



HAL
open science

Segmentation par modèle déformable surfacique localement régularisé par spline lissante

Jérôme Velut

► **To cite this version:**

Jérôme Velut. Segmentation par modèle déformable surfacique localement régularisé par spline lissante. Interface homme-machine [cs.HC]. INSA de Lyon, 2007. Français. NNT: . tel-00262088

HAL Id: tel-00262088

<https://theses.hal.science/tel-00262088v1>

Submitted on 10 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

ÉCOLE DOCTORALE : ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE
FORMATION DOCTORALE : SCIENCES DE L'INFORMATION, DES DISPOSITIFS ET DES
SYSTÈMES

par

Jérôme VELUT

Segmentation par modèle déformable surfacique localement régularisé par spline lissante

Soutenue le 10 décembre 2007 devant la Commission d'examen

Jury :

Johan MONTAGNAT	HdR	Rapporteur
Jacques-Olivier LACHAUD	Professeur	Rapporteur
Pierre-Yves COULON	Professeur	Examineur
Olivier COULON	Chargé de Recherche	Examineur
Hugues BENOIT-CATTIN	Professeur	Directeur de thèse
Christophe ODET	Professeur	Directeur de thèse

Résumé

LA segmentation d'image par modèles déformables est une méthode permettant de localiser les frontières d'un objet. Dans le cas d'images difficiles à segmenter en raison de la présence de bruit ou d'un manque d'information, l'introduction de connaissance a priori dans le modèle déformable améliore la segmentation. Ces cas difficiles sont fréquents dans l'imagerie du vivant, où les applications peuvent concerner le traitement d'une grande quantité de donnée. Il est alors nécessaire d'utiliser une méthode de traitement robuste et rapide.

Cette problématique nous a amené à proposer une régularisation locale du modèle déformable. Pour ce faire, nous reprenons le concept du contour actif en proposant un nouveau schéma de régularisation. Celle-ci est désormais effectuée via un filtrage RII des déplacements à chaque itération. Le filtre est basé sur un noyau de spline lissante dont le but, à l'origine, était d'approcher un ensemble de points par une fonction continue plutôt que d'interpoler exactement ces points.

Nous mettons en avant, dans cette méthode de régularisation, la concision du paramètre de régularisation : il s'agit d'une valeur λ , réelle et positive, qui influe sur la fréquence de coupure du filtre passe-bas. Une relation analytique existant entre λ , la fréquence de coupure et la fréquence d'échantillonnage, il est possible de donner un sens métrique à la fréquence de coupure. De plus, nous pouvons affecter une valeur λ différente en chaque point du contour par une variation des coefficients du filtre et ainsi permettre une régularisation locale du contour actif.

La généralisation de cette nouvelle méthode de régularisation pour des modèles déformables surfaciques est proposée. La difficulté principale concerne la connectivité du maillage, contrainte à une valence 4 partout par le filtrage bidimensionnel. Des résultats de segmentation sont donnés pour de tels maillages ainsi que pour des maillages sphériques où un traitement particulier des pôles est mis en oeuvre.

Abstract

IMAGE segmentation through deformable models is a method that localizes object boundaries. When difficult segmentation context are proposed because of noise or a lack of information, the use of prior knowledge in the deformation process increases segmentation accuracy. Medical imaging is often concerned by these context. Moreover, medical applications deal with large amounts of data. Then it is mandatory to use a robust and fast processing.

This question lead us to a local regularisation of the deformable model. Highly based on the active contour framework, also known as *snake*, we propose a new regularization scheme. This is done by filtering the displacements at each iteration. The filter is based on a smoothing spline kernel whose aim was to approximate a set of points rather than interpolating it.

We point out the consistency of the regularization parameter in such a method. It deals with a real, positive λ value that tunes the cut-off frequency of a low-pass filter. As it is possible to link analytically the cut-off frequency and the sampling frequency, one may give a metric meaning to this cut-off frequency. Moreover a different λ value should be set at each point through a variation of the filter's coefficients. It induces a local cut-off frequency and a local regularization.

This new regularization method should be applied to surfaces. The main difficulty concerns the connectivity of the surface mesh. It has to be 4-valenced everywhere due to the bidimensionnal fashion of the filter. Segmentation results are given for such meshes. A special process of singular points on spherical mesh is proposed.

Remerciements

MES remerciements s'adressent d'abord aux membres du jury, messieurs Pierre-Yves Coulon, Olivier Coulon, Johan Montagnat et Jacques-Olivier Lachaud. L'intérêt qu'ils ont montré concernant mes travaux a été moteur pour la fin de la thèse. Je remercie plus particulièrement mes rapporteurs pour les précisions et les commentaires qu'ils m'ont donnés avant la soutenance.

Il y a maintenant deux personnes qui méritent plus que des remerciements. Messieurs Hugues Benoit-Cattin et Christophe Odet, mes directeurs de thèse, ont été pendant plus de trois ans des encadrants essentiels, indispensables à la progression de mes travaux. Plus que cela, ce sont eux qui m'ont accueilli au laboratoire comme stagiaire informaticien et m'ont encouragé à poursuivre les études. C'est grâce à eux que j'ai concrétisé mon projet professionnel, et je ne sais pas combien cela fera de gateaux.

Je suis arrivé au CREATIS-LRMN en avril 2003. Toutes les personnes que j'y ai rencontrées sont concernées par cette page de remerciements. Une mention spéciale pour Faty et Brigitte, les mamans des thésards ! Je me lance maintenant dans une énumération digne d'un Zola soporifique, le talent en moins : Bouba, Thomas, Joël, Bertrand, Arnaud, Vilo, Alex, Xavier, Marion, Delphine, Jean-Loïc, Seb, Sorina, Xian, Tarik, André, Yasser, Simone, Josiane, Solène,... J'en oublie, c'est évident. Mais le coeur y est. J'entre dans ma cinquième année au CREATIS -ou CREATIS-LRMN, c'est selon-, il faut donc pardonner ce manque d'exhaustivité. Cinq ans, c'est la plus longue période statique de ma vie ! C'est pourtant là que j'ai le plus voyagé. Que j'ai rencontré des personnes de tous horizons. Que j'ai prêté mon appartement à Mohammed, qui n'a pas manqué de se faire cambrioler à ce moment-là.

C'est aussi pendant cette moitié de décennie que j'ai rencontré le plus de médecins, et pourtant rien à voir avec l'imagerie médicale. Je remercie donc au passage le professeur Chevallier, couturier vasculaire de son état et les docteurs Glas et Lorge, génumécaniciens, pour les belles images qu'ils m'ont fournies.

N'en déplaisent aux adeptes des clichés, faire une thèse c'est aussi avoir une vie à côté. La mienne est faite d'amitiés, de famille et de musiques. Dory, Tomtom, Yani, Ben, Bouille, Nara, Oriane, Tinico, Granico, Chico, Léo, Yo ont été indulgents et ont consenti à me garder dans une formation riche en espoir. Pirfù, le groupe qui a failli jouer avec les plus grands, partir à New-York, au Japon ou en Suède, gagner des tremplins à ne plus savoir que faire des prix et des félicitations, fût un lest de mon équilibre. Le pan musical s'achève. J'ajoute à la liste Maud, Pélu, Prout, Sandy, Julia, Jeanne, Peggy, Pam, Sherif, Zina, Pépé, Grojube, Caro, Caro, Ju, Claire, Lo, Warno, Simon, Alice, Solène, Fred, Mélanie, Laurent, Nonore, Emilaille... J'en re-oublie, j'en suis re-désolé. Il

faut me re-comprendre. Derrière cette liste se cache un cœur gros comme ça, un réservoir de larmichettes, un décompresseur quotidien, un antidépresseur fortement addictif.

Je continue ces lignes dithyrambiques mais Ô combien sincères par ceux qui ont eu le courage de m'encadrer depuis ma naissance : mon père, ma mère et mes frères. Le travail était tel que mes belles belles-sœurs sont venues les soutenir, sans que cela ne suffise... Mes trois nièces Morgane, Lucile et Jeanne sont alors venues à la rescousse. En voilà une famille ! Indispensable, présente, motivante, réjouissante. Je ne les remercie pas : je leur rend hommage.

J'ai commencé cette thèse par fierté paternelle. Je l'ai continuée par fierté personnelle. Je l'ai terminée pour ma p'tite fée Maïwenn, pour faire honneur à ses encouragements, sa compréhension et sa patience. Et voilà qu'aujourd'hui, j'ai le bonheur de continuer mon chemin avec elle et notre petit bonhomme, notre ogre, notre choupiou, notre crevette, notre lutin, notre fils, Tilio.

À mon père, à mon fils.

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales 2007

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04 72 43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr AM : 64.43 - Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04 72 18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : S. GRENIER	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04 26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<u>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</u> http://ediis.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04 72 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53 ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04 72 35 72 32 Fax : Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04 72 43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Math IF	<u>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</u> M.Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M.Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie Bâtiment Doyen Jean Braconnier 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04 72 72 84 81 Fax : 04 72 89 69 Pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.18.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
SSED	<u>SCIENCES DES SOCIETES, DE L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT</u> Mme Claude-Isabelle BRELOT Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Claude-Isabelle BRELOT Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr

Table des matières

Liste des figures¹	18
I Introduction	19
1 Contexte	21
1.1 L'imagerie du vivant et l'aide au diagnostic	21
1.1.1 Donner la meilleure image	22
1.1.2 Donner des informations pertinentes	22
1.2 Le besoin d'un modèle déformable	23
1.2.1 Extraire les contours d'une image	23
1.2.2 Extraire le contour d'un objet	23
1.3 Concepts abordés	24
1.3.1 Régularisation	26
1.3.2 A priori	26
1.3.3 Représentations	26
2 Contributions de la thèse	29
2.1 <i>MoDeReS</i>	29
2.2 Organisation du document	30
II Modèles déformables : un état de l'art	31
3 Introduction à l'état de l'art	33
3.1 Étendue sémantique	33
3.2 Applications de modèles déformables pour la segmentation	34
4 Le <i>snake</i>, premier contour actif	35
4.1 Notations	35
4.2 Définition de l'énergie d'un snake	36
4.2.1 Énergie externe	36
4.2.2 Énergie interne	38
4.3 Mise en oeuvre de la déformation	38
4.3.1 Méthode d'Euler	38
4.3.2 Équilibre de forces	39

¹Vous trouverez les figures en couleurs dans la version électronique de la thèse, <http://docinsa.insa-lyon.fr>

5	Les descendants du snake	41
5.1	Le B-snake	41
5.1.1	Représentation <i>B-Spline</i>	42
5.1.2	Déformation d'un <i>B-Snake</i>	42
5.2	Le <i>B-Snake</i> sans énergie interne	43
5.2.1	La continuité <i>B-Spline</i> comme méthode de régularisation	43
5.2.2	Points de contour ou points de contrôle ?	43
5.3	Le contour actif basé région régularisé par spline lissante	44
5.3.1	Forces externes basées région	44
5.3.2	Un algorithme de déformation régularisée par <i>spline</i> lissante	44
6	Surfaces actives	47
6.1	Modèles déformables maillés	47
6.1.1	Premiers modèles déformables tridimensionnels	47
6.1.2	Modèles déformables simples	48
6.2	La surface <i>B-Spline</i> active	49
6.2.1	L'évolution directe du <i>B-Snake</i>	49
6.2.2	Plusieurs surfaces B-Splines pour un même modèle déformable	50
7	Connaissance a priori et modèle déformable adaptatif	53
7.1	Connaissance a priori	53
7.2	Modèles déformables adaptatifs	54
8	Conclusion de l'état de l'art	57
III	<i>MoDeReS-2D</i>, un contour actif régularisé par spline lissante	59
9	Introduction à la troisième partie	61
10	Éléments de discussion	63
10.1	Une analyse fréquentielle des contours actifs	64
10.1.1	Formulation lagrangienne	64
10.1.2	Transition vers le domaine fréquentiel	64
10.2	Étude du contour actif régularisé par <i>spline</i> lissante	65
10.2.1	Mise en équation de l'algorithme	65
10.2.2	Intervalle du paramètre de régularisation	65
10.3	Discussion	66
10.3.1	Pourquoi imposer un intervalle au paramètre de régularisation ?	66
10.3.2	Quels sont les conséquences d'un filtrage 1D sur un contour décrit par deux coordonnées 1D ?	66
11	Filtrage par spline lissante	69
11.1	Construction	69
11.1.1	Lissage par <i>spline</i>	69
11.1.2	Approche signal du lissage par <i>spline</i>	70
11.2	Caractérisation	71
11.2.1	Réponse fréquentielle et réponse impulsionnelle	71
11.2.2	Liens entre λ et la fréquence de coupure	71
11.3	Filtrage de courbes paramétriques	72

11.3.1	Construction d'une courbe paramétrique	72
11.3.2	Lissage d'une courbe paramétrique	74
11.3.3	Effets de l'échantillonnage	75
11.3.4	Filtrage variant	76
12	Modèle de régularisation par filtrage B-Spline lissant	79
12.1	Régularisation par filtrage des forces externes	79
12.1.1	Contour actif régularisé à un instant i	79
12.1.2	Intégration dans un processus de déformation	80
12.1.3	Rééchantillonnage	83
12.2	Régularisation locale	84
12.2.1	Motifs pour une variation de la régularisation	84
12.2.2	Mise en oeuvre et discussions	85
13	Résultats	87
13.1	Présentation des images de test	89
13.1.1	Cercle modulé	89
13.1.2	Image naturelle	89
13.1.3	Images médicales	90
13.2	Régularisation globale	91
13.2.1	Segmentation sans régularisation	91
13.2.2	Influence du pas d'échantillonnage	91
13.2.3	Influence de la régularisation	92
13.2.4	Application à l'aide à la sélection	94
13.3	Régularisation locale	96
13.3.1	Information sur la présence d'un bord	96
13.3.2	Information sur la rigidité du contour	99
14	Conclusion de la troisième partie	103
IV	MoDeReS-3D, un maillage déformable régularisé par spline lissante	105
15	Introduction à la quatrième partie	107
16	Contraintes liées à l'ajout d'une dimension	109
16.1	Théories liées aux surfaces	109
16.1.1	Maillages et notions de topologie	109
16.1.2	Maillages quadrangulaires	111
16.2	Extension du filtre <i>B-Spline</i> lissant	112
16.3	Filtrage bidimensionnel d'une surface	114
17	Filtrage B-spline lissant de maillages paramétriques	117
17.1	Construction de maillages sans singularités	118
17.1.1	Surfaces closes de type tore	118
17.1.2	Surfaces ouvertes de type cylindre et plan	118
17.1.3	Gestions des bords dans le domaine paramétrique	119
17.2	Maillages avec singularités, cas de la sphère	121
17.2.1	Équation paramétrique de la sphère	121
17.2.2	Extension d'un méridien à travers un point singulier	122

17.2.3	Traitement d'un point singulier	124
17.3	Filtrage de maillages paramétriques	124
18	Filtrage variant de maillages quadrangulaires	127
18.1	Uniformité d'un maillage	127
18.1.1	Mise en évidence de la non-uniformité	128
18.1.2	Conséquence pour un maillage filtré	128
18.2	Adaptation du filtre à l'échantillonnage	129
18.2.1	Relation entre l'échantillonnage et λ	130
18.2.2	Application au filtre bidimensionnel	130
18.3	Intégration dans l'algorithme de déformation <i>MoDeReS</i>	134
18.3.1	Filtrage de vecteurs sur un maillage	134
18.4	Intérêts du filtrage variant	135
18.4.1	La boîte à oeuf sphérique	135
18.4.2	Déplacements tangentiels	135
18.4.3	Influence de l'initialisation	137
19	Segmentation de structures anatomiques	141
19.1	Vue générale de l'algorithme <i>MoDeReS-3D</i>	141
19.2	Résultats	142
19.2.1	Segmentation de l'aorte	142
19.2.2	Segmentation de l'articulation du genou de cobaye	144
19.2.3	Segmentation des ventricules latéraux	148
20	Conclusion de la quatrième partie	151
V	Conclusion	153
21	Bilan et perspectives	155
21.1	Bilan	155
21.1.1	Contexte 2D	155
21.1.2	Contexte 3D	156
21.2	Perspectives	157
21.2.1	Méthodes intelligentes de choix des paramètres de régularisation	157
21.2.2	Extraction d'a priori géométrique à partir d'un modèle	157
21.2.3	Filtrage de surfaces de genre n	157
21.2.4	Suivi d'objets en temps réel	158
21.2.5	Applications cliniques et aide au diagnostic	159
	Bibliographie	167
A	Annexe : Implantation du filtre B-Spline lissant	171
A.1	Analyse des pôles	171
A.2	Implantation causale/anti-causale	172

Table des figures

1.1	IRM du cerveau. D'une image à 256 niveaux de gris (a), un seuillage produit une image binaire (b) où tous les pixels d'intensité inférieure au seuil sont noirs, les autres sont blancs.	22
1.2	Détection des contours présents dans une IRM du cerveau par un filtre de Sobel.	23
1.3	Détectons de contours d'une IRM abdominale et détection du bord de l'aorte par un contour actif.	24
1.4	Visualisation d'un volume issu d'une IRM d'abdomen.	25
1.5	Visualisation du tibia, du fémur et du ménisque d'un rongeur.	25
4.1	Énergie externe d'une image calculée par le module du gradient.	36
4.2	Extrema locaux de l'énergie externe d'un contour actif. Le contour de l'image (a) est bien détecté par un contour actif sans énergie interne (c). Le même contour actif, c'est à dire sans régularisation, échoue dans une image bruitée (f). La carte de contour (e) présente des extrema locaux attirant le contour actif.	37
5.1	Exemple de construction d'une courbe <i>B-Spline</i> . $g(k)$ et $c(k)$ sont respectivement les points et points de contrôle de la courbe. La courbe blanche est $g(s)$, une interpolation des $g(k)$ par une fonction de base <i>B-Spline</i> cubique (ordre 3).	42
5.2	Lien entre points de contrôle $c(k)$ et points $g(k)$ par filtrage <i>B-Spline</i>	43
5.3	Lissage par spline lissante d'un signal $g(k)$. Un filtre passe-bas S_λ produit le signal $\hat{c}(k)$, une approximation des points de contrôle <i>B-Spline</i> . Un filtrage <i>B-Spline</i> indirect B de $\hat{c}(k)$ produit à son tour une approximation $\hat{g}(k)$ du signal $g(k)$	45
6.1	Illustration de la dualité entre un maillage triangulaire et un maillage simplexe.	48
6.2	B-Surface pour la segmentation d'objet 3D (images extraites de [Chen 05]).	50
11.1	Module de la réponse fréquentielle du filtre SB_λ , pour des fréquences normalisées par la fréquence d'échantillonnage.	71
11.2	Réponse impulsionnelle sb_λ du filtre SB_λ	72
11.3	Liens entre la fréquence de coupure du filtre SB_λ et la valeur de λ	73
11.4	Une courbe paramétrique $g(s)$ est construite à partir de deux fonctions $g_x(s)$ et $g_y(s)$	73
11.5	Lissage d'une courbe grâce à un filtrage de type <i>spline</i> lissante de chaque composante. Le paramètre de lissage est le même pour les deux filtres.	74
11.6	Filtrage par <i>spline</i> lissante d'une courbe circulaire construite à partir de deux sinusoides bruitées.	74
11.7	Filtrage d'une courbe pour plusieurs valeurs de λ	75
11.8	$\lambda = 7$ constant, échantillonnages variables.	75
11.9	Influence de la variation de l'échantillonnage sur l'effet du lissage. Pour un λ constant, l'atténuation de la courbure n'est pas uniforme selon la densité des points.	76
11.10	Filtrage d'une courbe par un filtre SB_λ possédant trois valeurs de λ différentes.	77

12.1	Interprétation des forces externes en chaque point comme deux signaux indépendants.	81
12.2	Forces externes $\hat{f}(k)$ lissées par un filtrage monodimensionnel des deux composantes $f_x(k)$ et $f_y(k)$ de la figure 12.1(b).	82
12.3	<i>MoDeReS</i> : un contour actif régularisé par un filtrage des déplacements.	83
12.4	Rééchantillonnage uniforme d'un contour. Notons que si le pas d'échantillonnage est trop grand, nous risquons de perdre certains détails.	84
12.5	Les différents niveaux de détails d'un modèle initial seront porteurs de différentes régularisations. Γ_1 est une zone de détails fins, Γ_2 est une zone de détails moyens et Γ_3 est une zone sans détails.	85
13.1	Image d'un objet comportant différentes courbures à son bord.	88
13.2	Image présentant des caractéristiques intéressantes : le ballon est en partie caché par l'herbe, la jambe du sportif n'a pas la même netteté partout.	90
13.3	Coupe sagittale d'un volume IRM de genou de rongeur.	90
13.4	Coupe sagittale d'un volume IRM de fémur humain.	91
13.5	Segmentation de l'objet de test sans régularisation. $\lambda = 0$, la distance entre les points est de 1 pixel	92
13.6	Illustration de l'influence du pas d'échantillonnage sur une segmentation par contour actif.	93
13.7	Influence de la régularisation. La quantité de régularisation détermine quelles structures sont correctement délimitées. La distance entre les points du contours est de 5 pixels	93
13.8	Distance moyenne ϵ_d entre le contour idéal et le contour segmenté en fonction de λ , pour plusieurs écart-types de bruit gaussien ajouté à l'image (de $\sigma = 0$ à $\sigma = 20$). Les forces ballons et le gradient de la carte de contours sont les forces externes. La distance entre chaque point du contour actif est de 2 pixels	94
13.9	Contour actif appliqué à l'aide à la sélection. L'objet d'intérêt est la jambe d'un sportif en action. Les forces externes sont issues d'un VFC. La distance entre chaque point est de 3 pixels	95
13.10	Segmentation d'une image IRM. Les forces ballons rendent l'initialisation (en bleu) moins contraignante. Les différentes valeurs de λ introduisent des interprétations différentes des zones de l'image où l'existence d'un bord n'est pas flagrante. Les temps de segmentation sont inférieurs à $10s$	96
13.11	Contour actif appliqué à l'aide à la sélection. L'objet d'intérêt est un ballon. Les forces externes sont issues d'un VFC. La distance entre chaque point est de 5 pixels	97
13.12	Un contour actif initial pour la segmentation du fémur.	97
13.13	Application de la régularisation locale pour la segmentation d'une image IRM. La carte $\lambda(x, y)$ correspond à l'appréciation de l'opérateur sur la possibilité pour un pixel d'être un bord. Les forces ballons représente $\frac{1}{20}$ des forces images maximales. Le pas d'échantillonnage du contour est de 5 pixels	98
13.14	Un contour actif globalement régularisé utilisant des forces ballons. Différentes valeurs de λ règlent différents problèmes.	100
13.15	Régularisation locale. Les valeurs de λ utilisées dans la figure 13.14 sont intégrées dans un même contour actif. Segmentation achevée en 130 itérations, $20s$	100
16.1	Le nombre de triangles adjacents à une arête permet de confirmer la nature d'une variété.	110
16.2	Maillage construit uniquement avec des quadrangles. Les points n'ont pas forcément quatre voisins.	112

16.3	Réponse impulsionnelle du filtre SB_λ bidimensionnel selon différentes valeurs de λ et μ	113
16.4	Lissage d'une image par le filtre B -Spline lissant bidimensionnel, pour plusieurs valeurs de λ et μ ($\lambda = \mu$).	114
16.5	Filtrage B -Spline lissant bidimensionnel. La séparabilité permet de se ramener à un contexte de filtrage monodimensionnel.	114
16.6	Représentation altimétrique des images de la figure 16.4.	115
17.1	Construction d'un tore à partir de son équation paramétrique.	118
17.2	Un cylindre. Sa hauteur est la longueur de l'axe générateur, ici horizontal.	119
17.3	Extension d'une grille dans l'espace.	120
17.4	Une sphère peut être représentée par un maillage de valence 4 presque partout (a). Les pôles ont une valence égale aux nombres de méridiens. Une sphère sans les pôles est homéomorphe à un cylindre (b).	121
17.5	Illustration de l'ambiguïté induite par un pôle dans la détermination d'un sommet $V_{k,l+2}$ à partir d'un sommet $V_{k,l}$ se situant dans le premier anneau de ce pôle.	123
17.6	Différentes extensions du domaine paramétrique selon la topologie de la surface.	124
17.7	filtrage d'un plan.	125
17.8	filtrage d'un cylindre.	125
17.9	filtrage d'un tore.	126
17.10	filtrage d'une sphère.	126
18.1	Cette sphère est colorée selon la distance d'un point à ses voisins sur une ligne parallèle. Les distances minimales sont en rouge, maximales en bleu.	128
18.2	Filtrage d'une sphère avec $\lambda = \mu = 300$. En (b), l'effet de l'échantillonnage variant est mis en évidence : les parallèles sont plus lissées que les pôles, produisant un objet qui n'est plus sphérique. La comparaison entre (a) et (b) montre que pour une même valeur de λ , deux échantillonnages différents produiront deux résultats différents.	129
18.3	Filtrage d'une courbe du plan dont l'échantillonnage varie le long de la courbe par le filtre SB_λ pour deux valeurs de λ ((b) et (d)) et par le filtre SB_Λ pour deux valeurs de Λ ((c) et (e)).	131
18.4	Une sphère bruitée filtrée selon les méthodes globale (a) et locale (b). Les couleurs correspondent à la courbure moyenne locale. La méthode globale lisse plus l'équateur que les pôles. La méthode locale s'adapte au pas d'échantillonnage et produit un effet de lissage uniforme.	132
18.5	Filtrage $SB_{\lambda,\mu}$ localement adapté d'une sphère avec différents échantillonnages de la surface.	133
18.6	Filtrage d'un champ de vecteurs f tridimensionnels défini sur une 2-variété. Les vecteurs présentés appartiennent au champ \hat{f} . Ils sont colorés selon leur norme, bleu étant la valeur maximale rencontrée sur le champ original et rouge la valeur minimale.	134
18.7	Isosurface (<i>marching cubes</i>) d'un volume construit avec l'équation paramétrique (18.6).	135
18.8	Segmentation de la boîte à oeuf avec une régularisation globale ((b) et (c)) et locale (d). Les forces externes sont une combinaison linéaire des forces ballons et du vecteur gradient du volume.	136
18.9	Influence de la position d'un pôle sur la régularisation. La distance de la boîte à oeuf à une surface régularisée globalement ($\lambda = 20$) est indiquée par la couleur.	138

18.10	Même mesure de distance que dans la figure 18.9, mais avec un modèle déformable régularisé localement en fonction de l'échantillonnage. Le paramètre de régularisation global est $\Lambda = 10000$	138
18.11	Dans le cas où un Λ est choisi pour segmenter tous les détails (ici, $\Lambda = 2600$), la position des pôles n'influence pas la segmentation finale.	139
19.1	Algorithme du <i>MoDeReS-3D</i>	142
19.2	Segmentation de l'aorte pour plusieurs valeurs de régularisation.	143
19.3	Deux applications du <i>MoDeReS-3D</i> dans l'exploration vasculaire.	144
19.4	Volume IRM d'un genou de rongeur de dimensions $128 \times 128 \times 24$ et une anisotropie $1 \times 1 \times 3$	145
19.5	Segmentation du plateau tibial d'un genou de rongeur dans un volume acquis par IRM en 50s.	146
19.6	Segmentation du plateau tibial par un modèle sphérique en 40s.	146
19.7	Segmentation de l'extrémité du fémur en 35s.	147
19.8	Carte des distances entre le plateau tibial et l'épiphyse distale. Le plateau tibial est le support de la carte, l'épiphyse est en transparence à titre indicatif.	147
19.9	Segmentation des ventricules du cerveau en 10s.	149
21.1	Isolignes d'un champ scalaire harmonique à l'origine d'un remaillage quadrangulaire.	158
21.2	Suivi d'une pièce de monnaie. Les forces externes ne prennent pas en compte les informations temporelles. Les images sont extraites d'une séquence video webcam de 10s.	159

Première partie

Introduction

1

Contexte

LA recherche scientifique s'est souvent appuyée sur des mécanismes physiologiques. Elle s'est inspirée de l'ouïe pour inventer le microphone. Elle a imité l'oeil, et la photographie et le cinéma sont nés. L'objectif des premiers systèmes de vision était principalement concentré sur une problématique d'acquisition. Pourtant la vision ne peut se résumer à cela. C'est pourquoi les systèmes de vision actuels intègrent une multitude d'actions [Jolion 00] qui prétendent à comprendre l'image. Depuis Curie et les rayons X où le médecin restait le seul médium cognitif, le traitement d'image permet dorénavant d'automatiser certains processus décisionnels.

Cette thèse est l'occasion d'approfondir une méthode particulière de traitement d'image : la segmentation par modèle déformable. Le contexte dans lequel sont menées les recherches est étroitement lié à l'imagerie du vivant, ne serait-ce que par l'approche transdisciplinaire de la recherche en imagerie médicale du laboratoire CREATIS-LRMN. Les projets sont développés par des équipes appartenant autant aux sciences et techniques de l'information et de la communication qu'aux sciences de la vie.

Après avoir replacé brièvement les modèles déformables dans ce contexte en énonçant les besoins principaux de l'imagerie médicale, nous définirons, dans ce chapitre, les concepts qui formeront le fil conducteur des travaux.

1.1 L'imagerie du vivant et l'aide au diagnostic

Un domaine demandeur d'images est sans conteste la médecine. En cause, la capacité des systèmes de vision à rendre visibles les intérieurs. La résonance magnétique (IRM), les rayonnements X, l'émission de positons (TEP) ou encore les ultrasons sont autant de techniques au service des médecins et biologistes pour explorer un corps in vivo.

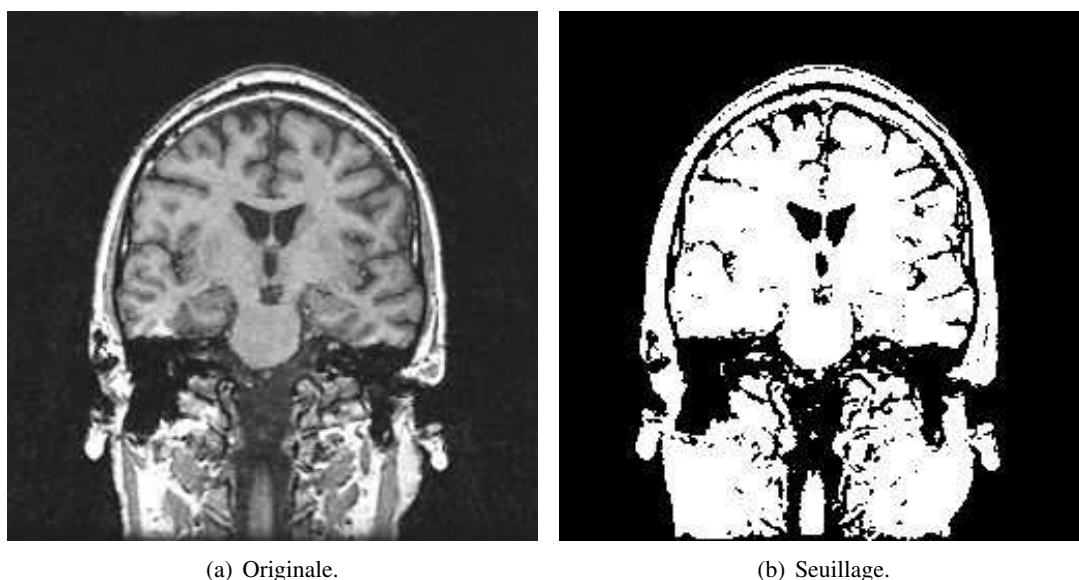


FIG. 1.1: IRM du cerveau. D'une image à 256 niveaux de gris (a), un seuillage produit une image binaire (b) où tous les pixels d'intensité inférieure au seuil sont noirs, les autres sont blancs.

1.1.1 Donner la meilleure image

L'imagerie médicale offre le support sur lequel le médecin va baser ses observations à l'origine de son diagnostic. Ce support, l'image, doit alors comporter clairement les éléments identifiant telle pathologie, tel processus chimique. L'étape de l'acquisition doit être réfléchi dans ce sens. Par exemple, le choix d'une séquence IRM dépendra de la pathologie recherchée et de l'organe examiné.

Malgré tout le soin apporté à l'acquisition, l'information contenue dans l'image peut être perturbée par des phénomènes extérieurs. C'est là qu'intervient le traitement d'image. Son panel sans cesse grandissant de méthodes permet de mettre de l'ordre dans la masse de données que représente une image. La segmentation en est une : le but est de partitionner l'image en un ensemble de régions cohérentes, pouvant être assimilées à un objet d'intérêt. Le seuillage des niveaux de gris est la plus simple des segmentations [Pitiot 05](figure 1.1).

1.1.2 Donner des informations pertinentes

Si la segmentation apporte une clarification de l'image utile au médecin, il est également intéressant d'obtenir des informations autres que les niveaux de gris d'un pixel pour préciser un diagnostic. Il peut s'agir d'informations visuelles, mais également de mesures qui seront appliquées à l'image après un traitement convenable. Le logiciel Maracas, intégrant les travaux de [Hernández Hoyos 02], oeuvre dans ce sens. En quantifiant le degré de sténose d'une artère, il donne au médecin une précision qui le guidera dans le choix du geste thérapeutique.

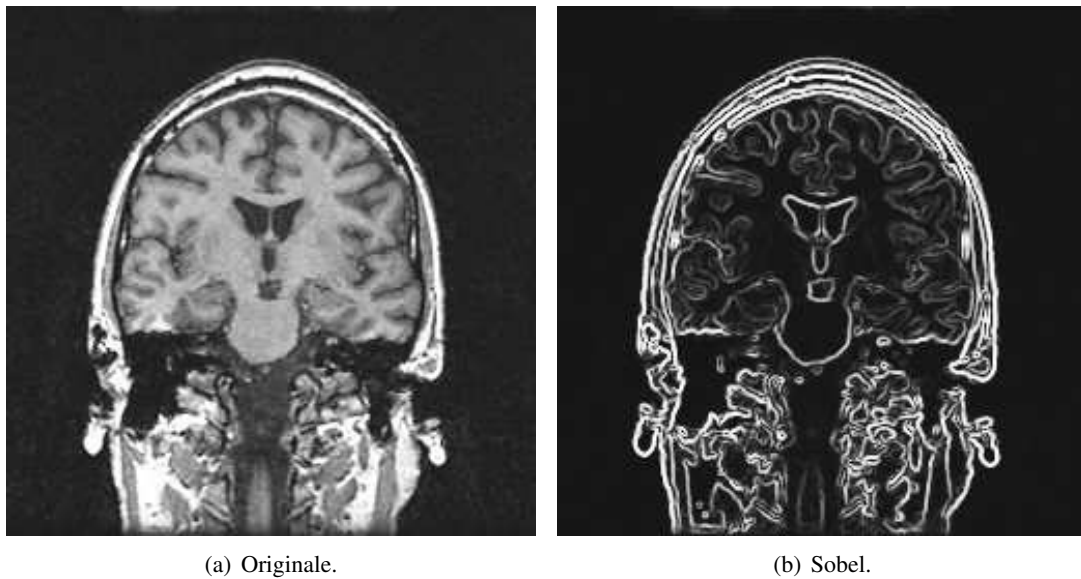


FIG. 1.2: Détection des contours présents dans une IRM du cerveau par un filtre de Sobel.

1.2 Le besoin d'un modèle déformable

1.2.1 Extraire les contours d'une image

Parmi les informations pertinentes que peut nécessiter une analyse médicale, nous trouvons les contours. De façon simple, un contour peut être défini comme une grande variation des niveaux de gris dans l'image. C'est ce que détectent les opérateurs de contours comme les filtres de Prewitt, Sobel (figure 1.2, figure 1.3) ou encore gradient.

Ces images sur lesquelles n'apparaissent que les principaux contours de l'image originale sont appelées *cartes de contours*. Dans la figure 1.2(b), les contours des ventricules apparaissent clairement, mais il n'est pas possible de les distinguer uniquement par un niveau de gris.

1.2.2 Extraire le contour d'un objet

Dans le cas où un objet appartenant à une image doit être isolé, les précédentes détections de contours par filtrage ne sont plus suffisantes. En effet, sur quels critères pouvons nous affirmer que tel pixel appartient ou non au bord de l'aorte dans l'image de la figure 1.3(b) ? Les modèles déformables sont une solution à ce type de problèmes : en initialisant un contour dans l'image de façon relativement grossière, il est possible de le déformer de sorte qu'il se positionne sur les bords de l'objet d'intérêt. La figure 1.3(c) montre la localisation de l'aorte par un modèle déformable *snakuscule* [Thévenaz 06] naturellement circulaire.

Non seulement un modèle déformable autorise la reconstruction d'un objet si celui-ci possède des contours subjectifs, mais en plus il donne l'occasion de s'abstraire de la représentation par pixel des informations visuelles. Ainsi les modèles déformables qui seront détaillés dans cette thèse représentent les contours d'objets par des fonctions paramétriques.

Si l'exploitation des contours d'un objet semble être judicieuse pour certaines applications

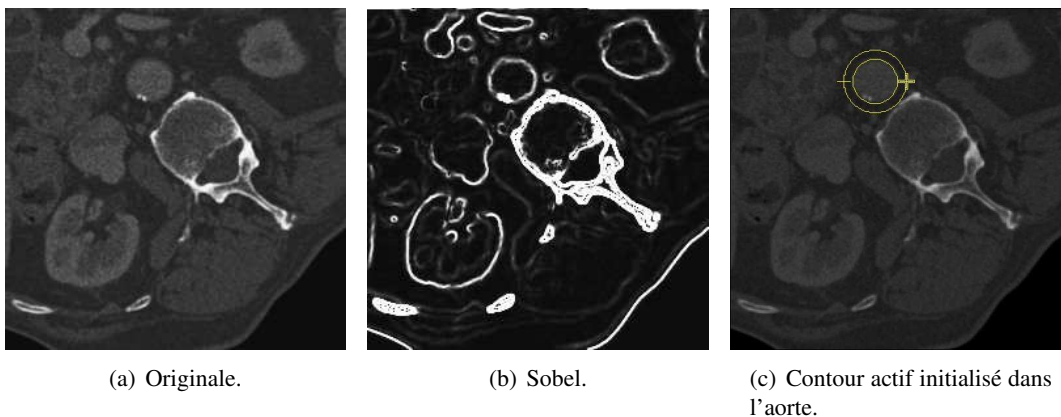


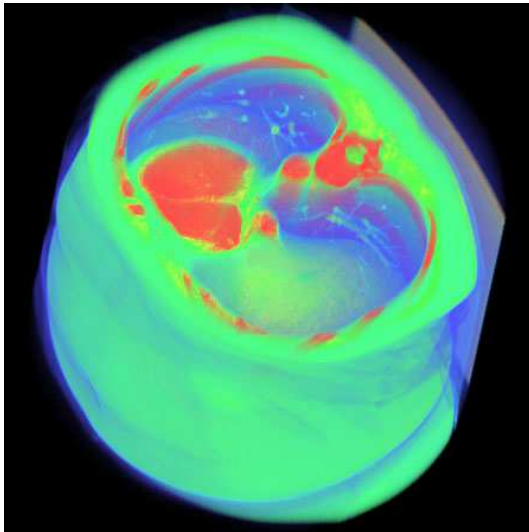
FIG. 1.3: Detections de contours d'une IRM abdominale et détection du bord de l'aorte par un contour actif.

dans le cas d'images 2D, elle est d'autant plus justifiée dans le cas de la visualisation de volumes. Les imageurs actuels sont capables de fournir des volumes de données, sous la même forme qu'une image à savoir une grille de pixel - il s'agit maintenant de grille tridimensionnelle de voxels. Mais alors, comment montrer l'intérieur de la grille ? La première solution consiste à visualiser le volume par coupe et donc revenir à un contexte bidimensionnel. Nous perdons alors l'intérêt d'une modélisation 3D d'un objet, qui est de se rapprocher de la réalité physique. Une deuxième solution consiste à utiliser des méthodes issues de l'informatique graphique, et de coupler cela à un seuillage. En variant l'opacité de chaque voxel, on peut obtenir une visualisation exploitable de l'objet (figure 1.4). Mais ceci reste conditionné par la qualité de l'image. De plus, si les voxels de bords ont la même valeur de niveau de gris que l'objet d'intérêt, il faudrait leur affecter une opacité nulle au même titre que les voxels appartenant à l'objet. Ce dernier ne serait alors plus visible.

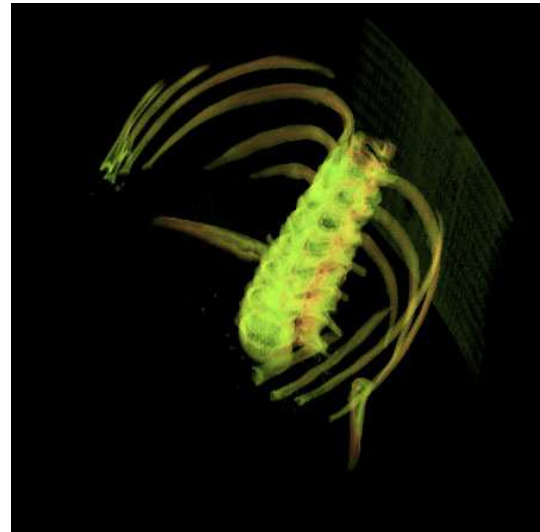
De nouveau, le modèle déformable peut être une solution. Ce que nous appelions contour devient surface, mais reste l'enveloppe extérieure de l'objet considéré. En se positionnant sur les frontières définies par l'image (i.e le volume), la visualisation de l'objet devient plus compréhensible, voire sans équivoque si l'outil de visualisation est efficace. La figure 1.5 montre la visualisation d'une articulation de rongeur acquise par IRM, par rendus volumique et surfacique.

1.3 Concepts abordés

Cette thèse développe des travaux effectués autour des modèles déformables. En se replaçant dans le contexte de l'imagerie du vivant, une problématique concernant l'extraction de contour s'est posée lors d'une étude sur des volumes IRM de rongeurs ostéoarthritiques [Bolbos 07]. L'objectif est la détection des cartilages du fémur et du tibia. La qualité des images et la quantité d'information imposent un modèle déformable robuste et rapide. C'est pourquoi les présents travaux focalisent essentiellement sur les problèmes de régularisation, l'utilisation d'a priori et la représentation des contours et des surfaces.

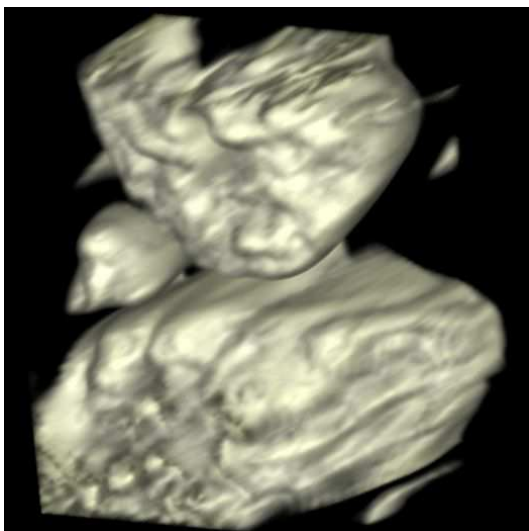


(a) Seuls les voxels noirs sont transparents.

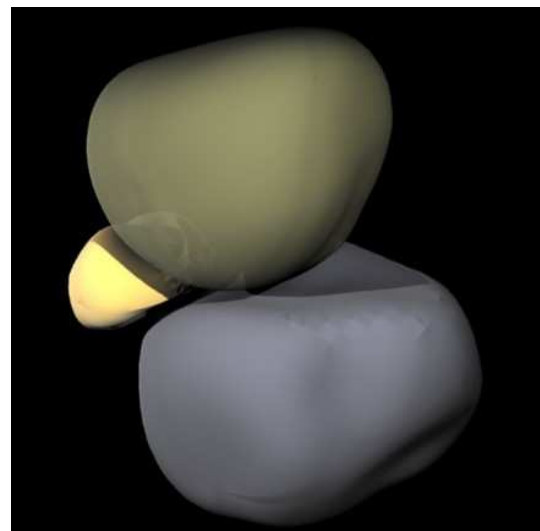


(b) Seuls les voxels appartenants potentiellement aux zones osseuses sont opaques.

FIG. 1.4: Visualisation d'un volume issu d'une IRM d'abdomen.



(a) Rendu volumique.



(b) Rendu surfacique.

FIG. 1.5: Visualisation du tibia, du fémur et du ménisque d'un rongeur.

1.3.1 Régularisation

La régularisation évoquée ici relève de la résolution des problèmes mal posés. La détection de contours dans une image via un modèle déformable en est un. Il est donc nécessaire d'introduire de l'information dans la résolution afin de l'aider à converger vers une solution significative [Neumaier 98, Lai 93].

Les techniques de régularisation utilisées lors de la déformation d'un modèle sont issues généralement des stabilisateurs de Tikhonov et se rapportent au caractère lisse du modèle. Seront détaillés par la suite (partie II) une pénalisation de la courbure [Kass 87], l'exploitation de la propriété de continuité des *B-Splines* [Brigger 00] et le lissage *B-Spline* d'un contour [Precioso 05]. Nous nous intéresserons particulièrement à ce dernier et développerons notre conception de la régularisation dans les parties III et IV [Velut 06b] de ce document. La régularisation par filtrage *B-Spline* lissant répond à une problématique d'efficacité temporelle pour la segmentation d'un grand nombre de volumes.

1.3.2 A priori

A priori : "En partant de ce qui est avant"¹. Lorsque l'objectif d'une détection de contours est de retrouver un objet particulier, il est bon de connaître une partie des caractéristiques intrinsèques de cet objet. Il devient alors indispensable de définir ce qu'est une caractéristique intrinsèque.

Tout d'abord, le modèle lui-même peut être cette caractéristique. C'est l'idée évoquée par [Leitner 91]. De même, dans [Abe 03], le modèle déformable est initialement dessiné par l'utilisateur. Il est considéré que cette ébauche de la cible recherchée est une connaissance de la forme finale, et doit être intégrée dans le processus de déformation.

La méthode énoncée par [Das 04b] explique comment les distributions des intensités des objets et de l'arrière-plan sont impliquées dans la déformation en tant que connaissance a priori. Cette considération peut paraître paradoxale si un a priori est pensé comme une information indépendante de l'image. Les niveaux de gris ne sont pas une caractéristique intrinsèque de l'objet cible, mais de l'image elle-même. De la même façon, est-ce que la position initiale du modèle déformable est une connaissance a priori ? Ce qui est vu comme telle doit être justifié par de fortes hypothèses, dans ce cas précis sur la robustesse de l'acquisition par rapport à la localisation des objets recherchés.

La méthode de régularisation par lissage *B-Spline* proposée dans cette thèse nous permet d'envisager la courbure comme un a priori. Cette vision a déjà été évoquée dans [Litvin 03], mais dans notre cas, la variation de la régularisation sur le contour est le moyen d'introduire effectivement la connaissance.

1.3.3 Représentations

Un contour peut être représenté de plusieurs façons. Si il est nécessaire de conserver une notion de pixels dans la définition du contour, ce dernier sera une simple chaîne de pixels connectés. Mais

¹9ème édition du *Dictionnaire de l'Académie Française*

dans le cas où il est possible de s'abstraire de la rigidité d'une grille pixellique, le contour pourra être :

- **Une courbe paramétrique continue** ou explicite définie par deux fonctions continues décrivant chacune une direction d'un repère cartésien (l'image) en fonction d'un paramètre. Le mouvement d'un point sur un plan en fonction du temps se représente de cette manière.
- **Une courbe paramétrique discrète** est identique à la courbe paramétrique continue à cela près que le paramètre ne prend que des valeurs entières. Différentes méthodes d'interpolation permettent de donner à une courbe discrète une définition continue, l'ordre de continuité C^n dépendant de la fonction d'interpolation (ou fonction *de forme*).
- **Une fonction cartésienne** ou implicite. Dans ce cas, le contour est défini par le niveau ω d'une fonction à deux variables $F(x, y) = \omega$. Cette représentation est à l'origine des modèles déformables par ensembles de niveaux, les *levelsets*.

Notre approche des contours actifs (partie III) est basée sur une représentation de type courbe paramétrique discrète. En ce qui concerne les surfaces actives (partie IV), nous retrouvons les mêmes familles d'objets mathématiques. Nous laisserons donc de côté les ensembles de niveaux d'une fonction à trois variables et les chaînes de voxels pour se concentrer sur les surfaces discrètes.

Une surface est une sous-variété à deux dimensions de l'espace euclidien à trois dimensions. Une surface peut donc être décrite par trois fonctions à deux variables, de la même façon qu'un contour l'est par deux fonctions à une variable :

$$G(u, v) = \begin{cases} G_x(u, v) \\ G_y(u, v) \\ G_z(u, v) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $G(u, v)$, u et v sont les paramètres et x , y et z sont les trois directions de l'espace euclidien.

Dans le contexte informatique, la représentation d'une surface continue n'est pas triviale et passe généralement par une modélisation discrète. On parle alors de maillages, ensembles de points appelés sommets, reliés par des arêtes formant des polygones appelés faces. Lorsque toutes les faces contiennent trois sommets exactement, le maillage est une triangulation.

Montagnat [Montagnat 01] dresse une classification des surfaces déformables en distinguant la représentation géométrique de la déformation. Nous nous focaliserons sur les modèles déformables à représentation discrète. Nous les appellerons *modèles déformables maillés*.

NOUS avons défini dans ce premier chapitre les contextes dans lesquels s'inscrivent les travaux de thèse. De façon générale, le modèle déformable pour la segmentation d'images et de volumes en sera la toile de fond. Plus précisément, nous nous focaliserons sur les contours actifs paramétriques et les modèles déformables maillés, leur régularisation et l'intégration de connaissance a priori dans le processus de segmentation. Nous donnons dans le chapitre suivant les objectifs de la thèse et l'organisation du document.

2

Contributions de la thèse

L'IMAGERIE du vivant est un champ d'application du traitement d'image proposant des contextes de segmentation souvent difficiles. Quand le résultat de la segmentation conditionne une prise de décision, il est nécessaire d'utiliser une méthode de segmentation robuste au bruit. Quand la quantité de données à traiter est grande, la méthode de segmentation doit produire un résultat dans un laps de temps raisonnable. Les modèles déformables sont régulièrement utilisés pour relever les défis posés par une application.

Ce chapitre présente succinctement le nouveau modèle déformable *MoDeReS* en énonçant les éléments principaux ainsi que l'organisation de ce document de thèse.

2.1 *MoDeReS*

Pour tenir compte des contraintes temporelles et de qualité de segmentation, nous nous inspirons des méthodes existantes et exploitons l'efficacité d'un filtrage RII¹ pour la régularisation d'un modèle déformable. Ce filtre est basé sur une minimisation de courbure et s'appelle filtre *B-Spline* lissant. Le *MoDeReS*, pour Modèle Déformable Régularisé par Spline lissante, autorise une régularisation variante pouvant traduire une connaissance a priori ou s'adapter localement.

Le *MoDeReS* pour la détection de contours dans une image 2D est une évolution simple des contours actifs paramétriques existants. L'extension vers un modèle déformable maillé, qui impose un maillage quadrangulaire, bénéficie de l'adaptabilité de la régularisation intrinsèque au *MoDeReS* pour gérer automatiquement les nécessaires non-uniformités d'un tel maillage.

¹ filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie

2.2 Organisation du document

La partie II propose un état de l'art des modèles déformables et plus particulièrement du contour actif paramétrique de [Kass 87]. Parmi ses descendants, nous détaillerons ceux qui ont apporté des éléments significatifs pour nos travaux, en termes de représentation des contours et de régularisation. Vient une description des méthodes de segmentation de volume par modèles déformables maillés, pour finir sur un panorama de la connaissance a priori dans les modèles déformables et leur adaptabilité.

Nous exposons ensuite (partie III) notre vision de la régularisation d'un contour actif. Une analyse de l'algorithme de [Precioso 05] est présentée, ainsi que l'approche fréquentielle des contours actifs de [Weruaga 04]. Ceci est le point de départ pour mettre en oeuvre le *MoDeReS* par une approche originale de filtrage des forces externes, permettant une régularisation locale du contour actif. Des résultats sont donnés sur des images de synthèse et des images réelles.

L'extension vers un modèle déformable surfacique est montrée dans la partie IV, où nous donnons les conditions et les clés permettant de conserver les avantages de la régularisation locale des contours actifs. Nous montrons des résultats de segmentations sur des objets de synthèses et des volumes acquis par IRM pour différents types de surfaces.

Finalement, la partie V est l'occasion de faire le bilan des différentes contributions ainsi que de donner quelques pistes de poursuites de recherches.

UN nouveau modèle déformable, le *MoDeReS*, sera développé au long de cette thèse. Il intègre une régularisation par filtrage RII variant des forces externes, ce qui lui confère souplesse et efficacité. Une connaissance a priori liée à la courbure est traduite en terme de régularisation locale. Dans sa version tridimensionnelle, le *MoDeReS* est contraint à un maillage quadrangulaire mais bénéficie de la régularisation locale par filtrage variant pour gérer les non-uniformités du maillage.

La partie suivante dressera un état de l'art des méthodes de segmentation par modèles déformables paramétriques et maillés, et aborde l'existant en ce qui concerne la connaissance a priori et l'adaptabilité des modèles déformables. Nous nous inspirerons de ces méthodes pour développer le *MoDeReS*.

Deuxième partie

Modèles déformables : un état de l'art

Transcrivez un modèle, on vous traite de plagiaire, mais si vous en copiez cent, vous voilà bientôt docteur.

Michel Serres (Le Tiers-Instruit, p.71, Folio/essais n.199)

3

Introduction à l'état de l'art

CETTE partie est un état de l'art de la segmentation par contour actif paramétrique ou par modèle déformable maillé. Nous profitons de cette introduction pour donner une idée de l'ampleur de la notion de modèle déformable, autant en termes conceptuels que d'applications concrètes.

Le chapitre 4 exposera ensuite le contour actif nommé *snake* qui est à l'origine de la segmentation d'image par modèle déformable. Les notions importantes y seront expliquées ainsi que la mise en oeuvre d'un tel contour actif.

Les progrès apportés au *snake* seront développés dans le chapitre 5 à travers trois innovations dans la représentation géométrique et la régularisation.

Le chapitre 6 montrera les méthodes existantes de modèles déformables maillés pour la segmentation de volume. Nous verrons comment un modèle déformable peut évoluer dans un monde tridimensionnel.

Enfin, le chapitre 7 présentera des solutions d'amélioration d'un modèle déformable via l'introduction de connaissance a priori dans le processus de segmentation et de souplesse grâce à une adaptabilité à l'environnement.

Le chapitre 8 dressera un bilan des différentes notions vues à travers l'état de l'art.

3.1 Étendue sémantique

La définition du mot "modèle" est très peu restrictive. Cette définition du Dictionnaire encyclopédique de psychologie [Sillamy 80] en atteste :

"On parle de modèle, en science, chaque fois qu'il y a renvoi d'une réalité concrète à une réalité idéale avec exploitation de leurs analogies descriptives. Analogie ne signifie nullement identité ; il

existe même une différence de nature entre le modèle et le réel qu'il représente, le modèle ayant une valeur symbolique."

Cependant, même l'adjonction du qualificatif "déformable" ne permet pas de classer ce concept -celui de modèle déformable- dans une catégorie claire. Tout au plus sommes nous capables d'y discerner une méthode relevant de l'altération d'une représentation de la réalité.

Nous retenons malgré tout deux principes. Soit la réalité concrète que l'on souhaite idéaliser est la déformation elle-même, ce qui est le cas de la simulation [Terzopoulos 87, Terzopoulos 88] (déformation de matériaux élastiques, ingénierie civile, animations), soit la déformation se rapporte aux analogies descriptives. Alors son but est de rapprocher la réalité idéale -le modèle- de la réalité concrète. Dans ce cas, à l'inverse de Milan Kundera qui souligne "l'incroyable capacité humaine à remodeler le réel à l'image de son idéal" [Kundera 75], nous nous efforcerons de prouver la capacité du modèle déformable à remodeler l'idéal à l'image du réel.

3.2 Applications de modèles déformables pour la segmentation

L'imagerie médicale est sans doute le domaine où les modèles déformables démontrent le mieux leurs capacités. Très tôt le contour actif a été utilisé pour la détection de vascularisation dans des angiogrammes [Hyche 91]. En 1992, Cohen dédie sa thèse de doctorat aux modèles déformables 2D et 3D pour la segmentation d'image médicale [Cohen 92]. Ensuite, à peine dix ans après la publication du premier contour actif, l'article présenté comme un aperçu de Mac Inerney [McInerney 96] cite déjà un grand nombre de références où les modèles déformables sont utilisés pour une application médicale. Dans [Lynch 00, Valdes 00, Hernández Hoyos 02, Tang 04, Hickman 04] et encore plus récemment [Xiao 07], les auteurs proposent encore le modèle déformable comme outil pour l'analyse d'images médicales. Mieux, c'est souvent grâce aux besoins de la médecine que des innovations sur les modèles déformable apparaissent, à l'instar de [Chen 05].

Parfois, les modèles déformables sont capables d'évoluer en temps réel dans une image, ce qui permet le suivi d'un objet dans une séquence vidéo [Wang 03, Precioso 05, Eveno 01]. L'utilisation per-opératoire de modèles déformables [Stindel 03] est alors venu enrichir le domaine des Gestes Médicaux Chirurgicaux Assistés par Ordinateur (GMCAO).

IL serait prétentieux de vouloir présenter un panorama exhaustif des différents modèles déformables, et encore plus des diverses utilisations qui en sont faites aujourd'hui. Néanmoins, après ce bref tour d'horizon, la suite de cette partie détaille plus précisément le contour actif de [Kass 87] et ses successeurs qui ont inspiré cette thèse.

4

Le *snake*, premier contour actif

À L'UNANIMITÉ dans la littérature, la paternité du contour actif revient à Kass [Kass 87]. L'idée sous-jacente est de créer un lien entre les processus bas-niveaux, qui utilisent uniquement ce qui est disponible dans l'image elle-même et les processus haut-niveaux, basés sur des mécanismes d'interprétations. L'appellation de contour actif vient de son comportement : le *snake* cherche toujours à minimiser son énergie. La manière reptilienne avec laquelle le contour actif se contorsionne pour atteindre une énergie minimale lui a valu le surnom de *snake*, aujourd'hui utilisé massivement.

Après avoir donné quelques notations, nous expliciterons les concepts d'énergie interne et énergie externe qui constituent les fondements du contour actif. La mise en oeuvre de la minimisation d'énergie sera ensuite détaillée pour aboutir à un processus itératif. Ce sera le principe de l'évolution d'un modèle déformable tout au long de cette thèse.

4.1 Notations

Le contour actif défini par Kass est consacré aux images 2D. Nous introduisons ici les premières notations. Soit $I(x, y)$ une image continue et $I(i, j)$ un échantillonnage régulier de cette image. Le couple (i, j) est un pixel. Le contour actif G sera représenté par une fonction paramétrique $g(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $g(s) = (g_x(s), g_y(s))$. Étant donné le traitement informatique du contour actif, il sera souvent question d'un contour discret. Dans ce cas, le paramètre s décrivant G deviendra k , l'indice du point.

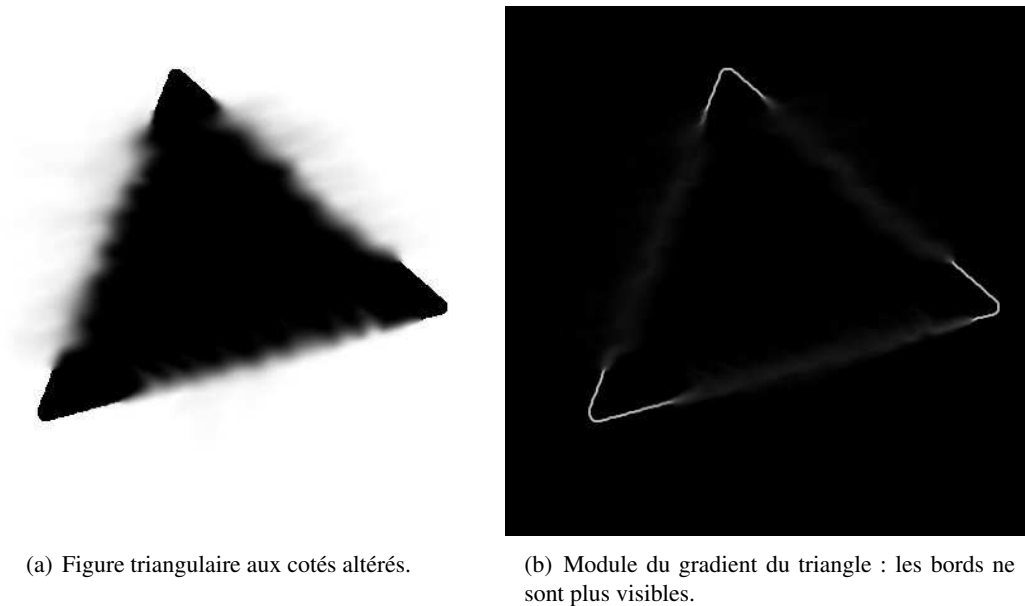


FIG. 4.1: Énergie externe d'une image calculée par le module du gradient.

4.2 Définition de l'énergie d'un snake

Deux types d'énergies sont utiles au *snake*. Premièrement, puisque son rôle est de déliméner certaines régions d'une image, il existe une énergie liée à l'image. Plus généralement, nous parlerons de l'énergie externe E_{ext} qui guide le contour actif sur l'image. Deuxièmement, la méthode de [Kass 87] introduit un terme de régularisation qui permet d'éviter les minima locaux. Ce terme se traduit par une énergie interne E_{int} imposant des contraintes sur la géométrie lors de la déformation.

L'énergie du *snake* E_{snake} s'écrit alors :

$$E_{snake}(g(s)) = E_{int}(g(s)) + E_{ext}(g(s)) \quad (4.1)$$

L'activité d'un *snake* est de minimiser la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$E_{snake}^* = \int_s E_{snake}(g(s)) ds \quad (4.2)$$

4.2.1 Énergie externe

La vocation de l'énergie externe est d'attirer le contour actif vers la position correspondant à une caractéristique recherchée. Sa définition est donc fortement dépendante de l'application. Cependant, l'utilisation générale des *snakes* est la détection de contour. C'est pourquoi l'énergie la plus utilisée est le gradient de l'image $-\|\nabla I(x, y)\|^2$. C'est également la plus simple des cartes de contours que l'on puisse obtenir (figure 4.1).

L'énergie externe est également une stratégie d'introduction de contraintes spécifiées par l'uti-

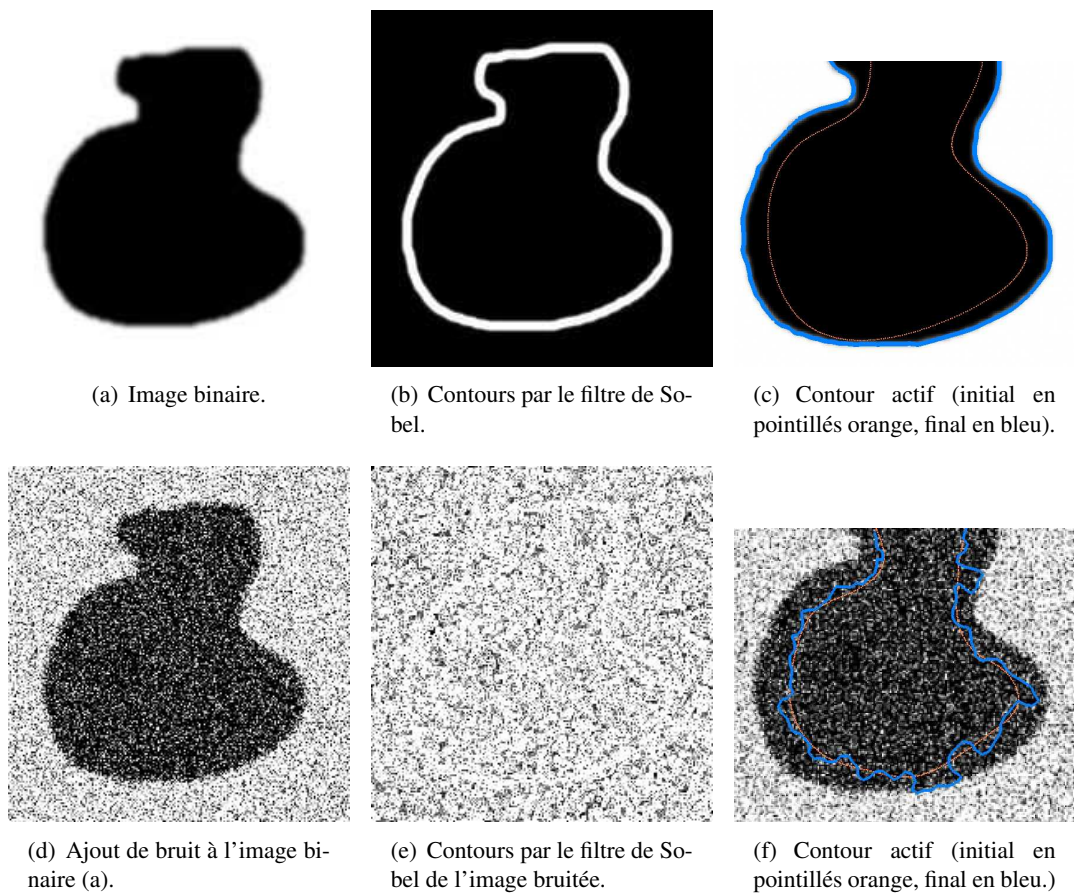


FIG. 4.2: *Extrema locaux de l'énergie externe d'un contour actif. Le contour de l'image (a) est bien détecté par un contour actif sans énergie interne (c). Le même contour actif, c'est à dire sans régularisation, échoue dans une image bruitée (f). La carte de contour (e) présente des extrema locaux attirant le contour actif.*

lisateur. Dans [Kass 87], il est fait état d'une énergie de contrainte E_{con} se comportant comme un ressort que l'on aurait connecté d'un coté au contour et de l'autre à la volonté de l'opérateur. La grandeur paramétrable est l'élasticité du ressort.

4.2.2 Énergie interne

Comme les énergies externes guide le contour actif vers sa position, il semblerait qu'elles suffisent à modéliser la déformation. Cependant, il ne s'agit pas d'énergies globales. Et puisque le contour actif évolue dans le cadre d'une minimisation d'énergie, il peut être attiré par des minima locaux. L'énergie interne inspirée des stabilisateurs de Tikhonov a été introduite dans le but d'éviter le piège des minima locaux de l'énergie externe (figure 4.2), et traduit la régularisation du contour actif.

Le but est d'introduire une contrainte sur le caractère lisse du contour. L'énergie interne, telle que décrite dans [Kass 87], se traduit par la relation :

$$E_{int}(g(s)) = \frac{1}{2} \left(\alpha(s) \frac{dg(s)}{ds} + \beta(s) \frac{d^2g(s)}{ds^2} \right) \quad (4.3)$$

Les deux termes du premier et second ordre présents dans l'équation (4.3), pondérés respectivement par α et β , imposent au contour actif un comportement plus ou moins stable lors de la déformation. Ainsi, $\beta = 0$ autorisera l'apparition d'angles le long du contour. Au contraire, une valeur de β élevée aura tendance à lisser fortement le contour. Le terme du second ordre est lié à la courbure, et le fait d'imposer une courbure minimale produira au final un cercle dans le cas d'un contour fermé. α pondère l'énergie dite d'élasticité car elle autorise au contour actif des variations de longueur.

4.3 Mise en oeuvre de la déformation

4.3.1 Méthode d'Euler

Pour trouver un minimum de E_{snake} , il suffit de résoudre l'équation qui annule la dérivée de cette énergie :

$$\frac{1}{2} \left(\alpha(s) \frac{d^2g(s)}{ds^2} + \beta(s) \frac{d^4g(s)}{ds^4} \right) + \frac{dE_{ext}(g(s))}{ds} = 0 \quad (4.4)$$

Une approximation par différences finies de l'équation (4.4) donne lieu à deux équations indépendantes liées aux composantes x et y de l'image I et du contour $g(s)$, où le paramètre continu s devient k discret. Ces équations peuvent s'écrire de façon matricielle en introduisant A , *matrice de rigidité* de taille $N \times N$, où N est le nombre de points du contour, construite à partir des coefficients α et β de l'énergie interne, et $f(k) = (f_x(k), f_y(k)) = \left(\frac{\partial E_{ext}}{\partial x}, \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} \right)$ sont appelées *forces externes* :

$$\begin{aligned} A \cdot g_x(k) + f_x(k) &= 0 \\ A \cdot g_y(k) + f_y(k) &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$f_x(k)$ et $f_y(k)$ sont les deux composantes du vecteur $f(k)$ dont l'origine est au point $g(k)$. La résolution de ce système peut se faire itérativement en ajoutant un terme à droite :

$$\begin{aligned} A \cdot g_{x,i}(k) + f_{x,i-1}(k) &= -\gamma (g_{x,i}(k) - g_{x,i-1}(k)) \\ A \cdot g_{y,i}(k) + f_{y,i-1}(k) &= -\gamma (g_{y,i}(k) - g_{y,i-1}(k)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Apparaît alors l'indice d'itération i , avec $g_{i=0}$ appelé *contour initial*. Lorsque $g_{i-1} = g_i$, le contour ne bouge plus ; l'équilibre est atteint sous la forme d'une solution de l'équation (4.5). Il est alors possible d'exprimer g_i en fonction de g_{i-1} :

$$\begin{aligned} g_{x,i}(k) &= (A + \gamma I)^{-1} (\gamma g_{x,i-1}(k) - f_{x,i-1}(k)) \\ g_{y,i}(k) &= (A + \gamma I)^{-1} (\gamma g_{y,i-1}(k) - f_{y,i-1}(k)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

où I est la matrice identité. Il est à noter ici que d'une part, la matrice A variant au cours des itérations imposera une inversion de matrice de taille $N \times N$. D'autre part, une absence totale de régularisation se traduit par une matrice A nulle et induit une évolution du contour actif dépendante uniquement des forces externes, ce qui est prévisible :

$$\begin{aligned} g_{x,i}(k) &= g_{x,i-1}(k) - \gamma^{-1} f_{x,i-1}(k) \\ g_{y,i}(k) &= g_{y,i-1}(k) - \gamma^{-1} f_{y,i-1}(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.3.2 Équilibre de forces

a) Forces ballons

La minimisation de l'énergie totale d'un contour actif fait apparaître la notion de forces externes et d'équilibre (équation (4.6)). L'idée exposée dans [Cohen 90] est d'utiliser directement ce concept de forces pour imposer la dynamique du *snake*. Le but est d'autoriser une initialisation du contour actif plus loin de la solution tout en évitant les pièges des minima locaux. Les forces ballons opèrent dans ce sens. Il s'agit de forces appliquées en chaque point du contour actif, dirigées selon la normale au contour. L'effet visible est un gonflement (ou dégonflement selon le sens de la force) du contour. De fait, si le contour est initialisé à l'intérieur de la forme à rechercher, le contour va gonfler comme un ballon jusqu'à ce que les forces externes et les forces ballons s'annulent.

b) Flux du vecteur gradient

Dans [Xu 97], la même volonté d'étendre la zone d'atteignabilité du contour actif est exprimée. En utilisant de nouveau le concept d'équilibre de forces, un champ de vecteur est calculé sur toute l'image. La construction de ce champ vectoriel est basée sur une équation de diffusion où la grandeur diffusée est le gradient de l'image, d'où le nom GVF^1 . La zone d'influence d'un gradient fort de l'image est alors agrandie, et le contour actif peut être initialisé loin de la solution.

¹GVF : de l'anglais *Gradient Vector Flow*.

L'avantage principal par rapport aux forces ballons est qu'il n'est pas nécessaire de connaître la position initiale par rapport à la solution, le sens de la force étant déterminé par la diffusion.

c) Convolution de champ de vecteurs

Une récente proposition concernant les forces externes guidant un contour actif est énoncée dans [Li 06] sous le nom de VFC^2 . Si le résultat obtenu est proche du GVF par sa forme - il s'agit à nouveau d'un champ de vecteur calculé à partir d'une carte de contours -, il diffère par sa mise en oeuvre. Une convolution de la carte de contours par un noyau vectoriel suffit à induire un effet de diffusion comparable au GVF . De plus, la construction du noyau de convolution est relativement libre. Plusieurs types de noyaux y sont présentés, dont un inspiré de la loi de gravitation de Newton ou encore une approximation du GVF .

UN contour actif de type *snake* est capable de détecter le contour d'un objet dans une image, avec l'avantage d'être robuste au bruit grâce à l'énergie interne. Les forces externes permettent quant à elles d'étendre la zone d'influence de l'objet recherché et de rendre le contour actif moins sensible à l'initialisation.

Cependant, la modélisation continue donne une importance considérable à la discrétisation qui conditionnera le nombre de points du contour. La matrice d'énergie interne peut se révéler ainsi de très grande taille. Le chapitre suivant expose plusieurs évolutions du *snake* qui modèrent l'importance de cette matrice.

²VFC : de l'anglais *Vector Field Convolution*.

5

Les descendants du snake

LES capacités du *snake* ont été largement exploitées dans la littérature. Et souvent une application apporte une amélioration au modèle original. Cela peut concerner la représentation géométrique du contour ou encore le modèle de déformation et de régularisation.

Nous évoquerons d'abord dans ce chapitre la représentation d'un contour par une interpolation B-Spline. Les travaux de [Menet 90] l'exploite à travers le *B-Snake* pour diminuer l'ordre du système à résoudre dans la minimisation d'énergie d'un contour actif.

Ensuite, nous nous intéresserons aux *B-Snake* sans énergie interne. Les propriétés de continuité des courbes *B-Splines* constituent l'argument principal de [Brigger 98] pour considérer la matrice d'énergie interne caduque et propose une régularisation basée sur l'échantillonnage du contour actif.

Enfin, nous décrirons le contour actif basé région de [Precioso 05]. La méthode de régularisation par filtrage *B-Spline* lissant qui y est utilisée sera d'une importance capitale pour la suite de nos travaux.

5.1 Le B-snake

La représentation d'un *snake* est continue. La notion de support fini, c'est à dire une représentation discrète du contour, n'apparaît que lors de la mise en oeuvre de la déformation. Ce point est mis en avant dans [Menet 90], en indiquant que l'échantillonnage du contour continu peut se révéler coûteux, voire problématique. Ici, l'auteur opte pour une représentation *B-Spline* du contour. Ce dernier pourra alors être construit via un ensemble fini de points. Les propriétés de continuité sont conservées, et la mise en oeuvre de la déformation sera appliquée à un moindre ensemble de points. En conséquence, la matrice de rigidité A sera nettement plus petite.

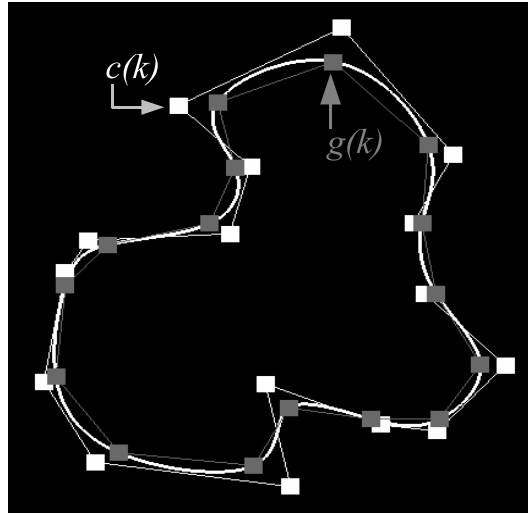


FIG. 5.1: Exemple de construction d'une courbe *B-Spline*. $g(k)$ et $c(k)$ sont respectivement les points et points de contrôle de la courbe. La courbe blanche est $g(s)$, une interpolation des $g(k)$ par une fonction de base *B-Spline* cubique (ordre 3).

5.1.1 Représentation *B-Spline*

Une courbe *B-Spline* $g(s)$ est une interpolation d'un ensemble de points $g(k)$. L'interpolation est une combinaison linéaire d'un ensemble de points de contrôle $c(k)$ et des fonctions de base *B-Splines* B_k :

$$g(s) = \sum_{k=0}^N c(k) \cdot B_k(s) \quad (5.1)$$

La continuité de $g(s)$ dépendra de l'ordre de la fonction de base B utilisée. Ainsi, une fonction B_k d'ordre 3 imposera une continuité au moins C^2 partout à la fonction $g(s)$. La courbe paramétrique $g(s) = (g_x(s), g_y(s))$ sera alors continue en courbure (figure 5.1). L'ouvrage [Schweizer 87] expose en détail la méthode de construction d'une courbe *B-Spline* et la formation des fonctions de base B_k .

5.1.2 Déformation d'un *B-Snake*

La déformation d'un contour actif représenté par une courbe *B-Spline* est semblable à celle d'un *snake*. Nous retrouvons une matrice de rigidité et les forces externes. Pourtant, les équations d'évolution ne se rapportent plus aux points du contour, mais aux points de contrôle de la courbe *B-Spline*. La matrice A devient A^b et les forces externes f deviennent également f^b .

$$\begin{aligned} c_{x,i}(k) &= (A^b + \gamma I)^{-1} \left(\gamma c_{x,i-1}(k) - f_{x,i-1}^b(k) \right) \\ c_{y,i}(k) &= (A^b + \gamma I)^{-1} \left(\gamma c_{y,i-1}(k) - f_{y,i-1}^b(k) \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

De la même façon que dans l'équation (4.8), si une matrice A^b nulle, la déformation n'impliquera que les contours aux itérations i et $i - 1$ et les forces externes. C'est une déformation non

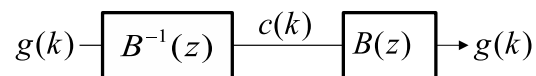


FIG. 5.2: Lien entre points de contrôle $c(k)$ et points $g(k)$ par filtrage B-Spline.

régularisée qui se traduit par :

$$\begin{aligned} c_{x,i}(k) &= c_{x,i-1}(k) - \gamma^{-1} f_{x,i-1}^b(k) \\ c_{y,i}(k) &= c_{y,i-1}(k) - \gamma^{-1} f_{y,i-1}^b(k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.2 Le B-Snake sans énergie interne

Dans leurs articles [Brigger 98, Brigger 00], les auteurs apportent deux améliorations au *B-Snake* précédemment décrit. La première concerne une simplification de la déformation en exploitant les propriétés de continuité de *B-Spline*. La deuxième apporte une intuitivité accrue en appliquant la déformation aux points du contour plutôt qu'aux points de contrôle de la courbe *B-Spline*.

5.2.1 La continuité *B-Spline* comme méthode de régularisation

La possibilité de s'émanciper de l'énergie interne a déjà été étudiée dans [Flickner 94]. Les propriétés de continuité des *splines* offrent une solution rapide à la minimisation via la paramétrisation du contour. Les travaux de [Brigger 98] soutiennent cette idée, tout en tirant profit plus particulièrement de la continuité en courbure des *B-Splines* cubique. Ces courbes sont implicitement lisses et correspondent à un optimum dans le cadre d'une minimisation de courbure proche de l'énergie interne d'un *snake*. Un échantillonnage variable permet alors de contrôler le caractère lisse de la courbe, et s'intègre parfaitement dans le cadre d'une analyse multirésolution.

La déformation d'un tel *B-Snake* est maintenant régie par l'équation (5.3), où l'énergie interne est implicitement représentée par l'échantillonnage du contour.

5.2.2 Points de contour ou points de contrôle ?

Si les courbes *B-Splines* ont apporté une amélioration importante dans la modélisation des contours actifs, elles emploient cependant le polygone de points de contrôle qui supporte désormais la déformation. Selon le nombre de points décrivant le contour, la détermination de ce polygone peut être fastidieuse. De plus, le processus de déformation perd en intuitivité puisque les positions des points de contrôle ne correspondent pas à une zone d'intérêt de l'image. Comme expliqué dans [Brigger 00], il est possible de retrouver une interaction directe avec les points du contour grâce au filtrage *B-Spline* [Unser 93a].

Soit une courbe discrète $g(k) = (g_x(k), g_y(k))$. Les composantes $g_x(k)$ et $g_y(k)$ sont alors considérées comme des signaux discrets indépendants. Les points de contrôle *B-Spline* $c(k) =$

$(c_x(k), c_y(k))$ sont liés aux signaux g_x et g_y par la relation :

$$g(k) = b(k) * c(k) \xrightarrow{z} G(z) = B(z) \cdot C(z) \quad (5.4)$$

où $B(z)$ est la fonction de transfert du filtre *B-Spline* indirect et $b(k)$ sa réponse impulsionnelle, avec :

$$B(z) = \frac{z + 4 + z^{-1}}{6} \quad (5.5)$$

pour un filtre basé sur une *B-Spline* cubique. Ainsi, $B(z)$ permet d'obtenir par filtrage les points du contour à partir des points de contrôle. Par filtrage inverse $B^{-1}(z)$, il est possible d'obtenir de la même façon les points de contrôle à partir des points du contour. La figure 5.2 illustre ce lien par simple filtrage entre $g(k)$ et $c(k)$. L'intérêt de cette relation est de conserver toutes les propriétés des *B-Splines* dans le cadre d'un contour actif, tout en exploitant l'idée de régularisation implicite via un échantillonnage variable et en utilisant l'équation (4.8). Les points de contrôle n'apparaissent pas dans cette équation. Seuls les points du contour sont concernés et déplacés par les forces externes. Un autre avantage de cette méthode est de pouvoir utiliser indifféremment un contour actif ouvert ou fermé grâce à des extensions appropriées des signaux $g_x(k)$ et $g_y(k)$

5.3 Le contour actif basé région régularisé par spline lissante

5.3.1 Forces externes basées région

Jusqu'ici, les contours actifs étaient guidés par une information de contour dans l'image. Il est pourtant possible d'intégrer des informations de région, à partir par exemple de critères d'homogénéité entre l'intérieur et l'extérieur du contour actif [Ronfard 94]. Par la suite, ces critères basés région ont été étudiés dans le cadre d'une implémentation par level-sets des contours actifs [Caselles 93]. Dans le cadre des contours actifs paramétriques, l'information d'homogénéité de région peut se traduire par une force dirigée selon la normale au contour. Il s'agit d'un autre type de forces externes, approprié à la déformation d'un contour décrite par l'équation (4.8). La méthode détaillée dans [Precioso 05] est basée sur un critère région et propose une autre méthode de régularisation. Plutôt que de compter sur un lissage implicite de la courbe par un échantillonnage variable, elle introduit un lissage explicite par un filtrage passe-bas des composantes du contour paramétrique.

5.3.2 Un algorithme de déformation régularisée par spline lissante

L'utilisation d'un filtrage passe-bas est justifiée par le manque de robustesse au bruit d'une interpolation *B-Spline*. Le filtre implémenté dans [Precioso 05] est une extension des filtres *B-Splines* direct et indirect (figure 5.2). L'intention est d'obtenir, à partir d'un ensemble de points $g(k)$, non plus une interpolation exacte à travers les points de contrôle $c(k)$ mais une approximation $\hat{g}(k)$. Pour ce faire, le filtre S_λ détermine les points de contrôle $\hat{c}(k)$. L'approximation $\hat{g}(k)$

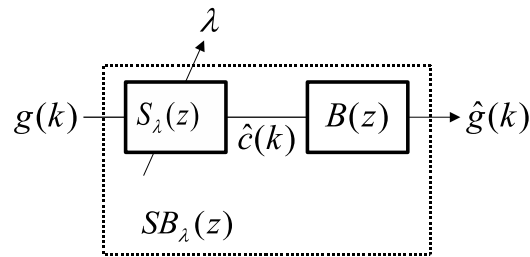


FIG. 5.3: Lissage par spline lissante d'un signal $g(k)$. Un filtre passe-bas S_λ produit le signal $\hat{c}(k)$, une approximation des points de contrôle B-Spline. Un filtrage B-Spline indirect B de $\hat{c}(k)$ produit à son tour une approximation $\hat{g}(k)$ du signal $g(k)$.

des points $g(k)$ résulte du filtrage B-Spline indirect des $\hat{c}(k)$ (figure 5.2).

$$\hat{c}(k) = s_\lambda * g(k) \quad (5.6)$$

$$\hat{g}(k) = b * \hat{c}(k) \quad (5.7)$$

où s_λ est la réponse impulsionnelle du filtre *spline lissante* S_λ . Il s'agit d'un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure dépend de λ .

L'évolution d'un tel contour actif est régie par les étapes suivantes. La procédure d'initialisation donne le contour initial $g_{i=0}(k)$. Les points de contrôle lissés $\hat{c}_{i=0}(k)$ sont déduits de $g_{i=0}(k)$ par l'équation (5.6).

a) Calcul des points du contour lissé :

$$\hat{g}_i(k) = b(k) * \hat{c}_i(k) \quad (5.8)$$

b) Calcul des forces externes($f_i(k)$) :

$$f_i(k) = \nu \cdot N(k) \quad (5.9)$$

où ν est la *vitesse* du contour déduite de critères d'homogénéité et $N(k)$ est le vecteur normal au contour au point k .

c) Déplacement des $\hat{g}_i(k)$ selon $f_i(k)$ vers le prochain contour $g_{i+1}(k)$:

$$g_{i+1}(k) = \hat{g}_i(k) + f_i(k) \quad (5.10)$$

d) Calcul des nouveaux points de contrôle lissés :

$$\hat{c}_{i+1}(k) = s_\lambda(k) * g_{i+1}(k) \quad (5.11)$$

e) Retour à l'étape (a) jusqu'à l'équilibre.

Les auteurs montrent que la régularisation par filtrage B-spline lissant a pour effet d'accroître l'uniformité de l'échantillonnage. Ainsi, contrairement à [Brigger 98], l'échantillonnage dépend

de la régularisation, et non l'inverse. Nous reviendrons sur cet algorithme et ses implications dans la partie III, où nous détaillerons également le filtre S_λ .

NOUS avons présenté dans ce chapitre quelques évolutions du premier contour actif. La représentation du contour par une courbe *B-Spline* a apporté d'abord un allègement conséquent des résolutions de systèmes impliqués dans l'évolution d'un contour actif. Mais elle a également autorisé une annulation de la matrice d'énergie interne grâce à la propriété de courbure minimale d'une *B-Spline*. La conséquence est une équation d'évolution simple, où le contour suivant est déduit du précédent par un déplacement des points selon les forces externes. Parallèlement, un contour actif basé région se montre capable de détection en temps réel en exploitant l'efficacité d'un filtrage *B-Spline* lissant pour la régularisation.

La partie suivante montre comment le contour actif a évolué de l'image vers le volume et quelles adaptations il a dû subir pour accomplir sa tâche dans un contexte tridimensionnel.

6

Surfaces actives

LES techniques d'acquisitions permettent d'obtenir des données volumiques. Qu'ils s'agissent d'acquisitions par laser¹ ou d'images médicales IRM, tomographiques ou encore échographiques, la détection de contour n'est plus contrainte à un problème 2D. Elle doit dorénavant mettre en évidence l'enveloppe extérieure -la surface- d'un objet à trois dimensions. Rapidement, l'idée des contours actifs a été étendue à la notion de surface active.

Il sera d'abord question des premières adaptations du contour actif paramétrique. La généralisation se heurte au problème de la paramétrisation d'une surface [Cohen 93]. Une représentation par maillage est préférable, c'est pourquoi nous parlerons de modèle déformable maillé, par contradiction avec le contour actif paramétrique. Le modèle déformable maillé de [Delingette 92] est à l'origine du modèle déformable simplexe [Delingette 99] qui sera détaillé ensuite. La connectivité régulière de ces maillages est un atout pour la définition d'énergies originales.

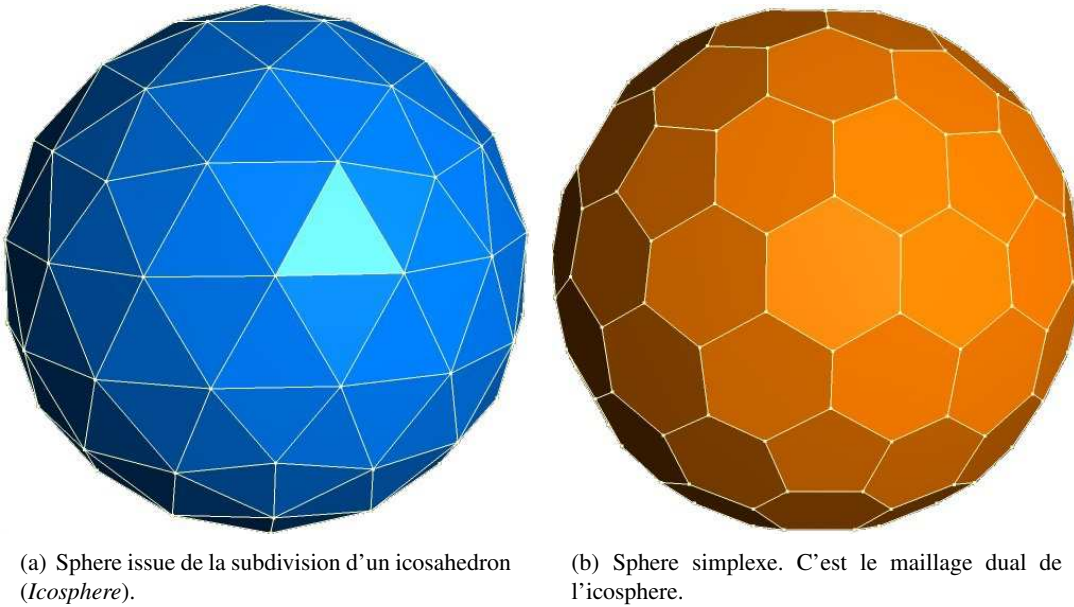
Ce chapitre se terminera par un aperçu des méthodes de [Huang 98] et [Chen 05]. Elles sont une extension non plus du *snake* mais du *B-Snake*. La représentation du modèle déformable est une surface *B-Spline* et bénéficie à ce titre des avantages vus dans le chapitre précédent.

6.1 Modèles déformables maillés

6.1.1 Premiers modèles déformables tridimensionnels

La généralisation du contour actif vers une surface active se traduit par le passage d'un contour à une surface, et d'une image à un volume. En d'autres termes, le modèle déformable n'est plus décrit par une fonction $g(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, mais par $g(s, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Chaque point de la surface

¹Pour un exemple, voir le projet *Michelangelo Numérique* - http://graphics.stanford.edu/papers/digmich_falletti/



(a) Sphere issue de la subdivision d'un icosaedron (*Icosphere*).

(b) Sphere simplexe. C'est le maillage dual de l'icosphere.

FIG. 6.1: Illustration de la dualité entre un maillage triangulaire et un maillage simplexe.

sera déterminé par trois composantes $g(s, t) = (g_x(s, t), g_y(s, t), g_z(s, t))$. Dans [Cohen 93], il est démontré que la minimisation de l'énergie interne correspond à une minimisation de la courbure moyenne de la surface. Cependant, l'augmentation de la taille du système à résoudre impose certaines optimisations. Parmi celles proposées, nous trouvons l'utilisation de contours 2D, coupe par coupe, pour finalement reconstruire une surface. Cela contraint la surface active à une forme cylindrique, et le processus de déformation n'intègre aucune interaction entre coupes. Certes, les mêmes travaux [Cohen 93] donnent les moyens pour s'affranchir de ces contraintes, en introduisant par exemple la direction orthogonale aux coupes pour représenter la deuxième dimension de la surface. Mais c'est grâce à la méthode par éléments finis qu'ils parviennent à se défaire de la dépendance à la représentation par coupe et de la forme cylindrique.

La même généralisation par simple ajout d'une dimension dans la représentation de la surface est proposée dans [Delingette 92]. Il est cependant mis en avant l'impossibilité de paramétrer une sphère sur un domaine carré. Le modèle initial utilisé est alors une triangulation issue de la subdivision d'un icosaédron ; la déformation sera portée par les centres des triangles. Ce type de maillage discret est à l'origine du modèle déformable simplexe.

6.1.2 Modèles déformables simplexes

La généralisation des contours actifs amène, en même temps qu'une dimension supplémentaire, des problèmes liés à la représentation de la surface [Delingette 94a]. Les contours actifs étaient représentés par une fonction paramétrique. Il en va de même pour les surfaces actives. Le plongement d'une surface dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 est une application du plan dans l'espace. Cette application est appelée paramétrisation : une surface est un objet tridimensionnel paramétré par deux variables. La représentation d'un plan infini, d'un cylindre ou d'un tore ne pose pas de dif-

ficulté puisque l'application est bijective. Pour des surfaces quelconques, l'application n'est plus bijective partout. Les difficultés apparaissent aux points où la fonction paramétrique peut prendre plusieurs valeurs. Les pôles d'une sphère sont une illustration de l'existence de points dégénérés sur une surface. De plus, il est souvent fait usage de grandeurs dépendantes de la paramétrisation dans la définition d'énergies, telles que les dérivées. De fait, plusieurs paramétrisations pour un même modèle conduiront à des résultats différents. Ou pire, une paramétrisation mal choisie peut conduire à des instabilités du système rendant impossible toute segmentation fiable.

La proposition de [Montagnat 98, Delingette 94a] est d'utiliser les maillages simplexes comme représentation géométrique du modèle déformable. Un maillage est une représentation discrète d'une surface. Habituellement, un maillage est un ensemble de triangles. Avec ses trois points, un triangle est la plus simple définition d'un plan. Un maillage triangulaire est donc composé d'une multitude de cellules polygonales, appelées *faces*, comportant chacune trois *arêtes*. Un maillage simplexe est dual à une triangulation : une face d'un maillage triangulaire est un point d'un maillage simplexe et un point d'un maillage triangulaire est une face d'un maillage simplexe². Une propriété remarquable, parmi d'autres exposées dans [Delingette 94b], est que chaque point d'un maillage simplexe dual à une triangulation possède exactement trois voisins. La figure 6.1 montre une sphère créée à partir de trois subdivisions d'un icosaèdre³(6.1(a)) et son dual simplexe (6.1(b))

Le propos de [Montagnat 98] est de démontrer l'équivalence entre les méthodes de recalage et une déformation libre⁴ d'un maillage. L'introduction de contraintes est assurée par une définition locale des forces internes. Les maillages simplexes sont une source d'efficacité en évitant les problèmes de topologie et de paramétrisation à tel point qu'ils sont présentés comme une extension naturelle des contours actifs.

Dans un maillage simplexe déformable décrit dans [Delingette 99], comme dans la plupart des modèles déformables, les points sont considérés comme des masses physiques soumises aux lois de la mécanique de Newton. La géométrie des maillages simplexes permet de proposer une nouvelle force interne où les composantes tangentielles et normales à la surface sont basées respectivement sur la distance d'un point à ses voisins et sur la courbure moyenne en un point. La force de régularisation aura tendance à ramener un point vers le centre de gravité de ses voisins.

6.2 La surface *B-Spline* active

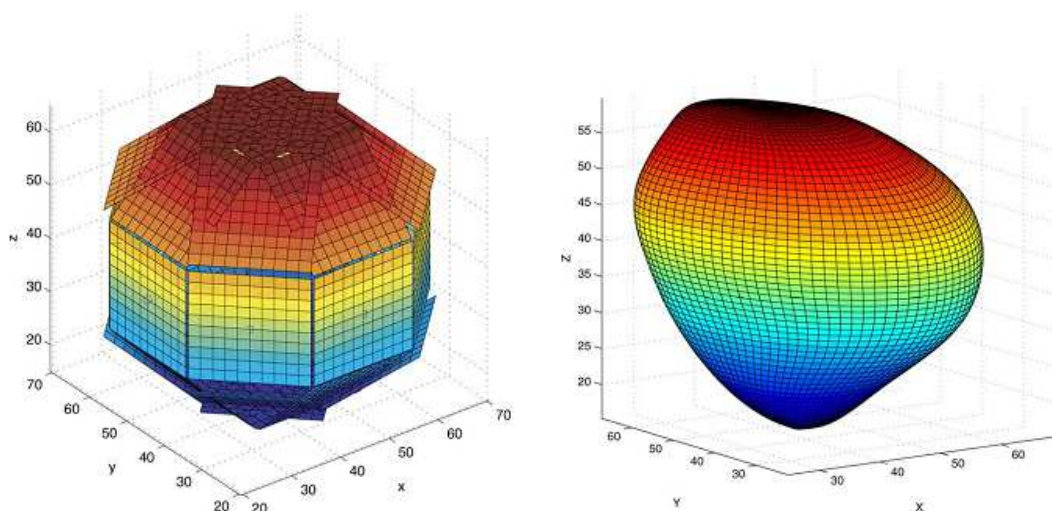
6.2.1 L'évolution directe du *B-Snake*

Tout comme les contours actifs ont rapidement été enrichis par une représentation *B-Spline*, les surfaces actives peuvent également en profiter. Elles bénéficient alors d'une énergie interne simplifiée et d'un schéma d'interpolation intrinsèque bienvenu dans le cadre d'une segmentation multirésolution. Dans [Huang 98], il est expliqué comment utiliser une surface *B-Spline* comme

²On retrouvera la même dualité entre une triangulation de Delaunay et un diagramme de Voronoï, à cela près que la dualité Delaunay/Voronoï est géométrique alors que la dualité triangulation/simplexe est uniquement topologique.

³Images créées avec le logiciel *Stella* - <http://web.aanet.com.au/robertw/Stella.html>

⁴Traduction de l'anglais *free-form deformation*.



(a) *B-Surface* originale. Il s'agit d'un ensemble de plan dans l'espace initialisés autour de l'objet à segmenter.

(b) *B-Surface* finale. Après fusion des bords, la surface segmente une tumeur du cerveau.

FIG. 6.2: *B-Surface* pour la segmentation d'objet 3D (images extraites de [Chen 05]).

représentation du modèle déformable. Cependant, la construction d'une telle surface est basée sur un produit tensoriel entre deux courbes *B-Splines*. La topologie de la surface obtenue est alors homéomorphe à un plan. Au mieux, en adaptant les conditions aux limites, il est possible d'obtenir un cylindre ou un tore. Il s'agit là d'une contrainte forte à la conservation de la nature paramétrique d'un modèle déformable.

6.2.2 Plusieurs surfaces *B-Splines* pour un même modèle déformable

La dernière innovation concernant l'utilisation des *B-Splines* comme représentation paramétrique d'un modèle déformable est décrite dans [Chen 05]. Plutôt que de se conformer à une topologie simple de la surface, il est proposé de déformer indépendamment plusieurs surfaces *B-Splines* planes puis de les fusionner comme le montre la figure 6.2. Cet algorithme n'utilise pas d'énergie interne, considérant, à l'instar de [Brigger 98] pour les courbes, que les surfaces *B-Splines* possèdent intrinsèquement de fortes contraintes sur la courbure. De plus, le calcul des forces externes orientant la déformation est reporté sur les points de contrôle *B-Splines* qui seront effectivement déplacés. Mais le processus de fusion des surfaces *B-Splines* obligatoire pour obtenir la surface n'est pas décrit et le problème topologique lié à la paramétrisation n'est pas résolu.

LES modèles déformables tridimensionnels ont été traités dans ce chapitre. À l'origine, la volonté était de conserver une représentation paramétrique du modèle déformable pour traduire les bases théoriques des contours actifs dans un repère à trois dimensions. Cependant, la paramétrisation impose des contraintes topologiques. Les solutions proposées ont pour conséquence de s'affranchir d'une paramétrisation en utilisant un modèle maillé comme une triangulation ou un maillage simplexe. Dans le cas du modèle déformable représenté par une surface *B-Spline*, la pa-

paramétrisation doit être conservée. La solution est alors de déformer plusieurs surfaces *B-Spline*.

L'état de l'art montre une divergence des voies de recherche dans l'extension des contours actifs vers les modèles tridimensionnels. D'un côté, la paramétrisation d'une surface impose des contraintes topologiques qui sont levées par l'utilisation de modèles déformables maillés. D'un autre côté, la représentation paramétrique d'une surface avec des *B-Splines* surfaciques apporte les mêmes avantages en terme de régularisation que les contours actifs *B-Snakes* mais conserve en même temps les contraintes topologiques.

Le chapitre suivant fera un état de l'art de méthodes contribuant à améliorer la segmentation par les contours actifs paramétriques ou les modèles déformables maillés. Nous ciblerons principalement l'introduction de connaissance a priori dans le processus de segmentation et l'adaptation du modèle déformable à son environnement.

7

Connaissance a priori et modèle déformable adaptatif

Les modèles déformables présentés dans les chapitres précédents sont capables de détection de contour dans une image ou dans un volume. La notion d'énergie interne d'un contour actif, liée à celle de courbure moyenne sur une surface, est le moyen de régulariser le processus de segmentation. La conséquence est une robustesse au bruit accrue.

Cependant, une segmentation erronée n'est pas uniquement causée par le bruit. D'autres paramètres viennent perturber la position finale du modèle déformable, comme des phénomènes d'occlusions ou de contours subjectifs. Nous montrerons dans ce chapitre quelles sont les solutions existantes permettant de guider le modèle déformable vers un résultat correspondant au mieux à l'objet recherché.

D'abord, nous présenterons l'intégration de connaissance a priori. Il est naturel de penser que lorsque que l'objet est connu, il est plus facile de le trouver dans une image. Le problème est de traduire cette connaissance.

Nous ferons ensuite un tour d'horizon des méthodes où le modèle déformable possède différentes caractéristiques en fonction de son environnement et de son état. Nous parlerons alors de modèles déformables adaptatifs.

7.1 Connaissance a priori

Lorsque l'objet recherché dans l'image est connu, cette connaissance peut être avantageusement utilisée dans le processus de segmentation. Ainsi, [Olstad 96] propose un encodage de l'information a priori dans un contour. Cet encodage s'inscrit dans un contexte grammatical dont

l'implantation se fait par programmation dynamique [Amini 90]. Dans le même cadre, [Abe 03] propose une méthode où l'utilisateur dessine le contour initial. De ce contour initial sont extraites des séquences d'angles, lignes et courbes décrivant le modèle. Cet encodage de l'information a priori apporte une robustesse au bruit et évite les problèmes d'occlusions.

La connaissance a priori peut également être traduite par des descripteurs de forme, mais le modèle déformable devient alors une forme active par opposition au contour actif [Tejos 04]. Les méthodes basées sur les formes nécessitent généralement de longs apprentissages pour être efficaces. Dans [Das 04b], les auteurs proposent d'utiliser les distributions d'intensité comme connaissance a priori d'un objet. Nous revenons alors sur des méthodes de contours actifs basés région qui sont fortement liées à notre contexte d'équilibre de forces [Zhu 96].

Finalement, le *B-Snake* sans énergie interne de [Brigger 00] décrit dans le paragraphe 5.2 intègre à sa façon une connaissance a priori de l'objet recherché. En effet, le pas d'échantillonnage qui est utilisé comme paramètre de régularisation du contour actif doit être compatible avec les caractéristiques de l'objet. Le nombre de points constituant le contour traduit alors une connaissance a priori. De plus, le pas d'échantillonnage peut être variant. La densité des points, imposant une rigidité plus ou moins forte, devient également une connaissance a priori. Il s'agit là d'un exemple où régularisation et a priori partagent une même mise en oeuvre.

7.2 Modèles déformables adaptatifs

Par définition, un modèle déformable est contraint spatialement et temporellement. En partant du principe qu'un modèle déformable n'est pas initialisé systématiquement à la même distance de l'objet recherché et que la qualité de l'image n'est pas forcément homogène, l'adaptation de différents paramètres en fonction de la position du modèle améliore la segmentation [Davatzikos 93].

[Metaxas 02] va dans ce sens en proposant une régularisation locale variant spatialement et temporellement. La détermination des paramètres locaux de régularisation est conditionnée par la distance du modèle déformable aux données. Une régularisation locale est également le propos de [Lai 93], pour qui l'algorithme du *minimax* est le moyen d'obtenir localement le meilleur compromis entre régularisation et attache aux données. Dans [Li 99], les forces ballons et la régularisation sont rendues adaptatives en fonction des forces images. Il y est avancé que la régularisation doit être forte si les forces images sont faibles ou absentes.

Dans [Das 04a], ce n'est plus la régularisation qui s'adapte à l'environnement du modèle déformable mais les forces externes. Les forces ballons sont remplacées par des forces inertielles. Contrairement aux forces ballons qui ne dépendent que du contour à l'instant i , les forces inertielles dépendent de l'itération précédente. Leur formulation les rend plus faibles aux environs d'un bord et améliore ainsi la stabilité du modèle déformable.

Le dernier paramètre adaptatif que nous présentons dans ce paragraphe est l'échantillonnage du modèle déformable. De nouveau, le *B-Snake* de [Brigger 00] entre dans cette catégorie. La variation de l'échantillonnage est d'abord un argument temporel, permettant une analyse multirésolution d'une image en augmentant parallèlement la résolution de l'image et le nombre de points du contour pendant le processus itératif. Les travaux de [Rueckert 95] intègrent également une adapta-

tion temporelle de l'échantillonnage, qui doit être suffisant pour décrire l'objet. Nous rapprochons cette adaptation à une connaissance a priori. Dans [Wang 01], c'est toujours l'échantillonnage qui est adaptatif, mais cette fois un point est inséré entre deux points du modèle déformable où la force externe est maximale.

Pour finir, une méthode d'échantillonnage adaptatif est proposée par [Lachaud 03]. Cette méthode est appliquée aux modèles déformables maillés. L'auteur considère qu'un modèle déformable doit adapter sa résolution en fonction des caractéristiques de l'image.

LES modèles déformables pour la segmentation d'images souffrent de défauts pouvant aboutir à un résultat erroné, ou à un comportement instable. Une solution est d'intégrer dans le processus de déformation une connaissance a priori sur la forme, la position, ou encore la distribution d'intensité des pixels représentant l'objet.

Une autre solution est de donner au modèle déformable une souplesse aux différents paramètres qui régissent son évolution. Ainsi, la régularisation, les forces externes ou l'échantillonnage peuvent s'adapter en fonction des données images, donc spatiales, et temporelles.

Nous avons vu que la régularisation peut être à la fois une connaissance a priori de l'objet recherché et un paramètre s'adaptant spatialement et temporellement. Le modèle déformable proposé dans cette thèse s'appuie en partie sur ce concept.

La conclusion à suivre dressera un bilan des différentes notions rencontrées dans cet état de l'art.

8

Conclusion de l'état de l'art

Nous avons ciblé dans cette partie bibliographique certains modèles déformables. La détection de contours dans une image est réalisée par les contours actifs paramétriques, tirant leur nom de la représentation géométrique du contour par des fonctions paramétriques. La description du contour actif de [Kass 87] apporte les bases théoriques sur lesquelles sont construits ses successeurs, le *B-Snake*, le *B-Snake* sans énergie interne [Brigger 98] et le premier contour actif régularisé par *spline* lissante [Precioso 05].

L'extension vers un modèle déformable tridimensionnel est également présentée [Cohen 93]. La notion de représentation paramétrique n'a plus lieu d'être pour des raisons de contraintes topologiques [Delingette 92]. Nous parlons alors de modèles déformables maillés, une surface étant habituellement représentée discrètement par un maillage de points. Les maillages simplexes sont un exemple de modèles déformables maillés dont la connectivité régulière autorise un calcul efficace des forces internes [Montagnat 98, Delingette 99]. Parallèlement, le *B-Snake* possède aussi son équivalent tridimensionnel à travers la surface active *B-Spline* [Huang 98, Chen 05]. Nous retrouvons alors un maillage naturellement paramétrique puisque issu du produit tensoriel de deux courbes *B-Splines* monodimensionnelles. Ce modèle déformable paramétrique intègre les mêmes propriétés de régularisation qu'un *B-Snake* mais reste contraint à des surfaces topologiquement simples.

L'introduction d'une connaissance a priori dans un modèle déformable a été étudiée, en parallèle avec des méthodes de modèles déformables adaptatifs. Nous avons vu que la régularisation peut être à la fois une connaissance a priori en empêchant un modèle de se déformer plus qu'il ne le devrait et une variable s'adaptant à l'environnement, comme la distance aux données [Metaxas 02] ou la résolution de l'image [Brigger 00]. De la même façon, l'échantillonnage du modèle traduit une connaissance a priori de l'objet, puisque régularisation et échantillonnage sont liés. Mais il

peut aussi s'adapter en fonction de divers critères, comme le temps [Rueckert 95] ou les données images [Wang 01, Lachaud 03].

LA suite du document est constituée de deux parties dans lesquelles nous proposerons d'abord une amélioration des contours actifs paramétriques et ensuite son extension vers un modèle déformable maillé. Nous appelons ce modèle déformable le *MoDeReS* pour Modèle Déformable Régularisé par *Spline* lissante.

Nous profiterons d'un modèle de déformation non régularisé pour introduire notre concept de régularisation par filtrage *B-Spline* lissant variant. Parmi les avantages qu'elle apporte, nous trouvons une régularisation locale traduisant une connaissance a priori de l'objet recherché. L'efficacité d'un filtrage RII permet d'envisager l'utilisation du *MoDeReS* dans des applications à fortes contraintes temporelles. La régularisation locale peut aussi s'adapter à la qualité de l'image pour accroître la robustesse au bruit. Le passage à un modèle déformable tridimensionnel est nécessairement accompagné d'une adaptation de la méthode de régularisation, car le filtre devient bidimensionnel, et de la représentation de la surface rapprochant modèles déformables maillés et modèles déformables paramétriques à travers un maillage quadrangulaire.

Troisième partie

***MoDeReS-2D*, un contour actif régularisé par spline lissante**

9

Introduction à la troisième partie

LA partie II nous a donné une vision précise de ce que sont les modèles déformables. Pour la détection de contours dans une image, les contours actifs paramétriques ont prouvé leur efficacité. Le concept initial de minimisation d'une énergie liée à la géométrie du contour et à l'image possède cependant quelques lacunes que l'intégration de connaissance a priori et l'adaptativité des paramètres tentent de combler. La littérature sur ce sujet offre ainsi différentes méthodes d'optimisation de la qualité de la segmentation. D'un autre côté, la vitesse de convergence d'un modèle déformable a été amélioré par l'exploitation d'un filtrage numérique pour permettre à un contour actif basé région d'évoluer en temps réel [Precioso 05].

Nous détaillerons dans le chapitre suivant une analyse fréquentielle des contours actifs proposée par [Weruaga 04] et donnerons une formulation mathématique de l'algorithme de contour actif basé région régularisé par filtrage *B-Spline* lissant de [Precioso 05]. Une analogie entre les deux résultats nous permettra de lancer une discussion autour de l'utilisation du filtrage *B-Spline* lissant en tant que moteur de la régularisation.

CETTE discussion sera à l'origine du développement fait dans cette partie. Le filtre *B-Spline* lissant sera précisément caractérisé dans le chapitre 11 où nous irons jusqu'au filtrage variant d'une courbe paramétrique du plan. Le chapitre 12 tirera parti de ce filtrage dans la régularisation d'un nouveau modèle de déformation d'un contour actif, le *MoDeReS-2D*. Le filtrage variant devient une méthode simple de régularisation locale. Enfin, des résultats seront présentés dans le chapitre 13. La méthode de régularisation, globale ou locale, sera testée sur des images synthétiques et réelles et nous montrerons comment la régularisation locale peut être le moyen d'introduire une connaissance a priori sur l'objet recherché.

10

Éléments de discussion

La régularisation d'un modèle déformable est indispensable pour une segmentation performante. Nous avons vu qu'elle améliore la robustesse au bruit pendant la déformation, mais peut également être considérée comme une connaissance a priori de l'objet recherché en empêchant le modèle de se déformer plus qu'il ne faut. Il est également possible d'adapter la régularisation, spatialement et temporellement pour améliorer la segmentation en fonction de l'environnement du modèle déformable.

Les précédents travaux traitant des contours actifs paramétriques rapportent régulièrement un problème de rétrécissement du contour tout au long du processus de déformation. Si cet effet est en général observable pour une forte régularisation, nous allons montrer dans ce chapitre que cela est en fait lié à un phénomène de convolutions multiples du contour par un filtre passe-bas.

D'abord, nous présenterons une analyse fréquentielle des contours actifs [Weruaga 04] et nous mettrons en évidence l'existence de convolutions successives dans le cadre de la minimisation d'énergie du paragraphe 4.3.

Nous montrerons ensuite par une formulation mathématique de l'algorithme du contour actif basé région de [Precioso 05] qu'il existe le même phénomène de convolution itération après itération du contour par un filtre passe-bas.

Finalement, nous ferons une analogie entre les deux résultats. Le phénomène de rétrécissement est la conséquence d'un filtrage trop fort pour un grand nombre d'itérations ou une valeur de régularisation élevée. Nous proposerons une discussion sur la régularisation par filtrage *B-Spline* lissant d'un contour actif.

10.1 Une analyse fréquentielle des contours actifs

10.1.1 Formulation lagrangienne

Dans [Liang 99] s'inspirant des modèles déformables élastiques [Terzopoulos 87], la minimisation de l'énergie d'un contour actif se traduit dans le temps par l'équation suivante, basée sur l'équation du mouvement de Lagrange :

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{g}_t}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d \mathbf{g}_t}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{g}_t = \mathbf{f}(\mathbf{g}_t) \quad (10.1)$$

Ici, \mathbf{g}_t est le vecteur formé par les points du contour à l'instant t . Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont construites à partir des paramètres α et β de l'énergie interne (équation (4.3)). \mathbf{K} est appelée matrice de rigidité.

En donnant au temps t une forme discrète, on peut réécrire l'équation (10.1) sous la forme :

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{K}) \mathbf{g}_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_{i-1} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{g}_{i-2} + \mathbf{f}_i \quad (10.2)$$

avec $\mathbf{b} = \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t}$ et $\mathbf{c} = -\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2}$ et où \mathbf{g}_i est le vecteur composé des points du contour à l'instant i . Il s'agit ici d'une formulation proche de la méthode de minimisation décrite dans l'état de l'art. Elle est présentée dans [Liang 99] comme une généralisation des contours actifs explicites en s'appuyant sur les éléments finis déjà utilisés dans [Cohen 93]. L'analyse fréquentielle des contours actifs [Weruaga 04] est basée sur les écritures (10.1) et (10.2).

10.1.2 Transition vers le domaine fréquentiel

Dans l'équation (10.2), le signal discret \mathbf{g}_i est le vecteur dont les composantes sont les points $g_i(k)$ du contour. Si l'on considère $g_i(k)$ comme un signal temporel où k est le paramètre de temps discret, on peut écrire sa transformée de Fourier $G_i(\omega)$. Nous pouvons écrire de la même façon les forces externes dans le domaine fréquentiel $F_i(\omega)$ ainsi que la matrice de rigidité $K(\omega)$. De cette façon, l'équation (10.2) devient :

$$(b + c + K(\omega)) G_i(\omega) = b \cdot G_{i-1}(\omega) + c \cdot G_{i-2}(\omega) + F_i(\omega) \quad (10.3)$$

Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{C} sont indépendantes du paramètre k et se retrouvent dans b et c sous forme de constantes. Après normalisation, l'équation (10.3) devient :

$$G_i(\omega) = \frac{\eta}{\eta + K(\omega)} (\check{b} G_{i-1}(\omega) + \check{c} G_{i-2}(\omega) + F_i(\omega)) \quad (10.4)$$

avec $\eta = \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{\Delta t}$ et \check{b} et \check{c} sont des constantes normalisées ($\check{b} + \check{c} = 1$).

Soit $H(\omega) = \frac{\eta}{\eta + K(\omega)}$, la transformation de Fourier inverse de l'équation (10.4) est alors donnée par :

$$g_i(k) = h(k) * (\check{b} g_{i-1}(k) + \check{c} g_{i-2}(k) + f_i(k)) \quad (10.5)$$

$H(\omega)$ et sa réponse impulsionnelle $h(k)$ caractérisent un filtre passe-bas dont la fonction de transfert dépend des paramètres α et β de l'énergie interne ainsi que de la méthode d'interpolation liant les points $g(k)$ au contour décrit par la fonction $g(s)$. L'équation (10.5) montre que à chaque itération, le contour et les déplacements subissent une convolution par le noyau passe-bas $h(k)$.

10.2 Étude du contour actif régularisé par *spline* lissante

10.2.1 Mise en équation de l'algorithme

Nous avons décrit dans le paragraphe 5.3 un algorithme utilisant un filtre passe-bas particulier ([Unser 93a]) en guise de régularisation. La description mathématique de cet algorithme, que nous avons proposée dans [Velut 07], issue des équations (5.8) à (5.11) est la suivante :

L'équation (5.10) donne à l'itération $i + 1$ le contour $g(k)$ en fonction du contour régularisé $\hat{g}(k)$ précédant (itération i). En combinant ceci avec le lien entre points de contrôle et points du contour (équation (5.8)), on en déduit :

$$g_{i+1}(k) = \hat{g}_i(k) + f_i(k) = \hat{c}_i(k) * b(k) + f_i(k) \quad (10.6)$$

Et finalement, l'équation (5.11) nous conduit au résultat :

$$\hat{c}_{i+1}(k) = \hat{c}_i(k) * sb_\lambda(k) + f_i(k) * s_\lambda(k) \quad (10.7)$$

où $sb_\lambda = s_\lambda * b$. La figure 5.3 montre la construction de ce filtre.

Ce résultat est à rapprocher de l'équation (10.5) où nous avons souligné un filtrage passe-bas du contour et des forces externes à chaque itération. Nous retrouvons le même schéma dans l'équation (10.7) pour laquelle nous pouvons faire apparaître l'état initial $c_0(k)$ dans une expression utilisant les transformées en z :

$$\hat{C}_{i+1}(z) = \hat{C}_0(z) \cdot \prod_{j=0}^{i+1} SB_\lambda(z) + \sum_{j=0}^i \left(F_j(z) \cdot S_\lambda(z) \prod_{k=0}^{i-j} SB_\lambda(z) \right) \quad (10.8)$$

10.2.2 Intervalle du paramètre de régularisation

Dans le paragraphe 5.3, la régularisation est succinctement décrite comme un filtrage passe-bas du contour. Le paramètre de régularisation λ est également le régulateur de la fréquence de coupure du filtre SB_λ impliqué dans l'algorithme. Ainsi, une forte régularisation se traduit par une grande valeur de λ , c'est à dire une fréquence de coupure faible. En évoquant la stabilité et l'efficacité de la segmentation, les auteurs de [Precioso 05] proposent une limite supérieure pour ce paramètre à 1, ainsi qu'une limite inférieure à 0.1, soit $\lambda \in [0.1, 1]$.

10.3 Discussion

Les articles de références [Weruaga 04, Precioso 05, Unser 93a] sont à l'origine de la réflexion menée à travers cette thèse. L'intervention du traitement des signaux dans un processus de segmentation par contour actif est un point commun aux deux premiers. Quant au troisième, il constitue lui aussi une approche par traitement des signaux mais appliquée cette fois à la théorie des *splines*. Les résultats exposés dans ces articles montrent l'efficacité de la fusion entre contours actifs, *splines* et filtrage. Cependant, comme nous le soulignons dans les deux paragraphes suivants, plusieurs questions se posent.

10.3.1 Pourquoi imposer un intervalle au paramètre de régularisation ?

Dans [Precioso 05], le paramètre de régularisation λ est contraint arbitrairement à la limite supérieure de 1. Pourtant, il s'agit d'un paramètre régissant la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas, où $\lambda \rightarrow \infty$ se traduit par une fréquence de coupure $f_c \rightarrow 0$.

Les équations (10.5) et (10.8) donnent une explication de cette limitation. Un contour à l'itération $i + 1$ est obtenu par le filtrage passe-bas du contour précédant (itération i). Ainsi, le contour à l'itération $i + 1$ est le résultat de i convolutions du contour initial par la réponse impulsionnelle $h(k)$ dans (10.5) ou du filtre SB_λ dans (10.8). Une valeur élevée de λ est synonyme d'une fréquence de coupure faible. Le phénomène de convolutions successives se conjugue à un filtrage fortement passe-bas pour aboutir, au final, à un contour trop lissé. Ce lissage excessif conduit à terme à un rétrécissement du contour actif qui peut s'observer sur d'autres modèles déformables [Radeva 95]. Notre modèle de régularisation des contours actifs, qui sera détaillé dans le chapitre 12, résout ce problème.

10.3.2 Quels sont les conséquences d'un filtrage 1D sur un contour décrit par deux coordonnées 1D ?

Dans l'analyse fréquentielle des contours actifs, tout comme dans le filtrage *B-Spline* décrit auparavant, les contours sont représentés par deux signaux 1D traités chacun de façon complètement indépendante. Les outils du traitement du signal utilisés dans le cadre des contours actifs sont toutefois porteurs de certaines exigences. L'une d'elles concerne l'échantillonnage des signaux qui doit être uniforme. L'espacement uniforme des points d'un contour $g(k)$ construit à partir de deux signaux $g_x(k)$ et $g_y(k)$ n'a rien de systématique. Les travaux existants l'intègrent comme une hypothèse de construction du contour paramétrique.

Parallèlement, le filtrage *B-Spline* lissant influe sur la dérivée seconde d'un signal 1D. Les conséquences d'un tel filtrage des deux composantes sur la courbure d'un contour paramétrique ne sont pas triviales. Nous verrons dans la partie suivante que l'échantillonnage de la courbe est un paramètre important du lissage d'une courbe paramétrique du plan.

NOUS avons mis en évidence dans l'algorithme de [Precioso 05] les raisons de la limitation du paramètre de régularisation. Le développement mathématique de cet algorithme que nous

proposons montre l'existence d'un phénomène de convolutions successives du contour par le filtre passe-bas *B-Spline* lissant. Les auteurs limitent la valeur de λ à 1 pour éviter ce problème. La conséquence est un rétrécissement du contour, flagrant pour de fortes valeurs de λ . Parallèlement, la formulation fréquentielle des contours actifs de [Weruaga 04] montrent que la modélisation par minimisation d'énergie et sa résolution par méthode itérative introduisent également ces convolutions du contour à chaque itération par un filtre passe-bas.

Nous présenterons dans le chapitre suivant une caractérisation du filtre *B-Spline* lissant proposé dans [Unser 93a], son application à un contour représenté par deux fonctions paramétriques et une méthode de filtrage variant permettant d'attribuer des fréquences de coupure différentes selon le point considéré. Ensuite, un nouveau modèle de déformation éliminant le phénomène de convolutions multiples sera proposé : le *MoDeReS*. La régularisation est effectuée par un filtrage *B-Spline* lissant, mais le paramètre de régularisation n'est plus restreint à un intervalle arbitraire. Il reste cohérent avec la notion de fréquence de coupure à laquelle il est initialement fortement lié. De plus, ce modèle déformable bénéficie d'une méthode de filtrage RII variant pour mettre en oeuvre une régularisation locale.

11

Filtrage par spline lissante

LE modèle déformable *MoDeReS* présenté dans cette thèse utilise, comme dans [Precioso 05], un filtrage *B-Spline* lissant comme solution de régularisation. Sa capacité à faire office de régularisation avec une contrainte temps réel [Precioso 05] nous a incité à le caractériser précisément.

Nous décrirons d'abord dans ce chapitre la construction du filtrage *B-Spline* lissant, basé sur la théorie de l'interpolation et approximation *splines*.

Ensuite, nous étudierons le comportement d'une courbe discrète paramétrique du plan lissée par un filtrage *B-Spline* de chacune de ses composantes.

Pour finir, nous proposerons une variante du filtrage *B-Spline* lissant dans laquelle la fréquence de coupure peut être définie localement. Le lissage de la courbe par ce filtre est alors contrôlé par la valeur locale du paramètre λ . C'est ce qui nous permettra de mettre en oeuvre la régularisation locale du *MoDeReS* dans la partie suivante.

11.1 Construction

11.1.1 Lissage par *spline*

La théorie des *splines* se rapporte essentiellement à des problèmes d'interpolation. Il est possible grâce aux *splines* de reconstruire à partir d'une fonction discrète $g(k)$ une autre fonction $g(s)$, continue cette fois où le comportement en terme de continuité de $g(s)$ aux points $s = k$ sera lié à la fonction d'interpolation utilisée.

Cette passerelle entre monde discret et monde continu est exploitée fréquemment pour conserver les fondements mathématiques de méthodes de traitement d'image, dont les contours actifs.

Le filtrage par *spline* lissante de signaux discrets en est un exemple.

Quand une fonction $g(k)$ est issue d'un instrument de mesure, l'introduction de bruit est inévitable. Reinsch [Reinsch 67] met en avant l'insuffisance d'une interpolation exacte $g(s)$ et propose une approximation de $g(s)$ par une fonction $\hat{g}(s)$. Cette fonction $\hat{g}(s)$ est nommée *spline* lissante.

L'approximation de type *spline* lissante est obtenue grâce à un compromis entre une fonction proche de $g(s)$ et une fonction lisse, traduit par une dérivée seconde faible. Ce compromis est obtenu en minimisant la fonctionnelle :

$$\varepsilon_s^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (g(k) - \hat{g}(k))^2 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \hat{g}(s)}{\partial s^2} \right)^2 ds \quad (11.1)$$

Le terme $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (g(k) - \hat{g}(k))^2$ représente l'attache aux données, tandis que le terme $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \hat{g}(s)}{\partial s^2} \right)^2 ds$ est appelé terme de régularisation. Notons ici l'introduction du paramètre λ qui détermine le compromis d'approximation. Si $\lambda = 0$, la fonction $\hat{g}(s)$ minimisant ε_s^2 dans l'équation (11.1) est celle qui est la plus proche de $g(s)$. De même, si $\lambda \rightarrow \infty$, l'importance est donnée à une dérivée seconde proche de 0, donc une fonction $\hat{g}(s)$ à dérivée constante, c'est-à-dire une droite.

11.1.2 Approche signal du lissage par *spline*

Les paragraphes 5.2 et 5.3 nous ont amenés à évoquer le filtrage proposé dans [Unser 93a] appelé *B-Spline* lissant. Dans le cas de ce filtrage, le signal $\hat{g}(k)$ est considéré comme la sortie d'un filtre SB_λ et le signal $g(k)$ comme l'entrée. En utilisant les transformées en z de ces signaux et du filtre, on peut écrire le système :

$$\hat{G}(z) = SB_\lambda(z) \cdot G(z) \quad (11.2)$$

La figure 5.3 montre que ce système se décompose en une cascade de deux filtres. Un premier filtre S_λ permet d'obtenir une approximation des points de contrôle *B-Spline* $\hat{c}(k)$ de la fonction $g(k)$. Un deuxième, le filtre *B-Spline* indirect B détermine les points de $\hat{g}(k)$. Le système de l'équation (11.2) devient alors :

$$\hat{G}(z) = S_\lambda(z) \cdot B(z) \cdot G(z) \quad (11.3)$$

La fonction de transfert de $B(z)$ est donnée dans l'équation (5.5). La fonction de transfert de $S_\lambda(z)$ est explicitée dans [Unser 93b]. On en déduit la fonction de transfert de SB_λ :

$$SB_\lambda = \frac{z^{-1} + 4 + z}{z^{-1} + 4 + z + 6\lambda(z^{-2} - 4z^{-1} + 6 - 4z + z^2)} \quad (11.4)$$

qui caractérise un filtre RII¹ symétrique du quatrième ordre. Il est montré dans [Unser 93b] que cette fonction de transfert se décompose en une cascade de deux filtres, l'un causal et l'autre anti-

¹RII : Réponse Impulsionnelle Infinie

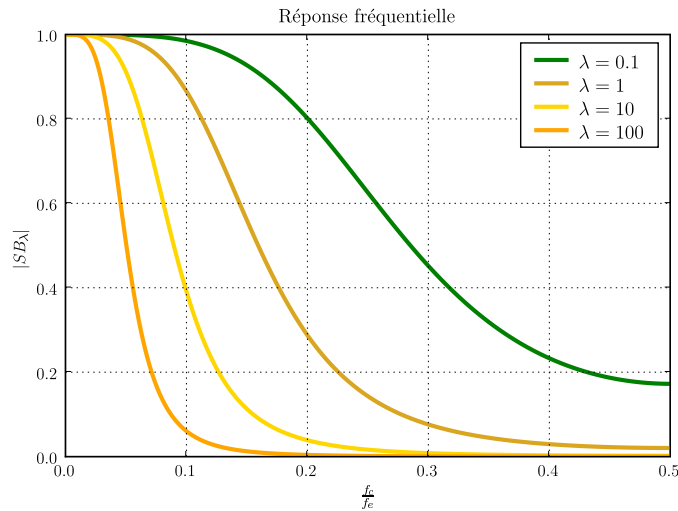


FIG. 11.1: Module de la réponse fréquentielle du filtre SB_λ , pour des fréquences normalisées par la fréquence d'échantillonnage.

causal, autorisant un filtrage récursif des signaux. L'annexe A détaille l'implantation du filtre par la méthode bidirectionnelle ainsi que l'initialisation du filtrage sur les deux premiers échantillons par approximation de la réponse impulsionnelle.

11.2 Caractérisation

11.2.1 Réponse fréquentielle et réponse impulsionnelle

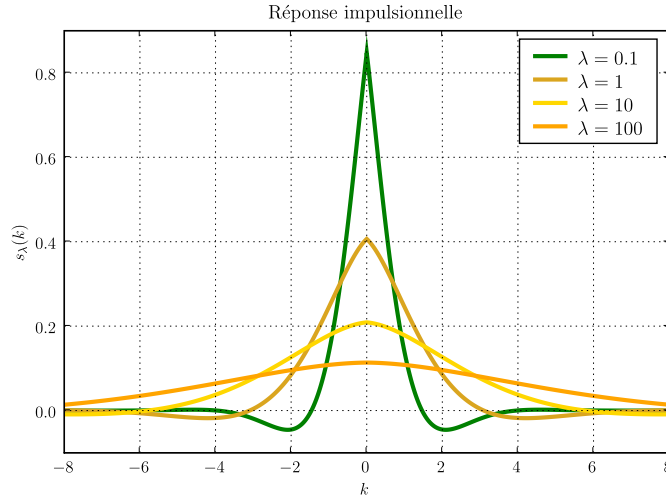
Le filtre SB_λ laisse apparaître, dans sa fonction de transfert (équation (11.4)), le paramètre λ qui ajuste le compromis entre l'interpolation et l'approximation des *splines* lissantes. La variation de λ aura pour effet de modifier la réponse fréquentielle de SB_λ . Nous montrons dans la figure 11.1 cette réponse fréquentielle pour quelques valeurs de λ .

La fonction de transfert du filtre SB_λ représente un système symétrique du quatrième ordre. La symétrie se traduit directement dans la réponse impulsionnelle montrée dans la figure 11.2 pour plusieurs valeurs de λ .

11.2.2 Liens entre λ et la fréquence de coupure

Nous venons de voir que la réponse fréquentielle du filtre SB_λ est étroitement liée à la valeur de λ . Nous avons donc proposé dans [Velut 07] une expression analytique de ce lien en fonction du module $A = |SB_\lambda|$ de la réponse fréquentielle.

Ainsi, en posant $z = e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{f_c}{f_e}}$ dans (11.4) avec f_c la fréquence de coupure du filtre et f_e la fréquence d'échantillonnage, nous pouvons exprimer λ en fonction de $\frac{f_c}{f_e}$ pour une atténuation

FIG. 11.2: Réponse impulsionnelle sb_λ du filtre SB_λ .

$-20 \log_{10}(A)$ du signal :

$$\lambda = r_g\left(\frac{f_c}{f_e}\right) = \frac{(-1 + A) \left(2 + \cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_e}\right)\right)}{12A \left(\cos\left(2\pi \frac{f_c}{f_e}\right) - 1\right)^2} \quad (11.5)$$

où r_g est une fonction $[0, 0.5] \rightarrow \mathbb{R}^+$, l'inverse de cette fonction étant $r_g^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 0.5]$ définie par :

$$\frac{f_c}{f_e} = r_g^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{A(-24\lambda + 1) - 1 + \sqrt{(1-A)(144A\lambda + (1-A))}}{24A\lambda}\right) \quad (11.6)$$

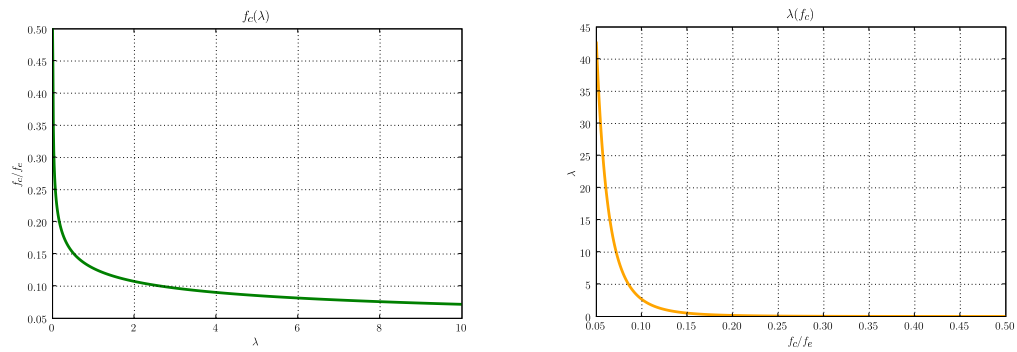
Ces expressions sont issues d'un logiciel de calcul formel. La figure 11.3 illustre ces relations pour $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est à dire une atténuation de $3dB$.

Dans l'algorithme de [Precioso 05], la régularisation du modèle déformable est un filtrage *B-Spline* lissant du contour. La mise en oeuvre de la régularisation du *MoDeReS* proposé dans cette thèse est similaire. Or nous avons étudié dans ces deux paragraphes un filtre monodimensionnel. Maintenant, nous allons voir comment utiliser un filtre monodimensionnel pour le lissage d'une courbe paramétrique du plan.

11.3 Filtrage de courbes paramétriques

11.3.1 Construction d'une courbe paramétrique

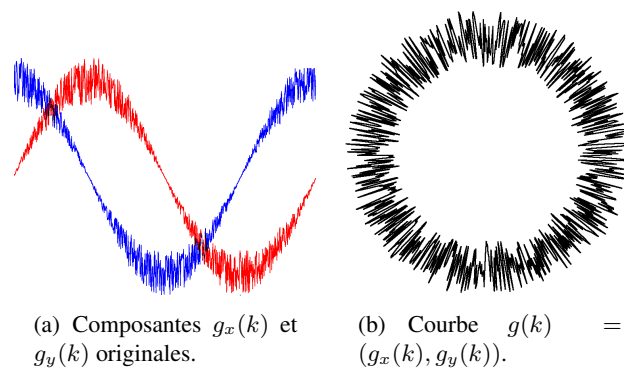
Les courbes paramétriques utilisées dans le cadre des contours actifs (voir partie II) sont décrites, dans le plan I , par deux composantes g_x et g_y . Ces composantes sont elles-mêmes dépendantes d'un seul paramètre s . La figure 11.4 montre la construction d'une courbe paramétrique discrète $g(k)$ à partir de deux signaux $g_x(k)$ et $g_y(k)$.



(a) Fréquence de coupure f_c normalisée par la fréquence d'échantillonnage f_e du filtre SB_λ en fonction de λ pour une atténuation de $3dB$.

(b) λ en fonction de la fréquence de coupure f_c normalisée par la fréquence d'échantillonnage f_e du filtre SB_λ pour une atténuation de $3dB$.

FIG. 11.3: Liens entre la fréquence de coupure du filtre SB_λ et la valeur de λ .



(a) Composantes $g_x(k)$ et $g_y(k)$ originales.

(b) Courbe $g(k) = (g_x(k), g_y(k))$.

FIG. 11.4: Une courbe paramétrique $g(s)$ est construite à partir de deux fonctions $g_x(s)$ et $g_y(s)$.

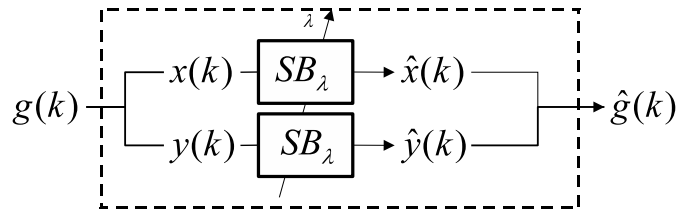


FIG. 11.5: Lissage d'une courbe grâce à un filtrage de type spline lissante de chaque composante. Le paramètre de lissage est le même pour les deux filtres.

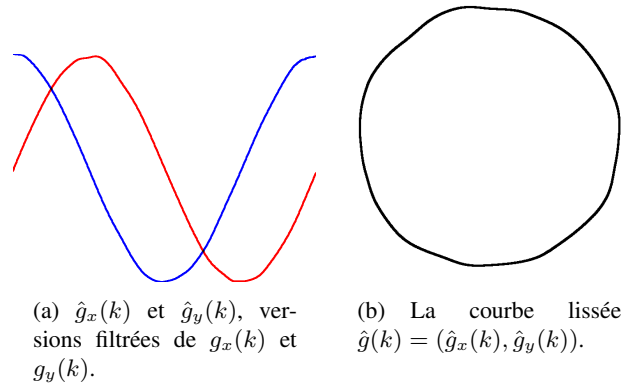


FIG. 11.6: Filtrage par spline lissante d'une courbe circulaire construite à partir de deux sinusoïdes bruitées.

11.3.2 Lissage d'une courbe paramétrique

Nous venons de voir qu'une courbe paramétrique est composée de deux fonctions réelles à une dimension. Le filtrage d'une telle courbe sera donc effectué par un filtrage de chaque composante de la courbe. Les deux composantes étant indépendantes, nous attribuons à chacune un paramètre de lissage différent : λ régie la fréquence de coupure du filtre lissant $g_x(k)$ et μ a le même rôle concernant $g_y(k)$. En règle générale, il n'y a pas de raison de privilégier une des deux directions² du plan x ou y . Nous imposons donc $\mu = \lambda$. Le filtrage d'une courbe paramétrique est alors illustré en figure 11.5, λ devenant le paramètre de lissage unique.

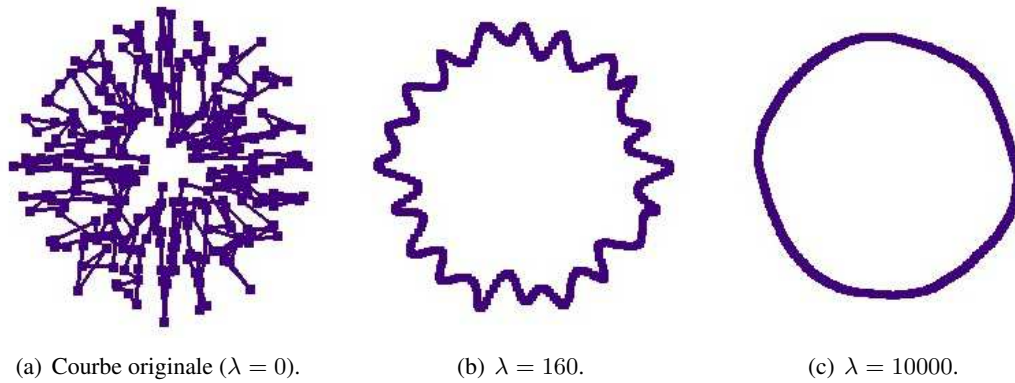
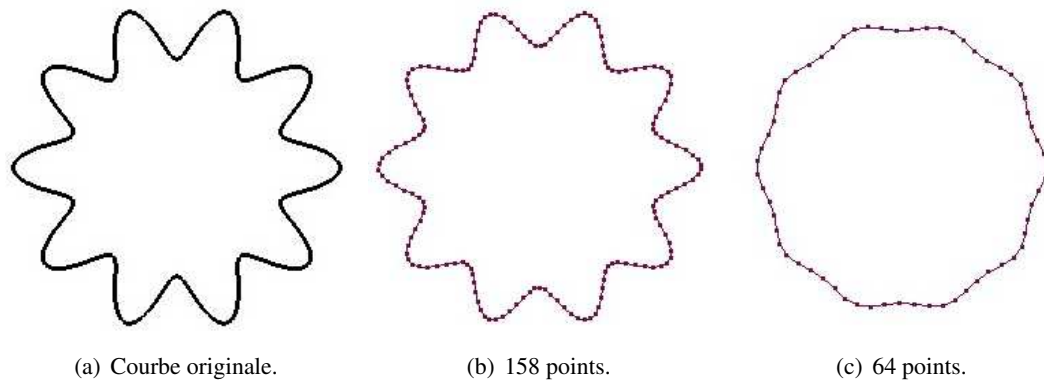
La figure 11.6 illustre le filtrage d'une courbe circulaire $g(k)$ formée à partir des fonctions :

$$\begin{cases} x(k) = (R + \beta) \cdot \sin(k \frac{2\pi}{N}) \\ y(k) = (R + \beta) \cdot \cos(k \frac{2\pi}{N}) \end{cases} \quad (11.7)$$

où β est une valeur aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$, R est le rayon principal du cercle et N est le nombre de points de la courbe. De la même façon, la figure 11.7 montre le filtrage d'une courbe pour trois valeurs de λ . Ici, un aspect intéressant du lissage de courbe par filtrage des composantes est mis en avant : que se passera-t-il si le paramètre de lissage continue de croître ? De l'équation (11.6) nous déduisons :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_c = 0 \quad (11.8)$$

²Une distinction des deux paramètres peut être utile dans le cas d'une anisotropie de l'image formant le plan I .

FIG. 11.7: Filtrage d'une courbe pour plusieurs valeurs de λ .FIG. 11.8: $\lambda = 7$ constant, échantillonnages variables.

ce qui signifie que les signaux $g_x(k)$ et $g_y(k)$ sont filtrés avec une fréquence de coupure nulle. La sortie du système ne conservera donc que les composantes continues de chacun des signaux. Ainsi, si $\forall k, g_x(k) = a$ et $g_y(k) = b$, la courbe lissée sera un point de coordonnées (a, b) .

En utilisant un schéma d'extension des signaux $g_x(k)$ et $g_y(k)$ approprié [Brigger 00], la courbe paramétrique pourra être ouverte. Nous verrons dans le chapitre 13 un contour actif représenté par une courbe ouverte.

11.3.3 Effets de l'échantillonnage

Parallèlement à [Precioso 05], qui démontre que le filtrage tend à uniformiser l'échantillonnage d'un contour, nous nous sommes intéressés aux conséquences qu'aurait une variation de l'échantillonnage sur la courbe lissée. L'échantillonnage dont il est question ici concerne la courbe dans le plan et se rapporte donc directement à la distance entre points adjacents.

Tout d'abord, d'un point de vue global, la figure 11.8 présente le filtrage de deux courbes semblables. Leur différence réside dans le nombre de points les constituant, λ étant le même dans les deux cas. Nous constatons que pour une même valeur de λ , le contour possédant la plus grande densité de points est également celui qui conserve le plus de détails. Cela rejoint les méthodes de régularisation par variation de l'échantillonnage comme dans [Brigger 98].

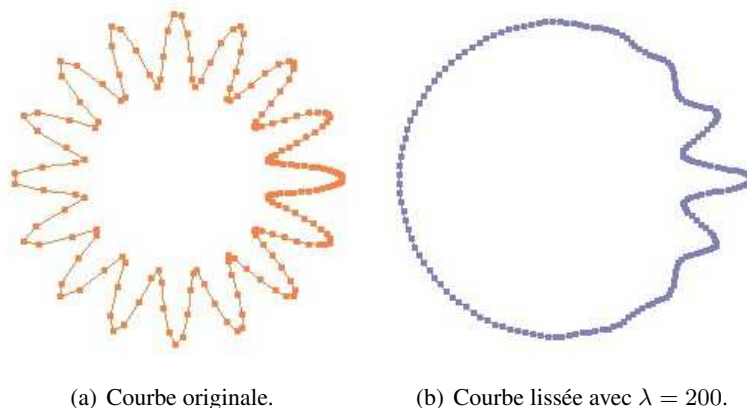


FIG. 11.9: Influence de la variation de l'échantillonnage sur l'effet du lissage. Pour un λ constant, l'atténuation de la courbure n'est pas uniforme selon la densité des points.

La variation du pas d'échantillonnage peut également être observable au sein d'un même contour. Dans ce cas, la figure 11.9 illustre le phénomène : l'effet lissant du filtre SB_λ n'est plus uniforme tout au long de la courbe.

En conséquence, le filtrage d'une courbe paramétrique discrète est fortement lié à son échantillonnage. Si le lissage doit être uniforme, en regard de l'application, une solution serait de contraindre l'uniformité de l'échantillonnage. Une autre solution serait de varier localement la fréquence de coupure du filtre, en fonction de l'échantillonnage. Nous montrons justement, dans le paragraphe suivant, que le filtre *B-Spline* lissant autorise la variation de la fréquence de coupure.

11.3.4 Filtrage variant

Le filtre SB_λ dont la fonction de transfert se trouve dans l'équation (11.2) est un filtre symétrique du 4ème ordre à réponse impulsionnelle infinie. L'implantation d'un filtrage *B-Spline* lissant d'un signal f passe par l'écriture de l'équation aux différences :

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) = & \frac{1}{a} \cdot (f(k+1) + 4f(k) + f(k-1)) \\ & - \frac{b}{a} \cdot \left(\hat{f}(k-1) + \hat{f}(k+1) \right) \\ & - \frac{c}{a} \cdot \left(\hat{f}(k-2) + \hat{f}(k+2) \right) \end{aligned} \quad (11.9)$$

où a , b et c sont des constantes issues de l'écriture factorisée de SB_λ :

$$SB_\lambda = \frac{z + 4 + z^{-1}}{a + b \cdot (z + z^{-1}) + c \cdot (z^2 + z^{-2})} \quad (11.10)$$

avec $a = 4 + 36\lambda$, $b = 1 - 24\lambda$ et $c = 6\lambda$.

L'équation aux différences met en relation un point k avec ses voisins $k-1$, $k-2$, $k+1$ et $k+2$ et avec λ . En donnant à chaque point une valeur de λ propre, la fréquence de coupure du filtre SB_λ devient locale [Velut 06a, Velut 07]. Des précautions doivent évidemment être prises sur la vitesse de variation de λ d'un point à l'autre [Stonick 95]. La figure 11.10 donne une illustration

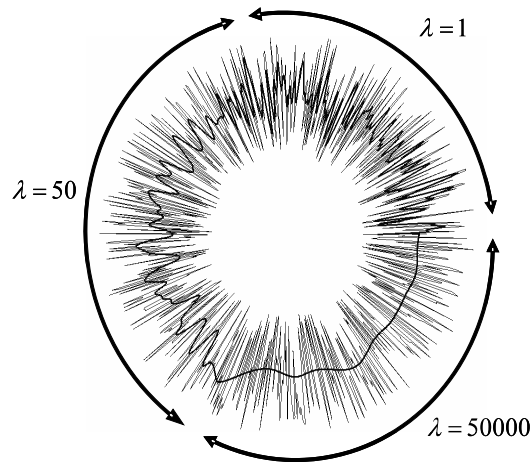


FIG. 11.10: Filtrage d'une courbe par un filtre SB_λ possédant trois valeurs de λ différentes.

d'un filtrage de courbe où :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 1 & \forall k < \frac{N}{3} \\ \lambda_k &= 50 & \forall k \in \left[\frac{N}{3}, 2\frac{N}{3} \right] \\ \lambda_k &= 50000 & \forall k > \frac{N}{3} \end{aligned} \quad (11.11)$$

avec N le nombre de points du contour. La courbe obtenue possède trois portions dont les courbes dépendent de la valeur de λ associée.

NOUS avons montré dans ce chapitre que le filtrage *B-Spline* lissant est basé sur une minimisation de la dérivée à l'ordre 2 d'une fonction *spline*. Il s'agit d'un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle infinie dont la fréquence de coupure est régie par un paramètre λ . Dans le cas d'un filtrage monodimensionnel de chaque composante d'une courbe paramétrique du plan, son effet est de minimiser la courbure ce qui justifie son exploitation pour la régularisation d'un contour actif. Nous avons explicité le lien analytique qui existe entre λ et la fréquence de coupure du filtre. De plus, le paramètre λ peut varier le long du contour pour imposer différentes importances de lissage selon le point filtré.

Pourtant, rien n'indique ici l'obligation de limiter λ dans un quelconque intervalle. Nous montrerons dans le chapitre suivant que toute la gamme des fréquences de coupure offerte par le filtre *B-Spline* lissant est exploitable dans la régularisation d'un contour actif. Un nouveau modèle de déformation régularisée sera proposé. Il bénéficie de l'efficacité du filtrage *B-Spline* lissant en terme de rapidité et de minimisation de courbure et intègre la méthode de filtrage variant ce qui nous permettra de mettre en oeuvre une régularisation locale.

12

Modèle de régularisation par filtrage B-Spline lissant

LES précédents travaux traitant des contours actifs rapportent régulièrement un problème de rétrécissement du contour tout au long du processus de déformation. Cela est en général lié à une régularisation trop forte. Les chapitres 9 et 11 proposent une explication à ce phénomène : un nombre important de convolutions successives entre le contour et un noyau de filtrage passe-bas se traduit par une fréquence de coupure quasi nulle (chapitre 10) et implique donc au final une convergence de tous les points vers une même position (paragraphe 11.3). Les forces ballons proposées par [Cohen 89] contrebalancent cet effet, mais peuvent altérer la stabilité du modèle déformable.

Ce chapitre proposera un nouveau modèle de déformation des contours actifs exploitant les avantages d'un filtrage *B-Spline* lissant pour la régularisation que nous appellerons le *MoDeReS-2D*. Contrairement à l'existant, ce modèle déformable ne subit pas un filtrage du contour à chaque itération. Nous détaillerons d'abord le concept de régularisation globale par filtrage des forces externes et l'algorithme de déformation associé. Ensuite, nous montrerons comment la régularisation peut devenir locale et quels en seraient les avantages.

12.1 Régularisation par filtrage des forces externes

12.1.1 Contour actif régularisé à un instant i

Les contours actifs tels qu'ils existent aujourd'hui intègrent un système de régularisation semblable aux stabilisateurs de Tikhonov via une énergie interne basée sur la dérivée seconde du

contour (paragraphe 4.2.2). D'un autre côté, nous avons vu qu'il existe une méthode de lissage des courbes, dite *B-Spline* lissante, également fondée sur une pénalisation de la dérivée seconde et également proche des stabilisateurs de Tikhonov (chapitre 11). Nous proposons dans cette thèse de considérer qu'un contour non régularisé $g_i(k)$ et son pendant régularisé $\hat{g}_i(k)$ pour une itération i sont liés par :

$$\hat{g}_i(k) = sb_\lambda * g_i(k) \quad (12.1)$$

où sb_λ est la réponse impulsionnelle du filtre SB_λ .

12.1.2 Intégration dans un processus de déformation

La différence majeure avec [Precioso 05] est que l'on ne considère pas le contour actif à l'itération $i + 1$ comme non régularisé. Cette hypothèse est à l'origine du phénomène des convolutions successives. Dans notre modèle, nous nous replaçons dans le cadre d'une déformation sans énergie interne décrite par l'équation (4.8), rappelée ici :

$$g_i(k) = g_{i-1}(k) - \gamma^{-1} f_{i-1}(k) \quad (12.2)$$

De (12.1) et (12.2), nous déduisons que :

$$\hat{g}_i(k) = sb_\lambda * (g_{i-1}(k) - \gamma^{-1} f_{i-1}(k)) \quad (12.3)$$

Cette dernière équation nous permet de mettre en correspondance $\hat{g}_i(k)$ et $\hat{g}_{i-1}(k)$ par la relation :

$$\hat{g}_i(k) = \hat{g}_{i-1}(k) - \gamma^{-1} \hat{f}_{i-1}(k) \quad (12.4)$$

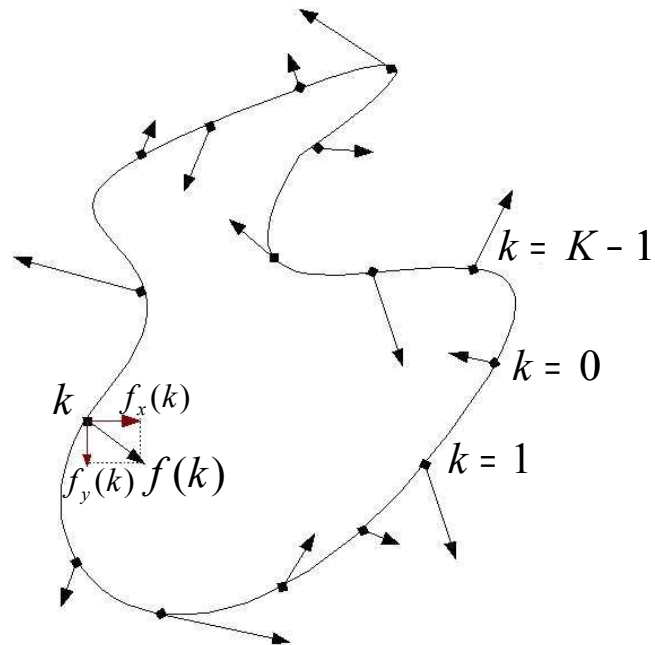
où $\hat{f}_{i-1}(k) = sb_\lambda * f_{i-1}(k)$ résulte du filtrage des forces externes à chaque itération par le filtre *B-Spline* lissant SB_λ .

Ainsi, en tout point k de la courbe $g(k) = (g_x(k), g_y(k))$ est défini un vecteur $f(k)$ de composantes $f_x(k)$ et $f_y(k)$ (figure 12.1). Ces composantes seront les signaux effectivement filtrés par SB_λ (figure 12.2).

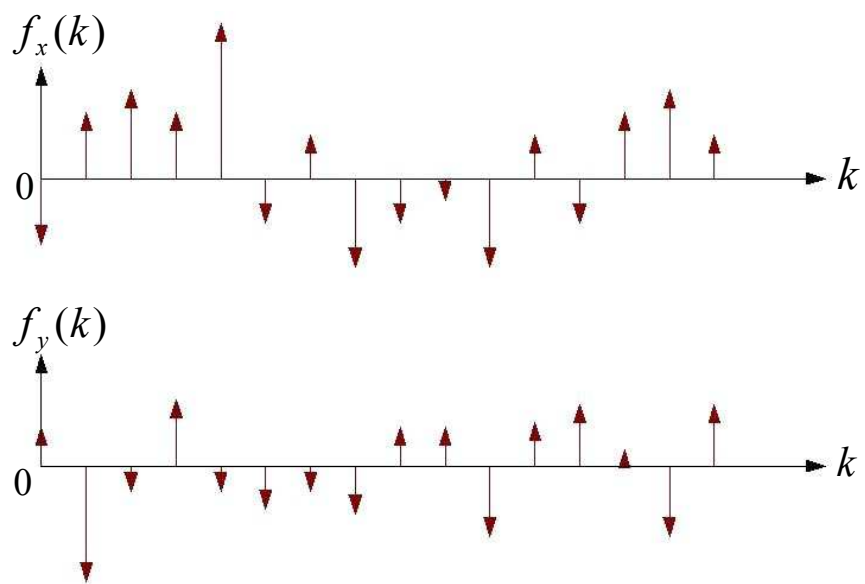
Notons qu'une régularisation forte, c'est à dire $\lambda \rightarrow \infty$ ou encore $f_c \rightarrow 0$, impliquera $\hat{f}_x(k)$ et $\hat{f}_y(k)$ constantes. Les forces externes seront identiques en tout point k du contour. La déformation tendra alors vers une translation, la forme du contour précédent sera conservée.

La figure 12.3 montre les différentes étapes de l'algorithme de segmentation basé sur l'équation (12.4) dont voici une description :

- **L'initialisation.** Elle peut être manuelle, c'est à dire tracée par l'utilisateur, ou bien automatique mais produira dans tous les cas un contour $\hat{g}_0(k)$. Le processus itératif commence maintenant, $\hat{g}_0(k)$ devient $\hat{g}_i(k)$
- **Le calcul des forces externes.** En chaque point k de coordonnées $(g_{x,i}(k), g_{y,i}(k))$ sera calculé un vecteur $f_i(k)$ à deux composantes selon la méthode choisie pour les forces externes (figure 12.1). Il s'agira, par exemple, d'une combinaison linéaire entre le vecteur normal au contour (force ballon) et le vecteur gradient de l'image en $(g_{x,i}(k), g_{y,i}(k))$.

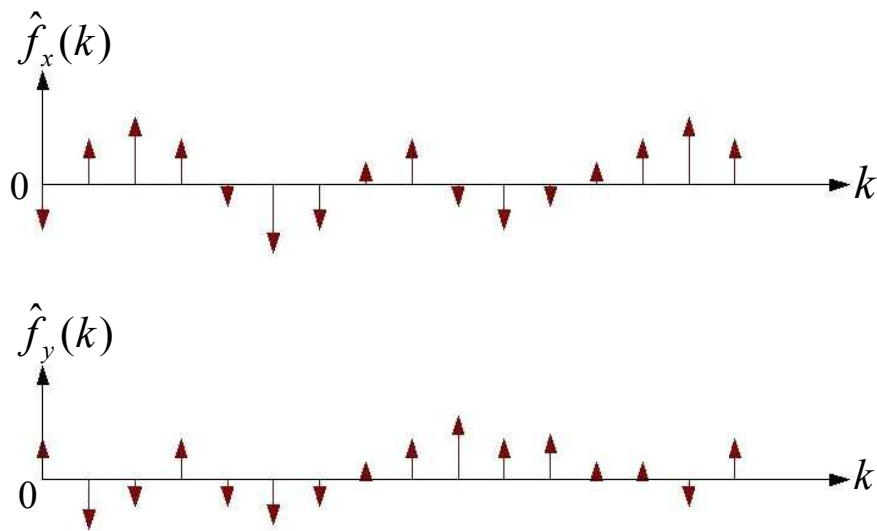


(a) Courbe de K points, avec une force $f(k)$ définie en chaque point k .

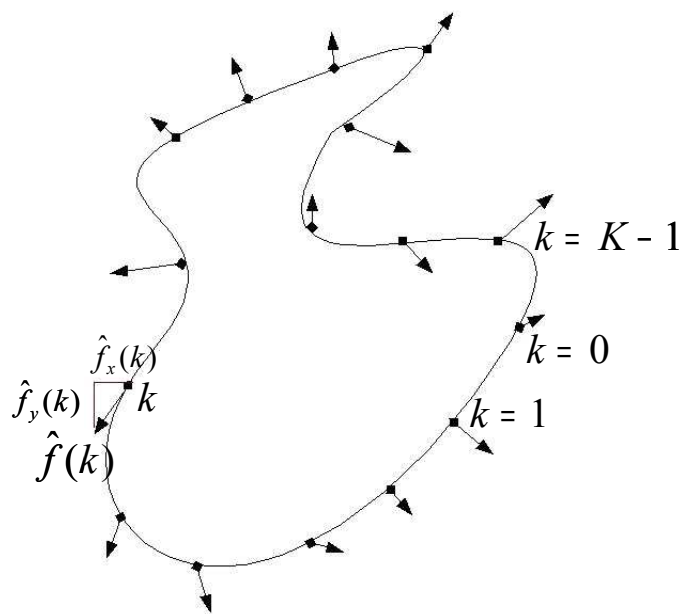


(b) Deux signaux $f_x(k)$ et $f_y(k)$ déduit des composantes de $f(k)$ dans (a).

FIG. 12.1: Interprétation des forces externes en chaque point comme deux signaux indépendants.



(a) Deux signaux $\hat{f}_x(k)$ et $\hat{f}_y(k)$ issus du filtrage de $f_x(k)$ et $f_y(k)$ de la figure 12.1.



(b) Courbe de K points, avec une force régularisée $\hat{f}(k)$ définie en chaque point k à partir de $\hat{f}_x(k)$ et $\hat{f}_y(k)$.

FIG. 12.2: Forces externes $\hat{f}(k)$ lissées par un filtrage monodimensionnel des deux composantes $f_x(k)$ et $f_y(k)$ de la figure 12.1(b).

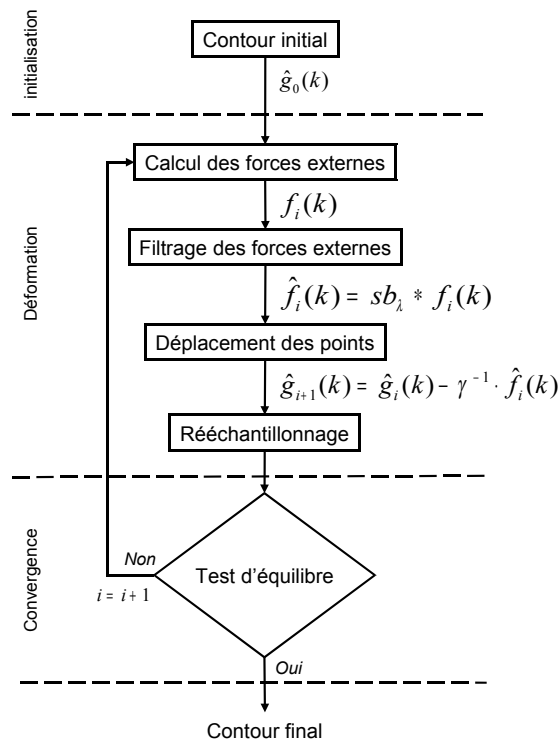


FIG. 12.3: MoDeReS : un contour actif régularisé par un filtrage des déplacements.

- **La régularisation.** Comme expliqué dans cette section, elle est mise en oeuvre par le filtrage SB_λ des forces externes $f_i(k)$. Nous obtenons les déplacements effectifs $\hat{f}_i(k)$ (figure 12.2).
- **La déformation.** Chaque point de $\hat{g}_i(k)$ est déplacé selon le vecteur de déformation associé $\hat{f}_i(k)$ à un facteur d'échelle près $-\gamma^{-1}$ traduisant la vitesse de convergence. Nous obtenons alors le nouveau contour $\hat{g}_{i+1}(k)$
- **La convergence.** Si l'équilibre est atteint, la segmentation est terminée. Sinon, le processus de déformation reprend le calcul des forces externes sur $\hat{g}_{i+1}(k)$.

Pour une itération donnée, la complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$, n étant le nombre de points du contour. L'implantation par filtrage RII de la régularisation implique que la complexité ne soit pas dépendante de λ . La rapidité du contour à atteindre sa position d'équilibre dépendra essentiellement des forces externes choisies et de l'initialisation du modèle déformable.

12.1.3 Rééchantillonnage

Comme nous l'avons déjà étudié dans le paragraphe 10.3.2, un échantillonnage uniforme est une solution pour conserver un même effet de filtrage à λ constant le long du contour.

Cela se traduit par une distance constante entre chaque point. Le rééchantillonnage peut se faire à chaque itération ou lorsque qu'un critère de non-uniformité est atteint, comme par exemple la variance de la distance entre points adjacents.

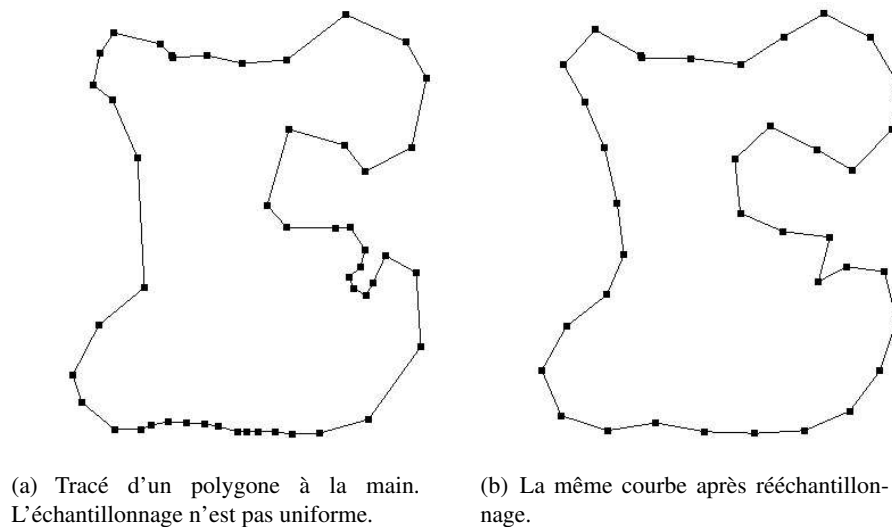


FIG. 12.4: Rééchantillonnage uniforme d'un contour. Notons que si le pas d'échantillonnage est trop grand, nous risquons de perdre certains détails.

Parmi les méthodes permettant de conserver l'uniformité de l'échantillonnage, la plus intuitive est de reconstruire la fonction discrète $g(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ à partir de la fonction continue $g(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ en s'assurant que $\|g(k+1) - g(k)\| = \epsilon$, ϵ étant le pas d'échantillonnage. Nous retenons également la méthode CALN (pour "Contour Actif à Longueur Normalisée") proposée par [Anwander 01]. Le principe est de redistribuer les points le long du contour en suivant une interpolation linéaire du polygone existant. L'intérêt principal est de conserver le nombre de points, et ainsi d'éviter un remaniement de la matrice d'énergie interne (voir chapitre 4).

L'algorithme *MoDeReS* n'utilisant plus la matrice d'énergie interne pour la régularisation, nous utilisons la première méthode de rééchantillonnage (figure 12.4). Elle nous permet de varier le pas d'échantillonnage du contour actif entre chaque itération, ce qui est un atout dans l'éventualité d'une optimisation multi-résolution [Brigger 98].

12.2 Régularisation locale

12.2.1 Motifs pour une variation de la régularisation

La régularisation locale est un moyen de contrôler plus précisément la déformation du contour actif. En effet, en donnant en chaque point du contour une valeur différente de régularisation, la déformation sera plus ou moins affectée par les forces externes.

a) Connaissance a priori

Ce contrôle précis de la déformation via une régularisation locale est un moyen d'introduire une connaissance a priori dans le *MoDeReS*. La connaissance du modèle géométrique initialisant le modèle déformable est alors nécessaire. La figure 12.5 montre une courbe de N points possédant plusieurs niveaux de détails. Les points $g(k)$ tel que $k \in \Gamma_1 = [0, N/3[$ sont issus de la

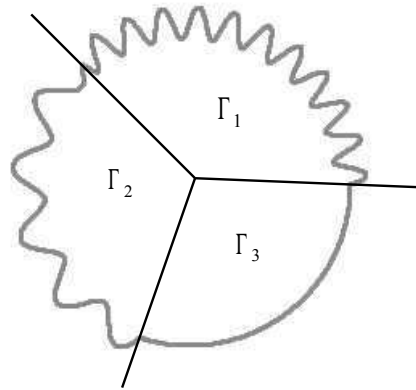


FIG. 12.5: Les différents niveaux de détails d'un modèle initial seront porteurs de différentes régularisations. Γ_1 est une zone de détails fins, Γ_2 est une zone de détails moyens et Γ_3 est une zone sans détails.

modulation du rayon d'un cercle par une sinusoïde de fréquence f_1 . Pour $k \in \Gamma_2 = [N/3, 2N/3[$, la modulation est plus lente, de fréquence f_2 . Quant aux autres points $k \in \Gamma_3 = [2N/3, N - 1]$, ils se situent sur un cercle, la modulation est nulle ($f_3 = 0$). La régularisation locale permettra ici d'imposer une déformation uniforme pour les points de Γ_3 alors que les points de Γ_1 et Γ_2 auront plus de liberté de mouvement.

b) Régularisation adaptative

D'un autre côté, le rôle premier de la régularisation d'un contour actif est d'éviter les minima locaux introduits par le bruit de l'image. Le bruit n'est pas forcément homogène ce qui implique que la confiance accordée aux données image peut être très différente d'un bout à l'autre du contour. De la même façon, des perturbations ou des caractéristiques propres aux objets peuvent conduire à un manque d'information dans l'image (figure 4.1), ce qui amènerait le contour actif à "rater" un bord. En considérant la régularisation locale comme un paramètre adaptatif du *MoDeReS*, elle sera le moyen de traduire cette confiance en lissant les forces externes selon la position de chaque point.

12.2.2 Mise en oeuvre et discussions

Le paragraphe 11.3.4 détaille une méthode qui transforme le filtre SB_λ de régularisation en filtre variant. Le *MoDeReS* exploite simplement cette possibilité : à chaque point du contour actif sera affectée une valeur λ_k . La régularisation au point k sera d'autant plus forte que λ_k sera grand.

L'introduction de connaissance a priori est effectuée via λ_k , qui donnera au point k la liberté suffisante pour se déplacer dans l'image tout en gardant une position cohérente relativement à ses voisins. Cependant, dans cette thèse, les valeurs de λ_k pour la connaissance a priori sont déduites empiriquement. Nous considérons qu'une faible courbure est synonyme d'un λ_k grand. Une perspective intéressante serait de déduire des valeurs précises de λ_k à partir d'un modèle.

L'adaptation de la régularisation à l'environnement est également traduite par une valeur de λ_k

variante, mais cette fois en fonction de la position du point k dans l'image. Diverses stratégies sont envisageables. Par exemple, une diminution de λ à chaque itération permettrait de négliger les détails en début de déformation, pour favoriser une attache aux données fortes en fin de déformation. Ou encore, une estimation de la variance locale des niveaux de gris de l'image traduit une quantité de bruit qui pourrait être un indicateur du taux de régularisation à imposer. Nous avons choisi de valider le principe d'adaptation de la régularisation par filtrage variant plutôt qu'une stratégie particulière. Dans le chapitre suivant, nous montrons comment l'utilisateur peut fournir un a priori sur la qualité de l'image.

NOUS avons proposé dans ce chapitre un nouveau modèle déformable, le *MoDeReS-2D*. C'est un contour actif paramétrique sans énergie interne. Nous avons opté pour un échantillonnage constant du contour. La régularisation est effectuée par un filtrage *B-Spline* lissant des forces externes. Le contour ne subissant aucun filtrage, l'effet de rétrécissement observé sur les autres contours actifs n'existe plus. En outre, la possibilité de rendre le filtre *B-Spline* lissant spatialement variant est un moyen d'introduire une régularisation locale dans le modèle déformable. Par ce biais, une connaissance a priori peut être exprimée en terme de quantité de régularisation.

Le chapitre suivant présentera des résultats de segmentation par le contour actif régularisé par filtrage *B-Spline* lissant des forces externes. Une méthode globale sera appliquée à des images de synthèse et des images réelles. De la même façon, la régularisation locale sera testée dans différents contextes de segmentation.

13

Résultats

NOUS sommes maintenant en possession d'un contour actif localement régularisé par filtrage *B-Spline* lissant des forces externes que nous appelons le *MoDeReS-2D*. La régularisation est un moyen d'améliorer la robustesse au bruit d'un contour actif. Mais nous avons également montré que cette régularisation peut être le moyen d'introduire une connaissance a priori de l'objet recherché.

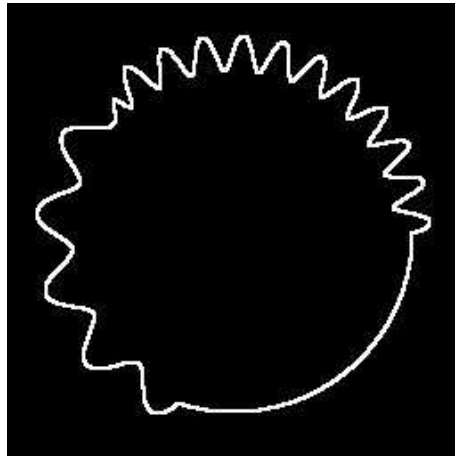
Nous présenterons dans ce chapitre des résultats de segmentation obtenus avec le *MoDeReS-2D*. Nous commencerons par présenter les différentes images utilisées, synthétiques et réelles ainsi que leurs caractéristiques.

Nous donnerons ensuite un aperçu des capacités de notre modèle déformable dans le cas d'une régularisation globale, c'est à dire avec λ constant sur tout le contour. Nous validerons son comportement sans régularisation avec une image de synthèse sans bruit et montrerons l'influence du pas d'échantillonnage et de la régularisation sur le résultat de la segmentation. Un exemple d'application sera proposé : le *MoDeReS* est utilisé comment assistant à une sélection manuelle d'une région dans une image. Nous montrerons, entre autre, comment une forte régularisation permet de considérer le contour initial comme une connaissance a priori.

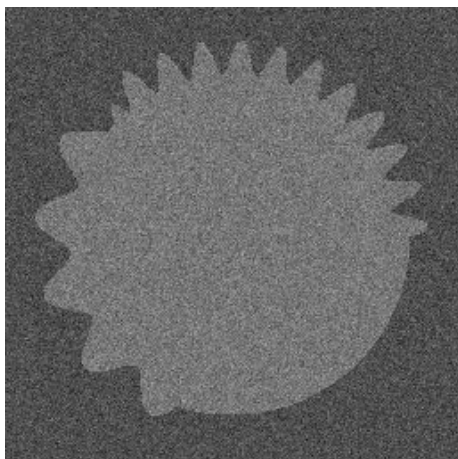
Ensuite, nous montrerons l'intérêt d'une régularisation locale dans la segmentation. Une adaptation de λ en fonction de données images sera proposée. Parallèlement, l'intégration d'a priori sur la forme de l'objet recherché par une variation de λ sera testée sur une image de synthèse.



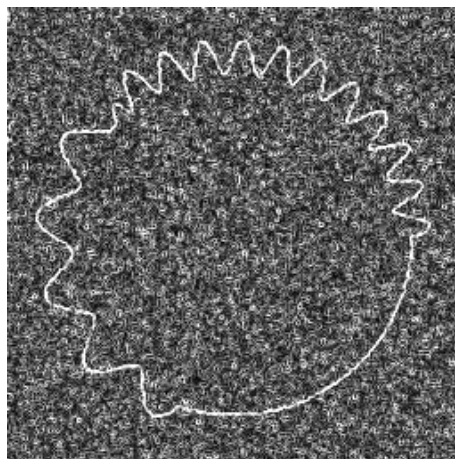
(a) Image d'objet créé par le remplissage d'un cercle modulé. Image 256×256 , 256 niveaux de gris.



(b) Carte des contours de l'objet obtenu par le gradient de l'image de test. Le bord de l'objet correspond à l'équation paramétrique (13.1) d'un cercle modulé.



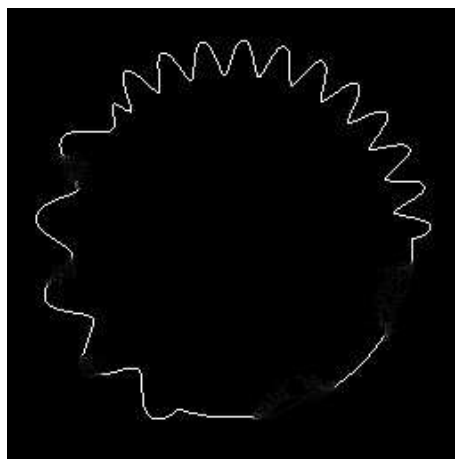
(c) L'image de test additionnée d'un bruit gaussien.



(d) La carte des contours de l'objet bruité.



(e) Le disque modulé dont les bords sont altérés.



(f) Carte des contours de (e). Il manque des contours.

FIG. 13.1: Image d'un objet comportant différentes courbures à son bord.

13.1 Présentation des images de test

13.1.1 Cercle modulé

Nous avons créé un objet à partir de l'équation paramétrique d'un cercle modulé. L'équation, de paramètre $\theta \in [0, 2\pi[$ est la suivante :

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cdot \cos(\theta) + O_x \\ y(\theta) = \rho(\theta) \cdot \sin(\theta) + O_y \end{cases} \quad (13.1)$$

où $\rho(\theta)$ est le rayon variable et (O_x, O_y) sont les coordonnées du centre du cercle. Si r est le rayon principal du cercle, $\rho(\theta)$ est donné par :

$$\rho(\theta) = r + A \cdot \sin(\theta \cdot f) \quad (13.2)$$

où A et f sont l'amplitude et la fréquence des modulations. Pour l'image utilisée (figure 13.1(a)), trois fréquences f_1 , f_2 et f_3 différentes sont données en fonction de la valeur du paramètre θ . Nous avons ainsi une image 256×256 pixels à 256 niveaux de gris. Le fond est au niveau de gris 0, l'objet est à 40. Les différents paramètres sont :

- $r = 100$ pixels
- $A = 10$ pixels
- $f_1 = 7.5$, $f_2 = 15$ et $f_3 = 0$

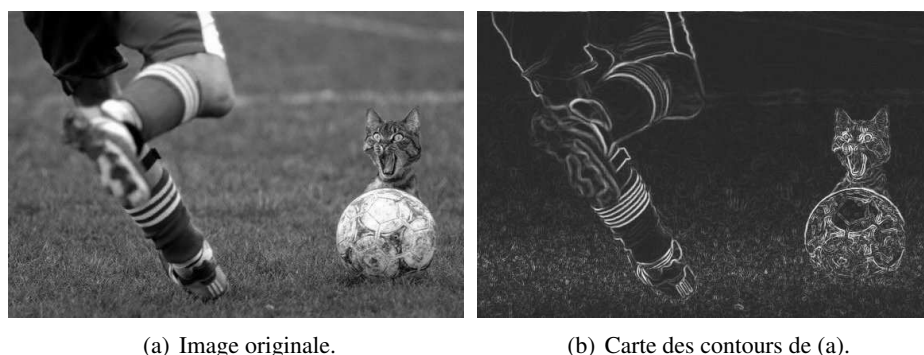
Les différentes fréquences de modulation schématisent les différents niveaux de détail que peut contenir un objet. Nous montrons dans la figure 13.1(b) la carte de contours déduite de 13.1(a) par le module du gradient. Idéalement, les résultats de segmentation devraient être proches de cette carte de contours.

La figure 13.1(c) est l'objet de la figure 13.1(a) auquel nous avons ajouté un bruit gaussien de moyenne 40 et d'écart-type $\sigma = 15$. La carte de contours correspondante (13.1(c)) montre l'existence d'une multitude de minima locaux de l'énergie externe (voir chapitre 4).

Nous reprenons l'objet idéal de la figure 13.1(a) dans la figure 13.1(e) après avoir lissé les bords de l'objet dans certaines zones. En particulier, le bord modulé par f_2 est lissé sur des longueurs de l'ordre de grandeur des détails de f_1 . Idem, la partie non modulée (correspondant à f_3) est lissée ce qui occasionne des trous de la taille des détails de f_2 . La carte de contours de la figure 13.1(f) confirme l'existence des trous. Nous verrons que ces défauts sont à l'origine de fuites du contour actif, et que le *MoDeReS-2D* peut les éviter.

13.1.2 Image naturelle

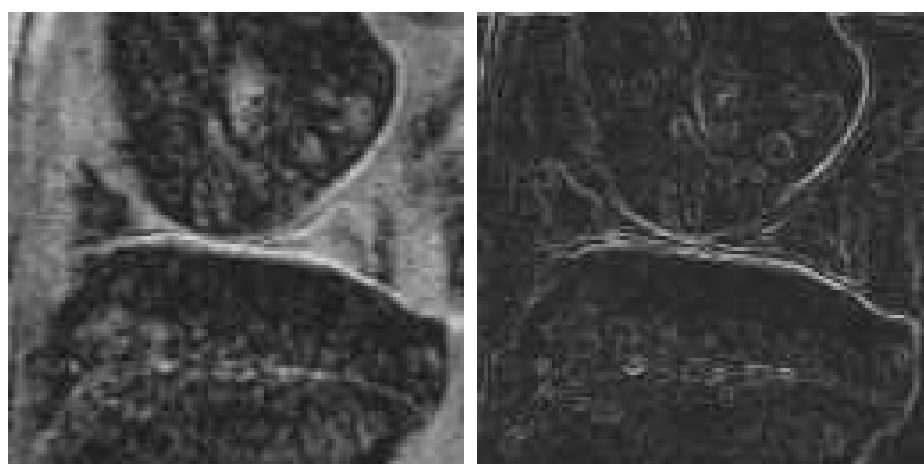
Pour tester le *MoDeReS-2D* sur une image réelle, nous avons choisi l'image de la figure 13.2(a). La carte de contours correspondante (figure 13.2(b)) montre les caractéristiques de l'image qui nous intéressent. Le ballon est en partie occulté, ses contours ne sont plus clairement visibles dans l'herbe. La jambe du sportif n'est pas uniformément nette, et les contours de l'arrière du mollet et du dessous de la chaussure ne sont pas intenses.



(a) Image originale.

(b) Carte des contours de (a).

FIG. 13.2: Image présentant des caractéristiques intéressantes : le ballon est en partie caché par l'herbe, la jambe du sportif n'a pas la même netteté partout.



(a) Image originale.

(b) Carte des contours de (a).

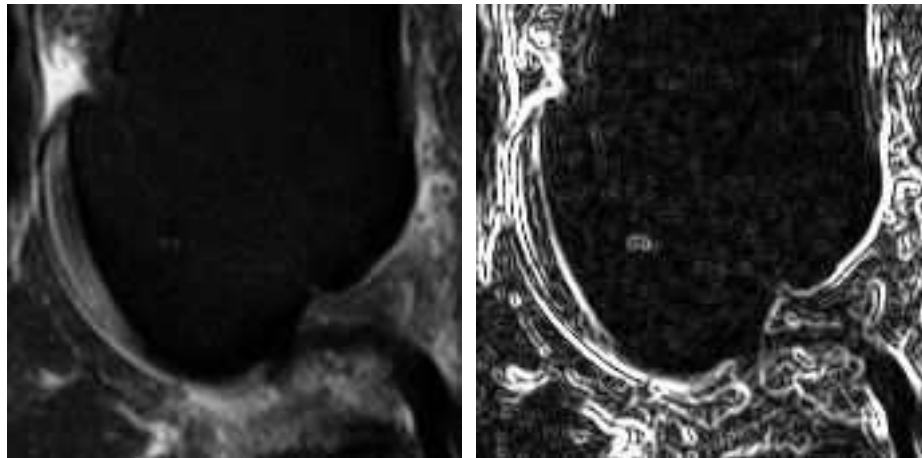
FIG. 13.3: Coupe sagittale d'un volume IRM de genou de rongeur.

Nous utiliserons cette image dans une application de sélection assistée dans laquelle la régularisation globale du *MoDeReS-2D* est un paramètre réglé par l'utilisateur.

13.1.3 Images médicales

Nous avons voulu tester notre contour actif sur des images médicales car elles proposent souvent des contextes de segmentation difficile. La figure 13.3(a) montre une coupe d'un volume IRM de genou de rongeur. Elle est extraite de la base de donnée utilisée dans [Bolbos 07] pour le suivi longitudinal d'une pathologie. Les deux masses noires sont le tibia en bas et le fémur en haut. La carte de contours de cette image (figure 13.3(b)) montre que le cartilage se situant entre ces deux os ne possède pas une frontière bien définie partout. Le *MoDeReS-2D* permettra malgré tout de retrouver l'interface entre le cartilage et le fémur.

Une autre image IRM est utilisée. La figure 13.4 montre une coupe IRM d'un fémur humain, dans l'articulation du genou. La figure montre la principale difficulté pour la détection des contours. Le ligament croisé postérieur et le fémur sont représentés par le même niveau de gris.



(a) Image originale.

(b) Carte des contours de (a).

FIG. 13.4: Coupe sagittale d'un volume IRM de fémur humain.

Les points de contact entre ces deux structures anatomiques ne sont donc pas sur un gradient fort de l'image. L'intervention d'un spécialiste permettra, en désignant approximativement ce lieu, de renseigner le contour actif sur la valeur de régularisation à imposer.

13.2 Régularisation globale

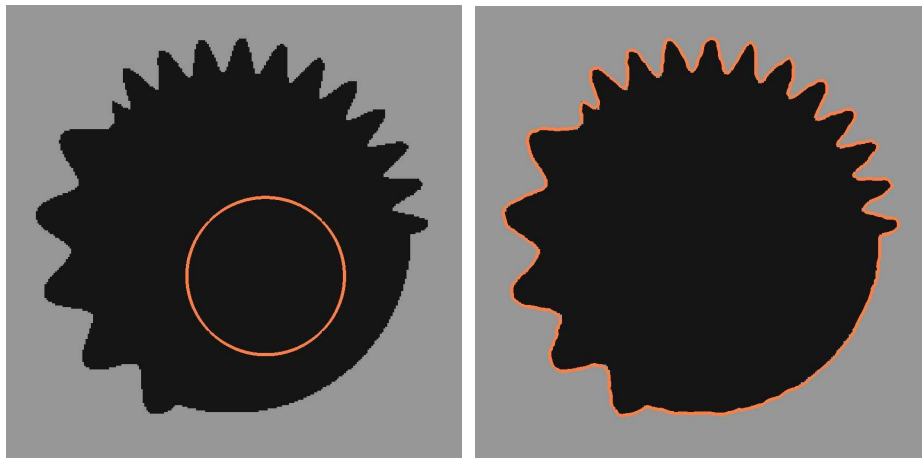
Nous étudions dans ce paragraphe les résultats obtenus par le *MoDeReS-2D* dans sa version globale. Le paramètre de régularisation λ est donc le même pour tous les points du contour actif.

13.2.1 Segmentation sans régularisation

Dans le contexte idéal de la figure 13.1(a), un contour actif correctement échantillonné ne doit pas avoir besoin de régularisation pour se positionner sur les bords puisque aucun bruit ne vient perturber la segmentation. La figure 13.5 montre que l'algorithme produit une segmentation identique au contour idéal pour un pas d'échantillonnage de 1pixel . Ici, les forces externes sont une combinaison entre forces ballons et gradient de la carte de contours de l'image 13.1(a) convoluée par une gaussienne d'écart-type 0.5.

13.2.2 Influence du pas d'échantillonnage

Nous avons vu dans le paragraphe 5.2 que le pas d'échantillonnage d'un contour actif peut être un paramètre régularisant [Brigger 98]. Même si, dans notre algorithme, la distance entre points adjacents est constante, elle peut être considérée comme un paramètre. Par analogie au théorème de Shannon [Unser 00], elle doit être choisie de manière à pouvoir décrire l'objet à segmenter dans sa globalité. Par exemple, la figure 13.6 est le résultat d'une segmentation de deux contours actifs identiques à la figure 13.5 à l'exception du pas d'échantillonnage. Nous constatons que si le



(a) Contour actif initialisé par l'utilisateur. Ce dernier impose le centre et le rayon d'un cercle.

(b) Segmentation finale.

FIG. 13.5: Segmentation de l'objet de test sans régularisation. $\lambda = 0$, la distance entre les points est de 1 pixel.

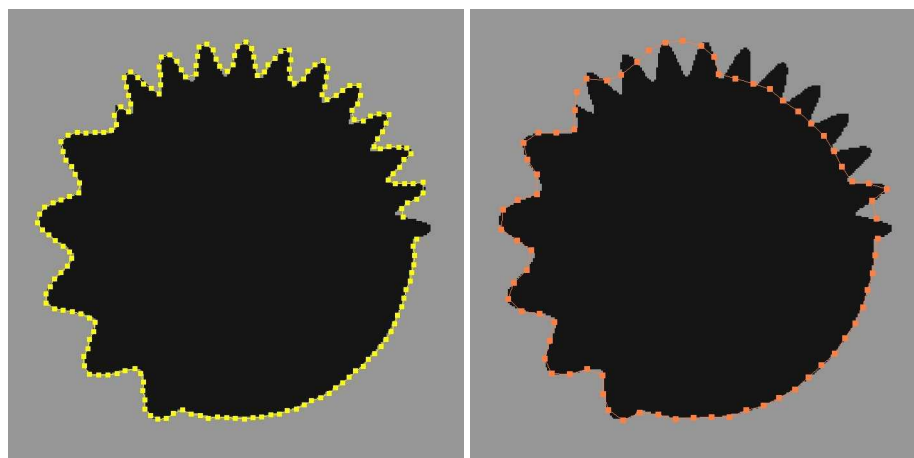
contour actif possède un pas d'échantillonnage trop grand, la partie haute fréquence f_1 du cercle n'est pas segmentée.

13.2.3 Influence de la régularisation

L'image 13.1(a) représente un idéal. Seuls deux niveaux de gris sont présents dans l'image, étiquetant respectivement le fond et l'objet d'intérêt. Nous initialisons le contour actif de la même façon que dans la figure 13.5(a) sur l'objet modulé bruité (figure 13.1(c)). Le contour actif non régularisé (figure 13.7(a)) ne parvient évidemment pas à atteindre le bord du disque. Le choix de λ dépendra alors de l'importance accordée à chaque modulation. Ainsi, dans la figure 13.7(b), les détails de l'objet ne sont pas détectés tandis que les modulations moyennes le sont. Dans les figures 13.7(c) et 13.7(d), ni les détails fins ni les détails moyens ne sont segmentés. Un compromis doit être fait entre la recherche d'une forme approximative et un positionnement exact du contour actif sur les bords d'un objet. Le bruit présent est évidemment un critère important dans ce compromis.

La figure 13.7 donne aussi les temps de segmentation, en itérations et en secondes. Ces temps, et ceux donnés par la suite, sont obtenus avec un code non optimisé sur une plateforme PC, processeur x86 3GHz. Nous les donnons à titre indicatif puisque la distance du modèle initial à la solution et le choix des forces externes sont des paramètres importants de la vitesse de convergence.

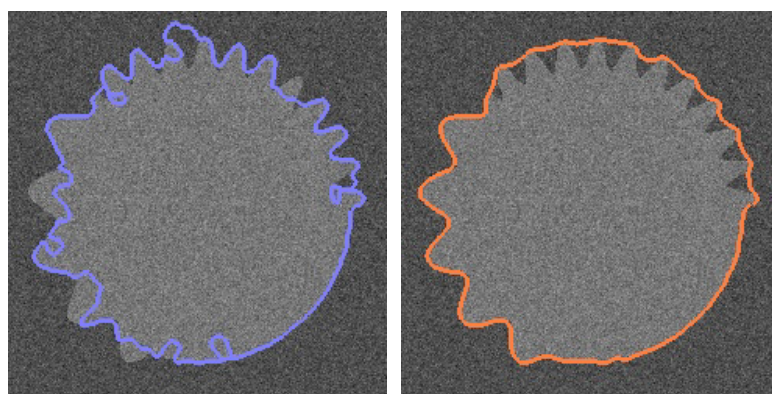
La figure 13.8 illustre la robustesse du *MoDeReS* dans une image bruitée. Le même contour actif a été utilisé pour segmenter l'objet synthétique de la figure 13.1(a), en terme d'échantillonnage et de forces externes. Les variables sont l'écart-type σ du bruit gaussien ajouté à l'image idéale et la valeur de λ . Soit \mathcal{C}_i le contour de référence issu de la carte de contour de l'image idéale (figure 13.1(b)) et \mathcal{C}_s le contour actif final. La mesure présentée dans la figure 13.8 est la distance moyenne ϵ_d des points de \mathcal{C}_i à \mathcal{C}_s . Pour les mesures de $\lambda = 0$ à $\lambda = 20$, l'augmentation de λ réduit ϵ_d quel que soit σ . Par exemple, pour $\sigma = 20$, la distance moyenne ϵ_d est de 5 pixels sans régularisation



(a) La distance entre chaque point du contour actif est de 5 *pixels*. L'objet est bien segmenté.

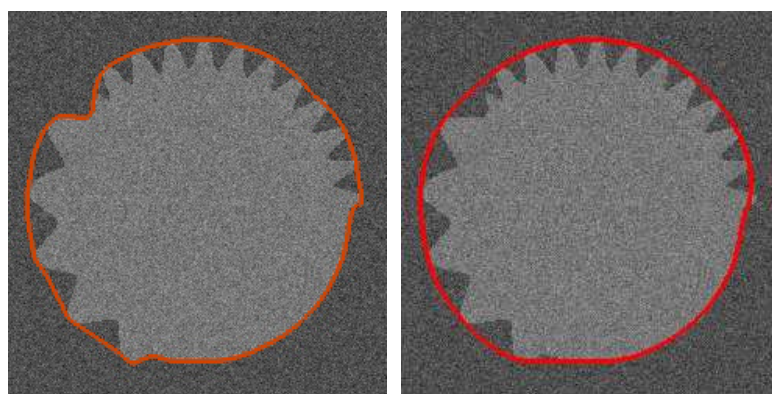
(b) La distance entre chaque point est de 10 *pixels*. La partie du cercle à forte variation n'est pas segmentée correctement par le contour actif.

FIG. 13.6: Illustration de l'influence du pas d'échantillonnage sur une segmentation par contour actif.



(a) Un contour actif non régularisé n'atteint pas le bord.

(b) $\lambda = 10$. Segmentation achevée en 400 itérations, 7s.



(c) $\lambda = 130$. Segmentation achevée en 500 itérations, 9s.

(d) $\lambda = 1000$. Segmentation achevée en 500 itérations, 9s.

FIG. 13.7: Influence de la régularisation. La quantité de régularisation détermine quelles structures sont correctement délimitées. La distance entre les points du contours est de 5 *pixels*.

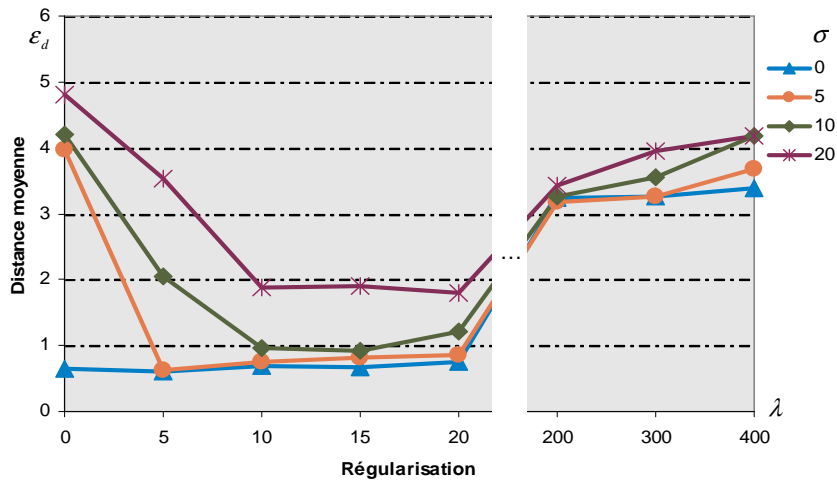


FIG. 13.8: Distance moyenne ϵ_d entre le contour idéal et le contour segmenté en fonction de λ , pour plusieurs écart-types de bruit gaussien ajouté à l'image (de $\sigma = 0$ à $\sigma = 20$). Les forces ballons et le gradient de la carte de contours sont les forces externes. La distance entre chaque point du contour actif est de 2 pixels.

et devient inférieure à 2 pixels pour $\lambda = 10$.

Quand λ devient grand ($\lambda \geq 200$), ϵ_d augmente quel que soit σ . La régularisation est trop forte pour que le contour détecte les détails de l'image, mais le bruit n'est plus influent.

13.2.4 Application à l'aide à la sélection

a) Forme libre

La plupart des logiciels d'infographie intègre des outils manuels de sélection d'une zone d'une image. Il existe des améliorations facilitant la tâche parfois fastidieuse du détourage, comme la baguette magique de Photoshop ou les ciseaux intelligents de The Gimp (certainement inspirés de [Mortensen 98]). La figure 13.9 montre le *MoDeReS-2D* utilisé dans ce contexte. Le travail de l'infographiste est de placer grossièrement quelques points proches de la frontière de l'objet d'intérêt. À partir de ces points, une courbe *spline* qui sera le contour actif initial est interpolée. Le paramètre de régularisation λ , potentiellement la seule variable dans cette application¹, donnera des sélections différentes selon sa valeur.

La figure 13.10 montre la segmentation d'une image IRM dont le contour initial est une courbe ouverte. Dans la figure 13.10(a), les forces ballons sont très faibles par rapport aux forces images. Le bord du fémur n'est pas segmenté. Nous augmentons les forces ballons dans la figure 13.10(b) pour permettre au contour actif d'atteindre le bord partout. Enfin, dans la figure 13.10(c), la régularisation est plus forte. Le contour atteint également le bord, mais l'interprétation de la position

¹Selon les compétences de l'utilisateur, il peut lui être octroyé le contrôle des forces externes.

(a) Initialisation par tracé grossier d'une courbe *spline*.

(b) $\lambda = 0$. Sans régularisation, le contour n'apporte rien en terme de qualité de sélection même après 300 itérations.

(c) $\lambda = 40$. Lorsque le contraste est grand, 100 itérations (5s) suffisent à positionner la sélection sur les bords de l'objet.

(d) $\lambda = 1000$. Après 150 itérations (6s), l'approximation profite aux zones où le contraste est faible.

FIG. 13.9: Contour actif appliqué à l'aide à la sélection. L'objet d'intérêt est la jambe d'un sportif en action. Les forces externes sont issues d'un VFC. La distance entre chaque point est de 3 pixels.

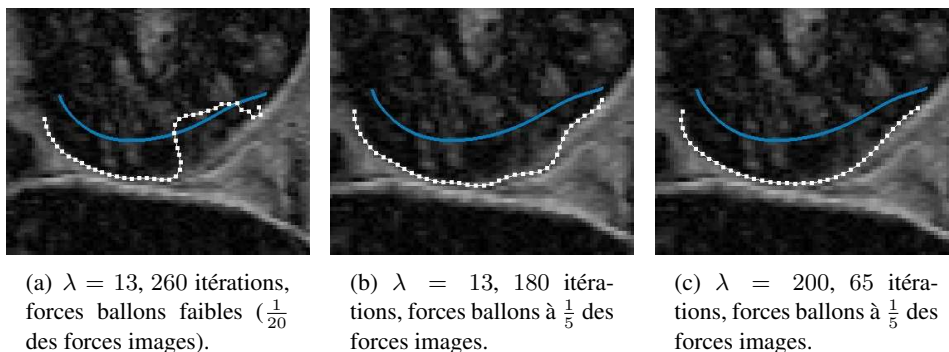


FIG. 13.10: Segmentation d'une image IRM. Les forces ballons rendent l'initialisation (en bleu) moins contraignante. Les différentes valeurs de λ introduisent des interprétations différentes des zones de l'image où l'existence d'un bord n'est pas flagrante. Les temps de segmentation sont inférieurs à 10s.

du contour est différente.

b) Forme connue

Dans le cas où un fort a priori existe sur la forme de l'objet à sélectionner, une très forte régularisation permet de se positionner sur des bords occultés. Par exemple, le ballon de football est connu pour être rond : un cercle positionné aux alentours du ballon dans la figure 13.11(a) et déformé avec une faible régularisation ne retrouve pas les bords (figures 13.11(b) et 13.11(c)). En revanche, une très forte régularisation parvient non seulement à guider correctement le cercle vers les bords existants mais aussi à conserver une forme circulaire où le ballon est caché par l'herbe (figure 13.11(d)).

13.3 Régularisation locale

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus avec *MoDeReS-2D* où une régularisation locale est utilisée pour améliorer la segmentation et montrer comment le modèle déformable utilise une information sur la qualité de l'image et intègre une connaissance a priori de l'objet recherché.

13.3.1 Information sur la présence d'un bord

La régularisation locale traitée dans les paragraphes 11.3.4 et 12.2 autorise une variation du paramètre λ le long du contour. Nous voulons détecter le bord du fémur de la figure 13.4. Le contour actif initial est donné dans la figure 13.12. Dans la figure 13.13, la valeur de λ_k au point k est tirée d'une carte $\lambda(x, y)$. Cette carte fait le lien entre les coordonnées des points $g_x(k), g_y(k)$ du contour actif et la valeur du paramètre de régularisation. Il s'agit ici d'une simple image binaire dont les pixels sont blancs lorsque la probabilité d'être proche d'un contour est forte.

Les figures 13.13(a) et 13.13(b) montrent les inconvénients d'une régularisation globale. Une régularisation faible partout ne permet pas au contour actif de détecter le bord du fémur au niveau



(a) Initialisation par positionnement du centre et du rayon d'un cercle.



(b) $\lambda = 0$. Si le but est de détourner le ballon, c'est un échec total.



(c) $\lambda = 130$. La forme recherchée est un cercle, le résultat de la segmentation n'en est pas un.



(d) $\lambda = 10000$. Une forte régularisation implique une conservation de la forme de départ, même dans la partie du ballon occultée par l'herbe. Segmentation achevée en 60 itérations, 2.5s.

FIG. 13.11: Contour actif appliqué à l'aide à la sélection. L'objet d'intérêt est un ballon. Les forces externes sont issues d'un VFC. La distance entre chaque point est de 5 pixels.

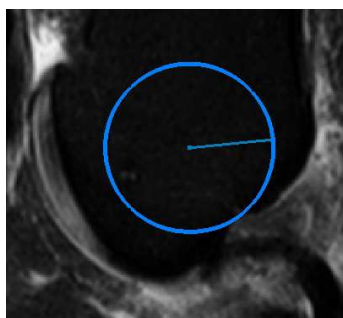
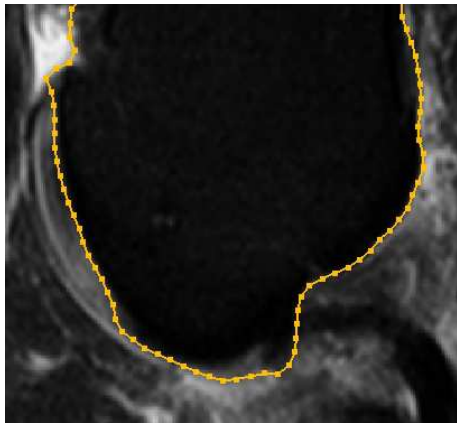
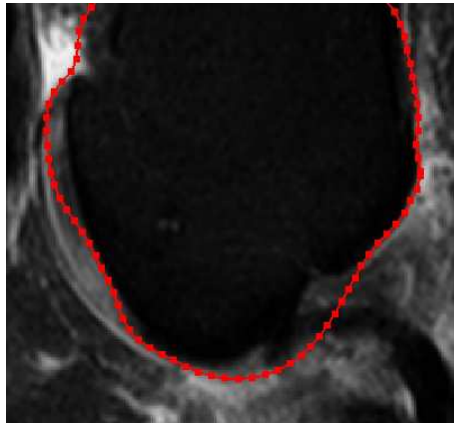


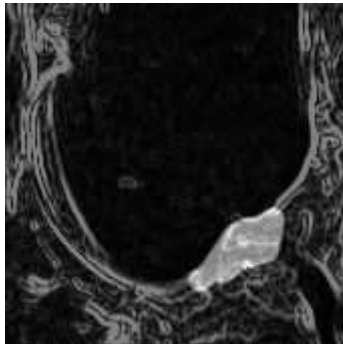
FIG. 13.12: Un contour actif initial pour la segmentation du fémur.



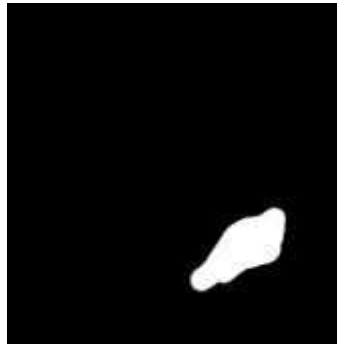
(a) $\lambda = 5$ partout. Résultat après 1740 itérations.



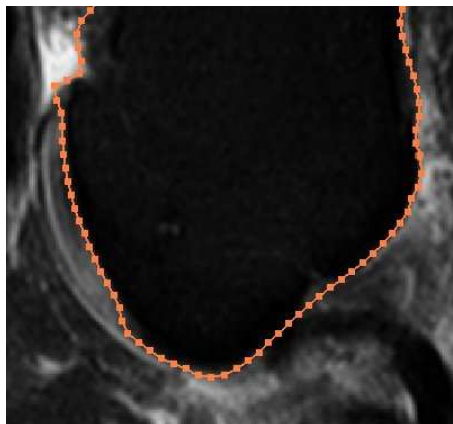
(b) $\lambda = 250$ partout. Résultat après 1200 itérations.



(c) Carte binaire de valeurs minimales et maximales dessinée par l'utilisateur sur la carte des contours.



(d) Carte binaire des valeurs λ_{min} (noires) et maximales λ_{max} (blanches).



(e) Résultat après 1170 itérations (30s) avec $\lambda_{min} = 5$ et $\lambda_{max} = 255$.

FIG. 13.13: Application de la régularisation locale pour la segmentation d'une image IRM. La carte $\lambda(x, y)$ correspond à l'appréciation de l'opérateur sur la possibilité pour un pixel d'être un bord. Les forces ballons représente $\frac{1}{20}$ des forces images maximales. Le pas d'échantillonnage du contour est de 5 pixels.

du contact avec le ligament croisé postérieur. Cependant, les détails sont correctement segmentés. Une forte régularisation induit une erreur de positionnement du contour vers le ligament et les détails ne sont pas détectés.

Nous proposons d'introduire une connaissance de spécialiste par l'image. Dans la figure 13.13(c), un utilisateur dessine approximativement la zone de contact entre le genou et le ligament. Ce tracé est considéré alors comme une zone où la régularisation devra être maximale. Il en résulte une carte des λ locaux (figure 13.13(d)) définissant les zones de régularisation maximale où $\lambda(x, y) = \lambda_{max}$ et les zones de régularisation minimale $\lambda(x, y) = \lambda_{min}$.

La figure 13.13(e) montre le résultat d'une segmentation où avec $\lambda_{min} = 5$ dans presque toute l'image, sauf au contact entre le fémur et le ligament où $\lambda_{max} = 255$. Le bord manquant de l'os est maintenant bien segmenté par le contour actif ainsi que les détails.

Dans l'exemple de la figure 13.13, l'image est le support pour introduire une connaissance de l'objet recherché. Pour cela, Nous avons utilisé l'adaptabilité de λ en fonction de données image. Nous allons voir que le contour peut aussi être porteur de connaissance a priori.

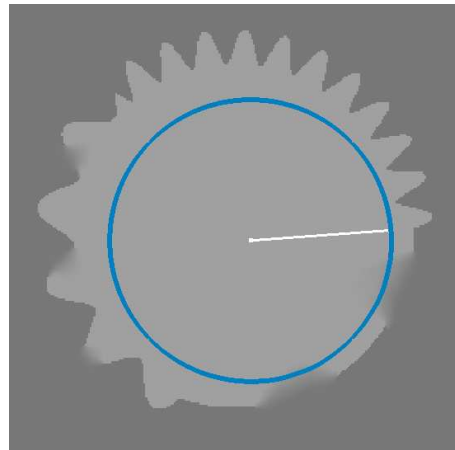
13.3.2 Information sur la rigidité du contour

La régularisation locale permet d'autoriser certains points du contour à se déplacer librement tout en contraignant d'autres points à subir les mêmes déformations que leurs voisins. Nous utilisons l'objet synthétique de la figure 13.1(e) pour montrer que la régularisation locale permet de détecter le bord non modulé (f_3) sans perdre les détails (f_1) en attribuant aux points une valeur appropriée de λ_k .

Dans la figure 13.14(b), le contour actif non régularisé fuit, les forces ballons n'étant pas compensées par un gradient suffisant. Une régularisation globale mais faible permet de limiter les fuites par les plus petites ouvertures mais n'empêche pas le contour de continuer son chemin par les grandes ouvertures (figure 13.14(c)). Enfin, une très forte régularisation contraint le contour même au niveau des grandes ouvertures, occasionnant une segmentation très approximative des parties modulées du disque (figure 13.14(d)).

Afin d'obtenir une segmentation convenable partout, nous utilisons la connaissance a priori de l'objet recherché. Ainsi, le contour actif de la figure 13.15(a) possède plusieurs valeurs de régularisation en fonction de l'indice du point filtré. Les fuites par les grandes ouvertures sont évitées, tout en conservant un contour proche de la solution dans les zones modulées (figure 13.15(b)). La régularisation locale est donc bien une solution pour introduire une connaissance a priori dans le processus de segmentation.

LES résultats de segmentation obtenus dans ce chapitre confirment la validité de l'algorithme de déformation régularisée par filtrage *B-Spline* lissant. Les temps de segmentation sont tous de l'ordre de la dizaine de seconde, en fonction de l'initialisation et des forces externes utilisées. Malgré tout, l'échantillonnage du contour reste un paramètre important et ne doit pas être négligé. Nous avons montré que la régularisation globale apporte une robustesse en autorisant la détection de contours dans une image bruitée. Les tests sur des images réelles montrent que notre contour



(a) contour actif initial.

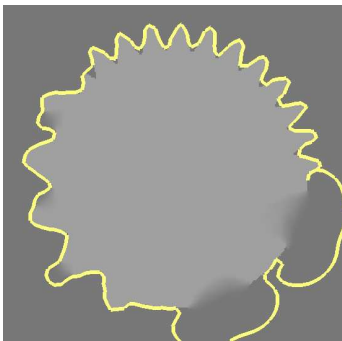
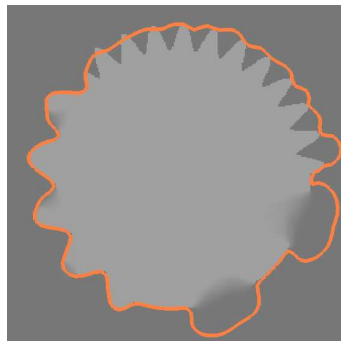
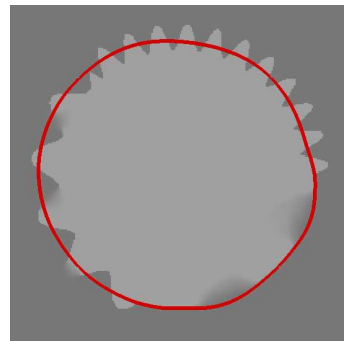
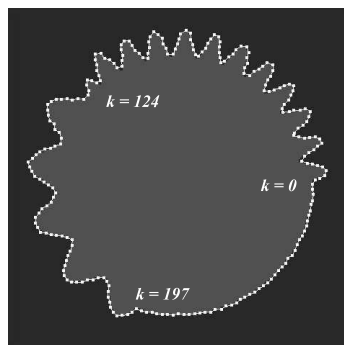
(b) $\lambda = 0$. Les ouvertures sont les lieux de fuites du contour.(c) $\lambda = 0.6$. Les ouvertures de petites tailles ne posent plus de problèmes. Restent des fuites par les grandes ouvertures.(d) $\lambda = 750$. La partie circulaire du disque est retrouvée, au détriment des zones modulées.

FIG. 13.14: Un contour actif globalement régularisé utilisant des forces ballons. Différentes valeurs de λ règlent différents problèmes.



(a) On récupère sur un modèle les indices des points correspondant au changement de modulations.

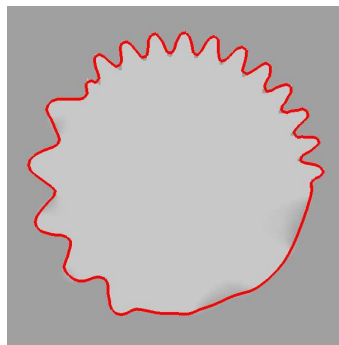
(b) Si $k < 124$, $\lambda = 0$. Si $124 \leq k < 197$, $\lambda = 0.6$. Si $k \geq 197$, $\lambda = 750$.

FIG. 13.15: Régularisation locale. Les valeurs de λ utilisées dans la figure 13.14 sont intégrées dans un même contour actif. Segmentation achevée en 130 itérations, 20s

actif est capable de déliméer un objet de façon plus ou moins approximative en fonction de la régularisation. De plus, une forte régularisation a pour effet de conserver la forme initiale, ce qui implique que nous pouvons proposer le contour initial comme une connaissance a priori de l'objet recherché.

Dans nos tests, la régularisation locale est d'abord un moyen d'exprimer la confiance que le contour actif peut accorder aux forces externes. Grâce à une carte des valeurs de λ approximatives, le modèle déformable adapte la régularisation en fonction de la position des points dans l'image.

Enfin, nous montrons comment apporter une connaissance a priori sur le contour en donnant en chaque point du contour actif une valeur de λ correspondant à la courbure locale. Les résultats sont comparés à des segmentations par régularisation globale et montrent qu'une régularisation locale évite certaines erreurs de segmentation.

Le prochain chapitre sera l'occasion de conclure cette partie sur le *MoDeReS-2D*.

14

Conclusion de la troisième partie

NOUS avons présenté dans cette partie un nouveau modèle déformable, le *MoDeReS-2D*. Il s'inspire directement des contours actifs existants en mettant en jeu la déformation d'une courbe paramétrique. Le processus de déformation, dont l'algorithme est résumé dans la figure 12.3, est basé sur un filtrage *B-Spline* lissant des forces externes. Ainsi, la régularisation par énergie interne n'a plus lieu d'être. La régularisation par filtrage est aussi avantageuse en terme de temps de traitement grâce à l'implantation récursive du filtre RII *B-Spline* lissant. De plus, l'effet de rétrécissement connu des contours actifs n'est plus observable. Une régularisation infinie aura pour effet de limiter les déplacements à une translation.

La régularisation par filtre *B-Spline* lissant des forces externes permet en outre d'affecter localement des valeurs différentes de λ . Cette régularisation locale est mise en oeuvre par une variation de la fréquence de coupure du filtre le long du contour. Nous avons exploité cette possibilité pour adapter la régularisation à des données images et pour introduire une connaissance a priori dans la déformation.

En l'état actuel, notre contour actif est exploitable pour l'analyse d'image mais ouvre cependant des perspectives intéressantes. Premièrement, l'échantillonnage est un paramètre du *MoDeReS-2D*. L'intégration dans un algorithme multi-résolution devrait être possible en s'inspirant de la méthode de [Brigger 98]. Deuxièmement, les valeurs locales de λ sont pour l'instant attribuées par expérience. Une mesure autour des points du contour liant la régularisation à un critère de confiance sur la présence d'un contour et une extraction de la connaissance a priori d'un modèle seraient un pas vers l'automatisation du modèle déformable.

NATURELLEMENT, nous avons voulu étendre ce contour actif vers une surface active afin de segmenter un volume. L'utilisation d'un seul paramètre λ possédant un sens physique fort,

l'implantation d'un filtre RII pour une régularisation rapide et le modèle de déformation par filtrage des forces externes promettent un modèle déformable tridimensionnel efficace. Dans la prochaine partie, nous présenterons le *MoDeReS-3D*.

Quatrième partie

***MoDeReS-3D*, un maillage déformable régularisé par spline lissante**

15

Introduction à la quatrième partie

L'EXTENSION du contour actif régularisé par *spline* lissante vers un modèle déformable surfacique s'est imposée naturellement. En effet, il est courant aujourd'hui de devoir traiter des données volumiques. Et puisque la méthode présentée dans la partie précédente offre un contrôle aisé de la déformation via un filtrage RII, nous voulons l'adapter à un modèle déformable surfacique pour obtenir le *MoDeReS-3D*. Mais le passage à une dimension supérieure entraîne forcément des conséquences sur les différentes composantes du modèle déformable, notamment sur la représentation géométrique et sur le filtrage *B-Spline* lissant.

Nous donnerons dans le chapitre suivant un aperçu des nouvelles notions auxquelles nous serons confrontés, avant de montrer quelles seront les conséquences de l'ajout d'une dimension au modèle déformable, qui devient un maillage. Nous verrons qu'il s'agit principalement d'une contrainte sur la connectivité du maillage.

CES conséquences seront traitées dans cette partie, en commençant par le filtrage *B-Spline* lissant des maillages paramétriques (chapitre 17). La contrainte sur la connectivité induit une non-uniformité des maillages, nous étudierons donc dans le chapitre 18 une solution par filtrage variant permettant de s'abstraire de l'échantillonnage. Enfin, le *MoDeReS-3D* sera testé sur des volumes de synthèse et sur des volumes IRM dans le chapitre 19.

16

Contraintes liées à l'ajout d'une dimension

L'ÉVOLUTION du *MoDeReS-2D* vers le *MoDeReS-3D* est motivée par l'efficacité de ce modèle déformable intégrant une régularisation locale via un filtrage RII des forces externes. Si la topologie d'un contour paramétrique du plan est simple, celle d'une surface de \mathbb{R}^3 introduit de nouvelles notions que nous étudierons rapidement dans ce chapitre. Nous détaillerons ensuite l'extension du filtre *B-Spline* lissant monodimensionnel vers un filtre bidimensionnel. Le *MoDeReS-3D* sera régularisé par ce filtre. Nous expliciterons enfin les contraintes sur le maillage qui seront imposées par le filtre *B-spline* lissant bidimensionnel.

16.1 Théories liées aux surfaces

16.1.1 Maillages et notions de topologie

Nous avons étudié dans l'état de l'art (partie II) certaines surfaces actives. La notion de surface est large, nous donnons donc ici quelques précisions de vocabulaire.

Définition 1 Une hypersurface est une $(n - 1)$ -variété plongée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Une surface est une 2-variété.

Définition 2 Une variété orientable possède un champ de vecteurs normaux jamais nul.

L'objectif d'un modèle déformable étant de se rapprocher d'une réalité physique, il aurait été plus juste de parler de 2-variété orientable au lieu de surface. Concernant le maillage, il s'agit en fait d'une représentation discrète d'une 2-variété et nous trouvons la définition suivante dans [Desbrun 06] :

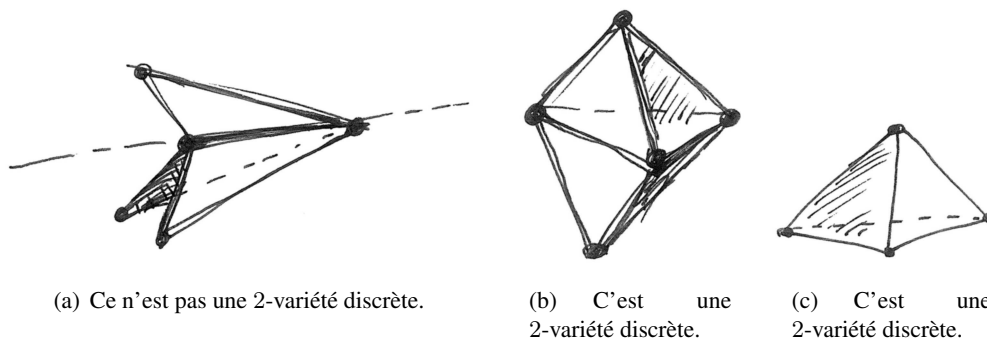


FIG. 16.1: Le nombre de triangles adjacents à une arête permet de confirmer la nature d'une variété.

	V	E	F	χ
Cube	8	12	6	2
Tétraèdre	4	6	4	2
Octaèdre	6	12	8	2

TAB. 16.1: Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré χ pour des polyèdres simples

Définition 3 Une k -variété discrète est une collection de k -simplexes (complexe simplicial) dont chaque $(k - 1)$ -simplexe possède deux k -simplexes adjacents, un seul si c'est un bord.

Il s'agit là d'une définition générale de la discrétisation d'une k -variété. Un k -simplexe est le plus simple élément de dimension k d'un maillage. Le bord d'un k -simplexe est formé de $k + 1$ $(k - 1)$ -simplexes. Prenons le cas d'une 2-variété discrète : le 0-simplexe est tout simplement le point, qui constituera un sommet. À partir de deux sommets, nous pouvons former une arête, le plus simple élément de dimension 1. À partir de trois arêtes, enfin, nous pouvons former le plus simple élément de dimension 2 à savoir le triangle qui sera une face. L'application de la définition 3 aux maillages triangulaires que nous manipulons habituellement conduit vers la constatation suivante (voir la figure 16.1) : toutes les faces du maillage sont des triangles et toutes les arêtes possèdent deux triangles adjacents, à l'exception des bords qui n'appartiennent qu'à un seul triangle, quand ils existent. Ces maillages sont des triangulations.

Maintenant qu'un maillage triangulaire tel que nous l'entendons est défini de manière rigoureuse, nous introduisons un invariant topologique, la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété \mathcal{M} :

$$\chi = \text{card}(V) - \text{card}(E) + \text{card}(F) \quad (16.1)$$

où V est l'ensemble des sommets de \mathcal{M} , E l'ensemble des arêtes et F l'ensemble des faces. Par exemple, pour la sphère, nous avons $\chi = 2$. Étant un invariant topologique, cette valeur ne doit pas changer pour toute surface homéomorphe à une sphère. On le vérifie facilement en la calculant par la relation (16.1) sur des polyèdres (tableau 16.1)

Nous notons que dans le tableau 16.1 se trouve le cube, dont les faces ne sont pas des triangles mais des carrés. En fait, la relation d'Euler-Poincaré est généralisable à tout graphe planaire. Les faces peuvent donc être représentées par des polygones dont les arêtes ne se croisent jamais. Pour

	g	χ
sphere	0	2
cylindre (2 bords)	0	0
plan (1 bord)	0	1
tore	1	0
n -uples tore	n	$2 - 2n$

TAB. 16.2: Genres g et caractéristiques d'Euler-Poincaré χ de quelques surfaces types.

être cohérent avec la définition 3, il est aisé de retrouver un complexe simplicial à partir d'un maillage polygonal.

Une autre grandeur souvent utilisée pour caractériser une surface est son genre g . Il s'agit maintenant de compter le nombre d'anses présentes sur la surface. Ainsi, une sphère sera de genre 0, un tore de genre 1, un Bretzel de genre 2 ou 3 selon la cuisson. Pour les surfaces closes orientables, le genre est lié à la caractéristique d'Euler-Poincaré par la relation :

$$g = \frac{2 - \chi}{2} \quad (16.2)$$

Tout comme la caractéristique d'Euler-Poincaré, une transformation homéomorphique d'une variété laisse le genre inchangé. Cependant, l'invariance du genre est plus forte que celle de la caractéristique d'Euler-Poincaré car une surface close ne changera pas de genre si elle est percée de n trou(s). C'est ainsi qu'un cylindre, homéomorphe à une sphère percée de deux trous, sera de genre 0, ainsi que le plan, homéomorphe à une sphère percée de un trou. Le tableau 16.2 compare, pour quelques surfaces simples, leurs genres et caractéristiques d'Euler-Poincaré respectifs.

16.1.2 Maillages quadrangulaires

Nous aurons besoin plus tard de maillages quadrangulaires possédant une connectivité particulière. Les éléments théoriques du paragraphe précédent sont toujours valables, puisqu'il suffit d'ajouter une arête à une diagonale de chaque quadrangle pour retrouver un complexe simplicial.

Beaucoup de travaux proposent de créer un maillage essentiellement composé de quadrangle à partir d'une triangulation. Les solutions proposées s'inspirent d'un large éventail de domaine, depuis la définition d'une 0-forme harmonique [Dong 05, Tong 06], en passant par l'étude spectrale des surfaces [Dong 06] ou des courbures principales [Alliez 03], jusqu'aux techniques de paramétrisation [Ray 06].

Il en ressort que la difficulté principale lors de la construction d'une quadrangulation est l'existence de *points singuliers* appelés aussi singularités. Dans la théorie de Morse, une fonction à valeur réelle définie sur une variété compacte possède des singularités où le gradient de la fonction s'annule. Mieux, la somme des indices des singularités est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété [Edelsbrunner 01, Ni 04], d'où par exemple les deux pôles d'une sphère. Bien qu'il soit possible d'obtenir un pavage uniquement par des quadrangles d'une 2-variété en traitant les singularités de façon ad hoc [Tong 06], nous allons montrer que nous avons besoin d'un maillage où les points possèdent tous quatre voisins. La figure 16.2 montre qu'un maillage

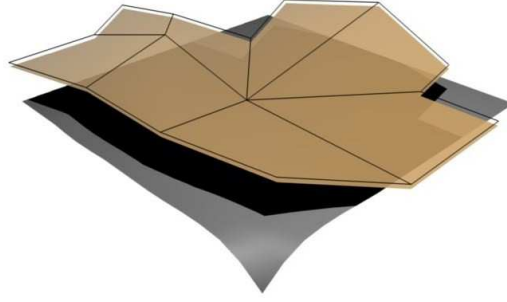


FIG. 16.2: Maillage construit uniquement avec des quadrangles. Les points n'ont pas forcément quatre voisins.

purement quadrangle n'intègre pas nécessairement cette contrainte.

Dans nos travaux, il nous importe d'assimiler le maillage quadrangulaire à une grille, comme une image. En ce sens, pour toute surface paramétrée par k et l , un point V_i non singulier est déterminé par le couple (k, l) et se note $V_{k,l}$. Le voisinage $V_{k,l}^*$ d'un point $V_{k,l}$ est :

$$V_{k,l}^* = \{V_{k,l+1}, V_{k,l-1}, V_{k+1,l}, V_{k-1,l}\} \quad (16.3)$$

Nous expliquerons dans les deux prochains paragraphes que cette contrainte est liée au filtrage *B-Spline* lissant bidimensionnel d'une surface.

16.2 Extension du filtre *B-Spline* lissant

Parmi les avantages qu'apporte le filtrage *B-Spline* lissant au modèle déformable, nous trouvons une implantation basée sur l'équation aux différences. Détermination des conditions initiales mise à part (voir annexe A), cela signifie que quelle que soit la valeur de λ , la régularisation en un point k n'a besoin que des deux voisins de chaque côté, $k - 1$, $k - 2$, $k + 1$ et $k + 2$.

L'ajout d'une dimension conduit inévitablement à utiliser un filtre bidimensionnel. Nous choisissons de conserver une implantation monodimensionnel du filtrage en filtrant les deux directions par le filtre *B-Spline* lissant. Ainsi, pour un signal discret $g_x(k, l)$ obtenu par l'échantillonnage d'une fonction continue $g_x(u, v)$, la séparabilité se traduit par le filtrage selon la direction k avec SB_λ puis selon l avec SB_μ . Dans le domaine de la transformée en z , cela conduit au système suivant :

$$\hat{G}_x(z_1, z_2) = SB_\lambda(z_1) \cdot SB_\mu(z_2) \cdot G_x(z_1, z_2) \quad (16.4)$$

où z_1 et z_2 sont les variables dans le domaine fréquentiel selon les directions k et l dans le domaine spatial et G_x et \hat{G}_x sont respectivement les transformées en z des signaux d'entrée $g_x(k, l)$ et de sortie $\hat{g}_x(k, l)$ du système. La fonction de transfert $SB_{\lambda,\mu}(z_1, z_2) = SB_\lambda(z_1) \cdot SB_\mu(z_2)$, dont la réponse impulsionnelle est illustrée pour quelques valeurs de $\lambda = \mu$ dans la figure 16.3, est alors :

$$SB_{\lambda,\mu}(z_1, z_2) = \frac{B(z_1)B(z_2)}{B(z_1)B(z_2) + \lambda B(z_2)D(z_1)^2 + \mu B(z_1)D(z_2)^2 + \lambda\mu D(z_1)^2 D(z_2)^2} \quad (16.5)$$

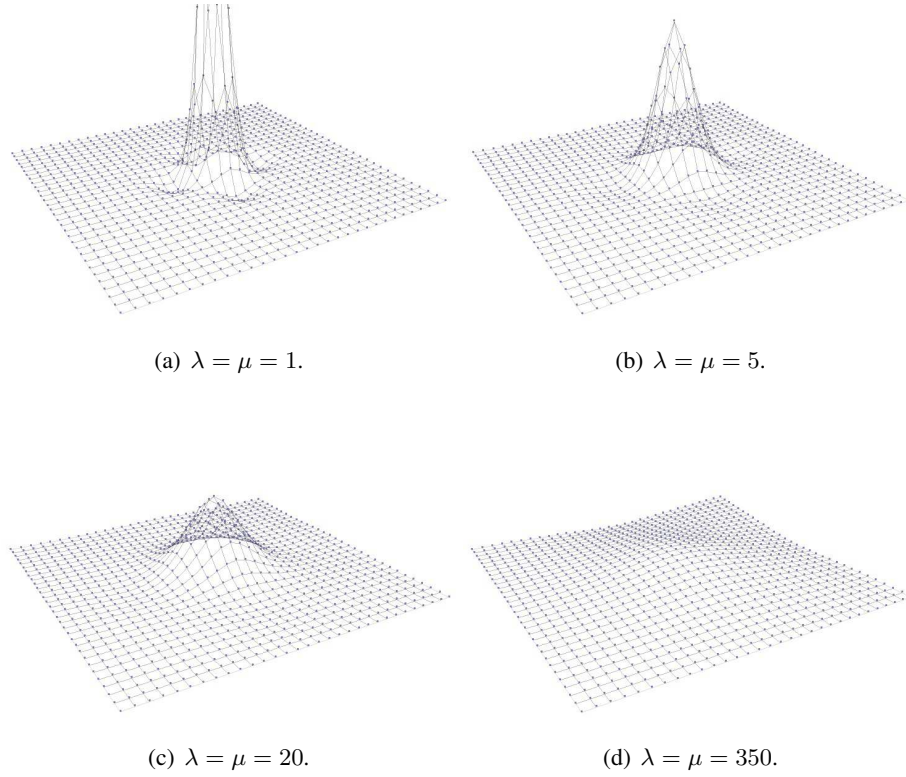


FIG. 16.3: Réponse impulsionnelle du filtre SB_λ bidimensionnel selon différentes valeurs de λ et μ .

où $D(z) = -z + 2 - z^{-1}$ et $B(z)$ est le filtre *B-Spline* indirect défini dans le paragraphe 5.2. L'apparition d'un terme croisé $\lambda\mu$ dans la fonction de transfert (16.5) se retrouve dans la fonctionnelle d'énergie dont la version monodimensionnelle est définie par (11.1). Cette fonctionnelle, en deux dimensions, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_s^2 = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (g(k, l) - \hat{g}(k, l))^2 \\
 & + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \hat{g}(u, l)}{\partial u^2} \right)^2 du \\
 & + \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \hat{g}(k, v)}{\partial v^2} \right)^2 dv \\
 & + \lambda\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \hat{g}(u, v)}{\partial u^2 \partial v^2} \right)^2 dudv
 \end{aligned} \tag{16.6}$$

La séparabilité du filtrage des directions k et l fait apparaître un terme croisé impliquant λ et μ dans la fonctionnelle (16.6). Il n'est pas prouvé que la fonction spline bidimensionnelle $\hat{g}(u, v)$ soit effectivement la solution optimale de la minimisation de ε_s^2 [Unser 93a]. Cependant, si $\lambda = \mu = 0$, alors $g(k, l) = \hat{g}(k, l)$ annule la fonctionnelle (16.6). Le filtre n'a aucun effet. Si $\lambda \rightarrow \infty$ et $\mu \rightarrow \infty$, $\hat{g}(k, l)$ devra être très lisse pour que sa dérivée seconde (pondérée par λ et μ dans la fonctionnelle (16.6)) tende vers 0. La figure 16.4 montre le résultat du filtrage d'une fonction $g(k, l) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ représentant une image en niveau de gris¹.

¹Images créées à partir de l'applet <http://bigwww.epfl.ch/demo/jsmoothing/demo.html>

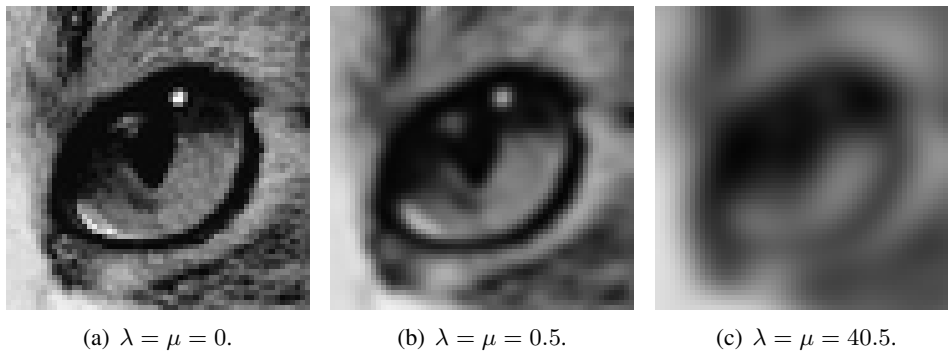


FIG. 16.4: Lissage d'une image par le filtre B-Spline lissant bidimensionnel, pour plusieurs valeurs de λ et μ ($\lambda = \mu$).

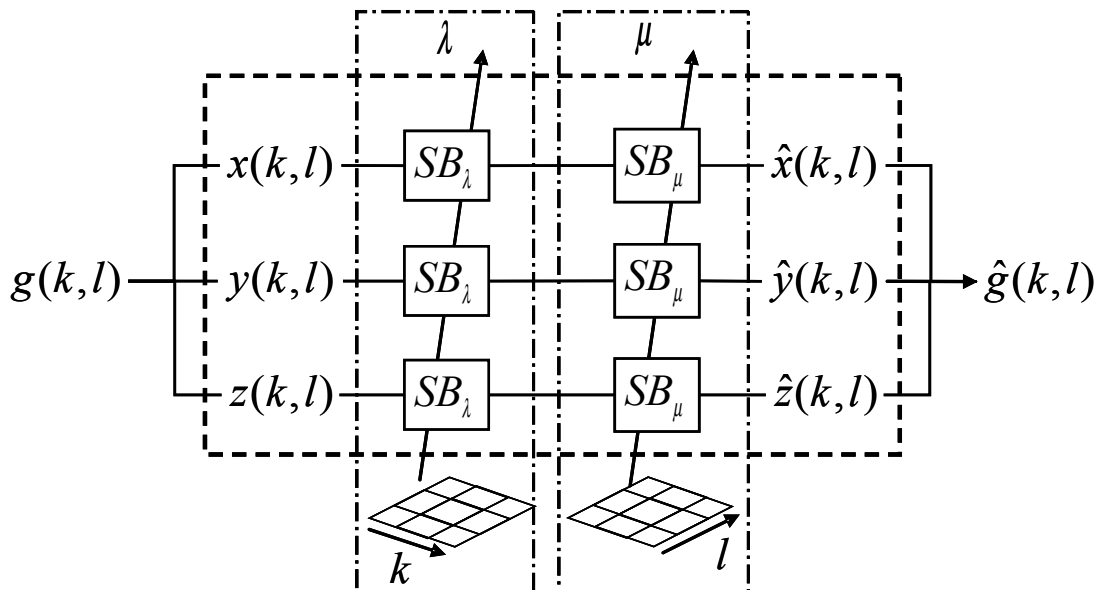


FIG. 16.5: Filtrage B-Spline lissant bidimensionnel. La séparabilité permet de se ramener à un contexte de filtrage monodimensionnel.

16.3 Filtrage bidimensionnel d'une surface

L'extension d'un contour paramétrique discret $g(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vers une surface paramétrique discrète se traduit simplement par l'ajout d'une variable dans la fonction paramétrique $g(k, l) : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. L'ensemble d'arrivée est l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , décrit par trois fonctions $g_x, g_y, g_z : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui seront les composantes de la surface.

Le filtrage B-Spline lissant d'une surface est similaire au filtrage d'un contour (voir paragraphe 11.3). Mais dans le cas bidimensionnel, le filtre SB_λ est appliqué successivement selon les directions k puis l . La figure 16.5 rappelle la méthode illustrée dans la figure 11.5 adaptée cette fois à un contexte bidimensionnel. Nous donnons dans la figure 16.6 une illustration de ce filtrage de surface. La surface originale est construite à partir d'une image I en niveau de gris. Le plan (x, y)

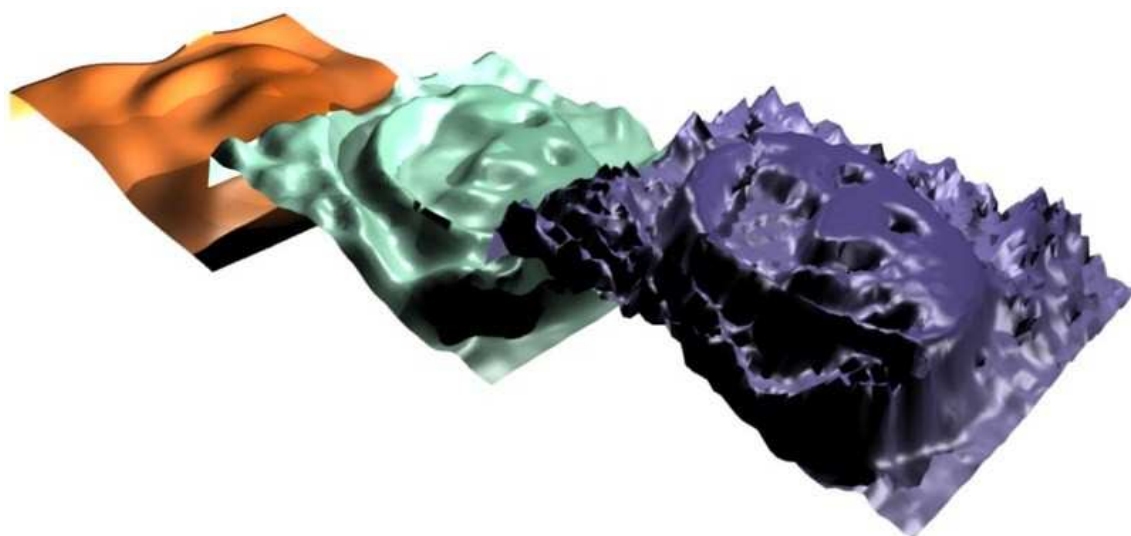


FIG. 16.6: Représentation altimétrique des images de la figure 16.4.

est conservé et donne ainsi une grille. La profondeur z est lié au niveau de gris de l'image I .

$$g(k, l) = \begin{cases} g_x(k, l) = k \\ g_y(k, l) = l \\ g_z(k, l) = I(k, l) \end{cases} \quad (16.7)$$

La contrainte majeure du lissage de surface par filtrage *B-Spline* lissant bidimensionnel est maintenant flagrante. Cette méthode s'applique aux signaux bidimensionnels portés par une grille à l'instar d'une image, où la grille est formée par les pixels. En conséquence, les maillages utilisés dans le *MoDeReS-3D* devront contenir uniquement des sommets de valence 4 et nous parlons de maillages quadrangulaires réguliers de valence 4. Le respect de cette contrainte impose au maillage d'être homéomorphe à un tore. Dans le chapitre suivant, nous proposerons des extensions des bords de surfaces ouvertes pour permettre le filtrage de cylindres et de plans et une gestion du voisinage de certaines singularités autorisant le filtrage d'une sphère. Nous pourrions alors utiliser des maillages semi-réguliers de valence 4.

ÉTENDRE le filtrage *B-Spline* lissant des contours aux surfaces fait intervenir de nouvelles notions, étudiées par la topologie, la géométrie différentielle ou encore la théorie de Morse. Pour conserver une implantation récursive du filtre, il est nécessaire de traiter des maillages à connectivité régulière, où chaque sommet est de valence 4. Cette régularité n'est possible que pour des maillages de surface de genre 1, les autres possédant des points singuliers ou des bords qu'il faudra traiter différemment.

Dans le chapitre suivant, nous décrirons le filtrage de maillages construits à partir des équations paramétriques. Les singularités et les sommets situés sur un bord seront alors précisément localisés et pourront être filtrés au même titre que les autres sommets.

17

Filtrage B-spline lissant de maillages paramétriques

NOUS avons vu que le filtrage *B-Spline* lissant d'une surface implique que le maillage représentant la surface soit composé uniquement de sommets de valence 4. Le *MoDeReS-3D* intègre cette contrainte puisque la régularisation est effectuée par le filtrage des forces externes associées à chaque sommet.

Cependant, les maillages réguliers de valence 4 se limitent à la représentation des surfaces homéomorphes à un tore. Les autres surfaces posséderont soit des bords, soit des points singuliers où le maillage ne peut pas avoir de sommets de valence 4. De plus, la construction des maillages quadrangulaires semi-réguliers à partir d'une triangulation est un domaine de recherche actif aujourd'hui encore et n'est pas le propos de la thèse.

Dans ce chapitre, nous proposerons de construire des maillages compatibles avec un filtrage *B-Spline* lissant à partir de leurs équations paramétriques. Cela nous permettra non seulement d'en connaître précisément la connectivité, mais aussi de rapprocher les modèles déformables maillés et les surfaces actives paramétriques (voir dans l'état de l'art le paragraphe 6).

Nous verrons d'abord comment construire un maillage quadrangulaire régulier de valence 4. Ce maillage sans bord et sans singularité est basé sur l'équation paramétrique du tore. Ensuite, nous étudierons le plan et le cylindre qui sont des maillages sans singularité à bord. Nous proposerons donc une stratégie d'extension des bords pour permettre le filtrage de tous les sommets.

Nous continuerons avec la construction d'un maillage représentant une surface fermée de genre 0 à partir de l'équation paramétrique de la sphère et nous proposerons une stratégie de gestion des pôles où la valence est différente de 4. Nous finirons par quelques exemples de filtrage de maillages toriques, plans, cylindriques et sphériques.

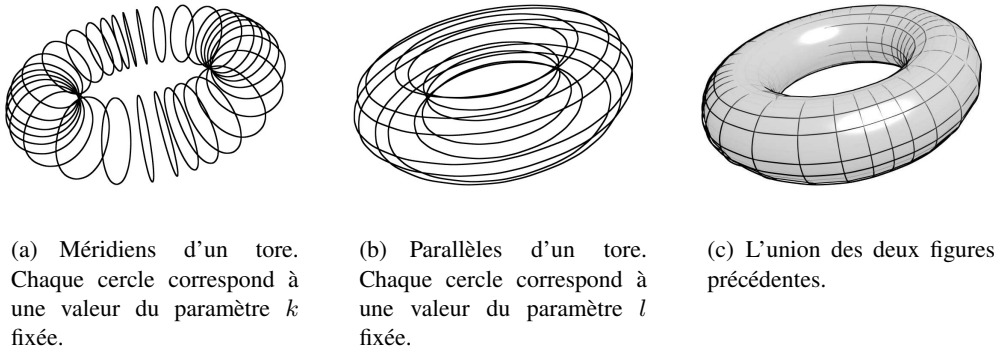


FIG. 17.1: Construction d'un tore à partir de son équation paramétrique.

17.1 Construction de maillages sans singularités

17.1.1 Surfaces closes de type tore

D'après la relation (16.2) qui s'applique aux surfaces closes orientables avec $\chi = 0$, nous aurons à faire ici aux surfaces de genre 1 donc homéomorphes à un tore.

L'équation paramétrique d'un tore dans un repère $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$ s'écrit :

$$\begin{cases} g_x(u, v) = (R + r \cdot \cos(v)) \cos(u) \\ g_y(u, v) = (R + r \cdot \cos(v)) \sin(u) \\ g_z(u, v) = r \cdot \sin(v) \end{cases} \quad (17.1)$$

où $u \in [0, 2\pi[$ et $v \in [0, 2\pi[$ sont les paramètres. Concrètement, un tore est la translation d'un cercle de rayon r le long d'un cercle de rayon R . Nous pouvons créer une grille de dimension K, L en paramétrant discrètement l'équation (17.1). Soit $k, l \in \mathbb{N}, k < K$ et $l < L$, les coordonnées des sommets d'un tore discret quadrangulaire sont définis dans l'espace \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{cases} g_x(k, l) = (R + r \cdot \cos(2\pi \frac{l}{L})) \cos(2\pi \frac{k}{K}) \\ g_y(k, l) = (R + r \cdot \cos(2\pi \frac{l}{L})) \sin(2\pi \frac{k}{K}) \\ g_z(k, l) = r \cdot \sin(2\pi \frac{l}{L}) \end{cases} \quad (17.2)$$

La figure 17.1 illustre la construction d'un tore à partir de deux ensembles de cercles obtenus en fixant le paramètre k et en incrémentant l , puis en fixant l et en incrémentant k . En tout sommet $V_{k,l}$, nous connaissons son voisinage comme défini dans (16.3). Ce type de maillage pourra être filtré par un filtre *B-Spline* lissant, comme illustré dans le paragraphe 17.3.

17.1.2 Surfaces ouvertes de type cylindre et plan

Les surfaces ouvertes sont des surfaces possédant au moins un bord. Il existe deux types de surfaces orientables ouvertes sans singularité, qui sont les cylindres et les plans.

Un cylindre (figure 17.2) correspond topologiquement à une sphère percée de deux trous, et

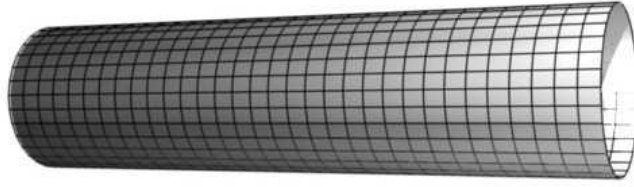


FIG. 17.2: Un cylindre. Sa hauteur est la longueur de l'axe générateur, ici horizontal.

se construit par la translation d'un cercle de rayon r le long d'une droite qui sera son axe. Pour deux paramètres $k \in [0, K[$ et $l \in [0, L[$, l'équation paramétrique d'un maillage quadrangulaire cylindrique de hauteur h est :

$$\begin{cases} g_x(k, l) = r \cdot \cos(2\pi \frac{l}{L}) \\ g_y(k, l) = r \cdot \sin(2\pi \frac{l}{L}) \\ g_z(k, l) = h \cdot \frac{k}{K} \end{cases} \quad (17.3)$$

Un plan est une sphère percée de un trou. Nous pouvons le représenter par un sous-ensemble du plan cartésien (x, y) de longueur p et de largeur q et s'écrit donc paramétriquement dans l'espace :

$$\begin{cases} g_x(k, l) = k \cdot \frac{p}{K} \\ g_y(k, l) = l \cdot \frac{q}{L} \\ g_z(k, l) = 0 \end{cases} \quad (17.4)$$

Les équations paramétriques données ici sont exemptes de toutes transformations affines. Le tore est centré sur l'origine O de l'espace euclidien (O, x, y, z) , alors que le cylindre est d'axe z dans le même espace euclidien mais il est "posé" sur le plan (x, y) . L'initialisation d'un modèle déformable ne se suffit souvent pas de ces positions spatiales. Une transformation devra suivre pour amener le maillage non loin de l'objet recherché dans le volume.

17.1.3 Gestions des bords dans le domaine paramétrique

Les équations paramétriques du tore, du cylindre ou du plan nous permettent d'obtenir divers maillages grâce à la combinaison de trois grilles de mêmes dimensions (K, L) . Ces grilles sont identifiées à des images que le filtre *B-Spline* lissant bidimensionnel est tout à fait capable de traiter. Se pose maintenant le problème des bords : pour filtrer un sommet, il faut connaître les deux sommets précédents et les deux sommets suivants dans chacune des directions. Comment définir les sommets voisins d'un bord dans le domaine des paramètres ? Autrement dit, quelles sont les coordonnées des sommets $V_{k=-1,l}, V_{k=K,l}, V_{k,l=-1}, V_{k,l=L}$?

→ **Le tore** n'a pas de bord, au sens de bord d'une variété. Il suffit de remplacer k par K dans son équation paramétrique pour constater que $V_{K,l} = V_{0,l}$ et que $V_{k,L} = V_{k,0}$. De façon générale, nous utilisons la relation de congruence $\Theta_M(m) : \mathbb{Z} \rightarrow [0, M[$ suivante :

$$\Theta_M(m) = [m]_M \quad (17.5)$$

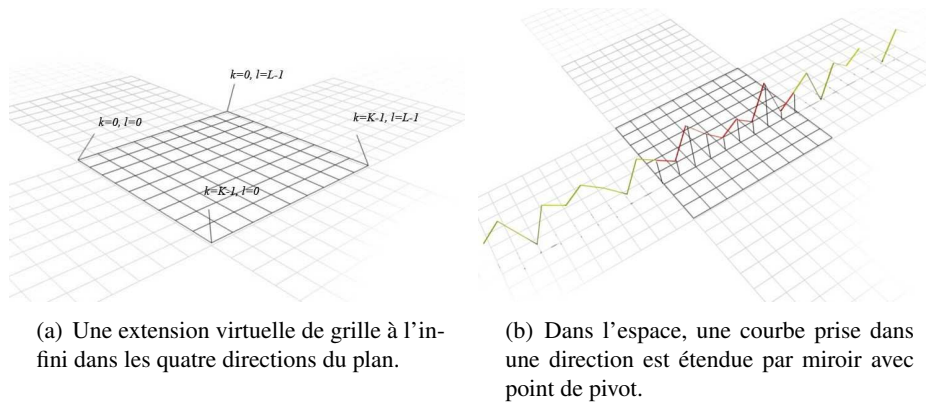


FIG. 17.3: Extension d'une grille dans l'espace.

pour étendre virtuellement un maillage $\{V_{\Theta_K(k), \Theta_L(l)}\}$, où les indices des sommets (k, l) peuvent prendre valeur dans tout \mathbb{Z} .

→ **Le plan** possède un bord. Mais par analogie avec une image, nous pouvons distinguer quatre extensions différentes, se situant aux quatre points cardinaux de la grille dans le domaine paramétrique (figure 17.3(a)). Dans le cas du filtrage d'une image, la technique habituelle est de considérer les pixels en dehors de l'image comme nuls, ou égaux à la dernière valeur de pixel connue dans la direction de l'extension :

$$\begin{cases} V_{K+\epsilon, l} &= V_{K-1, l} \\ V_{-\epsilon, l} &= V_{0, l} \\ V_{k, L+\epsilon} &= V_{k, L-1} \\ V_{k, -\epsilon} &= V_{k, 0} \end{cases} \quad (17.6)$$

Dans le cas d'une surface paramétrique, cela reviendrait à agglomérer les sommets des extensions à leurs bords respectifs, et donc introduire une discontinuité sur le cadre. Il est préférable de prolonger le signal de la même façon dans l'espace que dans le domaine des paramètres. Les travaux de [Brigger 00] rappellent certaines méthodes d'extension de signaux monodimensionnels. Puisque nous nous sommes ramené à un contexte monodimensionnel (figure 16.5), nous pouvons appliquer ces extensions. En particulier, l'extension par miroir avec point de pivot¹ permet de conserver une continuité aux points extrêmes (figure 17.3(b)).

→ **Le cylindre** peut être soit le résultat d'un découpage d'un tore le long d'un cercle générateur (méridien ou parallèle), soit le collage de deux cotés opposés d'un plan. Dans la direction des parallèles, c'est l'équation (17.5) qui déterminera les coordonnées des sommets. Dans les directions méridiennes, les extensions seront produites de façon similaire à celles d'un plan.

¹Anti-mirror with pivot point, en anglais dans le texte.

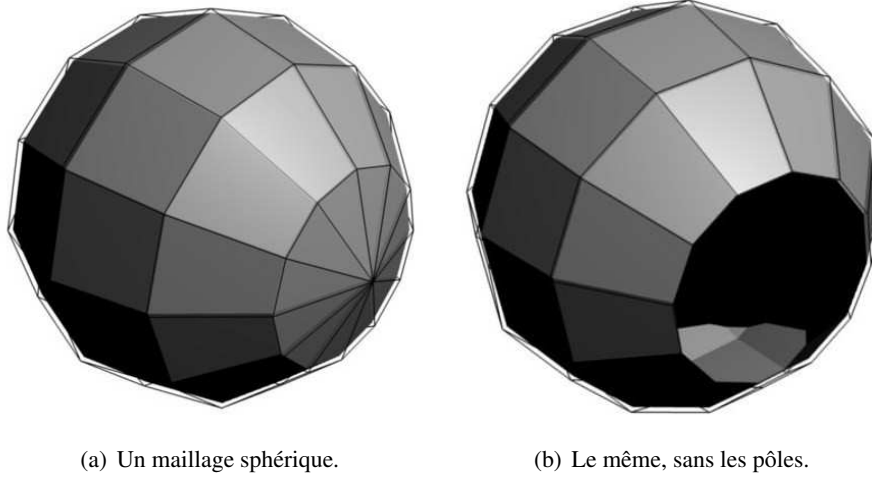


FIG. 17.4: Une sphère peut être représentée par un maillage de valence 4 presque partout (a). Les pôles ont une valence égale aux nombres de méridiens. Une sphère sans les pôles est homéomorphe à un cylindre (b).

17.2 Maillages avec singularités, cas de la sphère

Toutes les surfaces fermées de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle possèdent des points singuliers qu'il n'est généralement pas possible de mailler avec quatre voisins seulement. La théorie de Morse donne une explication de cette contrainte en formalisant le comportement d'une fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sur une variété \mathcal{M} . En bref, les extrema de la fonction sont les lieux de départ ou d'arrivée des lignes intégrales de la fonction : imposer quatre voisins à un point situé sur une singularité revient à représenter une surface avec seulement quatre lignes. Les points-selles de f , quand ils existent, sont aussi des singularités et devront être traités différemment pour être filtrés.

La sphère est une surface de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle ne possédant pas de points-selles ($\chi = 2$). L'existence des deux pôles est confirmée par la définition d'une fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ simple, la fonction Altitude. À chaque sommet V_i d'une sphère de centre O et de rayon r est attribué son altitude z dans le repère (O, x, y, z) . Le minimum de f est en $z = -r$, le pôle sud, et le maximum est en $z = r$, le pôle nord. En tant qu'extrema de f , les pôles sont des singularités.

17.2.1 Équation paramétrique de la sphère

De la même manière que les maillages sans singularité vus précédemment, il existe une équation paramétrique discrète de la sphère utilisant les paramètres $k \in [0, K[$ et $l \in [0, L[$ et définie par :

$$\begin{cases} g_x(k, l) = r \cdot \cos\left(\pi\left(2\frac{k}{K} - 1\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(2\frac{l}{L} - 1\right)\right) \\ g_y(k, l) = r \cdot \sin\left(\pi\left(2\frac{k}{K} - 1\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(2\frac{l}{L} - 1\right)\right) \\ g_z(k, l) = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(2\frac{l}{L} - 1\right)\right) \end{cases} \quad (17.7)$$

Cette paramétrisation impose un nombre K de méridiens et un nombre L de parallèles, mais elle offre une grille bidimensionnelle de dimensions (K, L) pour laquelle un filtrage *B-Spline* lissant semble a priori possible. Se pose de nouveau la question du voisinage aux bords du domaine paramétrique.

De façon triviale, nous constatons que le comportement de la surface aux valeurs extrêmes de k est identique à celui d'un tore. Tous les points tels que $k < 0$ ou $k \geq K$ sont définis par la relation de congruence (17.5).

Par contre, les valeurs extrêmes de l sont censées nous donner les pôles de la sphère. Effectivement, $V_{0,0}$ est bien le pôle sud. Le problème est que $V_{0,0} = V_{k,0}$. Dans ces conditions, quel couple (k, l) correspond au pôle sud ? Il en va bien évidemment de même pour le pôle nord, avec $l = L - 1$. Nous avons choisi de limiter le domaine de définition du paramètre l décrivant une ligne méridienne : dorénavant, $l \in [1, L - 1[$. Une sphère est maintenant composée de trois éléments : la grille définie par l'équation paramétrique (17.7), le pôle sud $V_s = V_{0,0}$ et le pôle nord $V_n = V_{0,L-1}$. La connectivité en tout point du maillage est définie par (16.3), sauf en V_n et V_s :

$$\begin{aligned} V_s^* &= \{V_{k,1}\} \quad k \in [0, K[\\ V_n^* &= \{V_{k,L-2}\} \quad k \in [0, K[\end{aligned} \tag{17.8}$$

Une sphère construite de cette façon est un maillage dont les points sont de valence 4 partout, sauf V_n et V_s qui sont de valence K (figure 17.4).

17.2.2 Extension d'un méridien à travers un point singulier

La définition du voisinage des pôles n'est pas suffisante pour l'application d'un filtre *B-Spline* lissant bidimensionnel. En effet, vu l'équation aux différences (11.9), il faut garantir pour un sommet $V_{k,l}$ une extension sans ambiguïté jusqu'à $V_{k,l+2}$, $V_{k,l-2}$, $V_{k+2,l}$ et $V_{k-2,l}$. Dans le cas de notre paramétrisation (17.7), la garantie existe pour les lignes parallèles tracées par k . La figure 17.5(a) montre que ce n'est pas le cas pour les lignes méridiennes au voisinage d'un pôle.

De façon pragmatique, nous définissons le point $V_{k,l+2}$ comme étant le point le plus en face possible de $V_{k,l}$ par rapport au pôle, ici $V_{k,l+1}$.

a) Un cas idéal

Dans la figure 17.5(b), un pôle compte un nombre pair de méridiens régulièrement répartis autour du point. L'extension d'un méridien k est formée du pôle suivi du méridien $[k + K/2]_K$. Comme la paramétrisation de la sphère produit implicitement un espacement régulier des méridiens, il suffit de contraindre K à un nombre pair pour utiliser ce type d'extension.

b) Le cas général

La configuration d'un pôle, en terme de direction de ses méridiens, est plus souvent proche de la figure 17.5(c) que de la figure 17.5(b). La notion de point le plus en face se traduit alors par une relation vectorielle autour du pôle.

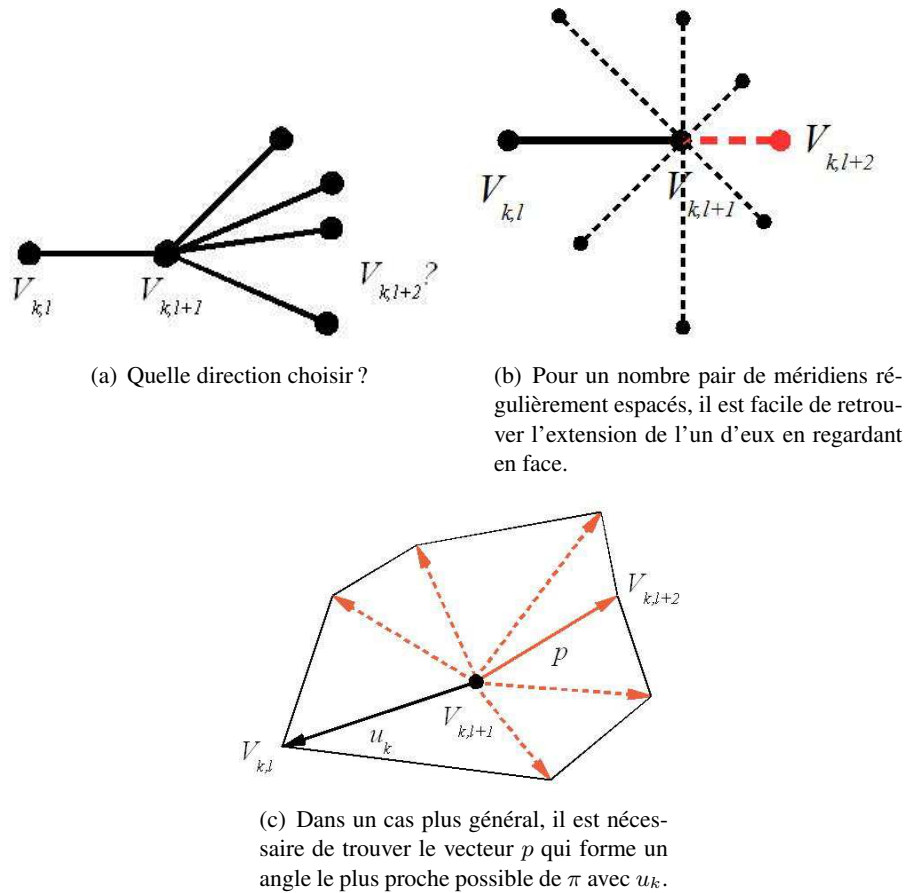


FIG. 17.5: Illustration de l'ambiguïté induite par un pôle dans la détermination d'un sommet $V_{k,l+2}$ à partir d'un sommet $V_{k,l}$ se situant dans le premier anneau de ce pôle.

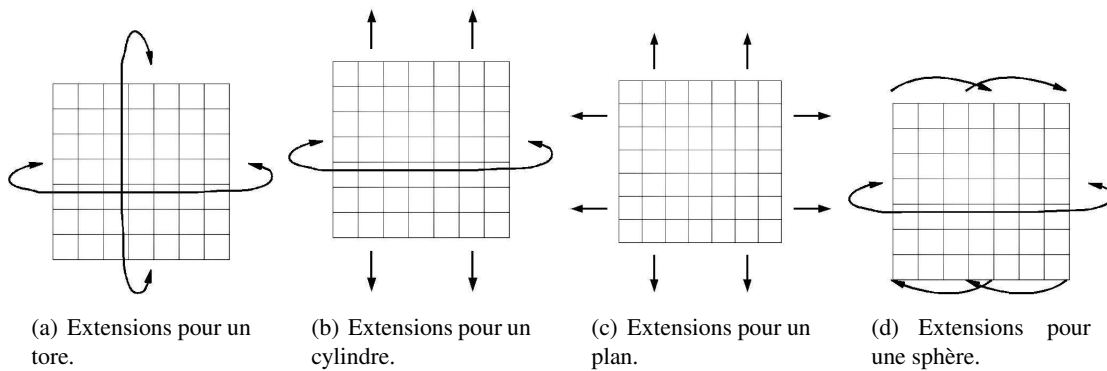


FIG. 17.6: Différentes extensions du domaine paramétrique selon la topologie de la surface.

Soit u_k le vecteur ayant le pôle $V_{k,l+1}$ comme origine et dirigé vers $V_{k,l}$. Soit \mathcal{P} l'ensemble des vecteurs formés par les arêtes contenant le pôle, ce dernier étant leur origine. Nous cherchons alors le vecteur $p \in \mathcal{P}$ tel que le produit scalaire $\frac{u_k \cdot p}{\|u_k\| \cdot \|p\|}$ soit minimal. Ce vecteur p est formé du pôle et du point $V_{k,l+2}$.

17.2.3 Traitement d'un point singulier

Étant donné l'implantation monodimensionnel du filtre *B-Spline* lissant, les méridiens seront filtrés comme autant de courbes indépendantes et donc le pôle sera inmanquablement traité autant de fois qu'il y a de méridiens. Les différentes solutions à ce problème sont :

- Retenir la position obtenue pour le dernier méridien effectivement filtré,
- Filtrer K fois le pôle induit K convolutions : le pôle est plus filtré que ses voisins, la fréquence de coupure n'est plus la même.
- Retenir la valeur moyenne des positions obtenues sur la totalité des méridiens filtrés.

Pour éviter un choix arbitraire (a) ou un filtrage aux pôles différent des autres points (b), nous choisissons la valeur moyenne (c). Soit \hat{p}_k la position du pôle issue du filtrage du k^e méridien. Le pôle réellement filtré \hat{p} sera :

$$\hat{p} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{p}_k \quad (17.9)$$

17.3 Filtrage de maillages paramétriques

Ce chapitre nous a amené à construire des maillages compatibles avec un filtrage *B-Spline* lissant bidimensionnel. Ces maillages doivent être de genre 1 fermés ou de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, ouverts ou fermés. Dans tous les cas, le domaine paramétrique est borné mais les conditions de continuité de la surface ne sont pas les mêmes selon l'existence d'un bord ou non, ou la présence d'un point singulier. La figure 17.6 récapitule les différents types d'extensions traitées précédemment.

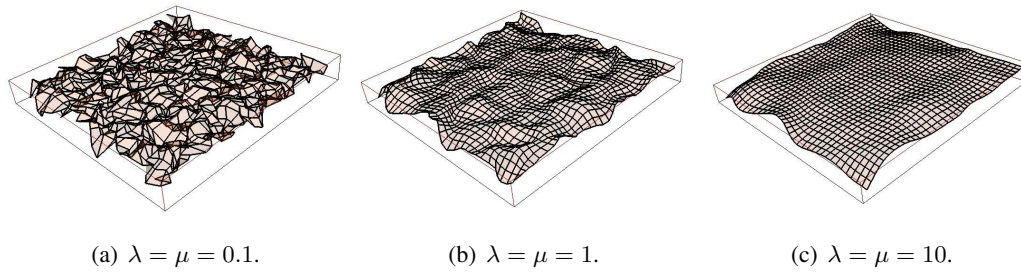


FIG. 17.7: filtrage d'un plan.

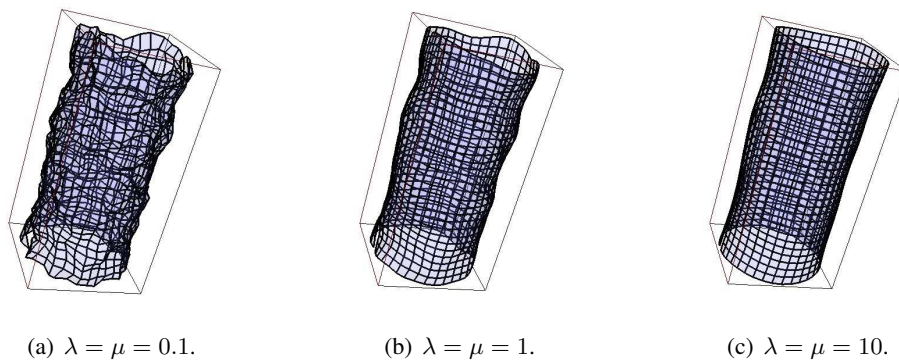


FIG. 17.8: filtrage d'un cylindre.

Plusieurs résultats de filtrage sont exposés dans les figures 17.7 à 17.10. Les maillages utilisés sont construits avec les équations paramétriques (17.2), (17.3), (17.4) et (17.7). Ensuite, les points des maillages sont déplacés aléatoirement dans l'espace. Les conditions limites dans les domaines paramétriques sont en accord avec la topologie connue a priori (figure 17.6).

Les résultats montrent que nous sommes capables de filtrer un maillage paramétrique cylindrique, plan, torique ou sphérique par le filtre *B-spline* lissant, au même titre qu'une courbe du plan (voir paragraphe 11.3).

NOUS avons montré dans ce chapitre comment construire des maillages quadrangulaires de valence 4 presque partout compatibles avec un filtrage *B-Spline* lissant bidimensionnel. Ils sont issus de fonctions paramétriques connues. Ces maillages paramétriques peuvent être à bord(s), sans bord et avec des singularités de type pôles d'une sphère. Nous avons proposé des méthodes d'extensions des maillages dans les différents cas pour permettre au filtre de traiter tous les sommets. Nous avons montré le résultat de quelques filtrages de maillages quadrangulaires.

Le chapitre suivant fait état de la non-uniformité d'un maillage quadrangulaire et propose d'utiliser la propriété de filtrage variant vu dans le chapitre 11.

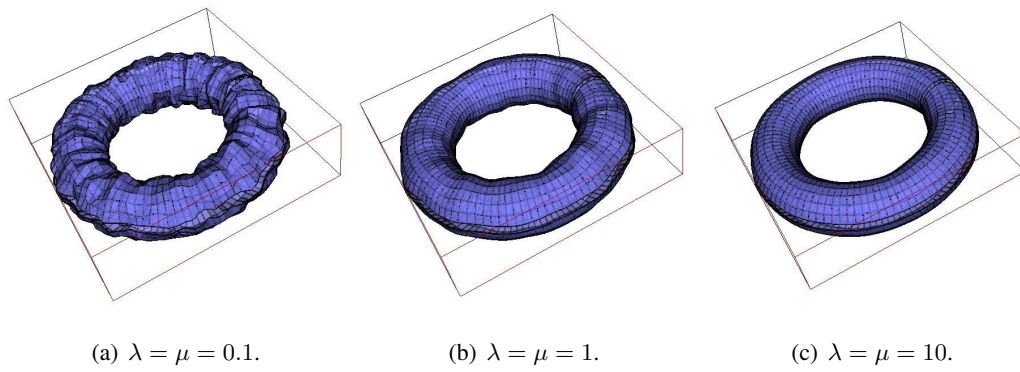


FIG. 17.9: filtrage d'un tore.

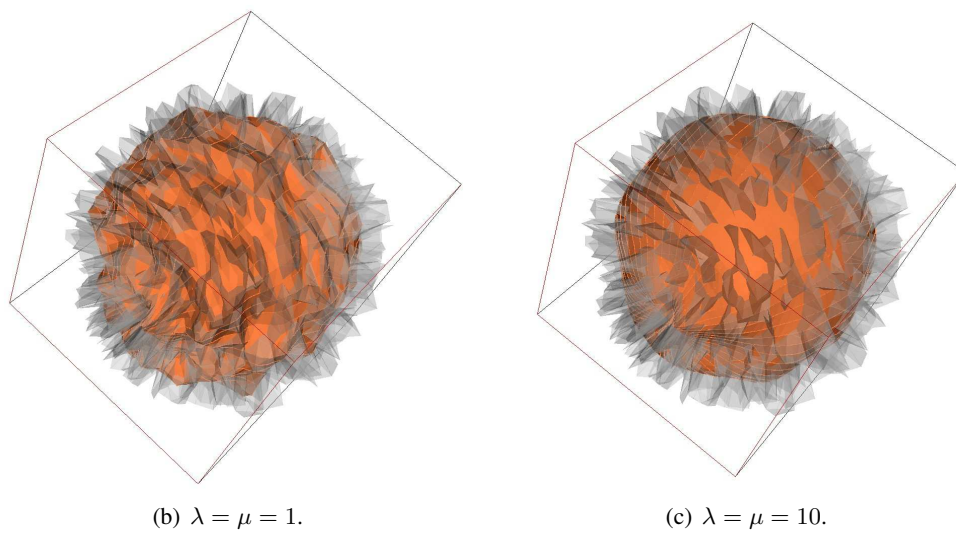
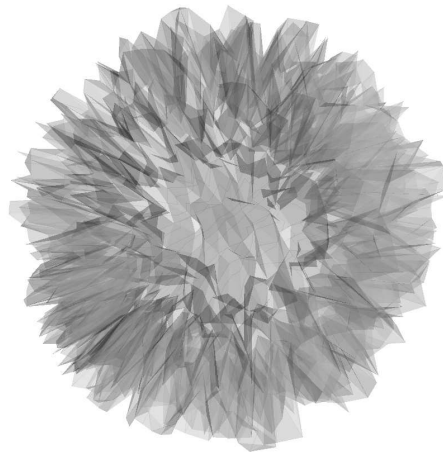


FIG. 17.10: filtrage d'une sphère.

18

Filtrage variant de maillages quadrangulaires

LES précédents chapitres ont montré que le filtrage *B-Spline* lissant de surfaces est possible, moyennant une contrainte sur la connectivité. Parallèlement, dans le chapitre 11, nous avons montré l'influence de l'échantillonnage d'un contour sur l'uniformité du filtrage.

Dans ce chapitre, nous mettrons en évidence la non-uniformité d'un maillage quadrangulaire et ses conséquences sur un filtrage *B-Spline* lissant bidimensionnel avec λ et μ constants. Nous montrerons ensuite comment le filtre *B-Spline* lissant peut adapter automatiquement la valeur de λ en fonction du pas d'échantillonnage local pour produire un effet de lissage identique sur tout un contour. Cette adaptation sera appliquée au filtrage d'un maillage quadrangulaire sphérique nécessairement non-uniforme.

Pour finir, nous intégrerons le filtrage *B-Spline* lissant bidimensionnel de maillage quadrangulaire dans l'algorithme *MoDeReS* et nous montrons les avantages d'un filtrage variant en fonction de l'échantillonnage.

18.1 Uniformité d'un maillage

Par définition, un maillage uniforme est un maillage dont toutes les arêtes sont de même longueur. Il est facile de construire un maillage cylindrique quadrangulaire où toutes les arêtes sont de même longueur. Il en va de même pour le plan. Nous allons voir que ce n'est pas le cas de la sphère.

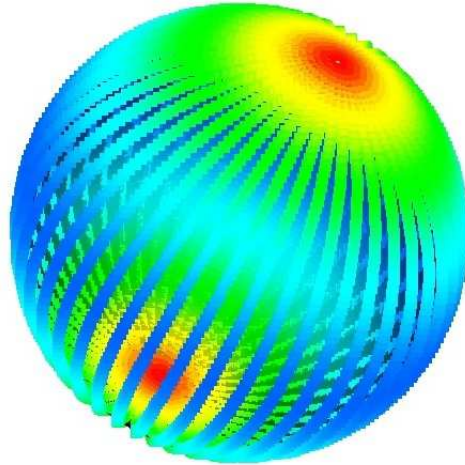


FIG. 18.1: Cette sphère est colorée selon la distance d'un point à ses voisins sur une ligne parallèle. Les distances minimales sont en rouge, maximales en bleu.

18.1.1 Mise en évidence de la non-uniformité

Dans le cas des maillages de valence 4 presque partout, la propriété d'uniformité est parfois impossible à respecter. L'exemple de la sphère le confirme : le cercle équatorial \mathcal{C}_e est une courbe de k points qui sont à l'intersection d'autant de méridiens. Le cercle polaire \mathcal{C}_p est formé du voisinage du pôle, qui contient k points également. D'après l'équation paramétrique de la sphère (17.7) et en posant $l = \frac{L}{2} - 1$, le rayon du cercle équatorial r_e est égal au rayon r de la sphère. Le cercle polaire correspondant à $l = 1$ est de rayon r_p défini par :

$$r_p = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{L} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (18.1)$$

Nous constatons que $r_p < r_e \forall L > 1$. Le pas d'échantillonnage¹ des cercles polaires et équatorial est donné respectivement :

$$\begin{aligned} d_e &= \frac{2\pi r_e}{K} \\ d_p &= \frac{2\pi r_p}{K} \end{aligned} \quad (18.2)$$

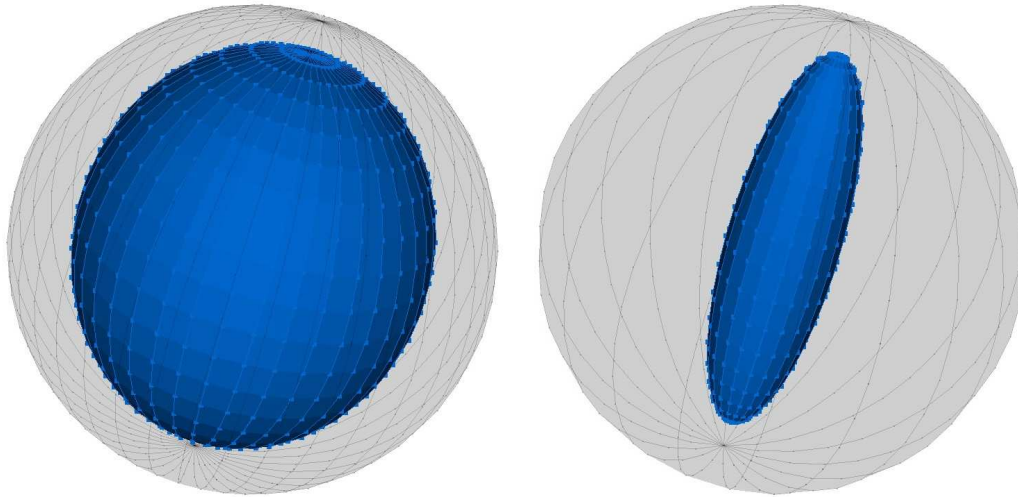
Il en ressort que $d_e > d_p \forall L > 1, r \neq 0$. Pour souligner la non-uniformité d'un maillage quadrangulaire sphérique, une sphère colorée en fonction de la distance moyenne d'un point à ses voisins dans la direction des parallèles est montrée dans la figure 18.1.

Par extrapolation, nous pouvons affirmer que cette non-uniformité est valable pour un maillage torique quadrangulaire dont la paramétrisation est donnée dans l'équation (17.1).

18.1.2 Conséquence pour un maillage filtré

Dans la figure 11.9, nous avons montré l'effet d'un échantillonnage non-uniforme sur le filtrage B-Spline lissant : une densité plus faible de points sur le contour induit un lissage plus fort. Ce phénomène se retrouve lors du filtrage d'un maillage. La figure 18.2 montre un exemple sur

¹Le pas d'échantillonnage est la distance euclidienne entre deux points.



(a) Les parallèles de cette sphère comptent chacune 40 points, les méridiens 20.

(b) Les parallèles et méridiens de cette sphère comptent chacun 20 points.

FIG. 18.2: Filtrage d'une sphère avec $\lambda = \mu = 300$. En (b), l'effet de l'échantillonnage variant est mis en évidence : les parallèles sont plus lissées que les pôles, produisant un objet qui n'est plus sphérique. La comparaison entre (a) et (b) montre que pour une même valeur de λ , deux échantillonnages différents produiront deux résultats différents.

une sphère. Dans la figure 18.2(a), les parallèles ont un pas d'échantillonnage plus fin que dans la figure 18.2(b) mais les méridiens sont échantillonnés de la même façon. Nous constatons que deux objets identiques à l'exception de la résolution dans une direction sont différents à la sortie d'un même filtrage. Nous pouvons extrapoler en affirmant que cet effet de sur-filtrage pour des zones sous-échantillonnées sera également visible comme dans le cas du filtrage de contours paramétriques (paragraphe 11.3).

18.2 Adaptation du filtre à l'échantillonnage

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré que les courbes $g(k) = (g_x(k), g_y(k))$ et surfaces paramétriques $g(k, l) = (g_x(k, l), g_y(k, l), g_z(k, l))$ étaient composées de plusieurs signaux discrets monodimensionnels définis dans l'espace paramétrique, leur fréquence d'échantillonnage f_e étant alors $f_e = \Delta k = 1$. Dans les espaces de plongement, bi- ou tridimensionnels, la constance de la fréquence d'échantillonnage n'est pas systématique. Si elle n'est pas forcée par un rééchantillonnage fréquent (voir paragraphe 12.1.3), le filtrage n'aura pas le même impact partout, comme souligné au paragraphe précédent.

Puisque le paramètre λ peut varier le long du contour, impliquant une fréquence de coupure f_c du filtre SB_λ locale et que nous connaissons λ en fonction de f_c (équation (11.5)) et f_c en fonction de λ (équation (11.6)), nous sommes capables d'adapter la fréquence de coupure du filtre localement, en fonction de la fréquence d'échantillonnage.

18.2.1 Relation entre l'échantillonnage et λ

La période d'échantillonnage d'un signal discret temporel est le temps qui sépare deux échantillons. Nous définissons la période d'échantillonnage en un point k d'une courbe $g(k) = (g_x(k), g_y(k))$ dans \mathbb{R}^2 ou $g(k) = (g_x(k), g_y(k), g_z(k))$ dans \mathbb{R}^3 comme étant la distance moyenne du point à ses voisins :

$$d_k = \frac{1}{2} \cdot \|g(k) - g(k-1)\| + \frac{1}{2} \cdot \|g(k) - g(k+1)\| \quad (18.3)$$

La fréquence d'échantillonnage local normalisée est $f_{e_k} = \frac{d_{max}}{d_k}$, où d_{max} est la plus grande distance d'un point à ses voisins que l'on peut rencontrer sur le maillage. Soit Λ un paramètre de régularisation globale correspondant au cas idéal où $f_e = 1$ partout. D'après la relation (11.6) introduisant r_g^{-1} , la fréquence de coupure f_c correspondante est $f_c = r_g^{-1}(\Lambda)$. Nous utilisons la relation (11.5) en imposant une fréquence de coupure f_c quel que soit l'échantillonnage local f_{e_k} . Nous obtenons ainsi une valeur λ_k en chaque point :

$$\begin{aligned} \lambda_k &= r_g \left(\frac{f_c}{f_{e_k}} \right) \\ &= r_g \left(\frac{r_g^{-1}(\Lambda)}{f_{e_k}} \right) \\ &= r_g \left(r_g^{-1}(\Lambda) \cdot \frac{d_k}{d_{max}} \right) \end{aligned} \quad (18.4)$$

La figure 18.3 montre sur une courbe du plan que l'adaptation de λ en un point k en fonction de d_k évite le problème du sur-filtrage des portions de la courbe sous-échantillonnées. Le filtre variant s'appelle alors SB_Λ .

18.2.2 Application au filtre bidimensionnel

Au début de ce chapitre, nous avons vu qu'un maillage n'est pas nécessairement uniforme. Dans la partie III traitant des contours actifs, ce problème est résolu par un simple rééchantillonnage du contour pour imposer l'uniformité. Dans le cas des maillages semi-réguliers de valence 4, forcer l'uniformité peut se révéler difficile voire impossible. Par contre, $SB_{\lambda,\mu}$ étant séparable en SB_λ et SB_μ , il est possible de rendre chacun des filtres monodimensionnels adaptatifs selon le pas d'échantillonnage dans la direction de filtrage. Ainsi, λ_k et μ_l sont les paramètres variants des filtres SB_λ et SB_μ . La figure 18.4 rappelle l'effet de sur-filtrage à l'équateur d'une sphère et montre le résultat d'un filtrage variant SB_Λ en fonction de l'échantillonnage.

Nous montrons dans la figure 18.5 la robustesse à l'échantillonnage d'un filtrage variant. Dans cette figure, la sphère subit une déformation géométrique qui lui donne un aspect de citron. Nous avons observé cet effet pour des très grandes valeurs de Λ (par exemple, la figure 18.4 n'est pas concernée). Cependant, nous utilisons cet artéfact pour montrer que quel que soit le nombre de méridiens et de parallèles, une sphère réagit au filtrage de la même façon et ce, même dans le cas de fortes anisotropies (figures 18.5(d) et 18.5(e)).

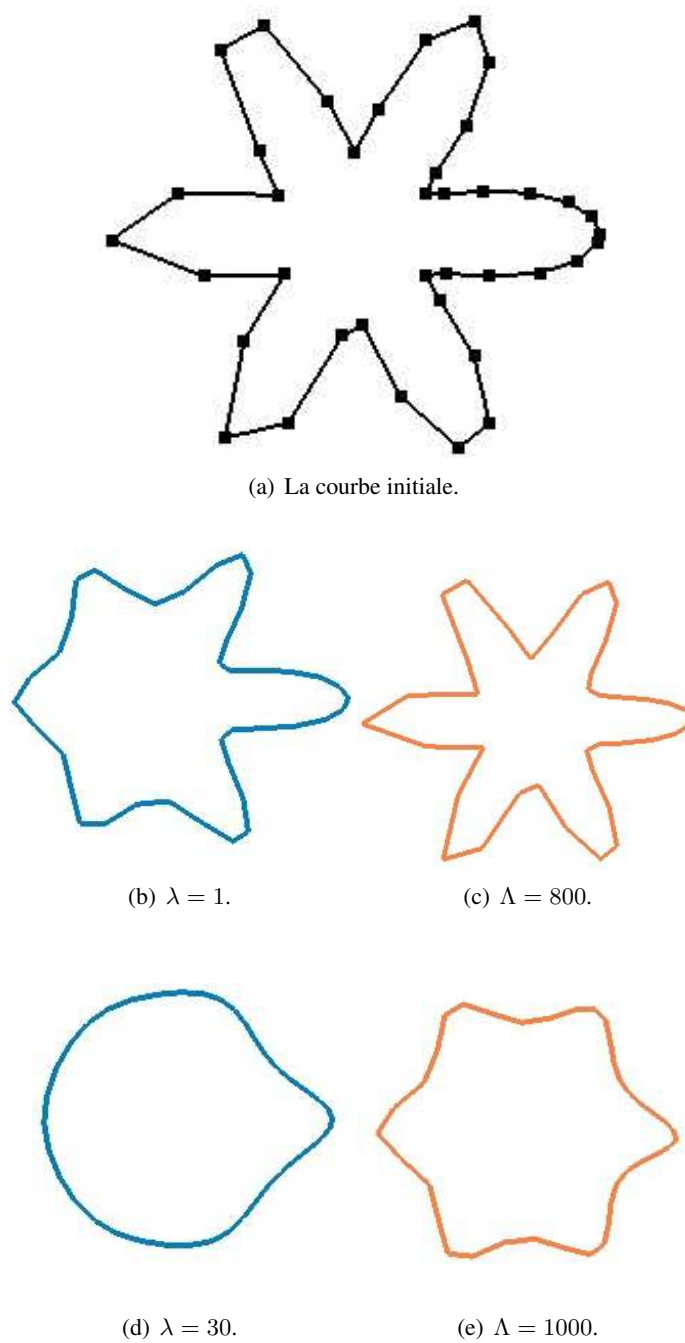
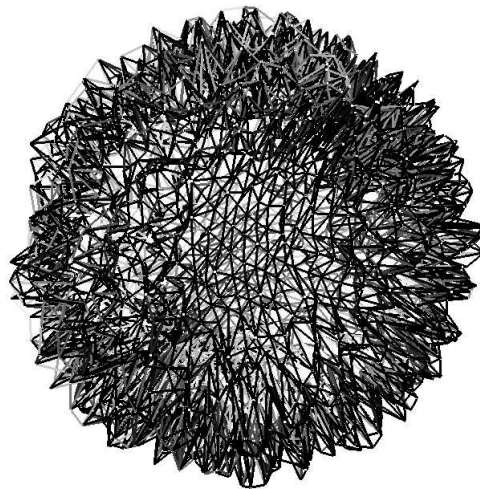


FIG. 18.3: Filtrage d'une courbe du plan dont l'échantillonnage varie le long de la courbe par le filtre SB_λ pour deux valeurs de λ ((b) et (d)) et par le filtre SB_Λ pour deux valeurs de Λ ((c) et (e)).



(a) Vue en fil de fer d'une sphère bruitée.

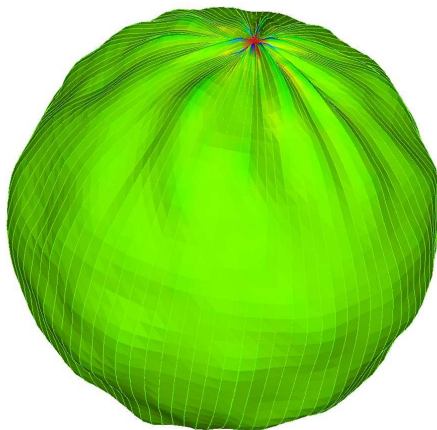
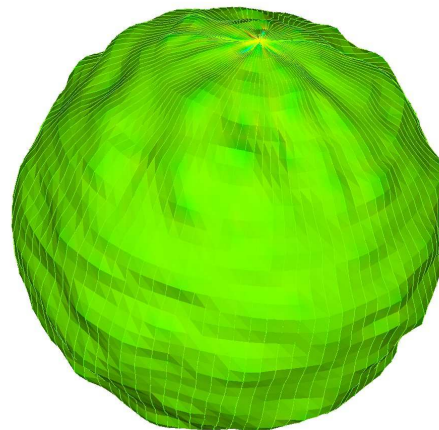
(b) Filtrage de (a) par $SB_{\lambda,\mu}$ avec $\lambda = \mu = 3$.(c) Filtrage de (a) par SB_{Λ} avec $\Lambda = 3$ (λ_k et μ_l dépendent du pas d'échantillonnage).

FIG. 18.4: Une sphère bruitée filtrée selon les méthodes globale (a) et locale (b). Les couleurs correspondent à la courbure moyenne locale. La méthode globale lisse plus l'équateur que les pôles. La méthode locale s'adapte au pas d'échantillonnage et produit un effet de lissage uniforme.

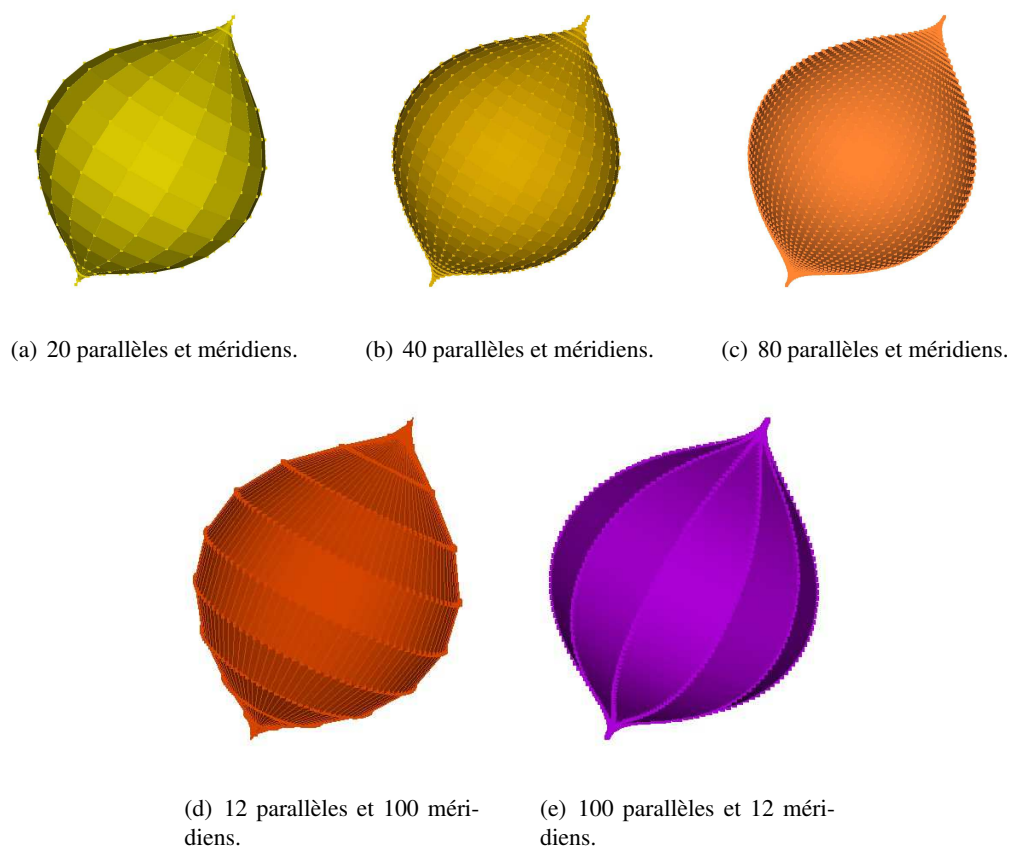


FIG. 18.5: Filtrage $SB_{\lambda,\mu}$ localement adapté d'une sphère avec différents échantillonnages de la surface.

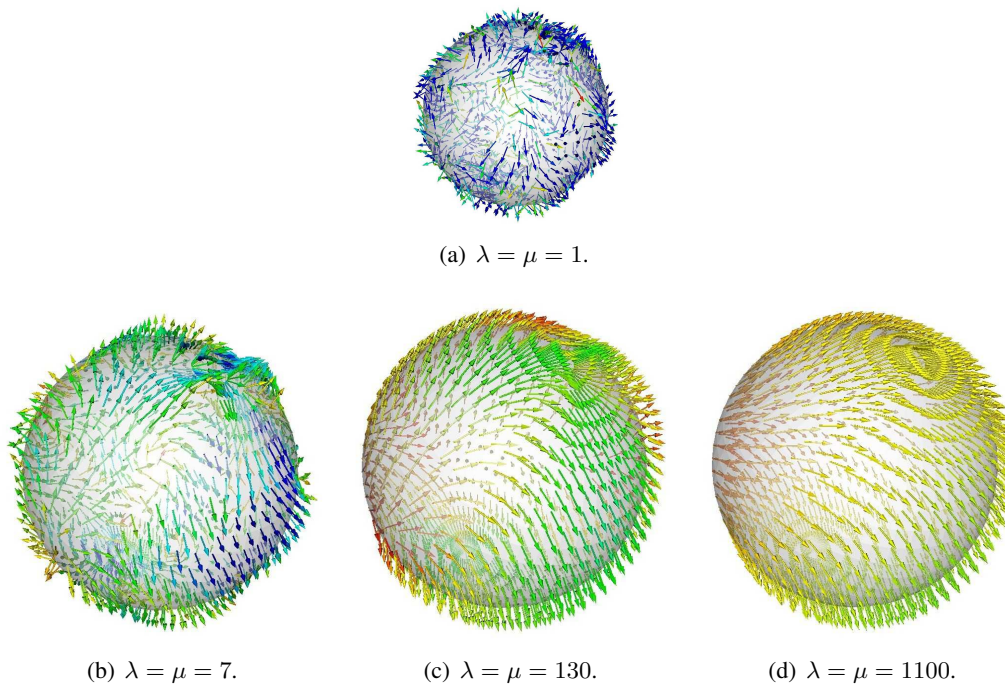


FIG. 18.6: Filtrage d'un champ de vecteurs f tridimensionnels défini sur une 2-variété. Les vecteurs présentés appartiennent au champ \hat{f} . Ils sont colorés selon leur norme, bleu étant la valeur maximale rencontrée sur le champ original et rouge la valeur minimale.

18.3 Intégration dans l'algorithme de déformation *MoDeReS*

Nous avons défini dans les chapitres précédents comment appliquer le filtre *B-Spline* lissant sur des surfaces. Nous venons de voir que la version variante du filtre peut s'adapter à l'échantillonnage pour uniformiser l'effet de filtrage sur toute la surface.

Nous rappelons cependant que le coeur de l'algorithme du *MoDeReS* est le filtrage des forces externes et non du modèle géométrique lui-même. Nous montrons dans les paragraphes suivants comment le filtre *B-Spline* lissant bidimensionnel s'intègre dans l'algorithme de déformation *MoDeReS* et les avantages liés au filtrage variant.

18.3.1 Filtrage de vecteurs sur un maillage

La figure 18.6 illustre le filtrage par le filtre *B-Spline* lissant d'un champ de vecteurs définis sur le maillage quadrangulaire d'une sphère. Soit $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs défini sur une variété \mathcal{M} à valeur dans \mathbb{R}^3 . Le champ de vecteurs filtré sera $\hat{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dans la figure 18.6, les composantes de chaque vecteur de f sont tirées aléatoirement uniformément entre -1 et 1 . Plusieurs valeurs de filtrage globales et isotropes ($\lambda = \mu$ indépendamment de l'échantillonnage) sont employées. L'accroissement du paramètre de régularisation produit un champ de vecteurs \hat{f} de plus en plus homogène.

Dans la figure 18.6, le filtre ne s'adapte pas à l'échantillonnage. L'intérêt du filtrage variant en fonction du pas d'échantillonnage est illustré dans le prochain paragraphe.

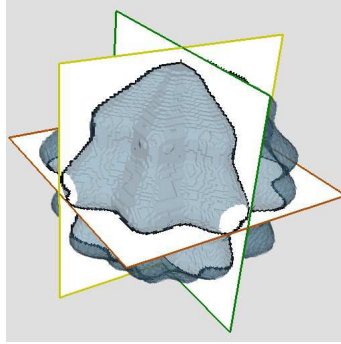


FIG. 18.7: Isosurface (marching cubes) d'un volume construit avec l'équation paramétrique (18.6).

18.4 Intérêts du filtrage variant

Nous avons utilisé dans le chapitre 13 un objet de synthèse issu d'une équation paramétrique. L'intérêt était d'intégrer différents niveaux de détails à l'objet recherché. Nous avons eu la même démarche pour tester le *MoDeReS-3D* en définissant un volume ressemblant à une boîte à oeuf sphérique. Les différents niveaux de détails permettent de montrer l'avantage d'un filtrage en fonction de l'échantillonnage.

18.4.1 La boîte à oeuf sphérique

L'objet de synthèse représenté dans la figure 18.7 est une sphère dont le rayon est modulé sur certaines parties de la surface. Si α et β sont les paramètres de la sphère, avec $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\beta \in [0, \pi]$, la modulation est donnée par :

$$\rho = A \cdot \sin(\alpha \cdot \omega_\alpha) + B \cdot \sin(\beta \cdot \omega_\beta) \quad (18.5)$$

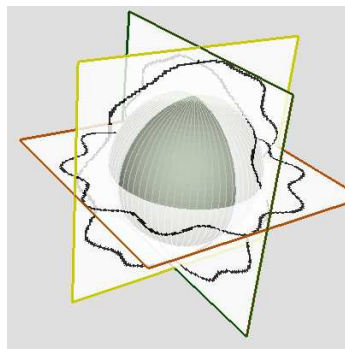
où A et ω_α sont l'amplitude et la fréquence de la modulation selon α , de même pour B et ω_β selon β . La sphère est alors construite à partir des fonctions paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\alpha, \beta) &= (r + \rho) \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ y(\alpha, \beta) &= (r + \rho) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ z(\alpha, \beta) &= r \cdot \cos(\beta) \end{cases} \quad (18.6)$$

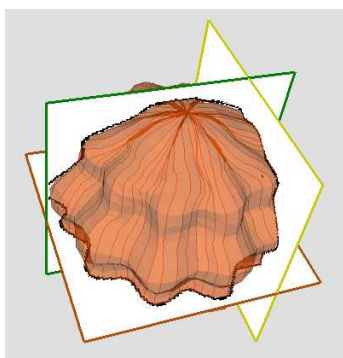
où r est le rayon de la sphère. Dans la figure 18.7, le volume est de taille 128^3 , le rayon est $r = 58$, les fréquences sont $\omega_\alpha = \omega_\beta = 10$ et les amplitudes $A = B = 5$. En fixant les voxels qui se trouvent sur la surface à 1 et les autres à 0, nous obtenons un volume binaire représentant une carte de contours utilisée pour calculer le champ de forces externes.

18.4.2 Déplacements tangentiels

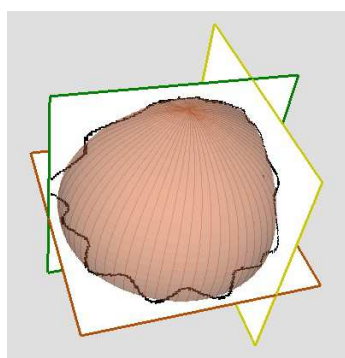
Dans un modèle déformable, les déplacements tangentiels à la surface sont gênants. Ils n'apportent pas d'information sur la déformation et désorganisent la paramétrisation. Ce problème a



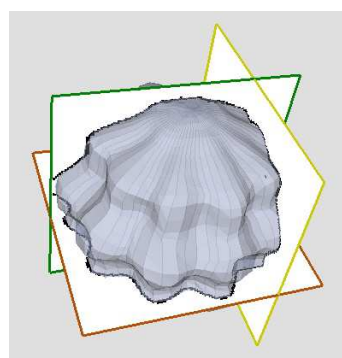
(a) Initialisation d'un modèle sphérique pour la segmentation.



(b) Segmentation de la boîte à oeuf en 76 itérations avec $\lambda = \mu = 3$. Les pôles situés dans la zone à faible courbure de la surface sont perturbés par des déplacements tangentiels.



(c) Après 73 itérations et $\lambda = \mu = 700$. La régularisation est telle que les recouvrements ne sont plus visibles, mais les détails de la sphère non plus.



(d) L'adaptation de la régularisation en fonction du pas d'échantillonnage local contraint les mouvements aux pôles mais laisse les points proches de l'équateur détecter les détails. $\Lambda = 1000$, après 65 itérations.

FIG. 18.8: Segmentation de la boîte à oeuf avec une régularisation globale ((b) et (c)) et locale (d). Les forces externes sont une combinaison linéaire des forces ballons et du vecteur gradient du volume.

été traité nombre de fois, mais nous montrons dans la figure 18.8 qu'un filtrage variant en fonction de l'échantillonnage contribue au maintien d'une surface correctement maillée. En effet, dans la figure 18.8(b), une valeur de λ, μ maximale est trouvée pour segmenter la boîte à oeuf sans perdre les détails de modulation. Dans ce cas, les points proches du pôle sont d'autant plus libres qu'ils sont plus denses que les points proches de l'équateur et sont perturbés par des déplacements tangentiels. Pour imposer aux points polaires une certaine cohérence, le paramètre de régularisation a été fortement augmenté (figure 18.8(c)). Cela a pour conséquence la perte des détails dans le résultat de la segmentation.

La figure 18.8(d) illustre un avantage du filtrage variant. Comme pour la figure 18.8(b), une valeur maximale du paramètre de régularisation globale Λ est trouvée de façon à conserver les détails. Les pôles étant échantillonnés plus finement qu'à l'équateur, la régularisation locale sera plus forte. Les points polaires se déplaceront de façon uniforme et éviteront les irrégularités observées dans la figure 18.8(b).

18.4.3 Influence de l'initialisation

La figure 18.8 montre le résultat de plusieurs segmentations dont le modèle initial était identique, en résolution et position. Nous avons montré dans ce chapitre que l'action du filtre était subordonnée à l'échantillonnage de la surface. Pour une sphère, l'échantillonnage étant dépendant de la position des pôles, nous montrons dans la figure 18.9 le résultat de plusieurs segmentations dont le modèle initial a subi une rotation. La représentation choisie est une coloration des sommets de la surface idéale \mathcal{S}_r en fonction de leur distance minimale à la surface segmentée \mathcal{S}_f , calculée par le logiciel MESH [Aspert 02].

Ainsi, dans la figure 18.9(a), le modèle initial n'a subi aucune rotation ($\theta_y = 0$). Ses pôles se situent dans la zone à faible courbure, l'équateur se trouve dans la partie modulée. La distance entre \mathcal{S}_r et \mathcal{S}_f est nulle aux pôles, mais grande dans la partie modulée puisque les paramètres de régularisation sont $\lambda = \mu = 20$. Après une rotation autour de l'axe y de $\theta_y = -\frac{\pi}{5}$, la figure 18.9(b) montre qu'une partie des détails de \mathcal{S}_r sont très proches de la segmentation \mathcal{S}_f . Ce phénomène est également visible dans la figure 18.9(c), où le modèle initial a été tourné de $\theta_y = -\frac{\pi}{10}$. Une superposition du résultat final après une rotation $\theta_y = -\frac{\pi}{10}$ sur la surface de référence \mathcal{S}_r indique que cet excès de proximité coïncide avec la position des pôles (figure 18.9(d)).

La même démarche a été appliquée pour une régularisation dépendante du pas d'échantillonnage et est illustrée dans la figure 18.10. La position du pôle du modèle initial n'influence pas le résultat. Dans la figure 18.10(a), l'initialisation est identique à la figure 18.9(a). Le modèle final visible par ses méridiens n'est pas attiré par les bosses et les creux. Le modèle initial de la figure 18.10(b) est tourné de $\theta_y = \frac{\pi}{5}$ autour de l'axe y . Le pôle, à l'intersection des méridiens, subit une régularisation suffisante pour produire un résultat proche de la figure 18.10(a).

La figure 18.11 montre la même robustesse à l'initialisation dans le cas où Λ est choisi suffisamment petit pour segmenter les détails de la boîte à oeuf.

NOUS avons souligné la non-uniformité des maillages quadrangulaires. Nous avons utilisé la

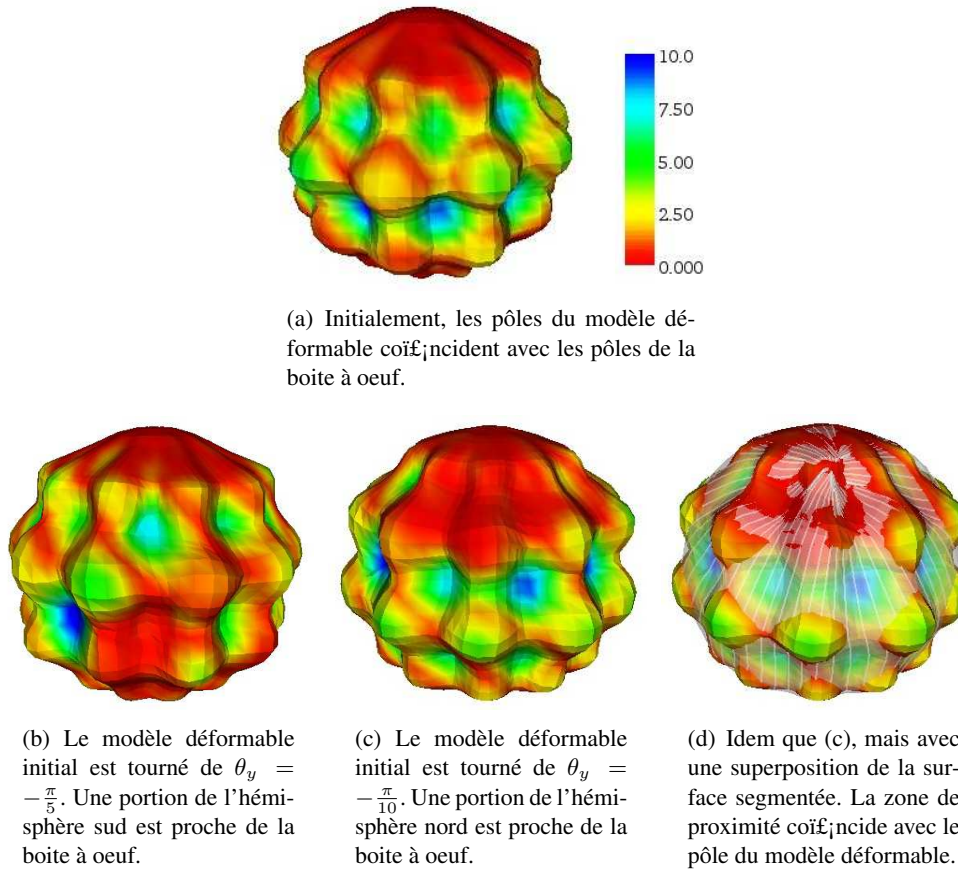


FIG. 18.9: Influence de la position d'un pôle sur la régularisation. La distance de la boîte à oeuf à une surface régularisée globalement ($\lambda = 20$) est indiquée par la couleur.

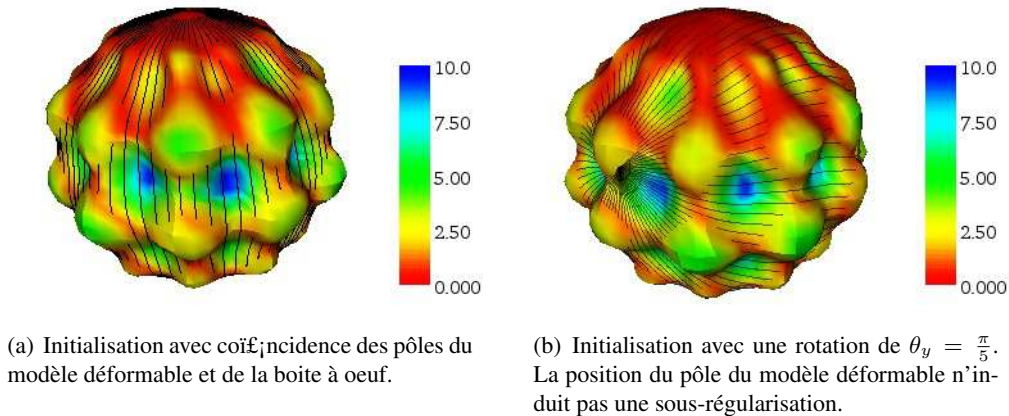


FIG. 18.10: Même mesure de distance que dans la figure 18.9, mais avec un modèle déformable régularisé localement en fonction de l'échantillonnage. Le paramètre de régularisation global est $\Lambda = 10000$.

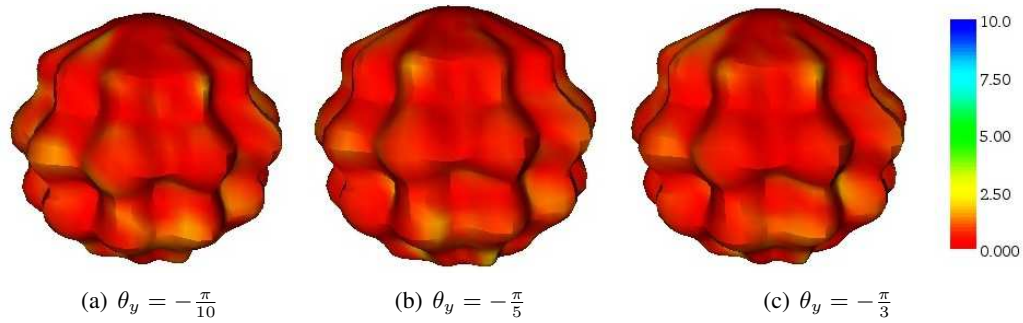


FIG. 18.11: Dans le cas où un Λ est choisi pour segmenter tous les détails (ici, $\Lambda = 2600$), la position des pôles n'influence pas la segmentation finale.

méthode de filtrage variant du chapitre 11.3.4 et les relations entre λ et fréquence de coupure du chapitre 11.2 pour adapter automatiquement λ au pas d'échantillonnage. Nous avons défini un paramètre global de régularisation Λ qui traduit l'importance du filtrage. Nous avons élargi la méthode de filtrage variant en fonction de l'échantillonnage au filtre *B-spline* lissant bidimensionnel pour gérer les non-uniformités d'un maillage quadrangulaire, et nous avons montré ses avantages dans le cadre d'une déformation. La solution du *MoDeReS-2D* était de rééchantillonner le contour pour maintenir un pas constant entre les points. Le maintien de l'uniformité pour un maillage quadrangulaire peut être impossible. Le filtrage variant en fonction de l'échantillonnage est une solution à ce problème.

Le chapitre suivant présentera des résultats de segmentation du *MoDeReS-3D* sur des structures anatomiques acquises par IRM.

19

Segmentation de structures anatomiques

LES précédents chapitres ont concerné le filtrage de maillages paramétriques quadrangulaires par un filtre *B-spline* lissant bidimensionnel. Nous avons également vu que dans le cadre d'une déformation, l'adaptation de la régularisation au pas d'échantillonnage local améliore la robustesse à l'initialisation et à l'échantillonnage du maillage.

Dans ce chapitre, nous commencerons par donner une vue générale de l'algorithme *MoDeReS* dans sa version 3D.

Ensuite, différentes structures anatomiques seront l'occasion de tester différents maillages paramétriques comme modèles initiaux. Un cylindre segmentera l'aorte, un plan ou une sphère seront appropriés pour détecter le plateau tibial. Un modèle de genre 0 plus général sera utilisé pour segmenter les ventricules latéraux d'un cerveau.

19.1 Vue générale de l'algorithme *MoDeReS-3D*

L'objectif de cette partie est d'étendre l'algorithme *MoDeReS* vu en 2D (figure 12.3) au 3D. La figure 19.1 montre les différentes étapes de l'algorithme *MoDeReS-3D*. Il est effectivement très semblable à son homologue 2D. Seule l'étape de rééchantillonnage n'apparaît pas, puisque nous avons vu dans le chapitre précédent que le filtre est capable de s'adapter à l'échantillonnage. C'est un atout dans le cas des maillages car leur rééchantillonnage peut être coûteux en temps de traitement et une subdivision locale de quadrangles n'est pas compatible avec le filtrage RII utilisé.

Notons que dans la figure 19.1, la régularisation est effectuée par le filtre $SB_{\lambda,\mu}$ de réponse impulsionnelle $sb_{\lambda,\mu}$, dont les paramètres λ et μ ne varient pas en fonction de l'échantillonnage. L'utilisation d'un filtre variant SB_{Λ} ne change en rien l'algorithme.

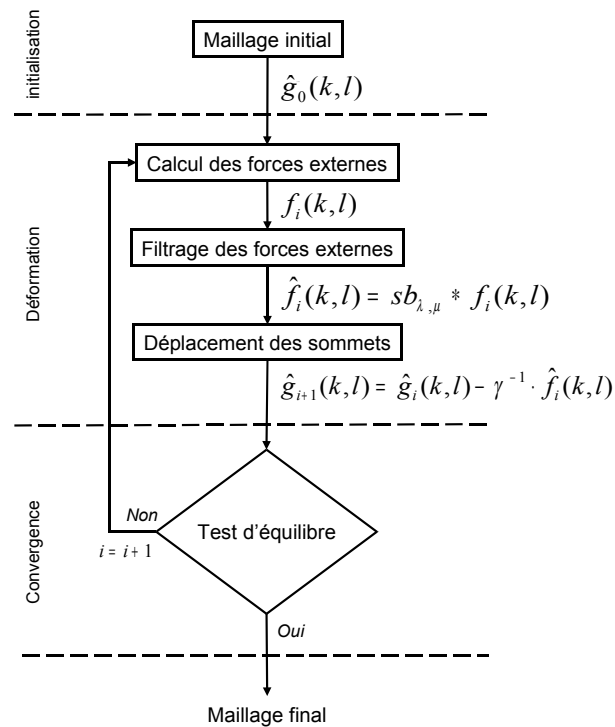


FIG. 19.1: Algorithme du MoDeReS-3D.

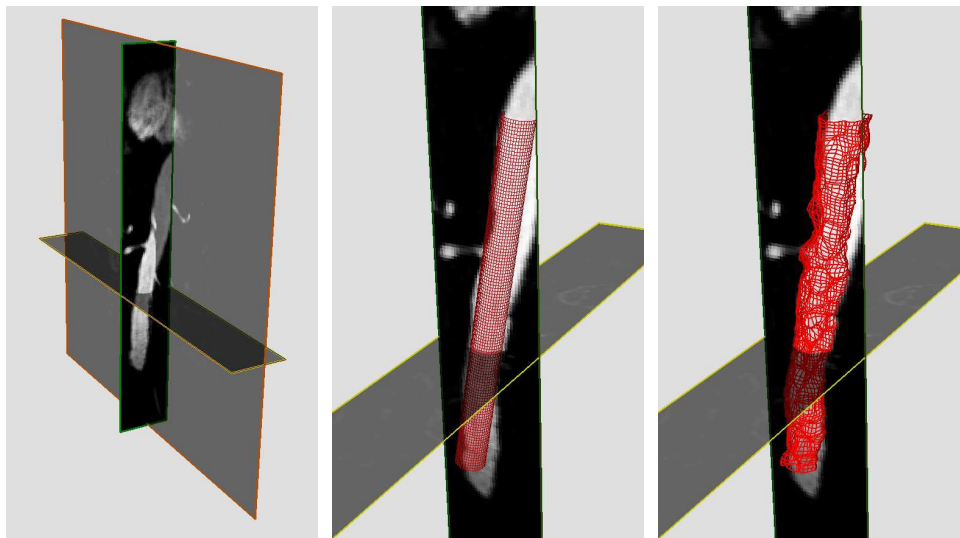
19.2 Résultats

19.2.1 Segmentation de l'aorte

L'aorte est une structure anatomique qui se prête à une segmentation par modèle déformable cylindrique. La figure 19.2(a) montre trois coupes d'un volume acquis par angio-IRM d'une partie de la cage thoracique.

a) Segmentation par un cylindre

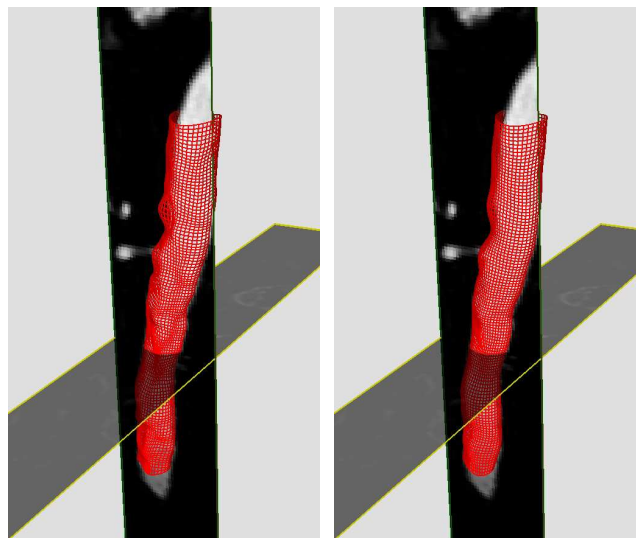
Nous montrons, dans la figure 19.2, la segmentation de l'aorte (figure 19.2(a)) par un cylindre. L'initialisation est un cylindre placé approximativement dans l'aorte (figure 19.2(b)). Le résultat des segmentations est conforme aux attentes. Une régularisation trop faible (figure 19.2(c), $\lambda = 0.1$) ne permet pas au cylindre initial de se déformer de façon suffisamment cohérente pour atteindre les bords de l'aorte. Une régularisation raisonnable (figure 19.2(d), $\lambda = 14$) produit une segmentation sensible aux détails, comme par exemple les départs des vaisseaux secondaires. Enfin, une grande valeur de λ (figure 19.2(e), $\lambda = 123$), synonyme de forte régularisation, entraîne une segmentation approximative de l'aorte.



(a) Volume de données acquises par angio-IRM de la cage thoracique.

(b) Modèle déformable initial.

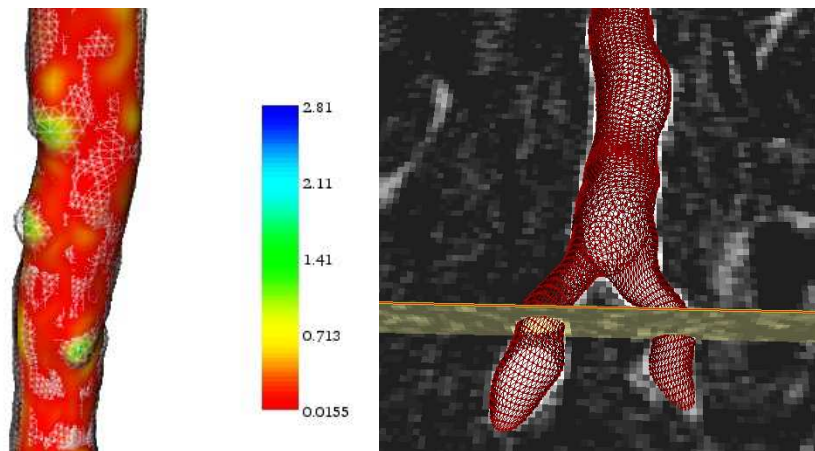
(c) $\lambda = 0.1$.



(d) $\lambda = 10$. Temps de segmentation 11s

(e) $\lambda = 120$. Temps de segmentation 16s

FIG. 19.2: Segmentation de l'aorte pour plusieurs valeurs de régularisation.



(a) Distance entre une segmentation fortement régularisée ($\lambda = 165$) et faiblement régularisée ($\lambda = 1.5$) de l'aorte. Les vaisseaux secondaires sont identifiés par une grande distance entre les deux surfaces.

(b) Deux surfaces actives initialisées sur chaque iliaque commune. Un recouvrement des deux cylindres initiaux existe au niveau de l'aorte abdominale. La bifurcation aortique est correctement segmentée.

FIG. 19.3: Deux applications du MoDeReS-3D dans l'exploration vasculaire.

b) Exemples d'applications

Le modèle déformable présenté dans cette thèse n'intègre pas de gestion de la topologie, contrairement à [McInerney 00, Lachaud 03]. La conséquence est qu'il ne peut pas segmenter les vaisseaux secondaires. Néanmoins, il est possible malgré la rigidité topologique de localiser les bifurcations. La figure 19.3(a) montre le résultat d'une segmentation par modèle cylindrique avec $\lambda = \mu = 165$, les forces externes étant toujours une combinaison linéaire des forces ballons et du gradient de la carte de contours. Cette segmentation est ensuite considérée comme le modèle initial d'une nouvelle segmentation où $\lambda = \mu = 1.5$. Les points du maillage situés sur un bord de l'aorte sont déjà en position d'équilibre, et ne bougeront plus ou peu. Par contre, les points se trouvant au centre d'une bifurcation seront poussés par les forces ballons et s'éloigneront de la surface initiale. La probabilité qu'une bifurcation existe croît avec la distance.

Nous revenons sur la rigueur imposée à la topologie dans une autre application. La bifurcation aortique n'échappe pas à l'impossibilité d'être détectée par un cylindre. Dans la figure 19.3(b), nous contourrons la difficulté en initialisant deux modèles déformables cylindriques, chacun ayant pour tâche de segmenter une artère iliaque commune. Les surfaces finales se recouvrent dans l'aorte abdominale, mais l'utilisation d'une valeur de régularisation identique pour les deux modèles déformables produit la même segmentation dans cette zone.

19.2.2 Segmentation de l'articulation du genou de cobaye

Le volume présenté dans la figure 19.4 est issu d'un imageur IRM à haut champ pour le petit animal. Nous avons déjà utilisé une coupe de ce volume pour tester le *MoDeReS-2D* (chapitre 13). Dans le cadre d'une étude pathologique d'animaux ostéoarthritiques, l'information pertinente est l'épaisseur des cartilages du genou [Bolbos 07]. Le *MoDeReS-3D* est utilisé pour segmenter

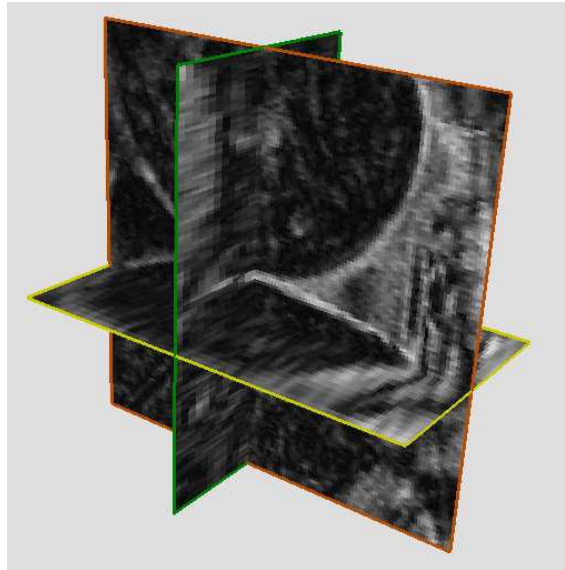


FIG. 19.4: Volume IRM d'un genou de rongeur de dimensions $128 \times 128 \times 24$ et une anisotropie $1 \times 1 \times 3$.

les interfaces entre os et cartilages du tibia et du fémur. Les modèles initiaux seront planaires ou sphériques.

a) Plateau tibial

Il s'agit de l'extrémité haute du tibia qui, comme son nom l'indique, est de forme planaire. Une initialisation grossière est donnée (figure 19.5(a)) sous la forme d'une grille isotrope de dimension 78×78 . Les forces ballons et le gradient de la carte de contours sont les forces externes guidant le modèle déformable jusqu'au plateau tibial (figure 19.5(b)).

La figure 19.6 reprend le volume du genou de rongeur de la figure 19.4 en initialisant cette fois le modèle déformable par une sphère (figure 19.6(a)). Une régularisation variante en fonction de l'échantillonnage ($\Lambda = 1800$) est utilisée pour obtenir le plateau tibial dans la figure 19.6(b).

b) Épiphyse distale

L'extrémité du fémur formant une partie de l'articulation du genou se nomme l'épiphyse distale. Elle comporte normalement deux condyles, un interne (ou médial) et un externe (ou latéral). Le volume segmenté (19.4) ne comporte que le condyle externe. Bien que de forme sphérique, la zone d'intérêt pour la mesure d'épaisseur de cartilage est réduite à une portion de sphère faisant face au plateau tibial. En utilisant l'équation paramétrique de la sphère (équation (17.7)) et en bornant les paramètres u et v pour qu'ils n'atteignent jamais les couples (u_p, v_p) correspondants aux pôles, nous sommes en mesure de fournir une grille initiale de forme sphérique (figure 19.7(a)).

Après déformation, les surfaces résultantes des segmentations de l'épiphyse distale (figure 19.7(b)) et du plateau tibial font l'objet d'une mesure de distances (figure 19.8) et donnent une première estimation de l'épaisseur des cartilages.

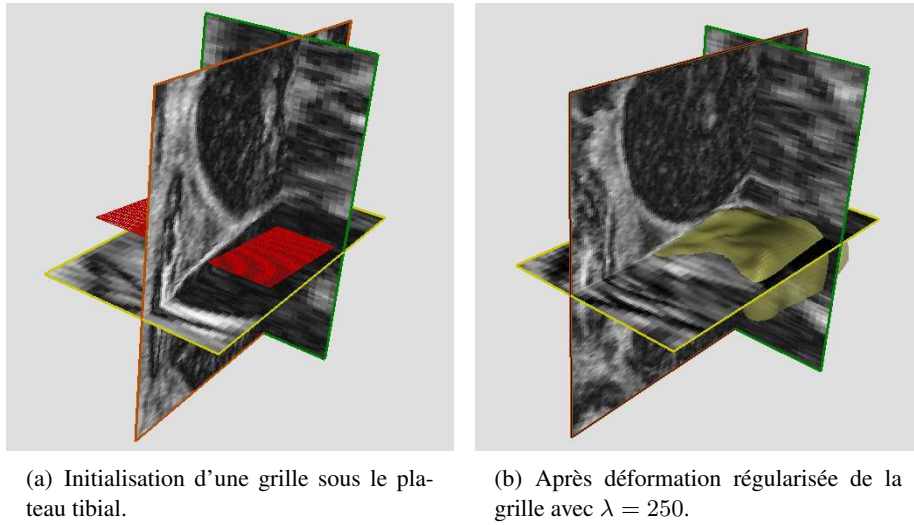


FIG. 19.5: Segmentation du plateau tibial d'un genou de rongeur dans un volume acquis par IRM en 50s.

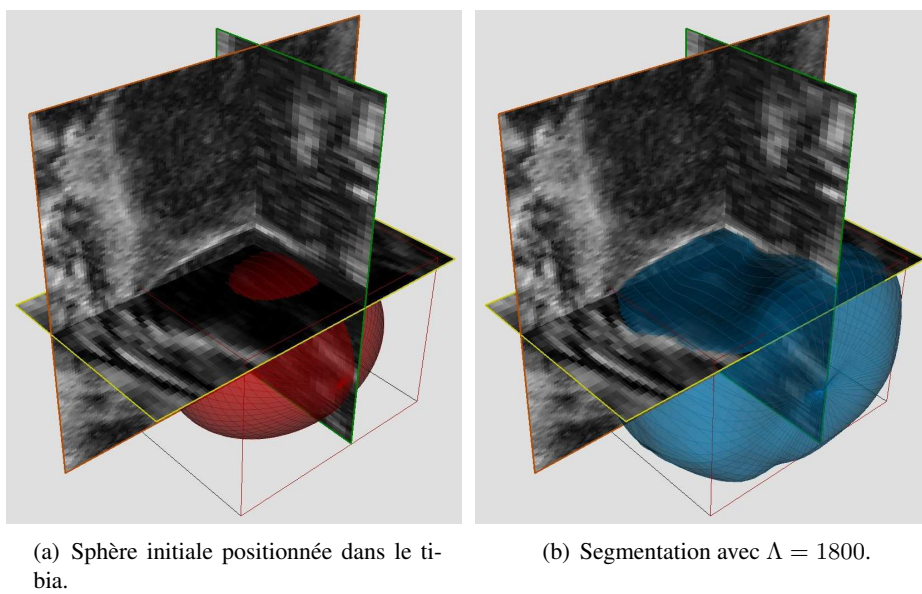


FIG. 19.6: Segmentation du plateau tibial par un modèle sphérique en 40s.

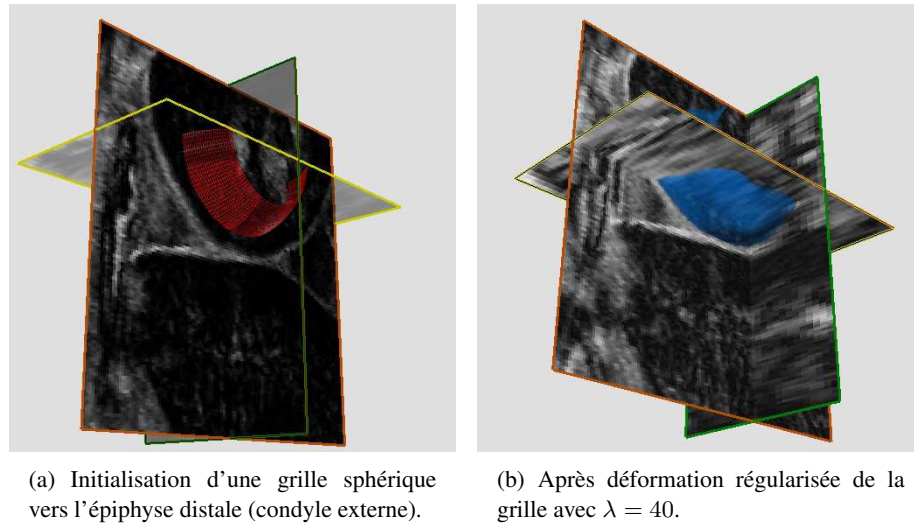


FIG. 19.7: Segmentation de l'extrémité du fémur en 35s.

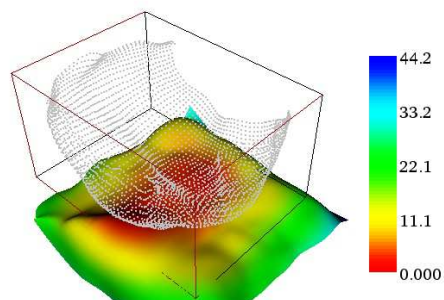


FIG. 19.8: Carte des distances entre le plateau tibial et l'épiphyse distale. Le plateau tibial est le support de la carte, l'épiphyse est en transparence à titre indicatif.

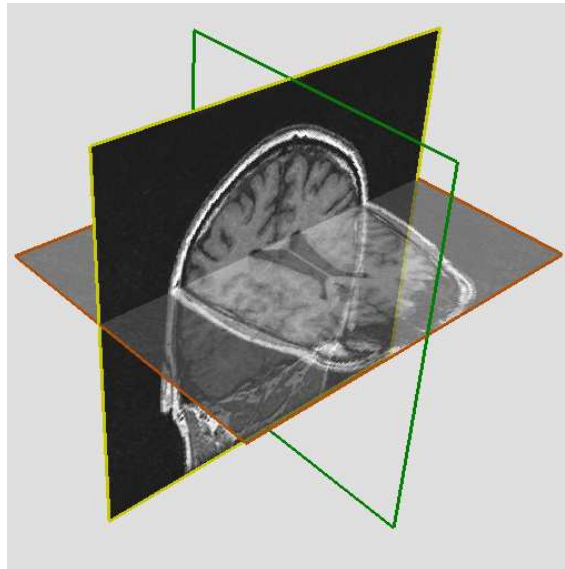
19.2.3 Segmentation des ventricules latéraux

La partie centrale du cerveau est composée du premier et du deuxième ventricule, aussi appelés ventricules latéraux (figure 19.9(a)). Il n'est pas possible d'approcher leur forme par un cylindre, un plan ou une sphère. Il s'agit cependant de structures anatomiques simplement connexes, représentables par des surfaces closes de genre 0, que le *MoDeReS-3D* est capable de gérer.

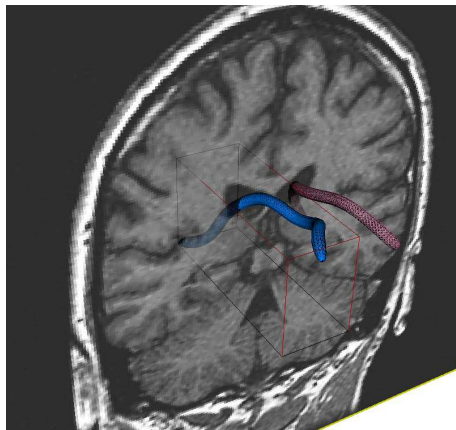
La figure 19.9(b) montre la solution d'initialisation. Une courbe est tracée à partir d'un ensemble de points choisis dans les ventricules. Une méthode similaire est utilisée dans [Coulon 02] pour l'initialisation d'une surface active cylindrique *B-Spline* dans la colonne vertébrale. Cette courbe forme en quelque sorte l'épine dorsale du modèle déformable initial, qui est le résultat de la translation d'un cercle le long de cette courbe. Le résultat de la segmentation est montré figure 19.9(c). Les ventricules latéraux du cerveau sont correctement segmentés.

LES résultats présentés dans ce chapitre montrent que les modifications apportées au *MoDeReS-2D* pour l'étendre à une surface active sont valides. Après avoir donné une vue générale de l'algorithme de déformation *MoDeReS-3D*, très semblable à la version 2D, nous avons testé le *MoDeReS-3D* sur des volumes IRM pour différentes structures anatomiques. Un choix judicieux de la topologie du modèle déformable initial conduit à des segmentations correctes. Ainsi, des modèles cylindriques, plans ou encore sphériques ont été utilisés pour segmenter l'aorte, l'articulation fémoro-tibial d'un rongeur et les ventricules latéraux d'un cerveau.

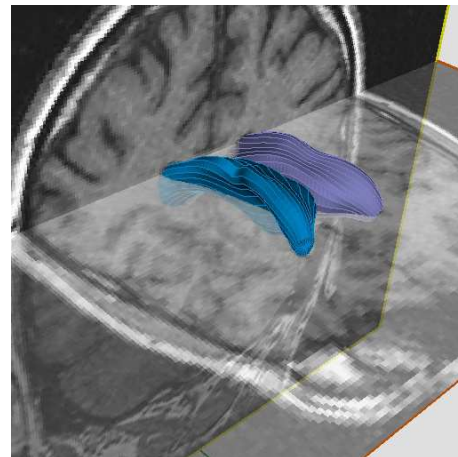
Le prochain chapitre conclura la quatrième partie sur le *MoDeReS-3D*



(a) Volume IRM d'un cerveau. Les données ont été fournies par *MICCAI'07 Workshop on 3D Segmentation in the Clinic : A Grand Challenge*.



(b) Initialisations épinières dans les ventricules.



(c) Segmentation des ventricules droits et gauches.

FIG. 19.9: *Segmentation des ventricules du cerveau en 10s.*

20

Conclusion de la quatrième partie

CETTE quatrième partie est axée sur la généralisation du *MoDeReS-2D* à un modèle déformable surfacique pour obtenir le *MoDeReS-3D*. Nous avons montré les conséquences du passage à une dimension supérieure sur la représentation géométrique et topologique du modèle déformable. Le filtrage bidimensionnel impose une 4-connectivité régulière au maillage, mais cette contrainte ne peut être respectée systématiquement. Un traitement particulier des bords et des points singuliers est mis en oeuvre, autorisant le filtrage des surfaces orientables de genre 0 et 1.

La notion de régularisation locale par filtrage variant a été utilisée pour limiter les répercussions d'un échantillonnage non-uniforme de la surface. En liant analytiquement le paramètre de régularisation λ , la fréquence d'échantillonnage d'un signal et le pas d'échantillonnage d'un maillage, nous avons pu intégrer une variation automatique de la fréquence de coupure selon la distance du sommet filtré à ses voisins. Des résultats sont exposés montrant l'avantage d'un filtrage variant par rapport à un filtrage global classique.

L'algorithme *MoDeReS-3D* est ensuite testé sur des volumes réels acquis par IRM pour plusieurs types de modèles initiaux. Nous avons ainsi pu segmenter l'aorte, le plateau tibial et l'épiphyse distale d'un rongeur et les ventricules latéraux d'un cerveau humain.

LE *MoDeReS-3D* intègre le filtrage variant pour une raison différente de son homologue 2D. Nous n'avons pas tiré parti de la connaissance a priori que pourrait apporter la régularisation locale comme nous l'avons fait pour le *MoDeReS-2D*, ni de la possibilité d'adapter la régularisation à l'image. À terme, cela pourrait conduire à un modèle déformable encore plus efficace. Même si pour de grandes déformations, un rééchantillonnage de la surface sera indispensable, il pourra être peu fréquent tout en bénéficiant d'une régularisation cohérente sur toute la surface grâce au filtrage variant.

Pour étendre le *MoDeReS-3D* aux surfaces de genre n , il faudra élargir les réflexions de cette partie à la gestion des points-selles. La cinquième et dernière partie dresse un bilan de ce travail de thèse en récapitulant les objectifs fixés et les contributions proposées pour y parvenir.

Cinquième partie

Conclusion

21

Bilan et perspectives

NOUS avons développé dans cette thèse plusieurs idées autour des modèles déformables pour la segmentation d'images et de volumes. L'objectif était de produire un modèle déformable rapide et robuste pour la segmentation de volumes. Dans le contexte de l'imagerie du vivant, les grandes quantités de données à traiter justifiaient la rapidité et la robustesse voulues.

Nous avons développé un modèle déformable paramétrique régularisé par filtrage *B-Spline* lissant que nous appelons *MoDeReS*. Le filtrage RII mise en oeuvre dans cet algorithme est garant de la rapidité. Il est aussi la garantie d'une grande robustesse puisqu'il gère la régularisation. Nous l'avons rendu variant, et il permet d'introduire une connaissance a priori d'un objet recherché dans sa version 2D grâce à une régularisation locale. De même, il adapte la régularisation en fonction de données images.

L'objectif est atteint avec le *MoDeReS-3D*, qui est une extension du *MoDeReS-2D* pour la segmentation de volume. Le filtre variant gère automatiquement les non-uniformités du modèle représenté par un maillage quadrangulaire ce qui permet de maîtriser le niveau de régularisation en cours de déformation sur des données non-uniformes.

Nous dressons un bilan des innovations apportées dans ce dernier chapitre et proposons des pistes de recherches pour l'amélioration du *MoDeReS*.

21.1 Bilan

21.1.1 Contexte 2D

Dans la partie III de ce document, nous avons proposé un nouvel algorithme de contour actif basé sur une régularisation par spline lissante.

Les contours actifs basés sur une minimisation de l'énergie interne pour la régularisation souffrent d'un rétrécissement pour une régularisation trop élevée. En nous appuyant sur les travaux de [Weruaga 04], nous avons montré que ce phénomène était lié à une convolution répétée sur le contour par un filtre passe-bas au cours du processus itératif [Velut 06a].

La solution avancée pour s'abstraire des convolutions successives est un filtrage des forces externes, et non du contour. Ce filtre est le filtre *B-Spline* lissant [Unser 93a] déjà utilisé avec succès dans le cadre d'une régularisation [Precioso 05]. Nous avons appelé cet algorithme *MoDeReS*, pour Modèle Déformable Régularisé par Spline lissante

Le paramètre de régularisation λ est directement lié à la fréquence de coupure du filtre *B-Spline* lissant [Velut 07]. Nous avons proposé d'octroyer à chaque point k une valeur différente de λ , soit λ_k . Cela a pour effet de varier la fréquence de coupure du filtre en fonction du point filtré. La régularisation devient locale.

Les résultats ont montré qu'une régularisation locale permet d'introduire une connaissance a priori sur la forme recherchée dans l'image. Nous avons traduit une estimation de courbure locale en valeur de λ_k , ce qui nous a permis de détecter des bords manquants d'un objet tout en conservant la détection des détails du même objet. La régularisation locale a également permis d'adapter la régularisation à une information provenant de l'image sur la présence ou non d'un bord.

21.1.2 Contexte 3D

Nous avons étendu le *MoDeReS-2D* aux surfaces et aux volumes dans la partie IV. Le filtre *B-Spline* lissant bidimensionnel est appliqué aux surfaces et nous avons tiré parti de la régularisation locale pour s'abstraire de la non-uniformité de l'échantillonnage des surfaces paramétriques.

Le filtre *B-Spline* lissant bidimensionnel est obtenu par un filtrage monodimensionnel successif des signaux dans les deux directions principales. L'intérêt majeur est de conserver une implémentation récursive du filtre RII, ce qui implique que le temps de traitement d'un point ne dépend pas de la fréquence de coupure.

Cependant, la représentation d'un signal bidimensionnel est une grille cartésienne. Une surface paramétrique ne peut pas être représentée systématiquement de cette façon. Nous avons proposé un schéma d'extension du domaine paramétrique pour les surfaces fermées de genre 1 et les surfaces ouvertes de genre 0 (à 1 ou 2 bords) [Velut 06b]. Les surfaces fermées de genre 0 possèdent deux points singuliers de valence différente de 4 pour lesquels nous avons défini les conditions de filtrage.

L'uniformité d'un maillage, à savoir l'équidistance des points par rapport à leurs voisins, est difficile voire impossible à obtenir. Le filtre *B-Spline* lissant pouvant s'adapter localement, nous avons proposé un calcul automatique de la valeur de régularisation du filtre en fonction du pas d'échantillonnage de chaque point.

LE *MoDeReS* remplit les objectifs fixés de segmentation rapide et robuste. Le filtre *B-spline* est un élément central de la thèse, et nous avons su l'intégrer dans un algorithme de déformation simple et l'enrichir par le principe de régularisation locale.

21.2 Perspectives

Les résultats obtenus dans ces travaux nous ont permis de valider l'approche originale de régularisation locale d'un modèle déformable par filtrage *B-Spline* lissant des forces externes. Nous pouvons envisager dès aujourd'hui différentes voies de recherches visant à compléter, automatiser et généraliser ce modèle déformable.

21.2.1 Méthodes intelligentes de choix des paramètres de régularisation

La régularisation locale d'un modèle déformable ouvre plusieurs perspectives. Il serait intéressant d'adapter le paramètre de régularisation en fonction de la pertinence de l'information délivrée par l'image via les forces externes. Nous l'avons déjà fait avec une estimation visuelle de la qualité de l'image. Une mesure statistique, comme par exemple la variance locale, permettrait d'automatiser l'adaptation de λ à la qualité de l'image.

21.2.2 Extraction d'a priori géométrique à partir d'un modèle

La régularisation locale permet également de mieux prendre en compte la connaissance a priori d'un modèle. Les atlas anatomiques sont de plus en plus riches et fournissent à ce titre une précieuse source de connaissances a priori. L'extraction des caractéristiques géométriques d'un modèle et sa traduction en terme de régularisation locale seraient un atout pour une segmentation efficace. Plusieurs travaux décrivent le concept de traitement du signal sur des maillages [Taubin 95]. Le spectre des valeurs propres d'une matrice laplacienne est présenté et un rapprochement avec la notion de fréquence est fait. Nous pouvons envisager une analyse spectrale locale type temps-fréquence pour extraire une information de fréquences locales sur les sommets du maillage, l'objectif étant d'adapter la régularisation du *MoDeReS-3D* en fonction de ces fréquences.

21.2.3 Filtrage de surfaces de genre n

Même si les méthodes de filtrage de surfaces sont nombreuses [Floater 97, Desbrun 99, Ohtake 01, Bajaj 03], elles sont basées sur un lissage itératif des maillages. Ces méthodes sont comparables à une implantation de filtre à réponse impulsionnelle finie. Cela signifie qu'un filtrage très passe-bas de la surface sera plus long en temps qu'un filtrage moins passe-bas. Nous avons proposé un filtrage de surface dont l'implantation est faite par une équation récurrente, rendant la complexité indépendante de la fréquence de coupure du filtrage désirée. Mais contrairement à l'existant, nous ne gérons que les surfaces de genre 0 et 1. La généralisation du filtrage *B-Spline* lissant de surface de genre n ne nous abstrait pas de la contrainte de 4-connectivité presque partout.

L'obtention d'un maillage compatible avec le filtrage *B-Spline* lissant bidimensionnel est rendue possible grâce aux méthodes de remaillages quadrangulaires. Par exemple, [Dong 05] définit une fonction harmonique sur une variété (figure 21.1). Les isolignes de la fonction sont les lignes parallèles de la quadrangulation alors que les lignes intégrales seront les méridiens. Les sources des lignes intégrales sont les extrema de la fonction et sont topologiquement similaires aux pôles d'une



(a) Isolignes sur un organe. Les pôles sont placés comme sur une sphère, au nord et au sud.

(b) Les pôles sont situés aux bouts des doigts. des points-selles apparaissent entre les doigts.



(c) Champ scalaire utilisé pour obtenir les isolignes de (b).

FIG. 21.1: Isolignes d'un champ scalaire harmonique à l'origine d'un maillage quadrangulaire.

sphère (figure 21.1(a)). Notre méthode de filtrage devra prendre en compte un nouveau type de singularités, les points-selles (figure 21.1(b)), que la théorie de Morse étudie précisément [Ni 04].

21.2.4 Suivi d'objets en temps réel

La rapidité d'exécution d'un filtrage numérique est un argument en faveur d'opérations temps réel [Precioso 05]. Le *MoDeReS* possède également l'avantage de ne pas se réduire à un point même dans le cas de fortes régularisations. Cela le rend propice à une segmentation d'objet dans une séquence d'images, où les forces externes seraient issues des données statiques (image) et dynamiques (séquence). La figure 21.2 montre un test de faisabilité de notre contour actif dans le cadre d'un suivi d'objet.

La possibilité pour notre modèle déformable de fonctionner en temps réel nous permet d'envisager de multiples applications. La réalité augmentée, par exemple, est par définition demandeuse de techniques temps réel [Grasset 03]. Un modèle déformable possédant cette caractéristique peut être un outil idéal pour lier GMCAO [Stindel 03] et réalité augmentée.

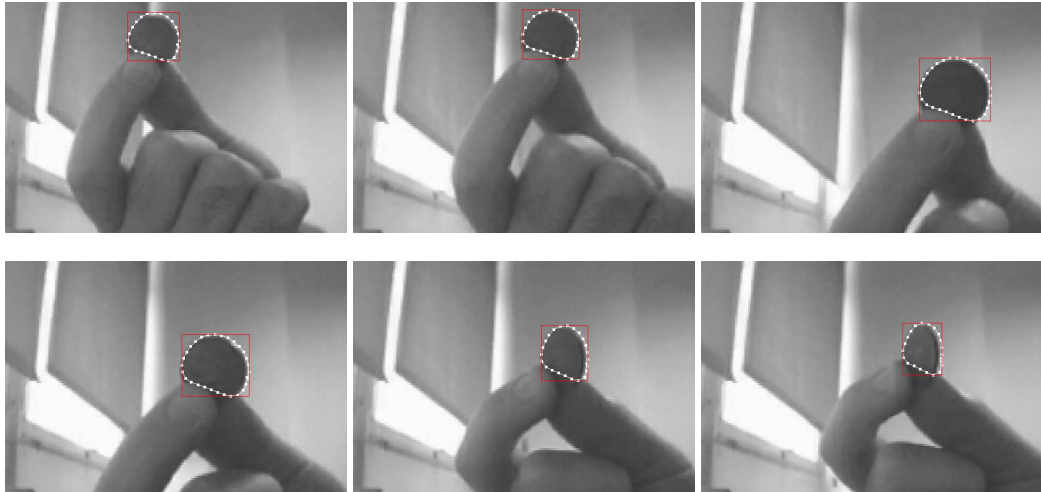


FIG. 21.2: Suivi d'une pièce de monnaie. Les forces externes ne prennent pas en compte les informations temporelles. Les images sont extraites d'une séquence video webcam de 10s.

21.2.5 Applications cliniques et aide au diagnostic

Nous avons posé dans cette thèse de solides bases pour le développement d'un modèle déformable. La finalité est évidemment d'expérimenter cette méthode de segmentation dans un cadre applicatif. Le peu de paramètres à régler et les possibilités d'automatisation vont dans le sens de l'intégration de notre modèle déformable dans une application médicale. Une réflexion importante doit avoir lieu sur l'interface de contrôle du modèle déformable pour offrir à l'utilisateur un accès aisé aux paramètres principaux et une lecture efficace des résultats obtenus.

CETTE thèse s'achève sur un objectif atteint, le *MoDeReS-3D*. Mais ce dernier chapitre montre que l'intégration de connaissance a priori dans un modèle déformable est un problème ouvert, tout comme l'adaptation de la régularisation à l'environnement. Quels liens existent entre la géométrie d'un modèle et la régularisation ? Quel compromis faire entre les données de l'image et l'a priori ? Nous avons déjà des éléments sur le filtrage de maillage de genre n . L'extraction de caractéristiques géométriques nous semble aujourd'hui la piste la plus intéressante, par son aspect fédérateur entre atlas anatomiques et applications médicales.

Bibliographie

- [Abe 03] Toru Abe & Yuki Matsuzawa. *Active Contour Model Using A Priori Knowledge of Region Shape*. In ICIP, Barcelona, 2003. IEEE.
- [Alliez 03] Pierre Alliez, David Cohen-Steiner, Olivier Devillers, Bruno Levy & Mathieu Desbrun. *Anisotropic polygonal remeshing*. ACM Transactions on Graphics, vol. 22, no. 3, pages 485 – 493, 2003.
- [Amini 90] Amir A. Amini, Terry E. Weymouth & Ramesh C. Jain. *Using Dynamic Programming for Solving Variational Problems in Vision*. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence., vol. 12, no. 9, pages 855–867, 1990.
- [Anwander 01] Alfred Anwander. *Segmentation d'images couleur par un opérateur gradient vectoriel multiéchelle et contour actif : Application à la quantification des phases minéralogiques du clinker de ciment*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2001.
- [Aspert 02] N. Aspert, D. Santa-Cruz & T. Ebrahimi. *MESH : Measuring Errors between Surfaces using the Hausdorff Distance*. In IEEE International Conference on Multimedia and Expo, volume I, pages 705 – 708, 2002.
- [Bajaj 03] Chandrajit L. Bajaj & Guoliang Xu. *Anisotropic diffusion of surfaces and functions on surfaces*. ACM Trans. Graph., vol. 22, no. 1, pages 4–32, 2003.
- [Bolbos 07] R. Bolbos, H. Benoit-Cattin, J.B. Langlois, A. Chomel, E. Chereul, C. Odet, P. Pastoureau, M. Janier & O. Beuf. *Knee cartilage thickness measurements using MRI : a 4 1/2-month longitudinal study in the meniscectomized guinea pig model of OA*. Osteoarthritis and Cartilage, pages (in–press), 2007.
- [Brigger 98] Patrick Brigger & Michael Unser. *Multi-scale B-spline snakes for general contour detection*. In Wavelet Applications in Signal and Image Processing VI, Jul 22-23 1998, volume 3458 of *Proceedings of SPIE*, pages 92–102, San Diego, CA, United States, 1998.
- [Brigger 00] Patrick Brigger, Jeff Hoeg & Michael Unser. *B-spline snakes : a flexible tool for parametric contour detection*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 9, no. 9, pages 1484–1496, 2000.
- [Caselles 93] Vincent Caselles, Ron Kimmel, Guillermo Sapiro & C. Sbert. *A Geometrical Model for Active Contours in 3D Images*. Numerische Mathematik., vol. 66, no. 1, pages 1–31, 1993.
- [Chen 05] Xujian Chen & Eam Khwang Teoh. *3D object segmentation using B-Surface*. Image and Vision Computing, vol. 23, no. 14, pages 1237–1249, 2005.

- [Cohen 89] Laurent D. Cohen. *On Active Contour Models*. Programmation, Calcul Symbolique et Intelligence Artificielle Rapport de Recherche 1075, INRIA Rocquencourt, 1989.
- [Cohen 90] Laurent D. Cohen & Isaac Cohen. *A Finite Element Method Applied To New Active Contour Models and 3D Reconstruction From Cross Sections*. Programme 6 – Robotique, Image et Vision Rapport de Recherche 1245, INRIA Rocquencourt, 1990.
- [Cohen 92] Isaac Cohen. *Modèles déformables 2-D et 3-D : Application à la Segmentation d'Images Médicales*. Thèse de doctorat, Paris IX - Dauphiné, 1992.
- [Cohen 93] Laurent D. Cohen & Isaac Cohen. *Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 15, no. 11, pages 1131–1147, 1993.
- [Coulon 02] O. Coulon, SJ. Hickman, GJ Parker, GJ. Barker, DH Miller & SR Arridge. *Quantification of spinal cord atrophy from magnetic resonance images via a B-spline active surface model*. Magnetic Resonance in Medicine, vol. 47, no. 6, pages 1176–1185, 2002.
- [Das 04a] B. Das & S. Banerjee. *Inertial snake for contour detection in ultrasonography images*. IEE Proceedings : Vision, Image and Signal Processing, vol. 151, no. 3, pages 235–240, 2004.
- [Das 04b] Bipul Das, P. Kumar Saha & Felix W. Wehrli. *Object class uncertainty induced snake with applications to medical image segmentation*. In Medical Imaging, volume 5370 I, pages 369–380, San Diego, CA, United States, 2004. International Society for Optical Engineering.
- [Davatzikos 93] Chris Davatzikos & Jerry L. Prince. *Adaptive active contour algorithms for extracting and mapping thick curves*. In CVPR, pages 524 – 528, New York, NY, USA, 1993.
- [Delingette 92] H. Delingette, M. Hébert & K. Ikeuchi. *Shape Representation and Image Segmentation Using Deformable Surfaces*. Image and Vision Computing, vol. 10, no. 3, pages 132–144, April 1992.
- [Delingette 94a] H. Delingette. *Adaptive and Deformable models based on Simplex Meshes*. In IEEE Workshop of Non-Rigid and Articulated Objects, Austin, Texas, November 1994.
- [Delingette 94b] H. Delingette. *Simplex Meshes : a General Representation for 3D Shape Reconstruction*. In CVPR, pages 856–857, Seattle, USA, June 1994.
- [Delingette 99] Hervé Delingette. *General Object Reconstruction Based on Simplex Meshes*. International Journal of Computer Vision, vol. 32, no. 2, pages 111–146, September 1999.
- [Desbrun 99] Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schröder & Alan H. Barr. *Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow*. In SIGGRAPH, pages 317–324, New York, NY, USA, 1999. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [Desbrun 06] Mathieu Desbrun, Eva Kanso & Yiyang Tong. *Discrete differential forms for computational modeling*. In SIGGRAPH Courses, pages 39–54, New York, NY, USA, 2006. ACM Press.

- [Dong 05] S. Dong, S. Kircher & M. Garland. *Harmonic functions for quadrilateral remeshing of arbitrary manifolds*. Computer Aided Geometric Design, vol. 22, no. 5, pages 392–423, 2005.
- [Dong 06] Shen Dong, Peer-Timo Bremer, Michael Garland, Valerio Pascucci & John C. Hart. *Spectral surface quadrangulation*. In SIGGRAPH, pages 1057–1066, New York, NY, USA, 2006. ACM Press.
- [Edelsbrunner 01] Herbert Edelsbrunner, John Harer & Afra Zomorodian. *Hierarchical morse complexes for piecewise linear 2-manifolds*. In Symposium on Computational Geometry, pages 70–79, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.
- [Eveno 01] Nicolas Eveno, Patrice Delmas & Pierre-Yves Coulon. *Vers l'Extraction Automatique des Lèvres d'un Visage Parlant*. In GRETSI, Toulouse, 2001.
- [Flickner 94] Myron Flickner, Harpreet Sawhney, Duaine Pryor & Jeff Lotspiech. *Intelligent interactive image outlining using spline snakes*. In Conference on Signals, Systems & Computers, volume 1, pages 731–735, Pacific Grove, CA, USA, 1994. IEEE, Los Alamitos, CA, USA.
- [Floater 97] Michael S. Floater. *Parametrization and Smooth Approximation of Surface Triangulations*. Computer Aided Geometric Design., vol. 14, no. 3, pages 231–250, 1997.
- [Grasset 03] Raphaël Grasset & Jean-Dominique Gascuel. *Réalité Augmentée et Environnement Collaboratif : Un Tour d'Horizon*. In AFIG'03, December 2003.
- [Hernández Hoyos 02] Marcella Hernández Hoyos. *Segmentation anisotrope 3D pour la quantification en imagerie vasculaire par résonance magnétique*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2002.
- [Hickman 04] S. J. Hickman, A. Hadjiprocopis, O. Coulon, D. H. Miller & G. J. Barker. *Cervical spinal cord MTR histogram analysis in multiple sclerosis using a 3D acquisition and a B-spline active surface segmentation technique*. Magn Reson Imaging, vol. 22, no. 6, pages 891–895, Jul 2004.
- [Huang 98] Jiantao Huang & Amir A. Amini. *Anatomical object volumes from deformable B-spline surface models*. In ICIP, volume 1, pages 732–736, Chicago, IL, USA, 1998. IEEE Comp Soc, Los Alamitos, CA, USA.
- [Hyche 91] M. Eric Hyche, Norberto F. Ezquerro & Daryl Lawton. *Vasculature detection in angiograms using active contours*. In EMBC, volume 13, pages 1054–1055, Orlando, FL, USA, 1991. Publ by IEEE, Piscataway, NJ, USA.
- [Jolion 00] Jean-Michel Jolion, editeur. *Les systèmes de vision. Traité IC2, Traitement*. Hermes Paris, 2000.
- [Kass 87] Michael Kass, Andrew Witkin & Demetri Terzopoulos. *Snakes : Active Contour Models*. In ICCV, pages 259–268, London, Engl, 1987. IEEE, New York, NY, USA.
- [Kundera 75] Milan Kundera. *La plaisanterie*. Gallimard Paris, 1975.
- [Lachaud 03] J.-O. Lachaud & B. Taton. *Deformable model with adaptive mesh and automated topology changes*. In 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM'03), pages 12–19, Alberta, Canada, 2003.

- [Lai 93] Kok F. Lai & Roland T. Chin. *On Regularization, Formulation and Initialization of the Active Contour Models (Snakes)*. In First Asian Conference on Computer Vision, pages 542–545, Osaka, 1993.
- [Leitner 91] F. Leitner & P. Cinquin. *Dynamic segmentation : Detecting complex topology 3D-object*. In EMBC, volume 13, pages 295–296, Orlando, FL, USA, 1991.
- [Li 99] Xiaobo Li & Jiankang Wang. *Adaptive balloon models*. In Computer Vision and Pattern Recognition, volume 2, pages 434 – 439, Fort Collins, CO, USA, 1999. IEEE.
- [Li 06] Bing Li & S.T. Acton. *Vector field convolution for image segmentation using snakes*. In ICIP, Atlanta, GA, USA, 2006.
- [Liang 99] Jianming Liang, Tim McInerney & Demetri Terzopoulos. *United Snakes*. In ICCV, volume 2, page 933. IEEE Computer Society, 1999.
- [Litvin 03] Andrew Litvin. *Levelset Based Segmentation Using Data Driven Shape Prior on Feature Histograms*. In Workshop on Statistical Signal Processing, 2003.
- [Lynch 00] John A. Lynch, Souhil Zaim, Jenny Zhao, Alexander Stork, Charles G. Peterfy & Harry K. Genant. *Cartilage segmentation of 3D MRI scans of the osteoarthritic knee combining user knowledge and active contours*. In Medical Imaging 2000, volume 3979, pages 925–935, San Diego, CA, USA, 2000.
- [McInerney 96] Tim McInerney & Demetri Terzopoulos. *Deformable Models in Medical Image Analysis : A Survey*. Medical Image Analysis, vol. 1, no. 2, pages 91–108, 1996.
- [McInerney 00] Tim McInerney & Demetri Terzopoulos. *T-Snakes : Topology Adaptive Snakes*. Medical Image Analysis., vol. 4, no. 2, pages 73–91, 2000.
- [Menet 90] Sylvie Menet, Philippe Saint-Marc & Gérard Medioni. *B-Snakes : Implementation and Application to Stereo*. Image Understanding Workshop, pages 720–726, 1990.
- [Metaxas 02] Dimitris N. Metaxas & Ioannis A. Kakadiaris. *Elastically adaptive deformable models*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 24, no. 10, pages 1310–1321, 2002.
- [Montagnat 98] Johan Montagnat & Hervé Delingette. *Globally constrained deformable models for 3D object reconstruction*. Signal Processing, vol. 71, no. 2, pages 173–186, 1998.
- [Montagnat 01] Johan Montagnat, H. Delingette & N. Ayache. *A Review of Deformable Surfaces : Topology, Geometry and Deformation*. Image and Vision Computing., vol. 19, pages 1023–1040, 2001.
- [Mortensen 98] Eric N. Mortensen & William A. Barrett. *Interactive segmentation with intelligent scissors*. Graphical Models and Image Processing, vol. 60, no. 5, pages 349 – 384, 1998.
- [Neumaier 98] Arnold Neumaier. *Solving ill-conditioned and singular linear systems : A tutorial on regularization*. SIAM Review, vol. 40, no. 3, pages 636 – 666, 1998.

- [Ni 04] Xinlai Ni, Michael Garland & John C. Hart. *Fair morse functions for extracting the topological structure of a surface mesh*. In SIGGRAPH, pages 613–622. ACM Press, 2004.
- [Ohtake 01] Y. Ohtake, A. Belyaev & I. Bogaevski. *Mesh regularization and adaptive smoothing*. CAD Computer Aided Design, vol. 33, no. 11, pages 789 – 800, 2001.
- [Olstad 96] Bjorn Olstad & Anders H. Torp. *Encoding of a priori information in active contour models*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 18, no. 9, pages 863–872, 1996.
- [Pitiot 05] A. Pitiot, H. Delingette & P.M. Thompson. *Automated Image Segmentation : Issues and Applications*. In Cornelius T. Leondes, editeur, Medical Imaging Systems Technology, volume 3. World Scientific, London, 2005.
- [Precioso 05] Frederic Precioso, Michel Barlaud, Thierry Blu & Michael Unser. *Robust real-time segmentation of images and videos using a smooth-spline snake-based algorithm*. IEEE Transactions on Image Processing, vol. 14, no. 7, pages 910–924, 2005.
- [Radeva 95] Petia Radeva, Joan Serrat & Enric Marti. *Snake for model-based segmentation*. In ICCV, pages 816 – 821, Cambridge, MA, USA, 1995. IEEE.
- [Ray 06] Nicolas Ray, Wan Chiu Li, Bruno Levy, Alla Sheffer & Pierre Alliez. *Periodic global parameterization*. ACM Transactions on Graphics, vol. 25, no. 4, pages 1460 – 1485, 2006.
- [Reinsch 67] Christian H. Reinsch. *Smoothing by Spline Functions*. Numerisch Mathematik, vol. 10, pages 177–183, 1967.
- [Ronfard 94] Remi Ronfard. *Region-based strategies for active contour models*. International Journal of Computer Vision, vol. 13, no. 2, pages 229–251, October 1994.
- [Rueckert 95] Daniel Rueckert & Peter Burger. *Contour Fitting Using an Adaptive Spline Model*. In British Machine Vision, volume 1, pages 207–216, Birmingham, 1995.
- [Schweizer 87] Philippe Schweizer. *Infographie ii : Transformation et découpage, courbes et surfaces, normes, visibilité, rendu réaliste*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1987.
- [Sillamy 80] Norbert Sillamy. *Dictionnaire encyclopédique de psychologie, volume 2*. Bordas, 1980.
- [Stindel 03] Éric Stindel. *Chirurgie Orthopédique Assistée par Ordinateur : Utilisation Per-opératoire des Modèles Statistiques Déformables*. Signal, vol. 98, pages 17–22, 2003.
- [Stonick 95] V.L. Stonick. *Time-varying performance surfaces for adaptive IIR filters : geometric properties and implications for filter stability*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 43, no. 1, pages 29–42, 1995.
- [Tang 04] Jinshan Tang & Scott T. Acton. *Vessel Boundary Tracking for Intravital Microscopy Via Multiscale Gradient Vector Flow Snakes*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 51, no. 2, pages 316–324, 2004.
- [Taubin 95] Gabriel Taubin. *A signal Processing Approach to Fair Surface Design*. In SIGGRAPH, pages 351–358, 1995.

- [Tejos 04] Cristian Tejos, Laurance D. Hall & Arturo Cardenas-Blanco. *Segmentation of articular cartilage using active contours and prior knowledge*. In EMBS, volume 26 III, pages 1648–1651, San Francisco, CA, United States, 2004. IEEE.
- [Terzopoulos 87] Demetri Terzopoulos, John Platt, Alan Barr & Kurt Fleischer. *Elastically deformable models*. In SIGGRAPH, pages 205–214, New York, NY, USA, 1987. ACM Press.
- [Terzopoulos 88] Demetri Terzopoulos. *Computation of Visible-Surface Representations*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 10, no. 4, pages 417–438, 1988.
- [Thévenaz 06] P. Thévenaz & M. Unser. *The Snakuscule*. In ICIP, pages 1633–1636, Atlanta GA, USA, October 8-11, 2006. IEEE.
- [Tong 06] Y. Tong, P. Alliez, D. Cohen-Steiner & M. Desbrun. *Designing quadrangulations with discrete harmonic forms*. In Symposium on Geometry Processing, pages 201–210, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland, 2006. Eurographics Association.
- [Unser 93a] Michael Unser, Akram Aldroubi & Murray Eden. *B-spline signal processing. Part I. Theory*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 2, pages 821–833, 1993.
- [Unser 93b] Michael Unser, Akram Aldroubi & Murray Eden. *B-spline signal processing. Part II. Efficient design and applications*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 2, pages 834–848, 1993.
- [Unser 00] M. Unser. *Sampling—50 Years After Shannon*. Proceedings of the IEEE, vol. 88, no. 4, pages 569–587, April 2000.
- [Valdes 00] R. Valdes, O. Yanez-Suarez & V. Medina. *Trachea segmentation in CT images using active contours*. In EMBC, volume 4, pages 3184–3187, Chicago, IL, 2000. IEEE.
- [Velut 06a] Jérôme Velut, Hugues Benoit-Cattin & Christophe Odet. *Locally Regularized Snake Through Smoothing B-Spline Filtering*. In EUSIPCO, page In proceedings, Firenze, 2006.
- [Velut 06b] Jérôme Velut, Hugues Benoit-Cattin & Christophe Odet. *Segmentation by Smoothing B-Spline Active Surface*. In ICIP, pages 209–212, Atlanta GA, 2006.
- [Velut 07] Jérôme Velut, Hugues Benoit-Cattin & Christophe Odet. *Locally Regularized Smoothing B-Snake*. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, vol. 2007, pages Article ID 76241, 12 pages, 2007.
- [Wang 01] Y. Wang, E.K. Teoh & D. Shen. *Structure-adaptive B-snake for segmenting complex objects*. In ICIP, volume 2, pages 769–772, Thessaloniki, 2001. IEEE.
- [Wang 03] Yue Wang, Eam Khwang Teoh & dinggang Shen. *Lane Detection and Tracking Using B-Snake*. Image and Vision Computing., vol. 22, pages 269–280, 2003.
- [Weruaga 04] Luis Weruaga, Rafael Verdu & Juan Morales. *Frequency domain formulation of active parametric deformable models*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 26, no. 12, pages 1568–1578, 2004.

- [Xiao 07] Di Xiao, Wan Sing Ng, Charles B. Tsang & Udantha Ranjith Abeyratne. *A region and gradient based active contour model and its application in boundary tracking on anal canal ultrasound images*. Pattern Recognition, vol. 40, no. 12, pages 3522 – 3539, 2007.
- [Xu 97] Chenyang Xu & Jerry L. Prince. *Gradient Vector Flow : A New External Force for Snakes*. In Computer Vision Pattern Recognition, pages 66–71, Puerto Rico, 1997. IEEE.
- [Zhu 96] Song Chun Zhu & Alan Yuille. *Region Competition : Unifying Snakes, Region Growing, and Bayes/MDL for Multi-band Image Segmentation*. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence., vol. 18, no. 9, pages 884–900, 1996.

Annexes



Annexe : Implantation du filtre B-Spline lissant

Cette annexe détaille l'implantation du filtre *B-Spline* lissant. Elle est liée à la valeur de λ qui influe sur les pôles du filtre.

A.1 Analyse des pôles

Nous présentons le système de la figure 5.3. Le filtre $B(z)$ est un filtre FIR. Il est implanté par l'équation aux différences associée à sa fonction de transfert (equation (5.5)). La mise en oeuvre du filtre $S_\lambda(z)$ n'est pas si triviale. Dans [Unser 93b], $S_\lambda(z)$ est équivalent à deux filtres symmetric du second ordre en cascade :

$$S_\lambda(z) = S_\lambda^+(z) \cdot S_\lambda^+(z^{-1}) \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$S_\lambda^+(z) = \frac{1 - 2\rho \cdot \cos(\omega) + \rho^2}{1 - 2\rho \cdot \cos(\omega) \cdot z^{-1} + \rho^2 \cdot z^{-2}} \quad (\text{A.2})$$

Dans l'équation (A.2), ρ et ω sont le module et l'argument des deux racines complexes conjuguées ($p_1 = \rho \exp^{j\omega}$, $p_2 = \rho \exp^{-j\omega}$) du dénominateur de $S_\lambda^+(z)$, et sont liés à λ par :

$$\rho = \frac{24\lambda - 1 - \sqrt{\xi}}{24\lambda} \cdot \sqrt{\frac{48\lambda + 24\lambda \cdot \sqrt{3 + 144\lambda}}{\xi}} \quad (\text{A.3})$$

$$\tan(\omega) = \sqrt{\frac{144\lambda - 1}{\xi}} \quad (\text{A.4})$$

$$\xi = 1 - 96\lambda + 24\lambda \cdot \sqrt{3 + 144\lambda} \quad (\text{A.5})$$

Les équations (A.3) et (A.4) sont valables pour des valeurs de λ plus grande que $1/24$. Quand cette condition n'est pas vérifiée, il est nécessaire de considérer plusieurs cas :

1. Si $\lambda = \frac{1}{24}$, ρ et ω sont donnés par :

$$\rho = \sqrt{11 - \sqrt{120}} \quad (\text{A.6})$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.7})$$

2. Si $\lambda \in]1/144 : 1/24[$, les équations (A.3) et (A.4) sont valides mais $\rho > 1$. En conséquence, les racines conjuguées associées sont celles de $S_\lambda^+(z^{-1})$ au lieu de $S_\lambda^+(z)$.
3. Si $\lambda \in]0 : 1/144]$, les racines de $S_\lambda^+(z)$ deviennent réelles et sont données par :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2+x_1+\sqrt{4x_1+x_1^2}}{2} \\ p_2 &= \frac{2+x_2+\sqrt{4x_2+x_2^2}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{with } x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-144\lambda}}{12\lambda} \text{ and } x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-144\lambda}}{12\lambda}$$

Nous pouvons alors écrire $S_\lambda^+(z)$ de la façon suivante :

$$S_\lambda^+(z) = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{\lambda}} \frac{1}{1 - (p_1 p_2)z^{-1} + p_1 p_2 z^{-2}} \quad (\text{A.9})$$

4. Si $\lambda = 0$, alors :

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow S_\lambda(z) = B^{-1}(z) \Leftrightarrow SB_\lambda(z) = 1$$

Cela signifie que le filtre SB_λ n'a aucun effet. L'entrée et la sortie sont égales.

A.2 Implantation causale/anti-causale

Le filtre $SB(z)$ est mis en oeuvre par une cascade de deux filtres, l'un causal et l'autre anti-causal (equation (A.1)) suivie du filtre $B(z)$ (equation (5.5)).

$$\begin{aligned} \hat{D}_1(z) &= D(z) \cdot S_\lambda^+(z) \\ \hat{D}_2(z) &= \hat{D}_1(z) \cdot S_\lambda^+(z^{-1}) \\ D(z) &= \hat{D}_2(z) \cdot B(z) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Les équations aux différences correspondantes sont données par :

$$\hat{d}_1(k) = c \cdot d(k) + a \cdot \hat{d}_1(k-1) - b \cdot \hat{d}_1(k-2) \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{d}_2(k) = c \cdot \hat{d}_1(k) + a \cdot \hat{d}_2(k+1) - b \cdot \hat{d}_2(k+2) \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{d}(z) = \frac{1}{6}(\hat{d}_2(k-1) + 4 + \hat{d}_2(k+1)) \quad (\text{A.13})$$

où a , b and c sont calculées à partir de ρ and ω selon la valeur de λ comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. L'équation (A.11) représente le filtrage causal alors que l'équation (A.12) représente le filtrage anti-causal. Nous pouvons utiliser le filtre $S_\lambda^+(z)$ en inversant son entrée et sa sortie.

Comme le filtre *B-spline* est IIR, le calcul de la sortie à l'instant k a besoin de connaître les sorties aux instants $k-1$ and $k-2$ (equations (A.11) et (A.11)). En conséquence, le filtrage doit être initialisé par les deux premiers points dans la récursion causale et les deux derniers dans la récursion anti-causale. Pour ces initialisations, nous utilisons une approximation de la réponse impulsionnelle de $S^+\lambda(z)$:

$$\begin{aligned} \hat{d}_1(0) &= \sum_{k=0}^n d(k)s_\lambda^+(k) \\ \hat{d}_1(1) &= \sum_{k=0}^n d(k)s_\lambda^+(k-1) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où n et la longueur de l'approximation. Notons que n doit être suffisamment grand pour approcher correctement la réponse impulsionnelle. Ainsi, la valeur de n sera augmentée en même temps que la valeur de λ . Le filtre anti-causal est initialisé de la même façon.

Quand $\lambda > 1/144$, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$s_\lambda^+(k) = (1 - 2\rho \cdot \cos(\omega) + \rho^2) \frac{\rho^{|k|} \sin((|k| + 1)\omega)}{\sin(\omega)} \quad (\text{A.15})$$

Quand $\lambda < 1/144$, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$s_\lambda^+(k) = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{\lambda}} \left(\frac{1}{1 - \frac{p_2}{p_1}} p_1^{|k|} + \frac{1}{1 - \frac{p_1}{p_2}} p_2^{|k|} \right) \quad (\text{A.16})$$

Quand $\lambda = 1/144$, la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$s_\lambda^+(k) = (|k| + 1) \cdot p_1^{|k|} \quad (\text{A.17})$$