



HAL
open science

Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps: théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur

Yassine Ariba

► **To cite this version:**

Yassine Ariba. Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps: théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur. Informatique [cs]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2009. Français. NNT: . tel-00442454

HAL Id: tel-00442454

<https://theses.hal.science/tel-00442454>

Submitted on 21 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :

Automatique

Présentée et soutenue par :

Yassine Ariba

le : lundi 23 novembre 2009

Titre :

Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps :
théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur

JURY

M. Jean-Pierre Richard	Ecole Centrale de Lille	Président
M. Olivier Sename	Institut National Polytechnique de Grenoble	Rapporteur
M. Hugues Mounier	Université Paris 11	Rapporteur
M. Jean-Louis Calvet	Univ. Toulouse III - Paul Sabatier	Examineur
M. Chaouki T. Abdallah	University of New Mexico, USA	Examineur

Ecole doctorale :

Systèmes (EDSYS)

Unité de recherche :

LAAS-CNRS, 7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse, France

Directeur(s) de Thèse :

M. Frédéric Gouaisbaut	Univ. Toulouse III - Paul Sabatier	LAAS-CNRS
M. Yann Labit	Univ. Toulouse III - Paul Sabatier	LAAS-CNRS

Rapporteurs :

M. Olivier Sename	INP de Grenoble	Professeur des Universités
M. Hugues Mounier	Université Paris 11	Maître de Conférence, HDR

Avant Propos

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été effectués au *Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes* (LAAS) du *Centre National de la Recherche Scientifique* (CNRS), au sein des groupes *Méthodes et Algorithmes pour la Commande* (MAC) et *Outils Logiciels pour la Communication* (OLC). Je tiens tout d'abord à remercier M. Raja Chatila, directeur du LAAS, et l'ensemble des membres du laboratoire pour m'avoir accueilli et avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.

Mes recherches ont été réalisées sous la direction de Monsieur Frédéric Gouaisbaut et Monsieur Yann Labit. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance pour l'encadrement de ce travail, leur grande disponibilité et l'enthousiasme dont ils ont fait preuve tout au long de ces trois années.

Je suis très honoré que Monsieur Olivier Sename, professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, et Monsieur Hugues Mounier, maître de conférence à l'Université de Paris 11, aient accepté d'examiner cette thèse en tant que rapporteur et de participer au jury de soutenance en compagnie de Jean-Pierre Richard, professeur à l'École Centrale de Lille, Jean-Louis Calvet, professeur à l'Université Paul Sabatier, et Chaouki T. Abdallah, professeur à University of New Mexico. Je remercie vivement l'ensemble des membres du jury pour leurs critiques, leurs commentaires constructifs et leurs compliments.

Je souhaite également exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué, directement ou indirectement, au bon déroulement de cette thèse au travers de leur aide, leur soutien, leurs encouragements. Les amis de bureau, Yann, Philippe, Pascal, Thierry, Nicolas, Baptiste, Fred et Roxana. Tous les membres du groupe MAC et du groupe OLC. Les doctorants et docteurs, Thomas, Giorgio, Ixbalank, Luiz, Sandy, Pauline, Wilfried, Christophe, Carlos, Jean-Philippe, Emmanuel. Les amis de tous les jours, Antho, Had, Nazemax, Rémi, Ingrid et Phil, Caro et Guy, Julie, Jo, Pierre, Sylu, Océ, Laura, Rémi, Soline, Delphine, Lydia, Nano et Mathilde, Myth et Livie, Dav' et Phi, Myrq... Les danseurs, Vincent, Reza, Lauriane, Fanny, Chloé, Flora, Audrey, Thierry...

Enfin, j'aimerais conclure en remerciant particulièrement ma mère, Sylvaine Prost, pour m'avoir toujours encouragé à poursuivre mes études et m'avoir permis d'arriver là où j'en suis.

Table des matières

Notations	5
Introduction générale	7
I Sur la stabilité des systèmes à retards	11
I.1 Introduction	11
I.2 Généralités	12
I.2.1 Modélisation des systèmes à retards LTI	12
I.2.2 Catégories de retards	13
I.2.3 Modélisation incertaine et non stationnaire	13
I.2.4 Stabilité	15
I.3 Analyse de stabilité par la seconde méthode de Lyapunov	18
I.3.1 Approche par fonctionnelles de Krasovskii	19
I.3.2 Approche par fonctions de Razumikhin	22
I.4 Analyse de stabilité par l'analyse robuste	22
I.4.1 Théorème du faible gain	23
I.4.2 Séparation quadratique	26
I.5 Conclusion	29
II Réseaux de communication et modélisation	31
II.1 Généralités	31
II.1.1 Contexte	31
II.1.2 Définitions	33
II.2 Le protocole TCP	35
II.2.1 Rôle	35
II.2.2 Problème de congestion	36
II.2.3 Algorithme d'évitement de congestion	37
II.2.4 Modèle dynamique de TCP	41
II.3 Active Queue Management	43
II.3.1 Principe	43
II.3.2 Exemple du RED	44
II.3.3 Extension	45
II.4 Cadre de travail	46
II.5 Conclusion	47
III Elaboration de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii	51
III.1 Introduction	51
III.2 Augmentation du modèle	52

III.2.1	Préliminaires	52
III.2.2	Modèle augmenté	55
III.2.3	Vers une nouvelle fonctionnelle	58
III.2.4	Stabilité robuste	61
III.3	Translation temporelle	62
III.3.1	Translation de $\frac{h(t)}{2}$	63
III.3.2	Cas général	67
III.3.3	Stabilité robuste	70
III.4	Conclusion	73
IV	Sur la construction de conditions de stabilité par l'analyse robuste	75
IV.1	Introduction	75
IV.2	Extension de la séparation quadratique	76
IV.3	Analyse	77
IV.3.1	Stabilité des systèmes à retards variant inconnus	78
IV.3.2	Stabilité des systèmes à retards variant majorés	79
IV.3.3	Stabilité des systèmes à retards variant bornés	83
IV.3.4	Remarques sur la construction d'opérateurs	87
IV.3.5	Stabilité robuste	88
IV.3.6	Stabilité des systèmes à retards distribués	90
IV.4	Exemples comparatifs	97
IV.4.1	Cas des retards variant majorés	97
IV.4.2	Cas des retards variant bornés	100
IV.4.3	Cas des retards distribués	100
IV.5	Conclusion	102
V	Régulation du protocole TCP pour le contrôle de congestion	105
V.1	Introduction	105
V.2	Contrôle de congestion d'un routeur	106
V.2.1	Modélisation	106
V.2.2	Synthèse par retour d'état structuré	109
V.2.3	Exemple numérique	114
V.3	Traffic monitoring	117
V.3.1	Modélisation	118
V.3.2	Synthèse d'un observateur à retards	120
V.3.3	Exemple numérique	124
V.4	Conclusion	126
VI	Simulations et expérimentations	129
VI.1	Introduction	129
VI.2	Contrôle de congestion d'un routeur	130
VI.3	Traffic monitoring	136
VI.4	Emulation	138
VI.5	Conclusion	143
	Conclusion générale et perspectives	145

Annexes	i
A Théorèmes utiles	iii
A.1 Complément de Schur	iii
A.2 Lemme de Finsler	iii
A.3 Lemme de Projection	iv
A.4 Inégalité de Jensen	iv
A.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz	iv
B Quelques démonstrations	v
B.1 Preuve du Théorème III.4	v
B.2 Extension de la séparation quadratique	vii
B.3 Linéarisation du modèle fluide de TCP	ix
C Codes sources et scripts pour NS-2	xi
C.1 Script de simulation	xi
C.2 Script d'émulation	xiii
C.3 Codes sources de MonAQM	xv
D Input-output framework for robust stability of TVDS	xxiii
D.1 INTRODUCTION	xxiii
D.2 PRELIMINARIES	xxiv
D.2.1 Notations and problem statement	xxiv
D.2.2 Stability analysis via quadratic separation	xxv
D.3 MAIN RESULTS	xxv
D.3.1 Defining operators	xxv
D.3.2 Stability condition for time-varying delay systems	xxvii
D.3.3 Model extension	xxix
D.3.4 Robustness issue	xxxi
D.4 NUMERICAL EXAMPLES	xxxiii
D.4.1 Example 1	xxxiii
D.4.2 Example 2	xxxiv
D.5 CONCLUSIONS	xxxv
Références Bibliographiques	xxxv

Notations

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{R}_+	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{C}_+	demi-plan droit du plan complexe
$\mathbb{R}^{n \times m}$	ensemble des matrices à n lignes et m colonnes
$[a, b]$	intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
$\{1, \dots, N\}$	ensemble des N premiers nombres entiers positifs.
\mathcal{C}	ensemble des fonctions continues de $[-h, 0]$ dans \mathbb{R}^n
$L_2^n[0, +\infty[= L_2$	ensemble des fonctions de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R}^n de carré intégrable
$\mathbb{P}_T(\cdot)$	opérateur de troncature temporelle à l'instant $t = T$
f_T	fonction tronquée de f à l'instant T : $f_T \mathbb{P}_T(f) = f(t)$ si $t \leq T$ et 0 sinon
L_{2e}	ensemble des fonctions f telles que leur troncature f_T appartienne à l'ensemble L_2 quelque soit $T \geq 0$
$x_t \in \mathcal{C}$	fonction définie par : $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\forall \theta \in [-h, 0]$
$x^{(i)}(t)$	$i^{\text{ième}}$ dérivée temporelle de $x(t)$
$\ x\ _2$	norme Euclidienne de x
$\ \phi\ _{\mathcal{C}}$	norme fonctionnelle sur \mathcal{C} de ϕ et se définit par $\forall \phi \in \mathcal{C}$: $\sup_{\theta \in [-h, 0]} \ \phi(\theta)\ $
$\ f\ _{L_2}$	norme fonctionnelle L_2 de f et se définit par $\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t) ^2 dt}$
$\langle f, g \rangle$	produit scalaire de f et g et s'exprime par $\int_0^{+\infty} f^*(t)g(t)dt$
A^T	matrice transposée de la matrice A
S^\perp	complément orthogonal à droite de la matrice S tel que $SS^\perp = 0$
$A > 0$ (< 0)	matrice A définie positive (définie négative)
$\text{diag}(A, B, C)$	matrice bloc diagonale : $\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$.
$\mathbb{1}_n$	matrice identité de dimension $n \times n$
$\mathbb{0}_{n \times m}$	matrice nulle de dimension $n \times m$

Introduction générale

Cette thèse s’inscrit dans une thématique pluridisciplinaire explorant les liens existants entre la théorie de la commande et une classe de réseaux informatiques. Comme le suggère le titre de ce mémoire, l’enjeu de ce travail de recherche est double. Il consiste d’une part à construire des critères à minimum de pessimisme pour l’analyse de stabilité des systèmes linéaires, éventuellement incertains, présentant des retards variables dans leur dynamique. D’autre part, il propose d’employer les outils théoriques ainsi développés, dans le cadre de l’Automatique, pour le contrôle de congestion d’un routeur lors de communications TCP (*Transmission Control Protocol*). Notre thématique de recherche se compose donc à la fois d’un aspect fondamental, constitué par la recherche de conditions générales de stabilité pour la classe de systèmes considérés et d’un aspect applicatif lié au monde des réseaux de communication. Nous avons choisi d’orienter cette introduction suivant le second axe afin de motiver l’ensemble de notre étude et d’appréhender au mieux la problématique.

La communication entre plusieurs ordinateurs nécessite au préalable la mise en place d’un “langage” commun, c’est-à-dire un protocole de communication. Le protocole TCP, inventé en 1981, s’est imposé comme le standard pour la communication dans l’Internet. Il est chargé de gérer la quantité de données à émettre sur le réseau lors d’un transfert d’informations d’un ordinateur source vers son destinataire. C’est un protocole de communication dit de *bout en bout* puisque, du fait de son niveau d’abstraction, il établit une connexion directe entre l’émetteur et le récepteur, sans se préoccuper des dispositifs (logiciels ou matériels) mis en oeuvre pour traverser le réseau. La communication effective est, quant à elle, établie par les protocoles de niveau inférieur (par exemple : IP, Ethernet) offrant ainsi une liaison directe entre les machines communicantes. Sa propriété principale est de garantir une communication fiable. En appliquant un mécanisme d’acquiescement, il assure que l’intégralité des données soit transmise au destinataire. Ainsi, s’il y a une perte, la source renverra le paquet manquant. Cependant, étant donné la concurrence des différents utilisateurs pour l’accès au réseau, la question est : *à quel débit un émetteur peut-il envoyer ses données ?* Il s’agit de maximiser, équitablement, les débits de chaque source tout en évitant la saturation de la capacité du réseau. Cette problématique constitue le point de départ du *contrôle de congestion* et plus généralement de la *Qualité de Service* (QoS).

Le phénomène de congestion se manifeste lorsqu’un dispositif reçoit plus d’information qu’il ne peut en traiter, c’est-à-dire, dès lors que le débit de données entrant est supérieur au débit sortant. Il est clair que dans le cas d’un routeur agrégeant une certaine quantité de flux de

données, l'ensemble des émetteurs sont en compétition pour l'accès aux ressources. Si l'intensité du trafic dépasse la capacité du routeur, ce dernier est en état de congestion et les données reçues sont mises en attente avant de pouvoir être traitées. Plus précisément, le buffer de réception du routeur se remplit, puis, une fois saturé tous les nouveaux paquets arrivant sont éjectés, donc perdus. La congestion entraînant la perte de paquets, TCP doit, pour maintenir un service fiable, retransmettre l'ensemble des données perdues. Mais si la surcharge du réseau n'a pas été résolue, les paquets réémis seront certainement de nouveau perdus. De ce fait, le protocole a été doté d'un algorithme supplémentaire pour l'*évitement de congestion*. A partir de la "vision" bout en bout de TCP, ce mécanisme se base sur le postulat que la perte d'un paquet est synonyme de congestion à l'intérieur du réseau. Par conséquent, il ajuste son taux d'émission en fonction de la réception ou non-réception d'un acquittement. Cependant, de nombreuses études ont montré que cet algorithme empirique entraîne de fortes oscillations du trafic et l'inéquité parmi les utilisateurs.

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés au contrôle de congestion d'un routeur dans les réseaux IP. Plus précisément, notre étude s'est focalisée sur le partage d'un lien de communication entre plusieurs émetteurs situés sur des sites distants. Le lien en aval du routeur congestionné étant emprunté par N flux, chaque source applique le mécanisme d'évitement de congestion pour remédier au problème de surcharge du réseau. Des travaux de modélisation fluide proposant une représentation mathématique du comportement du protocole TCP ont été développés dans le but d'effectuer une analyse quantitative du problème de congestion. Ainsi, sous certaines hypothèses, l'évolution temporelle du taux d'émission d'une source est régie par une équation différentielle *retardée*, dépendant du taux de perte au niveau du routeur. Par conséquent, l'intensité des flux étant sensible à la perte de paquets, des dispositifs d'*Active Queue Management* (AQM), capable d'éjecter prématurément des paquets de la file d'attente ont été proposés afin d'anticiper la saturation du buffer et de réduire les fortes oscillations de la file. Dès lors, des chercheurs issus de la communauté de l'Automatique se sont intéressés à ce sujet et au problème de commande sous-jacent. C'est dans ce contexte applicatif que nous avons développé des outils d'analyse avancés propres aux systèmes à retards, offrant alors un cadre de travail approprié pour l'étude de stabilité du système de communication considéré. La présence de multiple retards variables dans la dynamique des équations différentielles complique notablement l'analyse des propriétés du modèle. Si pour un retard constant de nombreuses techniques ont été proposées dans la littérature, dans le cas variant dans le temps les possibilités sont plus restreintes. Deux méthodes principales peuvent être dégagées : la méthode de Lyapunov et l'approche entrée-sortie faisant appel aux outils de robustesse. Toutefois, l'analyse de stabilité d'une telle classe de systèmes reste un problème de recherche ouvert. Nous nous sommes appliqués, dans cette thèse, à construire de nouveaux critères de stabilité au travers des méthodes de Lyapunov-Krasovskii et de séparation quadratique. Dans les deux cas, nous avons cherché, par un travail de modélisation du phénomène de retard, à caractériser "au mieux" la dynamique d'un système à retards afin de réduire le conservatisme de l'analyse.

La thèse s'organise autour de ces deux problématiques : *stabilité des systèmes à retards variables* et *contrôle de congestion d'un routeur*, et se structure comme suit.

Le premier chapitre de ce mémoire présente un état de l'art sur les systèmes à retards. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la notion de stabilité et les différentes manières de l'aborder pour une telle classe de système. Pour cela, nous rappellerons quelques concepts théoriques, tels que la méthode de Lyapunov et les outils de l'analyse robuste, utiles pour la suite

de ce mémoire. Cette première partie nous permettra ainsi d'introduire les bases nécessaires à la bonne compréhension de nos travaux.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de notre application, à savoir les réseaux de communication et l'Internet. Nous détaillerons le fonctionnement du protocole TCP et analyserons les conséquences de son mécanisme d'évitement de congestion lors de communications empruntant un goulet d'étranglement. A partir de là, nous serons en mesure de mettre en évidence la problématique du phénomène de saturation d'un routeur. Nous verrons alors comment il est possible de réguler le trafic TCP à l'aide du dispositif d'AQM, localisé au niveau du routeur, afin d'améliorer le contrôle de congestion.

Les troisième et quatrième chapitres entament la partie technique de ce manuscrit, dans lesquels nous développerons les contributions théoriques de nos travaux de recherche. Nous y présentons un ensemble de méthodes pour l'analyse de stabilité, éventuellement robuste, des systèmes linéaires à retards variant dans le temps. Chacun des deux chapitres proposent un cadre théorique différent pour aborder la même problématique. Au Chapitre III, nous essaierons de construire de nouvelles fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii à partir d'un travail de modélisation dans lequel nous augmenterons la taille du système pour prendre en compte des informations supplémentaires sur la dynamique retardée. Puis, au Chapitre IV, nous ferons appel au principe de séparation quadratique et utiliserons la notion d'opérateurs pour modéliser les systèmes à retards comme l'interconnexion d'une application linéaire avec un ensemble d'opérateurs incertains. Nous verrons que le choix de tels opérateurs permet de traiter différentes classes de systèmes et conditionne, en outre, le pessimisme de l'approche.

Le cinquième chapitre s'appuie sur les résultats précédemment obtenus pour proposer une solution au problème de contrôle de congestion d'un routeur. Le système de communication, alors modélisé comme un système à retards multiples, sera mis sous une forme appropriée afin d'établir un critère de stabilisation. Ainsi, le dispositif de correction, matérialisé par l'AQM, sera en charge de réguler le trafic TCP ainsi que d'assurer une certaine Qualité de Service (QoS) pour les communications. Nous verrons qu'un tel cadre de travail permet également, par la mise en place d'un système d'observation, de faire du "traffic monitoring" et de la détection d'anomalies.

Le sixième et dernier chapitre est entièrement dédié à l'aspect expérimental de l'application. Nous y effectuons des tests à l'aide du simulateur de réseaux NS-2 afin de valider la théorie exposée au chapitre précédent. Puis, nous essaierons d'aller un peu plus loin dans le processus de validation en réalisant des premiers tests d'émulation qui combinent à la fois un environnement simulé (temps réel) et un réseau réel.

Finalement, nous résumerons les différents points abordés tout au long de cette thèse et tenterons de dégager quelques pistes ouvertes pour des travaux futurs.

Chapitre I

Sur la stabilité des systèmes à retards

DANS ce premier chapitre, nous ferons un état de l'art sur les systèmes à retards avant de nous intéresser plus particulièrement à l'étude de leur stabilité. L'objectif n'est pas de présenter de façon exhaustive les problématiques associées à une telle classe de systèmes mais plutôt d'introduire les concepts qui nous seront utiles par la suite. Ainsi, nous nous intéresserons plus particulièrement à la stabilité des systèmes à retards suivant deux cadres théoriques différents : *la méthode de Lyapunov et l'analyse robuste*.

I.1 Introduction

Lors de l'étude d'un système, l'étape de modélisation est essentielle car elle conditionne les méthodes qui seront ensuite utilisées pour analyser ses propriétés. La classe de systèmes considérée dans ce mémoire présente la particularité de posséder un phénomène de retard dans leur dynamique. Les modèles associés sont alors régis par des équations différentielles fonctionnelles [69]. Au delà de l'intérêt théorique pour l'étude de telles équations, la modélisation par systèmes à retards trouve sa justification dans de nombreux problèmes appliqués. Biologie, chimie, économie sont autant de domaines pour lesquels certains processus font apparaître lors de leur modélisation une partie dynamique retardée [96], [126]. Contrairement aux systèmes ordinaires dont l'évolution est déterminée à partir de la valeur de l'état x à l'instant présent t : $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, celle des systèmes à retards dépend de surcroît des *valeurs passées* de l'état $x(t-h)$, $h > 0$. Dans ce cas, il est nécessaire de mémoriser une partie de "l'histoire" du système pour connaître son évolution. Cette caractéristique leur vaut également la dénomination de *systèmes héréditaires* et sont généralement représentés par des équations différentielles de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{I.1}$$

où f est à présent une *fonctionnelle*, c'est-à-dire une "fonction de fonction". La fonction x_t représente l'état du système sur un certain intervalle du temps et est définie par [149] :

$$x_t : \begin{cases} [-h_{max}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \theta \rightarrow x_t(\theta) = x(t + \theta). \end{cases}$$

h_{max} correspond au retard maximum, c'est-à-dire l'instant $t-h$ le plus ancien qui soit nécessaire au calcul de $\dot{x}(t)$, $t \geq 0$. Nous noterons par la suite \mathcal{C} l'ensemble des fonctions continues de

I.2.2 Catégories de retards

Lors de la phase de modélisation, au même titre que les matrices définissant un modèle, il est essentiel de déterminer le type de retard qui affecte le système. Plus précisément, un retard, constant ou variant dans le temps, est souvent restreint à un certain domaine de définition. Le cas échéant, les propriétés intrinsèques au système physique peuvent apporter des informations sur les valeurs admissibles du retard. Nous avons dégagé trois catégories principales de retard¹ :

- (a) *Retards inconnus* : Dans ce premier cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérée. Qu'il soit constant ou variant dans le temps, il peut prendre toutes les valeurs dans \mathbb{R}_+ [21], [68].
- (b) *Retards majorés* : Cette seconde classe suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard

$$0 \leq h(t) \leq h_{max}.$$

Si $h(t) = h$ est constant, il reste en pratique incertain et la contrainte ci-dessus assure un intervalle borné. Ce cas de figure a été très largement considéré dans la littérature [55, 64, 68, 106, 124, 148].

- (c) *Retards bornés* : Moins abordée que le cas précédent, cette dernière catégorie suppose que le retard vérifie la contrainte

$$h_{min} \leq h(t) \leq h_{max}.$$

Le phénomène de retard souvent induit par le transport d'information, impose dans ce cas un délai (dû au temps de propagation) minimum incompressible². La littérature concernant ce type de modèle est moins vaste [58], [65], [71].

Dans le cas des retards variant dans le temps, une contrainte supplémentaire relative à sa dérivée peut être ajoutée

$$|\dot{h}(t)| \leq d, \quad d \in \mathbb{R}_+,$$

indiquant alors une limitation sur la vitesse de variation du retard $h(t)$. En pratique la contrainte $d \leq 1$ est souvent utilisé afin d'assurer que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique.

Par ailleurs, indépendamment du procédé physique et du type de retard associé, certains auteurs [121], [128] se sont intéressés à la robustesse de la stabilité³ d'un système vis-à-vis du retard. Il s'agit dans ce cas d'estimer les intervalles (ou encore *clusters* en anglais) sur le retard tel que le système reste stable. Un cas particulier considère un système à retards stable lorsque celui-ci est nul et le but est de trouver la valeur maximale du retard telle que la stabilité du système soit préservée.

I.2.3 Modélisation incertaine et non stationnaire

De manière générale, les modèles mathématiques ne peuvent pas décrire parfaitement le comportement dynamique d'un système. Tout d'abord, les équations régissant un procédé donné sont généralement complexes (non linéaires, à coefficients variant dans le temps) et des simplifications

¹Les retards constants et variant n'ont pas été distingués et chaque catégorie inclut les deux cas.

²Un retard nul signifierait un transfert d'information ou de matière instantané.

³Nous définirons la notion de stabilité dans la section suivante.

sont donc nécessaires pour pouvoir les traiter avec les outils de l'Automatique. Deuxièmement, les paramètres caractérisant un système ne peuvent être identifiés avec exactitude, ceci étant dû, par exemple, aux imprécisions de mesure. Ainsi, linéarisation, dynamiques négligées, incertitudes d'identification sont autant d'imprécisions affectant la pertinence du modèle considéré. La question est donc : *comment traiter ces erreurs de modélisation ?* La littérature à ce sujet est très vaste et nous pouvons citer, par exemple, les ouvrages de références [151], [166].

Afin de tenir compte des incertitudes de modélisation, il convient d'adapter notre modèle linéaire à retard⁴ pour obtenir un modèle linéaire *incertain* à retard :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0(\Delta)x(t) + A_1(\Delta)x(t-h) \\ y(t) &= C_0(\Delta)x(t) + C_1(\Delta)x(t-h), \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

où Δ représente le caractère incertain du modèle. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ne sont pas complètement connues mais on suppose qu'elles appartiennent à un ensemble donné Ω appelé *ensemble incertain* $\forall \Delta \in \mathbb{A}$. \mathbb{A} est l'ensemble des incertitudes admissibles. Le principe de la modélisation incertaine est d'étudier non plus un modèle unique mais un ensemble de modèles qui englobe le comportement du système réel.

Remarque I.1. *L'argument Δ des matrices incertaines comprend également la dépendance de ces dernières vis-à-vis du temps t . La modélisation (I.4) permet ainsi de tenir compte du caractère non stationnaire d'une certaine classe de systèmes.*

Nous présentons maintenant deux formalismes particuliers, souvent utilisés en analyse robuste des systèmes à retards, pour décrire l'incertitude et son domaine de définition Ω . Le premier modèle, le modèle polytopique, consiste à exprimer les matrices incertaines en une somme pondérée de matrices connues et constantes. Le second modèle sépare la partie supposée connue de la partie incertaine des matrices, puis suppose que cette dernière est bornée en norme.

Incertitudes polytopiques

Un polytope est un ensemble constitué de n_p sommets et est défini comme l'enveloppe convexe de ces derniers. Cette modélisation est applicable seulement dans le cas où les matrices du système (I.4) sont affines en les paramètres incertains. Si l'on suppose que chacune des incertitudes évoluent entre deux bornes alors l'ensemble incertain caractérisant

$$\Sigma(\Delta) = \begin{bmatrix} A_0(\Delta) & A_1(\Delta) \\ C_0(\Delta) & C_1(\Delta) \end{bmatrix} \in \Omega, \text{ pour tout } \Delta \in \mathbb{A},$$

est un polytope et peut s'exprimer comme l'enveloppe convexe des sommets de cette matrice

$$\Omega = \text{co}\{\Sigma^{[1]}, \Sigma^{[2]}, \dots, \Sigma^{[n_p]}\}.$$

Les matrices du système (I.4) peuvent alors être paramétrées en fonction de ces sommets par des coefficients barycentriques :

$$\begin{bmatrix} A_0(\Delta) & A_1(\Delta) \\ C_0(\Delta) & C_1(\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i A_0^{[i]} & \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i A_1^{[i]} \\ \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i C_0^{[i]} & \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i C_1^{[i]} \end{bmatrix},$$

⁴Pour des raisons de clarté évidente, le modèle incertain est présenté pour un système autonome avec un simple retard discret. Il peut aisément être adapté au système (I.2).

où les fonctions scalaires $\alpha_i(t)$ sont des fonctions de pondération vérifiant les conditions

$$\sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i(t) = 1 \text{ et } \alpha_i(t) \geq 0, \forall i = \{1, \dots, n_p\}.$$

Les matrices constantes $A_j^{[i]}, C_j^{[i]}$ définissent les sommets du polytope et sont construites à partir des bornes des paramètres incertains.

Cette modélisation incertaine présente l'inconvénient majeur de générer des problèmes numériques de taille considérable dès lors que le nombre de paramètres incertains devient important. En effet, pour n_p paramètres incertains, le polytope correspondant sera composé de 2^{n_p} sommets, c'est-à-dire autant de systèmes d'extrémité de l'ensemble.

Incertitudes bornées en norme

Dans le cas d'incertitudes bornées en norme, les matrices du système (I.4) sont décomposées en deux parties : une partie constante représentant le comportement nominal et une partie incertaine (éventuellement dépendante du temps)

$$\begin{aligned} A_i(\Delta) &= A_{i_0} + \delta A_i \\ C_i(\Delta) &= C_{i_0} + \delta C_i, \quad i = \{0, 1\}. \end{aligned}$$

L'incertitude, supposée bornée en norme, est généralement exprimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \delta A_i &= E_{A_i} F_{A_i} G_{A_i} \\ \delta C_i &= E_{C_i} F_{C_i} G_{C_i}, \quad i = \{0, 1\} \end{aligned}$$

où le caractère incertain est réduit aux matrices F_k appartenant à la "boule unité"⁵

$$F_k^T F_k \leq 1.$$

E_* et G_* sont des matrices constantes connues ayant pour rôle de structurer et pondérer l'incertitude. Finalement, l'ensemble incertain Ω peut être défini par

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} A_{0_0} & A_{1_0} \\ C_{0_0} & C_{1_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{A_0} F_{A_0} G_{A_0} & E_{A_1} F_{A_1} G_{A_1} \\ E_{C_0} F_{C_0} G_{C_0} & E_{C_1} F_{C_1} G_{C_1} \end{bmatrix} \mid F_k^T F_k \leq 1 \right\}.$$

I.2.4 Stabilité

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de l'Automatique. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions [163]. Dans cette section, nous nous intéresserons à deux notions particulières : la stabilité *interne au sens de Lyapunov* et la stabilité *entrée-sortie au sens de la norme L_2* . Les résultats que nous développerons aux Chapitres III et IV s'appuieront sur ces concepts pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes à retards étudiés.

Stabilité au sens de Lyapunov

L'étude de stabilité au sens de Lyapunov s'intéresse au comportement d'un système autour d'un point d'équilibre. Les trajectoires de son état sont dites *stables* si, pour une position initiale donnée assez proche du point d'équilibre, elles restent dans un certain voisinage appelé *domaine*

⁵Comme mentionné dans la remarque I.1, les matrices F_k dépendent éventuellement du temps.

de stabilité (cf Figure I.1). Plus intéressante, la *stabilité asymptotique* assure que les trajectoires rejoignent l'état d'équilibre après un certain temps éventuellement infini (cf Figure I.2). La propriété de convergence définie par la stabilité asymptotique en fait la qualité la plus populaire en pratique. Nous constatons ainsi que le principe de stabilité au sens de Lyapunov se rapporte à une notion de "distance" de l'état vis-à-vis du point d'équilibre. Il apparaît alors nécessaire d'introduire une norme afin de quantifier cet écart. Pour les systèmes à retards, on utilise la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ définie par

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}} = \max_{a \leq \theta \leq b} \|\phi(\theta)\|,$$

où ϕ est une fonction appartenant à \mathcal{C} l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ vers \mathbb{R}^n . Tout au long du manuscrit, la notation $\|\cdot\|$ représentera, pour un vecteur v , la norme euclidienne définie par $\|v\|_2 = \sqrt{v^T v}$. De façon plus formelle, considérant le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \\ x_{t_0} &= \phi_0 \in \mathcal{C}, \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, nous introduisons les définitions suivantes.

Définition I.1. [69] *L'origine⁶ du système (I.5) est dite :*

- **stable** si, $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tel que

$$\|\phi_0\|_{\mathcal{C}} < \delta(t_0, \epsilon) \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

- **asymptotiquement stable** si elle est stable et s'il existe $\delta_a(t_0) > 0$ tel que

$$\|\phi_0\|_{\mathcal{C}} < \delta_a(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Des propriétés supplémentaires peuvent être ajoutées à ces définitions afin de préciser le type de stabilité. On définit alors les notions de

- *globalité* si la condition de stabilité asymptotique est garantie $\forall \phi_0 \in \mathcal{C}$ (δ_a peut être choisi arbitrairement large).
- *uniformité* si la condition de stabilité (asymptotique) est garantie indépendamment de l'instant initial t_0 .

Dans les chapitres suivants, nous nous préoccupons seulement de la stabilité asymptotique et un système dit "stable" réfèrera à "asymptotiquement stable".

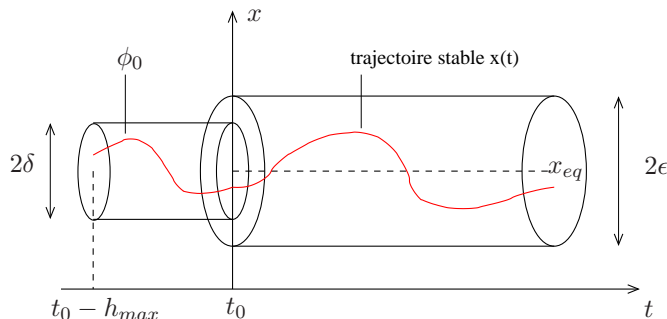


FIG. I.1: *Stabilité au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre x_{eq} .*

⁶Sans perte de généralité, la stabilité est définie autour de l'origine. Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque un point d'équilibre peut toujours être ramené à l'origine par changement de variable.

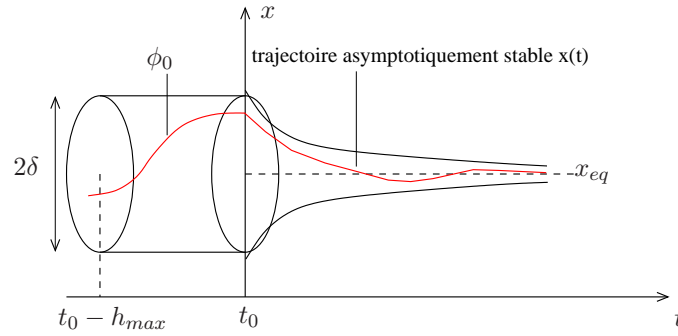


FIG. I.2: *Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov autour d'un point d'équilibre x_{eq} .*

Les Figures I.1 et I.2 illustrent, respectivement, une trajectoire $x(t)$ stable et asymptotiquement stable, pour une condition initiale ϕ_0 donnée.

Stabilité entrée-sortie

Dans cette approche, illustrée sur la Figure I.3, un système dynamique est appréhendé comme un opérateur H associant à une entrée u à laquelle il est soumis, la sortie $y = Hu$. Moins détaillée qu'une description par espace d'état (I.5), cette représentation, assimilée alors à une "boîte" liant un signal de sortie à un signal d'entrée, masque éventuellement une partie de la dynamique du système.

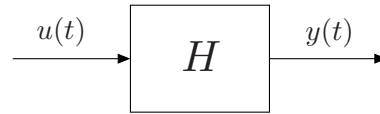


FIG. I.3: *Un système dynamique vu comme une relation entrée-sortie.*

Selon la définition de Lyapunov, la stabilité d'un système est traitée de façon *interne* par l'analyse des trajectoires de l'ensemble de son état. La notion de stabilité entrée-sortie s'attache, quant à elle, à la réaction du signal de sortie en réponse au signal d'entrée appliqué. Sommairement, un système est dit stable entrée-sortie si sa sortie reste bornée pour toutes entrées bornées. De ce fait, il est une fois encore nécessaire de se munir d'outils mathématiques appropriés afin de mesurer la "taille" d'une fonction. Nous définissons alors la norme fonctionnelle L_2 :

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^{\infty} \|f(t)\|^2 dt}$$

et l'espace fonctionnel L_2^n représente l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $\|f\|_{L_2}$ existe et soit finie. Pour alléger l'écriture, on pourra omettre l'indice n qui se rapporte à la dimension de l'espace, si le contexte le permet. Au vu de la définition de la norme L_2 , l'espace précédemment défini n'est cependant pas suffisant car la classe des fonctions de carré intégrable est trop restrictive. En effet, des signaux usuels tels que l'échelon ou le sinus n'appartiennent pas à cet espace et ne peuvent donc pas être pris en compte. De ce fait, il convient de travailler sur

un espace appelé L_2 étendu noté L_{2e} . Pour cela, nous devons introduire au préalable l'opérateur de troncature :

$$\mathbb{P}_T f = f_T = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

Nous pouvons à présent définir l'espace de travail qui sera constamment utilisé dans la suite du manuscrit.

Définition I.2 (Espace L_2 étendu). *L'espace étendu L_{2e} représente l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que la fonction tronquée f_T appartienne à L_2 pour tout $T \geq 0$:*

$$L_{2e}^n = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f_T \in L_2^n \forall T \geq 0\}.$$

Notons que l'opérateur de troncature est également utile pour définir la causalité. En effet, un opérateur H est dit *causal* s'il satisfait $\mathbb{P}_T H = H \mathbb{P}_T$ pour tout $T > 0$. En d'autres termes, si H est causal et $y = Hu$, alors $y(t)$ est indépendant de $u(\theta)$, $\forall \theta > t$.

Définition I.3. [41] *Le système H est stable entrée-sortie (au sens de la norme L_{2e}) si $\forall u \in L_{2e}$,*

- $y = H(u) \in L_{2e}$,
- il existe un réel $\gamma > 0$ tel que $\|y\|_{L_{2e}} = \|H(u)\|_{L_{2e}} \leq \gamma \|u\|_{L_{2e}}$.

On définit également la norme induite de l'application $H : L_2 \rightarrow L_2$ par

$$\|H\|_{2,2} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}.$$

On peut donc conclure que le système H sera stable entrée-sortie (au sens de la norme L_{2e}) ou encore BIBO L_2 -stable (*Bounded-Input Bounded-Output*) si sa norme induite $\|H\|_{2,2}$ est finie.

Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, la stabilité *interne* définie au paragraphe précédent implique la stabilité entrée-sortie. Et, sous les hypothèses de commandabilité et d'observabilité, les deux notions se confondent [41].

I.3 Analyse de stabilité par la seconde méthode de Lyapunov

La seconde méthode de Lyapunov concerne l'analyse de la stabilité interne d'un système dynamique (I.5). L'originalité de la méthode directe de Lyapunov consiste à étudier la convergence de l'état $x(t)$ vers l'origine à travers une fonction scalaire V de l'état. V , appelée *fonction candidate à Lyapunov*, peut être appréhendée comme une représentation énergétique du système. Bien que la méthode soit abstraite, on conçoit naturellement qu'en "mouvement", le système possède une certaine quantité d'énergie mesurée par V et qu'à l'équilibre, en phase statique, celle-ci soit minimale. Sommairement, dans le cas des systèmes sans retard, ceci se traduit mathématiquement par les conditions :

- $V(x(t)) > 0, \forall t > 0, \forall x(t) \neq x_{\text{équilibre}}$,
- $V(x(t)) = 0$ si $x(t) = x_{\text{équilibre}}$.
- $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ implique $V(x(t)) \rightarrow \infty$.

Intuitivement, on comprend alors que si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement avec le temps alors ce système tend à rejoindre sa position d'équilibre.

- $\frac{dV(x(t))}{dt} < 0, \forall t > 0, \forall x(t) \neq x_{\text{équilibre}}$.

Enfin, si la fonction candidate $V(x(t))$ vérifie le long des trajectoires du système $x(t)$ la condition ci-dessus alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable et V est une *fonction de Lyapunov* pour le système considéré.

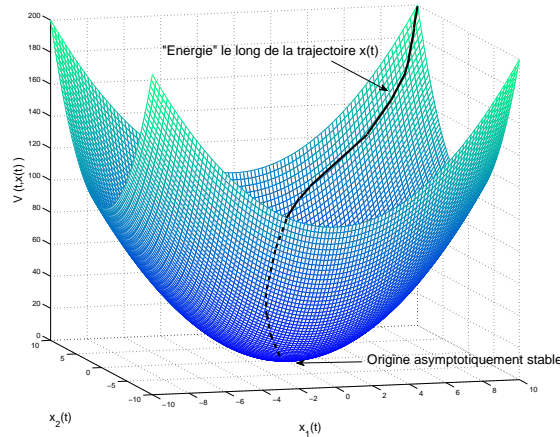


FIG. I.4: *Fonction de Lyapunov* $V(x) = x^T(t)Px(t)$, $P > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ et représentation “*énergétique*” de la trajectoire d’un système du second ordre asymptotiquement stable (conditions initiales : $x(0) = [10 \ 10]^T$).

Etant de dimension infinie, la seconde méthode de Lyapunov, ainsi énoncée, n’est pas directement applicable aux systèmes héréditaires d’état x_t . Deux extensions ont alors été développées dans le cadre des équations différentielles à retards : la méthode de *Lyapunov-Krasovskii* [98] et la méthode de *Lyapunov-Razumikhin* [140]. Cette dernière, moins utilisée dans la littérature et non abordée dans cette thèse, sera tout de même brièvement introduite.

I.3.1 Approche par fonctionnelles de Krasovskii

La méthode de Lyapunov-Krasovskii est une extension directe de la seconde méthode de Lyapunov traditionnelle aux équations différentielles retardées. L’état considéré x_t n’étant plus un point mais une fonction $[-h_{max}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la fonction $V(x_t)$ candidate devient une *fonctionnelle* mesurant la déviation de x_t par rapport à l’origine.

Théorème I.1 (Lyapunov-Krasovskii). [68] *Soient $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, strictement croissantes ; $u(\theta)$ et $v(\theta)$ positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction f de (I.5) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.*

S’il existe une fonctionnelle continue $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(i) \ u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c),$$

$$(ii) \ \dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ le long des trajectoires de (I.5),}$$

alors la solution nulle de (I.5) est uniformément stable. De plus, si $w(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$, alors la solution nulle de (I.5) est uniformément asymptotiquement stable.

La difficulté majeure de cette approche reste la détermination d’une telle fonctionnelle V vérifiant les spécifications du théorème et plus particulièrement la condition de décroissance le long des trajectoires du système (I.5). Dans le cas des systèmes linéaires invariants avec un seul retard, des travaux ont été menés sur l’existence d’une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii,

dite *complète*, dès lors qu'un tel système est stable [69, 81, 91, 141]. On montre que si le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h)$$

où A et A_d sont des matrices de dimensions appropriées et h un retard constant, est asymptotiquement stable alors la fonctionnelle

$$\begin{aligned} V(x_t) = & x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 U(-h - \theta)A_d x(t + \theta)d\theta \\ & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t + \theta_1)A_d^T U(\theta_1 - \theta_2)A_d x(t + \theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \\ & + \int_{-h}^0 x^T(t + \theta)[(h + \theta)W_2 + W_3]x(t + \theta)d\theta \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

où

$$U(\theta) = \int_0^\infty \Phi^T(t)[W_1 + hW_2 + W_3]\Phi(t + \theta)dt,$$

et W_1, W_2, W_3 sont des matrices définies positives et Φ représente la matrice fondamentale du système, est une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii pour le système considéré [68].

En pratique, la fonctionnelle (I.6), très générale et ne pouvant être traitée numériquement, des conditions suffisantes sont souvent recherchées [68]. Ainsi, on manipule plus facilement des fonctionnelles de la forme

$$\begin{aligned} V(x_t) = & x_t^T(0)Px_t(0) + x_t^T(0) \int_{-h}^0 S(w)x_t(w)dw \\ & + \int_{-h}^0 x_t^T(w)Q(w)x_t(w)dw + \int_{-h}^0 \int_w^0 x_t^T(s)R(w, s)x_t(s)dsdw \end{aligned}$$

avec certaines restrictions sur les matrices (invariantes par rapport à la variable d'intégration par exemple) [142] ou par une méthode de discrétisation (linéaire par morceaux) des matrices dépendantes du retard [66]. On trouve également beaucoup de travaux qui développent leur analyse à partir de la fonctionnelle [107], [132]

$$V(x_t) = x_t^T(0)Px_t(0) + \int_{-h}^0 x_t^T(w)Qx_t(w)dw + \int_{-h}^0 \int_w^0 \dot{x}_t^T(\theta)R\dot{x}_t(\theta)d\theta dw. \quad (\text{I.7})$$

De manière générale, la méthode de Lyapunov se compose de deux points essentiels. Premièrement, le pessimisme de l'analyse sera conditionné par le choix de la fonctionnelle et de la nature des matrices de Lyapunov (invariantes, dépendantes du retard, dépendantes de paramètres incertains). Des transformations de modèle sont couramment appliquées au système pour :

- introduire de nouvelles variables de décision et offrir des degrés de liberté supplémentaires

aux critères à tester. Nous pouvons citer, par exemple, la formule de Newton-Leibniz [160]

$$\begin{aligned} x(t-h) &= x(t) - \int_{t-h}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha, \\ &= x(t) - \int_{t-h}^t [Ax(\alpha) + A_d x(\alpha-h)] d\alpha, \end{aligned}$$

ou encore la forme descripteur [53] qui réécrit le système à retard sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t), \\ 0 &= -y(t) + (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-h}^t y(\alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

soit $E\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{A}_d \int_{t-h}^t y(\alpha) d\alpha$ avec

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A + A_d & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix}.$$

Le lecteur intéressé pourra consulter, par exemple, les références [161], [29] pour un rapide tour d'horizon sur les modèles de comparaison.

- pour obtenir une meilleure description de la dynamique du système, par exemple, par augmentation du modèle (fractionnement du retard [62], décalage temporel [21]).

La seconde difficulté réside dans les techniques utilisées pour vérifier que la condition de décroissance sur la dérivée de V soit satisfaite. Généralement, il s'agit de majorer cette dernière quantité en introduisant des inégalités plus ou moins conservatives. Parmi les plus utilisées, nous pouvons citer les inégalités de Park [132], Moon [124] ou encore Jensen [67] présentées, respectivement, dans les lemmes I.1, I.2 et A.4. De plus, la recherche de conditions de stabilité exploitables fait appel à diverses manipulations mathématiques telles que des changements de variables linéarisants, le complément de Schur ou encore le lemme de Finsler (cf. Annexe A.2).

Lemme I.1 (Inégalité de Park [132]). *Soient les fonctions $a(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ et $b(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ définies pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors pour toutes matrices définies positives $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et toutes matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, nous avons*

$$-2 \int_{t-h}^t a^T(\alpha) b(\alpha) d\alpha \leq \int_{t-h}^t \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & XM \\ M^T X & (M^T X + \mathbb{1})X^{-1}(M^T X^{-1} + \mathbb{1})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha$$

Lemme I.2 (Inégalité de Moon [124]). *Soient les fonctions $a(\alpha) \in \mathbb{R}_a^n$, $b(\alpha) \in \mathbb{R}_b^n$ et $\mathcal{N}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$ définies pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors pour toutes matrices $X \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$, $Z \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$ et $Y \in \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$ telles que $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq \mathbb{0}$ nous avons*

$$-2 \int_{t-h}^t a^T(\alpha) \mathcal{N}(\alpha) b(\alpha) d\alpha \leq \int_{t-h}^t \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - \mathcal{N}(\alpha) \\ Y^T - \mathcal{N}^T(\alpha) & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha$$

La méthode de Lyapunov-Krasovskii offre donc un large éventail de possibilités et la littérature à ce sujet est, de ce fait, très abondante [68, 126, 161]. Elle est de loin la méthode la plus utilisée en ce qui concerne l'analyse des systèmes à retards variant dans le temps.

I.3.2 Approche par fonctions de Razumikhin

Contrairement à l'approche de Krasovskii qui considère l'ensemble de l'état $x_t \in \mathcal{C}$, la méthode proposée par Razumikhin tient compte simplement de l'état instantané $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit alors de chercher non plus une fonctionnelle mais une fonction de Lyapunov plus classique. De plus, cette méthode présente la particularité de vérifier la décroissance de la fonction candidate seulement pour les trajectoires de l'état qui ont "tendance" à s'éloigner du point d'équilibre, plus précisément lorsque $V(x(t)) \geq \max_{\theta \in [-h_{max}, 0]} V(x(t + \theta))$.

Théorème I.2 (Lyapunov-Razumikhin). [68] Soient $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, strictement croissantes ; $u(\theta)$ et $v(\theta)$ positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction f de (I.5) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments. Alors, s'il existe une fonctionnelle continue $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|)$,
- (ii) $\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x\|)$ pour les trajectoires de (I.5) vérifiant

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)), \forall \theta \in [-h, 0],$$

alors la solution nulle de (I.5) est uniformément stable. De plus, si $w(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ et s'il existe une fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, strictement croissante avec $p(\theta) > \theta$ pour $\theta > 0$ telle que (ii) soit vraie pour toutes fonctions vérifiant :

$$V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t))), \forall \theta \in [-h, 0],$$

alors la solution nulle de (I.5) est uniformément asymptotiquement stable.

I.4 Analyse de stabilité par l'analyse robuste

Dans cette approche, le travail de modélisation occupe une place prépondérante. Essentielle, cette première étape consiste à transformer un modèle incertain sous une forme appropriée pour appliquer les outils de l'analyse robuste. La modélisation privilégiée est, comme bien souvent en Automatique, une structure interconnectée (illustrée sur les Figures I.5, I.7 et I.9). Diverses méthodes ont été développées pour analyser la stabilité et les performances d'un système incertain de façon générique dès lors que le modèle d'interconnexion est établi [144, 151, 166]. Dans cette partie, nous verrons deux grands principes de l'analyse robuste : *le théorème du faible gain* et *la séparation quadratique*. Nous utiliserons ces méthodologies non seulement pour analyser la stabilité robuste des systèmes à retards incertains, tels que présentés dans la Section I.2.3, mais aussi pour traiter le retard. En effet, nous verrons qu'elles se révèlent être un cadre intéressant pour modéliser la dynamique retardée. Nous rappelons ici la définition de la stabilité robuste et notons que la pertinence d'une telle analyse est totalement liée à modélisation de l'ensemble incertain Δ .

Définition I.4 (Stabilité robuste). *Le système incertain (I.4) est robustement stable si, pour toutes les valeurs admissibles de l'incertitude $\Delta \in \Delta$, le système est stable.*

I.4.1 Théorème du faible gain

Le théorème du faible gain constitue un résultat fondamental dans la théorie de l'analyse robuste. Il détermine la robustesse d'un système nominal M vis-à-vis d'une incertitude Δ bouclée tel que représenté sur la Figure I.5.

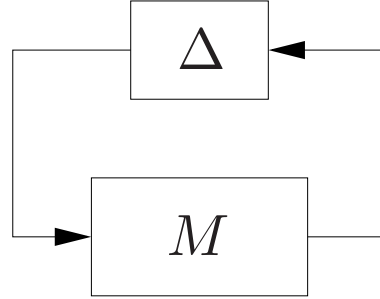


FIG. I.5: Structure (boucle) $M - \Delta$.

Théorème I.3 (Faible gain). [166] *Supposons que M et Δ soient causaux, linéaires et L_2 -stables entrée-sortie. Alors la structure $M - \Delta$ est L_2 -stable entrée-sortie si*

$$\|M\Delta\|_{L_2} < 1.$$

Cette version du théorème est un cas particulier du théorème plus général du faible gain pour lequel n'importe quelle norme induite peut être considérée [41]. Les normes matricielles étant sous-multiplicatives $\|M\Delta\| \leq \|M\| \cdot \|\Delta\|$, si la norme d'un des blocs est connue, la stabilité peut être évaluée à partir de celle du second. Plus précisément, la structure $M - \Delta$ est stable si $\|M\| \cdot \|\Delta\| < 1$.

Considérons le système H illustré sur la Figure I.3 et décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, u(t)), \\ y(t) &= h(t, x_t, u(t)), \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

avec l'état instantané $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie. Soit \mathcal{X} l'ensemble des matrices réelles non singulières de dimension $m \times m$ et $\mathcal{Z} = \{X^T X \mid X \in \mathcal{X}\}$. Le problème du faible gain étendu consiste à vérifier si H est stable de façon interne et s'il existe une matrice $X \in \mathcal{X}$ garantissant⁷

$$\|H_X\|_{L_2} < 1, \quad (\text{I.9})$$

où H_X est défini par $H_X u = XH(X^{-1}u)$. Cette approche revient alors à chercher une matrice $Z \in \mathcal{Z}$ telle que

$$\int_0^t y^T(\tau) Z y(\tau) d\tau \leq \int_0^t u^T(\tau) Z u(\tau) d\tau \quad (\text{I.10})$$

soit satisfaite pour tout $t > 0$, u vérifiant $y = Hu$.

⁷Notons que l'inégalité (I.9) est équivalente à $\|H\|_{L_2} < 1$ puisque le système H_X est équivalent à H par changement de base.

Théorème I.4 (Faible gain étendu). [68] Soit les fonctions $w_k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $w_k(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} w_1(s) = \infty$. Le système H décrit par (I.8) est stable de façon interne⁸ et satisfait (I.9) s'il existe une matrice $Z \in \mathcal{Z}$ et une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $V(t, x_t)$ qui vérifient

$$w_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x_t) \leq w_2(\|x_t\|_C),$$

et une fonctionnelle

$$W(t, x_t, u(t)) = \dot{V}(t, x_t) + y^T(t)Zy(t) - u^T(t)Zu(t) \quad (\text{I.11})$$

vérifiant

$$W(t, x_t, u(t)) \leq -w_3(\|x(t)\|) - \epsilon\|u(t)\|^2,$$

où \dot{V} est la dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système (I.9).

Le théorème du faible gain étendu présente la particularité de combiner l'approche robuste d'un point de vue entrée-sortie avec la méthode de Lyapunov-Krasovskii. Ainsi, cette dernière technique, réalisée par V , permet d'évaluer la stabilité interne de (I.8). La propriété de faible gain, vérifiée par la fonctionnelle W , garantit une borne sur le gain entrée-sortie du transfert de u vers y .

Exemples illustratifs

Considérons le système H retardé de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \\ y(t) &= C_0x(t) + C_1x(t-h) + Du(t). \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

où, pour des raisons de simplicité de présentation, le retard h est supposé constant. Choisissons une fonctionnelle simple de Lyapunov-Krasovskii

$$V(x_t) = x_t^T(0)Px_t(0) + \int_{-h}^0 x_t^T(\theta)Qx_t(\theta)d\theta,$$

où P et Q sont des matrices définies positives. Calculons maintenant la fonctionnelle $W(x_t, u(t))$ définie en (I.11) :

$$\begin{aligned} W(x_t, u(t)) &= \begin{bmatrix} x_t(0) \\ x_t(-h) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{cc|c} PA_0 + A_0^T P + Q & PA_1 & PB \\ A_1^T P & -Q & 0 \\ \hline B^T P & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_t(0) \\ x_t(-h) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z & 0 \\ * & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

On observe donc que la fonctionnelle W se compose, d'une part (premier terme du membre de droite), de la condition de stabilité interne du système (I.12) autonome ($u(t) = 0$) et d'autre part (second terme), du test sur la norme L_2 induite du transfert de $u(t)$ vers $y(t)$. Ainsi, le système (I.12) est asymptotiquement stable et vérifie l'inégalité (I.9) si la négativité de W est assurée, c'est-à-dire si l'inégalité matricielle

⁸On considère l'origine comme point d'équilibre du système autonome, c'est-à-dire $f(t, 0, 0) = 0$ et $h(t, 0, 0) = 0$.

$$\begin{bmatrix} PA_0 + A_0^P + Q + C_0^T Z C_0 & PA_1 + C_0^T Z C_1 & PB + C_0^T Z D \\ * & -Q + C_1^T Z C_1 & C_1^T Z D \\ & & D^T Z D - Z \end{bmatrix} \leq 0$$

est satisfaite.

Considérons à nouveau le système (I.8) mais représenté, maintenant, tel qu'illustré sur la Figure I.6. La chaîne directe de la boucle Figure I.6 étant un simple système linéaire à temps invariant,

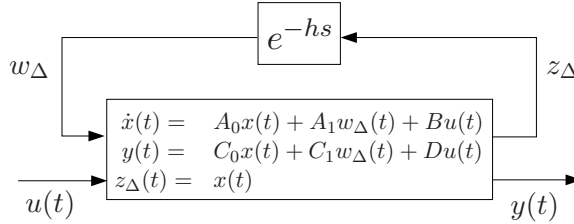


FIG. I.6: Structure $M - \Delta$ modélisant le système (I.8).

il convient d'étudier la stabilité par la fonction de Lyapunov traditionnelle

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t),$$

P étant une matrice définie positive. Par ailleurs, puisque le bloc incertain est borné $|e^{-hs}| \leq 1$, $\forall s \in \mathbb{C}_+$, en vertu du Théorème I.3, le système (I.8) est stable si la norme H_∞ du transfert de w_Δ vers z_Δ est inférieure à 1.

Comme précédemment, l'objectif est de prouver la stabilité du système tout en assurant l'atténuation L_2 du transfert de $u(t)$ vers $y(t)$ (I.10). La fonctionnelle W correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} W(x_t, u_1(t)) &= \begin{bmatrix} x_t(0) \\ w_\Delta(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c|c|c} PA_0 + A_0^T P & PA_1 & PB \\ \hline A_1^T P & 0 & 0 \\ \hline B^T P & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_t(0) \\ w_\Delta(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ * & -Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où $u_1(t)$ et $y_1(t)$ sont, respectivement, les vecteurs d'entrée et de sortie de la chaîne directe de la Figure I.6 et

$$u_1(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ w_\Delta(t) \end{bmatrix}, \quad y_1(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z_\Delta(t) \end{bmatrix}, \quad Z_1(t) = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

L'atténuation de $u(t)$ vers $y(t)$ garantit le critère de performance désirée (I.10) tandis que l'atténuation de $w_\Delta(t)$ vers $z_\Delta(t)$ assure la stabilité (I.8) (c'est-à-dire, sur la Figure I.6, celle de la chaîne directe vis-à-vis de l'incertitude e^{-hs}). La condition de négativité de W est analogue à celle de l'exemple précédent (I.13).

Le théorème du faible gain étendu offre ainsi une analyse relativement souple dans laquelle le phénomène de retard est soit traité au travers d'une fonctionnelle de Lyapunov appropriée, soit modélisé comme une incertitude. Dans le premier cas, la dynamique retardée est toujours présente dans le système nominal M (Figure I.5) et la difficulté réside dans le choix de la fonctionnelle. Dans le second cas, le retard est modélisé comme un ensemble incertain Δ sur la chaîne de retour et le problème consiste à trouver une borne sur la norme de cet opérateur

incertain. Ces quelques remarques soulignent les liens existants entre la méthode de Lyapunov et l'analyse robuste pour l'étude des systèmes à retards [64, 145, 164, 165].

I.4.2 Séparation quadratique

De manière générale, le problème d'analyse robuste s'intéresse à la stabilité et aux propriétés résultantes de l'interconnexion de deux opérateurs telle que représentée sur la Figure I.7a. Les travaux de Michael G. Safonov [144], [145] ont montré qu'une telle problématique pouvait être interprétée en terme de *séparation topologique*.

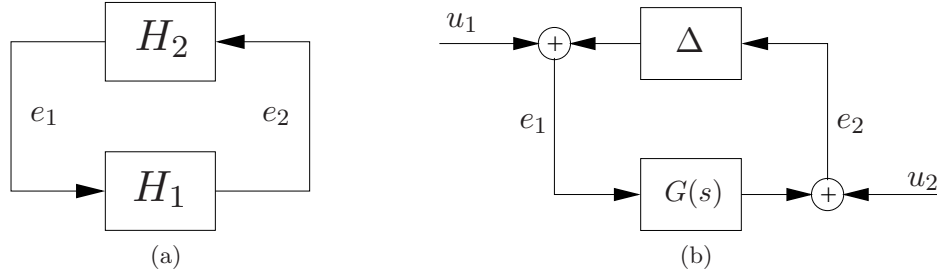


FIG. I.7: Interconnexion de deux applications.

H_1 et H_2 sont des applications causales, respectivement, de $L_{2e}^{n_{e_1}}$ dans $L_{2e}^{n_{e_2}}$ et de $L_{2e}^{n_{e_2}}$ dans $L_{2e}^{n_{e_1}}$ pour lesquelles on définit le *graphe* associé comme l'ensemble des signaux entrée/sortie admissibles :

$$\mathcal{G}_{H_1} = \left\{ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in L_{2e}^{n_{e_1}+n_{e_2}} : e_2 = H_1 e_1 \right\},$$

$$\mathcal{G}_{H_2} = \left\{ \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} \in L_{2e}^{n_{e_2}+n_{e_1}} : e_1 = H_2 e_2 \right\},$$

et le *graphe inverse* de H_2 ,

$$\mathcal{G}_{H_2}^I = \left\{ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in L_{2e}^{n_{e_1}+n_{e_2}} : e_1 = H_2 e_2 \right\}.$$

L'auteur de [144] montre que la stabilité de l'interconnexion $H_1 - H_2$ (Figure I.7a) est assurée s'il existe une séparation topologique⁹ entre les graphes \mathcal{G}_{H_1} et $\mathcal{G}_{H_2}^I$, c'est-à-dire, s'ils se superposent seulement à l'origine (Figure I.8). Il s'agit alors de trouver une fonction θ , appelée *séparateur*, à valeurs réelles telle que

$$\theta(e_1, e_2) < 0 \text{ si } \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_{H_1},$$

$$\theta(e_1, e_2) \geq 0 \text{ si } \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_{H_2}^I.$$

Habituellement en analyse robuste, l'opérateur H_1 représente le système nominal¹⁰ $G(s)$ tandis que l'opérateur H_2 est assimilé à la matrice incertaine Δ [133]. La Figure I.7b schématise le système

$$\begin{cases} e_1 = \Delta e_2 + u_1 \\ e_2 = G e_1 + u_2 \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

⁹Les graphes \mathcal{G}_{H_1} et $\mathcal{G}_{H_2}^I$ sont dits topologiquement séparés si $\mathcal{G}_{H_1} \cap \mathcal{G}_{H_2}^I = \{0\}, \forall (e_1, e_2) \in L_{2e}$.

¹⁰On se place dans le cas classique où $G(s)$ est une fonction de transfert à coefficient constant, stable et Δ est borné.

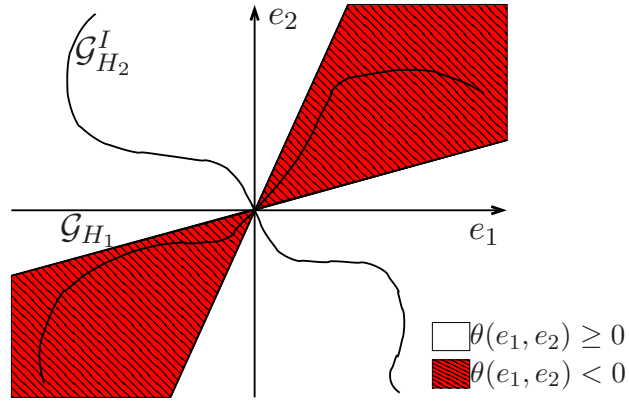


FIG. I.8: Illustration à deux dimensions de la séparation topologique, cas où la condition de séparation forme un cône [145].

Au vu de la structure du système global $G - \Delta$, la première question que l'on pourrait se poser est de se demander si une telle interconnexion a un sens, c'est-à-dire si elle est bien définie ou physiquement réalisable. Cette interrogation nous permet d'introduire la notion de système *bien posé*.

Définition I.5 (Bien posé). [166] *Le système interconnecté (I.14) est dit bien posé, si l'opérateur*

$$\mathbb{1} - G\Delta : L_{2e} \rightarrow L_{2e},$$

est inversible.

A partir de la définition I.3 de stabilité entrée-sortie, nous particularisons cette propriété au système interconnecté de la Figure I.7.

Définition I.6 (Stabilité). [87] *Le système interconnecté (I.14) est dit stable s'il est bien posé et s'il existe un scalaire $\gamma > 0$ tel que*

$$\forall T > 0, \forall (u_1, u_2) \in L_{2e}, \left\| \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \right\| \leq \gamma \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\|.$$

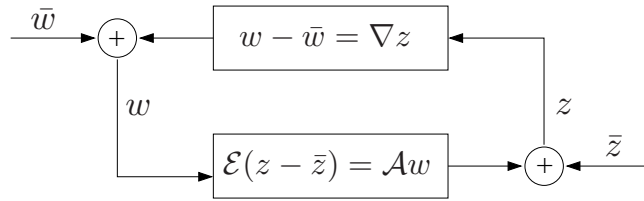
En d'autres termes, un système bien posé de la forme (I.14) est stable si l'opérateur $(\mathbb{1} - G\Delta)^{-1}$ est borné. Les travaux de T. Iwasaki [82] ont prouvé que dans ce cas (Figure I.7b avec Δ une matrice complexe), il est nécessaire et suffisant de chercher un séparateur quadratique de la forme

$$\theta(e_1, e_2) = \begin{bmatrix} e_1^* & e_2^* \end{bmatrix} \Theta(s) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \text{ où } \Theta(s) \in \mathbb{C}^{n_{e_1} + n_{e_2}}.$$

Ces résultats ont ensuite été étendus dans [135] au cas des systèmes singuliers (cf. Figure I.9), introduisant alors une matrice \mathcal{E} non nécessairement carrée. C'est à partir de ce résultat que nous construirons par la suite de nouveaux critères de stabilité pour les systèmes à retards variant.

Théorème I.5 (Séparation quadratique). [135] *Soient deux matrices,¹¹ éventuellement non carrées, \mathcal{E} , \mathcal{A} et une matrice incertaine ∇ appartenant à un ensemble Ξ . Le système interconnecté incertain de la Figure I.9 est bien posé et stable si et seulement si il existe une matrice hermitienne*

¹¹Dans cette version du théorème, afin de simplifier les notations, on suppose que \mathcal{E} est de rang plein.

FIG. I.9: *Système interconnecté.*

$\Theta = \Theta^*$ satisfaisant les conditions :

$$[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}]^{\perp*} \Theta [\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}]^{\perp} > 0, \quad (\text{I.15})$$

$$[\mathbb{1} \quad \nabla^*] \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} \leq 0, \quad \forall \nabla \in \Xi. \quad (\text{I.16})$$

Tout le problème réside dans la détermination de la matrice de séparation Θ . Celle-ci sera naturellement liée aux opérateurs constituant la matrice ∇ . Ce choix particulier de la structure du séparateur, alors composé de variables de décision, fixera le pessimisme de l'analyse. Le lecteur intéressé est renvoyé aux références [17, 82, 133] pour de plus amples informations sur la construction de la matrice Θ .

Exemple illustratif

Considérons le système autonome suivant

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h). \quad (\text{I.17})$$

Les matrices A_0 et A_1 de dimensions $n \times n$ sont constantes. De plus, pour des raisons de simplicité de présentation, le retard h est également supposé constant. Il peut être réécrit sous la forme d'une interconnexion

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}}_w = \underbrace{\begin{bmatrix} s^{-1}\mathbb{1} & 0 \\ 0 & e^{-hs}\mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_z, \quad (\text{I.18})$$

et

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}}_w,$$

telle que représentée sur la Figure I.9 [63], [64]. La matrice incertaine ∇ comporte les opérateurs d'intégration et de retard exprimés avec le formalisme de Laplace. Le premier représente le caractère dynamique de (I.17) tandis que le second décrit son aspect retardé. En vue d'appliquer le Théorème I.5, il faut au préalable déterminer le séparateur Θ tel que la condition (I.16) soit satisfaite $\forall \nabla \in \Xi$. Sachant que l'interconnexion doit être analytique dans $\forall s \in \mathbb{C}_+$ (c'est-à-dire pas de pôle dans le demi-plan droit du plan complexe, $s + s^* > 0$) et $|e^{-hs}| \leq 1$, les deux relations suivantes sont vérifiées [63] :

$$[\mathbb{1} \quad s^{-1*}\mathbb{1}] \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ s^{-1*}\mathbb{1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (\text{I.19})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & e^{-hs^*} \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ e^{-hs^*} \mathbb{1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (\text{I.20})$$

où P et Q sont des matrices définies positives. Ainsi, en joignant les deux inégalités précédentes, le séparateur Θ de la forme

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 \\ \hline -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 \end{array} \right]$$

remplit la condition (I.16). Finalement la condition (I.15) constitue le critère de stabilité du système (I.17) :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & -A_0 & -A_1 \\ 0 & \mathbb{1} & -\mathbb{1} & -0 \end{bmatrix}^{\perp*} \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & -A_0 & -A_1 \\ 0 & \mathbb{1} & -\mathbb{1} & -0 \end{bmatrix}^{\perp} > 0.$$

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la problématique centrale de nos travaux : l'étude des systèmes à retards. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la notion de stabilité et à son étude pour une telle classe de systèmes.

Nous tenterons, au troisième chapitre, de résoudre cette question et d'améliorer les résultats existants selon les deux approches temporelles suggérées. Premièrement, nous exploiterons le potentiel offert par la méthode de Lyapunov-Krasovskii pour développer de nouvelles fonctionnelles appropriées. Puis, en nous fondant sur une perspective entrée-sortie, nous approfondirons les outils de l'analyse robuste afin d'établir une méthodologie adaptée à la modélisation et l'analyse des systèmes à retards variant dans le temps.

Par ailleurs, ce premier chapitre a également permis de poser les bases d'une classe de systèmes naturellement rencontrée dans la modélisation de réseaux de communication (comportement, architecture). Nous avons ainsi pu introduire les outils qui nous seront nécessaires pour mener à bien les objectifs de notre application : le contrôle des flux TCP et le contrôle de congestion d'un routeur. Le cadre de l'application ainsi que le problème théorique sous-jacent sont exposés au chapitre suivant.

Chapitre II

Réseaux de communication et modélisation

Nous proposons dans ce second chapitre de présenter le contexte de l'application. Après une introduction succincte sur l'architecture des réseaux de communication, nous développerons l'objet de notre étude, le protocole TCP (Transmission Control Protocol). Nous présenterons divers définitions et concepts propres au domaine des réseaux informatiques afin d'appréhender au mieux le principe du protocole de transmission. Puis, en vue de l'utilisation des outils de l'Automatique, nous introduirons une modélisation mathématique du comportement de TCP, extraite de la littérature. Enfin, nous verrons comment nous pouvons réguler le trafic de flux TCP au niveau d'un routeur grâce au dispositif d'*Active Queue Management* (AQM).

II.1 Généralités

II.1.1 Contexte

En premier lieu, notons qu'il ne s'agit pas, dans cette introduction, de détailler avec précision le "monde" des réseaux de communication et le protocole TCP mais de donner les notions et concepts nécessaires pour comprendre la *problématique* abordée dans cette thèse. Le lecteur intéressé pourra, par exemple, se référer aux ouvrages [153] et [156] pour plus de détails sur les réseaux de communication. Tout au long de ce chapitre, on s'attachera à présenter le contexte de l'application de manière à être compris le plus largement possible.

Depuis les inventions du télégraphe et du téléphone à la fin du dix-neuvième siècle, la communication entre les hommes a connu, durant les trentes dernières années, une progression sans précédent avec les avancées technologiques des calculateurs. Si au départ un réseau se résumait à un ensemble de terminaux¹ connectés à un unique ordinateur central, il désigne maintenant un ensemble d'ordinateurs autonomes capables d'échanger entre eux des informations. Un réseau informatique se définit comme l'ensemble des moyens matériels et logiciels mis en oeuvre pour assurer la communication entre plusieurs terminaux. Le premier point fondamental, préalable à toute échange d'information, est de mettre en place un *protocole* de communication, c'est-à-dire "parler la même langue". Cependant, historiquement, chaque constructeur a développé ses propres technologies et langages rendant alors impossible la communication entre systèmes propriétaires différents. Afin d'instaurer un langage commun malgré les disparités technologiques,

¹Un terminal est un équipement périphérique à un ordinateur, dédié à la sortie (affichage écran, papier) et/ou à l'entrée (clavier, souris) de données.

l'organisme ISO (International Standards Organization) a établi un modèle de référence : OSI (Open Systems Interconnection). Resté dans un cadre théorique, ce sera finalement le protocole IP, *Internet Protocol*, initié par le département de la Défense Américaine qui s'imposera comme le langage standard et permettra l'interconnexion de systèmes hétérogènes. Toutefois, à l'image du modèle OSI, l'architecture TCP/IP propose d'organiser l'interface de communication d'une station en une série de couches, chacune étant construite sur celle du niveau inférieur. Le rôle de chaque couche est d'offrir certains services aux couches supérieures, celles-ci étant ainsi affranchies de la mise en oeuvre des tâches correspondantes. La pile de protocoles TCP/IP est constituée de cinq couches (Figure II.1) :

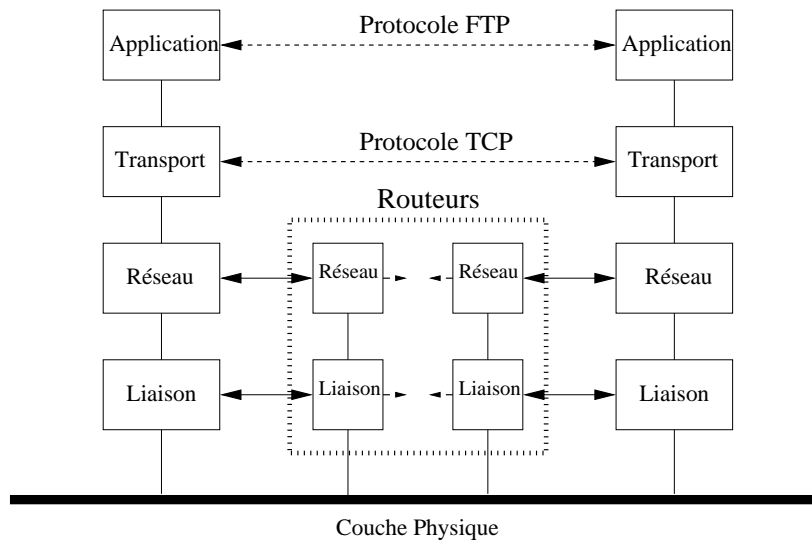


FIG. II.1: Structure en couches de la pile de protocoles TCP/IP.

- La *couche physique* : couche de niveau le plus bas, elle est en charge de la transmission physique des bits sur le support de communication. Elle assure ainsi la liaison des couches supérieures avec le matériel et transforme l'information à envoyer (bits) en un signal adapté au média (électrique, optique ou encore hertzien).
- La *couche liaison* : elle accepte ou transmet un ensemble de bits, appelé trame, à la couche physique. Puisque cette dernière relaie simplement un flot de bits sans en analyser le contenu, c'est la couche liaison qui détecte et éventuellement corrige (par un contrôle de redondance cyclique) les erreurs de transmission (0 interprété en 1 par la couche physique et vice versa). Son rôle principal est d'assurer l'échange de trames entre deux ordinateurs directement liés (appartenant au même *réseau local*). Celui-ci comprend la gestion de l'accès au média, partagé par l'ensemble des ordinateurs du réseau local. Citons comme exemples de protocoles de niveau 2 : Ethernet et Token ring.
- La *couche réseau* : elle gère les communications inter-réseaux locaux et s'emploie à l'acheminement (ou *routage*) des paquets² de données vers le bon destinataire. Elle a alors la tâche de résoudre les problèmes d'hétérogénéité inhérents à l'interconnexion de réseaux différents, c'est-à-dire de couches inférieures incompatibles. Le protocole IP, évoqué précédemment, ou encore ICMP (Internet Control Message Protocol) appartiennent à la couche réseau.

²A ce niveau, on parle de "paquet", lequel sera ensuite intégré dans une "trame" suivant le principe d'encapsulation/désencapsulation.

- La *couche transport* : Sa première fonction est de segmenter les données transférées par la couche application afin de les adapter au format de paquets compréhensibles par la couche réseau. Réciproquement, elle est chargée d'assembler les paquets issus de la couche réseau afin de reconstituer l'ensemble des données destinées à la couche application. En effet, les données brutes à transmettre ne peuvent être directement envoyées sur le réseau, il est nécessaire de les structurer en unités (paquets puis trames et enfin signaux) manipulables par les différents protocoles. La couche transport fixe également la *Qualité de Service*³ (abrégé en anglais QoS : *Quality of Service*) de bout en bout à fournir à la couche supérieure et, finalement, aux utilisateurs du réseau. Plus précisément, suivant les besoins de l'application, la couche transport peut mettre à disposition divers protocoles afin de satisfaire certains critères de qualité désirée (fiabilité, rapidité, délai constant...). Citons comme exemples de protocoles de niveau 4 : TCP (Transmission Control Protocol) et UDP (User Datagram Protocol).
- La *couche application* : Il s'agit de la couche de plus haut niveau d'abstraction, elle utilise les couches inférieures pour communiquer avec une autre station mais les moyens mis en oeuvre lui sont transparents. Elle constitue l'interface logiciel de l'utilisateur avec le réseau. Par exemple, les navigateurs web utilisent, entre autres, l'application HTTP (HyperText Transfer Protocol) pour visualiser des pages web hébergées sur un serveur distant. Dans ce cas, l'utilisateur spécifie simplement l'adresse de la page (comportant l'adresse IP du serveur) sans se préoccuper des détails de la procédure de communication. Il existe une grande variété d'applications associées aux différents besoins des utilisateurs : transfert de fichiers FTP (File Transfert Protocol), courrier électronique SMTP (Simple Mail Transfert Protocol), prise de contrôle à distance SSH (Secure Shell)...

Le modèle en couches permet donc une répartition des tâches dans laquelle les couches inférieures offre un certain niveau d'abstraction aux couches supérieures. Cette architecture favorise la flexibilité et la simplicité de développement de protocoles pour une couche donnée.

II.1.2 Définitions

Ce paragraphe est dédié à la définition de quelques termes usités dans la communauté des informaticiens, nécessaire à la bonne compréhension de l'application présentée dans ce chapitre.

Un réseau local, ou LAN (Local Area Network), est un ensemble d'ordinateurs appartenant au même réseau physique, c'est-à-dire reliés directement les uns aux autres à travers le même média. Les communications intra-réseau local sont établies au niveau de la couche liaison, le protocole le plus répandu étant Ethernet. Notons qu'un LAN peut être étendu ou raccordé au support physique d'un autre LAN (et former un nouveau LAN plus grand) via des éléments d'interconnexion de niveau 1 et 2 tels que des répéteurs, des concentrateurs (HUB) ou encore des commutateurs (switches). Cependant, le fonctionnement des protocoles de la couche liaison, notamment la gestion de l'accès au média, impose une limite géographique de l'ordre de la taille d'un bâtiment, d'un site d'entreprise ou d'un campus universitaire.

Un en-tête ou *header* de paquets est la partie du message contenant les informations de fonctionnement nécessaires à la transmission du paquet au travers du réseau : adresses de l'expéditeur et du destinataire, taille du message, code de détection d'erreurs... Son format est directement lié au protocole et au niveau de couche utilisés.

Un acquittement, plus communément nommé accusé de réception, est un message

³La QoS analyse les propriétés des moyens de communication (protocole, architecture) et leur pertinence pour assurer un fonctionnement acceptable d'une application donnée. Cette notion sera définie dans la section suivante.

(ACK) émis par le destinataire pour informer l'émetteur que le paquet transmis a effectivement été reçu (par référence au numéro de séquence spécifié dans l'en-tête du paquet). Plus précisément, le récepteur renvoie dans l'acquittement le prochain paquet attendu. Les protocoles utilisent ce mécanisme afin de *fiabiliser* (en terme de Qualité de Service) la communication. Dans ce cas, la non-réception d'un acquittement, consécutive à la perte d'un paquet (où à un retard important), impliquera sa retransmission (Figure II.2).

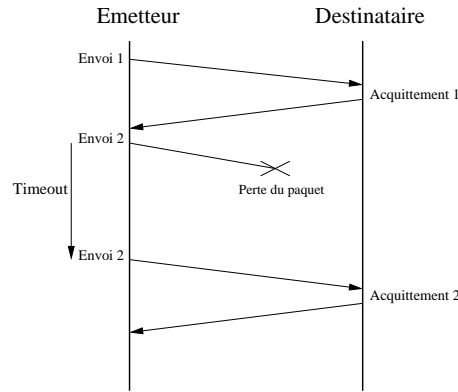


FIG. II.2: Occurrence d'un Time Out.

Le Time Out (TO) correspond au temps d'attente maximal d'un accusé de réception. Sur l'envoi d'un paquet, un timer se déclenche. Lorsque que le temps fixé par le Time Out est écoulé, le paquet est supposé perdu (Figure II.2).

Le buffer ou mémoire tampon, est une zone de mémoire vive utilisée pour stocker temporairement des données. Etant donné les problèmes de partage des ressources, d'une part, d'un ordinateur (processeur, RAM, cartes de communication) et ceux d'un réseau (accès au média, bande passante autorisée) d'autre part, la transmission de données ne peut être effectuée sur chaque sollicitation. De ce fait, lorsqu'un flux de paquets arrive ou quitte une station (ou un routeur), il est mis en "file d'attente" dans le buffer avant de pouvoir être traité.

La congestion est un phénomène de saturation. Elle se produit lorsque le trafic est trop intense par rapport à ce que la capacité du réseau peut traiter. Ce phénomène peut survenir, par exemple, lorsqu'un nombre important d'utilisateurs se connecte à un même site, inondant alors le serveur de requêtes et provoquant le ralentissement des différentes connexions. Le problème de congestion dans les réseaux IP sera détaillé dans la Section II.2.2.

Le Round Trip Time (RTT) d'une connexion est le temps nécessaire lors d'un échange aller-retour entre l'émetteur et le récepteur. Il se compose du temps de propagation sur le média ainsi que le temps de traitement dans les différents routeurs que le paquet et l'acquittement ont emprunté.

La gigue représente, dans notre contexte, la variation du délai lors du transfert de l'information. Mais elle se définit plus généralement comme la fluctuation d'un signal (en amplitude ou en phase). En anglais, on utilise le terme *jitter*.

La Qualité de Service (QoS) désigne la capacité d'un support de communication (architecture réseau, protocoles) à satisfaire certaines exigences. Ces contraintes, caractérisant les propriétés nécessaires au bon fonctionnement d'une application donnée, s'expriment en termes de délai, débit, gigue ou encore de taux de perte. Par exemple :

- Les besoins en terme de débit diffère d'une application à une autre. La consultation de pages web ou de mails ne requièrent que quelques kilo-octets de bande passante tandis que le partage de fichiers en Peer-to-Peer exige un taux de transfert beaucoup plus important.
- Les applications interactives, telle que la visioconférence, imposent une contrainte indispensable sur le délai pour établir un échange convenable.
- Les flux multimédias (streaming audio et vidéo) présentent des contraintes temporelles dues au caractère isochrone de leur transmission. Par conséquent, les données doivent arriver de façon régulière au client de l'application. Dans ce cas, si le délai importe peu c'est la gigue qui fixera la qualité de service de la communication.

II.2 Le protocole TCP

Après une description sommaire du cadre de travail, nous allons maintenant détailler le principe de fonctionnement du protocole TCP. Son premier rôle est d'apporter aux communications des couches supérieures un service de *fiabilité*. Par ailleurs, sachant que le réseau est une ressource partagée par un certain nombre (inconnu) d'utilisateurs, la question est *quel est le débit maximal d'émission que peut autoriser TCP tout en respectant un certain critère de partage (équité ou niveaux de priorités) entre tous les utilisateurs ?* Le protocole a donc pour tâche supplémentaire de mettre en place un *contrôle de congestion*.

II.2.1 Rôle

Le protocole TCP, inventé en 1981 [136], s'est imposé comme le standard pour la communication dans l'Internet. Situé au niveau de la couche transport, TCP est chargé de gérer la quantité de données à émettre sur le réseau ainsi que d'assurer un service de fiabilité aux applications de la couche supérieure. C'est un protocole de communication dit de *bout en bout* puisque, du fait de son niveau d'abstraction, il est en "discussion" directe avec le récepteur (Figure II.1). La communication effective (à travers éventuellement plusieurs routeurs) est, quant à elle, établie par les couches inférieures offrant ainsi une liaison directe entre les échanges TCP de l'émetteur avec le récepteur. Dans l'Internet, les échanges sont basés sur la transmission à commutation de paquets par opposition aux réseaux à commutation de circuits. En d'autres termes, plutôt que de réserver un chemin pour transmettre l'ensemble des données, chaque paquet est indépendant et peut emprunter un parcours différent. Aussi TCP doit numéroter les paquets de manière à ce que le récepteur puisse les réordonner.

La propriété principale de TCP est de garantir une communication fiable. En appliquant un mécanisme d'acquiescement, il assure que l'intégralité des données soit transmise au destinataire. Plus précisément, ce dernier signale le prochain paquet attendu (via le système de numérotation) et s'il y a une perte, la source renverra le paquet manquant. Cependant, cette fiabilité coûte cher en temps à cause de l'attente de l'accusé de réception. Le principe de la fenêtre d'émission autorise l'émetteur à envoyer plusieurs paquets à la suite. Puis, il attend le signal du récepteur avant de reprendre l'émission d'un nouveau lot de paquets (Figure II.5a). Etant donné la concurrence des différents utilisateurs pour l'accès au réseau, la question est *combien de paquets d'affilée*

un émetteur peut-il envoyer ? Cette problématique constitue le point de départ du *contrôle de congestion*.

II.2.2 Problème de congestion

Le phénomène de congestion se manifeste lorsqu'un dispositif reçoit plus d'information que ce qu'il ne peut traiter, plus précisément, dès lors que le débit de données entrant est supérieur à celui sortant. En premier lieu et indépendamment du réseau, un émetteur est donc tenu d'envoyer une quantité de données au plus égale à la capacité du récepteur. Afin d'éviter une éventuelle surcharge, le récepteur informe l'émetteur de la capacité disponible en remplissant un champ dédié de l'en-tête du message d'acquittement (Figure II.3). Ce mécanisme, appelé *contrôle de flux*, permet à la station réceptrice de régler la taille maximum du flux d'émission de la source.

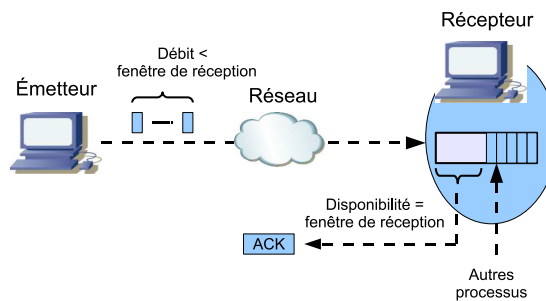
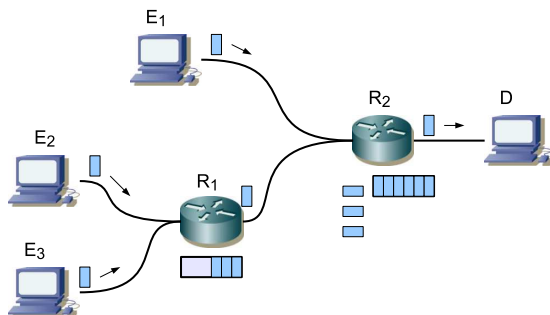


FIG. II.3: *Contrôle de flux.*

Bien que le trafic généré par TCP soit adapté à la capacité du destinataire, il ne le sera pas forcément vis-à-vis du réseau. Afin d'illustrer le véritable problème de congestion, observons un simple réseau schématisé sur la Figure II.4. Dans cet exemple, le destinataire D , annonçant à chaque émetteur E_i les débits maximaux individuels, n'est pas saturé. Cependant, les trois trafics sont multiplexés au niveau du routeur R_2 et si la capacité du lien en sortie n'est pas suffisamment importante, une congestion se crée. Plus précisément, le buffer de réception (au niveau IP) du routeur se remplit, puis, une fois saturé, tous les nouveaux paquets arrivant sont éjectés, donc perdus. Contrairement au contrôle de flux, le problème est que ni l'émetteur ni le récepteur ne possèdent d'informations sur l'état de congestion du réseau et ceci d'autant plus que pour TCP, la communication à travers le réseau (réalisée par les couches inférieures) lui est transparente.

La congestion entraînant la perte de paquets, TCP doit, pour maintenir un service fiable, retransmettre l'ensemble des données perdues. Mais si la surcharge du réseau n'a pas été résolue, les paquets rémis seront certainement à nouveau perdus. Dans ces conditions, il est clair que ce mécanisme contribue à alimenter la congestion. Avec l'expansion d'Internet dans les années 80 et le succès du protocole TCP, le nombre grandissant d'utilisateurs a conduit à des séries d'effondrement du réseau, entraînant des baisses drastiques de performances. Des travaux de recherche ont ensuite été menés, notamment à l'Université de Berkeley (Californie, USA), afin de développer des algorithmes permettant à TCP d'empêcher ce phénomène, connu sous le nom

FIG. II.4: *Phénomène de congestion.*

de *congestion collapse*. Finalement, les travaux de [83], [84] ont doté le protocole du *contrôle de congestion* et jeté les bases de la version de TCP la plus répandue actuellement.

II.2.3 Algorithme d'évitement de congestion

Afin d'éviter la congestion d'un élément du réseau à partir de la vision bout en bout des échanges TCP, l'auteur de [83] a proposé l'algorithme AIMD (*Additive-Increase Multiplicative-Decrease*). L'objectif de celui-ci est de transmettre un maximum d'informations tout en minimisant la perte de paquets.

L'hypothèse fondamentale de cet algorithme est de considérer qu'une perte de paquets est synonyme de congestion. En effet, les pertes accidentelles, dues à un problème physique de la ligne de communication ou encore aux erreurs bits non corrigées par la couche liaison sont négligeables. En se rappelant qu'à chaque instant, les hôtes connectés sont en compétition pour l'accès aux ressources de transmission, le principe de l'algorithme AIMD est simple, chaque émetteur augmente progressivement son taux d'envoi (*Additive-Increase*). Cet accroissement s'effectue jusqu'à l'occurrence d'une perte, le cas échéant cela signifie qu'il y a une surcharge quelque part dans le réseau. A cet instant, les débits d'émission des sources concernées sont alors diminués et cette réduction doit être assez importante pour être sûr de sortir de l'état de saturation (*Multiplicative-Decrease*). Avant de présenter (dans les grandes lignes) l'algorithme d'évitement de congestion, emprunt adapté de *congestion avoidance*, nous rappelons quelques définitions.

La fenêtre de réception désigne le nombre maximum de paquets que le destinataire est capable de recevoir (lié à la place disponible dans le buffer de réception). La taille de la fenêtre est donc fixée par le récepteur et constitue le principe de contrôle de flux évoqué au paragraphe précédent.

La fenêtre de congestion correspond au nombre de paquets que l'émetteur peut envoyer avant de devoir attendre la réception d'un accusé de réception (figure II.5a). Une fois l'acquittement effectué, la transmission peut poursuivre. Bien évidemment, la fenêtre de congestion doit toujours rester inférieure à la fenêtre de réception.

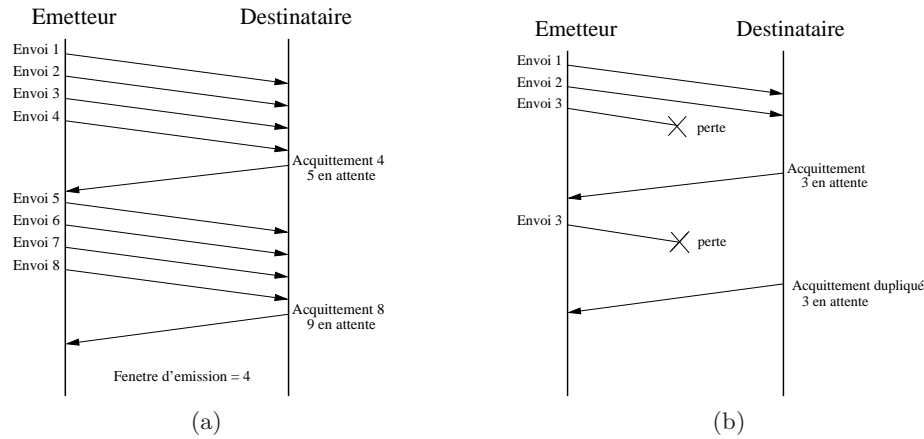


FIG. II.5: (a) Principe de la fenêtre de congestion, (b) acquittement dupliqué.

Un **acquittement dupliqué** ou DupAck est un nouvel acquittement, identique au précédent, envoyé à l'émetteur pour signaler qu'un paquet n'est pas arrivé et donc toujours attendu par le récepteur (Figure II.5b).

Dans un premier temps, nous exposerons une description simplifiée de TCP pour montrer l'idée principale du protocole. Ensuite, nous détaillerons quelques algorithmes supplémentaires, composant la version actuelle du protocole.

Algorithmes

La philosophie de TCP est de "sonder" le réseau en augmentant progressivement la taille de la fenêtre de congestion. Puis, suivant l'information suggérant la perte d'un paquet, elle est diminuée brutalement afin de sortir rapidement de l'état de congestion.

- Une source envoie W paquets (la fenêtre de congestion est donc égale à W).
- Le flux de paquets transite dans le réseau⁴ :
 - Si le flux est transmis avec succès, sur réception de l'ACK (acquittement), l'émetteur augmente son taux d'envoi : $W \leftarrow W + 1$.
 - S'il y a une perte, l'émetteur doit retransmettre le/les paquets perdus et réduire sa fenêtre de congestion W .

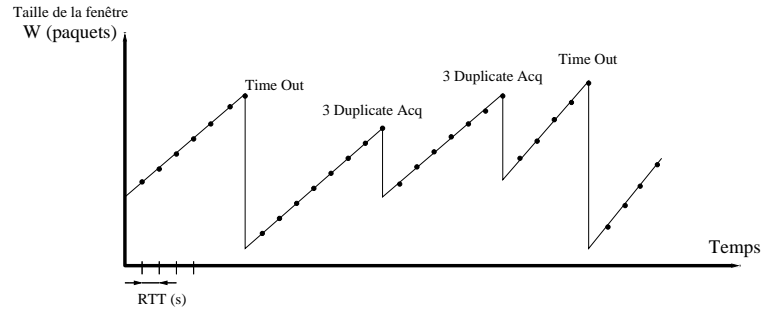
Dans le second cas, on distingue deux types d'indication de congestion : les indications par Time Out et les indications par acquittements dupliqués (3DupAck)

- Si la source n'a pas de réponse du destinataire (\equiv TO) : $W \leftarrow 1$.
- Si la source reçoit trois acquittements identiques (\equiv 3DupAck) : $W \leftarrow W/2$.

Le temps entre chaque échange correspond au trajet d'un aller-retour, c'est-à-dire un RTT . On observe donc, sur la Figure II.6, le comportement caractéristique de l'algorithme AIMD [122].

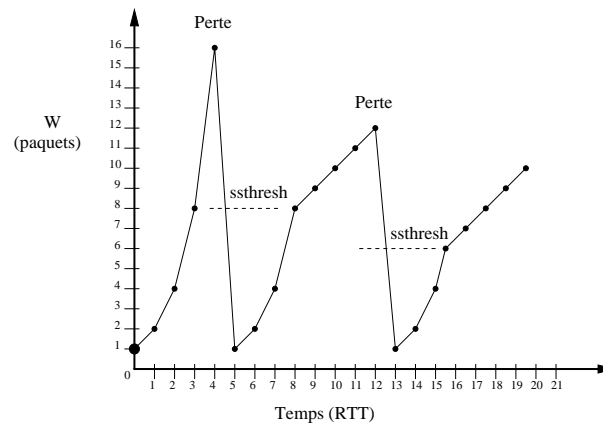
Au cours de son évolution, des algorithmes supplémentaires ont amélioré TCP pour le rendre plus efficace. Cette évolution a généré plusieurs versions de TCP [3] (Tahoe, Reno, SACK, New Reno, Vegas...), New Reno étant actuellement la plus utilisée. Nous décrivons ici quelques mé-

⁴Les paquets n'empruntent pas forcément la même route et peuvent donc rejoindre le destinataire dans un ordre différent. Cependant cela ne pose aucun problème car à l'aide du numéro de séquence (présent dans l'en-tête des paquets), ils seront réordonnés par la couche transport et le récepteur acquittera les paquets reçus en spécifiant ceux attendus.

FIG. II.6: Exemple d'évolution de la fenêtre de congestion W .

canismes caractéristiques.

L'algorithme du *slow start* est une phase d'initialisation et a pour but d'obtenir une estimation rapide du seuil de congestion. Pour cela, la taille de la fenêtre de congestion, initialement à 1, croît exponentiellement (de base 2) jusqu'à l'occurrence d'une perte (Figure II.7). A cet instant, la moitié de la taille de la fenêtre courante est enregistrée dans la variable *ssthresh* (slow start threshold). Celle-ci définit le seuil en dessous duquel la fenêtre augmentera exponentiellement (phase de *slow start*) tandis qu'au dessus elle grandira linéairement (phase de congestion avoidance). La variable *ssthresh* est redéfinie à chaque fois qu'une perte se produit (Figure II.7). Ainsi la phase de progression linéaire débutera directement à partir d'une taille de fenêtre convenable, on considère qu'il n'est pas utile (perte de temps, donc de performance) d'être en phase d'évitement de congestion en dessous du seuil *ssthresh*.

FIG. II.7: *Slow start* et évitement de congestion.

L'algorithme du *fast retransmit* a été mis en place pour éviter que l'émetteur attende l'expiration du *Time Out* avant de retransmettre. Le destinataire signale, par ses accusés, où il est dans la réception des données. Les paquets arrivant éventuellement dans le désordre, il est probable que la source reçoive des accusés identiques. Cependant, l'algorithme considère que sur réception de trois acquittements dupliqués (c'est-à-dire quatre acquittements portant le même numéro), un lien dans le réseau est encombré. Donc, plutôt que d'attendre la durée complète du *Time Out*, l'émetteur réduit la fenêtre de congestion et retransmet les informations attendues

par le récepteur.

Enfin, dans le cas d'une détection de perte par acquittements dupliqués, c'est l'algorithme de *fast recovery*, souvent associé à celui du *fast retransmit* qui s'exécute. Dans ce cas, au lieu de se réinitialiser à un, la fenêtre se réduit à la moitié du seuil, puis passe donc directement à la phase d'évitement de congestion (phase linéaire).

Remarque II.1. Une indication de perte par *Time Out* signifie que l'émetteur n'a plus de nouvelle du destinataire. Dans ce cas, on suppose que la congestion est trop importante et la fenêtre de congestion est donc réduite à l'unité pour "calmer" complètement l'intensité du trafic. Les algorithmes de *fast recovery* et *fast retransmit* permettent à l'émetteur d'être plus réactif et d'anticiper un état de congestion avancé.

Sur la Figure II.8 est illustré un exemple de d'évolution de la fenêtre de congestion appliquant les mécanismes décrits ci-dessus.

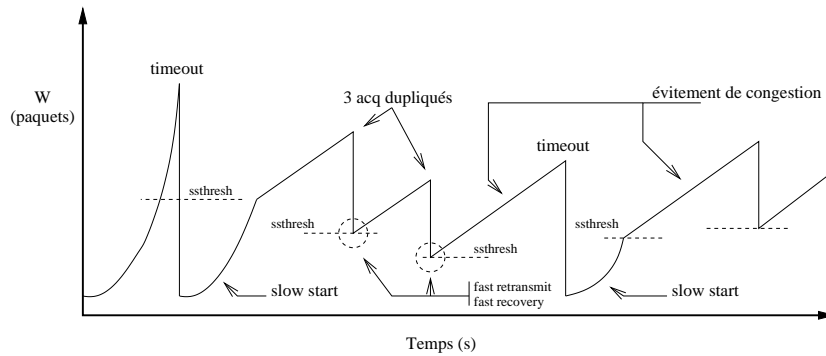


FIG. II.8: Illustration des protocoles de *slow start*, *fast retransmit* et *fast recovery* (TCP Reno et NewReno).

Exemple de simulation

A l'aide du simulateur *NS-2* (*Network Simulator*, [44]), un goulet d'étranglement, illustré par la Figure II.9, a été simulé. Les trois trafics générés par les sources E_i convergent vers un lien de capacité plus faible : $5Mbps$. Suivant le principe du protocole TCP, les sources augmentent leur débit d'émission jusqu'à saturation du routeur R , après quoi il diminue brusquement.

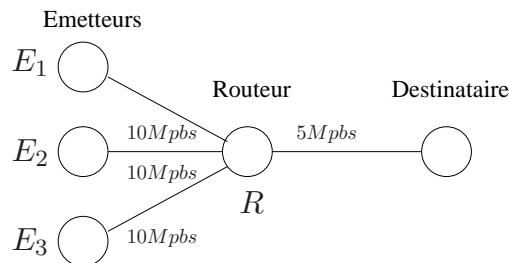


FIG. II.9: Goulet d'étranglement.

L'évolution de la fenêtre de congestion de l'émetteur E_1 est représentée sur la Figure II.10a. L'état de remplissage du buffer (taille de file d'attente au niveau du routeur), de taille maximal de 100 *pqts*, est montré sur Figure II.10b.

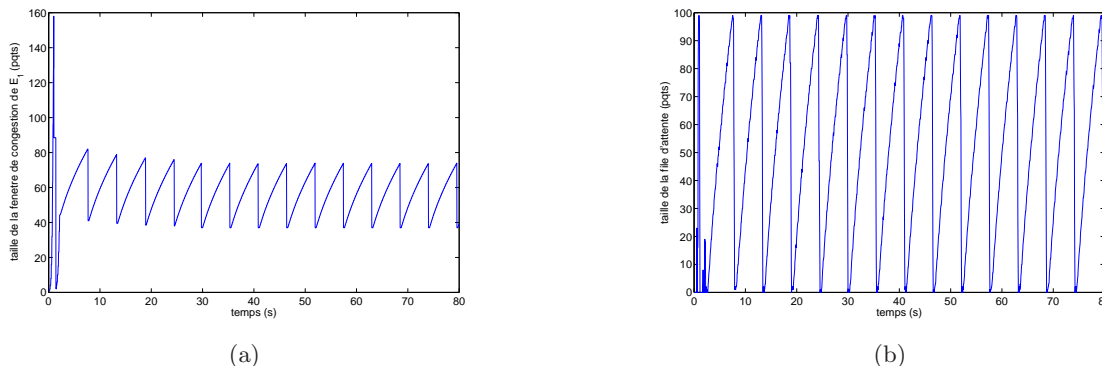


FIG. II.10: *Simulation NS-2 : (a) évolution de la fenêtre de congestion de E_1 , (b) file d'attente dans le buffer du routeur R.*

Nous pouvons observer sur la Figure II.10a les phases d'évitement de congestion (progression linéaire) et les instants de perte de paquets. Le buffer du routeur se remplit jusqu'à atteindre sa capacité maximale (100 *pqts*), les paquets supplémentaires sont ensuite éjectés de la file. Ce principe simpliste est connu sous le nom de *Droptail*. La Figure II.10b montre que cette politique de gestion de file d'attente induit de larges oscillations et maintient l'utilisation du buffer proche de sa saturation.

II.2.4 Modèle dynamique de TCP

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés au contrôle de congestion d'un routeur dans les réseaux IP. Plus précisément, notre étude s'est focalisée sur le partage d'un lien de communication entre plusieurs émetteurs situés sur des sites distants (Figure II.11a). Les ordinateurs utilisent le protocole TCP pour communiquer et tenant compte du comportement du protocole décrit précédemment, il s'agit de résoudre le problème de partage de ressource sous une certaine contrainte de Qualité de Service (comme l'équité ou un service différencié entre les sources).

Le lien en aval du routeur étant emprunté par les N flux, chaque source applique le mécanisme d'évitement de congestion, détaillé dans la Section II.2.3, pour remédier au problème d'effondrement du réseau. Des travaux de modélisation fluide proposant une représentation mathématique du comportement du protocole TCP [110, 122, 123] ont été développés dans le but d'effectuer une analyse quantitative du problème de congestion. Alors que la plupart des travaux ayant traité ce sujet dans le cadre de la théorie de la commande ont considéré le modèle fluide proposé par [123], nous avons adopté le modèle, plus complet, introduit dans [110] et décrit par (II.1)-(II.2). Nous reviendrons plus en détails sur ce point au Chapitre V. L'équation différentielle suivante rend compte de l'évolution de la fenêtre de congestion $W_i(t)$ d'une source TCP i :

$$\dot{W}_i(t) = \frac{W_i(t - \tau_i)}{\tau_i(t - \tau_i)} (1 - p_i(t - \tau_i^b)) \frac{1}{W_i(t)} - \frac{W_i(t - \tau_i)}{\tau_i(t - \tau_i)} \frac{W_i(t)}{2} p_i(t - \tau_i^b). \quad (\text{II.1})$$

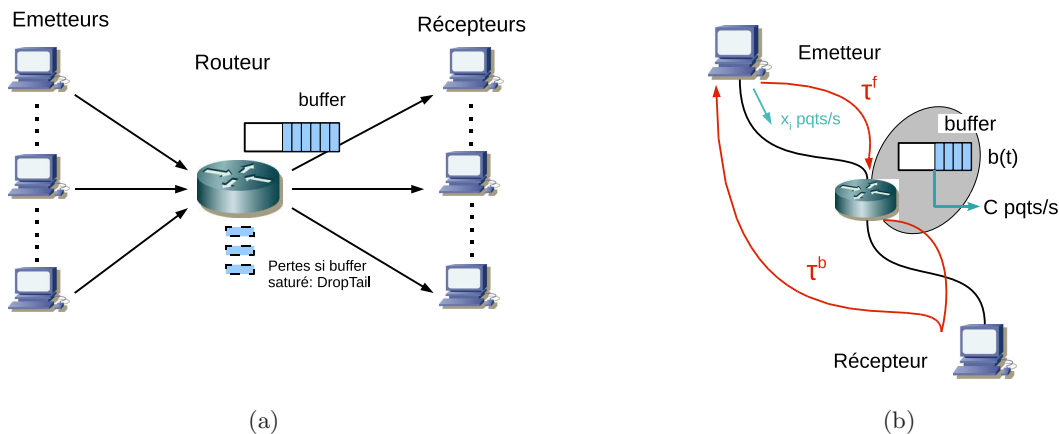


FIG. II.11: Topologie étudiée.

Le signal $p_i(t)$ est le taux de perte subi par la source i . Le retard τ_i représente le RTT perçu par la source i . Il peut se décomposer comme la somme des *forward* et *backward delays* (τ_i^f et τ_i^b) représentant, respectivement, le temps de trajet de la source i au routeur et du routeur à la source en passant par le récepteur (Figure II.11b) :

$$\tau_i = \frac{b(t)}{C} + T_{p_i} = \tau_i^f + \tau_i^b$$

où $b(t)$ est la taille de la file d'attente du buffer au niveau du routeur. Sa dynamique s'exprime par

$$\dot{b}(t) = -C + \sum_N \eta_i \frac{W_i(t - \tau_i^f)}{\tau_i(t - \tau_i^f)}. \quad (\text{II.2})$$

C , T_{p_i} et N sont des paramètres caractéristiques du réseau et représentent, respectivement, la capacité du lien, le temps de propagation expérimenté par un paquet de la connexion i et le nombre de source TCP. Le paramètre η_i correspond au nombre de sessions établies par l'émetteur i . Notons que ce paramètre peut tout aussi bien comprendre d'autres hôtes si les temps de propagation sont proches. Typiquement, η_i peut représenter un ensemble d'ordinateurs localisés sur un même site peu étendu tel qu'un LAN.

Il est important de noter que l'équation (II.1) de la fenêtre de congestion ne modélise pas les mécanismes de slow start et de perte par Time Out. Cependant, l'algorithme de fast retransmit permet à TCP de réagir avant que le timeout s'exécute. Ce dispositif ne se déclenche qu'en cas de saturation aggravé lorsque le trafic trop intense et que les messages d'acquittement ne peuvent rejoindre la source. De plus, l'algorithme de fast recovery permet d'éviter le redémarrage en slow start. Sur l'exemple des Figures II.9 et II.10a, on constate que sur l'ensemble de la simulation, le slow start et le Time Out n'apparaissent qu'au début de la communication, en phase d'initialisation.

Comme évoqué dans les sections précédentes, TCP est sensible à la perte de paquets et le signal p_i constitue ainsi l'entrée de commande du modèle (II.1). Pour pouvoir "jouer" sur le taux de perte de paquet dans un réseau, des mécanismes dit d'*Active Queue Management* (AQM), présentés dans la section suivante, ont été mis au point. Bien qu'encore au stade expérimental,

la littérature consacrée à ce sujet s'est substantiellement développée au cours de cette dernière décennie.

II.3 Active Queue Management

De manière générale, le contrôle de congestion consiste à réguler le trafic généré par les différents émetteurs en fonction de la charge du réseau. Les mécanismes présentés jusqu'à maintenant effectuent un contrôle de congestion point à point, c'est-à-dire émetteur-récepteur, sans assistance du réseau. En effet, TCP observe l'apparition d'une perte⁵ pour détecter un problème de congestion à l'intérieur du réseau. Ce retour d'information est rendu possible par le système d'accusé de réception qui permet à l'émetteur de "se tenir au courant des paquets réclamés" par le récepteur. Bien que le mécanisme d'évitement de congestion de bout en bout appliqué par TCP prévient l'effondrement du réseau, il reste insuffisant pour assurer un contrôle efficace du trafic (Figure II.10). Par conséquent, des études ont suggéré de faire participer le réseau au contrôle de congestion et la gestion des ressources partagées [25, 104, 143].

II.3.1 Principe

Essentiellement, les routeurs appliquent un simple mécanisme de *store-and-forward* dans lequel les paquets entrants sont stockés dans un buffer avant d'être transférés (ou *routés*) selon la bande passante du lien. Généralement, les buffers sont gérés suivant une politique FIFO (*First-In First-Out*) et la saturation de leur capacité entraîne la perte des paquets supplémentaires (principe du Drop Tail). Les possibilités de gestion du trafic depuis les hôtes en bordure du réseau étant limitées, des mécanismes supplémentaires doivent être ajoutés au niveau des routeurs pour compléter les contrôles point à point. On distingue deux classes de dispositifs : *les politiques de file d'attente* et *les algorithmes d'ordonnancement*. La première concerne la stratégie de contrôle de la longueur de file d'attente dans les buffers. La seconde détermine quel sera le prochain paquet à être traité (il peut y avoir plusieurs files d'attente). Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à la première classe de mécanismes, appelés *Active Queue Management* (AQM), en supposant, pour la seconde, un ordonnancement FIFO sur une seule file (configuration la plus commune).

Nous avons vu que la perte de paquet, plus exactement la réception d'acquitemments dupliqués, constituait une mesure de la congestion pour le protocole TCP. L'objectif du mécanisme d'AQM consiste alors à réguler, de façon *implicite*, le trafic TCP en agissant sur le taux de pertes (Figure II.12). Pour cela, l'AQM a la possibilité de forcer la perte en *éjectant* un paquet du buffer afin d'anticiper la saturation totale du routeur. En effet, le paquet étant perdu (volontairement), il n'atteindra pas le destinataire et celui-ci réclamera toujours le même paquet. L'émetteur, quant à lui, pensera que le paquet a été perdu par surcharge du réseau et diminuera en conséquence sa fenêtre d'émission. Ainsi, le mécanisme d'AQM s'appuie sur le principe de contrôle de congestion de bout en bout de TCP (c'est-à-dire l'algorithme AIMD) pour agir, à distance, sur le taux d'envoi des sources. Situé au niveau du routeur, il est le mieux placé pour analyser l'état de congestion du lien (taille de la file d'attente du buffer, intensité du trafic). Puis, à partir de cette mesure et d'un algorithme décisionnel, il choisira d'éjecter ou non un paquet. Cette perte forcée constitue non seulement un moyen de réduire le débit d'un émetteur mais plus généralement un retour d'information de l'intérieur du réseau vers les utilisateurs de

⁵Certaines versions de TCP utilisent d'autres informations pour détecter la congestion. Par exemple, TCP Vegas [26] observe le délai, c'est-à-dire le RTT, pour conclure sur l'état de saturation du réseau.

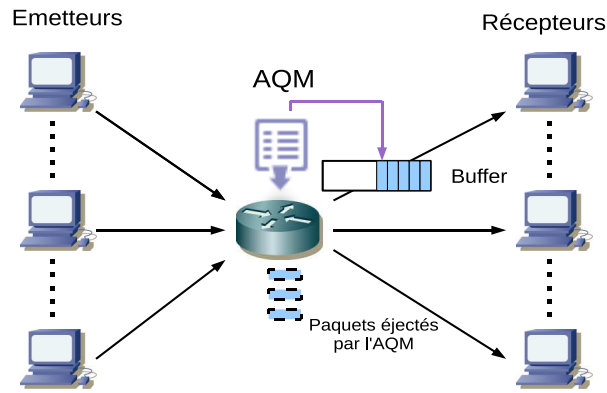


FIG. II.12: *Un AQM agit sur le taux de pertes.*

bout. Bien que le transfert de l'information soit implicite, cette *rétro-action* permet toutefois d'établir une structure en boucle fermée.

Avant cette vision très générale et le principe des mécanismes d'AQM, cette idée de gestion *proactive* de la congestion au niveau du routeur se retrouve initialement dans le mécanisme RED, développé au début des années 90 [52], pour améliorer l'algorithme AIMD.

II.3.2 Exemple du RED

L'idée originelle de l'algorithme du *Random Early Detection* (RED) [52] est d'anticiper la saturation du buffer. Ce phénomène indésirable conduit à un état de congestion sévère du lien, entraînant des Time Out, une forte dégradation et une synchronisation des débits d'émission. Ainsi, plutôt que d'attendre le remplissage complet du buffer, l'idée suggérée est d'éjecter prématurément un paquet pour indiquer à la source correspondante de réduire son taux d'envoi.

Le principe du RED consiste à éjecter les paquets entrant avec une certaine probabilité p . Ce taux de perte est une fonction croissante de la taille moyenne de la file d'attente du buffer (Figure II.13) et s'exprime par :

$$p(\bar{b}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \bar{b} < b_{min} \\ \frac{\bar{b} - b_{min}}{b_{max} - b_{min}} p_{max}, & b_{min} \leq \bar{b} \leq b_{max} \\ 1, & b_{max} < \bar{b} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où \bar{b} est la longueur moyenne de la file d'attente, b_{min} , b_{max} et p_{max} sont des paramètres à configurer. On observe donc que si la file est petite ($\bar{b} < b_{min}$), chaque paquet entrant est accepté et mis en mémoire tampon. Tandis qu'au delà d'un certain seuil, une fraction des flux entrants, proportionnelle à la mémoire utilisée (en moyenne) \bar{b} , est rejetée. Enfin, au delà de la limite b_{max} tous les paquets supplémentaires sont refusés.

Initialement développé sur des bases empiriques, des analyses expérimentales [22], [118] ont montré les difficultés de réglage des paramètres du RED. Puis, de nombreux articles ont alors proposé des méthodes de configuration ainsi que des modifications pour le doter de nouvelles propriétés (stabilité, auto-adaptation...) [37, 47, 129]. Du point de vue de la théorie de la com-

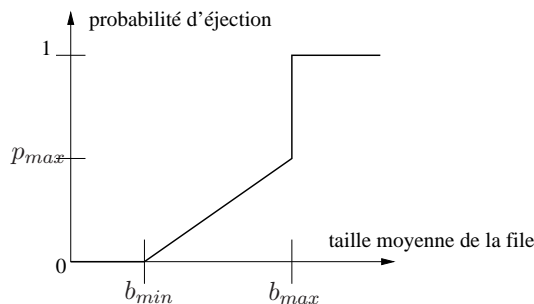


FIG. II.13: Probabilité de pertes du RED en fonction la taille de la file d'attente.

mande, le RED peut être assimilé à un filtre passe-bas (calcul de la taille de file moyenne) avec une action proportionnelle [75]. Il est intéressant de noter que si au départ le RED n'était qu'un mécanisme supplémentaire, plutôt intuitif, pour anticiper la saturation d'un buffer, il apparaît finalement comme un dispositif de *rétroaction* renvoyant une information sur l'état de congestion d'un lien. Dès lors, il a ouvert la voie à une problématique de recherche fertile, portant sur la contribution des routeurs pour le contrôle de congestion et la gestion de buffer.

Notons que, de concert avec le principe d'AQM, un mécanisme appelé *Explicit Congestion Notification* (ECN) a été proposé [51], [139]. Il donne la possibilité au routeur de *marquer* un paquet afin de signaler *explicitement* l'information de congestion plutôt que de l'éjecter. Pour cela, un champ d'un bit (dit ECN) a été ajouté dans l'en-tête IP d'un paquet. Le routeur marque alors le paquet par la mise à "1" de ce bit. Bien évidemment, ce marquage est relayé par le destinataire lors de l'envoi de l'acquittement. L'avantage de cette technique est d'éviter la perte de paquets et donc des retransmissions inutiles.

II.3.3 Extension

La mise en place de mécanisme de gestion de file d'attente, initié par le RED, pour tenter de satisfaire les besoins en Qualité de Service a établi les bases du concept d'*Active Queue Management* (AQM). Leur rôle consiste à informer TCP de l'état de congestion d'un lien afin de prévenir la surcharge du réseau. La question est *quel taux de pertes/marquages faut-il appliquer pour contrôler le trafic et la taille de file d'attente du buffer ?*

Différents algorithmes ont été proposés pour compléter TCP dans le contrôle de congestion [143] tels que BLUE, REM ou encore AVQ pour ne citer que les plus connus.

BLUE [47], [48] met à jour la probabilité d'éjection de paquet p (à une fréquence arbitraire *freeze - time*) en fonction des événements de pertes et de l'utilisation du buffer. Elle est augmentée d'une valeur d'incrémentation d_1 lorsqu'un paquet est perdu ou que la file d'attente dépasse un certain seuil L . Elle est décrétementée d'une valeur d_2 lorsque le buffer est inutilisé.

L'algorithme du REM (Random Early Marking) [18], réalisé dans le cadre d'un problème d'optimisation, associe au lien une fonction coût $p_l(t)$ en fonction de la taille de la file d'attente. La probabilité de perte est ensuite exprimée par $p(t) = 1 - e^{-p_l(t)}$.

AVQ (Adaptative Virtual Queue) [99] met en place une file d'attente virtuelle vq qui se remplit au même rythme que la file réelle et applique le principe de drop tail. Cet algorithme d'AQM agit sur la capacité (virtuelle) \hat{C} de la file virtuelle pour empêcher la saturation du buffer. Cette

dernière est actualisée en fonction du taux de données entrant λ et du taux d'utilisation désiré γ : $\dot{C} = \alpha(\gamma C - \lambda)$. C est la capacité réelle du lien et $\alpha > 0$ un paramètre à régler.

Par ailleurs, il existe de nombreux travaux utilisant explicitement la théorie de la commande. C'est à partir des travaux de [76], [77] que la question a véritablement été reformulée en terme de problème de régulation au sens où l'entendent les Automaticiens. A partir du modèle dynamique de TCP établi dans [122], [123], ils ont proposé un correcteur Proportionnel Intégral (PI) pour calculer la probabilité de perte $p(t)$. Dès lors, de nombreux chercheurs se sont intéressés à cette nouvelle problématique, exploitant les différents outils de l'Automatique [157]. La plupart de ces travaux se sont focalisés sur la régulation de la file d'attente par diverses méthodes allant des correcteurs fréquentiels [2], [45] à l'analyse non linéaire [74], [120] en passant par la commande robuste [116, 138, 158] ou encore la commande prédictive [93], [159]. Si pour la communauté des réseaux de communication, le contrôle de congestion est un phénomène critique au regard de la Qualité de Service, la problématique a suscité un grand intérêt en termes de stabilité du trafic dans la communauté de l'Automatique.

II.4 Cadre de travail

Avant de finir ce chapitre, nous revenons sur les objectifs de notre travail et délimitons le cadre d'étude de notre application. Bien que nous nous focaliserons sur le contrôle de congestion *d'un seul* routeur, nous montrons dans cette section que, au delà du problème théorique qu'il constitue, ce cas de figure peut être replacé dans un cadre concret.

D'une part, la nécessité et l'omniprésence des réseaux, et d'autre part, les besoins en performance et qualité de service ont amorcé un intérêt considérable de la communauté de la recherche pour le développement d'algorithmes de communication efficaces. Parmi les automaticiens, de nombreux travaux ont interprété cette question en un problème d'allocation de ressources faisant alors appel aux outils de l'optimisation [90, 111, 152]. Il s'agit de maximiser les taux d'envoi de chaque source au travers d'une fonction dite d'utilité, représentant le profit individuel de chaque connection⁶. Ces débits d'émission sont ajustés par rapport aux informations retournées par des fonctions dites de coût, mesurant l'état de congestion des différents liens. Si ces contributions ont développé des concepts théoriques notables, ces résultats restent toutefois dans un cadre académique.

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse aux communications qui utilisent le protocole TCP pour échanger des données. Son contrôle de congestion et sa propriété de fiabilité font que cet algorithme s'est historiquement imposé comme standard pour la communication inter-réseaux. Bien que son efficacité soit très discutée, il représente actuellement plus de 80% du trafic de l'Internet et constitue de ce fait un cas d'étude d'un intérêt pratique évident. Au paragraphe II.3 nous avons exposé le mécanisme d'AQM qui, intégré au routeur au niveau de la couche IP, ne nécessite aucune intervention sur les stations de bout. En effet, l'implémentation d'un tel dispositif est tout à fait transparente pour le protocole de niveau transport et ne requiert donc aucune modification du code de la pile TCP/IP pour les utilisateurs. Nous développerons au Chapitre V une méthodologie pour la synthèse d'AQM pour le contrôle de congestion d'un routeur tel qu'illustré sur la Figure II.12.

Lors de communications TCP entre deux hôtes éloignés, il n'est pas rare que plusieurs types

⁶L'objectif en terme de Qualité de Service à appliquer réside dans le choix des fonctions d'utilité.

de réseaux soient traversés, chacun offrant une Qualité de Service spécifique. Il est clair que si une parcelle du trajet, même faible, est sujette à un nombre de pertes plus important⁷, les performances de la connexion seront d'autant plus dégradées que les temps de réception des acquittements dupliqués et des retransmissions seront basés sur l'ensemble du parcours. Un groupe de recherche de l'IETF⁸ s'est penché sur ce problème de communication multi-réseaux et des propositions de découpage des connexions de niveau transport ont été recommandées [20], [23]. L'idée consiste à scinder une communication TCP en plusieurs connexions par l'intermédiaire de proxies⁹ (cf. Figure II.14a). Ces dispositifs vont intercepter les demandes d'ouverture (ou de fermeture) de connexion TCP afin de transférer la requête avec une nouvelle connexion. Puis, tous les paquets provenant d'une connexion seront redirigés vers l'entrée de l'autre. Cette méthode dite de *splitting* permet d'isoler un tronçon du réseau de manière à résoudre localement la détection de pertes et la retransmission de paquets. Des études expérimentales [115], [162] ont montré l'efficacité d'un tel mécanisme qui, de plus, ne nécessite aucune mesure du réseau ou de modification des protocoles de communication TCP et IP.

Ce type d'architecture est également très avantageux lors de communication par satellite [112]. En effet, un satellite joue le rôle de routeur et offre une bande passante relativement faible, de l'ordre de quelques centaines de kilo-octets par seconde. Il constitue alors un goulet d'étranglement avec un débit de sortie faible et des temps de propagation importants, et la mise en place de proxies au niveau des points d'accès terrestres permet une gestion dédiée à la liaison problématique voire une adaptation du protocole de communication (Figure II.15).

Il nous paraît donc intéressant d'exploiter cette architecture multi-connexions pour justifier et mettre en avant notre étude (Figure II.14b).

Par ailleurs, ce dispositif présente l'avantage de la simplicité de mise en oeuvre et ne requiert aucune modification de la pile de protocoles de communication, de la topologie ou d'équipement supplémentaire. Il suffit de doter les routeurs appropriés des couches de niveau transport (TCP) et d'un algorithme d'AQM.

II.5 Conclusion

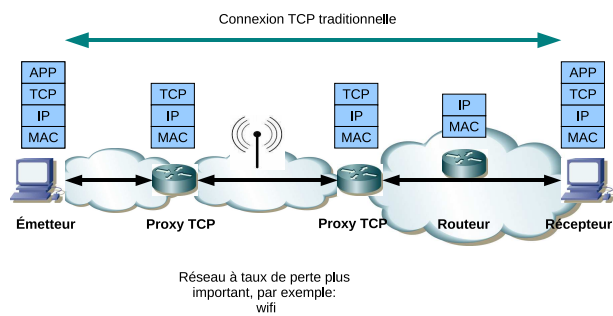
Nous avons consacré ce chapitre à la présentation de l'application qui a motivé notre travail tout au long de cette thèse. De nombreux concepts et définitions ont été introduits et il convient alors de faire un court récapitulatif. Nous avons présenté, dans un premier temps, l'architecture des réseaux dans l'Internet et son principe de couche qui garantissent un certain niveau d'abstraction pour un protocole de communication donné.

Cette introduction préliminaire, très générale, nous a permis d'expliquer progressivement le protocole TCP et de le situer dans son environnement. TCP est non seulement en charge d'établir des communications fiables entre deux utilisateurs mais il doit également mettre en oeuvre un mécanisme de contrôle de congestion. En effet, à chaque signal (acquittement) du récepteur, le protocole de niveau transport doit calculer le nombre de paquet à émettre (fenêtre de congestion). D'une part, il s'agit de maximiser le taux d'envoi pour avoir un débit de transfert

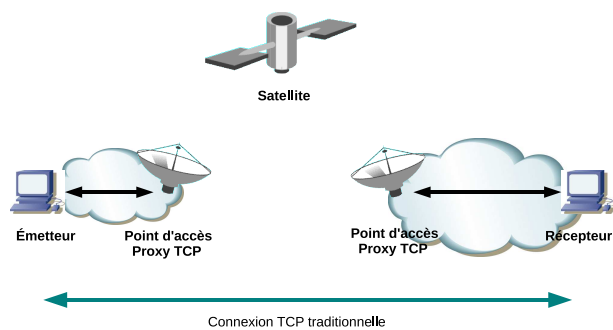
⁷C'est le cas, par exemple, des réseaux sans fil, des goulets d'étranglement enclins à la congestion ou encore les liaisons satellite.

⁸Il s'agit de l'*Internet Engineering Task Force*, un ensemble de groupes de travail internationaux composés de chercheurs et d'industriels de la communauté des réseaux informatiques en charge d'établir les standards pour Internet [80].

⁹Un proxy est un serveur qui intercepte des requêtes qui ne lui sont pas destinées pour ensuite les transmettre à la station appropriée. Par exemple, il permet d'établir des échanges entre Internet (possédant des adresses publiques) et des machines d'un réseau à adresses privées.



(a)



(b)

FIG. II.14: (a) Principe de la méthode de *splitting*, (b) cas d'un communication satellite.

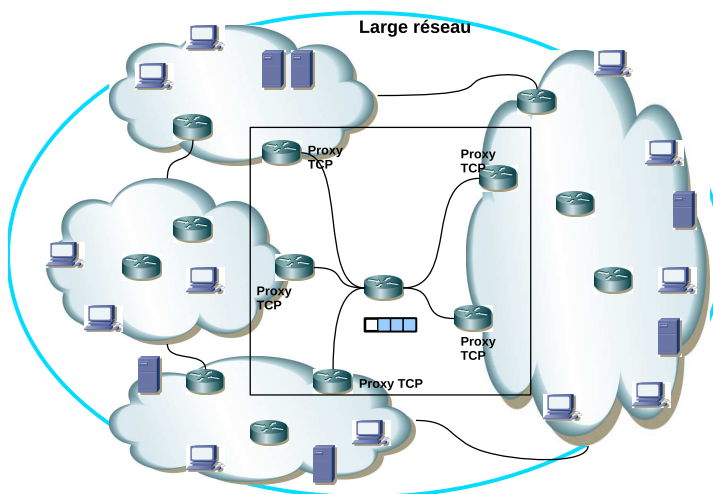


FIG. II.15: *Splitting* pour le contrôle de congestion.

intéressant et, d'autre part, il est essentiel que l'intensité cumulée des différents flux de paquets injectés dans le réseau ne dépasse pas la capacité de traitement des routeurs. L'algorithme d'évitement de congestion consiste à augmenter doucement le débit d'émission lorsque tout se passe bien puis à le diminuer drastiquement si une perte de paquet se produit. La perte de paquets, détectée par la réception de multiple acquitemments dupliqués, constitue un signal d'information de la congestion.

Puis, nous avons vu qu'il existait des dispositifs, appelés AQM, destinés à contrôler le phénomène de congestion. Localisés au niveau des routeurs, le principe de fonctionnement de tels algorithmes consiste à forcer la perte de paquets de sorte à réduire le trafic de la source correspondante. Nous avons ensuite évoqué l'émergence de nombreux travaux dédiés à l'utilisation du principe de rétroaction propre à l'Automatique pour la synthèse d'AQM efficaces assurant une certaine Qualité de Service. C'est ce dernier point que nous aborderons au Chapitre V. Mais avant cela, il est nécessaire de présenter *comment* nous étudierons la stabilité d'un tel système, affecté par le phénomène de retard. Ceci constitue l'objet des deux prochains chapitres.

Chapitre III

Elaboration de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

Nous proposons dans ce chapitre de développer différents critères d'analyse de stabilité pour les systèmes à retards variant dans le temps. Comme cela a été suggéré au premier chapitre, nous nous attaquons à ce problème suivant deux approches. Tout d'abord, nous considérerons la méthode classique de Lyapunov-Krasovskii, dans laquelle nous chercherons des fonctionnelles qui tiennent compte au mieux des informations disponibles sur le retard. Puis, dans un cadre plus original, nous établirons au chapitre suivant diverses conditions de stabilité fondées sur le principe de séparation quadratique, en fonction du modèle de retard. Dans les deux cas, nous nous efforcerons de développer progressivement la construction des résultats obtenus pour une présentation claire et précise de notre contribution.

III.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons débuté avec une présentation sur les systèmes à retards et les notions de stabilité qui s'y rapportent. Nous concentrons maintenant notre étude sur l'analyse des systèmes linéaires affectés par un retard discret variable $h(t)$. Si pour un retard constant de nombreuses techniques ont été proposées dans la littérature [68, 121, 126], dans le cas variant dans le temps les possibilités sont plus restreintes. Deux méthodes principales peuvent être dégagées : la méthode de Lyapunov et l'approche entrée-sortie faisant appel aux outils de robustesse (comme le théorème du faible gain et le principe des IQC) [58], [89]. Par conséquent, nous proposons logiquement d'exposer sur deux chapitres la présentation de notre contribution sur l'analyse de stabilité.

Ce premier chapitre est dédié à l'analyse de stabilité par la méthode de Lyapunov-Krasovskii. Comme cela a été mentionné au Chapitre I, dans cette approche l'enjeu repose sur deux points essentiels. D'une part, le choix de la fonctionnelle où il s'agit de résoudre le compromis entre pessimisme et complexité de calculs. D'autre part, les techniques de majoration mises en oeuvre pour borner les différents termes de la fonctionnelle et de sa dérivée afin d'obtenir une condition facile à tester. Partant d'une fonctionnelle commune, nous contribuerons au premier point par le biais de transformations du modèle de représentation d'un système à retard.

Pour commencer, nous réécrirons un résultat connu de la littérature, bâti sur une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii très classique (I.7). Ce premier critère servira de point de départ

pour le développement des différentes méthodes que nous proposons par la suite. Nous visons, par un travail de modélisation du système, à améliorer la pertinence de l'analyse. Pour cela, deux techniques sont envisagées. La première consiste à augmenter l'état du système pour prendre en compte la dérivée temporelle du modèle original [5], [7]. La seconde propose de faire intervenir dans la description du système, et donc dans la fonctionnelle, l'état retardé par des fractions du retard original [6]. Toutes deux ont pour objectif d'utiliser des informations supplémentaires sur le retard et d'explicitier les relations qui les lient au système. Pour chaque théorème développé, les critères de stabilité seront formulés en termes d'*Inégalités Matricielles Linéaires* (LMI) [24]. Ces conditions peuvent alors être résolues efficacement sous `Matlab` [117] (via l'interface `Yalmip` [109]) à l'aide de solveurs de programmation semi-définie positive tels que `SeDuMi` ou `LMILab` [154].

Remarque III.1. *Notons que, pour des raisons évidentes de clarté, l'ensemble des conditions de stabilité a été développé pour des systèmes affectés par un seul retard. Toutefois, elles peuvent aisément être étendues au cas de systèmes à multiples retards en appliquant indépendamment à chaque retard la même méthodologie. Bien entendu, dans ce cas cette méthode reste entachée d'un certain pessimisme car elle ne tient pas compte des interactions potentielles entre les retards.*

III.2 Augmentation du modèle

Au cours de ce chapitre, nous considérerons le système linéaire à retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)), & \forall t \geq 0, \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-h_{max}, 0], \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état instantané, $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes connues et ϕ est la condition initiale. Le retard, $h(t)$, est supposé être une fonction continue satisfaisant

$$0 \leq h(t) \leq h_{max}, \quad (\text{III.2})$$

où $h_{max} > 0$ peut être infini si aucune borne maximale n'est connue. De plus, nous ferons l'hypothèse que la fonction dérivée du retard $\dot{h}(t)$ est également bornée :

$$|\dot{h}(t)| \leq d \leq 1. \quad (\text{III.3})$$

III.2.1 Préliminaires

En premier lieu, nous commençons avec la présentation d'une condition de stabilité pour les systèmes à retard majoré fondée sur la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii introduite plus haut en (I.7). Il s'agit d'une reformulation d'un résultat récent, établi dans [71], [72] pour l'analyse de stabilité dite *delay dependent*¹ dans le cas des systèmes certains. Généralement, il s'agit de trouver, pour un système donné stable sans retard, la valeur maximale h_{max} du retard admissible telle que la stabilité soit préservée. Le Théorème III.1 a pour objectif d'exposer la méthodologie employée tout au long de cette partie et constituera le point de départ pour la suite de notre travail.

¹Terme anglais consacré pour l'étude de stabilité des systèmes à retard majoré.

Théorème III.1. *Etant donnés les scalaires $h_{max} > 0$ et $d \geq 0$, le système (III.1) est asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant (III.2) et (III.3), s'il existe des matrices définies positives P , Q_i où $i = \{1, 2\}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$S^{\perp T} \Gamma S^{\perp} < 0 \quad (\text{III.4})$$

avec

$$S = \begin{bmatrix} -1 & A & A_d & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\text{III.5})$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} h_{max}R & P & 0 & 0 \\ P & T & \frac{1}{h_{max}}R & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{max}}R & U & \frac{1}{h_{max}}R \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_{max}}R & V \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = Q_1 + Q_2 - \frac{1}{h_{max}}R, \\ U = -(1-d)Q_1 - \frac{2}{h_{max}}R, \\ V = -\frac{1}{h_{max}}R - Q_2, \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

et S^{\perp} est une matrice orthogonale² à S .

PREUVE : Introduisons la fonctionnelle candidate à Lyapunov-Krasovskii :

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x_t^T(0)Px_t(0) + \int_{-h(t)}^0 x_t^T(\theta)Q_1x_t(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h_{max}}^0 x_t^T(\theta)Q_2x_t(\theta)d\theta + \int_{t-h_{max}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{x}_t^T(s)R\dot{x}_t(s)dsd\theta. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Puisque P , Q_1 , Q_2 , R sont des matrices définies positives, nous pouvons conclure que pour un certain $\epsilon > 0$, la condition de positivité de la fonctionnelle $V(x_t) \geq \epsilon \|x_t(0)\|$ est satisfaite (cf. par exemple [68]). Il s'agit maintenant de montrer la décroissance de celle-ci le long des trajectoires du système i.e. $\dot{V}(x_t) < 0$. Le calcul de sa dérivée le long des trajectoires de (III.1) mène à

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Q_1x(t) - (1 - \dot{h}(t))x^T(t-h(t))Q_1x(t-h(t)) \\ &+ x^T(t)Q_2x(t) - x^T(t-h_{max})Q_2x(t-h_{max}) + h_{max}\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ &- \int_{t-h_{max}}^t \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Comme il a été remarqué dans [71], la dérivée de $\int_{t-h_{max}}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta$ est habituellement majorée par $h_{max}\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta$ et le terme $-\int_{t-h_{max}}^{t-h(t)} \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta$ est ignoré. Par conséquent, afin de réduire le pessimisme, il est plus intéressant de séparer le dernier terme de (III.8) en deux parties :

$$- \int_{t-h_{max}}^t \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta = - \int_{t-h_{max}}^{t-h(t)} \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(\theta)R\dot{x}(\theta)d\theta. \quad (\text{III.9})$$

²La matrice S^{\perp} , orthogonale à S , est telle que $SS^{\perp} = 0$. La définition d'une matrice orthogonale est détaillée en Annexe A.2.

Par application de l'inégalité de Jensen (cf Annexe A.4), (III.9) peut être bornée par :

$$\begin{aligned} - \int_{t-h_{max}}^{t-h(t)} \dot{x}^T(\theta) R \dot{x}(\theta) d\theta - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(\theta) R \dot{x}(\theta) d\theta &< -v^T(t) \frac{R}{h_{max}-h(t)} v(t) - w^T(t) \frac{R}{h(t)} w(t) \\ &< -v^T(t) \frac{R}{h_{max}} v(t) - w^T(t) \frac{R}{h_{max}} w(t) \end{aligned}$$

avec $v(t) = x(t-h(t)) - x(t-h_{max})$ et $w(t) = x(t) - x(t-h(t))$. Ainsi, après réorganisation des différents termes, nous avons $\dot{V}(x_t) < \xi^T(t) \Gamma \xi(t)$ avec Γ défini par (III.6) et

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-h_{max}) \end{bmatrix}. \quad (III.10)$$

Notons que le vecteur d'état étendu $\xi(t)$ permet de réécrire le système (III.1) sous la forme $S\xi(t) = 0$ où S est définie par (III.5). Le système (III.1) sera donc asymptotiquement stable si pour tout $\xi(t)$ tel que $S\xi(t) = 0$, l'inégalité $\xi^T(t) \Gamma \xi(t) < 0$ est vérifiée. La dernière étape de la démonstration fait appel au lemme de Finsler (cf. Annexe A.2) et montre que cette dernière condition est équivalente à $S^{\perp T} \Gamma S^{\perp} < 0$, où S^{\perp} est une matrice orthogonale à S . \diamond

Si l'on exprime S^{\perp} par

$$S^{\perp} = \begin{bmatrix} A & A_d & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

alors la condition (III.4) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + Q_1 + Q_2 & P A_d & 0 \\ A_d^T P & -(1-d)Q_1 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{h_{max}} \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}^T + h_{max} \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0.$$

Nous remarquons ainsi que si la LMI ci-dessus est faisable pour un $h_{max} > 0$ donné, alors la condition reste vraie pour tout retard inférieur à la borne maximale h_{max} . Le Théorème III.1 apporte donc bien une condition de stabilité pour les systèmes à retard majoré.

Remarque III.2. La condition (III.4) dépend des bornes sur le retard et ses variations (h_{max} et d) spécifiées par les contraintes (III.2)-(III.3). Dans le cas où le retard est inconnu, c'est-à-dire lorsque $h_{max} = \infty$, un cas particulier du Théorème III.1 consiste à annuler la matrice R pour donner une condition indépendante du retard. De même, si l'on pose $Q_1 = 0$ alors le critère résultant sera indépendant de l'amplitude des variations du retard.

Remarque III.3. Par application du lemme de projection (cf. Annexe A.3), on observe que la condition (III.4) peut s'écrire

$$\Gamma + X S + S^T X^T < 0,$$

où X est une nouvelle variable de décision, appelée multiplicateur ou encore free weighting matrices en anglais. Ces deux conditions étant équivalentes, nous pouvons en déduire que les degrés de

liberté apportés par la seconde ne sont d'aucune utilité. Les auteurs de [64] ont montré que si les multiplieurs étaient superflus en analyse, ils pouvaient cependant s'avérer intéressants dans les problèmes de synthèse et d'analyse robuste. Ces multiplieurs sont à rapprocher de plusieurs techniques utilisant des matrices de pondération appliquées comme suit.

Nous avons vu au paragraphe I.3.1 que, à partir d'une seule fonctionnelle, divers résultats peuvent être obtenus selon les techniques utilisées pour établir la condition de stabilité. Certains travaux [59], [160] proposent d'ajouter un terme identiquement nul, issu de la formule de Leibniz-Newton, lors du calcul de la dérivée (III.8) :

$$2[x^T(t)Y_1 + x^T(t-h(t))Y_2] \left[x(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t-h(t)) \right] = 0.$$

Cette technique permet d'introduire, après factorisation des signaux, de nouvelles variables de décisions Y_1 et Y_2 . Néanmoins, comme cela a été évoqué dans la remarque ci-dessus, la pertinence d'une telle technique est discutable puisqu'aucune information n'est véritablement apportée. Plus intéressant, dans l'article [72] les auteurs proposent d'appliquer la fonctionnelle (I.7) non pas à l'état $x(t)$ mais à un vecteur étendu, composé de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$. C'est parallèlement à ces travaux que nous avons développé les résultats présentés dans cette section. Alors que certaines expressions des vecteurs de la fonctionnelle ont été omises dans [72], nous essaierons d'explicitier toutes les relations liants les différents signaux afin d'exploiter au mieux cette modélisation.

III.2.2 Modèle augmenté

L'idée proposée dans ce paragraphe est d'obtenir une meilleure caractérisation des systèmes à retards par un travail de modélisation. Inspirés par les travaux de [42] concernant les systèmes linéaires incertains, nous considérons maintenant un modèle augmenté, composé du système original (III.1) et de sa dérivée. Dans le cas des systèmes à retards, cette technique permet de mettre en valeur les relations existantes entre le retard $h(t)$, ses variations $\dot{h}(t)$ et l'état $x(t)$. Dérivons le système (III.1) :

$$\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + (1 - \dot{h}(t))A_d\dot{x}(t - h(t)).$$

Si l'on considère le modèle artificiellement augmenté

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_dx(t - h(t)), \\ \ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + (1 - \dot{h}(t))A_d\dot{x}(t - h(t)), \end{cases}$$

avec l'état augmenté associé

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

et en spécifiant la relation entre les deux composantes de $z(t)$ par l'égalité $[\mathbf{1} \ 0]\dot{z}(t) = [0 \ \mathbf{1}]z(t)$, nous obtenons le nouveau système :

$$E\dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{A}_dz(t - h(t)), \quad (\text{III.12})$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & (1 - \dot{h}(t))A_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette nouvelle modélisation conduit donc à un système à retard descripteur [54] et variant dans le temps, plus difficile a priori à manipuler. La première idée consiste à réutiliser la même fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (III.7) que précédemment. Le paramètre variant $\dot{h}(t)$ sera, quant à lui, modélisé comme une incertitude polytopique. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème III.2 ([5], [7]). *Soient les matrices \mathcal{A} , \mathcal{B} et Θ_2 telles que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\dot{h}) &= \Theta_1^T P \Theta_2(\dot{h}) + \Theta_2^T(\dot{h}) P \Theta_1 + \Theta_3^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & -(1 - \dot{h})Q_1 \end{bmatrix} \Theta_3 + \Theta_4^T \begin{bmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & -Q_2 \end{bmatrix} \Theta_4, \\ \mathcal{B} &= \Theta_5^T \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \Theta_5 \text{ et } \Theta_2(\dot{h}) = \begin{bmatrix} A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ A^2 & AA_d & (1 - \dot{h})A_d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_3 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Theta_4 &= \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \Theta_5 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & -\mathbb{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Soient les scalaires $h_{max} > 0$ et $d \geq 0$, le système (III.1) est asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant (III.2) et (III.3), s'il existe des matrices définies positives P , Q_j avec $j = \{1, 2\}$ et $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ telles que la LMI suivante soit vérifiée pour $i = \{1, 2\}$:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(i)} - \frac{1}{h_{max}} \mathcal{B} & \Theta_2^{(i)T} R \\ R \Theta_2^{(i)} & -\frac{1}{h_{max}} R \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.15})$$

où $\mathcal{A}^{(i)}$ et $\Theta_2^{(i)}$ pour $i = \{1, 2\}$ sont les deux sommets des matrices $\mathcal{A}(\dot{h}) \in \mathbb{R}^{5n \times 5n}$ et $\Theta_2(\dot{h}) \in \mathbb{R}^{2n \times 5n}$ respectivement, en remplaçant le terme $\dot{h}(t)$ par d_i , $i = \{1, 2\}$ correspondant aux bornes de $\dot{h}(t)$: $d_1 = d$ et $d_2 = -d$.

PREUVE : Reprenons la fonctionnelle (III.7) en l'adaptant au vecteur d'état augmenté $z(t)$,

$$V(z_t) = z_t^T(0) P z_t(0) + \int_{-h(t)}^0 z_t^T(\theta) Q_1 z_t(\theta) d\theta + \int_{-h_{max}}^0 z_t^T(\theta) Q_2 z_t(\theta) d\theta + \int_{-h_{max}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{z}_t^T(s) R \dot{z}_t(s) ds d\theta. \quad (\text{III.16})$$

En suivant la même ligne directrice que celle développée dans la preuve du Theoreme III.1, la dérivée de la fonctionnelle (III.16) peut être bornée par $\dot{V}(z_t) \leq \psi(t)^T \Gamma(\dot{h}) \psi(t)$ où

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ z(t) \\ z(t-h(t)) \\ z(t-h_{max}) \end{bmatrix}, \quad \Gamma(\dot{h}) = \begin{bmatrix} h_{max}R & P & 0 & 0 \\ P & T & \frac{1}{h_{max}}R & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{max}}R & U & \frac{1}{h_{max}}R \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_{max}}R & V \end{bmatrix} \quad (III.17)$$

avec

$$\begin{aligned} T &= Q_1 + Q_2 - \frac{1}{h_{max}}R, \\ U &= -(1-\dot{h}(t))Q_1 - \frac{2}{h_{max}}R, \\ V &= -\frac{1}{h_{max}}R - Q_2. \end{aligned}$$

Le système (III.12) sera donc asymptotiquement stable si pour tout $\psi(t)$ tel que $S(\dot{h})\psi(t) = 0$ avec

$$S(\dot{h}) = \begin{bmatrix} -E & \bar{A} & \bar{A}_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (III.18)$$

l'inégalité $\psi(t)^T \Gamma(\dot{h}) \psi(t) < 0$ est vérifiée. D'après le lemme de Finsler, cette dernière relation est équivalente à

$$S^{\perp T}(\dot{h}) \Gamma(\dot{h}) S^{\perp}(\dot{h}) < 0 \quad (III.19)$$

où $S^{\perp}(\dot{h})$ est une matrice orthogonale à $S(\dot{h})$ donnée, par exemple, par

$$S^{\perp}(\dot{h}) = \begin{bmatrix} A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ AA & AA_d & (1-\dot{h})A_d & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}. \quad (III.20)$$

Le développement de l'expression (III.19) avec (III.20) mène à la condition

$$\mathcal{A}(\dot{h}) - \frac{1}{h_{max}}\mathcal{B} + h_{max}\Theta_2^T(\dot{h})R\Theta_2(\dot{h}) < 0 \quad (III.21)$$

où les matrices \mathcal{A} , \mathcal{B} et Θ_2 sont définies en (III.13) et (III.14). En appliquant le complément de Schur à la dernière relation conduit finalement à l'inégalité

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\dot{h}) - \frac{1}{h_{max}}\mathcal{B} & \Theta_2^T(\dot{h})R \\ R\Theta_2(\dot{h}) & -\frac{1}{h_{max}}R \end{bmatrix} < 0. \quad (III.22)$$

A ce stade, la condition de stabilité (III.22) dépend du paramètre variant $\dot{h}(t)$ et n'est donc pas numériquement exploitable. Sachant que $\dot{h}(t)$ est soumis à la contrainte (III.3), il existe α_1 et α_2 avec $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 1$ tels que $\dot{h}(t)$ s'exprime par $\dot{h}(t) = \alpha_1(t)d - \alpha_2(t)d$. Puisque l'inégalité (III.22) est linéaire en $\dot{h}(t)$, l'ensemble incertain résultant est décrit par un polytope. Les deux sommets de cet ensemble sont associés aux bornes inférieure et supérieure du paramètre

incertain. Par conséquent, la condition (III.22) devient :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathcal{A}^{(i)} - \frac{1}{h_{max}} \mathcal{B} & \sum_{i=1}^2 \alpha_i \Theta_2^{(i)T} R \\ R \sum_{i=1}^2 \alpha_i \Theta_2^{(i)} & -\frac{1}{h_{max}} R \end{bmatrix} < 0 \quad (III.23)$$

où $\alpha_i(t) \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^2 \alpha_i(t) = 1$, $\mathcal{A}^{(i)}$ et $\Theta_2^{(i)}$ pour $i = \{1, 2\}$ sont les sommets des matrices variantes $\mathcal{A}(\dot{h})$ et $\Theta_2(\dot{h})$ respectivement pour $\dot{h}(t) \in [-d, d]$. La propriété de convexité de l'ensemble des contraintes (III.23) pour tout $\alpha_i(t) \in [0, 1]$ permet de ramener le problème à celui de la faisabilité des "extrémités"

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(i)} - \frac{1}{h_{max}} \mathcal{B} & \Theta_2^{(i)T} R \\ R \Theta_2^{(i)} & -\frac{1}{h_{max}} R \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2. \quad (III.24)$$

En d'autres termes, l'inégalité (III.22) doit être vérifiée seulement pour ses sommets (III.24). Finalement, la stabilité asymptotique du système (III.12) est garantie si les deux LMI (III.24) sont satisfaites avec les mêmes variables de décisions. Pour n'importe quelle condition initiale, l'état $z(t)$ converge donc asymptotiquement vers zéro, en particulier sa composante $x(t)$. Ce qui nous permet de conclure quant à la stabilité du système original (III.1). \diamond

Remarque III.4. *A partir de l'expression (III.21), on constate aisément que si la condition (III.24) est vérifiée pour h_{max} alors le système est stable pour $h(t) \leq h_{max}$. Le Théorème III.2 évalue donc bien une borne maximale sur le retard admissible.*

Remarque III.5. *Notons que si l'on assigne, respectivement, à P , Q_1 , Q_2 et R une structure particulière $\begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Q_{111} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Q_{211} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pour la fonctionnelle (III.16) on retrouve les résultats du Théorème III.1 et de [71], [72]. De plus, si Q_{211} est fixé à 0 et que le second terme intégral de (III.9) est négligé, les critères classiques de la littérature [55, 88, 160] sont obtenus. Par conséquent, la condition proposée ici est nécessairement moins conservative dans le sens où les résultats seront, dans le pire des cas, équivalents à la plupart de ceux proposés dans la littérature concernant la méthode de Lyapunov.*

III.2.3 Vers une nouvelle fonctionnelle

La nouvelle modélisation des systèmes à retard (III.12) tient compte de la dynamique du vecteur d'état dérivé $\dot{x}(t)$ et introduit le signal $\ddot{x}(t)$. Il convient de compléter la fonctionnelle (III.16) par un terme additionnel approprié lié à ce signal supplémentaire. Nous proposons alors une fonctionnelle candidate à Lyapunov-Krasovskii sous la forme :

$$\begin{aligned} V(z_t) &= z_t^T(0) P z_t(0) + \int_{-h(t)}^0 z_t^T(\theta) Q z_t(\theta) d\theta \\ &+ \int_{-h_{max}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{z}_t^T(s) R \dot{z}_t(s) ds d\theta + \int_{-h_{max}}^0 \int_s^0 \int_u^0 \ddot{x}_t^T(\theta) W \ddot{x}_t(\theta) d\theta duds \end{aligned} \quad (III.25)$$

Un tel choix de fonctionnelle pour l'étude de stabilité du système (III.1) permet d'établir le résultat suivant :

Théorème III.3 ([5], [7]). *Soient les scalaires $h_{max} > h_{min} > 0$, $d \geq 0$, le système (III.1) est asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant les hypothèses $h_{min} \leq h(t) \leq h_{max}$*

et (III.3), s'il existe des matrices définies positives $P, Q, R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, une matrice définie positive $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $X \in \mathbb{R}^{7n \times 4n}$ telles que la LMI suivante soit satisfaite pour $i = \{1, \dots, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \mathcal{E}^T \Theta_3^{(i)T} R & \mathcal{E}^T \Theta_3^{(i)T} E_2^T W \\ R \Theta_3^{(i)} \mathcal{E} & -\frac{1}{h_{max}} R & 0 \\ W E_2 \Theta_3^{(i)} \mathcal{E} & 0 & -\frac{2}{h_{max}^2} W \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.26})$$

$$\Gamma = \mathcal{A}^{(i)} + X S^{(i)} + S^{(i)T} X^T$$

où $\mathcal{A}^{(i)}$, $\Theta_3^{(i)}$ et $S^{(i)}$ pour $i = \{1, \dots, 4\}$ sont les sommets des matrices $\mathcal{A}(h, \dot{h}) \in \mathbb{R}^{7n \times 7n}$, $\Theta_3(\dot{h}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $S(h, \dot{h}) \in \mathbb{R}^{4n \times 7n}$ respectivement, en remplaçant les termes $h(t)$ par h_{min} et h_{max} et $\dot{h}(t)$ par d et $-d$. \mathcal{A} , S , \mathcal{E} et Θ_3 sont définies par

$$S(h, \dot{h}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 & -h\mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & -\mathbb{1} & 0 & -h\mathbb{1} & 0 & 0 \\ A & A_d & 0 & -\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ A^2 & AA_d & (1 - \dot{h})A_d & 0 & -\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \Theta_3(\dot{h}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1 - \dot{h})A_d & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}(h, \dot{h}) = N^T M N - \mathcal{E}^T \Theta_3^T(\dot{h}) T \Theta_3(\dot{h}) \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0_{2n} & \mathbb{1}_{2n} & 0_{2n} & 0_{n \times 2n} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.27})$$

PREUVE : Tout d'abord, nous pouvons vérifier que pour P, Q, R et W définis positifs, la fonctionnelle est positive, c'est-à-dire pour $\epsilon > 0$ assez petit $V(x_t) \geq \epsilon \|x(0)\|^2$. Pour la suite des calculs, nous avons besoin de définir les matrices $E_1 = [\mathbb{1}_n \ 0_n]$ et $E_2 = [0_n \ \mathbb{1}_n]$. Le calcul de la dérivée de la fonctionnelle (III.25) conduit à

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2\dot{z}^T(t) P z(t) + z^T(t) Q z(t) \\ & - (1 - \dot{h}(t)) z^T(t - h(t)) Q z(t - h(t)) + h_{max} \dot{z}^T(t) R \dot{z}(t) \\ & - \int_{-h(t)}^0 z_t(\theta)^T R z_t(\theta) d\theta + \frac{h_{max}^2}{2} \dot{z}^T E_2^T W E_2 \dot{z} - \int_{-h(t)}^0 \int_s^0 x_t(\theta)^T W x_t(\theta) d\theta ds. \end{aligned}$$

Celle-ci peut être majorée en appliquant l'inégalité de Jensen aux deux intégrales

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2\dot{z}^T(t) P z(t) + z^T(t) Q z(t) - (1 - \dot{h}(t)) z^T(t - h(t)) Q z(t - h(t)) \\ & + h_{max} \dot{z}^T(t) R \dot{z}(t) - \int_{-h(t)}^0 z_t(\theta)^T d\theta \frac{R}{h(t)} \int_{-h(t)}^0 z_t(\theta) d\theta \\ & + \frac{h_{max}^2}{2} \dot{z}^T E_2^T W E_2 \dot{z} - \int_{-h(t)}^0 \int_s^0 x_t(\theta)^T d\theta \frac{W}{h^2(t)/2} \int_{-h(t)}^0 \int_s^0 x_t(\theta) d\theta ds, \end{aligned}$$

ou encore de manière équivalente

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2\dot{z}^T(t) P z(t) + z^T(t) Q z(t) \\ & - (1 - \dot{h}(t)) z^T(t - h(t)) Q z(t - h(t)) + h_{max} \dot{z}^T(t) R \dot{z}(t) \\ & - [z(t) - z(t - h(t))]^T \frac{R}{h(t)} [z(t) - z(t - h(t))] + \frac{h_{max}^2}{2} \dot{z}^T E_2^T W E_2 \dot{z} \\ & - [h(t) E_1 \dot{z}(t) - E_1(z(t) - z(t - h(t)))]^T \frac{W}{h^2(t)/2} [h(t) E_1 \dot{z}(t) - E_1(z(t) - z(t - h(t)))]. \end{aligned}$$

Cependant, cette dernière inégalité est non linéaire en le retard $h(t)$. Pour remédier à cette difficulté, nous introduisons les signaux supplémentaires

$$\delta_1(t) = \frac{z(t) - z(t - h(t))}{h(t)} \text{ et } \delta_2(t) = \dot{z}(t) - \delta_1(t), \quad (\text{III.28})$$

et réécrivons l'inégalité sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2\dot{z}^T(t)Pz(t) + z^T(t)Qz(t) - (1 - \dot{h}(t))z^T(t - h(t))Qz(t - h(t)) \\ & + h_{max}\dot{z}^T(t)R\dot{z}(t) - h(t)\delta_1^T(t)R\delta_1(t) + \frac{h_{max}^2}{2}\dot{z}^T E_2^T W E_2 \dot{z} - 2\delta_2^T(t)E_1^T W E_1 \delta_2(t). \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Ces signaux intermédiaires linéarisants seront ensuite explicités lors de la définition de la matrice S . Ainsi, cette linéarisation n'introduit aucun pessimisme. Avant de poursuivre, il est nécessaire de définir les deux vecteurs étendus :

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ z(t - h(t)) \\ \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } \psi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t - h(t)) \\ \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.30})$$

Nous pouvons alors factoriser à droite et à gauche par $\xi(t)$ le membre de droite de l'inéquation (III.29) pour obtenir :

$$\dot{V} \leq \xi^T(t) \underbrace{\begin{bmatrix} Q & P & 0 & 0 & 0 \\ P & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \dot{h})Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -hR & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2E_1^T W E_1 \end{bmatrix}}_M \xi(t) \quad (\text{III.31})$$

avec $T = h_{max}R + \frac{h_{max}^2}{2}E_2^T W E_2$. Puis, à partir des expressions de $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$, l'inégalité peut de nouveau être reformulée par

$$\dot{V} \leq \psi^T(t)N^T M N \psi(t)$$

où M est la matrice du membre de droite de (III.31) et

$$N = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0_{2n} & 0_{2n} & 0_{2n \times n} \\ \Theta_2 & \Theta_3(\dot{h}) & 0_{2n} & 0_{2n \times n} \\ 0_{2n \times n} & \mathbb{1}_{2n} & 0_2 & 0_{2n} \\ 0_{2n \times n} & 0_{2n} & \mathbb{1}_2 & 0_{2n} \\ 0_{2n \times n} & 0_{2n} & 0_2 & \mathbb{1}_{2n} \end{bmatrix} \text{ avec } \Theta_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A & A_d \end{bmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} A & A_d \\ A^2 & AA_d \end{bmatrix},$$

et $\Theta_3(\dot{h})$ définie par (III.27). En résumé, nous pouvons montrer la stabilité du système (III.12), et par voie de conséquence celle du système (III.1), si l'inégalité $\psi^T(t)N^T M N \psi(t) < 0$ sous la contrainte $S(h, \dot{h})\psi(t) = 0$ avec S exprimée par (III.27) est satisfaite. Puis, le lemme de Finsler montre que ce problème peut se ramener à l'existence d'une matrice $X \in \mathbb{R}^{7n \times 4n}$ telle que :

$$\mathcal{A}(h, \dot{h}) + X S(h, \dot{h}) + S^T(h, \dot{h})X^T + \mathcal{E}^T \Theta_3^T(\dot{h}) T \Theta_3(\dot{h}) \mathcal{E} \leq 0$$

avec \mathcal{A} et \mathcal{E} définies par (III.27). Finalement, il reste à appliquer deux fois le complément de Schur pour retrouver la condition (III.26) du Théorème III.3. En adoptant les mêmes arguments que ceux développés dans la preuve du Théorème III.2, les paramètres $h(t)$ et $\dot{h}(t)$ (apparaissant linéairement dans (III.26)) peuvent être modélisés comme des incertitudes polytopique. Le polytope est donc constitué de quatre sommets associés aux différentes combinaisons linéaires des bornes sur les deux paramètres. Il suffit alors de tester la condition (III.26) sur les quatre sommets de l'ensemble incertain. \diamond

Remarque III.6. *Par l'approche polytopique, le Théorème III.3 garantit la stabilité pour tout retard compris dans un intervalle $h(t) \in [h_{min}, h_{max}]$. Il convient donc pour l'analyse de stabilité de systèmes soumis à un modèle de retard de type borné (cf. Section I.2.2). Par contre, contrairement aux résultats de la littérature [58, 72, 160], notre critère ne requiert pas a priori la stabilité du système lorsque le retard est nul. Nous verrons dans la Section IV.4 quelques exemples pour illustrer notre propos.*

III.2.4 Stabilité robuste

En pratique, les matrices A et A_d composant le système (III.1) peuvent ne pas être connues précisément et sont généralement affectées d'une incertitude. Nous souhaitons étendre les précédents résultats à une classe de systèmes incertains (cf. Section I.2.3) et considérons maintenant les modèles incertains polytopiques :

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t - h(t)), \quad (\text{III.32})$$

avec $h(t)$ satisfaisant les contraintes $0 \leq h_{min} \leq h(t) \leq h_{max}$ et (III.3), $[A(\alpha) \quad A_d(\alpha)] = \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i [A^{[i]} \quad A_d^{[i]}]$ où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\eta})$ appartient à l'ensemble $\Xi = \{\alpha_i \geq 0 \text{ tels que } \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i = 1\}$. Les matrices incertaines sont supposées invariantes (α est donc constant). Cette dernière hypothèse est nécessaire pour pouvoir utiliser la technique d'augmentation du modèle telle qu'elle est exposée. Dans le cas de paramètres variant dans le temps, elle reste applicable mais est, cependant, plus délicate à manipuler et requiert en outre des informations sur les variations de l'incertitude (expression ou domaine des valeurs admissibles de $\dot{\alpha}$). Nous modélisons alors le système (III.32) par un second système augmenté de la forme

$$E\dot{z}(t) = \bar{A}(\alpha)z(t) + \bar{A}_{d1}(\alpha)z(t - h(t)) + \bar{A}_{d2}(\alpha)w(t), \quad (\text{III.33})$$

avec

$$E = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{d1}(\alpha) = \begin{bmatrix} A_d(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_d(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{d2}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_d(\alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

et $w(t) = -\dot{h}(t)z(t - h(t))$. Le théorème suivant fournit un critère de stabilité robuste sur un intervalle de retard.

Théorème III.4 ([7]). *Soient les scalaires positifs $h_{max} \geq h_{min} \geq 0$ et $d \geq 0$, le système (III.32) est robustement asymptotiquement stable pour tout retard $h(t) \in [h_{min}, h_{max}]$ satisfaisant (III.3) et $\forall \alpha \in \Xi$, s'il existe des matrices définies positives $P^{[i]}, Q^{[i]}, Q_m^{[i]}, R^{[i]} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $W^{[i]} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et*

une matrice $X \in \mathbb{R}^{14n \times 9n}$ telles que la LMI suivante soit vérifiée pour $i = \{1, \dots, \eta\}$, $j = \{1, 2\}$ et $k = \{1, 2\}$:

$$\Gamma^{[i]} + XS^{[i][j][k]} + S^{[i][j][k]T}X^T < 0 \quad (\text{III.34})$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma^{[i]} &= \text{diag} \left(\begin{bmatrix} Q^{[i]} & P^{[i]} \\ P^{[i]} & T^{[i]} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -(1-d)Q^{[i]} - \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} & \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} \\ \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} & -Q_m^{[i]} - \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} \end{bmatrix}, 0_{2n}, -h_{max}R^{[i]}, -2E_1^T W^{[i]} E_1 \right), \\ T^{[i]} &= h_{max}R^{[i]} + \frac{h_{max}^2}{2} E_2^T W^{[i]} E_2, \\ S^{[i][j][k]} &= \begin{bmatrix} \bar{A}^{[i]} & -E & \bar{A}_{d1}^{[i]} & 0 & \bar{A}_{d2}^{[i]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}^{[k]} \mathbb{1} & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 & 0 & -h^{[j]} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^{[i]} = \begin{bmatrix} A^{[i]} & 0 \\ 0 & A^{[i]} \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{d1}^{[i]} &= \begin{bmatrix} A_d^{[i]} & 0 \\ 0 & A_d^{[i]} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{d2}^{[i]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_d^{[i]} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} h^{[1]} = h_{min} \text{ et } h^{[2]} = h_{max} \\ \dot{h}^{[1]} = -d \text{ et } \dot{h}^{[2]} = d \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

avec $A^{[i]}$ et $A_d^{[i]}$ pour $i = \{1, \dots, \eta\}$ sont, respectivement, les sommets des matrices $A(\alpha)$ et $A_d(\alpha)$ associés à l'incertitude polytopique.

PREUVE : La démonstration de ce théorème est donnée en Annexe B.1. Elle repose sur la recherche d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendant des paramètres de la forme

$$\begin{aligned} V(z_t, \alpha) &= z_t^T(0)P(\alpha)z_t(0) + \int_{-h(t)}^0 z_t^T(\theta)Q(\alpha)z_t(\theta)d\theta + \int_{-h_{max}}^0 z_t^T(\theta)Q_m(\alpha)z_t(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h_{max}}^0 \int_{\theta}^0 z_t^T(s)R(\alpha)\dot{z}_t(s)dsd\theta + \int_{-h_{max}}^0 \int_s^0 \int_u^0 \ddot{x}_t^T(\theta)W(\alpha)\ddot{x}_t(\theta)d\theta duds \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

pour le système augmenté (III.33). Les matrices définies positives $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$ et $R(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dépendent de l'incertitude constante α [133], [134]. Il s'agit ensuite d'établir la condition de stabilité robuste, c'est-à-dire pour tout $\alpha \in \Xi$, à partir de la condition de négativité de la dérivée de $V(z_t, \alpha)$ le long des trajectoires de l'état étendu $z(t)$. \diamond

III.3 Translation temporelle

Nous proposons maintenant une seconde technique pour la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Elle consiste à prendre en compte des valeurs instantanées supplémentaires de l'état, retardées d'une fraction du retard total $h(t)$. L'idée sous-jacente, initialement exploitée par [62], [63] pour le cas des retards constants, est de "reconstituer" l'ensemble de l'état x_t du système par discrétisation. En effet, les fonctionnelles établissent généralement des relations entre les valeurs extrêmes $x(t)$ et $x(t - h(t))$ de l'état. Le principe consiste donc à introduire des valeurs intermédiaires par translation temporelle du signal $x(t)$. Il convient pour cela de définir l'opérateur approprié :

$$\mathcal{D}_{\alpha h(t)} : x(t) \rightarrow x(t - \alpha h(t))$$

où $\alpha \in [0, 1]$ est un scalaire rationnel. Il est montré dans [62] que l'application redondante d'un tel opérateur permettait de réduire le conservatisme de l'analyse. Cependant, si dans le cas des

retards constants le décalage temporel permet une discrétisation uniforme et le recouvrement de l'état retardé du système $x(t-h)$, le cas des retards variant est plus délicat à traiter [6]. Par exemple, le décalage d'une moitié de retard donne :

$$\begin{array}{ll} \text{Cas des retards constants} & x(t) \xrightarrow{\mathcal{D}_{h/2}} x(t - \frac{h}{2}) \xrightarrow{\mathcal{D}_{h/2}} x(t - h), \\ \text{Cas des retards variant} & x(t) \xrightarrow{\mathcal{D}_{h(t)/2}} x(t - \frac{h(t)}{2}) \xrightarrow{\mathcal{D}_{h(t)/2}} x(t - \frac{h(t)}{2} - \frac{h(t-h(t)/2)}{2}). \end{array}$$

Ainsi, dans le premier cas, on comprend que si l'on opère N fois une translation de $\frac{1}{N}h$ nous retrouverons le signal $x(t-h)$, utile pour la description du système. Par contre, la nature non stationnaire du retard dans le second cas mène à un signal plus "exotique" (pour le cas $N=2$: $x(t - \frac{h(t)}{2} - \frac{h(t-h(t)/2)}{2})$). Cette particularité nous amène aux interrogations : *Que représente ce signal ? Peut-on établir un lien avec le signal $x(t-h(t))$ propre au système ?* Nous proposons, pour faire face à cette difficulté, d'introduire un opérateur ∇ qui caractérisera l'écart entre le signal obtenu et $x(t-h(t))$ afin d'établir une description complète du système (III.1).

Cette approche, liée à l'introduction de signaux intermédiaires, tient compte des valeurs de l'état retardé par un retard différent de celui du modèle original. A coté de nos travaux [6], nous pouvons citer ceux de [59] dans lesquelles le retard n'est pas "décalé" dans le temps mais "coupé". Plus précisément, l'intervalle de définition du retard est divisé en deux $h(t) \in [h_{min}, h_2] \cup [h_2, h_{max}]$ et le système est redéfini en un nouveau système commutatif :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \chi_{[h_{min}, h_2]}(h(t))A_d x(t-h(t)) + (1 - \chi_{[h_{min}, h_2]}(h(t)))A_d x(t-h(t))$$

$$\text{où } \chi_{[h_{min}, h_2]}(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \in [h_{min}, h_2] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La stabilité d'un tel système est ensuite étudiée à partir de la fonctionnelle (I.7) en choisissant des matrices de Lyapunov dépendantes du retard, plus précisément, constantes par intervalle. Dans notre approche, nous cherchons plutôt à mettre en avant des relations de redondances caractérisant l'état du système.

III.3.1 Translation de $\frac{h(t)}{2}$

Nous allons, dans un premier temps, reprendre l'exemple ci-dessus afin d'illustrer clairement la méthodologie avant d'exposer le cas général au paragraphe suivant. Tout d'abord, définissons certains signaux utiles pour la suite :

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x\left(t - \frac{h(t)}{2}\right), \\ x_1(t) &= x\left(t - \frac{h(t)}{2} - \frac{h(t-h(t)/2)}{2}\right). \end{aligned} \tag{III.37}$$

Au vu de $x_1(t)$, il n'y a a priori aucune liaison directe avec l'état instantané retardé $x(t-h(t))$. Afin de quantifier la relation entre les deux signaux, nous introduisons l'opérateur,

$$\nabla : \begin{cases} L_2 & \rightarrow L_2 \\ x(t) & \rightarrow \int_{t-h(t)}^{t - \frac{h(t)}{2} - \frac{h(t-h(t)/2)}{2}} x(u) du \end{cases} \tag{III.38}$$

qui caractérise l'écart entre $x_1(t)$ et $x(t-h(t))$. Notons que pour un retard constant, ∇ est réduit

à l'opérateur nul et souligne que dans ce cas $x_1(t) = x(t - h(t))$. Un moyen pour analyser cet écart est d'évaluer la norme L_2 induite de ce nouvel opérateur :

$$\|\nabla(x)\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty \left(\int_{t-h(t)}^{t-\frac{h(t)}{2}-\frac{h(t-h(t))/2}{2}} x(u) du \right)^2 dt = \int_0^\infty \left(\int_{t-h(t)}^{t-h(t)+\frac{1}{2}\delta(t)} x(u) du \right)^2 dt$$

avec $\delta(t) = h(t) - h(t - \frac{h(t)}{2})$. Cette dernière quantité peut, quant à elle, être majorée par :

$$\delta(t) = \int_{t-\frac{h(t)}{2}}^t \dot{h}(u) du \leq \int_{t-\frac{h(t)}{2}}^t d du \leq \frac{h_{max}d}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Ensuite, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (cf. Annexe A.5), nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned} \|\nabla(x)\|_{L_2}^2 &\leq \int_0^\infty \frac{h_{max}d}{4} \int_{t-h(t)}^{t-h(t)+\frac{1}{2}\delta(t)} \|x(u)\|^2 du dt, \quad \text{si } \delta(t) \geq 0, \\ &\leq \int_0^\infty \frac{h_{max}d}{4} \int_0^{h_{max}d/4} \|x(u+t-h(t))\|^2 du dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\nabla(x)\|_{L_2}^2 &\leq \int_0^\infty \frac{h_{max}d}{4} \int_{t-h(t)+\frac{1}{2}\delta(t)}^{t-h(t)} \|x(u)\|^2 du dt, \quad \text{si } \delta(t) < 0, \\ &\leq \int_0^\infty \frac{h_{max}d}{4} \int_{-h_{max}d/4}^0 \|x(u+t-h(t))\|^2 du dt \end{aligned}$$

Le changement de variables $s = u + t - h(t)$ conduit, dans les deux cas, à

$$\begin{aligned} \|\nabla(x)\|_{L_2}^2 &\leq \frac{h_{max}d}{4} \frac{1}{1-d} \int_0^{h_{max}d/4} \int_0^\infty \|x(s)\|^2 ds du \\ &\leq \left(\frac{h_{max}d}{4} \right)^2 \frac{1}{1-d} \|x\|_{L_2}^2. \end{aligned} \tag{III.39}$$

La quantité $\frac{h_{max}d}{4} \sqrt{\frac{1}{1-d}}$ constitue donc une borne sur la norme L_2 induite de l'opérateur ∇ . Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème qui suit.

Théorème III.5 ([6]). *Soient les scalaires $h_{max} > 0$ et $0 \leq d \leq 1$, le système (III.1) est asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant (III.2) et (III.3), s'il existe des matrices définies positives $P, Q_0, Q_2, R_0, R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice définie positive $Q_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ telles que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$S^{\perp T} \Gamma S^{\perp} < 0 \tag{III.40}$$

avec

$$S = \begin{bmatrix} -1 & A & 0_n & 0_n & A_d \end{bmatrix} \text{ et} \quad (\text{III.41})$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} U & P & 0 & 0 & 0 \\ P & V & \frac{2}{h_{max}}R_1 & 0 & \frac{1}{h_{max}}R_0 \\ 0 & \frac{2}{h_{max}}R_1 & -\frac{2}{h_{max}}R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q_2 & Q_2 \\ 0 & \frac{1}{h_{max}}R_0 & 0 & Q_2 & W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0_{n \times 2n} & 0_{n \times 2n} \\ 0_{2n \times n} & Q_1 & 0_{2n \times 2n} \\ 0_{2n \times n} & 0_{2n \times 2n} & 0_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

$$+ \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & 0_{2n \times 2n} & 0_{2n \times n} \\ 0_{2n \times 2n} & -(1-d/2)Q_1 & 0_{2n \times n} \\ 0_{n \times 2n} & 0_{n \times 2n} & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$U = \left(\frac{h_{max}d}{4}\right)^2 \frac{1}{1-d}Q_2 + \frac{h_{max}}{2}R_1 + h_{max}R_0,$$

$$V = Q_0 - \frac{2}{h_{max}}R_1 - \frac{1}{h_{max}}R_0,$$

$$W = -(1-d)Q_0 - Q_2 - \frac{1}{h_{max}}R_0.$$

S^\perp est une matrice orthogonale à S .

PREUVE : L'introduction de nouveaux signaux associés à des valeurs discrètes du retard θ de l'état $x_t(\theta)$ nécessite l'élaboration d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii appropriée. Nous proposons une fonctionnelle de la forme (III.43), composée des termes traditionnels V_1 , V_3 , V_5 (cf. fonction (III.7), [55, 64, 160]) et des termes V_2 , V_4 incorporant les valeurs instantanées utilisées de x_t (cf [63] pour le cas des retards constants) :

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) + V_4(x_t) + V_5(x_t) \quad (\text{III.43})$$

où

$$V_1(x_t) = x^T(t)Px(t), \quad (\text{III.44})$$

$$V_2(x_t) = \int_{t-\frac{h(t)}{2}}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\frac{h(s)}{2}) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s-\frac{h(s)}{2}) \end{bmatrix} ds, \quad (\text{III.45})$$

$$V_3(x_t) = \int_{t-h(t)}^t x^T(s)Q_0x(s)ds, \quad (\text{III.46})$$

$$V_4(x_t) = \int_{t-\frac{h_{max}}{2}}^t \int_s^t \dot{x}^T(u)R_1\dot{x}(u)duds, \quad (\text{III.47})$$

$$V_5(x_t) = \int_{t-h_{max}}^t \int_s^t \dot{x}^T(u)R_0\dot{x}(u)duds. \quad (\text{III.48})$$

Il est clair que pour P , Q_1 , Q_0 , R_0 et R_1 définies positives, on a $V(x_t) \geq \|x(0)\|^2$. Cependant, il convient de redéfinir au préalable le système (III.1) de manière à prendre en compte l'opérateur

∇ (III.38) liant le signal inhabituel $x_1(t)$ au système. Nous réécrivons ainsi le système (III.1) sous forme de l'interconnexion illustrée sur la Figure III.1.

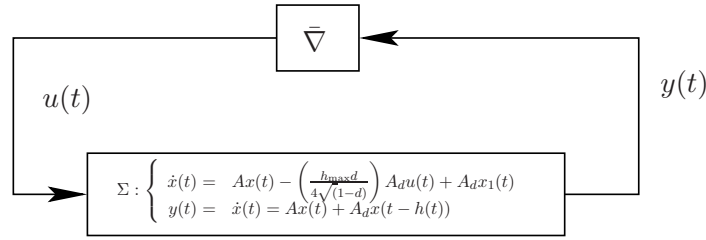


FIG. III.1: Réécriture du système (III.1) incluant l'opérateur ∇ (III.38).

avec $x_1(t) = x(t - \frac{h(t)}{2} - \frac{h(t-h(t)/2)}{2})$ et $\bar{\nabla} = \left(\frac{4}{h_{\max}d}\right) \sqrt{1-d}\nabla$.

La démonstration de la stabilité d'un tel système s'effectue en deux temps. Premièrement, nous avons montré en (III.39) que l'opérateur ∇ était borné et, par conséquent, $\|\bar{\nabla}\|_{L_2} \leq 1$. Dans ce cas, le théorème du faible gain, énoncé dans la Section I.4.1, nous affirme que l'interconnexion sera stable si

$$\|\Sigma\|_{L_2} \leq 1, \text{ c'est-à-dire si } \int_0^t y'(\tau)Q_2y(\tau)d\tau \leq \int_0^t u'(\tau)Q_2u(\tau)d\tau, \quad (\text{III.49})$$

Q_2 est une matrice définie positive. Nous allons alors, dans un second temps, faire appel au théorème du faible gain étendu pour montrer la stabilité interne de Σ et garantir la condition (III.49). Revenons maintenant à la fonctionnelle $V(x_t)$ (III.43) et calculons sa dérivée le long des trajectoire de (III.1) :

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + \dot{V}_2(x) + \dot{V}_3(x) + \dot{V}_4(x) + \dot{V}_5(x)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_t) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t), \\ \dot{V}_2(x_t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ x_0(t) \end{bmatrix} - (1 - \frac{d}{2}) \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}, \\ \dot{V}_3(x_t) &= x^T(t)Q_0x(t) - (1 - d)x^T(t - h(t))Q_0x(t - h(t)). \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

où $x_0(t)$ et $x_1(t)$ sont définis en (III.37). Les termes \dot{V}_4 et \dot{V}_5 peuvent quant à eux être majorés par application de l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(x_t) &\leq \frac{h_{\max}}{2} \dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \frac{2}{h(t)} w^T(t)R_1w(t) \\ &\leq \frac{h_{\max}}{2} \dot{x}^T(t)R_1\dot{x}(t) - \frac{2}{h_{\max}} w^T(t)R_1w(t) \\ \dot{V}_5(x_t) &\leq h_{\max} \dot{x}^T(t)R_0\dot{x}(t) - \frac{1}{h(t)} v^T(t)R_0v(t) \\ &\leq h_{\max} \dot{x}^T(t)R_0\dot{x}(t) - \frac{1}{h_{\max}} v^T(t)R_0v(t) \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

où $w(t) = x(t) - x(t - \frac{h(t)}{2})$ et $v(t) = x(t) - x(t - h(t))$. A l'aide du théorème du faible gain

étendu (Théorème I.4), le système (III.1) sera stable si la fonctionnelle

$$W(t, x_t) = \dot{V}(t, x_t) + \dot{x}'(t)Q_2\dot{x}(t) - \nabla(\dot{x})'Q_2\nabla(\dot{x}) \left(\frac{4}{h_{\max}d} \right)^2 (1-d) \quad (\text{III.52})$$

est négative. En combinant les majorations (III.50), (III.51) et (III.52), cette dernière condition s'écrit $W(t, x_t) < \xi^T(t)\Gamma\xi(t)$ avec Γ défini par (III.42) et

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t - \frac{h(t)}{2}) \\ x(t - \frac{h(t)}{2} - \frac{h(t-h(t)/2)}{2}) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x_0(t) \\ x_1(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.53})$$

De la même manière que pour les démonstrations précédentes, nous pouvons conclure sur la stabilité du système (III.1) si pour tout $\xi(t)$ vérifiant $S\xi(t) = 0$, l'inégalité $\xi^T(t)\Gamma\xi(t) < 0$ est satisfaite. Finalement, le lemme de Finsler permet de retrouver la condition formulée par le théorème. \diamond

Le principe du faible gain est habituellement appliqué dans les approches de type entrée-sortie [68]. Nous pouvons citer les travaux de [57], [58] dans lesquelles le système à retard $h(t)$ variant est vu comme un système à retards h_n constants affectés d'une perturbation $\eta(t)$. Dans ces conditions, le système original est modélisé comme un système à retard constant bouclé par le retour

$$u(t) = -\frac{1}{\mu} \int_{-h_n-\eta}^{-h_n} y(t+\theta)d\theta,$$

où $y(t) = \dot{x}(t)$ est le signal de sortie de la chaîne directe et μ donne une borne sur la valeur absolue de $\eta(t)$. Dans cette technique, l'opérateur ci-dessus, associé à la composante variante du retard, est alors borné au sens de la norme L_2 pour pouvoir ensuite appliquer le théorème du faible gain. Ces travaux poursuivent ceux de [78], [164] où il s'agit de trouver un modèle d'interconnexion pertinent tout en minimisant le pessimisme sur l'estimation de la borne du bloc incertain. Nous reviendrons sur cet aspect au chapitre suivant avec une approche différente, à savoir la séparation quadratique.

III.3.2 Cas général

Nous allons maintenant étendre la technique proposée au cas général d'un fractionnement du retard de taille arbitraire. Il s'agit donc de segmenter l'intervalle $[t - h(t), t]$ en $N + 1$ parts a priori de longueurs différentes. Dans ce cas, l'opérateur $\mathcal{D}_{h(t)/N}$ sera appliqué N fois et nous bornerons le $N + 1$ ^{ième} intervalle entre les instants $\mathcal{D}_{h(t)/N}^N[t]$ et $(t - h(t))$ au travers de la norme L_2 induite de l'opérateur de liaison ∇ .

Théorème III.6 ([6]). *Soient les scalaires $h_{\max} > 0$, $0 \leq d \leq 1$ et un nombre entier $N > 0$, le système (III.1) est asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant (III.2) et (III.3), s'il existe des matrices définies positives P , Q_0 , Q_2 , R_0 , $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice définie positive $Q_1 \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ telles que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$S^\perp{}^T \Gamma S^\perp < 0 \quad (\text{III.54})$$

$$\text{où } S = \begin{bmatrix} -1 & A & \mathbb{0}_{n \times Nn} & A_d \end{bmatrix} \text{ et} \quad (\text{III.55})$$

$$\begin{aligned} \Gamma = & \left[\begin{array}{ccc|c} U & P & \mathbb{0} & \mathbb{0}_{n \times Nn} \\ P & V & \frac{N}{h_{max}} R_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \frac{N}{h_{max}} R_1 & -\frac{N}{h_{max}} R_1 & \frac{1}{h_{max}} R_0 \\ \hline \mathbb{0}_{Nn \times n} & \mathbb{0} & \mathbb{0}_{Nn \times n} & X \end{array} \right] + \begin{bmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0}_{n \times Nn} & \mathbb{0}_{n \times 2n} \\ \mathbb{0}_{Nn \times n} & Q_1 & \mathbb{0}_{Nn \times 2n} \\ \mathbb{0}_{2n \times n} & \mathbb{0}_{2n \times Nn} & \mathbb{0}_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{2n \times 2n} & \mathbb{0}_{2n \times Nn} & \mathbb{0}_{2n \times n} \\ \mathbb{0}_{Nn \times 2n} & -(1-d/N)Q_1 & \mathbb{0}_{Nn \times n} \\ \mathbb{0}_{n \times 2n} & \mathbb{0}_{n \times Nn} & \mathbb{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

avec

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{h_{max}d(N-1)}{2N} \right)^2 \frac{1}{1-d} Q_2 + \frac{h_{max}}{N} R_1 + h_{max} R_0, & V &= Q_0 - \frac{N}{h_{max}} R_1 - \frac{1}{h_{max}} R_0, \\ X &= \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{n(N-2) \times n(N-2)} & \mathbb{0}_{n(N-2) \times n} & \mathbb{0}_{n(N-2) \times n} \\ \mathbb{0}_{n \times n(N-2)} & -Q_2 & Q_2 \\ \mathbb{0}_{n \times n(N-2)} & Q_2 & W \end{bmatrix}, & W &= -(1-d)Q_0 - Q_2 - \frac{1}{h_{max}} R_0. \end{aligned}$$

S^\perp est une matrice orthogonal à S .

PREUVE : Soit la fonctionnelle candidate à Lyapunov-Krasovskii :

$$V(x) = V_1(x) + V_3(x) + V_5(x) + V_7(x) + V_8(x) \quad (\text{III.57})$$

où $V_1(x)$, $V_3(x)$, $V_5(x)$ sont définies en (III.44), (III.46), (III.48) et

$$V_7(x) = \int_{t-\frac{h(t)}{N}}^t \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \frac{h(s)}{N}) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{N-2}(t) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(s) \\ x(s - \frac{h(s)}{N}) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{N-2}(t) \end{bmatrix} ds, \quad (\text{III.58})$$

$$V_8(x) = \int_{t-\frac{h_{max}}{N}}^t \int_s^t \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du ds, \quad (\text{III.59})$$

où les $x_i(t)$ et le nouvel opérateur ∇ sont définis respectivement par (III.60) et (III.62). Comme il a été mentionné précédemment, l'idée réside dans la prise en compte de valeurs instantanées supplémentaires de l'état x_t . Le décalage temporel d'une fraction plus faible $\frac{1}{N}$ du retard $h(t)$ permet d'obtenir par redondance plus de signaux intermédiaires. Ceux-ci sont rangés dans un vecteur et incorporés dans la fonctionnelle au travers du terme (III.58). Ce vecteur "mémoire" se construit à partir des signaux

$$x_i(t) = \mathcal{D}_{h(t)/N}^{(i+1)} [x(t)]. \quad (\text{III.60})$$

En résumé, les variables $x_i(t)$ représentent l'état instantané $x(t)$ affecté par différents retards. Elles peuvent alors se caractériser par l'argument temporel sous la forme $x_i(t) = x(t_i)$ avec

$$t_i = \mathcal{D}_{h(t)/N}^{(i+1)}[t] = t - a_0(i+1)h(t) + a_1(i+1)\delta(t) + a_2(i+1)\delta(t+h_1(t)) + \dots + a_i(i+1)\delta(t+h_{i-2}(t)) \quad (\text{III.61})$$

où

$$h_1(t) = -\frac{h(t)}{N}, \quad h_i(t) = \mathcal{D}_{h(t)/N}^{(i-1)}[-\frac{h(t)}{N}],$$

$$\delta(t) = h(t) - h(t - \frac{h(t)}{N}), \quad a_j(i) = \begin{cases} \frac{i-j}{N}, & \text{si } i-j > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite, afin de créer la liaison entre les signaux $x_{N-1}(t)$ et $x(t-h(t))$, il est nécessaire de redéfinir l'opérateur ∇ :

$$\nabla : x(t) \rightarrow \int_{t-h(t)}^{t_{N-1}} x(u) du. \quad (\text{III.62})$$

Remarquons que

$$t_{N-1} - (t - h(t)) = a_1(N)\delta(t) + a_2(N)\delta(t+h_1(t)) + \dots + a_{(N-1)}(N)\delta(t+h_{N-3}(t)),$$

$$\leq [a_1(N) + \dots + a_{(N-1)}(N)] \frac{h_{max}d}{N}, \leq \frac{h_{max}d(N-1)}{2N}$$

puisque $\delta(t) = \int_{t-\frac{h(t)}{N}}^t \dot{h}(s) ds \leq \frac{h_{max}d}{N}$. De la même façon que (III.39), on peut montrer que la norme L_2 du nouvel opérateur est également bornée :

$$\|\nabla[x]\|_{L_2}^2 \leq \left(\frac{(N-1)h_{max}d}{2N} \right)^2 \left(\frac{1}{1-d} \right) \|x\|_{L_2}^2. \quad (\text{III.63})$$

Calculons maintenant la dérivée de la fonctionnelle (III.57) le long des trajectoires du système (III.1)

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + \dot{V}_3(x) + \dot{V}_5(x) + \dot{V}_7(x) + \dot{V}_8(x) \quad (\text{III.64})$$

où $\dot{V}_1(x)$, $\dot{V}_3(x)$, $\dot{V}_5(x)$ ont été majorées en (III.50) (III.51). En ce qui concerne les nouveaux termes (III.58) et (III.59) de la fonctionnelle, on montre aisément que

$$\dot{V}_7(x) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x_{N-2}(t) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x_{N-2}(t) \end{bmatrix} - (1 - \frac{d}{N}) \begin{bmatrix} x(t - \frac{h(s)}{N}) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x(t - \frac{h(s)}{N}) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$\dot{V}_8(x) \leq \frac{h_{max}}{N} \dot{x}^T(t) R_1 \dot{x}(t) - \frac{N}{h_{max}} m^T(t) R_1 m(t)$$

avec $m(t) = x(t) - x(t - \frac{h(t)}{N})$. Notons que dans le cas d'un pas de translation temporelle $\frac{h(t)}{N}$ plus fin, la borne sur la dérivée du terme V_8 est plus faible (donc moins conservative) que dans le cas précédent (III.51) avec V_4 , et a fortiori dans le cas classique (III.8). A partir des mêmes arguments que ceux employés dans la preuve du Théorème III.5, la stabilité de (III.1) sera garantie si la fonctionnelle

$$W(t, x_t) = \dot{V}(t, x_t) + \left(\frac{h_{max}d(N-1)}{2N} \right)^2 \frac{1}{1-d} \dot{x}^T(t) Q_2 \dot{x}(t) - \nabla[\dot{x}]^T Q_2 \nabla[\dot{x}] \quad (\text{III.65})$$

est négative. Celle-ci peut être majorée par $W(t, x_t) < \xi^T(t)\Gamma\xi(t)$ où Γ est défini par (III.56) et

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t - \frac{h(t)}{N}) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.66})$$

La variable étendue $\xi(t)$ redéfinit le système (III.1) par $S\xi(t) = 0$ où S est défini par (III.55). Ainsi, le système (III.1) est asymptotiquement stable si l'inégalité $S^{\perp T}\Gamma S^{\perp} < 0$ est vérifiée. \diamond

Remarque III.7. Notons qu'un changement de variable $Q_2 = \tilde{Q}_2(1 - d)$ peut être effectué de façon à autoriser l'application du Théorème III.6 lorsque $d = 1$.

Comme cela a été évoqué plus haut, la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (III.43) peut être particularisée de façon à retrouver certains résultats de la littérature. Ainsi, si les matrices Q_1 , Q_2 et R_1 sont fixées à 0, nous obtenons les résultats proposés dans [55, 88, 160]. De plus, si nous ajoutons le terme $\int_{t-h_{max}}^t x^T(s)Q_3x(s)ds$ et effectuons la séparation de l'intégrale lors du calcul de la dérivée de $V_5(x)$ (comme expliqué en (III.9)), alors nous retrouvons les résultats de [71]. Nous illustrerons ces affirmations au travers de quelques exemples numériques dans la Section IV.4.

III.3.3 Stabilité robuste

Nous souhaitons à présent étendre ces résultats au cas où le modèle (III.1) est sujet à des incertitudes. Dans la Section I.2.3, nous avons vu deux catégories de modélisations fréquemment utilisées pour traiter les systèmes incertains. Nous allons maintenant montrer comment peut-on adapter notre méthodologie afin d'établir la stabilité robuste de tels systèmes. Considérons dans un premier temps, le cas des modèles incertains polytopiques :

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t - h(t)), \quad (\text{III.67})$$

avec $h(t)$ vérifiant (III.2) (III.3) et $[A(\alpha) \quad A_d(\alpha)] = \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i [A^{[i]} \quad A_d^{[i]}]$ où $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_{\eta})$ est le vecteur des paramètres incertains constants et appartient à l'ensemble $\Xi = \{\alpha_i \geq, \text{ tels que } \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i = 1\}$. La matrice S (III.55) décrivant le système nominal est, dans le cas incertain, linéaire en les matrices $A(\alpha)$, $A_d(\alpha)$. Elle peut donc se décomposer comme la combinaison linéaire des matrices $S^{[i]}$, $i = \{1, \dots, \eta\}$, décrivant les sommets $\{A^{[i]}, A_d^{[i]}\}$ correspondants :

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i S^{[i]} = \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i \begin{bmatrix} -\mathbb{1} & A^{[i]} & 0_{n \times N_n} & A_d^{[i]} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.68})$$

Le théorème suivant reprend la méthodologie développée dans le cas nominal pour établir un critère d'analyse robuste.

Théorème III.7 ([6]). Soient les scalaires $h_{max} > 0$, $0 \leq d \leq 1$ et un entier $N > 0$, le système (III.67) est robustement asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant (III.2), (III.3) et pour tout $\alpha \in \Xi$, s'il existe des matrices définies positives $P^{[i]}$, $Q_0^{[i]}$, $R_0^{[i]}$, $R_1^{[i]}$,

$Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_1^{[i]} \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ et une matrice $Y \in \mathbb{R}^{(N+3)n \times n}$ telles que les LMI suivantes soit vérifiées pour $i = \{1, 2, \dots, \eta\}$:

$$\Gamma^{[i]} + YS^{[i]} + S^{[i]T}Y^T < 0$$

où $S^{[i]}$ et $\Gamma^{[i]}$ sont définies en (III.68) et (III.69).

PREUVE : Revenons sur la fonctionnelle (III.57) dans laquelle, cette fois, les matrices de Lyapunov ($P, Q_j, R_j, j = 0, 1$) dépendent du paramètre incertain α . Le début de la démonstration est similaire à celui du Théorème III.6 et ne sera donc pas développée. Il s'agit ensuite de montrer que $S^{\perp T}(\alpha)\Gamma(\alpha)S^{\perp}(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in \Xi$ avec S définie par (III.68) et Γ de la forme (III.56) dans laquelle les matrices $P, Q_j, R_j, j = 0, 1$ sont des fonctions de α . Le lemme de Finsler nous permet de reformuler cette dernière condition par l'inégalité

$$\Gamma(\alpha) + YS(\alpha) + S^T(\alpha)Y^T < 0$$

où Y est une matrice de décision de dimensions appropriées. Finalement, si l'on articule la matrice $\Gamma(\alpha)$, en accord avec la matrice $S(\alpha)$ (III.68), comme le barycentre de η sommets $\sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i \Gamma^{[i]}$,

$$\begin{aligned} \Gamma^{[i]} = & \left[\begin{array}{ccc|ccc} U^{[i]} & P^{[i]} & 0 & 0_{n \times Nn} & 0 & 0 \\ P^{[i]} & V^{[i]} & \frac{N}{h_{max}} R_1^{[i]} & 0 & \frac{1}{h_{max}} R_0^{[i]} & 0 \\ 0 & \frac{N}{h_{max}} R_1^{[i]} & -\frac{N}{h_{max}} R_1^{[i]} & 0_{n \times Nn} & 0_{n \times Nn} & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0_{n \times Nn} & 0_{n \times 2n} \\ 0_{Nn \times n} & Q_1^{[i]} & 0_{Nn \times 2n} \\ 0_{2n \times n} & 0_{2n \times Nn} & 0_{2n \times 2n} \end{array} \right] \\ & + \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0_{Nn \times n} & 0_{Nn \times n} & 0 \\ 0_{Nn \times n} & \frac{1}{h_{max}} R_0^{[i]} & 0_{Nn \times n} & X^{[i]} & 0 & 0 \\ 0_{2n \times 2n} & 0_{2n \times Nn} & 0_{2n \times n} & 0 & 0 & 0 \\ 0_{Nn \times 2n} & -(1-d/N)Q_1^{[i]} & 0_{Nn \times n} & 0 & 0 & 0 \\ 0_{n \times 2n} & 0_{n \times Nn} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (III.69)$$

avec

$$\begin{aligned} U^{[i]} &= \left(\frac{h_{max}d(N-1)}{2N} \right)^2 \frac{1}{1-d} Q_2 + \frac{h_{max}}{N} R_1^{[i]} + h_{max} R_0^{[i]}, & V^{[i]} &= Q_0^{[i]} - \frac{N}{h_{max}} R_1^{[i]} - \frac{1}{h_{max}} R_0^{[i]}, \\ X^{[i]} &= \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0_{n(N-2) \times n} & 0_{n(N-2) \times n} \\ 0_{n \times n(N-2)} & -Q_2 & Q_2 \\ 0_{n \times n(N-2)} & Q_2 & W^{[i]} \end{array} \right], & W^{[i]} &= -(1-d)Q_0^{[i]} - Q_2 - \frac{1}{h_{max}} R_0^{[i]}, \end{aligned}$$

nous retrouvons alors la condition du théorème. \diamond

Remarque III.8. Nous rappelons que le théorème ci-dessus évalue la stabilité robuste du système (III.67) pour des incertitudes stationnaires et impose donc des paramètres α_i constants. Il reste valide³ pour des incertitudes variantes dans le temps mais nécessite, dans ce cas, de choisir le même jeu de matrices $\{P, Q_j, R_j \mid j = 0, 1\}$ pour tous les sommets du polytope, c'est-à-dire que la fonctionnelle doit être indépendante des paramètres et les matrices de décisions uniques, par exemple, $P^{[i]} = P, \forall i = \{1, \dots, \eta\}$. On parle dans ce cas de stabilité quadratique [17].

En ce qui concerne la modélisation incertaine bornée en norme, on trouve souvent, dans la

³Dans ce cas, la condition du théorème est particularisée en fixant $\Gamma^{[i]} = \Gamma^{[j]} \forall i$ et $j = \{1, \dots, \eta\}$ ou, plus simplement, en retirant les exposants $[i]$ de (III.69).

littérature, une représentation de tels systèmes sous la forme :

$$\dot{x}(t) = (A + E_1 F_1(t) G_1) x(t) + (A_d + E_2 F_2(t) G_2) x(t - h(t)) \quad (\text{III.70})$$

où A, A_d sont des matrices constantes connues décrivant le comportement du système nominal. E_i et $G_i, i = 1, 2$, également constantes connues, sont des matrices de pondération de l'incertitude $F_i(t)$ vérifiant $F_i^*(t) F_i(t) \leq \mathbb{1}$. Ce système peut se réécrire sous la forme d'une boucle de rétroaction

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + E_1 u_1(t) + A_d x(t - h(t)) + E_2 u_2, \\ y(t) = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix}, \\ u(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 \\ 0 & F_2(t) \end{bmatrix}, \end{cases}$$

de façon à isoler l'incertitude du système nominal. Les nouveaux vecteurs y et $u^T = [u_1^T \ u_2^T]$ sont des signaux intermédiaires assurant la liaison des deux blocs de l'interconnexion. Il s'agit alors d'assembler ce bouclage à celui induit par l'opérateur ∇ (III.62) pour développer un critère de stabilité robuste à partir du théorème du faible gain étendu.

Théorème III.8. *Soient les scalaires $h_{max} > 0, 0 \leq d \leq 1$ et un entier $N > 0$, le système (III.70) est robustement asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant (III.2), (III.3) et pour tout $F_i(t)$ telles que $F_i^* F_i \leq \mathbb{1}$, s'il existe des matrices définies positives $P, Q_0, R_0, R_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q_1 \in \mathbb{R}^{Nn \times Nn}$ et deux scalaires positifs z_1, z_2 tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$S^{\perp T} \Gamma_1 S^{\perp} < 0$$

avec S et Γ_1 définies en (III.72) et (III.71).

PREUVE : Considérons à nouveau la fonctionnelle V (III.57). Nous avons vu que les normes L_2 induites des opérateurs ∇ et $F_i, i = \{1, 2\}$ composant le bloc incertain étaient bornées, respectivement, par $\left(\frac{h_{max} d(N-1)}{2N\sqrt{1-d}}\right)^2$ et 1. Par conséquent, la stabilité de (III.70) sera prouvée, en vertu du Théorème I.4, si la fonctionnelle

$$W(x_t) = \dot{V}(x_t) + \dot{x}^T(t) Q_2 \dot{x}(t) - \left(\frac{2N\sqrt{1-d}}{h_{max} d(N-1)}\right)^2 \nabla[\dot{x}]^T Q_2 \nabla[\dot{x}] + y^T(t) Z y(t) - u^T(t) Z u(t),$$

avec $Z = \text{diag}(z_1 \mathbb{1}_n, z_2 \mathbb{1}_n)$ est négative. Quelques calculs montrent que $W(x_t) = \xi_1^T(t) \Gamma_1 \xi_1(t)$ où ξ_1 et Γ_1 contiennent, respectivement, le vecteur ξ (III.66) et la matrice Γ (III.56) du cas nominal :

$$\xi_1(t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \text{ et } \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & -z_1 \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & & -z_2 \mathbb{1}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ G_1^T & \vdots \\ 0_n & 0_n \\ \vdots & G_2^T \\ \vdots & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ G_1^T & \vdots \\ 0_n & 0_n \\ \vdots & G_2^T \\ \vdots & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}^T. \quad (\text{III.71})$$

Le système (III.70) s'écrit maintenant $S\xi_1(t) = 0$ avec

$$S = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A & \mathbb{0}_{n \times Nn} & A_d & E_1 & E_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.72})$$

et d'après le lemme de Finsler, la fonctionnelle $W(x_t)$ sera négative si l'inégalité $S^{\perp T} \Gamma_1 S^{\perp} < \mathbb{0}$ est satisfaite. \diamond

III.4 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie plusieurs techniques pour l'analyse des systèmes à retard variant dans le temps par la méthode de Lyapunov-Krasovskii. Partant d'une fonctionnelle classique, nous avons cherché à améliorer le critère de stabilité au moyen de transformations du modèle afin d'enrichir la représentation du système et, par conséquent, la fonctionnelle.

Nous avons ainsi effectué un travail de modélisation afin de représenter "au mieux" la dynamique d'un système linéaire affecté par un retard variable $h(t)$. Pour cela, nous avons tout d'abord considéré un modèle augmenté formé du système original et de sa dérivée, lequel dépend explicitement des variations du retard $\dot{h}(t)$. En accord avec le "format" de la fonctionnelle de base (I.7), adaptée au vecteur d'état étendu, un nouveau terme lié à la dérivée seconde de l'état a donc été proposé :

$$\int_{-h_{max}}^0 \int_s^0 \int_u^0 \ddot{x}_t^T(\theta) W \ddot{x}_t(\theta) d\theta du ds, \quad W > \mathbb{0}.$$

Puis, dans un second temps, nous avons cherché à décrire l'état x_t en introduisant dans la fonctionnelle des fractions du retard complet $h(t)$. Contrairement au cas constant, la translation temporelle s'avère plus délicate lorsque le retard dépend du temps et nécessite la mise en place d'un opérateur (III.62) approprié. En effet, celui-ci établit la liaison entre le nouveau modèle obtenu et l'original. Cette particularité exprime le système à retards sous forme d'une interconnexion et nous conduit alors à l'application du théorème du faible gain étendu. Bien que nous n'ayons pas montré formellement la réduction du conservatisme, notre méthodologie admet en cas particulier certains résultats connus de la littérature. Des travaux futurs à court terme consisteront à combiner adroitement ces deux techniques afin de tirer profit des deux modélisations à la fois.

De multiples exemples numériques sont rassemblés dans la Section IV.4 pour une étude comparative de l'ensemble des théorèmes proposés dans les Chapitres III et IV et ceux de la littérature.

Au prochain chapitre, nous reprenons la même problématique mais l'abordons cette fois avec une approche *entrée-sortie*. Appartenant aux méthodes d'analyse robuste, nous nous appuyons sur le principe de séparation quadratique que nous modifierons pour construire les critères de stabilité. Nous verrons que ce cadre de travail se révèle très intéressant pour traiter différentes classes de systèmes dans un formalisme unifié (différents types de retards discrets, retards distribués, robustesse).

Chapitre IV

Sur la construction de conditions de stabilité par l'analyse robuste

Nous développons dans ce chapitre une seconde méthodologie pour l'analyse des systèmes à retards variant dans le temps. Nous adoptons cette fois une approche entrée-sortie dans laquelle nous utiliserons le principe de séparation quadratique pour obtenir des conditions sur la stabilité. Toutefois, cette méthode initialement développée dans un cadre stationnaire, sera étendue aux cas des systèmes variant dans le temps. Plus précisément, nous introduirons la notion d'*opérateur* temporel pour pouvoir traiter la nature variable du retard.

IV.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons travaillé sur la stabilité des systèmes à retard variant seulement par la méthode directe de Lyapunov-Krasovskii qui est la plus couramment utilisée. Cette problématique peut également être abordée par une approche de type entrée-sortie, empruntant dans ce cas les outils de l'analyse robuste tels que le théorème du faible gain [58], [68] ou les IQC [119]. Nous poursuivons maintenant cette étude avec une nouvelle approche qui, elle aussi, emprunte ses bases aux principes de robustesse. La méthode de séparation quadratique consiste à modéliser un système comme l'interconnexion d'une application linéaire avec une matrice incertaine [82], [135].

Ce concept théorique, totalement nouveau en ce qui concerne la classe de systèmes considérés ici, nécessite d'adapter les résultats existants sur la séparation quadratique. En effet, ces derniers ont été menés dans le cas stationnaire par une modélisation fréquentielle et ne se prête donc pas à l'étude des retards variant dans le temps. C'est pourquoi, nous énonçons, dans un premier temps, un nouveau théorème de séparation quadratique dans lequel est introduit la notion d'*opérateurs* [12]. Cette formulation a pour but de dissocier, d'un côté, les matrices de définition du modèle, et de l'autre, les opérateurs caractérisant celui-ci. Au delà des opérateurs élémentaires d'intégration et de retard, nous verrons que des opérateurs auxiliaires (liés au retard) peuvent être ajoutés afin d'enrichir la modélisation. Nous verrons que ce cadre de travail, de par sa généralité et sa souplesse, se révèle très intéressant pour traiter différentes classes de systèmes dans un formalisme unifié (différents types de retards discrets, retards distribués, robustesse).

Finalement, nous illustrerons, aux travers d'exemples numériques, l'efficacité des différents

critères de stabilité proposés aux cours de ces deux derniers chapitres. Les résultats seront synthétisés dans des tableaux et comparés à ceux de la littérature.

Remarque IV.1. *Encore une fois, dans un souci de clarté, les théorèmes proposés considèrent des systèmes affectés par un seul retard. Mais, ils peuvent aisément être étendus au cas des systèmes à multiples retards en appliquant indépendamment à chaque retard la même méthodologie.*

Remarque IV.2. *Appartenant aux méthodes de l'analyse robuste, la séparation quadratique offre un cadre de travail approprié pour étendre les résultats de stabilité sur les systèmes à retards au cas des modèles incertains.*

IV.2 Extension de la séparation quadratique

Nous proposons, dans cette section, d'adopter une nouvelle modélisation qui repose sur le principe de séparation quadratique, introduit au paragraphe I.4.2. Utilisé plutôt pour les systèmes incertains, son application pour les systèmes à retards constants, initiée par [64], [65], s'est avérée efficace. Toutefois, c'est une approche encore peu explorée que nous tenterons de construire "pas à pas".

Les travaux de [64], [65] s'appuient sur une reformulation des systèmes à retard sous forme d'une interconnexion (cf. Figure IV.1). Le retard h étant constant, la matrice ∇ est construite à partir de la description du terme e^{-sh} en utilisant le formalisme de Laplace (cf. Section I.4.2). Bien que cette méthode permette une réduction importante du conservatisme grâce à une caractérisation pertinente du retard (par discrétisation de h et l'introduction d'équations redondantes liées au développement en série de Taylor de e^{-sh} et à la majoration du reste [65]), elle trouve ses limites lorsque le retard dépend du temps. De ce fait, il est donc nécessaire, d'étendre le Théorème I.5 de façon à pouvoir établir la stabilité d'un modèle interconnecté, non pas pour une matrice incertaine complexe, mais pour *une matrice d'opérateurs temporels* [12].

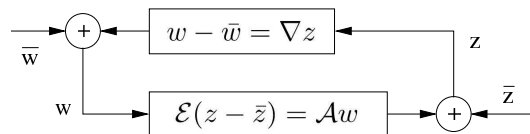


FIG. IV.1: *Système interconnecté.*

Ainsi, si nous considérons le système interconnecté de la Figure IV.1, les matrices \mathcal{E} et \mathcal{A} , éventuellement non carrées et dépendantes du temps, sont à valeurs réelles et ∇ est une matrice d'opérateurs linéaires de L_{2e} dans L_{2e} . Pour des raisons de simplicité, nous supposons que \mathcal{E} est de rang plein. Nous souhaitons donc établir une condition assurant la stabilité d'une telle interconnexion. Suivant la ligne directrice de [135], à partir des notions de produit scalaire et de l'espace fonctionnel L_{2e} nous proposons le théorème suivant.

Théorème IV.1 ([12]). *Sous l'hypothèse d'être bien-posé, le système interconnecté, représenté sur la Figure IV.1, est stable s'il existe une matrice symétrique $\Theta(t) = \Theta^*(t)$ satisfaisant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A}(t) \end{bmatrix}^{\perp*} \Theta(t) \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A}(t) \end{bmatrix}^{\perp} > 0, \quad \forall t > 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$\forall u \in L_{2e}, \left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u, \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u \right\rangle \leq 0 \quad (\text{IV.2})$$

PREUVE : La démonstration est détaillée en Annexe B.2. \diamond

Rappelons tout d'abord la classe de systèmes étudiée :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)) & \forall t \geq 0, \\ x(t) = \phi(t) & \forall t \in [-h_{max}, 0] \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état instantané, ϕ est la condition initiale et $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices constantes connues. Le retard $h(t)$ est variant dans le temps et vérifie les hypothèses

$$h(t) \in [h_{min}, h_{max}] \quad \text{et} \quad |\dot{h}(t)| \leq d, \quad (\text{IV.4})$$

où $h_{max} \geq h_{min}$ et d sont des scalaires positifs donnés. Les bornes h_{max} et d peuvent être infinies si aucune information n'est disponible sur la valeur maximale du retard ou de ses variations, respectivement. h_{min} peut être fixé à 0 lorsque le retard est de type majoré ou inconnu.

Ayant introduit les outils et hypothèses nécessaires, nous sommes maintenant en mesure de développer des conditions pour l'analyse de stabilité des systèmes à retard variant (IV.3) dans le cadre de la séparation quadratique. La méthode se compose principalement de trois étapes :

- En premier lieu, un travail de modélisation dans lequel le système (IV.3) est mis sous la forme de l'interconnexion de la Figure IV.1, doit être réalisé. Cette phase préliminaire, fondamentale, consiste à *caractériser* au mieux la dynamique retardée et conditionnera ainsi le pessimisme du critère final.
- Une fois l'interconnexion réalisé, il s'agit de construire le séparateur Θ , à partir des propriétés des opérateurs composant la matrice ∇ , de manière à satisfaire l'inégalité (IV.2). En pratique, nous nous appuyerons sur la norme L_{2e} induite de ces opérateurs pour définir le séparateur.
- Enfin, la condition (IV.2) du Théorème IV.1 étant vérifiée par construction, il reste à tester l'inégalité (IV.1) laquelle constitue le critère de stabilité du système (IV.3). A cette étape, la difficulté réside dans la formulation de cette dernière condition de sorte à être numériquement exploitable. On cherchera toujours à ramener l'inégalité (IV.1) à un nombre fini de LMI.

IV.3 Analyse

Nous allons maintenant présenter les résultats de stabilité fondés sur le Théorème IV.1. Le formalisme des opérateurs offre un cadre de travail puissant où, comme nous allons le voir, une large classe de systèmes peut être étudiée. Nous proposerons ainsi des conditions de stabilité pour des systèmes présentant diverses catégories de retards discrets, des retards distribués, des incertitudes.

IV.3.1 Stabilité des systèmes à retards variant inconnus

Une première modélisation évidente du système (IV.3) consiste à isoler les deux opérateurs qui le définissent : les opérateurs d'intégration et de retard,

$$\mathcal{I} : x(t) \rightarrow \int_0^t x(u)du, \quad (\text{IV.5})$$

$$\mathcal{D} : x(t) \rightarrow x(t - h(t)). \quad (\text{IV.6})$$

Nous pouvons alors reformuler le système (IV.3) comme l'interconnexion de $w = \nabla z$ exprimé par

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix}}_{\nabla_0} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

avec $\mathcal{E}z = \mathcal{A}w$ exprimé par

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A_d \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.8})$$

L'application du Théorème IV.1 nécessite, au préalable, la réalisation de la condition (IV.2) et par conséquent la recherche du séparateur Θ . Pour cela, il s'agit de déterminer des contraintes inégalités associées à chaque opérateur de ∇_0 . Ces relations sont formalisées par les lemmes suivants.

Lemme IV.1. *Une contrainte intégrale quadratique pour l'opérateur \mathcal{I} est donnée par l'inégalité suivante, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$ et pour toute matrice définie positive P ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{I} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{I} \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

PREUVE : De simples calculs montrent que, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{I} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{I} \end{bmatrix} x \right\rangle &= -2 \int_0^T x(t)^T P \int_0^t x(s) ds \\ &= -2 \int_0^T \frac{d}{dt} (\mathcal{I}x)^T P (\mathcal{I}x) dt \\ &= -(\int_0^T x(s) ds)^T P (\int_0^T x(s) ds) \end{aligned}$$

est négatif quelle que soit $P > 0$. ◇

Lemme IV.2. *Une contrainte intégrale quadratique pour l'opérateur \mathcal{D} est donnée par l'inégalité suivante, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$ et pour toute matrice définie positive Q_0 ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -Q_0 & 0 \\ 0 & Q_0(1 - \dot{h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

PREUVE : Encore une fois, de simples calculs montrent que, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -Q_0 & 0 \\ 0 & Q_0(1 - \dot{h}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} x \right\rangle &= - \int_0^{+\infty} x^T(u) Q_0 x(u) du + \int_0^{\infty} x_d^T(t) Q_0 x_d(t) (1 - \dot{h}) dt \\ &= - \int_0^{+T} x^T(t) Q_0 x(t) dt + \int_{-h(0)}^{T-h(T)} x^T(u) Q_0 x(u) du \\ &= - \int_{T-h(T)}^T x(u)^T Q_0 x(u) du \end{aligned}$$

où $x_d(t) = x(t - h(t))$, est négatif quelle que soit $Q_0 > 0$. \diamond

En combinant les deux précédents lemmes, il nous est possible de former l'inégalité globale (IV.2) sur le produit scalaire des signaux $\nabla_0 x$ et x . Ainsi, un séparateur Θ satisfaisant la contrainte (IV.2) pour ∇_0 s'écrit comme suit.

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & -Q_0 & 0 & 0 \\ \hline -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_0(1 - d) \end{array} \right], \quad (\text{IV.9})$$

avec P et Q_0 deux matrices définies positives. L'inégalité (IV.1), avec \mathcal{E} , \mathcal{A} et Θ définies par (IV.8) et (IV.9), constitue finalement un premier test pour évaluer la stabilité du système (IV.3). Ce critère est une LMI et fournit une condition de stabilité indépendante de la taille du retard ($h_{min} = 0$ et $h_{max} = \infty$). La seule information requise est la borne maximale sur sa vitesse d .

Théorème IV.2. *Soient le scalaire positifs d , le système (IV.3) est asymptotiquement stable pour tout retard $h(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\dot{h}(t)| \leq d$ s'il existe des matrices définies positives $P, Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que la LMI (IV.1) soit vérifiée avec Θ, \mathcal{E} et \mathcal{A} définies par (IV.9) et (IV.8).*

Notons que le développement de la condition du théorème ci-dessus conduit à la même inégalité que celle obtenue par la méthode de Lyapunov en choisissant la fonctionnelle

$$V(x_t) = x^T(t) P x(t) + \int_{-h(t)}^0 x_t^T(\theta) Q_0 x_t(\theta) d\theta.$$

Cette particularité, évoquée dans [64] et [65], suggère qu'à chaque opérateur peut être associé un terme de Lyapunov-Krasovskii. Des travaux futurs consisteront à établir formellement l'analogie entre les deux approches concernant l'étude de stabilité des systèmes à retards.

IV.3.2 Stabilité des systèmes à retards variant majorés

Dans ce paragraphe, nous considérons des systèmes stables sans retard ($h_{min} = 0$) et évaluons la borne maximale admissible h_{max} telle que la stabilité soit préservée. Pour cela, de nouveaux opérateurs capables d'apporter des informations supplémentaires sur le retard doivent être introduits. Par exemple, dans l'approche entrée-sortie traditionnelle, [68], [164] proposent l'opérateur pour les retards constants (dans le domaine de Laplace) $(1 - e^{-sh})s^{-1}$ lequel est borné par h_{max} . Nous reprenons ici cette idée pour dresser nos contraintes intégrales quadratiques et définissons

les opérateurs suivants, liés à la fois au retard maximal h_{max} et courant $h(t)$:

$$\mathcal{D}_m : x(t) \rightarrow x(t - h_{max}), \quad (\text{IV.10})$$

$$\nabla_a \equiv (1 - \mathcal{D})\mathcal{I} : x(t) \rightarrow \int_{t-h(t)}^t x(u) du, \quad (\text{IV.11})$$

$$\nabla_b \equiv (1 - \mathcal{D}_m)\mathcal{I} : x(t) \rightarrow \int_{t-h_{max}}^t x(u) du. \quad (\text{IV.12})$$

Puisque h_{max} est un scalaire constant, les opérateurs (IV.10) et (IV.12) peuvent s'exprimer, suivant le formalisme de Laplace, par $e^{-h_{max}s}$ et $(1 - e^{-h_{max}s})s^{-1}$ respectivement. Les normes L_{2e} induites associées à chaque opérateurs sont résumées dans les lemmes suivants.

Lemme IV.3. *Une contrainte intégrale quadratique pour l'opérateur \mathcal{D}_m est donnée par l'inégalité suivante, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$ et pour toute matrice définie positive Q_1 ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{D}_m \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathcal{D}_m \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

PREUVE : La démonstration suit celle du Lemme IV.2 et est donc omise. Voir [64] pour une preuve utilisant le formalisme de Laplace. \diamond

Lemme IV.4. *Une contrainte intégrale quadratique pour l'opérateur ∇_b est donnée par l'inégalité suivante, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$ et pour toute matrice définie positive Q_3 ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla_b \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} (c^2 - r^2)h_{max}^2 Q_3 & -ch_{max} Q_3 \\ -ch_{max} Q_3 & Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla_b \end{bmatrix} x \right\rangle < 0,$$

où $(c; r) \in \mathcal{R}^2$. Dans [65], le couple de valeurs $(c = 0, 25; r = 0, 75)$ est proposé et procure une majoration fine sur la norme de l'opérateur.

PREUVE : cf [65]. \diamond

Les deux lemmes ci-dessus sont issus de travaux antérieurs concernant la modélisation des systèmes à retard constant, également dans le cadre de la séparation quadratique. Enfin, la contrainte inégalité relative au troisième opérateur est, quant à elle, bâtie conjointement avec ∇_b .

Lemme IV.5. *Une contrainte intégrale quadratique pour l'opérateur ∇_a est donnée par l'inégalité suivante, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$ et pour toute matrice définie positive Q_2 ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \\ \nabla_a & 0 \\ 0 & \nabla_b \end{bmatrix} x, \Omega \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \\ \nabla_a & 0 \\ 0 & \nabla_b \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

avec

$$\Omega = \left[\begin{array}{cc|cc} -h_{max}^2 Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2Q_2 & -Q_2 \\ 0 & 0 & -Q_2 & Q_2 \end{array} \right].$$

PREUVE : La démonstration débute avec la majoration de la norme de ∇_b , d'abord par inégalité triangulaire, puis par inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| \int_{t-h(t)}^t x(u) du \right\|^2 + \left\| \int_{t-h_{max}}^{t-h(t)} x(u) du \right\|^2 dt &\leq \int_0^\infty h(t) \int_{t-h(t)}^t \|x(u)\|^2 du + (h_{max} - h(t)) \int_{t-h_{max}}^{t-h(t)} \|x(u)\|^2 du dt, \\ &\leq \int_0^\infty h_{max} \int_{t-h(t)}^t \|x(u)\|^2 du + h_{max} \int_{t-h_{max}}^{t-h(t)} \|x(u)\|^2 du dt, \\ &\leq \int_0^\infty h_{max} \int_{t-h_{max}}^t \|x(u)\|^2 du \leq h_{max}^2 \|x\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

En simplifiant l'écriture, nous obtenons

$$\|(\nabla_b - \nabla_a)[x]\|_{L_2}^2 + \|\nabla_a x\|_{L_2}^2 \leq h_{max}^2 \|x\|_{L_2}^2,$$

ce qui revient à

$$\int_0^\infty (\nabla_b x(t) - \nabla_a x(t))^* Q_2 (\nabla_b x(t) - \nabla_a x(t)) + (\nabla_a x(t))^* Q_2 (\nabla_a x(t)) dt \leq h_{max}^2 \int_0^\infty x^*(t) Q_2 x(t) dt$$

pour toute matrice $Q_2 > 0$. Enfin, une factorisation à droite et à gauche permet de retrouver le résultat du lemme. \diamond

Nous concaténons alors ces opérateurs avec la précédente matrice ∇_0 (IV.7) afin d'obtenir une description "améliorée" du système (IV.3) et établir une nouvelle interconnexion. Les différents signaux constituant le modèle sont générés par la matrice d'opérateurs $w = \nabla z$:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-h_{max}) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla_0 & & & & \\ & \mathcal{D}_m & & & \\ & & \nabla_a & & \\ & & & \nabla_b & \\ & & & & \nabla_1 \end{bmatrix}}_{\nabla_1} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

avec $w_1 = x(t) - x(t-h(t))$, $w_2 = x(t) - x(t-h_{max})$. Il convient ensuite de spécifier les différentes relations liant les signaux composant z et w par l'équation $\mathcal{E}z = \mathcal{A}w$:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{5n} \\ \mathbb{0}_{2n \times 5n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ A & A_d & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-h_{max}) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.14})$$

Ayant défini le système interconnecté et les opérateurs qui s'y rapportent, nous pouvons maintenant énoncer le théorème qui suit.

Théorème IV.3. *Soient les scalaires positifs d et h_{max} , le système (IV.3) est asymptotiquement stable pour tout retard satisfaisant (IV.4) ($h_{min} = 0$) s'il existe des matrices définies positives P, Q_i pour $i = \{0, 1, 2, 3\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que la LMI (IV.1) soit vérifiée pour $\dot{h}(t) = \{-d, d\}$ avec $\Theta(\dot{h}), \mathcal{E}$ et \mathcal{A} définies par (IV.15) et (IV.14).*

PREUVE : Le regroupement des contraintes intégrales quadratiques définies par les différents lemmes mène à l'inégalité générale (IV.2) pour la matrice ∇_1 dont le séparateur :

$$\Theta = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \hline * & \Theta_{22} \end{array} \right] \quad (IV.15)$$

avec

$$\Theta_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q_2 h_{max}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_3 \alpha \end{bmatrix}, \quad \Theta_{12} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta Q_3 \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0(1 - \dot{h}(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Q_2 & -Q_2 \\ 0 & 0 & 0 & -Q_2 & Q_2 + Q_3 \end{bmatrix}$$

où α et β sont égales à $(c^2 - r^2)h_{max}^2$ et $-ch_{max}$ respectivement. Finalement, étant donné l'interconnexion (IV.13)-(IV.14), par application du Théorème IV.1, le système (IV.3) est stable si l'inégalité (IV.1) avec $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \Theta(\dot{h})$, définie en (IV.14) et (IV.15), est vérifiée. Celle-ci étant convexe en la variable $\dot{h}(t)$, il suffit de tester la condition pour les valeurs extrêmes $-d$ et d . \diamond

Nous avons vu dans la Section III.2 que l'introduction d'équations redondantes pouvait apporter des informations supplémentaires sur la dynamique des systèmes à retard. Nous allons donc reprendre cette idée afin d'améliorer l'interconnexion décrivant notre système. A l'image de (III.12), nous définissons le système artificiellement augmenté

$$E\dot{\zeta}(t) = \bar{A}\zeta(t) + \bar{A}_d\zeta(t - h(t)) \quad (IV.16)$$

avec le vecteur d'état instantané étendu $\zeta(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$ et

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_d(t) = \begin{bmatrix} (1 - \dot{h}(t))A_d & 0 \\ 0 & A_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Reprenons la méthodologie exposée jusqu'à présent mais appliquée, cette fois, au nouveau modèle (IV.16). L'interconnexion (IV.13)-(IV.14) reste valable mais nécessite toutefois l'adaptation des dimensions des matrices et la prise en compte la matrice E . La relation $w = \nabla z$ s'exprime alors

par

$$\begin{bmatrix} \varsigma(t) \\ \varsigma(t - h(t)) \\ \varsigma(t - h_{max}) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \nabla_1 \otimes \mathbb{1}_2 \begin{bmatrix} \dot{\varsigma}(t) \\ \varsigma(t) \\ \varsigma(t) \\ \dot{\varsigma}(t) \\ \dot{\varsigma}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

avec $w_1 = \varsigma(t) - \varsigma(t - h(t))$ et $w_2 = \varsigma(t) - \varsigma(t - h_{max})$, tandis que la chaîne directe $\mathcal{E}z = \mathcal{A}w$ est maintenant de la forme

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_d(t) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.18})$$

Puisque les mêmes opérateurs ont été considérés, la structure du séparateur (IV.15) reste inchangée mais les dimensions de toutes les matrices de décisions doivent être adaptées. Ainsi, la première condition du Théorème (IV.1) affirme que l'interconnexion (IV.17)-(IV.18) sera stable si

$$[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}(\dot{h})]^\perp \Theta(\dot{h}) [\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}(\dot{h})]^\perp > 0, \quad \forall \dot{h}(t) \in [-d, d].$$

Quelques manipulations mathématiques montrent que cette dernière inéquation est linéaire en $\dot{h}(t)$. En utilisant l'argument de convexité de l'ensemble des inégalités à vérifier, nous pouvons restreindre le test de la condition ci-dessus sur les bornes de \dot{h} , $-d$ et d . Nous pouvons finalement conclure sur le théorème correspondant.

Théorème IV.4. *Soient les scalaires d et h_{max} , le système (IV.3) est asymptotiquement stable pour tout retard satisfaisant les contraintes (IV.4) ($h_{min} = 0$) s'il existe des matrices définies positives P , Q_i pour $i = \{0, 1, 2, 3\} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ telles que la LMI (IV.1) est vérifiée pour $\dot{h}(t) = \{-d, d\}$ avec \mathcal{E} et \mathcal{A} définies en (IV.18). Le séparateur est de la forme (IV.15) avec les dimensions appropriées.*

L'approche proposée a consisté à caractériser au mieux l'incertitude ∇_a (IV.11) et plus particulièrement sa norme. Une autre approche que nous avons développé dans [8] et non exposé, consiste, à l'instar des techniques IQC [89], à utiliser des filtres de pondération afin de mieux apprécier ∇_a . Ceci permet de réduire de manière importante le pessimisme de l'approche tout en évitant la multiplication du nombre d'opérateurs utilisés¹. Une autre approche que nous avons développé dans L'article correspondant est donné en Annexe D.

IV.3.3 Stabilité des systèmes à retards variant bornés

Comme cela a été suggéré au paragraphe III.2.3, le modèle augmenté (IV.16) introduit la dérivée seconde de l'état $\ddot{x}(t)$. C'est pourquoi, afin de mettre à profit ce signal, nous proposons

¹Nous avons plus particulièrement éliminés les opérateurs \mathcal{D}_m et ∇_b , n'ayant pas de véritable relation avec le système ($\dot{x}(t)$ ne dépend pas explicitement de $x(t - h_{max})$), afin de réduire les dimensions des matrices et variables de décision.

un nouvel opérateur

$$\nabla_c \equiv \frac{\mathcal{I}^2 - \mathcal{D}\mathcal{I}^2 + h(t)\mathcal{I}}{h(t)} : x(t) \rightarrow \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t x(\theta) d\theta ds. \quad (\text{IV.19})$$

Le lemme suivant donne une borne sur sa norme L_2 induite.

Lemme IV.6. *Une contrainte intégrale quadratique pour l'opérateur ∇_c est donnée par l'inégalité suivante, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$ et pour toute matrice définie positive Q_4 ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla_c \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -\frac{h_{max}^2}{2} Q_4 & 0 \\ 0 & 2Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla_c \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

PREUVE : Si l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz à $\bar{\nabla}_c = h(t)\nabla_c$ nous avons pour $h(t) > 0, \forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$,

$$\begin{aligned} \|\bar{\nabla}_c x(t)\|^2 &\leq \left(\int_{t-h(t)}^t \int_s^t d\theta ds \right) \left(\int_{t-h(t)}^t \int_s^t \|x(\theta)\|^2 d\theta ds \right), \\ \frac{\|\bar{\nabla}_c x(t)\|^2}{h^2(t)/2} &\leq \int_{t-h(t)}^t \int_s^t \|x(\theta)\|^2 d\theta ds, \\ \int_0^\infty \frac{2}{h^2(t)} \|\bar{\nabla}_c x(t)\|^2 dt &\leq \int_0^\infty \int_{-h_{max}}^0 \int_s^0 \|x_t(\theta)\|^2 d\theta ds dt, \\ \int_0^\infty \frac{2}{h^2(t)} \|\bar{\nabla}_c x(t)\|^2 dt &\leq \frac{h_{max}^2}{2} \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Nous concluons finalement sur l'inégalité relative à l'opérateur qui nous intéresse de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty 2 \left\| \frac{\bar{\nabla}_c x(t)}{h(t)} \right\|^2 - \frac{h_{max}^2}{2} \|x(t)\|^2 dt &\leq 0, \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty 2 \|\nabla_c x(t)\|^2 - \frac{h_{max}^2}{2} \|x(t)\|^2 dt &\leq 0. \end{aligned}$$

◇

Ce nouvel opérateur vient s'ajouter au "jeu" d'opérateurs de la matrice ∇ . En vu de déterminer une condition de stabilité sur un intervalle de retards ($h_{min} \neq 0$), nous modifions légèrement l'opérateur $\nabla_a = (1 - \mathcal{D})\mathcal{I}$ en $\bar{\nabla}_a = \frac{\nabla_a}{h(t)}$. Cette transformation a pour but d'insérer dans la condition finale des termes liés au retard courant $h(t)$ plutôt qu'au retard maximum h_{max} , intéressant quant à eux, seulement dans le cas de modèle majoré. La contrainte inégalité correspondante est alors définie par :

Lemme IV.7. *Une contrainte intégrale quadratique pour l'opérateur $\bar{\nabla}_a$ est donnée par l'inégalité suivante, $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}$ et pour toute matrice définie positive Q_5 ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \bar{\nabla}_a \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -h_{max} Q_5 & 0 \\ 0 & h(t) Q_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \bar{\nabla}_a \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

PREUVE : La preuve reprend l'idée de la précédente et débute donc avec la majoration de ∇_a ,

$$\begin{aligned}\|\nabla_a x(t)\|^2 &\leq h(t) \int_{t-h(t)}^t \|x(\theta)\|^2 d\theta, \\ \frac{\|\nabla_a x(t)\|^2}{h(t)} &\leq \int_{-h_{max}}^0 \|x(t+\theta)\|^2 d\theta, \\ \int_0^\infty h(t) \frac{\|\nabla_a x(t)\|^2}{h^2(t)} dt &\leq h_{max} \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt.\end{aligned}$$

Puis, en plaçant les deux termes sous la même intégrale,

$$\int_0^\infty \|\bar{\nabla}_a x(t)\|^2 - h_{max} \|x(t)\|^2 dt \leq 0,$$

le résultat du lemme est retrouvé. \diamond

Nous décrivons ensuite le système augmenté (IV.16) à partir de la matrice d'opérateurs

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varsigma(t) \\ \varsigma(t-h(t)) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}}_w = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} \otimes \mathbb{1}_2 & & & \\ & \mathcal{D} \otimes \mathbb{1}_2 & & \\ & & \bar{\nabla}_a \otimes \mathbb{1}_2 & \\ & & & \nabla_c \end{bmatrix}}_{\nabla_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varsigma}(t) \\ \varsigma(t) \\ \dot{\varsigma}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_z \quad (\text{IV.20})$$

avec $w_1 = \frac{\varsigma(t) - \varsigma(t-h(t))}{h(t)}$ et $w_2 = \dot{x}(t) - \frac{x(t) - x(t-h(t))}{h(t)} = E_1 \varsigma(t) - E_2 w_1(t)$ où les matrices E_1 et E_2 sont définies par $E_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}$ et $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}$. En sélectionnant les lemmes appropriés, nous construisons le séparateur (IV.21) remplissant la condition (IV.2) :

$$\Theta = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \hline * & \Theta_{22} \end{array} \right], \quad (\text{IV.21})$$

avec

$$\begin{aligned}\Theta_{11} &= \text{diag} \left(\mathbb{0}_{2n}, -Q_0, -Q_5 h_{max}, -Q_4 \frac{h_{max}^2}{2} \right), \\ \Theta_{12} &= \text{diag} (-P, \mathbb{0}_{5n}), \\ \Theta_{22} &= \text{diag} \left(\mathbb{0}_{2n}, Q_0(1 - \dot{h}(t)), h(t)Q_5, 2Q_4 \right).\end{aligned}$$

Les matrices P , Q_0 , $Q_5 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $Q_4 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont définies positives.

Théorème IV.5. Soient les scalaires d , h_{min} et h_{max} , le système (IV.3) est asymptotiquement stable pour tout retard satisfaisant (IV.4) s'il existe des matrices définies positives P , Q_0 , $Q_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $X \in \mathbb{R}^{6n \times 3n}$ telles que la LMI

$$N^T(\dot{h}^{[i]})\Theta(h^{[j]}, \dot{h}^{[i]})N(\dot{h}^{[i]}) + XS(h^{[j]}) + S^T(h^{[j]})X^T > 0, \quad (\text{IV.22})$$

est vérifiée quel que soit $i = \{1, 2\}$ et $j = \{1, 2\}$. Les matrices N et S sont définies en (IV.25). Les paramètres $h^{[j]}$ et $\dot{h}^{[i]}$ représentent, respectivement, les bornes sur le retard $h(t) \in [h_{min}, h_{max}]$ et ses variations $\dot{h}(t) \in [-d, d]$.

PREUVE : A partir de la matrice de la matrice d'opérateurs définie en (IV.20), nous décrivons le système (IV.16) par²

$$[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}] \xi(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}.$$

Etant donné la matrice de séparation (IV.21), et par application du Théorème IV.1, le système sera stable si

$$\xi^T(t) \Theta(h(t), \dot{h}(t)) \xi(t) > 0.$$

Cette inégalité, qui n'est autre qu'une reformulation de la condition (IV.1), peut encore s'exprimer de manière équivalente par

$$\psi^T(t) N^T(\dot{h}(t)) \Theta(\dot{h}(t)) N(\dot{h}(t)) \psi(t) > 0 \quad (\text{IV.23})$$

telle que $S(h(t))\psi(t) = 0$ avec

$$\psi = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varsigma(t - h(t)) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

et

$$S = \begin{bmatrix} A & -\mathbb{1} & A_d & -\mathbb{1}h(t) & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1}h(t) & 0 \\ A & 0 & A_d & 0 & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} AA & A_d(1 - \dot{h}) & AAd & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & A_d & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & A_d & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ AA & A_d(1 - \dot{h}) & AAd & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & A_d & 0 & 0 & 0 \\ AA & A_d(1 - \dot{h}) & AAd & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & A_d & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.25})$$

Le passage de la première inégalité à la seconde s'opère par le choix du vecteur étendu composé de différentes relations de l'état de (IV.3). Tous deux offrent une représentation particulière du système. La description de ce dernier réside dans la matrice de pondération S (ou $[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}]$) de

²Jusqu'à présent, nous n'avons pas explicité les matrices de la chaîne directe \mathcal{E} et \mathcal{A} . Cela ne sera pas nécessaire car nous définirons le système suivant une formulation différente, à partir de vecteurs étendus $\xi(t)$ puis $\psi(t)$.

“l'état étendu” ψ (ou ξ). D'après le lemme de Finsler, la condition (IV.23) est équivalente à

$$N^T(\dot{h}(t))\Theta(h(t), \dot{h}(t))N(\dot{h}(t)) + XS(h(t)) + S^T(h(t))X^T > 0,$$

où X est une variable de décision supplémentaire de dimensions appropriées. Quelques calculs montrent que $N^T(\dot{h}(t))\Theta(h(t), \dot{h}(t))N(\dot{h}(t))$ est affine en les variables $h(t)$ et $\dot{h}(t)$. Par conséquent, l'ensemble d'inégalités généré par les intervalles $h(t) \in [h_{min}, h_{max}]$ et $\dot{h}(t) \in [-d, d]$ est un polytope à 4 sommets. De ce fait, si les 4 LMI (IV.22) sont satisfaites, la condition ci-dessus sera également vérifiée pour tous $h(t)$ et $\dot{h}(t)$ dans leur domaine de définition respectif. \diamond

IV.3.4 Remarques sur la construction d'opérateurs

Au même titre que la composition d'une fonctionnelle de Lyapunov, la recherche d'opérateurs “intéressants” n'observe pas de règle générale mais s'appuie, plus ou moins intuitivement, sur l'analyse des propriétés du système et des opérateurs élémentaires qui le constituent. Dans le cadre de nos travaux³, nous nous sommes inspirés de précédents travaux [65] dans lesquels les opérateurs proposés, liés à un retard h constant, ont été développés à partir du développement en série de Taylor de l'opérateur initial e^{-hs}

$$e^{-sh} = 1 - hs + \frac{h^2 s^2}{2} - \frac{h^3 s^3}{6} + \dots + \frac{(-hs)^N}{N!} + R_N(h, s).$$

Plus précisément, les opérateurs supplémentaires correspondent aux *restes* $R_N(h, s)$, $N = 0, 1, 2, \dots$ considérés alors comme des incertitudes qu'il convient de borner. Ainsi, les deux premiers sont donnés par

$$\begin{aligned} R_0(h, s) &= - \left(1 - e^{-sh} \right), \\ R_1(h, s) &= - \left(1 - e^{-sh} - hs \right). \end{aligned}$$

Notons qu'il est nécessaire de multiplier ces quantités par des intégrateurs s^{-1} : $(s^{-1})^{N+1} R_N(h, s)$ de sorte que l'opérateur final soit causal et qu'il puisse être borné⁴. Dans ces conditions, ce ne sera pas $R_N(h, s)$ qui s'appliquera à $x(t)$ mais $(s^{-1})^{N+1} R_N(h, s)$ à $x^{(N+1)}(t)$, puisque dans le second cas on est en mesure d'établir une contrainte inégalité [65].

En ce qui concerne les retards variant, nous avons délaissé le formalisme de Laplace pour ne raisonner qu'en terme d'*opérateur temporel* (s^{-1} et e^{-sh} sont devenus \mathcal{I} et \mathcal{D} respectivement). Nous comprenons ainsi la nécessité d'étendre les résultats existants de séparation quadratique [82], [135] à ce nouveau cadre de modélisation (cf. début de la Section IV.2).

Remarque IV.3. *Dans le cas des systèmes à retard variant, le calcul des dérivées successives du modèle (IV.3) s'exprime difficilement de manière générique et, de plus, fait intervenir les dérivées successives du retard $\dot{h}(t), \dots, h^{(N)}(t)$. C'est pourquoi, dans la modélisation (IV.20), nous nous sommes arrêtés à l'ordre $N = 1$. Néanmoins, cette approche offre des perspectives intéressantes et l'origine du pessimisme peut être appréciée.*

Remarque IV.4. *Dans le cadre des IQC, les auteurs de [89] ont proposé de borner la quantité*

³Voir également le choix d'opérateurs pour les systèmes à retard distribué dans la Section IV.3.6.

⁴En effet, par exemple, $\text{abs}(R_1(h, s)) \rightarrow \infty$ lorsque $w \rightarrow \infty$ ($s = jw$) tandis que $\text{abs}(R_1(h, s)s^{-2}) \leq \frac{h^2}{2}$, $\forall s \in \mathbb{C}_+$.

$(1 - \mathcal{D})$ à l'aide d'un filtre $\phi(s)$. Il transforme alors la relation

$$x(t) - x(t - h(t)) = (1 - \mathcal{D})[x(t)] \text{ en } x(t) - x(t - h(t)) = (1 - \mathcal{D})\phi^{-1}[\tilde{x}(t)] \quad (\text{IV.26})$$

où $\tilde{x}(t)$ représente l'état $x(t)$ filtré : $\phi[x(t)]$. Voir à ce sujet l'Annexe D pour plus de détails et une interprétation en terme de séparation quadratique.

IV.3.5 Stabilité robuste

La séparation quadratique, issue des méthodes d'analyse robuste, procure un cadre de travail tout à fait approprié pour l'étude de stabilité des systèmes incertains. Considérons maintenant un système à retard présentant des incertitudes, éventuellement variant dans le temps, s'exprimant sous la forme

$$\dot{x}(t) = A(\Delta)x(t) + A_d(\Delta)x(t - h(t)) \quad (\text{IV.27})$$

où

$$\begin{bmatrix} A(\Delta) & A_d(\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A_d \end{bmatrix} + B\Delta \begin{bmatrix} C & C_d \end{bmatrix}.$$

Le second terme du membre de droite décrit l'incertitude affectant le modèle (IV.27). Celle-ci est caractérisée par la matrice incertaine Δ et nous savons seulement qu'elle appartient à un certain ensemble Ω . Les matrices C , C_d et B sont constantes, de dimensions appropriées et structurent l'incertitude engendrée par Δ dans les matrices du modèle (IV.27). De concert avec l'ensemble des incertitudes admissibles, il s'agit de trouver un séparateur U tel que

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \end{bmatrix} x, \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2^* & U_3 \end{bmatrix}}_U \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta \end{bmatrix} x \right\rangle \leq 0, \quad \forall \Delta \in \Omega. \quad (\text{IV.28})$$

Cette contrainte intégrale quadratique vient s'ajouter aux autres inégalités associées aux opérateurs propres à la description du retard. Par exemple, si l'on considère l'ensemble des matrices diagonales réelles de paramètres incertains bornés

$$\Omega = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N) \mid |\delta_i| \leq \bar{\delta}_i \},$$

le lecteur pourra aisément vérifier que le séparateur

$$U = \left[\begin{array}{cc|cc} -\bar{\delta}_1^2 u_1 & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & -\bar{\delta}_N^2 u_N & \\ \hline & & & u_1 & 0 \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & 0 & & u_N \end{array} \right]$$

satisfait la contrainte (IV.28). Les scalaires u_i , $i = \{1, \dots, N\}$ sont des variables de décision.

Remarque IV.5. Notons que de multiples séparateurs, au sens de l'inégalité (I.16), associés à différentes classes d'incertitudes sont proposés dans [82]. En fait, la recherche d'un séparateur général dans l'ensemble Θ des matrices symétriques de dimensions appropriées pour toutes incertitudes $\Delta \in \Omega$ résulte en une infinité de LMI. De ce fait, pour des formes particulières

d'incertitudes, Iwasaki et al [82] propose des sous-ensembles de séparateurs⁵ $\bar{\Theta}$ en structurant la matrice de séparation de sorte que le problème soit numériquement faisable.

Nous établissons, dans le théorème suivant, des conditions de stabilité robuste pour le système incertain (IV.27) dans le cas de la modélisation exposée au paragraphe IV.3.2. Ce résultat peut être facilement adapté aux autres modèles d'interconnexions développés tout au long de cette section.

Théorème IV.6. *Soient les scalaires h_{max} et d , le système (IV.27) est robustement asymptotiquement stable pour tout retard $h(t)$ satisfaisant (IV.4) (ici $h_{min} = 0$) et pour toute incertitude $\Delta \in \Omega$, s'il existe des matrices définies positives $P, Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices U_k ($k = 1, 2, 3$) structurées en accord avec l'ensemble incertain Ω (c'est-à-dire satisfaisant (IV.28)) telles que la LMI (IV.1) soit vérifiée avec Θ, \mathcal{E} et \mathcal{A} définies en (IV.30) et (IV.29).*

PREUVE : En premier lieu, introduisons les signaux artificiels

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta, \text{ avec } z_\Delta = Cx(t) + C_d x(t - h(t)),$$

de façon à isoler et incorporer l'incertitude Δ à la matrice d'opérateurs ∇ . Elle vient ainsi s'ajouter à l'ensemble des opérateurs décrivant le système à retard (pour des raisons de clarté de présentation, nous avons choisi ici le jeu d'opérateur $\{\mathcal{I}, \mathcal{D}, \nabla_a\}$ (IV.11)). Le système (IV.27) se réécrit en fin de compte comme l'interconnexion de

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - h(t)) \\ v_1(t) \\ w_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & & 0 \\ & \mathcal{D} & \\ & & (\mathbb{1}_n - \mathcal{D}) \circ \mathcal{I} \\ 0 & & & \Delta \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ \dot{x} \\ z_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{z(t)}$$

avec

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_n & 0 & 0 \\ -\mathbb{1}_n & 0 & \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & A_d & 0 & B \\ \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & C_d & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} w(t). \quad (\text{IV.29})$$

En combinant toutes les contraintes inégalités relatives à chaque opérateur ainsi que celle liée à l'ensemble des incertitudes admissibles (IV.28), un séparateur de la forme

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^* & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.30})$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \text{diag}(0_n, -Q, -h_{max}^2 R, U_1), \\ \Theta_{12} &= \text{diag}(-P, 0_{2n}, U_2), \\ \Theta_{22} &= \text{diag}(0_n, (1-d)Q, R, U_3), \end{aligned}$$

satisfait la condition (IV.2) pour tout $\Delta \in \Omega$. Finalement, la seconde condition (IV.1) fournit la

⁵Dans ce cas, la recherche d'un séparateur Θ est relaxée par une approximation intérieure : $\bar{\Theta} \subset \Theta$. De par le conservatisme introduit, les conditions résultantes seront seulement suffisantes.

condition de stabilité robuste du système proposée par le théorème. \diamond

En ce qui concerne les systèmes incertains polytopiques, la méthodologie reprend la seconde partie de la démonstration donnée en Annexe B.1 et ne sera donc pas développée ici.

IV.3.6 Stabilité des systèmes à retards distribués

Dans les sections précédentes, nous avons vu qu'une méthode possible pour utiliser le concept de séparation quadratique était de raisonner en terme d'opérateur. Les critères de stabilité établis jusqu'à maintenant reposaient sur l'assemblage (dans la matrice ∇) de divers opérateurs relatifs à celui de *retard discret* \mathcal{D} (IV.6). La généralité offerte par cette méthodologie suggère que nous puissions tout aussi bien traiter les systèmes à *retards distribués*, à condition de disposer d'opérateurs appropriés [61].

Le retard distribué, représentant l'effet cumulatif du passé sur la dynamique, apporte souvent une modélisation plus fine de certains processus physiques [49], [60]. Si le modèle est plus fidèle au procédé, son analyse reste cependant plus délicate. De tels systèmes sont généralement étudiés sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-h}^0 A_d(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad (\text{IV.31})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état instantané, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est constant et le scalaire $h > 0$ définit la plage temporelle de distribution du retard θ . La matrice $A_d(\theta)$, appelée noyau du retard distribué, est une fonction du retard de $[-h, 0]$ dans $\mathbb{R}^{n \times n}$.

La question de la stabilité a été explorée suivant deux voies : l'approche fréquentielle [28], [125] et la méthode de Lyapunov-Krasovskii [68], [97]. La plupart des travaux que l'on peut trouver dans la littérature concernent seulement la stabilité d'une classe particulière du système (IV.31). En effet, la matrice A_d est habituellement supposée constante et les conditions de stabilité sont établies pour une valeur de h donnée et donc connue précisément. Nous pouvons également citer les travaux de [68] qui, par une méthode de discrétisation et une fonctionnelle très générale, ont considérablement réduit le pessimisme de l'étude. Cependant, le modèle du noyau, alors constant par morceaux, ne reste qu'une approximation de $A_d(\theta)$. En ce qui concerne notre approche, nous considérerons une classe de systèmes à retard distribué légèrement plus large que celle traditionnellement étudiée :

- Le noyau du retard distribué est supposé polynomial en le retard θ et peut donc s'exprimer sous la forme

$$A_d(\theta) = \sum_{i=0}^r A_{di}\theta^i,$$

où r est un entier positif et correspond au degré du polynôme. $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall i \in \{0, \dots, r\}$ sont des matrices constantes.

- Le scalaire h est incertain mais est supposé appartenir à l'intervalle

$$0 \leq h_{min} \leq h \leq h_{max}. \quad (\text{IV.32})$$

Par conséquent, le système à retard (IV.31) se définit plus simplement par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^r A_{di} \int_{-h}^0 \theta^i x(t+\theta) d\theta, \quad (\text{IV.33})$$

et le retard maximal h vérifie l'hypothèse (IV.32).

Remarque IV.6. *Notons que, d'après le théorème de Weierstrass, pour toute fonction continue définie sur un compact, le modèle polynomial avec un degré assez élevé constitue une approximation aussi précise que l'on veut.*

Les opérateurs que nous considérerons dans la suite de ce paragraphe seront définis selon le formalisme de Laplace. La méthode de séparation quadratique telle qu'énoncée dans [135] et présentée dans la Section I.4.2 sera donc suffisante pour la classe de systèmes étudiée ici.

Introduisons maintenant l'opérateur de retard distribué $\forall i \in \{0, \dots, r\}$

$$\delta_i : x(t) \rightarrow \int_{-h}^0 \theta^i x(t+\theta) d\theta. \quad (\text{IV.34})$$

A l'image des opérateurs d'intégration et de retard discret (I.19)-(I.20), il convient de trouver une contrainte inégalité pour chaque opérateur ci-dessus et en déduire le séparateur associé.

Lemme IV.8. *Une contrainte quadratique pour les opérateurs $\delta_i, \forall i \in \{0, \dots, r\}$ est donnée par l'inégalité suivante, pour toutes matrices définies positives Q_i*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_n \\ \delta_i \mathbb{1}_n \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\frac{h_{\max}^{2i+2}}{(i+1)^2} Q_i & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n \\ \delta_i \mathbb{1}_n \end{bmatrix} \leq 0. \quad (\text{IV.35})$$

PREUVE : A partir de la formulation de l'opérateur dans le domaine de Laplace $\delta_i(s) = \int_{-h}^0 \theta^i e^{\theta s} d\theta$, pour tout $s \in \mathbb{C}^+$ une borne sur $|\delta_i(s)|$ peut aisément être estimée :

$$|\delta_i(s)| \leq \int_{-h}^0 |\theta^i e^{\theta s}| d\theta \leq \frac{h_{\max}^{i+1}}{i+1}.$$

◇

A ce stade, nous avons défini l'ensemble minimum des opérateurs nécessaires à la modélisation du système (IV.33) en un système interconnecté tel que représenté sur la Figure I.9 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \delta_0[x(t)] \\ \vdots \\ \delta_r[x(t)] \end{bmatrix}}_{w(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} s^{-1}\mathbb{1}_n & & 0 \\ & \delta_0\mathbb{1}_n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \delta_r\mathbb{1}_n \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ \vdots \\ x(t) \end{bmatrix}}_{z(t)}, \quad (\text{IV.36})$$

et

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ \vdots \\ x(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & A_{d0} & \dots & A_{dr} \\ \mathbb{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \delta_0[x(t)] \\ \vdots \\ \delta_r[x(t)] \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.37})$$

L'analyse de stabilité de cette interconnexion par les outils de la séparation quadratique (en l'occurrence le Théorème I.5) conduit à un premier résultat.

Théorème IV.7 ([61]). *Soient les scalaires h_{max} et r , le système (IV.33) est asymptotiquement stable pour tout $0 \leq h \leq h_{max}$ s'il existe des matrices définies positives $P, Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $i = \{0, \dots, r\}$ telles que la LMI (I.15) soit satisfaite avec Θ, \mathcal{E} et \mathcal{A} définies en (IV.38) et (IV.37).*

PREUVE : La réunion de tous les séparateurs (I.19) (IV.35) associés à chaque opérateur composant la relation (IV.36) donne le séparateur global pour ∇

$$\Theta = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \hline * & \Theta_{22} \end{array} \right], \quad (\text{IV.38})$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \text{diag}(0_n, -h_{max}^2 Q_0, \dots, -\frac{h_{max}^{2r+2}}{(r+1)^2} Q_r), \\ \Theta_{12} &= \text{diag}(-P, 0_{n \times n(r+1)}), \\ \Theta_{22} &= \text{diag}(0_n, Q_0, \dots, Q_r), \end{aligned}$$

et $P, Q_0, \dots, Q_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices définies positives. La contrainte (I.16) du Théorème I.5 étant satisfaite par construction, la seconde (I.15) constitue la condition de stabilité de l'interconnexion (IV.36)-(IV.37) et donc celle du système (IV.33). \diamond

Comme nous l'avons expliqué tout au long de ces derniers paragraphes, la philosophie de la séparation quadratique repose sur la recherche de relations caractéristiques du système afin d'enrichir le modèle d'interconnexion résultant. Nous espérons donc améliorer ce premier résultat ci-dessus en exploitant les propriétés des opérateurs δ_i propres aux systèmes à retards distribués. En effet, nous remarquons que si l'on intègre par parties la quantité $\delta_i(s) = \int_{-h}^0 \theta^i e^{\theta s} d\theta$, nous obtenons une définition par récurrence des opérateurs $\delta_i, \forall i \geq 1$,

$$\begin{cases} \delta_i(s) &= -\frac{(-h)^i e^{-sh}}{s} - \frac{i}{s} \delta_{i-1}(s), \\ \delta_0(s) &= \frac{1 - e^{-hs}}{s}. \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

Cette nouvelle expression établit un lien entre les δ_i ainsi que les opérateurs d'intégration s^{-1} et de retard discret e^{-sh} . L'application de δ_i au signal $\dot{x}(t)$ sous sa seconde formulation (IV.39) met en équation l'état aux instants extrêmes de l'intervalle de distribution, c'est-à-dire, l'instant présent $x(t)$ et l'instant le plus retardé $x(t-h)$ nécessaire au calcul de $\dot{x}(t)$:

$$\begin{cases} \delta_0[\dot{x}(t)] &= x(t) - x(t-h), \\ \delta_1[\dot{x}(t)] &= hx(t-h) - \delta_0[x(t)], \\ \delta_2[\dot{x}(t)] &= -h^2 x(t-h) - 2\delta_1[x(t)], \\ &\vdots \\ \delta_r[\dot{x}(t)] &= -(-h)^r x(t-h) - r\delta_{r-1}[x(t)]. \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

On constate que, logiquement, la variation de l'état $\dot{x}(t)$ joue un rôle dans la description du système (IV.33). Nous proposons, encore une fois, d'incorporer dans un modèle augmenté la dynamique de ce signal :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^r A_{di} \int_{-h}^0 \theta^i x(t+\theta) d\theta, \\ \ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + \sum_{i=0}^r A_{di} \int_{-h}^0 \theta^i \dot{x}(t+\theta) d\theta. \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

L'ajout des nouvelles relations (IV.40) et (IV.41) nous conduit à la réalisation d'une matrice ∇ de la forme

$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2n}s^{-1} & & & & 0 \\ & \mathbb{1}_n e^{-hs} & & & \\ & & \mathbb{1}_{2n}\delta_0(s) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \mathbb{1}_{2n}\delta_r(s) \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.42})$$

Celle-ci définit le couple de signaux internes w et z de la boucle d'interconnexion de la Figure I.9

$$z(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t) \\ \vdots \\ \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad w(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t-h) \\ \delta_0[\dot{x}(t)] \\ \delta_0[x(t)] \\ \vdots \\ \delta_r[\dot{x}(t)] \\ \delta_r[x(t)] \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.43})$$

Les matrices \mathcal{E} et \mathcal{A} , définies comme suit, fixent les relations liant les différentes composantes des deux vecteurs étendus.

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} E_H \\ \mathbb{0}_{n(r+1) \times n(2r+5)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{A}_{d0} & \dots & \bar{A}_{dr} \\ \hline V \otimes \mathbb{1}_{2n} & & \mathbb{0}_{2n(r+2) \times n(2r+3)} & \\ \hline & & & A_L \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.44})$$

avec $\forall i \geq 0, \bar{A}_{di} = \mathbb{1}_2 \otimes A_{di}$,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix}, \quad E_H = \text{diag}(F_1, \mathbb{1}_{2n(r+1)}), \\ F_1 &= \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+2)}, \\ A_L &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h\mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -(-h)^r \mathbb{1} & 0 & . & 0 & -r\mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème IV.8 ([61]). *Soient les scalaires h, h_{max} et r tels que $0 \leq h \leq h_{max}$, le système*

(IV.33) est asymptotiquement stable pour un retard h donné s'il existe des matrices définies positives $P, Q_0, \dots, Q_r \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que la LMI (I.15) soit satisfaite avec Θ, \mathcal{E} et A définies en (IV.45) et (IV.44).

PREUVE : La démonstration est semblable à celle du Théorème IV.7. La matrice incertaine ∇ (IV.42), proche de (IV.36), admet pour séparateur

$$\Theta = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \hline * & \Theta_{22} \end{array} \right], \quad (\text{IV.45})$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \text{diag}(0, -R, -h_{\max}^2 Q_0, \dots, -\frac{h_{\max}^{2r+2}}{(r+1)^2} Q_r), \\ \Theta_{12} &= \text{diag}(-P, 0, \dots, 0), \\ \Theta_{22} &= \text{diag}(0, R, Q_0, \dots, Q_r), \end{aligned}$$

où $P, Q_0, \dots, Q_r \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sont $r+3$ matrices définies positives (comme précédemment (IV.38), cf. (I.19) et (IV.35)). La matrice de décision R , quant à elle, provient de la contrainte quadratique de l'opérateur de retard discret, puisque $\forall s \in \mathbb{C}_+$ on a $|e^{-hs}| \leq 1$, ce qui implique

$$\left[\begin{array}{c} \mathbb{1}_n \\ e^{-hs} \mathbb{1}_n \end{array} \right]^* \left[\begin{array}{cc} -R & 0 \\ 0 & R \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbb{1}_n \\ e^{-hs} \mathbb{1}_n \end{array} \right] < 0 \quad (\text{IV.46})$$

pour tout $R > 0$. ◇

Si la pertinence de la modélisation des systèmes à retard distribué a été améliorée, le Théorème IV.8 ne présente cependant pas de propriété de robustesse vis-à-vis du retard. En fait, il évalue la stabilité de (IV.33) pour un retard $h \leq h_{\max}$ donné et non pour tout $h \leq h_{\max}$. Nous proposons de remédier à cet inconvénient en modifiant quelque peu l'expression de δ_i . Pour cela, en combinant deux opérateurs successifs

$$\begin{cases} \delta_i(s) = -\frac{(-h)^i e^{-sh}}{s} - \frac{i}{s} \delta_{i-1}(s), \\ \delta_{i-1}(s) = -\frac{(-h)^{i-1} e^{-sh}}{s} - \frac{i-1}{s} \delta_{i-2}(s), \end{cases}$$

nous réécrivons les δ_i sous la forme

$$\delta_i(s) = -\left(h + \frac{i}{s}\right) \delta_{i-1}(s) - \frac{h(i-1)}{s} \delta_{i-2}(s), \quad \forall i \geq 2.$$

Nous avons ainsi linéarisé l'expressions des δ_i en le retard h . De plus, par récurrence, on montre qu'ils peuvent également se mettre sous la forme explicite

$$\delta_i(s) = (-1)^i i! \left(\frac{1}{s^{i+1}} - \sum_{j=0}^i \frac{h^{i-j} e^{-sh}}{(i-j)! s^{j+1}} \right).$$

Dans ce cas, les $\delta_i(s)$ sont décrits par combinaison des opérateurs e^{-hs} et d'intégration à l'ordre $i+1$. Il paraît alors utile de considérer, en outre, les dérivées successives de l'état du système. Par conséquent, nous généralisons le modèle (IV.41) et considérons maintenant le vecteur d'état

augmenté

$$y(t) = \begin{bmatrix} x^l(t) \\ x^{l-1}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix},$$

où $x^k(t)$ est la dérivée k -ième de $x(t)$ de dynamique

$$x^{k+1}(t) = Ax^k(t) + \sum_{i=0}^r A_{di} \int_{-h}^0 \theta^i x^k(t + \theta) d\theta,$$

l est l'ordre maximal de dérivation, fixé arbitrairement. De plus, le vecteur étendu et sa dérivée sont liés par l'équation linéaire

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{E_2} \dot{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}}_{E_1} y(t). \quad (\text{IV.47})$$

Nous pouvons maintenant construire l'interconnexion finale modélisant le système (IV.33) et ses dérivées successives (jusqu'à l'ordre l) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-h) \\ \delta_0[\dot{y}(t)] \\ \delta_0[y(t)] \\ \vdots \\ \delta_r[\dot{y}(t)] \\ \delta_r[y(t)] \end{bmatrix}}_{w(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n(l+1)} s^{-1} & & & 0 \\ & \mathbb{1}_{n(l+1)} e^{-hs} & & \\ & & \mathbb{1}_{2n(l+1)} \delta_0(s) & \\ & & & \dots \\ 0 & & & \mathbb{1}_{2n(l+1)} \delta_r(s) \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ y(t) \\ \dot{y}(t) \\ y(t) \\ \vdots \\ \dot{y}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{z(t)}, \quad (\text{IV.48})$$

et

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_4 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} (z - \bar{z}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 \\ \mathcal{A}_4 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}(h)} w \quad (\text{IV.49})$$

$$\text{avec } W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+2) \times (r+2)},$$

IV.4 Exemples comparatifs

Cette section est dédiée à l’application des techniques développées tout au long de ce chapitre. En effet, les exemples numériques suivants ont pour objectif de comparer les méthodes proposées dans ce manuscrit avec les résultats rencontrés dans la littérature.

IV.4.1 Cas des retards variant majorés

Nous allons, dans un premier temps, tester la pertinence de nos critères sur des systèmes à retard majoré, c’est-à-dire, des systèmes stables lorsque le retard est nul et qui se déstabilisent si celui-ci dépasse une certaine valeur maximale noté h_{max} . Ainsi, une condition de stabilité sera d’autant moins pessimiste qu’elle sera capable d’estimer une valeur h_{max} élevée (proche de la borne exacte).

Premier exemple

Considérons l’exemple académique (IV.50), extrait de [105], largement repris dans la littérature :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - h(t)). \quad (\text{IV.50})$$

Le retard $h(t)$, variant, satisfait les contraintes sur ses valeurs admissibles $0 \leq h(t) \leq h_{max}$ ainsi que sur sa vitesse de variations $|\dot{h}(t)| \leq d \leq 1$. La matrice $A + A_d$ étant hurwitz, le système (IV.50) sans retard (pour $h(t) = 0$) est stable. La question est : *quelle est la plus grande valeur du retard h_{max} telle que la stabilité de (IV.50) soit préservée ?* Dans le cas d’un retard h constant, on montre analytiquement que la valeur maximale est $h_{max} = 6.1725$. Dans le cas variant, pour plusieurs valeurs données sur la borne d , le retard maximal a été évalué suivant différentes méthodes. Les résultats sont résumés dans la Table IV.1. Si l’approche robuste est employée dans [58] et [88, 89] (lemme borné réel et IQC respectivement), la méthode directe de Lyapunov-Krasovskii reste la méthode la plus utilisée [55, 58, 71, 72, 160]. La plupart des résultats classiques [55], [160] se basent sur la fonctionnelle commune (I.7). Et, se limitant à la réduction du pessimisme inhérent à la majoration de la dérivée, aucune technique n’est véritablement employée pour déduire des informations sur la dynamique retardée. Bien que de nouvelles variables de décision, communément nommées “multiplicateurs” ou encore “slack variables”, soient introduites, elles s’avèrent généralement inutiles en analyse de stabilité [64]. Comme prévu, à partir de la même fonctionnelle et en appliquant la technique de séparation de l’intégrale (III.8), le Théorème III.1 (simple reformulation mais avec moins de variables de décision) donne les mêmes résultats que [71]. Puis, nous pouvons ainsi remarquer que la prise en compte d’informations supplémentaires sur les systèmes à retard lors de l’étape de modélisation (augmentation du modèle ou translation temporelle) permettait d’améliorer sensiblement les résultats (Théorèmes III.2, III.3 et III.6). En ce qui concerne l’approche par séparation quadratique, les valeurs obtenues montrent qu’une description améliorée du retard au travers d’opérateurs appropriés est également très intéressante pour réduire le conservatisme de l’analyse. Il est clair que le choix des opérateurs et le calcul de leur norme pour la caractérisation du phénomène de retard vont conditionner la pertinence du critère de stabilité. Dans [89], par le formalisme des IQC, seul les deux opérateurs \mathcal{D} et $(\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \mathcal{I}$ sont considérés. Néanmoins, une majoration fine de la norme du second, par l’intermédiaire de filtres de pondération, ont permis d’établir d’excellents résultats. Dans nos derniers travaux [8] (cf. Annexe D) sur la stabilité, nous avons adapté cette idée dans le cadre de la séparation quadratique et l’avons combiné avec la modélisation augmentée. Les résultats obtenus sont prometteurs et des travaux futurs concernent la synthèse d’un filtre

TAB. IV.1: Retard maximal h_{max} admissible pour le système (IV.50) en fonction de d .

Méthodes	d	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	$\forall d$
Lyapunov Krasovskii	Fridman (2002) [55]	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	0.999	0.999
	Fridman (2006) [58]	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632
	Wu et al (2004) [160]	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	-	-
	He et al (2007) [71]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492	1.345	1.345
	He et al (2007) [72]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492	1.345	1.345
IQC	Kao et al (2005) [88]	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	0.999	-
	Kao et al (2007) [89]	6.117	4.714	3.807	2.280	1.608	1.360	-
L.K. Augmentation modèle	Théorème III.1	4.472	3.605	3.039	2.043	1.590	1.345	1.345
	Théorème III.2	4.472	3.670	3.209	2.514	2.181	2.034	-
	Théorème III.3	5,120	4,081	3,448	2,528	2,152	1,991	-
L.K. Translation temporelle	Théorème III.6, N=2	5,717	4,286	3,366	2,008	1,364	1,345	1,345
	Théorème III.6, N=4	5,967	4,375	3,349	2,008	1,364	1,345	1,345
	Théorème III.6, N=6	6,120	4,396	3,321	2,008	1,364	1,345	1,345
Séparation Quadratique	Théorème IV.3	4.568	3.672	3.084	2.043	1.492	1.345	1.345
	Théorème IV.4	4.568	3.740	3.263	2.536	2.183	2.034	-
	Théorème IV.5	5.120	4.081	3.448	2.528	2.152	1.991	-
Sép. Quad. + filtre	Théorème 2 [8]	6.117	4.714	3.807	2.280	1.608	1.360	1.345
	Théorème 3 [8]	6.117	4.794	3.995	2.682	1.957	1.602	-

approprié pour la majoration du nouvel opérateur $\mathcal{I}^2 - \mathcal{D}\mathcal{I}^2 + h(t)\mathcal{I}$ (IV.19).

Nous présentons dans la suite différents exemples illustrant l'efficacité des conditions de stabilité développées au cours de ce chapitre.

Second exemple

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(t - h(t)). \quad (\text{IV.51})$$

Nous nous assurons en premier lieu que la matrice $A + Ad$ est stable. Puis, en appliquant les théorèmes précédents nous recherchons la valeur maximale h_{max} du retard telle que le système (IV.51) reste stable. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la littérature dans la Table IV.2. Nous remarquons que dans le cas d'un retard constant ($d = 0$), le système semble stable indépendamment de la taille de celui-ci. Mais dès lors que le retard $h(t)$ devient variant dans le temps, des bornes inférieures (bien plus faibles) sur le retard maximal autorisé peuvent être estimés.

Troisième exemple

Considérons maintenant le cas de systèmes incertains tels que

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0.12 + 12\rho \\ 1 & -0.465 - \rho \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.1 & -0.35 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} x(t - h(t)). \quad (\text{IV.52})$$

TAB. IV.2: Retard maximal h_{max} admissible pour le système (IV.51) en fonction de d .

Méthodes	d	0	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8
Lyapunov Krasovskii	Fridman (2002) [55]	∞	8.330	5.459	3.25	2.175	0.999	0.560
	Fridman (2006) [58]	1.082	1.082	1.082	1.082	1.082	1.082	1.082
	Wu et al (2004) [160]	∞	8.330	5.459	3.255	2.175	0.999	0.560
	He et al (2007) [71]	∞	8.331	5.461	3.264	2.195	1.082	0.774
L.K. Augmentation modèle	Théorème III.1	∞	8.331	5.459	3.25	2.195	0.999	0.560
	Théorème III.2	∞	8.572	5.823	3.824	2.919	2.008	1.356
	Théorème III.3	∞	9.649	6.320	3.949	2.913	1.995	1.332
Trans. temp.	Théorème III.6	∞	10.311	6.095	3.295	2.176	0.999	0.301
Séparation quadratique	Théorème IV.3	∞	8.468	5.519	3.271	2.195	1.082	0.774
	Théorème IV.4	∞	8.718	5.893	3.847	2.926	2.008	1.356
	Théorème IV.5	∞	9.649	6.320	3.949	2.913	1.995	1.332
Sép. quad. + filtre	Théorème 2 [8]	∞	10.709	6.494	3.480	2.154	0.886	0.439
	Théorème 3 [8]	∞	11.058	6.996	4.171	2.970	1.829	1.055

TAB. IV.3: Retard maximal h_{max} admissible pour le système (IV.52) en fonction de d .

d	0	0.1	0.5	0.8
[56]	0.782	0.736	0.465	0.454
[73]	0.863	0.786	0.465	0.454
Théorème III.4	1.475	1.444	1.395	1.380

où ρ est un paramètre inconnu mais supposé constant et compris dans un intervalle $|\rho| \leq 0.035$. Nous cherchons alors à montrer que le système (IV.52) est stable pour tout retard $h(t) \in [0, h_{max}]$, $|\dot{h}(t)| \leq d$ et pour tout $|\rho| \leq 0.035$. Les valeurs de h_{max} calculées pour différents d sont données dans la Table IV.3. Nous avons préféré la méthode de Lyapunov puisque, l'incertitude étant constante, nous pouvons utiliser facilement une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendant des paramètres.

Quatrième exemple

Considérons le système incertain et à temps variant suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -2 + \delta_1 \cos(t) & 0 \\ 0 & -1 + \delta_2 \sin(t) \end{bmatrix} x(t) \\ & + \begin{bmatrix} -1 + \gamma_1 \cos(t) & 0 \\ -1 & -1 + \gamma_2 \sin(t) \end{bmatrix} x(t - h(t)), \end{aligned} \quad (\text{IV.53})$$

extrait de [92]. Les δ_i et γ_i sont des paramètres incertains mais que nous savons bornés :

$$|\delta_1| \leq 1.6, \quad |\delta_2| \leq 0.05, \quad |\gamma_1| \leq 0.1, \quad |\gamma_2| \leq 0.3.$$

TAB. IV.4: Retard maximal h_{max} admissible pour le système (IV.53) en fonction de d .

d	0	0.1	0.5	0.8
[92]	0.241	0.234	0.188	0.110
[160]	1.149	1.106	0.924	0.760
[89]	1.416	1.302	0.974	0.829
Théorème IV.6	1.515	1.422	1.105	0.910

En raison des termes en sinus et cosinus, les matrices du système (IV.53) sont non-stationnaires. Dans ces conditions, nous pouvons exprimer ce dernier sous la forme d'un système incertain borné en norme (IV.27) avec

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \mathbf{1}_2, \quad C = \text{diag}(1.6, 0.05), \quad C_d = \text{diag}(0.1, 0.3).$$

Les résultats sont rassemblés dans la Table IV.4.

IV.4.2 Cas des retards variant bornés

Nous considérons maintenant le cas où la valeur minimale du retard h_{min} est supérieure à zéro. Soit l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) - 0.1\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t).$$

Nous souhaitons la stabiliser au moyen d'un retour de sortie statique retardé $u(t) = ky(t-h(t))$. Pour $k = 1$, [68] montre que, dans la cas d'un retard constant, le système est stable si h est compris dans l'intervalle $]0.10016826, 1.7178[$. Nous appliquons ensuite notre méthode pour évaluer l'intervalle de stabilité lorsque le retard devient variable. Le système s'écrit

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h(t)). \quad (\text{IV.54})$$

Les couples de valeurs $h_{min} - h_{max}$ estimés pour différentes bornes d sont donnés dans la Table IV.5. Pour cela, nous avons appliqué la technique de fenêtre glissante à partir des Théorèmes III.3 et IV.5, seuls capables de détecter un intervalle de stabilité pour des systèmes instables sans retard (sur cet exemple, ils donnent les mêmes résultats).

IV.4.3 Cas des retards distribués

Nous finissons cette série d'exemples par deux applications numériques concernant les systèmes à retard distribué. Nous nous appuyons sur le logiciel `trace-DDE` [27] pour évaluer l'efficacité de notre critère développé dans la Section IV.3.6.

TAB. IV.5: Intervalle de retard stabilisant le système (IV.54) en fonction de d .

	h_{min}	h_{max}
$d = 0$	0.102	1.424
$d = 0.1$	0.102	1.424
$d = 0.2$	0.103	1.423
$d = 0.5$	0.104	1.421
$d = 0.8$	0.105	1.419
$d = 1$	0.105	1.417
analytique (cas constant)	0.10016826	1.7178

Théorème IV.9, $r = 3$	h_{max}
$l = 0$	1.32
$l = 1$	1.58
$l = 2$	1.60
$l \geq 3$	1.61

(a)

Théorème IV.9, $l = 0$	h_{max}
$r = 3$	1.32
$r = 4$	1.43
$r = 5$	1.432

(b)

TAB. IV.6: Retard maximal h_{max} pour le système (IV.55) ($h_{min} = 0$).

Premier exemple

Considérons tout d'abord un système du premier ordre :

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + \int_{-h}^0 (1 + \theta + \theta^3)x(t + \theta)d\theta. \quad (\text{IV.55})$$

Une analyse par une méthode numérique [27] montre que ce système est asymptotiquement stable pour tout retard h inférieur à 1.759. Un premier résultat donné par le Théorème IV.8 évalue cette borne à 1.0. Puis, le Théorème IV.9 permet, grâce à l'introduction d'équations redondantes, d'améliorer considérablement ce résultat (h_{min} est fixé à zero). En effet, par extension du vecteur d'état composé des dérivées successives de $x(t)$, l'estimation du retard maximal h_{max} croît avec l'ordre de dérivation l (cf. Table IV.6a).

Nous constatons que pour un ordre $l \geq 3$ supérieur à l'ordre du polynôme il n'y a plus d'amélioration. Ceci suggère qu'il n'est pas utile d'augmenter l'état $y(t)$ (IV.47) au delà de rn pour espérer réduire le conservatisme. De ce fait, nous proposons de représenter le noyau $A_d(\theta) = 1 + \theta + \theta^3$ comme un polynôme d'ordre supérieur $\mu > r$: $A_d(\theta) = \sum_{i=0}^{\mu} A_{di}$ avec $A_{di} = 0, \forall i \geq r$. Ce subterfuge autorise l'insertion d'opérateurs supplémentaires fictifs $\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_{\mu}$ qui, comme le montre la Table IV.6b, améliorent le résultat. Finalement, en combinant le vecteur étendu $y(t)$ (en augmentant l) et la modélisation artificielle (polynôme d'ordre $\mu > r$) nous montrons que, pour $r = 9, l = 9$, le système (IV.55) est stable $\forall h \leq 1.758$.

Théorème IV.9,	h_{min}	h_{max}
$l = 1, r = 1$	0.23	1
$l = 1, r = 2$	0.21	1.2
$l = 1, r = 3$	0.2	1.29
$l = 2, r = 1$	0.21	1
$l = 2, r = 2$	0.20	1.2
$l = 2, r = 3$	0.20	1.3

TAB. IV.7: Intervalle de stabilité du système (IV.56).

Second exemple

Soit le système à retard distribué de la forme

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.01 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \int_{-h}^0 \begin{bmatrix} -1 + 0.3\theta & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t + \theta) d\theta \quad (\text{IV.56})$$

où le noyau est un polynôme d'ordre deux en le retard. Nous remarquons que ce système est instable lorsque $h = 0$. En fait, pour certaines valeurs de h , le terme retardé a un effet stabilisant. A l'aide de l'outil numérique `trace-DDE`, on s'aperçoit que le système est stable pour $0.195 \leq h \leq 1.71$. Par application du Théorème IV.9 sur une fenêtre $[h_{min}, h_{max}]$ glissante, nous établissons les résultats de la Table IV.7.

IV.5 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie divers théorèmes pour l'analyse des systèmes à retards variables par une méthode originale, à savoir la séparation quadratique. Résumons sommairement les différents points abordés dans ce chapitre.

Dans un premier temps, nous avons revisité le principe de séparation quadratique pour l'adapter à l'étude des systèmes à retards variant dans le temps. Pour cela, nous avons reformulé le théorème en terme d'opérateurs temporels en lieu et place des opérateurs fréquentiels issus du formalisme de Laplace et limités au cas des systèmes stationnaires. Dans cette approche, un système à retard est modélisé comme l'interconnexion d'une équation linéaire avec une matrice d'opérateurs ∇ définissant le système. Ce paradigme ouvre des perspectives intéressantes pour traiter, dans un cadre uniforme, différents types de retard. Il nous a ainsi permis de construire des conditions de stabilité pour les systèmes à retards discrets (inconnus, majorés ou bornés) et à retards distribués (de noyau polynomial en le retard). En outre, appartenant aux méthodes d'analyse robuste, nous avons pu modéliser aisément le cas des systèmes incertains. L'ensemble des opérateurs utilisés pour caractériser la dynamique retardée et les contraintes inégalités associées déterminent le conservatisme de la modélisation. Ces bases mises en place, il s'agira, en prospective, d'affiner le calcul des normes induites et d'agrémenter l'application ∇ d'opérateurs complémentaires pour une description fidèle du phénomène de retard.

Nous allons désormais entamer le cinquième chapitre de notre mémoire dans lequel nous revenons sur la partie applicative de notre travail. Nous verrons que le trafic TCP, dans la topologie de réseau considérée, sera modélisé par un système à multiples retards. Même si nous

n'exploiterons pas pleinement les méthodes développées ici, elles nous serviront de base pour établir un critère simple et pratique (avec peu de variables de décision) pour la stabilisation du phénomène de congestion. Notons par ailleurs que cette approche a également été utilisée pour la synthèse de contrôleur stabilisant l'algorithme de Foschini-Miljanic souvent utilisé pour la gestion d'énergie dans les réseaux sans fil [35].

Chapitre V

Régulation du protocole TCP pour le contrôle de congestion

NOUS revenons maintenant sur la problématique introduite au Chapitre II concernant le phénomène de congestion d'un routeur dans un réseau de communication. Nous proposons, dans cette quatrième partie, d'utiliser la méthodologie développée au cours du dernier chapitre afin de modéliser et réguler le protocole TCP. Une telle régulation de trafic sera mise en oeuvre par un mécanisme d'*Active Queue Management* (AQM), implanté au niveau du routeur. Son rôle sera non seulement de réguler la congestion mais aussi de préserver un certain niveau de *Qualité de Service* (QoS).

V.1 Introduction

Comme cela a été mentionné auparavant, nous nous sommes intéressés dans cette thèse au problème de partage d'un lien de communication traversé par différentes sources distantes. Cette problématique est représentée, de façon schématisée, sur la Figure V.1. Chaque source possède un temps de communication différent selon le chemin emprunté par la connexion et les temps de propagation associés (cf. Figure V.1b). La dénomination de "source" ne se rapporte pas forcément à une seule machine, mais éventuellement à un ensemble d'émetteurs proches géographiquement (plus précisément de RTT comparables).

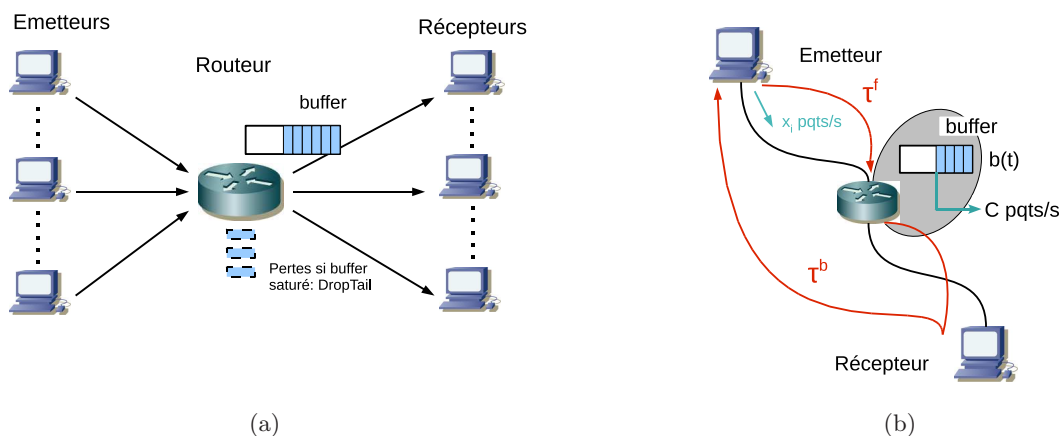


FIG. V.1: Topologie étudiée.

Dans des travaux préliminaires, nous avons d’abord considéré le cas particulier où toutes les sources avaient le même temps de communication, c’est-à-dire le même RTT [9, 14, 16, 101, 102]. Ce cas de figure simpliste a fait l’objet de nombreuses études dans la littérature [36, 45, 75, 76, 138, 157]. Dans ce chapitre, nous considérons le problème général présenté ci-dessus et introduit au paragraphe II.2.4 [11], [10]. Quelques travaux menés par [70] et [93] ont traités ce cas. Les auteurs de [70] font appel au critère de Nyquist pour régler les paramètres du RED et du PI pour un nombre arbitraire de sources et de routeurs. Toutefois, ces réglages sont réalisés à partir d’un modèle simplifié de TCP dans lequel certains retards sont négligés. De plus, une telle méthode fréquentielle trouve ses limites lorsque les retards deviennent variant dans le temps. Dans [93], une approche prédictive est utilisée pour compenser les retards. Si cette étude énonce une formulation générique de la synthèse d’AQM, incorporant divers mécanisme (RED, PI, PID avec coût LQ), la loi de commande est relativement “lourde” nécessitant de multiples calculs intégraux, des multiplications et exponentielles de matrices. Encore une fois les retards sont supposés constants. Bien qu’intéressantes en théorie, ces méthodes sont difficilement exploitables en pratique. La méthodologie que nous proposons par la suite présente plusieurs avantages :

- Alors que la plupart des travaux à ce sujet utilisent le modèle fluide donné dans [123], nous considérons ici celui de [110]. En effet, ce second modèle, plus complet, retranscrit fidèlement la structure du réseau et tient compte des forward et backward delays. Le premier, quant à lui, néglige le forward delay et n’est donc valide que pour une topologie particulière.
- Nous tenons également compte de la nature variable des retards de communication.
- Nous essayons d’établir les liens entre les spécifications de la commande et les besoins en Qualité de Service d’un point de vue réseau. Notre algorithme d’AQM est capable d’assurer un service équitable ainsi qu’un service différencié dans lequel certaines sources, dites prioritaires, ont une part de bande passante plus importante.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous verrons qu’il peut être intéressant de réaliser un observateur, non seulement pour avoir accès à l’état en évitant sa mesure complète mais aussi pour mettre en place un système de *traffic monitoring*. Dans ces premiers travaux, nous développons un observateur augmenté pour l’estimation du trafic TCP et la détection d’une classe d’anomalies. Nous détaillerons ce nouveau cadre d’étude et ses enjeux dans la Section V.3.

V.2 Contrôle de congestion d’un routeur

V.2.1 Modélisation

Nous rappelons ici le modèle dynamique de l’évolution de la fenêtre de congestion d’une source TCP, introduit plus tôt au Chapitre II :

$$\begin{aligned}
 \dot{W}_i(t) &= \frac{W_i(t - \tau_i(t))}{\tau_i(t - \tau_i(t))} (1 - p_i(t - \tau_i^b(t))) \frac{1}{W_i(t)} - \frac{W_i(t - \tau_i(t))}{\tau_i(t - \tau_i(t))} \frac{W_i(t)}{2} p_i(t - \tau_i^b(t)), \\
 \dot{b}(t) &= -C + \sum_N \eta_i \frac{W_i(t - \tau_i^f)}{\tau_i(t - \tau_i^f)}, \\
 \tau_i(t) &= \frac{b(t)}{C} + T_{p_i} = \tau_i^f + \tau_i^b(t).
 \end{aligned} \tag{V.1}$$

W_i est la taille de la fenêtre de congestion de la source i . b est la taille de la file d'attente du buffer induit par l'agrégat des flux $i \in \{1, \dots, N\}$ au niveau du routeur. τ_i est le temps d'aller retour (RTT) observé par la source i . Il est composé du retard dû au temps de propagation sur le média T_{p_i} et du temps d'attente dans le buffer $b(t)/C$ de capacité C (pqts/s). Notons que les retards τ_i et τ_i^b , $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, comprennent la quantité $b(t)/C$ et sont, par conséquent, variant dans le temps. Les τ_i^f sont quant à eux constants puisqu'ils représentent seulement le temps de propagation de la source i au routeur (cf. Figure V.1b). Le terme variable $b(t)/C$ étant borné (le buffer a une mémoire finie b_{max}), les retards sont supposés bornés : $\tau_i(t) \leq \tau_{i_{max}}$ et $\tau_i^b(t) \leq \tau_{i_{max}}^b$ $\forall i = \{1, \dots, N\}$. Bien que le forward delay soit constant, nous le considérons incertain et borné $\tau_i^f \leq \tau_{i_{max}}^f$.

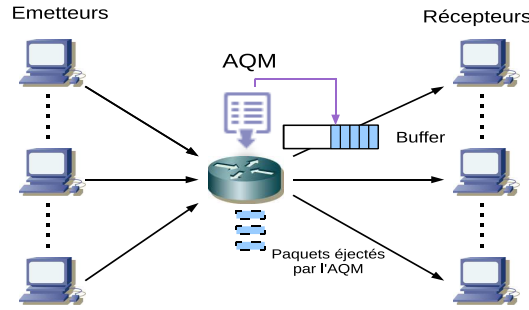


FIG. V.2: Implémentation d'un AQM.

Le signal $p_i(t)$ représente le taux d'éjection de paquets appliqué par l'AQM.

L'objet de notre étude trouve son point de départ avec la question suivante : *quelle stratégie d'éjection doit-on attribuer aux $p_i(t)$, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ afin de réguler le phénomène de congestion ?* Pour cela, et comme bien souvent en Automatique, il est nécessaire de mesurer des informations représentatives de l'état du système, assurant ainsi une structure de commande en boucle fermée. Cependant, la fenêtre de congestion W_i étant difficilement mesurable en pratique, nous proposons un second modèle (V.2) qui considère le débit de chaque flux x_i , plus facilement accessible. Celui-ci s'exprime par $x_i(t) = \frac{W_i(t)}{\tau_i(t)}$. La dynamique de cette nouvelle quantité se calcule ainsi

$$\dot{x}_i(t) = \left(\frac{\dot{W}_i(t)}{\tau_i(t)} \right) = \frac{\dot{W}_i(t)\tau_i(t) - W_i(t)\dot{\tau}_i(t)}{\tau_i^2(t)} = \frac{\dot{W}_i(t) - x_i(t)\dot{\tau}_i(t)}{\tau_i(t)}.$$

A partir des expressions de $\dot{W}_i(t)$, $\dot{b}(t)$, $\tau_i(t)$ (V.1) et $\dot{\tau}_i(t) = \frac{\dot{b}(t)}{C}$, on obtient un nouveau modèle du comportement de TCP :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \frac{x_i(t - \tau_i(t))}{x_i(t)\tau_i^2(t)} (1 - p_i(t - \tau_i^b(t))) - \frac{x_i(t - \tau_i(t))x_i(t)}{2} p_i(t - \tau_i^b(t)) \\ &\quad - \frac{\sum_{k=1}^N \eta_k x_k(t - \tau_k^f)}{\tau_i(t)C} x_i(t) + \frac{x_i(t)}{\tau_i(t)}, \end{aligned} \quad (V.2)$$

$$\dot{b}(t) = -C + \sum_{k=1}^N \eta_k x_k(t - \tau_k^f),$$

Remarque V.1. Le modèle (V.2) permet de considérer la variable d'état x_i plutôt que W_i .

Celle-ci est couramment utilisée par les mécanismes d'AQM dits rate-based tels que l'algorithme AVQ proposé dans [99], [155]. Par ailleurs, des chercheurs ont développé des outils logiciels pour la mesure de débit dans les réseaux, plus particulièrement dans le cadre de la supervision de trafic et de la détection d'anomalies (voir par exemple [19], [94]).

Notre objectif est de réguler la taille de file d'attente $b(t)$ ainsi que le débit des flux $x_i(t) \forall i \in \{1, \dots, N\}$ autour d'un point d'équilibre. Il convient pour cela de définir l'ensemble des points d'équilibre du modèle non linéaire (V.2) :

$$\begin{cases} \tau_{i_0} = T_{p_i} + b_0/C, \\ \dot{b}(t) = 0 \Rightarrow \sum_N \eta_i x_{i_0} = C, \\ \dot{x}_i(t) = 0 \Rightarrow p_{i_0} = \frac{2}{2+(x_{i_0} \tau_{i_0})^2}. \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

A partir d'un point d'équilibre arbitraire, nous approchons le modèle (V.2) par le modèle linéaire

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{x}_N(t) \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_N(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + A_d \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta p_1(t - \tau_1^b(t)) \\ \vdots \\ \delta p_N(t - \tau_N^b(t)) \end{bmatrix}, \quad (\text{V.4})$$

où $\delta x_i = x_i - x_{i_0}$, $\delta b = b - b_0$ et $\delta p_i = p_i - p_{i_0}$ représentent les variations de l'état et de l'entrée autour du point de fonctionnement (V.3). Les matrices du système ci-dessus sont définies par

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & a_N & h_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} f_1 \eta_1 & \dots & f_1 \eta_N & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ f_N \eta_1 & \dots & f_N \eta_N & 0 \\ \eta_1 & \dots & \eta_N & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e_N \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec $a_i = -\frac{1-p_{i_0}}{x_{i_0} \tau_{i_0}^2} - \frac{x_{i_0} p_{i_0}}{2}$, $h_i = -\frac{2(1-p_{i_0})}{C \tau_{i_0}^3}$, $f_i = -\frac{x_{i_0}}{\tau_{i_0} C}$ et $e_i = -\frac{1}{\tau_{i_0}^2} - \frac{x_{i_0}^2}{2}$. Cette linéarisation nous permet non seulement de simplifier (approximation locale) le modèle complexe non linéaire (V.2), mais aussi de nous affranchir des contraintes de positivité de l'état ($x_i(t) \geq 0$ et $b(t) \geq 0$) et de saturation de la commande ($p_i(t) \in [0, 1]$). Le détail du calcul de la linéarisation est reporté en Annexe B.3.

En ce qui concerne le choix du point d'équilibre, parmi l'ensemble $(b_0, x_{i_0}, p_{i_0}, \forall i \in \{1, \dots, N\})$ appartenant à \mathbb{R}_+^{2N+1} et vérifiant (V.3), celui-ci peut être guidé selon certaines spécifications désirées :

- b_0 , dans la première équation de (V.3), peut être choisi de façon à fixer le temps de file d'attente (en régime permanent) à une valeur souhaitée. Ce choix autorise le réglage de la QdS en terme de délai.
- x_{i_0} , dans la seconde équation, permet de répartir les portions de la capacité du routeur allouées aux différents flux i . Cette spécification permet donc d'ajuster la QdS, en terme de débit, pour chacun des utilisateurs i . Si l'on pose $\eta_i x_{i_0} = C/N$, $\forall i = \{1, \dots, N\}$, un service équitable sera assuré.

Notons que dans un cadre plus général, indépendamment du protocole TCP, des travaux [110], [152] ont formulé la recherche du point de fonctionnement comme un problème d'optimisation sous certaines contraintes liées à la capacité des différents points d'un réseau.

Par la suite nous omettrons l'argument temporel des retards variables afin d'alléger les notations.

V.2.2 Synthèse par retour d'état structuré

Comme nous l'avons dit plus haut, un dispositif d'AQM éjecte un paquet de la file d'attente dans le but d'amener la source correspondante, selon le principe d'AIMD, à réduire son taux d'émission. Il s'agit donc de développer, pour chaque entrée $p_i(t)$, une *stratégie d'éjection*¹ ou encore une *politique de file d'attente*. En d'autres termes, le problème consiste à synthétiser une *loi de commande* stabilisant les variables $b, x_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$ à partir d'une mesure de l'état du réseau. Nous proposons alors un retour d'état de forme particulière, dans lequel l'algorithme d'AQM calcule la probabilité de perte $\delta p_i(t)$ par combinaison linéaire du débit du flux i en entrée du routeur et de la taille de la file d'attente (cf. Figure V.3) :

$$\delta p_i(t) = k_{1_i} \delta x_i(t - \tau_i^f) + k_{2_i} \delta b(t)$$

où $k_{1_i}, k_{2_i} \forall i \in \{1, \dots, N\}$ sont des paramètres à déterminer. En appliquant ce calcul à chacune des entrées, il en résulte la commande globale

$$\begin{bmatrix} \delta p_1(t) \\ \vdots \\ \delta p_N(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{1_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_{1_N} \end{bmatrix}}_{K_1} \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{2_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_{2_N} \end{bmatrix}}_{K_2} \begin{bmatrix} \delta b(t) \\ \vdots \\ \delta b(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{V.5})$$

Nous rappelons que ce vecteur d'entrées est calculé au niveau du routeur. Par conséquent, l'occurrence d'une perte de paquet (non réception de l'acquittement associé) ne sera détectée par une source qu'après un certain délai lié au temps de retour d'information : trajet routeur-destinataire (comprend le temps de file d'attente) + trajet destinataire-émetteur = backward delay. Par exemple, la source i percevra le taux de perte p_i , subi par le flux i , avec un retard τ_i^b . Il est à noter que nous avons choisi d'imposer aux gains matriciels K_1 et K_2 une structure diagonale pour deux raisons :

- afin d'éviter de multiples combinaisons de délais (forward delay + backward delay de parcours différents) : $\delta x_i(t - \tau_i^f - \tau_j^b)$ pour $i, j \in \{1, \dots, N\}$, introduisant alors de nombreux retards supplémentaires et des signaux retardés plus difficile à interpréter.
- Le nombre d'opérations à effectuer (et donc le temps de calcul du routeur) est alors bien plus faible que dans le cas de produits matricelles où K_1 et K_2 sont matrices non structurées.

¹*Dropping strategy* ou *queue discipline/management* sont les termes communément usités dans la littérature.

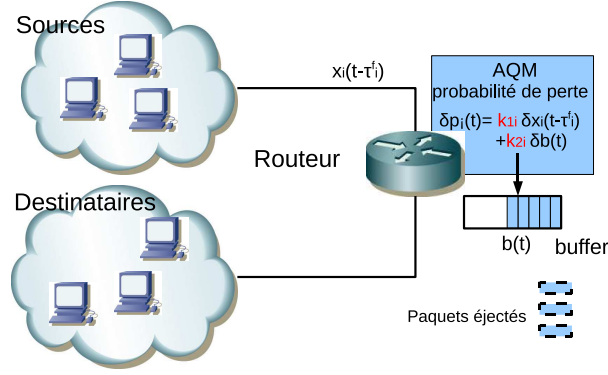


FIG. V.3: Stratégie d'éjection : retour d'état structuré.

Si l'on applique une telle loi de commande (V.5) au modèle (V.4), il en résulte un système en boucle fermée de la forme :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{x}_N(t) \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_N(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + A_d \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + BK_1 \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N) \end{bmatrix} + BK_2 \begin{bmatrix} \delta b(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta b(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}. \quad (\text{V.6})$$

Remarque V.2. Les mécanismes d'AQM sont généralement classifiés suivant deux catégories : *queue-based* et *rate-based* [155]. Le premier type désigne les mécanismes comme le RED [52], se basant sur la taille de la file d'attente pour éjecter des paquets du buffer. Le second, quant à lui, utilise la mesure des flux entrants (par exemple AVQ [99]). Etant donné que l'AQM proposé ici manipule les deux quantités b et x_i , au travers d'un retour d'état, il apparaît comme un mélange des deux catégories d'algorithmes. En combinant ces deux aspects, nous espérons appliquer une commande plus pertinente et efficace.

Suivant la méthodologie développée au chapitre précédent, nous souhaitons maintenant déterminer les paramètres K_1 et K_2 de l'AQM au travers de l'analyse de stabilité de l'interconnexion (V.6). Cette dernière peut s'exprimer sous la forme canonique représentée sur la Figure I.9 en choisissant habilement les matrices \mathcal{E} , \mathcal{A} , ∇ et les vecteurs z , w . Notons que le système (V.6) présente une forme particulière et ne peut être traité facilement avec les outils classiques. En effet, les second et troisième termes du membre de droite font intervenir différents retards sur chaque composante de l'état. De plus, le quatrième terme nécessite la répétition du dernier élément du vecteur d'état à différents instants passés. Le principe de séparation quadratique permet de décomposer la structure du modèle (V.6) en séparant les signaux des opérateurs qui leurs sont appliqués. Il peut être appliqué aux systèmes de forme non-standard, sa souplesse et sa modularité en font un outil approprié pour étudier la stabilité de (V.6).

Nous proposons ainsi, dans le théorème suivant, un critère de synthèse des paramètres K_1 et K_2 .

Théorème V.1. Soient les scalaires positifs $\tau_{i_{max}}$, $\tau_{i_{max}}^f$ et $\tau_{i_{max}}^b$ tels que $\tau_i(t) \leq \tau_{i_{max}}$, $\tau_i^f \leq \tau_{i_{max}}^f$ et $\tau_i^b(t) \leq \tau_{i_{max}}^b$ ($i = \{1, \dots, N\}$), le système (V.6) est asymptotiquement stable, s'il existe

une matrice définie positive $P \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$, des matrices positives diagonales $Q_j \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $j = \{1, 2, 3\}$ et deux matrices diagonales K_1, K_2 telles que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\begin{bmatrix} \Psi & Y_1 Q_1 & Y_1 Q_2 & Y_2 Q_3 \\ * & T_1^{-1} Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & T_2^{-1} Q_2 & 0 \\ * & * & * & T_3^{-1} Q_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{V.7})$$

où Ψ, Y_1, Y_2 sont définies en (V.11)-(V.14) et $T_j, \forall j = \{1, 2, 3\}$ (V.13) contiennent les informations sur les bornes maximales des différents retards.

PREUVE : Pour commencer, nous redéfinissons les signaux impliqués dans la dynamique du modèle (V.6)

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + A_d \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} + BK_1 \xi_2(t) + BK_2 \begin{bmatrix} \delta b(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta b(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}$$

où

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_N(t) \end{bmatrix}, \quad \xi_1(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \end{bmatrix}, \quad \xi_2(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N) \end{bmatrix}.$$

Puis, en vue de modéliser celui-ci comme une interconnexion (cf. Figure I.9), nous introduisons les opérateurs suivants, utiles à sa description.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &: y(t) \rightarrow \int_0^t y(u) du, \\ d_\tau &: y(t) \rightarrow y(t - \tau), \\ (1 - d_\tau)\mathcal{I} &: y(t) = \int_{t-\tau}^t y(u) du. \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Les opérateurs \mathcal{I} et d_τ correspondent, respectivement, aux opérateurs d'intégration et de retard. Le troisième est généralement employé pour établir des conditions dépendantes du retard ("delay-dependent"). Par ailleurs, nous avons vu au Chapitre IV que le séparateur associé à l'opérateur de retard d_τ dépendait des variations du retard $\hat{\tau}$ (cf. Lemme IV.2). C'est pourquoi seuls les premier et troisième opérateurs seront considérés par la suite afin d'élaborer un critère de stabilité indépendant des variations des retards ("rate-independent"). Ainsi, à partir des matrices d'opérateurs liés aux différents retards affectant le système (V.6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \begin{bmatrix} (1 - d_{\tau_1^f})\mathcal{I} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1 - d_{\tau_N^f})\mathcal{I} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{bmatrix} (1 - d_{\tau_1})\mathcal{I} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1 - d_{\tau_N})\mathcal{I} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{J}_3 &= \begin{bmatrix} (1 - d_{\tau_1^b})\mathcal{I} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1 - d_{\tau_N^b})\mathcal{I} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

nous pouvons reconstruire tous les signaux composant le système :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} &= \mathcal{I} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix}, \\ \xi(t) - \xi_1(t) &= \mathcal{J}_1 \dot{\xi}(t), \\ \xi(t) - \xi_2(t) &= \mathcal{J}_2 \dot{\xi}(t), \\ \begin{bmatrix} \delta b(t) - \delta b(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta b(t) - \delta b(t - \tau_N^b) \end{bmatrix} &= \mathcal{J}_3 \begin{bmatrix} \delta \dot{b}(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nous rassemblons ensuite ces opérateurs dans une seule matrice ∇ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \delta b \\ \hline \xi(t) - \xi_1(t) \\ \hline \xi(t) - \xi_2(t) \\ \hline \delta b(t) - \delta b(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta b(t) - \delta b(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}}_w - \bar{w} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I} & & 0 \\ & \mathcal{J}_1 & \\ & & \mathcal{J}_2 \\ 0 & & & \mathcal{J}_3 \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \delta \dot{b}(t) \\ \hline \dot{\xi}(t) \\ \hline \dot{\xi}(t) \\ \hline \delta \dot{b}(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix}}_z. \quad (\text{V.9})$$

Finalement, le système (V.6) peut se formuler comme l'interconnexion de (V.9) avec l'équation linéaire

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ -E_1 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ -E_1 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -E_2 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \delta \dot{b}(t) \\ \hline \dot{\xi}(t) \\ \hline \delta \dot{b}(t) \\ \vdots \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix}}_z - \bar{z} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{A} & -A_d E_1^T & -BK_1 & -BK_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \delta b \\ \hline \xi(t) - \xi_1(t) \\ \hline \xi(t) - \xi_2(t) \\ \hline \delta b(t) - \delta b(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta b(t) - \delta b(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}}_w, \quad (\text{V.10})$$

où

$$E_1 = [\mathbb{1}_N \quad 0_{N \times 1}], \quad E_2 = \left[\begin{array}{c|c} & \mathbb{1} \\ & \vdots \\ 0_N & 1 \end{array} \right], \quad \mathbb{A} = A + A_d + BK_1 E_1 + BK_2 E_2. \quad (\text{V.11})$$

En s'appuyant sur les Lemmes IV.1 et IV.7, on montre aisément qu'un séparateur global comme (V.12) satisfait le produit scalaire (IV.2) du Théorème IV.1.

$$\Theta = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & -P & & \\ & -Q_1 T_1 & & & 0 & \\ & & -Q_2 T_2 & & & 0 \\ & & & -Q_3 T_3 & & 0 \\ \hline -P & & & & 0 & \\ & 0 & & & & Q_1 \\ & & 0 & & & & Q_2 \\ & & & 0 & & & & Q_3 \end{array} \right], \quad (\text{V.12})$$

$P \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ est une matrice définie positive, $Q_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\forall i = \{1, 2, 3\}$ sont des matrices diagonales positives et les matrices

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{diag} \left(\tau_{1_{max}}^{f^2}, \dots, \tau_{N_{max}}^{f^2} \right), \\ T_2 &= \text{diag} \left(\tau_{1_{max}}^2, \dots, \tau_{N_{max}}^2 \right), \\ T_3 &= \text{diag} \left(\tau_{1_{max}}^{b^2}, \dots, \tau_{N_{max}}^{b^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

contiennent les informations sur les bornes maximales des retards : $\tau_i(t) \leq \tau_{i_{max}}$, $\tau_i^f \leq \tau_{i_{max}}^f$ et $\tau_i^b(t) \leq \tau_{i_{max}}^b$. Nous rappelons que τ_i^f est constant mais n'est pas précisément connu, $\tau_{i_{max}}^f$ donne une borne supérieure. D'après le Théorème IV.1, une telle interconnexion, et de façon équivalente le système (V.6), est asymptotiquement stable si l'inégalité (IV.1) est vérifiée pour \mathcal{E} , \mathcal{A} et Θ définis en (V.10) et (V.12). Des calculs montrent que cette condition se développe en l'inégalité

$$\Psi - Y_1^T (Q_1 T_1 + Q_2 T_2) Y_1 - Y_2^T Q_3 T_3 Y_2 \geq 0$$

où

$$\Psi = \left[\begin{array}{cc|cc} -PA - A^T P + M & -PA_d E_1^T - E_1^T Q_1 & & \\ * & Q_1 & & \\ * & * & & \\ * & * & & \\ \hline & -PBK_1 - E_1^T Q_2 & -PBK_2 - E_2^T Q_3 & \\ & 0 & 0 & \\ & Q_2 & 0 & \\ & * & Q_3 & \end{array} \right] \quad (\text{V.14})$$

$$M = E_1^T Q_1 E_1 + E_1^T Q_2 E_1 + E_2^T Q_3 E_2,$$

$$Y_1 = [E_1 A \quad E_1 A_d E_1^T \quad E_1 B K_1 \quad E_1 B K_2],$$

$$Y_2 = [E_2 A \quad E_2 A_d E_1^T \quad E_2 B K_1 \quad E_2 B K_2].$$

Enfin, par application du complément de Schur, la condition (V.7) du Théorème V.1 est retrouvée. \diamond

Ainsi, les matrices K_1 et K_2 sont obtenues par résolution de l'inégalité matricielle (V.7) avec un solveur de programmation semi-définie approprié.

Remarque V.3. *Remarquons que la condition (V.7) est bilinéaire en les variables de décision. Par conséquent, le problème d'optimisation est non convexe et l'algorithme de résolution ne*

converge généralement pas vers la solution optimale globale. Néanmoins, le problème de faisabilité de la condition peut toujours être testé à l'aide d'un solveur BMI [95] ou d'un algorithme de relaxation. Notons que, dans notre cas d'étude, cette première méthode s'avère bien fonctionner en pratique.

Nous donnons ici un exemple d'algorithme de relaxation couramment utilisé dans la littérature :

- **étape 0.** Initialisation : $K_1 = K_{1_0}$, $K_2 = K_{2_0}$.
- **étape 1.** Résoudre la LMI (V.7) avec K_1, K_2 fixées \Rightarrow sauvegarder les variables de décisions $P_0 = P$, $Q_{1_0} = Q_1$, $Q_{2_0} = Q_2$, $Q_{3_0} = Q_3$.
- **étape 2.** Pour $P = P_0$, $Q_{1_0} = Q_1$, $Q_{2_0} = Q_2$, $Q_{3_0} = Q_3$ fixées et K_1, K_2 libre, résoudre la LMI (V.7).
- **étape 3.** Si la condition est faisable : stop. Sinon : aller à **étape 0**.

Des travaux récents [32], [31] ont établi des résultats constructifs pour la commande avancée² des systèmes à retards sur les bases de la commande robuste pour les systèmes LPV. Dans cette approche, les auteurs modélisent le système retardé sous une forme LFT particulière pour ensuite appliquer le théorème du faible gain sur le nouveau modèle de comparaison obtenu. Nous ambitionnons, dans des travaux futurs, nous inspirer de cette méthodologie pour formuler dans le cadre de la séparation quadratique une condition LMI pour la synthèse d'un retour d'état stabilisant et robuste.

V.2.3 Exemple numérique

Pour exposer les résultats établis dans le paragraphe précédent, nous étudions maintenant un exemple numérique. Nous considérons un réseau de communication simple, constitué de 3 sources de trafics émettant des données vers leur destinataire respectif au travers de connexions TCP. La topologie de ce réseau et les temps de propagation des liens sont illustrés sur la Figure V.4.

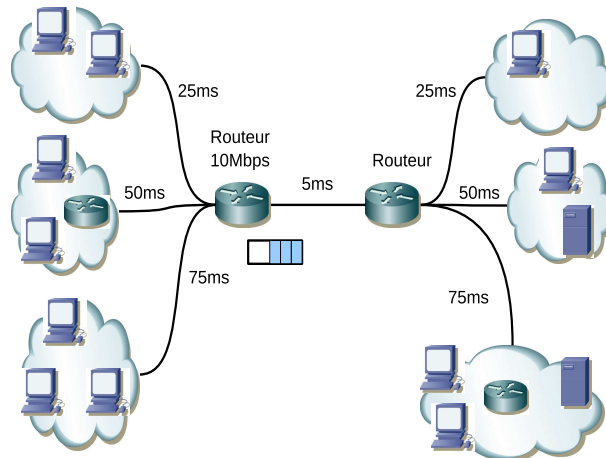


FIG. V.4: Exemple de topologie.

Le premier routeur possède une bande passante de $10Mbps$, soit $2621pqts/s$ pour des paquets de 500 octets. Celle-ci est partagée parmi les différents ordinateurs composant les trois sources³ et

²Ils proposent de synthétiser un retour d'état muni de diverses propriétés : robustesse, performance d'atténuation L_2 garantie, séquençement du gain en fonction du retard.

³Dans cet exemple, nous considérons 10 ordinateurs par source.

nous souhaitons implanter un mécanisme d'AQM afin de contrôler le phénomène de congestion. L'objectif est de réguler le trafic TCP et maintenir une taille de file d'attente constante de 100 paquets sachant que la capacité maximale du buffer est de 400 paquets. Dans ces conditions, le temps de file d'attente à l'équilibre est fixé à $38ms$. A partir de ces spécifications, nous pouvons régler le point d'équilibre (V.3) : $b_0 = 100pqt/s$, $\tau_{1_0} = 150ms$, $\tau_{2_0} = 250ms$, $\tau_{3_0} = 350ms$, $x_{1_0} = x_{2_0} = x_{3_0} = 87.3pqt/s$ (débit alloué à chaque connexion des trois sources⁴) et $p_0 = 10^{-3} [11.8 \ 4.2 \ 2.2]^T$.

Remarque V.4. *Nous choisissons ici d'assurer l'équité parmi l'ensemble des utilisateurs. Toutefois, il est tout à fait possible de répartir de façon arbitraire la bande passante à condition que l'équation d'équilibre soit respectée, c'est-à-dire que l'agrégat des flux entrant soit égal à la capacité du routeur (cf. la seconde équation de (V.3)). Ainsi, l'AQM est en mesure de fournir un service différencié en terme de débit suivant la politique d'allocation de ressources désirée. Nous reviendrons sur ce point dans un second exemple.*

Comme il a été proposé au paragraphe V.2.1, nous modélisons la dynamique des différentes variables du réseau, autour du point d'équilibre donné ci-dessus, par le système d'équations :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1(t) \\ \delta \dot{x}_2(t) \\ \delta \dot{x}_3(t) \\ \delta \dot{b}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.03 & 0 & 0 & -0.23 \\ 0 & -0.37 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0 & -0.18 & -0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -2.25 & -2.25 & -2.25 & 0 \\ -1.34 & -1.34 & -1.34 & 0 \\ -0.95 & -0.95 & -0.95 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t - 0.025) \\ \delta x_2(t - 0.050) \\ \delta x_3(t - 0.075) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -3863 & 0 & 0 \\ 0 & -3834 & 0 \\ 0 & 0 & -3826 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1(t - 0.125) \\ \delta p_2(t - 0.200) \\ \delta p_3(t - 0.275) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (V.15)$$

Les stratégies d'éjection $p_i(t)$ associées à chaque source sont appliquées par l'AQM selon la loi de commande

$$\begin{bmatrix} \delta p_1(t - 0.125) \\ \delta p_2(t - 0.200) \\ \delta p_3(t - 0.275) \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} \delta x_1(t - 0.15) \\ \delta x_2(t - 0.25) \\ \delta x_3(t - 0.35) \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} \delta b(t - 0.125) \\ \delta b(t - 0.200) \\ \delta b(t - 0.275) \end{bmatrix}, \quad (V.16)$$

où les paramètres K_1 et K_2 sont des matrices diagonales à synthétiser. Par application du Théorème V.1, nous obtenons les gains

$$\begin{aligned} K_1 &= 10^{-4} \text{diag}(0.255, 0.533, 0.616), \\ K_2 &= 10^{-4} \text{diag}(0.343, 0.197, 0.102), \end{aligned} \quad (V.17)$$

assurant la stabilité de l'interconnexion (V.15)-(V.16). Une simulation (cf. Figure V.5) a été réalisée sous le logiciel `Matlab/Simulink` [117] à partir du modèle non linéaire (V.2). Aux instants $t = 0s$ et $t = 30s$, une impulsion est générée en entrée pour écarter les variables de leur équilibre. Comme attendu, la figure montre que l'AQM régule le trafic TCP $x_i(t)$ et la file d'attente $b(t)$ et maintient les différentes variables du réseau à leur valeur d'équilibre $x_{i_0} = 87.3pqt/s$ pour

⁴Chaque ordinateur consommera, à l'équilibre, la même bande passante : 87.3×10 ordinateurs $\times 3$ sources = $2621pqt/s$ (la capacité totale).

tout $i = \{1, 2, 3\}$ et $b_0 = 100pqt.s$. Notons que le régime transitoire des débits est différent selon la source d'origine. Bien que chaque émetteur utilise le protocole TCP et possède donc le même modèle, il diffère par le temps de communication. Ceci explique la différence des comportements dynamiques.

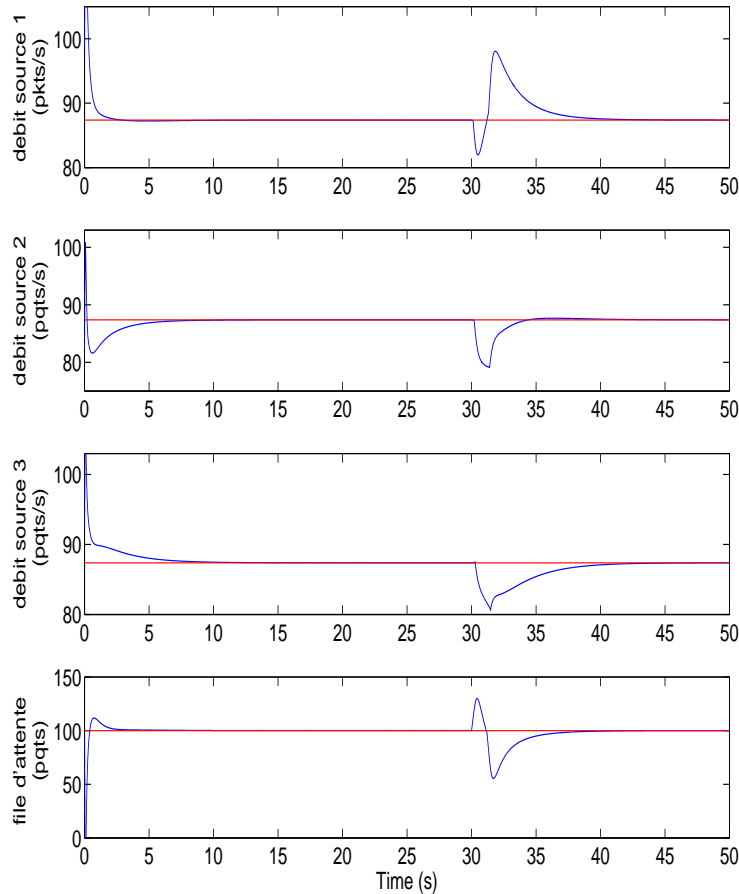


FIG. V.5: *Simulation matlab de l'exemple Figure V.4 à partir du modèle non linéaire : file d'attente désirée $b_0 = 100pqt.s$, débit désiré pour chaque connexion des trois sources $x_{i_0} = 87.3pqt.s$. A $t = 30s$, nous avons généré une impulsion en entrée.*

Nous souhaitons maintenant, sur le même réseau (cf. Figure V.4), imposer un service différencié dans lequel la source 1 aurait 33% de la bande passante du routeur, la source 2 plus prioritaire aurait 45% et la source 3 moins importante aurait les 22% restants. La taille de file d'attente désirée, quant à elle, reste fixée à $100pqt.s$ de sorte d'avoir un temps de file à l'équilibre de $38ms$. Nous appliquons la même méthodologie que précédemment et obtenons les nouveaux gains :

$$\begin{aligned} K_1 &= 10^{-4} \text{diag}(0.254, 0.214, 2.08), \\ K_2 &= 10^{-4} \text{diag}(0.342, 0.097, 0.271), \end{aligned} \tag{V.18}$$

avec $p_0 = 10^{-3} [12.0 \ 2.32 \ 4.93]^T$. La Figure V.6 montre les résultats de simulation sur le modèle non linéaire (V.2). Nous pouvons observer que le mécanisme d'AQM stabilise toujours le trafic

TCP des différentes sources aux valeurs d'équilibres prescrites. Il applique cette fois une politique non équitable et alloue une bande passante différente selon la provenance de la connexion (source 1 : $865pqts/s$, source 2 : $1179pqts/s$ et source 3 : $576pqts/s^5$).

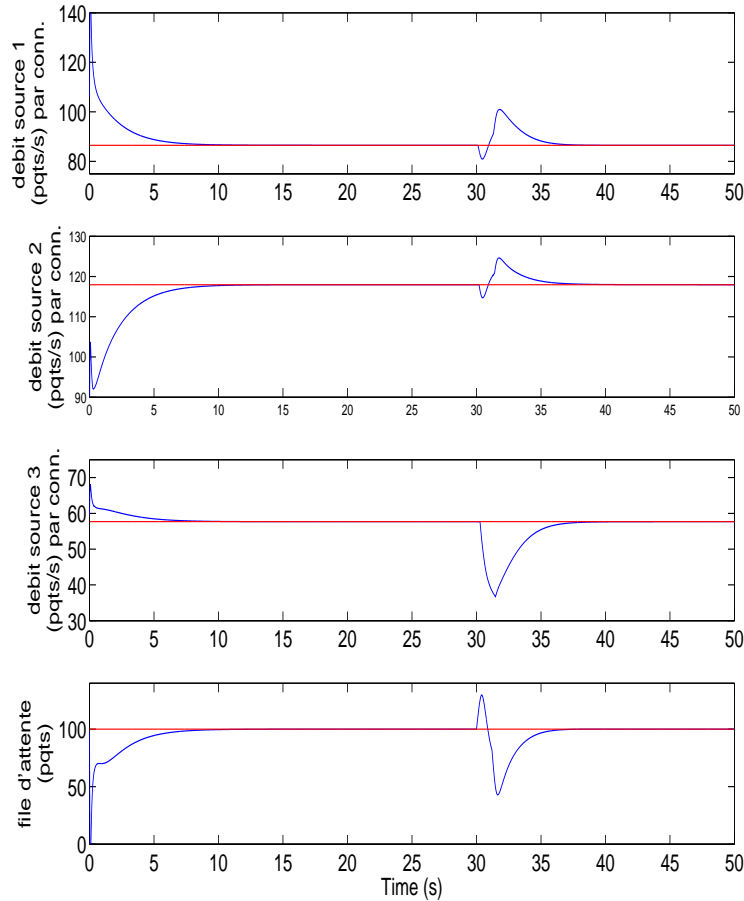


FIG. V.6: Simulation matlab de l'exemple Figure V.4 à partir du modèle non linéaire : file d'attente désirée $b_0 = 100pqts$, débit désiré pour chaque connexion de la source 1 : $x_{0_1} = 86.5pqts/s$, de la source 2 : $x_{0_2} = 117.9pqts/s$, de la source 3 : $x_{0_3} = 57.6pqts/s$. A $t = 30s$, nous avons généré une impulsion en entrée.

Nous avons validé, sur un exemple, notre méthodologie par des simulations théoriques à l'aide du logiciel `Matlab/Simulink`. Nous irons un peu plus loin au chapitre suivant en testant notre approche sur le simulateur de réseaux NS-2 (*Network Simulator*) [4], [44].

V.3 Traffic monitoring

Le *traffic monitoring* désigne les méthodes et moyens mis en oeuvre pour la surveillance du trafic dans les réseaux de communication. Les besoins en Qualité de Service des diverses applications proposées dans l'Internet nécessitent d'analyser et comprendre le comportement du

⁵A l'équilibre, nous avons donc une répartition de la capacité totale : $2621pqts/s = 10 \times 86.5(\text{source 1}) + 10 \times 117.9(\text{source 2}) + 10 \times 57.6(\text{source 3})$.

trafic en fonction des protocoles et des événements qui peuvent se produire. Cette problématique a donné naissance, il y a une dizaine d'années, à la *météorologie des réseaux* [130]. On distingue principalement deux types de méthodes : la *météorologie active* [137] et *passive* [38].

La première consiste à injecter des paquets-sondes dans le réseau pour les mesures de retards, de taux de pertes ou encore de la bande passante disponible. Ces données sont traitées en ligne pour estimer l'état et les performances des réseaux traversés (c'est-à-dire sondés). Cependant, l'introduction d'un flux supplémentaire pour sonder le réseau perturbe inévitablement le trafic sous surveillance et induit donc un biais sur la mesure. En ce qui concernant la *météorologie passive*, les données mesurées sont traitées hors ligne, après une phase de *capture*. Cette première étape consiste à recueillir les données en un point du réseau à l'aide d'outils matériels (cartes d'acquisitions) ou logiciels. La capture des informations ne doit pas interférer avec le trafic et permet une mesure précise et fiable des différentes caractéristiques du réseau (RTT, gigue, débits...). Ses principaux inconvénients sont liés au coût de l'équipement matériel (pour la capture et le stockage), à la difficulté d'obtenir un accès aux infrastructures réseaux, au manque de réactivité de l'analyse (hors ligne) et à la capacité de stockage nécessaire pour sauvegarder les données mesurées.

Ces outils ont pour objectif final la supervision du réseau et plus particulièrement la détection d'anomalies. En effet, le trafic peut présenter des variations fortes, soudaines mais légitimes (panne matérielle, foule subite⁶) qu'il peut être difficile de distinguer des anomalies illégitimes. Dans ce second cas, on parle alors d'*attaques* par déni de service (*Denial of Service* en anglais, DoS [34]) dont le but est de rendre indisponible durant une certaine période les services ou ressources d'un système informatique (par exemple, un serveur web). Il existe également des attaques dites distribuées (en anglais, Distributed DoS attacks) dans lesquelles la cible est attaquée par plusieurs ordinateurs simultanément. Parmi les plus connues, nous pouvons mentionner les attaques de type *flooding* qui consistent à inonder de requêtes un ordinateur ou une partie du réseau afin de surcharger la capacité de la victime. Des travaux de recherches se sont alors consacrés au développement de dispositifs de détection d'anomalies ou d'intrusions (Intrusion ou Anomaly Detection System, IDS [79] ou ADS [103]) capables de détecter différents types d'anomalies. Ces mécanismes font généralement appel à des méthodes d'analyse statistique ou d'analyse de paquets (formats spécifiques, en-têtes) à partir des outils de météorologie.

Nous souhaitons aborder cette problématique avec une toute autre vision dans laquelle nous proposons d'*observer* le trafic à l'aide, encore une fois, des outils de l'Automatique [15, 13, 50]. Après une première phase de modélisation, nous réalisons un observateur pour la supervision du trafic TCP et la détection d'une classe d'anomalies.

V.3.1 Modélisation

Reprenons la topologie illustrée sur la Figure V.2 dans laquelle le trafic TCP est régulé autour d'un point d'équilibre par un dispositif d'AQM. La dynamique d'un tel trafic est régie par le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x_d(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

⁶Le problème de foule subite, ou "flash crowd" en anglais, se produit lorsqu'un nombre important d'utilisateurs envoient des requêtes à un même serveur. Par exemple, ce phénomène peut apparaître lors de la mise en ligne de places de concert.

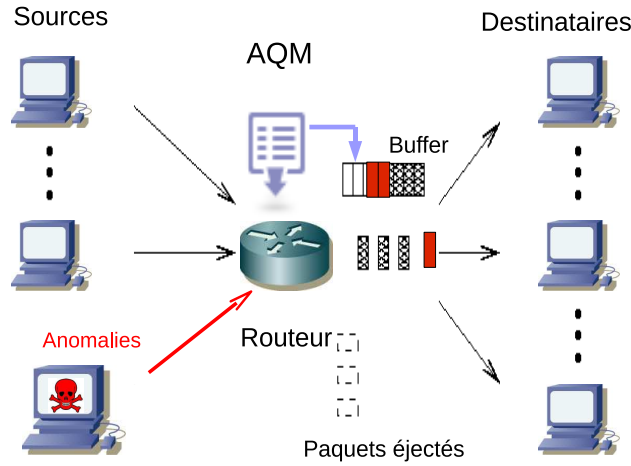


FIG. V.7: Introduction d'une source de trafic supplémentaire assimilée à une anomalie.

où les matrices A , A_d et B ont été introduites précédemment en (V.4),

$$x(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_N(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix}, \quad x_d(t) = \begin{bmatrix} \delta x_1(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ \delta x_N(t - \tau_N^f) \\ \delta b(t) \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} \delta p(t - \tau_1^b) \\ \vdots \\ \delta p(t - \tau_N^b) \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1].$$

Le signal $y(t)$ représente la mesure de la taille de la file d'attente du buffer. $u(t)$ correspond à l'entrée de commande et réunit dans un vecteur l'ensemble des stratégies d'éjection associées à chaque source.

Considérons maintenant une nouvelle source⁷ de trafic générant des flux inattendus (cf. Figure V.7). Aucune hypothèse n'est faite sur l'origine du trafic sinon qu'il utilise un autre protocole que TCP pour communiquer à travers le réseau (citons par exemple le protocole UDP, *User Datagram Protocol*). Assimilé à une anomalie, il contribue au remplissage du buffer $b(t)$ au niveau du routeur et interfère avec la seconde équation du modèle (V.2) :

$$\dot{b}(t) = -C + d(t) + \sum_{i=1}^N \eta_i x_i(t - \tau_i^f).$$

La variable $d(t)$ représente donc l'agrégat de flux non-TCP perçu par le routeur. Nous souhaitons, par ce signal exogène, modéliser une certaine classe d'anomalies et d'attaques DoS.

Dans ce travail, nous avons considéré des anomalies caractérisées par des applications de type CBR (*Constant Bit Rate*). Généralement utilisées pour le streaming video, la visioconférence ou encore la voix sur IP (VoIP), ces applications isochrones présentent la particularité d'envoyer les

⁷“La nouvelle source” est une notion schématique et peut tout aussi bien représenter plusieurs émetteurs différents (en particulier dans le cas distribué) générant des trafics non-TCP depuis n'importe quels points du réseau.

données sur le réseau à cadence régulière. Le taux d'émission d'une telle source peut alors être modélisée par une fonction constante par morceaux. Cette caractéristique se retrouve également chez certaines classes d'attaques [114] comme celle de *flooding* (par exemple, *Shrew* [100]) ou encore de PDoS *Pulsing DoS* [113]. Le principe de cette seconde catégorie repose sur l'envoi de trains d'impulsions pour provoquer des séquences de faux signaux de congestion (Time Out ou acquittements dupliqués) à un émetteur TCP. Si les impulsions sont suffisamment proches, la victime verra sa fenêtre de congestion maintenue à une valeur faible.

Ainsi, le signal $d(t)$, composé de différents trafics CBR, est supposé constant par morceaux. Dans ces conditions, nous proposons le système augmenté suivant incorporant le modèle d'une classe d'anomalies :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{A}_d\tilde{x}_d(t) + \tilde{B}u(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

où

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{A}_d = \left[\begin{array}{c|c} A_d & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} B \\ \hline \mathbb{0}_{1 \times N} \end{array} \right],$$

$$\tilde{x}_d(t) = \left[\begin{array}{c} x_d(t) \\ \hline d(t) \end{array} \right], \quad \tilde{x}(t) = \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hline d(t) \end{array} \right], \quad \tilde{C} = [C \mid 0].$$

Dans cette approche, nous avons étendu le vecteur d'état de façon à intégrer le comportement d'une classe d'anomalies dans la représentation du système. De ce fait, cette méthode présente l'inconvénient de nécessiter un modèle du trafic que l'on veut "monitorer". Nous projetons, dans des travaux futurs, d'examiner le bénéfice que pourrait apporter le développement d'un observateur à entrées inconnues (UIO : *Unknown Input Observer*) [46], [147]. Dans cette seconde approche, il s'agit de maximiser la norme minimale du transfert des entrées (ou fautes) à diagnostiquer vers un nouveau signal de sortie, appelé résidu, tout en minimisant la norme maximale du transfert des entrées de perturbation vers cette même sortie.

V.3.2 Synthèse d'un observateur à retards

Comme cela a été mentionné plus haut, la supervision de trafic consiste à mesurer et surveiller l'activité des flux de données qui transitent en un certain point du réseau. Nous proposons dans cette section de, non pas mesurer, mais d'*estimer* l'intensité de certains types de trafics par la mise en place d'un *observateur*. Cette approche présente plusieurs avantages :

- elle effectue une supervision en temps réel et appartient donc à la famille des outils de *métérologie active* [137].
- Contrairement aux autres méthodes de cette catégorie, elle ne nécessite pas l'injection de sondes dans le réseau qui perturbent le trafic sous surveillance. Notre méthode est donc *non-intrusive*.
- Seul la file d'attente du buffer est mesurée.

Nous cherchons donc à réaliser un observateur⁸ pour le système augmenté (V.20) de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{A}_d\hat{x}_d(t) + \tilde{B}u(t) + L(y - \tilde{C}\hat{x}(t)) \quad (\text{V.21})$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état de l'observateur et L son gain. Ce dernier doit être synthétisé de telle sorte que le vecteur $\hat{x}(t)$ converge vers $\tilde{x}(t)$. Ainsi, un tel dispositif permettra, à partir de la mesure $y(t)$, de reconstruire l'état de (V.20) contenant différentes informations sur le trafic géré par le routeur.

Remarque V.5. *Nous avons opté pour un observateur (V.21) linéaire invariant plus facile à synthétiser. L'inconvénient majeur de notre méthode est qu'elle reste valide seulement au voisinage d'un point de fonctionnement. Ainsi, l'observateur doit nécessairement être implanté de concert avec un dispositif d'AQM. Notons que dans [50], un observateur non linéaire synthétisé par platitude est proposé. Bien qu'aucune hypothèse ne soit faite sur la perturbation $d(t)$, cette étude est restreinte au cas de sources homogènes (toutes les connexions ont le même RTT). Prospectivement, nous envisagerons les possibilités de synthétiser un observateur LPV [29], [30], éventuellement sans mémoire (cf. remarque suivante), capable d'évoluer en fonction du point d'équilibre avec une connaissance approximative des retards de communication.*

Remarque V.6. *Notre méthode présente un second inconvénient. Puisque l'observateur (V.21) intègre des retards (comme dans le signal $\hat{x}(t)$), il est nécessaire de mettre en mémoire sur une certaine période de temps ("bufferiser") la variable $\hat{x}(t)$ pour pouvoir calculer $\dot{\hat{x}}(t)$.*

Le théorème suivant donne un critère LMI pour la synthèse du gain de l'observateur L assurant la convergence de $\hat{x}(t)$ converge vers $\tilde{x}(t)$.

Théorème V.2 ([13]). *S'il existe des matrices définies positives P , Q_i et $S_i \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+2)}$, pour tout $i = \{1, \dots, N\}$ et une matrice $X \in \mathbb{R}^{(N+2) \times 1}$ telles que la LMI suivante soit satisfaite*

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 + \Xi_3 & Y & \dots & Y \\ Y^T & \frac{1}{\tau_1^2} S_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ Y^T & 0 & & \frac{1}{\tau_N^2} S_N \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{V.22})$$

avec

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \Psi & -P\tilde{A}_{d_1} & \dots & -P\tilde{A}_{d_N} \\ -\tilde{A}_{d_1}^T P & Q_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\tilde{A}_{d_N}^T P & 0 & & Q_N \end{bmatrix}, \quad (\text{V.23})$$

$$\Xi_3 = \sum_{i=1}^N M_i (2P - S_i) M_i^T, \quad (\text{V.24})$$

⁸Il a été vérifié au préalable que la paire $(\tilde{A} + \tilde{A}_d, \tilde{C})$ était observable ce qui implique qu'il existe un observateur (dépendant éventuellement du retard) assurant la reconstruction de l'état de (V.20).

$$Y = [(P\bar{A} - X\bar{C}) \quad P\bar{A}_{d_1} \quad \dots \quad P\bar{A}_{d_N}]^T \quad (\text{V.25})$$

$$\Psi = -P\tilde{A} - \tilde{A}^T P + X\bar{C} + \bar{C}^T X^T - \sum_{i=1}^N Q_i, \quad (\text{V.26})$$

$$M_i = \begin{bmatrix} -\mathbb{1}_{N+2} \\ \mathbb{0}_{(N+2)(i-1) \times (N+2)} \\ \mathbb{1}_{N+2} \\ \mathbb{0}_{(N-i)(N+2) \times (N+2)} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.27})$$

alors le système (V.21) est un observateur pour le système (V.20). Le gain de l'observateur L est donné par $L = P^{-1}X$.

PREUVE : Afin de montrer la convergence asymptotique de $\hat{x}(t)$ vers $\tilde{x}(t)$, définissons tout d'abord l'erreur entre l'état du système à reconstruire (V.20) et celui de l'observateur (V.21) par $e(t) = \tilde{x}(t) - \hat{x}(t)$. Cette quantité tendra vers zero si la stabilité du système suivant est garantie :

$$\dot{e}(t) = (\tilde{A} - L\tilde{C}) e(t) + \tilde{A}_d e_d(t) \quad (\text{V.28})$$

où $e_d(t) = \tilde{x}_d(t) - \hat{x}_d(t)$. Nous réécrivons ensuite ce système sous la forme plus standard des systèmes à multiples retards

$$\dot{e}(t) = \mathbb{A}e(t) + \sum_{i=1}^N \tilde{A}_{d_i} e(t - \tau_i^f) \quad (\text{V.29})$$

avec $\mathbb{A} = (\tilde{A} - L\tilde{C})$,

$$\tilde{A}_{d_i} = \eta_i \left[\begin{array}{c|c} & \left. \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \\ \mathbb{0}_{(N+2) \times (i-1)} & \mathbb{0}_{(N+2) \times (N-i+2)} \end{array} \right].$$

Puis, nous suivons la même méthodologie utilisée jusqu'à maintenant et transformons (V.29) en un système interconnecté défini par

$$w(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} s^{-1}\mathbb{1}_{N+2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \otimes \mathbb{1}_{N+2} & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbb{1} - \mathcal{D})s^{-1} \otimes \mathbb{1}_{N+2} \end{bmatrix}}_{\nabla} z(t) \quad (\text{V.30})$$

et

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{(N+2)(N+1)} & \mathbb{0}_{(N+2)(N+1) \times (N+2)N} \\ -\mathbb{1}_{(N+2)} & \\ \vdots & \\ -\mathbb{1}_{(N+2)} & \mathbb{0}_{(N+2)N} \quad \mathbb{1}_{(N+2)N} \\ \hline \mathbb{0}_{(N+2)N \times (N+2)(2N+1)} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ e(t) \\ \vdots \\ e(t) \\ \dot{e}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{A} & \tilde{A}_{d_1} & \dots & \tilde{A}_{d_N} & 0 \\ \mathbb{1}_{(N+2)} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \mathbb{1}_{(N+2)} & & & & \\ \hline \mathbb{0}_{(N+2)N \times (N+2)(2N+1)} \\ \mathbb{1}_{(N+2)} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \mathbb{1}_{(N+2)} & & & & \\ \hline -\mathbb{1}_{(N+2)N} & & & & \\ & & & & -\mathbb{1}_{(N+2)N} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ e(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ e(t - \tau_N^f) \\ e(t) - e(t - \tau_1^f) \\ \vdots \\ e(t) - e(t - \tau_N^f) \end{bmatrix}}_{w(t)} \quad (\text{V.31})$$

avec $\mathcal{D} = \text{diag} \left(e^{-\tau_1^f s}, \dots, e^{-\tau_N^f s} \right)$.

Par extension au cas multiples retards des travaux de [64] sur l'utilisation du principe de séparation quadratique pour l'analyse de stabilité des systèmes à retards constants, on montre aisément que la matrice (V.32) est candidate à la séparation et vérifie (I.16) pour ∇ défini en (V.30).

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ * & \Theta_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{V.32})$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \text{diag} \left(\mathbb{0}_{N+2}, -Q_1, \dots, -Q_N, -R_1 \tau_1^{f^2}, \dots, -R_N \tau_N^{f^2} \right), \\ \Theta_{12} &= \text{diag} \left(-P, \mathbb{0}_{2N(N+2)} \right), \\ \Theta_{22} &= \text{diag} \left(\mathbb{0}_{N+2}, Q_1, \dots, Q_N, R_1, \dots, R_N \right), \end{aligned}$$

P, Q_i et $R_i \forall i \in \{1, \dots, N\}$ sont des matrices définies positives. Par conséquent, le système (V.28) sera stable si l'inégalité (I.15) (\mathcal{E} et \mathcal{A} sont donnés en (V.31)) est également satisfaite. Une série de calculs conduisent à la formulation

$$\bar{\Xi}_1 - \bar{\Xi}_2 + \bar{\Xi}_3 > 0 \quad (\text{V.33})$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_1 &= \begin{bmatrix} -P\mathbb{A} - \mathbb{A}^T P - \sum_i Q_i & -P\tilde{A}_{d_1} & \dots & -P\tilde{A}_{d_N} \\ -\tilde{A}_{d_1}^T P & Q_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\tilde{A}_{d_N}^T P & 0 & & Q_N \end{bmatrix}, \\ \bar{\Xi}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T \\ \tilde{A}_{d_1}^T \\ \vdots \\ \tilde{A}_{d_N}^T \end{bmatrix} \sum_{i=1}^N \tau_i^{f^2} R_i \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T \\ \tilde{A}_{d_1}^T \\ \vdots \\ \tilde{A}_{d_N}^T \end{bmatrix}^T, \\ \bar{\Xi}_3 &= \sum_{i=1}^N M_i R_i M_i^T. \end{aligned}$$

et M_i s'exprime par (V.27). Nous réécrivons, respectivement, $\bar{\Xi}_2$ et $\bar{\Xi}_3$ en

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^T P \\ \tilde{A}_{d_1}^T P \\ \vdots \\ \tilde{A}_{d_N}^T P \end{bmatrix} \sum_i \tau_i^{f^2} P^{-1} R_i P^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T P \\ \tilde{A}_{d_1}^T P \\ \vdots \\ \tilde{A}_{d_N}^T P \end{bmatrix}^T,$$

$$\sum_i \begin{bmatrix} -P \\ \mathbb{0}_{(N+2)(i-1) \times (N+2)} \\ P \\ \mathbb{0}_{(N-i)(N+2) \times (N+2)} \end{bmatrix} P^{-1} R_i P^{-1} [*]^T.$$

Il est possible de linéariser cette dernière expression par un changement de variable pessimiste. En effet, si l'on définit $S_i = PR_i^{-1}P$ et sachant que $(P-S_i)^T S_i^{-1} (P-S_i) \geq 0$ ce qui est équivalent à $PS_i^{-1}P \geq 2P - S_i$, l'inégalité $\Xi_1 - \Xi_2 + \Xi_3 > 0$ avec Ξ_3 définie en (V.24), implique (V.33). Pour finir, en appliquant un complément de Schur et en posant $X = PL$, nous retrouvons la condition (V.22) du théorème. \diamond

Le rôle de l'observateur est double. D'une part, il permet la mise en place de notre loi de commande par retour d'état à partir de la seule mesure de la file d'attente du buffer. D'autre part, il fournit un moyen de superviser le trafic empruntant le routeur. A l'aide d'une technique d'augmentation de modèle, l'observateur est capable de détecter une certaine classe d'anomalies (cf. Figure V.8). Il est clair qu'à partir de modèles d'anomalies supplémentaires, il est possible d'améliorer le système d'observation en incorporant de nouveaux modèles par extension de l'état.

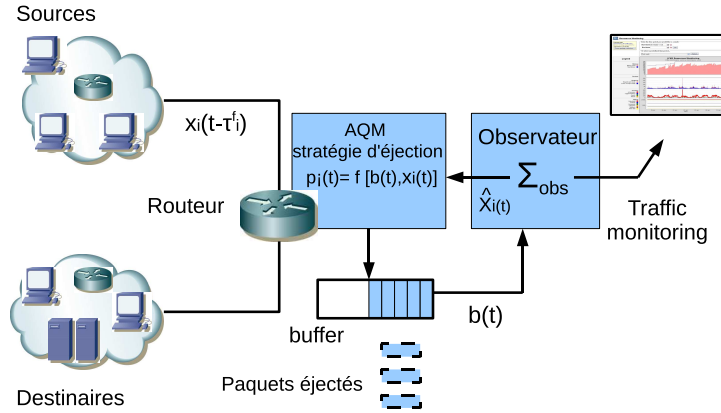


FIG. V.8: Mise en place d'un observateur.

V.3.3 Exemple numérique

Etudions maintenant le cas de l'exemple illustré sur la Figure V.9. Ce réseau est constitué de trois sources comportant 20 émetteurs TCP chacune. Nous avons implanté un AQM au niveau du premier routeur afin de réguler le trafic et contrôler le phénomène de congestion. Une source supplémentaire, malveillante, est présente et envoie des flux de paquets à certaine période du temps. Ce trafic additionnel, alors considéré comme une anomalie, est supposé constant par morceaux⁹.

Le premier routeur possède une bande passante de $10Mbps$, soit $2621pqt/s$ pour des paquets de 500 octets. La taille de la file d'attente de son buffer de réception est contrôlée autour de $100pqt/s$. L'AQM applique une politique équitable entre chaque connexion TCP ($x_{i0} =$

⁹Nous rappelons que nous considérons dans cette étude une certaine classe d'anomalies, celles de type CBR.

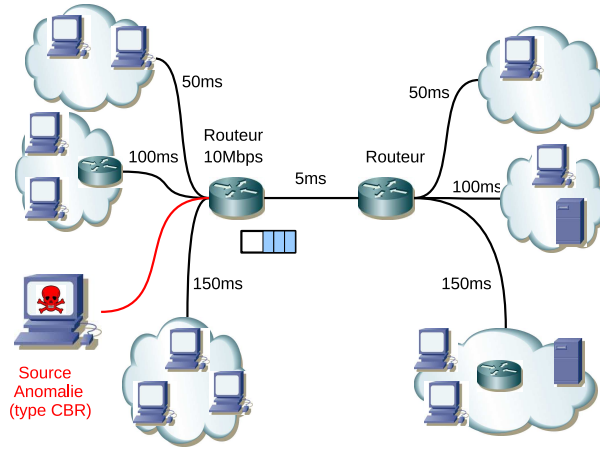


FIG. V.9: Exemple de topologie.

43.69pqt/s, $\forall i = \{1, 2, 3\}$). Etant donné la configuration du réseau, nous synthétisons un observateur de la forme

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1(t) \\ \delta \hat{x}_2(t) \\ \delta \hat{x}_3(t) \\ \dot{\hat{b}}(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.73 & 0 & 0 & -0.049 & 0 \\ 0 & -0.22 & 0 & -0.008 & 0 \\ 0 & 0 & -0.10 & -0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1(t) \\ \delta \hat{x}_2(t) \\ \delta \hat{x}_3(t) \\ \delta \hat{b}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} -1.34 & -1.34 & -1.34 & 0 & 0 \\ -0.74 & -0.74 & -0.74 & 0 & 0 \\ -0.51 & -0.51 & -0.51 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1(t - 0.050) \\ \delta \hat{x}_2(t - 0.100) \\ \delta \hat{x}_3(t - 0.150) \\ \delta \hat{b}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} -970 & 0 & 0 \\ 0 & -959 & 0 \\ 0 & 0 & -956 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \delta p_1(t - 0.198) \\ \delta p_2(t - 0.348) \\ \delta p_3(t - 0.498) \end{bmatrix} \\
 + L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &(\tilde{x}(t) - \hat{x}(t))
 \end{aligned} \tag{V.34}$$

où le gain de l'observateur L est construit de façon à assurer la convergence de $\hat{x}(t)$ vers \tilde{x} . Ce paramètre peut être obtenu en résolvant la LMI du Théorème V.2 : $L = [0.28 \ 0.46 \ 0.45 \ 1.76 \ 0.54]^T$.

Remarque V.7. Les signaux p_i de l'observateur (V.34) sont calculés par l'AQM. Notons que n'importe quel mécanisme d'AQM peut être utilisé dès lors qu'il maintient les variables du réseau assez proches du point d'équilibre prescrit. Dans notre cas, nous avons implanté notre stratégie, proposée au paragraphe V.2.2, mais cette fois la loi de commande ne se base pas sur la mesure de l'état mais l'état estimé par l'observateur.

Nous avons effectué des tests à partir du modèle non linéaire (V.2) sous Matlab/Simulink. L'anomalie $d(t)$ a été simulée par un générateur d'impulsions auquel nous avons réglé la période et l'amplitude des échelons. Les résultats sont donnés sur les Figures V.10 et V.11. Dans le premier cas, la source inconnue génère un trafic de 10pqt/s entre 100s et 200s. La Figure V.10

montre que l'observateur (V.34) est capable non seulement d'estimer cette anomalie mais aussi de reconstruire les débits des connexions TCP du modèle initial (V.19) malgré la source perturbatrice. Dans la seconde simulation, l'attaque $d(t)$ apparaît sous forme d'un train d'impulsions d'une amplitude de 20pqts/s et d'une période de 20s . Bien que le signal soit trop rapide pour être reconstruit intégralement par l'observateur, l'anomalie peut toutefois être détectée.

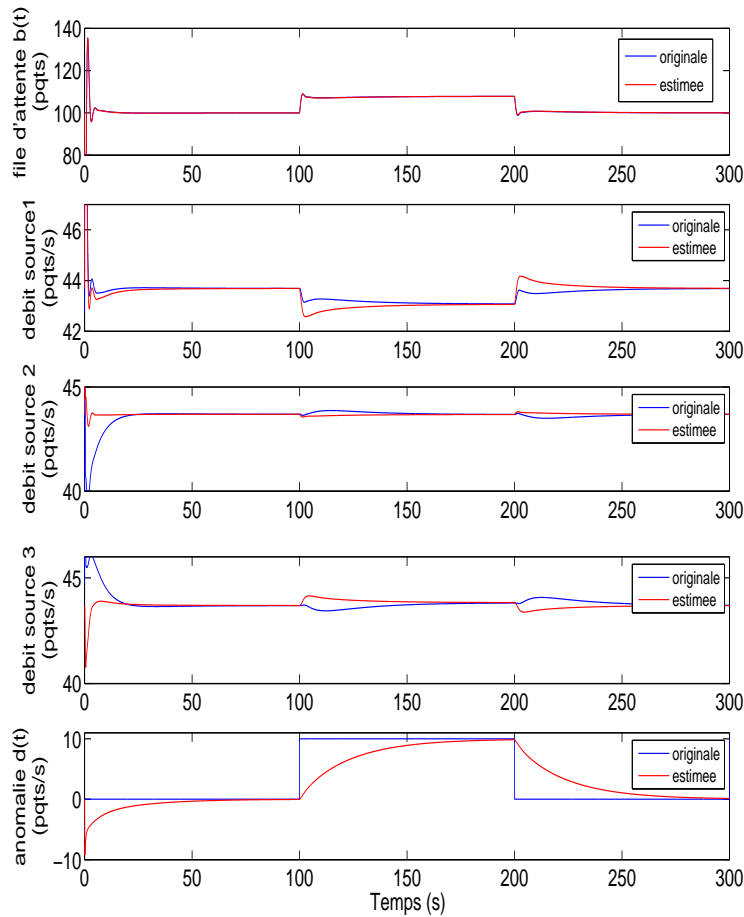


FIG. V.10: Simulation matlab de l'exemple Figure V.9 à partir du modèle non linéaire : reconstruction de l'état du système (V.20).

V.4 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que les techniques d'analyse par séparation quadratique peuvent être appliquées avec succès aux problèmes de régulation de trafic et de congestion d'un routeur. En effet, une telle méthode constitue un cadre de travail approprié pour étudier la stabilité de systèmes à multiple retards et de forme particulière. Elle permet de décomposer la structure du modèle, de dissocier les signaux des matrices de définition du système et de fournir finalement une écriture compacte du problème.

Dans un premier temps, partant du modèle dynamique de la fenêtre de congestion d'une

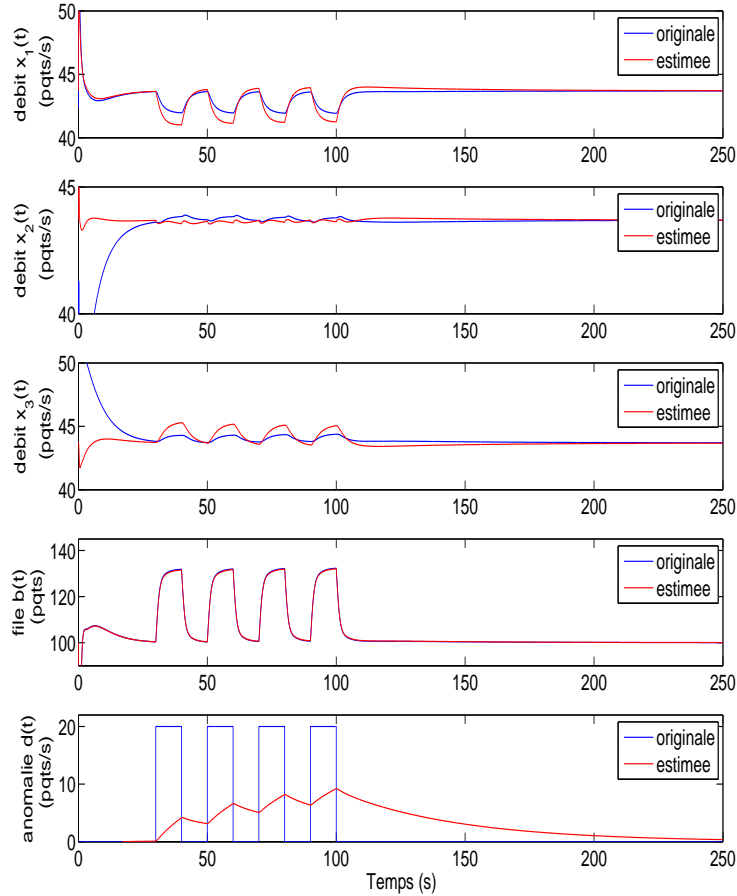


FIG. V.11: *Simulation matlab de l'exemple Figure V.9 à partir du modèle non linéaire : reconstruction de l'état du système (V.20).*

source TCP, nous avons proposé un second modèle non linéaire représentant la dynamique des flux générés en terme de débit. Cette nouvelle variable d'état, plus représentative de l'intensité du trafic dans le réseau, est accessible à la mesure au détriment de la charge d'opérations effectuées par le routeur. Ce modèle a ensuite été linéarisé autour d'un point d'équilibre. Le choix de ce point de fonctionnement est capital pour la Qualité de Service. Il permet de fixer la répartition de la bande passante offerte par le routeur parmi les différents utilisateurs. Puis, à l'aide de la méthode de séparation quadratique développée au Chapitre IV, nous avons calculé une loi de commande régulant le trafic TCP à l'état d'équilibre souhaité. Celle-ci a été mise en oeuvre par un dispositif d'AQM localisé au niveau du routeur. Des simulations du comportement du système non linéaire bouclé par ce correcteur ont permis d'attester la validité de l'ensemble de la méthodologie proposée.

Nous avons ensuite vu qu'il pouvait être intéressant d'implémenter un dispositif d'observation linéaire, conjointement avec un algorithme d'AQM, dans le routeur afin de reconstruire l'état du système. En effet, l'ajout d'un tel mécanisme présente deux avantages. Premièrement, l'état estimé peut être utilisé par l'AQM pour calculer le retour d'état. Dans ces conditions, la mesure des débits entrants n'est donc plus nécessaire. Deuxièmement, les méthodes d'observa-

tion s'avèrent être un outil approprié pour le “traffic monitoring”. Suivant une méthodologie similaire à celle de la partie commande, nous avons alors réalisé un observateur capable de reconstruire les débits des différentes connexions TCP traversant le routeur. De plus, grâce à une méthode d'augmentation de modèle, nous l'avons doté d'un “détecteur” d'anomalie. Seulement restreinte à une certaine classe d'anomalies, notre approche et les résultats obtenus sont encourageants pour le développement de systèmes d'observation plus performants et traitant un spectre d'anomalies et de trafics plus large.

Au chapitre suivant, nous poursuivons le processus de validation de la méthodologie proposée dans cette thèse. Nous effectuerons de nouveaux tests à partir du simulateur de réseaux NS-2.

Chapitre VI

Simulations et expérimentations

CE dernier chapitre est dédié à la présentation des résultats expérimentaux effectués à l'aide du simulateur de réseaux NS-2. Cette partie a pour objectif de valider, au travers d'exemples, la méthodologie proposée au chapitre précédent. Pour cela, nous simulons des communications TCP au travers d'un goulet d'étranglement et observons l'influence des différentes politiques de file d'attente appliquées au routeur en congestion. Nous terminerons enfin par la présentation de premiers tests d'émulation dans lesquels de véritables sources TCP sont impliquées.

VI.1 Introduction

Très utilisé dans la communauté des réseaux informatiques, le simulateur NS-2¹ [44] offre un support pratique pour tester une multitude de protocoles sur différents types de réseaux (filaire, sans fil, local, satellite...) avec une topologie arbitraire. Remarquons qu'il avait été initialement conçu pour la recherche en environnement Internet et donc plus particulièrement pour l'analyse et l'amélioration du protocole TCP.

Le simulateur se compose de deux couches. Un premier niveau propose une interface de programmation en OTcl (Object Tools Command Language) dans laquelle l'utilisateur définit le scénario de simulation : la topologie du réseau, les caractéristiques des liens physiques, les protocoles utilisés, les trafics générés... Ces instructions sont transmises au travers d'un script² puis traduites par l'interpréteur OTcl pour être ensuite exécutées par le noyau. Ce dernier, écrit en C++, constitue la couche centrale du simulateur. Il possède une structure bien organisée, facilitant l'ajout d'extensions, dont les principales classes implémentées sont :

- *Application* : la classe mère de toutes les applications (ftp, telnet, CBR...).
- *Agent* : la classe mère de tous les protocoles de niveaux 3 et 4 (TCP, UDP...).
- *Node* : la classe des nœuds du réseau (machines, routeurs). Chaque nœud contient une classe *Classifier* pour aiguiller les paquets arrivant d'un agent ou d'une interface vers la sortie appropriée.
- *Queue* : la classe mère de tous les types de buffers (DropTail, RED...).
- *Packet* : la classe qui définit les types de paquet (format, header).

Les codes sources de NS étant en accès libre, il est possible de modifier le noyau puis de le recompiler afin de doter le logiciel de nouvelles fonctionnalités. Néanmoins, si le simulateur est plutôt convivial et facile à prendre en main à partir du langage OTcl, il est beaucoup plus

¹Dans ces travaux, nous avons utilisé la version *ns - 2.30*.

²Un exemple de script de simulation est donné en Annexe C.1.

délicat de programmer dans le noyau en C++. En ce qui concerne notre étude, nous souhaitons expérimenter le mécanisme d'AQM développé au cours du Chapitre V. Pour cela, à l'image des éléments DropTail ou RED, nous avons intégré le code nécessaire pour définir un nouvel objet *MonAQM* dans la classe *Queue*. Les fichiers sources correspondants sont donnés en Annexe C.3.

VI.2 Contrôle de congestion d'un routeur

Revenons à l'exemple de la Section V.2.3, dont la topologie est illustrée sur la Figure VI.1. Le réseau de communication est constitué de 3×10 agents FTP³ (file transfert protocol) utilisant le protocole TCP pour transmettre des données à leur destinataire. L'ensemble des communications emprunte le même routeur et se partage donc sa capacité, égale à 10Mbps .

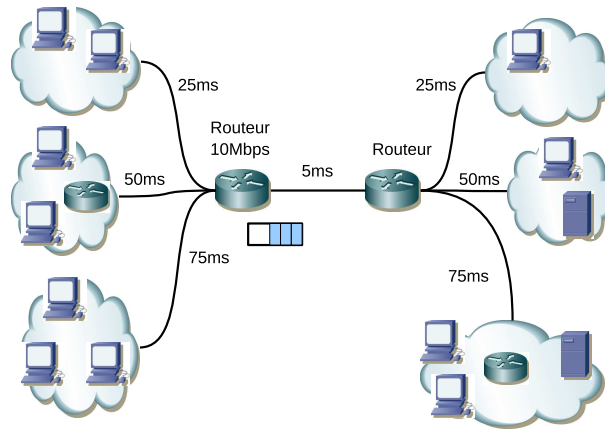


FIG. VI.1: *Exemple de topologie.*

Les flux du trafic TCP sont fractionnés en paquets de 500 octets. Le routeur peut alors traiter 2621 paquets par seconde. Cependant, si l'agrégat des flux entrants dépasse cette capacité, le buffer de réception du routeur en congestion va se remplir. Nous avons simulé un scénario dans lequel les applications FTP génèrent du trafic en permanence et le routeur applique le mécanisme traditionnel du Drop Tail (la taille du buffer est fixée à 400 paquets). La Figure VI.2 montre l'évolution temporelle de la file d'attente et se caractérise par de fortes oscillations et un buffer constamment saturé. Ce comportement induit un temps de file d'attente et une gigue importants, caractéristiques incompatibles avec certaines applications de types temps réel, telles que le streaming video, la téléphonie sur IP ou encore la visioconférence qui nécessitent un RTT relativement faible et surtout peu variable dans le temps. Afin d'améliorer la Qualité de Service, un AQM peut être ajouté au routeur pour fournir un retour d'information sur le phénomène de congestion depuis le réseau. Nous avons vu qu'un tel dispositif "jouait le rôle" d'un correcteur assistant le protocole TCP pour le contrôle de congestion. Au cours de la Section V.2, nous avons proposé une méthodologie pour la construction d'un mécanisme AQM sur les bases d'un retour d'état (éventuellement complété d'un observateur) structuré.

Nous souhaitons réguler la taille de file d'attente du buffer à une valeur de $b_0 = 100\text{pqt/s}$ de façon à avoir un temps de file autour de 38ms . Par conséquent, le point d'équilibre (V.3) est fixé à $b_0 = 100\text{pqt/s}$, $\tau_{1_0} = 150\text{ms}$, $\tau_{2_0} = 250\text{ms}$, $\tau_{3_0} = 350\text{ms}$, $x_{1_0} = x_{2_0} = x_{3_0} = 87.3\text{pqt/s}$ (débit

³FTP est une application dédiée au transfert de fichiers.

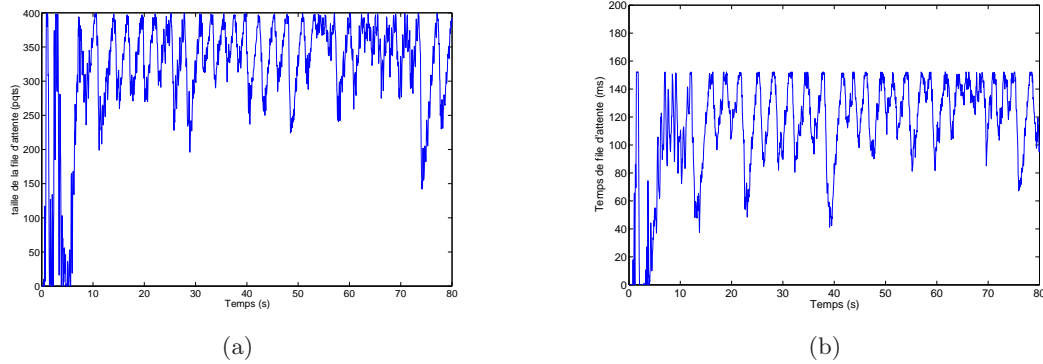


FIG. VI.2: Mécanisme de Drop Tail : (a) taille de la file d'attente, (b) temps de file (à ajouter aux temps de propagation pour obtenir le RTT d'une connexion).

TAB. VI.1: Réglages des différents mécanismes d'AQM.

RED	$min_{th}=50, max_{th}=300, w_Q=5.99e-06, max_p=0.1, f_s=160Hz$
REM	$\gamma=0.003, \Phi=1.001, q_{ref}=100pqs$
PI	$a=1.483e-05, b=1.479e-05, q_{ref}=100pqs, f_s=160Hz$
RES	gains K_1 et K_2 (VI.1), point d'équilibre (V.3)

par connexions pour une répartition équitable) et $p_0 = 10^{-3} [11.8 \ 4.2 \ 2.2]^T$. Les paramètres de réglages K_1 et K_2 (V.5) de l'AQM sont calculés à l'aide du Théorème V.1

$$\begin{aligned} K_1 &= 10^{-3} \text{diag} \left(0.084, 0.153, 0.169 \right), \\ K_2 &= 10^{-3} \text{diag} \left(0.078, 0.057, 0.037 \right). \end{aligned} \quad (VI.1)$$

Différents algorithmes d'AQM ont été testés (leurs réglages sont donnés dans la Table VI.1) et leurs impacts sur la file d'attente du buffer et les débits des sources sont illustrés, respectivement, sur la Figure VI.3 et les Figures VI.5, VI.6, VI.7, VI.8. Les Tables VI.2 et VI.3 présentent une analyse statistique des résultats de simulations. Le script de simulation est donné en Annexe C.1.

La Figure VI.3 représente l'évolution temporelle de la file d'attente dans le buffer pour différentes stratégies d'éjection de paquets. Ces graphiques permettent d'apprécier la capacité de ces mécanismes d'AQM à assurer une certaine Qualité de Service en terme de délai. Nous pouvons observer que notre AQM, RES (*Retour d'Etat Structuré*), permet une régulation efficace et maintient la taille de la file proche de sa valeur d'équilibre. De ce fait, il est en mesure de fournir un temps de file d'attente "stable" et par conséquent, des RTT contrôlés avec des giges faibles (cf. Figure VI.4). De plus, le temps de régime transitoire est relativement court, assurant ainsi un retour rapide du comportement du trafic au point de fonctionnement désiré. La Table VI.2 analyse les différentes réponses des Figures VI.3 et VI.4 une fois le régime permanent établi. La *moyenne* (ou *temps de file moyen*) montre la précision de l'AQM tandis que l'*écart type* (ou *gigue moyenne*) montre la capacité de ceux-ci à maintenir la taille de la file proche de la valeur d'équilibre. Bien que le RED et le PI régulent la file efficacement, le second provoque légèrement plus d'oscillations et leur temps de réponse est plus long. Ceci peut être gênant lorsque du trafic supplémentaire de courte durée (requêtes http, flux "souris"UDP) traversent

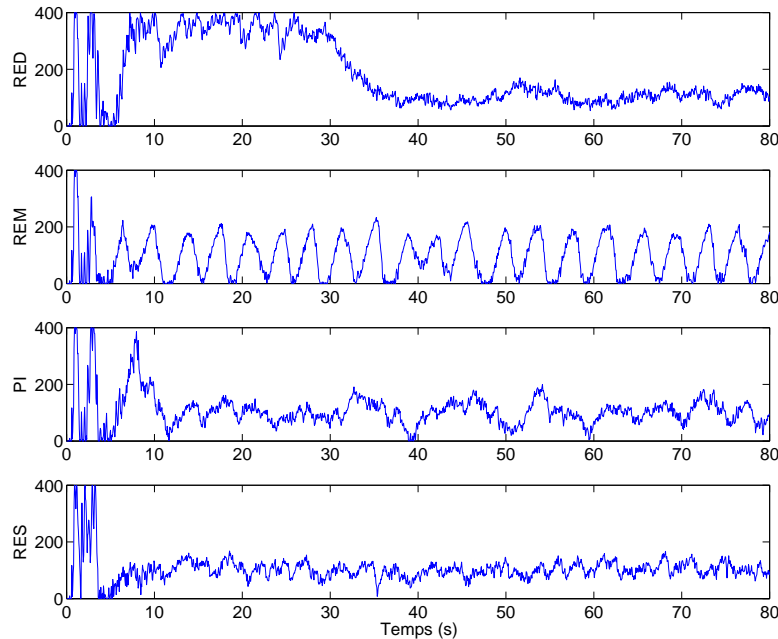


FIG. VI.3: Evolution de la file d'attente $b(t)$ (ppts) : taille désirée $b_0 = 100ppts$.

le routeur régulièrement et perturbent périodiquement le régime permanent⁴ [14]. Notons que le REM, quant à lui, entraîne de large oscillations. Même s'il a le temps de file d'attente moyen le plus faible, l'objectif est de réguler celui-ci à $38ms$.

Les Figures VI.5, VI.6, VI.7 et VI.8 représentent l'évolution temporelle du débit moyen d'une connexion pour chacune des sources. Le choix du point d'équilibre prescrit une politique équitable dans laquelle chaque connexion doit avoir accès à une bande passante de $87.3ppts/s$. Nous pouvons constater que seul le *RES* parvient véritablement à appliquer une stratégie équitable parmi les différents utilisateurs. La Table VI.3 présente quelques indices sur les performances des diverses stratégies en ce qui concerne le contrôle du trafic et confirme la précision du *RES*. De plus, nous avons mesuré l'équité de chaque approche au travers de l'indice de Jain [86] [85] :

$$\text{Indice d'équité} = \frac{(\sum x_i)^2}{(n \sum x_i^2)}.$$

Plus l'indice est proche de 1, plus la répartition de la capacité est équitable. Cette régulation efficace du trafic est rendu possible du fait que, contrairement aux autres dispositifs d'AQM, le *RES* applique une stratégie d'éjection différente pour chaque source : $p_i(t)$ pour $i = \{1, 2, 3\}$. L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle augmente la charge de calcul du routeur. Néanmoins, cette différenciation est nécessaire pour offrir des degrés de libertés supplémentaires dans le choix du point d'équilibre. En effet, au vu de la troisième équation du point d'équilibre (V.3), une unique entrée p impose d'égaliser tous les produits $x_{i_0} \tau_{i_0}$, $\forall i = \{1, \dots, N\}$, contraignant alors fortement le choix des débits x_{i_0} .

Comme nous l'avons vu auparavant, il est possible d'attribuer à chaque source une portion

⁴Un exemple est donné plus loin dans la section.

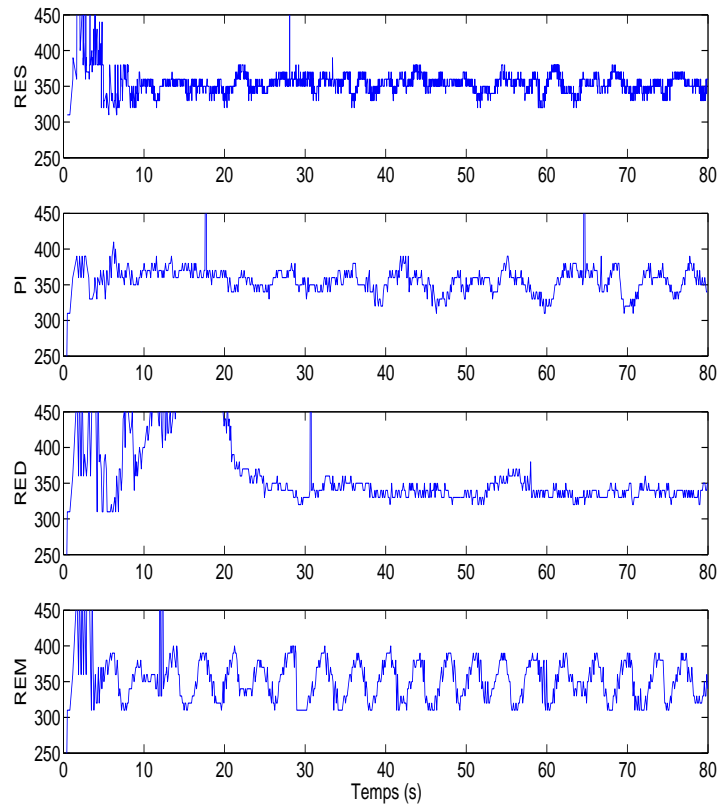


FIG. VI.4: Evolution du RTT des connexions issues de la source 3 (ms) : la valeur à l'équilibre est 350ms.

TAB. VI.2: Quelques statistiques liées à aux files d'attente de la Figure VI.3.

	DT	RED	REM	PI	RES
<i>Moyenne (pqts)</i>	317.6	108.1	94.8	99.4	102.3
<i>Ecart type (pqts)</i>	84	21.7	70.7	35.1	23.3
<i>Temps de file moyen (ms)</i>	121	41.2	36.1	37.9	39
<i>Gigue moyenne (ms)</i>	30.5	8.2	26.9	13.3	8.8

TAB. VI.3: Quelques statistiques liées à aux débits des connexions pour différents AQM.

utilisateurs	RED			REM			PI			RES		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Moyenne (pqts/s)	147	83	148	147	81	60	146	88	109	104	91	88
Ecart type (pqts/s)	61	36	372	56	34	23	66	35	335	41	30	40
Jain's fairness index	0.9450			0.8703			0.9579			0.9946		

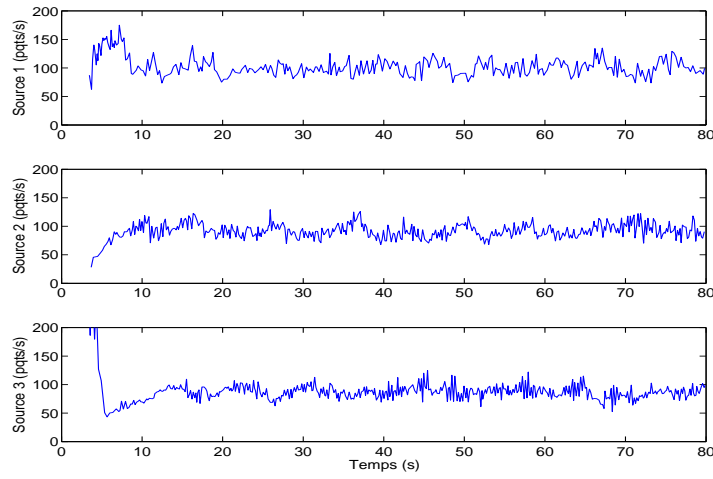


FIG. VI.5: *Stratégie RES* : débits moyens des connexions par source (ppts/s), $x_{i_0} = 87.3ppts$, $\forall i = \{1, 2, 3\}$.

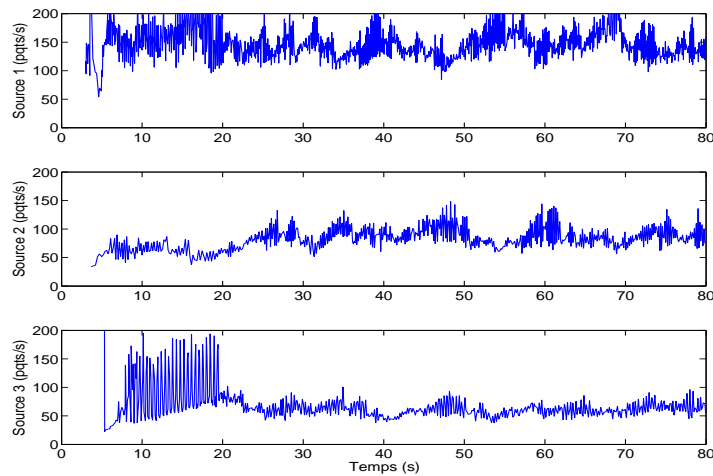


FIG. VI.6: *Stratégie RED* : débits moyens des connexions par source (ppts/s), $x_{i_0} = 87.3ppts$, $\forall i = \{1, 2, 3\}$.

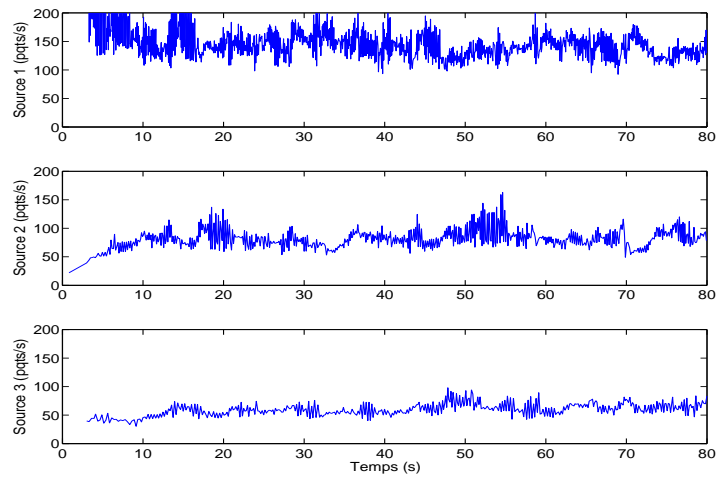


FIG. VI.7: *Stratégie REM* : débits moyens des connexions par source (ppts/s), $x_{i_0} = 87.3\text{ppts}$, $\forall i = \{1, 2, 3\}$.

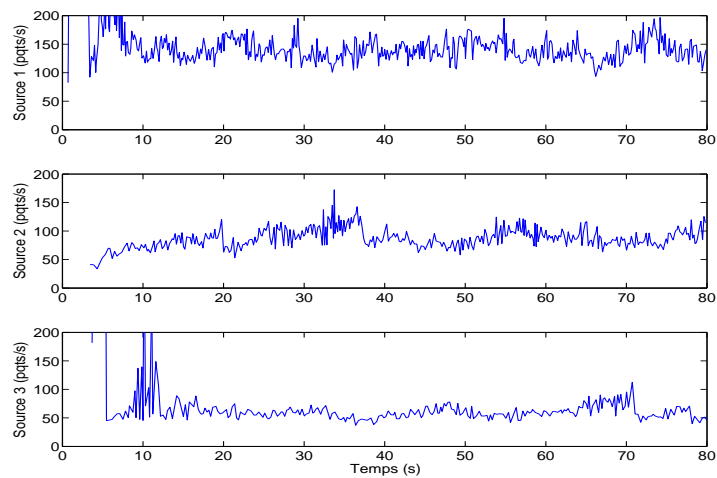


FIG. VI.8: *Stratégie PI* : débits moyens des connexions par source (ppts/s), $x_{i_0} = 87.3\text{ppts}$, $\forall i = \{1, 2, 3\}$.

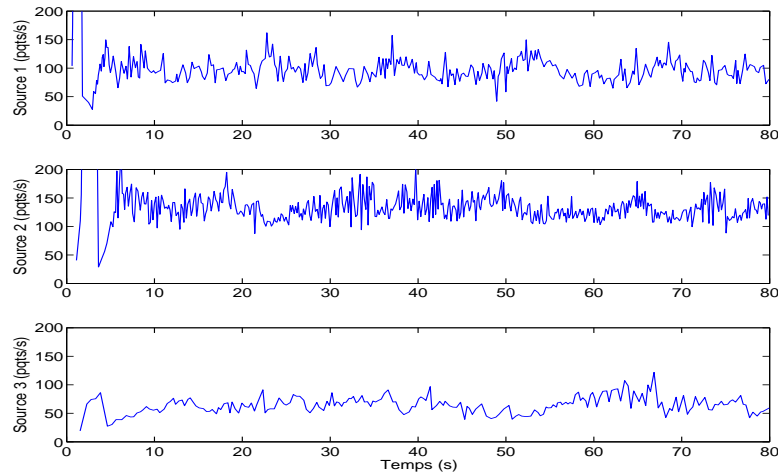


FIG. VI.9: *Stratégie RES avec services différenciés : débits moyens des connexions par source (ppts/s), $x_{1_0} = 86.5ppts/s$, $x_{2_0} = 117.9ppts/s$ et $x_{3_0} = 57.6ppts/s$.*

arbitraire de la bande passante du routeur. Nous reproduisons maintenant la même simulation en modifiant la répartition des ressources comme suit : source 1 33%, source 2 45% et la source 3 22%. Ainsi, à l'équilibre, les débits par connexion sont $x_{1_0} = 86.5ppts/s$, $x_{2_0} = 117.9ppts/s$ et $x_{3_0} = 57.6ppts/s$ et la probabilité de perte est $p_0 = 10^{-3} [12.0 \ 2.32 \ 4.93]^T$. La résolution de la condition du Théorème V.1 nous donne :

$$K_1 = 10^{-3} \text{diag} \left(0.303, 0.198, 0.062 \right),$$

$$K_2 = 10^{-3} \text{diag} \left(0.215, 0.057, 0.017 \right).$$

Dans cette nouvelle configuration, la file d'attente du buffer est toujours régulée à $100ppts$ mais les taux d'émission des utilisateurs sont différents selon leur provenance, en accord avec la spécification ci-dessus (cf. Figure VI.9).

Pour finir, nous avons également testé l'effet de l'introduction d'un trafic supplémentaire, non prévu et insensible à la perte de paquets tel que UDP (cf. Figure VI.10). Ce trafic éphémère est généré par 1, 6 ou 10 sources avec un débit de $0.5Mbps$ (soit $131ppts/s$) chacune entre 80 et 100 secondes. On s'aperçoit que si le trafic devient trop intense la taille de file d'attente augmente et un écart avec la valeur d'équilibre se crée. Dans ce cas, la QdS en terme de délai n'est plus assurée. Néanmoins, une fois les communications UDP achevées, le point de fonctionnement est rapidement rétabli.

VI.3 Traffic monitoring

Dans la Section V.3, nous avons vu que, grâce à une méthode d'observation et sous certaines conditions, il était possible de faire de la supervision de trafic et éventuellement de la détection d'anomalies au niveau d'un routeur. Nous visons dans cette partie à valider ces précédents résultats théoriques au travers du simulateur NS-2. Pour cela, nous reprenons l'exemple du paragraphe V.3.3 dans lequel nous avons considéré un réseau tel que schématisé sur la Figure VI.11. Les anomalies peuvent être provoquées depuis plusieurs sources différentes, on parle dans

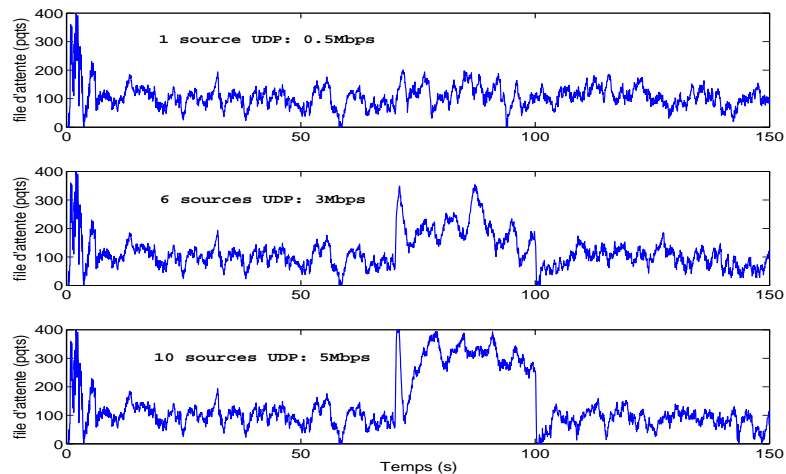


FIG. VI.10: *Stratégie RES avec des sources UDP additionnels : 1, 6 puis 10. Elles génèrent du trafic insensible aux pertes de paquets avec un débit de 0.5Mbps chacune entre 80 et 100 secondes.*

ce cas d'attaques distribuées. Nous ne faisons aucune hypothèse sur le nombre de source et leur origine. Par contre, nous limitons notre étude à une classe d'anomalies, celles de type CBR (plus précisément, celles dont le taux d'émission peut être modélisé par une fonction constante par morceaux).

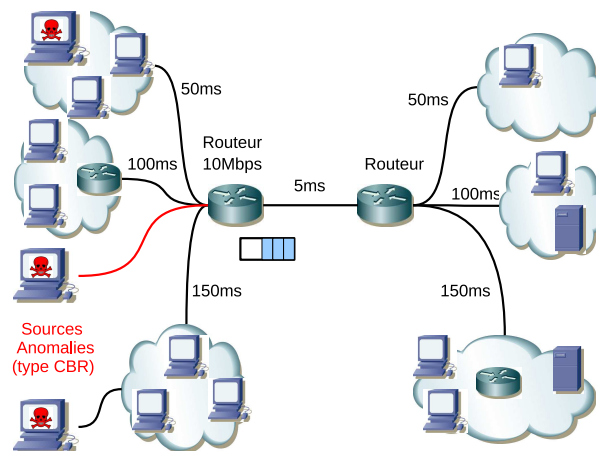


FIG. VI.11: *Exemple de topologie.*

Dans cet exemple, 60 connexions TCP, réparties parmi trois sources, ont été établies. Le lien entre les deux routeurs crée un goulet d'étranglement d'une bande passante de 10Mbps, soit $2621pqts/s$ pour une taille de paquet moyenne de 500 octets. Les temps de propagation sont tels qu'illustrés sur la Figure VI.11. Afin de réguler le trafic et remédier au problème de congestion, nous mettons en place un contrôleur AQM, réalisé à partir de la méthodologie proposée dans ce mémoire. Dans ces conditions, nous souhaitons ajouter notre observateur linéaire à retards. Ce dispositif supplémentaire permet de nous affranchir de la mesure des débits des différentes connexions (seule la mesure de la file d'attente est nécessaire) et de faire du trafic monitoring. L'AQM est réglé de telle sorte que la file soit régulée autour de $b_0 = 100pqts$ et qu'il y ait un

partage de 33% de la bande passante pour la source 1, 50% pour la source 2 et 17% pour la source 3. Etant donné le point de fonctionnement du mécanisme de contrôle de congestion, nous construisons un observateur de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \delta \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \delta \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{b}}(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.73 & 0 & 0 & -0.049 & 0 \\ 0 & -0.22 & 0 & -0.008 & 0 \\ 0 & 0 & -0.10 & -0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1(t) \\ \delta \hat{x}_2(t) \\ \delta \hat{x}_3(t) \\ \delta \hat{b}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -1.34 & -1.34 & -1.34 & 0 & 0 \\ -0.74 & -0.74 & -0.74 & 0 & 0 \\ -0.51 & -0.51 & -0.51 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_1(t - 0.050) \\ \delta \hat{x}_2(t - 0.100) \\ \delta \hat{x}_3(t - 0.150) \\ \delta \hat{b}(t) \\ \hat{d}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -970 & 0 & 0 \\ 0 & -959 & 0 \\ 0 & 0 & -956 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1(t - 0.198) \\ \delta p_2(t - 0.348) \\ \delta p_3(t - 0.498) \end{bmatrix} \\
&+ L [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] (\tilde{x}(t) - \hat{x}(t))
\end{aligned} \tag{VI.2}$$

où le gain de l'observateur L est calculé à partir du Théorème V.2 : $L = [0.28 \ 0.46 \ 0.45 \ 1.76 \ 0.54]^T$.

Au cours de la simulation, des anomalies, basées sur la protocole UDP, se produisent sur certaines périodes du temps : 150 – 170s, 250 – 270s et 300 – 320s. Celles-ci sont composées de trois sources générant simultanément du trafic avec un débit de 0.5Mbps. Les résultats de simulations sont donnés sur la Figure VI.12. Nous pouvons constater que le système (VI.2) est bien un observateur pour le réseau de communication de la Figure VI.11. D'une part, il permet de reconstruire l'état représentatif du trafic TCP issu des trois sources. D'autre part, il permet également de "détecter" les trois anomalies qui sont apparues lors de communications. Même si ces attaques sont trop courtes pour laisser le temps à l'observateur de les reconstruire totalement, nous sommes toutefois en mesure de deviner la présence du trafic anormal. En effet, celui-ci est invisible sur la courbe de la file d'attente tandis que des "pics" apparaissent clairement sur la courbe d'estimation de la perturbation.

VI.4 Emulation

Dans cette section, nous proposons d'aller un peu plus loin dans le processus de validation de la théorie. Il s'agit maintenant non pas de faire des simulations purement logicielles mais de *l'émulation*. Ce type d'expérimentation se situe à mi chemin entre les tests de simulations et les tests en environnement réel. Ces derniers sont l'objectif final de tout chercheur pour attester et évaluer le bon fonctionnement du "produit" développé (protocole, algorithme, architecture...). Alors que la simulation vise à reproduire un modèle dans son ensemble, l'émulation consiste à substituer un ou plusieurs éléments matériels par un logiciel. Un émulateur nécessite donc, d'une part, de disposer d'une interface appropriée pour assurer les échanges entre l'environnement émulé (logiciel) et le réseau physique et, d'autre part, d'imposer des contraintes temps-réel fortes.

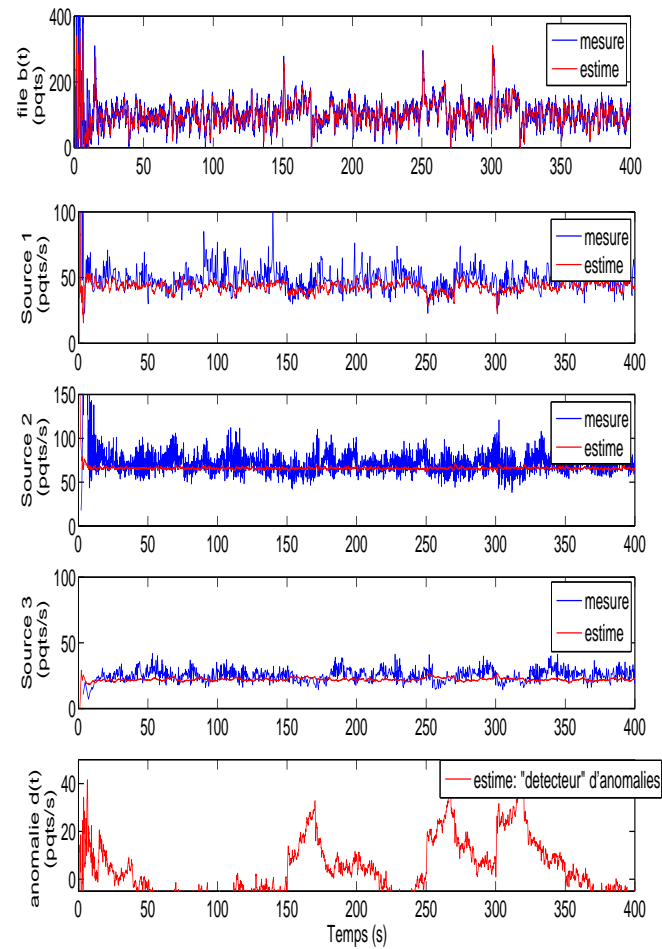


FIG. VI.12: Implémentation de l'observateur dans NS : mesure/estimé de l'état.

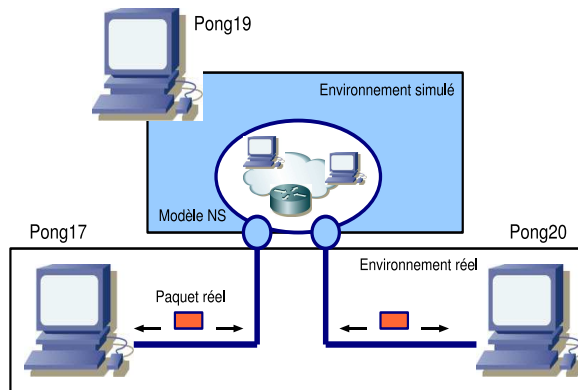


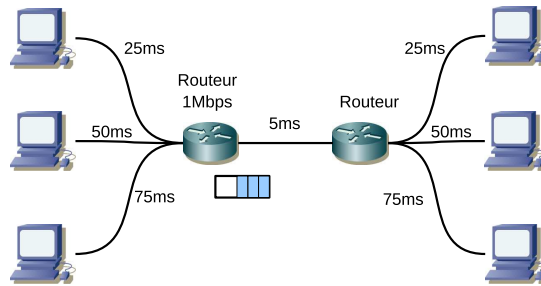
FIG. VI.13: *Emulation avec NS temps réel.*

Le logiciel NS, jusqu'à maintenant utilisé pour des simulations, propose des fonctionnalités permettant d'effectuer des communications avec le monde réel [43]. Pour cela, une classe spéciale, nommée *network object*, assure la liaison entre l'environnement de NS et les différentes cartes réseaux de l'ordinateur hôte. Ce sont les *network objects* qui vont capturer les paquets réels depuis une interface réseau et injecter du trafic sur le réseau physique. Puis, une seconde classe d'objets, les *tap agents*, encapsulent les paquets réels dans un format compréhensible par le simulateur pour assurer la bonne circulation de ceux-ci dans le réseau simulé. Cette approche présente l'avantage de permettre la réutilisation des bibliothèques NS et plus particulièrement notre mécanisme d'AQM que nous avons ajouté à la classe des mécanismes de gestion de buffer (le code est donné en Annexe C.3).

Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes servis de NS pour émuler le goulet d'étranglement. Comme le montre la Figure VI.13, la machine "Pong19", hébergeant le simulateur, introduit dans le réseau réel une partie simulée comprenant le routeur et son dispositif d'AQM. Les machines "Pong17" et "Pong20", quant à elles, génère un trafic TCP réel et jouent les rôles, respectivement, de la source et du destinataire.

Nous souhaitons tester notre méthode dans cette nouvelle configuration expérimentale. Cependant, NS est une application relativement coûteuse en ressources, s'exécutant au niveau utilisateur (et non dans le noyau du système d'exploitation) et étant donné les contraintes temps réel, il est nécessaire de réduire la capacité de traitement du routeur. Dans ces conditions, nous considérons l'exemple de réseau illustré sur la Figure VI.14. Nous avons réalisé cette topologie à partir d'une plate-forme d'expérimentation *LaasNetExp.fr* [131] composée, entre autres, d'une quarantaine de machines sous différents OS disposant chacune de 4 interfaces Ethernet. L'ensemble de ces interfaces sont connectées à différents commutateurs Ethernet. Ces derniers peuvent être configurés pour définir des VLAN⁵ et ainsi former la topologie désirée.

⁵Un *Virtual Local Area Network* est, comme son nom l'indique, un réseau local virtuel. C'est une solution permettant de répartir les machines d'un même switch Ethernet ou d'une interconnexion de switch Ethernet (c'est-à-dire un même LAN) en plusieurs sous-ensembles indépendants. Deux utilisateurs appartenant à des VLAN différents ne pourront communiquer qu'au travers d'un routeur, connecté aux deux sous-réseaux *logiques*. Ce concept permet de diviser un réseau local en plusieurs LAN qui, bien que toujours liés physiquement, ne peuvent

FIG. VI.14: *Exemple de topologie.*

Pour réaliser le réseau de la Figure VI.14, nous avons utilisé trois machines :

- *Pong17* crée les trois sources qui génèrent le trafic TCP. Chacune d’entre elles établit trois connexions.
- *Pong20* crée les trois destinataires associés à chaque source. Il reçoit les données émises depuis les $3 \times 3 = 9$ connexions TCP.
- *Pong19* fait office de routeur et intègre un environnement NS. Chaque paquet entrant dans une des interfaces réseaux de *Pong19* est pris en charge par le simulateur et réinjecté ensuite dans le réseau réel par l’interface appropriée. Le routeur ainsi émulé est doté d’un dispositif AQM + observateur.

La configuration des machines est schématisé sur la Figure VI.15. Les numéros correspondent aux adresses IP des différentes interfaces réseaux. Les temps de propagation entre chaque node sont émulsés (au niveau du noyau de l’OS) grâce à un utilitaire de Linux : `netem` [108]. Bien que les trois interfaces de *Pong20* soient dans le VLAN 114, chacune d’entre elles insère son propre délai. Les tap agents de l’environnement simulé assurent la conversion des paquets issus du réseau physique (via les network objects) en “paquets NS”. Les sources utilisent le générateur de trafic `Iperf` [127] pour émettre les flux TCP.

Nous synthétisons notre AQM/observateur afin de réguler la file d’attente à $80pqts$, soit un temps de file d’attente d’environ $300ms$ et pour assurer l’équité parmi les utilisateurs :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 10^{-3} \text{diag} \left(0.669, 0.813, 0.869 \right), \\
 K_2 &= 10^{-3} \text{diag} \left(0.416, 0.285, 0.197 \right), \\
 L &= [0.509, 0.053, 0.456, 0.177, 1.129]^T.
 \end{aligned}$$

Le script d’émulation est donné en Annexe C.2 et les résultats de l’expérimentation sont représentés sur les Figures VI.16 et VI.17. Bien que la file d’attente du buffer soit régulée, il y a une erreur importante en régime permanent. Ce changement de point de fonctionnement ajoute un délai d’environ $80ms$ pour toutes les communications et la QoS n’est par conséquent plus satisfaite. Par ailleurs, étant donné la quantité de trafic généré par *Pong17*, `Iperf` ne fournit une mesure que toute les $5s$ et nous amène à nous poser des questions quant à la fiabilité de celle-ci. Notons que ces travaux sont actuellement en cours et certains points concernant les réglages de la plate-forme et des machines sont à clarifier afin de s’assurer des bonnes conditions

plus communiquer par le biais de protocoles de niveau liaison (Ethernet).

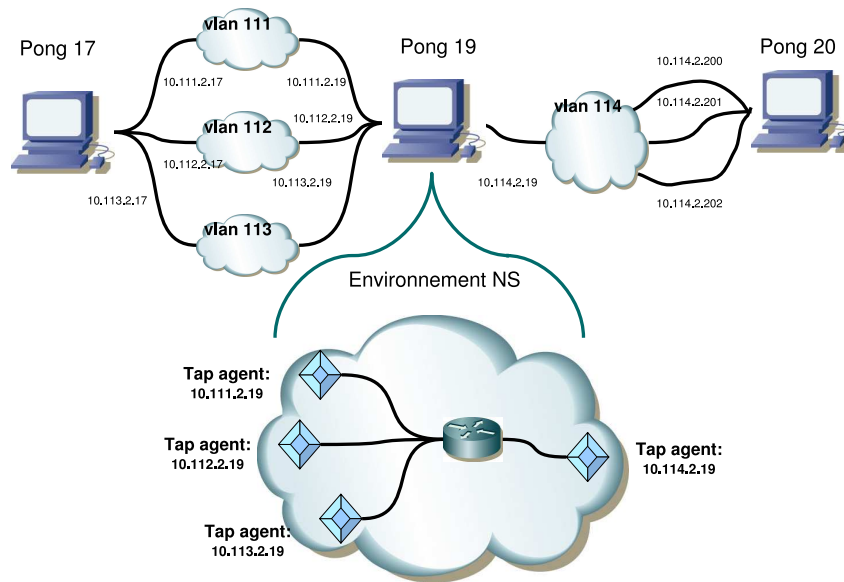


FIG. VI.15: Réalisation de la topologie de la Figure VI.14 sur la plate-forme expérimentale.

d'expérimentation.

Finalement, bien que ces premiers résultats soient discutables, ils restent toutefois encourageants pour de futures études dans lesquelles il s'agira d'utiliser des outils de mesures plus performants (par exemple `tcpdump` [1] ou `wireshark` [39]) pour une analyse plus précise de nos tests expérimentaux.

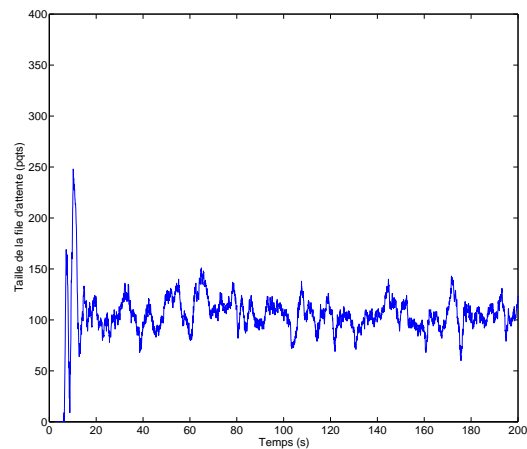


FIG. VI.16: Evolution temporelle de la taille de la file d'attente.

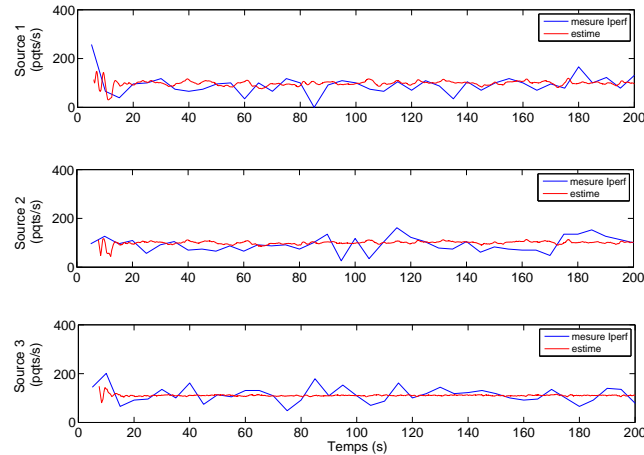


FIG. VI.17: *Evolution temporelle des débits.*

VI.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes efforcés de mettre en application les résultats théoriques du chapitre précédent. Pour cela, deux niveaux d'expérimentation ont été envisagés. Nous avons tout d'abord, et principalement, effectué des tests à l'aide du simulateur NS-2. A l'instar du DropTail ou du RED, ces simulations ont nécessité au préalable l'implémentation de notre politique de file d'attente dans le noyau du logiciel. Nous avons ainsi pu montrer, d'une part, que notre mécanisme d'AQM était capable de réguler le trafic TCP tout en assurant une certaine QoS en terme de délai et de partage de ressources. D'autre part, la mise en place d'un observateur s'est avérée être avantageuse pour à la fois compléter l'AQM et permettre la supervision de trafic. Le second niveau d'expérimentation concerne le test en émulation, dans lequel un véritable réseau est combiné à un environnement logiciel (réalisé par NS-2). Plus réaliste, cette méthode est plus délicate à mettre en oeuvre et nous a conduit à nous interroger sur les outils réseaux à utiliser (mesure, générateur de trafic, émulateur...). Les résultats obtenus sont prometteurs et nous encouragent à poursuivre notre étude et rechercher les moyens logiciels et matériels appropriés.

En ce qui concerne l'émulation, nous avons réutilisé NS pour pouvoir profiter des fonctionnalités offertes par le simulateur. Etant donné la configuration de la plate-forme, si le trafic régulé est bien réel, notre mécanisme d'AQM est quant à lui virtuel. L'étape suivante consiste à programmer notre AQM dans le noyau du système d'exploitation pour une expérimentation entièrement réelle (en fait, seuls les temps de propagation seront émulés) et performante. Par exemple, il s'agira de compléter l'utilitaire `tc` qui gère la politique de gestion des buffers sous Linux [40].

Conclusion générale et perspectives

L'OBJECTIF général de ce mémoire est double. D'une part, nous proposons de multiples méthodes pour l'analyse de stabilité des systèmes à retards variant dans le temps. Cette problématique a été entreprise suivant deux cadres théoriques différents : la méthode de Lyapunov-Krasovskii et la séparation quadratique. D'autre part, nous présentons une seconde thématique de recherche, appartenant au domaine des réseaux informatiques, dans laquelle certains aspects peuvent être interprétés comme un problème de commande. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au phénomène de congestion d'un routeur lors de communications TCP. Ainsi, à partir des outils d'analyses développés au premier point, nous avons cherché à traiter les problèmes posés dans la partie applicative. Dans cette conclusion, nous revenons, chapitre par chapitre, sur les différents points abordés pour finalement dégager les futures pistes de recherches envisagées.

Dans un premier temps, nous avons présenté la classe des systèmes linéaires à retards et le formalisme qui s'y rapporte. Nous y rappelons quelques définitions concernant la stabilité ainsi que certains théorèmes usuels. Nous avons soulevé les points spécifiques qui nous sont utiles pour la suite du mémoire. Plus particulièrement, nous avons vu que la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps s'étudiait principalement suivant deux approches temporelles. Une première méthode repose sur la très populaire méthode de Lyapunov dans laquelle il s'agit de trouver une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui dépend à la fois de l'état instantané et de son "passé". Une seconde possibilité consiste à employer les outils de l'analyse robuste. Dans ce cas, le retard est considéré comme un opérateur incertain qu'il convient d'isoler du reste connu du système en vu d'appliquer le théorème approprié (faible gain, séparation quadratique).

Le Chapitre II nous plonge dans le "monde" des réseaux informatiques. Après une introduction générale sur ce domaine, nous nous focalisons sur le cadre applicatif de ce mémoire, à savoir le mécanisme de contrôle de congestion mis en place par TCP pour éviter la saturation des noeuds intermédiaires. A partir d'une vision bout en bout, le protocole TCP utilise le signal de perte de paquet, alors synonyme d'un phénomène de congestion dans le réseau, pour ajuster son débit d'émission. Nous démontrons qu'il est possible de "jouer" sur le taux de perte par le mécanisme d'AQM des routeurs pour agir indirectement sur le taille des flux TCP. Ceci nous conduit naturellement à la question qui nous intéresse qui consiste à formuler le problème du contrôle de congestion et de régulation du trafic en un problème de stabilité du point de vue de l'Automatique.

Dans les Chapitres III et IV nous abordons la partie technique de ce mémoire. Nous y détaillons notre contribution sur l'analyse de stabilité des systèmes à retards variant dans le temps. De nombreux résultats sont développés et font appel à un large éventail de méthodes. D'une part, nous considérons la méthode très classique de Lyapunov-Krasovskii dans laquelle nous élaborons de nouvelles fonctionnelles en adéquation avec de nouvelles modélisations du système. Pour cela, nous procédons à des augmentations de modèle par une méthode de segmentation du retard et par la prise en compte de la dérivée temporelle du système. D'autre part, la stabilité a également été abordée avec une approche entrée-sortie, empruntant alors les outils de l'analyse robuste. Plus précisément, le système à retard est réécrit comme l'interconnexion d'une application linéaire avec une matrice incertaine constituée des opérateurs définissant le système original (intégration, retard). Après avoir revisité le principe de séparation quadratique, nous développons des opérateurs auxiliaires afin de caractériser au mieux la dynamique retardée et proposer des critères moins pessimistes. Dans les deux approches, l'objectif est de prendre en compte un maximum d'informations sur le système afin de fournir des conditions de stabilité moins conservatives. Toutes les conditions obtenues sont formulées en termes de LMI qui peuvent être résolues efficacement grâce à des solveurs de programmation semi-définie. Plusieurs exemples académiques illustrent les bonnes performances de nos propositions.

Nous revenons, dans le cinquième chapitre, sur la partie applicative qui fait également l'objet d'une part importante des travaux de cette thèse. Nous proposons un modèle fluide non-linéaire régissant l'évolution des débits d'émission de différentes sources TCP partageant un goulet d'étranglement. Ce modèle est ensuite linéarisé autour d'un point d'équilibre. Le choix de ce point de fonctionnement est essentiel car il conditionne, à l'équilibre, la QoS de la communication. En effet, il permet, d'une part, de régler le délai de file d'attente et donc les RTT, d'autre part, il fixe la répartition de la capacité du routeur parmi les différents utilisateurs. Nous obtenons donc un système linéaire à multiples retards pour lequel nous tenons compte de la variabilité des délais. Puis, sur les bases de la méthodologie développée au précédent chapitre, nous avons construit un mécanisme d'AQM, réalisé à partir d'un retour d'état structuré. Des simulations non-linéaires sous `Matlab/Simulink` attestent de la validité de l'ensemble de la démarche et montre que notre mécanisme de contrôle de congestion est en mesure de réguler le trafic TCP et assurer la QoS prescrite. Par ailleurs, nous avons vu que la mise en place d'un observateur, en complément de l'AQM, était une solution intéressante pour fournir au correcteur les valeurs (estimées) de l'état et pour la supervision de trafic et la détection d'une classe d'anomalies à partir de la seule mesure de la file.

Finalement, le Chapitre VI porte exclusivement sur l'aspect simulations et expérimentations de la partie applicative. Nous reprenons les résultats établis au Chapitre V pour les tester sur le simulateur de réseaux `NS-2`. Les simulations confirment le bon fonctionnement de cette méthode et soulignent l'intérêt du choix du point d'équilibre au regard de la QoS. Dans un deuxième temps, nous proposons une première tentative d'expérimentation dans laquelle le goulet d'étranglement est émulé par `NS` et un trafic TCP réel est régulé. Ces premiers résultats encourageants méritent d'être évalués finement à l'aide d'outils réseaux appropriés et constituent le premier pas vers un nouveau mode d'expérimentation, plus proche de la réalité.

En prospective, plusieurs points sont à approfondir et ouvrent la voie vers de nouveaux axes de recherche :

- L'étude de stabilité des systèmes à retards variant dans le temps est un problème ouvert en perpétuelle évolution. Il s'agit donc de développer/améliorer différentes techniques afin de minimiser le pessimisme de l'analyse. Dans notre approche, nous souhaitons, dans des travaux futurs, chercher de nouveaux opérateurs pour caractériser au mieux la dynamique retardée et augmenter la pertinence des critères de stabilité.
- Quelques auteurs de la littérature [64, 145, 164] ont montré les liens existants entre la méthode de Lyapunov et l'analyse robuste. Il serait intéressant de mettre en parallèle les deux approches utilisées dans ce mémoire (Lyapunov-Krasovskii et séparation quadratique) et établir rigoureusement la relation entre le choix d'un terme dans la fonctionnelle et celui d'un opérateur avec le séparateur associé.
- Le principe de séparation quadratique, tel qu'il a été formulé dans la Section IV.2, raisonne en terme d'opérateur et offre, de ce fait, un cadre de travail très général. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés particulièrement aux opérateurs combinant l'intégration et le retard. Nous pouvons ensuite nous interroger sur la possibilité de traiter d'autres opérateurs, non linéaires par exemples, tels que les phénomènes de saturation ou de zone morte.
- En ce qui concerne la régulation de trafic TCP dans les réseaux, nous souhaitons prendre en compte, dans la synthèse de l'AQM, certains critères de performances. Il est donc nécessaire de déterminer au préalable, par une étude pratique, les sources d'incertitudes dans le modèle et de perturbations. Le correcteur devra alors être robuste à l'ensemble incertain (à définir) et atténuer l'effet des perturbations telles que les flux UDP, insensibles à la perte de paquets.
- Le développement de systèmes d'observation pour la supervision de trafic constitue également un thème de recherche intéressant avec un fort intérêt pratique. Deux points essentiels sont à voir. D'une part, il s'agit d'établir différents modèles de comportement de trafic, pour divers protocoles, afin d'élargir la classe des anomalies détectables. D'autre part, la synthèse d'un observateur non linéaire apparaît être une bonne solution pour s'affranchir d'un quelconque point de fonctionnement nécessitant l'implémentation d'un mécanisme d'AQM. Une toute autre option intéressante à examiner est le développement d'observateurs à entrées inconnues, ne nécessitant aucune connaissance sur le comportement du trafic à superviser. Par ailleurs, le diagnostic par observateur peut être significativement amélioré en dotant ce dernier de certaines propriétés : observateur LPV évoluant en fonction du point d'équilibre, observateur sans mémoire, robustesse vis-à-vis des retards et/ou des paramètres...
- Comme cela a été évoqué à la fin du Chapitre VI, les tests préliminaires d'émulation nécessitent l'utilisation d'outils de mesures plus performants. Des travaux futurs consistent, dans un premier temps, à définir les moyens logiciels et matériels adéquats pour mener à bien notre étude expérimentale. Puis, dans un second temps, il s'agit d'effectuer de nombreux tests pour différentes topologies de réseau afin de d'évaluer l'efficacité et les limites de notre méthode. Finalement, l'objectif est de réduire la partie émulée pour tendre vers des expérimentations totalement "réelles".

Annexes

Annexe A

Théorèmes utiles

Dans cette partie sont présentés quelques résultats relatifs aux inégalités matricielles utilisés dans ce mémoire. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage [24] dédié à l'application des inégalités matricielles pour l'Automatique.

A.1 Complément de Schur

Certaines inégalités matricielles non linéaires peuvent être reformulées en terme de LMI à l'aide du complément de Schur décrit dans le lemme suivant.

Lemme A.1 (Complément de Schur) [24]. *Soient les matrices $Q(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dépendant d'une variable $x \in \mathbb{R}^p$. Alors, les inégalités matricielles :*

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \end{cases}$$

et :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

sont équivalentes

Si les matrices $Q(x)$, $R(x)$ et $S(x)$ dépendent affinement de la variable x , alors la dernière inégalité matricielle est une LMI.

A.2 Lemme de Finsler

Le lemme de Finsler faisant intervenir la notion de matrices orthogonales, nous allons dans un premier temps en préciser la définition.

Définition A.1. *Une matrice $V^\perp \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ est dite orthogonale à une matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de rang r si elle vérifie :*

$$\mathcal{N}(V^\perp) = \mathcal{I}(V) \quad \text{et} \quad V^\perp(V^\perp)^T > 0,$$

où $\mathcal{N}(V^\perp)$ désigne le noyau de (V^\perp) et $\mathcal{I}(V)$ désigne l'image de V .

Une propriété de ces matrices est que le produit $V^\perp V$ est nul :

$$V^\perp V = 0.$$

De plus, V^\perp existe si, et seulement si, V a des lignes linéairement dépendantes : $n > r$. V^\perp n'est pas unique mais par la suite, on considérera que V^\perp désigne une matrice V^\perp particulière, choisie arbitrairement.

Lemme A.2 (Lemme de Finsler [150]). *Soient deux matrices $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que $\text{rang}(V) = r < n$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{aligned} V^\perp Q V^{\perp T} &\leq 0 \\ \exists \tau \in \mathbb{R} : Q &\leq \tau V V^T \\ x^T Q x &\leq 0, \forall x \neq 0 : V^T x = 0 \end{aligned}$$

A.3 Lemme de Projection

Lemme A.3 (Lemme de Projection - Généralisation de A.2 [150]). *Soient trois matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $S \in \mathbb{R}^{p \times n}$ telles que $\text{rang}(R) < n$ et $\text{rang}(S) < n$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ telle que :

$$R \mathbf{X} S + S^T \mathbf{X}^T R^T + Q < 0$$

2. Les matrices Q, R, S vérifient :

$$\begin{cases} R^\perp Q R^{\perp T} < 0 \\ S^{T^\perp} Q S^{T^\perp T} < 0 \end{cases}$$

A.4 Inégalité de Jensen

Cette inégalité est souvent utilisée pour majorer des termes intégraux lors du calcul de la dérivée de certaines fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, notamment (I.7).

Lemme A.4 (Inégalité de Jensen [68]). *Pour tout scalaire $\gamma > 0$, matrice définie positive $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, fonction $w : [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que l'intégrale soit définie, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\gamma \int_0^\gamma x^T(\theta) M x(\theta) d\theta \geq \left(\int_0^\gamma x^T(\theta) d\theta \right) M \left(\int_0^\gamma x(\theta) d\theta \right).$$

A.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Cette inégalité est utilisée à plusieurs reprises dans ce mémoire pour l'estimation de bornes supérieures sur la norme L_2 d'opérateurs temporels.

Lemme A.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soient deux fonctions f et g à valeurs complexes de carré intégrable, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\int f^* \cdot g \leq \left(\int |f|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int |g|^2 \right)^{1/2}.$$

Annexe B

Quelques démonstrations

Nous détaillons dans cette partie les preuves de quelques résultats qui ont été développés au cours de ce mémoire.

B.1 Preuve du Théorème III.4

Nous revenons ici sur la démonstration du Théorème III.4 qui propose une condition de stabilité robuste pour les systèmes à retard variant dans le temps. La méthode consiste à trouver une fonctionnelle de Lyapuno-Krasovskii pour le système incertain augmenté (III.33). Soit la fonctionnelle candidate suivante dépendant des paramètres

$$\begin{aligned}
 V(z_t, \alpha) = & z_t^T(0)P(\alpha)z_t(0) + \int_{-h(t)}^0 z_t^T(\theta)Q(\alpha)z_t(\theta)d\theta + \int_{-h_{max}}^0 z_t^T(\theta)Q_m(\alpha)z_t(\theta)d\theta \\
 & + \int_{-h_{max}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{z}_t^T(s)R(\alpha)\dot{z}_t(s)dsd\theta + \int_{-h_{max}}^0 \int_s^0 \int_u^0 \ddot{x}_t^T(\theta)W(\alpha)\ddot{x}_t(\theta)d\theta duds
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

où $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$, $R(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ et $W(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices définies positives dépendant des paramètres incertains. Premièrement, définissons les deux matrices $E_1 = [\mathbb{1}_n \ 0_n]$ et $E_2 = [0_n \ \mathbb{1}_n]$. Le calcul de la dérivée de (B.1) le long des trajectoires de (III.33) conduit à

$$\begin{aligned}
 \dot{V} \leq & 2\dot{z}^T(t)P(\alpha)z(t) + z^T(t)Q(\alpha)z(t) - (1 - \dot{h}(t))z^T(t - h(t))Q(\alpha)z(t - h(t)) \\
 & + h_{max}\dot{z}^T(t)R(\alpha)\dot{z}(t) - h(t)\delta_1^T(t)R(\alpha)\delta_1(t) + \frac{h_{max}^2}{2}\dot{z}^T E_2^T W(\alpha)E_2 \dot{z} \\
 & - 2\delta_2^T(t)E_1^T W(\alpha)E_1 \delta_2(t) - z^T(t - h_{max})Q_m(\alpha)z(t - h_{max}) \\
 & - (z(t - h(t)) - z(t - h_{max}))^T \frac{R(\alpha)}{h_{max}} (z(t - h(t)) - z(t - h_{max})),
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

où les signaux $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$ sont donnés en (III.28). En définissant le vecteur étendu

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ z(t - h(t)) \\ z(t - h_{max}) \\ w(t) \\ \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix}, \tag{B.3}$$

l'inégalité (B.2) s'exprime maintenant par

$$\dot{V} \leq \xi^T(t)\Gamma(\alpha)\xi(t) \quad (\text{B.4})$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} Q(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & T(\alpha) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -(1-d)Q^{[i]} - \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} & \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} \\ \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} & -Q_m^{[i]} - \frac{1}{h_{max}}R^{[i]} \end{bmatrix}, \right. \\ \left. 0_{2n}, -h_{max}R(\alpha), -2E_1^T W(\alpha)E_1 \right).$$

où $T(\alpha) = h_{max}R(\alpha) + \frac{h_{max}^2}{2}E_2^T W(\alpha)E_2$. Notons qu'entre les inégalités (B.2) (B.4), les variables $h(t)$ et $\dot{h}(t)$ ont été majorées par leur borne supérieure h_{max} et d respectivement. Cette majoration introduit du conservatisme mais est nécessaire pour éviter des termes bilinéaires en les paramètres. Ainsi la condition de décroissance de la fonctionnelle s'écrit

$$\xi^T(t)\Gamma(\alpha)\xi(t) < 0 \quad \text{tel que } S(\alpha, h, \dot{h})\xi(t) = 0.$$

où la matrice $S \in \mathbb{R}^{9n \times 14n}$ spécifie les relations existantes entre les composantes de $\xi(t)$:

$$S = \begin{bmatrix} \bar{A}(\alpha) & -E & \bar{A}_{d1}(\alpha) & 0 & \bar{A}_{d2}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}(t)\mathbb{1} & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 & 0 & -h(t)\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme de Finsler, s'il existe une matrice $X \in \mathbb{R}^{14n \times 9n}$ telle que

$$\Gamma(\alpha) + XS(\alpha, h, \dot{h}) + S^T(\alpha, h, \dot{h})X^T < 0, \quad (\text{B.5})$$

alors la première condition est vérifiée. La matrice S s'exprime comme la combinaison linéaire de ses sommets $S^{[i]}$: $S(\alpha) = \sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i S^{[i]}$,

$$S^{[i]} = \begin{bmatrix} \bar{A}^{[i]} & -E & \bar{A}_{d1}^{[i]} & 0 & \bar{A}_{d2}^{[i]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{h}(t)\mathbb{1} & 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ \mathbb{1} & 0 & -\mathbb{1} & 0 & 0 & -h(t)\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}.$$

où $\bar{A}^{[i]}$, $\bar{A}_{d1}^{[i]}$ et $\bar{A}_{d2}^{[i]}$ sont définies par (III.35). Par conséquent, l'inégalité (B.5) devient

$$\sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i \left(\Gamma^{[i]} + XS^{[i]}(h, \dot{h}) + S^{[i]T}(h, \dot{h})X^T \right) < 0,$$

pour tout $\alpha_i > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{\eta} \alpha_i = 1$ avec $\Gamma^{[i]}$ définie par (III.35). Cette dernière condition est équivalente à

$$\Gamma^{[i]} + XS^{[i]}(h, \dot{h}) + S^{[i]T}(h, \dot{h})X^T < 0, \quad \forall i = \{1, \dots, \eta\}. \quad (\text{B.6})$$

Puis, nous modélisons les termes en $h(t)$ et $\dot{h}(t)$ comme des incertitudes polytopiques. Ainsi, une condition suffisante pour la négativité de (B.6) est donnée par

$$\Gamma^{[i]} + X S^{[i][j][k]} + S^{[i][j][k]T} X^T < 0$$

pour tout $i = \{1, \dots, \eta\}$, $j = \{1, 2\}$ et $k = \{1, 2\}$, avec $S^{[i][j][k]}$ définie par (III.35). Si cette inégalité est satisfaite alors le système (III.33) est robustement asymptotiquement stable.

B.2 Extension de la séparation quadratique

Dans cette section, nous exposons la preuve du Théorème IV.1 introduit au paragraphe IV.2. Ce résultat étend celui de [135] au formalisme des opérateurs temporels causaux. Les précédents résultats [82], [135], quant à eux, considéraient les opérateurs fréquentiels issus du formalisme de Laplace. Ces travaux ont également été publiés dans [12].

Considérons l'interconnexion illustrée sur la Figure IV.1, la dynamique du système bouclé est décrite par les équations

$$\begin{cases} w(t) - \bar{w}(t) = \nabla z(t), \\ \mathcal{E}(z(t) - \bar{z}(t)) - \mathcal{A}(t)w(t) = 0. \end{cases}$$

En appliquant l'opérateur de troncature à cette relation, nous obtenons

$$\begin{cases} w_T(t) - \bar{w}_T(t) = \mathbb{P}_T \nabla z(t), \\ \mathcal{E}(z_T(t) - \bar{z}_T(t)) - \mathcal{A}(t)w_T(t) = 0. \end{cases}$$

Nous supposons que les opérateurs constituant la matrice ∇ sont causaux, la relation suivante est donc vraie [87] :

$$\mathbb{P}_T \nabla z = \mathbb{P}_T \nabla z_T$$

et nous avons

$$\begin{cases} w_T(t) - \bar{w}_T(t) = \mathbb{P}_T \nabla z_T(t), \\ \mathcal{E}(z_T(t) - \bar{z}_T(t)) - \mathcal{A}(t)w_T(t) = 0. \end{cases}$$

La première inégalité du théorème (IV.1) implique que $\forall T > 0$, $\forall t \in [0, T]$ il existe un scalaire positif ϵ assez petit tel que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A}(t) \end{bmatrix}^{\perp*} (\Theta(t) - \epsilon \mathbb{1}) \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A}(t) \end{bmatrix}^{\perp} \geq 0. \quad (\text{B.7})$$

De plus, à partir de la seconde équation du système bouclé : $\mathcal{E}(z(t) - \bar{z}(t)) - \mathcal{A}(t)w(t) = 0$, il existe un signal $y \in L_{2e}$ telle que nous puissions exprimer $\begin{bmatrix} z(t) - \bar{z}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ par

$$\begin{bmatrix} z(t) - \bar{z}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} & -\mathcal{A}(t) \end{bmatrix}^{\perp} y(t).$$

Par application du signal y à la relation (B.7), il en résulte $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{pmatrix} z(t) - \bar{z}(t) \\ w(t) \end{pmatrix}^* (\Theta(t) - \epsilon \mathbb{1}) \begin{pmatrix} z(t) - \bar{z}(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \geq 0$$

ce qui mène à (en prenant l'intégrale de 0 à T)

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_T - \bar{z}_T \\ w_T \end{pmatrix}, (\Theta - \epsilon \mathbb{1}) \begin{pmatrix} z_T - \bar{z}_T \\ w_T \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0. \quad (\text{B.8})$$

Considérons maintenant le seconde inégalité (IV.2). Celle-ci implique que

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{P}_T \nabla \end{bmatrix} z_T, \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{P}_T \nabla \end{bmatrix} z_T \right\rangle \leq 0$$

ou de façon équivalente

$$\left\langle \begin{bmatrix} z_T \\ w_T - \bar{w}_T \end{bmatrix}, \Theta \begin{bmatrix} z_T \\ w_T - \bar{w}_T \end{bmatrix} \right\rangle \leq 0. \quad (\text{B.9})$$

En combinant les inégalités (B.8) et (B.9), nous déduisons une contrainte quadratique sur le vecteur étendu $X = (w_T^* \ z_T^* \mid \bar{w}_T^* \ \bar{z}_T^*)^*$ de la forme

$$\langle X, \begin{bmatrix} \epsilon \mathbb{1} & T_1 \\ T_1^* & T_2 \end{bmatrix} X \rangle \leq 0$$

où T_1 et T_2 sont des matrices de dimensions appropriées dépendant de Θ et ϵ . Pour tout $\tilde{\epsilon}$ tel que $\epsilon > \tilde{\epsilon} > 0$ et pour un scalaire $\tilde{\gamma} > 0$ suffisamment grand tel que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\epsilon} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\tilde{\gamma} \mathbb{1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \epsilon \mathbb{1} & T_1 \\ T_1^* & T_2 \end{bmatrix},$$

nous avons

$$\langle X, \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\tilde{\gamma} \mathbb{1} \end{bmatrix} X \rangle \leq 0.$$

Par conséquent, cette dernière inégalité prouve que

$$\exists \tilde{\gamma} > 0, \forall (\bar{w}_T, \bar{z}_T) \left\| \begin{pmatrix} w_T \\ z_T \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \tilde{\gamma} \left\| \begin{pmatrix} \bar{w}_T \\ \bar{z}_T \end{pmatrix} \right\|_2.$$

Ceci nous permet de conclure quant à la stabilité de l'interconnexion dès lors que les conditions du Théorème IV.1 sont satisfaites (cf. la Définition I.6).

Remarque B.1 (Unicité). *Supposons que pour une paire d'entrées exogènes donnée \bar{w}_T, \bar{z}_T , il existe deux paires de signaux internes w_{1T}, z_{1T} et w_{2T}, z_{2T} satisfaisant le modèle interconnecté. Nous avons alors par soustraction*

$$\begin{aligned} w_{2T} - w_{1T} &= \mathbb{P}_T \nabla (z_{2T} - z_{1T}), \\ \mathcal{E}(z_{2T} - z_{1T}) &= \mathcal{A}(w_{2T} - w_{1T}). \end{aligned}$$

Par changements de variables $w_{3T} = w_{2T} - w_{1T}$ et $z_{3T} = z_{2T} - z_{1T}$, on obtient les relations

$$\begin{aligned} w_{3T} &= \mathbb{P}_T \nabla z_{3T}, \\ \mathcal{E} z_{3T} &= \mathcal{A} w_{3T}. \end{aligned}$$

La norme des signaux internes étant bornée par une quantité proportionnelle à la norme des signaux exogènes (ici ils sont nuls), $\|w_{3T}\|_2 = \|z_{3T}\|_2 = 0$, ce qui implique l'unicité.

B.3 Linéarisation du modèle fluide de TCP

Nous avons vu au paragraphe V.2.1 que la dynamique du trafic TCP pouvait être modélisée par

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \frac{x_i(t - \tau_i)}{x_i(t)(\frac{b(t)}{C} + T_{p_i})^2} (1 - p_i(t - \tau_i^b) - \frac{x_i(t - \tau_i)x_i(t)}{2} p_i(t - \tau_i^b)) \\ &\quad - \frac{\sum_{k=1}^N \eta_k x_k(t - \tau_k^f)}{b(t) + CT_{p_i}} x_i(t) + \frac{x_i(t)}{\frac{b(t)}{C} + T_{p_i}}, \\ &= f(x_i(t), x_i(t - \tau_i), x_k(t - \tau_k^f), b(t), p_i(t - \tau_i^b)), \\ \dot{b}(t) &= -C + \sum_{k=1}^N \eta_k x_k(t - \tau_k^f), \\ &= g(x_k(t - \tau_k^f)).\end{aligned}$$

En vu de linéariser ce modèle, nous calculons, autour d'un point d'équilibre (V.3), les termes dérivés des fonctions f et g par rapport à leurs différents arguments :

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f}{\partial x_i(t)} \right|_{eq} &= - \left[\frac{x_{i_0}(1 - p_{i_0})}{\tau_{i_0}^2 x_{i_0}^2} + \frac{x_{i_0} p_{i_0}}{2} + \frac{r}{C \tau_{i_0}} - \frac{1}{\tau_{i_0}} \right] \\ &= - \left[\frac{(1 - p_{i_0})}{\tau_{i_0}^2 x_{i_0}} + \frac{x_{i_0} p_{i_0}}{2} \right], \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x_i(t - \tau_i)} \right|_{eq} &= \frac{(1 - p_{i_0})}{x_{i_0} \tau_{i_0}^2} - \frac{x_{i_0} p_{i_0}}{2} = 0, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x_k(t - \tau_k^f)} \right|_{eq} &= - \frac{x_{i_0}}{C \tau_{i_0}} \eta_k, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial b(t)} \right|_{eq} &= - \left[\frac{x_{i_0}}{\tau_{i_0}^2 C} - \frac{x_{i_0} r}{C^2 \tau_{i_0}^2} + \frac{x_{i_0}(1 - p_{i_0})2}{x_{i_0} C \tau_{i_0}^3} \right], \\ &= - \frac{(1 - p_{i_0})2}{C \tau_{i_0}^3}, \\ \left. \frac{\partial f}{\partial p_i(t - \tau_i^b)} \right|_{eq} &= - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0} \tau_{i_0}^2} - \frac{x_{i_0}^2}{2}, \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x_k(t - \tau_k^f)} \right|_{eq} &= \eta_k\end{aligned}$$

avec $r = \sum_{k=1}^N \eta_k x_{k_0}$. Par conséquent, pour des variations assez faibles autour du point de fonctionnement (V.3), le modèle (V.2) peut être approché par le système linéaire à retards suivant :

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}_i(t) &= - \left[\frac{(1 - p_{i_0})}{\tau_{i_0}^2 x_{i_0}} + \frac{x_{i_0} p_{i_0}}{2} \right] \delta x_i(t) - \frac{x_{i_0}}{C \tau_{i_0}} \sum_{k=1}^N \eta_k \delta x_k(t - \tau_k^f) \\ &\quad - \frac{(1 - p_{i_0})2}{C \tau_{i_0}^3} \delta b(t) - \left[\frac{1}{\tau_{i_0}^2} + \frac{x_{i_0}^2}{2} \right] \delta p_i(t - \tau_i^b), \\ \delta \dot{b}(t) &= \sum_{k=1}^N \eta_k \delta x_k(t - \tau_k^f),\end{aligned}$$

où $\delta x_i = x_i - x_{i_0}$, $\delta p_i = p_i - p_{i_0}$ et $\delta b = b - b_0$ représentent les perturbations de x_i , p_i et b , respectivement, autour du point d'équilibre (V.3). Nous retrouvons ainsi le système (V.4).

Annexe C

Codes sources et scripts pour NS-2

Cette partie contient différents programmes utilisés pour les tests d'expérimentation sous le simulateur de réseaux NS-2.

- Le *script de simulation* est un programme Tcl utilisé pour la définition de la topologie du réseau, la configuration des liens, des agents, description du scénario... Il permet de créer et lancer une simulation logicielle.
- Le *script d'émulation* est un programme Tcl et a le même rôle que le script de simulation. Cependant, il possède des instructions particulières qui permettent la déclaration de "Tap Agent" et de "Network Object" assurant l'interface avec les cartes réseaux de l'ordinateur hôte. En effet, le principe de l'émulation est de faire cohabiter un environnement simulé (par NS) au milieu d'un environnement physique. Les éléments d'interfaçages ("Tap Agent" et "Network Object") permettent au simulateur d'injecter (de recevoir) des paquets dans (depuis) un véritable réseau. Ce fichier permet donc de créer et lancer une simulation logicielle en communication avec un environnement réel.
- La partie *codes sources* comprend deux fichiers : `gain-k2.h` et `gain-k2.cc`. Il s'agit du code de MonAQM (retour d'état structuré). Ces programmes en C++ ont été intégrés au noyau du simulateur puis compilés avec l'ensemble. Ainsi, le mécanisme d'AQM réalisé est, au même titre que les stratégies de file d'attente classiques (Droptail, RED, AVQ), disponible dans la configuration du réseau, depuis l'interface Tcl.

Notons que dans les scripts Tcl, les entrées `$parameters(x)` sont des données importées depuis un fichier texte `file.config` utile pour la configuration. Il comprend différents paramètres de réglage de la simulation : les gains de notre AQM + observateur (appelé GAIN_K2), le nombre de machines, les temps de propagation, les bandes passantes...

C.1 Script de simulation

```
set ns [new Simulator]

# Load a file that will be used to enter some
parameters
set config [open "file.config" r]

set i 1;
while [gets $config line] != -1
set fields [split $line " :"];
puts $line;
set parameters($i) [lindex $fields 2];
set i [expr $i+1];

# Define a file that will be used to trace the queue
size and the bandwidth at the bottleneck.
set qsize [open queue.size.tr w]
set qbw [open queue.bw.tr w]

#Create bottleneck link
set N1 [$ns node]
set N2 [$ns node]

##### AQM set up #####

#parametre RED
Queue/RED set bytes_ false
Queue/RED set queue_in_bytes_ false
```

```

Queue/RED set gentle_ false
Queue/RED set thresh_ 60
Queue/RED set maxthresh_ 500
Queue/RED set q_weight_ 2.999998200501011e-06
Queue/RED set linterm_ 10
Queue/RED set adaptive_ 0

#parametre PI
Queue/PI set a_ 1.483116796077166e-05
Queue/PI set b_ 1.479561582023445e-05
Queue/PI set w_ 160
Queue/PI set qref_ 100

Queue/GAIN_K2 set k1_1_ $parameters(1)
Queue/GAIN_K2 set k1_2_ $parameters(2)
Queue/GAIN_K2 set k1_3_ $parameters(3)
Queue/GAIN_K2 set k2_1_ $parameters(4)
Queue/GAIN_K2 set k2_2_ $parameters(5)
Queue/GAIN_K2 set k2_3_ $parameters(6)

Queue/GAIN_K2 set w_ 160
Queue/GAIN_K2 set qref_ $parameters(11)
Queue/GAIN_K2 set xref_ $parameters(10)
Queue/GAIN_K2 set p1ref_ $parameters(7)
Queue/GAIN_K2 set p2ref_ $parameters(8)
Queue/GAIN_K2 set p3ref_ $parameters(9)

Queue/GAIN_K2 set a1_ $parameters(12)
Queue/GAIN_K2 set a2_ $parameters(13)
Queue/GAIN_K2 set a3_ $parameters(14)
Queue/GAIN_K2 set ad1_ $parameters(18)
Queue/GAIN_K2 set ad2_ $parameters(19)
Queue/GAIN_K2 set ad3_ $parameters(20)
Queue/GAIN_K2 set f1_ $parameters(15)
Queue/GAIN_K2 set f2_ $parameters(16)
Queue/GAIN_K2 set f3_ $parameters(17)
Queue/GAIN_K2 set b1_ $parameters(24)
Queue/GAIN_K2 set b2_ $parameters(25)
Queue/GAIN_K2 set b3_ $parameters(26)

Queue/GAIN_K2 set l1_ $parameters(27)
Queue/GAIN_K2 set l2_ $parameters(28)
Queue/GAIN_K2 set l3_ $parameters(29)
Queue/GAIN_K2 set l4_ $parameters(30)
Queue/GAIN_K2 set l5_ $parameters(31)

Queue/GAIN_K2 set tauf1_ $parameters(32)
Queue/GAIN_K2 set tauf2_ $parameters(33)
Queue/GAIN_K2 set tauf3_ $parameters(34)
Queue/GAIN_K2 set taub1_ $parameters(38)
Queue/GAIN_K2 set taub2_ $parameters(39)
Queue/GAIN_K2 set taub3_ $parameters(40)
Queue/GAIN_K2 set eta1_ $parameters(21)
Queue/GAIN_K2 set eta2_ $parameters(22)
Queue/GAIN_K2 set eta3_ $parameters(23)

#####

#Create links between these nodes
set Trr [expr $parameters(41)*1000]
$ns duplex-link $N1 $N2 $parameters(43)Mb ($Trr)ms
GAIN_K2
#Set Queue Size of link (N-D)
$ns queue-limit $N1 $N2 400

set NumSrc1 $parameters(21)
set NumSrc2 $parameters(22)
set NumSrc3 $parameters(23)
set NumDest1 $parameters(21)
set NumDest2 $parameters(22)
set NumDest3 $parameters(23)

set NumSrcPert 0

set Duration 150

#Sources nodes
for set j 1 $j<=$NumSrc1 incr j
set S1($j) [$ns node]

for set j 1 $j<=$NumSrc2 incr j
set S2($j) [$ns node]

for set j 1 $j<=$NumSrc3 incr j
set S3($j) [$ns node]

#Destinations nodes
for set j 1 $j<=$NumDest1 incr j
set D1($j) [$ns node]

for set j 1 $j<=$NumDest2 incr j
set D2($j) [$ns node]

for set j 1 $j<=$NumDest3 incr j
set D3($j) [$ns node]

#Declare forward delays
set Tf(1) [expr $parameters(32)*1000]
set Tf(2) [expr $parameters(33)*1000]
set Tf(3) [expr $parameters(34)*1000]
#Declare backward propagation delays
set Tpb(1) [expr $parameters(35)*1000]
set Tpb(2) [expr $parameters(36)*1000]
set Tpb(3) [expr $parameters(37)*1000]

#Links between sources and bottleneck
for set j 1 $j<=$NumSrc1 incr j
$ns duplex-link $S1($j) $N1 100Mb $Tf(1)ms DropTail
$ns queue-limit $S1($j) $N1 100

for set j 1 $j<=$NumSrc2 incr j
$ns duplex-link $S2($j) $N1 100Mb $Tf(2)ms DropTail
$ns queue-limit $S2($j) $N1 100

for set j 1 $j<=$NumSrc3 incr j
$ns duplex-link $S3($j) $N1 100Mb $Tf(3)ms DropTail
$ns queue-limit $S3($j) $N1 100

#Links between bottleneck and destinations
for set j 1 $j<=$NumDest1 incr j
$ns duplex-link $N2 $D1($j) 100Mb $Tpb(1)ms DropTail
$ns queue-limit $N2 $D1($j) 100

for set j 1 $j<=$NumDest2 incr j
$ns duplex-link $N2 $D2($j) 100Mb $Tpb(2)ms DropTail
$ns queue-limit $N2 $D2($j) 100

for set j 1 $j<=$NumDest3 incr j
$ns duplex-link $N2 $D3($j) 100Mb $Tpb(3)ms DropTail
$ns queue-limit $N2 $D3($j) 100

#TCP Sources
for set j 1 $j<=$NumSrc1 incr j
set tcp_src1($j) [new Agent/TCP/Newreno]

for set j 1 $j<=$NumSrc2 incr j
set tcp_src2($j) [new Agent/TCP/Newreno]

for set j 1 $j<=$NumSrc3 incr j
set tcp_src3($j) [new Agent/TCP/Newreno]

#TCP Destinations
for set j 1 $j<=$NumSrc1 incr j
set tcp_snk1($j) [new Agent/TCPSink]

for set j 1 $j<=$NumSrc2 incr j
set tcp_snk2($j) [new Agent/TCPSink]

for set j 1 $j<=$NumSrc3 incr j
set tcp_snk3($j) [new Agent/TCPSink]

#Connections
for set j 1 $j<=$NumSrc1 incr j
$ns attach-agent $S1($j) $tcp_src1($j)
$ns attach-agent $D1($j) $tcp_snk1($j)
$ns connect $tcp_src1($j) $tcp_snk1($j)

for set j 1 $j<=$NumSrc2 incr j
$ns attach-agent $S2($j) $tcp_src2($j)
$ns attach-agent $D2($j) $tcp_snk2($j)
$ns connect $tcp_src2($j) $tcp_snk2($j)

for set j 1 $j<=$NumSrc3 incr j
$ns attach-agent $S3($j) $tcp_src3($j)
$ns attach-agent $D3($j) $tcp_snk3($j)
$ns connect $tcp_src3($j) $tcp_snk3($j)

#FTP sources
for set j 1 $j<=$NumSrc1 incr j
set ftp1($j) [$tcp_src1($j) attach-source FTP]

for set j 1 $j<=$NumSrc2 incr j
set ftp2($j) [$tcp_src2($j) attach-source FTP]

```

```

for set j 1 $j<=$NumbSrc3 incr j
set ftp3($j) [$tcp_src3($j) attach-source FTP]

#Parametrisation of TCP sources
for set j 1 $j<=$NumbSrc1 incr j
$tcp_src1($j) set packetSize_ $parameters(42)
$tcp_src1($j) set window_ 10000
$tcp_src1($j) set ecn_ 0

for set j 1 $j<=$NumbSrc2 incr j
$tcp_src2($j) set packetSize_ $parameters(42)
$tcp_src2($j) set window_ 10000
$tcp_src2($j) set ecn_ 0

for set j 1 $j<=$NumbSrc3 incr j
$tcp_src3($j) set packetSize_ $parameters(42)
$tcp_src3($j) set window_ 10000
$tcp_src3($j) set ecn_ 0

#Schedule events for the FTP agents :
for set i 1 $i<=$NumbSrc1 incr i
$ns at 0.1 "$ftp1($i) start"
$ns at Duration "$ftp1($i) stop"

for set i 1 $i<=$NumbSrc2 incr i
$ns at 0.1 "$ftp2($i) start"
$ns at Duration "$ftp2($i) stop"

for set i 1 $i<=$NumbSrc3 incr i
$ns at 0.1 "$ftp3($i) start"
$ns at Duration "$ftp3($i) stop"

#####

#Disturbing Source nodes
for set j 1 $j<=$NumbSrcPert incr j
set Sudp($j) [$ns node]

#UDP sources
for set j 1 $j<=$NumbSrcPert incr j
set udp_src($j) [new Agent/UDP]

#UDP Destinations
for set j 1 $j<=$NumbSrcPert incr j
set udp_snk($j) [new Agent/Null]

#Links between source and bottleneck
for set j 1 $j<=$NumbSrcPert incr j
$ns duplex-link $Sudp($j) $N1 15Mb 100ms DropTail
$ns queue-limit $Sudp($j) $N1 100

#Connections UDP
for set j 1 $j<=$NumbSrcPert incr j
$ns attach-agent $Sudp($j) $udp_src($j)
$ns attach-agent $D3($j) $udp_snk($j)
$ns connect $udp_src($j) $udp_snk($j)

#Setup CBR sources
for set j 1 $j<=$NumbSrcPert incr j
set cbr($j) [new Application/Traffic/CBR]
$cbr($j) attach-agent $udp_src($j)
$cbr($j) set packetSize_ 500
$cbr($j) set rate_ 0.5Mb
$cbr($j) set random_ false

#Schedule events for the CBR agents :
for set i 1 $i<=$NumbSrcPert incr i
$ns at 70.0 "$cbr($i) start"
$ns at 100.0 "$cbr($i) stop"
#$ns at 350.0 "$cbr($i) start"
#$ns at 370.0 "$cbr($i) stop"
#$ns at 300.0 "$cbr($i) start"
#$ns at 320.0 "$cbr($i) stop"

#####

#Define a 'finish' procedure
proc finish
global ns nf tf qsize config qbw
$ns flush-trace
close $qsize
close $config
close $qbw
exit 0

# QUEUE MONITORING
set qfile [$ns monitor-queue $N1 $N2 [open queue.tr
w] 0.05]
[ $ns link $N1 $N2 ] queue-sample-timeout ;

#set pdrops_total 0
# The following procedure records queue size,
bandwidth and loss rate
proc record
global ns qfile qsize N1 N2 qbw
set time 0.05
set now [$ns now]

# print in the file $qsize the current queue size
# print in the file $qbw the current used bandwidth
# print in the file $qlost the loss rate

$qfile instvar parrivals_ pdepartures_ bdrops_
bdepartures_ pdrops_pkts_
puts $qsize "$now [expr $pkts_]"
puts $qbw "$now [expr $bdepartures_*8/1024/$time]"
set bdepartures_ 0
#set pdrops_total [expr $pdrops_+$pdrops_total]
#puts $qlost "$now [expr $pdrops_total]"
#puts $qlr "$now [expr $pdrops_/$time]"
#set pdrops_ 0
#puts $qpass "$now [expr $pdepartures_]"
$ns at [expr $now+$time] "record"

$ns at 0.0 "record"
$ns at [expr $Duration] "finish"
$ns run

```

C.2 Script d'émulation

```

set ns [new Simulator]; # create simulator object

$ns use-scheduler RealTime; # specify the real-time
sync'd scheduler

# test if the machine have ip forwarding disabled
set ipforw [exec cat /proc/sys/net/ipv4/ip_forward]

if $ipforw
puts "Warning : can not run with ip forwarding
enabled"
exit 1

# Load a file that will be used to enter some
parameters
set config [open "file.config" r]

set i 1;
while [gets $config line] != -1
set fields [split $line " :"];
puts $line;
set parameters($i) [lindex $fields 2];
set i [expr $i+1];

#parametre REM
Queue/REM set gamma_ 0.003

```



```

Queue/REM set mean_pktsize_ 1500
Queue/REM set pbo_ 100
Queue/REM set markpkts_ false
Queue/REM set qib_ false

#parametre PI
Queue/PI set a_ 1.483116796077166e-05 Queue/PI set b_
1.479561582023445e-05 Queue/PI set w_ 160
Queue/PI set qref_ 100

#parametre GAIN_K2
Queue/GAIN_K2 set k1_1_ $parameters(1)
Queue/GAIN_K2 set k1_2_ $parameters(2)
Queue/GAIN_K2 set k1_3_ $parameters(3)
Queue/GAIN_K2 set k2_1_ $parameters(4)
Queue/GAIN_K2 set k2_2_ $parameters(5)
Queue/GAIN_K2 set k2_3_ $parameters(6)

Queue/GAIN_K2 set w_ 160
Queue/GAIN_K2 set qref_ $parameters(11)
Queue/GAIN_K2 set xref_ $parameters(10)
Queue/GAIN_K2 set p1ref_ $parameters(7)
Queue/GAIN_K2 set p2ref_ $parameters(8)
Queue/GAIN_K2 set p3ref_ $parameters(9)

Queue/GAIN_K2 set a1_ $parameters(12)
Queue/GAIN_K2 set a2_ $parameters(13)
Queue/GAIN_K2 set a3_ $parameters(14)
Queue/GAIN_K2 set ad1_ $parameters(18)
Queue/GAIN_K2 set ad2_ $parameters(19)
Queue/GAIN_K2 set ad3_ $parameters(20)
Queue/GAIN_K2 set f1_ $parameters(15)
Queue/GAIN_K2 set f2_ $parameters(16)
Queue/GAIN_K2 set f3_ $parameters(17)
Queue/GAIN_K2 set b1_ $parameters(24)
Queue/GAIN_K2 set b2_ $parameters(25)
Queue/GAIN_K2 set b3_ $parameters(26)

Queue/GAIN_K2 set l1_ $parameters(27)
Queue/GAIN_K2 set l2_ $parameters(28)
Queue/GAIN_K2 set l3_ $parameters(29)
Queue/GAIN_K2 set l4_ $parameters(30)
Queue/GAIN_K2 set l5_ $parameters(31)

Queue/GAIN_K2 set tauf1_ $parameters(32)
Queue/GAIN_K2 set tauf2_ $parameters(33)
Queue/GAIN_K2 set tauf3_ $parameters(34)
Queue/GAIN_K2 set taub1_ $parameters(38)
Queue/GAIN_K2 set taub2_ $parameters(39)
Queue/GAIN_K2 set taub3_ $parameters(40)
Queue/GAIN_K2 set eta1_ $parameters(21)
Queue/GAIN_K2 set eta2_ $parameters(22)
Queue/GAIN_K2 set eta3_ $parameters(23)

set bpf0 [new Network/Pcap/Live]; # live traffic -
read IP pkts
$bpf0 set promisc_ true; # use promiscuous mode
$bpf0 open readonly eth0; # specify interface

set bpf1 [new Network/Pcap/Live]; # live traffic -
read IP pkts
$bpf1 set promisc_ true; # use promiscuous mode
$bpf1 open readonly eth1; # specify interface

set bpf2 [new Network/Pcap/Live]; # live traffic -
read IP pkts
$bpf2 set promisc_ true; # use promiscuous mode
$bpf2 open readonly eth2; # specify interface

set bpf3 [new Network/Pcap/Live]; # live traffic -
read IP pkts
$bpf3 set promisc_ true; # use promiscuous mode
$bpf3 open readonly eth3; # specify interface

set ipnet [new Network/IP]; # live traffic - write
IP pkts
$ipnet open writeonly

$bpf0 filter "src 10.114.2.200 or src 10.114.2.201 or
src 10.114.2.202";
$bpf1 filter "src 10.111.2.17";#(not ip host
10.111.2.19) and (not ether broadcast)";
$bpf2 filter "src 10.113.2.17";
$bpf3 filter "src 10.112.2.17";

set pfa0 [new Agent/Tap]
set pfa1 [new Agent/Tap]
set pfa2 [new Agent/Tap]

set pfa3 [new Agent/Tap]

set ipa0 [new Agent/Tap]
set ipa1 [new Agent/Tap]
set ipa2 [new Agent/Tap]
set ipa3 [new Agent/Tap]

$pf0 network $bpf0 # associate pf net object w/tap
agent
$pf1 network $bpf1 # associate pf net object w/tap
agent
$pf2 network $bpf2 # associate pf net object w/tap
agent
$pf3 network $bpf3 # associate pf net object w/tap
agent
$ipa0 network $ipnet # associate ip net object w/tap
agent
$ipa1 network $ipnet # associate ip net object w/tap
agent
$ipa2 network $ipnet # associate ip net object w/tap
agent
$ipa3 network $ipnet # associate ip net object w/tap
agent

# create topology in simulator
set node0 [$ns node]
set node1 [$ns node]
set node2 [$ns node]
set node3 [$ns node]
set router [$ns node]

#Declare forward delays
set Tf(1) [expr $parameters(32)*1000]
set Tf(2) [expr $parameters(33)*1000]
set Tf(3) [expr $parameters(34)*1000]

set Trr [expr $parameters(41)*1000]

$ns duplex-link $node1 $router 100Mb $Tf(1)ms
DropTail
$ns duplex-link $node2 $router 100Mb $Tf(2)ms
DropTail
$ns duplex-link $node3 $router 100Mb $Tf(3)ms
DropTail
$ns simplex-link $router $node0 $parameters(43)Mb
($Trr)ms GAIN_K2
$ns simplex-link $node0 $router 100Mb ($Trr)ms
DropTail
$ns queue-limit $router $node0 400

# place agents in topology
$ns attach-agent $node0 $pfa0; # packet filter agent
$ns attach-agent $node0 $ipa0; # ip agent (for
sending)
$ns attach-agent $node1 $pfa1; # packet filter agent
$ns attach-agent $node1 $ipa1; # ip agent (for
sending)
$ns attach-agent $node2 $pfa2;
$ns attach-agent $node2 $ipa2;
$ns attach-agent $node3 $pfa3;
$ns attach-agent $node3 $ipa3;

$ns simplex-connect $pfa0 $ipa1
$ns simplex-connect $pfa1 $ipa0
$ns simplex-connect $pfa0 $ipa2
$ns simplex-connect $pfa2 $ipa0
$ns simplex-connect $pfa0 $ipa3
$ns simplex-connect $pfa3 $ipa0
# QUEUE MONITORING
set qsize [open queue-size.tr w]
set qbw [open queue-bw.tr w]
set qfile [ $ns monitor-queue $router $node0 [open
queue.tr w] 0.05]
[ $ns link $router $node0 ] queue-sample-timeout;

# The following procedure records queue size,
bandwidth and loss rate
proc record
global ns qfile qsize qbw
set time 0.05
set now [$ns now]

# print in the file $qsize the current queue size
# print in the file $qbw the current used bandwidth
# print in the file $qlost the loss rate

$qfile instvar parrivals_ pdepartures_ bdrops_
bdepartures_ pdrops_ pkts_
puts $qsize "$now [expr $pkts_]"

```

```

$ns at [expr $now+$time] "record"                puts "let's go"
                                                    $ns run; # start emulation

$ns at 3.0 "record"

```

C.3 Codes sources de MonAQM

fichier .h

```

#ifndef ns_gain-k2_h
#define ns_gain-k2_h

#undef setbit

#include "queue.h"
#include "trace.h"
#include "timer-handler.h"
#include "estimator.h"
#include <iostream>
#include <fstream>

#define DTYPE_NONE 0 /* ok, no drop */
#define DTYPE_FORCED 1 /* a "forced" drop */
#define DTYPE_UNFORCED 2 /* an "unforced" (random) drop */

// Insert APPLE specific macro here
// #if defined( __MACH__ ) && defined( __APPLE__ )
#undef setbit
#endif

/*
 * Early drop parameters, supplied by user
 */
struct edp_gain_k2
/*
 * User supplied.
 */
int mean_pktsize; /* avg pkt size, linked into Tcl */
int bytes; /* true if queue in bytes, false if packets */
int setbit; /* true to set congestion indication bit */
double k1_1, k1_2, k1_3, k2_1, k2_2, k2_3; /* parameters to gain_k2 controller */
double a1, a2, a3, ad1, ad2, ad3, f1, f2, f3, b1, b2, b3, l1, l2, l3, l4, l5; /* parameters for observer*/
double tauf1, tauf2, tauf3, taub1, taub2, taub3, eta1, eta2, eta3;
double w; /* sampling frequency (# of times per second) */
double qref, xref, p1ref, p2ref, p3ref; /* queue size, window, probability at the equilibrium*/
edp_gain_k2() : mean_pktsize(0), bytes(0), setbit(0), w(0.0), qref(0.0), xref(0.0)
;

/*
 * Early drop variables, maintained by GAIN_K2
 */
struct edv_gain_k2
TracedDouble v_prob; /* prob. of packet drop before "count". */
int count; /* # of packets since last drop */
int count_bytes; /* # of bytes since last drop */
int qold;

double v_pob1;
double v_prob2;
double v_prob3;
edv_gain_k2() : v_prob(0.0), count(0), count_bytes(0), qold(0)
;

class LinkDelay;
class GAIN_K2Queue;

class GAIN_K2Queue : public Queue

public :
GAIN_K2Queue(const char * = "Drop");

double CongFen; int rtt; int i; double K1[10]; double K2[10]; double P[10];
FILE *fich; int EjectPkt; int PassedPkt; int DropEarlyPkt; int ArrivedPkt; double x0[3];
double AggFlow[3]; double old_now; double z[5]; double zd[5]; double z_point[5]; double pd1;
double pd2; double pd3; double tab_z1[82]; double tab_z2[82];
double tab_z3[82]; double tab_p1[82]; double tab_p2[82]; double tab_p3[82];
double tab_temps[82]; ofstream fichier_agg1bis; ofstream fichier_agg1; ofstream fichier_agg2; ofstream
fichier_agg3; ofstream fichier_queue_est;
ofstream fichier_agg_est1; ofstream fichier_agg_est2; ofstream fichier_agg_est3; ofstream fichier_perturb_est;
ofstream fichier_rtt;

protected :
int command(int argc, const char*const* argv);
void enqueue(Packet* pkt);
virtual Packet *pickPacketForECN(Packet* pkt);

```

```

virtual Packet *pickPacketToDrop();
Packet* deque();
void reset();
int drop_early(Packet* pkt, int qlen);
double calculate_p(int src, int addr);

LinkDelay* link_; /* outgoing link */
int fifo_; /* fifo queue? */
PacketQueue *q_; /* underlying (usually) FIFO queue */

    int qib_; /* bool : queue measured in bytes? */
NsObject* de_drop_; /* drop_early target */

//added to be able to trace EDrop Objects - ratul
//the other events - forced drop, enqueue and deque are traced by a different mechanism.
NsObject * EDTrace; //early drop trace
char traceType[20]; //the preferred type for early drop trace.
//better be less than 19 chars long
Tcl_Channel tchan_; /* place to write trace records */
TracedInt curq_; /* current qlen seen by arrivals */
void trace(TracedVar*); /* routine to write trace records */

    edp_gain_k2 edp_; /* early-drop params */
edv_gain_k2 edv_; /* early-drop variables */

int first_reset_; /* first time reset() is called */
;

#endif

```

fichier .cc

```

#include <math.h>
#include <sys/types.h>
#include "config.h"
#include "template.h"
#include "random.h"
#include "flags.h"
#include "delay.h"
#include "gain-k2.h"

    static class GAIN_K2Class : public TclClass {
public :
GAIN_K2Class() : TclClass("Queue/GAIN_K2") {}
TclObject* create(int argc, const char*const* argv) {
if (argc==5)
return (new GAIN_K2Queue(argv[4]));
else
return (new GAIN_K2Queue("Drop"));
}
} class_gain_k2;

    GAIN_K2Queue : :GAIN_K2Queue(const char * trace) : rtt(0), EjectPkt(0), PassedPkt(0), DropEarlyPkt(0),
ArrivedPkt(0), //CalcTimer(this),
link_(NULL), q_(NULL),
qib_(0), de_drop_(NULL), EDTrace(NULL), tchan_(0), curq_(0),
edp_(), edv_(), first_reset_(1)
{
if (strlen(trace) >=20) {
printf("trace type too long - allocate more space to traceType in gain-k2.h and recompile");
exit(0);
}
strcpy(traceType, trace);

bind_bool("bytes_", &edp_.bytes); bind_bool("queue_in_bytes_", &qib_); bind("k1_1_", &edp_.k1_1);
bind("k1_2_", &edp_.k1_2); bind("k1_3_", &edp_.k1_3); bind("k2_1_", &edp_.k2_1);
bind("k2_2_", &edp_.k2_2); bind("k2_3_", &edp_.k2_3); bind("a1_", &edp_.a1);
bind("a2_", &edp_.a2); bind("a3_", &edp_.a3); bind("ad1_", &edp_.ad1);
bind("ad2_", &edp_.ad2); bind("ad3_", &edp_.ad3); bind("f1_", &edp_.f1);
bind("f2_", &edp_.f2); bind("f3_", &edp_.f3); bind("b1_", &edp_.b1);
bind("b2_", &edp_.b2); bind("b3_", &edp_.b3); bind("l1_", &edp_.l1);
bind("l2_", &edp_.l2); bind("l3_", &edp_.l3); bind("l4_", &edp_.l4);
bind("l5_", &edp_.l5); bind("tauf1_", &edp_.tauf1); bind("tauf2_", &edp_.tauf2);
bind("tauf3_", &edp_.tauf3); bind("taub1_", &edp_.taub1); bind("taub2_", &edp_.taub2);
bind("taub3_", &edp_.taub3); bind("eta1_", &edp_.eta1); bind("eta2_", &edp_.eta2);
bind("eta3_", &edp_.eta3); bind("w_", &edp_.w); bind("qref_", &edp_.qref);
bind("xref_", &edp_.xref); bind("p1ref_", &edp_.p1ref); bind("p2ref_", &edp_.p2ref);
bind("p3ref_", &edp_.p3ref); bind("mean_pktsize_", &edp_.mean_pktsize); bind_bool("setbit_", &edp_.setbit);
bind("prob_", &edv_.v_prob); bind("prob1_", &edv_.v_prob1); bind("prob2_", &edv_.v_prob2);
bind("prob3_", &edv_.v_prob3); bind("curq_", &curq_); q_ = new PacketQueue();
pq_ = q_; reset(); K1[1]=edp_.k1_1;
K1[2]=edp_.k1_2; K1[3]=edp_.k1_3; K2[1]=edp_.k2_1;
K2[2]=edp_.k2_2; K2[3]=edp_.k2_3; P[1]=edp_.p1ref; P[2]=edp_.p2ref; P[3]=edp_.p3ref;

```

```

    // pour observer
    fichier_agg1bis.open("out_agg1.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_aggfl.open("out_aggfl.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_agg2.open("out_agg2.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_agg3.open("out_agg3.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_queue_est.open("out_queue_est.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_agg_est1.open("out_agg_est1.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_agg_est2.open("out_agg_est2.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_agg_est3.open("out_agg_est3.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_perturb_est.open("out_perturb_est.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    fichier_rtt.open("out_rtt.tr", ios : :out | ios : :trunc);
    old_now=0;
    int i;
    for(i=0;i<83;i++){
    tab_z1[i]=0; tab_z2[i]=0; tab_z3[i]=0; tab_p1[i]=0; tab_p2[i]=0; tab_p3[i]=0; tab_temps[i]=0; }
    for(i=0;i<5;i++){ z[i]=0; z_point[i]=0; }
    x0[0]=edp_.xref; x0[1]=edp_.xref; x0[2]=edp_.xref;

    }

    void GAIN_K2Queue : :reset()
    {
    //double now = Scheduler : :instance().clock();
    /*
    if (qib_ && first_reset_ == 1) {
    edp_.qref = edp_.qref*edp_.mean_pktsize;
    }
    */
    edv_.count = 0;
    edv_.count_bytes = 0;
    edv_.v_prob = 0;
    edv_.v_prob1 = 0;
    edv_.v_prob2 = 0;
    edv_.v_prob3 = 0;
    edv_.qold = 0;
    curq_ = 0;
    Queue : :reset();
    }
    void GAIN_K2Queue : :enqueue(Packet* pkt)
    {
    double now = Scheduler : :instance().clock();
    hdr_cmn* ch = hdr_cmn : :access(pkt);
    ++edv_.count;
    edv_.count_bytes += ch->size();
    int droptype = DTYPE_NONE;
    int qlen = qib_? q_>byteLength() : q_>length();
    curq_ = qlen; // helps to trace queue during arrival, if enabled
    int qlim = qib_? (qlim_ * edp_.mean_pktsize) : qlim_;

    //////////////////////////////////////

    hdr_ip* iph = hdr_ip : :access(pkt);
    int ip_addr=iph->saddr();

    //////////////////////////////////////
    if(ip_addr>=2 && ip_addr<=edp_.eta1+2-1)
    {this->calculate_p(1,ip_addr);}
    else if(ip_addr>=edp_.eta1+2 && ip_addr<=edp_.eta1+edp_.eta2+2-1)
    {this->calculate_p(2,ip_addr);}
    else if(ip_addr>=edp_.eta1+edp_.eta2+2 && ip_addr<=edp_.eta1+edp_.eta2+edp_.eta3+2-1)
    {this->calculate_p(3,ip_addr);}

    //////////////////////////////////////

    hdr_tcp* tcph = hdr_tcp : :access(pkt);
    CongFen = tcph->get_fenetre();
    double rtt = tcph->last_rtt();

    ////////////////////////////////////// observer //////////////////////////////////////

    if((now-old_now)>=0.01 && ip_addr<edp_.eta1+edp_.eta2+edp_.eta3+2 && ip_addr !=1){
    int i;

    for(i=0;i<5;i++){
    z[i] = z[i]+(now-old_now)*z_point[i];
    }
    old_now=now;
    for(i=80;i>0;i-){
    tab_z1[i]=tab_z1[i-1];
    tab_z2[i]=tab_z2[i-1];
    tab_z3[i]=tab_z3[i-1];
    tab_p1[i]=tab_p1[i-1];
    tab_p2[i]=tab_p2[i-1];
    tab_p3[i]=tab_p3[i-1];
    tab_temps[i]=tab_temps[i-1];
    }
    tab_z1[0]=z[0];
    tab_z2[0]=z[1];
    tab_z3[0]=z[2];

```

```

tab_p1[0]=edv_.v_prob1 ;
tab_p2[0]=edv_.v_prob2 ;
tab_p3[0]=edv_.v_prob3 ;
tab_temps[0]=now ;
int cmpt_tauf1=0 ;
int cmpt_tauf2=0 ;
int cmpt_tauf3=0 ;
int cmpt_taub1=0 ;
int cmpt_taub2=0 ;
int cmpt_taub3=0 ;

while((now-tab_temps[cmpt_tauf1])<edp_.tauf1*0.001){
cmpt_tauf1=cmpt_tauf1+1 ;}
while((now-tab_temps[cmpt_tauf2])<edp_.tauf2*0.001){
cmpt_tauf2=cmpt_tauf2+1 ;}
while((now-tab_temps[cmpt_tauf3])<edp_.tauf3*0.001){
cmpt_tauf3=cmpt_tauf3+1 ;}
while((now-tab_temps[cmpt_taub1])<edp_.taub1*0.001){ cmpt_taub1=cmpt_taub1+1 ;}
while((now-tab_temps[cmpt_taub2])<edp_.taub2*0.001){ cmpt_taub2=cmpt_taub2+1 ;}
while((now-tab_temps[cmpt_taub3])<edp_.taub3*0.001){ cmpt_taub3=cmpt_taub3+1 ;}
zd[0]=tab_z1[cmpt_tauf1] ;
zd[1]=tab_z2[cmpt_tauf2] ;
zd[2]=tab_z3[cmpt_tauf3] ;
pd1=tab_p1[cmpt_taub1] ;
pd2=tab_p2[cmpt_taub2] ;
pd3=tab_p3[cmpt_taub3] ;

z_point[0]=edp_.a1*z[0]+edp_.f1*z[3]+edp_.ad1*(edp_.eta1*zd[0]+edp_.eta2*zd[1]+edp_.eta3*zd[2])
+edp_.b1*(pd1-edp_.p1ref)+edp_.l1*((qlen-edp_.qref)-z[3]) ;
z_point[1]=edp_.a2*z[1]+edp_.f2*z[3]+edp_.ad2*(edp_.eta1*zd[0]+edp_.eta2*zd[1]+edp_.eta3*zd[2])
+edp_.b2*(pd2-edp_.p2ref)+edp_.l2*((qlen-edp_.qref)-z[3]) ;
z_point[2]=edp_.a3*z[2]+edp_.f3*z[3]+edp_.ad3*(edp_.eta1*zd[0]+edp_.eta2*zd[1]+edp_.eta3*zd[2])
+edp_.b3*(pd3-edp_.p3ref)+edp_.l3*((qlen-edp_.qref)-z[3]) ;
z_point[3]=z[4]+1*(edp_.eta1*zd[0]+edp_.eta2*zd[1]+edp_.eta3*zd[2])+edp_.l4*((qlen-edp_.qref)-z[3]) ;
z_point[4]=edp_.l5*((qlen-edp_.qref)-z[3]) ;

////////////////////////////////////
if(now>0.4 && rtt>0.001){
if(ip_addr>=2 && ip_addr<=edp_.eta1+2-1)
{fichier_aggf1 <<now<<" "<<CongFen/(rtt*0.001)<< endl ;AggFlow[0]=CongFen/(rtt*0.001) ;
fichier_agg_est1 <<now<<" "<<(z[0]+edp_.xref)<< endl ;}
else if(ip_addr>=edp_.eta1+2 && ip_addr<=edp_.eta1+edp_.eta2+2-1)
{fichier_agg2 <<now<<" "<<CongFen/(rtt*0.001)<< endl ;AggFlow[1]=CongFen/(rtt*0.001) ;
fichier_agg_est2 <<now<<" "<<(z[1]+edp_.xref)<< endl ;}
else if(ip_addr>=edp_.eta1+edp_.eta2+2 && ip_addr<=edp_.eta1+edp_.eta2+edp_.eta3+2-1)
{fichier_agg3 <<now<<" "<<CongFen/(rtt*0.001)<< endl ;AggFlow[2]=CongFen/(rtt*0.001) ;
fichier_agg_est3 <<now<<" "<<(z[2]+edp_.xref)<< endl ;}
//fichier_rtt <<now<<" "<<rtt<< endl ;
fichier_queue_est <<now<<" "<<(z[3]+edp_.qref)<< endl ;

fichier_perturb_est <<now<<" "<<z[4]<< endl ;
}}
////////////////////////////////////

if (qlen >= qlim) {
droptype = DTYPE_FORCED ;
}
else {
if (drop_early(pkt, qlen)) {
droptype = DTYPE_UNFORCED ;
}
}
if (droptype == DTYPE_UNFORCED) {
Packet *pkt_to_drop = pickPacketForECN(pkt) ;
if (pkt_to_drop != pkt) {
q_>enqueue(pkt) ;
q_>remove(pkt_to_drop) ;
pkt = pkt_to_drop ; /* XXX okay because pkt is not needed anymore */
}
if (de_drop_ != NULL) {
if (EDTrace != NULL)
((Trace *)EDTrace->recvOnly(pkt) ;
de_drop_>recv(pkt) ;
}
else {
drop(pkt) ;
}
} else {
q_>enqueue(pkt) ;
if (droptype == DTYPE_FORCED) {
pkt = pickPacketToDrop() ;
q_>remove(pkt) ;
drop(pkt) ;
edv_.count = 0 ;
edv_.count_bytes = 0 ;
} } return ;
}

double GAIN_K2Queue : :calculate_p(int src, int addr)

```

```

{
double now = Scheduler : :instance().clock();
double p=0;
int qlen = qib_? q_>byteLength() : q_>length();

    if (qib_) {
//p=edp_.k1*(CongFen*1.0/edp_.mean_pktsize-edp_.wref)+edp_.k2*(qlen*1.0/edp_.mean_pktsize-edp_.qref)+edp_.pref ;
p=0;
}
else {
// retour d'Altat
//p=P[src]+K2[src]*(qlen-edp_.qref)+K1[src]*(AggFlow[src-1]-x0[src-1]); //+K3[src]*intqlen ;
// retour de sortie dynamique (AQM+observer)
p=P[src]+K2[src]*(qlen-edp_.qref)+K1[src]*(zd[src-1]);
}

    if (p < 0) p = 0;
if (p > 1) p = 1;

    switch (src)
    {
case 1 :
edv_.v_prob1 = p;
break;
case 2 :
edv_.v_prob2 = p;
break;
case 3 :
edv_.v_prob3 = p;
break;
}
edv_.v_prob = p;
edv_.qold = qlen;

return p;
}

int GAIN_K2Queue : :drop_early(Packet* pkt, int qlen)
{
//double now = Scheduler : :instance().clock();
hdr_cmh* ch = hdr_cmh : :access(pkt);
double p = edv_.v_prob;

    if (edp_.bytes) {
p = p*ch->size()/edp_.mean_pktsize ;
if (p > 1) p = 1;
}

    double u = Random : :uniform();
if (u <= p) {
edv_.count = 0;
edv_.count_bytes = 0;
hdr_flags* hf = hdr_flags : :access(pickPacketForECN(pkt));
if (edp_.setbit && hf->ect()) {
hf->ce() = 1; // mark Congestion Experienced bit
return (0); // no drop
} else {
return (1); // drop
}
}
return (0); // no DROP/mark
}

Packet* GAIN_K2Queue : :pickPacketForECN(Packet* pkt)
{
return pkt; /* pick the packet that just arrived */
}

Packet* GAIN_K2Queue : :pickPacketToDrop()
{
int victim;
victim = q_>length() - 1;
return(q_>lookup(victim));
}

Packet* GAIN_K2Queue : :deque()
{
Packet *p;
p = q_>deque();
curq_ = qib_? q_>byteLength() : q_>length(); // helps to trace queue during arrival, if enabled
return (p);
}

int GAIN_K2Queue : :command(int argc, const char*const* argv)
{
Tcl& tcl = Tcl : :instance();
if (argc == 2) {
if (strcmp(argv[1], "reset") == 0) {
reset();
}
}
}

```

```

return (TCL_OK);
}
if (strcmp(argv[1], "early-drop-target") == 0) {
if (de_drop_ != NULL)
tcl.resultf("
return (TCL_OK);
}
if (strcmp(argv[1], "edrop-trace") == 0) {
if (EDTrace != NULL) {
tcl.resultf("
}
else {
tcl.resultf("0");
}
return (TCL_OK);
}
if (strcmp(argv[1], "trace-type") == 0) {
tcl.resultf("
return (TCL_OK);
}
}
else if (argc == 3) {
// attach a file for variable tracing
if (strcmp(argv[1], "attach") == 0) {
int mode;
const char* id = argv[2];
tchan_ = Tcl_GetChannel(tcl.interp(), (char*)id, &mode);
if (tchan_ == 0) {
tcl.resultf("GAIN_K2 : trace : can't attach return (TCL_ERROR);
}
return (TCL_OK);
}
// tell GAIN_K2 about link stats
if (strcmp(argv[1], "link") == 0) {
LinkDelay* del = (LinkDelay*)TclObject : :lookup(argv[2]);
if (del == 0) {
tcl.resultf("GAIN_K2 : no LinkDelay object return(TCL_ERROR);
}
link_ = del;
return (TCL_OK);
}
if (strcmp(argv[1], "early-drop-target") == 0) {
NsObject* p = (NsObject*)TclObject : :lookup(argv[2]);
if (p == 0) {
tcl.resultf("no object
return (TCL_ERROR);
}
}
de_drop_ = p;
return (TCL_OK);
}
if (strcmp(argv[1], "edrop-trace") == 0) {
NsObject * t = (NsObject *)TclObject : :lookup(argv[2]);
if (t == 0) {
tcl.resultf("no object
return (TCL_ERROR);
}
}
EDTrace = t;
return (TCL_OK);
}
if (!strcmp(argv[1], "packetqueue-attach")) {
delete q_;
if (!(q_ = (PacketQueue*) TclObject : :lookup(argv[2])))
return (TCL_ERROR);
else {
pq_ = q_;
return (TCL_OK);
} }
return (Queue : :command(argc, argv));
}

void GAIN_K2Queue : :trace(TracedVar* v)
{
char wrk[500], *p;

if (((p = strstr(v->name(), "prob")) == NULL) &&
((p = strstr(v->name(), "curq")) == NULL)) {
fprintf(stderr, "GAIN_K2 :unknown trace var
return;
}
if (tchan_) {
int n;
double t = Scheduler : :instance().clock();
// XXX : be compatible with nsv1 GAIN_K2 trace entries
if (*p == 'c') {
sprintf(wrk, "Q
} else {
sprintf(wrk, "
}
n = strlen(wrk);

```

```
wrk[n] = 'carriage return';  
wrk[n+1] = 0;  
(void)Tcl_Write(tchan_, wrk, n+1);  
}  
return;  
}
```


Annexe D

Input-output framework for robust stability of time-varying delay systems

D.1 INTRODUCTION

Stability of linear time-delay systems has been intensively studied since several decades (see [58], [124], [126], [142], [68] and references therein). A such success can be explained by their applied aspect. Indeed, many processes include dead-time phenomena such as biology, chemistry, economics, as well as population dynamics [97] [126]. Processing time and propagation time in actuators and sensors generally induce also such delays, especially if some devices are physically distant. That is the challenge of networked controlled systems [33] as well as network control [157].

In the case of constant delay and unperturbed linear systems, efficient criteria based on roots location [128] [121] allow to find the exact region of stability with respect to the value of the delay. Beside these direct methods, numerous works based either on Lyapunov functionals [68][142][54] or robustness framework (small gain theory [68], IQC [88] or quadratic separation [65]) have established interesting results to tackle the robust stability of delay systems with practical tools (like LMI). All resulting stability conditions are based on convex optimization (linear matrix inequality framework) and allow to conclude on stability intervals with respect to the delay and/or the uncertainty.

Regarding the case of time-varying delay systems, some authors have extended the upper cited results to address the stability issue of such systems. Nevertheless, the time-varying nature of the delay should be carefully handled rather than roughly adapted from methods originally developed for the constant delay case. In the Lyapunov-Krasovskii approach few studies [160][55][72][5] have proposed customized functionals able to significantly improve classical results. In the input-output approach [68][58][89][12], some terms (or operators) related to the delayed dynamics are embedded into an uncertain matrix and the method consists in ensuring the robust stability of the nominal system with respect to the uncertain domain. Hence, in one hand, the key issue relies on the choice of the interconnection modeling the delay systems (and thus the uncertain set), and in other hand, on the L_2 -norm bounds which fit the uncertain set. Although the Lyapunov and the input-output approaches are closely related [164][64], the second

one states clearly the reasons of the conservatism and how it may be reduced.

In this paper, the quadratic separation principle, belonging to the input-output framework, is considered to deal with the stability analysis of linear time-varying delay systems. First, such systems are modeled as the interconnection of a linear matrix equation with an uncertain matrix of operators. Secondly, based on previous results [12] and [89] which provide bounds on some operators, integral quadratic constraints are built. At last, a redundant equation is introduced to construct a new modeling of the delay systems. To this end, an augmented state is considered which is composed of the original state vector and its derivatives. Then defining relationship between augmented states \dot{x} , \ddot{x} , the delay h and its derivative \dot{h} as a set of integral quadratic constraints allows to improve the stability criterion. Conditions are expressed in terms of linear matrix inequalities (LMI) which can be solved efficiently with semi-definite programming (SDP) solvers.

After the introduction, the paper carries on with the definition of some operators and preliminaries on quadratic separation useful to present the main result. In section D.3, the prior result on robust stability is exploited to derive a stability condition for time-varying delay systems. The robust stability for the case of uncertain systems is also addressed. Numerical examples that show the effectiveness of the proposed criteria is provided in section D.4.

D.2 PRELIMINARIES

D.2.1 Notations and problem statement

Throughout the paper, the following notations are used. The set of L_2^n consists of all measurable functions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}^n$ such that the following norm $\|f\|_{L_2} = \left(\int_0^\infty (f^*(t)f(t)) \right)^{1/2} dt < \infty$. When context allows it, the superscript n of the dimension will be omitted. the set L_{2e}^n denotes the extended set of L_2^n which consists of the functions whose time truncation lies in L_2^n . For two symmetric matrices, A and B , $A > (\geq) B$ means that $A - B$ is (semi-) positive definite. A^T denotes the transpose of A . $\mathbb{1}_n$ and $\mathbb{0}_{m \times n}$ denote respectively the identity matrix of size n and null matrix of size $m \times n$. If the context allows it, the dimensions of these matrices are often omitted. $\text{diag}(A, B, C)$ stands for the block diagonal matrix :

$$\text{diag}(A, B, C) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

Let consider the following time-varying delay system :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)) & \forall t \geq 0, \\ x(t) = \phi(t) & \forall t \in [-h_{\max}, 0] \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, ϕ is the initial condition and $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are constant matrices. The delay h is time-varying and the following constraints are assumed

$$h(t) \in [0, h_{\max}] \quad \text{and} \quad |\dot{h}(t)| \leq d, \quad (\text{D.2})$$

where h_{\max} and d are given scalar constants and may be infinite if delay independent condition

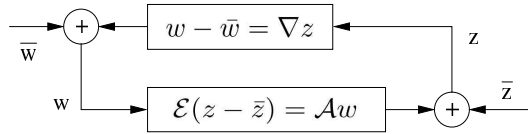


FIG. D.1: Feedback system

and fast-varying delay condition, respectively, are looked for.

D.2.2 Stability analysis via quadratic separation

Coming from robust control theory, the quadratic separation provides a fruitful framework to address the stability issue of non-linear and uncertain systems [82], [135]. Recent studies [64], [65] have shown that a such framework allows to reduce significantly the conservatism of the stability analysis of time-delay systems with constant delay. Then, in order to deal with the time-varying delay case, the quadratic separation method has been extended in [12] to handle not only the case of uncertain matrices but more generally uncertain operators. Indeed, based on the inner product and the L_{2e} space a suitable theorem is then proposed. This latter will be later used to derive stability conditions for time-varying delay systems.

Let consider the interconnection defined by Figure D.1 where \mathcal{E} and \mathcal{A} are two, real valued, possibly non-square matrices and ∇ is a linear operator from L_{2e} to L_{2e} . For simplicity of notations, we assume in the present paper that \mathcal{E} is full column rank. Assuming the well-posedness, we are interested in looking for conditions that ensure the stability of the interconnection.

Theorem 1. *The interconnected system of Figure D.1 is stable if there exists a Hermitian matrix $\Theta = \Theta^*$ satisfying both conditions*

$$[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}]^{\perp*} \Theta [\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}]^{\perp} > 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\forall u \in L_{2e}, \left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u, \Theta \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla \end{bmatrix} u \right\rangle \leq 0 \quad (\text{D.4})$$

PROOF : Inspired from [135], the proof is detailed in [12]. \diamond
Basically, inequality (D.4) which forms an integral quadratic constraint, is built from definitions and informations on different operators which compose the matrix ∇ . Then, the other one (D.3) provides the stability condition of the interconnection.

D.3 MAIN RESULTS

D.3.1 Defining operators

Toward modeling delay system as an interconnected system such as illustrated on Figure D.1, it is required to define appropriate operators. Define the integral operator

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : L_{2e} &\rightarrow L_{2e}, \\ x(t) &\rightarrow \int_0^t x(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

and the delay operator (or shift operator)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : L_{2e} &\rightarrow L_{2e}, \\ x(t) &\rightarrow x(t-h), \end{aligned} \tag{D.6}$$

which constitute the fundamental elementary operators to describe a delay system. The related integral quadratic constraints are introduced in the following two lemmas. These latter will be helpful to construct inequality (D.4) and to derive then stability criteria for linear systems with time-varying delays in the next section.

Lemma 1. *An integral quadratic constraint for the operator \mathcal{I} is given by the following inequality $\forall x \in L_{2e}^n$ and for a positive definite matrix P ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{I}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{I}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x \right\rangle < 0$$

PROOF : Simple calculus shows that $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}^n$, (x being truncated : $x(t) = 0, \forall t > T$)

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{I}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -P \\ -P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{I}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x \right\rangle \\ &= -2 \int_0^T x(t)^T P \int_0^t x(s) ds \\ &= -2 \int_0^T \frac{d}{dt} (\mathcal{I}x)^T P (\mathcal{I}x) dt \\ &= -(\int_0^T x(s) ds)^T P (\int_0^T x(s) ds) < 0 \end{aligned}$$

◇

The second step is to derive a parameterized IQC for the operator \mathcal{D} :

Lemma 2. *An integral quadratic constraint for the operator \mathcal{D} is given by the following inequality $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}^n$ and for a positive matrix Q ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{D}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q(1-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{D}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x \right\rangle < 0 \tag{D.7}$$

PROOF : We get that $\forall T > 0, \forall x \in L_{2e}^n$, (x being truncated : $x(t) = 0, \forall t > T$)

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{D}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q(1-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathcal{D}\mathbf{1}_n \end{bmatrix} x \right\rangle \\ &= -\int_0^{+\infty} x^T(u) Q x(u) du + \int_0^\infty x_d^T(t) Q x_d(t) (1-h(t)) dt \\ &= -\int_0^{+T} x^T(t) Q x(t) dt + \int_{-h(0)}^{T-h(T)} x^T(u) Q x(u) du \\ &= -\int_{T-h(T)}^T x(u)^T Q x(u) du < 0 \end{aligned}$$

where $x_d(t) = x(t-h(t))$.

◇

In the next paragraph, applying the prior result exposed in Section D.2.2 a rate and delay dependent stability condition for time-varying delay systems is provided.

D.3.2 Stability condition for time-varying delay systems

First, let us reformulate the dynamic of linear systems with time-varying delay as suggested on Figure D.1 in order to apply the quadratic separation principle. System (D.1) can be described as the feedback

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{I}\mathbb{1}_n & \\ & \mathcal{D}\mathbb{1}_n \end{bmatrix}}_{\nabla} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_{z(t)}, \quad (\text{D.8})$$

over the feedforward equation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & A_d \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}}_{w(t)}.$$

This simplistic description of the system D.1 gives rise, applying Theorem 1, to the well-known independent of delay (IOD) criterion [12][64]. Secondly, so as to develop delay dependent condition, an additional operator must be blended into ∇ , enhancing then the time delay system description. Usually, the operator $(\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \mathcal{I}$ (or in Laplace domain for the constant delay case $(1 - e^{-sh})s^{-1}$), bounded by h_{max} , is added. This operator is applied to the signal $\dot{x}(t)$ and the relationship

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \mathcal{I}[\dot{x}_i(t)] &= (\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \mathcal{I}[\mathcal{I}^{-1}[x_i(t)]] \\ &= x_i(t) - x_i(t-h(t)), \quad i = \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

should be specified in the linear equation $\mathcal{E}z(t) = \mathcal{A}w(t)$. In this paper, inspired from [89], instead of the integrator \mathcal{I} , a scaling filter of dimension n_ϕ of the form

$$\begin{cases} \dot{x}_\phi(t) = A_\phi x_\phi(t) + B_\phi u(t), \\ y(t) = C_\phi x_\phi(t) + D_\phi u(t), \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

is considered. The key idea is now to apply the new operator $(\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \phi^{-1}$ to the filtered signal $y(t, x_i(t))$ (each component of the state vector $x(t)$ of system (D.1) is processed $u(t) = x_i(t)$, $i = \{1, \dots, n\}$) :

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \phi^{-1}[y(t, x_i(t))] &= (\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \phi^{-1}[\phi[x_i(t)]] \\ &= x_i(t) - x_i(t-h(t)), \quad i = \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

The dynamical system (D.9) should be designed according to the following lemma.

Lemma 3. *An integral quadratic constraint for the operator $\mathcal{F} = (\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \phi^{-1}$ is given by the following inequality $\forall x \in L_{2e}^n$ and for a positive definite matrix R ,*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n \\ \mathcal{F}\mathbb{1}_n \end{bmatrix} x, \begin{bmatrix} -R & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_n \\ \mathcal{F}\mathbb{1}_n \end{bmatrix} x \right\rangle < 0,$$

where ϕ , defined in (D.9), is a realization of any bounded rational transfert function Φ which

satisfies

$$\begin{cases} |\Phi(j\omega)| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}, & \text{if } h_{max}|\omega| > 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}, \\ |\Phi(j\omega)| > h_{max}|\omega|, & \text{if } h_{max}|\omega| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{1-d}}. \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

PROOF : In [89], it is shown that for all systems ϕ satisfying the above specifications $\|(\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \phi^{-1}\|_{L_2} \leq 1$ holds. It means that for any v , a L_2^n function,

$$\|\mathcal{F}v\|_{L_2} \leq \|v\|_{L_2}$$

$$\int_0^\infty (\mathcal{F}v(t))^T \mathcal{F}v(t) - v^T(t)v(t) dt \leq 0$$

is satisfied. Defining $v(t) = R^{1/2}x(t)$, R being a symmetric positive definite matrix, we have

$$\int_0^\infty (\mathcal{F}x(t))^T R \mathcal{F}x(t) - x^T(t)Rx(t) dt \leq 0.$$

Factorizing on both sides by $[x^T(t) \ (\mathcal{F}x(t))^T]$ and its transposed, the IQC of the lemma is recovered. \diamond

An example of $\Phi(s)$, proposed by [89], satisfying (D.10) is

$$\Phi(s) = k \frac{h_{max}^2 s^2 + ch_{max}s}{h_{max}^2 s^2 + ah_{max}s + b} \quad (\text{D.11})$$

where $k = \sqrt{8/(2-d)}$, $a = \sqrt{6.5 + 2b}$, $b = \sqrt{50}$ and $c = \sqrt{12.5}$.

The time-varying delay system (D.1) is now modeled as the interconnection of

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}_\phi(t) \\ x(t-h(t)) \\ v_1(t) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \nabla \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_\phi(t) \\ x(t) \\ \tilde{\phi}[x] \end{bmatrix}}_{z(t)} \quad (\text{D.12})$$

with

$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I}\mathbb{1}_n & & & 0 \\ & \mathcal{I}\mathbb{1}_{n_\phi n} & & \\ & & \mathcal{D}\mathbb{1}_n & \\ 0 & & & (\mathbb{1} - \mathcal{D}) \circ \phi^{-1}\mathbb{1}_n \end{bmatrix}$$

and

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n(3+n_\phi)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & A_d & 0 \\ \tilde{B}_\phi & \tilde{A}_\phi & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_\phi & \tilde{C}_\phi & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} w(t) \quad (\text{D.13})$$

where $v_1(t) = x(t) - x(t - h(t))$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\phi &= \mathbb{1}_n \otimes A_\phi, & \tilde{B}_\phi &= \mathbb{1}_n \otimes B_\phi, \\ \tilde{C}_\phi &= \mathbb{1}_n \otimes C_\phi, & \tilde{D}_\phi &= \mathbb{1}_n \otimes D_\phi, \\ \tilde{x}_\phi &= \begin{bmatrix} x_{\phi 1} \\ \vdots \\ x_{\phi n} \end{bmatrix}, & \tilde{\phi}[x] &= \begin{bmatrix} \phi[x_1] \\ \vdots \\ \phi[x_n] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

x_i are the components of the state vector x . Note that there is one filter of dimension n_ϕ associated to each x_i . At this point, referring to the quadratic separation approach, Theorem 1 may be applied.

Theorem 2. *For given positive scalars h_{\max} and d , if there exists positive definite matrices $P \in \mathbb{R}^{n(1+n_\phi) \times n(1+n_\phi)}$ and $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, then system (D.1) with a time varying delay constrained by (D.2) is asymptotically stable if the LMI condition (D.3) holds with Θ (setting $\dot{h} = d$), \mathcal{E} and A defined as (D.15) and (D.13).*

PROOF : First, condition (D.4) must be satisfied for ∇ defined as (D.12). Invoking all Lemmas previously defined and combining all inequalities related to each operator, it is readily seen that the separator (D.15) fulfills the inequality (D.4), where

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^* & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.15})$$

with

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \text{diag}(0_{n(1+n_\phi)}, -Q, -R), \\ \Theta_{12} &= \text{diag}(-P, 0_{2n}), \\ \Theta_{22} &= \text{diag}(0_{n(1+n_\phi)}, (1 - \dot{h})Q, R), \end{aligned}$$

and $P \in \mathbb{R}^{n(1+n_\phi) \times n(1+n_\phi)}$ and $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are positive definite matrices. It is readily seen that inequality (D.7) still holds for $\dot{h} = d$. Hence, regarding the separator, Θ_{22} can be chosen as $\text{diag}(0, (1 - d)Q, R)$. Then, the filter ϕ may be chosen as a realization of (D.11) defined by

$$\begin{cases} \dot{x}_{\phi i}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{h_{max}^2} & -\frac{a}{h_{max}} \end{bmatrix} x_{\phi i}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y_i(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{kb}{h_{max}^2} & \frac{kc-ka}{h_{max}} \end{bmatrix} x_{\phi i}(t) + ku(t) \end{cases},$$

where $x_{\phi i}$, $i = \{1, \dots, n\}$, represents the different states of the same filter according to the different inputs $u(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$. Considering Theorem 1 where the interconnection is given by (D.13)-(D.12), and (D.4) being proved, the LMI (D.3) forms the stability criterion. \diamond

D.3.3 Model extension

Previous works [42] and [21], [65] have shown that redundant system modeling (for linear uncertain systems and constant delay systems, respectively) may increase the relevancy of the stability analysis. The rationale behind this model extension is to provide some extra relations between the delay, its variations and the state. Using the derivative operator, an augmented state is constructed which is composed of the original state vector and its derivatives. Then de-

fining relationship between augmented states \dot{x} , \ddot{x} , the delay h and its derivative \dot{h} an enhanced stability condition is provided.

Differentiating the system (D.1), we get :

$$\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + (1 - \dot{h}(t))A_d\dot{x}(t - h(t)).$$

Consider the artificially augmented system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_dx(t - h(t)), \\ \ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + (1 - \dot{h}(t))A_d\dot{x}(t - h(t)), \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

with accordingly defined initial conditions. Introducing the augmented state

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix},$$

and specifying the relationship between the two components of $\zeta(t)$ with the equality $[0 \ \mathbb{1}]\dot{\zeta}(t) = [\mathbb{1} \ 0]\zeta(t)$, we have the new descriptor augmented system

$$E\dot{\zeta}(t) = \bar{A}\zeta(t) + \bar{A}_d\zeta(t - h(t)), \quad (\text{D.17})$$

where

$$E = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \\ 0 & \mathbb{1} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & (1 - \dot{h}(t))A_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Then, the new time-varying delay system (D.17) can be shaped as Figure D.1 with

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \tilde{x}_\phi(t) \\ \zeta(t - h(t)) \\ v_2(t) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \nabla \otimes \mathbb{1}_2 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\zeta}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_\phi(t) \\ \zeta(t) \\ \tilde{\phi}[\zeta] \end{bmatrix}}_{z(t)}, \quad (\text{D.18})$$

and

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{diag}(E, \mathbb{1}_{2n(2+n_\phi)}) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A} & 0 & \bar{A}_d & 0 \\ \tilde{B}_\phi & \tilde{A}_\phi & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_\phi & \tilde{C}_\phi & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} w(t) \quad (\text{D.19})$$

where $v_2(t) = \zeta(t) - \zeta(t - h(t))$, ∇ defined as (D.12) and redefining

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\phi &= \mathbb{1}_{2n} \otimes A_\phi, & \tilde{B}_\phi &= \mathbb{1}_{2n} \otimes B_\phi, \\ \tilde{C}_\phi &= \mathbb{1}_{2n} \otimes C_\phi, & \tilde{D}_\phi &= \mathbb{1}_{2n} \otimes D_\phi, \end{aligned}$$

$$\tilde{x}_\phi = \begin{bmatrix} x_{\phi 1} \\ \vdots \\ x_{\phi 2n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\phi}[\zeta] = \begin{bmatrix} \phi[\dot{x}_1] \\ \phi[x_1] \\ \vdots \\ \phi[\dot{x}_n] \\ \phi[x_n] \end{bmatrix}. \quad (\text{D.20})$$

Following the same line than in the previous section, we propose :

Theorem 3. *For given positive scalars h_{\max} and d , if there exists positive definite matrices $P \in \mathbb{R}^{2n(1+n_\phi) \times 2n(1+n_\phi)}$, $Q, R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ and a matrix $X \in \mathbb{R}^{2n(6+2n_\phi) \times n(7+2n_\phi)}$, then system (D.1) with a time varying delay constrained by (D.2) is asymptotically stable if the LMI condition*

$$\Theta^{[j]} + X[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}^{[j]}] + (X[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}^{[j]}])^T > 0$$

holds for $j = 1, 2$, with \mathcal{E} and \mathcal{A} defined as (D.19). Θ is of the form of (D.15) with appropriate dimension. $\Theta^{[j]}$ and $\mathcal{A}^{[j]}$ are the vertices of, respectively, Θ and \mathcal{A} setting $\dot{h}(t) = d_j$. The constraint (D.2) gives $d_1 = -d$ and $d_2 = d$.

PROOF : First, It follows the same idea that the one of Theorem 2. Hence, the stability of (D.17) will be proved if

$$[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}(\dot{h}(t))]^{\perp*} \Theta(\dot{h}(t)) [\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}(\dot{h}(t))]^{\perp} > 0$$

with \mathcal{E}, \mathcal{A} defined as (D.19) and Θ is of the form of (D.15) with appropriate dimension. Applying the Finsler's lemma, the above inequality is equivalent to

$$\Theta(\dot{h}(t)) + X[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}(\dot{h}(t))] + (X[\mathcal{E} \quad -\mathcal{A}(\dot{h}(t))])^T > 0 \quad (\text{D.21})$$

where X is a new decision variable of appropriate dimensions. Since, $\dot{h}(t)$ appears linearly and is bounded, invoking argument of convexity, it is sufficient to test (D.21) on its vertices. The inequality proposed by Theorem 3 is thus recovered. System (D.17) being stable, the whole state $\zeta(t)$ converges asymptotically to zero. Hence, its components $x(t)$ converge as well. The original system (D.1) is thus also asymptotically stable. \diamond

D.3.4 Robustness issue

Coming from robust control, quadratic separation provides a suitable framework to address the stability analysis of uncertain delay systems :

$$\dot{x}(t) = A(\Delta)x(t) + A_d(\Delta)x(t - h(t)) \quad (\text{D.22})$$

where

$$[A(\Delta) \quad A_d(\Delta)] = [A \quad A_d] + B\Delta [C \quad C_d].$$

The second term of the right hand side of the above equation describes the uncertainty characterizing system (D.22). The uncertain time-varying matrix Δ , belonging to Ω , satisfies

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \leq \mathbb{1}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \Delta \in \Omega, \quad (\text{D.23})$$

and models non-linear and neglected dynamics as well as parametric uncertainties. C , C_d and B are constant matrices of appropriate dimensions which structure the uncertainty. Then, according to the set of admissible uncertainties and (D.23), we have to find a separator U such that

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \Delta \end{bmatrix} x, \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2^* & U_3 \end{bmatrix}}_U \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \Delta \end{bmatrix} x \right\rangle < 0, \quad \forall \Delta \in \Omega. \quad (\text{D.24})$$

For instance, assume Ω is a set of diagonal real valued matrices with bounded uncertainties :

$$\Omega = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_N) \mid |\delta_i| \leq \bar{\delta}_i \},$$

Then, inequality (D.24) holds with

$$U = \left[\begin{array}{cc|cc} -\bar{\delta}_1^2 u_1 & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & -\bar{\delta}_N^2 u_N & \\ \hline & 0 & u_1 & 0 \\ & 0 & & \ddots \\ & & 0 & u_N \end{array} \right]$$

where u_i , $i = \{1, \dots, N\}$ are scalar decision variables. Eventually, we propose to analyze the robust stability of system (D.22) with the following Theorem.

Theorem 4. *For given positive scalars h_{\max} and d , if there exists positive definite matrices $P \in \mathbb{R}^{n(1+n_\phi) \times n(1+n_\phi)}$, Q , $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and matrices U_k ($k = 1, 2, 3$) designed according to the uncertain set Ω (i.e. such that (D.24) holds), then system (D.22) with a time varying delay constrained by (D.2) is robustly asymptotically stable for any uncertainty $\Delta \in \Omega$ if the LMI condition (D.3) holds with Θ , \mathcal{E} and \mathcal{A} defined as (D.26) and (D.25).*

PROOF : First, introducing the exogenous signals

$$w_\Delta = \Delta z_\Delta, \quad \text{with } z_\Delta = Cx(t) + C_d x(t - h(t)),$$

we rewrite system (D.22) as the interconnection of

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}_\phi(t) \\ x(t - h(t)) \\ v_1(t) \\ w_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \nabla \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_\phi(t) \\ x(t) \\ \tilde{\phi}[x] \\ z_\Delta(t) \end{bmatrix}}_{z(t)}$$

with

$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathcal{I}\mathbb{1}_n & & & & 0 \\ & \mathcal{I}\mathbb{1}_{n_\phi n} & & & \\ & & \mathcal{D}\mathbb{1}_n & & \\ & & & \mathcal{F}\mathbb{1}_n & \\ 0 & & & & \Delta \end{bmatrix}$$

and

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_{n(3+n_\phi)+n_\Delta} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\varepsilon} z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & A_d & 0 & B \\ \tilde{B}_\phi & \tilde{A}_\phi & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{D}_\phi & \tilde{C}_\phi & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & C_d & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & -\mathbb{1} & -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} w(t) \quad (\text{D.25})$$

with notations of (D.14). Combining every IQC related to each operators defined by lemmas and the struture of the uncertainty leading to (D.24), a separator of the form

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^* & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.26})$$

with

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \text{diag}(0_{n(1+n_\phi)}, -Q, -R, U_1), \\ \Theta_{12} &= \text{diag}(-P, 0_{2n}, U_2), \\ \Theta_{22} &= \text{diag}(0_{n(1+n_\phi)}, (1-d)Q, R, U_3), \end{aligned}$$

fulfills the requirement (D.4). Finally, condition (D.3) provides the robust (with respect to the uncertain set Ω) stability criterion. \diamond

Remark 1. *It is worthy to note that the same methodology may be applied to Theorem 3 which considers an augmented modeling. However, since the time-derivative of the system is taken into account, the method developed through out the Section D.3.4 combined with the one exposed in Section D.3.3 can only deals with constant uncertainties. If uncertainties are time-varying, additional informations on their derivative and more system-specific calculus are required.*

Remark 2. *Note that some relevant uncertainty characterizations are provided in [82] according to the case of the former quadratic separation result. Indeed, several inequalities have been developed to deal with different classes of uncertainties.*

D.4 NUMERICAL EXAMPLES

D.4.1 Example 1

Consider the following system,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t-h(t)). \quad (\text{D.27})$$

For various d , the maximal allowable delay, h_{max} , is computed. To demonstrate the effectiveness of our criterion, results are compared against those obtained in the literature (see Table

TAB. D.1: The maximal allowable delays h_m for system (D.27)

d	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1
Fridman et al (2002) [55]	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	0.999
Fridman et al (2006) [58]	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632
Wu et al (2004) [160]	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364	-
He et al (2007) [71]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492	1.345
He et al (2007) [72]	4.472	3.605	3.039	2.043	1.492	1.345
Ariba et al (2007) [5]	5.120	4.081	3.448	2.528	2.152	1.991
Kao et al (2007) [89]	6.117	4.714	3.807	2.280	1.608	1.360
Theorem 2	6.117	4.714	3.807	2.280	1.608	1.360
Theorem 3	6.117	4.794	3.995	2.682	1.957	1.602

D.1). On this example, compared to Lyapunov technics, robust approaches [89], Theorem 2 and 3 reduce drastically the conservatism, especially when d is close to zero *i.e.* when the delay is slowly time varying. Modeling delay systems as feedback systems having uncertain operators, the conservatism of the analysis may be observed and thus improved providing suitable bounds. Although the Lyapunov method can provides interesting results, the relevancy of the approach is not so clear and rather required insight. Using the same scaling filter for bounding operators Theorem 2 recovers the results of [89], whereas Theorem 3, taking into account the derivative equation, reduces the conservatism. Indeed, the stability analysis is further improved thanks to an appropriate modeling of time-varying delay systems which brings additional informations on the system.

D.4.2 Example 2

Consider now the following time-varying and uncertain system, extracted from [92],

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} -2 + \delta_1 \cos(t) & 0 \\ 0 & -1 + \delta_2 \sin(t) \end{bmatrix} x(t) \\ & + \begin{bmatrix} -1 + \gamma_1 \cos(t) & 0 \\ -1 & -1 + \gamma_2 \sin(t) \end{bmatrix} x(t - h(t)). \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

The δ_i and γ_i are uncertain but bounded parameters :

$$|\delta_1| \leq 1.6, \quad |\delta_2| \leq 0.05, \quad |\gamma_1| \leq 0.1, \quad |\gamma_2| \leq 0.3.$$

This example can be expressed as system (D.22) with

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B &= \mathbf{1}_2, \quad C = \text{diag}(1.6, 0.05), \quad C_d = \text{diag}(0.1, 0.3). \end{aligned}$$

Results are summarized in Table D.2. It shows that Theorem 4 enables to find higher maximal bounds on the delay $h(t)$ than others results from the literature. The quadratic separation offers thus a suitable framework to address uncertainties. In that case, the conservatism is also related

TAB. D.2: The maximal allowable delays h_m for system (D.28)

d	0	0.1	0.5	0.8
[92]	0.241	0.234	0.188	0.110
[160]	1.149	1.106	0.924	0.760
[89]	1.416	1.302	0.974	0.829
Theorem 4	1.515	1.422	1.105	0.910

to the manner to handle uncertainties (as the design of (D.24)).

D.5 CONCLUSIONS

In this paper, the problem of the delay dependent stability analysis of a time-varying delay systems has been studied by means of quadratic separation. The delay part is embedded into an uncertain matrix of operators. Inspired from [12] and [89], tight bounds of the L_2 induced norms of operators allow to reduce the conservatism of the approach. Then using an augmented state, new modelling of time delay systems are introduced which emphasizes the relation between \dot{h} and signals \dot{x} and \ddot{x} . The resulting criteria are then expressed in terms of a convex optimization problem with LMI constraints, allowing the use of efficient solvers. Finally, two numerical examples show that these methods reduced conservatism and improved the maximal allowable delay.

Bibliographie

- [1] Packet sniffer : tcpdump/libpcap. <http://www.tcpdump.org/>.
- [2] D. Agrawal and F. Granelli. Redesigning an active queue management system. In *IEEE Globecom*, volume 2, pages 702–706, December 2004.
- [3] M. Allman, V. Paxson, and W. Stevens. TCP congestion control. RFC 2581, April 1999. URL : <http://www.ietf.org/rfc.html>.
- [4] E. Altman and T. Jiménez. NS simulator for beginners. Lecture notes, December 2003. URL : <http://www-sop.inria.fr/maestro/personnel/Eitan.Altman/COURS-NS>.
- [5] Y. Ariba and F. Gouaisbaut. Delay-dependent stability analysis of linear systems with time-varying delay. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2053–2058, New Orleans, USA, December 2007.
- [6] Y. Ariba and F. Gouaisbaut. Construction of lyapunov-krasovskii functional for time-varying delay systems. In *the 47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'08)*, pages 3995–4000, Cancun, Mexico, Dec. 2008.
- [7] Y. Ariba and F. Gouaisbaut. An augmented model for robust stability analysis of time-varying delay systems. *Int. J. Control*, 82 :1616–1626, September 2009.
- [8] Y. Ariba and F. Gouaisbaut. Input-output framework for robust stability of time-varying delay systems. In *the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'09)*, Shangai, China, December 2009.
- [9] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, and Y. Labit. Controle de congestion d'un routeur par retour d'état. In *Conference Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'08)*, July 2008.
- [10] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, and Y. Labit. Feedback control for router management and TCP/IP network stability. *to appear in the IEEE Transactions on Network and Service Management*, December 2009.
- [11] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, and Y. Labit. Multiple time-delays system modeling and control for router management. In *European Control Conference*, Budapest, Hungary, August 2009.
- [12] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, and D. Peaucelle. Stability analysis of time-varying delay systems in quadratic separation framework. In *The International conference on mathematical problems in engineering , aerospace and sciences (ICNPAA'08)*, Gene, Italie, June 2008. URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00357766/fr/>.
- [13] Y. Ariba, F. Gouaisbaut, S. Rahme, and Y. Labit. Robust control tools for traffic monitoring in TCP networks. In *IEEE Conference on Control Application (MSC-CCA'09)*, Saint Petersburg, Russia, July 2009.
- [14] Y. Ariba, Y. Labit, and F. Gouaisbaut. Design and performance evaluation of a state-space based aqm. In *IARIA International Conference on Communication Theory, Reliability, and Quality of Service*, pages 89–94, Bucharest, Romania, July 2008.

- [15] Y. Ariba, Y. Labit, and F. Gouaisbaut. Network anomaly estimation for TCP/AQM networks using an observer. In *3th ACM International Workshop on Feedback Control Implementation and Design in Computing Systems and Networks (FeBID'08)*, pages 45–50, Annapolis, USA, June 2008.
- [16] Y. Ariba, Y. Labit, and F. Gouaisbaut. Congestion control of a single router with an active queue management. *International Journal on Advances in Internet Technology*, 2(1), 2009.
- [17] D. Arzelier. Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation. HDR Thesis, 2004. LAAS-CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- [18] S. Athuraliya, D. Lapsley, and S. Low. An enhanced random early marking algorithm for internet flow control. In *IEEE INFOCOM*, pages 1425–1434, December 2000.
- [19] P. Barford and D. Plonka. Characteristics of network traffic flow anomalies. In *In Proceedings of the ACM SIGCOMM Internet Measurement Workshop*, pages 69–73, November 2001.
- [20] P. Berthou. Architecture de communication multimédia et multi-réseaux. PhD Thesis, 2001. Institut National Polytechnique, Toulouse, France.
- [21] P.-A. Bliman. Lyapunov equation for the stability of linear delay systems of retarded and neutral type. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 47 :327–335, February 2002.
- [22] T. Bonald, M. May, and J.-C. Bolot. Analytic evaluation of red performance. In *IEEE INFOCOM*, volume 3, pages 1415–1424, March 2000.
- [23] J. Border, M. Kojo, J. Griner, G. Montenegro, and Z. Shelby. Performance enhancing proxies intended to mitigate link-related degradations. RFC 3135, June 2001. URL : <http://www.ietf.org/rfc.html>.
- [24] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, USA, 1994. in Studies in Applied Mathematics, vol.15.
- [25] B. Braden, D. Clark, and J. Crowcroft. Recommendations on queue management and congestion avoidance in the internet. RFC 2309, April 1998.
- [26] L. S. Brakmo and L. L. Peterson. TCP vegas : end to end congestion avoidance on a global internet. *IEEE Journal on selected Areas in communications*, 13 :1465–1480, 1995.
- [27] D. Breda, S. Maset, and R. Vermiglio. Tool for robust analysis and characteristic equation of delay differential equations. URL : <http://users.dimi.uniud.it/~dimitri.breda/traceDDE.html>. Software `trace-DDE`.
- [28] D. Breda, S. Maset, and R. Vermiglio. Pseudospectral differencing methods for characteristic roots of delay differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(2) :482–495, 2005.
- [29] C. Briat. Commande et observation robuste des systèmes LPV retardés. PhD Thesis, 2008. Institut National Polytechnique, Grenoble, France.
- [30] C. Briat, O. Sename, and J. F. Lafay. Full order LPV/ \mathcal{H}_∞ observers for LPV time-delay systems. In *3rd IFAC Symposium on System Structure and Control 2007, Foz do Iguacu, Brazil*, 2007.
- [31] C. Briat, O. Sename, and J. F. Lafay. Delay-scheduled state-feedback design for time-delay systems with time-varying delays - a lpv approach. *Systems & Control Letters*, 58(9) :664–671, 2009.

- [32] C. Briat, O. Sename, and J. F. Lafay. \mathcal{H}_∞ delay-scheduled control of linear systems with time-varying delays. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 42(8) :2255–2260, 2009.
- [33] L.G. Bushnell. Networks and control. *IEEE Control Systems Magazine*, 21, February 2001.
- [34] Software Engineering Institute CERT. Denial of service attacks. http://www.cert.org/tech_tips/denial_of_service.html.
- [35] T. Charalambous and Y. Ariba. On the stability of a power control algorithm for wireless networks in the presence of time-varying delays. In *European Control Conference*, Budapest, Hungary, August 2009.
- [36] C.K. Chen, Y.C. Hung, T.L. Liao, and J.J. Yan. Design of robust active queue management controllers for a class of TCP communication networks. *Information Sciences.*, 177(19) :4059–4071, 2007.
- [37] M. Christiansen, K. Jeffay, D. Ott, and F. Smith. Tuning red for web traffic. In *ACM/SIGCOM*, pages 139–150, 2000.
- [38] J. Cleary, S. Donnely, I. Graham, A. McGregor, and M. Pearson. Design principles for accurate passive measurement. In *PAM (Passive and Active Measurements) Workshop*, pages 1–7, 2000.
- [39] G. Combs. Wireshark : a network protocol analyzer. <http://www.wireshark.org/>.
- [40] Jon Crowcroft and Iain Phillips. *TCP/IP and Linux protocol implementation : systems code for the Linux Internet*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 2002.
- [41] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback systems : input-output properties*. Academic Press, New York, USA, 1975.
- [42] Y. Ebihara, D. Peaucelle, D. Arzelier, and T. Hagiwara. Robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems by taking higher-order time-derivatives of the states. In *44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*, Seville, Spain, December 2005.
- [43] K. Fall. Network emulation in the vint/ns simulator. In *Computers and Communications, 1999. Proceedings. IEEE International Symposium on*, pages 244–250, 1999.
- [44] K. Fall and K. Varadhan. The ns manual. notes and documentation on the software ns2-simulator, 2002. URL : www.isi.edu/nsnam/ns/.
- [45] Y. Fan, F Ren, and C. Lin. Design a pid controller for active queue management. In *IEEE International Symposium on Computers and Communication (ISCC)*, volume 2, pages 985–990, 2003.
- [46] A. Fattouh. Observation et commande numérique robustes des systèmes à retards. PhD Thesis, 2000. Institut National Polytechnique, Grenoble, France.
- [47] W.-C. Feng, D. D. Kandlur, D. Saha, and K. G. Shin. A self-configuring red gateway. In *IEEE INFOCOM'99*, volume 3, pages 1320–1328, March 1999.
- [48] W.-C. Feng, K. G. Shin, D. D. Kandlur, and D. Saha. The blue active queue management algorithms. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 10(4) :513–528, 2002.
- [49] Y. A. Fiagbedzi and A. E Pearson. A multistage reduction technique for feedback stabilizing distributed time-lag systems,. *Automatica*, 23(3) :311–326, 1987.
- [50] M. Fliess, C. Join, and H. Mounier. *An introduction to nonlinear fault diagnosis with an application to a congested internet router*, chapter 16, pages 327–343. Advances in communication control networks. Springer, 2005. edited by S. Tarbouriech, C. T. Abdallah and J. Chiasson.

- [51] S. Floyd. TCP and explicit congestion notification. *ACM Computer Communication Review*, 24 :10–23, 1994.
- [52] S. Floyd and V. Jacobson. Random early detection gateways for congestion avoidance. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1 :397–413, August 1993.
- [53] E. Fridman. A lyapunov-based approach to stability of descriptor systems with delay. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2850–2855, December 2001.
- [54] E. Fridman and U Shaked. A descriptor system approach to \mathcal{H}_∞ control of linear time-delay systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 47 :253–270, February 2002.
- [55] E. Fridman and U. Shaked. An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 47 :1931–1937, November 2002.
- [56] E. Fridman and U. Shaked. Parameter dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 48(5) :861–866, May 2003.
- [57] E. Fridman and U. Shaked. Stability and l_2 -gain analysis of systems with time-varying delays : input-output approach. In *44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*, Seville, Spain, December 2005.
- [58] E. Fridman and U Shaked. Input-output approach to stability and l_2 -gain analysis of systems with time-varying delays. *Systems & Control Letters*, 55 :1041–1053, September 2006.
- [59] E. Fridman, U. Shaked, and K. Liu. A convex optimization approach to stability of systems with uncertain delays. In *6th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'09)*, Haifa, Israel, June 2009.
- [60] H. Gorecki, S. Fuksa, P. Grabowski, and A. Korytowski. *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. John Wiley & Sons, 1989.
- [61] F. Gouaisbaut and Y. Ariba. Delay range stability of distributed time delay systems. In *The 6th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'09)*, Haifa, Israel, June 2009.
- [62] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle. Delay-dependent robust stability of time delay systems. In *5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'06)*, Toulouse, France, July 2006.
- [63] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle. Delay-dependent stability analysis of linear time delay systems. In *IFAC Workshop on Time Delay System (TDS'06)*, Aquila, Italy, July 2006.
- [64] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle. A note on stability of time delay systems. In *5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'06)*, Toulouse, France, July 2006.
- [65] F. Gouaisbaut and D. Peaucelle. Robust stability of time-delay systems with interval delays. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, December 2007.
- [66] K. Gu. Discretized lmi set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems. *International Journal of Control*, 68 :923–934, November 1997.
- [67] K. Gu. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2805–2810, December 2000.
- [68] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser Boston, 2003. Control engineering.

- [69] J. K. Hale and S. M. Verduyn-Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, 1993.
- [70] H. Han, C. V. Hollot, Y. Chait, and V. Misra. TCP networks stabilized by buffer-based aqms. In *IEEE INFOCOM*, pages 964–974, March 2004.
- [71] Y. He, Q. G. Wang, C. Lin, and M. Wu. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay. *Automatica*, 43 :371–376, 2007.
- [72] Y. He, Q. G. Wang, L. Xie, and C. Lin. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 52 :293–299, February 2007.
- [73] Yong He, Min Wu, Jin-Hua She, and Guo-Ping Liu. Parameter-dependent lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(5) :828–832, May 2004.
- [74] C. V. Hollot and Y. Chait. Nonlinear stability analysis for a class of TCP/AQM networks. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2309–2314, December 2001.
- [75] C. V. Hollot, V. Misra, D Towsley, and W. Gong. A control theoretic analysis of red. In *IEEE INFOCOM*, pages 1510–1519, April 2001.
- [76] C. V. Hollot, V. Misra, D Towsley, and W. Gong. On designing improved controllers for aqm routers supporting TCP flows. In *IEEE INFOCOM*, volume 3, pages 1726–1734, April 2001.
- [77] C. V. Hollot, V. Misra, D Towsley, and W. Gong. Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 47 :945–959, June 2002.
- [78] Y.-P. Huang and K. Zhou. Robust stability of uncertain time-delay systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 45 :2169–2173, November 2000.
- [79] A. Hussain, J. Heidemann, and C. Papadopoulos. A framework for classifying denial of service attacks. In *SIGCOMM*, In Karlsruhe, Germany, Aug 2003.
- [80] IETF. The internet engineering task force. URL : <http://www.ietf.org/>. Open international community of network designers, operators, vendors, and researchers.
- [81] E. F. Infante and W. V. Castelan. A lyapunov functional for a matrix difference-differential equation. *J. Diff. Equations*, 29 :439–451, 1978.
- [82] T. Iwasaki and S. Hara. Well-posedness of feedback systems : insights into exact robustness-analysis and approximate computations. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 43 :619–630, May 1998.
- [83] V. Jacobson. Congestion avoidance and control. In *ACM SIGCOMM*, pages 314–329, Stanford, CA, August 1988.
- [84] V. Jacobson. Modified, TCP congestion avoidance algorithm,. end2end-interest mailing list, April 1990.
- [85] R. Jain. Congestion control and traffic management in atm networks : Recent advances and a survey. *Computer Networks and ISDN Systems*, 28 :1723–1738, 1996.
- [86] R. Jain, D. Chiu, and W. Hawe. A quantitative measure of fairness and discrimination for resource allocation in shared computer systems. Technical Report TR301, Digital Equipment Corp, 1984.

- [87] U. Jönsson. Lecture notes on integral quadratic constraints. Technical report, the Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden, 2000. URL : <http://www.math.kth.se/uj/5B5744/5B5744.html>.
- [88] C. Y. Kao and A. Rantzer. Robust stability analysis of linear systems with time-varying delays. In *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [89] C. Y. Kao and A. Rantzer. Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays. *Automatica*, 43(6) :959 – 970, 2007.
- [90] F. P. Kelly, A. Maulloo, and D. Tan. Rate control for communication networks : shadow prices, proportional fairness and stability. *Journal of the Operational Research Society*, 49 :237–252, March 1998.
- [91] V. L. Kharitonov and A. P. Zhabko. Lyapunov-krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39(1) :15 – 20, 2003.
- [92] J. H. Kim. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 46(5) :789–792, May 2001.
- [93] K. B. Kim. Design of feedback controls supporting TCP based on the state space approach. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 51 (7), July 2006.
- [94] Seong Soo Kim and A. L. Narasimha Reddy. Netviewer : a network traffic visualization and analysis tool. In *LISA'05 : Proceedings of the 19th conference on Large Installation System Administration Conference*, pages 185–196. USENIX Association, 2005.
- [95] M. Kocvara and M. Stingl. bilinear matrix inequalities : Penbmi. PENOPT GbR, <http://www.penopt.com/>.
- [96] V. B. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999.
- [97] V. B. Kolmanovskii and J. P. Richard. Stability of some linear systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :984–989, May 1999.
- [98] N. N. Krasovskii. *Stability of motion*. Stanford University Press, 1963.
- [99] S. Kunniyur and R. Srikant. Analysis and design of an adaptive virtual queue (AVQ) algorithm for active queue management. In *ACM SIGCOMM*, pages 123–134, San Diego, CA, USA, aug 2001.
- [100] A. Kuzmanovic and E. W. Knightly. Low-rate TCP-targeted denial of service attacks : the shrew vs. the mice and elephants. In *SIGCOMM '03 : Proceedings of the 2003 conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communications*, pages 75–86, 2003.
- [101] Y. Labit, Y. Ariba, and F. Gouaisbaut. Design of lyapunov based controllers as TCP AQM. pages 45–50, Munich, Germany, May 2007.
- [102] Y. Labit, Y. Ariba, and F. Gouaisbaut. On designing lyapunov-krasovskii based aqm for routers supporting TCP flows. pages 3818–3823, New Orleans, USA, Dec. 2007.
- [103] A. Lakhina, M. Crovella, and C. Diot. Diagnosing network-wide traffic anomalies. In *ACM SIGCOMM, Portland*, 2004.
- [104] L. Le, J. Aikat, K. Jeffay, and F. Donelson Smith. The effects of active queue management on web performance. In *ACM SIGCOMM*, pages 265–276, August 2003.
- [105] X. Li and C. E. de Souza. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay. *Automatica*, 33 :1657–1662, September 1997.

- [106] X. Li and C. E. De Souza. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : A linear matrix inequality approach. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 42 :1144–1148, August 1997.
- [107] X. Li and C.E. de Souza. Lmi approach to delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems. *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 4 :3614–3619, Dec 1995.
- [108] The Linux Foundation. Netem : network emulation. <http://www.linuxfoundation.org/en/Net> :Netem.
- [109] J. Löfberg. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [110] H. S. Low, F. Paganini, and J.C. Doyle. Internet congestion control. *IEEE Control Systems Magazine*, 22 :28–43, Feb 2002.
- [111] S.H. Low and D.E. Lapsley. Optimization flow control. i. basic algorithm and convergence. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 7(6) :861–874, December 1999.
- [112] M. Luglio, M.Y. Sanadidi, M. Gerla, and J. Stepanek. On-board satellite “split TCP” proxy. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 22(2) :362–370, Feb. 2004.
- [113] X. Luo and R. Chang. On a new class of pulsing denial-of-service attacks and the defense. In *Proceedings of the Network and Distributed System Security Symposium*, pages 97–104, February 2005.
- [114] X. Luo, R. Chang, and E. Chan. Performance analysis of TCP/AQM under denial-of-service attacks. In *The 13th IEEE International Symposium on Modeling, Analysis, and Simulation of Computer and Telecommunication Systems*, pages 97–104, 2005.
- [115] I. Maki, G. Hasegawa, M. Murata, and T. Murase. Performance analysis and improvement of TCP proxy mechanism in TCP overlay networks. In *IEEE International Conference on Communications, ICC’05*, volume 1, pages 184–190, May 2005.
- [116] S. Manfredi, M. di Bernardo, and F. Garofalo. Robust output feedback active queue management control in TCP networks. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1004–1009, December 2004.
- [117] Mathworks. MATLAB - the language of technical computing. <http://www.mathworks.fr/products/matlab/>.
- [118] M. May, C. Diot, B. Lyles, and J. Bolot. Influence of active queue parameters on aggregate traffic performance. Technical Report 3995, INRIA, Sophia Antipolis, France, 2000.
- [119] A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 42(6) :819–830, June 1997.
- [120] D. Melchor-Aguilar and S. I. Niculescu. Remarks on nonlinear stability analysis for a class of TCP/AQM networks. In *4th IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS’03)*, September 2003.
- [121] W. Michiels and S. I. Niculescu. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems, An Eigenvalue-Based Approach*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2007.
- [122] V. Misra, W. Gong, and D. Towsley. Stochastic differential equation modeling and analysis of TCP window size behavior. Technical Report ECE-TR-CCS-99-10-01, University of Massachusetts, October 1999.

- [123] V. Misra, W. Gong, and D Towsley. Fluid-based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED. In *ACM SIGCOMM*, pages 151–160, August 2000.
- [124] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon, and Y. S. Lee. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *Int. J. Control*, 74(14) :1447–1455, 2001.
- [125] C.-I. Morarescu, S.-I. Niculescu, and Gu K. Stability crossing curves of shifted gamma-distributed delay systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 6(2) :475–793, 2007.
- [126] S.I. Niculescu. *Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
- [127] NLANR/DAST. Iperf. URL : <http://iperf.sourceforge.net/>.
- [128] N. Olgac and R. Sipahi. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (lti) systems. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 47(5) :793–797, 2002.
- [129] T. J. Ott, T. V. Lakshman, and L. H. Wong. SRED : stabilized RED. In *IEEE INFOCOM'99*, pages 1345–1355, March 1999.
- [130] P. Owezarski. Contribution de la métrologie internet à l'ingénierie des réseaux. HDR Thesis, 2006. LAAS-CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- [131] Philippe Owezarski, Pascal Berthou, Yann Labit, and David Gauchard. LaasNetExp : a generic polymorphic platform for network emulation and experiments. In *TridentCom '08 : Proceedings of the 4th International Conference on Testbeds and research infrastructures for the development of networks & communities*, pages 1–9, ICST, Brussels, Belgium, Belgium, 2008. ICST (Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering).
- [132] P. Park. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 44(4) :876–877, Apr 1999.
- [133] D. Peaucelle. Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de lyapunov dépendant des paramètres. PhD Thesis, 2000. Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- [134] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust d-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30, May 2000.
- [135] D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion, and F. Gouaisbaut. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation. *Automatica*, 43(5) :795–804, 2007.
- [136] J. Postel. Transmission control protocol - DARPA internet program protocol specification. RFC 793, September 1981.
- [137] R. Prasad, C. Dovrolis, M. Murray, and K. Claffy. Bandwidth estimation : metrics, measurement techniques, and tools. *IEEE Network Magazine*, 17(6) :27–35, Nov.-Dec. 2003.
- [138] P. F. Quet and H. Özbay. On the design of aqm supporting TCP flows using robust control theory. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 49 :1031–1036, June 2004.
- [139] K. K. Ramakrishnan and S. Floyd. A proposal to add explicit congestion notification (ECN) to IP. RFC 2481, January 1999. URL : <http://www.ietf.org/rfc.html>.
- [140] B. S. Razumikhin. On the stability of systems with a delay. *Prikl. Mat. Meh.*, 20 :500–512, 1956. en russe.

- [141] Y. M. Repin. Quadratic lyapunov functionals for systems with delay. *Prikl. Mat. Meh.*, 29 :564–566, 1965. en russe.
- [142] J.-P. Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667–1694, October 2003.
- [143] S. Ryu, C. Rump, and C. Qiao. Advances in active queue management (AQM) based TCP congestion control. *Telecommunication Systems*, 4 :317–351, 2004.
- [144] M. G. Safonov. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. MIT Press, 1980. Series in Signal Processing, Optimization, and Control.
- [145] M. G. Safonov and M. Athans. On stability theory. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 17, pages 301–314, January 1978.
- [146] O. Sename. Sur la commandabilité et le découplage des systèmes linéaires à retards. PhD Thesis, 1994. Ecole Centrale de Nantes, Nantes, France.
- [147] O. Sename. New trends in design of observers for time delay systems. *Kybernetika*, 37(4) :427–458, 2001.
- [148] A. Seuret. Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications. PhD Thesis, 2006. Ecole Centrale de Lille, Lille, France.
- [149] S. N. Shimanov. On the stability in the critical case of a zero root for systems with time lag. *J. Appl. Math. Mech.*, 24 :653–668, 1960.
- [150] R. Skelton, T. Iwazaki, and K. Grigoriadis. *A unified algebraic approach to linear control design*. Taylor and Francis series in systems and control, 1998.
- [151] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control, analysis and design*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 2005.
- [152] R. Srikant. *The Mathematics of Internet Congestion Control*. Birkhauser, 2004.
- [153] W. R. Stevens. *TCP/IP règles et protocoles*. Addison-Wesley France, Paris, France, 1995. Titre original : TCP/IP Illustrated : the protocols, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [154] J.F. Sturm. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. Optimization Methods and Software 625-653, Special issue on Interior Point Methods, 1999. <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- [155] D. Supratim and R. Srikant. Rate-based versus queue-based models of congestion control. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 51 :606–619, April 2006.
- [156] A. Tanenbaum. *Computer networks*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1989.
- [157] S. Tarbouriech, C. T. Abdallah, and J. Chiasson. *Advances in communication Control Networks*. Springer, 2005.
- [158] D. Wang and C. V. Hollot. Robust analysis and design of controllers for a single TCP flow. In *IEEE International Conference on Communication Technology (ICCT)*, volume 1, pages 276–280, April 2003.
- [159] E. Witrant, D. Georges, C. Canudas de Wit, and O. Sename. Stabilisation of network controlled system with a predictive approach. In *1st Workshop on Networked Control System and Fault Tolerant Control*, October 2005.
- [160] M. Wu, Y. He, J. H. She, and G. P. Liu. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 40 :1435–1439, 2004.

-
- [161] S. Xu and J. Lam. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems. *International Journal of Systems Science*, 39(12) :1095–1113, December 2008.
- [162] K. Yamanegi, T. Hama, G. Hasegawa, M. Murata, H. Shimonishi, and T. Murase. Implementation experiments of the TCP proxy mechanism. In *APSITT'05 Proceedings of the 6th Asia-Pacific Symposium on Information and Telecommunication Technologies*, pages 17–22, Nov. 2005.
- [163] N. Yeganefar. Définition et analyse de stabilités pour les systèmes à retard non linéaires. PhD Thesis, 2006. Ecole Centrale de Lille, Lille, France.
- [164] J Zhang, C.R. Knopse, and P. Tsiotras. Stability of time-delay systems : equivalence between lyapunov and scaled small-gain conditions. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 46(3) :482–486, March 2001.
- [165] J. Zhang, C.R. Knospe, and P. Tsiotras. A unified approach to time-delay system stability via scaled small gain. *Proceedings of the American Control Conference*, 1 :307–308, June 1999.
- [166] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps :
théorie et application
au contrôle de congestion d'un routeur

Résumé :

Cette thèse s'inscrit dans une thématique pluridisciplinaire explorant les liens existants entre la théorie de la commande et les réseaux informatiques. L'idée consiste à appliquer les outils de l'Automatique pour la stabilisation du trafic dans les réseaux de communication. Ainsi, ce mémoire s'organise naturellement suivant deux axes de recherche principaux : la construction de conditions de stabilité pour les systèmes à retards variant dans le temps et le contrôle de congestion dans les réseaux IP (Internet Protocol).

Premièrement, nous nous sommes intéressés à l'analyse de stabilité des systèmes à retards variables au travers de deux approches temporelles. D'une part, nous avons considéré la très populaire méthode de Lyapunov-Krasovskii dans laquelle nous avons élaboré de nouvelles fonctionnelles en adéquation avec de nouvelles modélisations du système. Pour cela, nous avons procédé à des augmentations de modèle par une méthode de segmentation du retard et par la prise en compte de la dérivée temporelle du système. D'autre part, la stabilité a également été abordée avec une approche entrée-sortie, empruntant alors les outils de l'analyse robuste. Plus précisément, le système à retard est réécrit comme l'interconnexion d'une application linéaire avec une matrice incertaine constituée des opérateurs définissant le système original (intégration, retard). Après avoir revisité le principe de séparation quadratique, nous développons des opérateurs auxiliaires afin de caractériser au mieux la dynamique retardée et proposer des critères moins pessimistes. Dans les deux approches, l'objectif est de prendre en compte un maximum d'informations sur le système afin de fournir des conditions de stabilité moins conservatives. Toutes les conditions obtenues sont formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires.

Deuxièmement, la méthodologie développée est ensuite utilisée pour le problème de contrôle de congestion d'un routeur lors de communications TCP (Transmission Control Protocol). Ce protocole de bout en bout est sensible à la perte de paquet et modifie en conséquence son taux d'émission selon l'algorithme du AIMD (Additive-Increase Multiplicative-Decrease). Il s'agit alors de commander le taux de perte par l'intermédiaire d'un mécanisme d'Active Queue Management (AQM) situé au niveau du routeur pour réguler le trafic. Un tel dispositif joue donc le rôle d'un correcteur qui stabilise le trafic TCP et le phénomène de congestion du routeur en dépit des retards de transmission induits par le réseau. Les résultats théoriques sont ensuite évalués à l'aide de simulations non linéaires sur Matlab, puis sur le simulateur de réseaux NS-2.

Mots clés :

Automatique, systèmes à retards, Lyapunov, séparation quadratique, LMI.
Réseaux de communication, TCP, contrôle de congestion, active queue management.

On the stability of time-varying delay systems :
theory and application
to congestion control of a router

Abstract :

This thesis investigates the existing links between the control theory and the communication networks supporting the well-known communication protocol TCP (Transmission Control Protocol). The key idea consists in using the tools from control theory for the network traffic stabilization. Hence, this manuscript has naturally been turned towards two research lines : the design of stability and stabilization conditions for delay systems and the congestion control issue in IP network (Internet Protocol).

First, we have addressed the stability analysis of time-varying delay systems via two temporal approaches. On one hand, we consider the well-known Lyapunov-Krasovskii method in which new functionals are built according to original modelings of the system. To this end, we proceed to a model augmentation through delay fractionning or with the use of the system derivative. On the other hand, the stability is also assessed with an input-output approach, borrowing then tools from the robust control framework. More precisely, the time delay system is rewritten as the interconnection of a linear application with a uncertain matrix consisting in a set of operators that defines the former system. Thus, having revisited the quadratic separation principle, additional auxiliary operators are proposed in order to provide an enhanced modeling of the delayed dynamic of the system. In both cases, we aim at taking into account relevant informations on the system to reduce the conservatism of the stability analysis. All the stability criteria are expressed as linear matrix inequality conditions.

In a second part, the developed methodology is used to cope with the congestion phenomenon in a router supporting TCP communications. This end-to-end protocol is sensitive to packet losses and adjusts thereof its sending rate with respect to the AIMD (Additive-Increase Multiplicative-Decrease) algorithm. Based on the Active Queue Management (AQM) principle, we design a controller embedded into the router that monitors the packet losses. A such mechanism allows to stabilize the network traffic and to control the congestion phenomenon in spite of the delays induced by the network. All theoretical results are tested through nonlinear simulations in Matlab as well as some experiments under the network simulator NS-2.

Keywords :

Automatic control, time-varying delay systems, Lyapunov, quadratic separation.
Network, TCP, congestion congestion, active queue management.

