



HAL
open science

l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire

René Berthelot, Marie Hélène Salin

► **To cite this version:**

René Berthelot, Marie Hélène Salin. l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1992. Français. NNT: . tel-00414065

HAL Id: tel-00414065

<https://theses.hal.science/tel-00414065>

Submitted on 7 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Didactique des Mathématiques

par

BERTHELOT René

&

SALIN Marie-Hélène

-oOo-

L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la
scolarité obligatoire

Thèse soutenue le 7 novembre 1992 devant la Commission d'examen :

MM. R. GAY , Professeur Université Bordeaux I	Président
G. ARSAC , Professeur Université Lyon 1	
G. BROUSSEAU , Professeur IUFM d'Aquitaine	
Y. CHEVALLARD , Professeur IUFM Aix-Marseille	
Y. GERBIER , Maître de conférences Université Pau	
J. PERES , Docteur en Sciences de l'Education	
G. VERGNAUD , Directeur de recherche CNRS	Examineurs

RESUME :

L'apprentissage des connaissances spatiales ne figure pas dans les curriculum d'enseignement, au delà du cycle 2. Il est remplacé par celui de la géométrie des figures élémentaires. Cette absence laisse enfants et adultes démunis dans de nombreuses situations nécessitant l'usage ou la production de représentations spatiales de la vie courante ou professionnelle. Par ailleurs, l'enseignement de la géométrie au collège constitue pour un trop grand nombre d'élèves un obstacle à l'apprentissage des mathématiques.

La thèse est une étude des liens entre ces deux phénomènes et une tentative pour ouvrir des voies de solution à ce problème.

L'étude montre comment le contrat didactique de l'enseignement de la géométrie repose sur la fiction culturelle de la transparence des rapports spatiaux dans l'apprentissage de la géométrie élémentaire ; il appartient à l'élève seul de se constituer et de mettre en oeuvre les connaissances nécessaires à la compréhension de la géométrie enseignée; or ces connaissances ne sont pas « naturellement » acquises dans notre société par les interactions usuelles avec l'environnement spatial ; en cas d'échec cette fiction ne permet à l'enseignant que des remédiations inefficaces et/ou le conduit à en rejeter la responsabilité sur l'élève.

L'étude théorique s'appuie sur la théorie des situations didactiques développée par G Brousseau.

Les auteurs proposent de distinguer trois principaux types de rapports à l'espace appelés problématiques : la problématique pratique, la problématique de modélisation « spatio-géométrique », la problématique géométrique (déductive ou théorique). Ils montrent par de nombreux exemples comment l'absence de prise en compte ou d'articulation de ces problématiques dans l'enseignement les constitue en obstacles à l'apprentissage.

Pour construire des situations d'enseignement permettant le dépassement de la problématique pratique, les auteurs reprennent et étendent l'analyse des représentations de l'espace introduites par G. Galvez et G. Brousseau, micro, meso, et macro-espaces.. Ils développent à cet effet plusieurs processus expérimentaux, sur l'enseignement des plans, sur l'enseignement des angles et de leur mesure, sur l'introduction des raisonnements sur les figures élémentaires, et une analyse comparée de plusieurs situations d'introduction à la démonstration au collège.

MOTS-CLES

Espace, géométrie, enseignement obligatoire, programmes, représentations spatiales, micro-espace, méso-espace, macro-espace, situation adidactique, ostension, phénomènes de didactique, problématique pratique, modélisation, ingénierie, repérage, angle

A

Christiane, et Antoine

Paul, Bruno, et Dominique

Anne et Jean Michel, Etienne, Yves, et Marie

Remerciements

C'est à plusieurs titres que nous exprimons ici notre profonde reconnaissance à Guy Brousseau : au directeur de thèse, bien sur, qui nous a proposé ce vaste sujet, et nous a dirigés dans son exploration ; mais aussi au formateur qu'il a été pour nous depuis vingt ans, en tant que créateur et moteur principal du C.O.R.E.M.¹, soucieux de constamment articuler la théorie à la connaissance du terrain, c'est à dire aux "êtres de chair" que sont les enfants et les maîtres. Notre participation au C.O.R.E.M. nous a permis d'apprendre à la fois notre métier de chercheur et celui de formateurs d'enseignants.

Nous remercions vivement les membres du jury :

Roger Gay, qui nous a fait l'honneur d'accepter de le présider,

Gilbert Arsac, Yves Chevallard et Gérard Vergnaud auxquels nous voulons aussi exprimer notre gratitude pour leur accueil au sein de la communauté didactique,

Yves Gerbier et Jacques Pérès.

Il est rare d'entreprendre une thèse à deux. Pour nous, cette collaboration a été déterminante ; elle nous a permis d'aller au delà de ce que nous aurions pu faire seuls, et de surmonter les moments de découragement provoqués par l'ampleur de la tâche.

Ce travail n'est pas seulement le fruit d'une réflexion à deux mais, pour une part importante, d'un travail d'équipe. Nous exprimons notre reconnaissance à tous les enseignants de l'école Jules Michelet avec lesquels nous avons travaillé, ils sont nombreux de la maternelle au CM2, et plus particulièrement aux directeurs, Gisèle Jousson et Pierre Raymond, chevilles ouvrières du C.O.R.E.M., dont l'aide pour l'observation nous a été indispensable. Nous y associons les membres du groupe élémentaire de l'I.R.E.M., nos collègues anciens professeurs d'école normale, ainsi que Jacques Pérès qui a toujours répondu à nos questions avec compétence et disponibilité.

Pendant cinq ans, nous avons participé aux travaux d'un des groupes du Groupement de Recherche en Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques du C.N.R.S. : "Espace, géométrie, graphismes scientifiques et techniques". Notre réflexion y a été stimulée par la communication entre didacticiens et psychologues, et son champ y a été élargi aux problèmes du monde du travail, en particulier à celui des bas niveaux de qualification. Nous en remercions plus particulièrement R. Baldy, T. Bautier, A. Bessot, F. Colmez, M. Eberhard, B. Parzysz, P. Rabardel, P. Vérillon, et A. Weil-Fassina.

Nous remercions F. Del Moral, M. Boisnard, J. Courbin, et J.P. Dorignac, pour l'aide apportée à la réalisation matérielle de ces ouvrages.

Enfin, comment des étudiants de Guy Brousseau pourraient-ils oublier le rôle joué par Nadine Brousseau qui, au delà de ses compétences professionnelles, a su si bien les accueillir et les encourager ?

¹ Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques

PLAN GENERAL

INTRODUCTION	5
PARTIE A : INTRODUCTION A UN PROBLEME D'INGENIERIE	8
PARTIE B : ANALYSE DIDACTIQUE	
Introduction	19
B-1 : Les déficits de maîtrises spatiales.....	21
B-2 : Le problème de la différenciation entre l'enseignement de l'espace et l'enseignement de la géométrie	28
B-3 : Caractères principaux des rapports spatiaux de l'élève avec le milieu.....	36
B-4 : Propriétés didactiques des différents types de situation engendrés par ces caractères.....	52
B-5 : Phénomènes de didactique	75
B-6 : Les représentations spontanées de l'espace	91
B-7 : Questions d'ingénierie	126
PARTIE C : ETUDES EXPERIMENTALES	
C-1 : Evolution du contenu des programmes.....	150
C-2 : Etude diachronique de l'utilisation de l'ostension dans l'enseignement primaire	163
C-3 : Problèmes "Rectangle" et "Bancs"	177
C-4 : Représentations pratiques de l'espace.....	216
C-5 : Mise en évidence expérimentale de conceptions du repérage	232
C-6 : L'enseignement des angles au CM, étude préalable.....	239
C-7 : Premier processus d'enseignement des angles	260
C-8 : Deuxième processus d'enseignement des angles.....	302
C-9 : Etude d'un processus d'apprentissage des plans	324
PARTIE D : RECUEIL DE SITUATIONS	340
CONCLUSION	353
BIBLIOGRAPHIE	364
TABLE DES MATIERES	371
ANNEXES	TOME 2

Introduction

La didactique des mathématiques se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre l'enseignement et l'apprentissage de cette science.

Cette formulation, proposée par l'Encyclopaedia Universalis, permet d'aborder d'emblée ce qui est au coeur de la relation didactique, c'est-à-dire la question du *partage des responsabilités entre le professeur et l'élève*.

Une fois déterminés les savoirs à enseigner, la réflexion traditionnelle porte sur l'ordre dans lequel ils doivent être enseignés, sur ce que l'élève devrait savoir au vu des enseignements antérieurs qu'il a reçus, et sur ce qu'il devrait donc pouvoir apprendre de nouveau. Mais elle laisse dans l'ombre la source suivante de problèmes didactiques : L'élève a besoin de connaissances qui ne lui sont pas enseignées mais qu'il doit savoir mettre en oeuvre, soit pour apprendre, soit pour utiliser ce qu'il a appris.

Cette composante fondamentale du contrat didactique est le plus souvent occultée car celui-ci ne peut s'engager si l'enseignant et l'élève n'ont pas la conviction que les acquisitions antérieures et les conditions du nouvel enseignement donnent à l'élève la possibilité de l'acquisition de la notion visée. Mais que se passe-t-il quand l'enseignement échoue? Une multitude de raisons peuvent être invoquées: l'élève n'a pas travaillé, il ne sait pas travailler, il manque de bases, il ne sait pas appliquer ce qu'il a appris, ou bien le professeur n'a pas bien expliqué, il est allé trop vite etc. Ces explications, que l'on entend couramment dans les salles de professeurs ou de la part des élèves, expriment bien l'exigence du partage des responsabilités entre l'enseignant et l'apprenant. Notre objet n'est pas de discuter de la pertinence de ces explications mais de mettre en évidence un autre partage, qui lui n'est pas reconnu : Parmi les connaissances nécessaires à l'élève pour réaliser les tâches demandées, certaines sont enseignées et sous la responsabilité du professeur, d'autres ne le sont pas et sont donc sous la responsabilité implicite de l'élève. Ce partage est inéluctable, mais l'identification précise de ces deux types de connaissances n'est pas faite, et leur attribution à la responsabilité du maître ou de l'élève ne peut être remise en cause.

Un champ de recherches en didactique s'est ouvert sur ce sujet, dont nous allons donner quelques exemples, avant de préciser en quoi notre travail relève de ce champ.

Le domaine, sans doute le mieux identifié, de ces connaissances attendues des élèves, mais qui ne leur sont pas enseignées, concerne le raisonnement. Savoir raisonner fait partie de ces compétences que l'enseignant se désole de ne pas trouver chez ses élèves, tout en étant désarmé quant à l'aide à leur apporter sur ce plan. L'enseignement du savoir savant correspondant, la logique, tenté pendant un temps, n'a pas produit les effets attendus. La thèse de P. Orus (1992) s'attaque à ce problème, en proposant d'autres voies.

A l'inverse, il existe des connaissances comme l'énumération, nécessaire à la résolution de problèmes posés aux élèves à différentes étapes de leur scolarité, du dénombrement à la combinatoire, qui, non seulement ne sont pas enseignées, mais dont l'absence n'est même pas pointée comme cause de difficultés et d'erreurs. C'est l'objet de la recherche de J. Briand¹.

¹thèse en préparation

Notre travail soulève ce même problème à propos de l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Comment s'y fait le partage des responsabilités entre ce qui relève de celle du professeur et ce qui relève de celle de l'élève ? y a-t-il des connaissances ou même des savoirs que le professeur attend des élèves sans que l'enseignement ne les aient jamais pris en charge ? Si oui, lesquels ? Ce partage est-il satisfaisant ? Si non, peut-on le modifier ?

En ce qui concerne la géométrie au collège, plusieurs recherches proposent l'introduction d'enseignements nouveaux, non pas pour étendre le champ des savoirs enseignés mais pour en permettre un meilleur traitement par les élèves : par exemple, l'équipe de l'IREM de Lyon (Arsac et coll., 1992) propose des situations d'enseignement permettant "aux élèves de s'approprier les règles du débat mathématique", connaissance nécessaire en particulier pour l'apprentissage de la géométrie. B. Parsysz (1989) a montré la nécessité d'un apprentissage explicite d'un système de représentation graphique de l'espace. Virginia Padilla Sanchez (1992), à Strasbourg, a étudié les effets d'un apprentissage des différents traitements figuratifs qui donnent aux figures géométriques leur rôle heuristique. L'existence de ces recherches, montre que cette question de la détermination des connaissances à enseigner ou non ne relève pas du choix personnel de chaque enseignant, mais de celui du système d'enseignement dans son ensemble.

La spécificité de notre travail est en particulier d'éclaircir le statut et le rôle des connaissances spatiales dans la transposition didactique de la géométrie, au cours de la scolarité obligatoire et plus particulièrement à l'école primaire et dans les deux premières années du collège. En effet, dans les situations d'enseignement qu'il met en oeuvre, le professeur ne peut éviter de laisser à l'élève la responsabilité de faire appel à des connaissances spatiales, dont une partie au moins ne lui ont pas été enseignées. Ce fait est particulièrement illustré par la recherche que mène C. Molina à Saragosse : il s'agit de concevoir un enseignement de la géométrie pour des classes qui comportent à la fois des élèves voyants et non-voyants. Serait-ce possible ? Sitôt la question posée, les difficultés surgissent et leur évocation fait apparaître toutes les connaissances et compétences implicites concernant les rapports à l'espace qu'exige cet enseignement, compétences dont semblent privés les non-voyants.

Mais les enfants voyants, eux, qui constituent les classes sur lesquelles porte notre recherche, disposent-ils bien de ces compétences que leur attribue implicitement l'enseignement ? Se développent-elles spontanément ? Si ce n'est pas le cas et si leur absence explique les difficultés d'apprentissage de certains, pourquoi l'enseignement ne les prend-il pas en charge ? Est-il possible d'envisager un déplacement pertinent de la frontière établie entre ce qui est enseigné et ce qui ne l'est pas ?

Ces interrogations constituent l'un des axes de notre approche des problèmes posés par l'enseignement de la géométrie et de l'espace dans la scolarité obligatoire.

Le second axe de notre travail est l'étude de la transposition didactique des questions d'espace et de géométrie, du point de vue, plus traditionnel, de la détermination des savoirs enseignés.

Comment l'enseignement du savoir savant, que constitue la géométrie, théorie très puissante de toute une famille de pratiques spatiales, s'articule-t-il avec celui de ces savoirs pratiques ?

Contrairement au raisonnement, dont le savoir savant correspondant, la logique mathématique, n'est pas enseigné dans la scolarité obligatoire, la géométrie est, très tôt, une rubrique de l'enseignement des mathématiques.

Les connaissances apportées par l'enseignement de la géométrie permettent-elles à un enfant ou à un adolescent de maîtriser l'essentiel des problèmes spatiaux que ce savoir théorise, auxquels il est ou va être, scolairement ou non, confronté ?

Et si ce n'est pas le cas, pourquoi les connaissances spatiales ont-elles si peu de place dans les programmes de la scolarité obligatoire ?

Posons notre question brutalement : L'enseignement de la géométrie n'a-t-il pas éliminé l'enseignement de l'espace ?

Et accompagnons la de la question inverse : l'absence d'un traitement didactique convenable des connaissances spatiales ne constitue-t-il pas, en retour, un obstacle à l'enseignement de la géométrie ?

Quelle est la fonction, dans cette transposition, tant au niveau de la détermination des savoirs à enseigner qu'à celui du partage de la responsabilité entre professeurs et élèves, de l'épistémologie des professeurs, et particulièrement d'un procédé didactique aussi général que l'ostension ?

Enfin, un troisième fil directeur a conduit notre travail, celui de la recherche des moyens à mettre en oeuvre pour que les élèves de la scolarité obligatoire donnent un *sens convenable* aux connaissances et aux savoirs enseignés. Comment construire des situations didactiques qui le permettent ? Quels problèmes pose l'introduction de ces situations dans le système d'enseignement ?

Présentation de l'ouvrage

L'ampleur du sujet nous a conduits à développer, dans la partie A, une première approche où sont exposées une série de questions tendant à en cerner différents aspects.

La transformation de ces questions dans un cadre théorique plus rigoureux, et leur étude sont présentées dans la partie B.

La partie C comprend plusieurs travaux expérimentaux sur lesquels s'appuient les développements de la partie B.

La partie D présente un catalogue de situations didactiques, de différentes origines, s'inscrivant dans la problématique dans laquelle nous nous situons.

PARTIE A
PREMIERE APPROCHE D'UN PROBLEME
D'INGENIERIE

I. TROIS PROPOSITIONS SUR L'ENSEIGNEMENT

L'enseignement de la géométrie dans l'enseignement secondaire est depuis les années 60 l'objet de vives controverses et de changements importants. Après une période de quasi-disparition de la "vraie" géométrie, celle-ci retrouve droit de cité à la fin des années 70. Toutefois, si l'on en croit l'exposé de Gouteyron au colloque inter-IREM¹ de 1984, de nombreux problèmes sont apparus, risquant de mettre en cause, de facto, l'enseignement de la géométrie. Les sources de problèmes qu'il relève sont classées en six catégories : l'hétérogénéité de la classe, l'insuffisance de formation des jeunes enseignants, la place (insuffisante) accordée à la géométrie dans diverses sections, la longueur excessive des programmes, la critique des mathématiques "instrument de sélection", et enfin, le niveau général insuffisant des élèves. L'auteur plaide ensuite pour le maintien et l'amélioration de l'enseignement de la géométrie, en affirmant qu'il favorise l'apprentissage du raisonnement et le développement de l'esprit de recherche. Aucune place n'est faite aux connaissances spatiales nécessaires à l'apprentissage de la géométrie.

A l'école élémentaire, les enjeux ne sont pas de même nature. Les controverses font place, depuis le début des années 80, à des déclarations sur l'importance de la construction de l'espace et, en particulier, sur celle du rôle de la géométrie dans cette construction.

Faut-il différencier le spatial du géométrique ? Faut-il articuler les deux ? Si les réponses sont positives, comment réaliser cette articulation ?

Que doit prendre en charge l'enseignement de la scolarité obligatoire ?

Les opinions sur ces questions sont diverses et il n'y a pas eu à notre connaissance de recherche en didactique permettant de débattre des réponses et donc d'éclairer le débat.

Nous avons donc entrepris de répondre à ces questions. Dans cette partie, qui constitue une première approche de notre travail, nous avons exploré le sujet en déterminant trois grandes classes de questions. Nous avons représenté chacune de ces classes par une proposition, qui constitue une hypothèse de réponse que nous soumettons au débat.

Proposition I

Introduire explicitement des objectifs relatifs aux connaissances spatiales dans l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire.

Proposition II

Différencier nettement l'enseignement des connaissances spatiales et celui des connaissances géométriques auprès des élèves en respectant ce qui fait la spécificité de chacun de ces domaines de connaissances.

¹ organisé à Marseille les 1-2 juin 1984, avec l'aide de la Direction des Lycées, de la Société Mathématique de France, et du CIRM, actes publiés par l'IREM de Marseille, 1985.

Proposition III

Commencer l'enseignement de la géométrie, c'est à dire celui de l'étude des objets spatiaux dans une problématique mathématique, dans la scolarité obligatoire dès la fin du primaire en introduisant les concepts fondamentaux de la géométrie comme outils pour résoudre des problèmes spatiaux effectifs.

Articuler au collège la géométrie outil dans l'espace et la géométrie héritée des grecs.

II. EXAMEN DE LA PROPOSITION 1

A. Explicitation de la proposition 1

1. A la fin de la scolarité obligatoire, les élèves doivent disposer de connaissances spatiales minimales.

Rappelons les fonctions de la scolarité obligatoire :

- certes, préparer aux apprentissages ultérieurs, en particulier professionnels et scolaires
- mais aussi préparer l'élève à assumer les décisions qu'il doit prendre dans son milieu de vie.

De ce double point de vue, des connaissances spatiales minimales sont nécessaires pour tous les élèves.

Par spatial nous entendons ce qui est relatif à l'espace dans lequel tout individu doit savoir agir de façon pertinente, en exploitant et/ou en anticipant les rétro-actions de l'environnement (qu'il adapte ou modifie éventuellement).

Par connaissances spatiales nous désignons les connaissances que peut décrire la géométrie, et qui permettent à chacun de maîtriser l'anticipation des effets de ses actions sur l'espace, leur contrôle, ainsi que la communication d'informations spatiales.

2. Pourquoi l'assignation explicite d'objectifs strictement spatiaux à l'enseignement des mathématiques est-il nécessaire ?

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, c'est l'enseignement de la géométrie qui est traditionnellement en charge des questions spatiales, mais aucun objectif spatial explicite n'est plus assigné, dès le cycle 2, à l'enseignement des maîtres et à l'apprentissage des élèves. On pourrait penser que l'enseignement de la géométrie fournit aux élèves des outils pour mieux maîtriser leurs rapports spatiaux.

Dire qu'une assignation explicite de connaissances spatiales est nécessaire, c'est dire qu'actuellement dans la scolarité obligatoire l'enseignement de la géométrie ne prend pas en charge ce type d'objectifs et ne peut pas le faire, ce qui va à l'encontre d'affirmations courantes qui assimilent enseignement de géométrie et enseignement spatial.

B. Questions rassemblées autour de la proposition 1

1. Quels sont les acquis et les déficits de connaissances spatiales repérés à la fin de la scolarité obligatoire ?

Cette question est une question nouvelle, qui n'a fait l'objet d'aucune étude globale concernant le système éducatif, nous avons pu le constater :

- Il n'existe aucune liste d'un ensemble de connaissances spatiales considéré comme minimal, à fortiori, aucun constat d'ensemble.
- C'est en vain que nous avons cherché des indications dans les évaluations officielles de l'enseignement.

- Les centres d'orientation et d'information ne disposent pas de résultats et manquent de moyens d'investigation spécifiques.

Nous devons donc faire appel à des études relativement ponctuelles, liées à des problèmes professionnels soulevés dans le cadre des milieux correspondants.

2. Existe-t-il dans la vie courante des déficits qui justifient de poser un problème d'enseignement ?

Chacun connaît de nombreux exemples d'erreurs spatiales courantes; certaines forment même régulièrement le support de gags à la télévision ou au cinéma : pensons au personnage qui transporte un objet long (skis, échelle), incapable de contrôler les effets de ses déplacements sur son environnement immédiat².

Si l'on considère la vie de "tous les jours", on constate que se déplacer dans un espace inconnu (la plupart du temps urbain) ou y guider quelqu'un est une activité aussi fréquente dans le monde actuel que mal maîtrisée avec ou sans utilisation de plans...sans parler des "inévitables" confusions entre la droite et la gauche, et bien d'autres problèmes de communication au cours d'actions spatiales.

Nous citerons et développerons les travaux mal connus de G. Galvez (1984) qui a étudié sur la demande des autorités de la ville de Mexico le problème grave des enfants qui se perdent dans cette mégapole. Nous montrerons en particulier l'actualité dans notre espace urbain moderne du déficit de connaissances révélé par ce problème.

Les déficits que nous venons d'évoquer sont de bons exemples d'aptitudes qui s'acquièrent difficilement après la scolarité obligatoire. Cela suffit-il à justifier l'assignation à l'enseignement obligatoire de l'acquisition de ces aptitudes?

3. Existe-t-il des déficits de connaissances spatiales préjudiciables à l'enseignement obligatoire ou post-obligatoire?

a) relatives aux mathématiques ?

Les professeurs de mathématiques font souvent référence au fait que les élèves ne savent pas faire de bonnes figures et ne voient pas dans l'espace ce qu'ils devraient être capables de voir.

Cette affirmation peut sembler étonnante à quelqu'un qui n'enseigne pas la géométrie dans l'enseignement secondaire : les élèves ne verraient-ils pas les figures de géométrie tracées sur la feuille? Mais, justement, répondent les professeurs, les élèves ne voient qu'elles, que ce qui est tracé, avec une signification spontanée tirée de l'énoncé; ils sont incapables de ré-interpréter ces tracés, de voir par exemple une droite là où il n'ont tracé qu'un côté de triangle, incapables de concevoir ce qui peut-être ajouté (ou enlevé) pour résoudre les problèmes.

Les compétences incriminées sont peu précises, mais on en trouve l'écho jusque dans les programmes d'enseignement.

Nous aurons à nous interroger sur la légitimité des déclarations à ce sujet.

b) relatives aux autres disciplines scolaires ou professionnelles ?

Là non plus, nous n'avons trouvé aucune étude globale. Il pourrait s'agir :

² Le rire déclenché manifeste la connaissance que chacun a de ces problèmes et des "accidents" quasi inéluctables liés à ces situations. Le risque est soit socialement accepté, tant que ce ne sont pas des situations trop courantes, soit particulièrement contrôlé (dans une station de ski, tout le monde se méfie...)

- de connaissances spatiales nécessaires à l'apprentissage d'une discipline, connaissances sans lesquelles l'accès aux concepts de la discipline et à leur fonctionnement est bloqué ; par exemple en géographie, les notions de repérage sur une sphère au moyen de deux angles.
- ou de connaissances spatiales dont la manipulation est un fondement des concepts de la discipline considérée, le dessin industriel ou la physique par exemple.

Des déficits très importants de ce type sont signalés par des études de psychologues concernant des adultes en formation de "bas niveau", en dessin technique en particulier.

Nous ne pouvons citer que quelques travaux dont nous avons eu connaissance à travers notre collaboration au Groupement de Recherche de "Didactique des disciplines scientifiques" du CNRS

4. Quelles connaissances spatiales faut-il enseigner en mathématiques au cours de la scolarité obligatoire?

a) Qu'est-ce qui ne peut pas relever de l'enseignement des mathématiques ?

La question est moins de proposer des connaissances à l'apprentissage que de délimiter l'étendue du domaine qu'il est légitime d'assigner à l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire. En effet, à croire certains mathématiciens, toutes les questions de maîtrise de l'espace relèveraient de la géométrie ou des géométries.

Il y a bien d'autres disciplines qui prennent en charge des maîtrises spatiales : ne citons que les APS, la géographie, les activités technologiques, l'enseignement professionnel. En l'absence d'une réflexion interdisciplinaire sur ce point, il est difficile de délimiter précisément le rôle réciproque des unes et des autres relativement aux connaissances spatiales autrement que par recours aux textes officiels de l'enseignement..

Une fois des choix faits relativement à l'étendue de ces connaissances et savoir-faire, il faudra les transformer en objectifs d'enseignements, si cela est possible...

b) Quelles connaissances spatiales sont-elles actuellement assignées à l'enseignement des mathématiques?

Il faut examiner les rapports qu'entretient l'enseignement de la géométrie avec l'espace dans l'enseignement actuel.

Les textes officiels (1985) sur l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire affirment que "les activités géométriques doivent concourir au même titre que d'autres, à la construction de l'espace chez l'enfant". L'emploi du verbe "doivent" laisse sous-entendre que cet apport des activités géométriques à la construction de l'espace ne se fait pas de lui-même, que les enseignants ont quelque chose à faire pour qu'il en soit ainsi. Nous aurons donc à nous interroger :

-ce "quelque chose" est-il explicité dans les instructions et les programmes concernant les activités géométriques?

-Parmi les objectifs assignés aux "activités géométriques" par ces textes, y en a-t-il certains qui concernent explicitement la maîtrise de l'espace? Les enseignants peuvent-ils les traduire en situation d'enseignement ?

Nous montrerons qu'après le C.P., les activités ne portent plus que sur des objets, il n'est même plus question dans le cadre des mathématiques de plan de l'espace environnant, par exemple. Les connaissances à enseigner, issues du savoir géométrique, sont constamment référées à certaines expériences spatiales : celles liées à la connaissance des formes et des propriétés au moyen de la vision, mais ne sont pas articulées avec la problématique spatiale.

Enfin, plusieurs enquêtes ont montré que les enseignants du primaire faisaient très peu de géométrie (malgré les incitations du programme)

c) Les connaissances et savoir-faire spatiaux sont-ils enseignables?

En effet, si une connaissance n'est pas enseignée, c'est peut-être parce qu'elle n'est pas enseignable, dans l'état actuel du système d'enseignement.

Suffira-t-il d'ajouter quelques objectifs à l'enseignement ?

S'il s'agit de quelques connaissances ou savoir-faire isolés, on pourrait envisager d'allonger de quelques lignes les programmes de géométrie. Seraient-ils effectivement enseignés ?

Pour enseigner une connaissance, il faut pouvoir :

- la transformer en objectifs d'enseignement organisés en une genèse raisonnable, comportant un nombre limité de situations d'enseignement gérables dans la classe. Cette question sera reprise dans la proposition suivante.
- la communiquer aux enseignants, accompagnée d'un vocabulaire convenable et de moyens d'évaluation adéquats.
- proposer un choix suffisamment varié de situations d'enseignement...

d) Quelles connaissances spatiales pourront-elles être explicitement prises en charge par l'enseignement de la géométrie? Et à quelles conditions?

Pour répondre à cette question, il faudra :

- identifier la relation entre les connaissances visées et la géométrie
- concevoir des situations d'apprentissage adaptées aux réponses sur les origines des difficultés, et spécifiques.
- étudier la communicabilité de ces situations aux enseignants, préciser les connaissances culturelles et didactiques qu'elles supposent.

Nous reprendrons cette question en l'élargissant à l'occasion de la proposition suivante

C. Conclusion

A ce niveau de notre étude, nous avons précisé les enjeux de notre première proposition en dégagant quelques questions centrales qui lui sont liées, et dont nous montrerons dans la partie suivante que certaines admettent des réponses positives .

Encore faudra-t-il que ces connaissances qui ne sont pas enseignées à l'heure actuelle le soient de façon efficace. Comment faire ? C'est l'objet des deux propositions suivantes.

III. EXAMEN DE LA PROPOSITION 2

Différencier nettement l'enseignement des connaissances spatiales et celui des connaissances géométriques auprès des élèves en respectant ce qui fait la spécificité de chacun de ces domaines de connaissances.

A. Explicitation de la proposition

Nous affirmons par là, d'abord que l'on peut identifier des spécificités suffisamment importantes qui délimitent deux domaines de connaissances, ensuite qu'il n'est pas suffisant de les différencier auprès des maîtres, mais qu'il faut le faire vis à vis des élèves. Cette proposition contredit les idées qui sous-tendent un certain nombre de pratiques courantes de l'enseignement de la géométrie. Nous allons ci-après rassembler quelques explicitations nécessaires pour donner du sens à ces affirmations.

1. Les connaissances spatiales et les connaissances de géométrie ont-elles des caractéristiques différentes ?

a) La genèse

Une première différence est relative à la genèse de ces connaissances pour l'enfant.

Chaque enfant dispose de connaissances spatiales avant même que l'on se propose de lui apprendre des connaissances de géométrie.

La géométrie, elle, doit être enseignée pour exister.

b) Le vocabulaire

Il comporte bien des mots communs. La signification en est-elle la même? Rien n'est moins sûr :

Dans la vie courante ou professionnelle (hors mathématiques) personne ne qualifiera de rectangulaire un objet de forme carrée : ce serait considéré comme une erreur, parce que cela serait interprété comme voulant signifier une différence de longueur entre les côtés consécutifs.

En géométrie par contre, qualifier un carré de rectangle constitue une manifestation d'une connaissance particulière qui fait l'objet d'un enseignement.

c) Les connaissances

Nous poursuivons l'identification des différences autour d'un autre exemple :

Quelles connaissances sont-elles nécessaires au vitrier pour reproduire un quadrilatère de forme parallélogramme afin de découper une vitre adaptée à la fenêtre d'un de ses clients? Il est certain que s'il s'agit pour lui d'une action familière : ce ne sera pas un problème et il mettra en oeuvre la procédure qu'il connaît bien. S'il n'est familier que des fenêtres de forme rectangulaire, comme le vitrier à qui nous avons eu affaire et que nous avons pu observer, il doutera et ne saura quelles mesures prendre avec les outils dont il dispose. Son problème est de prendre les informations qui lui garantissent que la vitre qu'il va découper aura bien la forme voulue. Ce qui lui manque est la maîtrise du caractère déformable ou non des figures dont on connaît les longueurs des côtés. Dans le cas que nous avons observé, c'est bien ce qu'a manifesté la décision qu'a prise le vitrier : il a fait, avant la coupe du verre, un cadre en bois correspondant aux mesures saisies puis il l'a comparé à la fenêtre, et ajusté à sa forme.

Dans le cadre de la géométrie, la formulation d'un problème correspondant au problème du vitrier serait par exemple : "Trouver un ensemble de propriétés caractéristiques du parallélogramme". La solution de ce problème appelle une validation d'ordre mathématique. Si le vitrier dispose de connaissances géométriques, il pourra prévoir que la connaissance des longueurs des côtés et d'une diagonale (informations auxquelles ses instruments lui donnent un accès facile) suffit à déterminer une figure superposable à la figure mesurée.

Mais il ne trouvera pas cette propriété dans un cours de géométrie, car pour la géométrie elle n'a pas particulièrement d'intérêt. Les propriétés intéressantes pour la géométrie et pour l'espace ne sont pas les mêmes et les exemples ne manquent pas : l'incommensurabilité du côté du carré à sa diagonale par exemple, comme la droite d'Euler, ne répondent à aucun intérêt spatial. Considérons une propriété géométrique dont l'utilité spatiale est avérée, la relation de Pythagore par exemple ; le premier problème de géométrie en est la démonstration, qui n'a aucune utilité spatiale. A l'inverse, l'intérêt du théorème de Pythagore pour

l'enseignement mathématique n'est pas seulement fondé sur son utilité spatiale (qui est grande), mais aussi sur la variété de démonstrations que l'on peut en fournir ou qu'il permet de faire...

d) L'organisation des connaissances

Bien évidemment, l'ensemble de ces différences ne peut que déterminer une organisation différente des concepts communs.

Les connaissances de la géométrie sont identifiées et organisées de manière bien connue par la théorie mathématique. Cette structuration a d'ailleurs changé au cours de l'histoire.

L'étendue et la structure des connaissances spatiales spontanées ou culturelles sont par contre moins bien connues, parce que utilisées pour résoudre des situations particulières correspondant à des champs professionnels distincts.

2. L'enseignement traditionnel de la géométrie ne prend pas en compte de manière explicite ces différences.

Ceci peut-il expliquer une partie des difficultés rencontrées par les élèves ?

Par exemple, dans l'enseignement obligatoire jusqu'en en 6^e-5^e, les connaissances géométriques, souvent réduites à un langage décrivant certaines configurations spatiales très délimitées, ont-elles un rapport avec la résolution de problèmes spatiaux effectifs relatifs aux objets ou tracés physiques à partir desquels se font ces descriptions ?

Comme une partie du vocabulaire géométrique appartient au langage de tous les jours l'apprentissage s'effectue sur le mode d'apprentissage de ce langage : la monstration. "Ceci (que l'on montre), est un(e) ___" ? L'enseignement actuel courant n'étend-il pas, particulièrement à l'école primaire, ce processus à l'ensemble du vocabulaire géométrique, dont la pertinence échappe ainsi totalement aux sujets : pourquoi par exemple appeler rectangle un carré?

Tandis que l'enseignant pense enseigner des "objets" géométriques, les élèves ont-ils les moyens de concevoir autre chose que des objets spatiaux qu'ils rattachent à leurs représentations spatiales spontanées?

3. L'enseignement de ces deux types de connaissances doit être différencié auprès des élèves

La distinction doit donc d'abord être faite auprès des maîtres, sinon c'est l'objectif géométrique qui écrase la dimension spatiale des objets de connaissance.

Mais ceci est insuffisant; si la distinction n'est pas explicitement faite auprès des élèves, ceux-ci ne peuvent que confondre les deux types de connaissances.

Si nous voulons que les élèves échappent à la confusion des deux problématiques, il serait donc essentiel que les situations d'enseignement spatial et celles d'enseignement de la géométrie qui leur sont proposées soient elles-mêmes nettement différenciées. Nous aurions en conséquence à structurer le champ des connaissances spatiales en une genèse spécifique, autour de situations d'enseignement qui auront elles aussi, par rapport à celles de géométrie, un caractère spécifique.

B. Questions rassemblées autour de la proposition 2

La spécificité des connaissances spatiales par rapport aux connaissances géométriques que nous avons illustrée par des exemples, est à relier aux débats sur les rapports entre les

connaissances spatiales et la géométrie qui se sont déroulés au cours de l'histoire des mathématiques. C'est du point de vue de la théorie des situations que nous reprendrons ces questions :

1. Quelles sont les caractéristiques pertinentes pour l'enseignement qui différencient les connaissances spatiales et géométriques ?

Récapitulons les spécificités que nous avons pointées à partir de quelques exemples :

- la genèse "naturelle" dans un cas, totalement scolaire dans l'autre
- la nature de la validation
- le choix des propriétés et des problèmes
- l'organisation des connaissances

a) Sont-elles fondées?

b) Sont-elles pertinentes pour l'enseignement?

c) Comment l'enseignement actuel les traite-t-il?

1) Différence de genèse

2) Différence de problèmes et de validation

Les problèmes spatiaux relèvent d'une solution empiriquement validée. Les problèmes de géométrie relèvent eux, d'une solution mathématiquement prouvée.

Dans une situation d'enseignement de connaissances spatiales, c'est la précision de la réalisation que le maître devra valoriser et veiller à faire obtenir. Quel en est le coût?

Dans les situations de géométrie, l'essentiel se passe au niveau non de l'espace, mais du langage qui le décrit. Bernard Malgrange³ décrit très bien les incompréhensions des élèves quand ils sont confrontés pour la première fois à un problème de géométrie : la règle du jeu change sans qu'ils puissent en comprendre la raison. Pour beaucoup d'entre eux, cette incompréhension initiale demeure.

3) Différences de structure

L'enseignement actuel de la géométrie s'appuie sur les connaissances spontanées des élèves.

a) Les connaissances spatiales spontanées correspondent-elles à une collection de compétences très variées, plus ou moins spécifiques à certains contextes, et sans lien entre elles? Dans ce cas, l'enseignement de nouvelles connaissances pourrait être fait sans nécessiter une étude très poussée sur leur articulation avec les anciennes.

b) Les connaissances géométriques constituent-elles la structuration implicite et "naturelle" des connaissances spatiales ? Dans ce cas, leur enseignement ne devrait pas soulever de difficulté sérieuse.

c) Les connaissances spatiales spontanées sont-elles organisées en systèmes de connaissances stables (selon les hypothèses de Brousseau et Galvez), dont certaines se constitueraient en obstacles à de nouvelles connaissances (spatiales ou géométriques)? Dans ce cas, l'enseignement devrait organiser l'identification et le franchissement de ces obstacles.

2. Faut-il concevoir deux enseignements indépendants?

³ Nimier (1989), Entretiens avec des mathématiciens, PUF de Lyon, p. 54

Le professeur ne peut enseigner la géométrie dans la scolarité obligatoire sans s'appuyer sur des connaissances spatiales.

Il est donc amené à assumer de façon habituelle la relation suivante entre ces deux domaines : l'espace relève des compétences préalables des élèves, c'est ce qui est sous leur contrôle, tandis que la géométrie est sous le contrôle du professeur.

Les rapports entre l'espace et la géométrie sont controversés parmi les mathématiciens. La position la plus répandue dans l'enseignement est la position platonicienne qui établit une rupture fondamentale entre les deux types de connaissances, la géométrie faisant partie du monde des Idées. Les connaissances géométriques n'en contribuent pas moins à la résolution de problèmes spatiaux : elles fournissent des moyens logiques d'anticiper des solutions et d'en contrôler la validité.

C. Conclusion

Nous avons parcouru quelques aspects de la spécificité respective des connaissances spatiales et de la géométrie.

Quelle que soit la position que nous choisissons, géométrie platonicienne ou géométrie science expérimentale de l'espace, il y a une rupture entre les deux domaines de connaissances. Comme chacune de ces deux positions implique une approche différente des activités d'enseignement, il va falloir choisir l'une ou l'autre.

Pour choisir, il faudrait étudier les propriétés didactiques de chacune de ces positions, et déterminer celle qui correspond le mieux aux objectifs choisis pour l'enseignement.

La position platonicienne ne conduit-elle pas la majorité des élèves à des obstacles qui ne sont pas levés au cours de la scolarité obligatoire ?

Peut-on, si l'on se réfère au fonctionnement de ces connaissances, concevoir entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques des rapports supportés par le rôle de *théorie scientifique* que peut jouer *la géométrie* par rapport à *certaines problèmes spatiaux*? Il faudrait alors préciser les conditions expérimentales de cette relation et montrer comment ce point de vue nous permet de prendre en compte de façon naturelle les différences spécifiques entre les deux types de connaissances évoquées ci-dessus.

Il nous faudrait ensuite étudier la possibilité d'un enseignement sur la base de cette relation expérimentale, en proposant des situations d'enseignement pour la scolarité obligatoire qui exploitent cette relation. C'est l'objet de la proposition suivante.

IV. EXAMEN DE LA PROPOSITION 3

Commencer l'enseignement de la géométrie, c'est à dire celui de l'étude des objets spatiaux dans une problématique mathématique, dans la scolarité obligatoire dès la fin du primaire en introduisant les concepts fondamentaux de la géométrie comme outils pour résoudre des problèmes spatiaux effectifs.

Traiter au collège la différence entre réalité spatiale et modèle géométrique.

A. Explicitation de la proposition 3

L'initiation à la géométrie devrait-elle donc commencer dès l'école primaire ?

Cette initiation doit pouvoir se fonder sur de nouvelles relations avec l'espace.

Il peut être dommageable de repousser à l'enseignement secondaire une connaissance spatiale de certains concepts de la géométrie

- parce que le caractère spatial risque d'y être évacué

- parce que le développement de l'élève se fera mieux s'il possède plus de moyens de maîtrise spatiale.
- parce que le fonctionnement du concept en géométrie peut être amélioré s'il repose sur une connaissance spatiale établie.

Nous ne soutiendrons pas que tous les concepts géométriques doivent être étudiés comme des objets de la géométrie mathématique dès l'école primaire.

Par contre, tous les concepts essentiels ne devraient-ils pas être introduits à partir de problèmes spatiaux, pour lesquels ces concepts apparaissent comme des outils privilégiés permettant l'anticipation de la solution spatiale ?

Un tel enseignement est-il réalisable ?

Nous ne pouvons pas considérer que la géométrie des mathématiciens relève du même fonctionnement. En effet, dans ce cadre, il n'y a pas appui sur le sensible, il y a rejet explicite de ce type de référence. Il faut donc permettre aux élèves de passer d'un cadre à l'autre, et cela peut se faire au collège.

B. Questions à examiner pour débattre la proposition 3

1. Quels sont les principaux concepts géométriques à élaborer spatialement dans la scolarité obligatoire?

En première analyse, nous ne remettrons pas en cause ce que proposent les textes officiels régissant les niveaux d'enseignements auxquels nous nous intéressons.

Pour ce qui relève de l'enseignement primaire, nous y trouvons les concepts suivants : longueur, segment, quadrilatères particuliers, cercle, éléments de symétrie, droites, angle droit, milieu, droites parallèles, droites perpendiculaires, angles, agrandissement ou réduction, translation, rotation, surfaces, volumes.

2. Par quelles situations élaborer les concepts géométriques?

Il ne serait pas raisonnable de concevoir que tous ces concepts relèvent d'un même niveau de développement géométrique en particulier à l'école primaire .

Quelles sont les maîtrises spatiales importantes commandées par chacun de ces concepts géométriques ?

Citons en quelques unes sans en faire une liste exhaustive :

Comment conserver la forme des figures dans la reproduction ?

Comment se déplacer sans se perdre dans un espace inconnu ?

Comment évaluer la distance entre deux points si on ne peut (ou ne veut) pas faire de mesure directe entre les deux ? (problèmes du plombier, de l'électricien...)

Comment couper au sol les poutres pour qu'elles s'assemblent convenablement sur le toit ? (problème du charpentier...)

Comment connaître la position des objets par rapport à moi, si je me déplace ? (problème du randonneur...)

Parmi ces maîtrises, quelles sont celles qui ne se développent pas spontanément ?

Un certain nombre de situations visant de telles maîtrises ont été mises au point dans le cadre des recherches du COREM. Elles sont souvent mal connues, nous les présenterons.

3. Quels problèmes spatiaux peuvent permettre d'introduire à la pratique géométrique?

La question de l'initiation à la géométrie dépend fondamentalement du choix du type de rapport entre espace et géométrie. Nous avons choisi l'approche d'une science expérimentale.

Comment initier à une approche expérimentale ?

Quelle est la place de la précision des tracés ?

Quelle est la fonction et la place des propriétés des figures ?

Comment introduire à la relation logique entre propriétés ?

4. Comment gérer ces situations dans la classe?

Quelles sont les étapes d'un processus expérimental ?

Dans chacune,

- Quelle est la part des élèves ? Comment en faire la dévolution aux élèves ?
- Quelle est la part du maître ?

5. Quelles progressions mettre en oeuvre?

Comment articuler les apprentissages les uns aux autres ?

Quelles situations fondamentales privilégier ?

Quelles variables didactiques choisir ?

6. Comment communiquer ces situations aux enseignants?

Comment montrer aux enseignants que ces situations répondent à leurs questions ?

A quelles conditions ces situations seront-elles comprises, et acceptées par les enseignants ?

Quelle formation concevoir ?

Quelle est la place des documents écrits ?

Quelle est la place des réalisations typiques effectivement réalisées en stage ?

Quelle est la place des documents vidéos ?

Quelle est la place des simulations informatiques ?

7. Comment déterminer le coût de ce changement ?

Quel est le coût du maintien de la situation actuelle en échecs pour les élèves ?

Dans quelle mesure :

- un changement peut-il s'amorcer sur ces seules questions spatiales?
- un changement peut-il se faire dans les conditions de programme actuelles ?
- un changement peut-il se faire avec le découpage actuel des séances d'enseignement ?

V. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté notre problématique initiale.

C'est à partir de ce questionnement que nous avons conçu l'essentiel de notre étude expérimentale, présentée en partie C, concernant les conceptions spontanées des élèves d'une part, l'enseignement des angles d'autre part.

Les résultats de cette partie expérimentale nous ont contraint à reprendre notre questionnement et à l'approfondir d'un point de vue théorique.

C'est ce travail que nous présentons dans la partie B qui suit.

PARTIE B

PROBLEMATIQUE DIDACTIQUE

INTRODUCTION

Dans la partie A, nous avons proposé à l'étude des propositions sur l'enseignement de l'espace et de la géométrie que nous rappelons ci-après :

Proposition I

Introduire explicitement des objectifs relatifs aux connaissances spatiales dans l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire.

Proposition II

Différencier nettement l'enseignement des connaissances spatiales et celui des connaissances géométriques auprès des élèves en respectant ce qui fait la spécificité de chacun de ces domaines de connaissances.

Proposition III

Commencer l'enseignement de la géométrie, c'est à dire celui de l'étude des objets spatiaux dans une problématique mathématique, dans la scolarité obligatoire dès la fin du primaire en introduisant les concepts fondamentaux de la géométrie comme outils pour résoudre des problèmes spatiaux effectifs.

Articuler au collège la géométrie outil dans l'espace et la géométrie héritée des grecs.

Ces propositions visent à assurer, au niveau de l'enseignement obligatoire, les différentes acquisitions spatiales et géométriques qui sont ou devraient être visées.

Les différents chapitres de cette nouvelle partie vont nous permettre de débattre de la nécessité didactique de ces propositions.

Le chapitre I est consacré aux déficits de maîtrise spatiale. Nous allons montrer que la référence naïve à une signification usuelle du terme de déficit spatial suffit pour montrer qu'il existe effectivement des déficits spatiaux repérables à l'issue de la scolarité obligatoire, que ces déficits sont préjudiciables à une partie importante de la population, et qu'on ne parvient pas à les combler à l'issue de la scolarité obligatoire.

Dans le chapitre II nous abordons le problème de la différenciation entre enseignement de l'espace et enseignement de la géométrie. Nous montrerons les insuffisances de l'approche naïve du déficit spatial quant à la compréhension des déficits constatés, et nous verrons l'intérêt de faire intervenir la théorie des situations pour éclairer les différences entre ces deux enseignements.

Le chapitre III nous permet d'approfondir notre cadre théorique, particulièrement en ce qui concerne la pertinence, pour les situations d'enseignement, des caractéristiques retenues jusqu'ici dans les travaux didactiques sur les questions d'espace et de géométrie. Nous montrerons l'importance qu'a la prise en compte, pour la compréhension de ce qui se passe dans les classes, des caractéristiques suivantes des rapports spatiaux : effectifs ou intériorisés, didactiques ou a-didactiques, engagés dans une problématique pratique, de modélisation ou de géométrie.

Dans le chapitre IV nous montrerons la pertinence de ces propriétés des rapports spatiaux pour différencier et classer les activités de l'enseignement spatial et géométrique à l'école obligatoire.

Dans le chapitre V, nous montrerons comment cette approche théorique nous permet d'interpréter d'une nouvelle façon quelques uns des problèmes d'enseignement de l'espace et de la géométrie que nous avons relevés ou qui l'ont été dans les études didactiques antérieures dont nous avons eu connaissance. Nous précisons certains phénomènes didactiques correspondant à ces problèmes d'enseignement en montrant comment ils sont articulés avec les contraintes didactiques de cet enseignement.

Le chapitre VI approfondit du point de vue didactique, dans la lignée de la problématique pratique, une question nouvelle qu'à la suite de Brousseau et Galvez, nous posons à la psychologie. Il s'agit de l'hypothèse d'existence chez les élèves de la scolarité obligatoire d'une conception spontanée de l'espace qui serait hétérogène, et qui le resterait parfois pour des adultes. Nous y avons consacré une partie de notre travail expérimental.

Le chapitre VII est consacré à l'ingénierie; nous y dégagerons sur quelques situations les principes de la mise en oeuvre pratique des trois propositions énoncées dans la partie A. Ce chapitre servira plus particulièrement de référence théorique à l'ingénierie qui sera présentée dans la partie D, constituée d'un ensemble (encore incomplet) de séquences pédagogiques réparties sur l'école maternelle et élémentaire.

L'ensemble de ces chapitres constitue à la fois la charpente et l'aboutissement théorique des travaux présentés en partie C et D.

CHAPITRE B-1

LES DEFICITS DE MAITRISES SPATIALES

Pour montrer que notre travail porte sur un domaine source de réelles difficultés pour les élèves de la scolarité obligatoire et pour leurs enseignants, nous avons rassemblé quelques résultats fournissant des exemples¹ de compétences spatiales dont un nombre non négligeable d'élèves ne semblent pas disposer, ce qui les handicape soit au cours de la scolarité obligatoire, soit à son issue, dans les activités sociales que chaque sujet doit pouvoir maîtriser.

I. DELIMITATION DU CHAMP DE NOTRE ETUDE

Le champ des maîtrises spatiales est vaste, et nous allons d'abord restreindre celui que nous explorerons. Nous ne retiendrons, pour les étudier, que celles qui *dépendent de connaissances spécifiquement spatiales* qui doivent être acquises au cours de la scolarité obligatoire.

Dépendent de *connaissances spécifiquement spatiales* les maîtrises qui s'appuient sur des *procédures descriptibles dans le langage spatial ou géométrique*. Ce n'est pas le cas, loin s'en faut, de toutes les maîtrises spatiales; par exemple, si "reconnaître son voisin" est une maîtrise socialement exigée de chacun, il n'existe pas de procédure descriptible permettant d'en assurer la réalisation.

Nous excluons en particulier de notre étude les maîtrises dites *spatio-temporelles* qui font intervenir de façon déterminante des facteurs liés à la maîtrise de la co-ordination entre l'espace et le temps (durée, vitesse, accélération, etc.). Ne seront donc pas étudiées les maîtrises corporelles kinesthésiques ou sensori-motrices dans la mesure où elles font intervenir le temps de façon essentielle.

Nous excluons aussi toutes les capacités qui ne sont en fait demandées que pour *l'exercice spécifique de certaines activités professionnelles*; par exemple, un grutier devra disposer de certaines capacités pour maîtriser le déplacement des objets. Quelqu'un qui ne dispose pas de ces capacités ou qui ne saurait les acquérir n'en serait pas pourtant handicapé dans l'exercice de ses activités sociales, il devrait seulement choisir un autre métier.

II. EXEMPLES D'INSUFFISANCE ATTESTEE DE COMPETENCES SPATIALES

A. Compétences nécessaires à la vie sociale

Le témoignage le plus frappant que nous ayons des difficultés liées à une mauvaise maîtrise spatiale nous vient du Mexique où le Ministère de l'Education avait commandé une recherche à l'Institut Pédagogique National pour étudier dans quelle mesure l'école pourrait, par un enseignement approprié, aider les enfants à se repérer dans la ville. La thèse de Galvez (1985) présente le résultat de cette recherche.

Si, en France, le problème ne paraît pas aussi crucial pour la population moyenne, c'est peut-être que les conditions de vie sont telles que les parents ont le moyen d'éviter les risques

¹ puisque comme nous l'avons dit en A, nous n'avons pas trouvé d'études d'ensemble sur ce sujet, confirmant de manière expérimentale quantifiée les constats d'insuffisance émis par diverses instances.

de se perdre pour leurs enfants, en les transportant eux-mêmes jusqu'à un âge avancé². Notons toutefois que les formateurs de jeunes en rupture scolaire signalent les très grandes difficultés spatiales que rencontrent les populations auxquelles ils s'adressent: l'usage du plan est souvent méconnu et ils ont une mauvaise représentation de leur environnement direct³.

B. Compétences nécessaires à la formation professionnelle

C'est dans ce secteur que nous avons trouvé les informations les plus précises sur les difficultés que rencontrent les adolescents et certains adultes dans la résolution de problèmes mettant en jeu des représentations spatiales.

1. La lecture et l'utilisation de plans

Weill-Fassina et Rachedi (1992) ont étudié les comportements d'une population constituée d'adolescents et d'adultes de bas niveau de qualification dans une tâche de mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan ; cette tâche consiste à repérer un bureau désigné par l'expérimentateur dans l'espace réel sur un plan représentant le rez-de-chaussée d'un lycée. Le plan, posé sur une table mobile, a subi une rotation de 180° par rapport à l'espace réel. La consigne est : "Ça (la vue de dessus de l'étage) c'est le plan de tout cet étage là (montrer le couloir et les bureaux dans l'espace concret); ce que je vous demande, c'est de me montrer ce bureau en face de vous, sur le plan; où est-ce qu'il est dessiné? Vous pouvez écrire, si vous le désirez. La table est mobile".

Nous ne fournissons ici que les résultats concernant les neuf jeunes interrogés, élèves de 2ème année de CAP constructeur béton armé. Deux seulement réussissent sans aide à la première réponse.

Les auteurs dégagent trois modalités principales de fonctionnement cognitif.

- Trois élèves relèvent de la première modalité "caractérisé par l'utilisation de propriétés spatiales pertinentes au but".
- Trois autres d'une seconde modalité caractérisée "par la découverte et la prise en compte de la congruence des 2 espaces par étapes successives".
- Les trois derniers relevant d'une modalité caractérisée par "l'absence de prise de conscience du problème de la congruence des 2 espaces, par la difficulté de coordination d'ensemble des rapports spatiaux et par l'apparition de tentatives échouées de mise en relation, faute de compréhension des effets de la rotation du plan".

Surpris par ces résultats, nous nous sommes demandés s'ils tenaient à ce type particulier de population ou s'ils étaient représentatifs d'un état de maîtrise spatiale que l'on pourrait relever chez la majorité des jeunes de cet âge. Il n'existe malheureusement pas de test permettant d'examiner dans quelle mesure un sujet est capable d'orienter convenablement un plan pour y puiser une information sur l'espace réel⁴.

² Pêcheux (1990 page 27) note: "Comment une mère de 1990 accueillerait-elle les expéditions nocturnes des héros de la guerre des boutons? Sans doute Tigibus ne risquait-il guère de se faire écraser, mais il aurait bien pu s'égarer; sur quoi se fondent les craintes actuelles que les enfants ne se perdent?"

On peut trouver d'autres raisons à cette pratique qui touche tant les banlieues que les centres ville, où les écoles de taille modeste sont relativement proches du domicile. L'une de ces raisons pourrait être la disparition d'un milieu social (petits commerces en particulier), vivant et solidaire des habitants des quartiers, qui rendait autrefois possible un contrôle sur l'enfant durant son parcours vers l'école.

³ Bulletin de la MAFPEN d'Aix-Marseille n° 12 p.80³

⁴ Si l'on se réfère à Pêcheux (1990), les tests d'aptitude spatiale comme celui de Thurstone "apprécient l'anticipation du résultat de transformations spatiales", mais remarquons qu'aucun ne porte sur les rapports entre un espace réel et sa représentation.

Nous avons alors utilisé les possibilités d'observation dont nous disposons à l'Ecole Michelet, pour proposer aux 57 élèves de CM2 une tâche tout à fait semblable à celle élaborée par Weill-Fassina et Rachedi⁵. Les résultats en sont les suivants:

- 14 d'entre eux, soit 24%, ont été capables de montrer sur le plan, dès la première réponse, la porte indiquée par l'expérimentateur.
- 22, soit 39%, n'ont à aucun moment envisagé le problème de l'orientation du plan malgré la prise de conscience pour certains, de contradictions entre leurs interprétations de certains de ses éléments et la réalité.
- 21, soit 37%, nous semblent relever de la deuxième modalité décrite par Weill-Fassina et Rachedi.

Nos résultats montrent que les trois-quart de ces élèves de CM2 ne maîtrisent pas convenablement l'utilisation d'un plan dans une activité fonctionnelle et que 40% d'entre eux sont même assez loin de la compréhension des propriétés spatiales en jeu dans une mise en oeuvre correcte. Nous verrons que ces constats sont nettement différents de ceux auxquels on pourrait s'attendre si les objectifs assignés au cycle des apprentissages fondamentaux pouvaient vraiment être atteints.

2. L'apprentissage du dessin technique

Rabardel et Vérillon (1992) écrivent: "L'apprentissage du dessin technique (...) est un processus difficile et complexe, de l'avis des enseignants et des élèves, et qui donne lieu à des échecs scolaires nombreux et profonds. Ces échecs sont parfois niés ou leur importance est méconnue des décideurs, en particulier de ceux qui sont impliqués dans l'élaboration des programmes et la construction des filières d'enseignement, mais les résultats de recherche sont tous convergents et se recoupent d'un pays à l'autre. D'autre part des signaux d'alarme sont envoyés par les entreprises qui se plaignent de l'insuffisance de performance des sortants du système éducatif dans ce domaine."

Un rapport de recherche de l'INRP (1984 n°9) "L'apprentissage de la géométrie du dessin technique : des constats d'échec et des moyens de réussite" fournit de nombreux résultats attestant des difficultés de représentation spatiale que rencontrent les élèves. Nous ne citerons que ceux de Artaud, Dolle et Lardeux (1984) qui ont proposé à 75 élèves de LEP une série d'épreuves où les problèmes posés consistaient à lire sur un dessin 2 vues d'un parallélépipède rectangle pour en construire d'autres, en faisant varier les positions des vues données ainsi que leurs proportions. Les auteurs insistent sur l'échec que représente, pour cet enseignement, le fait que après 20 semaines de pratique hebdomadaire du dessin soit 80 heures de travail, "près de la moitié des élèves échouent sur des notions sensées être comprises et assimilées depuis les premières heures." L'apport d'examens cliniques leur permet de préciser de manière qualitative les difficultés repérées dans les tests collectifs, dont nous présentons les trois plus importantes:

- "L'incapacité des élèves (30 à 40 % suivant les proportions de l'objet) à changer de point de vue d'observation pour repérer la troisième dimension."
- "la fixation sur la vue de face, stéréotype représentatif, auquel est demandé toute information."
- "La résistance à sortir du stéréotype pour choisir une autre vue de face."

⁵ Pour une description détaillée, voir Chapitre C-9

En résumé, les auteurs concluent : "les élèves des classes de LEP qui échouent, n'utilisent pas les opérations euclidiennes et projectives de façon coordonnée."

D'autres types de déficits spatiaux, décelés à l'occasion de bilans concernant des élèves en grande difficulté scolaire, font l'objet d'études psychologiques, mais ils sont présentés comme des caractéristiques de ces sujets, qui n'auraient pas atteint, au moment où ils sont examinés, le niveau de développement attendu pour leur âge. Le plus souvent, les spécialistes ne relient pas ces déficits à des insuffisances de l'apprentissage spontané ou de l'enseignement reçu par ces enfants mais tentent de les expliquer par des déficits organiques, ou par des inadaptations ou des retards liés à l'histoire psycho-affective ou sociale des sujets.

Dans le cas de l'apprentissage du dessin technique, certaines recherches adoptent ce point de vue et proposent des outils de "remédiation" à utiliser avant tout apprentissage du dessin pour aider les sujets (de bas niveau scolaire) à maîtriser les opérations spatiales projectives. C'est le cas de Higélé (1984).

Les travaux (relatifs à l'enseignement de la perspective) présentés par Bautier et coll. (1987) laissent penser que ces "déficits" (par rapport à la norme piagétienne) sont beaucoup plus généraux. Les auteurs écrivent en effet: "En l'absence d'apprentissage spécifique, les élèves observés développent des représentations mentales de l'espace incohérentes. S'ils semblent assez bien armés pour interpréter certains dessins dans lesquels ils identifient des éléments de repère conformes à leurs conceptions, ils semblent aussi démunis pour faire le travail inverse qu'on pouvait l'être au Moyen-Age et cherchent, comme les enfants de la maternelle, à représenter d'abord les relations qui leur semblent importantes; l'ensemble constitue un schéma incohérent, intégrant des éléments disparates; leur représentation est ainsi non homogène".

C. Compétences nécessaires à l'apprentissage de la géométrie

Comme nous l'avons évoqué en A, les allusions des professeurs aux difficultés spatiales des élèves dans la résolution des problèmes de géométrie sont nombreuses, relatives aussi bien à la géométrie plane qu'à la géométrie dans l'espace.

Le plus souvent, les difficultés spatiales que les enseignants attribuent à leurs élèves concernent leur incapacité à "voir" ce qui est à voir sur la figure.

Ce reproche n'est pas explicitement étiqueté relativement à une insuffisance spatiale spécifique et n'a pas, nous semble-t-il, le même sens dans les deux cas :

1. En ce qui concerne la géométrie plane,

Ne pas "voir" est employé pour dire l'incapacité (rencontrée par de nombreux élèves) à reconnaître des propriétés sensées relever de la perception visuelle de la figure⁶ pour pouvoir les utiliser dans une recherche de résultat ou de démonstration.

a) Dans les manuels

Des conseils sont donnés aux élèves pour qu'ils puissent mieux voir. Ainsi, dans "Mathématiques 6ème" de chez Didier, le paragraphe consacré aux triangles équilatéraux est accompagné d'une figure comportant le tracé des trois axes de symétrie, la représentation symbolique des angles droits et des égalités des demis-côtés avec le conseil suivant: "*Photographie bien cette figure*". Il en est de même pour toutes les figures particulières.

⁶ plus précisément du dessin selon Parzys (1989)

b) Dans les compte-rendus de travaux IREM

On trouve la présentation de moyens pour, soit rendre les figures plus "lisibles", soit aider les élèves à mieux "voir" leurs propriétés. Ainsi, dans Repères n°4, Courivaud (1991) propose des "traitements graphiques des images de géométrie" afin que les élèves puissent plus facilement construire "une signification globale" pour la figure.

c) Dans les travaux de recherche en didactique (français)

Nous avons trouvé deux types de références à des limitations spatiales essentiellement repérées au cours des tracés de "figures" géométriques.

Le premier type va associer les limitations spatiales à une analyse en termes d'obstacle, et les exploiter dans l'enseignement et l'apprentissage de modèles géométriques dont la maîtrise doit permettre de surmonter ces déficits. On trouvera de nombreux exemples dans l'essai de synthèse sur "l'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques" fait par C. Laborde (1988) ; l'auteur y relève la dualité entre espace physique (objet de perception, qualifié de sensible, appréhendé aussi par les instruments) et espace théorique ou spécifiquement géométrique et cite un certain nombre de recherches qui ont choisi d'articuler l'apprentissage de la géométrie sur des limitations de la maîtrise de l'espace sensible, pour en fonder l'intérêt et la spécificité. Y est aussi relevée la *taille de l'espace*, repérée (par G. Brousseau, 1983) comme une variable didactique potentielle mais non utilisée dans l'enseignement.

Le deuxième type se situe dans la lignée de certains travaux d'IREM, notamment ceux de Marion et Ovaert (1980) où l'on trouve une problématique de déficience, associée à un travail de remédiation didactique, bien que ces termes ne soient pas avoués. Cette problématique s'est articulée autour du concept de *configuration*, et elle a été ensuite reprise développée et théorisée par Audibert (1982) dans une problématique désignée par le terme d'*équilibre*. Dans cette problématique, moins connue que la précédente, les limitations, spatiales entre autres, que rencontrent les élèves dans la résolution de problèmes géométriques sont repérées comme une propension des sujets à se fixer sur certains éléments perceptifs aux dépens de ceux qui seraient géométriquement pertinents. Par exemple, la prégnance parasite des directions liées aux bords de la feuille sur laquelle sont effectués les tracés.

L'effort de la recherche débouche d'abord, à travers le concept de configuration (Audibert 1989), d'une part sur l'identification et l'enseignement systématique des représentations spatiales les plus courantes d'un *concept ou d'une propriété importante*, d'autre part sur une normalisation des "figures" proposées par l'enseignant; cette normalisation doit permettre aux élèves une reconnaissance rapide en *évitant* l'effet des limitations repérées (par exemple, évitement du chevauchement de figures partielles, limitations du nombre de traits tirés, limitation à des rapports simples (voire entiers) des segments à mesurer, etc...). On apprend à l'élève à *voir*, en lui enseignant en même temps que le concept, ses *représentations typiques* ou *configurations*.

En prolongement de la même ligne, nous semble-t-il, Padilla Sanchez V (1992) introduit l'apprentissage d'un traitement particulier des figures : la *reconfiguration*.

C'est cette introduction d'objets spatiaux dans les objets d'enseignement de la géométrie qui nous fait qualifier cette approche de remédiation spatiale⁷. L'origine "naturelle" ou didactique des limitations de la reconnaissance n'est pas étudiée par ces chercheurs.

⁷ On peut bien entendu interroger cette approche à partir de la notion d' "effet méta-cognitif".

F et J Cordier (1991) situent cette approche dans le cadre théorique de la typicalité, et en étudient le fonctionnement sur l'enseignement du théorème de Thalès. Ils en relèvent des effets "pervers" sur les comportements des élèves. L'effet principal souligné⁸ est que "l'élève ne traite pas la catégorie comme une catégorie conceptuelle, c'est à dire ne se montre pas capable d'abstraire la ou les propriétés strictement nécessaires à l'application du théorème, mais fonde son raisonnement sur de multiples propriétés figuratives des figures géométriques dont plusieurs sont évidemment superflues"⁹.

Dans ces deux approches, hormis le paramètre "taille de l'espace", les limitations identifiées semblent très liées à l'espace réduit des tracés sur une feuille de papier.

2. En ce qui concerne la géométrie dans l'espace,

Ne pas "voir" veut d'abord dire être dans l'incapacité de se représenter mentalement convenablement l'objet à 3 dimensions dont la figure est une représentation dénuée des propriétés d'analogie existant entre le dessin et la "figure" de la géométrie plane.

Le problème du "voir" en géométrie de l'espace, outre qu'il figure comme un objectif explicite dans l'énoncé des programmes de géométrie du premier comme du second cycle de l'enseignement secondaire¹⁰ est l'objet de nombreux travaux¹¹.

Parzys (1989) a étudié comment les élèves de second cycle manifestaient le conflit "voir/savoir" dans leurs représentations planes d'objets de l'espace. Il a analysé leurs réponses à des questionnaires portant sur la lecture et l'écriture de représentations, et a expérimenté dans quatre classes une série de séquences ayant pour objectif "de dévoluer aux élèves le problème de la représentation plane des figures de l'espace en perspective cavalière". L'auteur dégage quelques principes généraux que les élèves mettent en oeuvre: "ils essaient, à l'encodage, de maximiser la conservation sur le dessin de l'information concernant l'objet spatial, tout en préservant l'aspect visuel...La contrepartie de cet état de fait étant, lors du décodage, la tendance à transférer à l'objet spatial certaines propriétés géométriques de la représentation" (que ne possède pas l'objet). Il conclut ainsi: "Nos enquêtes ont permis de montrer les carences de l'enseignement qu'avaient reçu nos élèves au cours des années antérieures, et de constater un type de rapport aux représentations que l'on ne se serait pas attendu à trouver à cet âge et à ce niveau".

Il relève en particulier :

- "le principe de transfert de propriété postulant que certaines propriétés géométriques se transportent mutatis mutandis de l'objet spatial à sa représentation et inversement... Ce transfert peut porter sur des propriétés de natures diverses (topologiques, affines, métriques) agir en négatif ou sur des éléments implicites¹²...
- l'importance du repère spatial privilégié constitué par une verticale et un plan horizontal
- que certains dessins sont en fait des reproductions de stéréotypes
- que pour certains un plan est limité..."

⁸ p. 62

⁹ Ce type d'effet pervers est souvent associé à l' "effet métacognitif" ici utilisé dans l'introduction d'objets d'enseignement non mathématiques, destinés à "faciliter" un certain enseignement de la notion mathématique. voir Brousseau, (1986b).

¹⁰ programmes des classes de seconde et première

¹¹ Pour un recensement de ces recherches, voir le compte-rendu du colloque "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques", Vergnaud et coll., 1988, La pensée sauvage.

¹² RDM 11/2.3, p. 217

Ces différents points pourraient être reliés selon nous à la taille des espaces en référence desquels s'effectue l'apprentissage de la géométrie.

Parzysz pointe là certaines des déficiences que Dolle (1984) et Bessot -Eberhard (1992) ont mises en évidence sur l'apprentissage du dessin technique. L'ingénierie qu'il propose prend en compte l'utilisation de maquettes tri-dimensionnelles et l'apprentissage explicite d'un système de représentation graphique de l'espace, toutes choses non prévues par les programmes de géométrie.

Il ajoute : "Nous la considérons simplement comme un essai d'enseignement de la géométrie de l'espace intégrant trois apprentissages, pour nous essentiels: espace, représentations, géométrie. Pour nos élèves, cet enseignement est venu très tard. Il n'a été en réalité qu'une tentative de remédiation à une situation de fait que nous estimons anormale. Les apprentissages visés ici pourraient se faire avec profit tout au long de la scolarité et en particulier au collège."

III. CONCLUSION

Nous avons donc pu relever, dans les travaux de didactique ou de psychologie, des indications sur des insuffisances des compétences spatiales d'élèves.

Remarquons que la plupart relèvent

- soit de limitations dans la reconnaissance de figures planes sur une feuille de papier.
- soit de la maîtrise des analogies entre un espace (ou un ensemble d'objets spatiaux) et leurs représentations graphiques planes sur une feuille de papier.

Signalons au passage une étude en cours sur les difficultés des non-voyants¹³. Cette étude permet de poser plusieurs de nos questions sous un nouvel angle qui permettra probablement d'éprouver certains aspects de notre travail. Ce ne sont cependant pas les difficultés d'élèves relevant de déficits organiques qui sont à l'origine de notre travail mais celles qui sont signalées pour une partie importante de la population scolaire.

L'ensemble de ces difficultés nous renvoie alors à une interrogation sur la façon dont le système d'enseignement prend en charge le développement des compétences et des connaissances spatiales, nécessaires tant à la vie sociale qu'aux apprentissages mathématiques ou professionnels ultérieurs.

¹³ Thèse en préparation, C. Molina, Université de Saragosse

CHAPITRE B-2

LE PROBLEME DE LA DIFFERENCIATION ENTRE L'ENSEIGNEMENT DE L'ESPACE ET L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Dans notre première partie (A), nous avons illustré l'intérêt de différencier nettement enseignement (ou apprentissage) de l'espace et enseignement (ou apprentissage) de la géométrie.

Or le lecteur remarquera que nous n'avons pas encore défini de critères clairs sur cette différenciation, ni même tenté d'en justifier vraiment la nécessité.

Nous voulons maintenant montrer tout d'abord que loin d'être un point de départ, la différenciation entre enseignement (ou apprentissage) de l'espace et enseignement (ou apprentissage) de la géométrie ne peut se clarifier qu'au terme d'un processus d'analyse relativement complexe, pour lequel nous avons besoin d'élaborer des outils adéquats.

I. PROBLEMATIQUE DE LA NATURE DE L'ESPACE .

C'est la problématique traditionnelle, qui a été particulièrement développée par de grands mathématiciens au début de ce siècle, pour aider les enseignants de mathématiques à faire la rupture entre l'espace euclidien et l'espace de nos sensations et de nos représentations, afin d'accéder à la compréhension des géométries non-euclidiennes.

Poincaré (1943) par exemple distingue l'espace géométrique de l'espace représentatif¹. Selon lui, l'espace géométrique, qui fait l'objet de la géométrie, est continu, infini, à trois dimensions, homogène et isotrope. L'espace représentatif est lui, composé des espaces visuels, tactiles et moteurs, et est essentiellement différent de l'espace géométrique. "Il n'est ni homogène, ni isotrope ; on ne peut même pas dire qu'il ait trois dimensions..."

A propos des situations didactiques, Chevillard (1991) articule de façon finalisée ces deux espaces quand il distingue l'espace sensible "espace contenant des objets, et qui nous est accessible par le biais des sens" et espace géométrique, résultat de l'effort théorique appelé géométrie "pour rendre raison du sensible...", "de la même façon que, plus largement la physique part du monde sensible pour le constituer en monde physique".

En effet, la maîtrise de l'espace, c'est à dire la possibilité d'un contrôle efficace par le sujet de ses relations à l'espace sensible, est facilitée s'il dispose des connaissances géométriques qui s'appliquent au problème qu'il doit résoudre.

Quelqu'un qui connaît la géométrie peut s'en servir pour raisonner sur l'espace sensible. Fréchet (1955) explique dans "Les mathématiques et le concret": "Quand un arpenteur veut estimer l'aire d'un terrain, il ne peut songer à la mesurer directement, c'est à dire compter le nombre d'unités d'aires qu'elle contient. En fait, la seule méthode usitée consiste à opérer indirectement, à mesurer non des aires mais des longueurs et des angles et à en tirer la valeur de l'aire grâce aux théorèmes et aux formules obtenus par voie déductive en Géométrie et en Trigonométrie."

Analysons de plus près le travail de l'arpenteur:

¹ La science et l'hypothèse, Flammarion, 1943, pp. 88 et suivantes

Ayant à évaluer l'aire d'un terrain "réel", il va constamment faire appel à des connaissances spatiales et géométriques pour réaliser sa tâche. Par exemple, si son terrain est clôturé sur un côté, il va commencer par s'assurer que la clôture est rectiligne. Pour cela, il va par exemple faire une visée, c'est à dire utiliser une pratique proprement spatiale. Mais ce qui le guide dans le *choix* des éléments à contrôler, c'est la connaissance géométrique dont il dispose concernant les facteurs qui interviennent dans le calcul d'une aire. Ce sont ces connaissances également qui lui permettent de ne prendre que les mesures nécessaires, puis, à partir d'un schéma représentant approximativement le terrain sur lequel il aura noté les mesures des côtés et des angles, de calculer l'aire.

Par ailleurs, il aura utilisé ses connaissances spatiales pour effectuer les mesures : s'il ne dispose pas d'un instrument de mesure des longueurs suffisamment long et qu'il est conduit à reporter plusieurs fois son décamètre-ruban lors de la mesure d'une distance non matérialisée par une haie, il aura contrôlé l'alignement des extrémités successives².

Ainsi, à chaque instant, l'arpenteur fait appel à des connaissances qui relèvent soit de celles nécessaires au contrôle spatial soit du modèle géométrique. Il n'y a pas pour lui d'ambiguïté : il respecte la fonction de chaque type de connaissances.

L'un des problèmes qui nous occupe est celui de l'appropriation par l'élève de ce type de compétence et de l'ensemble des connaissances qu'elle suppose.

II. INSUFFISANCE DE LA PROBLEMATIQUE DE LA NATURE DE L'ESPACE

Un point d'achoppement de l'enseignement de la géométrie semble bien être celui de l'articulation entre maîtrise de l'espace sensible et maîtrise de l'espace géométrique.

De nombreuses propositions ont été utilisées au fil des ans, alimentant un débat sur cet enseignement, débat qui semble ne jamais pouvoir être conclu.

Nous nous appuyerons sur deux exemples différents de solutions pour essayer de montrer en quoi ce débat nous paraît bloqué.

A. Exemple de Fréchet

Nous le tirons à nouveau du livre de Fréchet. Il s'interroge sur la possibilité de réduire une science à sa partie déductive et analyse ce qui est fait dans l'enseignement à partir d'un ouvrage : le cours de géométrie élémentaire de Combette. "J'y lis page 2 deux axiomes. Par exemple: *Il existe une surface telle que la droite qui passe par deux quelconques de ses points s'y trouve entièrement contenue. Cette surface s'appelle plan; elle est illimitée dans toutes ses directions.* Qui a jamais vu une telle surface? Bien qu'inspirée de l'observation du monde sensible, c'est une pure conception de l'esprit. Sans aucun avertissement préalable, l'élève se trouve jeté en pleine théorie axiomatique. C'est bien, admettons-le. Nous nageons en pleine abstraction. Mais à la page 33, sans aucune transition, nous trouvons l'application : *Tracer à l'aide de l'équerre, la parallèle à une droite passant par un point donné.* Comment peut-on à l'aide d'une équerre, c'est à dire d'un instrument en bois, qui existe, que nous connaissons, effectuer des opérations sur des droites abstraites, sur un plan abstrait tel celui qui est décrit à l'axiome II?"

² Ce que ne font pas spontanément des élèves de CM2 confrontés à ce problème. voir " Problème rectangle", chapitre C-3

Fréchet souligne la négation de la réalité spatiale de l'activité de tracé par son assimilation à une activité abstraite, qui se traduit par ce que nous appellerions une espèce de "langue de bois" dans l'enseignement, et les problèmes de rejet que nous connaissons.

B. L'inégalité triangulaire

Nous le tirons d'abord de la brochure "Enseignement des mathématiques utilisant la réalité" (1987), réalisée par A. Berté et éditée par l'IREM de Bordeaux.

Les auteurs rapportent les faits suivants qui se passent en 4ème:

"L'enseignant donne trois séries de nombres aux élèves. Il faut dans chaque cas, dessiner un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres en cm. 1er cas: 7, 5, 4 2ème cas: 9, 5, 4 3ème cas: 10, 5, 4. Les élèves peuvent travailler en petit groupe et discuter entre eux.

Dans le premier et le troisième cas, tous les élèves dessinent le triangle avec le compas ou la règle pivotant autour du zéro et concluent sans difficulté.

Dans le deuxième cas, un groupe d'élèves arrivent à dessiner un triangle, très aplati mais pas tout à fait. La vérification de la longueur des côtés avec la règle graduée leur paraît exacte. Malgré quelques objections timides des autres élèves, ils s'acharnent donc à dire que le triangle existe et arrivent même parfois à convaincre toute la classe! "

Il y a donc là aussi un problème pour l'enseignement !

C. Comparaison des deux approches:

Commentant la première approche, Fréchet écrit: "Il y a là une confusion fâcheuse (et inadmissible dans l'enseignement) entre deux ordres entièrement distincts: l'étude des figures réelles perceptibles et celle des figures abstraites traitées dans la théorie déductive." En effet, la communication enseignant-enseigné s'effectue sur la seule base des concepts géométriques. Ces concepts sont supposés rendre compte indifféremment de l'activité mathématique et de l'activité spatiale. Le travail de construction demandé est supposé exercer les élèves à faire fonctionner les relations mathématiques entre ces concepts. Il y a négation de la dualité objective, au profit des mathématiques.

Dans la deuxième, c'est l'espace sensible (le tracé) qui est placé comme base de la communication enseignant-enseigné. La connaissance géométrique est supposée naturellement isomorphe à celle de l'espace sensible. Or la solution spatiale obtenue par certains élèves est incompatible avec la solution géométrique !

Malgré la différence entre ces deux démarches, le commentaire de Fréchet s'applique aussi bien à la seconde qu'à la première. En voulant remédier aux défauts de la présentation axiomatique, les propositions d'enseignement actuelles risquent de provoquer chez les élèves une confusion tout aussi difficile à surmonter entre espace sensible et espace géométrique.

Berdonneau (1981) présente de manière détaillée les solutions utilisées successivement depuis le début du siècle par des auteurs de manuels pour tenter de résoudre ce problème. Elle montre qu'existent, chez la plupart d'entre eux des contradictions profondes entre un discours général sur la différence entre espace géométrique et espace sensible et le recours inopiné à des résultats issus de la connaissance du second pour démontrer des résultats portant sur le premier (P. 164 et suivantes). Elle conclut son étude ainsi: "De tous ces exposés se dégage un sentiment de malaise, malaise que semblaient ressentir les auteurs face à la connaissance qu'ils étaient chargés de transmettre".

Nous allons tenter de montrer que ce malaise ne peut être compris sans élargir l'analyse aux caractéristiques de la situation d'enseignement.

Reprenons pour cela le second exemple en nous appuyant sur les comportements rapportés des élèves et en nous interrogeant sur la situation de l'enseignant et des élèves.

L'activité porte-t-elle sur l'espace ou la géométrie ?

L'insertion de cette activité dans le cours de mathématiques pour la classe de 4ème la situe très clairement du côté de ce que l'institution scolaire appelle l'enseignement de la géométrie. Pour les élèves (même s'ils appellent géométrie ce travail), la consigne est de type spatial: ils fournissent un dessin de triangle dont ils vérifient qu'il répond bien aux contraintes imposées. Ils peuvent conclure que, sur une feuille de papier, seule la troisième construction n'est pas possible.

Pour le professeur, la situation est alors embarrassante: il a voulu appuyer son enseignement de géométrie, où les élèves doivent acquérir des connaissances relevant du modèle "espace géométrique", sur une interaction effective avec l'espace de la feuille de papier parce qu'il ne peut les faire travailler directement dans le modèle, comme il le fait lui-même.

Mais, une fois la figure faite, ce qu'il "voit" (dans le modèle) et ce que voient les élèves (sur la feuille) n'est pas identique. Lui "voit" que dans le triangle presque aplati, les longueurs des côtés ne sont pas égales à ce que croient les élèves ou plutôt il "sait" qu'elles ne peuvent pas l'être parce qu'il se fonde sur des connaissances du modèle, et cela l'empêche de "voir" ce que voient les élèves, c'est à dire que les côtés du triangle mesurent bien les longueurs demandées (les tracés ayant été faits avec une précision normale).

Les efforts du professeur pour amener les élèves à son point de vue, ce qui nécessite pour eux un "changement d'espace", se heurtent à des difficultés d'autant plus grandes que ce que ce qui constitue, d'après la consigne, la base de leurs échanges, semble relever de l'évidence même si enseignant et élèves ne "voient" pas la même chose.

Une intervention du professeur portant sur la *relation entre les propriétés* des figures "réelles" de l'espace et celles des figures géométriques paraît alors inévitable. Est-elle envisagée dans le contexte décrit?

La lecture de la suite du document IREM montre que cette éventualité n'est pas envisagée par l'auteur qui propose au professeur deux voies, non exclusives mais complémentaires³, pour sortir de cette impasse:

- une autre matérialisation du problème (spaghettis) pour rendre plus "évident" le fait qu'il n'existe pas de triangle non aplati quand la mesure d'un des côtés est égale à la somme de celles des deux autres. Par elle-même, cette nouvelle matérialisation n'est pas beaucoup plus probante que la précédente, constate d'ailleurs l'auteur⁴. En fait l'introduction de ce nouveau problème a surtout pour fonction de montrer aux élèves que ce n'était pas la situation spatiale réelle qui était l'objet désigné par le professeur à l'activité des élèves, mais une autre chose, commune aux deux matérialisations. Nous y voyons un effet "Diénes"⁵.

- Un *saut* dans la voie (géométrique) de la cohérence théorique, en supposant l'existence d'un tel triangle et en montrant que l'on obtient une contradiction avec une autre propriété bien connue...

³ édition 92

⁴ dans l'édition février 92, l'auteur admet néanmoins que "près du cas limite, l'inégalité n'est pas très évidente...en fait les mathématiques ne se lisent pas directement dans la réalité..."

⁵ Brousseau G. (1986b), p.57

Dans ces deux solutions, on remarque que le professeur est contraint de rompre avec le contrat didactique initial, "a-didactique", et de reprendre la situation en mains.

Une variante de cette situation a été étudiée très précisément par Arzac et coll. (1992), variante qui tente de maintenir le contrat a-didactique. Les auteurs constatent que dans ce contrat, seuls certains élèves⁶ ont accès à la preuve mathématique, les autres restent sur la conviction qu'il existe bien un triangle dont les côtés mesurent 4cm, 9cm, 5cm.

D. Conclusion

Dans ce traitement du problème du triangle aplati, nous reconnaissons la dualité platonicienne entre l'espace sensible et l'espace mathématique, ce qui conduit, au niveau de l'enseignement, à ne concevoir les relations entre les deux que sous le mode d'un saut entre deux mondes.

Voyons pourquoi l'invitation faite aux élèves de sortir d'un espace "sensible" pour entrer dans un espace "géométrique" intellectuel, par une espèce de saut, ne peut que se heurter à des difficultés profondes. Pour cela, nous proposons au lecteur de se pencher sur les rapports que le professeur veut faire établir par l'élève avec les objets de chacun de ces espaces.

Dans l'espace "sensible", l'élève contrôle ses rapports effectifs de manière continue à l'aide de la vue.

En géométrie, l'élève est aussi en rapport avec un objet de l'espace sensible, la figure⁷. Ces figures ne sont que des représentations "imparfaites" des véritables figures, celles de la géométrie. L'élève est invité à abandonner un contrôle empirique de ses déclarations au profit d'un contrôle par le moyen de raisonnements. Il ne s'agit donc pas seulement de changer de cadre, de passer d'un monde "imparfait" à un monde "parfait", par une espèce de passage à la limite. Il s'agit de changer radicalement de mode de contrôle de ses rapports à l'espace.

On pourrait penser qu'il n'existe pas d'autre alternative que celles évoquées ci-dessus : négation du monde sensible, ou exigence d'un saut pur et simple du monde sensible vers un monde intellectuel.

Nous proposons d'envisager une autre alternative qui consiste à assumer la *géométrie comme une théorie physique de l'espace*. Ce choix place les rapports entre géométrie et espace au niveau des rapports entre la théorie et la pratique. Ces rapports s'inscrivent pour nous dans le cadre des sciences expérimentales.

Si nous reprenons le problème de l'élève dans cette alternative, nous voyons qu'il ne s'agit plus de lui faire effectuer un saut d'un monde dans un autre, mais de passer de rapports effectifs et contingents avec un certain espace à la modélisation de rapports avec cet espace. En quelque sorte, passer du *fait* à la *loi*, ce qui n'est pas simple en soi, et constitue une toute autre démarche.

L'analyse que nous venons de faire montre que pour progresser dans la compréhension des difficultés de l'enseignement de la géométrie, enseignement qui fait nécessairement intervenir à la fois le modèle géométrique et la réalité physique qu'il modélise, il faut aller au-delà de la simple prise en compte du type d'espace dans lequel on veut placer l'élève, et étudier les rapports établis entre l'élève d'une part et chacun de ces espaces d'autre part.

⁶ du moins s'ils ne commencent pas par le tracé du grand côté. Nous proposons au chapitre 6 une explication de ce comportement.

⁷ au sens de "dessin" selon Parzys (1989), pp. 13 à 15

En termes de la théorie des situations, nous dirons que chacun des espaces constitue un milieu pour l'élève, et que l'interaction avec chacun de ces milieux se contrôle avec des moyens spécifiques.

Si l'on veut comprendre les difficultés des élèves à passer d'un milieu à un autre en situation d'enseignement, et proposer une alternative à cet enseignement, il nous faut étudier les rapports effectivement entretenus avec ces milieux. C'est à dire qu'il faut considérer la Situation Didactique dans son ensemble. Nous nous placerons dorénavant dans le cadre de la théorie des situations, en explicitant les *rappports* entre quatre systèmes :

- les élèves,
- l'enseignant
- un milieu
- les connaissances ou le savoir

Le terme de milieu⁸ désigne de façon générale le système antagoniste du sujet dans la situation didactique.

Le milieu objectif est constitué des objets en rapport avec lesquels l'élève va développer des anticipations dans les situations qu'il doit maîtriser ; le terme "objet" est pris dans un sens général englobant par exemple les lieux dans lesquels le sujet peut prévoir un déplacement.

Afin d'effectuer et de communiquer à un coût raisonnable les distinctions didactiques pertinentes permettant d'éclairer la question de l'enseignement de l'espace et de l'enseignement de la géométrie, nous allons dans un premier temps proposer une classification des rapports élève-milieu qui prenne en compte un nombre minimal de caractères déterminés par la situation.

Nous utiliserons ensuite cette classification pour analyser les situations d'enseignement de l'espace et de la géométrie.

III. POSITION METHODOLOGIQUE

Nous venons de présenter la méthode que nous nous proposons d'utiliser pour étudier le problème de l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire et plus particulièrement pour les élèves jusqu'à 14 ans. Ce sujet fait l'objet actuellement de nombreux travaux, en France et à l'étranger⁹.

Quelles méthodes sont utilisées par leurs auteurs? Nous nous limiterons aux travaux français.

* Comme nous l'avons signalé dans l'introduction de ce chapitre, la problématique de la nature de l'espace (espace sensible, espace géométrique) est présente depuis longtemps dans les débats sur l'enseignement de la géométrie. Depuis une dizaine d'années, ces débats ont repris une vigueur nouvelle, en particulier au sein des IREM; la réflexion s'appuie sur des travaux d'histoire des mathématiques et de leur enseignement ainsi que sur une relecture de textes de mathématiciens largement engagés dans ces débats dans la première moitié du siècle: Poincaré, Fréchet, Lebesgue, Gonsseth etc...En témoignent¹⁰ les actes des colloques

⁸ Brousseau G. (1988a)

⁹ Le volume 5 de "Studies in mathematics education" édité par L'UNESCO en 1986 réunit les contributions d'auteurs de différents pays sur ce sujet. Nous renvoyons tout particulièrement aux articles de de Lange, Koman et al., et Bishop.

¹⁰ Pour une bibliographie, voir Repères N°1 et n° 4 et Itard (1984)

organisés par les commissions inter-Irem "Epistémologie et Histoire des mathématiques" et "Géométrie" ainsi que nombre d'articles parus dans la revue "Repères" depuis sa création.

* Dans leur article "Autour de la l'enseignement de la géométrie au collège", Chevallard et Jullien (1991) proposent une autre méthode pour répondre à la question "Qu'est-ce que la géométrie?". "Elle consiste à construire une image objective - par opposition aux images culturellement déformées que promeuvent les divers groupes sociaux - de ce qu'est la géométrie dans la réalité historico-culturelle". Après avoir noté l'ambition de ce projet, les auteurs précisent: "Il équivaut, somme toute, à un immense travail d'épistémologie, *historique, culturelle* et *sociale* qu'il ne nous est guère permis d'accomplir ici et maintenant ni de toute façon, en une seule fois. "

Dans trois articles successifs de Petit x, ils rendent compte des premiers résultats de ce travail et ils montrent, sur quelques exemples, l'efficacité de cette méthode quant à l'analyse des situations d'enseignement de la géométrie au collège.

* La méthode que nous utilisons se différencie des deux précédentes parce qu'elle se propose de modéliser les fonctions des connaissances par des situations non didactiques, représentatives des pratiques des institutions de référence (Brousseau 1991), et d'utiliser ces modèles pour l'analyse des situations d'enseignement, l'élaboration et le contrôle d'ingénieries.

Brousseau (1983) propose ainsi deux situations fondamentales correspondant aux deux fonctions différentes de la géométrie:

1. La situation fondamentale de la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace"

"C'est celle du charpentier qui doit préparer et tailler au sol des bois qui devront s'ajuster exactement dans l'espace à 10 m. du sol. Il faut qu'il ait une représentation et des techniques précises qui lui permettent d'anticiper le résultat de ses décisions."

La situation d'enseignement correspondante doit permettre à la fois l'élaboration et l'explicitation de modèles Aussi le schéma de fonctionnement le plus général est-il le suivant. Un élève A placé devant un dispositif spatial doit demander à un élève B, qui ne dispose pas des mêmes informations, d'effectuer pour lui certaines tâches. Pour cela, il doit désigner les éléments qui l'intéressent, définir ceux qui sont inconnus de son interlocuteur, décrire et expliciter son modèle mental. La rétroaction de la situation permet d'éprouver la valeur du modèle et de son explicitation. L'instauration par l'enseignant de nouvelles contraintes conduit à l'exploration des propriétés du modèle: recherche de messages minimaux, équivalents, diverses formes de représentation etc..."

-2- La situation fondamentale de la géométrie en tant que savoir mathématique

Il s'agit d'une mise en scène du fonctionnement de la géométrie savante dans une situation de recherche des propriétés des points de concours des médiatrices du triangle. Cette mise en scène consiste à :

-demander aux élèves de tracer les trois médiatrices en faisant le choix d'une configuration des 3 points propre à minimiser les chances d'obtenir un point unique. (triangle assez grand avec un angle obtus)

- organiser la confrontation entre eux sur la possibilité d'agrandir le triangle des points d'intersection, sur la base de preuves pragmatiques.

La situation doit être conçue pour qu'au cours de ces débats, un élève ait intérêt à déclarer à ses camarades : "Je vais vous faire économiser des tentatives inutiles, si le dessin est bien fait, les trois points doivent être confondus". Et qu'il produise une preuve

intellectuelle qui puisse convaincre les autres élèves que cette preuve "remplace et rend inutile toutes les preuves pragmatiques,"

Ce traitement du problème des médiatrices définit des conditions a-didactiques auxquelles doit satisfaire la situation d'enseignement "si l'on veut que l'élève comprenne ce que c'est qu'une preuve mathématique," ... , qu'il soit capable "d'en utiliser, et pas seulement à l'intérieur de situations déjà mathématiques pour imiter et reproduire ce qui lui a été montré, mais à la place d'autres genres de preuve (...) ou d'autres moyens d'entraîner la conviction des autres(...)."

Dans les chapitres qui suivent, nous allons exploiter les propriétés de ces situations.

Nous montrerons d'abord l'importance pour l'enseignement de :

A) bien dégager ces deux fonctions non didactiques de la géométrie, et montrer comment les situations qui en relèvent diffèrent d'autres situations spatiales dont la maîtrise relève du "sens pratique".

B) favoriser, par une dialectique convenable entre les caractères effectifs et intériorisés des rapports spatiaux introduits, la construction chez les élèves des représentations qui permettent:

- l'anticipation d'une action et la construction de modèles (implicites et explicites)
- la production de preuves et leur mise en débat.

C) d'effectuer un partage convenable entre ce qui est à la charge des élèves (partie a-didactique) et ce qui est à la charge du professeur (partie didactique).

Nous reprendrons ensuite ces situations dans le chapitre B-7

CHAPITRE B-3

CARACTERES PRINCIPAUX DES RAPPORTS SPATIAUX DE L'ELEVE AVEC LE MILIEU.

I. INTRODUCTION

Rappelons tout d'abord le champ de connaissances que nous nous proposons d'explorer: c'est celui qui permet à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de :

- reconnaître, décrire, fabriquer ou transformer des objets ;
- déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ;
- reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement.

La maîtrise de l'espace est l'objet d'apprentissages bien avant l'entrée dans la scolarité et elle continue de se développer par des voies parallèles tout au long de l'enfance et de l'adolescence, voire de l'âge adulte. Ces apprentissages du sujet s'appuient sur une multiplicité d'interactions diversifiées avec le milieu matériel et humain, sous la forme de rapports effectifs, d'imitation des comportements d'adultes ou d'enfants plus grands, d'échanges oraux avec les adultes à propos de ses actions, de leurs effets etc.... Ces interactions sont d'autant plus efficaces qu'elles sont finalisées et pour certaines d'entre elles, vitales pour le sujet¹.

L'efficacité des solutions apportées à ces problèmes est essentielle à la survie des individus comme des sociétés. Les solutions que le sujet leur apporte sont donc partiellement le fruit d'une adaptation individuelle dans une exploration autonome, et celui de l'appropriation culturelle des conduites reconnues socialement comme les plus adaptées, comme l'a montré Hall (1966).

Dans notre société, une partie importante des connaissances² spatiales est fortement liée au savoir géométrique, ce qui n'est pas le cas, par exemple dans la société esquimaude . Cette présence préalable de la géométrie dans notre culture a d'ailleurs des effets dans le processus de modélisation des problèmes spatiaux³.

Ces situations, non didactiques, où la part des interactions effectives avec le milieu n'est limitée que par les caractéristiques de ce milieu, le désir des sujets et les contraintes sociales, permettent à l'enfant de développer des connaissances et des compétences spatiales qui vont servir de base aux enseignements ultérieurs y compris géométriques. Mais elles ne suffisent pas à faire acquérir au sujet toutes les connaissances que la société juge importantes, d'où la présence de certaines connaissances spatiales à acquérir dans les programmes scolaires.

¹ voir Von Glaserfeld, 1988, Budapest

² Rappelons la distinction entre connaissances et savoirs donnée par Brousseau et Centeno (1992): "Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc..) mais non nécessairement explicites, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale.... Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir et la production de nouveaux savoirs."

³ Mercier et Tonnelle (1992), pp. 48-49

La situation scolaire avec ses contraintes (regroupement de nombreux enfants du même âge, limitation des situations laissées à l'expérimentation des enfants ..) ne fournit pas facilement les conditions favorables à des apprentissages se déroulant comme les précédents, dits "spontanés"⁴.

Les situations d'enseignement peuvent-elles s'appuyer sur les mêmes leviers que les situations non didactiques ou bien sur d'autres leviers à préciser? Comment gérer le rapport avec la géométrie?

Telles sont les questions que nous chercherons à faire avancer en dégagant dans les paragraphes qui suivent les caractères suivants des rapports spatiaux⁵ :

- le caractère effectif ou intériorisé ;
- le caractère a-didactique ou didactique de la situation qui les suscite ;
- la problématique dans laquelle s'inscrivent les rapports déterminés par la situation. Nous en distinguerons trois : le type pratique, le type géométrique, et le type modélisation.

Nous allons préciser successivement chacun de ces caractères avant de les utiliser.

II. RAPPORTS SPATIAUX EFFECTIFS AVEC UN MILIEU OBJECTIF, RAPPORTS SPATIAUX INTERIORISES AVEC UN MILIEU OBJECTIF EVOQUE:

A. Etude d'un exemple

Nous allons sortir du cadre un peu étriqué de l'enseignement, pour illustrer, sur un exemple emprunté au domaine du sport, combien peut varier la connaissance liée à la maîtrise des rapports spatiaux avec un même milieu objectif

- * selon le type de rapport spatial effectif déterminé par la situation ;
- * selon que le rapport avec le milieu objectif est effectif ou intériorisé.

Nous allons prendre l'exemple d'un match de basket.

1. Rapports spatiaux effectifs

Comme sujets établissant de tels rapports spatiaux au cours d'une partie (de basket), c'est à dire susceptibles par leur action de modifier le déroulement du jeu, nous identifions principalement les joueurs, les arbitres, l'entraîneur.

a) Les joueurs

Pour un joueur, le rapport spatial est centré sur l'objectif de l'équipe : amener le ballon dans le cercle fixé au panneau.

Il prend en compte la position du ballon, des panneaux, et des autres protagonistes; chacun se saisit perceptivement et de façon quasi continue des informations relatives aux positions des "objets pertinents" du milieu objectif, les traite immédiatement en adaptant ses

⁴ A tort; quand le milieu familial, pour diverses raisons, ne stimule pas l'enfant, les déficits apparaissent. voir Dolle (1990).

⁵ Rappelons que nous nommons *spatiaux* les rapports que l'élève entretient avec le milieu objectif dans la mesure où les connaissances ou le savoir qui en commandent la maîtrise sont identifiables culturellement comme des connaissances spatiales ou comme relevant du modèle géométrique. Nous nous interrogerons plus tard sur les raisons qui font que certaines connaissances ne font pas partie du savoir géométrique; par exemple celles qui permettent d'orienter convenablement un plan au moment de s'en servir

mouvements et déplacements pour réaliser l'action anticipée, ou empêcher ceux de l'équipe adverse de marquer⁶.

⁶ Ceci prend parfois une voie un peu détournée, quand le joueur provoque ceux de l'autre équipe à la faute, ou bien lorsque l'on cherche à gagner du temps.

b) L'arbitre

Il est lui aussi acteur de la même situation objective, mais son rôle est d'assurer que l'ensemble des joueurs qui évoluent sur le terrain le fassent strictement selon la règle du jeu. Il doit donc saisir de toutes autres informations que les joueurs, traiter ces informations de façon à effectuer de toutes autres anticipations correspondant à son rôle (en particulier les risques de contrevenance aux règles), choisir ses moments d'intervention, etc...

c) L'entraîneur

Enfin, nous pouvons illustrer la notion de rapport effectif avec un milieu par un troisième type, celui établi par l'entraîneur: Celui-ci ne va intervenir effectivement qu'à certains moments de la partie (les pauses), fournir de l'information, modifier les rôles des joueurs par exemple, la stratégie de base convenue entre eux, etc...pour permettre à chacun des joueurs retenus d'exploiter au mieux la complémentarité de leurs capacités du moment face à l'autre équipe.

Pour ce faire, de quelles connaissances devra-t-il faire preuve?

Il va devoir saisir (tout au long de chaque phase du jeu) des informations spécifiques sur les deux équipes, estimer le type de rapport personnel à l'espace qui est actualisable par chacun des joueurs dans la situation du match.

d) En conclusion

Ces types de rapports effectifs, qui font appel à des connaissances ou des savoirs dont la différence est particulièrement évidente dans ce type de situation, nous permettent d'entrevoir l'importance qu'il va falloir accorder, lorsque nous traiterons des apprentissages spatiaux en situation scolaire, à l'identification précise du rapport spatial effectif des élèves et de l'enseignant à un milieu lui aussi bien déterminé.

On imagine par exemple les différences qui peuvent se creuser, ou être exploitées, dans le travail d'un groupe d'élèves, collectivement en charge d'une activité spatiale : celui qui agit effectivement, celui qui observe, celui qui critique, celui qui se préoccupe de la consigne, etc..

2. Les rapports spatiaux évoqués avec un milieu objectif

Poursuivons l'illustration préalable de notre propos sur le même exemple.

a) Le spectateur

A propos d'un spectateur du match, dira-t-on que regarder les joueurs, lui permet d'établir un rapport à cet espace? Certes, il ne peut pas plus agir sur cet espace qu'en recevoir des rétroactions directes. Mais il peut communiquer avec ses voisins, ou avec lui-même, des anticipations: par exemple si les uns et les autres connaissent un peu le jeu, prévoir des mouvements de joueurs, observer si le jeu confirme ou non leurs anticipations.

Si ces spectateurs sont par ailleurs joueurs, ils peuvent aussi chercher à observer, à identifier des éléments de stratégie mise en oeuvre par les joueurs, éléments qu'ils peuvent se proposer d'exploiter plus tard. Ils ont alors des rapports effectifs non plus avec l'espace du jeu, mais avec des représentations de cet espace, établis grâce à leurs connaissances antérieures, et ces rapports effectifs sont susceptibles de modifier ces représentations (prise de conscience de possibilités nouvelles par exemple...).

Une autre catégorie de spectateurs peut aussi exister, ceux venus par exemple pour faire plaisir à quelqu'un et qui ne prennent aucun intérêt au jeu. Ces spectateurs reçoivent

exactement les mêmes stimuli spatiaux que les précédents, mais le jeu se déroule comme une succession d'images dont ils attendent impatiemment la dernière. Nous dirons que ces spectateurs n'établissent dans cette situation aucun rapport spatial avec le terrain de jeu et ses occupants.

b) Les joueurs à la pause

Lors de chaque pause, l'entraîneur communique ses analyses, en évoquant les rapports antérieurs ou à venir.

Il utilise pour cela le langage, mais aussi une représentation spatiale du terrain sur ardoise. Cette représentation lui permet de communiquer des positions de manière collective ou individuelle, efficace et rapide.

c) Les joueurs à l'entraînement

Les équipes sportives pratiquent aussi de façon importante (à l'entraînement en particulier) l'évocation de rapports spatiaux, utilisant par exemple la vidéo (et particulièrement le ralenti), le dessin, les schéma, mais aussi des simulations de mise en oeuvre de tactiques :

Lors de l'entraînement suivant le match par exemple, après visionnement de certains épisodes, examen de certains mouvements au ralenti, l'entraîneur va reprendre une phase de jeu insatisfaisante, et se servir d'une représentation spatiale *sur tableau* de l'espace du terrain où il représente les positions et les joueurs dont il veut parler..."toi, tu étais là etc.." un véritable débat peut s'en suivre dans l'équipe, chacun exprimant les potentialités d'action et les limites qu'il conçoit, représentant par des tracés les évolutions qui auraient été souhaitables si chacun avait été conscient des possibilités ou des limites...

Nous disons alors que sur le tableau, les rapports spatiaux avec le milieu A ont été représentés à l'aide d'un autre milieu spatial B. L'intérêt de l'introduction de ce second milieu B réside en son approche plus facile et immédiate que le premier A. En effet tous les joueurs sont placés en B dans un rapport tel qu'ils contrôlent d'un seul coup d'oeil l'ensemble des positions relatives de tous les joueurs⁷.

L'entraîneur peut enfin décrire une stratégie par un schéma qui utilise l'espace du tableau pour mettre en évidence les relations entre les différentes composantes d'une action.

d) Les jeux vidéos

On peut aussi imaginer d'autres modes de représentations des rapports spatiaux, par modélisation informatique plus ou moins riche du jeu sportif en jeu sur console vidéo, car une partie des rétroactions du milieu peuvent être modélisées.

Ainsi, ont été mis au point un certain nombre de simulateurs de pilotage d'avions, de conduite automobile, du jeu de tennis etc...

Encore faut-il que les actions du joueur devant sa console traduisent effectivement des décisions qu'il doit prendre sur le terrain, en rapport avec les situations correspondantes, et que les rétroactions de la console renvoient au joueur une information sur les qualités ou les défauts sur le terrain des décisions prises.

e) Exemple en géométrie

⁷ Ils ont ramené un rapport méso-spatial à un rapport micro-spatial (voir Brousseau 1983)

Le lecteur sera peut-être étonné de ne pas avoir encore trouvé de référence à la géométrie. Il en trouvera tout au long des chapitres suivants, mais citons en un au moins dès maintenant.

C'est un type de rapport évidemment fondamental en géométrie. La différence entre un milieu objectif constitué par un tracé sur une feuille et l'intériorisation qui peut lui correspondre est bien illustrée dans ce domaine par l'exemple de la communication d'un tracé de trois segments concourants. A ce même milieu peuvent correspondre par exemple les intériorisations suivantes :

- il y a un point et il est sur les trois segments
- il y a deux segments qui se coupent et le troisième passe par ce point d'intersection
- il y a un point sur un segment et les deux autres se coupent en ce point.

Tout enseignant de géométrie sait l'importance qu'il y a, pour résoudre un problème, où il s'agit par exemple de montrer que trois segments se coupent en un même point, de savoir passer d'un de ces points de vue à un autre, chacun commandant une recherche différente de la solution. Laborde (1982) a étudié la complexité des intériorisations produites par des élèves de 6ème et 5ème, repérée par les désignations d'objets géométriques réalisées pour communiquer (oralement ou par écrit) une figure tracée à quelqu'un qui devait la reproduire.

B. Essai de définition théorique :

Nous reprenons la formulation par Brousseau (1990) des diverses structurations du *milieu*, considéré comme système -dénué d'intention didactique- antagoniste du sujet, mises en évidence par l'identification des situations en termes de jeu⁸, donc d'états successifs, initiaux, intermédiaires ou terminaux, gagnants ou perdants, d'enjeux, de tactiques ou de stratégies, etc...

Le principal avantage de ce langage est de proposer une description de l'activité qui permette d'identifier dans le déroulement ce qu'il est raisonnable d'attribuer au "sujet mathématique⁹", par rapport à d'autres dimensions de ce sujet.

1. Divers niveaux de milieu¹⁰

Les rapports effectifs vont donc correspondre à ce niveau du milieu désigné par "*milieu objectif*", constitué du système antagoniste du sujet agissant : pour un joueur ou un arbitre, ce milieu est donc constitué du milieu matériel (ballon, terrain de jeu), et des autres protagonistes qui évoluent sur le terrain. La situation d'interaction avec le milieu objectif, est désignée comme "*situation de référence*"; elle est caractérisée par un ensemble d'*états* du jeu rendus *possibles* par la *règle* du jeu qui fixe les rapports effectifs entre les sujets et le milieu objectif. La structuration des états en tactiques ou stratégies est effectuée par le sujet, qui met en oeuvre des connaissances.

La classe de situations réflexives par rapport à la situation de référence est nommée *situation d'apprentissage* ; le sujet y établit des rapports non plus avec le milieu objectif, mais avec une *intériorisation* des rapports qu'un sujet agissant (lui ou un autre) a avec le milieu objectif. C'est ce qu'on nomme *milieu d'apprentissage*. Nous reviendrons plus loin sur les autres niveaux du milieu. L'effort de description de la situation en "états successifs et différenciés" déterminés par les rapports au milieu sera donc l'outil de base de notre analyse.

⁸ Brousseau G. (1986c), tome 1, modélisation des situations didactiques, p.326 et suivantes ou R.D.M. 7/2, pp.74 et suivantes

⁹ Margolinas C. (1989), p. 93

¹⁰ Brousseau (1986a), pp.54-68, et (1988a), pp.318-319

2. Rapports spatiaux effectifs

Nous nommons effectifs les rapports entretenus par les sujets agissant sur le milieu objectif dans la situation de référence, c'est à dire dont la mise en oeuvre détermine le passage d'un état du jeu à un état suivant.

3. Rapport spatial intériorisé avec un milieu objectif évoqué

Nous parlons de rapport spatial intériorisé dans une situation lorsque le sujet évoque, pour communiquer des informations nécessaires à la réalisation efficace des actions spatiales qu'il n'exerce pas, provisoirement au moins, ou débattre de la validité d'une stratégie.

Nous nous plaçons tout à fait dans le prolongement du sens que Piaget (1957)¹¹ donne au terme "action intériorisée" : "Nous appellerons intériorisée une action exécutée en pensée sur des objets symboliques... soit par représentation de son déroulement possible et de son application à des objets réels évoqués par images mentales (c'est alors l'image qui joue le rôle du symbole), soit par application directe à des systèmes symboliques"...

Dans le cas particulier des rapports spatiaux, les objets symboliques mis en oeuvre par les sujets ont ceci de particulier que certains d'entre eux sont de nature spatiale.

On peut classer les représentations symboliques de l'espace en différentes catégories:

- infralangagières, gestuelles par exemple, permettant de communiquer des indications spatiales en simulant corporellement des mouvements. Le codage gestuel (langage des sourds par exemple) manifeste la proximité de cette catégorie avec les suivantes.

- langagières:

* utilisant le langage spatial courant

* utilisant un langage spatial géométrique ou professionnel. Chaque profession développe en effet un langage fonctionnel à composante spatiale adapté aux décisions que ses membres doivent prendre (physiciens, architectes, cheminots, typographes, etc..).

Les langages professionnels font des emprunts plus ou moins importants à la géométrie.

- spatiales, qui permettent une mise en correspondance analogique plus ou moins riche avec le milieu de référence.

C'est le cas des dessins techniques, croquis ou maquettes de professionnels, des dessins ou croquis pour communiquer, des images, de certaines schémas, de l'usage de certaines "figures" en géométrie.

Le caractère spatial de ces représentations matérielles nous permettra d'analyser avec les mêmes outils les rapports que le sujet va entretenir avec elles.

C. Importance du critère effectif/évoqué pour l'analyse des situations

La théorie piagétienne a montré l'importance tant de l'action effective que de l'action intériorisée et de leur bonne articulation pour le développement cognitif de l'enfant.

Ramozzi-Chiarottino (1984) distingue, parmi les enfants en difficulté qu'elle a été conduite à examiner et à suivre dans leur rééducation, deux catégories marquées par un déficit d'action effective sur le milieu:

- les enfants empêchés d'agir dans le milieu où ils vivent (enfants des bidonvilles ou enfants surprotégés).

- ceux plus en contact avec les représentations des choses qu'avec les choses elles-mêmes (enfants dont la seule activité jusqu'à 3-4 ans a été de regarder la télévision).

¹¹ pp. 44-45

Ces deux catégories d'enfants présentent des déficits d'apprentissage, différents certes, mais qu'elle relie, pour les premiers à une absence d'organisation du réel, pour les seconds à une organisation inadéquate du réel, "leurs notions spatio-temporelles et causales se confondent avec l'imagination". Elle signale aussi le cas d'autres enfants qui, quoiqu'ayant organisé le réel de façon adéquate, rencontrent également de grandes difficultés d'apprentissage. D'après cet auteur, bien que ces enfants aient acquis la capacité de représentation, "ils n'ont pas été sollicités, au sens de structurer leurs représentations, soit en relation avec l'espace, soit en relation avec le temps, ou dans le sens logique et causal... Il leur manque la stimulation pour évoquer leurs représentations et ensuite pour les organiser de façon spatio-temporelle".

Bien que ces difficultés, liées souvent à des situations particulières, sociales ou autres, ne soient pas le lot de tous les enfants, elles illustrent l'importance de l'articulation entre les situations mettant en jeu des rapports effectifs et celles mettant en jeu des rapports intériorisés avec l'espace dans la scolarité obligatoire et plus précisément primaire. Nous verrons plus loin (chapitre B-6) comment, dans le cas des aveugles de naissance, le handicap peut entraîner une construction mentale de l'espace différente, qu'il serait important de prendre en compte dans l'enseignement. Une étude est actuellement en cours¹² pour déterminer comment mieux exploiter dans l'enseignement de la géométrie les connaissances intériorisées ainsi développées.

Nous reprendrons cette question ultérieurement mais nous pouvons déjà nous référer aux travaux de la psychologie du développement pour affirmer que, pour certains enfants au moins, l'articulation entre rapports évoqués et rapports effectifs à l'espace doit être travaillée de manière importante.

Nous avons déjà souligné par ailleurs combien l'apprentissage de représentations spatiales par seule évocation des rapports spatiaux, comme l'est actuellement celle des cartes et des plans, laissait les sujets dans l'incapacité d'utiliser ces moyens dans des situations d'action réelles.

Remarque

L'importance de l'interaction avec le milieu par des rapports effectifs pour la constitution de nouvelles acquisitions symboliques n'est par ailleurs plus à montrer. Il ne faudrait cependant pas transformer notre propos : nous n'affirmons nullement que toute action spatiale qui peut se modéliser à l'aide d'une notion géométrique fournit une aide à l'élaboration de cette notion. Par exemple, il est douteux qu'une manipulation technologique de la targette puisse être d'une quelconque aide quant à la maîtrise du concept géométrique de translation. Il faudra donc se garder d'ajouter sans précaution à l'enseignement actuel telle ou telle activité spatiale. On aboutirait alors à un glissement méta-cognitif caractérisé.

De plus, dans les situations scolaires, l'action effective est coûteuse: elle suppose des moyens matériels, une gestion de la classe plus difficile et beaucoup de temps. La décision de construire des situations d'apprentissage où les rapports effectifs de chaque élève avec l'espace sont nombreux ne peut être justifiée que par la qualité des représentations¹³ développées et par les difficultés suscitées par un enseignement qui ne pourrait s'appuyer sur de telles représentations.

¹² Molina, thèse en cours, université de Bordeaux I

¹³ Cette qualité de relation entre les situations d'action et les représentations développées est étudiée en didactique par le moyen des situations fondamentales.

III. CARACTERE DIDACTIQUE OU A-DIDACTIQUE DES SITUATIONS

Ce caractère des situations didactiques, maintenant bien connu, est souvent identifié au précédent, tant sont nombreuses les situations didactiques qui ne font appel qu'à des rapports intériorisés. De plus, particulièrement dans l'enseignement primaire, le développement des situations a-didactiques s'est surtout fait par des situations d'action, c'est à dire des rapports effectifs. Nous avons donc cru utile de développer les propriétés spécifiquement liées à ce caractère.

A. Etude de 2 exemples

Comparons les deux situations didactiques suivantes destinées à des élèves de Cours préparatoire.

1. Situation des quadrillages 1¹⁴

Voici la description de l'activité préparatoire au chapitre "Quadrillages".(P. 72-73 du guide pour l'enseignant)

Matériel : Un quadrillage dessiné par terre, aux cases assez grandes pour permettre un déplacement réel. Chaque enfant dispose d'une feuille de papier sur laquelle est représenté le quadrillage ainsi que d'un crayon.

On choisit deux enfants. Le premier est placé dans une case du quadrillage; le second a une craie.

Consigne donnée au premier enfant A : *Tu te déplaces dans le quadrillage en changeant de case, sans passer par les coins des cases.*

Consigne donnée au second enfant: *Marque le déplacement de A avec la craie sur le grand quadrillage.*

Consigne donnée aux autres enfants: *Marquez aussi le déplacement de A sur votre quadrillage.*

Si le premier enfant ne respecte pas la consigne, les autres enfants réagiront et la consigne sera accentuée: *on se déplace de case en case, on ne passe pas par les coins, on passe par les côtés.*

L'observation par la classe des différents tracés obtenus et de leurs différences fera prendre conscience qu'il faut marquer nettement le départ, l'arrivée et l'arrêt dans les cases, en mettant, par exemple, un gros point au centre de la case.

On verra aussi qu'il faut orienter le quadrillage si l'on veut que toutes les feuilles décrivent le même déplacement. Les repères seront liés à l'espace dans lequel se trouvent les élèves (vers le préau, vers la cantine, vers la sortie, etc...)"

2. Situation des quadrillages 2

Le matériel est le même, mais dans certaines cases, sont disposés des pots de yaourt retournés (un par case). Les élèves sont assis autour du quadrillage, ayant en main sa représentation. La consigne est la suivante:

"Un enfant va sortir. Pendant ce temps, un autre élève reçoit 6 (par exemple) jetons, choisira une case départ, se déplacera d'une case à la voisine sans passer par les coins des cases, cachant un jeton sous chaque pot de chaque case sur laquelle il passe, et ce jusqu'au dernier jeton.

¹⁴ tirée de Perrot et coll. ()

Quand A reviendra, il faudra qu'il trouve tous les jetons en soulevant les pots un à un. S'il soulève un seul pot sous lequel il n'y a pas de jeton, ou en oublie, il aura perdu.

Vous n'aurez pas le droit de lui parler ni de lui montrer avec la main, mais vous pourrez l'aider en écrivant des choses sur un papier.

Je choisirai au hasard une de vos feuilles que je lui donnerai. Il faudra que grâce à elle, il réussisse."

L'activité est organisée ensuite de telle manière que tous les enfants puissent expérimenter l'écriture ou la lecture des messages¹⁵, et ceci un nombre de fois suffisant pour qu'au fur et à mesure les difficultés de repérage du point de départ ou d'orientation du quadrillage dessiné soient rencontrées puis exprimées par les élèves.

Les connaissances élaborées sont ensuite mises en évidence par l'enseignant.

3. Comparaison des situations

Il peut sembler que les connaissances spatiales visées par ces deux situations didactiques soient les mêmes : elles font intervenir des rapports effectifs avec l'espace constitué du quadrillage et de son environnement. S'il en était ainsi, on pourrait dire que tout élève qui maîtrise la première doit maîtriser la seconde. Il est évident que ce n'est pas le cas, tant leurs caractéristiques sont profondément différentes.

Dans la seconde, la situation est organisée de telle manière que les messages des élèves soient validés par leur efficacité: ces messages permettent ou non à un enfant qui n'a pas vu où étaient les jetons de les retrouver. Bien sûr, la compétence du lecteur est également en cause et c'est le couple émetteur-récepteur qui progresse, au fil des différentes reprises du jeu. Les interventions du maître, une fois le problème convenablement dévolu aux élèves, se limitent à favoriser l'explicitation par ceux-ci des difficultés rencontrées (en plus du rôle d'arbitre et d'animateur). Les connaissances sont donc élaborées comme des outils, de manière similaire à ce qui se passe dans les apprentissages spontanés, puis, grâce à la prise de distance suscitée par le maître, progressivement décontextualisées.

Dans la première, les rapports effectifs avec le milieu objectif ne sont pas finalisés. La représentation sur papier du déplacement de l'enfant ne débouche sur aucune action qu'elle permettrait seule de réaliser; le maître ne dispose donc que de son pouvoir (et savoir) d'enseignant ou des connaissances des élèves les plus avancés pour invalider un trajet mal représenté.

On peut noter que l'intervention effective du maître est dans ce texte comme gommée par la description : "on verra", "l'observation...fera prendre conscience...". Or le maître devra développer une maïeutique serrée, par exemple pour que tous les élèves arrivent à comprendre pourquoi et comment on doit orienter le quadrillage "si l'on veut que toutes les feuilles décrivent le même déplacement".

La situation didactique n'est pas construite ici autour d'une situation a-didactique qui simule le fonctionnement non didactique des connaissances visées (ici la représentation d'un trajet et l'orientation du plan) comme dans la seconde situation présentée. On peut craindre que beaucoup d'enfants ne donnent qu'un sens très limité à cette activité et ne soient pas à même, dans un autre contexte, de reconnaître, par exemple, qu'il faut contrôler l'orientation d'un plan quand on veut retrouver un trajet.

¹⁵ voir partie D, le jeu du plan au CE2

Par ailleurs, ces deux situations didactiques diffèrent profondément par le coût en temps nécessaire à chacune d'elles: si la première est prévue pour se dérouler sur moins d'une séance, il est bien évident qu'une durée beaucoup plus longue doit être prévue pour un fonctionnement efficace de la seconde. Dans la mesure où tous les élèves ont à expérimenter la position de l'émetteur et celle du récepteur, à modifier leurs stratégies en fonction de leurs résultats et des échanges avec leurs camarades, c'est une suite de séances que le maître doit organiser. Nous voyons là le "talon d'Achille" des situations d'enseignement de ce type: si la différence des acquisitions n'est pas considérée comme importante, le temps didactique utilisé semble perdu et la mise en place de tels processus sera rejetée comme trop complexe et trop coûteuse.

B. Rapports didactiques, non didactiques, a-didactiques

1. Situation non didactique (relative à un savoir)

C'est une situation finalisée par un résultat, dont la maîtrise dépend spécifiquement de la mise en oeuvre du savoir en question, qui peut être rencontrée en dehors de tout contexte et de tout rapport d'enseignement, à laquelle l'enfant ou l'adulte (qu'il connaisse ou non le savoir correspondant) doit faire face seul. La situation sanctionne les décisions, inadéquates ou adéquates .

2. Situation a-didactique (relative à un savoir)

A l'intérieur d'une situation didactique (donc organisée par le maître pour un certain enseignement), le terme de situation a-didactique désigne toute situation (finalisée par un résultat) qui d'une part ne peut être maîtrisée de façon convenable sans la mise en oeuvre des connaissances ou du savoir visé et qui d'autre part sanctionne, sur le mode de l'évidence pour l'élève, les décisions qu'il prend (bonnes ou mauvaises), sans intervention du maître relativement au savoir à mettre en oeuvre.

Brousseau (1986b) la décrit ainsi¹⁶ : "Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien, et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître¹⁷. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle, mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques...".

Cette situation peut être réelle ou évoquée.

On distingue trois types principaux de situations a-didactiques, correspondant à des états de connaissance différents et liés à des fonctions complémentaires du savoir: *les situations de validation, de formulation et d'action*¹⁸.

Le caractère a-didactique d'une situation de validation est réalisé lorsque la situation place les participants dans des rôles nommés "proposants" et "opposants".

Ces rôles les placent à la fois

¹⁶ p 49

¹⁷ Pour que ces situations fonctionnent, il faut bien entendu que le maître intervienne de multiples façons. Il s'interdit seulement d'apporter de façon directe ou indirecte les connaissances qu'il veut voir apparaître.

¹⁸ Pour une description détaillée, voir Brousseau G.(1986b), pp.85 à 112

- en opposition pour produire des assertions vraies relatives aux stratégies gagnantes de la situation d'action correspondante, et/ou en assurer la validité sur la seule base des connaissances communes et des règles du jeu de cette situation d'action

- en position de coopération sur la constitution de connaissances : toute connaissance acceptée est assumée par tous, sous sa forme explicitée et dans ses conséquences logiques.

On peut se référer à l'exemple de la course à 20 dans sa phase "jeu de la découverte". Le professeur n'a pas besoin d'intervenir pour décider de la validité ou non des assertions. Son seul rôle est de stimuler les élèves et de faire respecter les règles définies par la situation¹⁹.

Le caractère a-didactique d'une situation de formulation est réalisé lorsque elle place les participants en émetteurs et récepteurs et qu'elle permet de constater expérimentalement l'échec ou le succès d'une communication, de valider ainsi le choix du langage utilisé et la pertinence des informations explicitées.

Le caractère a-didactique d'une situation d'action est réalisé lorsque la situation permet de valider les actions des sujets, et par là, leurs modèles implicites, les connaissances qui leurs ont permis de construire et de mettre en oeuvre une stratégie gagnante.

Nous appellerons a-didactiques les rapports spatiaux des élèves dans une situation d'enseignement s'ils se développent au sein d'une situation a-didactique, et didactiques dans le cas contraire.

C. Importance du critère "a-didactique" pour l'analyse des situations spatiales

Nous pouvons généraliser les remarques que nous avons faites après la présentation des deux exemples.

Le développement de rapports a-didactiques avec le milieu garantit²⁰ une qualité des apprentissages liée au fait que les élèves sont capables de donner un sens proche de celui des pratiques de référence (spatiales ou géométriques) aux connaissances élaborées dans ce cadre.

L'établissement et la régulation de ce type de rapport implique un "coût" important en ce qui concerne tant la gestion de la classe (en particulier pour faire effectivement assumer par les élèves, sous forme de rôles, la responsabilité de la production de la connaissance aux trois niveaux de celle-ci) que par les conséquences sur l'allongement du temps didactique.

Le choix des enseignements à mettre en oeuvre de cette manière doit donc être bien réfléchi et s'appuyer sur des résultats de recherche qui en établissent la nécessité.

IV. TYPES DE PROBLEMATIQUE : PRATIQUE, GEOMETRIQUE, DE MODELISATION.

Après avoir critiqué l'analyse des situations d'enseignement en termes d'opposition entre l'espace sensible et la géométrie, nous avons proposé au chapitre précédent d'étudier les différences de rapports qu'un élève peut entretenir avec chacun de ces deux espaces.

Nous nous proposons maintenant de caractériser ces différences en termes de problématiques liées à des situations ou plutôt, à des types de situations correspondant à des pratiques différentes parce que spécifiques d'institutions²¹ différentes.

Nous allons commencer par illustrer nos catégories sur quelques exemples.

¹⁹ Brousseau, G. (1988c) , pp104-109

²⁰ Brousseau, (1986b), pp.88-90

²¹ au sens de Chevallard (1992)

A. Exemple de l'inégalité triangulaire

Reprenons le problème tel qu'il est proposé aux élèves dans Berté (1992)²².

Il s'agit pour eux de construire trois triangles dont les mesures des côtés en cm sont données par l'enseignant: pour le premier 7, 5, 4; pour le second 9, 5, 4 pour le troisième 10, 5, 4. Pour répondre à la demande de l'enseignant, les élèves s'engagent dans la construction des triangles, ce qui ne leur pose pas de problème pour les premières et les troisièmes données mais, comme nous l'avons vu, les conduit à des conclusions différentes pour les secondes. En effet, dans les deux premiers cas cités, les relations spatiales que l'élève établit avec la figure-dessin lui fournissent suffisamment d'informations pour qu'il puisse conclure sans ambiguïté, ce qui explique que tous les enfants s'accordent sur le résultat. Dans le deuxième cas, ceci ne se produit plus, certains enfants arrivent à construire un triangle, d'autres non.

Que conclure de ces faits ?

Ils peuvent se décomposer en deux expériences nettement différentes que l'uniformité de la consigne cache : une première, aux résultats facilement établis, une seconde beaucoup plus complexe, qui porte sur l'existence d'un triangle de mesures 5, 9, 4, existence à propos de laquelle la réalisation graphique²³ ne permet pas à la classe de se mettre d'accord.

La démarche des uns consiste à essayer²⁴, et à conclure sur la seule base des essais. Cette démarche pragmatique relève d'une autre problématique que nous désignerons par problématique pratique (de la vie courante). Et le résultat en est, indiscutablement selon nous, de faire conclure à l'existence du triangle, à la précision exigible des tracés et des mesures. Le lecteur pourra s'en convaincre en comparant les mesures des trois côtés de la figure (1).

Arsac (1989)²⁵ rapporte que dans cette deuxième expérience, certains élèves de cinquième entrent facilement dans une autre problématique, sans que l'on puisse savoir comment.

Cette entrée dans une nouvelle problématique se manifeste par des comportements tout à fait différents de ceux de la majorité de leurs camarades quant aux moyens à mettre en oeuvre pour répondre à la question de l'existence du triangle 5, 9, 4. Citons Arsac qui explicite et analyse certains de ces comportements : "très peu de dessins, voire pas du tout, ou des dessins qui ne proviennent pas de l'activité de construction à la règle et au compas mais en donnent directement le résultat anticipé par l'élève, c'est-à-dire un segment avec un point marqué.... Lors des débats avec les autres élèves, la source de la conviction de ces élèves, lorsque nous avons pu la repérer, est toujours liée à la perception graphique des propriétés... du type suivant : l'hypoténuse d'un triangle rectangle est plus longue que chacun des côtés". Et l'auteur conclut: "L'incertitude engendrée par le dessin sur le triangle proposé est levée en abandonnant le résultat concret et contradictoire de la construction et en se ramenant à une propriété dont on est sûr."

L'entrée dans la problématique géométrique est ici repérée dans les débats en particulier par des comportements traduisant une certaine exigence implicite de *non-contradiction* entre l'existence de "vrais triangles" dont la longueur d'un des côtés serait la

²² p. 58-60

²³ Il ne s'agit pas ici d'une expérience graphique comme la décrit Mercier et Tonndle (1992), p.34. En effet, il ne s'agit pas d'un montage expérimental dont la fonction est de mettre en rapport une théorie avec l'espace sensible.

²⁴ par tâtonnements avec sa règle si on a oublié son compas, si on en croit Chevallard et Jullien (1991), p.75

²⁵ L'auteur y décrit de manière détaillée les différentes conceptions des élèves, il montre l'existence d'une conception imprévue, liée à l'ordre dans lequel on construit les côtés du triangle, et sur laquelle nous reviendrons.

somme des longueurs des deux autres et certaines propriétés de l'espace connues. Nous pourrions dire que ce rejet de l'existence du triangle est basé sur la nécessité de maintenir pour vraies dans toute leur généralité, des propriétés dont ils veulent montrer qu'elles seraient mises en cause par l'existence d'un tel triangle.

La situation a été choisie par Arsac et coll. (1992), justement parce qu'elle permet de faire surgir simultanément les deux, chacune apportant une réponse contradictoire avec celle de l'autre. Le professeur peut ainsi mettre en scène la nouvelle problématique, en la différenciant nettement de la première.

Cet exemple ne suffit pas selon nous à illustrer l'intérêt des distinctions que nous proposons. L'exemple suivant concerne à la fois des adultes, futurs enseignants, et des situations plus courantes.

B. Exemple de l'aire du triangle

Comparons les solutions proposées par les candidats à un des exercices du concours d'entrée à l'école normale, il y a quelques années :

Le texte en était le suivant: "(ABCD) est un trapèze quelconque, les diagonales (AC) et (BD), se coupent en M. Comparer les aires des triangles (AMD) et (BMC). Justifier votre réponse." Ce texte était accompagné d'une figure (fig 2) représentant le trapèze.

Nous allons distinguer trois types de solutions : A, B et C

Un nombre non négligeable de candidats ont proposé une solution de type (A) :

Ils ont mesuré les longueurs des bases et des hauteurs de ces deux triangles et appliqué la formule donnant l'aire à partir de ces deux mesures.

Un nombre très faible, au contraire, s'est engagé dans une solution de type (B), pour laquelle aucune mesure n'était nécessaire: Il suffisait de remarquer que la comparaison demandée produisait le même résultat que celle des triangles ADC et BDC et que ces deux triangles avaient même aire puisque même base [DC] et des hauteurs égales (celle de la hauteur du trapèze).

Nous qualifions la solution B de *géométrique*. Elle s'inscrit bien dans une problématique mathématique.

Une troisième solution (C) qui n'est pas apparue aurait pu être utilisée²⁶ : fabriquer un gabarit d'un des triangles et tenter de recouvrir la surface de l'autre par celle du gabarit, découpée en autant de morceaux que nécessaire.

D'un certain point de vue, mathématique, ces trois solutions ne diffèrent que par la nature mathématique des connaissances utilisées. Ces différences peuvent être étiquetées comme des différences de *conceptions* de la notion mathématique d'aire, ce terme étant pris au sens au sens d'Artigue(1991).

- solution A : calcul de l'aire d'un triangle par la formule $S = (B \times H)/2$,
- solution B : relation ensembliste dans l'ensemble des surfaces mesurées,
- solution C : définition générale de l'aire.

Nous voulons montrer ci-après que, pour les candidats auxquels ce problème est posé, ces différences s'accompagnent de problématiques et de rapports à l'espace différents.

Les solutions A et C correspondent à une compréhension du problème dans laquelle ce sont les triangles "matériels" dessinés sur la feuille qu'il faut comparer. Elles s'appuient sur la figure comme un milieu objectif.

²⁶ Cette solution correspond aux moyens utilisés par les élèves de C.M. dans le cadre de certaines introductions à la notion d'aire.

La solution C ne fait appel qu'à la signification spatiale du concept d'aire (superposition des étendues) et ne met en oeuvre aucune connaissance géométrique. La réponse est recherchée par un ajustement au niveau de l'action sous le contrôle de la perception. Nous qualifions de *pratique* cette solution. Elle s'inscrit dans la problématique de la vie courante ou du "sens pratique" de Bourdieu (1980).

Les candidats qui ont choisi la solution A connaissent et savent utiliser en situation la formule qui fournit l'aire d'un triangle. Or l'utilisation de cette formule est bien le résultat d'un travail géométrique minimal, identifiant hauteurs et bases relatives à un triangle, faisant appel à une formule, reliant par la mesure les concepts géométriques à l'espace. Leur réponse est partielle en ce qu'elle ne prend pas en compte l'effet sur les calculs de l'incertitude liée aux mesures, effet qui peut être important et qui, si on ne le prend pas en compte, conduit à des résultats contradictoires d'un candidat à l'autre. Cette solution ne permet donc pas de conclure à l'égalité des aires.

Nous qualifions la problématique de cette solution de *modélisation*. Elle s'inscrit dans une problématique de modélisation de la réalité spatiale par des connaissances géométriques.

Comment expliquer le choix de la solution A dans une épreuve de mathématiques? Nous y voyons deux explications : quoiqu'ayant certainement reçu un enseignement de géométrie, les candidats ayant choisi la solution A avaient tout oublié de la problématique géométrique, ou bien, incapables de trouver une démonstration, ils s'étaient résignés à produire une réponse dont ils pouvaient espérer qu'elle leur fournirait quelque avantage sur leurs concurrents restés "secs" (qui ont constitué le lot le plus nombreux).

On pourrait aussi remarquer que le texte était ambigu: les étudiants pouvaient comprendre que la question était posée à propos de ce triangle particulier dessiné sur la feuille, alors que si le texte n'avait pas été accompagné d'une figure, le fait qu'il s'agissait d'un problème de géométrie aurait été plus clair!

C. Caractérisation des problématiques

Sur les exemples ci-dessus, nous avons avancé quelques-uns des critères qui vont nous permettre de formuler de façon plus précise ce que nous entendons par chacune des problématiques géométrique, pratique, et de modélisation.

1. Problématique de la géométrie

La pratique de référence est celle de la géométrie des mathématiciens, et se caractérise depuis les grecs par un certain type de problèmes et de solutions dont nous allons tenter de décrire les principaux caractères.

Se placer dans une problématique géométrique c'est donc entrer dans un *rapport entre mathématiciens établi sur la base de déclarations concernant un espace conceptualisé et contrôlé par la consistance (au sens de non-contradiction) de l'ensemble de ce qui est déclaré sur lui. Ce rapport peut-être intériorisé ou effectif²⁷. La problématique géométrique a évolué avec le temps depuis les grecs, comme ont évolué les déclarations sur l'espace et les moyens d'en contrôler la consistance avec l'ensemble du corpus.*

²⁷ Le rapport est effectif lorsqu'il y a un débat scientifique réel sur les productions. Entre ces moments de débat effectif, le producteur de mathématiques débat avec une communauté intériorisée, et il peut le faire car les règles de débat sont bien connues.

Nous qualifierons de géométriques les connaissances relatives à l'espace et les rapports spatiaux qui sont mis en oeuvre par les élèves ou les enseignants dans une problématique géométrique déterminée par une situation didactique.

Les connaissances spatiales relevant de ce type de traitement ont été triées et organisées depuis les grecs jusqu'à nos jours sur ces principes.

2. Problématique pratique

Nous prenons comme référence la pratique de la vie courante, des problèmes spatiaux "ordinaires" de la vie de monsieur "tout le monde", ou encore du "sens pratique" selon les caractéristiques qu'en donne Bourdieu : "La pratique se déroule dans le temps, et elle en a...l'irréversibilité...Elle ne connaît que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique... Elle exclut tout intérêt formel. Le retour réflexif sur l'action elle-même, lorsqu'il survient (c'est à dire presque toujours en cas d'échec des automatismes), reste subordonné à la poursuite du résultat et à la recherche (qui ne se perçoit pas nécessairement comme telle) de la maximisation du rendement de l'effort dépensé."

Se placer dans une problématique pratique, c'est donc essentiellement contrôler ses rapports spatiaux de manière empirique et contingente.

Les situations correspondantes sont des situations d'action et de communication, résolues par les moyens les plus économiques en conceptualisation. L'action, dont le résultat est immédiatement visible et évalué de façon continue, constitue le principal régulateur de la mise au point de la solution des situations correspondantes : si la solution n'est pas satisfaisante, le sujet va la modifier par ajustement jusqu'à ce qu'elle le devienne.

Nous désignons par pratiques les rapports spatiaux et les connaissances mis en oeuvre dans une problématique pratique.

Nous étudierons plus particulièrement au chapitre 6 ce type de connaissances dont font partie les connaissances pratiques spontanément mises en oeuvre par des élèves sur un problème posé dans l'espace sensible.

3. Problématiques de modélisation

Nous ferons référence ici aux pratiques de modélisation de l'espace, et particulièrement pour notre propos, aux modélisations par la géométrie ou par des représentations spatiales matérialisées.

L'espace de référence dont il est question est bien l'espace sensible, comme dans la problématique pratique. Un autre point commun avec la problématique pratique, est que la solution doit pouvoir être validée dans l'espace sensible.

Par contre, la démarche de résolution par modélisation n'a plus rien à voir avec la démarche que nous avons appelée pratique car la solution d'un problème par modélisation est construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce système.

Cette démarche établit un certain rapport entre deux mondes : le monde sensible et un modèle, système symbolique doté de règles internes qui permettent de constituer à partir des objets initiaux et de relations initiales de nouveaux objets et de nouvelles relations valides. Un certain nombre de relations (initiales) dans le modèle sont signifiantes de relations de l'espace sensible et leur permettent de représenter le problème dans l'espace (c'est ce qui joue le rôle d'hypothèses et de conclusion par exemple) par un problème dans le modèle. A partir de ces relations, et du système de règles de production internes au modèle, la solution est construite dans le modèle.

L'interprétation dans l'espace sensible de la solution construite dans le modèle permet la validation pragmatique de l'ensemble de la démarche.

Nous nommons *spatio-géométrique* la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique, et *analogique* la modélisation d'un espace par un autre : schéma, croquis, dessins, plans, etc..

Cette différenciation ne relève pas de la problématique mais du niveau de formalisation du modèle auquel le processus de modélisation sera porté, selon la complexité des connaissances géométriques intervenant et le niveau d'enseignement.

4. Conclusion

La "niche écologique" de la problématique pratique est de toute évidence celle des problèmes de la vie courante ou des problèmes "ordinaires" que doit savoir maîtriser toute personne dans notre société. Par contre, la problématique de modélisation concerne d'abord les problèmes des professionnels de l'espace. Quand à la problématique géométrique, elle ne concerne directement, nous l'avons vu, que les mathématiciens.

Cette remarque permet de mettre en perspective les problèmes de l'enseignement et de l'apprentissage des connaissances correspondantes.

Nous sommes donc en présence de trois problématiques, dont deux doivent être fondées par l'enseignement.

La question, traditionnelle dans l'enseignement, de l'entrée des élèves dans la géométrie mathématique va se complexifier, et se poser en termes d'articulation des trois problématiques.

Si l'on peut faire l'hypothèse d'un passage possible du statut d'outil au statut d'objet²⁸ pour envisager l'articulation de la modélisation avec la géométrie, il est évident que ce ne peut être le cas de l'articulation du spatial avec la modélisation. Nous reprendrons cette question au chapitre VII.

V. CONCLUSION

Ce chapitre nous a permis de mieux cerner les caractéristiques des rapports spatiaux que nous estimons essentielles de prendre en compte pour analyser les situations d'enseignement de l'espace et de la géométrie.

Nous allons entreprendre au chapitre suivant l'examen de la typologie des situations spatiales et géométriques déterminée par nos trois variables : problématique, caractère didactique ou a-didactique, caractère effectif ou intériorisé des rapports spatiaux.

²⁸ au sens de Douady R. (1984).

CHAPITRE B-4

PROPRIETES DIDACTIQUES DES DIFFERENTS TYPES DE SITUATIONS ENGENDRES PAR CES CARACTERES

I. INTRODUCTION

Pour illustrer l'intérêt de nos catégories, nous allons examiner de notre point de vue l'ingénierie développée à l'occasion des recherches d'Arsac et coll., et de Berté d'une part, d'autre part de D. Grenier. Nous poserons les questions suivantes :

- Quelles sont les propriétés des rapports déterminés par les situations proposées : insérés dans une problématique pratique ou géométrique ou de modélisation, didactique ou a-didactique, effective ou évoquée?
- Que peut-on en déduire de cette classification?
- L'expérience rapportée conforte-t-elle nos déductions?
- Quelles conclusions en tirons-nous?

Nous examinerons ensuite le produit de la combinaison des caractères d'effectivité (ou non), didactique (ou non), pratiques ou géométriques ou spatio-géométriques des rapports spatiaux installés dans les situations d'enseignement. Cela fait huit cas possibles que nous chercherons à caractériser quant à leurs propriétés didactiques. Pour cela, nous les regrouperons selon les deux problématiques visées par notre enseignement : "de modélisation" ou "géométrique".

II. EXAMEN DE DEUX ETUDES DIDACTIQUES

A. Etude 1 : L'enseignement de la symétrie¹ par D. Grenier.

1. Erreur ! Source du renvoi introuvable. Description des premières situations proposées

Nous allons nous intéresser particulièrement à la construction et à l'étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième annoncé dans le titre de la thèse. Nous choisissons d'analyser la première partie du processus d'enseignement qui fait l'objet d'une partie du chapitre IV, des chapitres V, VI et VII, de la fin du chapitre IX et d'une partie du chapitre X.

a) Phase 1 : Diagnostic des conceptions des élèves de la symétrie pliage.

L'activité² comporte deux tâches qui se rapportent au même jeu de figures (14 figures), et le pliage est interdit. L'objectif des deux tâches est de mettre en jeu la perception globale de la droite de symétrie d'une figure. (Annexe 1)

Trois figures sont au tableau, dont une, inscrite dans un carré a un centre et deux axes de symétrie, et les autres n'ont qu'un axe de symétrie, avec la consigne "qu'est-ce que ces trois figures ont en commun?"....et l'enseignant doit mettre en évidence les seules droites de symétrie, matérialisées par le pliage. (Annexe 2)

¹ thèse, chapitre VII et VIII en particulier

² décrite p 104-107

"...La première tâche consiste à reconnaître (pour chacune des figures sur carton) si elle est symétrique en répondant à la question "cette figure a-t-elle une symétrie du même type que celles qu'on vous a montrées?"... (Elle) doit nous permettre de repérer quelles sont les figures qui, perceptivement pour les élèves, admettent une symétrie-plier..."

"La deuxième tâche consiste à construire (sur un deuxième jeu de figures identique au précédent) à main levée toutes les droites de symétrie de chaque figure s'il en existe"

La signification apportée à la symétrie en termes de pliage, "tient lieu de référence pour résoudre les problèmes posés, mais aussi de moyen de validation.... L'interdiction de plier oblige l'élève à anticiper le résultat du pliage".

b) Phase 2³ : Remise en question des perceptions et conceptions erronées

"Nous avons de nouveau donné aux élèves la tâche de construction à main levée des droites de symétrie si elles existent..."

Les onze figures ont été choisies pour permettre l'apparition des erreurs vues en phase 1. (Annexe 3)

Le travail a été organisé pour déstabiliser les conceptions erronées (groupes de quatre, avec recherche d'accord sur une réponse commune pour chaque figure, mise en commun et argumentation par un représentant du groupe chargé de défendre la solution du groupe en l'argumentant. Les arguments attendus sont surtout de type perceptif. L'issue du débat ne peut être garantie si l'enseignant ne le gère pas (mise en évidence d'aspects erronés ou reconnaissance d'une solution correcte s'ils échappent à la classe).

L'enseignant doit aussi récapituler dans une phase d'institutionnalisation en soulignant "les aspects importants à retenir de l'activité ...:

- une ligne de symétrie est forcément une droite
- une figure peut avoir plusieurs droites de symétrie
- une droite de symétrie passe par le milieu de deux points correspondants et elle est perpendiculaire à la droite joignant ces deux points".

La tâche "à main levée" n'exige pas un usage analytique des propriétés, mais plutôt un respect global de celles-ci....

c) Phase 3 : Utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie

L'objectif est de mettre en oeuvre de façon "naturelle" ou opératoire les relations d'incidence, et l'équidistance des points de l'axe de toute paire de points symétriques. Pour cela, l'auteur joue sur les variables des figures et les contraintes de la tâche (instruments permis). Trois groupes de figures (sur carton) et d'instruments sont déterminés. (Annexe 4)

G1 règle graduée et équerre; octogone, 2 cercles sécants de dimension différente centres non marqués. G2 règle non graduée et équerre; trapèze isocèle, drapeaux. G3 règle non graduée et compas; cercle "sans centre", ellipse "avec centre".

L'organisation sociale prévue est la même que dans la phase précédente.

L'enseignant devait introduire dans la phase d'institutionnalisation la notion de médiatrice en la reliant aux constructions faites pour le G3.

La consigne formulée lors de la première séance est : "*construire très précisément, en utilisant les instruments mis à leur disposition (règle, compas, équerre), toutes les droites de symétrie des figures proposées*".

³ p. 107-109

Pour la deuxième séance, la consigne a été légèrement modifiée : "Nous avons décidé de bannir de la consigne le mot précis. Il est prévu que l'enseignant explique aux élèves le sens des contraintes sur les instruments de la manière suivante : l'absence de règle graduée signifie que les mesures sont interdites, et que les élèves doivent chercher d'autres moyens de construction en utilisant les instruments pour ce pour quoi ils sont faits"⁴. Les groupes d'instruments-figures ont été conservés en modifiant l'orientation des axes, et dans le troisième groupe, l'ellipse a été abandonnée et le rayon du cercle rendu supérieur à l'ouverture du compas des élèves.

2. Analyse de ces situations

Chaque phase peut-être décomposée en plusieurs situations:

- une situation de référence évoquée (tracés sous contrôle continu du pliage)
- une situation d'apprentissage plus ou moins complète constituée par :
 - . le travail individuel de tracé sans pliage
 - . le travail en groupe préparatoire à la phase de bilan
 - . le bilan collectif où chacun expose ses résultats et où ceux-ci sont évalués en fonction de la situation de référence.
- une situation d'enseignement⁵ dès que l'enseignant va intervenir au niveau de l'évaluation des productions, se substituant à la situation de référence ou aux capacités d'apprentissage des élèves.
- éventuellement une situation d'enseignement explicite pour institutionnaliser certains résultats.

a) Les activités de la phase 1.

1) Caractéristiques des rapports déterminés et conséquences prévisibles

Le caractère a-didactique de la situation d'apprentissage est lié à la capacité d'anticipation d'une activité que chacun sait pouvoir facilement réaliser, le pliage. La détermination de la validité du résultat est inscrite dans le milieu objectif et les rapports spatiaux correspondants, maîtrisés par les élèves, sans nécessiter l'intervention de l'enseignant. Le fait de pouvoir recourir effectivement au pliage pour vérifier est essentiel, même si on n'y recourt qu'en dernière extrémité.

Le caractère évoqué concerne

- pour la première tâche, à la fois le tracé de l'axe, et le contrôle par rapport au pliage.
 - pour la seconde tâche (tracé à main levée), seulement le contrôle par rapport au pliage.
- La première activité est donc plus exigeante en capacité de représentation mentale que la seconde, où le sujet peut s'appuyer sur la vue de l'axe, une fois celui-ci tracé, pour contrôler que l'axe tracé est bien un axe de symétrie.

Le caractère pratique des rapports établis par ces situations est déterminé par le type d'activité auquel fait appel la consigne, que ce soit la reconnaissance visuelle d'une symétrie ou le tracé à main levée d'un trait (droit) reconnu visuellement.

La consigne de tracé à main levée appelle des procédures de résolution par ajustement sous contrôle visuel, procédures pratiques dont l'efficacité n'est pas remise en cause ici. Le

⁴ ibidem p203

⁵ au sens de Brousseau, R.D.M. 9/3. Interaction entre élèves, enseignant et savoir, en référence à la situation d'apprentissage qui constitue le "milieu" de cette nouvelle situation.

caractère évoqué ne suffit pas à impliquer une modélisation géométrique, le dessin d'expression le montre bien.

2) *Confrontation avec les observations rapportées*

La phase collective d'introduction⁶ met pourtant en évidence la capacité d'un élève au moins à articuler logiquement un résultat (axe proposé par un autre élève pour la figure du tableau) et une propriété de l'espace qu'il explicite alors pour rejeter ce résultat: "ça n'en n'est pas une (droite de symétrie), parce que le trait ne peut pas être mis sur un autre".

Le professeur trouve cette remarque intéressante puisqu'il la relève, mais sous une forme différente ("Les deux parties doivent se superposer exactement"), sa négation logique en quelque sorte; il ne souligne donc pas l'intérêt mathématique que pourrait avoir l'activité de formulation des raisons d'un rejet.

Pour ce qui relève du caractère *intériorisé*, les deux questions déterminent effectivement des résultats différents (certains élèves changeant de point de vue sur les propriétés de symétrie au moment du tracé à main levée), qui traduisent des rapports différents, que l'auteur a souligné en parlant de "contradictions" entre les deux. La réussite est meilleure pour la seconde tâche.

La diversité des résultats obtenus, qui est une des caractéristiques des rapports a-didactiques dans des situations problématiques, confirme ce caractère.

Deux facteurs confirment selon nous le caractère pratique des rapports introduits : l'importance des échecs pour les figures dont l'axe de symétrie n'est parallèle à aucun bord de la feuille ; l'absence d'indications concernant la référence (prévue par l'auteur) des élèves aux sommets, angles, segments, confirme l'absence de modélisation géométrique.

b) Les activités de la phase 2

1) *Caractéristiques des rapports déterminés et conséquences prévisibles*

Parmi les situations précédentes, l'auteur a choisi la plus simple et la mieux réussie, celle qui nécessite le moins de représentation mentale, le tracé à main levée d'un trait représentant l'axe de symétrie reconnu.

La consigne est identique à celle de la phase précédente: tracer à main levée. Le choix des moyens est complètement ouvert, et appelle de la part des élèves le choix des moins coûteux; les procédures pratiques de résolution par ajustement sous contrôle visuel sont efficaces, rien au niveau de l'évaluation ne vient les remettre en question. Il reste à examiner si certains paramètres spécifiques à l'organisation sociale de cette phase vont s'opposer à l'attribution de ce caractère pratique.

a) les groupes

Le regroupement d'élèves ayant fourni des réponses différentes permet en principe à chacun

- d'élargir le champ des résultats qu'il envisage, grâce à ceux que les autres produisent.
- de profiter de la critique des autres.

Le caractère *pratique*, par opposition à celui de *modélisation*, de rapports déterminés par la situation est-il remis en question par cette organisation ?

Cela pourra se constater au niveau :

- des formulations des propriétés permettant de discuter de tel ou tel résultat,

⁶ p.128

- du caractère contingent ou non de ces propriétés à chaque figure, de la prise en compte ou non de la cohérence entre les critères utilisés d'une figure à l'autre.

Les caractères a-didactique et évoqué n'ont aucune raison d'être modifiés par le travail de groupe, du moins tant que le professeur n'interviendra pas quant aux moyens d'obtenir le résultat ou au niveau de leur validation.

b) Séance de bilan collectif.

Conduite de manière a-didactique, figure par figure, aux fins de validation du résultat de chacun des groupes, nous ne voyons pas de raison qui pousserait les élèves à modifier la nature de leurs rapports spatiaux, du moins tant que ce caractère a-didactique sera conservé.

Il nous faut examiner, en rapport avec ce débat, l'objectif assigné au professeur : Nous allons voir que l'énoncé de ces "*aspects importants à retenir*", comme une "*récapitulation*" introduit une modification notable.

Les deux premiers, "*une ligne de symétrie est forcément une droite*" et "*une figure peut avoir plusieurs droites de symétrie*", peuvent apparaître comme un choix (légitime en phase d'institutionnalisation) du professeur parmi des remarques échangées durant la séance, ou même comme l'expression d'évidences sous-jacentes aux rapports pratiqués.

Par contre, le troisième, "*une droite de symétrie passe par le milieu de deux points correspondants, et elle est perpendiculaire à la droite joignant ces deux points*", est un énoncé fondamental qui constitue l'entrée de fait dans la géométrie que l'on veut enseigner.

La signification de l'introduction de cet énoncé est la perte du caractère a-didactique des rapports entretenus par les élèves avec la situation. En effet, la réalité du caractère a-didactique de la situation ne peut être assurée que dans la mesure où celle-ci assure le caractère *fonctionnel* du savoir visé par rapport au problème posé. Rien dans l'analyse de la situation faite par l'auteur⁷ ne permet d'assurer ce caractère fonctionnel. L'auteur conclut en effet l'analyse de cette phase par : *la tâche de "tracé à main levée" n'exige pas un usage analytique des propriétés de la droite de symétrie...mais plutôt un respect global de celles-ci...*

Pour illustrer notre analyse, suggérons au lecteur une modification⁸ de ces situations susceptible d'enclencher des rapports de modélisation géométrique dès cette phase, en privilégiant la définition comme moyen d'action :

La phase de travail de groupe aurait pu explicitement être centrée sur une phase collective ainsi conçue sur le modèle bien connu de "la course à vingt":

- une phase de construction précise sur des figures fournies par le professeur, où chaque groupe jouerait par l'intermédiaire d'un représentant. Gagnerait celui qui produirait la meilleure construction dans un temps donné.
- un Jeu de la Découverte sur la consigne suivante: Comment construire avec précision, ou prouver de façon indiscutable sans plier qu'une droite n'est pas axe de symétrie d'un dessin?

Il est évident qu'il faudrait choisir des figures qui déconsidèrent, au niveau des résultats, les procédures d'ajustement. La taille est un paramètre essentiel à ce niveau.

Il faut étudier les *variables didactiques* de la situation, en tenant compte du fait que les élèves ne connaissent pas la géométrie. L'objectif du travail de groupe aurait

⁷ p. 109

⁸ Cette proposition n'a pas été testée auprès d'élèves. Nous ne prétendons nullement qu'il faille recourir à ce modèle. Notre propos étant d'illustrer nos questions, nous choisissons ce modèle pour son caractère bien connu des didacticiens.

alors été la production de procédés dont l'efficacité et l'économie de moyens puissent être reconnues.

Une alternance entre ces deux modalités, groupe et collectif, permettrait la découverte et la mise au point du procédé.

Notre analyse nous conduit donc à considérer ce type d'énoncé comme hétérogène aux rapports spatiaux déterminée par la situation. Il ne peut donc pas être spontanément produite dans une activité a-didactique, dans la situation d'apprentissage conçue par l'auteur.

Une situation de référence ne peut assurer à elle seule, de manière a-didactique, un caractère fonctionnel à une modélisation, particulièrement lorsque elle peut être abordée et résolue dans une problématique "pratique". Il faudra en général une situation fondamentale.

Le professeur sera donc conduit, selon nous, soit à abandonner l'explicitation de cette propriété, soit à la produire par un quelconque *effet didactique* qui transformera la nature de la situation.

2) Confrontation avec les observations rapportées⁹

Elles confortent notre analyse :

Des conceptions erronées apparaissent effectivement, comme l'attend l'auteur; mais, selon nous, ces erreurs traduisent l'insuffisance de connaissances "pratiques" des élèves.

Nous trouvons confirmation du caractère "pratique" de l'activité à plusieurs reprises :

- La référence¹⁰ au "milieu" comme à un "point d'équilibre"¹¹ comme l'analyse l'auteur, ainsi que le peu d'utilisation de la propriété d'orthogonalité.

- La deuxième réalisation de l'activité introduit¹² un "papillon" destiné à permettre aux élèves de remarquer et d'utiliser une propriété d'incidence : "le point d'intersection de deux segments symétriques est sur l'axe de symétrie". Or "les élèves ont analysé la figure en deux triangles qui se correspondent dans un pliage".

Nous établirons, au chapitre 6 sur les représentations spontanées de l'espace, le caractère "pratique" de certaines erreurs, traduisant des conceptions ici micro-spatiales.

Nous sommes en accord avec l'auteur lorsqu'elle conclut¹³ "que l'activité a permis de remettre en question des perceptions de symétrie-pliage erronées ou trop restreintes", mais nous ne voyons pas en quoi l'activité a permis "de préciser avec les élèves la notion mathématique de droite de symétrie d'une figure par rapport à la notion culturelle de symétrie bilatérale...", sauf à placer une notion mathématique comme prolongement de notion culturelle... ce qui conduit à la difficulté suivante rapportée¹⁴ : Enfin, l'enseignant "a rencontré des difficultés inattendues pour déstabiliser la conviction de certains élèves de l'existence de droites de symétrie dans cette figure "(le parallélogramme). L'auteur met en cause à ce propos "la connaissance (par le professeur) des difficultés des élèves, et la force de certaines de leurs conceptions erronées".

c) Les activités de la phase 3

1) Caractéristiques des rapports déterminés et conséquences prévisibles

⁹ pp. 147 à 185 et 318 à 328

¹⁰ pp. 152 à 155

¹¹ selon la terminologie d'Audibert

¹² p. 179

¹³ p. 170

¹⁴ p.327

D'après l'insistance du professeur sur la précision du tracé et l'utilisation d'instruments, on pourrait croire que le caractère pratique de l'activité initiale va pouvoir ainsi être remis en question.

La situation garde pourtant des caractéristiques communes avec les précédentes, tant au niveau du travail de groupe que du bilan : Les procédures d'ajustement par tâtonnement semblent encouragées dans la première séance et gardent leur efficacité, vue la taille des figures proposées et la validation se fait toujours par évocation du pliage ou par réalisation effective en dernier ressort. Pourquoi recourir à la modélisation, même à l'aide de connaissances géométriques connues depuis longtemps, si des procédures d'ajustement pratique paraissent efficaces, ? C'est une loi didactique bien connue¹⁵ qu'une approche sensorielle tend à s'affiner et n'est effectivement abandonnée que si elle est discréditée par la situation.

Pour le professeur, la situation doit appeler une modélisation géométrique. En effet, la précision à laquelle il pense n'est pas la précision spatiale que les élèves sont prêts à assumer sur le résultat. Cette "précision" désigne en fait un mode de tracé qui fournit le résultat sans tâtonnements. Cet appel à la précision est donc en fait un appel à une procédure "géométrique", mais sans le dire, ni le justifier en quoi que ce soit.

Les deux séances ne peuvent donc être que l'occasion de quiproquos entre les élèves et l'enseignant sur la nature de l'activité.

On peut alors que s'attendre à ce que :

- a) - soit l'enseignant assume le caractère a-didactique de la situation, ce qui le conduit à abandonner ses repères de géométrie... et à s'aventurer à la suite des élèves. Cette démarche est risquée à plusieurs niveaux : du point de vue de l'avancement du programme, du point de vue de la confiance qu'il peut avoir en sa capacité d'aboutir à des mathématiques par de telles voies. Ce choix ne peut, par conséquent, être assumé que de façon exceptionnelle ou par un enseignant dont les compétences mathématiques sont exceptionnelles.
- b) - soit changer clairement de contrat didactique, revenir au type "je vous montre et vous appliquez", ce qui est difficile dans ce contexte.
- c) - soit à changer implicitement de contrat didactique pour faire dire aux élèves ce qui doit être dit pour l'avancement de l'enseignement, et cela de façon plus ou moins subtile, par des effets didactiques de type "Topaze".

2) *Confrontation avec les observations rapportées*¹⁶

L'auteur relève des décalages importants entre les effets attendus et les effets obtenus. "Il s'est produit un phénomène de détournement de la tâche ou de détournement des instruments de la part des élèves... Les procédures ont consisté à mesurer au jugé ou par tâtonnements...La signification de la tâche n'a pas été saisie par les élèves et sa renégociation n'a pas réussi dans la première séance."

Ces procédures sont, selon nous, bien caractéristiques des rapports pratiques, mais l'auteur analyse ce phénomène en termes de "prégnance des conceptions spontanées des élèves qui se constituent en obstacles à l'émergence des propriétés géométriques."

L'enseignant a été obligé d'intervenir dans les groupes, et même en phase de bilan¹⁷, en jouant de son autorité pour retenir certaines solutions et en réfuter d'autres, particulièrement les solutions d'ajustement à vue.

¹⁵ explicitée par J. M. Digneau (1980) sous la forme du saut informationnel

¹⁶ pp. 329 à 347, 397 à 406

Ces faits, et particulièrement les décalages constatés chez l'enseignant entre ce qui était convenu et ce qui s'est passé, au niveau de "la signification de la notion de réussite", et du "sens de la tâche pour les élèves"¹⁸ sont interprétés comme une manifestation de variables liées à l'enseignant, et à ses représentations du savoir.

3. Conclusion

Nous avons montré comment nos catégories nous permettent d'effectuer une analyse à priori que ne semblent pas permettre celles utilisées par l'auteur. Son analyse supposait que s'établirait un rapport de modélisation mais celui-ci n'est pas nécessaire dans la situation. Nous avons dégagé pourquoi il en était ainsi : Les situations proposées déterminent des rapports pratiques, et ces rapports font obstacle à la mise en place de rapports de modélisation lorsqu'un débat est directement articulé sur la situation de référence. Il faut donc, pour obtenir des élèves une connaissance de la symétrie orthogonale par une modélisation géométrique, soit modifier les situations, soit les adapter à un fonctionnement complètement didactique.

Bautier (1988) analyse l'enseignement de la même notion d'un point de vue complémentaire, et fait ressortir les limites didactiques de l'introduction par les pliages, les contraintes didactiques qui lui sont liées, et propose un autre introduction.

Notre analyse nous a permis d'interpréter de nombreuses difficultés relevées par l'auteur comme déterminées par les situations mêmes et non point par la psychologie spécifique des acteurs, élèves ou professeurs.

Nous ne nions certes pas l'importance des représentations des professeurs ou des élèves dans la difficulté de mise en oeuvre d'un autre enseignement de la géométrie.

Nous soulignons que, dans le cas qui nous intéresse, l'effet des représentations des professeurs a été d'autant plus grand et difficile à contrôler qu'ils ont été placés dans des situations qu'ils ne pouvaient pas gérer de manière a-didactique, contrairement aux hypothèses de Grenier.

B. Etude 2 : Le triangle aplati

1. Rappel de la situation

Nous avons présenté (Chap. 3, IV-A), la situation d'enseignement analysée et observée par Arzac et coll. (1992).

Cette situation a été proposée à des élèves qui ne connaissent pas le jeu de la géométrie, pour les y introduire.

La consigne (de la situation de référence, qui détermine l'état terminal gagnant) est : *existe-t-il un triangle de dimensions données (4cm, 9cm, 5cm) ?* Toute liberté est laissée quant aux moyens à mettre en oeuvre pour déclarer cette existence.

2. Analyse

Il suffira au lecteur de faire une construction soignée pour conclure que, dans une interprétation pratique, la réponse à la question est indiscutablement positive. (fig 1)

Dans une interprétation de modélisation (spatio-géométrique), il est impossible de décider de la réponse à partir d'une réalisation. En effet, du point de vue de la précision des mesures, un triangle ne se distingue vraiment d'un segment que s'il n'est pas trop aplati ; si l'on

¹⁷ Nous n'avons pas pu consulter les protocoles complets ou les bandes vidéo qui auraient pu nous informer sur le niveau précis d'intervention plus ou moins explicite à chaque moment du bilan. Cependant les indications fournies par l'auteur nous paraissent suffisamment explicites.

¹⁸ p. 404

augmente la précision des tracés, le triangle construit devient de plus en plus aplati. Donc on ne peut pas décider !

Il s'en suit que la réponse visée (ce triangle n'existe pas) ne peut être le produit d'aucune de ces deux problématiques, mais qu'elle ne peut être obtenue que par la seule problématique de la géométrie mathématique.

Or, dans les situations rapportées, le moyen de déterminer la validité de la réponse apportée n'est pas précisé (et pour cause, puisque c'est un débat à ce niveau qu'attendent les auteurs). Le moyen usuel de détermination d'existence d'un objet est de le montrer. Ce moyen est donc implicitement légitimé par la consigne, d'autant plus qu'il n'est pas proposé d'alternative explicite, même au niveau de la situation d'apprentissage, constituée principalement par la préparation et la réalisation de la phase de bilan. Dans cette problématique, il y a plusieurs solutions à la construction. La réponse est donc "oui".

Les situations expérimentées rentrent donc très clairement dans le cadre de la problématique pratique, par défaut de mise en place de conditions suffisantes pour introduire une autre problématique, nécessairement plus coûteuse en représentation. Or, le but assigné par les auteurs à cette situation est d'introduire à la problématique géométrique. Comme la situation ne permet pas de légitimer ce type de rapport, les élèves devraient se maintenir au niveau de rapports pratiques, du moins tant que la situation est menée de façon a-didactique.

3. Confrontation avec les observations

Il semble qu'un peu moins de la moitié de la classe se retrouve dans une problématique pratique, affirmant l'existence du triangle. L'autre moitié affirme la non existence du triangle.

Il est à noter qu'aucune argumentation rapportée ne s'appuie sur le mode de tracé au compas, du type suivant que nous imaginons (lorsque les cercles sont tangents extérieurement) : les deux cercles ont un point commun sur la droite déterminée par le segment ; si, avec un compas sur chacun des cercles, on part au dessus de ce point commun, les crayons s'écartent l'un de l'autre... donc il ne peut pas y avoir d'autre point commun...

De même certaines argumentations ont pour nous un statut ambigu : "il faut que ça se croise, et non que ça se touche"; dans quelle mesure cette argumentation ne s'appuie-t-elle pas sur une forme symbolique de l'intersection dont on sait qu'elle est bien repérée par les élèves¹⁹.

La problématique de la précision apparaît bien, et les auteurs la repèrent dans la catégorie des arguments de type technique dont on voit bien qu'elle n'est ni attendue ni exploitée : "dans certaines phases du débat, on voit un enlisement dans des considérations techniques"²⁰...

Nous sommes en désaccord sur la formulation de la conclusion : "les élèves se trouvent bien devant l'impossibilité de conclure devant les arguments tirés seulement de l'observation du dessin". En fait les conclusions des élèves diffèrent selon les problématiques dans lesquelles ils se placent. La situation a même été pour certains élèves²¹ l'occasion de régresser des rapports géométriques vers des rapports pratiques.

¹⁹ les "croisillons" (que les élèves qui ont oublié leur compas utilisent afin de mystifier le professeur), relevé par Mercier, Petit x n°27, p.75

²⁰ Arsac et coll., 1992, p. 84-85

²¹ voir pour toute la classe, selon le compte rendu d'A. Berté version 1987

Une intervention didactique²² s'est trouvée effectivement nécessaire, ce qu'assument les auteurs.

Il nous faut donc expliquer les deux faits suivants :

a)- *Certains élèves ont bien investi des rapports géométriques.*

b)- *Certains d'entre eux s'y sont maintenus.*

L'explication du *second* peut se faire en invoquant :

- le contrat didactique implicite (attentes du professeur reconnues par les élèves, et très probablement accompagnées de signaux, même très subtils que le professeur fournit éventuellement de façon involontaire aux élèves qui entrent dans son jeu) de type mathématique, compte tenu du fait que la situation se situe dans le cadre de l'enseignement de mathématiques.

- le confort de cette position qui permet d'économiser sur la précision des tracés et qui n'est pas accompagnée d'une exigence de démonstration effective. Il est à noter quand même que certains esquissent une démonstration comme l'atteste Arsac²³.

Le *premier* fait est plus difficile à expliquer.

- Il manifeste d'abord que la situation accepte des rapports des deux types, pratiques et géométriques.

- Il manifeste ensuite que certains élèves sont capables de concevoir des rapports géométriques (mathématiques) sans y avoir été initiés, au moins en géométrie, dans le cadre de la classe. Nous avancerons l'hypothèse suivante: Dans la mesure où certains élèves²⁴ ont pu avoir l'expérience des caractéristiques spécifiques aux rapports mathématiques, soit dans la classe, soit dans une classe antérieure, soit dans leur milieu social, ils ont compris le jeu, et sont capables de réinvestir ces caractéristiques au niveau de l'espace. Ce fait permettrait de confirmer que la géométrie n'est pas nécessairement la voie royale de l'initiation au jeu mathématique... l'arithmétique a aussi sa place, place que lui réservent Arsac et coll. dans l'ouvrage cité.

4. Conclusion

Là où nous divergeons avec les auteurs tant au niveau de l'analyse qu'au niveau du contenu de l'intervention didactique proposée, c'est que selon nous, la fonction du débat, moment crucial de la situation, moment de l'apprentissage, est d'établir la légitimité des différents points de vue, relevant de problématiques différentes. A l'intérieur de chacune des problématiques, l'une des trois réponses est parfaitement valide et argumentable de façon convaincante.

La relation des observations montre que chaque traitement peut être rapporté à des démarches mises en oeuvre spontanément par des élèves. Le professeur peut donc les repérer, les expliciter, et les présenter aussi clairement que possible. Utilisée de façon didactique par un professeur, les situations de référence et de débat peuvent donc être un appui efficace pour *présenter la problématique de la géométrie mathématique*, base du contrat didactique spécifique à son enseignement.

C. Conclusion

²² comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent.

²³ PME, 1989

²⁴ qui ont alors du manifester ces qualités dans d'autres activités de la classe, ce que la publication ne permet pas de vérifier.

Nous avons montré, en analysant à priori les phases présumées "géométriques" des deux études que les situations de référence, a-didactiques, déterminaient en fait des rapports pratiques. Les caractéristiques du milieu, l'espace de la feuille de papier, rendent sa maîtrise facile par des procédures d'ajustement (à vue) qui n'ont rien à voir avec les connaissances attendues.

Les observations d'Arsac et coll. comme celles de D. Grenier confirment notre analyse.

Grenier a tenté d'instaurer des rapports de modélisation spatio-géométriques et d'amener les élèves à partir de ceux-ci vers des rapports de géométrie. Nous avons montré en étudiant ses situations comment une construction didactique peut instaurer les rapports pratiques en obstacles aux rapports de modélisation.

Arsac et coll. tentent d'instaurer directement une problématique géométrique à partir d'un problème de type pratique. Nous avons montré comment l'insuffisance de l'analyse les oblige pour cela à rejeter au niveau des élèves la légitimité des autres problématiques, ce qui est regrettable. Cet effet excessif peut être évité par une identification, claire au niveau des professeurs et des élèves, des différentes problématiques et du domaine de légitimité de chacune d'elles.

Nous retrouvons (en creux) les lignes directrices de nos propositions d'ingénierie que nous pourrions reformuler en soulignant l'importance d'assumer au niveau des élèves :

- la distinction entre les rapports pratiques et les rapports de modélisation.

- une articulation convenable des uns sur les autres.

III. PROBLEMATIQUE GEOMETRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT

A. Situations a-didactiques

Le caractère *a-didactique* des rapports géométriques attendus de l'élève est évidemment lié aux pratiques de références non didactiques des mathématiques.

Au niveau des situations d'enseignement, si la géométrie a conservé ou plutôt retrouvé son caractère de modèle épistémologique de l'activité mathématique, c'est bien parce qu'elle est censée²⁵ mieux permettre tant "l'apprentissage du raisonnement" qu'un "développement de l'esprit de recherche" (a-didactique par essence) par opposition aux activités de type "procédural"²⁶ (qui peuvent être didactiques ou a-didactiques).

Si ce caractère a-didactique n'a pas encore envahi, loin s'en faut, l'espace de notre enseignement effectif de la géométrie, de l'école élémentaire jusqu'au lycée, malgré tous les efforts et les propositions pédagogiques, c'est qu'il existe selon nous de sérieux obstacles, ce que nous essayons d'éclairer tant dans ce chapitre que dans les suivants.

Le caractère a-didactique d'une situation suppose que le milieu renvoie au sujet (sans intention didactique) les informations permettant de valider les résultats obtenus sans intervention de l'enseignant. Cela nécessite soit la participation *effective* à une véritable société de mathématiciens, soit la mise en place, au sein de la classe, des rapports *effectifs* entre élèves simulant ceux d'une société de mathématiciens, soit *l'intériorisation* de tels rapports par le sujet.

²⁵ selon les termes de Gouteyron, "rapport sur l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée", Actes du colloque géométrie inter-i.r.e.m. 1984)

²⁶ Cette expression qualifie dans notre langage une activité où le sujet est cantonné dans un rôle de sujet objectif, qui n'a aucun choix personnel à faire autre que de se conformer à un algorithme, soit pour mémoriser cet algorithme, soit pour augmenter la vitesse de son exécution.

La résolution individuelle de véritables problèmes de géométrie est une activité de plus en plus couramment proposée à partir de la classe de seconde et dans les sections scientifiques ; elle suppose des élèves, pour la rédaction de la solution, l'intériorisation des rapports spécifiques à la société mathématique.

L'ouvrage d'Arsac et coll. (1992) nous propose un exemple de problème élémentaire, dit du rectangle d'Euclide, dont il sera facile au lecteur de faire l'analyse. Le professeur pourra sans doute mieux encore mettre en évidence la problématique géométrique à partir du conflit entre deux problématiques, celle de modélisation spatio-géométrique, et celle de la géométrie.

Nous ne nous attarderons pas à donner des exemples de ce type d'activité, qui concernent essentiellement les élèves de l'enseignement secondaire postérieur à la classe de cinquième, ce qui sort du champ strict de notre étude. De nombreux manuels en proposent suffisamment. Par contre, ce qui n'est pas courant, ce sont des descriptions de situations réalisées en classe, qui montrent comment le professeur peut préparer, par l'organisation des rapports mathématiques effectifs, l'intériorisation nécessaire à la pratique individuelle de la recherche.

B. Situations didactiques

Nous avons analysé en introduction un exemple de situation didactique, le triangle aplati. Nous sommes d'accord avec Arsac et coll. (1992) quant à sa propriété de permettre une présentation aux élèves la problématique géométrique. Ces auteurs ne développent pas comment a été gérée cette présentation. Aussi, une lecture trop rapide pourrait laisser croire que le professeur peut se contenter des affirmations d'élèves dont l'argumentation développe plus la conviction absolue de leurs auteurs qu'une preuve logique.

L'exemple nous semble pourtant riche de possibilités d'illustrations de démarches mathématiques :

- transformer le problème posé en un autre problème. Ainsi, s'il y avait un triangle, deux cercles tels que la distance de leurs centres est égale à la somme de leurs rayons auraient plusieurs points communs dont un sur la ligne des centres...

- tenter un raisonnement par l'absurde sur les seuls triangles : raisonner en joignant le sommet B contesté au point I du segment [AC] tel que $AB = AI$ et $BC = BI$.

On peut alors montrer que l'angle B du triangle ABC est égal à la somme des angles AIB et BIC des deux triangles isocèles...et par conséquent il a pour mesure 180 degrés. Encore faut-il que ces démonstrations puissent se faire dans le cadre de propriétés connues des élèves.

C. Conclusion

Nous n'avons fait qu'esquisser quelques unes des questions que la mise en oeuvre de cette problématique dans des situations d'enseignement de la scolarité obligatoire pose. De nombreuses études complémentaires théoriques et expérimentales sont nécessaires. Nous illustrerons au chapitre 7 par l'étude détaillée d'un autre problème, celui de l'intersection des médiatrices, d'autres questions spécifiques à cette problématique.

Notre approche théorique permet d'envisager de façon nouvelle l'étude de cette question d'enseignement qui est à la frontière de notre domaine. Il reste en particulier à développer les modalités d'articulation de cette problématique avec la problématique de modélisation, question que nous aborderons au chapitre 7.

IV. PROBLEMATIQUES DE MODELISATION SCIENTIFIQUE

Nous avons rencontré deux types de modèles pertinents pour l'enseignement de la géométrie : le modèle spatio-géométrique et le modèle analogique constitué de représentations spatiales.

Nous allons illustrer la proximité de ces deux problématiques, et montrer que malgré la diversité des modèles, ce sont bien les mêmes catégories de rapports qui sont mis en oeuvre dans les mêmes catégories de situations. Il est évident qu'en dernière analyse, tout problème spatial peut être ramené à un modèle spatio-géométrique, mais l'expression rigoureuse en termes de géométrie en est souvent trop complexe pour la scolarité obligatoire.

A. Modélisation analogique de l'espace

Nous allons illustrer cette classe de rapports spatiaux sur la base d'une même connaissance dont nous avons souligné l'importance au chapitre I : La maîtrise de l'utilisation des plans ou cartes.

Nous avons trouvé deux grandes catégories de problèmes où l'utilisation d'un plan est nécessaire²⁷ :

- celles où les cartes ou plans sont nécessaires pour communiquer des informations sur un espace inconnu à une personne qui doit se déplacer dans cet espace, trouver un lieu précis etc. La géométrie correspondante est, au minimum, topologique.

- celles où les cartes ou plans sont nécessaires pour communiquer ou déterminer une localisation précise où une modification précise doit être entreprise : implantation d'une maison, d'une autoroute, etc., des mesures doivent être fournies rendant possibles ces actions. La géométrie correspondante est métrique, euclidienne en ce qui nous concerne.

Nous prendrons nos exemples dans la première catégorie de connaissances.

1. Activités didactiques, effectives et évoquées

a) *En classe de mathématiques*

Le manuel "Objectif calcul " de CE1 propose de telles situations²⁸. Examinons les. "Se repérer sur un plan" est l'objectif auquel correspondent trois séquences de classe.

1) Première séquence

a) Description sommaire

Elle consiste à faire réaliser par les enfants, hors de la classe, de manière collective et avec l'aide de l'enseignant, une maquette de la classe à l'aide d'une grande feuille de papier supposée représenter le sol et de cubes divers représentant le mobilier. Le plan est obtenu en prenant la trace des cubes. "De retour en classe, les élèves doivent comparer le dessin qu'ils viennent de réaliser avec la classe et apporter des corrections si nécessaire"

b) Analyse

Il y a un espace représenté, celui de la classe, et un espace qui le représente, ou le modélise de manière analogique : la feuille avec les cubes, puis la feuille avec les traces des cubes. L'objectif d'apprentissage déclaré est constitué des connaissances permettant de "se repérer sur un plan", donc de savoir utiliser le modèle dans des problèmes de repérage.

Que peut-on dire des rapports des enfants à l'espace représentant (cubes et dessin)? Il n'y a (à cet âge) aucun problème de maîtrise de ces espaces, le seul auquel on pouvait s'attendre est celui de la maîtrise du dessin et celui-ci est évité par les "traces".

Les rapports de repérage des enfants à l'espace de la classe traduisant la connaissance sont *évoqués* à travers la représentation par la feuille et les cubes, car elle se fait hors de la classe. Qu'est-ce qui est discuté par la classe ? Comment analyser le problème réel d'un enfant qui ne dispose pas encore des connaissances visées ?

Il nous faut faire une analyse à priori du problème posé. Ce problème est celui de représenter la disposition du mobilier sur une feuille disposée d'une certaine façon dans un certain environnement, orienté lui-même d'une certaine façon par rapport à chacun des élèves,

²⁷ Pour plus de détails, voir chapitre C-9

²⁸ voir annexe n° 5, Clavier et coll.

par rapport à la salle de classe et par rapport aux repères familiers à chacun des élèves dans la classe.

Une des difficultés, et non la moindre, est donc celle que chaque élève peut éprouver à relier l'orientation de cette feuille sur le sol par rapport à lui-même, son orientation par rapport au lieu, l'orientation du lieu par rapport à la salle de classe, et l'orientation à partir de laquelle il se représente la classe et le mobilier.

La seconde difficulté, mineure à notre avis par rapport à la première, concerne la mémoire que chacun peut avoir des positions du mobilier dans la classe.

Les deux difficultés sont liées, dans le sens que la mémoire ne peut s'exercer que si le sujet est capable de relier toutes ces orientations.

Si l'on vise la première difficulté, on imagine l'importance du choix du lieu où l'on représente, par rapport à la classe, et de la disposition de la représentation dans ce lieu en rapport avec la disposition de chaque enfant. Or, il n'est aucunement fait mention de ces dispositions dans la fiche. Donc la connaissance visée est celle d'une mémoire des lieux, des éléments du mobilier, et de leur disposition mutuelle, mémoire qui pourrait s'exercer indépendamment de la disposition des sujets, tant par rapport au lieu représenté que par rapport au lieu où se fait la représentation, et à la disposition du modèle par rapport au sujet pendant la représentation.

La validation met en principe en jeu la disposition respective des sujets par rapport au lieu, des sujets par rapport au modèle et du modèle par rapport au lieu ! Comment peut-elle se dérouler ? Une personne met en bonne position le modèle (fait coïncider directions et sens dans le modèle et la réalité) et chacun reconnaît alors la position connue du mobilier ou les erreurs commises. Pour mettre en bonne position le modèle, sur quoi faut-il se baser ? S'il y a une erreur de positionnement d'un ou plusieurs objets par rapport aux autres, et si c'est justement sur la base de la position de ces objets qu'est réalisé l'ajustement avec le modèle, c'est alors la position de tous les autres qui apparaît comme fausse ? Comment interpréter une erreur ? Qui peut le faire ?

Notre analyse met en évidence tant la complexité de la connaissance nécessaire à une bonne réalisation de la modélisation, que celle qui est nécessaire à une interprétation de la *validation* prévue. Comme cette validation ne peut être interprétée par les élèves, on peut affirmer que cette situation ne peut être que *didactique*. Ces deux remarques nous permettent d'affirmer qu'un élève qui n'a pas la connaissance visée ne peut l'acquérir dans cette situation.

La seule possibilité de faire coïncider validation et décisions est selon nous de neutraliser les facteurs de position, c'est à dire de choisir un lieu dont on puisse facilement identifier l'orientation avec celle de la classe, de faire placer le modèle de façon à identifier son orientation avec celle de la classe, et enfin de positionner les élèves à peu près dans la même orientation vis à vis du modèle que celle qu'ils ont dans la classe. On a ainsi des chances de réduire la distance entre la réalisation et l'évaluation, c'est à dire de conserver à l'évaluation son rôle. Bien entendu, pour ce faire, on aura évité la connaissance visée !

2) *Deuxième séquence*

a) Description sommaire

Elle comporte une activité collective et deux activités individuelles.

Dans l'activité collective, l'enseignant représente un déplacement sur le plan de la salle à l'aide de flèches, un enfant doit réaliser ce déplacement, un autre le décrire, sans doute sous

le contrôle de leurs camarades. Dans une autre phase, un élève se déplace librement, un autre doit représenter son déplacement

Au cours de la première activité individuelle, chaque enfant dispose d'un plan de la classe (fourni par le maître) et doit inscrire son prénom puis celui de ses camarades à leur place.

Dans la seconde, les élèves disposent du dessin en perspective d'une classe fictive et de trois plans dont l'un seulement correspond à cette salle. Ils ont à trouver lequel. Les différences mettent en jeu pour l'un la position et l'orientation du bureau du maître, pour l'autre la position des meubles du fond de la salle. Il n'y a pas de problème d'orientation globale du plan par rapport au dessin.

b) Analyse

i) l'activité collective

Elle ne peut être que *didactique*, du moins vis à vis de ceux qui n'ont pas déjà acquis les connaissances visées par l'enseignement. En effet, il n'y a pas de moyen de validation du résultat par le milieu objectif, ici l'espace de la classe. Pour qu'une telle validation soit possible, il faudrait qu'il y ait un problème interne à l'espace de la classe. Ce serait le cas s'il s'agissait par exemple de trouver un chemin d'un endroit à un autre qui réponde à certaines contraintes spatiales (par exemple, de poser un objet sur tel ou tel meuble, sans faire face à la porte...) ou si un déplacement explicitement projeté en des termes qui ne font appel qu'à des connaissances acquises posait des difficultés pratiques.

Quel est le milieu avec lequel les élèves interagissent ? Pour l'élève qui se déplace, on pourrait croire qu'il s'agit de la classe, mais l'élève maîtrise parfaitement ses déplacements dans la classe, et ce n'est pas du tout de cela qu'il s'agit. Ce n'est pas dans ses interactions avec ce milieu que le sujet va investir les connaissances visées.

Ce milieu "antagoniste du sujet" est de fait constitué en plus de la salle de classe, du schéma d'un déplacement dans la classe. Ce qui détermine le déplacement du sujet, ce ne sont pas les contraintes de l'espace sensible, c'est l'intériorisation des rapports bien déterminés à la salle de classe que modélise le schéma. Le plan muni d'indications fléchées constitue, pour qui sait l'interpréter, un modèle qui permet l'*évocation* du rapport d'un sujet à la salle de classe, rapport auquel l'élève doit strictement se conformer. Le schéma constitue une *modélisation spatiale* de ce rapport.

Que peuvent apprendre les enfants à propos du repérage sur un plan au cours de cette séquence? Le plan dont il est question est un plan collectif, déjà disposé et, gageons-le, bien orienté. L'élève acteur doit donc être capable de se représenter dans la réalité le déplacement désigné par les flèches dans le modèle, c'est à dire mettre en correspondance la succession des positions dans le modèle avec une succession anticipée de positions qu'il va occuper dans la salle, mémoriser cette succession de positions, et la réaliser. L'élève spectateur (à condition de ne pas jouer le rôle du spectateur qui attend la fin du match) peut contrôler la correspondance du modèle vers la réalité au fur et à mesure sans mémoriser, pour peu qu'il ait vue sur le plan. Dans la deuxième phase, la mémorisation porte sur le déplacement observé, et la mémoire collective assure la persistance. Celui qui représente le déplacement traduit la succession observée sur la représentation, ce qui suppose la capacité de traduire dans le modèle un ensemble de lieux de la réalité.

Notre analyse met en évidence la différence considérable entre les connaissances nécessaires à la maîtrise de la situation précédente et celle qui est ici nécessaire. Les

connaissances nécessaires à cette nouvelle activité sont incluses dans celles nécessaires à l'activité précédente, sauf à différencier le repérage de positions entre des objets, du repérage d'objets, et les mémorisations correspondantes.

Si les élèves font quand même des erreurs, le maître ou les élèves qui savent peuvent seuls relever ces erreurs et les corriger. L'élève qui ne sait pas est supposé apprendre par cette interaction. Dans ce type de situation, la progression du groupe est liée à la participation des enfants les plus en avance, à la capacité de l'enseignant de mobiliser l'attention des autres et à la capacité pour les élèves "spectateurs" de se projeter dans l'action des acteurs et de tirer profit des décisions de leurs camarades.

Toutefois, personne n'aura eu l'occasion de prendre conscience du rôle d'outil nécessaire du plan dans certaines circonstances, en particulier dans des lieux *non familiers*, qu'on ne peut parcourir d'un seul regard, ni des conditions à respecter pour qu'il soit un outil efficace (*l'orientation* par exemple).

ii) les activités individuelles

Dans quelle mesure, les activités individuelles qui suivent peuvent-elles permettre à ceux ayant des difficultés de progresser?

La première est l'occasion pour chacun de s'interroger sur la mise en relation du plan et de l'espace au sein de rapports *évoqués*. Que se passe-t-il pour un enfant qui par exemple ne tient pas compte spontanément de certaines relations spatiales ? Ayant à placer tous les élèves, il peut aboutir à des résultats que savent contradictoires ceux qui sont capables d'interpréter simultanément les relations de proximité entre élèves ou entre élèves et éléments fixes représentés. Si lui aussi en est capable, il peut revenir sur sa démarche et de l'améliorer. L'évaluation²⁹ de l'enseignant ou de ceux qui savent est donc indispensable vis à vis des autres.

La deuxième activité individuelle se situe à un tout autre niveau: L'espace dont il est question est fictif, il est évoqué de deux manières différentes qu'il faut mettre en relation. L'hypothèse des auteurs est sans doute qu'il est équivalent pour les enfants de mettre en relation avec son plan la "photographie" de la salle ou elle-même. De ce point de vue, cette "activité" peut apparaître comme un contrôle des apprentissages antérieurs. Or la lecture d'un dessin en perspective ne suppose pas les mêmes rapports à l'espace que la prise de connaissance d'un espace lorsqu'on est situé à l'intérieur. Ce n'est pas le lieu ici d'expliquer en quoi, remarquons seulement que ce contrôle ne porte pas que sur les connaissances enseignées, et concerne la relation entre deux modélisations d'un espace.

3) Troisième séquence

a) Présentation sommaire

Des questions sont posées aux élèves sur un quartier dont un plan est fourni.

Pour répondre aux questions posées, les enfants doivent "se repérer sur le plan", c'est à dire retrouver des bâtiments représentés, tracer un trajet raconté par un texte etc...

b) Analyse

Dans cette séquence, l'espace est à nouveau fictif, il s'agit d'une ville dont un morceau de plan est représenté.

Les enfants ont-ils des rapports spatiaux effectifs avec la représentation?

²⁹ nous reprenons là la distinction faite par Margolinas (1989) entre évaluation et validation

Le travail est d'abord un travail de reconnaissance sur le plan des représentations des objets évoquées par les questions. C'est alors un travail sur le système de codage du plan, et sa relation avec le vocabulaire.

Il s'agit ensuite d'effectuer un rapport entre des déplacements évoqués dans le texte et le plan. La tâche qui est assignée correspond bien à ce que doit faire un individu voulant se déplacer dans un espace inconnu dont il possède un plan, mais à une partie seulement, la plus facile, qui ne prend son sens qu'en relation avec la suite de ses actions: la mise en congruence du plan et de l'espace effectif pour pouvoir déterminer son chemin. Et les rapports spatiaux mis en oeuvre dans cette mise en congruence sont totalement différents, de part la taille de l'espace en jeu, de ceux mis en oeuvre pour se repérer dans le plan.

Dans la mesure où la tâche proposée aux élèves est une partie de la tâche complexe liée au repérage dans l'espace à l'aide d'un plan, son intégration dans une situation didactique se justifie bien. Mais l'étonnant est que, par la suite, (ni au CE1 ni plus tard), on ne place les élèves dans des situations didactiques ayant pour objectif la maîtrise réelle de l'utilisation d'un plan. Nous rencontrons là un phénomène sur lequel nous reviendrons: La maîtrise "travaillée" à l'école ne semble pas être celle de l'espace et de ses représentations convenablement articulées mais seulement celle des représentations elles-mêmes. C'est à l'enfant tout seul de faire le lien avec le réel.

4) Conclusion

Nous n'avons jusqu'ici rencontré à propos de l'enseignement de l'espace, qu'une des quatre catégories de situations possibles en croisant les caractères didactique / a-didactique et effectifs /non effectifs des rapports spatiaux : les rapports *évoqués et didactiques*.

De plus nous avons vu que malgré les déclarations des auteurs, la connaissance effectivement enseignée par ces situations didactiques est particulièrement réduite par rapport aux connaissances effectivement nécessaires pour maîtriser les situations non didactiques qui leur correspondent dans la vie courante, laissant de côté ce qui justement fait problème aux enfants comme aux adultes lorsqu'ils se déplacent en terrain inconnu.

Nous pensons que les problèmes de repérage sont trop complexes et variés pour pouvoir être résolus par la seule évocation des rapports spatiaux avec un milieu urbain.

Est-il possible d'envisager des situations où ces rapports seraient didactiques et effectifs?

Pour cela, il faudrait poser aux élèves un problème dans un espace non maîtrisé... et par conséquent sortir de la classe... c'est ce qui semble être pratiqué par exemple en géographie.

b) En classe de géographie

Dans la rubrique "géographie" des instructions officielles de l'enseignement élémentaire (1985), il est écrit par exemple pour le cycle des apprentissages fondamentaux: "l'enfant doit être capable de construire et utiliser un plan simple avec sa légende".

1) *Construction d'une modélisation par évocation didactique de rapports effectifs:*

a) Description

Dans la plupart des classes, les activités correspondant à l'objectif énoncé ci-dessus sont par exemple introduites de la manière suivante :

Au cours d'une promenade, pour raconter ce qu'ils ont fait³⁰, les élèves sont invités à faire un dessin, soit collectivement, soit individuellement d'abord le plus souvent; l'élaboration finale est collective, l'enseignant "aide" les élèves à choisir et à affiner parmi leurs propositions celles qui correspondent au produit "plan" qu'il attend.

b) Analyse

Les élèves ont au cours de la "sortie", des rapports effectifs avec l'espace, qui peuvent être accompagnés de sollicitation à anticiper le parcours, à envisager à un croisement les éventualités, etc. La modélisation spatiale est introduite pour évoquer des rapports effectifs.

La fonction assignée à cette modélisation, permettre de raconter la promenade à quelqu'un de fictif, ne peut pas donner l'occasion aux élèves de tester la validité de leur production. Cette validité est donc à la seule charge du maître ou de ceux qui savent, la situation est *didactique*. Formuler un chemin pour quelqu'un qui ne connaît pas est pourtant une des fonctions sociales du plan, et chacun sait combien il est risqué de s'aventurer d'après ces seules indications à trouver le domicile d'un ami dans un espace urbain non familier, alors que l'émetteur d'informations est convaincu de la pertinence de son message.

2) Exploitation d'une modélisation dans des rapports didactiques et effectifs

On peut imaginer, et un certain nombre de maîtres le font certainement, de véritables rapports *effectifs* mettant en jeu la connaissance visée. Il n'y a de rapport effectif que lorsqu'il y a un problème de maîtrise. Il faut alors décider par exemple de se rendre d'un endroit à un autre dans un espace inconnu, en munissant chacun des élèves d'un plan.

Le problème peut alors être résolu en discutant, à chaque occasion de décision à prendre, des choix possibles et des raisons de prendre les décisions. Ce rapport sera *didactique*, dans la mesure où il n'est pas question de laisser prendre aux enfants des décisions différentes, dont certaines seraient erronées; le maître les validera donc avant que la situation ne le fasse. Cette situation a l'avantage sur la précédente de développer les possibilités réelles d'anticipation liées à la modélisation.

2. Activités a-didactiques, effectives et évoquées

C'est la situation dans laquelle se trouve, par exemple, la personne qui prépare un plan pour indiquer à un ami comment se rendre chez elle. Il lui faut anticiper tous les moments où, dans son déplacement, son invité se trouvera devant des choix à faire, et transcrire de manière efficace les informations nécessaires pour que celui-ci prenne la bonne décision. Suivant qu'elle dispose ou non d'un plan, sa tâche sera plus ou moins facile. Nous savons tous d'expérience que l'épreuve n'est pas toujours réussie, même par des adultes cultivés!

Ici les rôles d'émetteurs et de récepteurs ne sont pas symétriques. Les caractéristiques de l'espace inconnu du récepteur sont déterminantes quant aux types de connaissances à mettre en oeuvre.

Nous allons évoquer une des situations dont la conception et le détail sont exposées au chapitre C-9 de notre étude. Elle concerne des élèves de CE2.

a) Description sommaire de la situation

Le maître présente un plan simplifié de l'école maternelle et les quelques codes nécessaires à sa compréhension (les doubles traits des murs, les zones délimitées par les murs,

³⁰ voir Tourter, chemins de la découverte mathématique" P. 110 et ss

la représentation des portes), ainsi qu'un repère facile: la salle de jeu sur le plan de laquelle a été collée une gommette.

Puis les élèves sont répartis en groupes de 4. 2 d'entre eux sont émetteurs, 2 sont récepteurs. L'activité se déroule groupe après groupe.

- Après l'énoncé de la consigne par l'enseignant, émetteurs et récepteurs se concertent pendant 5mn, plan en mains...

- Les émetteurs partent les premiers avec le plan et quatre enveloppes, qu'ils doivent coller sur 4 des portes intérieures de l'école. Ils désignent chaque enveloppe par une lettre écrite sur un papier qu'ils cachent dans l'enveloppe et doivent désigner l'emplacement de cette dernière sur le plan, à l'aide de la lettre.

- Ils donnent leur plan aux récepteurs et assistent sans parler aux recherches menées par ces derniers pour retrouver quelle est la lettre cachée dans chaque enveloppe.

- Les récepteurs inscrivent cette lettre dessus. Une fois ce travail terminé, les enveloppes sont ouvertes, leur contenu comparé à ce qu'ont écrit les récepteurs.

Pour gagner, il faut l'identité des 2 lettres pour les quatre enveloppes. En cas d'échec, le maître suscite une discussion avec les enfants pour déterminer qui s'est trompé, des récepteurs ou des émetteurs, et comment il faut utiliser le plan, ceci sur le lieu pour lequel il y a eu échec.

Une discussion générale à la classe aboutit à l'énoncé d'un certain nombre de règles pour pouvoir bien utiliser un plan.

b) Analyse

La phase de codage s'appuie sur un rapport intériorisé : le problème est de se représenter la position du récepteur pour lui communiquer un message interprétable, pour trouver sur le plan où se situe la porte que l'on a choisie, et en marquer la position.

Le caractère effectif du rapport spatial établi par la phase de décodage est assuré par les propriétés suivantes :

- il y a bien problème spatial effectif pour le récepteur qui doit chercher dans son environnement réel de quoi assurer la correspondance avec le plan:

- le récepteur va prendre des décisions effectives le conduisant à un état terminal dont il pourra juger si il est ou non gagnant.

Les phases de discussion, dans le groupe ou collective, déterminent des rapports intériorisés commandés par la connaissance visée.

Le caractère a-didactique est donc lui aussi bien assuré; le milieu spatial fournit bien la validation de la réponse, et la production de la réponse, qui se fait de façon autonome par l'élève, est bien commandée par la connaissance visée.

Les observations faites au COREM confirment les caractéristiques de la situation, et la difficulté de sa mise en oeuvre dans une classe ordinaire.

Il n'est pas facile de faire vivre dans le milieu scolaire des situations qui proviennent de pratiques sociales aussi complexes; aussi cette transposition est-elle une tâche difficile qui suppose de l'enseignant (et du chercheur) une vigilance particulière pour contrôler que les caractéristiques essentielles de la situation non didactique sont bien reproduites dans la simulation proposée par la situation a-didactique qu'il a construite.

Si ce contrôle n'est pas suffisant, les connaissances à mettre en oeuvre peuvent être fort éloignées de celles visées, et la situation peut ne pas favoriser les apprentissages désirés.

3. Conclusion

Les contraintes scolaires et particulièrement celles de l'enseignement des mathématiques ne favorisent pas l'installation de rapports de modélisation qui soient articulés fonctionnellement sur des rapports spatiaux effectifs.

En dehors de rapports effectifs, certaines connaissances complexes nécessaires à l'utilisation de modélisation spatiale ont peu de chance d'être acquises par les élèves qui ne les acquièrent pas dans la vie courante.

Le seul milieu spatial où l'effectivité des rapports est possible est celui de la classe. Les propriétés des rapports effectifs à ce milieu, liées aux rapports pratiques, rendent difficile l'apprentissage de connaissances dont l'utilité sociale non didactique se réfère aux grands espaces.

Reste la possibilité de construire des simulations partielles mais efficaces de rapports à ces espaces, par des rapports à l'intérieur de la classe, voire sur une feuille de papier, voire sur l'écran d'un ordinateur.

Les rapports effectifs pertinents resteront coûteux à communiquer aux maîtres, et à organiser dans la classe.

B. Modélisation spatio-géométrique

a) Situations a-didactiques de modélisation

Nous en décomposerons l'analyse en dégagant les deux situations qui fondent la modélisation :

- la situation de référence : situation d'interaction spatiale effective et a-didactique
- la situation d'apprentissage: situation de modélisation.

La modélisation d'une situation particulière (contingente) ne se justifie que par l'exigence d'une réponse convenable à une classe de situations particulières, effectivement mises en place ou intériorisées.

La situation de référence doit donc donner naissance par l'effet de variables didactiques convenables, à une classe de situations modélisables par la même notion géométrique.

C'est ce que l'on entend par situation fondamentale d'une notion. Nous allons illustrer ces contraintes sur un exemple.

1) Situation d'interaction spatiale effective et a-didactique :

Un terrain de tennis entouré d'un grillage (de forme rectangulaire). Un fil³¹ est tendu au sol entre deux points de deux côtés consécutifs. Le problème posé est de déterminer la longueur du fil tendu sans intervenir dans l'enceinte du terrain.

Les solutions faisant appel à une problématique pratique sont donc exclues.

a) Solutions

Il faut alors examiner les diverses solutions envisageables par les élèves. Elles s'appuient sur des connaissances antérieures que nous identifierons ici comme concernant la pratique des alignements et des mesures. Dans ce cadre, le problème admet diverses solutions qui font appel à des transformations renvoyant dans un espace accessible le segment dont il s'agit de déterminer la longueur :

³¹ Dans la réalisation que nous en avons effectuée, il s'agissait d'un long tuyau rectiligne poussé contre le grillage, qu'il touchait en deux de ses côtés

- Prolonger un des côtés du grillage au delà du coin déterminant un triangle avec le fil et y reporter la distance du coin au point de contact ...(solution observée en CM2).

- Prolonger les deux côtés au-delà du sommet commun et faire comme ci-dessus pour chacun d'eux...

- Reproduire un angle droit et reporter les distances au sommet...

- Reconstituer un terrain isométrique...

- faire un plan à l'échelle...

b) Quelles connaissances supposent ces solutions?

i) connaissances communes

La connaissance des mesures et du rôle des approximations fait partie intégrante de la connaissance du processus de modélisation et de toutes les solutions.

ii) Pour la solution du plan.

Il faut, pour avoir l'idée d'y recourir, alors qu'on n'en dispose pas, savoir :

1) qu'on peut résoudre le problème sur un plan à l'échelle

2) qu'une représentation du grillage permet de représenter n'importe quelle figure dont la position est repérable par rapport à lui (sur-figures et sous-figures). Il suffit d'ailleurs de représenter l'angle droit dont les côtés supportent la barre.

3) que la position de la barre sur le plan est déterminée par celle de ses extrémités.

iii) Pour les solutions géométriques

1) la capacité à considérer l'espace "vide" qui constitue l'environnement du tuyau comme un ensemble de lieux potentiels dont certains possèdent des propriétés qui vont permettre de résoudre le problème posé. De nombreuses études ont montré comment, dans l'espace de la feuille de papier, cette "connaissance" était rare.

2) de savoir représenter la situation par un schéma, afin de procéder aux tests permettant de vérifier a priori que la procédure envisagée (coûteuse) pourra donner le résultat attendu

3) de reconnaître dans la situation une particularisation de la situation fondamentale des transformations (L'impossibilité de la mesure sur le lieu même oblige à déplacer la figure en un autre lieu, ce qui pourrait constituer une situation fondamentale des similitudes).

4) d'avoir une connaissance des figures élémentaires associée à celle des transformations simples.

Bien évidemment, ces connaissances ne s'élaborent pas à l'occasion d'une situation, mais d'un ensemble engendré à partir de situations fondamentales, en faisant varier de façon adéquate certaines variables didactiques.

2) Situation de modélisation géométrique articulée avec la précédente

Il s'agit donc d'organiser une situation d'apprentissage où, par évocation de la situation de référence, pourra être dégagée une loi (de type loi physique) de l'espace qui s'appuie sans les contredire sur les connaissances préalablement étudiées, ici les alignements et les mesures.

Ceci va être obtenu en faisant varier la valeur d'une variable didactique de la situation de référence, ici la forme du terrain.

Le même problème peut en effet être posé par exemple à partir de quatre piquets plantés sur une pelouse, reliés par une corde et disposés selon des formes diverses, deux piquets situés sur deux côtés consécutifs déterminant la longueur à prévoir.

Prévoir ce qu'il faut précisément faire pour déterminer la mesure de cette longueur, avant de connaître la disposition des 6 piquets ?

L'idée géométrique est ici d'insérer la longueur inconnue dans une figure soit que l'on sait pouvoir reproduire ailleurs, soit qui permette de reproduire la longueur ailleurs. Les figures les plus simples ici pertinentes sont le triangle que l'on sait reproduire dans certains cas, et le parallélogramme qui déplace les longueurs.

Si l'on maintient l'angle droit, la procédure la plus économique est celle observée dont on peut dire qu'elle consiste à construire le symétrique du triangle par rapport à l'un des côtés.

Si on fait varier cet angle, la procédure consistant à prolonger les 2 côtés au-delà du sommet commun puis à reporter les longueurs des côtés du triangle a de bonnes chances de s'imposer, si les conditions spatiales sont conçues pour la rendre réalisable.

L'institutionnalisation de cette procédure au C.M. permet de repérer une méthode de construction d'un triangle isométrique qui va prendre place parmi d'autres (la mesure des trois longueurs, la mesure d'angle et des longueurs de deux côtés adjacents, etc...). La formulation de ces procédures en langage de la géométrie scolaire et leur organisation dans une théorie pourront attendre le premier cycle de l'enseignement secondaire. Dans l'enseignement d'avant les années 60, cette formulation aurait débouché sur les cas d'égalité des triangles. Aujourd'hui, on exprimera ces connaissances en termes d'invariants dans des isométries...

Dans ces situations, où les rapports effectifs et intériorisés auront été convenablement articulés sous l'action de variables didactiques d'une situation fondamentale, les élèves auront acquis une pratique modélisante des rapports spatiaux, source de *connaissances* et de *questionnement* sur leur environnement spatial.

3) Conclusion

La solution du plan consiste à établir une correspondance bi-univoque, conservant les distances à un coefficient près, entre les éléments de l'espace sur lequel on veut agir ou dont on veut tirer de l'information et l'espace d'une feuille de papier, de type micro-espace, où les contraintes "naturelles" ne s'exercent plus. Le problème, ainsi déplacé, peut être étudié avec les moyens de la problématique pratique et les solutions trouvées peuvent être reportées dans l'espace réel. La connaissance fondamentale est alors celle qui permet d'établir la relation entre les deux espaces, la triangulation. Il nous paraît nécessaire de l'enseigner.

Dans certains cas, la construction d'un schéma permet de faire appel à des savoirs de géométrie pour résoudre les mêmes problèmes. La fonction de ces savoirs est de permettre de contourner les limitations de la situation. Cela pourrait conduire à réinterpréter les savoirs géométriques de base pour les insérer dans cette problématique. Par exemple, le rectangle ne serait plus seulement considéré comme un objet en soi, mais comme un outil dont la construction permet de déplacer, en les conservant, des longueurs ou des directions de droites. C'est une autre orientation qu'il nous paraît important d'étudier.

La modélisation de l'espace pose évidemment la question, épineuse, de l'approximation des mesures. La prise en charge de cette question par les élèves est indispensable, et elle ne peut attendre qu'ils soient capables de la maîtriser par exemple par le calcul différentiel. L'approche de la question des mesures dans le cadre de la géométrie, doit compléter celle des autres mesures physiques.

La résolution de problèmes spatio-géométriques nécessite donc la mise en oeuvre de véritables raisonnements qui sont accessibles aux enfants dès l'école primaire.

Le lecteur trouvera dans les parties C et D plusieurs exemples expérimentés en situation d'enseignement ou de tests avec de nombreux élèves.

b) Situations impliquant des rapports didactiques

1) Rapports évoqués

On trouve dans cette catégorie bien des leçons traditionnelles de l'enseignement élémentaire. Nous renvoyons le lecteur à l'analyse détaillée que nous faisons d'une leçon sur le périmètre en cours moyen, au chapitre suivant³². On pourra aussi se rapporter à Mercier et Tonnelle (1992)³³ et à l'exemple du manuel d'arpentage qu'ils présentent et commentent.

2) Rapports effectifs

Nous caractériserons ce type d'activité en le rapportant à l'apprentissage, au sens traditionnel, de la façon d'apprendre un métier d'un maître. Le rôle du maître est de montrer à l'apprenti, de contrôler l'imitation que celui-ci fait des gestes fondamentaux du métier, de redresser les mauvais gestes, etc.

On retrouve ce type de situation dans *l'apprentissage du tracé avec instruments* sur feuille de papier. Cet apprentissage des tracés, traditionnellement dévolu à l'enseignement élémentaire, a été plus ou moins explicitement confié au secteur de "travail manuel".

Nous avons pu observer, dans le cadre de l'enseignement élémentaire, de nombreuses difficultés de manipulation d'instruments, que ce soit la règle (pour prolonger un trait) ou l'équerre (difficultés bien connues pour mener un trait perpendiculaire à un autre, et passant par un point extérieur) sur la feuille de papier, le mètre dans la mesure de la longueur d'une pièce, le double décimètre dans celle de la mesure de l'épaisseur d'un tas de feuilles, le rapporteur (dont on se demande qui en enseigne dorénavant l'usage). Nous avons pu constater combien la bonne exécution de ces pratiques était liée à une compréhension convenable des notions spatio-géométriques qui leur correspondent. Ces apprentissages relèvent traditionnellement de rapports didactiques et effectifs.

V. CONCLUSION

Nous avons d'abord montré sur plusieurs exemples comment l'utilisation des caractères définis en III permet d'enrichir l'analyse à priori des situations d'enseignement, de prévoir des effets de certains choix, jusqu'ici inexpliqués, sur les apprentissages des élèves.

Nous avons ensuite montré comment l'adjonction de la catégorie des problématiques à celles déjà familières d'effectivité ou non des rapports et de situation a-didactique ou non, permet de classer les situations d'enseignement de façon pertinente par rapport tant aux apprentissages qu'aux contraintes auxquelles les enseignants sont confrontés.

³² paragraphe de "l'ostension assumée"

³³ p. 44

CHAPITRE B-5

PHENOMENES DE DIDACTIQUE

I. INTRODUCTION

Nous avons signalé, tout au long des chapitres précédents, un certain nombre de problèmes de l'enseignement de l'espace et de la géométrie dont nous nous sommes servis pour illustrer les outils que nous avons présentés.

L'explicitation de ces problèmes est issue d'observations d'origines diverses: la communauté des enseignants qui, de génération en génération relève les mêmes difficultés chez les élèves, la noosphère qui propose des solutions, et depuis peu, (relativement à l'ancienneté des problèmes posés par l'enseignement de la géométrie), les didacticiens. Nous plaçant dans ce dernier cadre, nous allons tenter d'identifier ces problèmes en terme de "phénomènes de didactique"¹. Ce travail est d'autant plus nécessaire que les propositions que nous avançons, en réponse à certains de ces problèmes, sont des propositions d'action sur le système d'enseignement.

Or la réalisation d'un enseignement n'est pas seulement le produit de décisions administratives dont l'effet pourrait être quasi instantané: elle est soumise à tout un ensemble de contraintes qui s'exercent sur les diverses composantes du système didactique: *enseignants, apprenants, savoirs*, dont les interactions se jouent dans les *situations effectives d'enseignement*, ce système lui-même n'étant pas isolé mais finalisé et dépendant d'un *projet social* dont il n'est pas le maître.

Plusieurs recherches ont montré l'importance de prendre en charge le système pour obtenir une modification "réelle" d'un de ses éléments, modification qui a nécessairement des répercussions sur les autres et sur les relations qu'ils entretiennent entre eux². En l'absence de la connaissance des contraintes qui pèsent sur le système d'enseignement et des moyens dont disposent les acteurs pour s'y adapter, il est difficile, sinon impossible de prévoir l'effet d'une modification³.

Notre projet s'appuie sur l'observation et l'analyse d'insuffisances de l'enseignement actuel. Pour y pallier, il propose des transformations affectant l'équilibre entre activités spatiales et géométriques et leur articulation, il remet donc en cause toute l'économie de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Aussi, il doit prendre en compte ce qui peut expliquer le fonctionnement actuel, c'est-à-dire dégager et analyser les phénomènes didactiques liés à cet enseignement.

¹ Comme l'explique Brousseau (1986b) "identifier ces phénomènes revient à construire un "modèle" des protagonistes en présence, des relations et des contraintes qui les lient, et à montrer que le jeu de ces contraintes produit bien des effets et le déroulement observés." p. 41

² Dans une étude sur l'évaluation, Chevillard et Feldmann (1986) ont par exemple montré comment celle-ci interagissait sur l'enseignement. Ils ont ainsi montré la vanité d'appliquer aux contrôles dans la classe les critères par ailleurs discutés d'une évaluation externe.

³ Pensons aux différentes réformes de l'enseignement des mathématiques. Divers groupes de pression ont proposé et fait adopter par le système d'enseignement, des modifications de programmes, de méthodes etc... apparemment pleines de bon sens, qui se sont avérées produire des effets tout à fait différents de ceux attendus.

De nombreuses recherches sur l'enseignement de la géométrie sont productrices de "faits d'observation". En extraire des "phénomènes didactiques" est un travail complexe⁴, ce fut le projet de C. Laborde dans son cours à la Cinquième Ecole d'été de Didactique (1989), "l'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques"⁵. Elle y a rassemblé un certain nombre d'observations et d'hypothèses portant soit sur des "macro-phénomènes" repérables sur l'ensemble de l'enseignement de l'espace et la géométrie dans la scolarité obligatoire, soit sur des faits liés à l'étude de certains thèmes géométriques.

En nous appuyant sur quelques-uns des travaux cités et sur d'autres, dont ceux que nous avons été conduits à développer et dont nous présentons le détail dans la partie C I, nous allons, dans ce qui suit, pointer comme des phénomènes didactiques certaines des caractéristiques de l'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire et en 6ème-5ème, en les rapportant aux contraintes qui pèsent sur le système didactique et ses agents⁶.

II. PREMIER PHENOMENE: LES CONNAISSANCES SPATIALES UTILES SONT EXCLUES DES PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

A. Fait didactique

Les connaissances spatiales servant à résoudre des problèmes pratiques, en particulier celles faisant intervenir des représentations analogiques, n'ont jamais été reconnues comme importantes dans les programmes de mathématiques à l'école primaire. Elles ne font partie des contenus d'enseignement que si elles s'inscrivent dans une finalité professionnelle (à l'époque où celle-ci existait) ou dans une finalité disciplinaire. Leur importance pour le développement des enfants n'est prise en compte qu'à l'école maternelle⁷.

Ce constat, qui peut paraître en contradiction avec les déclarations actuelles de la noosphère sur l'importance de l'espace, s'appuie sur l'étude de l'évolution, depuis le début de la scolarité obligatoire, des programmes de l'ensemble des disciplines concernées par la maîtrise des relations spatiales, à l'école élémentaire, et sur celle des contenus des programmes de géométrie des deux premières années du premier cycle depuis 1957. Nous présentons cette étude dans le chapitre 1 de la partie C.

En voici quelques résultats :

* Les connaissances spatiales à finalité professionnelle comme l'arpentage ou la perspective ont disparu en même temps que les classes de fin d'études, les plans et les cartes

⁴ peu entrepris jusqu'ici car les équipes diverses se sont centrées en priorité sur l'élaboration de cours et de situations d'enseignement variées tentant de répondre à certains de ces problèmes mais en faisant l'économie de leur analyse approfondie.

⁵ RDM 9/3

⁶ Nous essaierons, pour reprendre les termes de Crozier(1977), d'étudier la "causalité systémique de ces phénomènes. "La causalité systémique consiste à considérer effets et causes comme interdépendants à l'intérieur d'un système dont les propriétés (modes de régulation ou de gouvernement, types de jeux prédominants) permettent de comprendre et de prévoir les résultats que l'on voudrait expliquer. Si nous poussons un peu en opposant le raisonnement systémique au raisonnement linéaire le plus courant: au lieu de rechercher le ou les coupables, au lieu d'essayer de localiser le vice de structure ou le vice de fonctionnement, il s'agit de faire un diagnostic du système qui permette de comprendre en quoi et pourquoi, dans ce système, les comportements ou les mécanismes incriminés sont rationnels."

⁷ Cette affirmation rejoint celle de Pêcheux (1990) qui conclut ainsi son étude sur "les programmes scolaires et l'espace": "Au total, dans les pratiques scolaires, la systématisation des connaissances spatiales est laissée très largement au hasard."

relèvent depuis 1970 de l'enseignement de la géographie (même si on trouve encore des activités sur ce thème en mathématiques dans les manuels), la "construction de l'espace" introduite en 77 au C.P. est justifiée par son intérêt pour l'enseignement ultérieur de la géométrie.

* Il est intéressant de comparer le devenir de propositions nouvelles de contenu faites dans les I.O. de 78-80: Par exemple, celles concernant les "changements de point de vue" n'ont pas été reprises dans les I.O. de 85 alors que celles concernant les transformations ponctuelles proposées pour le CM en 80 ont été mises au programme dès le cours élémentaire en 85, au moment où elles faisaient leur entrée en 6ème. Ainsi une connaissance qui relève d'un secteur reconnu des mathématiques est plus facile à légitimer, même dans l'enseignement primaire, qu'une connaissance spatiale pratique, aussi nécessaire soit-elle aux enfants.

B. Explication du fait

Nous proposons de relier ce constat à la théorie de la transposition didactique, dans son évolution récente, où Chevallard (1989b) réfère toute connaissance et tout savoir à une ou plusieurs institutions et, pour les savoirs, à quatre types de "manipulation" (utilisation, enseignement, production et transposition).

- Certaines connaissances spatiales, relèvent de ces "systèmes institutionnels de connaissances⁸", par exemple la façon de se retrouver dans un espace urbain en constante et rapide évolution. Elles ne sont donc "naturellement" pas enseignées, bien que leur insertion récente dans la vie pratique n'ait pas permis leur appropriation par les modes traditionnellement utilisés, comme le frayage; en particulier beaucoup d'adultes ne se les ont pas appropriés de façon systématique.

- D'autres connaissances sont issues d'institutions professionnelles (utilisatrices); elles renvoient à une finalité pré-professionnelle quand elles sont prises en compte dans l'institution d'enseignement général. La prolongation de la scolarité obligatoire a modifié les rapports entre ces deux types d'institutions, ce qui explique la disparition de certains enseignements des programmes de l'école primaire⁹.

- Enfin, les savoirs spatio-géométriques¹⁰ ont une existence stable. La justification de leur présence dans l'enseignement primaire a toutefois varié: conçus autrefois comme nécessaires aux pratiques de mesurage (donc dans une perspective pré-professionnelle), ils apparaissent dans les IO de 1970 comme un lieu d'exercice de "la pensée mathématique", c'est à dire en référence au savoir savant, celui produit par l'institution des mathématiciens¹¹. A partir de cette époque, le choix des concepts à enseigner suit la même évolution que celui du collège. En ce qui concerne ces savoirs, l'enseignement en 6ème-5ème s'affirme en continuité avec celui de l'école primaire. Le souci de munir les élèves de compétences spatiales plus larges¹², susceptibles d'être facilement mobilisées pour résoudre

⁸ que Chevallard (1991) qualifie ainsi, en reprenant les termes de Bourdieu: "des savoirs pratiques, lesquels sont mis en oeuvre, s'apprennent, s'enrichissent, sans pour autant être utilisés, enseignés, produits"; Postface à la deuxième édition de "La transposition didactique"

⁹ Ce fait confirme bien à nouveau l'affirmation de Chevallard (1989a) : "L'enseignement général se crée et se réforme jusqu'à aujourd'hui par un mouvement descendant, procédant par retombées successives, du haut vers le bas".

¹⁰ c'est à dire ici ceux qui seront reprises dans l'enseignement de la géométrie,

¹¹ Il serait intéressant d'étudier comment a varié le type d'exercices proposés, sur une même notion, avec le changement d'institutions de référence.

¹² par exemple, savoir reproduire tout forme polygonale.

des problèmes relevant de la problématique spatio-géométrique propre à des institutions utilisatrices, n'est jamais apparu¹³ depuis 70.

Par ailleurs, l'évolution de cet état de fait, et particulièrement l'introduction de connaissances spatiales dans le système d'enseignement va se heurter à un obstacle issu du rapport dominant qu'exerce, dans notre société, l'institution de production de savoir savant sur les autres institutions, ce qu'explique Chevallard (1989) en ces termes¹⁴ : "L'institution d'enseignement recherche la validation et la légitimation de la part de pratiques sociales de référence *culturellement dominantes*, capables de lui apporter une investiture épistémologique qui en impose aux autres pratiques sociales, dominées ou muettes.

...le modèle de dominance historiquement pérenne, à l'intérieur des sociétés occidentales, est celui des institutions de savoir dites savantes. D'où le phénomène selon lequel tout savoir enseigné s'autorise ou cherche à s'autoriser d'un savoir savant correspondant, capable de faire taire les critiques issues des autres institutions de référence potentielles."

En ce qui concerne l'ensemble des connaissances spatiales, le savoir savant le plus proche est bien entendu la géométrie d'Euclide dont le poids dans l'enseignement des mathématiques a été prépondérant pendant plusieurs siècles¹⁵. L'histoire de l'évolution des programmes montre que, même pour l'école élémentaire, le choix des savoirs à enseigner est soumis à cette contrainte, rendant instable l'enseignement de connaissances comme celles permettant la maîtrise des plans, ou comme la notion de point de vue; connaissances qui ne sont pas reprises dans l'enseignement ultérieur de la géométrie¹⁶, tout au moins dans la scolarité obligatoire.

La difficulté à faire vivre des enseignements destinés à l'acquisition de connaissances pour lesquelles il n'existe pas de savoir mathématique, relativement simple, correspondant, constitue donc un phénomène de didactique que notre projet doit prendre en compte.

III. DEUXIEME PHENOMENE: LA PERSISTANCE DU REJET DE L'APPRENTISSAGE A-DIDACTIQUE DES CONNAISSANCES SPATIO-GEOMETRIQUES HORS DU TEMPS DIDACTIQUE

A. Fait didactique:

L'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire et en 6ème-5ème s'appuie majoritairement sur une présentation ostensive des connaissances spatiales et spatio-géométriques.

Nous n'avons pas besoin d'établir ce constat, lieu commun dans les milieux didactiques. Mais nous avons été conduits à revenir sur la définition de l'ostension et à étudier

¹³ Voici ce qu'écrit Pêcheux (1990) en conclusion de son étude sur "L'espace au collège" (P. 281): "Au collège, l'espace est considéré dans diverses disciplines, et le plus souvent de manière très abstraite. Précisément le passage, problématique, entre constat et abstraction des mécanismes sous-jacents aux phénomènes constatés, est souvent laissé au seul génie de l'élève."

¹⁴ Chevallard (1989b), p.221

¹⁵ En fait comme l'explique Itard (1972) dans son article "A propos de l'histoire de l'enseignement des mathématiques", l'enseignement de la géométrie a été plus ou moins fidèle à Euclide suivant les époques.

¹⁶ tout au moins de manière simple! Dans le cas des points de vue, par exemple, ce savoir existe mais il est trop complexe et ne peut être "représenté" par un mot appartenant à la culture commune comme celui de symétrie ou d'agrandissement.

l'évolution récente de son utilisation pour en dégager les liens avec le phénomène que nous étudions.

B. Du fait au phénomène

Cette importance de l'ostension a été relevée par Laborde (1990) comme un phénomène didactique de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Elle le relie au "présupposé inductiviste fondant les savoirs géométriques d'enseignement" et note qu'il est "particulièrement favorisé en géométrie de par l'existence de représentations qui sollicitent l'appel à la perception plus fréquemment qu'ailleurs."

Nous allons essayer d'aller plus loin dans la description et dans l'analyse de ce phénomène en montrant que:

- l'effet de ces présupposés inductivistes sur les comportements d'ostension de l'enseignant est renforcé par les contraintes qui pèsent sur la relation didactique.

- l'ostension a pour conséquence, dans l'enseignement de la géométrie au niveau qui nous occupe, de faire porter à l'élève la responsabilité de l'établissement des rapports entre les concepts qui lui sont enseignés et la réalité sensible à laquelle ils se rapportent.

Pour justifier cette analyse, nous nous appuyons sur l'étude diachronique de l'utilisation de l'ostension que nous exposons dans la partie C, au chapitre 2.

1. L'ostension ou présentation ostensive du savoir mathématique

Ratsimba-Rajohn (1977), dans son "Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques", définit la présentation ostensive comme la donnée par l'enseignant de "tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée". Il précise: "le rapport du sujet et de l'objet nouveau est institué seulement au niveau de la représentation de l'objet présumé indépendant du sujet". En s'appuyant sur des exemples¹⁷, il présente plusieurs formes d'ostension correspondant à des choix didactiques aussi divers que la présentation encyclopédique des savoirs, la présentation axiomatique ou la présentation fonctionnelle, comme les a décrites ultérieurement Brousseau (1983)¹⁸.

2. Résultats de l'étude de l'évolution de l'emploi de l'ostension

Présentons-en les éléments essentiels et les conclusions.

Nous avons distingué l'époque de l'ostension "assumée" et celle de l'ostension "déguisée".

a) L'ostension assumée

Par l'ostension assumée, repérée dans l'histoire de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et en 6ème-5ème jusqu'aux programmes de 77-78-80, l'enseignant présente les connaissances en s'appuyant sur l'observation "dirigée" d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations, et suppose les élèves capables d'en étendre l'emploi à d'autres situations. Nous nous permettons de reprendre in extenso nos conclusions du chapitre 2 de la partie B:

"Le critère qui nous apparaît essentiel pour différencier une présentation ostensive du mode d'enseignement par adaptation, est celui de **l'existence** ou non, au sein de la situation d'enseignement, d'une **situation a-didactique d'apprentissage** où l'élève peut se situer en "résolveur de problèmes" grâce à ses interactions avec un milieu de référence effectif.

¹⁷ montrant par là qu'il n'est pas facile d'échapper à la présentation ostensive d'un concept!

¹⁸ dans la dernière partie de ce texte sur la géométrie

Dans les situations d'ostension assumée que nous avons analysées, si la situation objective peut être présente, ni la situation de référence où se pose le problème pour l'élève ni la situation d'apprentissage a-didactique qui développe l'explicitation et la justification de l'action, ne sont mises en scène.

Or c'est la situation de référence qui donne du sens à la problématique spatio-géométrique et c'est la situation d'apprentissage a-didactique qui sert d'appui à l'institutionnalisation des connaissances¹⁹. Leur absence a pour conséquence que la relation entre le savoir enseigné et l'ensemble des situations de référence dont ce savoir assure la maîtrise, c'est à dire le sens de ce savoir, est à la charge de l'élève.

Autrement dit, il n'y a de place, dans la relation didactique, que pour la circulation du savoir officiel et ceci, dès son commencement. Dans la résolution des exercices qui suivent cette présentation par l'enseignant du savoir officiel, certains élèves sont capables, pour des raisons personnelles, de transformer ce savoir en connaissances adaptées; le plus grand nombre ne peut que se fier aux repères qui sont fournis par le contrat didactique, c'est à dire rechercher dans les ressemblances entre la situation de présentation et celle qu'ils ont à résoudre, ce qui doit permettre de répondre à l'attente du professeur. De l'attitude de l'élève, au moment de l'évaluation par l'enseignant de sa production, dépend sa possibilité d'apprentissage: Comme le souligne Margolinas (1989), "Le maître attend de l'élève qui échoue un travail réflexif sur cet échec, mais ce travail relève alors de la sphère privée de l'élève."

En conclusion, dans la présentation assumée, l'enseignant prend à sa charge la formulation de la correspondance entre un milieu objectif et le modèle géométrique. L'élève a la charge de "problématiser l'espace", c'est à dire doit faire appel à ses connaissances privées pour traduire en questions sur l'espace les questions posées dans le cadre du savoir officiel, pour faire le lien entre les solutions pratiques et les solutions géométriques, pour reconnaître dans d'autres milieux les mêmes modèles géométriques.

b) L'ostension déguisée

Nous avons repéré dans les IO de 77-78-80, puis 85, pour le primaire, 86 pour le premier cycle, une évolution des conceptions épistémologiques de leurs rédacteurs, avec l'apparition de "la résolution de problèmes" comme moyen de prendre en compte le caractère "d'outil" des mathématiques.

L'examen d'un certain nombre de propositions d'enseignement concernant tant les apprentissages spatiaux "pratiques" que les apprentissages spatio-géométriques nous a conduit à conclure ainsi:

"Il semble que de manière générale, les situations d'enseignement de l'espace et de la géométrie ne comportent guère plus de phase a-didactique, maintenant qu'autrefois, malgré les timides incitations des instructions." Dans ces conditions, toutes les conclusions que nous avons tirées ci-dessus sur ce qui est à la charge de l'élève restent vraies.

De plus, "l'ostension assumée" a été remplacée par "l'ostension déguisée": "Au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le dissimule derrière une fiction: celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les objets spatiaux soumis à son observation ou à son action. Comme ce savoir à découvrir est un savoir très élaboré, le maître est obligé de "manipuler" le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible;

¹⁹ voir Rouchier (1991), p.50 et ss.

malgré cela, ses interventions sont indispensables, mais au lieu d'être vécues par l'élève comme un apport d'informations dont il ne dispose pas, elles peuvent l'être comme le signe manifeste de son incapacité à voir et comprendre ce qui est si évident pour

l'enseignant et comme une plus grande incitation à décoder les intentions didactiques du maître. Nous retrouvons là l'un des paradoxes étudiés par Brousseau (1986b) et (1989a) sous le nom "d'effet Dienes": Plus l'enseignant désire que ce soit l'élève qui découvre les connaissances (ici spatio-géométriques), plus celui-ci est incité à s'appuyer sur la convention didactique et plus il est abandonné à lui-même quant à l'établissement du sens de ces connaissances.

3. Explication du phénomène

Que l'ostension (assumée), qui n'accorde de place qu'au savoir, rejette l'apprentissage de l'espace hors du temps didactique de l'enseignement de la géométrie, voilà qui est bien cohérent avec la méthode ; nous n'aurons pas de mal à convaincre le lecteur que les contraintes didactiques de l'époque en ont fait la solution la plus économique.

Or, nous avons aussi pu faire le constat de la persistance de ce rejet de l'apprentissage a-didactique des connaissances spatiales hors du temps didactique, alors qu'on prétend tenir compte des connaissances de l'élève ; la persistance de ce rejet tient alors d'un phénomène didactique majeur, que nous allons tenter de mettre en relation avec les contraintes de la relation didactique.

a) Les contraintes de la relation didactique

Le contrat didactique usuel assigne des rôles bien différenciés à l'enseignant et à l'élève que nous allons résumer brièvement:

1) L'enseignant

a la responsabilité de la communication du savoir et du contrôle que ce que l'élève a appris est bien conforme au rapport officiel au savoir. De plus, il est comptable devant les instances officielles, les parents d'élèves et les élèves de l'avancée du temps didactique.

Par contre, il a théoriquement le choix des moyens²⁰.

2) L'élève,

Lui, a la responsabilité d'effectuer les gestes d'élève qui lui sont assignés par le professeur, non pas de manière passive mais en étant "motivé²¹". Ces gestes varient bien sûr en fonction des choix didactiques des enseignants.

b) Relation entre l'ostension assumée et le contrôle de la relation didactique par le professeur

Brousseau (1983) décrit plusieurs présentations possibles du savoir géométrique, en montrant comment chacune permet d'optimiser un aspect particulier de la relation didactique: ainsi, "la présentation axiomatique des savoirs" "prend en charge explicitement ce qui est supposé connu de l'élève et une manière de construire ou d'acquérir avec cela les connaissances nouvelles."..."Ce point de vue est particulièrement adapté au contrôle et à l'amélioration de la communication entre le professeur et l'élève. Il facilite la négociation du contrat didactique en ce sens qu'il permet au professeur de renvoyer l'élève soit à des enseignements antérieurs dont l'acquisition est à sa charge, soit à des conditions d'acquisition vraiment "universelles" et que l'élève ne saurait rejeter."

²⁰ Dans la présentation du programme des collèges de 1986, il est rappelé, après trois pages d'instructions générales concernant en particulier le choix des méthodes: "...le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés par les programmes."

²¹ voir Degouys et Postic (1983)

La présentation axiomatique du savoir est l'une des formes de l'ostension, différente bien sûr de celle que nous étudions ici. Toutefois, cette dernière possède les mêmes caractéristiques que la présentation axiomatique en ce qui concerne une certaine optimisation des responsabilités entre l'enseignant et l'élève: Si ce dernier échoue, le professeur a le moyen de le renvoyer à l'étude de ce qui lui a été expliqué antérieurement, connaissance ou méthode; souvent cette étude ne suffit pas à l'élève pour progresser mais comme ni lui ni l'enseignant ne sont en mesure d'identifier ce qui lui manque²², la fiction que le professeur a fourni tous les éléments de connaissance suffisants à la compréhension, à condition que l'élève y mette du sien, ne peut que persister, permettant le maintien de la relation didactique²³.

Dans la présentation ostensive du savoir, l'élève doit apprendre le cours, faire les exercices, chercher les problèmes que choisit le professeur mais cela n'est pas suffisant; Margolinas (1989) montre bien comment le professeur attend que l'élève réalise ces tâches, non pour remplir son contrat, mais en se situant en tant que "mathématicien", c'est à dire en tant que sujet autonome capable d'avoir recours à son cours pour éclairer un point qu'il a oublié, capable de s'interroger sur les raisons de son échec²⁴ à telle question etc.. Le problème est que l'installation de l'élève dans cette position que nous pouvons qualifier de a-didactique, est aléatoire, elle dépend plus de ses caractéristiques personnelles que de l'action de l'enseignant²⁵ qui a fait le choix de la présentation ostensive.

c) Les raisons du "déguisement" de l'ostension

Pour les enfants les plus jeunes, l'insistance relativement récente sur le rôle des connaissances et de l'activité propres de l'élève dans la construction de ses savoirs, conduit le système d'enseignement à rejeter l'emploi de l'ostension assumée, c'est-à-dire de la présentation préalable de ceux-ci par l'enseignant.

Les rapports didactiques à l'espace vont-ils en être modifiés ?

Ce sont les contraintes de la relation didactique et l'ignorance du système sur d'autres moyens pour y satisfaire, qui conduisent à l'emploi de la forme d'ostension que nous avons appelée "déguisée".

L'élève n'est donc plus considéré comme une cire vierge; sur les savoirs visés, il a déjà des connaissances explicites ou non, plus ou moins adaptées mais dont le maître doit tenir compte. Pour pouvoir réaliser cette prise en compte, il est nécessaire de commencer un enseignement par un temps de "recherche", ou par la résolution d'un problème nouveau où l'élève va pouvoir engager et éventuellement expliciter ce qu'il sait déjà.

Or, dans la majorité des cas, ce que produit l'élève est très éloigné du savoir officiel, et la validation empirique ne permet pas facilement la réduction de cette distance. Tout enseignant qui n'a même essayé qu'une fois (en 6ème par exemple) d'organiser avec ses élèves²⁶ une situation de communication pour travailler la description d'objets géométriques,

²² ce qui se manifeste par l'affirmation des élèves: "le prof, si on ne comprend pas, il réexplique toujours pareil!"

²³ Voir Brousseau (1986b), ch III "Eléments pour une modélisation".

²⁴ note que "ce travail réflexif sur l'échec relève de la sphère privée de l'élève". La recherche actuelle de procédures d'évaluation "formatrice" a pour objectif de prendre en compte cet investissement personnel de l'élève dans le temps didactique officiel, sans nécessairement toucher aux formes usuelles d'enseignement.

²⁵ sauf exception, bien sûr! Il existe des enseignants de style "traditionnel" capables de faire passer leur passion de la recherche à une bonne partie de leurs élèves; les dispositifs du type "Rallye mathématique" ont cet objectif.

²⁶ à un moment où ils sont censés disposer d'un certain bagage géométrique

exprime sa stupéfaction devant la distance entre leurs productions et ce qu'il attend²⁷: des descriptions fausses de son point de vue aboutissent à des réussites, des descriptions justes à des échecs parce que les récepteurs ne disposent pas des mêmes connaissances que les émetteurs ou que les tracés quoique bien conçus ont été mal exécutés, des discussions sont nécessaires pour décider de l'échec ou de la réussite de la communication parce que les deux figures ne sont que presque superposables.

Deux types de raisons peuvent être invoquées:

1) La complexité de la confrontation du modèle géométrique à la réalité

Nous renvoyons le lecteur à l'analyse que fait Brousseau²⁸ des difficultés introduites par cette confrontation effective des élèves à la réalité dans le cas de la mesure. Il montre combien "la réalité est beaucoup plus difficile à comprendre qu'une théorie", en illustrant son propos par la détermination expérimentale du poids d'un verre.

2) L'impossibilité pour le professeur de prendre en compte les connaissances des élèves

Engager les élèves à résoudre un problème avant que les connaissances nécessaires à sa résolution ne leur aient été enseignées oblige le professeur à prendre en compte leurs connaissances antérieures, leurs représentations spontanées qui peuvent être fort éloignées des savoirs visés. Or, l'enseignant peut-il accepter par exemple que l'élève soit convaincu de l'existence du triangle (4 6 10) parce qu'il en a dessiné un, alors que ce résultat est faux dans le savoir dont il est le garant, la géométrie²⁹? Pour répondre oui à cette question, il faudrait qu'il se sente autorisé à reconnaître comme valide une proposition qui s'appuie sur une connaissance spatiale effective de l'élève, mais qui n'a pas statut de vérité dans la géométrie et qu'il dispose de moyens pour aider l'élève à passer de cette connaissance, à la connaissance géométrique correspondante, avec une intervention didactique minimale de sa part³⁰. Or ce sont ces moyens qui lui manquent.

La même difficulté didactique est étudiée par Orus (1992) en ce qui concerne l'apprentissage du raisonnement: L'enseignant ne dispose pas de moyens de traiter la logique naturelle de l'enfant, il ne peut admettre que des raisonnements recevables dans la logique mathématique.

d) Conclusion

L'ostension "déguisée" apparaît alors comme une solution de compromis; elle évite tous ces problèmes à l'enseignant en le laissant maître du jeu, tout en semblant prendre en compte l'activité de l'élève. Nous avons vu qu'en fait, elle a pour conséquence la persistance du rejet de l'apprentissage a-didactique des connaissances spatio-géométriques hors du temps didactique.

²⁶ au point d'en décourager plus d'un: "Ça ne marche pas" nous a affirmé un enseignant de collège, voulant dire par là que ce n'est pas un bon moyen pour faire dire aux élèves ce qu'on attend d'eux, comme dans l'ostension déguisée.

²⁸ (1988b), p.18 et ss.

²⁹ Ce que Conne (1990) exprime ainsi, de manière plus générale: "Dans tous les cas d'interaction de connaissances entre plusieurs individus, le modèle est le médiateur des interactions. Dans l'enseignement par exemple, pour le maître, il s'agit de mettre judicieusement à profit l'interaction cognitive, qu'il peut entretenir avec des élèves et la situation qu'il propose, afin d'activer le développement de leurs connaissances. Son instrument de contrôle est le modèle, c'est par ce biais qu'il communique avec les élèves."

³⁰ C'est bien le projet d'Arsac et coll (1991)

En conclusion, nous voudrions citer cet extrait de Brousseau (1988)³¹: "Accepter de prendre en charge les moyens individuels d'apprentissage de l'élève (le sujet cognitif) exigerait :

- une modification complète du rôle du maître et de sa formation
- une transformation de la connaissance elle-même
- d'autres moyens de contrôles individuels et sociaux de l'enseignement,
- une modification de l'épistémologie du professeur, etc.

...si actuellement le sujet n'a pas de place dans la relation d'enseignement, (il en a une dans la relation pédagogique), ce n'est pas parce que les maîtres s'opiniâtrent dans le dogmatisme mais parce qu'ils ne peuvent corriger les causes didactiques profondes de cette exclusion."

La théorie des situations a bien comme ambition de favoriser cette évolution dont Brousseau montre les enjeux. Elle a permis la construction d'un certain nombre de situations d'enseignement dont les caractéristiques ont été suffisamment contrôlées pour assurer les enseignants qui y ont recours, qu'elles favorisent cette position a-didactique de l'élève tout en permettant une communication convenable du savoir. En ce qui concerne l'enseignement de l'espace et de la géométrie, le vivier de situations est restreint, l'étude en est lente et difficile, parce que les difficultés à surmonter sont complexes, leur reproductibilité pas toujours maîtrisée³².

IV. TROISIEME PHENOMENE: LA CONFUSION DU LANGAGE

Nous proposons de l'appeler "**la confusion du langage**", pour caractériser différents faits que nous avons relevés dans les manuels ou dans la littérature pédagogique récents, en relation avec l'utilisation des figures dans l'enseignement de la géométrie en 6ème-5ème. Nous relient cette confusion du langage à l'injonction paradoxale faite au professeur de faire passer ses élèves **de manière progressive**, d'un monde à un autre, **qu'il sait complètement différents**, en **faisant appel** le plus possible à leur **activité**.

A. Quelques faits

1. Remarque:

Nous avons bien conscience de ne pas avoir fait une recherche empirique convenable pour établir ces faits d'une manière un peu générale. Toutefois, les enseignants de collège, (étudiants de D.E.A., ou au cours de stages PAF), à qui nous avons présenté certains d'entre eux, ne les ont pas contestés et même nous ont dit avoir été éclairés, grâce à cela, sur ces difficultés rencontrées par leurs élèves.

2. Dans "les travaux géométriques" présentés par les manuels, sur une même page, un même mot peut être employé dans plusieurs sens.

³¹ Le rôle du maître

³² Une crainte souvent exprimée par les enseignants qui laissent une place importante aux situations a-didactiques dans le temps scolaire est "de se faire manger par le temps"; en effet, la production et le traitement des travaux des élèves, quelle que soit leur organisation, suppose de disposer d'une durée suffisante et dont les différents moments soient convenablement situés dans le temps scolaire. Ces deux conditions peuvent être réunies plus facilement à l'école primaire qu'au collège où le temps est morcelé et la pression de l'avancée du programme plus forte.

Le langage en question n'est pas le langage géométrique mais celui qui sert au professeur pour indiquer aux élèves les tâches à réaliser.

Les exemples sont pris dans deux manuels de 6ème et un manuel de 5ème: "Pythagore" 6ème (Hatier 90)(P6), "Mathématiques 6ème"(Didier 1986)(D), Pythagore 5ème (P5).

a) "*Représenter*"

- Le plus souvent, ce terme est associé aux exercices de représentation plane d'objets de l'espace (en perspective).

-Mais il apparaît aussi dans la première leçon sur les angles dans (D) dans le texte suivant: "Voici une figure *représentant*³³ un angle" (la figure est tracée à côté); la tâche proposée à l'élève est d'apprendre à "Reproduire un angle"; elle est ainsi explicitée: "Reproduire signifie ici *représenter* ailleurs". Dans les exercices, la consigne demande le plus souvent de "*représenter* un angle sur le cahier", alors que dans le cas des triangles, il faut les "tracer".

- Dans (P6), les angles sont à "tracer" ou à "construire" et non pas à "représenter", mais le mot "représentations" apparaît aussi en dehors du contexte "perspective", dans le récapitulatif sur les droites parallèles et perpendiculaires: Les dessins présentant les divers couples de droites possibles sont précédés d'un titre "représentations" alors que ce n'est pas le cas pour la synthèse sur les triangles ni sur les angles, un peu plus loin dans le manuel.

Ainsi, le terme "représenter" qui renvoie ici à un usage géométrique des figures, considérées comme des dessins représentant des figures géométriques abstraites, est introduit de manière discrète, pour des concepts dont l'aspect illimité ne peut être représenté sur un dessin. On peut se demander alors pourquoi, dans chaque manuel, les angles et les droites ne sont pas traités de la même manière.

b) "*Reproduire*"

A l'école primaire, "reproduire un objet ou une figure, c'est en réaliser "une copie conforme"³⁴. C'est aussi le sens retenu par EVAPM. La superposabilité des deux figures fournit un critère pour finaliser l'action des élèves puis la valider.

Dans les deux manuels, le sens est fluctuant. Le rapport avec la superposabilité est évoquée pour la reproduction d'angles dans (D), il ne l'est jamais dans (P)

Suivant les cas, nous pensons, en nous référant au contexte, que ce mot (employé seul) peut désigner l'action de réaliser:

* une copie conforme que l'on peut faire avec un calque³⁵

* une copie conforme à faire avec des instruments (mais ce n'est pas dit)³⁶

* une copie qui respecte certaines propriétés mais pas forcément toutes, celles à respecter n'étant pas indiquées³⁷.

L'élève peut être d'autant plus dans l'incertitude que, sur la même page, d'autres exercices sont formulés avec la même consigne, mais avec des précisions sur la nature de la reproduction: soit les nouvelles dimensions, soit la mention "à la règle et au compas".

³³ C'est nous qui soulignons dans ce paragraphe.

³⁴ IO CM 1980

³⁵ D p.76; P5 ex 50 p.145 (Annexe 1)

³⁶ P6 n° 19 p.124; D n°46 p.120 (Annexe 1)

³⁷ P6 P.116; D n° 13 P.117 (Annexe 2)

D'autre part, dans les deux manuels (P), d'autres expressions sont utilisées comme synonymes, "dessine une figure comme celle-ci", "construis un dessin semblable à celui-ci", "réalise un dessin de ce genre", etc...

c) "Construire", "tracer"

Comme le signalent Mercier et Tonnelles pour P1, ces deux termes sont utilisés indifféremment; c'est le cas aussi pour les deux autres manuels.

d) "Figure" et "dessin"

Dans les deux (P), ces deux termes sont utilisés avec le même sens³⁸; il n'y a pas d'évolution entre la 6ème et la 5ème.

Dans (D), l'emploi du terme "figure" est plus systématique, associé à "trace", "construis" ou "dessine".

e) "Figures fausses"

Dans de nombreux exercices, il faut reproduire ou construire une figure déjà dessinée sur le manuel, accompagnée ou non d'indications portant sur les mesures à respecter de certains segments ou angles, ou sur des égalités entre ces mesures (symbolisées de manière traditionnelle).

Nous pouvons faire deux remarques:

* Si l'on compare la figure de départ et la figure reproduite suivant les indications de mesure, tous les cas sont possibles: les figures sont superposables, ou semblables, ou complètement différentes. Dans ce dernier cas, l'élève peut en être prévenu par la mention: "les figures sont volontairement fausses". Que signifie ce "volontairement faux" qui n'est mentionné que lorsque les deux figures ne sont pas semblables? Que les indications d'angles portées sur la figure de départ mais qui concernent la figure à tracer, ne s'appliquent pas à la figure de départ. C'est à dire que la nature de schéma de cette dernière, dans ce cas, n'est pas différenciée de celle d'épure. C'est donc une figure "fausse".

* Des contradictions demeurent:

- Les élèves ne sont pas toujours prévenus du caractère "volontairement faux" de la figure qu'ils ont à construire. .

- Sur une même page³⁹, une figure est "juste", l'autre est "fausse" (sans que les élèves en soient prévenus), alors que dans les deux cas, il s'agit d'évaluer des angles en justifiant les réponses.

- Pourquoi une figure de départ "de même forme" que la figure "arrivée" mais pour lesquelles les indications de longueur ne correspondent pas, n'est-elle pas appelée "figure fausse"?

De manière générale, l'existence, en géométrie, de "dessin-schéma" n'est pas reconnue. Ainsi, sur les figures de départ, il n'y jamais de contradiction entre les données implicites de la figure à lire par l'élève et les indications symboliques d'égalité portées⁴⁰. Ces

³⁸ Nous avons même repéré la consigne suivante: "Pour chacun de ces dessins, compléter la figure pour que D soit un axe de symétrie." ainsi que la qualification de "figure" d'un dessin représentant trois allumettes.

³⁹ par exemple, dans P5 p 179 ex 46 et 52

⁴⁰ Nous n'avons trouvé qu'une exception: N3 p140 P5. Est-ce une erreur, est-ce voulu?

indications symboliques sont donc redondantes avec les informations fournies par la figure, auxquelles l'élève doit avoir recours pour pouvoir tracer la nouvelle figure⁴¹.

A quoi servent alors les indications symboliques? Aucune explication n'est donnée à cet effet, aucune allusion à l'imprécision des mesures, ni à la possibilité d'utiliser un dessin comme un schéma, représentant une autre réalité de manière approchée. ..

Cette grande confusion dans le rapport à la figure, institué par l'ensemble des exercices en 6ème-5ème, prive donc les élèves de tout contrôle sur leurs productions et les livre au déchiffrement de "l'énigme professorale".

B. Tentative d'explication

Nous faisons l'hypothèse que les confusions relevées traduisent la perplexité des enseignants-auteurs au moment de la mise en oeuvre des IO: Les tâches qu'ils proposent à leurs élèves concernant les figures tracées sur le livre, sont souvent matérielles, (reproduire, construire) mais cette reproduction n'est pas finalisée. Dans de nombreux exercices, c'est une question rituelle qui précède les questions traditionnellement posées en 6ème et 5ème concernant les propriétés des figures⁴². Les auteurs pensent sans doute appliquer ainsi les conseils des IO sur l'importance de l'activité de l'élève⁴³.

Le langage méta-mathématique utilisé qui a recours tant à des expressions imagées qu'à des termes "consacrés" (représenter, figure) est la réponse à l'exigence du passage progressif de la langue naturelle au langage géométrique⁴⁴. Mais on pourrait penser à une substitution progressive des termes courants par des termes mathématiques. Or ce n'est pas le cas.

Le flou sur le rapport aux figures dessinées sur le manuel ne peut s'expliquer que par la persistance, chez les enseignants de l'importance donnée au caractère "idéal" des figures au détriment de leur caractère spatial: Pourquoi avoir des exigences de reproduction isométrique d'une figure constituée d'une droite et d'un point extérieur pour faire tracer la perpendiculaire à cette droite passant par le point? Pourquoi différencier deux figures semblables alors qu'elles renvoient à la même figure géométrique? C'est peu à peu, par l'intermédiaire des évaluations du professeur, qui tantôt acceptera, tantôt pénalisera la reproduction non isométrique d'une figure, que l'élève devra deviner que le mot "reproduire" a plusieurs sens et dans quel contexte il faut utiliser celui-ci plutôt que celui-là.

C. Confirmations

Notre interprétation du fait que les enseignants sont pris entre des exigences qui leur apparaissent contradictoires et sont conduits à développer *des comportements et un discours ambigus*, à propos des figures, nous paraît confirmée par la façon dont les exigences

⁴¹ Voir par exemple, ex 33 p.138 dans P6 (Annexe 3)

⁴² On peut se demander si leur présence ne permet pas de concilier deux contraintes: faire réaliser des tracés aux élèves et disposer ainsi de figures sur lesquelles ils peuvent écrire pour répondre aux questions suivantes, sans abîmer le livre!

Plus sérieusement, nous nous interrogeons sur la possibilité de faire reproduire par les élèves, certaines de ces figures, compte-tenu de leur complexité et du côté lacunaire des indications données.

⁴³ Ces auteurs n'avaient pas à, notre connaissance, écrit de manuel pour les programmes antérieurs. La comparaison entre le traitement d'une même notion par un même auteur en 77 et 86 serait éclairante.

⁴⁴ "Le professeur est attentif au langage et aux significations diverses d'un même mot. Il évite de fixer d'emblée le vocabulaire et les notations:.."

de précision sont soit "relativisées" soit "utilisées" suivant les besoins. En voici des exemples contradictoires:

1. Exemple 1: La négociation à la baisse sur les exigences de précision

Il s'agit d'analyses, que nous estimons discutables, relevées dans les documents EVAPM 6ème 1987 et EVAPM 6ème-5ème 1991.

Les auteurs du commentaire notent en 6ème des résultats satisfaisants aux items de constructions élémentaires et même un fort taux de réussite (88%) à l'item EXD14: tracé d'un carré dont un côté est dessiné non parallèle aux bords de la feuille. Toutefois, il nous paraît difficile de déduire de ces résultats que les élèves maîtrisent convenablement les tracés élémentaires à l'aide d'instruments, quand nous lisons dans les consignes de codage⁴⁵ que "les tolérances sur les tracés de figures sont de + ou - 2mm pour la position des points et de 2 degrés pour les angles". Etant donnée la taille des figures (le côté du carré mesure 3 cm), combien d'élèves peuvent avoir réussi sans avoir effectivement utilisé l'équerre ou le compas?

Comment expliquer le fait que les correcteurs aient choisi des intervalles de tolérance aussi grands pour des figures aussi petites? N'est-il pas justement le signe que les tracés sont encore mal maîtrisés en fin de 6ème, mais que ce fait n'est pas considéré comme important par les professeurs? Cette interprétation de notre part nous est suggérée par ce commentaire tiré de EVAPM 6ème-5ème 91 à propos des tracés "au jugé": "Ce dernier, lorsqu'il est correctement effectué, témoigne d'une bonne représentation mentale de la notion, ce qui n'est pas nécessairement le cas de ceux qui ont parfaitement assimilé une technique de construction."

Quelle est donc la signification de cette minimisation du travail graphique de l'élève? La problématique spatio-géométrique est incontournable à ce niveau de la scolarité, mais les enseignants de mathématiques savent bien qu'elle n'est pas déterminante pour l'entrée qu'ils aménagent aux élèves dans la problématique de la géométrie.

La contrainte de précision dans les tracés, qui n'est pas reprise en mathématiques mais le sera dans des disciplines techniques par exemple, est donc assumée avec difficulté par les professeurs de mathématiques, d'où un comportement évaluateur et un discours que nous estimons ambigus

2. Exemple 2: L'imprécision du dessin comme moyen de justifier la démonstration

Nous tirons cet exemple d'une activité pour la classe de 3ème dont les commentaires sont particulièrement développés puisque destinés aux élèves de l'enseignement par correspondance⁴⁶.

Après avoir fait construire une figure très précise (avec dimensions à respecter), puis énoncer une propriété de trois des points construits ", lue" sur la figure, les auteurs la font démontrer en guidant les élèves mais sans parler de démonstration. Le texte continue alors par ce commentaire :

" Voir n'est pas suffisant pour affirmer. Un dessin même minutieux est imprécis. Il est donc nécessaire de savoir si ce que tu supposes (ce qu'on appelle la conjecture) est vrai dans tous les cas, et pourquoi c'est vrai. La seule façon d'être sûr est de justifier cette conjecture par un raisonnement, c'est à dire de démontrer".

⁴⁵ EVAPM 87 p.10; ultérieurement, les correcteurs ont utilisé des calques de contrôle, un peu plus sévères.

⁴⁶ CNED Classe de 3ème. (Annexe 4)

Certes, qui ne serait d'accord avec les auteurs qu'un "dessin même minutieux est imprécis". Mais ce qui est soupçonné est qu'une propriété vraie sur le dessin, ne puisse pas l'être réellement. Si c'est cette expérience qui fonde la démonstration, pourquoi seulement l'évoquer ?

La suite révèle l'embarras des enseignants: En quoi le manque de précision empêche-t-il de faire des déclarations vraies? Quelle confiance accorder alors aux affirmations des scientifiques non mathématiciens? Pourquoi la seule façon d'être sûr d'une propriété, par ailleurs rapportée à une figure particulière, choisie de telle manière que la conjecture soit sans difficulté, serait-elle de démontrer? Cette nécessité subite de savoir si ce que l'on suppose est vrai dans tous les cas, et pourquoi c'est vrai, vient-elle vraiment de l'imprécision du dessin?

3. Exemple 3 L'imprécision de la mesure comme moyen de justifier la démonstration.

Nous retrouvons dans l'article de Gaud et coll (1987)⁴⁷, une ambiguïté assez voisine: Un tableau présente trois moyens de répondre à la question "Pourquoi?" (sous-entendue: pourquoi la propriété conjecturée est-elle vraie?), assortis des avantages et des inconvénients de chacun de ces moyens. Le deuxième d'entre eux est "en faisant des mesures", son inconvénient étant "pas totalement sûr" (imprécision des instruments de mesure), le troisième "en donnant des raisons: je l'ai prouvé, démontré", son avantage étant "permet d'être sûr de ce que l'on dit". Pour illustrer ce tableau, deux exemples sont donnés. Dans chacun d'entre eux, il est demandé d'abord de tracer une figure "épure", à propos de laquelle l'élève doit répondre à des questions. Pour le premier exercice, la deuxième question porte sur le périmètre d'un certain quadrilatère. Deux façons différentes de répondre sont proposées à l'analyse du lecteur:

- pour les élèves de 6ème-5ème, "il s'agira de mesurer (niveau 2 du tableau) et de donner une valeur approchée du périmètre en précisant bien que cette valeur est approchée. Ceci ne pose pas de problème car les élèves ne trouvent pas tous le même résultat..."

-Pour les élèves de 4ème, le calcul pourra être fait et la valeur sera exacte: ce sera la même pour tous. La mesure ne servira plus qu'à vérifier, mais son rôle, tout en ayant changé de statut (ce n'est plus une preuve) restera fondamental, voire indispensable."

Tout, dans ce commentaire, laisse à penser que les élèves de 4ème sont en mesure de se poser la question de l'évaluation "exacte" du périmètre de la réalité spatiale qu'ils viennent de dessiner. Il n'existe pourtant aucune figure réelle dont on puisse assurer que le périmètre est égal à la valeur calculée. Le glissement qui déplace l'objet de l'activité de la figure réelle à la figure idéale, est complètement passé sous silence⁴⁸.

Dans ce "discours" destiné aux enseignants, comme dans le précédent destiné aux élèves, la problématique géométrique est présentée implicitement comme prolongeant la problématique spatio-géométrique, par l'effet d'une substitution de signifié sous le même signifiant "figure". Nous analysons ce phénomène comme un essai d'adaptation des professeurs à l'injonction paradoxale ainsi résumée : "Il faut organiser une transition douce entre deux mondes relevant de logiques différentes".

⁴⁷ Suivi scientifique 5ème (Annexe 5)

⁴⁸ Quelques pages plus loin, Mante (1987) écrit à ce propos: "Il faut que l'élève considère la figure non plus comme un objet de construction, mais comme le représentant d'un objet idéal. Elle ne peut donc plus servir de support pour affirmer des propriétés: en ce sens, la figure n'a plus besoin d'être précise."

D. Conclusion

Nous avons noté, dans notre présentation des programmes de 1986, que la nouveauté la plus importante peut-être, était l'apparente disparition de la rupture entre la géométrie de l'observation et des tracés et la géométrie de la déduction, associée jusque là au passage d'un niveau à un autre. S'il n'était pas question pour les auteurs du programme de confondre les deux, il semble que les outils didactiques courants dont disposent les enseignants ne les aident pas bien à assurer la mise en oeuvre du projet qui sous-tend ces programmes, de manière satisfaisante pour les élèves.

En 1957, les rédacteurs des IO avaient repris à leur compte cette citation de Fréchet:"

"A mon avis, il est essentiel:

1) De dire aux élèves très nettement que ce qu'on appelle droite, angle dans la pratique n'a pas les propriétés rigoureuses qu'on leur attribue dans la théorie;

2) De faire vérifier expérimentalement sur un ou deux exemples que les relations rigoureuses entre certains éléments de la théorie ne sont pas vérifiées rigoureusement par les objets concrets correspondants;

3) De constater cependant qu'elles le sont approximativement;

4) D'affirmer que, quelle que soit la précision des mesures entreprises, elles n'ont jamais conduit dans le passé à des approximations inadmissibles (...). Les axiomes de la géométrie gardent un sens indépendant de l'interprétation concrète qu'on leur donne mais ils dépendent de l'expérience en ce sens que c'est l'expérience qui a conduit leur choix et qui, ensuite, l'a justifié.

"Ma conclusion est donc qu'il faut cesser d'enseigner une géométrie qu'on ne s'est pas donné le droit d'appliquer à la réalité. La géométrie qu'on enseigne est une géométrie tronquée, parce que réduite à sa partie axiomatique. Il faut, sans y consacrer longtemps, prononcer les mots nécessaires pour que les élèves aient entre les mains une géométrie applicable, une géométrie totale."

Quoique destinés à un enseignement présentant les caractères opposés à ceux de l'enseignement actuel de la géométrie dans la scolarité obligatoire, ces conseils nous apparaissent une source de réflexions tout-à-fait intéressantes pour les professeurs de 1992. Bien que relativement simples à appliquer (Fréchet se situe dans un enseignement ostensif assumé), ils ne l'ont jamais été et sont tombés très vite dans l'oubli⁴⁹. Mais puisqu'il semble que son projet soit à l'ordre du jour: fournir aux élèves une géométrie applicable, peut-être serait-il bon de fournir aux enseignants des moyens didactiques adaptés aux exigences actuelles, prenant en compte les aspects dont il souligne l'importance. C'est ce que nous tentons de faire dans la suite de ce travail.

⁴⁹ Il serait intéressant de rechercher pourquoi!

CHAPITRE B-6

LES REPRESENTATIONS SPONTANÉES DE L'ESPACE

I. INTRODUCTION : POURQUOI S'INTERESSER AUX CONNAISSANCES SPONTANÉES DE L'ESPACE ?

A. Le contrat didactique usuel

L'analyse des situations d'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire et en 6ème-5ème, effectué plus particulièrement au chapitre précédent, montre que l'élève est supposé construire des concepts géométriques fondamentaux, "abstrait" spontanément de l'observation des figures ou des objets géométriques.

Dès la partie A, cette conception épistémologique de l'acquisition de la géométrie nous amenait à poser les questions suivantes :

- Les connaissances géométriques constituent-elles la structuration implicite et "naturelle" des connaissances spatiales ?

- Les connaissances spatiales spontanées sont-elles organisées en systèmes de connaissances stables, dont certaines se constitueraient en obstacles à de nouvelles connaissances (spatiales ou géométriques)? Si tel était le cas, nous devrions pouvoir mettre en relation certaines erreurs des élèves avec ces connaissances spontanées. C'est ce que nous allons tenter de faire dans le paragraphe suivant en nous appuyant sur des travaux que nous avons cités dans les chapitres précédents.

Rappelons quelques faits que nous avons rencontrés dans les derniers chapitres.

B. L'analyse des erreurs ou des difficultés relevées dans différentes recherches.

Nous avons relevé par exemple chez Grenier (1988) ou chez Artigue et Robinet (1982) l'identification d'une difficulté importante concernant des concepts aussi simples que celui de segment ou d'arc de cercle : les élèves ne considèrent pas les tracés comme des ensembles de points, mais comme des espèces d'objets, c'est à dire relevant des rapports spatiaux usuels.

De même, ne peut-on pas relier la résistance de la confusion périmètre/aire aux interventions didactiques¹, à ce que ces deux notions participent de la délimitation des mêmes petits objets ? En effet, ces concepts sont, soit référés à des objets par exemple dessinés, soit référés à un milieu objectif de type rural, mais connu seulement à travers son évocation par des dessins.

Nous avons par ailleurs relevé chez Audibert (1982) et chez Grenier (1988) des difficultés qui peuvent faire penser à des obstacles que rencontreraient les élèves à l'apprentissage de la géométrie. Citons en quelques-unes :

- L'incapacité à envisager des sur-figures ou des sous-figures². Cette compétence difficile à acquérir n'intervient quasiment jamais lors des rapports spatiaux usuels : les objets

¹ Comme le montrent les travaux de Douady R. et Perrin M.J.(1989) "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane" *Educationnal studies in mathematics* 20: 387-424.

² en particulier lorsque ces sous-figures ne constituent pas un élément de la partition de l'espace déterminée par les traits de la figure initiale. C'est notamment le cas pour le théorème de Thalès

préexistent. Un ajout ou un retrait constituent une modification de l'objet, une transformation souvent irréversible de l'objet qui détruit le premier objet.

- De même, ont été repérées dans des contextes très différents (symétrie orthogonale³ ou résolution du problème Sim⁴) des difficultés dans la réalisation de constructions attribuées à la prégnance de "l'horizontale" ou de la "verticale", en fait des directions privilégiées par les bords de la feuille ou du cadre limitant le dessin, directions que le sujet ramène en général à son propre repère dans les activités usuelles du micro-espace

- Citons enfin le "milieu" d'un segment ou d'une figure, proposé comme obstacle par D. Grenier au cours de l'apprentissage de la symétrie. Cette notion ne relève-t-elle pas à la fois des connaissances pratiques et des connaissances mathématiques ?

En conclusion, l'existence de nombreuses difficultés dans la compréhension et l'utilisation des concepts géométriques montre que l'abstraction "spontanée", par observation d'objets physiques, n'aboutit pas à des concepts géométriques, et que l'ensemble des expériences spatiales des élèves, pourtant très riche, ne leur permet pas une élaboration facile de ces concepts.

C. Le traitement de ces erreurs et difficultés

De nombreux auteurs ont fait des études (longitudinales ou ponctuelles) sur les conceptions des élèves relatives à un concept ou à un champ conceptuel et utilisent les informations récoltées pour la construction de séquences d'enseignement qu'ils estiment plus pertinentes.

Mais si certaines des erreurs et des difficultés relevées proviennent, comme nous en faisons l'hypothèse, du rôle que l'enseignement fait jouer aux rapports spatiaux, il est nécessaire d'examiner de plus près les connaissances issues des rapports spatiaux "naturels" et leur structuration. Nous utiliserons pour cela, en premier lieu, les travaux des psychologues qui se sont intéressés à la formation des connaissances spontanées, plus particulièrement ceux de Piaget et de son école.

II. QUE SAVONS-NOUS SUR LES CONNAISSANCES SPONTANÉES DE L'ESPACE ?

A. Apports de l'école de Piaget

1. Le développement de la connaissance de l'espace

Nous empruntons à Pêcheux⁵ (1990) les principales idées de la synthèse. Piaget a étudié le développement de la connaissance de l'espace selon deux axes conjugués : "l'un d'eux met en rapport une description géométrique⁶ de l'espace physique et une description dans les mêmes termes des comportements spatiaux. L'autre axe envisage la succession des stades sensori-moteur, intuitif, concret et formel."

³ Grenier, (1988), p155 et suivantes

⁴ Audibert, (1982), p. 192-197

⁵ Pêcheux (1990), pp.16 à 22

⁶ faisant appel à la hiérarchie des géométries en topologique, projective, métrique.

Piaget et ses collaborateurs considèrent, comme pour les opérations logico-arithmétiques, que les mécanismes opératifs relatifs aux transformations que l'action du sujet produit sur le réel structurent un fonctionnement cognitif dont les mécanismes figuratifs, perception, imitation, représentation...ne sont que les supports. Piaget et Inhelder (1966) soulignent⁷ "l'interdépendance des mécanismes opératoires et de la constatation" et précisent "un cadre opératoire de nature logico-mathématique est nécessaire non pas seulement pour l'interprétation notionnelle du donné perceptif, ce qui va de soi, mais encore pour son évocation par l'image...". Ils distinguent l'espace perceptif ou sensori-moteur, de l'espace représentatif⁸ : "Si la représentation prolonge en un sens la perception, elle introduit également un élément nouveau, qui lui est irréductible : un système de significations comportant une différenciation nette entre le signifiant et le signifié."... Ces signifiants "consistent en signes (langage courant ou mathématique, etc.) ou en symboles (images ou gestes imitatifs, dessins, etc.)...La représentation spatiale est une action intériorisée...l'intériorisation des étapes s'effectue selon des étapes graduelles qu'il nous a été donné de suivre pas à pas. A la suite de l'activité sensori-motrice élémentaire, liée à la perception de l'objet, vient l'action évoquée en imagination, mais après seulement qu'elle a été exécutée matériellement...Les opérations concrètes (de 7-8 à 11-12 ans) résultent de cette articulation (des anticipations fragmentaires des actions ultérieures possibles) lorsque les actions intériorisées sous forme de schèmes sont assez coordonnées pour que leur composition, et, par conséquent, chacune d'entre elles, puissent être déroulées dans les deux sens : c'est cette composition réversible qui caractérise la première forme d'équilibre des actions intériorisées et qui constitue ainsi les premiers systèmes proprement opératoires. Puis, avec le développement de ces coordinations opératoires, plusieurs systèmes peuvent être pensés simultanément, ce qui caractérise les opérations formelles et rend possible leur traduction sous forme de proportions hypothético-déductives (vers 11-12 ans)...
...Ici s'achève l'intuition et débute un type de pensée qui, tout en constituant un aboutissement de cette intériorisation, prépare l'axiomatisation même de l'espace, grâce à ses formalisations discursives croissantes."⁹

Piaget relève qu'à chaque nouveau stade, les sujets doivent reconstruire l'évolution observée lors des étapes précédentes, évolution correspondant à la hiérarchie inclusive des géométries : la géométrie topologique en premier, puis la géométrie projective et enfin la géométrie métrique. Il y a ainsi des années de décalage entre la maîtrise de l'espace au niveau sensori-moteur et la maîtrise des représentations. "Bien plus, il se produit au fur et à mesure des progrès de l'espace représentatif, un choc en retour ou de rejaillissement de l'activité représentative sur l'activité perceptivo..."¹⁰

On peut dire en cela, comme Gréco (1978)¹¹ que la théorie piagétienne considère que les diverses variétés d'espace "d'abord hétérogènes sont progressivement structurées par les

⁷ Piaget et Inhelder, *L'image mentale chez l'enfant*, 1966, PUF, p. 456-457

⁸ Piaget et Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, 1947, P.U.F., (éd.1977) p. 28

⁹ *ibidem*, p. 530-531

¹⁰ Piaget et Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, 1947, P.U.F., (éd.1977) p. 12

¹¹ Toutes sortes d'espace ou : les positions les figures et le calcul, *Approches psychopathologiques de l'espace et de sa structuration*, P.U.F.

opérations logico-mathématiques, aboutissant à la construction d'un espace rationnel "intégré", homogène, isotrope, etc."

2. Spécificités de la prise de connaissance des propriétés spatiales.

Cette prise de connaissance est-elle de nature empirique, c'est-à-dire, dégagée du réel, ou logico-mathématique? Piaget (1977)¹² répond à cette question en montrant que l'abstraction spatiale relève à la fois de l'abstraction physique et de l'abstraction logico-arithmétique.

a) Abstraction spatiale et abstraction physique

"L'abstraction physique, appelée abstraction simple constitue l'aspect figuratif des processus cognitifs..." " Les structures qui interviennent ici selon Piaget sont : la perception, l'image, l'imitation au sens large." (Bideaud 1976)¹³.

Comme l'abstraction physique, l'abstraction spatiale "porte sur des propriétés que possédait l'objet avant que le sujet ne les y découvre : des formes, dimensions, positions, déplacements, etc., ainsi que s'il s'agissait de masses, forces ou vitesses, etc." Piaget (1977).

b) Abstraction spatiale et logico-arithmétique

L'abstraction spatiale comme l'abstraction logico-arithmétique "procède de l'abstraction réfléchissante des actions du sujet sur les objets et de leur coordination. Ce n'est plus le résultat de l'action qui intervient ici, mais l'action en tant que telle, reliée à d'autres actions; l'objet tient alors le rôle de support. Cette abstraction constitue l'aspect opératif des processus cognitifs et permet la connaissance des transformations réalisées ou possibles qui relie les états ou configurations" (Bideaud, 1976)

Piaget (1977) précise : "...leur caractère commun est d'enrichir les objets de nécessités déductives non données dans les faits comme tels. Mais la différence est que les cadres logico-arithmétiques ...sont ajoutés aux objets, tandis que les cadres déductifs de nature spatiale rejoignent les propriétés que possédaient déjà les objets...", puis que si la spécificité des opérations spatiales s'efface au niveau formel, "le domaine spatial bénéficie d'un double privilège : les observables figuratifs s'y insèrent très directement dans des transformations rationnelles, et ces transformations elles-mêmes sont représentables sous une forme figurative."

De ces travaux il ressort que :

- Les connaissances spatiales des enfants se forment de manière progressive : certaines connaissances ne seront pas disponibles à certains âges. Nous pourrions chercher dans ces travaux des éléments pour interpréter certaines difficultés en terme d'obstacles ontogénétiques.

- La construction des connaissances spatio-géométriques ne se fait pas par la lecture de propriétés de l'espace physique, mais par une reconstruction "à partir des actions propres et de l'espace sensori-moteur, puis mental et représentatif, déterminé par les coordinations de ses actions" (Piaget, 1964).

¹² Piaget, Recherches sur l'abstraction réfléchissante Tome 2, 1977) l'abstraction de l'ordre et des relations spatiales, p. 298-299

¹³ Bideaud (1976) : le modèle inducteur, *Recherches Pédagogiques* n°78, INRDP, 167-173

B. Remises en question de certains résultats piagétiens

Après avoir rappelé brièvement les traits principaux dégagés par l'école de Genève, signalons les principales remises en question réalisées depuis, en empruntant encore à Pêcheux (1990)¹⁴ les éléments de la synthèse suivante.

1. La hiérarchie parallèle des géométries et des performances spatiales

"De nombreux travaux ont mis en question la possibilité de mettre en parallèle l'évolution des performances spatiales des enfants avec la hiérarchie topologique/ projectif/ métrique.

Les représentations des zones ou des objets familiers sont organisées selon des règles projectives ou métriques, alors que les espaces flous ou contingents qui les relient ne sont appréhendés qu'au niveau topologique".

2. L'intégration des stades successifs de la pensée spatiale

"L'apparition de modes élaborés d'appréhension de l'espace n'abolit pas les modes plus simples... S'agissant d'espace, de nouveaux modes d'approche sont bien élaborés au cours du développement; mais ces modifications du répertoire mènent à redéfinir les limites de validité de chacun des modes d'approche, sans qu'il y ait pour autant des disparitions obligées...".

C'est l'économie de moyen qui va souvent être décisive. Les stades ne détermineraient pas des états, mais des potentialités...

Ces deux directions de remise en question pointent en fait l'insuffisante prise en compte par Piaget des caractéristiques des situations dans lesquelles le sujet établit des interactions spatiales. Or ces caractéristiques constituent un des leviers essentiels, à la disposition des enseignants, dans la gestion de la classe. On ne peut donc bâtir une didactique de l'espace et de la géométrie sur les seules études piagétienne.

3. Relativité des facteurs de développement en fonction des sujets.

Piaget signalait déjà la variabilité individuelle par rapport à l'accession aux différents stades de la pensée spatiale. Chaque individu atteint-il le stade ultime ? Weil-Fassina et Rachedi (1992)¹⁵ mettent en évidence, sur une population d'adultes de bas niveau de qualification, des stades d'élaboration de la représentation correspondant aux stades piagétiens des moins élaborés aux plus élaborés. Vermersch (1979)¹⁶ désigne par "registres de fonctionnement" ces différents paliers.

On peut se demander si, dans le domaine spatial, le minimum acquis par tous n'est pas particulièrement bas, et si ces acquis sont suffisants pour assurer aux sujets les moyens d'une adaptation autonome aux évolutions de leurs conditions de vie.

4. Conclusion

En conclusion de l'examen de ces différents travaux, quelles informations pouvons nous tirer quant à la constitution d'un processus didactique ?

¹⁴ p. 20, p. 8

¹⁵ Weill-Fassina A. et Rachedi Y. Les modalités de mises en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan. *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*. La Pensée Sauvage. (A paraître)

¹⁶ P. Vermersch (1979), "la théorie opératoire de l'intelligence appliquée aux adultes", *l'éducation permanente* n° 51, p. 2-29

1) La confirmation, appuyée sur la théorie piagétienne, que la présentation ostensive des connaissances n'est pas suffisante pour assurer un apprentissage efficace des savoirs spatiaux et spatio-géométriques. A moins de penser qu'il y aurait une rupture complète entre les processus cognitifs "spontanés" et ceux engagés dans les situations d'apprentissage scolaires, nous devons reprendre à notre compte tout ce que montre Piaget sur le nécessaire travail de reconstruction par l'enfant, au niveau représentatif, donc intériorisé, des connaissances et des schèmes qu'il sait mettre en oeuvre au niveau de la perception et de l'action.

2) Pour que cette reconstruction soit possible, il faut que l'enfant soit placé dans des conditions favorables. Les situations d'observation utilisées dans les recherches cliniques ne fournissent des modèles de ces conditions ni pour les situations d'apprentissage spontané, ni pour les situations d'enseignement. La prise en compte des conditions réelles dans lesquelles se constituent les connaissances spatiales des sujets est nécessaire.

C. Propositions de Pêcheux

Pêcheux fait le bilan des études portant sur le développement des connaissances spatiales au cours de l'enfance sous l'angle des différents facteurs qui y interviennent.

Elle rassemble d'abord les principaux résultats concernant "les différents facteurs qui interviennent dans l'élaboration des performances spatiales, et qui sont susceptibles d'expliquer l'évolution des rapports des enfants à l'espace." Elle présente successivement :

- le développement chez l'homme de la saisie des informations spatiales

- l'intégration centrale des informations spatiales

- les apports de l'environnement à la connaissance de l'espace où elle examine les facteurs culturels puis le rôle des jeux et des jouets et enfin celui des apprentissages scolaires.

En introduisant cette question, elle affirme¹⁷ : "Les capacités des enfants à résoudre tel ou tel problème spatial ...qui se construisent par l'action de l'enfant sur son environnement en fonction des possibilités de l'espèce humaine, se développent en fonction des opportunités que fournit l'environnement physique et social..." et elle envisage une méthode, qu'elle critique aussitôt, pour étudier cette liaison : "On pourrait imaginer de faire un catalogue des problèmes spatiaux que rencontrent les enfants et des circonstances où ils les rencontrent. Il n'y serait plus question d'un espace unique, abstrait, illimité et isotrope, mais d'espaces divers, plus ou moins reliés...En fonction des actions dont ils sont le support, et de l'agent de ces actions, les espaces sont diversement stables et sujets à transformations. On pourrait multiplier les exemples à l'infini. Si l'on adoptait cette perspective pour rendre compte de l'évolution avec l'âge des performances spatiales enfantines, on se retrouverait face à une multitude d'observations, certes écologiques, mais qui manquerait tout autant de structure que la multitude d'études expérimentales sur le domaine."

Autrement dit, il n'y aurait pas une sorte de développement unifié et général pour tous les sujets, les menant au stade de la représentation euclidienne ; mais ces connaissances spontanées seraient très différentes en fonction du sujet¹⁸ et de ses expériences.

On peut se demander pourquoi Pêcheux, cherchant à identifier les apports de l'environnement à la connaissance de l'espace, s'intéresse au fait de pratiquer tel ou tel jeu : N'y a-t-il pas, dans la vie d'un enfant, d'autres situations, beaucoup plus fréquemment

¹⁷ Pêcheux (1990) p. 27-28

¹⁸ Le sujet épistémique de Piaget est un sujet mythique.

répétées, dont le rôle dans la constitution de représentations spatiales serait essentiel? N'y a-t-il pas moyen d'opérer des regroupements dans le foisonnement des expériences spatiales humaines auxquels correspondraient des manières particulières de se représenter l'espace?

L'auteur montre que les catégories de Gréco (1978), espace des positions, espace des figures, espace calculable rendent bien compte de la pluralité des types de rapport des sujets à l'espace, mais que l'on bute sur une difficulté fondamentale lorsqu'on veut relier ces rapports aux tâches spatiales, car, dans les tâches spatiales, plusieurs mécanismes de traitement sont utilisables (par un sujet) et utilisés selon le cas. Cette affirmation nous semble traduire la difficulté du chercheur à déterminer par une analyse à priori le ou les traitements que le sujet va choisir, et par conséquent le risque (grand) d'attribuer telle performance à tel mode de traitement alors qu'elle peut également s'expliquer par un autre...

En conclusion, Pêcheux constate selon nous l'incapacité actuelle de la psychologie à classer les situations de façon à prendre en charge à la fois la diversité des connaissances des sujets, et la pluralité potentielle des modes de traitement des objets par un même sujet.

D. L'hypothèse de Brousseau et Galvez

Face à ce foisonnement de situations et à cette diversité de modes de traitement, Brousseau¹⁹ et Galvez²⁰ proposent un mode de classification, permettant de constituer trois grandes classes de situations, grâce à la prise en compte du facteur "taille de l'espace".

La distinction entre "small scale" et "large scale space" a déjà été faite par des psychologues cités par Pêcheux (1980)²¹. Toutefois, elle signale que le terme "macro-espace" peut recouvrir selon les auteurs aussi bien l'espace de la ville (pour des géographes) que l'espace d'une grande salle pour des expérimentateurs comme Acredolo (1981)²². Mais les il semble que, dans ces travaux, les rapports entre la spécificité de ces différents espaces et leur traitement, n'aient pas été pris en compte de manière significative.

C'est par contre cette prise en compte qui fonde l'hypothèse de Brousseau et Galvez, et qui les conduit à différencier trois types d'espaces et non pas deux.

III. L'APPROCHE DE BROUSSEAU ET GALVEZ

Ces travaux se situent dans une problématique didactique, et prennent en charge l'articulation entre le domaine de la didactique et celui de la psychologie.

A. Un problème d'enseignement de l'espace

Rappelons que G. Galvez fut chargée d'une étude par les autorités de Mexico soucieuses de réduire le nombre d'enfants qui se perdaient dans la ville, même entre leur domicile et l'école. Il s'agissait d'étudier ce problème, de proposer des moyens d'enseignement adéquats, et de former en conséquence les enseignants.

¹⁹ Brousseau G. (1983) "Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie", Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble (1982-1983)

²⁰ Galvez G. (1985) " El aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano: Una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria", Tesis, Centro de Investigacion del IPN Mexico

²¹ Pêcheux (1980) " Les enfants et les grands espaces", L'année psychologique.

²² Acredolo L. (1981) Small- and large-scale spatial concepts in infancy and childhood. Spatial representation and behavior across the life span. Academic Press

Nous nous excusons auprès de nos lecteurs de reporter ci-après de longs extraits, traduits par nos soins, de la thèse de G. Galvez, inaccessible à l'heure actuelle. La nouveauté du point de vue, la reprise du vocabulaire dans beaucoup d'études et les critiques que nous serons amenés à y porter nécessitent cet exposé détaillé.

B. Les résultats

1. Sur le problème de G. Galvez

Les moyens envisagés par la municipalité pour remédier au problème étaient du type "code de la route", ensemble de prescriptions à respecter, dont il suffirait de communiquer la liste aux enseignants, assortie de quelques commentaires.

Les conclusions de ce travail ont mis en évidence la complexité des questions de déplacement et d'orientation dans la ville. L'étude a montré que le problème ne pouvait pas être réduit par le type de moyens envisagés, et que sa résolution nécessitait une véritable prise de conscience des modes de repérages spontanés de chacun (y compris des enseignants), accompagnée de la mise en oeuvre de situations d'enseignement où les élèves pourraient construire et adapter de nouveaux moyens plus efficaces (construction et usage de plans), sans parler des autres moyens de recours dans une ville (demande d'information).

2. Des modèles conceptuels différents selon des espaces de taille différentes

En s'appuyant sur l'analyse de la différence des limitations apportées par le milieu à la saisie et à la gestion des informations pertinentes, dans les situations courantes caractérisées par leur fréquence de rencontre, Brousseau et Galvez distinguent trois valeurs de la variable "taille" de l'espace avec lequel le sujet entre en interaction. Ils nomment micro-espace, méso-espace et macro-espace les trois espaces ainsi déterminés par la taille et prévoient qu'il leur correspond trois représentations différentes de l'espace.

Brousseau (1983) décrit une méthode pour mettre en évidence ces représentations. Il propose de montrer que les connaissances que le sujet manifeste sous forme de modèles implicites, de schèmes d'action, de formulations particulières, en réponse à des questions judicieusement choisies sont :

- d'une part, pour certains concepts, et à l'intérieur d'un même concept, différenciées en "conceptions²³", chacune liée à une famille de problèmes correspondant à des interactions spatiales différentes. Il y a ainsi plusieurs conceptions de la longueur, ou de "l'objet".

- d'autre part regroupées en "représentations", selon la taille de l'espace, car fonctionnant ensemble dans le même type de situations. Ainsi, dans le micro-espace, il y a des relations entre une conception de la longueur et une conception de l'objet...

Ces relations impriment aux conceptions correspondantes une structure qui justifie leur regroupement en représentations. L'élève peut ainsi avoir des rapports spatiaux selon plusieurs modèles, hétérogènes, reliés ou non, selon la taille des objets avec lesquels il entre en relation.

Si cette hypothèse est confirmée, nous aurons à étudier les conséquences sur l'apprentissage, d'un enseignement de l'espace et de la géométrie qui se limite au micro-espace.

²³ au sens préconisé par Artigue (1991) à la fin de son article.

3. Types d'interaction entre le sujet et le milieu permettant de différencier les trois familles.

a) Du côté du sujet ,

Outre l'influence des motivations du sujet, les interactions dépendent :

- de ses possibilités effectives d'exploration, donc de sa mobilité relative au milieu, de la portée des déplacements dont il est capable ou dont il veut user.
- des sens qu'il peut ou non mobiliser pour cette exploration : vue, toucher, éventuellement ouïe et odorat...

Les limitations apportées à la vision²⁴ et le coût des déplacements constituent deux facteurs de différenciation de ces interactions.

b) Du côté du milieu

Brousseau et Galvez classent les milieux en trois grandes catégories, qui ne regroupent pas tous ceux qui seraient possibles mais ceux qui, pour la plupart des gens évoluant dans une société urbanisée sont déterminants notamment par leur fréquence. Rappelons qu'ils nomment ces catégories : micro-espace, méso-espace et macro-espace.

1) Le micro-espace ou espace des interactions liées à la manipulation des petits objets²⁵

"Les interactions supposent seulement la mobilité manuelle du sujet, elles font intervenir le toucher et la vue.

Toutes les limitations de la vue peuvent être annulées par un déplacement de l'objet, et les déplacements des objets peuvent s'effectuer quasi instantanément, sous le contrôle continu de la vue. Ils ne nécessitent donc aucune conceptualisation"²⁶.

"Le micro-espace est le secteur de l'espace proche du sujet, et qui contient des objets accessibles à la vision comme à la manipulation. Dans ce secteur, le sujet peut bouger l'objet ou bien se mouvoir lui-même dans n'importe quelle direction. Le jeu des déplacements du sujet et de l'objet permet de rétablir n'importe quelle perspective, moyennant les inversions et les compensations des transformations antérieures. Puisque toutes les positions relatives entre le sujet et l'objet sont également possibles et faciles à obtenir, la perception de l'objet peut se caractériser comme exhaustive.

La quantité et la précocité de ces informations permettent de caractériser l'interaction sujet-objet dans le micro-espace comme de forte densité informationnelle. Le sujet contrôle pleinement ses relations spatiales avec l'objet... Bien qu'une description détaillée des mouvements utilisés dans la manipulation d'un objet du micro-espace soit extrêmement complexe, l'exécution d'une telle manipulation est assez simple pour le sujet.

Le coût faible de la réalisation des actions a pour conséquence que les relations avec l'objet se maintiennent à un niveau pragmatique... Le micro-espace se constitue en un domaine si familier au sujet qu'il ne lui pose pas de problème. Ce n'est pas le lieu d'événements énigmatiques qui nécessiteraient d'être expliqués... Le sujet n'a besoin, pour sélectionner une action déterminée, ni de faire une anticipation précise de ses effets, ni de coordonner à l'avance des séquences d'actions.

La perception immédiate de l'effet permet de corriger très vite l'action. La conceptualisation, la théorisation, tous les processus inhérents à la construction intellectuelle, manquent de sens... Dans le micro-espace, le sujet

²⁴ modalité majeure de la saisie des informations selon Vurpillot (1972), Le monde visuel du jeune enfant, P.U.F, p. 295

²⁵ selon la formulation de Brousseau (1983)

²⁶ Galvez (1985), Traduction Salin. Le texte traduit est présenté dans un caractère spécial.

établit ses relations avec l'objet indépendamment de celles qu'il développe avec le reste de l'espace,... il peut donc considérer l'objet d'une manière égocentrique...

On peut considérer que le micro-espace est l'espace de l'objet en face duquel se situe le sujet, mais du dehors. Pour exercer son action sur l'objet, le sujet n'a pas besoin de structurer l'espace en tant que contenant; il suffit de le considérer comme une périphérie de l'objet, et qui va être engendrée au fur et à mesure que celui-ci se déplace... Les propriétés spatiales que le sujet distingue sont attribuées directement à l'objet, de sorte que c'est lui qui donne sa cohésion au micro-espace.

Le sujet n'a pas besoin de considérer des dimensions différentes de l'espace, puisque toutes sont équivalentes en relation avec son exploration de l'objet. En fait, les objets sont perçus et traités comme tridimensionnels, mais cette propriété est attribuée seulement à un niveau factuel, non conceptuel. De même on peut observer la prise en compte des longueurs, et non celle des distances, qui peuvent seulement apparaître comme propriétés d'un espace situé entre les objets, qui, au niveau du micro-espace, "n'existe" pas."

2) *Le méso-espace*

Brousseau (1983) en a proposé la définition suivante : C'est "l'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet".

Pour Galvez, "C'est l'espace des interactions liées à la détermination et à la modification des positions à l'intérieur d'un domaine de déplacements domestiques, comme aux mouvements du sujet à l'intérieur des limites de ce domaine... C'est une partie de l'espace accessible par une vision globale, obtenues à partir de perceptions successives, mais de durées minimales. ...C'est l'espace que contient un immeuble, qui peut être parcouru par un sujet, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur.

Le milieu offre des limitations à la vision simultanée des éléments spatiaux faisant l'objet de l'intérêt des sujets : il y a plusieurs pièces, et ces pièces sont séparées par des murs (ou planchers-plafonds) qui empêchent toute vision simultanée de l'ensemble.

Les déplacements à l'intérieur de cet espace sont rapides et peu coûteux. Par ailleurs, la vision dans une même pièce ne permet de contrôler simultanément que les objets situés à l'intérieur d'un certain angle, mais des raccordements de ces vues peuvent être constitués quasi instantanément en tournant la tête.

Enfin, les objets ne sont pas déplaçables facilement par le sujet, il doit constamment annuler mentalement l'effet de ses déplacements pour reconnaître objets et lieux. Comme ses déplacements modifient les relations spatiales par lesquelles le sujet effectue la reconnaissance des objets dans le micro-espace (forme et taille), il est contraint de tenir compte d'éléments nouveaux : le point de vue et les distances. Le toucher n'intervient plus qu'au niveau des rapports entre le sujet et le sol.

Dans le méso-espace, puisque les objets demeurent fixes, ils fonctionnent comme des points de référence pour le sujet (ex : les meubles, les portes, les murs) tandis que le sujet peut se déplacer mais avec des restrictions qui sont dérivées des conditions suivantes :

La position érigée du sujet, qui génère une expérience différente suivant les directions horizontale et verticale. Ces directions forment la base de l'organisation du méso-espace qui se constitue comme un espace non isotrope.

La nécessité d'accommoder les déplacements en fonction de la localisation des objets.

Il résulte de là des trajets obligés comme ceux déterminés par les corridors, les escaliers, qui impliquent la différence entre les espaces vides et pleins.

On peut dire que le méso-espace est l'espace des déplacements du sujet. L'expérience est limitée aux points de vue que l'on peut obtenir à travers les déplacements possibles du sujet maintenant sa position verticale. Cela ne signifie pas qu'il lui est impossible d'adopter d'autres perspectives, mais que le recours à celles qui ne sont pas usuelles ne contribue pas significativement à la structuration du méso-espace.

Pour élaborer une conception globale du méso-espace avec lequel il interagit, le sujet doit intégrer et coordonner les différentes perspectives qu'il obtient au fur et à mesure qu'il se déplace. Ces perspectives ont des parties communes qui correspondent à des perceptions successives obtenues sur de petits intervalles de temps.

Cette proximité temporo-spatiale facilite la construction d'une représentation unique du méso-espace par une espèce de juxtaposition ou ajustement des représentations partielles.

Les déplacements sont plus coûteux dans le méso-espace que dans le micro-espace. De là surgit la nécessité de construire une représentation intellectuelle du méso-espace qui rend possible pour le sujet l'orientation de ses déplacements

Le processus de construction d'une vision d'ensemble dans le méso-espace se produit spontanément en fonction du besoin pratique qu'a le sujet d'orienter ses déplacements dans un environnement de cette taille.

Bien que la conceptualisation soit implicite, on peut la détecter au travers du comportement du sujet.

Comme le sujet est immergé dans le méso-espace, il lui est nécessaire de se décentrer pour construire une représentation unique de cet environnement, à l'intérieur duquel il doit situer sa propre position. Le méso-espace se construit comme un contenant homogène des objets qu'il inclut, doté de propriétés spécifiques. Pour organiser ses déplacements dans le méso-espace, le sujet a besoin de l'orienter, lui attribuant trois dimensions par rapport à un système de références fixe. Bien entendu, ... les distances entre les objets prennent une pertinence dont elles manquent dans le micro-espace. Les angles sont très importants puisqu'ils sont à la base de changements de perspective très économiques qui correspondent aux rotations du sujet...qu'il peut effectuer en remuant seulement la tête."

3) *Le macro-espace urbain²⁷ ou l'espace des trajets dans la ville.*

La vue qui, dans le micro-espace, permet un contrôle complet, continu et quasi instantané sur la totalité du domaine spatial avec lequel le sujet interagit, ne permet plus ici que le contrôle d'une petite partie de l'espace d'interaction, celle qui est autour du sujet et qui par conséquent varie tout au long de son déplacement.

Comme l'exprime Pêcheux (1980), "lorsqu'on est immobile, la référence à soi-même selon un système de coordonnées polaires est une référence fiable, car fixe; lorsqu'on se déplace, la référence à soi-même n'est utilisable qu'associée à un système de référence externe."

Le macro-espace urbain "correspond à un secteur de l'espace dont la dimension est telle qu'on peut l'embrasser seulement par l'intermédiaire d'une succession de visions locales, séparées entre elles par les déplacements du sujet sur la surface terrestre.

Dans le macro-espace il est impossible pour le sujet d'obtenir une vision globale simultanée du secteur de l'espace avec lequel il est en interaction, à moins de s'élever dans l'air, expérience qui se produit trop peu souvent pour pouvoir structurer l'espace terrestre... Les objets restent fixes, c'est le sujet qui se déplace. Pour orienter ses déplacements il doit construire une représentation globale du macro-espace reliant ses visions partielles pour récupérer la continuité de l'espace parcouru.

La conceptualisation est indispensable pour construire une image de l'ensemble inaccessible à la perception directe.

Il est possible de distinguer grosso modo trois types de macro-espace : l'urbain, le rural et le maritime. Dans le macro-espace urbain ou rural, il existe une multiplicité d'objets qui peuvent être utilisés par le sujet comme des points de référence pour structurer sa représentation. La possibilité de les utiliser dépend autant des possibilités spécifiques du secteur considéré que de l'expérience antérieure du sujet...

A la différence de ce qui se passe dans les deux autres, dans le macro-espace maritime, en particulier celui qui correspond à la navigation en haute mer, ... c'est la connaissance par le sujet de la structure de l'espace qui régit

²⁷ Il est évident que dans une civilisation forestière, rurale, maritime ou du désert, la saisie et le traitement sont différents de ce qu'elles sont dans l'espace urbain; on pourrait ainsi considérer plusieurs types de macroespaces.

la prise de décision; et la rétroaction s'obtient seulement à la fin du voyage, selon que l'arrivée a lieu ou non à l'endroit prévu...

Ceci correspond à l'hypothèse générale selon laquelle la nécessité de conceptualiser est d'autant plus forte que la densité informationnelle est plus faible. Moins le sujet a de points de référence à sa disposition, plus il a besoin de recourir à une théorie pour prendre ses décisions...

Aussi, bien qu'il y ait des sujets...qui acquièrent spontanément la capacité de maîtriser leurs déplacements dans le macro-espace, il y a une partie importante de la population tant en milieu rural qu'urbain et côtier, qui a besoin d'interactions explicites et éducatives pour apprendre à se déplacer de manière autonome dans un environnement de cette dimension.

Pour des besoins pratiques, le macro-espace peut être organisé comme un espace à deux dimensions, celles qui suffisent pour l'orientation des déplacements du sujet. Les variations d'altitude sont perçues, particulièrement lorsque le déplacement est impulsé par la force propre du sujet, mais elles ne modifient pas qualitativement la structuration de l'espace, dans lequel les directions de base correspondent au tracé de deux axes perpendiculaires sur le plan.

Dans le macro-espace, les objets entretiennent des relations spatiales réciproques comme par exemple la contiguïté de deux édifices. Le sujet prend conscience de ces invariances et recourt à elles pour restructurer ses représentations en coordonnant les différentes perspectives qu'il obtient en s'approchant d'un même lieu depuis des directions différentes; mais il a perdu quelque chose dont il disposait dans le méso-espace : la possibilité de visualiser quasi simultanément les objets autour desquels il se déplace.

Bien qu'ils ne soient pas visibles de manière permanente dans le macro-espace urbain ou rural, les objets continuent à exister et peuvent servir de points de référence quand le sujet arrive en face d'eux. Dans l'espace maritime l'espace et les points de repère doivent être complètement intellectualisés.

Le macro-espace apparaît comme isotrope. Le sujet doit l'orienter en y introduisant des directions. La première orientation consiste à projeter son système de référence corporel (avant-arrière, droite-gauche), mais puisque ce système varie à mesure que le sujet tourne, il doit être coordonné avec un système de références externe au sujet, dans lequel les directions sont invariantes quand le sujet change d'orientation."

Galvez rassemble les différents caractères de ces espaces dans le tableau suivant :

Micro-espace	Méso-espace	Macro-espace
Proche du sujet Accessible à la manipulation et à la vision	Accessible à une vision globale, presque simultanée.	Accessible seulement à des visions locales. La vision globale doit être construite de manière intellectuelle.
Tous les déplacements du sujet et de l'objet sont possibles : il y a une perception exhaustive de l'objet	Les objets, fixes, fonctionnent comme points de référence, perceptibles seulement depuis certaines perspectives. Les déplacements du sujet sont limités par la disposition des objets. L'espace est différencié en fonction des pleins et des vides.	Les objets sont fixes, fonctionnent comme points de référence, mais une partie seulement est sous le contrôle de la vue.

<p>Forte densité informationnelle pour le sujet :</p> <ul style="list-style-type: none"> - contrôle empirique des relations spatiales - pas de besoin de conceptualiser 	<p>Par rapport au micro-espace, moins de densité informationnelle, coût plus élevé des actions.</p> <p>Un certain niveau de conceptualisation est nécessaire pour intégrer et coordonner des perspectives différentes.</p>	<p>Trois types de macro-espace correspondant à des niveaux de densité informationnelle décroissante : urbain, rural, maritime.</p> <p>La conceptualisation est indispensable pour reconstruire la continuité de l'espace et obtenir une représentation globale.</p>
<p>Le sujet est à l'extérieur de l'espace, centré sur sa perspective</p>	<p>Le sujet est à l'intérieur de l'espace, il a besoin de décentrations.</p>	<p>le sujet est à l'intérieur de l'espace, a besoin de se décentrer pour intégrer et coordonner des perceptions fragmentaires.</p>
<p>L'espace est généré autour de l'objet.</p> <p>Des propriétés spatiales sont attribuées à l'objet : longueur, trois dimensions.</p> <p>Il n'y a pas besoin de système de référence.</p>	<p>L'espace est considéré comme un contenant homogène des objets.</p> <p>Propriétés de l'espace vide : il est étendu (distances), il a trois dimensions et n'est pas isotrope.</p> <p>Nécessité de coordonner sous le contrôle continu de la vue, le système de référence du sujet avec un système de référence fixe.</p>	<p>Espace comme contenant construit intellectuellement.</p> <p>Propriétés de l'espace : étendue, trois dimensions, Espace isotrope.</p> <p>Pour s'orienter, nécessité de coordonner le système de référence du sujet avec un ou plusieurs autres, externes, fixes.</p>

IV. DES ESPACES (micro, méso, macro) AUX RAPPORTS SPATIAUX

La mise en évidence du méso-espace a constitué l'un de nos projets initiaux, et nous y avons consacré une part importante de notre travail expérimental. Ce travail expérimental a été le moteur de l'évolution que nous avons fait subir aux concepts de Brousseau et Galvez.

A. Première étude expérimentale

1. Comment apporter la preuve de l'existence des micro-, méso-, et macro-espaces?

Brousseau (1983) a proposé plusieurs méthodes pour éprouver l'existence des micro-espace, mésoespace et macroespace.

Parmi celles-ci, nous avons retenu la suivante :

Pour caractériser les diverses conceptions d'un concept mathématique, on étudie la variation des stratégies utilisées par les élèves dans différentes situations sous l'effet de la variation des valeurs d'une variable commune, ici la taille.

Si, dans ces différentes situations relevant d'un même concept, le rectangle par exemple, les stratégies des élèves changent autour des mêmes valeurs de la taille des côtés, on dira que les bornes ainsi déterminées définissent des intervalles de meilleur fonctionnement de conceptions distinctes du rectangle.

Si, de plus, on peut déterminer, relativement à la taille, les mêmes intervalles pour plusieurs concepts mathématiques (rectangle, cercle, parallélisme, par exemple), on essaiera d'expliquer ces coïncidences par l'existence, dans chaque intervalle, d'une représentation liant les conceptions.

2. Détermination de l'expérimentation²⁸

Cette méthodologie suppose que l'on ait pu déterminer par une étude théorique préalable des hypothèses relativement précises et sûres relativement :

- aux variables pertinentes; c'est ici le cas : la taille
- à une estimation des intervalles qui détermineraient les conceptions : Brousseau (1983) a proposé des intervalles précis.

Avançons dans la mise en oeuvre.

a) Choix des concepts mathématiques :

Il nous a fallu choisir un premier concept. Nous l'avons voulu familier pour la population visée, l'école élémentaire. Le caractère didactique de notre visée, nous appelle à éclairer les relations éventuelles entre une hétérogénéité des conceptions spatiales d'élèves et certains problèmes de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire et notamment à l'école primaire. Ce sera le rectangle.

Le rectangle est "naturellement" riche de relations avec d'autres concepts comme le parallélisme, la perpendicularité, l'angle droit, le segment, la longueur, voire les symétries en fin de scolarité élémentaire²⁹.

b) Choix des valeurs de la variable taille

Il s'agit là d'un choix essentiel, et Brousseau propose des indications suffisamment précises pour permettre de mettre en oeuvre la méthode décrite : les petits objets manipulables pour le micro-espace, entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet pour le mésoespace.

Laissant de côté le macrospace, nous avons cherché à cerner le mésoespace par différenciation du micro-espace.

La nature des situations choisies va contraindre les valeurs précises de la taille à l'intérieur des intervalles déterminés à priori.

c) Choix des questions

A la notion de rectangle peut être associé un ensemble de situations ou questions.

Celles-ci devront être conçues de telle manière qu'une bonne réponse à chacune d'entre elles devra nécessiter des choix et la mise en oeuvre par l'élève d'au moins un ensemble de propriétés caractéristiques du rectangle.

²⁸ La description complète de l'expérimentation et de ses résultats figure en partie C-3. La description faite ici est réduite au minimum nécessaire à la compréhension.

²⁹ du moins est-ce là un des objectifs assignés par les textes officiels à l'enseignement de la géométrie qui y est dispensée

1) *Rapports évoqués ou effectifs?*

Peut-on se contenter de situations évoquées ou faut-il organiser le rapport réel des élèves avec elles ?

Si on évoque une situation, le langage social a pour principal effet d'assurer l'homogénéité de la conception. Il risque donc de masquer l'existence chez le sujet d'une diversité de conceptions, et cela d'autant plus que la situation évoquée ne relève pas des questions de la vie courante des sujets. L'évocation n'est-elle pas alors une invitation didactique à traiter la question sur le mode de l'assimilation à d'autres situations, en libérant le sujet de la responsabilité de ces transferts?

Un autre aspect nous semble plus décisif : dans tous les cas, faudra-t-il se baser sur l'observation du premier modèle investi par les élèves, ou sur le choix du modèle après au moins un essai? Le premier modèle investi semble mieux traduire une "conception spontanée", qu'une adaptation. Mais la question didactique sous jacente à notre étude est l'existence de difficultés importantes voire d'obstacles³⁰ dus aux conceptions spatiales. Nous opterons donc pour l'identification du modèle du premier essai, et de celui retenu pour le deuxième essai, ce qui exclut la situation évoquée qui ne permet pas de rétroaction de la situation.

2) *Invariance de la question sous l'effet de la taille :*

C'est là, la plus grande difficulté que nous ayons rencontrée. Il s'agit de construire une suite de situations dont chacune puisse être proposée dans les différents intervalles de la taille.

Or, il n'est pas courant de se poser la même question dans des contextes aussi différents que ceux qu'impose la variation prévue de la taille. Par exemple, la reconnaissance d'un rectangle est immédiate au niveau d'un petit objet courant, elle l'est moins pour un terrain de sport. Cela signifie que dans le premier contexte, il n'y a pas de problème, c'est "évident". La plupart des questions ne prennent leur sens qu'au niveau d'un intervalle assez restreint.

Nous voulons de plus que les modèles de meilleure efficacité d'un intervalle à l'autre puissent être différents lorsque dans une situation, on fait varier la taille.

a) La stratégie optimale pour une valeur de la variable est bloquée "naturellement" pour l'autre.

C'est la situation la plus courante, celle qui motive le plus nettement la modélisation de l'espace.

Par exemple, "joindre deux points par une ligne droite" :

- (1) sur une feuille de papier
 - (2) d'une pièce à une autre séparée par une cloison (par exemple pour prévoir la position ou la longueur d'une canalisation, ou encore, pour creuser un tunnel en partant des deux côtés).
- Les stratégies visuelles, ou d'utilisation d'une règle, optimales sur la feuille de papier, sont bloquées dans le second cas.

Les choix différents de stratégie sont ici imposés par la situation, et non le fait du sujet.

Si la situation (2) se traduit par le blocage de l'élève qui sait résoudre la situation (1), on ne pourra donc rien conclure relativement à une différence de conception de l'alignement développée par le sujet.

³⁰ au sens de Duroux, 1983, "La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure", Petit x N°3.

b) Le changement de taille dans la situation maintient réalisables les mêmes stratégies, tout en modifiant leur facteur d'efficacité.

Nous avons choisi ce type de situation, où la décision de changer ou non de stratégie conceptuelle dépend du sujet. Il ne faut cependant pas sous-estimer l'effet par exemple des outils : de manière générale, l'augmentation notable de taille, lorsqu'il ne vide pas de sens une question, impose au moins des outils différents pour agir sur l'espace, outils dont la connaissance n'est développée ni dans l'école, ni dans la vie ordinaire de l'élève citoyen.

Si un sujet qui sait résoudre (1) ne sait pas résoudre (2), l'interprétera-t-on :

- comme l'effet de la méconnaissance d'outils qui permettent d'étendre la démarche de solution d'une situation à l'autre?

- comme la manifestation d'une hétérogénéité de la conception de l'espace?

3) *Validation pragmatique ou non?*

Le choix de se placer dans un autre espace que le micro-espace risque d'avoir une incidence sur une propriété importante : l'existence ou non d'une validation pragmatique.

Reproduire un peu plus loin un terrain de sport identique à un terrain donné, ou comparer deux terrains ne peut admettre de preuve pragmatique par superposition. Les preuves disponibles sont alors :

- soit la référence à une définition implicite mise en oeuvre dans l'activité (c'est la solution la plus immédiate).
- soit la vérification d'autres propriétés (diagonales de même longueur, etc.).

4) *Détermination des situations d'observations*

Les observations ont été de type clinique, en dehors de la classe, ne faisant intervenir qu'un ou deux élèves et l'observateur.

Les problèmes choisis ont été de type "problèmes de construction", où la même question est posée pour les différentes valeurs de la taille, où la situation maintient réalisables les mêmes stratégies, tout en modifiant leur facteur d'efficacité.

Nous avons décidé d'effectuer une étude préalable à partir du problème "Rectangle", étude qui déboucherait sur la construction d'une situation d'observation impliquant un nombre important d'élèves.

En voici l'énoncé : Deux sommets d'un rectangle étant marqués, il s'agit de marquer au sol la position des deux autres. Ce problème a été posé, en dehors de la classe, à quelques paires d'élèves de CM2, en faisant varier certains paramètres (taille, rectangle désigné comme tel à construire ou déterminé par des objets "culturellement" connus comme rectangulaires).

3. Résultats principaux de l'expérimentation

a) *Le problème "Rectangle "*

Les élèves interrogés (13) sont principalement de bons élèves ou des élèves moyens de CM2. Ils ont passé l'une après l'autre dans l'ordre de taille décroissante deux ou trois des épreuves suivantes.

1) *Grande taille (9m sur 7m) :*

La désignation par le terme de rectangle ou par un dessin ne produit pas de différence notable.

Les propriétés suivantes du rectangle sont référées à la situation scolaire et contrôlées : longueurs des côtés et, pour deux groupes de bons élèves, des diagonales. Pour l'angle droit, le contrôle est soit corporel (plusieurs modalités) ou par l'équerre (souvent mal maîtrisée) ou inexistant.

La déclaration de fin de réalisation s'appuie sur le contrôle des longueurs, celui des côtés ou souvent des diagonales, parfois des angles.

Par contre, les propriétés contrôlées n'entraînent pas toujours la conviction sur l'adéquation entre le résultat et l'objectif visé. Deux exemples recueillis :

- "Je ne suis pas convaincu, il faudrait aller au deuxième étage et regarder".
- "Mais peut-être qu'il y a des figures avec quatre angles droits et qui ne sont pas des rectangles".

Le vocabulaire spatial spontanément utilisé par les élèves pour coordonner leurs actions s'est révélé mal adapté et très ambigu, en particulier pour le terme "droit".

2) Taille moyenne (1m sur 2 environ)

La désignation par le nom de l'objet (table) n'a été proposée qu'à 1 groupe, qui a négligé l'angle droit, seule la relation de longueur entre les côtés a été prise en compte.

La désignation par le terme de rectangle a été proposée à trois groupes. Ils ont tous pris en compte les angles droits, mais l'usage de l'équerre n'est pas maîtrisé par 2 groupes sur 3 (visée sur un seul côté).

Le vocabulaire est mal maîtrisé, comme pour la grande taille, mais l'action est plus rapide.

3) Petite taille (travail individuel sur feuille)

Les angles sont réalisés à l'oeil, seules les longueurs sont bien contrôlées à l'instrument. La réussite est de meilleure qualité.

4) Conclusion :

Nous n'avons pas noté de différence stable entre les stratégies mises à l'oeuvre dans la construction pour les valeurs moyenne et grande de la taille.

Le travail a demandé pour chaque groupe un temps important (environ 1 heure, et parfois plus) sans toujours permettre d'aller au bout. Les situations sans validation empirique ne débouchent pas souvent sur une interrogation spontanée des élèves relativement à l'adéquation de leur travail à la prévision. Le contexte scolaire étant appelé par la consigne : "construire un rectangle", nous ne savons pas si les réponses ne sont pas biaisées par une didactification difficile à contrôler par l'observateur.

5) Contraintes retenues pour la situation d'expérimentation

Le travail d'exploration mené sur les situations du rectangle nous ont conduit à faire les choix suivants pour les situations expérimentées.

- assurer une validation empirique et ainsi éviter, autant que faire se peut, de voir les réponses biaisées par une didactification incontrôlable.
- raccourcir le temps de résolution, tout en permettant plusieurs tentatives.
- maintenir la variable d'orientation "oblique" par rapport aux repères extérieurs, ce qui permet d'observer le recours effectif aux relations entre les directions internes à la figure.

b) Le problème "Bancs "

a) Enoncé

Un banc est un objet allongé, muni de pieds dont nous ne considérerons que ceux situés aux extrémités. La forme du quadrilatère déterminé au sol par les pieds est un rectangle. Il est présenté aux élèves dans une position initiale.

Dans un autre lieu, l'expérimentateur détermine³¹ la position des deux premiers pieds (situés à une même extrémité du banc) de façon à ce que le rectangle des pieds fasse un angle d'environ 45° avec les directions privilégiées par le cadre (murs ou bords de la feuille). Le

³¹ En fait, seule la zone où devait se trouver les pieds était fixée par l'observateur, sous forme d'une ellipse très aplatie. Ainsi, la direction et la position des pieds étaient bien contrôlés.

problème posé à l'élève revient à prévoir et à marquer au sol la position que prendront les deux autres pieds du banc lorsqu'on l'aura déplacé. (Annexe 1)

La vérification se fait par pose du banc sur les traces. Il y a réussite si les pieds touchent les traces. En cas d'échec, il est demandé à l'élève d'en expliciter les causes et de dire ce qu'il faut modifier dans la réalisation de la tâche pour la réussir sans tâtonnement.

Les valeurs de la variable taille ont été fixées d'une part à celles d'un banc scolaire (environ 200cmx40cm), posé sur le sol d'une pièce, d'autre part à celles d'une planche de 40cmx5cm traversée par quatre clous, proches des extrémités et posée sur une feuille de papier.

b) Résultats et conclusion

Nous prévoyions que

- dans le premier essai l'espace de la feuille de papier pouvait induire l'investissement de procédures spécifiques habituelles à ce type de contexte : l'introduction de figures polygonales, la reconnaissance du rectangle, et le tracé des angles droits, ou même une reconnaissance visuelle directe.

- l'évaluation empirique, lors de l'épreuve papier, déclencherait des corrections sous le contrôle de la vue (procédure du micro-espace) plus fréquentes et efficaces que dans l'épreuve du grand banc où l'appel à l'équerre serait plus fréquent.

La comparaison des résultats obtenus sur deux populations d'élèves du CM2

- ne fait apparaître aucune différence significative entre la réussite aux deux épreuves,
- fait apparaître un taux d'échecs important dans les deux épreuves (50 % environ) même après un feed-back de la situation,
- ne fait pas apparaître de différence entre les stratégies utilisées pour l'une ou l'autre épreuve.

Certes une seule épreuve aussi particulière ne permet pas de réfuter le rôle important de la variable taille de l'espace.

La similitude des résultats a cependant attiré notre attention sur la similitude des rapports entre le sujet et le milieu; ceux-ci ont été maintenus invariants par le principe de notre expérimentation, malgré le changement de taille de l'objet sur lequel portait le problème posé aux enfants. En effet, le grand banc, comme le petit, est un objet qui peut être vu " d'un seul coup d'oeil", déplacé sans difficulté réelle, éventuellement retourné.

D'où la question suivante qui s'est imposée à nous :

Les caractéristiques globales des rapports avec le milieu ne seraient-elles pas plus déterminantes que la taille en ce qui concerne les modes de traitement de l'espace par le sujet, et par conséquent les représentations?

Nous avons alors mis en doute la pertinence de la caractérisation des représentations par un milieu dont la taille serait le facteur déterminant, et par conséquent la pertinence des concepts de micro-espace, méso-espace, et macro-espace, si on les différencie par ce seul facteur. Par contre, nous avons donné plus d'importance aux contraintes portant sur les interactions possibles entre le sujet et le milieu, contraintes bien décrites par Galvez. Ainsi, par exemple, pour tracer un cercle avec les contraintes micro-spatiales, la méthode adaptée est de se servir d'un disque comme gabarit. Avec les contraintes méso-spatiales, cette démarche n'est pas pertinente.

B. De l'espace aux représentations pratiques de l'espace par la détermination des rapports spatiaux

1. Présentation de l'étude

Les travaux précédents nous ont conduits à reprendre l'étude à priori des rapports entre le sujet et le milieu naturellement développés dans une problématique pratique, selon des déterminations liées à la taille. Ces rapports sont caractérisés par leur fréquence de mise en oeuvre et par leur importance pour les sujets.

De manière plus précise, nous avons examiné quels rôles jouent les concepts géométriques de base dans la maîtrise de ces situations, c'est-à-dire jusqu'à quel degré leur conceptualisation est nécessaire pour résoudre les problèmes liés à telle ou telle famille d'interactions. Nous nous appuyons sur l'hypothèse que la conceptualisation apparaît quand l'activité sensori-motrice immédiate ne permet pas de résoudre le problème posé et que, suivant le type et l'importance des limitations opposées à l'action du sujet, les conceptualisations correspondantes peuvent être plus ou moins élaborées. Ainsi, il est possible qu'apparaissent des paliers dans l'élaboration d'un concept, auxquels correspondraient des schèmes³² et des conceptions propres à chacune des familles d'interactions.

Nous avons alors cherché à identifier à priori les représentations micro-spatiale, méso-spatiale et macro-spatiale, comme des classes de conceptions au sens préconisé par Artigue (1991). Nous présentons le résultat de ce travail au chapitre C-4.

Pour chacune des représentations³³, et pour les concepts géométriques qui nous ont paru les plus importants, nous avons tenté de cerner quelle conception, c'est-à-dire quel "point de vue sur ce concept" était développé par la résolution des problèmes posés par la famille de situations correspondante.

On pourrait objecter que l'expérience spatiale des enfants, dans notre culture, ne se résume pas à la solution des problèmes de vie courante appartenant aux trois familles : Le fait d'avoir été confronté même un petit nombre de fois, mais de façon très marquante, à d'autres types de situations peut les avoir conduits à élaborer des connaissances spatiales plus riches dont nous pouvons sous-estimer les effets dans nos interprétations. Dans la mesure où ces expériences seraient communes à une part significative de la population, il serait possible de compléter notre approche des conceptions spontanées par les caractéristiques ainsi dégagées.

³² selon la définition de Vergnaud (1991): "Appellons *schème l'organisation invariante de la conduite dans une classe de situations donnée*. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en acte des sujets, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire." RDM 10/2.3.

Il serait intéressant d'explorer ce que nous désignons par "représentation" à l'aide de la théorie des champs conceptuels. En effet, la notion de schème rend bien compte du fait qu'à chaque famille de situations, correspondent à la fois un mode de traitement aussi bien que des connaissances.

³³ malgré la polysémie de ce terme, utilisé par Brousseau, nous l'avons conservé; aucune des alternatives signalées par Artigue (modèle, conception) ne nous a paru mieux adaptée.

2. Extrait de l'analyse à priori relative aux concepts de longueur et de distance :

a) Longueur et distance microspatiales

Les objets sont de tailles différentes, propriété qui permet d'aider à leur reconnaissance, mais la comparaison des longueurs au cours de leurs déplacements n'a pas besoin d'être conçue pour la réussite des actions de manipulation : le contrôle continu par la vue suffit.

Cependant il existe une catégorie de situations où la longueur est l'outil de décision, même si son usage n'est qu'approximatif : le partage d'objets consommables (friandises ou desserts particulièrement) et ces contrôles sont l'objet de négociations sociales.

La distance ne se distingue pas de l'espacement. Le sujet agit constamment sur les distances entre objets, mais là encore, le contrôle visuel immédiat rend inutile la conception d'une mesure des distances.

b) Longueurs, distances, hauteurs, profondeur méso-spatiales

La variation des distances constitue le vécu constant des activités de déplacement : les distances, celles qui sont importantes pour le sujet, entre lui et son but, sont constamment variables. Mais la distance entre des lieux reste faible, eu égard aux possibilités du sujet, et de plus, elle est rarement objet d'anticipation : il n'y a pas souvent d'occasion de choix de parcours qui diminue de façon suffisante la distance pour qu'un contrôle conscient soit nécessaire.

La comparaison des distances n'a pas souvent l'occasion d'être sous le contrôle des sujets. Des activités ludiques comme la pétanque sont de bons exemples d'un tel contrôle qui, s'effectuant à l'aide de longueur d'objets ou de fils tendus, constituent une occasion d'homogénéiser les deux notions.

La profondeur d'un placard ou d'un meuble est mise en rapport avec les longueurs des objets que l'on y range.

Les dimensions des pièces relèvent de la double notion ; espacement entre deux murs, qui conditionne la longueur des meubles, et objet-mur muni d'une longueur et d'une hauteur qui matérialise ces espacements. La comparaison des distances entre lieux et des dimensions des objets immobiles du méso n'est pas l'objet d'anticipations fréquentes. Les expériences les moins rares sont celles de l'aménagement de l'espace par déplacement de meubles très difficiles à déplacer (semi-fixes), ce qui nécessite une modélisation. En général, les enfants n'en ont pas la responsabilité; et il faudrait savoir si l'expérience sociale la plus courante chez les adultes n'est pas encore celle du déménagement par essais-erreurs.

Les longueurs des meubles interviennent aussi comme contraintes aux trajets, contraintes déterminant des espacements entre lesquels on peut ou non facilement déplacer d'autres meubles comme des chaises, etc.. Par contre, la hauteur à laquelle sont placés des objets, sur lesquels se porte l'intérêt des sujets, va être perçue assez tôt.

En définitive, en ce qui concerne longueur et distance, la spécificité de l'expérience pratique méso-spatiale par rapport à l'expérience micro-spatiale est de faire exister une certaine notion de distance associée à celle de trajet et d'espacement. C'est dans le contexte méso-spatial que le rapport entre longueur et distance prend son sens : pour comparer la distance entre plusieurs objets, on compare les longueurs de fils tendus entre eux.

c) Longueur et distance macro-spatiales

Les informations sur les distances macro-spatiales sont fréquemment véhiculées par le langage particulièrement en km, en centaines de m ou en durées de trajet.

La prise en compte de la longueur d'un trajet fait partie de l'expérience courante, du fait de son coût en temps ou en fatigue.

C'est dans le contexte méso-spatial que le rapport entre longueur et distance a pris son sens. Cette conception se prolonge dans le macro-espace par la distance "à vol d'oiseau", mais dans beaucoup de situations, la longueur du segment qui relie les deux points n'est pas opératoire.

3. Conclusion

Ce bref exposé concernant longueur et distance, concepts fondamentaux tant pour la maîtrise de l'espace que pour celle de la géométrie, montre qu'ils n'interviennent pas avec la même nécessité dans les trois familles de situations. Nous faisons donc l'hypothèse qu'y correspondent, par exemple, trois conceptions différentes de la distance.

4. Homogénéisations de l'espace

Il est difficile pour l'adulte possédant un minimum de culture géométrique d'imaginer que d'autres ne puissent pas disposer d'un modèle homogène de l'espace : Il a fait sienne l'idée qu'il peut ne pas y avoir de différence entre un cube d'un mm. de côté et un immeuble de même forme, entre un espace "plein", comme un mur ou un pilier et un espace "vide" comme l'intérieur d'une pièce ; il a une pratique des graphismes d'espace qui lui permet d'utiliser un petit dessin pour élaborer la solution d'un problème qui se pose dans un espace de grande taille, ou de représenter de manière adéquate les parties vides ou pleines d'un objet technique par exemple. Il est capable de choisir parmi un ensemble de méthodes celle qui est adaptée aux conditions concrètes du problème auquel il est confronté.

Le problème est de savoir comment se développent ces compétences car l'expérience courante des interactions micro- et méso-spatiales³⁴ génère deux sortes d'hétérogénéité spatiale : celle liée à la taille, et celle liée à l'existence d'espaces pleins et d'espaces vides qui ne peuvent pas être traités de la même manière.

Bautier (1987, 1992, et projet de thèse) a étudié l'homogénéisation des pleins et des vides de l'espace. Pour lui, dans les interactions de type micro- ou méso-spatial, "les connaissances spatiales qui en sont le résultat, ne peuvent qu'enregistrer cette prédominance des pleins et ignorer le vide comme autre constituant de l'espace." L'homogénéisation ne peut se réaliser dans les situations communes d'exploration de l'espace, "elle nous semble toujours relever d'une attitude de théorisation de la réalité", attitude qu'il retrouve "du côté des découvertes techniques (stéréotomie, perspectives, dessins techniques et triangulation) ou savantes (les transformations géométriques, les modélisations mathématiques de l'espace)". Selon lui, l'enseignement doit contribuer à cette homogénéisation, et il étudie dans ce sens des didactiques des représentations graphiques d'espace : celle de la perspective conique, celle de la perspective cavalière et celle de la triangulation.

³⁴ les interactions macro-spatiales étant nettement plus rares, nous ne les prenons pas en compte pour l'instant.

En ce qui concerne l'homogénéisation au sens de la taille, nous pouvons nous demander si la structuration des connaissances pratiques de l'espace en conceptions différentes donne aux sujets, à elle seule, les moyens d'une représentation homogène de l'espace. Il est légitime d'en douter : chacune des conceptions a un domaine d'efficacité optimale, et les sujets sont-ils naturellement capables de transporter ces connaissances hors de ce domaine, si rien ne les y contraint? Pourquoi d'ailleurs le feraient-ils?

L'homogénéisation de l'espace au sens de la taille ne s'avère nécessaire que si la conception d'un espace homogène, c'est-à-dire dont les propriétés sont modélisable par les mêmes concepts, quelle que soit sa taille, est un moyen nécessaire ou seulement plus économique de résoudre des problèmes spatiaux. Elle se traduit par la possibilité de représenter un espace d'une certaine taille à l'aide d'un autre, de taille différente, permettant un traitement de l'information plus facile.

Or quelles situations peuvent conduire à cette nécessité? Celles dans lesquelles le sujet est soumis à des contraintes plus fortes que celles des actions micro- ou méso-spatiales, contraintes l'obligeant à différer son action, et à en anticiper les effets, c'est-à-dire celles dans lesquelles la problématique pratique ne suffit pas³⁵.

Les problèmes macro-spatiaux d'exploration de grands espaces en sont l'exemple le plus commun, puisque tout un chacun y est confronté, mais la plupart des situations professionnelles d'élaboration d'objets matériels fabriqués supposent cette conception homogène de l'espace. Leur recours nécessaire aux graphismes d'espace en est le signe.

Examinons, pour exemple, ce qu'apporte le fonctionnement d'une carte pour un déplacement macro-spatial dans un contexte urbain : Elle permet, grâce à une vision globale de tout l'espace dans lequel doit se développer le déplacement, de déterminer et de découper le trajet qui relie le but à l'origine, en unités pouvant être traitées par les compétences méso-spatiales du sujet.

De manière plus générale, l'homogénéisation réussie consisterait à se doter des moyens de ramener sur une feuille de papier tout problème spatial, de le résoudre dans cet espace, puis de savoir exploiter dans l'espace du problème la solution sur feuille³⁶. Le traitement du problème sur feuille est ainsi conditionné par les contraintes du problème spatial. Par exemple, si seuls des angles sont contrôlables dans l'espace du problème, il ne sera pas question de ne traiter la solution sur papier qu'à l'aide de longueurs sous prétexte que sur papier tout peut se contrôler par les longueurs.

Dans la géométrie, le problème de l'homogénéité ne se pose pas car, comme l'expliquent Chevallard et Jullien (1991)³⁷, il est maintenant établi, depuis Laplace et Carnot, que "tout système géométrique est le siège de phénomènes géométriques identiques quelle que soit l'échelle".

Ce pourrait donc être une des fonctions principales d'un enseignement de la géométrie que d'introduire, par l'approche modélisante, une homogénéisation de l'espace conçu, une disponibilité dans toutes les conditions spatiales des connaissances établies plus

³⁵ Comme Thalès évaluant la hauteur des pyramides

³⁶ Nous développons l'analyse d'un exemple au chapitre 7, "la situation des drapeaux". La résolution du problème posé fait intervenir les deux types d'homogénéité.

³⁷ Petit X n° 27 p.58

particulièrement dans certaines d'entre elles, une capacité à étudier ces problèmes en les transportant dans les conditions de la feuille de papier.

C. Nouvelle étude expérimentale

La centration sur les rapports spatiaux et les contraintes qui les limitent, que nous avons effectuée à la suite de notre première étude expérimentale, nous a conduit à concevoir autrement l'approche expérimentale de la mise en évidence des conceptions et des représentations.

1. Etude à priori

a) La recherche des situations à observer

Nous avons cherché à construire un problème qui ait du sens dans les trois familles de situations, et dont la solution, parce qu'adaptée à des contraintes différentes, ne fait pas nécessairement appel aux mêmes connaissances dans les trois modalités, même si elles relèvent du même "champ conceptuel". C'est-à-dire que nous avons renoncé à une contrainte que nous nous étions imposée dans la première validation expérimentale : "Le changement de taille dans la situation maintient réalisables les mêmes stratégies".

Dans quelles conditions alors, peut-on observer des comportements que nous pourrions attribuer spécifiquement à la représentation micro- ou à la représentation méso-?

Supposons que le problème soit posé dans ses différentes modalités à un sujet qui maîtrise les trois représentations : comme chacune d'elles est la plus économique³⁸ sur son domaine de situations, le sujet n'a aucune raison de renoncer par exemple à une stratégie relevant de la représentation micro-spatiale, face à une situation correspondante; il va donc développer des stratégies différentes et bien adaptées dont la constatation ne pourra pas nous servir à établir l'existence par exemple de représentation micro-spatiale : il aura seulement su choisir parmi ses connaissances celle qui lui permet de résoudre le problème au meilleur coût.

Par contre, si le problème est posé à un sujet,

1) dans les conditions de la représentation la plus élaborée, alors que nous supposons que ce sujet n'en dispose pas, nous pouvons faire l'hypothèse qu'il va investir la situation avec ses connaissances, dont la représentation la moins élaborée; nous pourrions observer s'il met en oeuvre une stratégie que nous pourrions attribuer à cette représentation, qui bien sûr ne lui fournira pas la solution, les erreurs qu'il fera, et la façon dont il s'adaptera aux rétroactions de la situation, si elle en comporte.

Si de plus, l'on fait l'hypothèse que les trois types de représentations spatiales se développent au fur et à mesure que l'enfant est confronté aux problèmes de ce type, la représentation micro-spatiale devrait se constituer la première, puis la représentation méso-spatiale, puis les représentations macro-spatiales.

Des difficultés significatives peuvent donc apparaître au moment où se constituent les représentations méso-spatiale ou macro-spatiales; un problème est de déterminer pour chaque concept le moment du développement où ces erreurs significatives peuvent apparaître. Nous n'avons pas étudié systématiquement cette question. Nous pouvons penser toutefois que la

³⁸ Rappelons qu'elles se forment dans une problématique pratique

représentation micro-spatiale se constitue très tôt, et que la représentation méso-spatiale est efficace, bien avant la fin de la scolarité obligatoire.

2) dans des situations qui ne relèvent spécifiquement d'aucune des classes correspondantes de situations mais qui se situent dans des milieux ayant certaines composantes de l'une ou de l'autre. Nous pouvons prévoir que le sujet, s'il ne maîtrise pas les connaissances qui fondent les solutions du problème, peut avoir recours à des stratégies qu'il utilise usuellement dans les problèmes posés dans un contexte semblable.

Puisque chacune des représentations demeure activable pour tous les sujets, le problème n'est pas nécessairement lié à leur âge : on doit pouvoir trouver des situations où quelqu'un, devant un problème spatial nouveau, met en oeuvre une stratégie inadaptée que nous pourrions attribuer à l'une des représentations pratiques spontanées.

b) Le cas micro-spatial

En conséquence, l'observation de comportements d'élèves relevant de la représentation micro-spatiale pourrait se faire en confrontant les élèves à :

- des problèmes qui peuvent être posés dans des conditions microspatiales et méso-spatiales : les stratégies et les erreurs des enfants peuvent être comparées dans les deux modalités.

- des problèmes ne se rapportant ni à l'une ni à l'autre catégorie mais présentant une des composantes contextuelles essentielles du micro : la taille des objets sur lesquels porte l'activité.

c) Le cas méso-spatial

De la même manière, l'observation de comportements d'élèves relevant de la représentation méso-spatiale pourrait se faire dans les deux conditions suivantes :

- en leur posant, à un moment donné de leur évolution, un problème macro-spatial, en étudiant leurs erreurs à la lumière de la représentation méso-spatiale et en voyant comment ils surmontent leurs difficultés.

- en leur posant un problème ayant certaines composantes contextuelles proches des situations méso-spatiales mais n'en relevant pas.

d) Remarque

Si l'on retient l'hypothèse de la détermination des représentations pratiques par les limitations naturelles apportées aux rapports spatiaux, certains groupes de handicapés peuvent être amenés à développer différemment ces représentations, par les limites apportées à leurs rapports spatiaux courants. Nous renvoyons le lecteur au travail en cours de C. Molina qui, étudiant l'enseignement de la géométrie pour des aveugles, est concernée par cette question. Ce type de handicap devrait à la fois limiter le développement de la représentation méso-spatiale et provoquer de la part des sujets des représentations macro-spatiales beaucoup plus développées. En effet, les conditions de déplacement des sujets dans le méso-espace pourraient relever des conditions macro-spatiales des voyants, où les sujets sont contraints de recoller des informations locales sous un contrôle exclusivement intériorisé. Les conditions de l'élaboration de certaines notions géométriques en devraient être significativement modifiées.

2. Observations réalisées et les travaux examinés

Pour un concept précis, le repérage de la position d'un ensemble d'objets, nous avons construit une situation expérimentale de comparaison entre conditions micro-spatiale et méso-spatiale (basée sur des problèmes d'énumération), et effectué des observations significatives à l'école maternelle.

Nous avons exploité par ailleurs les données fournies par d'autres travaux, dont nous prolongeons les analyses faites dans leur cadre d'origine.

Enfin, nous présentons ci-après en D-1 un ensemble d'observation d'erreurs repérées dans l'enseignement de la géométrie à partir de figures sur feuille de papier, qui constituent une autre source de résultats relative à la représentation micro-spatiale.

3. Résultats

a) *La représentation microspatiale*

1) Premier type d'observations : la comparaison des comportements des élèves lors de la résolution d'un même problème d'énumération dans des conditions micro et méso.

Cette étude a été faite dans une classe d'enfants de 4 ans.

Plusieurs situations d'énumération ont été proposées aux enfants, bâties autour d'un même jeu : le jeu des tire-lires.

Il s'agit pour l'enfant de placer un jeton et un seul dans chaque tire-lire d'une collection. Les tire-lires sont opaques, une fois le jeton à l'intérieur, il n'est plus visible. Selon les caractéristiques de la collection de boîtes (taille, disposition, possibilité ou non de les déplacer), l'action suppose un contrôle de type micro ou méso- spatial. Nous avons étudié différentes situations :

a) Enoncé des situations

i) Situation 1 : conditions micro-spatiales :

Devant l'enfant, sont disposées un tas de 20 boîtes d'allumettes percées d'un trou; à côté il dispose d'une autre boîte pleine d'allumettes. La consigne est de mettre une allumette et une seule dans chacune des boîtes. La stratégie attendue est de bien séparer au fur et à mesure de leur remplissage, les boîtes pleines des boîtes vides.

ii) Situation 2 : conditions méso-spatiales :

Un ensemble de 18 casiers, placés en 3 rangées superposées de 6 casiers chacune, de longueur totale 2,50 m. environ joue le rôle des boîtes aux lettres que l'enfant facteur doit remplir avec une lettre et une seule par boîte, lettre qu'il glisse par une fente telle qu'il ne peut pas voir ce qu'il y a dans chaque casier. La disposition des meubles est telle qu'il n'a pas accès d'emblée aux extrémités du meuble constitué par les casiers et que donc s'il le fait, c'est à la suite d'une décision de sa part. Les lettres sont dans une boîte posée sur un banc à côté des casiers.

Une stratégie adaptée aux conditions méso-spatiales de ce problème suppose de prendre des repères permettant de savoir à chaque instant quelles sont les boîtes déjà remplies et pour cela, le plus simple consiste à utiliser la structure quadrillée du meuble et à se déplacer soit verticalement soit horizontalement, en tenant la boîte contenant les lettres dans la main, et à les prendre sans quitter des yeux les casiers.

iii) Situation 3 : les conditions comportent à la fois des éléments micro-spatiaux et des éléments méso-spatiaux

Il s'agit toujours de mettre un objet et un seul dans chacune des boîtes d'un ensemble, mais cette fois ces boîtes sont petites, disposées en quadrillage, sous le contrôle de la vue, et indéplaçables. La stratégie efficace est la même que dans la situation précédente.

b) Résultats des observations :

Sur 27 enfants,

i) Dans la situation 1.

18 utilisent d'emblée une stratégie micro efficace, 2 sont encore en échec au 3ème essai.

ii) Dans la situation 2.

sur ces 18, 9 seulement réussissent au 1er essai, tous ont utilisé la structure quadrillée; les autres ont développé une stratégie de type "micro", en remplissant des blocs proches d'eux mais sans contrôler le raccordement de ces différents blocs. Au 2ème essai, 8 ont changé de stratégie et adopté une stratégie "mésospatiale". Après le 4ème essai, 4 enfants n'ont toujours pas réussi.

iii) Dans la situation 3.

13 enfants réussissent au 1er essai, la difficulté pour les autres est de contrôler là où ils en sont quand ils viennent de piocher un haricot en ayant quitté des yeux l'ensemble des tirelignes. Au 2ème essai, les progrès sont plus rapides que dans la situation précédente, (qui s'est déroulée auparavant)

En résumé, nous pouvons dire que, à 4 ans, presque tous les enfants maîtrisent convenablement un problème d'énumération posé dans des conditions micro-spatiales, mais que ce même problème, posé dans des conditions méso-spatiales, est nettement plus difficile, même si la majorité d'entre eux est capable de construire une solution adaptée par la prise en compte des repères suggérés par la situation elle-même.

2) Deuxième type d'observations : Problèmes dans l'espace graphique

Nous avons repris quelques problèmes de l'espace graphique étudiés par des psychologues.

Les interactions du sujet avec l'espace graphique comportent des caractéristiques bien différentes de celles qu'il entretient avec le micro-espace³⁹, en particulier en ce qui concerne les objets. Nous interprétons plusieurs types de comportements, concernant des enfants petits confrontés à des problèmes posés dans l'espace graphique, comme les résultats d'une "lecture micro-spatiale" des tâches à accomplir.

* Dans "l'épistémologie de l'espace", Vurpillot (1964) décrit une expérience sous le titre "la matérialité du tracé figural".

Elle formule ainsi deux hypothèses :

"La première hypothèse est la suivante : Un même dessin possède des propriétés bien distinctes lorsqu'il est considéré comme un objet matériel ou comme la marque d'un déplacement dans l'espace. Quand les figures perçues dans un dessin sont traitées comme des objets physiques, seules peuvent être effectuées sur ces figures des opérations possibles sur des objets..."

"La seconde hypothèse est que l'importance relative des deux aspects du dessin évolue avec l'âge : la matérialité prédomine chez le jeune enfant puis grâce au développement de l'activité perceptive, c'est l'autre aspect qui prend peu à peu la première place."

³⁹ nous renvoyons le lecteur au chapitre C-4 où nous avons approfondi cette question.

La validation expérimentale de ces deux hypothèses s'appuie sur l'analyse des erreurs faites par les enfants dans plusieurs tâches, dont nous extrayons celle-ci pour exemple :

Deux dessins complexes B et C (Annexe 2) sont présentés l'un après l'autre aux enfants. "Ils doivent dessiner successivement, sur le même exemplaire, un carré (avec un crayon bleu) puis un triangle (avec un crayon rouge)."

"A 4 ans, les réussites sont pratiquement nulles et il faut attendre 6 ans et demi pour qu'elles dépassent 50%."

"Les erreurs se répartissent essentiellement en deux catégories. Dans la plupart des cas, les enfants qui ont correctement reproduit la première figure (carré ou triangle) se refusent à repasser sur le trait déjà dessiné et répondent par une non-fermeture à la seconde figure. Mais un certain nombre d'enfants, surtout parmi les plus jeunes, ne savent pas à laquelle des deux figures, triangle ou carré, attribuer le segment commun, et faute de faire un choix, donnent deux réponses de non-fermeture."

Nous pensons pouvoir relier ces comportements à la représentation micro-spatiale dans laquelle seuls existent les objets. Leurs contours n'existent pas indépendamment d'eux; en particulier, un contour ne peut être commun à deux objets distincts, puisque c'est l'espacement entre les objets qui sert à les délimiter, ce qui dans la représentation graphique, se traduit par le théorème en acte ainsi formulé par Vurpillot : "un même trait ne peut appartenir à deux figures." ⁴⁰

* Nous rapprochons les résultats de Vurpillot d'observations que nous avons nous-mêmes faites à propos de la représentation graphique de la contiguïté : les enfants petits représentent deux cubes, qui se touchent par une face, par deux carrés séparés par un petit espace. La prégnance de l'existence d'un espace autour des objets se manifeste encore à 5-6 ans. Les enseignantes de grande section de l'école J. Michelet avaient remarqué que dans les tâches de découpage d'une forme dans une feuille à l'aide d'un gabarit, les enfants n'utilisaient jamais, le bord de la feuille, si la forme avait un bord droit, et plaçaient le gabarit en plein milieu, malgré leurs incitations à économiser le papier.

Nous avons placé ces élèves dans la situation suivante : Ils disposaient d'un grand rectangle de 12 cm sur 9, et d'un gabarit carré de 3 sur 3. Ils devaient découper le plus possible de carrés de cette dimension dans le rectangle, après les avoir dessinés sur la feuille. Bien sûr, dans le recueil des résultats, le contrôle de la taille des carrés découpés était pris en compte.

Les premiers essais aboutirent à un maximum de 4 ou 5 carrés dispersés dans la feuille, mais peu à peu des stratégies se mirent en place consistant à aligner les carrés et à diminuer l'espace entre deux dessins. Toutefois, seule une enfant a eu l'idée de dessiner les carrés en utilisant le bord de droite de l'un comme bord de gauche de celui qui lui était contigu et l'étonnement de ses camarades en voyant comment elle avait réussi à découper 12 carrés nous a montré combien ils étaient loin de cette démarche.

⁴⁰ Il semble que cette difficulté se prolonge au delà de l'enfance pour certains: Piaget (1964) écrit, à partir des discussions ayant suivi l'exposé de Vurpillot : "Libois pense que la difficulté à pouvoir rattacher une même ligne à deux figures différentes se retrouve jusque chez des étudiants de 18 ans et souligne le fait que des adultes non géomètres seraient plus proches des enfants..." L'obstacle constitué par la représentation micro-spatiale aurait donc la vie dure!

3) Conclusion

Nous avons rencontré d'autres exemples de comportements, attestés dans des recherches de psychologie, qui nous semblent significatifs d'obstacles liés à la représentation micro-spatiale.

Nous pourrions substituer à la seconde hypothèse⁴¹ de Vurpillot l'hypothèse suivante : C'est en rapport avec le développement de la représentation méso-spatiale que le dessin peut être considéré comme la marque d'un déplacement dans l'espace.

Un recensement systématique serait nécessaire pour s'assurer qu'il ne s'agit pas là de cas tout à fait marginaux et donc sans signification.

b) La représentation méso-spatiale

Nous proposons, au paragraphe C 1 b, deux types de situations à observer. Nous n'avons pu mettre en oeuvre le premier. Par contre, nous nous sommes interrogés sur l'origine possible des difficultés des élèves dans deux situations correspondant à des problèmes posés dans le méso-espace mais avec des contraintes plus fortes que les contraintes proprement méso-spatiales.

1) * *La programmation de la tortue de sol.*

La tortue Jaulin simule en partie les déplacements du méso-espace mais elle s'en différencie par le fait que les primitives de base dissocient le mouvement de rotation et le mouvement de translation, contrairement à ce qui se passe dans les déplacements "naturels". Pérès (1986) a étudié un certain nombre d'obstacles cognitifs que rencontrent les enfants de grande section d'école maternelle dans diverses situations de guidage de la tortue, en particulier dans des situations de programmation.

Citons-en quelques-uns :

- "la centration sur le but au détriment de l'itinéraire", qui se manifeste par exemple quand il faut programmer un déplacement d'un point à un autre, alors que l'axe de la tortue ne se superpose pas à la droite qui joint ces deux points. Dans la représentation méso-spatiale, du fait de la possibilité de contrôler visuellement le but du déplacement, les changements de direction n'ont pas besoin d'être conceptualisés. Les enfants de cet âge ont donc un lent travail de décentration à effectuer pour réussir.

- la difficulté à prendre en compte l'encombrement de la tortue lors de ses déplacements, pour contourner un obstacle ou atteindre un but par l'arrière. Là aussi, dans les déplacements méso-spatiaux, le sujet n'a que très rarement l'occasion de devoir anticiper les effets de son "envergure".

- "la répugnance des enfants à travailler avec la tortue en déplacement recule". Nous pensons que cette répugnance peut être liée à la rareté de ce mode de déplacement dans le méso-espace.

⁴¹ Rappelons les deux hypothèses : "La première hypothèse est la suivante: Un même dessin possède des propriétés bien distinctes lorsqu'il est considéré comme un objet matériel ou comme la marque d'un déplacement dans l'espace. Quand les figures perçues dans un dessin sont traitées comme des objets physiques, seules peuvent être effectuées sur ces figures des opérations possibles sur des objets..."

" La seconde hypothèse est que l'importance relative des deux aspects du dessin évolue avec l'âge : la matérialité prédomine chez le jeune enfant puis grâce au développement de l'activité perceptive, c'est l'autre aspect qui prend peu à peu la première place."

En conclusion, ces trois obstacles cognitifs nous apparaissent liés au fait que l'enfant utilise, pour guider la tortue, les schèmes qu'il a construits dans ses déplacements méso-spatiaux.

2) * *Le jeu des formes de couleur*

Nous présentons en détail, dans la partie C 9, une situation didactique ayant pour objectif de permettre des apprentissages macro-spatiaux, et pour cela "d'organiser le milieu a-didactique (qui ne peut pas être le macro-espace) en respectant les caractéristiques essentielles des inter-actions entre le macro-espace et le sujet." La situation que nous avons élaborée se situe donc dans le méso-espace, mais la solution du problème posé nécessite l'élaboration d'un plan comportant des repères "exocentrés"⁴² sans lesquels la mise en congruence du plan, sur lequel l'élève doit prendre des informations pour réussir, avec l'espace réel est impossible. Au cours des deux premiers essais, la moitié des élèves seulement pensent à indiquer des repères, sur leur plan, repères qui se répartissent à peu près à égalité entre exocentrés et égocentrés⁴³. Nous attribuons ce petit nombre de réussites à la prégnance de la représentation méso-spatiale : Dans aucune des situations proprement méso-spatiales, en effet, le sujet n'est obligé de s'interroger sur la relation existant entre la portion d'espace qu'il contrôle visuellement et l'espace plus large dans lequel il veut se déplacer.

4. Conclusion de la deuxième étude expérimentale

Nous ne nous sommes pas engagés très loin dans la validation expérimentale de l'existence de ces représentations pratiques. Elle reste donc à compléter.

Pour notre part, les confirmations que nous en avons trouvées à la fois dans notre étude expérimentale, dans l'examen renouvelé d'autres travaux et dans l'analyse que nous présentons ci-dessous de productions d'élèves en classe de géométrie, constituent des indices suffisamment solides pour appuyer notre conviction. Nous nous servirons donc de ces catégories, dans notre cadre didactique, pour analyser comme pour produire de l'ingénierie.

D. L'apport de cette recherche à l'enseignement de la géométrie et de l'espace

Comme nous venons de le dire, la prise en compte de l'existence de ces représentations spontanées nous permet :

- d'une part, de renouveler l'analyse de certaines erreurs des élèves dans le domaine géométrique : La presque totalité des problèmes leur est posée dans un contexte spécifique, l'espace de la feuille de papier qui présente un certain nombre de composantes contextuelles micro-spatiales. On peut donc s'attendre à trouver un mode de traitement "micro-spatial" de ces problèmes comme support des stratégies de base.

- d'autre part, de dégager les conditions qui favorisent la conceptualisation spatio-géométrique pour pouvoir les reproduire ou les simuler dans les situations d'enseignement.

⁴² La situation a été organisée de manière à ce qu'aucun des éléments significatifs du problème ne puisse servir de repère à lui tout seul. Il faut représenter sur le plan un élément qui, apparemment, n'intervient pas mais qui permet d'orienter le plan convenablement (par exemple le tableau).

⁴³ Ils indiquent l'endroit où ils étaient placés pour faire le plan. Mais s'ils ne s'en souviennent pas, leur repère est inutilisable.

1. La représentation micro-spatiale, outil d'analyse de comportements d'élèves dans les travaux de géométrie

a) *"On ne mesure pas le vide"*

Nous donnons ici un exemple d'interprétation nouvelle des résultats d'évaluation d'élèves, en choisissant une épreuve dans l'évaluation menée par le ministère en classe de 6ème.(septembre 1991)

Un quadrilatère ABCD, non convexe est dessiné sur la feuille. Il est demandé aux élèves de mesurer avec leur règle graduée , d'une part "la longueur du segment [BC]", segment tracé, d'autre part "la distance du point A au point C", le segment [AC] n'est pas tracé. (Annexe 3)

Les directions et les mesures des deux segments posent le même type de difficultés, très bien surmontées à cet âge, puisque 93,2% des enfants réussissent la première question. Ils ne sont plus que 54,4 % pour la seconde. Tous les types d'erreurs ne sont malheureusement pas identifiées mais nous savons tout de même que 23,6% des élèves positionnent mal leur règle (au lieu de 1,8 %) dans la première question et que 10% d'entre eux ont mesuré puis calculé $AB+BC$ ou $AD+DC$. Le pourcentage de non-réponses est très faible.

On pourrait penser que ces élèves ne connaissent pas bien le sens du mot distance. Or l'année précédente, la même question avait été posée à propos de deux points, qui eux étaient reliés par un segment tracé; la réussite avait été de 91%. Nous attribuons donc cette différence dans les réussites au fait que pour presque la moitié des élèves, l'hétérogénéité de la feuille de papier, au sens des pleins et des vides, induite par la représentation micro-spatiale qu'ils mobilisent, est encore très forte.

b) *L'obstacle didactique de l'enseignement des angles*

Nous désignons ainsi une série d'erreurs ou de blocages bien connus attestés jusque dans des définitions dans des ouvrages de mathématiques (Berdonneau 1980) qui attribuent aux angles des propriétés liées à la longueur des tracés de la représentation considérée.

Ces questions sont détaillées dans C-6. Nous montrons que cette conception erronée peut s'expliquer si l'on admet que les enfants interprètent les tracés d'angles comme des objets micro-spatiaux.

Nous avons confirmé ce jugement par l'examen de l'enseignement (ostensif) de la notion et en développant un autre enseignement élémentaire des angles (voir chapitres C-6 à C-8) qui évite aux élèves de les assimiler à des objets.

c) *L'obstacle à la conception ponctuelle*

Nous interprétons les difficultés à considérer les tracés comme des ensembles de points, difficultés signalées par Artigue et Robinet d'une part, par Grenier d'autre part, dans la même logique. Ce n'est qu'une conséquence, selon nous, d'un enseignement de la géométrie appuyé sur une pratique de "figures" considérées comme des objets.

d) *Explication du "phénomène" signalé par Arsac (1987)*

Il s'agit d'une observation sur la relation entre l'existence ou non d'un triangle de longueur de côtés (5, 4, 9) et l'ordre du tracé des côtés.

Si considère que le segment tracé sur une feuille est spontanément considéré dans une conception micro-spatiale, on voit immédiatement la différence de situation qui se présente à l'élève lorsqu'il trace d'abord le grand côté ou d'abord l'un des deux autres :

S'il commence par le grand côté (9), le tracé de celui-ci le fait exister en tant qu'objet connu qui appelle les connaissances que l'on a à son propos, par exemple la possibilité de le couper en deux et d'en partager ainsi la longueur. Le tracé des cercles menés à partir de ses extrémités et respectivement de rayon (4) et (5) coupe effectivement en un point qui peut être reconnu comme existant sur le segment préalablement conçu. Un seul des cercles tracés suffit à réaliser la section du segment en deux; l'autre cercle passe donc "nécessairement" par ce point "connu", dont la distance au centre est de suite calculable, et égale au second rayon.

Si l'on commence par un "petit" côté (5 par exemple), les cercles menés par ses extrémités et respectivement de rayon (4) et (9) ne coupent plus l'objet, segment initialement tracé. Il faut aller chercher à l'extérieur, où rien n'est matérialisé, dans "un vide d'objets". Ce vide est de suite "marqué" par les deux cercles, nouveaux objets, en position peu commune : c'est l'inconnue totale. Ces cercles se coupent-ils en un point? se touchent-ils tout le long d'un arc ?

Le prolongement du segment pourrait constituer un nouvel objet ; encore faut-il penser à l'effectuer; ses caractéristiques d'objet seraient alors moins fortes, car sa longueur n'est pas déterminée, elle peut être variable. Le point d'intersection avec le prolongement du segment n'est donc muni d'aucune propriété immédiatement perçue par une conception micro-spatiale. Il faudrait pour cela que l'élève ait homogénéisé sa conception de l'espace de la feuille, au sens des pleins et des vides .

Nous comprenons ainsi pourquoi la conception de "Protagoras"⁴⁴ s'épanouit...

e) " Les sur-figures"

Le phénomène décrit par Arsac est, selon nous, un cas particulier d'un phénomène plus général, celui de la difficulté pour les élèves à concevoir, dans le traitement d'une figure géométrique, la possibilité de l'inclure dans une sur-figure. En voici plusieurs exemples pris dans des contextes différents.

1) Prolonger un segment

a) Nous tirons de Grenier (1988)⁴⁵ un autre exemple pris dans une séance d'enseignement de la propriété d'incidence de la symétrie axiale. Il s'agit de la construction à la règle de l'axe de symétrie d'un octogone (régulier), d'un trapèze et de "drapeaux".

Grenier analyse en décomposant les constructions par considération de paires de deux segments, appelons-les de manière générique : [AB] et [A'B'], non parallèles. "La construction revient à celle de deux points I et J tels que I est l'intersection des segments [AB'] et [BA'] ...et J, l'intersection des droites (AB) et (A'B')... Les élèves ont produit des constructions de points de type I, mais de peu de points de type J" (Annexe 4).

Nous prolongeons l'explication de Grenier en faisant remarquer que

⁴⁴ Sophiste du cinquième siècle av J.C., qui affirmait que le cercle et sa tangente n'ont pas qu'un seul point commun. Arsac et coll. y réfèrent la position des élèves qui considèrent que deux cercles tangents intérieurement se touchent sur toute une longueur.

⁴⁵ p. 308

- la construction de J oblige d'abord à considérer des segments non parallèles de la figure, puis à prolonger chacun des segments, ce à quoi s'oppose la conception des segments comme objets du micro-espace.

- La construction de I peut tout aussi bien se faire en reconstituant les "papillons" rencontrés lors de la tâche à main levée, et pour deux figures sur trois, en ne considérant que des segments parallèles entre eux. Les segments tracés joignent deux sommets déjà existants de la figure, et chacun enrichit la figure initiale en nouveaux objets.

b) L'obstacle est tenace comme en témoignent les observations faites dans un groupe de professeurs d'école en formation : Devant planter des piquets à égale distance de deux poteaux, ils ont déterminé deux points de la médiatrice à l'aide d'une ficelle, puis utiliser la ficelle tendue comme une règle pour déterminer d'autres points répondant à la question. Par contre, ils ont été incapables de planter des piquets plus éloignés des poteaux (la ficelle étant relativement courte), par impossibilité de concevoir le prolongement, par visée, du segment représenté par la ficelle. Leurs connaissances méso-spatiales, étaient insuffisantes pour surmonter l'obstacle dû à leur lecture micro-spatiale du problème.

2) *Le traitement des figures non connexes*

a) Nous avons observé, dans le problème des bancs, combien le fait de proposer de positionner des "points" qui ne forment pas une "figure" assimilable à un objet (il y a quatre objets minuscules) déconcertait de façon profonde les élèves du CM2, dont un peu moins de la moitié recouraient quand même à la sur-figure du quadrilatère ou des angles droits, en traçant les côtés, et résolvaient ainsi le problème. Un peu moins de la moitié, c'est peu, mais c'est aussi beaucoup, à un niveau où l'on n'a enseigné que les figures "objets". Cela montre qu'un autre enseignement est concevable !

b) Bautier (1989), dans son étude de l'enseignement de la symétrie orthogonale, montre que les figures non connexes posent aux élèves des problèmes particuliers, "la transformation semble opérer sur les figures tracées, les transforme, mais laisse invariants les points du fond."

f) Conclusion : Le primat de la représentation micro-spatiale, obstacle didactique?

Ces observations et d'autres que nous n'avons pas rapportées, constituent selon nous un ensemble de preuves relatives à l'existence d'une représentation micro-spatiale.

Cette représentation est tout particulièrement activée par la présentation ostensive des "figures" de la géométrie qui fait que les élèves les assimilent à des objets du micro-espace, dont les possibilités de traitement sont particulièrement pauvres. Nous pensons que l'on peut trouver dans la notion micro-spatiale d'objet la source des blocages aux notions de sur-figures et de sous-figures.

Quel est le prix payé dans l'enseignement secondaire pour l'économie réalisée sur l'enseignement de la notion de figure dans le cycle primaire et en 6ème-5ème?

Quelle est la part d'obstacle didactique ainsi constitué au traitement géométrique des figures?

Nous n'avons pas de réponse à ces questions qu'il nous paraîtrait nécessaire d'étudier plus profondément.

2. Elaboration d'ingénieries.

a) Les contraintes de l'enseignement

Les conditions de travail dans les écoles ne permettent qu'exceptionnellement et avec beaucoup de limitations, le recours à des apprentissages par des rapports a-didactiques et effectifs au méso-espace. Quant au macro-espace, où il serait encore plus important de placer les élèves en situation d'apprentissage, de tels rapports sont encore plus difficiles à établir.

Les situations d'enseignement se déroulent donc presque exclusivement dans le micro-espace. La représentation micro-spatiale est naturellement mobilisée dans cet environnement. Or, cette représentation ne fait intervenir que des connaissances trop peu élaborées pour servir de support à l'élaboration de connaissances spatio-géométriques. Le recours à des actions effectives et a-didactiques des élèves poserait problème : l'élève résoudre le problème avec ses connaissances pratiques, tandis que le professeur veut qu'il fasse appel à des techniques élaborées, qui n'ont pas de "sens" dans ces conditions.

Organiser les bons apprentissages dans des rapports a-didactiques et effectifs semble donc impossible, d'où le recours exclusif à l'ostension.

b) Importance des limitations

La nécessité d'anticiper et donc de conceptualiser ne se rencontre dans le cadre de la vie courante que dans les conditions du méso-espace ou du macro-espace.

Pour les apprentissages spatiaux, visant à combler les insuffisances des représentations pratiques, les rapports a-didactiques et effectifs nécessaires ne pourront donc être établis que dans le cadre de simulations. Pour cela, il faudra dégager les contraintes spécifiques à l'intervention des connaissances visées dans leur contexte naturel.

Pour les apprentissages spatio-géométriques, certaines expériences exceptionnelles devront probablement se dérouler dans le méso-espace (alignements par exemple) et devront de toute façon être complétées par des activités dans le micro-espace où l'on aura contrôlé la disqualification de la problématique pratique.

Prenons l'exemple de la fabrication d'une figure superposable à une autre. Pour qu'une prise de conscience des propriétés soit nécessaire, l'espace d'action ne doit pas être le micro-espace mais un espace dans lequel l'objet modèle ne puisse pas être constamment comparé à l'objet en cours de fabrication, c'est à dire un espace comparable au méso-espace. Nous trouvons dans ces conditions le travail du charpentier qui doit découper au sol une poutre s'adaptant à un endroit particulier, celui du vitrier devant découper dans son atelier une vitre de forme parallélogramme etc...

En mettant en oeuvre ces différents types de limitations, nous avons étudié de manière détaillée deux processus :

- l'un relevant des apprentissages macro-spatiaux que l'école devrait se fixer comme objectifs à atteindre par tous les élèves : il s'agit de la mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan (C9).
- l'autre relevant des apprentissages de base pour la conceptualisation géométrique : Il s'agit d'un processus d'enseignement du concept d'angle (C6, C7, C8).

CHAPITRE B-7

QUESTIONS D'INGENIERIE

I. ENSEIGNER LA GEOMETRIE ET/OU L'ESPACE ?

Avec le chapitre 6, et l'étude des représentations pratiques de l'espace, nous avons achevé l'exposé minimal des outils indispensables à l'entreprise que nous annonçons dès la partie A, en en soulignant la complexité : étudier et mettre au point des conditions favorables à une amélioration de l'enseignement de l'espace et de la géométrie.

Dans le chapitre 5, nous avons montré pourquoi l'articulation de la géométrie sur l'espace pose des problèmes très difficiles à l'enseignement, en les reliant aux contraintes conjuguées :

- des nécessités du *contrat didactique* qui impose au professeur de s'appuyer sur les connaissances des élèves, renforcées par l'injonction moderne qui leur est faite de s'appuyer davantage sur l'activité des élèves,
- de l'existence chez les élèves de connaissances et de savoirs pratiques spatiaux importants, développés dans une *problématique pratique* qui privilégie l'efficacité immédiate sur la conceptualisation,
- de la prégnance d'une méthode d'enseignement "naturelle", l'ostension, particulièrement bien adaptée à la communication de savoirs pratiques, et utilisée par tous dans la vie sociale,
- de la prégnance des présupposés inductivistes dans l'épistémologie des enseignants,
- enfin, et ce n'est sans doute pas la moindre des contraintes, de la complexité de la confrontation du modèle à la "réalité" spatiale, qui oblige à assumer l'approximation des mesures, et toutes les interférences que cette approximation peut avoir avec la construction du modèle géométrique.

Nous avons pointé comment l'ensemble des contraintes pesant sur le système didactique, produisent quelques-uns des phénomènes didactiques que l'on peut observer, et particulièrement *la persistance du rejet de l'enseignement de l'espace hors du temps de l'enseignement*.

Nous pouvons maintenant examiner à nouveau les propositions que nous avançons en partie A, et d'abord les reformuler en tenant compte des catégories introduites depuis.

A. Proposition 1 :

Introduire explicitement dans l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire, des objectifs relatifs à certaines connaissances spatiales utiles, en particulier pour le macro-espace et pour la maîtrise des représentations matérielles des objets.

La mise en évidence au chapitre 5 du phénomène de persistance du rejet de l'espace hors du temps didactique, et au chapitre 1 de l'existence de déficits spatiaux importants pour la vie pratique, montre la nécessité de cette première proposition.

B. Proposition 2, reformulée :

Différencier nettement auprès des élèves les problématiques spatio-géométrique et géométrique d'une part, la problématique pratique d'autre part, en mettant en valeur ce qui fait la spécificité de chacune d'entre elles.

1. la primauté spatiale de la problématique pratique

L'espace sur lequel les élèves sont appelés à opérer en classe de géométrie est essentiellement constitué, en première approche, de la feuille de papier ou de petits objets, domaines qui leur sont particulièrement familiers. Ainsi, ceux-ci ne paraissent-ils pas démunis et développent-ils spontanément les stratégies qui leur sont habituelles et qui demandent le minimum de conceptualisation pour obtenir le résultat attendu, comme dans la vie courante.

Cette primauté trouve évidemment sa source dans l'antériorité de la problématique pratique par rapport à la géométrie, et dans l'expérience de son efficacité. nous ne nous attarderons pas sur ce point.

2. La problématique pratique constitue un obstacle didactique à l'instauration des autres problématiques.

a) Obstacle à la problématique de la géométrie

En analysant, aux chapitres B-3 et B-4, les travaux de Grenier (1988) et d'Arsac (1987) nous avons pu expliquer combien c'est l'absence de prise en compte, auprès des élèves, de la spécificité de la problématique pratique d'une part, et des deux autres d'autre part, qui a constitué le véritable blocage de l'activité géométrique d'un nombre important d'élèves. L'étude des représentations pratiques faite aux chapitre B-6 et C-4 nous a permis de mieux connaître les connaissances effectivement disponibles chez les élèves, selon les caractéristiques des rapports spatiaux qui sont liés aux différentes représentations pratiques. Nous avons pu voir en particulier combien peut être forte la notion d'objet micro-spatial, notion liée à la problématique pratique sur laquelle l'enseignement appuie traditionnellement les premières acquisitions géométriques. Sans une distanciation très claire de cette problématique pratique, celle-ci constitue un obstacle didactique pour les autres problématiques.

b) Obstacle à la problématique spatio-géométrique

Nous avons pointé à plusieurs reprises comment la problématique pratique constitue aussi un obstacle pour la problématique spatio-géométrique, et particulièrement dans Grenier (1988).

Examinons le travail du professeur décrit par Grenier au chapitre VII : il propose par exemple de tracer *très précisément* à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, *toutes les droites de symétrie* d'un cercle d'une part, et d'une ellipse d'autre part, ces figures étant tracées de façon à ce que seuls les contours soient visibles.

L'auteur remarque d'abord que, pour les élèves, la *construction précise passe bien par des mesures*, (et c'est bien pour cela que la règle graduée a été exclue), ce qui place les élèves devant une espèce d'injonction paradoxale. Le paradoxe est cependant résolu par la plupart d'entre eux qui placent le centre du cercle ou les axes de l'ellipse, au jugé, mais avec un tel soin que "tous les groupes fournissent des tracés perceptivement justes pour les deux figures (p. 196).

L'auteur parle alors, selon les groupes, de *détournement*, soit *de la tâche*, soit *de l'usage des instruments*. Cette interprétation marque, selon nous, l'importation que le professeur fait alors, dans sa lecture des comportements des élèves, des principes *de sa propre relation à la situation, radicalement différente de celle des élèves*.

Nous exprimons ce fait en soulignant que les élèves ont réalisé la tâche demandée dans une problématique pratique, en utilisant les instruments de façon cohérente avec cette problématique, qui minimise la conceptualisation.

La suite relatée montre que le professeur a dû intervenir au cours du travail de groupe de la séance suivante et de la mise en commun, pour exclure les stratégies partiellement ou totalement de type "au jugé".

Dans notre langage, nous dirons que ce rejet par le professeur des stratégies "pratiques", auquel il a été contraint, équivaut à la distinction, implicite auprès des élèves, de la problématique recherchée par rapport à la problématique pratique ; mais cela s'est fait sans que la situation lui permette de préciser de façon positive et compréhensible les spécificités de chacune de ces problématiques. D'où notre affirmation :

3. Il est nécessaire de distinguer les problématiques auprès des élèves

Nous avons donc montré qu'il ne s'agit point d'ajouter une contrainte supplémentaire à l'enseignement tel qu'il se déroule, mais d'en resituer de façon fonctionnelle et positive certaines d'entre elles, faute de quoi elles sont exercées par les enseignants de manière à dévaloriser les stratégies légitimes des élèves.

Nous avons restreint cette première proposition à l'identification des rapports entre la problématique pratique et les deux autres, pour les besoins de l'argumentation. Nous reportons ce qui concerne les rapports entre la problématique de modélisation et la problématique de la géométrie à la proposition suivante.

Nous estimons pouvoir conclure à la nécessité de la proposition 2 reformulée.

Nous n'avons pas encore débattu de celle qu'il y aurait à différencier très tôt, auprès des élèves, la problématique de modélisation de la problématique de la géométrie.

Il faudrait étudier les paramètres à maîtriser pour que l'introduction de la géométrie dès l'école élémentaire permette d'éviter les *obstacles didactiques*, que nous avons repérés, à l'apprentissage par les élèves de la problématique de la géométrie ultérieure, tout en permettant une bonne homogénéisation de leurs pratiques spatiales.

C. Proposition 3, reformulée :

Introduire, dès l'école primaire, les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux.

1. Dépasser les obstacles dus à la méthode ostensive

La modélisation est, selon nous, la seule possibilité pour dépasser les obstacles dus à la méthode ostensive, dont nous avons par ailleurs relevé combien elle optimise les contraintes didactiques. Ce constat ne se limite d'ailleurs pas à l'enseignement obligatoire : Bessot et Ebehrard (1992) ont montré que, même dans le cas d'enseignements professionnels, comme celui du dessin technique, de nombreux blocages didactiques demeurent et que l'enseignement s'accompagne encore d'un rejet des rapports spatiaux hors de la sphère didactique.

La justification de cette proposition passe néanmoins par l'établissement du caractère réalisable d'un autre enseignement, donc par une réponse à la question :

2. Comment le faire ?

C'est l'objet de la suite de ce chapitre que de dessiner les principes sur lesquels nous allons nous appuyer pour réaliser ce projet.

Enfin, nous reformulons sous forme de question les rapports à introduire, dans l'enseignement primaire, entre les problématiques de modélisation et de géométrie :

3. Quand et comment faut-il commencer à articuler la problématique de modélisation avec la problématique géométrique ? Faut-il les différencier auprès des élèves ?

C'est à dire quelle va être la part de rapports spatiaux effectifs, de rapports didactiques, de rapports de modélisation ou géométriques ?

- Si les connaissances spontanées des élèves peuvent être reconnues par le professeur comme "isomorphes" à celles que l'on pourrait tirer de la géométrie dans les contextes spatiaux usuels, et seulement dans ce cas, on peut faire l'économie d'une construction par les élèves des notions correspondantes, et en proposer un traitement directement, par seule évocation des questions spatiales correspondantes.

- Sinon, si les connaissances spatiales élaborées spontanément par les élèves et les notions spatio-géométriques ne sont pas en filiation directe, il faut alors aménager des rapports effectifs pour l'apprentissage de ces notions.

La question n'est pas simple, et il ne peut sans doute pas y être répondu de façon indifférenciée selon les notions.

Nous avons cependant, pour plusieurs notions élémentaires de géométrie, la possibilité de mettre en évidence des différences profondes entre les représentations pratiques et la notion spatio-géométrique :

- Les conceptions micro-spatiales qui vont s'imposer dès l'utilisation de représentations sur papier s'opposent à la notion d'angle, même d'angle de secteur. Nous en avons fait la démonstration en montrant le lien entre les difficultés des élèves, et l'appui sur les connaissances spontanées de ces élèves, imposé par la réduction de l'apprentissage à un apprentissage didactifié. Le lecteur, que nous avons déjà sensibilisé à cette question au chapitre B-6, pourra s'en convaincre en se reportant aux chapitres C-6, C-7, et C-8. Nous y exposons en détail notre analyse de l'enseignement actuel, et montrons qu'un apprentissage a-didactique au départ permet d'éviter aux élèves un bon nombre de difficultés bien connues, sans en rajouter de nouvelles.

- la notion de "figure" comme ensembles de points. Cette question est déjà soulevée par Artigue et Robinet (1982), par Grenier (1988), comme soulevant des difficultés importantes auprès des élèves. Nous avons apporté au chapitre B-6 des explications qui permettent de douter des effets d'un enseignement didactifié correspondant.

- certaines notions aussi élémentaires que le rectangle. Le lecteur pourra se reporter au chapitre C-3, où nous montrons que le rectangle ne peut être mobilisé, pour la moitié environ des élèves, pour maîtriser effectivement, dans une situation a-didactique, la position relative de quatre "points", même dans le cas où ces points sont placés sur une feuille de papier.

- certains aspects de la notion même de longueur : les élèves de CM pensent qu'une feuille n'a pas d'épaisseur ; c'est un fait que nous rencontrons dans la reproduction des leçons sur les décimaux selon le processus proposé par Brousseau(1981).

- la notion d'alignement par prolongement. Un certain nombre d'observations effectuées au cours de la formation de professeurs d'école nous montrent que de nombreux adultes ne la maîtrisent pas encore. Or c'est bien ainsi que sont proposés à l'apprentissage des élèves les notions de droite, et de demi-droite... Quelques observations d'élèves du CM2 nous ont convaincus que, dès que cette distance dépasse quelques mètres, la distance entre deux

points n'est pas correctement liée à l'alignement des reports de l'instrument, tandis qu'elle l'est à la jonction sans rupture ni recouvrement de ces reports.

Il nous paraît difficile de répondre aux questions 3.2 et 3.3 sans approfondir ce qu'une approche de la problématique spatio-géométrique apporte spécifiquement, et les limites de cette approche par rapport à la problématique de la géométrie.

Le débat peut-il être tranché en partageant l'enseignement des problématiques selon les niveaux scolaires ? C'était l'approche des programmes avant 1985¹ qui assignaient à l'école primaire et jusqu'à la 5^{ème} incluse, une approche "concrète" c'est à dire spatio-géométrique des notions de géométrie, pour introduire la vraie géométrie à partir de la quatrième. Les programmes de 1985 recommandent une introduction progressive de la problématique géométrique à partir de la classe de 6^{ème}.

Pour aller plus loin, il nous faut approfondir chacune des deux problématiques, et nous allons le faire selon la méthode des situations, c'est à dire en nous appuyant sur une mise en situation prototypique et a-didactique de chacune d'entre elles.

II. MODELISER L'ESPACE : LA SITUATION DES DRAPEAUX

Cette situation, évoquée par Brousseau (1983) comme une modalité de la situation fondamentale de la géométrie modèle de l'espace, a été précisée dans Brousseau (1987) et mise en oeuvre au moins une fois à l'école Michelet. Aucune étude didactique approfondie n'en a été faite à notre connaissance, et elle est demeurée peu connue.

A. Le scénario de base

Le professeur a préparé dans la cour de récréation le dispositif suivant (Annexe1, figure 1):

Dans le jardin de l'école, au bord de deux allées convergentes, nous avons planté deux fanions. Voici un double mètre ; pouvez vous prévoir la distance entre ces deux fanions ? Vous avez le droit de vous déplacer et de mesurer partout, sauf sur la pelouse. Nous vérifierons votre prévision après, en tendant un fil entre les deux fanions et en le mesurant.

Notons que si on ne précise pas la tolérance admise sur la différence entre la valeur prévue et la valeur trouvée, on ne peut réellement pas choisir le moyen adapté. Si cette tolérance était nulle, le problème serait impossible à résoudre; plus elle est faible, plus le processus devient coûteux.

B. Solutions

Il est bien évident qu'elles dépendent de manière très sensible des connaissances dont dispose celui qui résout, du niveau de sa culture spatiale et géométrique.

1. Reconnaissance de la situation comme une particularisation de la situation fondamentale du plan².

a) il peut disposer d'un plan des lieux

Une fois ce plan en mains, il va s'efforcer d'y situer les deux drapeaux. La complexité de ce travail va dépendre des éléments présents sur le plan, et auxquels il va devoir reporter la situation des drapeaux.

¹ voir chapitre C-1

² Voir chapitre C-9

Ensuite, il n'aura plus qu'à mesurer la distance trouvée sur le plan, et la transformer en distance représentée pour donner la réponse attendue.

La précision du résultat dépend de l'échelle du plan, de la précision du report de la position des drapeaux, et de celle de la lecture sur le plan.

b) il ne dispose pas d'un plan³

Il sait construire un plan adapté à une situation particulière.

Dans le cas qui nous intéresse, le plus rapide est de construire un plan en prenant les objets pertinents comme repères.

1) Il sait quelles sont les informations minimales qu'il est nécessaire de saisir pour constituer un plan.

Comme il suffit de déterminer la position de trois points comme sommets d'un triangle dont on connaît les longueurs, la question est de bien situer ces points par rapport aux drapeaux, pour positionner ceux-ci facilement. La solution la plus simple est de placer chaque drapeau sur un prolongement de l'un des côtés du triangle de repérage (RST dans la figure 1).

2) Il ne dispose pas de cette connaissance

La résolution du problème passant par l'établissement d'un plan des lieux est plus coûteuse, et se fera en reportant les repères naturels, bâtiments, limites, etc., et on est ramené à la situation (a).

c) Conclusion :

Pour qui connaît le moyen d'établir un plan, la solution qui demande le moins de mesures, est en général la solution (b.1).

Les moyens connus et pratiqués à l'école pour situer un lieu non repéré sur un plan (solution a), sont peu nombreux. Ils consistent le plus souvent en un repérage par la longueur si le lieu à repérer est sur une ligne (route) du plan. Sinon, il existe d'autres systèmes, : coordonnées rectangulaires par rapport à un ou plusieurs repères existant sur le plan (par exemple : latitude et longitude), ou utilisant des propriétés géométriques d'alignements, etc. Aucun n'est pratiqué en situation effective.

2. Méthodes géométriques ou méthodes "directes"

Ce sont celles que l'on peut mettre en oeuvre si l'on n'a pas reconnu la situation comme liée à un plan, ou bien si l'on ne sait pas mettre en oeuvre la solution du plan, ou bien si l'on préfère ne pas faire de plan, et résoudre le problème directement dans l'espace.

Les méthodes vont dépendre du degré de connaissances géométriques du sujet.

Leur principe va consister à utiliser une transformation simple pour associer le segment dont les drapeaux sont les extrémités à un segment sur lequel on pourra effectuer les mesures.

Selon les contraintes, on pourra utiliser une translation basée sur une figure simple que l'on sait construire (rectangle ou parallélogramme par le milieu des diagonales), une rotation de 60° avec un triangle équilatéral, ou une homothétie dont on fixe le sommet et le rapport simple (1/2 ou -1 par exemple) [Annexe 1, fig(2,3,4)].

3. Quelles connaissances supposent ces solutions?

³ Ce sont les conditions envisagées par Brousseau (1987) dans la présentation de cette situation.

a) connaissances communes

La connaissance des mesures et du rôle des approximations fait partie intégrante de la connaissance du processus de modélisation et de toutes les solutions.

La capacité à considérer l'espace "vide" qui constitue l'environnement des drapeaux comme un ensemble de lieux potentiels dont certains possèdent des propriétés qui vont permettre de résoudre le problème posé. De nombreuses études⁴ ont montré comment, dans l'espace de la feuille de papier, cette "connaissance" était rare.

b) Pour la solution a),

Il s'agit en plus de savoir repérer un lieu de façon à en reporter la position sur le plan.

c) Pour les autres solutions

- de concevoir une représentation simplifiée de la situation par deux points sur un croquis ne respectant pas les dimensions (et pour cause), pour rechercher une solution et/ou en contrôler la pertinence.

- d'accompagner la réflexion par production de sur-figures conçues à partir des hypothèses sur les outils, sur-figures englobant la représentation de la situation effective, et constituées à partir des connaissances disponibles.

1) Pour les solutions géométriques

- de reconnaître dans la situation une particularisation de la situation fondamentale des transformations⁵.

- d'avoir une connaissance des figures élémentaires associée à celle des transformations simples.

2) pour la solution (b 1)

Cette solution s'appuie sur la triangulation comme moyen minimal de reproduction respectant les formes et les rapports de longueurs. Cette triangulation peut ne faire appel qu'à la saisie directe de longueurs, ou à la saisie d'angle. En ce cas, elle nécessite de connaître ce qu'on appelait anciennement "les cas d'égalité des triangles", c'est à dire les différents triplets de mesures (angles et longueurs) qui déterminent la possibilité de reproduire un triangle.

d) Lien avec la situation du "terrain de tennis" du chapitre B-3

Nous avons étudié au chapitre B-3 une variante simplifiée de cette situation, où la position des deux fanions sur deux côtés d'une forme rectangulaire peut rendre plus facile la mise en oeuvre d'une solution géométrique. Cette solution n'en nécessite pas moins la conception d'une figure et d'une transformation non fournies directement par les objets de l'environnement.

C. L'élaboration des notions de géométrie par les situations de modélisation spatio-géométrique

Nous n'avons pas encore fait avancer cette question, mais nous commençons à en voir poindre quelques paramètres :

⁴ Audibert, Grenier, cités au chapitre B-1, en ce qui concerne les sur-figures par exemple.

⁵ L'impossibilité de la mesure sur le lieu même oblige à déplacer la figure en un autre lieu, ce qui pourrait constituer une situation fondamentale des similitudes.

- les pratiques spatiales professionnelles ont permis la mise au point de systèmes de représentation symboliques de l'espace dont l'utilisation est très performante quant à l'économie de moyens et aux possibilités d'exploitation. Le plan à l'échelle en est un, le dessin technique en est un autre. L'initiation à la conception du plan à l'échelle, dans le cas simple d'un espace plan, ne nécessite qu'une connaissance spatiale de base, la triangulation, en plus du processus d'agrandissement-réduction proportionnel.

- L'insertion de la géométrie n'est donc pas toujours chose évidente : elle se pose ici en concurrente de solutions spatiales de triangulation⁶. Introduire les concepts de géométrie par des situations de modélisation, va nécessiter pour le moins, l'élaboration de situations particulièrement adaptées.

Il nous faut maintenant examiner sur une situation prototypique de la problématique de la géométrie, les caractéristiques spécifiquement mathématiques des concepts de géométrie.

III. INTRODUIRE A LA GEOMETRIE : LA SITUATION DES MEDIATRICES⁷

Nous avons vu, au chapitre 3, que ce qui spécifie profondément le domaine des connaissances spatio-géométriques de celui des connaissances géométriques est la nature et la fonction de la validation : C'est cette différence qui doit être pointée clairement, ce que cherchent à faire Arsac et coll.(1992).

Dans le cas des problèmes spatio-géométriques, la validation se fait

- par vérification empirique
- par étude du procédé mis en oeuvre, de ses qualités et de ses limites

Dans le cas des problèmes de géométrie, c'est le débat mathématique à propos de la cohérence d'une déclaration conjecturale sur l'espace et les déclarations précédemment admises comme vraies, qui valide une solution. Chevallard et Julien (1991)⁸ montrent bien, sur un problème de construction, que la solution mathématique peut aboutir à des solutions techniquement inacceptables.

C'est le contrat didactique qui détermine le sens que l'élève donne au travail fait en classe, c'est à son niveau que la différence entre traitement spatio-géométrique et traitement géométrique doit intervenir. Dans le contrat géométrique, l'élève doit comprendre que le rapport à l'espace n'est plus le même, qu'il n'est plus qu'un moyen d'entrer en rapport avec un autre milieu, celui formé par l'ensemble des personnes qui à propos d'un "fait" spatial, s'interrogent sur son aspect contingent ou nécessaire, et qui pour répondre à cette question, ont recours à une méthodologie tout à fait particulière, spécifique des mathématiques.

Le passage graduel d'un contrat à l'autre est-il possible ?

Faut-il au contraire que la rupture soit mise en scène, annoncée et commentée par l'enseignant sous la forme d'expérience fondamentale ?

Pour mieux analyser le problème, analysons en détail une mise en scène de la situation proposée par Brousseau (1983).

1. Le scénario

⁶ Il est évident que toutes ces solutions sont, du point de vue mathématique, liées à la géométrie. L'une cependant relève pour le sujet d'une procédure de résolution générale qui peut être algorithmisée

⁷ Cette situation a été proposée par Brousseau (1983)

⁸ p75-76

Le professeur donne à ses élèves un triangle comme celui-ci (Annexe 1, figure 5), avec un angle obtus, et il dit "Savez vous comment tracer les médiatrices ?"

"Je sais" disent les enfants, "on prend l'équerre.."

"Faites-le" dit le maître...et chaque enfant essaie de tracer les médiatrices comme d'habitude, (sans compas).

Le professeur dit alors : "C'est bien; il faut maintenant nommer les 3 points que vous avez trouvés. mais il faut faire attention, et nommer A' le point d'intersection des médiatrices des côtés opposés à B et C, B' le point , etc".

Les élèves vont penser qu'il est normal de trouver un triangle; si un élève n'obtient qu'un seul point, il peut penser que sa figure est trop particulière. Si le triangle est trop petit, il va essayer de tracer un autre triangle pour que A'B'C' soit plus grand (Annexe 1, figure 5).

Le professeur annonce que c'est sur ce triangle A'B'C' qu'il veut les faire travailler. Certains élèves l'ont mal fait puisque les points sont presque confondus. Ils doivent donc recommencer pour essayer d'en obtenir un plus grand. Il faut ainsi chercher comment choisir le triangle ABC pour que A'B'C' soit assez grand. La plupart des élèves sont convaincus que c'est possible, ils disent : "Je peux essayer parce que je vois que si je pousse un peu de ce côté, la médiatrice va se pousser par là, et le triangle sera plus grand" ; ils essaient, et à chaque fois la troisième médiatrice coupe les deux autres près du premier point, le triangle reste petit!

Dans cet exemple, la réalité ne guide pas vers le bon modèle : dans la réalité il y a trois points et dans le modèle il n'y en a qu'un !

Mais dans la réalité, il est impossible de faire un triangle assez grand et cela étonne les élèves. La réalité s'impose à eux, non pas sous la forme d'un modèle (un point), mais sous la forme d'une impossibilité de faire quelque chose qu'ils croient possible.

La classe doit prendre acte de ce qu'il y a quelque chose qu'on ne comprend pas, qui n'est pas possible : on ne peut pas agrandir le triangle sans tricher, et il faut trouver l'explication.

Le professeur dit : "ce que nous allons faire maintenant pour comprendre ce qui se passe, ça s'appelle de la géométrie".

Autrement dit, ici, la géométrie ne désigne pas un savoir particulier, mais cela désigne ce qu'il faut faire pour maîtriser un type particulier de situation.

2. Analyse comparative avec d'autres situations concernant la démonstration de la même propriété

Comparons la situation dans laquelle sont placés les élèves de cette classe avec celle des élèves dans deux présentations classiques du travail sur ce théorème.

a) Les énoncés

(1) Thirioux 3ème p.156 prog. 80 Exercice résolu

Représente un triangle propre ABC. Construis les médiatrices des côtés. Que constates-tu? Démontre.

(2) Acti-maths 5ème A. Colin p.10

Nous vous proposons de démontrer la propriété : Les 3 médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est à égale distance des sommets de ce triangle

** tracez un triangle ABC. Construisez la médiatrice D du segment [BC] et la médiatrice D' du segment [CA]. Pourquoi les droites D et D' se coupent-elles en O?*

** comparez les longueurs OB et OC; OC et OA.*

** Démontrez que $OB = OA$ et déduisez-en que O appartient à la médiatrice du segment [AB]*

* *Avez-vous démontré que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes en O?*

b) Validation empirique, validation géométrique

(1) Thirioux

Le triangle n'a aucun angle obtus, ce qui rend plus probable le fait de lire la propriété sur la figure. Les deux types de validation, empirique et géométrique sont mis sur le même plan, les élèves n'ont pas le moyen de comprendre comment se situe l'un par rapport à l'autre.

(2) Acti-maths

Ici, la validation empirique de la figure est escamotée puisque la démonstration conduit à tracer seulement deux médiatrices et à faire passer l'autre par le point O.

Dans les deux cas, la démonstration n'est pas située par rapport à une question spatiale qu'elle viendrait éclairer; c'est une exigence "rituelle" de l'activité mathématique.

c) Les démonstrations

Entrons maintenant dans le détail des démonstrations proposées ou possibles.

Dans les deux exemples cités, une preuve est demandée ou exposée de l'existence d'un point d'intersection pour un couple quelconque de médiatrices. Soyons sûrs que les élèves ont de la peine à comprendre pourquoi il faut établir une propriété évidente alors que pour le faire on utilise une propriété qui ne l'est pas plus (Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre) mais que, elle, on a le droit de tenir pour vraie parce qu'on la voit sur les figures-dessins..

La suite de la démonstration classique est la suivante : .

"On veut montrer qu'il n'y a qu'un point ; Si les médiatrices de [AB] et de [AC] se coupent en un point I, comme il est sur la médiatrice de [AB], $IA=IB$, et comme il est sur la médiatrice de [AC], $IA=IC$ donc $IB=IC$ et I appartient à l'intersection des médiatrices de [AB] et [BC]; I est l'intersection de ces médiatrices car il n'y a qu'un point d'intersection entre les deux et je connais maintenant ce point."

Nous avons là la démonstration officielle du fait qu'il n'existe qu'un point d'intersection des trois médiatrices. Remarquons qu'elle fait jouer un rôle subtil à l'axiome : "Deux droites se coupent en un seul point". En effet, la démonstration rigoureuse suppose d'envisager l'ensemble F des points d'intersection des médiatrices de [AB] et de [BC], de montrer que le point I, unique point d'intersection des médiatrices de [AB] et de [AC] en vertu du même axiome (mais il n'est pas d'usage d'y faire référence ici) appartient à F et de s'appuyer sur l'axiome pour dire que F étant réduit à un singleton, il ne peut contenir que le point I; en toute rigueur, il faudrait ajouter aussi que I appartenant à l'intersection des médiatrices de [AC] et de [BC] et cette intersection étant un singleton, I est aussi le seul point commun à ces deux médiatrices.

Mais, en réalité⁹, les élèves ne peuvent pas produire eux-mêmes ce type de démonstration. Ils peuvent l'apprendre, la répéter. Ils ne peuvent pas même être convaincus par la démonstration ! Pourquoi? Parce que la démonstration est basée sur des pratiques culturelles qui nécessitent la connaissance de ce que sont des axiomes et de leur utilisation convenable.

Remarquons d'ailleurs que beaucoup des démonstrations que l'on trouve dans les manuels ne font pas appel à l'axiome. Si l'on réalise la figure au fur et à mesure du déroulement de la démonstration comme cela est proposé dans le manuel Acti-math 5ème, on

⁹ Comme l'atteste l'ensemble des travaux analysés par Arsac (1989)

ne trace que les deux médiatrices de [AB] et de [AC]; par un raisonnement, on prévoit que la médiatrice de [BC] passe par I, on ne la trace qu'à ce moment et on conclut sans avoir apparemment besoin de l'axiome que le point I est le point de concours unique des trois médiatrices. Bien sûr, la démonstration est incomplète sans l'énoncé de l'axiome car en supposant que les médiatrices soient des courbes, la configuration suivante (Annexe 1, fig. 6) permettrait le même raisonnement sans que la conclusion d'unicité soit vraie. Mais évoquer la possibilité d'une figure de ce genre ne peut venir à l'esprit que de quelqu'un qui est déjà à l'aise avec la démarche mathématique.

d) *Un autre scénario possible et ses conséquences*

Supposons que le professeur n'ait pas "manipulé" la situation et que les élèves se mettent d'accord sur le résultat suivant : "les médiatrices se coupent deux à deux en trois points qui sont très proches les uns des autres".

Le professeur peut se sentir obligé de dire : "hé bien non, ce résultat est faux, elles se coupent toutes au même point, nous allons le démontrer",

Certains élèves peuvent se demander pourquoi et quand il est permis de considérer comme vrai quelque chose qu'on voit sur un dessin et pourquoi et quand cela n'est plus possible!

Supposons d'autre part que l'enseignant guide les élèves comme dans Acti-math (démonstration proposée dans les premières pages du manuel donc sensée se placer au tout début de l'année).

Nous avons vu que la démonstration proposée ne prend en compte qu'un seul des points d'intersection et escamote tout rapport avec la "réalité". Les enfants seront-ils convaincus par ce raisonnement "éthéré" ou feront-ils plutôt confiance à leurs figures?

e) *Retour au scénario initial*

Comment les faire entrer dans cette démarche où la réponse apportée à une question posée dans le milieu spatial n'est pas le résultat d'une constatation mais d'une articulation d'énoncés? Faire de la géométrie, en effet, c'est choisir certains énoncés, et ne pas en accepter d'autres parce que sinon on aurait un discours inconsistant, contradictoire.

Simuler la géométrie nécessite donc que les enfants comprennent qu'ils vont devoir accepter quelques relations et qu'alors ils seront obligés d'en accepter d'autres comme vraies et leur problème c'est de choisir lesquelles.

Supposons donc que le professeur n'ait pas refermé trop vite la situation et que les élèves s'engagent dans la recherche d'explications au fait qu'on ne peut pas agrandir le triangle formé par les points d'intersection des médiatrices.

Voici par exemple un raisonnement normal d'élève : comme $AA' = BA' = CA'$, alors ce point A' est équidistant des trois points A et B et C; bien ; et de même pour B' et C' ! Et les élèves ne voient aucune raison de penser qu'il n'y a qu'un point équidistant de A, B, C ! Il y a bien beaucoup de points équidistants de deux points, il peut bien y en avoir plusieurs à la même distance de trois ! Pourquoi pas ?

A ce moment, pour les élèves, il n'y a pas de réel problème théorique, le seul problème est "pourquoi le triangle n'est-il pas plus grand?"

La prochaine étape est la suivante : Les enfants vont avoir à exprimer qu'ils acceptent ou bien que deux droites se coupent en plusieurs points ou bien que deux droites se coupent seulement en un point ; mais alors, s'ils admettent que deux droites ne se coupent qu'en un point, il faut qu'ils admettent que ces trois points sont une représentation fautive d'un seul point

unique, qu'ils ne voient pas. Ce qui va convaincre les enfants, c'est quand on va montrer que C' devrait se trouver sur la médiatrice de [AB] (puisque $C'A = C'B$) alors que manifestement il n'y est pas sur leur figure. Si les points A' et C' étaient distincts, comme ils le croient, alors la médiatrice de [AB] couperait celle de [AC] en A' et C' .

Le problème est de faire la dévolution à l'élève du problème spécifique de la géométrie qui est de choisir un système consistant.

Le professeur pourra ensuite parler de ce qu'est la géométrie dans la culture : C'est un travail sur la consistance du discours sur l'espace ; ce n'est pas de dire des choses sur l'espace, mais de contrôler la consistance de ce qu'on dit de l'espace.

L'objet de la leçon est donc d'introduire la géométrie comme un jeu de l'esprit et c'est quelque chose de tout à fait nécessaire pour que l'enfant puisse différencier cette activité de celle qu'il développe dans le travail spatio-géométrique.

La réflexion sur la relation entre le dessin et la connaissance géométrique est nécessaire dans ce type de modèle alors qu'elle est implicite dans l'enseignement habituel de la géométrie : La différence entre ce qui devrait se produire, étant données les propriétés de départ des objets géométriques tracés et ce qui se produit réellement, au lieu d'être occultée, devient un point d'appui pour différencier le phénomène spatial et son modèle géométrique.

3. Analyse des caractères de ce type de situation didactique :

a) A-didactique/didactique

- le problème est d'abord posé au niveau du "milieu" (l'espace de la feuille), l'élève dans ses essais pour agrandir le triangle développe des connaissances sur ce milieu.

Il est très important de voir la différence avec la situation habituelle des premiers enseignements de la géométrie :

Quand l'enseignant fait faire un triangle aux enfants et leur dit : "regardez, il n'y a qu'un point", les élèves pensent que la figure est un moyen qu'il leur fournit pour leur enseigner quelque chose.

Mais quand ils essaient de faire un grand triangle et qu'ils n'y arrivent pas, ils ont l'impression que c'est quelque chose qu'ils voient par eux-mêmes. Et ceci d'autant plus que c'est le maître qui leur demande de faire un grand triangle et qu'ils ne peuvent pas.

La situation comporte donc une phase a-didactique essentielle pour la suite : Si les élèves n'ont pas expérimenté l'impossibilité d'agrandir le triangle, comment l'enseignant pourrait-il les intéresser à la recherche d'une explication de cette "expérience graphique"¹⁰?

- Dans un deuxième temps, le professeur assume explicitement sa responsabilité didactique en introduisant un débat entre les élèves à propos des explications possibles de ce phénomène¹¹.

b) D'autres problèmes de droites concourantes sont-ils aussi favorables à l'entrée dans la démarche géométrique?

1) Le problème des médianes

Il n'a pas les mêmes vertus que celui des médiatrices.

¹⁰ Au sens développé par Chevallard (1991)

¹¹ Nous ne développons cette partie de la situation didactique et renvoyons aux travaux de Balacheff (1988) sur l'organisation des débats de preuve

a) La taille du triangle des intersections

Le triangle des intersections est plus petit, et l'élève ne voit pas ce qu'il peut changer pour obtenir un triangle plus grand.

Avec les médiatrices, il peut penser qu'il peut réellement changer quelque chose en modifiant les angles du triangle, Avec les médianes la figure apparaît trop stable.

b) Difficulté de la preuve

D'autre part, la preuve est sans doute plus difficile que dans le cas des médiatrices, parce que elle demande plus de connaissances de géométrie, par exemple le théorème de Thalès, le rapport d'homothétie

2) *Le problème des hauteurs*

Il est meilleur que celui des médianes du point de vue a), car en choisissant bien la figure on peut envoyer le point de concours loin à l'extérieur du triangle ; mais la preuve (b) est difficile pour les élèves et ils ne peuvent pas la construire par eux-mêmes car ils sont peu exercés aux méthodes de la géométrie.

c) *Conclusion provisoire*

De "bonnes" situations d'introduction de la géométrie doivent posséder les caractères suivants :

- mettre en jeu des propriétés non évidentes¹²
- qui soient logiquement proches des axiomes
- qui soient faciles à prouver

4. Comparaison avec la situation didactique construite par Balacheff (1988) "la somme des angles d'un triangle"

Ces caractères sont sans doute nécessaires, ils ne sont pas suffisants. Balacheff (1988), étudiant la "construction d'une conjecture" rapporte les observations effectuées dans une situation didactique qui les possède. Il s'agit du problème de la somme des angles du triangle. Dans la première séance, les élèves sont invités dans une phase individuelle à tracer un triangle, à mesurer les angles au rapporteur, puis à en calculer la somme. Les résultats obtenus sont collectés au tableau, sans commentaire de l'enseignant, sous forme d'un histogramme ; l'enseignant demande alors un commentaire aux élèves ; il ne prend pas parti.

La séance suivante a pour but de différencier dans les commentaires des élèves ce qui tient à l'incertitude des mesures de ce qui tient des conceptions erronées. Le professeur remet à chaque élève une copie d'un même triangle (Annexe 2). Il "demande alors à chacun de formuler un pari sur la somme des mesures des angles de ce triangle, puis d'inscrire ce pari sur une feuille de papier qui sera récoltée ; il demande ensuite à chacun de mesurer les angles du triangle, et de calculer la somme des nombres obtenus ; à l'issue de cette activité, l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme pour chaque triangle, les résultats obtenus, organise, d'abord une confrontation pour chaque élève des résultats au pari, puis l'expression de commentaires sur l'histogramme à la classe"¹³. La séance suivante a pour fonction de provoquer la formulation de conjectures sur la somme des angles d'un triangle. Le professeur remet à chaque équipe une copie de trois triangles de taille et de formes non

¹² Très souvent les propriétés que l'on demande de prouver en classe dans les premiers apprentissages sont aussi évidentes que les axiomes dont on aura à se servir et la preuve est difficile pour les élèves.

¹³ Thèse, Chapitre V-III p. 395- 457

usuelles (Annexe 3). Le déroulement est calqué sur la séance précédente, mais le travail individuel est remplacé par un travail de groupe.

Cette séquence de base a été reprise, en modifiant quelques paramètres à partir de la deuxième séance, par Arsac et coll.(1992). Leur objectif est triple : disqualifier la figure et le rapporteur comme outils de preuve, faire approprier le résultat ($S=180^\circ$) aux élèves, mettre en échec la pseudo-proportionnalité des angles et de la taille du triangle. Ils introduisent à la deuxième séance une production des paris d'abord individuelle puis, avant de recourir aux mesures, un travail en groupe pour faire un pari par triangle au nom du groupe. Le recensement des paris une fois effectué, la vérification se fait individuellement, et les résultats en sont rassemblés au tableau. Le débat prend appui sur les avis qui se dégagent des remarques sur la conformité entre paris et mesures, remarques que le professeur a invité les élèves à faire.

Nous nous proposons de comparer ces situations en référence avec celle que Brousseau propose comme "modèle" de l'entrée dans la géométrie, afin d'en repérer, à l'aide de nos catégories, les différences éventuelles¹⁴.

a) Situations NB et NBA

1) Analyse à priori commune

Ce qui est proposé aux élèves à partir de la deuxième séance est une anticipation, non d'une valeur théorique, ce qui aurait obligé chacun à se situer d'emblée dans le modèle géométrique, mais sur les mesures qu'ils vont effectuer¹⁵. Ce point est selon nous très important, bien qu'implicite dans la consigne : "faire un pari sur la somme des angles de ce triangle". Professeur et élèves peuvent donc interpréter de manière toute différente le sens de la proposition. Mais pour les élèves, et c'est cette situation que nous étudions, la référence à l'activité de mesure de la séance précédente nous paraît la seule légitime, d'ailleurs confortée par le recours ultérieur à la mesure avant le débat.

Face à cette situation, il s'agit donc pour les élèves de fournir un pari dont ils savent (ou croient) qu'il sera confronté aux mesures.

La "pseudo-proportionnalité" fournit une stratégie de base.

La stratégie gagnante consiste à travailler sa proposition pour qu'elle ne puisse pas être disqualifiée par les mesures. Nous en voyons deux : fournir un intervalle centré sur 180° , ou une valeur, 180°

Quelles sont les solutions à la portée des élèves ? cela dépend-il des situations ?

2) Situation NB

Pour la situation NB, le pari individuel va porter sur une mesure. Seule la valeur 180° est constatée gagnante. Les productions éloignées sont ensuite disqualifiées par la vérification immédiate, qui si elle est conduite avec soin, fournit un intervalle autour de 180° .

Le pari du groupe est produit lors de la séance suivante ; il porte sur les angles de chacun des triangles "singuliers". Il serait alors plausible que se dégage comme produit d'un compromis une nouvelle forme de pari : l'intervalle centré sur 180° . Les productions produites sur la base d'une "pseudo-proportionnalité" vont être disqualifiées par la vérification qui suit.

¹⁴ Nous désignons ces situations, dans ce paragraphe, respectivement par NB, NBA et GB, selon qu'il s'agit de Balacheff, d'Arsac et coll. ou de Brousseau.

¹⁵ On peut penser que, après la première séance et en particulier le choix de rassembler les résultats par un histogramme, certains élèves vont vite être amenés à considérer d'autres contrats intermédiaires qui seraient : les mesures qu'on aurait du trouver, que les autres vont trouver, etc.

Au moment où les conjectures vont être identifiées, seules peuvent rester en lice (P1) : 180° et (P2) : un intervalle centrés sur 180° . Mais on peut s'interroger sur l'incertitude à leur propos que pourraient ressentir les élèves : ils ont pu *constater* à trois reprises, sur des contextes différents (triangles tous dissemblables, un triangle fourni par le professeur, puis trois triangles singuliers) que la somme varie peu autour de 180° . Ces situations ont donc créé l'environnement idéal pour produire chez tous les élèves une conviction empirique.

Sur quel levier le professeur pourra-t-il s'appuyer pour introduire la nécessité de se centrer sur l'identification d'une valeur théorique ?

Si les propositions P1 et P2 étaient contradictoires, les élèves pourraient ressentir le besoin de changer de point de vue. Or elles sont toutes deux confortées par toute expérimentation correctement menée : dans la problématique de la mesure, il est normal, et même inévitable que la valeur obtenue fluctue.

La question d'une valeur théorique n'a donc pas de sens dans le contexte proposés aux élèves, et elle ne peut provenir que d'un changement de problématique, et comme ce changement n'est pas le produit d'une disqualification de la problématique précédente, il ne peut qu'être le produit de contraintes *extérieures* à la situation.

Balacheff fait le constat que cette suite de situations n'a pas permis la dévolution claire de la nécessité de la preuve.

3) *La situation NBA*

Les variations introduites ont, selon nous, comme premier effet de diminuer la le poids de l'approche empirique : les résultats ne sont plus collectés selon un histogramme, la deuxième séance est supprimée et la troisième articule sans vérification intermédiaire le pari individuel sur le pari en groupe. Il y a donc une vérification de moins, et aucune entre les deux paris. Le premier effet est de rendre plus difficile un accord dans le groupe sur une valeur, et par conséquent plus probable la production au niveau du groupe d'un pari sur un intervalle.

Mais le problème de fond reste le même, et c'est bien ce que constatent Arzac et coll. dans certaines classes, celles où le contrat didactique n'a pas été faussé par la connaissance antérieure du résultat. Les deux bonnes stratégies apparaissent, et résistent aux tentatives du professeur.

Ces auteurs signalent qu'après une observation fine, ils ont constaté que cette activité ne permet d'atteindre de façon reproductible qu'un objectif : la remise en cause de la pseudo-proportionnalité de la mesure des angles avec la taille du triangle.

En ce qui concerne l'objectif de disqualification des mesures, il n'est généralement pas atteint : ou bien les élèves connaissaient le résultat, et le "retrouvaient" (en donnant un coup de pouce éventuel aux nombres obtenus à l'aide du rapporteur), ou bien ils ne le connaissaient pas et s'entendaient pour dire que la somme des angles d'un triangle est proche de 180° . La problématique de la mesure serait confortée.

Quant au résultat de la somme des angles, on ne peut pas dire que, dans les classes où il n'était pas connu, ce soit le cas ; en effet beaucoup d'élèves de ces classes ont cherché à prouver que la somme des angles d'un triangle est proche de 180° .

b) situation GB

Dans la situation des médiatrices, par une rupture de contrat, le professeur propose aux élèves de faire quelque chose que lui (seul¹⁶) sait impossible, en termes de relation entre des objets géométriques et non de relation entre un objet et une mesure. Le recours à l'espace permet, selon Brousseau, de faire apparaître deux réponses qui, ne s'exprimant pas en termes de mesure, mais de géométrie, peuvent être considérées comme contradictoires aux yeux des élèves : certains élèves trouvent 3 points (qu'ils n'arrivent pas à "écarter les uns des autres"), d'autres peuvent n'en trouver qu'un. Une réalisation, aussi précise soit-elle, ne permet pas de décider entre les deux. Mais les propositions sont contradictoires. Cette contradiction insoluble spatialement est, pour les élèves, un phénomène inattendu qui va justifier la recherche d'un autre type de preuve. L'entrée dans la géométrie se fait alors contre la figure, une fois constatée l'impossibilité de trancher par le tracé.

c) Conclusions

Ces dernières remarques nous conduisent à préciser, en conclusion, un autre caractère, nécessaire selon nous, d'une bonne situation d'entrée dans la problématique de la géométrie : les différentes conjectures permises par la situation et par conséquent proposées au débat d'initiation doivent être considérées comme logiquement incompatibles. De plus, les autres problématiques ne doivent pas permettre de trancher. Il ne suffit pas de mettre en débat une proposition qui peut être remise en cause par des interactions satisfaisantes avec le milieu spatial et d'autres pour lesquelles ces interactions n'apportent pas de réponse.

On peut noter une propriété de la version NBA que notre analyse permet de révéler : elle permet de proposer simultanément au débat (seulement dans le groupe, malheureusement) les propositions issues de la pseudo-proportionnalité et celles issues de la maîtrise des mesures. Dans l'hypothèse d'une exploitation collective, avant mesures, de déclarations sollicitées sur ce que l'on peut dire de la somme des mesure des angles d'un triangle, on obtiendrait alors des déclarations qui pourraient être considérées comme contradictoires. Une réflexion qui serait menée, avant le recours aux mesures, sur la manière de décider du vrai et du faux de telles déclarations, constituerait un changement de problématique, et pourrait déboucher sur un type de preuve qui fait jouer à l'espace un rôle de *contre exemple*. Une "épure" peut alors, sous réserve d'assumer l'articulation entre la géométrie et le spatio-géométrie par la précision, être produite comme *preuve*. Ainsi, dans le cas où il serait possible de mener une telle réflexion, cette situation pourrait constituer un outil didactique pour introduire ce rôle de l'espace dans la géométrie, rôle qui n'est actuellement exploité que par les professeurs pour réfuter des suggestions d'élèves.

d) Remarque sur le rôle attribué à la pratique des mesures dans NB et NBA

Dans aucune des deux modalités les auteurs ne rapportent d'interventions concernant les vérifications d'une bonne pratique des mesures au rapporteur. La production de résultats de mesures différents pour un même triangle aurait du produire un refus d'une variation de plus

¹⁶ Mais cette situation étant toute fictive puisque non réalisée jusqu'ici dans des conditions expérimentales convenables, on peut nous objecter que nous n'avons aucune assurance que les élèves ne résistent pas, comme ceux de Balacheff à une rupture de contrat aussi radicale! Notons quand même, que lorsque nous avons proposé la même situation à un groupe de professeurs d'école, ceux-ci sont totalement rentrés dans le jeu. La rupture de contrat n'est perceptible pour les élèves qu'à la fin de la recherche, ce qui fait que ne peuvent résister que les élèves qui disposent du savoir avec beaucoup de certitude.

de trois degrés autour de 180° , et un recours immédiat à une vérification soignée et contrôlée, collective par exemple. Ce n'est pas le cas, comme le rapporte Balacheff (1988)¹⁷.

Dans NB et NBA, la situation paraît conduite de manière à éviter de poser le problème d'une bonne pratique de la mesure. Ceci nous interroge.

On obtient d'abord selon nous, comme première conséquence de cet aspect du contrat didactique, une disqualification *de fait* du soin dans la mesure, et une disqualification des mesures en général. Nous sommes à ce niveau en désaccord avec Arzac et coll. quand ils concluent que dans les classes (A), où trop d'élèves connaissent le résultat, la situation a renforcé l'idée que le rapporteur permet d'atteindre la précision que les élèves souhaitent¹⁸. Ils ont en effet très finement observé la falsification de ces mêmes mesures pour aboutir au résultat.

Mais il est un avantage didactique important de cette pratique : elle permet au professeur de manipuler à sa guise le contrat, puisqu'il a fait disparaître une certaine forme de référence à la réalité concernée par les propositions des élèves.

5. Comparaison de la situation du triangle aplati avec celle des médiatrices.

Les situations semblent posséder des propriétés très semblables.

Voyons en quoi elles diffèrent :

- Comme nous l'avons montré au chapitre B-4, la situation du triangle aplati admet plusieurs réponses, chacune contradictoire avec les autres, et cependant valide au sein de la problématique dans laquelle le "résolveur" se situe. Cette situation permet donc, par les propriétés de ses différentes réponses, de poser la question de leur légitimité et donc des différentes problématiques. La situation n'en déconsidère aucune, et c'est donc l'enseignant qui doit choisir.

- La situation des médiatrices aboutit à une impossibilité de réaliser la construction attendue, quelque soit la problématique dans laquelle se situe le résolveur. Elle appelle donc naturellement la question suivante : comment se fait-il que l'on ne puisse résoudre le problème posé ?

L'hypothèse des trois points confondus ne peut être validée par aucune autre problématique que mathématique. La situation permet d'articuler une démarche de modélisation spatiale avec la démarche mathématique selon une épistémologie convenable, qui ne se situe pas en terme de rejet, mais de complémentarité.

C'est la situation qui gère le rapport entre les problématiques.

6. Prolongements

L'inégalité triangulaire permet donc de bien mettre en scène l'approximation et ses conséquences sur la distanciation, qui peut et doit exister, entre un concept géométrique et une épure, aussi soignée fut-elle, et par voie de conséquence entre la problématique géométrique et la problématique de la modélisation.

Cette distanciation peut être rendue plus forte encore par une limitation spatialement arbitraire au niveau du choix des instruments utilisables, limitation dont les effets peuvent être

¹⁷ p.438-439, Les mesures collectées d'un même triangle varient de 178° à 262° . Des élèves ayant ri pour "262", le professeur est alors intervenu pour à nouveau rappeler le contrat dans le cadre duquel la classe travaille : ... quand quelqu'un dit quelque chose de bizarre, on ne rit pas...si ça se trouve, c'est elle qui a raison". Les mesures ne seront pas vérifiées, et leur variété est de fait mise sur le même plan que celle des paris

¹⁸ p.119

étudiés en rapport avec une axiomatique correspondante. C'est ce qu'a fait L. Félix (1964)¹⁹ en faisant reposer la définition des droites sur une axiomatique de la distance qui correspond au seul usage des cercles. L'image spatiale ainsi déterminée pour les droites ne permet aucune certitude quant aux conjectures, et justifie par conséquent le recours aux démonstrations dont certaines peuvent d'ailleurs être très simples.

Dans l'annexe 4 à ce chapitre, le lecteur trouvera un texte où Guy Brousseau illustre en quelques pages inédites la richesse de cette approche.

IV. CONCLUSIONS

A. Exploitation du caractère métaphorique de ces situations

Une métaphore ne vaut que par les aspects qu'elle met en valeur pour les besoins de la communication avec une catégorie particulière de récepteurs. Les récepteurs potentiels sont ici d'abord les enseignants, et peut-être les élèves.

1. La situation des drapeaux²⁰

Cet exemple nous permet d'illustrer les points suivants :

a) Importance épistémologique du rapport entre le phénomène d'approximation des mesures et la modélisation.

Ce rapport intervient dès l'énoncé de la situation. Il est à l'heure actuelle totalement escamoté de l'enseignement tant élémentaire qu'ultérieur. Nous reviendrons de manière plus approfondie sur cette question.

b) Relation entre modélisation et connaissance géométrique

Une modélisation ne débouche pas nécessairement sur des connaissances géométriques, au sens de faisant partie du corpus de la géométrie constituée, définition, axiome ou théorème.

Une modélisation spatio-géométrique, comme nous l'avons appelée, débouchant sur des concepts de géométrie, ne peut donc être obtenue que si l'enseignant a conçu le choix et l'articulation des situations en "consommant" beaucoup de géométrie, pour disqualifier d'autres approches comme la problématique pratique, et pour pouvoir faire reconnaître le concept géométrique sous-jacent au modèle spatial sans "trop" forcer "l'effet Jourdain".

c) Pratiques différentes des tracés

Le rapport de modélisation avec l'espace introduit trois pratiques des tracés géométriques, l'épure²¹, représentée par le plan, le dessin, et sa transformation en schéma par l'introduction de (sur- et sous-) figures. Il nous paraît essentiel de souligner la richesse de l'acquis que constitue, pour l'activité géométrique ultérieure, une pratique de transformation du dessin en schéma, transformation naturelle dans le processus de modélisation ici décrit.

¹⁹ 1964, Initiation à la géométrie, Classe de 5^e, Dunod éditeur.

²⁰ Brousseau N. et G. (1987), p.p.256-258

²¹ Nous utilisons ici ces termes au sens de Mercier et Tonnelle : le *dessin* représente les deux fanions dans leur environnement, le *schéma* est issu de la transformation du dessin pour y inclure par exemple une *figure* géométrique comme le rectangle (conçu comme rassemblant un certain nombre de relations mathématiques) et rechercher si la construction est possible, l'*épure* représente le plan précis à l'échelle sur lequel on va travailler en report et saisie d'informations.

d) Rôle des transformations

Les connaissances de géométrie réputées difficiles à acquérir, que sont les transformations, trouvent en de tels problèmes l'occasion de montrer leur intérêt, tout en renouvelant complètement la connaissance usuelle des figures remarquables.

Ces figures remarquables prennent alors un nouveau statut, leur statut véritable, non de dessin d'un objet typique, mais de réservoir de relations exemplaires entre propriétés géométriques, qui ne se donnent à voir qu'à celui qui connaît, selon la pratique chinoise des figures²².

2. La situation des médiatrices

L'articulation entre une problématique de modélisation et une problématique de géométrie s'effectue sans nier la spécificité de l'une ni de l'autre.

Qu'est-ce qui permet une telle articulation ?

²² Martzloff J.C. (1989), Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, ed IREM de Besançon et de Lyon, 131-154.

a) Rôle du rapport à l'espace comme à un laboratoire et non comme à une boule de cristal²³.

C'est d'abord un regard neuf sur l'espace, un regard où l'on laisse exister, ou plutôt où l'on force, par l'artifice didactique²⁴, l'existence de l'étonnement de voir trois droites se couper en un seul point. C'est de surcroît un regard fondamentalement sceptique, qui interroge l'espace à la manière dont on interroge l'expérience dans une science, non point pour y contempler la vérité, mais pour y débusquer les conditions qui auraient pu "artificiellement" produire ce phénomène. Y sont manifestées à la fois :

- la continuité avec l'attitude modélisante par l'investissement des connaissances et le respect de la réalité,
- une rupture, un changement de rapport du sujet à l'espace par le fait que la situation aboutit à une contradiction inacceptable dans la logique "naturelle" des élèves, et par là, la nécessité d'une distanciation vis à vis de l'espace.

b) Rôle de la modélisation comme source possible de questions de mathématiques.

On a mené aussi loin que possible l'enquête spatiale; le résultat en est que s'il y a trois points, ils sont très proches, *comme* s'il n'y avait qu'un point. Le problème spatial est résolu, du moins sur la feuille de papier : on peut faire comme s'il n'y avait qu'un point, cela permet par exemple de réaliser le tracé de la troisième médiatrice dès qu'on a fait celui des deux autres.

Certes, on ne sait alors rien de la question si on la posait avec les dimensions d'une maison, d'un département, d'une galaxie; mais qui s'en soucie ? C'est du domaine de la question intellectuelle ! La modélisation doit alors laisser place à une autre problématique, celle du savoir, ou bien être portée sur des objets du macro-espace, ce qui ne pourra se faire que de manière évoquée.

Si certains élèves peuvent poser d'eux-mêmes ce type de question, il faut convenir qu'il s'agit d'un tout autre problème, et que seul le professeur peut le reconnaître comme pertinent, et en assumer les contraintes nouvelles de prise en charge.

Le lien avec l'étape de modélisation relève particulièrement ici de la même curiosité qui a soutenu la recherche spatiale : Comment se fait-il que ces trois droites soient si près de se couper ? On n'est pas parvenu à agrandir ce triangle, alors on change de préoccupation, on cherche une explication, on conjecture certes que les trois points peuvent être confondus en un, mais surtout qu'il y a une contrainte de nécessité dans cette propriété, et on la cherche, non plus avec les outils matériels, mais au niveau des savoirs.

La question du "pourquoi" est d'autant plus facile et naturelle que la situation aura mis en scène une frustration importante au niveau de la réalité.

c) Rôle de la cohérence assumée entre les déclarations retenues pour vraies sur l'espace.

Une autre spécificité de l'exemple des médiatrices est de montrer qu'il peut être profitable de rejeter l'introduction immédiate de l'artifice de la démonstration scolaire usuelle,

²³ L'image de la boule de cristal ne vient pas qualifier la pratique de modélisation, comme le montre l'exemple ci-dessus, mais les pratiques ostensives.

²⁴ Qu'il faille de tels artifices didactiques pour obtenir ce résultat en dit long sur le poids de l'empirisme sur la culture, et en particulier notre culture didactique.

qui permet de dérouler un discours "socratique" à l'auditeur médusé de tant d'habileté. La situation laisse exister l'énoncé vraisemblable de l'élève : et bien, "il y a trois points qui sont équidistants de trois autres, quoi d'étonnant ?".

C'est là encore qu'intervient le professeur de mathématiques. Cette déclaration, déduite des procédés de constructions, est une déclaration de plus qui peut prendre place dans le modèle, mais c'est une déclaration fautive de la théorie. Le souci de cohérence entre l'ensemble des déclarations des différents modèles est bien à la racine de la géométrie, comme des mathématiques. N'est-ce pas ce souci de cohérence théorique en géométrie (ce qui ne semble pas être le cas de l'arithmétique) qui manquait aux civilisations comme celle des égyptiens, dont les oeuvres prouvent amplement qu'ils maîtrisaient la modélisation ? C'est là qu'il y a rupture culturelle entre la modélisation de l'espace, et la théorisation de la géométrie.

Notons que la situation permet d'illustrer que la cohérence n'est pas le produit naturel d'une situation de modélisation, que l'importance essentielle de ce souci de cohérence ne pourra être prise en compte que sous l'action du professeur. C'est le débat mathématique qui conditionne l'existence des situations de géométrie, situations où la cohérence est la règle principale qui régit l'acceptation ou le refus des déclarations. La géométrie viendra alors effectivement structurer les connaissances spatiales des élèves.

d) Comment et pour qui différencier les problématiques ?

1) au niveau des enseignants

Il est pour nous évident que quel que soit le niveau d'enseignement, il est nécessaire de bien différencier pour les enseignants, non seulement la problématique pratique des autres, mais la problématique de modélisation de la problématique de la géométrie. Ce n'est qu'à ce prix que l'enseignant pourra rester le maître dans sa classe !

Comment le faire ?

L'expérience de la formation des maîtres nous a montré la difficulté qu'il y a à modifier le rapport épistémologique des personnes à la connaissance, et ici à une connaissance qui tient des mathématiques et de la physique, par une action portée exclusivement sur les savoirs.

Nous pensons que les métaphores précédentes, exploitées dans ce sens, pourront aider dans la communication avec les enseignants.

2) au niveau des élèves

a) de l'enseignement secondaire

La difficulté principale du rapport à la géométrie est pointée, par les enseignants comme par les élèves, au niveau du rapport à l'espace lié à la géométrie.

Nous avons quant à nous pointé un déficit plus important, qui relève d'abord du rapport de modélisation à l'espace, et ensuite d'un autre type de rapport (laboratoire d'expériences) commandé par la géométrie.

Tout le monde sait que cette difficulté ne peut être résolue par simple évocation, ou par le signalement du changement de contrat.

Nous proposons d'utiliser avec les élèves la situation des médiatrices, et probablement quelques autres, avec un rôle aussi métaphorique que pour les enseignants, pour dégager "en situation" les caractéristiques de la nouvelle activité dont on veut leur faire la dévolution.

b) qu'en est-il pour l'école élémentaire et maternelle ?

i) Réhabiliter la problématique pratique

Sans une pratique de la problématique pratique, est-il possible d'installer une autre des problématiques qui nous intéressent ? On peut en douter. Cette problématique est la clef de la résolution par l'action des situations effectives, situations de référence des véritables problèmes de modélisation.

Nous ferons donc des propositions d'ingénierie pour l'école maternelle et élémentaire portant sur l'acquisition des concepts spatiaux, dont nous avons montré l'insuffisante maîtrise par une partie au moins des élèves.

ii) Introduire la problématique de modélisation

Comme nous l'avons déjà souligné, l'introduction de cette problématique de modélisation va nécessiter une rupture avec la problématique pratique, rupture dont il faut faire la dévolution aux élèves.

Cela nécessite d'abord d'établir un rapport convenable aux mesures, et nous disposons à cet effet du travail d'ingénierie réalisé par N. Brousseau (1990) au CM1, travail qui indique des pistes pour faire aux élèves la dévolution de cette prise en charge. Nous nous heurtons là, plus qu'à un problème vis à vis des élèves, à un problème de culture mathématique des maîtres, dont la scolarité mathématique a toujours soigneusement évité la confrontation avec la réalité, et pour cause, comme le montre très clairement G. Brousseau (1988).

Cela nécessitera aussi un choix judicieux des situations et de leur articulation.

Il est cependant douteux que cette seule problématique suffise à permettre aux élèves d'établir un sens suffisamment large des concepts géométriques, dont la fonction épistémologique de modèle de l'espace nécessite et provoque l'homogénéisation des outils de pensée nécessaires à la résolution de telle ou telle famille de solutions.

iii) Ouvertures, à l'école primaire, sur la problématique géométrique

Il est évident qu'il n'est pas question d'en faire une dévolution institutionnelle aux élèves, mais, d'introduire des moments de géométrie, lorsque les situations s'y prêtent, c'est à dire lorsqu'elles amènent déjà quelques élèves à se poser des questions intellectuelles. Ceci relève de la responsabilité du maître.

Pour illustrer notre propos, citons une question dont nous avons pu observer l'émergence dans le cadre des observations que nous avons faites à l'occasion de nos travaux expérimentaux :

Dans la situation du grand rectangle, les élèves prennent en charge le placement de quatre piquets constituant les sommets d'un rectangle de 7m sur 9m sur une pelouse voisinant la classe. Les élèves contrôlent les angles, les égalités de mesure des côtés et de la diagonale, et ne sont pas convaincus que la forme obtenue est un rectangle. L'un d'eux énonce : "peut-être qu'il existe des quadrilatères qui ont quatre angles droits et qui ne sont pas des rectangles !"

Une recherche aurait alors pu être lancée dans le "laboratoire" de la feuille, pour obtenir des quadrilatères non rectangles ayant quatre angles droits... recherche débouchant sur un échec. La traduction de cet échec en termes de propriétés caractéristiques du rectangle appuie celles-ci sur une conviction empirique, leur confère "naturellement" un statut de "théorème en acte".

Quelle peut être l'exploitation géométrique de cette situation? Développer la pratique d'un certain rapport entre une propriété géométrique et des réalisations spatiales : un seul tracé d'épure invalide une propriété géométrique (conjecturée). Ici, un seul tracé de quadrilatère non

rectangulaire mais ayant quatre angles droits suffirait à invalider la propriété que quatre angles droits suffisent à déclarer qu'un quadrilatère est rectangle. Pour cela, il faut faire passer les élèves d'une problématique de "théorèmes en actes", empiriquement établis, à celle de conjectures. Or, attribuer le statut de conjecture à une propriété suppose qu'on ait rencontré suffisamment d'occasions de rejet de propriétés à la portée des raisonnements des élèves. Cela suppose donc d'identifier des situations où l'on peut produire des raisonnements des conjectures fausses, et une pratique de l'enseignement qui ne les rejette pas immédiatement.

Nous avons vu par ailleurs comment une connaissance culturelle, du type de la somme des angles d'un triangle, peut empêcher la dévolution ultérieure d'une situation de preuve. Il pourrait en être de même pour celle des médiatrices.

Les grands espaces, ou tout au moins l'absence de la vision directe dans la collecte d'informations, ne sont-ils pas des occasions où, par l'impossibilité d'une validation immédiate, des questions peuvent se poser à propos d'objets réels ? Les conditions micro-spatiales sont à contrario les plus mauvaises pour cette émergence.

B. Etat des réalisations d'ingénierie à l'école primaire

Si l'on veut modifier l'enseignement, il nous faut donc concevoir de nouveaux équilibres du système didactique, équilibres qui possèdent leurs systèmes de régulation.

L'étude de tels équilibres suppose la construction d'au moins une suite de situations d'enseignement, situations dont il s'agit de contrôler, avec nos instruments d'analyse, le choix, l'articulation, et les conditions de réalisation effective.

C'est un vaste projet que nous n'avons pu qu'entreprendre à la suite des travaux déjà menés au C.O.R.E.M.²⁵, et dont la réalisation appellera des travaux complémentaires.

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'état actuel de notre travail, les questions que nous avons repérées, les réponses que nous étudions, quand nous en avons.

Les questions peuvent dans une certaine mesure être séparées en deux groupes respectivement désignés par les termes de macro-didactiques et de micro-didactiques (Artigue, 1988).

1. Problèmes macro-didactiques :

Les décisions à prendre concernent les objectifs spécifiques à retenir, le choix des situations et de leurs articulations.

Nous ne connaissons pas à l'heure actuelle de méthodologie avérée pour élaborer et valider un choix d'objectifs relatifs à un champ de connaissances aussi large que celui sur lequel nous travaillons. Dans la mesure où nous allons inclure certains objectifs relatifs à une problématique pratique, nous ne pourrions les formuler qu'en termes de maîtrise de classes de situations non didactiques ou de connaissances en acte. (par exemple, être capable d'avoir recours à un gabarit dans toutes les situations où on a besoin de plusieurs exemplaires d'un même objet).

Nous avons ainsi défini 4 grandes familles d'objectifs pour l'enseignement de l'école élémentaire :

a) maîtrise de problèmes dans le micro-espace

Il s'agit de problèmes "complexes" destinées aux enfants d'école maternelle : fabrication d'objets répondant à certaines contraintes (le cahier, le sac, la petite voiture, le toit

²⁵ Centre d'Observation et de Recherches de l'Ecole J. Michelet à Talence.

de la "case" etc..., gabarits, assemblage de feuilles, pour faire un cahier ou un sac en papier..). grâce auxquels peuvent se construire à la fois certaines relations fondamentales et certains invariants spatiaux, dans une problématique pratique.

b) maîtrise de problèmes méso-spatiaux

Ces problèmes sont destinés aux enfants des cycles 1 et 2, permettant l'enrichissement du vocabulaire spatial et la prise de conscience des phénomènes projectifs (coordination des points de vue). Ils ont pour objectif l'affinement de représentations mentales et langagières du méso-espace.

Remarque

Pour ces deux types de situations, on peut se demander s'il est bien nécessaire de prévoir un enseignement pour des apprentissages qui se font de toute façon plus ou moins spontanément. L'intérêt de proposer aux enfants la résolution de problèmes de ce type est que le choix par le maître de conditions plus favorables à la "conceptualisation" peut conduire les enfants, en particulier ceux qui ne disposent pas, de par leur milieu familial d'interactions suffisantes avec le milieu (voir Dolle, 198), à un travail plus approfondi (cf activités logiques JP). Le lecteur trouvera, en partie D, quelques exemples de ces deux types de situation.

c) maîtrise de problèmes macro-spatiaux

Problèmes réels ou simulés dans le méso ou micro-espace, ils sont destinés aux enfants des cycles 2 et 3 pour développer la construction de représentations mentales, langagières et matérielles du méso et du macro-espace (maquettes, dessins, schémas, plans, cartes).

Le lecteur en trouvera des exemples au chapitre C-9, et en partie D.

d) entrée dans la modélisation de l'espace par la conceptualisation spatio-géométrique.

1) Choix des objectifs

Nous n'avons pas de raison de remettre en cause la liste des concepts géométriques proposés depuis longtemps au travail des élèves, tous sont nécessaires à une maîtrise spatiale suffisante : longueur, segment, milieu, figures simples du plan et de l'espace, cercle, droites, angle droit, droites parallèles, droites perpendiculaires, angles, éléments de symétrie, agrandissement et réduction, translation, rotation, surfaces, volumes.

L'importance spatiale de ces concepts est très variable, et plus ou moins éloignée du traitement mathématique du concept (par exemple, la rotation sera surtout importante à ce niveau en rapport avec les changements de points de vue dans un méso-espace). Ils ne peuvent donc pas faire l'objet dans notre étude d'un traitement selon les mêmes exigences.

2) Quelles situations et quelles articulations?

La méthodologie des situations fondamentales permet d'explorer un champ de problèmes, à l'aide de quelques situations (à déterminer) et de variables didactiques (à identifier) liées à chacune d'entre elles. On peut ainsi tenter de couvrir l'ensemble des problèmes relatifs à l'enseignement d'une notion. C'est cette méthodologie que nous avons illustrée sur la problématique de modélisation, au chapitre C-9 sur l'apprentissage des plans au CE2, aux chapitres C-6, C-7, et C-8 en ce qui concerne les angles au CM.

3) L'articulation entre la problématique de modélisation et la problématique de la géométrie mathématique.

La détermination des occasions propices à ce travail à l'école élémentaire, et leur exploitation est une tâche à laquelle nous allons pouvoir nous atteler, ce que nous ne pouvions faire avant de dégager clairement les caractéristiques de ces problématiques.

2. Problèmes micro-didactiques :

Ils concernent le contrôle à priori, dans chaque situation d'enseignement, du fait que le contrat didactique d'apprentissage est conforme aux choix didactiques décidés, que les conditions de réalisation assurent des résultats conformes aux prévisions.

Rappelons, sous forme d'une liste de questions, les caractéristiques principales des rapports spatiaux dans les situations d'enseignement que nous avons proposées à cet effet et dont nous avons montré l'importance :

a) Le caractère effectif ou intériorisé,

L'apprentissage visé nécessite-t-il des rapports effectifs ?

Comment assurer l'articulation de l'intériorisé sur l'effectif ?

b) Le caractère didactique ou a-didactique des situations

L'apprentissage visé nécessite-t-il des situations a-didactiques ?

Comment assurer l'articulation des rapports a-didactiques et didactiques dans chacune des situations ?

c) La problématique dans laquelle s'inscrivent les rapports spatiaux : pratique, de modélisation, ou géométrique.

Comment assurer dans la classe la mise en oeuvre de la problématique visée ?

Comment assurer l'articulation des problématiques ?

Nous renvoyons à présent le lecteur aux différents chapitres où nous avons mis en oeuvre de l'ingénierie au sens développé dans ce chapitre, en particulier aux chapitres C5, C6, C7, C8 et C9.

Nous présentons en partie D la description de différentes situations d'enseignement dont la mise en oeuvre et l'articulation nous paraît conforme au projet dont nous avons débattu tout au long de cette étude.

CHAPITRE C-1

EVOLUTION DU CONTENU DES PROGRAMMES

Nous nous proposons d'étudier tout d'abord l'évolution du contenu de l'enseignement portant sur l'espace et la géométrie à l'école primaire, en la rapportant aux "lois" dégagées par Chevallard dans ses études de la transposition didactique puis d'examiner du point de vue de l'articulation connaissances spatio-géométriques / savoir géométrique l'évolution de l'enseignement des deux premières années du collège depuis 1957.

POURQUOI CETTE ETUDE?

Comme nous l'avons rappelé ci-dessus, nous avons comme projet de proposer des modifications d'objectifs et de pratiques à l'enseignement actuel de l'espace et de la géométrie. Or l'un des éléments dont peut dépendre la réussite de ce projet est la stabilité de cet enseignement au cours de l'histoire depuis le début de la scolarisation obligatoire. Si les contenus et les formes de l'enseignement ont peu varié depuis un siècle, on peut estimer que cela constitue un état d'équilibre qu'il sera impossible de modifier sans action sur les "forces" qui l'assujettissent, et qu'il nous revient de déterminer. Aussi nous nous proposons d'examiner les questions suivantes :

La maîtrise de l'espace était-elle visée en mathématiques et par d'autres disciplines à l'école primaire depuis la création de la scolarité obligatoire?

Quels étaient les contenus et les objectifs de l'enseignement de la géométrie au moment où l'école primaire préparait la majorité de la population à la vie active?

De quelle nature ont été les changements ultérieurs?

Y-a-t-il une rupture entre la géométrie enseignée au cours moyen et celle des deux premières années de collège?

L'ambiguïté qui règne dans l'enseignement au collège, sur les rapports espace sensible-géométrie, est-elle un fait récent ou était-elle déjà manifeste dans les programmes antérieurs?

Nous allons examiner de ces points de vue l'évolution de l'ensemble des programmes de la scolarité primaire et l'évolution des programmes de mathématiques des deux premières années du collège. Nous utiliserons l'analyse théorique de Chevallard (1991) sur la transposition didactique pour nous interroger sur l'existence de "lois" régissant cette évolution.

I. ENSEIGNEMENT PRIMAIRE DANS SON ENSEMBLE

Des programmes et des instructions officielles¹ concernant l'ensemble des enseignements primaires ont été successivement définis en 1887, 1923, 1945, 1970 (pour les mathématiques seulement), 1977-1978-1980, 1985.

A. L'apparition de "l'espace"

Remarquons tout d'abord que le terme "espace" n'y est apparu que récemment, sans doute à la suite des travaux de Piaget sur la construction de l'espace chez l'enfant. La rupture se situe sur la période 1977-1980 pendant laquelle l'ensemble des programmes et instructions

¹ Dans cette étude, nous nous appuyons à la fois sur les textes des programmes et sur les I.O. qui les accompagnent.

de l'école primaire est complètement repensé et reformulé. Les rédacteurs s'appuient sur les travaux de recherche de l'INRP, eux-mêmes issus de la réflexion et des expérimentations menées dans certaines écoles normales et, en ce qui concerne les mathématiques, dans certains IREM.

Jusqu'aux programmes du CP de 77, la maîtrise de l'espace n'est jamais explicitement proposée comme objectif à l'enseignement, dans quelque domaine que ce soit. Mais des connaissances et des compétences d'ordre sensori-moteur ou proprement spatiales sont assignées dans un cadre disciplinaire précis.

En voici quelques exemples pour le programme de 1945 du cours élémentaire, concernant des disciplines autres que les mathématiques :

-en travail manuel: pour les garçons : "coudre des boutons, faire un paquet, couvrir livres et cahiers" ; pour les filles : "Tricot : étude collective de la maille. Applications simples avec deux aiguilles de bois".

- en éducation physique : "Education motrice, sous forme d'exercices naturels visant à développer l'adresse, la vitesse, la détente et l'agilité."

-en géographie : "...observation et compréhension des grands faits géographiques et de leur vocabulaire usuel: points cardinaux...". "Les plans de la classe, de la maison, de la rue, de la commune serviront d'initiation à la compréhension d'une carte."

B. Espace et/ou géométrie dans les programmes de mathématiques

Pour les mathématiques, nous avons rassemblé dans un tableau tout ce qui peut relever des connaissances spatiales et/ou géométriques depuis 1887.(Pour les CP-CE, voir tableau n°1; pour CM, CS, FE, CP-CE, voir tableau n°2)

1. Remarques générales

a) La fluctuation du nom des savoirs enseignés à l'école primaire

Une première remarque doit être faite : Il n'y a pas de "mathématiques" à l'école primaire jusqu'en 1970, mais des savoirs dont le nom générique varie.

* Les programmes les plus anciens distinguent le calcul arithmétique et la géométrie qui concerne l'étude des figures planes et de quelques solides ainsi que celle des mesures spatiales².

* Les programmes de 1925 distinguent eux aussi le calcul arithmétique et la géométrie mais la mesure des aires et des volumes passe dans la partie "calcul" parce que, expliquent les instructions, "on ne les mesure pas effectivement, on les calcule en appliquant des formules".

* Les programmes de 1945, eux, désignent par calcul toutes les activités précédentes y compris "notions d'angle droit, de droites perpendiculaires, de droites parallèles". Seuls les programmes de fin d'étude distinguent arithmétique, système métrique et géométrie.

* Les programmes de 1970 désignent par "éléments de mathématiques" ce qui concerne les apprentissages numériques, mais la mesure et la géométrie en semblent exclues puisque les deuxième et troisième parties des programmes ont les titres suivants : "Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques" et "exercices pratiques de mesure et de repérage". Notons que depuis ce moment, géométrie et mesure apparaissent toujours dans des rubriques différentes.

² Ainsi relèvent de cette rubrique au C.E.: "exercices fréquents de mesure et de comparaison des grandeurs par le coup d'oeil; appréciation approximative des distances et leur évaluation en mesures métriques.

* Les programmes de 1977-1980 ont pour titre général: "Mathématiques". Ils sont formulés en terme d'objectifs. Ceux qui concernent les apprentissages numériques ou la mesure sont exprimés par des phrases à l'infinif. Donnons l'exemple du cycle élémentaire : "écrire et nommer les nombres", "comparer les nombres", "calculer sur les nombres", "repérer et mesurer". Au C.P., le quatrième grand objectif est "se situer dans l'espace et l'organiser", alors que pour les deux autres cycles, le dernier objectif se nomme : "activités géométriques". Il semble donc que les auteurs du programme aient réussi à formuler un objectif général concernant une certaine maîtrise de l'espace pour les enfants les plus jeunes mais aient renoncé à une formulation de ce type pour les connaissances à acquérir dans le domaine géométrique pour les plus âgés. Nous nous interrogerons à ce propos un peu plus loin.

* Les programmes de 1985 dont le titre général est également "Mathématiques" reviennent à des formulations classiques pour les différentes parties : "Arithmétique", "Géométrie", "Mesure de quelques grandeurs"³. Mais le contenu est très proche de celui des programmes de 77-80 y compris au C.P., où sous le terme de géométrie, le programme désigne un ensemble d'activités dont l'objectif correspond à "se situer dans l'espace et l'organiser".

Une première remarque s'impose donc:

Si le nom générique des connaissances dont nous disons maintenant qu'elles relèvent des mathématiques a changé au cours de l'histoire, c'est dans le domaine de la géométrie et de l'espace que ces fluctuations ont été les plus grandes. Le sens étymologique du mot "géométrie" semble avoir été retenu pour les programmes de 1887 et abandonné à partir de 1923.

b) La définition des contenus : notions ou activités?

Une deuxième remarque concerne le mélange constant qui est fait dans tous les programmes portant sur ces domaines entre des énoncés de notions et des énoncés d'activités.

Prenons quelques exemples :

* dans le programme de 1887, le premier paragraphe commence par "simples exercices...", le second par: " Différentes sortes d'angles"

* les auteurs du programme de 70 ont très clairement voulu le définir en termes mathématiques rigoureux⁴. Ils y réussissent bien pour les apprentissages numériques; le seul terme qui évoque une activité est "pratique" qui apparaît dans le contexte "pratique de la multiplication". Ceci signifie sans doute que ce n'est pas seulement l'opération mathématique "multiplication" dont la connaissance est visée mais aussi l'algorithme. Par contre, la deuxième partie comporte trois lignes décrivant successivement des activités : tracés, découpages, pliages et des concepts géométriques : cube, carré, rectangle, triangle puis quadrillages.

c) Conclusion

Les deux remarques précédentes nous conduisent à faire l'hypothèse que le statut des connaissances auxquelles nous nous intéressons n'est pas aussi bien établi que celui des apprentissages numériques.

³ Ils ont été élaborés à la demande de M. Chevènement, qui remettait alors à l'honneur "l'élitisme républicain", d'ou leur charme rétro...

⁴ voir l'introduction des I.O.

2. Evolution, niveau par niveau, du contenu et des objectifs des programmes :

a) Enseignement pré-élémentaire et cours préparatoire (tableau n°1)

Si dans les premiers temps de l'institution scolaire, le programme propose la réalisation d'exercices Fröbel⁵, il est ensuite muet, entre 1923 et 1977 sur les apprentissages spatiaux et géométriques. En 1977, nous voyons apparaître dans la circulaire concernant l'école maternelle et dans l'ensemble des programmes du Cours Préparatoire, le souci très net de définir le rôle des activités scolaires dans la construction par l'enfant des notions d'espace et de temps. A côté des "apprentissages instrumentaux", les "exercices corporels et activités d'éveil" ont pour objectifs généraux le développement de familles de compétences qui recouvrent l'ensemble des compétences spatiales telles que nous les avons définies au début du chapitre B-3, en tenant compte de l'âge des enfants considérés. Pour chacun des "domaines d'activités", des objectifs spécifiques concernent l'espace et l'on retrouve dans l'un ou l'autre domaine toutes les activités citées dans le chapitre "se situer dans l'espace et l'organiser" des apprentissages mathématiques. Ce qui est cohérent avec le premier paragraphe des instructions concernant "la présentation de l'espace": "Dans ce domaine, de nombreuses activités ne relèvent pas directement des mathématiques. Ce sont par exemple les exercices relatifs au schéma corporel, les jeux concernant la situation relative d'objets, les jeux de déplacement et de parcours, la détermination d'itinéraires, les activités de découpage et de pliage, la réalisation de pavages, puzzles, mosaïques, les jeux de construction dans l'espace, par superposition, emboîtement, assemblages, etc."

Le lecteur est en mesure de se demander pourquoi de telles activités sont proposées également dans le cadre des apprentissages mathématiques. Le deuxième paragraphe répond à cette question par une affirmation qu'il ne cherche pas à fonder: "Ces activités contribuent cependant toutes à la formation de la pensée logique et préparent de façon intuitive et empirique la prise de conscience de propriétés géométriques qui seront dégagées par la suite (orthogonalité, parallélisme, symétries, translation...), étant bien entendu que ces propriétés ne doivent faire l'objet d'aucune étude à ce niveau." On comprend mieux dès lors que la rupture entre les programmes antérieurs et celui de 1977 n'est que de surface : Ce qui intéresse la noosphère mathématicienne, c'est la géométrie mais dans une période où la réflexion pédagogique s'appuie autant sur la psychologie génétique, il est de bon ton d'affirmer (sans le justifier) que les savoirs géométriques sont issus des connaissances spatiales, supposées se développer dans les activités précitées.

Notre interprétation nous semble corroborée par l'évolution récente des textes officiels (1991) qui se manifeste dans la rédaction "des compétences à acquérir au cours de chaque cycle". En effet, pour la première fois, sont distingués pour les objectifs de l'école élémentaire trois types de compétences :

- * des compétences transversales parmi lesquelles figurent celles relatives "à la construction des concepts fondamentaux d'espace et de temps" pour lesquelles il est précisé: "ces concepts fondamentaux d'espace et de temps se construisent dans toutes les activités pratiquées à l'école primaire."
- * des compétences d'ordre disciplinaire dont relève le domaine mathématique.
- * des compétences dans le domaine de la maîtrise de la langue.

⁵ Fröbel (1782-1852). Pédagogue allemand, créateur (entre autres) des premiers jardins d'enfants, et de matériel pédagogique

Quelle influence a eu l'existence de tels objectifs transversaux sur la définition des objectifs mathématiques?

Le tableau n°3 montre qu'au cours du cycle 1 (qui recouvre toute la scolarité maternelle), des objectifs relevant de la "structuration de l'espace" sont définis mais que pour la suite (les cycles 2 et 3), et donc en particulier pour le Cours préparatoire, ce type d'objectifs a disparu de la rubrique "mathématiques" et est remplacé par des objectifs dont le nom générique est "géométrie", que nous analyserons plus en détail dans le paragraphe suivant. Les objectifs transversaux concernant l'espace sont par contre repris et précisés dans la rubrique "géographie", comme celui-ci: "l'enfant doit être capable de décrire son environnement immédiat, de prendre des repères et de s'orienter". Ce genre de compétence ne semble donc plus relever des activités mathématiques au C.P., même si les programmes de 1985 sont toujours valides.

b) Cours élémentaire

L'étude du tableau n°1 montre une étonnante stabilité dans la définition des connaissances à acquérir dans le domaine géométrique sur plus d'un siècle. Si les formulations changent en particulier en 78, deux constantes apparaissent :

* Au cours élémentaire deux sortes "d'objets géométriques" sont l'objet du travail des élèves :

-les figures élémentaires : triangle, rectangle, carré cercle. Par contre, le point, la ligne droite ou brisée, le segment, la droite ne font pas partie de la liste.

- les solides, en particulier le cube.

* A aucun moment, les programmes ne parlent de définitions de ces objets que les enseignants auraient à introduire; ces "objets" préexistent dans la culture, il s'agit d'apprendre à les connaître par l'observation, le dessin et à partir du programme de 45 des manipulations diverses : découpages, pliages. Aussi la liaison avec les activités manuelles est le plus souvent évoquée dans les instructions.

* Les mesures de longueur relèvent de ce cours.

Comment se manifeste l'évolution?

* Par des modifications de contenu:

- la notion d'angle disparaît en 1945. Remarquons que c'était le seul concept géométrique de base explicitement au programme.

- l'apparition de nouveaux objets de connaissance :

les quadrillages en 70

les transformations ponctuelles : symétrie, translation en 85

- la mesure des longueurs ne relève plus de la géométrie à partir de 1945, mais d'une rubrique spécifique à partir de 1970, en même temps disparaît "l'appréciation approximative des distances et leur évaluation", c'est-à-dire un travail sur l'espace environnant.

* Une extension du champ des activités proposées quant à leur buts : "classer, construire, agencer, reproduire", quant aux objets pris en compte (solides divers et pas seulement le cube, le pavé et la pyramide) et aux techniques de reproduction et de construction.

c) Cours moyen (tableau n°2)

La stabilité des programmes du cours moyen est moins forte que celle du cours élémentaire. Si l'étude des figures planes et des solides usuels demeure commune à tous, ainsi

que l'utilisation de divers instruments pour les tracés, des différences déjà signalées au cours élémentaire prennent plus d'importance au CM.

* Ce qui relève de la représentation de l'espace : plans et cartes à une échelle donnée (présents dans les programmes de 1923 à 1945) disparaît à partir de 1970 du libellé des programmes même si les instructions y font référence.

* La représentation des solides apparaît et disparaît selon les programmes. Elle est notée explicitement en 1923 sous la forme : "croquis côté". Elle est repoussée au cours supérieur en 1945, disparaît en 70 et est de nouveau mentionnée de manière très générale, sans relation avec un savoir particulier, en 1980 et en 85.

* Par contre, les transformations géométriques ponctuelles occupent à partir des programmes de 1980 une place importante dans le travail géométrique.

* Jusqu'en 1970, les connaissances géométriques semblent surtout destinées à préparer la résolution des problèmes de mesure d'aires et de volumes, comme l'indiquent les I.O. du Cours Moyen de 1945: "Les notions pratiques indiquées pour le cube, le parallélépipède rectangle, le prisme droit, et le cylindre de révolution ne seront données qu'en raison de leur utilisation pour le calcul des surfaces latérales et des volumes."

d) Cours supérieur 1887 et 1923; fin d'études 1945

Quoique, avec la disparition de ces classe, la comparaison entre ce qui se faisait dans la première moitié du siècle et la situation actuelle ne soit plus possible, il est intéressant de remarquer que l'enseignement de géométrie avait pour but d'introduire à des savoirs nécessaires pour la résolution de problèmes spatiaux comme l'arpentage et le nivellement.

C. Espace et/ou géométrie dans les programmes d'autres disciplines

Nous avons réuni dans les tableaux n°4, 4 bis, 5a et 5b, les programmes de géographie, dessin et travail manuel correspondant aux périodes examinées pour les mathématiques. Quelles conclusions pouvons-nous tirer de l'examen de ces tableaux?

1. Géographie :

Depuis le début de la scolarité obligatoire, trois sortes d'objectifs semblent communs à l'enseignement de la géographie à l'école élémentaire :

* Pour les enfants les plus jeunes (CP et CE), la connaissance "en acte" de leur environnement (repérage par rapport à soi-même, par rapport aux points cardinaux⁶, itinéraires etc...).

* L'apprentissage progressif de la représentation cartographique. Cet apprentissage s'appuie tout d'abord sur la représentation de l'espace familier mais il semble que les problèmes d'usage effectif du plan pour se déplacer dans un espace inconnu ne soient pas abordés. C'est seulement dans la description des compétences en fin de cycle 2 de 1991 que l'on trouve une mention qui s'y rapporte : "l'enfant doit être capable de construire et d'utiliser un plan simple avec sa légende". Ce type de compétence n'est plus évoqué ensuite, le travail sur les cartes étant destiné à savoir situer les ensembles géographiques étudiés (régions, pays, océans etc...) et à savoir en identifier certaines propriétés à partir de la lecture des cartes. La fin du cycle 2 s'adressant à des enfants de 8 ans, à un âge où l'apprentissage de l'usage effectif

⁶ On lit dans les programmes de 1887: "Les points cardinaux, non appris par coeur mais trouvés sur le terrain, dans la cour, dans la promenade, d'après la position du soleil".

d'une carte ne peut être terminé, il semble clair que l'enseignement de la géographie ne vise pas cet objectif.

* L'apprentissage de connaissances et de méthodes propres à cette discipline. C'est cette troisième famille d'objectifs qui a le plus évolué sur 100 ans.

2. Travail manuel

Conçu en 1887 comme une partie de l'éducation physique, il s'est vu reconnaître, à partir de 1923, comme une discipline qui "comme le dessin géométrique, se relie intimement à l'enseignement scientifique"⁷. D'où l'importance donnée au travail sur les "figurations géométriques" et "la représentation et l'exécution en carton de solides géométriques", que les I.O. commentent ainsi: "Quiconque sait avec quelle difficulté les enfants et même les jeunes gens se représentent les figures géométriques "dans l'espace" comprendra de quel secours peuvent être pour l'enseignement mathématique des exercices ayant pour objet la construction matérielle de ces figures."

Les programmes de 1945 reprennent ceux de 1923, des changements importants interviennent en 77-78-80 où le "travail manuel" est remplacé par "les activités manuelles", qui constituent l'une des disciplines réunies sous le nom "d'activités d'éveil". Les objectifs de cette rubrique semblent à la fois beaucoup plus ambitieux qu'auparavant et beaucoup moins précis en terme de contenus. La contribution de ces activités à la construction de l'espace par l'enfant est jugée très importante⁸, en particulier en ce qui concerne l'espace à 3 dimensions et, à partir du CM, ses modes de représentation⁹.

Une nouvelle rupture se produit en 1985: Les activités manuelles disparaissent au profit de leur intégration dans le programme de sciences et technologie; on peut se demander si cette décision ne risque pas d'inciter les maîtres à diminuer la part des activités nécessitant une interaction effective entre l'élève et les objets de l'espace.

3. Dessin

L'enseignement du dessin fournit aux élèves jusqu'en 1945 l'occasion d'être confrontés à la représentation des objets en modelage ou sur papier; au CM, les I.O. conseillent "d'appeler l'attention (des élèves) sur les phénomènes principaux de la perspective et de leur donner les moyens de les contrôler".

Au cours moyen et au cours supérieur le programme prévoit l'enseignement du dessin géométrique et du croquis côté.

Le programme de 1945 ne possède plus qu'un intitulé "Dessin ou travail manuel", dont le contenu correspond à celui de l'intitulé "travail manuel" de 1923, et l'horaire à la moitié de l'horaire antérieur des deux rubriques réunies. Nous n'avons pas le moyen de savoir si cela a correspondu à une disparition de l'enseignement du dessin d'art dans les classes ainsi qu'à celle du dessin géométrique et du croquis côté mais il est certain que lors de la refonte complète des programmes entreprise de 1977 à 1980, la plupart des outils enseignés antérieurement pour la représentation des objets de l'espace n'ont plus trouvé de place dans l'enseignement des arts plastiques, centré de manière prioritaire sur l'expression et la création personnelle. Sur ce point, les programmes de 1985 sont très proches de ceux qui les ont précédés.

4. Education physique

C'est à partir des programmes de 1977 que sont précisés des objectifs concernant la maîtrise de l'espace en relation avec la maîtrise corporelle.

⁷ extrait des I. O. de 1923 le concernant.

⁸ au point qu'une des deux brochures élaborée par des professeurs d'école normale, sous l'égide de l'Inspection Générale, destinée à la formation des enseignants, porte comme titre: " La conquête de l'espace par le geste".

⁹ Voir IO CM P.115

Ainsi, on peut lire dans les I.O. du CM de 1980: "L'enfant doit être capable de choisir la conduite la mieux adaptée à une situation donnée :

- * Effectuer un parcours donné et non exploré en se servant du plan et éventuellement de la boussole... (parcours, course d'orientation)

- * Maîtriser en les coordonnant, dans le cadre des jeux et sports collectifs les actions de courir, sauter, lancer, réceptionner, par rapport aux buts et aux règles, aux partenaires et aux adversaires;

D. Premières conclusions à propos de l'évolution des contenus d'enseignement de l'école élémentaire

1. Dans les disciplines non mathématiques

Suivant les époques, il semble que le projet de fournir aux élèves des moyens de maîtrise de l'espace et de ses représentations ait été pris en charge par une discipline ou l'autre, sans plan organisé pour couvrir les besoins des élèves. L'apparition d'une rubrique "Construction des concepts fondamentaux d'espace et de temps " parmi les compétences transversales à acquérir en situation scolaire permettra-t-elle une meilleure prise en charge des connaissances spatiales? Il est trop tôt pour le dire.

2. En mathématiques

En ce qui concerne les apprentissages spatiaux qui ont pour but la maîtrise des rapports effectifs à l'espace et à ses représentations matérielles, on peut remarquer un double mouvement :

Les apprentissages de base, correspondant au terme de "construction de l'espace" dans les programmes de 1977 et après, ne sont pas à la charge de l'école jusqu'à cette date. Par contre, les connaissances nécessaires à la vie professionnelle (mesurages sur le terrain, représentations graphiques de l'espace, arpentage, nivellement) sont explicitement présentes pour les grands élèves de l'école élémentaire tant que celle-ci est chargée de l'essentiel de la formation de la population rurale. Ils disparaissent ensuite.

Les seules pratiques effectives qui demeurent, pour les élèves les plus âgés, portent alors sur des objets de petite taille à propos desquels la distinction entre ce qui relève du travail manuel et ce qui relève des mathématiques n'est pas claire : On note dans les instructions une même foi, quelle qu'en soit la date, dans les possibilités des enfants "d'abstraire" les propriétés spatio-géométriques de l'observation et de la reproduction des objets physiques sans que les conditions favorables à la conceptualisation soient dégagées. Voici par exemple ce que l'on peut lire dans les I.O. de 1985: "Peu à peu on amène les élèves, grâce à de nombreuses activités sur ces objets physiques (dés, berlingots, boîtes,...) à changer d'angle de vue, c'est à dire à les considérer de façon plus géométrique : cube, pavé, tétraèdre...puis si l'on s'attache aux faces : parallélogramme, rectangle, triangle,... enfin si l'on s'attache aux arêtes : segment, sommet, milieu..."

Les éléments nouveaux apparus dans les programmes de 77-78-80 concernent "la présentation de l'espace" pour le CP dont nous avons analysé les buts ci-dessus, et les transformations géométriques, pour les élèves à partir du CE au moment justement où ces concepts font une apparition remarquée dans l'enseignement de la géométrie au collège.

E. Quels enseignements sur le fonctionnement du système didactique pouvons-nous tirer de l'examen de l'évolution des textes officiels?¹⁰

Contrairement à ce que l'on pourrait attendre, ce ne sont pas les besoins des élèves au fur et à mesure de leur développement qui sont pris en compte mais ce qui est censé les préparer à leurs besoins futurs : quasi-professionnels tant que l'enseignement primaire avait cette vocation, préparatoires à l'enseignement ultérieur ensuite. Comme l'explique Chevallard (1989a), "L'enseignement général se crée et se réforme jusqu'à aujourd'hui par un mouvement descendant, procédant par retombées successives, du haut vers le bas". La disparition de l'arpentage, de la perspective s'inscrivent dans ce contexte.

D'autre part, remarquons que les "objets d'activité¹¹" qui apparaissent relèvent de savoirs géométriques relativement "savants": Ainsi pour le C.M., dans le programme de 1985: "Application à des objets géométriques des **transformations ponctuelles** (translation, rotation, symétrie)".

Et, quoique le programme n'emploie pas ce mot, nous pouvons penser que le succès des activités "spatiales" en début de C.P. tient plus dans le terme de "topologiques" qui leur a été accolé dans les années 70 par les manuels, que dans leur intérêt propre¹² pour le développement des enfants.

Ainsi, les lois qui président aux changements de contenu dans l'enseignement des mathématiques, explicitées par Chevallard (1991)¹³, s'appliquent aussi à cet enseignement au contenu hybride, que constitue celui de la géométrie à l'école élémentaire :

* Un enseignement de l'espace qui ne peut faire référence à un savoir savant (comme la maîtrise effective des plans et cartes) ni à une finalité professionnelle, disparaît.

* Pour être légitimé, un enseignement nouveau doit s'appuyer sur un domaine reconnu des mathématiques, indépendamment de la distance entre ce domaine et ce qui est effectivement enseigné¹⁴!

II. DEBUT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN MATHEMATIQUES

Nous n'avons pu prendre connaissance des programmes antérieurs aussi nous nous limiterons à la période la plus récente.

Les programmes définis en 37-38 ont été valables jusqu'en 57. A cette époque, ils sont remaniés pour toutes les classes de l'enseignement secondaire. En 60, le Ministère institue le cycle d'observation; les programmes de 57 de l'enseignement secondaire s'appliquent alors à toutes les classes de 6ème et de 5ème, seules les notes préliminaires sont légèrement modifiées.

Un arrêté de juillet 68 modifie profondément les programmes de 6ème et 5ème; de nouvelles I.O. sont publiées en février 69.

Le programme est à nouveau transformé en 77 pour la 6ème, 78 pour la 5ème puis en 85.

Le tableau n°6 présente les différents libellés.

¹⁰ Nous reprenons cette réflexion au chapitre 5, de manière plus approfondie.

¹¹ Puisqu'elles constituent l'essence des apprentissages géométriques à l'école primaire.

¹² Nous justifierons cette assertion qui peut paraître gratuite un peu plus tard

¹³ La transposition didactique Ch 1 et postface

¹⁴ D'où une source jamais tarie d'effets Jourdain!

Nous ne nous engagerons pas dans une analyse comparative détaillée, nous relèverons seulement ce qui a trait à l'articulation entre connaissances spatio-géométriques et géométriques en faisant référence également aux I.O..

A. Programmes de 1957-60

La "note préliminaire sur les nouveaux programmes de mathématiques" d'Août 1957 définit l'enseignement du premier cycle ainsi: " Au cours des quatre premières années, un enseignement d'initiation, commun à tous, partant des domaines de l'observation et de l'expérience accessibles aux enfants, est destiné d'une part à dégager une présentation de quelques êtres et de quelques notions mathématiques dont le caractère abstrait ne doit pas faire oublier l'origine concrète, d'autre part, à préparer l'accès aux formes logiques de la pensée et à leur mise en oeuvre à l'occasion de problèmes simples" Pour permettre que cette initiation prenne "véritablement racine dans le réel familier à l'enfant", l'aide à "aller plus loin dans l'exploration du monde environnant", le programme comporte deux rubriques, une rubrique "programme" et une rubrique "travaux pratiques".

Pour la classe de 6ème, les différents thèmes ne sont pas regroupés en géométrie et arithmétique alors que c'est le cas pour la 5ème.

Le contenu de la classe de 6ème est explicitement relié à celui de la scolarité primaire, "le programme de cette classe n'apporte formellement aucune connaissance nouvelle", mais il ne s'agit pas de réviser le programme du CM. Le libellé du programme montre bien la rupture opérée et l'entrée dans une approche mathématique de la géométrie :

Pour chaque thème, l'étude des objets géométriques et celle des mesures associées sont bien distinguées;

Chaque thème correspond à un concept de base : segment, droite; cercle; sphère; polygones; solides.

Les travaux pratiques "serviront à présenter une notion, à préparer ou à illustrer une définition, à découvrir une relation entre certains faits ou certains êtres, à vérifier un résultat ou une formule, à suggérer quelque problème nouveau". Ceux de géométrie sont l'occasion pour les élèves d'utiliser des instruments de dessin usuels, et des appareils de mesure usuels ou plus élaborés comme un palmer ou un curvimètre. Leur maniement doit devenir "un acte réfléchi, adapté à l'exécution de tel ou tel travail".

Les travaux pratiques doivent permettre aussi d'introduire des notions simples d'astronomie. Il est précisé qu'"elles seront présentées, dans toute la mesure du possible, à partir ou à propos d'observations réelles, portant sur l'aspect local de quelques phénomènes permanents (..) ou exceptionnels(..)".

Ainsi, si le but de l'enseignement est bien la présentation des concepts géométriques, celle-ci devrait s'appuyer de manière au moins aussi explicite qu'à l'école primaire sur des réalisations spatiales portant sur des objets de petite taille (dessins et construction de solides) auxquelles s'ajoute l'étude de phénomènes astronomiques.

C'est en 5ème qu'est instituée l'entrée dans la démarche géométrique :

Voici comment l'explicitent les indications préliminaires : "Une fois les premières notions acquises (s'appuyant sur l'observation et l'expérience), apparaîtront les questions dont l'étude mettra en jeu les idées de raisonnement et de déduction."

Sont introduits en 5ème tous les outils classiques de la géométrie élémentaire : bissectrice, médiatrice, symétrie par rapport à une droite, cas d'égalité des triangles.

Au cours des travaux pratiques, "de nombreux exercices de dessin accompagneront l'étude des divers chapitres de la géométrie; ils comporteront notamment des constructions de figure, des comparaisons, des vérifications expérimentales, des mesures dont on ne manquera

pas de faire ressortir le caractère limité et restreint afin de faire peu à peu saisir la différence entre la constatation, même répétée, d'un fait particulier et une démonstration générale."

Les travaux pratiques devront permettre également l'extension des connaissances astronomiques des élèves.

B. Programmes de 1968

Ils sont le résultat du travail de la commission Lichnérowicz et donc très marqués par la conception ensembliste. La nouveauté est affirmée avec insistance.

Toutefois, **en géométrie, le programme de 6ème** reprend les contenus traditionnels de cette classe sous le libellé "Etude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures" avec pour sous-titre "choix d'une unité, ordre de grandeur, encadrement". S'y ajoute une partie nouvelle : "Méthodes de repérage" comportant deux alinéas : repérage d'un lieu d'une ville à l'aide d'un plan quadrillé de celle-ci et repérage sur la sphère terrestre.

En 5ème, ce qui a trait à la géométrie est rassemblé sous deux titres : "Première étude concrète de l'espace" pour laquelle il est précisé: "Il s'agit d'une simple description", avec une nouveauté: la convexité; et la rubrique "Repérage"; la référence spatiale est abandonnée : le travail porte sur le repérage à l'aide d'un quadrillage oblique et le transport de dessins.

Les instructions concernant les travaux pratiques, au cours desquels il est dit que doit se faire l'essentiel du travail sur la géométrie, reprennent celles de 1960, y compris la référence à l'astronomie.

La continuité entre les programmes antérieurs et les nouveaux en ce qui concerne les thèmes spatio-géométriques n'est qu'apparente. La place qui leur est réservée est faible, en particulier en 5ème. La rédaction des I.O. donne l'impression que ces sujets de travail ne sont là qu'en attente de pouvoir faire des choses "sérieuses": le repérage sur un plan "donne un exemple d'initiation à la notion de bijection", son intérêt pratique n'est à aucun moment signalé. Le commentaire sur la convexité tient autant de place que celui sur la nature du travail à faire en 5ème à propos de la première étude concrète de l'espace.

Le passage à la géométrie déductive se situe en 4ème, la rupture est fortement signalée. "En sixième et cinquième, l'observation d'objets de l'espace physique, les constructions graphiques opérées avec les outils usuels, constituent une préparation essentielle à l'étude de la géométrie proprement dite, bien que le mot **géométrie** prenne en quatrième un sens différent de son sens initial.

Les instructions concernant "l'introduction à la géométrie de 4ème et de 3ème" développent une conception de la géométrie comme "premier exemple de mathématisation d'une réalité physique". Le point de départ est constitué de l'étude expérimentale d'un certain nombre de propriétés de la réalité physique, qui devront apparaître "à la fois comme **naturelles** et **simples** à des débutants...".Le texte se poursuit ainsi: "Le point de départ ainsi une fois choisi, nous définissons des êtres mathématiques comme des ensembles d'éléments ayant les propriétés précédentes que nous énonçons sous forme d'**axiomes**. De l'ensemble des axiomes choisis seront alors déduites d'autres relations entre les êtres mathématiques ainsi définis et entre leurs combinaisons; ces relations **démontrées** sont énoncées sous forme de **théorèmes**."

Bien que le texte affirme qu'il faut consacrer beaucoup de temps et de soin à l'étude expérimentale, aucun détail n'est donné quant à la façon de la mener alors que 28 pages sont consacrées à l'exposition axiomatique de la géométrie.

C. Programmes de 77-78

D'emblée deux étapes sont bien distinguées : celle de 6ème-5ème, et celle de 3ème et 4ème.

La liaison du cycle d'observation avec l'enseignement primaire est affirmée avec beaucoup plus de force qu'en 68, comme dans les programmes antérieurs.

La géométrie est présentée dans les deux classes sous le titre "Observations d'objets géométriques et physiques". Ces objets sont plans en 6ème, plans ou spatiaux en 5ème.

Si les contenus de connaissance sont les mêmes qu'auparavant, la présentation est différente, les paragraphes commencent par des titres tout-à-fait hétérogènes : Premières observations sur..., Instruments du dessin dans le plan..., vocabulaire de la géométrie plane..., quadrillage, repérage..., aires... : nous retrouvons là une caractéristique que nous avons relevée dans les programmes de l'école primaire marquant, selon nous, la difficulté à définir le statut des éléments du programme, concepts ou activités.

Remarquons aussi que le mot "observation" est utilisé six fois sur l'équivalent d'une page de libellé et qu'il n'y a pas de différence de nature entre le travail proposé en 5ème et celui proposé en 6ème. C'est en 4ème que se produit le passage d'une géométrie de l'observation à la géométrie déductive. Les I.O. citent un rapport de l'Académie des Sciences : "Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans les classes de 4ème et de 3ème provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en 6ème et 5ème par l'usage expérimental des instruments de dessin et à partir de cette intuition amener progressivement l'élève à raisonner et à manipuler consciemment les instruments pour lui faire acquérir peu à peu la notion de plan euclidien(...). Il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie."

D. Programmes de 86

Deux différences importantes avec les programmes antérieurs apparaissent :

La première peut être résumée par la modification du titre des parties concernant la géométrie en 6ème-5ème : on passe de "Observation d'objets géométriques et physiques" à "Travaux géométriques". Le terme "observation", si prégnant antérieurement, disparaît. L'activité qui renvoie à ce terme est remplacée par d'autres qui évoquent toutes une action effective sur les figures : reproduction, description, représentation, construction.

Cette modification est en conformité avec la conception de l'apprentissage mathématique développée dans les instructions, basée sur la résolution de problèmes.

En ce qui concerne les contenus eux-mêmes, on peut noter trois nouveautés : l'introduction des deux symétries, l'une en 6ème, l'autre en 5ème, ainsi que l'introduction explicite de la représentation en perspective.

La deuxième différence concerne la rupture que nous avons notée dans les programmes antérieurs entre la géométrie enseignée avant et après la classe de quatrième. Elle n'est plus explicite, ni dans les programmes, ni dans les instructions; au contraire, la continuité de tout l'enseignement au collège est affirmée dans les introductions propres à chaque classe.

Ainsi, dès la classe de sixième, il est indiqué dans les I.O. : "les travaux développeront les capacités à choisir les instruments adaptés à une situation donnée. Ils faciliteront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant par exemple sur la définition du cercle et des propriétés d'orthogonalité et de parallélisme."

Pour la classe de troisième, les remarques préliminaires contiennent l'affirmation suivante : "L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont

conduits dans l'esprit des classes antérieures, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, de façon à développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration." Et la première phrase des commentaires concernant les travaux géométriques rappelle que : "La description et la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul de grandeurs attachées à ces objets demeurent des objectifs fondamentaux".

La continuité des enseignements est liée à la conception que développent les auteurs des instructions, de l'aspect progressif et naturel du passage de la géométrie (non plus de l'observation mais des tracés), à la géométrie déductive. C'est bien ce que souligne cette phrase tirée des instructions de sixième, à propos de l'enseignement de la symétrie : "L'effort portera d'abord sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles se dégageront de façon **progressive**¹⁵ les propriétés conservées par la symétrie axiale, ces propriétés prenant alors **naturellement** le relais dans les programmes de constructions." La même idée est exprimée à de nombreuses reprises, nous ne citerons, avant de conclure, que ce qui concerne l'inégalité triangulaire en classe de quatrième : "La pratique des tracés de figures mettant en jeu des triangles ou des cercles montrera l'intérêt de l'inégalité triangulaire et permettra de préciser dans quel cas on obtient l'égalité." Nous avons vu dans les chapitres précédents les difficultés de cette dernière tâche, pour l'enseignant comme pour les élèves.

E. Conclusions

En dépit de changements successifs rapides affectant l'ensemble des programmes de mathématiques des collèges, en dépit des batailles menées pour ou contre Euclide, les programmes de 6ème-5ème en géométrie restent stables car bâtis autour d'une idée force : Ces classes sont le lieu où les enfants comprennent ou découvrent¹⁶ les concepts géométriques par l'observation et le dessin; elles constituent une étape nécessaire à l'entrée dans la géométrie déductive.

III. CONCLUSIONS CONCERNANT LA PRISE EN CHARGE PAR L'ENSEIGNEMENT DU DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES SPATIALES DES ELEVES.

Le tableau que nous venons de brosser à grands traits nous incite à prendre à notre compte ce qu'écrit Pêcheux (1990), de son point de vue de psychologue spécialiste de ce domaine : "Au delà de ces acquisitions, cruciales pour notre culture que sont la lecture et l'écriture, il nous semble que les performances spatiales sont davantage considérées comme relevant d'aptitudes individuelles, qui peuvent éventuellement être utiles pour certains métiers, mais dont on peut aisément se passer. Ni l'enseignement élémentaire, ni le collège n'entreprennent d'enseigner l'espace de manière structurée".

¹⁵ C'est nous qui soulignons

¹⁶ selon l'idéologie du moment

CHAPITRE C-2

ETUDE DIACHRONIQUE DE L'UTILISATION DE L'OSTENSION DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

Nous distinguons deux périodes dans l'étude diachronique que nous faisons de l'utilisation de l'ostension. La première qui court depuis les débuts de la scolarité obligatoire jusqu'à la fin des années 70 correspond à ce que nous appelons "l'ostension assumée". La seconde, dans laquelle nous sommes immergés, s'ouvre avec la parution des programmes de l'élémentaire de 77-78-80, se prolonge avec ceux de 85 puis de 86 pour les classes de collège. Elle correspond à ce que nous appelons "l'ostension déguisée".

Comme nous l'indiquons au chapitre 5 III B, nous nous référons à la définition qu'en a donné Ratsimba-Rajohn (1977), dans son "Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques". Il définit la présentation ostensive comme la donnée par l'enseignant de "tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée". Il précise : "le rapport du sujet et de l'objet nouveau est institué seulement au niveau de la représentation de l'objet présumé indépendant du sujet".

I. L'OSTENSION ASSUMÉE

Rappelons tout d'abord que l'ostension est une conséquence logique de la conception empiriste¹ de la formation des connaissances largement partagée par la noosphère et les enseignants jusqu'à une époque récente.

A. L'ostension à travers les textes

Elle est complètement assumée dans les instructions officielles de l'école primaire jusqu'à celles de 1977-80 ainsi que dans celles du début de l'enseignement secondaire². La présentation des savoirs par l'enseignant n'est pas suffisante pour assurer l'apprentissage de l'élève : Ce dernier y prend sa part par l'observation active de ce que montre le maître ainsi que par la réalisation de tâches matérielles sous la conduite de l'enseignant. Cette présentation apparaît comme un progrès important par rapport à l'enseignement formel dénoncé en particulier par F. Buisson dans l'article "Géométrie" du Dictionnaire de Pédagogie de 1885.

Ainsi, dans les I.O. de 1887, 1923, 1945, l'accent est mis sur l'aspect "pratique" de la géométrie. En 1887 par exemple : "Il ne s'agit point, même dans le cours supérieur, de notions théoriques, mais d'applications pratiques que l'on rencontre journellement : ce n'est que le complément du système métrique."; et en 1923: "Dans les programmes d'aujourd'hui, pas plus que dans ceux d'hier, on ne craint d'aborder des notions inscrites sous le titre, un peu effrayant de "géométrie", mais il faut entendre par là "forme des champs, mesures sur le terrain". Il s'agit d'opérations réellement exécutées, avec un ruban gradué, avec une règle graduée... On opérera dans la cour, dans la salle de classe, parfois sur le pupitre³ " (1923).

¹ Dans sa thèse, Margolinas (1989) fait, p.87-89, une présentation synthétique de l'empirisme et de son emploi dans l'enseignement.

² voir C I fin

³ Notons qu'à cette époque, l'apprentissage des mesures spatiales est conçue dans les I.O. comme devant s'appuyer sur des activités effectives, dans des contextes variés ne se limitant pas à la feuille de papier.

Le recours aux exercices de travail manuel et de dessin linéaire est explicitement recommandé "pour la définition des termes employés, la construction des figures, la justification des formules" (1887).

Toutefois, l'action effective des élèves n'est pas requise pour résoudre un problème spatial, de manière autonome, puisque la solution leur est montrée par le maître, mais comme nécessaire à un premier apprentissage du dessin et du travail manuel auxquels sont associés "des exercices d'observation et de leçons de choses" permettant de comprendre les notions de géométrie (1945). Ainsi "le pliage d'un carré pour la construction d'une cocotte peut fournir de nombreuses remarques : égalité de côtés, égalité d'angles droits, partage d'un angle droit en deux angles de 45° etc..."

Dans les commentaires de 70 également, l'enseignement de la géométrie s'appuie sur l'observation et sur "l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses."

Il nous apparaît donc que les rapports spatiaux préconisés pendant presque un siècle, s'ils font appel à l'activité de l'enfant, sont de caractère didactique très marqué: Les parts respectives de l'enseignant et de l'élève sont bien claires :

- L'enseignant montre et nomme ce qui est à remarquer; il fait réaliser divers travaux dont il donne les modèles.

- L'élève observe et écoute, réalise les travaux proposés. Il est supposé ainsi devenir capable de reconnaître, dans une autre situation, par exemple dans les exercices qui lui sont proposés, les connaissances en jeu et de les utiliser.

Les savoirs spatio-géométriques sont donc conçus comme extérieurs au sujet et directement lisibles dans la réalité et non comme liés à l'action anticipatrice du sujet au cours de la résolution des problèmes qui se posent à lui.

Cette forme d'ostension que nous qualifions "d'active", parce que liée à la réalisation d'actions, de mesurages effectifs, apparaît ainsi comme un procédé légitime d'introduction des savoirs spatio-géométriques pour les élèves jusqu'à 13 ans. L'existence d'autres procédés n'est pas envisagée⁴.

B. L'ostension dans les manuels

1. Qu'attendre de l'examen des manuels?

Notre étude de l'utilisation de l'ostension ne peut se limiter à celle des IO. Le décalage entre les conceptions de leurs rédacteurs et les réalisations effectives dans les classes est bien connu et source de bien des étonnements⁵. Les manuels ne présentent "ni le savoir à enseigner ni le savoir enseigné⁶". Mais, même si peu d'enseignants les suivent à la lettre, ils témoignent bien de la façon dont leurs auteurs, enseignants eux-mêmes le plus souvent, ont interprété les conseils des I.O. pour les rendre compatibles avec les contraintes rencontrés par les professeurs dans leur tâche d'enseignants.

⁴ tout au moins dans l'enseignement officiel. Les tenants de la pédagogie active tiennent un autre discours qu'il nous faudrait analyser de plus près pour savoir dans quelle mesure leurs propositions échappent à la présentation ostensive du savoir ou non.

⁵ Du genre: "Ha, ils disaient déjà cela, à cette époque!" Pour un exemple précis, nous renvoyons aux "Instructions complémentaires relatives à l'enseignement des mathématiques de janvier 57"

⁶ voir Tavignot (1991) : C.R.TD EE 91 p.57

2. De quelle manière est réalisée cette ostension active dans les manuels d'avant 70?

Nous n'avons pu examiner que trois manuels d'école primaire des années 50. Ils présentent des caractéristiques voisines.

Nous choisissons l'exemple d'un manuel de 1960⁷, dont la préface cite Gonseth sur "la nature expérimentale de cette science"⁸. Nous présentons deux leçons nous permettant d'illustrer le procédé d'introduction des savoirs spatio-géométriques.

a) *Le rectangle.*

(1) *Description*

C'est la première leçon sur le rectangle. Il n'y a pas de géométrie au CP. (Annexe 1)

En haut de la page, un rectangle ABCD est dessiné. Le texte suivant l'accompagne:

"J'observe cette figure. Elle a 4 côtés et 4 angles. Les côtés [AB] et [CD] mesurent 4 cm. Les côtés [AD] et [BC] mesurent 3 cm. Les angles sont droits.

La figure ABCD est un **rectangle**

Les grands côtés [AB] et [CD] s'appellent les **longueurs**

Les petits côtés [AD] et [BC] s'appellent les **largeurs**"

Le rectangle a 2 longueurs égales, 2 largeurs égales et 4 angles droits.

Suivent une quinzaine d'exercices, certains étant réservés aux élèves de CE2, qui présentent diverses activités de construction de rectangles, par pliage, avec une équerre, un compas etc..activités que les élèves doivent réaliser et qui constituent la phase active de l'apprentissage.

(2) *Analyse*

Si nous appliquons les critères dégagés au chapitre B-3, nous pouvons affirmer que les rapports spatiaux des élèves avec le milieu,

* sont effectifs,

* relèvent de la problématique spatio-géométrique (modélisation d'un objet spatial à l'aide de concepts géométriques),

* mais qu'aucune place n'est faite à une démarche a-didactique qui permettrait aux élèves de comprendre l'utilité de ce savoir sur le rectangle.

b) *Le périmètre d'une figure.*

(1) *Description*

Sur la partie gauche de la page, une pelouse polygonale entourée d'un grillage est représentée en perspective (Annexe 2). Sur le dessin, les longueurs de chacun des côtés de la pelouse sont indiquées juste au dessous. Le texte suivant accompagne le dessin:

" Dans le jardin public il y a une pelouse, le jardinier l'entoure d'une bordure en grillage.

Le jardinier emploie : $8m + 6m + 5m + 5m + 4m = 28m$ de bordure"

La conclusion de l'exemple est tirée en dessous et encadrée en jaune:

"Le tour, pourtour ou périmètre d'une figure se calcule en additionnant la longueur de tous ses côtés"

⁷ Ardriot et coll.(1960) : Calcul cours élémentaire, Classiques Hachette

⁸ Il s'agit du calcul. A cette époque, les connaissances géométriques en relevaient dans les IO.

Suivent 5 exercices, du même type, présentant des problèmes de périmètre concernant un milieu matériel évoqué par un dessin: une place, un pré à entourer d'un triple rang de fil de fer, un napperon bordé d'une dentelle, un tablier, un espace délimité par une palissade. Pour aucun de ces exercices, les enfants n'ont pas de mesure à effectuer, elles sont données sur les dessins.

(2) Analyse

Nous ne savons pas exactement comment les maîtres de l'époque utilisaient le manuel avec leurs élèves. Nous pouvons tout de même faire l'hypothèse d'une lecture collective du texte accompagnée de questions : "qu'est-ce que vous voyez sur l'image? comment connaître la longueur de grillage employée par le jardinier?" et d'explications complémentaires puis de la recherche individuelle des exercices.

Comment pouvons-nous qualifier les rapports spatiaux développés par les enfants pendant cette leçon? Reprenons les distinctions présentées dans le chapitre 3:

* ces rapports ne sont pas effectifs; le milieu matériel (la pelouse polygonale et son grillage) est évoqué par une représentation fournie à l'enfant, l'action du jardinier par le mot "entoure" (en rouge dans le texte). Les enfants sont donc supposés capables de se représenter la situation objective à partir de ces seules informations⁹.

* ils relèvent bien de la problématique spatio-géométrique : Le maître fournit aux élèves un modèle leur permettant d'évaluer le périmètre de toute surface polygonale, connaissant les longueurs des côtés.

* Par contre, là aussi, aucune place n'est faite à une approche a-didactique:

- La raison pour laquelle une évaluation de la longueur du grillage est nécessaire n'est pas évoquée.

- il y a absence de la situation de référence, celle dans laquelle les élèves se posent le problème de "comment connaître le périmètre dans les conditions fixées?" et envisagent différentes façons possibles de le faire (y compris par mesurage effectif) :

Il y a bien présentation du modèle mais absence, dans la situation didactique, du travail de modélisation, ce qui supposerait qu'une fois résolu par différents moyens empiriques (dont le mesurage), le problème de l'évaluation de la longueur du tour de la pelouse, d'autres problèmes soient étudiés, correspondant à des limitations dans l'action; l'élaboration de la procédure à utiliser dans le cas d'une forme polygonale pourrait apparaître alors comme le résultat d'une modélisation de ces problèmes particuliers.

Ainsi, dans cette leçon, "l'ostension" de la solution d'un cas particulier doit suffire aux élèves pour résoudre les exercices suivants, de difficultés graduées, dans lesquels ils doivent pouvoir reconnaître et adapter cette procédure¹⁰.

(3) Conclusion de l'étude de cet exemple

Nous l'avons choisi car il nous paraît représentatif des caractéristiques de la présentation ostensive des savoirs spatio-géométriques :

* Ils n'apparaissent pas comme des outils pour résoudre un problème proposé aux élèves. Aucune place n'est faite à une approche a-didactique qui les aiderait à identifier l'apport du savoir mathématique à la maîtrise du réel.

⁹ La préface explique: "Les leçons s'appuient sur un fait concret que matérialise une illustration à la fois précise et évocatrice".

¹⁰ par exemple multiplier le périmètre par 3, nombre de rangées de fil de fer; enlever la largeur de la porte etc...

* Le milieu matériel auquel s'applique la connaissance est absent, il est remplacé par un autre milieu, symbolique, sans que l'enseignant soit en mesure de s'assurer que, pour les élèves, le concept visé fonctionne de la même manière à propos des deux milieux.

Cette caractéristique concerne tout particulièrement les situations didactiques où la situation objective évoque des actions se déroulant dans l'espace à 3 dimensions. Elle n'est pas fautive pour autant dans le cas de l'introduction de concepts géométriques plans car quelle est la nature du rectangle dessiné en haut de la page de la leçon ci-dessus? Pour l'enseignant, c'est une représentation prototypique du concept de rectangle dont il sait qu'il peut modéliser la forme d'un certain nombre d'objets. Pour l'élève, c'est ce dessin particulier auquel il attribue peut-être des propriétés non incluses dans la définition du rectangle : une certaine proportion entre longueur et largeur, la direction des côtés etc..¹¹

En conclusion, nous pouvons affirmer que dans cette situation didactique du périmètre, pour pouvoir réaliser les apprentissages visés, l'élève doit être capable, sans que cela lui ait été enseigné, de donner du sens à deux connaissances spatio-géométriques : la possibilité de mesurer la longueur du bord d'un domaine, celle d'évoquer cette action à partir de la représentation de ce domaine.

C. Nouvelle caractérisation des situations d'ostension

Le critère qui nous apparaît essentiel pour différencier une présentation ostensive du mode d'enseignement par adaptation, est celui de l'existence ou non, au sein de la situation d'enseignement, d'une situation a-didactique d'apprentissage où l'élève peut se situer en "résolveur de problèmes" grâce à ses interactions avec un milieu de référence effectif¹².

Dans les situations d'ostension assumée que nous avons analysées, si la situation objective peut être présente, ni la situation de référence où se pose le problème pour l'élève ni la situation d'apprentissage a-didactique qui favorise l'explicitation et la justification de l'action, ne sont mises en scène.

Or c'est la situation de référence qui donne du sens à la problématique spatio-géométrique et c'est la situation d'apprentissage a-didactique qui sert d'appui à l'institutionnalisation des connaissances¹³. Leur absence a pour conséquence que la relation entre le savoir enseigné et l'ensemble des situations de référence dont ce savoir assure la maîtrise, c'est à dire le sens de ce savoir, est à la charge de l'élève.

Autrement dit, il n'y a de place, dans la situation didactique, que pour la circulation du savoir officiel et ceci, dès son commencement. Dans la résolution des exercices qui suivent cette présentation par l'enseignant du savoir officiel, certains élèves sont capables, pour des raisons personnelles, de transformer ce savoir en connaissances; le plus grand nombre ne peut que se fier aux repères qui sont fournis par le contrat didactique, c'est à dire rechercher dans les ressemblances entre la situation de présentation et celle qu'ils ont à résoudre, ce qui doit permettre de répondre à l'attente du professeur. De l'attitude de l'élève, au moment de l'évaluation par l'enseignant de sa production, dépend sa possibilité d'apprentissage : Comme le souligne Margolinas (1989), "Le maître attend de l'élève qui échoue un travail réflexif sur cet échec, mais ce travail relève alors de la sphère privée de l'élève."

En conclusion, nous dirons qu'un enseignement spatio-géométrique relève d'une présentation ostensive assumée si :

*** le savoir officiel est présenté dès l'entrée dans la situation didactique,**

¹¹ La situation conforte les enfants dans leur appréhension du rectangle comme ce que Wermus (1976 et 1978) appelle un "prédicat amalgamé" dont les propriétés "ajoutées" sont les composantes contextuelles

¹² ce qui ne veut pas dire que ses rapports avec le milieu matériel doivent être constamment effectifs.

¹³ voir Rouchier (1991) p.50 et ss.

*** il n'existe pas, au sein de la situation d'enseignement, de situation a-didactique d'apprentissage où l'élève peut se situer en "résolveur de problèmes" grâce**

à ses interactions avec un milieu de référence effectif.

D. Remarque

Notons dès maintenant que notre analyse de la leçon sur le périmètre a besoin d'être poursuivie : en effet quel type de situation didactique suppose la mise en scène de la problématique spatio-géométrique, dans une situation se référant aux pratiques sociales correspondant au savoir visé, le périmètre?

Ce sont bien les situations non didactiques, évoquées dans le manuel qui peuvent servir de base à la situation a-didactique à construire. Or le milieu objectif correspondant est difficile à faire vivre dans la classe! Deux solutions s'offrent alors :

-remplacer le milieu spatial pour lequel se pose réellement le problème, par un milieu d'accès plus facile : des surfaces polygonales en carton, par exemple, pour lesquelles les élèves devront commander la longueur de ficelle nécessaire pour en faire le tour. Mais ne rencontreront-ils pas des difficultés dans des situations objectives relevant d'un contexte différent en particulier dans le cas d'espaces de grande taille?

- garder la référence à ces situations non didactiques et, puisque la pelouse n'a pas sa place dans la classe, la remplacer par son dessin accompagné de toutes les informations nécessaires. Ce qui, comme nous l'avons dit plus haut, suppose une compétence spatiale des élèves assez élaborée mais sans doute transparente pour les auteurs du manuel.

Nous voyons donc sur cet exemple que ce sont peut-être autant les contraintes de gestion de la classe qui expliquent les choix faits que la conception empiriste des auteurs du manuel.

II. L'OSTENSION DEGUISEE

A partir des années 80, l'influence du constructivisme piagétien et la diffusion des résultats de certaines recherches en didactique des mathématiques montrant l'importance de la résolution de problèmes et de l'activité de l'élève pour la construction des connaissances, ont conduit les rédacteurs des programmes et des I.O. à modifier leur contenu.

Nous nous proposons de montrer que ces modifications sont de surface et que les propositions d'enseignement qui correspondent à ces nouvelles conceptions n'aboutissent le plus souvent qu'à une forme déguisée d'ostension, dont nous préciserons la nature plus loin, laissant l'élève actuel peut-être plus démuné que ses prédécesseurs.

Nous examinerons donc d'abord les instructions officielles puis quelques propositions d'enseignement en utilisant le critère que nous avons dégagé dans le paragraphe précédent en I.C.

A. Les instructions officielles

1. Les I.O. de 77-80

C'est à cette époque que sont apparus des changements assez importants dans les libellés des programmes (voir C-1, §I-B). Les I.O. du CE et du CM proposent également des modifications concernant les activités à mener avec les élèves.

D'une part, l'enseignement de la géométrie fait référence aux "situations-problèmes" ainsi présentées dans le paragraphe 2.5 des I.O. du Ce : "On considèrera d'abord que chaque nouvel outil mathématique peut se *construire*¹⁴ et trouver sa signification mathématique au

¹⁴ Dans ce paragraphe, c'est nous qui soulignons

travers de l'exploitation d'une ou plusieurs "*situations-problèmes*" convenablement choisies." Parmi elles, une place importante est accordée aux activités de construction. Les termes employés dans la phrase ci-après montrent que les auteurs du commentaire les conçoivent comme pouvant fonctionner de manière a-didactique : "Il faut souligner ici l'importance que revêt l'action de construction, qui oblige les enfants à *anticiper* sur la réalisation de l'objet mais qui leur permet aussi de *contrôler les prévisions* qu'ils ont pu faire et au besoin de les modifier, *sans nécessairement recourir au maître.*"(CE). Des activités fonctionnelles concernant l'espace sont évoquées : "Décrire un objet, (sous l'angle géométrique) c'est communiquer des formulations de nature géométrique permettant de l'identifier, de le reproduire ou de le représenter."(CM)

D'autre part, les I.O. présentent un éventail d'activités plus larges que l'on ne pourrait s'y attendre en lisant les programmes. En particulier, la notion de point de vue est développée au CE, un travail sur le plan au CM.

Toutefois, on retrouve de nombreuses traces des conceptions antérieures basées sur l'observation. Ainsi en est-il du travail proposé sur la symétrie au CM: "Les élèves peuvent d'abord réaliser les figures symétriques de figures données (par pliage, décalquage, etc.) La comparaison de la figure initiale et de la figure symétrique associée les conduit à découvrir la conservation de toutes les mesures (côtés, angles, aires) et le changement d'orientation. Ils peuvent alors s'aider de ces découvertes pour trouver un procédé de construction point par point (c'est-à-dire réaliser une transformation ponctuelle)."

2. Les I.O. de 85

Elles constituent une reprise globale de celles de 77-78-80 qui concernaient chaque cycle. Il est intéressant de rechercher dans ce texte si les modifications présentes dans les I.O. précédentes sont confirmées.

L'accent est mis sur la construction de l'espace "représentatif" dans le premier paragraphe, sur la constitution par l'enfant d'un "champ d'expériences sur lequel peut se construire la géométrie" grâce à "une pédagogie de l'activité", un peu plus loin dans le texte.

Un partie assez développée est consacrée au "champ des activités : objets physiques, objets géométriques".

Remarquons que ce champ est réduit à l'espace graphique de la feuille de papier et aux objets physiques manipulables. Le texte exclut implicitement toute référence aux phénomènes spatiaux qui se développent dans l'espace englobant les individus : comme par exemple, les changements de point de vue quand on se déplace autour d'un objet, l'utilisation d'un plan en situation etc...Il semble que la géométrie n'ait pas de rapport avec cet aspect de l'espace alors qu'il était présent dans les I.O. précédentes¹⁵ (mais pas dans les programmes).

Un objet géométrique est défini comme étant un objet "physique" dépouillé d'un certain nombre de ses caractéristiques : "par exemple le cube est la forme commune à toute une série de boîtes cubiques de tailles, de couleurs, et de fonctions différentes". C'est grâce à de nombreuses activités sur ces objets physiques que "l'on amène les élèves à les considérer de façon plus géométrique".

Le texte énumère et décrit ensuite quatre types d'activités à conduire avec les objets : Reproduire, décrire, représenter et construire, sans relation entre elles.

¹⁵ avec un grand développement sur l'élaboration de plans

Un dernier chapitre concerne les méthodes : Le premier paragraphe insiste sur l'alternance "entre des moments d'investigation et des moments de réalisation, entre des moments d'analyse et d'autres de synthèse, étroitement liés dès lors que l'on se trouve dans un processus de production, comparable à celui de la technologie"¹⁶.

Le second paragraphe introduit les transformations géométriques, qui font partie des programmes du CE et du CM, à partir des actions sur les objets géométriques (déplacements, agrandissements, réductions, déformations) : "C'est en observant les résultats de ces actions, puis en prenant comme objet d'études ces actions elles-mêmes que peuvent être mises en évidence les transformations géométriques planes : translation ou rotation, symétrie."

Quelles remarques pouvons-nous faire sur ces instructions?

* La conception empiriste et platonicienne de la formation des concepts géométriques demeure.

* Toutefois, si l'observation "active" reste un des fondements de la démarche d'acquisition des connaissances (en particulier concernant les transformations géométriques), elle n'est plus considérée comme suffisant à assurer "la conceptualisation", d'autres activités sont considérées comme nécessaires.

* L'aspect fonctionnel de ces activités est plusieurs fois évoqué, mais l'articulation entre "reproduire, décrire, représenter et construire" n'est pas identifiée, alors qu'un effort en ce sens avait été fait dans les I.O. précédentes par l'insistance sur la validation. On reconnaît des morceaux de "la situation fondamentale de la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace" (Brousseau 1983), mais présentés comme ayant un but en soi. D'autre part, les paramètres des situations qui permettent de développer tel ou tel concept ne sont pas dégagés clairement en tant que tels, même si certains sont signalés.

3. Les instructions du collège de 1986

Nous renvoyons le lecteur à la présentation succincte que nous en avons faite dans la partie C. Ces instructions nous apparaissent comme développant des conceptions de l'enseignement assez voisines de celles des I.O. de l'école primaire, faisant implicitement référence à des théories psychologiques incompatibles : d'une part l'empirisme "ambiant" qui constitue l'épistémologie de base du système d'enseignement, d'autre part un constructivisme dont on ne retient que l'importance de l'action pour la construction des connaissances par l'enfant.

B. Analyse de quelques situations d'enseignement actuelles de l'espace et de la géométrie

De quelle manière l'effort fait par la noosphère pour repenser l'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire s'est-il traduit dans des propositions d'enseignement ? En particulier, les pratiques ostensives de présentation des connaissances en ont-elles été affectées?

¹⁶ Les étapes de cette démarche sont ainsi caractérisées dans la liste des compétences à acquérir au CM parues en 1980:

- concevoir, seul ou en groupe, un projet de fabrication
- organiser les étapes de réalisation
- adopter si nécessaire à l'égard de certaines opérations ou de certaines pratiques une attitude expérimentale
- utiliser, au besoin en les adaptant voire en les élaborant, divers langages appropriés
- évaluer (individuellement ou collectivement) la réalisation par comparaison avec le projet, ou avec d'autres réalisations.

Nous n'avons pas sur ce sujet de nombreuses données d'observation ni fait d'analyse approfondie de manuels. Toutefois les caractéristiques des situations d'enseignement que nous allons décrire en nous appuyant sur quelques exemples nous paraissent difficilement réfutables.

Nous distinguerons ce qui relève de l'enseignement spatial pratique proposé à l'école maternelle et au CP et l'enseignement "spatio-géométrique" ultérieur.

1. L'enseignement de l'espace pour les enfants les plus jeunes : Des intentions à la réalisation

a) Retour sur l'enseignement du plan

Dans le chapitre B-4, nous avons exposé deux réalisations didactiques concernant l'apprentissage de la représentation d'un déplacement sur un plan, destinées à des élèves de CP pour l'une, de CE1 pour l'autre et tirées de manuels pour les enseignants. Dans les deux cas, nous avons noté le peu de place assignée aux situations a-didactiques. Utiliser un plan n'est pas référé à un contexte où s'en servir est nécessaire pour atteindre un certain but, mais c'est un objet culturel. Pour l'enseigner, le maître s'appuie sur les compétences des élèves les plus avancés, les critiques à propos du travail d'un des élèves ne viennent pas d'abord du fait que la réalisation matérielle du plan (ou son utilisation) fournit un mauvais résultat c'est-à-dire que la représentation du trajet ne permet pas d'arriver au bon endroit¹⁷ mais de la confrontation entre les propositions de différents élèves. Au cours de la discussion, il est facile pour le maître d'orienter le choix du groupe vers la "bonne" solution par ses questions et ses remarques. Dans la pratique courante, le bon résultat est souvent montré par un des élèves et l'évaluation (et non pas la validation) du travail des autres se fait par comparaison avec le sien.

Nous retrouvons ici la première caractéristique que nous avons repérée ci-dessus, concernant la présentation ostensive, à ceci près que l'enseignant n'assume plus la responsabilité de présenter le savoir mais qu'il la délègue à l'un des élèves. Nous avons montré dans le chapitre B-4 combien la connaissance enseignée dans des conditions didactifiées était peu opératoire en comparaison de ce qui peut se passer dans un enseignement bâti autour d'une situation a-didactique. Nous devons nous interroger sur l'effet produit sur les élèves moyens et faibles par ce procédé qui consiste à laisser du temps à la classe pour résoudre le problème mais à priver les élèves de la mise à l'épreuve de leur solution par la présentation rapide de la solution officielle, celle qui permet d'apporter au problème la réponse attendue par le maître.

b) Le langage spatial

La même analyse pourrait être faite à propos de l'apprentissage du langage spatial à l'école maternelle et au CP.

Ainsi, dans le guide pédagogique CP de la collection "Vivre les mathématiques"¹⁸, la deuxième leçon (p.2) a pour objectifs : "Préciser les notions sur, au dessus, au-dessous, observer des positions relatives d'objets". Voici les activités proposées : "Inviter les enfants en ces premiers jours d'école à découvrir leur nouvelle classe. Leur faire observer et décrire¹⁹ les

¹⁷ à condition que celui-ci ait été repéré.

¹⁸ éditeur Armand Colin-Bourrelier

¹⁹ Il est sous-entendu que le maître doit corriger, au fur et à mesure, les principales erreurs.

nouveaux objets de leur environnement : *Exemple: " Le calendrier est entre le tableau et la porte, sous la réglette, derrière le bureau"*

"Se rendre au gymnase ou observer l'image 1. Demander aux enfants de se placer sous un banc, sur une chaise, de sauter au dessus d'un obstacle " ...

Les exercices du fichier sont tous du même type (voir Annexe 3) : un dessin représente des objets non coloriés, par exemple une table avec des objets posés dessus et d'autres dessous. La consigne est la suivante : "colorie ce qui est sur la table". Une autre saynète représente un village avec un hélicoptère volant au dessus des maisons. Les enfants ont à colorier "ce qui est au dessous de l'hélicoptère" .

On retrouve le même genre de leçons dans presque tous les manuels de CP. Deux caractéristiques peuvent en être dégagées :

D'une part, l'apprentissage "didactifié" du langage spatial. A aucun moment l'enfant n'est mis en situation de le faire fonctionner comme un langage informatif, c'est à dire pour communiquer une information à quelqu'un qui n'en dispose pas ou pour recevoir une information lui permettant d'agir. Par contre, sur les deux premières pages du cahier, l'expression "j'observe" est répétée quatre fois. C'est d'ailleurs une caractéristique du manuel: Il n'y a pas une page où cette expression ne figure pas²⁰. Ceci est caractéristique d'une conception de l'apprentissage dans laquelle le maître a sélectionné ce qui est à voir, l'a montré aux enfants dans un premier temps de la leçon et où dans un deuxième temps, ils ont à le reconnaître, grâce à leur travail d'observation. Nous reconnaissons là la présentation par ostension, dans ce cas pas même déguisée.

D'autre part, le transfert très rapide de questions portant sur l'espace effectif à des questions portant sur un espace fictif représenté par un dessin²¹, comme s'il n'y avait pas de différence entre reconnaître une propriété dans le réel et la reconnaître sur une représentation en perspective²². Bien sûr, on ne demande pas à l'enfant de produire un tel dessin, seulement de le lire. Mais si un enfant échoue, à quoi le maître peut-il attribuer cet échec? à sa méconnaissance de la relation "être en dessous de" ou de la représentation de cette relation? A aucun moment cette difficulté n'est signalée dans le livre du maître, elle est même niée au moment où le texte suggère de remplacer le travail dans le gymnase par l'observation du dessin du haut de la page. Et si en effet, l'objet du travail n'est pas que les élèves exercent leur maîtrise du langage spatial mais est seulement l'occasion pour le maître de montrer ce qu'il attend ensuite, c'est à dire la réponse aux questions posées dans les exercices du manuel, mieux vaut "faire parler" les enfants qui savent, sur l'image qui représente le gymnase.

Par cette analyse, nous nous interrogeons sur l'objectif "officiel" de cet enseignement tel qu'il est exprimé dans l'introduction du guide pour le maître, repris des IO: "Permettre à l'enfant de se situer et de situer des objets par rapport à des repères...". Nous pourrions, en nous appuyant sur d'autres exemples issus du même livre ou d'autres, montrer qu'au moins en mathématiques, les activités relevant de l'organisation de l'espace n'ont pas pour but de l'aider à maîtriser ses rapports effectifs à l'espace dans des situations significatives pour lui. Nous aurons à nous interroger sur les raisons de cet état de fait.

²⁰ ce fait, quoique général, est particulièrement frappant dans ce manuel

²¹ L'exercice de l'hélicoptère, cité ci-dessus, est d'ailleurs infaisable: le dessin ne permet pas de voir si l'hélicoptère vole au dessus des immeubles ou du terrain qui est devant eux.

²² Nous retrouvons là la deuxième caractéristique que nous avons relevée tout à l'heure.

2. Enseignement des connaissances spatio-géométriques à partir du CE1: Etude de quelques propositions de manuels

Retrouvons-nous les mêmes caractéristiques pour l'enseignement des connaissances que nous avons appelées spatio-géométriques?

Les enseignants du premier degré ont à leur disposition un grand nombre de collections d'ouvrages, destinés à leurs élèves²³. Un certain nombre d'entre eux sont accompagnés de guides pour les maîtres décrivant l'ensemble des séquences, en particulier les activités dirigées par les maîtres dont les supports ne sont pas nécessairement présentés dans le manuel pour les élèves. C'est sur plusieurs exemples de ce type que nous nous appuyons pour décrire certaines caractéristiques importantes des démarches exposées. Nous avons choisi de travailler à partir de "Maths et Calcul CM1" éditeur Hachette(A), "Le livre Outil CM1" éditeur Magnard (B), et "Objectif Calcul CM1" éditeur Hatier (C)²⁴.

Pour chacun des manuels, nous proposons de regarder les titres des chapitres (Annexe 4), qui, de manière générale, permettent de repérer ce que l'auteur veut que les enfants retiennent de la leçon, ainsi que la structure générale de cette dernière et éventuellement quelques leçons précises.

a) Manuel A

Sur les 9 titres, l'un concerne la reproduction de figures, un autre la construction de polyèdres, les 7 autres renvoient à des concepts géométriques : Parallèles et perpendiculaires, Symétrie par rapport à une droite etc..

Chaque chapitre est divisé en 3 parties : correspondant à trois phases du travail des élèves :

- "recherche" où les élèves ont à résoudre un problème permettant d'introduire une notion ou une technique. Le maître apportera bien sûr les compléments d'information nécessaires et précisera ce qu'il y a lieu de retenir."²⁵

- "applications"

- "problèmes"

Ce sont les activités de la partie "recherche" qu'il nous faut analyser puisque c'est à ce moment que sont introduits les concepts spatio-géométriques.

Le document pour les maîtres ne décrit aucune activité de caractère a-didactique. On ne trouve tout au plus parmi les exercices de "recherche" que quelques exemples de situation de communication mais dont les valeurs des variables didactiques sont si mal contrôlées qu'on peut prévoir qu'ils ne peuvent conduire qu'à l'échec (des élèves et du maître!). La structure la plus générale est la suivante : une figure est dessinée, les éléments en sont désignés par des couleurs ou des lettres. Les concepts visés ne sont pas explicitement présentés comme dans les manuels de la période antérieure, mais les élèves doivent les reconnaître et les nommer, en réponse à la question "Que peux-tu dire de... ?"

Ainsi dans la phase "recherche" de la leçon sur la symétrie par rapport à une droite, qui présente le dessin de deux oiseaux symétriques par rapport à une droite D verticale sur lesquels ont été repérés et désignés par des lettres, un certain nombre de points en

²³ Nous avons choisi d'utiliser ces documents plutôt que ceux rédigés à la suite des recherches IREM ou INRP, dont une enquête a montré qu'ils étaient peu connus des enseignants primaires.

²⁴ le premier pour sa représentativité (c'est de loin le plus vendu), le deuxième provient d'une collection nouvelle, ses auteurs n'ont pas le label "professeur d'EN", le troisième a ce label, et se réfère de plus à Ermel.

²⁵ commentaire de la préface

correspondance (les pointes du bec, des ailes,), les élèves doivent dire que les segments joignant les segments correspondants sont parallèles entre eux, perpendiculaires à l'axe et que le point de rencontre avec l'axe est le milieu du segment! Dans l'activité suivante ils ont à utiliser les observations faites à l'exercice précédent pour construire l'avion symétrique de celui dessiné (mais cette fois le dessin est fait sur papier quadrillé, l'axe étant encore vertical), dans la troisième, le saut est considérable, puisqu'il faut construire sur papier blanc, le symétrique d'un triangle, l'axe étant oblique, et expliquer comment on a fait.

Nous avons ici l'exemple type de ce que nous appelons l'ostension déguisée :

Dans un premier temps, les propriétés visées sont représentées sur la figure, de manière à ce qu'elles soient les plus lisibles possible, l'observation du dessin doit permettre aux enfants de les reconnaître et de les expliciter.

Dans un deuxième temps, il est demandé aux élèves de les réutiliser pour différents types d'exercices dont la proximité conceptuelle avec la situation d'introduction n'est pas contrôlée.

Nous affirmons que dans ces conditions, la part du didactique est essentielle :

Dans le cas de la symétrie, la recherche de Grenier nous a appris que les propriétés ponctuelles n'étaient pas du tout évidentes pour des élèves de 6ème; même mises en scène comme dans le manuel, rien n'autorise à penser que les élèves de CM1 vont répondre ce qu'attend le maître, sauf la force du contrat didactique pour les meilleurs; Que dire des deux segments joignant les sommets se correspondant? Ils ne sont manifestement pas de même longueur, ils ne sont manifestement pas perpendiculaires, ils ne peuvent plus qu'être parallèles.

Ce raisonnement a d'autant plus de chance de fonctionner que depuis le CE1, les élèves sont soumis à ce type de questionnements à propos de figures qui ne sont jamais "quelconques", et pour lesquelles, par exemple l'établissement du parallélisme de deux segments supposerait l'usage d'un instrument. Bautier (1987) appelle de telles figures des "figures-messages", nous renvoyons à son étude très fine, en ce qui concerne la symétrie.

Si le "message" n'est pas décodé par au moins un des élèves, "l'exploitation collective" permet à l'enseignant d'avancer, suivant les conseils du manuel pour le maître, qui s'exprime en ces termes : " on dégagera, on fera constater, on mettra en évidence etc..." Ce "on" est bien commode, il permet au maître de se sentir autorisé à intervenir largement tout en maintenant la fiction que ces interventions ne sont que la reprise de l'expression des enfants.

La production de la réponse attendue ne signifie donc pas que les élèves donnent du sens à l'emploi de ces propriétés pour obtenir la symétrie d'une figure, objet dont ils ont une connaissance culturelle à partir du pliage introduit au CE. Or la réussite au troisième exercice suppose qu'ils soient capables de donner un sens précis et général aux connaissances dégagées dans un contexte très particulier. Ce travail n'est en aucune façon soutenu par l'enseignant, il est entièrement à la charge de l'élève.

Nous retrouvons là la caractéristique de la présentation ostensive des connaissances : l'élève est seul responsable de la construction du sens, en particulier de la relation entre ce qu'il connaît déjà dans la problématique "pratique" et ce qui lui est enseigné.

b) Manuel B

Les titres des chapitres renvoient uniquement à des concepts géométriques. L'examen des leçons montre que les activités de reproduction, description, etc jouent un rôle marginal.

Les enfants ont essentiellement à "observer" des figures, à répondre à des questions les concernant et quelquefois à en tracer.

Une différence importante avec le manuel A est la présence dans la partie "Activités préparatoires" d'aides pour résoudre les exercices et en fin de chapitre, d'un mémento qui expose les résultats essentiels. Ce manuel est donc beaucoup plus proche de ceux d'avant la réforme de 77-78-80. Sa modernité est toutefois attestée par le nombre non négligeable d'exercices dont la consigne est une des formes du "Que peux-tu dire?".

c) Manuel C

Les titres des chapitres renvoient, dans la moitié des cas, à des activités portant sur des objets spatio-géométriques, comme le suggèrent les instructions (reproduire..., paver...etc.), à des concepts géométriques pour l'autre moitié (symétrie, polyèdres.etc..)

Chaque chapitre comporte une partie "Découverte", une partie "exercices" et une partie "aide-mémoire". Certaines des activités de la partie "Découverte", en particulier celles qui sont seulement décrites dans le manuel pour le maître, pourraient effectivement fonctionner en tant que situations a-didactiques, mais de manière générale, elles ne sont pas conçues pour cela: la quantité d'informations qu'elles sont censées fournir à l'élève est telle que l'on voit mal comment c'est possible sans une intervention importante du maître extrêmement rapidement, intervention qui est d'ailleurs prévue dans le livre du maître.

De plus, on peut remarquer un divorce total entre ces activités et le savoir géométrique qui en est "abstrait" pour l'aide-mémoire, savoir qui, lui, est nécessaire pour résoudre les exercices. A aucun moment l'articulation entre l'activité de découverte et la conceptualisation spatio-géométrique n'est indiquée dans le livre du maître. Si certains enfants réussissent les exercices, ce ne peut être qu'avec l'aide du mémento qui est l'exposé traditionnel des résultats de la géométrie²⁶.

Toutefois, le nombre d'exercices à consigne "Que constates-tu?" est moins important que dans les autres manuels. Ils sont remplacés par des exercices où la consigne n'est pas d'observer et de dire mais d'observer et de continuer la construction commencée. Dans ce manuel, une part moins grande est faite à l'explicitation des connaissances au profit des activités de traçage.

d) Les manuels de 6ème-5ème

Nous n'avons pas pu les examiner de manière suffisamment approfondie pour en tirer des conclusions générales. Toutefois, un rapide examen de quelques notions clés nous permet de reprendre à notre compte ce qu'affirment Mercier et Tonnelles (1992) à propos d'activités présentées dans le manuel "Pythagore": "Que, de ces activités, se dégagent des propriétés du parallélisme ou de l'orthogonalité est un résultat aussi aléatoire que l'émergence d'un texte en prose dans l'activité quotidienne de Monsieur Jourdain."²⁷

e) Conclusion de l'étude des manuels

Ainsi, il semble que de manière générale, les situations d'enseignement de l'espace et de la géométrie ne comportent guère plus de phase a-didactique, maintenant qu'autrefois malgré les timides incitations des instructions.

²⁶ L'examen du chapitre 40 P. 116 et du livre du maître p.113 est particulièrement significatif; on peut se demander quels élèves seront capables de réussir l'exercice 2.. (Annexe 5)

²⁷ Petit x n°29 p.17 et 18.

L'ostension "assumée" a été remplacée par l'ostension "déguisée": Au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le maître le dissimule derrière une fiction: celle que c'est l'élève lui-même qui le découvre sur les figures soumises à son observation. Comme ce savoir à découvrir est un savoir très élaboré, le maître est obligé de "manipuler" le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible; malgré cela, ses interventions sont indispensables, mais au lieu d'être vécues par l'élève comme un apport d'informations dont il ne dispose pas, elles peuvent l'être comme le signe manifeste de son incapacité à voir et comprendre ce qui est si évident pour l'enseignant et une plus grande incitation à décoder les intentions didactiques du maître. Nous retrouvons là l'un des paradoxes étudiés par Brousseau (1986), sous le nom "d'effet Dienes": Plus l'enseignant désire que ce soit l'élève qui découvre les connaissances, plus celui-ci est incité à s'appuyer sur la convention didactique et plus il est abandonné à lui-même quant à l'établissement du sens de ces connaissances.

CHAPITRE C-3

PROBLEMES "RECTANGLE" et "BANCS"

I. INTRODUCTION

A. Objectifs spécifiques

Brousseau et Galvez ont émis l'hypothèse de l'existence chez les élèves de la scolarité obligatoire de modèles conceptuels différents selon la taille de l'espace avec lequel ils sont en interaction. Ils soupçonnaient que les limites et l'hétérogénéité selon la taille de ces modèles pourraient constituer une source de difficultés, voire d'obstacles tant dans la maîtrise de l'espace que dans l'enseignement de la géométrie.

Ils ont ainsi distingué trois espaces, le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace.

Nous avons voulu, par ces études, rechercher une confirmation expérimentale de cette hypothèse chez des élèves de fin de l'école primaire, relativement aux deux premiers espaces : le micro-espace et le méso-espace.

Pour cela, il faut repérer des ruptures de démarches pratiques entre l'espace de la manipulation des petits objets, et celui des déplacements du sujet dans un espace dont les objets mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet..

B. Méthode expérimentale

Parmi les propositions que G. Brousseau (1983) a avancées pour une méthodologie expérimentale, nous avons choisi la seconde, où il s'agit d'étudier les variations de méthodes mises en oeuvre par les élèves dans une famille de situations, lorsqu'on modifie la taille des objets avec lesquels le sujet est en interaction.

Nous avons commencé par déterminer :

- une notion
- une ou plusieurs situations observables, significatives de la notion, sur lesquelles on puisse faire varier la taille
- les éléments de stratégie observables, sensibles à la variation de la taille.

Nous avons décidé de commencer par le repérage clinique de situations où se manifesteront des différences suffisamment nettes, avant de mettre en place un contrôle statistiques des résultats.

C. Choix de la notion

1. Notion spatiale ou géométrique ?

Si notre seul but avait été de tester l'existence de conceptions hétérogènes, nous aurions pu choisir à priori n'importe quelle notion spatiale, où la variable taille puisse intervenir.

Mais notre visée n'est pas psychologique, même si le champ que nous nous proposons de parcourir est exploré par de nombreux psychologues.

Le caractère didactique de notre visée, nous appelle à éclairer les relations éventuelles entre une hétérogénéité des conceptions spatiales d'élèves et certains problèmes de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire et notamment à l'école primaire.

C'est pourquoi nous avons ciblé nos recherches sur des situations où nous pouvons assurer l'implication évidente de notions géométriques.

2. Quelles notions géométriques? :

Dans cette phase de notre travail, où nous voulons étudier les relations entre les conceptions spontanées et la géométrie, il nous fallait trouver des notions à la fois objets culturels et objets d'enseignement, nécessaires à la maîtrise de l'espace courant.

Notre population de référence étant les élèves de l'école primaire, nous avons choisi le rectangle qui est, parmi les notions familières aux enfants de fin de scolarité primaire, une de celles qui nous paraît la mieux assurée, et une des plus riches de propriétés mathématiques connues.

3. Quelles connaissances sur le rectangle?

a) Connaissances liées à la langue

Un rectangle est naturellement pour les enfants ce qu'il est pour la culture : une forme munie de quelques attributs obligés qui délimitent la pertinence de l'information qu'apporte son emploi : il n'est ni trop grand (au-delà des objets domestiques, on utilise l'adjectif "rectangulaire" et non plus le nom) ni trop petit (trop petit, ça devient un "carreau", ou un point), de proportions "moyennes" entre longueur et largeur (au-delà on passe au presque carré -qui n'est pas un rectangle dans ce contexte- ou au ruban...).

Wermus (1976 et 1978) propose un modèle -les prédicats amalgamés- pour décrire l'identification et la reconnaissance des figures dans le contexte culturel courant.

b) Connaissances mathématiques

L'enseignement va viser à substituer progressivement à la forme reconnue visuellement, son identification et son traitement par un ensemble de propriétés.

Le caractère nécessaire de ces propriétés n'est pas établi de la même façon pour toutes.

* *Un rectangle a nécessairement 4 côtés ; ses côtés (opposés) sont deux à deux de même longueur. D'un point de vue culturel, on parle de la longueur, et de la largeur du rectangle.*

* *Il a 4 angles droits.*

* *Les côtés opposés de ce quadrilatère sont parallèles, c'est un parallélogramme.*

* *Il a deux diagonales, qui sont de même longueur.*

* *Ses diagonales se coupent en leur milieu.*

Ces deux dernières propriétés caractérisent le rectangle pour le mathématicien, mais pas encore pour l'élève de l'école élémentaire.

* *Les médiatrices de ses côtés opposés sont axes de symétrie du rectangle.*

* *La symétrie par rapport à un point n'étant pas enseignée avant la classe de 6ème, les élèves auront peut-être rencontré le centre du rectangle comme centre d'une rotation qui le conserve.*

Au rectangle sont attachées, outre les mesures de longueurs de chacun des côtés, un périmètre et une aire, calculés selon des formules spécifiques.

Savoir que tel ensemble de propriétés est suffisant ou non n'est pas objet d'enseignement avant le collège. A l'école élémentaire, les deux propriétés *quatre angles*

droits, et les côtés opposés de même longueur, sont associés au mot rectangle, comme une définition.

Les propriétés mathématiques qui vont effectivement intervenir dans notre étude peuvent différer selon les interactions effectivement mises en oeuvre, et le niveau d'élaboration des connaissances des élèves. Elles vont donc dépendre de la situation proposée.

D. Présentation des études :

1. Les problèmes "Rectangles"

Le lecteur y trouvera :

- L'étude préalable qui a permis de construire les situations que nous avons retenues pour explorer les situations favorables à l'épreuve de l'hypothèse des conceptions liées à la taille.
- L'analyse à priori des situations explorées que l'on peut rassembler sous la description suivante :

Deux sommets d'un rectangle étant marqués, il s'agit de marquer au sol la position des deux autres.

- Les observations cliniques : Ce problème a été posé, en dehors de la classe, à quelques paires d'élèves de CM2, en faisant varier certains paramètres (taille, détermination de la forme "rectangle" à construire par le nom ou par un objet-modèle).
- les conclusions, en particulier, la détermination d'une situation pour l'étude expérimentale de l'hypothèse d'existence chez les élèves de modèles conceptuels différents selon la taille de l'espace avec lequel les sujets sont en interaction.

2. Les problèmes "Bancs"

Nous y présentons différentes études sur les problèmes "Bancs"¹ :

- L'élaboration des problèmes "Grand Banc" et "Petit Banc", conçus pour apporter des informations sur des comportements différenciés par la taille de l'objet, objets respectivement du méso-espace et du micro-espace. Il s'agit de prévoir les positions (sommets d'un rectangle) au sol des deux paires de pieds situés respectivement aux deux extrémités d'un banc (scolaire ou "miniaturisé"), lorsqu'on va le déplacer dans un autre endroit.
- Les observations sur le problème du "Grand Banc" au CM2
- Les observations sur le problème "Petit Banc" au CM2, avec bien entendu d'autres élèves.
- L'analyse des différences observées ou non.
- Les conclusions.

Cette première série de travaux nous a permis de reconsidérer la notion théorique des modèles conceptuels liés à la taille de l'espace avec lequel les sujets sont en interaction, d'en reprendre l'étude (chapitres B-6 et C-4). Cete étude a abouti à proposer l'identification de différentes représentations pratiques de l'espace, dont la mise en oeuvre est déterminée non plus seulement en fonction de la taille des espaces avec lequel les sujets sont en interaction, mais aussi par un ensemble d'autres facteurs. Cette hypothèse a été soumise à l'expérimentation sur une autre notion, le repérage de la position des objets lors d'une énumération d'objets, et à un autre niveau scolaire, la maternelle. Ce travail est présenté au chapitre C-5.

¹ Ces études ont fait l'objet d'un poster au colloque CNRS Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, mai 1987.

3. Identification d'un changement de conception de l'angle droit par l'effet d'un enseignement.n

Nous y présentons une utilisation du problème "Petit Banc" comme moyen de tester le changement de conception éventuellement introduit par un enseignement sur les angles.

Le lecteur y trouvera :

- une seconde série d'observations réalisée sur le problème "Petit Banc" posé au CM1, après la phase correspondante d'enseignement.
- les conclusions.

II. LE PROBLEME "RECTANGLE"

Il s'agit donc :

1) de construire un problème se déroulant dans un espace dont la taille constitue une variable qui puisse prendre des valeurs correspondant au micro-espace d'une part, au méso-espace de l'autre, sans que ses autres variables en soient significativement affectées. C'est à dire un problème où les variations de taille et de stratégies puissent être mises en rapport de cause à conséquence.

Posé dans les deux espaces, ce problème doit par ailleurs permettre aux élèves de mettre en oeuvre des stratégies entre lesquelles nous pourrions identifier une rupture qui soit significative du changement de taille.

2) d'observer des élèves, isolés ou regroupés par deux, afin de repérer les changements de stratégies qui puissent être significatives du changement de taille. Le regroupement des élèves par deux peut aussi permettre de proposer une tâche complexe (et il est difficile de faire autrement dans le méso-espace), et favoriser l'observation en provoquant des échanges verbaux entre eux.

A. Choix d'une situation spatiale relevant de la notion rectangle

Nous allons ci-après faire une revue des avantages et inconvénients des différents types de problèmes simples que l'on peut poser sur cette notion.

1. Rapport avec les situations scolaires :

a) La reconnaissance.

La situation choisie peut-elle être une situation de reconnaissance de forme ?

Les tests de reconnaissance visuelle de rectangles en situation scolaire sont réussis bien avant le CM2, en ce qui concerne les rectangles tracés sur papier.

Wermus (1976) a montré comment cette reconnaissance pose des problèmes conceptuels, le mot rectangle étant d'abord attaché à une classe d'objets déterminée par ce qu'il nomme prédicat amalgamé. La différence de longueur entre les côtés est une de ces propriétés là, avec une largeur minimale, un certain rapport entre les côtés, etc.

Proposer la reconnaissance de rectangles dans le méso-espace va ainsi constituer une situation non habituelle, nécessitant une détermination effective par un prédicat "décanté" des propriétés non pertinentes. Or, la reconnaissance de rectangles uniquement à partir de propriétés ne fait pas partie des situations scolaires courantes à l'école élémentaire, où la vue et le tracé sont quasiment toujours préalables au problème de la reconnaissance, quand celui-ci est posé.

Quelles pourraient alors être les réponses à une question du type : "Quelle est la forme de ce terrain (de sport par exemple)? " ou "A quoi ressemble ce terrain?". C'est une question qui mêle deux domaines habituellement séparés : le sport et les mathématiques.

Une question qui porterait spécifiquement sur la reconnaissance de forme risquerait de poser à l'élève un problème de signification et de contrat vis à vis de l'observateur. Cela pourrait donc provoquer des biais rendant difficile l'interprétation en termes de conceptions spontanées.

b) L'énoncé des propriétés

La question pourrait porter sur la connaissance et l'énoncé des propriétés suivantes des rectangles, travaillées à l'école primaire : *quatre angles droits, côtés opposés parallèles et de même longueur. formule du périmètre et de l'aire.*

Les axes de symétrie ne sont pas objets de la même pression scolaire, et par conséquent, de la même connaissance.

On pourrait par exemple questionner les élèves à propos d'une forme rectangulaire familière du méso-espace (bâtiment, terrain de sport...).

La difficulté d'une telle situation vient du fait que pour un certain nombre d'élèves, ces grandeurs n'ont de signification qu'en ce qui concerne les formes de la taille des dessins sur une feuille de papier, et nous risquons de retrouver les problèmes posés plus haut.

c) La construction effective d'un rectangle.

Les élèves de CM2 savent couramment construire un rectangle (sur une feuille de papier) dont on donne les dimensions, ou qu'on leur demande de reproduire (ils savent saisir les deux dimensions, du moins sur une feuille) : Ils construisent un côté, et complètent au double décimètre en utilisant ou non l'équerre, pour mener les côtés perpendiculaires au côté fourni et y reporter les deux autres sommets. Il est alors évident pour tout élève du CM2, que sauf erreur visuellement constatable, le quadrilatère construit est bien un rectangle.

Un problème de construction met en oeuvre la reconnaissance de l'objet construit, et l'utilisation de propriétés qui peut rester implicite, tout en se traduisant de façon observable au niveau des stratégies. Ce type de problème mobilisant l'action, risque moins d'être conçu comme une évaluation des acquis scolaires, et ce, d'autant moins que la situation sera éloignée des caractéristiques des tâches courantes dans ce milieu.

La question inévitable de la précision des tracés va être sous-jacente à toute l'activité. Les élèves vont cependant pouvoir se rendre compte de la normalité ou non de l'amplitude des différences entre les résultats attendus et obtenus, dès la prise de mesures, ou lorsqu'ils vont les refaire pour vérifier. L'observateur pourra tempérer des exigences trop grandes.

d) La position par rapport au milieu extérieur

Il s'agit du parallélisme ou non d'un côté du rectangle à un cadre de référence.

La construction effective de rectangles se fait couramment en laissant au choix de l'élève la direction des côtés qui est alors, ne serait-ce que pour des raisons d'économie, celle des bords de la feuille et du quadrillage.

Si la situation fournit deux sommets, qui ne sont pas sur une ligne parallèle à l'un des côtés de la feuille, elle s'éloigne de la situation usuelle.

Dans la situation usuelle, lorsque les côtés sont parallèles aux bords de la feuille, la réussite de la construction des angles droits peut être obtenue par un guidage perceptif fondé

sur le parallélisme aux bords de la feuille, sans nécessiter aucune décision spécifique à l'angle droit.

A l'inverse, dans le cas où ses côtés ne sont pas parallèles aux bornes du domaine, il faut une décision du sujet pour reproduire convenablement l'angle ; en cas d'échec, nous ne pourrions, en utilisant les catégories de Wermus, qu'affirmer que le prédicat "avoir un angle droit" n'est pas décanté, pour ce sujet, de la position de parallélisme par rapport à un environnement rectangulaire.

e) La désignation ou non de la connaissance :

Poser le problème de la reproduction d'un objet spatial permet de poser un problème a-didactique, sans désigner la connaissance. On trouve des modèles à reproduire (bâtiments, terrains de sport) qui ont plus de 15m dans l'une au moins des dimensions. A moins de 15 mètres, on pourrait se servir d'une pièce dont on cherche à reproduire l'étendue au sol.

On peut aussi demander la construction d'un rectangle de telle et telle dimension.

Pour reproduire, il faut choisir les mesures, puis les saisir, les noter, les reporter, et y revenir éventuellement lors de la vérification.

Désigner la forme par le nom de rectangle permet par contre d'économiser beaucoup de temps, celui de la saisie des dimensions, et ce, d'autant plus que celles-ci sont importantes. Par le fait même, on perd des informations sur les opérations de saisie.

2. Conséquences du choix d'une grande taille

a) Modalités de preuve

Les objets de grande taille ne sont en général pas déplaçables. Il n'y a donc plus de preuve empirique par la superposition d'un modèle.

La preuve pour les élèves peut alors se faire :

- soit par référence à la définition implicitement mise en oeuvre dans la construction (c'est la solution la plus immédiate),
- soit en vérifiant d'autres propriétés (diagonales de même longueur),

b) La connaissance investie dépend des outils disponibles

1) Les longueurs

La mesure des longueurs ne posera pas les mêmes problèmes aux élèves selon que l'on fournira : un double décimètre, un mètre, un double mètre pliant, un décimètre, selon que ces instruments seront en bon état ou cassés...

Si la longueur de l'instrument dépasse la longueur à mesurer, il ne reste à la charge de l'utilisateur que le positionnement de l'origine, la tension éventuelle pour assurer la ligne droite, et la lecture de la graduation à l'extrémité.

Si la longueur de l'instrument est inférieure à la longueur à mesurer, le problème du report se pose avec les deux connaissances associées : alignement des reports de l'instrument, et additivité des segments considérés par superposition de l'origine du suivant à l'extrémité du précédent.

Le double décimètre, outre le fait de sa dimension réduite et de l'erreur due aux nombreux reports nécessaires offre, comme le mètre du tableau, la particularité d'une graduation qui ne va pas jusqu'aux extrémités. Chaque report correspond à une longueur supérieure à celle indiquée par les graduations et qu'il faut déterminer.

Un instrument cassé du côté de l'origine va imposer à l'utilisateur un contrôle supplémentaire des mesures comme différences entre les repères numériques...

2) *La construction des angles droits*

Dans les conditions non scolaires, et en dehors d'un contexte professionnel, il se fait soit visuellement, de manière approximative, soit à l'aide du corps (ligne de visée par rapport à la ligne des épaules)².

Dans les conditions scolaires, il est censé se faire à l'aide de l'équerre.

Si les côtés du rectangle sont matérialisés, l'alignement des reports se fera par superposition de l'instrument à la ligne du côté; sinon, il faudra recourir au contrôle par la visée.

Utiliser une grande "équerre" sur un terrain suppose trois contrôles : la position d'un sommet et la présence de chacun des deux sommets voisins du terrain sur le prolongement des côtés de l'instrument.

3. **Choix des paramètres de la situation :**

1) *Variables fixées*

Nous avons choisi un problème de construction effective plutôt qu'un problème de reconnaissance : Un problème de construction implique au moins au moment de sa validation, mais aussi au cours de cette construction, la mise en oeuvre de processus de reconnaissance. L'énoncé des propriétés n'est pas demandé, mais les propriétés vont intervenir implicitement ou explicitement à travers le choix de procédures de construction et de vérification.

Une indication de la précision raisonnable peut être fournie par comparaison entre la mesure de la distance entre les deux piquets fournis et la dimension annoncée.

Nous avons décidé de fixer la position par rapport au milieu extérieur, nettement de biais. Nous pourrions ainsi différencier les élèves qui disposent effectivement d'une connaissance de l'angle droit décentrée de la caractéristique du parallélisme avec les limites rectangulaires du domaine dans lequel il s'inscrit, des élèves qui n'en disposent pas.

Nous avons décidé de fournir les outils disponibles selon la demande des élèves, sans leur indiquer préalablement ce dont nous disposons. Nous avons prévu : matériel de tableau, corde, décimètre, matériel de géométrie de l'élève, feuille de papier.

2) *Variables commandées*

a) La taille

Nous avons choisi de la faire varier de celle d'une feuille de papier, à 9m sur 7m, en passant par la dimension d'une table.

b) Désignation de la connaissance :

Nous avons gardé deux modalités : la désignation directe, et la désignation indirecte par un plan sur feuille de papier.

Nous avons choisi comme situation principale la référence au rectangle dans la consigne et nous avons rejeté la donnée d'un modèle sur la grande taille, à cause du coût supplémentaire de la saisie des informations que cela occasionnerait. Cependant nous avons testé un groupe en situation de modèle, avec une table comme référence.

Dans le cas de la désignation directe, la situation ainsi créée est évocatrice de tâches familières et faciles, et évite une désorientation trop grande.

² Nos expériences nous ont montré que certains élèves peuvent construire un angle droit en se trompant de moins d'un degré.

Les limites de cette situation en découlent :

- L'appel explicite au rectangle active, de ce fait, les connaissances scolaires
- L'impossibilité d'une vérification empirique renforce l'appel aux connaissances. Ne pourront correctement évaluer que ceux qui auront maîtrisé la construction.

Le caractère spatial de la situation est ainsi explicitement combiné avec ses propriétés géométriques dès la consigne.

B. Etude à priori de la situation

1. Énoncé des deux problèmes:

A : Construire un rectangle de dimensions données, dont deux sommets sont déterminés à l'avance par l'expérimentateur. Les outils disponibles fournis à la demande sont : un mètre de tableau, un double mètre pliant, une ficelle, une équerre de tableau.

B : Prévoir la position de deux coins d'une table quand on aura placé les deux autres sur les gommettes déjà fixées au sol.

2. Solutions géométriques

La solution de l'énoncé B se ramène à celle de A une fois reconnue la forme et effectuée la saisie des données.

Solution 1 : Sur la ligne joignant les sommets fixés et d'un même côté de cette ligne, mener en chaque sommet une ligne droite perpendiculaire. Sur chacune de ces lignes, et à partir du sommet connu, déterminer un segment qui a la seconde dimension pour longueur. Les deux autres sommets sont ainsi fixés.

Solution 2 : Sur la ligne joignant les sommets fixés et d'un côté de cette ligne, mener un segment perpendiculaire ayant la seconde dimension pour longueur. Déterminer ainsi le troisième sommet. De ce sommet, et dans le bon sens, tracer un segment perpendiculaire qui a la première dimension pour longueur. Le dernier sommet est ainsi déterminé.

D'autres variantes sont imaginables, utilisant d'autres propriétés du rectangle.

3. Mise en oeuvre spatiale des solutions

Les résultats dépendent de la précision de la détermination des longueurs et des angles.

Pour les deux solutions proposées, la construction de trois côtés suffit pour résoudre le problème. La vérification de la mesure du quatrième devrait provoquer la mise en cause du résultat de la construction, et enclencher un processus de corrections successives.

Le problème de la convergence de ce processus de tâtonnement vers un bon résultat est complexe et dépend du processus :

* Si le processus ne fait appel qu'aux longueurs, il convergera rapidement vers un parallélogramme qui a toute chance d'être non-rectangle.

* Si la correction prend en compte prioritairement les angles, avec des moyens efficaces, on pourra obtenir "un rectangle" à la précision correspondant aux outils.

La détermination de cette précision est une caractéristique fondamentale de la solution spatio-géométrique par rapport à la solution géométrique.

L'ajustement selon la solution 1, concernant aussi les angles, nécessite un contrôle rigoureux de ceux construits aux deux sommets placés par l'expérimentateur, et une maîtrise des outils, ici, de l'équerre (contrôle des alignements sur les deux côtés). C'est le processus dont la convergence est la plus rapide vers un résultat acceptable.

La solution 2 construit le quatrième sommet à partir de la position obtenue par la construction du troisième. Les erreurs de construction du troisième sommet interfèrent avec celles de la construction du quatrième sommet.

L'ajustement par la longueur des diagonales est plus complexe : sans la connaissance effective de leurs mesures, il n'indique qu'un certain niveau d'erreur sans fournir aucun moyen élémentaire pour corriger cette erreur.

Les autres solutions utilisant d'autres propriétés comme le parallélisme n'apportent pas d'avantage particulier dans la construction spatiale, sauf si l'on pouvait se guider à un environnement rectangulaire, ce qui ne sera pas le cas.

On peut constater la différence de complexité entre les solutions géométriques et leur mise en oeuvre spatiale.

4. Quelles sont les variables didactiques ?

a) la taille est-elle une variable didactique?

Si oui, les stratégies des élèves vont se différencier d'une taille à l'autre. Des changements peuvent se manifester de plusieurs façons :

- par le blocage de certaines propriétés pour certaines tailles.
- par le recours à d'autres procédures de résolution

b) la donnée de la forme dans l'énoncé est-elle une variable didactique?

Nous ne le pensons pas lorsqu'il s'agit du rectangle. En effet, le concept de rectangle est passé dans la culture courante, et les enfants savent en reconnaître un uniquement à l'oeil.

Pourquoi alors avoir fait varier ce paramètre? C'est parce qu'il autorise une validation différente de la stratégie de construction. La situation où la construction se réfère à un plan ou une table est donc moins dépendante des connaissances antérieures; elle pourrait permettre un investissement différent des modèles spontanés, et surtout provoquer leur enrichissement par l'effet de la rétroaction.

5. Situations observées

a) Situation A1 :

Deux piquets sont plantés dans le sol, à 7m l'un de l'autre (à 2cm près). Consigne : j'ai planté deux piquets qui sont les sommets d'un grand rectangle que vous allez terminer; vous allez planter les deux autres piquets. Il faut que la longueur de ce rectangle soit de 9m.

b) Situation B1 :

Voici le dessin d'un bâtiment que l'on voudrait construire. Il faut marquer les coins par des piquets sur la pelouse. J'en ai planté deux à 7m l'un de l'autre. Il faut placer les deux autres selon le plan. (échelle, 1cm pour 1m).

c) Situation A2 :

Même situation que A1, mais les piquets sont remplacés par des gommettes sur le sol d'une pièce et les dimensions du rectangle sont 1m20 et 1m70.

d) Situation B2 :

On va retourner la table (2m sur 1m) et la poser par terre en plaçant les deux coins (de la largeur) sur ces gommettes; il faut marquer par deux autres gommettes là où vont se trouver les deux autres coins.

e) Situation A3 :

Sur une feuille blanche, le même travail que A1, mais avec 14cm sur 18cm.

C. Résultats attendus :

Nous avons ci-après étudié l'exploitation que nous aurions pu réaliser de la mise en oeuvre des situations précédentes sur un nombre important de groupes. L'hétérogénéité des groupes observés et leur nombre (4 au maximum par situation), ne nous permettent pas de conclure.

1. Comparaison des observations dans les situations A1 et B1

Une différence entre A1 et B1 réside en ce que, en A1 le rectangle est nommé tandis qu'en B1 il ne l'est pas. La comparaison pourrait éventuellement nous donner des indications sur l'influence de la désignation de la forme par le nom de rectangle par rapport à une désignation implicite par un dessin. Nous pourrions tenter d'identifier l'effet de la désignation par son nom d'un objet culturel bien connu, en l'opposant à la désignation par le dessin, autre forme culturelle du concept.

En B1, il est de plus possible de saisir la dimension des diagonales, si l'échelle est simple. Si des différences sont constatées sur l'usage de la diagonale, elles pourraient être décrites en termes de blocage dans les situations A1 d'une des composantes du prédicat rectangle.

2. Comparaison entre les résultats A2 et B2

Elle pourrait nous donner des indications sur l'influence de la matérialisation du rectangle par un objet plein, pourvu de côtés bien matérialisés, par opposition à l'accent mis sur les sommets d'un rectangle non matérialisé.

Nous interpréterions les différences en termes d'importance de la matérialité de l'ensemble des composantes du prédicat rectangle, pour la prise en compte de ces composantes.

3. Comparaison des résultats de A3 avec les autres

Elle nous donnerait éventuellement des indications sur les paramètres qui sont sensibles au changement de taille réalisé.

Nous porterons notre observation sur les comportements que l'on peut relier aux composantes des stratégies de résolution telles que nous les avons identifiées ci-dessus.

- Concevoir des lignes droites liant les points donnés et/ou à construire.
- Régler la direction des reports de longueur par rapport à la direction des côtés déterminés par les points connus ou déjà construits.
- Effectuer les reports de longueur
- Ajuster le résultat par une ou plusieurs des procédures identifiées, ou une autre...

D. Observations :

1. Population

Elle a été constituée de 6 groupes de deux élèves de CM2, désignés par leur maîtres comme représentants de l'une des trois catégories suivantes : bons élèves, élèves moyens, élèves faibles.

Cette étude ne peut avoir qu'une valeur clinique, le petit nombre de groupes excluant toute analyse statistique.

2. Organisation

Nous les avons groupés par deux, afin :

- 1- de limiter l'impression de difficulté qui aurait pu bloquer un seul élève.
- 2- de permettre la formulation de communications entre eux qui pourraient nous informer sur les modèles mentaux
- 3- de mieux contrôler le contrat didactique.

Chaque groupe a reçu un nom distinct Rk ou Pk(rectangle ou plan)

	Situation	Bons	Moyens	Faibles
grande taille	A1	Ra	Rb,Rd	Rc
	B1	Pa	Pb	
taille moyenne	A2	Ra	Rb	Rc
	B2	Pa		
petite taille		Ra, Pa	Rb	Rc

Le travail des groupes Ra, Rb, Rc, et Pa a duré pour chacun d'eux plus d'une heure, dont les deux tiers ont été consacrés à la situation 1.

Pour aucun groupe, les situations 1 et 2 n'ont abouti à une réussite de la construction à 1° près. Le meilleur résultat³ a dévié de moins de 2 degrés mais les autres en étaient assez loin. La situation A3 a donné lieu à plus de réussites.

Les élèves sont repartis sans avoir pu d'eux-mêmes évaluer avec assurance le niveau de réussite de leur travail et encore moins identifier la source principale de leurs erreurs qu'ils ont attribuées au paramètre avec lequel ils se sont battus avec le plus d'acharnement : alignement pour les uns, capacité à construire des points "en face", etc..

La vérification du caractère *rectangle* s'est souvent faite par celle de l'égalité de longueur des diagonales, alors que la construction a fait appel aux longueurs des côtés, et à la perpendicularité (éventuellement). Elle n'a cependant pas entraîné la conviction des élèves : "mais peut-être qu'il y a des figures avec quatre angles droits qui ne sont pas des rectangles" (Stéphane), ou "je ne suis pas convaincu, il faudrait aller au deuxième étage et regarder"...

Les comportements suivants observés ont été regroupés selon les étapes de la construction telles que nous les avons présentées dans l'analyse.

3. Comportements

³ Il s'agit de Ra. Les diagonales mesurées faisaient respectivement 11,25m et 11,55m. La diagonale théorique mesure 11,40 m. L'incertitude sur les côtés étant estimée à 2cm, cela donne une incertitude de moins de 3cm sur la diagonale. Si on nomme a et b la longueur des côtés, α l'angle dont dévie le tracé du côté b par rapport à la perpendiculaire à la direction du côté a, on a $d = b \cos \alpha + (a-b \sin \alpha)$. Un calcul pour $\alpha = 1$ degré fournit 11,30 pour la petite diagonale et 11,50 pour la grande ; pour $\alpha = 2$ on a respectivement 11,20 et 11,59.

a) Alignement des reports

1) Visée :

Nous avons rassemblé ici deux comportements : celui qui consiste à reporter l'instrument de mesure comme pour l'accoler en prolongement avec sa précédente position, en ajustant la position de la nouvelle extrémité par contrôle de l'alignement du piquet avec la direction du report; et celui qui consiste à mettre bout à bout des instruments rigides de mesure, et à contrôler l'alignement des segments, et la présence du piquet de départ sur cette ligne.

2) Glissement :

Il s'agissait de faire glisser l'instrument sur sa précédente position, en assurant un recouvrement de la nouvelle sur l'ancienne. Le recouvrement utilisé dans la situation (3) avec de petites règles a été de 3cm. Le procédé est mathématiquement correct, mais spatialement incorrect, et le groupe qui l'a utilisé a été surpris par cet échec.

3) Problème non posé :

Le problème a été évacué dans les situations A1 et B1 pour quatre groupes, du fait de l'emploi d'un décimètre; il suffisait alors de tendre cet instrument pour effectuer de bonnes mesures et reports. C'est souvent l'observateur qui a fourni le décimètre, afin de limiter la complexité de la tâche. En B2, c'est le fait que la dimension maximale de la table égalait la longueur du double mètre utilisé qui a empêché le problème de se poser. Le problème est resté posé dans les situations A2.

b) détermination de la direction à suivre pour placer les points à construire :

1) Angle droit (A)

Nous avons regroupé ici l'utilisation de l'équerre, d'une grande feuille de papier comme équerre, et de deux bancs scolaires ajustés perpendiculairement. Les groupes Rb et Rc (situation 1) cherchent à corriger leur première construction faite par repère corporel, en utilisant l'équerre. Les difficultés de manipulation de l'objet leur en font abandonner l'usage, au profit d'estimations "en face ou pas en face". Dans la plupart des cas, le repère corporel est utilisé pour faire la construction, l'équerre pour vérifier.

2) Repère corporel (C)

La direction perpendiculaire a été estimée par référence au repère corporel ou "à l'oeil". Nous avons désigné par repère corporel l'alignement des épaules au côté déjà déterminé par deux points et la marche droit devant soi. Ce comportement est typique des situations 1. Nous l'avons regroupé avec l'estimation de la direction à l'oeil essentiellement dans les situations 2, quand il est apparu clairement que la perpendicularité ou la forme rectangulaire étaient recherchées.

3) Parallélisme (P)

Nous avons ici regroupé le contrôle entre une direction matérialisée et une autre pour les amener à être parallèles, par conservation d'un écartement régulier, mesuré ou estimé à vue.

4) Sans contrôle apparent :

Sont ici regroupés les comportements où la direction de report n'est déterminée ni par l'orthogonalité, ni par le parallélisme.

5) Matérialisation des segments pour contrôler une direction :

Nous avons ici regroupé l'utilisation de ficelles pour relier deux piquets (situations 1), utilisation de petits objets pour relier deux sommets consécutifs de la construction (situation 2), et tracer les lignes séparant deux points (situation 2 et 3)

6) Variante dans l'ordre

"A-D, B-C" représente la construction de D à partir de A et de C à partir de B.

"B-C-D" représente la construction du quatrième point non à partir d'un des points donnés, mais à partir de celui qui vient d'être construit.

c) Les questions de langage :

Le vocabulaire utilisé par les élèves au cours de la résolution de ces situations, est loin d'être pour eux une aide.

En effet, l'expression "c'est droit" ou son contraire vont selon le moment qualifier une ligne droite (ficelle bien ou pas tendue) ou un angle, ou la position d'une ligne matérialisée ou non, implicitement par rapport à un mur ou un bâtiment.

Enfin, les expressions "c'est penché ou pas assez penché" ou "en biais" vont qualifier une situation d'écart de la ligne (matérialisée ou imaginée entre deux sommets) par rapport à une ligne implicite (qui formerait un angle droit)

Les expressions "en face ou pas en face" vont traduire tantôt la perpendicularité de deux côtés consécutifs : par la position de deux individus se regardant, placés au niveau de deux sommets construits, la ligne des épaules passant par les points de départ; et tantôt le fait qu'en se plaçant au niveau de l'un des sommets construits et (inconsciemment) la ligne des épaules parallèle à un mur ou bâtiment proche, on ne voit pas l'autre sommet en face.

4. Tableau récapitulatif

Codage : Le "1" signifie présence d'un comportement, le 0, son absence pour le groupe.

(1) signifie présence du comportement pour un seul des deux élèves, (2) présence pour les deux élèves du groupe.

Le "x" signifie que l'observation n'a pas permis de répondre à cette question.

Groupes	R	R	R	R	P	P	R	R	R	P	R	R	R	P
	a	b	c	d	a	b	a	b	c	a	a	b	c	a
Situations	A	A	A	R	B	B	A	A	A	B	C	C	C	C
	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
Alignements														
Visée	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Glissement	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Non contrôlé	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
Problème non posé	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
Demande d'équerre au début	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
Détermination des directions														
Parallélisme entre côtés	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Angle droit (gabarit)	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	2	0	1	0
Estimation corporelle	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	2	2	1	1
Sans contrôle apparent	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Matérialisation des segments														
possible d'après la consigne	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1

réalisée	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
Ordre de construction														
A-D, B-C	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	x	x	x	1
B-C-D	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	x	x	x	0
Ajustement														
Utilisant l'orthogonalité	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
Basé seulement sur les longueurs	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	2	1	1
Utilisant les diagonales	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	x	x	x	0

5. Commentaires à propos de ces résultats en fonction des caractéristiques des situations

a) Comparaison entre les situations A1 et B1

* En ce qui concerne les alignements de reports de longueurs, il n'y a qu'en "Pa" que l'on note un contrôle par visée. Nous ne voyons cependant pas en quoi ceci serait un indice de spécificité de la désignation par un plan.

* Le recours pendant la construction au contrôle de la direction des reports par le parallélisme des côtés opposés n'a été observé qu'en situation P et l'ajustement des côtés exclusivement par l'égalité des longueurs a été systématique en situation P.

Nous pourrions donc nous demander si la forme rectangulaire d'un dessin est associée au parallélisme (des côtés opposés et éventuellement avec le cadre) et aux égalités de longueur, plus qu'à la perpendicularité des côtés consécutifs.

Si nous examinons les procédures de vérification, on peut constater qu'un groupe P au moins recourt à la vérification de l'égalité de longueur des diagonales, ce qui suppose que cette propriété du rectangle est bien présente dans l'esprit des élèves.

On pourrait aussi penser que la désignation de la forme par le mot rectangle peut déclencher, plus que sa désignation par un dessin, un appel à l'angle droit.

Cependant, il faut noter que le groupe Rb n'a contrôlé aucun angle droit dans les situations 1 et 2, se contentant de l'égalité des longueurs des côtés opposés.

En conclusion, la diversité des réponses rend ces suppositions trop douteuses pour que nous les retenions.

b) Comparaison entre les situations A2 et B2

On pouvait attendre que la situation B2 renforce l'appel aux propriétés du rectangle en permettant une vue d'ensemble d'un seul coup d'oeil.

L'observation a montré que pour le groupe "Pa" (bons élèves), il n'en a rien été; L'évaluation par la table posée sur les coins fournis et s'éloignant nettement des coins prévus a surpris fortement les élèves, mais ne leur a pas apporté d'indication sur l'origine de leur erreur.

c) Comparaisons entre les situations obtenues en faisant varier la taille.

1) Alignements des reports de longueur

En situation 1 les problèmes d'alignement des reports de longueur ne sont même pas soupçonnés par certains groupes. Le problème ne s'est pas posé pour d'autres à cause des outils. Cependant, la transposition du problème en situation 3, avec une règle plus courte que la distance à rapporter, conduit aux mêmes observations : le problème n'est pas perçu.

Nous pensons donc que le problème des alignements est un problème nouveau pour les élèves, et que le milieu ne peut pas renvoyer de rétro-actions spécifiques à cette question qui remettent en cause ce point (voir problèmes des triangles aplatis en partie B).

2) La question des angles droits

Sur les dix réalisations 1 et 2, les élèves ont recouru quatre fois à une matérialisation de l'angle droit pour corriger les directions.

Si en situation 3, les figures sont relativement rectangulaires, il n'en est pas systématiquement de même pour les situations 1 et 2.

L'usage de l'instrument "équerre" est mal maîtrisé dans les situations 1 et 2 lorsque les côtés ne sont pas matérialisés : Les élèves ne s'assurent de l'alignement des sommets aux côtés de l'instrument que pour un côté.

En situation 1, contrairement aux situations 3, même après vérification de l'égalité de longueur des diagonales, les élèves ne sont pas convaincus de leur réussite.

Les ajustements convergent très vite en 3 et beaucoup plus lentement en 1.

d) Conclusion :

Nous avons repéré trois comportements vraisemblablement liés à la taille :

- le recours effectif à l'équerre, plus important dans les ajustements dans les situations 1 et 2 que dans les situations 3 où elle n'est utilisée qu'au premier report.

- le recours des élèves à une communication, pour coordonner leurs actions dans les tâches de construction des situations 1, se heurte à l'ambiguïté de la pratique de la langue, même lorsqu'ils utilisent des termes géométriques. Il n'est pas certain que le même vocabulaire serait utilisé en situation 3, si les besoins d'une communication étaient établis, ce qui n'est pas le cas dans les situations observées.

- l'émergence d'un problème de géométrie en rapport avec la validation du travail des élèves en situation 1 : conditions suffisantes pour déterminer un rectangle.

E. Remarques

Les trois remarques suivantes soulèvent des questions que notre analyse à priori n'avait pas prises en compte.

1. Recours aux connaissances de géométrie

Dans une tâche de construction ou de reproduction de configuration spatiale, lorsqu'on passe du micro-espace au méso-espace, il y a augmentation du recours effectif aux connaissances de géométrie (angles droits, diagonales de même longueur, parallélisme)

On peut penser que c'est un effet de l'inadaptation des outils : dans les tâches d'action sur un grand espace, si on n'utilise pas de nouveaux outils, des connaissances supplémentaires sont très souvent nécessaires. En effet, une fonction des outils adaptés est de décharger l'opérateur du maximum de connaissances à investir dans le domaine pour lequel ils ont été conçus.

2. Questions de géométrie

La validation d'une tâche de construction dans le méso-espace peut faire émerger des questions de géométrie.

Si des questions peuvent émerger, cela n'implique pas qu'elles puissent être résolues par les élèves.

3. L'ambigüité du langage spatial

La mise au point d'un vocabulaire spatial utile et non ambigu se révèle mieux dans la communication du méso-espace.

Une certaine nécessité relative à l'emploi d'un langage précis peut apparaître dans une communication relative à la coordination de l'action de deux élèves. Les ambigüités relevées, en particulier liées à l'usage du mot droit, nécessitent des situations d'apprentissage adaptées, en rendant impossible la correction par le geste par exemple, et coûteuse la demande d'informations complémentaires.

Le "en face" traduit une pratique spatiale courante, qui est de se placer dans les meilleurs conditions de communication par rapport à un interlocuteur. La mise en rapport de cette connaissance avec l'établissement de deux trajets parallèles et simultanément perpendiculaires au premier côté, par l'alignement de la ligne des épaules avec le point de départ, semble confirmée dans la situation A1.

F. Conséquences sur la détermination de la situation expérimentale

1. Intérêt de la reprise du premier essai :

Un certain nombre de comportements en situations 1 et 2 se modifient pertinemment par rapport au problème dès la fin du premier essai. Comme nous souhaitons repérer l'investissement de conceptions stables, il faudra que la situation permette plusieurs essais.

2. Intérêt de la validation empirique

Dans une situation où elle est possible, l'évaluation est complètement dévolue aux élèves ; Il y a donc moins de risques de recours à l'observateur comme à un enseignant, et par conséquent qu'ils répondent comme ils pensent que l'enseignant le souhaite.

Par ailleurs, cela permet aux élèves d'enclencher un processus d'interrogation sur la différence entre prévision et réalité, et donc d'observer une évolution a-didactique de leurs comportements.

3. La position par rapport au milieu extérieur

Cette variable a produit l'effet attendu, sans que cela conduise à une perte de sens du problème; nous la conserverons.

4. Alignement lors des reports

Cette propriété ne paraît pas être soumise véritablement à l'effet de taille, comme nous l'avons souligné plus tôt. Nous proposons de faire prendre en charge l'alignement par les instruments.

III. LES PROBLEMES "BANCS"

L'objectif de cette étude est de déterminer si une variation de la variable taille entre les valeurs du micro-espace et celle du méso-espace produit, chez des élèves de CM une modification de comportement traduisant une différence de conception spatiale relative aux connaissances liées au rectangle.

A. Etude a priori de la situation des bancs

1. Description⁴

Une planche rectangulaire horizontale est supportée par quatre pieds approximativement verticaux et de même longueur. Ces pieds déterminent au sol quatre sommets d'un rectangle de dimensions différentes de celles de la planche.

Dans le cas du grand banc, la largeur du rectangle au sol est supérieure à celle de la planche, mais sa longueur lui est inférieure. Dans le cas du petit banc, les deux dimensions du rectangle au sol sont inférieures à celles de la planche.

Les dimensions des rectangles correspondant aux deux modèles retenus sont respectivement d'environ 190cmx40cm et 20cmx4cm.

Sont dessinées les traces des pieds du banc, au sol ou sur une feuille de papier selon la dimension, dans une position initiale. Le grand banc est alors parallèle au mur, et le petit banc sur le grand axe d'une feuille découpée en forme d'ellipse.

Le problème consiste à prévoir où se situeront chacun des quatre pieds, après un déplacement du banc relativement loin de la position initiale, en les dessinant au bon endroit.

Une contrainte physique impose aux nouvelles directions du rectangle de n'être parallèles à aucune droite repérable dans l'environnement : la zone où doivent se trouver deux pieds déterminant la largeur du rectangle est dessinée en forme d'ellipse très aplatie.

La solution sera jugée convenable si deux pieds étant posés sur les dessins dans la zone imposée, les deux autres touchent au moins les dessins correspondants.

Les outils disponibles sont les outils géométriques du tableau ou de l'élève.

2. Etude à priori des solutions

a) Partie géométrique

Le problème consiste à reproduire, au loin, une configuration formée par quatre petits "ronds" assez distants les uns des autres. On peut saisir toutes les mesures considérées comme utiles. la forme topologique de la configuration (convexité ou non du quadrilatère, par exemple) peut être mémorisée.

Nous allons comparer les solutions possibles par le nombre et la nature des mesures nécessaires qu'il faut mémoriser pour procéder à une reproduction satisfaisante.

1) Chaque point est considéré comme isolé des autres.

Le repérage ne peut se faire que par rapport à l'environnement.

Supposons, ce qui sera le cas à des degrés divers pour les deux situations expérimentales, que l'environnement comporte un rectangle reproductible.

Un système de repérage à partir du rectangle nécessite deux coordonnées pour chaque point; cela fait 8 informations pour l'ensemble des quatre points, plus éventuellement deux pour le rectangle auquel on se repère. Des coordonnées par rapport à un repère cartésien ne nécessiteraient que 8 mesures.

2) Les points sont déterminés comme extrémités de 2 segments dont un est placé, et l'autre repéré par rapport au premier

⁴ Voir dessin en annexe 1 du chapitre B-6

La construction du premier segment nécessite une information, la longueur, car sa position est arbitraire dans la zone fixée.

Le deuxième segment demande deux informations pour chacune de ses extrémités, que ce soit en coordonnées polaires ou cartésiennes.

Nous voyons donc que le nombre d'informations sera d'au moins 5 pour l'ensemble de la configuration.

3) Trois points sont déterminés comme sommets d'un triangle :

La reproduction (à une symétrie près) d'un triangle nécessite trois informations au moins : trois longueurs, ou deux longueurs et un angle, ou deux angles et une longueur. mais ces deux derniers triplets nécessitent une information supplémentaire sur la position relative de ses éléments.

Pour déterminer le quatrième point par le même système, il faut deux mesures en choisissant de compléter ainsi le quadrilatère, dont il faut se rappeler s'il est convexe ou concave.

Cela fait en tout cinq mesures.

4) Les points sont déterminés comme un trajet du premier au quatrième

Il faut alors une information pour le premier segment, positionné dans la zone imposée, une pour l'angle dont il faut tourner pour tracer le second, la longueur du second, l'angle dont il faut tourner pour tracer le troisième, et la longueur du troisième. Cela fait cinq mesures à la saisie et au report.

5) Recherche de la forme remarquable du quadrilatère

Dans le cas d'un rectangle, le nombre d'informations à la saisie est le même que dans la stratégie précédente (il faut s'assurer que c'est un rectangle), mais au report, il n'est besoin que de trois informations.

6) Conclusion :

On voit donc que le problème posé trouve dans la recherche de la forme (ici rectangulaire) une solution optimale du point de vue du nombre des informations à communiquer (3), mais si l'on considère l'ensemble des informations nécessaires à déterminer la forme il en faut 5, comme pour trois autres stratégies.

Ce qui fait que la stratégie du rectangle constitue la meilleure décision du point de vue de l'économie de moyens, c'est la prééminence culturelle des formes sur les autres techniques.

7) Construction d'un rectangle

Pour déterminer les sommets d'un rectangle connaissant ses dimensions l_1 et l_2 (ou diagonale d), on construit un côté $[AB]$ (segment de longueur l_1)

a) variante 1

Sur cette base, on construit aux deux extrémités deux segments $[AD]$ et $[BC]$ de longueur l_2 et perpendiculaires à (AB) et tous deux dans le même demi plan.

b) variante 2 : type "trajet"

En B on construit $[BC]$ perpendiculaire à $[AB]$ et de longueur l_2 , puis en C, $[CD]$ perpendiculaire à $[BC]$, de longueur l_1 , tel que D et A soient d'un même côté de la droite (BC) .

Ces variantes font appel au même nombre de construction d'angles droits et de segments.

c) variante 3 :

Le premier segment construit, la demi-diagonale permet de construire le centre, et les deux autres sommets. On évite ainsi la construction d'un angle.

b) Solutions spatiales optimales

1) La largeur des pieds

Si les pieds sont de quelque épaisseur, la détermination des longueurs devra en tenir compte, du moins si l'exigence de précision est forte.

1) cela fait une longueur de plus à reporter

2) cela peut complexifier les stratégies :

- dans la stratégie du repérage des points, le plus simple est de déterminer la position du centre de la trace au sol, de la reporter et de reproduire un petit cercle de dimension connue dont il est le centre.

- dans la stratégie rectangle, cela complique singulièrement le problème de la saisie (plus que du report) des longueurs.

Pour la saisie, on peut en effet considérer plusieurs rectangles : (M) de milieu à milieu, dont aucun sommet n'est visible, (E) dont les côtés sont tangents extérieurement, et (I) dont les côtés sont tangents intérieurement, par exemple. (E) et (M) seront plus commodes que (I) à considérer pour le report, comme pour la saisie.

2) Seuil de performance déterminant la réussite

Il faut déterminer un seuil à partir duquel il n'y aura plus réussite. La détermination choisie : les deux pieds du banc une fois fixés sur les traces dans la zone imposée, les autres doivent se positionner au moins partiellement sur les traces prévues. Ce choix a l'avantage de neutraliser l'effet d'erreurs légères dues à des changements de rectangle (M, E, I) non maîtrisés entre la saisie et le report.

Cela correspond à un écart maximal toléré du diamètre du pied tracé. L'angle d'écart est d'environ 1°.

3) Effets des erreurs de report dans les stratégies du rectangle :

* on obtient un meilleur résultat en choisissant de reporter en premier un segment dont la longueur soit la longueur et non la largeur du rectangle; on minimise ainsi l'erreur de déplacement due à l'incertitude sur le tracé de l'angle droit.

Nous nous servons de cet effet pour maximiser l'erreur constatée, en imposant la superposition d'abord de deux pieds d'une même largeur.

* La première variante est plus sûre que la seconde car la seconde construction de l'angle droit se fait sur [AB] dont la position n'est entachée d'aucune incertitude.

* La variante 3 implique une maîtrise de l'alignement dans les reports de longueur.

4) La question des ajustements

a) Contrôles

Dans la stratégie des points isolés, le seul contrôle est de vérifier, en les refaisant, chacune des opérations réalisées.

Dans la stratégie du rectangle, au bout de trois opérations, on a construit les quatre points. Un premier contrôle se fait en mesurant la longueur du côté non construit. Ceci ne vérifie que la propriété parallélogramme.

Il est possible d'effectuer alors un contrôle de la forme rectangulaire en n'utilisant que l'égalité de longueurs des diagonales.

b) Ajustements

L'ajustement peut se faire

- en vérifiant dans l'ordre, les opérations de tracé et de report, et en corrigeant la construction au fur et à mesure.

- en changeant de stratégie de construction; il faut alors décider de ce dont on tient compte en cas de résultats différents.

L'utilisation de la comparaison de longueur des diagonales se révèle intéressante pour vérifier l'angle, une fois vérifiée la longueur des côtés, mais mal commode pour ajuster les corrections, car elle ne donne pas d'indications sur les nouvelles positions à adopter.

3. Effets attendus des variables fixées

a) La situation de construction

Cette situation minimise l'intérêt du recours aux diagonales du rectangle.

Les stratégies a) et b) ne font appel aux diagonales que pour la vérification, car l'ajustement ne peut se faire par ce moyen.

La stratégie c) y recourt pour la construction, mais elle nécessite d'introduire un point nouveau par rapport aux données matérielles, une première construction par triangulation, et un prolongement des côtés obtenus. Elle est d'une complexité beaucoup plus grande que les deux autres quant aux connaissances nécessaires. La triangulation est une stratégie plus simple à concevoir.

On devrait donc ne trouver, parmi les stratégies "rectangle", qu'un faible nombre d'élèves ayant recours à la propriété des diagonales.

b) Le nombre d'essais et la question

Notre propos était de tester dans un premier temps si la variation de la taille modifiait soit le modèle investi, soit sa résistance à l'épreuve de la réalité.

Une erreur de stratégie pourrait être interprétée comme relevant d'une non-compréhension du problème. C'est pourquoi nous avons introduit une validation pragmatique et une question sur l'anticipation d'un nouvel essai.

Pour exprimer, après vérification, l'interprétation efficace de leur erreur, les élèves doivent disposer du langage nécessaire, relevant des propriétés élémentaires du rectangle ou des angles.

La situation construite permet donc de tester ce que nous voulons.

c) L'orientation "en biais" par rapport à l'environnement :

Il est certain que le changement d'orientation par rapport à l'environnement va rendre plus complexe le recours au repérage par rapport à cet environnement, et par conséquent la stratégie de repérage des points individualisés. Pour utiliser ces stratégies, il faudrait reconstituer un environnement différent de celui qui est proposé.

Nous attendons de cette variable ce que nous en avons obtenu dans les problèmes "Rectangles", à savoir la différenciation entre les élèves qui conçoivent le rectangle muni d'angles droits comme propriété interne à la figure, et ceux qui ne repèrent le rectangle que par rapport à des directions privilégiées de l'environnement, c'est à dire en fait par parallélisme.

Nous prévoyons qu'un certain nombre d'élèves utiliseront une stratégie que nous nommerons "*parallélogramme*" :

On construit un côté [AB] (segment de longueur l_1) dans la zone imposée. Sur cette base, on construit à l'une des deux extrémités un segment [AD] de longueur l_2 , puis à l'autre, un segment [BC] parallèle à [AB], et tous deux dans le même demi-plan. Nous considérerons que la stratégie "rectangle-variante a" en est une particularisation.

Une autre stratégie pourrait se trouver favorisée, proche cette fois-ci du trajet, en ne respectant que le parallélisme entre le premier et le troisième segment.

L'orientation rend donc plus difficile la stratégie "points isolés", et par conséquent pourrait favoriser la stratégie "parallélogramme", qui est proche de la variante A.

d) Une configuration et non une forme matérialisée

1) Effets sur les relations entre les points

Les quatre points ne sont reliés entre eux que par une planche qui n'est pas dans le même plan.

Les traces des pieds apparaissent donc comme des objets isolés. Or il s'agit de reproduire l'ensemble des positions au sol, sans disposer pour cela de moyen de reproduction de l'objet selon ses dimensions "hors sol".

On pourrait attendre de ce choix une difficulté à concevoir les relations entre ces traces, et un nombre plus important de stratégies "points isolés".

Si les relations entre les pieds sont quand même prises en compte, les longueurs qui sont matérialisées (planches) ne sont pas pertinentes et inversement, les pertinentes ne sont pas matérialisées. Il pourrait y avoir confusion entre longueurs matérialisées et distances utiles.

2) Effets sur la conception de l'angle

Concevoir un angle droit à partir de points isolés va nécessiter de se représenter simultanément les droites joignant les points, et va par conséquent faire appel à un angle qui permet de régler l'une par rapport à l'autre les directions de deux droites. La conception angle de secteur pourrait être insuffisante pour régler cette question.

La conception de l'angle qui caractérise le changement de direction (des instruments de saisie ou de report de longueurs) entre des demi-droites est peu travaillée dans notre enseignement. Les raisons en sont étudiées aux chapitres B-6 et C-6.

On peut donc penser qu'un tracé permettra de simplifier la tâche de conception tant de la forme que des angles, plus encore dans le grand banc que dans le petit.

e) Complexité des tâches de réalisation et taille des groupes :

1) Le grand banc

La réalisation de la tâche du grand banc est complexe : la prise de mesures impose au réalisateur un contrôle simultané à plusieurs endroits, et un déplacement pour effectuer ce contrôle si l'on est seul.

Le report exige quant à lui, pour être correct, la maîtrise simultanée de questions de choix de direction, d'ajustement de graduations aux deux bouts éloignés de l'instrument, et l'alignement par rapport au précédent ou au suivant.

Toutes ces opérations revêtent un caractère de nouveauté.

On peut donc s'attendre, si l'élève est seul devant sa tâche à des demandes d'aide adressées à l'observateur, auxquelles il sera difficile de ne pas répondre, et qu'il sera difficile de limiter aux caractères non pertinents.

La présence d'un camarade peut avoir plusieurs avantages :

- sécuriser devant la tâche nouvelle,
- permettre une réalisation sans intervention de l'observateur
- permettre la communication et même des débats autour de décisions, assurant ainsi un minimum de réflexion. En particulier, on peut s'attendre à *plus de contrôle avant vérification*.

- permettre à l'observateur de saisir des informations supplémentaires.

Cette présence peut aussi avoir des inconvénients :

- les décisions prises ne peuvent être rapportées à un élève seulement; il sera difficile de faire le lien entre la connaissance individuelle sur laquelle on peut par ailleurs disposer d'informations, et les décisions.

- Le groupe de deux peut être dominé par l'un des deux, et on se prive des informations relatives aux décisions qu'aurait prises le second.

2) *Le petit banc*

La taille du matériel ne nécessite plus la collaboration de deux élèves pour la réalisation d'une tâche que chacun d'eux aurait pu mener. Un groupe de deux alors aurait eu plus d'inconvénients que d'avantages. Le contrôle avant vérification risque d'être réduit, la pression de la vérification empirique étant forte.

4. Effets liés à la variation de taille

a) *Les différences dues au matériel :*

1) *Dans le petit banc,*

- la planche dépasse dans les deux sens
- les pieds sont perpendiculaires à la planche; le rectangle déterminé par les pieds au niveau de la planche et le rectangle au sol sont isométriques.

Le petit banc favorise donc l'utilisation d'un repère de référence commode : la planche.

2) *Dans le grand banc,*

- la largeur de la planche est inférieure à la largeur du rectangle déterminé par les pieds, mais sa longueur est supérieure à la longueur du rectangle des pieds.
- la forme en arceau du haut des pieds ne permet pas, au niveau de la planche, de déterminer leur espacement.

b) *Les différences dues aux outils*

D'un côté, les outils sont ceux que le maître utilise en géométrie pour son tableau; de l'autre, ce sont les outils individuels usuels pour les activités de géométrie.

Le rapport entre les outils et la tâche est modifié entre les deux expériences : dans le cas du grand banc, les longueurs à saisir et à reporter sont supérieures à celle de l'instrument

de mesure. Il faudra donc contrôler la question de l'alignement des positions de l'instrument lors des saisies et surtout des reports partiels.

c) Les différences dues à la taille

Nous allons faire varier la taille en lui donnant la valeur de celle d'un banc scolaire (environ 1,8m sur 0,4m) d'une part, puis de celle d'une planche percée de 4 clous figurant les pieds, et déterminant un rectangle de 20cm sur 4cm.

La taille des distances intervenant dans les éléments sur lesquels porte l'action, passe donc effectivement de celle des petits objets à celle des déplacements du sujet. Pour le grand banc, le report de l'instrument renforce, à notre avis, cet aspect. Nous sommes dans les conditions que proposait Brousseau, où pourraient se manifester par des comportements observés, des stratégies différentes de résolution, peut-être une différence de conceptions spatiales.

1) Pour le petit banc :

- toutes les constructions papier-crayon auxquelles les élèves sont habitués font une part importante à la forme, et les élèves peuvent disposer, dans le micro-espace, d'une certaine habileté, et même d'habitudes de repérage par les formes "rectangle" et par l'angle droit.

- l'appel au tracé des côtés devrait donc être encore renforcé par la ressemblance matérielle entre la situation proposée et les situations courantes de géométrie : tracé sur papier à l'aide des mêmes outils.

- la vue d'un seul coup d'oeil des quatre points dessinés sur la feuille devait déclencher, soit au cours du travail, soit à la fin de ce travail, un réglage fin des directions, et par conséquent un meilleur résultat avant vérification.

2) Pour le grand banc :

- dans le méso-espace, la reconnaissance de formes n'est pas un moyen de repérage habituel pour déterminer un cheminement reliant des lieux bien identifiés comme le sont les positions occupées par les pieds du banc. La stratégie "trajet" devrait donc être renforcée.

- Le contrôle de l'orientation par la vue d'ensemble étant plus difficile, on pourrait attendre moins d'ajustements avant la vérification, mais plus de recours à l'interprétation de l'erreur explicitement en termes de directions, voire d'angle droit (lié à tourner à angle droit par exemple).

Dans les deux valeurs de la taille, la stratégie des points isolés est rendue difficile par le changement d'orientation imposé. Mais le recours aux planches constituant les bancs constitue un environnement extérieur rectangulaire facilement transportable et par rapport auquel on peut chercher à repérer les points. Ceci peut paraître plus facile pour le petit banc que pour le grand banc.

3) Conclusion :

Nous attendons donc de meilleurs résultats au petit banc, avant la vérification.

La vérification devrait provoquer plus d'interprétations de l'erreur en termes d'angle droit ou de rectangle.

Le nombre de contrôles par le tracé des côtés devrait être plus grand pour le petit banc.

Le nombre de solutions "trajet" devrait être plus important pour le grand banc.

Le nombre d'interprétations de l'erreur en termes de direction, après la vérification, devrait être plus grand pour le grand banc.

Le nombre de solutions "points isolés" devrait être supérieur au problème petit banc.

B. Le problème "grand banc"

1. Conditions générales :

a) Population

Il s'agit des élèves de cinq classes de cours moyen deuxième année.

Pour chaque classe, les élèves sont passés en deux ou trois après-midi maximum, avec consigne de ne rien dire aux autres élèves de la classe avant que tous y soient passés.

Nous n'avons aucune raison de douter que cette consigne ait été suivie (évolution de la réussite, comportements semblables du début à la fin).

b) Déroulement et Consignes :

L'observateur accueille le groupe de deux, et se rend avec eux dans l'endroit où se trouve le banc.

A la craie sur le sol il entoure chacun des quatre pieds ou montre les traces déjà réalisées.

En bougeant légèrement le banc, les élèves peuvent voir les quatre traces.

L'observateur se rend ensuite dans un autre endroit où les élèves devront tracer, et d'où on ne voit pas le banc.

Des instruments géométriques utilisés pour le tableau de la classe sont déposés sur une table.

Il leur précise alors la tâche à réaliser :

Nous allons apporter le banc ici; mais, avant, vous allez prévoir et dessiner où seront les pieds du banc. Il faut que deux pieds soient dans cette région (elliptique et étroite, de grand axe 50cm environ).

Vous avez le droit de faire ce que vous voulez, sauf de déplacer le banc.

Si vous en avez besoin il y a ici des crayons, et du papier (un quart de feuille ordinaire).

Si vous avez besoin de quelque chose, vous me le demandez.

Lorsque les élèves ont fini, l'observateur leur demande s'ils sont sûrs d'eux, si les quatre pieds du banc vont bien se placer où ils ont fait les marques.

Enfin, lors de la vérification, l'observateur veille à placer en premier les pieds situés dans la zone de contrainte.

Si l'ensemble des pieds touchent les cercles marqués par les élèves comme anticipations des positions, il y a réussite. Sinon, l'observateur déclare qu'il y a échec (Il n'y a pas eu de contestation de ces résultats).

Quand il y a échec, l'observateur pose les questions :

Pourquoi est-ce que ça ne va pas?

Que faudrait-il faire pour réussir du premier coup?

2. Résultats

100 élèves répartis en 50 groupes de deux ont subi l'épreuve.

Les lignes représentent les groupes numérotés de 1 à 50.

Les colonnes représentent les critères ordonnés comme suit :

14 critères ont pu être observés sur la quasi-totalité des groupes :

1 : Utilisation d'équerre à la saisie (0 ou 1)

- 2 : Utilisation d'équerre au report (0 ou 1)
 3 : Réussite du tracé selon les directions (0 ou 1)
 4 : Capacité à réussir avec l'équerre (0 ou 1)
 5 : interprétation du résultat, en cas d'erreur, en termes
 - d'angle : appel à l'équerre ou angle droit (A), [utilisation de l'équerre à la construction (x)]
pour ceux qui n'ont pas fait appel à l'équerre ou à l'angle droit,
 - de direction : penché, pas droit,(DI)
 - de parallélisme : appel au contrôle de la largeur bande (P)
 - de mesures de longueur (L).
 - erreur et pas de déclaration (V)
 6 : Report parallèlement au mur (0 ou 1)
 7 : Contrôle et ajustements sur le parallélisme (0 ou 1)
 8 : Tracé de traits (0 ou 1)
 9 : Nombre de longueurs saisies. (* indique qu'elles ont été saisies par un procédé de marques) (0 ou 1 ou 2)
 10 : Mesure de la planche (saisies et reportées) (0 ou 1)
 11 : Contrôle de l'alignement des reports (0 ou 1)

L'ensemble des observations fait ressortir quelques comportements complémentaires ayant à voir avec la détermination des directions :

- 12 : Amplitude de l'écart angulaire⁵ supérieure à 9° (0 ou 1)
 13 : Contrôle corporel de l'angle droit : observation d'ajustements faits concernant les directions de côtés consécutifs, et aux réussites sans instrument. (0 ou 1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	es	er	R	ev	Int	mu	//	Tr	nL	Pl	Ali	>9	C
1	0	0	0	0	L	0	0	0	2	1	0	0	0
2	0	1	0	1	A	0	0	1	2*	0	1	0	0
3	0	1	1	1	x	0	0	1	2*	0	1	0	0
4	0	1	0	1	A	0	0	1	2	0	1	?	0
5	1	1	1	1	x	0	1	1	2	0	1	0	0
6	0	1	1	1	x	0	1	1	2	0	1	0	1
7	0	0	0	0	V	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	L	0	0	0	2	1	0	0	0
9	0	1	0	1	A	0	1	1	2	0	0	0	0
10	0	0	0	0	DI	0	1	0	3	0	0	0	0
11	0	0	0	0	DI	0	0	0	2	0	0	0	0
12	0	0	0	0	DI	1	0	0	2	0	0	1	0
13	0	0	0	0	DI	1	1	0	2	0	0	1	0
14	0	0	0	0	DI	0	0	0	2	0	1	0	0

⁵ Cet écart est calculé à posteriori à l'aide des erreurs mesurées en cm. Le choix de 9 degrés est évidemment arbitraire. Pour le grand banc, il y a une nette rupture (effectif nul entre 6° et 9°) entre des réalisations approximatives, mais visant une reproduction d'angle droit (explicitée ou non), dont l'erreur peut aller jusqu'à 6° et des réalisations qui ne tiennent pas compte de la reproduction de l'angle entre les directions des côtés. La réussite correspond à une erreur inférieure à 2°

15	0	0	0	0	V	0	0	1	2	0	0	1	0
16	0	1	1	1	x	0	0	1	2	0	0	0	0
17	0	1	0	1	A	0	1	1	2	0	0	0	0
18	0	0	0	0	V	1	0	0	1	0	0	1	0
19	0	0	0	0	DI	0	0	1	2	1	1	1	0
20	0	0	0	0	V	1	0	1	2	0	0	1	0
21	0	0	1	0	x	0	0	0	2	0	1	0	1
22	0	1	1	1	x	0	0	1	2	0	0	0	1
23	0	0	1	1	x	0	0	0	2	0	1	0	1
24	0	1	1	1	x	0	1	1	2	0	0	0	0
25	0	0	1	1	x	0	0	1	2	0	0	0	1
26	0	0	0	1	A	0	0	1	2	1	0	?	1
27	0	0	0	1	A	0	0	1	2	0	0	?	0
28	1	1	1	1	x	0	0	1	2	0	1	0	0
29	0	1	1	1	x	0	1	1	2	0	1	0	0
30	0	1	1	1	x	0	0	1	2	1	0	0	0
31	1	1	1	1	x	0	1	1	2	0	1	0	0
32	0	0	0	1	A	0	0	0	2	0	0	1	0
33	1	1	0	1	A	0	0	1	2	0	1	0	0
34	0	0	0	0	L	0	0	0	2	0	0	1	1
35	0	0	0	0	DI	1	1	0	2	0	0	1	0
36	0	0	0	0	P	0	1	0	2	1	0	1	0
37	0	0	0	0	V	1	0	0	1	0	0	1	0
38	0	0	1	0	x	0	1	0	2	0	0	0	1
39	0	0	1	0	x	0	1	0	2	1	1	0	1
40	0	0	0	0	DI	0	0	0	2*	0	0	1	0
41	0	0	0	0	V	0	0	0	2	0	1	1	0
42	0	0	0	0	DI	0	0	0	2*	0	1	0	0
43	0	0	0	0	DI	0	0	0	2	0	1	1	0
44	0	0	0	0	P	0	1	1	2	1	1	1	0
45	0	0	1	0	DI	0	0	1	2	0	1	0	0
46	0	1	1	1	x	0	0	1	2	0	1	0	0
47	0	0	0	0	P	0	1	0	2	0	0	?	0
48	0	0	0	0	L	0	0	0	2	0	0	?	0
49	0	0	0	0	P	0	0	1	2	0	1	0	0
50	0	0	0	0	DI	1	0	0	2	0	0	?	1
	4	16	17	21		7	15	25	46	8	21	16	11

3. Regroupements d'observations :

a) Concernant les longueurs :

* au moins 46 groupes ont saisi directement seulement deux dimensions, longueur et largeur, certains vérifiant l'égalité des côtés opposés sur une troisième.

* 4 ont mesuré et reporté la longueur des planches et non pas l'écartement des pieds (1, 8, 19, 44).

* 2 ont commencé de même, puis se sont rendus compte de cette erreur (26, 36).

* 3 groupes n'ont pas saisi suffisamment de mesures et ont reporté des dimensions plus ou moins proches selon le souvenir visuel.

* Aucun n'a déplacé le banc pour saisir les mesures sur les traces au sol du banc dans sa position initiale.

* Aucun n'a considéré de diagonale.

* La saisie des mesures a posé aux élèves le problème de l'épaisseur des pieds (environ 4cm); plusieurs solutions se sont dégagées : prendre les mesures de milieu à milieu, à gauche ou à droite, à l'intérieur ou à l'extérieur. Les observations sur la cohérence entre la démarche de saisie et celle de report faisant défaut, ce caractère ne figure pas, bien qu'il ait parfois préoccupé les élèves.

b) Concernant les directions :

16 groupes au moins ont dévié de plus de 9 degrés.

Sur les 16 groupes qui ont construit en utilisant l'équerre,

* seuls 4 ont vérifié le caractère droit d'au moins un angle avant la construction.

* Parmi les 12 autres, 8 ont dès le début de la construction utilisé l'équerre pour diriger le report des mesures dans des directions perpendiculaires; les quatre autres ne s'y sont résolus qu'après s'être convaincus du caractère insuffisant ou douteux du résultat obtenu "à l'oeil".

Sur les 26 groupes d'élèves qui, après échec du à un défaut d'angle droit des deux directions reportées, n'ont pas reconnu la cause de leur erreur,

* 15 ont corrigé leurs directions au cours de la phase de report en fonction du parallélisme, estimé à l'oeil ou assuré par l'invariance de l'écartement.

* 6 ont presque suivi la direction des murs (12, 13, 18, 20, 35, 37).

* 3 ont attribué leur erreur de direction à des mesures de longueur insuffisamment précises (48, 8, 1).

* 13 interprètent leur erreur en utilisant des termes relatifs au réglage de la direction.

6 utilisent le mot "droit : ex : "c'est pas droit, c'est en diagonale", "c'est pas droit, face à face", "il faut faire penché et tout droit", je bougerai pour voir si c'est bien droit" (50, 45, 42, 35, 34, 14,)

Les expressions suivantes ont été utilisées : "mal placés, il faut dessiner les traits/On ne pouvait pas diriger la règle/On a fait comme ça, il fallait faire comme ça/Le banc était tourné/On n'a pas pris la longueur dans la même position, on ne sait pas comment le faire mieux de travers/redresser un peu/pas droit face à face/en diagonale, pas droit".

c) Regroupement des résultats aux colonnes 1-4

5 0

Col. (1)

46

4

Col. (2)		34			12	4
Col. (3)	28	4	1	6	8	3
Col. (4)	25	4	3	2	12	4

C. Le problème "petit banc"

1. Déroulement :

a) Population concernée,

Il s'agit des élèves des deux classes de CM2 de l'Ecole J. Michelet en 1986-87

b) Matériel :

- Une grande table de 1m50 sur 2m50, une planche de 26cm sur 6cm, percée perpendiculairement de 4 clous dont les extrémités forment un rectangle de 4cm sur 20cm. Une feuille ronde de 35cm de diamètre est percée par les 4 clous de la planche en 4 trous bien visibles correspondant à une position de la planche sur la feuille.

- A la disposition des élèves : triple décimètre, équerre d'écolier.

c) Déroulement et consignes

La planche et la feuille sont déposées à un coin de la table, le travail de tracé est exécuté au coin opposé de la table.

L'observateur amène l'enfant au coin de table où se trouve la planche et, lui désignant le coin opposé, il lui donne la consigne :

Là-bas, tu vas dessiner sur une feuille les endroits où les clous de la planche vont se trouver quand on l'apportera; comme les trous de la feuille sur laquelle est posé le banc.

L'élève est invité à constater que les 4 clous se posent bien dans les 4 trous.

Quand le travail sera terminé, et pas avant, on ira chercher la planche et on la déposera en mettant les clous sur le dessin des trous.

Tu as le droit de prendre le matériel que tu veux, mais il doit rester au coin de la table avec la feuille pour dessiner.

De même, planche et feuille ronde trouée doivent rester dans leur coin.

Tu peux te déplacer d'un coin à l'autre avec un papier (7x10) et un crayon à chaque fois que tu as besoin d'un renseignement.

Pendant la réalisation, l'observateur ne fait que relancer telle ou telle partie de la consigne.

2. Résultats

40 élèves ont subi l'épreuve.

Les lignes représentent les élèves, numérotés de 1 à 40.

Les colonnes représentent les comportements observés, numérotés de 1 à 14.

La présence et l'absence du comportement sont respectivement notées 0 ou 1 sauf pour le n°5.

1. Vérification des angles avec l'équerre avant le report
2. Utilisation de l'équerre pour la construction
3. réussite pour les directions
4. identification de la nécessité de contrôler l'angle droit
5. interprétation de l'erreur de direction : [(x) : pas d'erreur]
(A) : en termes d'angles. (DI) : en termes de directions
(L) en termes de longueurs. (V) : sans interprétation
6. Stratégie : (TR) : Trajet rectangle. (R) : Rectangle. (T) : Trajet non rectangle. (P) : parallélogramme. (S) : segments isolés
7. mesures à partir des bords de la planche
8. contrôle du parallélisme pendant la construction
9. tracé de traits pour construire
10. saisie de deux dimensions (longueur, largeur) au premier essai (sont ici comptés ceux qui ont saisi les dimensions de la planche) : 1

11. même chose au deuxième essai
 12. erreur inférieure à 2°
 13. erreur inférieure à 3°
 14. erreur inférieure à 5°

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	es	er	R	ev	Int	Str	P	//	Tr	nl1	nl2	<2	<3	<5
1	0	0	0	0	L	T	0	0	1	1	x	1	1	1
2	0	1	0	1	A	P	0	0	0	1	x	0	0	1
3	0	0	0	0	V	Tr	1	1	0	1	x	0	0	0
4	0	0	0	0	V	P	0	0	0	1	x	0	0	0
5	0	0	0	0	V	P	0	1	0	1	x	1	1	1
6	0	0	0	0	V	P	0	0	0	1	x	0	0	0
7	0	1	1	1	x	Tr	0	0	1	1	x	1	1	1
8	0	1	1	1	x	R	0	0	1	1	x	1	1	1
9	0	0	0	0	DI	T	1	0	1	1	x	0	0	0
10	0	0	0	0	L	P	0	0	1	1	x	0	0	0
11	0	1	0	1	A	R	0	0	0	1	x	1	1	1
12	0	0	0	1	A	P	0	0	1	1	x	1	1	1
13	0	1	1	1	x	R	0	0	0	1	x	1	1	1
14	0	0	0	1	A	P	0	0	0	1	x	0	0	1
15	0	1	0	1	A	Tr	0	0	1	1	x	0	0	1
16	0	1	1	1	x	Tr	0	0	1	1	x	1	1	1
17	0	1	1	1	x	Tr	0	0	1	1	x	1	1	1
18	0	1	1	1	x	R	0	0	1	1	x	1	1	1
19	0	0	1	0	x	R	0	1	1	1	x	1	1	1
20	0	0	1	0	x	P	0	0	0	0	0	1	1	1
21	0	0	0	0	DI	P	0	1	1	1	x	0	0	1
22	0	0	0	0	L	P	0	0	0	0	1	0	0	1
23	0	1	1	1	x	R	1	1	1	1	x	1	1	1
24	0	0	0	1	A	P	0	0	1	1	x	0	1	1
25	0	1	0	1	A	R	0	0	1	1	x	0	0	1
26	0	0	0	0	L	P	0	0	0	1	x	0	0	0
27	0	1	0	1	A	R	0	1	1	1	x	1	1	1
28	1	1	0	1	A	R	0	0	0	1	x	0	1	1
29	0	1	0	1	A	I	1	1	1	1	x	1	1	1
30	0	0	0	0	DI	T	0	0	0	1	x	0	0	0
31	0	0	0	0	DI	P	0	0	0	1	x	0	1	1
32	0	0	0	0	V	S	0	0	0	1	x	1	1	1
33	0	0	0	0	DI	P	0	0	0	1	x	0	0	1
34	0	1	1	1	x	I	1	0	0	1	x	1	1	1
35	0	1	1	1	x	R	0	0	0	0	1	1	1	1
36	0	0	0	0	DI	P	0	0	1	1	x	0	0	0
37	0	0	0	0	L	?	0	0	0	0	1	1	1	1

38	0	1	1	1	x	R	0	0	1	1	x	1	1	1
39	0	1	0	1	A	Tr	0	1	1	1	x	1	1	1
40	0	0	0	0	DI	P	1	0	0	1	x	0	1	1
	1	18	12	21			6	8	20	36	3	21	25	32

3. Regroupements d'observations

a) Regroupement des résultats aux colonnes 1-4

4 0

Col. (1)				39										1
Col. (2)				22						17				1
Col. (3)		20		7		1			2	10				0
Col. (4)		17		2				3		17				1

b) Observations complémentaires

1) Report des longueurs et stratégies

35 élèves saisissent deux dimensions, la plupart les désignent par "longueur" et "largeur". Parmi les 5 autres, qui n'ont pas saisi les deux dimensions, 3 le font au deuxième essai.

4 élèves commencent à placer les points sans prendre aucune mesure (20, 22, 35 37). Deux (20 et 22) iront ainsi jusqu'à la vérification avant de changer de stratégie.

10 élèves font un report du type "trajet", pour la planche ou les clous.

6 élèves prennent les mesures de la planche et des mesures pour positionner les clous par rapport à la planche. Ils construisent d'abord les sommets de la planche.

- 3 d'entre eux (23, 34, 40) abandonnent en cours de travail au profit de la distance entre les clous, sous pression de l'observateur.

- 1 saisit directement la distance entre les clous, mais pour la largeur, il a recours à la planche et à la distance aux bords.(9)

- 1 place les deux premiers clous sur la largeur de la planche, mais à bonne distance, puis les autres sur l'autre largeur, entre eux à bonne distance (3).

- 1 positionne correctement les clous (29).

Un élève seulement (4) [en plus de (3) ci-dessus] attribue la longueur de la planche au quadrilatère des clous (sans placer les coins de la planche).

Aucun élève ne songe à prendre une mesure des diagonales du rectangle.

2) Directions

- 1 seul élève (21) tient jusqu'à la vérification à placer la longueur (il reporte celle de la planche) parallèlement au bord de la feuille, bien qu'ayant placé les deux premiers sommets dans la zone imposée; il tente de faire un rectangle sur deux autres extrémités constate le problème (il a dessiné un trapèze) et est bloqué, puis, il change de stratégie.

- 1 seul a utilisé l'équerre à la saisie, mais 13 autres l'ont utilisée dès le début de la construction (7, 8, 11, 13, 16, 17, 18, 23, 25, 27, 29, 34, 35) et 2 n'y viendront que pour vérifier et résoudre une difficulté...

- 6 réussissent à diriger leurs reports sans équerre en déviant de moins de 2 degrés, 32 auront dévié de moins de 5 degrés (dont 16 sans équerre), et 38 de moins de 9 degrés.

- sur les 19 qui ne peuvent corriger leur erreur de direction, un déclare qu'il faut faire droit, , un qu'il faut tourner, mais ils ne voient pas comment faire et les 17 autres attribuent aux mesures ou "ne savent pas".

Lorsque l'observateur propose de résoudre le même problème avec à la place des clous de la planche, les 4 coins d'un rectangle découpé qui leur est remis entre les mains, presque tous les élèves reconnaissent immédiatement le même problème et déclarent qu'ils ne savent pas plus, que c'est pareil.

- Certains élèves qui ne savent pas se servir d'une équerre utilisent la graduation du zéro de la règle pour la mettre approximativement en coïncidence avec la ligne des deux premiers sommets du tracé, la plupart du temps elle même non tracée, et tirer ainsi sur le bord de la règle, un trait à peu près perpendiculaire à la base..

3) Formulations d'interprétation :

Les expressions utilisées sont du même type que pour le grand banc :

"Il faut faire droit, j'aurais dû faire comme ça (geste), ça pourrait être juste, mais ça a été déplacé, la règle était un peu plus relevée (à relever), j'ai bien mesuré mais pas dans le bon sens, pas bien penché, c'est un peu en diagonale".

D. Comparaisons entre les résultats des grand et petit bancs

1. Solutions observées :

a) "rectangle" ou "parallélogramme"

1) Le G. banc

17 groupes sur 50 ont saisi et reporté les mesures selon la stratégie parallélogramme, .

15 ont utilisé la stratégie "rectangle-variante a" qui ne s'en différencie que par l'usage de l'équerre.

2) Le P. banc

Il était difficile de distinguer celui qui n'aurait construit qu'en réglant les longueurs de celui qui règle en même temps le parallélisme; aussi nous n'avons fait qu'une seule catégorie.

16 ont utilisé la stratégie "parallélogramme".

11 ont utilisé la stratégie "rectangle-variante a" après avoir saisi 2 dimensions (et souvent en explicitant longueur, largeur).

b) trajet (avec ou sans angle droit)

1) Le G. banc

18 font le report en "trajet" : les n° 3, 9, 10, 12, 17, 21, 22, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 50.

2) *Le P. banc*

10 font le report en "trajet" : les n° 1, 3, 7, 9, 15, 16, 17, 25, 30, 39.

c) quatre points indépendants

1) *Le G. banc* :

Le n°7 n'a saisi aucune longueur, et a placé les points au jugé.

2) *Le P. banc*

Deux élèves ont saisi et reporté les dimensions de la planche, en repérant les positions des points par rapport à la planche. (29) et (34)

d) deux segments opposés :

1) *Le G. banc*

Les n° 18 et 37 n'ont saisi qu'une longueur. Tous deux ont commencé par construire deux segments de même longueur, à peu près parallèles mais sans contrôle observable spécifique, dont les origines se trouvaient dans la zone imposée, sans tenir compte de la deuxième dimension. Ce n'est qu'ensuite qu'ils ont eu recours à la seconde dimension pour assurer la même largeur.

Le n°37 est alors allé saisir sur le banc la largeur "réelle", et a ajusté l'une des largeurs seulement à cette dimension.

2) *Le P. banc* :

Un seul élève positionne deux clous, puis deux autres, sans se préoccuper de la mesure des distances entre les couples (30)

e) autres stratégies du petit banc :

* Les élèves n° 20 et 22 sont bloqués par la situation. L'observateur les aide à prendre des mesures, mais ils ne savent pas quoi faire des mesures obtenues.

* les élèves 32 et 37 semblent bloqués par la contrainte de disposer deux pieds (d'une largeur) à l'intérieur de la zone dessinée. Il semble d'après leurs dessins qu'ils ont essayé de disposer la longueur dans l'espace imposé pour la largeur.

f) Remarques

Parmi les 12 qui ont réussi au petit banc, 8 ont fait un tracé. Parmi les 17 qui ont réussi au grand banc, 13 ont fait des tracés.

Nous nous sommes rendus compte à posteriori que la stratégie "trajet" a très bien pu être contrariée par la contrainte du positionnement préalable de deux pieds de la largeur. En effet, une fois ces deux pieds placés, il devient plus efficace de partir de chacun d'eux, indépendamment.

La stratégie de report des deux grandes dimensions (qualifiée de quadrilatère) a été favorisée dans le grand banc par le fait que les deux élèves pouvaient travailler simultanément. Dans la stratégie "trajet", le second était obligé d'attendre la fin du premier.

La stratégie de repérage indépendant des points, "points isolés", n'a été observée que pour un groupe au grand banc, et 2 élèves au petit banc.

Nous n'avons pas fait apparaître la comptabilisation de la répartition des élèves entre les différentes interprétations de leurs erreurs; en effet l'interprétation cognitive en est rendue difficile par les différents effets possibles liés au contrat didactique activé à la fois par l'échec, et par les questions de l'observateur :

- ceux qui n'utilisent que des termes liés à la direction reconnaissent bien par là qu'ils n'ont pas de prise sur ce paramètre par les longueurs, mais qu'ils peuvent le décrire à l'aide du langage spatial des déplacements usuels.

- ceux qui ne se réfèrent qu'aux longueurs pourraient le faire :

- * soit parce que le contrat usuel entre maître et élèves porte depuis très longtemps sur le soin à apporter aux problèmes de longueur, et ils n'ont pas reconnu de problème de direction tels qu'on a appris à les résoudre avec les angles.

Les questions de direction sont habituellement implicites et à la charge de l'élève, comme beaucoup de détails spatiaux de construction.

- * soit parce qu'ils sont encore convaincus que la longueur des côtés règle le problème des directions relatives des côtés.

- ceux qui ne disent rien, peuvent:

- * soit avoir reconnu que la reproduction échappe aux longueurs des côtés, mais ne pas avoir reconnu de problème de direction

- * soit avoir reconnu un problème spatial de direction et ne pas se sentir autorisé à y faire référence, concevant cela comme relevant de la responsabilité individuelle et non pas de la connaissance.

Il n'y a que peu d'élèves qui utilisent la stratégie "trajet" sans vérifier la dernière dimension (4 pour le GB, 5 pour le PB).

L'exploration complémentaire menée avec quelques groupes en échec a montré que le caractère rectangle était reconnu, mais qu'ils ne savaient pas comment assurer ce caractère au quadrilatère construit dans ces conditions.

Ces observations corroborent de nombreuses observations faites notamment à l'école Michelet sur d'autres quadrilatères : Une majorité d'élèves de cet âge pensent réaliser une isométrie en ne conservant que les longueurs du pourtour d'un polygone ⁽⁶⁾.

2. Tableau des principaux traits comparés

	GRAND BANC 50	PETIT BANC 40
Effectif		
Tracés parallèles au "mur"	7	1
Erreur supérieure à 9°	16	2
Report en "trajet"	18	10
Mesure de la planche substituée à une dimension	7	7
Stratégie "parallélogrammes"	17	16
Recours à des tracés	21	20
Réussite sans équerre (à l'oeil)	4	2

⁶ Nous avons pu remarquer par hasard qu'en classe de terminale A1, on trouve encore un certain nombre d'élèves qui pensent assurer à un quadrilatère d'être carré en n'assurant que l'égalité des longueurs des côtés.

Utilisation de l'équerre à la construction	16	18
Capacité à contrôler l'angle droit (équerre + oeil)	25	23
prise en compte de l'angle droit après constat d'erreur	3	3

Le premier fait majeur est, pour les deux bancs, le peu d'élèves qui mettent en oeuvre une construction correcte du rectangle, impliquant au moins un angle droit.

Le second est le peu de changement de stratégies déterminé par la vérification. Il traduit une incapacité pour de nombreux élèves à identifier l'effet de l'angle entre les deux directions de reports.

E. Interprétations :

1. Les ressemblances attendues et observées

Comme prévu, l'utilisation de la diagonale n'a été le fait d'aucun sujet observé.

2. Les ressemblances inattendues et observées

La variable "configuration" a beaucoup moins influencé les élèves qu'on aurait pu l'attendre : la stratégie des quadrilatères a été très majoritairement choisie et ce, immédiatement, tant dans le grand que dans le petit banc.

La variable "position par rapport à l'environnement" a produit des effets très semblables : 17 et 16 stratégies "parallélogramme" respectivement. Nous pensions que la taille du petit banc permettrait une reconnaissance du rectangle, au moins après vérification. Cela n'a pas été le cas⁷.

Nous avons constaté par ailleurs une telle absence de contrôle de la forme rectangulaire dans l'expérience du "rectangle" avec une table renversée, ce dont nous avons rendu compte plus haut (Problème rectangle, situation A2).

Nous avons cependant observé une meilleure mémorisation d'une forme approximative pour le petit banc (2 erreurs supérieures à 9° seulement contre 16 pour le grand banc).

Nous avons aussi noté la ressemblance des termes utilisés pour qualifier l'erreur et les moyens d'y remédier.

3. Effet de la variable taille :

a) Les différences

1) Taux de tracés parallèles au mur

On ne peut imputer aux différences matérielles entre les bancs la différence entre le nombre de réalisations parallèles au mur pour le grand banc (7) et au petit banc (1).

Cette différence aurait du être (et a peut-être été) réduite par le fait qu'un plus grand contrôle peut être exercé sur une production par un groupe de deux que par une personne.

Dans le cas du tracé sur papier, les solutions trop déviantes sont vite rejetées. Dans le cas du grand banc, un nombre bien plus important ne l'est pas.

Ceci est d'autant plus étonnant que les effectifs des grandes classes de stratégies diffèrent très peu entre les deux tailles, et en tous cas, de manière non significative au test du χ^2 .

2) Différences de précision

⁷ $\chi^2 < 1$; non significatif à 10% .

Les erreurs tolérées sont moins importantes dans le petit banc que dans le grand : il n'y a que 2 positionnements déviants de plus de 9° pour le petit banc, alors que dans le cas du grand banc, malgré la présence de deux élèves, il y en a 16.

La réussite à moins de 2° près a été le fait de suffisamment de sujets avec ou sans instrument d'ailleurs, dans les deux modalités de la taille, pour qu'on n'impute pas aux instruments les différences de contrôle du résultat ci-dessus évoqués.

3) Conclusion

Nous attribuons ces différences à la taille. Elles portent sur de petits effectifs

La perte de la forme approximative au profit du parallélisme avec les limites de l'environnement est plus forte dans le cas du grand banc que dans le cas de la feuille de papier.

Le contrôle approximatif de la forme s'exerce mieux dans les dimensions de la feuille de papier que dans celles du grand banc. En effet, ce contrôle est maîtrisé depuis l'âge de l'école maternelle, et il s'exerce, sur la feuille de papier, dans les conditions de vue comparables à celles des petits objets.

b) Les ressemblances

Le changement de taille a eu une influence non significative sur la mise en oeuvre de la connaissance de l'angle droit, sur le choix des stratégies principales.

4. Conclusions

Nous visions à mettre en évidence des effets de la variable taille dans le comportement des enfants face aux deux situations.

Nous pensions être confrontés à la manifestation dominante de conceptions spatiales bien distinctes, et nous sommes bien obligés de constater que sur l'essentiel, dans les deux situations, nous n'avons pas repéré de réelle hétérogénéité dans les comportements créés par la variation de taille introduite.

Certes, nous en avons constaté quelques différences liées à la taille, mais portant sur des comportements bien minoritaires.

Nous n'avons pas pu attribuer la similitude des résultats obtenus à des biais internes aux situations, aussi avons nous dû remettre en cause les éléments de notre analyse qui nous avaient fait prévoir des différences.

Nous en concluons donc que l'hypothèse d'existence de plusieurs conceptions serait à rejeter si l'on associait à ces conceptions une obligation de produire des différences dès que l'on fait bouger la variable taille. Une telle hypothèse, serait d'ailleurs une interprétation restrictive de l'hypothèse de Brousseau.

L'hypothèse selon laquelle les conditions n'étaient pas réunies pour provoquer l'apparition, dans les comportements, de différences importantes dues aux différentes conceptions est vraisemblable. Les quelques effets imputables à la taille sont insuffisantes pour rejeter cette hypothèse.

Notre attention a donc été attirée vers la similitude des rapports établis, dans les deux situations, entre les sujets et le milieu.

Les comportements observés dans cette expérience relèvent d'une même conception⁸, qu'il nous reste à identifier : conception micro-spatiale, comme nous avons d'abord pensé, ou conception méso, voir macro-spatiale.

Nous avons donc été renvoyés à l'approfondissement théorique de la notion de conception, ce que nous avons développé aux chapitres B-6 et C-4.

IV. APPENDICE : LE PETIT BANC AU CM1

Après avoir réalisé un enseignement des angles au CM1, selon le deuxième processus, nous avons voulu vérifier que la conception enseignée, angle de secteur, ne permettait pas de résoudre de façon satisfaisante un problème dont la solution optimale relève d'un contrôle de la position des points par des directions, puis par les angles de deux directions consécutives, c'est à dire d'une autre conception des angles.

A. Résultats

53 élèves ont subi l'épreuve.

1. Equerre avant le report
2. Equerre pour la construction
3. Réussite pour les directions
4. Capacité à résoudre le problème avec l'équerre après la vérification
5. Interprétation de l'erreur par l'angle droit (A) avant ou après vérification, ou seulement en termes de directions sans angle ("plus vers la D", "comme cela") (DI), ou en termes de longueurs (L). Pas d'interprétation (V).
6. Mesures à partir des bords de la planche
7. Contrôle du parallélisme pendant la construction
8. Tracé de traits pour construire
9. Saisie de x longueurs au premier essai
10. Erreur inférieure à 2°
11. Erreur inférieure à 3°
12. Erreur inférieure à 5°

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	es	er	R	ev	DI	Pl	//	Tr	nL	<2	<3	<5
1	1	1	1	1	A	0	0	0	2	1	1	1
2	0	0	0	0	DI	0	0	0	2	0	1	1
3	0	0	0	0	L	0	0	0	2	0	0	1
4	0	1	0	1	A	0	0	1	5	1	1	1
5	0	0	0	0	DI	0	0	0	3	1	1	1

⁸ Le travail théorique effectué depuis nous a permis d'éclaircir la question : Ce qui a produit la similitude, c'est essentiellement le fort taux d'échecs à la détermination de moyens de placer convenablement les directions des droites déterminées par les points du quadrilatère convexe associé aux quatre pieds.

Les élèves disposeraient selon nous d'une conception micro-spatiale de l'angle et des objets. Or la maîtrise des deux situations relève en fait d'autres conceptions, méso- ou macro-spatiales : Il faut considérer d'une part des droites (ou demi-droites), non matérialisées, mais déterminées par deux points, et d'autre part des angles déterminés par ces droites (ou demi-droites) comme moyens de maîtriser les directions de ces droites.

Notons par ailleurs que la moitié des élèves parvient à dépasser l'obstacle après une rétro-action de la situation. Celle-ci pourrait peut-être constituer un outil didactique utile pour le dépassement d'un tel obstacle si l'existence de cet obstacle était confirmée.

6	0	1	1	1	A	0	0	1	4	1	1	1
7	0	0	0	0	DI	1	0	0	3	0	0	0
8	0	0	0	0	L	0	0	0	2	0	0	0
9	0	1	1	1	A	1	0	0	2	1	1	1
10	0	0	0	0	DI	0	1	1	3	0	0	1
11	0	0	0	0	L	0	0	0	4	0	1	1
12	0	0	0	1	A	0	1	1	3	1	1	1
13	0	0	0	1	A	0	0	1	4	0	0	0
14	0	0	0	1	DI	0	0	0	2	1	1	1
15	0	0	0	1	A	0	0	1	4	1	1	1
16	1	1	1	1	A	0	0	1	2	1	1	1
17	0	1	1	1	A	0	0	1	2	1	1	1
18	0	0	0	0	L	0	1	1	4	0	0	0
19	0	0	0	1	L	0	0	1	3	1	1	1
20	0	0	0	0	L	0	0	1	3	0	0	0
21	0	0	0	0	L	0	0	0	3	0	0	1
22	0	0	1	0	V	0	0	0	2	1	1	1
23	0	0	0	1	A	0	0	1	2	0	0	0
24	0	0	0	1	A	0	0	0	4	0	0	1
25	0	0	0	1	A	1	1	1	10	1	1	1
26	0	0	0	1	A	0	1	0	4	1	1	1
27	0	0	0	0	DI	0	0	0	4	0	0	0
28	0	0	0	0	L	1	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	L	0	0	0	4	0	0	0
30	0	0	0	0	V	0	0	0	3	0	0	1
31	0	0	0	0	DI	0	0	0	4	0	0	1
32	0	0	0	0	V	0	0	0	2	0	0	0
33	0	0	0	0	V	0	0	0	2	0	1	1
34	0	0	1	0	V	0	0	1	2	1	1	1
35	0	0	0	0	V	0	0	3	0	1	1	1
36	0	0	0	0	DI	0	0	0	2	0	0	1
37	0	0	1	0	V	0	0	0	2	1	1	1
38	0	0	0	0	V	0	1	1	2	0	0	0
39	0	0	0	0	V	1	0	1	6	0	0	0
40	0	0	0	0	V	0	1	0	4	0	0	0
41	0	0	0	0	DI	0	0	0	4	0	0	0
42	0	1	1	1	A	0	0	1	2	1	1	1
43	0	0	1	0	V	1	0	0	4	1	1	1
44	0	0	1	1	A	0	0	1	3	1	1	1
45	0	0	0	0	V	0	1	0	6	0	1	1
46	0	0	1	1	A	0	0	0	3	1	1	1
47	0	0	0	0	DI	0	0	0	4	0	0	x1
48	0	0	1	0	DI	1	0	0	4	1	1	1

49	1	1	1	1	A	0	0	0	2	1	1	1
50	0	0	0	0	L	0	0	0	2	0	0	1
51	0	0	0	0	DI	0	0	0	4	0	0	1
52	0	0	0	0	DI	0	0	0	4	0	1	1
53	0	0	0	1	DI	0	0	1	4	0	1	1
	3	8	14	20		7	8	22		23	29	39

B. Regroupement des résultats aux colonnes 1-4

	5 3					
Col. (1)	50					3
Col. (2)	45			5		3
Col. (3)	38		1	7	4	3
Col. (4)	28	5	10	2	5	3

C. Interprétation

Nous avons comparé ces résultats à ceux obtenus après un enseignement traditionnel des angles, et relatés ci-dessus en III-B et III-C. La comparaison de la reconnaissance ou non de la nécessité de maîtriser l'orientation des positions par un angle droit (explicitée ou réussie corporellement) avec les épreuves passées au CM2 a été effectuée avec un test de CHI². ce test donne un résultat non significatif, même à 0,1.

Nous en avons donc conclu que, comme nous le pensions, l'enseignement dispensé dont nous avons testé l'efficacité selon les critères scolaires, n'a pas permis aux élèves de se forger une conception de l'angle adaptée à ce problème.

Nous pourrions dire encore que ce résultat permet de confirmer l'hétérogénéité des conceptions de l'angle.

D. Observations complémentaires

1. Longueurs

Une seule élève (28) n'a pas saisi de longueurs, et a reporté au jugé, comme elle "pense". Au deuxième essai, elle a tenté de repérer les trous par rapport au bord de la feuille (modèle).

Les dimensions de la planche ont été saisies par 6 élèves, mais pas utilisées, sauf par erreur (9 et 39) à la place, soit de la longueur soit de la largeur.

3 élèves (4, 38, 45) ont saisi la dimension d'une diagonale, mais ne l'ont pas utilisée.

1 élève (46) a réussi à l'oeil. Lorsque l'observateur lui a proposé la réalisation manifestement fautive d'un camarade, en lui demandant : "Que ferais-tu pour savoir si ça va aller ou pas?", il a comparé les mesures des diagonales de cette réalisation.

1 élève (45) fait de même mais sur sa propre réalisation. après constat d'erreur

2. Directions

Deux élèves (39 et 47) dessinent parallèlement au bord de la feuille; (39) est manifestement perturbé par la situation. Il faudra beaucoup l'aider. (47) fait une erreur de 3° environ à son deuxième essai.

13 sur les 29 en échec déclarent encore que pour réussir, ils "feront mieux les mesures". Les autres se réfèrent à la direction des reports sans savoir comment la contrôler.

Parmi ces derniers, l'observateur a poussé 13 élèves plus loin, en suggérant : "Est-ce qu'il y aurait un instrument (pour réussir)?"....

Il a obtenu 3 réponses nouvelles où l'élève repérait la désignation du rapporteur (ou de l'équerre) par l'observateur, (en effet le rapporteur est l'instrument nouveau de l'année) puis l'envisageait par politesse, et d'un coup en découvrait l'utilisation nouvelle : "

- 53 peut-être une pince de crabe, ..oui, je la poserais sur .. (il désigne la ligne 1-2)

- 46... "Peut-être un rapporteur... Ah oui, un rapporteur, on prendrait l'angle ici,...."

- 44une équerre après hésitation, puis elle vérifie sur la feuille percée, et sur sa construction.

Par contre, pour les élèves : 2, 7, 8, 10, 18, 21, 27, 47, 48, 52, cette suggestion n'a pas de sens.

Parmi les 15 qui font une erreur de plus de 5 degrés, 7 dévient de 10 degrés au plus (7, 8, 13, 20, 23, 27, 32).

Sur les 29 qui ne savent pas corriger leur erreur, 17 commentent la direction et 6 imputent leur erreur aux longueurs mal mesurées.

CHAPITRE C-4

LES REPRESENTATIONS PRATIQUES DE L'ESPACE

I. PRESENTATION DE L'ETUDE

A. Identification de représentations

Les résultats obtenus aux "Problèmes Bancs" nous ont conduit¹ à nous atteler à l'étude à priori des rapports entre le sujet et le milieu, naturellement développés dans une problématique pratique, selon des déterminations liées à la taille.

Ces rapports sont caractérisés par leur fréquence de mise en oeuvre, et par leur importance pour les sujets, dans trois catégories de situations associées respectivement à la manipulation des petits objets, aux déplacements domestiques, et aux déplacements dans des grands espaces.

Nous nous appuyons sur l'hypothèse que la conceptualisation naît des limitations apportées à la résolution immédiate des problèmes rencontrés par une activité sensori-motrice. Suivant le type et l'importance des limitations opposées à l'action du sujet, les conceptualisations correspondantes peuvent être plus ou moins élaborées. Nous allons examiner quels rôles jouent les concepts géométriques de base dans la maîtrise de ces situations, c'est-à-dire jusqu'à quel degré leur conceptualisation est nécessaire pour résoudre les problèmes liés à chacune des trois familles d'interactions.

Pour chacun des concepts géométriques qui nous ont paru les plus importants, nous avons tenté de cerner quelle conception, c'est-à-dire quel "point de vue sur ce concept" était développé par la résolution des problèmes posés par la famille de situations correspondante. Nous avons repris la définition de El Bouzzaoui (1988) : "Une conception est un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs, qui permettent ensemble de résoudre une classe de situations et de problèmes de façon à peu près satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations où cette conception échoue soit qu'elle suggère des réponses fausses, soit que les résultats soient obtenus plus difficilement et dans des conditions plus défavorables". Ces différentes conceptions d'une même notion pourront éventuellement être rapportées aux différentes conceptions² mathématiques qui lui sont liées.

Nous identifions chacune des représentations, micro-spatiale, méso-spatiale et macro-spatiale à la classe correspondante de conceptions.

B. Rapports spatiaux considérés

Les rapports spatiaux du sujet avec le milieu sont la source de problèmes très fréquemment rencontrés dont la solution est le fruit d'une adaptation individuelle ou de l'appropriation d'une solution culturellement reconnue.

Nous allons explorer les rapports établis par un sujet avec son environnement pour :

- reconnaître, décrire, fabriquer, transformer des objets ;
- déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ;
- reconnaître, décrire, parcourir, transformer un espace de vie ou de déplacement.

¹ Voir chapitres B-6, et C-3

² au sens d'Artigue et Robinet (1982)

Pour ce faire, le sujet fait appel à un certain nombre de connaissances explicites ou non.

La théorie des situations distingue trois fonctions du savoir dans lesquelles s'inscrivent les connaissances spatiales :

- permettre l'adaptation de l'action sur le milieu spatial,
- permettre la réussite de la communication entre deux ou plusieurs interlocuteurs à propos d'actions sur ce milieu,
- permettre un débat scientifique sur les moyens d'anticipation des résultats de certaines actions sur le milieu.

En première approche, seules les deux premières fonctions sont concernées par la problématique pratique de l'espace. L'une et/ou l'autre de ces fonctions, agir et communiquer, sont liées à la majorité des problèmes spatiaux que nous avons à résoudre pour la vie courante. Les problèmes qui relèvent de la troisième fonction du savoir sont spécifiques des pratiques professionnelles : un architecte, un ingénieur, un technicien, un ouvrier doivent pouvoir justifier à l'avance l'adéquation de l'ensemble des travaux qu'ils décident d'entreprendre à la réalisation d'un projet.

C. Limites et prolongements

Nous considérons les résultats de ce travail comme provisoires, comme le produit d'une activité de défrichage dans la "forêt"³ de l'ensemble des situations qui ont pu provoquer une évolution des représentations symbolique de l'espace chez les sujets de notre monde moderne et urbanisé.

Ainsi délimitées, chacune des représentations n'a qu'un domaine restreint d'efficacité optimale. Ce travail nous permettra d'étudier ensuite si la structuration de ces connaissances spatiales pratiques en représentations donne ou non aux sujets les moyens d'une représentation homogène⁴ de l'espace.

II. LES CONCEPTIONS MICRO-SPATIALES

Nous avons désigné par micro-spatiales les conceptions mises en jeu par le sujet lors des manipulations courantes des objets positionnés devant lui.

Ces situations recouvrent les activités spontanées du sujet avec les objets, que l'on peut regrouper en activités de reconnaissance, saisie, déplacement, assemblage.

Les rétroactions dans ces situations sont très rapides, les objets peuvent échapper des mains, le sujet les récupère immédiatement sauf s'ils tombent (ils peuvent disparaître pour le bébé) ; ces rétro-actions suffisent à assurer peu à peu la réussite.

A. L'espace : des objets

L'espace est "constitué" d'objets.

L'espace entre deux objets permet de les distinguer, c'est un séparateur d'objets.

*deux objets distincts n'ont pas de partie commune, des parties de leurs surfaces peuvent être en contact, mais il est possible de les séparer car on peut toujours créer de l'espace entre deux objets.

³ Pêcheux (1990) parle de foisonnement..

⁴ Au sens des pleins et des vides, il est évident que les représentations ne sont pas homogènes. Au sens de l'exploitation, lors de la confrontation avec une situation nouvelle, des capacités pratiques les plus appropriées, la réponse est moins évidente. Le rôle de la géométrie dans ces deux types d'homogénéisation est étudié par Bautier dans sa thèse en cours.

*il n'y a pas d'espace global, il y a un ensemble d'objets sous le contrôle de la vue et de la main, sans déplacement du sujet.

On peut dire que les objets sont des "pleins" d'espace et que le reste de ce que nous nommons espace "n'existe" pas, sauf pour les séparer : c'est du "vide".

Les objets sont rigides, leur forme permet de les identifier, leur nom de les concevoir comme un tout.

Ils présentent de la cohésion : si on tire à un bout, le reste vient.

Ils sont limités, la surface est ce qui les limite, ce par quoi on saisit l'objet.

Ils sont déplaçables facilement, aussi même si un objet en cache un autre, on peut retrouver le second.

Les positions particulières ne les "marquent" pas trop : du fait de leur manipulation, le sujet peut les déplacer pour les voir sous n'importe quel angle.

Certains objets sont pleins, d'autres creux, d'autres troués. Les actions qui mettent en relation deux objets de type différent ne sont pas toutes possibles.

Nous pouvons alors distinguer plusieurs types de relation que peuvent entretenir deux objets :

- les relations topologiques : se toucher ou non, être à l'intérieur l'un de l'autre.
- les relations métriques : la localisation extrêmement précise des objets à saisir ou à assembler, la comparaison par superposition, passer à travers l'un de l'autre.

Un objet étant un tout, sa conception sous forme d'ensembles de points n'a pas de sens; bien sûr, on peut différencier des faces planes et non planes, des arêtes "droites" ou courbes mais les problèmes posés par le comportement différent, lors de leur manipulation, de ces différentes catégories d'objets sont facilement résolus.

B. Les formes géométriques

La reconnaissance des formes géométriques s'effectue sur le mode plus général de la reconnaissance des personnes par exemple. C'est une connaissance publique (chacun doit savoir reconnaître son voisin), mais non décomposable à l'aide de concepts de géométrie.

Le nom est un moyen d'identifier un objet, d'en marquer l'importance culturelle.

La forme "rectangle" ne peut être ramenée à celle de carré. Il y a certes des ressemblances, mais il y a un trait distinctif : le rectangle a un côté plus court que l'autre. La forme de rectangle suppose de plus, pour être reconnue, certaines caractéristiques que Wermus (1978) a nommé composantes contextuelles, un rapport entre longueur et largeur compris entre certaines valeurs, des dimensions pas trop petites...

La forme "losange" est particulièrement liée à la position, et ne concerne pas le carré qui est, lui, reconnu en le tournant.

La forme cercle est liée à celle du disque, et exprime la rotondité du pourtour d'un objet, et s'exprime par "rond", comme celle de la balle. C'est l'aspect "courbure constante" qui est le plus proche de cette approche, qui n'a aucune raison d'être conceptualisée.

Les angles interviennent-ils dans la reconnaissance des formes polygonales d'objets ? L'objet est considéré comme plus ou moins pointu par ses coins, mais là s'arrêtent les considérations qui pourraient être décrites en termes d'angle. Cette conception dont le concept mathématique le plus proche est l'angle de secteur, est encore loin de pouvoir être développée, d'autant plus que les sujets n'ont aucune décision à prendre entraînant une anticipation exigeant la comparaison et encore moins la mesure d'angles. La reconnaissance d'objets sur une photo s'effectue en annulant la transformation des angles liée à cette représentation.

C. Le repérage :

La position d'un objet par rapport au sujet n'a pas besoin d'être conceptualisée : le sujet la modifie à son gré, instantanément et sans effort.

Seul le repérage par rapport aux limites de l'espace de préhension peut intervenir. le dépassement de ces limites peut entraîner la chute des objets et/ou la nécessité de se déplacer, voire un conflit avec d'autres enfants.

La verticale et l'horizontale sont des directions privilégiées mais leur réglage, en dehors de la relation d'empilement, a rarement besoin d'être contrôlé par anticipation, sauf en ce qui concerne l'horizontalité des liquides dans les récipients qui s'oppose à leur manipulation dans tous les sens.

D. Les transformations géométriques

Elles correspondent au résultat des actions du sujet sur les objets qui consistent uniquement en déplacements des objets, le reste de l'espace n'étant pas concerné. On peut classer ces déplacements en deux types :

- ceux qui font apparaître ou disparaître l'espace entre deux objets, comme l'assemblage et le désassemblage du stylo et de son capuchon, la fabrication d'une pile de livres, le rangement d'un objet dans un autre.

- ceux qui ne modifient pas les relations de contiguïté de l'objet avec les objets environnants.

La complexité intrinsèque des déplacements d'objets du micro-espace est bien mise en évidence dans la programmation d'un robot : il faut beaucoup de connaissances géométriques aux concepteurs des machines très complexes qui servent à équiper un handicapé privé de l'usage de ses bras.

La réussite des actions de manipulation courante par des sujets non handicapés ne semble par contre supposer qu'une très faible conceptualisation des relations spatiales en jeu. La réussite est assurée au niveau sensori-moteur.

Certains déplacements d'objets sont plus difficiles à régler que d'autres : ceux qui correspondent à la mise "au dessus de", sont soumis à la contrainte de la pesanteur, ce qui n'est pas le cas pour ceux qui correspondent à la "mise à coté de ...".

E. Longueurs, distances, espacements, épaisseurs...

Les objets sont de tailles différentes, propriété qui permet d'aider à leur reconnaissance, mais la comparaison des longueurs au cours de leurs déplacements n'a pas besoin d'être conceptualisée pour la réussite des actions de manipulation : le contrôle continu par la vue suffit.

Cependant il existe une catégorie de situations où la longueur est l'outil de décision, même si son usage n'est qu'approximatif : le partage d'objets consommables (friandises ou desserts particulièrement) et ces contrôles sont l'objet de négociations sociales.

La distance ne se distingue pas de l'espacement. Le sujet agit constamment sur les distances entre objets, mais là encore, le contrôle visuel immédiat rend inutile la conception d'une mesure des distances.

F. Périmètre et surface

Le prédicat "formes", associé à celui d'objet, ne permet pas la décantation des caractéristiques surface et périmètre par exemple. Le pourtour des objets est un moyen de les

reconnaître, et d'en apprécier la taille. L'étendue n'a pas de raison d'être décantée, alors que son appréciation est aussi un des moyens d'apprécier la taille, notamment dans le contexte des "parts" de nourriture.

G. Volumes

Le volume d'un objet, comme la surface de sa périphérie, est un des moyens d'en apprécier la taille, et de l'identifier par rapport à d'autres. Ce prédicat n'a aucune raison d'être décanté. La seule question qui pourrait constituer une étape vers une conception du volume comme espace occupé, est celle du rangement d'objets dans un contenant. On sait combien elle est mal résolue, la seule technique disponible consistant à tout déverser dans le contenant.

Le volume peut cependant être approché par la question des fluides, boissons en particulier, réparties dans des contenants. Mais, la boisson peut-elle être considérée comme un objet ? elle en a peu de caractéristiques. L'air encore moins.

La comparaison de sacs de petits objets, des bonbons par exemple, pourrait constituer aussi une approche. Il est certain, les expériences sur le nombre en témoignent, que les enfants savent assez tôt estimer, même si c'est assez grossièrement, la quantité d'objets semblables, en s'appuyant sur la perception de la place qu'elle occupe.

H. En conclusion

L'hypothèse d'existence d'une représentation micro-spatiale nous a permis de faire le tour, en ce qui concerne les notions géométriques de base, des éléments qui ont pu être élaborés dans des situations courantes d'interactions avec le micro-espace.

L'espace représenté doit être essentiellement constitué d'objets, et de "vides" qui les séparent ; Il est par conséquent hétérogène.

Les seules notions que nous avons identifiées comme devant bénéficier d'une représentation proche de la notion géométrique correspondante, sous l'effet de leur fonctionnalité sont la longueur et la direction verticale.

III. CONCEPTIONS MESO-SPATIALES

Nous allons maintenant examiner les mêmes notions du point de vue des situations spatiales les plus courantes liées aux déplacements du sujet dans l'espace domestique. Nous le ferons d'un double point de vue :

- rupture ou continuité de ces conceptions avec celles opérant dans les conditions micro-spatiales,
- constituant ou non une construction qui fournira les stratégies de base dans le macro-espace.

L'espace domestique est un espace social :

- la relation du sujet avec les autres est régulée par des déplacements dans un lieu et d'un lieu à un autre.
- Ces déplacements sont cependant soumis à des contraintes plus ou moins explicites; en particulier, les objets déplaçables sont affectés de façon privilégiée à un endroit et un lieu où il faudra les replacer à un certain moment.
- les lieux sont affectés d'un nom.
- c'est dans la communication à propos de situations méso-spatiales que se construit le langage spatial courant : par exemple quand la mère dit à l'enfant "va me chercher mon sac qui est sur la table de la cuisine".

Les problèmes du sujet relèvent :

- * du contrôle de ses déplacements dans un lieu.
- * du contrôle de ses déplacements du lieu où il se trouve vers un autre lieu du même espace domestique.
- * du contrôle des déplacements (ou des trajectoires) des sujets ou objets avec lesquels il est en relation.
- * de l'identification par son nom de l'endroit précis où est placé un sujet ou un objet, par exemple pour obtenir, par demande verbale, que quelqu'un apporte l'objet
- * de l'identification par description d'un endroit où est placé un sujet ou un objet
 - soit qu'il ne peut montrer à son interlocuteur.
 - soit pour lui-même, auto-communication puisant dans la mémoire les indications permettant de retrouver un objet qu'il a déplacé ou qui s'est déplacé selon une trajectoire qui lui est propre.
- * Dans ces situations, les rétroactions sont rapides, mais non immédiates comme dans les situations micro-spatiales, aussi le sujet est-il conduit à une conceptualisation un peu plus poussée, lors de la rencontre de limitations à ses rapports.

A. L'espace : des lieux et des objets

L'espace domestique est composé de lieux, ou d'objets.

Pour le méso-espace, c'est le "vide" qui est l'élément fondamental : c'est lui qui permet l'activité déambulatoire des sujets ou des objets et son contrôle visuel.

Le plein est ce qui limite et contraint cette activité.

1. Les lieux

Le "plein" y délimite donc deux espaces : l'intérieur et l'extérieur. L'espace ne peut encore être représenté comme homogène.

Certains lieux, de dimensions réduites par rapport au sujet peuvent être appréhendés avec les notions micro-spatiales liées aux objets.

D'autres lieux introduisent un rapport nouveau, en particulier parce que le sujet ne peut les embrasser d'un seul coup d'oeil : lorsqu'il en contrôle une partie par la vue, d'autres parties de l'espace sur lesquelles se portent aussi son intérêt lui échappent.

Parmi ces lieux, il y a l'espace qui entoure le sujet qui s'y trouve, et dont les limites sont matérialisées par de grands objets, murs ou autres bâtiments ou clôtures. Le sujet passe d'un lieu à un autre en franchissant ces limites; en général, ceci n'est possible qu'en certaines parties : les portes.

Le traitement des problèmes de l'espace se fait encore autant que possible sous le contrôle de la vision.

La reconnaissance des lieux se fait à l'aide de leur fonction sociale, fixée dans le nom, et à l'aide des objets qui y sont disposés :

- utilisation d'objets placés au mur, meubles...
- reconnaissance de surfaces (sol, murs...) textures, couleurs et aspect visuel.
- reconnaissance de position d'ouvertures, et de meubles, d'objets en général

Lorsqu'il s'agit de lieux mal connus, visite à des amis par exemple, se posent peut-être d'autres problèmes :

- reconnaissance d'un point de vue privilégié, visible d'un coup d'oeil depuis une entrée dans le lieu.
- reconnaissance de trajets d'une pièce à une autre.

2. Les objets

Les "pleins" de ces espaces vont pouvoir être appréhendés à l'aide du concept micro-spatial d'objet. Ces espaces vont donc provoquer une extension du concept d'objet aux murs, bâtiments, arbres, fleurs, etc... les lieux étant en quelque sorte délimités par un continuum d'objets.

Les activités qui sont relatives aux objets du micro-espace relèvent de leur déplacement d'un micro à un autre et vont poser des problèmes spécifiques qui ne relèvent plus de la manipulation de l'objet mais de sa localisation :

- au manque de l'objet (mère, etc...) répond la recherche de moyens de récupérer cet objet (le cri, ça marche pour faire venir la mère...)

- "où est l'objet ?" Formulation de la question et de la réponse.

- passer un objet à quelqu'un peut poser de nouveaux problèmes, notamment d'orientation de l'objet par rapport au corps des deux personnes; on ne passe pas un couteau ni une bouteille (ni un livre etc.) comme on passe une balle.

- surtout, certains objets, en échappant à la préhension du bébé, mais pas à sa vue, aboutissent à la constitution de la notion de trajectoire repérée par les psychologues. (Pêcheux)

Les objets semi-fixes (Hall 1966), comme les meubles, sont en nombre limité. Leur reconnaissance comme celle des objets au sens du micro-espace est facilitée par la reconnaissance de leur caractère déplaçable.

La conception méso-spatiale des "gros" objets diffère de la conception micro-spatiale par les caractéristiques suivantes : ils sont pour la plupart toujours au même endroit de la pièce, dans la même position. Ils sont par ailleurs reconnus à l'aide de ce qui, dans leur forme, traduit l'activité à laquelle ils sont liés : rangement, nettoyage, cuisson, consommation du repas, travail, siège, etc...En dehors de leur usage social, ils interviennent comme obstacles au déplacement dans un lieu, et on doit souvent les contourner ou les éviter.

3. Les formes d'objets, le parallélisme.

La question de la reconnaissance des objets, étendue aux lieux, est profondément modifiée, en particulier par la structuration de l'espace en objets semi-fixes ou fixes. Les formes, au sens du micro-espace, n'y jouent qu'un rôle secondaire.

Par rapport aux objets, le déplacement des sujets s'accompagne de modifications de la perception des dimensions et des formes : la reconnaissance des rectangles ne peut plus se faire par changement de position de l'objet; elle nécessite la construction d'une équivalence avec des formes trapézoïdales ou parallélogrammes, voisines dans la perspective visuelle. On peut dire qu'on "voit" partout des angles droits, mais tout aussi bien qu'on ne les voit quasiment jamais tels.

Les relations perçues entre les lignes droites sont essentiellement structurées par l'incidence et le parallélisme.

Le parallélisme échappe souvent au contrôle visuel global de la forme, quand il règle les limites de terrain de sport, par exemple. Il est aussi l'objet d'illusions, de contradictions apparentes, comme en ce qui concerne les bords d'une longue route bien droite, ou les rails de chemin de fer. Son contrôle, lors de la construction d'objets du méso-espace, ne serait-ce que le tracé de marelle doit être consciemment pris en charge. Nous avons pu constater que les élèves du CM savent effectuer ce contrôle, par l'égalité des distances entre deux traits notamment.

B. Longueurs, distances, hauteurs, profondeur.

La variation des distances constitue le vécu constant des activités de déplacement : les distances, celles qui sont importantes pour le sujet, entre lui et son but, sont constamment variables. Mais la distance entre des lieux reste faible, eu égard aux possibilités du sujet, et de plus, elle est rarement objet d'anticipation : il n'y a pas souvent d'occasion de choix de parcours qui diminue de façon suffisante la distance pour qu'un contrôle conscient soit nécessaire.

De manière plus générale, le contrôle spatial des sujets ne s'exerce pas sur la comparaison des distances.

Des activités ludiques comme la pétanque sont de bons exemples d'un tel contrôle : s'effectuant à l'aide de longueur d'objets ou de fils tendus, ils constituent une occasion d'homogénéiser les deux notions, distance et longueur. La vie rurale, aujourd'hui marginalisée, donne de multiples occasions de ce type : utilisation du fil de fer, des ficelles et des cordes, remplacement des clôtures en fil de fer, etc..

La profondeur d'un placard ou d'un meuble est mise en rapport avec les longueurs des objets que l'on y range.

Les dimensions des pièces relèvent des deux notions de longueur et d'espacement : espacement entre deux murs, qui conditionne la longueur des meubles, et objet-mur, muni d'une longueur et d'une hauteur, qui matérialise ces espacements. La comparaison des distances entre lieux et des dimensions des objets immobiles du méso, n'est pas l'objet d'anticipations fréquentes. Les expériences les moins rares sont celles de l'aménagement de l'espace par déplacement de meubles très difficiles à déplacer (semi-fixes), ce qui nécessite une anticipation. En général, les enfants n'en ont pas la responsabilité; et il faudrait savoir si l'expérience sociale la plus courante chez les adultes n'est pas encore celle du déménagement par essais-erreurs.

Les longueurs des meubles interviennent aussi comme contraintes aux trajets, contraintes déterminant des espacements entre lesquels on peut ou non facilement déplacer d'autres meubles comme des chaises, etc.. Par contre, on peut penser que la hauteur à laquelle sont placés des objets, sur lesquels se porte l'intérêt des sujets, va être perçue assez tôt.

En définitive, en ce qui concerne longueur et distance, la spécificité de l'expérience pratique méso-spatiale par rapport à l'expérience micro-spatiale, est de faire exister une certaine notion de distance associée à celle de trajet et d'espacement. C'est dans le contexte méso-spatial que le rapport entre longueur et distance prend son sens : pour comparer la distance entre plusieurs objets, on compare les longueurs de fils tendus entre eux.

C. Repérage

Le sujet qui se trouve dans un lieu, y contrôle sa position par rapport aux limites sans déplacement spécifique, d'un coup d'oeil circulaire.

Le sujet sait dans quel lieu il se trouve, et il sait qu'il saura aller du lieu où il se trouve à n'importe quel autre lieu de cet espace. Il n'a pas souvent l'occasion de formuler ce savoir, qui reste implicite.

Le sujet qui se déplace doit contrôler ses déplacements par rapport aux objets fixes, et aux points de passage contraints d'un lieu à un autre.

Le déplacement naturel de l'endroit où le sujet se trouve à un autre situé sous le contrôle de sa vue est la ligne droite.

Les portes vont constituer des buts intermédiaires pour un déplacement anticipé, et ainsi que les fenêtres, ou d'autres "objets-lieux" construits par le sujet, ces objets constituent des points de référence déterminant des étapes de son déplacement.

Les meubles n'interviennent pas de la même façon que les portes. Ils viennent s'interposer entre le sujet et son but. Ils sont alors, sous peine de collision douloureuse, des points de référence locaux obligés, intérieurs à un trajet sous contrôle de la vision.

1. Les directions

a) la verticale

C'est une direction privilégiée tant par la position érigée du sujet que par les difficultés à vaincre la pesanteur dans un déplacement vertical.

La verticale va aussi intervenir en relation avec les décisions à la charge du sujet, à travers les questions de point de vue : si la taille du sujet est inférieure à un obstacle visuel, plus il est près d'une murette ou d'un meuble, moins il voit derrière. Il y a là une contradiction entre l'expérience micro-spatiale pour laquelle le rapprochement est facteur d'amélioration de la connaissance et celle du méso-espace où cela devient un obstacle. Cette contradiction pourrait ne pas être surmontée dans le méso pour deux raisons :

- l'importance pour le sujet de voir loin est relativement faible, car de loin, il ne peut pas prendre l'objet, ce qui est l'objet principal de sa quête. Il sera donc amené au contraire à s'approcher, puis à dépasser l'obstacle en se rehaussant par le moyen d'une chaise, prototype du meuble déplaçable, ou, bien sûr, en demandant à être porté dans les bras.
- la taille des sujets croissant avec le temps, le nombre d'occurrences de cette situation diminue avec l'âge, dans cet environnement.

Ces situations ne seront retrouvées qu'avec le macro-espace, en montagne le plus souvent, provoquant la surprise souvent renouvelée des néophytes.

La verticale est la seule direction qui soit continuellement perçue comme invariante. Cette direction est repérable tant au niveau des meubles, des ouvertures que des intersections de murs. Les autres directions subissent des altérations, certes faibles, dans les changements de points de vue !

Elle paraît donc relever d'autres anticipations, donc d'une autre conception, que les directions horizontales.

b) Les directions horizontales :

Elles existent pour le sujet, d'abord comme moyen de localisation des objets dans le méso, par rotation des yeux, puis de la tête, puis du corps, pour le déplacement moteur d'un lieu à un autre.

On peut ainsi penser que directions horizontales et déplacement du sujet vont être très liés.

Quand le sujet acquiert la possibilité de déplacement par la marche, on le voit qui dirige cette marche par le maintien de son corps dans une direction constante par rapport à l'objet convoité; à ce stade, (et plus tard encore, de nombreux gags en font foi), le sujet ne voit pas les obstacles à son déplacement si ceux-ci ne coupent pas son rapport visuel à l'objet convoité et fixé du regard.

Le sujet pouvant régler la direction de son regard et de son corps dans l'instant, en conformité avec le but du déplacement, ces changements de direction n'ont pas besoin d'être anticipés ni conceptualisés comme dans le macro-espace. Le sujet est cependant obligé de

régler à plusieurs reprises la direction de son déplacement vers son but, après le contournement de chaque obstacle.

Cependant, la recherche visuelle de l'objet ou de la personne donne l'occasion d'explorer consciemment l'ensemble des directions.

Enfin, toutes les activités de lancer d'objet nécessitent souvent une anticipation, et par conséquent une prise de conscience minimale de la concordance de la direction du regard et du geste. Il se pourrait que ce soient les activités les plus structurantes de cette notion.

2. L'orientation⁵

L'orientation dans cet espace se fait au moyen du repère corporel sur des trajets balisés par les "points" de référence. Le repère corporel se compose de trois directions, que rien ne permet de considérer comme homogènes : le haut-bas de la verticale, l'arrière-avant, et celle de la ligne des épaules. Alors que l'orientation des directions verticales et avant-arrière est une nécessité évidente, il n'en est pas de même de celle de la ligne des épaules.

Tout objet qui est muni d'une certaine hauteur possède un haut et un bas.

La plupart des meubles sont orientés, que ce soit le lit, ou la cuisinière. Certains le sont en coïncidence avec le corps qui y trouve sa place (le lit, la chaise...), tandis que d'autres sont munis d'une orientation en miroir, comme la cuisinière et d'autres meubles non destinés à porter le corps, alors que l'avant d'un meuble désigne bien la partie qui vient dans sa fonction en regard de l'avant du corps ; parler de "la gauche d'une armoire" introduit un conflit entre la gauche de l'utilisateur, et la gauche de ce même utilisateur, mais qui se retourne pour identifier son avant avec celui du meuble.

D. La ligne droite

Dans l'ensemble des activités mettant en oeuvre déplacements horizontaux et plus encore des lancers (ballons ou balles, pétanque, flèches, pierres, etc.), les directions sont liées avec une certaine conception de la ligne droite liant deux lieux de l'espace, et pouvant se prolonger au-delà du segment qui les relie, et souvent en contrariant le lanceur. C'est pourquoi on peut penser que les notions de segment liant deux points, de demi-droite, voire de droite se constituent dans ce type de rapport.

E. Les angles

1. Angles de direction

L'intervention éventuelle du concept d'angle dans le méso-espace peut être d'abord recherchée sous l'aspect du changement de direction du sujet, ainsi que sous celui des directions différentes des segments matérialisés jouant un rôle dans les activités de reconnaissance et de déplacement.

- pour ce qui est des changements de direction, le sujet qui se déplace en réalise constamment. Comme cette activité se situe très tôt dans un contexte de recherche d'un "objet", il est certainement amené à effectuer un contrôle plus ou moins conscient de la direction de son déplacement et de son corps.

Des anticipations sont-elles nécessaires? on peut en douter.

⁵ pour une analyse approfondie de cette question, nous renvoyons à Lurçat (1976)

Le fait que ces directions soient toujours liées à la posture du sujet, l'amène à se construire un certain repérage par rapport à son corps et aux possibilités musculaires mises en jeu (Paillard 1974).

Des études psychologiques ont montré que très tôt de nombreux bébés sont capables d'un certain contrôle et du repérage de trajectoires, mais aussi du contrôle de la direction de leurs déplacements par rapport à des repères construits à l'aide d'éléments de l'environnement.

La conceptualisation des angles nécessiterait la construction d'invariants, or le trajet méso-spatial change très souvent de direction, et ce, sous contrôle de la vue, sans anticipation nécessaire.

Le repérage d'une direction mobile par rapport à une direction fixe apparaît pourtant dans une circonstance familière de la vie quotidienne : il s'agit de la porte ou de la fenêtre lorsqu'on l'ouvre, ou la ferme.

N'y aurait-il pas construction possible du concept d'angle, orienté, de surcroît?

Cet angle n'appelle cependant aucune anticipation. Pas plus que celui des autres mouvements de rotation apportés par la technologie : boutons de porte, ou ouverture de robinets... a-t-on même le besoin de se souvenir de leur sens quand le hasard vous fait trouver le bon une fois sur deux, et lorsque l'essai malheureux donne un résultat immédiat dont le coût est nul?

Par contre, le sens d'ouverture associé à chaque porte et qui peut être repéré à l'aide d'indices matériels peut porter à l'anticipation; en effet, outre qu'un sens ou l'autre ne requiert pas la même disposition du corps lors de l'ouverture, un sens, l'ouverture vers soi peut être assez souvent l'occasion de collisions douloureuses, lorsque quelqu'un, de l'autre côté ouvre brutalement alors qu'on s'apprête à le faire.

Peut-on en espérer une certaine conceptualisation? Nulle place à l'invariance, ni à l'anticipation de la grandeur. Seules trois valeurs sont désignées par un mot : ouvert, fermé, entr'ouvert.

2. Angles de vue

Leur limitation est ce qui détermine de nombreux déplacements du sujet, déplacements de la tête d'abord. Ce déplacement est peu coûteux, et fait constamment varier la portion d'espace concernée, sans possibilité de comparaison, et donc de conceptualisation.

Relativement à un objet donné, la variation de l'angle sous lequel il est vu est lié à la variation (inverse) de la distance entre l'objet et le sujet⁶. Il est donc probable que ces deux notions sont plus ou moins amalgamées.

F. Surfaces et aires

La comparaison de surfaces, du point de vue de l'aire, pourrait être développée à partir de la comparaison de l'espace attribué pour effectuer des manipulations micro-spatiales, si cet espace était variable et objet de négociations sociales. Ce ne semble pas être souvent le cas.

Volume et surface au sol ne sont-ils pas souvent confondus ? En effet, d'abord l'espace parcouru par le corps est essentiellement délimité par l'espace au sol, ensuite, les locaux domestiques délimitent des volumes de même hauteur; enfin, l'acte de délimitation de l'espace personnel de celui des autres, se porte sur l'espace au sol! et ceci est à peine modifié dans l'espace extérieur, hormis le cas de jeux sportifs particuliers.

⁶ Nous avons commencé à étudier cette relation au chapitre C-6.

Les activités d'entretien ménager font faire de réelles expériences de la notion de recouvrement : lavage de vaisselle, essuyage de tables, balayage...mais, couvrir des livres, ou des murs, que ce soit de peinture ou de papier, est souvent une activité laissée aux adultes.

La vie rurale fournit de réelles occasions, que ce soit pour le labour, les semailles, l'épandage d'engrais, la moisson, ... mais elle ne concerne aujourd'hui qu'une minorité d'enfants.

La comparaison directe de deux surfaces, par découpage et superposition est exceptionnelle⁷.

G. Volumes

La notion de volume pourrait s'appréhender de différentes manières :

- le volume intérieur ou espace délimité par la pièce, qui est plutôt lié au concept de surface, vue que l'occupation se fait au niveau du sol.
- le volume des habitacles, des voitures par exemple, est plus objet d'expériences courantes, et d'adaptations. Les départs en vacances, les déménagements pourraient fournir une base au concept.
- le volume des murs est quasiment inaccessible.
- le volume-contenance des placards et autres meubles, s'apparente au concept micro-spatial, du cartable par exemple.

H. Transformations géométriques

Le déplacement du sujet correspond, dans son repère, à un déplacement de son environnement dont l'orientation serait inverse.

Cependant, il y a peu d'occasions de prendre conscience d'invariants de tels déplacements.

La nécessité de tenir compte de ces questions n'apparaît qu'en certaines occasions : mettre la table par exemple, lorsque l'on ne peut en faire le tour facilement. Il faut alors inverser son repère pour tenir compte de la position future.

Les occasions de communications de trajets, face à un interlocuteur sont occasion d'erreurs, compensées par un changement de position, ici très facile.

Les portes et fenêtres, sont certes animées de mouvements de rotation, mais c'est la technologie invisible qui a seule en charge l'invariance de la charnière; quant à l'angle de rotation, sa mesure n'a aucune pertinence.

Par contre, sans doute peut-on en retirer une certaine expérience d'un autre mouvement que celui du déplacement d'objets, car ici, il y a un invariant, d'ailleurs à la charge de la technologie et non du sujet.

I. Remarque :

La plupart des constructions précédemment évoquées pour la représentation méso-spatiale devraient être profondément revues si l'on se préoccupait de sujets aveugles. Nous renvoyons ici au travail en cours de Molina (Université de Saragosse).

IV. CONCEPTIONS MACRO-SPATIALES

⁷ Le recouvrement de surfaces par des objets est une activité importante dans l'aménagement de l'habitat : carrelages, moquettes, papiers peints, mais ce sont les adultes qui doivent conceptualiser pour anticiper les quantités.

Le macro-espace, c'est l'espace de l'aventure, dont la maîtrise ne relève plus des modes de familiarité. C'est l'espace étrange par définition.

A. L'espace : des lieux, des objets, et des trajets

C'est un espace de *trajets*, d'un lieu souvent désigné par *point de départ*, à un autre, désigné comme *point d'arrivée*, en passant par des *étapes* plus ou moins répertoriées, selon la durée du trajet : plus d'un jour de voyage nécessite de prendre des dispositions particulières pour le repos nocturne, les repas, etc..

Les différents lieux, constituant un certain continuum dans le méso-espace, sont ici nécessairement traités différemment selon leur nature : lieux de départ, d'arrivée ou de passage.

Le continuum des lieux demeure certes, mais l'effort porté sur sa connaissance devient même un obstacle à la mémorisation du trajet, car la quantité d'informations dépasse les possibilités des sujets.

La maîtrise de tels espaces par une population importante nécessite un travail symbolique très important, très tôt effectué dans certaines civilisations, et qui a abouti à nos cartes actuelles. La seule carte léguée par l'Egypte ancienne (carte dite des "mines d'or") est une représentation d'itinéraires⁸. Les cartes mésopotamiennes, dont la carte la plus ancienne connue à ce jour, remplissent une fonction d'enregistrement de la localisation, et ne sont pas liées à un trajet orienté.

Nous avons développé au chapitre C-9 l'étude de l'utilisation des plans et cartes. La situation la plus courante, en milieu urbain, est de devoir mémoriser un itinéraire, de la façon la plus économique et efficace, afin d'atteindre le lieu d'arrivée, et/ou de retrouver le lieu de départ. Ceci se fait en mémorisant les conditions dans lesquelles s'est effectué chacun des choix afin d'en permettre la reconstitution successive. La reconstitution du trajet inverse peut alors se faire, sous contrainte de transformation de chacun des repérages par un demi-tour. Porter son effort à ce niveau est une compétence qui n'est pas développée de façon courante dans le méso-espace.

L'optimisation du déplacement du sujet, d'un lieu à un autre et à travers plusieurs lieux, est un problème souvent rencontré. Sa solution nécessite une représentation globale de l'ensemble des lieux, et de leurs rapports topologiques, connexions en particulier.

La mémorisation d'un trajet urbain ou rural peut se faire en mémorisant les lieux où s'effectuent les choix de nouvelles directions, qui constituent des "points de référence" et les éléments permettant de retrouver ces choix.

B. Repérage

Les méthodes de repérage dépendent du type d'espace et du problème à résoudre.

Dans notre société, du fait de la multiplication des déplacements, de leur importance sociale, l'espace de déplacement est contraint et signalisé. Nous n'avons pas souvent l'occasion de trouver notre chemin dans une forêt, encore moins celle de nous guider aux étoiles ou de faire le "point". Pour indiquer son chemin à quelqu'un engagé sur une voie, dans un sens déterminé, il suffit de lui indiquer les croisements où il lui faut changer de voie, et la nouvelle voie à emprunter (par exemple, la deuxième à droite après le cinéma). Les noms de voies, lorsqu'ils sont reportés et qu'on peut les lire, sont d'une grande aide.

⁸ Baud M.(1990) : La représentation de l'espace en Egypte ancienne : cartographie d'une expédition, *Bulletin de l'Institut Français d'Archéologie Orientale* tome 90, Le Caire

Traverser en voiture une ville inconnue, de nuit par exemple, pour atteindre une autre assez éloignée, pose souvent, en France, des problèmes difficiles à résoudre. En effet, le repère du chauffeur en dehors de la ville d'arrivée peut être de deux types : une ville intermédiaire, ou le nom de la voie. Dans le cas d'une ville intermédiaire, celle-ci n'est pas nécessairement balisée, en fonction de règles mal connues et de découpages administratifs. Par contre, le nom de la voie serait commode s'il était reporté sur les panneaux, ce qui n'est pas le cas en France...

Les plans et les cartes sont la réponse culturelle aux problèmes de repérage, qu'il s'agisse de lieux ou de trajets, de l'espace urbain ou rural voire maritime.

Leur usage pose néanmoins de nombreuses difficultés, et en cas de demande de renseignements à un passant, on peut avoir jusqu'à 6 systèmes de référence en interaction :

- celui de l'espace réel (déterminé par ce qui peut-être reconnu)
- celui du voyageur dans l'espace réel (référence au repère corporel)
- celui du passant dans la réalité (qui peut faire face au voyageur)
- celui de la carte (il y a en général une orientation N-S par rapport à laquelle les graphismes sont disposés)
- celui que projette le voyageur sur la représentation de sa position dans le plan (je suis là...)
- celui que projette le passant interrogé sur la position du voyageur dans le plan (vous êtes là...)

La solution du problème passe en général par une identification du maximum de ces systèmes différents, par orientation du plan et des sujets selon l'espace réel.

1. Les lignes droites et les directions

Les voies sont estimées droites ou non par visée au loin, en identifiant l'axe arrière-avant à l'axe de la voie. Si la visée est coupée par le bord gauche, la voie tourne à droite, si elle est coupée par le bord droit, elle tourne à gauche.

Les directions de repérage en ville sont contraintes par les rues, et particulièrement par les rues principales qui comportent de longues parties rectilignes.

2. Les angles

Le repérage par rapport à une rue principale, dès qu'on la quitte pour des rues secondaires, devient un problème particulièrement complexe, dont la maîtrise nécessite l'intégration de la mesure approximative des angles (orientés) dont on a tourné. Un cas particulièrement simple est fourni par deux changements de 90°, dont la composition assure d'être sur une voie à peu près parallèle, dans le même sens ou le sens contraire, selon le sens des changements. Le parallélisme est donc lié à une composition de rotations.

Le repérage de la position et de son évolution dans un trajet s'effectue aussi en tenant compte de l'orientation du trajet, contraint ou non par une voie, par rapport à un monument particulièrement haut, un sommet, un astre.

En campagne, le soleil peut fournir de jour⁹ une indication du changement de direction géographique de la voie suivie, que l'on peut comparer à sa représentation sur le plan...

L'instrument privilégié de repérage est la boussole, dont l'utilisation conjointe à une carte permet (à celui qui en maîtrise les pratiques, et en particulier celles des angles) de déterminer sa position, et la direction à suivre pour atteindre son but.

C. Longueur et distance macro-spatiale

⁹ et la lune, de nuit, quand on la voit bien

Les informations sur les distances (ou éloignements) macro-spatiales sont fréquemment véhiculées par le langage particulièrement en Km, ou en durées de trajet.

La prise en compte de la longueur d'un trajet fait partie de l'expérience courante, du fait de son coût en temps ou en fatigue.

C'est dans le contexte méso-spatial que le rapport entre longueur et distance a pris son sens. Cette conception se prolonge dans le macro-espace par la distance "à vol d'oiseau", mais dans beaucoup de situations, la longueur du segment qui relie les deux points n'est pas opératoire.

Les trajets macro-spatiaux s'effectuant en véhicules, la détermination de la longueur parcourue se fait à travers un instrument, le compteur du véhicule. Quant aux très longues distances, effectuées en train, avions ou navires, elles sont estimées en durées, heures, jours, semaines, etc.

V. EXEMPLE D'UTILISATION : CARACTERISTIQUES DES INTERACTIONS AVEC LA FEUILLE DE PAPIER

Nous rassemblons ci-après quelques réflexions développées çà et là dans la partie B. Beaucoup reste à faire, pour exploiter la quantité très importante d'études concernant les productions des sujets sur un support culturellement privilégié dans notre société occidentale.

A. Caractéristiques micro-spatiales

1. L'ensemble de l'espace est sous le contrôle d'un seul coup d'oeil

2. les "objets" considérés spontanément :

Ils sont tracés, entourés d'une ligne fermée simple, et leurs contours séparés d'un espace, comme on le sait, même s'ils sont accolés.

Un trait d'un bord à l'autre peut cependant les couper en deux "objets" ou plus.

Deux tracés superposables sont spontanément considérés comme deux objets distincts bien qu'identiques. Le "p" et le "q" sont d'abord interprétés comme identiques par un enfant qui les considère comme des objets.

La surface de la feuille est hétérogène : la zone du bord n'est pas considérée de la même façon que le reste de la surface lorsqu'on veut découper un morceau de forme choisie. Cela peut correspondre aux limites du micro-espace, au delà desquelles les objets peuvent tomber. D'ailleurs, pour les tracés géométriques en particulier, sortir de la feuille est considéré comme relevant d'une erreur, tandis que la position du tracé dans la feuille est placée sous la responsabilité exclusive de l'élève, alors que ce n'est pas, en général, chose simple.

B. Caractéristiques méso-spatiales

1. Les "objets ne sont pas déplaçables (ou très difficilement)

La difficulté en cas de mauvais placement peut être rapprochée d'une difficulté méso-spatiale de placement de meubles : le déplacement est quasi-impossible si le tracé n'a pas été effectué au crayon effaçable, et cela nécessite la destruction de tout le travail réalisé.

Les outils informatiques que sont le traitement de texte et d'images permettent une véritable manipulations d'objets, comme on peut le faire dans les conditions du micro-espace.

2. l'espace est orienté :

- par les bords de la feuille (deux directions privilégiées)
- par les lignes éventuelles du quadrillage
- sur une ligne (de gauche à droite), et d'une ligne à l'autre (de haut en bas), par l'apprentissage de la lecture.

Cette orientation se fait par rapport au repère du sujet, lui-même dans une position privilégiée par rapport aux quatre bords de la feuille.

3. Le sujet est contraint à se déplacer par rapport à la feuille ou à déplacer la feuille (l'espace entier) par rapport à lui.

On peut observer cette difficulté en cas de tracés d'épures soignées, où le confort du tracé nécessiterait de faire tourner la feuille par rapport au sujet. Le sujet se contorsionne ou se lève et tourne autour de sa feuille.

4. Le déplacement d'un crayon peut être assimilé à un trajet [Vurpillot (1972)].

C. Conclusion

Très tôt, l'enfant est accoutumé à considérer l'espace de la feuille et ses tracés comme une représentation du "monde", à y effectuer à travers des figurations "ressemblantes" des opérations de reconnaissance et de désignations d'objets. Cette caractéristique placerait-elle la feuille de papier comme un facteur culturel d'homogénéisation potentiel des représentations de l'espace?

Selon la situation et les rapports qu'elle détermine entre le sujet et la feuille de papier, les représentations micro-spatiales ou méso-spatiales peuvent être particulièrement activées. C'est ce que nous avons noté aux chapitres B-4 et surtout B-6.

Compte tenu du développement spontané de chacune de ces représentations, leur intervention peut être selon le cas une aide ou une source de difficultés.

La feuille de papier est un outil indispensable comme support de représentations d'espaces, permettant d'affiner ce qui n'existe encore que comme projet, ou permettant d'effectuer les raccordements entre les informations concernant des portions locales du macro-espace grâce au contrôle global par la vision.

La représentation micro-spatiale peut se constituer en obstacle au fonctionnement convenable des rapports entre le sujet et les représentations sur l'espace de la feuille de papier. Nous avons rencontré au moins deux domaines d'apprentissage où des difficultés, pouvant être ainsi interprétées, sont attestées :

- l'apprentissage des représentations en dessin technique¹⁰.
- l'apprentissage de la géométrie¹¹.

¹⁰ de nombreux exemples sont rapportés dans l'ouvrage à paraître : "*Espace graphiques et graphismes d'espace*, La pensée Sauvage.

¹¹ Chapitres B1, B3, B4, B6, en particulier à propos des travaux examinés de Grenier, Artigue-Robinet, et Audibert, ainsi qu'à propos des angles (B-6 et C-6 à C-8)

CHAPITRE C-5

MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DE CONCEPTIONS DIFFERENTES DU REPERAGE DANS UNE ACTIVITE D'ENUMERATION D'OBJETS

Rappelons les objectifs de ce travail : Nous avons recherché un problème qui ait du sens dans les trois modalités spatiales que nous étudions, et qui, posé à des enfants petits, nous permettent de voir comment se construisent peu à peu des compétences pratiques micro-spatiales, puis méso-spatiales, les secondes s'appuyant sur les premières. L'énumération d'une collection nous est apparue un "bon" problème à étudier pour cela.

I. SITUATION FONDAMENTALE DE L'ENUMERATION¹ : LE JEU DES TIRELIRES.

A. Description :

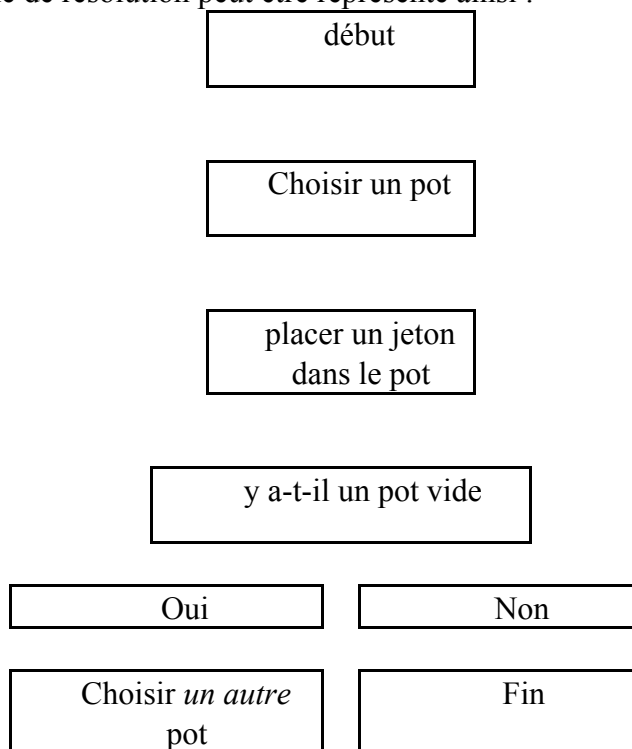
On dispose d'une collection de tirelires opaques; Il s'agit de placer un jeton et un seul dans chacune d'elles.

Le fait que les tirelires soient opaques empêche le contrôle visuel continu du déroulement de l'activité d'énumération : à chaque instant, on ne peut connaître, en jetant un coup d'oeil sur les tirelires, celles où il a été déposé quelque chose et celles où il n'a encore rien été déposé; autrement dit le problème est de pouvoir répondre à chaque instant à la question "qu'est-ce qui a été fait, qu'est-ce qui reste à faire?"

C'est ce contrôle qui est également difficile dans certaines situations de la vie courante, comme mettre du sucre dans une série de pots déjà remplis de liquide, ou distribuer des tracts dans des boites aux lettres. Nous tirons de cette remarque la caractéristique essentielle du processus d'énumération en situation courante : il nécessite une coordination de l'espace et du temps; l'espace est constitué par les objets à énumérer et leur environnement, et le temps est celui du déroulement de l'action d'énumération.

¹ Pour une étude plus générale, nous renvoyons à Brousseau (1986) "L'enseignement de l'énumération" p. 434-446

L'algorithme de résolution peut être représenté ainsi :



Les difficultés se situent au niveau du "encore" et du "un autre", dans la mesure où à chaque boucle, la collection des pots à explorer pour répondre à ces deux questions est modifiée.

B. Solutions du problème :

Quatre solutions différentes et spécifiques au problème sont possibles pour le résoudre, correspondant à des contraintes différentes :

1. Stratégie de base : S_0

Celle d'une énumération instantanée, acquise pour moins de 6 objets dont on a le contrôle visuel simultané.

2. 1ère stratégie : S_1

Doubler l'énumération d'une énumération "à visibilité constante", c'est à dire ici, marquer les pots au fur et à mesure de la distribution des jetons.

C'est la stratégie adoptée quand on distribue en plusieurs fois des documents à un groupe, dont on a la liste des noms, ou lorsqu'on dénombre avec possibilité de marquage une collection dessinée.

3. 2ème stratégie : S_2

Utiliser l'espace pour ponctuer le temps : Pour savoir s'il y a encore un pot vide, il suffit, au fur et à mesure, de différencier le pot plein des pots à remplir en le séparant de la collection de ces derniers, préalablement regroupés.

4. 3ème stratégie : S_3

Organiser l'espace selon une structure d'ordre total ou permettant la détermination facile d'au moins un ordre total préalablement à l'action, pour que la coordination spatio-temporelle soit plus facile et ne nécessite plus de déplacements : par exemple mise en ligne de tous les objets.

5. 4ème stratégie : S₄

Si on ne peut pas modifier l'espace des objets, ni le marquer, il faut alors pouvoir le structurer mentalement, par intervention de repères intérieurs ou extérieurs à la collection de tirelires, ou liés au repère corporel de celui qui remplit, permettant d'appliquer un ordre total sur la collection entière.

La stratégie dépend alors

- de la collection d'objets
- de l'espace environnant
- du rapport à l'espace du sujet énumérant
- des capacités du sujet à structurer la collection d'objets et l'espace, et à coordonner l'espace avec le temps.

Ces structurations peuvent rester strictement mentales ou devoir se traduire au niveau de représentation communicables.

C. Variables didactiques

Aider l'enfant dans sa maîtrise de l'énumération, c'est lui permettre de savoir choisir, parmi ces différents moyens, celui qui est le plus adapté à la tâche qu'il a à réaliser.

La quatrième stratégie, par exemple, est beaucoup moins fiable que la première, car elle nécessite la gestion continue d'un grand nombre d'informations. Aussi, il est dommage de voir des enfants de 10 ans ignorer que le marquage est un moyen efficace d'énumération, à utiliser chaque fois que l'on peut.

Quelles sont donc les variables qui peuvent déterminer le choix de telle ou telle stratégie?

1.- Variable 1 : Utilisation possible ou non du marquage

Elle correspond aux situations où le marquage est possible et à celles où il ne l'est pas. Il est difficile de trouver une caractéristique commune à ces situations, autre que cette possibilité ou impossibilité.

On peut dire toutefois que les situations sur supports papiers y sont plus favorables, mais d'autres cas sont possibles (par exemple pour faire l'inventaire dans des cas où on ne peut pas séparer les objets déjà inventoriés des autres).

2.- Variable 2 : Nombre d'objets de la collection

L'énumération de moins de 6 objets peut être gérée sans recourir à une structuration particulière de l'espace, du moins pour un adulte. Une collection plus nombreuse va nécessiter une structuration correspondant à l'une ou à plusieurs des stratégies présentées ci-dessus, selon les contraintes apportées à l'action.

3.- Variable 3 : Nature de l'espace; micro- ou méso-espace

Si le problème relève bien du micro-espace, (objets petits, déplaçables) la stratégie 2 est la plus efficace. Mais dans certains cas, la stratégie 2 peut être plus mal-commode que la stratégie 3 (par exemple dans le cas du sucre).

Par contre la stratégie 4 est seule possible pour un problème relevant du méso- ou du macro-espace, elle est possible mais moins fiable pour le micro-espace; elle peut être la seule possible dans le cas où les objets à énumérer, quoique petits, sont fixes.

Dans cette étude, nous avons bien entendu privilégié la variable spatiale, et nous représentons ci-dessous les effets des valeurs de variables choisies pour la situation en maternelle.

II. ORGANISATION DE L'EXPERIMENTATION

Cette étude a été faite dans une classe de 27 élèves de 4 ans en 87- 88.

Plusieurs situations d'énumération ont été proposées aux enfants, bâties autour d'un même jeu, mais sous deux habillages : le jeu des tire-lires, et le jeu du facteur.

Dans la forme "tire-lire", il s'agit pour l'enfant de placer un jeton et un seul dans chaque tire-lire d'une collection. Elles sont opaques : une fois le jeton à l'intérieur, il n'est plus visible.

Dans la forme "facteur", il s'agit de glisser une lettre et une seule dans chaque casier d'un meuble de rangement dont la structure est semblable à celle de l'ensemble des boîtes aux lettres d'un immeuble. rassemblées en tableau.

Selon les caractéristiques de la collection de boîtes (taille, disposition, possibilité ou non de les déplacer), l'action suppose un contrôle de type micro ou méso- spatial. Nous avons étudié 3 situations différentes :

A. La première correspond aux conditions micro-spatiales :

Devant l'enfant, sont disposées un tas de 20 boîtes d'allumettes percées d'un trou; à côté il dispose d'une autre boîte pleine d'allumettes. La consigne est de mettre une allumette et une seule dans chacune des boîtes. La stratégie attendue est de bien séparer au fur et à mesure de leur remplissage, les boîtes pleines des boîtes vides.

B. La deuxième correspond aux conditions méso-spatiales :

Un ensemble de 18 casiers, placés en 3 rangées superposées de 6 casiers chacune, de longueur totale 2,50 m. environ joue le rôle des boîtes aux lettres que l'enfant facteur doit remplir avec une lettre et une seule par boîte, lettre qu'il glisse par une fente telle qu'il ne peut pas voir ce qu'il y a dans chaque casier. La disposition des meubles est telle qu'il n'a pas accès d'emblée aux extrémités du meuble constitué par les casiers et que donc s'il le fait, c'est à la suite d'une décision de sa part. Les lettres sont dans une boîte posée sur un banc à côté des casiers.

Une stratégie adaptée aux conditions méso-spatiales de ce problème suppose de prendre des repères permettant de savoir à chaque instant quelles sont les boîtes déjà remplies et pour cela, le plus simple consiste à utiliser la structure quadrillée du meuble donc à se déplacer soit verticalement soit horizontalement, en commençant par une des extrémités du meuble et, en tenant la boîte contenant les lettres dans la main, à les prendre sans quitter des yeux les casiers.

C. Situation ayant des composantes micro- et méso-spatiales

Il s'agit toujours de mettre un objet et un seul dans chacune des boîtes d'un ensemble, mais cette fois ces boîtes sont petites, disposées en quadrillage, sous le contrôle de la vue, et indéplaçables. La stratégie efficace est la même que dans la situation précédente.

D. Tableau des stratégies

Situations Stratégies	Micro-spatiale Petits Objets libres A	Petits Objets indéplaçables après remplissage	Petits Objets indéplaçables C	Méso-spatiale B
Contrôle visuel non organisé S ₀	possible, mais peu fiable au delà de 6 objets	possible, mais peu fiable au delà de 6 objets	possible, mais peu fiable au delà de 6 objets	possible, mais peu fiable au delà de 6 objets
Marquage S ₁	possible dans certains cas	possible dans certains cas	possible dans certains cas	possible dans certains cas
Différenciation spatiale S ₂	favorable	bloquée	bloquée	bloquée
Organisation spatiale pré-établie S ₃	possible, moins fiable et plus rapide que S ₂	favorable	bloquée	bloquée
Repérage mental S ₄	possible	possible	nécessaire	nécessaire

E. Prédiction de résultats

Le tableau que nous avons fait nous permet d'avancer les hypothèses suivantes :

1. Situation A : boîtes et allumettes

Seules sont possibles S₀, S₂ et S₃. S₁, le marquage, est très improbable.

Avec 6 objets, les enfants peuvent peut-être réussir, sans séparer nettement les boîtes déjà remplies des autres, mais avec 20, si nous avons bien ciblé notre population, un certain nombre devrait échouer avec cette stratégie S₀, puis en changer au cours d'essais successifs, pour adopter la stratégie S₂.

2. Situation B : le jeu du facteur

Les stratégies S₀ et S₄ sont les seules possibles. Les conditions que nous avons choisies dans l'organisation de la situation ne permettent pas de réussir sans faire appel à une stratégie méso-spatiale, c'est-à-dire à une structuration mentale de l'ensemble des cases. On peut penser qu'un certain nombre d'élèves vont appréhender le problème avec une stratégie que nous rattachons à la stratégie micro-spatiale de base, en remplissant un ensemble de cases voisines, puis un autre etc... mais sans contrôler ce qui se passe à la frontière.

3. Situation C : boîtes et haricots

La stratégie gagnante est la même que pour la situation B. Nous avons proposé cette situation aux mêmes enfants, après le jeu du facteur. Peut-on s'attendre à ce que ceux qui

avaient élaboré cette stratégie dans la situation précédente la réinvestissent dès le premier essai? Nous ne le pensons pas, la composante micro-spatiale de l'action pouvant les inciter à utiliser un contrôle visuel non organisé. Au premier essai, nous devrions trouver moins d'enfants utilisant S_4 qu'après apprentissage dans la situation B.

III. DEROULEMENT ET RESULTATS DE L'EXPERIMENTATION :

Les différentes activités ont été proposées à 27 enfants entre 4 et 5 ans. C'est un atelier de la classe auquel les élèves passent les uns après les autres. Les autres enfants peuvent regarder, donner des conseils oraux à leur camarade. Autant que possible, aussitôt après un échec, l'enseignant incite l'enfant à faire un nouvel essai.

A. Situation A,

7 enfants ont échoué au premier essai avec 6 boîtes, mais réussi au deuxième. La moitié d'entre eux ont rangé les boîtes au fur et à mesure qu'ils les remplissaient en lignes en colonnes ou en hauteur ; 6 les séparaient en deux tas, et sept ont réussi sans que nous puissions discerner une stratégie apparente.

Avec 20 boîtes, 10 enfants échouent au premier essai : 3 de ceux qui avaient échoué avec 6 boîtes et six autres dont certains avaient pourtant utilisé des rangements élaborés. Il y a donc une régression pour quelques-uns, mais dès le deuxième essai, 4 maîtrisent l'organisation la plupart par rangement, deux enfants seulement échouent encore au troisième essai.

Nous avons observé un comportement non prévu mais tout-à-fait caractéristique de la problématique pratique : plusieurs enfants ne sachant plus si la boîte qu'ils prenaient était bien vide, la secouaient pour entendre le bruit de l'allumette contre les parois. Cette procédure ne permet pas de réussir si les boîtes sont à nouveau mélangées, mais elle est le signe d'une bonne compréhension du problème.

B. Situation B : Le jeu du facteur

La réussite dépend de la maîtrise de deux paramètres : d'une part, comme nous l'avons dit, de l'organisation spatiale de la distribution, mais aussi de la façon dont l'enfant prend les lettres dans leur boîte : s'il les laisse sur le banc et vient les chercher une à une ou par paquets, une bonne organisation spatiale peut s'avérer insuffisante.

Comme nous nous y attendions, sur les 24 enfants ayant une bonne stratégie micro-spatiale à la fin de la situation précédente, dix seulement réussissent au premier essai, tous en distribuant les cartes par lignes ou par colonnes, 9 d'entre eux en prenant la boîte des lettres dans la main. Un autre enfant, en échec dans le jeu des allumettes, réussit du premier coup, avec cette stratégie.

Parmi les 15 qui échouent, 9 procèdent en remplissant des blocs proches d'eux mais sans contrôler le raccordement de ces différents blocs, ou par lignes et colonnes mais en commençant au milieu du panneau ou sans prendre la boîte dans les mains. Au deuxième essai, 9 de ces enfants réussissent, tous ont adopté la stratégie gagnante. C'est le cas de 4 autres au troisième essai.

Après le 4ème essai, 4 enfants n'ont toujours pas réussi. par inorganisation de leur distribution, et 2 n'ont pu faire que deux essais.

C. Situation C,

13 enfants réussissent au premier essai, la difficulté pour les autres est de contrôler là où ils en sont quand ils viennent de piocher un haricot en ayant quitté des yeux l'ensemble des tire-lires. La plupart d'entre eux utilisent la structure quadrillée. Au 2ème essai, les progrès sont plus rapides que dans la situation précédente, (qui s'est déroulée auparavant)

IV. INTERPRETATION ET CONCLUSIONS

En résumé, nous pouvons dire que, à 4 ans, presque tous les enfants maîtrisent convenablement un problème d'énumération posé dans des conditions micro-spatiales, mais que ce même problème posé dans des conditions méso-spatiales est pour eux nettement plus difficile, même si la majorité d'entre eux est capable de construire une stratégie adaptée par la prise en compte des repères (type ligne-colonne) suggérés par la situation elle-même.

Nous avons mis en évidence l'existence de plusieurs stratégies, dont l'attribution théoriquement prévue aux conditions spatiales s'est vérifiée. Nous pouvons donc parler de conceptions spatiales du repérage, différentes, investies dans les situations d'énumération.

Enfin, l'ensemble de ces activités nous paraît constituer une base enrichissante pour l'apprentissage conjoint de l'énumération et du repérage; d'autres formes de jeu pourraient être développées, par exemple le jeu du facteur dans tout le territoire de l'école où seraient disposées une série de boîtes aux lettres, ou le jeu des allumettes avec des boîtes que l'enfant serait libre d'organiser comme il voudrait avant de les remplir mais auxquelles il ne pourrait plus toucher après.

CHAPITRE C-6

L'ENSEIGNEMENT DES ANGLES AU C.M., ETUDE PREALABLE

I. PERSPECTIVE GENERALE

Notre objectif est double :

- développer une ingénierie permettant la construction des concepts spatio-géométriques par l'élève comme des connaissances nécessaires au contrôle des situations spatiales puis comme savoirs du domaine mathématique appelé géométrie.

- utiliser les résultats de l'observation lors de la mise en oeuvre de l'ingénierie dans divers buts :

- * étudier les difficultés des élèves dans des conditions plus propices à leur observation et à leur analyse que la simple passation d'un test.

- * éprouver l'hypothèse qu'une partie au moins des difficultés attestées est d'origine didactique en montrant qu'un autre enseignement permet de les éviter ou de les surmonter.

- * déterminer les connaissances spatiales nécessaires à la maîtrise de ces concepts.

II. LE CHOIX DU SUJET

A. motivations d'enseignement

1. L'angle, objet actuel de l'enseignement de la géométrie :

L'enseignement des angles comme concepts géométriques est préparé à l'école élémentaire par la pratique des reports de figures par gabarits et, en 6ème et 5ème, par l'usage d'instruments de dessin à l'occasion de reproduction de figures planes simples.

Dans les programmes du collège de 1985, les angles retrouvent la place (importante) qu'ils occupaient dans les programmes d'avant 1970 et en plus celle (moderne) d'invariants dans les transformations.

Or, à l'occasion des stages de formation continue, les enseignants de 6ème et 5ème désignent encore cette notion comme ne "passant" pas auprès des élèves.

2. Les difficultés de l'enseignement des angles

Berdonneau (1980), puis Balacheff (1984) ont pointé l'existence d'une conception erronée de l'angle, résistante à l'enseignement usuel :

a) attestée par les manuels

Cette conception est attestée par certains ouvrages anciens d'enseignement de la géométrie : Tout de suite après avoir donné la définition de l'angle, les auteurs insistent sur le fait que l'angle est indépendant de la longueur des côtés¹ qui le déterminent.

Ainsi, dans un manuel de CM de 1968, deux activités de la première leçon sur les angles consistent à comparer d'abord deux angles de longueurs de côtés très différentes et à

¹ Par exemple : "La grandeur d'un angle dépend de leur écartement et non de la longueur des côtés" (Cours de géométrie Alcan, 1910) Cité par C.Berdonneau (1981) p. 215-224

conclure à leur égalité après décalquage et report d'un angle sur l'autre, puis de deux angles de même longueur de côtés et à conclure à leur inégalité.

b) attestées par des questionnaires

Cette conception est aussi attestée par des résultats d'élèves : Balacheff cite ceux de Giles (1981) et de Close (1982) et conclut :

"l'angle est conçu comme la donnée de deux segments ayant une extrémité commune et des supports distincts". "Avec une telle conception, deux figures qui diffèrent par la seule longueur des segments qui les constituent apparaissent comme représentant deux angles différents".

Balacheff fait l'hypothèse qu'une partie importante des élèves de cinquième n'a pas encore rejeté cette conception de l'angle.

c) les résultats de Close

Nous avons repris les résultats de Close qui nous semblent faire apparaître une autre difficulté. L'explication que nous en donnons précise et étend la formulation de Balacheff.

Parmi les items proposés par cet auteur à 87 enfants de 6ème avant un nouvel enseignement sur les angles, trois concernent la comparaison de paires d'angles égaux mais de longueurs de côtés différentes²; tous donnent comme résultat que la réponse erronée correspondant à l'angle ayant soit un, soit les deux côtés les plus longs est fournie par plus du tiers des élèves qui répondent à la question³ (soit une vingtaine sur 65), et que le cinquième d'entre eux ont un comportement stable sur les trois items. (Annexe 1).

Un autre item est nettement mieux réussi mais il est intéressant d'examiner la réponse erronée significativement la plus fréquente : Cet item concerne la détermination du plus grand de quatre angles saillants dont les côtés sont de même longueur : le plus grand est un angle obtus (c) d'environ 150 degrés. Si l'on compare les aires des triangles qui s'appuient sur les segments limitant les côtés de ces angles, la plus petite est celle correspondant à cet angle obtus et la plus grande, celle correspondant à un angle proche d'un droit (b). 12 élèves sur les 81 qui répondent donnent la réponse (b), la plupart d'entre eux sont parmi les élèves qui ont le score le plus faible pour l'ensemble du questionnaire, avec beaucoup de non-réponses. Contrairement à Close qui attribue cette erreur à la difficulté de comparer mentalement b et c, nous l'attribuons à la prise en compte de la place occupée par "l'intérieur" de la figure, manifestement plus grande pour b que pour c. (Annexe 2)

Nous faisons l'hypothèse que ces deux conceptions erronées de l'angle, qui n'apparaissent d'ailleurs pas chez les mêmes élèves, relèvent de la conception micro-spatiale de l'espace et sont la conséquence de l'association du mot "angle" avec une figure que l'élève assimile à un objet. La deuxième conception serait plus rudimentaire que la première, la plupart des élèves qui font cette réponse n'en fournissent pas pour les trois autres items. Par contre, des enfants qui se trompent dans la comparaison d'angles de longueurs de côtés différentes ne le font pas quand les côtés sont de même longueur.

L'étude des résultats à un autre item peut nous conforter dans cette interprétation : Il s'agit toujours de comparer deux angles pour répondre à la consigne indiquée à la note (3), cette fois, les tracés sont identiques, les côtés parallèles deux à deux, la seule différence concerne le morceau d'arc conventionnellement attaché à la représentation d'un angle. Sur l'un

² Le quart des élèves ne répondent pas à ces questions aussi le taux de réussite est-il d'environ 40 %.

³ La consigne est la suivante: "Which angle is BIGGER or are they ABOUT THE SAME SIZE?"

des deux, son rayon est petit et conforme à toutes les représentations du questionnaire, sur l'autre, le rayon est nettement plus grand. Sur les 67 élèves qui répondent, 33 tombent dans le piège et déclarent le second plus grand. Comment interpréter ces résultats? Nous voyons deux explications possibles : les enfants, qui devaient répondre "à l'oeil", ont interprété l'arc comme un symbole délivrant un message sur la taille effective de l'angle, ou bien ils ont repéré sur la deuxième figure un caractère permettant de lui attribuer la propriété "plus grande", montrant par là que, même pour ceux qui avaient donné une bonne réponse dans les autres items cités, la lecture micro-spatiale de la figure réapparaissait face à une question non conforme au contrat didactique usuel.

d) Résultats de EVAPM6 1987

La comparaison des résultats de deux items assez proches nous paraît apporter des informations sur d'autres difficultés que rencontrent les élèves. (Annexe 3)

Il s'agit du tracé de la bissectrice d'un angle dans deux conditions différentes :

* l'angle est représenté par deux segments de même origine : la réussite est alors de 69% (Item EXA18)

* il s'agit de l'angle BAC d'un triangle : la réussite est de 28%, il y a 25% de non-réponses et voici comment les auteurs décrivent les autres réponses : "nombre de dessins traitent d'un autre angle que celui qui est demandé, habituellement le plus grand angle : B, sans d'ailleurs, en général, donner sa bissectrice. Le tracé est souvent celui d'une demi-droite issue de B non identifiable avec une hauteur ou une médiane. (Item EXC4)

Dans les deux items, l'orientation et la taille de l'angle sont similaires.

Ce résultat nous incite à penser que ce qui est en cause est davantage le concept d'angle que celui de bissectrice. Près des trois-quarts des élèves ont beaucoup de mal à lui donner du sens quand il n'est pas présenté sous sa forme "primitive", c'est-à-dire scolaire, et à être capable de le reconnaître comme sous-figure d'une autre figure.

e) Résultats de EVAPM5 88

Nous retrouvons cette même difficulté à propos de l'item C26 (Annexe 4), où il faut reproduire un parallélogramme dessiné en utilisant un angle déjà tracé. 55% des élèves réussissent, mais une des erreurs les plus fréquentes est la suivante : "Les demi-droites déjà tracées ont souvent été prises comme les côtés du nouveau parallélogramme qui, lorsqu'il est tracé correctement n'a cependant pas les mêmes mesures que celui donné". Ceci atteste que la conception d'un angle comme paire de segments de même origine demeure pour certains enfants en fin de 5ème et qu'elle n'est pas remise en cause spontanément dans un exercice où elle produit une réponse contradictoire avec d'autres données du problème.

f) Conclusion

L'apprentissage de la notion d'angle rencontre donc des difficultés, que nous nous proposons d'étudier. Nous allons préciser maintenant de quel point de vue.

B. motivations théoriques

Les difficultés évoquées ci-dessus sont persistantes, elles résistent à l'enseignement usuel. Relèvent-elles d'obstacles cognitifs, et si oui de quel type?

Pour répondre à cette question, il nous faut examiner les conditions proposées par Duroux (1982) permettant de distinguer un obstacle d'une simple difficulté.

* "un obstacle est une connaissance, qui produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.

* Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.

* De plus cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure.

* Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre."

1. La conception de l'angle comme paire de segments de même origine peut-elle être considérée comme un obstacle cognitif?

Nous avons des éléments de réponse positifs pour les quatre premiers points, nous permettant de conclure que cette conception constitue bien un obstacle cognitif.

Parmi ces obstacles, Brousseau (1989) distingue les obstacles d'origine ontogénétique, ceux d'origine didactique, et ceux d'origine épistémologique historique.

2. Examen de l'origine possible de cet obstacle

a) origine ontogénétique

Les données de l'épistémologie génétique⁴ nous permettent de réfuter le caractère ontogénétique de cet obstacle pour des enfants de 11 ans.

Piaget (1948) a étudié la question dans le contexte de reproduction de tracés sur une feuille de papier, report de l'inclinaison d'une ligne sur une autre, parallèle à la ligne des épaules du sujet.

Conclusion : Dès le stade III B (9 ans), les enfants sont capables de désigner dans leur vocabulaire l'inclinaison d'une ligne sur l'autre, de reproduire cette inclinaison en tâtonnant et de réussir par mesure des longueurs de segments non tracés.

Ils disposent donc, dès cet âge, des schèmes leur permettant de servir de supports à l'apprentissage d'une notion élémentaire d'angle géométrique.

b) Origine épistémologique

Quoique, sur le plan de l'histoire, comme nous le verrons ultérieurement, la notion d'angle n'ait été élaborée que tardivement par les grecs, nous n'avons pas d'indice montrant l'existence historique de la conception que nous étudions.

c) Origine didactique

Dans notre travail sur les conceptions de l'espace, nous avons montré que la conception micro-spatiale est activée par un certain type de rapport du sujet à l'espace : celui lié à la manipulation des petits objets, avec une possibilité de contrôle visuel de l'espace d'action constant et "d'un seul coup d'oeil".

Interrogeons-nous sur le type de rapport à l'espace qui est développé dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, et en particulier en ce qui concerne l'approche de la notion d'angle :

⁴ Piaget J. Inhelder B. et Szeminska A. (1948), chapitre VII et VIII pp213-256

Comme nous le montrons dans deux analyses de séquences d'introduction des angles, l'une pour le CM1, l'autre pour la 6ème⁵, ce concept est présenté en tant qu'objet de l'espace graphique déterminé par la feuille de papier.

L'analyse des rapports spatiaux avec cet espace, faite au chapitre C 4, montre que certains caractères micro-spatiaux sont prégnants : la conception des "figures-dessins" comme des objets soumis au même type de reconnaissance et de traitement que les objets du micro-espace mais avec davantage de contraintes puisque ces objets graphiques ne sont pas déplaçables.

Introduire l'angle comme un objet de l'espace graphique va donc avoir des conséquences spécifiques : La notion a toute chance d'hériter des propriétés principales des objets, et en particulier de leur caractère "fini". Or, contrairement à la plupart des "figures" élémentaires de la géométrie, l'angle n'a pas de représentation matérielle convenable sous forme d'une partie de l'espace dont l'étendue soit de dimension finie.

Nous faisons donc l'hypothèse que l'obstacle cognitif que nous avons repéré ci-dessus a une origine didactique, lié à la conception micro-spatiale activée par son enseignement ostensif.

Nous nous proposons de valider cette hypothèse en construisant et en éprouvant par l'expérimentation un processus d'enseignement alternatif permettant aux élèves de surmonter cet obstacle.

III. PRESENTATION DU PLAN DE L'ETUDE

Nous avons exposé, dans la partie précédente les objectifs de cette recherche. Comme le précise Artigue (1990), la méthodologie d'ingénierie peut être découpée en quatre phases, qui, même si elles ne correspondent pas à la chronologie exacte de la recherche, permettent d'en rendre compte de manière satisfaisante pour le lecteur.

A. La première phase

Elle est constituée des analyses préalables, qui peuvent recouvrir l'analyse du savoir à enseigner, l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets, celle des conceptions des élèves et enfin celle "du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective".

Dans la partie précédente, nous avons exposé des éléments qui nous apparaissent suffisants pour les deuxième et troisième types d'analyses⁶, nous n'y reviendrons pas. Par contre, nous présenterons dans la partie suivante quelques rappels concernant le savoir "angles", ainsi que le cadre institutionnel qui définit certaines contraintes de notre travail.

B. La deuxième phase

C'est la phase de conception et d'analyse à priori. C'est la recherche d'une situation fondamentale qui guidera notre travail, dont les résultats seront exposés dans ce chapitre.

C. La troisième phase

C'est celle de l'expérimentation. Ayant été conduits à élaborer deux processus d'enseignement différents, nous les présentons successivement dans deux chapitres distincts, le chapitre C 7 et le chapitre C 8.

⁵ voir annexe n°5 et n° 6

⁶ notamment l'analyse de l'enseignement ostensif en B 5 et celle des conceptions spatiales spontanées en B 4.

D. La quatrième phase

C'est la phase de l'analyse à posteriori et de l'évaluation.

Elle prend place à la suite de chaque expérimentation, donc dans les chapitres 7 et 8.

IV. ANALYSES PREALABLES COMPLEMENTAIRES

A. Repères mathématiques .

1. Repères, non destinés spécialement aux enseignants

a) *l'Encyclopaedia Universalis,*

L'angle ne fait pas l'objet d'un article, mais renvoie à l'article "Groupes" où il est montré que peuvent être identifiés : rotations planes (définies comme sous-groupe des transformations orthogonales sur un R-espace vectoriel de dimension 2) et groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On y appelle "groupe des angles" un groupe qui leur est isomorphe. Les angles sont ensuite étendus aux géométries non euclidiennes.

b) *Le dictionnaire des mathématiques de Bouvier et Georges (1983)*

Destiné à des utilisateurs des mathématiques, il ne repère pas moins de 22 notions distinctes, chacune associée à un domaine mathématique plus ou moins large. Certes, ces notions ne sont pas sans lien entre elles, mais cette diversité montre que le concept d'angle, y compris au sein des mathématiques, n'est pas univoque. Ceci est une source de problèmes pour son enseignement.

2. Les références professionnelles des enseignants de mathématiques

L'étude de l'évolution de la transposition didactique de la notion d'angle, en rapport avec les réformes de l'enseignement de la géométrie depuis 1960 reste à faire. L'enseignement de cette notion est sans doute celui qui a été le plus bouleversé par l'insertion, à partir de la quatrième, de la géométrie "traditionnelle" dans le cadre algébrique, comme le demandaient un certain nombre de mathématiciens.

a) *L'analyse de Balacheff(1988) :*

Dans sa thèse, Balacheff (1988)⁷ fait une revue des principales définitions des angles, telles qu'elles sont apparues dans l'histoire. Il distingue :

- "l'angle, inclinaison d'une droite sur une autre" (l'angle d'Euclide).
- "l'angle, figure formée par deux demi-droites" (Formulation de Legendre, reprise de manière plus précise par Hilbert qui remplace l'expression "figure formée par" par "ensemble de").
- "l'angle, région du plan" correspondant aux notions de pinceau ou partie du plan.
- "l'angle, rotation". Heath (1956) suggère que Carpus d'Antioche en serait un précurseur et souligne que presque tous les auteurs qui font appel à une autre définition, désignent la nature essentielle d'un angle comme relevant de la rotation.

Pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur au texte de Balacheff. Par contre, nous citerons rapidement quelques documents intermédiaires entre les mathématiques savantes et les livres d'élèves qui selon nous sont significatifs de l'évolution des références des enseignants entre les années 60 et aujourd'hui.

⁷ tome 2 p. 367 à 370.

b) Document 1 : l'imbroglia des angles(1966)⁸

Ceci est le titre, bien parlant, de la première émission d'un cycle de formation des professeurs par la télévision scolaire, formation assurée par des universitaires militant à l'Association des Professeurs de Mathématiques.

Leur objectif est clairement exprimé dans l'avant-propos du document d'accompagnement : "Les émissions du premier trimestre (au nombre de neuf) sont consacrées à l'épineuse question des angles. Leur ambition est ...de montrer que l'étude de la géométrie fondée sur la structure d'espace vectoriel en permet un exposé qui est rigoureux, sans que la signification concrète soit le moins du monde perdue, ...".

Dans la première émission, les auteurs considèrent :

- qu'il faut distinguer les notions d'angles selon les structures mathématiques sous-jacentes à leur fonctionnement et à celui des mesures qui peuvent y être définies.

- que l'on peut regrouper les diverses acceptions du mot angle autour de trois d'entre elles : le secteur angulaire (correspondant à l'expérience du champ visuel, de l'angle de tir), l'angle de rotation ("que l'on rencontre dans la pratique lorsqu'on parle du changement de cap ou d'un changement de direction pour un véhicule"), et l'angle cinématique ("qui intervient dans des expressions telles que le moteur tourne à 4000 tours-minute.").

1) secteur angulaire :

ou l'angle comme ensemble de points ou de demi-droites.

La structure ensembliste de complémentaire d'un ensemble fait ressortir le couple angle saillant-angle rentrant (aux côtés près).

La mesure des secteurs angulaires se définit suivant un processus comparable à celui des longueurs ou des aires. Elle permet d'associer à tout secteur un nombre réel positif qui varie entre 0 et 2π radians.

2) l'angle de rotation :

ou angle d'un couple de demi-droites.

La référence est celle du groupe des isométries directes, lui même construit à partir des applications linéaires de \mathbb{R}^2 laissant invariantes le produit scalaire.

Les auteurs soulignent que la mesure des angles qu'on y définit n'est pas une "mesure" au sens habituel, une application d'un ensemble d'angles (muni d'une structure) dans \mathbb{R} , mais l'inverse : une application de \mathbb{R} ou d'une de ses parties sur l'ensemble des angles.

La "mesure" d'un angle de rotation est déterminée sur un intervalle de \mathbb{R} , d'amplitude 2π radians.

3) l'angle cinématique

Son étude est rattachée à celle de la mesure-des-angles⁹.

La "mesure" d'un angle cinématique, est un nombre réel quelconque.

Dans la dernière émission, "La place des angles dans l'enseignement du second degré", les auteurs proposent de :

- ne pas parler indistinctement d'angles, mais de préciser : secteur angulaire, angle de rotation, angle cinématique

⁸ Revuz, Balibar, Dehame, Fort,(1966) Chantiers mathématiques, information des professeurs 1er et 2e cycles, émission de la Télévison scolaire, .

⁹ les auteurs utilisent des tirets pour signaler qu'il ne s'agit pas d'une "vraie" mesure

- réduire l'importance accordée aux secteurs angulaires "notion qui a plus d'importance en analyse qu'en géométrie"

Ils recommandent l'approche par la rotation qui permet d'élaborer successivement : rotations, trigonométrie, propriétés élémentaires des angles (division par 2, angles plats et droits), sans faire appel encore à la mesure des angles. Ces notions peuvent être "traitées avec une rigueur propre à satisfaire les plus difficiles, sans que la référence à la signification pratique et intuitive des notions étudiées soit pour autant minimisée." . Ils notent : "Dans le proche avenir de l'enseignement des angles, c'est l'angle de rotation qui doit être considéré comme la notion importante."

Enfin, ils soulignent la rupture entre les questions précédentes et celles de mesure des angles en ce qui concerne la rigueur avec laquelle on peut les traiter et concluent : "Comme il paraît impossible de ne pas introduire aussi, dans les dernières classes du second degré, la "mesure-des-angles"..." à cause de son importance pratique"... on n'écartera pas la question de la mesure, mais on expliquera honnêtement le degré de rigueur avec lequel on la traite...après tout le reste."

c) Document 2 : MOTS APMEP.

Ce second document est une sorte de dictionnaire de l'usage des mots et notions, fait pour aider les enseignants à utiliser au mieux les manuels.

Les auteurs de ceux-ci ont essayé de traduire dans les faits (d'enseignement), l'appel des mathématiciens à la rigueur dans le langage, avec plus ou moins de bonheur. Ils ont dû pour cela formaliser des objets intermédiaires nécessaires à la transposition didactique envisagée¹⁰.

1) MOTS V (1980)

La brochure se réfère aux programmes de 1968 (6ème-5ème) et 1971 (4ème-3ème) pour le premier cycle, et à l'inflation du vocabulaire et des notations qui s'en est suivie dans les manuels.

Elle distingue pour ce qui relève des angles plans :

- les "*secteurs*", parties du plan.
- les "*angles de secteurs*", classes de secteurs isométriques. Ils sont représentés par des secteurs particuliers. Les termes de sommet, et de côtés n'ont de sens que pour les secteurs, pas pour les angles de secteurs qui "ne sont pas des ensembles de points".

"Le choix d'un angle de secteurs unité permet d'associer à chaque secteur un nombre qui le mesure."

Les théorèmes classiques sur les propriétés angulaires des polygones peuvent s'exprimer facilement et avec rigueur en terme d'angles de secteurs; par exemple : "La somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat."

- les "*angles de paires de demi-droites*", définies par quotient sur l'ensemble des paires de demi-droites du plan ou de l'espace. Il existe une bijection entre les angles de secteurs saillants et les angles de paires de demi-droites.

La brochure souligne l'inutilité de la notion d'écart angulaire, introduite par les programmes de 1971 pour remplacer la mesure de l'angle de demi-droites, la lourdeur et les abus de langage qui s'en sont suivis, et recommande un "charitable oubli" de ce terme.

Deux sortes de bissectrices peuvent être définies :

¹⁰ voir Berdonneau (1981) p. 221-224

- la bissectrice d'un secteur; c'est une demi-droite.
- la bissectrice d'une paire de demi-droites de même origine : c'est une droite.

Le concept d'angle de couple de demi-droites n'est pas examiné, relevant de l'enseignement du second cycle.

2) MOTS VII (1984)

Cette brochure complète la précédente au niveau du second cycle de l'enseignement secondaire par une présentation :

- de l'angle de couples de demi-droites;
- du phasage d'un angle de couple de demi-droites : permettant de compléter la caractérisation (par un angle de couple de demi-droites) de la position d'un mobile en rotation autour d'un cercle par la phase;
- des relations existant entre les différents types d'angles.

Il y est jugé périlleux de définir le mot d'angle, indépendamment de son contexte, dans une rubrique unique.

Les trois catégories maintenues comme pertinentes sont les angles de secteurs, de couples, et cinématiques.

d) Remarques

Nous pouvons constater que ni les angles de secteurs ni ceux de paires de demi-droites ne figurent dans le document 1 de 66, et que par contre, MOTS 84 retient comme importants, pour les élèves de lycée, les mêmes concepts que ceux exposés dans ce document.

Les concepts d'*angles de secteurs* et d'*angles de paires de demi-droites* apparaissent comme des constructions destinées à assurer une certaine rigueur à l'enseignement du collège.

B. Les programmes de l'Ecole Primaire¹¹ et de 6ème-5ème : Evolution et état actuel

1. Programmes de 1970 (E.P) et 1968 (6ème-5ème)

C'est l'époque de la rigueur : il vaut mieux ne rien enseigner que quelque chose qui risque de se révéler faux : ni angle ni secteur à l'école primaire, seulement le secteur angulaire en 6ème, sans qu'il soit question de sa mesure.

2. Programmes de 1978-80 (E.P.) et 1977 (6ème-5ème)

Dans la partie "Vocabulaire de la géométrie plane", apparaissent en 6ème : secteur angulaire et unités usuelles d'angle.

Pour le CM, sont signalés dans les programmes, "reporter un angle" (comme moyen pour reproduire une figure par exemple), et dans les commentaires, un exemple d'activité portant sur un secteur angulaire.

3. Programmes de 1985 (E.P.), 1986 (6ème-5ème)

En 6ème, le terme d'angle n'apparaît dans les programmes qu'en relation avec la symétrie dans la "mise en évidence de la conservation des angles".

Les compétences exigibles le concernant sont au nombre de trois : *Reproduire un angle. Utiliser correctement, dans une situation donnée, le terme d'angle. Construire la bissectrice d'un angle.*

¹¹ que nous désignerons par E.P.

En 5ème, les programmes comportent les points suivants :

- Mise en évidence de la conservation des angles à propos de la symétrie centrale;*
- Caractérisations angulaires du parallélisme*
- Triangle : somme des angles;*

A propos de chacun de ces points, des compétences exigibles sont précisées.

Dans le programme du CM, l'angle apparaît dans la rubrique "formation des concepts de longueur, etc.." La compétence attendue est la suivante : *Reproduire des angles avec calque, gabarit ou compas.*

4. Remarques

* Nous voyons que le concept de secteur angulaire n'a eu qu'une assez brève existence en 6ème-5ème, de 68 à 86. En effet, en dehors "d'être prétexte à des exercices sur la notion d'ensemble convexe"¹², il n'est pas vraiment opératoire pour la géométrie enseignée à l'école primaire et en 6ème-5ème. C'est la notion d'angle de secteurs qui l'est (comme un des outils possibles dans la reproduction de figures, dans la conservation des angles par symétrie, etc..et comme étape vers la mesure des secteurs). C'est pourquoi le choix fait pour le CM en 85 se comprendrait si l'angle désignait une grandeur attachée à une famille d'objets précisée. Mais il ne semble pas être question de secteur angulaire. D'autre part, des incohérences apparaissent à propos de la bissectrice par exemple, (dans les programmes de 6ème de 86 puisque secteurs et angles ne sont pas différenciés, à la différence de ce qui est dit dans les commentaires de 80 pour le CM), et surtout, aucune indication n'est donnée aux enseignants quant à la construction de ce concept d'angle (de secteur). Pour les tenants de la rigueur, le risque est grand de retomber "dans la confusion qui n'a que trop régné dans la question des angles"¹³, en particulier dans la non-distinction entre un angle et sa mesure. Nous renvoyons d'ailleurs, sur ce point également, aux deux leçons que nous avons étudiées¹⁴.

Nous pouvons en particulier nous poser la question : Peut-on faire l'économie de l'opération de passage au quotient qui permet de *définir l'égalité de deux angles?*

* L'angle comme moyen de rendre compte des rotations n'est pas pris en compte.

* Les conseils des réformateurs, de distinguer par des termes différents des concepts différents, paraissent bien oubliés : Tout au long du collège, seul le terme d'angle est utilisé. L'angle de paire de demi-droites présent en 3ème en 71 et en 78 (sous des noms différents!) a lui aussi sombré. Pourtant, à partir de la cinquième, l'élève sera amené à utiliser les caractérisations angulaires du parallélisme dans des démonstrations. C'est le modèle "angle de paire de demi-droites" qui est pertinent pour cela.

* Enfin, nous n'avons plus trouvé de trace, dans les documents pédagogiques destinés aux professeurs (les Suivis Scientifiques des IREM par exemple), des préoccupations "mathématiques" de ceux que nous venons d'examiner. "L'épineuse question des angles"¹⁵ n'est plus à l'ordre du jour, cela ne veut sans doute pas dire qu'il n'y a plus de problème.

V. ELABORATION DU PROCESSUS

A. Les contraintes institutionnelles

¹² Chantiers mathématiques, émission n° 9

¹³ ibidem

¹⁴ Voir annexes n°5 et n°6

¹⁵ Chantiers mathématiques, émission n° 9

Le processus que nous mettons à l'épreuve doit pouvoir être réalisé dans une classe d'élèves de 10 à 12 ans, dans des conditions scolaires à peu près ordinaires.

B. Introduction

Rappelons que notre objectif est de développer une ingénierie permettant la construction des concepts spatio-géométriques par l'élève comme des connaissances nécessaires au contrôle des situations spatiales puis comme savoirs du domaine mathématique appelé géométrie. Comme le dit Bessot(1988)¹⁶, "le problème du sens de la connaissance construite par l'élève est central à la fois comme enjeu de l'enseignement et comme objet d'étude didactique des processus didactiques."

"Nous caractériserons le sens d'un savoir mathématique par un ensemble de problèmes culturels pour lesquels le savoir concerné par le projet d'enseignement, est indispensable pour obtenir une solution. C'est l'organisation de cet ensemble de problèmes qui est essentielle : nous utilisons le terme de situation fondamentale de Guy Brousseau pour désigner cette organisation."

C. A la recherche d'une situation fondamentale

Nous allons passer en revue l'ensemble des pratiques de référence dont nous pensons qu'elles peuvent être à la source ou utiliser des conceptions des angles. Nous commencerons par l'examen des données historiques qui pourraient nous permettre de repérer une ou des situations ayant conduit à la conceptualisation de l'un ou l'autre des aspects de la notion d'angle.

1. Données historiques sur l'émergence du concept

La genèse historique de la notion d'angle est, à notre connaissance, encore mal déterminée, et particulièrement dans son rapport aux problèmes spatiaux que les hommes se sont posés dès l'aube des civilisations.

Très tôt on trouve trace de problèmes de repérage de directions que nous résoudre par les angles, problèmes de repérage dans les déplacements, de détermination d'invariants astronomiques ou de détermination d'inclinaison de surfaces. Cependant, d'après Itard(1964), comme d'après Szabo et Maula (1986), dans l'état actuel de la recherche historique, on n'a pas plus trouvé trace de la notion d'angle chez les Babyloniens que chez les Egyptiens ou d'autres civilisations antiques.

Les Egyptiens par exemple ont laissé des documents montrant qu'ils utilisaient les notions d'inclinaison de surface, de pente, hauteur, d'écartement, qui paraissent bien n'être que des notions auxiliaires destinées à faire face à l'absence du concept d'angle. On ne trouve pas trace chez eux de mesure d'angles, mais des relations de pratiques de mesure des deux côtés de l'angle d'un triangle rectangle, mesures qui d'ailleurs ne sont pas exprimées par la même unité (paumes et coudées). Ces pratiques ont sans doute constitué des étapes vers l'élaboration des rapports trigonométriques.

Selon Szabo et Maula¹⁷, c'est à Thalès (sixième siècle av. J.C.) que l'on fait remonter les plus anciennes propositions sur les angles".

¹⁶ Bessot A.(1988) "A propos de certains travaux du groupe français sur le thème "Espace, géométrie, graphisme scientifique et technique". Communication ICME 6 Budapest.

¹⁷ ibidem p 172

L'origine du concept d'angle serait-elle profondément liée au développement de la géométrie? Nous n'avons pas pour l'instant d'éléments pouvant appuyer une réponse à cette question.

L'élaboration du concept a sans doute permis une unification des connaissances astronomiques et géographiques de l'époque.

La connaissance historique dans le cas des angles n'est pas encore suffisamment élaborée pour nous fournir de modèle interne aux mathématiques sur lequel nous pourrions faire porter notre analyse afin de déterminer le faisceau de contraintes, internes ou non à la connaissance, qui aurait rendu les angles nécessaires.

2. Les différentes pratiques de références en relation avec une ou des conceptions des angles

Nous distinguerons 2 catégories : celles liées aux problèmes ordinaires de la vie courante, celles liées aux problèmes professionnels et nous essaierons de rattacher les conceptions de l'angle en jeu dans ces problèmes aux différentes définitions mathématiques que nous avons rappelées ci-dessus.

a) *Les pratiques de référence "ordinaires".*

Nous reprenons ici, à propos de ce concept, le travail fait au chapitre C 4 où nous avons examiné le rôle joué par les différents concepts dans la résolution des problèmes spatiaux de la vie courante.

1) **Problèmes micro-spatiaux :*

Les angles interviennent dans la reconnaissance des formes des objets, mais en tant que prédicat amalgamé. Ce sont les angles de secteurs qui sont comparés de manière implicite. Ils ne sont jamais désignés par le terme d'angle. Le terme approprié est "coin".

Les problèmes d'équilibre dans la superposition des objets amènent au repérage de la direction verticale; ils sont très tôt présents dans les jeux des enfants et ils les conduisent à ajuster la disposition des empilements par rapports à cette direction.

On ne peut pas considérer cette compétence acquise comme liée à une conception de l'angle, même limitée, mais comme une conception de direction privilégiée, qui est par ailleurs liée aussi au développement du schéma corporel.

2) **Problèmes méso-spatiaux :*

D'après Szabo et Maula , le mot angle trouve sa source en architecture. "L'angle est le coin inférieur formé par deux murs ou parois ($\gamma\omicron\nu\iota$ ¹⁸), l'angle droit désignant au sens premier du terme la manière habituelle dont deux murs se touchent"**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

Notons que c'est dans ce contexte qu'est utilisé le terme d'angle dans la langue ordinaire : "l'angle de la pièce", "à l'angle des deux rues", etc..Le mot désigne alors non un secteur angulaire mais un lieu défini par des caractéristiques topologiques plus ou moins précises. Par contre, l'usage du terme "d'angle mort" pour le réglage du rétroviseur d'une voiture, ou celui "d'angle de vue", ou celui "d'angle de tir" sur un terrain de foot renvoie bien au secteur angulaire.

¹⁸ Serres (1986) rappelle que " $\gamma\omicron\nu\iota$ est un coin, le pilier d'un pont, et surtout s'apparente à $\gamma\omicron\nu$, le genou". p.170

Nous avons vu que ni l'expérience courante des changements de direction du corps dans les déplacements ou de ceux de certains objets comme les portes (modélisables par les angles de rotation) ni celle des changements d'angles de vue (définissables en terme de secteurs angulaires) ne conduisaient à la nécessité d'une conceptualisation des angles. Les changements de direction au cours des déplacements, par exemple, fonctionnent comme des prédicats amalgamés²⁰ : Les mouvements de rotation et de translation sont simultanés, il n'est pas si aisé de décomposer un tel mouvement : les difficultés rencontrées par les adultes pour décrire le mouvement de la tortue LOGO pour qu'elle laisse une trace courbe, sont là pour l'attester.

3) *Problèmes macro-spatiaux :

On peut penser que la navigation antique comme le déplacement dans les régions polaires²¹ se trouvaient facilités lorsqu'il existait un vent fréquemment dominant de direction fixe. Ces déplacements s'effectuaient alors grâce (entre autres) à une estimation angulaire.

Dans notre société, du fait de la multiplication des déplacements, de leur importance sociale, l'espace de déplacement est contraint et signalisé. Nous n'avons pas souvent l'occasion de trouver notre chemin dans une forêt, encore moins de nous guider aux étoiles ou de faire le point. Pour indiquer son chemin à quelqu'un, il suffit de faire référence à l'ordre des points de repères, et à des valeurs approximatives de distances. Les informations angulaires concernent l'angle droit ou des indications de direction comme "la rue en biais". Dans la fabrication d'un plan destiné à guider quelqu'un, la prise en compte des angles est seulement approximative.

Aussi, c'est dans des espaces maintenant rarement rencontrés que la résolution des problèmes de déplacement conduit à utiliser le concept d'angle. C'est pour cela que nous rattachons aux pratiques professionnelles, les situations de :

- repérage des astres
 - parcours d'orientation à l'aide de la boussole.
 - détermination du "cap" en navigation
- qui toutes trois relèvent des angles de rotation dits aussi angles de couples de demi-droites.

b) Repérage de quelques pratiques professionnelles

1) * Les experts-géomètres :

mesurent des angles quand la mesure des distances ne leur est pas accessible (angles de couples de demi-droites).

2) * Les métiers de la navigation aérienne ou maritime

déterminent le "point" en reportant des angles sur des cartes.

3) * Dans certaines machines-outils,

le réglage de l'orientation de parties mobiles à la charge de l'utilisateur nécessite la détermination et le report de valeurs d'angles, ce qui se fait en déplaçant un repère sur une échelle numérique graduée en degrés par exemple.

4) * L'étude et la maîtrise des phénomènes périodiques

²⁰ Wermus H. (1976) Essai de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles. Archives de psychologie vol XLIV n° 171

²¹ voir Hall (1966) p.103

fait intervenir des fonctions trigonométriques d'angles variant sur \mathbb{R} . (électricité, optique, etc..)

5) * *L'Architecture et dessin industriel*

* Par contre, il semble que les mesures d'angles n'y soient pas utilisées de manière diversifiée. Les mesures concernent essentiellement les longueurs, qui, dans ces 2 contextes, permettent de tout régler.

c) Conclusions :

Les caractéristiques spatiales des situations que nous venons d'énumérer sont différentes. Elles font intervenir l'une ou l'autre des trois conceptions des angles retenues par MOTS. Nous proposons donc le classement suivant des types d'angles dont l'école doit prendre en compte l'enseignement, dans la scolarité obligatoire :

- . l'angle de repérage d'une direction par rapport à une autre ce qui peut recouvrir l'usage de la boussole, l'angle de rotation, l'angle logo.

- . les angles des polygones, plus spécifiques à l'enseignement des figures de la géométrie élémentaire, dont nous avons vu que le modèle pertinent était celui d'angle de secteurs.

- . l'angle de vue (secteur angulaire)

Le problème de l'établissement des relations entre les trois conceptions doit être étudié ainsi que celui de l'ordre dans lequel les introduire.

3. Examen de quelques situations :

Nous cherchons à construire, à partir d'un des problèmes évoqués ci-dessus, un ensemble de situations a-didactiques, adaptées à l'état des connaissances des élèves de 10-11 ans, et intégrables dans des situations didactiques destinées à des classes d'une vingtaine d'élèves.

a) Problèmes macro-spatiaux

A priori, ce sont les problèmes macro-spatiaux qui apparaissent les plus aptes à nous fournir des propositions, puisque les seuls à nécessiter une conceptualisation de la notion d'angle.

Nous ne pouvons, bien sûr, nous appuyer à l'école, ni sur le repérage des étoiles, ni sur l'apprentissage du guidage des bateaux.

1) Guidage à la boussole

Examinons rapidement les connaissances dont devraient disposer des enfants pour l'introduction de l'angle comme moyen de repérer un déplacement avec une boussole.

Dans un premier temps, il faut repérer sur la carte le point de départ et le point d'arrivée du déplacement (supposé rectiligne, dans un bois par exemple) et orienter la carte convenablement à l'aide de la boussole. Ceci suppose des élèves qu'ils sachent que celle-ci permet de repérer une direction fixe, représentée sur la carte, et qu'en tout point de la carte, on peut retrouver cette direction en menant une parallèle à la flèche représentant le nord.

Dans un deuxième temps, il faut repérer la direction du déplacement sur la carte, puis déterminer la ligne du déplacement dans l'espace en question.

Si cette ligne peut être repérée par un élément singulier servant de but intermédiaire, la boussole n'est plus nécessaire jusque là; sinon, sur la mer ou dans le désert, pour maintenir le cap, il faut avoir évalué l'angle du déplacement avec la direction du nord, et maintenir fixe cet angle pendant tout le déplacement.

Ce sont donc des connaissances complexes qui interviennent (plans, boussole, etc..) et la situation n'est pas favorable à une exploration a-didactique : Si le maître veut éviter que les enfants ne se perdent, il sera tenté de les placer dans un espace qu'ils connaissent déjà, ce qui biaisera fondamentalement leur recherche.

En renonçant, pour ces raisons, à utiliser ce problème, devons-nous pour autant renoncer à l'introduction de l'angle à partir du repérage d'une direction par rapport à une direction fixe?

2) Ombres

Nous avons examiné une autre situation, qui se situe dans un contexte méso-spatial : Il s'agit de l'étude de la position de l'ombre de bâtons, étude pouvant se situer en introduction à celle du mouvement diurne du soleil qui est, elle, proprement macro-spatiale²².

Dans un premier temps, les élèves devraient prendre conscience de l'impossibilité de se faire se croiser les ombres de bâtons verticaux : elles ont toutes la même direction, mais cette direction change au cours de la journée, on ne peut donc pas la repérer à l'aide d'un élément fixe du cadre de vie. Ce qui est invariant ici, c'est à un instant donné, l'angle de l'ombre d'un bâton avec une direction de référence.

Dans un deuxième temps, on pourrait poser aux élèves le problème suivant : "un bâton étant déjà planté verticalement en un point X, prévoir et marquer par un tracé, avant de poser le bâton verticalement en un point Y, la position de l'ombre de ce bâton".

Suivant les positions respectives de X et de Y, des solutions différentes sont possibles.

* Si X et Y sont proches, un tracé à vue doit permettre de réussir.

* Si X et Y sont éloignés mais que la droite qui les joint soit tracée, c'est le report de l'angle de la première ombre avec cette droite qui peut permettre de réussir²³.

* Si X et Y ne peuvent pas être joints, (ils sont par exemple dans des lieux différents), il faut pouvoir repérer la direction de l'ombre à l'aide d'une même direction, quelconque mais repérable facilement dans les deux lieux.

Nous avons renoncé là aussi à explorer cette situation pour plusieurs raisons; elle suppose en effet :

- de se dérouler sur un temps bref; si la recherche des enfants dure un peu, le soleil a tourné et la situation ne permet plus de valider leur travail.
- des capacités très fines de repérage et de tracés de lignes droites dans un espace dont les dimensions excèdent celles de la feuille de papier
- des conditions météorologiques fiables.

b) Problèmes dans le méso-espace :

1) Angles de vue²⁴

Nous avons cherché à travailler sur des angles de vue simplifiés, en réduisant le champ à un plan horizontal. Pour cela, nous avons construit des instruments selon le principe suivant : ce sont des cylindres de cartons de diamètres et de longueurs différentes; la face placée

²² L'ombre est une façon très ancienne de ramener dans le méso- ou le micro-espace, l'étude d'un phénomène du macro-espace. Voir Szabo et Maula (1986).

²³ une approximation de cette direction est bien sûr fournie par l'ombre d'un élève debout en Y! Pour que l'angle apparaisse, il faut des exigences de précision.

²⁴ si l'on s'en tient à la définition que nous avons donnée des problèmes méso-spatiaux, aucun d'entre eux ne nécessite la conceptualisation de l'angle. Les problèmes étudiés ci-dessous ne relèvent donc pas des situations ordinaires.

contre l'oeil est percée d'un trou, dans l'autre face, est découpée une fenêtre ramenant l'ouverture à une mince bande rectangulaire horizontale dont la longueur est égale au diamètre; ces "lorgnettes" sont utilisées pour viser une grande ligne horizontale tracée sur un tableau. (Annexe 7a)

Nous avons déterminé deux problèmes

a) Problème 1²⁵

Parmi les lorgnettes, certaines, de tailles différentes (longueurs et diamètres), ont été construites de manière à déterminer le même angle de visée. Elles permettent donc d'embrasser à partir du même point, le même champ visuel, c'est à dire, dans cette situation, le même segment tracé au tableau. Il s'agit de trouver un moyen de prévoir, sans viser, si deux d'entre elles, choisies au hasard dans la collection, satisfont à ce critère (Annexe 7b).

La résolution de ce problème suppose, il nous a semblé, un minimum de connaissances sur le déplacement des rayons lumineux, et la capacité à envisager une représentation de la coupe horizontale d'un appareil articulée avec celle de ses rapports avec l'espace environnant, en particulier le tableau. Elle suppose aussi de pouvoir décrire et nommer ce qui fait l'objet du problème, c'est à dire l'angle de vue alors qu'aucun de ses éléments n'est matérialisé. L'angle peut-il être conceptualisé directement?

Aussi, il nous a paru impossible de retenir ce problème pour des élèves de Cours Moyen.

b) Problème 2

Une lorgnette étant donnée, et une position choisie permettant de voir juste un segment [IJ] tracé au tableau, comparer les champs visuels obtenus avec la même lorgnette à partir d'autres positions (Annexe 8).

La recherche empirique de la réponse peut permettre aux enfants de remettre en cause des conceptions erronées comme "plus on est proche du tableau, plus on voit une petite partie du segment", mais c'est la demande de prévision de la réponse, avant d'avoir visé, qui suppose la prise en compte de l'angle de visée de la lunette. La découverte de la solution suppose les mêmes capacités que celle du problème précédent.

Nous n'avons pas donc pas mis en oeuvre une telle situation dans un contexte de découverte de la notion d'angle. Par contre, nous avons construit la situation suivante que nous avons expérimentée en classe de 6ème en fin d'année, sous forme de test (donc après un enseignement des angles avec leur professeur).

Dans un premier temps, les enfants ont expérimenté les appareils (tous identiques) librement; puis, un segment horizontal étant tracé au tableau, ils ont cherché des positions permettant de voir juste ce segment²⁶, ou un segment inclus ou un segment l'incluant. Des remarques ont été faites par les uns et les autres, mais sans reprise systématique par l'enseignant.

Dans un deuxième temps, un test individuel mais présenté de manière collective, leur a été proposé (annexe 9). Sur une feuille, sont représentés, sous forme de plan, le segment IJ et

²⁵ Ce problème est proposé par Ermel (1982), Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen, tome 3, Sermaphatier, pp.257-261

²⁶ La recherche des positions où se placer pour englober le même segment spatial par visée au travers d'un même cylindre de carton correspond à la détermination de l'arc capable interceptant ce segment, lié à l'angle de visée déterminé par le diamètre et la longueur du tube.

3 positions A, B, C, telles que : $ICJ > IBJ > IAJ$. La consigne est la suivante : muni de sa lorgnette, Francis se place en B et voit juste le trait IJ.

S'il était en A, verrait-il tout le trait, moins, plus?

S'il " B, " " " " ?

En voici les résultats les plus marquants :

Sur 39 réponses,

* 17 sont justes, 8 sont justifiées par des tracés d'angles : soit les trois angles IAJ, IBJ, ICJ, soit IBJ et des angles égaux à IBJ ayant respectivement A et C comme sommets et [AI] ou [AJ], [CI] OU [CJ] comme côté; 4 sont accompagnées de tracés d'angles non pertinents ou incomplets, 5 d'aucun tracé.

* 22 sont fausses. L'erreur la plus fréquente correspond au théorème en acte : "plus je suis proche du support du segment, plus j'en vois un petit morceau" (12 réponses (moins, moins)), la deuxième au théorème : "plus je suis proche, plus je vois un grand morceau" (5 réponses (plus, plus)). Ces résultats sont significativement différents du hasard²⁷.

23 élèves font des tracés (plus ou moins pertinents), 16 n'en font pas.

Quelles conclusions tirons-nous de ces résultats?

Plus de 40% des élèves sont capables de fournir une bonne réponse : le problème n'est donc pas hors de leur portée.

Mais la même proportion, à peu près, n'est pas capable de reconnaître dans ce problème un problème d'angle : Le transfert des connaissances scolaires à cette situation spatiale n'est pas automatique. Une interrogation clinique des élèves aurait été fort intéressante pour discerner leurs connaissances et leurs difficultés. Nous n'avons pas eu le temps de la mener.

2) L'angle LOGO

D'autres voies ont été explorées pour l'enseignement des angles depuis l'introduction du langage LOGO à l'école élémentaire :

Nous n'avons pas fait une revue des recherches, nombreuses, portant sur l'enseignement de la géométrie à l'aide de Logo, en particulier sur l'utilisation de l'angle de rotation et de sa mesure pour désigner certains mouvements élémentaires de la tortue. On peut en effet se poser la question suivante : Dans quelle mesure ce dispositif, associé à un choix de problèmes pertinents, permet-il de problématiser la notion d'angle de rotation? Rouchier (1985), après une expérimentation à l'aide du promobile Jaulin dans une classe de CM1, donne une réponse pour le moins nuancée : "Le lecteur aura pu constater par lui-même qu'il n'y a pas eu construction de la notion d'angle"²⁸. Il estime "nécessaire de reprendre l'analyse épistémologique et cognitive du fonctionnement de la notion d'angle dans la situation de commande de tracé par la tortue."

c) Conclusions sur les situations dans le macro- ou le méso-espace

L'étude faite ci-dessus montre la complexité de ces situations. Elles mettent en jeu, bien sûr, l'alignement et la visée, et la relation fondamentale qui les lie, mais aussi soit l'analyse d'une situation spatiale à trois dimensions en terme de plans et de droites non

²⁷ $CHI2 = 7,1$ significatif à .01

²⁸ bien que la plupart des élèves soient capables d'utiliser l'algorithme permettant de programmer le dessin d'un polygone régulier en divisant 360 par le nombre de côtés.

matérialisées (méso-espace), soit la représentation d'un espace à trois dimensions par un plan (macro-espace).

Vouloir construire le concept d'angle à partir de l'étude a-didactique de tels problèmes nous est apparu une gageure impossible à tenir dans l'état actuel de nos connaissances²⁹. De plus, leur mise en oeuvre dans la classe est difficile. Il nous a semblé plus adapté aux conditions actuelles de l'enseignement de rechercher des situations où le concept d'angle pourrait apparaître comme un moyen de différencier des objets plans, donc dans un contexte micro-spatial.

Mais les problèmes que nous avons examinés ci-dessus nous paraissent une source d'interrogations importantes, en particulier sur la question suivante : Quels rapports existent entre l'homogénéisation de l'espace et la résolution de ces problèmes ? Les seconds supposent-ils ou entraînent-ils la première? Cette question demeure ouverte pour nous.

d) Problèmes portant sur des objets du micro-espace

Ces problèmes ne doivent pas relever de la problématique pratique pour laquelle la problématisation de l'angle n'est pas nécessaire, comme nous l'avons vu.

1) Rappel des conditions favorables à l'apprentissage de la modélisation spatio-géométrique

Nous avons vu en B 6 que la rapidité et l'aisance des rétroactions dans les situations micro et méso-spatiales pouvaient expliquer le peu de conceptualisation associée. Dans le macro-espace, au contraire, la distance dans le temps et l'espace entre le but à atteindre et le déroulement des actions conduit à la construction par le sujet de représentations beaucoup plus élaborées. Remarquons que cette caractéristique est celle aussi des situations non ordinaires, pour lesquelles la démarche par "approximations successives" est d'un coût beaucoup trop élevé : Dans une usine, les pièces sont fabriquées dans un autre lieu et à un autre moment que ceux où elles sont utilisées ou conçues.

D'autre part, pour qu'une situation d'apprentissage soit efficace, il est nécessaire que la comparaison entre le but à atteindre et la réalisation ayant engagé les conceptions du sujet soit facile et rapide, afin qu'il puisse les remettre en cause et les modifier au cours de "parties" successives. Ceci est le cas dans les situations ayant certaines caractéristiques micro-spatiales, comme la taille (petite), la possibilité de déplacer les objets pour les superposer, les assembler, etc...

2) Conséquences pour l'élaboration des situations a-didactiques

Nous avons donc conçu des situations a-didactiques dans lesquelles :

- les problèmes portent sur des objets petits, faciles à comparer
- les actions sont à réaliser dans d'autres lieux que ceux où on doit prendre de l'information
- la réussite ou l'échec sont relativement faciles à évaluer
- les formulations sont issues de la nécessité de communiquer à quelqu'un d'autre les informations nécessaires à la réalisation d'objets identiques à ceux dont dispose l'émetteur.
- les différentes méthodes utilisées sont confrontées du point de vue de leur efficacité, et de leur facilité à être mise en oeuvre.

²⁹ La décision en question ici est de déterminer une situation par laquelle commencer, donc où les élèves peuvent développer des rapports effectifs et a-didactiques. Rien ne dit que la suite ne peut être menée de manière didactique, en s'appuyant sur des problèmes du méso- ou du macro-espace.

Au cours de ces confrontations, le vocabulaire utilisé spontanément par les élèves est, soit repris par l'enseignant, s'il est adéquat, soit refusé (en maths, on ne dit pas "pointe" mais "angle"), sans qu'une définition soit apportée. Les termes mathématiques sont institutionnalisés, à l'issue du contrôle, après l'analyse faite avec les enfants de leurs erreurs ou difficultés.

3) *Les situations correspondantes*

Comme nous l'avons vu, les angles interviennent dans les situations micro-spatiales sous forme de composantes contextuelles associées à la reconnaissance des formes des objets plans, en particulier des polygones.

Deux problèmes portant sur ce type d'objets nous ont paru susceptibles d'être étudiés.

a) La communication d'informations pour faire reproduire un quadrilatère à quelqu'un qui ne peut pas consulter le modèle ou pour faire retrouver ce quadrilatère parmi d'autres ayant les mêmes longueurs de côté

Peut-on dégager le concept d'angle de secteur de la résolution de ces problèmes?

De manière générale, la réponse est négative puisque la reproduction par triangulation est la plus simple, elle ne fait intervenir que les mesures de longueur et l'usage de la règle et du compas.

La prise en compte des angles n'a donc de chance de se produire que si celle de la longueur des diagonales est moins naturelle, pour des raisons diverses liées à la nature matérielle des objets que la prise en compte des angles, ou si au cours de la dévolution du problème, un artefact intervient, comme nous le verrons ci-après.

b) Le choix de polygones pavant le plan

Peut-on dégager le concept d'angles de secteur de la résolution de problèmes portant sur l'information à fournir pour choisir des polygones dont l'assemblage pave le plan?

Là aussi, on peut toujours remplacer une information sur un angle par celle sur une longueur mais l'analyse a priori des situations possibles montre que cela suppose une conceptualisation préalable plus élaborée que dans le cas ci-dessus

4. **Présentation des deux situations étudiées**

a) *Prendre et communiquer des informations pour reproduire ou retrouver des quadrilatères.*

1) *Le cas des losanges*

La situation la plus simple est celle de la communication d'informations pour fabriquer des losanges ayant tous la même longueur de côtés : seuls leurs angles sont différents. Mais c'est aussi la situation où la relation qui lie, dans un triangle, la taille de l'angle et celle du côté opposé est la plus spontanément mise en oeuvre : la diagonale, objet culturel s'il en est pour le losange, a toutes chances d'empêcher la conceptualisation de l'angle.

(2) Exemple de la situation expérimentée par Blanc (1986)³⁰

"L'activité se présente sous la forme d'une situation de communication entre groupes d'enfants. Chaque groupe reçoit un losange dont la longueur des côtés est 8 cm ..et doit rédiger un message comportant des informations en quantité suffisante permettant de

³⁰ Blanc (1986), Angles au CM, Publication de l'IREM de Nice.

Cette brochure présente des travaux très intéressants. L'esprit et le contenu d'une partie d'entre eux sont assez proches des nôtres. Nous l'avons découverte après la réalisation de notre premier processus.

reconstituer exactement le losange dont il dispose....Il est précisé que le message peut comporter des dessins mais pas le tracé complet d'un côté du losange. Cette précision a pour but de dissocier l'idée de secteur angulaire de celle de longueur".

Il semble que certains enfants aient produit "les gabarits des deux angles", à côté d'autres indiquant "la longueur de l'une ou des deux diagonales avec ou sans précision sur le découpage du losange qu'elles induisent." Cette production de gabarits n'a jamais été observée à l'Ecole Michelet, dans des situations de communication de ce type, mais dans lesquelles le message devait être entièrement écrit. Il nous a semblé que l'apparition des angles était relativement peu probable, et qu'il fallait faire appel à d'autres types de quadrilatères et à d'autres caractéristiques du matériel pour la rendre moins aléatoire, ou moins sujette à une didactification subtile de la situation.

2) Le choix de certaines variables didactiques

Pour diminuer les chances d'utilisation de la diagonale, nous avons donc pris deux décisions :

a) Travailler sur des quadrilatères quelconques, dont les diagonales ne sont pas des objets culturels connus

b) Proposer un matériel hétérogène (au sens des pleins et des vides)

Dans la plupart des cas, le matériel proposé aux enfants est constitué soit de figures en carton, soit de figures tracées sur une feuille. Ce choix est favorable au tracé des diagonales, puisque le matériau le permet, puis à leur mesure. Nous avons préféré leur donner dans un premier temps, des quadrilatères réalisés en baguettes de bois, assemblées par des vis-papillon.

c) Proposer aux élèves un "outil", constitué de deux baguettes en bois reliées à leur sommet par une vis-papillon.

Ceci permet de privilégier une représentation "dynamique" de l'angle par l'utilisation de matériel articulé. Le matériel utilisé pour les quadrilatères permet aussi de mettre en évidence, de manière immédiate, que dans les transformations qui conservent l'ordre et la longueur des côtés, la forme n'est pas conservée.

b) Prendre et communiquer des informations pour choisir des polygones qui pavent le plan.

Dans un puzzle³¹ à pièces polygonales comme le tangram, à chaque noeud, la somme des angles des pièces incidentes est égale à 360° . Au cours de la reconstitution du puzzle, la recherche d'une pièce est guidée par la taille de l'angle à "remplir", mais les longueurs doivent aussi correspondre, d'où la difficulté à reconstituer une figure donnée d'avance, un carré par exemple. Nous avons cherché à fabriquer un jeu, ayant comme but de paver la plus grande surface possible avec un nombre donné de pièces, mais où l'intervention des longueurs soit la plus minime possible. Le choix de polygones, convexes ou non, dont les mesures de tous les angles sont des multiples de 30° permet de remplir ces conditions. A un même jeu de pièces, correspond un très grand nombre de pavages différents. Les annexes 10a et 10b, montrent deux des solutions pour le même jeu de huit pièces.

³¹ l'idée est adaptée de de Elem-Math VII, aides pédagogiques pour le cycle moyen, publication de l'APMEP n°49, situation n° 2, p.81-83.

Ce matériel sert de support à plusieurs jeux, de structure semblable à celle du scrabble : les pièces sont partagées entre plusieurs joueurs, chacun à tour de rôle pose une pièce si elle satisfait aux conditions définies par les règles, pour agrandir le polygone déjà formé sur la table.

Dans un premier temps, le choix des pièces se fait sous le contrôle de la vue, dans un deuxième temps, le joueur qui dispose du polygone commencé doit trouver un moyen pour commander la pièce qu'il désire à un marchand. La solution la plus économique est de prendre, par superposition, la trace de l'angle à "boucher", ce qui constitue l'ébauche de la représentation de l'angle de secteurs correspondant.

5. Conclusion :

Pour un ensemble de raisons que nous venons d'exposer, nous avons renoncé à utiliser une situation où le concept d'angle est l'outil nécessaire pour résoudre le problème posé, et choisi de confronter les élèves à une situation dans le micro-espace où, si l'angle est bien un outil particulièrement efficace, il est aussi possible de réussir en n'utilisant que des mesures de longueur. Par là même, nos situations a-didactiques vont intervenir sur un secteur spatial dont les longueurs permettent une maîtrise par des moyens simples. Les situations devront donc disqualifier les longueurs, et il faudra s'assurer que les élèves ne vont pas extrapoler une déconsidération de leur usage.

Nous faisons l'hypothèse que ces situations, grâce au choix des valeurs de certaines variables didactiques, permettront aux élèves de donner un sens correct au concept d'angle de secteurs. Nous sommes bien conscients que leurs connaissances risquent d'être limitées à un contexte particulier, celui des objets du micro-espace. Il nous faudrait étudier si elles peuvent constituer une base pour la maîtrise des autres aspects du concept d'angle, aspects dont le sens est lié à la résolution de problèmes se déroulant dans le méso- ou le macro-espace.

Nous avons successivement mis à l'épreuve les deux processus élaborés, l'un, le plus complet, à partir des quadrilatères articulés en CM1, avec un prolongement au CM2 concernant la mesure des angles. Pour des raisons que nous expliquerons ultérieurement, nous n'avons pas reproduit ce processus une deuxième fois, mais nous avons élaboré et mis à l'épreuve un deuxième processus, basé sur le pavage du plan, correspondant à ce qui est attendu des élèves à la fin de l'école primaire, donc sans introduction de la mesure. Après une première expérimentation au CM2, nous avons apporté des modifications la deuxième année. Depuis, cette série de séquences sur les angles fait partie du cursus habituel du CM2 à l'École Michelet.

CHAPITRE C-7

UN PREMIER PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT DES ANGLES

Nous avons présenté dans le chapitre C-6, les choix que nous avons faits concernant la situation de base du premier processus d'enseignement des angles. Ce processus vise à couvrir les apprentissages de l'école primaire et de la 6^{ème}.

I. LES OBJECTIFS DU PROCESSUS

Il s'agit de permettre la construction par les élèves du concept d'angle de secteurs, de le faire fonctionner dans des situations de reproduction de quadrilatères quelconques en utilisant des instruments de report d'angles de plus en plus élaborés dont le rapporteur usuel, puis, à partir de l'étude de celui-ci, de donner du sens à la somme des mesures de 2 angles.

II. DE L'ANGLE A SA MESURE : LES 3 ETAPES DU PROCESSUS

A. Les quadrilatères articulés

Dans cette première étape, les élèves ont à découvrir comment utiliser un couple de baguettes de bois assemblées à leurs extrémités par un ensemble vis-papillon pour prendre des informations sur un quadrilatère construit avec des baguettes assemblées de la même manière, et, soit en construire un superposable, soit retrouver parmi plusieurs gabarits dessinés, celui qui correspond au modèle dont ils disposent. Ces deux actions doivent être réalisées hors de la vue du quadrilatère-modèle.

B. Reproduction de quadrilatères et introduction d'instruments de report d'angles

Une même tâche : dessiner un quadrilatère superposable à un quadrilatère donné, est proposée dans trois types de conditions :

- le dessin se fait à côté du modèle
- le modèle est éloigné, l'élève doit aller prendre des informations avant de dessiner
- une situation de communication ; l'émetteur, qui dispose du modèle, transmet un message comportant les informations qui doivent permettre au récepteur de dessiner un quadrilatère superposable à celui de l'émetteur.

Deux sortes d'instruments sont proposés aux élèves pour le report des angles.

C. Somme et mesure des angles. Rôle et usage du rapporteur

Dans une première situation, les élèves ont à utiliser le rapporteur usuel comme moyen de repérer la taille d'angles qu'ils ont à comparer.

Dans la seconde, le problème de la graduation d'un rapporteur muet, à partir de la connaissance de deux valeurs d'angles leur est posé. La comparaison des graduations des deux rapporteurs fait apparaître des différences correspondant aux erreurs liées aux modèles inadéquats qu'utilisent certains élèves. Un débat sur les causes de ces différences permet d'explicitier le modèle de la construction de l'angle dont la mesure est la somme des mesures de 2 angles donnés

III. ETAPE 1 : LES QUADRILATERES ARTICULES

A. Présentation

1. Description générale des situations a-didactiques

a) Le matériel

Il est constitué de baguettes de bois plates découpées dans des moules à chants plats de 2 cm de large percées d'un trou à chacune de leurs extrémités ; ces baguettes sont de 4 tailles : Les distances entre les 2 trous étant respectivement de 12, 14, 16, 18 cm. Deux baguettes peuvent être assemblées à l'aide d'un système vis-écrou à papillon.

1) Les quadrilatères articulés

Ils sont constitués de 4 baguettes de tailles différentes assemblées à leurs extrémités. Tous les quadrilatères ont donc leurs côtés de même longueur, ils ne diffèrent que par leurs angles et pour certains d'entre eux par l'ordre dans lequel les baguettes sont assemblées. Nous les qualifions d'articulés puisque leurs formes changent quand on desserre tous les boulons et que l'on modifie l'angle de 2 des baguettes.

2) Les gabarits de quadrilatères

Ce sont les traces de quadrilatères obtenues en prenant la trace intérieure des quadrilatères en bois et en la doublant, à l'extérieur, d'un trait parallèle à 2,2 cm du premier contour.

3) Les instruments de report d'angles

Ils sont de même nature que les quadrilatères, c'est-à-dire, constitués de 2 baguettes de même longueur assemblées à l'une de leurs extrémités par une vis-papillon permettant à l'angle des 2 baguettes de prendre des valeurs variables.

b) Les 2 types de problèmes

1) Le problème 1

Chaque groupe de 2 enfants dispose d'un gabarit. Il doit construire le quadrilatère correspondant à partir d'un ensemble de 4 baguettes.

2) Le problème 2

Chaque groupe de 2 enfants a, à sa disposition un ensemble de x gabarits situés sur une table, et un cadre, situé sur une autre table. Il s'agit de retrouver le gabarit correspondant au cadre, alors qu'il n'est pas permis de les changer de place. Des aides sont fournies aux enfants sous la forme d'ensembles de 4, 3 ou 2 baguettes identiques à celles qui constituent le cadre.

2. Analyse à priori du problème 1

Nous allons envisager les solutions possibles en fonction des valeurs possibles des variables.

a) Les variables du problème 1 :

1) La distance entre le lieu du modèle et celui de la fabrication

Si cette distance est nulle, c'est à dire si le cadre peut être fabriqué en contrôlant au coup par coup, par superposition, les dispositions relatives des baguettes, les angles qu'elles font 2 à 2 n'ont aucune raison d'être conceptualisés, la situation est purement de type micro-spatial.

Par contre, si cette distance est telle qu'il n'est pas possible de superposer le gabarit et le cadre au cours de l'action, ni même de voir le gabarit, il est nécessaire de disposer d'informations sur le quadrilatère. Mais le problème se pose différemment si toutes les informations doivent être fournies à l'avance ou si l'élève peut aller recueillir les informations élémentaires au fur et à mesure de ses besoins. D'où l'intervention d' une deuxième variable :

2) Le nombre de voyages possible entre les 2 tables

Si un seul voyage est permis, dans la situation qui est la nôtre ici, où les longueurs des côtés sont fixées, plusieurs ensembles d'informations sont possibles, certains étant minimaux ; l'ensemble le plus simple est constitué de la connaissance de l'ordre dans lequel les baguettes sont assemblées et soit de la taille de l'angle de 2 baguettes précisées, soit de celle de la diagonale opposée.

Si le nombre de voyages n'est pas limité, l'élève peut commencer par repérer les informations nécessaires à la fabrication d'un premier angle (longueur des baguettes concernées et taille de l'angle ou celle de la diagonale) puis celui-ci réalisé, continuer soit avec l'angle opposé, soit avec un des angles adjacents. Dans les 2 cas, si les reports ont été bien faits, l'assemblage terminal est possible, et valide la prise d'informations et leur utilisation.

Quelle que soit la valeur de cette variable, nous voyons que la prise en compte de "l'inclinaison" d'au moins une baguette par rapport à l'autre est nécessaire, mais que cette inclinaison peut être mesurée soit par la taille de la diagonale, soit par la taille de l'angle, à condition de disposer d'un moyen de reporter celui-ci. Une troisième variable va alors jouer un rôle essentiel :

3) la nature des instruments mis à la disposition des élèves.

On peut envisager plusieurs possibilités :

- pas d'instrument mais la consigne : "Demandez ce dont vous avez besoin". L'ouverture de la consigne est telle que rien ne garantit que les élèves soient capables d'inventer un moyen permettant de résoudre le problème. La demande d'un double décimètre serait la plus probable, car c'est l'instrument le plus usuel, encore faut-il que les élèves l'utilisent pour mesurer la distance entre les extrémités des baguettes ; mais il n'y a aucune chance qu'un élève pense à un couple de baguettes d'angle réglable, car ce n'est pas un instrument culturel.

Le choix d'une consigne aussi ouverte nous paraît donc contradictoire avec nos objectifs puisque la solution la plus probable exclut l'explicitation de l'angle.

- une feuille de papier plus petite que le cadre, et un crayon de manière à ce que les élèves ne puissent pas redessiner le gabarit complètement mais seulement certaines parties, en particulier l'articulation de 2 baguettes. On peut penser que des élèves ayant déjà implicitement perçu le rôle de l'angle de 2 baguettes soient capables de le représenter sur le papier en utilisant le cadre comme un gabarit.

- un couple de baguettes de même longueur, inférieure à celle de la plus petite des baguettes du cadre, reliées par un ensemble vis- papillon réglable. Cet instrument, de même

nature que le cadre permet de reporter des angles et non de repérer des longueurs. Toutefois on peut prévoir que certains enfants pourraient en détourner l'usage en fixant les 2 baguettes bout à bout pour obtenir une baguette plus longue que celles du cadre, qu'ils pourraient utiliser pour reporter des longueurs.

b) Les choix faits

Nous avons proposé ce problème deux fois aux élèves, avec deux valeurs de la variable "distance" différentes :

* au tout début du processus, ils ont eu à construire un cadre superposable à un gabarit donné situé à coté d'eux. L'objectif était qu'ils apprennent à manipuler le matériel, qu'ils découvrent comment contrôler la forme du cadre.

* à la fin, après la résolution des diverses formes du problème 2, ils ont eu à réaliser la même tâche, mais cette fois le gabarit était éloigné des éléments à assembler, ils disposaient d'un couple de baguettes pour reporter les angles dont ils avaient expérimenté l'usage dans les phases précédentes et ils étaient libres de faire le nombre de voyages qu'ils estimaient nécessaires.

c) Une difficulté intrinsèque au fonctionnement d'une situation didactique bâtie à partir du problème 1 : Le contrôle de la valeur de la solution.

Evaluer la réussite à la consigne "construire un cadre superposable au gabarit " semble simple : Le maître pose devant l'élève le cadre construit sur le gabarit et vérifie s'il y a bien correspondance. Mais quel doit être son niveau d'exigence? Si la coïncidence doit être celle obtenue lorsqu'on fabrique le gabarit à partir du cadre, il est probable qu'il n'y aura presque aucune réussite dans la classe. S'il est trop laxiste, des élèves peuvent penser avoir réussi alors qu'ils ont utilisé des procédures inadéquates. Il y a là un problème didactique important sur lequel nous reviendrons ultérieurement et qui nous a conduits à choisir le problème 2 pour la construction des premières situations d'apprentissage sur la notion d'angle, dans la mesure où ce problème des critères d'évaluation de la réussite ne se pose pas.

3. Analyse à priori du problème 2 et choix des variables

Dans ce problème, il s'agit de retrouver parmi plusieurs, le gabarit correspondant au cadre dont on dispose. Gabarits et cadre sont éloignés, l'élève dispose du matériel décrit ci-dessous, qu'il est autorisé à transporter auprès des gabarits.

a) Les variables du problème 2

1) La nature et le nombre de baguettes dont on dispose pour la comparaison

Si l'on dispose des 4 baguettes identiques à celles qui constituent le cadre, la solution micro-spatiale la plus rapide est de constituer un cadre superposable au cadre initial, de le transporter auprès des gabarits et d'éliminer par superposition tous ceux qui n'y correspondent pas. Sitôt que l'on a trouvé un gabarit superposable, la recherche peut arrêter puisqu'il n'y en a qu'un d'après la consigne. Bien sûr, ce problème est sans enjeu cognitif au niveau qui nous intéresse.

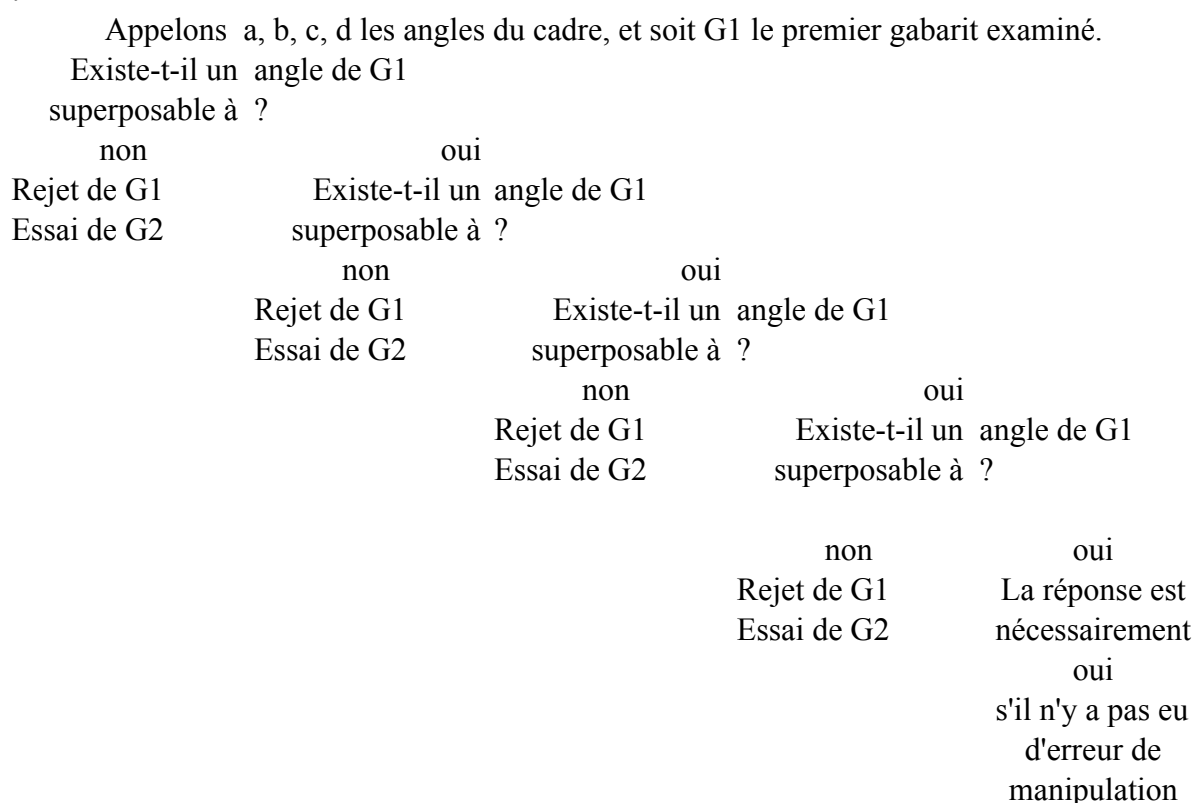
Si l'on ne dispose plus que de 3 des 4 baguettes, la solution est la même puisque la position de la 4ème est entièrement déterminée par celle des 3 autres.

Il n'en est plus de même si l'on ne dispose que de 2 baguettes : il est alors impossible de constituer un objet intermédiaire capable de contenir toutes les informations nécessaires. Plusieurs stratégies sont possibles, faisant appel à des connaissances différentes.

* La solution la plus efficace consiste à relever l'ordre et le sens dans lequel les baguettes sont assemblées, et à constituer avec le couple de baguettes un angle superposable à un des angles du cadre, en repérant ses cotés. Puis à éliminer tous les gabarits dont l'assemblage est différent et à rechercher celui dont l'angle déterminé par les côtés repérés du cadre est superposable à celui des 2 baguettes. Cette solution suppose évidemment des connaissances sur les quadrilatères dont ne disposent pas les élèves de C.M.1 et son élaboration ne fait pas partie de nos objectifs.

Remarquons que la prise de l'angle peut être remplacée par celle de la longueur de la diagonale correspondante à condition de disposer d'un instrument adéquat.

* En l'absence de telles connaissances, des procédures par élimination peuvent être utilisées : basées sur l'idée que s'il existe un angle du cadre ne coïncidant avec aucun angle du gabarit examiné, alors ce gabarit peut être exclu ; elles peuvent être décrites par l'arbre suivant :



Supposons donc qu'on ait pu repérer ainsi sur le gabarit G_i , pour chacun des angles du cadre, qu'il existe un angle superposable : G_i devient un candidat solution ; la procédure utilisée ne permet pas de prévoir si le cadre lui-même peut être superposé à G_i ou au gabarit obtenu par retournement de G_i . La prise en compte de l'ordre dans lequel sont assemblées les baguettes permet de lever cette indétermination.

Remarquons que la même démarche par élimination peut être entreprise en utilisant les diagonales : si le cadre et le gabarit examiné diffèrent par la longueur d'une diagonale, alors ce dernier peut être éliminé.

Des économies de temps pour rejeter un gabarit peuvent être faites si on prend en compte les longueurs des côtés du polygone, correspondant aux angles comparés

*Evaluons quels problèmes de désignation posent ces stratégies par élimination : les baguettes peuvent être différenciées par leur taille, la petite, la petite moyenne etc...et les angles par le nom du couple de baguettes-côtés.

La désignation des angles paraît nécessaire pour s'assurer que l'on n'a pas comparé 2 fois le même angle à ceux du gabarit puisqu'on est obligé de se déplacer entre chaque essai d'un gabarit. Il n'y a pas de risque de prendre successivement 2 fois le même angle puisqu'on doit changer l'ouverture de l'instrument entre 2 essais consécutifs, mais ce pourrait être le cas entre le premier et le troisième essai.

2) Le nombre de gabarits

Ce nombre doit être assez grand pour que les chances de réussir en désignant un gabarit au hasard ou avec un vague souvenir de la forme du cadre restent faibles. Il ne doit pas être trop grand non plus pour ne pas rendre trop longue la stratégie par élimination.

3) Les différences entre les gabarits

Nous avons vu que les stratégies par élimination pouvaient aboutir à retenir les 2 gabarits symétriques. Or les cadres n'étant pas symétriques par retournement, un seul convient. Si dans les objectifs de l'activité, était prévue la prise de conscience de l'existence de 2 quadrilatères symétriques, il pourrait être intéressant de garder les 2 gabarits correspondants. Sinon, cela complexifie la situation et il vaut mieux l'éviter.

D'autre part, dans les stratégies par élimination, on peut penser qu'un certain nombre d'élèves se contenteront d'avoir trouvé un angle d'un gabarit superposable à un angle du cadre (ou une diagonale de même longueur) pour en conclure que c'est celui qu'ils recherchaient. Pour mettre en échec cette stratégie, il faut choisir des gabarits ayant 2 angles superposables (ou une diagonale de même longueur) sans l'être eux-mêmes.

4) La taille des baguettes de l'outil

Le choix n'est à envisager que dans le cas où ne sont disponibles que 2 baguettes. Trois cas sont possibles :

- les 2 baguettes sont choisies de même taille que 2 de celles qui constituent le cadre. On peut penser que cela va orienter les élèves vers la prise en compte du seul angle correspondant à ce couple de baguettes ou même leur poser problème si, sur un gabarit particulier ou sur le cadre, ces baguettes correspondent à des côtés opposés.

- les 2 baguettes sont de même taille, plus grandes que la plus grande des baguettes du cadre. L'instrument peut permettre de repérer la taille d'un angle mais aussi, par un marquage par exemple, les longueurs des côtés du quadrilatère correspondants aux côtés de cet angle. La prise de conscience du fait que la taille d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés risque alors d'être plus difficile que dans le dernier cas possible :

- les 2 baguettes sont de même taille, plus petites que la plus petite des baguettes du cadre. L'instrument ne permet de prendre en compte que l'information "taille des angles" indépendamment de celle des côtés. Pour réussir, l'élève doit mettre en oeuvre une représentation de l'angle dans laquelle cette caractéristique n'intervient pas.

b) Les choix faits

Le problème 2 a été proposé 5 fois aux élèves, avec les valeurs suivantes affectées aux variables :

1) le nombre de baguettes

- * la première fois 4, identiques à celles du cadre ; l'objectif est que les enfants élaborent une stratégie de base par élimination très simple, qui leur permette de réussir et donc de bien rentrer dans le problème.

* la deuxième fois 3, identiques à celles du cadre ; il s'agit ici de préparer la phase suivante en enclenchant une espèce de défi : "Vous savez retrouver le bon gabarit avec 4 puis avec 3 baguettes, êtes-vous capables de le faire avec 2 ?"

* puis 3 fois de suite avec 2 baguettes seulement. Nous prévoyions qu'il leur faudrait plusieurs tentatives pour pouvoir élaborer une stratégie capable de les mener jusqu'au but, et de s'exprimer à son propos.

2) le nombre de gabarits

gabarits constitués en 2 séries; voir annexe 1

3) les différences entre les gabarits

Une série de 3 est obtenue à partir d'un même assemblage, en donnant à l'angle des baguettes 12-14, les valeurs 72, 80, et 95 degrés.

Une deuxième série l'est en intervertissant le montage des baguettes 16 et 18 mais en gardant les mêmes valeurs à l'angle des baguettes 12-14 (donc à celui des 2 autres baguettes)

Dans une même série, certains gabarits ont un angle égal ou très proche (mais correspondant à des baguettes différentes), et chacun d'entre eux a un "faux symétrique" dans l'autre série avec 2 des angles opposés égaux à 2 des angles opposés du cadre initial.(annexe 1)¹

Nous considérons comme différents 2 angles dont la différence de mesure en degrés est supérieure à 5.

Au cours des 5 essais, nous avons gardé les 6 mêmes gabarits, mais en les changeant de noms entre chacune des 3 séances, pour que les enfants ne les reconnaissent pas.

4) la taille des baguettes de l'instrument de report.

Elles sont plus courtes que toutes les baguettes, elles mesurent 10 cm.

B. Description des 3 leçons

1. Leçon 1

Elle a pour objectifs de familiariser les enfants avec le matériel et de permettre la dévolution du problème aux élèves.

a) Première phase

1) L'organisation de la classe

Les élèves sont répartis en groupes de deux, chaque groupe dispose

- d'un lot de 4 baguettes et 4 ensembles vis-écrous nécessaires pour fabriquer un cadre
- d'un des 6 gabarits de cadres décrits ci-dessus.

2) la consigne :

Le maître montre l'un des cadres et dit :

"Un vitrier doit découper des vitraux qui s'adaptent dans les cadres de bois que vous allez fabriquer. Pour cela, vous disposez tous de baguettes de la même longueur que celles de ce cadre, et d'un gabarit. Un cadre sera bien fabriqué, s'il correspond exactement à son gabarit et si les vis sont bien serrées."

Puis il leur demande "Pensez-vous que vos cadres seront pareils quand vous les aurez construits?"

¹ les gabarits sont reproduits avec une réduction de 70%

Le maître fait donc exprimer les élèves sur le fait que les cadres de leurs camarades seront ou non identiques au leur (ils sont conscients ou non que cela dépend d'autre chose que des longueurs.)

Il lance ensuite la fabrication puis passant auprès de chaque groupe, s'assure de la bonne qualité des constructions, forme et assemblage.

3) la mise en commun

Après avoir commenté le travail obtenu, le maître fait constater que certains cadres ne se superposent pas ; il fait proposer des explications et peut utiliser à cette occasion le terme d'angle, pour qualifier la propriété reconnue par les élèves et qui différencie un cadre d'un autre.

b) Deuxième phase

1) L'organisation de la classe

Chaque groupe dispose d'un cadre, différent du premier, et de l'ensemble baguettes-vis.

Sur une table commune à 2 groupes, suffisamment éloignée, sont disposés les 6 gabarits correspondant aux 6 modèles de cadre.

2) Consigne

" Vous avez chacun un cadre. Vous devez retrouver le gabarit qui lui correspond exactement. Pour vous, X et Y, ces gabarits sont là... " Le maître énumère ainsi les groupes de 2 élèves et leur montre où est situé leur matériel. Il continue : " pour ce faire, vous ne pourrez pas déplacer votre cadre, mais vous pourrez déplacer d'autres matériels, par exemple les baguettes que je vous fournis, avec les fixations nécessaires, et une feuille de papier, si vous avez besoin d'écrire quelque chose." Le maître accepte le double décimètre, sans en encourager l'usage ni le mentionner.

3) Mise en commun

Le maître recense les groupes qui ont retrouvé leur gabarit, fait s'exprimer les autres sur les difficultés qu'ils ont rencontrées et sur le nombre de voyages qu'ils ont faits entre leur bureau et la table supportant les gabarits. Ce temps d'échange doit rester bref.

c) Troisième phase

Elle est identique, dans son déroulement et sa consigne à la phase précédente, mais le maître ne distribue aux élèves que trois des baguettes nécessaires pour reconstituer le cadre. A la fin de la séance, il annonce que le lendemain, ils auront à réaliser la même tâche, mais cette fois avec 2 baguettes seulement.

2. Leçon 2

Elle a pour objectifs l'élaboration par les élèves de la notion d'angle comme outil pour comparer les formes de 2 quadrilatères.

Elle comporte 2 phases, correspondant à 2 essais pour chaque groupe d'élèves.

a) Phase 1

1) organisation matérielle

Chaque groupe de 2 élèves dispose d'un cadre fixé, de 2 baguettes de 10 cm de longueur, d'un ensemble vis-écrou, d'un crayon et d'une petite feuille de papier. Comme dans

la séance précédente, 6 gabarits dessinés, repérés par des lettres, communs à 2 groupes sont posés sur une table éloignée.

2) consigne

"Vous avez presque tous réussi à retrouver le gabarit d'un cadre avec 3 baguettes. Ceux qui n'ont pas réussi savent-ils maintenant pourquoi et comment faire?.. C'était facile.

Aujourd'hui, nous travaillons encore avec des cadres et des gabarits faits avec les mêmes baguettes, mais je vais vous poser un problème plus difficile. Il faut retrouver le gabarit d'un cadre seulement avec ces deux petites baguettes et une vis. C'est possible!

Comme la dernière fois, vous n'avez pas le droit d'emporter le cadre auprès des gabarits ni les gabarits auprès des cadres. Quand vous pensez avoir retrouvé quel gabarit va avec votre cadre, vous écrivez sa lettre sur le papier que vous avez. Ce papier peut vous servir aussi à écrire des informations dont vous auriez besoin pour vous aider à retrouver le gabarit de votre cadre.

Ensuite vous vérifierez tous en même temps si vous avez réussi ou non."

3) Déroulement

Etant donnée la difficulté de cette nouvelle situation a-didactique, nous avons prévu avec les maîtres plusieurs scénarios didactiques différents entre lesquels l'enseignant a à choisir en fonction de ce qui se passe dans la classe.

Au bout de 10 à 15 minutes maximum après la donnée de la consigne, plusieurs éventualités peuvent se produire :

* Si seulement certains ont réussi à sélectionner un gabarit, en comparant au moins un angle, une première mise en commun peut avoir lieu, où ces élèves exposent aux autres leurs démarches sur leur matériel. Si le terme d'angle peut aider les élèves à s'expliquer, le maître l'introduit "naturellement". Si le problème de la désignation des angles est posé, il peut proposer, en fonction des difficultés exprimées :

-une désignation des sommets du cadre avec collage de gommettes de couleurs différentes sur les papillons

-une désignation plus commode des baguettes, en référence à leur longueur, par un codage 1-2-3-4.

Le maître relance le travail, sans prendre position,

-pour ceux qui auraient fini et réussi sur un nouveau cadre

-pour les autres sur le même.

* Si personne n'a réussi, bien que certains aient comparé des angles, mise en commun des essais, recherche des raisons de ce qui manque pour réussir, réflexion sur les problèmes de désignation d'où nouveaux essais.

* Si les élèves ne font rien ou des essais "dans le vide", introduire une phase intermédiaire en donnant 2 baguettes de même longueur que 2 baguettes consécutives du cadre afin d'enclencher une procédure par élimination, s'appuyant sur la comparaison par morceau du cadre et des gabarits.

Quand tous les élèves ont réussi à sélectionner un gabarit, vérification puis relance par le maître : "tout à l'heure, il y avait des difficultés ; apparemment, beaucoup d'entre vous les ont surmontées, mais est-ce que vous sauriez le faire sur un autre cadre?"

b) Phase 2

Le maître redonne un nouveau cadre à chaque groupe, avec la même consigne.

Puis après la vérification par chaque groupe, le maître demande qui a réussi ou échoué. Il affiche alors au tableau les 6 gabarits, donne un cadre à un enfant et lui demande d'expliquer tout en le faisant, comment il a fait pour retrouver le bon gabarit. Si à ce moment, les

problèmes de désignation n'ont pas encore été explicités, il peut le faire en posant des questions : comment sais-tu que ce n'est pas le même angle du cadre que tu as déjà regardé? D'où l'introduction des désignations proposées ci-dessus.

Par contre, si certains élèves contestent la méthode utilisée par un de leurs camarades, le maître renvoie la discussion à la séance suivante.

3. Leçon 3

Elle a comme objectifs la discussion sur les méthodes de comparaison des quadrilatères (comparer un angle suffit-il ?), la mise au point des techniques de comparaison d'angles et leur réinvestissement dans une tâche de construction d'un quadrilatère superposable à un gabarit donné

a) Phase 1

1) matériel et organisation de la classe

Ils sont les mêmes que la veille.

2) consigne et déroulement

Le maître fait rappeler aux élèves le but de l'activité de la séance précédente, et conclure qu'on pouvait réussir avec 2 petites baguettes en s'en servant pour faire un angle égal à un angle du cadre ou d'un gabarit. Il institutionnalise l'emploi du mot "angle" à la place des termes utilisés par les élèves comme "coins", "bouts" etc...

Puis il lance le débat sur la méthode : " S'occuper d'un seul angle du cadre permet-il de réussir à tous les coups? Certains disent oui, d'autres pensent qu'il faut contrôler tous les angles, nous allons examiner cette question."

Le maître fait passer au tableau un élève qui a réussi en ne contrôlant qu'un seul angle, puis un des élèves qui conteste la validité de cette méthode, en montrant que le cadre et un gabarit pouvaient avoir un angle égal sans être superposables. Il est probable que dans le débat, vont apparaître des remarques comme " j'ai comparé tous les angles et pourtant je me suis trompé". Le maître doit alors renvoyer les enfants à la qualité du report d'angles (serrage des vis) ou aux difficultés de désignation.

La conclusion du débat doit pouvoir être formulée ainsi : "une méthode qui, bien que bien employée, peut faire perdre, n'est pas, en mathématiques, une bonne méthode."

b) Phase 2

Le maître propose alors de faire un dernier essai et de trouver, sans se tromper, le gabarit correspondant au cadre.

Quand les enfants ont terminé, le maître organise un bilan : "Qui a échoué? combien d'angles pris? est-ce que les angles ont été bien pris?"

"Qui a réussi? combien d'angles pris? s'est-on occupé des côtés? comment?"

c) Phase 3

1) Matériel et organisation de la classe

Un gabarit, un ensemble de 4 baguettes et un couple de petites baguettes par groupes de deux

2) Consigne et déroulement

Le maître propose une nouvelle activité, correspondant au problème 1 : "Je donne à chaque groupe un gabarit, et là-bas, sur une autre table, le matériel nécessaire pour faire un cadre. Saurez-vous fabriquer un cadre qui se superpose au gabarit que je vous ai donné? Attention, vous ne pouvez pas changer ni l'un ni l'autre de table, vous pouvez seulement transporter les 2 petites baguettes. "Quand vous aurez terminé, vous vérifierez par superposition."

Après la vérification, le maître fait le bilan :

-qui a réussi?

-qui a échoué? pourquoi? quels renseignements avez-vous pris? avez-vous bien reporté les angles? vous êtes-vous préoccupé des côtés?

C. Les conditions de l'observation

L'observation s'est déroulée sur les 3 leçons consécutives (en janvier 87).

1. Les classes

Il s'agit de 2 classes de CM1, de 26 et 27 élèves, dont la majorité ont entre 9 et 10 ans.

2. La méthode d'observation

a) Description

Les observations ont eu lieu au COREM, dont le bâtiment spécialement aménagé, permet l'enregistrement vidéo des séquences ainsi que la présence de plusieurs observateurs auprès des groupes d'enfants. Toutefois les 3 leçons n'ont pu être observées avec le même soin.

b) Les fiches d'observation

Elles définissent le travail des observateurs des groupes, auxquels nous avons demandé de s'intéresser en priorité à certains aspects.

1) Leçon 1

a) phase 1

Noter :

- la méthode de construction

* Reconstitution du quadrilatère en posant les baguettes sur le gabarit avant d'installer les vis puis essai de fixer ces dernières sans déformer le quadrilatère

* Fixation de 2 côtés, et vissage après détermination de leur angle puis même activité sur un 2ème angle, soit adjacent à la partie déjà faite, soit opposé. Enfin pose et vissage des 2 derniers écrous.

* Assemblage des côtés sans tenir compte des angles puis réglage des angles et vissage

* Autre méthode

- les termes utilisés par les enfants pour désigner les ajustements. Exemples : côtés, pointes, coin, dépasse etc...

b) phase 2 et phase 3

Noter :

- la méthode de reconnaissance

* Construction de l'outil sur le cadre puis recherche du gabarit correspondant. Un voyage suffit pour réussir.

* Construction de l'outil sur un des gabarits, comparaison du cadre et de l'outil, acceptation ou rejet du gabarit, nouvel essai.

* Autres ou passage de l'une à l'autre

- le soin apporté au vissage ; c'est en effet un comportement significatif : il manifeste ou non la compréhension qu'a l'enfant du fait qu'il y a quelque chose à contrôler dans le déplacement du quadrilatère.

- les termes utilisés

2) Leçon 2 et 2ème phase de la leçon 3

Noter pour chaque essai

- ce qu'ils disent et ce qu'ils font des 2 petites baguettes

Des exemples possibles :

* non utilisation, essai de repérage visuel de la forme pour choisir le gabarit

* mise bout à bout et repérage des longueurs des côtés du cadre.

* placement des baguettes sur un angle du cadre, et fabrication d'un angle superposable avec saisie explicite ou non des côtés de ce cadre puis recherche sur un des gabarits d'un angle superposable.

- comment ils traitent l'information "angle" dans la recherche du bon gabarit. Ce traitement peut être décrit par l'arbre suivant :

Choix d'un angle du cadre		----- saisie explicite des longueurs
		----- pas de saisie

Report sur gabarit		----- en tenant compte des longueurs
		----- sans en tenir compte

Si non superposition		----- autres essais sur le même gabarit
		----- rejet du gabarit et choix d'un autre

Si superposition		----- sélection du gabarit
		----- essai sur d'autres gabarits
		----- retour au cadre pour saisir un autre angle

- nombre d'angles saisis

- Au cours de cette démarche, noter comment les enfants ont résolu les problèmes de désignation et d'énumération des éléments du cadre et des gabarits.

a) leçon 3; 3ème phase

Noter

- la méthode de construction

* construction d'un ou de 2 angles à partir de la saisie sur le gabarit mais sans prendre en compte les côtés

* Fixation de 2 côtés repérés, et vissage après détermination de leur angle puis même activité sur un 2ème angle, soit adjacent à la partie déjà faite, soit opposé. Enfin vissage des 2 derniers boulons.

* Assemblage des côtés sans tenir compte des angles puis réglage des angles et vissage
- la réaction des élèves lorsqu'ayant fait des erreurs de report ou détermination des côtés, ils s'aperçoivent que leur quadrilatère ne se ferme pas.

- le soin apporté au vissage
- les termes utilisés par les élèves

c) Limites de l'observation

Nous avons décrit de manière détaillée un guide d'observation dont l'usage serait plus adapté à des observations cliniques des groupes d'élèves. En fait selon les cas, 19 groupes au maximum ont pu être observés, et toutes les observations ne sont pas complètes..

D. Les résultats

1. Leçon 1

a) Quantitatifs (réussites-échecs)

1) Phase 1)

Tous les enfants ont réussi plus ou moins rapidement à reconstituer un cadre superposable à leur gabarit, mais un quart d'heure a été nécessaire pour que tous se familiarisent avec le matériel, et remarquent que tous les écrous étaient placés du même côté.

2) Phase 2)

Après un certain flottement, pour quelques groupes, auxquels l'enseignante a du réexpliquer la consigne ; tous sauf 2, ont rapporté un gabarit dont ils pensaient qu'il correspondait à leur cadre. La réussite a été effective pour les 4/5 d'entre eux.

3) Phase 3)

La réussite concerne les 2/3 des groupes mais pas forcément les mêmes que les précédents.

b) Qualitatifs

1) Les comportements observés pendant les temps de recherche

a) Phase 1

Tous les groupes observés (16), ont commencé par disposer les baguettes sur le gabarit, ce qui leur a permis d'obtenir le bon ordre. Aucun n' a tenté de les assembler sans tenir compte des angles. La moitié ont commencé par assembler 2 angles opposés, puis à les accrocher avec le souci de respecter les deux autres angles, un quart ont formé les angles les uns après les autres en tournant, enfin le dernier quart, après avoir posé les baguettes sur le gabarit, a essayé de les assembler sans déformer le quadrilatère.

Quelle que soit la méthode utilisée, le comportement des élèves atteste que pour eux, la reproduction d'un quadrilatère articulé est de même nature que celle d'un quadrilatère en carton, c'est-à-dire, que pour le reproduire, il faut reproduire les angles les uns après les autres, au fur et à mesure de l'assemblage. Peu à peu, toutefois, certains non satisfaits du résultat et en étant à leur 2ème ou 3ème tentative, ont commencé à essayer de fixer

convenablement un des angles par déformation du cadre, sans défaire complètement les vis. Aucune réflexion n'a cependant montré leur étonnement devant le fait qu'une fois cet angle fixé, les autres l'étaient aussi. Personne n'en a pris conscience. D'ailleurs l'observation de leurs actions pour refaire ou modifier leur cadre montre que c'est le dispositif technologique qui leur était inconnu : voulant corriger un angle, ils dévissaient uniquement l'écrou qui y correspondait ou au contraire défaisaient tout jusqu'à revenir aux 2 baguettes. Ces comportements ont peu à peu diminué, au fur et à mesure du déroulement de la séquence, mais cette adaptation ne concerna que l'action. Elle ne fut accompagnée d'aucune prise de conscience explicite des propriétés des angles des quadrilatères.

b) Phase 2

Sur les 19 groupes à propos desquels nous avons pu recueillir de l'information :

* 14 ont commencé par construire un cadre superposable au leur et l'ont utilisé pour aller rechercher le gabarit correspondant au cadre initial. Les 3 échecs s'expliquent par des raisons différentes : dans un groupe, les 2 enfants n'ont pas réussi à s'entendre sur une méthode, dans les 2 autres, des erreurs dans la construction du cadre outil, pour l'un, leur ont fait choisir un mauvais gabarit, pour l'autre, les ont déstabilisés et même fait perdre le fil de leurs actions.

* 3 sont partis avec leur "outil", construire un cadre correspondant à un des gabarits qu'ils avaient choisi, en ayant sans doute assez bien en mémoire la forme du modèle, car l'un d'entre eux a réussi en un voyage, un autre en deux.

* les 2 autres groupes ont réussi grâce à une analyse visuelle fine des gabarits qu'ils ont été examiner dès la fin de la consigne. Revenus à leur place, ils ont réalisé un cadre mais qui ne leur a pas servi pour aller chercher leur gabarit!

c) Phase 3

Dans un premier temps, un certain nombre de groupes ont été désarçonnés par le fait de ne plus disposer que de 3 baguettes pour repérer la forme d'un objet qui en a 4. Quelques enfants l'ont exprimé ; un groupe a commencé par fabriquer un triangle, d'autres ont attendu de voir ce que faisaient leurs voisins.

Mais un nombre suffisant d'enfants ont vu qu'ils pouvaient utiliser les 3 baguettes comme ils avaient utilisé les 4 et ce procédé s'est vite répandu dans les classes. Le nombre moindre de réussites s'explique par la nécessité accrue d'un contrôle du vissage, lors du transport de l'outil ; avec 4 baguettes, le blocage d'un boulon suffit à maintenir la rigidité de l'ensemble tandis qu'avec 3, il faut en serrer 2, c'est à dire tous!

La majorité des groupes ayant réussi ont rencontré des difficultés à retrouver un gabarit superposable avec leur outil, ce qui les a incités à vérifier plusieurs fois sa forme par rapport à celle du modèle et à prendre conscience de la nécessité du vissage. Devant ces difficultés, ceux qui ont échoué ont, soit renoncé à trouver le gabarit, soit désigné celui qui leur paraissait le plus proche, soit même pour 2 groupes, perdu le sens de ce qu'ils faisaient en adaptant leur outil à la forme d'un des gabarits, tout en croyant qu'il était aussi superposable avec leur modèle.

2) Les échanges collectifs

Ils se sont déroulés après la consigne et entre chaque phase.

A la question de la phase 1, " pensez- vous que vos cadres seront pareils quand vous les aurez construits?", une seule réponse apparaît : "ils seront pareils, ils auront la même forme ; il y a la même longueur de baguettes." Il faudra attendre la vérification après leur

réalisation pour que les élèves prennent conscience que ce n'est pas le cas . Certains attribuent cette différence au fait qu'ils n'ont pas reçu les mêmes gabarits, d'autres pensent qu'ils n'ont pas eu les mêmes longueurs de baguettes. L'institutrice ayant montré que cette hypothèse est fautive, ils essaient d'exprimer ce qui différencie leurs cadres par des expressions comme : "celui-ci est plus pointu que celui-là", "on dirait que c'est plus grand", "celui-là déborde", "il y a un décalage des baguettes"...Aucune expression ni aucun geste ne témoigne que les enfants établissent un rapport entre les différences de forme et les angles que font les baguettes.

Dans les deux temps qui ont suivi la recherche du gabarit correspondant à leur cadre modèle, les échanges ont pris comme point de départ la description des méthodes utilisées par ceux qui n'avaient pas fini ou qui avaient échoué. Ils ont permis d'explicitier en CM1B les 2 méthodes utilisées par les élèves (en CM1A, tous avaient construit leur cadre outil par référence au modèle) et dans les deux classes, de soulever le problème du vissage .

3) Le langage utilisé par les élèves

Tous les observateurs ont noté la pauvreté du vocabulaire utilisé par les élèves dans leurs échanges à deux : ils utilisent beaucoup de démonstratifs, pour commenter leurs actions mais aucun terme un peu technique. Ce fait était prévisible : il s'agit d'actions micro-spatiales où le langage est presque superflu.

c) Conclusions de la leçon 1

L'objectif visé : " familiariser les élèves avec le matériel et permettre la dévolution du problème" a bien été atteint. Les observations ont fait apparaître que les élèves ont une conception globale des quadrilatères articulés, dans laquelle le concept d'angle n'intervient pas de manière suffisamment explicite pour que les enseignantes aient la possibilité d'introduire ce terme. Toutefois, on peut penser que le temps passé pour se familiariser avec le dispositif aurait pu l'être en dehors d'une leçon de mathématiques.

2. Leçon 2 - Leçon 3 phase 2

Rappelons qu'au cours de ces 2 leçons, le même problème est posé aux élèves, il s'agit de trouver parmi six, le gabarit de leur cadre en utilisant comme seul instrument un ensemble de 2 baguettes de même longueur.

Entre chaque essai, un temps est consacré à la discussion des résultats et des méthodes.

a) Le scénario suivi pour le premier jeu

Nous avons prévu trois scénarios possibles, en fonction des comportements majoritaires des enfants. Dans les deux classes, la plupart des groupes, au bout d'un quart d'heure, avaient commencé à utiliser leur outil pour comparer des angles du gabarit et des angles du cadre, et plusieurs avaient sélectionné un gabarit comme superposable à leur cadre. Aussi, l'enseignant n'a pas eu à intervenir pour débloquer la situation, il a attendu que tous aient choisi leur gabarit. Une discussion générale a suivi chaque jeu.

b) Résultats quantitatifs (réussites-échecs)

Le tableau suivant résume les résultats de chaque groupe. La réussite est codée 2, l'échec 1.

1) CM1A

NOMS	JEU 1	JEU 2	JEU 3
PIN-NAM	1	2	2
CEM-CMB	1	2	2
OGS-BAE	1	2	2
CED-CHJ	1	2	2
BEP-COC	1	1	1
LES-LHS	1	1	2
NOJ-ACM	1	2	2
VEA-CEC	2	2	2
ARG-DAA	1	1	2
LEH-MAD	2	2	2
LOJ-POM	2	2	2
BOA-GLE	1	2	2
PUY-ELH	2	1	2
REUSSITES	4/13	9/13	12/13

2) CM1B

NOMS	JEU 1	JEU 2	JEU 3
CAF-GAL	2	1	1
CLA-IBA	2	1	1
KAF-MIP	2	1	2
MIC-DUH	2	1	2
NTO-CEU	1	1	2
MOM-SCA	2	1	*
FER-VID	1	1	*
ROJ-SAB	2	2	2
GRJ-GAC	1	1	*
SAR-BAW	2	1	2
FOR-HAE	1	2	2
LER-JON	2	2	*
LAS-LAG	2	1	2
LER-MOM	*	*	2
GRJ-VID	*	*	2
REUSSITES	9/13	3/13	9/11

3) Questions posées par la comparaison entre les deux classes

L'évolution des 2 classes apparaît très différente :

* au CM1A, les résultats, faibles comme nous nous y attendions, croissent régulièrement.

* au CM1B, par contre, dès le premier jeu, il y a beaucoup de réussites, mais au 2nd, il se produit une chute importante, et une remontée très forte au 3ème.

Comment expliquer ces résultats? Sont-ils le signe d'une très forte ouverture de la situation pour les élèves ou peuvent-ils s'expliquer par une gestion différente de la situation didactique dans les deux classes? L'analyse des comportements des élèves et de leurs échanges dans les moments collectifs nous permettra d'avancer des réponses.

Quoiqu'il en soit, il semble que la majorité des groupes d'enfants soient capables, au terme des trois jeux, d'utiliser convenablement les couples de baguettes pour comparer les formes de quadrilatères qu'ils ne peuvent voir d'un même regard.

c) Résultats qualitatifs

1) les différentes stratégies des élèves pour retrouver leur gabarit

a) Jeu 1

i) usage du couple de baguettes

Dans les deux classes, il y a eu trois sortes d'évolution dans l'emploi du couple de baguettes (que nous appellerons dorénavant "l'outil") :

- * la majorité des groupes observés (17) l'utilisent d'emblée pour comparer des angles
- * quelques-uns (3 sur les 10 groupes du CM1A, 2 sur les 7 du CM1B) ont attaché les 2 baguettes pour en faire une baguette plus longue que les côtés du cadre et ont essayé d'en prendre les mesures. Ne voyant pas comment continuer, 2 des groupes ont essayé de se repérer au souvenir de la forme, les trois autres ont ensuite utilisé leur outil comme les premiers. L'observation ne permet pas de dire si il y a eu imitation ou si cela a été un changement spontané.

ii) traitement de l'information "angle"

Nous avons prévu une observation très précise de ce traitement ; or nous n'avons pu réaliser que l'observation de quelques groupes par classe et la vitesse d'action des enfants était trop grande pour que les observateurs aient pu noter de manière détaillée toutes les étapes de leur démarche et en particulier les hésitations, les vérifications etc. Certains des observateurs ont été plus précis que d'autres, mais dans l'ensemble nous disposons plutôt de synthèse correspondant à l'interprétation de la démarche des élèves par l'observateur.

a) Nous avons relevé les stratégies suivantes :

- * prise d'un angle non repéré et choix du premier gabarit ayant un angle superposable : (A)
- * prise d'un angle et choix des deux gabarits ayant un angle superposable suivi de l'examen des autres angles,
 - choix du premier gabarit ayant deux angles superposables : (B).
 - choix du gabarit ayant les 4 angles superposables : (C).
- * prise d'un angle repéré, c'est à dire en tenant compte de la longueur de ses côtés ; suite comme (A) : (A'),
- * prise de deux angles opposés repérés suivi du repérage de la grande baguette : (B').

b) Voici comment se répartissent les stratégies dans les deux classes

CM1A

NOMS	Résultat	Stratégie
PIN-MAM	1	C
BEP-COC	1	A'
LES-LHS	1	B
NOJ-ACM	1	B
VEA-CEC	2	B'
LEH-MAD	2	A
LOJ-POM	2	A'
BOA-GLE	1	C

CM1B

NOMS	Résultat	Stratégie
CAF-GAL	2	A
MIC-DUH	2	A
MOM-SCA	2	A
ROJ-SAB	2	C
SAR-BAW	2	A
FOR-HAE	1	A
LER-JON	2	A
LAS-LAG	2	A

Nous constatons que :

* dans le CM1A, le nombre de méthodes utilisées est supérieur à celui du CM1B mais le nombre de réussites y est inférieur. Alors que seules permettent de gagner à tout coup les méthodes C et B' (si les angles sont reportés avec suffisamment de précision), sur les 3 groupes qui les ont employées au CM1A, 2 ont échoué, le seul qui l'a fait au CM1B a bien réussi mais 5 groupes qui ont utilisé la méthode A permettant de réussir avec 50 % de chance ont effectivement eu cette chance.

* les échanges qui ont suivi le premier jeu ont fait apparaître des éléments différents dans les deux classes, ce qui peut expliquer les résultats des jeux 2 et 3 :

- Dans le CM1A, 7 groupes sont venus exposer leur méthode ; toutes étaient différentes, certaines faisaient appel à une différenciation des baguettes, d'autre pas. Les résultats n'étant pas liés à l'emploi d'une stratégie efficace ou pas, leur comparaison sur ce plan n'a pas été amorcée, sauf le rejet de celle ne faisant intervenir l'outil que pour comparer des longueurs. Par contre, des remarques ont été faites faisant apparaître la prise de conscience par les enfants de la pertinence des relations d'incidence entre les baguettes pour comparer les cadres.

- Dans le CM1B, seules deux méthodes ont été explicitées : la méthode A par Julien qui avait perdu puis la C par Jérémie qui avait gagné. Mais quand la maîtresse demande si d'autres groupes ont utilisé la méthode de Julien et ont réussi, 6 lèvent la main. La réflexion de

Jérémie "c'est un peu le hasard" est reprise par l'enseignante : "on va voir si c'est du hasard ; si nous recommençons, peut-être que ça ne marchera pas".

En ce qui concerne la différenciation des baguettes, elle n'a pas été explicitée, seule l'a été le recours à la forme : "on a regardé la forme, ça aide". Alors que nous pensions que les enfants auraient des difficultés avec l'absence de désignation des baguettes et seraient conduits à utiliser la feuille qui leur avait été donnée pour noter des informations, il n'en a rien été : Ils ont semblé bien se rappeler quel angle du cadre ils avaient cherché à retrouver sur les gabarits et les quelques-uns qui ont pensé à en différencier les côtés l'ont fait en parlant de petit, petit-moyen, etc...

De manière générale, on peut penser que plusieurs étapes sont nécessaires pour que les enfants soient capables de dissocier les prédicats angles et longueur des côtés caractérisant les quadrilatères quelconques. Une première étape a été franchie quand leur hypothèse sur la superposabilité de deux quadrilatères construits avec les mêmes baguettes a été invalidée. Au cours de ce premier jeu, le modèle implicite majoritaire est qu'il suffit que de tels quadrilatères aient un angle superposable pour qu'ils le soient. Quelques-uns complètent ce modèle par la prise en compte de la forme ou des rapports entre les baguettes.

A la fin de la discussion, le but fixé par l'enseignante pour le nouveau jeu n'est pas tout à fait le même dans les deux classes :

- Dans la classe A, il est exprimé ainsi : "Ceux qui n'avaient pas réussi, saurez-vous utiliser une stratégie qui marche?"

- Dans la classe B, ainsi : "nous allons faire un nouveau jeu, on va voir si la méthode de Julien, c'est du hasard²".

b) Jeux 2 et 3

L'évolution des réussites, des stratégies et du contenu des échanges a été différente dans les deux classes, comme le laissait prévoir les conclusions tirées du premier jeu.

Toutefois, au terme de cette phase, des acquis communs sont apparus :

- La méthode A n'est pas une bonne méthode : Elle ne permet pas de trouver à tous les coups. Les enseignantes ont clairement relié cette conclusion à ce qui en mathématiques, caractérise une bonne méthode.

- On peut appliquer la méthode C, c'est à dire vérifier tous les angles, et cependant se tromper si on n'a pas reporté les angles avec suffisamment de soin. La méthode suppose une bonne coïncidence de l'outil et du cadre ou du gabarit, et le serrage de la vis.

D'autres remarques, en particulier relevant de la possibilité de ne tenir compte que de deux angles à condition de noter la position des baguettes, ont été faites dans le CM1A. Au CM1B, la centration sur la question de la méthode a nui à l'explicitation des pratiques repérables chez quelques enfants concernant cette prise en compte.

2) L'introduction du terme "angle"

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction générale, nous avons décidé d'introduire le mot "angle", ni par ostension en montrant l'outil formant un certain angle et en disant "vous voyez, ceci est un angle", ni au moyen d'une définition mais en reprenant de manière systématique les termes employés par les enfants pour décrire leurs méthodes et en les remplaçant par le mot d'angle chaque fois que l'idée exprimée par l'enfant y correspondait bien. Ce faisant, nous n'évitons pas l'ambiguïté dénoncée par les réformateurs : l'angle peut

² Il serait intéressant de relever tout l'implicite de cette formulation et de s'interroger sur la compréhension qu'ont les enfants de cet âge du hasard...

être, pour un enfant, ce couple de baguettes. Toutefois, en donnant au couple de baguettes le nom d'outil et en l'utilisant pour comparer des secteurs par superposition, sans coïncidence de longueur des côtés, nous estimons que l'expression : "ces deux quadrilatères ont un même angle" va prendre le sens que nous visons.

Le corpus montre que peu à peu le terme d'angle a remplacé ceux de "coin" majoritairement employé, "côtés", "bout". Ceci dans les phases d'explicitation collective. L'évaluation individuelle faite ultérieurement nous a donné des indications sur le degré d'appropriation individuelle de ce terme en liaison avec celle du concept.

3. Leçon 3 Phase 2

Il s'agissait, à ce moment, pour chaque groupe de deux, de construire un quadrilatère superposable à un gabarit placé loin des enfants. Le seul moyen de prendre des informations était de transporter l'outil.

a) Résultats quantitatifs

1) CM1A

NOMS	
PIN-MAM	2
CEM-CMB	2
OGS-BAE	2
CED-CHJ	1
BEP-COC	2
LES-LHS	2
NOJ-ACM	1
VEA-CEC	2
ARG-DAA	2
LEH-MAD	2
LOJ-POM	2
BOA-GLE	2
BOA-GLE	2
REUSSITES	11/13

2) CM1B : Le nombre important d'échecs à la première construction (Cons 1) a conduit à proposer une seconde (cons 2)

NOMS	CONS 1	CONS 2
CAF-GAL	1	2
CLA-IBA	1	2
KAF-MIP	1	2
IC-DUH	2	2
NTO-CEU	1	1
MOM-SCA	*	2
FER-VID	*	1
ROJ-SAB	2	2
GRJ-GAC	*	2
SAR-BAW	1	1
FOR-HAE	1	1
LER-JON	*	2
LAS-LAG	1	2
LER-MOM	2	*
GRJ-VID	1	*
REUSSITES	3/11	9/13

b) Commentaires

Cette fois encore les résultats des deux classes sont très différents. L'observation des comportements des élèves dans la réalisation du cadre montre que la plupart des groupes du CM1A ont repéré les longueurs des côtés des angles fabriqués alors que cela a été une conduite minoritaire au CM1B, au premier essai.

Les deux échecs du CM1A correspondent à une imprécision dans la prise des angles alors que les causes d'échecs sont plus diversifiées au CM1B :

- 2 groupes n'avaient pas terminé au moment de la vérification, car ils s'étaient aperçu que, quoiqu'ayant fabriqué 2 angles superposables opposés, l'assemblage final ne fournissait pas des angles superposables pour les deux derniers.

- 5 groupes n'avaient pas respecté l'ordre des baguettes

- un groupe avait pris les angles de manière imprécise.

Cette différence de comportement entre les deux classes s'explique bien par le contenu des échanges lors des phases précédentes. Les rétroactions de la situation ont permis aux élèves du CM1B de prendre conscience du rôle de l'ordre de l'assemblage des baguettes dans la reproduction du gabarit et la réussite de la majorité d'entre eux dans un nouvel essai.

4. L'évaluation individuelle

a) Objectifs visés

Rappelons que l'objectif de ces trois séquences est la construction par les élèves du concept d'angle comme propriété commune à des polygones dont certaines parties sont superposables.

L'évaluation a pour buts :

- de vérifier que la plupart des enfants sont capables individuellement d'effectuer les tâches essentielles des activités qui leur avaient été proposées par groupes dans les séances précédentes.

- d'évaluer dans quelle mesure ils ont développé une conception des angles en accord avec le concept d'angle de secteurs, ceci dans des situations dont le contexte est de plus en plus éloigné du contexte de l'apprentissage et s'ils se sont approprié un usage convenable du terme d'angle.

- de comparer les réponses de nos élèves avec celles obtenues d'élèves de 6ème dans certains items du questionnaire de Close (1982)

b) Description des épreuves

1) Epreuve 1

Chaque enfant dispose d'une feuille sur laquelle sont dessinés, de chaque côté, un gabarit de cadre. Les deux gabarits sont de forme voisine mais différente et ont au moins deux angles superposables. La question est la suivante : "Est-ce que ces deux gabarits correspondent au même cadre? Pourquoi?"

Le dépouillement des réponses a pris en compte trois types d'informations :

- l'échec ou la réussite

- le type de justification utilisé par l'enfant

- le type de vocabulaire pour désigner les angles du gabarit

2) Epreuve 2

Deux gabarits de triangle sont dessinés sur une même feuille, chacun des angles étant désigné par une lettre. Les enfants ont à répondre à deux questions :

- Dans le triangle n°2, y-a-t-il un angle égal à l'angle Q du triangle n°1? Si oui lequel?

- Dans le triangle n°1, y-a-t'il un angle égal à l'angle T du triangle n° 2? Si oui lequel?

Aucune des deux réponses ne peut être donnée sans l'utilisation de l'outil, les mesures des angles concernés étant proches. Les deux angles égaux ont des côtés de longueur

différente. Aucune explication sur le sens des termes "angle égal" n'est fournie d'emblée aux enfants. Si certains posent la question, l'enseignant doit répondre que cela veut dire superposable.

3) Epreuve 3

Un pentagone irrégulier est dessiné sur une feuille, à côté de chaque sommet est placée une lettre servant à désigner l'angle correspondant. Deux questions sont posées :

- Y-a-t-il un angle égal à A? si oui lequel?

- Y-a-t-il un angle égal à D? si oui lequel?

La réponse attendue est oui, C pour la première question.

La réponse attendue est non pour la deuxième question.

Les côtés de A et de C sont de longueur différente, alors que ceux de D et de E dont la différence de mesure est environ de 5 degrés sont de même longueur.

4) Epreuve 4

Afin de placer les élèves dans le contexte le plus usuel en ce qui concerne la "représentation" des angles, deux questions leur sont posées à propos de la comparaison d'angles de deux baguettes.

Deux gabarits d'outils sont dessinés, de longueur de côtés très nettement différente, accompagnés de la question : "Les angles G et F sont-ils égaux?" La réponse attendue est "oui"

La même question est posée à propos de deux autres aux côtés de même longueur. La réponse attendue est "non", la différence de mesure entre les deux angles est de 5 degrés.

L'évaluation est donc centrée sur la maîtrise, par les élèves, de l'égalité des angles³ alors que le processus d'apprentissage n'a jamais porté explicitement sur ce concept.

c) Description des résultats

1) Epreuve 1

Au CM1A, 4 élèves sur 27 n'ont pas donné la bonne réponse.

Au CM1B, 3 élèves sur 25 n'ont pas donné la bonne réponse.

a) Quelles sont leurs justifications?

Etant donnée l'ouverture de la question, on peut s'attendre à deux types de réponses :

* celles qui essaient d'exprimer un constat

* celles qui essaient de décrire les actions entreprises pour obtenir le résultat

Remarquons que les enfants de cet âge ont beaucoup de peine à expliquer de manière exhaustive un phénomène qui met en jeu des quantificateurs. Une des explications que l'on pourrait attendre d'eux pourrait être ainsi formulée dans le langage adulte : "Il existe un angle (ou deux) du gabarit recto que l'on ne peut superposer à aucun angle du gabarit verso." L'objet de cette étude n'étant pas d'analyser la façon dont les élèves manipulent les quantificateurs, nous n'exploiterons pas le corpus des justifications de ce point de vue et nous serons amenés, en tenant compte de notre connaissance des élèves, à interpréter leurs textes souvent ambigus. Les conditions de production de ces textes ne les incitaient d'ailleurs pas à être le plus

³ Deux angles égaux sont donc deux angles superposables. La rigueur des années 60 est malmenée. Peut-on y échapper?

explicites possible puisqu'ils étaient destinés à l'enseignant censé être capable de comprendre ce que l'élève veut dire⁴.

i) Les justifications correspondant aux sept réponses erronées :

- * une des réponses est une tautologie : "il est comme le premier"
- * une deuxième se réfère à la mesure des côtés qui est précisée.
- * deux réponses sont ambiguës : "les côtés sont les mêmes" et "j'ai essayé de tous les côtés et ça a marché". L'emploi du terme "côtés" pourrait laisser penser que les enfants font la même erreur que l'auteur de la réponse précédente, mais ce terme est également employé par certains comme synonyme d'angle. Ces deux réponses proviennent d'enfants qui ont investi convenablement le travail des 3 leçons et bien réussi les épreuves suivantes. On peut penser qu'ils ont mal contrôlé l'ouverture de l'outil lors du report des angles.

- * trois réponses se réfèrent aux angles : dans l'une la conclusion est tirée de la comparaison "des" angles, sans en préciser le nombre, dans les deux autres, il semble que les enfants n'aient comparé qu'un angle pour l'un, deux pour l'autre et aient conclu à partir de leur égalité.

ii) Les justifications correspondant aux réponses justes

Nous les avons classées en plusieurs catégories :

- * celles correspondant à l'affirmation : "les angles ne sont pas les mêmes" ou "ne sont pas pareils", en précisant le nombre (catégorie A1) ou sans précision supplémentaire (A2).

- * celles où le même constat est exprimé à l'aide des expressions "ne correspondent pas" ou "ne vont pas" faisant une référence implicite à la superposition. Nous pouvons diviser cette catégorie en 2 : les justifications de ce type précisant le nombre d'angles concernés : "il y a deux angles qui vont, deux qui vont pas" (B1) et celles ne le précisant pas (B2).

- * celles tentant de décrire la procédure utilisée. La diversité en est plus grande, nous distinguons seulement celles qui permettent de penser que l'enfant n'a comparé qu'un angle du recto avec un angle du verso et n'ayant pas trouvé de superposition a répondu "non" (C0), celles dans lesquelles l'enfant précise le nombre d'angles pour lesquels "ça n'allait pas" (C1) et celles pour lesquelles il ajoute à sa description le repérage des angles par la taille de leurs côtés (C2).

- * celles évoquant la différence entre les gabarits liée à la différence d'ordre dans l'accrochage des baguettes (D).

- * enfin, au CM1B, une des réponses justes est accompagnée d'une justification basée sur la position des gabarits dans la feuille "parce que le cadran de devant a une baguette verticale et une autre baguette horizontale".

Voici les résultats chiffrés d'emploi de chacune des catégories de justifications dans chaque classe :

	A1	A2	B1	B2	C0	C1	C2	D
CM1A	0	6	3	1	1	7	5	0
CM1B	0	5	5	2	2	5	0	2
TOTAL	0	11	8	3	3	12	5	2

De plus 3 enfants font référence à 2 méthodes.

⁴ Un travail sur la formulation supposerait une mise en situation particulière.

Nous pouvons constater que le quart des enfants utilisent des justifications de type A, l'absence de justifications A1 nous laisse supposer que pour tous ces élèves, l'affirmation "les angles ne sont pas les mêmes", signifie "l'ensemble des angles du gabarit 1 est différent de celui des angles du gabarit 2".

Plus des deux-tiers des élèves, pour justifier leurs réponses, font appel implicitement (type B) ou explicitement (type C) aux manipulations qu'ils ont faites, presque tous en évoquant le résultat de manière précise. Remarquons que seuls des élèves du CM1A, qui avaient déjà évoqué ces caractéristiques dans leurs débats, évoquent le repérage des angles par les longueurs de leurs côtés. Enfin 4 élèves font référence à l'ordre des baguettes, dont deux comme justification complémentaire à celle des angles.

En conclusion, la plupart des élèves sont capables, dans une situation d'action individuelle, de réinvestir convenablement les connaissances acquises antérieurement.

b) Le vocabulaire utilisé par les élèves

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, il n'y a pas eu d'explication par l'enseignante de ce qu'on appelle un angle mais utilisation du terme en situation. Nous faisons l'hypothèse que les élèves étaient capables de se l'approprier et de le réutiliser spontanément si nécessaire. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons relevé dans leurs explications les termes employés pour désigner les angles et pour désigner leur "superposabilité" ou leur égalité.

i) Termes désignant les angles

	CM1A	CM1B	Ensemble
angle	14	13	27
Coin	5	3	8
côtés	4	3	7
pointe	1	0	1
baguettes	2	1	3
pas de terme	1	5	6

ii) Termes désignant le rapport entre les angles

	CM1A	CM1B	Ensemble
pareils	5	2	7
mêmes	3	4	7
correspondent	1	3	4
"ça va"	14	12	26
divers	4	4	8

Dans la catégorie "divers", nous trouvons "même forme", "même longueur", "même largeur", "juste".

Les diverses formes de "ça va" sont bien sûr associées aux justifications de catégories B et C. En voici deux exemples un peu différents d'utilisation :

"Non, les deux gabarits ne sont pas les mêmes parce que certains coins ne vont pas sur les autres"

"Non, j'ai essayé le grand coin ça allait, et un autre coin ça n'allait pas"

Conclusions à propos du vocabulaire

Les résultats des élèves montrent que :

* seulement la moitié d'entre eux utilisent spontanément le terme "angle"

* un peu plus du tiers les termes "même" ou "pareil" pour traduire la relation de superposabilité entre les angles. Peut-on estimer que, seuls, ceux-ci ont une certaine conception de l'équivalence entre les angles? L'analyse des autres épreuves du test nous fournit des indications intéressantes à ce propos.

2) Epreuves 2-3-4

a) Résultats chiffrés des épreuves 2- 3- 4

Voici le tableau des réussites pour chacune des épreuves et des classes. Au CM1A, ces résultats portent sur 27 élèves ; au CM1B, sur 25.

	2-a	2-b	3-a	3-b	4-a	4-b
CM1A	24	21	25	17	20	22
CM1B	25	23	24	18	17	24

L'analyse statistique montre qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux classes. Les différences entre les deux déroulements n'ont pas eu de conséquences sur les conceptions évaluées.

Le pavé général des résultats montre que 2 enfants du CM1A sont en échec complet : L'un d'entre eux (1 réussite) n'a participé qu'à une séance sur les trois, l'autre (0 réussite) interrogée sur ses réponses a exprimé " je n'avais pas compris que les longueurs ne comptaient pas."

Si l'on exclut ces enfants du tableau des résultats, celui-ci reste valable sauf l'effectif de la colonne 3-a qui passe à 24. Les effectifs globaux des deux classes sont de 25.

On obtient alors le tableau suivant pour le nombre de réussites par enfant

Nb de Réussites	3	4	5	6
CM1A	2	3	10	10
CM1B	1	1	14	9

b) Etude des erreurs

Nous devons pour la faire rapprocher les épreuves 1-a, 2-a, et 3-a

Elles portent en effet toutes les 3 sur la recherche d'un angle égal à un angle donné, l'angle solution n'ayant pas les mêmes longueurs de côtés. Nous remarquons que 3 enfants seulement ont fait une erreur à l'une des 2 premières questions alors que 13 (5 en CM1A, 8 en CM1B) ont répondu que G et F n'étaient pas égaux à la question 4-a. Aucun de ces 13 ne s'était trompé à 2-a ni à 3-a. Comme pour 11 d'entre eux, c'est la seule erreur sur l'ensemble des épreuves, on peut penser que c'est bien la différence de longueur des côtés et non la prise des angles qui provoque leur réponse. Nous pouvons supposer qu'ils ne donnent pas le même sens au mot angle quand il s'agit de l'angle d'un quadrilatère et lorsqu'il s'agit d'une représentation de l'outil. Il serait intéressant de vérifier si cette différence est vraie aussi pour des élèves n'ayant pas reçu cet enseignement.

De même, dans les questions b, il s'agissait de comparer des angles de même longueur de côtés et de différence de mesure égale à 5 degrés et de conclure à une non-égalité. Les réponses erronées sont les mêmes pour tous les enfants, elles se répartissent ainsi :

2-b : 5 3-b : 14 4-b : 4

8 enfants sur 14 n'ont fait que cette erreur sur l'ensemble des épreuves, 5 en ont fait une autre soit sur 2-b soit sur 4-b. Pour ceux-là, on peut penser que leur exigence sur la coïncidence des côtés de l'outil avec ceux de l'angle sont insuffisantes, mais comment expliquer l'erreur des 8 autres? L'absence d'observateurs nombreux lors de la passation du test ne nous permet pas de savoir s'ils ont vérifié à l'oeil ou s'ils ont mal contrôlé la position de leur outil.

E. Conclusions

L'ensemble des séquences que nous avons élaborées nous semble bien répondre à sa fonction : les élèves sont capables, à son issue, de donner un sens convenable au concept d'angle, ceci étant attesté par le résultat d'évaluations individuelles, portant sur des questions dépassant le contexte limité de présentation de la notion.

Toutefois, une deuxième étape est nécessaire pour développer chez les élèves la maîtrise de la reproduction d'angles dans des situations où celle-ci a du sens pour eux, c'est-à-dire dans une situation fonctionnelle. Les différentes situations de reproduction de quadrilatères que nous leur avons proposées ont cet objectif ainsi que d'autres que nous préciserons le moment venu.

IV. ETAPE 2

A. Introduction

Nous ne présentons qu'un compte-rendu résumé de cette recherche, malgré son intérêt. La complexité des situations, celle du matériel, le temps nécessaire pour traiter l'ensemble du processus nous ont conduit à ne pas le reproduire une deuxième année. Nous nous sommes alors consacrés à l'élaboration du deuxième processus (voir chapitre C-8) et à celle d'autres ingénieries et avons, par manque de temps renoncé à présenter un compte-rendu détaillé des deux dernières étapes.

B. Description de la situation a-didactique

1. Le matériel

a) les quadrilatères sur feuille calque

Ce sont des quadrilatères convexes quelconques, d'assez grandes dimensions (ils occupent l'espace d'une feuille A4), de manière à ce que les erreurs sur les reports d'angles se manifestent nettement.

b) les 2 sortes d'instruments de report d'angles

Nous les avons fabriqués nous-mêmes, dans de la cartoline épaisse.

1) Le premier ((annexe 2)

Le premier proposé aux élèves est une sorte de pince, dont les bords extérieurs sont arrondis ; le sommet de l'angle des bords intérieurs (rectilignes) n'est pas matérialisé puisque il est situé au centre de l'oeillet qui sert à fixer les deux parties et permet qu'elles puissent tourner l'une sur l'autre. Le trou de l'oeillet est assez grand (2mm) pour que l'on puisse voir le croisement de deux lignes situé sur une feuille en dessous. Une bonne utilisation de l'instrument suppose le contrôle précis de la position des deux côtés rectilignes sur celle des deux côtés de l'angle que l'on veut reporter. La position du sommet correspond, sur l'instrument, au centre non matérialisé de l'oeillet ; son repérage précis ne se fait qu'indirectement par celui des côtés.

Les enfants ont appelé cet instrument la "pince de crabe".

2) Le deuxième (annexe 3)

Il est construit suivant le même principe, mais une des deux parties a la forme d'un rapporteur usuel, sans graduation et peut être considérée comme fixe ; l'autre partie, mobile,

correspond à une aiguille tournant autour du centre du rapporteur, et est fixée à la première par un œillet.

Pour reporter plusieurs angles en une seule fois, on peut faire des marques au crayon sur la partie arrondie ;

2. Le problème 1

Il s'agit de reproduire un quadrilatère superposable à un quadrilatère donné, fixé sur une table.

3. Le problème 2

Il concerne deux personnes, un émetteur et un récepteur : Il s'agit, pour le premier, qui dispose d'un quadrilatère, de fournir toutes les informations nécessaires au second pour pouvoir construire un quadrilatère superposable.

4. Remarque importante

Ces deux problèmes relèvent, dans le micro-espace, de la triangulation. La prise en compte des angles est inutile pour les résoudre. Mais nous faisons l'hypothèse que les élèves sensibilisés aux angles par le travail sur les quadrilatères articulés, vont réinvestir leurs connaissances dans ces situations.

5. Les variables du problème 1

a) La distance entre le lieu du modèle et le lieu du tracé

Si le tracé se fait au même endroit que la saisie des informations, celles-ci peuvent être prises et reportées morceau par morceau, le contrôle de l'organisation topologique du quadrilatère dessiné est implicite. (situation d'auto-communication proche)

Par contre, si le tracé se fait en un autre lieu que la saisie des informations, celles-ci doivent être soit mémorisées, soit représentées sur une feuille auxiliaire. Si cette feuille auxiliaire est de même taille que la feuille modèle, le problème peut alors être résolu de la même manière, mais en deux temps, que dans le cas précédent ; le choix d'une feuille plus petite que le quadrilatère modèle oblige à un traitement des informations à saisir (situation d'auto-communication éloignée). Ces informations concernent des mesures et un ordre entre ces mesures.

b) Les instruments disponibles

L'absence d'instrument de report d'angle est favorable à la stratégie de triangulation, leur présence a toutes chances d'induire leur utilisation.

c) La taille des côtés comparée à celle des branches des instruments de report d'angles

Si les côtés de l'outil sont plus longs que ceux du quadrilatère, il peut servir à repérer à la fois l'angle et la longueur des côtés du quadrilatère, évitant aux enfants d'engager le travail de décantation de ces deux prédicats.

6. Les variables du problème 2

a) Les instruments disponibles

La même remarque s'applique à ce deuxième problème quant à la présence ou non d'instruments de report d'angles.

La nature de ces instruments intervient : avec la pince, il faut reproduire les angles sur le message, avec le rapporteur muet, il est possible de repérer la taille de plusieurs angles sur l'outil (et cela est intéressant si l'outil peut être joint au message).

b) La taille des cotés comparée à celle des branches des instruments de report d'angles

L'effet est le même que pour le problème 1

c) La taille de la feuille sur laquelle l'émetteur transmet les informations

Même remarque que pour le problème 1

7. Analyse à priori des problèmes

Nous avons déjà évoqué la solution la plus économique : découper le quadrilatère en deux triangles à l'aide d'une diagonale, et reproduire les deux triangles accolés, connus par la longueur de leurs côtés. Dans le cas de l'auto-communication à distance ou de la communication, la fabrication d'un schéma indiquant comment sont disposés les côtés s'avère plus efficace qu'une description en langage courant.

La prise en compte des angles conduit à plusieurs solutions dépendant des connaissances sur le quadrilatère : la plus économique est la reproduction d'un angle, suivie du tracé des côtés correspondants du quadrilatère, puis de la construction du point de concours des deux cercles de centres les deux sommets ainsi déterminés et de rayons les longueurs respectives des deux côtés restants. En l'absence de connaissances sur le quadrilatère, on peut s'attendre à la saisie des longueurs des quatre côtés, de deux, trois ou quatre angles. Nous y reviendrons.

C. Description des 3 leçons

1. Leçon 1

Problème 1, auto-communication, modèle sur la table de reproduction.

a) L'organisation de la classe

Par groupes de deux élèves qui disposent de :

- deux calques, correspondant à deux quadrilatères différents ; le premier est fixé sur la table avec du scotch. Le second est donné aux élèves au fur et à mesure de la fin de leur première tâche.

- deux feuilles de papier blanc A4,

Sur une table, sont disposés les instruments suivants, en nombre suffisant pour que chaque groupe en dispose : double-décimètres, instruments de report du premier type

b) La dévolution du problème aux élèves

Voici la consigne : "Sur cette feuille blanche vous devez dessiner un quadrilatère superposable à celui qui est sur le calque. Vous n'avez pas le droit de le décalquer. Vous pouvez venir prendre les instruments que vous voulez sur cette table. Quand vous aurez terminé, vous vérifierez en posant le calque sur votre feuille.

Vous échangez sur la manière de faire, mais un seul d'entre vous, que je vais désigner, fera le tracé. Pour le deuxième quadrilatère, ce sera l'autre.

c) La validation des résultats

Elle est laissée sous la responsabilité des élèves. Cela présente deux risques opposés : soit de laxisme, soit de très grande sévérité.

d) La confrontation du travail des différents groupes

Une fois le travail de tracé terminé pour les deux quadrilatères, le maître recueille le nombre de réussites pour chacun des essais et s'intéresse aux groupes qui ont échoué lors du deuxième essai : "Savez-vous pourquoi vous n'avez pas réussi?" Pour s'expliquer les enfants viennent par groupes de deux devant le tableau montrer aux autres comment ils ont procédé et pourquoi ils ont été gênés. S'ils n'ont pas compris pourquoi ils ont échoué, leurs camarades peuvent (dans certains cas) les aider à trouver la cause de leur échec et l'énoncer.

e) Les comportements attendus

Nous prévoyons que les enfants vont presque tous utiliser l'instrument et tenter de reproduire le quadrilatère morceau par morceau : un côté puis un angle puis le côté adjacent etc...

Leurs difficultés peuvent provenir de l'absence de matérialisation du sommet de l'angle de la pince : une fois les côtés tracés en s'appuyant sur le bord de la pince, il faut les prolonger dans les deux directions, vers le sommet pour le déterminer, vers les autres sommets pour obtenir des côtés de bonne longueur. Les enfants peuvent être tentés de faire le premier prolongement à l'oeil, d'où des erreurs de longueurs.

Nous pensons relever deux types de comportement concernant le traitement des informations dont nous savons qu'elles sont redondantes : certains peuvent anticiper le résultat de la validation avec le calque en mesurant par exemple, avant de le tracer, le quatrième côté et constater qu'il ne correspond pas à la longueur sur le modèle. Il s'agit là d'un véritable raisonnement, même s'il est implicite : "Si j'ai bien reproduit le quadrilatère, le dernier côté doit être de la même longueur que sur le modèle; ce n'est pas le cas, donc la reproduction est fautive. D'autres risquent de prendre les informations nécessaires au fur et à mesure, jusqu'au placement du dernier sommet, puis de relier celui-ci au premier, sans penser qu'un contrôle est possible sur cette longueur.

f) Les conditions de l'observation

1) 1. Les classes

Ce sont les mêmes classes que lors de la première étape, deux mois plus tard

2) 2. La méthode d'observation

Quelques groupes ont pu être suivis par un observateur, notant du mieux possible leur démarche.

g) Les résultats

1) Quantitatifs (réussites-échecs)

Dans chacune des deux classes, un groupe déclare avoir réussi pour le premier quadrilatère, trois pour le deuxième.

Nous avons contrôlé les affirmations des enfants pour le deuxième quadrilatère : ils sont plus sévères que nous, qui acceptons une erreur de 2mm sur les longueurs de côtés et de 1 d° sur les angles.

Dans ces conditions, au CM1A 6 groupes sur 13 ont réussi, au CM1B, 4 groupes sur 13.

De plus, sur l'ensemble des deux classes, deux groupes ont bien reproduit les angles mais pas les côtés, 6 ont fait l'inverse.

Aucun groupe n'a fait d'erreur d'angle dépassant $7d^\circ$

2) *comportements observés*

a) Les comportements observés pendant les temps de recherche

Trois méthodes ont été utilisées (que nous n'avons pu quantifier précisément par manque d'observateurs)

- Le repérage des sommets du quadrilatère par rapport aux côtés de la feuille.
- la prise en compte des longueurs mais le report des angles à l'oeil.
- la prise en compte des longueurs et des angles, soit à l'aide de la pince, soit par la méthode suivante, que nous n'avons pas prévue, et qui est apparue dans deux groupes : les enfants marquent sur chacun des côtés un point à la même distance du sommet et mesurent la distance entre ces points. Ce procédé astucieux et prometteur n'est pas très facile à mettre en oeuvre pour la reproduction car ils n'ont pas de compas, et en plus, la méthode n'a pas été enseignée.

Nous avons observé, comme nous l'avions prévu, des enfants capables de dire d'eux-mêmes que la validation serait négative, et d'autres que cette idée n'a pas effleurés.

b) Les discussions à propos des méthodes

Elles ont permis de préciser sur quoi pouvaient porter les erreurs (angles ou/et longueurs des côtés), de discuter des avantages et inconvénients des méthodes utilisées et de préciser l'origine des erreurs dans l'emploi de la pince. Toutefois, il n'y a pas eu énoncé, par les enseignants, d'exigence à son propos ; l'apprentissage n'est pas terminé.

c) Le problème de la validation des résultats

Les enseignants ont rencontré une difficulté que nous avons mal cernée avant l'expérimentation : celle de la validation avec le calque. En effet, les enfants ont tendance à prendre la consigne à la lettre, c'est à dire, à rejeter leur production si elle n'est pas parfaite. L'enseignant sait bien que les erreurs, en particulier d'angles, sont impossibles à éviter d'autant plus que le matériel n'est pas suffisamment précis. Il sait aussi que certains enfants sont plus maladroits que d'autres, et qu'avec une bonne méthode, ils peuvent obtenir un résultat assez mauvais. Aussi, il est tenté d'être, pour une fois, plus laxiste que les élèves et d'adapter les critères d'appréciation de la tâche à chaque enfant, ce qui est inacceptable dans le contrat usuel. La difficulté, pour lui, est qu'il n'a aucun moyen d'échanger avec ses élèves à ce sujet, tout au moins au moment de la consigne : S'il parle de ce phénomène dès ce moment, les élèves risquent de ne pas comprendre ce qui est demandé ou de ne pas prendre au sérieux la demande de précision, s'il ne le fait pas, et s'il n'intervient pas pour tempérer l'exigence de certains, ils peuvent se décourager et penser que le maître les a placés dans une situation impossible.

2. **Leçon 2**

Problème 1, auto-communication, modèle sur une table éloignée.

a) *Organisation de la classe*

L'organisation de la classe est la même que dans la leçon précédente, le matériel également ; chaque groupe dispose d'une demi-feuille de papier et les quadrilatères modèles ne sont pas collés sur les bureaux des élèves mais sur d'autres, éloignés d'eux de telle façon qu'ils ne puissent pas voir les modèles de leur place.

b) La dévotion du problème aux élèves et le déroulement de la séquence

Voici la consigne : " Sur cette feuille blanche, vous allez dessiner un quadrilatère superposable à celui qui est sur le calque. Mais aujourd'hui, le calque n'est pas posé près de vous. Vous dessinerez sur votre bureau, mais vous devrez vous lever pour aller chercher les renseignements qui vous seront utiles. Vous pouvez faire le nombre de voyages que vous estimez nécessaires. Pour noter les renseignements, vous aurez chacun une feuille blanche. Lorsque vous aurez fini le quadrilatère, vous vérifierez en posant le calque sur votre feuille."

Le déroulement prévu est le même que celui de la leçon précédente, les enfants sont incités à se concerter avant d'agir mais un seul est désigné pour tracer.

Après avoir fait réaliser les deux tracés demandés, et relevé les résultats, une discussion collective porte sur les raisons de l'échec, sur les renseignements notés, et le nombre de voyages fait. A la fin de la leçon, l'enseignant annonce la prochaine activité de communication.

c) Les comportements attendus

Nous prévoyons que, le nombre de déplacements n'étant pas limité, peu d'enfants vont remarquer l'économie que procurent le schéma et la représentation des angles sur la demi-feuille. Nous nous attendons à ce qu'ils transportent les pinces d'un lieu à un autre.

d) Les résultats

1) quantitatifs (réussites, échecs)

réussites sur 26 pour le premier quadrilatère, comme pour le second. Il y a peu de tracés aberrants, mais un certain nombre d'enfants ont du mal à contrôler toutes les informations nécessaires. Quand ils sont attentifs aux angles, ils oublient les longueurs et la forme particulière de l'instrument a posé problème à plusieurs.

2) comportements observés

a) Prise de l'information

Nous avons regroupé les stratégies de recueil d'informations des élèves en 6 catégories :

* (M) : Mémoire, rien n'est écrit sur la feuille, les élèves transportent la pince pour reproduire les angles et mémorisent la longueur de leurs côtés.

* (F) : mesure des distances des sommets aux bords de la feuille sur laquelle sont dessinés les quadrilatères

* (L) : seules sont notées sur la feuille les longueurs des côtés, avec éventuellement des repérages comme droite, gauche, ... les élèves ont reporté les angles à l'aide de la pince, en se déplaçant plusieurs fois.

* (LS) : Schéma⁵ représentant

- soit un quadrilatère avec les longueurs de côtés indiquées à côté de chacun d'entre eux,

⁵ voir annexe 4

- soit la disposition des côtés, seulement par leurs longueurs ou accompagnées des flèches. Même procédé que (L) pour les angles

* (LA1) : longueurs des côtés et taille des angles en indiquant la distance en cm entre les pointes de la pince

* (LA2) : longueurs des côtés et angles représentés sur la feuille avec utilisation de la pince comme un gabarit mobile.

Tableau des résultats de chacune des classes

Stratégie	F	M	L	LS	LA1	LA2
CM1 A-1	0	0	7	2	3	1
CM1 A-2	0	0	9	1	2	2
CM1 B-1	1	1	8	3	0	0
CM1 B-2	0	0	7	2	0	3

Comme nous le pensions, le schéma est bien apparu, mais en petit nombre. La reproduction des angles sur la feuille aide-mémoire n'a pas non plus paru nécessaire.

b) Utilisation de l'information

Les compte-rendus des observateurs montrent que les élèves ont eu de la difficulté à reporter sur la feuille l'angle de la pince, à cause de l'absence de matérialisation du sommet.

En effet, beaucoup commençaient par tracer un côté de la bonne longueur. Mais il leur a fallu du temps et de nombreux essais pour savoir où placer la pince. La figure 1 montre la solution et des erreurs relevées. Dans les deux cas, l'oeillet se trouvant décalé par rapport à l'extrémité tracée du segment, le prolongement du second côté les amenait à corriger l'extrémité du premier, et ils ne pensaient pas à tenir compte de cette modification, d'où l'erreur sur les longueurs.

Nous avons observé d'autres erreurs provenant d'enfants utilisant la pince pour faire comme tout le monde, mais n'en comprenant pas vraiment la nécessité.

3) La mise en commun

Elle a été très brève par manque de temps. Elle a permis de pointer les difficultés du report de l'angle.

3. Leçon 3

Problème 2, communication

a) Organisation de la classe

L'organisation de la classe est la même que dans la leçon précédente, le matériel également ; chaque groupe dispose d'une demi-feuille de papier et les quadrilatères modèles ne sont pas collés sur les bureaux des élèves mais sur d'autres, éloignés d'eux de telle façon qu'ils ne puissent pas voir les modèles de leur place.

Les enfants sont par groupes de quatre, 2 émetteurs et 2 récepteurs.

Les émetteurs disposent d'un quadrilatère sur papier calque, d'un rapporteur muet en carton (voir annexe 3), d'une demi-feuille pour le message, d'un double-décimètre.

Les récepteurs disposent d'une grande feuille pour dessiner le quadrilatère, et d'un double-décimètre.

b) La dévolution du problème aux élèves et le déroulement de la séquence

Voici la consigne :

" Aujourd'hui, vous allez faire un jeu de communication. Vous travaillerez par équipes de 4. Dans chaque équipe, il y a 2 émetteurs et 2 récepteurs qui jouent ensemble. Si une équipe gagne, ce sont les quatre élèves qui gagnent, si elle perd, les quatre élèves perdent. Il faut donc essayer de s'entendre le mieux possible.

Le jeu consiste à faire reproduire, par les récepteurs, un quadrilatère superposable à celui que je vais donner aux émetteurs et que les récepteurs ne verront pas.

Je vais donner aux émetteurs une demi-feuille de papier pour faire un message sur lequel ils écriront tous les renseignements qui leur paraissent nécessaires pour que les récepteurs réussissent le quadrilatère.

Je vais également donner aux émetteurs un nouvel instrument qui sera transmis aux récepteurs avec le message

Vous pourrez marquer tout ce que vous voudrez sur le message. Si les récepteurs ne comprennent pas bien ou s'ils jugent qu'il leur manque un renseignement, ils pourront renvoyer le message en demandant ce renseignement par écrit. Vous pouvez aussi écrire sur le rapporteur, mais au crayon.

Il est interdit de se lever, c'est moi qui porterai les messages.

La partie sera réussie si les récepteurs font un quadrilatère superposable à celui des émetteurs."

Deux phases sont prévues, avec deux quadrilatères différents de manière à ce que tous les élèves aient expérimenté les deux positions : émetteurs et récepteurs.

Après ces deux phases, un temps de mise en commun doit permettre de revenir sur les erreurs et sur les méthodes.

c) Les comportements attendus

Ils concernent la désignation des éléments du quadrilatère et de leur organisation topologique, et l'utilisation du rapporteur.

Nous pouvons prévoir que les enfants vont avoir besoin d'utiliser des désignations pour les sommets et les côtés, plus précises que gauche ou droite. Ils n'ont pas l'habitude de désigner des points par des lettres et encore moins des segments par la paire de leurs extrémités.

Des schémas plus nombreux que dans la phase précédente devraient apparaître

Ils peuvent utiliser les rapporteurs comme les pinces, c'est-à-dire comme un moyen de reporter les angles sur le message, ou bien repérer leur taille sur le rapporteur par un petit trait.

d) Les résultats⁶

Il a fallu deux séances pour le déroulement total de la leçon

1) réussites/échecs

Ils traduisent mal les progrès réalisés, car le niveau d'exigence choisi⁷ rejette des productions assez proches de la réussite. Il faudrait une approche beaucoup plus fine. Sur 6 groupes,

dans la première phase, il y a eu 2 réussites franches, 2 réussites approchées et 2 échecs.

dans la seconde, 2 réussites franches, 1 approchée et 3 échecs.

2) comportements observés

⁶ pour le CM1A seulement; pour un ensemble de raisons, les leçons du CM1B ont partiellement échappé au schéma prévu.

⁷ en reprenant les critères d'exigence de EVAPM, nous aurions de bien meilleurs résultats et pourrions les comparer à ceux de cette évaluation.

Comme nous le pensions, les enfants ont utilisé différents types de notation pour désigner les angles et les côtés du quadrilatère, certaines efficaces, d'autres ambiguës.

L'usage de schémas s'est développé entre la première et la deuxième phase, ainsi que celui du rapporteur permettant de repérer la taille des angles (annexes 5a, 5b et 6). Toutefois, certains enfants ont conservé jusqu'au bout la reproduction des angles sur le message.

Tous les groupes, sauf un, ont systématiquement communiqué la taille des 4 angles

3) *Bilan final*

Il a permis de revenir sur des types d'erreurs déjà rencontrées, en particulier à propos du report d'angles pour dessiner le quadrilatère.

D'autre part, toutes les méthodes ont été examinées et comparées. Il semble qu'à la fin de la deuxième phase, la plupart des enfants aient été convaincus de l'intérêt du schéma et du repérage de la taille des angles sur le rapporteur.

Tout le travail effectué dans cette deuxième étape étant un travail de groupe, nous avons pensé nécessaire d'évaluer les acquis individuels.

Nous avons proposé aux élèves deux sortes d'épreuves :

- une épreuve reprenant le travail de la situation de communication
- une série d'items très proche de ceux de Close (1982)

4. **Contrôle individuel : Reprise de la situation de communication**

Les élèves ont eu successivement à élaborer un message pour faire reproduire un quadrilatère, puis à en construire un, à l'aide d'un message, le même pour tous.

a) *La fabrication du message*

1) *Consigne :*

Le maître distribue à chaque élève un quadrilatère, une demi-feuille pour le message, un double-décimètre, et un rapporteur et leur propose la tâche suivante :

"Fabrique, sur cette feuille et avec le rapporteur, le message qui permet de construire un quadrilatère superposable à ce quadrilatère."

2) *Description des résultats*

a) Méthodes

- Une élève a juste indiqué la longueur des côtés.
- Le tableau suivant montre comment se répartissent les messages suivant les 2 critères suivants :

* tracé ou non d'un schéma

* communication des angles sur le rapporteur ou reportés sur le message.

	Schéma	Pas de schéma
Rapporteur	14	7
Message	2	3

Nous remarquons donc que presque les deux tiers des élèves ont utilisé un schéma, outil caractéristique de la modélisation géométrique, comme nous l'expliquons au chapitre B-7.

b) Notations

Les notations posent des problèmes aux élèves : 16 d'entre eux utilisent des notations cohérentes, 6 ont encore recours à des désignations faisant appel aux positions des angles sur la feuille (haut, bas, gauche, droite) et 3 marquent sur les rapporteurs des noms de côtés.

c) Report des angles

Nous avons appelé bon ce report, si pour les 4 angles, la différence de mesure entre les angles du modèle et les angles reportés étaient inférieure à 2 d°, moyenne si c'était le cas pour 3 angles seulement, mauvaise pour 2 angles ou moins.

Les élèves se distribuent ainsi dans les trois catégories :

- bonne : 20
- moyenne : 5
- mauvaise : 2

b) Le tracé du quadrilatère à partir du message

1) Consigne

Nous avons choisi de donner aux élèves le message comportant un schéma avec les notations les plus simples, utilisées par le tiers des enfants dans la tâche précédente : les angles sont numérotés, les côtés n'ont pas de nom, leur longueur est notée au dessus de chacun d'eux,

Chaque enfant reçoit donc un schéma, et un rapporteur (annexe 4) sur lequel sont reportés les 4 angles du quadrilatère à tracer.

2) Résultats (sur 25 présents)

a) Globaux

enfants ont tracé un quadrilatère satisfaisant tant du point de vue des angles (moins de 1 d° de différence) que de celui de la longueur des côtés (1mm ou moins).

ont fait des erreurs sur certains angles comprises entre 1 et 2 d°, et/ou sur certaines longueurs comprises entre 1 et 2 mm.

ont fait des erreurs plus importantes, tout en ayant été capables de reproduire convenablement une partie du quadrilatère (sauf un qui n'a pas tenu compte du rapporteur).

Aussi ces résultats seraient-ils meilleurs si on ne prenait en compte que les angles.

b) Concernant la reproduction des angles

Avec les mêmes critères que dans la fabrication du message, nous relevons les résultats suivants quant à la réussite :

- bonne : 17
- moyenne : 6
- mauvaise : 2

c) Conclusion

Ces résultats nous permettent d'affirmer que la plupart des enfants maîtrisent convenablement les problèmes posés et l'utilisation du rapporteur muet.

D. Conclusions sur la deuxième étape du processus

L'objectif de cette deuxième étape était de placer les enfants dans des situations où le concept d'angle, dégagé dans l'étape précédente, avait un rôle fonctionnel lié à un contexte plus habituel en géométrie, et d'observer leurs capacités à résoudre des problèmes complexes de plusieurs points de vue : élaboration de schémas et de notations, utilisation du rapporteur.

Les élèves ont été très intéressés par la résolution de ces problèmes, et dans l'ensemble, ils ont développé des compétences tant au niveau de la réflexion que de la pratique auxquelles nous ne nous attendions pas, venant d'enfants de cet âge : 9-10 ans. Cela montre,

selon nous, que les élèves d'école primaire sont capables d'entrer dans la problématique spatio-géométrique. Toutefois, nous avons noté de grandes différences dans la mise en oeuvre des outils élaborés. Ces différences se traduisent dans la qualité des productions, et dans le temps nécessaire pour effectuer les tâches proposées. Ainsi, certains enfants ont tracé le quadrilatère de la deuxième phase de l'évaluation en moins de 10 minutes, alors qu'il en a fallu plus de 30 à d'autres pour obtenir un résultat satisfaisant.

V. CONCLUSIONS SUR LA REALISATION DES DEUX PREMIERES ETAPES AU CMI

Rappelons notre objectif principal, présenté dans le chapitre C-6 : *faire la preuve que la conception de l'angle comme une paire de segments de même origine relevée par de nombreux auteurs était le résultat d'un obstacle didactique, et que cette conception pouvait ne pas apparaître ou être rapidement transformée dans une autre approche.*

Pour nous assurer que notre objectif était vraiment atteint, nous avons proposé aux élèves des deux classes une épreuve passée en fin d'année, sans révision préalable. Elle a été construite pour pouvoir comparer les résultats des élèves avec ceux de Close (1982). Les enfants ont à répondre, pour 5 paires d'angles, à la question suivante : *Ecris le nom du plus grand ou alors écris : "ils sont égaux".* (annexe 7)

C'est la première fois que les enfants ont à répondre à une question de cette nature, les réponses précédentes portant sur égalité ou inégalité. Nous avons choisi des configurations pièges, pour observer dans quelle mesure les élèves étaient capables de les éviter.

Ainsi, pour (A,B), (C,D), (B,C), se baser sur la longueur des côtés conduit à une réponse fautive, et, pour (B,C), la différence de taille entre B et C (dont les longueurs de côtés sont à peu près les mêmes), n'est pas visible sans report de l'un sur l'autre.

Le tableau suivant donne les résultats des deux classes.

R correspond à la bonne réponse, # à la réponse "différent" (qui ne correspond pas à la consigne); en cas de réponse erronée, le nom de l'angle proposé comme le plus grand par l'élève est indiqué dans les autres colonnes de chaque item.

Item	1			2			3			4					
	R	A	B	R	#	C	R	#	C	R	B	R	#	D	C
CM1A	24	3	0	24	1	2	22	1	4	18	9	24	1	1	1
CM1B	16	7	3	25	0	1	24	0	2	23	3	25	0	1	0
Total	40	10	3	49	1	3	46	1	6	41	12	49	1	2	1
%	75,5	19	5,5	92			87			77		92			

Nous remarquons :

* qu'un élève sur 5 tombe dans le piège tendu par la première comparaison, et que ceci concerne surtout les élèves du CM1B. Nous avons recherché si certains enfants s'étaient systématiquement trompés sur les trois items présentant cette difficulté : Il n'y en a aucun. Un seul enfant s'est trompé sur deux items. Nous en concluons que la plupart des enfants qui ont fourni la réponse A au premier item, manifestent une conception de l'angle proche de celle qui est visée.

* qu'au 4ème item, un quart des élèves a mal déterminé le plus grand des deux angles B ou D (très proches l'un de l'autre). Or, pour comparer, ils disposaient d'un rapporteur en carton, qu'ils n'avaient pas utilisé depuis plusieurs mois. On peut penser qu'ils se sont trouvés confrontés à la difficulté de son emploi.

Les élèves de Close, étaient environ 40% à réussir des tests plus simples, en début de 6ème.

Nos résultats montrent donc que les difficultés rencontrées par l'enseignement du premier cycle, en particulier sur la relation entre la valeur des angles et la longueur des côtés, sont d'origine didactique, puisqu'un enseignement construit autour de situations fonctionnelles permet d'atteindre le but fixé, avec des enfants plus jeunes.

Toutefois, nous sommes bien conscients de la lourdeur du dispositif, en particulier concernant la fabrication du matériel. Il nous a permis d'établir le résultat ci-dessus, mais il ne nous paraît pas être adaptable à d'autres contextes scolaires. Aussi, nous avons élaboré et expérimenté un deuxième processus, destiné à atteindre les mêmes objectifs. Il est exposé dans le chapitre C-8.

VI. ETAPE 3

Elle s'appuie sur trois leçons que nous présentons très succinctement. Ces leçons ont été expérimentées avec les mêmes élèves que les précédentes mais dans la classe suivante, au CM2.

A. Le rapporteur, instrument permettant de repérer la taille d'un angle

L'objectif, dans cette première leçon, est la mise à plat de l'ensemble des difficultés suscitées par l'emploi du rapporteur, comme moyen de repérer la taille des angles et de les comparer.

1. La situation a-didactique

a) Le problème

Deux polygones P et Q sont tracés sur deux feuilles différentes. Ils ont été choisis de manière à ce que deux de leurs angles soient égaux, il s'agit de trouver lesquels, sans les superposer, à l'aide d'un rapporteur ordinaire, mais n'ayant qu'une graduation.

b) Les variables concernant l'emploi du rapporteur

1) La position des angles à comparer

Le rapporteur n'ayant qu'une graduation, certains angles sont plus faciles à mesurer que d'autres, selon leur orientation dans la feuille et la position du zéro sur le rapporteur. Le choix de polygones à 5 côtés ou plus permet de varier ces orientations.

2) Les différences entre les mesures

Si les angles d'un même polygone sont de mesures très distinctes, la réussite peut être obtenue sans appel à une bonne précision.

3) La longueur des côtés comparée à la taille du rapporteur

L'emploi du rapporteur est plus difficile si les côtés de l'angle sont plus courts que son rayon. Il faut alors prolonger les côtés.

4) Les choix faits (annexe 8)

Deux angles du polygone P sont égaux à deux angles du polygone Q ; l'un est aigu, l'autre obtus.

Au moins l'un des deux est situé entre deux côtés de longueur nettement inférieure au rayon du rapporteur.

Dans chaque polygone, deux angles ont des mesures très proches (différence de l'ordre de 5 degrés).

Les sommets d'un polygone sont repérés par des lettres, ceux de l'autre par des numéros.

Le polygone P a deux côtés consécutifs égaux à deux côtés consécutifs de Q. les angles déterminés par ces côtés sont différents.

2. La leçon : Fiche didactique

a) Le matériel

Quelques exemplaires du rapporteur à aiguille.

Des rapporteurs du commerce à une seule graduation (1 par élève)⁸.

Un double-décimètre par enfant

Un jeu de polygones P et Q par groupe.

b) Phase 1

1) Consigne :

"Voici le rapporteur à aiguille que vous avez déjà utilisé et d'autres rapporteurs. Comparez-les. Qu'observez-vous?"

2) Déroulement

Après un court moment, l'enseignant recueille les remarques des élèves. Il est souhaitable que soient reconnus et nommés : le centre, le zéro, la ligne du zéro, la position des graduations jusqu'à 180 d°.

Les rapporteurs à aiguille sont ensuite enlevés du matériel à la disposition des enfants.

c) Phase 2

1) Consigne

Le maître montre de loin et successivement, les deux polygones P et Q. en disant aux élèves : " Voici P, et voici Q. Deux angles de P sont égaux à deux angles de Q. Il faut trouver lesquels. Vous allez travailler deux par deux. Je vais distribuer à la moitié des groupes un polygone P et à l'autre moitié un polygone Q. Je vous les laisserai un moment puis je les ramasserai. Vous aurez le droit, pendant ce temps, de noter sur la feuille de papier les renseignements que vous voudrez, concernant votre polygone, en vous servant des outils. Vous vous regrouperez ensuite par quatre, deux qui ont eu le polygone P, les autres le polygone Q. Avec les renseignements que vous aurez pris, vous devrez trouver tous les quatre ensemble les noms des 2 angles de P qui sont égaux aux 2 angles de Q. Un d'entre vous viendra vérifier devant tout le monde en superposant les angles.

⁸ En attendant de les trouver dans le commerce, il est possible de les fabriquer en photocopiant sur un transparent un rapporteur où le centre est repéré par un croisement de deux lignes, après avoir effacé une des graduations. On peut aussi utiliser les rapporteurs disques, en plastique transparent, édités par l'IREM de Paris 7.

2) *Déroulement*

Après le travail par deux, puis par quatre, le maître recueille les résultats des équipes sous forme d'un tableau comportant une colonne "réponse" et une colonne "arguments".

Après la validation empirique, qui permet de déterminer la bonne réponse et qui a réussi, la discussion sur la nature des arguments à fournir est engagée en s'appuyant sur le tableau : par exemple, le relevé des longueurs des côtés n'est pas pertinent.

Si plusieurs enfants n'ont pas réussi à trouver les couples d'angles, le relevé au tableau des mesures effectuées par chacune des équipes permet de déterminer, éventuellement dans une autre séance, l'ensemble des causes d'erreurs :

- * positionnement du rapporteur
- * prolongement de certains côtés
- * lecture de la graduation
- * expression de la mesure.

3. Résultats de l'observation

Il a fallu deux séances pour traiter l'ensemble des problèmes évoqués ci-dessus et faire réaliser aux enfants un certain nombre d'exercices d'entraînement.

B. Additivité des angles et somme des mesures

L'objectif est la compréhension de la décomposition d'un angle en somme de deux autres et de la structure du rapporteur comme système de mesure avec une unité ($58\text{ d}^\circ = 58 \times 1\text{ d}^\circ$).

1. Fiche didactique

a) *Matériel*

Par élève :

- un rapporteur muet sur feuille blanche
- un rapporteur plastique
- deux quart de feuilles de calque, portant chacune un angle, l'un de 50 d° , l'autre de 36 d° .

b) *Consigne*

" Voici un rapporteur muet et deux angles l'un de 36 degrés , l'autre de 50 degrés . Sur ce rapporteur muet, pouvez-vous placer la graduation 36 d° ?"

Une correction collective au tableau suit le travail individuel. Le maître conseille de placer le 0 et le 36 à l'extérieur du rapporteur pour plus de commodité.

La vérification de l'exactitude du placement est réalisée avec le rapporteur.

Puis l'enseignant retire les rapporteurs.

Il expose ensuite l'objet du travail : " A l'aide de ces deux angles, vous devez placer d'autres graduations, le plus possible. Je vous arrêterai dans 15 minutes. Puis vous vérifierez combien vous en avez de justes avec le rapporteur déjà gradué et nous comparerons les méthodes que vous avez utilisées."

c) *Déroulement*

1) *Phase 1*

Le professeur arrête l'activité individuelle quand il lui apparaît que la majorité des enfants ont épuisé leurs possibilités de trouver de nouvelles graduations.

2) Phase 2

Il propose aux enfants de vérifier leur travail en superposant le rapporteur plastique au rapporteur muet, et il définit un seuil de tolérance : Une graduation marquée est juste si elle ne diffère pas de plus de 1° de la graduation du rapporteur.

3) Phase 3

Il relève ensuite le nombre de réponses justes de chacun, les sources d'erreurs liées à une mauvaise position du rapporteur, puis les méthodes utilisées. On peut prévoir les suivantes :

- * report plusieurs fois d'un même angle
- * report d'un angle puis de l'autre
- * placement du plus petit sur le plus grand et report de l'angle différence
- * pliage de la feuille de calque en deux pour obtenir un angle moitié
- * combinaison des divers angles obtenus.

4) Phase 4

L'enseignant propose aux élèves de réfléchir à la signification des phrases : "AB mesure 5 cm " et "A mesure 5° ", puis de tracer un angle de 1° .

Enfin, il les ouvre une discussion sur la réponse à la question suivante : " Est-ce qu' angle de un degré réalisé avec le rapporteur du tableau est égal à un angle de un degré tracé avec votre rapporteur?"

2. Résultats de l'observation

Les différences entre les enfants se sont avérées très grandes. Certains avaient marqué une quinzaine de graduations en utilisant plusieurs types de report, tandis que d'autres n'avaient pas été au delà de 2. Aussi la classe a été divisée en deux parties à peu près égales : les uns ont repris, avec l'aide de l'enseignant, la graduation du rapporteur, les autres ont été confrontés à un nouveau problème (annexe 9).

C. Construction de triangles

L'objectif de cette troisième leçon est le réinvestissement des connaissances sur la mesure des angles dans la construction de triangles, dont sont connues les mesures de trois éléments. De plus elle permet plusieurs prolongements, d'ordre logique et/ ou géométrique. Des enfants de niveau différent peuvent y développer des stratégies différentes.

1. Fiche didactique

a) Matériel

- Plusieurs feuilles de papier blanc par enfant
- un rapporteur et un double-décimètre
- une liste de 6 "messages", constitués de 3 informations concernant un nombre pair de triangles.

b) Consigne

Les élèves sont par groupes de deux

Suivant le niveau de la classe, le professeur développe de manière plus ou moins détaillée, les indications suivantes :

* J'ai tracé 3 triangles, ils sont dans cette enveloppe.

* J'ai fabriqué deux messages pour chaque triangle, avec des noms différents pour les sommets.

* Tous les messages ont été mélangés. A vous de retrouver les messages correspondant à chaque triangle.

Vous vous organisez à deux, l'équipe qui aura trouver le plus de paires justes aura gagné. Il faudra certainement construire des triangles. Si vous êtes astucieux, vous pouvez peut-être trouver la réponse sans les construire tous.

c) Analyse

Les 3 informations recueillies, pour chaque triangle, déterminent ou non un seul triangle, à un retournement près. Ainsi, si ce sont les mesures des trois angles, une infinité de triangles y correspondent. Il faut donc choisir avec soin les triangles et les informations fournies pour qu'il soit possible de résoudre le problème.

La stratégie de base consiste à essayer de construire le ou les triangles correspondant à chaque message, puis à les comparer 2 à 2, par superposition pour déterminer les paires.

Une stratégie économique consiste à construire un des triangles, à mesurer les éléments restants et à sélectionner le message qui y correspond en prenant en compte l'organisation des données.

La complexité de la tâche de construction dépend des informations fournies : deux côtés et un angle non adjacent à ces deux côtés donne deux triangles possibles.

2. Résultats de l'observation**a) Nos choix concernant les informations fournies**

1	AC = 12 cm	B = 115 d°	C = 38 d°
2	DF = 16,7 cm	FE = 16,4 cm	DE = 12 cm
3	HG = 8,2 cm	GI = 12 cm	H = 43 °
4	JK = 12 cm	J = 70 °	K = 67°
5	M = 38 °	NO = 8,2 cm	OM = 12 cm
6	P=110°	O = 43 °	R= 27 °

b) Commentaires

Nos choix ont placé les élèves dans des situations complexes : Les triangles 1, 3, 5 sont difficiles à construire, deux différents correspondent à 3 et 5, pour 6 il y a une infinité de solutions. Aussi tous les groupes n'ont pas réussi à trouver les paires. Le travail a été repris au cours d'une deuxième séance.

Nous avons relevé différentes méthodes de résolution :

* Certains tracent directement les différents triangles et appariement les tracés par superposition

* D'autres essaient de repérer des indices sur les messages qui permettent de faire des hypothèses de regroupement ou de déceler des impossibilités. 1 et 5 relèvent du premier cas. Puis ils vérifient par le tracé.

* Certains commencent par tracer un triangle et repèrent ensuite, à l'aide de la règle graduée et du rapporteur, des mesures éventuellement données par d'autres messages. Par exemple, un enfant a tracé le triangle 3 et mesuré les trois angles; il s'est aperçu que ce sont ceux du message 6.

Tous les enfants n'ont bien sûr pas réussi à construire tous les triangles, l'enseignante a d'ailleurs guidé dans leur choix du message, les enfants les plus en difficulté. Mais ils se sont tous fortement investis dans cette tâche qui avait du sens pour eux.

D. Conclusion de la troisième étape

Notre objectif, dans cette troisième étape, était l'élaboration d'une suite de leçons permettant l'apprentissage de la mesure des angles avec le rapporteur, au moyen de la résolution de problèmes riches et préparatoires à l'enseignement ultérieur de la géométrie.

Il nous semble que la suite des trois leçons proposées correspond bien à cet objectif.

En ce qui concerne les apprentissages réalisés par l'ensemble des 50 élèves de CM2, nous leur avons proposé un mois après les leçons, de construire les deux triangles correspondant aux données suivantes :

$$AB = 7 \text{ cm} \quad BC = 8,5 \text{ cm} \quad B = 37^\circ$$

$$A = 38^\circ \quad B = 87^\circ \quad AB = 5,4 \text{ cm}$$

La réussite a été le fait de 70 % des élèves pour le premier triangle, de 50 % pour le second. Rappelons que les mêmes exercices posés à des élèves de 5ème dans EVAPM5, avec des exigences sur les mesures inférieures aux nôtres, donnent une réussite de 75 % pour le premier, de 65 % pour le second. Le processus proposé nous semble répondre de manière satisfaisante, à la réalisation des objectifs de la scolarité obligatoire concernant la mesure des angles, et son utilisation dans des situations variées.

CHAPITRE C-8

UN DEUXIEME PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT DES ANGLES

I. INTRODUCTION

A. Les objectifs visés par le processus

Il s'agit de permettre la construction par les élèves de la notion d'angle de secteur, par la mise en oeuvre de situations plus faciles à réaliser (quant au matériel), et à gérer pour l'enseignant que celles utilisant les quadrilatères articulés.

Ces situations ont pour but pour les élèves, la prise ou la communication d'informations pour choisir des polygones qui pavent le plan, à la manière d'un puzzle. Elles sont organisées de façon à ce que la prise en compte des angles des pièces soit efficace et que la longueur de leurs cotés ne soit pas une donnée pertinente pour la résolution des problèmes posés.

B. Les objectifs visés par la recherche

La mise en oeuvre que nous avons réalisée à propos de ce processus avait pour but essentiel d'en étudier la validité empirique : faisabilité, qualité des apprentissages, reproductibilité.

II. SITUATION GNERIQUE

A. Le matériel

Il est constitué de pièces découpées dans du carton, de forme polygonale, convexes ou non; elles sont conçues de telle manière qu'il existe au moins une solution au problème posé par leur assemblage, en utilisant la règle suivante : Deux cotés de la nième pièce à poser doivent toucher 2 cotés du polygone formé avec les $n-1$ pièces déjà posées.

Cette condition n'a aucune chance d'être réalisée si la forme des pièces est choisie au hasard; par contre, elle l'est d'emblée si les pièces sont découpées dans un polygone quelconque comme dans l'exemple de la figure (1). Toutefois, ce découpage doit être "calculé" pour répondre à un certain nombre de contraintes liées aux objectifs des situations; nous le décrirons donc de manière plus détaillée après avoir décrit et analysé ces dernières.

B. Le jeu du géométriscrable.

Un jeu de n pièces est commun à p joueurs. Deux des pièces sont posées sur la table, jointives par un côté, suivant une configuration déterminée à l'avance; les autres pièces sont distribuées aux joueurs. A tour de rôle, chacun se procure une pièce de son lot et peut la poser si elle touche sans chevauchement, le long de deux de ses cotés, deux cotés du polygone formé par les pièces déjà assemblées suivant cette même règle. Sinon le tour passe au joueur suivant. Le premier qui s'est débarrassé de ses pièces a gagné.

Examinons l'effet, sur les connaissances nécessaires pour jouer, des moyens de se procurer les pièces : ces moyens sont définis par un ensemble de règles dont nous allons

montrer qu'il constitue une variable didactique essentielle pour la construction de situations d'apprentissage de la notion d'angle.

C. Variables didactiques :

1. La règle

a) Règle n° 1

Chaque joueur tire au hasard une pièce, il essaie de l'encastrer convenablement ; s'il échoue, il replace la pièce dans son lot, s'il réussit, il la laisse posée; dans les deux cas, le tour continue. Dans ces conditions, la réussite finale est due au hasard ; les joueurs doivent seulement être capables de déterminer si une pièce s'encastre bien et sinon d'organiser de manière efficace la recherche d'un autre angle ou d'un autre lieu pour cette pièce.

b) Règle n°2

Chaque joueur tire une pièce et doit prévoir à voix haute quelle partie de la pièce il va pouvoir encastrer et à quel endroit du puzzle elle se place.

*S'il prévoit bien, c'est au suivant de jouer.

*S'il prévoit mal (l'angle de la pièce indiqué ne s'adapte pas à l'endroit indiqué), il perd son tour et remet sa pièce dans l'enveloppe

*Si le joueur dit qu'il n'y a pas de place pour sa pièce il le vérifie.

- si c'est vrai, il remet sa pièce et en tire une autre, avec laquelle il rejoue.

- si c'est faux, il remet sa pièce dans son lot et passe son tour.

Ces règles favorisent les bonnes prévisions, qui s'appuient sur les comparaisons visuelles entre les angles des côtés de la pièce tirée et les angles extérieurs du puzzle. Elles supposent donc que les caractères : taille des côtés et taille des angles, des pièces polygonales, constituent un prédicat amalgamé en voie de décanation (Wermus 1976)¹, décanation à laquelle le jeu du géométriscrabble peut concourir.

c) Règle n°3

Cette fois-ci, ce n'est pas le hasard qui décide de la pièce fournie au joueur mais c'est lui qui doit en commander une, dont il pense qu'elle convient à un endroit explicité par lui à l'avance, à un marchand (qui n'est aucun des joueurs). Mais le joueur ne voit pas l'ensemble des pièces dont dispose le marchand. Il doit donc fournir à ce dernier une information lui permettant de répondre à sa commande. Pour cela il dispose d'un crayon et d'une feuille de papier, et peut avoir recours à tout instrument qui lui paraît nécessaire.

Que peut alors faire le joueur?

Bien sûr, le marchand pourrait dupliquer toutes ses pièces sur la feuille de papier, et les numéroter pour que le joueur les commande "à l'oeil". Cette solution, de "commande par correspondance" n'est pas celle que nous avons choisie, c'est à l'acheteur de fournir une information et au marchand soit de satisfaire son client, soit de lui dire qu'il ne peut pas (comme dans les pratiques sociales les plus courantes).

Quelle information le joueur doit-il donc fournir au marchand?

¹ Wermus H. (1976) Essai de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles. Archives de psychologie vol XLIV n° 171

La solution la plus économique consiste à reproduire par superposition un angle extérieur du polygone déjà formé en demandant au marchand de lui fournir une pièce ayant une partie se superposant à cet angle. Cette solution suppose que les élèves, émetteurs et récepteurs, soient capables de donner du sens à une figure constituée de 2 segments de même sommet, c'est à dire de concevoir qu'elle permet de représenter la propriété que doit posséder la pièce nécessaire à la poursuite du puzzle.

En l'absence de cette connaissance, on peut prévoir deux autres stratégies :

- l'enfant émetteur peut dessiner ou décrire une pièce polygonale, anticipant une forme possible, mais sans recours à la superposition. L'échec probable du marchand à trouver cette pièce peut conduire celui-ci soit à affirmer qu'il ne peut répondre à la demande, soit à rechercher une pièce qui ait un angle superposable avec l'un de ceux de la pièce dessinée. Dans un cas comme dans l'autre, la rétroaction de la situation peut inciter l'élève émetteur à modifier l'information transmise et à ne dessiner que les traits pertinents de la pièce qu'il désire.

- Le joueur peut aussi dessiner par superposition le polygone déjà constitué et demander une pièce pouvant s'encaster convenablement à l'endroit qu'il désigne, puis compléter son dessin, la pièce une fois posée pour commander la suivante. Cette solution contient en germe la solution visée, puisqu'elle met en oeuvre la représentation par superposition. Toutefois, si elle est considérée comme aussi efficace que la représentation d'un angle, rien n'incitera les élèves à cette "décantation". Aussi, il faut trouver le moyen de la rendre plus coûteuse que l'autre, par le biais de l'organisation de la situation.

d) Conclusion

Nous voyons donc qu'à chaque ensemble de règles correspondent des connaissances implicites différentes, de plus en plus élaborées, à partir desquelles il est possible de construire un enseignement qui vise l'acquisition et la maîtrise par les élèves des savoirs sur les angles correspondants aux classes de CM2 et de 6ème.

2. Autres variables didactiques de ce jeu

a) La convexité des pièces

La première concerne la nature des pièces : Si toutes sont convexes, le concept d'angle risque d'être associé chez les enfants à celui de saillant, alors que le déroulement du jeu n'est pas affecté par ce caractère. Par contre, si parmi les pièces, il y en a qui ont à la fois des angles rentrants et des angles saillants, il faudra trouver un moyen de différencier les deux types dans le message.

b) La règle d'assemblage

Telle qu'elle est énoncée ci-dessus, des configurations comme sur la figure 2 sont possibles, c'est à dire des puzzles avec trou. Elles pourraient être intéressantes pour généraliser la notion d'angle à celle d'angle de deux demi-droites d'origines différentes. Si on veut éviter ce genre de configuration, il suffit de préciser, dans la règle, que 2 côtés consécutifs de la pièce à poser doivent toucher 2 côtés consécutifs du polygone déjà constitué.

III. SITUATIONS DIDACTIQUES BATIES AROUND DU JEU DU GEOMETRISCRABBLE

A. Première leçon

1. Objectifs

- familiariser les enfants avec ce type de matériel, qui présente à la fois des ressemblances et des différences avec les puzzles auxquels ils sont habitués.
- leur fournir une occasion de faire des comparaisons d'angles de manière visuelle.

2. Organisation de la classe

Les élèves sont par 3, chaque groupe dispose d'un jeu de 20 pièces. Ils en tirent 2, qu'ils posent sur la table en les accolant par un côté; puis ils se partagent les 18 pièces restantes.

3. Consignes et déroulement

a) Première phase : avec la règle n°1.

Chaque joueur tire au hasard une pièce, il essaie de l'encastrier convenablement ; s'il échoue, il replace la pièce dans son lot, s'il réussit, il la laisse posée; dans les deux cas, le tour continue.

Recherchons à quelle condition le jeu peut se dérouler de manière satisfaisante : S'il n'existe pour chaque pièce qu'une seule configuration pour pouvoir la placer, le jeu sera presque toujours bloqué : d'une part il faudra au début que ce soit le maître qui place les deux premières pièces, d'autre part, en cours de jeu, puisqu'il y a tirage avec remise, il peut arriver que ce ne soit qu'après un grand nombre de tours qu'un joueur sorte la pièce nécessaire. Pour éviter cet écueil, il suffit de choisir des pièces dont les mesures des angles sont toutes des multiples de 30 d°. L'assemblage de telles pièces fait apparaître des angles qui ont eux aussi une mesure multiple de 30 d°. Il y a alors une multitude de configurations possibles pour un même ensemble de pièces.

C'est le choix de ce matériel que nous avons fait. L'annexe 1 montre comment il est constitué. L'expérience montre qu'il n'y a que très peu de possibilités de blocages pour cause de longueur de côtés. Ces blocages se produisent tout à fait à la fin du jeu et ressemblent à ce qui se passe au vrai jeu du scrabble quand les joueurs ne peuvent pas placer leurs dernières lettres.

La pratique de ce jeu étant seulement destinée à placer les élèves dans le contexte, avec une règle simple, il est arrêté quand chaque équipe a fait 2 parties.

b) Deuxième phase : avec la règle n°2.

Là aussi, les élèves sont par équipes de trois. Le matériel est le même (pour la même raison)

L'enseignant annonce " Vous allez rejouer avec ce matériel mais les règles vont être différentes. Une fois la distribution faite, vous cachez vos pièces dans l'enveloppe que je vous ai distribuée.

Le joueur 1 tire une pièce et doit prévoir à voix haute quelle partie de la pièce il va pouvoir encadrer et à quel endroit du puzzle elle se place.

Nous allons faire ensemble un début de jeu au tableau"

Le maître place au tableau les 2 pièces du départ et appelle 2 élèves. Le 1er tire et prévoit, puis le second, puis le maître. Au fur et à mesure, en fonction de ce qui se passe, l'enseignant énonce les règles suivantes :

*Si le joueur prévoit bien, c'est au suivant de jouer.

*S'il prévoit mal (l'angle de la pièce indiqué ne s'adapte pas à l'endroit indiqué), il perd son tour et remet sa pièce dans l'enveloppe

*Si le joueur dit qu'il n'y a pas de place pour sa pièce il le vérifie.

- si c'est vrai, il remet sa pièce et en tire une autre, avec laquelle il rejoue.

- si c'est faux, il remet sa pièce dans son lot et passe son tour.

Le premier dont l'enveloppe est vide a gagné.

Quand tous les élèves ont fait 2 ou 3 jeux, l'enseignant fait rapidement le bilan des parties gagnées ou perdues par chacun, mais sans insister. Il annonce que ces jeux préparent la leçon du lendemain.

B. Deuxième leçon

1.

ifs

- p l a c e r l e s é l è v e s d a n s u n e
a t i o n d ' a f f i n e m e n t d e s m o y e n s q u ' i l s u t i l i s a i e n t p o u r
q u e l l e

choisir dans la situation précédente.

- donner du sens à la représentation d'un angle par le dessin "usuel".

- donner du sens à la superposition comme moyen de comparer deux angles et de faire expliciter la non-pertinence de la comparaison des longueurs des côtés.

Les deux phases de la leçon y contribuent : d'une part, la situation de communication dans laquelle il s'agit de trouver un moyen écrit de communiquer les informations nécessaires, d ' a u t r e p a r t l a p h a s e

t a t i o n e t d e c o m p a r a i s o n d e

c e s m o y e n s e n t r e

s différents groupes de la classe.

2. Organisation matérielle

L e s é l è v e s s o n t r é p a r t i s p a r g r o u p e s

t r o i s : 2 j o u e u r s e t u
rchand.

Les premiers sont côte à côte, et tournent le dos au marchand. Ils ent :

-d'une grande feuille de papier sur laquelle sont collées 2 pièces du puzzle, formant un polygone connexe, polygone qu'ils doivent agrandir peu à peu, au fur et à mesure de leurs commandes au marchand.

-de feuilles de papier blanc assez minces pour les messages

-d'un feutre

Le marchand dispose de 9 autres pièces : 6 d'entre elles ont des angles multiples de 30° , c o m m e l e s 2 ces déjà collées, 3 autres sont intruses, st-à-dire n'ont aucun angle multiple de 30° mais leurs angles ont été choisis proches (5 à 10° environ) de ceux des 6 autres pièces. Ces p i è c e s i n t r u s e s , q u i n'existaient pas dans les jeux précédents, ont pour but de mettre en échec, s'ils apparaissent,

les messages comportant des dessins d'angles avec des côtés très courts.

3. Consigne et déroulement

a)

re phase

L'enseignant, après avoir décrit l'organisation des groupes et le matériel de chacun, continue ainsi :

" Voici la règle du jeu :

Les

élèves d'un même groupe sont associés, les 8 groupes sont concurrents.

Dans chaque groupe, un des émetteurs, chacun à son tour, commandera par un message, une p i è c e s ' e m b o î t a n t à u n e n d r o i t d u p u z z l e

é s i g n é p a r l u i à
avance à l'aide d'un pion.

Le marchand recevra le message et enverra la pièce commandée. L'autre émetteur que la pièce obtenue convient bien, c'est-à-dire que l'un des angles de la pièce reçue s'emboîte bien à l'endroit prévu.

-Si c'est bien le cas, la pièce est collée.

-Si ce n'est pas le cas, la pièce est renvoyée

-Si l'un des angles s'emboîte bien mais qu'il y a chevauchement, les joueurs renvoient la pièce au marchand.

-Si le marchand n'a pas la pièce demandée, il le signale, les joueurs font une autre demande.

Au bout de 15 minutes, tous les groupes arrêtent leurs échanges, celui qui a collé le plus de p i è c e s a

é.
A v a n t d e

les membres d'un même groupe, allez vous concerter pour trouver un moyen de faire votre commande que le marchand puisse comprendre."

L'enseignant leur donne environ 5 minutes puis lance le jeu en distribuant le matériel. Il **i n t e r r o m p t** **c e t t e** **p r e m i è r e** **p a r t i e** **a u** bout de 15mn, fait le bilan du nombre de pièces collées par chaque groupe.

b) Deuxième phase

Il annonce une deuxième partie avec un nouveau matériel et après qu'un des deux émetteurs ait remplacé le marchand.

Si au moins un groupe de la classe a communiqué grâce à la représentation par superposition **d e** **t o u t** **l e** one, la consigne est légèrement modifiée pour rendre cette stratégie coûteuse en temps et inciter les enfants à en changer : après chaque commande efficace, le message est laissé au marchand. Un nouveau temps de concertation est donné aux **p e s** (mais il n'y a pas d'échange entre les groupes, l'évolution doit pouvoir se faire par **u n e** **r é f l e x i o n** **i n t e r n e** **s u r** **l e s** icultés rencontrées). Le jeu est arrêté après 10 mn.

c) Troisième phase

La dernière phase est consacrée à un deuxième bilan et à la mise en commun des moyens utilisés et des difficultés rencontrées. Le jeu est donc arrêté et le travail porte sur l'explicitation et la comparaison des divers moyens de réaliser une commande efficace.

L'enseignant demande à un des élèves de venir au tableau donner un exemple de commande **p o u r** **u n** **a n g l e** il choisit un groupe dont le score est faible : soit parce que n'ayant pas encore compris qu'on ne pouvait demander une pièce entièrement définie, soit parce que dessinant à chaque fois le puzzle tout entier.

Si l'action n'a pas permis aux élèves concernés de comprendre

c h e c **d e** **l a** mière stratégie, les réactions des autres élèves du genre "on ne peut pas savoir s'il y a un triangle qui s'emboîte là" doivent les aider à en prendre conscience.

La deuxième stratégie, comparée à celle qui consiste à représenter chaque angle choisi, doit apparaître comme trop lourde.

L'enseignant appelle ensuite 2 élèves de 2 groupes différents qui ont réalisé un message de même type (celui visé) pour un même angle \square et demande comment on peut se rendre compte qu'ils correspondent bien au même angle : Il attend la proposition de superposition des 2 tracés et profite de ce moment pour introduire les termes de côtés et de sommet d'un angle. L'indépendance, pour la comparaison, de la longueur des côtés est alors explicitée.

Le maître demande ensuite quelles difficultés les élèves ont rencontrées et comment ils les ont surmontées. Devraient ainsi apparaître les ambiguïtés liées au fait qu'à un tracé correspondent 2 angles, le saillant et le rentrant et la solution du marquage de l'angle choisi.

d) Remarques

-L'organisation que nous avons choisie pour cette deuxième leçon modifie assez profondément le jeu étudié avec la règle n°3 : En effet, dans la première leçon, les joueurs sont concurrents, c'est à chacun d'avoir une attitude d'exploration du puzzle et de contrôle de ses coéquipiers. Il n'a pas intérêt à les aider. Nous avons envisagé la mise en oeuvre d'une **s i t u a t i o n** **d e**

² un de ceux du polygone de départ, qui sont communs à tous les enfants.

ommunication gardant les mêmes caractéristiques : Il aurait fallu alors que chaque joueur ait un marchand et qu'en dehors du contrôle des pièces reçues des marchands, les deux joueurs n'aient aucun rapport entre eux pour pouvoir élaborer et expérimenter des stratégies indépendantes. Mais la prise d'informations sur le puzzle commun, si elle avait dû se faire en l'absence de l'adversaire aurait nécessité une organisation lourde : 3 lieux éloignés pour le puzzle et chacun des 2 couples joueur-marchand, une rotation des présences auprès du puzzle difficile à gérer

... Or, des

de jeu plus simples doivent permettre de faire la dévolution aux élèves du problème de la comparaison d'angles de pièces que l'on ne peut ni superposer ni comparer visuellement. C'est l'hypothèse que nous avons faite en choisissant l'organisation décrite, qui a l'avantage aussi de développer les interactions entre

les enfants, interactions tout à fait fructueuses dans une tâche comme celle-ci d'élaboration d'un moyen nouveau.

- Le terme angle est utilisé dans deux acceptions par l'enseignant, au cours de la leçon :

. dans le sens culturel, au début, comme moyen de désigner une partie de la pièce; il est synonyme de "coin".

. dans le sens mathématique, dans la phase, quand il affirme que deux pièces de forme différente, mais qui

ent

er au même endroit, ont un^o1 par élève (annexe 2a) et une demi-feuille de papier calque.

- Une paire de feuilles d'exercice n^o2 (annexe 2b) par groupe de 2 élèves
- Un rapporteur muet à aiguille par groupe

a) Le rapporteur

L'observation des erreurs faites par les élèves dans l'emploi d'un rapporteur ordinaire³ montre qu'elles renvoient à deux sources de difficultés :

-la première à l'absence de représentation mentale de l'angle du rapporteur qu'il faut superposer à l'angle que l'on veut mesurer. D'où la grande difficulté à positionner convenablement le rapporteur, en superposant son centre sur le sommet et la base sur un des côtés de l'angle.

-la deuxième à la complexité de la double graduation

C'est la première difficulté que l'emploi d'un rapporteur muet peut aider les élèves à surmonter pourvu qu'il leur soit présenté dans un contexte qui ait du sens pour eux.

Nous avons donc fait le choix de garder le contexte du géométriscrabble comme situation objective évoquée pour les exercices présentés dans cette leçon, et celui de construire nous-mêmes dans du plastique transparent un rapporteur comportant les éléments traditionnels (base et centre) auxquels est ajoutée une aiguille rectangulaire pivotant autour du centre, sur

³ Close (1981) rend compte de nombreuses observations cliniques à ce propos.

laquelle une demi-droite issue de ce dernier permet de matérialiser, sur le rapporteur, le second côté de l'angle que l'on veut reporter. (cf fig.3) Le procédé de fabrication étant peu élaboré, la position de l'aiguille doit être repérée à l'aide d'un trait au feutre sur la partie fixe, car il est impossible de l'empêcher de bouger lors des déplacements du rapporteur. L'existence de cette aiguille simplifie le report d'angles dont les côtés sont plus courts que le rayon du rapporteur puisqu'elle les prolonge automatiquement, mais nous n'envisageons l'utilisation de cet instrument que pour une période brève, très vite (dès la première séance pour certains à cause de sa fragilité), les élèves seront amenés à utiliser un rapporteur sans aiguille, puisque celle-ci se détache du reste du rapporteur.

b) Les exercices

Il s'agit, pour les deux, d'apparier des angles représentés sur des feuilles : En recto-verso d'une même feuille pour le premier, sur 2 feuilles différentes et éloignées l'une de l'autre pour le second.

Dans le premier cas, en effet, les élèves doivent réinvestir des connaissances élaborées la veille, alors que dans le second, l'objectif est de faire sentir l'intérêt de l'emploi d'un instrument comme le rapporteur qui permet de repérer de manière économique les tailles de plusieurs angles à condition de concevoir que la base du rapporteur constitue un côté commun pour tous et qu'il suffit de repérer les 2èmes côtés. Pour que les élèves puissent évaluer l'économie de cette procédure, ils sont placés dans une situation de concurrence entre les équipes : elles doivent trouver le moyen de comparer les angles des deux feuilles à l'aide du rapporteur en effectuant le moins de voyages possible entre les deux. Aura gagné l'équipe qui aura réussi avec le plus faible nombre de déplacements.

Les différences de valeur des angles constituent une autre variable didactique. Nous les avons choisies ainsi :

* pour le premier exercice, sur chaque page, trois angles sont saillants, deux sont rentrants. En ce qui concerne les angles saillants, la différence entre un angle d'une page et les trois angles de l'autre est soit visible à l'oeil pour l'un, soit égale à environ 10 degrés pour l'autre, soit égale à 5 d° pour le dernier, sauf pour le couple où il y a égalité. Pour ce couple, les longueurs de côtés d'un des angles sont le double de celles de l'autre. Pour les angles rentrants la différence est soit de 5 soit de 10 d°. De plus, sur les cinq paires d'angles, trois sont constituées d'un angle rentrant et d'un angle saillant dont la somme est égale à deux plats. Nous attendons donc deux sortes d'erreurs, l'une provenant de la confusion rentrant-saillant, l'autre de la fabrication de représentations des angles sur le calque avec des côtés trop courts (en particulier chez ceux qui ont le mieux compris que la longueur de ses côtés ne caractérisait pas un angle) ne permettant pas de différencier deux angles ayant une différence de mesure de 5 degrés.

* pour le deuxième exercice, nous n'avons proposé que des angles saillants puisque son but est l'usage du rapporteur. Les angles ont des différences de mesure de 5 d°, ils sont disposés de manière diverse sur la feuille.

3. Consigne et déroulement

a) Phase 1

Chaque élève reçoit une feuille recto-verso et une feuille de calque.

Le maître expose : "Sur le recto et sur le verso de votre feuille sont tracés 5 angles correspondants à des pièces d'un puzzle. Parmi eux, il en existe deux, un de chaque côté, qui

correspondent au même angle. Trouvez-les." L'enseignant leur laisse 5 mn environ puis relève les résultats. S'ils sont différents, il envoie au tableau un élève pour montrer comment il a obtenu son résultat. Etant donné le choix des angles, des erreurs de manipulation ou de report au moyen d'angles décalqués aux côtés trop petits peuvent expliquer les différences. Cette comparaison des résultats est l'occasion pour le maître de faire expliciter ces difficultés et d'introduire dans le contexte les termes d'angles égaux, sans en donner une définition formelle.

b) Phase 2

L'enseignant propose aux élèves un instrument qui permet de remplacer le papier calque. Il montre alors un rapporteur du commerce, et demande qui a déjà vu cet instrument. Il poursuit : "pour vous aider à l'utiliser, car ce n'est pas très simple, j'en ai fabriqué en les modifiant un peu". Il montre alors le rapporteur muet à aiguille qu'il fait décrire par les enfants mais sans leur en expliquer le fonctionnement, et leur propose de rechercher à deux comment ils auraient pu utiliser cet instrument pour faire l'exercice précédent. Au bout de quelques minutes, après être passé dans les rangs pour aider les enfants ne trouvant pas de solution, il fait expliciter par plusieurs groupes les procédés utilisés pour comparer 2 angles et fait remarquer que placer l'aiguille hors du demi-disque (fig 4) est particulièrement malcommode, même si cela permet de réussir à condition que l'aiguille ne bouge pas.

Si les enfants remarquent qu'on ne peut pas former un angle rentrant sur le rapporteur, il leur montre un rapporteur en forme de disque.

c) Phase 3

Le maître distribue à chaque groupe de deux une feuille sur laquelle sont représentés trois angles, et dispose sur des tables éloignées des enfants d'autres feuilles sur lesquelles sont représentées également trois angles. Il expose leur travail :

"Vous allez refaire une recherche de paires avec le rapporteur mais cette fois-ci sur deux feuilles séparées. Pour plus de facilité il n'y a que des angles saillants. Une des feuilles est sur votre table, l'autre loin de vous. L'équipe championne sera celle qui réussira en faisant un seul déplacement entre les deux feuilles. Alors réfléchissez bien."

L'enseignant veille à encourager les équipes à aller jusqu'au bout de l'exercice, c'est-à-dire à trouver la bonne paire même si c'est avec deux déplacements ou plus.

Au bout de 10 mn, il relève les résultats des différentes équipes, (paire trouvée et nombre de déplacements) et fait exposer les différentes méthodes utilisées en comparant leur efficacité. A la fin de la séance, l'enseignant institutionnalise l'usage habituel du rapporteur, avec coïncidence du sommet et du centre de l'angle à reporter, et coïncidence de la base avec un des côtés de l'angle.

IV. EVALUATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES A L'ISSUE DE LA SERIE DE TROIS SEANCES.

A. Les objectifs

Ils sont doubles :

- dans le cadre de la recherche, s'assurer que les élèves ont bien construit les connaissances visées et qu'ils savent les réinvestir dans des situations dont le contexte est de plus en plus éloigné du contexte initial.

- au niveau de la gestion didactique, fournir aux élèves et à l'enseignant une occasion de revenir sur ces connaissances, et sur leur explicitation : C'est à l'occasion de la correction du contrôle que le terme "angles égaux" est institutionnalisé, après une discussion sur les phénomènes liés à la longueur des côtés.

B. Les épreuves

Elles sont très proches des épreuves constituant les tests d'évaluation du premier processus d'enseignement des angles. L'épreuve 1, la plus proche de la situation a-didactique comporte deux items du même type : prévoir si une pièce polygonale dessinée d'un côté de la feuille peut s'encastrent dans le puzzle dessiné de l'autre côté (annexe 3a). Pour répondre à la question, les enfants ont à leur disposition, à la demande, règles, double-décimètre, papier calque, mais pas de rapporteur dont l'usage, mal maîtrisé par tous à ce moment, pourrait masquer des difficultés sur la conception des angles. Il leur est demandé d'expliquer comment ils ont fait. L'analyse de ces explications peut nous permettre de voir dans quelle mesure ils réinvestissent leur connaissance des termes comme angle, superposer, etc...

Le premier item comporte deux solutions, un même angle (rentrant) de la pièce peut s'emboîter à deux endroits différents. Un "piège" a été prévu : Un autre angle (saillant) de la pièce est égal à un angle saillant du puzzle.

Le deuxième item ne comporte pas de solution, mais un des angles de la pièce est égal à un des angles du puzzle.

L'épreuve 2 et l'épreuve 3 (annexes 3b et 3c) sont les mêmes que celles du test précédent⁴.

L'épreuve 4 (annexe 3d) a été construite pour pouvoir comparer les résultats des élèves avec ceux de Close (1982). Les enfants ont à répondre, pour 6 paires d'angles, à la question suivante : *Ecris le nom du plus grand ou alors écris : "ils sont égaux"*.

C'est la première fois que les enfants ont à répondre à une question de cette nature, les réponses précédentes portant sur égalité ou inégalité. Nous savons choisi des configurations pièges, comme celle de A et B, pour observer dans quelle mesure les élèves étaient capables de les éviter. la comparaison porte aussi sur un couple constitué d'angles rentrants et sur un couple constitué d'un angle saillant et d'un angle rentrant dont la somme est égale à 360 d°. Nous prévoyons qu'elle va poser problème aux enfants.

V. REPRODUCTION DE POLYGONES A L'AIDE DU RAPPORTEUR

MUET

L'observation du travail des élèves dans les situations de reproduction de quadrilatères nous avait montré l'intérêt de ce type de tâches pour la maîtrise de l'usage du rapporteur.

Nous avons donc proposé aux élèves, en fin d'année, une situation individuelle de reproduction d'un pentagone non convexe en leur demandant explicitement d'utiliser les rapporteurs muets. Le travail fait avec eux antérieurement en géométrie aurait pu les inciter à le faire par triangulation. Cette possibilité, si elle avait été évoquée par certains, devait être reconnue comme efficace par le maître mais ne correspondant pas à la consigne.

A. Les caractéristiques de la situation choisie

⁴ présenté au chapitre C-7.

1. Description

Sur la table de chaque élève, est collée une demie-feuille de papier calque sur laquelle est dessinée un pentagone non convexe dont les longueurs des côtés sont comprises entre 3 et 12 cm. L'élève dispose d'une feuille de papier blanc. Dans un coin de la classe, sont réunis à la disposition des enfants, règles graduées, équerres, compas, rapporteurs muets avec ou sans aiguille. L'élève doit reproduire le pentagone, la vérification se fera quand il pensera avoir terminé, par superposition des 2 figures. Trois figures sont préparées, quand il a terminé son travail avec l'une, il peut passer à la suivante (annexe 4).

2. Analyse à priori

a) Le choix du pentagone

C'est une figure où le nombre d'informations à saisir est suffisamment important pour que les enfants aient plusieurs occasions de reporter des angles et des longueurs. Le fait qu'il soit non convexe est lié au choix que nous avons fait de travailler d'emblée sur ce type de figures; mais cette propriété ne paraît pas pouvoir avoir d'incidence sur les stratégies des élèves puisque le modèle étant constamment sous leurs yeux, ils n'ont pas besoin de garder en mémoire le fait qu'un angle est saillant ou rentrant.

Les longueurs des côtés ont été choisies de manière à poser au moins une fois le problème de report d'un angle dont les côtés sont de longueur inférieure à celle du rayon du rapporteur. Il faut donc décider de les prolonger, un prolongement à vue, que l'on peut attendre de certains élèves risque de conduire à une figure fautive.

b) La position du modèle

Elle a été choisie proche de l'élève pour qu'il ait à chaque instant le contrôle visuel du moment où il en était dans sa progression. Un autre choix (modèle loin de la réalisation) aurait nécessité la création de désignations (ordre des côtés, relations entre côtés et angles) pour effectuer l'auto-communication d'informations et ce contrôle, cela nous paraît mériter une autre leçon que nous n'avons pas réalisée.

c) La variété des instruments

Bien que la consigne demande aux élèves de reproduire le polygone avec un rapporteur, nous leur avons laissé la possibilité d'avoir recours à d'autres instruments, en particulier au compas, pour ceux qui seraient incapables d'utiliser le rapporteur.

d) La vérification et la prise de décision de la réussite

Nous avons déjà vu les problèmes que pose la détermination de la réussite ou de l'échec. Nous avons pensé déterminer un "seuil de tolérance", le même pour tous les enfants, qui constituerait un critère objectif tenant compte de l'impossibilité d'obtenir la superposition parfaite avec les instruments grossiers dont disposent les élèves (en particulier le rapporteur sur lequel on est obligé de faire des repères épais). Mais l'analyse du problème montre qu'une même erreur d'angle correspond à des différences plus ou moins importantes des positions des sommets en fonction de la longueur des côtés correspondants⁵. Aussi il aurait fallu déterminer une bande dont la largeur aurait varié selon les côtés. Dans l'impossibilité de justifier cela avec les enfants, nous avons renoncé à déterminer un seuil. La réussite est validée par

⁵ voir figure 5

l'enseignant en accord avec l'enfant (qui est en général plus exigeant). En cas de différence nette (l'enseignant l'estime dans un premier temps par rapport aux autres élèves) avec le modèle, le maître demande à l'élève de comparer les angles et les côtés séparément pour déterminer d'où viennent ses erreurs.

B. Les comportements des élèves que nous prévoyons

Une première difficulté provient du fait que pour reporter un angle, il faut d'abord tracer un sommet et un côté, sans contrainte, puis utiliser l'information fournie par le rapporteur pour tracer le second côté. Nous pouvons prévoir que certains enfants vont commencer par prendre une information avec le rapporteur, puis vouloir l'utiliser d'emblée. Plusieurs cas sont possibles :

- le blocage : l'enfant ne voit pas comment "décalquer" l'angle dessiné sur le rapporteur sur sa feuille de papier.

- des essais de reproduction en soulevant un peu le rapporteur pour dessiner les côtés les plus proches possibles de ceux du rapporteur : cette méthode risque de générer des erreurs que l'enfant pourra repérer s'il procède à des vérifications

- l'émergence de la solution soit directement, soit après un premier essai comme ci-dessus.

VI. RESULTATS DES OBSERVATIONS

Nous avons reproduit tout ou partie de ce processus trois années consécutives au CM2. Les descriptions suivantes s'appuient donc sur l'observation de comportements que nous avons pu relever au moins deux fois. Les résultats quantitatifs correspondent à l'année 89-90.

A. Le jeu du géométriscrabble

1. Leçon 1

a) Phase 1

Ce premier jeu permet aux enfants à la fois de se familiariser avec le matériel en faisant attention à placer convenablement les pièces qui ont tendance à glisser, et de recevoir du maître des réponses aux questions (sur la règle) qu'ils se posent au fur et à mesure du déroulement de la première partie : "Peut-on retourner les pièces?" "Est-ce qu'il faut que cela fasse une forme particulière?" "Tout s'emboîte bien mais il y a un trou dans le puzzle, est-ce que je peux poser ma pièce ainsi?"

Une fois les réponses aux questions bien comprises par les enfants, cette phase est arrêtée puisque le jeu ne fait intervenir que le hasard.

Cette phase remplit bien son rôle et dure environ 10 minutes.

b) Phase 2

Avec les nouvelles règles du jeu, il faut comparer à l'oeil les angles de la pièce tirée avec les angles extérieurs du puzzle déjà formé.

Nous avons remarqué :

- des différences individuelles très grandes quant à la capacité à explorer le puzzle et la pièce; certains enfants tiennent la pièce dans la main et ne s'intéressent qu'aux angles qu'ils ont sous les yeux, sans penser à la faire pivoter.

- des différences également importantes quant à l'évaluation à l'oeil de la taille des angles.

- que la vitesse de déroulement du jeu est très variable : certains en sont à la troisième partie quand d'autres n'ont pas fini la première. Toutefois, cette lenteur, liée à un manque de méthode, ne semble pas constituer un handicap pour la suite des leçons.

- que le langage utilisé par les élèves est très pauvre puisqu'ils ont la possibilité de montrer : "ça, ça rentre là". Nous avons toutefois relevé l'usage du mot "coin", ainsi que du terme "angle droit" dans des cas où en effet, la pièce comportait un tel angle.

2. Leçon 2

C'est la leçon clé du processus.

a) Les stratégies développées par les élèves

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse à priori, elles peuvent être classées en deux grandes catégories, celles qui témoignent d'une certaine décantation de la notion d'angle⁶ et celles qu'utilisent les élèves qui ne peuvent concevoir qu'on puisse décrire une pièce répondant à la question sans donner toutes ses caractéristiques. Précisons-les en les désignant par des lettres pour pouvoir les repérer :

2) Stratégie A1

Demande d'une pièce par le nom de sa forme, sans autre précision.

3) Stratégie A2

⁶ Wermus (1976)

Demande d'une pièce, le plus souvent un triangle permettant de rendre convexe le puzzle, en fournissant comme informations les mesures des côtés. La description peut être accompagnée d'un dessin fait à l'oeil ou respectant certaines mesures de longueur.

4) *Stratégie A3*

Utilisation de la feuille comme calque et reproduction du puzzle entier par superposition.

5) *Stratégie A4*

Choix d'un angle parce qu'il est droit et demande d'une pièce ayant un angle droit sans préciser sa forme.

6) *Stratégie A5*

Représentation d'un angle du puzzle, soit à l'oeil (A5a), soit en utilisant la feuille comme calque et en superposant (A5b), avec indication des mesures des côtés⁷.

7) *Stratégie A6*

Représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant (comme A5b) mais les longueurs sont seulement respectées sans être indiquées

8) *Stratégie A7*

Représentation d'un angle du puzzle en utilisant la feuille comme calque et en superposant (comme A5b) mais sans respecter ni indiquer les longueurs des côtés.

* les dessins correspondant aux stratégies A4 à A7 peuvent être accompagnés d'informations supplémentaires permettant de différencier angles rentrants et angles saillants. Nous avons alors ajouté un (') aux stratégies correspondantes.

Pour chacun des groupes, nous avons pu relever tous les messages⁸, et, pour quelques-uns, observer les réactions des marchands et les échanges avant chaque jeu.

b) Synthèse des observations⁹ du travail par groupes

La majorité des groupes utilise dans les premiers échanges soit A2 soit A4.

A4 permet, étant donnée le puzzle initial, de réussir pour 2 pièces, ensuite il n'y a plus d'angle droit rentrant dans le puzzle. Les élèves se retrouvent dans la même situation que ceux qui n'ont pas remarqué l'existence d'angle droit. Toutefois la proportion de ceux qui régressent vers A2 est plus faible que celle de ceux qui adoptent une procédure d'indice supérieur ou égal à cinq¹⁰.

Comme nous nous y attendions, l'impossibilité de fournir une pièce correspondant à une forme bien déterminée déstabilise les enfants, suivant une vitesse variable. Nous avons constaté que certains groupes, après avoir déclaré dans la discussion initiale, que les longueurs des côtés n'étaient pas importantes, qu'on ne pouvait pas savoir la forme de la pièce, faisaient leur première demande en utilisant A2.

⁷ Nous avons regroupé ces deux stratégies parce qu'elles manifestent la possibilité pour l'élève, de représenter le seul caractère pertinent de la figure, à ce moment. Nous aurions dû plutôt les désigner de manière différente, à cause de la manière de traiter la taille de l'angle.

⁸ nous avons relevé chaque année, 2 ou 3 enfants proposant pour désigner l'angle demandé, de déterminer sur chacun des côtés, deux points à 1cm du sommet et de mesurer la distance entre ces deux points. Cette procédure était vite abandonnée car difficile à expliquer par écrit au marchand! Elle pourrait constituer la base de la procédure de reproduction d'un angle à la règle et au compas. Nous ne l'avons pas exploitée car trop minoritaire.

⁹ voir les résultats détaillés dans l'annexe 5.

¹⁰ mais nos effectifs sont trop peu nombreux pour faire apparaître un résultat significatif.

A l'issue du deuxième jeu, 11 groupes sur les 15 étaient passés à une procédure de type A5, A6 ou A7, A5a étant utilisé par un seul groupe. 6 groupes avaient attribué l'échec de certains messages à l'ambiguïté du tracé ne permettant pas de savoir "s'il fallait envoyer une pointe ou un creux" et avaient mis au point des solutions : flèches, estompage de la partie pleine, etc... La formulation "où on peut faire rentrer un angle droit" a été utilisée par un groupe n'étant pas sorti de la stratégie A4.

Quant aux groupes ayant utilisé A3, le changement de règle entre le premier et le deuxième jeu a suffi pour faire abandonner à 2 groupes sur 4 cette procédure efficace mais ne permettant pas d'engager le type de travail sur les angles que nous visions, pour leur faire adopter la procédure A6.

c) La phase d'échanges en fin de leçon

Elle commence par le bilan du nombre de pièces collées. L'enseignant interroge ensuite les enfants des quelques groupes qui n'ont réussi à coller qu'une pièce pour qu'ils viennent expliquer leurs difficultés¹¹.

Les groupes qui n'ont pas réussi à dépasser A4 ou A2 posent le problème : "Il n'y avait pas de pièce comme on voulait".

Les autres groupes viennent expliquer leur méthode : "Nous, on a pris la trace de l'angle en superposant la feuille sur le puzzle", ce qui provoque dans l'une des classes une réaction indignée des élèves de deux groupes : "C'est de la triche!"¹²

Dans les deux classes, certains enfants sont revenus sur l'importance de prendre en compte ou non les mesures des "bords". Cela a été l'occasion pour l'enseignant d'une part d'introduire les termes de côté et de sommet d'un angle¹³, d'autre part de préciser quand deux pièces ont un même angle : le sommet et les deux côtés de l'angle se superposent en partie, une même trace représente les angles des 2 pièces.

Quelques élèves font remarquer qu'à une même trace correspondent deux sortes de pièces¹⁴ et qu'ils ont trouvé le moyen de préciser laquelle ils désiraient. Ceci permet à l'enseignant d'explicitier qu'à une même trace correspondent deux angles, d'introduire les termes de saillant et rentrant ainsi que la notation mathématique usuelle.

Ainsi, à la fin de la séance, une première institutionnalisation à propos des angles a été faite. Nous verrons qu'elle ne suffit pas.

3. Leçon 3

a) Phase 1 : Exercice 1

¹¹ dans cette deuxième phase, les enfants qui ont utilisé une méthode "prim" ont collé plus de pièces que les autres. Mais le nombre de pièces collées n'est pas un critère sûr de la qualité de la procédure employée par le groupe: dans chaque classe, un groupe a réussi un bon score en utilisant la méthode du "coup d'oeil auxiliaire". Aussi, il est très important que l'enseignant explique pourquoi marchand et clients ne doivent pas se retourner pour regarder le jeu de l'autre: "Ils ont l'impression de gagner, mais cela les gênera pour apprendre ce que l'on apprend en faisant ce jeu et les autres activités qui vont suivre".

¹² Cette réaction a souvent été observée dans des situations où il s'agit "d'inventer". Le contrat didactique est déstabilisé, le permis et non permis n'est pas pré-déterminé par le maître, et certains élèves, même n'ayant aucune difficulté sur le plan conceptuel, restent bloqués. On peut penser aussi qu'ils ont envisagé cette solution mais qu'elle leur paraît si simple qu'ils n'imaginent pas que ce soit cela que l'enseignant attend.

¹³ Les enfants connaissent déjà l'emploi de ces deux termes dans le cas des polygones, ils ne le réutilisent pas spontanément dans ce contexte.

¹⁴ "celles qui ont un angle qui sort, celles qui ont un angle qui mange"! Les expressions sont toujours très imagées!

1) Comportements et résultats des élèves

Sur les 44 élèves qui ont fait l'activité, 42 ont reproduit un ou plusieurs angles sur leur calque, certains en respectant les longueurs de côté, les autres en les faisant délibérément plus petits. Les 2 élèves restants ont repéré les extrémités des tracés par des points et n'ont pas conclu.

La moitié a réussi et comme nous nous y attendions, les erreurs viennent des deux sources mentionnées dans l'analyse à priori :

- un quart des enfants ont donné une réponse attestant qu'ils ne différenciaient pas l'angle rentrant et l'angle saillant correspondant à un même tracé.

- l'autre quart a donné une réponse correspondant à deux angles de mesure erronée de 5 degrés. Cela provient soit de la taille des côtés, soit d'une mauvaise maîtrise de la reproduction sur le calque.

2) Les échanges après le bilan des résultats

Aussitôt que l'enseignant a inscrit au tableau l'ensemble des réponses trouvées par les élèves, plusieurs réfutent celles correspondant à des angles dont la somme est deux plats en disant : "ça ne va pas, il y a un extérieur et un intérieur". L'enseignant rappelle alors les termes adéquats.

Puis interviennent les débats à propos des 2 paires correspondant à des angles saillants. L'enseignant propose à un élève de montrer comment il compare A et 1, à un autre D et 1. Un des enfants explique : "Il faut les faire assez longs (les côtés) parce qu'au début ils sont pareils". Les autres causes d'erreur sont énumérées spontanément : l'épaisseur du feutre, le fait de dessiner les côtés à main levée, le manque de transparence du calque.

En conclusion, l'enseignant fait redire à l'un des enfants comment l'on reconnaît que deux angles sont égaux. Il introduit ici ce terme que certains enfants avaient déjà utilisé, sous sa forme symbolique, dans leur réponse ($D=1$). L'emploi des termes adéquats est encore difficile pour les élèves.

b) Phase 2 : comparaison de deux angles

Il s'agit, dans cette phase, de trouver comment le rapporteur muet permet de comparer deux angles. Les enfants recherchent à deux puis l'enseignant demande à un enfant de venir expliquer sa méthode. L'enfant explique convenablement, les remarques des autres enfants furent : "L'aiguille, j'arrive à m'en servir mais ça bouge"; "le rapporteur, c'est mieux parce qu'il n'y a pas d'aiguille, il y a une graduation"; "au lieu de tenir l'aiguille (après avoir repéré l'angle), il n'y a qu'à faire une marque".

Une discussion s'engage :

- "Le 4 (c'est un angle rentrant), on ne peut pas le mesurer"
- "ce n'est pas la même pièce qui s'emboîte mais on peut le faire"
- "l'aiguille dépasse le rapporteur"
- "il faudrait un rapporteur rond"

L'enseignant en sort un; un enfant vient montrer comment il pourrait l'utiliser.

Ainsi, la dynamique de la situation conduit les élèves les plus mûrs à envisager les différents problèmes que l'on peut rencontrer dans l'usage du rapporteur avant même que l'enseignant ne les ait posés. Il ne faut tout de même pas se leurrer, la majorité des enfants a besoin d'être confrontée à un usage effectif du rapporteur muet dans lequel les erreurs vont être sanctionnées par l'échec. C'est l'objet de la 3ème phase.

c) Phase 3 : reproduction de polygones

1) Comportements et résultats des élèves

Sur les 22 groupes, 1 n'a pas eu le temps de terminer, 4 ont échoué en appariant des angles dont la différence de mesure était de 5 ou 10 d°, ou en ne trouvant pas d'angles égaux, les 17 autres groupes ont réussi, la majorité en un seul voyage, par transport du rapporteur sur lequel les élèves avaient repéré les trois angles de la feuille de leur table. L'attache de l'aiguille étant très fragile, celle-ci s'est parfois détachée du rapporteur lui-même. Certains groupes ont vu d'eux-mêmes qu'en fait elle ne servait à rien puisque (les côtés des angles ayant été choisis à dessein assez longs dans ce premier exercice), on pouvait repérer par transparence le deuxième côté de l'angle. Aux enfants venant lui demander de la réparer, l'enseignant répondait "crois-tu vraiment que c'est nécessaire?" et en cas de réponse affirmative remplaçait l'aiguille.

Les élèves ont tous choisi comme premier côté de leurs angles, l'un des deux segments CA ou CB de la base du rapporteur, et ont repéré par un trait de feutre les deuxièmes côtés. Pour certains, un deuxième voyage a été nécessaire quand les enfants se sont aperçus qu'ils n'avaient pas noté le nom des angles.

2) Bilan et conclusion

Après la prise en compte des résultats, l'enseignant appelle un des enfants d'un groupe qui n'a pas réussi pour qu'il refasse le travail devant la classe. Il commente et institutionnalise l'usage du rapporteur muet et explique aux enfants qu'ils apprendront au collègue à utiliser le rapporteur avec graduations.

B. Les résultats de l'évaluation

1. Introduction

Au terme des 3 leçons associées au jeu du géométriscrabble, les élèves ont semblé maîtrisé de mieux en mieux le concept d'angle. L'évaluation faite une semaine après permet de contrôler ce qu'il en est pour chacun d'entre eux.

2. Epreuve 1

39 enfants sur 41 ont réussi au premier item, 36 au deuxième. Tous ont utilisé le papier calque; pour les deux items, la grande majorité d'entre eux (34) ont décalqué les pièces entières, les autres seulement les angles leur paraissant convenir. Un seul élève a confondu, dans le deuxième item, emboîtement et superposition des angles¹⁵.

Dans leurs explications, peu d'enfants utilisent spontanément le terme d'angle, 9 seulement : 5 sur les 7 qui n'ont décalqué que les angles, et 4 sur les 34 qui ont décalqué les pièces entières. Telle qu'elle était posée (à dessein), la question n'appelait pas nécessairement une réponse en terme d'angles, il est normal que seuls ou presque, l'aient employé ceux qui ont effectivement comparé des angles.

3. Epreuve 2

¹⁵ En 90-91, cette erreur a été plus fréquente, elle correspond à 20% des réponses.

Rappelons qu'il s'agit ici de comparer les angles de deux triangles. Pour le premier item, il y a une solution, pour le deuxième pas, mais un des angles du triangle 1 ne mesure que 7 degrés de plus que l'angle du triangle 2.

Pour les deux items, 35 enfants sur 41 réussissent, 3 échouent aux 2 items.

4. Epreuve 3

Elle est de même type que la précédente, mais les enfants doivent comparer des angles d'un même quadrilatère. Les deux angles qu'ils doivent déclarer égaux ont des côtés de longueur nettement différente, par contre pour le deuxième item, deux angles ont l'air égaux alors que leur mesure diffère de 5° . Tous les enfants ont réussi le premier item, 8 ont échoué au second ayant soit comparé à l'oeil (3), soit pris un calque aux côtés très courts (2), soit mal contrôlé la superposition des côtés (3).

5. Epreuve 4

C'est l'épreuve la plus éloignée du contexte dans lequel le concept d'angle a été présenté aux élèves.

6 items permettent de contrôler si les élèves conçoivent la taille des angles comme indépendante de celle de leurs côtés, sont capables de donner du sens à la relation "être plus grand que" entre des angles de même nature, 1 propose la comparaison d'un angle saillant et d'un angle rentrant dont la somme est égale à 360°

a) Comparaison d'angles de même nature

En 89-90, les résultats aux 6 items varient entre 76 et 93%. En 90-91, entre 74 et 87%¹⁶.

Si nous examinons de plus près les résultats de 90, et regroupons les enfants par nombre de résultats justes, nous voyons que seuls 4 enfants ont moins de 4 réussites : Celle qui n'a qu'une réussite a systématiquement donné la réponse correspondant à l'angle dont les côtés sont les plus longs, sa seule réponse juste concerne deux angles de longueur de côtés à peu près semblable, un autre enfant n'a pas suivi la consigne et a donné le résultat de la relation d'égalité (sans se tromper), les deux derniers enfants ont donné trois résultats justes, il semble qu'ils aient comparé à l'oeil pour l'un, avec une mauvaise technique de report pour l'autre mais qu'ils aient une conception convenable des angles. En résumé, nous pouvons affirmer que seule une élève sur 41 n'a pas compris ce qui était en jeu dans la suite d'activités¹⁷.

b) Comparaison d'un angle saillant et d'un angle rentrant de somme égale à 360°

Comme nous le pensions, c'est l'item qui a posé le plus de problèmes aux élèves. En 89-90, nous avons relevé 5 types de réponse dont nous donnons la fréquence :

- * la bonne réponse, $E > C$: 11/41
- * l'égalité : 24/41
- * "impossible" : 2/41
- * "différent" : 1/41
- * pas de réponse : 3/41

Comment expliquer ces résultats? Nous pouvons faire l'hypothèse que pour tous les élèves, il y a une difficulté dans la comparaison entre un angle saillant et un angle rentrant parce que ces deux types d'angles correspondent à des propriétés perceptives nettement différentes des objets spatiaux correspondants.

¹⁶ L'ensemble de l'épreuve a été proposée l'avant dernier jour de classe, ce qui peut expliquer la petite différence entre les deux années.

¹⁷ en 90-91, sur 54 élèves, un élève est en échec total, 5 ne maîtrisent convenablement que la relation d'égalité.

Certains ne la surmontent pas et soit ne répondent pas, soit ont "l'audace" de dire qu'il est impossible de répondre à la question posée par le maître.

On peut interpréter de 2 façons différentes la réponse d'égalité : soit les élèves n'ont pas remarqué qu'un des termes du couple est un angle rentrant et l'autre saillant, soit ils résolvent la difficulté (parce qu'il faut bien donner une réponse) en négligeant un des caractères des figures à comparer, à savoir le caractère rentrant. Nous n'avons pas le moyen de savoir pour chaque enfant ce qu'il en est mais les explications souvent confuses données au moment de la comparaison des réponses apportées à cette question nous laissent penser qu'il y a là une difficulté conceptuelle : malgré la concrétisation proposée faisant jouer le même rôle aux pièces concaves et convexes, donc aux deux types d'angles, pour la majorité des enfants, ils restent hétérogènes, la superposition qui a du sens pour comparer deux angles de même type n'en a plus pour comparer deux angles de type différent puisque la relation "naturelle" entre les deux est l'emboîtement.

Cette difficulté est-elle l'effet du processus d'apprentissage que nous avons mis en oeuvre? Il semble qu'elle soit plus générale puisque, après un enseignement à des élèves de 6ème, Close donne comme résultat pour des items du même type mais où les côtés des angles sont parallèles (annexe 6) :

item 6-v	réussite : 11/21	égalité : 4/21
item 6-vii	réussite : 3/21	égalité : 12/21

Et elle conclut que la capacité à reconnaître des angles rentrants n'a pas été suffisamment développée par la méthode d'enseignement adoptée.

En ce qui nous concerne, nous n'avons pas étudié comment lever cette difficulté¹⁸.

C. La reproduction de pentagones

Remarquons tout de suite que c'est une tâche qui passionne les enfants, ils sont capables de rester plus d'une demi-heure sur leurs figures, de recommencer plusieurs fois si la réussite n'est pas acquise.

Dans les deux classes, les dix premières minutes de la leçon ont été consacrées à faire rappeler, par un des élèves, la façon d'utiliser le rapporteur, la moitié d'entre eux ayant oublié puisque cette séance s'est déroulée environ un mois après la leçon 3. Pour quelques enfants, ce rappel n'a pas suffi, il a fallu de nouvelles explications individuelles de l'enseignant.

1. Les difficultés rencontrées

Au moment du démarrage du travail, comme nous l'avions prévu, plusieurs enfants, capables d'utiliser le rapporteur pour comparer des angles déjà tracés sont bloqués car ils ne voient pas comment reporter l'angle représenté sur le rapporteur : Ils n'imaginent pas qu'il faille d'abord tracer l'un des côtés et décider de la position du sommet.

Une deuxième difficulté survient pour reporter la position du deuxième côté : Plusieurs cas sont possibles :

* L'extrémité du côté est située "sous" la partie pleine du rapporteur assez loin des bords. Les élèves ont tendance, dans un premier temps, à la repérer par un point qu'ils ne peuvent facilement reporter sur leur feuille, ils essaient de le faire en soulevant le rapporteur

¹⁸ Y-a-t-il un obstacle culturel, la forme apparente de la plupart des objets du micro est convexe, c'est le "vide" qui comporte des angles rentrants?

sans le déplacer, ce qui les conduit à une position approximative et explique les erreurs de précision.

* Le côté est plus court que le rayon intérieur du rapporteur :

- si celui-ci a une aiguille, elle prolonge le côté mais seulement jusqu'au milieu de la bande, les enfants ont tendance à y marquer cette extrémité et rencontrent la même difficulté que ci-dessus.

- si le rapporteur n'a pas d'aiguille, il faut prolonger le côté avec une règle soit en dessinant sur la figure de départ, soit seulement pour déterminer sa direction par un petit trait sur le rapporteur. Nous avons vu très peu d'enfants utiliser la première méthode.

Ces difficultés sont peu à peu surmontées par la plupart des élèves, mais à des vitesses très variables et la complexité de la tâche fait que, quand ils contrôlent mieux, par exemple, le report d'un angle, ils oublient la vérification de la longueur du côté¹⁹ D'autre part, s'ils s'aperçoivent qu'un angle ne va pas, ils effacent et corrigent sans nécessairement être conscients des effets de cette correction sur l'angle consécutif.

Enfin quelques élèves ont confondu l'angle à reporter avec son supplémentaire, erreur leur faisant perdre du temps mais dont ils se rendaient compte dans la plupart des cas, la forme de leur figure étant alors nettement différente.

2. Comment expliquons-nous ces difficultés?

Elles nous semblent témoigner de la persistance de la conception micro-spatiale de la figure. Les démarches qui consistent à prolonger les côtés, ou à dissocier le côté de son support ne sont pas spontanées, elle se construisent (peu à peu), parce que la tâche n'est pas réalisable autrement.

Il faut noter que sur la plupart des figures terminées, les élèves s'empressent d'effacer les traits ayant servi à construire et ne correspondant pas aux côtés, ce qui peut être relié à la ressemblance recherchée avec le modèle.

3. Remarques

Elles concernent des comportements que nous avons vu apparaître, mais de façon assez rare.

a) *Le tracé du dernier côté*

Quand quatre des côtés sont tracés, le dernier s'obtient sans prise d'informations supplémentaires. Par contre, la comparaison de sa longueur avec celle du côté correspondant sur le modèle permet une vérification de la construction. Un petit nombre d'enfants y a recours, alors que la plupart, désireux de tester leur travail, s'empressent de tracer le segment et de déclarer qu'ils ont fini. Dans une perspective de maîtrise spatiale, il serait intéressant de valoriser le contrôle préalable.

b) *Stratégie mixte*

Nous avons observé quelques élèves qui, après avoir tracé trois côtés à l'aide du rapporteur, ont obtenu le dernier sommet par intersection des deux cercles de centres respectifs les deux sommets "libres" et de rayons les longueurs des côtés. Ils ont bien réinvesti le travail sur le tracé de triangle fait quelques mois plus tôt.

¹⁹ voir observation de Jérôme, annexe 7.

4. Résultats quantitatifs

Les observations que nous avons faites ne nous ont pas permis de quantifier tous les comportements rapportés ci-dessus. Une étude plus approfondie nécessiterait une observation clinique des élèves.

Nous ne disposons donc que de quelques observations longitudinales et des résultats à la fin de la séance. Comme les deux classes ont des profils voisins, nous les donnons regroupés.

Sur 43 élèves,

- 18 ont réussi à tracer au moins une bonne figure à l'aide du rapporteur et de la règle graduée.

- 1 a réussi par triangulation avec le compas

- 6 ont "presque" réussi, c'est-à-dire que les erreurs sur les longueurs sont proches des tolérances qui font partie des exigences en cours dans la classe : 1mm. Si nous avions retenu celles de EVAPM, ces élèves auraient été considérés comme ayant réussi.

- 11 ont échoué mais plusieurs angles de la figure ont été convenablement reportés.

- 7 enfants sont en difficulté, dont 4 importante. Sauf pour un d'entre eux, ces élèves avaient bien réussi le bilan individuel.

Notons aussi l'extrême hétérogénéité des élèves : Dans le même temps, deux d'entre eux ont réalisé les trois figures sans erreur, 6 deux et certains ne sont pas arrivés à terminer la première.

5. Conclusion

Pour une bonne partie des enfants, l'apprentissage n'est pas terminé, une ou deux séances supplémentaires auraient été nécessaires. Mais il nous semble que cette activité, introuvable dans les manuels de 6ème et 5ème, fournit aux élèves une source intéressante d'apprentissages concernant les angles et le rapporteur. Elle pourrait se prolonger par un questionnement sur le nombre minimal d'informations à prendre sur la figure de départ pour la reproduire.

On pourrait penser à prolonger cette activité par un questionnement sur le nombre minimal d'informations à prendre sur la figure de départ pour la reproduire. Notons cependant que l'intérêt spatial peut s'avérer différent de l'intérêt géométrique : saisir plus de mesures qu'il n'en est besoin pour la construction est utile pour vérifier immédiatement cette construction, et le choix des informations permettant de favoriser la précision de la construction effective n'est pas aussi ouvert que celui des informations géométriques suffisant à déterminer la figure.

VII. CONCLUSION

A. Sur le déroulement du processus

Nous avons reproduit ce processus trois années, dans les classes de CM2 de l'Ecole J. Michelet. Nous avons conclu à sa reproductibilité, et à son efficacité relativement aux objectifs que nous nous étions fixés. Seule la durée à affecter à la deuxième leçon nous paraît être sujette à variation : Selon la rapidité des élèves à s'approprier la représentation des angles du polygone à compléter, par décalque, cette leçon nécessite une ou deux séances.

Nous insistons particulièrement sur le fait que, pour les élèves, le terme d'angle a du sens aussi bien pour caractériser certaines propriétés d'une figure polygonale fermée²⁰ que pour désigner la figure formée par deux demi-droites de même extrémité. Ils ne connaissent pas ce terme, mais ils sont capables de traiter les côtés de la figure comme des demi-droites pour comparer les angles.

Enfin, nous pensons qu'il faudrait étudier la possibilité d'introduire le rapporteur à une graduation et à aiguille plutôt que le rapporteur muet. C'est ce que nous ferions pour les élèves de 6ème.

Ce processus, plus simple à mettre en oeuvre dans les classes que le précédent, a été incorporé dans les leçons ordinaires de la classe de CM2 de l'école Michelet.

B. Sur les objectifs visés

La comparaison de ce processus avec celui précédemment mis en oeuvre ne fournit pas de différences significatives, quant aux résultats mesurés au moyen des tests présentés ; mais nous ne nous sommes pas donnés les moyens d'une évaluation plus fine de différences éventuelles qui pourraient être liées aux possibilités d'exploration des relations entre côtés et angles, réalisables avec le matériel articulé.

Après le premier processus, il confirme expérimentalement le caractère didactique de l'obstacle cognitif repéré dans l'enseignement des angles : l'influence de la longueur des côtés sur l'appréciation de la valeur de l'angle.

²⁰ Nous n'avons pas eu la possibilité d'introduire la bissectrice. Il aurait été éclairant de comparer leurs résultats à ceux des élèves de 6ème pour l'item EX4 de EVAPM. (Chapitre C-6 annexe 3)

CHAPITRE C-9

ETUDE D'UN PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DES PLANS

I. PROBLEMATIQUE

La lecture et l'utilisation de cartes et de plans dans les situations courantes (localiser un bureau dans un grand bâtiment, se déplacer dans une ville ou un quartier inconnus, trouver son chemin en montagne...) restent la source de difficultés nombreuses pour un certain nombre d'adultes¹. Rappelons par ailleurs que la thèse de G. Galvez avait pour objectif d'étudier la possibilité d'introduire, dans le cadre scolaire, des enseignements favorisant le développement de ces compétences dans le macro-espace urbain, constitué par la ville de Mexico. Ce projet l'a conduite à construire et expérimenter plusieurs situations d'apprentissage du langage spatial et des plans, en confrontant les élèves à des problèmes simulant certaines caractéristiques des interactions macro-spatiales.

L'école primaire française mentionne bien, parmi les objectifs du cycle des apprentissages fondamentaux², ce domaine de connaissances : Parmi les compétences transversales rassemblées sous le titre : "**Construction des concepts fondamentaux d'espace et de temps**", figure l'énoncé suivant : *il (l'enfant) commence à réaliser des représentations simples de l'espace familier, puis d'un espace plus abstrait, éloigné d'une expérimentation concrète : il peut s'y situer.*

Dans la rubrique **géographie**, *l'enfant doit être capable de construire et utiliser un plan simple avec sa légende.*

Mais il semble que passé l'âge de 8 ans, ces compétences n'aient plus besoin d'être travaillées dans le cadre scolaire, puisque l'articulation entre l'espace et ses représentations n'est plus objet d'études ; seuls sont mentionnés le passage d'une représentation à une autre (par l'étude de l'échelle) et l'exploitation géographique de la lecture d'une carte.

Le plus souvent les activités correspondant aux objectifs énoncés ci-dessus, quand elles sont faites, se déroulent dans ou autour de l'école : par exemple, au cours d'une promenade, pour raconter ce qu'ils ont fait, les élèves sont invités à faire un plan, soit collectivement, soit individuellement d'abord le plus souvent; l'élaboration finale est collective et ne donne pas l'occasion à chaque élève de tester sa propre représentation ni d'être confronté à un vrai problème de mise en relation entre un espace réel et sa représentation.

Le résultat en est que, comme l'écrit Pêcheux (1990) dans Le développement des rapports des enfants à l'espace (p. 281), *Au total, dans les pratiques scolaires, la systématisation des connaissances spatiales est laissée très largement au hasard.*

La représentation de l'espace à 3 dimensions par un plan ou une carte peut-elle être considérée comme un véritable objet d'enseignement? Cet enseignement peut-il permettre aux enfants d'élaborer et/ou d'utiliser des représentations planes de l'espace dans des situations dans lesquelles elles apparaissent comme des outils nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux et au cours desquelles ils surmontent l'ensemble des difficultés liées à leur

¹ Weill-Fassina A. et Rachedi Y. (1992)

² Voir p. 33 du document "Les cycles à l'école primaire" publié par le Ministère de l'Education Nationale

utilisation? C'est en nous appuyant sur le corpus théorique de la didactique des mathématiques que nous nous proposons de montrer comment des éléments de réponse à ce problème peuvent être apportés.

L'enseignement consiste à provoquer chez l'élève les apprentissages projetés en le plaçant dans des situations appropriées auxquelles il va répondre "spontanément" par des adaptations. Il s'agit donc de déterminer quelles sont les adaptations qui correspondent aux savoirs et aux connaissances visées, et à quelles circonstances elles répondent. Nous reprenons à notre compte ce projet, exprimé par Brousseau (1989) (p 323). La didactique permet la mise au point contrôlée d'un tel enseignement; pour cela, elle modélise l'apprentissage pour déterminer préalablement les étapes, les difficultés, voire les obstacles spécifiques à l'acquisition des connaissances visées que vont rencontrer les élèves dans leur adaptation à la situation. Les outils privilégiés de cette modélisation sont la mise au point théorique d'une **situation fondamentale** et l'observation des stratégies des élèves lors de sa mise en oeuvre.

II. LES SITUATIONS FONDAMENTALES DE LA REPRESENTATION DE L'ESPACE ENVIRONNANT PAR UN PLAN OU UNE CARTE ET LES CONNAISSANCES ASSOCIEES

Pour déterminer cette ou ces situations fondamentales, il nous faut rechercher parmi les problèmes spécifiques du savoir visé, celui ou ceux susceptibles d'être organisés par l'enseignant pour devenir les supports de la construction des connaissances par les élèves eux-mêmes.

Selon la complexité du savoir visé, plusieurs types d'études doivent être entrepris, comme le montrent Bessot et Eberhard³. En ce qui nous concerne, l'objet de notre travail étant l'élaboration de cartes ou de plans dans le contexte familial, nous nous limiterons à présenter un résumé succinct de l'analyse des pratiques de référence.

A. Dans quels types de situations est-il nécessaire de faire appel à une carte ou à un plan?

Une analyse un peu systématique des pratiques de référence montre que l'on peut les rassembler en 3 catégories de situations fondamentales :

- celles où les plans ou cartes sont, pour un sujet, des supports à l'exploration et à la mise en mémoire des connaissances concernant un espace nouveau.

En général, la personne a recours à un plan déjà établi, mais elle peut aussi fabriquer son propre plan à partir de ses explorations de l'espace concerné. La carte ou le plan favorisent une intégration des connaissances obtenues par des explorations partielles, le plus souvent finalisées : Où suis-je? Comment rejoindre tel lieu? ⁴

- celles où les cartes ou plans constituent, pour une personne qui doit se déplacer dans un espace, inconnu pour elle, un des moyens⁵ les plus efficaces pour saisir les informations

³ Bessot, Deprez, Eberhard, et Gomas (1992)

⁴ Une étude détaillée sur ce sujet a été réalisée par PAILHOUS (1970), s'appuyant sur l'analyse des problèmes de représentation spatiale rencontrés par les chauffeurs de taxi.

⁵ Ce moyen vient en complément ou se substitue à l'échange à l'aide du langage spatial. Un des objectifs du travail de G.Galvez était la prise en charge scolaire de l'apprentissage de ce langage mal maîtrisé, par une grande partie de la population.

nécessaires à la détermination de son itinéraire. Ce plan est soit fourni par la société, soit par un interlocuteur connaissant bien la région. Le macro-espace concerné peut correspondre à une grande zone, urbaine, maritime ou rurale, ou à un bâtiment suffisamment vaste et complexe pour que le déplacement à l'intérieur suppose le même type de représentation globale reliant les visions partielles et successives que le sujet a de l'espace pour récupérer la continuité de l'espace parcouru.

- celles où les cartes ou plans sont nécessaires pour communiquer ou déterminer une localisation précise où une action technique d'aménagement de l'espace doit être entreprise : implantation d'une maison, d'une autoroute, etc...des informations beaucoup plus précises doivent être fournies rendant possibles des mesurages. Les plans à l'échelle répondent à ces exigences.

(Remarquons que nous excluons du champ de notre étude toute représentation tendant à rendre compte des 3 dimensions de l'espace comme le dessin en perspective ou le système de vues)

B. Caractéristique commune à ces trois types de situations : La maîtrise de l'orientation⁶

Faire appel à un plan enrichit la situation de base de communication d'informations spatiales qui met en scène quelqu'un qui en a besoin et quelqu'un qui en dispose, que nous nommerons "autochtone".

1. La communication sans plan

En l'absence de plan, la production et l'interprétation de ces informations en langue courante oblige à tenir compte de trois systèmes de référence : celui de la réalité, celui de la réalité telle que se la représente l'autochtone, et celui de la réalité telle que se la représente le demandeur au moment de son action.

2. La communication avec plan

Nous proposons de modéliser la situation la plus générale de la détermination des déplacements dans le macro-espace, faisant appel à un plan, de la manière suivante :

Elle met en scène trois personnages, distincts ou non, le demandeur, le producteur du plan et "l'autochtone", auquel le demandeur peut faire appel en cas de difficultés.

- Dans la première catégorie de problèmes, "l'explorateur" qui ne dispose d'aucun plan, joue simultanément les trois rôles, et deux quand il a recours à une carte que la société lui fournit, il n'y a pas d'interactions entre le producteur et le demandeur.

- Dans la seconde catégorie de problèmes, des difficultés d'orientation peuvent se poser :

* au producteur du plan, au moment où il le réalise,

* au demandeur, au moment de l'action; en ce cas, il peut avoir besoin de l'aide d'un autochtone.

- Dans la troisième catégorie de problèmes, qui relèvent des activités professionnelles, l'orientation ne pose pas de difficulté nouvelle.

3. En conclusion,

⁶ Pour étudier cette question, nous nous sommes inspirés des réalisations didactiques de G. Galvez et de Brousseau (1983).

Le traitement de l'ensemble de ces situations fait intervenir au maximum deux personnages, le demandeur et l'autochtone, et deux espaces, l'espace réel et le plan. Dans le cas le plus complexe, six systèmes de référence interviennent, liés respectivement :

- (1) -à la réalité,
- (2) -au plan,
- (3) - au demandeur se situant dans la réalité,
- (4) - au demandeur se situant dans le plan,
- (5) - à l'autochtone se situant dans la réalité,
- (6) - à l'autochtone se situant dans le plan.

C. Quelles connaissances supposent la réalisation et l'utilisation d'un plan pour résoudre les deux premiers types de problèmes?

Nous n'étudions pas ici les connaissances nécessaires au sujet pour avoir "l'idée"⁷ de représenter un espace déterminé par des objets et des relations spatiales entre ces objets par un dessin sur un papier : nous les supposons acquises. Par contre, nous étudierons dans un cas précis comment peuvent se constituer certaines des connaissances nécessaires à la réalisation d'un dessin efficace et à son utilisation.

Il nous faut distinguer les connaissances du sujet réalisant un plan et celles du sujet utilisant un plan.

1. Les connaissances nécessaires à la réalisation d'un plan⁸.

a) Premier type de problèmes

Remarquons tout d'abord que la réalisation du plan d'un macro-espace, au fur et à mesure de son exploration, est une situation peu fréquente. Elle suppose de déterminer un système de repères pertinents, constitués de lieux et de chemins qui les relient, auxquels on puisse rapporter les nouveaux espaces explorés.

La réalisation du plan d'un espace complexe comme celui d'un quartier urbain ou du réseau des routes et chemins d'un espace rural, en ne respectant qu'approximativement les distances, nécessite le recollement des cartes obtenues par la représentation des espaces locaux situés par exemple autour des carrefours, en tenant compte des chemins qui mènent d'un carrefour à un autre. Elle suppose donc la représentation des déplacements et de leur coordination, dans l'espace considéré. Les cartes locales, sont obtenues par vision quasi-instantanée comme il est possible de le réaliser pour le plan d'une pièce à l'intérieur de laquelle on est situé. Ce phénomène de recollement caractérise aussi bien la représentation mentale du macro-espace que la représentation matérielle.

Que ce soit pour l'établissement des cartes locales ou de la carte globale, le contrôle de l'orientation relative des divers éléments représentés est essentiel.

b) Deuxième type de problèmes

Il s'agit pour le sujet émetteur d'anticiper tous les moments où, dans son déplacement, le récepteur se trouvera devant des choix à faire, et à transcrire de manière efficace les informations nécessaires pour que ce dernier prenne la bonne décision.

⁷ ces acquisitions relèvent d'apprentissages de l'école maternelle; voir PERES (1988)

⁸ Nous n'aborderons pas ici les connaissances sémiologiques

De quoi dépendent les connaissances à mettre en jeu?

* d'une part de la nature du problème : Remarquons que le dessin d'un plan n'est pas nécessairement la meilleure méthode : la description écrite des points de repère et des choix successifs à faire peut suffire pour indiquer à quelqu'un un déplacement précis.

Par contre si les informations fournies par le fabricant du plan doivent permettre à celui qui l'utilise de se repérer dans tout un quartier ou doivent permettre à des personnes ayant des projets différents de trouver leur chemin, un dessin respectant au moins les propriétés topologiques et affines de l'espace est nécessaire. Nous retrouvons là la distinction entre "route-map" et "survey-map" faite par les psychologues anglophones cités par Pêcheux (1980). Le travail de l'émetteur est alors semblable à celui de "l'explorateur" évoqué ci-dessus, mais en s'appuyant sur sa connaissance mentale de l'espace considéré et non sur ce qu'il voit.

* d'autre part des caractéristiques de l'espace considéré : plus l'espace est indifférencié et complexe, plus il faut faire appel à des propriétés fines pour en représenter les traits significatifs. Le plan du métro londonien qui ne respecte que les relations d'incidence⁹ entre lignes et stations suffit pour aller d'une station à une autre, un plan de ce type pour se déplacer dans une zone rurale serait source de multiples erreurs.

Dans les faits, le plus souvent, indiquer son chemin à quelqu'un nécessite seulement la prise des repères indispensables, le tracé d'un schéma constitue un moyen économique de rendre compte de l'organisation de ces repères les uns par rapport aux autres. Parmi ces repères, les informations permettant à l'utilisateur d'orienter le plan, c'est à dire de réaliser sans ambiguïté la mise en relation du plan et de l'espace réel sont essentielles.

Par contre, la fabrication de cartes représentant toute une zone de l'espace relève plutôt des pratiques professionnelles des géomètres.

2. Pour l'utilisateur d'un plan¹⁰

Il doit être capable de mettre en relation les éléments du plan et ceux qui leur correspondent dans la réalité. Pour cela, une connaissance du code utilisé par le fabricant lui est nécessaire ainsi que la capacité à déterminer la bonne orientation du plan pour pouvoir choisir le bon sens de déplacement dans la rue par exemple.

Cette orientation adéquate (appelée mise en congruence du plan et de l'espace) peut être réalisée matériellement ou seulement mentalement. Elle suppose la prise en compte des systèmes de référence (1) à (4).

Si la connaissance des codes usuels semble maîtrisée par tous les sujets scolarisés observés par Rachedi, la mise en congruence pose problème à de nombreux élèves de L.E.P.. Ce n'est donc pas une compétence spontanément acquise par tous, son absence pose de réels problèmes en formation professionnelle, il semble donc qu'elle devrait être explicitement mentionnée parmi les objectifs de l'école élémentaire.

D. Quelles connaissances supposent la réalisation et l'utilisation d'un plan pour résoudre le troisième type de problèmes?

Cette résolution suppose en plus des connaissances énumérées ci-dessus, une certaine maîtrise de la transformation géométrique *similitude* guidant le choix des propriétés à mettre

⁹ c'est à dire d'appartenance entre les ensembles de stations et de lignes et d'ordre entre les stations d'une même ligne.

¹⁰ Sans intervention de l'autochtone

en oeuvre soit pour réaliser le plan soit pour localiser un emplacement de la manière la plus appropriée aux conditions liées à la taille de l'espace en jeu.

Les problèmes de la première catégorie (sauf pour l'espace maritime) relèvent des pratiques de la vie courante alors que ceux de la seconde relèvent plutôt de pratiques professionnelles. Nous ne les aborderons pas dans cette étude

Notons toutefois qu'ils pourraient être la source de "bonnes" situations a-didactiques pour la compréhension par les enfants de ce qui est en jeu dans la réalisation ou l'utilisation de plans à l'échelle, c'est à dire pour la construction du sens de l'échelle.

III. L'ELABORATION DE SITUATIONS DIDACTIQUES ADAPTEES A L'APPROPRIATION DES CONNAISSANCES MACRO-SPATIALES DE LA PREMIERE CATEGORIE

A. Introduction

Nous avons décrit rapidement les "circonstances" dans lesquelles doit être placé un sujet pour manifester les *adaptations* dont parle BROUSSEAU (1989) : Elles définissent les caractéristiques de la situation fondamentale recherchée.

Mais il est clair que recréer ces circonstances dans le cadre scolaire est impossible : Un enseignant ne peut se permettre d'envoyer ses élèves d'âge primaire dans un quartier inconnu et de compter sur les rétroactions de la situation pour assurer le développement de leurs connaissances. Faut-il pour autant renoncer à un apprentissage par adaptation? Nous voulons montrer ici qu'il n'en est rien et qu'il est possible de construire des situations didactiques permettant des apprentissages macro-spatiaux à condition d'organiser le milieu a-didactique (qui ne peut pas être le macro-espace), en respectant les caractéristiques essentielles des interactions entre le macro-espace et le sujet.

Galvez (1985) présente ainsi un certain nombre de situations didactiques répondant à cet objectif pour des élèves de CM, dans lesquelles les déplacements dans le macro-espace sont simulés par le dispositif suivant : Sur une table, est collé le plan d'une ville fictive ou réelle, recouverte d'une nappe dans laquelle on a percé un trou ne permettant de voir à chaque instant qu'une petite portion du plan. Le déplacement du trou le long des rues représentées sur le plan, permet de prendre connaissance de la ville de la même manière qu'une personne se déplaçant dans une ville réelle, découvrant peu à peu l'espace global par une succession de vues partielles¹¹.

Pour travailler le problème de la mise en congruence du plan et de l'espace au CE2, nous avons construit un processus différent. dans lequel les enfants sont en interaction avec un espace réel et non simulé, mais où l'intérêt est porté sur la localisation et non sur les déplacements.

Nous présentons ci-dessous, la suite du raisonnement que nous avons été amenés à suivre pour l'élaboration des grandes lignes de ce processus.

1. Première condition

¹¹ Certaines de ces situations sont résumées dans la partie D

Si nous nous plaçons dans une problématique du "sens", en l'occurrence le sens du plan, il nous faut placer les enfants devant un problème qu'ils ne puissent pas résoudre sans plan. La réalisation d'un plan est toujours associée à une situation de communication, mais la communication peut être avec un autre ou avec soi-même quand on est dans l'impossibilité de mémoriser toute l'information à traiter. Nous utilisons ces deux formes de communication dans la construction des séances en jouant sur leurs avantages différents.

2. Deuxième condition :

L'espace à représenter ne doit pas être visible en un seul coup d'oeil. Des recolllements de cartes doivent être nécessaires. L'action doit se dérouler dans un espace au moins de la taille du méso-espace, c'est à dire doit supposer des déplacements dans une pièce.

Dans ces conditions, le problème posé ne correspond pas à toutes les contraintes du macro-espace¹² mais il en réalise une simulation dont nous faisons l'hypothèse qu'elle est suffisamment complexe et signifiante pour un premier temps.

3. Troisième condition

En ce qui concerne l'utilisation du plan, la mise en relation de celui-ci avec l'espace est d'autant plus difficile que celui-ci est plus indifférencié. Dans une course d'orientation par exemple, l'individu "lâché" en pleine nature avec une carte et comme seule information sa position est dans l'incapacité de se diriger s'il ne dispose pas d'autres connaissances; de même une personne sortant du métro à un carrefour de 2 rues doit chercher d'autres informations pour orienter convenablement son plan. Une simulation convenable de ce problème doit placer les élèves dans une situation où une prise de repères consciente soit nécessaire.

Si chacune des zones de l'espace représenté est facilement identifiable dans la réalité et sur la représentation, la mise en congruence risque d'être très facile à réaliser et donc de ne pas être explicitée. Il faut donc que l'espace sur lequel les enfants travaillent soit le plus indifférencié possible pour qu'ils sentent et expriment la nécessité de contrôler l'orientation du plan.

B. Description de la recherche

1. Ses objectifs

- observer les difficultés des enfants de 9 ans (CE2) à représenter une situation ayant des caractéristiques macro-spatiales et se déroulant dans le méso-espace.
- proposer une ingénierie propre à les aider à surmonter ces difficultés.
- étudier comment se fait le transfert des compétences acquises dans une situation artificielle de création et d'utilisation de plan, à une situation de lecture d'un plan d'architecte dans un contexte de communication d'informations.

Pour ce faire, nous avons conçu un module d'apprentissage et d'observation bâti sur l'articulation entre deux situations a-didactiques :

- le jeu des formes de couleur
- la communication d'informations spatiales dans l'école maternelle.

2. Situation 1 : Le jeu des formes de couleur

¹² Au cours des déplacements, le "décor" est quasiment fixe, la coordination des trajets n'a pas besoin d'être consciente.

La situation d'apprentissage que nous avons mise au point et expérimentée au CE2 est bâtie à partir du jeu suivant :

a) Dispositif matériel

*Une pièce, autre que la classe, dans laquelle on peut laisser une table sans la déplacer ni les objets qui sont posés dessus.

* Sur cette table, sont disposées un certain nombre de boîtes d'allumettes identiques.

* Un ensemble de petits blocs logiques tous différents, de même cardinal que celui des boites; les enfants savent représenter facilement ces objets.

* des feuilles de papier à la disposition des élèves

b) Le jeu

Un jour, le maître place un bloc logique dans chaque boîte, devant les enfants. Il les avertit que le lendemain, les boîtes étant fermées, il interrogera chaque élève de la manière suivante : Il lui montrera successivement 3 boîtes, celui-ci devra dire pour chacune quel objet est dedans. Après chaque réponse, le maître ouvrira la boîte et montrera son contenu.

Auront gagné les élèves qui auront eu juste pour les trois boîtes.

Il les avertit que pendant un certain temps les boîtes resteront ouvertes et qu'ils pourront, par groupes de 4, venir dans la salle pendant un petit temps pour y faire ce qu'ils pensent nécessaire pour gagner.

Ce même jeu est repris plusieurs fois sans changer la disposition des boîtes mais en en modifiant le contenu.

Puis la version *situation de communication* est présentée, dans laquelle un émetteur doit faire un plan pour que le récepteur, qui n'a jamais vu le contenu des boîtes, puisse le prévoir.

c) Le choix des valeurs des variables didactiques

L'analyse a priori fait apparaître un certain nombre de variables pour lesquelles nous avons eu à choisir des valeurs, permettant de réaliser les conditions énumérées en III A.

Voici les choix que nous avons faits :

- en ce qui concerne le matériel, nous avons choisi une très grande table, de forme carrée, dont les côtés sont disposés à 45° par rapport aux murs de la salle. Les 16 boîtes sont disposées par quatre parallèlement aux bords de la table, dans une position invariante par rotation d'un quart de tour. Les élèves ne peuvent pas avoir une vue globale du contenu des boîtes quand elles sont ouvertes (voir figure 1).

- les élèves dessinent leur plan à une place qui leur est attribuée, ils peuvent se lever et aller regarder ailleurs mais sans emporter leur feuille. Quand ils sont interrogés le lendemain, une autre place leur est désignée.

La réalisation de ces conditions permet de prévoir :

- que le nombre de boîtes est trop élevé pour que les élèves puissent réussir en se fiant à leur mémoire. Une représentation écrite est nécessaire, pas forcément un plan : la disposition des objets sur la table formant un cycle, une liste respectant leur ordre peut suffire à condition de se rappeler de la position du premier objet par rapport à un repère lié à la salle (et non à la table qui est carrée)

- que les enfants sont bien placés dans des conditions macro-spatiales :

* les enfants doivent coordonner les représentations des 4 régions (correspondant aux quatre groupes de boîtes, régions qu'ils ne peuvent examiner que successivement; on peut prévoir des difficultés pour certains d'entre eux.

* la table et les boîtes présentant une symétrie d'ordre 4, il faut choisir entre 4 positions possibles du plan pour assurer la congruence plan-espace quand les boîtes sont fermées. La prise d'au moins un repère supplémentaire lié à la salle est nécessaire. Les enfants qui ne l'ont pas fait dans la phase de dessin devraient échouer au premier essai, par contre sitôt une boîte ouverte, ils disposent d'assez d'informations pour orienter le plan; le deuxième essai devrait nous permettre de différencier les enfants capables de le faire des autres; (en supposant qu'il n'y ait pas d'autre erreur sur leur dessin)

- que le jeu d'auto-communication n'est pas suffisant pour faire apparaître la nécessité de repères externes. Il est possible que certains enfants réussissent en ayant mémorisé la place d'un des objets par rapport à la salle, ce qui leur permet d'orienter convenablement le plan. Il faudra donc passer assez vite à la phase de communication qui sera favorable à la formulation de ce qu'il faut que le plan comporte pour pouvoir le lire.

d) Les conditions de l'observation

Les situations ont été mises en oeuvre et observées dans une classe de CE2 de 28 élèves. Un observateur a observé toutes les phases du jeu.

e) Les résultats

1) Le déroulement des séances

Dès la présentation du jeu par l'enseignant, des enfants ont demandé s'ils pouvaient apporter une feuille pour dessiner et la prendre pour jouer. Ce que tous ont fait; 26 ont fait un plan, les deux autres une liste des objets; l'une bien organisée en cycle a permis à l'enfant de gagner, l'autre pas¹³.

Le même jeu a été répété 2 fois. A la deuxième séance, la moitié des enfants ont gagné alors que 6 seulement avaient pris des repères externes. Aussi, toujours avec le même matériel et la même disposition des boîtes, 3 séances de communication leur ont été proposées : une moitié de classe étant constituée d'émetteurs, l'autre de récepteurs. Les émetteurs assistaient à la lecture de leurs plans par les récepteurs, une discussion à propos des difficultés et des résultats entre les 2 enfants, animée par le maître concluant ce moment.

Une première séance d'institutionnalisation, reprenant l'ensemble des débats par couples a eu lieu après la première séance de communication.

2) Les comportements des élèves

Nous avons fait l'hypothèse que les élèves seraient confrontés à **4 sortes de difficultés**, correspondant à des échecs de type différent.

A l'écriture du plan :

- celle de la mise en relation correcte des 4 espaces constituant la disposition des boîtes. Elle se traduit par des erreurs d'ordre topologique, par exemple l'ordre d'un des 4 alignements de boîtes est représenté en sens contraire de celui des 3 autres.

¹³ Pourquoi la liste ordonnée, qui semble la solution optimale ici (à condition de repérer la première boîte), n'a-t-elle pas été utilisée par un plus grand nombre d'enfants? Nous n'avons pas de réponse à cette question, nous pouvons supposer que le plan fait partie des connaissances culturelles des élèves de cet âge et leur demande moins d'invention que la décision de faire une liste.

- celle de la nécessité de prendre des repères extérieurs à la table pour pouvoir utiliser son plan.

- celle d'une mise en relation correcte de ces repères avec la disposition des objets sur la table (mise en congruence).

A la lecture :

-celle de l'orientation du plan par rapport à la table, même si des repères sont fournis (mise en congruence également).

Evolution globale des comportements des élèves concernant la fabrication du plan

	<i>Auto-communication</i>		<i>Communication</i>		
	Séance 1	Séance 2	Séance 3	Séance 4	Séance 5
<i>Nombre d'élèves</i>	27	28	14	13	13
<i>Figuration de la table</i>	14	27	12	12	12
<i>Repères absents</i>	15	14	4	1	1
<i>Repères égocentrés</i>	5	8	2	0	0
<i>Repères exocentrés</i>	7	6	8	12	12
<i>Absence de mise en congruence</i>	0	2	6	1	3

La première ligne concerne la figuration de la table. Elle rend compte de la coordination des 4 sous-espaces; nous voyons que cette coordination est maîtrisée par tous les enfants (sauf un) dès la deuxième séance. Les lignes 2, 3 et 4 indiquent si les plans des enfants comportent des repères extérieurs à la table ou non. Les premiers peuvent être de deux sortes : un nombre important d'enfants ont noté leur position par rapport à la table, ce qui avait du sens quand les boîtes étaient ouvertes mais pas au moment de la lecture quand elles étaient fermées. Nous avons appelé égocentrés ce type de repères et exocentrés ceux faisant intervenir des éléments de la salle (le tableau, la porte etc...)

La dernière ligne fournit le nombre d'enfants ayant eu des difficultés à coordonner les repères pris dans la pièce avec la figuration de la table (mise en congruence des deux espaces). Ce nombre augmente à la première séance de communication parce que c'est à ce moment que presque tous les enfants commencent à prendre conscience de leur nécessité.

En ce qui concerne la lecture, presque tous les élèves ont, dès le début, été capables d'orienter le plan ou de le lire sans en changer l'orientation, dès qu'ils connaissaient la position d'un objet.

En conclusion, cette première phase du module que nous avons réalisée nous a permis d'observer plusieurs étapes de l'appropriation par les enfants de la représentation d'une situation ayant certains caractères macro-spatiaux : recollement des "cartes" de plusieurs "régions", choix de repères exocentrés, utilisation de ces repères à la lecture du plan.

L'ingénierie développée semble de nature à favoriser cette appropriation mais son coût pour l'enseignant est élevé : pendant les phases de fabrication des plans, 4 enfants travaillent successivement hors de la classe, les phases de lecture ont eu lieu pendant les récréations.

3. Situation 2 : Le jeu des portes

Il s'agit ici de confronter **les mêmes élèves** à l'utilisation d'un plan dans la situation suivante : l'espace est inconnu (ou mal connu), une représentation à l'échelle en est fournie, que les élèves doivent utiliser pour repérer certains lieux (voir figure 2).

Cette situation est directement issue des pratiques de référence; si l'espace concerné ne présente pas toutes les caractéristiques du macro-espace, du fait de sa "petitesse", il est suffisamment compliqué pour qu'une représentation correcte nécessite une prise de conscience de la coordination des déplacements à l'intérieur avec celle des différentes "régions" qui le composent sans le support quasi-constant de la vue comme dans le jeu précédent.

a) Objectifs

Ils sont de deux ordres :

-culturel : Savoir lire un plan d'architecte simplifié présentant quelques-unes des caractéristiques essentielles comme la réduction de 3 à 2 dimensions, le code de représentation des murs et des portes, la conservation des proportions.

-spatial : expérimenter la nécessité de la prise de repères et de l'orientation du plan pour une utilisation efficace.

b) Description sommaire de l'activité

Le maître présente un plan simplifié de l'école maternelle et les quelques codes nécessaires à sa compréhension (les doubles traits des murs, les zones délimitées par les murs, la représentation des portes), ainsi qu'un repère facile : la salle de jeu sur le plan de laquelle a été collée une gommette.

Puis les élèves sont répartis en groupes de 4. 2 d'entre eux sont émetteurs, 2 sont récepteurs. L'activité se déroule groupe après groupe.

Les émetteurs partent les premiers avec un plan et quatre enveloppes, qu'ils doivent coller sur 4 des portes intérieures de l'école. Ils désignent chaque enveloppe par une lettre écrite sur un papier qu'ils cachent dans l'enveloppe et doivent désigner l'emplacement de cette dernière sur le plan.

Ils donnent leur plan aux récepteurs (avec lesquels ils se sont concertés pendant 5 mn avant de partir) et assistent sans parler aux recherches menées par ces derniers pour retrouver quelle est la lettre cachée dans chaque enveloppe.

Les récepteurs inscrivent cette lettre dessus. Une fois ce travail terminé, les enveloppes sont ouvertes, leur contenu comparé à ce qu'ont écrit les récepteurs.

Pour gagner, il faut l'identité des 2 lettres pour les quatre enveloppes.

En cas d'échec, le maître suscite une discussion avec les enfants pour déterminer qui s'est trompé, des récepteurs ou des émetteurs, et comment il faut utiliser le plan, ceci sur le lieu pour lequel il y a eu échec.

Une discussion générale à la classe aboutit à l'énoncé d'un certain nombre de règles pour pouvoir bien utiliser un plan.

c) Les résultats de l'observation

Nos moyens d'observation ne nous ont pas permis de différencier le comportement de chaque élève dans le groupe, comme nous l'avions fait pour la situation précédente. Les informations que nous avons pu saisir concernent des groupes de 2, associés pour former 7 groupes de 4, émetteurs-récepteurs.

1) Echecs- réussites

- un groupe a été en grande difficulté, les émetteurs n'ayant pas réussi à déterminer convenablement la position de leurs enveloppes, sauf celle de la salle de jeu. Les récepteurs ont lu convenablement 3 des positions sur les 4.

- un autre groupe d'émetteurs a fait une erreur de repérage dans un cas un peu difficile, les récepteurs ayant fait la même erreur à la lecture, le groupe a réussi!

- les 5 autres groupes d'émetteurs ont fonctionné tout à fait bien. 3 groupes ont réussi jusqu'au bout, dans les 2 derniers, les récepteurs (?) ont fait 2 erreurs sur 4.

2) *Indications qualitatives*

- Le déroulement complet de l'activité pour un groupe a nécessité de 20 minutes à une demi-heure. En effet, les enfants hésitent, souvent ils ne contrôlent pas la position du plan dans leurs déplacements, et devant chaque nouvelle porte se reposent les mêmes questions.

- les discussions entre enfants aux différents moments du travail ont été très riches en particulier en ce qui concerne la mise en correspondance plan-espace qui, dans plus de la moitié des groupes, a commencé par la recherche de l'entrée. Par contre, les explicitations spontanées concernant la mise en congruence ont été beaucoup plus rares, elles sont apparues quand l'enseignant, à la fin de l'activité, a demandé à quoi il fallait faire attention pour bien utiliser le plan : "au sens" a proposé un enfant, idée reprise et développée par plusieurs.

- Les enfants se repèrent sur le plan davantage à l'aide des caractéristiques particulières de la partie de l'espace à laquelle ils s'intéressent (forme des couloirs, nombre de portes, position des portes les unes par rapport aux autres etc..) qu'à l'aide des caractéristiques des déplacements dans l'intérieur de l'école (on est passé par là, on a tourné là). Toutefois cette deuxième façon de faire apparaît dans certains groupes¹⁴.

3) *L'évaluation finale*

Elle a consisté, après un nouveau déplacement collectif dans l'école maternelle en ayant en main le plan mais sans pouvoir écrire, à noter, une fois rentrés dans la classe, où se trouvaient un certain nombre de lieux énumérés par le maître. Les résultats sont les suivants : Sur 26 présents, 21 n'ont fait aucune erreur, 4 une ou deux inversions de localisation, 1 n'a noté qu'un seul lieu sur les 8, et 1 enfant a fait de grosses erreurs, montrant son incapacité à utiliser un plan.

Remarque : Nous avons été tout à fait étonnés de la facilité avec laquelle les élèves sont entrés dans le codage de l'espace à 3 dimensions par le dessin du plan; ils avaient un peu travaillé le plan de l'école primaire l'année précédente, mais pas dans des situations fonctionnelles. Par contre, l'orientation du plan au cours de l'action, reste quelque chose de fragile même chez ceux qui ont réussi.

4. **Evaluation des acquis un an plus tard**

Nous avons eu la possibilité de comparer les résultats de cette classe¹⁵ dans une tâche de lecture de plan, avec ceux d'une classe d'élèves de CM2 de la même école qui n'avaient pas fait les activités décrites.

a) Le problème posé aux élèves est directement inspiré de celui étudié par Rachedi et Weill-Fassina.

¹⁴ Nous sommes dans l'incapacité de quantifier cette stratégie, relevant typiquement de la représentation macro-spatiale, et d'en décrire l'évolution. Cela relèverait d'une recherche dans laquelle nous ne sommes pas engagés.

¹⁵ les élèves étaient donc au CM1. Le travail sur les plans n'avait été repris ni en mathématiques ni en géographie.

Un des bâtiments de l'école comporte une partie centrale réunissant préau et diverses salles et deux ailes symétriques composées chacune de 4 classes (voir figure 3). Ce bâtiment est bien connu des enfants mais n'est pas celui où sont situées leurs classes.

L'observateur est assis devant une petite table placée en A dans le préau. Le plan du bâtiment est posé sur la table, dans la position inverse de celle congrue au bâtiment.

Le dialogue prévu est le suivant :

O. : Sais-tu comment s'appelle ce genre de dessins?

Suivant la réponse de l'élève il infirme ou confirme la réponse et ajoute :

O. : C'est un plan du bâtiment dans lequel nous sommes.

Il rappelle très vite les codes pour représenter les murs et les portes et pose le problème :

Je vais te montrer une porte, tu me diras où elle est sur le plan.

L'observateur et l'élève se déplacent jusqu'à la porte en laissant le plan sur la table.

Quand l'enfant a donné sa réponse, deux cas peuvent se présenter :

* Elle est juste, l'interrogation est terminée

* Elle est fautive, l'observateur montre le préau à l'élève sur le plan et demande *cela, qu'est-ce que c'est?* (question Q1), puis pose la même question pour les petites salles (Q2).

Il accepte les réponses des enfants, quelles qu'elles soient puis demande : *Alors tu es sûr que la porte que je t'ai montrée est bien celle-la sur le plan?* la réponse à cette deuxième interrogation sur la position de la porte met un terme à l'entretien.

b) Analyse à priori du problème posé aux élèves

Etant donnée la symétrie du plan du bâtiment, une vision rapide de ce dernier conduit à la réponse a (ou b) dans laquelle il n'est pas tenu compte de la position de la salle sur laquelle donne la porte, par rapport au préau, et donc de la mauvaise orientation du plan.

L'attention portée au préau grâce aux questions de l'observateur, doit faire apparaître chez l'élève des contradictions entre les nouvelles informations qu'il peut saisir sur le plan et sa réponse.

Nous faisons l'hypothèse qu'un certain nombre d'entre eux devraient à ce moment, spontanément ou en réponse à l'observateur, modifier leur proposition, en montrant soit b soit c.

Toutefois la réponse c suppose que l'élève prenne conscience que le plan a été mal orienté et soit le retourne de lui-même, soit demande s'il peut le retourner.

La première attitude est difficile pour les élèves, qui peuvent penser que si le plan a été mis dans cette position par l'observateur, c'est dans une intention bien déterminée et que répondre sans y toucher fait partie de la règle du jeu. Ces deux comportements sont donc révélateurs d'une bonne compréhension de ce qui est en jeu dans l'utilisation d'un plan..

c) Les comportements des élèves

Notons tout d'abord qu'à la première question, tous les élèves ont reconnu un plan de bâtiment et que tous, sauf trois, savaient situer le préau.

Nous avons regroupé ces comportements en quatre catégories¹⁶.

* A : l'élève montre la porte a ou a' sur le plan sans manifester d'hésitation. Les contradictions qu'il peut ou non percevoir entre sa reconnaissance du préau et la position de la porte ou d'autres éléments du plan ne le conduisent pas à modifier sa réponse.

¹⁶ Ces catégories rassemblent des comportements que l'on pourrait différencier davantage en utilisant des critères plus fins. Ce n'est pas l'objet de la présentation que nous faisons ici de ce travail.

* B : l'élève est sensible aux contradictions, il modifie sa réponse pour tenir compte de la contiguïté de la salle, dont il doit montrer la porte, avec le préau mais il ne pense pas à tourner le plan et il donne la réponse b.

* C : l'élève donne d'abord la réponse a mais il est sensible aux contradictions, il demande à tourner le plan ou il le fait de lui-même, et il montre la bonne porte.

* D : l'élève regarde le plan avec attention; il demande à tourner le plan ou il le fait de lui-même, et il donne la bonne réponse.

Comme nous le prévoyions, il y a un moment-clé dans le déroulement de la réflexion des élèves qui n'ont pas donné la bonne porte. La question "qu'est-ce que c'est?" de l'observateur montrant les salles attenantes au préau, provoque trois types de comportements :

- la donnée de la bonne réponse, c'est à dire la cantine et les toilettes suivie d'un remaniement de l'interprétation du plan.(B ou C)

- la donnée de la bonne réponse sans remaniement. Cela concerne un tout petit nombre d'élèves.

- la donnée d'une réponse erronée permettant de garder la cohérence de leur interprétation du plan, soit *les fenêtres du préau* (il est entièrement vitré avec plusieurs portes) soit *la cour* pour désigner une sorte de terrasse qui est située devant le préau et séparée du reste de la cour par quelques marches.

Ces deux réponses sont très nettement majoritaires parmi les enfants qui ont le comportement A.

L'ensemble de ces observations montre comment les élèves, placés dans la même situation, la vivent différemment : certains, les plus assurés dans leur connaissance du code, perçoivent un conflit cognitif qu'ils sont capables de surmonter, quelques-uns tout en donnant la bonne réponse ne semblent pas percevoir de contradiction avec leur détermination de la porte, d'autres enfin "oublient" le code et donnent une réponse qui leur permet d'échapper au conflit cognitif¹⁷.

5. Résultats quantitatifs

a) Répartition des comportements A, B, C, D, dans les deux classes

	CM1	CM2
A	9	14
B	1	8
C	10	3
D	2	3

Les effectifs étant trop faibles, nous ne pouvons appliquer le test de chi2 à cette distribution.

¹⁷ Un nombre non négligeable d'enfants semblent toutefois ressentir le conflit et ne pas être satisfaits de leur réponse. Une aide, sous la forme d'une explicitation du code, à ce moment précis, aurait peut-être pu débloquer la situation pour quelques-uns. Nous n'avons pas eu le temps de le faire.

Par contre, c'est possible si nous regroupons les comportements A et B d'une part, C et D d'autre part, c'est à dire si nous comparons les deux classes du point de vue du nombre de réussites.

b) Répartition des réussites dans les deux classes

	CM1	CM2
<i>Echecs</i>	10	22
<i>Réussites</i>	12	6

Le test de chi2 nous permet de rejeter l'hypothèse nulle "La répartition des réussites est identique dans les deux classes". Chi2 = 6,23 valeur significative à .05.

Le travail fait en CE2 nous paraît avoir encore des effets sur les élèves un an après puisqu'ils ont un comportement significativement plus élaboré que ceux de CM2 qui ont un an de plus.

Si peu d'élèves sont capables d'emblée de remarquer que le plan n'est pas bien orienté c'est que, placés devant le conflit créé par la troisième question, les réactions entre les élèves des deux classes se différencient : ceux de CM1 déjà confrontés au problème d'orientation d'un plan reconnaissent en plus grand nombre, dans la situation, un problème qui en relève et demandent s'ils peuvent tourner le plan ou le font d'eux-mêmes, les autres n'y pensent pas.

IV. CONCLUSIONS

L'analyse à priori et à posteriori du module d'apprentissage et d'observation que nous avons élaboré nous semble montrer :

- que les compétences travaillées ne sont pas acquises spontanément par les enfants de 9 ans¹⁸. Un apprentissage "organisé" leur permet d'être confrontés et de surmonter peu à peu les difficultés inhérentes à la lecture des plans dans le contexte expérimenté.

Notons toutefois que l'apprentissage n'est pas terminé puisque presque la moitié des élèves échouent au test passé un an après.

- l'ingénierie mise en oeuvre permet cette évolution¹⁹ mais elle est coûteuse en temps et en organisation. Directement inspirée des recherches sur les codages menées à l'école maternelle par J.Péres et son équipe dans le cadre du C.O.R.E.M., elle s'accorde bien avec un fonctionnement en atelier de la classe.

Sa gestion est moins adaptée aux conditions de l'école élémentaire et l'on peut penser qu'une organisation plus collective serait possible à condition de conserver une caractéristique essentielle de ce travail qui le différencie des situations didactiques usuelles : c'est chaque enfant, personnellement, qui doit être confronté aux problèmes et recevoir les rétroactions de la situation, les interactions entre les élèves et les interventions du maître ne peuvent prendre du sens pour tous qu'à cette condition²⁰.

- Le rôle du maître est lui aussi différent de celui de l'enseignant dans les situations usuelles : Il n'est plus celui qui montre, qui retient les bonnes solutions et fait rejeter les

¹⁸ ni par ceux de 11 ans. Les résultats des CM2 montrent qu'il n'y a pas d'apprentissage spontané de la représentation de l'espace par un plan et que les activités d'enseignement de la géographie qui portent sur ce thème n'ont pas les effets escomptés.

¹⁹ Nous ne l'avons montré que pour une seule classe; il est nécessaire de s'assurer de sa reproductibilité.

²⁰ Un tel processus est à l'étude actuellement.

autres. Mais il doit assurer la dévolution du problème aux élèves, leur communiquer sa conviction qu'ils sont capables de le résoudre tout en s'interdisant d'intervenir sous la forme d'apports de connaissances, puis assurer l'institutionnalisation de celles élaborées par les enfants, explicitées dans les débats portant sur les difficultés rencontrées et les solutions utilisées. Nous renvoyons pour une analyse plus fine du rôle du maître à la thèse de PÉRES (1984) et à l'article de BROUSSEAU (1988)

- enfin, ce travail n'est qu'une étape dans le chemin qui mène à la maîtrise du macro-espace. G. GALVEZ (1984), a mis au point d'autres situations visant d'autres niveaux d'appropriation de cet objectif destinés à des enfants plus âgés : elles permettent une simulation des problèmes rencontrés dans le macro-espace, concernant la coordination des déplacements, le recollements de cartes, et l'élaboration de langages adaptés.

PARTIE D

RECUEIL DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Les situations présentées ci-après, permettent d'organiser, pour les élèves, des rapports effectifs et a-didactiques avec l'espace, nécessaires à l'établissement du sens de connaissances nouvelles, étape préalable au développement de ces connaissances sous forme symbolique et communicable.

Nous avons rassemblé en une seule catégorie -spatiale- les trois catégories de la problématique pratique présentées au chapitre B-7 (pages 217 à 220). Les trois types de situations retenues sont donc :

- Les situations d'enrichissement des compétences spatiales, qui visent une meilleure maîtrise des problèmes micro-spatiaux, méso-spatiaux ou macro-spatiaux. Les connaissances développées ne sont pas nécessairement exploitées au niveau géométrique, du moins à l'école primaire. Certains problèmes sont posés et résolus dans une problématique pratique, d'autres dans une problématique de modélisation analogique,
- Les situations de modélisation de l'espace par des connaissances spatio-géométriques. Celles-ci, une fois développées dans des situations qui leur donnent un sens, devront être transformées en objets du savoir géométrique.
- Les situations d'introduction à la géométrie du secondaire.

Nous avons particulièrement développé la présentation des situations de la première catégorie, souvent mal connues. Un bref relevé de situations "spatio-géométriques" suit, qui constitue plus une liste (incomplète) qu'une présentation ; mieux diffusées que les premières, nous renvoyons souvent aux publications qui nous l'ont fait connaître.

I. LE DEVELOPPEMENT DES MAITRISES SPATIALES

A. Problèmes micro-spatiaux pour le cycle 1

1. Contrôle de l'énumération

Il est important que tous les élèves disposent de procédés de contrôle de cette tâche si courante. Les plus importants dans le micro-espace sont, pour les objets déjà énumérés, le regroupement et le marquage.

Les situations décrites en détail au chapitre C-5, (§II-A , boîtes et allumettes; §II-C, boîtes et haricots) peuvent concourir à cet objectif.

2. Fabrication d'objets répondant à certaines contraintes¹

L'objectif est de permettre aux enfants de résoudre par eux-mêmes certains problèmes posés par la fabrication d'objets, faisant appel à des connaissances spatiales. Le nombre d'essais n'est pas limité, les échanges informels entre enfants sont favorisés, des discussions sur les difficultés rencontrées sont organisées par l'enseignant.

Deux catégories de situations peuvent être exploitées :

* L'objet est décrit par sa fonction, le matériel de base est donné par l'enseignante, l'enfant peut avoir à choisir ou à reconstituer le matériel adapté au problème.

¹ Ces situations ont été mises au point à l'école Michelet mais n'ont pas fait l'objet de publication.

Exemple : Le sac (enfants de 4 ans)

Il faut fabriquer un sac pour emporter l'oeuf de Pâques à la maison.

Matériel : feuilles de différents formats pour les essais, longues bandes de papier, colle

Problèmes à résoudre : choix de la taille des feuilles, emplacement de la colle pour pouvoir placer l'oeuf à l'intérieur du sac, position et taille des anses.

* L'objet est montré : les enfants doivent trouver comment reproduire le modèle dont la réalisation suppose une coordination des actions relativement complexe.

Exemple : Les vagues (enfants de 5 ans)

Il s'agit de découper des vagues, dans des bandes de papier rectangulaires, suivant une technique de ribambelle, puis de trouver comment les faire se chevaucher pour que toutes les "dents" apparaissent et que le fond soit entièrement caché.

B. Problèmes méso-spatiaux

1. Contrôle de l'énumération d'une collection de "lieux"² (cycle 1)

Ce contrôle nécessite la structuration mentale de l'ensemble des positions des lieux à énumérer. Cette structuration dépend bien entendu de la position relative de ces lieux. Deux cas nous semblent d'utilisation fréquente : lieux disposés en quadrillage ou sur une ligne fermée simple.

a) Repérage grâce à la structure du quadrillage

Le jeu du facteur, analysé au chapitre C-5 (§II-B) en est un exemple. (enfants de 4 ans)

b) Repérage de l'origine sur une ligne fermée simple

Le jeu du facteur peut être adapté en plaçant les boîtes aux lettres en cercle.

2. Les positions relatives des objets et des personnes

a) Retrouver ou faire retrouver un objet caché. (cycles 1 et 2)

De nombreux jeux de communication orale, ayant pour but l'appropriation du langage spatial, peuvent être construits selon le schéma suivant :

Dans un certain espace, sont disposées des boîtes toutes semblables. Un enfant sort de la classe, pendant ce temps, un autre enfant cache un objet dans l'une des boîtes. Le premier enfant doit retrouver l'objet,

- soit en suivant les indications de celui qui avait caché l'objet ou d'un des spectateurs ou de l'enseignant,

- soit en leur posant lui-même des questions.

Les variables didactiques de la situation sont nombreuses; citons les principales : le nombre, et la position des boîtes pour un espace donné; la taille et la structuration de l'espace; les positions de l'émetteur et du récepteur.

b) Piquer le papier³. (CE2)

La connaissance visée est le repérage cartésien.

² Une collection de boîtes, disséminées dans une pièce, et non déplaçables, détermine dans cette pièce un ensemble de lieux distincts, chacun associé à l'une des boîtes.

³ La situation est tirée de Galvez(1984) où elle est référenciée sous le numéro SD 5

Matériel : Une boîte en carton rectangulaire (60x50x5), un morceau de papier de moins de 15cm, une pièce de tissu qui recouvre largement la boîte, une aiguille.

Le "papier" est posé sur la boîte, à la vue de l'élève. On recouvre la boîte du tissu, sans déplacer le papier.

Phase 1 : l'élève qui a observé, doit piquer le papier avec l'aiguille à travers le tissu. Si l'enfant gagne, on recommence en réduisant la taille du papier.

Phase 2 : l'élève qui a observé doit communiquer verbalement avec un autre qui n'a pas vu et qui doit piquer le papier avec l'aiguille à travers le tissu.

Phase 3 : comme en phase 2, mais la communication ne se fait que par dessin.

c) Les tables d'orientation

Ce type de représentation permet d'explorer un paysage de façon commode. Elle utilise implicitement des coordonnées polaires.

La réalisation d'une table est une tâche difficile, que proposent pourtant plusieurs ouvrages : Aides Pédagogiques (1983) et M. Blanc (1986).

3. La coordination des points de vue

Ce thème a été très peu abordé dans les travaux didactiques dont nous avons eu connaissance. Nous ne l'avons pas encore travaillé nous-mêmes. Le numéro 106 de la revue "Recherches pédagogiques" présente sous le titre "La construction de la perspective d'autrui : rôle des interactions sociales en grande section d'école maternelle"⁴ la description de quatre jeux qu'il nous paraît intéressant de faire connaître :

Le jeu du train

Le jeu du couvert

Le jeu du quadrillage

Le jeu du baril

Sous des formes diverses, ils placent les enfants dans des situations d'anticipation de la perspective d'autrui, les rétroactions s'appuyant sur les échanges entre les enfants et sur la situation elle-même.

On trouvera aussi dans ERMEL CE, p. 156, une situation adaptée d'une expérience de Piaget.

Enfin, nous signalons la situation très intéressante du "village", développée par Doise G. et Mugny G. (1981), p.117-169.

C. Problèmes macro-spatiaux

Les questions essentielles, pour la vie courante non professionnelle, sont celles de la communication d'un trajet dans une grande ville, et de l'utilisation d'un plan.

Ces questions ayant été peu étudiées dans l'enseignement, nous en développerons une brève analyse, afin de permettre au lecteur de situer les problèmes les uns par rapport aux autres.

G. Galvez y a proposé des réponses dans sa thèse. Comme ses résultats ne sont pas facilement accessibles, nous nous étendrons assez longuement sur la présentation des situations originales qu'elle a mises au point.

1. Les déplacements dans la ville

⁴ Bideaud J. et coll (1980)

Nous allons, dans un premier temps, présenter une analyse rapide des décisions nécessaires à ce type de déplacements, dans une ville mal connue et mal signalisée⁵.

a) Questions de lieux.

Le lieu privilégié du déplacement (en surface) est la rue.

- A chaque endroit, il faut décider de continuer, de s'arrêter, ou de revenir en arrière.
- A chaque croisement de rues, de plus, il faut choisir la voie où poursuivre.

La structure de base de l'espace correspondant aux décisions élémentaires est donc celle d'un graphe dont les sommets sont les croisements, et les arêtes les portions de rues joignant deux croisements consécutifs.

Il y a une sur-structure, plus élaborée, qui est constituée par l'ensemble des rues, et une structuration des rues, plus ou moins riche : deux rues peuvent ne pas se couper, se couper en un croisement, ou rarement, en deux.

b) Questions d'orientation

1) Dans une rue, entre deux croisements

Il y a deux sens possibles.

Le sens est déterminé par la connaissance du couple de croisements consécutifs correspondants. Il peut aussi être déterminé de façon interne, par le repérage d'un immeuble à la droite ou à la gauche de celui qui se déplace. L'orientation ne pose de problème que si l'on prend la rue entre deux croisements, en sortant d'un immeuble par exemple.

Il faut trouver un moyen d'identifier le sens de son déplacement. Cela peut se faire en se référant à son repère personnel, si on a mémorisé sa position avant d'entrer dans l'immeuble, ou en choisissant un sens au hasard et en se déplaçant jusqu'à un lieu connu, quitte à rebrousser chemin s'il n'est pas rencontré comme attendu.

2) Sur une place

a) On arrive au milieu

C'est le cas, lorsqu'on sort d'une bouche de métro, par exemple.

Si l'on ne trouve pas le nom de la rue que l'on doit prendre, on peut commencer son exploration en choisissant l'une des rues qui y débouchent, et en la repérant pour pouvoir s'en rappeler. Ce repérage peut s'effectuer de différentes manières, par exemple en choisissant un immeuble origine, en définissant un sens de rotation autour de la place, et en numérotant les rues qui y débouchent.

b) On arrive par une rue bien identifiée

On peut alors déterminer d'emblée un sens de rotation, et numéroté les rues.

Dans le cas particulier du croisement de deux rues, avec 4 voies ainsi déterminées, le choix peut être repéré directement par rapport à soi, et à son déplacement : tout droit, à droite ou à gauche.

c) Le plan.

Le plan prend en charge la structure topologique du graphe, à condition que toutes les rues soient représentées. Il ne reste au sujet qu'à résoudre les questions d'orientation. Cette

⁵ Cette analyse nous permettra ensuite de repérer, en particulier dans les situations de G. Galvez, les caractères retenus.

dernière comprend alors la coordination de quatre systèmes de référence : celui du plan, celui de la ville, celui du sujet dans la ville, celui du sujet dans le plan.

d) La communication orale avec quelqu'un qui connaît la ville ou le quartier (sans plan).

Exemple de situation : "Je suis en voiture, je veux aller à __, par où dois-je partir ?". Chacun des interlocuteurs dispose d'une représentation mentale de la ville, nécessairement distinctes, et dont il faut chercher les raccordements, ainsi que de certaines capacités d'orientation dans cette ville (mise en rapport de son repère personnel avec celui de la ville).

Il y a donc à coordonner le repère de la ville et les repères personnels des deux interlocuteurs ; cela fait trois systèmes de référence.

e) Le plan et la communication orale

C'est la réunion des deux problèmes précédents, qui exige donc la coordination des six systèmes de référence : celui du plan, celui de la ville, celui du sujet dans la ville, celui du sujet dans le plan, celui de l'interlocuteur dans la ville, et celui de l'interlocuteur dans le plan.

f) Deux problèmes : suivre un itinéraire ou connaître la ville?

1) Suivre un itinéraire

Le départ est connu, l'arrivée aussi. Une fois résolue l'orientation sur la rue, au départ, le trajet peut être décrit à l'aide du repère personnel, comme une suite de décisions à suivre à chaque occasion de choix.

2) Connaître une ville

Il s'agit alors de se représenter mentalement la structure de la ville, à travers une variété d'itinéraires que l'on va suivre ou imaginer. Pailhous (1970) a étudié ce problème pour les chauffeurs de taxi.

2. Les situations

Il n'est pas raisonnable de concevoir de placer les élèves dans des rapports effectifs a-didactiques avec un espace de cette taille, tout au moins de manière répétée. On est donc contraint d'organiser des simulations de ces situations. Toutefois, expérimenter, de manière exceptionnelle, ce type de rapports⁶, peut être essentiel quant au sens des connaissances développées.

Nous avons placé dans la liste de ces situations de simulation des problèmes macro-spatiaux, des situations destinées à des enfants jeunes, faisant intervenir des déplacements dans le méso-espace. En effet, certaines de leurs caractéristiques, comme la prise de conscience nécessaire du sens de rotation, peuvent préparer les enfants aux difficultés des déplacements macro-spatiaux.

a) Tortue de sol (Cycle 2)

La programmation de la tortue pose le problème de l'anticipation d'un trajet, et de sa formulation en exigeant la coordination du repère de la pièce avec celui de la personne qui circule. Voir Pérès et coll. (1986), et Daubet (1986)

⁶ Il ne s'agit pas, bien sûr de laisser les enfants sans aucun contrôle de l'adulte. Mais de payer le prix nécessaire à la mise en oeuvre de telles situations comme la situation "où ont été les copains?" expérimentée par G. Galvez et dont elle rend compte de manière très détaillée dans sa thèse.

b) Retrouver l'objet caché⁷ (Cycle 2)

Un plan (représenté en annexe 1) de la classe est fourni par le maître, plan représenté sur le tableau vertical (variante 1) ou par une maquette (variante 2). Pendant qu'un élève cache l'objet dans un bureau d'élève, un autre sort. Celui-ci doit retrouver l'objet, grâce à la désignation de sa position sur le plan. Dans la variante 1, il suffit de faire un rabattement pour faire coïncider les orientations du plan et de la classe. Dans la variante 2, l'orientation de la maquette constitue une variable importante, car elle nécessite de se déterminer par rapport à des objets (portes, fenêtres, tableau, etc.), autres que les bureaux qui sont indifférenciés.

c) Retrouver les jetons cachés sous les pots de yaourt (déplacements sur quadrillage) (Cycle 2)

Voir chapitre B-3, §IIIA

d) Le jeu des formes de couleur (CE2)

Voir chapitre C-9, §IIIB2

e) Les portes de l'école (CE2)

Voir chapitre C-9, §IIIB3

f) Où ont été les copains⁸?(cycle 3)

Deux élèves de la classe sortent de l'école avec deux adultes, qui les guident jusqu'à un point de départ. A partir de là, ils choisissent les directions qu'ils veulent prendre et l'endroit d'arrivée. Ils disposent d'une feuille de papier (qu'ils peuvent agrandir si nécessaire en ajoutant de nouveaux morceaux), grâce à laquelle ils réalisent au fur et à mesure une carte devant permettre à deux de leurs camarades, partant du même point de départ, d'arriver au même endroit.

g) Le jeu du carrefour⁹ (cycle 3)

Il s'agit d'une situation d'action, relevant du même modèle que le problème de l'orientation sur une place, décrit ci-dessus.

Sur une feuille de papier carrée, de 1m50 de côté environ, est représenté un carrefour. Chaque angle est désigné par une lettre différente. La classe est divisée en deux équipes, chaque équipe a une poupée.

On cache la partie centrale du carrefour, de manière que seuls restent visibles les quatre entrées et on imprime à la feuille une rotation de plusieurs tours. On découvre un seul des angles. Les élèves doivent répondre à des questions comme :

- La poupée de l'équipe 1 se déplace dans cette rue, (on la place à l'endroit indiqué), avant de traverser le carrefour, qu'est-ce qu'elle aura sur sa gauche?

- La poupée de l'équipe 2 arrive par cette rue, elle va tourner à droite au carrefour ; qu'est-ce qu'elle aura à sa gauche après le carrefour?

h) La vue d'avion¹⁰ (Cycle 3)

⁷ Galvez S.D. 1

⁸ Galvez ; deuxième situation de l'expérimentation

⁹ Galvez ; troisième situation de l'expérimentation

¹⁰ Galvez; S.D. 6

Il s'agit, pour les enfants, de représenter approximativement les positions relatives de lieux connus de la ville où ils habitent, telles qu'on pourrait les imaginer vus d'un avion. L'un est dessiné au centre de la feuille, les enfants doivent coller sur la feuille, pour chacun des autres lieux, un petit papier qui le représente.

Phase 1 : les quatre autres lieux choisis se situent approximativement aux quatre points cardinaux.

Phase 2 : les onze lieux sont répartis dans la zone de la ville bien connue des enfants, (un d'entre eux occupe une position centrale relativement aux autres).

Phase 3 : comparaison des "plans" élaborés par les élèves avec un plan du commerce.

i) La simulation par la nappe trouée

Le principe de base des situations, utilisées par G. Galvez, consiste à simuler le macro-espace urbain par l'exploration locale de ce qui peut correspondre à une vue d'avion. On pourrait obtenir des effets encore plus forts à partir d'un programme informatique, d'un vidéodisque comme plusieurs localités en ont conçues à des fins de publicité touristique.

La "vue d'avion" simplifiée a la dimension d'une petite table, et peut lui être fixée. Une nappe munie d'un trou que l'on peut déplacer permet de limiter drastiquement la vue à une partie de l'espace correspondant à un carrefour.

Le fait de ramener l'espace de la ville à celui d'une table va d'abord modifier la difficulté de mise en relation du repère personnel avec le repère de la ville. La simulation permet d'identifier à tout moment, le repère de la ville et le repère de la salle de classe, voire de la table si celle-ci dispose, du fait de sa forme et de sa position dans la classe, d'une orientation. Au lieu de varier durant le trajet, le rapport entre les deux repères peut être maintenu quasi-constant.

Une deuxième différence vient du fait que le repérage des lieux (croisement, constructions ou rues) s'effectue par l'intermédiaire d'une symbolique forcément très réductrice, qui rompt avec l'espèce de continuité méso-spatiale de l'espace réel. Dans un tel espace inconnu, le sujet doit lui-même saisir les indices, différencier les bâtiments, et surtout choisir de laisser de côté de nombreuses informations.

Une troisième différence vient de ce que dans une rue réelle, la vue peut s'étendre au delà du local immédiat par les grandes artères, ou grâce au surplomb de certains très grands éléments, naturels ou construits. Ces informations contribuent fortement à l'orientation du sujet par rapport à la ville.

Une quatrième différence est l'impossibilité graphique de traduire le nom des rues sur un espace réduit. Dans les plans, faits pour être embrassés d'un coup d'oeil, le nom s'étire d'un bout à l'autre de la représentation de cette rue.

La situation permet néanmoins de poser différents sous-problèmes des problèmes réels.

La fabrication d'un plan de la "vue de la ville" par les élèves, qui ne conservera que les rapports topologiques, à partir d'un parcours de visions locales, permet de rendre non pertinentes les indications d'angles et de distances. Dans la réalité, un plan à l'échelle permettrait de résoudre tous les problèmes de direction par des indications relatives à l'orientation de la ville, à l'aide d'une boussole par exemple. La situation de communication ne permet donc de communiquer qu'une orientation locale, dont elle organise l'apprentissage.

Le repérage local des différents choix de parcours dans une rue ou à un croisement, et de moyens de les formuler paraît assez semblable entre la réalité et la simulation, si l'on

néglige le problème de la détermination des constructions auxquelles il convient de se repérer, ainsi que le nom des rues.

De même, le fait de faire guider un élève par un autre permet de rendre problématique et nécessaire le rapport entre différents systèmes de référence : celui de l'élève qui déplace le trou de la nappe, celui de son guide, celui de la "vue de la ville", et celui du plan.

Nous mettons à la disposition des lecteurs la description rapide des situations utilisées par G. Galvez dans sa pré-expérimentation. Les dernières de ces situations ont ensuite été reprises et adaptées à l'école J. Michelet en 1982. Nous joignons, en annexe 2, les fiches didactiques de Michelet.

1) Présentation du matériel et des situations

Un carton sur lequel est représenté, comme en vue de dessus, un espace urbain : on y trouve des édifices et des places, localisés essentiellement au croisement de rues (2 ou plus) .

Le carton est recouvert d'une toile dans laquelle un trou a été aménagé, de diamètre approximatif de 2,5cm, trou que l'on peut déplacer sur le carton en découvrant ainsi tout l'espace à travers des visions locales.

S.D. 7, S.D. 8 permettent de se familiariser avec une structure de graphes dont les sommets sont symboliquement désignés, de s'en faire une représentation mentale qui peut rester implicite, et de coordonner deux repères : celui du sujet et celui de la ville.

S.D. 9 nécessite, dans la phase 1, une représentation de la structure de graphe représentant la ville, sous forme de dessin. Dans la phase 2, il y a, du point de vue du "voyageur", formulation orale des moyens de repérage local, et du point de vue du "géographe", outre le traitement et la production d'informations orales, la mise en rapport de son orientation dans le plan, de son orientation dans la ville, de l'orientation du plan par rapport à la ville (assez difficile, du fait du non-respect des angles), de celle du voyageur dans la ville. La phase 3 permet la mise au point d'un système de communication orale des orientations locales du voyageur.

S.D. 10 nécessite, à la phase 1, la production implicite des moyens par lesquels les enfants se représentent un repérage facile des orientations locales, en dévoluant aux élèves le choix et le positionnement de constructions. Dans les phases 3 et 4, la formulation écrite de trajets complets exploite les moyens de communication mis au point en S.D. 9.

S.D. 11¹¹ introduit un moyen nouveau de désignation des orientations qui s'ajoute aux anciens, le nom des rues.

2) S.D.7 : Le jeu des facteurs

1 jeu de 3 cartons, sur lesquels sont inscrites des consignes destinées à de petits groupes d'enfants.

Carton 1 : propose une activité d'exploration du diagramme .

Carton 2 : Les enfants doivent choisir un chef de la poste, qui ordonne aux facteurs de porter des lettres à différents endroits

Carton 3 : Suggère de demander aux facteurs d'effectuer des trajets plus complexes :

- aller de A à B, sans passer par C
- distribuer des lettres en plusieurs lieux, dans un ordre fixé

3) S.D.8 : Le jeu des messagers

Exploration de la ville en effectuant des trajets fixés par le maître.

¹¹ C'est la situation d'un passager qui se rend en taxi dans une mégapole telle que nous en avons connu au Caire.

"Vous êtes une équipe de messagers qui vont traverser une ville."

1 carton avec la description du jeu

12 cartons décrivant des tâches : tu es ... tu dois aller à ... et après à ...

Le but est de réaliser le plus grand nombre de tâches décrites

4) S.D.9 : Géographes et Voyageurs (CMI)

Connaissances engagées :

Saisir et coordonner des informations perçues localement. Reproduire les lieux et les connexions, sans en rajouter ni en oublier.

Pour communiquer oralement, ils doivent coordonner leurs systèmes respectifs de référence, l'orientation relative entre les secteurs de l'espace explorés, et développer des conventions pour différencier les différentes voies qui aboutissent à un même croisement.

Par rapport à la situation précédente, celle-ci incorpore l'explicitation des mécanismes de contrôle de l'activité des élèves, et un contrôle objectif de l'adéquation ou non, des décisions, par l'anticipation par les géographes du lieu atteint par les voyageurs.

Déroulement : L'équipe entière explore la ville en déplaçant le trou, et fait un plan qui sera utilisé par les géographes pour anticiper la destination des voyageurs. Le jeu montrera si le plan est bon ou non.

L'équipe est divisée ensuite en deux groupes : les géographes et les voyageurs.

Les géographes s'installent à une certaine distance, après avoir déterminé avec les voyageurs, d'un commun accord, un lieu de départ, localisé sur le plan et sur le carton.

Les voyageurs annoncent la direction qu'ils choisissent. Les géographes anticipent alors l'arrivée.

Les voyageurs avancent et valident ou invalident la prédiction, en découvrant le lieu d'arrivée.

Ils échangent les rôles.

Le professeur organise un débat pour déterminer un système commun de désignation des directions, et pour déterminer si le plan est correct ou non.

5) S.D.10 Guides et voyageurs

(communication écrite)

Connaissances engagées :

- désignation des lieux qui permette une orientation
- mise au point de langage écrit de communication des direction possibles

Déroulement

Les diagrammes sur carton sont nouveaux. Ils ne comportent que la représentation des voies.

Phase 1 : les élèves vont les explorer (par le trou de la nappe) et dessiner au fur et à mesure ce qui est nécessaire pour qu'il soit facile de dire à quelqu'un comment aller d'un lieu à un autre.

Phase 2 : chaque équipe fait une liste des lieux placés dans la ville, pour inviter les voyageurs à les visiter.

Phase 3 : une des équipes constitue l'équipe des voyageurs ; les autres choisissent sur leur ville un lieu de départ.

Le voyageur choisit dans la liste un lieu où il veut être conduit.

Les guides écrivent les indications pour permettre au voyageur d'aboutir au lieu qu'il a choisi.

Le voyageur ne reçoit aucune autre aide ; s'il arrive à destination, l'équipe des guides gagne un point.

Phase 4 : Discussion.

On note au tableau les résultats et on localise les difficultés : désignation des lieux, instructions fournies, utilisation par les voyageurs.

6) *S.D.11 : Les passagers du taxi (CMI)*

Le support est celui d'une carte du district sud de la ville de Mexico

Description de la fiche didactique :

Aujourd'hui, nous allons utiliser la carte de la partie sud du district fédéral.

En déplaçant le trou de la toile, vous pourrez découvrir la ville un peu comme si vous circuliez en voiture.

Cette activité doit vous servir à apprendre à vous orienter lorsque vous circulez dans la ville.

Le maître répartit le matériel entre les équipes, diagrammes, nappes,

Consigne 1 : Vous pouvez explorer librement la carte pendant 10 minutes.

Il faut que vous connaissiez bien la carte de manière à pouvoir dire à quel endroit on peut arriver en suivant les rues. Vous pouvez écrire pour ne pas oublier les lieux rencontrés.

Par exemple, "par cette rue, où peut-on aller ?".

Avertissez moi quand vous croirez bien connaître la carte, pour que je vous explique la règle du jeu.

Consigne 2 : Par équipes, il y a un chauffeur et des passagers.

Le chauffeur met le trou là où il veut. Le chauffeur déplace le trou et pour chaque croisement, il demande par où il doit continuer. A tour de rôle, chaque passager doit le lui dire. De cette façon, on voit si le passager avait ou non raison.

S'ils veulent, ils peuvent noter les échecs ou les erreurs.

Après un certain temps, un autre fait le chauffeur.

Consigne 3 : Jeu 2

Maintenant, vous allez utiliser ces fiches cartonnées à tour de rôle.

Les cartons du jeu proposent trois types de tâche.

1) étant donné un lieu initial et un but, déterminer :

- le chemin le plus court

- celui qui passe par certains lieux intermédiaires.

2) Etant donné lieu initial et un trajet, trouver le lieu d'arrivée.

3) Etant donné un lieu de départ, la direction de la progression (le but à atteindre?), et une série de lieux, les ordonner depuis le plus proche du point de départ, jusqu'au plus lointain.

Chacun lit son carton, et place le trou à l'endroit indiqué. Puis, il retourne le carton et lit ce qu'il doit faire, et le fait.

II. LA MODELISATION DE L'ESPACE

A. Reproduction de figures planes

1. La reproduction de figures

a) Autour du carré, à partir du cube (C.E.)

Présentée dans un film "atelier de pédagogie" de l'IPN en 1976, elle permet de problématiser les propriétés du carré, en particulier par leur reproduction ; voir, en annexe 3, la fiche d'accompagnement du film.

b) Reproduction de polygones (cycle 3)

Nous présentons aux chapitres 7 et 8 plusieurs activités de ce type, dont les caractéristiques sont étudiées.

c) Reproduction de figures complexes (cycle 3)

On trouve dans Aides pédagogiques (1983), p.97-101, des figures dont la reproduction exige la prise en compte de prolongements et/ou d'alignements.

Signalons une étude approfondie, en particulier du point de vue des variables didactiques : Duceul Y. et Peltier M.L., (1986) : *Géométrie, une approche par le dessin géométrique*, Irem de Rouen.

2. Communications de figures (cycle 3)

L'ancêtre des leçons de géométrie mise en oeuvre à de nombreuses reprises, dans des recherches diverses dont la nôtre (chapitres C-7 et C-8). Elle permet aux élèves d'investir leurs modèles implicites des figures élémentaires, de les formuler, et de déboucher sur des questions de géométrie. Nous joignons en annexe 4 quelques-unes des premières fiches didactiques rédigées au C.O.R.E.M. sur cette situation, par ailleurs exploitée par de nombreuses recherches menées à Grenoble.

3. Le biglotron (CE2)

Mise au point par Duval A. et coll. à l'école J. Michelet, elle permet de poser et d'approfondir la notion de droite et d'alignement. La situation est en cours de rédaction.

4. Le géométri-scrabble

Suite de leçons sur l'introduction des angles de secteur, présentées en détail au chapitre C-8.

5. Le rapporteur (CM2-5ème)

Suite de leçons sur la mesure des angles, dans des tâches de construction de polygones. Elles sont présentées en fin de chapitre C-7.

6. Le terrain de tennis (CM-6ème)

Leçon présentée au chapitre B-3. A travers la résolution d'un problème dans l'espace réel, elle permet de faire fonctionner des transformations géométriques simples (symétries, translation).

7. Les drapeaux (CM2-6ème-5ème)

Situation typique de modélisation, étudiée en détail au chapitre B-7, décrite dans Brousseau N. et G. (1987). Elle porte, selon les connaissances des élèves, soit sur la triangulation, soit sur les transformations.

8. Problèmes "rectangle" et "bancs"(cycle 3)

Ces situations sont présentées et analysées au chapitre C-3, leur adaptation reste à faire.

B. Figures dans l'espace

1. Reproduction et communication d'assemblages de cubes (CM à 3ème)

Bessot A., Eberhard M. présentent une étude très approfondie de cette situation conçue comme une situation fondamentale du graphisme technique, ainsi que des séances de classe construites. L'apport de ce travail est essentiel, et ne peut être résumé en trois lignes. Nous renvoyons à leur publication de 1987, ainsi qu'aux numéros 2 et 3 de Petit x.

Sous le titre "Jeux de construction", Aides pédagogiques au CM p.13 à 15, propose des activités de reconnaissance et de reproduction différée d'assemblages de cubes.

2. Dénombrement des faces d'un polyèdre

Objectif : élaboration d'une structuration de l'ensemble des faces. Matériel : polyèdres divers : deux représentants identiques par type, dont un aux faces numérotées pour la vérification. La classe est partagée en équipes, et alterne les phases collectives et de discussion en équipe. Le professeur présente un polyèdre, un élève désigné au hasard dans une équipe vient compter ses faces devant les autres, en montrant bien sa méthode. Si les autres ne sont pas d'accord avec la méthode et/ou le résultat, ils envoient un représentant prouver leurs dires. Cette situation est adaptée de Luckenbein (1981)

3. Du passe-muraille aux projections (CE)

Issue d'un film INRP, la situation est présentée dans ERMEL CE, sous le titre "Gabarits", tome 1, p. 151. L'objectif est de mettre en rapport des perforations d'une feuille de papier (la projection) avec un assemblage de cubes, qui doit passer à travers dans une translation selon une direction perpendiculaire au plan de la feuille. Les élèves construisent la perforation, à partir de l'assemblage de cubes, ou l'inverse.

4. Doubler la boîte (CM)

Un grand modèle de boîte d'allumettes est présenté aux élèves. Il leur est demandé de construire une boîte qui contiendra le double d'allumettes. La situation permet de poser le problème de la tri-linéarité du volume par rapport à chacune des dimensions du pavé.

C. Transformations planes

1. Translation

a) La poulie et la voiture (cycle 2)

Il s'agit de tirer une voiture par un fil, relié à l'avant de la voiture par l'intermédiaire d'une poulie, pour la placer entre deux traits. Proposée par Brousseau (1983)

b) La tortue (cycle 2)

La programmation de la tortue Jaulin sur un trajet passant entre deux plots, nécessite de prendre en compte l'envergure de la tortue. La situation et les résultats sont décrits par J. Pérès et coll. (1986).

c) Les pavages (cycle 3)

Il s'agit d'une situation actuellement étudiée par Dilma Fregona dans sa thèse préparée sous la direction de G. Brousseau. Un pavage, réalisé avec un motif, est placé sous une feuille de carton. Dans le carton sont découpés deux fenêtres rectangulaires, dont l'une est ouverte et permet de découvrir une portion de pavage. Il s'agit de prévoir la portion qui sera découverte par l'autre fenêtre.

2. La symétrie

a) Le calque (Bautier)

La situation consiste à étudier la transformation déterminée sur un plan, par le retournement d'un calque. Cette situation est étudiée et présentée par T. Bautier (1988)

b) Le terrain de tennis (cycle 3, 6ème)

La situation est décrite au chapitre B-4, page 103. Il s'agit d'utiliser un déplacement pour déterminer la longueur d'un objet qui s'appuie sur deux côtés d'un terrain de tennis, sans intervenir à l'intérieur du terrain.

3. Homothétie-similitude

a) Le puzzle et l'optimist (cycle 3)

Les situations, décrites très précisément dans N. et G. Brousseau (1987), permettent aux élèves de construire un modèle numérique de l'agrandissement et de la réduction qui conservent les formes.

b) Les drapeaux (6ème, 5ème)

La situation, décrite dans G. et N. Brousseau (1987) est analysée en détail au chapitre B-7.

III. L'INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DU SECONDAIRE

Nous avons étudié quelques-unes de ces situations au chapitre B-7.

Nous avons comparé les propriétés de la situation "des médiatrices", avec plusieurs autres situations, principalement celles choisies dans l'ouvrage d'Arsac et coll. (1992).

L'ouvrage d'Arsac et coll. constitue à notre connaissance la seule source facilement accessible qui présente, outre des situations, des observations précises sur leur mise en oeuvre dans des classes.

IV. CONCLUSION

Pour un certain nombre de situations présentées ci-dessus, l'analyse didactique et l'observation avec des moyens fiables restent à faire. La revue des situations intéressantes, proposées par divers supports pédagogiques, est loin d'être complète.

Nous reprendrons et développerons ce travail ultérieurement, avec l'aide de ceux qui seront intéressés.

CONCLUSION GENERALE

Au terme de l'exposé de notre recherche, revenons d'une part sur les propositions que nous avons avancées dans la partie A et sur les questions associées à chacune d'entre elles, d'autre part sur les outils d'analyse que nous avons développés, dont nous pensons que l'intérêt dépasse le domaine limité de notre recherche.

I. LES PROPOSITIONS D'INGENIERIE ET LES QUESTIONS ASSOCIEES

Il ne s'agit pas ici d'y répondre une à une, et dans la forme ou nous les avons posées, puisque le travail théorique que nous avons effectué dans la partie B nous a conduit à modifier très sensiblement notre problématique initiale et, dès le début du chapitre B-7, à reformuler les propositions étudiées.

Notre objectif, dans cette conclusion, est, pour chacune de ces dernières, de pointer les questions auxquelles nous sommes en mesure d'apporter des réponses, de préciser les apports de la réflexion théorique et de l'expérimentation, de dégager de nouvelles questions suscitées par ces réponses, et de signaler celles sur lesquelles notre travail n'a pas permis d'avancer de manière significative.

A. La proposition 1

Introduire explicitement dans l'enseignement des mathématiques de la scolarité obligatoire, des objectifs relatifs à certaines connaissances spatiales utiles, en particulier pour le macro-espace et pour la maîtrise des représentations matérielles des objets.

L'enseignement de la scolarité obligatoire se doit de pallier aux insuffisances concernant les besoins sociaux élémentaires en matière de rapports aux différents espaces dans lesquels se développe la conduite humaine.

1. Des déficits existent relativement aux connaissances spatiales utiles

Les trois premières questions que nous avons ainsi rassemblées concernent l'existence de déficits spatiaux préjudiciables au développement du sujet, à sa vie sociale, à sa réussite scolaire ultérieure en mathématiques ou dans le champ professionnel.

Sans pouvoir nous appuyer sur un travail exhaustif, nous avons tout de même pu montrer dans le chapitre B-1, qu'il existait des déficits non négligeables dans ces différents secteurs.

L'étude que nous présentons au chapitre B-5 montre que, de manière générale, dans l'enseignement primaire et en 6ème-5ème, les connaissances spatiales n'occupent qu'une place faible, et que leur traitement didactique ainsi que celui des connaissances spatio-géométriques, laisse à l'élève la responsabilité de l'établissement des rapports entre les concepts qui lui sont enseignés et les problèmes qu'ils devraient lui permettre de résoudre dans l'espace "sensible".

Nous avons montré comment ces phénomènes sont stables, parce qu'entretenus par les réactions du système d'enseignement aux contraintes de la transposition didactique et, en particulier, à celles du contrat didactique, auxquelles, dans l'état actuel de ce système, il est

difficile d'échapper. Ces contraintes sont de divers ordres : culturel, épistémologique, relatives à la gestion des activités des élèves etc..

Aussi, nous pouvons affirmer, d'une part, que la proposition d'introduire *explicitement des objectifs relatifs à l'espace*, est nécessaire, d'autre part qu'elle ne sera certainement pas suffisante pour produire un changement significatif dans les pratiques enseignantes.

2. Un certain nombre de connaissances et de savoir-faire spatiaux utiles sont enseignables

Les résultats obtenus par les ingénieries que nous avons élaborées (voir chapitres C-8 et C-9), ou présentées en partie D, établissent, de notre point de vue, que "les connaissances et savoir-faire spatiaux sont enseignables"; ces ingénieries pourront constituer des outils pour les enseignants, et nous avons tenté de décrire la façon dont nous les avons élaborées, de manière suffisamment précise, pour que cela puisse servir d'appui à d'autres recherches de ce type.

Mais il ne suffit pas qu'une connaissance soit enseignable pour qu'elle puisse être enseignée et nous n'avons pas étudié de manière suffisamment approfondie le travail nécessaire de l'enseignant pour qu'il puisse mettre en oeuvre ces outils, en respectant le difficile équilibre entre ce qui relève de la responsabilité de l'élève et ce qui relève de la sienne.

En effet, ce que nous proposons conduit à déplacer la frontière entre ce que l'enseignement laisse à la charge de l'élève et ce qu'il prend en charge, concernant les apprentissages spatiaux. D'une part, nous montrons la nécessité de développer des enseignements inexistantes actuellement, donc d'accroître la responsabilité de l'enseignant relativement à la maîtrise de ce secteur par ses élèves, d'autre part nous montrons que les formes usuelles des enseignements spatiaux, par ostension, ne permettent pas d'atteindre ce but parce qu'elles privent l'élève de la possibilité d'entrer dans les problèmes que ces connaissances permettent de résoudre. La mise en oeuvre de situations a-didactiques permet d'engager la responsabilité de l'élève dans l'établissement des connaissances, mais avec l'aide des rétroactions de la situation, des échanges avec ses camarades et des apports du maître. Le rôle de celui-ci en est profondément modifié. Il lui faut trouver un nouvel équilibre qui ne peut être obtenu sans une réflexion approfondie sur les fondements de la démarche.

3. Déterminer les objectifs essentiels

Il nous semble qu'une première direction pourrait être une évaluation précise des acquis et des déficits des adolescents et des adultes, en ce qui concerne leurs connaissances spatiales, et des difficultés qui en découlent dans divers secteurs de leur vie, sociale, scolaire ou professionnelle. Si, comme nous le laissent penser les résultats des travaux partiels que nous avons rassemblés sur ce sujet, ces difficultés sont importantes pour un nombre significatif de personnes, le système d'enseignement dans son ensemble, devrait pouvoir se poser la question de la prise en charge de ce domaine de connaissances dans la scolarité obligatoire.

La quantité d'objectifs strictement spatiaux ne peut être très étendue. Dans l'état de nos connaissances sur les déficits des élèves, il nous semble raisonnable de limiter les objectifs aux connaissances spatiales nécessaires à la maîtrise des situations les plus courantes du macro-espace et des représentations usuelles des objets, puisque c'est à leur propos que nous avons relevé les déficits les plus importants.

4. Conditions institutionnelles

Les phénomènes présentés au chapitres B-5 permettent de prévoir que si ces connaissances ne sont pas explicitement désignées à l'apprentissage, elles seront "éliminées" de l'enseignement.

Deux conditions institutionnelles apparaissent donc comme nécessaires :

* Des changements de programmes, incluant pour l'école primaire, des secteurs aujourd'hui négligés, paraissent possibles : l'enseignement de la perspective, disparu depuis plusieurs dizaines d'années du champ des connaissances scolaires, est bien réapparu.

* Mais, peut-être plus décisifs que les programmes, sont les épreuves d'examen et les outils d'évaluation, proposés récemment à tous les élèves. Nous savons bien que si ces outils divers ne comportent pas de moyens d'évaluer ce type d'objectifs, les enseignements correspondants seront abandonnés ou considérés comme facultatifs.

5. Il reste de nombreuses questions à faire avancer, par exemple :

Quelles sont les situations fondamentales adaptées à tel ou tel niveau, pour telle ou telle notion ?

Quelles sont les notions à développer par interaction spatiale effective?

Comment concevoir une articulation économique des caractéristiques didactiques et a-didactiques des situations, de rapports effectifs ou intériorisés, articulation qui conserve le sens de ces connaissances ?

B. La proposition 2

Différencier nettement auprès des élèves les problématiques spatio-géométrique et géométrique d'une part, la problématique pratique d'autre part, en mettant en valeur ce qui fait la spécificité de chacune d'entre elles.

L'efficacité des stratégies issues de la problématique pratique, quant à la résolution immédiate des problèmes spatiaux, est établie depuis le tout jeune âge.

En l'absence de détermination claire, par le contrat didactique, d'une autre problématique, c'est donc à la problématique pratique que les élèves vont faire appel; ceci est particulièrement vrai dans les situations a-didactiques et pendant l'initiation aux autres problématiques.

Nos analyses des chapitres B-3, B-4 et B-7 permettent de comprendre comment l'absence de prise en compte claire de la problématique pratique constitue un obstacle didactique à l'instauration des deux autres problématiques. Pour surmonter cet obstacle, nous avons vu que le professeur est, de toute façon, contraint à rejeter explicitement des stratégies de type "pratiques", ce qui équivaut à la distinction, implicite auprès des élèves, de la problématique recherchée par rapport à la problématique pratique.

Un choix convenable de situations devrait permettre au professeur de différencier auprès des élèves la problématique visée des autres, dans des conditions qui ne dévalorisent aucune d'entre elles.

C. La proposition 3

Nous avons, au chapitre B-7, laissé cette proposition sous la forme provisoire suivante

:

1. Introduire, dès l'école primaire, les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux.

2. Articuler la problématique de modélisation avec la problématique géométrique.

L'analyse des situations d'enseignement, menée dans toute la partie B, et notre travail expérimental, en particulier celui concernant les angles, présenté aux chapitres C-6 à C-8, comme divers travaux que nous avons rassemblés en partie D, nous amènent aux résultats suivants :

1. La problématique de modélisation de l'espace est incontournable, tant pour les apprentissages mathématiques que scientifiques de la scolarité obligatoire.

La problématique de la géométrie est inaccessible aux élèves de l'école élémentaire, tandis que la problématique de modélisation peut y être mise en place.

Les tentatives de mise en place directe de la problématique de la géométrie, avec de jeunes élèves de collège ne peuvent se faire de manière ostensive sans exclusion de nombre d'entre eux.

De telles tentatives nécessitent donc la médiation de situations spatiales a-didactiques mais l'exploitation de ces situations, directement dans la problématique de la géométrie, risque d'être accompagnée d'une disqualification des mesures. Cette association n'est pas sans risque, comme le montre l'ouvrage d'Arsac et coll. (1992), qui développe des propositions très intéressantes, accompagnées d'observations très fines d'élèves.

Au niveau des objectifs, les auteurs visent d'abord la remise en cause " de la lecture directe du dessin comme outil de preuve en géométrie"(p.67), puis "les conséquences de mesures effectuées sur le dessin" (p.91), ou "la figure et le rapporteur" (p.107, c'est à dire l'utilisation de l'instrument de mesure) comme outils de preuve. Ce sont donc à la fois les problématiques pratiques et spatio-géométrique que l'on cherche à éviter.

S'appuyant sur les observations rapportées, par exemple en classe de cinquième sur "le rectangle d'Euclide", les auteurs constatent que les situations ne permettent pas, en elles-mêmes, une véritable mise en cause par tous les élèves des mesures comme outil de preuve. Ils mettent aussi en évidence certains effets pervers quant au statut épistémologique même des mesures produits par cette tentative : on trouve, parmi les raisons invoquées pour réfuter *a priori* une réponse faisant appel aux mesures, des énoncés comme ceux-ci : "les mesures peuvent être fausses, si elles sont mal prises", "non, à cause des mesures et du dessin qui sont sources d'erreurs" ou encore, "si on ne fait pas de calculs, on ne peut pas se tromper".

Ces effets pervers ne sont-ils pas le produit de l'absence de reconnaissance par les auteurs d'un phénomène fondamental, la constitution de la problématique spatio-géométrique en obstacle à la problématique de la géométrie qu'ils cherchent à promouvoir ?

Ne peut-on relier à la même cause le rejet des mesures, des calculs approchés, que l'on peut encore observer bien plus tard dans notre enseignement : rejet de la physique accompagné d'une valorisation de l'exactitude des mathématiques par de nombreux élèves de la section A1, voire chez les étudiants avancés en mathématiques ?

Si l'apprentissage des notions élémentaires de la géométrie doit se faire d'abord dans une problématique de modélisation, le problème n'en n'est pas pour autant résolu. Il est posé dans de nouveaux termes qui en permettent l'étude contrôlée.

Tout au long du chapitre 7, nous avons précisé, autant que nous le pouvions, les conditions de l'établissement de la problématique spatio-géométrique, et de son articulation avec la problématique de la géométrie.

2. Conditions nécessaires pour introduire les savoirs géométriques de base comme outils de résolution effective de problèmes spatiaux

a) Exclure la problématique pratique

La condition première d'existence d'une telle problématique est l'impossibilité de réussir par la mise en oeuvre une problématique pratique. Ceci est naturellement le cas lorsque, sous l'effet de certaines contraintes, les interventions sur l'espace étudié ne peuvent directement se mettre au point par ajustement continu.

b) Organiser l'élaboration des connaissances visées

Il faut alors choisir des situations qui donnent aux élèves les moyens de rejeter simultanément d'autres connaissances, ce qui suppose la détermination *de situation fondamentale du savoir visé*, et la mise en oeuvre de contraintes didactiques appropriées.

Ainsi, dans le second processus d'enseignement des angles que nous avons développé (voir C-8), la première séance permet aux élèves de mettre oeuvre une stratégie relevant de la problématique pratique : essayer les pièces, jusqu'à ce que cela marche. Dès la seconde séance, l'instauration d'une situation de communication, où celui qui doit réaliser l'assemblage ignore tout des dimensions effectives des pièces qu'il doit commander, contraint à une anticipation et à une représentation nouvelles, qui se justifient dans ce type de situation, parce que cette dernière possède un certain nombre des caractéristiques macro-spatiales. Ce qui était licite et normal dans une situation où l'on peut procéder par essais-erreurs, ne l'est plus quand le coût devient prohibitif.

Ce n'aurait pas été le cas si les élèves s'étaient vu proposer les différentes pièces à placer, dessinées sur la même feuille que le début du puzzle à constituer (comme dans le manuel Delord et Vinrich, 1990, p.176). Ils auraient alors pu faire un calque des différentes pièces, et ainsi procéder comme à la séance précédente, par essai-erreur. En agissant ainsi, ne serait-ce que de façon intériorisée, ils passeraient à côté de l'une des acquisitions essentielles de la leçon : l'angle est indépendant de la longueur des côtés qui le déterminent, acquisition qui constitue justement l'obstacle sur lequel butent tant d'élèves.

Notre ouvrage contient plusieurs exemples d'ingénieries répondant à cet objectif.

Nous avons, en partie D, présenté ou signalé le travail élaboré dans le cadre de diverses recherches, anciennes ou en cours, réalisées dans le cadre du COREM, par exemple sur les reproductions de figures, les agrandissements et réductions, la translation.

Nous avons développé, sur l'exemple des angles, une proposition détaillée d'enseignement. Nous avons rendu compte de notre démarche, basée comme celle des travaux précédents, sur la théorie des situations, et dont nous pensons qu'elle constitue un outil essentiel pour l'élaboration d'autres ingénieries.

c) Organiser l'articulation des connaissances analogiques et des connaissances spatio-géométriques

Il nous semble nécessaire d'approfondir dans l'avenir la relation entre deux types de solution aux problèmes spatio-géométriques, du type de celui des drapeaux.

Une solution est celle du plan ou de la carte à l'échelle : elle consiste à établir une correspondance bi-univoque, conservant les distances à un coefficient près, entre les éléments de l'espace sur lequel on veut agir ou dont on veut tirer de l'information et l'espace d'une feuille de papier, de type micro-espace, où les contraintes "naturelles" ne s'exercent plus. Le problème, ainsi déplacé, peut être étudié avec les moyens de la problématique pratique et les solutions trouvées peuvent être reportées dans l'espace réel. La connaissance fondamentale est alors celle qui permet d'établir la relation entre les deux espaces, la triangulation. Il nous paraît nécessaire de l'enseigner.

Dans certains cas, la construction d'un schéma permet de faire appel à des savoirs de géométrie pour résoudre les mêmes problèmes. Ceux-ci interviennent alors dans la mesure où ils permettent de contourner directement dans l'espace même, les limitations de la situation.

d) Réinterpréter les savoirs géométriques de base

Cela pourrait conduire à réinterpréter les savoirs géométriques de base pour les insérer dans cette problématique. Par exemple, le rectangle ne serait plus seulement considéré comme un objet en soi, mais comme un outil dont la construction permet de déplacer, en les conservant, des longueurs ou des directions de droites. C'est une autre orientation qu'il nous paraît important d'étudier.

La modélisation de l'espace pose la question, épineuse, de l'approximation des mesures. La prise en charge de cette question par les élèves est indispensable, et elle ne peut attendre qu'ils soient capables de la maîtriser par le calcul différentiel. Son approche dans le cadre de la géométrie, doit compléter celle des autres mesures physiques.

3. Différenciation et articulation de la problématique de la modélisation avec la problématique géométrique : Quand ? Comment ?

L'étude approfondie des deux situations (drapeaux et médiatrices) établit la nécessité de la différenciation de ces problématiques auprès des élèves de l'enseignement secondaire, et propose des pistes pour le faire dans des conditions satisfaisantes.

Par contre, nous n'avons pas encore de réponse établie à la question du *quand* et du *comment*, car elle soulève des problèmes difficiles.

Citons-en un, celui de la logique sous-tendant les raisonnements dont sont capables les enfants. Quels sont les types de raisonnements que l'on peut attendre des élèves de tel ou tel niveau d'enseignement de la scolarité obligatoire ? Quelle est la part qui peut être prise en charge par la logique naturelle ? Quelle est celle qui ne peut se développer sans une prise en compte explicite par l'enseignement ? Ces questions nécessitent un travail de recherche ultérieur qui pourra s'appuyer sur les résultats de la thèse de P. Orus.

Nous avons montré, en particulier, que la résolution de problèmes spatio-géométriques nécessite de véritables raisonnements et que ceux-ci sont accessibles aux enfants dès l'école primaire.

Plus généralement, les réponses aux questions ici posées permettront de faire avancer la connaissance de la dialectique outil-objet.

D. Les problèmes de la mise en oeuvre de ces propositions

Nous avons assorti les propositions 1 et 3 d'un certain nombre de questions concernant la possibilité de leur prise en compte par le système d'enseignement et ses agents. Ces questions n'ont pas fait l'objet d'études frontales de notre part ; comme le remarque Chevallard

(1992) à propos de la théorie des situations "officielle", nous nous sommes surtout centrés "sur le fonctionnement de la machine, en laissant un peu de côté l'étude des conditions de possibilité de ce fonctionnement". Toutefois, les faits et les phénomènes que nous avons mis à jour peuvent nous permettre d'apporter des éléments de réponse à certaines de ces questions, et des pistes pour les approfondir.

Le phénomène le plus massif, du point de vue de l'enseignement de l'espace et de la géométrie, est cette difficulté à prendre en compte les interactions de l'élève avec l'espace, tant dans les programmes que dans la relation didactique. C'est le système d'enseignement dans son ensemble, qui est en cause, et au delà, toute notre culture qui fonctionne sur la fiction de la transparence des rapports spatiaux : "Regarde" en est le maître mot.

Pouvons-nous envisager des moyens permettant, non de transformer la culture, ce serait bien présomptueux de notre part, mais de sensibiliser le système d'enseignement à la nécessité d'une évolution?

1. Conditions institutionnelles de l'enseignement

Nous avons pointé les problèmes de programmes et d'examen avec notre première proposition.

Des modifications institutionnelles ne pourront être efficaces que si des situations d'enseignement nouvelles peuvent être mises en oeuvre par les enseignants, ce qui suppose plusieurs autres conditions.

2. Des outils pour les enseignants

Les changements ne pourront se faire tant que les enseignants ne seront pas munis d'outils leur permettant de faire une place aux situations d'apprentissage a-didactiques nécessaires.

Si donc, les recherches en didactique ne parviennent pas, d'une part à élaborer des processus d'enseignement pertinents, bien articulés entre eux, et réalisables dans les classes ordinaires, d'autre part à dégager de manière assez précise comment gérer les rapports de modélisation du milieu spatial, ainsi que l'initiation à la géométrie, il n'y aura pas d'évolution possible.

3. La formation des enseignants

Nous n'avons pas encore étudié de manière suffisamment approfondie l'effort d'adaptation nécessaire de l'enseignant pour qu'il puisse mettre en oeuvre les outils que nous avons rassemblés ou élaborés, qui nécessitent d'établir un nouvel équilibre entre ce qui relève de la responsabilité de l'élève et ce qui relève de la sienne.

Comme nous l'avons souligné, il y a aussi un problème de taille sur lequel bute le système didactique : l'ostension est un procédé si naturel, si ancré dans les pratiques culturelles et si économique, dans son domaine d'efficacité, qu'il est très difficile de se convaincre de ses limites et de recourir à d'autres procédés, surtout si ceux-ci exigent de l'enseignant une modification profonde de ses rapports personnels à la géométrie. Or c'est ce que suppose la prise au sérieux des analyses que nous avons présentées.

4. La recherche dans les IUFM

Le problème même de l'appropriation de ces outils par les enseignants n'est pas résolu, ni, d'après ce que nous en savons, objet de recherche. Or le travail à faire sur le plan de la formation des

professeurs est sans doute aussi difficile et important que celui concernant la formation des élèves. Les IUFM naissants ont sans doute là un champ de recherches à défricher.

II. LES OUTILS D'ANALYSE

L'étude des différentes propositions que nous avons avancées a d'abord été réalisée avec les outils de la théorie des situations. Le champ particulier de notre étude nous a amenés à adjoindre aux concepts de cette théorie, dont la fécondité est déjà bien établie, ceux de problématique et de représentation pratique. Nous avons par ailleurs mis en évidence de nouveaux phénomènes, en prenant en compte certains éléments de la théorie de la transposition didactique.

A. Les différentes problématiques

Nous avons montré (proposition 2) pourquoi un bon fonctionnement du contrat didactique de la géométrie nécessite de différencier auprès des élèves les différentes problématiques. L'analyse des situations d'enseignement, tout comme leur conception, doit donc prendre en compte l'identification par les élèves, parmi les trois problématiques suivantes, de celle que le contrat didactique veut installer.

1. La problématique de la géométrie

Nous proposons de nommer ainsi la catégorie de problèmes reconnus comme étant à la fois des problèmes de géométrie et des problèmes spécifiquement de mathématiques, c'est à dire dont la solution s'expose selon une démarche déductive. La pratique de référence est celle des mathématiciens, et le modèle historique correspondant à la scolarité obligatoire est la "géométrie d'Euclide". La transposition didactique a fait de cette géométrie l'outil privilégié de l'initiation à la rationalité spécifiquement mathématique.

2. La problématique pratique

Le fait de dégager l'existence d'une problématique pratique n'est pas seulement le produit d'une observation empirique : elle est le produit d'un effort de réflexion sur l'ensemble des problèmes proposés aux élèves, et sur la position des sujets par rapport à ces problèmes.

Les comportements correspondants à l'intervention de cette problématique pratique ont été repérés par d'autres chercheurs, en particulier Balacheff, Grenier, Margolinas ; ils les ont désignés par l'expression "détournement de la tâche". Nous avons montré que ceci est, la plupart du temps, non point un détournement, mais le traitement de la tâche dans une autre problématique que celle que le professeur veut introduire.

A défaut d'indications explicites, dans le cadre de la scolarité obligatoire jusqu'à 12 ans, la problématique que les élèves développent spontanément est celle qui demande le minimum de conceptualisation pour obtenir le résultat : la problématique pratique.

La géométrie a la propriété de traiter d'un domaine particulièrement familier aux sujets, à savoir l'espace. Aussi, les élèves ne sont-ils pas démunis devant un problème spatial, et l'intervention de cette problématique est-elle plus évidente dans ce domaine que dans le domaine numérique.

L'accent mis sur la participation de l'élève, oblige à prendre en compte ses connaissances pratiques :

- parce que ses stratégies de base s'y réfèrent nécessairement,
- mais aussi, et surtout parce que le contrat didactique va devoir se situer par rapport à cette problématique.

L'interprétation de la consigne, qui se doit d'être exprimée en langage ordinaire, va donc renvoyer naturellement à la problématique pratique si la situation ne permet pas de rétroaction rapide et claire.

Cette problématique va donc s'installer en obstacle didactique aux autres.

Il est par ailleurs des domaines où les élèves ne disposent pas de stratégies pratiques efficaces pour résoudre certains problèmes de plus en plus courants dans notre société, telles la détermination et la réalisation d'un trajet dans une ville mal connue. L'école se doit alors de leur fournir le minimum d'outillage à cet effet.

3. La problématique de la modélisation

La distance entre les productions des élèves de la scolarité obligatoire et l'activité caractéristique de la géométrie mathématique est évidente pour tout enseignant de mathématiques.

Nous avons montré comment les exigences développées dans l'enseignement usuel de la géométrie mathématique amènent à laisser de côté toute relation effective avec l'environnement spatial.

Avant la classe de quatrième, et en particulier dans l'enseignement primaire, les enseignants développent une catégorie d'activités au statut mal défini, basées sur le rapport entre certaines propriétés géométriques et certains tracés soigneux sur la feuille.

Nous avons proposé de référer clairement ces activités à une problématique de modélisation de la réalité spatiale. Ceci pose la question de la pertinence de l'extension de cette réalité hors de la feuille de papier, et de l'étude du rôle de la taille de l'espace dans l'établissement du sens de la modélisation.

L'étude de ce type de problèmes, permet d'en montrer la richesse sur le plan du développement de méthodes et de raisonnements dont certains formeront la base de compétences nécessaires à la géométrie strictement mathématique.

La prise en compte didactique de cette problématique permet aussi d'éclairer certains obstacles rencontrés dans l'initiation à la géométrie déductive.

La question de l'initiation des élèves à la géométrie se trouve ainsi transformée : ce n'est plus seulement un saut direct de la problématique pratique à la problématique géométrique qui peut être envisagé ; on peut aussi concevoir d'aménager l'entrée dans la problématique de modélisation, puis des aller-retours entre cette problématique, où les concepts de la géométrie ont un statut d'outil et commencent à figurer dans des raisonnements, et la problématique de la géométrie, où ils sont considérés comme des objets.

Notre position permet de poser de nouvelles questions, relatives au contrôle épistémologique des rapports introduits entre réalité et géométrie. En particulier, il faut approfondir la question du rôle des mesures dans l'enseignement de la géométrie au cours de la scolarité obligatoire.

Le problème de l'initiation à la géométrie n'est pas résolu, il est seulement approfondi et posé dans un cadre différent.

4. Conclusion

Ces problématiques constituent donc bien clairement un outil de classement de situations ; lorsque ces situations sont des situations didactiques, le classement de ces situations est lié aux caractéristiques du *contrat didactique* déterminées par les *fonctions que la transposition didactique de la géométrie fait jouer aux connaissances spatiales*.

Les distinctions ci-dessus n'ont pas pour fonction de hiérarchiser le niveau de connaissance des personnes. Il s'agit d'une question de pertinence par rapport aux situations : tel type de traitement est ou non adapté à tel type de situation.

B. Les représentations spontanées

Nous avons souligné combien l'apport de Brousseau et Galvez permettait de proposer une solution au problème de classification des situations que rencontrent les études de psychologie sur la question de la représentation de l'espace, comme le souligne Pêcheux (1990).

L'introduction de la problématique pratique comme un objet de la théorie didactique nous a permis de poser plus clairement la question des différentes représentations de l'espace introduites par ces deux auteurs, pour les étudier en termes de représentations "spontanées" issues de la problématique pratique dans laquelle les sujets évoluent depuis leur plus jeune âge.

Nous avons dégagé l'importance pour la didactique de la géométrie, de la connaissance des conceptions des différentes notions, liées à ces représentations : quelle que soit la démarche didactique, elle fait appel à ces représentations.

Leur étude pragmatique nécessite une analyse à priori, que nous avons ébauchée, en rassemblant pour chacune des représentations, les conceptions de chaque notion géométrique concernée.

Cette analyse demande à être enrichie, voire corrigée par l'ensemble des données disponibles, par les études de psychologie en particulier. Elle nous a néanmoins déjà permis d'éclairer d'un jour nouveau de nombreux faits didactiques, de l'interprétation d'erreurs jusqu'à l'importance accordée aux "objets" dans les formulations de programmes de la scolarité obligatoire.

L'étude expérimentale de ces conceptions reste à réaliser.

C. Les phénomènes identifiés

Nous avons mis à contribution divers apports théoriques pour trier et éprouver un certain nombre de faits connus sur l'enseignement de la géométrie. Nous pensons avoir ainsi identifié et établi par des raisonnements théoriques les raisons de :

- *l'exclusion des connaissances spatiales utiles des programmes de mathématiques.*
- *la persistance du rejet de l'apprentissage a-didactique des connaissances spatio-géométriques hors du temps didactique.*
- *la confusion du langage dans la communication entre professeurs et élèves, et même entre professeurs.*

Nous avons montré que l'extension des démarches ostensives dans l'enseignement s'explique à la fois par l'économie de moyens qu'elle permet aux enseignants, et par l'incapacité de leur épistémologie actuelle à attribuer un statut didactique à l'espace dans l'enseignement des mathématiques.

Les professeurs ont été placés depuis une vingtaine d'années devant une *injonction paradoxale* : la légitimité des démarches ostensives a été mise en cause au nom de la prise en compte de l'activité de l'élève, sans qu'il leur soit donné les moyens (en situations d'enseignement) de prendre en compte cette activité pour en tirer la production de savoirs géométriques. Nous avons trouvé la confirmation de notre analyse par l'identification que nous avons faite de *l'ostension déguisée*.

Notons enfin que la prise en compte de concepts issus de deux théories didactiques différentes pourrait poser question si on ne s'interrogeait pas sur la cohérence du système théorique ainsi constitué. En ce qui concerne la théorie des situations et la théorie de la transposition didactique, le problème de leur articulation est actuellement étudié, et a fait l'objet de cours à la sixième école d'été de didactique des mathématiques, publiés par R.D.M.. Nous avons utilisé l'une pour dégager les contraintes internes à la relation didactique, et l'autre pour préciser celles qui proviennent du système d'enseignement ; les apports de ces deux théories sont ici particulièrement complémentaires.

Nous n'avons cependant pas approfondi cette articulation sur le plan théorique, ni les limites du champ ainsi constitué.

Le lecteur sera peut-être déçu de ne pas trouver de réponse à toutes les questions d'enseignement de l'espace et de la géométrie, mais était-ce possible ?

Nous avons tenté de dégager la complexité du problème de cet enseignement, de proposer des instruments d'analyse adaptés, susceptibles, en particulier, de guider l'ingénieur tant dans la production que dans la mise en oeuvre des situations d'enseignement.

Il reste beaucoup de chemin à parcourir, et nous espérons avoir contribué à rendre ce chemin plus praticable.

BIBLIOGRAPHIE

- ACREDOLO L.P. (1981) : Small and large-scale spatial concepts in infancy and childhood, *Spatial representation and behavior across the life span*. Liben, Patterson, Newcombe, Academic Press, 63-82
- AIDES PEDAGOGIQUES pour le cycle moyen (1983), Elem-Math VII, publication de l'A.P.M.E.P. n°49
- AIDES PEDAGOGIQUES pour le cours élémentaire (1978), Elem-Math VII, publication de l'A.P.M.E.P. n°49
- ARSAC et coll. (1992) : *Initiation au raisonnement déductif au collège*, P.U. de Lyon
- ARSAC G. (1989) : la construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans, *Actes PME*, 1989.
- ARTAUD, DOLLE, LARDEUX (1984) : Difficultés dans l'apprentissage et l'utilisation des aspects géométriques du dessin en L.E.P., *L'apprentissage de la géométrie du dessin technique*, INRP collection rapports de recherches - 1984 n°9
- ARTIGUE M., ROBINET J. (1982) : Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques 3.1*, 5-64
- ARTIGUE M. (1988) : Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques 9/3*, 281-308
- ARTIGUE M. (1991) : Epistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques 10/2.3*, 241-286.
- AUDIBERT G. (1982) : *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*, thèse Université de Montpellier, éditions APMEP.
- AUDIBERT G. (1989) : *A propos du statut du dessin : configurations géométriques*, IREM USTL Montpellier
- AZEMAR et SALIN (1976) : Construction de l'espace et démarches cognitives, *Recherches pédagogiques 1976, n°78*, I.N.R.D.P.
- BALACHEFF N. (1988) : *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*, thèse université de Grenoble 1, 395-464
- BATTRO A. () : *Dictionnaire d'épistémologie génétique*, PUF Paris.
- BAUD M. (1990) : La représentation de l'espace en Egypte ancienne, cartographie d'une expédition, *Bulletin de l'Institut Français d'Archéologie Orientale T.90*, Le Caire
- BAUTIER T. (1988) : Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD-IMAG, Institut Fourier, Université J. Fourier, Grenoble, années 86-88*, p.197-238
- BAUTIER, BOUDAREL, COLMEZ, PARZYSZ, (1987) : Géométrie et espace, représentation plane des figures de l'espace, *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Vergnaud et coll., La pensée sauvage.
- BERDONNEAU C. (1981) : *Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l'enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle*, Thèse Université Paris VII
- BERTE A. (1987)(2ème éd. 1992) : *Enseignement des mathématiques utilisant la réalité*, IREM de Bordeaux.
- BERTHELOT R. (1988), Using the theory of situations to help teachers to choose and conduct lessons, *Papers of A.G. 6, from I.C.M.E. 6, Budapest*, Mathematics Department Illinois State University, Normal IL 61761, U.S.A.
- BERTHELOT R. et SALIN M.H. (1992) : Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire, *Espaces graphiques et Graphismes d'Espaces*, à paraître, La pensée sauvage.
- BESSOT A. ET RICHARD F. (1977) : *Etude du schéma dans l'enseignement des mathématiques*, Mémoire DEA, IREM de Bordeaux
- BESSOT A. ET RICHARD F. (1979) : *Commande de variables dans une situation didactique : rôle du schéma*, Thèse Université Bordeaux 1, IREM

- BESSOT A. et EBERHARD M. (1987) : Représentations graphiques et théorisation de l'espace des polycubes, un processus didactique, *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Vergnaud et coll., La pensée sauvage.
- BESSOT, DEPREZ, EBERHARD, ET GOMAS (1992) : Une approche didactique de la lecture des graphismes techniques en formation professionnelle de base aux métiers du bâtiment, *Espaces graphiques et Graphismes d'Espaces*, à paraître, La pensée sauvage.
- BIDEAUD (1976) : Le modèle inducteur, *Recherches Pédagogiques n°78*, 1976, INRP
- BLANC (1986) : *Angles au CM*, Publication de l'IREM de Nice
- BOURDIEU P. (1980) : *Le sens pratique*, Les éditions de minuit.
- BOUVIER et GEORGE (1983) : *Dictionnaire des mathématiques*, 2ème édition, PUF
- BROUSSEAU G. (1983) : Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie", *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble (1982-1983)
- BROUSSEAU G. (1986a) : *Actes de l'université d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 30-5 juillet 1986, IREM Paris VII
- BROUSSEAU G. (1986b) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques 7/2*, pp. 33-115
- BROUSSEAU G. (1986c) : *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université Bordeaux 1
- BROUSSEAU G. (1988a) : Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques 9/3*, 309-336.
- BROUSSEAU G. (1988b) : Les différents rôles du maître, *Bulletin de l'A.M.Q n°23*.
- BROUSSEAU G. (1988c) : Didactique fondamentale, *Actes de l'université d'été Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire*, 2-8 juillet 1988, édition IREM de Bordeaux
- BROUSSEAU G. (1989a) : Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x n°21*.
- BROUSSEAU G. (1989b) Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique, *Constructions des savoirs Actes du colloque international obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif*, CIRADE , Agence d'ARC inc
- BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) : Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques 11/2.3*, 167-210
- BROUSSEAU N. (1990) : *La mesure au CM1*, I.R.E.M. de Bordeaux.
- BROUSSEAU N. et G. (1987) : *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, I.R.E.M. de Bordeaux.
- CHEVALLARD ET FELDMANN (1986) : *Pour une analyse didactique de l'évaluation*, IREM de Marseille.
- CHEVALLARD ET JULIEN (1991) : Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie, *Petit x n°27*
- CHEVALLARD Y. (1989a) : Pourquoi enseigne-t-on les mathématiques, *Actes du colloque Finalités des enseignements scientifiques*, CCSTI et Groupe de la didactique de la physique de Marseille.
- CHEVALLARD Y. (1989b) : Le concept de rapport au savoir -rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, année 1988-1989, LSD-IMAG et Institut Fourier Université de Grenoble 1
- CHEVALLARD Y. (1991) : *La transposition didactique*, La pensée sauvage.
- CHEVALLARD Y. (1992) : Le caractère expérimental de l'activité mathématique, *Petit x n°30*.
- CLAIRAUT M. (1741) : *Elémens de géométrie* , Réédité par Philoe, Laval, 1987
- CLOSE G.S. (1982) : *Children's understanding of angle at the primary / secondary transfer age*, Master of science, Polytechnic of the South Bank
- CONNE F. (1990) : Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques 12/2.3*, 221-270.

- CORDIER F. et J.(1991) : L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs, *Recherches en didactique des mathématiques 11/1*, 45-64
- COURIVAUD J. (1991) : Le traitement graphique des images de géométrie, *Repères IREM n°4*
- CROZIER ET FRIEDBERG (1977) : *L'acteur et le système*, Seuil Point Politique.
- DAUBET M. (1986) : *L'organisation de l'espace proche en section des grands de l'école maternelle à partir du pilotage des déplacements d'un robot en langage logo*, Thèse Université de Bordeaux 1, IREM de Bordeaux
- DEGOUYS et POSTIC (1983) : Les représentations des différents partenaires de la relation éducative à l'égard des mathématiques en 6ème, *Revue Française de Pédagogie* 62.
- DIGNEAU J.M. (1980) : *Création d'un code à l'école maternelle, étude d'un saut informationnel*, Mémoire de DEA, IREM de Bordeaux
- DOISE W. et MUGNY G. (1981) : *Le développement social de l'intelligence*, InterEditions.
- DOLLE J.M. (1990) : *Ces enfants qui n'apprennent pas*, Centurion.
- DOUADY R. (1984), *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse Université Paris VII.
- DOUADY R. ET PERRIN M.J.(1989) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational studies in mathematics* 20: 387-424.
- DUROUX A. (1983) : La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit x N°3*.
- ERMEL (1982) : *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle moyen*, tome 3.
- ERMEL (1978) : *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle élémentaire*, tome 1.
- EVAPM (1987) *Evaluation du programme de mathématiques, fin de 6ème*, Publication de l'A.P.M.E.P. n° 66
- EVAPM (1988) *Evaluation du programme de mathématiques, fin de 5ème*, Publication de l'A.P.M.E.P. n° 72
- FELIX L. (1964) : *Initiation à la géométrie*, Classe de 5e, Dunod éditeur.
- FRECHET (1955) : *les mathématiques et le concret*, PUF Paris
- GALVEZ G. (1985) : *El aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano: Una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria*, Tesis, Centro de Investigacion del IPN Mexico.
- GAUD et Coll. (1987) : Apprentissage de la démonstration, *Suivi scientifique cinquième, bulletin inter-IREM premier cycle*, IREM de LYON
- GILES G. (1981) : *School mathematics under examination: Factors affecting the learning of mathematics*. University of Stirling.
- GONSETH F. (1946) : *La géométrie et le problème de l'espace*, éditions du Griffon, Neuchâtel
- GOUTEYRON (1984) : Rapport sur l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée, *Actes du colloque géométrie inter-I.R.E.M. 1985*
- GRECO P. (1978) : Toutes sortes d'espace ou : les positions les figures et le calcul, *Approches psychopathologiques de l'espace et de sa structuration*, P.U.F. Paris.
- GRENIER D. (1988) : *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*, Thèse Université J. Fourier Grenoble 1.
- HALL E.T. (1966) : *La dimension cachée*, Points Seuil, éd. fr. 1971,
- HIGELE P. (1984) : L'apprentissage des opérations projectives, *L'apprentissage de la géométrie du dessin technique*, INRP collection rapports de recherches - 1984 n°9
- ITARD (1964) : Quelques remarques sur la notion d'angle et sur l'angle de contingence, , *Mélanges, Alexandre Koiré*, Hermann
- ITARD J. (1972) : *à propos de l'enseignement des mathématiques*, Essais d'histoire des mathématiques, Librairie scientifique et technique A. Blanchard (1984)
- LABORDE C. (1988) : L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques 9/3*, 337-364.

- LANGE, KOMAN ET AL., ET BISHOP, (1986) : *Studies in mathematics education volume 5*, éd : UNESCO.
- LUCKENBEIN D. et Coll. (1981) : *Genèse et développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte, Description et analyse d'expériences de recherche*, Rapport n°34 avril 1981, ed. Université de Sherbrooke, Canada
- LURCAT L. (1976) : *L'enfant et l'espace, le rôle du corps*, P.U.F., Paris
- LURCAT L. (1984) : *L'activité graphique à l'école maternelle*, E.S.F. Paris
- MANTE (1987) : L'initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme du collège, *Suivi scientifique cinquième, bulletin inter-IREM premier cycle*, IREM de LYON
- MARGOLINAS C. (1989) : *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*, Thèse Université J. Fourier, Grenoble 1.
- MARION ET OVAERT (1980) : Sur l'enseignement de la géométrie au lycée, *Géométrie 1*, GREG IREM de Marseille N° 12
- MARTZLOFF J.C. (1989) : Quelques exemples de démonstration en mathématiques chinoises, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, ed IREM de Besançon et de Lyon, 131-154.
- MERCIER ET TONNELLE (1992) : Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, deuxième partie *Petit X n°29*
- MOLINA C., Thèse en cours, Université de Saragosse
- NIMIER (1989) : *Entretiens avec des mathématiciens*, PU de Lyon
- ORUS (1992) : Le raisonnement des élèves dans la relation didactique. Effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire, Thèse Université de Bordeaux I
- MOTS (1980), *Tome V*, Publication de l'A.P.M.E.P. n° 37
- MOTS (1984), *Tome VII*, Publication de l'A.P.M.E.P. n° 57
- PADILLA SANCHEZ V. (1992) : *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuratifs pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse, Université de Strasbourg I
- PAILHOUS J.(1970) : *La représentation de l'espace urbain*. P.U.F.
- PARZYSZ B. (1989) : *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée*, Thèse Université Paris VII
- PARZYSZ B. (1991) : Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée, *Recherches en didactique des mathématiques 11/2.3*, 211-240.
- PECHEUX M.G. (1990) : *Le développement des rapports des enfants à l'espace*, Nathan université
- PECHEUX M.G. (1980) : Les enfants et les grands espaces, *L'année psychologique 80*, 560-597.
- PERES J. (1984) : *Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage : construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle*. Etudes en didactique des mathématiques, IREM de Bordeaux
- PERES et coll. (1986) : *Utilisation d'une tortue-logo dans une grande section de maternelle*, IREM de Bordeaux
- PERES J. (1988) : *Analyse des modifications des stratégies des enfants dans une situation d'apprentissage*. Actes de l'Université d'été: Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, IREM de Bordeaux
- PIAGET (1957) : *Logique et équilibre*, PUF Paris
- PIAGET (1964) : *Six études de psychologie*, Gonthier Genève
- PIAGET (1977) : *Recherches sur l'abstraction réfléchissante Tome 2 ,L'abstraction de l'ordre et des relations spatiales*, PUF Paris
- PIAGET et INHELDER (1947) : *La représentation de l'espace chez l'enfant*, P.U.F Paris (éd.1977)
- PIAGET et INHELDER (1966) : *L'image mentale chez l'enfant*, PUF Paris
- PIAGET J. INHELDER B. et SZEMINSKA A. (1948) : *La géométrie spontanée de l'enfant*, PUF Paris

- POINCARÉ (1943) : *La science et l'hypothèse*, Flammarion.
- RAMOZZI CHIAROTTINO (1989) : *De la théorie de Piaget à ses applications*, Centurion
- REVUZ et coll. (1966) : Chantiers mathématiques, information des professeurs 1^{er} et 2^e cycles, premier trimestre, M.E.N., I.P.N., R.T.S.
- ROUCHIER (1991) : *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires*, Thèse Université d'Orléans
- ROUCHIER A. (1985) : *Théorème du trajet total et tracé des polygones réguliers : Logo à l'école élémentaire CMI*. Publication de l'IREM d'Orléans
- SALIN M.H. (1980) : *Le jeu : où habite-t-il ?*, Compte rendu de recherches à l'école J. Michelet, Etudes en didactiques des mathématiques, 1980-1981
- SERRES M. (1986) : *Le passage du nord-ouest*, Les éditions de minuit
- SZABO A. et MAULA E (1986) : *Les débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les grecs*, Vrin Paris, p 171-173
- TOURTET L. (1979) : *Chemins de la découverte mathématique*, Armand Colin, 110 et ss
- VERGNAUD (1991) : La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques 10/2.3*, 133-170.
- VERGNAUD et coll. (1988), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, La pensée sauvage.
- VERKERK H. (1990) : *Du dessin au concept de figure : évidence du dessin et argumentations dans le cas du "triangle aplati"*, mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université de Lyon I
- VERMERSCH P. (1979) : la théorie opératoire de l'intelligence appliquée aux adultes, *L'éducation permanente 51*, 2-29
- VON GLASERFELD E (1988), Environnement and communication, *Action group A1*, ICME VI, Budapest
- VURPILOT (1972) : *Le monde visuel du jeune enfant*, P.U.F Paris
- WEILL-FASSINA A. ET RACHEDI Y (1992) Mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation, *Espaces graphiques et graphismes d'espace*, à paraître, La pensée sauvage
- WERMUS H. (1976) : Essais de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles, *Archives de psychologie vol. XIV, n°171 Genève*, 205-221
- WERMUS H. (1978) : Esquisse d'un modèle des activités cognitives, *Dialectica Vol 32, N°3-4, Genève*, 317-338

Manuels d'élèves

- ARDIOT et coll. (1960), *Calcul au cours élémentaire*, classique hachette
- BENOIT et coll. (1986) : *Mathématiques 6ème*, Didier
- BODART G. et BREJAUD (1968) : *Le calcul quotidien Cours moyen 1ère et 2ème année réunies*, Fernand Nathan.
- BONNEFOND et coll. (1990), *Mathématiques Pythagore 5°*, Hatier
- BONNEFOND et coll. (1990), *Mathématiques Pythagore 6°*, Hatier
- COLIN et Coll. (1989) : *Mathématiques CMI*, Nathan
- CLAVIER et coll. (1987) : *Objectif calcul CMI*, Hatier
- CLAVIER et coll. (1988) : *Objectif calcul CE1*, Hatier
- CNED Classe de 3ème, Documents élèves.
- SOUMY et coll. (1985) : *Vivre les mathématiques CP*, Armand Colin
- DELORD et VINRICH (1990) : *Mathématiques en 6ème*, Hachette
- EILLER et coll. (1987) : *Math et calcul CMI*, Hachette
- PERROT et coll. (1989) : *Atout math CP*, Hachette
- SEMENADISSE B et coll. (1990) : *Livre Outil CMI*, Magnard

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	5
--------------------------	----------

PARTIE A : PREMIERE APPROCHE D'UN PROBLEME D'INGENIERIE
--

I. TROIS PROPOSITIONS SUR L'ENSEIGNEMENT	8
II. EXAMEN DE LA PROPOSITION 1.....	9
A. Explicitation de la proposition 1	9
1. A la fin de la scolarité obligatoire, les élèves doivent disposer de connaissances spatiales minimales.	9
2. Pourquoi l'assignation explicite d'objectifs strictement spatiaux à l'enseignement des mathématiques est-il nécessaire ?.....	9
B. Questions rassemblées autour de la proposition 1	9
1. Quels sont les acquis et les déficits de connaissances spatiales repérés à la fin de la scolarité obligatoire ?	9
2. Existe-t-il dans la vie courante des déficits qui justifient de poser un problème d'enseignement ?.....	10
3. Existe-t-il des déficits de connaissances spatiales préjudiciables à l'enseignement obligatoire ou post-obligatoire?.....	10
4. Quelles connaissances spatiales faut-il enseigner en mathématiques au cours de la scolarité obligatoire?.....	11
C. Conclusion	12
III. EXAMEN DE LA PROPOSITION 2	12
A. Explicitation de la proposition.....	12
1. Les connaissances spatiales et les connaissances de géométrie ont-elles des caractéristiques différentes ?.....	13
2. L'enseignement traditionnel de la géométrie ne prend pas en compte de manière explicite ces différences.....	14
3. L'enseignement de ces deux types de connaissances doit être différencié auprès des élèves	14
B. Questions rassemblées autour de la proposition 2	14
1. Quelles sont les caractéristiques pertinentes pour l'enseignement qui différencient les connaissances spatiales et géométriques ?.....	15
2. Faut-il concevoir deux enseignements indépendants?.....	15
C. Conclusion	16
IV. EXAMEN DE LA PROPOSITION 3	16
A. Explicitation de la proposition 3.....	16
B. Questions à examiner pour débattre la proposition 3.....	17
1. Quels sont les principaux concepts géométriques à élaborer spatialement dans la scolarité obligatoire?	17
2. Par quelles situations élaborer les concepts géométriques?	17

3. Quels problèmes spatiaux peuvent permettre d'introduire à la pratique géométrique?	17
4. Comment gérer ces situations dans la classe?	18
5. Quelles progressions mettre en oeuvre?	18
6. Comment communiquer ces situations aux enseignants?.....	18
7. Comment déterminer le coût de ce changement ?.....	18
V. CONCLUSION	18

PARTIE B : PROBLEMATIQUE DIDACTIQUE.....	19
---	-----------

CHAPITRE B-1: LES DEFICITS DE MAITRISES SPATIALES

I. DELIMITATION DU CHAMP DE NOTRE ETUDE.....	21
II. EXEMPLES D'INSUFFISANCE ATTESTEE DE COMPETENCES SPATIALES.....	21
A. Compétences nécessaires à la vie sociale	21
B. Compétences nécessaires à la formation professionnelle	22
1. La lecture et l'utilisation de plans	22
2. L'apprentissage du dessin technique.....	23
C. Compétences nécessaires à l'apprentissage de la géométrie.....	24
1. En ce qui concerne la géométrie plane,	24
2. En ce qui concerne la géométrie dans l'espace,.....	26
III. CONCLUSION	27

CHAPITRE B-2 : LE PROBLEME DE LA DIFFERENCIATION ENTRE L'ENSEIGNEMENT DE L'ESPACE ET L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

I. PROBLEMATIQUE DE LA NATURE DE L'ESPACE	28
II. INSUFFISANCE DE LA PROBLEMATIQUE DE LA NATURE DE L'ESPACE	29
A. Exemple de Frechet	29
B. L'inégalité triangulaire	29
C. Comparaison des deux approches:.....	30
D. Conclusion	32
III. POSITION METHODOLOGIQUE.....	33

CHAPITRE B-3 : CARACTERES PRINCIPAUX DES RAPPORTS SPATIAUX DE L'ELEVE AVEC LE MILIEU

I. INTRODUCTION	36
II. RAPPORTS SPATIAUX EFFECTIFS AVEC UN MILIEU OBJECTIF, RAPPORTS SPATIAUX INTERIORISES AVEC UN MILIEU OBJECTIF EVOQUE:	37
A. Etude d'un exemple.....	37
1. Rapports spatiaux effectifs	37
2. Les rapports spatiaux évoqués avec un milieu objectif.....	38
B. Essai de définition théorique :.....	40
1. Divers niveaux de milieu.....	40

2. Rapports spatiaux effectifs	41
3. Rapport spatial intériorisé avec un milieu objectif évoqué	41
C. Importance du critère effectif/évoqué pour l'analyse des situations	41
Remarque.....	42
III. CARACTERE DIDACTIQUE OU A-DIDACTIQUE DES SITUATIONS.....	43
A. Etude de 2 exemples	43
1. Situation des quadrillages 1	43
2. Situation des quadrillages 2	43
3. Comparaison des situations	44
B. Rapports didactiques, non didactiques, a-didactiques	45
1. Situation non didactique (relative à un savoir).....	45
2. Situation a-didactique (relative à un savoir).....	45
C. Importance du critère "a-didactique" pour l'analyse des situations spatiales.....	46
IV. TYPE DE PROBLEMATIQUE : PRATIQUE, GEOMETRIQUE, SPATIO- GEOMETRIQUE.....	46
A. Exemple de l'inégalité triangulaire	46
B. Exemple de l'aire du triangle.....	48
C. Caractérisation des problématiques	49
1. Problématique de la géométrie	49
2. Problématique pratique.....	50
3. Problématiques de modélisation.....	50
4. Conclusion.....	51
V. CONCLUSION	51
 CHAPITRE B-4 : PROPRIETES DIDACTIQUES DES DIFFERENTS TYPES DE SITUATIONS ENGENDRES PAR CES CARACTERES	
I. INTRODUCTION	52
II. EXAMEN DE DEUX ETUDES DIDACTIQUES.....	52
A. Etude 1 : L'enseignement de la symétrie par D. Grenier.....	52
1. Description des premières situations proposées	52
2. Analyse de ces situations.....	54
3. Conclusion	59
B. Etude 2 : Le triangle aplati.....	59
1. Rappel de la situation.....	59
2. Analyse	59
3. Confrontation avec les observations.....	60
4. Conclusion.....	61
C. Conclusion	61
III. PROBLEMATIQUE GEOMETRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT	62
A. Situations a-didactiques	62
B. Situations didactiques	63
C. Conclusion	63
IV. PROBLEMATIQUES DE MODELISATION SCIENTIFIQUE.....	63
A. Modélisation analogique de l'espace.....	64
1. Activités didactiques, effectives et évoquées	64
2. Activités a-didactiques, effectives et évoquées	69

3. Conclusion	70
B. Modélisation spatio-géométrique.....	71
V. CONCLUSION	74

CHAPITRE B-5 : PHENOMENES DE DIDACTIQUE

I. INTRODUCTION	75
II. PREMIER PHENOMENE: LES CONNAISSANCES SPATIALES UTILES SONT EXCLUES DES PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES.....	76
A. Fait didactique.....	76
B. Explication du fait.....	77
III. DEUXIEME PHENOMENE: LA PERSISTANCE DU REJET DE L'APPRENTISSAGE A-DIDACTIQUE DES CONNAISSANCES SPATIO-GEOMETRIQUES HORS DU TEMPS DIDACTIQUE.....	78
A. Fait didactique:	78
B. Du fait au phénomène	79
1. L'ostension ou présentation ostensive du savoir mathématique	79
2. Résultats de l'étude de l'évolution de l'emploi de l'ostension	79
3. Explication du Phénomène	81
IV. TROISIEME PHENOMENE: LA CONFUSION DU LANGAGE	84
A. Quelques faits	84
1. Remarque:.....	84
2. Dans "les travaux géométriques" présentés par les manuels, sur une même page, un même mot peut être employé dans plusieurs sens.....	84
B. Tentative d'explication	87
C. Confirmations.....	87
1. Exemple 1: La négociation à la baisse sur les exigences de précision	87
2. Exemple 2: L'imprécision du dessin comme moyen de justifier la démonstration	88
3. Exemple 3 L'imprécision de la mesure comme moyen de justifier la démonstration.	89
D. Conclusion	89

CHAPITRE B-6 : LES REPRESENTATIONS SPONTANEEES DE L'ESPACE

I. INTRODUCTION : POURQUOI S'INTERESSER AUX CONNAISSANCES SPONTANEEES DE L'ESPACE ?	91
A. Le contrat didactique usuel.....	91
B. L'analyse des erreurs ou des difficultés relevées dans différentes recherches.....	91
C. Le traitement de ces erreurs et difficultés.....	92
II. QUE SAVONS-NOUS SUR LES CONNAISSANCES SPONTANEEES DE L'ESPACE ?	92
A. Apports de l'école de Piaget.....	92
1. Le développement de la connaissance de l'espace.....	92
2. Spécificités de la prise de connaissance des propriétés spatiales.	94

B. Remises en question de certains résultats piagétien.....	95
1. La hiérarchie parallèle des géométries et des performances spatiales.....	95
2. L'intégration des stades successifs de la pensée spatiale.....	95
3. Relativité des facteurs de développement en fonction des sujets.....	95
4. Conclusion.....	95
C. Propositions de Pêcheux.....	96
D. L'hypothèse de Brousseau et Galvez.....	97
III. L'APPROCHE DE BROUSSEAU ET GALVEZ.....	97
A. Un problème d'enseignement de l'espace.....	97
B. Les résultats.....	98
1. Sur le problème de G. Galvez.....	98
2. Des modèles conceptuels différents selon des espaces de taille différentes.....	98
3. Types d'interaction entre le sujet et le milieu permettant de différencier les trois familles.....	99
IV. DES ESPACES (micro, méso, macro) AUX RAPPORTS SPATIAUX.....	105
A. Première étude expérimentale.....	105
1. Comment apporter la preuve de l'existence des micro-, méso-, et macro-espaces?.....	105
2. Détermination de l'expérimentation.....	105
3. Résultats principaux de l'expérimentation.....	108
B. De l'espace aux représentations pratiques de l'espace par la détermination des rapports spatiaux.....	111
1. Présentation de l'étude.....	111
2. Extrait de l'analyse à priori relative aux concepts de longueur et de distance :.....	112
3. Conclusion.....	113
4. Homogénéisations de l'espace.....	113
C. Nouvelle étude expérimentale.....	114
1. Etude à priori.....	115
2. Observations réalisées et les travaux examinés.....	116
3. Résultats.....	117
4. Conclusion de la deuxième étude expérimentale.....	121
D. L'apport de cette recherche à l'enseignement de la géométrie et de l'espace.....	121
1. La représentation micro-spatiale, outil d'analyse de comportements d'élèves dans les travaux de géométrie.....	122
2. Elaboration d'ingénieries.....	125

CHAPITRE B-7 : QUESTIONS D'INGENIERIE

I. ENSEIGNER LA GEOMETRIE ET/OU L'ESPACE ?.....	126
A. Proposition 1 :.....	126
B. Proposition 2, reformulée :.....	126
1. la primauté spatiale de la problématique pratique.....	127
2. La problématique pratique constitue un obstacle didactique à l'instauration des autres problématiques.....	127

3. Il est nécessaire de distinguer les problématiques auprès des élèves	128
C. Proposition 3, reformulée :	128
1. Introduire, dès l'école primaire, les savoirs géométriques de base comme outils pour résoudre effectivement des problèmes spatiaux.	128
2. Comment le faire ?	128
3. Quand et comment faut-il commencer à articuler la problématique de modélisation avec la problématique géométrique ? Faut-il les différencier auprès des élèves ?	129
II. MODELISER L'ESPACE : LA SITUATION DES DRAPEAUX	130
A. Le scénario de base	130
B. Solutions	130
1. Reconnaissance de la situation comme une particularisation de la situation fondamentale du plan	130
2. Méthodes géométriques ou méthodes "directes"	131
3. Quelles connaissances supposent ces solutions?	131
C. L'élaboration des notions de géométrie par les situations de modélisation spatio-géométrique	132
III. INTRODUIRE A LA GEOMETRIE : LA SITUATION DES MEDIATRICES	133
1. Le scénario	133
2. Analyse comparative avec d'autres situations concernant la démonstration de la même propriété	134
3. Analyse des caractères de ce type de situation didactique :	137
4. Comparaison avec la situation didactique construite par Balacheff (1988) "la somme des angles d'un triangle"	138
5. Comparaison de la situation du triangle aplati avec celle des médiatrices	142
6. Prolongements	142
IV. CONCLUSIONS	142
A. Exploitation du caractère métaphorique de ces situations	142
1. La situation des drapeaux	142
2. La situation des médiatrices	143
B. Etat des réalisations d'ingénierie à l'école primaire	147
1. Problèmes macro-didactiques :	147
2. Problèmes micro-didactiques :	149

PARTIE C : ETUDES EXPERIMENTALES

CHAPITRE C-1 : EVOLUTION DU CONTENU DES PROGRAMMES

POURQUOI CETTE ETUDE?	150
I. ENSEIGNEMENT PRIMAIRE DANS SON ENSEMBLE	150
A. L'apparition de "l'espace"	150
B. Espace et/ou géométrie dans les programmes de mathématiques	151
1. Remarques générales	151
2. Evolution, niveau par niveau, du contenu et des objectifs des programmes :	153

C. Espace et/ou géométrie dans les programmes d'autres disciplines	155
1. Géographie :	155
2. Travail manuel	156
3. Dessin	156
4. Education physique	156
D. Premières conclusions à propos de l'évolution des contenus d'enseignement de l'école élémentaire	157
1. Dans les disciplines non mathématiques	157
2. En mathématiques	157
E. Quels enseignements sur le fonctionnement du système didactique pouvons-nous tirer de l'examen de l'évolution des textes officiels?	157
II. DEBUT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN MATHÉMATIQUES	158
A. Programmes de 1957-60	159
B. Programmes de 1968	160
C. Programmes de 77-78	160
D. Programmes de 86	161
E. Conclusions	162
III. CONCLUSIONS CONCERNANT LA PRISE EN CHARGE PAR L'ENSEIGNEMENT DU DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES SPATIALES DES ELEVES	162
 CHAPITRE C-2 : ETUDE DIACHRONIQUE DE L'UTILISATION DE L'OSTENSION DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE	
I. L'OSTENSION ASSUMÉE	163
A. L'ostension à travers les textes	163
B. L'ostension dans les manuels	164
1. Qu'attendre de l'examen des manuels?	164
2. De quelle manière est réalisée cette ostension active dans les manuels d'avant 70?	165
C. Nouvelle caractérisation des situations d'ostension	167
D. Remarque	168
II. L'OSTENSION DEGUISEE	168
A. Les instructions officielles	168
1. Les I.O. de 77-80	168
2. Les I.O. de 85	169
3. Les instructions du collège de 1986	170
B. Analyse de quelques situations d'enseignement actuelles de l'espace et de la géométrie	170
1. L'enseignement de l'espace pour les enfants les plus jeunes : Des intentions à la réalisation	171
2. Enseignement des connaissances spatio-géométriques à partir du CE1: Etude de quelques propositions de manuels	172
 CHAPITRE C-3 : PROBLEMES "RECTANGLE" et "BANCS"	
I. INTRODUCTION	177
A. Objectifs spécifiques	177
B. Méthode expérimentale	177

C. Choix de la notion.....	177
1. Notion spatiale ou géométrique ?	177
2. Quelles notions géométriques? :.....	178
3. Quelles connaissances sur le rectangle?	178
D. Présentation des études :.....	179
1. Les problèmes "Rectangles"	179
2. Les problèmes "Bancs"	179
3. Identification d'un changement de conception de l'angle droit par l'effet d'un enseignement.n	180
II. LE PROBLEME "RECTANGLE"	180
A. Choix d'une situation spatiale relevant de la notion rectangle.....	180
1. Rapport avec les situations scolaires :	180
2. Conséquences du choix d'une grande taille	182
3. Choix des paramètres de la situation :	183
B. Etude à priori de la situation	184
1. Enoncé des deux problèmes:	184
2. Solutions géométriques.....	184
3. Mise en oeuvre spatiale des solutions.....	184
4. Quelles sont les variables didactiques ?.....	185
5. Situations observées.....	185
C. Résultats attendus :	186
1. Comparaison des observations dans les situations A1 et B1	186
2. Comparaison entre les résultats A2 et B2.....	186
3. Comparaison des résultats de A3 avec les autres	186
D. Observations :	186
1. Population.....	186
2. Organisation.....	187
3. Comportements.....	187
4. Tableau récapitulatif.....	189
5. Commentaires à propos de ces résultats en fonction des caractéristiques des situations.....	190
E. Remarques.....	191
1. Recours aux connaissances de géométrie.....	191
2. Questions de géométrie.....	191
3. L'ambiguïté du langage spatial	191
F. Conséquences sur la détermination de la situation expérimentale.....	192
1. Intérêt de la reprise du premier essai :	192
2. Intérêt de la validation empirique.....	192
3. La position par rapport au milieu extérieur	192
4. Alignement lors des reports.....	192
III. LES PROBLEMES "BANCS"	192
A. Etude a priori de la situation des bancs.....	193
1. Description.....	193
2. Etude à priori des solutions.....	193
3. Effets attendus des variables fixées	196
4. Effets liés à la variation de taille.....	198
B. Le problème "grand banc"	199

1. Conditions générales	199
2. Résultats	200
3. Regroupements d'observations	202
C. Le problème "petit banc"	203
1. Déroulement	203
2. Résultats	204
3. Regroupements d'observations	206
D. Comparaisons entre les résultats des grand et petit bancs	207
1. Solutions observées	207
2. Tableau des principaux traits comparés	209
E. Interprétations	210
1. Les ressemblances attendues et observées	210
2. Les ressemblances inattendues et observées	210
3. Effet de la variable taille	210
4. Conclusions	211
IV. APPENDICE : LE PETIT BANC AU CM1	212
A. Résultats	212
B. Regroupement des résultats aux colonnes 1-4	214
C. Interprétation	214
D. Observations complémentaires	214
1. Longueurs	214
2. Directions	214
CHAPITRE C-4 : LES REPRESENTATIONS PRATIQUES DE L'ESPACE	
I. PRESENTATION DE L'ETUDE	216
A. Identification de représentations	216
B. Rapports spatiaux considérés	216
C. Limites et prolongements	217
II. LES CONCEPTION MICRO-SPATIALES	217
A. L'espace : des objets	217
B. Les formes géométriques	218
C. Le repérage	219
D. Les transformations géométriques	219
E. Longueurs, distances, espacements, épaisseurs	219
F. Périmètre et surface	219
G. Volumes	220
H. En conclusion	220
III. CONCEPTIONS MESO-SPATIALES	220
A. L'espace : des lieux et des objets	221
1. Les lieux	221
2. Les objets	221
3. Les formes d'objets, le parallélisme	222
B. Longueurs, distances, hauteurs, profondeur	222
C. Repérage	223
1. Les directions	224
2. L'orientation	225
D. La ligne droite	225

E. Les angles.....	225
1. Angles de direction.....	225
2. Angles de vue	226
F. Surfaces et aires.....	226
G. Volumes.....	227
H. Transformations géométriques	227
I. Remarque :	227
IV. CONCEPTIONS MACRO-SPATIALES.....	227
A. L'espace : des lieux, des objets, et des trajets	227
B. Repérage.....	228
1. Les lignes droites et les directions.....	229
2. Les angles	229
C. Longueur et distance macro-spatiale.....	229
V. EXEMPLE D'UTILISATION : CARACTERISTIQUES DES INTERACTIONS AVEC LA FEUILLE DE PAPIER	230
A. Caractéristiques micro-spatiales	230
1. L'ensemble de l'espace est sous le contrôle d'un seul coup d'oeil.....	230
2. les "objets" considérés spontanément :.....	230
B. Caractéristiques méso-spatiales	230
1. Les "objets ne sont pas déplaçables (ou très difficilement).....	230
2. l'espace est orienté :	230
3. Le sujet est contraint à se déplacer par rapport à la feuille ou à déplacer la feuille (l'espace entier) par rapport à lui.....	231
4. Le déplacement d'un crayon peut être assimilé à un trajet [Vurpillot (1972)].	231
C. Conclusion	231
 CHAPITRE C-5 : MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DE CONCEPTIONS DIFFERENTES DU REPERAGE DANS UNE ACTIVITE D'ENUMERATION D'OBJETS	
I. SITUATION FONDAMENTALE DE L'ENUMERATION : LE JEU DES TIRELIRES.....	232
A. Description :.....	232
B. Solutions du problème :	233
1. Stratégie de base : S0.....	233
2. 1ère stratégie : S1.....	233
3. 2ème stratégie : S2.....	233
4. 3ème stratégie : S3.....	233
5. 4ème stratégie : S4.....	234
C. Variables didactiques	234
1.- Variable 1 : Utilisation possible ou non du marquage	234
2.- Variable 2 : Nombre d'objets de la collection	234
3.- Variable 3 : Nature de l'espace; micro- ou méso-espace.....	234
II. ORGANISATION DE L'EXPERIMENTATION.....	235
A. La première correspond aux conditions micro-spatiales :	235
B. La deuxième correspond aux conditions méso-spatiales :	235

C. Situation ayant des composantes micro- et méso-spatiales	235
D. Tableau des stratégies	236
E. Prévission de résultats.....	236
1. Situation A : boîtes et allumettes.....	236
2. Situation B : le jeu du facteur	236
3. Situation C : boîtes et haricots.....	236
III. DEROULEMENT ET RESULTATS DE L'EXPERIMENTATION :	237
A. Situation A,	237
B. Situation B : Le jeu du facteur	237
C. Situation C,.....	238
IV. INTERPRETATION ET CONCLUSIONS.....	238
CHAPITRE C-6 : L'ENSEIGNEMENT DES ANGLES AU C.M., ETUDE	
PREALABLE	
I. PERSPECTIVE GENERALE.....	239
II. LE CHOIX DU SUJET	239
A. motivations d'enseignement.....	239
1. L'angle, objet actuel de l'enseignement de la géométrie :.....	239
2. Les difficultés de l'enseignement des angles	239
B. motivations théoriques	241
1. La conception de l'angle comme paire de segments de même origine peut-elle être considérée comme un obstacle cognitif?	242
2. Examen de l'origine possible de cet obstacle.....	242
III. PRESENTATION DU PLAN DE L'ETUDE	243
A. La première phase.....	243
B. La deuxième phase.....	243
C. La troisième phase	243
D. La quatrième phase	243
IV. ANALYSES PREALABLES COMPLEMENTAIRES	244
A. Repères mathématiques	244
1. Repères, non destinés spécialement aux enseignants.....	244
2. Les références professionnelles des enseignants de mathématiques.....	244
B. Les programmes de l'Ecole Primaire et de 6ème-5ème : Evolution et état actuel.....	247
1. Programmes de 1970 (E.P) et 1968 (6ème-5ème).....	247
2. Programmes de 1978-80 (E.P.) et 1977 (6ème-5ème)	247
3. Programmes de 1985 (E.P.), 1986 (6ème-5ème).....	247
4. Remarques	248
V. ELABORATION DU PROCESSUS	248
A. Les contraintes institutionnelles.....	248
B. Introduction.....	249
C. A la recherche d'une situation fondamentale	249
1. Données historiques sur l'émergence du concept	249
2. Les différentes pratiques de références en relation avec une ou des conceptions des angles.....	250
3. Examen de quelques situations :	252

4. Présentation des deux situations étudiées.....	257
5. Conclusion :	258

CHAPITRE C-7 : UN PREMIER PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT DES ANGLES

I. LES OBJECTIFS DU PROCESSUS.....	260
II. DE L'ANGLE A SA MESURE : LES 3 ETAPES DU PROCESSUS.....	260
A. Les quadrilatères articulés	260
B. Reproduction de quadrilatères et introduction d'instruments de report d'angles	260
C. Somme et mesure des angles. Rôle et usage du rapporteur	260
III. ETAPE 1 : LES QUADRILATERES ARTICULES	261
A. Présentation.....	261
1. Description générale des situations a-didactiques.....	261
2. Analyse à priori du problème 1	261
3. Analyse à priori du problème 2 et choix des variables.....	263
B. Description des 3 leçons	266
1. Leçon 1	266
2. Leçon 2	267
3. Leçon 3	269
C. Les conditions de l'observation.....	270
1. Les classes	270
2. La méthode d'observation.....	270
D. Les résultats	272
1. Leçon 1	272
2. Leçon 2 - Leçon 3 phase 2.....	274
3. Leçon 3 Phase 2.....	279
4. L'évaluation individuelle	280
E. Conclusions.....	285
IV. ETAPE 2	285
A. Introduction.....	285
B. Description de la situation a-didactique.....	285
1. Le matériel.....	285
2. Le problème 1	286
3. Le problème 2	286
4. Remarque importante.....	286
5. Les variables du problème 1	286
6. Les variables du problème 2	286
7. Analyse à priori des problèmes.....	287
C. Description des 3 leçons	287
1. Leçon 1	287
2. Leçon 2	289
3. Leçon 3	291
4. Contrôle individuel : Reprise de la situation de communication.....	293
D. Conclusions sur la deuxième étape du processus	294
V. CONCLUSIONS SUR LA REALISATION DES DEUX PREMIERES ETAPES AU CM1	295

VI. ETAPE 3	296
A. Le rapporteur, instrument permettant de repérer la taille d'un angle	296
1. La situation a-didactique.....	296
2. La leçon : Fiche didactique.....	297
3. Résultats de l'observation	298
B. Additivité des angles et somme des mesures	298
1. Fiche didactique.....	298
2. Résultats de l'observation	299
C. Construction de triangles	299
1. Fiche didactique.....	299
2. Résultats de l'observation	300
D. Conclusion de la troisième étape	301
 CHAPITRE C-8 : UN DEUXIEME PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT DES ANGLES	
I. INTRODUCTION	302
A. Les objectifs visés par le processus	302
B. Les objectifs visés par la recherche.....	302
II. SITUATION GENERIQUE	302
A. Le matériel.....	302
B. Le jeu du géométriscrable.....	302
C. Variables didactiques :	303
1. La règle	303
2. Autres variables didactiques de ce jeu.....	304
III. SITUATIONS DIDACTIQUES BATIES AUTOUR DU JEU DU GEOMETRISCRABLE.....	305
A. Première leçon	305
1. Objectifs.....	305
2. Organisation de la classe	305
3. Consignes et déroulement.....	305
B. Deuxième leçon.....	306
1. Objectifs.....	306
2. Organisation matérielle.....	306
3. Consigne et déroulement	306
C. Troisième leçon.....	308
1. Objectifs.....	308
2. Matériel.....	309
3. Consigne et déroulement	310
IV. EVALUATION DES CONNAISSANCES DES ELEVES A L'ISSUE DE LA SERIE DE TROIS SEANCES.	311
A. Les objectifs.....	311
B. Les épreuves.....	311
V. REPRODUCTION DE POLYGONES A L'AIDE DU RAPPORTEUR MUET	312
A. Les caractéristiques de la situation choisie	312
1. Description.....	312
2. Analyse à priori.....	312

B. Les comportements des élèves que nous prévoyons.....	313
VI. RESULTATS DES OBSERVATIONS	313
A. Le jeu du géométriscrabble.....	314
1. Leçon 1	314
2. Leçon 2	314
3. Leçon 3	316
B. Les résultats de l'évaluation	318
1. Introduction.....	318
2. Epreuve 1	318
3. Epreuve 2	318
4. Epreuve 3	319
5. Epreuve 4.....	319
C. La reproduction de pentagones	320
1. Les difficultés rencontrées.....	320
2. Comment expliquons-nous ces difficultés?	321
3. Remarques	321
4. Résultats quantitatifs.....	321
5. Conclusion	322
VII. CONCLUSION.....	322
A. Sur le déroulement du processus	322
B. Sur les objectifs visés.....	323

CHAPITRE C-9 : ETUDE D'UN PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DES PLANS

I. PROBLEMATIQUE.....	324
II. LES SITUATIONS FONDAMENTALES DE LA REPRESENTATION DE L'ESPACE ENVIRONNANT PAR UN PLAN OU UNE CARTE ET LES CONNAISSANCES ASSOCIEES.....	325
A. Dans quels types de situations est-il nécessaire de faire appel à une carte ou à un plan?.....	325
B. Caractéristique commune à ces trois types de situations : La maîtrise de l'orientation.....	326
1. La communication sans plan	326
2. La communication avec plan.....	326
3. En conclusion,.....	326
C. Quelles connaissances supposent la réalisation et l'utilisation d'un plan pour résoudre les deux premiers types de problèmes?	327
1. Les connaissances nécessaires à la réalisation d'un plan.....	327
2. Pour l'utilisateur d'un plan	328
D. Quelles connaissances supposent la réalisation et l'utilisation d'un plan pour résoudre le troisième type de problèmes?	328
III. L'ELABORATION DE SITUATIONS DIDACTIQUES ADAPTEES A L'APPROPRIATION DES CONNAISSANCES MACRO-SPATIALES DE LA PREMIERE CATEGORIE.....	329
A. Introduction.....	329
1. Première condition.....	329
2. Troisième condition.....	330

B. Description de la recherche.....	330
1. Ses objectifs.....	330
2. Situation 1 : Le jeu des formes de couleur.....	330
3. Situation 2 : Le jeu des portes.....	333
4. Evaluation des acquis un an plus tard.....	335
5. Résultats quantitatifs.....	337
IV. CONCLUSIONS.....	338

PARTIE D : RECUEIL DE SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

I. LE DEVELOPPEMENT DES MAITRISES SPATIALES.....	340
A. Problèmes micro-spatiaux pour le cycle 1.....	340
1. Contrôle de l'énumération.....	340
2. Fabrication d'objets répondant à certaines contraintes.....	340
B. Problèmes méso-spatiaux.....	341
1. Contrôle de l'énumération d'une collection de "lieux" (cycle 1).....	341
2. Les positions relatives des objets et des personnes.....	341
3. La coordination des points de vue.....	342
C. Problèmes macro-spatiaux.....	342
1. Les déplacements dans la ville.....	342
2. Les situations.....	344
II. LA MODELISATION DE L'ESPACE.....	349
A. Reproduction de figures planes.....	349
1. La reproduction de figures.....	349
2. Communications de figures (cycle 3).....	350
3. Le biglotron (CE2).....	350
4. Le géométri-scrabble.....	350
5. Le rapporteur (CM2-5ème).....	350
6. Le terrain de tennis (CM-6ème).....	350
7. Les drapeaux (CM2-6ème-5ème).....	350
8. Problèmes "rectangle" et "bancs"(cycle 3).....	350
B. Figures dans l'espace.....	350
1. Reproduction et communication d'assemblages de cubes (CM à 3ème).....	350
2. Dénombrement des faces d'un polyèdre.....	351
3. Du passe-muraille aux projections (CE).....	351
4. Doubler la boîte (CM).....	351
C. Transformations planes.....	351
1. Translation.....	351
2. La symétrie.....	352
3. Homothétie-similitude.....	352
III. L'INTRODUCTION A LA GEOMETRIE DU SECONDAIRE.....	352
IV. CONCLUSION.....	352

CONCLUSION GENERALE

I. LES PROPOSITIONS D'INGENIERIE ET LES QUESTIONS ASSOCIEES.....	353
A. La proposition 1.....	353
1. Des déficits existent relativement aux connaissances spatiales utiles.....	353

2. Un certain nombre de connaissances et de savoir-faire spatiaux utiles sont enseignables.....	354
3. Déterminer les objectifs essentiels.....	354
4. Conditions institutionnelles	355
5. Il reste de nombreuses questions à faire avancer, par exemple :.....	355
B. La proposition 2	355
C. La proposition 3	355
1. La problématique de modélisation de l'espace est incontournable, tant pour les apprentissages mathématiques que scientifiques de la scolarité obligatoire.	356
2. Conditions nécessaires pour introduire les savoirs géométriques de base comme outils de résolution effective de problèmes spatiaux.....	357
3. Différenciation et articulation de la problématique de la modélisation avec la problématique géométrique : Quand ? Comment ?.....	358
D. Les problèmes de la mise en oeuvre de ces propositions	358
1. Conditions institutionnelles de l'enseignement.....	359
2. Des outils pour les enseignants.....	359
3. La formation des enseignants	359
4. La recherche dans les IUFM.....	359
II. LES OUTILS D'ANALYSE.....	360
A. Les différentes problématiques.....	360
1. La problématique de la géométrie	360
2. La problématique pratique.....	360
3. La problématique de la modélisation.....	361
4. Conclusion	361
B. Les représentations spontanées	362
C. Les phénomènes identifiés	362
BIBLIOGRAPHIE	364

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : **Didactique des Mathématiques**

par

BERTHELOT René
&
SALIN Marie-Hélène

-oOo-

**L'enseignement de l'espace et de la géométrie
dans la scolarité obligatoire**

ANNEXES

Thèse soutenue le 7 novembre 1992 devant la Commission d'examen :

MM. R. GAY, Professeur Université Bordeaux I	Président
G. ARSAC, Professeur Université Lyon I	
G. BROUSSEAU, Professeur IUFM d'Aquitaine	
Y. CHEVALLARD, Professeur IUFM Aix-Marseille	
Y. GERBIER, Maître de conférences Université Pau	
J. PERES, Docteur en Sciences de l'Éducation	
G. VERGNAUD, Directeur de recherche CNRS	Examineurs

CHAPITRE B-3

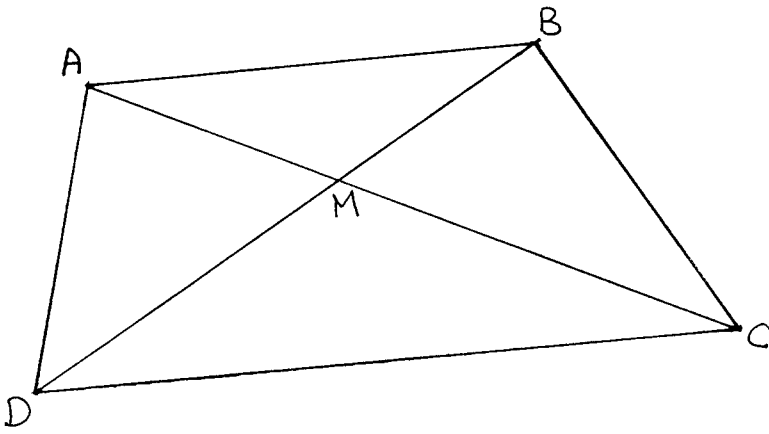
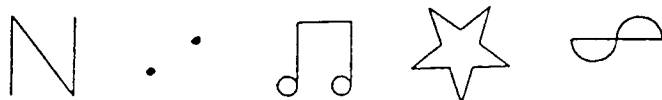
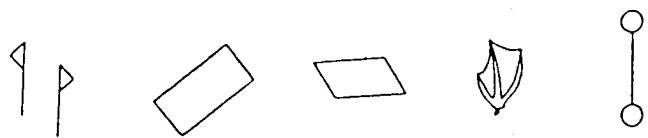
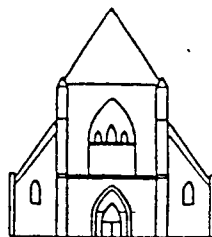
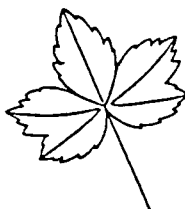
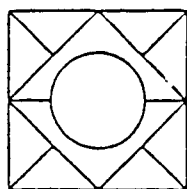


Fig 1.

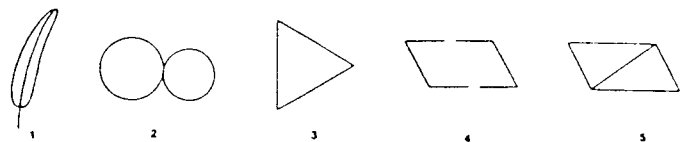
CHAPITRE B-4



Annexe 1.
Grenier 89



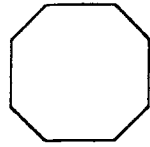
Annexe 2
Grenier 89



Annexe 3
Grenier 89

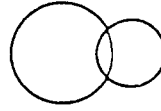
CHAPITRE B-4

groupe de figures 1



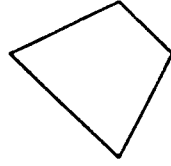
octogone

règle graduée et équerre



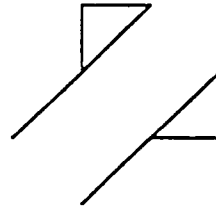
cercles sans leur centre

groupe de figures 2



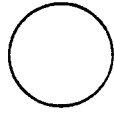
trapeze isocèle

règle non graduée et équerre



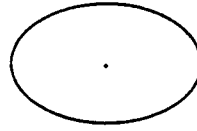
drapeaux

groupe de figures 3



cercle sans centre

règle non graduée et compas



ellipse avec centre

Annexe 4

Cremier 89

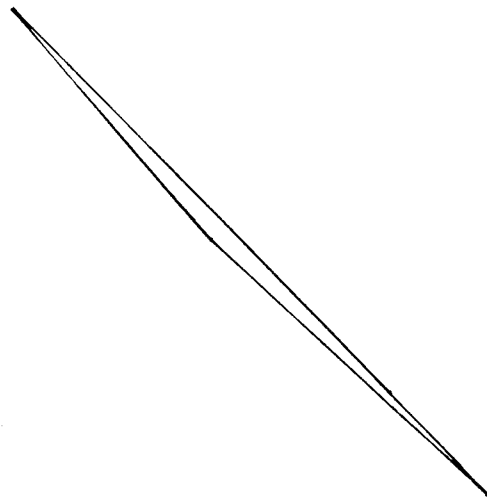


Fig 1

Se repérer sur un plan 1 (Page 20)

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

Confronter les enfants à deux aspects de l'organisation spatiale : se situer les uns par rapport aux autres, se situer par rapport à des repères fixes. Initiation à la notion de plan.

MATÉRIEL

- Une grande feuille de papier.
- Des cubes, étiquettes ou ardoises.
- Un feutre.

ACTIVITÉ PRÉALABLE

Quelques jours avant la séquence proposée ci-dessous demander aux enfants de dessiner leur classe*.
Leur préciser qu'ils devront se dessiner à leur place dans la représentation de la classe.

Les dessins sont ensuite exposés à la vue de tous les enfants qui sont invités à les commenter et à les comparer avec la classe.

Cette activité :

- fait intervenir le vocabulaire lié au mobilier.
- montre la difficulté de dessiner des objets par rapport à soi et des objets par rapport à d'autres objets.
- soulève le problème de l'orientation dans l'espace.
- permet de constater qu'il leur a été impossible de dessiner la classe « en entier », chacun l'ayant réalisée sous un angle différent, souvent lié à la place de l'enfant dans la classe.

* Ce dessin devra se faire soit à l'extérieur de la classe soit à la maison.

DÉROULEMENT

ACTIVITÉ COLLECTIVE

Pour réaliser cette activité réunir les enfants sous le préau ou dans une salle de jeu*.

Placer sur le sol une grande feuille de papier les enfants étant assis autour.

Consigne :

Cette feuille représente le sol de la classe, vous allez essayer d'y placer vos tables et tout le mobilier tels qu'ils sont disposés dans la classe.

Mettre à la disposition des enfants soit des cubes*, des ardoises ou de grandes étiquettes qui représenteront les tables et autre mobilier.

- Dans un premier temps laisser les enfants s'exprimer sans intervenir. Ils doivent découvrir qu'il est nécessaire de placer un premier repère puis de s'orienter par rapport à lui pour situer les autres meubles (ce repère peut être la table d'un enfant ou le bureau, etc...).

* Il est nécessaire qu'ils soient à l'extérieur de la classe ; sinon ils utilisent les repères de la classe sans réaliser qu'ils ne sont pas sur la feuille.

* L'utilisation des cubes permet une réalisation proche de la maquette.

Les enfants doivent apprendre à s'écouter, au fur et à mesure que les idées se confrontent la réalisation s'organise et s'enrichit :

- Au moment de représenter les placards, armoires ou autre mobilier plus grand que les tables, ils découvrent, qu'il est nécessaire d'utiliser plusieurs cubes ou étiquettes.

- La représentation du tableau, situé sur un mur, pose le problème de la représentation des murs, portes et fenêtres qui font intervenir le dessin*.

• Les enfants obtiennent ainsi une « maquette » de la classe. Leur demander de « retrouver leur place » afin de vérifier leur capacité à se situer dans la maquette.

Cette réalisation n'étant pas transportable, que devons-nous faire pour en garder l'organisation ? Les enfants proposent de dessiner le contour des tables et autres meubles*.

• De retour en classe les enfants doivent comparer le « dessin » qu'ils viennent de réaliser avec la classe et apporter des corrections si c'est nécessaire.

Ils doivent de même comparer cette réalisation avec les dessins réalisés précédemment. Ils en concluent que le « dessin » réalisé collectivement permet de faire figurer tous les éléments situés dans la classe et découvrent qu'ils sont vus « d'en haut ».

Leur faire savoir que ce « dessin » s'appelle un plan. Ils ont fait le plan de la classe.

* Traits pour représenter les limites de la classe c'est-à-dire les murs.

* Choisir un enfant habile, capable de réaliser le tracé rapidement.

Se repérer sur un plan 2 (Page 20)

INTENTIONS PÉDAGOGIQUES

Savoir se situer sur une représentation de l'espace classe..

MATÉRIEL

- Le plan réalisé au cours de la séquence précédente.
- Des plans de la classe photocopiés.
- Le livre de l'élève page 20.

DÉROULEMENT

ACTIVITÉ COLLECTIVE

Afficher sur le tableau le plan réalisé par les enfants au cours de la séquence précédente.


- Rappeler ce que représente ce dessin.**
 Désigner les différents éléments contenus dans ce plan.
 Vérifier que chaque enfant est capable de repérer sa place dans le plan de la classe.
- Représenter des déplacements sur ce plan.**
 - Demander à un enfant de quitter sa place pour venir devant le tableau.
 Ses camarades sont invités à décrire puis à représenter* sur le plan ce déplacement.
 - Travailler un nouveau déplacement en demandant à l'enfant qui se déplace d'aller chercher un objet situé au fond de la classe avant de venir devant le tableau.
 - Demander aux enfants de fermer les yeux*. Sur le plan, à l'aide des flèches, représenter rapidement un déplacement puis demander à un enfant* d'exécuter le déplacement et à un autre de le décrire.
 La description du déplacement permet de réinvestir les notions de à droite de, à gauche de, entre, etc.

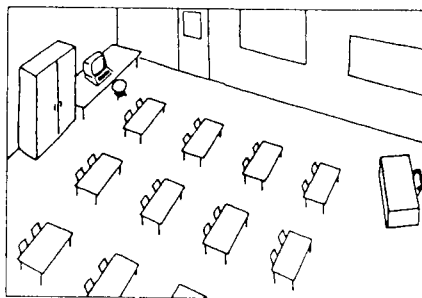
* Utiliser des petites flèches en papier.

* Momentanément !

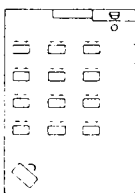
* Les yeux ouverts !!!

ACTIVITÉ INDIVIDUELLE

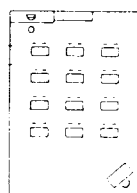
- Distribuer à chaque enfant le plan de la classe photocopié.
Consigne 1 : Écrivez votre nom (ou prénom) en rouge sur l'emplacement de votre table dans le plan. Chaque enfant repère sa place puis écrit son nom.*
Consigne 2 : Voici sur le tableau les noms (ou prénoms) de vos camarades. Vous allez écrire ces prénoms sur les tables qui correspondent aux places de vos camarades. Vous utilisez un stylo bleu. Passer auprès des enfants qui ont encore des difficultés pour s'orienter dans le plan.
- Livre de l'élève page 20.
 • Exercice 1
-  Relie le dessin de la classe et le plan qui lui correspond.



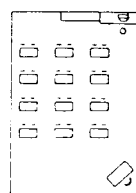
Plan n° 1



Plan n° 2



Plan n° 3



Les enfants réalisent seuls cet exercice.
 Au moment de la correction mettre en évidence les éléments qui permettent de découvrir le plan correspondant au dessin.

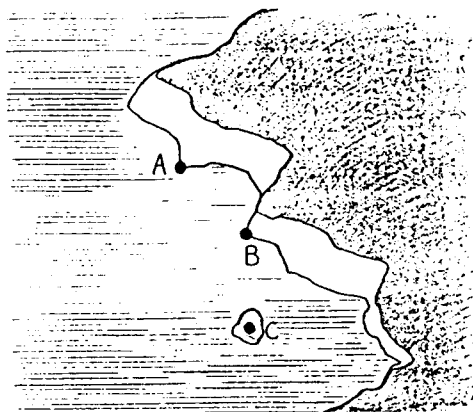
* Prévoir des plans suffisamment grands, les enfants devant y écrire le nom de chacun.

2. Le capitaine naufragé

Didier 6°

Avant que son bateau ne coule, un capitaine a eu seulement le temps d'indiquer par radio qu'il se trouvait à la fois :

- au centre d'un cercle passant par les phares A et B ;
- sur une droite passant par le phare A et parallèle ou perpendiculaire (le radio-récepteur a mal compris le mot) à la droite joignant le phare B au rocher C.



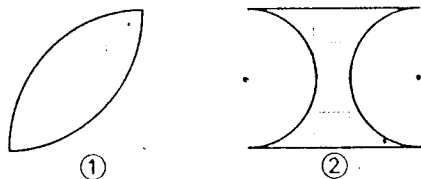
Reproduis ce dessin sur ton cahier à l'aide d'un papier calque et détermine l'endroit où le bateau a coulé.

Pythagore 5°

Pour chacun des exercices suivants :

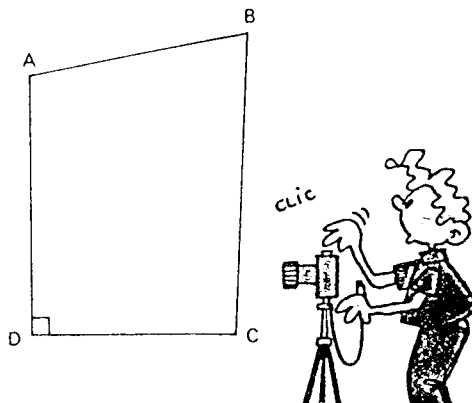
- a) Reproduire les figures (soit en construisant, soit en décalquant).
- b) Construire les axes et centres de symétrie s'ils existent.

50.



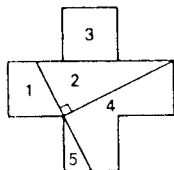
Pythagore 6°

19. Reproduire ce dessin.



Didier 6°

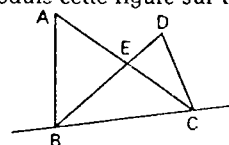
45 Réalise dans une feuille cartonnée la figure suivante et effectue les tracés indiqués ;



Découpe les cinq morceaux numérotés ; tu obtiens ainsi un puzzle avec lequel tu peux construire un carré.

Didier 6°

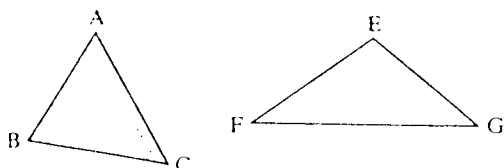
13 Reproduis cette figure sur ton cahier :



- a) Combien y a-t-il de triangles tracés ?
- b) Pour chacun des triangles dont l'un des côtés est [BC], indique :
 - le sommet opposé au côté [BC] ;
 - le côté opposé au sommet B.
- c) Pour chacun des triangles dont un des sommets est A indique :
 - le côté opposé à A ;
 - le sommet opposé au côté [AB].

Pythagore 6°

3. Voici deux dessins de triangles :



Dans chaque cas :

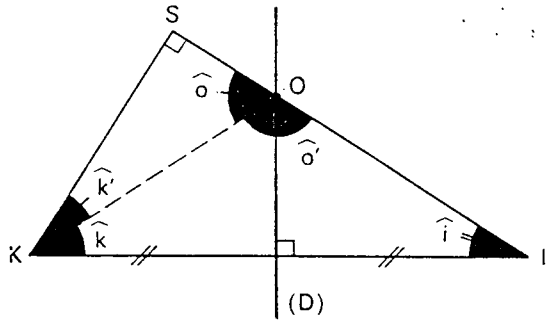
- reproduire un triangle ayant la même forme,
- tracer les hauteurs du triangle.

4. Que constate-t-on ? Qu'appelle-t-on orthocentre d'un triangle ?

Annexe 2

Pythagore 5° p.179

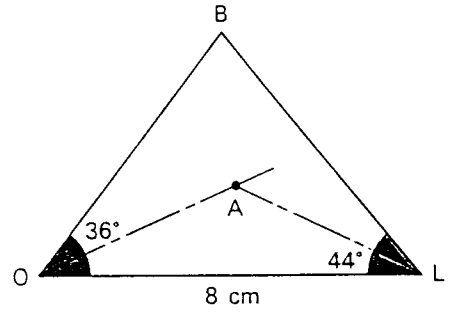
45. a) Construire ce dessin en respectant les instructions :
- KSI est un triangle rectangle en S.
 - $SK = 42 \text{ mm}$,
 - $\text{mes}(\hat{i}) = 32^\circ$,
 - D est la médiatrice de [KI].



- b) Évaluer la mesure des angles : \hat{k} ; \hat{o} ; \hat{k}' ; \hat{o}' , en justifiant les réponses.

Pythagore 5° p.179

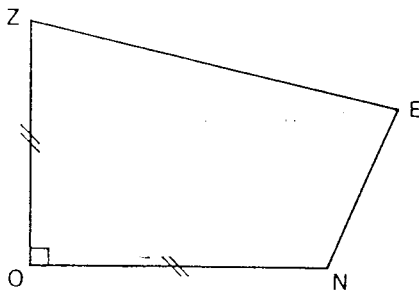
52. Bissectrices d'un triangle



- a) Tracer le triangle BOL.
 b) Construire les bissectrices des angles \hat{BOL} et \hat{BLO} ; elles se coupent en A.
 c) Évaluer les angles du triangle LAO en justifiant les réponses.

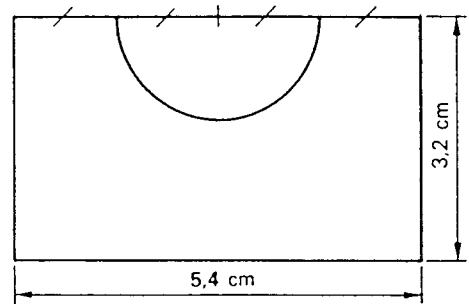
Pythagore 5° p.140

3. Reproduire cette figure en respectant les dimensions suivantes :
 $ON = 3 \text{ cm}$; $NE = 2 \text{ cm}$ et $ZE = 4 \text{ cm}$.



Pythagore 6°

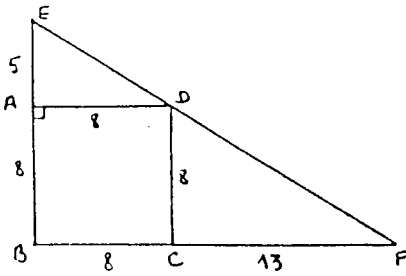
33. Construire cette figure :



CHAPITRE B-5

II - Démontrer :

Exercice autocorrectif n° 1 :



Construire la figure ci-contre en respectant les dimensions indiquées.

Il te semble d'après le dessin que les points E, D, F sont

- 1) Calcule l'aire du triangle BEF.
- 2) Calcule la somme des aires du triangle ADE, du triangle DCF et du carré ABCD.
- 3° Compare les résultats obtenus dans les

questions 1 et 2. Que peux-tu en conclure ?

.....
2) Voir n'est pas suffisant pour affirmer.

Un dessin même minutieux est imprécis.

Il est donc nécessaire de savoir si ce que tu supposes (ce que l'on appelle la **conjecture**) est vrai dans tous les cas et **pourquoi** c'est vrai. La seule façon d'être sûr est de justifier cette conjecture par un raisonnement, c'est à dire **démontrer**.

Une **démonstration** est un enchaînement **rigoureux** de déductions utilisant les définitions, propriétés et énoncés du cours.

Annexe 5

ou sous forme de tableau sur comment répondre à la question "pourquoi?"

Moyens	Avantages	Inconvénients
En observant la figure: ça se voit (la vue)	permet de se faire une idée	Pas totalement sûr (illusions, les tracés ne peuvent être exacts.
En faisant des mesures. (la mesure)	permet de vérifier son idée.	pas totalement sûr (imprécision des instruments de mesure.
En donnant des raisons: je l'ai prouvé, démontre (la logique)	permet d'être sûr de ce que l'on dit.	Il faut connaître les règles et être sûr du point de départ.

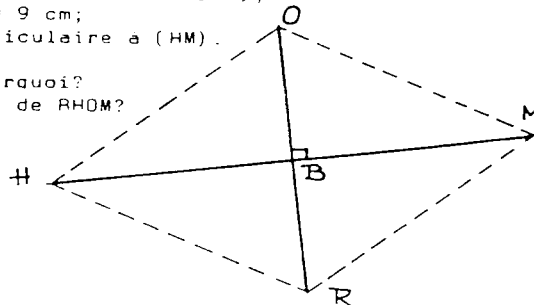
Deux exemples:

EXEMPLE 1:

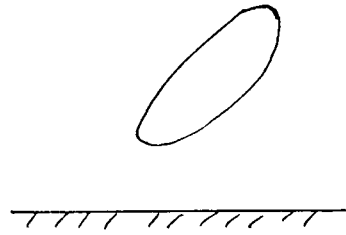
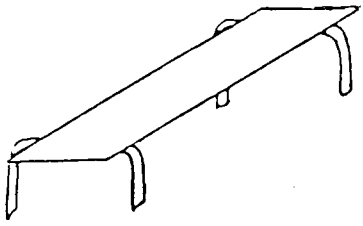
Dessine cinq points A, H, O, M, B de telle façon que:

- B soit le milieu de [AO] et de [HM];
- AO = 5 cm et HM = 9 cm;
- (AO) soit perpendiculaire à (HM).

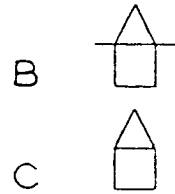
- 1- Que dire de AHOM? Pourquoi?
- 2- Quel est le périmètre de AHOM?



Annexe 1

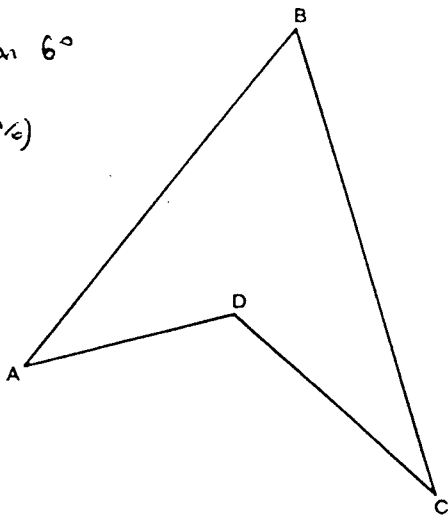


Annexe 2
Vurpillot



Annexe 3

évaluation 6°
91.
(réduction 70%)



En utilisant la règle graduée, mesure en centimètres :

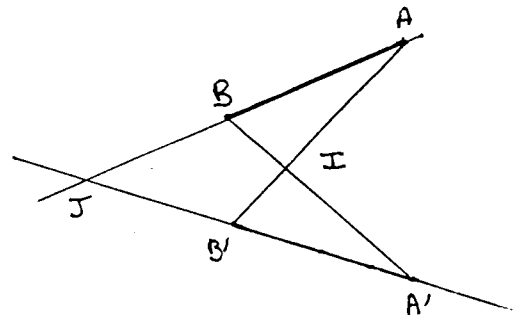
a. la longueur du segment [BC] :

BC = cm

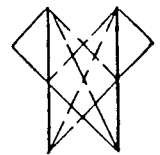
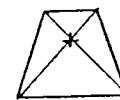
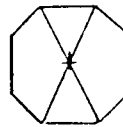
b. la distance du point A au point C :

AC = cm

Annexe 4



Les points de type I sont les suivants :



Les points de type J sont les suivants :

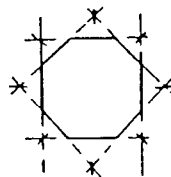


Figure 1

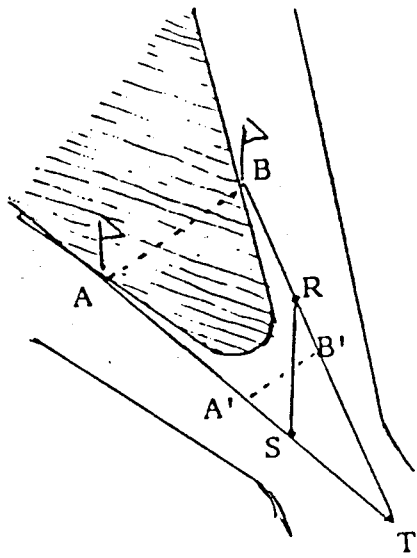


Figure 2

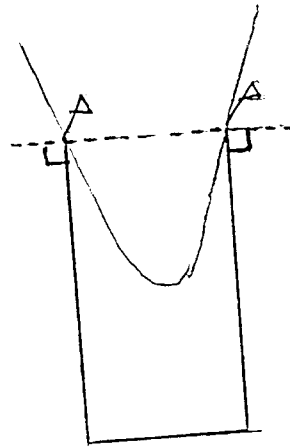


Figure 3

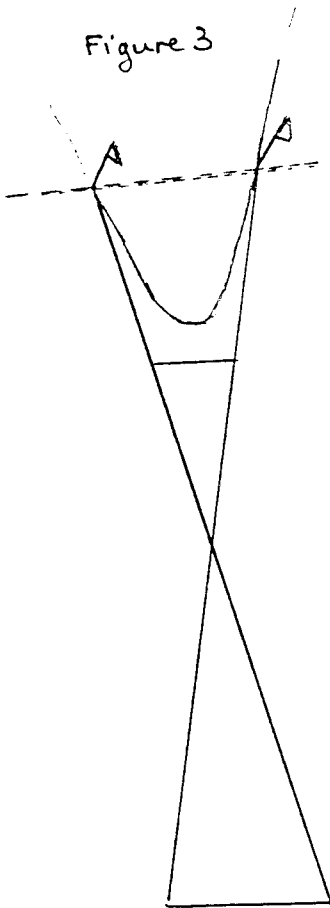
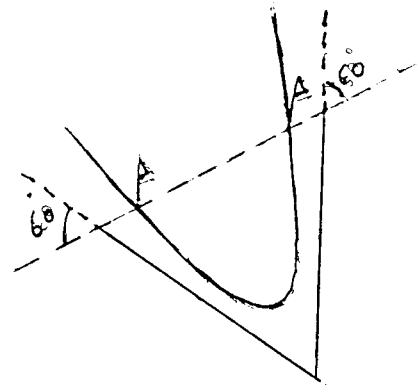
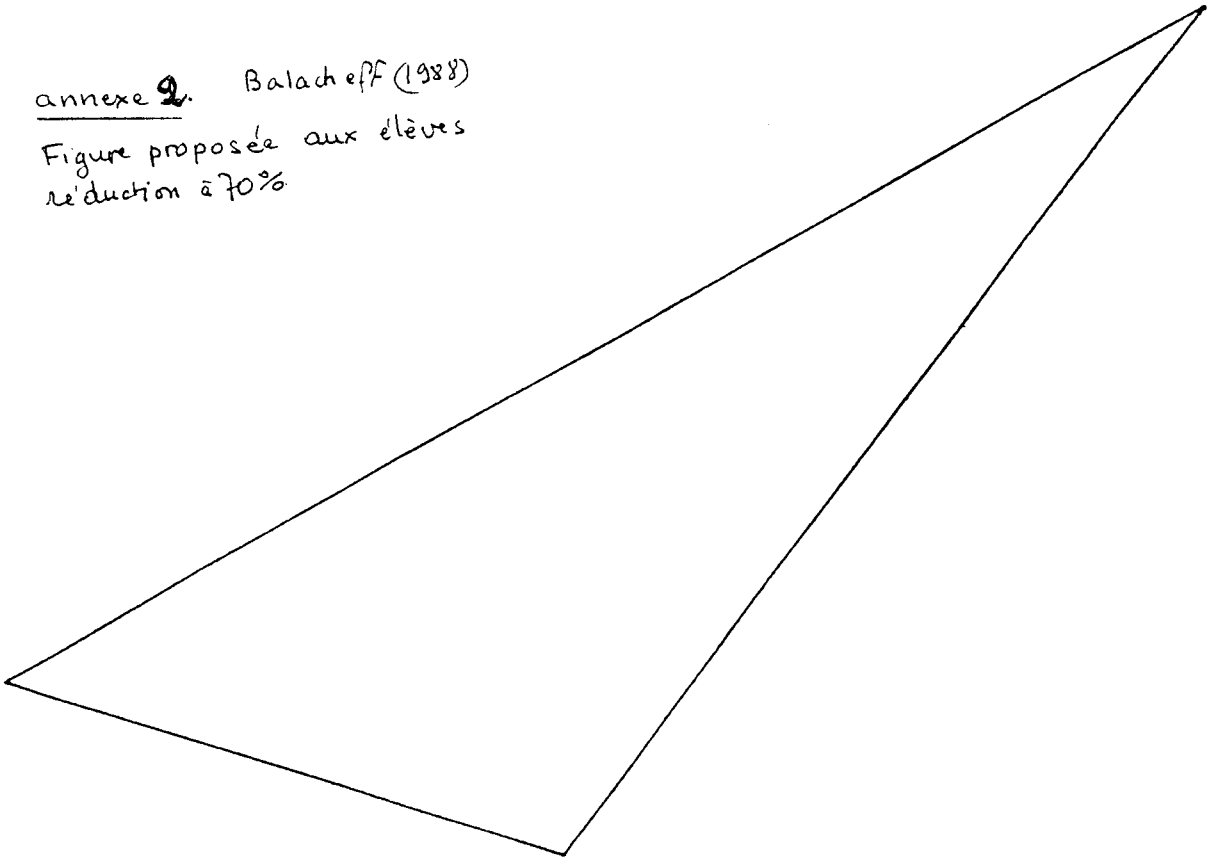


Figure 4

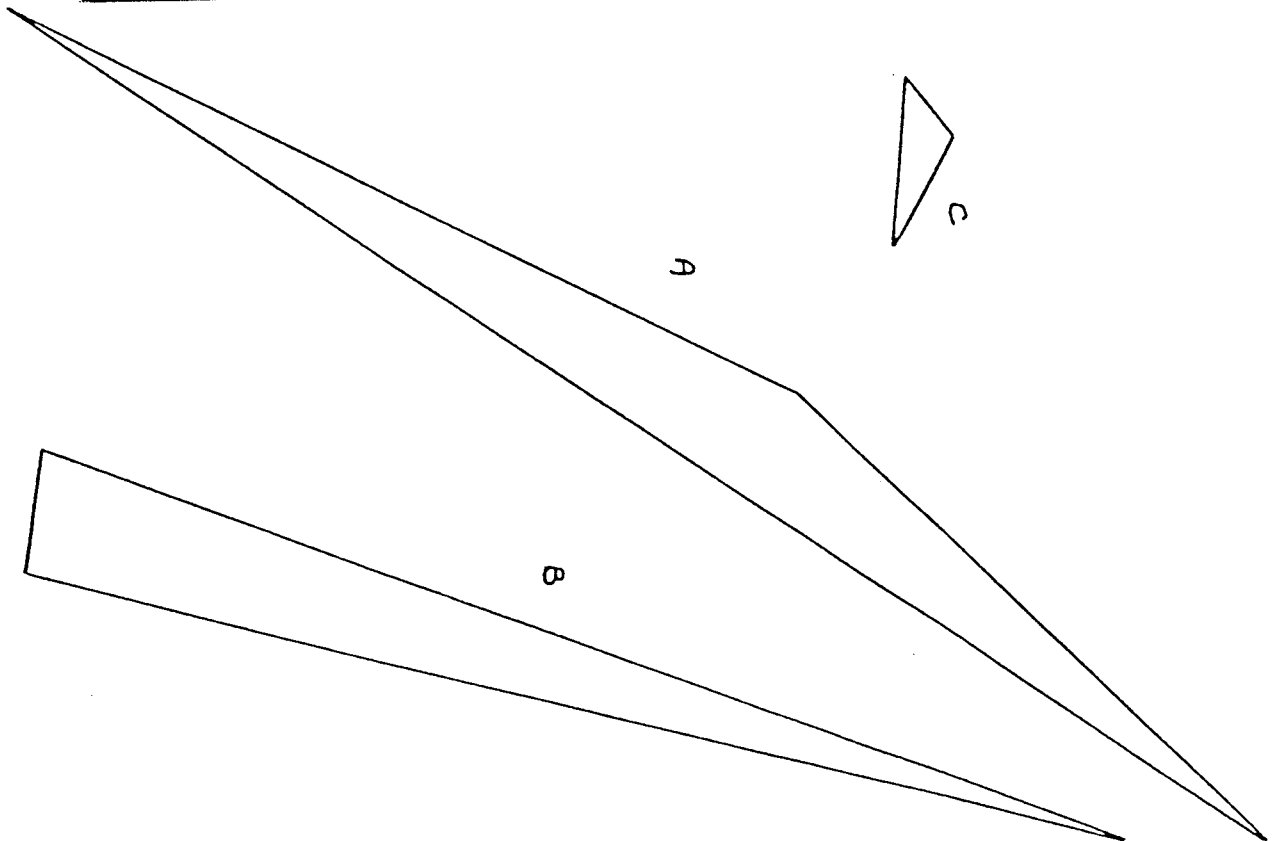


annexe 2. Balacheff (1988)

Figure proposée aux élèves
réduction à 70%



annexe 3.



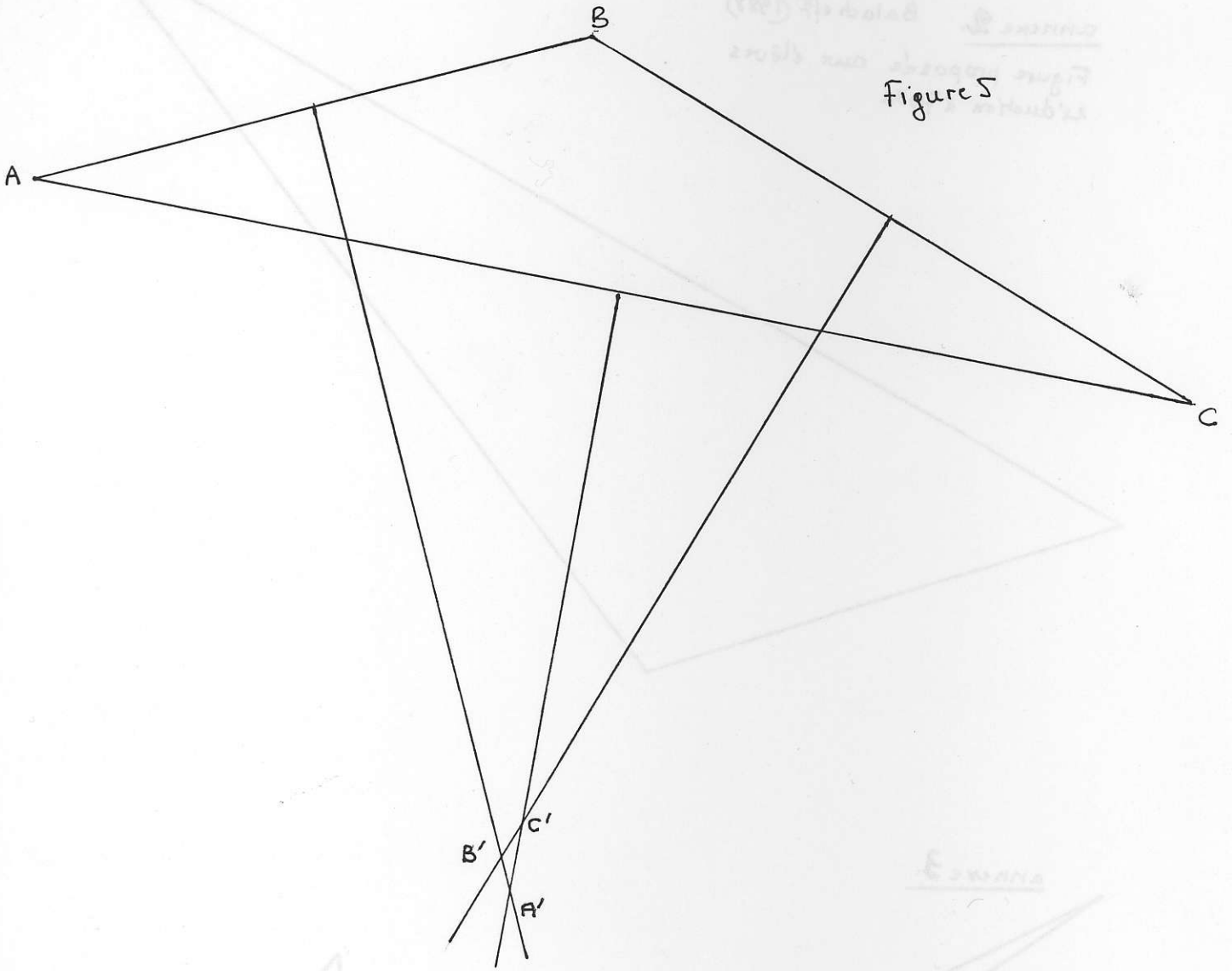


Figure 5



Figure 6

Notes

Pour M. Hélène SALIN et René BERTHELOT

sur un Cours de Géométrie de L. FELIX

par G. BROUSSEAU

○ Dans un petit manuel pour la classe de 5ème intitulé "Initiation à la Géométrie", publié en 1964 chez DUNOD, Lucienne FELIX propose une introduction remarquable, très originale et que je trouve très intéressante pour un didacticien.

Pour avoir longuement discuté avec l'auteur à l'époque où il rédigeait ce texte, je sais qu'il lui apparaissait autant comme un manifeste d'innovation que comme un simple manuel, aussi je voudrais souligner quelques-unes des idées qu'il contient. Il n'était pas adéquat à l'époque de publier ou même d'écrire ce genre de commentaires didactiques que des développements scientifiques ultérieurs ont rendu recevables.

○ Très clairement le souci de l'auteur est d'introduire auprès de jeunes élèves

- un corps de connaissances,
- un corps organisé cohérent
- et qui soit utile aux activités, aux manipulations et aux constructions.

Cette triple ambition est commune à tous les auteurs de manuels de géométrie, mais l'avant-propos met bien en évidence qu'il s'agit d'une initiation au raisonnement, (mais non toutefois de l'utilisation d'une logique déjà formée).

L'innovation la plus importante apparaît dès la première page du manuel: le premier objet immédiatement introduit est *la distance de deux points dans le plan*.

D'autre part des caractères propres à certains textes de cette époque sautent aux yeux:

- le mode d'introduction, très axiomatique
- la présentation, très formelle, et très complexe (écriture fonctionnelle des distances et même d'un cercle noté $C(A,r)$, symboles classiques d'égalité, d'inégalité, d'appartenance, d'implication, d'équivalence, et même un symbole maison pour la correspondance biunivoque

- l'accent mis sur le métalangage, en particulier logique.

Le didacticien ne peut qu'être frappé par la complexité (sémantique, syntaxique, lexicale, culturelle, et même calligraphique) du message puisqu'il comprend en même temps:

- des déclarations sur les objets mathématiques à enseigner (plan, points, distance, cercle, rayon, sphère), sur leurs relations et sur leurs propriétés (appartenance, cercles congruents, cercles concentriques...)

- des remarques mathématiques sur ces relations elles-mêmes, (qu'est-ce qu'une relation d'équivalence, réflexivité, symétrie, transitivité, correspondance biunivoque, correspondance bijective...)

- ainsi que de nombreux termes de logique (affirmation, proposition, réciproque, contraposée, définition...).

L'ensemble du message est d'une nouveauté, d'une complexité et d'un débit d'information qui peuvent paraître extravagants si on oublie les conventions éditoriales acceptées à l'époque pour cette collection par Georges Dunod et Lichnérovicz: Il s'agit de suggérer des éléments d'une réforme en cours à des professeurs supposés habiles, et l'ouvrage communique une axiomatique sous-jacente à une méthode à mettre au point. Cette convention était aussi celle qui présidait à la publication de mon livre pour le C.P.

○ Laissons de côté ces questions. L'élève apprend très vite que son compas lui permet de comparer des distances et de tracer des cercles (qui partagent le plan en trois parties: le cercle, son intérieur, et son extérieur). L'étude des positions relatives de deux cercles (ou plutôt d'un cercle fixe avec des familles de cercles concentriques lui fait distinguer divers cas, le plus intéressant étant celui où les deux cercles ont exactement un point commun.

La droite $d(A,B)$ est alors définie comme l'ensemble des points de tangence des couples de cercles (tangents) centrés respectivement en A et B.

Autrement dit trois points A,B et C sont alignés (dans cet ordre) si $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$

L'auteur passe très rapidement à la présentation des autres objets dont il a besoin (structure algébrique et topologique de l'ensemble des distances etc..régionnement du plan, axiomes du pliage... (page 15)

Mais arrêtons-nous sur les propriétés physiques, cognitives et didactiques de la droite ainsi définie. Cette analyse n'est pas exposée dans le texte initial.

1. Comment tracer effectivement une droite $(A B)$ en suivant une telle définition?

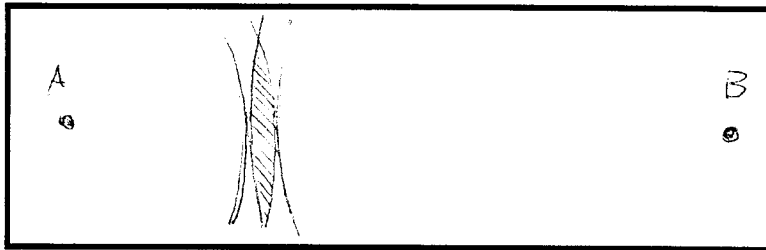
a) commençons par déterminer un point C, n'importe lequel, de ceux qui se trouvent *entre* A et B: Il faut choisir un rayon r *inférieur* à $d(A,B)$ et tracer le cercle de centre A et de rayon r . Il faut aussi *déterminer* la longueur $r' = d(A,B) - r$.

Le seul moyen théoriquement à la disposition des élèves est à ce moment là de calculer cette différence et de la réaliser avec le compas, le long de la règle graduée unique et non déplaçable qui définit l'application mesure pour la distance de deux points.

Bien sur il paraîtrait bien plus commode de déplacer la règle le long de A,B et de déterminer d'un coup les deux rayons r et r' en choisissant directement une valeur sur la règle et en déterminant le point C correspondant. Pourtant le fait que C puisse être déterminé sans lecture ni calcul des nombres montre que la règle est utilisée de façon illicite: Elle matérialise directement un ensemble de points qui se trouve être une partie de la droite (A,B).

Il faut transporter seulement la longueur r' et tracer le cercle de centre B et de rayon r' .

La Géométrie, en tant que théorie, dit que l'on n'obtient qu'un seul point C, mais cette déclaration paraît singulièrement contraire à l'observation de la figure. Deux cercles tangents semblent posséder en commun toute une zone lenticulaire.



-ou bien on est prêt à admettre qu'il n'y a qu'un seul point et on est bien incapable de dire lequel,

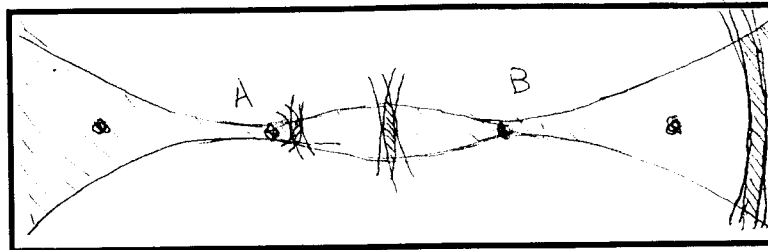
-ou bien on doit constater que de nombreux points et non pas un seul satisfont concrètement la condition.

Ainsi le choix de cette définition correspond aux plus mauvaises conditions physiques qui soient pour déterminer un point.

En fait la position de C sur le segment AB est connue de façon aussi précise que par toute autre méthode puisque la zone d'incertitude a le diamètre d de la pointe du crayon. Par contre sa position sur la perpendiculaire au segment est beaucoup ^{plus} incertaine: la zone est une sorte de lentille de diamètre l , d'autant plus allongée que les rayons sont plus grands et que le crayon est plus épais

C'est donc essentiellement la position du segment qui est incertaine.

b) Pour obtenir l'ensemble des points tels que C il faudrait recommencer l'opération qui donne alors une sorte de *barre* de largeur l variable. Elle est plus étroite en A et en B, plus large vers le milieu et devient beaucoup plus large dès qu'on s'éloigne à l'extérieur du segment AB.

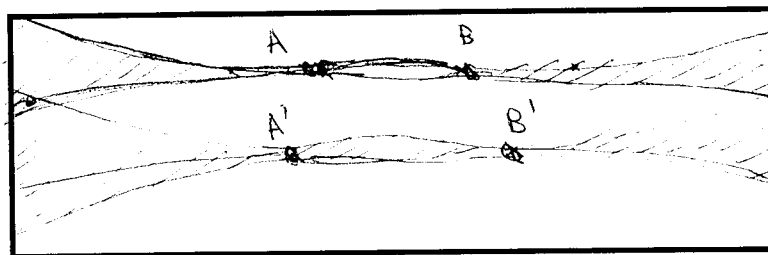


2. Comment conjecturer dans un tel "modèle"?

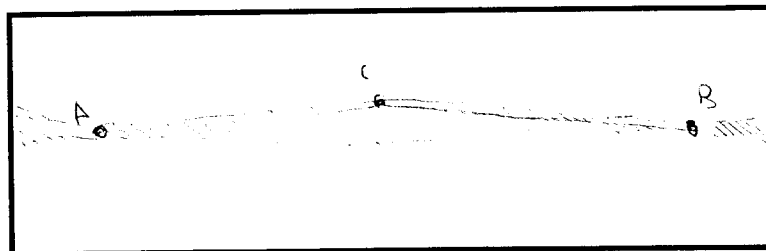
La droite concrète qui correspond à notre définition a une allure curieuse, parfois tout à fait impropre pour guider l'élève empiriquement vers une conjecture probable.

Par exemple:

- deux *barres* parallèles se rejoignent elles où non? Ou plus exactement existe-t-il des barres qui n'ont aucun point commun?



- tel point est-il aligné avec deux autres ou non?



Impossible de s'en remettre à la figure qui n'apporte que des renseignements métriques ou topologiques grossiers: il faut **raisonner**, et seulement avec l'aide des axiomes ou des définitions.

Rien n'est évident!

a) Dans la géométrie classique du triangle il est fréquent de démontrer des propriétés évidentes à l'aide d'autres qui le sont moins. De plus les démonstrations d'alignement sont toujours complexes et tortueuses au début: il faut montrer par exemple que des angles sont égaux ou supplémentaires... Les élèves et les professeurs sont alors sans cesse tentés de s'en remettre à la contingence et aux figures aussi bien pour préciser les conditions topologiques des objets qu'ils étudient (ce point est toujours aussi négligé) ^{que} pour guider leurs "intuitions" ou pour s'assurer de la valeur de leurs hypothèses.

Dans ces conditions la nécessité de raisonner passe mal auprès des élèves et la curiosité intellectuelle pour les questions de géométrie s'en ressent. L'accumulation d'informations sur le modèle prend le pas sur la façon de les obtenir.

b) Au contraire avec l'axiomatique que nous propose L. FELIX dans son petit livre, cette attitude n'est plus possible. De plus les raisonnements pour s'assurer de la colinéarité de trois points sont beaucoup plus simples, du moins au début puisqu'il s'agit de comparer des longueurs et des sommes de longueurs. Le choix de cette axiomatique a augmenté la nécessité et diminué la difficulté des démonstrations

Il est alors plus facile de présenter aux élèves quels sont les "vrais objets" dont s'occupe la géométrie et leur position par rapport aux représentations iconiques et aux figures, quel est le travail du géomètre, pourquoi il doit rejeter la figure au rang des accessoires quand il veut construire une connaissance de nature géométrique, et comment il doit y revenir pour d'autres usages.

Précisons que ces conditions sont assez fugitives, la droite devient bien vite ce que l'on obtient directement avec une règle et que l'ouvrage se concentre alors sur la géométrie elle-même. Précisons aussi qu'il contient bien d'autres idées intéressantes et excitantes.

○ **B**ien sûr, pour mettre en scène une telle relation au savoir, il aurait fallu préciser bien des conditions didactiques, inventer des situations particulières, et que sais-je, impossibles à préciser à cette époque (et hélas bien oiseuses encore aujourd'hui) mais l'idée était contenue dans l'axiomatique choisie.

Je ne sais pas si quelqu'un a utilisé effectivement ces leçons de la façon que j'imagine, mais j'aurais aimé essayer. Je crois qu'il aurait été intéressant de discuter de façon familière, concrète et utile, avec les élèves de ces questions d'épistémologie au moment où ils s'ouvrent au savoir.

Ce désir impossible à satisfaire a été pour beaucoup dans les recherches et les réflexions d'ingénierie que j'ai poursuivies par la suite.

Parmi toutes les conclusions que vos travaux récents ne manqueront pas de vous faire tirer de cet exemple, je voudrais souligner l'importance de l'instrument mathématique et axiomatique dans la détermination des conditions didactiques des situations d'enseignement.

Talence le 4 août 1992

CHAPITRE C-1

Tableau 1

Mathématiques

Cycles	1882-1887	1923	1945
CP (Classe enfantine)	Choix d'exercices Froebel évitant les nomenclatures techniques, les définitions et l'excès de détail dans l'analyse des formes géométriques.	Rien	Rien
CE	<p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>Simplex exercices pour faire reconnaître et désigner les figures régulières les plus élémentaires: carré, rectangle, triangle, cercle. Différentes sortes d'angles. Idée de 3 dimensions. Notions sur les solides au moyen de modèles en relief. Exercices fréquents de mesure et de comparaison des grandeurs par le coup d'oeil. Appréciation approximative des distances et leur évaluation en mesures métriques.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>Dessiner et reconnaître les figures les plus élémentaires: triangle, rectangle, carré, cercle. Notion d'angle. Idée de la nature des surfaces rectangulaires par quadrillage. Notions sur les solides au moyen de modèles en relief. Mesure des longueurs: apprécier des distances par l'oeil et contrôler par la mesure directe.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Calcul</u></p> <p>Etude des figures géométriques simples par tracés, découpages et pliages. Carré, rectangle, quadrillage, triangle régulier, cercle. Angle droit et demi-angle-droit. Usage de la règle, du double décimètre, de l'équerre (à 45°). Observation d'un cube. Exercices pratiques de mesure de longueurs en m et en cm.</p>

Tableau 1

Mathématiques

1970	1977-1980	1985
<p style="text-align: center;">Rien</p>	<p>E.M.: construire peu à peu les notions d'espace et de temps.</p> <p>CP: <u>Se situer dans l'espace et l'organiser.</u></p> <p>a) Se situer: - position relative d'objets par rapport à soi-même, à un ou plusieurs repères ou les uns par rapport aux autres. - déplacements, itinéraires, parcours selon les conventions. - utilisation de quadrillages et tableaux: repérage.</p> <p>b) Reconnaître des formes et figures simples. - courbes et domaines: intérieur, extérieur. - pavages, mosaïques, puzzles</p> <p>c) Organiser: - pliages, découpages - successions régulières, frises - jeux de construction, d'emboîtement.</p>	<p>E.M.: Progressivement, l'enfant découvre et construit des relations spatiales. Il saisit sa propre position dans l'espace; il perçoit et représente la position d'un objet par rapport à un ou plusieurs autres; il appréhende, nomme, représente des formes et des itinéraires.</p> <p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>.Repérage dans l'espace (les objets par rapport à soi) .Déplacement de l'élève et construction d'itinéraires en tenant compte de contraintes .Utilisation des quadrillages, diagrammes, tableaux. .Reconnaissance et organisation des formes et des figures simples: courbes et domaines: intérieur, extérieur, rosaces, frises, pavages, mosaïques, puzzles. .Tracés à la règle</p>
<p><u>Exercices d'observations et travaux sur des objets géométriques.</u> Tracés, découpages, pliages. Cubes, carré, rectangle, triangle. Quadrillages.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Activités géométriques</u></p> <p>Manipuler, classer, construire, agencer des solides divers. Manipuler, classer, construire, agencer des figures planes diverses (lignes ou surfaces) Savoir utiliser pliage, découpage, papier quadrillé, papier calque, règle, équerre, compas, bande de papier et autres instruments de dessin pour étudier, construire ou reproduire des figures planes.</p> <p style="text-align: center;"><u>Repérer et mesurer</u></p> <p>Savoir repérer les cases ou les noeuds d'un quadrillage et savoir utiliser les repérages dans des activités diverses.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>.Repérage des cases ou des noeuds d'un quadrillage; utilisation de ces repérages. .Reproduction, description, représentation (à l'aide de procédés conventionnels) et construction d'objets géométriques (solides, surfaces, lignes); - manipulation et classement des objets physiques. - utilisation des instruments: papier calque, papier quadrillé, règle, équerre, compas, gabarit. - mise au point des techniques de reproduction et de construction: calque, pliage, découpage, patrons de solides. - utilisation d'un vocabulaire géométrique et d'une syntaxe logiquement articulée. Application à des objets géométriques des transformations ponctuelles (symétrie, translation).</p>

Tableau 2

Mathématiques

Cycles	1882-1887	1923	1945
CM	<p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>Etude et représentation graphique au tableau noir des figures de géométrie plane et de leurs combinaisons les plus simples.</p> <p>Notions pratiques sur le cube, le prisme, le cylindre, la sphère, sur leurs propriétés fondamentales; applications au système métrique.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>Etude intuitive et représentation par le dessin des figures de la géométrie plane. Notions sommaires sur la représentation des longueurs, sur les plans et cartes à une échelle donnée.</p> <p>Notions pratiques sur les solides géométriques (cube, prisme droit). Notions sommaires sur leur représentation géométrique (croquis côté).</p> <p>Cercle. Sa division en degrés.</p> <p>Carré, hexagone régulier, triangle régulier inscrit dans le cercle.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Calcul</u></p> <p>Notions d'angle droit, de droites perpendiculaires, de droites parallèles. Usage de la règle, du double décimètre gradué en millimètres, de l'équerre. Cercle et circonférence. Usage du compas (<i>du rapporteur gradué de 5 en 5 degrés</i>). <i>Tracé et étude sommaire du triangle régulier et de l'hexagone régulier.</i></p> <p>Notions très simples sur les échelles des plans et des cartes.</p> <p>Travaux pratiques sur le cube et sur le parallépipède rectangle (<i>travaux sur les prismes droits et le cylindre de révolution</i>).</p> <p>N.B.: les parties en italique sont facultatives.</p>
Cours supérieur Fin d'études	<p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>Notions sommaires sur la géométrie plane et la mesure des volumes.</p> <p><u>Pour les garçons:</u> Application aux opérations les plus simples de l'arpentage. Idée du nivellement.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>Notions très sommaires de géométrie plane. Circonférence: sa division en 400 grades. Opérations les plus simples de l'arpentage. Notions très élémentaires servant aux exercices de dessin géométrique.</p>	<p>F.E. <u>Arithmétique</u></p> <p>5-) Echelles des plans et des cartes. Représentation figurée des grandeurs. Graphiques des variations dans le temps de ces grandeurs. Construction et interprétation.</p> <p style="text-align: center;"><u>Géométrie</u></p> <p>1-) La ligne droite et le segment de droite. Angles. Angle droit et droites perpendiculaires. Droites parallèles. Figures géométriques simples. Cercle. Secteur et arcs. Mesures des angles. Latitude et longitude d'un lieu. Polygones réguliers simples inscrits dans un cercle.</p> <p>2-) Tracés usuels à la règle, à l'équerre et au compas se rapportant à ces notions. Usage du rapporteur.</p> <p>3-) Initiation au croquis côté. Levé et lecture d'un croquis.</p>

Tableau 2

Mathématiques

1970	1977-1980	1985
<p><u>Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.</u> Bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangle. Disque, cercle. Pavé (parallépipède).</p>	<p><u>Activités géométriques</u> .Savoir: Pour différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes): -les reproduire -les décrire et les représenter -les construire à partir d'une description ou d'une représentation. Pour quelques objets géométriques, construire les transformés par des transformations ponctuelles simples (par exemple: la figure symétrique, par rapport à une droite, d'une figure donnée). . A cet effet: Choisir et utiliser un instrument. Mettre au point ou utiliser des techniques de reproduction. Mettre en oeuvre des procédés permettant d'identifier et de construire des parallèles, des perpendiculaires. Reporter une distance, un angle.</p>	<p><u>Géométrie</u> .Reproduction, description, représentation et construction de différents objets géométriques (solides, surfaces, lignes) .Application à des objets géométriques des transformations ponctuelles (translation, symétrie, rotation): - utilisation des instruments: papier calque, papier quadrillé, règle, équerre, compas, gabarit. - mise au point des techniques de reproduction et de construction: report de distances; reproduction, agrandissement ou réduction d'un dessin fait sur fond quadrillé; tracé de parallèles ou de perpendiculaires .Utilisation d'une syntaxe logiquement articulée et d'un vocabulaire géométrique: cube, arête, sommet, face, sphère, boule, triangle, quadrilatère, parallélogramme, rectangle, losange, carré, côté, diagonale, cercle, disque.</p>

Tableau 3

COMPETENCES 91		
	MATHEMATIQUES	COMPETENCES TRANSVERSALES CONSTRUCTION DES CONCEPTS FONDAMENTAUX D'ESPACE ET DE TEMPS
CYCLE 1	<p><u>Structuration de l'espace</u></p> <p>L'enfant doit pouvoir:</p> <ul style="list-style-type: none"> .se situer et se repérer dans l'espace; .coder et décoder un déplacement; .situer, repérer et déplacer des objets par rapport à soi ou par rapport à des repères fixes. 	<p>Au cours d'explorations d'espaces de plus en plus étendus et nombreux, dans des durées diversifiées, l'enfant:</p> <ul style="list-style-type: none"> .se situe dans un espace donné (classe, cour, rues, quartier...) .sait parcourir un itinéraire simple .se donne des repères et les code .se situe dans le temps proche .situe les événements de la vie quotidienne .exprime le temps et l'espace (temps des verbes, adverbes, vocabulaire approprié)
CYCLE 2	<p><u>Géométrie</u></p> <p>L'enfant doit être capable:</p> <ul style="list-style-type: none"> .de reproduire et décrire quelques solides simples (ex, le cube) .de reproduire et d'écrire quelques figures simples (carré, rectangle, triangle). .d'utiliser quelques techniques (calque, pliage, découpage) et quelques instruments (règle, équerre, gabarit). 	<p>L'enfant repère et traduit les notions d'espace et de temps qu'il a commencé à rencontrer au cours du cycle des apprentissages premiers:</p> <ul style="list-style-type: none"> .il se situe dans le passé proche, le futur proche. .il connaît différents calendriers... .il commence à réaliser des représentations simples de l'espace familier, puis d'un espace plus abstrait, éloigné d'une expérimentation concrète, il peut s'y situer
CYCLE 3	<p><u>Géométrie:</u></p> <p>L'élève doit être capable:</p> <ul style="list-style-type: none"> .de reproduire, de décrire et de construire quelques solides usuels et quelques figures planes (cube, parallépipède rectangle, carré, rectangle, losange, parallélogramme, cercle, triangle) .de les identifier dans une figure complexe .de reconnaître les axes de symétrie d'une figure plane, de compléter une figure plane par symétrie axiale ou translation .d'utiliser des outils usuels tels que papier calque, papier quadrillé, règle, équerre, compas, gabarit d'angle pour construire quelques figures planes ou solides. .d'appliquer quelques techniques usuelles de tracé (par exemple des parallèles et des perpendiculaires à l'aide de l'équerre et de la règle...). .d'utiliser à bon escient le vocabulaire précis donné par le programme. 	<p>Au cours de ce cycle, l'enfant doit s'entraîner à passer de l'espace et du temps <i>vécus</i> à l'espace et au temps <i>pensés</i>.</p> <p>Il peut mettre les 2 concepts en relation (exemple: temps mis pour parcourir une distance donnée).</p> <p>Il commence à:</p> <ul style="list-style-type: none"> .gérer son temps .comparer la représentation, à des échelles différentes, d'une même réalité; passer d'une échelle à l'autre, passer d'une représentation à une autre; .distinguer le temps linéaire (...) du temps répétitif.

Tableau 4
Géographie: extraits

Cycles	1887	1923
CP (Classe enfantine)	Causeries familiales et petits exercices préparatoires servant surtout à provoquer l'esprit d'observation chez les enfants en leur faisant simplement remarquer les phénomènes les plus ordinaires, les principaux accidents du sol.	<u>Leçons de choses</u> Exercices et entretiens familiaux ayant pour but de faire acquérir aux enfants les premières connaissances usuelles (la droite et la gauche; les jours les mois, les saisons; le nord, le sud, l'est, l'ouest), les animaux et surtout de les amener à observer, à comparer, à questionner.
CE	Suite et développements des exercices du premier âge. Les points cardinaux, non appris par coeur mais trouvés sur le terrain, dans la cour, dans les promenades, d'après la position du soleil. Exercices d'observation. Explication des termes géographiques. Préparation à l'étude de la géographie par la méthode intuitive et descriptive: 1-) La géographie locale 2-) La géographie générale (la terre, sa forme, son étendue...) Idée de la représentation cartographique: éléments de la lecture des plans et des cartes. Globe terrestre: continents et océans. Entretiens sur le lieu natal.	Exercices d'observation: l'horizon, les accidents du sol, les points cardinaux. Préparation à la connaissance d'une carte: plan de la classe, de la maison, de la rue, de la commune, etc... Explication des termes géographiques les plus usités. La terre: sa forme, ses divisions. Notions très sommaires sur la géographie de la France.
CM	Géographie de la France et de ses colonies. Géographie physique. Géographie politique. Exercice de cartographie au tableau noir et sur cahier, sans calque.	La France et ses colonies
Cours supérieur	Révision et développement de la géographie de la France. Géographie physique et politique de l'Europe. Géographie plus sommaire des autres parties du monde. Les colonies françaises. Exercices cartographiques de mémoire.	L'Europe. Les grands pays du monde. Révision de la géographie de la France et de ses colonies.

Tableau 4

suite

1945	1977-1980	1985
Rien	<p><u>Activités d'éveil</u></p> <p>Domaine des sciences sociales et humaines. Approche de la dimension géographique de la notion d'espace: itinéraires dans le village, le quartier, les environs et leur représentation schématique; les distances;</p>	<p>.Observation et description d'espaces familiers; comparaison avec des espaces plus éloignés. .Premières analyses de paysages...</p>
<p>Les leçons seront conçues comme devant initier l'enfant à l'observation et la compréhension des grands faits géographiques et de leur vocabulaire usuel: points cardinaux, etc... Observation du milieu local et explication de gravures; Les plans de la classe, de la maison, de la rue, de la commune, de la ville serviront d'initiation à la compréhension d'une carte.</p>	<p><u>Objectifs spécifiques au domaine des sciences sociales</u></p> <p>- de l'ordre du savoir faire: Utiliser à bon escient, à l'occasion d'activités (d'enquête ou d'exploration) les outils, les instruments et techniques qui contribuent à la collecte des informations, au compte rendu des résultats. ... Tracé de croquis, lecture élémentaire de plans et de cartes à grande échelle (orientation, légende, évaluation de distances, à l'exclusion de l'utilisation mathématique de la notion d'échelle) ...</p>	<p>.étude de l'environnement immédiat, comparaison avec d'autres cadres de vie... .localisation de ces divers lieux et milieux sur la carte, la planisphère et le globe.</p>
<p>Géographie Initiation à la notion d'échelle et à la cartographie.</p>	<p>Objectifs généraux: .mieux se situer dans l'espace et le temps Objectifs spécifiques:localiser sur de plans, cartes, atlas, globe terrestre, photos aériennes, des exemples caractéristiques des réalités ainsi étudiées.</p>	<p>1) La Terre -Présentation de la planète. -Localisation des grands ensembles de population et des principaux états. -situation de l'Europe et de la France. -...</p>

Tableau 4bis

COMPETENCES GEOGRAPHIE 91
<p>Cycle 1</p> <p>Rien</p>
<p>Cycle 2</p> <p>L'enfant doit être capable:</p> <ul style="list-style-type: none">.de décrire son environnement immédiat, de prendre des repères et de s'orienter;.de construire et d'utiliser un plan simple avec sa légende, d'employer un vocabulaire précis relatif à quelques éléments de géographie physique et humaine (...);.de repérer amont, aval, rive droite, rive gauche;.de connaître les différences essentielles de son milieu avec les autres grands milieux en recourant à des comparaisons..de repérer des éléments des milieux étudiés sur des photographies aériennes, des plans;.de situer les milieux étudiés sur des cartes, un globe, une planisphère.
<p>Cycle 3</p> <p>L'élève doit être capable de:</p> <ul style="list-style-type: none">.lire la légende d'une carte;.situer sur un globe ou une planisphère les continents, les océans et les principaux milieux géographiques;.de situer les principaux états sur des cartes à différentes échelles, une planisphère, un globe;.de situer sur des cartes à différentes échelles les principales régions et les grandes métropoles de la France;.de repérer par les points cardinaux:<ul style="list-style-type: none">- la position d'un point par rapport à l'observateur- la direction d'un axe (rue, rivière, etc...);.de lire une photo en tenant compte de l'angle de vue (horizontal, oblique, vertical) et en distinguant si nécessaire les différents plans;.d'identifier et de décrire les paysages français à partir de photographies et de cartes à différentes échelles, en utilisant un vocabulaire géographique simple et adapté;...

1884 Travail manuel

1923 Travail manuel

1945 Devisin au travail manuel

1881 Devisin de dessin

1923 Dessins

C Construction d'objets de carton : sage revêtu de dessins colorés et de papier de couleur. Travail. Papier, colle, ciseaux, fil de fer et du bois; ciseaux. Modélage ornements simples d'architecture. Notions sur les outils les plus usuels.

F 1° Exercices de marquage : alphabets et chiffres au point et marquage. Couture usuelle. 2° Couture usuelle : a) Révision des premiers exercices; b) point de piqure, point de boutonnière; couture simple, couture en surjet, couture rabattue, fond de fil, courtes piqures, boutons. Exercices et pose de boutons. Exercices : crochet à main.

E 1° Exercices combinés de dessins et de modélages; croquis cotés d'objets à exécuter et construction ou vice versa d'après les croquis. Étude des principaux outils employés au travail du bois. Exercices pratiques gradués. Rablage, sciage des bois, assemblages simples, boîtes clouées ou assemblées sans pointes, tour à bois, étude des modèles d'objets très simples. Emploi de l'outil dans le travail des exercices de limage, ébarbage ou finissage d'objets bruts de forge ou venus de fonderie.

Cours
Séparés

Garçons.
1. Reprise des figurations géométriques planes. Décomposition des figures, relations entre leurs éléments. Représentation et exécution en carton de solides géométriques. Développement. 2. Préparation à la vie courante : détacher un étiquette, réparer un livre, confectionner un carnet, etc. Travaux libres à la maison ou en classe : découpage à la scie, façonnage de silhouettes d'animaux, de pièces à assembler par collage ou pointage. Menus objets (carton, bois, corde, fil de fer). Révision d'appareils simples pour exercices et expériences scientifiques. Technologie : notions sur les outils usuels.

Filles.
1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons. 2. Alphabets et chiffres au point de marquage sur grosse étamine. Couture usuelle. — Couture simple, couture en surjet, couture rabattue en droit fil, ourlet piqué; pièces à un coin au point de surjet. Raccommodege. — Reprise sur tricot. Tricot. — Maille à l'endroit; maille à l'envers. Applications (craie-collé). Crochet. — Continuation des exercices précédents. Applications : petits jupons.

Garçons.
Continuation des exercices inscrits au programme du cours moyen. Confection de menus objets à l'aide de matériaux d'usage courant. Appareils pour démonstration (bobinage, montages électriques simples). Maintienement des outils les plus usuels : réparations diverses, menus travaux d'entretien. Technologie. Notions sur les matières d'œuvre, outils, machines. Visites d'ateliers et d'usines. Si l'école possède un atelier, construction, sur croquis et épures, d'objets utilisables.

A. Garçons.
1. Reprise des figurations géométriques planes. Décomposition des figures, relations entre leurs éléments. Représentation et exécution en carton de solides géométriques. Développement. 2. Préparation à la vie courante : détacher un étiquette, réparer un livre, confectionner un carnet, etc., etc. Travaux libres à la maison ou en classe : découpage à la scie, façonnage de silhouettes d'animaux, de pièces à assembler par collage ou pointage. Menus objets (carton, bois, corde, fil de fer). Réalisation d'appareils simples pour exercices et expériences scientifiques. Technologie : notions sur les outils usuels.

B. Filles.
1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons. 2. Alphabets et chiffres au point de marquage sur grosse étamine. Couture usuelle : couture simple, couture en surjet, couture rabattue en droit fil, ourlet piqué, pièces à un coin au point de surjet. Raccommodege. Reprise sur tricot. Tricot. — Maille à l'endroit, maille à l'envers. Applications (craie-collé). Crochet. — Continuation des exercices précédents. Applications : petits jupons.

A. Garçons.
Continuation des exercices inscrits au programme du cours moyen. Confection de menus objets à l'aide de matériaux d'usage courant. Appareils pour démonstration (bobinage, montages électriques simples). Maintienement des outils les plus usuels : réparations diverses, menus travaux d'entretien. Technologie : notions sur les matières d'œuvre, outils, machines, visites d'ateliers et d'usines. Si l'école possède un atelier, construction, sur croquis et épures, d'objets utilisables.

Filles.
1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons. 2. Alphabets et chiffres au point de marquage sur grosse étamine. Couture usuelle : couture simple, couture en surjet, couture rabattue en droit fil, ourlet piqué, pièces à un coin au point de surjet. Raccommodege. Reprise sur tricot. Tricot. — Maille à l'endroit, maille à l'envers. Applications (craie-collé). Crochet. — Continuation des exercices précédents. Applications : petits jupons.

A. Garçons.
Continuation des exercices inscrits au programme du cours moyen. Confection de menus objets à l'aide de matériaux d'usage courant. Appareils pour démonstration (bobinage, montages électriques simples). Maintienement des outils les plus usuels : réparations diverses, menus travaux d'entretien. Technologie : notions sur les matières d'œuvre, outils, machines, visites d'ateliers et d'usines. Si l'école possède un atelier, construction, sur croquis et épures, d'objets utilisables.

B. Filles.
Couture usuelle. Couture rabattue, fronces, bordage, pli. Applications variées. Raccommodege : reprise sur étoffe, pièce à un coin, en surjet et en couture rabattue. Applications : réparation de vêtements. Tricot, crochet : confection d'objets simples, polo, bétel, etc.

Dessins, au crayon noir ou aux crayons de couleur, d'objets usuels simples, d'échantillons empruntés aux récipients animal et végétal. Dessins de mémoire. Dessins explicatifs des leçons de choses, des récits d'histoire, etc. Dessins illustrés. Arrangements décoratifs élémentaires. Dessins libres faits hors de la classe (crayon, pastel, eau-forte, etc.). Modélage. Dessin géométrique. Croquis cotés.

Dessins faits en classe d'après les modèles : a) Objets usuels; b) Animaux ou végétaux; c) Moulés vivants vêtus. Arrangements décoratifs. — Dessins et croquis de mémoire. — Dessins libres faits hors de la classe (crayon, pastel, eau-forte, etc.), notamment illustration des devoirs. Modélage. Dessin géométrique. — Croquis cotés.

Dessins faits en classe d'après les modèles : a) Objets usuels; b) Animaux ou végétaux; c) Moulés vivants vêtus. Arrangements décoratifs. — Dessins et croquis de mémoire. — Dessins libres faits hors de la classe (crayon, pastel, eau-forte, etc.), notamment illustration des devoirs. Modélage. Dessin géométrique. — Croquis cotés.

Solomon
Elyonki
CP

4° Travail manuel.
Découpage et application de pièces de papier de couleur sur des dessins géométriques.
Combinaison en laine de couleur sur le cahiers ou le papier.

Petits exercices de tissage, pliage, trassage, découpage et pliage de papier sur des mesures données.
Petits éléments de la tapisserie, exercices sur canevass, en laine ou coton de couleur.
Crochet : étude de la maille, au gros crochet de bois ou d'os. — Application des exercices d'objets usuels très simples, tels que cache-nez, petits jupons, fichus, etc.
Pour la confection d'objets très simples, on utilisera les matériaux qui peuvent fournir les renseignements (paille, laine, etc.).

Découpage de cartons que l'on groupera de manière à représenter des nombres ou à former des arrangements décoratifs.
Petits exercices de tissage, pliage, tissage (jone, maille, raffin, papier, etc.), pliage, découpage et collage de silhouettes sur papier.
Confection d'objets et de jouets variés.

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Crochet. — Etude de la maille (crochet d'os), chaînette, barreille. Confection d'objets très simples : cache-nez de poupée, jarretières, etc.

1. Exercices à l'appui de l'enseignement de l'arithmétique, de la géométrie, du dessin.
Figurations géométriques à l'aide de bandellettes de papier de couleur.
Vérification concrète des propriétés des figures géométriques par la superposition et l'assemblage de ces figures ou de leurs éléments.
2. Préparation à la vie courante : couture des boutons, faire un paquet, couvrir livres et cahiers, etc.
Confection d'objets divers.

Garçons

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Eléments de couture usuelle. — Point devant, point arrière, point de côté, point de surjet, point de piqûre. Exercices sur canevass et grosse toile. Application à des objets très simples (mouchoir, serviette, essu-mains, etc.).
Etude du point de marque sur canevass. Applications.
Raccommodeage. — pose de boutons et d'agrafes.
Tricot. — Etude collective de la maille. Applications simples avec deux aiguilles de bois.
Crochet. — Confection de cache-nez.

Filles

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Eléments de couture usuelle. — Point devant, point arrière, point de côté, point de surjet, point de piqûre. Exercices sur canevass et grosse toile. Application à des objets très simples (mouchoir, serviette, essu-mains, etc.).
Etude du point de marque sur canevass. Applications.
Raccommodeage. — pose de boutons et d'agrafes.
Tricot. — Etude collective de la maille. Applications simples avec deux aiguilles de bois.
Crochet. — Confection de cache-nez.

Découpage de cartons que l'on groupera de manière à représenter des nombres ou à former des arrangements décoratifs.
Petits exercices de tissage, pliage, tissage (jone, paille, raffin, papier, etc.), pliage, découpage et collage de silhouettes sur papier.
Confection d'objets et de jouets variés.

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Crochet. Etude de la maille (crochet d'os), chaînette, barreille. Confection d'objets très simples : cache-nez de poupée, jarretières, etc.

1. Exercices à l'appui de l'enseignement de l'arithmétique, de la géométrie, du dessin.
Figurations géométriques à l'aide de bandellettes de papier de couleur.
Vérification concrète des propriétés des figures géométriques par la superposition et l'assemblage de ces figures ou de leurs éléments.
2. Préparation à la vie courante : couture des boutons, faire un paquet, couvrir livres et cahiers, etc.
Confection d'objets divers.

A. Garçons.

1. Exercices à l'appui de l'enseignement de l'arithmétique, de la géométrie, du dessin.
Figurations géométriques à l'aide de bandellettes de papier de couleur.
Vérification concrète des propriétés des figures géométriques par la superposition et l'assemblage de ces figures ou de leurs éléments.
2. Préparation à la vie courante : couture des boutons, faire un paquet, couvrir livres et cahiers, etc.
Confection d'objets divers.

B. Filles.

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Eléments de couture usuelle : point devant, point arrière, point de côté, point de surjet, point de piqûre. Exercices sur canevass et grosse toile. Application à des objets très simples (mouchoir, serviette, essuie-mains, etc.). Etude du point de marque sur canevass. Applications.
Raccommodeage : pose de boutons et d'agrafes.
Tricot : étude collective de la maille. Applications simples avec deux aiguilles de bois.
Crochet : confection de cache-nez.

1° Premieres sections. — Livres crayonnés. Silhouettes et alignement au moyen de calques, briques, bâtonnets, lettres, jokers, cailloux, boutons, etc. Essais de copies de lettres combinées.
2° Livres crayonnés. — Livres par semaine, sur cahier pour permettre de constater les progrès. Découpage de lettres, symboles, bordures, etc. Copie de lettres, comme précédemment.
3° Copie en noir ou de préférence en couleur de ces combinaisons. Petits dessins symétriques. Découpage de papiers de couleur et trassage. Copie d'objets très simples, de jouets enfants. Copies de tous genres. Modelage.

1. Exercices à l'appui de l'enseignement de l'arithmétique, de la géométrie, du dessin.
Figurations géométriques à l'aide de bandellettes de papier de couleur.
Vérification concrète des propriétés des figures géométriques par la superposition et l'assemblage de ces figures ou de leurs éléments.
2. Préparation à la vie courante : couture des boutons, faire un paquet, couvrir livres et cahiers, etc.
Confection d'objets divers.

Dessins au crayon noir ou aux crayons de couleur, d'objets très simples placés sous les yeux des élèves.
Dessins de mémoire, d'après des objets précédemment dessinés.
Dessins libres, d'après les leçons de choses ; devotifs illustrés de français, d'histoire ou de géographie.
Dessins libres faits hors de la classe.

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Eléments de couture usuelle : point devant, point arrière, point de côté, point de surjet, point de piqûre. Exercices sur canevass et grosse toile. Application à des objets très simples (mouchoir, serviette, essuie-mains, etc.). Etude du point de marque sur canevass. Applications.
Raccommodeage : pose de boutons et d'agrafes.
Tricot : étude collective de la maille. Applications simples avec deux aiguilles de bois.
Crochet : confection de cache-nez.

Exercices manuels destinés à développer la dextérité de la main.
Découpage de carton-carbone en forme de solides géométriques ; assemblage de divers éléments de ces solides ; reproduction de modèles géométriques et d'objets très simples.

Eléments de couture usuelle : point devant, point arrière, point de côté, surjet. — Etude du point de marque sur canevass ; ligne droite, ligne oblique, ligne brisée. — Application méthodique aux lettres de l'alphabet en commençant par les premières. Exercices de raccommodeage : reprises sur canevass ou grosse toile. Exercices récapitulatifs des divers points de couture sur pièces dessinées. — Applications pratiques à des objets très simples, tels que mouchoir, serviette, essuie-mains, etc.
Tricot : étude collective de la maille (bandes dessinées). — Applications : jarretières, manchettes, etc.
Coudre et à des points usuels. Applications : brassières, chemises, etc.

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Eléments de couture usuelle : point devant, point arrière, point de côté, point de surjet, point de piqûre. Exercices sur canevass et grosse toile. Application à des objets très simples (mouchoir, serviette, essuie-mains, etc.). Etude du point de marque sur canevass. Applications.
Raccommodeage : pose de boutons et d'agrafes.
Tricot : étude collective de la maille. Applications simples avec deux aiguilles de bois.
Crochet : confection de cache-nez.

1. Exercices empruntés au programme des écoles de garçons.
2. Eléments de couture usuelle : point devant, point arrière, point de côté, point de surjet, point de piqûre. Exercices sur canevass et grosse toile. Application à des objets très simples (mouchoir, serviette, essuie-mains, etc.). Etude du point de marque sur canevass. Applications.
Raccommodeage : pose de boutons et d'agrafes.
Tricot : étude collective de la maille. Applications simples avec deux aiguilles de bois.
Crochet : confection de cache-nez.

Tableau 6 – Mathématiques

	Sixième	Cinquième
1957-60	<p>I. Segments de droite, droite, demi-droite: égalité des segments. Addition; multiples et sous-multiples d'un segment. Mesure des longueurs; unités.</p> <p>II. Angles (première étude): définition; égalité; addition; multiples et sous multiples d'un angle. Mesure des angles: unités; opérations élémentaires sur les nombres représentant des mesures d'angles en degrés, minutes et secondes.</p> <p>III. Cercles (première étude). Centre, rayon, diamètre. Arcs; angles au centre. Mesure des arcs sur un cercle de rayon donné; unités. Mesure expérimentale de la longueur d'un arc de cercle; comparaison expérimentale des nombres mesurant un arc (en degrés par exemple) et la longueur de cet arc (en centimètres par exemple). Formule donnant la longueur de la circonférence.</p> <p>IV. Sphère (étude expérimentale, en vue de la liaison avec la géographie, d'une sphère considérée comme surface de révolution). Méridiens, équateurs, parallèles. Longitude et latitude exprimées en heures, minutes et secondes. ... Définitions relatives aux polygones: triangles, rectangles, carrés, trapèze. Notions sur la mesure des aires, unités. Aire du rectangle, du triangle, du trapèze. Formule donnant l'aire du cercle.</p> <p>VII. Définitions relatives à quelques solides: cubes, parallélépipèdes rectangles; prismes droits, cylindres de révolution. Surfaces latérales; développement. Aire latérale d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution, d'une pyramide régulière. Notions sur la mesure des volumes et des capacités: unités. Volume d'un parallélépipède rectangle, d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution. Formule donnant les volumes d'une pyramide régulière, d'un cône de révolution. Formules donnant l'aire et le volume de la sphère. ...</p>	<p>Géométrie</p> <p>1° Notions de droite, de segment de droite, de demi-droite. Segments égaux, segments inégaux. Notions de plan.</p> <p>2° Angles: angle saillant, angle rentrant, angle plat. Angles égaux, angles inégaux. Somme de deux angles. Angles supplémentaires. Bissectrice d'un angle; angle droit; angles complémentaires. Angles opposés par le sommet. Angles formés par deux droites sécantes. Droites perpendiculaires. Définition de la médiatrice d'un segment et de points symétriques par rapport à une droite.</p> <p>3° Cercle. Cercles égaux. Arc de cercle, angle au centre. Comparaison de deux arcs sur un même cercle ou sur des cercles égaux. (les notions sur la mesure des segments, des angles et des arcs de cercle ont été présentées en Sixième; elles seront rappelées à l'occasion d'exercices et de travaux pratiques.)</p> <p>4° Triangles. Triangle égaux. Triangle particuliers. Nomenclature de quelques droites remarquables d'un triangle. Les deux premiers cas d'égalité des triangles. Triangle isocèle. Propriétés de la médiatrice d'un segment. Le troisième cas d'égalité des triangles. Cas d'égalité des triangles rectangles.</p>
1968	<p>III. – Etude d'objets géométriques et physiques donnant lieu à mesures (choix d'une unité, ordre de grandeur, encadrement)</p> <p>a) Segment de droite, longueur.</p> <p>b) Cercle, longueur. Arcs de cercle et secteurs angulaires.</p> <p>c) Bandes. Triangles, rectangles, trapèzes, parallélogrammes, disque; aires.</p> <p>d) Solides: cubes, parallélépipèdes, rectangles, prismes droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution; volumes, masses, masses volumiques.</p> <p>e) Durées. Vitesse d'un mouvement uniforme. Débits.</p> <p>IV. – Méthodes de repérage</p> <p>a) Repérage d'un lieu d'une ville à l'aide d'un plan quadrillé de celle-ci.</p> <p>b) Sphère terrestre: pôles. Parallèles; équateur. Méridiens, méridien origine. Repérage d'un point par sa longitude et sa latitude.</p>	<p>IV. – Première étude concrète de l'espace (Il s'agit d'une simple description; on révisera d'abord les notions correspondantes dans le plan).</p> <p>Droites, demi-droites, segments, plans, demi-plans; positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan; de deux plans; droites et plans perpendiculaires; sommets, faces et arêtes d'un tétraèdre et d'un pavé oblique. Définition des ensembles convexes; intersection d'ensembles convexes.</p> <p>V. – Repérage</p> <p>Exercices sur le repérage d'un point dans un plan muni d'un quadrillage oblique. En particulier: deux plans étant munis de tels quadrillages, correspondance entre points de mêmes coordonnées; transport de dessins.</p>

Tableau 6 – Mathématiques

	Sixième	Cinquième
1977	<p>III.- Observations d'objets géométriques et physiques</p> <p>Premières observations sur des solides, des surfaces, des lignes. Segment de droite, morceau de surface plane.</p> <p>Instruments du dessin dans le plan: double décimètre, équerre, parallélogramme articulé, compas, rapporteur, papier calque.</p> <p>Vocabulaire de la géométrie plane: droite, plan, demi-plan, demi-droite; cercle (longueur), arc de cercle, secteur angulaire.</p> <p>Unités usuelles de longueur, d'aire, d'angle. Droites parallèles, perpendiculaires (ou orthogonales); tangente à un cercle en l'un de ses points.</p> <p>Observation et tracé de figures usuelles, par exemple: triangle, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.</p> <p>Quadrillage, repérage d'un point dans un plan quadrillé.</p> <p>Aires du rectangle, du triangle, du trapèze, du disque, du secteur circulaire.</p>	<p>IV.- Observation d'objets géométriques et physiques</p> <p>1- Révision du vocabulaire relatif aux figures planes</p> <p>2- Exercice de dessin dans le plan; tracés usuels faits avec les instruments. Reproduction d'un dessin fait sur fond quadrillé; agrandissement et réduction d'un dessin.</p> <p>3- Observation d'objets physiques de l'espace. Plans horizontaux; droites verticales; droites horizontales, plans verticaux. Droites parallèles de l'espace, plans parallèles; droite et plan perpendiculaires.</p> <p>Observation d'objets tels que cubes, prismes droits, cylindres droits, cylindres de révolution, pyramides, cônes de révolution. Calcul de volumes.</p> <p>Observations d'une sphère; plan tangent en un point; aire de la sphère; volume de la boule.</p> <p>Observation de surfaces coniques et cylindriques; plan tangent en un point.</p>
1985	<p>1. Travaux géométriques</p> <p>1. Reproduction de figures planes simples. Comparaison d'aires planes.</p> <p>2. Parallélépipède rectangle: description, représentation en perspective, patrons.</p> <p>3. Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à un droite, en exploitant des problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures:</p> <p>Construction de l'image: d'un point, d'une figure simple;</p> <p>Mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires. Exemple d'utilisation de ces propriétés;</p> <p>Construction d'axes de symétrie (médiatrice, bissectrice...);</p> <p>Construction de triangles isocèles, de quadrilatères possédant des axes de symétrie (rectangles, losanges...);</p> <p>Énoncé et utilisation de quelques propriétés. Caractéristiques des figures précédentes.</p>	<p>1. Travaux géométriques</p> <p>1. Prismes droits simples et cylindre de révolutions: Description, représentation en perspective, patrons; Aperçus élémentaires sur le parallélisme et l'orthogonalité dans l'espace.</p> <p>2. Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale en exploitant des situations-problèmes, nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures:</p> <p>Construction de l'image: d'un point, d'une figure simple;</p> <p>Mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires;</p> <p>Exemple d'utilisation de ces propriétés;</p> <p>Caractérisation angulaire du parallélisme;</p> <p>Construction et caractérisation du parallélogramme;</p> <p>Exemples d'autres figures simples ayant centre(s) et axe(s) de symétrie.</p> <p>3. Triangle: somme des angles, aire, construction du cercle circonscrit.</p>

Montrons et faisons manier les mesures afin d'en donner une idée exacte.

Dans le cours élémentaire, associés, le plus possible, les exercices de système métrique à ceux de calcul. Faisons porter l'étude de la numération et celle des quatre opérations sur les mesures métriques : mètre, litre, gramme.

Conformons-nous aux prescriptions de la loi du 11 juillet 1903 et du décret du 28 juillet 1903 relatifs aux nouvelles abréviations adoptées; n'oublions pas, au moins à partir du cours moyen, que le kilogramme — bien connu, d'un usage constant, — a été substitué au gramme — trop petit, peu employé, — comme unité principale des mesures de poids.

Il ne s'agit point, même dans le cours supérieur, de notions théoriques, mais d'applications pratiques que l'on rencontre journellement : ce n'est que le complément du système métrique. Néanmoins, les démonstrations simples sont à la portée des jeunes élèves, si l'on a recours aux exercices de travail manuel et de dessin linéaire pour la définition des termes employés, pour la construction des figures, pour la justification des formules en usage.

Rappelons les constructions nécessaires : différence entre la verticale et la perpendiculaire; différents angles; parallèles; rectangle divisé en bandes égales et l'une de ces bandes partagée en carrés pour montrer la surface et la nature des unités obtenues; carré ou rectangle particulier; parallélogramme se transformant en rectangle de même base et de même hauteur; parallélogramme se décomposant en deux triangles égaux de même base et de même hauteur; deux triangles quelconques égaux se réunissant pour former un parallélogramme; losange se décomposant en deux triangles; trapèze se décomposant en deux triangles; quadrilatère et polygones quelconques se décomposant en triangles; circonférence avec ficelles tendues montrant les diamètres perpendiculaires et les rayons; circonférence inscrite dans un carré et circonscrite à un hexagone; comparaison des trois périmètres en fonction du diamètre de la circonférence pour montrer la longueur de la circonférence; cercle divisé en secteurs nombreux ou triangles pour arriver à la surface du cercle et des polygones réguliers; construction de deux carrés égaux dont les surfaces couvertes différemment montrent la valeur du carré de l'hypoténuse.

Cube; parallépipède rectangle dont la base est divisée en carrés couverts de cubes pour montrer la formule du volume et la nature des unités obtenues; parallépipède droit se transformant en parallépipède rectangle; parallépipède avec section droite; parallépipède se décomposant en deux prismes triangulaires égaux; deux prismes triangulaires égaux se réunissant pour former un parallépipède; prisme polygonal se décomposant en prismes triangulaires; cylindre droit couvert d'une feuille de papier se développant pour montrer la surface rectangulaire latérale; pyramide creuse et prisme creux de même base; cône couvert d'une feuille de papier se développant; sphère décomposable en deux hémisphères.

CALCUL, ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE

L'ancien horaire prévoyait, « pour l'arithmétique et les exercices qui s'y rattachent », trois quarts d'heure ou une heure par jour de classe. Nous n'avons guère modifié ces proportions, puisque nous prévoyons :

Au cours préparatoire, deux heures et demie par semaine, soit en moyenne une demi-heure par jour de classe;

Au cours élémentaire, trois heures et demie par semaine, soit en moyenne plus de quarante minutes par jour de classe;

Au cours moyen, quatre heures et demie par semaine, soit en moyenne plus de cinquante minutes par jour de classe;

Au cours supérieur, cinq heures par semaine, soit en moyenne une heure par jour de classe.

Les idées directrices de l'ancien programme ne sont pas davantage abandonnées. Si nous avons modifié le texte de 1887, c'est pour en mieux marquer l'esprit. On s'en rendra nettement compte en juxtaposant les deux rédactions.

Par exemple, le texte de 1887 : « Premiers éléments de la numération orale et écrite » a été traduit, en 1923, par « Compte des objets, en écriture le nombre ».

Le texte de 1887 : « Les quatre opérations sur des nombres » est devenu : « Ajouter ou retrancher des groupes d'objets; additionner ou soustraire les nombres correspondants. — Compter par 2, par 3, par 4; multiplier par 2, par 3, par 4,.... »

Ainsi est consacrée la méthode qui consiste, au cours préparatoire, comme à l'école maternelle, à placer entre les mains des enfants des objets (boulons, graines, bâchettes, etc.) qu'ils ont à grouper, séparer, combiner de diverses manières pour se rendre compte, par les yeux et par la main, de la signification réelle des calculs les plus simples.

Partout l'opération manuelle précède l'opération arithmétique; l'expression du langage courant précède l'expression du langage mathématique. Partout le souci de marquer que l'enseignement doit être concret, simple, progressif. C'est sur les faits qu'il faut appuyer les calculs, les titres.

Dans les programmes d'aujourd'hui, pas plus que dans ceux d'hier, on ne craint d'aborder des notions inscrites sous le titre, un peu effrayant, de « géométrie », mais il faut entendre par là « forme des champs, mesures sur le terrain ». Il s'agit d'opérations réellement exécutées avec un ruban gradué, avec une règle graduée, accessibles en pratique à de jeunes enfants. Le texte porte, en e' et, « mesurer des longueurs, apprécier les distances par l'œil et contrôler par la mesure directe ». On opérera dans la cour, dans la salle de classe, parfois sur le pupitre.

Il faut signaler (pour le cours élémentaire) une intention qui se manifeste dès la première ligne : « Numération décimale : le mètre, le gramme.... » Quand on donnera en classe le principe de la numération décimale, après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. — Ainsi le système légal des mesures, système décimal, appuiera la leçon sur la numération.

L'étude des sous-multiples du mètre, du gramme, se fera plus tard, quand on aura à parler des nombres décimaux. Et ici, plus encore que dans le cas précédent, le système décimal servira de base, et de base presque unique aux études des nombres. Les élèves comprendront ce qu'est un dixième de mètre, un dixième de gramme, avant de comprendre ce qu'est un dixième d'unité, de la numération décimale, au moins à l'origine. Mais on remarquera que le programme, dans sa rédaction actuelle, sépare en trois parties l'étude du système légal : « Système des mesures légales à base dix, à base cent, à base mille ».

On a vu au cours élémentaire le mètre, le gramme et leurs multiples, et voilà comment le système légal à base dix; il suffit, pour en finir, de parler des sous-multiples du mètre, des sous-multiples du gramme, ce que l'on fera au cours moyen.

Remarquons que, de cette manière, on épuise d'abord les grandeurs que l'on mesure avec ce qu'on appelle parfois des unités effectives.

Mais, les surfaces, on ne les mesure pas effectivement; on les calcule, en appliquant des formules. On les exprime en se plaçant dans un système de numération à base cent. Les volumes, ensuite, on ne les mesure pas non plus; on les calcule, on les exprime en se plaçant dans un système de numération à base mille.

Cours élémentaire

Géométrie. — Les notions de géométrie doivent être comprises comme des exercices d'observation et de leçons de choses en même temps qu'un premier apprentissage du dessin et du travail manuel (découpage et pliage). Le pliage d'un carré pour la construction d'une cocotte peut fournir de nombreuses remarques : égalité de côtés, égalité d'angles droits, partage d'un angle droit en deux angles de 45° , centre et axe de symétrie..., etc. Il est désirable que les élèves aient un petit matériel de dessin : règle, double-décimètre, équerre à 45° (elle peut être construite par eux-mêmes en carton). Les quadrillages utilisés pour l'étude des surfaces peuvent aussi servir de base à des dessins simples.

Cours Moyen

Géométrie. — Les notions de géométrie étudiées au cours élémentaire comme des exercices d'observation et de leçons de choses doivent être un peu précisées au cours moyen en introduisant l'usage de quelques mots nouveaux et l'emploi de quelques instruments simples : règles, équerres, compas. Des constructions de carrés et de rectangles permettront de faire comprendre, sinon de définir, l'angle droit, la notion de droites perpendiculaires et de droites parallèles. La notion d'angle, en général, sera associée à l'usage de rapporteurs, soit pour mesurer, soit pour construire des angles.

L'étude du triangle régulier (ou équilatéral) et celle de l'hexagone, ainsi que leur construction, seront faites par l'observation comme avait été faite celle du carré dans le cours élémentaire.

La notion d'échelle (de plan ou de carte) pourra être étudiée soit sur des exemples géométriques, soit par des exercices d'arithmétique ; elle sera alors associée à l'étude de pourcentages et de fractions simples qu'elle permettra inversement d'illustrer. Les notions pratiques indiquées pour le cube, le parallélépipède rectangle, les prismes droits et le cylindre de révolution ne seront données qu'en raison de leur utilisation pour le calcul des surfaces latérales et des volumes. Elles pourraient être accompagnées de quelques exercices simples de travail manuel en utilisant soit du carton, soit du fil de fer.

Instructions de 1970

Deuxième partie

EXERCICES D'OBSERVATION
ET TRAVAUX SUR DES OBJETS GEOMÉTRIQUES

L'espace physique et les objets qui le peuplent fournissent une matière sur laquelle la pensée mathématique a bien des occasions de s'exercer. Ces exercices doivent, en même temps, aider l'enfant à s'adapter à ce milieu. Ils font appel, non seulement à l'observation mais aussi à l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses. L'enfant doit acquérir le goût de travaux manuels : tracer, dessiner, plier, découper pour *construire*. L'emploi des instruments (règle, équerre, compas...) pour la réalisation de ces constructions développera l'habileté et le soin.

On se devra de proposer aux enfants des thèmes et des buts d'activité à leur mesure et conformes à leur intérêt.

Il y aura souvent avantage à réaliser ces exercices en équipes.

Les démarches mathématiques porteront, comme dans le domaine numérique, sur la découverte de propriétés, les classements selon telle ou telle propriété, l'étude de relations sur un objet ou entre des objets.

On reconnaît :

Que deux lignes droites sont perpendiculaires ou forment un angle droit par un pliage convenable ou à l'aide de l'équerre ;

Que deux lignes droites sont parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre ;

Qu'un polygone découpé dans du carton épais et rigide est convexe par exemple en l'entourant d'un élastique et constatant que cet élastique est en contact avec tous les sommets.

Pour un polygone, on peut s'intéresser aux propriétés suivantes : convexité, nombre de côtés, nombre de sommets, longueur de côtés, existence de côtés parallèles, etc.

Les enfants ayant construit différents polygones, ils pourront les classer selon l'une ou l'autre de ces propriétés : ainsi, s'il s'agit de quadrilatères, ils distingueront, par exemple, les parallélogrammes et, parmi ceux-ci, les rectangles, les losanges. Ils découvriront ainsi que les carrés sont les quadrilatères qui ont la propriété d'être à la fois des rectangles et des losanges.

Une autre direction de travail peut être la fabrication de plans : plan de la classe, de la cour de l'école, du quartier, etc. Chez les enfants les plus jeunes, on peut s'intéresser surtout à la disposition des objets les uns par rapport aux autres. L'utilisation des mesures permettra ensuite l'exécution de plans à une échelle donnée.

Le repérage sur une droite ou sur un quadrillage pourra servir de thème à des exercices divers.

Pour un polyèdre (tétraèdre, cube, parallélépipède, prisme, etc.), on pourra s'intéresser à la nature des faces, à leur nombre, au nombre des sommets, à celui des arêtes, à leur disposition relative.

Les résultats de ces recherches seront utilisés par les enfants en travail manuel pour construire de tels objets géométriques, en carton par exemple.

CE

Introduction 77-80

CE

(1)

4. PRÉSENTATION DE L'ESPACE

Dans ce domaine, de nombreuses activités ne relèvent pas directement des mathématiques. Ce sont par exemple les exercices relatifs au schéma corporel, les jeux concernant la situation relative d'objets, les jeux de déplacements et de parcours, la détermination d'itinéraires, les activités de découpage et de pliage, la réalisation de pavages, puzzles, mosaïques, les jeux de construction dans l'espace, par superposition, emboîtement, assemblages, etc.

Ces activités contribuent cependant toutes à la formation de la pensée logique et préparent de façon intuitive et empirique la prise de conscience de propriétés géométriques qui seront dégagées par la suite (orthogonalité, parallélisme, symétries, translation...), étant bien entendu que ces propriétés ne doivent faire l'objet d'aucune étude à ce niveau.

On insistera tout particulièrement sur les exercices utilisant la notion de repérage très utile dans l'imédiat pour la confection et l'exploitation de tableaux, et indispensable pour la suite des études.

Certains de ces exercices pourront servir de point de départ à des activités numériques ou servir d'application à celles-ci.

3. REPERER ET MESURER

3.1 ACTIVITÉS SUR QUADRILLAGE

Les quadrillages permettent une organisation du plan : tout point, tout nœud ou toute case du plan peut y être repéré dès que l'on a désigné les lignes et les colonnes (exemple : situer un monument d'une ville sur un plan). Par ailleurs, la résolution de nombreux problèmes peut être facilitée si l'on se limite à utiliser l'ensemble des « nœuds » d'un réseau par exemple, tracés divers, reproduction de figures, figures symétriques, déduites par translation, agrandissement de figures, représentations graphiques de fonctions, calculs de distances. Enfin, on y retrouve évidemment des activités de désignation déjà pratiquées au cycle préparatoire : codage et décodage de cheminement, par exemple.

4. GÉOMÉTRIE

Les activités géométriques contribuent à la formation de la pensée logique au même titre que les activités numériques, mais leur objectif propre est double :

D'une part, elles doivent donner des moyens pour décrire, analyser, structurer, agencer des objets, considérés isolément ou dans les relations qu'ils entretiennent avec d'autres objets dans l'espace ou le plan ;

D'autre part, elles doivent faire acquérir des pratiques instrumentales utiles dans de très nombreuses activités de la vie scolaire et indispensables aux constructions que nécessite l'objectif précédent.

Dans tous les cas, l'accent sera mis sur la démarche plus encore que sur les résultats. C'est pourquoi on présentera les activités géométriques sous forme de situations ouvertes complexes : manipulation d'objets divers,

suite p. 37

1-1

36

jeux, dessins, constructions, pliages, découpages, etc. Les situations-problèmes définies en 2.5 pourront constituer des occasions particulièrement riches.

On y retrouvera une démarche de même nature :

Découverte des objets dans des activités de construction, de transfert ou d'agencement :

Prise de conscience de la multiplicité des modes d'approche, comparaison des diverses procédures utilisées par les enfants :

Description et explicitation de ces procédures dans des situations de communication exigeant l'élaboration d'un langage commun apte à désigner les objets et les actions. C'est ainsi que pourra être précisée la signification géométrique de certains termes de langage courant (face, arête, sommet, côté, retournement, glissement, etc.), de quelques propriétés usuelles (parallélisme, orthogonalité) ainsi que les noms de quelques polyèdres et polygones.

Une telle démarche suppose que l'on travaille d'abord sur des objets qui, bien que géométriquement complexes, sont plus proches de l'expérience des enfants : on va ainsi d'un travail dans l'espace à un travail dans le plan. Parmi les types d'activités possibles, on pourra retenir plus particulièrement :

Des classements qui permettent aux enfants de dégager, par observation et comparaison, certaines propriétés. Par exemple, pour les solides lors d'essais d'empilement, ils pourront s'intéresser à la planéité des faces, ce qui les conduira à isoler les polyèdres (solides uniquement bordés par des faces planes) et à réfléchir sur leurs caractéristiques (nombre de faces, arêtes, sommets, etc.). De même, pour les formes planes, ils pourront distinguer les différents polygones et les classer selon divers critères (nombre de côtés, de sommets, longueur des côtés, présence de côtés parallèles ou perpendiculaires, etc.). On pourra s'intéresser plus particulièrement aux carrés, losanges, parallélogrammes, rectangles, triangles :

Des assemblages de polyèdres ou de polygones (puzzles dans le plan et l'espace, mosaïques, pavages, etc.). C'est à partir d'activités de ce type qu'on peut espérer faire atteindre aux enfants une certaine maîtrise des formes et de leur organisation, ce que la simple observation ne saurait permettre. Ces activités pourront motiver les classements cités précédemment :

Des constructions qui amèneront les enfants à préciser leurs analyses : par exemple, ils pourront constater que pour construire un carré il ne suffit pas d'avoir remarqué que les quatre côtés ont la même longueur. Il faut souligner ici l'importance que revêt l'action de construction, qui oblige les enfants à anticiper sur la réalisation de l'objet mais qui leur permet aussi de contrôler les prévisions qu'ils ont pu faire et au besoin de les modifier, sans nécessairement recourir au maître. Ainsi les enfants pourront construire avec des matériaux divers (pâte à modeler, carton, baguette, etc.).

A cette occasion on pourra faire construire et utiliser des patrons de solides.

De même ils pourront réaliser des polygones en se donnant un certain nombre de contraintes (nombre de côtés ou de sommets, longueur des côtés, utilisation de certaines propriétés) et ce de multiples façons : baguettes, fils ou élastiques tendus sur des planches à clous, pliage, découpage, décalquage, dessin sur papier blanc ou sur réseaux.

Il est important de souligner que pour toutes ces constructions l'activité de l'enfant comporte sa propre validation : la construction est possible ou impossible, réussie ou manquée.

Dans ces activités l'accent sera tantôt mis sur les objets à construire, tantôt sur la découverte de technique (pliage, découpage, décalquage) et l'utilisation des instruments (règles, équerre, compas à pointe sèche, bande de papier...). Dans ce cas, les activités pourront être du type réalisation de maquettes, plans, assemblages, mosaïque, etc. Elles sont inséparables :

Des activités manuelles développant l'adresse et le soin :

Des activités de sensibilisation à la multiplicité des points de vue que l'on peut prendre d'un même objet. En effet, on peut regarder un objet de différents côtés, on peut imaginer ce qu'on pourrait en percevoir si on le coupait, si on le dépliait, si on le projetait sur un écran.

Ces différents points de vue pourront être coordonnés, notamment à des fins de construction au cycle moyen. Il s'agit seulement au cycle élémentaire d'en multiplier les expériences.

On pourra ainsi :

Prendre des empreintes de solide :

Couper des solides fabriqués avec de la terre ou de la pâte à modeler ; Imaginer et tracer les trous que ferait un objet en traversant un plan selon différentes directions :

Construire des objets pouvant passer dans un trou donné, ou dans plusieurs situés dans des plans différents :

Découper et déplier des solides de carton, tracer le développement d'un solide, prévoir la reconstruction d'un solide à partir de son développement :

Observer l'ombre au soleil d'un objet sur un écran, en faisant varier les positions relatives de l'objet et de l'écran ;

Faire des photos, sous différents angles d'un ensemble d'objets, chercher de quel endroit les photos ont été prises, etc.

Ces travaux pourront donner aux enfants des moyens de représentation plane d'objet à trois dimensions.

7. ACTIVITES GEOMETRIQUES

Au cycle moyen, les activités géométriques visent à atteindre différents objectifs, chaque activité relevant en général de plusieurs de ces objectifs. Par ailleurs, ceux-ci ne sont pas hiérarchisés ; leur ordre de présentation ne constitue en aucun cas une progression.

7.1 OBJECTIFS DES ACTIVITES GEOMETRIQUES :

Grâce à ces activités, il s'agit :

D'abord, comme au cycle élémentaire, de permettre aux enfants d'accumuler des expériences conduisant à la maîtrise de certains « savoir-faire » :

En outre, par une réflexion sur ces expériences, de conduire à un premier niveau d'abstraction, c'est-à-dire à la production de « langages » qui permettent, sans recourir à des définitions formelles, de communiquer et de justifier une action ou une suite d'actions incluses dans une activité géométrique.

7.1.1 Ces activités seront menées à propos d'objets géométriques variés. On ne partira pas d'objets géométriques « simples » (point, ligne, surface) mais d'objets physiques ; c'est le point de vue sous lequel on les considère qui leur donne un statut d'objet géométrique, lequel peut varier pour un même objet.

Ainsi, une porte est :

Un objet physique auquel on peut s'intéresser du point de vue du matériau, du sens de l'ouverture, etc.

Un objet géométrique :

Rectangle si l'on s'intéresse à sa forme (longueur et parallélisme des côtés, angles droits) ou à son aire (pour le périmètre par exemple) ; Parallélépipède si l'on s'intéresse au volume du matériau, etc.

Les activités géométriques peuvent concerner la reproduction, la description, la représentation ou la construction d'un objet :

Reproduire un objet dont les élèves disposent, c'est en réaliser une copie conforme.

Décrire un objet, (sous l'angle géométrique) c'est communiquer des formulations de nature géométrique permettant de l'identifier, de le reproduire ou de le représenter.

Représenter un objet, c'est le décrire, mais à l'aide de procédés conventionnels (traux, écrits ou graphiques). Ces procédés évoluent avec le niveau des élèves et peuvent être divers, chacun prenant en compte certaines propriétés et en négligeant d'autres.

Construire un objet est différent de le reproduire car les élèves partent alors d'une représentation ou d'une description et non de l'objet lui-même.

Dans tous les cas, une phase importante du travail est sa validation. Une description ou une représentation sont valides quand elles permettent de construire l'objet, la représentation devant en outre respecter les conventions établies. Valider une construction, à partir d'une description ou d'une représentation, suppose qu'on vérifie que l'objet construit répond aux caractéristiques décrites ou représentées. L'utilisation et/ou l'établissement de moyens conventionnels de communication doivent viser à réduire la part de subjectivité que risque de présenter la validation.

7.1.2 Ces activités peuvent également concerner des actions sur des objets géométriques. Il ne s'agit pas ici de faire une étude formelle de quelques transformations ponctuelles « simples » (translation, homothétie, symétrie, rotation...) mais de pratiquer, sur des objets géométriques divers, des déplacements, des agrandissements, des réductions, des déformations... A partir d'une réflexion sur ces actions et leurs effets, on caractérisera quelques transformations par leurs invariants et leurs propriétés, ce qui les rendra susceptibles d'une utilisation plus générale.

Par exemple, les élèves peuvent d'abord réaliser les figures symétriques de figures données (par pliage, décalquage, etc.). La comparaison de la figure initiale et de la figure symétrique associée les conduit à découvrir la conservation de toutes les mesures (côtés, angles, aire) et le changement d'orientation. Ils peuvent alors s'aider de ces découvertes pour trouver un procédé de construction point par point (c'est-à-dire réaliser une « transformation ponctuelle »).

7.1.3 Exemple d'activités :

L'exemple ci-après n'est pas un modèle : il n'est développé que pour mieux expliciter certains des objectifs définis ci-dessus. D'autres types d'activités, dont le déroulement peut prendre diverses formes, seraient tout aussi justifiés, pourvu qu'ils mettent en jeu des savoir-faire répondant aux objectifs cités aux paragraphes précédents (cf. § 7.1.1 et 7.1.2) et qu'elles comportent la communication qui permet de valider ou d'invalider les productions.

Des élèves travaillant en groupes pourront être invités à achever un plan incomplet (de la cour d'école, par exemple), les ébauches de plans proposés étant éventuellement différentes — par l'échelle, par l'orientation... — selon les groupes. Il s'agira alors successivement, pour chaque groupe :

D'identifier, par un codage collectif, différents éléments de l'espace réel à partir de leur représentation sur le plan, et de préciser la tâche à réaliser ;

D'anticiper l'action de représentation à effectuer pour juger des informations à recueillir sur le terrain et, à cet effet, choisir et utiliser à bon escient, parmi celui qui est disponible, le matériel le mieux approprié pour le mesurage (filé ou non au système métrique ; telle distance est de 12 m ou de 3 longueurs de banc...) et le repérage ;

De compléter le plan en recourant aux outils mathématiques (alignements, angles, distances, proportionnalité...) et aux instruments de tracé géométrique qui permettent de procéder au transfert des informations recueillies.

L'exposition et la comparaison des productions obtenues, sous forme de travail collectif, doit ensuite, par la description orale des réalisations et par les justifications apportées, permettre la mise en évidence de différences liées aux niveaux d'exigence, de compréhension ou de compétence des membres des groupes.

Enfin, les élèves peuvent être appelés à déterminer sur le terrain l'emplacement de repères indiqués après coup sur le plan (par exemple : placer un objet dans la cour, à l'endroit correspondant à une croix portée sur le plan). Si, de surcroît, chaque groupe opère avec un plan précédemment complété par un autre groupe, c'est, pour les élèves, l'occasion de décoder une production de leurs camarades, de la critiquer éventuellement, d'agir à partir de leur interprétation et, le cas échéant, d'être à leur tour critiqués par les auteurs du plan.

Discussions et arbitrages contribuent ainsi à la validation des réalisations des uns et des autres. L'instauration de cette communication fonctionnelle qui, en outre, aide à l'acquisition des langages appropriés, justifie ici le travail en groupes.

Cela n'exclut pas, à d'autres moments, un travail individuel portant aussi bien sur le recueil d'informations et leur traitement que sur la justification des actions effectuées.

7.2 INDICATIONS COMPLEMENTAIRES :

7.2.1 Les activités géométriques à ce niveau doivent permettre une réorganisation des connaissances acquises antérieurement et l'acquisition d'outils de construction exploitant les propriétés de certains objets géométriques : plus que de savoirs, ce sont encore des savoir-faire que l'on vise, mais en organisant des savoir-faire élémentaires en savoir-faire plus complexes et plus conscients.

Ainsi, un élève du cycle moyen doit être capable de justifier la procédure qu'il a utilisée pour construire un carré en faisant référence à certaines des propriétés du carré. Mais on n'exigera pas qu'il dispose d'une « définition du carré » (ensemble de propriétés nécessaires et suffisantes), ni qu'il soit capable d'énoncer les articulations logiques entre les différentes propriétés. Cependant, à l'occasion d'une activité de construction, il pourra être confronté au problème de savoir si une propriété utilisée lui permet bien d'obtenir à coup sûr un carré et seulement un carré, ou si elle peut conduire aussi à d'autres figures.

7.2.2 L'acquisition du vocabulaire prend plus d'importance qu'au cycle élémentaire, car on met davantage l'accent sur l'explicitation des procédures, et on commence à faire intervenir ponctuellement des raisonnements qui impliquent un langage fonctionnel. On peut distinguer deux niveaux d'utilisation :

Les termes qui servent à l'occasion d'une activité, mais pour lesquels on n'exige pas une connaissance générale ; par exemple, le mot « bissectrice » est utilisé pour désigner la ligne de pliage qui partage un secteur angulaire en deux secteurs superposables, sans se référer à une définition rigoureuse, ni à une connaissance formelle des propriétés :

Les termes qui désignent les objets ou des relations que l'on rencontre souvent ; par exemple, le mot « triangle » intervient pour désigner des parties de polygones, les mots « perpendiculaires », « parallèles », désignent des relations utilisées dans de nombreuses constructions. Il en est de même des mots : carré, rectangle, losange, quadrilatère, parallélogramme, diagonale, côté, cercle, cube, pavé, arête, sommet, face, sphère.

L'assimilation de ce vocabulaire requiert des activités nombreuses et répétées. Connaître un mot ce n'est pas être capable de réciter toutes les propriétés de l'objet désigné, c'est savoir l'utiliser de façon pertinente. Cette pertinence évolue naturellement avec le champ d'utilisation du mot et avec l'âge des enfants.

7.2.3 Toutes les activités géométriques développées au cycle moyen font appel à l'utilisation d'instruments qui ne vise pas seulement la réalisation correcte de certains tracés, mais développe aussi la capacité à choisir un ou des instruments adéquats à la tâche envisagée, ce qui suppose l'analyse de l'instrument et de l'objet d'étude (démarche analogue à celle de l'étude technologique).

Certaines activités conduisent éventuellement à la fabrication d'instruments (gabarit pour reporter un angle ; feuille de papier plié pour l'angle droit, etc.). Des activités de reproduction conduisent à l'utilisation de certaines techniques et procédures générales, relativement fiables et rapides (exemples : calque, quadrillage, patron, gabarit pour un pavage).

7.2.4 Les activités géométriques entretiennent, souvent, des liens étroits avec les autres apprentissages mathématiques : elles peuvent ainsi : Utiliser des notions introduites par ailleurs (proportionnalité, mesure...);

Permettre d'introduire de nouvelles notions (nombres décimaux, proportionnalité...);
Servir de support à une situation-problème spécifique (dénombrément des diagonales de polygones, par exemple).

Ainsi au terme de la scolarité élémentaire, les enfants auront une fréquentation du domaine mathématique dont le « calcul » n'est qu'une des composantes, sans qu'on puisse considérer que ces apprentissages mathématiques sont achevés : ils devront être entretenus, consolidés, réinvestis et surtout prolongés et approfondis tout au long du premier cycle du collège, dont les enfants doivent pouvoir aborder, sans rupture, le programme.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

« L'enseignement des mathématiques fait acquérir des connaissances et des compétences dans les domaines numérique et géométrique, tout en aidant l'élève à se forger des méthodes de travail. Il stimule l'imagination ». « Résoudre des problèmes suppose la maîtrise d'un certain nombre d'outils, numériques et géométriques, et l'appropriation de méthodes ».

Programmes et instructions, pp. 39-40

La géométrie présente une grande importance pour toute l'activité mathématique : c'est elle qui permet de visualiser les concepts fondamentaux (ensembles de nombres, continuité, limite, ...), elle est inséparable du nombre et de la mesure. Construire l'espace représentatif est indispensable pour que l'activité mathématique puisse s'exercer.

Les activités géométriques (constructions, tracés, ...) offrent la possibilité de cultiver, chez l'élève, le goût du travail bien fait, car la précision d'une construction dépend du soin apporté à sa réalisation. La conservation, par l'élève, des travaux qu'il a exécutés est, de même, une bonne incitation à une recherche de qualité et une motivation pour procéder à des constructions plus complexes et plus personnelles.

1. Le champ des activités : objets physiques, objets géométriques

A l'école élémentaire, les activités géométriques doivent concourir, au même titre que d'autres (par exemple les activités physiques et sportives) à la construction de l'espace chez l'enfant. Les élèves doivent donc être mis en situation :

- d'agir sur des objets, d'en fabriquer et d'en construire ;
- de se familiariser avec divers espaces, abordés selon des points de vue différents (on peut, par exemple, suivant le problème posé, s'intéresser seulement à la continuité ou seulement au parallélisme ou uniquement à la mesure) ;
- de traiter des problèmes de représentation.

C'est donc une pédagogie de l'activité qui permet à l'enfant de se constituer un champ d'expériences sur lequel peut se construire la géométrie. C'est pourquoi les activités doivent être conduites, tout au moins dans un premier temps, à partir d'objets physiques de l'espace qui, bien que complexes, sont plus proches de l'expérience des enfants : dés, berlingots, boîtes de toutes sortes, emballages divers...

Peu à peu on amène les élèves, grâce à de nombreuses activités sur ces objets physiques, à changer d'angle de vue, c'est-à-dire à les considérer de façon plus géométrique : cube, pavé, tétraèdre... puis, si l'on s'attache aux faces : parallélogramme, rectangle, triangle... enfin, si l'on s'attache aux arêtes : segment, sommet, milieu...

Le passage du monde des objets physiques à celui des objets géométriques est important et difficile ; il nécessite un effort d'abstraction (au sens de « enlever de »). Prenons l'exemple d'une boîte cubique : il faut en effet parvenir à ne pas tenir compte des inscriptions sur les faces, de la couleur de la boîte, à substituer l'idée et le mot de « face » à l'idée et au mot « couvercle » : une boîte a un couvercle mais toutes les faces d'un cube sont identiques. Pour effectuer ce passage il est indispensable que les élèves disposent de matériel et de matériaux nombreux et divers, dont la fonction est justement de permettre d'isoler les éléments invariants que sont le nombre de faces, d'arêtes, de sommets, de formes... ; par exemple, le cube est la forme commune à toute une série de boîtes cubiques de tailles, de couleurs et de fonctions différentes.

2. Les activités à conduire avec ces objets

Les activités géométriques consistent à reproduire, à décrire, à représenter, à construire.

● Reproduire

Les élèves disposent d'un objet et ils doivent en réaliser une copie. Il est possible de reproduire, avec des matériaux divers, un objet plus ou moins usuel, ou bien de procéder à des aménagements ou à des compléments de fabrication. On peut, pour la reproduction, utiliser des moulages, des calques, des patrons et, bien sûr, les instruments de mesure et de dessin. Le résultat obtenu est conforme ou non à l'objet initial. En cas d'erreur il suffit de mettre la production « à l'épreuve des faits ». En cas de demande d'un objet « semblable », il convient de préciser le degré de conformité souhaité, si l'on désire évaluer le résultat obtenu.

● Décrire

En reproduisant un objet et donc en choisissant, puis en agençant le matériel, les élèves sont amenés à s'exprimer à propos de cet objet et à formuler des remarques de type géométrique (ex. : il me faut des faces carrées). Progressivement, ils utilisent, en situation fonctionnelle, un vocabulaire géométrique qui permet :

- d'identifier l'objet, par comparaison et opposition avec d'autres objets, en choisissant le critère discriminant ;
- de le reproduire (quel matériel ? quelle démarche ?) ;
- de le représenter.

On pourra effectuer des classements et dresser une liste des propriétés de l'objet, en utilisant un langage de plus en plus précis.

Il s'agit donc de décrire pour :

- identifier : l'élève doit être capable d'expliciter les critères discriminants, d'énoncer les propriétés communes aux éléments d'une collection et de préciser pourquoi tel objet n'appartient pas à la collection (intrus) ;
- reproduire : l'élève doit être capable de formuler la demande en matériel nécessaire à la reproduction et de la justifier ;
- représenter : l'élève doit être capable de classer les remarques de type géométrique à propos d'un objet, d'une part celles qui sont mises en évidence dans une représentation donnée, d'autre part celles qui ne le sont pas.

● Représenter

Dès lors qu'on représente un objet géométrique à l'aide de procédés conventionnels, on se trouve dans l'obligation de négliger des propriétés pourtant présentes dans la description. La représentation ne permet pas, en effet, de mettre en évidence toutes les propriétés : par exemple, les six faces de la description d'un cube n'apparaissent pas toutes sur une représentation. Il est donc intéressant d'habituer les élèves à effectuer et à utiliser des représentations différentes d'un même objet, et à savoir choisir la représentation qui convient le mieux. Il est utile de prendre de nombreux points de vue de l'objet (empreintes, coupes, gabarits, ombres, ...), de passer des dessins d'un objet à des schémas conventionnels. On peut, en particulier, et dès le cours élémentaire,

procéder à des activités sur les patrons : développements divers d'un même objet, comparaison et classement des patrons.

● Construire

La construction est l'aboutissement d'un processus qui s'appuie sur la représentation et la description. Elle nécessite la mise en œuvre des techniques de tracés associées à un vocabulaire fonctionnel. Pour les constructions dans l'espace, on pourra utiliser divers matériaux (pâte à modeler, carton, baguette, fil de fer...); une attention particulière sera portée à la recherche des différents patrons d'un solide donné (cube, tétraèdre régulier, pavé, octaèdre régulier, ...). Notons que, si les matériaux utilisés sont très divers, ils ne sont pas interchangeables et ils ont leur spécificité, dans la mesure où ils mettent en évidence certains aspects plutôt que d'autres : le papier ou le carton matérialisent les faces, leur nombre, la continuité ; le fil de fer met l'accent sur les arêtes et les sommets ; la pâte à modeler met en évidence le volume. La diversité des matériaux permet donc une bonne articulation entre la reproduction et la description et peut aider à la représentation. Dans le plan, on pourra utiliser des planchés à clous, des fils élastiques, des baguettes ou procéder à des assemblages (tangram, puzzles). Une partie importante du travail à effectuer concerne l'usage des instruments de tracé et de mesure : règle, équerre, compas, règle graduée, papier calque, quadrillage, réseau, gabarit, rapporteur. Il peut être intéressant, à cet égard, de mettre l'élève en situation de construire un objet qui réponde à un « cahier des charges ». La validation est alors immédiate, les causes d'erreurs devant être situées pour progresser. Pour effectuer la construction, l'élève doit être capable de choisir la représentation qui convient le mieux (par exemple : ce patron permet de diminuer le nombre d'onglets). La construction est, en géométrie, un bon exemple de résolution de problème.

3. Réflexions sur les méthodes

● Démarche

Les activités géométriques nécessitent une alternance entre des moments d'investigation et des moments de réalisation, entre des moments d'analyse et d'autres de synthèse, étroitement liés dès lors que l'on se trouve dans un processus de production (reproduire et construire), comparable à celui de la technologie. Très souvent il faut anticiper sur les pratiques (par ex. : que faudrait-il faire pour obtenir un cube dont les arêtes soient doubles de celles du cube que vous venez de construire ?).

Les langages gestuel, oral, écrit (dont le dessin, le schéma, la photographie...) jouent un rôle important dans la conceptualisation des objets géométriques, qui est en cours à l'école élémentaire et qui doit être prolongée et enrichie au collège.

● Recours aux transformations géométriques

Les actions sur les objets géométriques (déplacements, agrandissements, réductions, déformations) concourent à ce processus de conceptualisation. En effet, c'est en observant les résultats de ces actions, puis en prenant comme objet d'étude ces actions elles-mêmes, que peuvent être mises en évidence les transformations géométriques planes : translation ou rotation (déplacement plan), symétrie. Les travaux concernant les rosaces, les mosaïques, les frises et les pavages, qui permettent de mettre l'accent sur l'imagination, la créativité et la dimension esthétique, aident à une prise de conscience de l'importance des transformations géométriques dans l'organisation de l'espace. On peut accorder une attention particulière aux ensembles de transformations qui conservent globalement une configuration donnée. Le rectangle est conservé globalement par chacune des symétries par rapport à la médiatrice de deux côtés parallèles, ainsi que par la rotation de 180° par rapport à son centre ; les mêmes remarques peuvent être faites pour le carré, qui est un rectangle particulier, mais, de plus, le carré est conservé globalement par chacune des symétries par rapport à une diagonale, ainsi que par les rotations de 90° et 270° par rapport à son centre ; le triangle équilatéral est conservé globalement par chacune des symétries par rapport à la médiatrice d'un côté, ainsi que par les rotations d'angles de 120° et 240° par rapport à son centre de gravité.

● Vocabulaire

Le vocabulaire géométrique sert à la transmission et à la compréhension des informations ; il aide aussi à la conceptualisation. Des mots précis, en nombre limité, doivent être acquis en situation fonctionnelle et parfaitement maîtrisés. L'élève doit accéder, le plus tôt possible, au vocabulaire correct et définitif, qui est celui de l'adulte. Il vaut mieux éviter tout vocabulaire provisoire. Le fait d'utiliser les mots *cercle* et *disque*, *sphère* et *boule*, facilite la perception des différences notionnelles et aide à la conceptualisation. Le vocabulaire géométrique est ainsi acquis au terme d'un processus d'utilisation continue et, bien sûr, ne doit pas être appris en dehors de tout contexte, associé à des définitions, qui n'ont pas leur place à l'école élémentaire, car elles sont fondées sur la notion de « condition nécessaire et suffisante », qui relève du collège. Il s'agit avant tout d'acquérir un vocabulaire actif et utile.

4. Problèmes posés par l'évaluation

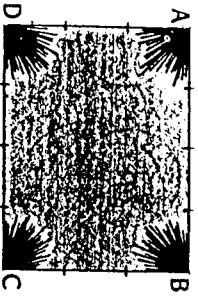
Les activités géométriques dépassent l'acquisition de savoir-faire techniques et de compétences de tracé, comme en témoigne ce qui précède, et l'évaluation n'en est pas facile. Elle est incluse dans l'explicitation même des verbes « reproduire », « décrire », « représenter », « construire ».

Des compétences de tracé sont attendues des élèves à la fin du C.M. et elles peuvent faire parfois l'objet d'une étude en soi, au cours de brèves séquences d'apprentissage, mais elles doivent être intégrées dans les activités et être conçues comme des moyens à mettre en œuvre dans des procédés de construction. C'est ainsi que les élèves doivent être capables :

- de tracer un trait à la règle, avec ou sans consigne, au C.E., l'apprentissage étant commencé dès le C.P. ;
- de tracer, au C.E., des perpendiculaires à une droite donnée ;
- de tracer, au C.M., des parallèles à une droite donnée et de construire des réseaux de droites, l'apprentissage pouvant commencer au C.E. en considérant deux droites perpendiculaires à une troisième ;
- de reporter, dès le C.E., des distances, avec une règle graduée, une bande de papier ou un compas ;
- de reproduire, au C.M., des angles avec calque, gabarit ou compas.

A la fin du C.M. les élèves sauront construire, sur différents supports (papier quadrillé, ligné ou blanc), des figures géométriques planes (triangle, parallélogramme, rectangle, losange, carré, autres polygones, cercle), l'apprentissage ayant été commencé dès le C.E., sur quadrillage. Progressivement les élèves apprendront à choisir eux-mêmes les instruments les mieux adaptés aux tracés et aux mesures qu'ils veulent réaliser.

Le rectangle



J'observe cette figure. Elle a 4 côtés et 4 angles. Les côtés AB et CD mesurent 4 cm. Les côtés AD et BC mesurent 3 cm. Les angles sont droits. La figure ABCD est un rectangle. Les grands côtés AB et CD s'appellent les longueurs. Les petits côtés AD et BC s'appellent les largeurs.

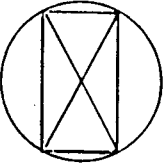
Le rectangle a 2 longueurs égales, 2 largeurs égales et 4 angles droits.

Exercices

- 1. Deux manières simples de construire un rectangle.



A l'aide du quadrillage de mon cahier.

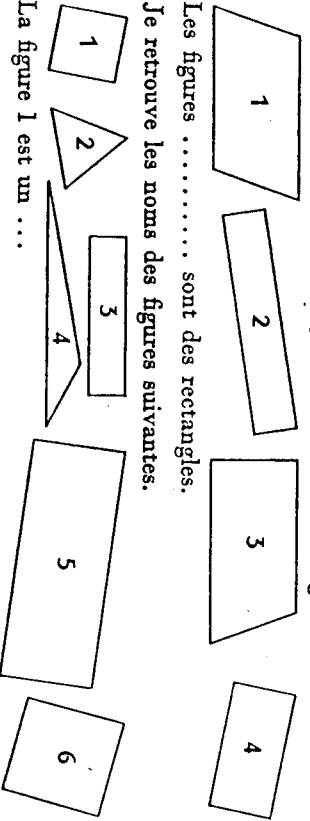


Dans 1 cercle, je trace 2 diamètres qui ne se coupent pas à angle droit. Je joins les 4 extrémités des diamètres. Je découpe.

- 2. En pliant 2 fois un rectangle, je vérifie que les longueurs, puis que les largeurs sont égales.



- 4. Parmi les figures suivantes, je reconnais les rectangles.



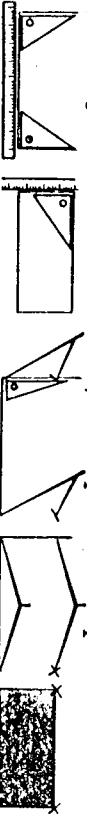
Les figures sont des rectangles.

- 5. Je retrouve les noms des figures suivantes.



La figure 1 est un ...

- 6. Deux autres manières de construire des rectangles :
1) avec équerre et double dm. * 2) avec équerre et compas.

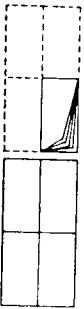


- 7. A l'aide du quadrillage de mon cahier, je construis un rectangle de 10 carreaux de longueur et 5 carreaux de largeur. Je porte sur ce rectangle la mesure en cm de la longueur et de la largeur.

- 8. Avec l'équerre et le double dm, je construis des rectangles ayant 5 cm de longueur et 3 cm de largeur, 8 cm de longueur et 6 cm de largeur.

- 9. Avec l'équerre et le compas, je construis des rectangles ayant 7 cm de longueur et 4 cm de largeur, 10 cm de longueur et 2 cm de largeur.

- 10. Je plie un rectangle suivant le modèle.



Les plus obtenus sont les médianes. Elles joignent les milieux des côtés opposés.

- 11. En utilisant le quadrillage de mon cahier, je construis un rectangle de 8 carreaux de longueur et 6 carreaux de largeur. Je trace les médianes. Je compare la longueur des médianes à celle des côtés. L'une des médianes est égale à la ... L'autre est égale à la ... Comment sont les angles formés par les médianes ?



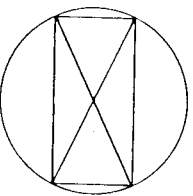
Je plie un rectangle suivant les croquis.

Les plus obtenus sont les diagonales.

- 13. Je construis un rectangle de 4 cm de longueur et 3 cm de largeur. Je trace les diagonales. Je les mesure. Les diagonales sont ... Les angles formés par les diagonales (sont droits) - (ne sont pas droits) Je porte la longueur du rectangle sur une diagonale. La diagonale est plus ... que la longueur.

44

- 14.

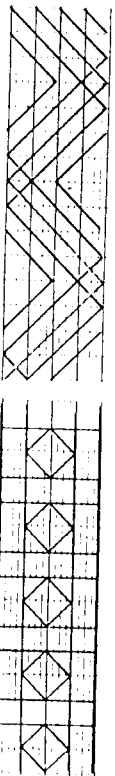


Sur un carton mince, je construis un rectangle de 8 cm de longueur et 6 cm de largeur. Je trace diagonales et médianes. Elles se coupent au même point. En prenant ce point comme centre, je trace le cercle qui passe par les sommets du rectangle. Le centre du rectangle est aussi celui de ce cercle. Je découpe ce rectangle et je vérifie sur la pointe de mon compas.

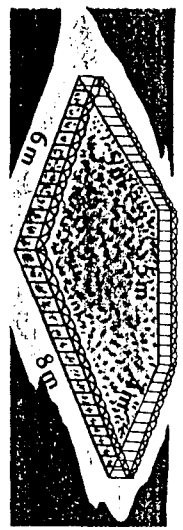
- 15.

Je reproduis les bordures suivantes :

- 16.



Le périmètre d'une figure

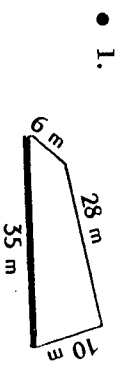


Dans le jardin public il y a une pelouse, le jardinier l'entoure d'une bordure en grillage.

Le jardinier emploie: $8\text{ m} + 6\text{ m} + 6\text{ m} + 8\text{ m} + 4\text{ m} + 4\text{ m} = 28\text{ m}$ de bordure.

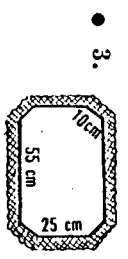
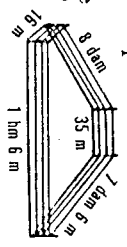
Le tour, pourtour ou périmètre d'une figure se calcule en additionnant la longueur de tous ses côtés.

Exercices



1. Au carrefour de plusieurs rues se trouve une petite place. Quelle est la longueur de la bordure en pierre qui entoure cette place?

- 2. Un cultivateur veut entourer son pré d'un triple rang de fil de fer. Quel est le périmètre du pré?
 $1\text{ km } 6\text{ m} \square 16\text{ m} \square 8\text{ dam} \square 35\text{ m} \square 7\text{ dam } 6\text{ m}$
ou $\dots\text{ m} \square \dots\text{ m} \square \dots\text{ m} \square \dots\text{ m} \square \dots\text{ m} \square \dots\text{ m} \square \dots\text{ m} \square \dots\text{ m}$
Quelle est la longueur du fil de fer employé?

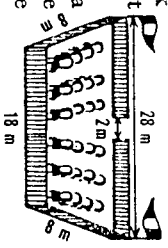


3. Jaqueline confectionne un napperon. Elle le borde d'une dentelle. Quelle est la longueur de cette dentelle? Un m de dentelle coûte 45 c. Quel est le prix de la dentelle employée?

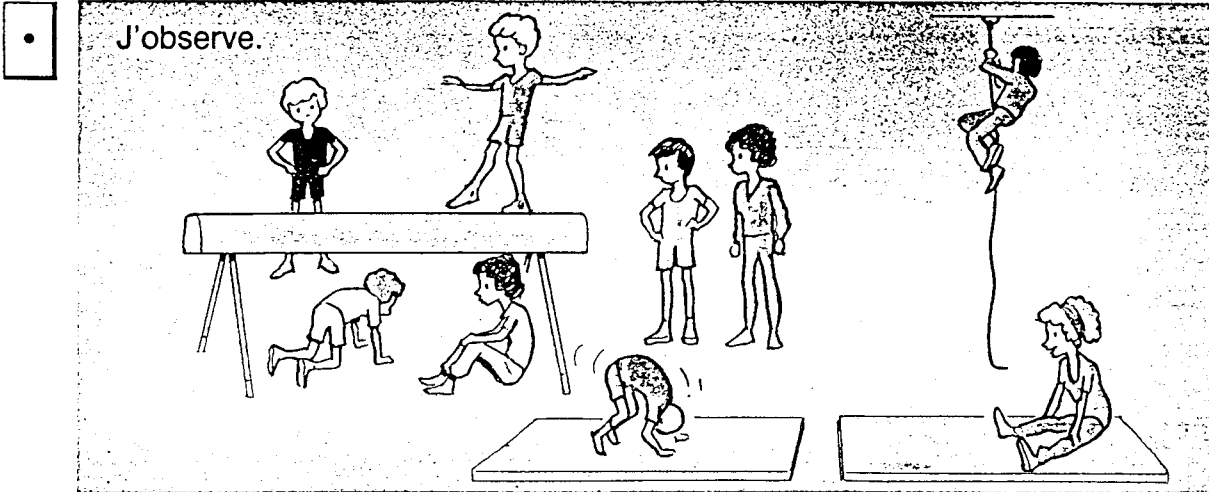


4. Danièle confectionne un tablier en prenant un carré d'étoffe de 55 cm de côté. Elle le borde d'un galon rouge. Puis elle emploie 2 morceaux du même galon pour faire une ceinture. Chaque morceau mesure 40 cm. Quelle longueur de galon a-t-il fallu pour border le tablier? Quelle longueur totale de galon Danièle a-t-elle employée?

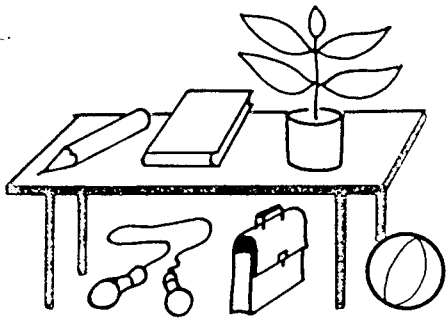
- 5. Dans une fête on a délimité la place réservée aux invités par une palissade en lattes de bois. Quel est le périmètre de la place réservée aux invités? On a ménagé une entrée large de 2 m. Quelle est la longueur de palissade nécessaire? Cette palissade existe en rouleaux de 1 dam de long. Quel est le nombre de rouleaux nécessaires?



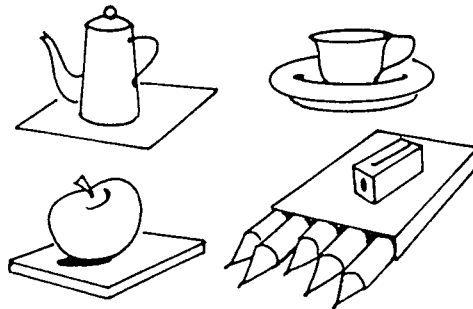
sur, sous, au-dessus, au-dessous



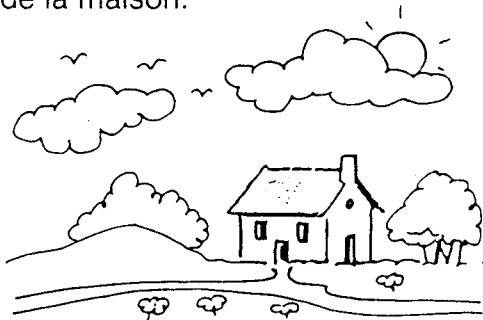
• Je colorie ce qui est **sur** la table.



•• Je colorie l'objet qui est **dessous**.



••• Je colorie ce qui est **au-dessus** de la maison.



•••• Je colorie ce qui est **au-dessous** de l'hélicoptère.



Vivre les mathématiques

CP

Eiller: Reproduction de figures

Parallèles et perpendiculaires

Parallélogrammes

Cercle et disque

triangles

construction de solides

symétrie par rapport à une droite

glissement de figures

agrandissement et réduction de figures

Livre outil

Les droites perpendiculaires

les droites parallèles

les secteurs angulaires

les polygones

le parallélogramme et ses cas particuliers

le rectangle, le carré

les triangles

le cercle, le disque

les polyèdres

le pavé droit et le cube

la translation

la symétrie par rapport à un point

la symétrie par rapport à une droite

agrandissement et réduction de figures

Objectif calcul

à propos de la règle et de l'équerre

" du compas

reproduire des figures

reconnaître des figures planes

paver le plan

du plan à l'espace

polyèdres

se repérer sur un quadrillage

symétries

déplacements

RECONNAITRE LES FIGURES PLANES (pp. 116 à 119) - ACTIVITÉ 1

RECHERCHE N° 1

■ **Mode de travail :** G.

■ **Matériel**

Pour G, une reproduction des figures de la p. 116 ou LE p. 116.

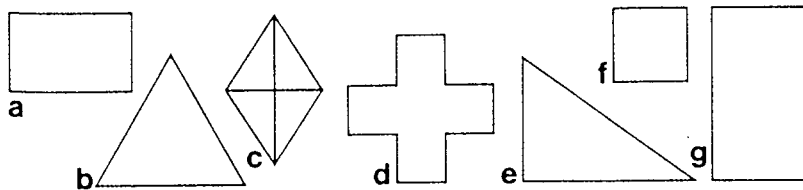
■ **Déroulement**

a) Situation de découverte

Parmi toutes les figures ci-dessous, choisis-en une.

1. Sur une feuille de papier, décris-la de telle façon qu'un camarade qui lira ton texte soit capable de la reproduire sans la voir (mais n'écris pas le nom de la figure si tu le connais).

2. Échange ton papier avec un camarade et construis la figure qu'il a décrite. Vérifiez entre vous que les figures choisies et construites se recouvrent parfaitement.



Consigne

Dans chaque groupe, choisissez une figure parmi les sept qui vous sont proposées. Décrivez-la le plus exactement possible. Vous n'avez pas le droit de la dessiner. Quand vous aurez terminé, échangez votre description avec celle d'un autre groupe. Grâce à cette seule description vous devrez retrouver la figure dont il s'agit.

b) Recherche : G.

c) Mise en commun

Elle doit permettre :

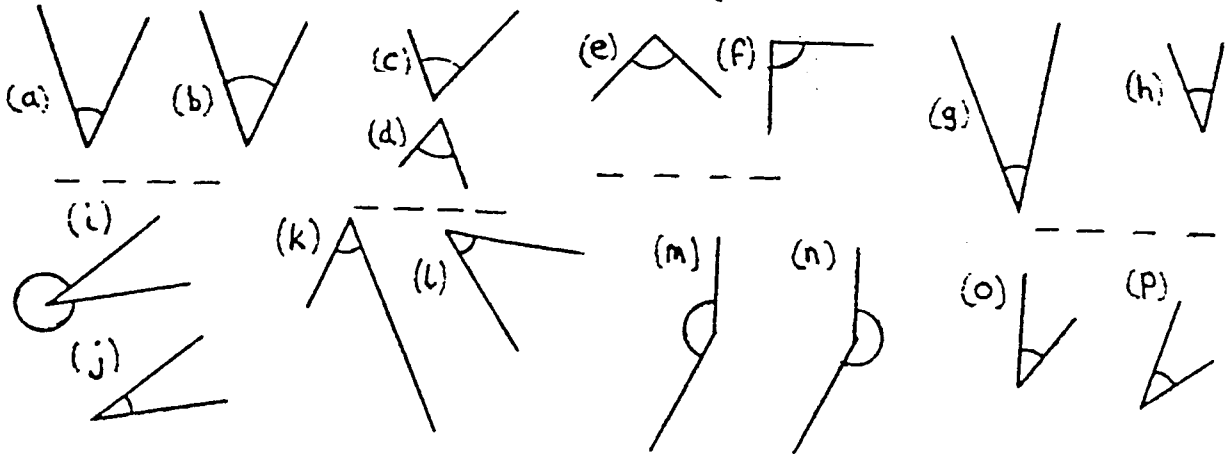
- de mettre en valeur les critères retenus pour décrire la figure ; sont-ils pertinents ?
- de juger si la description évite toute ambiguïté ;
- de qualifier les critères retenus en tant que propriétés de figures dont le seul inventaire permet de les construire ;
- de voir que l'on peut limiter le nombre de ces propriétés ;
- de rappeler le vocabulaire attaché aux figures connues.

Objectif Calcul

CM1

Annexe 1

⑥ Which angle is BIGGER or are they ABOUT THE SAME SIZE? Answer this question for each pair of angles.



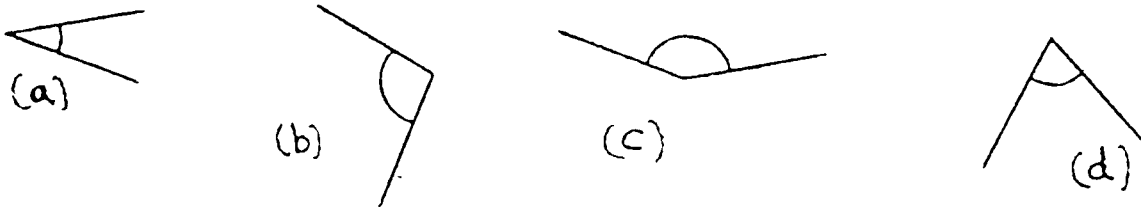
Réussites (c) (d) 39%

(g) (h) 44%

(k) (l) 42%

Annexe 2

① Which is the LARGEST of these angles? -----

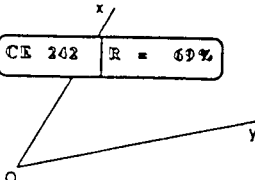


Réussite 74%

Réponse erronée la plus fréquente (b)

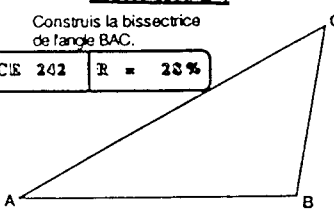
Item EXA18
TRACE la bissectrice de l'angle \widehat{xOy} .

CE 202	R = 69%
--------	---------



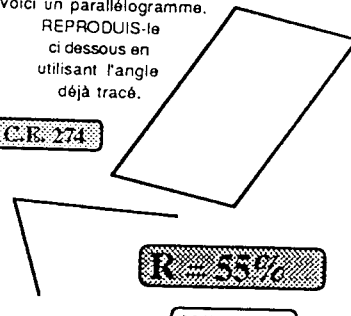
Item EXC4
Construis la bissectrice de l'angle BAC.

CE 202	R = 23%
--------	---------



Item C 26
Voici un parallélogramme.
REPRODUIS-le ci dessous en utilisant l'angle déjà tracé.

C.E. 274



R = 55%

N.R.: 13%

Annexe 4

Cette annexe est tirée du compte-rendu d'un atelier fait au Colloque Interirem de Géométrie en 1990: Duval A. et Salin M.H. (1990). "Y a un malaise" Actes publiés par l'IREM de Bordeaux.

Etudions, à titre d'exemple (mais il est assez représentatif), la façon dont la notion d'angle est présentée à des élèves de CM dans un manuel récent¹. Nous utilisons pour cela une liste de questions qui pourrait constituer un guide d'analyse commun à différentes approches. Ce guide s'appuie sur les résultats de l'analyse didactique que nous avons développée dans la partie B.

Dans le document étudié,

1)-Un problème spatial pour lequel le concept d'angle pourrait être construit comme un outil nécessaire à sa résolution est-il posé aux élèves?

- renvoie-t-il à des pratiques sociales importantes?
- un tel problème est-il seulement évoqué?

2) si l'angle n'est pas présenté comme un outil,

- l'introduction du concept est-elle associée
 - * à la description d'un phénomène spatial?
 - * à une figure de l'espace géométrique?
 - * à une définition accompagnée d'une figure?
- y-a-t-il des exercices permettant au maître de tester les représentations de ses élèves, aux élèves de les remettre en cause?
- existe-t-il des exercices d'application leur permettant de comprendre à quoi peuvent servir les angles?

3) Quelle transposition didactique de la notion d'angle a été choisie par les auteurs?

Etude du vocabulaire et des notations employés.

Voici quelques-uns des résultats que fournit l'application de cette grille à l'étude du document présenté.

¹ Bouchet et coll (1989) Collection Chapuis CM1, Nathan

Analyse de la première activité (annexe 5.1)

Au plan de l'espace

Elle relève du domaine spatial, mais l'activité de l'élève porte sur l'espace graphique dans lequel il doit représenter le déplacement de la boule conformément à une situation qui est seulement évoquée. La question posée est une prévision: La boule blanche, lancée dans la direction indiquée sur la figure, peut-elle après plusieurs rebonds pousser la boule 3 dans le trou?

Dans cette situation, le concept d'angle peut-il être construit par les élèves comme un outil permettant de résoudre le problème?

Remarquons tout de suite que la situation ne valide pas l'action de l'élève: S'il n'a pas compris comment se font les rebonds de la boule, s'il n'a pas su reporter des angles égaux, seule la correction par l'enseignant pourra le lui faire savoir.

Regardons de plus près les consignes en supposant que l'enseignant propose l'exercice exactement comme il est décrit dans le manuel.

* La possibilité de trouver qui des 2 joueurs a raison suppose que les élèves soient capables de reproduire le dessin de manière exacte, en particulier les positions des boules, et la direction du déplacement de la boule blanche. Bien sûr, il suffit de noter la position exacte de A et de B, mais pourquoi les enfants comprendraient-ils que la réponse à la question posée dépend, dans cette situation, de l'exactitude de leur reproduction, ce qui n'est pas le cas dans d'autres situations?

* Les auteurs doutent, fort justement, que les enfants soient capables de déterminer eux-mêmes la loi du rebond. Aussi la leur expliquent-ils en utilisant, dès le début, le terme d'angle (dont c'est la première apparition dans ce contexte; auparavant les enfants ont repéré des angles droits de quadrilatères) et en leur proposant un moyen permettant d'obtenir la construction attendue, grâce à un subterfuge: avoir choisi un angle d'attaque de 60° , permettant d'utiliser l'équerre.

Tout le travail de modélisation géométrique de la situation réelle est donc absent, son résultat est présenté aux élèves comme allant complètement de soi et l'activité spatiale ne sert que de prétexte à un travail de tracés, dont le résultat ne peut en aucun cas être confronté avec ce qui se passerait dans la réalité.

Notons enfin que l'utilité sociale d'une telle référence à l'espace n'est pas grande.

Au plan de l'espace graphique

CHAPITRE C-6

Annexe 5

L'activité proposée est donc une activité de tracé de segments, le problème étant de déterminer leurs directions en appliquant une règle de construction qui supposerait la compréhension par les élèves de l'égalité des angles et de la façon de les reporter. Mais puisque c'est la première activité sur ce sujet, les auteurs jugent nécessaire de les aider en suggérant l'emploi de l'équerre; toutefois, le maître aura bien besoin de guider les élèves s'il veut qu'une majorité d'enfants puissent aller jusqu'au bout de la tâche. De nombreuses observations dans d'autres situations, plus simples, laissent penser que l'emploi de l'équerre n'est pas si simple et qu'il faut déjà avoir compris ce que signifie le report d'un angle pour pouvoir l'utiliser à bon escient.

* Notons en ce qui concerne la transposition didactique de la notion d'angle, l'ambiguïté et la complexité de la situation proposée:

- Le trajet de la boule évoque les changements de direction et donc l'angle de rotation.

- La façon de construire fait appel à l'angle de secteur.

Notons aussi le choix fait par les auteurs de ne pas introduire le concept de secteur qui pourtant permet une certaine clarification de "l'imbroglie des angles". Mais ce choix est conforme aussi au programme de 6ème.

Analyse de la deuxième activité (annexe 5.1)

C'est encore une activité de tracé, qui généralise, mais en la situant dans un cadre différent, l'activité précédente:

Le tracé de départ ne représente plus le trajet d'une boule, il constitue un objet qu'il s'agit de "reproduire". Comme la consigne est assez floue, (quelles sont les caractéristiques du dessin qu'il faut reproduire? la position par rapport au rectangle, la longueur des segments Ox et Oy etc...), les auteurs décrivent successivement deux algorithmes qui doivent permettre aux élèves, sans doute, à la fois de comprendre ce qu'est un angle et de savoir en reproduire.

Nous voyons ici fonctionner un mode de présentation des connaissances, typique de l'enseignement élémentaire de la géométrie, l'ostension. Ne pouvant donner à des enfants de 9 ans une des définitions possibles du concept d'angle, (ce qui serait d'ailleurs en contradiction avec les instructions), ne pouvant non plus faire appel à une situation a-didactique le faisant fonctionner, les auteurs choisissent d'associer le mot angle à un tracé particulier, accompagné d'une série de "marqueurs" nouveaux pour les élèves

CHAPITRE C-6

Annexe 5

comme les notations O_x et O_y , ou la représentation de zones colorées non bordées par des traits.

Remarquons qu'aucune information complémentaire ne vient expliciter la différence entre reproduire un angle et reproduire un triangle: Un angle est une figure formée de 2 côtés et non de 3, dont on colorie une partie située entre les 2 côtés.

Analyse des exercices (annexe 5.2)

Peuvent-ils remettre en cause la conception énoncée ci-dessus?

Aucun des exercices 1, 2, 4, 5, ne peut faire apparaître une question ou une contradiction comme le pourrait l'exercice suivant:

$$A = B ?$$

Les exercices 3 et 6 sont une réplique exacte de la première activité, quant au jeu il présente les mêmes caractéristiques que les deux activités de présentation de l'angle: l'illusion que l'enfant peut donner du sens à n'importe quelle situation évoquée et qu'il suffit de lui montrer sur un exemple ce qu'il faut faire pour qu'il puisse le réaliser à son tour.

Conclusions

Nous voyons donc sur cet exemple², les deux caractéristiques les plus importantes de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire (et dans une moindre mesure, en 6ème -5ème. on retrouve tous les exercices à support spatial: billard, terrain de foot, radar dans des manuels de 6ème, comme exercices d'application.)

La référence à l'espace n'est toujours qu'évoquée:

Un dessin réalisé par l'adulte semble suffire pour donner au problème une signification spatiale, la transposition de la situation réelle à la situation représentée est supposée évidente, la capacité des élèves à utiliser, dans une situation réelle, les outils mathématiques introduits n'est pas testée.

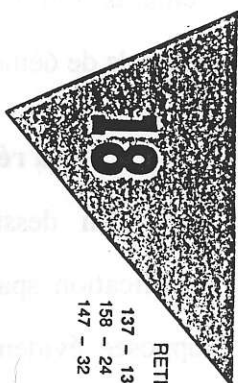
Les notions géométriques sont introduites sans référence à des problèmes a-didactiques, mais par ostension.

² mais c'est absolument général; pour un autre exemple voir Eiller et coll. Math et Calcul CM2 Hachette p.96 et ss.

CHAPITRE C-6

Annexe 5

La seule vue des tracés, accompagnés des notations mathématiques usuelles, doit suffire à définir les objets géométriques et leurs propriétés.



RETRANCHER UN NOMBRE DE DEUX CHIFFRES

137 - 13	137 - 13 = (137 - 10) - 3 = 127 - 3 = 124
158 - 24	266 - 11
147 - 32	495 - 52
	884 - 71
	748 - 35
	698 - 87

TRACÉ ET REPRODUCTION D'ANGLES

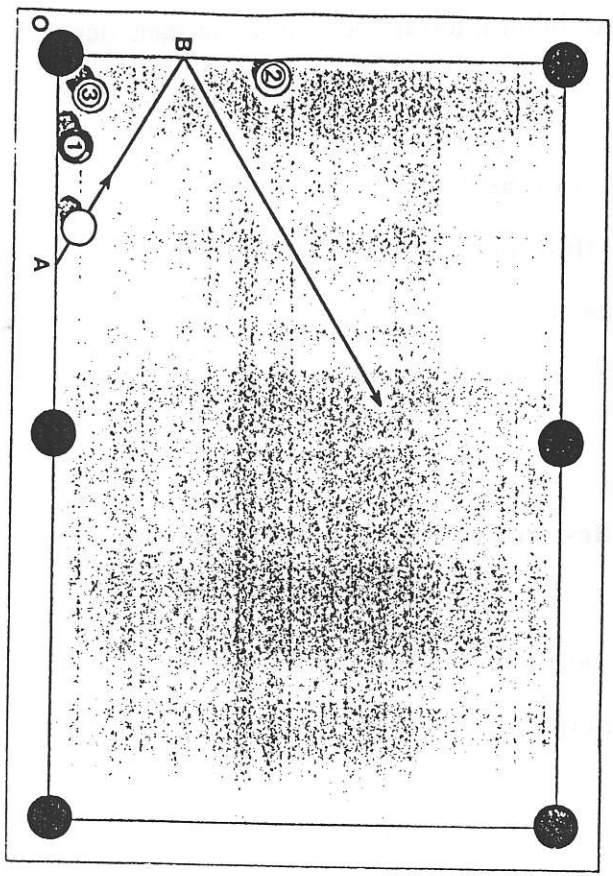
Présentation

Thomas et Sébastien font une partie de billard américain. La bille blanche doit envoyer les autres billes dans les trous.
C'est à Thomas de jouer, il frappe la bille et pense aussitôt qu'il va réussir à faire rentrer la bille n° 3 dans le trou.

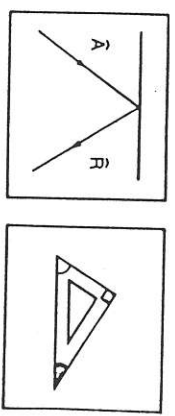


Sébastien, lui, est sûr du contraire.
Lequel des deux a raison ?

Pour t'aider à trouver qui a raison, voici un rectangle représentant la table de billard.



- Reproduis-le sur ton cahier d'essais puis marque les points A et B.
- Trace la suite de la trajectoire de la bille en respectant la règle suivante :
chaque fois qu'une bille lancée rencontre un bord, elle rebondit selon un angle égal à son angle d'attaque.
- Reporte les angles égaux en utilisant une équerre identique à celle-ci. Colorie-les d'une même couleur.



\hat{A} angle d'attaque
 \hat{R} angle de rebond
 $\hat{A} = \hat{R}$

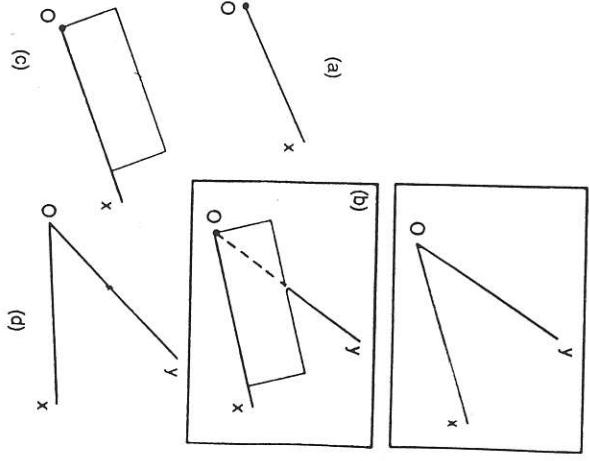
Reproduction d'angles

A l'aide d'un gabarit et d'une règle
Reproduis l'angle XOY sur une feuille de papier blanc.

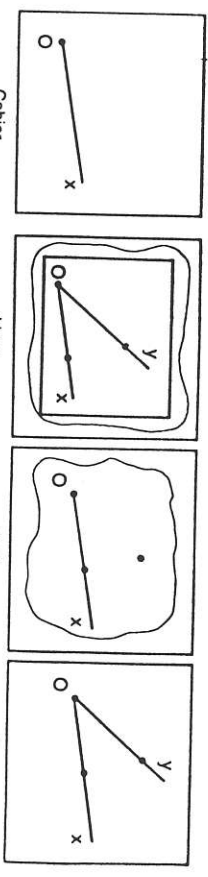
- Fabrication du gabarit
1. Trace sur une feuille de carton souple un rectangle dont les côtés mesurent 1 cm et 5 cm.
 2. Découpe-le. Il te servira de gabarit.

• Lis cette liste d'instructions puis exécute le tracé.

1. Marque le sommet O de l'angle et trace un côté (a).
2. Comme sur le dessin, place le gabarit sur l'angle à reproduire puis marque l'écartement (b).
3. Reporte l'écartement de l'angle (c).
4. Trace le deuxième côté et colorie la zone comprise entre les deux côtés.



A l'aide d'un calque et d'une règle
Reproduis à nouveau l'angle de l'exercice précédent sur ton cahier d'essais, en suivant les étapes de reproduction ci-dessous.



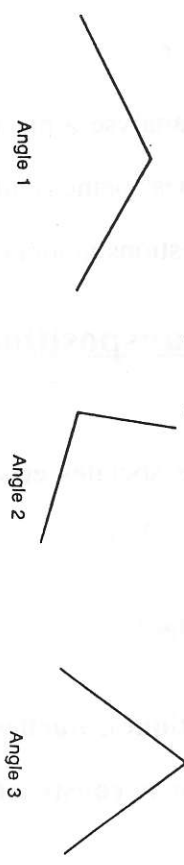
- Découpe les deux angles que tu viens de reproduire, puis vérifie par superposition sur le modèle que tu n'as pas commis d'erreur.



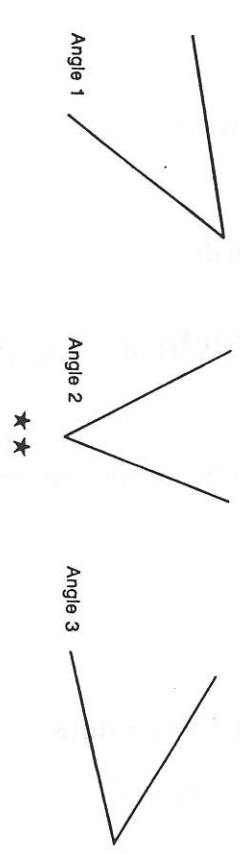
Pour reproduire ou reporter des angles avec un calque ou un gabarit, il est important :
 — de bien relever les points choisis,
 — de placer avec précision les instruments,
 — et de tracer avec soin les côtés de l'angle (crayon finement taillé).

TRAVAUX ET EXERCICES

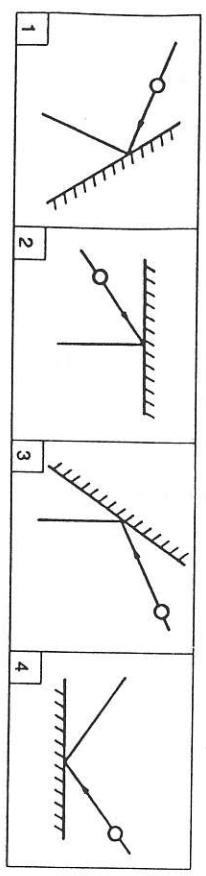
1 Reproduis ces angles sur ton cahier à l'aide d'un papier calque et d'une règle. Quels sont les angles plus grands que l'angle droit ?



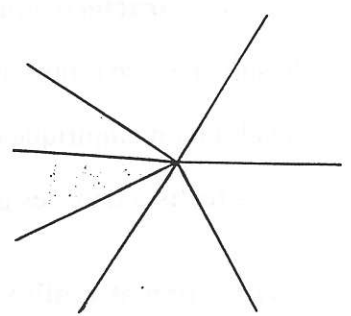
2 Reproduis ces trois angles à l'aide du gabarit et d'une règle. Deux angles sont égaux. Lesquels ?



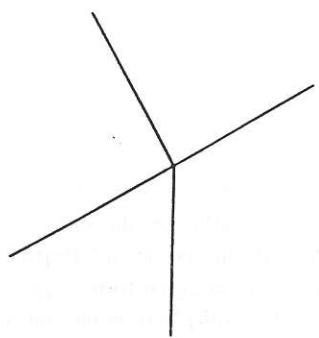
3 Chacune de ces figures représente la trajectoire d'une bille qui rebondit contre un bord du billard. Indique les trajets qui sont possibles et ceux qui sont impossibles.



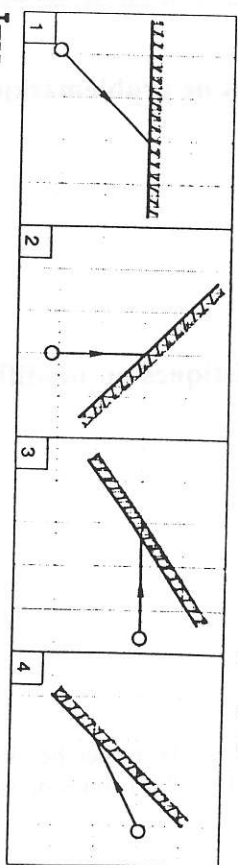
4 Utilise uniquement la règle et l'équerre pour reproduire ces angles.



5 A l'aide de l'équerre et de la règle, reproduis ces angles.



6 Reproduis ces figures sur ton cahier d'essais, puis complète chaque trajectoire de la bille. Utilise les instruments qui te paraissent les mieux adaptés. Colorie les angles égaux.



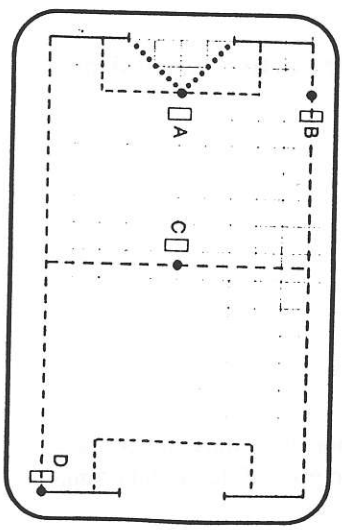
JEU

Cécile s'amuse sur son ordinateur à dessiner les angles de tir des différents joueurs.

Elle a déjà délimité la zone de tir du joueur A.

• Reproduis sur ton cahier d'essais ce terrain de football, puis trace et colorie les angles de tir des joueurs. Tu peux en placer d'autres.

A ton avis, où est-il préférable de se placer sur le terrain pour que l'angle de tir soit le plus grand ?



Cette annexe est tirée du compte-rendu du T.D. " A la recherche de phénomènes didactiques dans l'enseignement de la géométrie" Berthelot R. et Salin M.H. (1989) Actes de la Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique.

Eléments pour une analyse à priori des "travaux géométriques" proposés pages 94 à 98 du manuel "Mathématiques" 6ème (Didier)¹.

Deux groupes de questions guident cette analyse:

Groupe A: Transposition didactique de pratiques spatiales de référence

Y-a-t-il des pratiques sociales et spatiales auxquelles on peut renvoyer les activités décrites dans les pages 94 à 98?

1) Si oui, lesquelles?

2) Dans ces pratiques, quelles sont les contraintes qui rendent nécessaire la reproduction d'angles ou la construction de triangles?

3) Ces contraintes sont-elles réalisées dans ces activités?

Groupe B: L'espace comme milieu a-didactique

1) Les caractéristiques suivantes d'une problématique spatiale

-le sujet peut se représenter l'état final

-la validation empirique est effective

sont-ils réalisés dans les pages étudiées?

2) Comment réaliser ces caractéristiques en modifiant les activités aussi peu que possible?

3) Que penser du "coût didactique" d'une telle transformation?

¹ Benoit et coll. (1986) Mathématiques 6ème, Didier.

4) Certaines des activités proposées ont pour objectif la maîtrise des techniques spatiales de reproduction d'angles.

- quelles sont les variables qui rendent plus ou moins difficile l'application des différentes méthodes présentées P.94-96-97

-les valeurs choisies pour ces variables dans les différentes activités et exercices proposés aux élèves permettent-elles de rendre plausible la réussite d'une majorité d'élèves à une tâche quelconque de reproduction d'angles, sans intervention du professeur autre que celle prévue dans le livre?

Eléments de réponse

A 1 Les pratiques sociales qui intègrent l'usage d'angles pour saisir et communiquer des informations spatiales ne font pas partie des situations ordinairement vécues par chacun. Elles relèvent de pratiques professionnelles, même si certaines sont investies pendant leurs loisirs par des "amateurs".

A 2 Dans ces pratiques, c'est l'impossibilité ou le coût de la prise ou du report d'informations sur les longueurs qui rend nécessaire la prise en compte des angles.

A 3 Aucune de ces contraintes n'est réalisée dans les activités proposées, la reproduction de la figure peut être obtenue à l'aide de mesures de longueurs avec plus de fiabilité. Remarquons que même si l'angle est nommé, rien n'assure que pour l'élève, ce ne soit pas la reproduction du trajet x vers o puis vers y qui soit l'objet de ce travail.

B 1

a) L'état final est bien désigné par l'enseignant: c'est une figure tracée sur le papier à un autre endroit que le modèle, mais il n'y a aucune raison pour que l'élève saisisse que cette figure puisse constituer un état final gagnant même si les longueurs des côtés ne sont pas les mêmes que celles de la figure initiale.

b) La validation empirique n'est pas effective et l'élève ne dispose pas d'un moyen connu de lui pour déterminer s'il a réussi ou non. Il a besoin de l'enseignant pour que celui-ci lui confirme qu'il maîtrise l'algorithme de construction. La situation n'est donc pas a-didactique.

B 2 Pour rendre la situation a-didactique, le plus simple paraît d'introduire le calque comme support de la figure reproduite, la vérification de l'échec ou de la réussite se fait alors par superposition. Mais la détermination de ce qu'est un état terminal gagnant suppose que

soient explicités d'une part le fait que la longueur des côtés du modèle et de la réalisation n'intervient pas dans cette détermination, d'autre part l'écart admissible entre les deux angles comparés.

B 3 Ces modifications vont impliquer des contraintes de temps (plusieurs essais), une prise en compte par le professeur des contraintes de précision spatiale, une négociation plus explicite du statut de l'objet mathématique par rapport à l'objet spatial et probablement une modification de la progression. Son "coût didactique" est sans doute élevé.

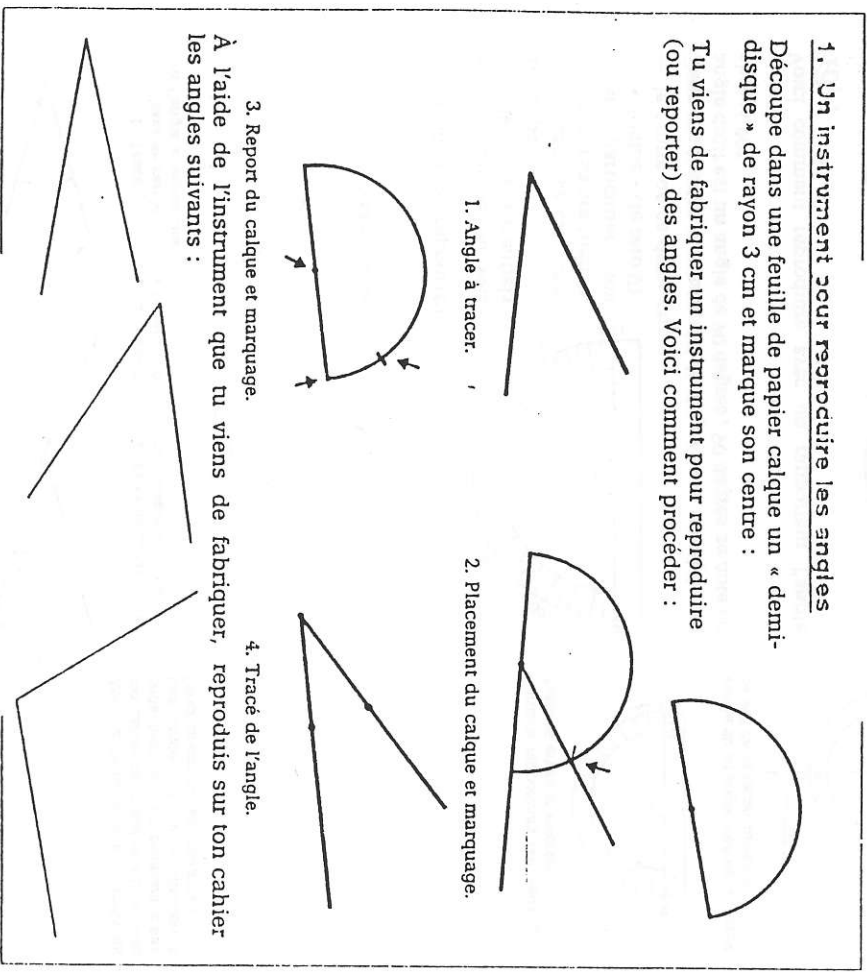
TRIANGLES ET QUADRILATÈRES

Approches

1. Un instrument pour reproduire les angles

Découpe dans une feuille de papier calque un « demi-disque » de rayon 3 cm et marque son centre :

Tu viens de fabriquer un instrument pour reproduire (ou reporter) des angles. Voici comment procéder :



1. Angle à tracer.

2. Placement du calque et marquage.

3. Report du calque et marquage.

4. Tracé de l'angle.

À l'aide de l'instrument que tu viens de fabriquer, reproduis sur ton cahier les angles suivants :



Bases



B1 Tracer l'angle d'origine

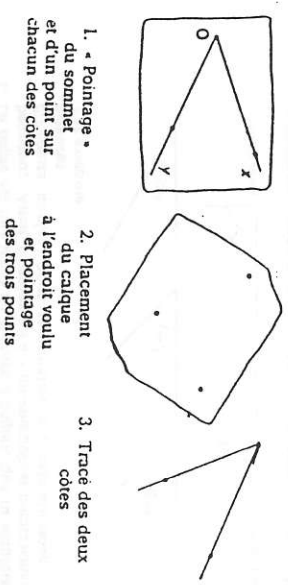
Dans ce chapitre, les figures géométriques que tu vas étudier, construites à partir de droites, comportent des angles. Il est donc important que tu saches reproduire un angle ; ce paragraphe est là pour t'apprendre à le faire, si tu ne le sais pas déjà.

Voici une figure représentant un angle, l'angle \widehat{xOy} (ou \widehat{yOx}). Les deux demi-droites Ox et Oy sont les côtés et le point O est le sommet.



Pour reproduire, l'angle \widehat{xOy} , plusieurs techniques sont possibles :

• À l'aide de papier calque :



1. « Pointage » du sommet et d'un point sur chacun des côtés

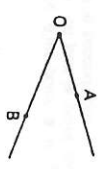
2. Placement du calque à l'endroit voulu et pointage des trois points

3. Tracé des deux côtés

• Reproduire « signifie ici » reporter ailleurs ».

Voir A1.

Retiens bien cette notation : le sommet (ici O) est toujours écrit au milieu, et la pointe du « chapeau » est au-dessus de lui. Si les droites, et donc l'angle, sont définies par des points O , A et B on notera l'angle \widehat{AOB} (ou \widehat{BOA}) :



Il s'agit donc de tracer à un autre endroit un angle égal à \widehat{xOy} .

Après avoir représenté un angle sur ton cahier, reproduis-le à côté avec cette technique, en essayant d'être très précis. La figure de départ et la nouvelle figure tracée sont superposables (décalqué et transporté, tu peux faire coïncider l'une avec l'autre).

• À l'aide d'un compas :



1. Tracé d'arcs de cercle sur l'angle à reproduire
2. Report à l'endroit voulu
3. Prise de l'écartement sur l'angle à reproduire



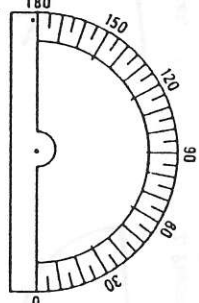
4. Report à l'endroit voulu
5. Tracé des deux côtés

• À l'aide d'un rapporteur :

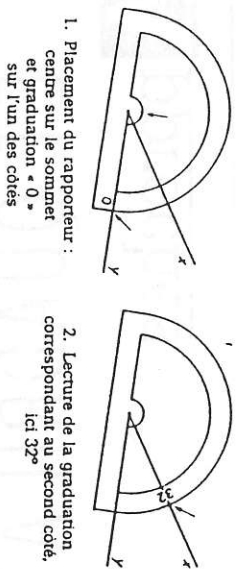
Sur ce schéma, tu vois les éléments essentiels du rapporteur :

- le demi-cercle extérieur et sa graduation, en particulier son « origine » (le zéro 0) ;
- le centre de ce demi-cercle.

Cette graduation a pour unité le degré ; par exemple, un angle droit est un angle de 90 degrés ; 90 degrés se note en abrégé 90°.



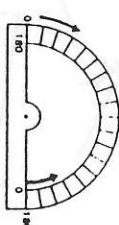
Voici comment reproduire avec un rapporteur l'angle \widehat{xOy} :



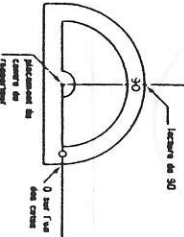
1. Placement du rapporteur : centre sur le sommet et graduation « 0 » sur l'un des côtés
2. Lecture de la graduation correspondant au second côté, ici 32°
3. Pointage du centre à l'endroit voulu, ainsi que des graduations 0 et 32
4. Trace des côtés

Après avoir représenté un angle sur ton cahier, reproduis-le à côté avec cette technique en essayant d'être très précis. Fais bien attention à l'enchaînement des opérations !

Certains rapporteurs ont deux graduations en sens inverses :



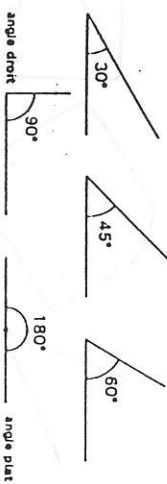
Vérifie qu'un angle droit est un angle de 90° de la façon suivante :



Si le second côté ne se trouve pas entièrement en face d'une graduation, tu lis « compris entre 31 et 32 » (par exemple) ou encore « approximativement 32,5° », etc. Tu apprends ici à mesurer un angle avec un rapporteur.

Après avoir représenté un angle sur ton cahier, reproduis-le à côté, avec cette technique, en essayant d'être précis.

Remarque :
1. Le degré est une unité de mesure d'angles, que tu emploieras beaucoup. Ainsi, entends-tu à « photographier mentalement » différents angles, pour reconnaître approximativement des mesures.
Par exemple :

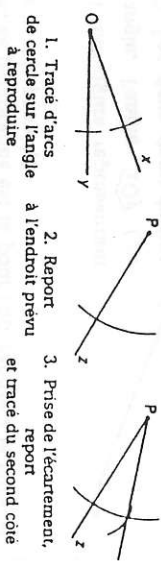


2. Le rapporteur permet de représenter n'importe quel angle dont on connaît seulement la mesure.
Par exemple, on veut tracer un angle de 57° à partir de la demi-droite Ox (O est le sommet de l'angle et Ox est un côté de l'angle) :



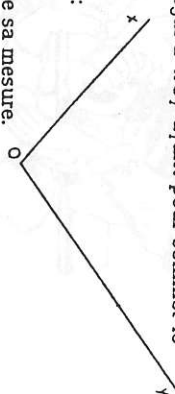
Pointage du centre et des graduations 0 et 57

3. Les mêmes méthodes sont utilisables si, par exemple, le sommet ou l'un des côtés de l'angle sont imposés.
Pour tracer un angle égal à \widehat{xOy} avec pour côté la demi-droite Pz en utilisant un compas :



VERIFIE SI TU AS COMPRIS

1. a) Représente sur ta feuille, à l'aide d'un rapporteur, un angle de 40°, note le \widehat{xOy} .
b) Choisis un point P qui ne soit situé ni sur la demi-droite Ox, ni sur la demi-droite Oy. À l'aide d'un compas, trace un angle égal à \widehat{xOy} ayant pour sommet le point P.
2. a) À l'aide d'un rapporteur, reproduis sur ta feuille l'angle suivant (tu le noteras aussi \widehat{xOy}) :
b) Estime, à l'œil, un encadrement (large) de sa mesure.
c) Trace une demi-droite Pz n'ayant aucun point commun avec la demi-droite Ox ni avec la demi-droite Oy. À l'aide d'un compas trace un angle égal à \widehat{xOy} ayant pour côté la demi-droite Pz.
Si tu commets plus d'une erreur, revois ce paragraphe.



Il existe d'autres unités de mesure d'angles, par exemple le grade, que tu peux trouver sur certains rapporteurs, sur le demi-cercle intérieur. Un angle droit, par exemple, est un angle de 100 grades. On ne l'utilisera pas ici.

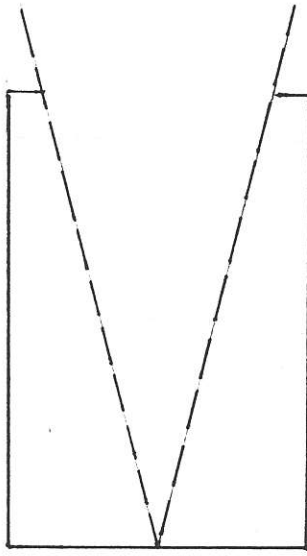
Ici on a tracé l'angle « au-dessus » de la demi-droite Ox : on aurait pu aussi le tracer « en-dessous ».

Trace d'un point à la graduation zéro : on joint le point avec 0 pour avoir le second côté.

Utilise la même démarche pour tracer un angle de 42°.

Relais ces traces sur ton cahier.

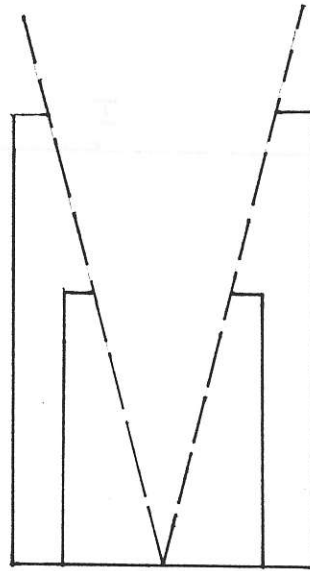
Annexe 7a



oeil

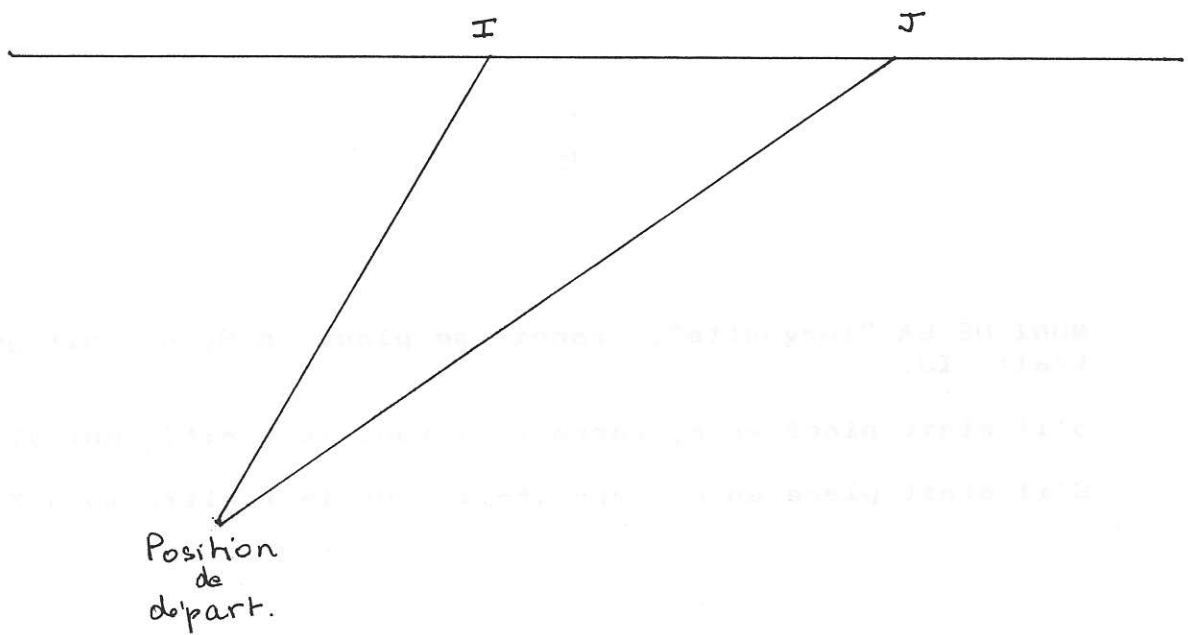
Lorgnette - Coupe

Annexe 7b



La petite et la grande lorgnettes ont le même angle de vue

Annexe 8



I J

A

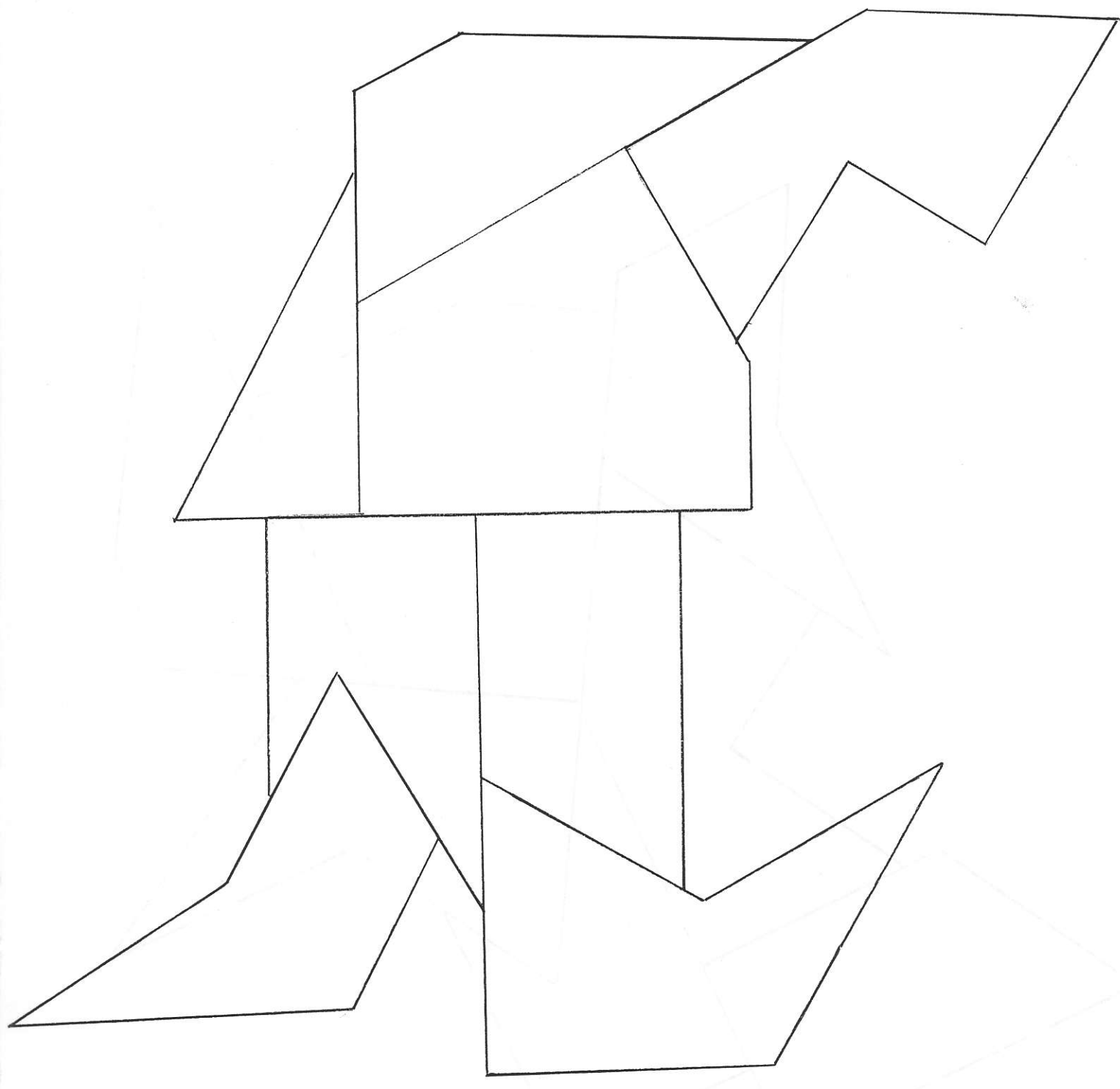
C

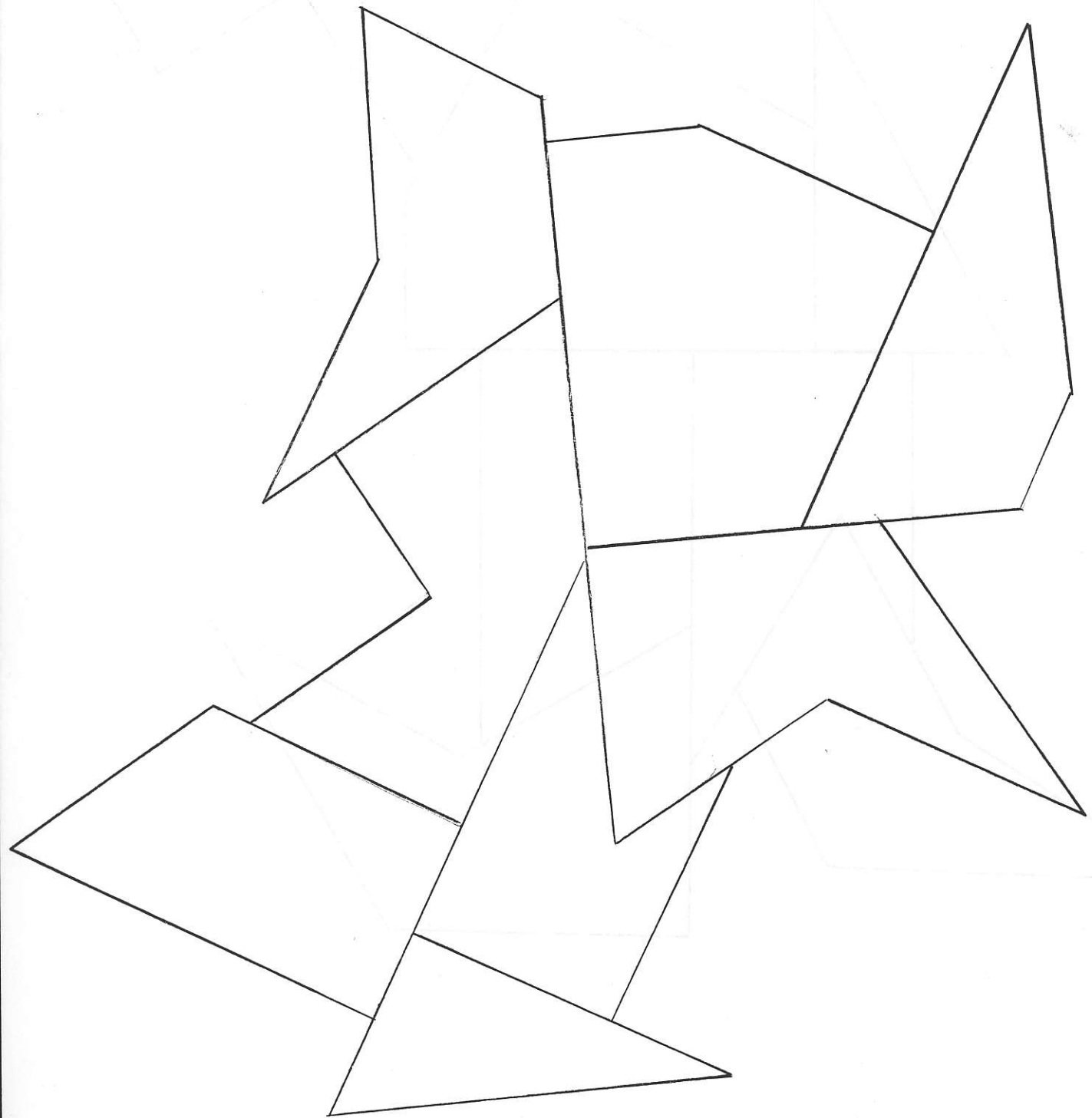
B

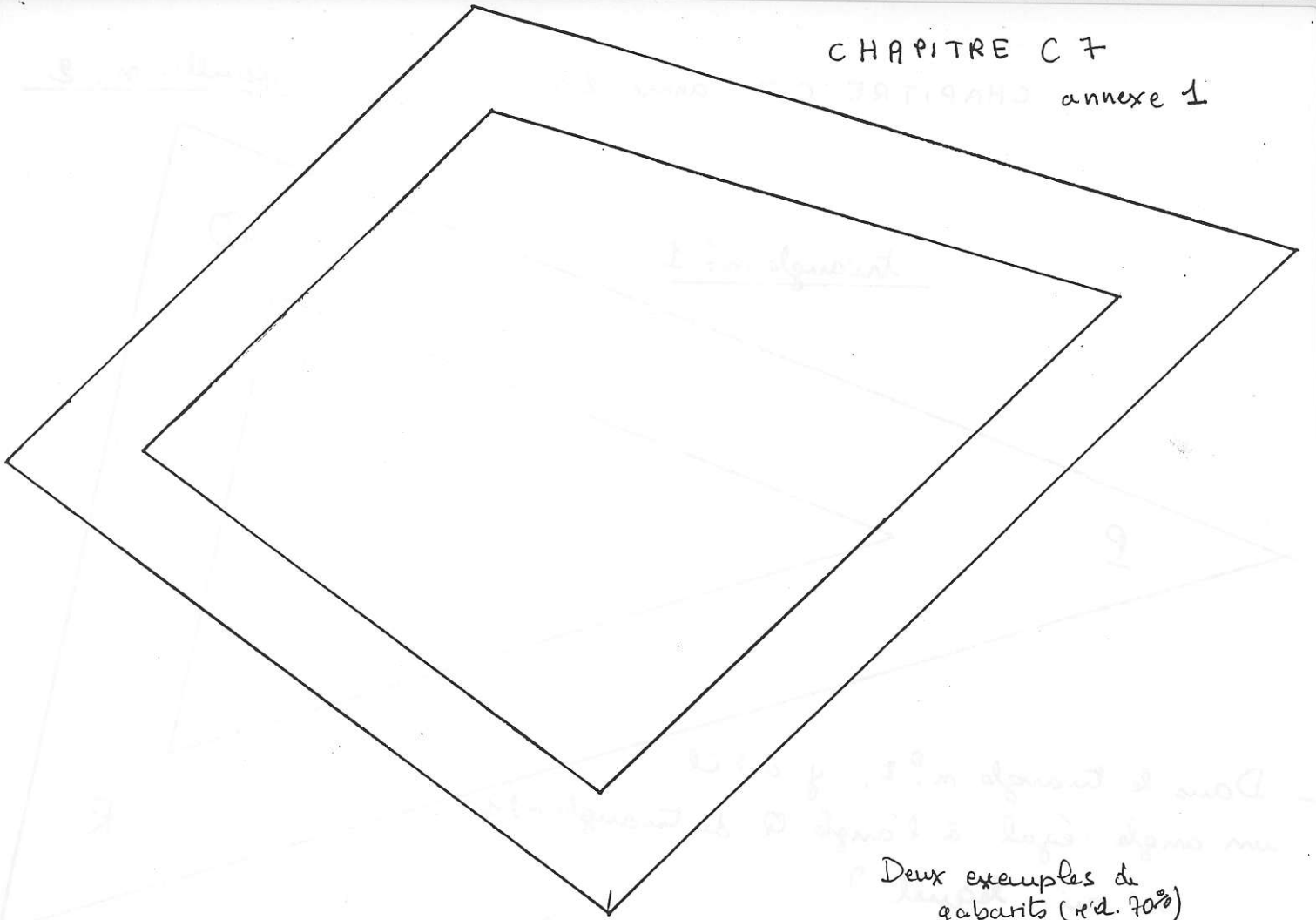
MUNI DE SA "lorgnette", Francis se place en B, et voit juste le trait IJ.

S'il était placé en A, verrait-il tout le trait?, moins?, plus?

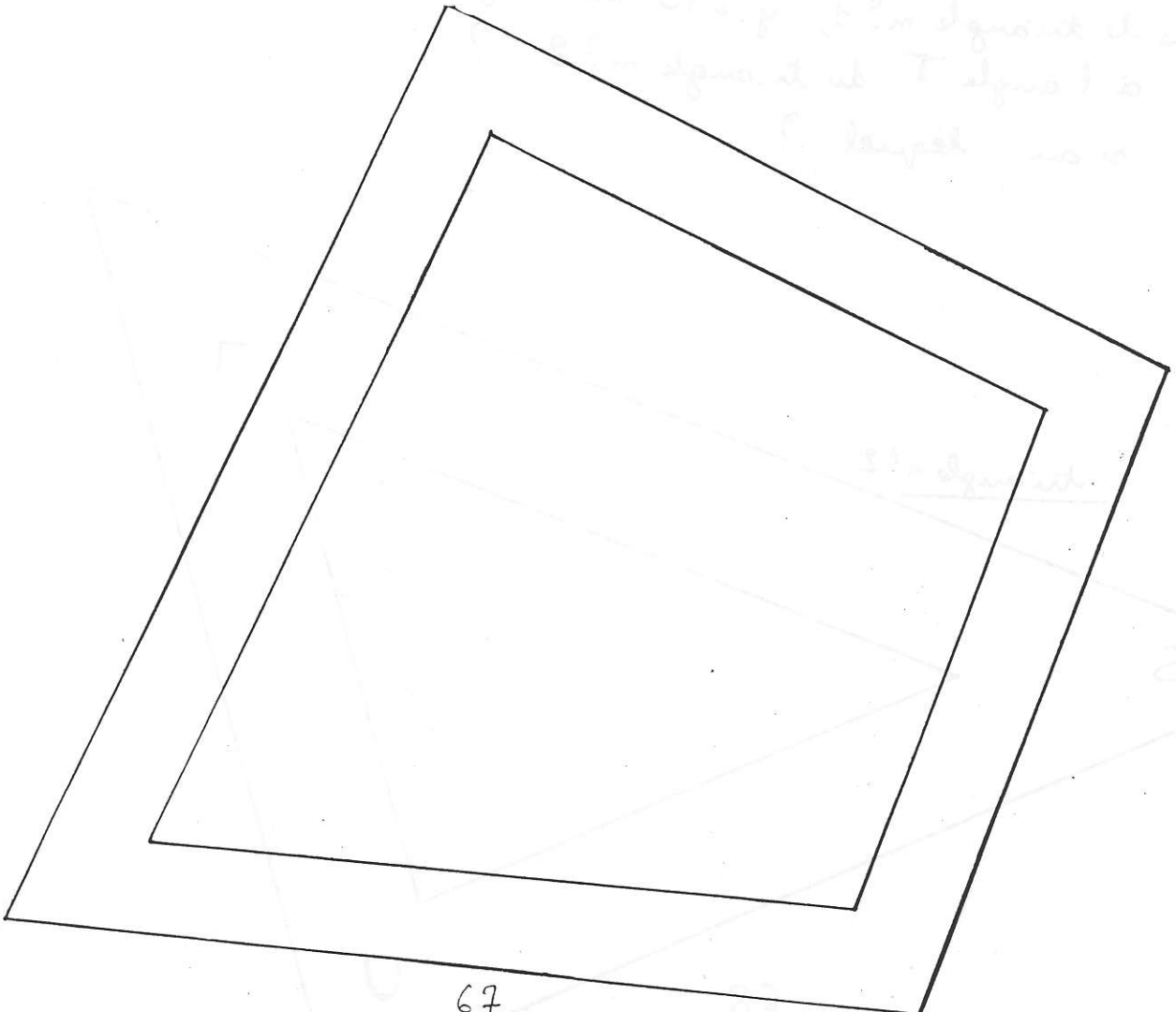
S'il était placé en C, verrait-il tout le trait?, moins?, plus?



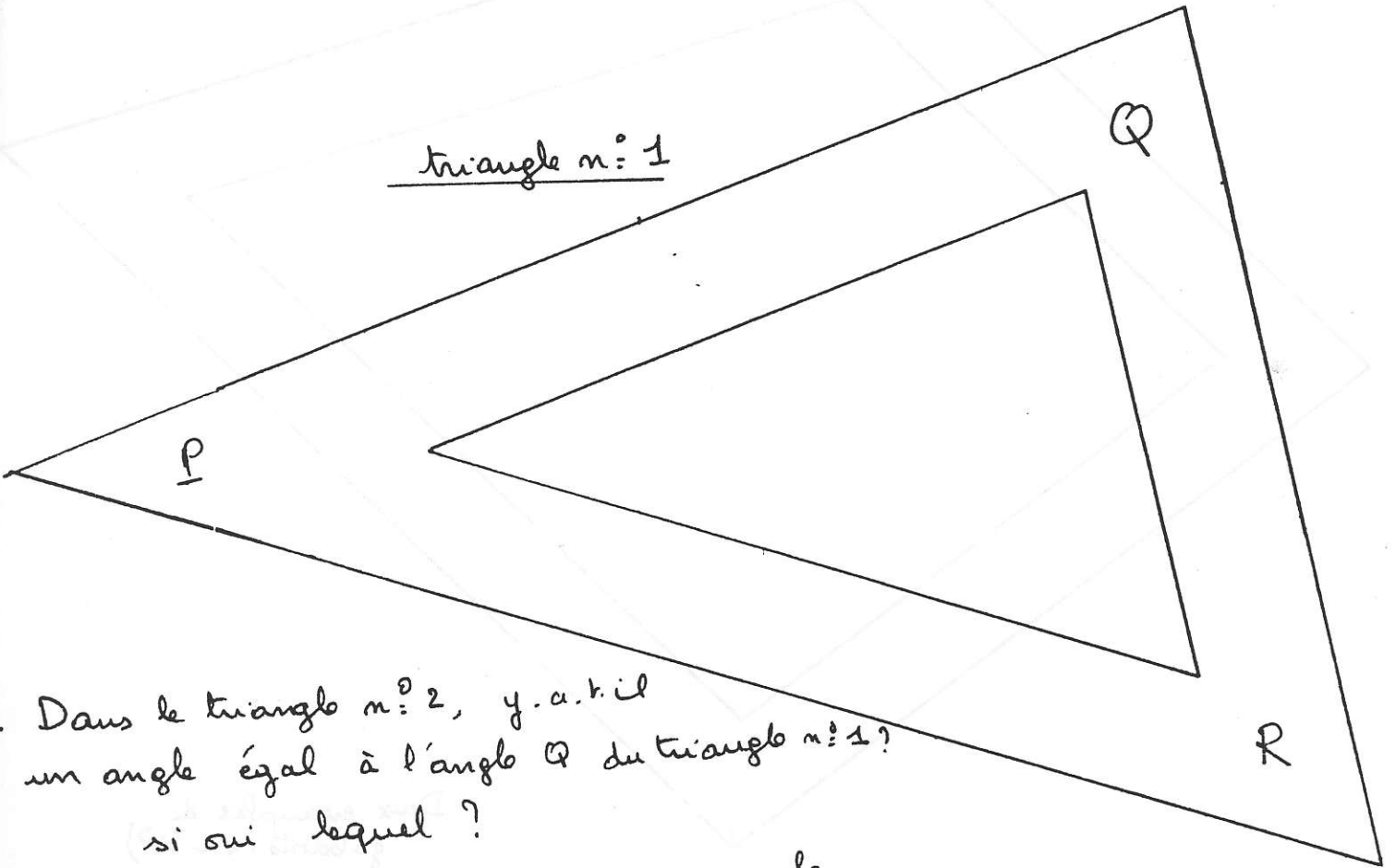




Deux exemples de gabarits (r'd. 70%)



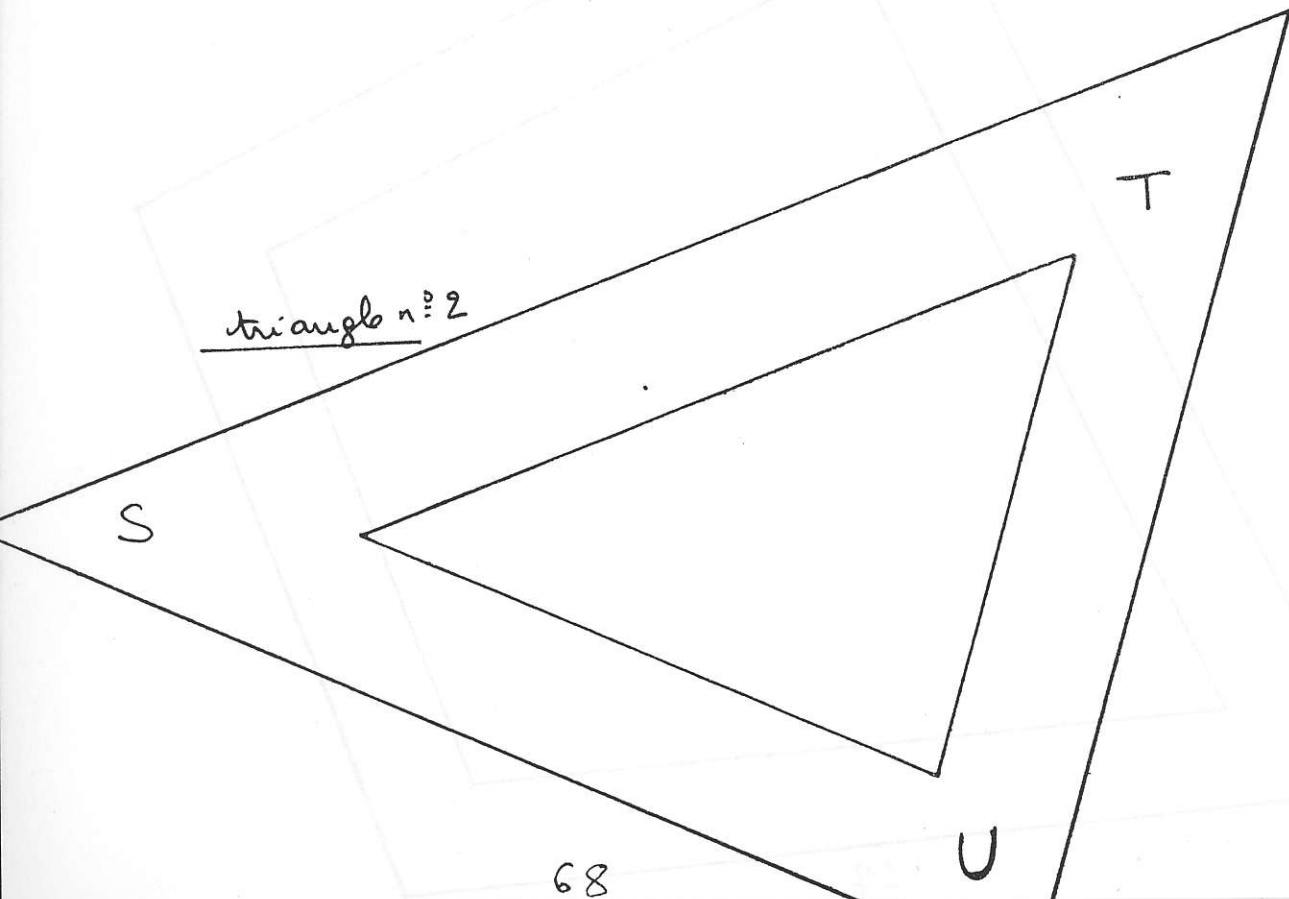
triangle n° 1



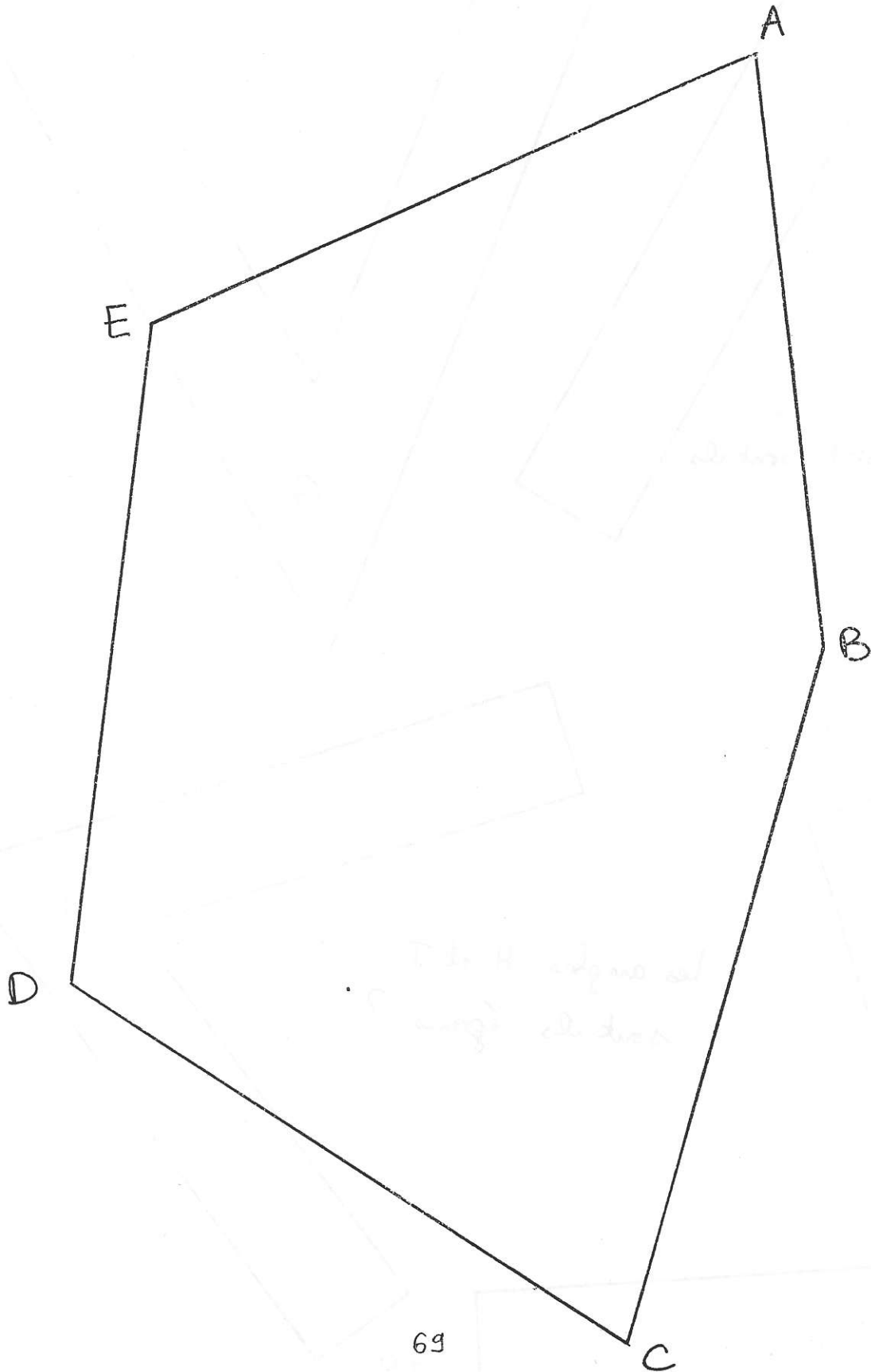
Dans le triangle n° 2, y.a.t il un angle égal à l'angle Q du triangle n° 1? si oui lequel ?

Dans le triangle n° 1, y.a.t il un angle égal à l'angle T du triangle n° 2 ? si oui lequel ?

triangle n° 2



y. a-t-il un angle égal à A ? si oui lequel ?
y. a-t-il un angle égal à D ? " " " ?



F



G

les angles G et F sont-ils égaux ?

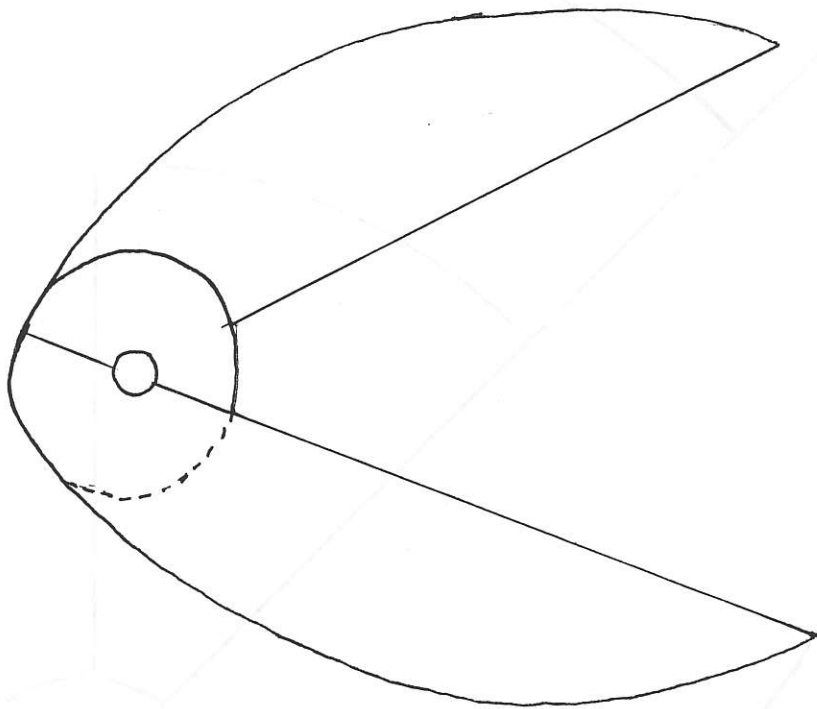


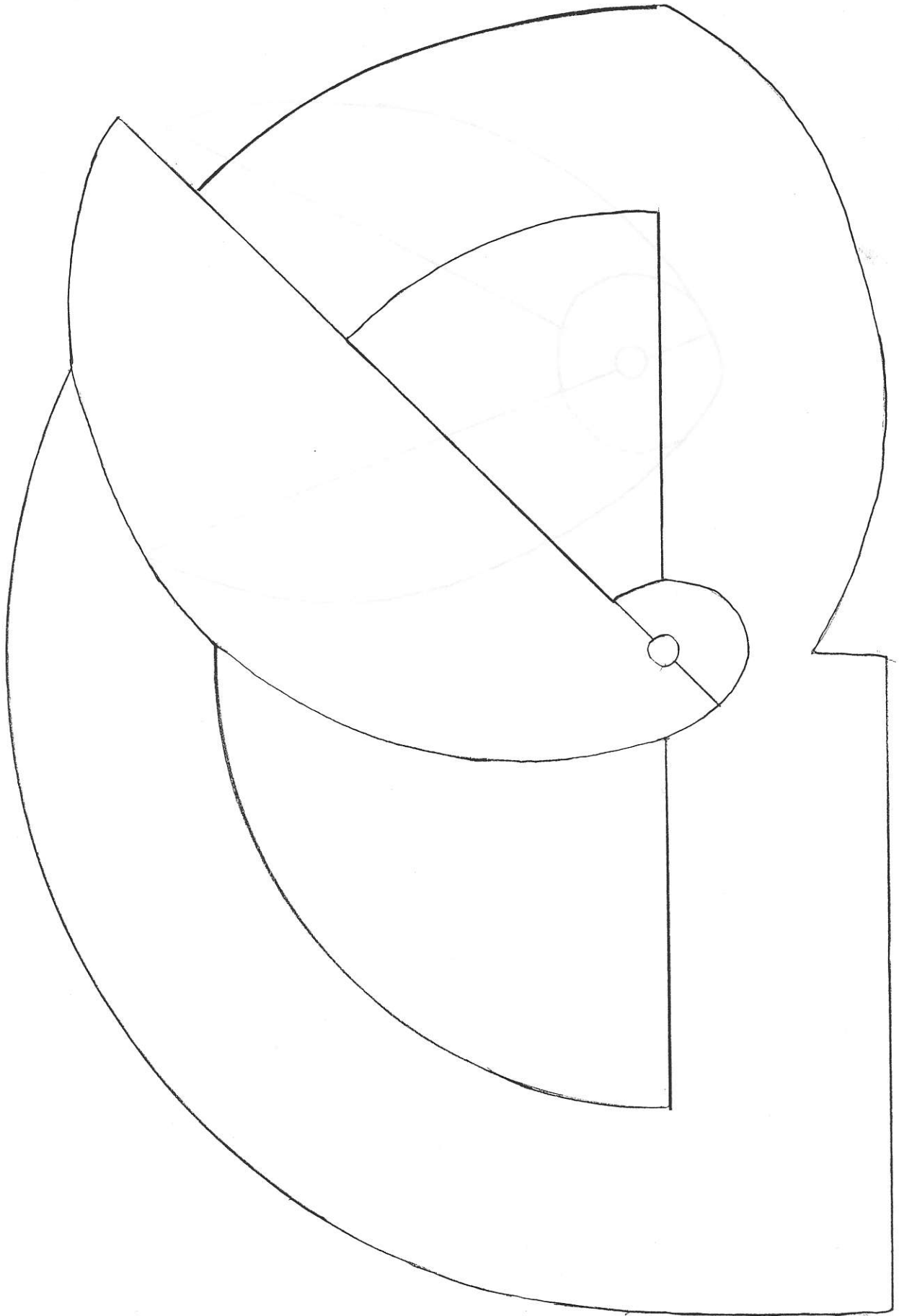
H

les angles H et I sont-ils égaux ?

I

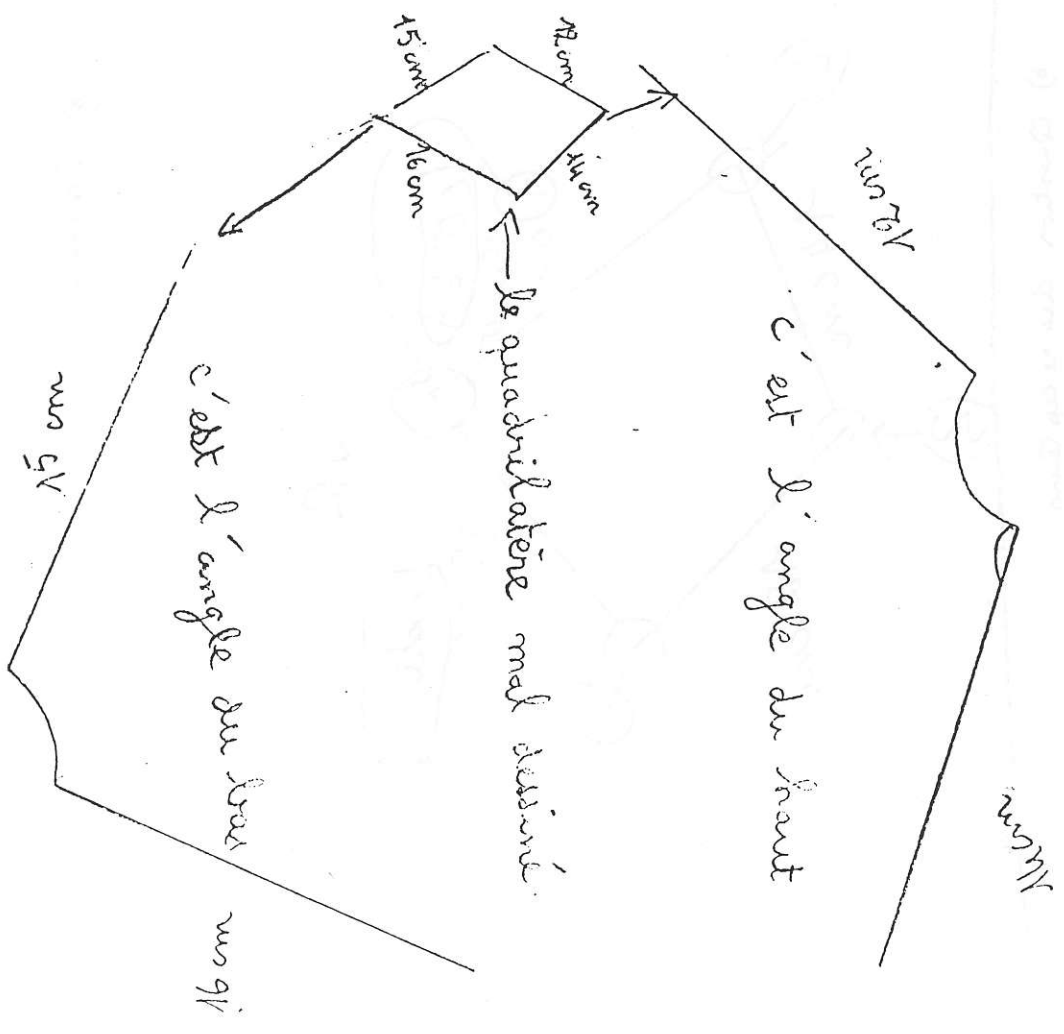






CHAPITRE C-7 annexe 5.a

② Messages des émetteurs



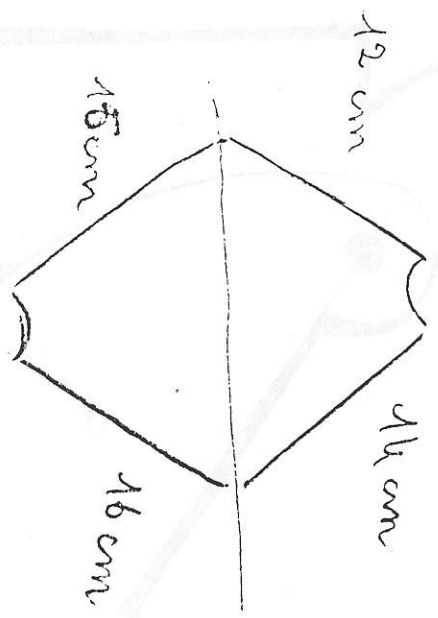
③ Demande des récepteurs

il nous faut les deux angles.

④ Représentation des émetteurs

respectivement, il n'y a pas besoin des quatre angles.

l'angle du haut



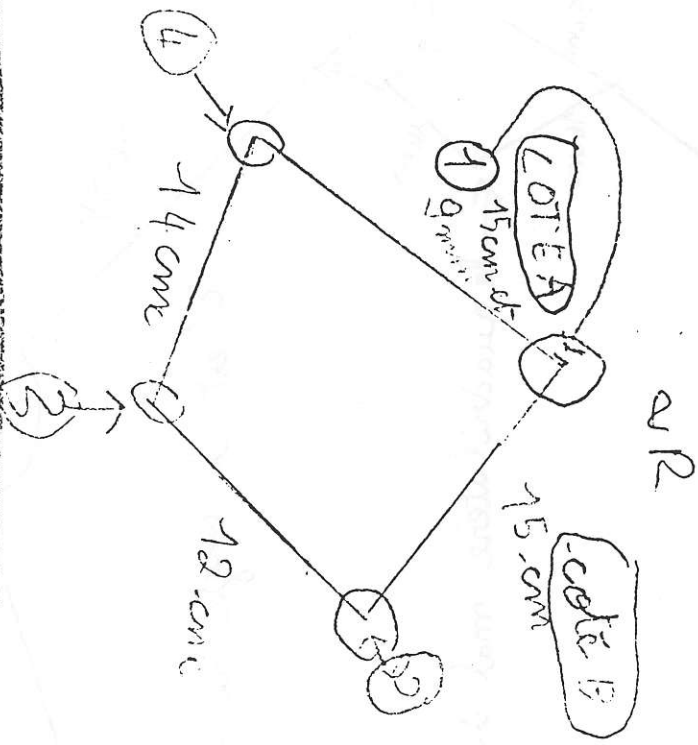
l'angle du bas

⑤ Nouvelle réclamation des récepteurs

Il nous faut les deux angles de

⑥ les émetteurs et sont exactes...

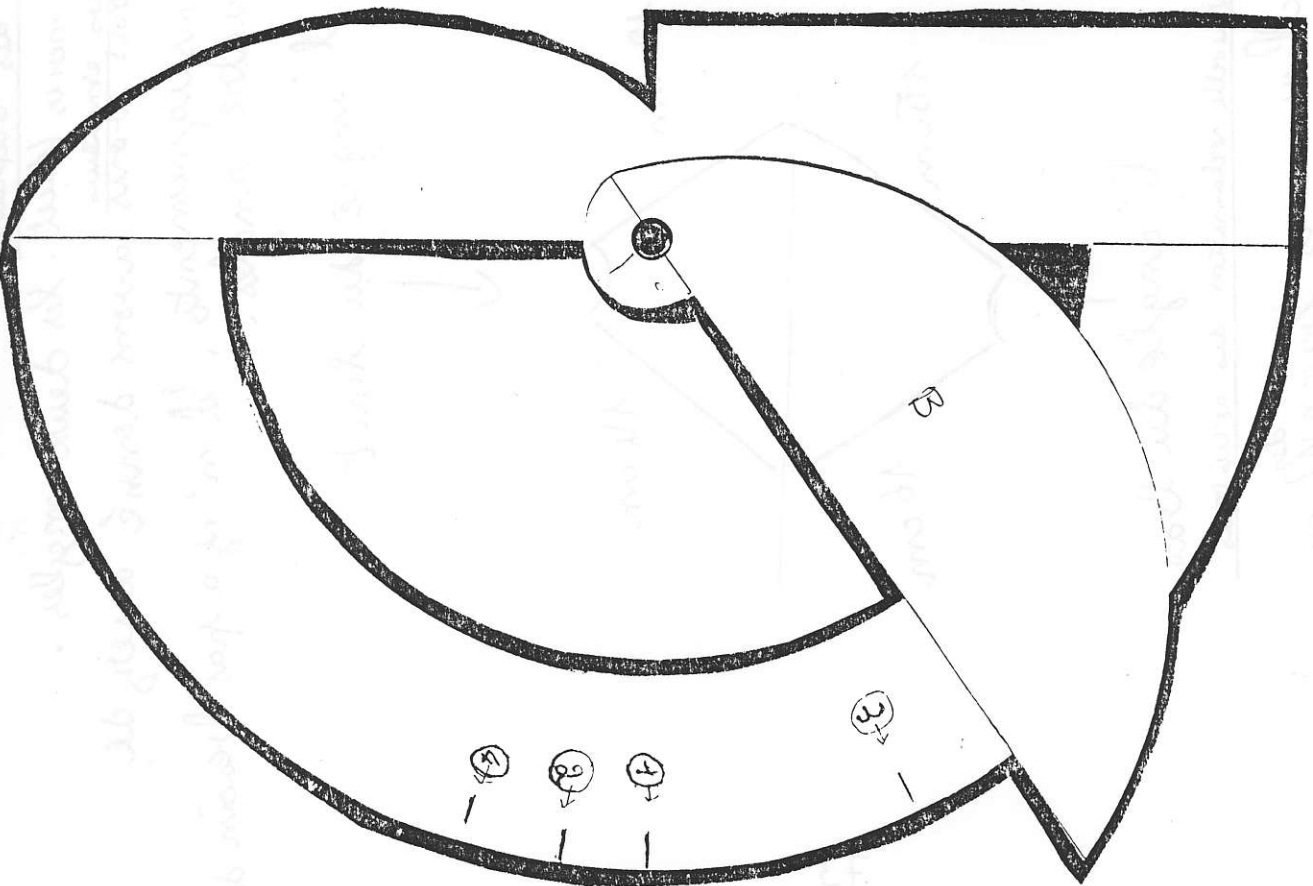
a) Emetteurs

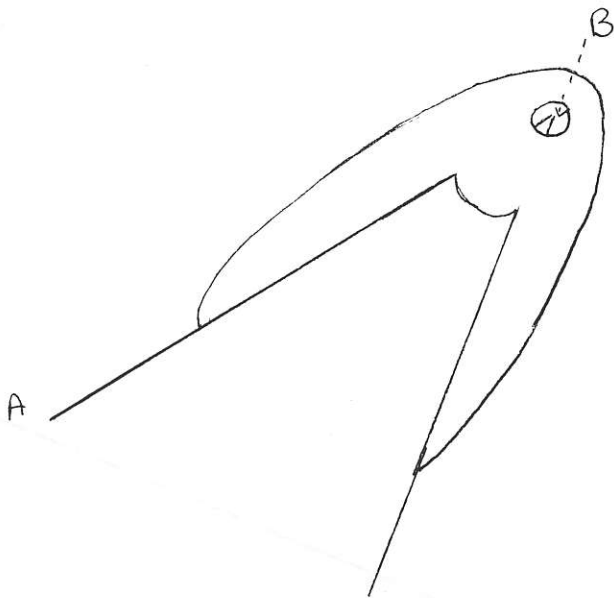


b) Question des récepteurs

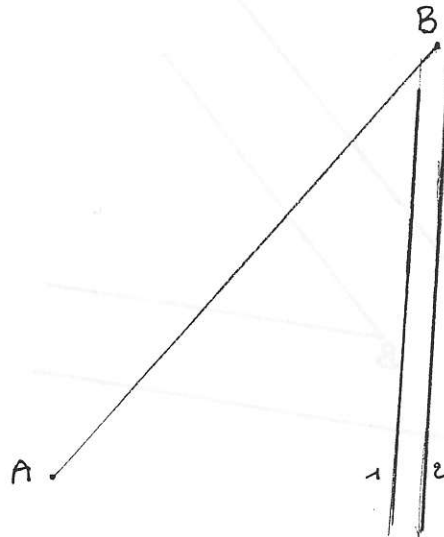
Comment devrnt nous nous servir de l'histogramme. faites nous des remarques.

c) en réponse, le rapporteur avec les manques (réduction 70%).



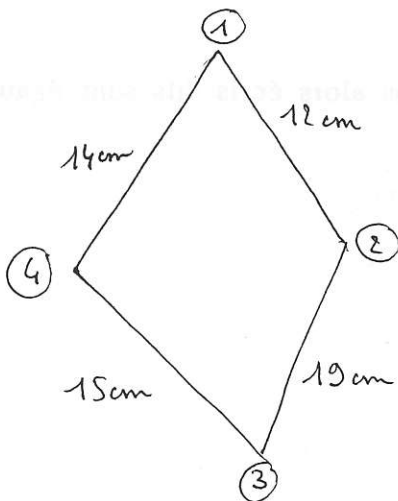


Bonne prise de l'angle sur la figure modèle

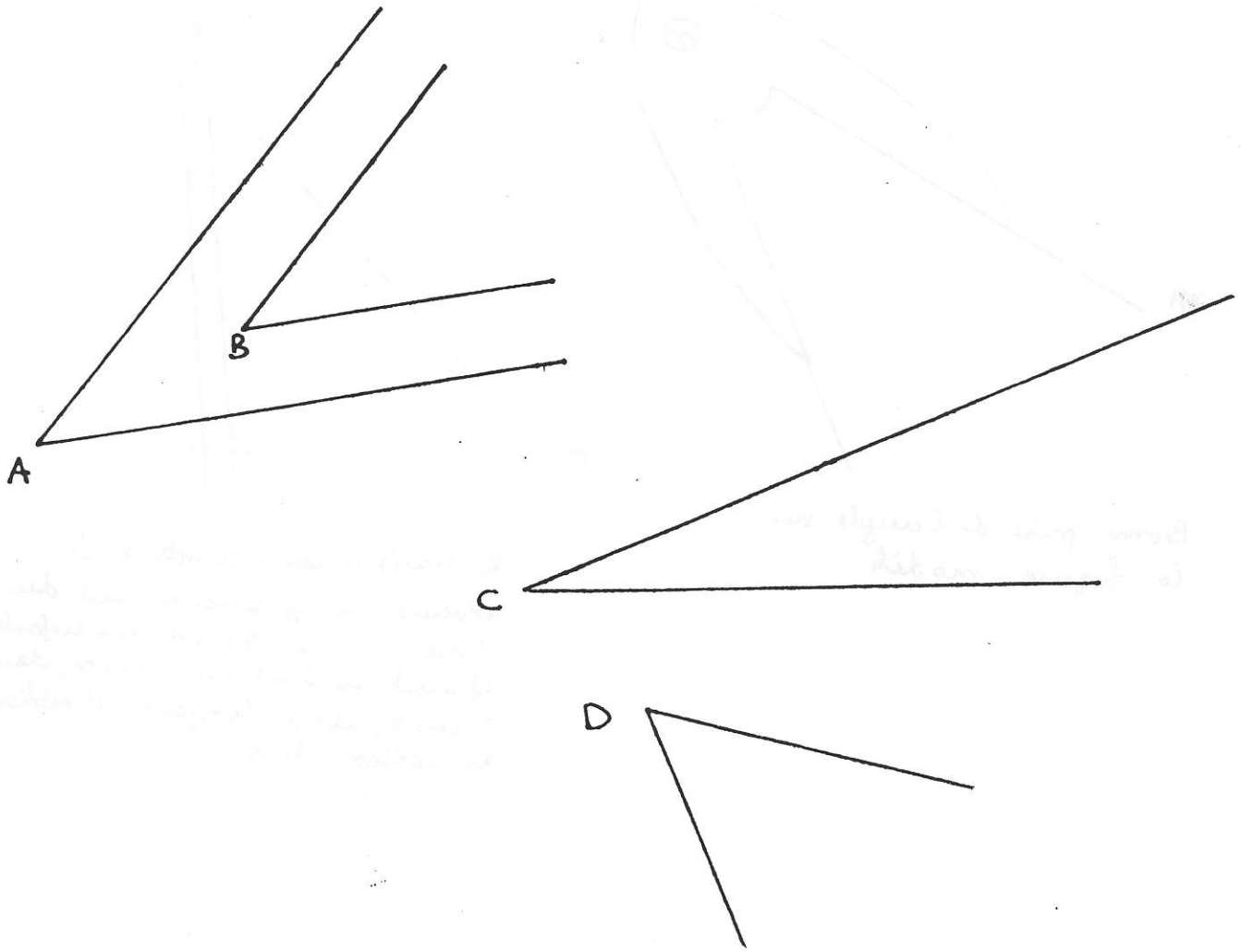


2 tracés correspondants à 2 erreurs de positionnement du "trou". Dans le cas 1, les enfants effacent le bout qui dépasse, dans le cas 2, ils prolongent et oublient la position de B

Annexe 6



Le rapporteur est marqué comme celui de l'annexe 5-b



Pour chaque paire d'angle, écris le nom du plus grand ou alors écris "ils sont égaux"

$\hat{A}, \hat{B} :$

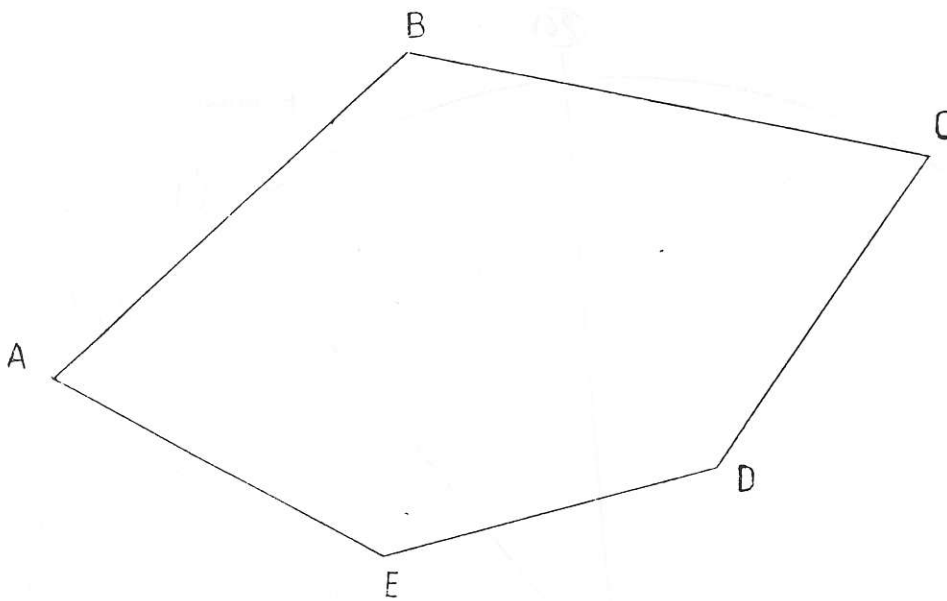
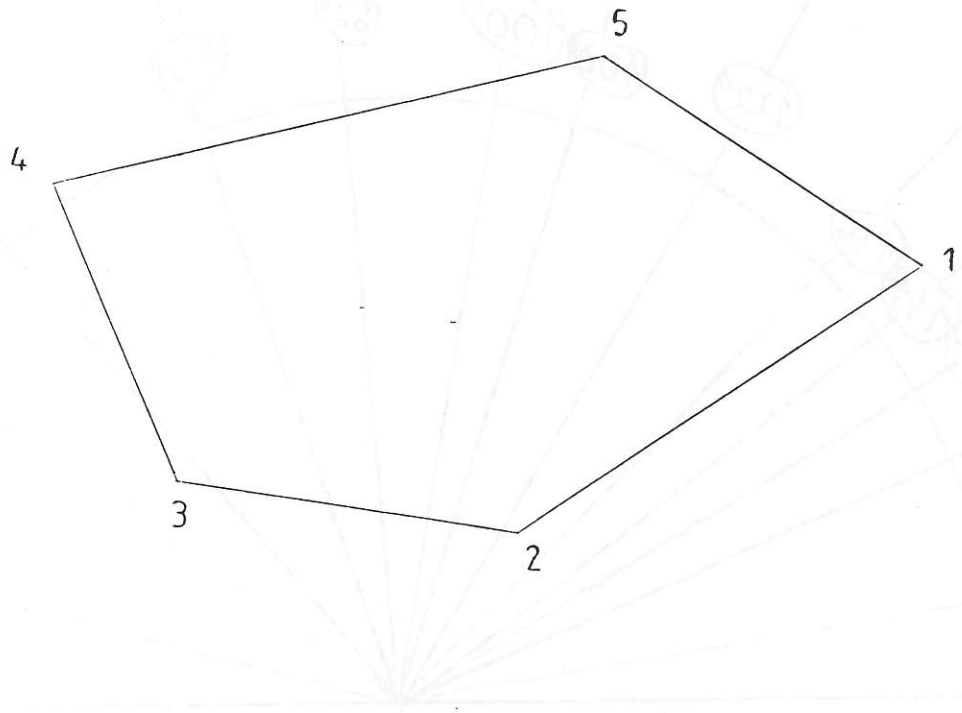
$\hat{B}, \hat{D} :$

$\hat{A}, \hat{C} :$

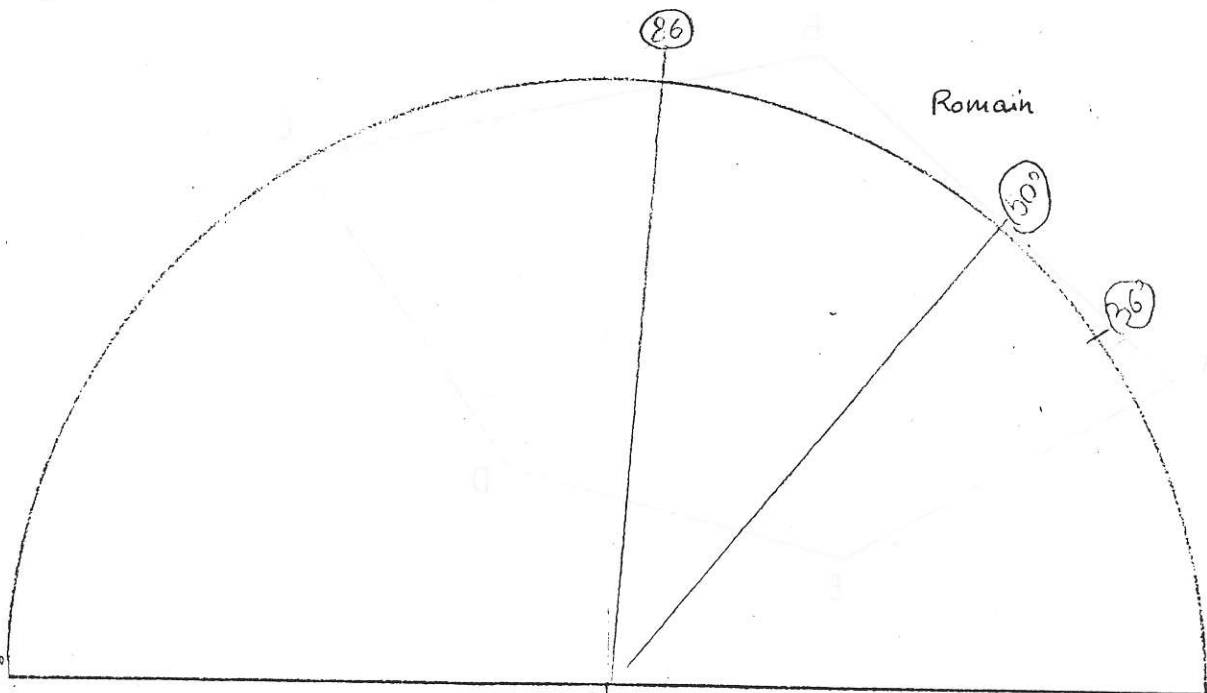
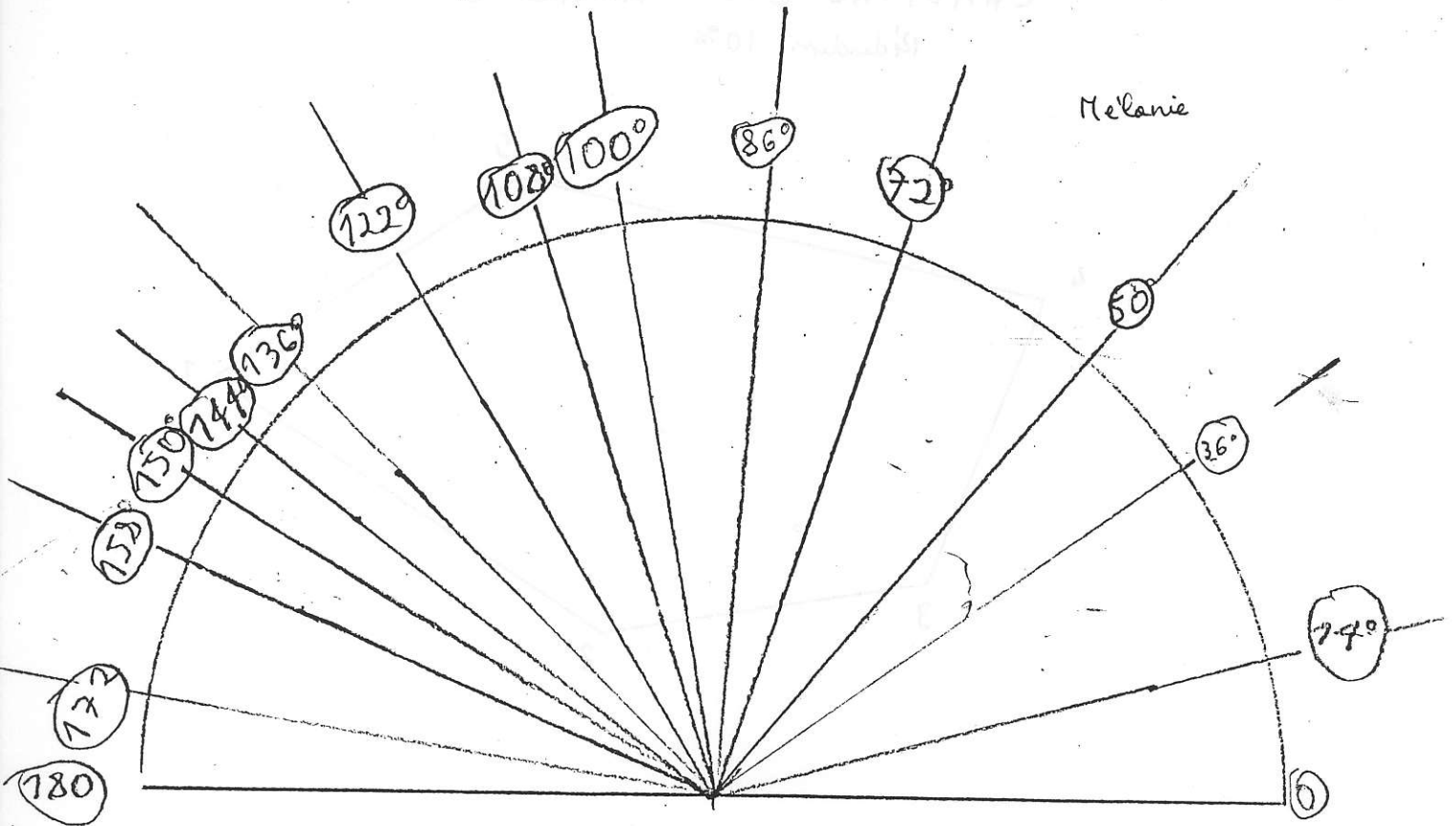
$\hat{B}, \hat{C} :$

$\hat{C}, \hat{D} :$

CHAPITRE C-7 Annexe 8
Réduction 70%



CHAPITRE C-7 annexe 9



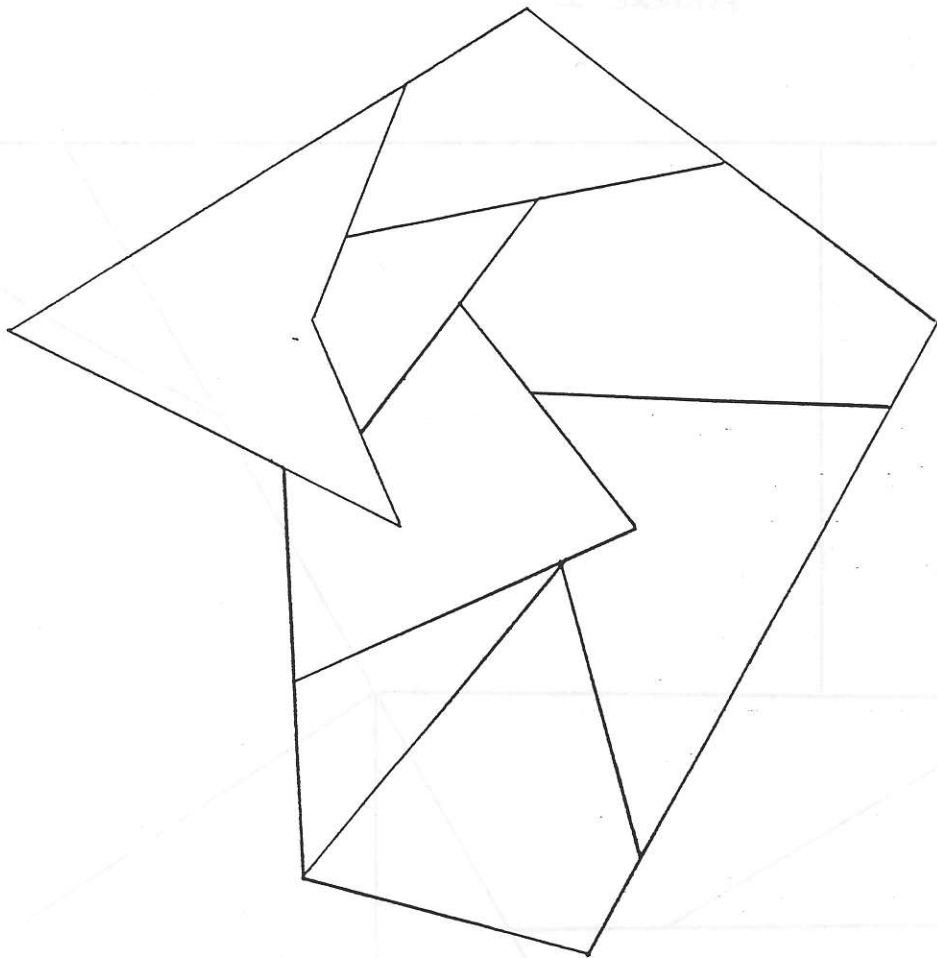


Fig 1.

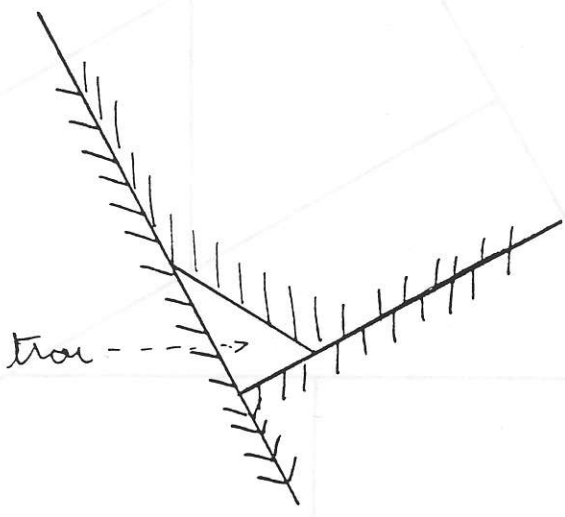
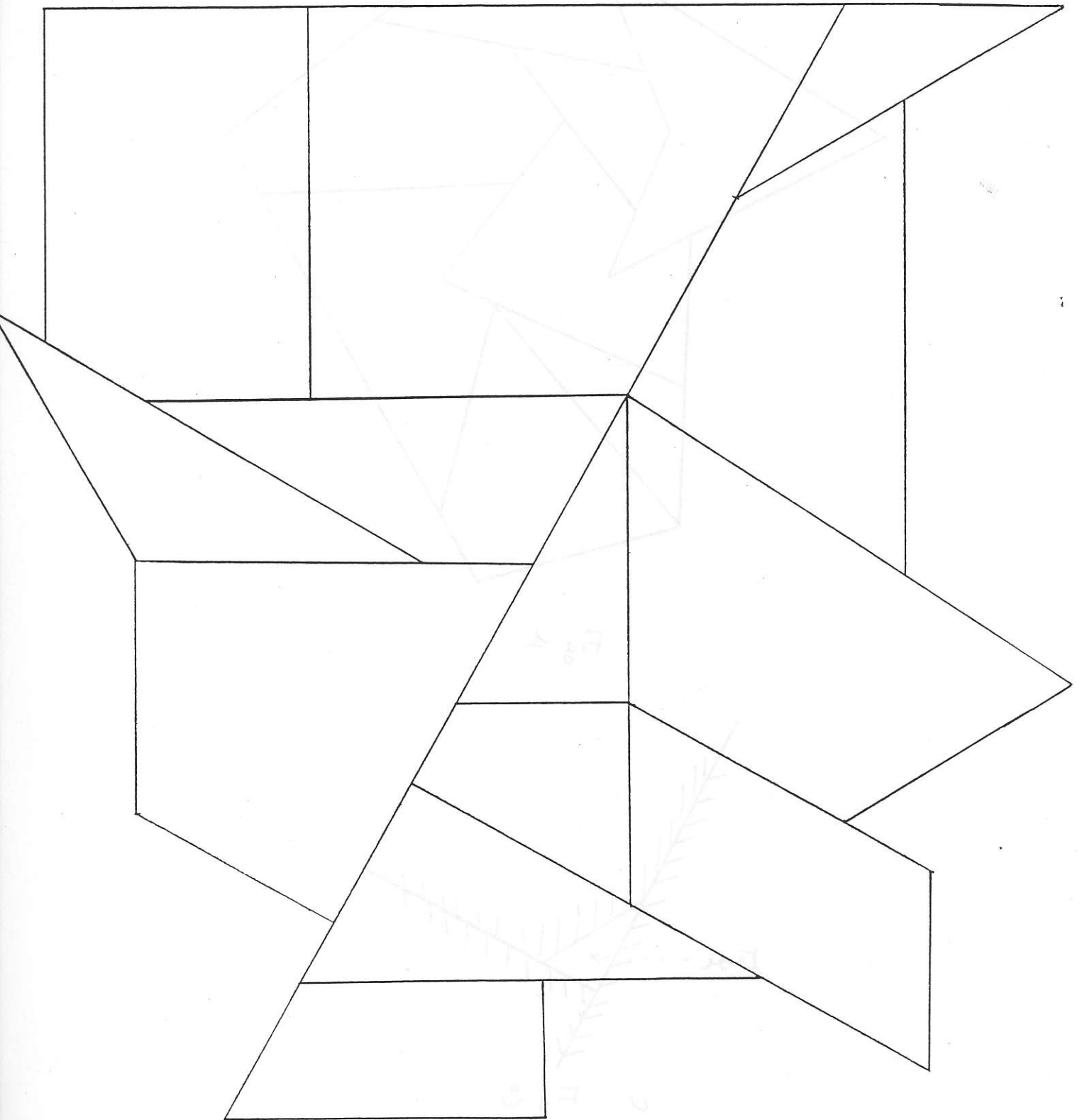


Fig 2

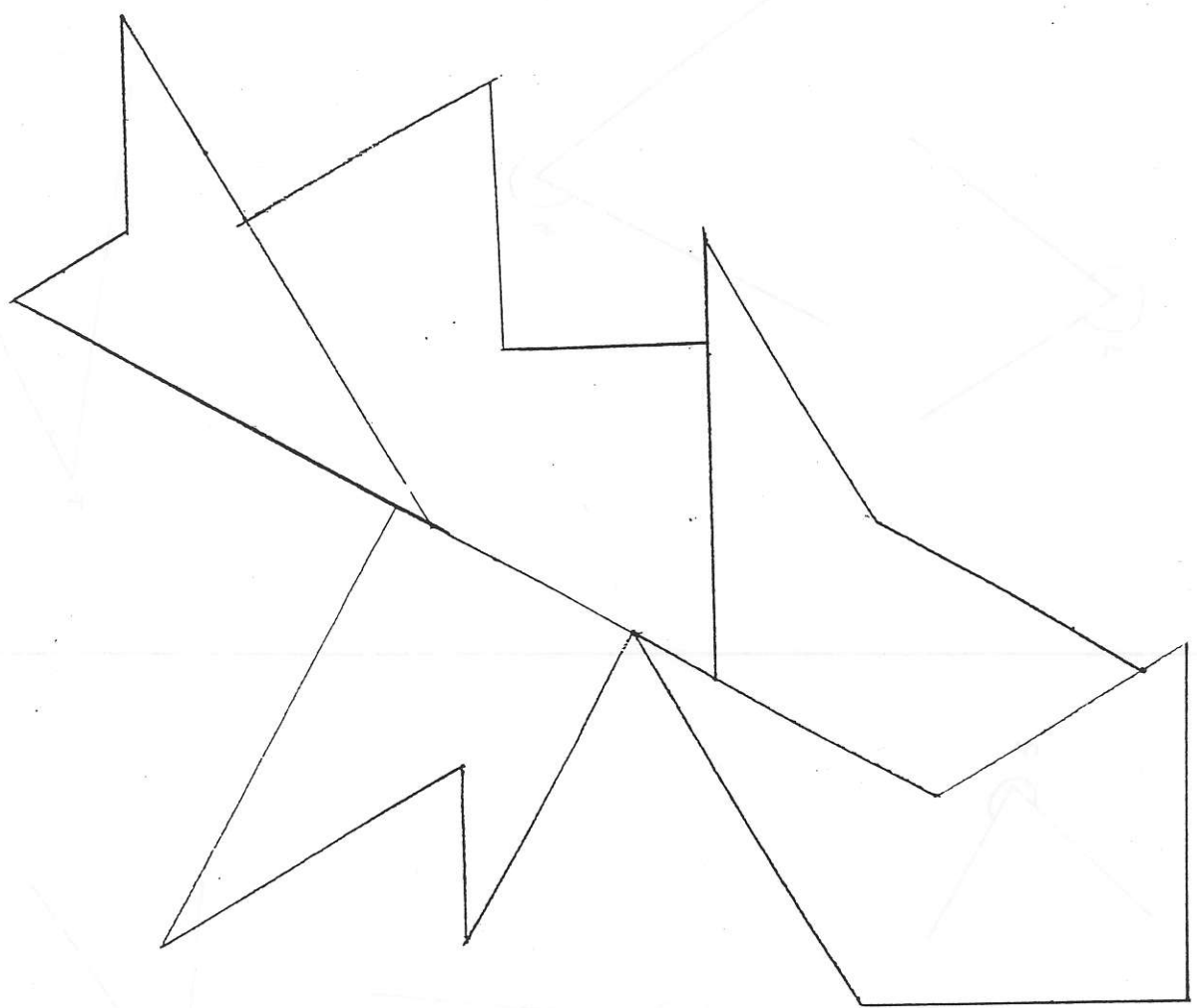
Annexe 1



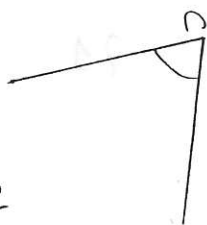
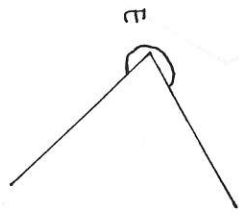
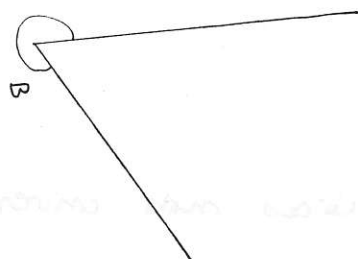
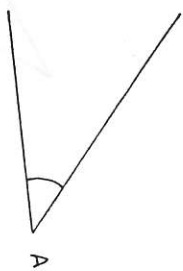
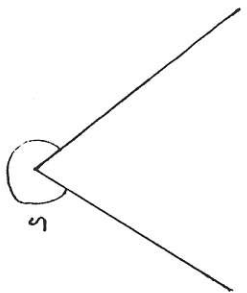
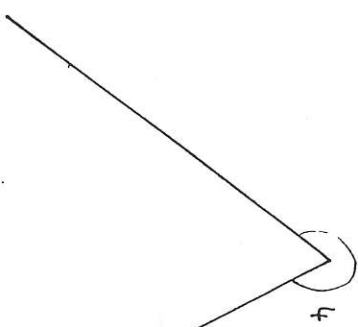
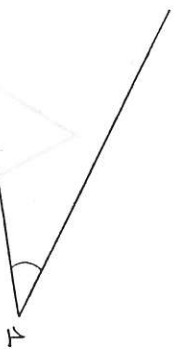
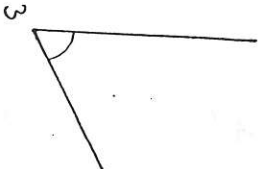
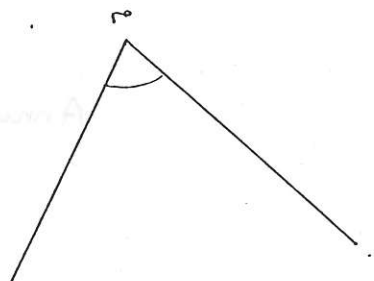
Pièces convexes

CHAPITRE C-8

Annexe 1'

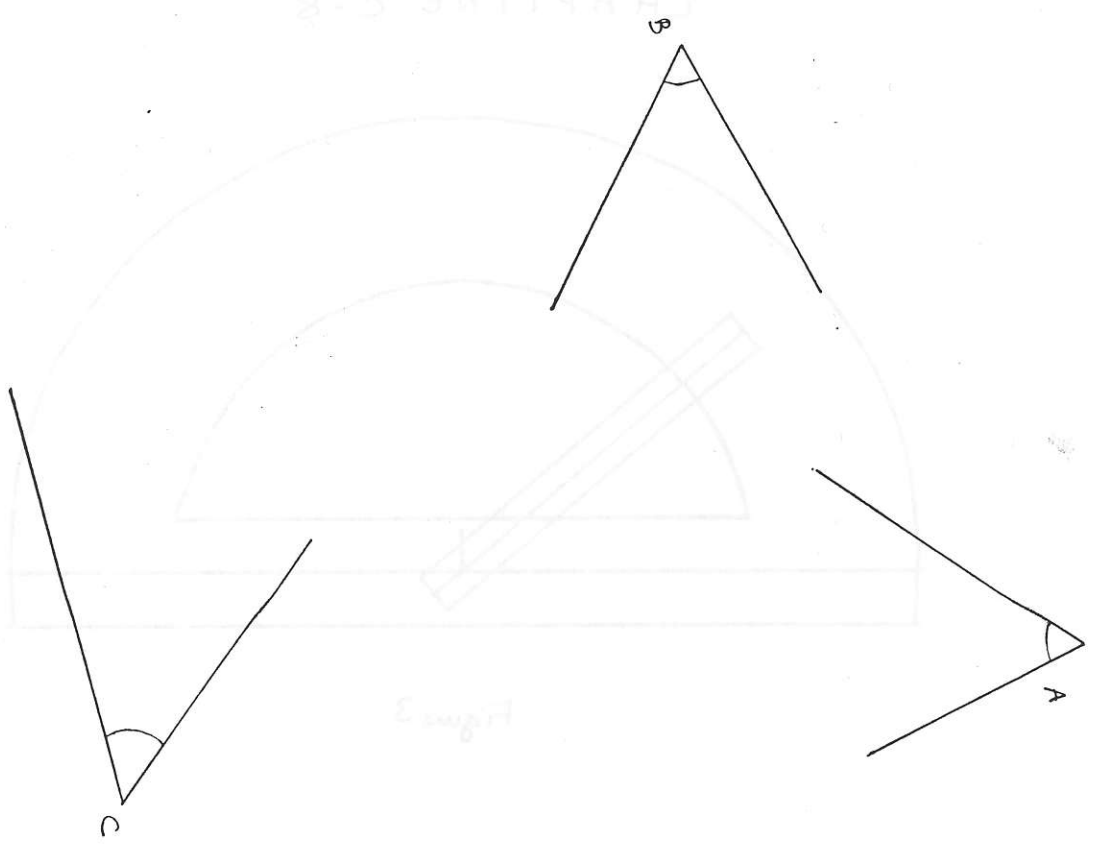


Pieces non convexes

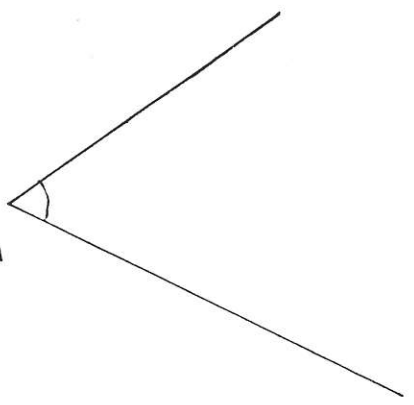
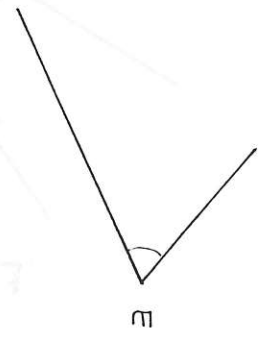
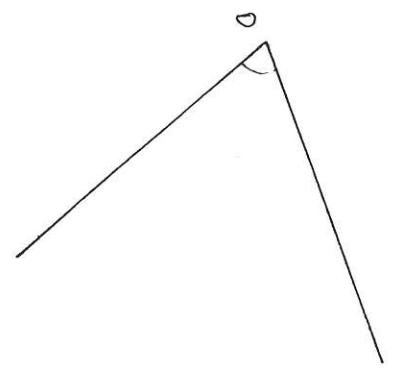


Recto

Verso



Feuille donné aux élèves



Feuille aux une table
éloigné

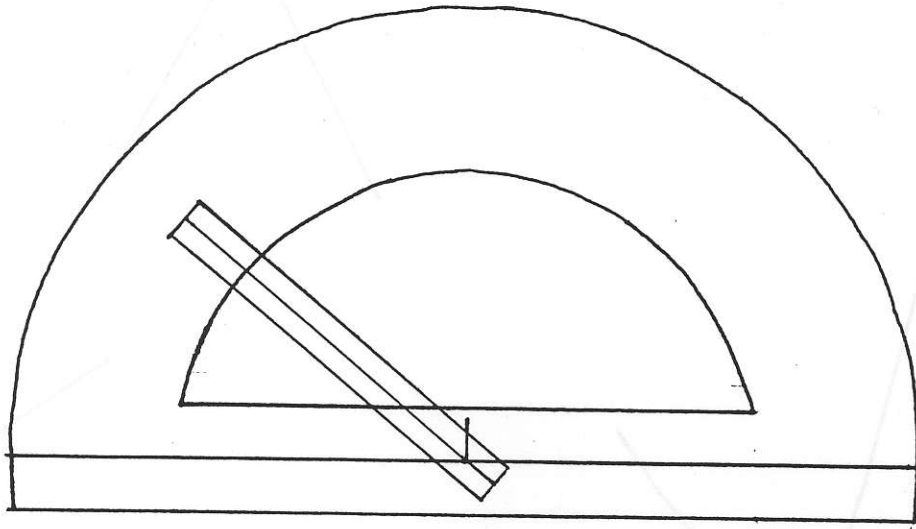


Figure 3

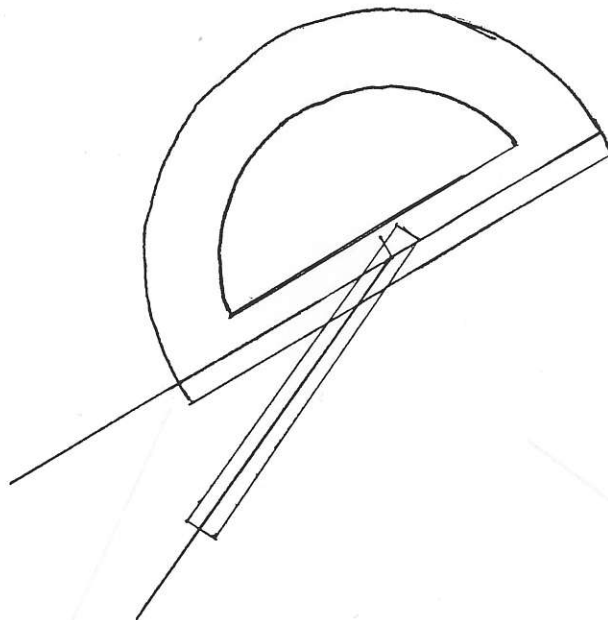
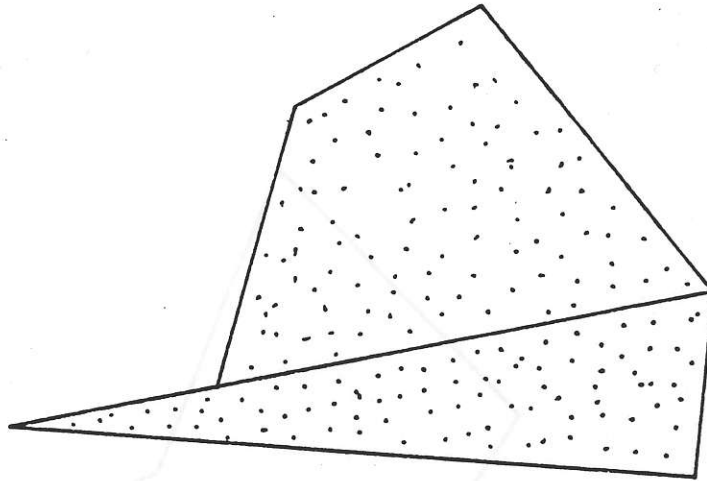


Figure 4

Epreuve 1
Item 1.

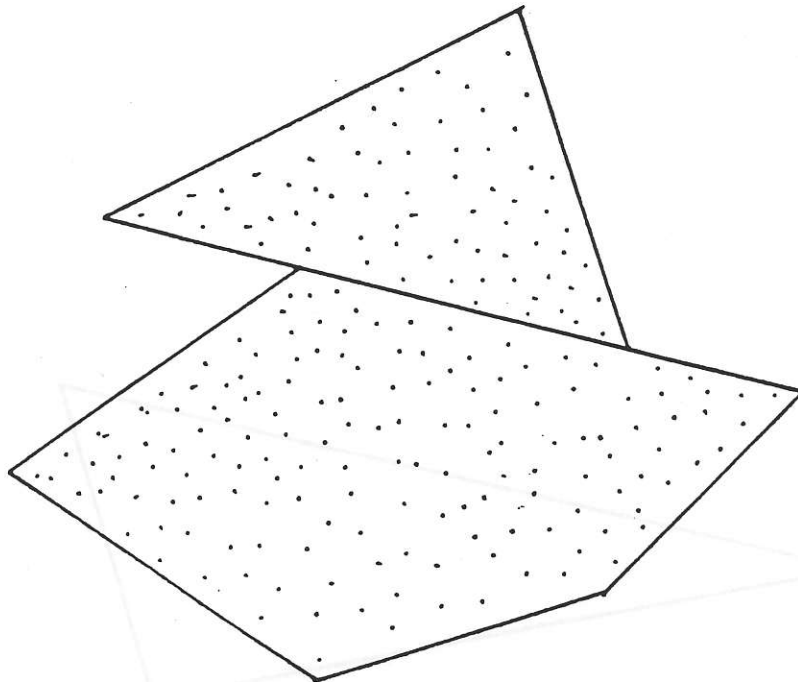


La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle?

Explique comment tu as fait pour répondre.

Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.

Epreuve 1
Item 2

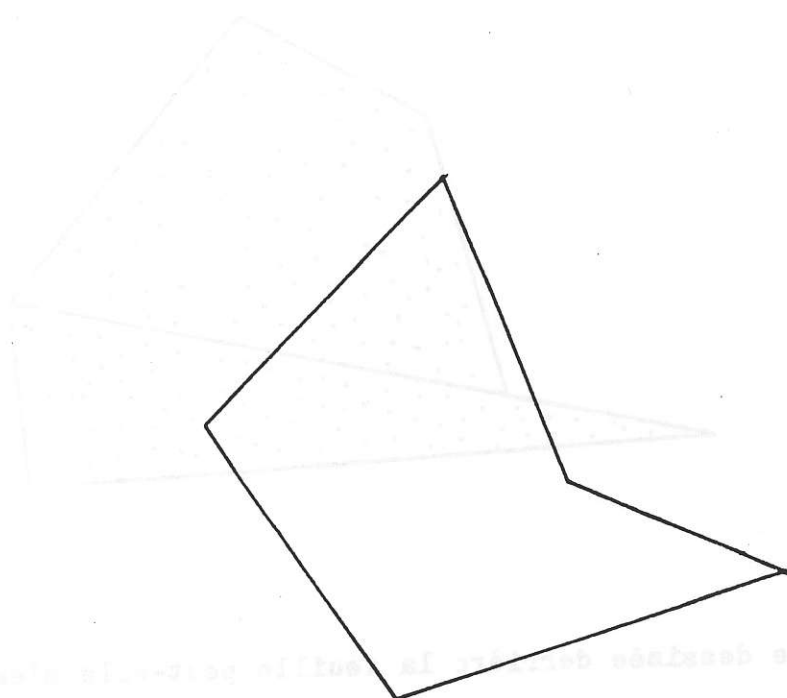


La pièce dessinée derrière la feuille peut-elle s'emboîter dans le puzzle?

Explique comment tu as fait pour répondre.

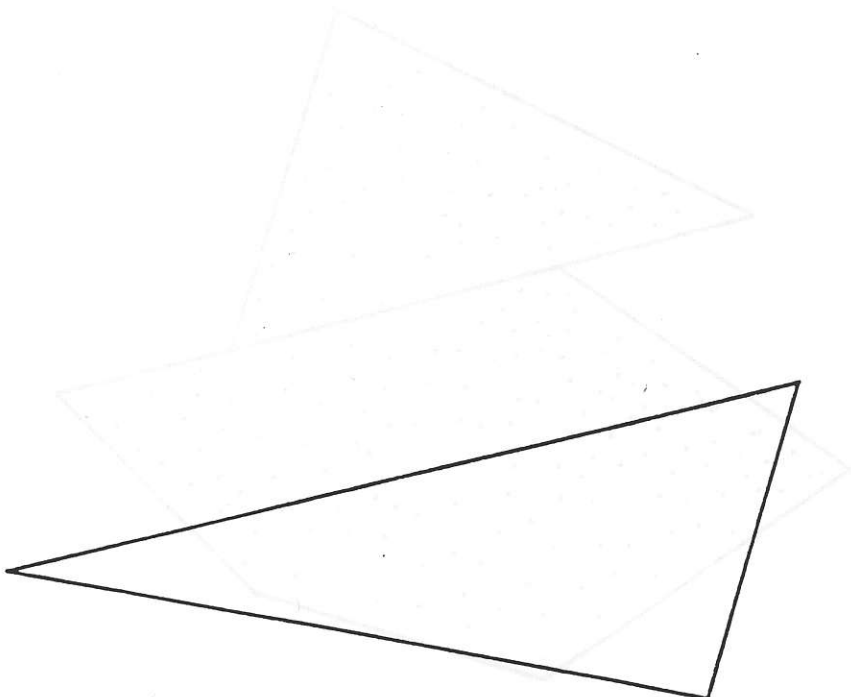
Mets une croix à l'endroit où la pièce s'ajuste.

Figure 1
Figure 2



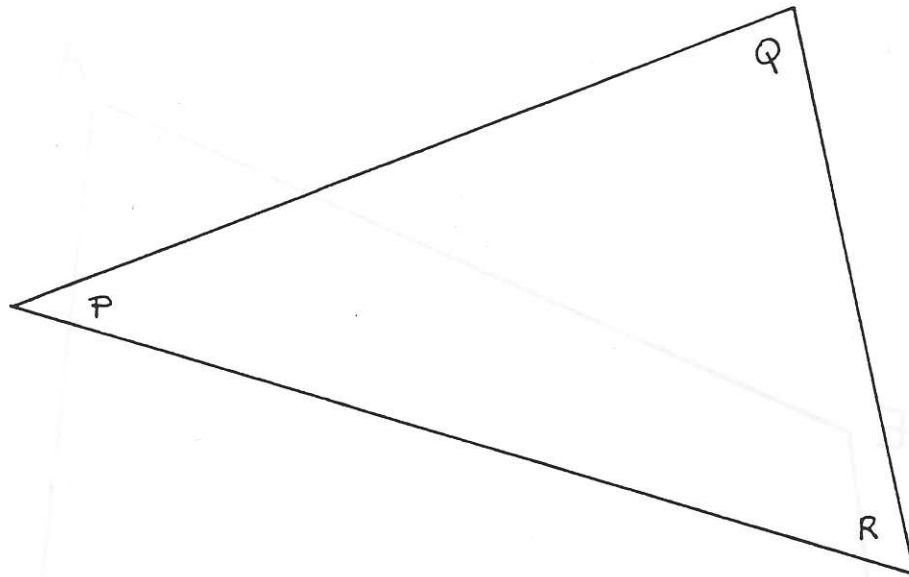
la pièce dessinée derrière la feuille peut-être complétée dans 1
le possible?
Explique comment tu es fait pour répondre.
Note une croix à l'endroit où la pièce s'ajoute.

Figure 1
Figure 2



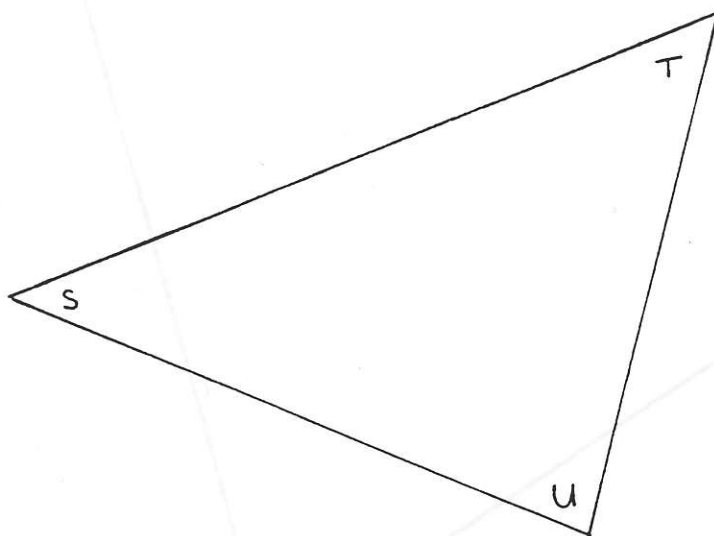
la pièce dessinée derrière la feuille peut-être complétée dans 1
le possible?
Explique comment tu es fait pour répondre.
Note une croix à l'endroit où la pièce s'ajoute.

Epreuve 2

triangle n° 1

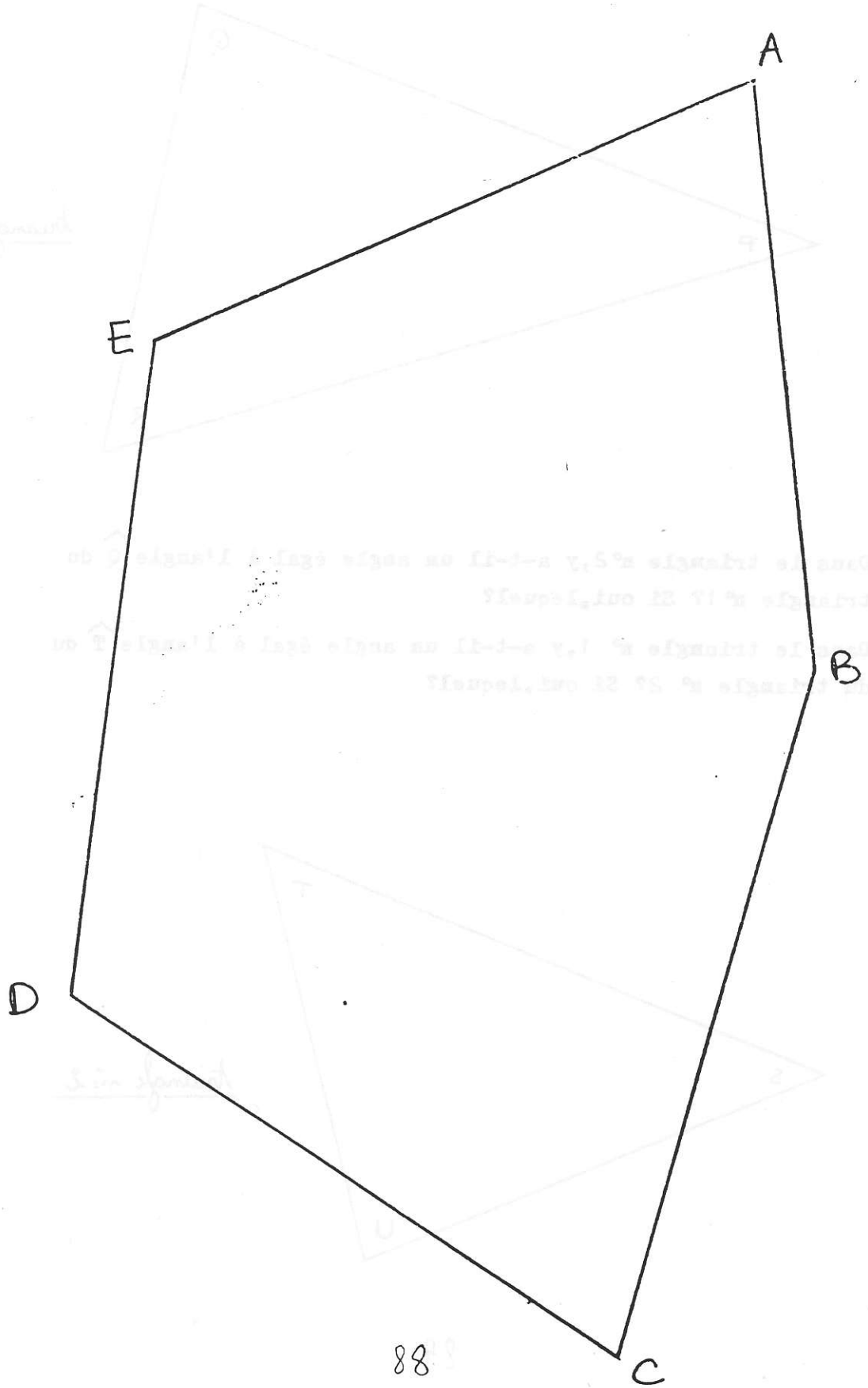
Dans le triangle n° 2, y a-t-il un angle égal à l'angle \hat{Q} du triangle n° 1? Si oui, lequel?

Dans le triangle n° 1, y a-t-il un angle égal à l'angle \hat{T} du triangle n° 2? Si oui, lequel?

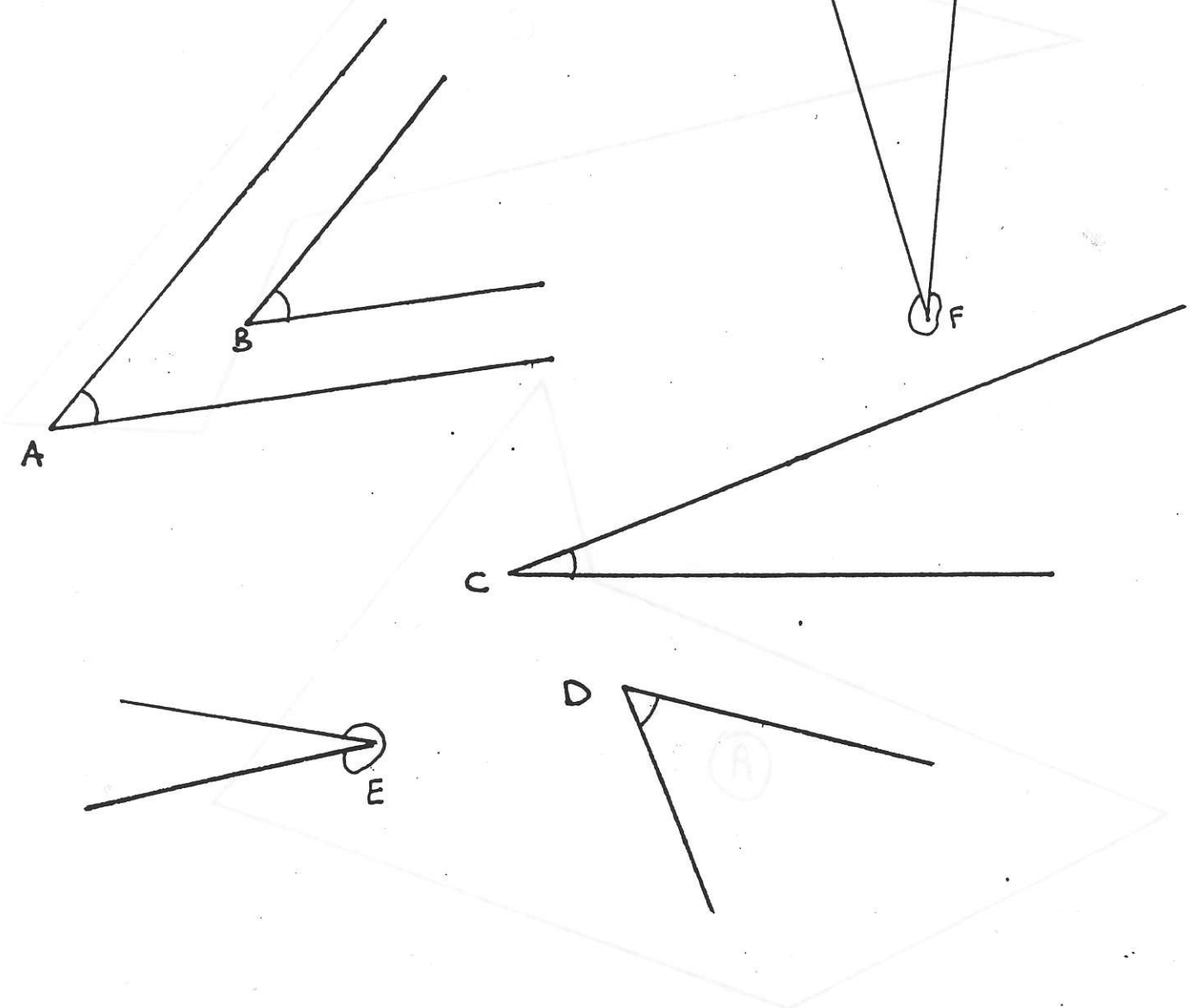
triangle n° 2

Y a-t-il un angle égal à \hat{A} ? Si oui , lequel ?

Y a-t-il un angle égal à \hat{D} ? Si oui , lequel ?



Epreuve 4



Pour chaque paire d'angles, écris le nom du plus grand ou alors écris "ils sont égaux"

$\hat{A}, \hat{B} :$

$\hat{A}, \hat{C} :$

$\hat{C}, \hat{D} :$

$\hat{B}, \hat{D} :$

$\hat{B}, \hat{C} :$

$\hat{C}, \hat{E} :$

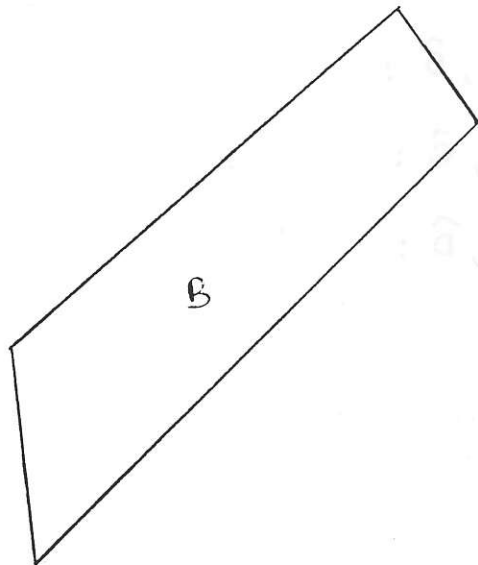
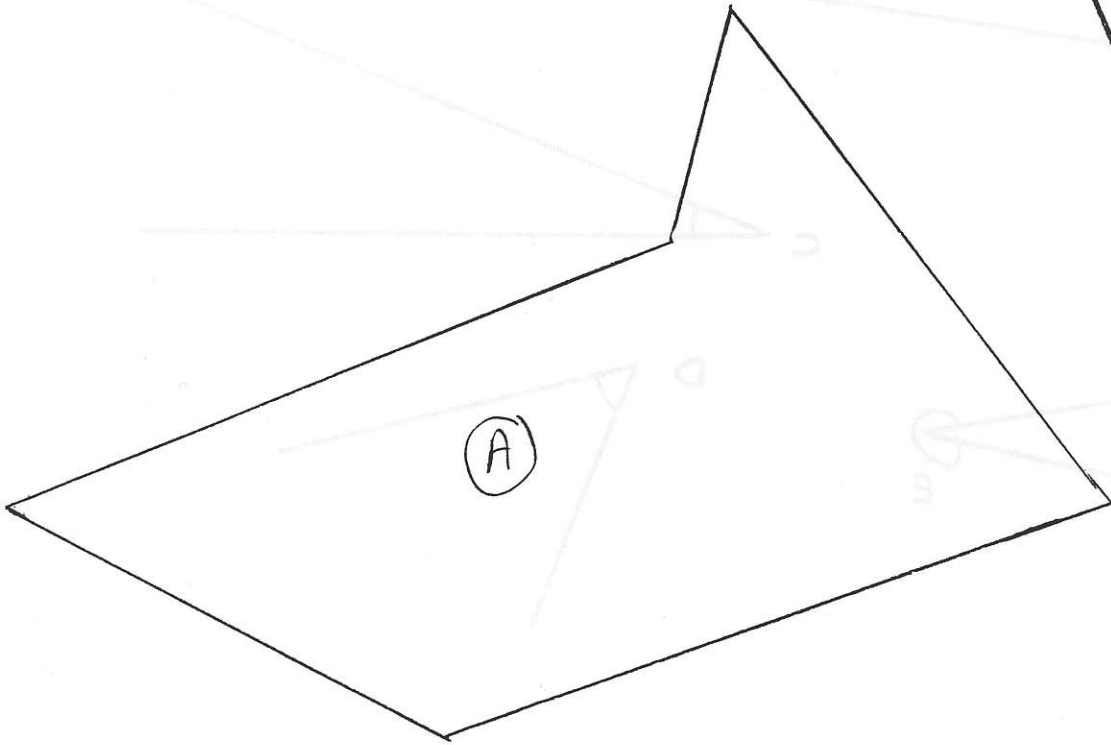
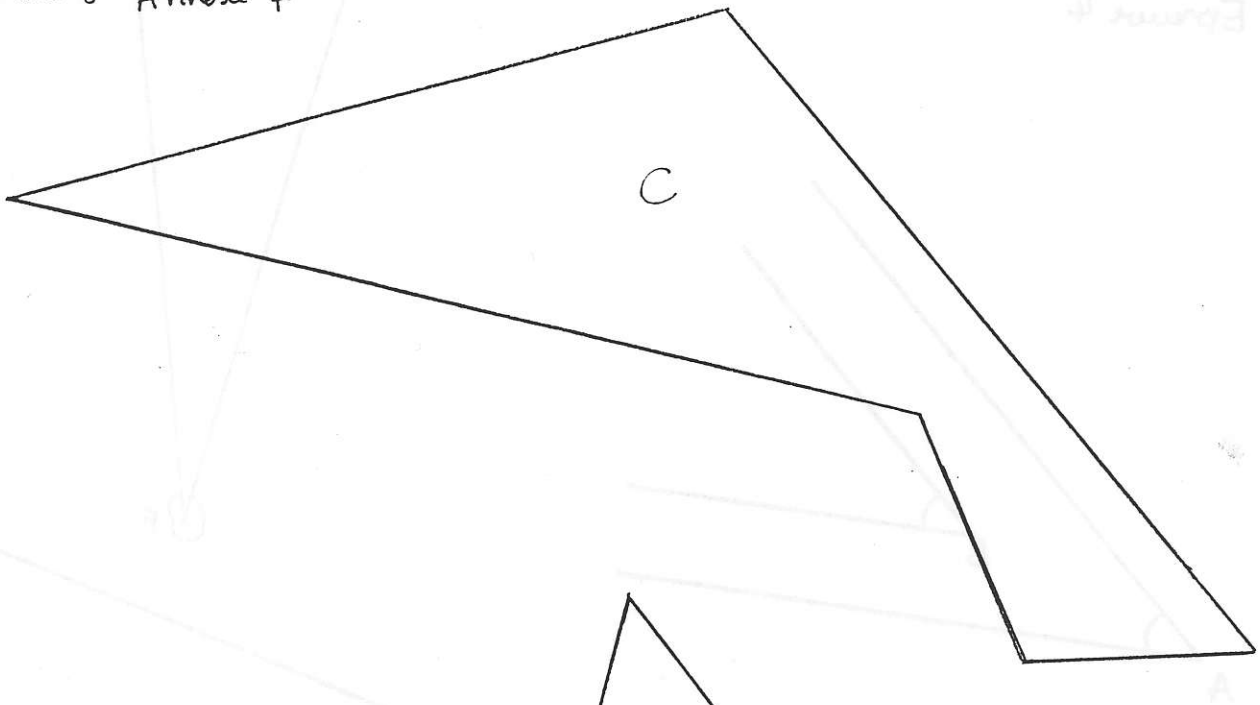
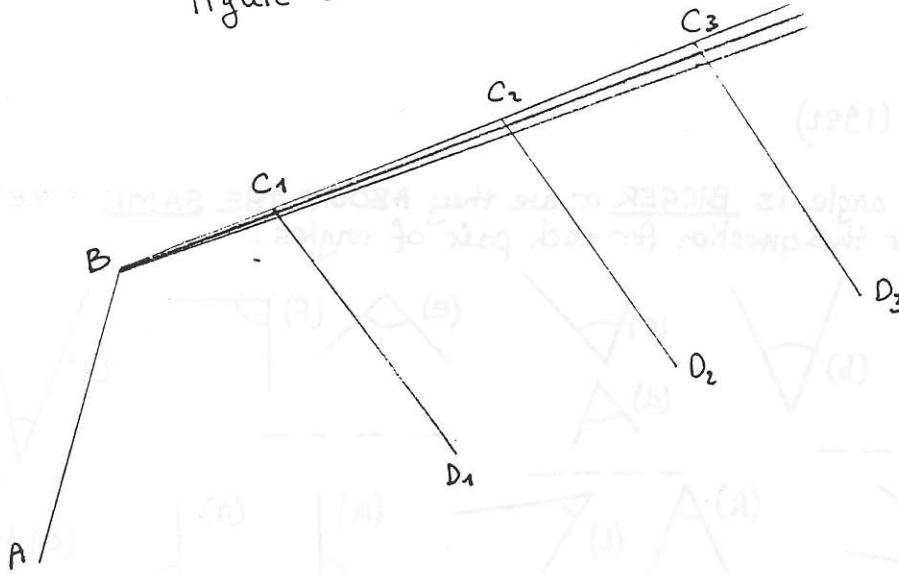


Figure 5



Annexe 5

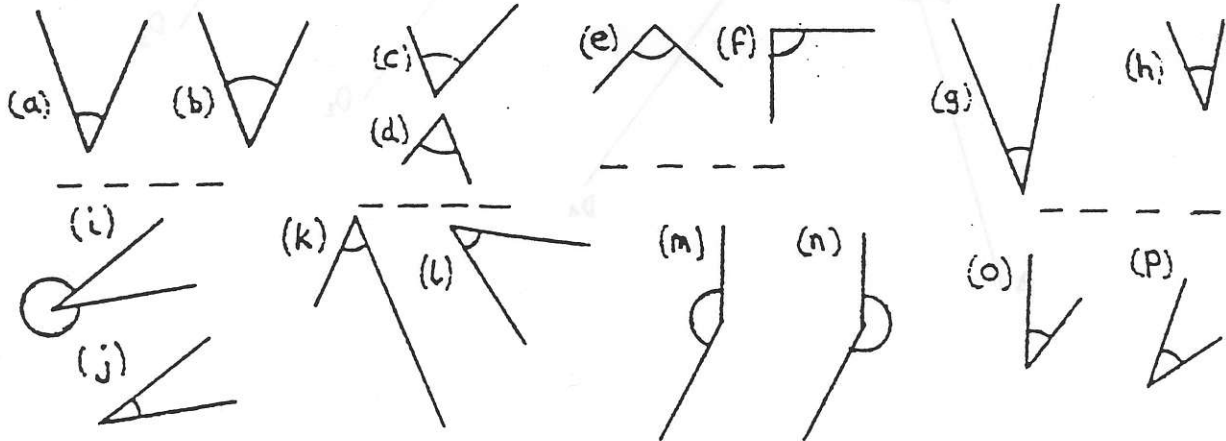
Stratégie / Groupe	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A _{5a}	A _{5b}	A ₆	A ₇
Jeu 1	6(3)	2 3 5 6 12 13(2)	9 10 11	1 13(1) 6(1) 13(2)	4 7 6(2)		5 8 14 15	
Jeu 2		2	9 12	A' ₄ 1	7	3	A ₆ : 4-5-13 14-15 A' ₆ : 10-11 15	A' ₇ : 6-8 11(1)

Les chiffres entre parenthèses correspondent au rang de la stratégie utilisée par les groupes qui en ont changés au cours d'un même jeu.

Annexe 6

Tiê' de Cloze (1982)

⑥ Which angle is BIGGER or are they ABOUT THE SAME SIZE?
 Answer this question for each pair of angles.



(i) (j)
 réussite 11/21
 égalité 4/21

(m) (n)
 réussite 3/21
 égalité 12/21

FA	3A	42A	2A	1A	2A	3A	1A	
	11 8 2		11	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11	
	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	
	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	11 8 2	

OBSERVATION DE JEROME

Jérôme commence par reporter l'angle en A sur le rapporteur convenablement, puis il pose le rapporteur sur sa feuille et place deux points à chaque extrémité des côtés de l'angle. Il retire le rapporteur et s'aperçoit qu'il n'y pas de centre ; il mesure alors le côté AE et le trace. Il reprend l'angle en A et ne sait pas où le placer. Il prend alors avec son compas l'écartement AE, retrace le segment AE avec son double-décimètre, vérifie avec le compas, trace un arc de cercle de centre A, reprend l'angle en A, pose le rapporteur à peu près comme il faut, et place un point isolé au bout du côté qui n'est pas AE.

Il reporte alors l'angle en E sur son rapporteur, et mesure ED. Il le reporte sur sa feuille, cobnvenablement mais en traçant un côté ED très court, sans en vérifier la longueur. Il reporte alors l'angle en D, et trace DC. Il s'aperçoit alors que DC n'a pas la bonne longueur, donne l'impression de vouloir tout gommer, se ravise et prolonge ED convenablement puis reporte DC.

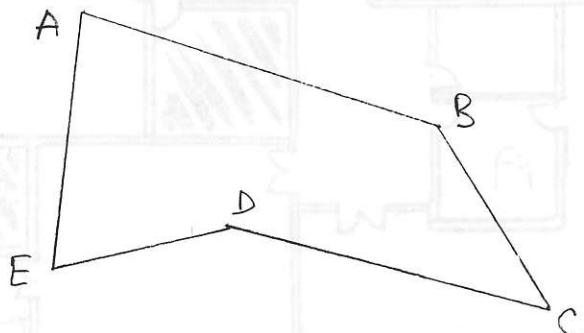
Il continue par l'angle en C, place d'abord le rapporteur du mauvais côté puis se ravise et trace CB.

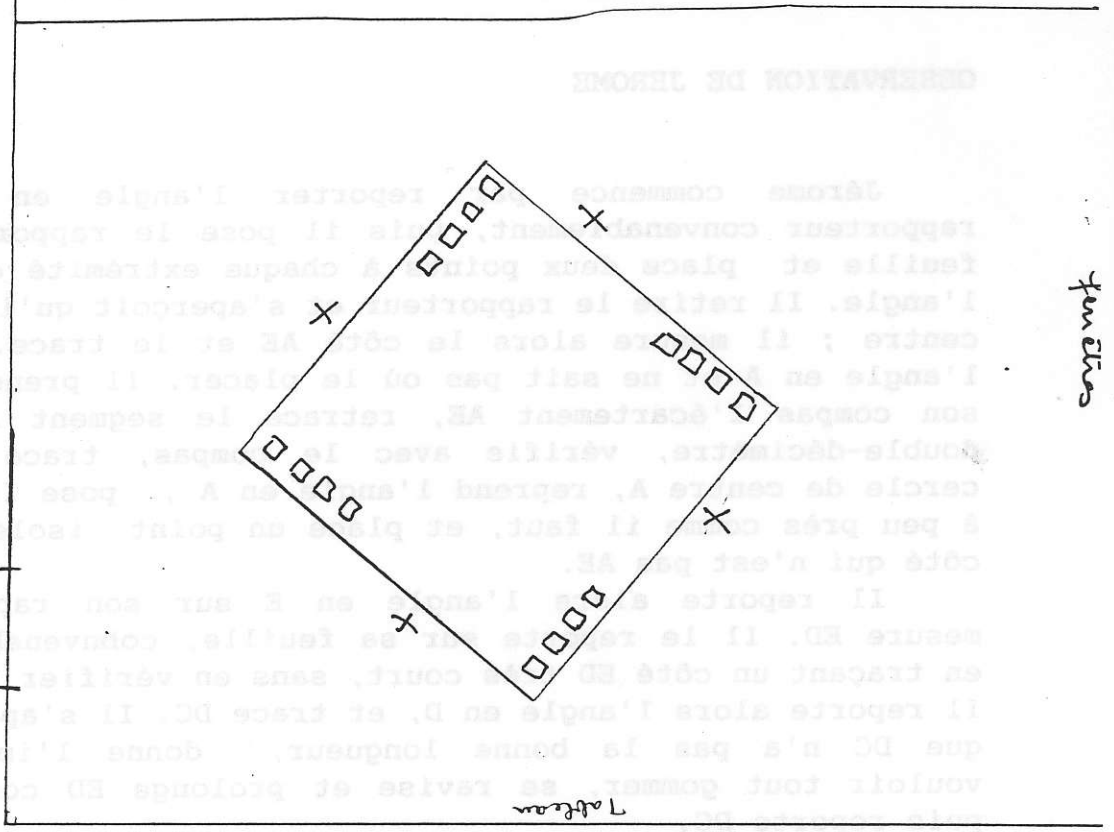
Il compare la longueur de AB sur le modèle avec la distance entre A et B (non tracée), et s'aperçoit qu'elle est trop petite. Aussi, il efface AE, reprend l'angle en E, le trouve plus large et retrace EA. Il vérifie AB, n'est pas satisfait; il vérifie les autres angles, et termine par B. Comme le côté n'est pas tracé et que le rayon du rapporteur est plus petit que le côté, il vérifie à l'oeil. Il revérifie E, corrige l'angle E, remplace D, reprend l'angle en D, ne mesure pas DC mais mesure CB, et joint AB parce que l'enseignant annonce que le temps est écoulé.

La vérification avec le modèle montre des erreurs de longueur, surtout.

Ainsi, Jérôme fait partie des élèves méticuleux, qui contrôlent la longueur du dernier côté avant de le tracer, et qui enclanchent alors un processus de correction qui pourrait être sans fin, car la complexité de la tâche est telle qu'ils n'arrivent pas d'emblée à en contrôler toutes les composantes. Mais il ne se décourage pas pour autant.

modèle
(réduit)





X : positions pour dessiner
 au lieu de plan.

Fig. 1

La salle et la disposition
 de la table et des brics

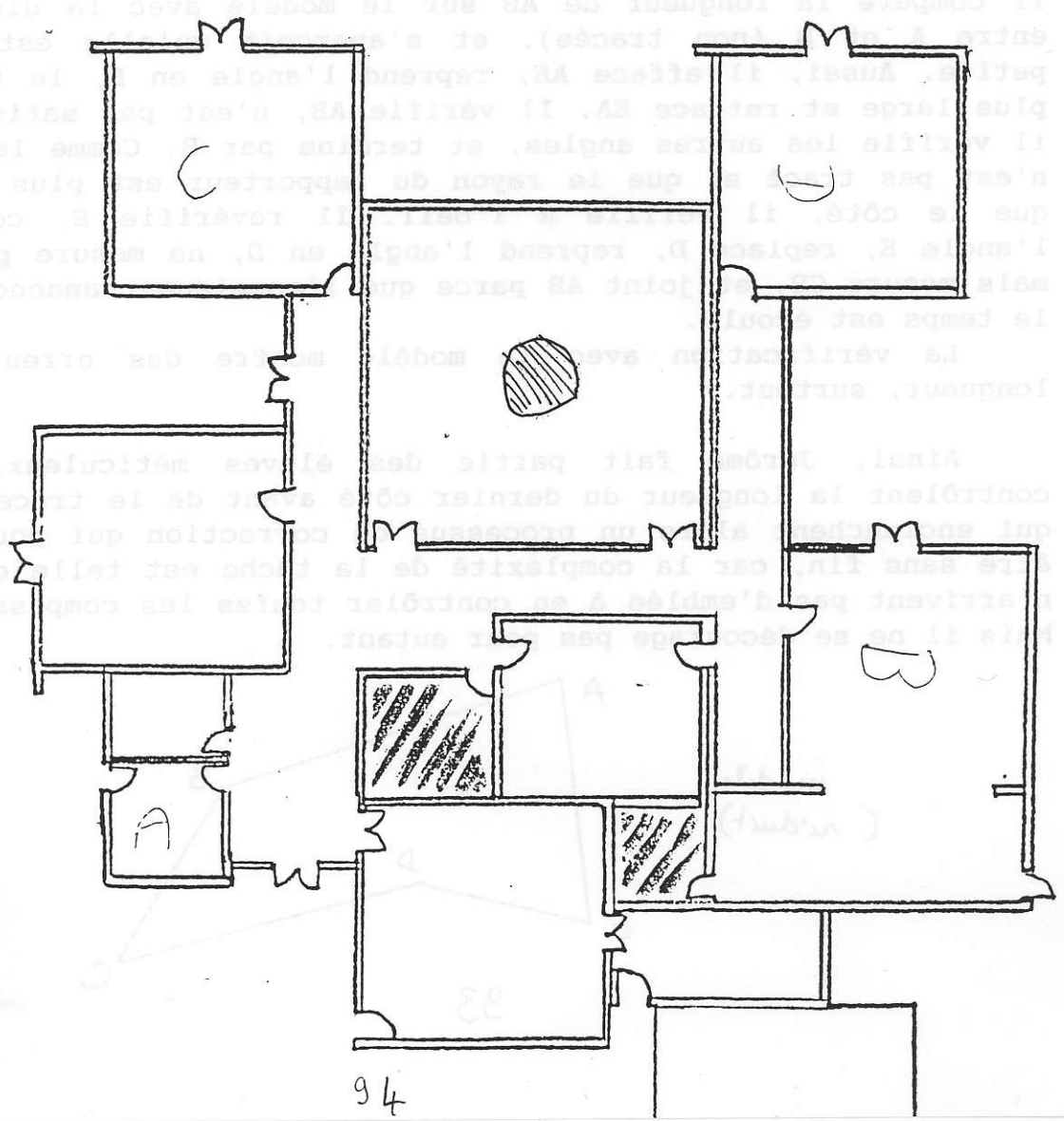


Fig. 2. L'édifc maternelle - d'un groupe

ou quise, des "cours" (reprises),
 et la gomme de rangement de salle de jeu

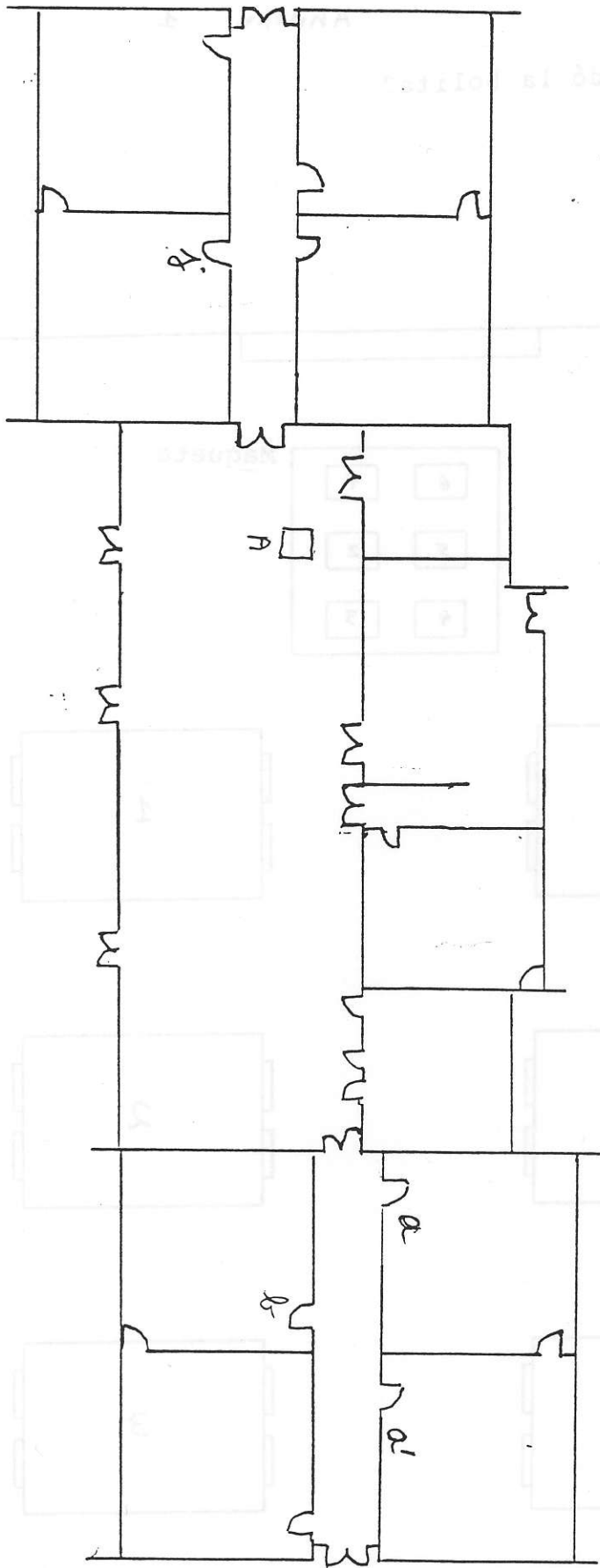
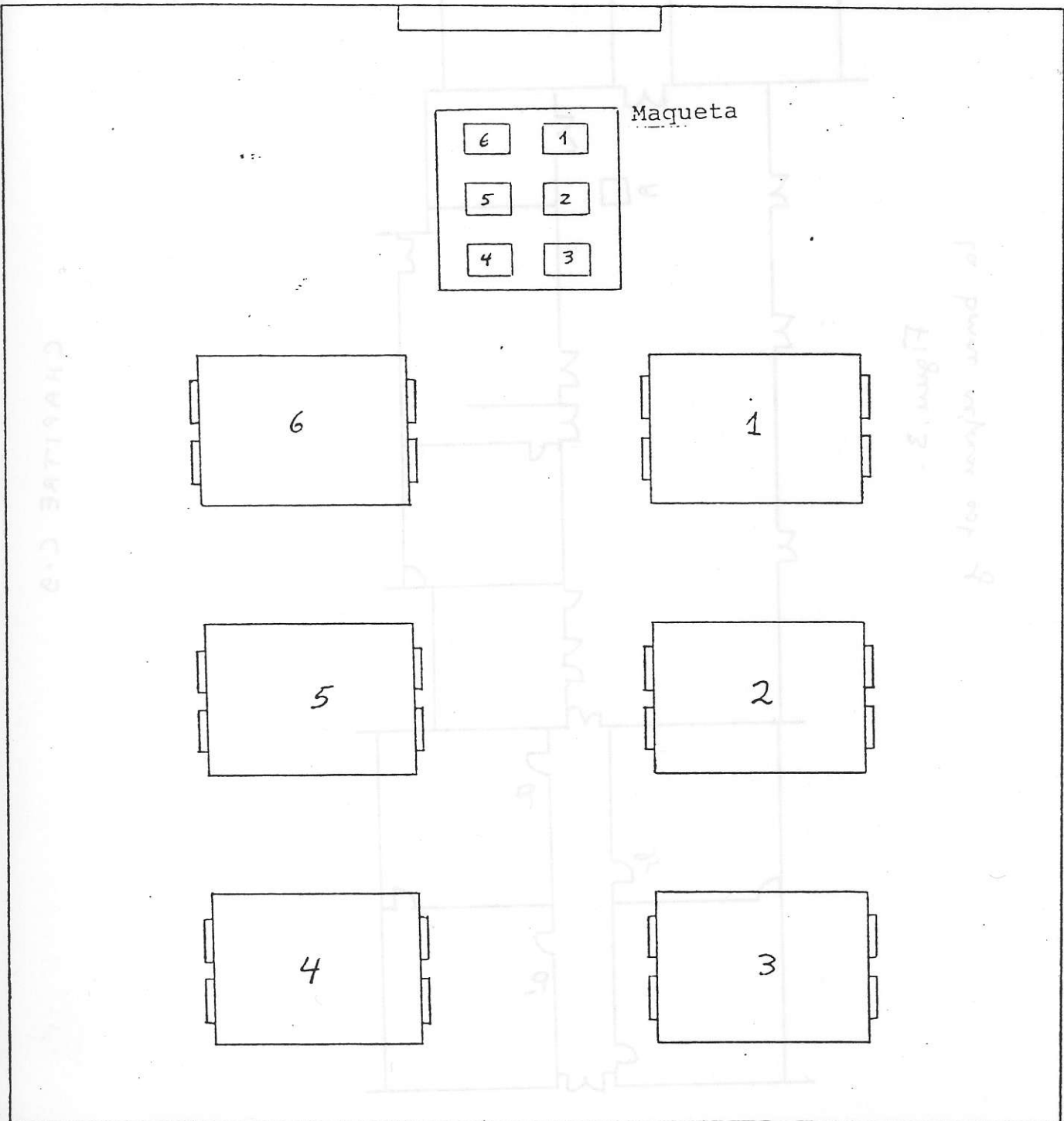


Figure 3 -
La bonne réponse est f

Esquema 4. ¿Dónde quedó la bolita?

SALON



FICHE DIDACTIQUE

CLASSE : C.M₂ A

ENSEIGNANTE : Nadine BROUSSEAU

DATE : 6 mai 1983

HEURE : 10 heures 15 - 11 heures

TITRE DE LA LEÇON : Jeu des "guides" et des "voyageurs"

SOMMAIRE

- I - Matériel
- II - Organisation de la classe
- III - Présentation de l'activité aux élèves (5 mn)
- IV - Déroulement de l'activité.

1°) Première phase :

a) Exploration de la maquette et réalisation du plan
(35 à 40 minutes environ)

b) Comportements, difficultés.

2°) Deuxième phase : Chaque équipe éprouve son plan (15 à 20 mn environ)

a) Consigne

b) Déroulement

c) Comportements et difficultés.

3°) Troisième phase : Mise à l'épreuve des plans par les voyageurs d'autres équipes.

Note : Cette 3ème phase est prévue, mais elle ne sera pas forcément réalisée au cours de cette activité.

I - MATERIEL.

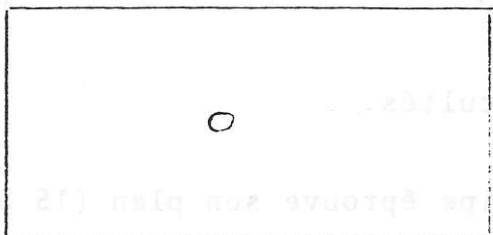
- 6 toiles opaques percées en leur milieu d'un trou rond cerclé d'un anneau (de 4 cm de diamètre environ). Ces toiles recouvrent des maquettes.

- 6 maquettes dessinées sur des feuilles de Canson (format 69 x 49). Ces maquettes sont toutes différentes. Elles représentent des routes et des carrefours auprès desquels sont dessinés des bâtiments ou des sites que l'on trouve habituellement dans une ville (école, mairie, poste à essence, restaurant, poste, jardin public... Ces dessins doivent être assez petits pour que l'on puisse les voir entièrement par le trou centré sur un carrefour.

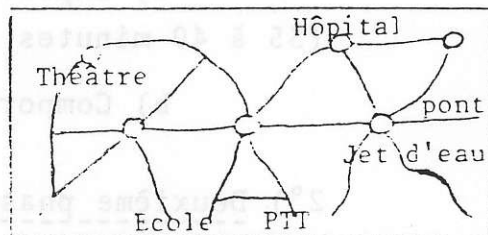
Remarque : Il faut que les enfants aient un certain plaisir à découvrir et à observer les dessins qui doivent être faits avec un grand soin.

Chaque feuille de canson est collée à l'aide de scotch à une table d'élève.

- 3 ou 4 feuilles blanches (30 x 40) pour chaque équipe
- 1 feutre pour chaque équipe



Toile opaque



II - ORGANISATION DE LA CLASSE.

Les enfants sont partagés en 6 équipes (A, B, C, D, E, F) de 4 ou 5 enfants chacune.

Au début de l'activité, chaque équipe est placée autour d'une table portant la maquette recouverte par le tissu.

équipe A → maquette A

équipe B → maquette B ...

III - PRESENTATION DE L'ACTIVITE AUX ELEVES (5 mn environ)

"Nous allons jouer au jeu des guides et des voyageurs. Nous avons dessiné la maquette d'une ville que nous avons cachée sous ces toiles.

Quand on se promène dans une région, à pied ou en voiture, on ne voit qu'une petite partie du paysage à la fois.

PARTIE D Annexe 2

Pour représenter cette petite partie de ce que l'on voit, nous avons fait un trou rond dans la toile qui cache la maquette. Par ce trou et sans soulever la toile, vous pouvez apercevoir un petit morceau de paysage.

. Dans un premier temps, vous allez essayer de faire un dessin qui représente cette ville. Pour cela, vous allez déplacer le tissu sans jamais le soulever et en suivant les routes comme le ferait un promeneur.

. Dans un deuxième temps, des guides utiliseront le plan qu'ils ont fait pour diriger des voyageurs. Le jeu vous sera expliqué en détail lorsque tout le monde aura terminé le plan.

IV - DEROULEMENT DE L'ACTIVITE.

1°) Première phase.

a) Exploration de la maquette et et réalisation du plan (35 - 40 minutes environ). Les enfants commencent à explorer la maquette et à repérer les endroits signalés par des dessins (SNCF, poste, école, jet d'eau...). Puis ils tentent de réaliser le plan.

b) Comportements - difficultés : Il arrive souvent que le plan commencé sur une feuille doive se poursuivre sur une autre.

La principale difficulté réside pour les enfants dans le raccordement des deux extrémités d'un circuit et les conduit à faire des plans très déformés.

Un plan topologiquement juste suffirait. Mais il arrive que les déformations trop importantes conduisent à des erreurs de topologie : les comportements des enfants manifestent les conflits qui apparaissent par suite des différences entre leur représentation mentale du paysage et la reproduction qu'ils sont amenés à en faire. Ces "conflits" sont le moteur des découvertes.

2°) Deuxième phase : Chaque équipe éprouve son plan (15-20 mn environ)

a) Consigne : "Maintenant que vous avez réalisé vos plans, vous allez les éprouver. Pour cela, chaque équipe va se séparer en 2 parties : des guides et des voyageurs.

.../...

Les guides vont utiliser le plan pour diriger les voyageurs. Ceux-ci partent d'un endroit convenu sur la maquette. A chaque carrefour, ils indiquent aux guides le chemin qu'ils choisissent et demandent : "où allons-nous arriver ?"

Les guides font une prévision à l'aide de leur plan. Si cette prévision s'avère juste, le jeu continue. Si les guides et les voyageurs ne sont plus d'accord, alors ils doivent discuter, soit pour s'entendre sur les indications qu'ils se donnent, soit pour arranger le plan".

b) Déroulement. Les enfants de chaque équipe se séparent eux-mêmes en guides et voyageurs (l'enseignant veille cependant à ce que les groupes soient équilibrés et éventuellement il peut modifier un groupe).

L'enseignant place les guides autour d'un autre bureau de manière à ce qu'ils ne voient plus la maquette des voyageurs et le jeu commence tel qu'il a été prévu.

L'enseignant fait respecter les consignes, encourage les enfants, aide à résoudre les problèmes matériels mais il n'intervient dans l'activité elle-même qu'à la demande des enfants pour écouter des remarques, résoudre des conflits éventuels...

Remarque : Il est souhaitable que les guides puissent être voyageurs et vice-versa avant la fin de l'activité.

c) Comportements et difficultés :

On rencontre deux types de difficultés : celles relatives à l'usage du plan (correspondance entre l'orientation du plan et de la maquette) et celles relatives au choix du vocabulaire pour indiquer les rapports entre les 6 systèmes de référence en présence :

- référence de la maquette
- système de référence lié au promeneur sur la maquette
- système de référence lié à l'observateur de la maquette
- Système de référence lié au plan
- système de référence lié à la représentation du promeneur sur le plan
- système de référence lié à l'observateur du plan.

Remarque : A la fin de cette partie, guides et voyageurs ont une représentation mentale du même paysage de sorte que les remises en cause du plan sont rares.

3°) Troisième phase : Mise à l'épreuve des plans faits à l'intérieur d'une équipe, par les voyageurs d'une autre équipe.

a) Consigne : "Les voyageurs d'une équipe vont aller jouer de la même façon avec les guides d'une autre équipe. Les guides gardent leur plan et dirigeront donc ces nouveaux voyageurs qui ne connaissent pas leur maquette.

Si les guides et les voyageurs arrivent à bien jouer, quels que soient les types de chemins, ils marquent un point chacun.

Si les voyageurs arrivent à montrer qu'à un certain endroit, les prévisions des guides sont régulièrement fausses, c'est que le plan est faux et les guides perdent leur point".

b) Déroulement : Le jeu se déroule comme dans la phase précédente mais les enfants marquent des points (ce qui les motive fortement).

c) Comportements et difficultés. Les difficultés peuvent surgir du fait que les guides et les nouveaux voyageurs n'ont ni une représentation commune du paysage, ni un vocabulaire commun pour se transmettre des renseignements sur la maquette avec laquelle ils jouent.

V - RESULTATS.

Dans la 1ère phase, les enfants doivent construire un modèle implicite d'un graphe à partir d'informations locales. Ce modèle implicite leur sert à contrôler la réalisation du plan.

Dans la 2ème phase, ils développent un langage pour décrire un trajet le long des rues et en particulier aux carrefours. Ils choisissent des directions (?) privilégiées de référence et un vocabulaire pour les désigner.

Dans la 3ème phase, ils peuvent être conduits à énoncer un minimum de règles topologiques sur ce que doit réaliser un bon plan.

Dans tous les cas, ils ont compris la nécessité de se donner un langage commun pour s'orienter.

JEU DES GEOGRAPHES ET DES VOYAGEURS
(classe entière)

I - PREMIER JEU DANS UNE MEME EQUIPE (GEOGRAPHES-VOYAGEURS)
pour éprouver le plan.

a) Consigne : "Au cours de la dernière séance, vous avez réalisé un plan que vous avez éprouvé rapidement en jouant ensemble. Beaucoup d'entre vous ont eu des difficultés de compréhension entre géographes et voyageurs, en particulier quand il s'agit de désigner un chemin à une patte d'oie."

Vous allez donc rejouer ensemble pour essayer de vous mettre d'accord sur le vocabulaire à employer pour bien vous comprendre et également pour voir si le plan que vous avez fait est correct".

b) Déroulement : Les enfants d'une même équipe se séparent en géographes et voyageurs et jouent. Les géographes et les voyageurs ne doivent pas se regarder.

Ils partent du point de départ.
Les voyageurs annoncent : "Nous prenons telle rue, où allons-nous arriver ?"

Les géographes annoncent en consultant le plan, le lieu d'arrivée aux voyageurs qui vérifient. S'il y a mésentente, les géographes et les voyageurs peuvent discuter d'une stratégie pour se mettre d'accord, et éventuellement rectifier leur plan.

...../.....

II - 2ème JEU : UTILISATION DU PLAN D'UNE AUTRE EQUIPE

a) Consigne : "Puisque vous pensez que vos plans sont corrects et que vous vous comprenez bien, vous allez jouer en utilisant le plan d'une autre équipe. Par exemple, l'équipe A change de place avec l'équipe F, l'équipe B change avec l'équipe E, l'équipe C avec l'équipe D.

Chaque équipe laisse à sa place le plan qu'elle a réalisé et vous jouez avec le plan des autres.

b) Déroulement : Chaque équipe laisse son plan à l'équipe qui la remplace. Les enfants d'une même équipe se séparent de nouveau entre géographes et voyageurs et jouent avec la plan et la maquette de l'équipe qu'ils remplacent. (Ils se rendent compte ainsi si les désignations qu'ils ont utilisées fonctionnent avec un plan et une maquette qu'ils ne connaissent pas).

III - DISCUSSION COLLECTIVE.

a) Consigne : Chaque équipe vient au tableau, à tour de rôle, pour dire si elle a pu utiliser le plan des autres, si ce plan lui paraît correct ou non, et quel système de désignation elle a utilisé.

b) Déroulement : Une première équipe vient donc au tableau avec le plan des autres qu'elle vient d'éprouver. Elle annonce si ce plan lui paraît correct, sinon elle explique pour quoi, il lui semble faux.

Elle indique également comment elle a fait pour désigner les chemins (aux pattes d'oie en particulier).

* Remarque : 1) Si l'équipe dont on éprouve le plan n'est pas d'accord, elle peut s'expliquer et se justifier éventuellement.

2) Les équipes qui écoutent essaient de reconnaître si le système de désignation exposé correspond au lieu ou s'il est différent.

3) Toute équipe qui a un système de désignation différent, vient l'exposer.

.../...

IV - Remarques :

Les enfants ont employé 4 systèmes de référence différents :

- ils prennent leur décision par rapport à la maquette
- ils prennent leur décision par rapport au plan
- ils prennent leur décision par rapport au voyageur
- ils prennent leur décision par rapport à l'observation

La difficulté c'est de faire coïncider un système de référence un autre.

III - DISCUSSION COLLECTIVE

a) Constat :

Chaque équipe vient au tableau, à tour de rôle, pour dire si elle a pu utiliser le plan des autres, si ce plan lui paraît correct ou non, et quel système de désignation elle a utilisé.

b) Déroulement :

Une première équipe vient donc au tableau avec le plan des autres qu'elle vient d'écrire. Elle annonce si ce plan lui paraît correct, sinon elle explique pour quoi, il lui semble faux.

Elle indique également comment elle a fait pour désigner les chemins (aux gares d'olé en particulier).

Remarque : si l'équipe dont on étudie le plan n'est pas d'accord, elle peut s'expliquer et se justifier éventuellement.

Les équipes qui écoutent essaient de reconnaître si le système de désignation exposé correspond au leur ou s'il est différent.

Toute équipe qui a un système de désignation différent, vient l'exposer.

3ème activitéI - ANNONCE D'UN NOUVEAU JEU - présentation de l'activité.

1°) Consigne : "Nous allons rejouer au jeu des géographes et des voyageurs. Mais aujourd'hui, le jeu sera un peu différent du précédent car les géographes et les voyageurs ne pourront plus se parler.

Les géographes enverront aux voyageurs des renseignements écrits (un message) pour leur communiquer des itinéraires qui leur permettront d'arriver au même endroit. J'ai choisi ces itinéraires avec un départ et une arrivée que je donnerai aux géographes. Ceux-ci n'auront pas le droit d'indiquer sur les messages les endroits comme "école", "mairie"... mais simplement des trajets, des directions.

Avant de jouer, il faut donc que vous vous mettiez d'accord sur un système de communication qui fonctionne toujours quel que soit le plan utilisé. Il faut aussi que vous sachiez communiquer ces systèmes à l'aide de mots (dont nous ferons une liste). Vous ne pourrez utiliser que les mots de la liste.

Chaque groupe va donc venir présenter son système.

2°) Énoncé des différents systèmes de communication :
Déroulement :

Chaque groupe vient rapidement énoncer le système qu'il a utilisé dans les jeux précédents (à l'aide des mots qu'il a employés).

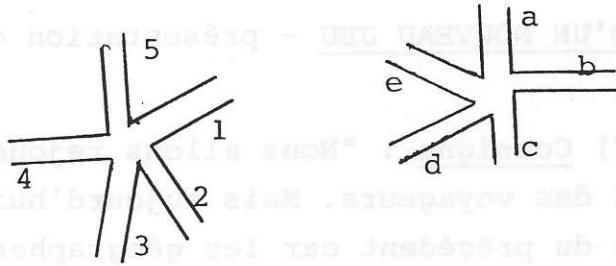
a) Si le reste de la classe peut dire à l'avance, sans l'expérimenter, que ce système n'est pas bon (c'est-à-dire valable dans n'importe quel cas, avec n'importe quel plan), alors il peut l'éliminer, à condition de dire pourquoi et de prouver soit l'ambiguïté, soit l'erreur.

Remarques : Ainsi certains systèmes de communication ont été rejetés immédiatement sans être expérimentés.

Exemples : 1) 2 groupes qui avaient numéroté ou désigné par des lettres, toutes les routes arrivant à des "pattes

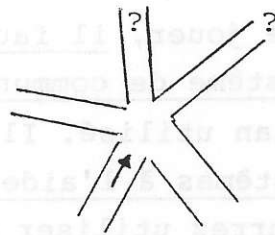
.../...

d'oie", ont reconnu tout de suite que leur système n'avait pas

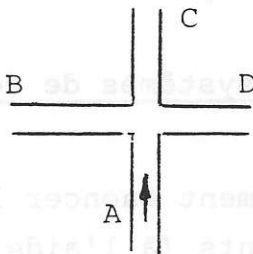


fonctionné lorsqu'ils ont joué avec une autre équipe. Ce système est rejeté par toute la classe.

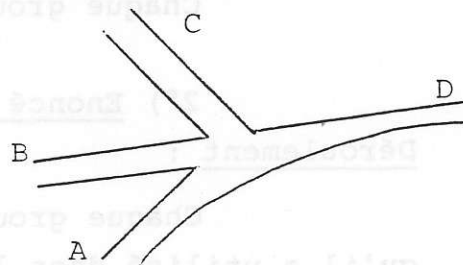
2) Un groupe qui avait utilisé les termes "en face" "en haut", "en bas" n'a pas réussi à s'entendre avec d'autres équipes (qui ne tenaient pas forcément le plan dans le même sens). Toute la classe rejette ce vocabulaire qui est équivoque dans beaucoup de cas (les enfants le montrent à l'aide de croquis)



"en face" ou encore,



(dessin sur le plan)



(dessin correspondant sur la maquette)

"en face" - Sur le plan, quand on vient de A, c'est "C"

Sur la maquette, quand on vient de A, c'est "D"

b) S'il n'est pas possible de savoir sans expérimentation que le système énoncé n'est pas bon, alors les élèves peuvent le vérifier sur des cas précis qu'ils ont rencontrés au cours des jeux précédents ou simplement sur des croquis qu'ils réalisent au tableau.

c) Les enfants éliminent progressivement les mots qui ne leur paraissent pas corrects pour communiquer dans tous les cas et

.../...

constituent une liste de mots qu'ils vont éprouver dans le jeu qui va suivre. Ils s'entendent sur les ordres qu'ils peuvent donner et sur le sens qu'ils peuvent avoir dans chacun des cas étudiés.

II - JEU.

1°) Consigne : "Maintenant que vous pensez être d'accord, vous allez jouer en n'utilisant que le vocabulaire retenu au cours de la discussion ainsi que les ordres qui vous ont paru corrects dans n'importe quel cas".

2°) Déroulement : Les enfants se départent en géographes et voyageurs de telle manière qu'ils soient assez loin les uns des autres. Les voyageurs sont autour d'une maquette, (différente de celle dont ils ont fait le plan au cours des précédentes leçons) les géographes ont le plan correspondant à cette maquette.

L'enseignant remet aux géographes des itinéraires correspondants à leur plan avec Départ et Arrivée.

Exemple : 1er itinéraire Départ : "Tinville"

Arrivée : "Géant Casino"

Les géographes doivent faire un message comportant :

- le départ : "Tinville"
- et le trajet à suivre pour arriver à "Géant Casino" (L'arrivée ne doit évidemment pas être marquée sur le message)

Le message terminé est transmis aux voyageurs qui doivent l'interpréter et le renvoyer en mentionnant l'endroit où ils sont arrivés.

Si cet endroit correspond à l'arrivée "Géant Casino" alors la communication a été bonne et ils refont un nouvel itinéraire. Si cet endroit ne correspond pas à l'arrivée indiquée sur l'itinéraire, alors il peut y avoir plusieurs raisons :

- soit le message n'est pas correct : les ordres sont mal indiqués, il y a des erreurs de direction, etc...
- soit le message est correct mais il a été mal interprété
- soit le plan est faux et ne correspond pas à la

.../...

maquette.

Dans ce cas, de nouvelles discussions sont engagées entre géographes et voyageurs de manière à pouvoir refaire un jeu et se comprendre.

* Remarque : Il est souhaitable que les voyageurs puissent être à leur tour géographes et que chaque groupe fasse au moins 3 jeux (ce qui fait 6 aller-retour)

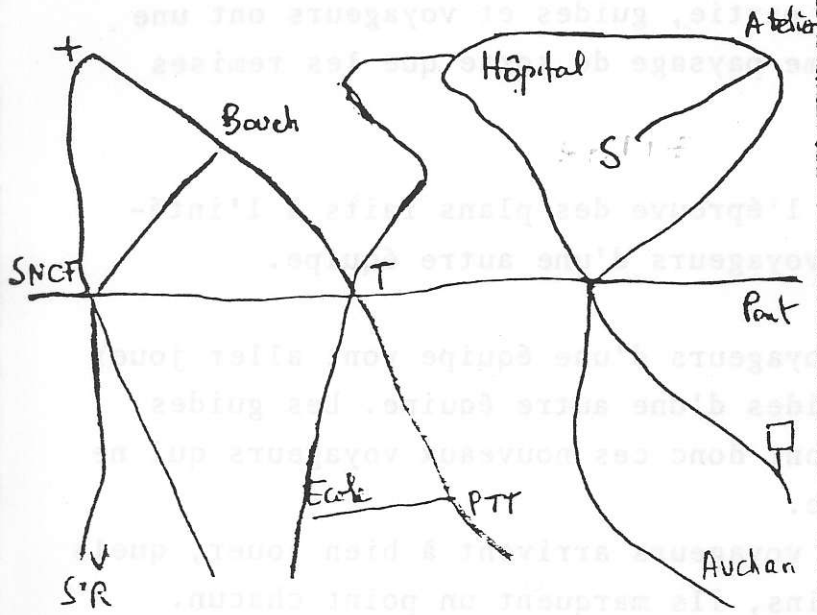
III - CONCLUSION.

1°) Lorsque des groupes ne sont pas arrivés à s'entendre, l'enseignant peut provoquer une discussion collective :

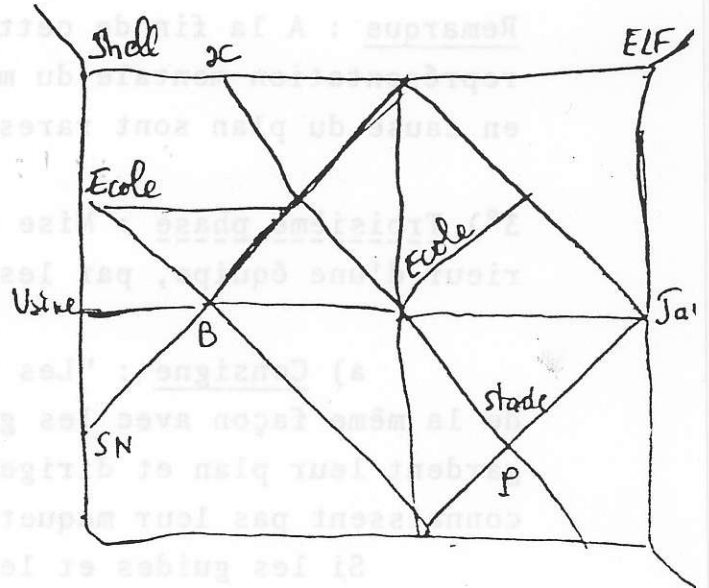
- . les enfants viennent dire pourquoi ils ne se sont pas compris, s'ils le savent
- . les autres peuvent essayer de comprendre et dire pourquoi la communication n'a pas pu se faire.

2°) D'autres systèmes de communication peuvent être expérimentés et retenus s'ils s'avèrent corrects.

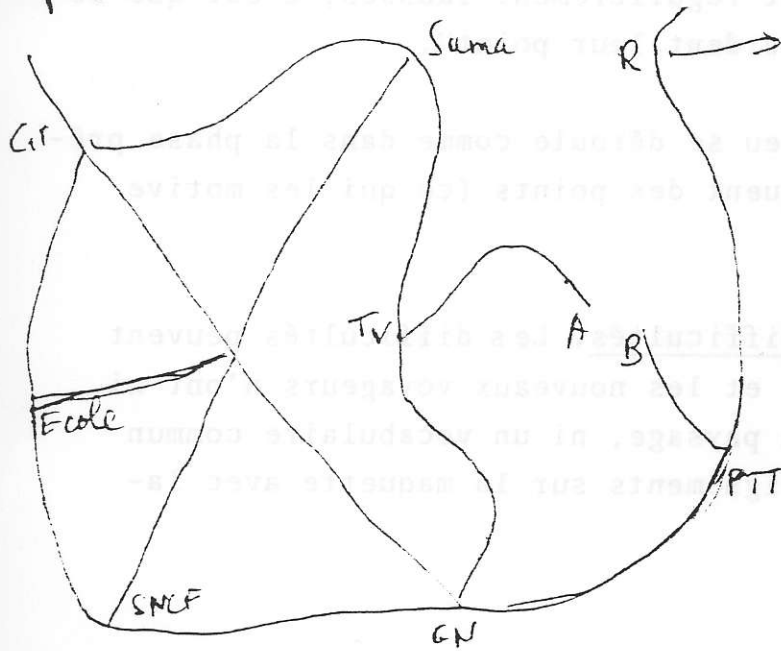
Maquette A



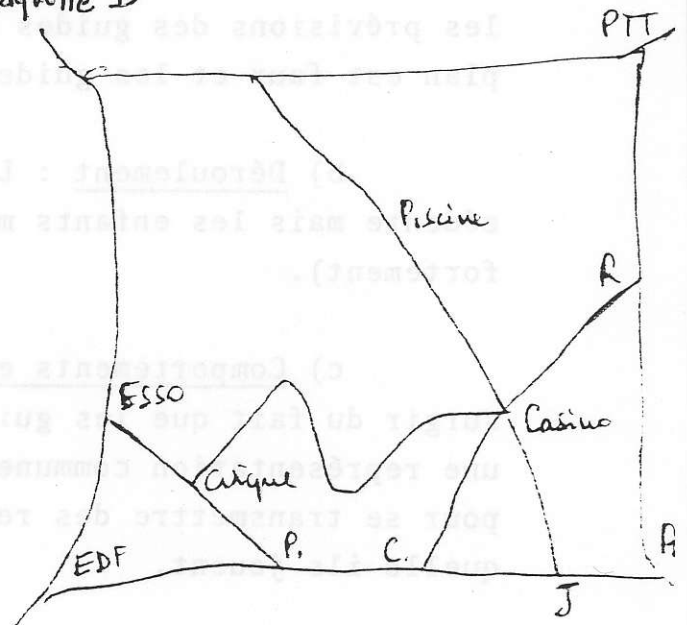
Maquette B



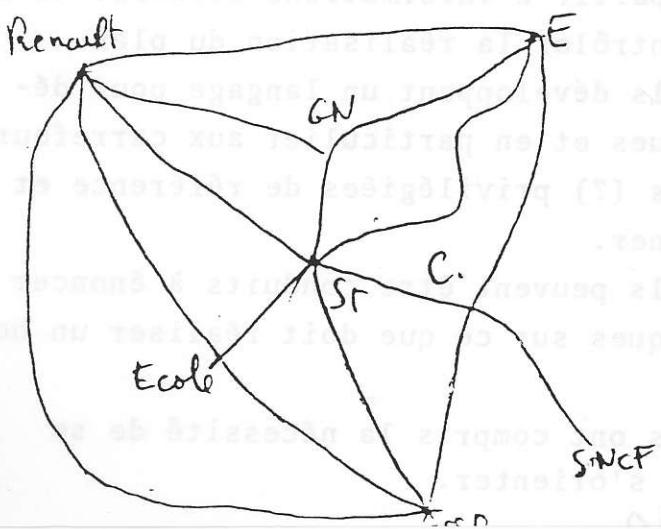
Maquette C



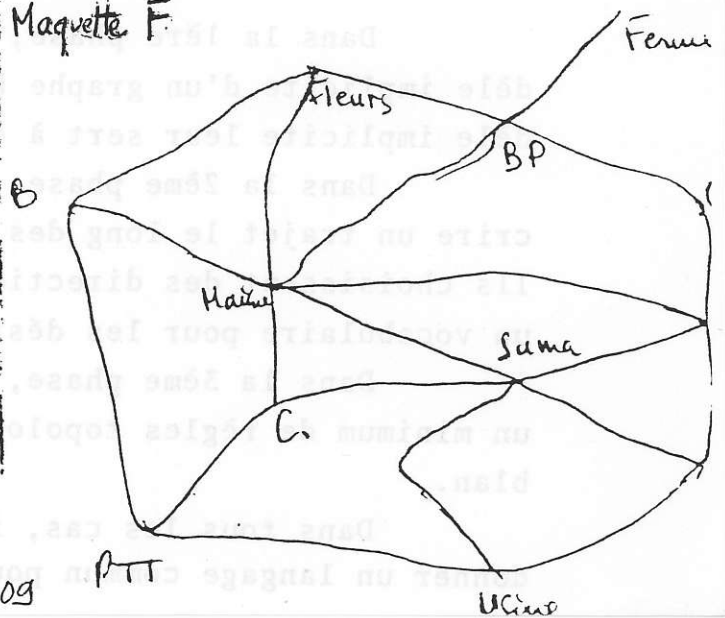
Maquette D



Maquette E



Maquette F



Remarque : A la fin de cette partie, guides et voyageurs ont une représentation mentale du même paysage de sorte que les remises en cause du plan sont rares.

3°) Troisième phase : Mise à l'épreuve des plans faits à l'intérieur d'une équipe, par les voyageurs d'une autre équipe.

a) Consigne : "Les voyageurs d'une équipe vont aller jouer de la même façon avec les guides d'une autre équipe. Les guides gardent leur plan et dirigeront donc ces nouveaux voyageurs qui ne connaissent pas leur maquette.

Si les guides et les voyageurs arrivent à bien jouer, quels que soient les types de chemins, ils marquent un point chacun.

Si les voyageurs arrivent à montrer qu'à un certain endroit, les prévisions des guides sont régulièrement fausses, c'est que le plan est faux et les guides perdent leur point".

b) Déroulement : Le jeu se déroule comme dans la phase précédente mais les enfants marquent des points (ce qui les motive fortement).

c) Comportements et difficultés. Les difficultés peuvent surgir du fait que les guides et les nouveaux voyageurs n'ont ni une représentation commune du paysage, ni un vocabulaire commun pour se transmettre des renseignements sur la maquette avec laquelle ils jouent.

V - RESULTATS.

Dans la 1ère phase, les enfants doivent construire un modèle implicite d'un graphe à partir d'informations locales. Ce modèle implicite leur sert à contrôler la réalisation du plan.

Dans la 2ème phase, ils développent un langage pour décrire un trajet le long des rues et en particulier aux carrefours. Ils choisissent des directions (?) privilégiées de référence et un vocabulaire pour les désigner.

Dans la 3ème phase, ils peuvent être conduits à énoncer un minimum de règles topologiques sur ce que doit réaliser un bon plan.

Dans tous les cas, ils ont compris la nécessité de se donner un langage commun pour s'orienter.

atelier
de pédagogie

préélémentaire et c.e. - information des maîtres
mercredi 14 janvier 1976; 9 h 30 - 10 h
vendredi 16 janvier 1976; 17 h 45 - 18 h 16 (2^e diffusion)



activités
mathématiques

AUTOUR D'UN CARRÉ A PARTIR D'UN CUBE

A. - PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Cette émission a été enregistrée les 3, 5 et 6 juin 1975 (4 séquences), dans un C.E. 1 de 25 élèves, les enfants étant disposés par table de 5.

L'idée générale est la suivante (elle s'appuie sur le programme du 2 janvier 1970 et ses commentaires concernant la géométrie au C.E. d'une part, sur différents travaux concernant les apprentissages, d'autre part): *le carré n'est pas défini à priori, mais au contraire l'enfant est amené à concevoir les propriétés de manière à élaborer une définition fonctionnelle du carré qui permettra de le construire et de le reconnaître d'une façon raisonné.*

Plan général

Hors Émission :

1. Classements de solides. Le CUBE est reconnu et décrit par comparaison et opposition avec les autres solides.
2. Tentative de construction d'un cube avec de la terre à modeler.

Émission :

3. Première définition du carré.
4. Propriétés métriques du carré. Tentative de construction.
5. Comparaison de carrés et de losanges pour amener l'étude des coins (angles).
« Le carré a 4 coins pareils »
6. « L'angle » droit : reconnaissance; construction.
Synthèse sur le carré; 2^e définition; construction.

Suite à donner :

7. Reconnaissance de carrés.
Carrés; rectangles; (losanges).

Remarques

Les 4 séquences présentées peuvent s'introduire à un autre moment de l'année.
Le rythme a été rapide en raison des nécessités du tournage.
5 ou 6 séquences pourraient être consacrées au travail présenté.

B. - LEÇONS PRÉLIMINAIRES

1. LE CUBE

Matériel :

Différents solides en matériaux variés : parallélépipèdes non cubiques, prismes, boules, cylindres, cubes, objets variés; ils sont en bois, en plastique (blocs logiques), en carton, en terre.

Déroulement :

Les enfants sont invités à classer les solides. Après des classements par matière ou par couleur, ils s'orientent rapidement sur l'aspect (rond, pointu, plat), sur la forme et le nombre des faces.

- Le cube (solide familier à l'enfant et dont le nom est connu), est ainsi dégagé naturellement.

2. TENTATIVE DE CONSTRUCTION DU CUBE

Matériel :

Une boule de terre à modeler pour chaque enfant.

Déroulement :

Les enfants sont invités à faire un cube.

- Très peu d'enfants sont satisfaits de leur construction et sont amenés à *expliquer* pourquoi (« faces pas plates, pas pareilles, coins pas droits, cube penché,... »).

La réalisation imparfaite amène les enfants à préciser les caractéristiques du cube.

Remarque : autres activités possibles.

On peut ici introduire à titre de thèmes d'étude différentes activités sur le cube (dénombrement, relations d'incidence c'est-à-dire positions relatives des faces, arêtes, sommets, cheminement d'un sommet aux autres en suivant les arêtes...). De nombreux manuels donnent des exemples d'activités de ce type.

C - SÉQUENCES DE L'ÉMISSION

1^{re} SÉQUENCE :

(3. PREMIÈRE DÉFINITION DU CARRÉ)

Intention :

Faire vérifier que le cube a 6 faces superposables. On s'intéressera donc à une de ces faces qu'on appelle le *carré*.

- Définition : le carré est une face de cube.

Matériel :

10 cubes de 10 cm d'arête, 10 cubes de 12 cm, 10 cubes de 15 cm.

Faces opposées de même couleur (ici 2 oranges, 2 blanches, 2 noires).

- Chaque enfant a son cube, mais on peut si cela n'est pas possible, travailler avec 1 ou 2 cubes par table, les cubes devant être si possible de dimensions variées.

Déroulement :

Les enfants ayant remarqué auparavant que le cube avait 6 faces « pareilles », sont amenés à le prouver. Différentes stratégies sont spontanément utilisées (empreinte, décalque, découpage, mesurage...).

- La séquence se termine par le dessin de l'empreinte d'une face, puis par son découpage. Chaque enfant a un *carré* (défini à partir du cube).

2^e SÉQUENCE :

(4. PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU CARRÉ)

Intentions :

- a) Faire découvrir que le carré a 4 côtés de même longueur.
- b) Faire découvrir que cette propriété n'est pas suffisante : une tentative de construction avec comme unique consigne le respect des longueurs aboutira à un échec.

Matériel :

- a) Chaque enfant possède son carré découpé dans la séquence précédente.

- b) Chaque enfant a une feuille de papier fort sur laquelle est dessiné en biais un trait de 10 cm.

Cette longueur correspond à celle des arêtes d'un des cubes références, car après tentative de construction, on vérifiera à l'aide du cube si la figure obtenue est bien superposable à une face du cube (et donc est un carré).

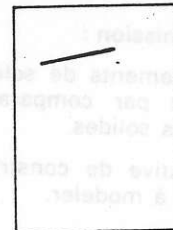


fig 1

Déroulement :

- a) Les enfants sont invités à observer leur carré. Ils en arrivent rapidement à la comparaison des côtés en utilisant des stratégies diverses (pliage, décalque, mesure à l'aide de bandes de papier par report ou superposition, mesure à l'aide d'instrument,....).

Le carré a ses 4 côtés de même longueur.

- b) On distribue aux enfants la feuille de papier (fig. 1), et on leur demande de dessiner un carré dont on a déjà tracé un côté. On ira ensuite vérifier sur un cube (découpage ou empreinte) si on a vraiment réalisé un carré. Pratiquement aucun enfant n'a réalisé un carré (« ils sont tordus ou n'ont pas les côtés pareils »).

3^e SÉQUENCE :

(5. AUTRES PROPRIÉTÉS DU CARRÉ angulaire)

Intentions :

Essayer de comprendre l'échec de construction dans la séquence précédente.

Matériel :

Pour chaque équipe (5 élèves) : 10 figures découpées dans du papier fort : 3 carrés, 4 losanges (dont 2 presque carrés), 3 rectangles (dont 2 presque carrés).

Déroulement :

- a) On donne les figures aux enfants, et on leur demande de les trier. Ils s'intéressent aux côtés et mettent en évidence losanges et carrés.
- b) On leur demande ensuite de voir (à l'aide du cube) quelles sont celles de ces figures qui sont des carrés, et pourquoi les autres n'en sont pas.
 - ▶ Les enfants s'intéressent alors aux « coins » (pointus, larges, droits) *Le carré a 4 coins superposables.*

4^e SÉQUENCE :

(6. DEUXIÈME DÉFINITION DU CARRÉ CONSTRUCTION)

Intentions :

- a) Faire analyser la présence de coins droits dans le carré. Faire donner une hypothèse de définition du carré (indépendante du cube).
- b) Construire un carré et vérifier que ce qui a été proposé définit bien un carré.

Matériel :

- a) Carrés en papier — Cubes références.
- b) Feuille de papier fort sur laquelle est dessinée en biais un trait de 13 ou 17 cm. Contrairement à la 2^e séquence, les traits ici ne doivent pas avoir la même longueur que les arêtes des cubes références (10, 12 ou 15 cm), car le cube doit être utilisé uniquement pour le coin droit et non comme un gabarit complet.

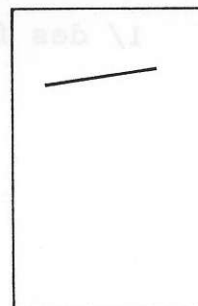


fig 2

Déroulement :

- a) On a vu que le carré avait 4 coins superposables. Comment les caractériser? « ils sont droits ». Où en trouver? « sur le cube ».

Remarque :

En raison des impératifs du tournage nous nous sommes arrêtés à cet exemple d'angle droit. On pourrait placer ici 1 ou 2 séquences supplémentaires destinées à connaître et à construire des coins droits (par pliage ou avec l'équerre).

Hypothèse :

- ▶ Le carré a 4 côtés de même longueur et 4 coins (ou angles) droits.

- b) On donne une feuille de papier (fig. 2), avec comme consigne de dessiner un carré dont on a déjà tracé un côté.

Les enfants s'exécutent : le cube est utilisé comme équerre et comme règle.

- ▶ Pratiquement tous les enfants ont bien (avec ces 2 critères) réalisé un carré (superposable à une face de cube).

Conclusion :

Un carré a 4 côtés de même longueur et 4 coins (ou angles) droits.

Le carré est désormais défini et construit indépendamment du cube.

Fiche établie par M. Blanc et M. Courrière.

CONSTRUCTION DE FIGURES GEOMETRIQUES

Matériel :

1/ des figures géométriques découpées dans du carton fort :

- 1 rectangle
- 1 triangle isocèle
- 1 triangle rectangle
- 1 triangle équilatéral
- 2 parallélogrammes (de dimensions différentes)

2/ Les enfants ont à leur disposition un double-décimètre, un compas, une paire de ciseaux, une équerre (faite par pliage d'une feuille de papier) et du papier carton.

Antécédents :

Dans le courant du 2ème trimestre, deux séances de mathématiques ont été consacrées à la construction de figures géométriques simples (que les enfants avaient vues en CM₁) : des carrés, des rectangles, des triangles.

Au cours de ces 2 séances, l'activité s'était déroulée de la manière suivante :

. la maîtresse avait découpé chacune des figures citées ci-dessus dans du carton

. elle montrait chaque figure - le carré par exemple - aux enfants en leur disant :

"Quels renseignements voulez-vous que je vous donne pour construire et découper un carré superposable au mien ?"

(Les enfants devaient faire leur demande individuellement par écrit, la maîtresse donnait à chacun d'eux les renseignements demandés par écrit aussi)

Les enfants vérifiaient eux-mêmes par superposition.

.../...

Objectifs de la leçon :

1/ L'un des principaux objectifs de cette activité est de voir : d'une part si les enfants se sont appropriés le vocabulaire introduit et employé lors des deux séances de construction et s'ils l'utilisent dans leurs messages d'autre part, s'ils prennent en compte - pour faire leurs messages et leurs constructions - des propriétés qu'ils avaient découvertes.

2/ Un autre objectif est de les entraîner au jeu de communication afin qu'il soit rôdé pour la leçon suivante - au cours de laquelle seront introduites de nouvelles figures, plus complexes et qu'ils ne connaissent pas : losanges, trapèzes, parallélogrammes.

Remarque : Etant donné la difficulté que présente la construction du parallélogramme, nous pensons que deux séances sont nécessaires (et probablement insuffisantes) pour arriver à cette construction, c'est la raison pour laquelle 2 parallélogrammes figureront dans cette première activité avec des figures beaucoup plus simples.

(Nous prévoyons évidemment que leur construction ne sera pas réussie). Ils figureront de nouveau dans la leçon suivante.

Description de l'activité :

1/ Organisation de la classe : Les enfants sont divisés en 6 équipes : 3 équipes de 4 et 3 équipes de 5

Chaque équipe comprend 2 groupes :

2 émetteurs et 2 récepteurs

ou 2 émetteurs et 3 récepteurs.

Les émetteurs et les récepteurs de chaque équipe sont séparés.

2/ Consigne : "J'ai découpé des figures géométriques dans du carton. Je vais donner une de ces figures aux émetteurs (les récepteurs ne le verront pas)

Les émetteurs enverront un message à leurs récepteurs contenant tous les renseignements qu'ils jugent nécessaires pour que ceux-ci puissent réaliser la figure sans la voir.

Annexe 4

Je porterai le message aux récepteurs qui pourront le renvoyer aux émetteurs s'ils désirent des renseignements supplémentaires.

Il ne devra pas y avoir de croquis sur les messages.

L'équipe qui aura réalisé le plus de figures superposables aura gagné.

Les récepteurs deviendront émetteurs à leur tour dès qu'ils auront réalisé la figure des émetteurs".

3/ Déroulement :

a) 1ère phase : 20 minutes.

Les émetteurs discutent entre eux et font le message destiné aux récepteurs.

(En attendant ce message, les récepteurs feront un travail individuel (opérations par exemple).

Dès la réception du message, les récepteurs réalisent la figure (pendant que les émetteurs font à leur tour le même travail préparé). Dès qu'elle est découpée, ils vont vérifier eux-mêmes par superposition.

b) 2ème phase : 20 minutes.

Les récepteurs deviennent émetteurs et ont une nouvelle figure.

Remarque : entre la 1ère et la 2ème phase, les émetteurs et les récepteurs peuvent se concerter pour discuter des messages.

c) 3ème phase : Synthèse collective (20 mn)

Les enfants et la maîtresse vérifient ensemble si les figures réalisées au cours du jeu sont, ou non, superposables.

a) Constructions réussies : Les messages seront lus et étudiés afin de voir ce qui a permis de réussir la figure (dégager de ces messages les renseignements essentiels)

b) Les constructions non réussies : Là encore, les messages seront lus par les enfants et il faudra essayer de voir pourquoi les constructions n'ont pas été réussies :

- le message peut être correct mais non compris par les récepteurs

- le message n'est pas correct. Il faut alors se demander pourquoi. Quels sont les renseignements que les récepteurs auraient voulu savoir ? Avec ces renseignements pourrait-on construire la figure (Essai si le temps le permet)

LEÇON DU 26 MAI 1981

CONSTRUCTION DE FIGURES GEOMETRIQUES

Matériel :

- 1/ Des figures géométriques découpées dans du carton fort :
 - 2 losanges de dimensions différentes
 - 2 trapèzes (1 rectangle, 1 isocèle)
 - 2 parallélogrammes (de dimensions différentes)
 - 1 quadrilatère quelconque
- 2/ Les enfants ont à leur disposition un double-décimètre, un compas, une paire de ciseaux, une équerre (faite par pliage d'une feuille de papier) et du papier carton.

Antécédents de la leçon :

Les enfants reconnaissent et savent construire des carrés, des rectangles et les 4 sortes de triangles qu'ils ont utilisés lors d'un jeu de communication

Objectifs de la leçon :

Les enfants devront élaborer des messages qui permettent les constructions correctes des figures proposées

Si les tentatives des enfants ne sont pas réussies, ils devraient découvrir, à la fin de cette séance la ou les techniques appropriées pour la construction ultérieure de ces figures.

Si leurs tentatives ont réussi, l'étude des messages devrait permettre de dégager les propriétés des figures étudiées, de réduire ces messages de manière à ne garder que les renseignements nécessaires et suffisants à la construction. Elle devrait permettre aussi de distinguer des messages qui ont abouti à des constructions correctes mais qui auraient pu, tels qu'ils sont, donner d'autres constructions, donc qui doivent être reformulés de manière à éviter toute équivoque.

Description de l'activité : Elle se déroule en trois phases

respectives de 25, 15, 30 minutes

1/ Organisation de la classe : les enfants sont divisés en 6 équipes : 3 équipes de 4
3 équipes de 5

Chaque équipe comprend deux groupes :

- 2 émetteurs et 2 récepteurs
- ou - 3 émetteurs et 2 récepteurs

les émetteurs et les récepteurs de chaque équipe sont séparés.

Première phase : Emission de messages (25 mn)

1) Consignes

"hier, vous avez écrit des messages pour que les récepteurs réalisent des figures superposables aux vôtres. Ces messages ont bien fonctionné, sauf un que nous reverrons tout à l'heure

Aujourd'hui, nous allons refaire le même jeu avec des figures plus compliquées

2) Déroulement

* Chaque groupe a une figure. Les enfants rédigent les messages

* Dès que les messages sont terminés, la maîtresse demande à chaque groupe d'éprouver son propre message en essayant de construire la figure. Elle enlève les modèles qu'elle fixe au tableau.

* Si le message ne leur permet pas de réaliser leur construction, ils pourront aller au tableau voir leur modèle afin de prendre d'autres renseignements ou d'autres mesures qu'ils jugent nécessaires. Alors ils écrivent un nouveau message plus satisfaisant

Deuxième phase : Le jeu de communication (15 mn)

Ces nouveaux messages sont transmis aux récepteurs qui doivent réaliser la figure correspondante au modèle. Eventuellement, les récepteurs pourront demander aux émetteurs des renseignements supplémentaires

Troisième phase : Synthèse collective . Examen de messages
(30 mn)

Les enfants et la maitresse vérifient ensemble si les figures réalisées au cours du jeu sont, ou non, superposables.

a) Constructions réussies : les messages seront lus afin de voir ce qui a permis de réussir la figure.

Si une construction est réussie, mais grâce à un message qui aurait pu être interprété différemment et donc, donner une autre construction (non conforme au modèle)

Les enfants en discuteront et éventuellement réaliseront ces figures différentes

Le message devra donc être repris et corrigé afin qu'il n'aboutisse qu'à la construction souhaitée.

b) Constructions non réussies : Là encore les messages seront lus par les enfants et il faudra essayer de voir pourquoi les constructions n'ont pas été réussies :

- le message peut être correct mais non compris par les récepteurs

- le message n'est pas correct. Il faut alors se demander pourquoi.

On recensera les problèmes mis en évidence :

- problèmes de vocabulaire (sommets, côtés, diagonales...)
- problèmes de constructions géométriques (droites parallèles, angles...)

- manque de renseignements indispensables. A ce propos, la maitresse lance un défi à la classe " avec un renseignement quel type de figure géométrique peut on construire? Avec deux renseignements? ...

Prolongements de cette activité :

A l'issue de l'examen des messages, les enfants auront explicité les informations qui leur permettent de reproduire les figures étudiées.

Une séance de construction de ces figures permettra, d'une part de consolider les acquisitions par l'élaboration de techniques pour le construction, d'autre part d'utiliser le vocabulaire introduit. Les caractéristiques dégagées permettront, en outre, de reconnaître la "famille" des parallélogrammes étudiés et construits et de les classer en :

- parallélogrammes
- losanges
- rectangles
- carrés

suivant leurs propriétés spécifiques.