



**HAL**  
open science

# Couplages fluide / milieu poreux en grandes déformations pour la modélisation des procédés d'élaboration par infusion

Pierre Celle

► **To cite this version:**

Pierre Celle. Couplages fluide / milieu poreux en grandes déformations pour la modélisation des procédés d'élaboration par infusion. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2006. Français. NNT : . tel-00741260

**HAL Id: tel-00741260**

**<https://theses.hal.science/tel-00741260v1>**

Submitted on 12 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 422 MI

# THÈSE

présentée par

Pierre CELLE

Ingénieur diplômé de l'École Nationale d'Ingénieurs de Saint-Étienne

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

Spécialité : Mécanique et Ingénierie

## Couplages fluide / milieu poreux en grandes déformations pour la modélisation des procédés d'élaboration par infusion

présentée et soutenue publiquement à Saint-Étienne le 08 décembre 2006

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Jean-Baptiste LEBLOND	<i>LMM, Université Pierre et Marie Curie - Paris</i>
<i>Rapporteurs :</i>	Joël BRÉARD	<i>LMH, Université du Havre - Le Havre</i>
	Francisco CHINESTA	<i>LMSP, ENSAM - Paris</i>
<i>Examineurs :</i>	Jean-Louis BATOZ	<i>UTC - Compiègne</i>
	Alain VAUTRIN	<i>MeM-SMS, ENSM-SE - Saint-Etienne</i>
<i>Directeurs de thèse :</i>	Jean-Michel BERGHEAU	<i>LTDS, ENISE - Saint-Étienne</i>
	Sylvain DRAPIER	<i>BMM-CIS, ENSM-SE - Saint-Étienne</i>
<i>Invités :</i>	Sylvain CHATEL	<i>EADS-CCR - Suresnes</i>
	Patrick HENRAT	<i>Hexcel Reinforcements - Les Avenières</i>
	Patrick de LUCA	<i>ESI GROUP - Rungis</i>

● **Spécialités doctorales :**

SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX  
 MECANIQUE ET INGENIERIE  
 GENIE DES PROCEDES  
 SCIENCES DE LA TERRE  
 SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT  
 MATHEMATIQUES APPLIQUEES  
 INFORMATIQUE  
 IMAGE, VISION, SIGNAL  
 GENIE INDUSTRIEL  
 MICROELECTRONIQUE

**Responsables :**

**J. DRIVER** Directeur de recherche – Centre SMS  
**A. VAUTRIN** Professeur – Centre SMS  
**G. THOMAS** Professeur – Centre SPIN  
**B. GUY** Maître de recherche  
**J. BOURGOIS** Professeur – Centre SITE  
**E. TOUBOUL** Ingénieur  
**O. BOISSIER** Professeur – Centre G2I  
**JC. PINOLI** Professeur – Centre CIS  
**P. BURLAT** Professeur – Centre G2I  
**Ph. COLLOT** Professeur – Centre CMP

● **Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat** (titulaires d'un doctorat d'Etat ou d'une HDR)

BENABEN	Patrick	PR 2	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
BERNACHE-ASSOLANT	Didier	PR 1	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean-Pierre	MR	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaïd	MR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR 2	Informatique	G2I
BOUDAREL	Marie-Reine	MA	Sciences de l'inform. & com.	DF
BOURGOIS	Jacques	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
BRODHAG	Christian	MR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
BURLAT	Patrick	PR 2	Génie industriel	G2I
COLLOT	Philippe	PR 1	Microélectronique	CMP
COURNIL	Michel	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR 1	Génie industriel	CMP
DARRIEULAT	Michel	ICM	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DECHOMET	Roland	PR 2	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
DELAFOSSÉ	David	PR 2	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR 1	Informatique	G2I
DRAPIER	Sylvain	PR 2	Mécanique & Ingénierie	CIS
DRIVER	Julian	DR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
FOREST	Bernard	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
FORMISYN	Pascal	PR 1	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
FORTUNIER	Roland	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	CMP
FRACZKIEWICZ	Anna	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	CR	Génie des Procédés	SPIN
GIRARDOT	Jean-Jacques	MR	Informatique	G2I
GOEURIOT	Dominique	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GOEURIOT	Patrice	MR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
GRAILLOT	Didier	DR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
GROSSEAU	Philippe	MR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	MR	Génie des Procédés	SPIN
GUILHOT	Bernard	DR	Génie des Procédés	CIS
GUY	Bernard	MR	Sciences de la Terre	SPIN
GUYONNET	René	DR	Génie des Procédés	SPIN
HERRI	Jean-Michel	PR 2	Génie des Procédés	SPIN
KLÖCKER	Helmut	CR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
LAFORÉST	Valérie	CR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
LE COZE	Jean	PR 1	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
LI	Jean-Michel	EC (CCI MP)	Microélectronique	CMP
LONDICHE	Henry	MR	Sciences & Génie de l'Environnement	SITE
MOLIMARD	Jérôme	MA	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
MONTHEILLET	Frank	DR 1 CNRS	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
PERIER-CAMBY	Laurent	MA1	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Christophe	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean-Charles	PR 1	Image, Vision, Signal	CIS
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
SZAFNICKI	Konrad	CR	Sciences de la Terre	SITE
THOMAS	Gérard	PR 1	Génie des Procédés	SPIN
TRAN MINH	Cahn	MR	Génie des Procédés	SPIN
VALDIVIESO	Françoise	CR	Génie des Procédés	SPIN
VALDIVIESO	François	MA	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
VAUTRIN	Alain	PR 1	Mécanique & Ingénierie	SMS
VIRICELLE	Jean-Paul	CR	Génie des procédés	SPIN
WOLSKI	Krzysztof	CR	Sciences & Génie des Matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR 1	Génie industriel	CIS

**Glossaire :**

PR 1 Professeur 1<sup>ère</sup> catégorie  
 PR 2 Professeur 2<sup>ème</sup> catégorie  
 MA(MDC)Maître assistant  
 DR 1 Directeur de recherche  
 Ing. Ingénieur  
 MR(DR2)Maître de recherche  
 CR Chargé de recherche  
 EC Enseignant-chercheur  
 ICM Ingénieur en chef des mines

**Centres :**

SMS Sciences des Matériaux et des Structures  
 SPIN Sciences des Processus Industriels et Naturels  
 SITE Sciences Information et Technologies pour l'Environnement  
 G2I Génie Industriel et Informatique  
 CMP Centre de Microélectronique de Provence  
 CIS Centre Ingénierie et Santé

*à ma famille.*





# Remerciements

Ce document présente l'aboutissement de 3 années de thèse passées au département Mécanique et Matériaux (MeM), laboratoire de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne. Je souhaite remercier ici, l'ensemble des personnes qui m'ont permis par leur aide et leur soutien de mener à bien ce travail.

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à mes directeurs de thèse Messieurs Sylvain Drapier, professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, et Jean-Michel Bergheau, professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Saint-Étienne, pour avoir accepté de me confier ce travail. Je les remercie vivement pour leurs conseils avisés, leurs compétences scientifiques et l'attention qu'ils n'ont cessée d'apporter à ce travail. J'exprime ma profonde reconnaissance pour les encouragements qu'ils ont su me prodiguer, leur enthousiasme et pour m'avoir initié à la recherche scientifique.

Je remercie également Monsieur Alain Vautrin, directeur du laboratoire MeM, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et avoir fait de mon séjour à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne une expérience très enrichissante.

Je tiens à remercier Monsieur Jean-Baptiste Leblond, professeur à l'université Pierre et Marie Curie, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse. Je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Mes remerciements vont également à Messieurs Paco Chinesta, professeur à l'Institut Supérieur d'Ingénierie de la Conception et directeur de l'Équipe de Recherche en Mécanique et Plasturgie, et Joël Bréard, professeur à l'Université du Havre, qui ont accepté de lire de commenter et de juger ce mémoire. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux et leur en suis infiniment reconnaissant.

Je remercie Monsieur Jean-Louis Batoz, professeur à l'Université Technologique de Compiègne, pour avoir accepté de participer à mon jury.

Messieurs Patrick de Luca, chef produit *PAM-FORM*<sup>TM</sup>/*PAM-RTM*<sup>TM</sup> à ESI Group, et Patrick Henrat, directeur de la R&D à *Hexcel Reinforcement*, m'ont fait l'honneur d'accepter de représenter la partie « industrielle » de ce jury. Je les remercie vivement pour leur implication et pour l'attention qu'ils ont portés à ce travail.

Je tiens également à remercier vivement tous les membres du laboratoire. Avant tout, j'exprime toute mon amitié à Madame Bernadette Degache pour sa gentillesse, son dévouement et son accueil. Je remercie également les permanents du laboratoire, en particulier Monsieur Jérôme Molimard et Joël Monnatte pour leurs conseils avisés dans le domaine de la mécanique expérimentale. Bien évidemment je remercie tous les doctorants que j'ai croisé durant ces trois années (par ordre d'apparition) : Laurent, Marco, Jihed, Benoit, Mounia, Stéphane, Jean-Christophe, Issam, Othmane, Jung-Ryul, Dany, Moo Sun, Romain, Gustavo, Laura, Pierre Jacques et Mathieu. Je leur souhaite une bonne continuation dans leurs travaux de recherche, leur vie professionnelle et personnelle.

Il reste évidemment ceux qui compte plus que tout et sans qui la vie ne serait pas grand chose. Je remercie mes amis d'escalade Laurent, Rodolphe, Alex, Matthieu, Nico, Eric, . . . , pour tous nos exploits sportifs et nos sorties stéphanoises. Un grand merci aussi à mes amis de Saint-Étienne, Laurent, Sophie, Carine, Pauline, Karine et Raph pour tous les moments inoubliables que je partage avec eux depuis 10 ans.

Enfin, je tiens à exprimer toute mon estime à mes parents et ma famille pour le soutien chaleureux qu'ils m'ont offert et sans qui je n'aurais pu arriver jusque là.

*« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne . . . et personne ne sait pourquoi ! » [Albert Einstein].*



## Résumé

Dans ce manuscrit, un modèle complet pour la simulation d'un écoulement thermo-réactif d'un fluide à travers un milieu poreux fortement compressible est présenté. Ce modèle est utilisé pour l'étude des procédés d'élaboration des matériaux composites par infusion à travers leur épaisseur (Liquid Resin Infusion-*LRI* et Resin Film Infusion-*RFI*). Dans ces procédés, le mélange entre les renforts et la résine liquide est réalisé dans la direction transverse aux plans des préformes pendant la phase de mise en forme. Les coûts sont ainsi réduits et les problèmes de remplissage éliminés. Ces procédés sont néanmoins peu maîtrisés et les caractéristiques de la pièce finale difficilement prévisibles (principalement les épaisseurs et les porosités). La mise au point d'un modèle numérique constituerait un bon outil pour développer et finaliser de nouvelles solutions composites. D'un point de vue physique, l'infusion de la résine à travers l'épaisseur des préformes est une conséquence de la pression appliquée sur l'empilement résine/préforme.

Dans cette analyse multi-physique deux types de problèmes sont rencontrés. Tout d'abord, nous connaissons mal les conditions de couplage entre les zones liquides, gouvernées par les équations de Stokes, et les préformes imprégnées assimilées à des milieux poreux, gouvernées par une loi de Darcy et une loi de comportement mécanique non-linéaire. Par ailleurs, les interactions entre l'écoulement de la résine et la compression des préformes ne sont pas bien maîtrisées. Le modèle développé inclut donc une condition de Beaver-Joseph-Schaffman modifiée pour le couplage entre les zones de Darcy et de Stokes. Une formulation *ALE* pour l'écoulement de la résine dans un milieu poreux déformable subissant de fortes déformations est utilisée et couplée à une formulation Lagrangienne Réactualisée pour la partie solide. Ces deux mécanismes physiques sont couplés à des modèles thermo-chimiques pour traiter la réticulation de la résine sous l'action du cycle de température.

Dans ce travail, un certain nombre d'outils numériques et de nouvelles formulations ont été développés en vue de simuler les procédés *LRI* et *RFI*. Chaque outil est étudié et validé analytiquement ou numériquement avant d'être intégré dans les modèles *LRI/RFI*. Des simulations numériques d'infusion sont ensuite présentées, commentées et une première comparaison avec des essais expérimentaux est proposée.

**Mots-clés:** Darcy, Stokes, Brinkman, matériaux composites, *FEM* : Finite Element Model, Formulation *ALE*, *LRI* : Liquid Resin Infusion, *RFI* : Resin Film Infusion, *RTM* : Resin Transfer Molding.



## Abstract

In the present work, an overall model for the study of a non isothermal fluid flow across a highly compressible porous medium is proposed. This model is used here to study dry composite manufacturing processes by infusion across the fabric thickness (Liquid Resin Infusion-*LRI* and Resin Film Infusion-*RFI*). These processes consist in mixing during the manufacturing stage, the reinforcements and the liquid resin transversely to the fabrics planes, yielding cost reductions while avoiding filling problems. These processes are however still poorly controlled and the characteristics of the finished part are not easily predictable (mainly the thickness and the porosity). A numerical predictive model would be a proper candidate to help in developing and finalizing new composite solutions with cost saving. Physically, liquid resin infusion is mainly induced across the compressed preform thickness, as a result of a pressure prescribed over the preform/resin stacking.

From the modeling point of view, problems of this multi-physical analysis are two fold. First, one faces ill-posed boundary conditions, regarding the coupling of liquid regions, where a Stokes flow prevails, with the fibrous preform regions modeled as porous medium governed by a Darcy's law and a non-linear mechanical response. Second, the interaction phenomena due to the resin flow in the highly compressible preform are not classical. The model developed here includes a modified Beaver-Schaffman-Joseph condition to couple Stokes and Darcy zones, and is based on an *ALE* formulation of the liquid flow across the deformable porous medium in which finite strains are accounted for with an updated Lagrangian scheme. This mechanical model is also coupled with thermo-chemical models, accounting for resin reticulation under the temperature cycle.

In the present work, numerical tools and new formulations have been developed in order to simulate the whole *LRI* or *RFI* process with a finite element software. These tools are studied individually and compared separately with analytical or other numerical results before being used in the *LRI* / *RFI* models. Numerical studies of infusion are then presented, commented, and a first comparison with experimental test is investigated.

**Keywords:** Darcy, Stokes, Brinkman, composites materials, *FEM* : Finite Element Model, *ALE* formulation, *LRI* : Liquid Resin Infusion, *RFI* : Resin Film Infusion, *RTM* : Resin Transfer Molding.





## Liste des acronymes

<i>NCF</i>	Non Crimped Fabrics
<i>NC2<sup>TM</sup></i>	Non Crimped New Concept
<i>LCM</i>	Liquid Composite Molding
<i>RTM</i>	Resin Transfer Molding
<i>VARTM</i>	Vacuum Assisted Resin Transfer Molding
<i>ICRTM</i>	Injection Compression Resin Transfer Molding
<i>RFI</i>	Resin Film Infusion
<i>LRI</i>	Liquid Resin Infusion
<i>RIFT</i>	Resin Infusion under Flexible Tooling
<i>SCRIMP</i>	Seemann Composites Resin Infusion Molding Process
<i>VARI</i>	Vacuum Assisted Resin Infusion
<i>ALE</i> ou <i>ELA</i>	Arbitrary Lagrangian Eulerian ou Euler Lagrange Arbitraire
<i>FEM</i>	Finite Element Method
<i>X-FEM</i>	eXtended Finite Element Method
<i>FEM/CV</i>	Finite Element Method / Control Volume
<i>RIP</i>	Reduced Integration Penalty method



# Liste des symboles

## Coordonnées :

- $(x, y, z)$  coordonnées dans le repère de référence  
 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  repère de référence orthonormé

## Tenseur (sauf indications contraires) :

- $a$  tenseur d'ordre 0 (scalaire)  
 $\mathbf{a}$  tenseur d'ordre 1 (vecteur) :  $a_i$   
 $\mathbf{A}$  tenseur d'ordre 2 :  $a_{ij}$   
 $\mathbb{A}$  tenseur d'ordre 4 :  $a_{ijkl}$

## Opération de base :

- $\frac{\partial x}{\partial t}$  dérivée partielle de  $x$  par rapport à  $t$   
 $\frac{Dx}{Dt}$   $\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla x$  dérivée particulaire (avec  $\mathbf{v}$  la vitesse des particules matérielles dans le repère matériel)
- $a = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$   $a = b_i c_i$   
 $a = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$   $a = B_{ij} c_j$   
 $A = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$   $A_{ij} = B_{ik} C_{kj}$   
 $a = \mathbf{B} : \mathbf{C}$   $A = B_{ij} C_{ji}$   
 $A = \mathbb{B} : \mathbf{C}$   $A_{ij} = B_{ijkl} C_{kl}$   
 $\mathbf{a} = \nabla b$  gradient de  $b$  :  $a = \frac{\partial b_x}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial b_y}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial b_z}{\partial z} \mathbf{e}_z$   
 $a = \text{div } \mathbf{b}$  divergence de  $\mathbf{b}$  :  $a = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}$   
 $a = \Delta b$  Laplacien de  $b$  :  $a = \frac{\partial^2 b_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial z^2}$

## Espace vectoriel :

- $H^1(\Omega)$  premier espace de Sobolev qui contient les fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  et dont les dérivées sont également de carré intégrable sur  $\Omega$   
 $C^k(\Omega)$   $0 \leq k \leq \infty$  espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égale à  $k$  existent et sont continues dans  $\Omega$

## Symboles Généraux :

$P_{imp}$	pression appliquée par le sac à vide
$p_{imp}$	pression au niveau du front de fluide
$\mathbf{f}^v$	vecteur des forces de volume
$\mathbf{f}^s$	vecteur des forces de surface
$\mathbf{u}_s$	déplacement du solide
$\mathbf{v}_s$	vitesse du solide
$\mathbf{v}_f$	vitesse moyenne intrinsèque du fluide
$\bar{\mathbf{v}}_f$	vitesse macroscopique du fluide
$p$	pression hydrostatique du fluide
$\mathbf{g}$	accélération de la pesanteur
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy (symétrique)
$\mathbf{P}$	premier tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff (non-symétrique)
$\mathbf{S}$	second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff (symétrique)
$\mathbf{D}$	tenseur des taux de déformation Eulérien
$\mathbf{I}$	tenseur identité
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\mathbf{F}$	tenseur gradient de la transformation
$\mathbf{E}$	tenseur des déformations de Green Lagrange
$\boldsymbol{\epsilon}$	tenseur des déformations logarithmiques ou de Hencky
$\mathbf{e}$	tenseur des déformations d'Euler Almansi
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur des déformations linéaires
$\boldsymbol{\mu}$	tenseur des déformations non-linéaires
$\beta$	paramètre correcteur de la loi de Biot
$J$	Jacobien de la transformation
$\eta$	viscosité dynamique
$\bar{\eta}$	viscosité dynamique effective (utilisée dans l'équation de Brinkman) : $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\phi_s}$
$\rho$	masse volumique
$V_{\text{pore}}$	volume des pores
$V_{\text{total}}$	volume total
$V_{\text{fluide}}$	volume fluide
$a$	surface spécifique
$\phi$	porosité $\left( \frac{V_{\text{pore}}}{V_{\text{total}}} \right)$ relatif à un élément de volume $V_{\text{total}}$ donné

$s$	degré de saturation $\left(\frac{V_{\text{fluide}}}{V_{\text{pore}}}\right)$ relatif à un élément de volume $V_{\text{pore}}$ donné
$\Delta t$	incrément de temps entre $t$ et $t + \Delta t$

**Théorie des milieux poreux (modèle de Kozeny) :**

$\gamma$	facteur de circularité
$\kappa$	conductivité hydraulique scalaire
$\boldsymbol{\kappa}$	conductivité hydraulique tensorielle
$R$	rayon équivalent du milieu poreux
$S$	section équivalente du milieu poreux
$V$	volume équivalent du milieu poreux
$U$	vitesse moyenne dans le milieu poreux
$N$	nombre de pores cylindriques
$Q$	débit dans le milieu poreux
$R_c$	rayon moyen des pores cylindriques
$S_c$	section moyenne des pores cylindriques
$V_c$	volume moyen des pores cylindriques
$U_c$	vitesse moyenne dans les pores cylindriques
$Q_c$	débit dans le canal
$h_k$	constante de Kozeny scalaire
$\mathbf{h}_k$	constante de Kozeny tensorielle
$T$	tortuosité

**Associés à la résine (indice  $r$ ) dans le domaine de résine (exposant  $r$ ) :**

$p_r^r$	pression hydrostatique de la résine
$\mathbf{v}_r^r$	vitesse intrinsèque de la résine
$\mathbf{v}_d^r$	vitesse du domaine de référence associé à la zone de résine seule
$\mathbf{c}_r^r$	vitesse convective de la résine
$\rho_r^r$	densité intrinsèque de la résine

**Associés aux préformes (indice  $f$ ) dans les préformes (exposant  $f$ ) :**

$\tilde{\rho}_f^f$	densité intrinsèque des fibres
$\rho_f^f$	densité moyenne intrinsèque des fibres

$\bar{\rho}_f^f$	densité moyenne des préformes ( $\bar{\rho}_f^f = (1 - \phi) \rho_f^f$ )
$\mathbf{u}_f^f$	déplacement des préformes
$\mathbf{v}_f^f$	vitesse des préformes ( $\mathbf{v}_f^f = \frac{D\mathbf{u}_f^f}{Dt}$ )
$\boldsymbol{\sigma}_e$	tenseur des contraintes de Cauchy effectif associé aux nappes sèches
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes de Cauchy associé au mélange nappes / résine

**Associés à la résine (indice  $r$ ) dans les préformes (exposant  $f$ ) :**

$p_r^f$	pression hydrostatique de la résine
$\tilde{\mathbf{v}}_r^f$	vitesse intrinsèque de la résine, <i>i.e.</i> vitesse réelle de la résine
$\mathbf{v}_r^f$	vitesse intrinsèque moyenne de la résine
$\bar{\mathbf{v}}_r^f$	vitesse macroscopique de la résine ou en fût vide ( $\bar{\mathbf{v}}_r^f = \phi s \mathbf{v}_r^f$ )
$\mathbf{c}_r^f$	vitesse convective de la résine
$\bar{\mathbf{c}}_r^f$	vitesse convective macroscopique de la résine
$\mathbf{d}_r^f$	vitesse relative de la résine, <i>i.e.</i> vitesse entre la résine et les préformes
$\bar{\mathbf{d}}_r^f$	vitesse relative macroscopique de la résine
$\tilde{\rho}_r^f$	densité intrinsèque de la résine
$\rho_r^f$	densité moyenne intrinsèque de la résine
$\bar{\rho}_r^f$	densité macroscopique de la résine ( $\bar{\rho}_r^f = \phi s \rho_r^f$ )

**Formulation *ALE* :**

$\mathbf{x}_0$	coordonnées initiales ( $\Omega_0$ )
$\mathbf{x}$	coordonnées matérielles ( $\Omega$ )
$\boldsymbol{\chi}$	coordonnées de référence ( $\hat{\Omega}$ )
$\phi(\mathbf{x}_0, t)$	fonction de passage du domaine initial vers le domaine matériel
$\psi(\mathbf{x}_0, t)$	fonction de passage du domaine initial vers le domaine de référence
$\hat{\phi}(\boldsymbol{\chi}, t)$	fonction de passage du domaine de référence vers le domaine matériel
$\mathbf{w}$	vitesse des particules matérielles dans le domaine de référence ( $\hat{\Omega}$ )
$\hat{\mathbf{u}}$	vitesse du domaine de référence

**Thermo-physico-chimiques :**

indice $r$	zone de résine seule
indice $f$	zone de préformes sèches

indice $m$	zone de préformes humides (variables homogénéisées)
$T$	température
$c$	capacité calorifique
$\lambda$	tenseur d'ordre 2 de conductivité thermique
$\Delta H$	chaleur dégagée par la réaction (enthalpie)
$\alpha$	degré de réticulation
$A_i$	constante pré-exponentielle
$E_i$	énergie d'activation
$\eta_0, \Delta E_\eta, \kappa$	constantes du modèle de viscosité

### Formulation Lagrangienne :

$[\mathbf{L}]$	opérateur déformations linéaires
$[\mathbf{A}], [\mathbf{H}]$	opérateurs déformations non-linéaires
$\{\boldsymbol{\theta}\}$	vecteur contenant les dérivées des déplacements
$[\mathbf{G}]$	$[\mathbf{G}] = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}]$
$[\mathbf{N}^e]$	matrice des fonctions de forme élémentaire
$[\mathbf{B}_L]$	matrice des dérivées des fonctions de forme pour la partie linéaire
$[\mathbf{B}_{NL}]$	matrice des dérivées des fonctions de forme pour la partie non-linéaire
$[\mathbf{B}]$	matrice des dérivées des fonctions de forme pour les parties linéaires et non-linéaires
$\{\boldsymbol{\psi}^e\}, \{\boldsymbol{\psi}\}$	vecteur résidu élémentaire, vecteur résidu
$[\mathbf{K}_T^e], [\mathbf{K}_T]$	matrice tangente élémentaire, matrice tangente
${}^t\mathbf{C}_t$	matrice de comportement tangente (Cauchy-logarithmiques)
${}^t\mathbf{C}_t^a$	matrice de comportement tangente (Cauchy-Euler-Almansi)
${}^t_0\mathbf{C}_t$	matrice de comportement tangente (Piola Kirchhoff-Green Lagrange)
${}^t\mathbf{C}_s$	matrice de comportement sécante (Cauchy-logarithmiques)
${}^t\mathbf{C}_s^a$	matrice de comportement sécante (Cauchy-Euler-Almansi)
${}^t_0\mathbf{C}_s$	matrice de comportement sécante (Piola Kirchhoff-Green Lagrange)
$C_t$	module de Young 1D tangent
$C_s$	module de Young 1D sécant
$\{\mathbf{R}^{t+\Delta t}\}$	vecteur second membre à $t + \Delta t$ (vecteur forces externes)
$\lambda = \frac{t_l}{0_l}$	élongation ou « stretch ratio »
$\boldsymbol{\sigma}^{dev}$	partie déviatoire du tenseur des contraintes
$\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}$	partie déviatoire du tenseur des déformations linéaires



$\nu$	coefficient de Poisson
$\nu_{TT'}$	coefficient de Poisson dans le plan d'isotropie pour un comportement isotrope transverse
$\nu_{LT}, \nu_{TL}$	coefficient de Poisson transverse pour un comportement isotrope transverse
$G_{TL}$	module de cisaillement transverse pour un comportement isotrope transverse

**Formulation mixte (vitesse-pression) :**

$p^h$	approximation du champ de pression
$\delta p^h$	champ test associé au champ de pression
$\mathbf{v}^h$	approximation du champ de vitesse
$\delta \mathbf{v}^h$	champ test associé au champ de vitesse
$[\mathbf{K}_{rd}]$	matrice de rigidité
$[\mathbf{K}_{ic}]$	matrice d'incompressibilité
$\{\mathbf{F}\}$	vecteur des sollicitations extérieures
$\alpha$	paramètre de pénalité
$[\mathbf{K}_{in}]$	matrice pour le traitement de l'incompressibilité
$k$	facteur de conditionnement de la matrice
$[\mathbf{N}^e]$	matrice des fonctions de forme élémentaire
$N_b$	fonction de forme associée au nœud bulle (fonction hiérarchique ou polynomiale)

# Table des matières

Table des figures	xxix
Liste des tableaux	xxxv
Introduction générale	1
<b>Partie I Cadre industriel de l'étude : l'infusion</b>	<b>5</b>
<b>1 Les matériaux composites et leurs procédés d'élaboration</b>	<b>7</b>
1.1 Les matériaux composites structuraux . . . . .	7
1.1.1 Définition . . . . .	7
1.1.2 Les propriétés . . . . .	8
1.1.2.1 Classement des composites . . . . .	8
1.1.2.2 Les avantages . . . . .	9
1.1.2.3 Les limites . . . . .	10
1.1.3 La matrice . . . . .	11
1.1.3.1 Propriétés . . . . .	11
1.1.4 Les renforts . . . . .	12
1.1.4.1 Caractéristiques mécaniques . . . . .	12
1.1.4.2 Propriétés thermiques . . . . .	12
1.1.4.3 Les différents types d'architecture . . . . .	13
1.1.4.4 Les renforts multi-axiaux . . . . .	14
1.1.5 Cycle de pression température . . . . .	15
1.2 Les procédés . . . . .	16
1.2.1 Les procédés par voies humides ou pré-imprégnées . . . . .	16
1.2.2 Les procédés par voie sèche . . . . .	16

1.2.2.1	Le procédé <i>RTM</i> . . . . .	17
1.2.2.2	Les procédés par infusion <i>LRI</i> et <i>RFI</i> . . . . .	18
1.3	Conclusion . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Modélisation de l’infusion : État de l’art</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	21
2.2	Difficultés et intérêt de la modélisation . . . . .	22
2.3	Revue bibliographique . . . . .	23
2.3.1	Les problèmes physiques rencontrés . . . . .	23
2.3.1.1	Les problèmes de remplissage et de bulles d’air . . . . .	24
2.3.1.2	La détermination de la perméabilité . . . . .	24
2.3.2	Difficultés numériques . . . . .	25
2.3.2.1	Écoulement dans un milieu poreux compressible . . . . .	25
2.3.2.2	Couplage entre une zone purement fluide et le milieu poreux partiellement saturé . . . . .	28
2.3.2.3	Couplage entre deux zones à forte différence de per- méabilité . . . . .	29
2.3.2.4	Conservation de la masse et suivi du front de fluide . . . . .	29
2.4	Conclusion . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Position de l’étude et objectif</b>	<b>33</b>
3.1	Analyse des besoins . . . . .	33
3.1.1	Modélisation du comportement des préformes . . . . .	33
3.1.2	Modèle d’écoulement dans un milieu poreux compressible . . . . .	34
3.1.3	Modèle d’écoulement dans une zone libre . . . . .	34
3.1.4	Gestion de l’évolution des domaines . . . . .	35
3.2	Démarche adoptée et objectifs . . . . .	35
	<b>Partie II Modélisation de l’infusion</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>Choix d’un modèle pour l’étude des procédés <i>LRI/RFI</i></b>	<b>39</b>
4.1	Échelle de la modélisation . . . . .	40
4.1.1	L’approche micro/mésoscopique . . . . .	40
4.1.2	L’approche macroscopique . . . . .	41
4.1.3	Discussion . . . . .	41

---

4.2	La modélisation des procédés <i>LRI</i> et <i>RFI</i> . . . . .	42
4.3	Stratégie de modélisation . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Modélisation mécanique</b>	<b>45</b>
5.1	Introduction . . . . .	45
5.2	Modélisation de la partie fluide . . . . .	46
5.2.1	Hypothèses . . . . .	47
5.2.2	Traitement des domaines mobiles : approche <i>ALE</i> . . . . .	47
5.2.2.1	Objectif . . . . .	47
5.2.2.2	Formulation <i>ALE</i> . . . . .	48
5.2.2.3	Principe . . . . .	50
5.2.2.4	Formulation quasi-eulérienne . . . . .	52
5.2.3	Écoulement de la résine dans la zone purement fluide . . . . .	54
5.2.4	Écoulement de la résine dans les préformes . . . . .	55
5.2.4.1	Hypothèse et modélisation . . . . .	55
5.2.4.2	Modèles choisis . . . . .	56
5.2.4.3	Les équations de conservation . . . . .	65
5.2.5	Écoulement de la résine dans le drainant . . . . .	66
5.3	Modélisation de la partie solide . . . . .	67
5.3.1	Conservation de la masse et porosité . . . . .	67
5.3.2	Influence de la résine sur le comportement des nappes . . . . .	68
5.4	Prise en compte de la saturation . . . . .	70
5.4.1	Définition . . . . .	70
5.4.2	Les approches possibles . . . . .	70
5.5	Conditions aux limites . . . . .	71
5.5.1	Interaction à l'échelle matériau . . . . .	72
5.5.2	Conditions limites à l'échelle structure . . . . .	72
5.6	Conclusion . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Modélisation thermique et chimique</b>	<b>75</b>
6.1	Introduction . . . . .	75
6.2	Les équations . . . . .	76
6.2.1	Équation de la chaleur . . . . .	76
6.2.2	Cinétique de réticulation . . . . .	76
6.3	Couplage mécanique / thermique . . . . .	77

6.3.1	Les paramètres thermo-chimiques équivalents . . . . .	77
6.3.2	Couplage explicite . . . . .	78
6.4	Les conditions aux limites . . . . .	78
6.5	Conclusion . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Bilan des couplages mis en jeu</b>	<b>81</b>
 <b>Partie III Outils numériques pour le problème d'infusion</b>		<b>85</b>
<b>8</b>	<b>Grandes déformations des nappes : Formulation Lagrangienne</b>	<b>87</b>
8.1	Introduction . . . . .	88
8.2	Formulation Lagrangienne . . . . .	89
8.2.1	Notations . . . . .	89
8.2.2	Équation d'équilibre . . . . .	90
8.2.3	Discrétisation par éléments finis . . . . .	93
8.2.3.1	Formulation Lagrangienne Totale . . . . .	94
8.2.3.2	Formulation Lagrangienne Semi-réactualisée . . . . .	95
8.2.3.3	Formulation Lagrangienne Réactualisée . . . . .	95
8.2.4	Résidu élémentaire . . . . .	96
8.2.5	Méthode de résolution non-linéaire . . . . .	97
8.2.5.1	Algorithme de Newton Raphson . . . . .	97
8.2.5.2	Calcul de la matrice tangente . . . . .	98
8.2.5.3	Résolution du système . . . . .	100
8.2.6	Synthèse . . . . .	101
8.3	Implémentation . . . . .	101
8.3.1	Courbe expérimentale et lois de comportement . . . . .	101
8.3.1.1	Courbe force courante ${}^tF$ en fonction du déplacement ${}^td$	102
8.3.1.2	Les lois de comportement . . . . .	103
8.3.2	Pratique de la Formulation Lagrangienne . . . . .	106
8.3.2.1	Formulation Lagrangienne totale . . . . .	107
8.3.2.2	Formulation Lagrangienne Réactualisée et semi-Réactualisée	107
8.3.3	Conclusion . . . . .	109
8.4	Validation et étude de cas tests . . . . .	109
8.4.1	Choix des modèles . . . . .	110

---

8.4.2	Validation avec une loi élastique linéaire isotrope . . . . .	111
8.4.2.1	Sans non-linéarités géométriques . . . . .	111
8.4.2.2	Avec non-linéarités géométriques . . . . .	112
8.4.3	Validation avec une loi hypoélastique isotrope . . . . .	113
8.4.3.1	Sans non-linéarité géométrique . . . . .	114
8.4.3.2	Avec non-linéarités géométriques . . . . .	115
8.4.4	Validation du comportement anisotrope et de la formulation corotationnelle . . . . .	115
8.5	Conclusion . . . . .	116
<b>9</b>	<b>Écoulement incompressible de la résine</b>	<b>119</b>
9.1	Introduction . . . . .	120
9.2	Les équations à résoudre . . . . .	120
9.3	Formulation faible du problème de Stokes et discrétisation par éléments finis . . . . .	122
9.4	Traitement de l'incompressibilité . . . . .	124
9.4.1	Méthode de pénalité . . . . .	124
9.4.1.1	Principe . . . . .	124
9.4.1.2	Intégration réduite . . . . .	125
9.4.1.3	Conclusion sur la méthode de pénalité . . . . .	127
9.4.2	Condition de Brezzi-Babuška . . . . .	127
9.4.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	128
9.4.4	Méthode du Lagrangien augmenté . . . . .	129
9.5	Les éléments P1+/P1 et P1-bulle/P1 . . . . .	129
9.5.1	Discrétisation de la vitesse et de la pression . . . . .	129
9.5.2	Conditions aux limites . . . . .	131
9.5.3	Formulation faible du problème discret . . . . .	132
9.5.3.1	La propriété d'orthogonalité . . . . .	132
9.5.3.2	La formulation faible . . . . .	133
9.5.3.3	Résolution du problème faible discret . . . . .	134
9.5.4	Intégration du terme $\int_{\Omega} \delta p^h \operatorname{div} \mathbf{v}_b^h dv$ . . . . .	135
9.6	Validation . . . . .	136
9.6.1	Équation de Stokes . . . . .	136
9.6.1.1	Écoulement de Poiseuille . . . . .	136

9.6.1.2	Cavité fermée . . . . .	137
9.6.1.3	Un autre exemple d'application . . . . .	139
9.6.2	Équation de Darcy . . . . .	140
9.7	Conclusion . . . . .	141
<b>10</b>	<b>Formulation <i>ALE</i> et modèle de Terzaghi</b>	<b>143</b>
10.1	Le modèle de Terzaghi . . . . .	143
10.1.1	Introduction . . . . .	143
10.1.2	Prise en compte du modèle de Terzaghi . . . . .	144
10.1.3	Validation en élasticité linéaire . . . . .	144
10.1.4	Conclusion . . . . .	146
10.2	La formulation <i>ALE</i> . . . . .	147
10.3	Conclusion . . . . .	148
<b>11</b>	<b>Remaillage et gestion des conditions cinématiques</b>	<b>149</b>
11.1	Traitement des conditions cinématiques . . . . .	149
11.1.1	Introduction . . . . .	149
11.1.2	Méthode . . . . .	150
11.1.3	Pratique de la pénalisation . . . . .	151
11.1.4	Les résultats . . . . .	152
11.1.5	Conclusion . . . . .	154
11.2	Remaillage . . . . .	155
11.2.1	Introduction . . . . .	155
11.2.2	Comment marche le remaillage . . . . .	155
11.2.3	Critère de remaillage . . . . .	156
11.2.4	Le remaillage . . . . .	157
11.2.5	Mapping . . . . .	157
11.2.6	Résultats . . . . .	158
11.2.7	Conclusion . . . . .	159
<b>12</b>	<b>Bilan</b>	<b>161</b>
<b>Partie IV</b>	<b>Applications</b>	<b>163</b>
<b>13</b>	<b>Simulation d'injections sous sac à vide</b>	<b>165</b>

---

13.1	Introduction . . . . .	165
13.1.1	Principe . . . . .	166
13.1.2	Résultats . . . . .	167
13.2	Conclusion . . . . .	170
<b>14</b>	<b>Étude des procédés <i>RFI</i> et <i>LRI</i></b>	<b>171</b>
14.1	Introduction . . . . .	171
14.2	Simulation du procédé <i>LRI</i> . . . . .	171
14.2.1	Principe . . . . .	171
14.2.2	Résultats . . . . .	173
14.3	Traitement du procédé <i>RFI</i> . . . . .	177
14.3.1	Principe . . . . .	177
14.3.2	Résultats . . . . .	178
14.4	Conclusion . . . . .	181
<b>15</b>	<b>Réflexions autour de la validation</b>	<b>183</b>
15.1	Introduction . . . . .	183
15.2	L'expérience réalisée . . . . .	184
15.2.1	La préforme . . . . .	184
15.2.2	La résine . . . . .	185
15.3	Essai de compression . . . . .	186
15.3.1	L'expérience . . . . .	186
15.3.2	La simulation . . . . .	187
15.4	L'essai d'infusion . . . . .	188
15.4.1	L'expérience . . . . .	188
15.4.2	Simulation de l'infusion . . . . .	190
15.5	Confrontation modèle / expérience . . . . .	192
15.6	Conclusion . . . . .	192
	<b>Conclusion générale</b>	<b>193</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>



<b>Annexes</b>	<b>213</b>
<b>A Équations de Bilan</b>	<b>215</b>
A.1 Conservation de la masse . . . . .	216
A.2 Hypothèse d'incompressibilité . . . . .	217
A.3 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	217
A.4 Bilan énergétique . . . . .	218
A.4.1 Premier principe de la thermodynamique . . . . .	218
A.4.2 Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	219
A.4.3 Autre expression du premier principe . . . . .	220
A.5 L'équation de Navier et Stokes . . . . .	221
A.6 Équation de la chaleur . . . . .	221
<b>B Forme faible de la quantité de mouvement</b>	<b>223</b>
<b>C Matrices utilisées dans les approches Lagrangiennes</b>	<b>225</b>
<b>D Lois de comportement isotrope et isotrope transverse</b>	<b>229</b>
D.1 Comportement isotrope . . . . .	229
D.2 Comportement isotrope transverse . . . . .	230
D.3 Méthode des Polynômes de Lagrange . . . . .	230
<b>E Validation du modèle de Terzaghi</b>	<b>231</b>
E.1 Solution analytique dans un cas simple : théorie des plaques en défor- mations planes . . . . .	231
E.1.1 Mise en équation . . . . .	231
E.1.2 Détermination du champ de contraintes . . . . .	231
E.1.3 Détermination des déformations et du champ de déplacement .	232
E.2 Application : validation du modèle de Terzaghi . . . . .	233
E.2.1 Calcul du champ de contraintes . . . . .	234
E.2.2 Calcul du champ de déformations . . . . .	235
E.2.3 Calcul des déplacements . . . . .	235
E.2.3.1 Calcul des $U_{ij}$ . . . . .	235
E.2.3.2 Calcul des $u_i$ . . . . .	236
<b>F Caractérisation du régime de l'écoulement</b>	<b>237</b>

---

<b>G</b>	<b>Le modèle de Terzaghi</b>	<b>239</b>
<b>H</b>	<b>Transport des quantités</b>	<b>241</b>
<b>I</b>	<b>Résolution analytique des problèmes tests de Stokes et de Darcy</b>	<b>243</b>
I.1	Le problème de Stokes . . . . .	243
I.2	Le problème de Darcy . . . . .	244
<b>J</b>	<b>Origine de l'équation de Brinkman</b>	<b>247</b>
<b>K</b>	<b>Comparaison Stokes Darcy Brinkman</b>	<b>251</b>



# Table des figures

1.1	Exemple d'utilisation de composite GD, (a) Aston Martin V12 (Plastics (2002c)) et HP, (b) Airbus A380. . . . .	9
1.2	Différents types de renforts : (a) nappe unidirectionnelle, (b) mat, (c) tissu, (d) tissage tridimensionnel orthogonal. . . . .	13
1.3	Cycle de cuisson pour une résine époxyde : (a) pression et température en fonction du temps et (b) évolution correspondante de l'état de la résine thermodurcissable. . . . .	15
1.4	Procédé <i>RTM</i> : Resin Tranfer Molding (Barbero (1998)). . . . .	17
1.5	Procédé <i>RFI</i> : Resin Film Infusion (Qi <i>et al.</i> (1999), Han <i>et al.</i> (2003), Antonucci <i>et al.</i> (2003) ...). . . . .	19
1.6	Procédé <i>LRI</i> : Liquid Resin Infusion (Williams <i>et al.</i> (1996)). . . . .	19
2.1	Mécanisme de formation des bulles d'air en régime transitoire : (a) $F_{visqueuse} > F_{capillaire}$ , (b) $F_{visqueuse} < F_{capillaire}$ (d'après Lee <i>et al.</i> (2006)) et (c) la capillarité . . . . .	25
4.1	Modélisation adoptée pour le procédé <i>RFI</i> . Découpage en 3 zones : résine seule, préformes imprégnées et préformes sèches et conditions aux limites associées. . . . .	43
4.2	Modélisation adoptée pour le procédé <i>LRI</i> . Découpage en 3 zones : résine et drainant, préformes imprégnées et préformes sèches et conditions aux limites associées. . . . .	43
5.1	Différents types de formulations disponibles basées sur des approches (a) matérielles, (b) initiales ou (c) de référence (Rabier (2003)). . . . .	48
5.2	Relation entre les domaines matériel $\Omega$ (coordonnées $\mathbf{x}$ ), initial $\Omega_0$ (coordonnées $\mathbf{x}_0$ ) et de référence $\hat{\Omega}$ (coordonnées $\boldsymbol{\chi}$ ) (Belytschko <i>et al.</i> (2000)). . . . .	51
5.3	De l'écoulement de résine dans un canal à l'écoulement dans un milieu poreux équivalent. . . . .	57
5.4	Écoulement dans une conduite circulaire : Loi de Hagen-Poiseuille. . . . .	57

5.5	Modèle de Kozeny : modélisation du milieu poreux à l'aide de pores identiques droits et indépendants. . . . .	58
5.6	Expérience de Darcy : écoulement dans un conduit poreux saturé incliné (prise en compte de la pesanteur). . . . .	60
5.7	Bilan de mesures de perméabilité en régime saturé et transitoire sur les nappes NC2 (Drapier <i>et al.</i> (2005)). . . . .	65
5.8	Conditions aux limites à l'échelle structure et interactions dans les nappes imprégnées à l'échelle matériau : cas du procédé <i>LRI</i> . . . . .	72
5.9	Conditions aux limites à l'échelle structure et interactions dans les nappes imprégnées à l'échelle matériau : cas du procédé <i>RFI</i> . . . . .	73
6.1	Évolution de la température (a) et du degré de réticulation (b) pour un matériau composite à fibres de verres E et matrice therm durcissable 914 - Modèle de Lee. . . . .	80
7.1	Couplage entre les phénomènes thermo-physico-chimiques, la mécanique des fluides et la mécanique des solides pour la zone de nappes imprégnées. . . . .	82
8.1	Notations utilisées dans le cadre de la formulation Lagrangienne. . . . .	89
8.2	Représentation des différentes configurations de calcul : configuration initiale à l'instant 0, configuration actuelle à l'instant $t$ , configuration recherchée à l'instant $t + \Delta t$ . . . . .	90
8.3	Principale méthode de résolution : (a) Newton - (b) Newton modifiée - (c) quasi-Newton ou BFGS . . . . .	92
8.4	Méthode itérative de Newton Raphson : Subdivision du chargement en incrément de chargement ${}^iF$ et méthode itérative de Newton Raphson pour la convergence de la solution ${}^iU$ sur chaque incrément. . . . .	99
8.5	Courbe de compression : Force courante ${}^tF$ en fonction du déplacement ${}^td$ . . . . .	102
8.6	Courbes de traction – (a) Contrainte de Piola Kirchhoff 2 en fonction des déformations de Green Lagrange, (b) Contrainte de Cauchy en fonction des déformations logarithmiques. . . . .	104
8.7	Essai de traction / compression : Mesure de l'effort courant ${}^tF$ en fonction du déplacement de l'éprouvette ${}^td$ . . . . .	104
8.8	Prise en compte de la rotation de la matière lors de l'utilisation des déformations logarithmiques : formulation corotationnelle. . . . .	109
8.9	Cas test pour la validation de la Formulation Lagrangienne Réactualisée - (a) essai de compression, (b) essai de cisaillement. . . . .	110

---

8.10	Essai de cisaillement avec un loi linéaire élastique sans non-linéarité - Contraintes de cisaillement $\sigma_{xy}$ en Pa : (a) <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> , (b) Abaqus <sup>TM</sup> , (c) Systus <sup>TM</sup> . . . . .	113
8.11	Loi de comportement simplifiée utilisée dans le cadre de la validation du comportement mécanique : contraintes de Cauchy en fonction des déformations logarithmiques . . . . .	114
8.12	Influence de la loi de comportement lors de l'essai de compression de la plaque en grandes déformations - (a) géométrie initiale, (b) compression isotrope et (c) compression isotrope transverse. . . . .	116
8.13	Compression d'un cube 3D encastré en grandes déformations. . . . .	117
9.1	Maillage constitué de quadrangles linéaires à 4 points de Gauss (a) et à 1 point de Gauss (b) : intégration réduite (Feulvarch (2005)). . . . .	126
9.2	Maillage constitué de triangles linéaires à 3 points de Gauss (a) et à 1 point de Gauss (b) : intégration réduite (Feulvarch (2005)). . . . .	127
9.3	Élément P1+/P1 et P1-bulle/P1 dans le repère de référence $(\xi, \eta, \zeta)$ : (a) élément triangle, (b) élément tétraèdre. . . . .	130
9.4	Choix de la fonction d'interpolation pour le degré bulle dans le cas d'un élément triangle 2D - (a) polynôme de degré 3, (b) fonctions hiérarchiques. . . . .	131
9.5	Nouveau schéma d'intégration pour l'élément P1+/P1. . . . .	135
9.6	Écoulement de Poiseuille : formulation en pression. . . . .	138
9.7	Effet fontaine lors de l'écoulement de poiseuille. . . . .	138
9.8	Cas test de la cavité fermée : (a) le cas test, (b) exemple de résultats. . . . .	139
9.9	Comparaison des résultats obtenus sur <i>FEMLAB</i> <sup>TM</sup> et sur <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> avec les deux types d'éléments bulles développés. . . . .	139
9.10	Mise en évidence de l'incompressibilité en 3D. . . . .	140
9.11	Formulation mixte « vitesse-pression » pour l'étude d'un convergent à l'aide d'un modèle de Darcy : Perméabilité isotrope $K = 1.10^{-9} m^2$ , rayon intérieur $r_{int} = 0,1 m$ , rayon extérieur $r_{ext} = 1 m$ , pression extérieure $P_{ext} = 10^5 Pa$ et pression intérieure $P_{int} = 0$ . . . . .	141
10.1	Cas test Terzaghi : Influence de la pression hydrostatique sur le comportement des nappes - (a) bord bloqué, (b) bord libre et condition de symétrie. . . . .	145
10.2	Cas test Terzaghi : résultats numériques obtenus (a) bord bloqué, (b) bord libre et condition de symétrie. . . . .	145
10.3	Comparaisons analytiques / numériques (a) et vérification de l'influence sur le temps de remplissage (b). . . . .	146

11.1	Relation entre les degrés de liberté : écoulement contre une paroi . . . . .	150
11.2	Écoulement dans un conduit : Élément mixte P1+/P1 en vitesse-pression et relation cinématique pour la paroi imperméable. . . . .	153
11.3	Analyse de l'influence des relations cinématiques entre degrés de liberté sur la modélisation en grandes déformations de la compression d'une plaque présentant des effets de courbures. . . . .	154
11.4	Principe de l'algorithme de remaillage . . . . .	156
11.5	Génération du contour pour la création du fichier de géométrie (*.geo); suppression de nœuds lors de la définition du contour et création de nœuds lors du remaillage. . . . .	157
11.6	Projection d'un nœud du nouveau maillage dans un élément de l'ancien. . . . .	158
11.7	Utilisation de la librairie de remaillage de <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> et de l'algorithme de mapping : écoulement de Stokes par une méthode mixte vitesse-pression. . . . .	159
11.8	Remaillage et mapping à l'aide des routines développées dans <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> : compression non-linéaire des nappes. . . . .	160
13.1	Principe de couplage : algorithme pour le procédé <i>VARTM</i> - couplage fort itératif entre l'écoulement de la résine et la déformation des nappes avec la prise en compte du modèle de Terzaghi. . . . .	167
13.2	Loi de comportement mécanique des préformes utilisée pour l'injection d'une jonction en « T ». . . . .	168
13.3	Injection d'un T : (a) distribution de pression en (Pa) sur la préforme déformée, (b) orientation de perméabilité sur la préforme initiale et conditions aux limites. . . . .	169
13.4	Comparaison des porosités en fonction du degré de remplissage (rapport entre le volume rempli et le volume total) pour différents niveaux de pression et les lois de comportement linéaire (a) et non-linéaire (b). . . . .	170
14.1	Principe de couplage : algorithme pour le procédé <i>LRI</i> - couplage fort itératif entre l'écoulement de la résine dans le drainant et l'écoulement dans les préformes compressibles. . . . .	173
14.2	Loi de comportement tronquée correspondant à la loi expérimentale 15.4. . . . .	174
14.3	Infusion d'une demi-coque par procédé <i>LRI</i> - (a) empilement préforme/résine, (b) pression mécanique du sac à vide avant infusion, (c) préforme saturée à 100% - condition de type 1, (d) préforme saturée à 100% - condition de type 2. . . . .	175
14.4	Conditions aux limites dans la zone de Stokes pour le procédé <i>LRI</i> : (a) type 1, (b) type 2. . . . .	176

---

14.5	Infusion d'une demi-coque par procédé <i>LRI</i> : évolution de la porosité et du temps de remplissage en fonction du degré de remplissage pour les deux types de conditions. . . . .	176
14.6	Principe du procédé <i>LRI</i> lorsque la résine est apportée depuis un pot de résine et <i>via</i> une pompe à vide. . . . .	177
14.7	Principe de couplage : algorithme pour le procédé <i>RFI</i> - couplage fort itératif entre l'écoulement de la résine dans le film de résine et l'écoulement dans les préformes compressibles. . . . .	179
14.8	Infusion d'une demi-coque par procédé <i>RFI</i> - (a) empilement préforme/résine, (b) pression mécanique due au sac à vide avant infusion, (c) préforme saturée à 100% - condition de type 1, (d) préforme saturée à 100% - condition de type 2. . . . .	180
14.9	Conditions aux limites dans la zone de Stokes pour le procédé <i>RFI</i> : (a) type 1, (b) type 2. . . . .	180
14.10	Infusion d'une demi-coque par procédé <i>RFI</i> : évolution de la porosité et du temps de remplissage en fonction du degré de remplissage. . . . .	181
14.11	Infusion d'une plaque plane par procédé <i>RFI</i> : évolution de la pression hydrostatique à la frontière Stokes-Darcy en fonction du degré de remplissage. . . . .	182
15.1	Infusion d'une plaque par procédé <i>LRI</i> - le principe est décrit sur la figure 1.6. . . . .	184
15.2	Dimension du stratifié (en <i>mm</i> ) avant infusion. . . . .	185
15.3	HexFlow <sup>®</sup> RTM 6 Viscosité isotherme. . . . .	185
15.4	Essai de compression des préformes : (a) machine de compression type Z300 ZWICK 300kN, (b) courbe de compression Cauchy-logarithmiques et porosité correspondante. . . . .	186
15.5	Compacité maximale pour deux types d'arrangements parfaits de fibres cylindriques. . . . .	187
15.6	Compression de la préforme : conditions aux limites et dimensions en <i>mm</i> (voir aussi figure 15.9). . . . .	188
15.7	Quantité de résine infusée en fonction du temps de remplissage. . . . .	189
15.8	Infusion d'une plaque par procédé <i>LRI</i> : (a) photographie de la plaque infusée, (b) Mesures d'épaisseur en <i>mm</i> après démoulage. . . . .	189
15.9	Infusion d'une plaque plane (distribution de pression) : Test de validation du procédé <i>LRI</i> . . . . .	191
15.10	Infusion d'une plaque plane par le procédé <i>LRI</i> : évolution de la porosité et du temps de remplissage en fonction du degré de remplissage. . . . .	191



A.1	Milieu continu en cours d'évolution . . . . .	215
D.1	Repère utilisé pour la description du comportement isotrope transverse. . .	230
E.1	Procédure de calcul des déplacements - Intégration des déformations le long du chemin le plus approprié . . . . .	233
E.2	Compression des nappes suivant le modèle de Terzaghi . . . . .	233
H.1	Écoulement de Couette - (a) condition « outflow » $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0$ , (b) pas de conditon « outflow » . . . . .	242
I.1	cas test Stokes : Étude de l'écoulement de Poiseuille. . . . .	243
I.2	cas test Darcy : Étude d'un divergent. . . . .	245
K.1	Comparaison du profil de vitesse suivant $x$ pour l'écoulement de Poiseuille pour des perméabilités égale à $1 m^2$ , $1.10^{-1} m^2$ , et $1.10^{-3} m^2$ . . . . .	252
K.2	Comparaison du profil de vitesse suivant $x$ entre <i>FEM-LAB</i> <sup>TM</sup> et <i>PROF-</i> <i>LOT</i> <sup>TM</sup> pour l'écoulement de Poiseuille et une perméabilité de $1 m^2$ . . . .	252

# Liste des tableaux

1.1	Comparaison des matériaux composites et des métaux (Extrait des « Techniques de l'ingénieur » A7790 Negrier et Rigal (1991)). . . . .	10
1.2	Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone, des fibres de verre (E) et des fibres d'aramide (d'après Berthelot (2005)). . . . .	13
8.1	Synthèse des caractéristiques des principales formulations matérielles : Formulation Lagrangienne Totale, Formulation Lagrangienne semi-Réactualisée et Formulation Lagrangienne Réactualisée. . . . .	91
8.2	Synthèse des résidus et des matrices tangentes associés aux Formulations Lagrangienne Totale, semi-Réactualisée et Réactualisée. . . . .	101
8.3	Principales mesures de déformations utilisées dans les codes de calculs, d'après Coirier (2001). . . . .	103
8.4	Comparaison des résultats obtenus pour l'essai de compression sur le champ de déplacement $u_y$ et la déformation $E_{yy}$ dans un cas linéaire sans non-linéarité géométrique : résultats analytiques, Abaqus <sup>TM</sup> , <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> , Systus <sup>TM</sup> . . . . .	112
8.5	Déplacement $u_x$ de la face supérieure dans un cas linéaire sans non-linéarité géométrique : Abaqus <sup>TM</sup> , <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> , Systus <sup>TM</sup> . . . . .	112
8.6	Comparaison des résultats obtenus pour l'essai de compression sur le champ de déplacement $u_y$ et la déformation $\epsilon_{yy}$ en élasticité linéaire avec non-linéarités géométriques : Abaqus <sup>TM</sup> , <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> , Systus <sup>TM</sup> . . . . .	113
8.7	Déplacement $u_x$ de la face supérieure pour l'essai de cisaillement en élasticité linéaire avec non-linéarités géométriques : Abaqus <sup>TM</sup> , <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> , Systus <sup>TM</sup> . . . . .	114
8.8	Comparaison des résultats obtenus pour l'essai de compression sur le champ de déplacement $u_y$ et la déformation $E_{yy}$ en hyperélasticité non-linéaire sans non-linéarité géométrique : Systus <sup>TM</sup> , <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> . . . . .	115

8.9	Comparaison des résultats obtenus pour l'essai de compression sur le champ de déplacement $u_y$ et la déformation $\epsilon_{yy}$ en hyperélasticité avec non-linéarités géométriques : Systus <sup>TM</sup> , PRO-FLOT <sup>TM</sup> . . . . .	115
11.1	Étude de la conservation de la masse (perte « - » ou gain « + » relatif de masse) et du temps de calcul pour les méthodes directes et GMRES en fonction du coefficient de pénalité $K$ . . . . .	154

# Introduction générale

Les matériaux composites résultent de l'association d'une matrice et de renforts qui en se combinant, donnent un matériau hétérogène souvent anisotrope. L'intérêt de ces matériaux réside principalement dans l'équilibre entre le gain de masse par unité de volume et les performances de la structure. Contrairement aux matériaux traditionnels, les propriétés mécaniques et physiques spécifiques (rapportées à la masse) des matériaux composites peuvent être adaptées à la structure dans laquelle ils sont employés. Ainsi, il ne s'agit plus seulement de choisir le matériau et la géométrie de la structure mais également de définir l'organisation interne du matériau.

Les matériaux composites à matrice organique et à fibres de verre ou de carbone trouvent de plus en plus d'applications dans la réalisation de pièces structurales de dimensions diverses dans de nombreux secteurs industriels tels que l'aéronautique, la construction navale, l'automobile, l'industrie chimique, le bâtiment . . . . Dans ces secteurs, le remplacement des structures métalliques par les matériaux composites a été essentiellement motivé par l'allègement. Les propriétés mécaniques obtenues sont égales voire même supérieures à celles des pièces métalliques, en particulier dans l'aéronautique où l'utilisation de ces matériaux s'est imposée et ne cesse de croître.

Les propriétés physiques et mécaniques des matériaux composites sont intimement liées aux procédés d'élaboration utilisés. Ces procédés se scindent en deux grandes catégories. Les procédés par voie humide pour lesquels le mélange entre les renforts et la matrice est réalisé dans le semi-produit dit « pré-imprégné » avant la phase de mise en forme, et les procédés par voie sèche pour lesquels le mélange est réalisé par injection ou infusion pendant la phase de réalisation et de mise en forme de la pièce finie ce qui réduit de façon conséquente les coûts de stockage et permet une augmentation des épaisseurs de nappes utilisées. De ces deux grandes catégories découlent une multitude de brevets et d'acronymes décrivant des procédés qui diffèrent principalement par la géométrie des moules utilisés, le type de renfort ou de matrice, la chronologie du procédé, . . . . Aujourd'hui les fournisseurs de matériaux cherchent à promouvoir de nouveaux constituants et

de nouveaux procédés permettant d'allier les performances des pré-imprégnés aux avantages économiques des procédés par voie sèche. Actuellement les procédés par injection de type RTM (Resin Transfer Molding) sont de plus en plus employés dans l'industrie. Ils bénéficient d'une bonne maîtrise et proposent une excellente alternative économique aux pré-imprégnés habituellement employés dans les domaines hautes performances. Les outils de conception et d'analyse de la phase de mise en forme sont bien maîtrisés et nombreux. Ils permettent une large diffusion industrielle de cette technique d'élaboration (économique, polyvalente, ...).

Parmi les nouvelles solutions technologiques, les plus prometteuses visent à élaborer des structures composites en infusant une résine liquide à travers l'épaisseur de renforts multiaxiaux secs. Deux principales technologies sont utilisées : des procédés employant des films de résine solide (*RFI* : Resin Film Infusion) et des procédés pour lesquels la résine est apportée au moyen d'un tissu drainant sous forme liquide (*LRI* : Liquid Resin Infusion). L'industrialisation récente de ces procédés pose néanmoins quelques problèmes de qualité et de maîtrise des propriétés finales de la structure. Par ailleurs, les renforts multiaxiaux *NC2* développés dans le cadre des technologies par infusion par *Hexcel Reinforcements* méritent une attention particulière en raison de leurs bonnes propriétés mécaniques et leur coût faible par rapport aux solutions traditionnelles. Afin de promouvoir des outils de conception et d'aide à l'élaboration (de nature numérique et expérimentale) dans le cadre de l'infusion de renforts *NC2*, une collaboration est née entre *Hexcel Reinforcements* et le département Mécanique et Matériaux (*MeM*) de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne (*ENSM-SE*). A l'issue de cette collaboration, deux thèses ont permis de mieux comprendre les différents mécanismes rencontrés dans les procédés par infusion. Les travaux d'Elbouazzaoui (2004) ont proposé une première analyse de la perméabilité transverse des nappes *NC2* en régime transitoire et saturé. Un suivi de la réticulation et des contraintes résiduelles et de service à l'aide de capteurs optiques insérés dans les nappes sèches ont également permis une meilleure compréhension des phénomènes physiques (Vacher (2004)).

Les mécanismes physiques rencontrés ici, mis en évidence lors de ces travaux et dans la littérature, sont complexes. Ils nécessitent la mise en œuvre d'une analyse complète des phénomènes multi-physiques (mécanique des solides, mécanique des fluides, thermique, ...) afin de répondre aux difficultés rencontrées dans la maîtrise des propriétés physiques des structures finales (épaisseur, taux de fibres, ...) et donc de leurs propriétés mécaniques. Cette modélisation complète devant permettre l'intégration d'un outil de calculs et d'aide à la décision dans un logiciel de calcul. Dans ces circonstances, une nouvelle

---

collaboration entre *ESI-GROUP*, éditeur de logiciel de calcul par éléments finis et le département *MeM* de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne est née dans le cadre de la mise au point d'un outil complet de simulation des procédés par infusion. Cette étude s'inscrit donc plus particulièrement autour de la modélisation et du développement d'un logiciel de simulation numérique s'appuyant sur le logiciel de simulation *PAM-RTM*<sup>TM</sup>, développé et commercialisé par *ESI-GROUP*. La présentation de ce travail est divisée en quatre parties :

- La première partie est consacrée à la présentation du cadre de l'étude. Après une introduction sur les matériaux composites et les nouveaux renforts multiaxiaux utilisés dans le cadre de l'infusion, les procédés d'élaboration des matériaux composites par infusion *LRI* et *RFI* sont présentés. Une revue bibliographique générale est ensuite menée sur la modélisation des procédés par injection puis axée sur les procédés par infusion. Un certain nombre de problèmes plus spécifiques sont analysés à cette occasion. Des analyses plus précises sont notamment réalisées sur le couplage fluides / structures lors de l'infusion, les conditions aux limites aux interfaces, le problème de conservation de la masse et les problèmes de suivi du front de fluide. A partir de cette revue bibliographique, une analyse des besoins en terme de simulation est réalisée. Après une courte description des libraires *PRO-FLOT*<sup>TM1</sup>, la position de l'étude est enfin définie et les objectifs clairement exposés.
- Dans la deuxième partie, une modélisation complète des procédés par infusion de type *RFI* / *LRI* est proposée. Un premier chapitre est consacré aux différentes hypothèses réalisées et à leur justification. Au cours de ce chapitre, une analyse de l'échelle de la modélisation est présentée. Elle permet d'aboutir à deux modèles macroscopiques pour l'étude des procédés *LRI* et *RFI*. Une étude détaillée des phénomènes mécaniques est ensuite réalisée. Elle repose sur la description complète de l'écoulement de la résine à l'intérieur et à l'extérieur de préformes, l'écoulement interne étant lui même couplé à la compression des nappes de renforts. Cette analyse mécanique est ensuite complétée par une étude des phénomènes thermo-chimiques. Enfin, un dernier chapitre propose une synthèse des différents mécanismes et de leurs interactions. A l'issue de ce chapitre une modélisation complète des procédés *LRI* et *RFI* est proposée. Elle décrit tous les mécanismes de couplage thermo-mécano-physico-chimique et l'ensemble des conditions aux limites spécifiques à ces deux types de procédés.

---

<sup>1</sup>libraires à la base du solveur de *PAM-RTM*<sup>TM</sup>

- La troisième partie composée de cinq chapitres décrit les principaux outils numériques développés dans les libraires *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> dans le cadre de l'intégration des modèles d'infusion exposés dans la partie précédente. Un premier chapitre est consacré à l'intégration d'un comportement mécanique non-linéaire en grandes déformations pour décrire la déformation des préformes. Elle comprend à la fois la description de la formulation utilisée et la validation du modèle développé. Un second chapitre décrit le traitement de l'écoulement incompressible de la résine à l'intérieur et à l'extérieur des préformes. Une formulation mixte « vitesse - pression » basée sur les éléments P1+/P1 ou P1-bulle/P1 choisis dans le cadre du traitement des équations de Stokes est décrite puis validée. Cette formulation est également appliquée au traitement de l'écoulement dans le milieu poreux (équation de Darcy). Dans un troisième temps l'intégration des formulations *ALE* et du modèle de Terzaghi est décrite brièvement. Une analyse de la formulation *ALE* et de son intérêt dans le cas d'un problème couplé est proposée puis le modèle de Terzaghi est validé analytiquement. Le chapitre suivant est consacré aux traitements numériques de la géométrie : l'algorithme de remaillage pour le traitement de la disparition de la zone de résine et l'implémentation d'une méthode pour le traitement de relations linéaires entre les degrés de liberté (application de conditions normales ou tangentielles). Une brève synthèse est enfin réalisée.
- La dernière partie de ce travail présente les premiers résultats obtenus dans le cadre de simulations d'infusion. Une première analyse décrit l'interaction entre le fluide et la structure (les nappes de renforts). Dans ce cas la zone de résine n'est pas représentée. Une débit d'injection ou une pression constante est appliqué directement sur les préformes qui se déforment sous l'action de la pression mécanique appliquée par le sac à vide et de la pression de la résine à l'intérieur des pores (procédé proche des techniques de type *VARTM*). Les deux chapitres suivants sont consacrés aux résultats numériques obtenus dans le cadre des procédés *RFI* et *LRI*. Pour chaque simulation une description de l'algorithme de couplage entre les différents mécanismes physiques est proposée. Les critères de convergence sont clairement exposés et les premiers résultats obtenus sont commentés. Enfin, les résultats expérimentaux obtenus lors d'une première série d'essais dans le cadre de la qualification du modèle *LRI* sont présentés. A partir de ces premières constatations expérimentales, une réflexion sur les perspectives de validation est proposée.

# Première partie

## Cadre industriel de l'étude : l'infusion





# Chapitre 1

## Les matériaux composites et leurs procédés d'élaboration

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Les matériaux composites structuraux . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1.1	Définition . . . . .	7
1.1.2	Les propriétés . . . . .	8
1.1.3	La matrice . . . . .	11
1.1.4	Les renforts . . . . .	12
1.1.5	Cycle de pression température . . . . .	15
<b>1.2</b>	<b>Les procédés . . . . .</b>	<b>16</b>
1.2.1	Les procédés par voies humides ou pré-imprégnées . . . . .	16
1.2.2	Les procédés par voie sèche . . . . .	16
<b>1.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>20</b>

---

## 1.1 Les matériaux composites structuraux

### 1.1.1 Définition

Un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est globalement supérieur à celui des composants pris séparément. Pour les matériaux composites structuraux, *i.e.* participant à la rigidité d'une structure, le but est donc d'élaborer des matériaux dont les propriétés, à masse égale, seront meilleures que celles des matériaux classiques. Un matériau composite structural est toujours élaboré

à partir de l'association de deux constituants de base, les renforts dont le rôle est de fournir les principales propriétés mécaniques et dont la répartition et surtout l'orientation dépendent des sollicitations mécaniques de la structure, et la matrice dont la principale fonction est d'assurer le transfert de charge entre les renforts et de les préserver des agressions extérieures. C'est également la matrice qui donne la forme finale de la pièce. A ces deux composants principaux peuvent s'ajouter des additifs qui permettent de modifier l'aspect, ou les caractéristiques du matériau : amélioration de l'adhérence entre les renforts et la matrice, pigments de coloration, agents anti-UV, charges ignifugeantes, isolation thermique ou acoustique . . . .

Les propriétés des matériaux composites résultent de celles de leur constituants, de leur distribution et de leur répartition géométrique ainsi que de leur fraction volumique. A la différence des matériaux « classiques », les caractéristiques mécaniques ne sont connues qu'après fabrication du produit fini puisque le produit (la structure) est réalisé en même temps que le matériau. Ceci constitue bien sûr un grand avantage, mais rend la conception de structures plus complexe puisqu'il ne s'agit plus seulement de choisir le matériau et la géométrie de la structure mais également d'en définir l'organisation interne. L'aspect anisotrope du matériau constitue l'une des caractéristiques fondamentales des composites : la possibilité de contrôler les propriétés souhaitées par une conception adaptée.

### 1.1.2 Les propriétés

Les composites à matrice organique représentent 99% des matériaux composites. Ils sont constitués d'une matrice thermoplastique ou thermodurcissable et d'une structure de renforts qui peut être en fibre de verre, de carbone, d'aramide ou encore naturelle. Il existe également des matériaux composites à structures non organiques (métallique ou céramique) dont la diffusion reste cependant marginale (Dopler *et al.* (1999)).

#### 1.1.2.1 Classement des composites

Les matériaux composites sont généralement scindés en deux catégories ; les composites « Grandes Diffusion » (GD) qui allient des coûts faibles à des caractéristiques moyennes et s'emploient principalement pour des applications grandes séries (Plastics (2003), Plastics (2002b), Plastics (2002c)) et les composites « Hautes Performances » (HP) dont les propriétés de la structure autorisent leur emploi dans des structures travaillantes (Plastics (2002a)).

**Les composites « Grande Diffusion »** possèdent des caractéristiques mécaniques souvent inférieures à celles des matériaux de références tels que l'acier. Ils sont utili-

sés principalement pour des raisons économiques et pour leur masse faible. Les procédés employés pour la fabrication de ces composites (injection, pultrusion ...) permettent d'obtenir des pièces de formes complexes en une seule opération. Ils conviennent donc aux grandes séries et sont généralement à base de fibres de verre. Ils sont employés principalement dans les applications non travaillantes pour l'industrie des transports (voir la figure 1.1-a) ou les biens d'équipement.



Figure 1.1 – Exemple d'utilisation de composite GD, (a) Aston Martin V12 (Plastics (2002c)) et HP, (b) Airbus A380.

**Les composites « Hautes Performances »** se caractérisent par des propriétés mécaniques plus élevées que celles des composites GD en contrepartie d'un coût global plus important en raison du prix des matériaux utilisés et des moyens de fabrication associés (autoclave, *RTM*, ...). Ces matériaux sont utilisés dans des applications de pointe telles que la Formule 1, l'aéronautique (voir la figure 1.1-b), les bateaux de compétition, les loisirs, ... Historiquement, c'est dans le secteur de l'aéronautique que les composites HP ont été les mieux rentabilisés, compte tenu des économies générées (carburant) et de la taille des structures composites. Aujourd'hui l'utilisation des composites HP s'étend de plus en plus en raison de l'évolution de la maîtrise des techniques de conception de nouvelles pièces composites. Ces dernières années est apparue la conception dite « intégrale » qui consiste à minimiser le nombre de sous ensembles par une re-conception des produits en utilisant la phase de cuisson comme phase d'assemblage (transmission de TGV développée au laboratoire MeM en collaboration avec Gec Alsthom - Cerisier (1998)).

### 1.1.2.2 Les avantages

La principale caractéristique des matériaux composites par rapport aux matériaux « classiques » réside dans l'anisotropie. Cette faculté doit être mise à profit par l'ingénieur lors de la conception d'une nouvelle structure afin de réaliser un élément adapté aux

sollicitations qu'il devra supporter. Un matériau composite n'existe pas sans son application et inversement. Les matériaux composites sont par ailleurs légers avec des masses volumiques comprises entre 1 et 3,5  $g/cm^3$  ; cette propriété est à l'origine de leur utilisation dans l'industrie aéronautique et spatiale, et de leur emploi dans le cadre de l'allégement des structures portantes. Cette association de la légèreté aux propriétés anisotropes nous amène à définir un critère de comparaison : les caractéristiques mécaniques spécifiques ou massiques c'est à dire les performances mécaniques des matériaux rapportées à la masse volumique. Le tableau 1.1 indique que les modules spécifiques et les résistances spécifiques des matériaux composites sont de une à six fois supérieurs à ceux des alliages « classiques » ce qui signifie qu'une structure unidirectionnelle sollicitée uniquement dans la direction des renforts pourrait être six fois plus légère qu'une structure fabriquée à l'aide d'un alliage. Notons enfin que les coûts d'élaboration d'une structure composite sont très intéressants. Leur structure permet souvent une simplification des pièces et l'intégration de fonctions. Les procédés de fabrication associés sont souvent plus économiques que ceux employés pour la mise en forme des métaux.

Caractéristiques mécaniques métaux et matériaux composites	Acier 35 NCD 16	Aluminium AU 4 SG	Carbone HR résine époxyde	Verre R résine époxyde
Masse volumique ( $kg/m^3$ )	7 900	2 800	1 500	2 000
Module de Young ( $GPa$ )	200	72	130	53
Résistance à la rupture ( $MPa$ )	1850	500	1000 à 1300	2000
Module spécifique ( $MN m kg^{-1}$ )	25	26	87	26,5
Résistance spécifique ( $MN m kg^{-1}$ )	0,24	0,18	0,65 à 0,85	0,9 à 1
Coefficient de dilatation linéique ( $^{\circ}C^{-1}$ )				
- longitudinal	$12 \cdot 10^{-6}$	$23 \cdot 10^{-6}$	$-0,2 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$
- transversal	$12 \cdot 10^{-6}$	$23 \cdot 10^{-6}$	$35 \cdot 10^{-6}$	$31 \cdot 10^{-6}$

Tableau 1.1 – Comparaison des matériaux composites et des métaux (Extrait des « Techniques de l'ingénieur » A7790 Negrier et Rigal (1991)).

### 1.1.2.3 Les limites

En raison de contraintes de mise en forme, de liaison avec les autres pièces et de stabilité, le gain de masse par rapport aux alliages métalliques se réduit à quelques dizaines de pourcent. Néanmoins, il reste avantageux pour toutes les applications où ce paramètre est très important en particulier pour l'aéronautique, l'aérospatial, l'énergie et les transports, . . . . Lorsque plusieurs directions sont renforcées et sollicitées, les caractéristiques spécifiques diminuent fortement. Elles sont par exemple divisées par deux lorsque deux directions

perpendiculaires sont renforcées. La présence de deux constituants conduit souvent à des problèmes d'homogénéité de la structure et à l'apparition de zones sèches responsables d'une forte dégradation des caractéristiques mécaniques. Ces zones sèches sont également responsables de l'augmentation de l'absorption d'humidité (Jedidi (2004)) et induisent une diminution de la résistance aux produits chimiques. Enfin, elles conduisent à une faible résistance au délaminage entre les couches de renforts. L'apparition de ces zones sèches étant étroitement liée au procédé de fabrication, l'un des objectifs est aujourd'hui de mettre au point des procédés capable de les éliminer. Enfin, les températures de service des matériaux composites structuraux actuels ne peuvent dépasser les 200°C, voire les 300°C compte tenu de la nature organique de la matrice.

### 1.1.3 La matrice

#### 1.1.3.1 Propriétés

La matrice maintient les fibres entre elles en jouant le rôle de liant dans le composite. Elle assure également le transfert de charge entre les renforts, tout en les maintenant dans leur position et leur orientation. Enfin, elle protège le composite des agressions extérieures et donne la forme désirée au produit final. Outre ces aspects intrinsèques, la qualité d'imprégnation de la résine dans les renforts va jouer un rôle essentiel dans la tenue mécanique du matériau composite. Pour obtenir des caractéristiques plus élevées, la résine doit, dans sa configuration finale, occuper tous les espaces inter-fibres et présenter le moins de bulles d'air possible. Pour réaliser cette imprégnation, la résine doit passer par un état liquide puis être polymérisée et réticulée par activation thermique et / ou chimique qui va fixer également les conditions d'utilisation de la structure et notamment la température maximale de service. Cette réaction chimique et la température d'activation et de service dépendent donc du type de résine employé et c'est tout naturellement que les matériaux composites sont classés suivant le type de résine.

Il existe deux types de résine. Elles atteignent leur état solide par la création de liaison au niveau des monomères lors du cycle de réticulation. Ces deux types se distinguent par le niveau d'énergie des liaisons créées : le faible niveau énergétique des liaisons créées au sein des thermoplastiques autorise la réversibilité de la structure polymère et donc le recyclage alors que les thermodurcissables présentent une réaction de réticulation irréversible. Les résines thermoplastiques sont économiquement intéressantes mais leurs propriétés mécaniques et thermo-mécaniques sont faibles. Les températures d'activation de la polymérisation sont de l'ordre de quelques centaines de degrés ce qui conduit à des coûts matériels importants. Cette température d'activation conduit cependant à des températures de service plus élevées que celles des composites à base de résines thermodur-

cissables. Ces résines thermoplastiques sont essentiellement utilisés pour les composites GD, mais actuellement des développements sont en cours chez Hexcel Reinforcements pour proposer de telles résines pour les composites HP. Parmi les résines thermodurcissables, les plus utilisées sont les résines polyesters. Notons également que les très bonnes propriétés mécaniques des résines époxydes sont à l'origine de leur très large utilisation pour les composites HP.

#### 1.1.4 Les renforts

Les renforts apportent aux matériaux composites ses performances mécaniques (rigidité, résistance à la rupture) et une partie de ses propriétés thermiques, électriques et chimiques tout en offrant un gain de masse avantageux vis à vis des métaux. Les familles de fibres sont variées. Elles peuvent être classées suivant leur nature, leurs propriétés ou encore leur architecture.

##### 1.1.4.1 Caractéristiques mécaniques

Les caractéristiques mécaniques des trois types de fibres les plus répandues dans le domaine des composites hautes performances sont synthétisées dans le tableau 1.2. Ces caractéristiques varient d'un fabricant à l'autre. Les fibres de carbone restent la référence pour les renforts à fibres continues même si leur coût demeure relativement élevé par rapport aux autres fibres. Elles possèdent d'excellentes propriétés en traction et compression tout en alliant une faible densité. Les fibres de verre sont très utilisées dans les composites grande diffusion pour leur excellent rapport performances mécaniques/prix, même si leur propriétés mécaniques restent faibles par rapport aux fibres de carbone. Les propriétés mécaniques de ces fibres se dégradent fortement avec l'humidité. Enfin, les fibres d'aramides possèdent des propriétés mécaniques similaires à celles des fibres de carbone pour une densité légèrement inférieure (1,5) mais surtout pour un prix 3 à 5 fois inférieur. La plus connue est le Kevlar<sup>®</sup> de DuPont de Nemours. Elles possèdent d'excellentes propriétés d'absorption, de tenue au choc et de résistance à la fatigue mais en revanche posent des problèmes d'adhérence à la matrice ce qui conduit à de mauvaises propriétés en compression.

##### 1.1.4.2 Propriétés thermiques

Une caractéristique importante des fibres est leur coefficient de dilatation négatif ou quasi nul dans le sens axial. Cette propriété peut être bénéfique ou nuisible selon le type d'application. Associées à une matrice à coefficient de dilatation positif, ces fibres vont avoir tendance à créer des contraintes thermo-mécaniques néfastes au niveau des interfaces

Caractéristiques mécaniques des fibres	Carbone (HR)	Verre (E)	Aramide (kevlar 49)
Masse volumique $\rho$ ( $kg/m^3$ )	1 750	2 600	1 450
Diamètre ( $\mu m$ )	5 à 7	10 à 20	12
Module de Young $E_f$ (GPa)	230	73	130
Contrainte à la rupture $\sigma_{fu}$ (MPa)	3000 – 4000	3400	3600
Module spécifique $E_f/\rho$ ( $MN m kg^{-1}$ )	130	28	90
Contrainte spécifique $\sigma_{fu}/\rho$ ( $MN m kg^{-1}$ )	1,71 – 2,29	1,3	2,48

Tableau 1.2 – Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone, des fibres de verre (E) et des fibres d’aramide (d’après Berthelot (2005)).

(Gigliotti (2004)). En revanche, en utilisant des arrangements de fibres judicieux il est possible en théorie de fabriquer des matériaux présentant une dilatation nulle (Grosset (2004)).

### 1.1.4.3 Les différents types d’architecture

Les fibres utilisées possèdent des diamètres très faibles. Pour simplifier la manipulation des fibres, des semi-produits dans lesquels plusieurs milliers de fibres sont placées côte à côte, selon des directions connues, sont utilisés. Cette orientation peut être réalisée à partir de différentes architectures (voir figure 1.2) : les unidirectionnels (UD), les bidirectionnels (tissé, tressé, ...) ou les renforts multi-axiaux. Les renforts sont donc commercialisés sous forme de nappes qui peuvent être imprégnées de résine (pré-imprégnées) ou non (nappes sèches) en fonction du procédé d’élaboration choisi (Cf. §1.2).

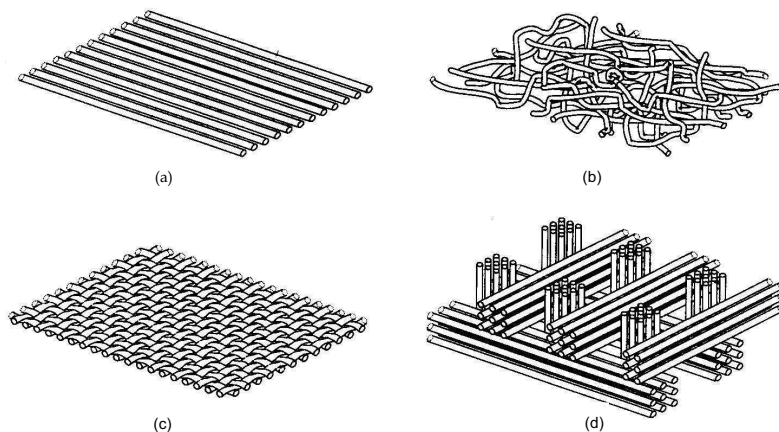


Figure 1.2 – Différents types de renforts : (a) nappe unidirectionnelle, (b) mat, (c) tissu, (d) tissage tridimensionnel orthogonal.



Les unidirectionnels (voir figure 1.2-a) présentent des performances mécaniques qui dépendent du type de renforts (verre, carbone, etc ...) et autorisent des sollicitations uniquement dans la direction des fibres. Les fibres peuvent se présenter sous forme de bobine (« Roving ») ou peuvent être reliées par un fil fin (« nappes »). A partir de ces nappes, des séquences d'empilements sont élaborés en fonction des propriétés mécaniques attendues. Notons que les pré-imprégnés, produits semi-finis qui fournissent actuellement les meilleures performances mécaniques, sont élaborés à partir d'uni-directionnels. Actuellement, les coûts de manipulation et de conservation des uni-directionnels pré-imprégnés conduisent à l'utilisation de renforts multi-directionnels. Les multi-directionnels (voir figure 1.2-a, 1.2-b et 1.2-c) présentent des arrangements de fibres dans au moins deux directions (tissus 2D : figure 1.2-c). Ils peuvent également être munis d'un renfort dans la direction transverse (tissus 3D : figure 1.2-d). Le plus courant est le mat (voir figure 1.2-a) qui se présente sous forme de fibres placées aléatoirement dans l'espace. La structure ne présente pas de direction préférentielle (comportement quasi-isotrope). Les propriétés mécaniques sont moyennes. Ils sont utilisés pour des structures non travaillantes. Les tissus (figure 1.2-c) permettent de répondre aux économies de manipulations mais également au renfort dans les directions transverses par couture d'empilement de tissus 2D ou tissage 3D (figure 1.2-d). Ils permettent une bonne mise en forme du renfort puisque la structure autorise une déformation en cisaillement (nécessaire au drapage) sans détérioration. Ils peuvent être imprégnés ou non et sont caractérisés par une ondulation des mèches appelé embuvage. Ce phénomène provoque un désalignement des directions principales et donc un amoindrissement des propriétés mécaniques. Pour répondre à ce problème de nouveaux renforts multi-axiaux ont été développés.

#### 1.1.4.4 Les renforts multi-axiaux

Les renforts multi-axiaux désignent des matériaux élaborés à partir de nappes unidirectionnelles maintenues entre elles. Ce maintien est le plus souvent assuré par un fil de couture. Ces renforts sont particulièrement adaptés à une utilisation dans les procédés par voie sèche. Contrairement aux renforts tissés, ils ne présentent pas d'embuvage d'où le nom de *NCF* (Non Crimped Fabrics) développé par Airbus et de *NC2* (Non Crimped New Concept) développé par *Hexcel Reinforcements*. Les *NCF* reposent sur une dépose en continu de mèches contenant un faible nombre de fibres (3 000 à 24 000) qui sont ensuite cousues à travers l'épaisseur. L'épanouissement des mèches reste assez limité compte tenu du concept utilisé, ce qui implique une dégradation des caractéristiques mécaniques par la présence de poches de résine entre les mèches (compression et cisaillement inter-laminaire ; Drapier et Wisnom (1999)). Ces espaces inter-mèches permettent néanmoins de faciliter l'écoulement de la résine lors de l'imprégnation (Drapier *et al.* (2002)). Enfin, le faible

nombre de fibres par mèche rend ce produit relativement onéreux. Les *NC2* sont élaborés à partir de mèches contenant un très grand nombre de fibres (24 000 à 80 000) qui sont épanouies (aplaties) puis juxtaposées de manière à former des nappes. Ces nappes sont ensuite déposées en continu pour former le renfort multi-axial. Les nappes obtenues sont très homogènes ce qui conduit à de bonnes caractéristiques mécaniques mais rend difficile l'écoulement de la résine lors de la mise en forme. Bien qu'il soit nécessaire de mettre en œuvre une étape supplémentaire dans la fabrication des *NC2* (« l'épanouissement des mèches »), le gain sur le coût total est de 20 à 30 % par rapport aux *NCF*. Le fil de couture permet de faciliter l'infiltration de la résine dans le renfort (Drapier *et al.* (2002)) bien qu'il soit à l'origine d'un désalignement des fibres qui réduit les caractéristiques mécaniques.

### 1.1.5 Cycle de pression température

Pour atteindre l'état final de la fabrication c'est à dire le durcissement de la résine il est nécessaire que les deux constituants subissent simultanément un cycle de pression et de température. Ce cycle est spécifique au système de résine et de durcisseur/accélérateur et il est donné par le fournisseur. Le cycle de pression permet par ailleurs le dégazage c'est à dire l'élimination des bulles d'air et des gaz volatiles résultant de la réaction thermo-chimique. Un exemple de cycle de pression / température est donné sur la figure 1.3 pour une résine époxyde.

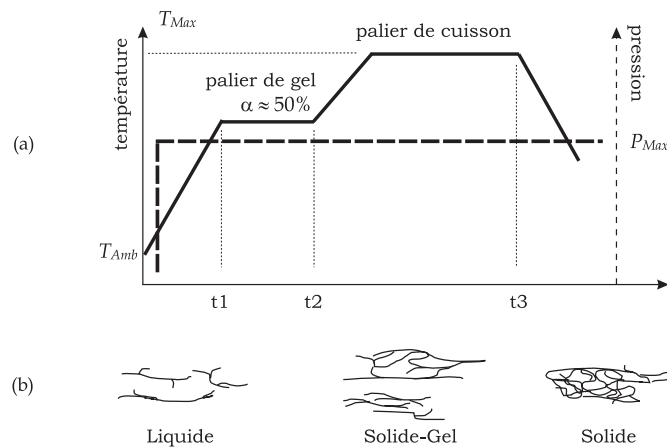


Figure 1.3 – Cycle de cuisson pour une résine époxyde : (a) pression et température en fonction du temps et (b) évolution correspondante de l'état de la résine thermodurcissable.

## 1.2 Les procédés

Historiquement, les propriétés mécaniques les plus élevées étaient obtenues en utilisant des renforts unidirectionnels pré-imprégnés en contrepartie de coûts élevés (main d'œuvre, stockage, matière et matériel). Depuis la fin des années 80, les procédés par voie sèche, ont permis de réduire considérablement ces coûts à condition d'utiliser des renforts secs tels que les multi-axiaux. Aujourd'hui ces nouvelles solutions permettent d'égaliser les propriétés mécaniques obtenues avec les UD's pré-imprégnés. Les principales limitations concernent les procédés de mise en œuvre. Ainsi de nombreux procédés sont sans cesse développés dans l'industrie afin d'améliorer la qualité de l'imprégnation et de maîtriser les caractéristiques de la pièce finale.

### 1.2.1 Les procédés par voies humides ou pré-imprégnées

Les nappes et les tissus pré-imprégnés résultent de l'association de fibres et de résine dans un état de polymérisation adapté à la mise en œuvre (drapage) mais aussi à sa conservation. Ils présentent l'avantage d'un emploi commode et permettent de maîtriser facilement les propriétés du produit fini en particulier la fraction volumique de fibre. En principe, une séquence d'empilement est réalisée puis la pièce est mise dans une cavité sous vide puis dans une autoclave qui applique un cycle de pression / température (voir paragraphe 1.1.5) propre aux pré-imprégnés utilisés. La pièce obtenue présente d'excellentes propriétés mécaniques résultant d'une faible porosité, d'une fraction volumique de fibre élevée et d'une répartition homogène de la résine. Mais cette qualité à un prix. Les coûts de stockage et de matière première sont très élevés. Ils seraient 40% moins importants si la résine et les renforts étaient stockés séparément. A ces coûts s'ajoutent des coûts de mise en œuvre et de matériel très importants.

### 1.2.2 Les procédés par voie sèche

L'apparition de ces procédés répond à un besoin de réduction des coûts à performances identiques. Ils sont utilisés principalement pour la mise au point de composites Hautes Performances dans les domaines de pointe tel que l'automobile, l'aéronautique, la construction navale, les installations éoliennes, ... Il existe principalement deux grandes familles de procédés desquelles découlent de nombreuses variantes. Les procédés par injection consistent à injecter une résine liquide dans un moule rigide. Ces procédés sont connus sous les acronymes *RTM* (Resin Transfer Molding), *VARTM* (Vacuum Assisted Resin Transfer Molding) ou *ICRTM* (Injection Compression Resin Transfer Molding). Pour répondre aux problèmes de remplissage rencontrés sur des structures de taille im-

portante et dans une stratégie de réduction permanente des coûts, les procédés par infusion font depuis une vingtaine d'années leur apparition. Ceux-ci sont plus connus sous les acronymes *VARI* (Vacuum Assisted Resin Infusion), *RIFT* (Resin Infusion under Flexible Tooling), *SCRIMP* (Seemann Composites Resin Infusion Molding Process), *RFI* (Resin Film Infusion), *LRI* (Liquid resin Infusion), ... Il faut noter que de nouveaux procédés sont sans cesse développés dans l'industrie des composites, même si les principes de base restent identiques. Nous nous proposons de décrire ici brièvement les grands principes qui sous-tendent les procédés actuellement les plus utilisés à savoir les procédés par injection type *RTM* puis les procédés par infusion *LRI* et *RFI* que nous nous proposons de modéliser dans ce travail.

### 1.2.2.1 Le procédé *RTM*

Le procédé par injection *RTM* est apparu au début des années 1980. Après une étape de préformage des renforts, les préformes sont placées dans un moule fermé muni d'une ou plusieurs buses d'injection et d'un ou plusieurs évents (Barbero (1998)). La résine est ensuite injectée à pression ou vitesse contrôlée puis un cycle de température est imposé (voir figure 1.4). Il est également possible de créer un vide d'air grâce à l'évent (procédé *VARTM*). L'injection de résine a lieu dans le plan des renforts. Les pièces créées possèdent des formes complexes à deux faces lisses pour une épaisseur finale contrôlée. La présence d'un moule rigide en deux parties peut entraîner un surcoût mais induit des temps de cycle courts et de faibles coûts de main d'œuvre pendant l'injection. Par ailleurs les fractions volumiques de résine et de fibres sont très bien contrôlées. En revanche, il est difficile d'atteindre un remplissage parfait du moule pour les pièces de grandes dimensions. Ces difficultés de remplissage conduisent à une étude de la stratégie de placement des points d'injection prenant en compte la variation de la viscosité de la résine pendant le remplissage (Kang *et al.* (2000)).

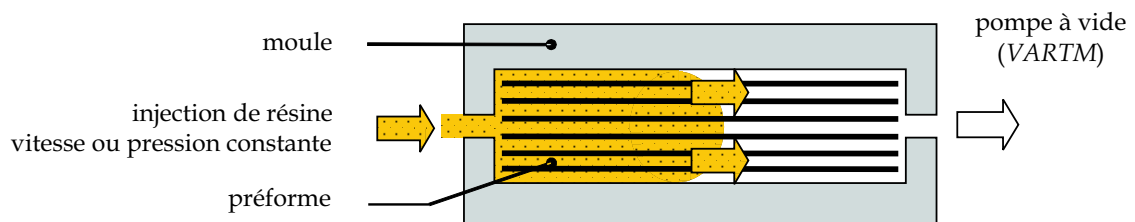


Figure 1.4 – Procédé *RTM* : Resin Transfer Molding (Barbero (1998)).

### 1.2.2.2 Les procédés par infusion *LRI* et *RFI*

Les procédés par infusion ont été mis au point ces dernières années afin de résoudre les problèmes de remplissage liés au procédé *RTM* sur de longues distances et de réduire les coûts de production. Ils consistent d'une manière générale à infuser la résine à travers l'épaisseur des renforts plutôt que dans leur plan sous l'action d'une pression motrice engendrée par le vide. L'idée de base de ces procédés était que des couches séparées et alternées de fibres et de résine pourraient permettre aux bulles d'air de s'échapper pendant le processus de cuisson et d'infusion en autoclave (Blest *et al.* (1999)). Cette technique améliorée depuis, permet la production de structures épaisses et de bonne qualité, tout en réalisant une économie par rapport aux techniques utilisant des pré-imprégnés et au procédé *RTM*. Parmi eux, nous nous proposons de modéliser ici plus précisément deux types de procédés regroupant l'ensemble des particularités des procédés par infusion : les procédés *LRI* (Liquid Resin Infusion) et *RFI* (Resin Film Infusion). Les modèles ainsi développés pourront aisément être appliqués dans le cadre de l'étude de nouvelles variantes reposant sur le même type de mécanismes physiques.

Afin d'éviter toute confusion dans la suite, le vocabulaire suivant est employé. Les préformes humides seront également qualifiées de nappes imprégnées et de stratifié. Les préformes sèches seront successivement appelées réseaux de fibres et nappes sèches. Enfin la zone de résine seule sera également qualifiée de zone purement fluide.

**Principe :** Le procédé *RFI* consiste à déposer les couches de fibres préformées au dessus de la couche de résine solide (voir figure 1.5). Afin d'assurer une bonne finition de la surface supérieure, une plaque perforée peut être placée au dessus de l'empilement nappes / résine. Un tissu absorbant est éventuellement utilisé pour absorber l'excédent de résine (généralement en fibre de verre). L'ensemble est ensuite isolé à l'aide d'un film en plastique anti-adhésif, puis introduit dans un système permettant d'imposer un cycle de pression (pompe à vide) et de température (autoclave ou table chauffante). Après application du cycle de température, la viscosité du film de résine décroît provoquant l'infusion de la résine à travers l'épaisseur des préformes sous l'action combinée du cycle de pression et de température. L'infiltration et la consolidation (réticulation de la résine) se déroulent en une seule et même étape (voir figure 1.5).

Plus récemment des techniques utilisant des lits de résine liquide ont fait leur apparition (*LRI*). Dans ce cas, la couche de résine est réalisée à l'aide d'un tissu drainant fortement perméable et placé au dessus de l'empilement de fibres préformées (voir figure 1.6). La déformation du tissu drainant est supposée négligeable devant les déformations à l'intérieur des préformes sèches et humides. Sa rigidité est très grande. Le différentiel de pression entre l'arrivée de résine, située au niveau du drainant, et l'évent, situé sur la base

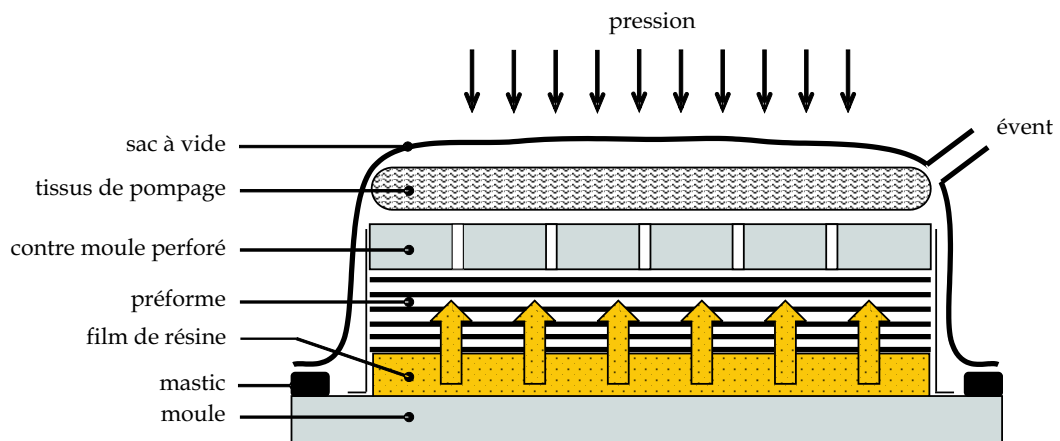


Figure 1.5 – Procédé *RFI* : Resin Film Infusion (Qi *et al.* (1999), Han *et al.* (2003), Antonucci *et al.* (2003) ...).

de la préforme, provoque l'infusion de la résine d'abord dans le drainant puis à travers l'épaisseur des préformes sèches (voir figure 1.6).

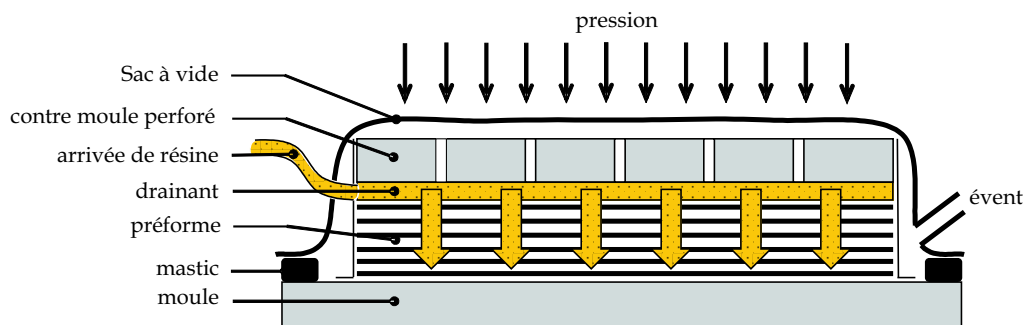


Figure 1.6 – Procédé *LRI* : Liquid Resin Infusion (Williams *et al.* (1996)).

Remarques : des tissus d'arrachage fortement perméables peuvent être placés sur les faces inférieures et supérieures des préformes afin d'obtenir de meilleurs états de surface. Le contre moule est facultatif mais est souvent employé car il permet une répartition homogène des épaisseurs et conduit ainsi à des fractions volumiques de fibres relativement constantes.

**Performances :** L'infusion dans le sens transverse présente un double avantage. D'abord en terme de temps de cycles puisque les pièces composites ont généralement des rapports section sur volume très faibles. Les distances de parcours de la résine sont donc faibles par rapport aux distances mises en jeu dans les procédés par injection classiques (*RTM*). Ensuite, en terme de qualité de l'infusion puisque ces faibles distances de parcours impliquent une meilleure dissociation des phases d'infusion et de réticulation de la résine. Ces pro-

cedés permettent de produire des composites possédant de bonnes propriétés mécaniques résultant d'une imprégnation homogène des renforts et de fortes fractions volumiques de fibres (60% de fibres sous certaines conditions de températures et de pressions). Ils sont relativement économiques par rapport au procédé *RTM* du fait de l'utilisation de moules semi-rigides et du nombre limité de manipulations. Enfin, les problèmes de zones sèches et de bulles d'air rencontrés dans les procédés par injection sur de longues distances sont en grande partie supprimés.

**Les limites :** D'une manière générale, malgré leurs concepts simples, les phénomènes physiques mis en jeu dans les procédés par infusion sont relativement complexes. Le contrôle de l'épaisseur et de la fraction volumique de fibres de la structure finale est extrêmement délicat. La phase de mise au point de nouvelles solutions composites par infusion est donc très coûteuse en terme de R&D. Elle repose essentiellement sur une analyse expérimentale du procédé puisqu'actuellement aucun outil analytique ou numérique ne permet de prévoir les variations d'épaisseurs constatées. Cette absence de dispositif de prédiction résulte d'un manque de connaissances au niveau des mécanismes régissant l'interaction entre les différents constituants (la résine et les fibres) et les différentes zones (la zone de résine seule et les nappes). A ce manque, il faut également ajouter les difficultés de caractérisation de certains paramètres du procédé notamment les viscosités, les phénomènes de capillarités et surtout les perméabilités transverses.

### 1.3 Conclusion

Les avantages fournis par les procédés par infusion de type *LRI* ou *RFI* sont nombreux et prometteurs, tant en terme de coût que de propriétés mécaniques finales des structures composites. Cependant leur maîtrise fait intervenir des phénomènes physiques complexes qui rendent difficile la prévision simultanée des temps de cycle, des épaisseurs et des fractions volumiques de fibres à l'aide des paramètres du procédé. Actuellement l'utilisation de ces procédés est limitée aux secteurs de pointe de l'industrie tant la phase de mise au point de nouvelles solutions est coûteuse. Sa migration vers des secteurs tels que les transports ou l'énergie nécessite la maîtrise rapide des conditions d'élaboration et des phénomènes physiques régissant les différents mécanismes ainsi que leurs interactions, afin de proposer et de fournir un outil permettant de prévoir les caractéristiques mécaniques et physiques de la pièce obtenue en fin d'infusion. C'est à ce niveau que se situe l'intérêt du développement d'un modèle multi-physique, puis d'un outil de simulation numérique associé, pour l'étude des procédés d'élaboration des matériaux composites par infusion.

# Chapitre 2

## Modélisation de l'infusion : État de l'art

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Difficultés et intérêt de la modélisation</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Revue bibliographique</b>	<b>23</b>
2.3.1	Les problèmes physiques rencontrés	23
2.3.2	Difficultés numériques	25
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

---

### 2.1 Introduction

Les procédés par infusion proposent une forte réduction des coûts d'élaboration et de mise en œuvre, tout en assurant des propriétés mécaniques aux moins égales à celles des UD's pré-impregnés et des procédés par injection (RTM, VARTM, ...). Ils restent néanmoins encore mal maîtrisés et contrôlés. Actuellement, la prédiction du comportement des préformes et de la résine lors de l'infusion à l'aide d'un modèle numérique n'est pas satisfaisante. De nombreuses études tentent d'apporter des informations en découplant les problèmes d'écoulement d'une part et de modification de la géométrie des renforts d'autre part, mais ce découplage n'est pas représentatif du phénomène physique réel. Seule l'étude d'un modèle général couplant tous les phénomènes mécaniques (solide et fluide) ainsi que les phénomènes thermo-chimiques associés à la réticulation de la résine sous l'action du cycle de température peut permettre de prévoir efficacement les propriétés physiques et mécaniques de la structure composite en service. Une revue bibliographique des travaux actuels sur la modélisation de l'infusion est présentée dans ce chapitre.



## 2.2 Difficultés et intérêt de la modélisation

L'analyse des procédés par infusion permet de dégager un certain nombre de phénomènes physiques que la modélisation devra prendre en compte. Actuellement le principal obstacle rencontré dans la modélisation de l'infusion concerne la prise en compte de l'écoulement d'un fluide (la résine) dans un milieu poreux subissant de grandes déformations, notamment lors du tirage du vide. Dans la littérature, des études expérimentales proposent d'étudier les interactions entre la résine et la déformation des renforts dans le milieu poreux saturé. A partir de ces constatations expérimentales, des modèles empiriques ou semi-empiriques sont élaborés, mais ils restent limités à des résines et des renforts multi-axiaux spécifiques et ne sont applicables que sous certaines conditions. Le couplage entre l'écoulement de la résine et la déformation du milieu est d'autant plus complexe que ces deux mécanismes interviennent alors que les préformes subissent de grandes déformations et de grandes rotations (Drapier *et al.* (2005), Kelly *et al.* (2006), ...). Par ailleurs, des essais mécaniques réalisés dans la direction transverse de préformes sèches et saturées mettent en évidence un comportement fortement non-linéaire de l'empilement de fibres sèches (Breard *et al.* (2004)). Lopatnikov *et al.* (2004) mentionnent la présence de phénomènes irréversibles dans cette même direction mais ceux-ci ne sont pas pris en compte dans les modèles numériques ou analytiques actuels. En conclusion, les déformations du renfort lors de l'infusion sont très rarement prises en compte par manque de connaissance. Pourtant, elles sont nécessaires pour la compréhension et la prédiction des variations d'épaisseurs et des fractions volumiques qui vont par ailleurs agir sur l'écoulement du fluide.

La modélisation ainsi que la simulation numérique des procédés par infusion constituent dans ce cadre un moyen efficace pour la maîtrise de ces procédés compte tenu de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu, ainsi que de la spécificité d'une analyse expérimentale (analyse appliquée à un couple particulier de préforme et de résine). Au delà de la maîtrise des épaisseurs et des fractions volumiques de fibres, la simulation numérique apporte également des outils efficaces pour la maîtrise et l'optimisation des temps d'infusion en agissant sur les paramètres du procédé. Par ailleurs, l'analyse numérique permet de prévoir les concentrations résiduelles de contraintes et ainsi d'effectuer des calculs de résistance mécanique bien plus précis sur des structures en service. Par exemple Ruiz *et al.* (2005) étudient l'influence de la température, de la fraction volumique de fibre et du degré de polymérisation de la résine sur les propriétés mécaniques d'un composite (répartition des contraintes). Enfin, et c'est sans doute le principal intérêt de cette modélisation, elle permet de remplacer la phase expérimentale de prototypage et de test pour la mise au point de nouvelles solutions composites par une phase de pré-choix

numérique industriellement peu coûteuse.

L'infusion apparaît comme un problème très complexe à modéliser. Elle mêle des problèmes mécaniques couplant à la fois des formulations en déplacement pour le comportement des nappes et en vitesse pour le comportement de la résine. Dans la suite de ce chapitre nous allons décrire l'état de l'art concernant les trois principales difficultés relatives à la mise au point d'un modèle multi-physique pour l'étude de l'infusion. Dans un premier temps, l'interaction entre l'écoulement de la résine et la déformation des préformes poreuses doit être prise en compte. Cette interaction concerne l'action mécanique exercée par le fluide sur l'empilement de fibres et la prise en compte du déplacement et de la déformation des nappes pendant l'écoulement. Les conditions aux limites à appliquer aux frontières pour la prise en compte des conditions de couplage entre un écoulement à l'intérieur et à l'extérieur des préformes constitue la seconde difficulté. Enfin, d'une manière générale, des problèmes de conservation de la masse au niveau du front de fluide apparaissent lors des simulations d'injection (type *RTM*). Ces difficultés numériques sont liées aux méthodes employées (algorithmes de remplissage) et devront également être résolues dans le cadre de l'infusion qui *a priori* reposera sur le même type d'algorithme.

## 2.3 Revue bibliographique

Cette analyse bibliographique de l'infusion présente les principaux problèmes physiques rencontrés lors de l'élaboration de matériaux composites. Les difficultés relatives à la caractérisation des propriétés physiques du matériau lors de l'infusion sont également présentées puis mises en relation avec la mise au point d'un modèle multi-physique pour la description de l'infusion. Enfin, les principales difficultés numériques associées à la prise en compte des phénomènes physiques rencontrés sont exposées.

### 2.3.1 Les problèmes physiques rencontrés

La mise au point et l'analyse des procédés d'élaboration des matériaux composites par voie sèche présentent des difficultés liées principalement à la présence d'un écoulement lors de la phase de mise en forme. Ces difficultés concernent la formation de bulles d'air, et donc de zones sèches, pendant l'infusion ou l'injection de résine, ce qui se traduit par une moindre résistance mécanique locale en service. La maîtrise des fractions volumiques de fibres est également essentielle afin de prédire les caractéristiques mécaniques de la structure. Actuellement la réponse à ces difficultés, d'un point de vue expérimental, repose principalement sur des mesures de perméabilité (Elbouazzaoui (2004)) et de courbe contraintes / déformation (Morel *et al.* (2002)). Des mesures à l'aide de capteurs optiques

ont également été réalisées afin d'étudier les déformations lors du cycle de réticulation puis lors d'essais mécaniques (Vacher (2004)). Ces simulations ont également permis de proposer des méthodes de suivi du front de fluide (Antonucci *et al.* (2003)).

### 2.3.1.1 Les problèmes de remplissage et de bulles d'air

Les problèmes de remplissage se situent à deux niveaux d'échelles : l'échelle des micropores à l'intérieur des torons (espaces intra-torons) et l'échelle des macro-pores constitués essentiellement par les espaces inter-torons. Pour supprimer ces effets indésirables principalement deux types de techniques sont utilisés. La première consiste à utiliser un protocole expérimental adapté afin de réduire la formation de vide. Afendi *et al.* (2005) proposent ainsi un dispositif basé sur un filtrage de la résine au moyen d'un film fibreux et un dégazage afin d'éliminer la formation de micro/macrovides. La seconde technique, consiste à agir sur la vitesse d'injection de la résine. En fonction de la vitesse du fluide, les forces visqueuses induites seront plus faibles ou plus élevées que les forces capillaires générées par les tensions de surfaces (Lee *et al.* (2006)). Si la vitesse du fluide est élevée, les torons de fibres ne sont pas saturés. Les bulles d'air se forment à l'intérieur de ces torons (voir figure 2.1-a). Au contraire, si la vitesse est faible les forces d'origine capillaires augmentent localement la vitesse du fluide et les bulles d'air se forment dans les espaces inter-torons (voir figure 2.1-b). Ces effets capillaires sont étroitement liés aux effets de tensions de surface (voir figure 2.1-c). Les études de Ruiz *et al.* (2005) et de Lee *et al.* (2006) proposent d'optimiser le débit d'injection afin de supprimer les écoulements relatifs entre la résine à l'intérieur et à l'extérieur des torons et ainsi d'éliminer les formations de micro et de macro vide. Lim *et al.* (1999) proposent un modèle mathématique afin de prédire la dimension des vides à partir du nombre capillaire<sup>2</sup>.

### 2.3.1.2 La détermination de la perméabilité

Les mesures de perméabilité de renfort fibreux sont, à juste titre, très étudiées dans la littérature. En effet, la connaissance de la perméabilité est essentielle pour une prévision réaliste de la physique du procédé, donc des principales caractéristiques de la structure composite (épaisseurs, fractions volumiques de fibres, ...). Une étude bibliographique permet de scinder l'analyse de la perméabilité en deux catégories. Les analyses en régime saturé et insaturé sont réalisées respectivement sur des préformes complètement imprégnées et en cours d'imprégnation. Les perméabilités sont alors obtenues en injectant les relevés de pression et de débit directement dans des relations théoriques décrivant l'écou-

---

<sup>2</sup>Nombre capillaire  $Ca = \frac{\eta \bar{v}}{\gamma \cos\theta}$  avec  $\eta$  la viscosité du fluide,  $\gamma$  la tension de surface,  $\bar{v}$  la vitesse superficielle ou macroscopique et  $\theta$  l'angle de contact entre la résine et les fibres.

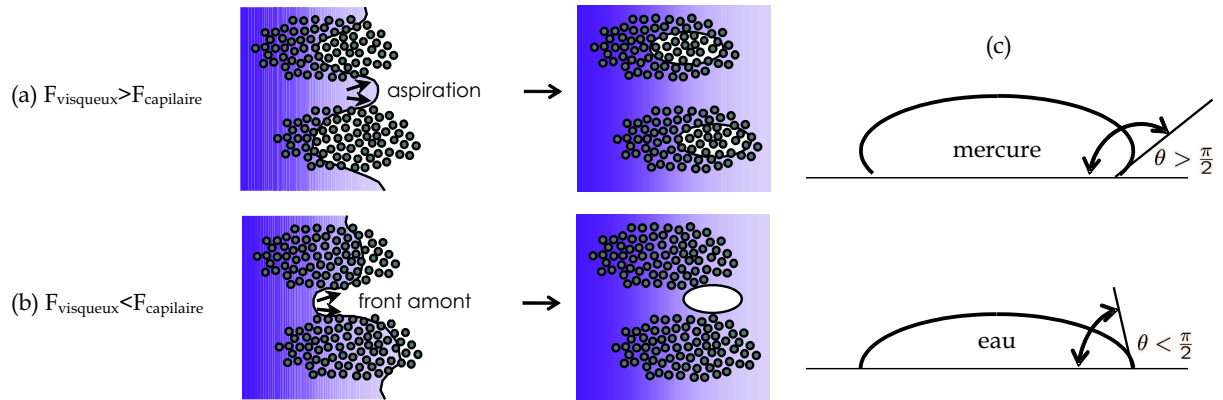


Figure 2.1 – Mécanisme de formation des bulles d’air en régime transitoire : (a)  $F_{visqueuse} > F_{capillaire}$ , (b)  $F_{visqueuse} < F_{capillaire}$  (d’après Lee *et al.* (2006)) et (c) la capillarité .

ment dans le milieu poreux (par exemple la loi de Darcy ; Bréard *et al.* (1998)). D’autres auteurs utilisent des relations semi-empiriques déterminées à partir de modèles théoriques afin de proposer une mesure de la perméabilité : approche de Carman Kozeny (Charpentier (2004)). Les phénomènes capillaires mis en évidence dans le paragraphe précédent jouent un rôle prépondérant sur la perméabilité. La saturation du renfort devra donc être prise en compte dans la détermination de sa perméabilité. Breard *et al.* (1999) puis Michaud et Mortensen (2001) proposent ainsi de séparer la perméabilité en deux parties ( $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{effective} \mathbf{K}_{relative}$ ), la perméabilité effective  $\mathbf{K}_{effective}$  *i.e.* la perméabilité mesurée en régime saturé, et  $\mathbf{K}_{relative}$  une grandeur comprise entre 0 et 1 dépendant du niveau de saturation noté  $s$ . Les mesures réalisées en régime saturé et insaturé par Drapier *et al.* (2005) sur des nappes de type NC2, indiquent de plus une forte dépendance de la perméabilité transverse à la face d’injection. Cette différence est essentiellement liée à la présence des trous de coutures. Dans cette étude, la perméabilité en régime saturé est environ dix fois plus faible que la perméabilité en régime transitoire.

Pour conclure, le comportement au voisinage du front de fluide ne peut pas être décrit par l’association d’une loi de Darcy avec une perméabilité effective. Les forces capillaires agissant au niveau du front de fluide doivent également être prises en compte, par exemple au moyen d’une perméabilité relative dépendant essentiellement du niveau de saturation.

## 2.3.2 Difficultés numériques

### 2.3.2.1 Écoulement dans un milieu poreux compressible

Une des principales difficultés rencontrée dans la modélisation concerne les conditions de couplage entre l’écoulement de la résine et la prise en compte de la compression des nappes. La compressibilité des préformes lors de l’infusion est liée à l’équilibre transitoire

entre la pression appliquée par le sac à vide et l'action du fluide sur le squelette de fibres. La distribution de pression et la mécanique de l'écoulement doivent par ailleurs prendre en compte le changement de géométrie du domaine au cours du temps. Dans ce type d'analyse, cette distribution de pression est principalement contrôlée par la perméabilité qui dépend à la fois de la porosité des préformes (Park et Kang (2003)) et de leur degré de remplissage ou saturation (Acheson *et al.* (2004)). La porosité, et par conséquent la fraction volumique de fibres, est principalement une fonction de la déformation des préformes et ainsi directement associée au comportement mécanique des préformes (Gutowski *et al.* (1987), Morel *et al.* (2002) ...). D'un point de vue expérimental, ces interactions ont été clairement établies dans la littérature où des déformations non négligeables peuvent être mesurées (Drapier *et al.* (2002)) et dépendent à la fois du régime d'écoulement étudié et des conditions aux limites appliquées (Morel *et al.* (2002)). Cependant, le manque de connaissances relatives à la prise en compte de cette compressibilité conduit à l'utilisation de simulations d'infusion de résines visqueuses dans des milieux non-déformables pour le traitement de ce type de problème. Les modèles employés décrivent dans ces cas l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux indéformable en utilisant par exemple la loi de Darcy. Dans le but d'améliorer ces modèles simples, des approches plus ou moins empiriques sont utilisées pour traiter le problème de la compression des préformes lors de l'infusion.

Dans le cadre de la modélisation des procédés par infusion, les premiers modèles développés par Loos et MacRae (1996) prennent bien en compte l'évolution de la porosité (et donc de la perméabilité) avec la compaction du sac à vide mais n'intègrent pas l'action de la résine sur la déformation des renforts. Les études de Preziosi *et al.* (1996) et Ambrosi *et al.* (2002) proposent l'utilisation d'un modèle linéaire pour l'étude de l'injection d'une résine visqueuse dans une préforme poreuse élastique pour des problèmes 1D. Ce modèle simplifié est basé sur une modification des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement des phases fluides et solides. Plus récemment, certains auteurs préconisent l'emploi d'un modèle de comportement de type Terzaghi, *i.e.* un modèle de type Kelvin Voigt dans lequel la contribution de la partie liquide (la résine) sur la partie solide (les préformes) est introduite *via* sa pression hydrostatique (Park et Kang (2003)). Dans ce cas, une loi expérimentale est utilisée pour le comportement de préformes sèches. Dans leur travaux, Deleglise *et al.* (2005a) s'intéressent à l'influence de déformations induites ou forcées sur la distribution de pression pour des problèmes mono-dimensionnels et comparent ces analyses à des résultats analytiques. Blest *et al.* (1999) proposent un modèle 1D basé sur l'écriture des équations de conservation dans la résine, les préformes et les préformes imprégnées pour des empilements alternés de films de résine solides et de préformes. Le même type d'approche est proposé par Correia *et al.* (2005), dont les tra-

vaux portent sur un modèle analytique pour l'infusion d'un domaine compressible et pour lesquels l'analyse de la compressibilité repose sur un modèle de Gutowski dans la direction transverse (Gutowski *et al.* (1987)). Globalement ces analyses restent unidirectionnelles et ne sont de toute façon pas adaptées à l'intégration dans des solveurs industriels basés sur la méthode des éléments finis. En effet, dans ces modèles, les équations de conservation n'apparaissent pas clairement sous forme d'équation aux dérivées partielles de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Elles sont présentées sous forme intégrale et tiennent compte d'autres phénomènes thermo-physico-chimiques. Les mêmes remarques peuvent être formulées pour les travaux de Kessels *et al.* (2006) concernant la modélisation des procédés *RIFT*.

En revanche, les études de Joubaud *et al.* (2002) portent sur une analyse numérique de l'effet de la compression des préformes humides sur la distribution de contraintes (procédé *VARI*) et introduisent à cette occasion de nouveaux éléments finis (« éléments de Darcy »)<sup>3</sup>. La simulation numérique d'injections à partir de ces nouveaux éléments, permet de minimiser la formation de vide par optimisation des débits d'injection dans le cadre de préformes compressibles (Trochu *et al.* (2006)).

D'une manière générale, les études actuelles sont principalement basées et formulées à partir de constatations et approximations expérimentales. Elles utilisent par exemple des lois semi-empiriques pour calculer la distribution de contraintes à l'intérieur de la préforme humide. Bien que certaines références synthétisent de manière exhaustive les équations de conservation pour des écoulement multi-phasiques (Schrefler et Scotta (2001)), les outils numériques associés pour traiter le problème multiphysique fortement couplé ne sont pas présentés.

En résumé, la modélisation et la simulation numérique d'un écoulement à l'intérieur de préformes subissant de fortes déformations est étudié dans la littérature. Cependant, les modèles proposés sont limités à des études mono-dimensionnelles, des matériaux spécifiques et des conditions aux limites particulières. Il semble donc justifié, sur la base de ces observations, de décrire d'une autre manière les interactions entre ces deux mécanismes à savoir l'écoulement de la résine dans un milieu compressible d'une part, et d'autre part la déformation proprement dite des préformes sous l'action du fluide à l'intérieur des pores de ces préformes. Dans le cadre de nos travaux, l'utilisation conjointe du modèle de Terzaghi pour le comportement des nappes et de la formulation d'Euler Lagrange Arbitraire (*ELA*) pour le comportement du fluide sera utilisée. Ils seront présentés en détail dans la deuxième partie de ce manuscrit. A cette première difficulté, viennent s'ajouter d'autres types de problèmes lorsque l'écoulement se déroule également à l'extérieur des préformes.

---

<sup>3</sup>élément fini dit « de Darcy » intégré par *ESI-GROUP* dans le solveur de *PAM-RTM*<sup>TM</sup> pour la simulation numérique des procédés de type *VARI*.

Une condition supplémentaire doit alors relier le comportement mécanique d'une zone purement fluide à celui de la zone de préforme, partiellement ou totalement saturée.

### 2.3.2.2 Couplage entre une zone purement fluide et le milieu poreux partiellement saturé

Les conditions de couplage entre l'écoulement de résine à l'intérieur des préformes et l'écoulement de la résine seule sont très peu étudiées dans la littérature. Elles se limitent à des analyses expérimentales qui conduisent à la mise au point de modèles empiriques. Actuellement, les modèles et simulations numériques d'infusion ne sont pas en mesure de représenter la zone de résine seule. Cette zone est généralement remplacée par une condition limite simplifiée de type pression constante ou débit d'injection au niveau de la frontière (Park et Kang (2003)). Certaines études s'intéressent à la prise en compte de la résistance à l'écoulement lors du remplissage et donc à l'évolution des conditions équivalentes d'injection par une mise à jour des pressions ou des débits (Deleglise *et al.* (2005b)). Dans ce type d'analyse la conservation du vecteur contrainte est vérifiée mais la conservation de la masse n'est pas considérée, la résine étant apportée par une buse d'injection.

Même si la condition de couplage entre les zones partiellement saturées et purement fluide n'est actuellement pas étudiée dans la littérature dans le cadre de la modélisation des procédés d'élaboration des matériaux composites, certaines références relatives à l'étude de l'écoulement dans les sols et au ruissellement de l'eau en surface proposent une synthèse des conditions aux limites à appliquer pour satisfaire la continuité des équations de conservations (Layton *et al.* (2003)). Ces conditions dites de Beaver-Joseph-Shaffman ont été présentées par de nombreux auteurs dans le cas de milieux poreux non déformables (Jäger et Mikelić (2001), Rivière et Yotov (2005), ...). Dans ces approches, la continuité des équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse est considérée. En d'autres termes, la continuité du vecteur contrainte au niveau de l'interface, ainsi que celle de la vitesse normale, doit être satisfaite. Cette condition de couplage introduit également un facteur de glissement, *i.e.* une condition sur les vitesses tangentielles au niveau de l'interface, qui doit être caractérisée par une analyse expérimentale (Porta (2005)). En particulier, ce facteur de glissement jouera un rôle déterminant lorsque des courbures seront introduites dans le modèle. Il est important de noter que la condition de couplage dans sa formulation actuelle ne permet pas la prise en compte de la déformation du milieu poreux lors de l'écoulement. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier de manière plus approfondie une nouvelle condition de couplage dans le cas des procédés d'élaboration par infusion des matériaux composites. En parallèle, une caractérisation expérimentale du facteur de glissement pour la condition en vitesse tangentielle devra être menée pour

décrire plus précisément les effets de bords.

### 2.3.2.3 Couplage entre deux zones à forte différence de perméabilité

De plus en plus d'études sont réalisées afin de coupler des milieux à perméabilités très différentes. Deux types d'applications sont visées par celles-ci. D'abord, l'utilisation et l'analyse numérique de canaux d'écoulement préférentiel à perméabilité élevée (généralement appelés « runner ») permettant d'assurer une meilleure répartition des points d'injections (Hammami *et al.* (1998) et Trochu *et al.* (2006)). Ensuite, la modélisation de techniques par infusion de type *LRI* nécessite l'utilisation de tissus drainants à perméabilité élevée. Les travaux de Diallo *et al.* (1998) indiquent une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques pour des couches de préformes de perméabilités différentes. Néanmoins, lorsque les perméabilités sont très éloignées comme dans le cas de l'association d'un drainant (perméabilité forte  $\approx 10^{-3}$ - $\approx 10^{-6}$ ) avec un renfort pour procédé *LCM* (perméabilité faible  $\approx 10^{-12}$ - $\approx 10^{-14}$ ), les solveurs numériques actuels ne permettent pas d'obtenir des résultats satisfaisants compte tenu des très forts gradients d'échelles. Srinivasagupta *et al.* (2003) proposent dans ses simulations de structures « sandwich » quelques paramètres adimensionnels qui pourraient éliminer ces effets mais ceux-ci sont appliqués à des rapports de perméabilités plus faibles ( $10^2$ ).

### 2.3.2.4 Conservation de la masse et suivi du front de fluide

Au delà des aspects propres à l'infusion d'une résine dans une préforme, des problèmes de conservation de la masse subsistent même dans le cas d'injection de milieux poreux de dimensions fixes. Ces difficultés sont principalement relatives aux algorithmes de remplissage actuellement utilisés et donc à l'interface reliant le milieu poreux saturé et les préformes sèches, *i.e.* le front de fluide. Pour appréhender le remplissage, par nature transitoire, les logiciels de simulation par éléments finis actuels utilisent des algorithmes itératifs où l'avancée du front de fluide se fait en deux temps (logiciels commerciaux : *PAM-RTM*<sup>TM</sup> « *ESI-GROUP* »<sup>4</sup> et *RTMWork* « *PolyWork* »<sup>5</sup>; universitaires : *LIMS* (Brouwer *et al.* (2003)) « *Delaware* »<sup>6</sup> et *FE/CV* code (Kang et Lee (1999)) « *SNU* »<sup>7</sup>). Pour une géométrie donnée, une première étape consiste à déterminer un groupe d'éléments et un temps de remplissage pour ce groupe. Le champ de pression dans ce groupe est calculé en appliquant des conditions aux limites spécifiques (la pression ou le débit d'injection sur la face d'injection et le vide au niveau du front de fluide). La seconde étape consiste à

<sup>4</sup><http://www.esi-group.com/>

<sup>5</sup><http://www.polyworx.com/>

<sup>6</sup><http://www.ccm.udel.edu/>

<sup>7</sup><http://www.snu.ac.kr/engsnu/>



calculer, à partir du champ de pression précédent, les flux de résine au niveau du front de fluide. A partir de ces flux, un temps de remplissage est associé à un nouveau groupe contenant les éléments totalement saturés. L'algorithme est réitéré sur le nouveau groupe jusqu'au remplissage complet de la géométrie discrétisée.

Actuellement deux types d'algorithmes sont utilisés. La méthode dite *FEM/CV* (Finite Element Method / Control Volume) utilisée dans la plupart des logiciels commerciaux ou universitaires (*LIMS*, *RTMWork*, ...), repose sur la construction de cellules de Voronoï à partir du maillage éléments finis (Frey et George (1999), Okabe *et al.* (2000)). La résolution du problème d'écoulement sur ce maillage donne un champ de pression. Ainsi, chaque cellule de Voronoï est associée à un degré de liberté en pression qui permet le calcul des flux entre les frontières du volume (Shojaei *et al.* (2003)). Associé au temps de remplissage, ce flux permet ainsi de déterminer les nouveaux éléments remplis au cours de l'itération suivante (Lim et Lee (2000), Advani et Brusckhe (1994), ...). Des approches en régime transitoire et en régime quasi-statique ont été proposées (avec prise en compte ou non de la saturation). Bien que très utilisée, cette première méthode ne permet pas de satisfaire de manière précise la conservation de la masse. Les erreurs rencontrées dans les problèmes 2D et 3D sont principalement dues à l'association d'une pression constante à un volume de contrôle (cellule de Voronoï). Par conséquent, lorsque les flux sont calculés à travers les frontières de ces volumes, ils conduisent à une mauvaise estimation du remplissage des nouveaux éléments (Joshi *et al.* (2000)). En particulier, une diminution de l'erreur est constatée lorsque le maillage est raffiné.

Pour résoudre les problèmes rencontrés et améliorer la conservation de la masse, un certain nombre de méthodes basées sur des pré-traitements ou des méthodes de résolution différentes ont été présentées. Lin *et al.* (1998) proposent une intégration implicite des équations en introduisant la saturation dans le problème élément finis. Bien que prometteuse, cette approche se heurte rapidement au manque de connaissances et de données expérimentales pour relier et déterminer une loi couplant la saturation et la pression. Plus récemment, Joshi *et al.* (2000) ont mis au point une méthode basée sur un tri des éléments, puis une vérification du bilan de masse à l'intérieur de chaque élément saturé de manière à redistribuer l'excédent de fluide. Ces méthodes restent cependant très coûteuses d'un point de vue numérique puisqu'elles nécessitent des pré ou post-traitements. La méthode proposée par Garcia *et al.* (2003) utilise une équation de transport, pour l'évolution de la saturation. Cette équation est basée sur des principes conservatifs adaptés à des grilles fixes mais doit être modifiée lorsque des grilles mobiles seront considérées. La méthode des éléments non-structurés, introduite par Trochu *et al.* (1997) dans *LCM FLOT* puis dans *PAM-RTM<sup>TM</sup>* par le biais des librairies *PRO-FLOT<sup>TM</sup>*, propose une alternative à la méthode *FEM/CV*. Dans ce cas, la construction de volume de contrôle par la méthode

des cellules de Voronoï n'est plus nécessaire puisque le volume de contrôle est associé à l'élément fini. En revanche, le champ de pression obtenu par une approximation de type non conforme n'est plus continu sur la frontière de l'élément (la continuité est assurée au nœud). Néanmoins, la méthode permet une meilleure conservation de la masse puisque les flux sont calculés à partir des gradients de pressions connus au centre de chaque face.

Quelle que soit la méthode utilisée pour traiter le remplissage, il n'est pas possible d'appliquer directement les conditions aux limites sur le front de fluide puisque celui-ci est localisé à l'intérieur des éléments. Kang et Lee (1999) proposent un raffinement du front de fluide avec un déplacement des nœuds des éléments situés au niveau du front de fluide sans toucher à la dimension générale du problème, *i.e.* le nombre de degrés de liberté reste constant. Bechet *et al.* (2003) proposent de la même manière une méthode adaptative reposant sur un remaillage du front de fluide au cours du remplissage.

La méthode *X-FEM* (Extended Finite Element Method) ou Level Set pourrait également être adaptée au suivi du front de fluide (Simone (2003)). Cette méthode propose une gestion des discontinuités à l'intérieur d'un maillage éléments finis à l'aide d'une partition de l'unité locale (Belytschko *et al.* (2003)). Dans ce cas à partir d'une équation de transport (problème de convection résolu par exemple à l'aide d'une approximation de Lesaint Raviart - Fortin *et al.* (1995), Abbès *et al.* (1999) et Bird *et al.* (2002)) ou de l'algorithme actuel de remplissage (filling) basé sur la méthode des volumes de contrôle *FEM/CV*, le front de fluide est localisé et les éléments situés au niveau du front de fluide sont enrichis. Les conditions aux limites relatives au front de fluide sont appliquées de manière précise à l'intérieur même des éléments finis du maillage par la méthode *X-FEM*.

Sur la base de ces observations, une nouvelle méthode permettant de traiter plus efficacement la conservation de la masse devra être proposée. Cette nouvelle méthode sera d'autant plus nécessaire que parallèlement à l'écoulement, la déformation du milieu poreux devra être prise en compte.

## 2.4 Conclusion

Cette brève revue bibliographique fait apparaître assez peu d'informations quant à la mise au point de modèles numériques pour le traitement de l'infusion. Cependant, au regard des études expérimentales menées dans ce domaine, ainsi que de l'étendue des applications qui pourraient utiliser ce type de techniques d'élaboration, la mise au point d'un tel modèle est nécessaire à une utilisation plus large des procédés par infusion.

Actuellement la modélisation se heurte à un certain nombre de difficultés que nous avons mises en évidence dans ce chapitre. Elles concernent principalement le traitement de l'écoulement de résine dans un milieu compressible à perméabilité variable. A ces

problèmes, il est également nécessaire d'ajouter un manque de connaissance dans la description des mécanismes et des conditions de couplage entre des zones purement fluide et un milieu poreux partiellement saturé.

Un certain nombre de difficultés tout aussi importantes, d'ordre beaucoup plus numérique et technique n'ont pas été présentées dans ce chapitre. Elles feront l'objet d'une description détaillée lors de leur traitement et de la mise en place du modèle afin de ne pas perdre le lecteur dans des considérations purement numériques : traitement de l'incompressibilité, traitement des non-linéarités, *etc* . . . .

# Chapitre 3

## Position de l'étude et objectif

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Analyse des besoins . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1.1	Modélisation du comportement des préformes . . . . .	33
3.1.2	Modèle d'écoulement dans un milieu poreux compressible .	34
3.1.3	Modèle d'écoulement dans une zone libre . . . . .	34
3.1.4	Gestion de l'évolution des domaines . . . . .	35
<b>3.2</b>	<b>Démarche adoptée et objectifs . . . . .</b>	<b>35</b>

---

### 3.1 Analyse des besoins

Pour le traitement des procédés par infusion, deux grands problèmes doivent être considérés : le traitement de la mécanique des fluides associée à la résine et de la mécanique des solides associée aux préformes, et le traitement de la thermo-physico-chimie associée à la réticulation de la résine et aux transferts de chaleur. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux outils nécessaires dans le cadre du développement d'une modélisation complète de l'infusion. Cette description reste générale, dans le sens où les différents aspects techniques relatifs à ces outils ne sont pas décrits. En d'autres termes, seule une analyse des fonctionnalités logicielles nécessaires est effectuée à partir des observations et des conclusions de l'étude bibliographique précédente.

#### 3.1.1 Modélisation du comportement des préformes

La littérature fournit très peu d'informations à propos du comportement des préformes. A notre connaissance, la compressibilité des préformes n'a actuellement jamais

été étudiée numériquement quel que soit le régime d'écoulement (insaturé ou saturé). Seules quelques informations expérimentales sont données au niveau du comportement de préformes sèches (Bickerton *et al.* (2003)) et saturées (Gutowski *et al.* (1987)). Une formulation du comportement mécanique des nappes en grande déformation est donc nécessaire. Cette formalisation de la compressibilité doit prendre en compte le caractère anisotrope du comportement des préformes. Elle doit permettre de prédire l'évolution de la porosité et de la perméabilité effective des renforts, c'est à dire leur perméabilité en régime permanent.

### 3.1.2 Modèle d'écoulement dans un milieu poreux compressible

Seule une formulation générale d'un modèle d'écoulement dans un milieu déformable peut permettre d'implémenter un modèle multi-physique 2D voire 3D dans un code par éléments finis. Actuellement, les formulations mono-dimensionnelles dans l'épaisseur des préformes, présentées dans l'étude bibliographique précédente, nécessitent le développement d'éléments finis particuliers, comme par exemple les éléments de Darcy développés dans *PAM-RTM*<sup>TM</sup>. La formulation proposée doit être générale, c'est à dire adaptée à n'importe quel type de perméabilité afin de modéliser le comportement à perméabilité forte du drainant et le comportement à perméabilité faible des préformes, et doit aussi être exprimée dans le cadre d'une analyse transitoire générale. Ce n'est que lors du traitement numérique du modèle que certaines hypothèses seront effectuées (régime quasi-statique, prépondérance des forces d'inerties, masses volumiques constantes, perméabilités effectives, approches en régime saturé ...).

### 3.1.3 Modèle d'écoulement dans une zone libre

La prise en compte d'un film de résine nécessite une formulation d'un problème d'écoulement à l'extérieur des préformes. Ce type de formulation n'est pas classique. La littérature indique des difficultés numériques spécifiques à des formulations de ce type (formulation vitesse-pression Arnold *et al.* (1984)). Par ailleurs, cette formulation devra être couplée au modèle d'écoulement utilisé pour décrire l'écoulement dans le milieu poreux. Les conditions de couplage entre ces deux zones devront être analysées. Notons que l'écoulement dans la zone purement fluide interviendra en même temps que sa disparition dans le cas du procédé *RFI*.

### 3.1.4 Gestion de l'évolution des domaines

Lors de l'infusion de la résine à l'intérieur des préformes, la zone de résine seule va disparaître progressivement. Une technique adaptée devra donc être employée afin de prendre en compte l'évolution de cette zone. Plusieurs méthodes sont envisageables dans l'hypothèse de l'utilisation de la méthode des éléments finis. Soit les éléments employés pour décrire le comportement de la résine et des préformes sont identiques. Dans ce cas une méthode permettant de gérer le déplacement de la frontière entre ces deux zones doit être employée (par exemple la méthode des éléments discontinus *X-FEM* ou une méthode de raffinement du maillage). Soit les éléments sont différents. Dans ce cas le nombre d'éléments employés dans la zone devra évoluer à l'aide d'une procédure externe de remaillage.

## 3.2 Démarche adoptée et objectifs

Le but de ce travail est de fournir une modélisation générale de l'infusion d'un fluide thermo-réactif dans un milieu poreux déformable. L'étude ainsi proposée vise à fournir des outils numériques adaptables dans le cadre de la modélisation des procédés *LRI* et *RFI*, mais également de tout procédé par infusion dérivant de ces deux brevets actuellement considérés comme représentatifs de deux grandes familles d'infusion, *i.e.* les infusions pour lesquelles la couche de résine est apportée par un drainant et celles pour lesquelles un film de résine solide est utilisé. Ce modèle doit également pouvoir être adapté dans d'autres domaines d'activité pour lesquels des phénomènes d'infusion interviennent. Le modèle que nous proposons ici est ainsi construit de manière systématique en intégrant toutes les interactions entre les différents constituants directement dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, comme par exemple dans les modèles d'écoulement en milieu poreux bi-phasique développés par Schrefler (2001). Ce modèle est mis en place dans la partie II de ce manuscrit.

Une étude précise des solutions logicielles pré-existantes pour modéliser l'infusion, se révèle infructueuse, compte tenu du caractère très novateur du procédé par rapport aux solutions pour la modélisation des procédés par injection très bien maîtrisées et utilisées depuis de nombreuses années. Dans le cadre d'un partenariat entre l'École des Mines de Saint-Étienne et la société *ESI GROUP*, le choix s'est donc porté sur *PAM-RTM*<sup>TM8</sup>. Ce logiciel développé en grande partie sur la base du solveur *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> lui même basé sur le solveur *LCM-FLOT* développé à l'École Polytechnique de Montréal en 1998 a été

---

<sup>8</sup>*ESI GROUP* : <http://www.esi-group.com/> : Logiciel dédié à la simulation numérique des procédés Resin Transfer Molding (*RTM*), Vacuum Assited RTM (*VARTM*) et Vacuum Assisted Resin Infusion (*VARI*) (Brouwer *et al.* (2003))

choisi pour au moins deux raisons (voir la documentation de *PAM-RTM*<sup>TM</sup> ESI (2004)). D'une part l'utilisation d'une librairie développée en C++ au niveau du solveur ce qui en fait un code fortement modulable du fait de l'orientation objet des librairies (documentation C++ : Stroustrup (2003)). Les modifications qui pourront lui être apportées seront plus facilement transportables et la mise à disposition de librairies est bien plus simple que celle de sources. D'autre part, l'utilisation d'un code industriel apporte une garantie et un savoir-faire quant aux modèles déjà implémentés. Par ailleurs, le choix d'un logiciel dédié à la simulation des procédés de mise en œuvre par injection / infusion, par rapport à une solution commerciale beaucoup plus généraliste (*Systus*<sup>TM</sup>, *Abaqus*<sup>TM</sup>, ...) est en partie liée à la présence d'un certain nombre d'outils numériques intéressants particulièrement au niveau des algorithmes de remplissage (algorithme de « filling »). Ici, bien que les approches soient différentes, ce type d'algorithme doit certes être modifié mais est réutilisable en grande partie. Actuellement, le remplissage s'effectue à l'aide d'une succession de pas quasi-statiques permettant de calculer, à partir d'un champ de pression, le flux au niveau du front de fluide et un temps de remplissage pour de nouveaux éléments. Ainsi, de proche en proche, le remplissage total de la structure est obtenu. C'est l'approche que nous utiliserons aussi dans nos travaux.

Les développements universitaires dans ce logiciel se déroulent principalement à l'École Polytechnique de Montréal dans l'équipe de M. Trochu<sup>9</sup>, à l'École Nationale Supérieure des Mines de Douai<sup>10</sup> et à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne<sup>11</sup>. Sur la base des observations précédentes, relatives au besoin du logiciel de simulation utilisé, il est évident que la modélisation de l'infusion dans ce logiciel nécessitera le développement d'un certain nombre d'outils numériques et de formulations qui seront détaillés dans la partie III de ce rapport.

---

<sup>9</sup>École Polytechnique de Montréal : <http://www.polymtl.ca/>

<sup>10</sup>École Nationale Supérieure des Mines de Douai : <http://www.ensm-douai.fr/>

<sup>11</sup>École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne : <http://www.emse.fr/>

**Deuxième partie**

**Modélisation de l'infusion**





# Chapitre 4

## Choix d'un modèle pour l'étude des procédés *LRI/RFI*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Échelle de la modélisation</b>	<b>40</b>
4.1.1	L'approche micro/mésoscopique	40
4.1.2	L'approche macroscopique	41
4.1.3	Discussion	41
<b>4.2</b>	<b>La modélisation des procédés <i>LRI</i> et <i>RFI</i></b>	<b>42</b>
<b>4.3</b>	<b>Stratégie de modélisation</b>	<b>44</b>

---

Dans la première partie de ce manuscrit nous avons mis en évidence la complexité des phénomènes physiques intervenant lors de l'infusion d'une résine thermo-réactive dans une préforme déformable. La modélisation des procédés par infusion va conduire à un modèle fortement couplé constitué d'un problème mécanique correspondant à l'écoulement de la résine à l'extérieur et à l'intérieur de nappes poreuses compressibles (originalité principale des procédés par infusion par rapport aux procédés par injection), et d'un problème thermo-physico-chimique relatif à la résolution couplée de la continuité thermique et de la physique de la réticulation. Dans cette seconde partie, nous nous limitons à une description exhaustive des différentes caractéristiques des modèles développés et proposés dans le cadre de la modélisation de l'infusion pour les procédés *LRI* et *RFI*. Les différents outils numériques employés dans l'approche éléments finis correspondante seront décrits de manière plus précise dans la troisième partie de ce manuscrit. Cette description générale de l'infusion doit servir de base à l'élaboration de nouveaux algorithmes dans le cadre de l'utilisation de nouvelles techniques par infusion. Dans ce premier chapitre, une description de la stratégie de modélisation adoptée dans le cadre de l'infusion est présentée.

## 4.1 Échelle de la modélisation

L'une des principales caractéristiques associée aux matériaux composites, à leur mise en forme, et donc à la modélisation des procédés d'élaboration, est la forte hétérogénéité de la structure. En particulier, les préformes humides sont constituées d'un mélange d'au moins deux matériaux : l'empilement de fibres et la matrice. La première étape de ce travail consiste donc à choisir une description des mécanismes physiques parmi les approches micro/mésoscopiques d'une part (échelle spécifique aux fibres et à la matrice) et l'approche macroscopique d'autre part (choix d'un volume représentatif pour le milieu hétérogène). Par conséquent, soit le comportement de l'empilement de fibres et de la résine est étudié séparément en affectant des modèles locaux thermiques et mécaniques aux fibres et à la résine, soit une description globale du comportement est réalisée en affectant des modèles « macroscopiques » au mélange fibres / résine.

### 4.1.1 L'approche micro/mésoscopique

Lorsqu'elle peut être envisagée, l'échelle des constituants fournit une caractérisation précise du comportement des différents composants d'un milieu hétérogène. L'utilisation d'une telle approche dans un contexte industriel est souvent difficile et mal adaptée. En effet, la mise en données et la description géométrique d'une structure complète par un modèle microscopique est très longue et numériquement très coûteuse (Bechtold et Ye (2003)). Bien que les nappes puissent être modélisées par la répétition d'un motif élémentaire et la résine comme un milieu homogène, cette caractérisation nécessite des traitements statistiques très difficiles à mettre en œuvre. Hormis les aspects purement géométriques, ce type d'approche nécessite une caractérisation des mécanismes physiques relatifs aux comportements des fibres et de la résine (mécanique et thermique) ainsi qu'une connaissance et une maîtrise des phénomènes physiques régissant le contact entre la résine et les renforts d'une part et le contact entre les faisceaux de fibres pendant la compression d'autre part. En dehors des aspects relatifs à la mécanique du contact (Chamoret (2002)), ces phénomènes sont contrôlés et régis par des mécanismes complexes faisant intervenir du frottement (Johnson (2004)), des phénomènes de mouillabilité (coefficients de tension de surface - Michaud et Mortensen (2001)), des écoulements par capillarité (Verrey *et al.* (2006)), *etc* . . . . Il faut enfin signaler que le temps de calcul associé à de tels modèles les rendent inexploitable dans un contexte industriel pour la mise au point de procédés. L'apport de la simulation numérique n'est alors plus aussi pertinent en terme de coût et de délais devant les solutions expérimentales de tests sur prototypes.

### 4.1.2 L'approche macroscopique

A travers une approche à l'échelle de la structure, l'objectif n'est pas de connaître le comportement intrinsèque des fibres et de la résine mais leur comportement macroscopique ramené à un volume représentatif. Ce volume représentatif est constitué d'un mélange d'air, de résine et de fibres. Introduisons dès à présent la porosité  $\phi$  du volume, *i.e.* le rapport entre le volume de pores et le volume total, et la saturation  $s$ , *i.e.* le rapport entre le volume de résine et le volume libre (volume occupé par la résine et l'air). D'un point de vue industriel ce type d'approche conduit à des coûts de description de modèles analytiques ou numériques fortement réduits, l'hétérogénéité de la structure étant partiellement supprimée. Les temps de calculs associés à ces nouveaux modèles deviennent eux aussi beaucoup plus intéressants pour une même structure.

L'élaboration d'un modèle macroscopique présente principalement deux étapes. En premier lieu, il s'agit de déterminer un modèle de comportement macroscopique pour la description des phénomènes physiques associés à chaque constituant. Ici, dans la zone de nappes imprégnées, il convient de décrire l'écoulement de la résine en même temps que la déformation des nappes dans lesquelles elle s'écoule. Parallèlement, une description et une détermination des paramètres et propriétés mécaniques et thermo-physico-chimiques doit être effectuée. Ces propriétés macroscopiques sont souvent difficilement accessibles, dans la mesure où elle dépendent de propriétés locales (microscopiques) et de « phénomènes cachés ». Elles sont souvent représentées par des lois semi-empiriques (par exemple la perméabilité : Charpentier (2004)) ou en utilisant des résultats de théorie de l'homogénéisation (par exemple les propriétés thermo-chimiques du mélange de fibres et de résine : Hassanizadeh (1983a)).

### 4.1.3 Discussion

Récemment de nouvelles approches mêlant des aspects micro/mésoscopiques et macroscopiques sont apparues. Plus connues sous le nom de modélisations « multi-échelles », elles visent à fournir une description plus précise des phénomènes physiques rencontrés. Ces approches rendent compte de l'influence de phénomènes microscopiques sur le comportement macroscopique d'un constituant, ou inversement de l'action d'un mécanisme macroscopique sur des propriétés microscopiques. Concernant le premier type de phénomène, hormis les problèmes relatifs à la détermination de la perméabilité, nous pouvons citer les effets de la capillarité (Han *et al.* (2003), Sevostianov *et al.* (1999)). Dans ces études, les effets capillaires sont prépondérants devant les pressions créées et imposées par le vide. La configuration microscopique du milieu est alors utilisée pour estimer la pression capillaire. Réciproquement, des analyses inverses peuvent permettre d'étudier et

d'optimiser l'écoulement (Lim *et al.* (1999)) et la formation de macro/micro vides (Ruiz *et al.* (2005)) c'est à dire de zones sèches dans les préformes. Ces problèmes de formations de bulles d'air sont directement reliés aux effets capillaires. Dans ces analyses, la vitesse d'injection de la résine (paramètre macroscopique relatif à l'écoulement) est comparée aux tensions de surfaces (grandeurs microscopiques) afin d'optimiser la formation de vides microscopiques et macroscopiques en agissant sur la vitesse d'injection. Au delà de l'optimisation, ces approches permettent de prévoir la répartition de micro/macrovides et de localiser les zones fragiles de la structure finie.

Ces approches microscopiques et multi-échelles sont utilisées pour décrire des phénomènes bien contrôlés dans le cadre de la modélisation des procédés par injection pour lesquels les effets non-linéaires (non-linéarités géométriques et comportementales des préformes) ne sont pas présents. En ce qui concerne la modélisation de l'infusion dans un contexte industriel, les différents mécanismes n'ont pas encore été clairement identifiés. L'approche macroscopique est donc choisie, bien que certains paramètres matériaux macroscopiques, notamment les perméabilités, restent encore mal maîtrisés (Ferland *et al.* (1996), Breard *et al.* (1999), Drapier *et al.* (2002)). Dans le futur et au delà du travail présenté ici, parallèlement à un accroissement des capacités de calculs, une meilleure connaissance des différents phénomènes physiques permettra la description de mécanismes microscopiques et ainsi une amélioration des analyses macroscopiques.

## 4.2 La modélisation des procédés *LRI* et *RFI*

D'une manière assez intuitive, et compte tenu de la description des procédés *RFI* et *LRI* présentés dans le chapitre 1.2.2.2, nous adoptons les modèles macroscopiques présentés respectivement sur les figures 4.1 et 4.2 pour les procédés *RFI* et *LRI*.

Dans les deux cas, un découpage en trois zones séparées par des frontières mobiles est réalisé. Ce découpage s'inspire en partie des travaux réalisés par Blest *et al.* (1999), Joshi *et al.* (1999), Kim *et al.* (2003) et Wang et Dong (2003). Dans chacune de ces zones, un modèle macroscopique devra décrire le comportement de chaque constituant (la résine ou l'empilement des nappes). La zone de résine seule, correspondant au film de résine (*RFI*) ou à l'association drainant / résine (*LRI*), alimente lors de l'infusion les nappes sèches qui disparaissent en fin d'infusion, au profit du mélange nappes / résine, à condition qu'il y ait suffisamment de résine. Au niveau des frontières mobiles séparant les trois zones, des conditions aux limites doivent assurer la continuité ou la discontinuité des champs de pression, de vitesse, de température et de déplacement et rendre compte des conditions de couplages entre les zones.

Les figures 4.1 et 4.2 présentent également les conditions aux limites appliquées natu-

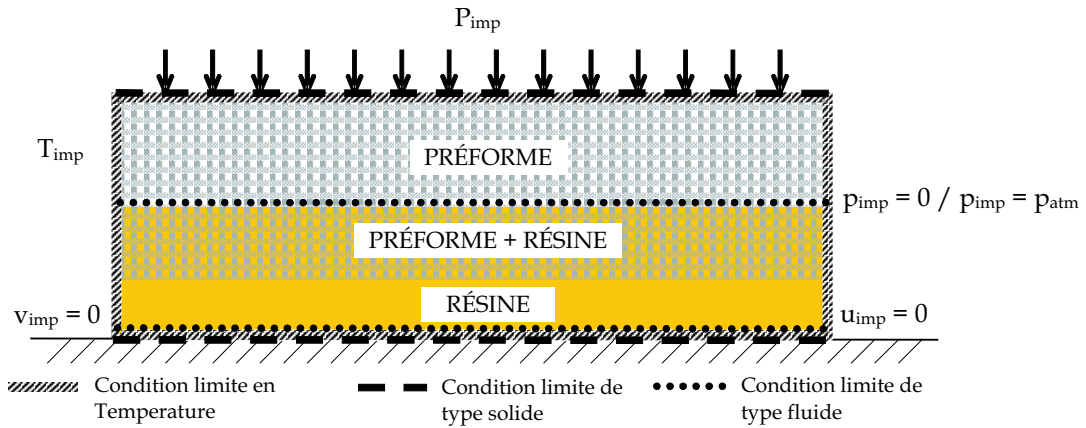


Figure 4.1 – Modélisation adoptée pour le procédé *RFI*. Découpage en 3 zones : résine seule, préformes imprégnées et préformes sèches et conditions aux limites associées.

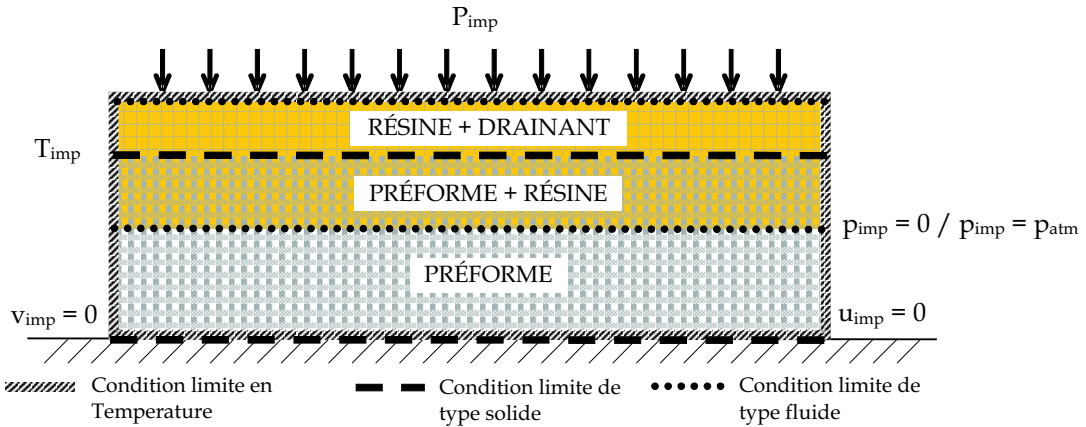


Figure 4.2 – Modélisation adoptée pour le procédé *LRI*. Découpage en 3 zones : résine et drainant, préformes imprégnées et préformes sèches et conditions aux limites associées.

rellement par le procédé. Il en existe d'autres qui permettent d'assurer la continuité du vecteur contrainte et la conservation de la masse au niveau des frontières mobiles. Elles seront décrites plus tard dans le manuscrit. Comme indiqué sur les figures 4.1 et 4.2 les conditions aux limites mécaniques imposées par le procédé concernent à la fois les composants solides (nappes) et fluides (résine). Globalement, elles se résument à une vitesse et un déplacement nul au niveau de la base, une pression mécanique sur la face supérieure de l'empilement (pression appliquée par le sac à vide, éventuellement complétée par une pression mécanique supplémentaire) et une pression hydrostatique nulle correspondant au vide sur la frontière mobile entre les zones sèches et humides dans les préformes. Le procédé impose également une condition limite en température sur les faces de l'empilement par l'intermédiaire d'un autoclave ou d'une table chauffante .

### 4.3 Stratégie de modélisation

La modélisation précédente est loin d'être suffisante. Hormis l'utilisation d'approches macroscopiques pour décrire le comportement dans les différentes zones, le traitement de l'évolution des zones (notamment la disparition de la zone de résine) et des frontières mobiles (le front de fluide) nécessite le développement d'outils numériques adaptés. Afin de fournir un modèle le plus général possible, nous avons choisi de décrire l'ensemble des équations de conservation, *i.e.* la conservation de la quantité de mouvement, la conservation de la masse et la conservation de l'énergie (voir Annexe A) pour chacun des constituants et dans chacune des zones identifiées sur les figures 4.1 et 4.2. L'aspect multi-physique du procédé associé aux interactions fluides-structures va imposer l'utilisation de formulations mixtes mêlant à la fois des approches matérielles (géométrie courante) et initiales (géométrie initiale) et ainsi le développement de nouvelles formulations dans les bibliothèques *PRO-FLOT*.

Les équations de conservation sont développées ici dans un cadre général. Les problèmes d'écoulement sont traités dans le cas de régimes transitoires. Les effets d'inerties et des forces de volumes sont considérés. Ces équations sont ensuite adaptées à l'étude de l'infusion, en tenant compte des hypothèses relatives à l'écoulement de la résine et au comportement des nappes.

# Chapitre 5

## Modélisation mécanique

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>45</b>
<b>5.2</b>	<b>Modélisation de la partie fluide</b>	<b>46</b>
5.2.1	Hypothèses	47
5.2.2	Traitement des domaines mobiles : approche <i>ALE</i>	47
5.2.3	Écoulement de la résine dans la zone purement fluide	54
5.2.4	Écoulement de la résine dans les préformes	55
5.2.5	Écoulement de la résine dans le drainant	66
<b>5.3</b>	<b>Modélisation de la partie solide</b>	<b>67</b>
5.3.1	Conservation de la masse et porosité	67
5.3.2	Influence de la résine sur le comportement des nappes	68
<b>5.4</b>	<b>Prise en compte de la saturation</b>	<b>70</b>
5.4.1	Définition	70
5.4.2	Les approches possibles	70
<b>5.5</b>	<b>Conditions aux limites</b>	<b>71</b>
5.5.1	Interaction à l'échelle matériau	72
5.5.2	Conditions limites à l'échelle structure	72
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>74</b>

---

### 5.1 Introduction

La principale difficulté rencontrée dans le traitement des procédés de fabrication par infusion concerne la modélisation de la forte compressibilité des préformes et leur déplacement pendant l'écoulement du fluide. La compressibilité des préformes est contrôlée à



la fois par la pression de la résine à l'intérieur des pores et par les efforts mécaniques externes appliqués par l'intermédiaire du sac à vide. Afin de prendre en compte ces interactions, l'écoulement de la résine et la compression des nappes vont être décrits par les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse dans chacune des zones considérées sur les figures 4.1 et 4.2. Ces modèles sont complétés de manière implicite ou explicite par des lois de comportement (équation entropique) qui relient les variables naturelles (contraintes) aux variables essentielles (déformations ou vitesses de déformation).

Remarques :

1. Afin de ne pas alourdir les équations, la dépendance des différentes variables aux coordonnées matérielles  $\mathbf{x}$ , initiale  $\mathbf{x}_0$  et de référence  $\boldsymbol{\chi}$  ne sera pas systématiquement précisée. Lorsqu'elle n'est pas précisée, il s'agit systématiquement de variables matérielles.
2. Convention de notation : un indice et un exposant sont associés à une variable  $X$  (scalaire, vectorielle ou tensorielle). L'indice correspond au constituant auquel la variable est associée. Un indice  $r$  ou  $f$  désigne respectivement des variables relatives à la résine et aux préformes (ou fibres) et un indice  $d$  désigne une variable associée au domaine de résine introduit dans l'approche *ALE* (voir la suite du chapitre). Un exposant décrit la zone dans laquelle la variable est définie, par exemple la vitesse  $\mathbf{v}_r^f$  correspond à la vitesse de la résine dans les préformes. D'une manière générale toutes les variables utilisées sont des variables moyennes intrinsèques, *i.e.* valeur moyenne propre à un constituant «  $x$  ». Si cette variable est purement intrinsèque, *i.e.* propre à un constituant, elle est notée «  $\tilde{x}$  ». Enfin, une variable macroscopique est une variable moyennée sur l'ensemble du volume considéré, elle est notée «  $\bar{x}$  ».

## 5.2 Modélisation de la partie fluide

Quel que soit le procédé modélisé (*LRI* ou *RFI*), l'écoulement de la résine a lieu dans deux zones distinctes (voir figures 4.2 et 4.1). Nous décrivons dans cette section concernant la mécanique des fluides les lois de comportement et les équations de conservation employées pour l'écoulement dans les zones de résine seule (*RFI*), le drainant (*LRI*) et les préformes (*LRI* et *RFI*). Pour chacune de ces zones nous présentons de manière exhaustive les différentes hypothèses simplificatrices utilisées.

### 5.2.1 Hypothèses

Les procédés par infusion sont d'une manière générale caractérisés par des vitesses d'infusion relativement lentes. Han *et al.* (2003) notent des temps d'infusion de plus d'une demi-heure pour des pièces en forme de « T » d'épaisseur 40 mm. A titre indicatif, les essais que nous avons menés sur des préformes d'épaisseur 20 mm présentent des temps d'infusion très longs, supérieurs à une heure. Les nombres de Reynolds relatifs à l'écoulement de résine lors de la mise en œuvre des structures composites par ce type de procédé indiquent principalement des régimes d'écoulements laminaires (voir Annexe F). Les effets d'inertie peuvent donc être négligés devant les forces visqueuses (Kaviany (1995), Loos et MacRae (1996)). Néanmoins, dans le cadre d'une description générale des procédés par infusion, les équations de conservations seront écrites d'une manière générale incluant les effets d'inertie, avant d'être simplifiées. D'un point de vue théorique, le comportement de la résine est celui d'un fluide Newtonien incompressible (Yang *et al.* (2000)). Cette hypothèse, classique pour la modélisation des procédés par injection, se justifie principalement par la compressibilité négligeable de la résine devant celle du milieu dans lequel elle s'écoule. La loi de comportement associée au fluide s'écrit donc d'une manière générale dans la configuration matérielle  $\mathbf{x}$  à  $t$  (fluide Newtonien Incompressible) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} \quad (5.1)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  tenseur des contraintes de Cauchy,  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})$  tenseur des taux de déformation eulérien défini à partir des gradients des vitesses  $\nabla \mathbf{v}$ ,  $\eta$  la viscosité dynamique de la résine,  $p$  la pression hydrostatique du fluide dans les pores et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité.

### 5.2.2 Traitement des domaines mobiles : approche *ALE*

#### 5.2.2.1 Objectif

Les domaines dans lesquels s'écoule la résine, *i.e.* les préformes et le domaine de résine seule dans le cas du procédé *RFI*, ne cessent d'évoluer au cours de l'infusion. Ainsi, alors que la zone de nappes se dilate sous l'action de la pression de la résine, la zone de résine seule s'amointrit pour disparaître en fin d'infusion. Dans le cadre d'une approche générale de l'infusion, il est nécessaire de prendre en compte ce mouvement lors de l'écriture des lois de conservation. Dans un premier temps, nous avons tenté de formuler le problème en réalisant des bilans de masses pour des volumes élémentaires dans les zones de préformes et de résine seule pour chaque constituant (la résine et les fibres). Compte tenu des mouvements relatifs entre les nappes et la résine et compte tenu de la déformation des nappes lors de l'écoulement de la résine, des termes convectifs apparaissent lors de

l'écriture des équations de conservation de la masse. Ces nouvelles équations proches des équations obtenues par Gawin *et al.* (2003), rappellent fortement les équations obtenues suite à l'emploi de formulations *ALE* (Belytschko *et al.* (2000)). Cette approche propose un formalisme permettant de prendre en compte les mouvements relatifs entre les particules matérielles et un domaine arbitraire. L'approche utilisée dans notre étude, proche de celle employée par Zhao et Forhad (2003), est basée sur une formulation *ALE* des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

### 5.2.2.2 Formulation *ALE*

La formulation *ALE* (Arbitrary Lagrangian Eulerian) est une méthode bien adaptée pour étudier l'écoulement d'un fluide dans un domaine mobile (Rabier (2003)). Cette approche numérique est basée sur un domaine de référence « fictif » indépendant du domaine matériel attaché aux particules matérielles et du domaine fixe associé au domaine initial. Le problème est alors résolu dans ce nouveau repère. La figure 5.1, synthétise les différentes approches numériques pouvant être utilisées dans le cas de grandes déformations, grands déplacements, et mouvements de frontières pour des problèmes discrets.

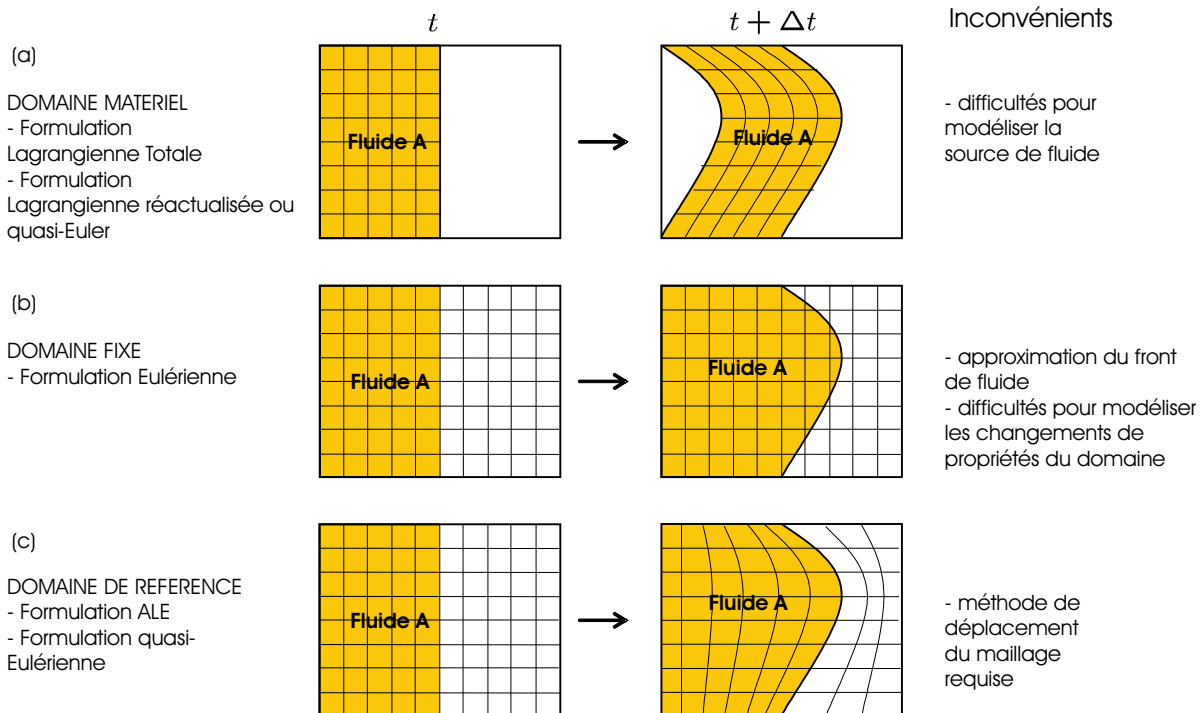


Figure 5.1 – Différents types de formulations disponibles basées sur des approches (a) matérielles, (b) initiales ou (c) de référence (Rabier (2003)).

La première approche (voir figure 5.1-a) est basée sur un domaine matériel, *i.e.* un domaine associé aux particules matérielles. Ainsi, chaque élément du maillage contient

toujours les mêmes particules matérielles. Cette approche est adaptée à la modélisation de comportements solides. Par contre, lorsque des fluides sont considérés, il n'est pas possible de prendre en compte simplement une source de fluide. Cela suppose l'ajout de particules matérielles, donc d'éléments lors du calcul. En revanche, une localisation précise du front de fluide peut être réalisée. Par ailleurs, ce type de formulation évite la présence de termes non-linéaires de convection puisque les particules matérielles sont associées au domaine de calcul. Néanmoins, lorsque de trop fortes déformations interviennent, la distorsion des éléments du maillage conduit à des erreurs numériques. Il est alors nécessaire d'utiliser des techniques adaptées de remaillage du domaine matériel qui provoquent elles aussi des erreurs de précision lors de la projection des données et conduisent à des augmentations des temps de calculs. Cette approche reste donc réservée à des problèmes où les interfaces se déforment peu, typiquement en mécanique des solides. Enfin notons que l'approche matérielle permet une conservation de l'histoire de la transformation, les valeurs stockées aux nœuds et aux points de Gauss étant en permanence associées à la même particule matérielle. Ce type d'approche peut être traité par des formulations Lagrangienne Totale, Lagrangienne semi-Réactualisée ou Réactualisée (tend vers une formulation eulérienne ; voir chapitre 8).

Lorsque l'approche basée sur un domaine fixe est considérée, les sources de fluides peuvent être plus facilement considérées. Dans ce cas, les particules matérielles qui s'écoulent sont observées depuis une position géométrique de l'espace fixe au cours du temps (le maillage initial). Bien que cette méthode conserve un maillage non déformé, *i.e.* le maillage initial, la formulation fait apparaître des termes convectifs non-linéaires dans les équations de conservation, puisqu'il existe alors un mouvement relatif entre les particules et le domaine de calcul initial fixe. Ces termes nécessitent des maillages fins et des techniques particulières de résolution (SUPG<sup>12</sup>). Concernant les problèmes aux interfaces mobiles, des méthodes dites à deux fluides doivent être employées. L'interface est alors reconstruite à l'aide de marqueurs transportés par l'écoulement. Le problème de cette méthode réside principalement dans la définition peu précise du front de fluide. Celui-ci est en effet situé à l'intérieur des éléments du maillage fixe. Des imprécisions sont donc rencontrées lorsque des conditions aux limites sont appliquées au niveau de ce front. Notons enfin que l'évolution des propriétés du domaine initial qui pourraient agir sur l'écoulement (par exemple la porosité associée au domaine géométrique dans le cas d'un milieu poreux) peut être imposée seulement lorsque l'écoulement est résolu de manière itérative (succession de sous-problèmes d'écoulement avec prise en compte de l'évolution du domaine dans lequel s'écoule le fluide). Ces approches basées sur un domaine fixe utilisent essentiellement des formulations eulériennes.

---

<sup>12</sup>SUPG : Streamline Upwind Petrov Galerkin

L'approche *ALE* (Arbitrary Lagrangian Eulerian) combine les avantages des approches précédentes. Elle permet un suivi précis du front de fluide puisque les frontières du domaine de calcul peuvent être attachées au front. Par ailleurs, les sources de fluides peuvent, comme dans le cas de l'approche basée sur un domaine fixe (formulation eulérienne), facilement être représentées puisque le domaine n'est pas associé aux particules matérielles. Enfin, la prise en compte des variations de propriétés du domaine sur l'écoulement de la résine est possible. Cette formulation enrichie requiert cependant l'introduction d'un domaine intermédiaire *a priori* arbitraire où les calculs seront effectués. Ce domaine devra subir des variations topologiques afin de prendre en compte la variation du domaine dans lequel s'écoule le fluide et les changements de propriétés physiques de ce domaine (principalement la porosité). Dans ce cas, la loi d'évolution du domaine de référence doit être choisie de manière à suivre le changement de ces propriétés. Comme dans le cas de la formulation eulérienne, cette formulation fait intervenir des termes convectifs liés au mouvement relatif entre les particules matérielles et le domaine de référence.

Cette brève description indique que la formulation d'Euler Lagrange Arbitraire (*ELA* ou *ALE*) répond aux besoins rencontrés ici dans le cadre de la modélisation des procédés par infusion de type *RFI* et *LRI*. Une revue bibliographique indique une utilisation forte d'une forme modifiée, la formulation dite de quasi-Euler, dérivant directement de la formulation *ALE* (Belytschko *et al.* (2000), Folch Duran (2000)). Nous présentons brièvement ci-après les aspects techniques de cette nouvelle formulation et ses avantages.

### 5.2.2.3 Principe

Le formalisme *ALE* est introduit sur la figure 5.2. Les notations suivantes sont utilisées ;  $\mathbf{x}_0$  désigne les coordonnées du matériau à l'instant initial dans le domaine initial (domaine  $\Omega_0$ ),  $\mathbf{x}$  désigne les coordonnées courantes du matériau dans le domaine matériel ou spatial (domaine  $\Omega$ ) et enfin  $\boldsymbol{\chi}$  désigne la position des particules matérielles dans le domaine de référence (domaine  $\hat{\Omega}$ ). Les fonctions de transformation  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_0, t) = \hat{\boldsymbol{\phi}} \circ \boldsymbol{\psi}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\chi}, t) = \boldsymbol{\phi} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1}$  et  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}^{-1} \circ \boldsymbol{\phi}$  introduites sur la figure 5.2, permettent de passer d'un domaine à l'autre.

Le déplacement de la matière est donné par la relation  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  c'est à dire la différence entre la position des particules matérielles dans le domaine matériel et la position des particules matérielles dans le domaine initial. Le déplacement du maillage (domaine  $\hat{\Omega}$ ) est donné par la relation  $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\chi}, t) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}$  c'est à dire par la différence entre la position des particules matérielles dans le domaine matériel et la position des particules matérielles dans le domaine de référence.

La formulation *ALE* consiste à exprimer le problème à résoudre dans le domaine de référence  $\hat{\Omega}$ . La dérivée matérielle d'une fonction  $f$  dans ce nouveau repère s'écrit :

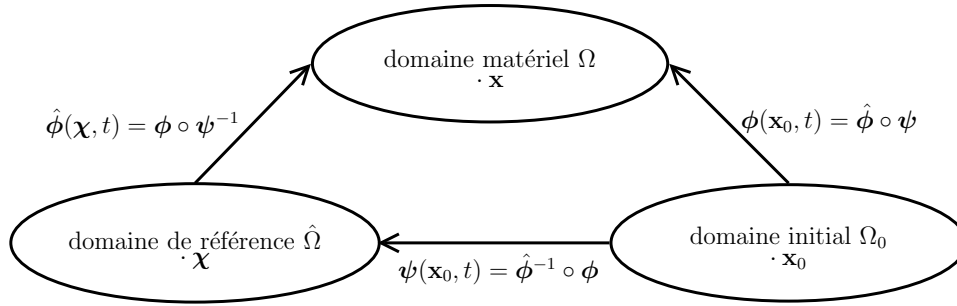


Figure 5.2 – Relation entre les domaines matériel  $\Omega$  (coordonnées  $\mathbf{x}$ ), initial  $\Omega_0$  (coordonnées  $\mathbf{x}_0$ ) et de référence  $\hat{\Omega}$  (coordonnées  $\boldsymbol{\chi}$ ) (Belytschko *et al.* (2000)).

$$\frac{Df(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{w}(\boldsymbol{\chi}, t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\chi}} f(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{w}$  est la vitesse des particules relativement au domaine de référence  $\mathbf{w}(\boldsymbol{\chi}, t) = \left. \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0}$ .

Principalement deux types de problèmes sont liés à l'utilisation d'une formulation *ALE*. Tout d'abord, des difficultés d'implémentation interviennent au niveau de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en raison de l'utilisation d'un tenseur non-symétrique exprimant le rapport entre les forces dans la configuration courante  $\Omega$  agissant sur un élément de surface dans la configuration de référence  $\hat{\Omega}$ . Ce tenseur que nous noterons  $\mathbf{P}'$  possède des propriétés proches du tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 1 ( $\mathbf{P}$ ) qui désigne le rapport entre les forces dans la configuration déformée  $\Omega$  agissant sur un élément de surface dans la configuration initiale. Ainsi, la conservation de la quantité de mouvement *ALE* possède une forme similaire à l'équation de conservation exprimée dans le domaine initial  $\Omega_0$ . Elle s'écrit (voir annexe A.3, page 217 pour la forme générale des équations de conservation de la quantité de mouvement dans une approche matérielle et adaptée ici à l'écriture dans le domaine de référence) :

$$\mathbf{div}_{\boldsymbol{\chi}} \mathbf{P}' + \mathbf{f}^v = \rho(\boldsymbol{\chi}, t) \frac{D\mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{f}^v$  désigne les forces volumiques,  $\rho$  la densité du milieu et  $\mathbf{v}$  la vitesse des particules dans le domaine matériel  $\mathbf{v} = \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0}$ .

D'autre part, la loi de comportement relative à l'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible est connue en fonction du tenseur des contraintes vraies de Cauchy (Cf. Eq. 5.1, page 47). Dans le cas de l'utilisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement précédente (Eq. 5.3), il est nécessaire d'utiliser des relations de transformations numériquement coûteuses afin de passer des contraintes de Cauchy aux contraintes

$\mathbf{P}'$  et inversement. Par ailleurs, la quantité de données stockée est plus importante puisque les tenseurs ne sont plus symétriques.

#### 5.2.2.4 Formulation quasi-eulérienne

Afin d'éliminer les deux difficultés précédentes, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est exprimée dans la configuration matérielle en utilisant des dérivées matérielles. Dans cette approche, les équations de conservation de la quantité de mouvement (Eq. 5.4) et de la masse (Eq. 5.4) s'écrivent :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^v = \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{Dt} \quad (5.4a)$$

$$\frac{D\rho(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \rho \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.4b)$$

Cette forme eulérienne de l'équation de conservation de la quantité de mouvement nécessite cependant d'être modifiée afin de tenir compte du mouvement du domaine d'étude et ainsi d'obtenir une formulation *ALE* appropriée. La relation entre les formes eulériennes et *ALE* des équations de conservation (conservation de la quantité de mouvement, conservation de la masse et conservation de l'énergie) apparaît à travers la dérivée matérielle *ALE* (Cf. Eq. 5.2) qui peut être réécrite en fonction des gradients eulériens (dérivées matérielles)  $\nabla_{\mathbf{x}}$ . Pour obtenir cette relation, la vitesse convective des particules  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ , égale à la différence entre la vitesse des particules  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t}$  et la vitesse du domaine de référence  $\hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\chi}, t) = \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} = \left. \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}}$ , est introduite :

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (5.5)$$

En utilisant les relations de transformation de la figure 5.2, la vitesse des particules matérielles s'écrit :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\phi}(\overbrace{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t)}^{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} = \left. \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \left. \frac{\partial \overbrace{\boldsymbol{\chi}}^{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0, t)}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad (5.6a)$$

$$= \hat{\mathbf{v}} + \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{w} = \hat{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{w} \quad (5.6b)$$

Finalement :

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{w} \quad (5.7)$$

Une nouvelle forme pour la dérivée particulière *ALE* (Eq. 5.2), fonction de la vitesse convective  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$  peut ainsi être utilisée :

$$\frac{Df(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} = \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} f(\boldsymbol{\chi}, t) \cdot \mathbf{w}(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (5.8a)$$

$$= \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \mathbf{w}(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (5.8b)$$

$$= \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \quad (5.8c)$$

Les deux dérivées matérielles étant identiques ( $\frac{Df(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} = \frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt}$ ), une nouvelle formulation *ALE* pour les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement peut être proposée (à partir des équations 5.4a et 5.4b) :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^{\mathbf{v}} = \rho(\mathbf{x}, t) \left. \frac{\partial \mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (5.9a)$$

$$\left. \frac{\partial \rho(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0 \quad (5.9b)$$

Cette nouvelle forme des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement est parfois appelée formulation « quasi-eulérienne » dans le sens où sa forme est proche d'une formulation eulérienne (Folch Duran (2000)).

Dans une description eulérienne, les dérivées temporelles  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$  correspondent à la différence entre deux instants différents, en un même point de l'espace, puisque la dérivée par rapport au temps s'effectue à  $\mathbf{x}$  constant, *i.e.* pour un domaine matériel qui n'évolue pas (maillage fixe). Inversement, les dérivées temporelles  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}}$  correspondent à la différence entre deux instants différents, mais pour deux points de l'espace différents puisque la dérivée par rapport au temps s'effectue dans ce cas à  $\boldsymbol{\chi}$  constant, c'est à dire pour un domaine de référence qui n'évolue pas. Compte tenu du mouvement relatif entre le domaine de référence et le domaine matériel, les deux instants de calcul seront associés à des coordonnées spatiales différentes. D'un point de vue numérique, la dérivée temporelle est calculée en un même point du maillage. Pour cette raison les indices sont omis des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Eq. 5.10). Le lecteur doit néanmoins garder en mémoire que ces dérivées sont conceptuellement différentes.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^{\mathbf{v}} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (5.10a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.10b)$$



Remarque : lorsque le domaine de référence et le domaine initial sont confondus ( $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x}_0$ ), l'approche est dite Lagrangienne ( $c = 0$ ). Tous les calculs sont effectués sur la configuration initiale. Lorsque les coordonnées matérielles et *ALE* sont confondues ( $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x}$ ), l'approche est dite eulérienne ( $c \neq 0$ ). Les calculs sont effectués sur la configuration courante et le tenseur des contraintes de Cauchy est utilisé.

Pour une description complète des formulations *ALE* et quasi-eulérienne, la loi de déplacement du domaine de référence  $\hat{\Omega}$  doit enfin être définie. Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été proposées comme l'indiquent Belytschko *et al.* (2000). La plus populaire d'entre elles consiste en un déplacement élastique des nœuds internes d'un domaine obtenu à partir de l'équilibre mécanique induit par un ensemble de conditions aux limites imposées au niveau des frontières du domaine. Le choix de la loi de déplacement du domaine de calcul est un point essentiel de la formulation *ALE*, elle doit assurer la conservation d'un facteur de forme correct pour tous les éléments du maillage.

### 5.2.3 Écoulement de la résine dans la zone purement fluide

L'écoulement de la résine obéit aux lois classiques de la mécanique des fluides pour un comportement Newtonien incompressible : l'équation de conservation de la quantité de mouvement de Navier et Stokes. Cette équation obtenue à partir de l'équilibre mécanique du système et de la loi de comportement Eq. 5.1 (voir description en Annexe A.5, Eq. A.7), est modifiée dans le cadre d'une formulation quasi-eulérienne. Cette nouvelle équation de conservation de la quantité de mouvement complétée de la forme quasi-eulérienne de la conservation de la masse conduit au système suivant :

$$\rho_r^r \left( \frac{\partial \mathbf{v}_r^r(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{c}_r^r \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_r^r \right) = \mathbf{f}^v - \nabla_{\mathbf{x}} p_r^r + \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_r^r \quad (5.11a)$$

$$\frac{\partial \rho_r^r(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{c}_r^r \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_r^r + \rho_r^r \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_r^r = 0 \quad (5.11b)$$

avec  $\mathbf{c}_r^r$  la vitesse convective de la résine dans la zone de résine seule, c'est à dire la vitesse relative entre les particules de résine dans le domaine matériel  $\mathbf{v}_r^r$  et la vitesse du domaine de référence  $\mathbf{v}_d^r$  dans la zone de résine seule,  $\mathbf{f}^v$  les forces de volumes,  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et  $\rho$  sa densité.

En négligeant les forces volumiques et en considérant de faibles vitesses d'infusion, les effets d'inertie peuvent être négligés devant les forces visqueuses. Une densité constante est considérée pour la résine  $\rho_r^r = c^{te}$ . Les équations de Navier et Stokes, en régime stationnaire deviennent donc les équations de Stokes :

$$-\nabla_{\mathbf{x}} p_r^r + \eta \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_r^r = 0 \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{c}_r^r \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_r^r + \rho_r^r \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_r^r = 0 \quad (5.12b)$$

La vitesse du domaine de référence dans la zone de résine seule  $\mathbf{v}_d^r$  résulte, comme expliqué dans la partie précédente (voir paragraphe 5.2.2.4), de la déformation du domaine dans lequel s'écoule la résine. En effet, lors de l'infusion, la diminution de l'épaisseur de la zone de résine engendre une vitesse de déplacement du domaine due au déplacement des frontières. Ce rétrécissement géométrique est traité ici à l'aide d'une loi élastique. À la différence du domaine qui sera utilisé pour l'écoulement dans les préformes, le domaine de résine est défini par ses frontières. Les déplacements internes de ce domaine peuvent être choisis de manière arbitraire puisque les propriétés physiques employées dans les équations de Navier et Stokes sont toutes relatives au fluide et non au domaine dans lequel il s'écoule, notamment la viscosité du fluide est propre à la résine et ne dépend pas du domaine.

## 5.2.4 Écoulement de la résine dans les préformes

L'écoulement de la résine dans les préformes repose sur des mécanismes complexes et relativement méconnus compte tenu de l'hétérogénéité de la structure étudiée. Il est impératif de modéliser l'infiltration de la résine dans les nappes, *i.e.* l'impact de la présence d'obstacles à l'écoulement. Après avoir décrit les différentes hypothèses retenues pour la prise en compte d'un tel milieu, nous analyserons successivement les différentes approches micro/mésoscopiques et macroscopiques avant de généraliser les résultats obtenus et de dégager un modèle macroscopique d'écoulement dans les préformes.

### 5.2.4.1 Hypothèse et modélisation

Les effets de capillarité sont dans un premier temps négligés. Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment ces effets peuvent être pris en compte par une analyse de la saturation  $s$  (voir la définition dans le §4.1.2, page 41) d'une part et la prise en compte de l'action de ces phénomènes locaux sur les perméabilités d'autre part. Comme nous l'observons classiquement, les nappes de renforts sont assimilées à un milieu poreux. Le problème de l'écoulement de résine va donc consister en l'étude de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux compressible constitué de deux phases, l'une solide et géométriquement continue (les fibres), l'autre fluide (l'air ou la résine). De toute évidence cette première hypothèse constitue une forte approximation puisqu'un milieu constitué de torons de fibres et d'espaces inter-fibres / inter-torons va être assimilé à un milieu poreux formé de grains et de pores.

Pour décrire ce milieu poreux équivalent, des grandeurs classiques de la mécanique des milieux poreux sont utilisées. Il s'agit tout d'abord de la porosité  $\phi$ , c'est à dire le rapport entre le volume poreux et le volume total  $\phi = \frac{V_p}{V_t}$ . Le volume poreux  $V_p$  est égal à la différence entre le volume total  $V_t$  (le volume apparent du milieu) et le volume de solide  $V_s$ . La fraction volumique de solide (ou compacité  $c$ ) égale au rapport entre le volume de solide  $V_s$  et le volume total  $V_t$  est également employée. Dans le cas des matériaux composites, cette fraction volumique est aussi appelée taux de fibres et notée  $\phi_f = \frac{V_s}{V_t} = 1 - \phi$ . La surface spécifique  $a$ , c'est à dire le rapport entre l'aire totale développée par la phase solide et le volume total (aire volumique en  $\frac{m^2}{m^3}$ ) ou la masse totale de cette même phase (aire massique en  $\frac{m^2}{kg}$ ) peut également être utilisée comme c'est le cas ici dans l'approche de Carman Kozeny. Enfin, la saturation  $s$  désigne le rapport entre le volume de fluide et le volume de pores  $\phi = \frac{V_f}{V_p}$ .

Certaines autres grandeurs relatives à la mécanique des milieux poreux semblent plus difficiles à utiliser. Ces grandeurs basées sur une description du milieu poreux par un milieu granulaire (grains et pores) sont difficilement transposables dans le cas des nappes de fibres (torons de fibres et espaces inter-mèches) : la coordinence, le facteur de forme et le facteur de taille. Le lecteur pourra consulter la définition de ces grandeurs dans la littérature (par exemple Charpentier (2004)).

Nous noterons que les porosités, fractions volumiques de fibres et saturation peuvent être associées à différents types de volumes. Ainsi, elles peuvent décrire globalement le milieu poreux. Dans ce cas ils seront calculés sur l'ensemble du milieu poreux. Elles peuvent aussi être associées à des volumes représentatifs plus faibles. Dans ce cas, plus la taille des volumes sera faible, plus la description du milieu poreux sera précise.

Nous retrouvons ces niveaux de description différents à travers les deux types d'approches classiquement utilisées dans la littérature pour décrire l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux : l'approche de Kozeny, reposant sur des considérations micro/mésoscopiques et l'approche de Darcy basée sur une représentation macroscopique de l'écoulement. La combinaison de ces deux approches permet d'obtenir des informations sur la perméabilité macroscopique introduite dans Darcy et de relier cette perméabilité à des grandeurs relatives à la microscopie de ce milieu. Nous obtenons la loi dite de Carman Kozeny. Enfin, le couplage des équations de Navier et Stokes avec la théorie de l'homogénéisation et l'approche de Kozeny permet d'obtenir une généralisation de l'équation de Darcy, l'équation de Brinkman décrite en Annexe J, page 247.

#### 5.2.4.2 Modèles choisis

**Modèle Microscopique - Approche de Kozeny** Dans cette approche, le milieu poreux est assimilé à un ensemble de canaux cylindriques. La loi de Kozeny est obtenue

en deux étapes. La première permet de relier le débit de fluide dans un canal à la perte de pression à ses extrémités, soit la loi de Hagen-Poiseuille. Dans un deuxième temps, la sommation de la contribution de chaque canal, permet de relier le débit et le gradient de pression imposés aux extrémités d'un échantillon macroscopiquement équivalent (voir figure 5.3).

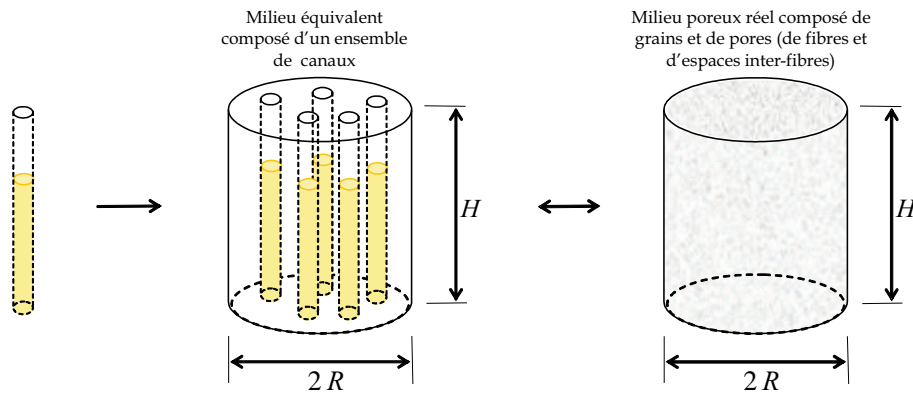


Figure 5.3 – De l'écoulement de résine dans un canal à l'écoulement dans un milieu poreux équivalent.

**Loi de Hagen-Poiseuille** Ici, compte tenu des remarques de la section 5.2.1, seuls les écoulements laminaires sont considérés (voir Annexe F, page 237). La loi de Hagen Poiseuille consiste à écrire l'équilibre stationnaire d'un fluide dans un pore cylindrique. Lors de l'écoulement dans une conduite circulaire, le profil de vitesse observé est parabolique. Une vitesse nulle peut être considérée sur les parois (due aux forces de frottement). Au centre du cylindre la vitesse est non nulle (voir figure 5.4). Ce type d'écoulement dit de Poiseuille sera analysé numériquement lors de la validation des équations de Stokes. Ici, nous nous appuyons sur une résolution analytique du problème.

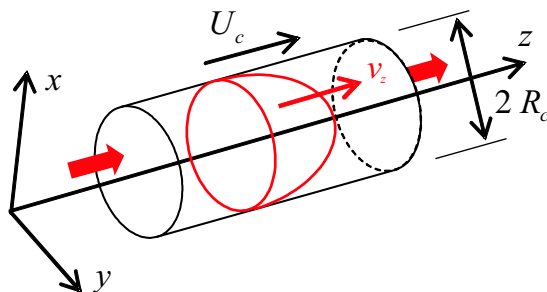


Figure 5.4 – Écoulement dans une conduite circulaire : Loi de Hagen-Poiseuille.

En négligeant les phénomènes d'inertie (régime stationnaire), l'écoulement dans le cylindre peut être décrit par l'équation de Stokes en coordonnées cylindriques suivant

l'axe  $z$  (voir équation A.7, page 221) :

$$\rho g_z - \frac{\partial p(z)}{\partial z} + \eta \Delta v_z(r) = 0$$

Par double intégration sur le rayon, et en tenant compte des conditions aux limites sur la vitesse ( $v_z(0) \neq \infty$  et  $v_z(R_c) = 0$ ), la vitesse suivant  $z$  s'écrit :

$$v_z(r) = \frac{1}{4\eta} \left[ \frac{\partial p(z)}{\partial z} - \rho g_z \right] (r^2 - R_c^2)$$

L'intégrale de cette équation sur la section du cercle donne une expression pour le débit volumique  $Q_c$  en fonction du gradient de pression. La loi de Hagen-Poiseuille s'écrit :

$$Q_c = -\frac{\pi R_c^4}{8\eta} \left[ \frac{\partial p(z)}{\partial z} - \rho g_z \right] \quad (5.13)$$

Cette équation décrit l'écoulement stationnaire d'un fluide dans un pore cylindrique. A partir de ce débit, la vitesse moyenne dans le canal ou vitesse superficielle peut être calculée ( $U_c = \frac{Q_c}{S_c}$ ).

**Loi de Kozeny** Le milieu poreux (de volume  $V = S H$  avec  $S = \pi R^2$ ) est remplacé par un milieu de même volume constitué de  $N$  pores identiques, droits et indépendants (non connectés entre eux), de longueur  $L$  et de rayon  $R_c$  (voir figure 5.5). Le nombre de pores  $N$  ainsi que le rayon de ces pores  $R_c$  sont choisis de telle sorte que la surface totale des capillaires soit égale à la surface spécifique de milieu poreux considéré «  $a$  » et que le volume total soit égal au volume de pores (voir la définition des grandeurs associées à un milieu poreux dans la partie 5.2.4.1).

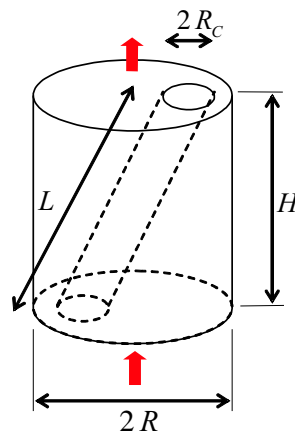


Figure 5.5 – Modèle de Kozeny : modélisation du milieu poreux à l'aide de pores identiques droits et indépendants.

Par ailleurs, le facteur de circularité  $\gamma$  est introduit. Il traduit le fait que la section s'écarte de la circularité. Il varie entre 0,83 pour les formes triangulaires et 1,5 pour les formes rectangulaires infiniment allongées. Pour des milieux réels,  $\gamma$  est généralement égal à  $1 \pm 0,15$ . Enfin, la tortuosité  $T = L/H$  désigne la longueur moyenne parcourue par le fluide dans les pores réels. L'équation 5.13 devient :

$$U_c = -\frac{1}{\gamma} \frac{R_c^2}{8\eta} \left( \frac{\Delta p}{L} - \rho g_z \right)$$

En écrivant l'égalité des débits en fût vide et dans les pores ( $Q = Q_c = SU = NS_c \frac{H}{L} U_c$  avec  $NS_c = S \frac{H}{L} \phi$  et  $\phi$  la porosité du milieu), une relation entre le débit  $Q$  et le gradient de pression aux extrémités d'un milieu poreux  $\frac{\Delta p}{L}$  peut être écrite :

$$Q = -\frac{1}{\eta} \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{R_c^2}{8} \phi \left( \frac{H}{L} \right)^2 \right] S \left( \frac{\Delta p}{L} - \rho g_z \right) \quad (5.14)$$

### Modèle Macroscopique - Approche de Darcy

**Expérience de Darcy** En 1856, Darcy étudie l'écoulement en milieu saturé de l'eau dans les filtres sableux connectés aux fontaines de la ville de Dijon (voir expérience sur la figure 5.6). Les expériences de Darcy montrent l'existence d'une relation de proportionnalité entre le débit et le gradient de pression imposé aux extrémités d'un milieu poreux (Darcy (1856)) :

$$Q = \frac{\kappa S}{L} (h_1 - h_2)$$

où  $\kappa$  désigne la conductivité hydraulique,  $S$  la section transverse du conduit et  $h_i = \frac{p_i}{\rho g} + u_i$  désigne la hauteur hydraulique (voir figure 5.6). En introduisant la relation entre la conductivité hydraulique et la perméabilité  $K = \frac{\kappa \eta}{\rho g}$ , le débit s'écrit :

$$Q = \frac{K S}{\eta} \left( \frac{p_1 - p_2}{L} + \rho g_z \sin(\alpha) \right)$$

Dans le cas d'un conduit vertical ( $\sin(\alpha) = 1$ ), et en introduisant le différentiel de pression  $\Delta p = p_2 - p_1$  :

$$Q = -\frac{K S}{\eta} \left( \frac{\Delta p}{L} - \rho g_z \right) \quad (5.15)$$

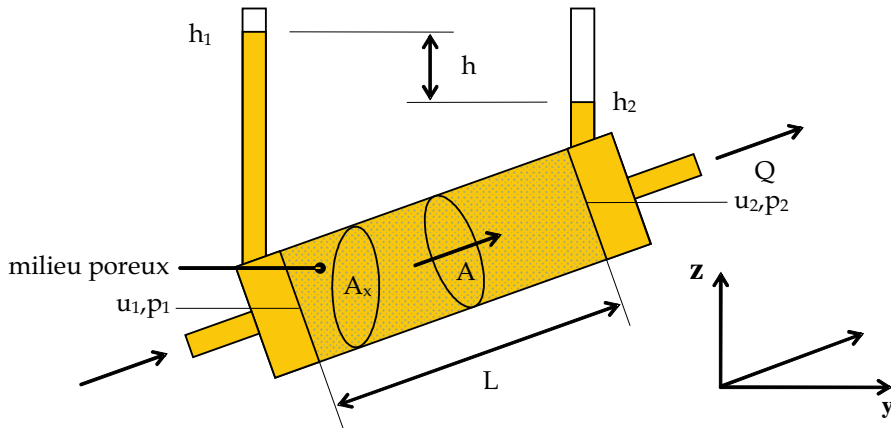


Figure 5.6 – Expérience de Darcy : écoulement dans un conduit poreux saturé incliné (prise en compte de la pesanteur).

**Généralisation de l'équation de Darcy** Lorsque la distance  $L$  tend vers 0, une expression différentielle de l'équation macroscopique de Darcy 1D peut être obtenue à partir de l'équation 5.15. Une généralisation 3D de cette équation donne (Hassanizadeh (1983c)) :

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{Q}{S} \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{K}}{\eta} \cdot (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (5.16)$$

où  $\bar{\mathbf{v}}$  désigne la vitesse en fût vide, *i.e.* la vitesse moyenne qu'aurait le fluide dans le tube de normale  $\mathbf{n}$ . C'est aussi la vitesse moyenne d'approche du liquide.  $\mathbf{K}$  est le tenseur de perméabilité tridimensionnel. Cette loi reste valable tant que le régime d'écoulement est laminaire c'est à dire tant que les forces visqueuses dominent les forces d'inertie (nombre de Reynolds faible).

Note : la même généralisation tridimensionnelle peut être réalisée sur l'équation de Kozeny à condition de proposer une caractérisation tridimensionnelle des grandeurs intervenant dans cette équation (voir le paragraphe suivant).

**Combinaison des approches : Carman-Kozeny** En observant les formules 1D obtenues à l'aide des approches macroscopiques (Darcy) et microscopiques (Kozeny) et en les combinant, une expression pour le tenseur de perméabilité  $K$  peut être obtenue :

$$K = \frac{1}{\gamma} \frac{R_c^2}{8} \phi \left( \frac{H}{L} \right)^2$$

En introduisant les propriétés caractéristiques d'un milieu poreux, notamment la porosité  $\phi$  et la surface spécifique ou aire volumique  $a$  (voir paragraphe 5.2.4.1), les relations d'égalité suivantes entre le modèle de Darcy et le modèle de Kozeny peuvent être écrites

(voir figure 5.5). D'une part, l'égalité des surfaces internes  $a V (1 - \phi) = N 2 \pi R_c L$ . D'autre part, l'égalité des porosités  $\phi V = N \pi R_c^2 L$ . Finalement une relation entre la surface spécifique  $a$  et la porosité  $\phi$  (Charpentier (2004)) peut être donnée  $a = \frac{2}{R_c} \frac{\phi}{1-\phi}$ . La perméabilité s'écrit donc (en introduisant la tortuosité déjà définie précédemment) :

$$K = \frac{1}{2 \gamma T^2 a^2} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}$$

Dans l'expression précédente la constante  $h_k = 2 \gamma T^2$  est appelée constante de Kozeny. Elle vaut  $h_k = 4,5 \pm 1,5$  (en pratique 5) pour des empilages de grains isométriques avec des porosités n'excédant pas 0,7 à 0,8. En exprimant la surface spécifique pour un milieu constitué de fibres de diamètre moyen  $d_f$ , il est possible d'écrire :

$$a = \frac{N \pi d_f L}{N \pi \frac{d_f^2}{4} L} = \frac{4}{d_f}$$

Finalement, une autre expression de la perméabilité souvent utilisée dans la littérature est donnée par l'équation suivante (Dullien (1979), Park et Kang (2003)) :

$$K = \frac{d_f^2}{16 h_k} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}$$

En généralisant dans un cas tridimensionnel, *i.e.* une constante de Kozeny dépendant des trois directions ( $\mathbf{h}_k$ ), l'expression dite de Carman Kozeny devient :

$$\mathbf{K} = \frac{d_f^2}{16 \mathbf{h}_k} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2} \quad (5.17)$$

Remarque : la relation de Carman-Kozeny est semi-empirique. La constante de Kozeny doit être déterminée expérimentalement. Elle conduit à une perméabilité effective c'est à dire une perméabilité en régime saturé. Dans le paragraphe 5.2.4.2 nous reviendrons en détail sur le problème de la perméabilité et sur la détermination de la constante de Kozeny.

**Équation de Brinkman** Les approches de Darcy et de Kozeny ne permettent pas de représenter un écoulement macroscopique dans un milieu poreux prenant en compte les effets de « bords » c'est à dire les conditions d'adhérence ou les conditions limites en vitesse au niveau des frontières (Yang *et al.* (2000)). En 1947, Brinkman propose une généralisation des équations de Navier et Stokes (voir équation A.7, page 221) aux milieux poreux. Ainsi, une force extérieure supplémentaire (terme de Darcy) traduit la diminution de la quantité de mouvement due à la présence du milieu poreux :  $\frac{\eta}{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{d}}_r^f$ . Formulée de manière quasi-eulérienne, l'équation de Brinkman s'écrit (voir Annexe J) :



$$\rho_r^f \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_r^f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{\phi_s} \bar{\mathbf{c}}_r^f \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}_r^f \right) = \underbrace{\mathbf{f}^v}_{\rho_r^f \phi_s \mathbf{g}} - \frac{\eta \phi_s}{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{d}}_r^f - \phi_s \nabla_{\mathbf{x}} p_r^f + \eta \Delta_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}_r^f \quad (5.18)$$

Dans cette équation  $\bar{\mathbf{c}}_r^f$  désigne la vitesse relative entre les particules matérielles de fluide  $\bar{\mathbf{v}}_r^f$  dans le domaine matériel et la vitesse du domaine de référence  $\bar{\mathbf{v}}_d^f$  choisi pour l'approche *ALE*, et  $\bar{\mathbf{d}}_r^f$  la vitesse relative entre le fluide et les préformes. Si le domaine de référence choisi pour l'approche *ALE* est le domaine dans lequel s'écoule le fluide (les préformes), les vitesses relatives  $\bar{\mathbf{d}}_r^f$  et  $\bar{\mathbf{c}}_r^f$  sont égales. Ce choix sera systématiquement effectué dans la suite de cette étude pour la résolution des équations de Darcy ou Brinkman compte tenu des explications données au paragraphe 5.2.4.3 :  $\bar{\mathbf{d}}_r^f = \bar{\mathbf{c}}_r^f$ . Par ailleurs, les vitesses introduites dans ces équations ne sont pas des vitesses réelles mais des vitesses macroscopiques ou dites en « fût vide ». Ainsi,  $\bar{\mathbf{v}}_r^f = \phi_s \mathbf{v}_r^f$  et  $\bar{\mathbf{c}}_r^f = \phi_s \mathbf{c}_r^f$  et  $\mathbf{v}_r^f, \mathbf{c}_r^f$  respectivement les vitesses intrinsèques moyennes de la résine dans les pores, et les vitesses intrinsèques moyennes relatives de la résine.

En négligeant les effets d'inertie et en considérant des régimes d'écoulement laminaires ainsi que de faibles perméabilités, le terme  $\mathbf{f}^v - \frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{c}}_r^f$  devient prépondérant devant les termes d'advection  $\eta \Delta_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}_r^f$  et de diffusion  $\bar{\mathbf{c}}_r^f \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}_r^f$  (Farina et Preziosi (2000a) et Preziosi et Farina (2002)). Ainsi, l'équation de Brinkman (Eq. 5.18), se réduit à l'équation classique de Darcy (Eq. 5.16, voir aussi Farina et Preziosi (2000b)) :

$$\mathbf{f}^v - \frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{c}}_r^f - \nabla_{\mathbf{x}} p_r^f = 0 \quad (5.19)$$

En considérant un écoulement quasi-statique pour lequel les phénomènes d'inertie sont négligés devant les phénomènes visqueux l'équation de Brinkman 5.18 devient (Ngo et Tamma (2001)) :

$$\mathbf{f}^v - \frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{c}}_r^f - \nabla_{\mathbf{x}} p_r^f + \bar{\eta} \Delta_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}_r^f = 0 \quad (5.20)$$

$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\phi_s}$  représente la viscosité effective. La viscosité doit être vue comme un paramètre permettant de prendre en compte les conditions aux limites de cisaillement au niveau des interfaces (Brinkman (1947)) par l'intermédiaire du terme d'advection.

**Le problème de la perméabilité** Quelle que soit l'approche utilisée (Darcy ou Brinkman), la perméabilité caractérise l'écoulement de fluide dans le milieu poreux. La modélisation de l'écoulement de la résine dans les procédés *LRI* et *RFI* devra donc s'appuyer sur une valeur théorique ou expérimentale de la perméabilité la plus précise possible afin de proposer un modèle réaliste et fiable. Dans le cas de ces procédés, les mesures concernent

principalement les perméabilités transverses des préformes. En effet, les perméabilités dans le plan des renforts ( $10^{-10} - 10^{-11} \text{ m}^2$ ) sont bien plus élevées que les perméabilités dans l'épaisseur ( $10^{-12} - 10^{-13} \text{ m}^2$ ). Expérimentalement, l'écoulement du fluide lors de l'infusion a lieu essentiellement dans l'épaisseur. Dans cette direction, comme nous l'avons décrit précédemment lors de la combinaison des approches de Kozeny et de Darcy, une formule semi-empirique peut être utilisée pour obtenir cette perméabilité : la relation de Carman Kozeny. L'autre méthode de plus en plus employée consiste à utiliser directement des mesures expérimentales spécifiques au milieu poreux analysé.

**Utilisation de loi semi-empiriques** Le modèle de Carman-Kozeny est très largement utilisé dans le cadre de la détermination de la perméabilité d'un empilement de préformes (Bear (1990), Kaviani (1995)). Ce modèle fait intervenir une constante dite constante de Kozeny dont la détermination n'est pas triviale. Kaviani (1995) note les limites de ce modèle et constate que la constante de Kozeny varie dans certaines conditions. Expérimentalement Elbouazzaoui (2004) montre, bien que ceci reste encore difficilement quantifiable et que la constante dépend du régime d'écoulement. Par ailleurs, la dépendance à la porosité proposée dans cette loi n'est pas toujours représentative du milieu poreux étudié (en l'occurrence ici le modèle de Kozeny n'est pas représentatif des renforts de type NC2 comme l'indiquent Drapier *et al.* (2005)). Il faut se rappeler que le modèle de Kozeny reste une approximation assez grossière du milieu poreux comme le montre la figure 5.5. Il est donc nécessaire de prendre de nombreuses précautions en employant cette loi, chose que de nombreux auteurs négligent de faire en se contentant d'identifier la constante de Kozeny. Les travaux de Chen et Papathanasiou (2006) montrent une forte sensibilité de la constante de Kozeny à la porosité mais surtout à la distance entre fibres.

D'autres travaux portent sur l'utilisation de la théorie de l'homogénéisation afin de prédire la perméabilité de renforts fibreux (Takano *et al.* (2000), Boutin (2000)). Dans ce cas la perméabilité du renfort (paramètre macroscopique) est déterminée à partir de la géométrie de la microstructure au moyen de la théorie de l'homogénéisation. Bizet *et al.* (2005) s'intéressent à l'analyse de la microstructure de renforts fibreux à l'aide de granulométries linéaires. Ces granulométries permettent de déterminer les caractéristiques de la phase poreuse. Une comparaison entre les valeurs de perméabilités expérimentales et de perméabilités calculées à l'aide des porosités et de la loi de Carman Kozeny est ensuite réalisée avec succès. Dans leur travaux Belov *et al.* (2004) proposent une analyse de la perméabilité à l'aide de simulations numériques sur un volume représentatif des renforts. Dans cette étude la méthode des « réseaux » de Boltzmann est utilisée pour analyser les écoulements complexes dans les textiles. Des modèles microscopiques sont adoptés et des relations cinématiques mésoscopiques sont utilisées. Le fluide est composé d'un

ensemble de « particules fluides » qui bougent et interagissent sur le réseau. Enfin notons que certains auteurs proposent une décomposition de la perméabilité en perméabilité absolue et perméabilité relative (Lewis *et al.* (1998)), les perméabilités relatives étant généralement introduites dans les écoulements multiphasiques de manière semi-empirique à partir des effets de capillarité afin de prendre en compte les différences entre perméabilité saturée et effective (insaturée) elles même calculées à partir de la relation de Carman Kozeny : voir paragraphe 2.3.1.2 dans la partie I.

**Mesures expérimentales de la perméabilité** De plus en plus, des études expérimentales relativement spécifiques sont menées afin de caractériser précisément la perméabilité propre à chaque matériau (Buntain et Bickerton (2003), Drapier *et al.* (2002), Ferland *et al.* (1996) ...). Ces études indiquent une dépendance de la perméabilité à la porosité et au niveau de saturation d'où la séparation effectuée par Lewis *et al.* (1998) en perméabilité effective et perméabilité relative. Dans la plupart des cas ces mesures de perméabilité reposent directement sur l'utilisation de la loi de Darcy (voir équation 5.16). Une mesure du débit et du gradient de pression aux extrémités d'un échantillon permet de déterminer la perméabilité en  $m^2$  d'un empilement, la viscosité dynamique du fluide étant connue. Deux types de caractérisations sont généralement effectuées (Binetruy *et al.* (1997), Elbouazzaoui (2004), ...). Des mesures en régime transitoire pour lesquelles le fluide imprègne le stratifié (Breard *et al.* (1999) et Drapier *et al.* (2005)). L'écoulement est supposé quasi-statique afin d'appliquer la loi de Darcy entre chaque pas de remplissage. Des mesures en régime saturé ou permanent permettent de déterminer des perméabilités dites effectives (Buntain et Bickerton (2003) et Ferland *et al.* (1996)).

Concernant les nappes NC2, des mesures de perméabilité en régime stationnaire et transitoire ont été réalisées par Elbouazzaoui (2004). La figure 5.7 présente les résultats obtenus dans le cadre de ces travaux. Les premiers résultats de l'étude montrent une forte dépendance de la perméabilité à la face d'injection, à la saturation ainsi qu'une dépendance *a priori* linéaire à la porosité. Néanmoins, ces mesures restent difficilement reproductibles. Actuellement des efforts sont engagés à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne dans le cadre d'une collaboration avec *Hexcel Reinforcements* (Nunez (2005)) afin de concevoir un dispositif permettant une caractérisation précise de la perméabilité pour tout type de renfort.

Remarque : Les mesures réalisées par *Hexcel Reinforcements* en régime permanent indiquent une perméabilité 50 fois supérieure dans la direction longitudinale pour des renforts sans trous de coutures et 100 fois supérieure lorsque les NC2 présentent des trous de coutures.

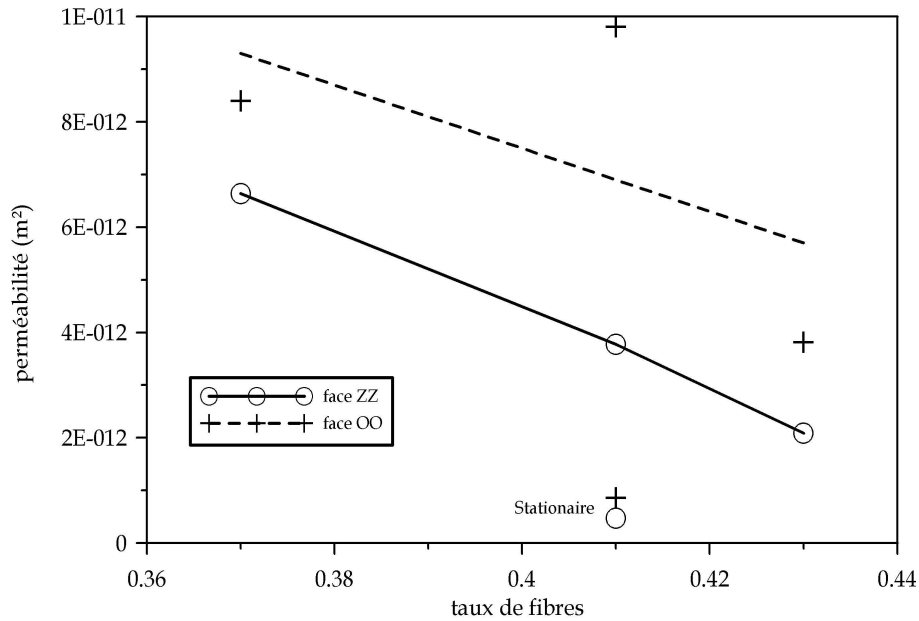


Figure 5.7 – Bilan de mesures de perméabilité en régime saturé et transitoire sur les nappes NC2 (Drapier *et al.* (2005)).

**Conclusion** La mesure de la perméabilité de préformes reste une difficulté expérimentale fondamentale. Actuellement de nombreux travaux sont en cours pour fournir une réponse aux différents problèmes posés (mesures en régime transitoire, en régime permanent, ...). Ici, dans le cadre de la mise au point d'un modèle et d'un outil de calcul pour l'étude générale des mécanismes de l'infusion, nous avons choisi d'utiliser en première approche une loi de type Carman-Kozeny. Ainsi, la perméabilité dépend essentiellement de la porosité. La constante de Kozeny est choisie de telle sorte que les perméabilités obtenues soient proches des perméabilités mesurées par Drapier *et al.* (2005), soit une perméabilité de  $1.10^{-12}$  pour un taux de fibres de 60 %. Dès que des caractérisations supplémentaires auront été menées sur la saturation, son intégration dans le modèle sera possible. Nous reviendrons dans la suite de ce chapitre consacré à la modélisation mécanique sur le problème de la saturation. Signalons enfin, que lors du drapage les perméabilités longitudinales (dans le plan) et transverses (dans l'épaisseur) vont fortement changer. Des logiciels sont actuellement proposés pour représenter ces variations (*PAM-FORM*<sup>TM</sup>) ou *QUIK-FORM*<sup>TM</sup>.

### 5.2.4.3 Les équations de conservation

Les développements précédents concernent l'étude de l'écoulement de la résine dans les préformes. L'équation de conservation de la quantité de mouvement de Brinkman décrit d'une manière générale l'écoulement dans un milieu poreux (ici l'écoulement de la résine

dans les préformes). Pour de faibles perméabilités cette équation est souvent remplacée par l'équation de Darcy. Cette équation largement utilisée dans la littérature pour la mise en forme de matériaux composites par injection ou infusion fournit d'excellents résultats au regard des confrontations résultats numériques / expériences présentés. Cette description de la conservation de la quantité de mouvement doit comme dans le cas de la zone purement fluide être complétée par une équation de conservation de la masse qui exprime ici l'incompressibilité du fluide. Exprimées dans le cadre d'une approche « quasi-eulérienne », en régime quasi-statique et pour un milieu poreux à perméabilité faible pour lequel la loi de Darcy est vérifiée, les équations de conservation s'écrivent en 3D ( $K < 1.10^{-3} m^2$ ; voir Annexe K) :

$$\frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{c}}_r^f + \nabla_{\mathbf{x}} p_r^f = 0 \quad (5.21a)$$

$$\bar{\mathbf{c}}_r^r \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_r^r + \rho_r^r \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}_r^r = 0 \quad (5.21b)$$

Pour les procédés par infusion, la vitesse de domaine de référence  $\bar{\mathbf{v}}_d^f$  n'est pas arbitraire. Le domaine poreux dans lequel s'écoule la résine subit d'importantes déformations. Afin de suivre l'évolution de ces propriétés et l'influence de cette modification sur l'écoulement de fluide, notamment au niveau des porosités et des perméabilités, il paraît astucieux de confondre le domaine de référence associé à l'écoulement de la résine dans le milieu poreux avec le domaine poreux lui-même. Ainsi, les perméabilités seront directement connues dans le domaine de référence  $\hat{\Omega}$ . L'emploi de la formulation quasi-eulérienne est donc naturel.

Dans la littérature, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont souvent regroupées. L'équation résultant de cette association est plus connue sous le nom d'équation de Richard ou de Buckingham-Darcy (voir Annexe I). Elle est à la base des méthodes FE/CV et des « éléments non-structurés » très utilisés dans la plupart des codes de calcul. Dans la littérature, des approches prenant en compte le déplacement du domaine dans lequel s'écoule la résine sont proposées (Kang *et al.* (2001)). Elles sont élaborées à partir de l'écriture des équations de conservation sur chacune des phases en présence, *i.e.* la résine et les fibres (Billi et Farina (2000)).

### 5.2.5 Écoulement de la résine dans le drainant

L'écoulement de la résine dans le drainant peut être modélisé de plusieurs façons. Certains estiment que les perméabilités très importantes rencontrées dans de tels milieux permettent de considérer directement un écoulement de type Navier et Stokes, voire Stokes compte tenu de l'hypothèse d'écoulement laminaire de la résine. D'autres auteurs préfèrent

utiliser les équations de Brinkman pour modéliser ces écoulements à fortes perméabilités. Une étude comparative des équations de Stokes, Brinkman et Darcy doit permettre de décider des seuils de perméabilité à partir desquels chacune de ces équations peut être employée. Une partie de cette étude est présentée dans l'Annexe K, page 251. Elle indique que pour des perméabilités inférieures à  $K = 1.10^{-3} m^2$ , la prise en compte des phénomènes de bords tels que les conditions d'adhérence conduit à des problèmes numériques caractérisés par l'apparition de couches limites. En deçà de ce seuil de perméabilité, l'équation de Darcy devient une bonne approximation.

## 5.3 Modélisation de la partie solide

Quelle que soit la zone considérée, les préformes sèches et humides se comportent comme un solide. Une formulation matérielle (basée sur un maillage associé aux particules matérielles) convient parfaitement pour modéliser ce type de comportement et permet de conserver intégralement l'histoire de la déformation (voir figure 5.1, page 48). Comme nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction, l'influence de la pression de la résine dans les pores des préformes peut expliquer les variations d'épaisseur rencontrées lors des procédés par infusion notamment les augmentations d'épaisseur mises en évidence dans les travaux de Kang *et al.* (2001) et Ahn *et al.* (1990). Nous avons choisi ici d'intégrer cette pression directement dans les équations de conservation afin de proposer un modèle le plus général possible. L'interaction entre le comportement solide des préformes et le comportement fluide de la résine intervient également à travers de l'évolution de la porosité que nous traitons ici de façon rationnelle à l'aide de l'équation de conservation de la masse.

### 5.3.1 Conservation de la masse et porosité

Dans une approche matérielle, la conservation de la masse est implicitement vérifiée dans le sens où les repères de calcul (le maillage) et le domaine matériel sont confondus. Ainsi, l'équation de conservation de la masse relie les masses aux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  via la densité macroscopique des fibres  $\bar{\rho}_f^f$  et le Jacobien de la transformation  $J$ .

$$J(\mathbf{x}, t + \Delta t) \bar{\rho}_f^f(t + \Delta t) = J(\mathbf{x}, t) \bar{\rho}_f^f(t) \quad (5.22)$$

Ici, les préformes sont supposées déformables mais composées de fibres incompressibles. Ainsi une variation de volume dans les préformes est associée à une variation du volume des pores et donc à une variation de porosité. La variation locale de porosité est alors calculée. La relation suivante relie de manière explicite l'état de déformation des préformes et les porosités associées :

$$J(\mathbf{x}, t + \Delta t) (1 - \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t)) = J(\mathbf{x}, t) (1 - \phi(\mathbf{x}, t)) \quad (5.23)$$

Numériquement, l'approche matérielle permet le calcul de la variation de porosité locale à partir de la variation de volume de chaque élément. Cette approche de la variation de porosité par la conservation de la masse, bien que très intuitive, est un point original du modèle proposé par rapport à ceux exposés actuellement dans la littérature où la variation de porosité (ou la variation de fraction volumique) est directement reliée à la pression appliquée sur l'empilement de préformes *via* des relations semi-empiriques 1D (Farina et Preziosi (2000c), Gutowski *et al.* (1987), ...) ce qui limite l'analyse du comportement à l'étude du comportement dans l'épaisseur.

### 5.3.2 Influence de la résine sur le comportement des nappes

En l'absence de force de volume, l'équation de conservation de la quantité de mouvement associée à l'empilement de préformes s'écrit sous forme eulérienne (voir Annexe A.3, page 217) :

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_f^f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.24)$$

Cette équation de conservation est écrite dans un premier temps en fonction des contraintes de Cauchy dans les préformes  $\boldsymbol{\sigma}_f^f$ . Elle peut néanmoins être formulée dans le repère initial et ainsi s'écrire en fonction du premier tenseur de Piola Kirchhoff (voir équation 5.3 dans le paragraphe dédié à la formulation *ALE*). La description des caractéristiques du comportement des nappes (imprégnées ou non) s'exprime dans la loi de comportement. Il est évident que le comportement des nappes va dépendre du comportement du réseau de fibres lui même (*i.e.* sa rigidité) mais également de la présence de fluide (la résine) dans les pores (Kessels *et al.* (2006)). De nombreux auteurs ont étudié la réponse mécanique de préformes saturées afin de dégager une loi de comportement. Ces analyses restent cependant limitées à des conditions aux limites particulières et fournissent des informations sur un certain type de préformes (Gutowski *et al.* (1987)). Ici, dans le cadre d'une analyse très générale de l'infusion, nous avons choisi de formuler le comportement des nappes imprégnées *via* le modèle dit de « Terzaghi ». Dans ce modèle purement mécanique, l'influence de la résine est prise en compte à travers sa pression hydrostatique (Terzaghi *et al.* (1967), Kempner et Hahn (1998), Gray et Schrefler (2001), Wan (2003), ...) :

$$\left| \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}_f^f = \boldsymbol{\sigma}_{e_f}^f - s p_r^f \mathbf{I} & \text{dans les préformes humides} \\ \boldsymbol{\sigma}_f^f = \boldsymbol{\sigma}_{e_f}^f & \text{dans les préformes sèches} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

où  $\sigma_{e_f}^f$  désigne les contraintes effectives dans les préformes, *i.e.* les contraintes en l'absence de résine,  $p_r^f$  la pression hydrostatique de la résine dans les préformes humides et  $s$  le degré de saturation déjà défini dans le paragraphe 5.2.4.1 et qui sera étudié plus précisément dans le paragraphe 5.4. Le lecteur est invité à consulter l'annexe G pour obtenir plus de détails sur le modèle de Terzaghi. En 1941, Biot généralise le modèle de Terzaghi sous la forme d'une théorie générale pour la consolidation en apportant un paramètre correcteur  $\beta$  dans la loi de comportement (Biot (1941), Schanz et Pryl (2004)).  $sp_r^f \mathbf{I}$  devient  $s\beta p_r^f \mathbf{I}$ .

Dans le cadre de leur élaboration les modèles de Biot et de Terzaghi étaient associés à des comportements effectifs de type élastique linéaire. Des généralisations de ces modèles proposent désormais des comportements beaucoup plus élaborés modélisant à la fois des effets irréversibles non-linéaires (principalement pour la mécanique des sols - Borja (2004)) voire même des aspects thermo-mécaniques (Schrefler et Scotta (2001)). Comme nous l'observons ici, la modélisation correcte du comportement mécanique en retenant le modèle de Terzaghi ou le modèle de Biot, nécessite la détermination de la loi de comportement effective des nappes et celle du paramètre de Biot  $\beta$ . Concernant ce dernier paramètre nous le supposons dans un premier temps égal à 1. Le modèle pourra ensuite être ajusté lors de la comparaison expériences / simulations. Des essais expérimentaux réalisés à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne sur des bi-axiaux NC2 [0,90] (Drapier *et al.* (2002), Drapier *et al.* (2005)) et plus récemment sur des empilements [0,90]<sub>100</sub> lors des essais de validation des modèles développés dans le cadre de la modélisation du procédé *LRI* (lois de comportement dans le chapitre 15), donnent des informations au sujet de la loi de comportement spécifique aux renforts NC2. Ces essais de compression montrent un comportement élastique non-linéaire en grandes déformations des préformes dans leur épaisseur (plus de 100 %). Les non-linéarités géométriques devront donc être prises en compte et traitées afin de modéliser correctement le comportement des nappes. La loi de comportement est globalement caractérisée par la présence de deux pentes. Une première rigidité est associée à des fractions volumiques de fibres inférieures à 60 %. Elle peut être interprétée comme une rigidité macroscopique du réseau de fibres due en partie aux forces de frottement. Une rigidité plus importante correspond ensuite à des fractions volumiques de fibres supérieures à 60 % (voir figure 8.5 dans le chapitre 8). Cette rigidité n'est plus liée aux forces de frottement mais à la rigidité même des fibres de carbone. A partir d'un certain seuil, les déformations ne sont plus élastiques. Des phénomènes irréversibles apparaissent (voir les travaux de Zhang et Schrefler (2000) pour la prise en compte de phénomènes plastiques dans la loi de Terzaghi). Le lecteur peut se reporter au paragraphe 8.3.1.2 du chapitre 8 pour plus d'informations au sujet de l'élaboration des lois de comportements anisotropes non-linéaires. Dans ce chapitre 8 (partie II) nous décrirons numériquement le type d'outils employés pour le traitement du comportement



élastique non-linéaire en grandes déformations des nappes de préformes.

D'autres travaux menés par Bickerton *et al.* (2003) indiquent un comportement visco-élastique de certaines préformes sèches. Pour conclure notons que des modèles plus élaborés sont utilisés pour étudier le comportement visco-élastique de structures en service comme le modèle développé par Kelly *et al.* (2006), mais une fois de plus ce type de modèle reste spécifique à des couples résine / préformes particuliers. Notons enfin que de fortes vitesses de déformations peuvent être à l'origine de dissipations thermiques dans les préformes. A notre connaissance, ce type de phénomène n'est pas mentionné dans la littérature et compte tenu des faibles vitesses d'infusion, donc de déformation des préformes, ces effets seront négligés.

## 5.4 Prise en compte de la saturation

### 5.4.1 Définition

L'équation de Buckingham-Darcy traditionnelle utilisée dans les modèles d'injection ne traite pas le changement possible du niveau de saturation comme le changement de porosité d'un domaine matériel. La saturation est définie comme le ratio entre le volume de résine et le volume de pores :

$$s = \frac{\text{volume de résine}}{\text{volume de pores}} \quad (5.26)$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de Darcy (voir Eqs. 5.21), écrites dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation s'expriment en fonction de variables macroscopiques ou en fût vide. Celles-ci font intervenir la saturation et la porosité. Dans ce qui précède nous avons observé comment l'évolution de la porosité était prise en compte à travers l'analyse du comportement des préformes (voir paragraphe 5.3.1). La variation de la saturation est plus délicate à analyser. Actuellement deux types d'approches sont étudiées dans la littérature et présentent toutes deux un certain nombre de difficultés.

### 5.4.2 Les approches possibles

D'un point de vue physique, la saturation est un paramètre progressif. La frontière entre une zone complètement saturée ( $s = 1$ ) et une zone sèche ( $s = 0$ ) est dans ce sens continue. Selon Spaid *et al.* (1998), la relation entre la pression et la saturation est gouvernée par les effets de tensions de surface. Ainsi, en régime transitoire, la relation supplémentaire entre le champ de pression et le degré de saturation doit être caractérisée.

Diverses études menées sur des écoulements de fluides en régimes saturés et insaturés sont notamment menées par Breard *et al.* (1999) afin de caractériser cette relation. Cependant, le manque d'informations concernant cette loi d'évolution en fait une approche assez peu utilisée dans la littérature. Par ailleurs comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 5.2.4.2, la saturation intervient également sur la perméabilité. Bien que nécessaire dans le cadre d'une modélisation complète de l'infusion, dans l'état actuel des connaissances, l'intégration de la saturation présente trop d'inconnues pour être d'une utilité avérée.

Pour répondre au manque d'information sur la saturation, l'approche dite « slug-flow » est actuellement la plus utilisée. Cette approche repose sur l'hypothèse d'une relation binaire entre la saturation  $s(\mathbf{x}, t)$  et la pression hydrostatique  $p(\mathbf{x}, t)$ . La saturation et la pression étant reliées à l'aide d'une seule relation explicite, cette hypothèse élimine un degré de liberté dans le problème éléments finis (Michaud et Mortensen (2001)).

$$\begin{cases} s(\mathbf{x}, t) = 1 \text{ pour } p(\mathbf{x}, t) \neq 0 \\ s(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ pour } p(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

Numériquement, l'approche « slug flow » repose sur l'utilisation d'un volume de contrôle associé à un degré de liberté en saturation ou en pression. Ce volume est utilisé pour calculer le flux de matière sur chacune des frontières des volumes de contrôle et permet ainsi de post-traiter le champ de pression et de connaître la séquence de remplissage d'une structure (voir Loos *et al.* (2002)). Principalement deux méthodes sont aujourd'hui utilisées. La méthode des éléments non-structurés et la méthode FE/CV déjà présentée lors de l'étude bibliographique dans le paragraphe 2.3.2.4.

## 5.5 Conditions aux limites

A l'exception des conditions aux limites appliquées par le procédé lui-même, comme la pression engendrée par le sac à vide ou encore la condition de déplacement normal nul sur la base de l'empilement (voir les figures 4.1 et 4.2), la détermination des autres conditions aux limites est un problème majeur principalement sur l'interface mobile entre la résine (film de résine ou drainant) et les préformes saturées. Les figures 5.9 et 5.8 synthétisent les conditions aux limites à l'échelle de la structure respectivement pour les procédés *LRI* et *RFI*. Les conditions de couplage entre les régions de fluide et de nappes dans la zone de préformes imprégnées sont intégrées directement dans les équations de conservation, elles sont également reportées sur les figures 5.9 et 5.8.

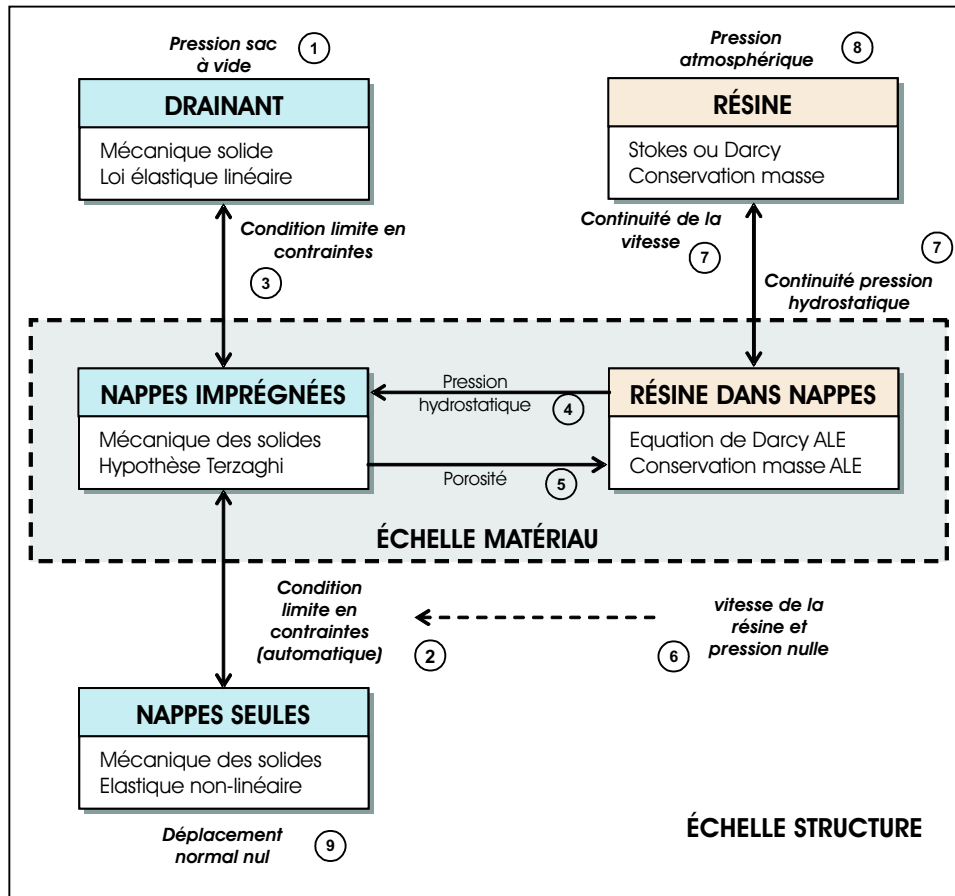


Figure 5.8 – Conditions aux limites à l'échelle structure et interactions dans les nappes imprégnées à l'échelle matériau : cas du procédé *LRI*.

### 5.5.1 Interaction à l'échelle matériau

Les interactions entre les préformes imprégnées et la résine sont directement prises en compte dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de ces constituants. La première interaction (④ sur les figures 5.9 et 5.8) modélise l'effet de la pression hydrostatique de la résine obtenue par l'équation de Darcy *ALE* sur les préformes humides *via* la loi de Terzaghi. Inversement, la deuxième interaction (⑤) concerne l'effet sur le champ de pression de la modification de porosité, donc de perméabilité consécutive à la déformation des préformes. Ces deux interactions sont identiques quel que soit le procédé considéré (*LRI* ou *RFI*).

### 5.5.2 Conditions limites à l'échelle structure

Ces conditions peuvent être divisées en deux catégories. Le premier type concerne les conditions imposées directement par le procédé. Quel que soit le procédé considéré

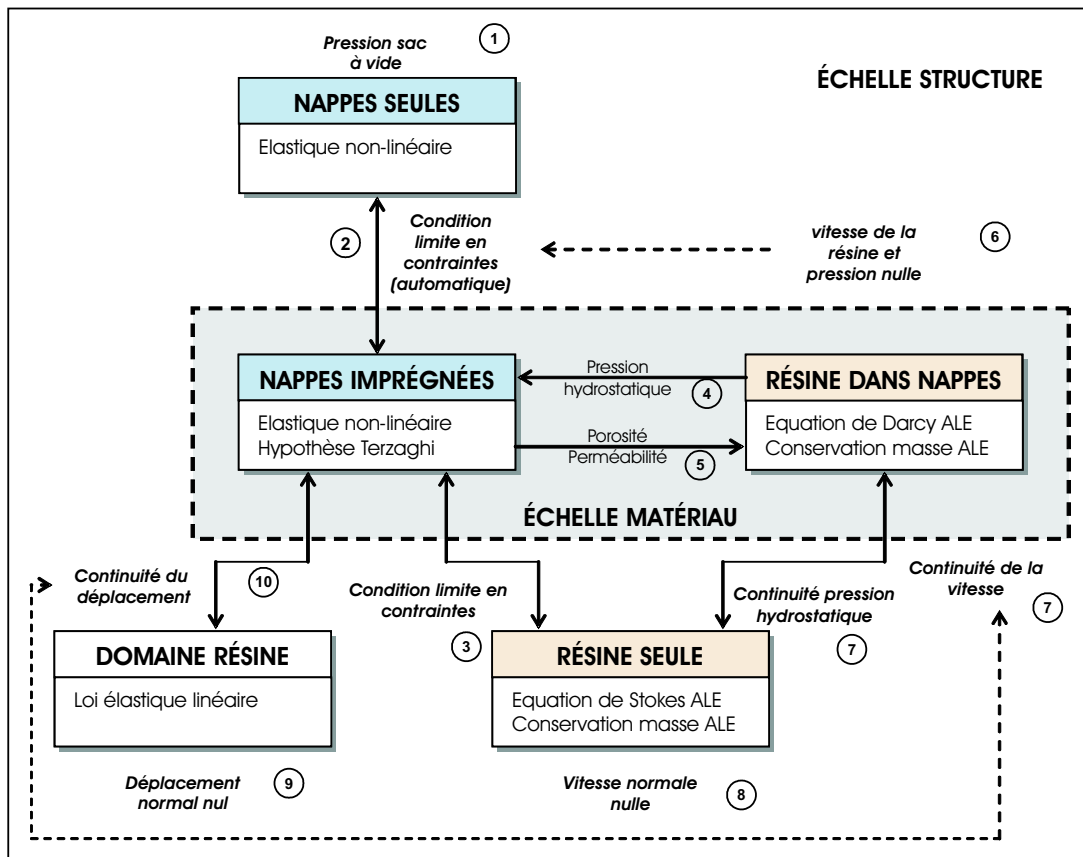


Figure 5.9 – Conditions aux limites à l'échelle structure et interactions dans les nappes imprégnées à l'échelle matériau : cas du procédé *RFI*.

(*LRI* ou *RFI*), le sac à vide crée une pression mécanique (①) sur la partie supérieure de l'empilement. Au niveau du front de fluide dans les préformes, le champ de pression et le champ de vitesse tendent vers zéro (⑥). Il est également possible d'appliquer la pression atmosphérique au niveau du front. Dans les deux procédés, l'interface entre la résine et les nappes imprégnées doit satisfaire à la fois la continuité de la vitesse normale, *i.e.* conservation de la masse, et de la pression hydrostatique (⑦). Dans le cas du procédé *RFI*, la continuité du champ de déplacement (⑩) est une conséquence de la continuité de la vitesse (⑦). Pour les deux procédés, la base du stratifié est modélisée à l'aide d'une condition sur le déplacement normal (⑨). Une vitesse normale nulle est également imposée sur la base pour le procédé *RFI* (⑧). Dans le cas du procédé *LRI*, nous appliquerons la pression atmosphérique sur la partie supérieure de l'empilement (⑧).

Le deuxième type de condition est relatif à la continuité du vecteur contraintes (② et ③). Concernant la première condition (②), *i.e.* la continuité du vecteur contraintes au niveau du front de fluide, elle est automatique et directement liée à l'annulation du champ de pression au niveau du front de fluide. La continuité du vecteur contraintes entre

la zone de résine et la zone purement fluide ou la résine dans le drainant, est mentionnée dans la littérature notamment dans les travaux de Beaver Joseph et Shaffman (Jäger et Mikelic (2001), Rivière et Yotov (2005), ...). Selon ces travaux trois types de conditions doivent être imposées au niveau de l'interface : la continuité de la vitesse normale due à la conservation de la masse (⑦), la continuité du vecteur contraintes (③) et enfin, une condition sur les vitesses tangentielles due aux mécanismes de frottements. Cette dernière relation nécessite de caractériser un coefficient de glissement par des essais expérimentaux. Ici, nous avons choisi dans une première approche de ne pas imposer de coefficient de glissement entre les deux zones. Néanmoins, cette condition reste essentielle (en particulier en mécanique des sols) surtout lorsque des géométries complexes avec effets de bords interviennent. En effet, compte tenu des larges rapports entre perméabilités longitudinales et transverses, l'infusion longitudinale domine. Bien que différentes, les conditions aux limites associées aux procédés *LRI* / *RFI* sont relativement proches. La transposition des modèles d'infusions développés dans le cadre de ces deux méthodes à d'autres procédés ne devrait *a priori* pas poser de problèmes particuliers.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une modélisation mécanique générale du comportement de la résine et des préformes dans les différentes zones identifiées lors du choix des modèles macroscopiques pour l'étude des procédés *LRI* et *RFI*. Cette analyse basée sur l'écriture des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour chacun des constituants et dans chacune des différentes zones a été complétée par une analyse exhaustive des conditions aux limites à l'échelle structure spécifiques aux procédés *LRI* et *RFI*. Ici, l'interaction entre l'écoulement de la résine et la déformation des nappes a été réalisé par l'association du modèle de Terzaghi et d'une formulation ALE de l'écoulement du fluide. Le modèle général de couplage des interactions entre le comportement de la résine et le comportement des préformes dans un zone hétérogène peut être utilisé dans de nombreuses autres applications qui dépassent largement le cadre des procédés par infusion analysés ici.

# Chapitre 6

## Modélisation thermique et chimique

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>75</b>
<b>6.2</b>	<b>Les équations</b>	<b>76</b>
6.2.1	Équation de la chaleur	76
6.2.2	Cinétique de réticulation	76
<b>6.3</b>	<b>Couplage mécanique / thermique</b>	<b>77</b>
6.3.1	Les paramètres thermo-chimiques équivalents	77
6.3.2	Couplage explicite	78
<b>6.4</b>	<b>Les conditions aux limites</b>	<b>78</b>
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>

---

### 6.1 Introduction

La modélisation des aspects thermiques et chimiques repose sur une approche assez différente de celle employée pour la partie mécanique. Ici, les modèles proposés pour les procédés *RFI* et *LRI* (voir les figures 4.1 et 4.2) sont toujours utilisés. En revanche, dans la zone intermédiaire, les préformes humides sont considérées comme un seul et même matériau. En effet, les vitesses très lentes des procédés que nous avons mentionnées précédemment (voir paragraphe 5.2.1) permettent de considérer un état thermique homogène dans la zone de mélange fibres / résine. Il est ainsi possible de déterminer un matériau homogène équivalent dont les propriétés thermo-physico-chimiques sont obtenues à l'aide de lois des mélanges (Loos *et al.* (2002), Hassanizadeh (1983a)).

Les phénomènes thermo-physico-chimiques sont décrits par deux équations : l'équation de la chaleur qui provient de l'équilibre énergétique du système et l'équation de réticulation

qui exprime le transport de la masse de résine réticulée. Dans ce chapitre, une brève description de ces équations est fournie. Le couplage des phénomènes thermo-chimiques avec le comportement mécanique de la résine et des préformes est ensuite décrit. Compte tenu des températures atteintes dans ce type de procédé ( $T < 300^\circ\text{C}$ ), les effets radiatifs seront négligés devant les effets conductifs et convectifs.

## 6.2 Les équations

### 6.2.1 Équation de la chaleur

L'équation de conservation de l'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermo-dynamique et du théorème de l'énergie cinétique (voir annexe A). En intégrant la loi de Fourier pour exprimer les effets de conduction (Bergheau et Fortunier (2004)), l'équation de conservation de l'énergie ou équation de la chaleur devient (voir Annexe A.6) :

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r + \text{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) \quad (6.1)$$

où  $T$  est la température,  $c$  est la capacité spécifique,  $\boldsymbol{\lambda}$  est le tenseur de conductivité thermique ( $\lambda$  est scalaire dans un cas isotrope) et  $r$  est le terme source.

La réaction de réticulation fait intervenir un terme source que nous pouvons exprimer sous la forme  $\Delta H \frac{D\alpha}{Dt}$  où  $\Delta H$  est la chaleur libérée par la réaction de réticulation et  $\alpha$  est le degré de réticulation. Le terme de dissipation mécanique  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$  est généralement négligé car très faible devant les termes convectifs et la source de chaleur  $r$ . L'équation de la chaleur s'écrit donc :

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \text{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) + \Delta H \frac{D\alpha}{Dt} \quad (6.2)$$

### 6.2.2 Cinétique de réticulation

L'équation de la réticulation exprime le transport de la masse de résine réticulée. Il s'agit donc d'une équation classique de transport qui s'écrit d'une manière générale :

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \alpha \quad (6.3)$$

où  $\bar{\mathbf{v}}$  désigne la vitesse macroscopique de la résine.

Dans la littérature de nombreux modèles sont utilisés pour exprimer l'évolution du taux de réticulation dans le temps  $\frac{D\alpha}{Dt}$ . Ces modèles sont généralement construits en couplant des lois Arrhenius avec des lois puissances. Ici nous présentons les deux modèles les plus

utilisés associés aux résines les plus employées dans les procédés de mise en œuvre par voies sèches (*LCM*).

Modèle de Kamal Sourour (Farina et Preziosi (2000c)) :

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \left( A_1 e^{-\frac{E_1}{RT}} + A_2 e^{-\frac{E_2}{RT}} \alpha^p \right) (1 - \alpha)^q \quad (6.4)$$

Modèle de Lee (Blest *et al.* (1999)) :

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \begin{cases} \left( A_1 e^{-\frac{E_1}{RT}} + A_2 e^{-\frac{E_2}{RT}} \alpha \right) (1 - \alpha) (0,47 - \alpha) & \alpha \leq 0,3 \\ \left( A_3 e^{-\frac{E_3}{RT}} \right) (1 - \alpha) & \alpha > 0,3 \end{cases} \quad (6.5)$$

où les  $A_i$  sont des constantes pré-exponentielles et les  $E_i$  des énergies d'activation.

Ces lois empiriques sont généralement données par le fournisseur de résine qui indique également au concepteur le cycle de température optimal permettant d'obtenir le meilleur taux de réticulation et ainsi, les meilleures caractéristiques mécaniques et thermiques. Signalons enfin que ce modèle d'évolution du degré de réticulation n'est pas exhaustif. Il existe vraisemblablement un lien entre les aspects mécaniques (contraintes internes) dans les fibres et / ou la résine qui vient agir sur l'évolution du degré de réticulation. Ce lien est directement dû à la modification de la structure des chaînes polymères lors de la réticulation, modification étroitement liée à la présence de contraintes de traction ou de compression entre les chaînes.

## 6.3 Couplage mécanique / thermique

### 6.3.1 Les paramètres thermo-chimiques équivalents

Dans la zone intermédiaire, en écrivant les équations de la chaleur pour chaque constituant (le réseau de fibres et la résine), il est possible de déterminer des paramètres thermo-mécaniques équivalents (indiqués  $m$ ). Le lecteur pourra trouver plus de détails théoriques à propos des techniques d'homogénéisation dans la littérature (Hassanizadeh (1983b)).

$$\lambda_m = \phi \lambda_r + (1 - \phi) \lambda_f \quad (6.6)$$

$$\rho_m = \phi \rho_r + (1 - \phi) \rho_f \quad (6.7)$$

$$c_m \rho_m = \phi c_r \rho_r + (1 - \phi) c_n \rho_f \quad (6.8)$$



D'autre part, la conductivité thermique  $\lambda_m$  n'est pas une grandeur scalaire mais tensorielle. Nous invitons le lecteur à consulter les travaux de Loos et MacRae (1996) pour la détermination des valeurs du tenseur de conductivité thermique.

### 6.3.2 Couplage explicite

Hormis les phénomènes de transport intégrés dans les équations de la chaleur et du degré de réticulation, la viscosité contrôle le couplage entre les phénomènes thermo-chimiques et les écoulements de fluides. Une relation empirique entre la température, le degré de réticulation et la viscosité fournit une équation explicite pour la détermination de la viscosité à partir des deux autres paramètres. L'équation suivante est un exemple utilisé dans la littérature (Park et Kang (2003)) :

$$\eta = \eta_0 \exp\left(\frac{\Delta E_\eta}{R T} + \kappa \alpha\right) \quad (6.9)$$

où  $\eta_0$ ,  $\Delta E_\eta$  et  $\kappa$  sont des constantes du modèle.

D'autres types de modèles sont présentés dans les travaux de Bikas *et al.* (2002). Notons enfin que des effets thermo-mécaniques peuvent également être pris en compte au niveau de la loi de comportement mécanique pour les préformes comme nous l'avons déjà indiqué dans le paragraphe 5.3.2.

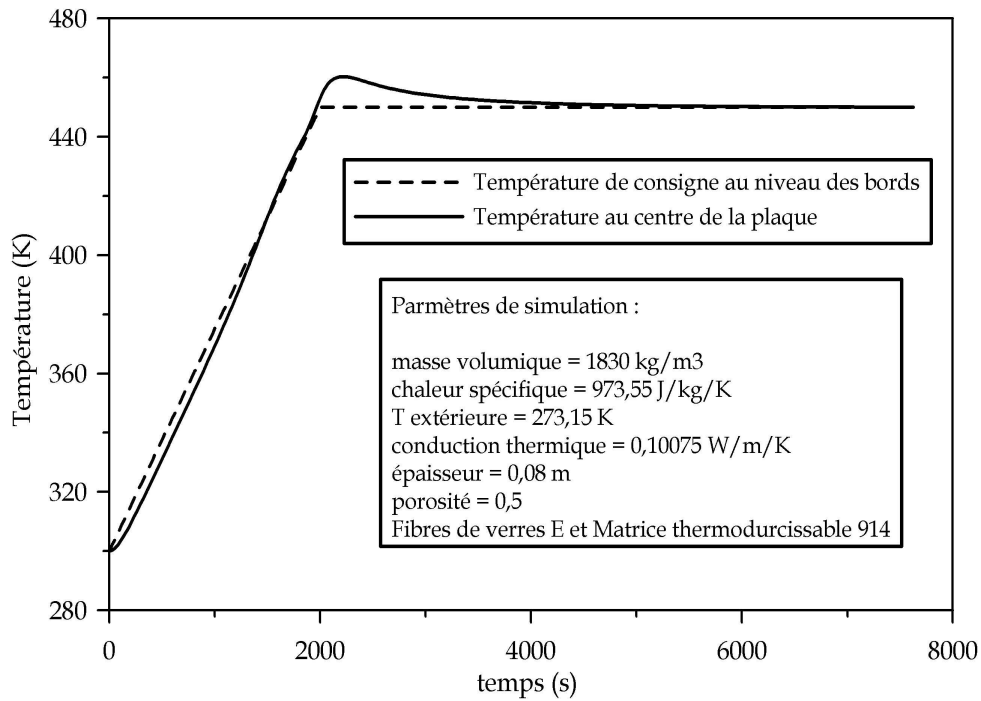
## 6.4 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites sont de deux types. Les conditions imposées par le procédé lui-même (la table chauffante ou l'autoclave), *i.e.* principalement la température, et les conditions aux limites imposées au niveau des interfaces mobiles pour garantir la continuité du champ de température. Le degré de réticulation associé à la résine en début de procédé doit être imposé comme condition initiale. Typiquement un degré de réticulation nul correspondant à une résine idéale non réticulée (fluide) est imposé.

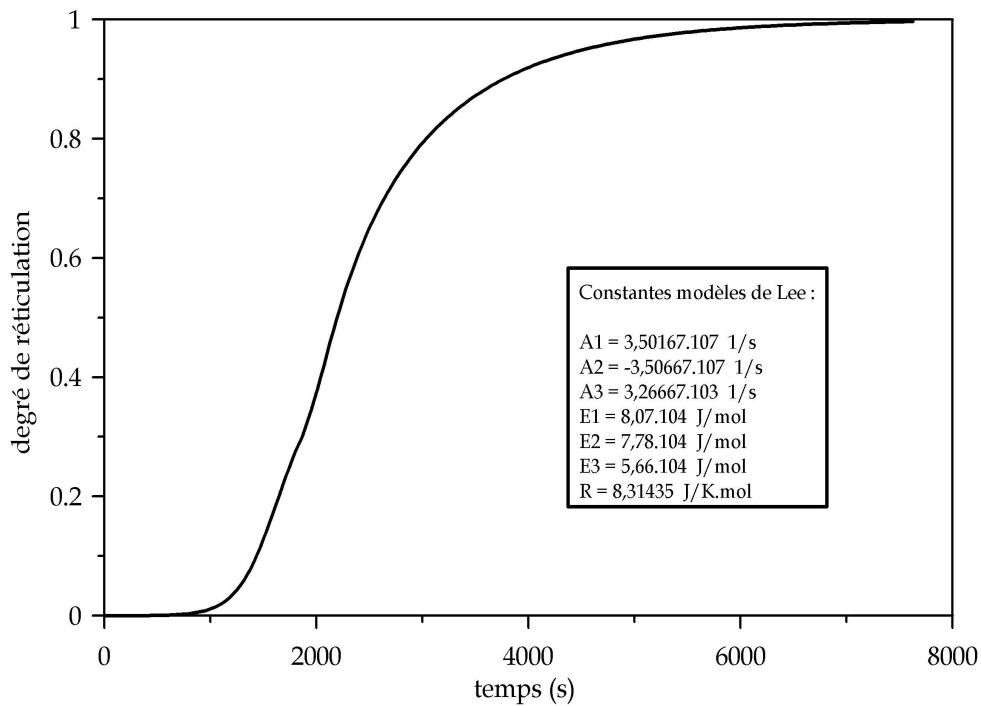
## 6.5 Conclusion

Les équations de la chaleur et du degré de réticulation présentées décrivent les mécanismes thermo-chimiques agissant lors de l'infusion. Ces équations sont écrites dans la zone imprégnée pour les deux composants *via* une approche d'homogénéisation contrairement à ce qui a été fait pour la description de l'écoulement de la résine et de la déformation des préformes. Certaines références bibliographiques (Han *et al.* (2003)) indiquent que les vitesses d'écoulement très faibles rencontrées dans les procédés par infusion permettent

de négliger les effets convectifs dans les équations de conservation (termes non-linéaires se traduisant par l'utilisation de techniques de résolutions particulières type *SUPG* pour traiter le problème de convection-diffusion). Au cours de ce travail de thèse, dans une première approche de la modélisation complète de l'infusion par différences finies en 1D nous avons pu vérifier et comparer les résultats fournis par le couplage d'une équation de la chaleur avec un modèle de Lee (sans effets convectifs). La figure 6.1 présente les résultats numériques que nous avons obtenus et que nous avons comparés avec succès à d'autres résultats de la littérature (Celle *et al.* (2005)). Ces résultats sont comparables aux résultats obtenus par Cheung *et al.* (2004).



(a)



(b)

Figure 6.1 – Évolution de la température (a) et du degré de réticulation (b) pour un matériau composite à fibres de verres E et matrice thermodurcissable 914 - Modèle de Lee.

# Chapitre 7

## Bilan des couplages mis en jeu

Dans les deux chapitres précédents, nous avons décrit les phénomènes mécaniques (solide et fluide) et thermo-chimiques interagissant lors des procédés *LRI* et *RFI*. La figure 7.1 synthétise les interactions entre les divers phénomènes rencontrés dans la zone hétérogène, *i.e.* les préformes humides, pour une meilleure compréhension des mécanismes. Ceux-ci sont divisés en trois grands types de phénomènes : la mécanique des solides liée à la compression des préformes, la mécanique des fluides liée à l'écoulement de la résine, et enfin les phénomènes thermo-physico-chimiques liés à la réticulation et aux transferts de chaleur.

Sur ce schéma, les boîtes pleines représentent les variables indépendantes du problème. Ces variables sont scalaires ou vectorielles. Chaque variable est connectée avec une équation de conservation ou une loi physique. La viscosité  $\eta$  n'est pas une variable indépendante dans le sens où elle dépend explicitement de la température et du degré de réticulation (Eq. 6.9). De même, il existe une dépendance directe de la perméabilité sur la porosité *via* l'équation de conservation de la masse des préformes (Cf. Eq. 5.23). Nous avons néanmoins choisi de représenter ces deux variables sur la figure 7.1 pour une meilleure compréhension des interactions. Finalement, quel que soit le procédé (*LRI* ou *RFI*), la zone de préformes humides comporte 7 variables indépendantes (3 déplacements, la pression de la résine, la saturation et le degré de réticulation). Si les vitesses sont prises en compte par une formulation mixte vitesse / pression pour la résolution des équations de Darcy (Eq. 5.16) ou de Brinkman (Eq. 5.18), 3 variables supplémentaires doivent être ajoutées dans le modèle (voir le traitement de l'écoulement incompressible dans le chapitre 9 de la partie III).

Le modèle présenté pour la zone intermédiaire, *i.e.* le mélange fibres et résine, peut facilement être appliqué aux deux autres zones. Le comportement dans la zone sèche sera dérivé du comportement dans la zone humide en considérant une pression et des vitesses nulles pour la résine. Les paramètres thermo-physico-chimiques (conductivité, capacité spécifique, ...) seront adaptés à cette zone en supprimant l'influence de la résine.

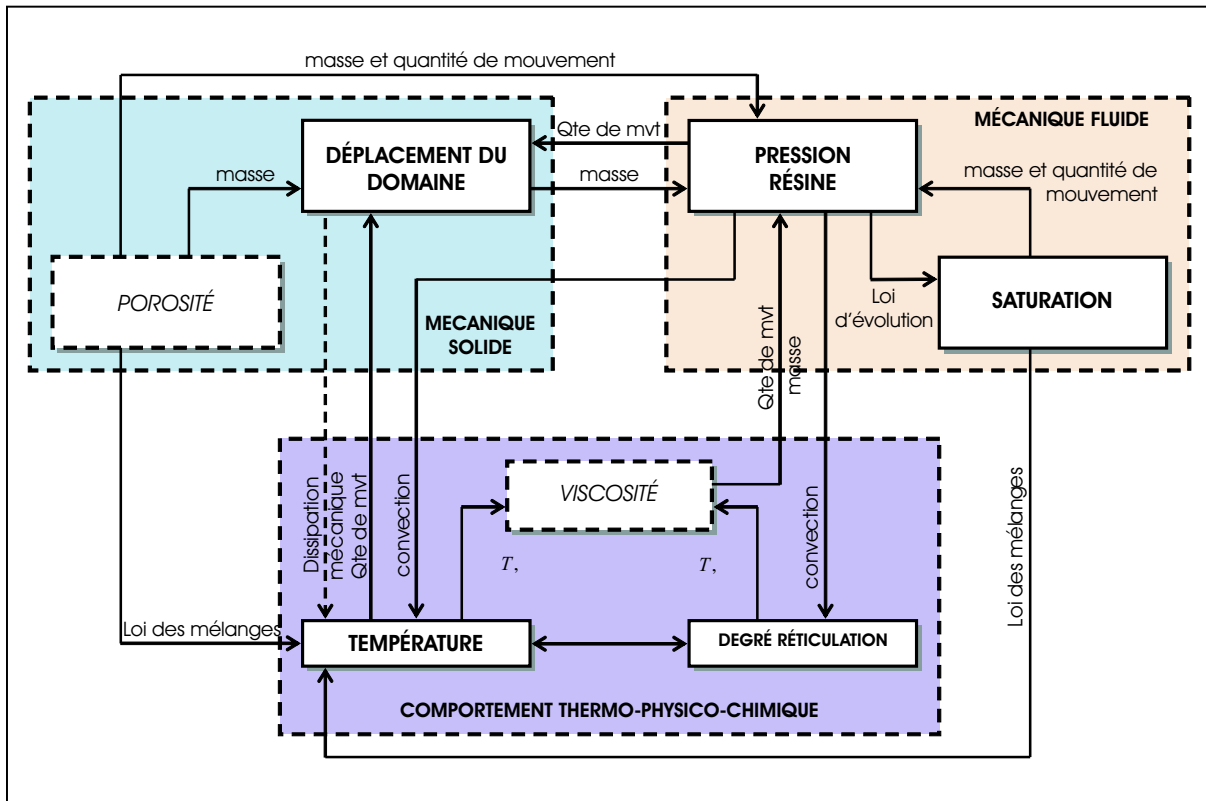


Figure 7.1 – Couplage entre les phénomènes thermo-physico-chimiques, la mécanique des fluides et la mécanique des solides pour la zone de nappes imprégnées.

Dans le cas du procédé *LRI*, le drainant sera modélisé avec le même type d'équations. Les perméabilités seront plus fortes et l'action de la partie fluide sur le comportement des préformes sera négligée compte tenu de la forte rigidité du drainant. Concernant la zone purement fluide dans le procédé *RFI*, elle sera simplement modélisée à l'aide des équations de Stokes. Les variables associées à la mécanique des solides décriront l'évolution du domaine dans lequel s'écoule la résine. L'action du fluide sur la partie mécanique sera supprimée.

Le couplage fort entre ces variables (résolutions simultanées à 7 voire 10 inconnues), pose de nombreuses difficultés numériques, principalement dues à des problèmes d'échelles, notamment au niveau des perméabilités et donc des vitesses de fluide. Il est bien possible d'adimensionner par pré-traitement ces termes afin d'obtenir un système numérique mieux conditionné mais ceci implique des coûts numériques significatifs (Srinivasagupta *et al.* (2003)). Par ailleurs, le choix du paramètre d'adimensionnement peut s'avérer délicat. Concernant le problème thermo-physico-chimique, un couplage fort entre la température et le degré de réticulation incluant les effets de transport, dus à l'écoulement de la résine nécessite une formulation numérique adaptée pour la prise en compte des instabilités

---

spatiales, par exemple une formulation *SUPG* (Brooks et Hughes (1982)).

Compte tenu des remarques précédentes, et des besoins de développement en terme d'outils numériques dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> pour la simulation des procédés *LRI* et *RFI*, nous avons choisi une démarche progressive. Dans la partie suivante, nous présentons les différents outils numériques que nous avons intégrés dans les libraires *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> dans le cadre de la simulation de l'infusion. En utilisant des méthodes analytiques ou numériques, une validation de chaque outil est réalisée et présentée lors de cette description. Une validation plus globale sera présentée dans la dernière partie de ce manuscrit.



## Troisième partie

# Outils numériques pour le problème d'infusion





# Chapitre 8

## Grandes déformations des nappes : Formulation Lagrangienne

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>88</b>
<b>8.2</b>	<b>Formulation Lagrangienne</b>	<b>89</b>
8.2.1	Notations	89
8.2.2	Équation d'équilibre	90
8.2.3	Discrétisation par éléments finis	93
8.2.4	Résidu élémentaire	96
8.2.5	Méthode de résolution non-linéaire	97
8.2.6	Synthèse	101
<b>8.3</b>	<b>Implémentation</b>	<b>101</b>
8.3.1	Courbe expérimentale et lois de comportement	101
8.3.2	Pratique de la Formulation Lagrangienne	106
8.3.3	Conclusion	109
<b>8.4</b>	<b>Validation et étude de cas tests</b>	<b>109</b>
8.4.1	Choix des modèles	110
8.4.2	Validation avec une loi élastique linéaire isotrope	111
8.4.3	Validation avec une loi hypoélastique isotrope	113
8.4.4	Validation du comportement anisotrope et de la formulation corotationnelle	115
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>116</b>

---

## 8.1 Introduction

La prise en compte du comportement solide des préformes nécessite une formulation particulière non présente dans les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> par nature adaptées aux traitements des écoulements de fluide. Les essais réalisés au cours des travaux précédents (Elbouazzaoui (2004)), et récemment dans le cadre de la validation expérimentale des modèles numériques proposés dans ce travail (voir §15.2, page 184), montrent un comportement élastique non-linéaire en grandes déformations des nappes dans la direction transverse. Bien que certains phénomènes irréversibles aient été mis en évidence lors de ces travaux (voir les déformations résiduelles de la préforme observées lors des essais de compression dans le §15.2.1, page 184), le comportement des préformes reste globalement réversible dans l'intervalle de porosités, ou de taux de fibres, concerné par les procédés par infusion.

Dans le cadre de cette étude, le comportement des préformes est supposé isotrope transverse. Ici, nous nous intéressons principalement au comportement dans la direction transverse c'est à dire l'épaisseur. Les rapports épaisseur sur volume des structures étudiées étant très faibles (pièces de type plaque), le comportement dans la direction transverse est supposé indépendant du comportement dans les directions longitudinales. Nous reviendrons dans ce chapitre sur les hypothèses réalisées pour décrire le comportement dans les directions planes et pour caractériser le comportement transverse.

L'hyperélasticité est une bonne représentation des comportements élastiques non-linéaire en grandes déformations. Un milieu est dit hyperélastique s'il existe une configuration de référence telle que, à chaque instant, l'énergie massique est une fonction de la température  $T$  et du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  et la dissipation intrinsèque volumique est nulle (Coirier (2001)). Il convient dans ce cas de déterminer à partir de la courbe expérimentale force / déplacement (voir figure 8.5, page 102 : loi de comportement obtenue dans le cas des nappes NC2) une expression générale de l'énergie massique, donc du potentiel thermo-dynamique. Cependant, la grande diversité des renforts structuraux (nombreux arrangements de fibres possibles), et la forte dépendance de la loi de comportement aux familles de matériaux employés, ne permet pas d'envisager l'utilisation d'un seul et même modèle hyperélastique simple et suffisamment général pour décrire le comportement de tous les types de préformes. Par ailleurs, bien que certains modèles complexes semblent adaptés à l'identification d'une large gamme de comportements, ceux-ci ne sont pas envisageables dans le contexte industriel de notre étude, car bien souvent la signification physique des nombreux paramètres à identifier n'est pas direct.

Dans le cadre d'une étude générale, l'hypoélasticité non-linéaire est employée. Ce type

de comportement désigne l'ensemble des lois de comportement élastiques non-linéaires, incluant donc le cas particulier de l'hyperélasticité. Dans ce chapitre une nouvelle formulation pour la prise en compte d'un comportement hypoélastique en grande déformation est étudiée. Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 5.3, page 67, cette formulation repose sur une approche Lagrangienne dans le sens où le maillage est associé aux particules matérielles. Après une présentation de la Formulation Lagrangienne et une description de son intégration dans un code numérique, la nouvelle formulation est validée à partir de résultats numériques et analytiques.

## 8.2 Formulation Lagrangienne

### 8.2.1 Notations

Dans la suite de ce chapitre, les notations suivantes sont utilisées. D'une manière générale une grandeur scalaire, vectorielle, ou tensorielle  $\mathbf{X}$  est notée  ${}_b^a \mathbf{X}_d^c$  (voir figure 8.1).  $a$  désigne la configuration ou l'instant auquel est effectué le calcul,  $b$  la configuration de référence (celle utilisée pour effectuer le calcul de la grandeur),  $c$  l'itération de calcul (liée à l'utilisation de méthodes itératives pour le calcul de la grandeur considérée, par exemple la méthode de Newton Raphson) et  $d$  les coordonnées spatiales c'est à dire les coordonnées du lieu où est effectué le calcul.

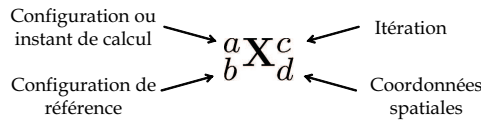


Figure 8.1 – Notations utilisées dans le cadre de la formulation Lagrangienne.

Pour éviter de surcharger les notations, l'incrément de déplacement entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , indépendant de la configuration de référence (voir figure 8.2), est noté  ${}_t \mathbf{u} = {}_0 \mathbf{u} = \mathbf{u}$ , *i.e.* sans exposant ni indice à gauche. Le déplacement total entre 0 et  $t + \Delta t$  s'écrit alors :

$${}^{t+\Delta t}{}_0 \mathbf{u} = {}^t{}_0 \mathbf{u} + \mathbf{u}$$

Par ailleurs, les tenseurs suivants sont considérés :

- $\boldsymbol{\sigma}$  : tenseur des contraintes vraies de Cauchy (symétrique),
- $\mathbf{S}$  : tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 2 (symétrique),
- $\mathbf{P}$  : tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 1 (non-symétrique),
- $\boldsymbol{\varepsilon}$  : tenseur des déformations linéaires,
- $\boldsymbol{\eta}$  : tenseur des déformations non-linéaires,
- $\mathbf{E}$  : tenseur des déformations de Green-Lagrange,

- $\mathbf{e}$  : tenseur des déformations d'Euler Almansi,
- $\boldsymbol{\epsilon}$  : tenseur des déformations logarithmiques,
- $\mathbf{F}$  : tenseur gradient de la transformation.

### 8.2.2 Équation d'équilibre

Afin de résoudre un problème non-linéaire en grandes déformations à l'aide d'une formulation matérielle, le problème est décomposé en incréments de chargement (pilotage en force, en déformation ou en longueur d'arc par exemple). Pour chaque incrément de chargement, par exemple entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , l'objectif est de trouver l'incrément de déplacement solution correspondant (noté  $\mathbf{u}$  d'après les conventions précédentes). Le lecteur pourra constater que la notion d'incrément est utilisée ici pour désigner la différence de déplacement entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Une variation sera désignée par le préfixe «  $\delta$  » et une différentielle par «  $d$  ». Pour déterminer l'incrément de déplacement  $\mathbf{u}$ , le système est linéarisé et nous utilisons une méthode itérative, par exemple la méthode de Newton Raphson, afin de résoudre pour cet incrément de chargement le problème non-linéaire. Le but de la résolution du problème mécanique est donc de trouver le champ de déplacement vérifiant l'équilibre de la configuration à l'instant  $t + \Delta t$  noté  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{u}$ , la configuration à  $t$  étant connue (voir figure 8.2).

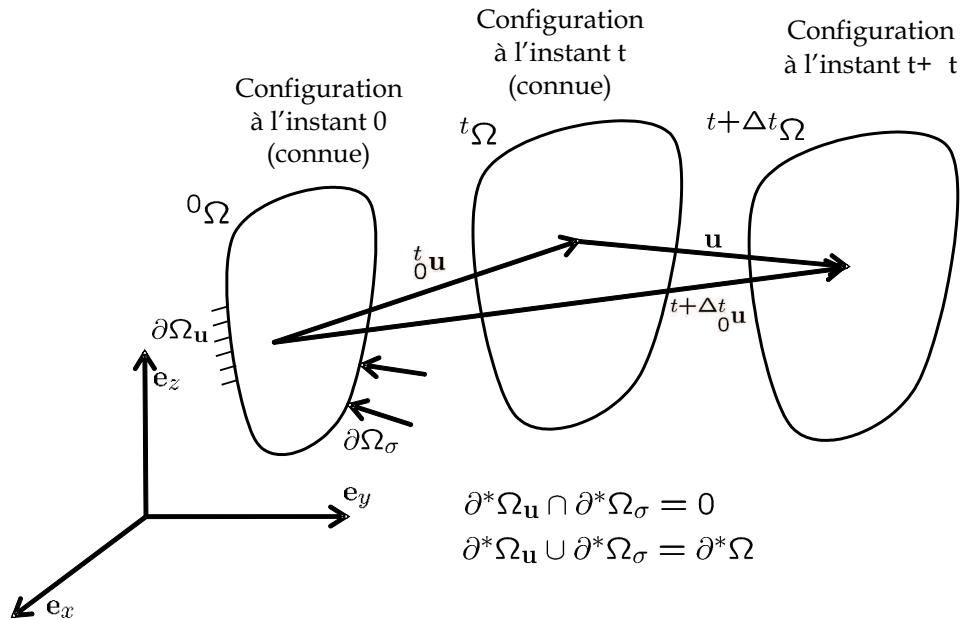


Figure 8.2 – Représentation des différentes configurations de calcul : configuration initiale à l'instant 0, configuration actuelle à l'instant  $t$ , configuration recherchée à l'instant  $t + \Delta t$ .

Trois méthodes sont traditionnellement employées pour résoudre des problèmes non-linéaires en grandes déformations par des approches matérielles (voir figure 5.1-a). Elles

sont synthétisées sur le tableau 8.1. Dans le cas de formulation Lagrangienne Totale, le calcul de la solution est en permanence effectué sur la géométrie initiale (géométrie à l'instant  $t = 0$ ). Dans ce cas, le tenseur de Piola Kirchhoff 2 (noté  $\mathbf{S}$ ) doit être calculé. Les effets des déplacements initiaux sur les déformations sont pris en compte (déplacement entre 0 et  $t$  noté  ${}^t_0\mathbf{u}$ ) et les contraintes de Piola Kirchhoff 2 doivent être transformées en contraintes vraies de Cauchy pour l'affichage. Lorsqu'une formulation Lagrangienne semi-Réactualisée est employée, les contraintes utilisées (celles de Cauchy) ne nécessitent plus d'être transformées. La réactualisation de la géométrie et de la matrice tangente du système a lieu à chaque incrément de chargement, ce qui nécessite la prise en compte des déplacements connus entre  $t$  et l'itération précédente ( $i - 1$ ) à  $t + \Delta t$  (voir paragraphe 8.2.3.2). La Formulation Lagrangienne Réactualisée évite la prise en compte de ces déplacements par une réactualisation de la géométrie et éventuellement de la matrice tangente à chaque itération et à chaque incrément de temps. C'est actuellement la formulation la plus employée dans les codes commerciaux (Systus<sup>TM</sup>, Abaqus<sup>TM</sup>, ...).

Formulation Lagrangienne	Transformation à chaque itération	Transformation à chaque incrément de chargement		Transformation des contraintes et déformations pour les sorties	Prise en compte des effets des déplacements initiaux sur les déformations
	Mise à jour géométrie	Mise à jour géométrie	Mise à jour matrice tangente		
Totale	Non	Non	Oui	Oui	Oui
Semi-Réactualisée	Non	Oui	Oui	Non	Oui
Réactualisée	Oui	Oui	Oui	Non	Non

Tableau 8.1 – Synthèse des caractéristiques des principales formulations matérielles : Formulation Lagrangienne Totale, Formulation Lagrangienne semi-Réactualisée et Formulation Lagrangienne Réactualisée.

Il faut noter que de nombreuses variantes existent dans la littérature. Généralement, elles reposent sur une modification de l'opérateur de comportement tangent. En effet le choix de cet opérateur est libre dans la mesure où il n'intervient pas sur la nature des résultats mais uniquement sur le nombre d'itérations nécessaires pour les obtenir. Ainsi, le calcul d'un opérateur simplifié bien choisi conduira à un gain de temps (lié à l'assemblage), si le nombre total d'itérations reste constant. La méthode de résolution *BFGS* (Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970), Shanno (1970)) en est un bon exemple (voir figure 8.3-c). La matrice tangente peut également être mise à jour de manière ponctuelle. Dans ce cas, la méthode dite de Quasi-Newton est employée (voir figure 8.3-b). Nous reviendrons en détail sur le calcul de l'opérateur tangent dans le paragraphe 8.2.5.

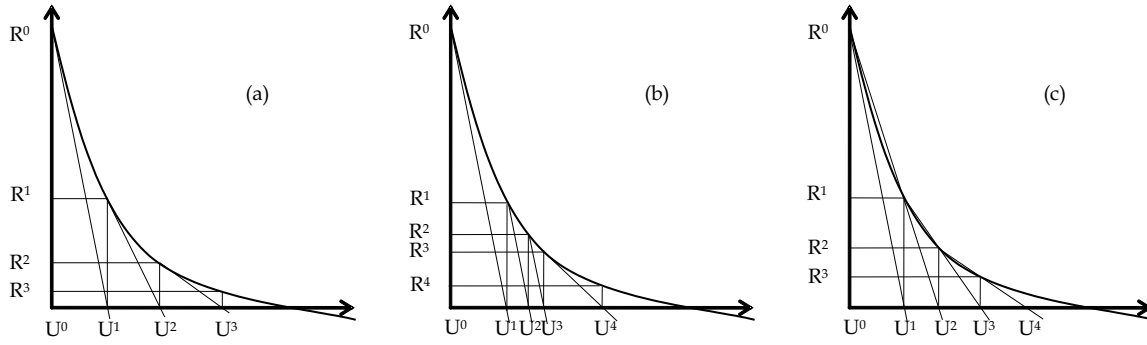


Figure 8.3 – Principale méthode de résolution : (a) Newton - (b) Newton modifiée - (c) quasi-Newton ou BFGS

Le principe des travaux virtuels à l'instant  $t + \Delta t$  sur la configuration à  $t + \Delta t$  s'écrit (voir Annexe B) :

$$\forall \delta \mathbf{u}, \int_{t+\Delta t \Omega} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} : \delta {}_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} {}^{t+\Delta t} dv = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (8.1)$$

où  ${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} = \int_{t+\Delta t \Omega} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^v \cdot \delta \mathbf{u} {}^{t+\Delta t} dv + \int_{\partial t+\Delta t \Omega} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^s \cdot \delta \mathbf{u} {}^{t+\Delta t} ds$  représente les actions mécaniques de contact et les actions extérieures agissant sur le volume  ${}^{t+\Delta t} \Omega$  à l'instant  $t + \Delta t$  dans lequel  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^s$  désigne les forces de contact à  $t + \Delta t$  et  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^v$  les actions de volume à  $t + \Delta t$  et  $\delta {}_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}$  représente la variation du tenseur linéarisé des déformations à  $t + \Delta t$ .

Le principe des travaux virtuels peut également s'écrire en considérant la configuration à l'instant initial ( $t = 0$ ) comme configuration de référence. Dans ce cas le tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 2 et le tenseur des déformations de Green Lagrange sont utilisés :

$$\int_{{}_0 \Omega} {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{S} : \delta {}^{t+\Delta t} {}_0 \mathbf{E} {}^0 dv = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (8.2)$$

Ou encore en considérant la configuration à l'instant  $t$  comme configuration de référence :

$$\int_{{}^t \Omega} {}^{t+\Delta t} {}_t \mathbf{S} : \delta {}^{t+\Delta t} {}_t \mathbf{E} {}^t dv = {}^{t+\Delta t} \mathfrak{R} \quad (8.3)$$

En effet,

- La conservation de la masse (approche matérielle) implique  ${}^0 \rho {}^0 dv = {}^t \rho {}^t dv$ .
- Le second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff s'écrit  ${}^0 \mathbf{S} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 \mathbf{F} \cdot {}^t \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^0 \mathbf{F}^T$ .

– Par définition :  $\delta_0 \boldsymbol{\varepsilon} = {}^t_0 \mathbf{F}^T \cdot \delta_t \boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}^t_0 \mathbf{F}$ .

– Enfin, les variations virtuelles de l'incrément de déformations linéarisées et de l'incrément de déformations de Green Lagrange sont égales :  $\delta_0 \boldsymbol{\varepsilon} = \delta_0^t \mathbf{E}$ .

Les solutions admissibles  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  de  $E_{\mathbf{u}}$  doivent être telles que pour toute fonction test, et donc toute variation du champ réel  $\delta \mathbf{u}$  de  $E_{\delta \mathbf{u}}$ , les équations suivantes soient satisfaites sur  $\Omega$  (en incorporant les conditions aux limites dans l'ensemble des fonctions admissibles - Cf. figure 8.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \delta \mathbf{u} \in E_{\delta \mathbf{u}}, \\ \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} : \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{E} {}^t dv - \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^v \cdot \delta \mathbf{u} {}^{t+\Delta t} dv - \int_{\partial^{t+\Delta t} \Omega_{\sigma}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^s \cdot \delta \mathbf{u} {}^{t+\Delta t} ds = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^s, \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega_{\sigma} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d, \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega_{\mathbf{u}} \\ E_{\mathbf{u}} = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) / \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega_{\mathbf{u}} \} \\ E_{\delta \mathbf{u}} = \{ \delta \mathbf{u} \in H^1(\Omega) / \delta \mathbf{u} = 0 \forall \mathbf{x} \in \partial \Omega_{\mathbf{u}} \} \end{array} \right. \quad (8.4)$$

### 8.2.3 Discrétisation par éléments finis

Dans cette partie, le système est dans un premier temps écrit d'une manière générale sans préciser les configurations de calculs et de références puis appliqué dans le cas des formulations Lagrangiennes Totales, semi-Réactualisées et Réactualisées. Nous renvoyons le lecteur en Annexe C pour une description plus précise des grandeurs matricielles introduites.

Les déformations de Green-Lagrange  $\{\mathbf{E}\}$  (notation vectorielle définie ci-dessous) se décomposent en une partie linéaire  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  et une partie non-linéaire  $\{\boldsymbol{\mu}\}$ .

$$\{\mathbf{E}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\mu}\} = \left\{ \begin{array}{c} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{zz} \\ 2E_{xy} \\ 2E_{xz} \\ 2E_{yz} \end{array} \right\}$$

Pour la partie linéaire, la relation  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  nous permet d'écrire  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{u}\}$  où  $[\mathbf{L}]$  est l'opérateur de dérivation défini en Annexe C - Eq. C.2.

L'interpolation nodale utilisée dans l'approche éléments finis permet de relier le déplacement  $\{\mathbf{u}\}$  d'un point au déplacement des nœuds de l'élément  $\{\mathbf{u}^e\}$  dans lequel se situe



ce point. Ainsi  $\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\}$  avec  $[\mathbf{N}^e]$  la matrice des fonctions de formes associées à l'élément  $e$ . Finalement, la partie linéaire des déformations de Green Lagrange s'écrit :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \underbrace{[\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{N}^e]}_{[\mathbf{B}_L^e]} \cdot \{\mathbf{u}^e\} = [\mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} \quad (8.5)$$

Concernant la partie non-linéaire, de la même manière la relation  $\mu = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}$  nous permet d'écrire  $\{\boldsymbol{\mu}\} = [\mathbf{A}] \cdot \{\boldsymbol{\theta}\}$  où  $[\mathbf{A}]$  et  $\{\boldsymbol{\theta}\}$  sont les opérateurs de dimension  $6 \times 9$  et  $9 \times 1$  définis en Annexe C - Eq. C.3. Par ailleurs, l'opérateur  $[\mathbf{H}]$  permet d'écrire les déformations non-linéaires en fonction du vecteur déplacements  $\{\mathbf{u}\}$ , soit  $\{\boldsymbol{\mu}\} = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}] \cdot \{\mathbf{u}\}$ . Finalement, en intégrant la matrice des fonctions de forme comme dans le cas des déformations linéaires, les déformations linéarisées s'écrivent :

$$\{\boldsymbol{\mu}\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}] \cdot \{\boldsymbol{\theta}\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}] \cdot [\mathbf{N}^e]}_{[\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})]} \cdot \{\mathbf{u}^e\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{G}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} \quad (8.6)$$

Les relations 8.5 et 8.6 pour les déformations linéaires et non-linéaires ont été écrites dans le cas général d'un déplacement  $\{\mathbf{u}\}$ . Elles peuvent désormais être écrites dans le cas plus particulier des formulations Lagrangiennes Totale, semi-Réactualisées et Réactualisées, pour obtenir les expressions des déformations de Green Lagrange ainsi que des incréments de déformations correspondants.

### 8.2.3.1 Formulation Lagrangienne Totale

L'incrément de déformation de Green Lagrange s'écrit  $\{\mathbf{E}\} = \{^{t+\Delta t}\mathbf{E}\} - \{^t\mathbf{E}\}$  soit après calculs :

$${}_0E_{ij} = \frac{1}{2} \underbrace{({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}_0^t u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0^t u_{k,j} {}_0u_{k,i})}_{\text{Linéaire en } {}_0u_i} + \frac{1}{2} \underbrace{({}_0u_{k,j} {}_0u_{k,j})}_{\text{non-linéaire en } {}_0u_i}$$

Les déformations linéaires font intervenir les déplacements initiaux entre 0 et  $t$  notés  ${}_0^t u_i$ . L'écriture de l'incrément de déformation est donc modifiée, soit sous forme discrète :

$$\{\mathbf{E}\} = [{}_0\mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} + [{}_0\mathbf{B}_{NL}^e(\{^t\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\mathbf{u}^e\} + \frac{1}{2} [{}_0\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\mathbf{u}^e\}$$

La variation de l'incrément de déformation  $\{\delta_0\mathbf{E}\}$  (configuration à  $t$  connue) s'écrit :

$$\{\delta_0 \mathbf{E}\} = [{}_0 \mathbf{B}_L^e] \cdot \{\delta \mathbf{u}^e\} + [{}_0 \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\delta \mathbf{u}^e\} + \underbrace{\frac{1}{2} [{}_0 \mathbf{A}(\mathbf{u}^e)] \{\delta_0 \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}^e)\} + \frac{1}{2} [\delta_0 \mathbf{A}(\mathbf{u}^e)] \{\mathbf{0} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{u}^e)\}}_{[{}_0 \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\delta \mathbf{u}^e\} \text{ car } [{}_0 \mathbf{A}(\delta \mathbf{u}^e)] \text{ et } \{\mathbf{0} \boldsymbol{\theta}(\delta \mathbf{u}^e)\} \text{ symétriques}}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{E}\} &= [{}_0 \mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} + [{}_0 \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\mathbf{u}^e\} + \frac{1}{2} [{}_0 \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\mathbf{u}^e\} = [{}_0 \mathbf{B}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} \\ \{\delta_0 \mathbf{E}\} &= [{}_0 \mathbf{B}_L^e] \cdot \{\delta \mathbf{u}^e\} + [{}_0 \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\delta \mathbf{u}^e\} + [{}_0 \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\delta \mathbf{u}^e\} = [\delta_0 \mathbf{B}^e] \cdot \{\delta \mathbf{u}^e\} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Note :  $[\delta_0 \mathbf{B}^e]$  est une notation qui permet de définir la relation entre la variation des déplacements et la variation des déformations. Il ne s'agit pas de la variation de  $[{}_0 \mathbf{B}^e]$  définie ci-dessus.

### 8.2.3.2 Formulation Lagrangienne Semi-réactualisée

La géométrie est réactualisée à chaque incrément de chargement mais pas à chaque itération du schéma de résolution. Comme dans le cas de la formulation Lagrangienne Totale, il est donc nécessaire de prendre en compte les effets des déplacements initiaux sur le tenseur des déformations de Green Lagrange, soit pour l'itération  $i$  (les déplacements  ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u}^{(i-1)}$  à l'itération  $(i-1)$  étant connus) :

$${}^t E_{ij}^{(i)} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j}^{(i)} + {}^t u_{j,i}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}_t u_{k,i}^{(i-1)} {}^t u_{k,j}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}_t u_{k,j}^{(i-1)} {}^t u_{k,i}^{(i)}) + \frac{1}{2} ({}^t u_{k,j}^{(i)} {}^t u_{k,j}^{(i)})$$

qui conduit à (voir Annexe C) :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{E}^{(i)}\} &= [{}_t \mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^{e(i)}\} + [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^{e(i-1)}\})] \cdot \{\mathbf{u}^{e(i)}\} + \frac{1}{2} [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^{e(i)}\})] \cdot \{\mathbf{u}^{e(i)}\} = [{}_t \mathbf{B}^e] \cdot \{\mathbf{u}^{e(i)}\} \\ \{\delta_t \mathbf{E}^{(i)}\} &= [{}_t \mathbf{B}_L^e] \cdot \{\delta \mathbf{u}^{e(i)}\} + [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^{e(i-1)}\})] \cdot \{\delta \mathbf{u}^{e(i)}\} + [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^{e(i)}\})] \cdot \{\delta \mathbf{u}^{e(i)}\} = [\delta_t \mathbf{B}^e] \cdot \{\delta \mathbf{u}^{e(i)}\} \end{aligned} \quad (8.8)$$

### 8.2.3.3 Formulation Lagrangienne Réactualisée

L'incrément de déformation de Green Lagrange s'écrit entre la dernière configuration connue  $t + \Delta t^{(i-1)}$  et la configuration à  $t + \Delta t$  :

$$\{\mathbf{E}\}_{t+\Delta t^{(i-1)}} = \{\mathbf{E}\}_{t+\Delta t^{(i-1)}} \text{ car } \{\mathbf{E}\}_{t+\Delta t^{(i-1)}} = 0$$

L'incrément de déformation de Green Lagrange entre  $t + \Delta t^{(i-1)}$  et  $t + \Delta t$  s'écrit :

$$\{\mathbf{E}\}_{t+\Delta t^{(i-1)}} = [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} + \frac{1}{2} [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\mathbf{u}^e\} = [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \{\mathbf{E}\}_{t+\Delta t^{(i-1)}} &= [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} + \frac{1}{2} [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\mathbf{u}^e\} = [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} \\ \{\delta_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{E}\} &= [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}_L^e] \cdot \{\delta\mathbf{u}^e\} + [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})] \cdot \{\delta\mathbf{u}^e\} = [{}_{t+\Delta t^{(i-1)}}\mathbf{B}^e] \cdot \{\delta\mathbf{u}^e\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

### 8.2.4 Résidu élémentaire

Pour des raisons de clarté, le problème Lagrangien est formulé en utilisant une formulation Lagrangienne semi-Réactualisée. Cette formulation est ensuite appliquée dans le cadre des formulations Lagrangienne Totale puis Lagrangienne Réactualisée. L'équation d'équilibre sous forme matricielle dans le cas d'une formulation Lagrangienne semi-Réactualisée (configuration à  $t$  connue) s'écrit, en ne faisant pas apparaître les itérations sur chaque incrément de chargement :

$$\forall \delta \mathbf{u} \in E_{\delta \mathbf{u}}, \int_{{}^t\Omega} \{\delta \mathbf{E}\}^T \cdot \{\mathbf{S}\} {}^t dv - \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} \{\delta \mathbf{u}\}^T \cdot \{\mathbf{f}^v\} {}^{t+\Delta t} dv - \int_{\partial^{t+\Delta t}\Omega_\sigma} \{\delta \mathbf{u}\}^T \cdot \{\mathbf{f}^s\} {}^{t+\Delta t} ds = 0$$

Les déformations de Green Lagrange s'écrivent aussi  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{E} = {}^t\mathbf{E} + {}_t\mathbf{E} = {}_t\mathbf{E}$  soit :

$$\forall \delta \mathbf{u} \in E_{\delta \mathbf{u}}, \int_{{}^t\Omega} \{\delta {}_t\mathbf{E}\}^T \cdot \{\mathbf{S}\} {}^t dv - \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} \{\delta \mathbf{u}\}^T \cdot \{\mathbf{f}^v\} {}^{t+\Delta t} dv - \int_{\partial^{t+\Delta t}\Omega_\sigma} \{\delta \mathbf{u}\}^T \cdot \{\mathbf{f}^s\} {}^{t+\Delta t} ds = 0$$

En exprimant l'ensemble des intégrales sur la configuration à  $t$  :

$$\forall \delta \mathbf{u} \in E_{\delta \mathbf{u}}, \int_{{}^t\Omega} \{\delta {}_t\mathbf{E}\}^T \cdot \{\mathbf{S}\} {}^t dv - \int_{{}^t\Omega} \{\delta \mathbf{u}\}^T \cdot \{\mathbf{f}^v\} {}^t dv - \int_{\partial^t\Omega_\sigma} \{\delta \mathbf{u}\}^T \cdot \{\mathbf{f}^s\} {}^t ds = 0$$

Le système discret s'écrit comme une somme sur tous les éléments ( $e = 1 \dots m$ ) :

$$\forall \{\delta \mathbf{u}^e\} \in E_{\delta \mathbf{u}}, \sum_{e=1}^m \left[ \int_{{}^t\Omega_e} \{\delta \mathbf{u}^e\}^T \cdot [{}_{\delta_t}\mathbf{B}^e]^T \cdot \{\mathbf{S}\} {}^t dv - \int_{{}^t\Omega_e} \underbrace{\{\delta \mathbf{u}^e\}^T \cdot [{}_{t}\mathbf{N}^e]^T}_{\{\mathbf{F}_V\}^{t+\Delta t}} \cdot \{\mathbf{f}^v\} {}^t dv - \int_{\partial^t\Omega_e} \underbrace{\{\delta \mathbf{u}^e\}^T [{}_{t}\mathbf{N}^e]^T}_{\{\mathbf{F}_S\}^{t+\Delta t}} \cdot \{\mathbf{f}^s\} {}^t ds \right] = 0$$

Finalement le résidu élémentaire s'écrit :

$$\{\psi^e\} = \int_{\Omega^e} [\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot \{^{t+\Delta t}_t \mathbf{S}\}^t dv - \{^{t+\Delta t} \mathbf{R}\} \quad (8.10)$$

$$\text{où } \{^{t+\Delta t} \mathbf{R}\} = \int_{\Omega^e} \{^{t+\Delta t}_t \mathbf{F}_V\}^t dv + \int_{\Omega^e} \{^{t+\Delta t}_t \mathbf{F}_S\}^t dv.$$

Nous notons que les contraintes de Piola Kirchhoff 2 ( $\{^{t+\Delta t}_t \mathbf{S}\}$ ) à  $t + \Delta t$  exprimées dans la configuration à  $t$  sont non-linéaires en  $\{^{t+\Delta t}_t \mathbf{E}\}$ .

### 8.2.5 Méthode de résolution non-linéaire

L'algorithme de Newton Raphson consiste à rechercher la solution d'un problème non-linéaire en linéarisant pour chaque itération successive le problème éléments finis à l'aide d'un développement en série de Taylor à l'ordre 1. Concrètement, pour un incrément de chargement entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , le problème non-linéaire est ainsi composé d'un ensemble de sous problèmes linéaires (itération  $i$ ) et une méthode itérative (ici Newton Raphson) permet d'obtenir la solution du problème éléments finis. Cette méthode est aussi appelée méthode de prédiction-corrrection. Elle consiste pour l'incrément de chargement courant à effectuer une prédiction (par exemple élastique) puis à corriger la prédiction jusqu'à l'annulation du résidu  $\{\psi\}$ .

#### 8.2.5.1 Algorithme de Newton Raphson

Le but est d'annuler le vecteur résidu  $\{\psi\}$  à l'incrément de calcul  $t + \Delta t$  (Bergheau *et al.* (1998)). Ce vecteur est constitué de l'assemblage par la méthode des éléments finis des résidus élémentaires correspondant à l'équation 8.10 :

$$\{\psi (^{t+\Delta t} \mathbf{u})\} = \sum_{e=1}^m \{\psi^e (\{^{t+\Delta t} \mathbf{u}^e\})\} = 0$$

Le développement de Taylor entre deux itérations ( $i - 1$ ) et ( $i$ ) à l'ordre 1 s'écrit :

$$\{\psi (\{^{t+\Delta t} \mathbf{u}\}^{(i)})\} = \{\psi (\{^{t+\Delta t} \mathbf{u}\}^{(i-1)})\} + \left. \frac{d\{\psi\}}{d\{^{t+\Delta t} \mathbf{u}\}} \right|_{\{^{t+\Delta t} \mathbf{u}\}^{(i-1)}} \left( \{^{t+\Delta t} \mathbf{u}\}^{(i)} - \{^{t+\Delta t} \mathbf{u}\}^{(i-1)} \right)$$

Pour annuler le résidu à l'instant  $t + \Delta t$ , le système suivant est résolu :

$$\left\{ \boldsymbol{\psi} \left( \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)} \right) \right\} + \left[ \frac{d\{\boldsymbol{\psi}\}}{d\{t+\Delta t \mathbf{u}\}} \Big|_{\{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)}} \right] \left( \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i)} - \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)} \right) = 0$$

La matrice tangente  $\left[ \frac{d\{\boldsymbol{\psi}\}}{d\{t+\Delta t \mathbf{u}\}} \Big|_{\{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)}} \right]$  est constituée de l'assemblage des matrices tangentes élémentaires (voir paragraphe 8.2.5.2) obtenues sur chaque élément du maillage pour la dernière configuration connue ( $i-1$ ). La résolution du problème linéarisé nécessite *a priori* son calcul à chaque itération. Néanmoins, comme mentionné dans le paragraphe 8.2.2, le calcul de cet opérateur peut être optimisé en fonction du problème non-linéaire traité. Ainsi, il peut être astucieux de réactualiser cet opérateur de manière ponctuelle (Newton modifié) ou d'utiliser une sécante (BFGS) souvent plus simple à implémenter. Dans cette étude, nous nous limitons à une méthode classique de Newton-Raphson basée sur une réactualisation systématique de l'opérateur de comportement tangent, à chaque itération et donc également à chaque incrément de chargement.

La figure 8.4, synthétise le principe de l'algorithme de Newton Raphson. Ici, par exemple, pour le troisième incrément de temps (en rouge sur le schéma), le niveau de chargement est donné par la grandeur scalaire  ${}^{(3)}F$ . Le déplacement  ${}^{(2)}U = {}^{(3)}U^{(0)}$  obtenu lors du dernier incrément de chargement ( ${}^{(2)}F$ ) permet de déterminer la pente  ${}^{(3)}K^{(0)}$  (matrice tangente), et ainsi une nouvelle valeur pour le déplacement  ${}^{(3)}U^{(i)}$  : prédiction. L'algorithme est réitéré jusqu'à convergence de la solution (le résidu est admissible) : correction. Ainsi, le déplacement  ${}^{(3)}U$  correspondant au chargement  ${}^{(3)}F$  est obtenu à l'aide du processus itératif de Newton Raphson.

### 8.2.5.2 Calcul de la matrice tangente

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, l'opérateur de comportement tangent  $[\mathbf{K}_T]$  est obtenu à l'issue de l'assemblage, par la méthode des éléments finis, des matrices tangentes élémentaires  $[\mathbf{K}_T^e]$ . Celles-ci sont calculées au niveau de chaque élément du maillage et reposent sur le calcul de la « différentielle » du résidu élémentaire  $d\{\boldsymbol{\psi}^e\}$ . Dans le cadre de cette présentation, les forces sont supposées indépendantes des déformations. En pratique, ces forces dépendent des déformations dans la mesure où elles sont appliquées sur la dernière configuration géométrique connue lors de l'utilisation d'une Formulation Lagrangienne Réactualisée. Pour cette présentation, la formulation Lagrangienne semi-Reactualisée est une fois de plus considérée. En exprimant la différentielle du résidu à partir de l'équation 8.10 :

$$d\{\boldsymbol{\psi}^e\} = \int_{t\Omega^e} d[\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot \{t+\Delta t \mathbf{S}\}^t dv + \int_{t\Omega^e} [\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot d\{t+\Delta t \mathbf{S}\}^t dv \quad (8.11)$$

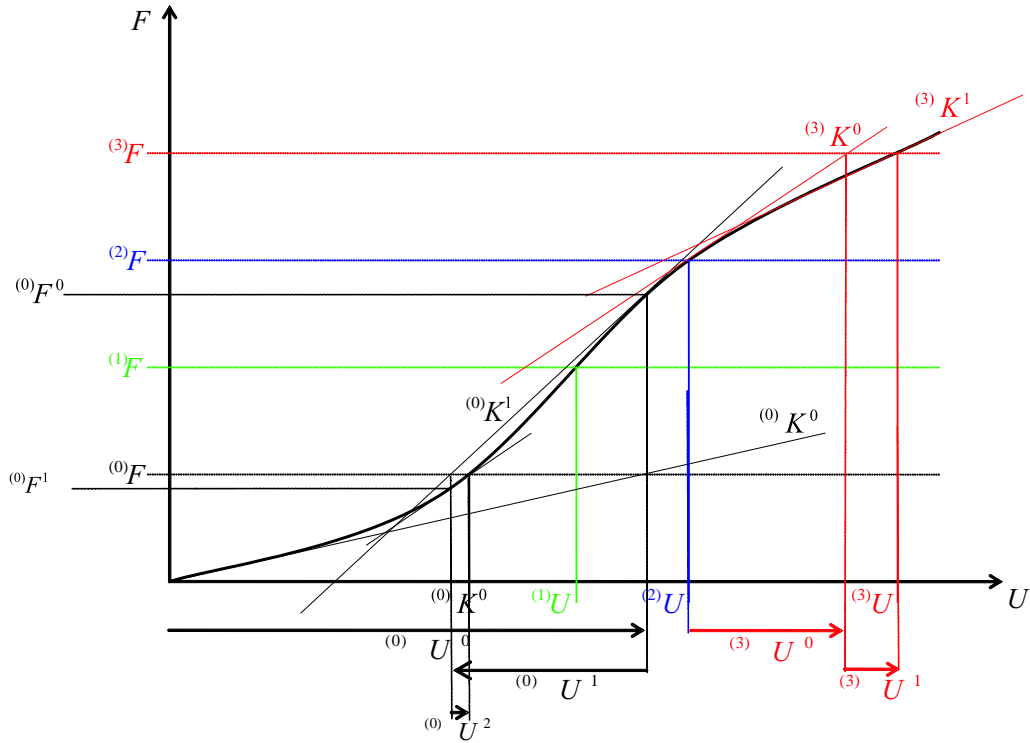


Figure 8.4 – Méthode itérative de Newton Raphson : Subdivision du chargement en incrément de chargement  $(i)F$  et méthode itérative de Newton Raphson pour la convergence de la solution  $(i)U$  sur chaque incrément.

La relation entre les contraintes de Piola Kirchhoff 2  $\{^{t+\Delta t}\mathbf{S}\}$  et les déformations de Green Lagrange  $\{^{t+\Delta t}\mathbf{E}\}$ , ainsi que la relation entre les incréments correspondants est introduite au moyen des matrices de comportement sécantes  $[\mathbf{C}_s]$  et tangentes  $[\mathbf{C}_t]$ . La méthode utilisée pour obtenir les opérateurs de comportement à partir des courbes expérimentales est décrite dans le paragraphe 8.3.1 :

$$\{^{t+\Delta t}\mathbf{S}\} = [{}^t\mathbf{C}_s] \cdot \{^{t+\Delta t}\mathbf{E}\} = [{}^t\mathbf{C}_s] \cdot [{}^t\mathbf{B}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} \quad (8.12)$$

$$\{d^{t+\Delta t}\mathbf{S}\} = [{}^t\mathbf{C}_t] \cdot \{d^{t+\Delta t}\mathbf{E}\} = [{}^t\mathbf{C}_t] \cdot [{}^t\delta\mathbf{B}^e] \cdot d\{\mathbf{u}^e\} \quad (8.13)$$

En intégrant ces deux relations supplémentaires (Eqs. 8.12 et 8.13), la différentielle du résidu élémentaire s'écrit :

$$d\{\psi^e\} = \int_{{}^t\Omega^e} d[{}^t\delta\mathbf{B}^e]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_s] \cdot [{}^t\mathbf{B}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} {}^t dv + \int_{{}^t\Omega^e} [{}^t\delta\mathbf{B}^e]^T \cdot [{}^t\mathbf{C}_t] \cdot [{}^t\delta\mathbf{B}^e] \cdot d\{\mathbf{u}^e\} {}^t dv$$

Or  $d[\delta_t \mathbf{B}^e] = d[{}_t \mathbf{B}_{NL}^e] = d[{}_t \mathbf{A}] \cdot [{}_t \mathbf{G}^e]$  soit :

$$d\{\psi^e\} = \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{G}^e]^T \cdot d[{}_t \mathbf{A}]^T \cdot \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \} {}^t dv + \int_{{}^t \Omega^e} [\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot [{}_t \mathbf{C}_t] \cdot [\delta_t \mathbf{B}^e] \cdot d\{\mathbf{u}^e\} {}^t dv \quad (8.14)$$

En introduisant une écriture particulière du tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 2  $\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \}$  sous forme matricielle noté  $[{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{S}}]$  (Annexe C, Eq. C.4), nous pouvons écrire :

$$d[{}_t \mathbf{A}]^T \cdot \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \} = [{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{S}}] \cdot d\{\mathbf{\theta}\} = [{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{S}}] \cdot [{}_t \mathbf{G}^e] \cdot d\{\mathbf{u}^e\}$$

La différentielle élémentaire du résidu devient :

$$d\{\psi^e\} = \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{G}^e]^T \cdot [{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{S}}] \cdot [{}_t \mathbf{G}^e] \cdot d\{\mathbf{u}^e\} {}^t dv + \int_{{}^t \Omega^e} [\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot [{}_t \mathbf{C}_t] \cdot [\delta_t \mathbf{B}^e] \cdot d\{\mathbf{u}^e\} {}^t dv$$

La matrice tangente élémentaire  $[\mathbf{K}_T^e]$  s'écrit donc :

$$[\mathbf{K}_T^e] = \frac{d\{\psi^e\}}{d\{\mathbf{u}^e\}} = \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{G}^e]^T \cdot [{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{S}}] \cdot [{}_t \mathbf{G}^e] {}^t dv + \int_{{}^t \Omega^e} [\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot [{}_t \mathbf{C}_t] \cdot [\delta_t \mathbf{B}^e] {}^t dv \quad (8.15)$$

3 termes sont généralement considérés dans cette matrice (Elseifi (1998)) :

– une matrice géométrique ou matrice des contraintes initiales :

$$[\mathbf{K}_G^e] = \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{G}^e]^T \cdot [{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{S}}] [{}_t \mathbf{G}^e] {}^t dv$$

– une matrice de rigidité en petits déplacements :

$$[\mathbf{K}_L^e] = \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{B}_L^e]^T \cdot [{}_t \mathbf{C}_t] \cdot [{}_t \mathbf{B}_L^e] {}^t dv$$

– une matrice de rigidité en grands déplacements, grandes rotations et grandes déformations :

$$[\mathbf{K}_{NL}^e] = \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{B}_L^e]^T \cdot [{}_t \mathbf{C}_t] \cdot [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e] {}^t dv + \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e]^T \cdot [{}_t \mathbf{C}_t] \cdot [{}_t \mathbf{B}_L^e] {}^t dv + \int_{{}^t \Omega^e} [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e]^T \cdot [{}_t \mathbf{C}_t] \cdot [{}_t \mathbf{B}_{NL}^e] {}^t dv$$

### 8.2.5.3 Résolution du système

La résolution du système non-linéaire est effectuée en 4 étapes :

1. Prédiction pour un chargement donné qui fournit une première approximation du champ de déplacement à l'instant  $t + \Delta t$  :  $\{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \}^{(i-1)}$ .

2. Calcul du résidu  $\left\{ \boldsymbol{\psi} \left( \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)} \right) \right\}$  à l'itération  $(i-1)$ .
3. Calcul de la matrice tangente à l'instant  $t + \Delta t$  à partir des données de l'itération  $(i-1)$  :  $\left[ \mathbf{K}_T \left( \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)} \right) \right] = \left[ \frac{d\{\boldsymbol{\psi}\}}{d\{t+\Delta t \mathbf{u}\}} \Big|_{\{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)}} \right]$
4. la correction est apportée par :

$$\{\Delta \mathbf{u}\}^{(i)} = \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i)} - \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)} = - \left[ \mathbf{K}_T \left( \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)} \right) \right]^{-1} \left\{ \boldsymbol{\psi} \left( \{t+\Delta t \mathbf{u}\}^{(i-1)} \right) \right\}$$

Remarque : concrètement la matrice tangente n'est pas inversée. Une méthode de résolution de système linéaire directe ou indirecte est utilisée (méthode des gradients conjugués (*CG*), méthode des bi-gradients conjugués, méthode *GMRES*, ...).

### 8.2.6 Synthèse

Les équations développées dans le cadre de la formulation Lagrangienne semi-Réactualisée peuvent facilement être généralisées au cas des formulations Lagrangiennes Totale et Réactualisée. Le Tableau 8.2 synthétise les résidus et matrices tangentes correspondants aux différentes formulations.

Formulation	Référence	Résidu $\{\boldsymbol{\psi}^e\}$	Matrice tangente $[\mathbf{K}_T^e]$
Totale	0	$\int_{0\Omega^e} [\delta_0 \mathbf{B}^e]^T \cdot \{t+\Delta t \mathbf{S}\}^0 dv - \{t+\Delta t \mathbf{R}\}$	$\int_{0\Omega^e} [0 \mathbf{G}^e]^T \cdot [{}^t+\Delta t \mathbf{S}] \cdot [0 \mathbf{G}^e]^0 dv$ + $\int_{0\Omega^e} [\delta_0 \mathbf{B}^e]^T \cdot [0 \mathbf{C}_t] \cdot [\delta_0 \mathbf{B}^e]^0 dv$
Semi-Réactualisée	t	$\int_{t\Omega^e} [\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot \{t+\Delta t \mathbf{S}\}^t dv - \{t+\Delta t \mathbf{R}\}$	$\int_{t\Omega^e} [t \mathbf{G}^e]^T \cdot [{}^t+\Delta t \mathbf{S}] \cdot [t \mathbf{G}^e]^t dv$ + $\int_{t\Omega^e} [\delta_t \mathbf{B}^e]^T \cdot [t \mathbf{C}_t] \cdot [\delta_t \mathbf{B}^e]^t dv$
Réactualisée	$t + \Delta t^{(i-1)} = t_+$	$\int_{t_+\Omega^e} [\delta_{t_+} \mathbf{B}^e]^T \cdot \{t+\Delta t \mathbf{S}\}^{t_+} dv - \{t+\Delta t \mathbf{R}\}$	$\int_{t_+\Omega^e} [t_+ \mathbf{G}^e]^T \cdot [{}^t+\Delta t \mathbf{S}] \cdot [t_+ \mathbf{G}^e]^{t_+} dv$ + $\int_{t_+\Omega^e} [\delta_{t_+} \mathbf{B}^e]^T \cdot [t_+ \mathbf{C}_t] \cdot [\delta_{t_+} \mathbf{B}^e]^{t_+} dv$

Tableau 8.2 – Synthèse des résidus et des matrices tangentes associés aux Formulations Lagrangienne Totale, semi-Réactualisée et Réactualisée.

## 8.3 Implémentation

### 8.3.1 Courbe expérimentale et lois de comportement

Dans cette partie nous analysons les méthodes employées pour obtenir les matrices de comportement sécantes ( $[\mathbf{C}_s]$ ) et tangentes ( $[\mathbf{C}_t]$ ) à partir des courbes expérimentales



force courante  ${}^tF$  en fonction du déplacement  ${}^td$ .

### 8.3.1.1 Courbe force courante ${}^tF$ en fonction du déplacement ${}^td$

Les essais de compression transverse d'un empilement de 100 Nappes NC2 ( $[0, 90]_{100}$ ) ont été réalisés dans le cadre de la validation expérimentale du modèle proposé pour la modélisation du procédé *LRI* (voir partie IV chapitre 15). Ces essais, ainsi que les essais réalisés à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne par Drapier *et al.* (2005) indiquent un comportement non-linéaire réversible en grandes déformations dans la direction transverse des nappes de carbone (plus de 100% de déformation). La courbe force déplacement est présentée sur la figure 8.5 pour une préforme d'épaisseur initiale 56 mm et de dimension  $585 \times 385$  mm.

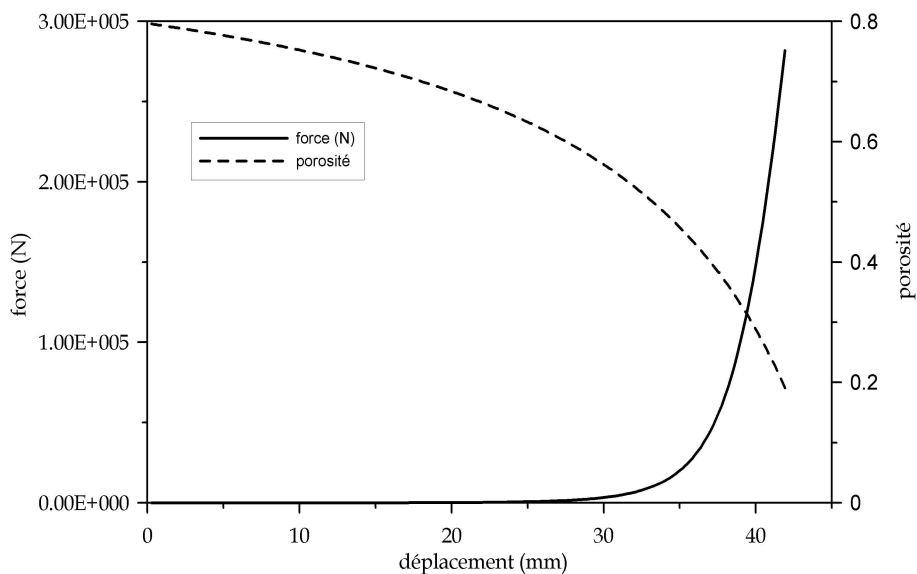


Figure 8.5 – Courbe de compression : Force courante  ${}^tF$  en fonction du déplacement  ${}^td$ .

Les conditions de l'essai (voir partie IV chapitre 15) sont proches de l'hypothèse des contraintes planes (bords libres dans les directions du plan). Aucune caractérisation du comportement dans les deux autres directions n'a actuellement été effectuée. Bien qu'elle sorte du cadre de notre étude, cette caractérisation est nécessaire pour une étude complète de la compression des préformes. Elle passe par la détermination des modules en tension dans chaque direction, des modules de cisaillements dans les directions planes et transverses ainsi que des coefficients de Poisson dans ces mêmes directions. Par simplification, nous allons considérer un comportement isotrope transverse des nappes. Le plan d'isotropie est le plan des nappes et la direction privilégiée est la direction de l'épaisseur (celle dont on connaît la courbe  ${}^tF = f({}^td)$ ). Des modules de rigidité plus importants sont utilisés dans les deux autres directions. Nous analyserons dans le paragraphe 8.3.1.2

le choix effectué pour les rigidités dans le plan, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement transverses.

### 8.3.1.2 Les lois de comportement

L'utilisation des formulations Lagrangiennes (Totale, semi-Réactualisée ou Réactualisée) est simplifiée dans le cas de l'emploi d'une loi de comportement cohérente. Une loi est dite cohérente lorsque les mesures de déformations utilisées et les mesures de contraintes associées sont énergétiquement cohérentes. Plusieurs choix sont possibles :

- ${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbb{C}_s^a : {}^t\mathbf{e}$  : contrainte de Cauchy / déformation d'Euler Almansi,
- ${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbb{C}_s : {}^t\boldsymbol{\epsilon}$  : contrainte de Cauchy / déformation logarithmique,
- ${}^t\mathbf{S} = {}^t\mathbb{C}_s : {}^t\mathbf{E}$  : contrainte de Piola Kirchhoff / déformation de Green Lagrange,
- *etc ...*

**Mesures de déformations et de contraintes** Le tableau 8.3 synthétise les principales mesures de déformations utilisées dans la littérature. Elles sont principalement au nombre de trois : les déformations de Green Lagrange ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2$ ), les déformations d'Euler-Almansi ( $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{-2}$ ) et les déformations logarithmiques ( $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{e}_0$ ). Dans ces relations,  ${}^t_0\mathbf{U}$ ,  ${}^t_0\mathbf{V}$  et  ${}^t_0\mathbf{R}$  sont obtenus à partir de la décomposition polaire de  ${}^t_0\mathbf{F}$ . Les relations suivantes sont ainsi utilisées :

$$\begin{aligned} {}^t_0\mathbf{F} &= {}^t_0\mathbf{R} \cdot {}^t_0\mathbf{U} = {}^t_0\mathbf{V} \cdot {}^t_0\mathbf{R} \\ {}^t_0\mathbf{C} &= ({}^t_0\mathbf{U})^2 \end{aligned} \quad (8.16)$$

Configuration Lagrangienne ${}_0\mathbf{C}$	Configuration Eulérienne ${}_t\mathbf{C}$
$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{\alpha} [{}^t_0\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{I}]$ pour $\alpha \neq 0$	$\mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{\alpha} [{}^t_0\mathbf{V}^\alpha - \mathbf{I}]$ pour $\alpha \neq 0$
$\mathbf{E}_0 = \ln {}^t_0\mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln {}^t_0\mathbf{C}$ avec ${}^t_0\mathbf{C} = {}^t_0\mathbf{F}^T \cdot {}^t_0\mathbf{F}$ Hencky	$\mathbf{e}_0 = \ln {}^t_0\mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln {}^t_0\mathbf{B}$ avec ${}^t_0\mathbf{B} = {}^t_0\mathbf{F} \cdot {}^t_0\mathbf{F}^T$
$\mathbf{E}_1 = {}^t_0\mathbf{U} - \mathbf{I}$ conventionnelle ou Biot	$\mathbf{e}_1 = {}^t_0\mathbf{V} - \mathbf{I}$
$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{2} [{}^t_0\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} [{}^t_0\mathbf{C} - \mathbf{I}]$ Green-Lagrange	$\mathbf{e}_{-2} = \frac{1}{2} [\mathbf{I} - {}^t_0\mathbf{V}^2] = \frac{1}{2} [\mathbf{I} - {}^t_0\mathbf{B}]$ Euler-Almansi

Tableau 8.3 – Principales mesures de déformations utilisées dans les codes de calculs, d'après Coirier (2001).

Comme pour les déformations, trois types de contraintes sont souvent utilisées dans la littérature :

- Les contraintes vraies de Cauchy  ${}^t\boldsymbol{\sigma}$  : ce sont les seules qui ont un sens physique. En 1D elles représentent le rapport entre la force courante  ${}^tF$  et la section courante  ${}^tS$ ,
- Les contraintes de Piola Kirchhoff 2 : elles n'ont pas de sens physique. Elles peuvent être calculées à partir des contraintes de Cauchy  ${}^t\boldsymbol{\sigma}$  en utilisant la relation suivante :  ${}^t_0\mathbf{S} = J {}^t_0\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t_0\mathbf{F}^{-1T}$  où  $J$  est le jacobien de la transformation entre 0 et  $t$ ,

- Les contraintes de Piola Kirchhoff 1. En 1D, elle correspondent au rapport entre la force courante  ${}^tF$  et la section initiale  ${}^0s$ .

**Loi de comportement 1D dans la direction transverse** A partir de la courbe force courante en fonction du déplacement  ${}^tF = f({}^td)$ , en supposant l'absence de contractions dans la direction transverse, la loi de comportement 1D reliant les déformations de Green Lagrange au tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff 2 ( $S_{11} = f({}^t_0E_{11})$ ) : voir figure 8.6-a) et celle reliant les déformations logarithmiques au tenseur des contraintes de Cauchy ( $\sigma_{11} = f(\epsilon_{11})$ ) : voir figure 8.6-b) sont calculées.

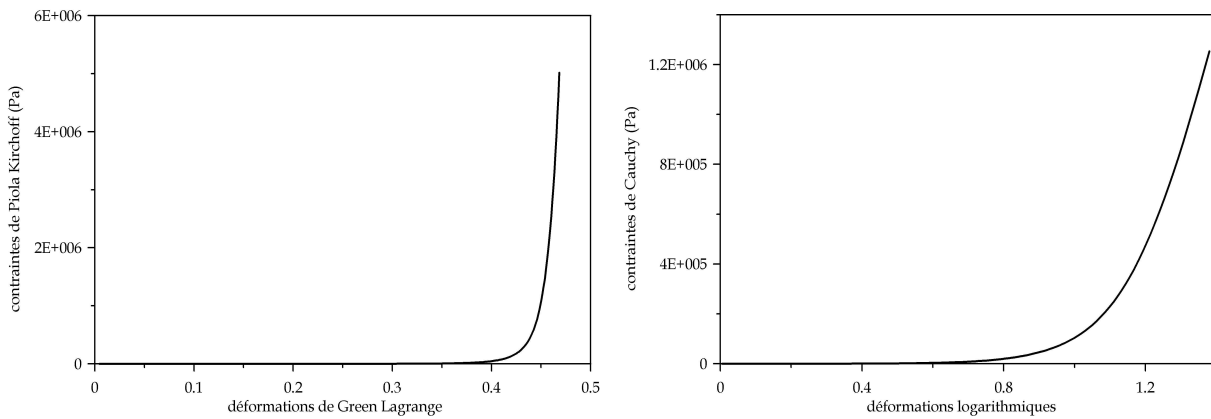


Figure 8.6 – Courbes de traction – (a) Contrainte de Piola Kirchhoff 2 en fonction des déformations de Green Lagrange, (b) Contrainte de Cauchy en fonction des déformations logarithmiques.

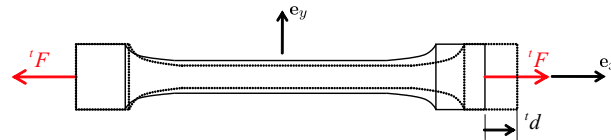


Figure 8.7 – Essai de traction / compression : Mesure de l'effort courant  ${}^tF$  en fonction du déplacement de l'éprouvette  ${}^td$

Les lois 1D isotropes sont obtenues à partir des hypothèses suivantes. L'essai de traction / compression réalisé est représenté sur la figure 8.7. La section de l'éprouvette cylindrique étant  $s = \pi r^2$ , la variation relative de section s'écrit :  $\frac{\Delta s}{s} = 2 \frac{\Delta r}{r}$ . La variation relative de volume  $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta s}{s}$  peut ainsi être calculée en utilisant la définition du coefficient de Poisson suivante :  $\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$ . Finalement la variation de volume s'écrit  $\frac{\Delta v}{v} = (1 - 2\nu) \frac{\Delta l}{l}$ . La section à l'instant courant devient donc :  ${}^ts = {}^0s + \Delta s = {}^0s - 2\nu \frac{\Delta l}{l} {}^0s$ . Dans la suite l'élongation dans la direction de l'essai de traction / compression est introduite (« stretch ratio ») :  $\lambda = \frac{\|d^t l\|}{\|d^0 l\|} = \frac{{}^tl}{{}^0l} = \frac{{}^td + {}^0l}{{}^0l}$ . Les équations précédentes deviennent :

$${}^t_s = (1 - 2\nu(\lambda - 1)) {}^0_s \quad (8.17a)$$

$$\frac{\Delta v}{{}^0_v} = (1 - 2\nu)(\lambda - 1) \quad (8.17b)$$

A partir de ces relations, les mesures de déformations et de contraintes du tableau 8.3 peuvent être calculées en utilisant l'élongation et la section courante de l'éprouvette qui dépend du coefficient de Poisson.

**Comportement isotrope** Les lois 1D précédentes ne sont pas utilisables en l'état dans un code de calcul par éléments finis. Dans le cas d'un comportement isotrope, le passage à un comportement tridimensionnel nécessite la définition d'une mesure de contrainte et de déformation équivalente. Ici, les mesures de contraintes et de déformations équivalentes choisies correspondent aux contraintes et déformations de von Mises :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{dev} \sigma_{ji}^{dev}} \text{ avec } \sigma_{ij}^{dev} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (8.18)$$

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon_{ij}^{dev} \varepsilon_{ji}^{dev}} \text{ avec } \varepsilon_{ij}^{dev} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (8.19)$$

Compte tenu de l'hypothèse de contraintes planes retenue, les déformations équivalentes suivantes peuvent être calculées (voir la forme du tenseur des contraintes et des déformations en Annexe D.1) en uniaxial :

$$\sigma_{eq} = |\sigma_{11}| \quad (8.20a)$$

$$\varepsilon_{eq} = (\nu + 1) |\varepsilon_{11}| \quad (8.20b)$$

Dans le code de calcul, pour un niveau de déformation 3D quelconque obtenu à partir du champ de déplacement, la déformation équivalente est calculée au sens de la relation 8.19. Les relations 8.20a et 8.20b et la loi de comportement 1D (voir figure 8.6) permettent d'obtenir la rigidité sécante de la structure, *i.e.* son module d'Young ( $C_s$ ) identique dans les trois directions puisque le comportement est isotrope. La pente de la courbe pour ce même niveau de déformation (courbe de traction 8.6) donne la rigidité tangente ( $C_t$ ). Le coefficient de Poisson étant connu et supposé constant (caractérisé par un essai ou fixé), les matrices tangentes et sécantes sont construites au moyen d'une matrice d'élasticité classique en utilisant les modules adéquats (voir l'allure de la matrice en Annexe D.3). Pour des raisons de stabilité numérique, une approximation des opérateurs tangents et sécants à l'aide des polynômes de Lagrange (Voir les équations D.5 et D.6 en Annexe D) est réalisé à partir de la courbe expérimentale.

**Comportement isotrope transverse** Dans ce cas la matrice de comportement dans le repère associé au matériau est celle décrite en Annexe D.2. Dans l'épaisseur des nappes, la rigidité  $C_L$  non-linéaire est donnée par les courbes contraintes / déformations présentée sur les figures 8.6-a et 8.6-b. En ce qui concerne les directions dans le plan des nappes aucune caractérisation n'a actuellement été effectuée faute de moyens adaptés. L'utilisation d'une théorie de l'homogénéisation telle que celle développée par Berthelot (2005) permet d'obtenir une bonne évaluation du module transverse  $C_T$  et du coefficient de Poisson dans le plan  $\nu_{TT'}$ . Une analyse *a posteriori* de l'influence de cette hypothèse sur les résultats obtenus peut être réalisée. A partir du module d'Young des fibres de carbone dans la direction longitudinale ( $C_L^c = 260 \text{ GPa}$ ) et de leur coefficient de Poisson ( $\nu_{LT}^c = 0,3$ ), la théorie nous permet de déterminer le module d'Young transverse  $C_T = C_L^c (1 - \phi)$  et le coefficient de Poisson transverse  $\nu_{TT'} = \nu_{LT}^c (1 - \phi)$  dans le plan des nappes. Il existe d'autres expressions théoriques permettant de déterminer ces grandeurs. Elles sont présentées dans Berthelot (2005).

Concernant le coefficient de Poisson  $\nu_{TL}$ , la théorie des mélanges ne nous permet pas de conclure. Compte tenu du manque d'informations, nous prendrons pour ce coefficient une valeur nulle, ce qui implique que la compression dans l'épaisseur des nappes n'influence pas le comportement dans le plan. Bien que simplificatrice, cette hypothèse constitue *a priori* une bonne approximation qualitative du phénomène observé expérimentalement, *i.e.* l'absence de déformations planes lors de l'essai de compression dans l'épaisseur. La relation  $\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}$  conduit alors à un coefficient de Poisson  $\nu_{LT} = 0$ . Enfin, le module de cisaillement  $G_{LT}$  est calculé à partir de la relation  $G_{LT} = \frac{2(1+\nu_{LT})}{E_L} = \frac{2}{E_L}$ .

Le traitement numérique du comportement isotrope transverse est légèrement différent de celui réalisé pour le comportement isotrope. L'état de déformation est systématiquement recalculé dans le repère matériau afin d'évaluer la rigidité à l'aide des relations contraintes / déformations des figures 8.6-a et 8.6-b. Ici, la notion de contrainte et déformation équivalente n'est plus requise.

Note : L'orientation des fibres doit être mise à jour lors du calcul pour prendre en compte la rotation de la matière.

### 8.3.2 Pratique de la Formulation Lagrangienne

Dans cette partie, nous observons d'une manière pratique comment est réalisée l'intégration des formulations Lagrangienne Réactualisée (ou semi-Réactualisée) et Totale dans un code de calcul. A l'issue de cette présentation, un choix est effectué.

### 8.3.2.1 Formulation Lagrangienne totale

Dans ce cas, la loi  ${}^t_0\mathbf{S} = {}^t_0\mathbb{C} : {}^t_0\mathbf{E}$  est considérée. Le résidu élémentaire et la matrice tangente élémentaire présentés dans le tableau 8.2 sont utilisés. Les contraintes de Piola Kirchhoff 2 à  $t + \Delta t$  exprimées dans la configuration à  $t = 0$ , s'écrivent  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{S} = {}^t_0\mathbf{S} + {}_t\mathbf{S}$ . Pour un incrément de chargement, connaissant les déformations de Green-Lagrange obtenues à l'itération précédente  ${}^t_0\mathbf{E}^{(i)}$  et calculées à partir du déplacement obtenu pour cette même itération  $\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}\}^{(i)}$ , les contraintes de Piola Kirchhoff  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{S}^{(i)}$  sont calculées à partir de la loi de comportement  ${}^t_0\mathbf{S}^{(i)} = {}^t_0\mathbb{C} : {}^t_0\mathbf{E}^{(i)}$ . Lorsque le processus a convergé, il est nécessaire d'appliquer les formules de transformations classiques afin d'obtenir les contraintes de Cauchy pour l'affichage  ${}^t\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} {}^t_0\mathbf{F} \cdot {}^t_0\mathbf{S} \cdot {}^t_0\mathbf{F}^T$ . Concernant le calcul de l'opérateur de comportement tangent  $[{}^t_0\mathbb{C}_t] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t_0\mathbf{S}}{\partial {}^t_0\mathbf{E}} \end{bmatrix}$ , une réactualisation est effectuée seulement à chaque incrément de chargement comme indiqué dans le tableau 8.1.

La prise en compte des chargements dépendant de la configuration géométrique nécessite d'effectuer un changement de repère pour actualiser l'orientation des forces à  $t + \Delta t$ . Dans la formulation Lagrangienne Totale le vecteur force externe s'écrit :

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} = \int_{{}^0\Omega} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{f}^v \cdot \delta \mathbf{u}^0 dv + \int_{\partial^0\Omega_\sigma} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{f}^s \cdot \delta \mathbf{u}^0 ds$$

Pour la prise en compte des chargements à  $t + \Delta t$  dépendant de la déformation, l'intégration doit être effectuée sur le domaine à  $t + \Delta t$  (initialement inconnu). Néanmoins au cours du processus itératif, une estimation de plus en plus précise du champs de déplacement souhaité est obtenue. Cette estimation permet d'effectuer le changement de variable nécessaire à l'estimation des forces de volume et de surface à  $t + \Delta t$  exprimé dans la configuration initiale 0.

### 8.3.2.2 Formulation Lagrangienne Réactualisée et semi-Réactualisée

Pour ce type de formulation, les lois de comportement Cauchy-logarithmiques ( ${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbb{C} : {}^t\boldsymbol{\epsilon}$ ) ou Cauchy-Euler-Almansi ( ${}^t\boldsymbol{\sigma} = {}^t\mathbb{C}^a : {}^t\mathbf{e}$ ) sont considérées (voir figure 8.6-b). Les résidus et matrices tangentes associés aux formulations Lagrangienne Réactualisée et Lagrangienne semi-Réactualisée sont utilisées (voir tableau 8.2). Les contraintes de Piola Kirchhoff s'écrivent alors  ${}^{t+\Delta t}_t\mathbf{S} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + {}_t\mathbf{S}$  avec ( $t = t + \Delta t^{(i-1)}$  pour la formulation Lagrangienne Réactualisée). Connaissant le déplacement entre 0 et  $t$  (0 et  $t + \Delta t^{(i-1)}$  dans le cas de la Formulation Réactualisée), et l'incrément de déplacement entre  $t$  et  $t + \Delta t^{(i-1)}$  (entre  $t + \Delta t^{(i-2)}$  et  $t + \Delta t^{(i-1)}$  pour la formulation Réactualisée), un calcul des déformations et de l'incrément de déformations de Green Lagrange peut être effectué pour l'itération précédente ( $i - 1$ ) :

$$\{ {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}^{(i-1)} \} = [ {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{B}^e ] \cdot \{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{e(i-1)} \}$$

$$\{ {}_t \mathbf{E}^{(i-1)} \} = [ {}_t \mathbf{B}^e ] \cdot \{ \mathbf{u}^{e(i-1)} \}$$

où  $[ \mathbf{B}^e ]$  dépend du type de la formulation employée *i.e.* Lagrangienne semi-Réactualisée ou Réactualisée ( $t = t + \Delta t^{(i-1)}$ ).

Selon le choix effectué par l'utilisateur et la loi de comportement expérimentale saisie, un calcul des déformations d'Euler-Almansi ou des déformations logarithmiques (décomposition polaire du tenseur gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  calculé à partir des déplacements  $\mathbf{u}$ ), est effectué à partir du vecteur déplacement  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{u}^{(i-1)}$ . A partir de l'état de déformation  ${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t} \mathbf{e}^{(i-1)}$  ou  ${}^{t+\Delta t}_{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}^{(i-1)}$ , les matrices tangentes et sécantes sont construites. En toute rigueur les contraintes de Cauchy obtenues doivent être converties en contraintes de Piola Kirchhoff 2. En utilisant une formulation Réactualisée, la géométrie étant réactualisée à chaque itération, la configuration de référence tend vers la configuration à  $t + \Delta t$ , ainsi  ${}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cong {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ . La loi incrémentale devient donc :

$$d_{{}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{S}} = {}_t \mathbb{C}_t : d_{{}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{E}} \Leftrightarrow d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}_{t+\Delta t} \mathbb{C}_t : d_{{}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}}$$

Il est donc possible de lire directement l'opérateur de comportement tangent  ${}_{t+\Delta t} \mathbb{C}_t$  sur la courbe  ${}^t \boldsymbol{\sigma} = f({}_t^t \boldsymbol{\epsilon})$ . Concernant la détermination du tenseur des contraintes  ${}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cong {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ , *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> ne propose pas de conteneur pour le stockage du tenseur des contraintes au niveau des points de Gauss. Une procédure incrémentale basée sur une sommation des déformations logarithmiques ne peut donc pas être proposée. Les contraintes sont donc recalculées à chaque itération en transformant les déformations de Green Lagrange entre 0 et  $t + \Delta t$  à l'itération  $(i - 1)$  en déformations logarithmiques ou d'Euler-Almansi et en utilisant la loi de comportement cohérente correspondante. Pour la formulation Lagrangienne semi-Réactualisée, le problème est plus délicat puisque la prise en compte des déplacements initiaux doit être accompagnée de l'utilisation des relations de transformations pour l'obtention des contraintes de Piola Kirchhoff 2 et des déformations de Green-Lagrange pour ne pas effectuer d'approximation au niveau des résidus.

Remarque : dans le cas de l'utilisation de déformations logarithmiques il est nécessaire d'utiliser une formulation dite corotationnelle. Les déformations logarithmiques calculées à partir de la décomposition polaire du tenseur gradient de la transformation ne prennent pas en compte la rotation de corps rigide, *i.e.* l'absence de déformations lors d'une rotation de la matière (voir figure 8.8). Les tenseurs de rotation doivent être utilisés pour rétablir et prendre en compte la rotation de la matière.

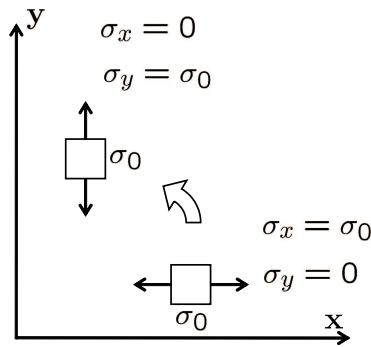


Figure 8.8 – Prise en compte de la rotation de la matière lors de l’utilisation des déformations logarithmiques : formulation corotationnelle.

Dans le cas d’un comportement isotrope transverse, une rotation supplémentaire des opérateurs de comportement tangents et sécants exprimés depuis le repère matériau dans le repère général doit être réalisée avant de les associer à des tenseurs contraintes et déformations exprimés dans le repère global.

### 8.3.3 Conclusion

Les deux formulations Lagrangienne Totale et Lagrangienne Réactualisée ont été implémentées avec succès dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>. En pratique et compte tenu des contraintes imposées par *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> au niveau du stockage des contraintes et des déformations, les développements proposés pour ces deux approches sont très similaires. D’autre part, l’approche Lagrangienne Réactualisée développée permet d’utiliser n’importe quelle loi de comportement à condition d’effectuer des conversions de contraintes et de déformations correctes. Dans la suite, nous avons choisi d’utiliser une formulation Lagrangienne Réactualisée, principalement pour deux raisons. D’une part la simplicité de prise en compte de chargements dépendant de la déformation, ce qui est le cas du sac à vide qui applique en permanence une pression normale sur la partie supérieure de l’empilement de préformes. D’autre part la prise en compte du modèle de Terzaghi (voir chapitre 10) est directe puisque la loi de comportement s’exprime directement en fonction des contraintes vraies de Cauchy.

## 8.4 Validation et étude de cas tests

Concrètement, la validité des résultats est évaluée en les confrontant à des tests de référence. L’utilisation de résultats analytiques en non-linéaire étant difficile voire impossible, nous avons donc choisi d’utiliser des codes de calculs commerciaux pour effectuer



cette comparaison (Abaqus (2005)<sup>TM</sup>, Systus (2005)<sup>TM</sup>). En simplifiant les hypothèses de simulation, des résultats analytiques peuvent également être proposés.

### 8.4.1 Choix des modèles

La validation de la formulation Lagrangienne Réactualisée est effectuée en compression et en cisaillement sur les cas tests présentés sur la figure 8.9. L'hypothèse de déformations planes ( $\varepsilon_{33} = 0$ ) est considérée dans ces deux cas. Lors de la mise en forme de nappes composites et de la compression de préformes dans leur épaisseur, cette hypothèse est le plus souvent observée compte tenu du faible rapport entre l'épaisseur d'une part et les dimensions dans le plan d'autre part.

L'essai en compression permet la validation du comportement des nappes en compression sous l'action du sac à vide (figure 8.9-a). L'essai en cisaillement permet par ailleurs la validation du cisaillement de la matière et donc la vérification du traitement des effets de courbures et la prise en compte des rotations de la matière (figure 8.9-b). Deux types de simulations sont réalisés. Des essais utilisant une loi élastique linéaire pour lesquels les non-linéarités géométriques sont activées ou non. Les résultats de ces cas tests sont comparées avec des modèles analytiques, Systus<sup>TM</sup> et Abaqus<sup>TM</sup>. Des essais utilisant des modèles de comportements hypoélastiques non-linéaires pour lesquels les non-linéarités géométriques sont activées ou non et tous les résultats sont comparés avec Systus<sup>TM</sup>.

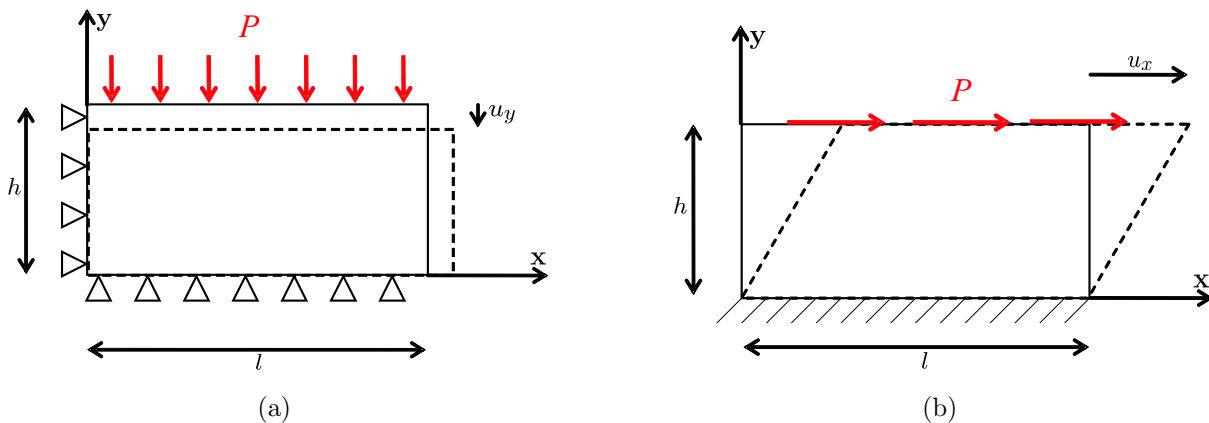


Figure 8.9 – Cas test pour la validation de la Formulation Lagrangienne Réactualisée - (a) essai de compression, (b) essai de cisaillement.

A titre d'illustration, une comparaison entre un comportement hypoélastique isotrope et un comportement hypoélastique isotrope transverse est présentée. Pour le comportement isotrope transverse, les rigidités situées dans le plan d'isotropie sont 10 fois supérieures à celle utilisée dans la direction transverse. Les non-linéarités géométriques sont activées afin de prendre en compte les grandes déformations.

Il faut signaler que le solveur que nous avons développé permet d'utiliser au choix, quel que soit le type de comportement modélisé, les déformations de Green Lagrange ou les déformations logarithmiques. En effet, les transformations correspondantes seront toujours réalisées afin d'exprimer la loi de comportement cohérente entre les déformations logarithmiques et les contraintes de Cauchy. Ceci est possible puisque le niveau de contraintes est recalculé à chaque itération. Néanmoins dans les logiciels utilisés ce choix n'est pas toujours possible. Ainsi dans Systus<sup>TM</sup>, une loi de comportement « déformations logarithmiques - contraintes de Cauchy » est associée à une formulation Réactualisée, et une loi de comportement « déformations de Green Lagrange - contraintes de Piola Kirchoff 2 » est associée à une formulation Totale.

## 8.4.2 Validation avec une loi élastique linéaire isotrope

Les paramètres de la loi élastique linéaire utilisés dans le cadre de cette validation correspondent à une approximation de la loi de comportement hypoélastique des nappes NC2 caractérisée par Elbouazzaoui (2004). Le module d'Young est égal à  $E = 266 \text{ kPa}$ , le coefficient de Poisson choisi est  $\nu = 0,3$ . Les lois intégrées sont validées sur les deux cas tests précédents en activant et en désactivant successivement les non-linéarités géométriques. La signification physique d'une loi élastique linéaire en grande déformation peut néanmoins soulever un certain nombre d'interrogations d'un point de vue physique. Ce type de comportement paraît en effet peu représentatif des matériaux usuels. Cette simulation étant numériquement possible nous la réalisons afin de proposer une validation supplémentaire de l'algorithme.

### 8.4.2.1 Sans non-linéarités géométriques

En utilisant les fonctions d'Airy, pour la prise en compte des déformations planes, des résultats analytiques peuvent être obtenus pour l'essai de compression. Les déplacements solution suivant  $u_x$  et  $u_y$  s'écrivent (voir annexe E) :

$$u_x = \frac{1 + \nu}{E} [\nu P x] \quad u_y = \frac{1 + \nu}{E} [(\nu - 1) P y] \quad (8.21)$$

avec  $\nu = 0,3$ ,  $E = 266 \text{ kPa}$ ,  $P = 100 \text{ kPa}$ ,  $l = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $h = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

Le tableau 8.4 présente les déformations de Green-Lagrange  $E_{yy}$  et le déplacement de la face supérieure suivant  $y$  et montrent une parfaite corrélation entre les différents codes de calculs et les résultats analytiques pour cet essai de compression en élasticité linéaire.

Concernant l'essai de cisaillement pour lequel une force surfacique selon  $x$  de  $P_x = 10 \text{ kPa}$  est appliquée sur la face supérieure, la comparaison est effectuée sur le champ de déplacement suivant  $x$ . Les déformations de Green Lagrange sont utilisées. Les résultats

Compression simple	Analytique	Abaqus <sup>TM</sup>	<i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> (Green)	Systus <sup>TM</sup>	erreur relative <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> / Systus <sup>TM</sup>
Déformation $E_{yy}$	$-3,43.10^{-1}$	$-3,43.10^{-1}$	$-3,43.10^{-1}$	$-3,43.10^{-1}$	0,0%
Déplacement $u_y$ (m)	$-6,854.10^{-3}$	$-6,854.10^{-3}$	$-6,854.10^{-3}$	$-6,854.10^{-3}$	0,0%

Tableau 8.4 – Comparaison des résultats obtenus pour l’essai de compression sur le champ de déplacement  $u_y$  et la déformation  $E_{yy}$  dans un cas linéaire sans non-linéarité géométrique : résultats analytiques, Abaqus<sup>TM</sup>, *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, Systus<sup>TM</sup>.

reportés dans le tableau 8.5 montrent une très bonne corrélation entre les trois codes de calculs pour cet essai de cisaillement en élasticité linéaire. Les figures 8.10 présentent l’état de contraintes obtenu lors de l’essai de cisaillement d’un matériau élastique sans non-linéarité géométrique. Bien que des différences apparaissent au niveau des valeurs minimums et maximums des contraintes, différences dues en partie à la méthode d’extrapolation des valeurs connues aux points de Gauss vers les nœuds, une mise à l’échelle montre une répartition similaire de l’état de contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$ .

Cisaillement simple	Abaqus <sup>TM</sup>	<i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> (Green)	Systus <sup>TM</sup>	erreur relative <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> / Systus <sup>TM</sup>
Déplacement $u_x$ ( <i>haut</i> ) (m)	$+2,577.10^{-3}$	$+2,540.10^{-3}$	$+2,620.10^{-3}$	3,15%

Tableau 8.5 – Déplacement  $u_x$  de la face supérieure dans un cas linéaire sans non-linéarité géométrique : Abaqus<sup>TM</sup>, *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, Systus<sup>TM</sup>.

### 8.4.2.2 Avec non-linéarités géométriques

Pour ce second essai de compression, l’hypothèse des grandes déformations est considérée. Le tableau 8.6 présente les déformations logarithmiques  $\epsilon_{yy}$  et le déplacement suivant  $y$  obtenus lors de l’essai de compression. Une fois de plus une très bonne corrélation des résultats numériques est obtenue entre Abaqus<sup>TM</sup> et *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>. Nous observons néanmoins, des difficultés de convergence des résultats sous Systus<sup>TM</sup>.

Le tableau 8.7 présente les résultats obtenus pour le champ de déplacement suivant  $x$  lors de l’essai de cisaillement en activant les non-linéarités géométriques. La comparaison des résultats entre les trois codes est une fois de plus très bonne.

<sup>1</sup>Des problèmes de convergence apparaissent. Les tolérances sur les résidus sont élevées.

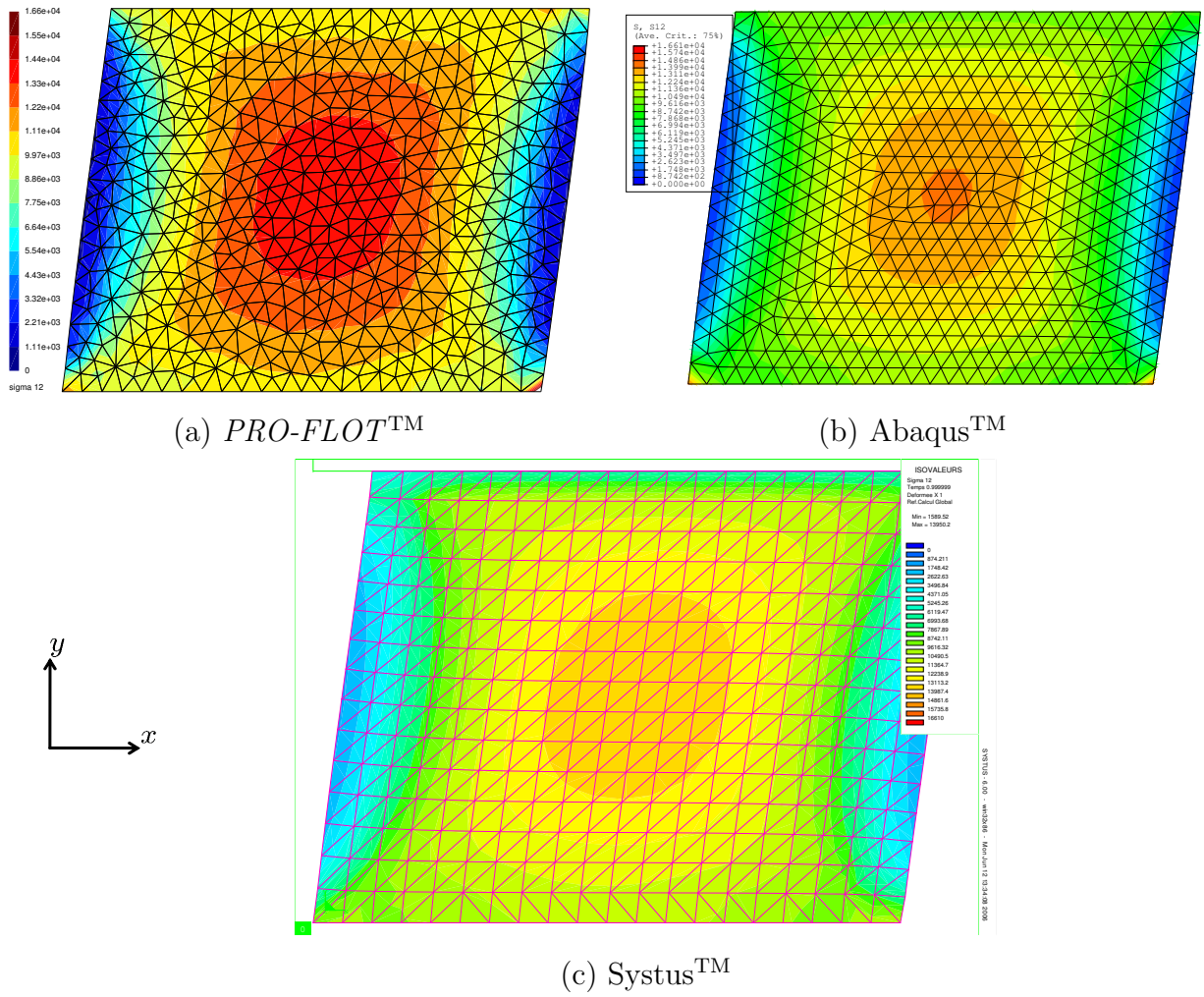


Figure 8.10 – Essai de cisaillement avec un loi linéaire élastique sans non-linéarité - Contraintes de cisaillement  $\sigma_{xy}$  en Pa : (a) *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, (b) *Abaqus*<sup>TM</sup>, (c) *Systus*<sup>TM</sup>.

Compression simple	<i>Abaqus</i> <sup>TM</sup>	<i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> (log)	<i>Systus</i> <sup>TM</sup> (modif.)	erreur relative <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> / <i>Abaqus</i> <sup>TM</sup>
Déformation $\epsilon_{yy}$	$-3,43.10^{-1}$	$-3,43.10^{-1}$	$-3,43.10^{-1}$	0,0%
Déplacement $u_y$ (m)	$-6,738.10^{-4}$	$-6,729.10^{-4}$	$-5,801.10^{-3}$ (1)	0,1%

Tableau 8.6 – Comparaison des résultats obtenus pour l’essai de compression sur le champ de déplacement  $u_y$  et la déformation  $\epsilon_{yy}$  en élasticité linéaire avec non-linéarités géométriques : *Abaqus*<sup>TM</sup>, *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, *Systus*<sup>TM</sup>.

### 8.4.3 Validation avec une loi hypoélastique isotrope

La loi hypoélastique implémentée dans *Abaqus*<sup>TM</sup> ne correspond pas à celle que nous avons implémentée dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>. Dans cette loi, le module d’Young et le coefficient

Cisaillement simple	Abaqus <sup>TM</sup>	<i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> (log)	Systus <sup>TM</sup> (modif.)	erreur relative <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> / Abaqus <sup>TM</sup>
Déplacement $u_x$ (haut) (m)	+2,500.10 <sup>-3</sup>	+2,578.10 <sup>-3</sup>	+2,633.10 <sup>-3</sup>	3,1%

Tableau 8.7 – Déplacement  $u_x$  de la face supérieure pour l’essai de cisaillement en élasticité linéaire avec non-linéarités géométriques : Abaqus<sup>TM</sup>, *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, Systus<sup>TM</sup>.

de Poisson dépendent du deuxième invariant du tenseur des déformations, *i.e.* la déformation équivalente, comme dans notre cas, mais également de la trace et du déterminant (premier et troisième invariants). Nous ne sommes pas parvenus à comparer les résultats entre ces deux codes. La loi hypoélastique implémentée dans Systus<sup>TM</sup> correspond en revanche à celle que nous avons intégrée aux bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>. Dans Systus<sup>TM</sup>, la formulation Lagrangienne Totale utilise des déformations de Green Lagrange et la formulation Lagrangienne Réactualisée les déformations logarithmiques. L’utilisateur peut également activer ou désactiver les non-linéarités. Nous présentons ici les résultats obtenus lors des essais de compression en activant ou non les non-linéarités géométriques. La loi de comportement est celle présentée sur la figure 8.11.

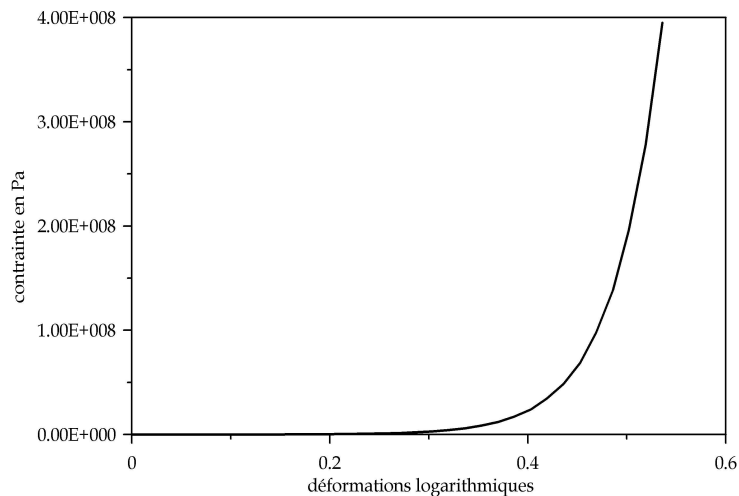


Figure 8.11 – Loi de comportement simplifiée utilisée dans le cadre de la validation du comportement mécanique : contraintes de Cauchy en fonction des déformations logarithmiques .

#### 8.4.3.1 Sans non-linéarité géométrique

Le tableau 8.8 présente les déformations de Green Lagrange  $E_{yy}$  et le déplacement suivant  $u_y$  obtenus lors de l’essai de compression en désactivant les non-linéarités géométriques. La corrélation entre les résultats fournis par Systus<sup>TM</sup> et *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> est

excellente.

Compression simple	Systus <sup>TM</sup>	<i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> (Green)	erreur relative <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> / Systus <sup>TM</sup>
Déformation $E_{yy}$	$-1,41.10^{-1}$	$-1,41.10^{-1}$	0,0%
Déplacement $u_y$ (m)	$-2,824.10^{-3}$	$-2,823.10^{-3}$	0,0%

Tableau 8.8 – Comparaison des résultats obtenus pour l’essai de compression sur le champ de déplacement  $u_y$  et la déformation  $E_{yy}$  en hyperélasticité non-linéaire sans non-linéarité géométrique : Systus<sup>TM</sup>, *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>.

#### 8.4.3.2 Avec non-linéarités géométriques

Le tableau 8.9 présente les déformations logarithmiques  $\epsilon_{yy}$  et les déplacements obtenus lors de l’essai de compression en activant les non-linéarités géométriques. Les résultats numériques sont en excellent accord pour cet essai de compression.

Compression simple	Systus <sup>TM</sup> (modif)	<i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> (log)	erreur relative <i>PRO-FLOT</i> <sup>TM</sup> / Systus <sup>TM</sup>
Déformation $\epsilon_{yy}$	$-1,41.10^{-1}$	$-1,41.10^{-1}$	0,0%
Déplacement $u_y$ (m)	$-2,633.10^{-3}$	$-2,637.10^{-3}$	0,2%

Tableau 8.9 – Comparaison des résultats obtenus pour l’essai de compression sur le champ de déplacement  $u_y$  et la déformation  $\epsilon_{yy}$  en hyperélasticité avec non-linéarités géométriques : Systus<sup>TM</sup>, *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>.

#### 8.4.4 Validation du comportement anisotrope et de la formulation corotationnelle

Les cas tests précédents permettent de valider la robustesse de l’algorithme dans le cas du traitement d’un comportement non-linéaire en grandes déformations. Par ailleurs, les essais de cisaillement en grandes déformations, utilisant par conséquent les déformations logarithmiques, montrent la capacité de l’algorithme à gérer la rotation de la matière. A titre d’illustration du comportement anisotrope, nous présentons l’exemple du profil d’une demi-coque de bateau. Pour ce type de géométrie complexe, une formulation corotationnelle est nécessaire pour résoudre le problème mécanique. Une loi de comportement élastique non-linéaire en grande déformation modélise le comportement à travers l’épaisseur de la plaque (voir la loi tronquée présenté dans le chapitre 14, page 174). Pour les

directions planes (indiquées sur la figure 8.12-a), une rigidité 10 fois plus importante est utilisée (figure 8.12-c). Afin de bien observer l'influence du comportement isotrope transverse nous présentons également les résultats obtenus pour un comportement isotrope (figure 8.12-b).

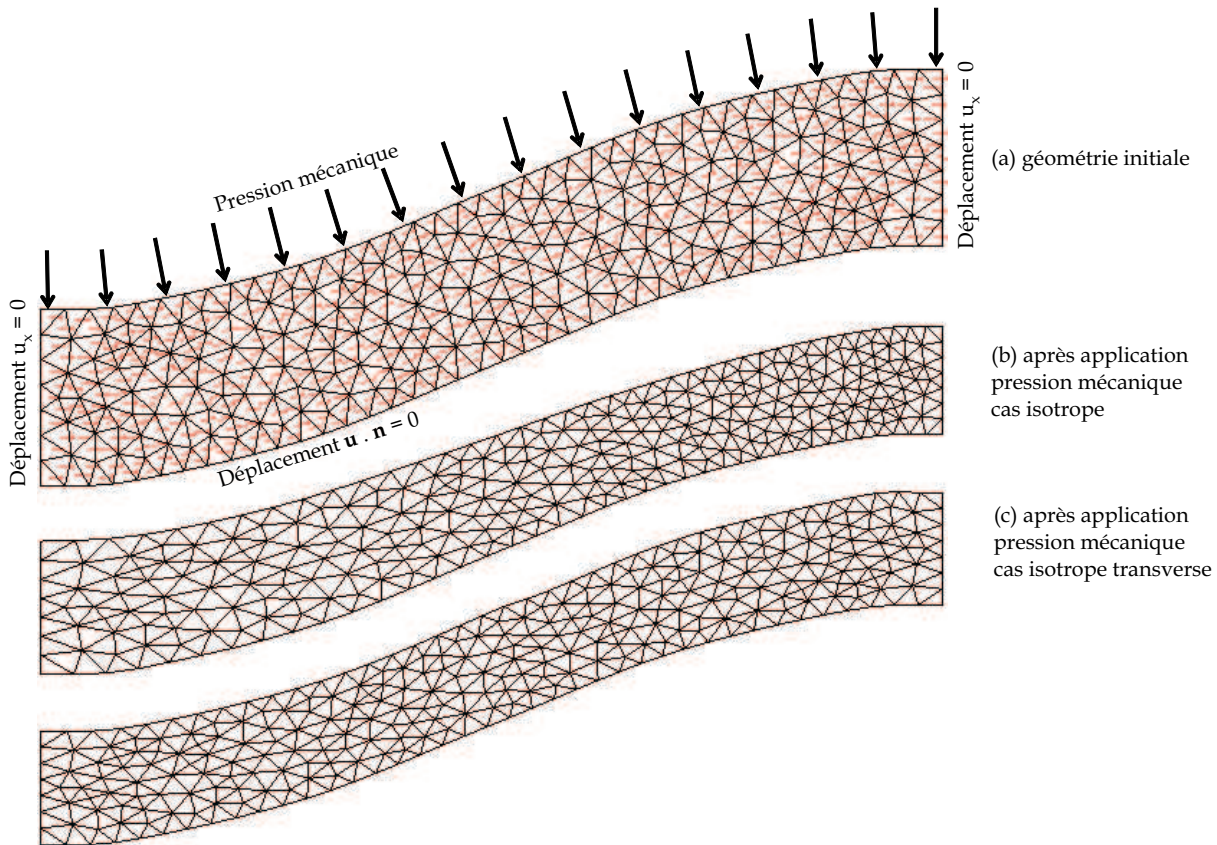


Figure 8.12 – Influence de la loi de comportement lors de l'essai de compression de la plaque en grandes déformations - (a) géométrie initiale, (b) compression isotrope et (c) compression isotrope transverse.

Dans le cas de rigidité dans le plan d'isotropie (plan des nappes) plus importante que dans l'épaisseur (figure 8.12-c), les déformations dans le plan sont plus faibles. Ainsi, la courbure de la plaque ne produit plus un regroupement des éléments sur la droite de la plaque comme nous pouvons l'observer dans le cas isotrope (figure 8.12-b). La forme des éléments est beaucoup plus régulière. Les porosités sont elles aussi plus homogènes.

## 8.5 Conclusion

A travers les différents cas tests présentés dans cette partie, il apparaît que la formulation Lagrangienne Réactualisée employée pour le traitement des lois de comporte-



ment non-linéaires en grande déformation (comportement hypoélastique) présente une très bonne corrélation avec les résultats obtenus par d'autres codes de calculs (Systus<sup>TM</sup> et Abaqus<sup>TM</sup>). Nous avons également pu valider cette formulation à partir de résultats analytiques sur des comportements simplifiés (élastiques sans prise en compte des non-linéarités géométriques). La formulation Lagrangienne Réactualisée développée ici permet également une intégration simplifiée du modèle de Terzaghi, le tenseur des contraintes utilisé dans la configuration réactualisée étant le tenseur des contraintes vraies de Cauchy. Enfin, cette formulation a été développée dans le cadre général d'un comportement tridimensionnel en grande déformation. L'étude 3D de la compression d'un cube encastré en grande déformation est présentée à titre d'exemple sur la figure 8.13 pour un module de Young de  $266 \text{ kPa}$ , un coefficient de Poisson de  $0,3$  et une pression normale de  $10 \text{ kPa}$  (déformée  $\times 10$ ). Les résultats obtenus pour ce cas test ont été confrontés avec succès à ceux fournis par Abaqus<sup>TM</sup>.

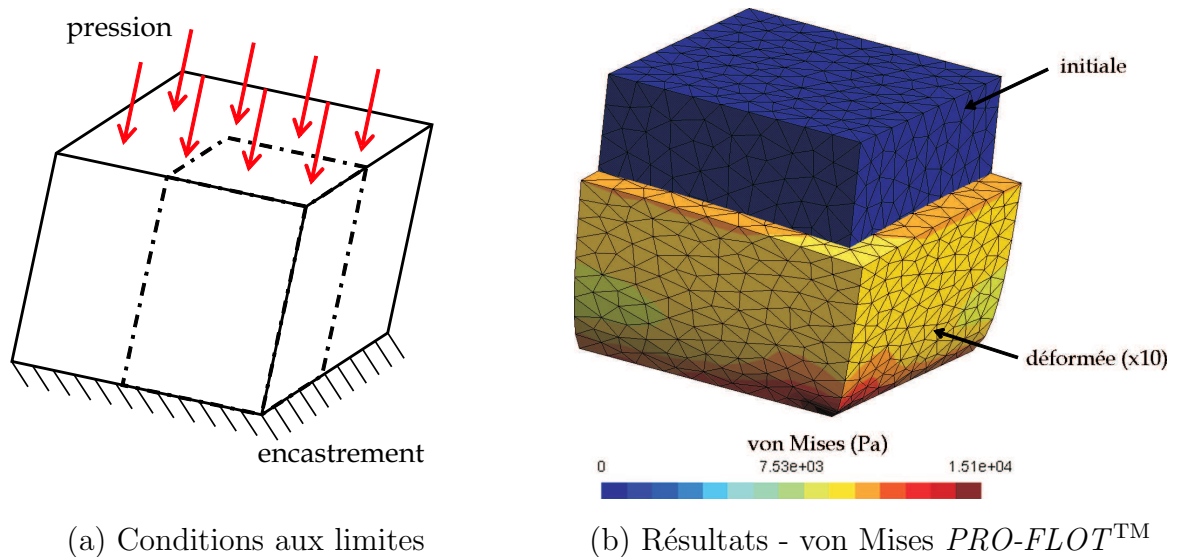


Figure 8.13 – Compression d'un cube 3D encastré en grandes déformations.

Le couplage de la déformation des nappes avec l'écoulement incompressible (vitesse-pression) de la résine à l'intérieur des préformes nécessite l'intégration d'une formulation mixte afin d'optimiser la conservation de la masse d'une part (voir explications du paragraphe 2.3.2.4, page 29) et d'obtenir directement un champ de vitesses nodales précis. Ce champ pourra alors être utilisé directement pour décrire les conditions de continuité notamment entre la zone de résine seule et les préformes saturées. Par ailleurs, la prise en compte de l'écoulement de Stokes à l'extérieur des préformes requiert le même type de méthode dès que des géométries 2D sont considérées. Dans le chapitre suivant, une description de la formulation mixte « vitesse-pression » utilisée pour le traitement de l'écoulement incompressible est donc proposée.





# Chapitre 9

## Écoulement incompressible de la résine

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>120</b>
<b>9.2</b>	<b>Les équations à résoudre</b>	<b>120</b>
<b>9.3</b>	<b>Formulation faible du problème de Stokes et discrétisation par éléments finis</b>	<b>122</b>
<b>9.4</b>	<b>Traitement de l'incompressibilité</b>	<b>124</b>
9.4.1	Méthode de pénalité	124
9.4.2	Condition de Brezzi-Babuška	127
9.4.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	128
9.4.4	Méthode du Lagrangien augmenté	129
<b>9.5</b>	<b>Les éléments P1+/P1 et P1-bulle/P1</b>	<b>129</b>
9.5.1	Discrétisation de la vitesse et de la pression	129
9.5.2	Conditions aux limites	131
9.5.3	Formulation faible du problème discret	132
9.5.4	Intégration du terme $\int_{\Omega} \delta p^h \operatorname{div} \mathbf{v}_b^h dv$	135
<b>9.6</b>	<b>Validation</b>	<b>136</b>
9.6.1	Équation de Stokes	136
9.6.2	Équation de Darcy	140
<b>9.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>141</b>

---

## 9.1 Introduction

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 5, partie II, la modélisation de l'écoulement incompressible est réalisée à l'aide des équations de Stokes et de Darcy en régime stationnaire, respectivement pour le milieu purement fluide et le milieu poreux. Lorsqu'un problème de ce type est résolu par la méthode des éléments finis, des difficultés de nature purement numérique apparaissent. La discrétisation par éléments finis doit être choisie de manière judicieuse afin de traiter le problème de l'incompressibilité.

Ce chapitre est dédié à la formulation numérique du problème vitesse-pression pour le traitement des équations de Stokes et de Darcy. Après une brève revue bibliographique relative au traitement de l'incompressibilité, la méthode mixte vitesse-pression employée ici est présentée. Enfin, les résultats numériques sur des problèmes tests relatifs aux équations de Stokes et de Darcy sont présentés et commentés.

## 9.2 Les équations à résoudre

La modélisation du problème d'écoulement incompressible repose sur la résolution des équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse. En mécanique des fluides, les déformations sont telles que l'approche Eulérienne (reposant sur un domaine fixe) est préférée à une approche Lagrangienne reposant sur le domaine matériel. Par conséquent, la matière qui s'écoule est observée à partir d'un point donné de l'espace. Néanmoins, ces approches peuvent être modifiées et se baser sur un domaine de référence afin d'exprimer un écoulement dans un domaine mobile (formulation *ALE*). L'annexe A.5 précise l'origine de l'équation de conservation de la quantité de mouvement relative à l'écoulement en régime stationnaire d'un fluide Newtonien incompressible. Complétées de l'équation de conservation de la masse, les équations de Stokes consistent à résoudre le système suivant :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{trouver } \mathbf{v} \text{ et } p \text{ en tout point } \mathbf{x} \in \Omega \text{ tel que} \\
 & \operatorname{div} (2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{v})) - \nabla p = 0 \\
 & \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\
 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \text{ sur } \partial\Omega_{\mathbf{t}} \\
 & \mathbf{v} = \mathbf{v}^d \text{ sur } \partial\Omega_{\mathbf{v}} \\
 & \mathbf{v} \in C^2(\Omega) \text{ et } p \in C^1(\Omega)
 \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

où  $\mathbf{v}$  et  $p$  sont les champs de vitesse et de pression,  $\eta$  désigne la viscosité dynamique,  $\mathbf{D}$

est le tenseur des taux de déformations eulérien et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes vraies de Cauchy. Il est clair que dès que des écoulements 2D ou 3D sont considérés, une résolution analytique de l'écoulement n'est plus possible, les équations de Stokes doivent être résolues à l'aide d'une approche mixte où la vitesse et la pression sont résolues en même temps.

L'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible dans un milieu poreux à faible perméabilité suit une loi de conservation de la quantité de mouvement de Darcy (paragraphe 5.2 chapitre 5 partie II). Le système à résoudre incluant également la conservation de la masse est formulé de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } \bar{\mathbf{v}} \text{ et } p \text{ en tout point } \mathbf{x} \in \Omega \text{ tel que} \\ \frac{\eta}{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{v}} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \text{ sur } \partial\Omega_t \\ \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^d \text{ sur } \partial\Omega_v \\ \bar{\mathbf{v}} \in C^1(\Omega) \text{ et } p \in C^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (9.2)$$

où  $\bar{\mathbf{v}}$  désigne la vitesse en fût vide ou vitesse macroscopique définie dans le chapitre 5 et  $\mathbf{K}$  est le tenseur de perméabilité du milieu.

Classiquement les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de Darcy sont regroupées. Le système consiste à résoudre alors l'équation de Buckingham-Darcy, c'est à dire un laplacien en vitesse (voir Annexe I). L'étude bibliographique présentée dans le paragraphe 2.3.2.4, page 29, indique que les méthodes numériques basées sur la résolution en deux phases à partir de cette équation (prédiction du champ de pression puis du champ de vitesse) conduisent à des imprécisions en terme de conservation de la masse. Ces imprécisions peuvent être aisément amoindries dès qu'une intégration mixte (vitesse-pression) des équations de Darcy est réalisée. Dans le cas de Darcy, afin de stabiliser le système numérique en vitesse-pression obtenu, Masud et Hughes (2002), proposent d'ajouter un terme de stabilisation directement dans la formulation faible des équations de conservation de la masse.

D'un point de vue général, depuis le début des années 60, beaucoup de travaux sont consacrés au traitement des problèmes en vitesse-pression. Dans le problème de Stokes, l'incompressibilité est exprimée au niveau de l'équation de conservation de la masse. Les méthodes de projection utilisées par Gresho et Sani (2000) permettent de gérer l'incompressibilité en introduisant un espace de vitesse à divergence nulle (voir aussi Rabier (2003), Rappaz *et al.* (1998)). Cette condition d'incompressibilité peut également être imposée de plusieurs manières : par pénalisation, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange et par la méthode du Lagrangien augmenté. Les deux premières approches sont les plus répandues dans la littérature.

Une méthode générale pour gérer l'écoulement incompressible et résoudre les équations de Stokes et de Darcy en régime stationnaire est proposée dans ce chapitre. Cette technique est basée sur une résolution mixte vitesse-pression utilisant les éléments P1+/P1 ou P1-bulle/P1. Les développements théoriques sont appliqués aux équations de Stokes puis validés sur des cas test pour les écoulements de Darcy et Stokes.

### 9.3 Formulation faible du problème de Stokes et discrétisation par éléments finis

La formulation faible du problème de Stokes correspondant au système d'équation 9.1 conduit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \forall \delta \mathbf{v} \in E_{\delta \mathbf{v}}, \forall \delta p, \\
 \int_{\Omega} 2 \eta \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dv - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \delta \mathbf{v} \, dv = \underbrace{\int_{\partial \Omega_t} \eta \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds - \int_{\partial \Omega_t} p \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds}_{\int_{\partial \Omega_t} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds} \\
 \int_{\Omega} \delta p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv = 0 \\
 \delta \mathbf{v} \in E_{\delta \mathbf{v}} = \{ \delta \mathbf{v} \in H^1(\Omega) / \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}} \} \\
 \mathbf{v} \in E_{\mathbf{v}} = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) / \mathbf{v} = \mathbf{v}^d \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}} \}
 \end{array} \right. \quad (9.3)$$

où  $\delta p$  est un champ test associé à  $p$ ,  $\delta \mathbf{v}$  est un champ test associé à  $\mathbf{v}$  qui s'annule sur la frontière  $\partial \Omega_{\mathbf{v}}$  s'il est égal à la variation du champ réel et  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})$  et  $\mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{v} + \nabla^T \delta \mathbf{v})$  sont les tenseurs des taux de déformation eulériens associés respectivement au champ de vitesse  $\mathbf{v}$  et au champ de vitesse virtuelle  $\delta \mathbf{v}$ .

Pour résoudre ce type de problème par la méthode des éléments finis, cette formulation doit respecter la condition « inf-sup » de Brezzi-Babuška (voir le paragraphe 9.4.2). Pour que cette condition soit respectée, et ainsi assurer l'existence et l'unicité de la solution, les champs de vitesse  $\mathbf{v}$  et de pression  $p$  doivent être judicieusement choisis. En général les approximations du champ de vitesse  $\mathbf{v}^h$  et du champ test associé  $\delta \mathbf{v}^h$  sont réalisées à l'aide de la même fonction d'interpolation  $N_i^e$  (l'exposant  $h$  désigne l'approximation du champ) :

$$\{ \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) \} = \sum_{i=1}^{n_{\mathbf{v}}^e} [N_i^e(\mathbf{x})] \{ \mathbf{v}_i^h \} \quad (9.4)$$

$$\{\delta \mathbf{v}^h(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^{n_v^e} [N_i^e(\mathbf{x})] \{\delta \mathbf{v}_i^h\} \quad (9.5)$$

où  $N_i^e$  représente la fonction de forme associée au nœud  $i$  qui appartient à l'élément  $e$  contenant lui-même  $n_v^e$  degrés de liberté associés au champ de vitesse.

Les champs  $\delta p^h$  associés à la pression  $p^h$  sont également approximés de façons identiques :

$$p^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_p^e} M_i^e(\mathbf{x}) p_i^h \quad (9.6)$$

$$\delta p^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_p^e} M_i^e(\mathbf{x}) \delta p_i^h \quad (9.7)$$

où  $M_i^e$  représente la fonction de forme associée au nœud  $i$  qui appartient à l'élément  $e$  contenant lui-même  $n_p^e$  degrés de liberté associés au champ de pression.

Ainsi après assemblage le système à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{rd}] & [\mathbf{K}_{ic}]^T \\ [\mathbf{K}_{ic}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.8)$$

où :

- $[\mathbf{K}_{rd}]$  désigne la matrice de rigidité,
- $[\mathbf{K}_{ic}]$  désigne la matrice d'incompressibilité,
- $\{\mathbf{F}\}$  désigne le vecteur sollicitations extérieures.

La matrice de rigidité  $[\mathbf{K}_{rd}]$  est obtenue dans une base cartésienne orthonormée par :

$$[\mathbf{K}_{rd}] = \sum_{e=1}^{elts} [\mathbf{K}_{rd}^e] \quad (9.9)$$

$$\text{avec } ([\mathbf{K}_{rd}^e])_{ij} = \begin{bmatrix} 2k_{11} + k_{22} + k_{33} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{11} + 2k_{22} + k_{33} & k_{23} \\ k_{13} & k_{12} & k_{11} + k_{22} + 2k_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{où } k_{mn} = \int_{\Omega^e} \eta \frac{\partial N_i^e}{\partial x_m} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_n} dv$$

La matrice d'incompressibilité est déterminée comme suit :

$$[\mathbf{K}_{ic}] = \sum_{e=1}^{elts} [\mathbf{K}_{ic}^e] \quad (9.10)$$

$$\text{avec } ([\mathbf{K}_{ic}^e])_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \text{ où } d_m = \int_{\Omega^e} M_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x_m} dv$$

Enfin, le vecteur sollicitation extérieure contient les conditions aux limites de type Neumann :

$$\{\mathbf{F}\} = \sum_{e=1}^{elts} \{\mathbf{F}^e\} \quad (9.11)$$

avec  $([\mathbf{F}^e])_i = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$  où  $f_m = \int_{\partial\Omega^e \cap \partial\Omega_t} N_i^e \underbrace{\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_m}_{t_m} dv$

Parallèlement aux problèmes liés aux choix des champs d'interpolations des vitesses et des pressions que nous avons mentionnés, le système 9.8 fait apparaître des termes diagonaux nuls. Ces termes vont poser des difficultés lors de l'utilisation de méthodes numériques.

## 9.4 Traitement de l'incompressibilité

La contrainte d'incompressibilité correspondant à l'équation de conservation de la masse peut être traitée par différentes techniques. Dans cette partie nous présentons les principales méthodes de traitement de l'incompressibilité, la méthode de pénalité, les méthodes mixtes vitesse-pression par les multiplicateurs de Lagrange et la méthode du Lagrangien augmenté, avant d'exposer la méthode retenue dans cette analyse : la méthode mixte vitesse-pression basée sur l'élément P1+/P1 ou P1-bulle/P1.

### 9.4.1 Méthode de pénalité

#### 9.4.1.1 Principe

La méthode de pénalisation repose sur une équation d'état numérique couplant le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  ou champ de pression  $p$  *via* un coefficient de pénalisation  $\alpha$  (Reddy et Gartling (2001)) :

$$\alpha \operatorname{div} \mathbf{v} + p = 0 \quad (9.12)$$

L'incompressibilité est d'autant mieux satisfaite que  $\alpha$  est grand. Typiquement, le coefficient de pénalisation  $\alpha$  prend des valeurs comprises entre  $10^7$  et  $10^9$  (Rabier (2003)). En intégrant l'équation d'état numérique (Eq. 9.12) dans la forme faible du système d'écoulement incompressible de Stokes (Eq. 9.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{v} \in E_{\delta \mathbf{v}}, \forall \delta p, \\ \int_{\Omega} 2 \eta \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dv - \int_{\Omega} \alpha \operatorname{div} \delta \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial \Omega_t} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ \delta \mathbf{v} \in E_{\delta \mathbf{v}} = \{ \delta \mathbf{v} \in H^1(\Omega) / \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}} \} \\ \mathbf{v} \in E_{\mathbf{v}} = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) / \mathbf{v} = \mathbf{v}^d \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}} \} \end{array} \right. \quad (9.13)$$

En utilisant les approximations introduites dans les équations 9.4 et 9.5 pour le champ de vitesse et le champ test associé, le système d'équation à résoudre devient le suivant :

$$[\mathbf{K}_{rd}] \cdot \{\mathbf{v}\} + \alpha [\mathbf{K}_{in}] \cdot \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (9.14)$$

La matrice de raideur  $[\mathbf{K}_{rd}]$  et le vecteur sollicitation extérieure  $\{\mathbf{F}\}$  restent inchangés par rapport à la définition donnée en 9.9 et 9.11. Par contre, la matrice issue du traitement de l'incompressibilité  $[\mathbf{K}_{in}]$  est obtenue dans une base cartésienne orthonormée directe par :

$$[\mathbf{K}_{in}] = \sum_{e=1}^{elts} [\mathbf{K}_{in}^e] \quad (9.15)$$

$$\text{avec } ([\mathbf{K}_{in}^e])_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{21} & \bar{k}_{31} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{où } \bar{k}_{mn} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_m} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_n} \, dv$$

#### 9.4.1.2 Intégration réduite

Pour de très grandes valeurs de  $\alpha$ , l'équation 9.14 devient (Zienkiewicz et Taylor (2000)) :

$$[\mathbf{K}_{in}] \cdot \{\mathbf{v}\} = 0 \quad (9.16)$$

Cette équation joue le rôle d'une contrainte d'incompressibilité. Une solution évidente est  $\{\mathbf{v}\} = \{0\}$  si  $[\mathbf{K}_{rd}]$  est inversible, mais ce champ de vitesse ne respecte pas nécessairement l'équilibre des efforts, car  $\{\mathbf{v}\}$  doit également satisfaire :

$$[\mathbf{K}_{rd}] \cdot \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (9.17)$$

Pour éviter cette situation, il est donc nécessaire que le nombre de relations d'incompressibilité à satisfaire dans  $[\mathbf{K}_{in}]$  soit inférieure au nombre d'inconnues du système ainsi :



$$[\mathbf{K}_{in}] \cdot \{\mathbf{v}\} = \{0\} \not\Rightarrow \{\mathbf{v}\} = \{0\} \quad (9.18)$$

$[\mathbf{K}_{in}]$  est formée par l'assemblage des relations d'incompressibilités linéairement indépendantes définies en chacun des points d'intégration du maillage. Il est donc nécessaire que le nombre de points d'intégrations numériques (ou l'on résout effectivement la relation d'incompressibilité) soit inférieur au nombre d'inconnues ( $\{\delta\mathbf{v}\}$  ou  $\{\mathbf{v}\}$ ). Ce qui n'est pas toujours le cas comme le montre la figure 9.1-a. Dans le cas contraire, un phénomène de verrouillage peut conduire à de fortes variations de contraintes au travers du maillage.

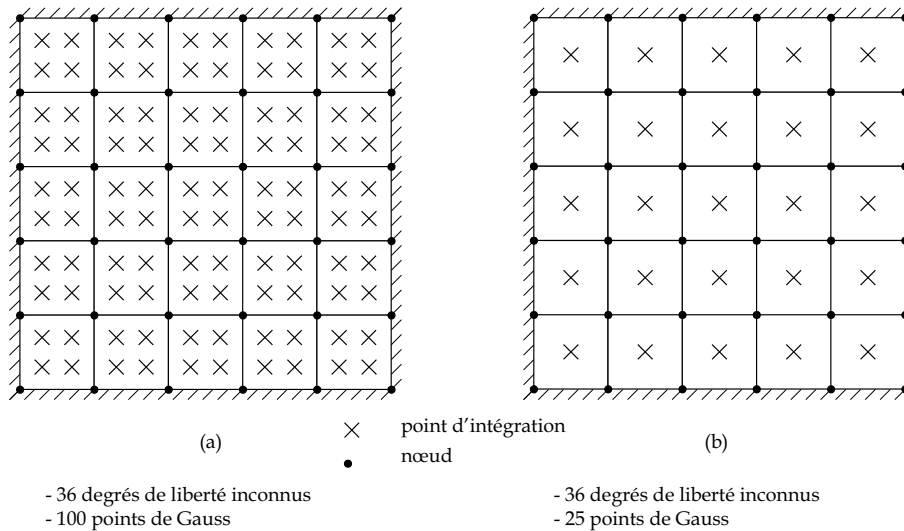


Figure 9.1 – Maillage constitué de quadrangles linéaires à 4 points de Gauss (a) et à 1 point de Gauss (b) : intégration réduite (Feulvarch (2005)).

La méthode RIP (Reduced Integration Penalty Method) consiste à diminuer le nombre de contraintes d'incompressibilité à satisfaire en réduisant le nombre de points d'intégration comme schématisé sur la figure 9.1-b (Reddy et Gartling (2001)). Ainsi la condition 9.18 est respectée et le phénomène de blocage est éliminé. En revanche, l'unicité de la solution n'est pas nécessairement assurée pour l'équation 9.17. Des modes parasites peuvent apparaître si  $[\mathbf{K}_{rd}]$  est calculé à partir d'un schéma réduit. Ce phénomène est identique à celui de l'hourglass pour les formulations Lagrangiennes, *i.e.* des modes de déformations à « énergie nulle ». Il peut être traité notamment en réduisant le nombre de points d'intégration uniquement pour le calcul de  $[\mathbf{K}_{in}]$ . Cependant, il n'est pas toujours possible de réduire le nombre de contraintes d'incompressibilité. Ainsi un maillage réalisé à l'aide de triangles à intégrations réduites<sup>13</sup> présente un nombre de contraintes à satisfaire de 50

<sup>13</sup>Nous remarquerons qu'un seul point de Gauss suffit pour l'intégration de la rigidité mais ne suffit pas pour l'intégration de la masse. Nous appellerons l'élément triangle à un point de Gauss l'élément à intégration réduite.

pour 36 degrés de liberté (voir figure 9.2). Il ne permet pas de satisfaire la relation 9.18. Le traitement de l'incompressibilité d'un écoulement d'un matériau métallique plastique parfait par la méthode de pénalité à intégration réduite ne peut donc pas être réalisé à l'aide de maillages triangles linéaires.

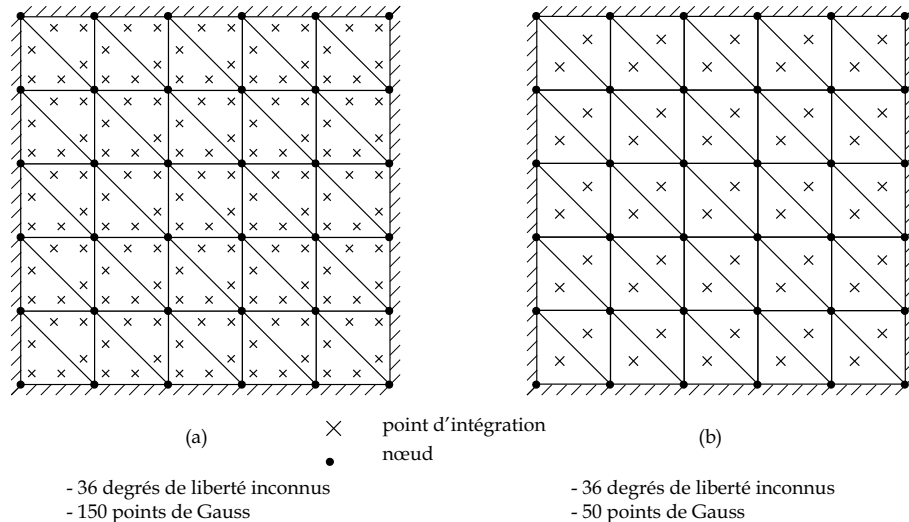


Figure 9.2 – Maillage constitué de triangles linéaires à 3 points de Gauss (a) et à 1 point de Gauss (b) : intégration réduite (Feulvarch (2005)).

### 9.4.1.3 Conclusion sur la méthode de pénalité

Cette méthode est actuellement l'une des méthodes les plus utilisées dans les codes de calcul par éléments finis en raison de sa simplicité de mise en œuvre. En particulier, cette technique ne nécessite pas d'introduction de variables supplémentaires dans le problème par éléments finis. En revanche le choix du paramètre de pénalisation présente un inconvénient majeur. Un paramètre de pénalisation élevé permet de satisfaire correctement la condition d'incompressibilité, cependant le système devient très mal conditionné et conduit à de nombreux problèmes numériques lors de la résolution. Inversement, un paramètre trop faible conduit à un mauvais traitement de l'incompressibilité.

## 9.4.2 Condition de Brezzi-Babuška

Lors de l'écriture de la formulation variationnelle du problème de Stokes nous avons signalé que les espaces des fonctions d'interpolation des vitesses et des pressions devaient satisfaire la condition dite de Brezzi-Babuška afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. Cette condition est relativement difficile à manipuler. Une expression théorique de cette condition peut être retrouvée dans la littérature (Arnold *et al.* (1984)). Ici, nous

nous proposons de mettre simplement en évidence les conséquences qu'elle implique sur la discrétisation. Comme nous l'avons vu lors du traitement de la méthode de pénalisation à intégration réduite, il est nécessaire que le nombre de contraintes d'incompressibilité soit inférieur au nombre d'inconnues en vitesse :

$$[\mathbf{K}_{ic}] \cdot \{\mathbf{v}\} = \{0\} \not\Rightarrow \{\mathbf{v}\} = \{0\} \quad (9.19)$$

Pour éviter l'apparition de phénomènes de blocage, et de modes de pressions parasites, il est donc nécessaire que le nombre d'inconnues en pression (ou le nombre de contraintes d'incompressibilité au regard du système 9.8) soit strictement inférieur au nombre d'inconnues en vitesse. Cette condition n'assure pas l'unicité de la solution. Le respect de la condition de Brezzi-Babuška nécessite également l'implication suivante :

$$[\mathbf{K}_{ic}]^T \cdot \{p\} = \{0\} \Rightarrow \{p\} = \{0\} \quad (9.20)$$

Dans la littérature, les éléments finis P1+/P1, P1-bulle/P1 et P2/P1 (éléments de Taylor Hood - Taylor et Hood (1973)) respectent la condition de Brezzi-Babuška. Il en existe d'autres. En particulier, il a été montré théoriquement et numériquement qu'il suffit que l'approximation de la vitesse soit d'un ordre supérieur à celle de la pression (Reddy et Gartling (2001)).

### 9.4.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Dans ce cas l'équation d'état numérique est simplement la conservation de la masse :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (9.21)$$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{rd}] & k [\mathbf{K}_{ic}]^T \\ k [\mathbf{K}_{ic}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \frac{1}{k} \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.22)$$

Le facteur  $k$  introduit dans 9.22 permet d'adimensionner le système. Ici la pression  $\{p\}$  joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. L'une des difficultés de cette méthode est qu'elle fait apparaître des termes diagonaux nuls dans le premier membre. Cette difficulté peut être contournée en renumérotant astucieusement les équations à résoudre. Cette méthode présente l'inconvénient majeur de rajouter une inconnue dans le système : la pression. Classiquement des méthodes de résolution basées sur un algorithme d'Uzawa sont utilisées (Rappaz *et al.* (1998)).

### 9.4.4 Méthode du Lagrangien augmenté

La méthode du Lagrangien augmenté combine la méthode de pénalité à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. L'idée est de rajouter un terme pénalisé au multiplicateur, en l'occurrence ici la pression. L'équation d'état numérique est la même que celle utilisée dans la méthode à intégration réduite :

$$\alpha \operatorname{div} \mathbf{v} + p = 0 \quad (9.23)$$

Le système suivant en « vitesse-pression » doit alors être résolu :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{rd}] & k [\mathbf{K}_{ic}]^T \\ k [\mathbf{K}_{ic}] & \frac{k^2}{\alpha(\{p\})} [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}\} \\ \frac{1}{k} \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.24)$$

Dans ce cas, le choix du paramètre de pénalité  $\alpha$  est moins critique. Comme dans la méthode de pénalité à intégration réduite, un coefficient élevé assurera un traitement correct de l'incompressibilité mais impliquera des difficultés numériques (mauvais conditionnement de la matrice). En revanche un coefficient trop faible engendrera un mauvais traitement de l'incompressibilité. Ici le système est bien conditionné car la pénalité s'ajuste en fonction de la valeur du multiplicateur de Lagrange dans un schéma de résolution itératif. La formulation mixte vitesse-pression basée sur l'élément P1+/P1 et P1-bulle/P1 que nous allons utiliser dans cette étude pour traiter les équations de Stokes et de Darcy conduit à l'utilisation d'un système élément fini dont la forme est proche de celle obtenue avec la méthode du Lagrangien augmenté.

## 9.5 Les éléments P1+/P1 et P1-bulle/P1

### 9.5.1 Discrétisation de la vitesse et de la pression

Les éléments retenus pour l'intégration numérique des équations de Stokes sont l'élément P1+/P1 et P1-bulle/P1 introduit par Arnold *et al.* (1984). Ces éléments proposent une intégration linéaire des champs de vitesse et de pression avec un degré d'interpolation supplémentaire au centre de l'élément pour enrichir le champ de vitesse. Ainsi, ils permettent à la fois de satisfaire la condition de Brezzi-Babuška dans le sens où le degré d'interpolation du champ de vitesse est supérieur au degré d'interpolation du champ de pression, et de résoudre les problèmes numériques dus à la présence de termes diagonaux nuls (Perchat (2000)). Pierre (1995) a généralisé les résultats d'Arnold et a montré la stabilité de ces éléments pour une approximation conforme (vérification de la condition de Brezzi-Babuška). Cet auteur a également prouvé la possibilité d'utiliser une approximation non conforme à condition de satisfaire la propriété d'orthogonalité de l'élément (voir

paragraphe 9.5.3.1). Les espaces d'approximations sont définis sur une triangulation  $T_h(\Omega)$  du domaine. Pour chaque élément, une fonction d'interpolation est associée à la vitesse  $\mathbf{v}$  et à la pression  $p$ . Ces sous espaces d'approximations doivent vérifier :

$$\begin{aligned} E_p^h &\subset E_p \quad \text{avec} & p \in E_p &= \{p \in L^2(\Omega)\} \\ E_{\mathbf{v}}^h &\subset E_{\mathbf{v}} \quad \text{avec} & \mathbf{v} \in E_{\mathbf{v}} &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) / \mathbf{v} = \mathbf{v}^d \text{ sur } \partial\Omega_{\mathbf{v}}\} \end{aligned} \quad (9.25)$$

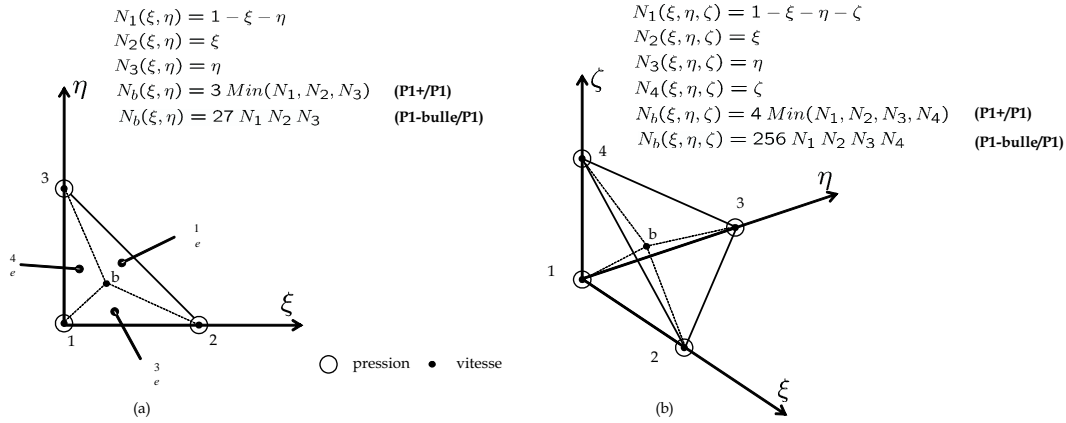


Figure 9.3 – Éléments P1+/P1 et P1-bulle/P1 dans le repère de référence  $(\xi, \eta, \zeta)$  : (a) élément triangle, (b) élément tétraèdre.

Par exemple pour les éléments P1+/P1 et P1-bulle/P1 2D et 3D présentés sur la figure 9.3, les fonctions d'interpolation suivantes sont choisies pour l'approximation des champs de pression  $p^h(\mathbf{x})$  et de vitesse  $\{\mathbf{v}^h(\mathbf{x})\}$  :

$$p^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^e} N_i(\mathbf{x}) p_i \quad (9.26)$$

$$\{\mathbf{v}^h(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{v}_l^h(\mathbf{x})\} + \{\mathbf{v}_b^h(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^{n^e} [N_i(\mathbf{x})] \{\mathbf{v}_l\} + [N_b(\mathbf{x})] \{\mathbf{v}_b\} \quad (9.27)$$

Les champs test associés  $\delta p^h(\mathbf{x})$  et  $\delta \{\mathbf{v}^h(\mathbf{x})\}$  s'écrivent :

$$\delta p^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^e} N_i(\mathbf{x}) \delta p_i \quad (9.28)$$

$$\{\delta \mathbf{v}^h(\mathbf{x})\} = \{\delta \mathbf{v}_l^h(\mathbf{x})\} + \{\delta \mathbf{v}_b^h(\mathbf{x})\} = \sum_{i=1}^{n^e} [N_i(\mathbf{x})] \{\delta \mathbf{v}_l\} + [N_b(\mathbf{x})] \{\delta \mathbf{v}_b\} \quad (9.29)$$

La fonction de forme pour le degré de liberté supplémentaire en vitesse ( $N_b$ ) est appelée fonction bulle. Cette fonction est égale à 1 au centre de l'élément et s'annule sur ses

bords. Son choix étant libre, la littérature propose différents types de fonctions dites bulles permettant de satisfaire cette condition :

- Fonctions Hiérarchiques :  $N_b = 3 \text{ Min}(N_1, N_2, N_3)$  en 2D et  $N_b = 4 \text{ Min}(N_1, N_2, N_3, N_4)$  en 3D. Cette fonction présente l'avantage de fournir le même ordre d'intégration pour les fonctions bulles que pour les vitesses et les pressions (voir figure 9.4-b). L'élément est appelé élément P1+/P1.
- Polynôme :  $N_b = 27 N_1 N_2 N_3$  en 2D et  $N_b = 256 N_1 N_2 N_3 N_4$  en 3D. Bien que sa stabilité ait été prouvée (Arnold *et al.* (1984)), dans le cadre d'éléments linéaires, le choix d'une bulle élevée est source de problèmes numériques. Elle nécessite une intégration numérique plus précise, fait craindre l'apparition d'instabilités dues à l'association des fonctions linéaires et cubiques mais surtout engendre un surcoût de calcul important pour une simple correction de vitesse (voir figure 9.4-a). L'élément est appelé élément P1-bulle/P1.
- ....

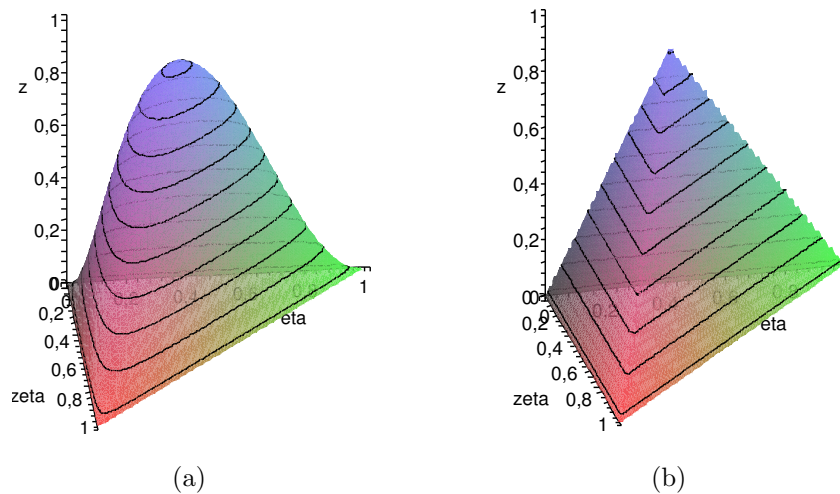


Figure 9.4 – Choix de la fonction d'interpolation pour le degré bulle dans le cas d'un élément triangle 2D - (a) polynôme de degré 3, (b) fonctions hiérarchiques.

Dans la suite les approximations utilisant des fonctions polynomiales et hiérarchiques sont utilisées et comparées numériquement. Une représentation des deux fonctions bulles proposées ici est donnée pour un élément triangle sur la figure 9.4.

## 9.5.2 Conditions aux limites

Hormis les conditions aux limites indiquées dans le système 9.1, page 120, il faut noter que pour un fluide incompressible, en l'absence de surface libre, la pression est connue à une constante près que l'on fixe en un point du maillage, généralement sur le bord du

domaine, ou encore en imposant que la pression moyenne sur le domaine soit égale à (Rappaz *et al.* (1998)) :

$$\int_{\Omega} p \, dV = 0 \quad (9.30)$$

### 9.5.3 Formulation faible du problème discret

#### 9.5.3.1 La propriété d'orthogonalité

Lorsque des fonctions hiérarchiques sont utilisées (P1+/P1), la fonction de forme associée au nœud bulle n'est pas dérivable sur l'ensemble de l'élément comme le montre la figure 9.4-b dans le cas d'un élément 2D triangle. Les quantités élémentaires ne peuvent donc pas être intégrées à partir d'un seul point de Gauss situé au centre de l'élément comme c'est habituellement le cas pour les éléments triangles et tétraèdres à approximation linéaire. Dans le cas du triangle (respectivement du tétraèdre), cette fonction est continue et dérivable sur 3 sous-domaines  $\Omega_1^e$ ,  $\Omega_2^e$  et  $\Omega_3^e$  (respectivement 4 sous-domaines  $\Omega_1^e$ ,  $\Omega_2^e$ ,  $\Omega_3^e$  et  $\Omega_4^e$ ) et de surface égale sur lesquels (voir figure 9.3-a) :

$$\begin{aligned} N_b = 3 \quad N_1 = 3 \quad (1 - \eta - \xi) & \quad \text{sur } \Omega_1^e \\ N_b = 3 \quad N_2 = 3 \quad \eta & \quad \text{sur } \Omega_2^e \\ N_b = 3 \quad N_3 = 3 \quad \xi & \quad \text{sur } \Omega_3^e \end{aligned} \quad (9.31)$$

La décomposition en 4 sous-tétraèdre est identique pour le tétraèdre P1+/P1. L'intégration peut donc être menée à partir d'un schéma à 1 point de Gauss sur chacun des sous domaines. Dans le cas du triangle, nous pouvons écrire :

$$\forall m \in (1, 2, 3) \quad \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_b}{\partial x_m} \, dv = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_j^e} \frac{\partial N_b}{\partial x_m} \, dv = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_b}{\partial x_m} \Omega_j^e = \frac{\Omega^e}{3} \sum_{j=1}^3 3 \frac{\partial N_j}{\partial x_m} \quad (9.32)$$

$$\sum_{j=1}^3 N_j = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^3 3 \frac{\partial N_j}{\partial x_m} = 0 \quad \text{d'après 9.32} \quad \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_b}{\partial x_m} \, dv = 0 \quad (9.33)$$

Cette relation est une illustration de la propriété d'orthogonalité de l'approximation hiérarchique (Heinrich (2003)) qui s'énonce ainsi : Pour tout tenseur  $\mathbf{C}$  constant sur l'élément  $\Omega^e$  la relation suivante sera vérifiée :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{C} : \mathbf{D}(\mathbf{v}_b^h) = 0 \quad (9.34)$$

Concernant l'élément P1-bulle/P1 utilisant une approximation polynomiale pour l'interpolation de la vitesse bulle, nous pouvons également démontrer facilement la propriété d'orthogonalité. Nous pourrions par exemple vérifier la double intégrale suivante dans le triangle de référence 2D :

$$\int_{\zeta=0}^{\zeta=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\zeta} \frac{\partial N_b}{\partial \zeta} d\eta d\zeta = 0$$

### 9.5.3.2 La formulation faible

Dans cette analyse, nous nous intéressons à la forme faible « vitesse-contraainte » des équations de Stokes. La forme en pression également étudiée dans ce travail a été développée dans le cadre de la validation du cas test de Poiseuille (voir paragraphe 9.39, page 136). Elle n'est pas présentée dans ce manuscrit mais les principes restent les mêmes. Compte tenu de la discrétisation choisie (Eqs. 9.26, 9.28, 9.27 et 9.29), la formulation faible du problème de Stokes (9.3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{v}_l^h, \forall \delta \mathbf{v}_b^h, \forall \delta p^h, \\ \int_{\Omega} 2 \eta \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}_l^h) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_l^h + \mathbf{v}_b^h) dv - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_l^h dv = \int_{\partial \Omega_t} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \\ \int_{\Omega} 2 \eta \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}_b^h) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_l^h + \mathbf{v}_b^h) dv - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_b^h dv = 0 \\ \int_{\Omega} \delta p^h \operatorname{div} \mathbf{v}_l^h dv + \int_{\Omega} \delta p^h \operatorname{div} \mathbf{v}_b^h dv = 0 \\ \delta \mathbf{v}_l^h \in E_{\delta \mathbf{v}_l^h} = \left\{ \delta \mathbf{v}_l^h \in H^1(\Omega) / \delta \mathbf{v}_l^h = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}_l^h} \right\} \\ \mathbf{v}_l^h \in E_{\mathbf{v}_l^h} = \left\{ \mathbf{v}_l^h \in H^1(\Omega) / \mathbf{v}_l^h = \mathbf{v}_l^{hd} \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}_l^h} \right\} \\ \delta \mathbf{v}_b^h \in E_{\delta \mathbf{v}_b^h} = \left\{ \delta \mathbf{v}_b^h \in H^1(\Omega) / \delta \mathbf{v}_b^h = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}_b^h} \right\} \\ \mathbf{v}_b^h \in E_{\mathbf{v}_b^h} = \left\{ \mathbf{v}_b^h \in H^1(\Omega) / \mathbf{v}_b^h = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega_{\mathbf{v}_b^h} \right\} \end{array} \right. \quad (9.35)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\left[ \begin{array}{ccc} [\mathbf{K}_{rdll}] & [\mathbf{K}_{crlb}] & [\mathbf{K}_{inlp}]^T \\ [\mathbf{K}_{crbl}] & [\mathbf{K}_{rdbb}] & [\mathbf{K}_{inbp}]^T \\ [\mathbf{K}_{inpl}] & [\mathbf{K}_{inpb}] & [0] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\mathbf{v}_l\} \\ \{\mathbf{v}_b\} \\ \{p\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{0}\} \\ \{0\} \end{array} \right\} \quad (9.36)$$

Dans ce système la matrice  $[\mathbf{K}_{crbl}]$  est définie de la même manière que la matrice de raideur  $[\mathbf{K}_{rd}]$  utilisée dans la méthode de pénalité (Eq. 9.9).



### 9.5.3.3 Résolution du problème faible discret

Dans le cas des fonctions d'interpolation polynomiales (P1-bulle/P1) et hiérarchiques (P1+/P1) développées, la propriété d'orthogonalité (Eq. 9.34) est vérifiée. Le champ de vitesse est discrétisé selon l'équation 9.27. Le champ  $\mathbf{v}_l^h$  étant linéaire,  $\mathbf{D}(\mathbf{v}_l^h)$  est constant sur l'élément  $\Omega^e$  :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{D}(\mathbf{v}_l^h) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_b^h) = 0 \quad (9.37)$$

Le terme croisé  $[\mathbf{K}_{crbl}]$  du système 9.36 s'annule et le problème discret s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{rdll}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{inlp}]^T \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{rdbb}] & [\mathbf{K}_{inbp}]^T \\ [\mathbf{K}_{inpl}] & [\mathbf{K}_{inpb}] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}_l\} \\ \{\mathbf{v}_b\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{0}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9.38)$$

En se plaçant au niveau élémentaire, la contribution de la fonction bulle peut être éliminée par condensation statique. Ainsi la ligne associée à  $\{\mathbf{v}_b^e\}$ , permet d'exprimer la vitesse bulle en fonction des autres termes :

$$\{\mathbf{v}_b^e\} = - [\mathbf{K}_{rdbb}^e]^{-1} [\mathbf{K}_{inbp}^e]^T \{p^e\}$$

Soit au niveau de chaque élément :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{rdll}^e] & [\mathbf{K}_{inlp}^e]^T \\ [\mathbf{K}_{inpl}^e] & [\mathbf{C}_{pp}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{v}_l^e\} \\ \{p^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}^e\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

avec  $[\mathbf{C}_{pp}^e] = - [\mathbf{K}_{inpb}^e] [\mathbf{K}_{rdbb}^e]^{-1} [\mathbf{K}_{inbp}^e]^T$ .

Après assemblage sur chaque élément la méthode mixte vitesse-pressure basée sur l'élément P1+/P1 ou l'élément P1-bulle/P1 permet d'obtenir un système proche de celui obtenu avec une méthode dite du Lagrangien augmenté (Eq. 9.24). Néanmoins, ici la sous matrice  $[\mathbf{C}_{pp}^e]$  n'est pas diagonale mais est judicieusement choisie et correspond à la contribution de la fonction bulle. L'absence de termes diagonaux nuls permet l'utilisation de méthodes de résolutions numériques classiques sans pré-traitement du système global. Perchat (2000) propose une stabilisation des oscillations en pression en introduisant un terme de pénalité au niveau de la matrice  $[\mathbf{C}_{pp}^e]$  mais les conséquences de l'introduction de cette pénalité sur nos résultats n'a pas été étudiée en détail.

### 9.5.4 Intégration du terme $\int_{\Omega} \delta p^h \operatorname{div} \mathbf{v}_b^h dv$

Ici, à titre d'exemple, nous nous intéressons à l'intégration du terme  $\int_{\Omega} \delta p^h \operatorname{div} \mathbf{v}_b^h dv$ .

Dans le cas de l'utilisation d'un élément P1-bulle/P1, l'intégration du champ bulle est réalisée à l'aide d'un polynôme d'ordre 3 défini et continu sur tout l'élément. Un schéma d'intégration classique à trois points de Gauss est utilisé.

L'intégration de ce terme à l'aide des fonctions hiérarchiques (élément P1+/P1) conduit à des difficultés numériques liées à la présence d'une fonction d'interpolation discontinue pour le champ de vitesse bulle. Dans ce cas, les 3 points de Gauss (ou le point de Gauss dans le cas d'un schéma réduit) vont être situés sur les arêtes de la pyramide (voir figure 9.4-b). Pour réaliser l'intégration de ce terme, chaque élément  $\Omega_e$  est divisé en sous éléments  $\Omega_1^e$ ,  $\Omega_2^e$  et  $\Omega_3^e$ . Sur chaque sous élément, l'intégration est réalisée à l'aide d'un seul point de Gauss situé au centre de l'élément. Les trois nouveaux points de Gauss ainsi définis sont représentés pour l'élément de référence sur la Figure 9.5. Le nouveau schéma utilisé correspond aux points de Gauss rouges de la figure 9.5.

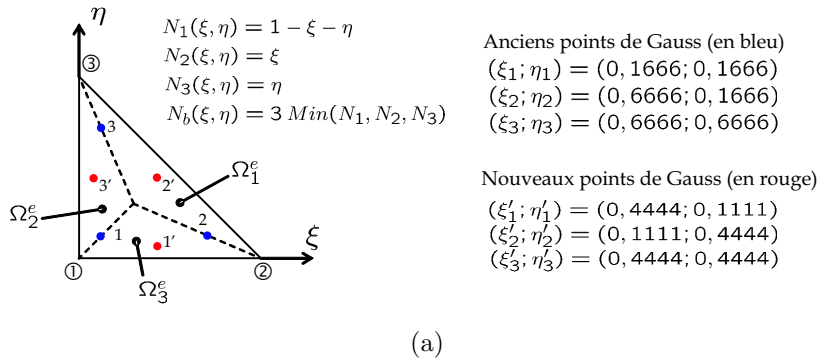


Figure 9.5 – Nouveau schéma d'intégration pour l'élément P1+/P1.

En posant les champs d'interpolation suivants :

$$p_b^h = [N] \cdot p^e$$

$$v_b^h = \begin{bmatrix} N_b & 0 & 0 \\ 0 & N_b & 0 \\ 0 & 0 & N_b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{b_x}^h \\ v_{b_y}^h \\ v_{b_z}^h \end{Bmatrix}$$

D'une manière générale pour l'élément triangle à trois nœuds :

$$\left[ \mathbf{K}_{inlp}^e \right] = \begin{bmatrix} N_1 \frac{\partial N_b}{\partial x} & N_1 \frac{\partial N_b}{\partial y} & N_1 \frac{\partial N_b}{\partial z} \\ N_2 \frac{\partial N_b}{\partial x} & N_2 \frac{\partial N_b}{\partial y} & N_2 \frac{\partial N_b}{\partial z} \\ N_3 \frac{\partial N_b}{\partial x} & N_3 \frac{\partial N_b}{\partial y} & N_3 \frac{\partial N_b}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Pour chaque sous triangle, les valeurs correspondantes des fonctions d'interpolations sont utilisées.

## 9.6 Validation

Les équations de Stokes et de Darcy ont été intégrées à *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> en utilisant les deux méthodes pour la fonction bulle (fonction polynomiale et fonctions hiérarchiques). Ici, les résultats obtenus sur des cas tests sont comparés à des résultats analytiques et numériques afin d'attribuer un label de qualité au solveur développé.

### 9.6.1 Équation de Stokes

#### 9.6.1.1 Écoulement de Poiseuille

La plupart des logiciels de simulation de procédés d'injection (par exemple *FORGE* <sup>3</sup>TM) utilisent une formulation dite en pression. Dans ces procédés, la pression apparaît souvent comme un paramètre d'entrée du système. Lorsque la formulation faible traditionnelle du problème de Stokes est considérée, l'utilisation d'une condition de Dirichlet en pression implique l'annulation du champ test associé  $\delta p$ . Dans ce cas, le second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement ne s'annule pas  $\int_{\partial\Omega_t} \delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds \neq 0$ . Il est nécessaire d'imposer la condition en pression également en tant que condition de Neumann. Finalement deux opérations sont nécessaires pour imposer une pression. La formulation en pression consiste à réaliser l'intégration par partie sur le terme associé à la conservation de la masse. Le système obtenu est le suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{v}, \forall \delta p, \\ \int_{\Omega} 2 \eta \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dv + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \nabla p dv = \int_{\partial\Omega_t} 2 \eta \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds \\ \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \delta p dv = \int_{\Omega} \delta p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dv \\ \delta p \in E_{\delta p} = \{ \delta p \in H^1(\Omega) / \delta p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_p \} \\ p \in E_p = \{ p \in H^1(\Omega) / p = p^d \text{ sur } \partial\Omega_p \} \end{array} \right. \quad (9.39)$$

Ainsi lorsque la pression est imposée, le second membre de l'équation de conservation de la masse s'annule. Si aucune condition de Neumann n'est imposée, le second membre de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'annule. Cela signifie que les gradients de vitesses à travers les frontières sont nuls, *i.e.* pas de discontinuité de la vitesse à travers la surface. Cette formulation est appliquée dans le cadre du traitement du cas test de Poiseuille présenté dans l'Annexe I.1. Pour ce cas test, il existe une solution analytique. Ainsi pour une boîte carrée de  $1 \times 1 \text{ m}^2$ , avec une viscosité  $\eta = 1 \text{ Pa.s}$ , une pression en entrée  $p_i = 1 \text{ Pa}$  et une pression en sortie  $p_f = 0$ , la vitesse suivant  $x$  au centre de la boîte  $v_x(0)$  s'écrit :

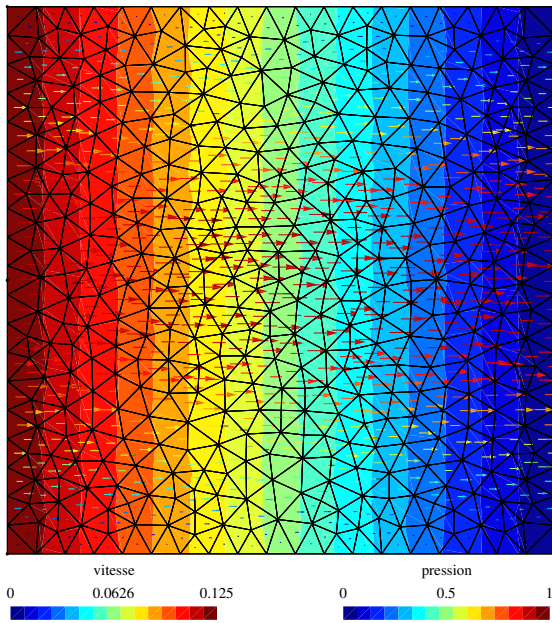
$$v_x(0) = -\frac{1}{2\eta} \frac{p_f - p_i}{l} \frac{h^2}{4} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ m/s}$$

La figure 9.6-a présente les résultats numériques obtenus pour un écoulement de Poiseuille en supposant les vitesses tangentielles nulles sur les faces d'entrée et de sortie (Duvaut (1999)). Ces résultats sont comparés avec succès aux résultats analytiques présentés dans l'annexe I.1 (voir figure 9.6-b). Ces résultats sont identiques pour les deux types de fonction bulle utilisés (fonctions polynomiales ou fonctions hiérarchiques). La figure 9.7 présente les résultats obtenus lorsque les conditions tangentielles en vitesse au niveau des faces d'entrée et sortie sont libres. Les caractéristiques de l'effet fontaine ont été étudiées plus précisément dans les travaux de Bigot (2001). Ces effets expliquent la présence d'un profil d'écoulement parabolique.

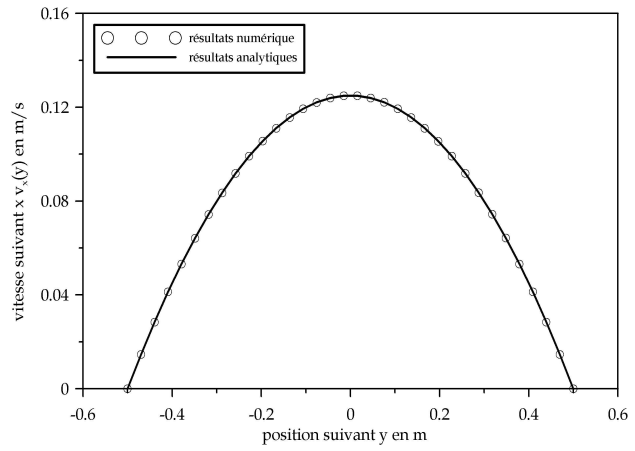
### 9.6.1.2 Cavité fermée

La cas test de la cavité fermée présentée sur la figure 9.8-a consiste à appliquer une vitesse de cisaillement sur la partie supérieure d'une cavité fermée. Deux types de conditions limites peuvent être appliqués sur les trois autres bords de la cavité. Soit une vitesse normale nulle est considérée, dans ce cas l'écoulement tangentiel de fluide est possible. Soit une condition d'adhérence est appliquée sur la vitesse tangentielle (par exemple une vitesse nulle) en plus de la condition sur la vitesse normale. Un exemple de résultat est donné sur la figure 9.8-b. Ce cas test a été validé par comparaison avec les résultats fournis par le code commercial *FEM-LAB*<sup>TM</sup>.

Les éléments P1+/P1 et P1-bulle/P1 sont comparés pour des vitesses tangentielles nulles (figure 9.9-a) et des vitesses tangentielles libres (figure 9.9-b). Les résultats obtenus montrent une bonne corrélation entre les deux codes de calcul pour l'utilisation de fonctions hiérarchiques (P1+/P1). Les résultats obtenus indiquent probablement l'apparition de difficultés numériques et d'instabilités dans le cas de l'élément P1-bulle/P1 dues à la présence simultanée de fonctions linéaires et cubiques mais les résultats restent

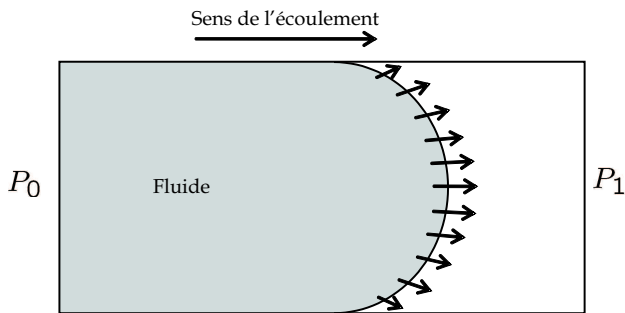


(a) Champ de vitesse et de pression obtenus sur le cas test de Poiseuille

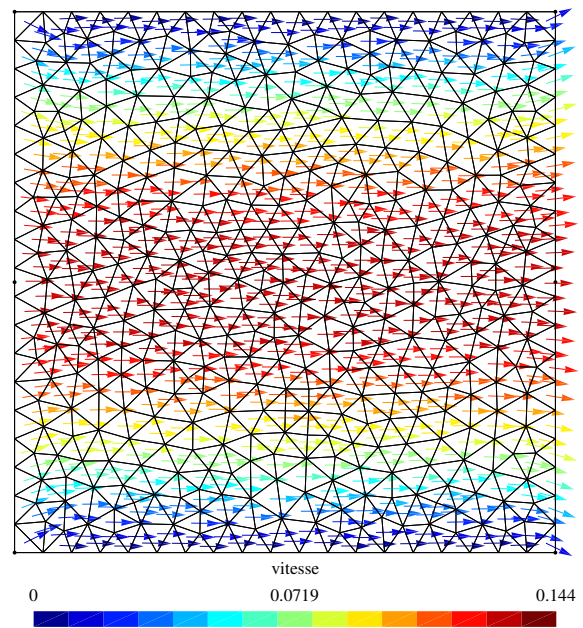


(b) Comparaison de résultats numériques et analytiques pour le champ de vitesse  $v_x(y)$

Figure 9.6 – Écoulement de Poiseuille : formulation en pression.



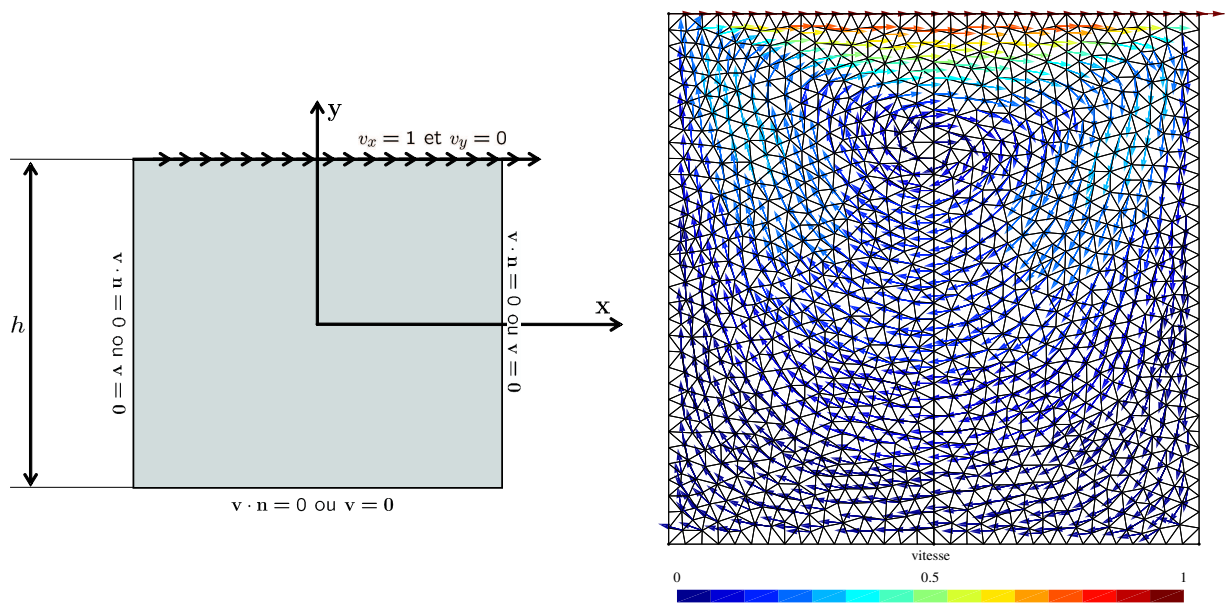
(a) Principe de l'effet fontaine : allure du champ de vitesse au niveau du front de fluide



(b) Mise en évidence de l'effet fontaine sur le cas test de Poiseuille

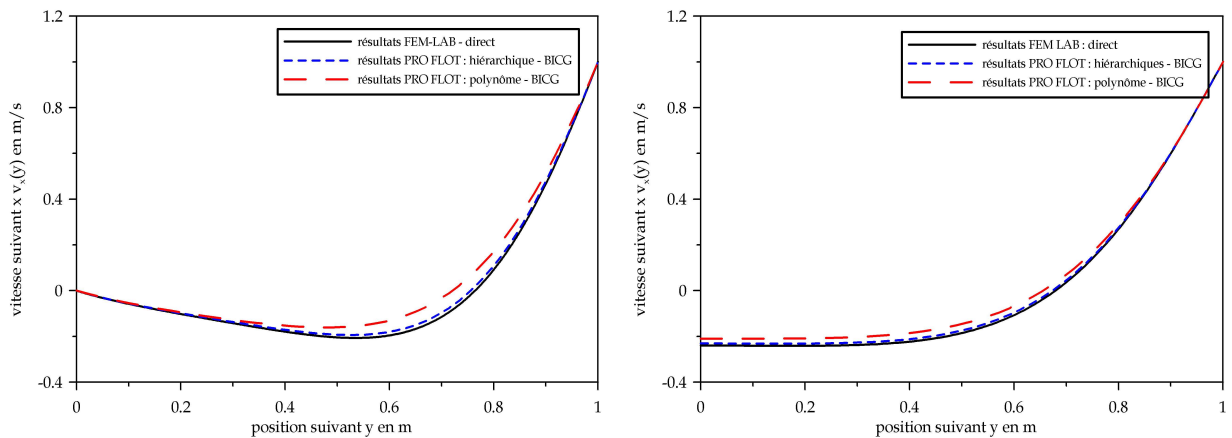
Figure 9.7 – Effet fontaine lors de l'écoulement de poiseuille.

qualitativement bons dans ce cas.



(a) Conditions aux limites lors du test de la cavité fermée (b) Résultats obtenus avec des fonctions hiérarchiques

Figure 9.8 – Cas test de la cavité fermée : (a) le cas test, (b) exemple de résultats.



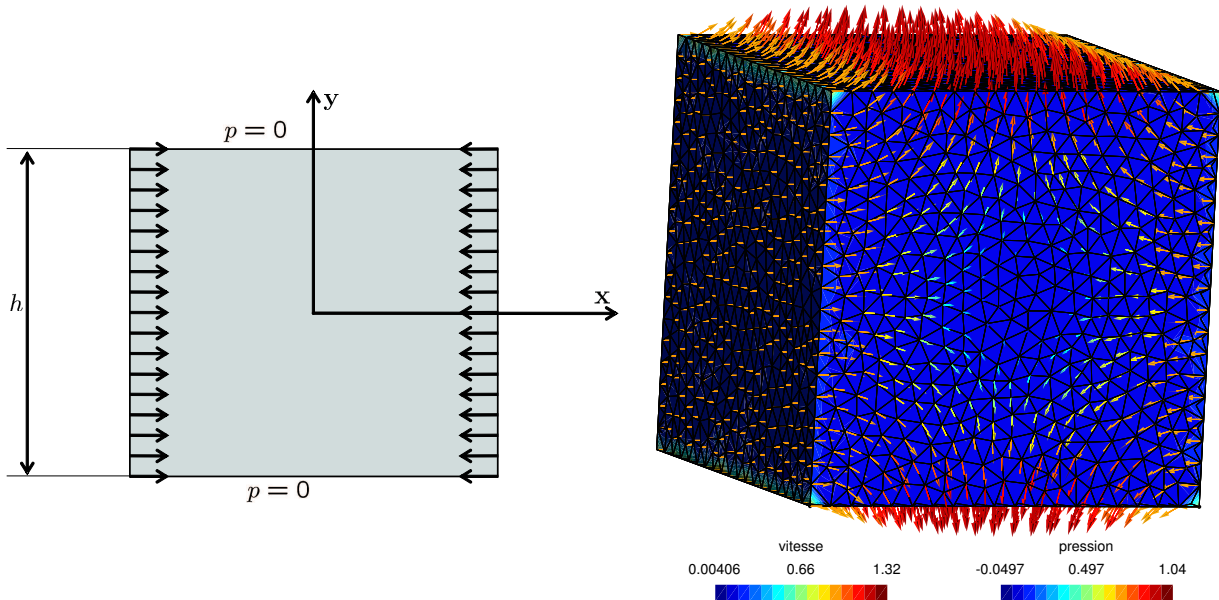
(a) Condition d'adhérence : vitesse normale et tangentielle nulle (b) Condition de glissement : vitesse normale nulle

Figure 9.9 – Comparaison des résultats obtenus sur *FEMLAB*<sup>TM</sup> et sur *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> avec les deux types d'éléments bulles développés.

### 9.6.1.3 Un autre exemple d'application

D'autres cas tests permettent de valider la formulation mixte « vitesse-pression ». Le cas test de couette présenté en annexe H dans le cadre de la description du transport des quantités depuis les points de Gauss vers les nœuds du maillage éléments finis permet d'étudier le comportement en cisaillement. A titre d'illustration de l'incompressibilité,

la simulation présentée sur la figure 9.10 permet de bien observer le mouvement de la matière.



(a) Schéma conditions aux limites

(b) Résultats numériques

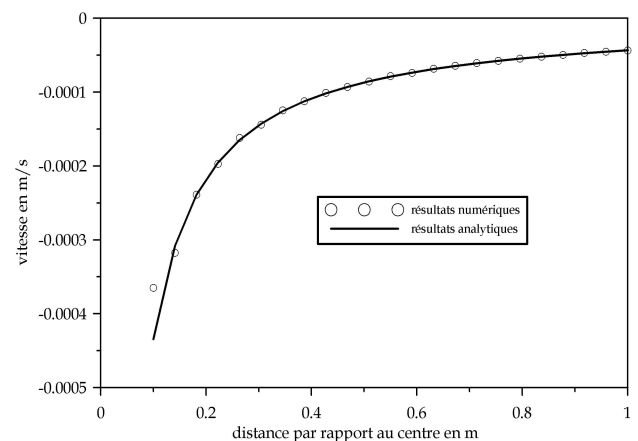
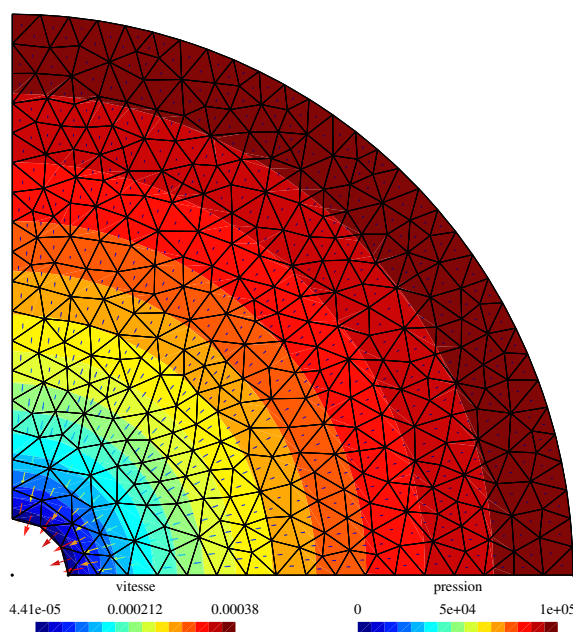
Figure 9.10 – Mise en évidence de l’incompressibilité en 3D.

### 9.6.2 Équation de Darcy

Une formulation mixte « vitesse-pression » dans le cadre du traitement des équations de Darcy en régime stationnaire peut également être proposée, bien que la forme du problème autorise la résolution du champ de pression indépendamment du champ de vitesse (voir paragraphe 9.2). Le terme de stabilisation proposé par Masud et Hughes (2002) a été adapté avec succès à *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> pour différents types de perméabilités. Une approche mixte reposant sur la méthode mixte basée sur l’élément P1+/P1 a également été intégrée dans les bibliothèques. Elle repose sur les mêmes mécanismes que ceux utilisés pour la résolution des équations de Stokes. La formulation faible du problème de Darcy dite en pression est présentée dans le système 9.40. Les résultats obtenus à l’aide du terme de Stabilisation de Hughes et de l’élément P1+/P1 ont été comparés avec succès à ceux fournis par *PAM-RTM*<sup>TM</sup> en utilisant l’approximation non-conforme. Concernant le champ de vitesse nous proposons ici une comparaison du profil de vitesse suivant  $x$  à l’aide de résultats analytiques sur le cas test d’un convergent décrit en Annexe I.2 (voir figure 9.11). Les résultats numériques obtenus indiquent une parfaite corrélation entre la solution numérique et la solution analytique.



$$\begin{cases}
\forall \delta \bar{\mathbf{v}}, \forall \delta p, \\
\int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}) \, dv + \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla p \, dv = 0 \\
\int_{\Omega} \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \delta p \, dv = \int_{\Omega} \delta p \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} \, dv \\
\delta p \in E_{\delta p} = \{ \delta p \in H^1(\Omega) / \delta p = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_p \} \\
p \in E_p = \{ p \in H^1(\Omega) / p = p^d \text{ sur } \partial\Omega_p \}
\end{cases} \quad (9.40)$$



(a) Résultats numériques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> avec élément P1+/P1 formulé en pression (b) Comparaison résultats analytiques - résultats numériques

Figure 9.11 – Formulation mixte « vitesse-pression » pour l'étude d'un convergent à l'aide d'un modèle de Darcy : Perméabilité isotrope  $K = 1.10^{-9} \text{ m}^2$ , rayon intérieur  $r_{int} = 0,1 \text{ m}$ , rayon extérieur  $r_{ext} = 1 \text{ m}$ , pression extérieure  $P_{ext} = 10^5 \text{ Pa}$  et pression intérieure  $P_{int} = 0$ .

## 9.7 Conclusion

Le traitement des équations de Stokes et de Darcy par la méthode mixte « vitesse-pression » par l'élément P1+/P1 (voire P1-bulle/P1) a été implémenté avec succès dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> en utilisant une formulation dite « vitesse-contrainte » (système 9.3) ou « pression » (système 9.39) pour le problème de Stokes et une formulation dite en pression pour le problème de Darcy (système 9.40). Concernant le problème de Stokes, la



comparaison avec les résultats analytiques puis les résultats fournis par *FEM-LAB*<sup>TM</sup>, montrent une très bonne corrélation avec les résultats numériques. Cette corrélation est d'autant plus satisfaisante que l'élément P1+/P1 est utilisé (cas test de Poiseuille, page 138). Néanmoins, une forte dépendance des résultats numériques au type de solveur utilisé est observée. Ceci est en parti dû à un mauvais conditionnement des matrices d'où l'idée d'adimensionner les termes (Srinivasagupta *et al.* (2003)). Une autre méthode pour résoudre ce type de problème mal conditionné repose sur l'utilisation de solveur direct, mais actuellement les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> ne proposent pas de solveur direct basé sur un stockage optimisé de la matrice (méthode dite « sparse »). En d'autres termes, le solveur direct devient inexploitable dès que la dimension du problème est trop importante puisque le stockage de toute les données de la matrice requiert une quantité de mémoire très importante.

L'utilisation de la méthode mixte pour la résolution du problème de Darcy présente deux principaux avantages. D'abord en terme de qualité de la résolution puisque la littérature met en évidence une meilleure conservation de la masse par cette méthode (problèmes numériques liés à la construction de cellules de Voronoï et à la détermination du champ de vitesse à partir de ces cellules). D'autre part, dans le cadre de notre application, la connaissance directe des vitesses aux nœuds permet une intégration plus directe des conditions aux limites entre les zones purement fluides et la zone de Darcy. En effet, dans le cas de l'utilisation des éléments non-structurés de *PAM-RTM*<sup>TM</sup>, le champ de vitesse est connu au centre des faces. Il est alors ainsi nécessaire d'effectuer un transport de ce champ aux nœuds, soit directement par la méthode des éléments finis, soit en utilisant une moyenne au sens des moindres carrés (comme celle présentée dans l'annexe H) ce qui induit nécessairement des imprécisions numériques. Notons enfin que le couplage de la thermique avec la mécanique des fluides (couplage fort thermo-mécanique) avec l'élément P1+/P1 ne pose pas de problèmes particuliers comme le montre Feulvarch (2005) dans son travail de thèse, à condition d'utiliser une formulation stabilisée classique (type *SUPG*).

# Chapitre 10

## Couplage écoulement de la résine / déformation des préformes : Formulation *ALE* et modèle de Terzaghi

### Sommaire

---

<b>10.1 Le modèle de Terzaghi</b> . . . . .	<b>143</b>
10.1.1 Introduction . . . . .	143
10.1.2 Prise en compte du modèle de Terzaghi . . . . .	144
10.1.3 Validation en élasticité linéaire . . . . .	144
10.1.4 Conclusion . . . . .	146
<b>10.2 La formulation <i>ALE</i></b> . . . . .	<b>147</b>
<b>10.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>148</b>

---

## 10.1 Le modèle de Terzaghi

### 10.1.1 Introduction

Dans le chapitre 5 (partie II) nous avons vu que l'action de la résine sur le comportement des nappes est directement prise en compte dans la loi de comportement des nappes. Dans cette modélisation, le modèle de Terzaghi prend en compte l'influence de la pression hydrostatique de la résine, à l'intérieur des pores, sur la déformation des préformes. Dans cette partie, nous analysons la méthode numérique employée dans le cadre de l'intégration de la pression hydrostatique de la résine dans le comportement des nappes. Dans un

deuxième temps, une validation de l'hypothèse pour un comportement simplifié, élastique linéaire en petites déformations, est proposée.

### 10.1.2 Prise en compte du modèle de Terzaghi

La prise en compte de la déformation des nappes sous l'action de sollicitations extérieures (pression du sac à vide) et de forces volumiques (poids propre) est réalisée au moyen d'une formulation Lagrangienne Réactualisée (voir chapitre 8 partie III). Dans cette formulation, la loi de comportement utilisée classiquement relie les contraintes de Cauchy aux déformations logarithmiques, c'est à dire des grandeurs exprimées dans la configuration courante. Ainsi, la prise en compte de la pression de la résine, elle aussi exprimée sur la géométrie courante dans une approche Eulérienne, ALE ou quasi-Eulérienne, dans la loi de comportement des nappes est automatique. Le modèle de Terzaghi s'écrit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\sigma}_f^f = \boldsymbol{\sigma}_{e_f}^f - s p_r^f \mathbf{I} & \text{dans les préformes humides} \\ \boldsymbol{\sigma}_f^f = \boldsymbol{\sigma}_{e_f}^f & \text{dans les préformes sèches} \end{array} \right. \quad (10.1)$$

D'un point de vue numérique, l'intégration du modèle de Terzaghi a été réalisée dans un premier temps dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations en intégrant directement la pression de la résine sous la forme d'une force volumique extérieure. Cette méthode a ensuite été modifiée lors de l'intégration de la formulation Lagrangienne Réactualisée afin de prendre en compte l'influence de la résine à la fois dans les opérateurs de comportement tangents et dans les résidus. Des algorithmes couplant les problèmes d'écoulement à la déformation des renforts ont ensuite été développés. Ils sont présentés dans la partie IV de ce manuscrit.

Dans ce chapitre nous n'entrons pas dans les détails numériques de l'intégration de ce modèle et nous renvoyons le lecteur au chapitre 8 pour les détails numériques relatifs à la prise en compte d'un comportement solide par une approche Lagrangienne Réactualisée par la méthode des éléments finis.

### 10.1.3 Validation en élasticité linéaire

En utilisant l'approche analytique présentée dans l'annexe E, une validation de l'intégration du modèle de Terzaghi peut être réalisée. Dans ce cas, un comportement élastique linéaire en petites déformations est considéré. Une plaque en déformation plane ( $\epsilon_{33} = 0$ ) soumise à un champ de pression interne est également soumise à une pression mécanique sur sa partie supérieure (pression du sac à vide constante). Un différentiel de pression est appliqué entre les faces supérieures et inférieures de la plaque pour deux types de

conditions aux limites (figures 10.1-a et b). Ici, la géométrie de la plaque implique une répartition linéaire de la pression.

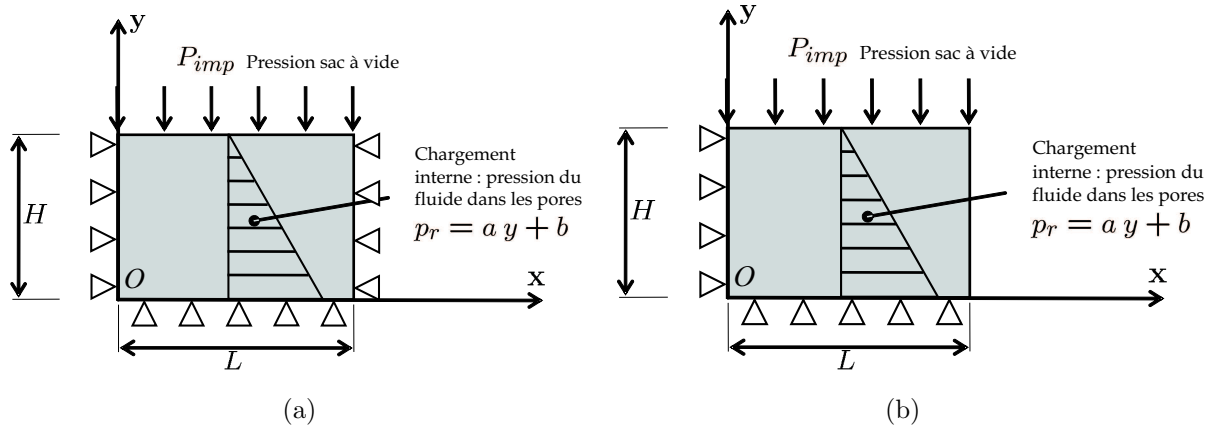


Figure 10.1 – Cas test Terzaghi : Influence de la pression hydrostatique sur le comportement des nappes - (a) bord bloqué, (b) bord libre et condition de symétrie.

Pour cette validation, un matériau isotrope de rigidité  $E = 266 \text{ kPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  est considéré. Le sac à vide applique une pression de  $P_{imp} = 1.10^4 \text{ Pa}$ . Les figures 10.2 représentent les résultats mécaniques obtenus pour une pression d'injection  $p_{inj} = 1.10^5 \text{ Pa}$ , une largeur  $L = 4.10^{-2} \text{ m}$  et une hauteur  $H = 2.10^{-2} \text{ m}$ .

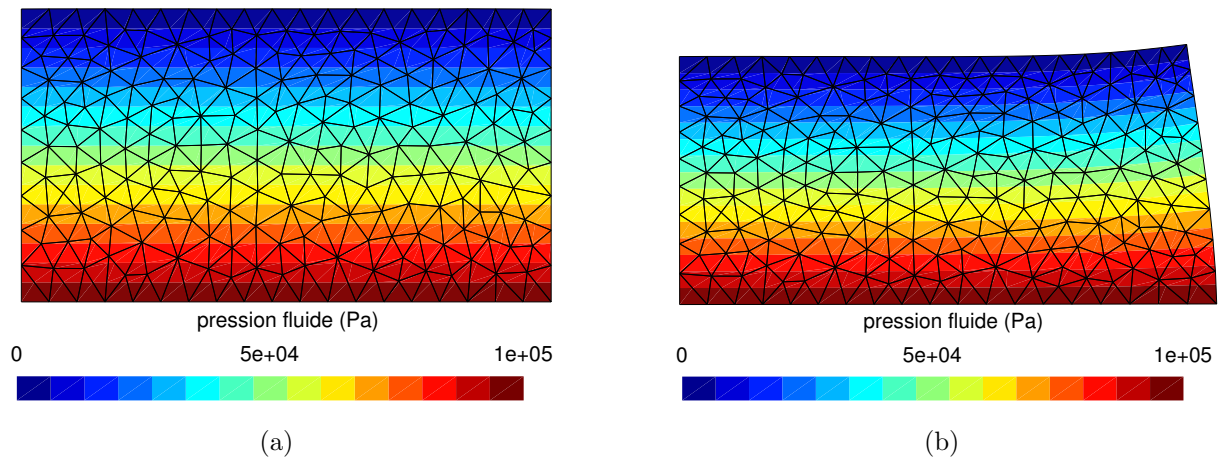


Figure 10.2 – Cas test Terzaghi : résultats numériques obtenus (a) bord bloqué, (b) bord libre et condition de symétrie.

Pour le second cas test (voir figure 10.2-b), les équations développées en annexe E permettent d'obtenir des résultats analytiques en déformations planes. Par exemple, le déplacement  $u_y$  suivant  $y$  est donné par :

$$u_y = \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - 2\nu) \left( \frac{a}{2} y + b \right) y + (\nu - 1) G y \right] \quad (10.2)$$

où les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $G$  sont définies en annexe E.

Les figures 10.3 présentent respectivement une comparaison entre les résultats numériques et les résultats analytiques en déformations planes et l'évolution du temps de remplissage et de l'épaisseur des nappes en fonction de la pression d'injection.

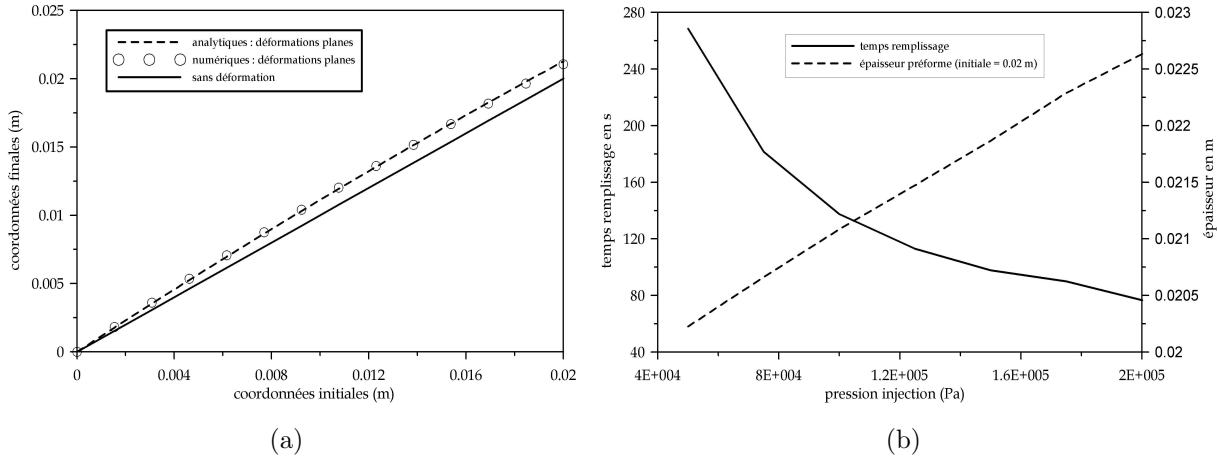


Figure 10.3 – Comparaisons analytiques / numériques (a) et vérification de l'influence sur le temps de remplissage (b).

La figure 10.3-a montre une très bonne corrélation entre les résultats analytiques et les résultats numériques validant ainsi l'intégration numérique réalisée pour la prise en compte du modèle de Terzaghi. La figure 10.3-b indique une décroissance non-linéaire du temps de remplissage avec l'augmentation de la pression d'injection. Pour des nappes incompressibles, les essais d'injections réalisés à l'aide d'un modèle de diffusion de Darcy indiquent une décroissance linéaire du temps de remplissage. Ici, l'augmentation de la pression d'injection est également associée à une augmentation de l'épaisseur de la préforme compressible comme l'indique la figure 10.3-b. Bien que l'écoulement de la résine soit plus rapide, le domaine à remplir est plus important. La décroissance du temps de remplissage n'est donc pas linéaire.

#### 10.1.4 Conclusion

L'intégration numérique du modèle de Terzaghi a été validée ici sur un exemple simple en élasticité linéaire par comparaison avec des résultats analytiques. L'influence de la pression hydrostatique de la résine sur le comportement des nappes et son rôle sur les épaisseurs, les fractions volumiques de fibres et les temps de remplissage a été mise en évidence sur un exemple simple.

## 10.2 La formulation ALE

En régime quasi-statique, en supposant que les effets visqueux sont prépondérants devant les effets d'inertie, les formulations ALE des problèmes de Stokes et de Darcy s'écrivent :

$$\text{Problème de Darcy : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{c}_r^f + \nabla_{\mathbf{x}} p_r^f = 0 \\ \mathbf{c}_r^r \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_r^r + \rho_r^r \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_r^r = 0 \end{array} \right. \quad (10.3)$$

$$\text{Problème de Stokes : } \left\{ \begin{array}{l} -\nabla_{\mathbf{x}} p_r^r + \operatorname{div} (2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{v}_r^r)) = 0 \\ \mathbf{c}_r^r \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho_r^r + \rho_r^r \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_r^r = 0 \end{array} \right. \quad (10.4)$$

Les algorithmes développés reposent sur un découpage du temps en incréments de remplissage pour lesquels un régime quasi-statique est considéré. Pour chaque pas de remplissage, nous souhaitons réaliser un couplage fort entre la déformation des préformes d'une part et l'écoulement de la résine d'autre part. Deux solutions peuvent être envisagées. Soit les deux problèmes précédents sont résolus simultanément au sein d'un même système matriciel. Dans ce cas, la formulation ALE doit être utilisée afin de prévoir l'influence de la déformation du domaine sur l'écoulement du fluide. Dans notre cas, pour des raisons de simplicité d'implémentation, nous avons choisi dans un premier temps la deuxième méthode qui consiste à résoudre de manière séparée chaque problème pour un pas de remplissage donné. La solution à  $t$  étant connue, les deux problèmes précédents sont résolus de manière itérative jusqu'à convergence des champs de pression, de vitesse et de déplacement pour l'instant  $t + \Delta t$ . Dans ce sens le couplage est fort puisque la solution est obtenue à l'issue du processus itératif.

L'intérêt de la formulation ALE avec cette méthode itérative n'est pas aussi critique que pour un problème direct. En effet, entre deux pas de temps, la vitesse du domaine dans lequel s'écoule la matière va diminuer pour s'annuler lorsque la solution du problème est trouvée. Par ailleurs, dans le cas de la zone de Darcy, compte tenu de la dépendance de la perméabilité au déplacement du domaine, il est plus aisé d'effectuer les calculs sur la dernière configuration connue, donc d'employer un processus itératif plutôt qu'une méthode directe. Pour la zone purement fluide, l'approche ALE permet d'éviter la ré-actualisation à chaque itération de la géométrie entre deux pas de temps puisque le terme source de la formulation ALE permet de prendre en compte la perte de matière. Cependant, nous observons dans ce cas une augmentation des coûts de calculs liés à l'assemblage des termes sources. Bien que peu pertinente dans cette étude, l'approche ALE sera nécessaire lors d'un couplage fort direct entre la mécanique des fluides et la mécanique des solides. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'implémenter ce terme source dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>.

### 10.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les outils numériques développés pour traiter le couplage entre la déformation des préformes d'une part et l'écoulement de la résine dans les préformes d'autre part. Le couplage entre ces deux mécanismes est contrôlé par le modèle de Terzaghi qui décrit l'action du fluide sur la déformation des nappes et la formulation *ALE* qui permet de prendre en compte l'influence de la déformation des nappes sur l'écoulement de la résine. Néanmoins, dans le cadre de l'approche forte itérative actuelle, nous avons montré que la formulation *ALE* n'est pas totalement pertinente. Elle demeure nécessaire dès qu'un couplage fort direct entre l'écoulement de la résine et la déformation des préformes sera réalisé.

Au cours des simulations, lorsque de trop forts niveaux de déformations interviennent, un remaillage des préformes peut être nécessaire. Par ailleurs lorsque des courbures sont considérées, les conditions aux limites normales ou tangentielle nécessitent d'être traitées en imposant non pas le degré de liberté mais une combinaison linéaire des degré de liberté. Le chapitre suivant décrit ces deux outils supplémentaires intégrés dans le cadre du traitement d'une forme complexe 2D.

# Chapitre 11

## Remaillage et gestion des conditions cinématiques

### Sommaire

---

<b>11.1 Traitement des conditions cinématiques . . . . .</b>	<b>149</b>
11.1.1 Introduction . . . . .	149
11.1.2 Méthode . . . . .	150
11.1.3 Pratique de la pénalisation . . . . .	151
11.1.4 Les résultats . . . . .	152
11.1.5 Conclusion . . . . .	154
<b>11.2 Remaillage . . . . .</b>	<b>155</b>
11.2.1 Introduction . . . . .	155
11.2.2 Comment marche le remaillage . . . . .	155
11.2.3 Critère de remaillage . . . . .	156
11.2.4 Le remaillage . . . . .	157
11.2.5 Mapping . . . . .	157
11.2.6 Résultats . . . . .	158
11.2.7 Conclusion . . . . .	159

---

## 11.1 Traitement des conditions cinématiques

### 11.1.1 Introduction

Lorsqu'une condition normale ou tangentielle est imposée à une surface  $S$  dans un repère différent du repère général, les degrés de liberté associés à la condition ne peuvent



pas être fixés indépendamment. Afin de présenter la méthode choisie dans ce cas, nous nous appuyons sur l'exemple de l'écoulement d'un fluide contre une paroi (voir figure 11.1). Dans le cas d'un écoulement idéalisé dans lequel les effets de frottement sont négligés, la condition à imposer au niveau de la paroi s'écrit :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (11.1)$$

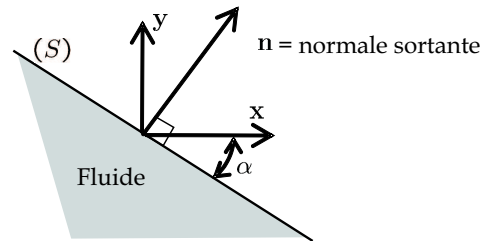


Figure 11.1 – Relation entre les degrés de liberté : écoulement contre une paroi

Cette condition traduit l'absence d'écoulement à travers la paroi, *i.e.* une paroi imperméable. Une relation supplémentaire sur la vitesse tangentielle peut également être imposée en complément ou non de la condition précédente afin de modéliser une vitesse de cisaillement ou des conditions d'adhérence. Les degrés de liberté associés aux nœuds du maillage sur lesquels la relation cinématique est imposée sont exprimés dans le repère général  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . La relation linéaire 11.1 s'écrit donc :

$$v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z = a \quad (11.2)$$

### 11.1.2 Méthode

Un certain nombre de méthodes présentées dans la littérature permettent d'imposer ces conditions supplémentaires. La méthode la plus simple à comprendre consiste à imposer la condition cinématique par substitution ou élimination en exprimant un des degrés de liberté ( $v_x$ ,  $v_y$  ou  $v_z$ ) à l'aide des deux autres. En pratique, cette méthode est très peu employée dans les codes de calculs car elle nécessite de pouvoir redéfinir dynamiquement la taille du système. Ceci n'est pas possible dans les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> qui imposent une taille de système constante. Les autres méthodes reposent sur des mécanismes similaires à ceux présentés dans le cas de la formulation mixte « vitesse-pression » (voir le chapitre 9). Ces méthodes consistent à assembler les relations cinématiques par pénalité (sans changement de la taille du système) ou par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (en ajoutant des multiplicateurs de Lagrange), voire même la méthode du Lagrangien augmenté. Ici nous avons choisi la première méthode pour sa simplicité de mise

en œuvre. Avant assemblage des relations cinématiques, le système à résoudre présente la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & A & B & C & \dots \\ \dots & E & F & G & \dots \\ \dots & I & J & K & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ v_x^i \\ v_y^i \\ v_z^i \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ D \\ H \\ L \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (11.3)$$

où  $v_x^i$ ,  $v_y^i$  et  $v_z^i$  sont les degrés de liberté associés au nœuds  $i$  du maillage sur lequel nous souhaitons imposer la relation linéaire.

La méthode de pénalité (voir 9.4.1 dans le chapitre 9) consiste à ajouter la relation cinématique à l'aide d'un facteur de pénalité  $K$ . Concrètement la relation est ajoutée sur le degré de liberté associé au  $n_x$ ,  $n_y$  ou  $n_z$  le plus grand. Par exemple ici le système 11.3 devient ( $n_y > n_x > n_z$ ) :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & A & B & C & \dots \\ \dots & E + n_x K & F + n_y K & G + n_z K & \dots \\ \dots & I & J & K & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ v_x^i \\ v_y^i \\ v_z^i \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ D \\ H + a K \\ L \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (11.4)$$

Plus  $K$  est grand, mieux la condition est respectée. En revanche, plus  $K$  est grand plus le système devient mal conditionné. Concrètement un choix judicieux de  $K$  peut être opéré. Par exemple, nous pourrions chercher la valeur absolue maximum dans la matrice globale et la multiplier par  $10^6$ .

### 11.1.3 Pratique de la pénalisation

Concrètement, les relations linéaires entre les degrés de liberté sont assemblées au niveau des éléments. Pour un degré de liberté donné, l'ensemble des faces connectées au degré de liberté sont listées. La relation cinématique est alors assemblée au niveau de chaque degré de liberté en considérant la longueur de la face correspondante et la normale à cette face. Comme indiqué dans le paragraphe précédent, la relation cinématique sera toujours assemblée sur le degré de liberté associé au  $n_x$ ,  $n_y$  ou  $n_z$  le plus grand. Cette méthode de pénalisation pose cependant des problèmes de conditionnement. En effet les termes de pénalité assemblés sont très grands devant les autres termes de la matrice. Bien que des choix judicieux puissent être effectués pour ces termes de pénalisation, les méthodes de résolution itératives (CG : Conjugate Gradient, GMRES : Generalized Minimum

RESidual, BICG : BIConjugate Gradient, BICGSTAB : BIConjugate Gradient STABILized ...) conduisent à des problèmes d'imprécisions sur les résultats obtenus lorsqu'elles convergent.

Une méthode utilisée pour réduire cet effet néfaste consiste à imposer les relations entre les degrés de liberté correspondants dans le référentiel local. Ainsi les termes de pénalité seront assemblés sur la diagonale du système. Les solveurs itératifs se comportent alors beaucoup mieux. Concrètement, une modification des colonnes associées aux degrés de liberté exprimés dans le référentiel local est effectuée. Par exemple, une rotation autour de l'axe  $z$  avec une face de normale  $\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n} = n_x \mathbf{x} + n_y \mathbf{y}$ ) conduira au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & A \cdot n_x + B \cdot n_y + K & -A \cdot n_y + B \cdot n_x & C & \dots \\ \dots & E \cdot n_x + F \cdot n_y & -E \cdot n_y + F \cdot n_x & G & \dots \\ \dots & I \cdot n_x + J \cdot n_y & -I \cdot n_y + J \cdot n_x & K & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ v_1^i \\ v_2^i \\ v_3^i \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ D + a K \\ H \\ L \\ \dots \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

Pour obtenir un bon conditionnement, le choix de la ligne sur laquelle est assemblée la relation cinématique est essentiel. Pour un  $n_x > n_y$ , la direction associée à la normale sera la direction 1 (équation 11.5). Inversement, la direction 2 sera choisie lorsque  $n_y > n_x$ . Ainsi le système obtenu ne contiendra pas de termes diagonaux nuls. Un post-traitement doit être effectué afin de réexprimer les degrés de liberté dans le référentiel général. Dans le cas d'une rotation autour de  $z$ , les expressions suivantes seront utilisées pour obtenir les vitesses  $v_x$  et  $v_y$  (par exemple dans le cas où la normale est dans la direction 1) :

$$\begin{cases} v_x = v_1 n_x - v_2 n_y \\ v_y = v_1 n_y + v_2 n_x \end{cases}$$

#### 11.1.4 Les résultats

Cette méthode implémentée pour le traitement des conditions aux limites dans le cadre de l'écoulement incompressible et du comportement mécanique en grande déformation est illustrée sur deux problèmes. La figure 11.2 présente le problème de l'écoulement dans un conduit. Les équations de Stokes en régime stationnaire sont résolues à l'aide d'une formulation mixte « vitesse-pression » basée sur l'élément bulle (P1+/P1).

La validation repose sur une analyse des débits entrants et sortants. Le tableau 11.1 indique une bonne conservation de la masse. Celle-ci est en général d'autant mieux satisfaite que le coefficient de pénalité est important. Les temps de calculs obtenus pour des conditions identiques sont relativement similaires selon que les relations cinématiques sont calculées dans les repères locaux ou le repère global. Il faut noter toutefois que ces

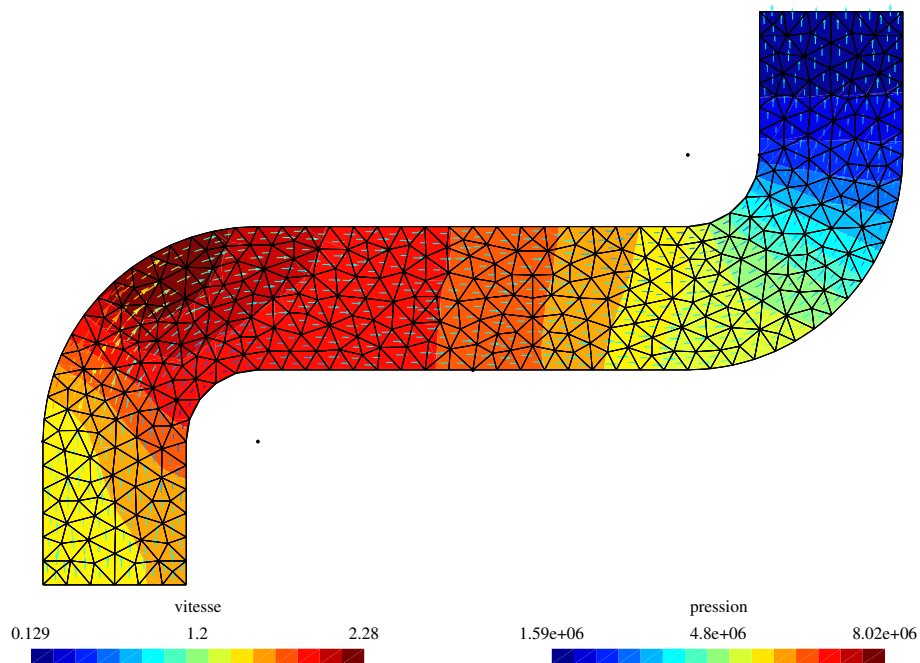


Figure 11.2 – Écoulement dans un conduit : Élément mixte P1+/P1 en vitesse-pression et relation cinématique pour la paroi imperméable.

expressions locales nécessitent des pré-traitements (transformations de la matrice) et post-traitements (transformation du vecteur solution) qui sont coûteux numériquement. Nous pouvons donc penser que le temps CPU alloué au solveur dans le cas de relations imposées dans le référentiel local est faible. Pour des problèmes plus importants, la solution locale peut devenir plus intéressante en terme de coût d'autant plus que les résultats obtenus sont souvent plus précis, surtout pour des pénalités faibles. Enfin, nous pouvons constater que même pour des pénalités très faibles ( $K = 1.10^6$ ), la méthode directe converge lorsque les relations cinématiques sont exprimées dans le repère local.

Le deuxième exemple proposé concerne un problème mécanique en grandes déformations. La figure 11.3 présente une simulation de compression de renforts structuraux en grandes déformations intégrant la gestion des relations cinématiques pour la modélisation des effets de courbure. Bien qu'uniquement qualitative, cette simulation représente le phénomène physique apparaissant lors de la compression, c'est-à-dire l'écoulement de la matière dans les directions tangentes et l'absence d'écoulement à travers la surface. Comme nous pouvons l'observer ici, le déplacement des éléments vers la droite est très important. Ceci est une conséquence de la loi de comportement non-linéaire en grandes déformations. En effet, ici nous avons employé, pour bien observer les effets de courbures, une loi de comportement isotrope non-linéaire construite à partir de la loi de comportement présentée sur la figure 8.11 dans le chapitre 8.

Type solveur	$K = 10^6$	$K = 10^8$	$K = 10^{12}$
direct (général)	+58,99% (43,6 s)	+1,80%(44,6 s)	-0,12% (45,8 s)
GMRES DIAG tolérance $10^{-24}$ (général)	+99,24% (2,4 s)	+100,00% (2,4 s)	-0,79% (2,5 s)
GMRES ILU tolérance $10^{-24}$ (général)	+109,59% (3,2 s)	-1,59% (3,3 s)	+0,57% (3,3 s)
direct (local)	-1,12% (43,6 s)	-1,12% (45,6 s)	-1,24% (45,7 s)
GMRES DIAG tolérance $10^{-24}$ (local)	+99,99% (2,5 s)	-0,69% (2,5 s)	-0,78% (2,5 s)
GMRES ILU tolérance $10^{-24}$ (local)	+99,27% (3,5 s)	+0,94 % (3,4 s)	+0,92% (3,4 s)

Tableau 11.1 – Étude de la conservation de la masse (perte « - » ou gain « + » relatif de masse) et du temps de calcul pour les méthodes directes et GMRES en fonction du coefficient de pénalité  $K$ .

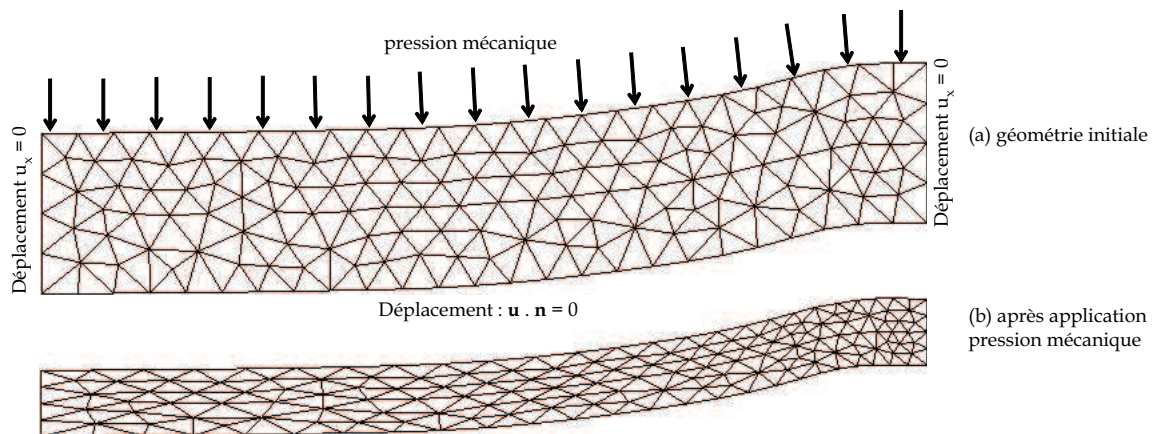


Figure 11.3 – Analyse de l'influence des relations cinématiques entre degrés de liberté sur la modélisation en grandes déformations de la compression d'une plaque présentant des effets de courbures.

### 11.1.5 Conclusion

La méthode de pénalité choisie dans le cadre du traitement des relations cinématiques entre les degrés de liberté conduit à un certain nombre de difficultés numériques qui dépendent principalement du coefficient de pénalité choisi. La résolution de ces relations dans le référentiel local permet d'améliorer la stabilité numérique, mais nécessite des opérations de pré et post traitement. Néanmoins, cette méthode permet d'obtenir de très bons résultats comme nous avons pu l'observer sur les deux exemples présentés. Par ailleurs, elle ne nécessite pas de redéfinir dynamiquement le nombre de degrés de liberté ce qui en fait une technique facilement implémentable dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>.

## 11.2 Remaillage

### 11.2.1 Introduction

Les zones de résines et de préformes imprégnées ou non subissent d'importantes évolutions et déformations lors de l'infusion. En fin d'infusion, la zone de résine a totalement disparu et le domaine de préforme a subi des déformations supérieures à 100 % (voir chapitre 15). La méthode des éléments finis nécessite d'utiliser en permanence une discrétisation correcte du domaine afin de fournir des résultats acceptables. En d'autres termes, le rapport de forme (Frey et George (1999)) des éléments représentatifs des différentes zones doit rester acceptable. Dans le cas où ce rapport de forme devient trop mauvais, un remaillage de la géométrie est nécessaire. Dans ce chapitre, nous présentons la méthode utilisée pour réaliser le remaillage des zones de résine et de préforme. La méthode employée s'appuie sur l'utilisation conjointe d'un mailleur externe libre *GMSH*<sup>©14</sup> et des bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>.

### 11.2.2 Comment marche le remaillage

Les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> ne sont pas capables de gérer dynamiquement le nombre de degrés de liberté d'un problème de manière simple (modification des groupes, des « set » d'éléments, ...). Il est donc nécessaire de séparer les phases de calcul d'une part et de remaillage d'autre part. Ainsi, lorsque le rapport de forme des éléments deviendra mauvais, au sens d'un critère à préciser (voir paragraphe 11.2.3), une procédure *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> définira les contours associés aux domaines de résine et de préforme. Ces contours seront utilisés comme paramètre d'entrée du mailleur libre *GMSH*<sup>©</sup>. Concrètement des fichiers de géométrie extension \*.geo seront élaborés dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> et traités dans *GMSH*<sup>©</sup>. Un nouveau fichier maillage au format *IDEAS* extension \*.unv sera ensuite importé dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>. Le nombre de degrés de liberté sera mis à jour. Enfin, une projection des résultats numériques obtenus sur l'ancien maillage sera réalisée sur le nouveau maillage (conservation de l'histoire de la transformation) à l'aide d'une procédure dite de « mapping ». Un aperçu du fonctionnement de l'algorithme de remaillage est présenté sur la figure 11.4.

Remarque : Une routine de raffinement du maillage est proposée dans les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> (Soukane et Trochu (2005), Bechet *et al.* (2003)). Cette fonction évite l'utilisation de *GMSH*<sup>©</sup> dans le cas où le nombre d'éléments augmente. L'étape de maillage dans *GMSH*<sup>©</sup> est ainsi remplacée par une fonction *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, les étapes de redéfinition de la structure de données (modification du nombre de degrés de liberté, des groupes

<sup>14</sup><http://geuz.org/gmsh>

d'éléments et des groupes de nœuds) ainsi que l'étape de « mapping » étant conservées.

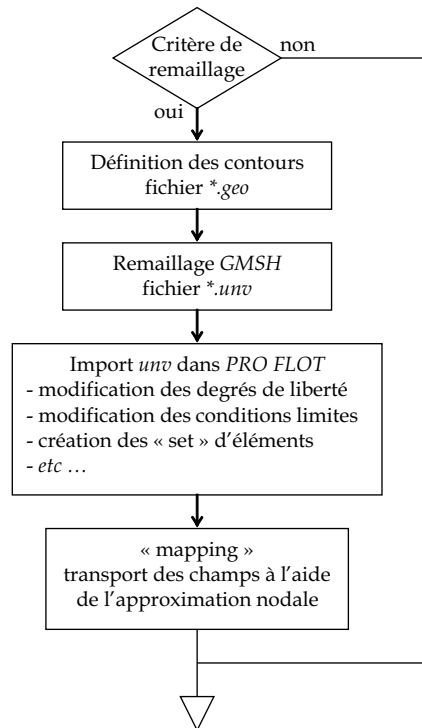


Figure 11.4 – Principe de l'algorithme de remaillage

### 11.2.3 Critère de remaillage

Le critère de remaillage est lié au plus mauvais rapport de forme des éléments du maillage. Concrètement, le rapport de forme de chaque élément est calculé. Le plus mauvais rapport donne la qualité du maillage. Ici, l'utilisation d'une formulation vitesse-expression implique l'utilisation en 2D d'éléments triangles. Le rapport de forme des éléments est défini comme le rapport entre le plus petit  $\alpha_{min}$  et le plus grand  $\alpha_{max}$  angle de chaque élément du maillage. Pour un triangle équilatéral, le critère est égal à  $Q_{elt} = \frac{\alpha_{min}}{\alpha_{max}} = \frac{60^\circ}{60^\circ} = 1$ . Pour un élément dans sa configuration de référence (triangle rectangle),  $Q_{elt} = \frac{\alpha_{min}}{\alpha_{max}} = \frac{45^\circ}{90^\circ} = 0,5$ . Enfin si un élément plat est considéré, l'un de ses angles vaut  $0^\circ$  et l'autre  $180^\circ$ , sa qualité est égale à  $Q_{elt} = 0$ . Finalement le critère de qualité du maillage  $Q_{maillage}$  s'écrit dans notre cas :

$$Q_{maillage} = \min(Q_{elt}) = \min\left(\frac{\alpha_{min}^{elt}}{\alpha_{max}^{elt}}\right) \quad (11.6)$$

### 11.2.4 Le remaillage

Lorsque qu'un remaillage est nécessaire, une procédure C++ développée dans le cadre de ce travail permet d'exporter le contour des zones purement fluides et des préformes au format *\*.geo* de *GMSH*<sup>©</sup> (voir documentation *GMSH*<sup>©</sup> - Geuzaine et Remacle (2006)). Le schéma 11.5 présente la méthode d'exportation du contour. Ici, des éléments doivent être supprimés dans la zone de Stokes, et inversement doivent être ajoutés dans les préformes. Lors de la définition du contour, les nœuds situés sur les arêtes verticales du domaine de Stokes sont supprimés. Après remaillage, des nœuds auront été ajoutés sur les arêtes verticales des préformes. A partir du contour défini dans le fichier *\*.geo*, le logiciel libre *GMSH*<sup>©</sup> crée un nouveau maillage régulier puis l'exporte au format *\*.unv* lisible dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>.

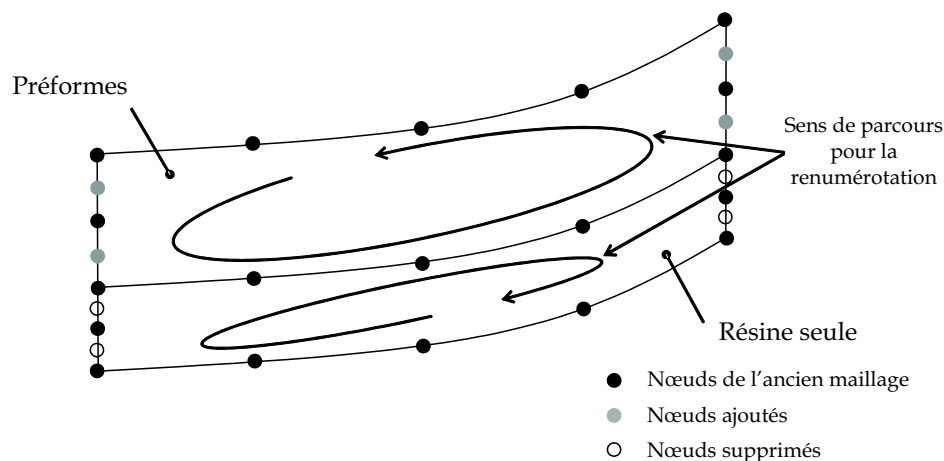


Figure 11.5 – Génération du contour pour la création du fichier de géométrie (*\*.geo*) ; suppression de nœuds lors de la définition du contour et création de nœuds lors du remaillage.

Dans le cas de l'utilisation de la fonction de remaillage disponible dans les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, aucune suppression de nœuds n'est possible. Un nœud situé sur le contour de la géométrie est conservé au cours du remaillage.

### 11.2.5 Mapping

Une fois le nouveau maillage construit, il est nécessaire de lui affecter les données de l'ancien maillage. Les quantités physiques du maillage source (maillage initial) doivent être ainsi transportées vers le maillage cible (après remaillage). En général, deux types de quantités sont transportées. Les variables nodales stockées comme leurs noms l'indiquent au niveau des nœuds du maillage, typiquement les déplacements  $\mathbf{u}$ , les vitesses  $\mathbf{v}$ , les températures  $T$ , les pressions  $p$ , ... et les variables stockées aux points de Gauss des



éléments telles que les contraintes, les déformations, .... Ici, les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> ne permettent pas nativement de stocker des grandeurs au niveau des points de Gauss du maillage. Seules les grandeurs nodales peuvent être transportées.

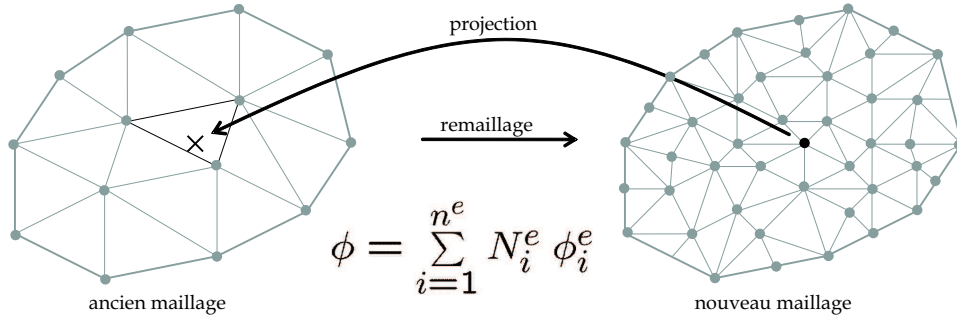


Figure 11.6 – Projection d’un nœud du nouveau maillage dans un élément de l’ancien.

Dans ce cas, l’élément de l’ancien maillage contenant le nœud considéré dans le nouveau maillage est recherché. Les quantités physiques lui sont alors affectées par l’intermédiaire des fonctions de forme de l’élément (voir figure 11.6). Cette opération est appelée interpolation inverse (Batoz et Dhett (1990)).

### 11.2.6 Résultats

Nous présentons ici deux applications du remaillage. La première permet de réaliser un raffinement de la géométrie. Dans ce cas, l’utilisation de la bibliothèque de remaillage de *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> est possible (exemple d’utilisation dans Trochu *et al.* (2006) pour la création de « runner »). L’algorithme de mapping associé est celui que nous avons développé dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>. Les équations de Stokes sont résolues en régime stationnaire par la méthode mixte vitesse / pression basée sur l’utilisation d’un élément P1+/P1. Dans l’exemple de la figure 11.7, une vitesse normale dirigée vers l’intérieur est appliquée sur les extrémités gauches et droites d’un carré de dimension  $1 \times 1$ . Une nouvelle illustration de l’incompressibilité est ainsi donnée. Dans cet exemple, un raffinement du maillage a été réalisé sur la moitié inférieure. Les champs de vitesses et de pressions sont ensuite projetés.

Dans l’exemple présenté sur la figure 11.8, l’algorithme de remaillage est associé à l’utilisation de *GMSH*<sup>©</sup>. En appliquant les conditions aux limites de la figure 11.8-a sur l’empilement de préformes, le champ de déplacement et la géométrie de la figure 11.8-b sont obtenus. L’exportation du contour permet de reconstruire un nouveau maillage (figure 11.8-c) dans *GMSH*<sup>©</sup>. A partir du champ de déplacement de la figure 11.8-b, et en utilisant l’algorithme de mapping entre les géométries 11.8-b et 11.8-c, nous pouvons

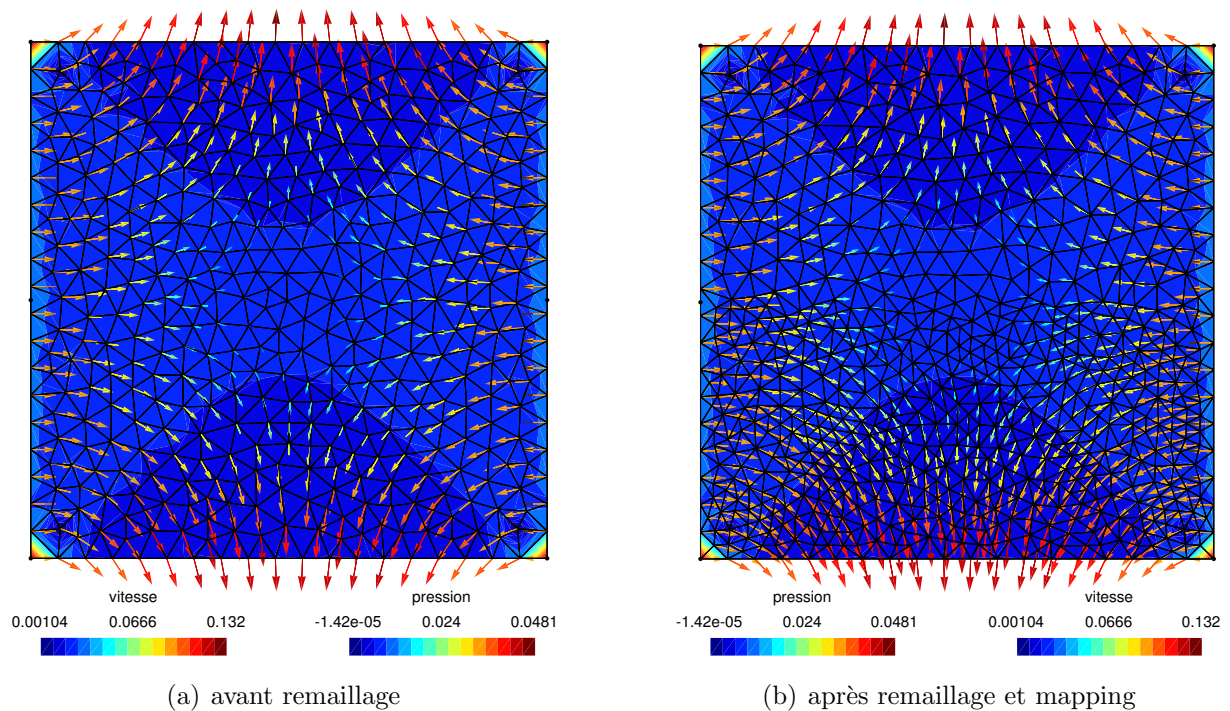


Figure 11.7 – Utilisation de la librairie de remaillage de *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> et de l’algorithme de mapping : écoulement de Stokes par une méthode mixte vitesse-pression.

reconstruire le champ de déplacement sur la nouvelle géométrie et ainsi obtenir l’allure de la géométrie initiale avec le nouveau maillage (11.8-d).

### 11.2.7 Conclusion

Dans le cadre du traitement de la disparition de la zone de résine, il est nécessaire de coupler une formulation *ALE* (pour satisfaire la conservation de la masse) à un algorithme de remaillage. En effet, lors de l’infusion le facteur de forme des éléments associés à la résine va devenir très mauvais (éléments très allongés). Concrètement, le nombre d’éléments dans cette zone va diminuer. Inversement, le nombre d’éléments associés aux nappes peut diminuer dans un premier temps (compression des nappes) mais peut augmenter à nouveau lors de l’infusion (dilatation des nappes associée au modèle de Terzaghi). Néanmoins, concernant la zone de résine la combinaison des algorithmes de remaillage et de la formulation *ALE* ne peut pas traiter la disparition complète de la zone. Il est nécessaire de conserver une épaisseur résiduelle afin de traiter les équations de conservation dans cette zone.

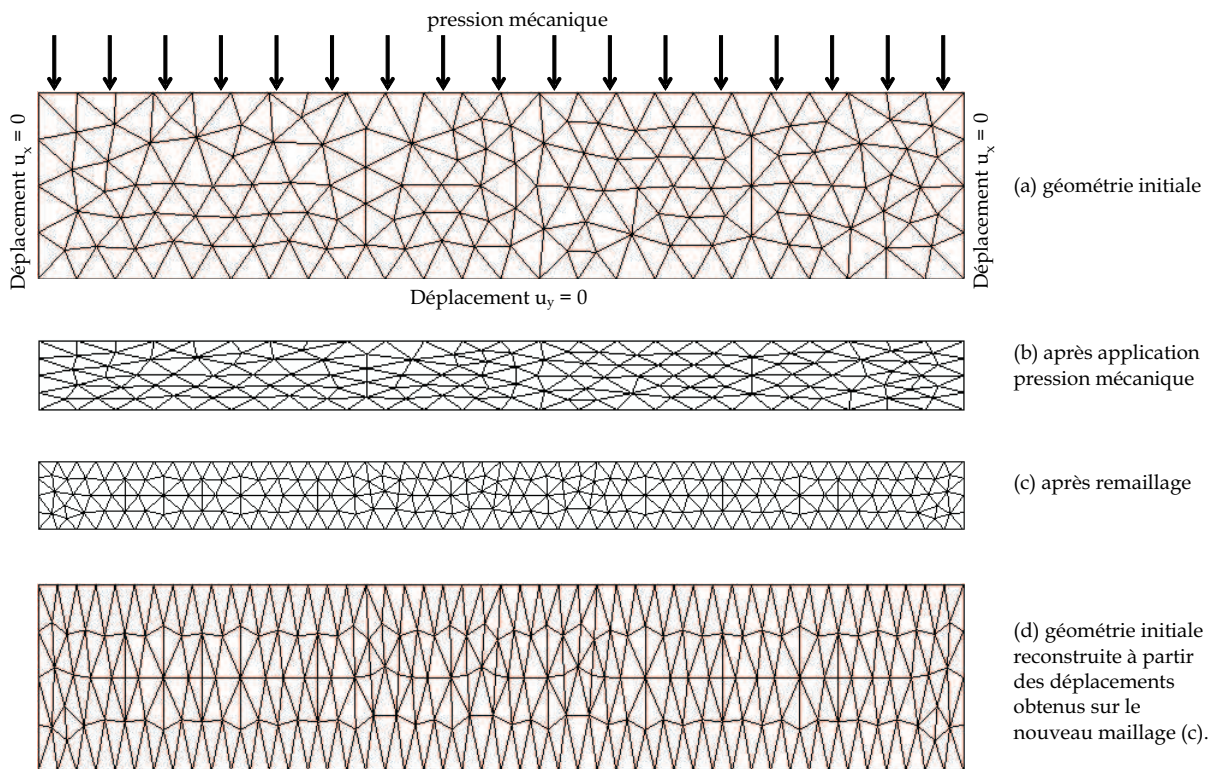


Figure 11.8 – Remaillage et mapping à l'aide des routines développées dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> : compression non-linéaire des nappes.

# Chapitre 12

## Bilan

Les chapitres précédents présentent les principaux outils numériques implémentés au cours de ce travail. Comme nous l'avons précisé, ces outils ont été implémentés et validés séparément avant d'être intégrés à des problèmes couplés. Parallèlement à ces développements reposant sur des mécanismes mathématiques relativement complexes, il est important que le lecteur ait conscience des différentes interfaces qui ont été développées.

Notons tout d'abord que *PAM-RTM*<sup>TM</sup> est un logiciel purement explicite. Les outils numériques proposés par les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> sont donc adaptés à ce type de solveur, mais le sont beaucoup moins lorsque que l'on souhaite résoudre des problèmes non-linéaires de manière implicite. Ainsi, une algorithmie complète a été développée autour de la résolution du système non-linéaire. Cet algorithme peut être facilement transposable à d'autres types de problèmes non-linéaires ou fortement couplés.

La seconde difficulté rencontrée ici concerne l'absence de gestion des formulations matérielles dans *PAM-RTM*<sup>TM</sup>. Concrètement, actuellement le type d'application visée dans ce logiciel se contente d'approches basées sur le domaine initial, *i.e.* les inconnues du problème sont observées depuis un point fixe de l'espace (approche eulérienne). L'utilisation de formulations matérielles engendrent une modification de la morphologie du maillage au cours du temps. Pour observer cette évolution, et présenter les différents résultats de cette thèse, notamment ceux concernant la prise en compte des grandes déformations des préformes (voir chapitre 8), nous avons réalisé une interface entre les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> et un logiciel de post-traitement libre, *GMSH*<sup>©</sup>. Ce lien présente un certain nombre de difficultés et l'Annexe H décrit à titre d'exemple la méthode employée pour visualiser dans *GMSH*<sup>©</sup> des grandeurs définies au niveau des points de Gauss.

Parallèlement à ces développements, un certain nombre d'autres outils complémentaires ont été intégrés. Citons à titre d'exemple les classes développées pour la détermination des valeurs propres et vecteurs propres pour la décomposition polaire du tenseur de Cauchy-Green, la méthode des polynômes de Lagrange pour l'interpolation des valeurs

à partir de données expérimentales, la lecture et l'écriture des fichiers de données et de résultats, la réalisation de classes de conteneur dynamique, *etc ...*

Concernant la convergence des calculs, une procédure supplémentaire d'ajustement automatique du pas de chargement a été intégrée afin de diminuer ou d'augmenter le pas de chargement en fonction de la qualité de la convergence du problème non-linéaire en grandes déformations. Les temps de calculs sont fortement réduits compte tenu de la forte non-linéarité des lois de comportement associées aux préformes, *i.e.* de forts niveaux de déformation sur la première partie de la courbe.

A titre d'illustration des possibilités offertes par les outils intégrés, la dernière partie de ce manuscrit présente les premiers résultats obtenus à l'aide des modèles développés dans le cadre de la simulation des procédés *LRI* et *RFI*. Ces premiers résultats, bien que satisfaisants, nécessitent une validation. Nous proposons donc, dans le dernier chapitre de ce manuscrit, une démarche de validation, basée sur une comparaison expérience / simulation numérique. Cette démarche est élaborée à partir des premières constatations expérimentales observées dans le cadre de la validation du procédé *LRI* au cours d'une première série d'essais réalisés au laboratoire d'*Hexcel Reinforcements*.

# Quatrième partie

## Applications



# Chapitre 13

## Simulation d'injections sous sac à vide

### Sommaire

---

<b>13.1 Introduction</b> . . . . .	<b>165</b>
13.1.1 Principe . . . . .	166
13.1.2 Résultats . . . . .	167
<b>13.2 Conclusion</b> . . . . .	<b>170</b>

---

### 13.1 Introduction

Dans cette étude destinée à valider les développements concernant la zone de nappes, nous ne représentons pas la zone de résine. Le comportement dans la zone de préforme (sèche et humide) est traité à l'aide des formulations Lagrangienne Réactualisée pour la déformation des préformes, et de la formulation vitesse-pression (élément P1+/P1) pour l'écoulement de la résine dans ces préformes. La zone de résine est quant à elle modélisée à l'aide d'une pression ou d'un débit d'injection constant au niveau de l'interface séparant les zones purement fluide et le milieu poreux partiellement rempli. Ce type de modèle peut être employé pour la simulation numérique des procédés de type *VARTM*, c'est à dire des injections isothermes de résine sous sac à vide dans des préformes compressibles. En effet, nous nous concentrons ici uniquement sur les aspects mécaniques, *i.e.* l'écoulement du fluide et la déformation du solide, en négligeant les aspects thermiques en particulier l'évolution de la viscosité de la résine. Pour cette approche mécanique, le modèle de Terzaghi qui a été validé dans le chapitre 10 par simplification des hypothèses (comportement linéaire sans non-linéarités géométriques) est utilisé dans le cadre général



d'un comportement non-linéaire en grandes déformations. Dans ce chapitre une illustration qualitative des possibilités offertes par les différents outils numériques développés est donnée sur l'exemple de l'infusion d'une jonction en « T » très souvent utilisée comme cas test en aéronautique.

### 13.1.1 Principe

L'algorithme de remplissage de *PAM-RTM*<sup>TM</sup> est utilisé. Cet algorithme, appelé algorithme de « filling » dans la littérature, repose sur une division du remplissage de la préforme, par nature transitoire, en sous problèmes quasi-statiques. L'algorithme de remplissage calcule, entre deux pas de remplissage, les nouveaux éléments remplis au cours du pas de temps courant à partir du champ de vitesse obtenu sur le pas de temps précédent. Dans le paragraphe 10.2, nous avons montré que dans ce cas, la formulation *ALE* présente un intérêt moindre dans la mesure où une boucle de convergence est utilisée, *i.e.* le champ de vitesse associé aux préformes s'annule lorsque la solution converge (couplage fort indirect). La formulation *ALE* tend donc vers une formulation Eulérienne.

L'algorithme de couplage proposé ici est basé sur la convergence de deux problèmes implicites (voir schéma 13.1). Pour chaque pas de remplissage, le problème de Darcy (remplissage des préformes) et le problème mécanique (déformation des préformes) sont résolus par report des conditions indiquées sur la partie droite de l'algorithme 13.1 (déformée, pression hydrostatique) tant que la convergence relative des champs de déplacement, de pression et de vitesse n'est pas vérifiée :

$$\frac{\|p^{(i+1)} - p^{(i)}\|}{\|p^{(i)}\|} + \frac{\|\mathbf{u}^{(i+1)} - \mathbf{u}^{(i)}\|}{\|\mathbf{u}^{(i)}\|} + \frac{\|\mathbf{v}^{(i+1)} - \mathbf{v}^{(i)}\|}{\|\mathbf{v}^{(i)}\|} \leq \epsilon \quad (13.1)$$

Le schéma numérique est répété jusqu'au remplissage total de la géométrie. La première phase d'initialisation correspond à l'application de la pression du sac à vide. Un calcul élastique non-linéaire en grandes déformations est réalisé sur les préformes sèches. Celui-ci conduit aux nouvelles porosités puis aux nouvelles perméabilités locales par application de la relation de Carman-Kozeny (voir Eq. 5.17, page 61). A partir des nouvelles perméabilités, un premier pas de remplissage est réalisé. Ici, un débit d'injection ou une pression d'injection constante est appliqué et la pression au niveau du front de fluide est nulle. Ce calcul conduit à la détermination du champ de pression hydrostatique de la résine à l'intérieur des pores. Ce champ est ensuite utilisé dans le modèle de Terzaghi et une nouvelle géométrie, solution de l'équilibre mécanique entre les pressions internes et la pression du sac à vide, est déterminée.

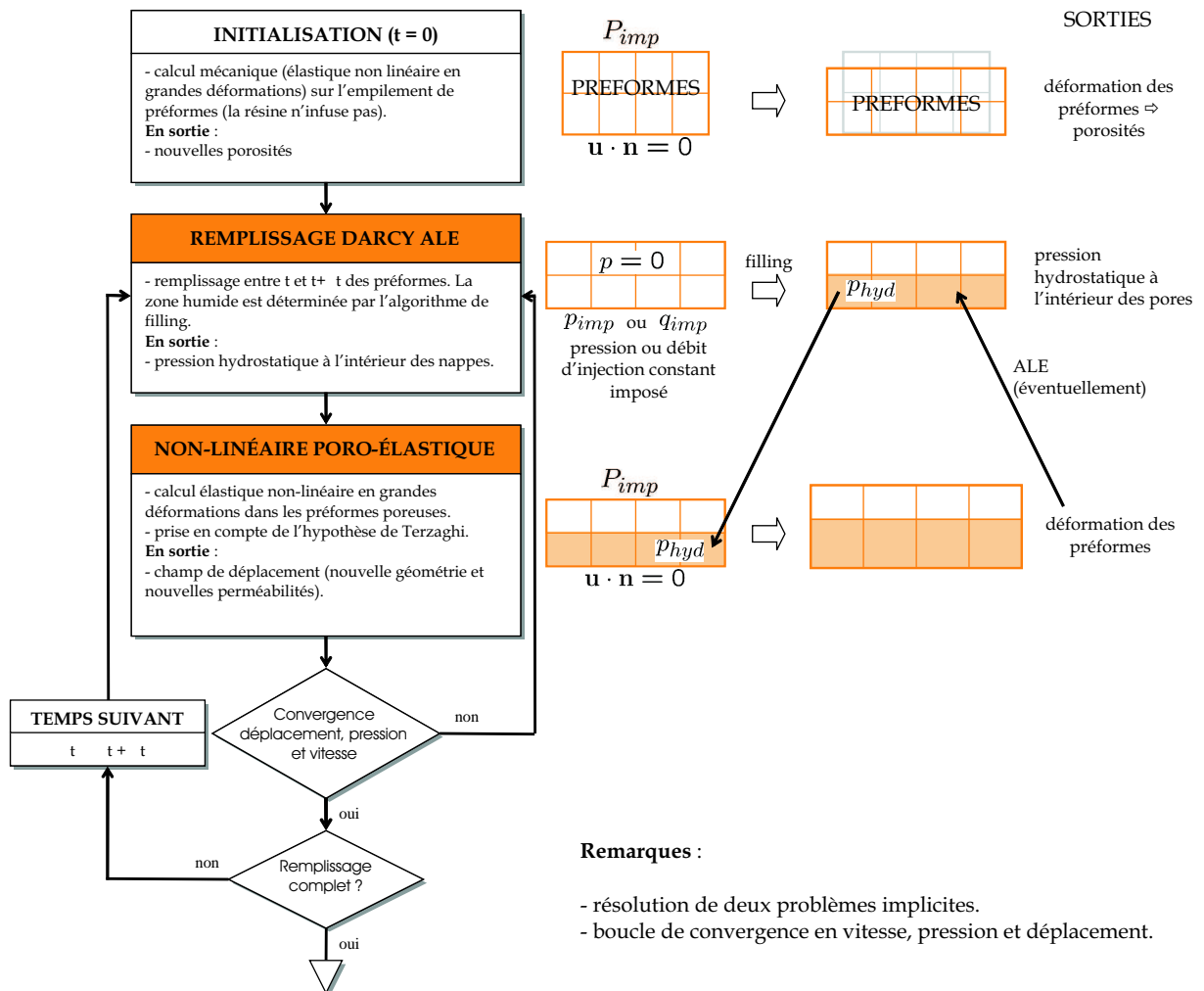


Figure 13.1 – Principe de couplage : algorithme pour le procédé *VARTM* - couplage fort itératif entre l'écoulement de la résine et la déformation des nappes avec la prise en compte du modèle de Terzaghi.

### 13.1.2 Résultats

Comme nous l'avons évoqué dans les chapitres précédents, les procédés par infusion sont très mal connus. Les modèles que nous proposons ici doivent être alimentés par des mesures expérimentales, en particulier les valeurs des perméabilités dans les trois directions. Dans la littérature très peu d'informations sont données sur ces mesures. Les fournisseurs de matériaux connaissent encore assez peu finement les perméabilités de leurs préformes d'autant plus qu'elles dépendent du régime d'écoulement, *i.e.* de la saturation (Cf. la différence entre perméabilité relative et perméabilité effective dans le paragraphe 5.2.4.2 du chapitre 5). Les résultats obtenus sont rarement qualifiés quantitativement. Nous ne disposons donc pas de cas test réel permettant de confronter les modèles dé-

veloppés à l'expérience. Pour ces raisons, les résultats présentés ici ont été obtenus sur une forme de type « T » avec des orientations de perméabilité, pour des conditions de simulations volontairement très exagérées, ceci afin de bien observer les interactions entre le comportement solide des préformes et l'écoulement de la résine.

Comme indiqué sur la figure 13.3-b, sur la base de la forme en T, la résine est injectée à pression constante. Le sac à vide applique une pression mécanique normale sur la face supérieure correspondant à la pression mécanique nécessaire pour contrebalancer la pression d'injection de la résine, ici la pression atmosphérique. Les orientations de perméabilités de la préforme sont également indiquées sur ce schéma. Le noyau (partie solide sans orientation de perméabilité) et les fibres dans les directions longitudinales des préformes sont 10 fois plus perméables que dans les directions transverses. Le comportement des préformes est élastique non-linéaire isotrope, tel que présenté sur la figure 13.2, et un coefficient de Poisson nul est utilisé. Les préformes subissent de grandes déformations (non-linéarités géométriques activées). Le modèle éléments finis en déformations planes comporte 1151 éléments et 643 nœuds pour un nombre total de 3215 degrés de liberté. Pour les conditions de simulation utilisées, le calcul comporte 367 itérations en temps et correspond à un temps CPU d'environ 50 minutes sur un Pentium 4. La porosité initiale de la préforme est supposée uniforme, égale à 61,3 %. Les fibres de carbone ont un diamètre de  $5 \mu\text{m}$ , ce qui conduit aux permeabilités initiales indiquées sur la figure 13.3 compte tenu des constantes de Kozeny choisies ( $h_{k_1} = 100$  et  $h_{k_2} = 10$ ).

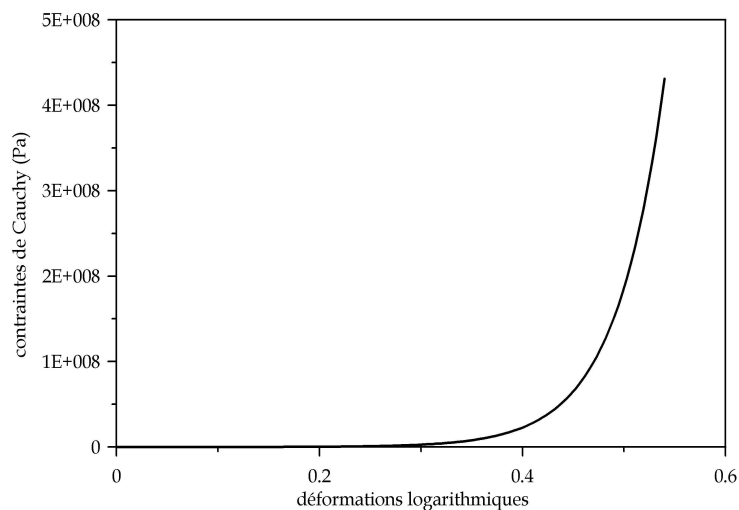


Figure 13.2 – Loi de comportement mécanique des préformes utilisée pour l'injection d'une jonction en « T ».

La figure 13.3-a présente la distribution de la pression de la résine dans la jonction en « T » déformée. Dans un premier temps, la phase de compression correspond à une forte diminution de l'épaisseur associée également à une diminution de la porosité. Dans un

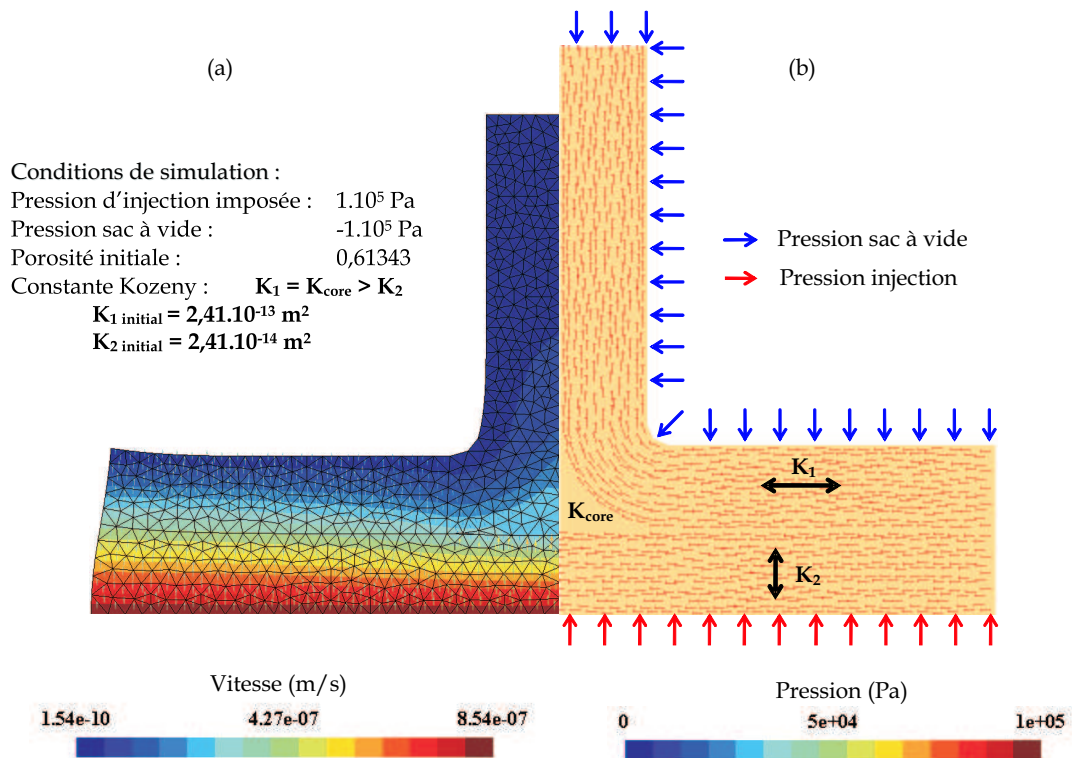


Figure 13.3 – Injection d'un T : (a) distribution de pression en (Pa) sur la préforme déformée, (b) orientation de perméabilité sur la préforme initiale et conditions aux limites.

second temps, compte tenu du débit d'injection important appliqué, une augmentation assez importante des porosités, donc des épaisseurs, est observée (voir augmentation des porosités sur la figure 13.4 au cours du remplissage). L'augmentation de l'épaisseur des préformes lors de l'infusion est conforme aux phénomènes observés dans la littérature notamment par Kang *et al.* (2001) et Ahn *et al.* (1990).

Cette simulation illustre l'effet du modèle de Terzaghi sur le comportement des préformes. Cet effet est couplé avec l'écoulement préférentiel dû aux orientations de perméabilités dans les préformes. Ici, le manque de connaissance ne permet pas d'utiliser le paramètre de Biot. Ce paramètre devra être ajusté par comparaison de résultats numériques et de résultats expérimentaux afin de prédire les bonnes variations d'épaisseur. Mais cet ajustement ne peut avoir lieu sur des géométries aussi complexes.

Une étude paramétrique rapide a été réalisée sur cette jonction en « T ». Elle décrit l'évolution de la porosité moyenne en fonction du degré de remplissage pour différents niveaux de pression du sac à vide, donc différentes pressions d'injection. Deux types de comportement ont été étudiés. Un comportement élastique non-linéaire en grandes déformations (voir figure 13.2) et un comportement « élastique linéaire » en grandes déformations de rigidité  $4.10^6$  Pa. Les figures 13.4-a et 13.4-b présentent les résultats obtenus.

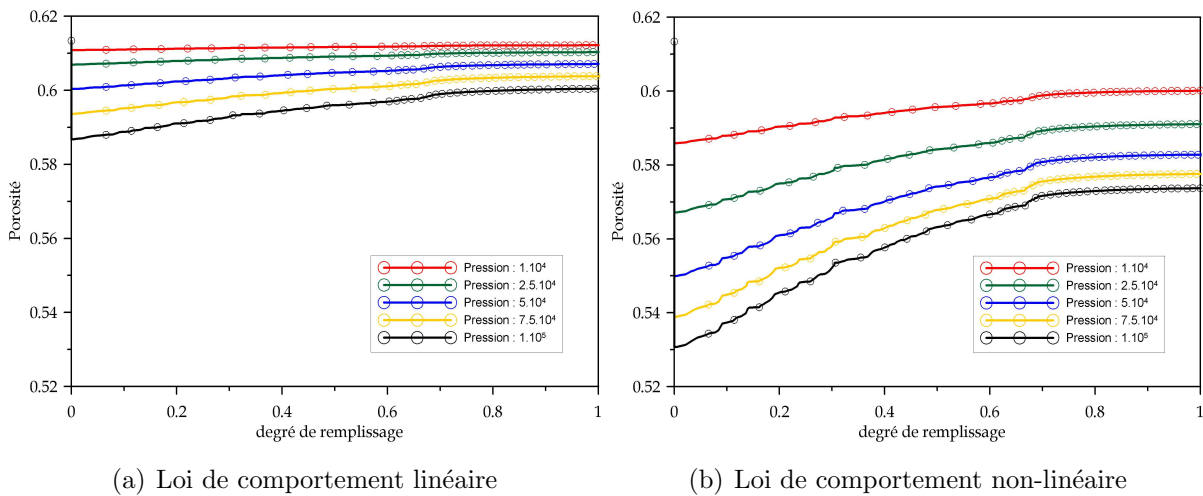


Figure 13.4 – Comparaison des porosités en fonction du degré de remplissage (rapport entre le volume rempli et le volume total) pour différents niveaux de pression et les lois de comportement linéaire (a) et non-linéaire (b).

Dans le cas d'une loi de comportement non-linéaire (figure 13.4-b), une décroissance non-linéaire des porosités avec l'augmentation de la pression appliquée par le sac à vide est observée. Plus le niveau de pression du sac à vide augmente, moins la variation de porosité est grande (courbes rouges). Pour la loi linéaire (figure 13.4-a) l'effet est inverse. Il faut rappeler que l'augmentation de la pression du sac à vide implique également l'augmentation de la pression d'injection sur la base de la jonction en « T ». Cette augmentation de la pression d'injection conduit localement à une dilatation des nappes sur la base de la préforme, le reste de la jonction étant « compacté » par la résine d'une part et le sac à vide d'autre part. En conclusion, pour ces conditions de simulations où la pression du sac à vide est la même que la pression d'injection de la résine, la variation de la porosité est essentiellement due à l'effet de la pression du sac à vide.

## 13.2 Conclusion

Ce premier exemple illustre l'influence de l'action de la résine infusée sur la déformation des préformes, *i.e.* la condition de couplage entre l'écoulement de la résine et les préformes *via* le modèle de Terzaghi. Cette illustration est rassurante dans la mesure où les tendances concernant la variation d'épaisseur sont conformes à celles observées dans la littérature. Dans le chapitre suivant, nous proposons deux algorithmes pour l'étude respective des procédés *LRI* et *RFI*. Ces algorithmes sont basés sur le même algorithme de « filling » qui suppose un découpage du remplissage en incréments quasi-statiques.

# Chapitre 14

## Étude des procédés *RFI* et *LRI*

### Sommaire

---

<b>14.1 Introduction</b> . . . . .	<b>171</b>
<b>14.2 Simulation du procédé <i>LRI</i></b> . . . . .	<b>171</b>
14.2.1 Principe . . . . .	171
14.2.2 Résultats . . . . .	173
<b>14.3 Traitement du procédé <i>RFI</i></b> . . . . .	<b>177</b>
14.3.1 Principe . . . . .	177
14.3.2 Résultats . . . . .	178
<b>14.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>181</b>

---

### 14.1 Introduction

Dans ce chapitre, des algorithmes de résolution pour les procédés *LRI* et *RFI*, élaborés à partir des outils de calcul précédemment développés, sont proposés. Ici, comme dans le chapitre précédent, seuls les aspects mécaniques sont considérés. Après une présentation des algorithmes de résolution et des conditions aux limites associées à chaque type de procédé (*LRI* et *RFI*), les résultats numériques sont présentés et commentés. Une étude qualitative des résultats obtenus est réalisée.

### 14.2 Simulation du procédé *LRI*

#### 14.2.1 Principe

Dans le cas du procédé *LRI*, le film de résine est réalisé à l'aide d'un tissu drainant de dimensions fixes contenant la résine liquide. Dans cette première approche de la modéli-

sation de l'infusion par tissu drainant deux hypothèses sont retenues. Tout d'abord nous supposons un remplissage instantané du drainant, ce qui est observé expérimentalement. Par conséquent l'infusion dans les renforts se produit une fois le drainant entièrement saturé. Par ailleurs, la perméabilité du drainant, très forte par rapport à celle des renforts, permet de considérer les équations de Stokes en régime stationnaire dans cette zone (voir Annexe K). Compte tenu des deux hypothèses précédentes, l'étude du remplissage du drainant n'est pas nécessaire. D'un point de vue mécanique, le drainant, bien que très perméable, possède une rigidité transverse très importante devant la rigidité transverse des préformes. Les déformations de ce composant sont ainsi négligeables devant celles des préformes.

Bien qu'expérimentalement l'hypothèse de remplissage quasi-instantané du drainant est vérifiée, une caractérisation de la perméabilité du drainant permettrait de modéliser plus précisément les différents mécanismes interagissant au cours du procédé. En outre, la prise en compte de cette perméabilité permettrait de simplifier le problème précédent en couplant fortement le comportement dans les deux zones puisque dans ce cas le même type d'équation de comportement serait utilisé pour modéliser l'écoulement dans le drainant et la résine (équations de Darcy, voire équations de Brinkman). Dans la littérature de nombreux auteurs s'intéressent au couplage fort de milieux à perméabilités très différentes. Numériquement des problèmes de conditionnement de matrices interviennent et rendent difficile cette étude (Bastian et Reichenberger (2000)). Une étude numérique de ce type de problème a été réalisée dans le cadre de cette thèse à l'aide de *FEM-LAB*<sup>TM</sup>. Elle n'est pas présentée dans ce manuscrit. Cette étude indique néanmoins des difficultés numériques lorsque les rapports de perméabilité sont supérieurs à  $10^4$ .

Comme dans le cas du traitement du procédé *VARTM*, l'algorithme utilisé (Figure 14.1) repose sur la résolution de problèmes implicites à l'intérieur d'une boucle de convergence pour chaque pas de remplissage. Ici, trois problèmes sont résolus : la mécanique de la déformation des préformes, l'écoulement de Darcy à l'intérieur des préformes, et l'écoulement de Stokes dans le drainant. Comme dans le cas précédent, la formulation *ALE* n'est pas employée car elle n'est pas aussi pertinente que dans le cas d'un couplage fort direct. Les conditions de couplage entre les différentes zones sont décrites sur l'algorithme 14.1.

Globalement le report des conditions aux limites est identique à celui employé lors des injections de résine sous sac à vide (voir algorithme 13.1). Il est complété par l'écoulement de la résine dans le tissu drainant. Il semble ici que deux types de conditions aux limites peuvent être employés, elles seront décrites plus précisément dans le paragraphe suivant.

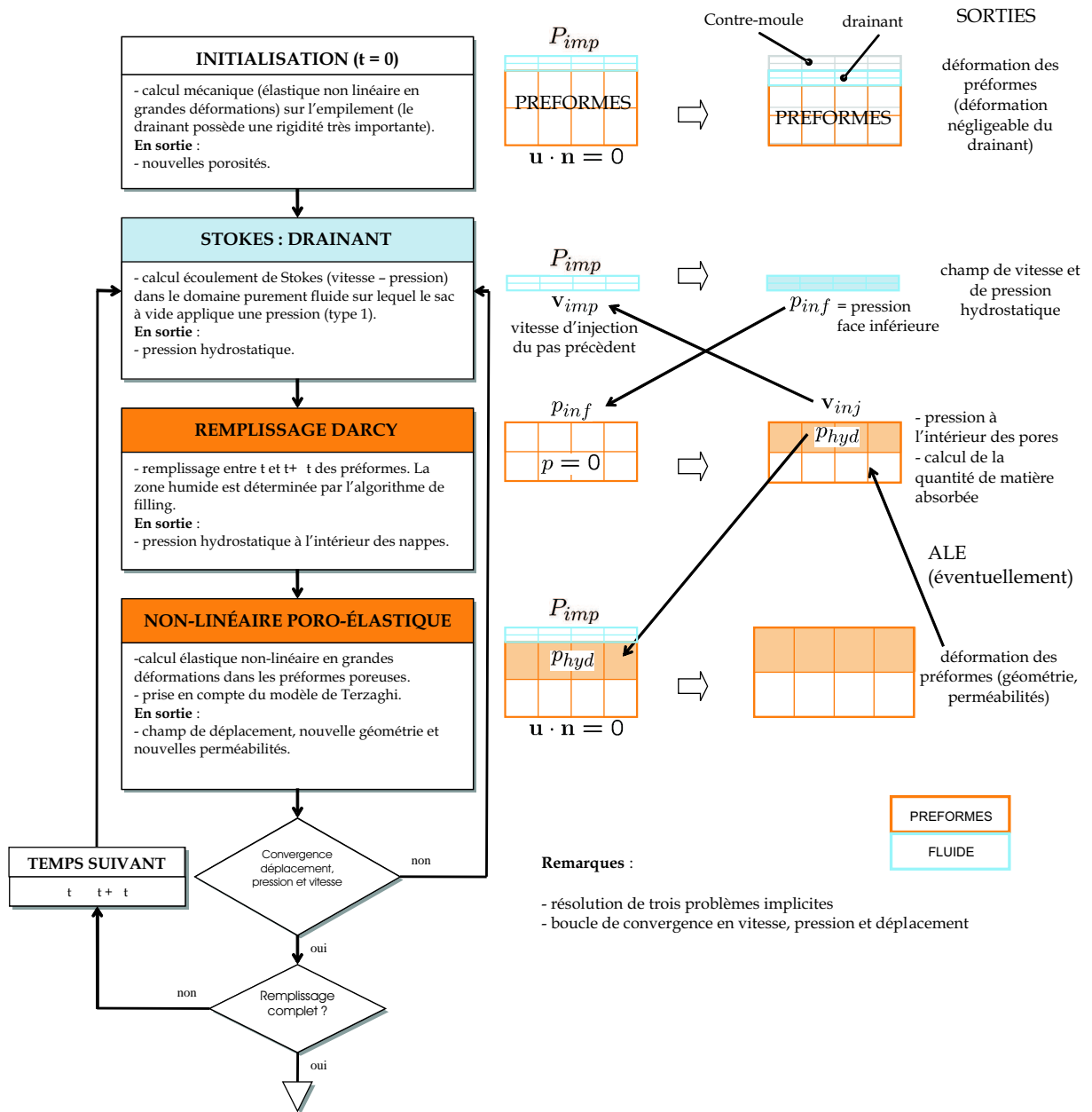


Figure 14.1 – Principe de couplage : algorithme pour le procédé LRI - couplage fort itératif entre l'écoulement de la résine dans le drainant et l'écoulement dans les préformes compressibles.

### 14.2.2 Résultats

Un exemple de résultat est présenté sur la figure 14.3. Ici, l'infusion d'une coque présentant des effets de courbures est réalisée. La loi de comportement des nappes dans l'épaisseur est représentée sur la figure 14.2, il s'agit de la loi de comportement déterminée expérimentalement (chapitre 15) que nous avons tronquée afin de limiter les difficultés



numériques (voir §15.3). La rigidité du drainant est isotrope et 1000 fois supérieure à celle des nappes dans la direction transverse. Le comportement des nappes est supposé isotrope transverse avec un plan d'isotropie contenu dans le plan des nappes. La rigidité dans la direction longitudinale des fibres est supposé 100 fois plus importante que celle utilisée dans l'épaisseur. Les coefficients de Poisson  $\nu_{TT'}$  et  $\nu_{LT}$  sont supposés nuls. Concernant le calcul des perméabilités la relation de Carman Kozeny (Eq. 5.17, page 61) est employée. Les fibres de carbone possèdent un diamètre de  $5 \mu m$  et les constantes de Kozeny dans les trois directions sont identiques et égales à  $h_k = 10$ . Ces constantes conduisent à des perméabilités variant entre  $10^{-12} m^2$  à l'état initial et  $10^{-14} m^2$  après compression.

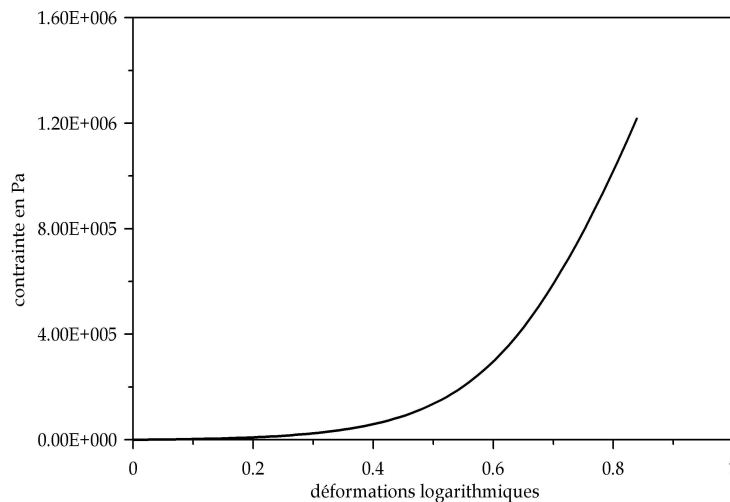


Figure 14.2 – Loi de comportement tronquée correspondant à la loi expérimentale 15.4.

Les conditions aux limites pour le demi-modèle sont représentées en partie sur la figure 14.3-a et l'algorithme 14.1. Concernant le calcul, l'assemblage de préformes et du drainant est soumis à la pression mécanique du sac à vide qui provoque l'écrasement de la préforme et la diminution de sa porosité (figure 14.3-b). En fin d'infusion l'épaisseur de la préforme a augmenté sous l'action de la pression de la résine dans les pores des nappes (voir figure 14.3-d). Dans cette étude, la déformation des éléments dans la zone de préforme ne requiert pas de remaillage puisque le facteur de forme des éléments reste correct. Le report des conditions aux limites entre les 3 problèmes implicites est celui présenté sur l'algorithme 14.1.

La convergence d'un tel modèle n'est pas triviale. En particulier les grandes déformations des nappes couplées à leur comportement anisotrope ainsi qu'au modèle de Terzaghi nécessitent souvent un nombre très important d'itérations pour obtenir la solution. Les paramètres de convergence (nombre d'incrément, valeur des résidus, méthodes de résolution) doivent être ajustés afin d'obtenir des résultats cohérents au sens des résidus qui doivent rester suffisamment faibles. Notons que lorsque des forts ratios de rigidité sont

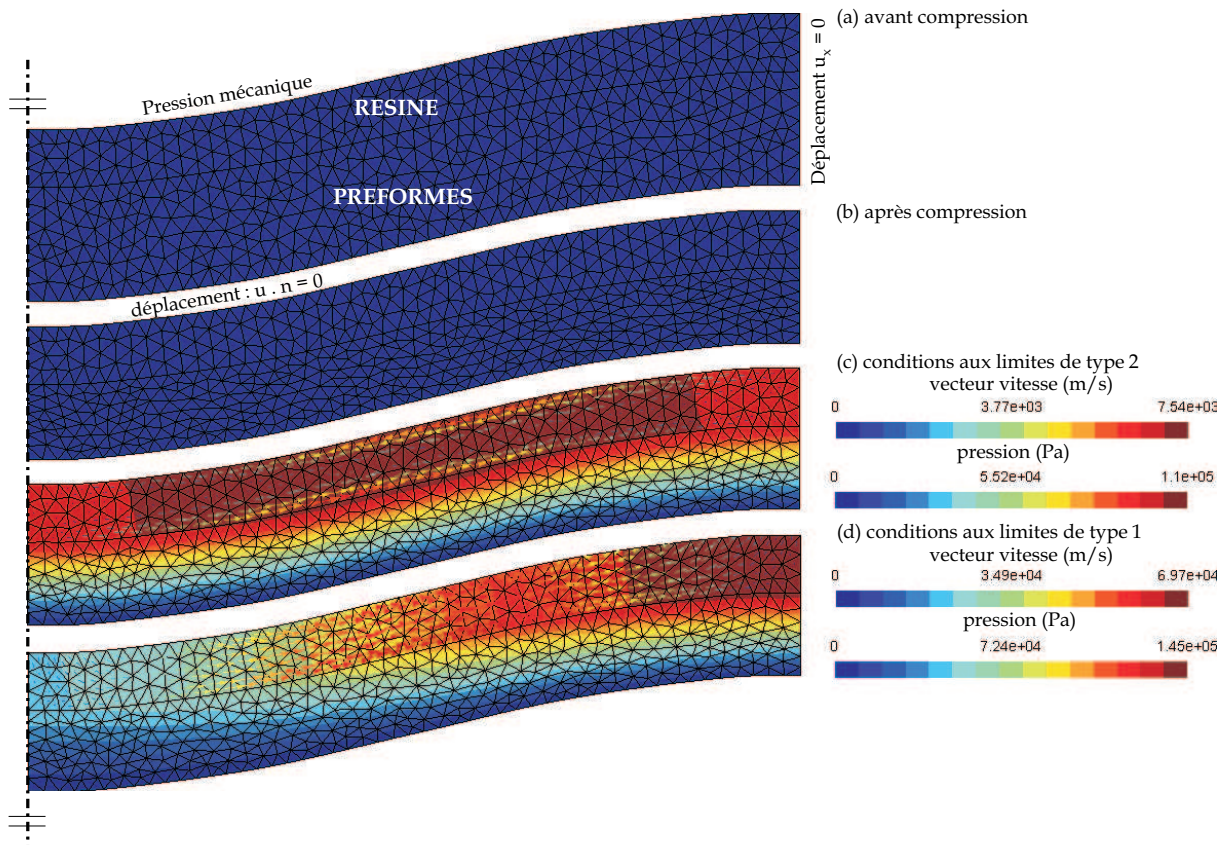


Figure 14.3 – Infusion d’une demi-coque par procédé *LRI* - (a) empilement pré-forme/résine, (b) pression mécanique du sac à vide avant infusion, (c) préforme saturée à 100% - condition de type 1, (d) préforme saturée à 100% - condition de type 2.

utilisés entre les directions d’anisotropie le nombre d’incrémentes augmente fortement.

Nous pouvons remarquer que par rapport à la réalité, imposer une pression mécanique sur l’empilement ne suffit pas à représenter la présence du contre-moule. En effet, même si des trous de passage sont généralement présents dans cette partie métallique au total leur surface n’excède pas 5% de la surface utile. Nous proposons donc de représenter la présence de ce contre moule à l’aide de conditions de paroi imperméable (voir figure 14.4-b) plutôt que d’imposer la pression mécanique du sac à vide (voir figure 14.4-a). Dans cette nouvelle configuration, une pression d’injection constante est par ailleurs appliquée par la buse d’injection sur le bord de la pièce. Compte tenu des très faibles vitesses d’infusion, nous constatons que la pression est quasiment constante dans le drainant (voir figure 14.3-c), et qu’elle ne varie pas au cours du temps.

La figure 14.5 présente l’évolution de la porosité moyenne et du temps de remplissage en fonction du degré de remplissage défini comme le ratio entre le volume infusé et le volume total. Les résultats obtenus pour les deux types de conditions aux limites pré-

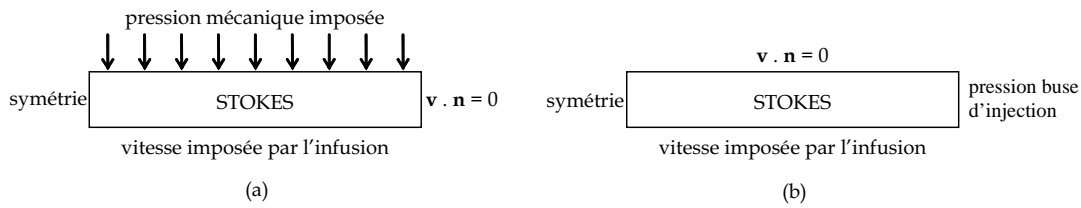


Figure 14.4 – Conditions aux limites dans la zone de Stokes pour le procédé *LRI* : (a) type 1, (b) type 2.

sentés ici montrent que l'évolution de la porosité moyenne est relativement identique. En revanche, les temps de remplissage sont beaucoup plus importants pour le premier type de conditions, soit 50 minutes contre 20 minutes pour le second type. Cette augmentation est une conséquence d'une répartition plus hétérogène de la pression au niveau de l'interface entre le drainant et les préformes (figure 14.3-d) pour le premier type de condition. Concernant les temps de calculs ils sont d'environ 30 minutes pour ce type de modèles 2D composé de 1245 éléments. Ils sont principalement liés aux non-linéarités importantes dans la zone des préformes qui nécessitent souvent plusieurs itérations pour converger.

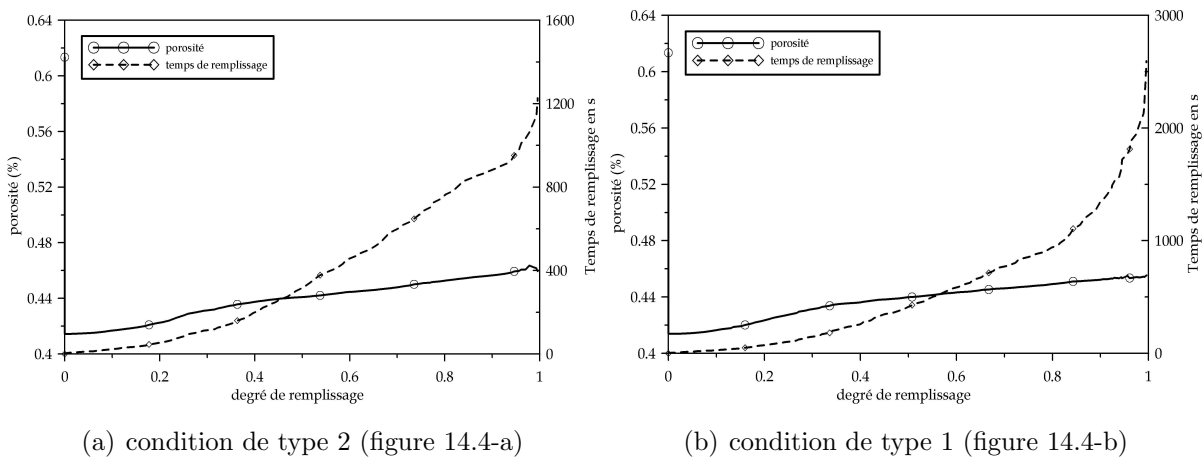


Figure 14.5 – Infusion d'une demi-coque par procédé *LRI* : évolution de la porosité et du temps de remplissage en fonction du degré de remplissage pour les deux types de conditions.

Pour ce procédé le choix des conditions aux limites n'est pas figé. Actuellement, d'un point de vue industriel le second type de solution est le plus souvent utilisé. Pourtant, au cours de l'infusion, lorsque la résine est amenée par le tirage du vide depuis un pot de résine situé à l'extérieur, ces conditions ne sont pas adaptées (voir figure 14.6). Les outils numériques développés dans le cadre de ce travail doivent donc être utilisés différemment. En effet, on constate expérimentalement que la pression de la résine au niveau de la buse d'injection n'est pas constante, elle diminue au cours de l'infusion compte tenu de la

résistance des préformes à l'écoulement. Notons également que la condition d'adhérence entre le tissu drainant et les préformes n'est pas non plus réaliste. Il existe du glissement entre ces deux composants qu'il conviendrait de modéliser au moyen d'une méthode de contact. Ce modèle peut néanmoins être utilisé dans un cas 1D puisque dans ce cas le glissement entre ces deux composants est nul (voir essais de validation du procédé *LRI* dans le chapitre 15).

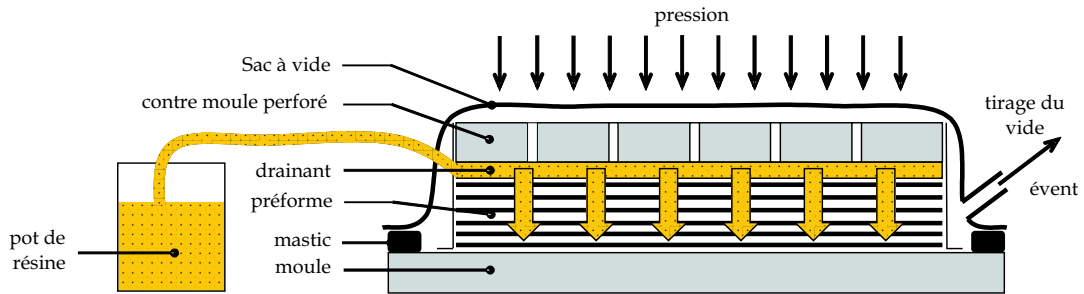


Figure 14.6 – Principe du procédé *LRI* lorsque la résine est apportée depuis un pot de résine et *via* une pompe à vide.

## 14.3 Traitement du procédé *RFI*

### 14.3.1 Principe

L'algorithme de calcul employé pour le procédé *RFI* est assez proche de celui utilisé pour le procédé *LRI*. Le principe est toujours le même : résolution itérative de problèmes implicites pour chaque pas de remplissage (voir algorithme 14.7). Comme pour les deux autres algorithmes présentés, la formulation *ALE* n'est pas pertinente suite à l'emploi d'un couplage fort itératif entre les problèmes de mécanique des fluides d'une part et de mécanique des solides d'autre part. Néanmoins, par rapport au cas du *LRI*, dans le cas du *RFI* un problème mécanique supplémentaire est traité afin de prévoir le déplacement de la zone de résine en fonction de la quantité de résine absorbée par le milieu poreux.

Les hypothèses de calcul sont semblables aux hypothèses considérées pour l'algorithme *LRI* et l'écoulement est divisé en pas de remplissage quasi-statiques. Au niveau de l'interface entre les préformes saturées et la zone purement fluide, deux hypothèses supplémentaires sont posées. D'une part les vitesses de cisaillement au niveau de cette interface sont libres. D'autre part, la rigidité des préformes est très importante devant celle du film de résine liquide qui se liquéfie sous l'action du cycle de température. Compte tenu des très faibles perméabilités considérées dans le milieu poreux, les vitesses d'écoulement dans la zone de résine sont très importantes devant les vitesses macroscopiques intervenant dans

le milieu poreux saturé. Nous supposons donc, pour chaque pas de remplissage quasi statique, la zone de résine s'ajuste de façon quasi-instantanée à la forme des préformes, ce qui implique la condition  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . La diminution de la zone de résine est calculée à partir d'un calcul macroscopique du volume de fluide entrant dans le milieu poreux entre deux pas de remplissage, à partir des différences centrées sur la vitesse du fluide entre deux instants successifs. La variation d'épaisseur de cette zone est distribuée de manière homogène sur l'épaisseur de la zone de résine. Cette diminution est accompagnée d'une forte distorsion des éléments qui doit être traitée à l'aide de l'algorithme de remaillage développé dans le chapitre 11.

Cette première approche de l'infusion à base d'un film de résine est bien sûr très simplificatrice. En effet, le couplage entre le fluide et les préformes saturées repose en toute rigueur sur un mécanisme de contact qui vient gérer l'équilibre mécanique. Cet outil n'est actuellement pas disponible dans les librairies *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>. Nous avons étudié brièvement son implémentation qui repose sur les mêmes types de mécanisme que l'incompressibilité ou les relations cinématiques, *i.e.* l'ajout de relations supplémentaires en l'occurrence ici des rigidités supplémentaires, par la méthode de pénalité, des multiplicateurs de Lagrange ou du Lagrangien augmenté (Chamoret (2002)) mais cette méthode n'a pas été intégrée dans le cadre de ce travail.

### 14.3.2 Résultats

L'infusion de la demi-coque déjà présentée pour le procédé *LRI* est réalisée ici à l'aide d'une technique de type *RFI* (voir figure 14.8). Les caractéristiques des préformes sont identiques. Pour ce procédé deux types de conditions aux limites ont été employées, elles sont présentées sur la figure 14.9. Le premier type (figure 14.9-a) correspond à l'application des conditions de Beaver-Joseph-Shaffman au niveau de l'interface entre la zone de résine seule et les préformes saturées assurant la continuité du vecteur contrainte. Pour le second type (figure 14.9-b), une pression constante est considérée dans la zone de Stokes. Cette condition correspond à la condition actuellement employée dans les codes de calculs où cette couche de résine ne peut être prise en compte.

Comme dans le cas du procédé *LRI*, le mode de remplissage des préformes diffère fortement en fonction du type de condition employé (type 1 ou 2). Dans le cas d'une pression constante, le remplissage des préformes a lieu de manière quasi-homogène (figure 14.8-d). En revanche, la présence d'effets de courbures apparaît clairement lorsque les conditions de Beaver-Joseph-Shaffman sont employés. Les temps de calculs pour de tels modèles sont d'environ 30 minutes.

Concernant l'évolution de la porosité moyenne et du temps de remplissage, une forte influence du type de condition aux limites est observée. Le temps de remplissage est 2,5

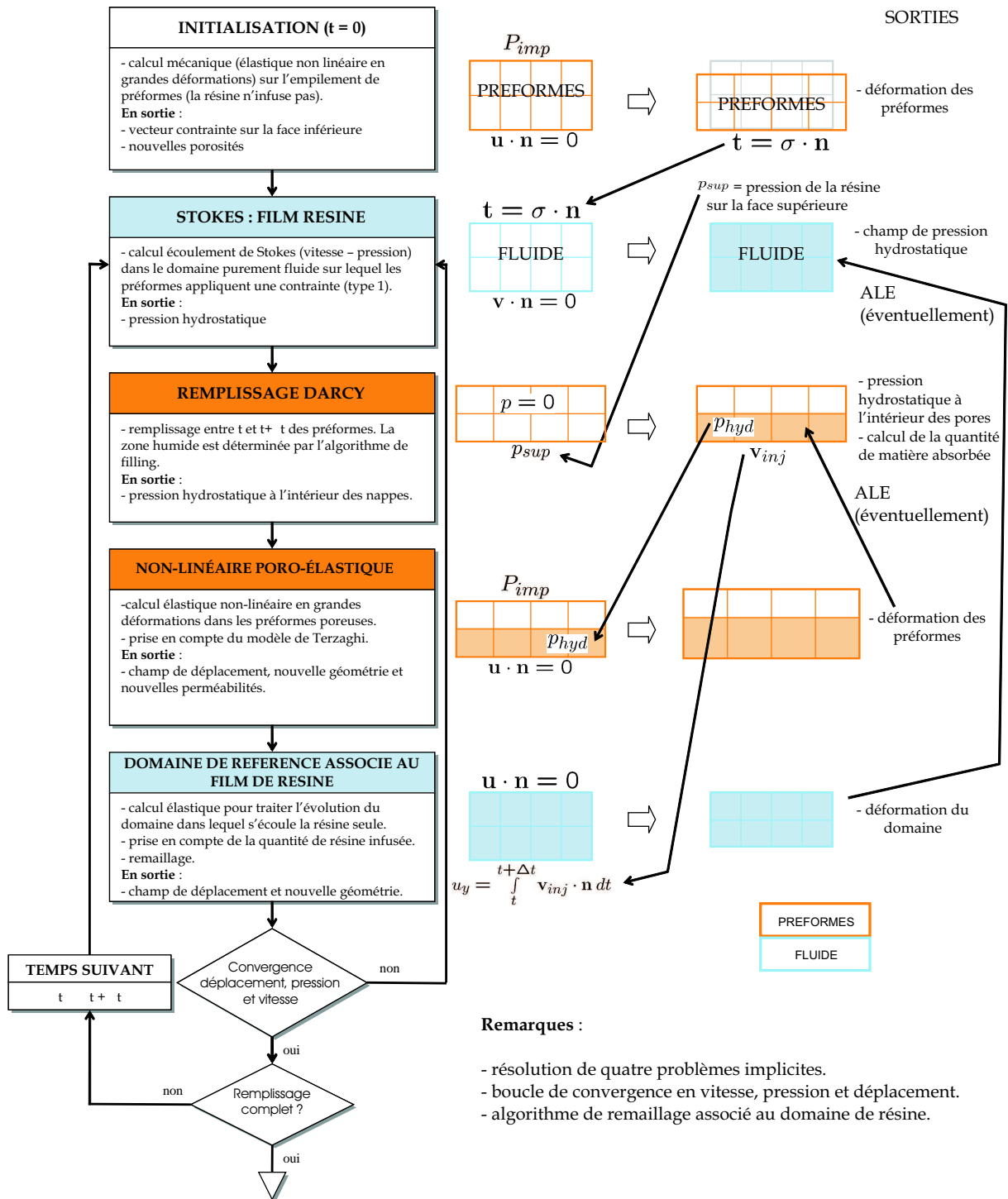


Figure 14.7 – Principe de couplage : algorithme pour le procédé RFI - couplage fort itératif entre l'écoulement de la résine dans le film de résine et l'écoulement dans les préformes compressibles.



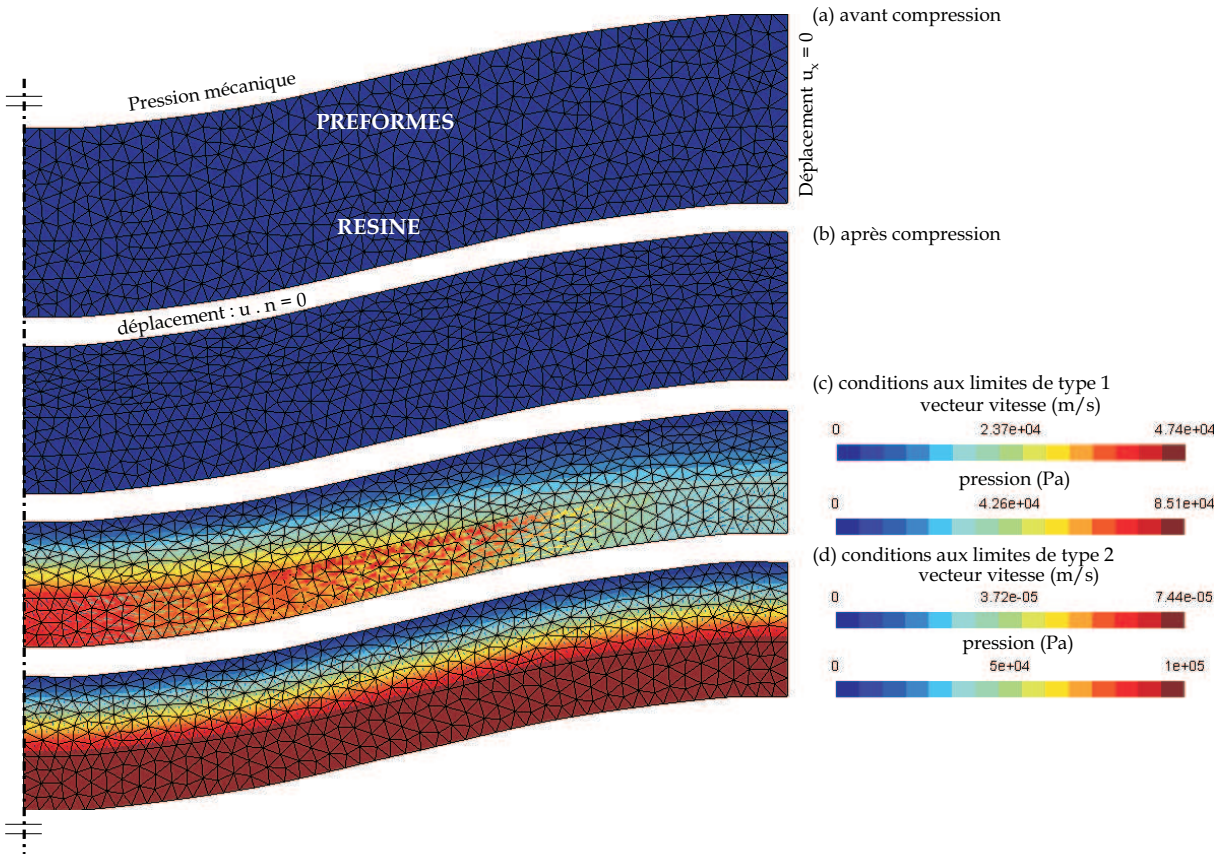


Figure 14.8 – Infusion d’une demi-coque par procédé *RFI* - (a) empilement préforme/résine, (b) pression mécanique due au sac à vide avant infusion, (c) préforme saturée à 100% - condition de type 1, (d) préforme saturée à 100% - condition de type 2.

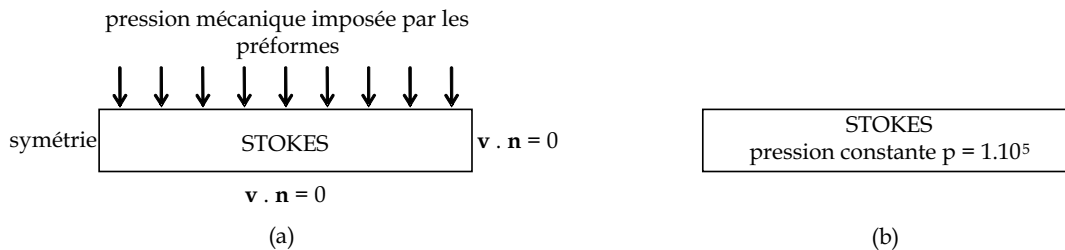


Figure 14.9 – Conditions aux limites dans la zone de Stokes pour le procédé *RFI* : (a) type 1, (b) type 2.

fois plus faible lorsque la pression imposée est constante dans la zone de Stokes. Dans ce cas, la porosité moyenne est également affectée par le type de condition aux limites, passant de 0,41 (type 1) à 0,45 (type 2) en fin d’infusion selon que la pression résulte de l’équilibre mécanique ou qu’elle est imposée.

La simulation d’une plaque plane sans effets de courbures a été réalisée. Hormis l’absence de courbures, les conditions de simulations et les caractéristiques de la préforme

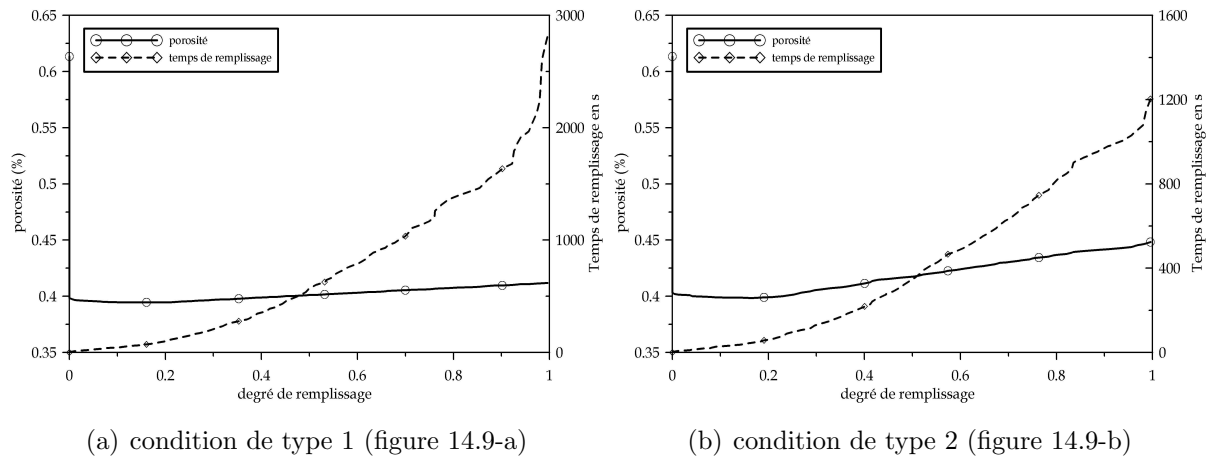


Figure 14.10 – Infusion d’une demi-coque par procédé *RFI* : évolution de la porosité et du temps de remplissage en fonction du degré de remplissage.

restent identiques. Dans ce cas, une pression hydrostatique homogène dans la zone de résine seule est observée. La figure 14.11 donne l’évolution de la pression hydrostatique moyenne à la frontière Stokes-Darcy au cours du remplissage. Le phénomène de résistance à l’infusion apparaît explicitement sur cette simulation : une diminution importante de la pression hydrostatique est observé en début d’infusion (elle passe de  $10^5$  Pa à  $6,6 \cdot 10^4$  Pa) et est suivie par une décroissance plus lente. Cette diminution indique une augmentation de la résistance à l’écoulement au fur et à mesure du remplissage des préformes. Ainsi, même dans un cas très simple, une pression constante n’est pas en mesure de représenter la complexité des procédés *RFI* où la pression de la résine est pilotée par les perméabilités et donc la déformation des préformes. Les simulations numériques d’infusion actuellement réalisées pour lesquels la pression est supposée constante dans la zone de Stokes ne sont donc plus valables pour des cas simples 1D, les simulations 2D et 3D ne sont donc pas raisonnablement envisageables.

## 14.4 Conclusion

Nous venons de vérifier que les simulations numériques ne sont pas capables de prédire les temps de remplissage correctement, pour partie à cause de la formulation trop simpliste du problème physique à résoudre, notamment en remplaçant la présence de résine par de simples conditions d’injection. Les résultats obtenus sont une illustration de ces difficultés.

Les simulations d’infusion présentées ici dans le cadre des procédés *LRI* et *RFI*, ne peuvent pas être validées à l’aide de modèles analytiques. Dans le cadre de ce travail de thèse nous avons insisté sur la validation séparée des différents outils numériques développés dans les bibliothèques *PRO-FLOT*. Dans le chapitre suivant nous proposons quelques



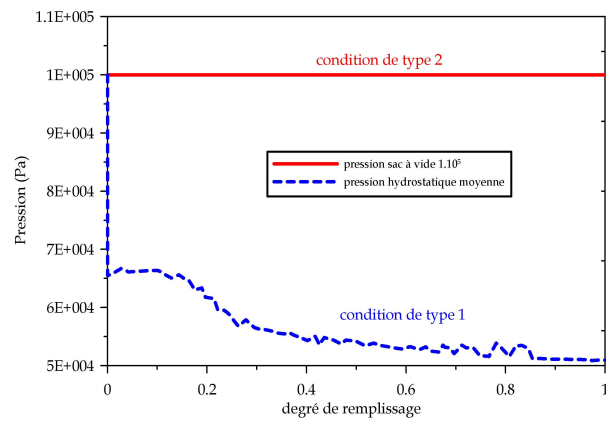


Figure 14.11 – Infusion d’une plaque plane par procédé *RFI* : évolution de la pression hydrostatique à la frontière Stokes-Darcy en fonction du degré de remplissage.

éléments de validation des modèles développés à l’aide d’essais expérimentaux.

# Chapitre 15

## Réflexions autour de la validation

### Sommaire

---

<b>15.1 Introduction</b>	<b>183</b>
<b>15.2 L'expérience réalisée</b>	<b>184</b>
15.2.1 La préforme	184
15.2.2 La résine	185
<b>15.3 Essai de compression</b>	<b>186</b>
15.3.1 L'expérience	186
15.3.2 La simulation	187
<b>15.4 L'essai d'infusion</b>	<b>188</b>
15.4.1 L'expérience	188
15.4.2 Simulation de l'infusion	190
<b>15.5 Confrontation modèle / expérience</b>	<b>192</b>
<b>15.6 Conclusion</b>	<b>192</b>

---

### 15.1 Introduction

Compte tenu de la complexité des modèles développés dans le cadre de la modélisation des procédés par infusion, seules des études expérimentales peuvent permettre de valider les différentes hypothèses retenues. Dans ce chapitre, une expérience relativement simplifiée d'infusion d'une préforme sèche plane (sans effet de courbure) est réalisée afin de valider l'algorithme développé dans le cadre du traitement des procédés de type *LRI*. La validation proposée ici repose à la fois sur des aspects purement mécaniques, *i.e.* la compression des nappes sèches lors de l'application de la pression du sac à vide, mais également sur des mesures réalisées lors de l'infusion (épaisseur, quantité de résine, *etc*

...). Dans un premier temps, une description de l'essai d'infusion *LRI* réalisé chez Hexcel Reinforcements est effectuée. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à des résultats numériques. Ce chapitre propose enfin des perspectives d'amélioration de ces premiers essais et, en parallèle, une critique des différentes hypothèses réalisées au niveau du modèle numérique et leurs implications sur les résultats obtenus.

## 15.2 L'expérience réalisée

L'expérience réalisée est représentée sur la photographie 15.1. Elle correspond à l'essai *LRI* de la figure 1.6, page 19. La pression appliquée par le sac à vide sur l'empilement de préformes n'est pas tout à fait la pression atmosphérique. Afin de garantir un meilleur tirage du vide, une seconde bâche à vide est placée sur l'empilement. L'essai réalisé montre une pression résiduelle de 3,1 *mbar*.

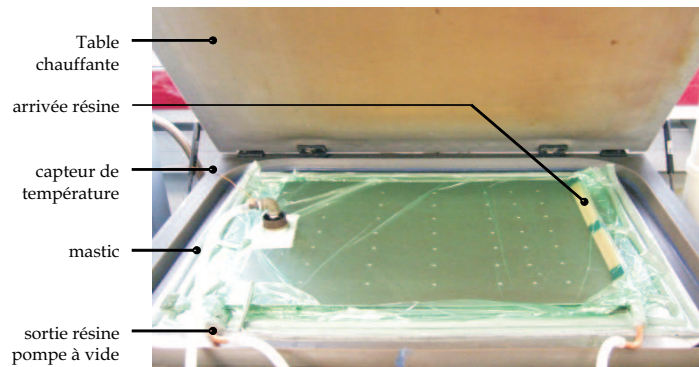
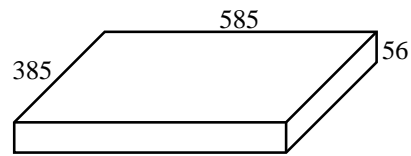


Figure 15.1 – Infusion d'une plaque par procédé *LRI* - le principe est décrit sur la figure 1.6.

### 15.2.1 La préforme

La préforme infusée est constituée d'un empilement de 100 nappes de NC2 bidirectionnel :  $[0,90]_{100}$ . Les dimensions initiales du stratifié sont répertoriées sur la figure 15.2. La masse mesurée de l'assemblage est 4,615 *kg*. Compte tenu des dimensions de la plaque, la masse surfacique est  $m_f^s = 20,49 \text{ kg/m}^2$ . La masse volumique des fibres de carbone est  $m_f = 1800 \text{ kg/m}^3$  (Berthelot (2005)). L'épaisseur initiale de la préforme sèche étant  $h = 56 \text{ mm}$ , sa porosité initiale est  $\phi = 1 - \phi_f = 1 - \frac{m_f^s}{m_f h} = 79,7\%$  où  $\phi_f$  désigne la fraction volumique de fibres.

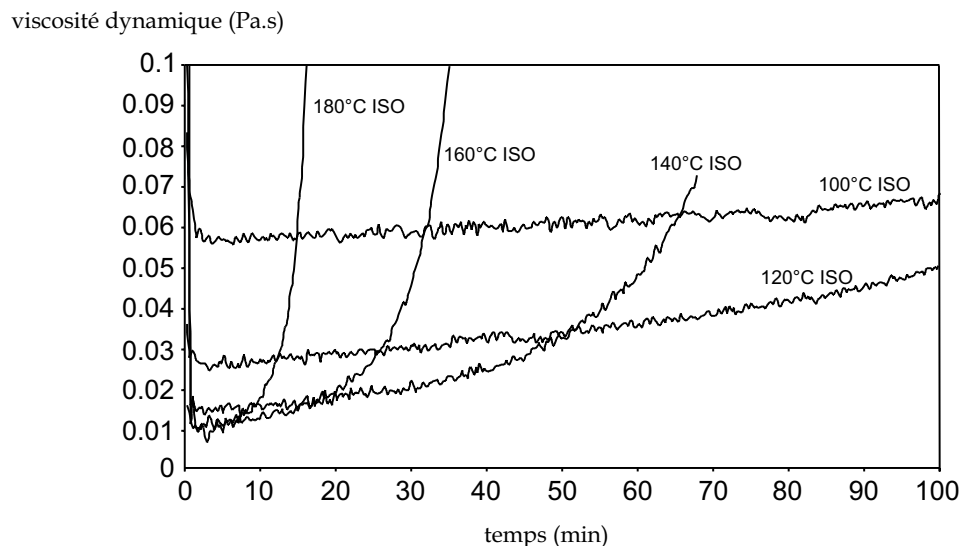
Note : compte tenu de la rigidité très faible de l'empilement de nappes NC2, et des conditions de mesures (mesure de l'épaisseur de la nappe sèche au pied à coulisse sur un bord), cette épaisseur initiale devra être utilisée avec précaution. Notons que l'épaisseur

Figure 15.2 – Dimension du stratifié (en *mm*) avant infusion.

résiduelle de la préforme, une fois le contre moule déposé, est d'environ 40 *mm* (épaisseur également déterminée au pied à coulisse après dépose et retrait du contre moule). Cette variation indique la présence d'effets irréversibles que nous avons mentionnés dans le paragraphe 5.3.2 de la partie II.

### 15.2.2 La résine

La résine utilisée est une résine de type HexFlow<sup>®</sup> RTM 6. Elle est conservée en dehors de la table chauffante dans un pot chauffant à 80°C. La température de consigne de la table chauffante étant de 120°C, une viscosité constante de 0,027 *Pa.s* est considérée pendant la totalité de l'essai (voir la Figure 15.3). Cette viscosité constante est utilisée dans le modèle éléments finis.

Figure 15.3 – HexFlow<sup>®</sup> RTM 6 Viscosité isotherme.

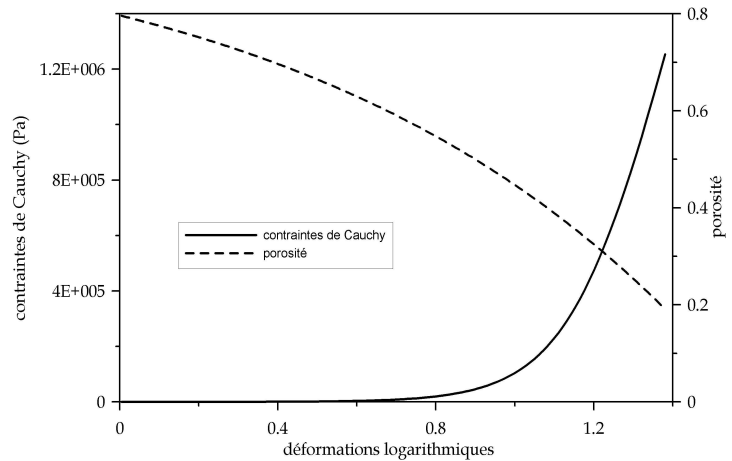
## 15.3 Essai de compression

### 15.3.1 L'expérience

L'essai de compression transverse sur l'empilement précédent (épaisseur 56 mm) est réalisé sur une machine de type Z300 ZWICK 300kN (voir figure 15.4-a). Après traitement et transformation de la courbe  ${}^tF = f({}^td)$ , la courbe exprimant les contraintes de Cauchy  ${}^t\sigma$  en fonction de déformations logarithmiques  ${}^t\epsilon$  est calculée (voir figure 15.4-b) selon la méthode présentée dans le paragraphe 8.3.1.2. Dans la suite, des coefficients de Poisson quasi-nuls sont considérés, conduisant à l'absence de déformations dans les directions transverses lors de la sollicitation dans l'épaisseur.



(a)



(b)

Figure 15.4 – Essai de compression des préformes : (a) machine de compression type Z300 ZWICK 300kN, (b) courbe de compression Cauchy-logarithmiques et porosité correspondante.

De toute évidence, la première partie de la courbe de compression, correspondant à de très fortes déformations pour de très faibles contraintes, n'est pas significative. Elle correspond à l'arrangement des différents plis entre eux. D'ailleurs, l'épaisseur résiduelle après compression est différente de l'épaisseur initiale, mais aucune mesure précise de cette épaisseur n'a été réalisée compte tenu des dispositifs de mesures disponibles lors de ces essais et de la souplesse de l'empilement de préformes. Enfin, la figure 15.4-b montre une porosité finale d'environ 20 %. Or, une analyse de la micro-structure des nappes montre

une compacité théorique maximale de 0,785 soit une porosité de 21,5 % (figure 15.5-b), proche du taux de fibres rencontré ici. Nous observons donc que la compacité de 0,907 pour un arrangement correspondant à la figure 15.5-b n'est pas envisageable pour les *NC2* sans détériorer le renfort.

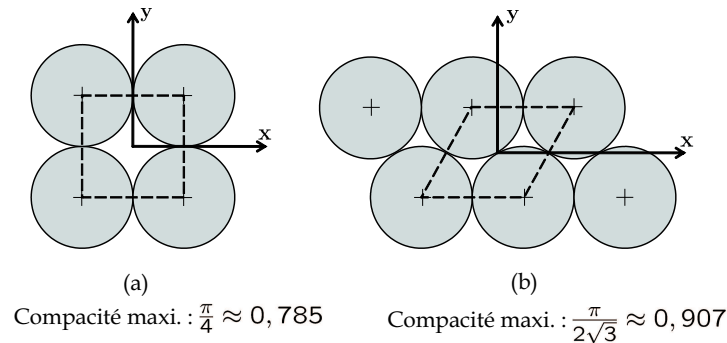


Figure 15.5 – Compacité maximale pour deux types d'arrangements parfaits de fibres cylindriques.

Pour limiter les problèmes numériques inhérents aux grandes déformations pendant la compression des nappes, il est possible d'effectuer un tronquage de cette courbe. En outre, ce tronquage permet d'éviter l'opération de remaillage des préformes en fin de compression avant infusion. En revanche, l'influence de ce tronquage sur les résultats obtenus lors des tests de compression doit être quantifiée. Nous avons réalisé cette validation à l'aide de l'outil de simulation mécanique développé dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> (voir simulation de l'essai de compression au paragraphe 15.3.2). Une très faible différence en terme d'épaisseur et de porosités finales a été constatée après compression pour ce niveau de tronquage. Pour la courbe tronquée, l'épaisseur initiale est de 29,45 mm, elle correspond à une porosité de 61,3 %. Après compression, l'épaisseur finale obtenue est de 20,62 mm (voir §15.3.2). Cette épaisseur initiale correspond à l'épaisseur pour un niveau de pression égale à 5% de celui appliqué par le sac à vide lors du tirage complet du vide. Avant infusion, une mesure de l'épaisseur de la préforme sous l'action du sac à vide et du contre moule a été réalisée sur le bord de la plaque, l'épaisseur était d'environ 20 mm.

### 15.3.2 La simulation

Pour cette géométrie simple, la loi de comportement non tronquée associée à un coefficient de Poisson  $\nu = 0$  est appliquée à une préforme d'épaisseur initiale 56 mm et de porosité  $\phi = 79,7$  %. Cette loi de comportement est isotrope dans la mesure où la simulation présentée ici se rapproche d'un essai de compression 1D dans les directions principales (pas totalement puisque l'hypothèse des déformations planes dans les directions situées dans le plan est considérée). La figure 15.6 présente les résultats obtenus en

supposant la loi non-linéaire représentée sur la figure 15.4-b. Ce problème est résolu en grandes déformations au moyen de la formulation Lagrangienne Réactualisée développée dans le chapitre 8. Les conditions aux limites de l'essai sont synthétisées sur la figure 15.6.

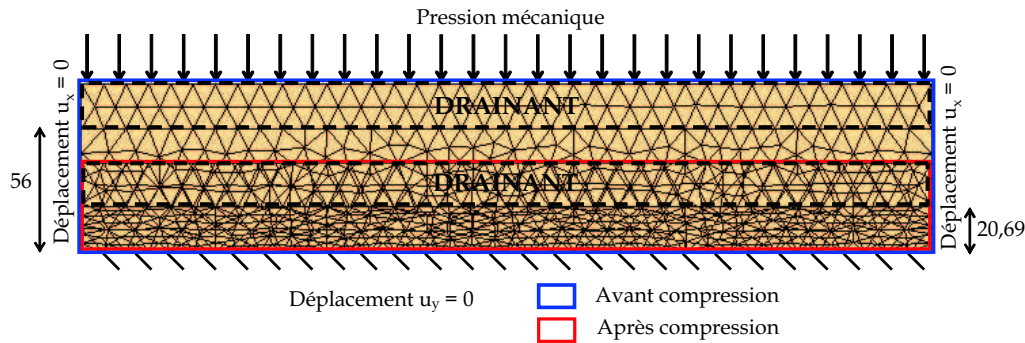


Figure 15.6 – Compression de la préforme : conditions aux limites et dimensions en  $mm$  (voir aussi figure 15.9).

Pour les conditions de simulations choisies (pression appliquée sur la face supérieure égale à  $1 \text{ atm}$ ), l'épaisseur de la préforme passe de  $56 \text{ mm}$  à  $20,69 \text{ mm}$ . La porosité finale est égale à  $45,1 \%$  soit un TVF de  $54,9 \%$ . L'épaisseur de la préforme obtenue par la simulation est cohérente avec l'épaisseur mesurée au pied à coulisse avant infusion d'environ  $20 \text{ mm}$  (mesurée sur le bord de la plaque). Pour information, l'épaisseur obtenue avec la loi tronquée est de  $20,62$  pour une porosité de  $44,80 \%$ . La corrélation avec l'épaisseur mesurée expérimentalement sur la plaque avant infusion est donc assez bonne. Néanmoins, aucune mesure précise de l'épaisseur pendant la compaction n'est possible compte tenu de l'ensemble du dispositif expérimental qui vient appliquer la pression du sac à vide.

## 15.4 L'essai d'infusion

### 15.4.1 L'expérience

La figure 15.7 représente une mesure de l'évolution de la quantité de résine infusée en fonction du temps de remplissage. La quantité de résine absorbée par la plaque et le dispositif expérimental en fin d'infusion est de  $2,222 \text{ kg}$  (dans le pot de récupération de la résine, les flexibles, le drainant et les préformes). La plaque infusée est présentée sur la photographie 15.8-a. Une fois les bords découpés et les tissus d'arrachage enlevés, les nouvelles dimensions de la plaque infusée sont  $562 \text{ mm} \times 354 \text{ mm}$ . Les épaisseurs ont été mesurées en 12 points à l'aide d'un comparateur (voir figure 15.8-b).

Une analyse statistique montre une épaisseur moyenne de  $18,85 \text{ mm}$  avec un écart type

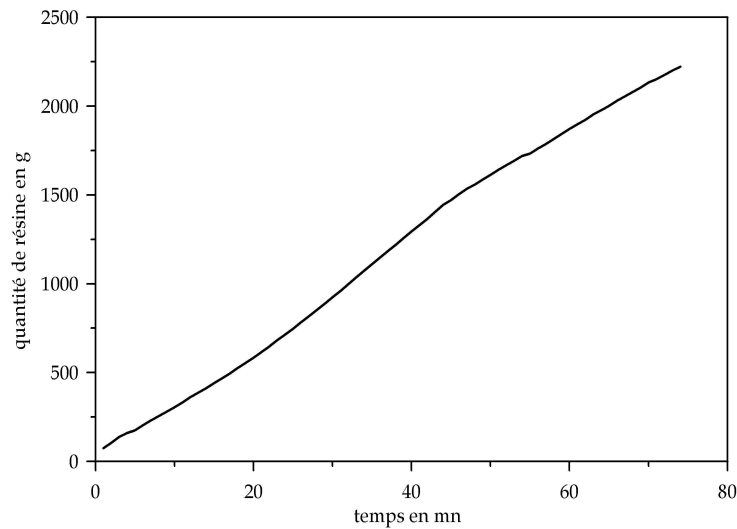
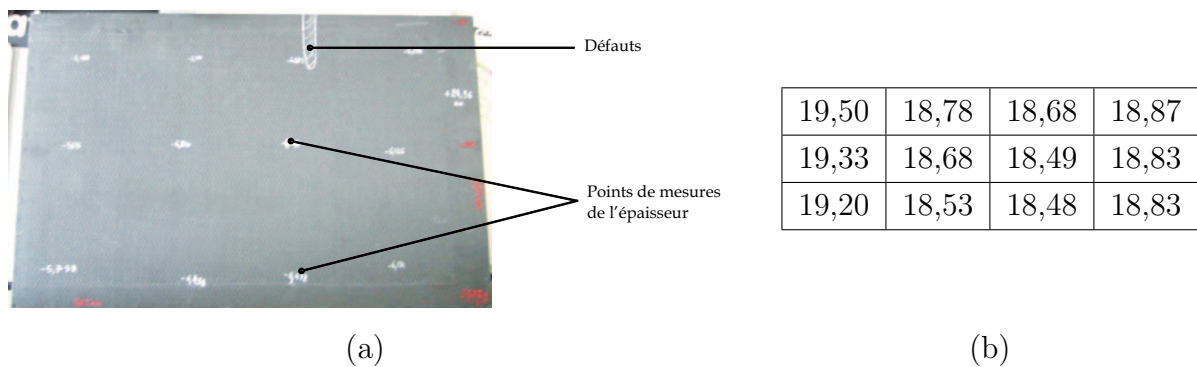


Figure 15.7 – Quantité de résine infusée en fonction du temps de remplissage.

Figure 15.8 – Infusion d'une plaque par procédé *LRI* : (a) photographie de la plaque infusée, (b) Mesures d'épaisseur en *mm* après démoulage.

de 0,33 *mm*. La masse du stratifié en fin d'infusion est de 5,672 *kg*. La masse de préforme après l'opération de découpage est de  $\frac{562 \times 354}{585 \times 385} \times 4,615 = 4,077$  *kg*. La masse de résine à l'intérieur de cette même plaque est donc de 1,595 *kg*. Une importante quantité de résine (2,222 – 1,595 = 0,627 *kg*) a été perdue dans la découpe, les conduits d'alimentation, le drainant et dans le pot de résine situé en sortie d'évent. A partir de l'épaisseur de la plaque infusée, un calcul du TVF (taux volumique de fibre) est réalisé : TVF = 59,3 % (voir paragraphe 15.2.1 pour la méthode de calcul). Ce taux volumique de fibres peut également être calculé à partir de la masse. Dans ce cas  $TVF = \frac{V_f}{V_i} = \frac{M_f / \rho_f}{M_r / \rho_r + M_f / \rho_f} = 61,8$  %. Ces fractions volumiques correspondent aux fractions volumiques attendues dans l'aéronautique par exemple.



### 15.4.2 Simulation de l'infusion

Le modèle développé dans le cadre de la simulation du procédé *LRI* est utilisé. Ici, les conditions de type 1 et 2 sont équivalentes en raison de l'absence d'effets de courbures. L'infusion d'une plaque d'épaisseur 56 mm et de largeur 385 mm en déformations planes est réalisée. Le calcul de la perméabilité de la plaque est effectué à l'aide d'un modèle de type Carman Kozeny pour lequel la perméabilité dépend essentiellement de la porosité (voir équation 5.17, page 61). Dans cette analyse, le diamètre moyen des fibres est de  $5.10^{-6}$  m et la constante de Kozeny  $h_k$  égale à 10. Pour une porosité initiale de 79,7% à 56 mm, nous avons donc une perméabilité moyenne de  $1,92.10^{-12}$  m<sup>2</sup>. Après compression elle est de  $5,11.10^{-14}$  m<sup>2</sup>. Pour des raisons de simplification, la perméabilité est supposée isotrope. La rigidité du drainant est supposée 1000 fois supérieure à celle des préformes. La rigidité longitudinale des nappes est 10 fois plus importante que la rigidité transverse, elle-même donnée par la courbe de compression expérimentale du paragraphe 15.4-b.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 15.9. Les conditions aux limites sont schématisées sur la géométrie initiale (figure 15.9-a). Après compression des préformes sous l'action du sac à vide, les éléments dans la zone de préformes présentent un très mauvais facteur de forme. Un remaillage est réalisé conformément à la routine développée (voir chapitre 11). Le nombre d'éléments dans les préformes et le drainant est augmenté afin de proposer une meilleure précision pour la simulation de la phase d'injection (voir figure 15.9-c).

Les résultats de la simulation de l'infusion indiquent une augmentation de l'épaisseur de la plaque de 1,92 mm (voir figure 15.9-d). Cette augmentation est conforme à celle constatée dans le chapitre précédent (paragraphe 14.2 du chapitre 14) dans le cas de la simulation par procédé *LRI*, mais contraire aux variations observées expérimentalement dans le paragraphe 15.4.1 (diminution de l'épaisseur de 20 mm à 18,85 mm). Néanmoins, la diminution de l'épaisseur au cours de l'expérience d'infusion est contraire à l'évolution proposée par le modèle de Terzaghi d'une part et aux évolutions constatées expérimentalement par Kang *et al.* (2001) et Ahn *et al.* (1990) lors de leurs essais d'infusion d'autre part. Avant d'interpréter et de dégager des informations trop hâtives sur cette première expérience, il est important de reconsidérer toutes les hypothèses réalisées dans la simulation numérique. Par ailleurs, un certain nombre d'effets constatés expérimentalement n'ont pas encore été intégrés dans le modèle. Cette première expérience d'infusion doit donc être vue comme un point de départ pour l'enrichissement du modèle par confrontation avec l'expérience.

La figure 15.10 présente l'évolution de la porosité et du temps de remplissage de la plaque obtenu par la simulation. L'augmentation de la porosité en même temps que l'épaisseur de la plaque sous l'action du modèle de Terzaghi conduit à des temps de

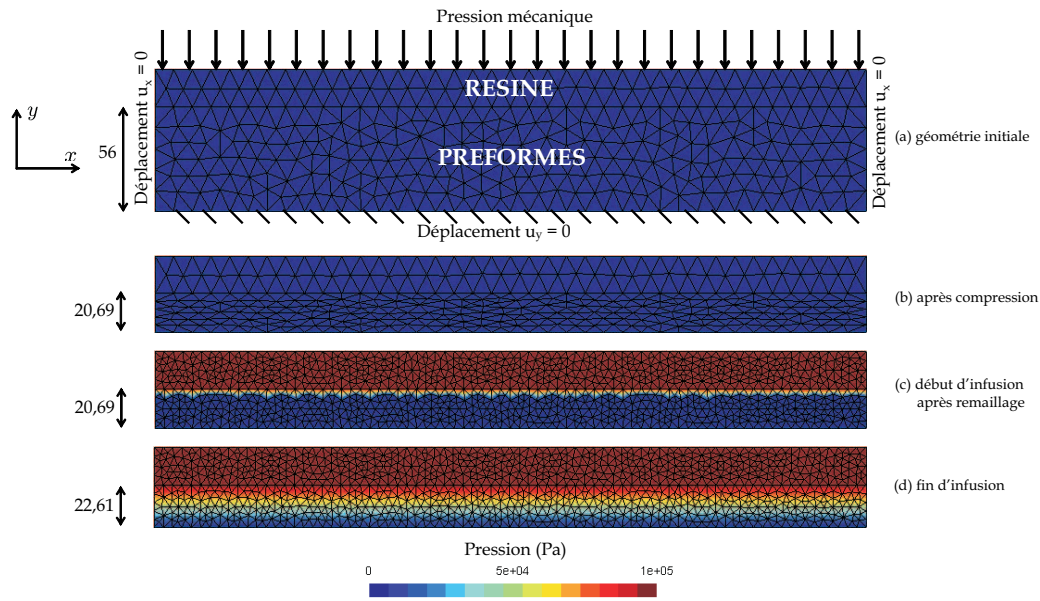


Figure 15.9 – Infusion d'une plaque plane (distribution de pression) : Test de validation du procédé *LRI*.

remplissage plus courts que ceux observés lors des essais expérimentaux. Le milieu résiste moins à l'écoulement consécutivement à l'augmentation de la perméabilité. Le lecteur doit par ailleurs se rappeler que les prévisions des temps d'infusion demeurent le point faible des analyses numériques en raison de simplifications drastiques mais également par méconnaissance des perméabilités.

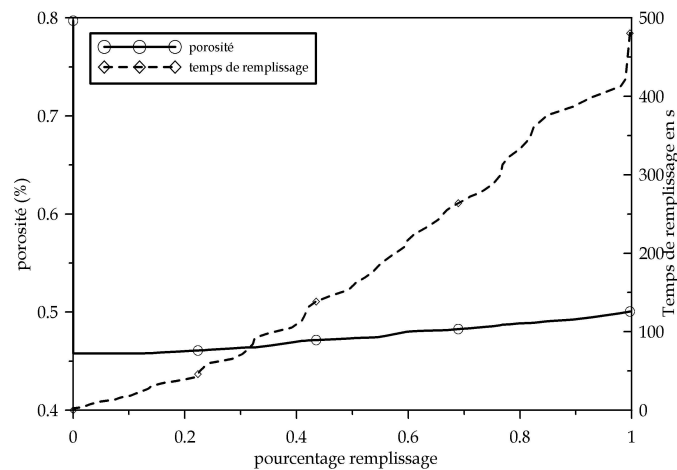


Figure 15.10 – Infusion d'une plaque plane par le procédé *LRI* : évolution de la porosité et du temps de remplissage en fonction du degré de remplissage.

## 15.5 Confrontation modèle / expérience

Des critiques peuvent être formulées quant aux essais et aux simulations réalisés. Concernant l'essai tout d'abord, il faut insister sur le fait que le vide n'est pas parfaitement réalisé. Parallèlement à ce problème, des problèmes d'uniformité du chargement peuvent être mentionnés. Notons enfin que la viscosité de la résine est assez mal maîtrisée compte tenu de l'utilisation d'une table chauffante. Au niveau du modèle plusieurs contraintes expérimentales sont assez mal représentées. Notons tout d'abord un problème de conditions aux limites. Ensuite, les déformations planes considérées dans les deux directions transverses ne sont peut être pas représentatives de l'essai de compression malgré les dimensions importantes de la plaque. D'autre part, les perméabilités utilisées dans le modèle sont assez mal connues. Notons par ailleurs que la simulation numérique emploie une perméabilité effective et ne tient pas compte des phénomènes de saturation. Enfin, le paramètre de Biot qui pourrait être utilisé est pour l'instant fixé à 1 (modèle de Terzaghi).

Ces essais permettent cependant d'envisager quelques mécanismes physiques qui pourraient être à l'origine de la diminution de l'épaisseur. Lors de l'infusion, il peut se produire un réarrangement des fibres qui expliquerait ce phénomène. Le modèle ne permet pas de prendre en compte ce phénomène qui dépendrait de la géométrie des préformes (figure 15.5). Par ailleurs le modèle actuel ne prend pas en compte les aspects thermo-mécaniques, notamment les phénomènes de retrait de la résine lors de la réticulation d'environ 3 % en volume. De nouvelles expériences doivent donc être menées parallèlement à un enrichissement du modèle afin de prévoir les phénomènes intervenant dans ce cas précis. Il serait sans doute préférable de réaliser ces essais dans un autoclave afin d'assurer un meilleur maintien de la température et donc une bonne maîtrise de la viscosité qui serait utilisée dans le modèle numérique. Un certain nombre de dispositifs techniques doivent également être mis au point afin de suivre précisément l'évolution des épaisseurs avant compression, pendant l'infusion et en fin d'infusion après réticulation de la résine.

## 15.6 Conclusion

Cette première expérience d'infusion dans le cadre de la validation des modèles développés pour le procédé *LRI*, bien que partiellement décevante, a fourni de nombreuses perspectives au travail réalisé dans le cadre de cette thèse. Elle montre la nécessité, à ce stade de l'étude, de mener en parallèle une amélioration du modèle numérique et la mise au point de dispositifs expérimentaux pour valider de nouveaux modèles physiques. D'ailleurs, les travaux de thèse réalisés ici se poursuivent en ce sens à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne.

# Conclusion générale

Les procédés d'élaboration des matériaux composites par infusion de type *LRI* et *RFI* sont très prometteurs. Ils permettent une réduction importante des coûts de fabrication, notamment des coûts de mains d'œuvre et d'outillage et permettent, s'ils sont associés à l'utilisation de renforts composites multi-axiaux performants, de réaliser des structures composites présentant d'excellentes caractéristiques mécaniques. Néanmoins, la complexité des mécanismes physiques interagissant lors de l'infusion de la résine dans les préformes rend difficile la prévision des caractéristiques physiques et mécaniques des structures composites en service. Afin de promouvoir ces techniques d'élaboration actuellement réservées à des applications très hautes performances pour l'aéronautique, et de réduire les coûts de mise au point de nouvelles solutions composites, ce travail de thèse propose une analyse complète et systématique des phénomènes multi-physiques (mécanique des solides, mécanique des fluides, thermique, ...) en vue de l'élaboration d'un outil numérique industriel basé sur la méthode des éléments finis.

L'analyse bibliographique réalisée lors de la première partie de l'étude a permis de dégager deux principales difficultés liées à la modélisation de l'infusion. Contrairement aux techniques traditionnelles par injection, l'infusion se déroule généralement dans un environnement semi-rigide. Les dimensions du stratifié ne sont donc pas imposées par la géométrie des moules utilisés. Par conséquent, lors de l'écoulement de la résine, les préformes vont subir d'importantes déformations liées d'une part à la contribution des pressions appliquées par le sac à vide, et d'autre part aux pressions engendrées par la résine à l'intérieur des pores. La première difficulté concerne donc la modélisation de la déformation des préformes imprégnées lors de l'infusion de la résine, et inversement l'effet de la déformation des nappes sur l'écoulement de la résine. L'infusion nécessite également l'étude des conditions aux limites spécifiques au couplage entre une zone purement fluide (la résine liquide) et une zone constituée du mélange renfort et résine. L'étude de ces conditions de couplage constitue la deuxième difficulté soulevée lors de l'analyse bibliographique.

Compte tenu de la complexité des phénomènes étudiés, une modélisation complète et générale de l'infusion a été proposée dans la partie II. Le modèle développé repose sur une analyse systématique du comportement de chaque constituant dans chacune des zones concernées par l'infusion, *i.e.* la résine seule, les préformes sèches et les préformes humides. Les interactions entre la résine et les renforts ont été intégrées directement dans les équations de conservation au moyen du modèle de Terzaghi et d'une modification de la conservation de la masse (approche *ALE*). Les conditions de couplage entre les différentes zones sont modélisées au moyen de conditions aux limites particulières explicitées au cours de cette partie. A l'issue de cette analyse systématique, une modélisation complète des phénomènes mécaniques (solide et fluide) et thermo-physico-chimiques est proposée. Dans la zone hétérogène, le modèle développé comporte 10 degrés de liberté en 3D (3 déplacements pour les préformes, 3 vitesses, la pression, la saturation pour la résine, la température du mélange et le degré de réticulation).

L'implémentation de ce modèle dans le code de calcul par éléments finis *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> a été réalisée de manière progressive. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à un couplage fort indirect de la mécanique des fluides et de la mécanique des solides. Le couplage avec les aspects thermiques n'a pas été considéré. En effet, compte tenu des hypothèses retenues sur les procédés, l'infusion a lieu à température constante. D'autre part, le modèle thermo-physico-chimique que nous avons traité par différences finies en 1D ne pose pas de problème numérique particulier à condition de bien connaître les propriétés thermo-physico-chimiques (notamment celles du milieu hétérogène) qui dépendent notamment des caractéristiques mécaniques de la préforme telle que sa porosité.

Afin de traiter les aspects mécaniques des procédés *RFI* et *LRI* dans leur globalité, nous avons donc développé quelques outils numériques spécifiques dans les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup>, jusque-là dédiées au traitement de problèmes de diffusion linéaire. Ces outils ont été présentés dans la partie III de cette thèse. Une nouvelle formulation Lagrangienne Réactualisée à tout d'abord été intégrée dans les bibliothèques *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> afin de traiter la déformation non-linéaire des préformes sous l'action de la pression appliquée par le sac à vide et de la pression de résine dans les pores. Cette formulation a été validée par comparaison avec des résultats analytiques, obtenus par simplification des hypothèses de comportement, puis des résultats numériques fournis par d'autres codes commerciaux (*Abaqus*<sup>TM</sup> et *Systus*<sup>TM</sup>). Le problème vitesse-pression correspondant à l'écoulement de la résine suivant les lois de Darcy et de Stokes a été traité à l'aide d'une approche mixte basée sur les éléments P1+/P1 et P1-bulle/P1. Les résultats fournis pour des cas tests sont en excellent accord avec les résultats analytiques et également avec les résultats fournis par

---

*FEM-LAB*<sup>TM</sup> pour le cas de la cavité fermée. La validation du traitement numérique du modèle de Terzaghi a été réalisée par comparaison avec des résultats analytiques. Enfin, les outils numériques développés dans le cadre du traitement des conditions cinématiques entre les degrés de liberté puis l'algorithme de remaillage pour le traitement de la disparition des zones de résine et de la dilatation des préformes ont ensuite été validés avec succès, soit par comparaison avec d'autres tests numériques, soit par comparaison avec des résultats analytiques. Une généralisation 3D des formulations développées dans le cadre du traitement du comportement non-linéaire des préformes et de l'écoulement incompressible du fluide a également été proposée.

Enfin, des algorithmes numériques ont été présentés dans le cadre de la modélisation des procédés par infusion *LRI* et *RFI*. Dans le premier algorithme, afin d'étudier la déformation des préformes, la zone de résine n'est pas considérée. Cette analyse s'apparente à des simulation d'injection à pression ou à vitesse imposée. Ce type de modèle peut notamment être appliqué aux procédés *VARTM*. Les deux algorithmes suivants, élaborés pour l'étude des procédés *RFI* et *LRI*, reposent également sur un couplage faible de 3 ou 4 problèmes implicites : mécanique des fluides à l'intérieur et à l'extérieur des préformes, mécanique des solides pour la déformation des nappes et éventuellement mécanique des solides pour le déplacement du domaine de résine. Afin de valider ces résultats une étude expérimentale à été réalisée pour le procédé *LRI*. Bien que les aspects purement mécaniques indiquent une très bonne corrélation avec l'expérience, le modèle et les conditions de couplage entre la résine et les préformes doivent être enrichies. En effet, il semblerait que l'évolution de l'épaisseur lors de l'infusion soit inverse à l'évolution proposée par le modèle, bien que l'évolution prévue par le modèle soit conforme aux évolutions décrites dans certaines références bibliographiques (Kang *et al.* (2001) et Ahn *et al.* (1990)). Le retrait de la résine lors de la réticulation pourrait expliquer les différences constatées. Par ailleurs, il est probable que des phénomènes de réarrangement des fibres se produisent au cours de l'infusion.

Pour résumer, un modèle multi-physique général a donc été proposé pour la modélisation des procédés par infusion. L'aspect systématique et général de ce modèle le rend facilement modifiable en vue d'intégrer de nouvelles interactions (mouillabilité, réarrangement de fibres, ...). Les outils numériques développés dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> afin de traiter ce type de problème doivent ainsi servir de base pour un approfondissement et une amélioration du modèle proposé.

Les perspectives à ce travail sont nombreuses. Nous proposons de les diviser en trois

grandes familles.

En premier lieu, des efforts de recherche importants doivent être fournis afin d'améliorer la qualité d'identification des différents paramètres du procédé. Les perméabilités transverses doivent être caractérisées en régime transitoire et stationnaire afin de fournir des simulations ne se limitant plus à une représentation qualitative des procédés utilisés, notamment en terme de temps d'injection. Par ailleurs, les lois de comportement anisotropes des préformes doivent être mesurées de manière plus précise en particulier dans la direction longitudinale. Les composantes du tenseur de comportement orthotrope devront être identifiées précisément. Enfin, la prise en compte de la mouillabilité permettra d'améliorer la qualité des résultats notamment en prenant en compte l'influence de la saturation sur la perméabilité. Elle repose sur l'utilisation d'une relation expérimentale entre la pression capillaire et la saturation. Ces différentes améliorations peuvent être réalisées, dans un premier temps, en parallèle à des simulations sur des nappes non déformables.

Dans un second temps, le modèle développé dans le cadre de la modélisation des procédés d'élaboration des matériaux composites par infusion doit intégrer d'autres phénomènes physiques afin de modéliser plus précisément les interactions entre les fibres et la résine et l'évolution des propriétés physiques (porosité, viscosité, ...) de ces composants. En premier lieu, l'intégration d'un couplage fort direct entre la mécanique des fluides (écoulement de Darcy) et la mécanique des solides (déformation des nappes) conduira à un gain de temps conséquent en supprimant la boucle itérative sur les deux problèmes précédents. La prise en compte des phénomènes thermo-physico-chimiques peut conduire à mieux modéliser les temps d'infusion (variation de la viscosité au cours de l'infusion) et permettra de prendre en compte les phénomènes de retrait de la résine lors de la réticulation. La diminution des épaisseurs et des fractions volumiques de fibres associée à ces phénomènes, que nous avons par ailleurs constaté lors de l'expérience *LRI*, est également une conséquence des phénomènes de réarrangement de fibres. Il est probable que l'utilisation d'une modélisation multi-échelle, basée sur des phénomènes de réarrangement géométriques à l'échelle microscopique, peut permettre de remonter aux propriétés physiques macroscopiques des préformes. Le couplage fort entre l'écoulement dans la zone libre et l'écoulement dans le milieu poreux saturé pose également des problèmes. Les phénomènes d'échelles importants intervenant entre ces deux zones, notamment sur les vitesses, conduisent à des difficultés numériques. Des méthodes numériques particulière comme la méthode de Galerkin discontinue peuvent apporter des réponses à ces problèmes et conduire à une amélioration des temps de calcul. Notons ensuite que ces développements dans la partie solveur de *PAM-RTM<sup>TM</sup>* (*PRO-FLOT<sup>TM</sup>*) doivent être accompagnés d'une amélioration

---

des fonctionnalités de l'interface graphique. Par exemple, la gestion de l'évolution de la géométrie des renforts permettra d'éviter les post-traitements externes (*GMSH*®) numériquement très coûteux. Enfin, la prévision des contraintes résiduelles dans le composite permettra d'étudier le comportement de la structure en service.

Pour clore ces pistes d'amélioration, les modèles actuellement développés dans le cadre de la modélisation des procédés *LRI* et *RFI* peuvent être utilisés afin de poursuivre les investigations expérimentales. Des études plus précises doivent permettre de proposer des protocoles expérimentaux permettant de valider les hypothèses réalisées et d'améliorer les modèles utilisés. Par ailleurs des études paramétriques (par exemple des « plans d'expérience ») doivent permettre de mieux comprendre l'influence des différents paramètres du procédé et de caractériser les grandeurs physiques qui interviennent principalement lors de la variation des épaisseurs et des fractions volumiques de fibres.

Les outils numériques développés dans le cadre de l'étude des procédés par infusion peuvent être appliqués dans un large domaine d'activités. Ces domaines concernent à la fois des applications en biomécanique (densification des os, absorption de substance par la peau sous chargement, ...), l'étude de l'écoulement dans les sols en géologie, la prise en compte des phénomènes de séchage, ainsi que des applications dans le domaine du génie civil et de la sécurité (étude du comportement de bétons humides lors d'un incendie, Schrefler (2001)). La multidisciplinarité des applications des modèles développés justifie la priorité accordée ici aux développements d'outils numériques efficaces et stables, et l'attention portée lors de la validation de ces outils et de leurs couplages.





# Bibliographie

- ABAQUS : *Documentation Abaqus*. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 2005.
- B. ABBÈS, R. AYAD et A. RIGOLOT : Une méthode de pseudo-concentration pour la simulation 3D volumique du remplissage de moules d'injection. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 8(7):695–724, 1999.
- J.A. ACHESON, P. SIMACEK et S.G. ADVANI : The implications of fiber compaction and saturation on fully coupled VARTM simulation. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 35(2):159–169, 2004.
- S.G. ADVANI et M.V. BRUSCHKE : A numerical approach to model non-isothermal viscous flow through fibrous media with free surfaces. *International Journal for numerical methods in fluids*, 19:575–603, 1994.
- M. AFENDI, W.M. BANKS et D. KIRKWOOD : Bubble free resin for infusion process. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(6):739–746, 2005.
- K.J. AHN, J.C. SEFERIS et L. LETTERMAN : Autoclave resin infusion process : analysis and prediction of resin content. *S.A.M.P.E. Quarterly*, 21(2):3–10, 1990.
- D. AMBROSI, A. FARINA et L. PREZIOSI : Recent developments and open problems in composites materials manufacturing. *In Progress in Industrial Mathematics*, pages 475–487. Springer, 2002.
- V. ANTONUCCI, M. GIORDANO, L. NICOLAIS, A. CALABRO, A. CUSANO, A. CUTOLO et S. INSERRA : Resin flow monitoring in resin film infusion process. *Journal of Materials Processing Technology*, 143-144:687–692, 2003.
- D.N. ARNOLD, F. BREZZI et M. FORTIN : A stable finite element for the stokes equations. *Estratto da Calcolo*, 21(4):337–344, 1984.
- E.J. BARBERO : *Introduction to composite materials design*. Taylor & Francis Group, 1998. ISBN 1560327014.

- P. BASTIAN et V. REICHENBERGER : Multigrid for higher order discontinuous galerkin finite elements applied to groundwater flow. Technical Report 2000-37 SFB 359, Heidelberg University, 2000 2000.
- J.L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, 1990. ISBN 2866012437.
- J. BEAR : *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, 1990. ISBN 0486656756.
- E. BECHET, E. RUIZ et F. TROCHU : Adaptive mesh generation for mould filling problems in resin transfer moulding. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(9 SU -):813–834, 2003.
- G. BECHTOLD et L. YE : Influence of fibre distribution on the transverse flow permeability in fibre bundles. *Composites Science and Technology*, 63(14):2069–2079, 2003.
- E. B. BELOV, S. V. LOMOV, Ignaas VERPOEST, T. PETERS, D. ROOSE, R. S. PARNAS, K. HOES et H. SOL : Modelling of permeability of textile reinforcements : lattice boltzmann method. *Composites Science and Technology*, 64(7-8):1069–1080, 2004.
- T. BELYTSCHKO, W.K. LIU et B. MORAN : *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, 2000. ISBN 0471987743.
- T. BELYTSCHKO, C. PARIMI, N. MOES, N. SUKUMAR et S. USUI : Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(4):609–635, 2003.
- J.M. BERGHEAU et R. FORTUNIER : *Simulation numérique des transferts thermiques*. Hermès - Lavoisier édition, 2004. ISBN 2-7462-0976-4.
- J.M. BERGHEAU, G. MANGIALENTI et F. BOITOUT : Contribution of numerical simulation to the analysis of heat treatment and surface hardening processes. *In Heat Treat 98, 18th ASM Heat Treating Society Conference and Exposition*, pages 681–690, Rosemont, Illinois, USA, 1998.
- J.M. BERTHELOT : *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. Tec & Doc Lavoisier, Paris, 2005. ISBN 2743007710.
- S. BICKERTON, M. J. BUNTAIN et A. A. SOMASHEKAR : The viscoelastic compression behavior of liquid composite molding preforms. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(5):431–444, 2003.

- 
- E. BIGOT : *Simulation tridimensionnelle du remplissage de corps minces par injection*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- A. BIKAS, N. PANTELELIS et A. KANARACHOS : Computational tools for the optimal design of the injection moulding process. *Journal of Materials Processing Technology*, 122(1):112–126, 2002.
- L. BILLI et A. FARINA : Unidirectional infiltration in deformable porous media : mathematical modeling and self-similar solution. *Quarterly of applied mathematics*, 58 (1):85–101, 2000.
- C. BINETRUY, B. HILAIRE et J. PABIOT : The interactions between flows occurring inside and outside fabric tows during RTM. *Composites Science and Technology*, 57:587–596, 1997.
- M.A. BIOT : General theory of three dimensional consolidation. *Journal of applied physics*, 12(2):155–164, 1941.
- R.B. BIRD, W.E. STEWART et E.N. LIGHTFOOT : *Transport phenomena*. John Wiley & Sons, Inc. 2002. ISBN 0471410772.
- L. BIZET, J. BRÉARD, G. BOUQUET, J.P. JERNOT et M. GOMINA : Microstructure et perméabilité d'un composite unidirectionnel à fibres longues. Relation entre porosité et constante de Kozeny. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, 15(3):413–419, 2005.
- D. C. BLEST, S. MCKEE, A. K. ZULKIFLE et P. MARSHALL : Curing simulation by autoclave resin infusion. *Composites Science and Technology*, 59(16):2297–2313, 1999.
- K. BOOMSMA, D. POULIKAKOS et Y. VENTIKOS : Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized periodic cell structure. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24(6):825–834, 2003.
- R. BORJA : Cam-Clay plasticity. Part V : A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:5301–5338, 2004.
- C. BOUTIN : Study of permeability by periodic and self-consistent homogenisation. *European Journal Mechanics*, 19:603–632, 2000.
- J. BREARD, Y. HENZEL et F. TROCHU : A standard characterization of saturated and unsaturated flow behaviors in porous media. *In 12th International Conference on Composite Materials ICCM12*, Paris, 1999.

- J. BREARD, Y. HENZEL, F. TROCHU et R. GAUVIN : Analysis of dynamic flows through porous media. Part II : Deformation of a double-scale fibrous reinforcement. *Polymer Composites*, 24(3):409–421, 2004.
- H.C. BRINKMAN : A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particules. *Applied science research*, A1:27–34, 1947.
- A. BROOKS et T.J. R. HUGHES : Sreamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flow with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- W. D. BROUWER, E. C. F. C. van HERPT et M. LABORDUS : Vacuum injection moulding for large structural applications. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(6):551–558, 2003.
- C.G. BROYDEN : The convergence of a class of double-rank minimization algorithms. I : General considerations. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 6:76–90, 1970.
- J. BRÉARD, A. SAOUAB et G. BOUQUET : Mesure de la perméabilité spatiale d'un renfort tridimensionnel pour matériaux composites à matrice polymère. *The European Physical Journal - Applied Physics*, 1:269–278, 1998.
- M. J. BUNTAIN et S. BICKERTON : Compression flow permeability measurement : a continuous technique. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(5):445–457, 2003.
- P. CELLE, S. DRAPIER et J.M. BERGHEAU : Etude d'un modèle mécanique et thermo-physico-chimique pour la mise en oeuvre de matériaux composites par infusion. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, 15(3):413–419, 2005.
- F. CERISIER : *Conception d'une structure travaillante en matériaux composites et étude de ses liaisons*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 1998.
- D. CHAMORET : *Modélisation du contact : nouvelles approches numériques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- J.C. CHARPENTIER : Elements de mécanique des fluides : Application aux milieux poreux. *Les techniques de l'ingénieur*, J1-065:12, 2004.

- 
- X. CHEN et T.D. PAPATHANASIOU : On the variability of the Kozeny constant for saturated flow across unidirectional disordered fiber arrays. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing; Selected Contributions from the 7th International Conference on Flow Processes in Composite Materials held at University of Delaware, USA*, 37(6):836–846, 2006.
- A. CHEUNG, Y. YU et K. POCHIRAJU : Three-dimensional finite element simulation of curing of polymer composites. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(8):895–912, 2004.
- J. COIRIER : *Mécanique des milieux continus : cours et exercices corrigés*. Dunod, 2001. ISBN 2100053817.
- N.C. CORREIA, F. ROBITAILLE, A.C. LONG, C.D. RUDD, P. SIMACEK et S.G. ADVANI : Analysis of the vacuum infusion moulding process : I. Analytical formulation. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(12):1645–1656, 2005.
- H. DARCY : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, 1856.
- M. DELEGLISE, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Simulation of LCM processes involving induced or forced deformations. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, In Press, Corrected Proof, 2005a.
- M. DELEGLISE, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Solution to filling time prediction issues for constant pressure driven injection in RTM. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(3):339–344, 2005b.
- M. L. DIALLO, R. GAUVIN et F. TROCHU : Experimental analysis and simulation of flow through multi-layer fiber reinforcements in LCM. *Polymer Composites*, 19:246–256, 1998.
- T. DOPLER, V. MICHAUD et A. MODARESSI : Simulation of non isothermal low pressure infiltration processing. *In 12th International Conference on Composite Materials ICCM12*, Paris, 1999.
- S. DRAPIER, J. MONATTE, O. ELBOUZZAOUI et P. HENRAT : Characterization of transient through-thickness permeabilities of non crimp new concept (NC2) multiaxial fabrics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(7):877–892, 2005.
- S. DRAPIER, A. PAGOT, A. VAUTRIN et P. HENRAT : Influence of the stitching density on the transverse permeability of non-crimped new concept (NC2) multiaxial reinforcements : measurements and predictions. *Composites Science and Technology*, 62(15):1979–1991, 2002.

- S. DRAPIER et M.R. WISNOM : Finite element investigation of the interlaminar shear strength of non-crimp fabric based composites. *Composites Science and Technology*, 59 (16):2351–2362, 1999.
- F.A.L. DULLIEN : *Porous Media : Fluid Transport and Pore Structure*, volume 21. Academic Press, New York, 1979.
- G. DUVAUT : *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 1999. ISBN 2100039326.
- O. ELBOUZZAOUI : *Caractérisation de la perméabilité transverse de nouveaux renforts multiaxiaux cousus pour composites structuraux*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2004.
- M. ELSEIFI : *A new scheme for the optimum design of stiffened composite panels with geometric imperfections*. Thèse de doctorat, Faculty of the virginia Polytechnic Institute and State university, 1998.
- ESI : *PAM-RTM 2004 : User's Guide & Tutorials*. 2004.
- A. FARINA et L. PREZIOSI : Infiltration of a polymerizing resin in a deformable preform for fiber reinforced composites. In *Applied and Industrial Mathematics "Venice 2"*, pages 259–271, Kluwer, 2000a.
- A. FARINA et L. PREZIOSI : Infiltration processes in composite materials manufacturing : modelling and qualitative results. In BIRKHAUSER, éditeur : *Complex Flows in Industrial Processes*, pages 281–306. 2000b.
- A. FARINA et L. PREZIOSI : Non-isothermal injection molding with resin cure and preform deformability. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(12):1355–1372, 2000c.
- P. FERLAND, D. GUITTARD et F. TROCHU : Concurrent methods for permeability measurement in resin transfer molding. *Polymer Composites*, 17(1):149–158, 1996.
- E. FEULVARCH : *Modélisation numérique du soudage par friction malaxage (Friction Stir Welding)*. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet de Saint-Etienne, 2005.
- R. FLETCHER : A new approach to variable metric algorithms. *Computer Journal*, 13 (3):317–322, 1970.
- A. FOLCH DURAN : *A numerical formulation to solve the ALE Navier-Stokes equations applied to the withdrawal of magma chambers*. Thèse de doctorat, Universitat Politècnica de Catalunya, 2000.

- 
- A. FORTIN, A. BÉLIVEAU et Y. DEMAY : Numerical solution of transport equations with applications to non-newtonian fluids. *In Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, pages 311–322. M.D.P.M. Marques et J.F. Rodrigues, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 77, 1995.
- P.J. FREY et P.L. GEORGE : *Maillages : Applications aux éléments finis*. Hermes Sciences Publicat., 1999. ISBN 2746200244.
- J. A. GARCIA, Ll. GASCON et F. CHINESTA : A fixed mesh numerical method for modelling the flow in liquid composites moulding processes using a volume of fluid technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(7-8):877–893, 2003.
- D. GAWIN, F. PESAVENTO et B. A. SCHREFLER : Modelling of hygro-thermal behaviour of concrete at high temperature with thermo-chemical and mechanical material degradation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(13-14):1731–1771, 2003.
- C. GEUZAIN et J.F. REMACLE : *GMSH*, volume 2006. <http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf>, <http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/gmsh.pdf> édition, 2006.
- M. GIGLIOTTI : *Modelling, simulation and experimental assessment of hygrothermoelastic behaviour of composite laminated plates*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Etienne, 2004.
- D. GOLDFARB : A family of variable metric updates derived by variational means. *Mathematics of Computing*, 24:23–26, 1970.
- W.G. GRAY et B. A. SCHREFLER : Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media. *European Journal Mechanics, A/ solids*, 20:521–538, 2001.
- P.M. GRESHO et R.L. SANI : *Incompressible Flow and the Finite Element Method : Advection-Diffusion*. Wiley Professional Software, 2000. ISBN 0471492493.
- L. GROSSET : *Optimization of Composite Structures by Estimation of Distribution Algorithms*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Etienne, 2004.
- T.G. GUTOWSKI, Z. CAI, S. BAUER, D. BOUCHER, J. KINGERY et S. WINEMAN : Consolidation experiments for laminate composites. *Composites Materials*, 21:650–669, 1987.



- A. HAMMAMI, R. GAUVIN et F. TROCHU : Modeling the edge effect in liquid composites molding. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(A):603–609, 1998.
- N. L. HAN, S. S. SUH, J. M. YANG et H. T. HAHN : Resin film infusion of stitched stiffened composite panels. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(3):227–236, 2003.
- S.M. HASSANIZADEH : General conservation equations for multi-phase systems, 1. Averaging procedure. In G.F. PINDER, éditeur : *Flow through Porous Media*, pages 1–16. CML Publications, Southampton, 1983a.
- S.M. HASSANIZADEH : General conservation equations for multi-phase systems, 2. Momenta, energy, and entropy equations. In G.F. PINDER, éditeur : *Flow through Porous Media*, pages 17–29. CML Publications, Southampton, 1983b.
- S.M. HASSANIZADEH : General conservation equations for multi-phase systems, 3. Constitutive theory for porous media flow. In G.F. PINDER, éditeur : *Flow through Porous Media*, pages 30–45. CML Publications, Southampton, 1983c.
- A. HEINRICH : *Modélisation thermomécanique de la coulée continue d’acier en deux dimensions*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003.
- J. JEDIDI : *Etude du comportement en cyclage hygrothermique d’un matériau composite épais*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2004.
- K. L. JOHNSON : *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 2004. ISBN 0521347963.
- S. C. JOSHI, Y. C. LAM et X. L. LIU : Mass conservation in numerical simulation of resin flow. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(10):1061–1068, 2000.
- S. C. JOSHI, X. L. LIU, Y. C. LAM et J. SHERIDAN : Simulation of resin film infusion process using finite element / nodal control volume approach. *Advanced composites Letters*, 8(3):101–104, 1999.
- L. JOUBAUD, F. TROCHU et J. LE CORVEC : Simulation of the manufacturing of an ambulance roof by vacuum assisted resin infusion (VARI). *Composites 2002 Convention and Trade Show, Composites Fabricators Association, Atlanta, Georgia USA*, 2002.
- W. JÄGER et A. MIKELIC : On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow. *Journal of Differential Equations*, 170(1):96–122, 2001.

- 
- M. K. KANG, J. J. JUNG et W. I. LEE : Analysis of resin transfer moulding process with controlled multiple gates resin injection. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(5):407–422, 2000.
- M. K. KANG et W. I. LEE : A flow-front refinement technique for the numerical simulation of the resin-transfer molding process. *Composites Science and Technology*, 59(11):1663–1674, 1999.
- M. K. KANG, W. I. LEE et H. T. HAHN : Analysis of vacuum bag resin transfer molding process. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 32(11):1553–1560, 2001.
- M. KAVIANY : *Principles of heat Transfer in Porous Media*. Springer-Verlag New York, New York, 1995. ISBN 0387945504.
- P.A. KELLY, R. UMER et S. BICKERTON : Viscoelastic response of dry and wet fibrous materials during infusion processes. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing Selected Contributions from the 7th International Conference on Flow Processes in Composite Materials held at University of Delaware, USA*, 37(6):868–873, 2006.
- E. A. KEMPNER et H. T. HAHN : A unified approach to manufacturing simulation for composites. In *Proceedings of the First Korea-U.S. Workshop on Composite Materials*, Seoul, Korea, 1998.
- J.F.A. KESSELS, A.S. JONKER et R. AKKERMAN : Fully 2.5d flow modeling of resin infusion under flexible tooling using unstructured meshes and wet and dry compaction properties. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, In Press, Corrected Proof, 2006.
- D. W. KIM, Y. S. AN, J. D. NAM et S. W. KIM : Thermoplastic film infusion process for long-fiber reinforced composites using thermally expandable elastomer tools. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(7):673–680, 2003.
- W.J. LAYTON, F. SCHIEWECK et I. YOTOV : Coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(6):2195–2218, 2003.
- D.H. LEE, W.I. LEE et M.K. KANG : Analysis and minimization of void formation during resin transfer molding process. *Composites Science and Technology*, In Press, Corrected Proof, 2006.
- R.W. LEWIS, B. A. SCHREFLER et N.A. RAHMAN : A finite element analysis of multiphase immiscible flow in deforming porous media for subsurface systems. *Communication in numerical methods in engineering*, 14:135–149, 1998.

- S. T. LIM, M. K. KANG et W. I. LEE : Modeling of void formation during Resin Transfer Moulding. *In 12th International Conference on Composite Materials ICCM12*, Paris, 1999.
- S. T. LIM et W. I. LEE : An analysis of the three-dimensional resin-transfer mold filling process. *Composites Science and Technology*, 60(7):961–975, 2000.
- M. LIN, H. T. HAHN et H. HUH : A finite element simulation of resin transfer molding based on partial nodal saturation and implicit time integration. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(5-6):541–550, 1998.
- A. C. LOOS et J. D. MACRAE : A process simulation model for the manufacture of a blade-stiffened panel by the resin film infusion process. *Composites Science and Technology*, 56(3):273–289, 1996.
- A.C. LOOS, D. RATAZZI et R.C. BATRA : A three-dimensional model of the resin infusion process. *Composites Materials*, 36:1255–1273, 2002.
- S. LOPATNIKOV, P. SIMACEK, J. GILLESPIEJR et S.G. ADVANI : A closed form solution to describe infusion of resin under vacuum in deformable fibrous porous media. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering.*, 12(3):191–204, 2004.
- A. MASUD et T.J. R. HUGHES : A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39-40):4341–4370, 2002.
- V. MICHAUD et A. MORTENSEN : Infiltration processing of fibre reinforced composites : governing phenomena. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 32(8):981–996, 2001.
- S. MOREL, C. BINETRUY et P. KRAWCZAK : Compression des renforts dans les procédés LCM 1. Analyse mécanique et microstructurale. *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, 12(2):243–263, 2002.
- A. NEGRIER et J.C. RIGAL : Présentation des matériaux composites. *Techniques de l'ingénieur*, A7790, 1991.
- N. D. NGO et K. K. TAMMA : Microscale permeability predictions of porous fibrous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(16):3135–3145, 2001.
- R. NUNEZ : *Conception d'un montage de mesure de perméabilité de renforts de matériaux composites*. Rapport de DEA, 2005.

- 
- A. OKABE, B. BOOTS, K. SUGIHARA et S.N. CHIU : *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, 2000. ISBN 0471986356.
- J. PARK et M. K. KANG : A numerical simulation of the resin film infusion process. *Composite Structures*, 60(4):431–437, 2003.
- E. PERCHAT : *MINI-Element et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- R. PIERRE : Optimal selection of the bubble function in the stabilization of the P1-P1 element for the Stokes problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 32(4):1201–1224, 1995.
- Reinforced PLASTICS : Bigger blades – the carbon option. *Reinforced Plastics*, 46(3):20–22, 2002a.
- Reinforced PLASTICS : SCRIMP offers a cleaner alternative. *Reinforced Plastics*, 46(5):26–29, 2002b.
- Reinforced PLASTICS : Vacuum moulding route chosen for rescue vessels. *Reinforced Plastics*, 46(5):30–32, 2002c.
- Reinforced PLASTICS : Composites on the road to the big time? *Reinforced Plastics*, 47(2):33–36, 2003.
- P.F. PORTA : *Heterogeneous domain decomposition methods for coupled flow problems*. Thèse de doctorat, Universität Augsburg, 2005.
- L. PREZIOSI et A. FARINA : On Darcy's law for growing porous media. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37:485–491, 2002.
- L. PREZIOSI, D. D. JOSEPH et G. S. BEAVERS : Infiltration of initially dry, deformable porous media. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(6):1205–1222, 1996.
- B. QI, J. RAJU, T KRUCKENBERG et R. STANNING : A Resin Film Infusion process for manufacture of advanced composite structures. *Composite Structures*, 47(1-4):471–476, 1999.
- S. RABIER : *Développement d'un modèle éléments finis pour la simulation d'écoulements à surface libre : application au soudage*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Universitaire de Marseille, 2003.

- M. RAPPAZ, M. BELLET et M. DEVILLE : *Traité des matériaux - Tome 10 - Modélisation numérique en science et génie des matériaux*. Presses polytechniques et universitaires Romandes, Lausanne, 1998.
- J.N. REDDY et D.K. GARTLING : *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press, 2001. ISBN 0849394104.
- B. RIVIÈRE et I. YOTOV : Locally conservative coupling of Stokes and Darcy flows. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(5):1959–1977, 2005.
- E. RUIZ, V. ACHIM, S. SOUKANE, F. TROCHU et J. BREARD : Optimization of injection flow rate to minimize micro/macro-voids formation in resin transfer molded composites. *Composites Science and Technology*, In Press, Corrected Proof, 2005.
- M. SCHANZ et D. PRYL : Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua. *International Journal of Solids and Structures*, 41(15):4047–4073, 2004.
- B. A. SCHREFLER : Computer modelling in environmental geomechanics. *Computers & Structures*, 79(22-25):2209–2223, 2001.
- B. A. SCHREFLER et R. SCOTTA : A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25):3223–3246, 2001.
- I. B. SEVOSTIANOV, V. E. VERIJENKO, C. J. von KLEMPERER et B. CHEVALLEREAU : Mathematical model of stress formation during vacuum resin infusion process. *Composites Part B : Engineering*, 30(5):513–521, 1999.
- D.F. SHANNO : Conditioning of quasi-newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*, 24(111):647–656, 1970.
- A. SHOJAEI, S. R. GHAFFARIAN et S. M. H. KARIMIAN : Simulation of the three-dimensional non-isothermal mold filling process in resin transfer molding. *Composites Science and Technology*, 63(13):1931–1948, 2003.
- A. SIMONE : Partition of unity-based discontinuous elements for interface phenomena : Computational issues. *Numerical Methods in Engineering*, 20(6):465–478, 2003.
- S. SOUKANE et F. TROCHU : New remeshing applications in resin transfer molding. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 24(15):1629–1653, 2005.

- 
- M. A. A. SPAID, J. PHELAN et R. FREDERICK : Modeling void formation dynamics in fibrous porous media with the lattice Boltzmann method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(7):749–755, 1998.
- D. SRINIVASAGUPTA, B. JOSEPH, P. MAJUMDAR et H. MAHFUZ : Effect of processing conditions and material properties on the debond fracture toughness of foam-core sandwich composite : process model development. *Composite part A : Applied Science and Manufacturing*, 34:1085–1095, 2003.
- B. STROUSTRUP : *Le langage C++*. Pearson Education, 2003. ISBN 2744070033.
- SYSTUS : *Documentation Systus*. 2005.
- N. TAKANO, M. ZAKO, T. YOSHIOKA et K. TERADA : Homogenization method to predict three-dimensional permeabilities considering micro-macro and solid-fluid interactions. 2000.
- C. TAYLOR et P. HOOD : A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computures and Fluids*, 1(1):73–100, 1973.
- K. TERZAGHI, R.B. PECK et G. MESRI : *Soil Mechanics in Engineering Practice*. Jones Wiley & Sons, New York, 1967. ISBN 0471086584.
- S.P. TIMOSHENKO et J.N. GOODIER : *Theory of Elasticity 3rd edition*. McGraw Hill, NY, 1969. ISBN 0070647208.
- F. TROCHU, P. FERLAND et R. GAUVIN : Functional requirements of a simulation software for liquid molding processes. *Science & Engineering of Composite Materials*, 6(4):209–218, 1997.
- F. TROCHU, E. RUIZ, V. ACHIM et S. SOUKANE : Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing Selected Contributions from the 7th International Conference on Flow Processes in Composite Materials held at University of Delaware, USA*, 37(6):890–902, 2006.
- C. L. TUCKER III : Heat transfer and reaction issues in liquid composite molding. *Polymer Composites*, 17(1):60–72, 1996.
- S. VACHER : *Capteurs à fibres optiques pour le contrôle de l'élaboration et la caractérisation mécanique des matériaux composites*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2004.

- J. VERREY, V. MICHAUD et J.-A.E. MANSON : Dynamic capillary effects in liquid composite moulding with non-crimp fabrics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(1):92–102, 2006.
- J. WAN : *Stabilized finite element methods for coupled geomechanics and multiphase flow*. Thèse de doctorat, Stanford university, 2003.
- X. WANG et J. DONG : Formulation and study of thermal-mechanical coupling for saturated porous media. *Computers & Structures*, 81(8-11):1019–1029, 2003.
- C. WILLIAMS, J. SUMMERSCALES et S. GROVE : Resin infusion under flexible tooling (RIFT) : a review. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(7):517–524, 1996.
- C. WOLFF : Viscosité. *Les techniques de l'ingénieur*, R2350, 1994.
- C. YANG, C.A. GRATTONI et A.H. MUGGERIDGE : Flow of water through channels filled with elastically-deformable polymer gels. *In European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, volume 13, page 8, Italy, 2000.
- H. W. ZHANG et B. A. SCHREFLER : Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media : one dimensional model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(3):503–524, 2000.
- Y. ZHAO et A. FORHAD : A general method for simulation of fluid flows with moving and compliant boundaries on unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(39-40):4439–4466, 2003.
- O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR : *The Finite Element Method, Vols 1-3*. Oxford. Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 0340759844.

# Annexes





# Annexe A

## Équations de Bilan

Cette annexe décrit les trois grandes lois de conservation qui régissent la mécanique : la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie.

Soit un domaine matériel connexe quelconque  $\Omega_A$  intérieur à un système matériel occupant à l'instant courant le domaine  $\Omega$  que l'on suit dans son mouvement. Une loi de conservation exprime le bilan d'une grandeur  $G$  (masse, quantité de mouvement ou énergie ...) dans tout domaine  $\Omega_A$  connexe strictement intérieur au système étudié (voir figure A.1).

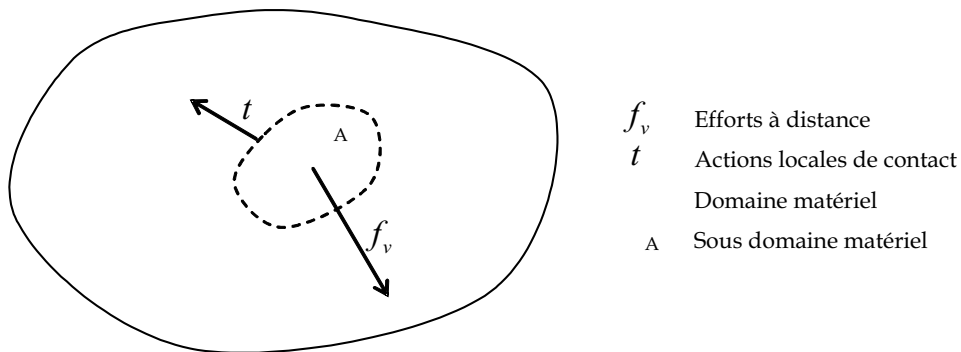


Figure A.1 – Milieu continu en cours d'évolution

Une loi de conservation s'écrit de la façon suivante : le taux de variation de  $G$  ( $a(\mathbf{x}, t)$  densité massique de la grandeur  $G$ ) associé à  $\Omega_A$  suivi dans son mouvement est égal à la somme :

- des échanges à travers  $\partial\Omega_A$  :  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  flux de  $G$ ,
- des sources internes à  $\Omega_A$  :  $A(\mathbf{x}, t)$  source interne de  $G$ .

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega_A} \rho(\mathbf{x}, t) a(\mathbf{x}, t) dv \right) = - \int_{\partial\Omega_A} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega_A} A(\mathbf{x}, t) dv$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à  $\partial\Omega_A$  (ce qui explique le signe « - »).

## A.1 Conservation de la masse

La loi de conservation de la masse exprime le fait que la masse de tout domaine matériel suivi dans son mouvement reste constante (milieu matériel formé d'un ou plusieurs constituants non miscibles et dans lequel les réactions chimiques sont exclues) :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0$$

La dérivée particulière d'une intégrale de volume est égale à :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_{A_0}} \rho_0(\mathbf{X}) J_0(\mathbf{X}) dv_0$$

Or :  $\frac{DJ_0(\mathbf{X})}{Dt} = \frac{\partial J_0(\mathbf{X})}{\partial t} = J_0(\mathbf{X}) \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \\ \frac{DJ}{Dt} = \varepsilon_{ijk} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \right) \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_3} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \right) \\ \frac{DJ}{Dt} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_3} \\ \frac{DJ}{Dt} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_1} \frac{\partial x_j}{\partial X_2} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \\ \frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} J(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} J(\mathbf{x}, t) \\ \frac{DJ}{Dt} = J(\mathbf{X}, t) \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_{A_0}} \left( \frac{\partial \rho_0(\mathbf{X})}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{X}) \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) J_0(\mathbf{X}) dv_0$$

En écrivant l'égalité des dérivées particulières dans la configuration courante et la configuration initiale  $\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \rho_0(\mathbf{X})}{\partial t}$  ainsi que l'égalité des densités  $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{X})$  :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_A} \left( \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dv$$

Or  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$ .

Finalement l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\int_{\Omega_A} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dv = 0$$

Cette équation est vraie quel que soit le domaine  $\Omega_A$  considéré. L'équation locale de conservation de la masse dans une approche eulérienne s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0} \quad (\text{A.1})$$

Compte tenu de l'équation locale de conservation de la masse, la dérivée particulaire d'une intégrale prise par rapport à une distribution de masse :

$$\frac{DF}{Dt} = \int_{\Omega_A} \frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} \rho dv$$

avec :  $F(t) = \int_{\Omega_A} \phi(\mathbf{x}, t) \rho dv$

## A.2 Hypothèse d'incompressibilité

L'hypothèse d'incompressibilité, soit l'invariabilité du volume considéré, s'exprime de manière générale à l'aide de l'équation :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} dv = 0$$

En utilisant la notion de dérivée particulaire d'une intégrale de volume, l'hypothèse d'incompressibilité s'écrit :

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0} \quad (\text{A.2})$$

## A.3 Conservation de la quantité de mouvement

Le domaine  $\Omega_A$  est soumis à :

- des efforts extérieurs à  $\Omega$  (efforts à distance) supposés être représentés par une densité volumique d'efforts  $\mathbf{f}^v(\mathbf{x}, t)$ ,
- des efforts extérieurs à  $\Omega_A$  mais intérieurs à  $\Omega$  (action locale de contact) représentés par une densité surfacique de force  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$  appelée vecteur contrainte en  $M(\mathbf{x})$  à l'instant  $t$  pour la direction  $\mathbf{n}$  (normale extérieure à  $\Omega_A$ ). Le vecteur contrainte s'écrit à partir du tenseur des contraintes :  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$ .

En partant de l'équation d'équilibre :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega_A} \rho \mathbf{v} dv \right) = \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{t} ds + \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^v dv$$

D'après l'hypothèse de conservation de la masse :

$$\frac{D}{Dt} \left( \int_{\Omega_A} \rho \mathbf{v} dv \right) = \int_{\Omega_A} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dv$$

En appliquant le théorème de la divergence  $\int_{\partial\Omega_A} \mathbf{t} ds = \int_{\partial\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega_A} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) dv$

$$\int_{\Omega_A} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dv = \int_{\Omega_A} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) dv + \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^v dv$$

Cette équation est vraie quel que soit le domaine considéré. La forme locale (eulérienne) de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{f}^v = \mathbf{0}} \quad (\text{A.3})$$

## A.4 Bilan énergétique

### A.4.1 Premier principe de la thermodynamique

La conservation de l'énergie (ou premier principe de la thermodynamique) exprime que pour tout domaine  $\Omega_A$  intérieur à  $\Omega$ , le taux de variation (dérivée particulière) de l'énergie associée à  $\Omega_A$  est égal à chaque instant à la somme des puissances des efforts extérieurs s'exerçant sur  $\Omega_A$  et du taux de chaleur reçu par  $\Omega_A$ .

L'énergie associée à  $\Omega_A$  se décompose en :

- énergie interne représentée par sa densité massique  $e$  :  $E = \int_{\Omega_A} \rho e dv$
- énergie cinétique :  $K = \int_{\Omega_A} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dv$

La conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{D(E + K)}{Dt} = P_{ext} + Q} \quad (\text{A.4})$$

avec :

- $P_{ext}$  = puissance des efforts extérieurs :  $P_{ext} = \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds$
- $Q$  = chaleur reçue par le système :  $Q = \int_{\Omega_A} r dv + \int_{\partial\Omega_A} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$

$q$  représente le flux de chaleur reçue par conduction ( $\mathbf{n}$  étant la normale sortante).

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit alors :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho \left( e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) dv = \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds + \int_{\Omega_A} r dv + \int_{\partial\Omega_A} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$$

En appliquant le théorème de la divergence, le premier principe s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega_A} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds - \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds - \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega_A} \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}) dv$$

### A.4.2 Théorème de l'énergie cinétique

Partant de l'équation locale de la conservation de la quantité de mouvement, en multipliant par la vitesse nous pouvons écrire :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

D'autre part compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes on a :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} \equiv \sigma_{ij} v_{i,j} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} v_{i,j} + \sigma_{ji} v_{j,i}) = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = \sigma_{ij} D_{ij} \equiv \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

Par ailleurs :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)$$

La forme globale du théorème de l'énergie cinétique est obtenue en intégrant sur le domaine  $\Omega_A$ .

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dv = \int_{\Omega_A} \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dv - \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv + \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} dv$$

En appliquant le théorème de la divergence au problème précédent :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dv = \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} dv - \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{DK}{Dt} = P_{ext} + P_{int}} \quad (\text{A.5})$$

avec :  $P_{int} = - \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv$

### A.4.3 Autre expression du premier principe

En combinant les expressions du premier principe de la thermodynamique,  $\frac{D(E+K)}{Dt} = P_{ext} + Q$  et du théorème de l'énergie cinétique,  $\frac{DK}{Dt} = P_{ext} + P_{int}$  :

$$\frac{DE}{Dt} = -P_{int} + Q$$

Avec :

$$\begin{aligned} - E &= \int_{\Omega_A} \rho e dv \\ - P_{int} &= - \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv \\ - Q &= \int_{\Omega_A} r dv + \int_{\partial\Omega_A} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_A} \rho e dv = \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv + \int_{\Omega_A} r dv - \int_{\partial\Omega_A} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$$

Après application du théorème de la divergence et de la dérivée particulière d'une intégrale de volume on a :

$$\int_{\Omega_A} \rho \frac{De}{Dt} dv = \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dv + \int_{\Omega_A} r dv - \int_{\Omega_A} \text{div}(\mathbf{q}) dv$$

Soit la forme locale suivante :

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \text{div}(\mathbf{q})} \quad (\text{A.6})$$

avec  $e$  la densité massique d'énergie interne,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\mathbf{D}$  le tenseur des taux de déformations Eulérien,  $r$  une source interne de chaleur  $\mathbf{q}$  le flux de chaleur.

## A.5 L'équation de Navier et Stokes

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}^v$$

La loi de comportement d'un fluide Newtonien incompressible est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \eta \mathbf{D}$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide et  $p$  sa pression hydrostatique.

Le terme  $\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})$  s'écrit donc :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{div}(p \mathbf{I}) + \mathbf{div}(2 \eta \mathbf{D}) = -\nabla(p) + \eta [\mathbf{div}(\nabla(\mathbf{v})) + \nabla(\mathbf{div}(\mathbf{v}))]$$

Or d'après l'hypothèse d'incompressibilité on a :  $\mathbf{div}(\mathbf{v}) = 0$

Finalement l'équation de Navier et Stokes s'écrit :

$$\boxed{\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \mathbf{f}^v - \nabla p + \eta \Delta(\mathbf{v})} \quad (\text{A.7})$$

En négligeant les effets d'inertie, l'équation en régime stationnaire de Stokes s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{f}^v - \nabla p + \eta \Delta(\mathbf{v}) = 0} \quad (\text{A.8})$$

## A.6 Équation de la chaleur

Le bilan énergétique issu de l'application du premier principe de la thermo-dynamique s'écrit (voir Eq. A.6) :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \mathbf{div}(\mathbf{q})$$

Par hypothèse, l'évolution a lieu à pression constante. La variation d'énergie interne  $\rho \cdot \dot{e}$ , nulle dans le cas stationnaire, peut alors être exprimée sous la forme  $\rho \dot{e} = \rho \dot{H}$  où  $\dot{H}$  est la variation au cours du temps de son enthalpie par unité de masse.

$$\rho \dot{H} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \mathbf{div}(\mathbf{q})$$

Dans de nombreux cas, l'enthalpie du solide est une caractéristique fonction seulement de la température,  $H(T)$ . Nous pouvons utiliser la chaleur spécifique du matériau  $c = \frac{DH}{DT}$  pour écrire  $\rho \dot{H} = \rho c \dot{T}$ . Finalement :



$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \operatorname{div}(\mathbf{q})$$

avec  $\frac{DT}{Dt}$  l'élévation de température par unité de temps,  $\rho$  la masse volumique et  $c =$  capacité calorifique à pression constante.

Expérimentalement, si les variations de température ne sont pas trop importantes, la loi de Fourier rend compte localement des phénomènes de conduction de la chaleur. Le vecteur densité de flux de chaleur est égal à :

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T$$

Dans cette équation,  $\boldsymbol{\lambda}$  est un tenseur symétrique dont chaque composante  $\lambda_{ij}$ , éventuellement fonction de la température, rend compte de l'influence d'un gradient thermique dans la direction  $j$  sur la densité de flux de chaleur dans la direction  $i$ . Dans le cas d'un matériau isotrope on a :  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda \mathbf{I}$ . En incorporant la loi de Fourier dans l'équation précédente, la nouvelle expression de l'équation de la chaleur est :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r + \operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T) \quad (\text{A.9})$$

## Annexe B

# Forme faible de la quantité de mouvement

En partant de la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement à  $t$  et en négligeant les effets d'inertie :

$$\operatorname{div} {}^t\boldsymbol{\sigma} + {}^t\mathbf{f}^v = \mathbf{0} \quad (\text{B.1})$$

Cette équation est multipliée par une variation de déplacement  $\delta\mathbf{u}$ , cinématiquement admissible à 0 sur les surfaces où les déplacements sont imposés et est intégrée sur le volume  $\Omega$ .

$$\forall \delta\mathbf{u} \in E_{\delta\mathbf{u}}, \int_{{}^t\Omega} \delta u_i {}^t\sigma_{ij,j} {}^t dv + \int_{{}^t\Omega} \delta u_i {}^t f_i^v {}^t dv = 0$$

L'intégration par parties donne :

$$\forall \delta\mathbf{u} \in E_{\delta\mathbf{u}}, \int_{{}^t\Omega} (\delta u_i {}^t\sigma_{ij})_{,j} {}^t dv - \int_{{}^t\Omega} \delta u_{i,j} {}^t\sigma_{ij} {}^t dv + \int_{{}^t\Omega} \delta u_i {}^t f_i^v {}^t dv = 0 \quad (\text{B.2})$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy  ${}^t\sigma_{ij}$  étant symétrique (écriture de la conservation de la quantité de mouvement des moments) :

$$\forall \delta\mathbf{u} \in E_{\delta\mathbf{u}}, \int_{{}^t\Omega} (\delta u_i {}^t\sigma_{ij})_{,j} {}^t dv - \int_{{}^t\Omega} \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) {}^t\sigma_{ij} {}^t dv + \int_{{}^t\Omega} \delta u_i {}^t f_i^v {}^t dv = 0 \quad (\text{B.3})$$

En appliquant le théorème de la divergence et en posant la variation de déformation linéarisée  $\delta_t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^t x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^t x_i} \right)$ ,  ${}^t x_i$  étant les coordonnées à  $t$ , *i.e.* dans la configuration courante :

$$\forall \delta \mathbf{u} \in E_{\delta \mathbf{u}}, \int_{\Omega} \delta_t \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dv = \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j ds + \int_{\Omega} \delta u_i f_i^v dv \quad (\text{B.4})$$

## Annexe C

# Matrices utilisées dans les approches Lagrangiennes

Les déformations linéaires s'écrivent :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{N}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} = [\mathbf{B}_L^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} \quad (\text{C.1})$$

avec :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{xy} \\ 2 \varepsilon_{xz} \\ 2 \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$[\mathbf{N}^e] = \begin{bmatrix} N_0^e & \cdots & N_{n^e-1}^e & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_0^e & \cdots & N_{n^e-1}^e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_0^e & \cdots & N_{n^e-1}^e \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{u}^e\} = \begin{Bmatrix} u_{0x}^e \\ \vdots \\ u_{n^e-1x}^e \\ u_{0y}^e \\ \vdots \\ u_{n^e-1y}^e \\ u_{0z}^e \\ \vdots \\ u_{n^e-1z}^e \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_L^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_0^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial z} \\ \frac{\partial N_0^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial y} & \frac{\partial N_0^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial N_0^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial x} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial z} & \frac{\partial N_0^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Les déformations non-linéaires s'écrivent :

$$\{\boldsymbol{\mu}\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}] \cdot \{\boldsymbol{\theta}\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}] \cdot \{\mathbf{u}\} = \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{H}] \cdot [\mathbf{N}^e]}_{[\mathbf{B}_{NL}^e(\{\mathbf{u}^e\})]} \cdot \{\mathbf{u}^e\} = \frac{1}{2} [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{G}^e] \cdot \{\mathbf{u}^e\} \quad (\text{C.3})$$

avec :

$$\{\boldsymbol{\mu}\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \\ 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + 2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + 2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + 2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + 2 \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + 2 \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{array} \right\}$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_x}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \{\boldsymbol{\theta}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right\}$$

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad [\mathbf{G}^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_0^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial N_0^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial N_0^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial z} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial z} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial x} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial y} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_0^e}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_{n^e-1}^e}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La matrice géométrique ou matrice des contraintes initiales s'écrit :

$$[\mathbf{K}_G^e] = \int_{t\Omega^e} [{}^t\mathbf{G}^e]^T \cdot d[{}^t\mathbf{A}]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}]^t dv = \int_{t\Omega^e} [{}^t\mathbf{G}^e]^T \cdot [{}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{S}}] \cdot [{}^t\mathbf{G}^e] dv \quad (\text{C.4})$$

avec :

$$d[{}^t\mathbf{A}]^T = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t x}\right) & 0 & 0 & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t y}\right) & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t z}\right) & 0 \\ 0 & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t y}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t x}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t z}\right) \\ 0 & 0 & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t z}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t x}\right) & d\left(\frac{\partial u_x}{\partial^t y}\right) \\ d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t x}\right) & 0 & 0 & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t y}\right) & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t z}\right) & 0 \\ 0 & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t y}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t x}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t z}\right) \\ 0 & 0 & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t z}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t x}\right) & d\left(\frac{\partial u_y}{\partial^t y}\right) \\ d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t x}\right) & 0 & 0 & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t y}\right) & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t z}\right) & 0 \\ 0 & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t y}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t x}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t z}\right) \\ 0 & 0 & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t z}\right) & 0 & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t x}\right) & d\left(\frac{\partial u_z}{\partial^t y}\right) \end{bmatrix} \quad \{{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}S_{xx} \\ {}^{t+\Delta t}S_{yy} \\ {}^{t+\Delta t}S_{zz} \\ {}^{t+\Delta t}S_{xy} \\ {}^{t+\Delta t}S_{xz} \\ {}^{t+\Delta t}S_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\left[ {}^{t+\Delta t}_t \tilde{\mathbf{S}} \right] = \begin{bmatrix}
 {}^{t+\Delta t}_t S_{xx} & {}^{t+\Delta t}_t S_{xy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 {}^{t+\Delta t}_t S_{xy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 {}^{t+\Delta t}_t S_{xz} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yz} & {}^{t+\Delta t}_t S_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}_t S_{xx} & {}^{t+\Delta t}_t S_{xy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{xz} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}_t S_{xy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yz} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}_t S_{xz} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yz} & {}^{t+\Delta t}_t S_{zz} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}_t S_{xx} & {}^{t+\Delta t}_t S_{xy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{xz} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}_t S_{xy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yy} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yz} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{t+\Delta t}_t S_{xz} & {}^{t+\Delta t}_t S_{yz} & {}^{t+\Delta t}_t S_{zz}
 \end{bmatrix}$$

# Annexe D

## Lois de comportement isotrope et isotrope transverse

### D.1 Comportement isotrope

Lors de l'essai de traction 1D dans la direction 1, les tenseurs des contraintes et des déformations s'écrivent (contraintes planes) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{E(\varepsilon)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$



## D.2 Comportement isotrope transverse

La matrice de comportement associée aux comportements isotropes transverses des nappes est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_L} & \frac{-\nu_{LT}}{C_T} & \frac{-\nu_{LT}}{C_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{C_T} & \frac{1}{C_T} & \frac{-\nu_{TT'}}{C_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{TL}}{C_T} & \frac{-\nu_{TT'}}{C_T} & \frac{1}{C_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{TT'})}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT'}} \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

avec  $\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}$  et  $G_{LT} = \frac{2(1+\nu_{LT})}{E_L}$

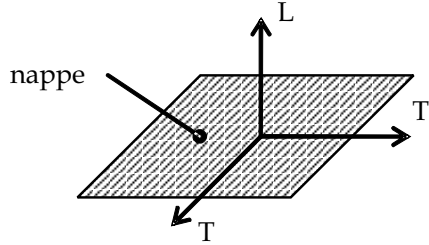


Figure D.1 – Repère utilisé pour la description du comportement isotrope transverse.

## D.3 Méthode des Polynômes de Lagrange

A partir de la loi de comportement expérimentale, l'interpolation des ordonnées  $P(X)$  et des pentes  $\frac{\partial P(X)}{\partial X}$  en un point  $X$  encadré par  $n$  points d'abscisse  $x_i$  et d'ordonnée  $f(x_i)$  à l'aide de la méthode des Polynômes de Lagrange s'écrit :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n \left( f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (D.5)$$

$$\frac{\partial P(X)}{\partial X} = \sum_{i=0}^n \left( f(x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left( \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right) \right) \quad (D.6)$$

Note : Le choix des points d'interpolation  $x_i$  pour la détermination efficace des opérateurs sécants  $\frac{P(X)}{X}$  et tangents  $\frac{\partial P(X)}{\partial X} \frac{1}{X}$  est particulièrement important.

# Annexe E

## Validation du modèle de Terzaghi

### E.1 Solution analytique dans un cas simple : théorie des plaques en déformations planes

#### E.1.1 Mise en équation

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit (les effets d'inerties sont négligés) :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^v = 0 \quad (\text{E.1})$$

En déformation plane la loi de Hooke s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1 - \nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2 \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

#### E.1.2 Détermination du champ de contraintes

En écrivant le vecteur force externe sous la forme du gradient d'un potentiel scalaire on obtient dans un cas bidimensionnel :

$$\mathbf{f}^v = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \mathbf{grad} \Omega(x, y)$$

Il est possible d'écrire la conservation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{grad} \Omega(x, y) = 0$$

On montre que cet état de déformation plane peut être résolu en utilisant les fonctions d'Airy (Timoshenko et Goodier (1969)). On doit alors choisir une fonction biharmonique  $\phi(x, y)$  qui satisfait :

$$\nabla^4 \phi \equiv \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = C(\nu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \quad (\text{E.3})$$

$$\text{avec } C(\nu) = \begin{cases} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & (\text{déformation plane}) \\ \frac{1}{1-\nu} & (\text{contrainte plane}) \end{cases}$$

La fonction  $\phi$  doit également satisfaire les conditions aux limites en contrainte sur les frontières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} n_y &= t_x \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} n_x - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} n_x &= t_y \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Le champ de contraintes dans un cas bidimensionnel en déformation plane est donné par les relations :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \Omega \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \Omega \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

### E.1.3 Détermination des déformations et du champ de déplacement

Lorsque le champ de contraintes est connu, il est possible de remonter aux déformations en utilisant la relation contrainte / déformation (la loi de Hooke dans notre cas). Pour déterminer les déplacements la relation  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$  est utilisée. Nous considérons un point  $\mathbf{x}_0$  dans le solide. Le déplacement de ce point est nul. La rotation du solide est également considérée comme nulle. Il est alors possible de calculer les déplacements en n'importe quel point  $\mathbf{x}$  dans le solide en intégrant les déformations le long du chemin le plus approprié voir figure (E.1) :

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^x U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) d\xi_j$$

avec  $U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = \varepsilon(\xi) + (x_k - \xi_k) \left[ \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\xi)}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}(\xi)}{\partial \xi_i} \right]$  où les  $x_k$  sont les composantes du vecteur position aux points auxquels nous calculons les déplacements et les  $\xi_j$  sont les

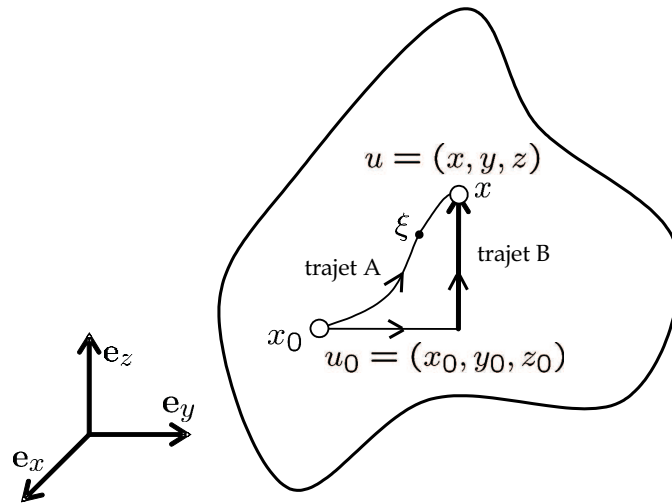


Figure E.1 – Procédure de calcul des déplacements - Intégration des déformations le long du chemin le plus approprié

composantes du vecteur position d'un point situé le long du trajet d'intégration.

## E.2 Application : validation du modèle de Terzaghi

Le problème à résoudre est représenté sur la figure E.2. Les conditions aux limites suivantes y sont associées :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}n_j = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0 & \text{sur } x = \pm L \text{ quel que soit } y \\ u_y = 0 & \text{sur } y = 0 \text{ quel que soit } x \\ \sigma_{xy} = 0, \sigma_{yy} = -P_{imp} & \text{sur } y = H \text{ quel que soit } x \end{cases}$$

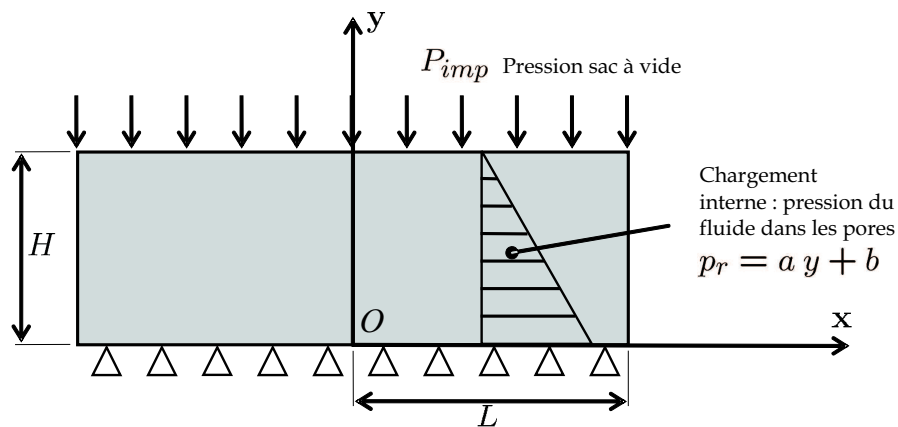


Figure E.2 – Compression des nappes suivant le modèle de Terzaghi

L'équation de conservation de la quantité de mouvement incluant la loi de comportement de Terzaghi ( $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e - p_r \mathbf{I}$ ) avec  $p_r(x, y) = \Omega = -(a y + b)$  s'écrit :

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}^e + \mathbf{f}_p = 0$$

$$\text{avec } \mathbf{f}_p = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \end{Bmatrix}$$

Nous pouvons alors trouver une fonction d'Airy (fonction bi-harmonique) qui satisfait les conditions aux limites précédentes, dont la forme générale est la suivante :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & A_1 x^4 + A_2 x^3 y + A_3 x^2 y^2 + A_4 x y^3 + A_5 y^4 \\ & + B_1 x^3 + B_2 x^2 y + B_3 x y + B_4 y^3 \\ & + C_1 x^2 + C_2 x y + C_3 y^2 \end{aligned}$$

Le polynôme biharmonique  $\phi(x, y)$  doit être choisi de telle sorte que  $\nabla^4 \phi \equiv \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$  soit  $3 A_1 + A_3 + 3 A_5 = 0$ .

## E.2.1 Calcul du champ de contraintes

Dans un état de déformation plane les composantes vont devenir :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 A_3 x^2 + 6 A_4 x y + 12 A_5 y^2 + 2 B_3 x + 6 B_4 y + 2 C_3 + (a y + b) \\ \sigma_{yy} &= 12 A_1 x^2 + 6 A_2 x y + 2 A_3 y^2 + 6 B_1 x + 2 B_2 y + 2 C_1 + (a y + b) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{21} &= -3 A_2 x^2 - 4 A_3 x y - 3 A_4 y^2 - 2 B_2 x - 2 B_3 y - C_2 \end{aligned}$$

Les surfaces de droite et de gauche étant libres,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0$  sur  $x = \pm L$  ce qui implique successivement  $A_4 = B_3 = 0$ ,  $A_3 = B_2 = 0$ ,  $A_5 = B_4 = C_3 = 0$  et enfin  $A_1 = 0$ . Le champ de contraintes peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (a y + b) \\ \sigma_{yy} &= 6 A_2 x y + B_1 x + 2 C_1 + (a y + b) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= -3 A_2 x^2 - C_2 = 3 A_2 (L^2 - x^2) \end{aligned}$$

Les constantes restantes  $A_2$ ,  $B_1$  et  $C_1$  sont déterminées à partir des conditions aux limites restantes en  $y = 0$  et  $y = H$ .

En ce qui concerne la condition aux limites en pression sur la face supérieure on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}|_{y=H} = 0 &\Rightarrow -3 A_2 x^2 - C_2 = 3 A_2 (L^2 - x^2) = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \\ \sigma_{yy}|_{y=H} = 0 &\Rightarrow B_1 x + 2 C_1 + (a H + b) = -P_{imp} \end{aligned}$$

Par ailleurs on a  $-3 A_2 L^2 - C_2 = 0$  soit :  $C_2 = 0$

Remarque :  $P_{imp} > 0$  désigne une force de compression.

Le moment sur la face supérieure implique  $B_1 = 0$ .

$$M|_{y=H} = e \int_{-L}^{+L} \sigma_{yy} x dx = e \int_{-L}^{+L} (B_1 x^2 + 2 C_1 x + (a H + b) x) dx = 0$$

L'effort sur la face supérieure implique  $C_1 = -\frac{P_{imp} + (a H + b)}{2}$ .

$$F|_{y=H} = e \int_{-L}^{+L} \sigma_{yy} dx = e \int_{-L}^{+L} (2 C_1 + (a H + b)) dx = -P_{imp} e 2 L$$

Finalement le champ de contraintes dans la plaque 2D en déformation plane s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (a y + b) \\ \sigma_{yy} = -P_{imp} - (a H + b) + (a y + b) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

## E.2.2 Calcul du champ de déformations

En utilisant la loi de Hooke (voir système E.2) les déformations s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} [(1 - 2\nu)(a y + b) + \nu G] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} [(1 - 2\nu)(a y + b) + (\nu - 1) G] \\ \varepsilon_{xy} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

avec  $G = a H + b + P_{imp}$ .

## E.2.3 Calcul des déplacements

### E.2.3.1 Calcul des $U_{ij}$

En utilisant l'équation E.1.3 et en remplaçant par les expressions des déformations :

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} [(1 - 2\nu)(a \eta + b) + \nu G] + (y - \eta) \frac{1+\nu}{E} [(1 - 2\nu) a] \\ U_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} [(1 - 2\nu)(a \eta + b) + (\nu - 1) G] \\ U_{xy} &= 0 \\ U_{yx} &= -\frac{1+\nu}{E} (x - \xi) [(1 - 2\nu) a] \end{aligned}$$

### E.2.3.2 Calcul des $u_i$

Les déplacements et les rotations en  $O(0,0)$  sont supposés nuls (voir le point  $O$  sur le schéma E.2) . Les déplacements d'un point arbitraire sont calculés à partir des intégrales

$$\text{le long des chemins } (u_x(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} U_{xx} d\xi + U_{xy} d\eta \text{ et } u_y(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} U_{yx} d\xi + U_{yy} d\eta) :$$

$$u_x(x, y) = \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)(ay+b)x + \nu Gx]$$

$$u_y(x, y) = \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{a}{2}y + b \right) y + (\nu-1) Gy - \frac{1-2\nu}{2} ax^2 \right]$$

Il reste maintenant à fixer un déplacement et une rotation nuls au niveau de la base (point  $O$ ). Pour cela on ajoute une rotation et une translation de corps rigide de telle sorte que  $u_i^{corrig} = u_i + c_i + \varepsilon_{ijk} w_j x_k$  où  $c_i$  représente un déplacement uniforme et  $\varepsilon_{ijk} w_j$  une rotation autour de l'origine. Nous pouvons vérifier assez simplement que les déformations sont indépendantes de  $c_i$  et  $\varepsilon_{ijk} w_j$ . Nous allons choisir ces deux paramètres de telle sorte que  $u_x = u_y = 0$  et  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$  au point  $O(x=0, y=0)$ . Étant donné que l'on traite un problème bidimensionnel, on prend  $c_z = w_x = w_y = 0$ . Ainsi,  $c_x = 0$ ,  $c_y = 0$  et  $w_z = 0$ . Finalement  $u_x^{corrig} = u_x$  et  $u_y^{corrig} = u_y$  soit :

$$\begin{aligned} u_x^{corrig} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)(ay+b)x + \nu Gx] \\ u_y^{corrig} &= \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{a}{2}y + b \right) y + (\nu-1) Gy - \frac{1-2\nu}{2} ax^2 \right] \end{aligned} \quad (E.8)$$

avec  $G = aH + b + P_{imp}$

# Annexe F

## Caractérisation du régime de l'écoulement

D'un point de vue dynamique, les écoulements sont classés d'après la valeur du nombre de Reynolds  $Re$  ; ce nombre, sans dimension, est défini par (Wolff (1994)) :

$$Re = \frac{\rho v \delta}{\eta} \quad (\text{F.1})$$

avec :

- $\rho$  : masse volumique du fluide,
- $v = \|\mathbf{v}\|$  : vitesse « moyenne » (mais intrinsèque) du fluide dans l'écoulement,
- $\delta$  : dimension caractéristique de l'écoulement ; il s'agit d'une dimension dont la variation, toutes choses égales par ailleurs (c'est-à-dire sans modifier les autres grandeurs indépendantes), entraîne un changement de la vitesse « moyenne ». Pour un écoulement dans un tube circulaire,  $\delta$  est le diamètre du tube ; pour un écoulement entre deux cylindres,  $\delta$  est égal à l'entrefer.

Le nombre de Reynolds caractérise en fait le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. Dans le cas d'un tube circulaire, pour  $Re < 2000$ , l'écoulement est laminaire ; macroscopiquement, tout se passe comme si les couches fluides glissaient les unes sur les autres sans s'interpénétrer (les filets de fluides sont parallèles) ; la longueur caractéristique des échanges entre couches est égale au libre parcours moyen des molécules constituant le fluide.

Au contraire, pour  $Re > 2000$ , il y a interpénétration importante et désordonnée (aussi bien dans le temps que dans l'espace) des couches les unes avec les autres : l'écoulement est turbulent et présente un aspect macroscopiquement incohérent. Le passage du régime laminaire au régime turbulent n'est pas brusque en général ; la transition s'effectue par un régime intermédiaire. Notons enfin qu'il ne faut pas confondre le régime turbulent avec



un régime caractérisé par l'existence d'écoulements secondaires stables (par exemple les tourbillons de Taylor dans les écoulements entre deux cylindres coaxiaux) ou d'instabilités à caractère périodique dans l'espace.

Dans le cas du procédé *LRI* (Bear (1990), Elbouazzaoui (2004), Boomsma *et al.* (2003), Bird *et al.* (2002)) l'équation devient :

$$Re = \frac{\rho v_p d_p}{\eta} \quad (\text{F.2})$$

avec  $d_p$  le diamètre moyen des pores et  $v_d$  la vitesse moyenne intrinsèque dans les pores.

Le régime d'écoulement est ainsi caractérisé par le nombre de Reynolds (Elbouazzaoui (2004)) :

- $1 < Re < 10$  : régime d'application de la loi de Darcy,
- $10 < Re < 150$  : régime inertiel ; la vitesse du fluide n'est plus proportionnelle au gradient de pression,
- $2000 < Re$  : régime turbulent, l'écoulement est chaotique et non-stationnaire.

# Annexe G

## Le modèle de Terzaghi

Les forces externes appliquées sur les nappes imprégnées et sèches sont supportées par les forces internes (contraintes) dans le réseau de fibres et la résine. Au niveau macroscopique la contrainte moyenne dans les préformes imprégnées notée  $\bar{\sigma}_{ij}^f$  peut s'exprimer au moyen des contraintes « superficielles » ou moyenne dans les nappes  $\bar{\sigma}_{f_{ij}}^f$  et des contraintes « superficielles » dans la résine  $\bar{\sigma}_{r_{ij}}^f$  (voir Kempner et Hahn (1998), Acheson *et al.* (2004), Farina et Preziosi (2000c)) :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{ij}^f &= \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \left[ \int_{V_f} \sigma_{f_{ij}}^f dV + \int_{V_r} \sigma_{r_{ij}}^f dV \right] \\ &= \bar{\sigma}_{f_{ij}}^f + \bar{\sigma}_{r_{ij}}^f\end{aligned}\tag{G.1}$$

Dans ce modèle, l'influence des contraintes de cisaillement de la résine dans les nappes imprégnées est négligeable devant celle de la pression hydrostatique. Cette hypothèse est directement reliée à l'hypothèse de Darcy qui permet d'obtenir la loi de Darcy à partir de celle de Brinkman. Dans cette équation de conservation de la quantité de mouvement, les contraintes du fluide Newtonien incompressible s'écrivent donc  $\sigma_{r_{ij}}^f = -p_r^f \delta_{ij}$ . Ainsi, les contraintes moyennes associées à la résine s'écrivent :

$$\bar{\sigma}_{r_{ij}}^f = -\phi (s p_r^f) \delta_{ij}\tag{G.2}$$

avec  $\phi = \frac{\text{Volume de pore}}{\text{Volume total}}$  la porosité des nappes de renforts et  $s = \frac{\text{Volume de résine}}{\text{Volume de pore}}$  leur saturation.

Les contraintes dans le réseau de fibres sont alors décomposées en deux parties : une partie correspondant aux contraintes induites par la pression de résine et une partie correspondant aux contraintes induites par les déformations des nappes elle mêmes :

$$\bar{\sigma}_{fij}^f = \bar{\sigma}_{frij}^f + \bar{\sigma}_{feij}^f \quad (\text{G.3})$$

où  $\bar{\sigma}_{feij}^f$  sont les contraintes effectives du réseau de fibres.

Dans cette équation, la pression hydrostatique du fluide agissant sur le réseau de fibres (porosité  $\phi$  et niveau de saturation  $s$ ) s'écrit :

$$\bar{\sigma}_{frij}^f = -(1 - \phi) (s p_r^f) \delta_{ij}$$

Les contraintes dans le réseau de fibres s'écrivent :

$$\bar{\sigma}_{fij}^f = \bar{\sigma}_{feij}^f - (1 - \phi) (s p_r^f) \delta_{ij} \quad (\text{G.4})$$

Finalement, les contraintes macroscopiques dans les nappes imprégnées de saturation ( $s$ ) s'écrivent :

$$\boxed{\bar{\sigma}_{ij}^f = \bar{\sigma}_{feij}^f - s p_r^f \delta_{ij}} \quad (\text{G.5})$$

## Annexe H

# Transport des quantités depuis les points de Gauss vers les nœuds

Les quantités calculées par éléments finis au point de Gauss doivent être transportées au niveau des nœuds afin d'être visualisées dans *GMSH*<sup>15</sup>. Nous proposons dans cette annexe une méthode de transport de ces quantités. De nombreux auteurs proposent des méthodes plus ou moins précises permettant de réaliser ce transport. La plus simple consiste à moyenner les quantités sur chaque élément entourant le nœud considéré. Une moyenne supplémentaire pondérée par le volume des éléments permet d'évaluer la valeur nodale. Une autre méthode plus précise consiste à considérer uniquement les points de Gauss entourant le nœud considéré. La moyenne des valeurs obtenues en chacun de ces points, pondérée par leur distance relative aux nœuds considérés, fournit une meilleure évaluation de la valeur nodale. La méthode des moindres carrés que nous avons choisie ici, bien que plus coûteuse, fournit des résultats plus précis. Cette méthode consiste à associer la méthode des éléments finis à la méthode des moindres carrés. Au niveau d'un élément  $e$ , en chaque point de Gauss, la valeur d'un champ (scalaire ou vectoriel) qui a été calculé au préalable par la méthode éléments finis est connue. Pour des raisons de présentation et de simplicité, un champ scalaire est ici considéré. Pour un point de Gauss,  $\phi$  la valeur du champ scalaire est donc connue. Soit  $\{\phi^e\}$  les valeurs inconnues de ce même champ aux nœuds de l'élément  $e$ . Les fonctions de formes associées à l'élément  $e$  sont notées  $\langle N^e \rangle$  (généralement des fonctions d'interpolation type Lagrange d'ordre 1). Pour le point de Gauss considéré, l'approximation conduit à la valeur approchée  $\phi^h$  suivante par la méthode des éléments finis :

$$\phi^h = \langle N^e \rangle \cdot \{\phi^e\}$$

---

<sup>15</sup> *GMSH*<sup>©</sup> : <http://geuz.org/gmsh/>

Au sens des moindres carrés, le problème à résoudre est le suivant :

$$\int_{\Omega^e} (\phi - \phi^h)^2 dv = \int_{\Omega^e} (\phi - \langle N^e \rangle \cdot \{\phi^e\})^2 dv$$

La minimisation de cette fonction conduit à :

$$\int_{\Omega^e} \langle d\phi^e \rangle \cdot \{N^e\} \cdot \langle N^e \rangle \cdot \{\phi^e\} dv = \int_{\Omega^e} \langle d\phi^e \rangle \cdot \{N^e\} \phi dv \quad (\text{H.1})$$

Le système à résoudre devient :

$$[A^e] \cdot \{\phi^e\} = \{F^e\}$$

où  $[A^e] = \int_{\Omega^e} \langle d\phi^e \rangle \cdot \{N^e\} \cdot \langle N^e \rangle dv$  est une matrice de masse élémentaire et  $\int_{\Omega^e} \langle d\phi^e \rangle \cdot \{N^e\} \phi dv$  est le vecteur second membre élémentaire.

Après assemblage ( $[\mathbf{A}] \cdot \{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{F}\}$ ), la matrice  $[\mathbf{A}]$ , proche d'une matrice de masse, peut être reconditionnée en additionnant les termes de chaque ligne sur la diagonale où l'influence de la masse est la plus grande pour le degré de liberté auquel elle est associée. La résolution du système est alors immédiate. Nous présentons ici un exemple d'utilisation de cet algorithme dans le cas de l'écoulement de Couette (équations de Stokes) pour l'affichage des contraintes équivalentes et des contraintes de cisaillement  $\sigma_{12}$  (voir cas test de Couette dans Duvaut (1999)).

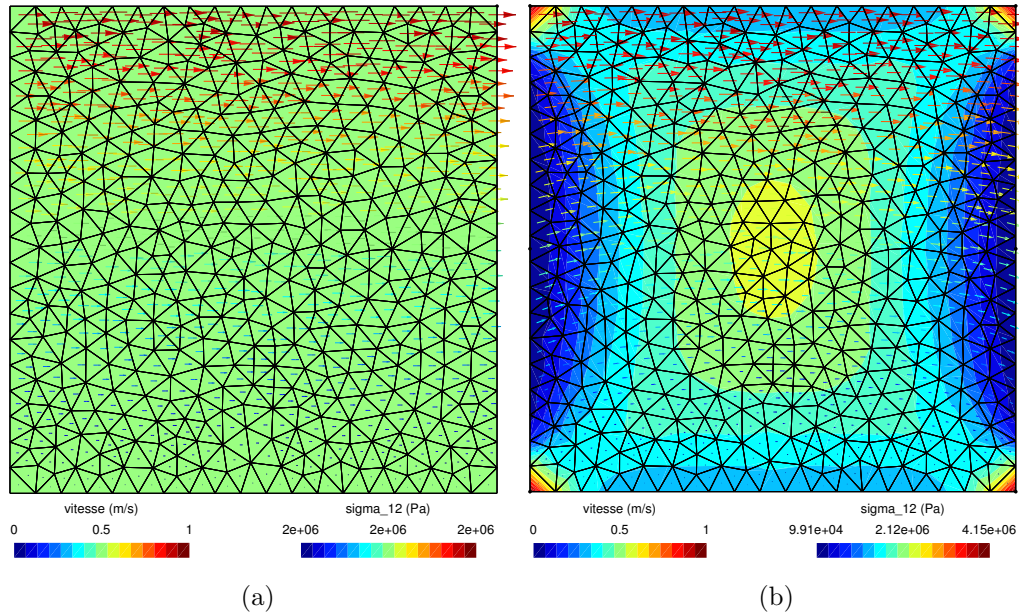


Figure H.1 – Écoulement de Couette - (a) condition « outflow »  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0$ , (b) pas de condition « outflow »

# Annexe I

## Résolution analytique des problèmes tests de Stokes et de Darcy

### I.1 Le problème de Stokes

Le problème de Stokes sans force de volume s'écrit :

$$\begin{cases} -\nabla p + \operatorname{div}(2\eta \mathbf{D}(\mathbf{v})) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Le cas test de Poiseuille décrit sur la figure I.1 est considéré :

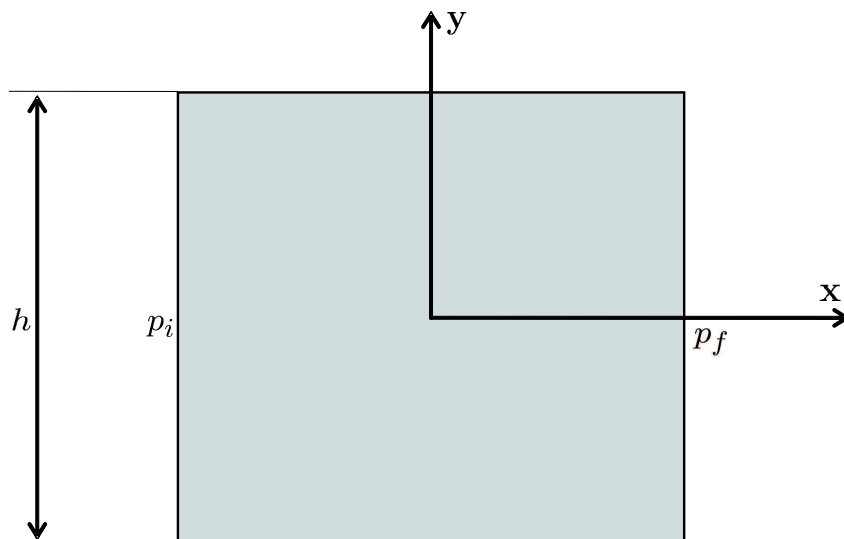


Figure I.1 – cas test Stokes : Étude de l'écoulement de Poiseuille.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement ( $\nabla p - \eta \Delta \mathbf{v} = 0$ ) tient compte de l'hypothèse d'incompressibilité (voir Annexe A.5). Suivant  $\mathbf{x}$ , elle s'écrit (la vitesse suivant  $\mathbf{x}$  ne dépend que de  $y$ ) :

$$-\frac{\partial p(x)}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} = 0$$

En intégrant deux fois par rapport à  $y$  :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p(x)}{\partial x} y^2 + a y + b$$

Après application des conditions d'adhérence au niveau des parois supérieures et inférieures, *i.e.* vitesse nulle ( $v_x(\pm \frac{h}{2}) = 0$ ), l'équation précédente s'écrit :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p(x)}{\partial x} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (\text{I.1})$$

En intégrant par rapport à  $x$  :

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{p_f - p_i}{l} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

Ainsi en  $y = 0$ , la vitesse suivant  $\mathbf{x}$  s'écrit :  $v_x(0) = -\frac{1}{2\eta} \frac{p_f - p_i}{l} \frac{h^2}{4}$

Pour  $y$  fixé, l'équation I.1 montre que le gradient de pression est constant. La répartition de la pression est donc linéaire.

## I.2 Le problème de Darcy

Le problème de Darcy sans force de volume s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{v} &= -\frac{\mathbf{K}}{\eta} \cdot \nabla p \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{cases}$$

En combinant les équations précédentes, l'équation dite de Richard ou de Buckingham-Darcy s'écrit :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{K}}{\eta} \cdot \nabla p \right) = 0$$

Soit en considérant une perméabilité  $\mathbf{K}$  et une viscosité  $\eta$  constante (équation de Laplace) :

$$\Delta p = 0 \quad (\text{I.2})$$

Le cas test que l'on souhaite modéliser ici est celui d'un convergent (ou d'un divergent) c'est à dire d'une injection radiale représentée sur la figure I.2.

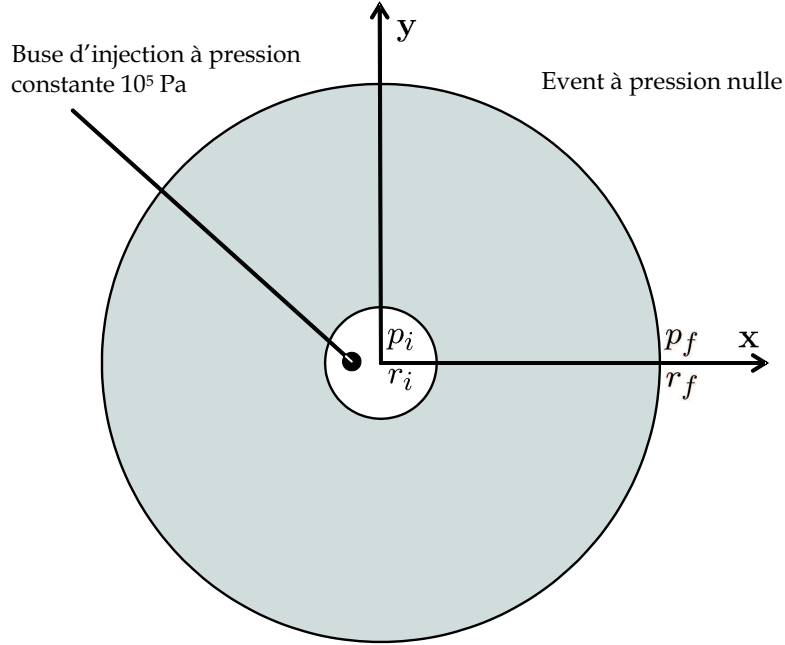


Figure I.2 – cas test Darcy : Étude d'un divergent.

En coordonnées cylindriques l'équation de Laplace s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.3})$$

Le milieu poreux est considéré isotrope ( $K_x = K_y = K_z = K$ ). Le champ de pression est donc purement radial :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (\text{I.4})$$

En intégrant cette équation, les expressions suivantes pour la pression  $p(r)$  et la vitesse radiale  $v_r(r)$  (en réinjectant les résultats de l'équation de Laplace dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement) sont obtenues :

$$p(r) = p_i + (p_f - p_i) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_f}\right)} \quad (\text{I.5})$$

et

$$v_r(r) = -\frac{K}{\eta} \frac{1}{r} \frac{(p_f - p_i)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_f}\right)} \quad (\text{I.6})$$





## Annexe J

# Origine de l'équation de Brinkman

Afin de déterminer des équations de conservation macroscopique d'écoulement à l'intérieur du milieu poreux et compte tenu de la forte hétérogénéité de la structure, des grandeurs moyennes sont introduites. Les grandeurs suivantes sont introduites (Rappaz *et al.* (1998) et Tucker III (1996)) :

La fraction volumique d'une phase  $\alpha$  notée  $\phi^\alpha$  :

$$\phi^\alpha = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \chi^\alpha(\mathbf{x}, t) dV = \frac{\Delta V^\alpha}{\Delta V} \quad (\text{J.1})$$

avec  $\chi^\alpha$  fonction de distribution de la phase  $\alpha$  :

$$\chi^\alpha(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega^\alpha \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \end{cases} \quad (\text{J.2})$$

La valeur moyenne  $\bar{\xi}^\alpha$  d'une grandeur intrinsèque  $\tilde{\xi}^\alpha$  pondérée sur le sous domaine  $\Delta V^\alpha$  s'écrit :

$$\langle \tilde{\xi}^\alpha \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t) \chi^\alpha(\mathbf{x}, t)$$

La valeur moyenne intrinsèque  $\xi^\alpha$  d'une grandeur intrinsèque  $\tilde{\xi}^\alpha$  spécifique au sous domaine  $\Delta V^\alpha$  s'écrit :

$$\langle \tilde{\xi}^\alpha \rangle^\alpha = \frac{1}{\Delta V^\alpha} \int_{\Delta V} \tilde{\xi}(\mathbf{x}, t) \chi^\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta V}{\Delta V^\alpha} \langle \xi^\alpha \rangle = \frac{1}{\phi^\alpha} \bar{\xi}^\alpha \quad (\text{J.3})$$

Rappaz *et al.* (1998) montrent que la dérivée temporelle d'une grandeur moyennée  $\bar{\xi}^\alpha$  s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \tilde{\xi}^\alpha v_n^{\alpha/\beta} \right\rangle^*$$

où  $v_n^{\alpha/\beta}$  est la composante normale de la vitesse de l'interface entre les phases  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\mathbf{n}^{\alpha/\beta}$  étant la normale pointant à l'extérieur du domaine  $\Omega^\alpha$ ),  $\langle \rangle$  désigne une valeur moyenne sur le domaine et  $\langle \rangle^*$  désigne une moyenne prise sur l'interface entre  $\alpha$  et  $\beta$ . Les dérivées spatiales s'écrivent alors :

$$\nabla \bar{\xi}^\alpha = \left\langle \nabla \tilde{\xi}^\alpha \right\rangle - \left\langle \tilde{\xi}^\alpha \mathbf{n}^{\alpha/\beta} \right\rangle^*$$

$$\text{div } \bar{\xi}^\alpha = \left\langle \text{div } \tilde{\xi}^\alpha \right\rangle - \left\langle \tilde{\xi}_n^\alpha \right\rangle^*$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement de Navier et Stokes moyennée et appliquée à la phase  $\alpha$  liquide dans un milieu poreux de dimensions fixes s'écrit (voir aussi les travaux de Dopler *et al.* (1999) dans le cas de matrices métalliques) :

$$\left\langle \tilde{\rho}^\alpha \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}^\alpha}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \right\rangle = \left\langle \mathbf{f}^{\nu\alpha} \right\rangle - \left\langle \nabla \tilde{p}^\alpha \right\rangle + \left\langle \eta \Delta (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle$$

Le fluide étant incompressible, la masse volumique de la phase  $\alpha$  reste constante ( $\tilde{\rho}^\alpha = c^{te}$ ). Par ailleurs, le terme  $\langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle$  peut également s'écrire (compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité  $\text{div } \tilde{\mathbf{v}}^\alpha = 0$ ) :

$$\langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle = \mathbf{div} (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha) - \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \text{div } \tilde{\mathbf{v}}^\alpha = \mathbf{div} (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient donc :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \tilde{\rho}^\alpha \mathbf{div} (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle = \left\langle \mathbf{f}^{\nu\alpha} \right\rangle - \left\langle \nabla \tilde{p}^\alpha \right\rangle + \left\langle \eta \Delta (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle \\ - \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle}{\partial t} + \left\langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \tilde{v}_n^{\beta/\alpha} \right\rangle^* \\ \text{Le solide est immobile : } & \left\langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \tilde{v}_n^{\beta/\alpha} \right\rangle^* = 0. \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle}{\partial t} \\ - \left\langle \mathbf{div} (\tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle &= \mathbf{div} \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle - \left\langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \right\rangle^* \\ \text{Le solide est immobile } & \left\langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \right\rangle^* = 0 \\ \left\langle \mathbf{div} (\tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle &= \mathbf{div} \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle \\ - \left\langle \eta \Delta (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle &= \eta \left\langle \mathbf{div} (\nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle = \eta \mathbf{div} \langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle - \eta \left\langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \right\rangle^* \\ \left\langle \eta \Delta (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle &= \eta \mathbf{div} (\nabla \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle) - \eta \mathbf{div} \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \rangle^* - \eta \left\langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \right\rangle^* \\ \text{Le solide est immobile } & \eta \mathbf{div} \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \rangle^* = 0. \text{ En posant } F^\mu = \eta \left\langle \nabla \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \right\rangle^* \\ \left\langle \eta \Delta (\tilde{\mathbf{v}}^\alpha) \right\rangle &= \eta \mathbf{div} (\nabla \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle) - F^\mu \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
- \langle \mathbf{f}^{v^\alpha} \rangle &= \langle \tilde{\rho}^\alpha \mathbf{g} \rangle = \tilde{\rho}^\alpha \phi^\alpha \mathbf{g} \\
- \langle \nabla \tilde{p}^\alpha \rangle &= \nabla \langle \tilde{p}^\alpha \rangle - \langle \tilde{p}^\alpha \mathbf{n}^{\beta/\alpha} \rangle^* = \nabla \langle \tilde{p}^\alpha \rangle + F^p
\end{aligned}$$

En regroupant les expressions moyennées, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle}{\partial t} + \mathbf{div} \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle = \tilde{\rho}^\alpha \phi^\alpha \mathbf{g} - \nabla \langle \tilde{p}^\alpha \rangle + \eta \mathbf{div} (\nabla \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle) - \underbrace{(F^p + F^\mu)}_F$$

Rappaz *et al.* (1998) montrent que le terme  $F = F^p + F^\mu$  peut aussi s'écrire  $F = \frac{\eta \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle}{K}$  généralement appelé terme de Darcy.

$$\frac{\partial \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle}{\partial t} + \mathbf{div} \langle \tilde{\rho}^\alpha \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle = \tilde{\rho}^\alpha \phi^\alpha \mathbf{g} - \nabla \langle \tilde{p}^\alpha \rangle + \eta \mathbf{div} (\nabla \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle) - \frac{\eta \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle \phi^\alpha}{K}$$

Soit :

$$\frac{\partial (\tilde{\rho}^\alpha \phi^\alpha \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle^\alpha)}{\partial t} + \mathbf{div} (\tilde{\rho}^\alpha \phi^\alpha \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle^\alpha) = \tilde{\rho}^\alpha \phi^\alpha \mathbf{g} - \nabla (\phi^\alpha \langle \tilde{p}^\alpha \rangle^\alpha) + \eta \mathbf{div} (\nabla \phi^\alpha \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle^\alpha) - \frac{\eta \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle^\alpha (\phi^\alpha)^2}{K}$$

A l'échelle mésoscopique les grandeurs varient lentement :

$$\mathbf{div} \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle^\alpha = \mathbf{div} (\langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle^\alpha \otimes \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle^\alpha)$$

En négligeant les gradients de  $\phi^\alpha$  :

$$\frac{\partial (\tilde{\rho}^\alpha \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle)}{\partial t} + \frac{1}{\phi^\alpha} \mathbf{div} (\tilde{\rho}^\alpha \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle \otimes \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle) = \tilde{\rho}^\alpha \phi^\alpha \mathbf{g} - \phi^\alpha \nabla \langle \tilde{p}^\alpha \rangle^\alpha + \eta \mathbf{div} (\nabla \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle) - \frac{\eta \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle \phi^\alpha}{K}$$

soit en notant  $\bar{\mathbf{v}}^\alpha = \langle \tilde{\mathbf{v}}^\alpha \rangle$  la vitesse moyenne de la phase  $\alpha$  (sur tout le volume),  $p^\alpha = \langle \tilde{p}^\alpha \rangle^\alpha$  la pression moyenne intrinsèque de la résine et  $\rho^\alpha = \tilde{\rho}^\alpha$  la masse volumique intrinsèque moyenne de la phase  $\alpha$  constante, l'équation de Brinkman devient :

$$\frac{\partial (\rho^\alpha \bar{\mathbf{v}}^\alpha)}{\partial t} + \frac{1}{\phi^\alpha} \mathbf{div} (\rho^\alpha \bar{\mathbf{v}}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{v}}^\alpha) = \rho^\alpha \phi^\alpha \mathbf{g} - \phi^\alpha \nabla p^\alpha + \eta \mathbf{div} (\nabla \bar{\mathbf{v}}^\alpha) - \frac{\eta \bar{\mathbf{v}}^\alpha \phi^\alpha}{K}$$



# Annexe K

## Comparaison Stokes Darcy Brinkman

Les équations de Brinkman en régime stationnaire ont également été intégrées dans *PRO-FLOT*<sup>TM</sup> à l'aide de la méthode basée sur l'élément P1+/P1. La formulation faible du problème de Brinkman en pression s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{v}, \forall \delta p, \\ \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot (\bar{\mathbf{v}}) \, dv + \int_{\Omega} 2 \eta \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, dv + \int_{\Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \nabla p \, dv = \int_{\partial \Omega_t} 2 \eta \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, ds \\ \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \delta p \, dv = \int_{\Omega} \delta p \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dv \\ \delta p \in E_{\delta p} = \{ \delta p \in H^1(\Omega) / \delta p = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \Omega_p \} \\ p \in E_p = \{ p \in H^1(\Omega) / p = p^d \text{ sur } \partial \Omega_p \} \end{array} \right. \quad (\text{K.1})$$

Nous comparons ici les résultats obtenus pour un écoulement type Poiseuille en utilisant les formulations de Stokes, Darcy et Brinkman. Le cas test utilisé est celui présenté sur la figure I.1, page 243. Pour la loi de Darcy aucune condition n'est appliquée sur les faces tangentielles supérieures et inférieures (la formulation faible 9.40, page 141 ne le permet pas). La vitesse normale est nulle. Les résultats sont comparés pour différents niveaux de perméabilités :  $K = 1 \, m^2$ ,  $K = 1.10^{-1} \, m^2$  et  $K = 1.10^{-3} \, m^2$ . Les résultats présentés ici ont été comparés avec succès avec *FEM-LAB*<sup>TM</sup> (voir figure K.2). Nous notons que pour des perméabilités inférieures à  $K = 1.10^{-3} \, m^2$ , les résultats obtenus sont très proches de ceux obtenus avec les équations de Darcy. Pour ces niveaux de perméabilité très faibles, des problèmes numériques apparaissent au niveau des bords où la condition d'adhérence est appliquée. Ces couches limites indiquent que pour ces niveaux de perméabilité il n'est plus possible d'appliquer ce type de condition. L'approximation de Darcy doit alors être utilisée.

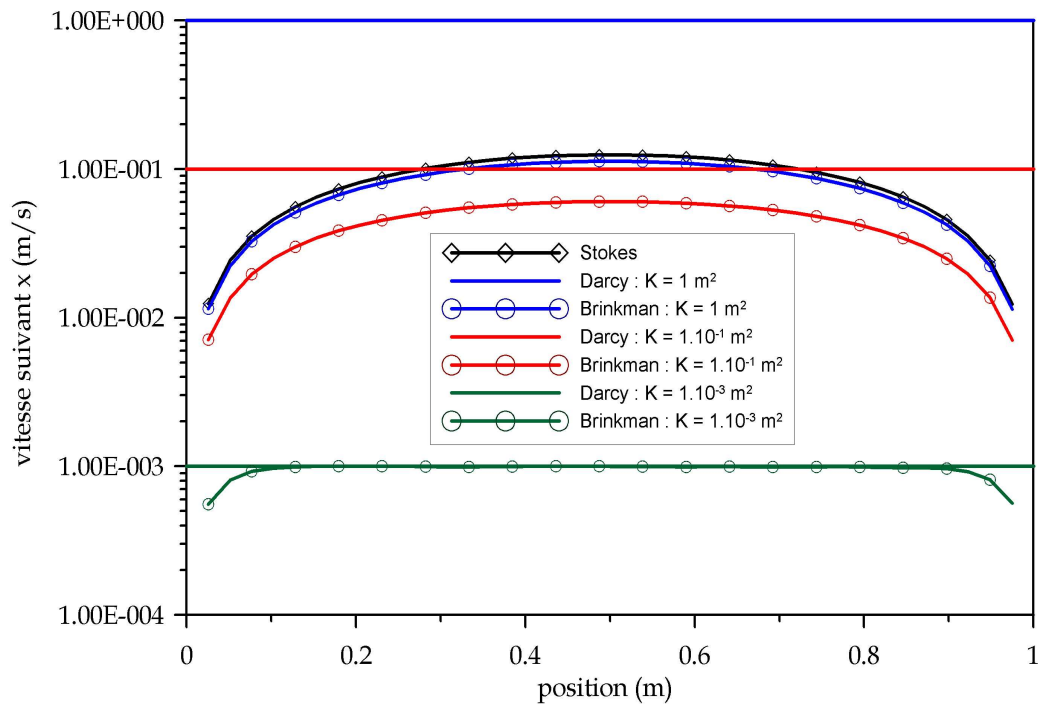


Figure K.1 – Comparaison du profil de vitesse suivant  $x$  pour l'écoulement de Poiseuille pour des perméabilités égale à  $1 \text{ m}^2$ ,  $1.10^{-1} \text{ m}^2$ , et  $1.10^{-3} \text{ m}^2$ .

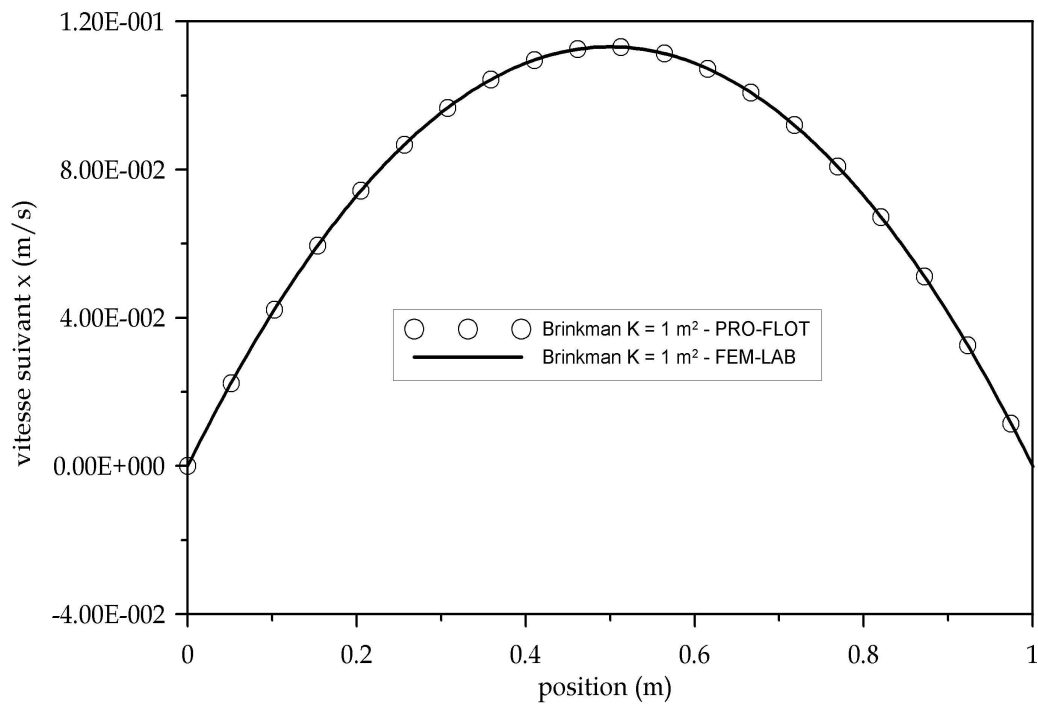


Figure K.2 – Comparaison du profil de vitesse suivant  $x$  entre  $FEM-LAB^{\text{TM}}$  et  $PRO-FLOT^{\text{TM}}$  pour l'écoulement de Poiseuille et une perméabilité de  $1 \text{ m}^2$ .

## Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

N° d'ordre : 422 MI

**Pierre CELLE**

**Titre de la thèse :** Coupling fluid / porous material under finite strains for modeling the infusion based manufacturing processes

**Spécialité :** Mechanics and Engineering

**Mots clefs :** Darcy, Stokes, Brinkman, composites materials, *FEM* : Finite Element Model, *ALE* formulation, *LRI* : Liquid Resin Infusion, *RFI* : Resin Film Infusion, *RTM* : Resin Transfer Molding.

**Résumé :** In the present work, an overall model for the study of a non isothermal fluid flow across a highly compressible porous medium is proposed. This model is used here to study dry composite manufacturing processes by infusion across the fabric thickness (Liquid Resin Infusion-*LRI* and Resin Film Infusion-*RFI*). These processes consist in mixing during the manufacturing stage, the reinforcements and the liquid resin transversely to the fabrics planes, yielding cost reductions while avoiding filling problems. These processes are however still poorly controlled and the characteristics of the finished part are not easily predictable (mainly the thickness and the porosity). A numerical predictive model would be a proper candidate to help in developing and finalizing new composite solutions with cost saving. Physically, liquid resin infusion is mainly induced across the compressed preform thickness, as a result of a pressure prescribed over the preform/resin stacking. From the modeling point of view, problems of this multiphysical analysis are two fold. First, one faces ill-posed boundary conditions, regarding the coupling of liquid regions, where a Stokes flow prevails, with the fibrous preform regions modeled as porous medium governed by a Darcy's law and a non-linear mechanical response. Second, the interaction phenomena due to the resin flow in the highly compressible preform are not classical. The model developed here includes a modified Beaver-Schaffman-Joseph condition to couple Stokes and Darcy zones, and is based on an *ALE* formulation of the liquid flow across the deformable porous medium in which finite strains are accounted for with an updated Lagrangian scheme. This mechanical model is also coupled with thermo-chemical models, accounting for resin reticulation under the temperature cycle. In the present work, numerical tools and new formulations have been developed in order to simulate the whole *LRI* or *RFI* process with a finite element software. These tools are studied individually and compared separately with analytical or other numerical results before being used in the *LRI* / *RFI* models. Numerical studies of infusion are then presented, commented, and a first comparison with experimental test is investigated.



## Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

N° d'ordre : 422 MI

**Pierre CELLE**

**Titre de la thèse :** Couplages fluide / milieu poreux en grandes déformations pour la modélisation des procédés d'élaboration par infusion

**Spécialité :** Mécanique et Ingénierie

**Mots clefs :** Darcy, Stokes, Brinkman, matériaux composites, *FEM* : Finite Element Model, Formulation *ALE*, *LRI* : Liquid Resin Infusion, *RFI* : Resin Film Infusion, *RTM* : Resin Transfer Molding.

**Résumé :** Dans ce manuscrit, un modèle complet pour la simulation de l'écoulement d'un fluide thermo-réactif à travers un milieu poreux fortement compressible est présenté. Ce modèle est utilisé pour l'étude des procédés d'élaboration des matériaux composites par infusion à travers leur épaisseur (Liquid Resin Infusion-*LRI* et Resin Film Infusion-*RFI*). Dans ces procédés, le mélange entre les renforts et la résine liquide est réalisé dans la direction transverse aux plans des préformes pendant la phase de mise en forme. Les coûts sont ainsi réduits et les problèmes de remplissage éliminés. Ces procédés sont néanmoins peu maîtrisés et les caractéristiques de la pièce finale difficilement prévisibles (principalement les épaisseurs et les porosités). La mise au point d'un modèle numérique constituerait un bon outil pour développer et finaliser de nouvelles solutions composites. D'un point de vue physique, l'infusion de la résine à travers l'épaisseur des préformes est une conséquence de la pression appliquée sur l'empilement résine/préforme. Dans cette analyse multi-physique deux types de problèmes sont rencontrés. Tout d'abord, on connaît mal les conditions de couplage entre les zones liquides, gouvernées par les équations de Stokes, et les préformes imprégnées assimilées à des milieux poreux, gouvernées par une loi de Darcy et une loi de comportement mécanique non-linéaire. Par ailleurs, les interactions entre l'écoulement de la résine et la compression des préformes ne sont pas bien maîtrisées. Le modèle développé inclut donc une condition de Beaver-Joseph-Schaffman modifiée pour le couplage entre les zones de Darcy et de Stokes. Une formulation *ALE* pour l'écoulement de la résine dans un milieu poreux déformable subissant de fortes déformations est utilisée et couplée à une formulation Lagrangienne Réactualisée pour la partie solide. Ces deux mécanismes physiques sont couplés à des modèles thermo-chimiques pour traiter la réticulation de la résine sous l'action du cycle de température. Dans ce travail, un certain nombre d'outils numériques et de nouvelles formulations ont été développés en vue de simuler les procédés *LRI* et *RFI*. Chaque outil est étudié et validé analytiquement ou numériquement avant d'être intégré dans les modèles *LRI/RFI*. Des simulations numériques d'infusion sont ensuite présentées et commentées, puis une première comparaison avec des essais expérimentaux est proposée.