



**HAL**  
open science

## Contribution à la vérification et à la validation d'un modèle diphasique bifluide instationnaire

Yujie Liu

► **To cite this version:**

Yujie Liu. Contribution à la vérification et à la validation d'un modèle diphasique bifluide instationnaire. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Aix-Marseille Université, 2013. Français. NNT : 184 . tel-00864567

**HAL Id: tel-00864567**

**<https://theses.hal.science/tel-00864567v1>**

Submitted on 22 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE ET MÉCANIQUE

---

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE**

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE (ED 184)

présentée et soutenue publiquement par

**Yujie LIU**

le 11 septembre 2013

---

**Contribution à la vérification et à la validation d'un modèle diphasique bifluide instationnaire**

---

DIRECTEUR DE THÈSE : M. JEAN-MARC HÉRARD

devant le jury composé de :

M. Christophe Chalons	Maître de conférence, Université Paris Diderot	Rapporteur
M. Alain Forestier	Assitant scientifique et programmes, CEA	Rapporteur
M. Thierry Gallouët	Professeur, Université Aix-Marseille	Examineur
M. Sergey Gavriluk	Professeur, Université Aix-Marseille	Examineur
M. Philippe Helluy	Professeur, Université de Strasbourg	Co-directeur de thèse
M. Jean-Marc Hérard	Ingénieur Senior, EDF R&D	Directeur de thèse
M. Fabien Crouzet	Tuteur industriel, EDF R&D	Invité



## Résumé

Les travaux de cette thèse contribuent à la vérification et à la validation d'un modèle diphasique instationnaire, le modèle bifluide de Baer-Nunziato, pour modéliser les phénomènes de transitoires hydrauliques tels que les coups de bélier et les marteaux d'eau, qui peuvent apparaître dans les réseaux de tuyauteries industrielles. Il s'agit d'abord de modéliser les écoulements de transitoires hydrauliques avec le modèle bifluide en représentation eulérienne, puis d'étendre ce modèle en formalisme ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) pour prendre en compte l'interaction fluide-structure (IFS). Pour modéliser les écoulements, des lois de fermetures du modèle bifluide concernant les termes interfaciaux, les termes sources et les lois thermodynamiques ont d'abord été étudiées. Ensuite, le système complet a été simulé avec une méthode à pas fractionnaires qui admet deux étapes, l'une pour la résolution de la partie convective, l'autre pour la prise en compte des termes sources. Pour la partie convective, le schéma de Rusanov a d'abord été vérifié. Des problèmes de stabilité ayant été observés, un nouveau schéma plus stable à pas fractionnaires a été proposé et vérifié. En ce qui concerne les termes sources, quatre schémas de relaxation non-instantanés qui représentent respectivement le retour à l'équilibre de pression, les transferts de quantité de mouvement, de chaleur et de masse, sont appliqués successivement. Ces schémas ont été étendus aux lois thermodynamiques 'Stiffened Gas généralisées' afin de représenter le changement de phase eau-vapeur. Après avoir retrouvé certains phénomènes typiques associés aux écoulements de transitoires hydrauliques le modèle bifluide a été confronté aux résultats de l'expérience de Simpson, qui est un cas classique de coup de bélier et à ceux de l'expérience Canon, dédiée à la décompression rapide d'un fluide à haute pression dans une tuyauterie. Par ailleurs, le modèle bifluide a été comparé avec deux modèles homogènes sur ces deux expériences. Enfin, une version ALE du modèle bifluide a été mise en œuvre et vérifiée sur un cas de propagation d'ondes de pression dans une conduite flexible, en écoulement 'quasi-monophasique', ou diphasique. La variation de la célérité des ondes de pression dans le fluide liée au couplage entre le fluide et la structure a été bien retrouvée. La validation a été effectuée sur une expérience qui étudie la réponse d'une tuyauterie remplie d'eau soumise à un pic de pression violent (140 bar). Les simulations sont en bon accord avec les données expérimentales.

**Mots clés :** Transitoires hydrauliques, cavitation, modèle bifluide, relaxation, ALE, Interaction fluide structure

## Abstract

This thesis contributes to the verification and the validation of the Baer-Nunziato (BN) model, to modelize water hammer phenomena in industrial piping systems. It consists of two parts, the first is to modelize water hammer flows with the BN model in Eulerian representation and the second is to extend this model to the ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) formalism so as to take into account fluid-structure interaction (FSI). To modelize water hammer flows, closure laws of the BN model concerning the interfacial/source terms and the equations of state (EOS) were first studied. Then the whole system was simulated with a fractional step method including two steps, one for the resolution of the convective part, the other for the source terms. For the convective part, the Rusanov scheme was first checked, and some stability problems have been observed. Thus a more stable fractional step scheme has been proposed and verified. Regarding the source terms, four non-instantaneous relaxation schemes which represent the return to equilibrium of pressure, the transfers of momentum, heat and mass were successively applied. These schemes have been extended to 'generalized Stiffened Gas' EOS in order to represent phase-change. After regaining some typical phenomena associated with water hammer flows, the BN model was validated with the Simpson experiment, a classical water hammer test case, and the Canon experience, a rapid decompression of fluid in a high pressure duct. Moreover, the model was compared with two homogeneous models on these two experiments. Finally, an ALE version of the BN model was implemented, and verified on a case of wave propagation in a 'single' phase flow and a two-phase flow in a flexible pipe. The variation of wave propagation speed due to the coupling between the fluid and the structure has been well retrieved. The validation was performed on an experiment which examines the response of a pipe filled with water, subjected to a violent pressure peak (140 bar). The simulations are in good agreement with the experimental data.

**Keywords :** Water hammer, cavitation, two-fluid model, relaxation , ALE, Fluid Structure Interaction



---

Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
0.1 Contexte industriel . . . . .	9
0.2 Modélisation des transitoires hydrauliques . . . . .	10
0.2.1 Modélisation des écoulements diphasiques compressibles . . . . .	10
0.2.2 Modèle bifluide à sept équations . . . . .	11
0.2.3 État de l'art . . . . .	11
0.2.4 Objectifs de la thèse . . . . .	12
0.3 Plan du mémoire . . . . .	12
0.4 Valorisation des travaux . . . . .	13
<b>1 Une approche bifluide statistique de modélisation des écoulements diphasiques à phases compressibles</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction et rappels élémentaires . . . . .	15
1.1.1 Quelques Rappels . . . . .	16
1.2 Lois d'évolution phasiques . . . . .	19
1.2.1 Equation topologique . . . . .	19
1.2.2 Définition des variables pondérées et choix des variables principales . . . . .	19
1.2.3 Moyenne statistique des équations d'évolution . . . . .	20
1.2.4 Conditions de positivité . . . . .	22
1.3 Lois de fermeture . . . . .	24
1.3.1 Loi d'état moyenne et tenseur des corrélations . . . . .	24
1.3.2 Lois de fermeture et hyperbolicité . . . . .	27
1.3.3 Lois de fermeture et condition d'entropie . . . . .	28
1.3.4 Synthèse partielle . . . . .	31
1.3.5 Lois de fermeture et relations de saut . . . . .	32
1.3.6 Synthèse . . . . .	32
1.4 Remarques concernant le cadre bifluide . . . . .	34
1.4.1 Liens avec quelques modèles diphasiques bifluides issus de la littérature. . . . .	34
1.4.2 Commentaires concernant le modèle de Baer-Nunziato. . . . .	34
1.4.3 Impact de la structure associée au champ $\langle V'_G \rangle(W)$ . . . . .	35
1.5 Extensions du formalisme bifluide . . . . .	36
1.5.1 Le cadre poreux . . . . .	36
1.5.2 Le cadre multiphasique [34] . . . . .	37

1.6	Quelques commentaires . . . . .	38
<b>Bibliographie</b>		<b>39</b>
<b>Préface des chapitre 2 et chapitre 3</b>		<b>43</b>
<b>2</b>	<b>Résolution de la partie convective du modèle bifluide</b>	<b>45</b>
2.1	Governing equations of the Baer-Nunziato model . . . . .	46
2.2	Numerical schemes . . . . .	48
2.2.1	First-order and second-order Rusanov scheme . . . . .	48
2.2.2	A fractional step method to compute Baer-Nunziato model . . . . .	49
2.3	Numerical results . . . . .	51
2.3.1	Definition of pure statistical fraction waves and equilibrium solutions . . . . .	51
2.3.2	A classical test case . . . . .	52
2.3.3	Pure void fraction waves . . . . .	53
2.4	Conclusion . . . . .	54
2.5	acknowledgements . . . . .	55
<b>Bibliographie</b>		<b>63</b>
<b>3</b>	<b>Schémas de simulation des termes de relaxation</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	Les lois d'état analytiques de type Stiffened Gas généralisés . . . . .	68
3.3	Un schéma implicite de discrétisation de la relaxation en vitesse $\mathcal{D}$ . . . . .	69
3.4	Un schéma implicite de discrétisation de la relaxation en pression $\Phi$ . . . . .	70
3.4.1	Un schéma implicite valable pour toute loi d'état . . . . .	71
3.4.2	Schéma implicite appliqué aux lois d'état de type SGG pour un mélange eau-vapeur . . . . .	72
3.5	Un schéma de relaxation en température implicite . . . . .	74
3.5.1	Schéma implicite valable pour toutes les lois d'état thermodynamiques . . . . .	75
3.5.2	Application du schéma au cadre des lois d'état de type SGG . . . . .	76
3.6	Schémas de relaxation en potentiel chimique . . . . .	78
3.6.1	Un schéma de type Euler explicite . . . . .	79
3.6.2	Un schéma de type Euler implicite . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Validation du modèle bifluide complet, comparaison bifluide/homogène/expérience</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Vérifications préliminaires du modèle bifluide . . . . .	84
4.2.1	Propagation d'une onde de pression dans un liquide monophasique . . . . .	84
4.2.2	Vitesse de propagation d'un signal de pression dans un mélange liquide/vapeur . . . . .	96
4.2.3	Conclusion . . . . .	98
4.3	Simulation de l'expérience de Simpson . . . . .	98
4.3.1	Présentation du dispositif expérimental . . . . .	98
4.3.2	Configuration et paramètres numériques . . . . .	99
4.3.3	Convergence en maillage . . . . .	102
4.3.4	Comparaisons modèle bifluide - modèles homogènes - expérience . . . . .	102
4.4	Simulation de l'expérience Canon . . . . .	112
4.4.1	Présentation du dispositif expérimental . . . . .	112
4.4.2	Configuration et paramètres numériques . . . . .	112
4.4.3	Convergence en maillage . . . . .	113

4.4.4	Comparaisons modèle bifluide - expérience - modèles homogènes . . . . .	115
4.5	Conclusion . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Prise en compte et validation de l'interaction fluide structure avec le modèle bifluide</b>	<b>121</b>
5.1	Introduction . . . . .	121
5.2	Formulation ALE du modèle bifluide . . . . .	122
5.3	Vérifications préliminaires . . . . .	125
5.3.1	Propagation d'ondes de pression . . . . .	125
5.3.2	Synthèse . . . . .	128
5.4	Simulation de l'expérience de Romander <i>et al.</i> [64] . . . . .	131
5.4.1	Présentation du dispositif expérimental . . . . .	131
5.4.2	Configuration et paramètres numériques . . . . .	132
5.4.3	Convergence en maillage . . . . .	135
5.4.4	Comparaisons modèle bifluide - modèle homogène HRM - expérience . . . . .	136
5.5	Conclusion . . . . .	142
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>143</b>
	<b>Appendices</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Cas tests pour la partie convective du modèle bifluide</b>	<b>149</b>
A.1	Vérification numérique et étude de la convergence en maillage du schéma de Rusanov . . . . .	149
A.1.1	Étude du choix thermodynamique GPGP . . . . .	149
A.1.2	Étude d'influence du choix thermodynamique plus complexe pour la phase liquide . . . . .	150
A.1.3	Synthèse . . . . .	153
A.2	Vérification numérique du schéma à pas fractionnaires et comparaison avec le schéma de Rusanov . . . . .	164
A.2.1	Cas tests avec une seule onde de discontinuité de contact . . . . .	164
A.2.2	Cas tests faisant intervenir plusieurs ondes . . . . .	164
A.2.3	Synthèse . . . . .	164
A.3	Synthèse . . . . .	164
	<b>Bibliographie</b>	<b>177</b>



### 0.1 Contexte industriel

Les configurations d'écoulements fluides dans les circuits secondaires en eau ou en vapeur des centrales nucléaires de type Réacteur à Eau Pressurisée (REP) sont multiples et peuvent, dans certaines conditions de fonctionnement, engendrer des transitoires hydrauliques violents, généralement désignés dans la littérature anglo-saxonne par le terme générique «water hammer». Ces transitoires recouvrent deux grandes classes d'évènements, traduites dans la langue française par l'expression «marteau d'eau» d'une part, «coup de bélier» d'autre part. Les marteaux d'eau désignent une poche d'eau entraînée par de la vapeur sous pression, venant impacter un obstacle. Les coups de bélier désignent quant à eux le ralentissement brusque d'une colonne d'eau. Les phénomènes générateurs de coups de bélier sont eux-mêmes multiples. En suivant la terminologie proposée par Devos [19], on distingue trois familles d'évènements, classées en fonction des phénoménologies rencontrées. Les coups de bélier classiques [3] proviennent de l'arrêt d'une colonne d'eau créée par la fermeture rapide d'une vanne ou d'un clapet, ou par la vaporisation brutale d'eau chaude (flashing) au passage d'un organe déprimogène. Les coups de bélier de condensation de poche de vapeur [51] résultent de la mise en vitesse d'une colonne d'eau par condensation d'une poche de vapeur, puis du ralentissement brutal de cette colonne sur un obstacle. Enfin, les coups de bélier par jonction de colonne d'eau [11] proviennent de la mise en vitesse d'une colonne d'eau par absence de contre pression (poche de vide ou poche d'air à basse pression), puis du ralentissement brutal de cette colonne par impact sur une autre colonne d'eau ou sur un obstacle.

Coups de bélier et marteaux d'eau sont des phénomènes rapides et violents ; ils sont susceptibles d'entraîner des dommages sur les installations, principalement au niveau des singularités des circuits (vannes, coudes, diaphragmes...), comme illustré sur la figure 1. Dans le cas des coups de bélier, les conséquences mécaniques ne se limitent pas aux dommages directs causés par l'énergie cinétique d'impact d'une colonne d'eau stoppée par un obstacle ou changeant de direction dans un coude ; elles incluent également les dégâts potentiels résultant des variations de pression propagées par les ondes. Dans cette situation, les phénomènes de couplage entre la propagation des ondes de pression et les déplacements de la tuyauterie peuvent avoir un effet non négligeable sur les niveaux de contrainte au sein des structures.

Les écoulements fluides associés aux transitoires hydrauliques de type marteau d'eau ou coup de bélier présentent plusieurs régimes très différents : monophasique en gaz, en vapeur ou en liquide, diphasique dispersé à bulles ou gouttelettes, stratifié... Lorsque les écoulements sont diphasiques, ceux-ci incluent la plupart du temps des changements de phase entre l'eau à l'état liquide et l'eau à l'état vapeur. De façon générale, les effets de compressibilité et de propagation d'ondes sont primordiaux, tout comme les discontinuités de type ondes de choc, inhérentes aux coups de bélier. Par ailleurs, les transitoires hydrauliques sont par essence fortement instationnaires et les dynamiques suffisamment rapides pour potentiellement engendrer des déséquilibres mécaniques, thermiques ou thermodynamiques au sein de l'écoulement. Enfin, les interactions entre le fluide et la structure revêtent un intérêt capital sur la physique des phénomènes étudiés : vitesse effective des ondes dans les tuyauteries, amplitudes des surpressions générées, présence de poches de cavitation...



FIGURE 1 – Illustration des dommages engendrés par un coup de bélier sur une tuyauterie du parc de production d'électricité nucléaire d'EDF.

Au vu de la complexité des phénomènes physiques en jeu, le recours à la simulation numérique s'avère le plus souvent indispensable pour pouvoir estimer les conséquences mécaniques sur les structures d'incidents de type marteaux d'eau ou coups de bélier. Il est donc nécessaire de disposer de modèles à même de représenter la physique recherchée. Ceci justifie l'intérêt porté par EDF à la modélisation et à la simulation numérique des écoulements diphasiques compressibles fortement instationnaires, qui ont motivé les travaux réalisés dans le cadre de la présente thèse.

## 0.2 Modélisation des transitoires hydrauliques

### 0.2.1 Modélisation des écoulements diphasiques compressibles

Deux grandes classes de modèles moyennés ont été proposées dans la littérature depuis les années 1970. Une première classe repose sur une approche mono-fluide dans laquelle les équations portent sur le mélange des deux fluides. Les codes THYC (EDF), FLICA (CEA) et GENEPI (CEA) sont basés sur de tels modèles. Cette classe comprend plusieurs modèles différents parmi lesquels on trouve : HEM (Homogenous Equilibrium Model), HRM (Homogenous Relaxation Model), drifit-flux modèle [31] et les modèles à cinq équations [1, 60] ... Dans ce cas, on définit toujours une équation de conservation de la masse, de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de l'énergie pour le mélange. Les déséquilibres dynamiques et thermodynamiques entre les deux phases peuvent être pris en compte suivant les modèles. Par exemple le modèle HRM permet de considérer le déséquilibre des potentiels chimiques (changements de phase) et les modèles à cinq équations peuvent prendre en compte ce dernier en plus du déséquilibre de température (transfert de chaleur) entre les deux phases [1, 60, 70]. Une autre classe utilise une approche à deux fluides, c'est le cas par exemple dans les codes RELAP (INL USA), CATHARE (CEA) et NEPTUNE\_CFD (EDF), où les modèles sont basés sur un modèle à six équations [18]. Ce type de modèle décrit les lois d'évolution pour chaque phase, chacune étant définie par une équation de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Un autre modèle bifluide comprend une septième équation d'évolution sur le taux de présence statistique d'une phase [6, 8, 48].

L'approche monofluide repose sur un certain nombre d'hypothèses d'équilibre entre phases. Pour ne citer que certains d'entre eux et sans vouloir viser l'exhaustivité, le modèle proposé par Barberon, Helluy et Seguin [33, 7] suppose un équilibre entre les vitesses des deux phases ; les modèles proposés par Murrone et Guillard [60] ou par Allaire et al [1] reposent quant à eux sur un équilibre en vitesse et en pression. L'approche bifluide à 7 équations ne repose quant à elle sur aucune hypothèse d'équilibre entre phase, ce qui en fait un candidat naturel pour la modélisation des coups de bélier, susceptibles de faire intervenir des déséquilibres importants entre phases. C'est ce qui a notamment motivé le choix d'un modèle bifluide à 7 équations dans le cadre de la présente thèse. L'approche bifluide repose sur le choix d'un certain

nombre de lois de fermeture, définies de façon à satisfaire le principe d'entropie. Ces lois comportent un certain nombre de constantes dont la valeur doit être recalée par rapport à des considérations physiques. Il n'existe pas actuellement de consensus sur la forme optimale des lois de fermeture des termes de transfert interfacial ou des échelles de temps de relaxation. De plus, les propriétés des modèles sont potentiellement fortement dépendantes des lois de fermetures considérées.

## 0.2.2 Modèle bifluide à sept équations

Le modèle bifluide à sept équations que nous considérons pour modéliser les écoulements associés aux transitoires hydrauliques est une généralisation du modèle introduit par Baer et Nunziato [6] pour l'étude des écoulements gaz-particules. Il admet sept équations aux dérivées partielles en une dimension d'espace : trois équations d'évolution (de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie) pour chaque phase et une équation d'évolution du taux de présence statistique de l'une des phases. Ce modèle est hyperbolique [6, 12, 27, 30, 48, 61]. Le problème à condition initiale associé au modèle est bien posé, ce qui permet de simuler les phénomènes instationnaires tels que les transitoires hydrauliques. Par ailleurs, il admet un unique jeu de relations de saut, et donc une unique solution pour les ondes de choc des transitoires hydrauliques. Ce modèle étant complexe et récent, il soulève encore plusieurs questions ouvertes, notamment sur les lois de fermeture des termes interfaciaux, la modélisation des termes sources associés aux échanges entre les phases, ou bien encore la discrétisation numérique de ces termes sources.

## 0.2.3 État de l'art

Pour le modèle bifluide, l'évolution de la fraction statistique est décrite par une équation de transport où la vitesse de transport est appelée vitesse interfaciale. Intervient également dans ce modèle une pression interfaciale qui peut être différente des deux pressions phasiques. Dans le cadre des écoulements gaz-particules étudiés par Baer et Nunziato, la vitesse interfaciale est indentifiée à la vitesse de déplacement de la phase des particules (la phase diluée) et la pression interfaciale est indentifiée à la vitesse du gaz (la phase porteuse). Ce modèle est généralisé par Coquel et *al.* [12] puis Gallouët et *al.* [27] à d'autres fermetures pour le couple pression-vitesse interfacial, tandis que d'autres propositions existent dans la littérature [68, 61, 8, 47]. Pour modéliser les écoulements associés aux transitoires hydrauliques, il n'existe pas de consensus sur le choix de la loi de fermeture du couple pression-vitesse interfacial.

Les autres fermetures concernent la modélisation des échanges entre les deux phases (la modélisation des termes sources). Une procédure de modélisation est proposée dans les travaux de Gallouët et *al.* [27] et est étudiée également dans les travaux de thèse de Guillemaud et Labois [32, 53]. Cette procédure de modélisation consiste tout d'abord en la définition d'une entropie pour le modèle bifluide ; les différents termes inconnus sont ensuite modélisés de manière à rendre positive la production d'entropie du système. La modélisation des termes sources retenue dans le cadre de la présente thèse s'inscrit dans la continuité de ces travaux.

On cherche ensuite des approximations des solutions du modèle bifluide complet avec une méthode à pas fractionnaires, qui comporte deux étapes : la première consiste à résoudre la partie convective du modèle bifluide et la deuxième prend en compte les termes sources qui représentent les transferts entre les deux phases. La résolution de la partie convective du modèle a donné lieu à la proposition de plusieurs schémas. Citons par exemple le schéma classique de Rusanov [65] qui sera très utilisé dans la suite. Celui-ci est stable et peut facilement être étendu aux lois thermodynamiques quelconques, mais a l'inconvénient d'être très diffusif. Un raffinement du maillage important est nécessaire. Il existe d'autres schémas (VFRoe [27], HLLC [76], schéma de relaxation [66], autres schémas [4, 5, 29, 71, 23]...) qui sont a priori plus précis au regard de ce dernier, mais qui ont été peu vérifiés, même pour des lois thermodynamiques très spécifiques (Gaz Parfait ou Stiffened Gas). L'extension aux lois thermodynamiques quelconques qui est potentiellement nécessaire pour représenter fidèlement les transitoires hydrauliques, s'avère être une difficulté importante pour ces schémas. En outre, le coût CPU associé peut être très élevé.

La résolution des termes sources a donné lieu dans la littérature à deux grandes familles d'approximation. La première famille regroupe les schémas dits « instantanés », qui traduisent l'équilibre des grandeurs d'intérêt (pression, vitesse,

température ou potentiel chimique) à chaque pas de temps du calcul. Différents schémas instantanés ont été proposés pour la température et le potentiel chimique [2, 21, 70, 80]. La deuxième famille regroupe les schémas de relaxation non instantanés et permettent la prise en compte de déséquilibres entre phases. Quelques schémas de relaxations en vitesse ont été proposés dans la littérature [5, 25]. En ce qui concerne les relaxations en pression, en température (transfert de chaleur) et en potentiel chimique (transfert de masse), des propositions ont été faites très récemment dans les travaux de Gallouët et al. [25], Hérard et al. [25, 27, 38, 39, 40, 41]. Seuls les schémas de relaxation non instantanés ont été étudiés dans le cadre de la présente thèse.

Dans son ensemble, modèle étudié dans le cadre de la thèse a fait l'objet d'analyses numériques et mathématiques détaillées, cependant il n'a jusque là jamais été mis en œuvre pour réaliser des simulations sur des configurations industrielles.

## 0.2.4 Objectifs de la thèse

Dans la perspective d'une application à la simulation numérique des coups de bélier, l'objectif de la thèse est double. Il s'agit d'une part de poursuivre la vérification des schémas de discrétisation du modèle bifluide à 7 équations par la réalisation de tests de convergence en maillage, d'entreprendre la validation du modèle bifluide par comparaison avec des données expérimentales, enfin de comparer les résultats issus du modèle bifluide avec ceux obtenus avec des modèles homogènes. D'autre part, il s'agit d'étendre la formulation bifluide pour la prise en compte des interactions fluide/structure.

L'étape de vérification / validation consiste en outre à :

- choisir des lois de fermeture admissibles et adaptées aux cas d'application visés ;
- choisir ou proposer des schémas numériques robustes, stables pour la résolution de la partie convective du modèle, mais aussi facilement extensibles à des lois thermodynamiques quelconques ;
- reprendre ou proposer des schémas numériques non-instantanés pour la résolution des termes sources du modèle et les étendre à des équations d'état adaptées aux phénomènes de transitoires hydrauliques fortement instationnaire.

Concernant le volet numérique de la thèse, l'objectif est de s'assurer de la robustesse et de la stabilité des schémas mis en œuvre. Ainsi, l'amélioration de la précision des schémas ne constitue pas un objectif de la thèse. Il en est de même pour les lois d'états thermodynamiques : des lois relativement simples seront utilisées, avec des coefficients recalés pour couvrir au mieux les domaines d'application visés.

Concernant la prise en compte de l'interaction fluide/structure, il s'agit d'étendre le modèle bifluide à une formulation en maillage mobile de type ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method) [20, 73, 22, 58], en cohérence avec les méthodes les mieux adaptées pour la simulation des phénomènes de dynamique rapide : méthode des volumes finis pour le fluide, méthode des éléments finis pour la structure avec schéma d'intégration temporelle explicite. La méthode ALE est une technique largement utilisée dans le cadre des études d'interaction fluide/structure. Elle consiste à réécrire la formulation fluide en considérant un volume de contrôle mobile et déformable ; ce qui se traduit par l'introduction d'une « vitesse de maillage ». Cette technique est utilisée afin d'autoriser un mouvement arbitraire du maillage fluide dans le but de pouvoir adapter le domaine fluide aux frontières solides de la structure en contact avec le fluide.

## 0.3 Plan du mémoire

Ce mémoire s'articule en cinq chapitres. Le premier a pour vocation de présenter le modèle bifluide. On présente dans un premier temps le processus de moyenne statistique permettant d'obtenir le système d'EDP ouvert du modèle bifluide. Les lois de fermeture sont ensuite discutées en considérant l'inégalité d'entropie du système et l'existence de relations de saut uniques. Les conditions d'hyperbolicité et des remarques associées au respect de la positivité des solutions régulières sont aussi évoquées.

Le deuxième et le troisième chapitres sont consacrés à la résolution numérique du modèle bifluide. Pour la partie convective, le schéma de Rusanov a été vérifié en utilisant des cas tests de la littérature et de nouveaux cas construits au cours de la thèse, en mettant l'accent sur l'onde de discontinuité de contact (où l'on considère le saut du taux de présence

de la vapeur). Des problèmes de stabilité ont été observés avec le schéma de Rusanov lorsque l'on considère un grand saut du taux de présence de la vapeur et la loi stiffened gas pour décrire le liquide. Ainsi un nouveau schéma plus stable à pas fractionnaires a été proposé et vérifié. En ce qui concerne les termes sources, 4 sous-étapes qui représentent respectivement le retour à l'équilibre de pression et les transferts de quantité de mouvement, de chaleur et de masse, sont présentées successivement. Chaque sous-étape est résolue avec un schéma non-instantané contrairement à la plupart des cas de la littérature, ce qui permet de simuler les déséquilibres entre les phases avec une grande flexibilité. Ces schémas ont été considérés pour les lois thermodynamiques stiffened gas étendues pour le changement de phase.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation du modèle bifluide complet pour modéliser les phénomènes de transitoires hydrauliques. Après avoir retrouvé des phénomènes typiques des transitoires hydrauliques (approche monophasique, vitesse de propagation des ondes de pression dans un mélange d'eau et d'air) avec des cas tests simples, le modèle bifluide a été confronté avec l'expérience de Simpson [72] et l'expérience Canon [63]. La première expérience est largement utilisée pour la validation d'outils numériques dédiés à la simulation des coups de bélier [24]. La deuxième représente la décompression rapide d'un fluide à haute pression dans une tuyauterie, qui peut être présente, par exemple, lors des transitoires hydrauliques intervenant en cas de rupture de tuyauterie. Les résultats obtenus avec le modèle bifluide ont été comparés avec ceux de deux modèles homogènes : le modèle à cinq équations [70] et le modèle HRM utilisant une loi d'état basée sur les tables de l'eau [57].

Le cinquième chapitre présente la version ALE du modèle bifluide. Pour valider cette dernière, la propagation d'ondes de pression dans une conduite flexible est d'abord étudiée. Le but dans ce cas est de retrouver la variation de la célérité des ondes de pression dans le fluide liée au couplage entre le fluide et la structure. Dans un premier temps, le cas 'quasi-monophasique' de l'eau liquide obtenu avec une valeur très faible de taux de présence statistique de vapeur est examiné. Dans un deuxième temps, l'influence de la valeur du taux de présence de la vapeur sur la vitesse de propagation des ondes est étudiée. Finalement, la validation a été effectuée sur l'expérience décrite dans les travaux de Romander *et al.* [64]. Il s'agit d'étudier la réponse d'une tuyauterie remplie d'eau soumise à un pic de pression violent (140 bar).

## 0.4 Valorisation des travaux

Les travaux présentés dans le chapitre 1, concernant le modèle bifluide, ont fait l'objet d'une note interne EDF R&D H-I81-2013-1162-FR.

Une partie des travaux présentés au chapitre 2, relatifs à la convergence des schémas de convection, a fait l'objet initialement d'un note courte présentée au congrès AIAA Fluid Dynamics à New-Orleans en juin 2012 (AIAA paper 2012-3355). La version longue correspondant au chapitre 2 est un article publié à ESAIM : Proceedings, 40, 63-82 (2013), faisant suite à une présentation orale faite au Workshop Applied Mathematics In Savoie (Juin 2012, Chambéry).

Le chapitre 3, qui décrit les schémas de relaxation mis en oeuvre dans le code, fait l'objet d'une note interne EDF R&D H-I83-2013-02014-FR.

Le chapitre 5, qui présente les travaux liés à la prise en compte de l'interaction fluide structure (IFS) avec le modèle bifluide, fait l'objet d'une note interne EDF R&D H-T63-2013-01854-FR.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE 2010/732 (Conventions Industrielles de Formation par la Recherche) entre le LATP (Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités) de l'Université Aix-Marseille et le département AMA (Analyses Mécaniques et Acoustique) d'EDF R&D (Recherche et Développement). Les travaux décrits dans cette thèse ont été effectués dans le cadre du projet SITAR d'EDF R&D, en lien étroit avec le département MFEE d'EDF R&D, et le laboratoire DYN de DEN/DANS/DM2S/SEMT, au CEA Saclay. Les développements informatiques

ont été capitalisés dans le code *Europlexus*, en bénéficiant d'apports techniques issus d'un prototype bifluide instationnaire développé dans le cadre du projet NEPTUNE. Le code *Europlexus*, co-propriété du Commissariat à l'Energie atomique (CEA) et du Centre Commun de Recherche européen (CCR), est développé depuis 2010 dans le cadre d'un consortium dont EDF est un partenaire majeur, au même titre que l'ONERA.

---

## Une approche bifluide statistique de modélisation des écoulements diphasiques à phases compressibles

---

Jean-Marc Hérard <sup>1</sup>, Yujie LIU <sup>2</sup>

### Resumé

Cette note propose une approche de modélisation statistique des écoulements diphasiques à phases compressibles. On présente dans un premier temps le formalisme d'obtention du système d'EDP ouvert. On détaille ensuite le processus de dérivation des lois de fermeture au regard des critères de caractérisation entropique et d'existence de relations de saut. Les conditions d'hyperbolicité sont également discutées, et quelques remarques associées au respect de la positivité des solutions régulières sont formulées. Les extensions au cadre poreux et au cadre multiphasique sont également brièvement mentionnées. Les travaux de ce chapitre font l'objet d'un note EDF R&D : H-I81-2013-01162-FR.

### 1.1 Introduction et rappels élémentaires

On s'intéresse ici à la modélisation statistique des écoulements diphasiques avec une approche à deux fluides. La démarche globale est assez classique. On propose dans un premier temps un jeu de lois d'évolution phasiques, et dans un second temps on construit des lois de fermeture admissibles au regard de certains critères. Les modèles d'équations aux dérivées partielles (EDP) proposés en fin de première section seront donc des modèles pour lesquels des lois de fermeture devront être fournies, qui relieront les grandeurs principales retenues auparavant. Le principe global d'obtention des équations d'évolution retenu dans la première section est de fait très similaire à celui proposé par Favre dans le cadre de la modélisation des écoulements turbulents monophasiques compressibles. Pour cela on introduira un opérateur de moyenne statistique, et on déduira par prise de moyenne les équations d'évolution des variables principales. Les très fortes non linéarités intervenant au niveau des flux convectifs et diffusifs pour les équations de base instantanées locales vont générer alors un nombre important de flux inconnus, ce qui nécessitera par la suite de proposer des lois de fermeture. Ceci sera réalisé en s'appuyant sur plusieurs principes. Une fois définies les inconnues principales, un procédé classique sera utilisé pour proposer des formes admissibles pour les lois de fermeture en terme d'objectivité, et qui admettent également une caractérisation entropique globale. Cette dernière contrainte permettra de "filtrer" partiellement les lois de fermeture. En outre, certaines relations locales reliant les fonctions d'énergie interne, de pression et de densité, aux inconnues principales seront examinées à ce stade. Enfin, une spécificité importante au cadre diphasique sera liée au fait qu'un ensemble

---

1. EDF, R&D, MFEE, 6 quai Watier, 78400, Chatou, France

2. EDF, R&D, AMA, 1 avenue du Général de Gaulle, 92150, Clamart, France

de lois de fermeture sera construit de manière telle que les relations de saut construites sur la base des équations fermées sur les variables principales soient uniques (en un certain sens). On comprend de suite l'importance de ce dernier point, qui fait l'objet de nombreux débats actuellement.

Pour clore ce travail, de nombreux commentaires seront faits, concernant :

- les modèles similaires existant dans la littérature ;
- les extensions possibles au cadre multiphasique, ou au cadre des écoulements en milieu poreux ;
- les possibilités d'extension permettant de gérer la transition entre différents régimes *a priori* ;
- certaines implications numériques afférentes au choix d'une loi de fermeture.

### 1.1.1 Quelques Rappels

Avant de débiter la construction des modèles, il est indispensable de rappeler certains éléments (le lecteur pourra par exemple relire [27]). Tout d'abord, on supposera que les équations locales instantanées vérifiées au sein de chaque phase  $k = 1, 2$  gèrent l'évolution spatio-temporelle des variables densité  $\rho_k$ , débit  $\rho_k U_k$  et énergie totale  $E_k$ , l'inconnue vectorielle associée étant alors :  $W_k = (\rho_k, \rho_k U_k, E_k)$  pour chaque phase. Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_k) + \partial_x (\rho_k U_k) &= 0 \\ \partial_t (\rho_k U_k) + \partial_x (\rho_k U_k^2) + \partial_x (P_k) &= \partial_x (\Sigma_k(W_k, \partial_x(W_k))) \\ \partial_t (E_k) + \partial_x (U_k(E_k + P_k)) &= \partial_x (\Sigma_k(W_k, \partial_x(W_k))U_k) + \partial_x (g_k^F(W_k, \partial_x(W_k))) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

On rappelle que l'énergie totale est reliée à l'énergie interne via la relation :

$$E_k = \rho_k \varepsilon_k + \rho_k U_k^2 / 2$$

sachant que l'énergie interne  $\varepsilon_k(P_k, \rho_k)$  est fonction des variables thermodynamiques  $P_k, \rho_k$ . Les flux  $\Sigma_k$  et  $g_k^F$  prennent en compte les effets de viscosité et de diffusivité thermique. Classiquement, ces derniers flux suivent une loi de premier gradient.

On peut formellement écrire de manière condensée les équations (1.1.1) sous la forme suivante :

$$\partial_t (W_k) + \partial_x (F_k^0(W_k)) = \partial_x (F_k^1(W_k, \partial_x(W_k))) \quad (1.1.2)$$

en notant  $F_k^0(W_k)$  le vecteur flux convectif et  $F_k^1(W_k)$  le vecteur flux diffusif. Il est possible d'adjoindre à ce système une caractérisation entropique, en introduisant un couple entropie/flux d'entropie  $\eta_k(W_k), f_{\eta_k}(W_k)$  compatible avec les termes visqueux, qui vérifie l'inégalité :

$$0 \leq \partial_t (\eta_k(W_k)) + \partial_x (f_{\eta_k}(W_k)) \quad (1.1.3)$$

Ce point est important, et permet par ailleurs de caractériser les solutions faibles admissibles, lorsque les effets diffusifs sont négligés, dès lors que cette dernière inégalité est conservée. En effet, dans ce cas, les évolutions des solutions  $W_k$  sont régies par le système :

$$\partial_t (W_k) + \partial_x (F_k^0(W_k)) = 0 \quad (1.1.4)$$

Des solutions choc peuvent alors apparaître au cours du temps : il faut alors, pour une discontinuité séparant deux états  $l, r$ , et se propageant à vitesse  $\sigma$ , imposer les relations de saut suivantes :

$$-\sigma [W_k]_l^r + [F_k^0(W_k)]_l^r = 0 \quad (1.1.5)$$

Même si cela peut paraître inutile, il faut rappeler ici que la formulation des relations de saut ne peut être faite que sur la base des lois de conservation (existence d'une divergence temps-espace) afférentes aux grandeurs physiques pertinentes ; dans le cadre Euler, il s'agit des grandeurs densité, débit, énergie totale, soit  $W_k$ .

Enfin, il faut également rappeler que les densités et énergies internes sont physiquement dans  $\mathbf{R}^+$ , et que la loi d'état doit respecter la condition :

$$(\partial_{P_k} (\varepsilon_k(P_k, \rho_k)))^{-1} (P_k/\rho_k - \rho_k \partial_{\rho_k} (\varepsilon_k(P_k, \rho_k))) > 0 \quad (1.1.6)$$

ce qui induit donc certaines contraintes sur la loi d'état. Cette condition (1.1.6) garantit notamment que les ondes se propageant dans le milieu isolé en phase  $k$  sont réelles (condition nécessaire pour obtenir l'hyperbolicité).

Dans la suite du document, l'espérance d'une variable aléatoire  $\psi(\xi)$  est notée :

$$\langle \psi(\xi) \rangle = \int_{\omega} \psi(\xi) \mu(\xi) d\xi$$

sachant que :  $\int_{\omega} \mu(\xi) d\xi = 1$ , et que  $0 \leq \mu(\xi)$ .

Cet opérateur est tel que :

$$\langle a\psi \rangle = a \langle \psi \rangle$$

si  $a$  est indépendant de  $\xi$ , et vérifie trivialement pour tout couple de variables  $(\alpha, \beta)$  l'identité :

$$\langle \alpha + \beta \rangle = \langle \alpha \rangle + \langle \beta \rangle$$

En outre, il commute avec les opérateurs de dérivée spatiale et temporelle :

$$\langle \partial_z (\psi(\cdot; \xi)) \rangle = \partial_z (\langle \psi(\cdot; \xi) \rangle)$$

pour :  $z = t, x$ , et pour toute fonction  $\psi(\cdot; \xi)$ .

Pour décrire le "mélange" des deux phases, on introduit classiquement la fonction caractéristique de présence de phase  $\chi_k(x, t; \xi)$ , valant 1 au point  $x$  à l'instant  $t$  si la phase  $k$  est présente pour une réalisation  $\xi$ , et 0 sinon. Ces deux fonctions sont telles que :  $0 \leq \chi_k(x, t; \xi)$ , et :

$$\chi_1(x, t; \xi) + \chi_2(x, t; \xi) = 1. \quad (1.1.7)$$

On en déduit de suite que :

$$\langle \chi_1(x, t; \xi) \rangle = 1 - \langle \chi_2(x, t; \xi) \rangle, \quad (1.1.8)$$

et :

$$\partial_z (\langle \chi_1(x, t; \xi) \rangle) = -\partial_z (\langle \chi_2(x, t; \xi) \rangle), \quad (1.1.9)$$

mais également :

$$0 \leq \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle,$$

et ainsi :

$$0 \leq \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle \leq 1, \quad (1.1.10)$$

mais aussi :

$$0 \leq \langle \chi_k(x, t; \xi) \psi(\cdot; \xi) \rangle \leq \langle \psi(\cdot; \xi) \rangle,$$

dès lors que la fonction  $\psi(\cdot; \xi)$  est à valeurs positives sur le support d'intégration  $\omega$ . Compte tenu des contraintes locales instantanées (1.1.8) et (1.1.9), on ne considèrera plus loin qu'une variable de description moyenne de la présence de phase.

L'évolution spatio-temporelle de  $\chi_k(x, t; \xi)$  est donnée par l'équation ([10]) :

$$\partial_t (\chi_k(x, t; \xi)) + V_\sigma(x, t; \xi) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) = 0, \quad (1.1.11)$$

où la vitesse  $V_\sigma(x, t; \xi)$  est communément (et assez improprement) appelée vitesse de déplacement de l'interface. Pour toute réalisation, cette vitesse est clairement indéterminée. On reviendra sur ce point par la suite. Il faut remarquer que cette équation (1.1.11) est consistante avec la contrainte (1.1.7).

Munis de ces éléments, nous pouvons écrire formellement les équations d'évolution des moments d'ordre un.

## 1.2 Lois d'évolution phasiques

Pour simplifier la présentation, nous considérons dans un premier temps le cadre non visqueux. Nous décrivons tout d'abord l'évolution de la variable  $\langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle$ , en s'appuyant sur la contrainte (1.1.11). Puis nous considérons l'espérance des équations (1.1.4), en précisant ensuite l'expression des flux, et en détaillant la contrainte en moyenne sur les lois d'état thermodynamique.

### 1.2.1 Equation topologique

Partant de (1.1.11), on obtient immédiatement :

$$\langle \partial_t (\chi_k(x, t; \xi)) + V_\sigma(x, t; \xi) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle = 0, \quad (1.2.1)$$

et donc :

$$\partial_t (\langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle) + \langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle \partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle) = \phi_k(x, t), \quad (1.2.2)$$

où  $\phi_k$  désigne la quantité :

$$\phi_k(x, t) = \langle (\langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle - V_\sigma(x, t; \xi)) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle. \quad (1.2.3)$$

On note de manière évidente, compte tenu de (1.1.9), que :

$$\phi_1 + \phi_2 = 0 \quad (1.2.4)$$

ce qui, d'ailleurs, garantit la compatibilité avec la contrainte (1.1.10). Il est aussi essentiel à ce stade de remarquer que, dans un cadre potentiellement multiphasique, soit pour  $2 \leq N$  phases, la vitesse  $V_\sigma(x, t; \xi)$  est unique. Il faut également noter que, si  $\langle \chi_1(x, t; \xi) \rangle$  désigne une variable principale, il faudra proposer deux lois de fermeture pour les termes  $\langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle$  et  $\phi_1$ .

### 1.2.2 Définition des variables pondérées et choix des variables principales

On introduit les variables pondérées phasiques et massiques comme suit :

$$\tilde{a}_k(x, t) = \langle \chi_k(x, t; \xi) a_k(x, t; \xi) \rangle / \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle$$

et :

$$\tilde{\tilde{a}}_k(x, t) = \langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) a_k(x, t; \xi) \rangle / \langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) \rangle$$

la seconde s'apparentant aux moyennes pondérées au sens de Favre, qui ont été introduites dans le cadre monophasique compressible turbulent en 1965 ([12, 13]), et la première étant analogue à la moyenne de Reynolds en situation monophasique (formellement, en substituant  $\chi_k = 1$ ). On déduit simplement, en notant :

$$a''_k(x, t; \xi) = a_k(x, t; \xi) - \tilde{a}_k(x, t)$$

que :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) a''_k(x, t; \xi) \rangle = 0$$

De même, on aura :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) b'_k(x, t; \xi) \rangle = 0$$

si  $b'_k(x, t; \xi) = b_k(x, t; \xi) - \tilde{b}_k(x, t)$ .

On considérera par la suite que les huit variables principales s'identifient à  $\alpha_k(x, t) = \langle \chi_k(x, t; \xi) \rangle$ ,  $\tilde{\rho}_k(x, t)$ ,  $\tilde{U}_k(x, t)$  et  $\tilde{P}_k(x, t)$  (respectivement taux de présence, densité, vitesse et pression moyenne statistique de phase  $k$  au point  $(x, t)$ ).

### 1.2.3 Moyenne statistique des équations d'évolution

Considérant les équations d'évolution (1.1.4) et (1.1.11), un calcul simple conduit à :

$$\partial_t (\chi_k(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) + \partial_x (\chi_k(x, t; \xi) F_k^0(W_k(x, t; \xi))) = \dots$$

$$(F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \quad (1.2.5)$$

pour des solutions suffisamment régulières, et dès lors à :

$$\partial_t (\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi) \rangle) + \partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^0(W_k(x, t; \xi)) \rangle) = \dots$$

$$\langle (F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle \quad (1.2.6)$$

On pourra par exemple, pour une telle approche, se référer aux articles [10, 5, 41]. On notera également par la suite :

$$J_k(x, t) = \langle (F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle \quad (1.2.7)$$

sachant que la somme des deux contributions n'est pas nulle puisque :

$$(J_1 + J_2)(x, t) = \langle (F_1^0(W_1) - F_2^0(W_2))(x, t; \xi) - V_\sigma(x, t; \xi) (W_1 - W_2)(x, t; \xi) \partial_x (\chi_1(x, t; \xi)) \rangle \quad (1.2.8)$$

Il faut donc exprimer les flux en temps et en espace en fonction des variables principales, en spécifiant les contributions devant faire l'objet de modélisations, puis proposer des lois de fermeture pour les contributions  $J_k$ . Ce dernier point sera abordé dans une section ultérieure.

En ce qui concerne les flux temporels, et si  $W_k^l$  désignent (pour  $l = 1, 2, 3$ ) les trois composantes de  $W_k$ , il est clair que :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^1(x, t; \xi) \rangle = \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \quad (1.2.9)$$

et :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^2(x, t; \xi) \rangle = \langle \chi_k(x, t; \xi) \rho_k(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) = \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \quad (1.2.10)$$

L'expression suivante est sensiblement plus complexe, ce qui est attendu car elle est associée au plus haut niveau de non linéarité par rapport aux variables de description locale instantanée. On établit simplement que :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^3(x, t; \xi) \rangle = \langle (\chi_k E_k)(x, t; \xi) \rangle = \langle \chi_k (\rho_k \varepsilon_k + \rho_k U_k^2 / 2)(x, t; \xi) \rangle$$

$$= \langle (\chi_k \rho_k \varepsilon_k)(x, t; \xi) \rangle + \langle \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \tilde{U}_k^2(x, t) \rangle + \langle (\chi_k \rho_k U_k^2)(x, t; \xi) \rangle / 2 \quad (1.2.11)$$

Tout comme dans le cadre monophasique turbulent, la structure de la fonction  $\rho_k \varepsilon_k$  est essentielle. Il faut noter en particulier que l'on peut toujours décomposer cette fonction comme suit :

$$(\rho_k \varepsilon_k)(P_k, \rho_k) = a_k^0 P_k + b_k^0 \rho_k + c_k^0 + (\rho_k \varepsilon_k)^\delta(P_k, \rho_k)$$

avec un triplet constant  $(a_k^0, b_k^0, c_k^0)$  choisi tel que  $(\rho_k \varepsilon_k)^\delta$  soit minimal, ce qui implique :

$$\langle (\chi_k \rho_k \varepsilon_k)(x, t; \xi) \rangle = \langle a_k^0 \alpha_k \tilde{P}_k + b_k^0 \alpha_k \tilde{\rho}_k + c_k^0 \alpha_k \rangle(x, t) + \langle \chi_k (\rho_k \varepsilon_k)^\delta \rangle(x, t)$$

En pratique, si l'on considère une loi de stiffened gas, on aura simplement :

$$a_k^0 = 1/(\gamma_k - 1) \quad ; \quad b_k^0 = 0 \quad ; \quad c_k^0 = \gamma_k P_k^\infty / (\gamma_k - 1)$$

et  $(\rho_k \varepsilon_k)^\delta = 0$ .

Il faut impérativement garder à l'esprit le fait que la fonction  $\langle \chi_k (\rho_k \varepsilon_k)^\delta \rangle$  devra être exprimée en fonction des seules grandeurs principales  $\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k, \alpha_k$ , et qu'elle devra être de telle sorte que la contrainte de positivité :

$$0 \leq \langle \chi_k \rho_k \varepsilon_k \rangle^{Modele} (x, t)$$

soit vérifiée sur l'ensemble des états admissibles. En outre, certaines conditions de type (1.1.6) concernant les dérivées partielles de la fonction résultante pourront émerger ultérieurement. Notons qu'au troisième terme dans le second membre de l'équation (1.2.11) correspond l'intensité d'énergie cinétique turbulente, dans le cadre des modèles de turbulence monophasique compressible (ou incompressible).

Considérons ensuite les flux en espace dans l'équation (1.2.6). On notera tout d'abord, si  $F_k^{0,i}$  désigne la  $i$ -ème composante du flux non diffusif  $F_k^0$ , que :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,1}(W_k(x, t; \xi)) \rangle = \langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^2(x, t; \xi) \rangle = \alpha_k(x, t) \tilde{\rho}_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \quad (1.2.12)$$

Ce regroupement au sens de Favre est essentiel, car c'est lui qui garantit aux solutions  $\alpha_k \tilde{\rho}_k$  de rester positives -en utilisant le lemme classique rappelé dans [12]-. En outre, un calcul simple donne :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,2}(W_k(x, t; \xi)) \rangle = (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)(x, t) + (\alpha_k \tilde{P}_k)(x, t) + \langle (\chi_k \rho_k u_k'^2)(x, t; \xi) \rangle \quad (1.2.13)$$

Le dernier terme au second membre ne doit pas être confondu avec celui afférent à la variable d'énergie totale. Il s'agit ici d'un tenseur du second ordre semi-défini positif, dont l'analogue serait le tenseur de Reynolds en configuration monophasique. La confusion d'écriture tient ici au fait que l'espace considéré est de dimension un. L'expression du dernier flux en espace est la suivante :

$$\begin{aligned} \langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle &= \langle \chi_k(x, t; \xi) U_k(x, t; \xi) (E_k + P_k)(x, t; \xi) \rangle \\ &= \langle (\chi_k U_k \rho_k \varepsilon_k)(x, t; \xi) \rangle && (RHS1) \\ &+ \langle (\chi_k U_k P_k)(x, t; \xi) \rangle && (RHS2) \\ &+ \langle (\chi_k \rho_k U_k^3)(x, t; \xi) / 2 \rangle && (RHS3) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

En introduisant les décompositions suivantes :

$$\phi(x, t; \xi) = \tilde{\phi}(x, t) + \phi''(x, t; \xi)$$

et :

$$\psi(x, t; \xi) = \tilde{\psi}(x, t) + \psi'(x, t; \xi)$$

dans les trois contributions figurant dans le second membre de (1.2.14), il vient de suite :

$$RHS1 = \langle (\chi_k \rho_k \varepsilon_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) + \langle (\chi_k \rho_k u_k'' \varepsilon_k')(x, t; \xi) \rangle \quad (1.2.15)$$

sachant que :  $\langle (\chi_k \rho_k u_k'') \rangle(x, t; \xi) \geq 0$ , d'une part, mais aussi :

$$\begin{aligned} RHS2 &= \langle (\chi_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'') \rangle(x, t; \xi) \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'' p_k') \rangle(x, t; \xi) \tilde{U}_k(x, t) \\ &+ \langle (\chi_k p_k') \rangle(x, t; \xi) \tilde{U}_k(x, t) \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

et :

$$\begin{aligned} RHS3 &= 1/2 \langle (\chi_k \rho_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k^3(x, t) \\ &+ 3/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k'') \rangle(x, t; \xi) \tilde{U}_k^2(x, t) \\ &+ 3/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^2) \rangle(x, t; \xi) \tilde{U}_k(x, t) \\ &+ 1/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^3) \rangle(x, t; \xi) \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Sachant en outre que :  $\langle (\chi_k p_k') \rangle(x, t; \xi) \geq 0$ , on déduit finalement, après simplifications et regroupement des contributions thermodynamiques, l'expression du troisième flux en espace, qui est :

$$\begin{aligned} \langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle &= \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k)(x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \\ &+ \alpha_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ 1/2 (\alpha_k \tilde{\rho}_k)(x, t) \tilde{U}_k^3(x, t) \\ &+ 3/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^2) \rangle(x, t; \xi) \tilde{U}_k(x, t) \quad (RHS4) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'') \rangle(x, t; \xi) \tilde{P}_k(x, t) \quad (RHS5) \\ &+ \langle (\chi_k u_k'' (\rho_k \epsilon_k' + p_k')) \rangle(x, t; \xi) \quad (RHS6) \\ &+ 1/2 \langle (\chi_k \rho_k u_k''^3) \rangle(x, t; \xi) \quad (RHS7) \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Les deux dernières contributions (RHS6) et (RHS7) ne sont pas spécifiques au cadre diphasique, puisque leur trace est non nulle (corrélations d'ordre 3 et de flux turbulent enthalpique) dans le cadre monophasique compressible (ou même incompressible). L'analogie de (RHS5) dans le cadre monophasique est par contre nul lorsque le fluide est incompressible. Dans le cadre monophasique compressible, on sait en particulier que la prise en compte du flux de masse turbulent  $\langle u_k'' \rangle$  est très sensible, et que peu de modèles proposés dans la littérature sont admissibles sur le plan thermodynamique, hormis le modèle de Ristorcelli (cf. [6, 2]), celui-ci alimentant la fonction de dissipation d'entropie globale du système fermé. Enfin, il faut signaler que le terme (RHS4) correspond à la prise en compte des fluctuations turbulentes, la corrélation  $\langle (\chi_k \rho_k u_k''^2) \rangle(x, t; \xi) \geq 0$  étant déjà explicitement présente dans l'expression de  $\langle \chi_k(x, t; \xi) W_k^3(x, t; \xi) \rangle$  dans (1.2.11).

A ce stade, le modèle ouvert est constitué du système d'équations aux dérivées partielles (1.2.6), les flux en espace et en temps étant donnés par (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12), (1.2.13), (1.2.14), et de l'équation gouvernant les évolutions du taux de présence statistique (1.2.2).

#### 1.2.4 Conditions de positivité

Les conditions de positivité concernent simplement les taux de présence, les densités, les énergies internes et un tenseur de corrélations. On attend donc que le modèle fermé soit en mesure d'assurer, au moins pour les solutions régulières, que les solutions soient telles que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_k(\mathbf{x}, t) \\ 0 &\leq \tilde{\rho}_k(\mathbf{x}, t) \\ 0 &\leq \langle \chi_k \rho_k \epsilon_k \rangle(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Enfin, le tenseur des corrélations devra être tel que :

$$0 \leq \sum_{i,j} Z_i \langle \chi_k \rho_k (u_k'')_i (u_k'')_j \rangle(\mathbf{x}, t) Z_j \quad i=1, d; j=1, d$$

pour tout  $Z \in R^d$ ,  $d$  désignant la dimension de l'espace considéré, et ce quelque soit le point de référence  $(\mathbf{x}, t)$ . En reprenant la terminologie propre au cadre monophasique, ceci correspond au principe de réalisabilité faible ([46, 50, 53, 31, 32]).

A ce stade, il importe de noter que la structure advective des équations d'évolution de  $\alpha_k(x, t)$  et de  $\tilde{\rho}_k(x, t)$  garantit, pour des solutions assez régulières (au moins  $C^1$ ), et sous réserve de satisfaire des conditions aux limites naturelles, que les deux premières contraintes seront satisfaites. On rappelle que ce résultat découle de l'utilisation d'un lemme classique, rappelé dans [12]. La difficulté essentielle concerne en fait la dernière condition dans (1.2.19) portant sur l'énergie interne moyenne phasique pondérée.

## 1.3 Lois de fermeture

### 1.3.1 Loi d'état moyenne et tenseur des corrélations

Si l'on observe la loi de fermeture associée à  $\langle \chi_k \rho_k \varepsilon_k \rangle$ , et la contrainte associée, il faut noter que les lois phasiques de type stiffened gas, assez bien adaptées au liquide, ont un statut particulier. En effet, si la loi phasique :

$$(\rho_k \varepsilon_k)(P_k, \rho_k) = (P_k + \gamma_k P_k^\infty) / (\gamma_k - 1)$$

est retenue (on rappelle que :  $\gamma_k > 1$ , et que  $0 \leq P_k^\infty$ ), alors il vient :

$$\langle \chi_k (\rho_k \varepsilon_k)(P_k, \rho_k) \rangle = \alpha_k (\tilde{P}_k + \gamma_k P_k^\infty) / (\gamma_k - 1)$$

Dans ce cas, il n'existe aucun problème de fermeture adhérent à la thermodynamique moyennée. Qui plus est, on peut raisonnablement s'attendre à ce que la contrainte de positivité associée soit préservée. En effet, au niveau local instantané phasique, la loi d'évolution de pression  $P_k$  est simplement, dans le cadre convectif pur :

$$\partial_t (P_k) + U_k \partial_x (P_k) + \gamma_k (P_k + P_k^\infty) \partial_x (U_k) = 0$$

ou encore, après translation, et pour toute réalisation :

$$\partial_t (P_k + P_k^\infty) + U_k \partial_x (P_k + P_k^\infty) + \gamma_k (P_k + P_k^\infty) \partial_x (U_k) = 0$$

Sous des hypothèses classiques, associées aux conditions initiales et aux limites, et en postulant que  $U_k$  et  $\partial_x (U_k)$  restent bornés sur  $\Omega \times [0, T]$ , cette structure garantit que la solution vérifie  $0 \leq P_k(x, t; \xi) + P_k^\infty$ , et ainsi statistiquement :

$$0 \leq \langle \chi_k (P_k + P_k^\infty) \rangle = \alpha_k (\tilde{P}_k + P_k^\infty)$$

en tout point  $(x, t)$ , soit donc, en définitive, après minoration :

$$0 \leq \alpha_k P_k^\infty \leq \langle \chi_k (\rho_k \varepsilon_k)(P_k, \rho_k) \rangle$$

qui est la condition escomptée. Il faudra par contre s'assurer que ce résultat reste valable, en considérant  $\tilde{P}_k$  comme *solution* du système fermé d'EDP, et non plus comme une variable soumise à une contrainte *a priori*.

En ce qui concerne le tenseur de corrélations  $\langle \chi_k \rho_k (u_k'')_i (u_k'')_j \rangle$ , plusieurs possibilités classiques existent, rappelées brièvement ci-dessous.

La première consiste à proposer une loi de fermeture locale instantanée, s'inspirant des lois de premier gradient, et donc à poser :

$$\langle \chi_k \rho_k (u_k'')_i (u_k'')_j \rangle = \alpha_k \tilde{\rho}_k (\mathcal{P}_N(\mathbf{S}_k))_{ij} \quad (1.3.1)$$

où  $\mathbf{S}_k$  désigne le tenseur de déformation au sein de la phase  $k$ , et  $\mathcal{P}_N$  est un polynôme de degré  $N < d$  à valeurs positives. On retrouve bien entendu ici l'esprit des modèles de turbulence classiques à une ou deux équations de transport, en se souvenant toutefois que ceux-ci n'imposent pas la contrainte de positivité sur  $\mathcal{P}_N$ , et sont donc non réalisables. La formulation (1.3.1) implique clairement l'alignement des axes propres de  $\langle \chi_k \rho_k (u_k'')_i (u_k'')_j \rangle$  et de  $\mathbf{S}_k$ .

Une seconde possibilité de modélisation est de prescrire une équation d'évolution pour le tenseur des corrélations. Une difficulté classique afférente est due au fait que le respect des conditions de réalisabilité devient alors assez technique ([31, 32, 2]).

**Remarque importante :**

Nous considérons par la suite le modèle particulier consistant à négliger  $\langle (\chi_k \rho_k (u_k'')_i (u_k'')_j) (x, t; \xi) \rangle$ , mais aussi les contributions  $\langle (\chi_k \rho_k u_k''^3) (x, t; \xi) \rangle$ ,  $\langle (\chi_k u_k'') (x, t; \xi) \rangle$  et  $\langle (\chi_k u_k'' (\rho_k \epsilon_k' + p_k') (x, t; \xi) \rangle$ . Nous supposons en outre que la corrélation  $\langle (\chi_k (\rho_k \epsilon_k) (P_k, \rho_k)) (x, t; \xi) \rangle$  peut s'écrire en fonction des seules variables principales  $\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k, \alpha_k$ .

Ainsi, le système global s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_k) + \langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle \cdot \partial_x (\alpha_k) &= \phi_k(x, t) \\ \partial_t (Z_k) + \partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^0(W_k(x, t; \xi)) \rangle (Y_k)) &= J_k(x, t) \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

sachant que  $Y_k = (\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{U}_k, \tilde{P}_k)$ , et que :  $Z_k = (\alpha_k \tilde{\rho}_k, \alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k, Z_k^E)$ , avec :

$$Z_k^E = \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k) \rangle (\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k, \alpha_k) + \alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2 / 2$$

et même, plus précisément, en tenant compte des approximations précédentes :

$$\begin{aligned} \partial_t (\alpha_k) + \langle V_\sigma(x, t; \xi) \rangle \cdot \partial_x (\alpha_k) &= \phi_k(x, t) \\ \partial_t (\alpha_k \tilde{\rho}_k) + \partial_x (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) &= J_k^M(x, t) \\ \partial_t (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) + \partial_x (\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2 + \alpha_k \tilde{P}_k) &= J_k^Q(x, t) \\ \partial_t (Z_k^E) + \partial_x (\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle (Y_k)) &= J_k^E(x, t) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Il faut se souvenir à ce stade de la contrainte (1.2.4), et du fait que :

$$\begin{aligned} \langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle &= \langle (\chi_k \rho_k \epsilon_k) (x, t; \xi) \rangle \tilde{U}_k(x, t) \\ &+ \alpha_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) \tilde{P}_k(x, t) \\ &+ 1/2 (\alpha_k \tilde{\rho}_k) (x, t) \tilde{U}_k^3(x, t) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

compte tenu des approximations retenues. En introduisant la notation de moyenne phasique pondérée définie en section 2.2, ce dernier terme peut encore s'écrire :

$$\langle \chi_k(x, t; \xi) F_k^{0,3}(W_k(x, t; \xi)) \rangle = \alpha_k(x, t) \tilde{U}_k(x, t) (\widetilde{\rho_k \epsilon_k}(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) + \tilde{P}_k + 1/2 \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)(x, t) \quad (1.3.5)$$

Tous les termes figurant en rouge dans les équations (1.3.3) doivent clairement faire l'objet d'une modélisation. On se restreindra dorénavant à la modélisation des termes de transfert interfacial de masse, de dynamique et d'énergie,  $J_k^{M,i}(x, t), J_k^{Q,i}(x, t), J_k^{E,i}(x, t)$ , qui par définition seront telles que :

$$\begin{aligned} \Sigma_k J_k^{M,i}(x, t) &= 0 \\ \Sigma_k J_k^{Q,i}(x, t) &= 0 \\ \Sigma_k J_k^{E,i}(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Si l'on examine le terme  $J_k$ , on note que celui-ci s'écrit explicitement sous la forme :

$$J_k(x, t) = \langle (F_k^0(W_k(x, t; \xi)) - V_\sigma(x, t; \xi) W_k(x, t; \xi)) \partial_x (\chi_k(x, t; \xi)) \rangle$$

En considérant que la vitesse instantanée  $V_\sigma$  est une combinaison convexe des vitesses de phase  $U_1$  et  $U_2$ , soit :

$$V_\sigma = \beta U_1 + (1 - \beta) U_2$$

avec  $\beta \in [0, 1]$ , et en décomposant les pressions et vitesses comme suit :

$$\begin{aligned} P_1 &= \pi + (1 - \gamma)(P_1 - P_2), & P_2 &= \pi - \gamma(P_1 - P_2) \\ U_1 &= V + (1 - \delta)(U_1 - U_2), & U_2 &= V - \delta(U_1 - U_2) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \pi &= \gamma P_1 + (1 - \gamma)P_2 \\ V &= \delta U_1 + (1 - \delta)U_2 \end{aligned}$$

et  $(\gamma, \delta)$  dans  $[0, 1]^2$ , on note alors que :

$$J_k(x, t) = \langle (U_k - V_\sigma)(\rho_k, \rho_k U_k, E_k)^t \partial_x(\chi_k) \rangle + \langle (0, P_k, P_k U_k)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle \quad (1.3.7)$$

peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} J_k(x, t) &= \langle (U_k - V_\sigma)(\rho_k, \rho_k U_k, E_k)^t \partial_x(\chi_k) \rangle \\ &+ \langle (0, (P_k - \langle \pi \rangle), (P_k U_k - \langle \pi V \rangle))(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle \\ &+ \langle (0, \langle \pi \rangle, \langle \pi V \rangle)(x, t) \partial_x(\alpha_k) \rangle \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

On aura ainsi, en notant :  $p^* = \pi - \langle \pi \rangle$ , et :  $(pv)^* = \pi V - \langle \pi V \rangle$  :

$$\langle (P_k - \langle \pi \rangle)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle = \langle a_k(P_1 - P_2) + p^*(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle$$

avec  $a_1 = 1 - \gamma$ ,  $a_2 = -\gamma$ . De même, on aura :

$$\begin{aligned} \langle (P_k U_k - \langle \pi V \rangle)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle &= \langle (b_k V(P_1 - P_2) + c_k \pi(U_1 - U_2))(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle \\ &+ \langle (d_k(U_1 - U_2)(P_1 - P_2) + (pv)^*)(x, t; \xi) \partial_x(\chi_k) \rangle \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

avec  $|b_k| < 1$ ,  $|c_k| < 1$  et  $|d_k| < 1$ . On aura en outre :  $\|U_k - V_\sigma\| < \|U_1 - U_2\|$ .

Ainsi, si l'on suppose que les vitesses relatives et les écarts de pression restent d'amplitude faible, il sera alors naturel de postuler que  $J_k^i(x, t)$  contient deux contributions, soit :

### Hypothèse fermeture 1 :

$$\begin{aligned} J_k^{M,i} &= J_k^{M,i,0}(W) \\ J_k^{Q,i} &= J_k^{Q,i,0}(W) + \Pi(W) \partial_x(\alpha_k) \\ J_k^{E,i} &= J_k^{E,i,0}(W) + \Pi(W) V(W) \partial_x(\alpha_k) \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

sachant que  $W = (\alpha_1, Z_1, Z_2)$ , et en notant que  $\Pi(W)$  et  $V(W)$ , qui ont respectivement la dimension d'une pression et d'une vitesse, doivent faire l'objet d'une modélisation. Les premiers termes au second membre de (1.3.10) sont associés aux deux premières contributions afférentes à (1.3.8), tandis que les termes proportionnels à  $\partial_x(\alpha_k)$  modélisent la troisième contribution dans (1.3.8). Il est clair dans ce cas que (1.3.6) sera vérifié si et seulement si :

### Hypothèse fermeture 2 :

$$\begin{aligned} \sum_k J_k^{M,i,0}(W) &= 0 \\ \sum_k J_k^{Q,i,0}(W) &= 0 \\ \sum_k J_k^{E,i,0}(W) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Nous postulerons également que le terme  $\phi_1 = 1 - \phi_2$  pourra s'écrire sous la forme :

**Hypothèse fermeture 3 :**

$$\phi_1 = \phi_1^0(W) + u(W)\partial_x(\alpha_k) \quad (1.3.12)$$

le terme  $u(W)$  pouvant être éliminé en l'intégrant au premier membre, soit en écrivant :

$$\partial_t(\alpha_1) + \langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x(\alpha_1) = \phi_1^0(W)$$

avec  $\langle V'_\sigma \rangle(W) = (\langle V_\sigma \rangle - u)(W)$ . Il s'agit donc désormais de proposer des formes admissibles pour les différents termes,  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ ,  $\phi_1^0(W)$ ,  $J_1^{M,i,0}(W)$ ,  $J_1^{Q,i,0}(W)$ ,  $J_1^{E,i,0}(W)$ , mais également  $\Pi(W)$  et  $V(W)$ , au regard de critères physiques pertinents.

Ce point fera l'objet des trois sections suivantes, le système s'écrivant désormais :

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_1) + \langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x(\alpha_1) &= \phi_1^0(W) \\ \partial_t(\alpha_k \tilde{\rho}_k) + \partial_x(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{M,i,0}(W) \\ \partial_t(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k) + \partial_x(\alpha_k \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2 + \alpha_k \tilde{P}_k) - \Pi(W)\partial_x(\alpha_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{Q,i,0}(W) \\ \partial_t(Z_k^E) + \partial_x(\alpha_k \tilde{U}_k (\tilde{\rho}_k \tilde{\varepsilon}_k(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) + \tilde{P}_k + 1/2 \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)) - \Pi(W)V(W)\partial_x(\alpha_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{E,i,0}(W) \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

en rappelant que :

$$Z_k^E = \alpha_k (\tilde{\rho}_k \tilde{\varepsilon}_k(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) + 1/2 \tilde{\rho}_k \tilde{U}_k^2)$$

Deux grands principes vont contribuer à clarifier la forme des modèles admissibles :

- Le premier principe consistera à donner une caractérisation entropique du système global ;
- Le second principe sera lié au nécessaire établissement des relations de saut dans le cadre limite non visqueux. Ce point sera intimement lié à la structure d'un champ particulier, entraînant dès lors la décorrélation des sauts de taux de présence statistique et des ondes vraiment non linéaires inhérentes au système.

**1.3.2 Lois de fermeture et hyperbolicité**

En considérant le système (1.3.13), et en posant :

$$\psi_k(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) = \tilde{\rho}_k \tilde{\varepsilon}_k(\alpha_k, \tilde{\rho}_k, \tilde{P}_k) / \tilde{\rho}_k$$

on peut dorénavant, et sans risque d'ambiguïté omettre les notations  $\tilde{a}$  pour toute grandeur  $a$ .

On peut alors, pour des solutions régulières, construire les équations d'évolution de  $\rho_k$  et  $U_k$ . celles-ci s'écrivent respectivement :

$$\partial_t(\rho_k) + U_k \partial_x(\rho_k) + \rho_k \partial_x(U_k) + \frac{\rho_k}{\alpha_k} (U_k - \langle V'_\sigma \rangle(W)) \partial_x(\alpha_k) = (J_k^{M,i,0}(W) - \rho_k \phi_1^0(W)) / \alpha_k \quad (1.3.14)$$

$$m_k (\partial_t(U_k) + U_k \partial_x(U_k)) + \alpha_k \partial_x(P_k) + (P_k - \Pi(W)) \partial_x(\alpha_k) = J_k^{Q,i,0}(W) - U_k J_k^{M,i,0}(W)$$

En prémultipliant par  $U_k$  la seconde équation de (1.3.14), et en la soustrayant à la dernière équation de (1.3.13), on obtient alors l'équation d'évolution de  $\psi_k$ , i.e. :

$$\begin{aligned} m_k (\partial_t(\psi_k) + U_k \partial_x(\psi_k)) + \alpha_k P_k \partial_x(U_k) &+ \Pi(W)(U_k - V(W)) \partial_x(\alpha_k) \\ &= J_k^{E,i,0}(W) - U_k J_k^{Q,i,0}(W) + (U_k^2/2 - \psi_k) J_k^{M,i,0}(W) \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

en notant classiquement :

$$m_k = \alpha_k \rho_k \quad (1.3.16)$$

En utilisant l'équation de bilan de masse moyenne, et en développant selon les trois variables  $\alpha_k, \rho_k, P_k$ , on obtient une équation portant sur la variable pression moyenne phasique  $P_k$  :

$$\begin{aligned} \partial_t (P_k) &+ U_k \partial_x (P_k) \\ &+ \rho_k (c_k)^2 \partial_x (U_k) \\ &+ (\partial_{P_k} (\Psi_k))^{-1} \left( \frac{\Pi(W)(U_k - V(W))}{m_k} + (U_k - \langle V'_\sigma \rangle (W)) (\partial_{\alpha_k} (\Psi_k) - \rho_k / \alpha_k \partial_{\rho_k} (\Psi_k)) \right) \partial_x (\alpha_k) \\ &= S_{P_k} \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

sachant que :

$$\rho_k (c_k)^2 = (\partial_{P_k} (\Psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k)))^{-1} (P_k / \rho_k - \rho_k \partial_{\rho_k} (\Psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k))) \quad (1.3.18)$$

et :

$$\begin{aligned} \partial_{P_k} (\Psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k)) S_{P_k} &= J_k^{E,i,0}(W) - U_k J_k^{Q,i,0}(W) + (U_k^2/2 - \Psi_k) J_k^{M,i,0}(W) / m_k \\ &- \phi_k^0(W) \partial_{\alpha_k} (\Psi_k) - (J_k^{M,i,0}(W) - \rho_k \phi_k^0(W)) \partial_{\rho_k} (\Psi_k) / \alpha_k \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Le système agissant sur la variable  $Z = (\alpha_1, \rho_1, \rho_2, U_1, U_2, P_1, P_2)$ , constitué de la première équation de (1.3.13), des deux équations (1.3.14) et de (1.3.17), est donc un système de type convection-sources. Les valeurs propres associées au système convectif seront clairement réelles dès lors que les deux conditions suivantes :

$$\rho_k (c_k)^2 > 0$$

seront vérifiées, ce qui implique certaines conditions sur les fonctions  $\Psi_k$ . Le spectre du noyau convectif est en fait simplement :

$$\langle V'_\sigma \rangle, U_1, U_2, U_1 \pm c_1, U_2 \pm c_2$$

quelles que soient les lois de fermeture afférentes à  $\langle V'_\sigma \rangle$  et aux différents termes sources.

Pour conclure cette section, il faut donc noter que l'hyperbolicité émerge naturellement dans cette approche statistique.

### 1.3.3 Lois de fermeture et condition d'entropie

Nous introduisons deux fonctions  $S_k(\alpha_k, \rho_k, P_k)$  vérifiant la contrainte suivante :

$$(c_k)^2 \partial_{P_k} (S_k) + \partial_{\rho_k} (S_k) = 0$$

Nous noterons également l'entropie de mélange :

$$S = m_1 S_1 + m_2 S_2$$

et le flux d'entropie de mélange :

$$F_S = m_1 S_1 U_1 + m_2 S_2 U_2$$

On peut alors, moyennant quelques manipulations, obtenir l'équation d'évolution de  $S$ , qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t (S) + \partial_x (F_S) &+ \mathcal{B} \partial_x (\alpha_1) \\ &= \Sigma_k \left( m_k \partial_{P_k} (S_k) S_{P_k} + \rho_k \partial_{\rho_k} (S_k) (J_k^{M,i,0}(W) - \rho_k \phi_k^0(W)) \right) \\ &+ \Sigma_k \left( S_k J_k^{M,i,0}(W) + m_k \partial_{\alpha_k} (S_k) \phi_k^0(W) \right) \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

où la contribution  $\mathcal{B}$  s'écrit :

$$\mathcal{B} = \Sigma_k (-1)^{k+1} m_k \left( \partial_{P_k} (S_k) (\partial_{P_k} (\Psi_k))^{-1} A_k + (U_k - \langle V'_\sigma \rangle (W)) \left( \frac{\rho_k}{\alpha_k} \partial_{P_k} (S_k) - \partial_{\alpha_k} (S_k) \right) \right)$$

avec :

$$A_k = (U_k - V(W)) \Pi(W) / m_k + (U_k - \langle V'_\sigma \rangle (W)) (\partial_{\alpha_k} (\Psi_k) - \frac{\rho_k}{\alpha_k} \partial_{P_k} (\Psi_k))$$

A ce stade, il est utile d'introduire deux modèles consistants pour les vitesses  $\langle V'_\sigma \rangle (W)$  et  $V(W)$ , soit :

#### Hypothèse fermeture 4 :

$$\langle V'_\sigma \rangle (W) = a_\sigma(W) U_1 + (1 - a_\sigma(W)) U_2 \quad (1.3.21)$$

$$V(W) = a(W) U_1 + (1 - a(W)) U_2$$

où les deux fonctions scalaires inconnues  $a(W)$  et  $a_\sigma(W)$  sont à valeurs dans  $[0, 1]$ . Cette hypothèse revient implicitement à assumer une notion de *consistance* pour les vitesses d'interface  $\langle V'_\sigma \rangle (W)$  et  $V(W)$ .

Compte tenu de la forme retenue ci-dessus, le terme  $\mathcal{B}$  prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & (U_1 - U_2) \left( \Pi(W) \left( \frac{1-a(W)}{T_1} + \frac{a(W)}{T_2} \right) - \left( \frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2} \right) \right) \\ & + (U_1 - U_2) \left( m_1 (1 - a_\sigma(W)) \left( \frac{1}{T_1} \partial_{\alpha_1} (\Psi_1) - \partial_{\alpha_1} (S_1) \right) + m_2 (a_\sigma(W)) \left( \frac{1}{T_2} \partial_{\alpha_2} (\Psi_2) - \partial_{\alpha_2} (S_2) \right) \right) \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

en notant classiquement :

$$1/T_k = \partial_{P_k} (S_k) / \partial_{P_k} (\Psi_k) > 0$$

Le terme  $\mathcal{B} \partial_x (\alpha_1)$  étant d'ordre différentiel 1 et ne pouvant être dissipatif, le contrôle intégral de l'entropie de mélange  $S$  conduit à imposer la contrainte :

$$\mathcal{B} = 0 \quad (1.3.23)$$

pour toute valeur de  $U_1 - U_2$ .

Si les fonctions  $\Psi_k$  ne dépendent pas de la variable  $\alpha_k$ , ceci implique que  $c_k$  est une fonction des seules variables  $\rho_k, P_k$ , ce qui conduit donc à retenir les fonctions  $S_k$  ne dépendant que de  $\rho_k, P_k$ . Ainsi, la contrainte (1.3.23) équivaut alors à annuler :

$$\Pi(W) \left( \frac{1-a(W)}{T_1} + \frac{a(W)}{T_2} \right) - \left( \frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2} \right) = 0 \quad (1.3.24)$$

ce qui revient à exprimer explicitement  $\Pi(W)$  en fonction de  $W$  et de  $(a_\sigma(W), a(W))$  :

$$\Pi(W) = \frac{\frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2}}{\frac{1-a(W)}{T_1} + \frac{a(W)}{T_2}}$$

Si en revanche une des fonctions  $\Psi_k$  dépend de  $\alpha_k$ , on imposera alors les contraintes sur les entropies partielles moyennes comme suit :

$$\frac{1}{T_1} \partial_{\alpha_1} (\Psi_1) - \partial_{\alpha_1} (S_1) = \frac{1}{T_2} \partial_{\alpha_2} (\Psi_2) - \partial_{\alpha_2} (S_2) = 0$$

Examinons la formule (1.3.24), en imposant des états de pression à l'équilibre entre les phases. Dans ce cas, on constate que l'on aura une *consistance* en pression si et seulement si :

#### Hypothèse fermeture 5 :

$$a(W) = a_\sigma(W) \quad (1.3.25)$$

Nous retiendrons cette hypothèse dorénavant, sachant qu'aucun élément *a priori* ne permet de remettre en cause ce point. La forme finale du terme  $\Pi(W)$  sera donc :

$$\Pi(W) = \frac{\frac{(1-a_\sigma(W))P_1}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)P_2}{T_2}}{\frac{1-a_\sigma(W)}{T_1} + \frac{a_\sigma(W)}{T_2}} = \mu(W)P_1 + (1-\mu(W))P_2$$

avec  $\mu \in [0, 1]$  si et seulement si  $a_\sigma(W) \in [0, 1]$ .

Il reste à ce stade à détailler la forme de la fonction de production d'entropie. Pour cela, il est préférable d'introduire des formes des termes sources tenant compte respectivement du transfert de masse, de quantité de mouvement, en posant :

$$\begin{aligned} J_k^{Q,i,0}(W) &= \mathcal{U}J_k^{M,i,0}(W) + L_k^Q(W) \\ J_k^{E,i,0}(W) &= \mathcal{U}L_k^Q(W) + \mathcal{W}J_k^{M,i,0}(W) + L_k^E(W) \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

sachant que :

$$L_1^Q(W) + L_2^Q(W) = 0$$

et :

$$L_1^E(W) + L_2^E(W) = 0$$

Les fonctions scalaires  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  ont respectivement la dimension d'une vitesse et du carré d'une vitesse. En l'absence de transfert de masse,  $L_k^Q(W)$  représente le transfert interfacial de quantité de mouvement entre phases ; de même,  $L_k^E(W)$  désigne le transfert de chaleur entre phases lorsque les transferts de masse et de dynamique sont négligés. Cette ré-écriture n'est pas indispensable, mais elle permet une meilleure compréhension de ce qui suit.

Dès lors, le second membre  $RHS_S$  de l'équation (1.3.20) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} RHS_S(W) &= ((\Psi_2 + P_2/\rho_2 - T_2S_2)/T_2 - (\Psi_1 + P_1/\rho_1 - T_1S_1)/T_1) J_1^{M,i,0}(W) \\ &+ ((\mathcal{W} - \mathcal{U}U_1 + U_1^2/2)/T_1 - (\mathcal{W} - \mathcal{U}U_2 + U_2^2/2)/T_2) J_1^{M,i,0}(W) \\ &+ ((\mathcal{U} - U_1)/T_1 - (\mathcal{U} - U_2)/T_2) L_1^Q \\ &+ (P_1/T_1 - P_2/T_2) \phi_1^0(W) \\ &+ (1/T_1 - 1/T_2) L_1^E(W) \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

On posera dans la suite :

$$\mu_k = \Psi_k + P_k/\rho_k - T_kS_k$$

mais aussi :

**Hypothèse fermeture 6 :**

$$\mathcal{U} = (U_1 + U_2)/2 \quad (1.3.28)$$

et :

$$\mathcal{W} = U_1U_2/2 \quad (1.3.29)$$

Il est clair alors que le second membre dans le bilan d'entropie sera tel que :

$$\begin{aligned}
RHS_S &= (\mu_2/T_2 - \mu_1/T_1) J_1^{M,i,0}(W) \\
&+ ((1/(2T_1) + 1/(2T_2))(U_2 - U_1) L_1^Q \\
&+ (P_1 - P_2)((1 - \mu(W))/T_1 + \mu(W)/T_2) \phi_1^0(W) \\
&+ (1/T_1 - 1/T_2)(L_1^E(W) + \Pi(W) \phi_1^0(W))
\end{aligned} \tag{1.3.30}$$

Il faut absolument noter à ce stade que les lois de fermeture (1.3.28) et (1.3.29) portant sur  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{W}$  sont les seules permettant de déconnecter la contribution cinématique dans le terme de transfert de masse interfacial. Il est également fondamental de souligner l'importance du respect d'appartenance à  $[0, 1]$  de  $\mu(W)$ . Enfin la reformulation des deux dernières lignes du second membre dans (1.3.27) sous la forme des deux dernières contributions dans (1.3.30) est importante puisqu'elle va permettre de retrouver une forme globale des équations fermées plus classique.

### 1.3.4 Synthèse partielle

A ce stade, et sachant qu'il ne reste plus qu'une inconnue  $\alpha_\sigma(W)$  dans le modèle global, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

#### Proposition 1 (bilan d'entropie de mélange diphasique) :

Supposons que les hypothèses 1 – 6 sont vérifiées, et donc que les lois de fermeture soient conformes à (1.3.10), (1.3.11), (1.3.12), (1.3.21), (1.3.25), (1.3.28), (1.3.29), et qu'en outre la fonction  $\Pi(W)$  soit telle que (1.3.24) soit satisfaite ; dans ce cas, si les termes sources  $J_1^{M,i,0}(W)$ ,  $L_1^Q(W)$ ,  $L_1^E(W)$ ,  $\phi_1^0(W)$  sont tels que :

$$\begin{aligned}
0 &\leq J_1^{M,i,0}(W)(\mu_2(W)/T_2 - \mu_1(W)/T_1), \\
0 &\leq L_1^Q(W)(U_2 - U_1), \\
0 &\leq (L_1^E(W) + \Pi(W)\phi_1^0(W))(T_2 - T_1), \\
0 &\leq \phi_1^0(W)(P_1 - P_2),
\end{aligned} \tag{1.3.31}$$

alors les solutions régulières  $W$  du système (1.3.13) seront telles que le bilan d'entropie de mélange  $S(W)$  sera conforme à :

$$0 \leq RHS_S(W) = \partial_t(S(W)) + \partial_x(F_S(W)). \tag{1.3.32}$$

Si, par exemple, nous postulons que les lois de fermeture sont telles que :

$$\begin{aligned}
J_1^{M,i,0}(W) &= \alpha_1 \alpha_2 K_M(W) (\mu_2/T_2 - \mu_1/T_1) \\
L_1^Q(W) &= \alpha_1 \alpha_2 K_Q(W) (U_2 - U_1) \\
\phi_1^0(W) &= \alpha_1 \alpha_2 K_P(W) (P_1 - P_2) \\
L_1^E(W) + \Pi(W) \phi_1^0(W) &= \alpha_1 \alpha_2 K_E(W) (T_2 - T_1)
\end{aligned} \tag{1.3.33}$$

où les fonctions scalaires  $K_Q(W)$ ,  $K_M(W)$ ,  $K_P(W)$ ,  $K_E(W)$  sont à valeurs positives, alors l'inégalité d'entropie (1.3.32) ci-dessus sera assurée.

On notera que la première loi portant sur  $L_1^Q(W)$  correspond à la prise en compte de la trainée statique, sachant que les vitesses dans cette formule sont bien les vitesses moyennes au sens de Favre. La littérature propose des échelles de temps de relaxation associées à ce terme qui renvoie à l'équilibre cinématique, notamment dans le cadre de mélanges de gaz et de particules, ou de bulles de gaz placées dans un liquide ([40]). Il en est de même pour le terme d'échange de chaleur  $K_E(W)(T_2 - T_1)$ , qui conduit asymptotiquement à un équilibre en température entre les deux phases ; ce terme est bien entendu actif même si les phases sont non miscibles. La troisième contribution de relaxation des pressions de phases est sensible, sachant que la plupart des modèles classiques dans la littérature proposent des échelles de temps de relaxation

associées *nulles*, conduisant ainsi à un équilibre local instantané en pression (voir par exemple [43]); ce cadre sera explicitement exclus ici. Une estimation simple de  $K_p(W)$  peut s'obtenir en considérant le mouvement d'une bulle isolée dans un fluide au repos ([17] et références associées), en tenant compte éventuellement des effets de tension superficielle. Enfin, le terme de transfert de masse associé au déséquilibre de potentiel chimique ( $\mu_2/T_2 - \mu_1/T_1$ ) est lui aussi classique, même si de nombreuses approches proposent une simplification de ce terme fortement non linéaire. Finalement, on remarque que l'annulation totale du terme source implique un quadruple équilibre en vitesse/pression/température/potentiel chimique.

Le système associé sera donc :

$$\begin{aligned}
\partial_t (\alpha_1) + (a_\sigma(W)U_1 + (1 - a_\sigma(W))U_2)\partial_x (\alpha_1) &= \phi_1^0(W) \\
\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k U_k) &= (-1)^{k+1} J_1^{M,i,0}(W) \\
\partial_t (\alpha_k \rho_k U_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k U_k^2 + \alpha_k P_k) - \Pi(W)\partial_x (\alpha_k) &= (-1)^{k+1} (L_1^Q(W) + \mathcal{U}J_1^{M,i,0}(W)) \\
\partial_t (Z_k^E) + \partial_x (U_k(Z_k^E + \alpha_k P_k)) + \Pi(W)\partial_t (\alpha_k) &= (-1)^{k+1} \alpha_1 \alpha_2 (K_E(W)(T_2 - T_1)) \\
&+ (-1)^{k+1} (\mathcal{W}J_1^{M,i,0}(W) + \mathcal{U}L_1^Q(W))
\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

avec :

$$Z_k^E = \alpha_k \rho_k (\Psi_k(\alpha_k, \rho_k, P_k) + 1/2U_k^2)$$

On notera que la forme finale des équations fait apparaître explicitement au premier membre des équations d'énergie une contribution proportionnelle à la variation temporelle  $\partial_t (\alpha_k)$ , qui peut, au moins formellement, être rapprochée d'un terme analogue dans la formulation monophasique en milieu poreux *mobile*. Nous garderons cette écriture par la suite.

### 1.3.5 Lois de fermeture et relations de saut

Le dernier point invoqué ici concerne l'existence (et unicité) de relations de saut associées au cadre non visqueux, pour le système convectif *non conservatif* correspondant au membre de gauche des équations du modèle (1.3.34). On sait en effet qu'une pathologie classique de nombreux modèles diphasiques est liée à l'absence de relations de saut, et concomitamment à la non-unicité de solutions chocs. Ce défaut majeur de certains modèles, indépendamment du respect (ou non) du caractère neutralement stable des systèmes convectifs, est lié à la définition des trois produits non conservatifs  $\langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x (\alpha_k)$ ,  $\Pi(W)\partial_x (\alpha_k)$ , et  $\Pi(W)\langle V'_\sigma \rangle(W)\partial_x (\alpha_k)$ .

Or, il a été souligné dans [8, 12] que l'hypothèse structurelle de champ linéairement dégénéré (LD) associée à la valeur propre  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$  permet de garantir l'existence et unicité des relations de saut champ par champ. Cette hypothèse est en fait naturelle : elle signifie simplement que, dans une expérience de type Riemann associée à une condition initiale discontinue sur le taux de présence statistique  $\alpha_k$ , le bloc convectif ne peut créer à lui seul de valeurs intermédiaires pour ce taux. On retrouve donc le caractère non matériel de cette variable moyenne *transportée*. La difficulté réside alors dans la recherche de fonctions scalaires  $a_\sigma(W)$  qui confèrent au champ associé à  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$  ce caractère LD.

On ne détaillera pas ici cet aspect qui a été examiné en détail dans [8, 12] (voir également [20, 35]).

### 1.3.6 Synthèse

Nous pouvons ici conclure la section en donnant les principales propriétés du modèle diphasique fermé, en rappelant que le terme de pression interfaciale  $\Pi(W)$  est fermé en considérant une inégalité d'entropie globale. Des caractérisations plus précises (en particulier des invariants de Riemann et des relations de saut à la traversée de chaque onde) sont accessibles dans les références citées.

**Proposition 2 (propriétés du modèle diphasique) :**

– Le système homogène associé au système (1.3.34) admet sept valeurs propres réelles qui sont :

$$\lambda_1 = (a_\sigma(W)U_1 + (1 - a_\sigma(W))U_2) \quad (1.3.35)$$

$$\lambda_2 = U_1, \quad \lambda_3 = U_1 - c_1(W), \quad \lambda_4 = U_1 + c_1(W), \quad (1.3.36)$$

$$\lambda_5 = U_2, \quad \lambda_6 = U_2 - c_2(W), \quad \lambda_7 = U_2 + c_2(W) \quad (1.3.37)$$

Les vecteurs propres associés engendrent l'espace  $\mathcal{R}^7$ , dès lors que  $z_k|U_1 - U_2|/c_k \neq 1$ , avec  $z_1 = |1 - a_\sigma(W)|$  et  $z_2 = |a_\sigma(W)|$ .

– Les champs associés à  $\lambda_{2,5}$  sont LD. Les autres champs associés à  $\lambda_{3,4,6,7}$  sont vraiment non linéaires (VNL). Le 1–champ est LD si :

$$a_\sigma(W)(1 - a_\sigma(W)) = 0, \quad \text{ou si :} \quad a_\sigma(W) = m_1/(m_1 + m_2). \quad (1.3.38)$$

– Les solutions régulières  $W(x,t)$  de (1.3.34) satisfont l'inégalité d'entropie :

$$0 \leq \partial_t (S(W)) + \partial_x (F_S(W)). \quad (1.3.39)$$

– Le système homogène admet des relations de saut uniques champ par champ dès lors que  $a_\sigma(W)$  est conforme à (1.3.38) ou admet la forme plus générale donnée dans [35].

En ce qui concerne les propriétés de convexité de l'entropie de mélange  $S$  et la possible symétrisation du système, on renvoie le lecteur à [9]. Le dernier point peut notamment être utilisé pour la reconstruction des valeurs de maille, dans un processus global -classique- de montée en ordre des schémas de convection.

## 1.4 Remarques concernant le cadre bifluide

### 1.4.1 Liens avec quelques modèles diphasiques bifluides issus de la littérature.

Les modèles proposés ci-dessus sont à mettre en relation avec les travaux externes, notamment des équipes de Kapila [4, 48, 47], Glimm [24, 25, 26, 5, 41, 42], Abgrall-Forestier-Gavrilyuk-Saurel [1, 20, 18, 61, 14], et des références initiales [62, 4, 11]. Ceux-ci concernent la plupart du temps des applications au cadre granulaire dense associé à la modélisation de la transition déflagration-détonation. Ce cadre est assez éloigné de celui qui nous intéresse ici, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les phases considérées gaz-solide correspondent à deux matériaux distincts, sachant qu'en outre la densité d'une des deux phases (solide) est constante, ce qui introduit une contrainte spécifique dans le système d'EDP. Il faut en outre mentionner le fait que les phénomènes de compactage maximal sous-jacents introduisent des spécificités importantes [25].

Deux références paraissent se détacher afin d'établir un parallèle avec la démarche retenue ici. La première analyse décrit avec une approche originale et très distincte un mélange de bulles en agitation turbulente au sein d'un liquide [20]. Il faut en particulier retenir le mode de construction, qui postule une structure d'évolution des entropies phasiques ; il faut également signaler la prise en compte potentielle d'une contribution d'entropie associée à l'interface (sans masse), point spécifique. La seconde contribution [61], qui examine le bilan entropique, est dans l'esprit plus proche des propositions [8, 12].

On notera également que les lois de fermeture proposées pour les couples vitesse/pression d'interface dans les publications [24, 25, 5] conduisent à des propriétés sensiblement différentes en ce qui concerne le champ associé à  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$ . On y postule en particulier que cette vitesse d'interface, choisie *a priori* comme combinaison convexe des vitesses phasiques, est contrainte à s'identifier à  $U_1$  dans la limite où  $\alpha_1$  tend vers 0, soit par exemple :

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = \alpha_2 U_1 + \alpha_1 U_2$$

Il faut aussi souligner que les lois de fermeture de pression d'interface sont plus de type phénoménologique.

### 1.4.2 Commentaires concernant le modèle de Baer-Nunziato.

Ce modèle correspond au choix particulier suivant :

$$\Pi(W) = P_k \tag{1.4.1}$$

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = U_{3-k} \tag{1.4.2}$$

où  $k$  désigne l'indice de la phase la plus présente dans l'écoulement. Ce modèle a été introduit dans le cadre de la modélisation de la transition déflagration détonation (DDT), de manière "directe" [4]. Une particularité importante de ce modèle est que chaque entropie phasique est elle-même solution convective d'une équation classique de type :

$$\partial_t (S_k) + U_k \partial_x (S_k) = 0$$

Ce modèle est assez bien adapté à la représentation des écoulements en eau-vapeur lorsque la vapeur est peu présente (et donc en posant  $\Pi(W) = P_l$  et  $\langle V'_\sigma \rangle(W) = U_v$ ), ou lorsque la phase vapeur dominante contient des gouttelettes d'eau (et donc en posant  $\Pi(W) = P_v$  et  $\langle V'_\sigma \rangle(W) = U_l$ ). Il est par contre *a priori* non optimal lorsque la configuration bascule (temporellement ou localement) du premier régime au second, ou inversement.

### 1.4.3 Impact de la structure associée au champ $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ .

On souligne ici que les lois parfois proposées concernant  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ , typiquement :

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$$

qui a la particularité d'être à divergence nulle lorsque les deux phases sont *incompressibles et non miscibles* (cadre distinct de celui retenu ici), ou encore la loi mentionnée ci-dessus :

$$\langle V'_\sigma \rangle(W) = \alpha_2 U_1 + \alpha_1 U_2$$

conduisent à une structure de champ VNL associé à  $\lambda = \langle V'_\sigma \rangle(W)$ . Une conséquence immédiate est qu'il n'est pas possible de construire de relations de saut uniques dans ces cas ; dès lors, les simulations convergées en maillage sont systématiquement schéma-dépendantes (voir par exemple [29]).

Signalons ici qu'une synthèse des travaux réalisés dans le domaine de la modélisation multiphasique à phases compressibles (cadre le plus général) est disponible dans le document [7]. On y mentionne en particulier la difficulté associée à la détermination précise des échelles de temps de relaxation associées aux termes de traînée statique  $K_Q(W)$ , de transfert de masse  $K_M(W)$ , de chaleur  $K_E(W)$  et à la relaxation en pression  $K_P(W)$ . Le lecteur pourra également y trouver des éléments pour construire des schémas numériques adaptés à la simulation des solutions de ces équations, ainsi que de nombreuses références bibliographiques.

On discute ci-après très succinctement les possibilités d'extension du formalisme présenté dans le cadre bi-fluide en milieu libre, et plus particulièrement :

- une formulation admissible pour les évolutions dans un cadre bifluide poreux ;
- une formulation admissible pour la gestion des écoulements triphasiques.

## 1.5 Extensions du formalisme bifluide

### 1.5.1 Le cadre poreux

Une première extension concerne le cadre des écoulements en milieu poreux. Il importe de noter ici que cette extension "classique" n'est pas nécessairement optimale pour ce qui concerne la spécificité poreuse ; il vaut mieux voir ce cadre comme un cadre admissible au sens de la modélisation bifluide en milieu poreux ou libre, que pour sa valeur "poreuse" stricte.

Dans le contexte du nucléaire civil, cette approche est essentiellement motivée par le fait qu'il est actuellement impossible d'envisager la modélisation de l'écoulement de fluide primaire au sein du cœur de réacteur, ou au niveau d'un générateur de vapeur, sachant que les très nombreux obstacles de petite taille vont interdire la création d'un maillage de taille admissible (au sens du coût CPU induit, ou de la mémoire à allouer). Une approche classique consiste alors à introduire une "porosité" locale stationnaire  $\varepsilon(\mathbf{x})$  définie par :

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 - \mathcal{V}'_s(\mathbf{x}) / \mathcal{V}'_{total}(\mathbf{x})$$

sachant que  $\mathcal{V}'_f(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{V}'_s(\mathbf{x})$  sont les volumes de fluide et de solide au sein d'une maille de volume  $\mathcal{V}'_{total}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}'_f(\mathbf{x}) + \mathcal{V}'_s(\mathbf{x})$ .

Si l'on retient alors le formalisme bifluide, le principe de construction retenu permet de construire le modèle poreux suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t(\varepsilon) &= 0 \\ \partial_t(\alpha_k) + V_{int}(W)\partial_x(\alpha_k) &= \phi_k^0(W) \\ \partial_t(\varepsilon m_k) + \partial_x(m_k U_k) &= \varepsilon J_k^{M,i,0}(W) \\ \partial_t(\varepsilon m_k U_k) + \partial_x(\varepsilon m_k U_k^2) + \varepsilon \alpha_k \partial_x(P_k) - \varepsilon(\Pi(W) - P_k)\partial_x(\alpha_k) &= \varepsilon(L_k^Q(W) + J_k^{M,i,0}(W)\mathcal{U}) \\ \partial_t(\varepsilon \alpha_k E_k) + \partial_x(\varepsilon \alpha_k U_k(E_k + P_k)) + \varepsilon \Pi(W)\partial_t(\alpha_k) &= \varepsilon(-1)^{k+1} K_E(W)(T_2 - T_1) \\ &\quad + \varepsilon(\mathcal{U}L_k^Q(W) + J_k^{M,i,0}(W)\mathcal{W}) \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

pour  $k = l, v$ .

Ce système admet les propriétés suivantes :

**Propriété (voir [14, 35]) :**

- La partie homogène du système (1.5.1) est hyperbolique, hormis lorsque :  $|U_k - V_{int}(W)|/c_k = 1$ , ou lorsque  $|U_k|/c_k = 1$ . Les valeurs propres de ce système sont les suivantes :

$$\lambda_0 = 0 \quad \lambda_1 = V_{int}(W) \quad (1.5.2)$$

$$\lambda_2 = U_1, \quad \lambda_3 = U_1 - c_1(W), \quad \lambda_4 = U_1 + c_1(W), \quad (1.5.3)$$

$$\lambda_5 = U_2, \quad \lambda_6 = U_2 - c_2(W), \quad \lambda_7 = U_2 + c_2(W). \quad (1.5.4)$$

- On note toujours :  $S = m_1 S_1 + m_2 S_2$ . Les solutions régulières du système (1.5.1) satisfont l'inégalité d'entropie :

$$0 \leq \partial_t(\varepsilon S(W)) + \partial_x \left( \varepsilon \sum_{k=l,v} m_k U_k S_k \right) \quad (1.5.5)$$

lorsque les lois de fermeture associées à  $\Pi(W)$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{W}$  et aux termes sources sont respectivement conformes à (1.3.24), (1.3.28), (1.3.29) et (1.3.33).

- Les champs associés à  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_2 = U_1$ ,  $\lambda_5 = U_2$  sont linéairement dégénérés. Il en est de même pour le champ associé à  $\lambda_1 = V_{int}(W)$  si la loi de fermeture pour la vitesse interfaciale est donnée par (1.3.38). Les autres champs sont VNL.

Il faut remarquer ici que, contrairement au cadre des évolutions en milieu libre, la probabilité d'occurrence de la résonance augmente notablement, puisque les cas soniques par phase (et non plus seulement au sens de la vitesse relative entre phases) peuvent déclencher la dégénérescence du système.

## 1.5.2 Le cadre multiphasique [34]

Une seconde application du formalisme concerne l'extension au cadre triphasique compressible, et on renvoie pour cet aspect le lecteur à la référence [34]. Deux points doivent être essentiellement retenus à ce niveau.

Tout d'abord, l'analyse constructive retenue permet de proposer une "extension directe" des résultats obtenus dans le cadre bifluide, notamment grâce à :

- L'utilisation du principe de caractérisation entropique, qui permet de mieux voir que les contributions du transfert interfacial de quantité de mouvement et d'énergie d'ordre un sont obtenues de manière *unique* en fonction de la vitesse d'interface (unique !)  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$ , l'entropie de mélange étant ici encore

$$S = \sum_k m_k S_k$$

- L'imposition de relations de saut uniques, qui sont assurées si le champ  $\langle V'_\sigma \rangle(W)$  a une structure LD.

Le second point concerne la complexité qui est partiellement occultée dans le cadre diphasique, notamment en ce qui concerne les degrés de liberté dans le transfert interfacial entre phases, mais aussi à propos de la vitesse d'interface moyenne.

En fin de compte, la construction des modèles à trois phases permet de constater que l'extension à un nombre quelconque de phases est possible, sachant que le degré de complexité afférent est croissant.

## 1.6 Quelques commentaires

Dans l'approche proposée ici, qui est de fait assez classique dans un cadre de modélisation en thermo-mécanique des milieux continus, plusieurs éléments ont été volontairement oubliés, notamment :

- (i) La prise en compte des effets de viscosité dans le système initial associé à chaque phase ;
- (ii) La prise en compte des effets de "turbulence" ;
- (iii) La comparaison avec le cadre monophasique.

Le premier point n'introduit pas réellement de problème incontournable, si l'on se restreint à l'utilisation de lois de premier gradient classiques [21] pour la modélisation des flux moyens associés à  $\Sigma_k$  dans (1.1.1). On pourra par exemple examiner la référence [29] pour cet aspect.

En ce qui concerne le second point, il faut souligner que certains aspects ont été abordés dans [33], en se limitant à une modélisation comportant une équation d'intensité de turbulence  $K_k$  par phase. Ceci correspond de fait à un choix simple du modèle de turbulence, à savoir :

$$\langle \chi_k \rho_k (u_k)_i (u_k)_j \rangle = 2/3 \alpha_k \rho_k K_k \delta_{ij}$$

qui vérifie les contraintes de réalisabilité dès lors que  $0 \leq K_k$  (sachant que les équations d'évolution de cette variable garantissent effectivement la positivité des solutions dans le cadre régulier). On rappelle que le cahier des charges retenu dans [33] est identique à celui considéré ici, mais que l'obtention de relations de saut bien définies se heurte aux mêmes difficultés que dans le cadre monophasique compressible turbulent (voir [2, 6, 18]). On souligne que cette problématique de définition correcte des relations de Rankine Hugoniot est essentielle pour certaines applications telles que celles faisant intervenir des coups de bélier dans les tuyauteries (cf. [54]). Un dernier point important est relatif à la prise en compte correcte des flux de masse turbulents diphasiques  $\langle (\chi_k u_k)(x, t; \xi) \rangle$  (contribution (RHS5) dans l'équation (1.2.18)) ; on rappelle que, dans le contexte monophasique, une possibilité consistante avec l'inégalité d'entropie correspond à la formulation de Ristorcelli. L'analyse dans le cadre diphasique n'a cependant jamais été entreprise jusqu'alors.

Enfin, on notera que la démarche retenue est identique à celle afférente au cadre monophasique compressible. En particulier, la modélisation naturelle en approche statistique n'introduit pas de réel problème concernant l'hyperbolicité du modèle fermé complet, et la caractérisation entropique globale émerge assez simplement. Il en résulte d'ailleurs en général un comportement des solutions régulières conforme aux attentes, en terme de respect de la positivité des variables ad hoc.

La dernière remarque concerne le processus de validation du modèle, qui présuppose que plusieurs tirs sont effectués pour chaque mesure expérimentale. En réalité, la littérature ne propose pas systématiquement des dossiers de ce type, alors que la dispersion des résultats peut s'avérer être assez importante, notamment en ce qui concerne le taux de présence statistique (voir [52] par exemple pour l'expérience de dépressurisation rapide Canon).

**acknowledgement** Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet SITAR. Le second auteur bénéficie d'une bourse CIFRE EDF/LATP 2010-732.

---

## Bibliographie

---

- [1] ABGRALL R., SAUREL R., "Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures" *J. Comp. Physics.*, vol. 186, pp. 361-396, 2003.
- [2] B. Audebert, Contribution à l'analyse des modèles aux tensions de Reynolds pour l'interaction choc turbulence, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2005
- [3] M.R. Baer, J.W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials, *IJMF*, **12(6)**, pp. 861-889, (1986).
- [4] J.B. Bdzil, R. Menikoff, S.F. Son, A.K. Kapila, D.S. Stewart, Two phase modelling of deflagration to detonation transition in granular materials : a critical examination of modelling issues, *Phys. of Fluids*, **11**, pp. 378-402, (1999).
- [5] W. Bo, H. Jin, D. Kim, X. Liu, H. Lee, N. Pestieau, Y. Yu, J. Glimm, J.W. Grove, Comparison and validation of multi phase closure models, *Computers and mathematics with Applications*, **56**, pp. 1291-1302, (2008).
- [6] G. Brun, J.M. Hérard, D. Jeandel, M. Uhlmann, An approximate Roe-type Riemann solver for a class of realizable second-order closures, *Int. J. Computational Fluid Dynamics*, **13**, pp.223-249 (2000)
- [7] F. Coquel, T. Gallouët, P. Helluy, J.M. Hérard, O. Hurisse, N. Seguin, Modelling compressible multiphase flows, internal EDF report H-I81-2012-02421-EN, to appear in ESAIM Proceedings, (2013).
- [8] F. Coquel, T. Gallouët, J.M. Hérard, N. Seguin, Closure laws for a two-fluid two-pressure model, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **I-332**, pp. 927-932, (2002).
- [9] F. Coquel, J.M. Hérard, K. Saleh, N. Seguin, Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows, internal EDF report H-I81-2013-0935-EN, to appear in Communications in Mathematical Sciences, (2013).
- [10] D.A. Drew, S.L. Passman, Theory of multi-component fluids, *Applied Mathematical Sciences*, **135**, Springer, (1999).
- [11] P. Embid, M. Baer, Mathematical analysis of a two-phase continuum mixture theory, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **4**, pp. 279-312, (1992).
- [12] J. Favre, Equations des gaz turbulents compressibles. Méthode des vitesses moyennes, méthode des vitesses macroscopiques pondérées par la masse volumique, *Journal de Mécanique*, **4**, pp. 391-421 (1965).
- [13] J. Favre, L.S.G. Kovasnay, R. Dumas, J. Gaviglio, M. Coantic, La turbulence en mécanique des fluides, **Gauthier-Villars**, (1976).
- [14] A. Forestier, S. Gavrilyuk, Criterion of hyperbolicity for non-conservative quasi-linear systems admitting a partially convex conservation law, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **32**, pp. 2148-2158 (2011)

- [15] T. Gallouët, P. Helluy, J.M. Hérard, J. Nussbaum, Hyperbolic relaxation models for granular flows, *ESAIM : M2AN*, **44** (2), (2010).
- [16] T. Gallouët, J.M. Hérard, N. Seguin, Numerical modelling of two phase flows using the two-fluid two-pressure approach, *Math. Mod. Meth. in Appl. Sci.*, **14**(5), pp. 663-700, (2004).
- [17] S. Gavriluk, Caractérisation des échelles de temps de relaxation dans les modèles diphasiques, rapport interne EDF (2013).
- [18] S. Gavriluk, H. Gouin Geometric evolution of the Reynolds stress tensor, *International Journal of Engineering Science*, **59**, p.65-73, (2012).
- [19] S. Gavriluk, H. Gouin, Y.V. Perepechko A variational principle for two-fluid models, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **III** **324**, p.483-490, (1997).
- [20] S. Gavriluk, R. Saurel, Mathematical and numerical modelling of two-phase compressible flows with micro-inertia, *J. Comp. Phys.*, **175**, pp. 326-360, (2002).
- [21] P. Germain, *Mécanique des milieux continus*, **Masson** (1962).
- [22] F. R. Gilmore, The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid, *California Institute of Technology*, **report 26-4**, (1952).
- [23] L. Girault, J.M. Hérard, A two-fluid hyperbolic model in a porous medium, *ESAIM : M2AN*, **44**(6), pp. 1319-1348, (2010).
- [24] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Renormalization group solution of two-phase flow equations for Rayleigh-Taylor mixing, *Phys. Letters A.*, **222**, pp. 171–176, (1996).
- [25] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Two-phase flow modelling of a fluid mixing layer, *J. Fluid Mech.*, **378**, pp. 119–143, (1999).
- [26] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Statistical evolution of chaotic fluid mixing, *Phys. Rev. Letters*, **80**, pp. 712–715, (1999).
- [27] E. Godlewski, P.A Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 118, **Springer Verlag**, (1996).
- [28] H. Gouin, S. Gavriluk, Hamilton's principle and Rankine-Hugoniot conditions for general motions of mixtures, *Mechanica*, **34**, p. 39-47, (1999).
- [29] V. Guillemaud, Modélisation et simulation des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions, PhD thesis, Université Aix Marseille, Marseille, France, (2007).
- [30] J.M. Hérard, Basic analysis of some second-order closures. Part I : incompressible isothermal turbulent flows, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **6**, pp. 213-233, (1993).
- [31] J.M. Hérard, Basic analysis of some second-moment closures. Part II : incompressible turbulent flows including buoyant effects, internal EDF report HE-41-94-30-A, (1994).
- [32] J.M. Hérard, Modèles au second ordre réalisables non dégénérés pour les écoulements turbulents incompressibles, *Comptes-Rendus Académie des Sciences Paris*, **322-III**, pp. 371-377, (1996).
- [33] J.M. Hérard, Numerical modelling of turbulent two phase flows using the two-fluid approach, *AIAA paper 2003-4113*, <http://www.aiaa.org> (2003)
- [34] J.M. Hérard, A three-phase flow model, *Math. and Computer Model.*, **45**, pp. 732-755, (2007).
- [35] J.M. Hérard, Un modèle hyperbolique diphasique bifluide en milieu poreux, *Comptes-Rendus Mécanique*, **336**, pp. 650-655, (2008).
- [36] J.M. Hérard, Une classe de modèles diphasiques bi-fluides avec changement de régime, internal EDF report H-I81-2010-0486-FR, in French, (2010).

- [37] O. Hurisse, Modelling of compressible single-phase flows using a stochastic approach, internal EDF report H-I83-2012-03036-FR, (2013).
- [38] M. Ishii, Thermofluid dynamic theory of two-phase flow, **Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France**, Collection Eyrolles, (1975).
- [39] M. Ishii, T. Hibiki, Thermofluid dynamics of two-phase flow, **Springer**, (2006).
- [40] M. Ishii, N. Zuber, Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows, *AICHE Journal*, **25**, pp. 843, (1979).
- [41] H. Jin, J. Glimm, D.H. Sharp, Compressible two-pressure two-phase flow models, *Physics Letters*, **353**, pp. 469–474, (2006).
- [42] H. Jin, J. Glimm, Weakly compressible two-pressure two-phase flow, *Acta Mathematica Scientia*, **29B**, pp. 1497–1540, (2009).
- [43] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, D.S. Stewart, Two phase modeling of a DDT in a granular material : reduced equations, *Phys. of Fluids*, **13**, pp. 3002–3024, (2001).
- [44] A.K. Kapila, S.F. Son, J.B. Bdzil, R. Menikoff, D.S. Stewart, Two phase modeling of a DDT : structure of the velocity relaxation zone, *Phys. of Fluids*, **9(12)**, pp. 3885–3897, (1997).
- [45] M. Labois , Modélisation des déséquilibres dynamiques dans les écoulements diphasiques. Approches par relaxation et par modèle réduit, PhD thesis, Université Aix Marseille, Marseille, France, (2008).
- [46] J.L. Lumley, Computational modelling of turbulent flows, *Advances in Applied Mechanics*, **18**, p. 123-176, (1978).
- [47] D. Lhuillier, Evolution of the volumetric interfacial area in two-phase mixtures, *Comptes rendus Mécanique*, **332**, p. 103-108, (2004).
- [48] C. Morel, Parcours théorique et numérique autour de la modélisation des écoulements diphasiques gaz-liquide, Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Joseph Fourier (2013).
- [49] M. Papin, R. Abgrall, Fermetures entropiques pour les modèles bifluides à sept équations, *Comptes-Rendus Mécanique*, **333**, pp. 838-842, (2005).
- [50] S.B. Pope, PDF methods for turbulent reactive flows, *Progress Energy Combustion Sciences*, **11**, p. 119-192, (1985).
- [51] V. Ransom, D.L. Hicks, Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow, *J. Comp. Physics.*, **53**, pp. 124-151, (1984).
- [52] B. Riegel , Contribution à l'étude de la décompression d'une capacité en régime diphasique, PhD thesis, Université Scientifique et Médicale et Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, (1978).
- [53] U. Schumann, Realisability of Reynolds stress turbulence models, *Physics of Fluids*, **20**, p. 721, (1977).
- [54] A.R. Simpson , Large water-hammer pressures due to column separation in sloping pipes (transient cavitation), PhD thesis, University of Michigan, (1986).
- [55] C.G. Speziale, Invariance of turbulence closure models, *Physics of Fluids A*, **22**, p. 1033-1037, (1979).
- [56] H.B. Stewart, B. Wendroff, Two-phase flow : models and methods, *J. Comp. Physics.*, **56**, pp. 363-409, (1984).



---

## Préface des chapitre 2 et chapitre 3

---

Les deux chapitres qui suivent ont pour objectif de présenter les méthodes numériques mises en oeuvre pour obtenir des approximations numériques des solutions du système d'EDP couplé à sept équations d'évolution portant sur les variables, taux de présence, densités, vitesses et pressions des deux phases. L'algorithme en temps, classique, repose sur l'utilisation d'une technique à pas fractionnaires, qui est consistante avec l'inégalité d'entropie. Cette démarche est courante dans un cadre industriel, notamment parce qu'elle permet de modifier certaines parties du modèle et les algorithmes associés, sans remettre en cause fondamentalement la totalité de l'édifice. En pratique ici, on considère un algorithme qui traite successivement les phénomènes de convection (soit l'ensemble des termes différentiels d'ordre un en temps-espace), puis les effets des termes sources qui mettent en action des phénomènes de relaxation en vitesse (pour le transfert interfacial de quantité de mouvement), en pression, en température (pour le transfert de chaleur entre phases, sans transfert de masse concomitant) et en potentiel chimique (pour la prise en compte des effets de transfert de masse entre phases).

L'algorithme nécessite donc, pour une donnée initiale  $W^n$ , de calculer une approximation de la solution du système suivant :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + C(W)\partial_x W = 0, \quad (1.6.1)$$

à l'instant  $t^n + \Delta t$ , celle-ci étant notée  $W^{n+1,*}$ , puis en recherchant une solution à  $t^n + \Delta t$  des solutions de :

$$\partial_t W = S(W), \quad (1.6.2)$$

avec une initialisation faite à  $W^{n+1,*}$ . La solution ainsi obtenue constitue une approximation de  $W$  à l'instant  $t^n + \Delta t$ .

Le chapitre 2 examine plus particulièrement deux schémas possibles d'ordre un pour le traitement de la convection. Le premier est un schéma classique, de référence, soit le schéma de Rusanov adapté à la prise de termes non conservatifs actifs dans un champ LD. Le second utilise une approche à pas fractionnaires (qui ne doit pas être confondue avec l'algorithme à pas fractionnaires développé dans [66]), qui a pour objectif de mieux gérer les forts déséquilibres de taux de présence statistique. Une extension de ces deux schémas à l'ordre deux en temps espace est ensuite considérée. Celle-ci est basée sur une reconstruction linéaire par maille selon les variables de symétrisation  $(\alpha, \rho_k, U_k, S_k)$ , et un schéma en temps de Runge\_Kutta d'ordre deux. Plusieurs cas tests de type Riemann sont enfin considérés pour évaluer la précision et la stabilité des schémas développés. Le chapitre 2, intitulé "Approximate solutions of the Baer-Nunziato model", est un article publié dans ESAIM Proceedings, 40, 63-82 (2013), faisant suite à une présentation au workshop AMIS 2012 en juin 2012 (Chambéry). Une annexe contenant un certain nombre de cas tests complémentaires complète ce chapitre. De nombreux autres schémas sont évidemment proposés dans la littérature [4, 5, 13, 14, 27, 29, 49, 76, 71].

Le chapitre 3 s'intéresse quant à lui à la discrétisation implicite des termes sources, qui emmènent en temps long vers

---

un équilibre  $U_1 = U_2$ ,  $T_1 = T_2$ ,  $P_1 = P_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ . Cette partie est essentielle pour le bon fonctionnement de l'algorithme global, et plusieurs difficultés sont contenues dans ce travail. En particulier, le niveau de complexité des lois d'état thermodynamique est d'une importance cruciale. En pratique, chaque effet de relaxation est traité séquentiellement, ce qui présente l'avantage d'une plus grande souplesse dans la recherche des schémas optimaux. Quelques schémas sont proposés dans la littérature pour la recherche d'approximations discrètes des solutions des systèmes d'EDO associés, pour les termes correspondant aux effets de trainée statique, mais aussi au transfert de chaleur sans transfert de masse. Par contre, la littérature afférente aux effets de relaxation en pression et au déséquilibre de potentiel chimique est peu fournie [25, 38, 40], ce qui justifie l'effort réalisé en ce sens. Le travail décrit dans ce chapitre a fait l'objet d'une note interne EDF R&D H-I83-2013-02014-FR.

---

## Approximate solutions of the Baer-Nunziato model

---

Fabien Crouzet, Frédéric Daude <sup>1</sup>, Pascal Galon <sup>2</sup>, Philippe Helluy <sup>3</sup>, Jean-Marc Hérard, Olivier Hurisse <sup>4</sup>, Yujie LIU <sup>5</sup>

### Resumé

#### Approximation des solutions du modèle de Baer-Nunziato

On examine ici la précision des approximations obtenues pour le modèle diphasique de Baer-Nunziato. Les équations du modèle et ses principales propriétés sont rappelées. Deux schémas distincts sont proposés, et des extensions classiques au second-ordre sont considérées, utilisant les variables de symétrisation. Des cas tests de tube à choc sont analysés, notamment deux cas utilisant des conditions initiales en équilibre. Les taux de convergence attendus sont retrouvés, mais on montre que la précision des approximations de certains problèmes de Riemann est assez médiocre. Ce chapitre est un article publié dans ESAIM Proceedings, 40, 63-82 (2013).

### Introduction

Several two-phase flow models may be used in order to predict water-hammer phenomena in pipes. Though the homogeneous approach is widely used for that purpose, the two-fluid model is also a rather appealing approach. Among these models, the Baer-Nunziato model [4, 8] arises at once, especially in this framework involving fast transient flows together with strong rarefactions and compressible effects. Unlike some other candidates, its hyperbolic structure and unique jump conditions render the computation of approximate solutions meaningful, at least from a mathematical point of view. The difficult question of whether it enables to obtain accurate enough predictions is precisely one main goal for the SITAR project.

Nonetheless, this rather complex model contains many non-linear waves, and even more two distinct contact discontinuities, which are known to slow down the convergence towards exact solutions. One contact discontinuity is connected with the velocity of the dilute vapour phase, whereas the second one corresponds to the velocity of the liquid phase. Thus, we expect to observe a rather poor accuracy on coarse meshes, due to the fact that none among existing schemes preserves

---

1. EDF, R&D, AMA, and LaMSID, UMR EDF/CNRS/CEA 2832, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141, Clamart, France

2. CEA, Saclay, France, and LaMSID, UMR EDF/CNRS/CEA 2832, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141, Clamart, France

3. IRMA, 7 rue Descartes, Université de Strasbourg, 67084, Strasbourg, France

4. EDF, R&D, MFEE, 6 quai Watier, 78400, Chatou, France

5. EDF, R&D, AMA, and LaMSID, UMR EDF/CNRS/CEA 2832, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141, Clamart, France. PhD student in LATP-Université Aix-Marseille, 39 rue Joliot Curie, 13453, Marseille, France

the so-called statistical fraction waves (which will be defined in the sequel). The fact that the two linearly degenerated (LD) fields are close to one another renders the problem even more tricky. It is well known from a long time that the excellent Godunov scheme may provide rather poor approximations of solutions of single-phase Euler equations on coarse meshes, even when the equations of state are not too intricate (stiffened gas EOS or Mie-Gruneisen EOS for instance). Several recipes have been proposed in the literature since the early papers by Karni and Abgrall [1], which means that the amplitude of oscillations around the contact discontinuity may be considerably reduced, using suitable modifications of algorithms. However, as emphasized in [11], approximate solutions may converge towards wrong shock solutions when present in the field, due to the fact that non-conservative schemes are widely used to smooth profiles. This in turn means that classical conservative Finite Volume schemes cannot be disregarded.

Hence, one main objective in this paper consists in verifying the convergence of approximate solutions of the Baer-Nunziato model towards the correct solutions when the mesh is refined, and also in evaluating the accuracy of some simple and cheap schemes on rather coarse meshes. This implies that well-balanced initial data need to be defined and used in order to initialize one-dimensional Riemann problems for the Baer-Nunziato model. This will be detailed, once the governing equations, the main properties, and Finite Volume schemes have been recalled and/or defined. Modelling issues and numerical problems arising with the full set of equations including interfacial source terms will not be discussed herein, and the reader is referred to [4, 3, 7, 25, 12, 13, 14, 34, 35, 17, 19, 21, 22] among others.

## 2.1 Governing equations of the Baer-Nunziato model

Throughout the paper, indexes  $l, v$  will refer to the liquid and vapour phases. The statistical void fractions of the vapour phase and the liquid phase are noted  $\alpha_v$  and  $\alpha_l$  respectively, and the local constraint  $\alpha_l = 1 - \alpha_v$  holds everywhere. We classically note liquid and vapour pressures  $P_{l,v}$ , phasic velocities  $U_{l,v}$  and densities  $\rho_{l,v}$ . Partial masses are noted  $m_\phi = \alpha_\phi \rho_\phi$  for  $\phi = v, l$ . Equations of state are given by the user, hence functions  $e_\phi(P_\phi, \rho_\phi)$  are known explicitly, so that the total energy is :

$$E_\phi = \rho_\phi e_\phi(P_\phi, \rho_\phi) + \rho_\phi \frac{U_\phi^2}{2}, \quad \phi = v, l \quad (2.1.1)$$

The state variable  $W$  of the Baer-Nunziato model is defined by :

$$W = (\alpha_l, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l U_l, \alpha_l E_l, \alpha_v \rho_v, \alpha_v \rho_v U_v, \alpha_v E_v)$$

We focus in the paper on flows dominated by the liquid phase, and thus assume that the statistical fraction  $\alpha_v$  is small compared with 1.

When neglecting source terms associated with drag effects, but also interfacial heat and mass transfer, the governing set of equations of the Baer-Nunziato model may be written as follows [4, 8] :

$$\begin{cases} \partial_t (\alpha_l) + U_v \partial_x (\alpha_l) = 0 \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l U_l) = 0 \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l U_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l U_l^2 + \alpha_l P_l) - P_l \partial_x (\alpha_l) = 0 \\ \partial_t (\alpha_l E_l) + \partial_x (\alpha_l U_l (E_l + P_l)) + P_l \partial_t (\alpha_l) = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) + \partial_x (\alpha_v \rho_v U_v) = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v U_v) + \partial_x (\alpha_v \rho_v U_v^2 + \alpha_v P_v) - P_l \partial_x (\alpha_v) = 0 \\ \partial_t (\alpha_v E_v) + \partial_x (\alpha_v U_v (E_v + P_v)) + P_l \partial_t (\alpha_v) = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Source terms may be incorporated using the fractional step method, when these comply with the overall entropy inequality. Some algorithms have been proposed in [25, 17] for that purpose. The celerity of acoustic waves in the pure

liquid (respectively vapour) phase is noted  $c_l$  (resp.  $c_v$ ), and the phase entropy  $s_\phi$  complies with :

$$(c_\phi)^2 \partial_{P_\phi} (s_\phi) + \partial_{\rho_\phi} (s_\phi) = 0 \quad (2.1.3)$$

We recall below the main properties of system (2.1.2) (details can be found in [3, 12]).

### Property 1

– *Hyperbolicity* :

The set of equations (2.1.2) is hyperbolic. It admits seven real eigenvalues :

$$\lambda_{1,2} = U_v, \quad \lambda_3 = U_v - c_v, \quad \lambda_4 = U_v + c_v, \quad \lambda_5 = U_l, \quad \lambda_6 = U_l - c_l, \quad \lambda_7 = U_l + c_l$$

and associated right eigenvectors span the whole space  $\mathcal{R}^7$ , unless  $|U_l - U_v|/c_l = 1$ .

– *Entropy inequality* :

Define the entropy  $\eta(W) = m_l s_l + m_v s_v$  and the entropy flux  $f_\eta(W) = m_l s_l U_l + m_v s_v U_v$ ; then smooth solutions  $W$  of (2.1.2) are such that :

$$0 = \partial_t (\eta(W)) + \partial_x (f_\eta(W)). \quad (2.1.4)$$

When diffusive and source terms are taken into account, the latter equality turns into the following inequality :

$$0 \leq \partial_t (\eta(W)) + \partial_x (f_\eta(W)). \quad (2.1.5)$$

– *Structure of fields* :

Fields associated with eigenvalues  $\lambda_{1,2,5}$  are linearly degenerate (LD). Other fields are genuinely non linear (GNL).

– *Riemann invariants through LD waves* :

The five Riemann invariants of the 1 – 2 LD field associated with the void fraction coupling wave are the following :

$$\begin{aligned} I_{1-2}^1(W) &= U_v; \\ I_{1-2}^2(W) &= s_l; \\ I_{1-2}^3(W) &= m_l(U_l - U_v); \\ I_{1-2}^4(W) &= \alpha_l P_l + \alpha_v P_v + m_l(U_v - U_l)^2; \\ I_{1-2}^5(W) &= e_l + P_l/\rho_l + (U_v - U_l)^2/2. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

The structure of the 5 LD wave is classical, since :

$$\begin{aligned} I_5^1(W) &= U_l & ; & & I_5^2(W) &= P_l; \\ I_5^3(W) &= \alpha_l & ; & & I_5^4(W) &= P_v; \\ I_5^5(W) &= U_v & ; & & I_5^6(W) &= \rho_v. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

– *Jump conditions* :

Within each isolated field associated with  $\lambda_k = 3, 4, 6, 7$ , unique jump conditions hold. If  $\sigma$  denotes the speed of the shock wave, and  $l, r$  the left-right states on each side of this travelling discontinuity, these jump conditions are :

$$\begin{aligned} [\alpha_v]_l^r &= 0; \\ -\sigma[\rho_\phi]_l^r + [\rho_\phi U_\phi]_l^r &= 0; \\ -\sigma[\rho_\phi U_\phi]_l^r + [\rho_\phi U_\phi^2 + P_\phi]_l^r &= 0; \\ -\sigma[E_\phi]_l^r + [U_\phi(E_\phi + P_\phi)]_l^r &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

and thus shock relations are exactly single-phase shock relations, field by field. Moreover, Riemann invariants of the latter 3, 4 waves (and 6, 7 waves respectively) coincide with those of the pure single vapour (respectively liquid)

phase.

The structure of Riemann invariants detailed in (2.1.6) enables to build basic solutions of the Riemann problem, such as pure statistical fraction waves for instance (see below). The entropy inequality (2.1.5) is obtained assuming vanishing viscosity contributions ; when focusing on shock waves associated with 3,4,6,7 fields, it corresponds to the classical entropy inequality for Euler equations, and thus selects the correct shock solution in (2.1.8).

## 2.2 Numerical schemes

### 2.2.1 First-order and second-order Rusanov scheme

System (2.1.2) may be recast in the following form :

$$\partial_t(W) + \partial_x(\mathcal{F}(W)) + \mathcal{H}(W)\partial_x(\alpha_l) = 0 \quad (2.2.1)$$

while noting :

$$\mathcal{F}(W) = (0, m_\phi U_\phi, m_\phi U_\phi^2 + \alpha_\phi P_\phi, \alpha_\phi U_\phi (E_\phi + P_\phi))$$

$$\mathcal{H}(W) = (U_v, 0, -P_l, -P_l U_v, 0, P_l, P_l U_v)$$

The first-order Rusanov scheme (referred to as **SR1** in the sequel) computes approximations of solutions of system (2.2.1) as follows. If  $\Delta t$  denotes the time step and  $h_i$  is the size of cell  $\Omega_i$ , it computes  $W_i^{n+1}$  in terms of neighbouring cell values  $W_k^n$  (for  $k = i-1, i, i+1$ ) using a three-point scheme :

$$h_i(W_i^{n+1} - W_i^n) + \Delta t(f_{i+1/2}^{Rusanov}(W_i^n, W_{i+1}^n) - f_{i-1/2}^{Rusanov}(W_{i-1}^n, W_i^n)) + \Delta t \mathcal{T}_i^n = 0 \quad (2.2.2)$$

The numerical flux  $f_{i+1/2}^{Rusanov}(W_i^n, W_{i+1}^n)$  through the interface  $(i+1/2)$  separating cells  $i$  and  $i+1$  is defined by :

$$f_{i+1/2}^{Rusanov}(W_i^n, W_{i+1}^n) = ((\mathcal{F}(W_i^n) + \mathcal{F}(W_{i+1}^n)) - r_{i+1/2}(W_{i+1}^n - W_i^n))/2 \quad (2.2.3)$$

In this formula, the scalar  $r_{i+1/2}$  is equal to  $\max(R_i^n, R_{i+1}^n)$  where  $R_k^n$  represents the spectral radius of the whole convection matrix associated with (2.2.1) and estimated at  $W_k^n$ , for  $k = i, i+1$  :

$$R_k^n = \max(|(U_l)_k^n| + (c_l)_k^n, |(U_v)_k^n| + (c_v)_k^n)$$

If  $\bar{\phi}_{k+1/2}^n$  stands for the mean value  $(\phi_k^n + \phi_{k+1}^n)/2$ , the non-conservative contribution  $\mathcal{T}_i^n$  is calculated as :

$$\mathcal{T}_i^n = \mathcal{H}(W_i^n) \left( (\bar{\alpha}_l)_{i+1/2}^n - (\bar{\alpha}_l)_{i-1/2}^n \right) \quad (2.2.4)$$

We recall that the first-order Rusanov scheme enjoys the following property :

#### Property 2 :

Assuming that the time step complies with the condition :

$$\Delta t(r_{i-1/2} + r_{i+1/2}) < 2h_i \quad (2.2.5)$$

then scheme (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) preserves positive values of partial masses  $m_\phi$  and void fractions  $\alpha_\phi$ , for  $\phi = l, v$ .

#### Second order extension of Rusanov scheme

The second-order Rusanov scheme **SR1-ORDER2** relies on a classical minmod reconstruction of the symmetrizing variable  $Z^l = (\alpha_l, U_l, U_v, P_l, P_v, s_l, s_v)$  within each cell  $i$  (see [9]). Hence, at each time step, we define within each cell a

linear reconstruction for  $Z$  :

$$Z_i(x, t^n) = Z_i^n + (x - x_i)(\nabla Z)_i^n$$

where :

$$h_i(\nabla Z)_i^n = \text{sign}(Z_{i+1}^n - Z_i^n) \left( \min(|Z_{i+1}^n - Z_i^n|, |Z_i^n - Z_{i-1}^n|) \right)$$

if

$$(Z_{i+1}^n - Z_i^n)(Z_i^n - Z_{i-1}^n) > 0$$

and  $(\nabla Z)_i^n = 0$  otherwise.

These enable to define values  $W_{i+1/2}^- = W(Z_{i+1/2}^-)$  where :  $Z_{i+1/2}^- = Z_i^n + h_i(\nabla Z)_i^n/2$  and :  $W_{i+1/2}^+ = W(Z_{i+1/2}^+)$  where :  $Z_{i+1/2}^+ = Z_{i+1}^n - h_{i+1}(\nabla Z)_{i+1}^n/2$ , on both sides on the interface  $i + 1/2$ . Thus the counterpart of the first-order numerical flux  $f_{i+1/2}^{Rusanov}(W_i^n, W_{i+1}^n)$  in (2.2.2) is now :

$$f_{i+1/2}^{Rusanov-2}(W_{i-1}^n, W_i^n, W_{i+1}^n, W_{i+2}^n) = ((\mathcal{F}(W_{i+1/2}^-) + \mathcal{F}(W_{i+1/2}^+)) - r_{i+1/2}(W_{i+1/2}^+ - W_{i+1/2}^-))/2$$

The term  $\mathcal{T}_i^n$  remains exactly the same.

For time integration we use a second-order Runge-Kutta time scheme. This completes the description of first and second-order Rusanov schemes.

## 2.2.2 A fractional step method to compute Baer-Nunziato model

We present now a second scheme relying on the fractional step method. The fractional step method is very useful in an industrial framework, since it allows to cope with simpler systems, and also provides a rather stable strategy. The fractional step approach has been used many years ago by Baraille, Leroux (see[5]) and other authors in order to obtain approximate solutions of Euler equations on structured and unstructured meshes. The following scheme should not be confused with another fractional step method introduced in [7, 20]. Starting with an initial condition  $W_i^n$ , we compute first some approximation of solutions of :

Step 1 :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_l) + U_v \partial_x(\alpha_l) = 0 \\ \partial_t(\alpha_\phi \rho_\phi) = 0 \\ \partial_t(\alpha_\phi \rho_\phi U_\phi) = 0 \\ \partial_t(\alpha_l E_l + \alpha_v E_v) = 0 \\ \partial_t(\alpha_l E_l) + P_l \partial_t(\alpha_l) = 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

for  $\phi = l, v$ . Then, using final values  $\hat{W}_j$  as an initial condition, we compute approximate solutions of :

Step 2 :

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha_l) = 0 \\ \partial_t(\alpha_\phi \rho_\phi) + \partial_x(\alpha_\phi \rho_\phi U_\phi) = 0 \\ \partial_t(\alpha_\phi \rho_\phi U_\phi) + \partial_x(\alpha_\phi \rho_\phi U_\phi^2 + \alpha_\phi P_\phi) - P_l \partial_x(\alpha_\phi) = 0 \\ \partial_t(\alpha_\phi E_\phi) + \partial_x(\alpha_\phi U_\phi (E_\phi + P_\phi)) = 0. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

The previous fractional step method **PFRAC3** enjoys the following properties :

**Proposition 1 :**

– Structure of step 1 :

System (2.2.6) is hyperbolic. It admits seven real eigenvalues :  $\lambda_1 = U_v$  ,  $\lambda_{2-7} = 0$  and associated right eigenvectors span  $\mathcal{R}^7$ . All fields are linearly degenerated.

– Riemann invariants in step 1 :

The six Riemann invariants through the 1-field are :

$$R_{u_v} = \{m_l, m_v, U_l, U_v, s_l, m_l e_l + m_v e_v\}$$

The sole Riemann invariant of the 2 – 7-wave is  $\alpha_l$ .

– Structure of step 2 :

System (2.2.7) is hyperbolic. It admits seven real eigenvalues :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= U_v, \quad \lambda_3 = U_v - c_v, \quad \lambda_4 = U_v + c_v, \\ \lambda_5 &= U_l, \quad \lambda_6 = U_l - c_l, \quad \lambda_7 = U_l + c_l \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

and associated right eigenvectors span  $\mathcal{R}^7$ , unless :  $|U_l| = c_l$ , or :  $|U_v| = c_v$ . The 1,2,5-fields are LD and other fields are genuinely non linear.

– Riemann invariants in step 2 :

Focusing on step 2, we note that Riemann invariants of the steady 1-wave are :

$$R_0 = \{m_l U_l, m_v U_v, H_l, H_v, \Sigma_{k=l,v}(m_k U_k^2 + \alpha_k P_k), s_l\}$$

setting  $H_k = e_k + P_k/\rho_k + U_k^2/2$ . Moreover, Riemann invariants associated with the other waves are respectively :

$$\begin{cases} R_{u_v} &= (\alpha_v, u_v, p_v, u_l, p_l, s_l), \\ R_{u_v \pm c_v} &= (\alpha_v, s_v, u_v \pm f_v, u_l, p_l, s_l), \\ R_{u_l} &= (\alpha_v, u_v, p_v, s_v, u_l, p_l), \\ R_{u_l \pm c_l} &= (\alpha_v, u_v, p_v, s_v, s_l, u_l \pm f_l), \end{cases} \quad (2.2.9)$$

with  $\partial f_\phi / \partial p_\phi = -1/\rho_\phi c_\phi$ .

In order to compute approximate solutions of system (2.2.6), we use the same non-conservative version of the Rusanov scheme recalled before. Thus, we define :

$$h_i((\hat{\alpha}_l)_i^n - (\alpha_l)_i^n) + \Delta t (g_{i+1/2}^{Rusanov}(W_i^n, W_{i+1}^n) - g_{i-1/2}^{Rusanov}(W_{i-1}^n, W_i^n)) + \Delta t Q_i^n = 0 \quad (2.2.10)$$

where :

$$g_{i+1/2}^{Rusanov}(W_i^n, W_{i+1}^n) = -\tilde{r}_{i+1/2}((\alpha_l)_{i+1}^n - (\alpha_l)_i^n)/2 \quad (2.2.11)$$

and :

$$Q_i^n = (U_v)_i^n \left( (\bar{\alpha}_l)_{i+1/2}^n - (\bar{\alpha}_l)_{i-1/2}^n \right) \quad (2.2.12)$$

We also keep partial masses and velocities frozen within the step :

$$\begin{aligned} (\hat{m}_k)_i &= (m_k)_i^n \\ (\hat{U}_k)_i &= (U_k)_i^n \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

and set :

$$\begin{aligned} (\hat{\alpha}_l \hat{E}_l + \hat{\alpha}_v \hat{E}_v)_i &= (\alpha_l E_l + \alpha_v E_v)_i^n \\ (\hat{s}_l)_i &= (s_l)_i^n \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

This substep provides some estimation  $\hat{W}_j$  within each cell  $j$  that is used to initialize the second substep corresponding with (2.2.7). We also use the generic Rusanov formulation detailed above to compute approximations of solutions of the second step (2.2.7). Positive values of statistical void fractions  $\alpha_{l,v}$  and partial masses  $m_{l,v}$  are guaranteed by the scheme if the time step is constrained by (2.2.5). This fractional step method is also meaningful in order to compute approximate solutions of the general system introduced in[35] .

## 2.3 Numerical results

### 2.3.1 Definition of pure statistical fraction waves and equilibrium solutions

1. Some among the following test cases require to define initial conditions (IC) that generate *pure statistical fraction waves*. These IC are obtained as follows. We assume some given left state  $w_L$ , and select two values  $(\alpha_l)_R \in ]0, 1[$  and

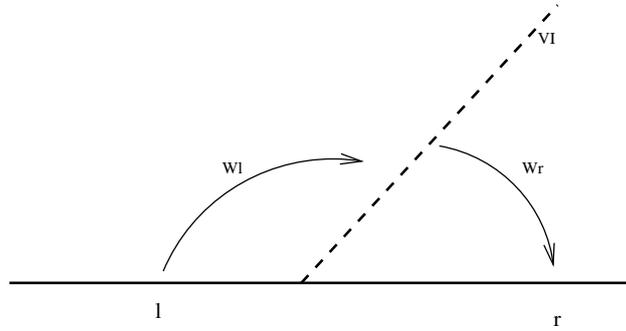


FIGURE 2.1 – Wave Structure of Riemann problem

$(\rho_v)_R > 0$ . Next we enforce the equilibrium of the Riemann invariants of the 1 – 2-wave (see property 1, equation (2.1.6)) :

$$I_{1,2}^k(w_L) = I_{1,2}^k(w_R) = R_k, \quad (2.3.1)$$

for  $k = 1$  to 5. Using these five relations, we get at once that :

$$(u_v)_R = (u_v)_L \quad (2.3.2)$$

Next we define the two main unknowns  $X = (\rho_l)_R$  and  $Y = (p_l)_R$ . Straightforward eliminations enable to establish that the pair  $(X, Y)$  should be solution of a system of two non-linear equations :

$$\begin{aligned} s_l(X, Y) &= R_2 \\ e_l(X, Y) + \frac{Y}{X} + \frac{R_3^2}{2(\alpha_l)_R^2 X^2} &= R_5 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Using (2.1.3), it appears that  $\partial_{p_\phi}(s_\phi) \partial_{p_\phi}(s_\phi) < 0$ ; hence we may get  $Y = \Phi(X)$  solution of the first equation in system (2.3.3). Moreover, we know that  $\Phi'(X) > 0$ , whatever the EOS of the liquid phase is. Plugging the value  $Y = \Phi(X)$  yields :

$$f(X) \stackrel{def}{=} e_l(X, \Phi(X)) + \frac{\Phi(X)}{X} + \frac{A^2}{X^2} - R_5 = 0 \quad (2.3.4)$$

where we note  $2A^2 = R_3^2/(\alpha_l)_R^2$ . For non-zero values of  $R_3$ , we define  $X_0$  solution of  $X^2\Phi'(X) = A^2$ . The function  $f(X)$  is decreasing in the interval  $]0, X_0[$  and then increasing for  $X \in [X_0, +\infty[$ . Thus system (2.3.4) admits two

solutions if :

$$f(X_0) < 0 \quad (2.3.5)$$

one solution if  $f(X_0) = 0$ , and no solution when  $f(X_0) > 0$ .

Once this pair  $(X, Y)$  has been computed, we deduce the remaining two unknowns :

$$(u_l)_R = (u_v)_L + \frac{R_3}{(\alpha_l)_R X} \quad (2.3.6)$$

and :

$$(p_v)_R = (R_4 - (\alpha_l)_R Y - \frac{(R_3)^2}{(\alpha_l)_R X}) / (1 - (\alpha_l)_R) \quad (2.3.7)$$

In practice, for a stiffened gas EOS in the liquid phase :

$$e_l(\rho_l, p_l) = \frac{p_l + \gamma_l(p_l)_\infty}{\rho_l(\gamma_l - 1)} \quad (2.3.8)$$

with  $\gamma_l > 1$ , we may check that  $X_0$  is unique and also :

$$X_0 = \left( \frac{2A^2}{\gamma_l R_2} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma_l + 1} \right)} \quad (2.3.9)$$

Hence in that case, the equation (2.3.4) admits two distinct solutions  $X_1, X_2$  if  $f(X_0) < 0$ .

2. We also define *equilibrium solutions* as follows. In that case, initial conditions are chosen such that a pressure/velocity/temperature equilibrium is reached, thus :

$$\begin{aligned} p &= (p_v)_L = (p_l)_L = (p_v)_R = (p_l)_R \\ u &= (u_v)_L = (u_l)_L = (u_v)_R = (u_l)_R \\ T &= (T_v)_L = (T_l)_L = (T_v)_R = (T_l)_R \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

The next subsection is devoted to the computation of a classical test case taken from the literature.

### 2.3.2 A classical test case

This first test case which is taken from [22] corresponds to a one-dimensional Riemann problem. The initial condition (Region L/Region R) and the intermediate states 1, 0, 2 are presented in table (2.1). A perfect gas EOS is used for the vapour phase, whereas a stiffened gas EOS is considered for the liquid phase.

Figure A.7 shows convergence curves for first and second-order schemes **SR1**, **SR1-ORDER2** on the left, and compares results obtained with scheme **SR1** and the fractional step method **PFRAC3** on the right. The  $L^1$  norm of the error has been plotted for all state variables using a logarithmic scale. The slope of the reference black line is  $\frac{1}{2}$ . Numerical results were obtained at time  $t = 0.07$  setting  $CFL = \frac{1}{2}$ . The number of cells in meshes grows from 100 to  $10^5$ . Results that were obtained on coarse meshes (200 & 500 or 500 & 5000 cells) and the exact solution are presented in Figures A.8, A.18.

Actually, we retrieve the expected rates of convergence  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  for the first/second order Rusanov schemes. Though the Baer-Nunziato model has no conservative form, we emphasize that it makes sense computing shock waves since the non-conservative products are only active in the linearly degenerate field associated with the 1, 2 wave. We note that the three schemes capture the shock wave successfully, and that no oscillations may be observed around shock waves and

EOS GP(vapour) + SG(liquid)  $\gamma_v = 1.4, \gamma_l = 3, (p_l)_\infty = 100$

	Region L	Region 1	Region 0	Region 2	Region R
$\alpha_v$	0.3	0.3	0.8	0.8	0.8
$\rho_v$	1.0	0.4684	0.5030	5.9991	1.0
$u_v$	-19.5975	6.7332	-1.7541	-1.7541	-19.5975
$p_v$	1000.0	345.8279	382.0858	382.0858	0.01
$\rho_l$	1.0	0.7687	1.6087	1.6087	1.0
$u_l$	-19.5975	-6.3085	-6.3085	-6.3085	-19.5975
$p_l$	1000.0	399.5878	466.7257	466.7257	0.01

TABLE 2.1 – Initial conditions and intermediate states for test case 1 proposed in [22]

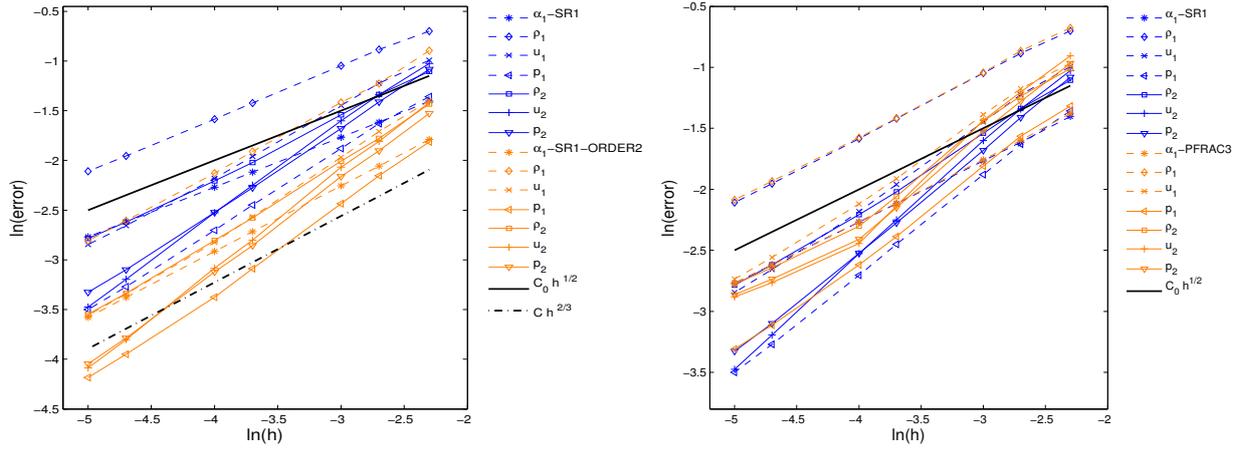


FIGURE 2.2 –  $L^1$  norm of the error for  $\alpha_v, \rho_\varphi, u_\varphi, p_\varphi, \varphi = l, v$ , for test case 1 taken from [22], using first and second-order schemes **SR1, SR1-ORDER2, PFRAC3**.  $CFL = 0.49, t = 0.007$ .

contact discontinuities. The accuracy of the first-order Rusanov scheme is slightly better than the one of the fractional step method on a given mesh, and of course a much better accuracy is gained with the second-order scheme .

### 2.3.3 Pure void fraction waves

In this subsection, we focus on the behaviour of schemes when computing the void fraction wave.

#### Test case 2

The second test case GPGP1\_A3 involves a large initial discontinuity of the statistical phase fraction  $\alpha_v$  from 0.05 to 0.95. Two Perfect Gas EOS are used for vapour and liquid phases. The initial condition and the EOS parameters are detailed in table (A.1). Since the exact solution contains a sole wave associated with  $U_v$ , a unique discontinuity traveling with the velocity  $U_v$  is expected in the numerical solution between the left and the right states.

Computations were run with the first/second order schemes setting  $CFL = 0.49$  and were stopped at time  $t = 0.25$ . Regular meshes containing from 200 up to  $10^5$  cells have been used. The expected rates of convergence  $\frac{1}{2}$  (respectively  $\frac{2}{3}$ ) were again obtained for the first-order scheme (respectively second-order scheme), see Figure A.1. Nonetheless, we observe that the accuracy of the second-order scheme is not much different from the one of the first-order scheme. Actually, numerical results in Figure A.2 show some -stable- oscillations around the void-fraction wave with the second-order scheme. This clearly means that the reconstruction is not fully compatible with the Riemann invariants of the 1 – 2 wave.

	Exact solution		
	$w_L$	$w_R$	
GPGP1_A3	$\alpha_v$	0.05	0.95
	$\rho_v$	0.1	0.1
	$u_v$	15	15
	$p_v$	$1 \times 10^4$	95044.7776983064
	$\rho_l$	1	0.956131036361501
	$u_l$	10	-84.3587660970787
	$p_l$	$1 \times 10^5$	95185.1409529552

TABLE 2.2 – Second test case GPGP1\_A3. Parameters of EOS for vapour and liquid phases :  $\gamma_v = 1.4$ ,  $\gamma_l = 1.1$

### Third and fourth test cases GPSG1\_A3 and GPSG1EQ\_A3

These two test cases GPSG1\_A3 involve a pure void fraction wave with a large initial jump of  $\alpha_v$  from 0.05 to 0.95. A stiffened gas EOS is used for the liquid, and a perfect gas EOS for the vapour phase. This test case GPSG1\_A3 is indeed much more difficult than GPGP1\_A3. When applying the first-order Rusanov scheme with  $CFL = 0.5$ , the calculation becomes rapidly unstable, and a restriction on the time step such that  $CFL \leq 0.15$  is compulsory in order to reach convergence. We note a huge difference of pressures between the two phases on the right side of the wave (see table A.3), and even more that the pressure of the liquid phase becomes negative. Results obtained with the fractional step method are displayed in Figure A.11. The fourth test case GPSG1EQ\_A3 is even simpler, as shown in table (A.3), but again approximations obtained on coarse meshes are very poor (see Figure A.12). The fractional step method performs much better on these two test cases, and we retrieve on Figures 2.7 and 2.8 correct rates of convergence for both test cases GPSG1\_A3 and GPSG1EQ\_A3 at  $CFL = 0.5$ .

	Exact solution			Exact solution			
	$w_L$	$w_R$		$w_L$	$w_R$		
GPSG1_A3	$\alpha_v$	0.05	0.95	GPSG1EQ_A3	$\alpha_v$	0.05	0.95
	$\rho_v$	10	12		$\rho_v$	5.4766	5.4766
	$u_v$	15	15		$u_v$	10	10
	$p_v$	$1 \times 10^6$	786639.618489141		$p_v$	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^6$
	$\rho_l$	1000	998.288925495528		$\rho_l$	1000	1000
	$u_l$	10	-80.1628306933727		$u_l$	10	10
	$p_l$	$1 \times 10^6$	-3511621.66716409		$p_l$	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^6$

TABLE 2.3 –

-GPSG1\_A3, PG (vapour) + SG (liquid) :  $\gamma_v = 1.4$ ,  $\gamma_l = 4.4$ ,  $(p_l)_\infty = 6 \times 10^8$

-GPSG1EQ\_A3, PG (vapour) + SG (liquid) :  $\gamma_v = 1.43$ ,  $\gamma_l = 2.35$ ,  $(p_l)_\infty = 1 \times 10^9$

## 2.4 Conclusion

We have detailed in this paper the numerical simulation of the homogenous system of the two-fluid model when considering water-hammer flows. The simple enough Rusanov scheme and a classical extension to second order have been tested for various EOS. Another stable fractional step method is also studied. The following conclusions are :

- We retrieve expected rates of convergence  $1/2$  and  $2/3$  for first-order and second-order finite volume schemes respectively, whatever the EOS are ;
- Though schemes do not preserve pure statistical fraction waves on coarse meshes, they converge towards the exact solution when the mesh is refined ;
- The fractional step method is actually more stable compared with the classical Rusanov scheme, though less accurate than the latter.

Eventually we emphasize that more accurate schemes are necessary in order to achieve cheap enough and reliable flow simulations. Among recent proposals dedicated to the Baer-Nunziato model, we would like to point out the relaxation scheme introduced in [20, 8]. In addition, for considering water-hammer flows in pipes, liquid-vapour phase transition has to be taken into account. In order to model such phenomena, source terms linked with mechanical relaxation, heat and mass transfer have to be considered in the governing equations. The numerical approximation of this complete two-fluid model can be obtained with the fractional step method that complies with the overall entropy inequality. Such recent algorithms have been introduced in [17] and [18] in order to tackle source terms.

## 2.5 acknowledgements

The last author has received financial support from EDF and ANRT through a EDF/CIFRE contract 732/2010. Computational facilities have been provided by EDF.

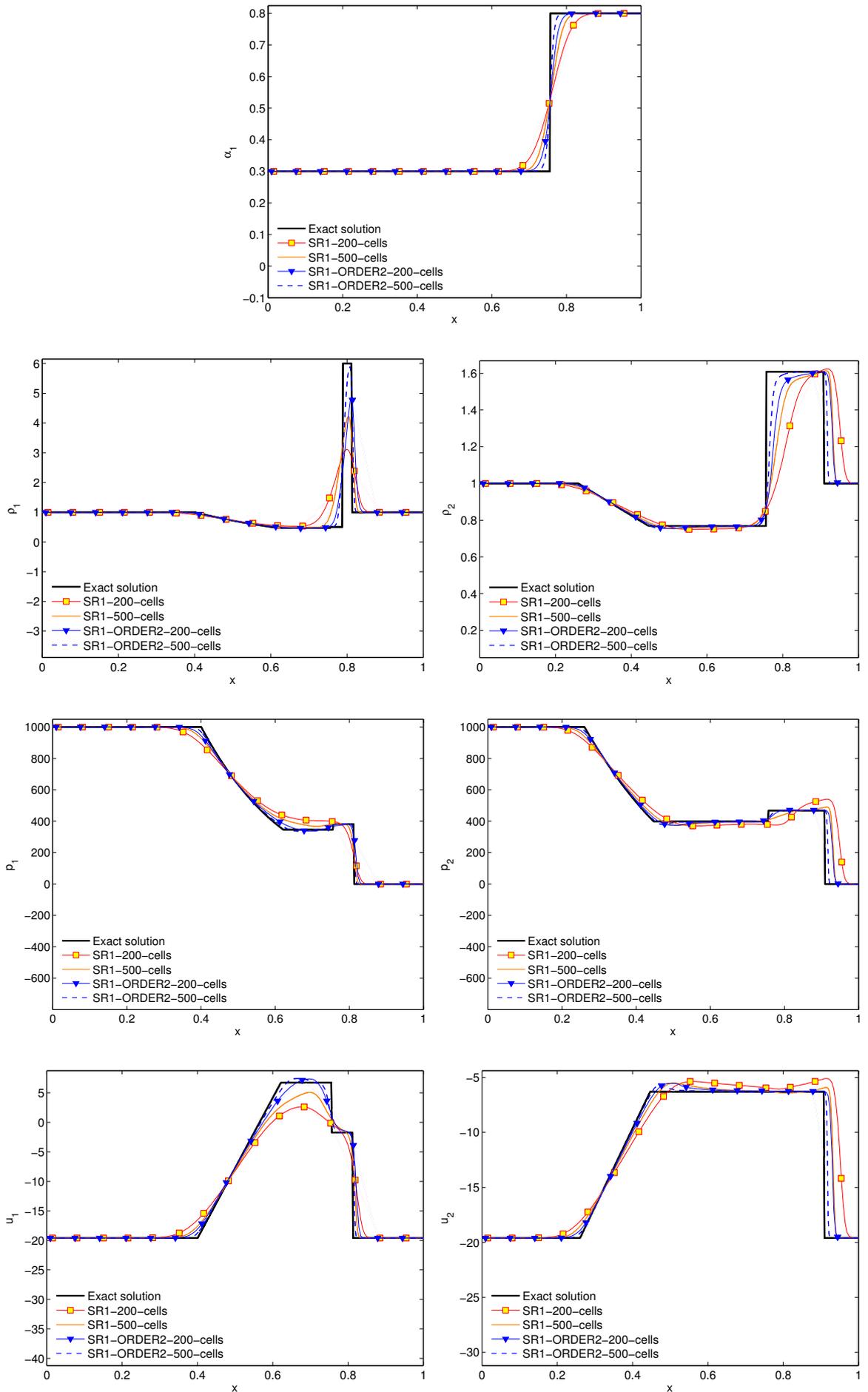


FIGURE 2.3 – Exact solution and numerical approximations of variables  $\alpha_\nu$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  for test case 1, using schemes **SR1** and **SR1-ORDER2**, with 200 and 500 cells.  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.007$ .

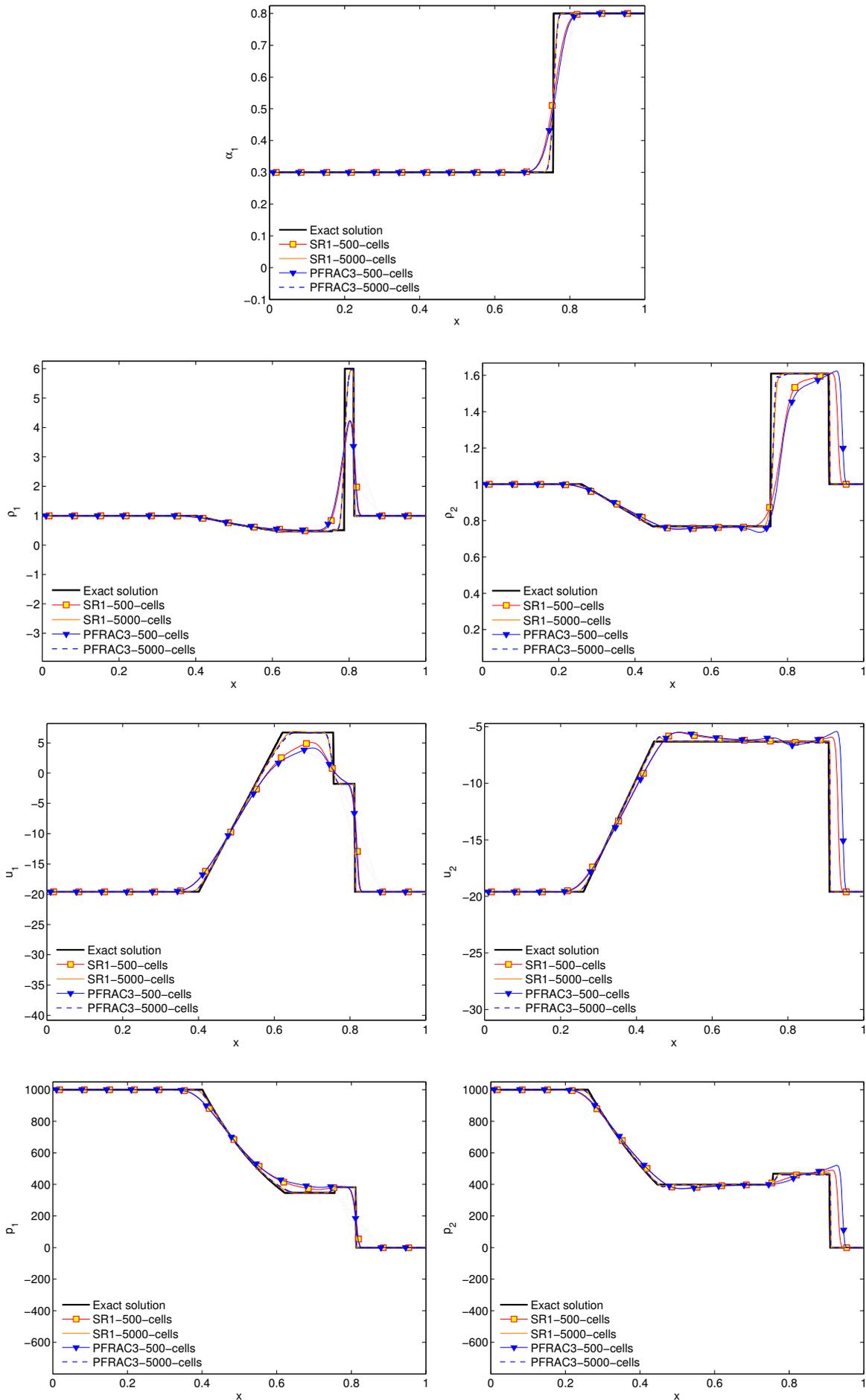


FIGURE 2.4 – Exact solution and numerical approximations of variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  for test case 1, using schemes **SR1** and **PFRAC3** with 500 and 5000 cells.  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.007$ .

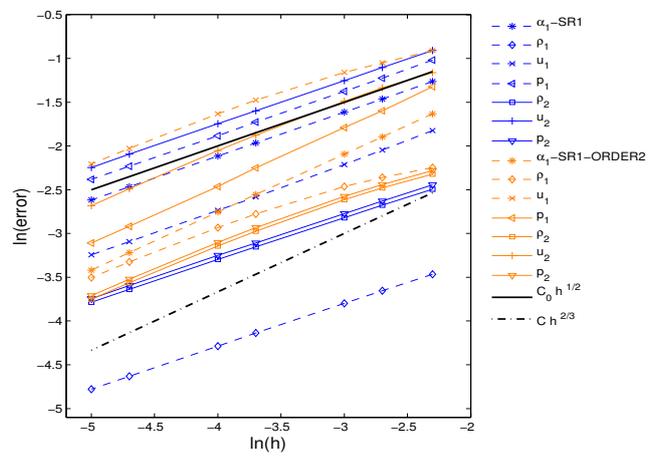


FIGURE 2.5 –  $L^1$  norm of the error for schemes **SR1** and **SR1-ORDER2** for the second test case GPGP1\_A3.  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

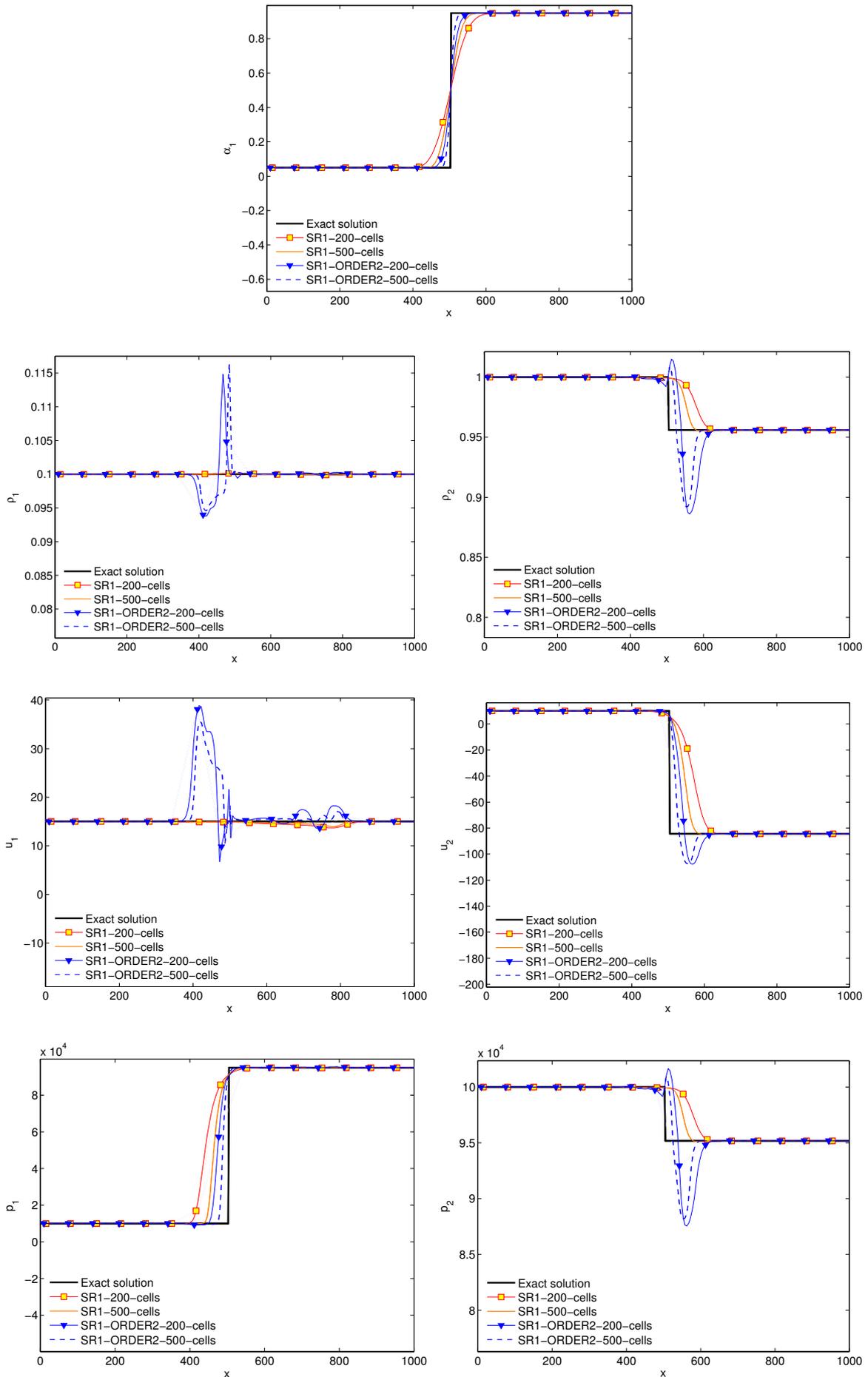


FIGURE 2.6 – Exact solution and numerical approximations for the second test case GPGP1\_A3, using schemes **SR1**, **SR1-ORDER2** and meshes containing 200 & 500 elements.  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

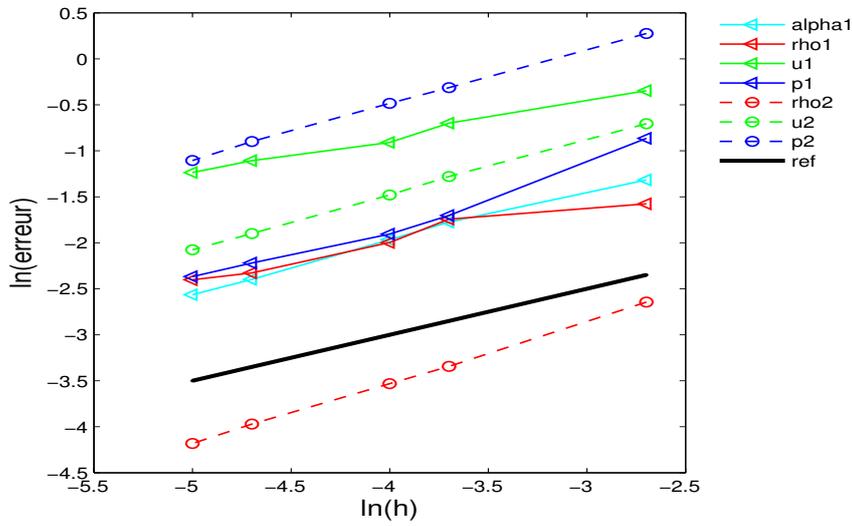


FIGURE 2.7 –  $L^1$  norm of the error for scheme **PFRAC3** when computing test case **GPSG1\_A3**, with  $CFL = 0.49, t = 0.25$

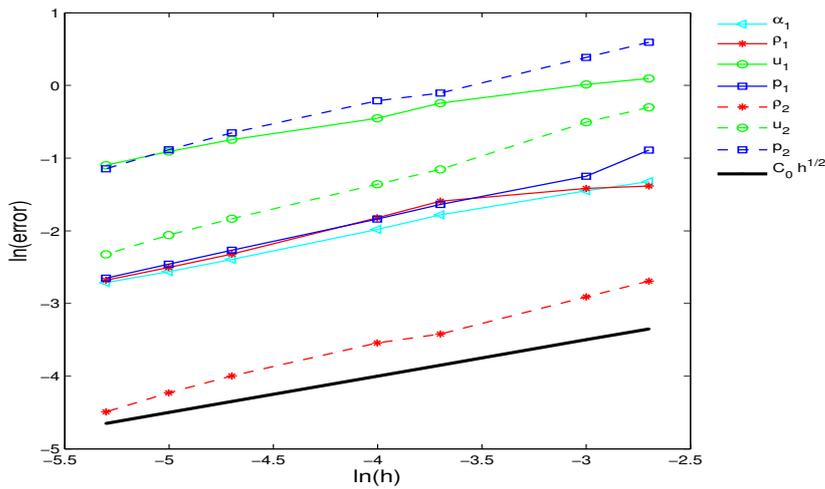


FIGURE 2.8 –  $L^1$  norm of the error for scheme **PFRAC3** when computing test case **GPSG1EQ\_A3**, with  $CFL = 0.49, t = 0.25$

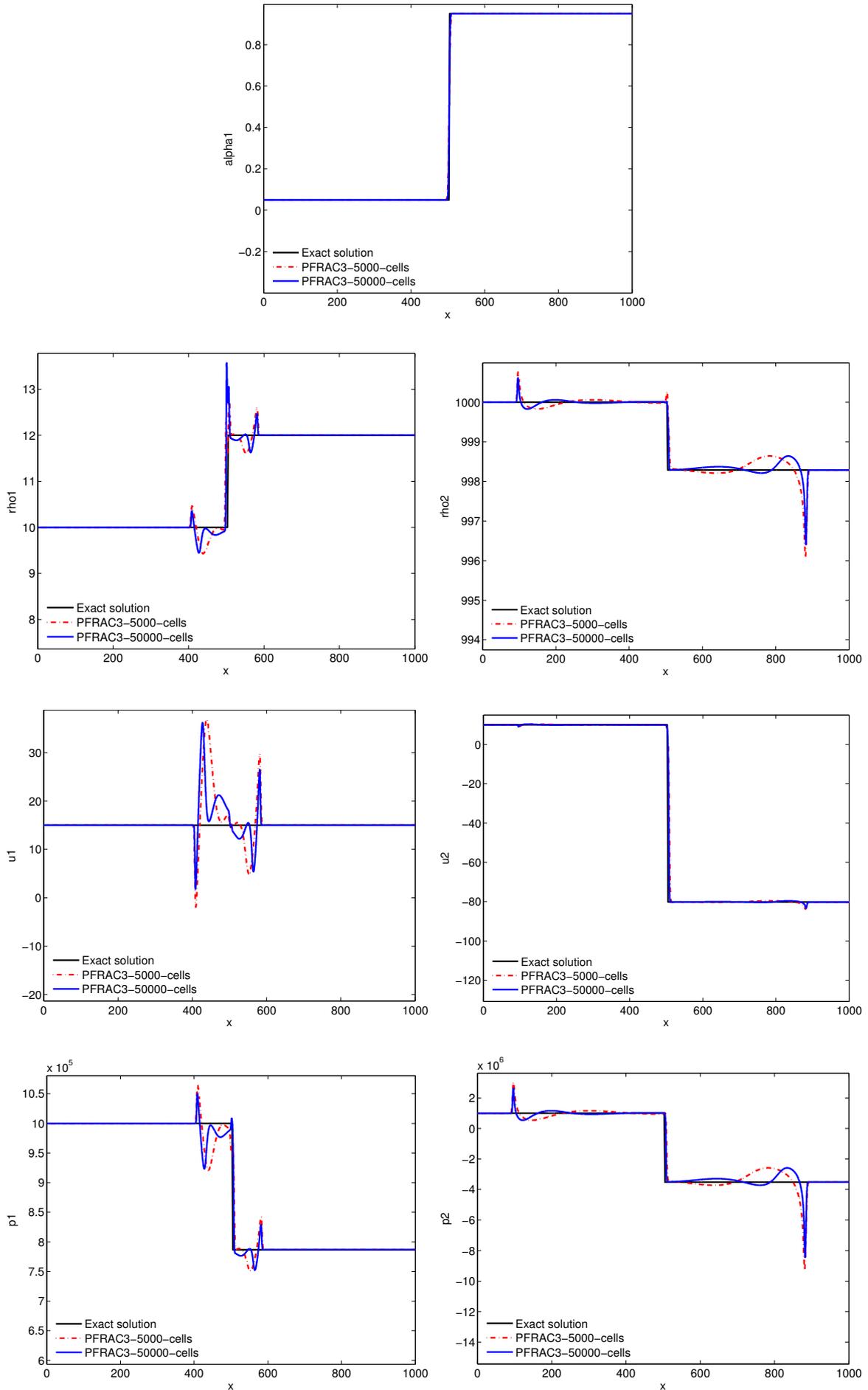


FIGURE 2.9 – Exact solution and numerical approximations for test case GPSG1\_A3 with scheme PFRAC3, with meshes containing 5000 & 50000 cells,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

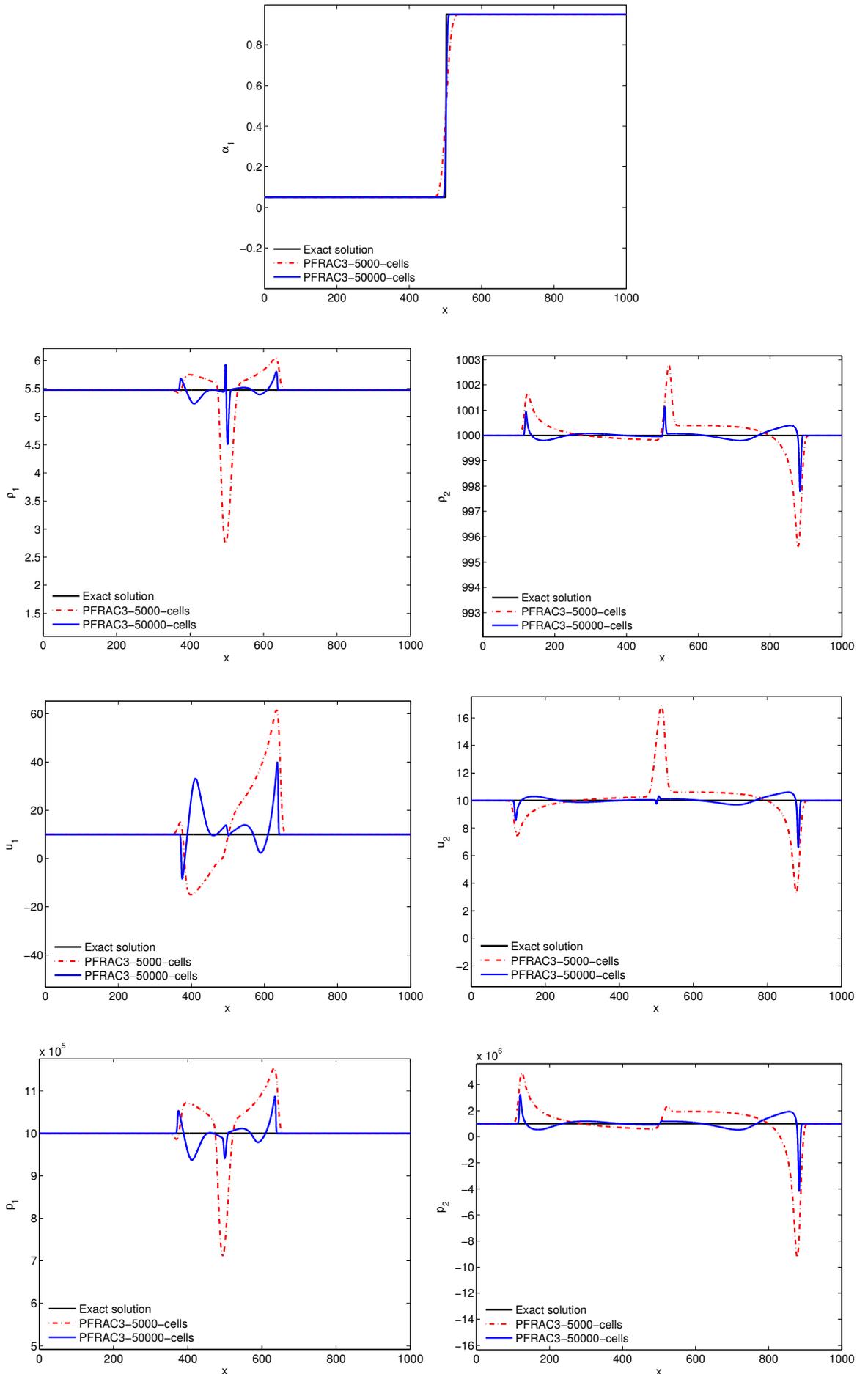


FIGURE 2.10 – Exact solution and numerical approximations for test case GPSG1EQ\_A3 with scheme **PFRAC3**, with meshes containing 5000 & 50000 cells,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

---

## Bibliographie

---

- [1] ABGRALL R., KARNI S., "Computation of compressible multifluids" *J. Comp. Physics.*, vol. 169, pp. 594-623, 2001.
- [2] AMBROSO A., CHALONS C., COQUEL F., GALIÉ T., "Relaxation and numerical approximation of a two-fluid two-pressure diphasic model " *Math. Model. and Numer. Anal.*, vol. 43(6), pp. 1063–1098, 2009.
- [3] AMBROSO A., CHALONS C., RAVIART P.A., "A Godunov-type method for the seven-equation model of compressible two-phase flow " *Computers and Fluids*, vol. 54, pp67-91, 2012.
- [4] BAER M.R., NUNZIATO J.W., "A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 12(6), pp. 861–889, 1986.
- [5] BARAILLE R., BOURDIN G., DUBOIS F., LE ROUX A.Y., "Une version à pas fractionnaires du schéma de Godunov pour l'hydrodynamique", *Comptes Rendus Académie des Sciences* , vol. I-314 , pp. 147-152, 1992.
- [6] BDZIL J.B., MENIKOFF R., SON S.F., KAPILA A.K., STEWART D.S., "Two-phase modeling of a DDT in granular materials : a critical examination of modeling issues", *Phys. of Fluids*, vol. 11, pp. 378-402, 1999.
- [7] COQUEL F., HÉRARD J.M., SALEH K., "A splitting method for the isentropic Baer-Nunziato two-phase flow model " *ESAIM proceedings*, vol. 38, pp. 241-256, 2013.
- [8] COQUEL F., HÉRARD J.M., SALEH K., SEGUIN N., " A robust entropy-satisfying Finite volume scheme for the isentropic Baer-Nunziato model ", *Math. Model. and Numer. Anal.*, to appear, 2013.
- [9] COQUEL F., HÉRARD J.M., SALEH K., SEGUIN N., " Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows", *Communications in Mathematical Sciences*, to appear, 2013.
- [10] GALLOUËT T., HELLUY P., HÉRARD J.-M., NUSSBAUM J., "Hyperbolic relaxation models for granular flows", *Math. Model. and Numer. Anal.*, vol.44(2), pp.371-400, 2010.
- [11] GALLOUËT T., HÉRARD J.-M., SEGUIN N., "A hybrid scheme to compute contact discontinuities in one-dimensional Euler systems", *Math. Model. and Numer. Anal.*, vol.36(6), pp.1133-1159, 2002.
- [12] GALLOUËT T., HÉRARD J.-M., SEGUIN N., "Numerical modelling of two phase flows using the two-fluid two-pressure approach", *Math. Mod. Meth. in Appl. Sci.*, vol. 14(5), pp. 663-700, 2004.
- [13] GAVRILYUK S., SAUREL R., "Mathematical and numerical modelling of two phase compressible flows with inertia", *J. Comp. Physics.*, vol. 175, pp. 326-360, 2002.
- [14] GIRAULT L., HÉRARD J.-M., "A two-fluid hyperbolic model in a porous medium", *Math. Model. and Numer. Anal.*, vol. 44(6), pp. 1319-1348, 2010.
- [15] HÉRARD J.-M., "A three-phase flow model", *Mathematical Computer Modelling*, vol. 45, pp. 432-455, 2007.

- 
- [16] HÉRARD J.-M., "Une classe de modèles diphasiques bi-fluides avec changement de régime", *internal EDF report*, H-I81-2010-0486-FR, in French, 2010.
- [17] HÉRARD J.-M., HURISSE O., " A fractional step method to compute a class of compressible gas-liquid flows", *Computers and Fluids*, vol.55, pp. 57-69, 2012.
- [18] HÉRARD J.-M., HURISSE O., " Computing two-fluid models of compressible water-vapour flows with mass transfer", *AIAA paper 2012-2959*, 2012.
- [19] KARNI S., HERNANDEZ-DUENAS G., "A hybrid algorithm for the Baer Nunziato model using the Riemann invariants", *SIAM J. of Sci. Comput.*, vol.45, pp.382-403, 2010.
- [20] SALEH K., Analyse et simulation numérique par relaxation d'écoulements diphasiques compressibles. Contribution au traitement des phases évanescences. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, november 26, 2012.
- [21] SCHWENDEMAN D.W., WAHLE C.W., KAPILA A.K., "The Riemann problem and a high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow ", *J. Comp. Physics.*, vol. 212, pp. 490-526, 2006.
- [22] TOKAREVA S.A., TORO E.F., "HLLC type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow", *J. Comp. Physics.*, vol. 229, pp. 3573-3604, 2010.

---

## Schémas de simulation des termes de relaxation

---

Ce chapitre correspond à la note EDF H-183-2013-02014-FR <sup>1</sup>.

### 3.1 Introduction

On s'intéresse ici aux schémas numériques de prise en compte des termes sources d'échange interfacial du système bifluide à relaxation en pression suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_t \alpha_v & + V_I \partial_x (\alpha_v) & = S_{1,v} \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) & + \partial_x (\alpha_v \rho_v u_v) & = S_{2,v} \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v) & + \partial_x (\alpha_v \rho_v u_v^2 + \alpha_v P_v) & - P_I \partial_x (\alpha_v) = S_{3,v} \\ \partial_t (\alpha_v E_v) & + \partial_x (\alpha_v u_v (E_v + P_v)) & + P_I \partial_t \alpha_v = S_{4,v} \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l) & + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) & = -S_{2,v} \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) & + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l) & - P_I \partial_x (\alpha_l) = -S_{3,v} \\ \partial_t (\alpha_l E_l) & + \partial_x (\alpha_l u_l (E_l + P_l)) & + P_I \partial_t \alpha_l = -S_{4,v} \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

où  $\alpha_\phi$  désignent les taux de présence statistiques,  $\rho_\phi$  les masses volumiques phasiques,  $u_\phi$  les vitesses phasiques,  $P_\phi$  les pressions phasiques et  $E_\phi$  les énergies totales phasiques. Les taux de présence satisfont la relation de consistance :

$$\alpha_v + \alpha_l = 1$$

Les termes  $P_I$  et  $V_I$  doivent être fermés [27], tout comme doivent être précisées les lois thermodynamiques reliant l'énergie interne spécifique phasique  $\epsilon_\phi = E_\phi / \rho_\phi - u_\phi^2 / 2$ , la pression phasique et la masse volumique phasique. Dans ce qui suit, la partie convective de 3.1.1 (i.e. dérivées en espace) ne sera pas traitée. Pour de plus amples détails sur le modèle complet 3.1.1, le lecteur pourra se référer entre autres à [36, 40, 27].

Le schéma de discrétisation du système global 3.1.1 repose sur une méthode à pas fractionnaires [79] : tout d'abord, le sous-système associé à la convection est résolu ; puis chaque effet source est intégré séquentiellement. Ce chapitre présente donc les schémas d'intégration retenus pour prendre en compte chacun des effets sources composant les termes sources du système d'EDP (3.1.1). Le sous-système associé aux termes sources étant un système d'ODE, le traitement est

---

1. "Note de vérification des schémas d'intégration numérique des termes sources d'un modèle diphasique à relaxation en pression", Olivier Hurisse, Yujie Liu, Jean-Marc Hérard.

donc naturellement réalisé maille par maille ; autrement dit la mise à jour des variables dans une maille ne dépend pas de la valeur des variables dans les mailles voisines. Les notations dans ce chapitre seront simplifiées et on omettra donc les indices de maille.

Le système d'ODE associé aux termes sources est :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_v & = S_{1,v} \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) & = S_{2,v} \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v) & = S_{3,v} \\ \partial_t (\alpha_v E_v) + P_l \partial_t \alpha_v & = S_{4,v} \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v + \alpha_l \rho_l) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v + \alpha_l \rho_l u_l) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v E_v + \alpha_l E_l) & = 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Cette écriture du système fait apparaître explicitement les 3 équations (les 3 dernières équations de (3.1.2)) de conservation de la masse du mélange, de la quantité de mouvement du mélange et de l'énergie totale du mélange. Les schémas décrits dans la suite sont basés sur ces 3 équations de conservation afin de conserver ces propriétés au niveau discret. On notera  $W$  le vecteur des variables conservatives :  $W = (\alpha_v, \alpha_v \rho_v, \alpha_v \rho_v u_v, \alpha_v E_v, \alpha_l \rho_l, \alpha_l \rho_l u_l, \alpha_l E_l)$  et  $m_\varphi = \alpha_\varphi \rho_\varphi$  désignera la masse partielle. L'énergie totale  $E_\varphi$  se décompose en une contribution d'énergie interne et une contribution d'énergie cinétique :  $E_\varphi = \rho_\varphi \varepsilon_\varphi + \rho_\varphi u_\varphi^2 / 2$ .

Les termes sources d'échange interfacial  $S_{k,v}$  ( $k = 1..4$ ) sont construits conformément à l'inégalité d'entropie [42] et font intervenir quatre effets sources liés aux retours à l'équilibre en vitesse  $\mathcal{D}$ , en pression  $\Phi$ , en température  $C$  et en potentiel de Gibbs  $\Gamma$ . Ils se décomposent comme suit :

$$\begin{aligned} S_{1,v} &= \Phi \\ S_{2,v} &= \Gamma \\ S_{3,v} &= \mathcal{D} + U_l \Gamma \\ S_{4,v} &= C + U_l \mathcal{D} + H_l \Gamma \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

où les effets de relaxation s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi &= (\tau_P)^{-1} \frac{\alpha_l \alpha_v}{|p_l| + |p_v|} (p_v - p_l) \\ \Gamma &= (\tau_G)^{-1} \frac{\alpha_l \rho_l \alpha_v \rho_v}{\alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v} \frac{\mu_l - \mu_v}{|\mu_l| + |\mu_v|} \\ \mathcal{D} &= (\tau_u)^{-1} \frac{\alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v}{\alpha_l \rho_l \alpha_v \rho_v} (u_l - u_v) \\ C &= (\tau_T)^{-1} \frac{m_l C_{V,l} m_v C_{V,v}}{m_l C_{V,l} + m_v C_{V,v}} (T_l - T_v) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

avec  $U_l = \frac{u_l + u_v}{2}$  et  $H_l = \frac{u_l u_v}{2}$ , et où le potentiel  $\mu_\varphi = \frac{g_\varphi}{T_\varphi}$  dépend de l'enthalpie de Gibbs spécifique  $g_\varphi = \varepsilon_\varphi + \frac{p_\varphi}{\rho_\varphi} - T_\varphi s_\varphi$ . Les capacités calorifiques à volume constant sont notées  $C_{V,\varphi}$ . Les paramètres  $\tau_{u/P/T/G}$  sont les temps caractéristiques de retour à l'équilibre et doivent être strictement positifs.

On se propose donc de discrétiser le système d'ODE (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4) en traitant à tour de rôle les quatre effets de relaxation dans l'ordre suivant : la trainée statique  $\mathcal{D}$  (avec  $\Phi \equiv 0$ ,  $\Gamma \equiv 0$  et  $C \equiv 0$ ), la relaxation en pression  $\Phi$  (avec  $\mathcal{D} \equiv 0$ ,  $\Gamma \equiv 0$  et  $C \equiv 0$ ), l'échange de chaleur pure  $C$  (avec  $\mathcal{D} \equiv 0$ ,  $\Gamma \equiv 0$  et  $\Phi \equiv 0$ ), puis le transfert de masse  $\Gamma$  (avec  $\mathcal{D} \equiv 0$ ,  $C \equiv 0$  et  $\Phi \equiv 0$ ). Ce qui peut se schématiser comme suit :

$$W_i^n \xrightarrow{\text{convection}} W_i^{n,0} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_i^{n,*} \xrightarrow{\Phi} W_i^{n,**} \xrightarrow{C} W_i^{n,***} \xrightarrow{\Gamma} W_i^{n,****} \quad (3.1.5)$$

Pour chaque étape la condition initiale est donc l'état final de l'étape précédente. Pour toutes les étapes d'intégration le pas de temps  $\Delta t$  est celui calculé au préalable à l'étape de convection. Ce pas de temps est subordonné à la taille du maillage (*via* la condition CFL) et peut donc, suivant les cas tests et les maillages utilisés<sup>2</sup>, être grand ou petit par rapport aux temps caractéristiques  $\tau_{u/P/T/G}$  qui représentent les échelles de temps physique des phénomènes simulés. En conséquence, les schémas choisis doivent être valides pour tout pas de temps, ce qui tend à privilégier les schémas implicites.

Lorsqu'un des temps caractéristiques est nul  $\tau_X = 0$  ( $X = \{u, P, T, G\}$ ), la relaxation correspondante est dite instantanée. Plusieurs auteurs ont proposé des schémas de relaxation instantanée [37, 67, 69, 54] pour la vitesse, la pression ou la température. Tous sont basés sur un principe similaire : un schéma d'Euler implicite portant sur les équilibres considérés. Les schémas qui sont décrits ci-dessous dégènèrent naturellement vers ce type de schéma lorsque le pas de temps  $\Delta t$  devient grand par rapport à un des temps caractéristiques. Ils permettent donc de traiter plus largement, si cela a un sens, les relaxations instantanées  $\tau_X = 0$  (en pratique  $\Delta t \gg \tau_X$ ) et les relaxations "non-instantanées".

La relaxation en vitesse apparaît dans de nombreux modèles. Son intégration ne présente pas de difficulté particulière et porte un enjeu assez faible. On trouve plusieurs schémas dans la littérature [36, 5]. Le schéma décrit ci-dessous permet de prendre en compte la trainée statique de manière totalement indépendante des lois thermodynamiques. Ceci semble naturel étant donné qu'il s'agit de simuler un effet purement dynamique.

*A contrario*, le terme source de relaxation en pression n'est pas classique. En effet, dans le domaine de la modélisation diphasique l'hypothèse de modélisation la plus largement répandue est que les pressions des deux phases sont en équilibre instantané à tout moment et en tout point de l'écoulement. Les modèles d'EDP associés sont donc directement écrits en ne considérant qu'une seule pression. Le modèle bifluide dont il est question ici ne fait pas cette hypothèse et prend en compte le déséquilibre en pression, pour lequel il convient donc de proposer un schéma d'intégration. Il existe quelques schémas d'intégration pour ce terme source  $\Phi$  dans la littérature. Tous sont basés sur le même principe, mais ils ont été spécialisés à certaines configurations ou certaines lois thermodynamiques. Dans [37], seule la relaxation instantanée en pression est considérée, tandis que dans [67, 69, 60, 54] elle est également associée à la relaxation instantanée des vitesses<sup>3</sup>. Les références [27, 38, 25] proposent des schémas d'intégration dans les situations de relaxation non-instantanée, et les schémas [38, 25] dégènèrent naturellement vers des schémas d'intégration de la relaxation instantanée lorsque  $\Delta t$  est grand devant  $\tau_P$ . On notera que le schéma proposé dans [27] ne conserve pas l'énergie totale du système, contrairement aux autres schémas référencés. De plus, dans [25], l'application visée est de type gaz-particules (assimilable à un écoulement gaz-gouttes) pour laquelle le choix de  $U_I (= U_s)$  et de  $P_I (= P_g)$  est différent de celui fait ici (écoulements de type fluide-bulles). Dans [38] le principe du schéma d'intégration est identique (référence dans laquelle le modèle retenu est le même que celui retenu ici), mais les résultats théoriques diffèrent légèrement de ceux de [25] à cause d'un choix différent des lois thermodynamiques. Le schéma proposé dans ce chapitre repose sur les mêmes ingrédients.

Le retour à l'équilibre en température  $C$  tient une place un peu particulière. D'un point de vue industriel, cet effet est généralement négligé. En particulier dans le cas des écoulements eau-vapeur avec changement de phase, le transfert de chaleur pur  $C$  est souvent jugé négligeable par rapport au transfert de chaleur lié au changement de phase  $H_I \Gamma$ . Peu de schémas existent et le schéma proposé ci-dessous repose sur un schéma de type Euler implicite, avec explicitation des capacités calorifiques dans le terme source.

Avec l'effet de relaxation en pression, le terme de transfert de masse est le plus important. Il intervient en effet dans toutes les équations exceptée celle sur le taux de présence statistique. Un premier schéma explicite a été proposé dans [40]. Etant donnée l'importance de ce terme pour les simulations eau-vapeur, il a été choisi ici de construire un schéma implicite plus stable pour l'intégration avec des grand pas de temps  $\Delta t \gg \tau_G$ . La forme du transfert de masse  $\Gamma$  retenue est

2. On rappelle que pour le traitement numérique des termes sources la taille du maillage est totalement transparente.

3. La comparaison de ces deux travaux permet de retrouver le fait que la perte d'hyperbolicité du modèle standard à une pression est directement corrélée à l'amplitude de la vitesse relative.

conforme à l'inégalité d'entropie du système et elle est classique dans le domaine de la thermodynamique du changement de phase. Pourtant les codes industriels décrivent souvent le déséquilibre thermodynamique par un écart à la saturation qui est une approximation à l'ordre 0 de l'écart en potentiel chimique, température et pression, et qui dans notre cas n'est pas conforme avec l'inégalité d'entropie.

Les premières versions des schémas référencés ci-dessus ont souvent été écrits pour des lois d'état de type Gaz Parfait ou Stiffened Gas. L'objectif de ce chapitre est d'adapter ces schémas aux lois d'état de type Stiffened Gas généralisé et de proposer de nouveaux schémas si nécessaire (pour le transfert de masse). L'organisation du chapitre reprend l'ordre du traitement de termes sources (3.1.5). Toutefois, on commencera par un petit rappel sur les lois thermodynamiques de type Stiffened Gas généralisé.

**Remarque.** Dans la suite, si elles ne sont pas précisées, les unités seront celles du standard international.

### 3.2 Les lois d'état analytiques de type Stiffened Gas généralisés

L'utilisation de lois d'état analytiques a deux avantages. Elles permettent souvent d'obtenir des propriétés théoriques pour les schémas, en particulier lorsque l'on considère des lois "linéaires" comme les lois de Gaz Parfait (abréviation GP), les lois de Stiffened Gas (abréviation SG) ou encore les lois Stiffened Gas généralisés (abréviation SGG). D'autre part, dans un code de calcul elle permettent d'obtenir une plus grande efficacité en terme de temps CPU et de précision de calcul des propriétés thermodynamiques. En ce qui concerne les lois linéaires, l'inconvénient majeur est de n'être valable qu'au voisinage d'un point de fonctionnement, ce qui peut parfois s'avérer trop réduit. On se propose dans cette section de rappeler brièvement les fonctions thermodynamiques pour une loi d'état Stiffened Gas généralisé [56].

Si les lois SG sont satisfaisantes pour la simulation fluide-gaz en l'absence de transfert de masse, elles montrent leur limite sur les simulations eau-vapeur. Les lois de SGG sont donc une extension de ces lois qui permettent de retrouver un bon comportement au voisinage de la saturation. Les fonctions thermodynamiques classiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \frac{p_\varphi + \gamma_\varphi (p_\varphi)_\infty}{\rho_\varphi (\gamma_\varphi - 1)} + Q_\varphi, \\ T_\varphi = \frac{p_\varphi + (p_\varphi)_\infty}{C_{V,\varphi} \rho_\varphi (\gamma_\varphi - 1)}, \\ s_\varphi = C_{V,\varphi} \ln \left( \frac{p_\varphi + (p_\varphi)_\infty}{(C_{V,\varphi} (\gamma_\varphi - 1) \rho_\varphi)^\gamma} \right) + Q'_\varphi \\ g_\varphi = h_\varphi - s_\varphi T_\varphi, \\ h_\varphi = \varepsilon_\varphi + p_\varphi / \rho_\varphi, \quad \varphi = l, v \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Les constantes  $\gamma_\varphi$ ,  $C_{V,\varphi}$ ,  $(p_\varphi)_\infty$ ,  $Q_\varphi$ ,  $Q'_\varphi$  doivent être prescrites par l'utilisateur. En pratique, dans les cas de validation comme ceux proposés dans [15], ces constantes sont déterminées en se donnant à une température ( $T_{ref}$ ) les grandeurs suivantes : la pression de saturation, la masse volumique, l'enthalpie, la célérité du son pour d'un état de référence de l'eau [9]. Les constantes  $\gamma_\varphi$ ,  $C_{V,\varphi}$ ,  $(p_\varphi)_\infty$  doivent être positives tandis que  $Q_\varphi$ ,  $Q'_\varphi$  ne sont pas signées. En particulier, dans le chapitre 4 de validation,  $Q_l$  est négatif et  $Q_v$  positif.

On remarque que si  $Q_\varphi = 0$ , on retrouve exactement les lois d'état des SG. Si de plus on choisit  $(p_\varphi)_\infty = 0$ , on retrouve les lois d'état de GP. La constante  $Q'_\varphi$  a quant à elle un rôle un peu particulier puisqu'elle intervient uniquement dans la définition de l'entropie en tant que constante additive. Les lois pour la pression et la température étant obtenues par des dérivées de l'entropie dans le plan thermodynamique,  $Q'_\varphi$  n'y joue donc aucun rôle. En pratique, cette constante est utilisée pour étalonner le transfert de masse.

Ces lois SGG sont définies si et seulement si  $p_\varphi + (p_\varphi)_\infty > 0$ . La célérité du son  $c_\varphi^2$  est alors définie dans  $\mathbb{R}^+$  par :

$$c_\varphi^2 = \frac{\gamma_\varphi(p_\varphi + (p_\varphi)_\infty)}{\rho_\varphi}$$

La température est alors positive :  $T_\varphi > 0$ , et l'entropie  $s_\varphi$  est bien définie. En revanche, l'énergie interne est quant à elle telle que :

$$\rho_\varphi \varepsilon_\varphi > (p_\varphi)_\infty + \rho_\varphi Q_\varphi$$

et peut donc être négative suivant les choix de  $Q_\varphi < 0$  et  $(p_\varphi)_\infty$  (ce qui est physiquement discutable pour une énergie). Toutefois ce cas arrive lorsque l'état thermodynamique considéré est "loin" du point de fonctionnement de référence ayant servi à déterminer les différentes constantes thermodynamiques. Naturellement, pour les SG tels que  $(p_\varphi)_\infty \geq 0$  le coefficient  $Q_\varphi$  est nul et l'énergie interne est donc positive, et en outre  $p_\varphi + (p_\varphi)_\infty > 0$ , ce qui constitue justement le domaine de définition de  $P_\varphi$  dans ce cas.

### 3.3 Un schéma implicite de discrétisation de la relaxation en vitesse $\mathcal{D}$

Le schéma de discrétisation de la relaxation en vitesse reprend le travail décrit dans [36]. Il est basé sur l'ODE :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_v & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v) & = \mathcal{D} \\ \partial_t (\alpha_v E_v) + P_l \partial_t \alpha_v & = \mathcal{D} \frac{u_v + u_l}{2} \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v + \alpha_l \rho_l) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v + \alpha_l \rho_l u_l) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v E_v + \alpha_l E_l) & = 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

avec comme condition initiale  $W(t=0) = W^{n,0}$ . Ce système peut être écrit de façon équivalente :

$$\begin{cases} \alpha_v = \alpha_v^{n,0}, m_v = m_v^{n,0}, m_l = m_l^{n,0} \\ m_v u_v + m_l u_l = (m_v u_v + m_l u_l)^{n,0} \\ \alpha_v E_v + \alpha_l E_l = (\alpha_v E_v + \alpha_l E_l)^{n,0} \\ \partial_t (m_v u_v) = \mathcal{D} \\ \partial_t (\alpha_v E_v) = \mathcal{D} \frac{u_v + u_l}{2} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Il est alors possible d'écrire l'équation vérifiée par la vitesse relative  $u_r = u_v - u_l$  :

$$\partial_t (u_r) = -\frac{1}{\tau_u} u_r$$

Dans le cas où le temps de relaxation  $\tau_u$  est constant cette équation est triviale à intégrer. On choisit donc d'expliciter  $\tau_u$  dans 3.3.2,  $\tau_u \leftarrow \tau_u^{n,0}$ , ce qui permet de donner une expression explicite pour la vitesse relative :

$$u_r(t) = u_r(t=0) e^{-t/\tau_u^{n,0}}$$

Les expressions analytiques des vitesses phasiques sont alors reconstruites en utilisant l'équation de conservation du moment (et les équations de masse). Une fois les vitesses phasiques déterminées, il reste à intégrer l'équation d'énergie vapeur (resp. liquide). Le fait d'avoir explicité  $\tau_u$  permet également d'intégrer exactement  $\varepsilon_v$  (resp.  $\varepsilon_l$ ). L'expression analytique de  $\varepsilon_l$  (resp.  $\varepsilon_v$ ) est ensuite obtenue en utilisant la conservation de l'énergie totale.

Au final, le schéma correspond à l'intégration décrite ci-dessus, en prenant pour  $W^{n,*}$  la valeur au temps  $t = \Delta t$  de la

solution exacte de 3.3.2 avec  $\tau_u$  explicité :  $W^{n,*} = W(t = \Delta t)$ . Autrement dit, le schéma s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_v^{n,*} = \alpha_v^{n,0} \\ m_\phi^{n,*} = m_\phi^{n,0}, \phi = l, v \\ u_l^{n,*} = u_l^{n,0} + (u_v^{n,0} - u_l^{n,0}) \frac{m_v^{n,0} (1 - e^{-\Delta t/\tau_u^{n,0}})}{m_v^{n,0} + m_l^{n,0}} \\ u_v^{n,*} = u_v^{n,0} - (u_v^{n,0} - u_l^{n,0}) \frac{m_l^{n,0} (1 - e^{-\Delta t/\tau_u^{n,0}})}{m_v^{n,0} + m_l^{n,0}} \\ (m_l \varepsilon_l)^{n,*} = (m_l \varepsilon_l)^{n,0} + \frac{m_l^{n,0} m_v^{n,0}}{m_v^{n,0} + m_l^{n,0}} \frac{(u_v^{n,0} - u_l^{n,0})^2}{4} (1 - e^{-2\Delta t/\tau_u^{n,0}}) \\ (m_v \varepsilon_v)^{n,*} = (m_v \varepsilon_v)^{n,0} + \frac{m_l^{n,0} m_v^{n,0}}{m_v^{n,0} + m_l^{n,0}} \frac{(u_v^{n,0} - u_l^{n,0})^2}{4} (1 - e^{-2\Delta t/\tau_u^{n,0}}) \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

Ce schéma correspond donc à une intégration exacte du terme source  $\mathcal{D}$  dans 3.3.1 lorsque  $\tau_u$  est constant. Dans les cas où  $\tau_u$  varie en temps, le schéma est d'ordre 1. Bien évidemment, pour un pas de temps donné (qui est ici dicté par l'étape de convection) la qualité de l'approximation calculée est d'autant meilleure que l'échelle de temps des variations de  $\tau_u$  est grande par rapport au pas de temps  $\Delta t$ .

**Proposition 3.3.1.** *Le schéma 3.3.3 préserve la positivité de  $\alpha_\phi$ ,  $m_\phi$  et  $m_\phi e_\phi$  ( $\phi = l, v$ ). De plus, il assure la conservation de la masse du mélange ( $m_v + m_l$ ), de la quantité de mouvement du mélange ( $m_v u_v + m_l u_l$ ) et de l'énergie totale du mélange ( $m_v E_v + m_l E_l$ ).*

La démonstration des propriétés de positivité est triviale en utilisant les formules 3.3.3, tandis que la préservation de la conservativité est assurée par construction.

Il est important de remarquer que la prise en compte de la trainée proposée ne fait intervenir que les variables conservatives  $W$  et ne nécessite donc pas d'avoir recours aux lois d'état. Ce schéma est donc valable pour toute loi d'état.

**Remarque.** Lorsque l'on fait rendre  $\Delta t/\tau_u$  vers  $+\infty$ , le vecteur  $W^{n,*}$  tend vers :

$$\begin{aligned} W^{n,*} &\xrightarrow{\Delta t/\tau_u \rightarrow +\infty} (\alpha_v^{n,0}, m_v^{n,0}, m_v^{n,0} u_v^{n,*}, \alpha_v^{n,0} E_v^{n,*}, m_l^{n,0}, m_l^{n,0} u_l^{n,*}, \alpha_l^{n,0} E_l^{n,*}) \\ \text{avec } u_v^{n,*} &= u_l^{n,*} = u_l^{n,0} + (u_v^{n,0} - u_l^{n,0}) \frac{m_v^{n,0}}{m_v^{n,0} + m_l^{n,0}} \\ (m_l \varepsilon_l)^{n,*} &= (m_l \varepsilon_l)^{n,0} + \frac{m_l^{n,0} m_v^{n,0}}{m_v^{n,0} + m_l^{n,0}} \frac{(u_v^{n,0} - u_l^{n,0})^2}{4} \\ (m_v \varepsilon_v)^{n,*} &= (m_v \varepsilon_v)^{n,0} + \frac{m_l^{n,0} m_v^{n,0}}{m_v^{n,0} + m_l^{n,0}} \frac{(u_v^{n,0} - u_l^{n,0})^2}{4} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Le schéma permet donc de faire naturellement de la relaxation instantanée  $\tau_u \rightarrow 0$  ou quasi-instantanée  $\Delta t \gg \tau_u$ .

### 3.4 Un schéma implicite de discrétisation de la relaxation en pression $\Phi$

Dans [38] deux schémas de discrétisation de la relaxation en pression ont été proposés : un schéma implicite et un schéma semi-implicite. Ce dernier étant par nature moins apte à traiter efficacement les grands pas de temps,  $\Delta t > \tau_p$ , on se concentre ici sur le schéma implicite. On propose donc une extension de ce schéma implicite [38, 36] aux lois d'état quelconques, ainsi que ses déclinaisons au cas des lois d'état SGG/GP et GP/GP.

### 3.4.1 Un schéma implicite valable pour toute loi d'état

Le système d'équations correspondant à la prise en compte de la relaxation en pression est :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_v & = (\tau_p)^{-1} \frac{\alpha_l \alpha_v}{|p_l| + |p_v|} (p_v - p_l) \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v E_v) + P_l \partial_t \alpha_v & = 0 \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_l E_l) + P_l \partial_t \alpha_l & = 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

avec comme condition initiale  $W(t=0) = W^{n,*}$ . On remarque que les vitesses phasiques ainsi que les masses partielles sont constantes :  $\forall t \geq 0, u_l(t) = u_l^{n,*}, u_v(t) = u_v^{n,*}, m_l(t) = m_l^{n,*}$  et  $m_v(t) = m_v^{n,*}$ . En conséquence on a :

$$u_l^{n,**} = u_l^{n,*}, \quad u_v^{n,**} = u_v^{n,*}, \quad m_l^{n,**} = m_l^{n,*} \quad \text{et} \quad m_v^{n,**} = m_v^{n,*}$$

La résolution de 3.4.1 se ramène donc à la résolution du système à trois équations 3.4.2 portant (par exemple) sur les inconnues  $p_l, p_v$  et  $\alpha_v$  :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_v & = (\tau_p)^{-1} \frac{\alpha_l \alpha_v}{|p_l| + |p_v|} (p_v - p_l) \\ m_l^{n,*} \partial_t (\varepsilon_l(p_l, m_l^{n,*} / \alpha_l)) + P_l \partial_t \alpha_l & = 0 \\ m_v^{n,*} \partial_t (\varepsilon_v(p_v, m_v^{n,*} / \alpha_v)) + P_l \partial_t \alpha_v & = 0 \end{cases} \quad (3.4.2)$$

On remarque immédiatement que les lois thermodynamiques des deux phases interviennent explicitement dans ce système (ici sous forme des lois d'énergies internes  $\varepsilon_\phi$  en fonction des pressions phasiques et masses volumiques phasiques).

On pose  $\theta = \tau_p(|p_l| + |p_v|)$ , et on choisit d'expliciter  $\theta$ . Ce terme est en effet fortement non-linéaire et son explicitation permet de résoudre explicitement le système 3.4.2 dans le cas de lois d'état de type SG/GP ou GP/GP. De plus, les termes les plus importants de  $\Phi$ , et donc ceux qui doivent absolument être implicites pour avoir des approximations physiquement satisfaisantes, sont :

- le produit des fractions  $\alpha_l \alpha_v$  qui permet d'assurer la positivité des taux de présence statistiques ;
- l'écart en pression ( $p_v - p_l$ ), qui porte une partie de l'information sur le point d'équilibre thermodynamique vers lequel le système tend à retourner.

Le système 3.4.2 est donc approché par le système 3.4.3 :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_v & = (\theta^{n,*})^{-1} \alpha_l \alpha_v (p_v - p_l) \\ m_l^{n,*} \partial_t (\varepsilon_l(p_l, m_l^{n,*} / \alpha_l)) + P_l \partial_t \alpha_l & = 0 \\ m_v^{n,*} \partial_t (\varepsilon_v(p_v, m_v^{n,*} / \alpha_v)) + P_l \partial_t \alpha_v & = 0 \end{cases} \quad (3.4.3)$$

et sa résolution est basée sur un schéma d'Euler implicite sur un pas de temps  $\Delta t$  qui s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha_v^{n,**} - \alpha_v^{n,*} + \Delta t (\theta^{n,*})^{-1} \alpha_l^{n,**} \alpha_v^{n,**} (p_l^{n,**} - p_v^{n,**}) = 0 \\ m_l^{n,*} \varepsilon_l(p_l^{n,**}, m_l^{n,*} / \alpha_l^{n,**}) - (m_l \varepsilon_l)^{n,*} - P_l^{n,**} (\alpha_v^{n,**} - \alpha_v^{n,*}) = 0 \\ m_v^{n,*} \varepsilon_v(p_v^{n,**}, m_v^{n,*} / \alpha_v^{n,**}) - (m_v \varepsilon_v)^{n,*} + P_l^{n,**} (\alpha_v^{n,**} - \alpha_v^{n,*}) = 0 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

En pratique, le schéma 3.4.4 peut *a priori* s'appliquer à n'importe quelle loi thermodynamique à condition de disposer d'une méthode de résolution satisfaisante. Actuellement, il n'existe malheureusement pas de résultat d'existence et d'uni-

cité des solutions de ce système non linéaire. C'est en partie pour cette raison qu'à ce jour il n'a jamais été appliqué à des lois générales (à notre connaissance), mais a été décliné pour des lois d'état analytiques simples telles que les SGG. Ces différentes déclinaisons sont présentées ci-dessous par ordre de complexité décroissante des lois thermodynamiques ; cet ordre ne reflète pas l'ordre chronologique des développements pour des lois de type SG ou GP [25, 36]. L'utilisation des lois d'état SGG et la déclinaison schéma proposée ci-dessous est une extension du cadre des applications réalisées jusque-là [25, 36].

### 3.4.2 Schéma implicite appliqué aux lois d'état de type SGG pour un mélange eau-vapeur

Dans le cadre de la simulation des écoulements eau-vapeur qui nous intéressent, la phase vapeur est toujours représentée par une loi d'état de type SGG avec  $(p_v)_\infty = 0$ . Cette caractéristique est prise en compte explicitement dans la suite. Pour plus de lisibilité des formules, on omet les indices  $(n, **)$  désignant les inconnues du système et les indices  $(n, *)$  désignant l'état initial sont remplacés par un 0 en exposant.

Si on considère le schéma 3.4.4 avec des lois d'état de type SGG et  $(p_v)_\infty = 0$ , on obtient le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \alpha_v - \alpha_v^0 + \Delta t (\theta^0)^{-1} \alpha_l \alpha_v (p_l - p_v) = 0 \\ m_l^0 \left( \frac{p_l + \gamma_l (p_l)_\infty}{\rho_l (\gamma_l - 1)} + Q_l \right) - m_l^0 \left( \frac{p_l^0 + \gamma_l (p_l)_\infty}{\rho_l^0 (\gamma_l - 1)} + Q_l \right) + p_l (\alpha_l - \alpha_l^0) = 0 \\ m_v^0 \left( \frac{p_v}{\rho_v (\gamma_v - 1)} + Q_v \right) - m_v^0 \left( \frac{p_v^0}{\rho_v^0 (\gamma_v - 1)} + Q_v \right) + p_l (\alpha_v - \alpha_v^0) = 0 \end{cases} \quad (3.4.5)$$

On remarque deux choses importantes, qui sont des conséquences du choix des variables de résolution  $p_l$ ,  $p_v$  et  $\alpha_v$  :

- les constantes  $Q'_\phi$  ne jouent aucun rôle (puisque l'entropie n'est pas utilisée) ;
- les constantes  $Q_\phi$  s'éliminent et n'interviennent donc pas dans le calcul de la solution.

Or ces constantes correspondent à la seule différence qui existe entre les lois d'état SG et les lois d'état SGG. La déclinaison 3.4.5 du schéma 3.4.4 est donc valable pour les deux types de lois d'état. On notera que ceci reste vrai même si  $(p_v)_\infty \neq 0$ .

La résolution du système non-linéaire 3.4.5 peut se ramener à la résolution d'une équation résolvante portant sur  $\alpha_v$ . Cette équation est obtenue en remplaçant dans la première équation du système 3.4.5 les pressions  $p_l$  et  $p_v$  par leurs expressions en fonction de  $\alpha_v$ , données par les deuxième et troisième équations de 3.4.5. Autrement dit, si on définit :

$$\begin{aligned} G(\alpha_v) &= \theta^0 (\alpha_v - \alpha_v^0) + \Delta t \alpha_v (1 - \alpha_v) (P_l(\alpha_v) - P_v(\alpha_v)) \\ \text{avec} \\ P_l(\alpha_v) &= \frac{(1 - \alpha_v^0)(p_l^0 + \gamma_l (p_l)_\infty) - (1 - \alpha_v) \gamma_l (p_l)_\infty}{1 - \alpha_v + (\gamma_l - 1)(\alpha_v^0 - \alpha_v)} \\ P_v(\alpha_v) &= \frac{\alpha_v^0 p_v^0 - (\gamma_v - 1)(\alpha_v - \alpha_v^0) P_l(\alpha_v)}{\alpha_v} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

la résolution de 3.4.5 est alors réalisée grâce à la résolution de  $G(\alpha_v) = 0$ . D'un point de vue pratique, le zéro de  $G$  est calculé à l'aide d'une dichotomie. Ceci est rendu possible grâce aux propriétés du schéma résumées dans la proposition 3.4.1.

**Proposition 3.4.1.** Soient  $\alpha_v^M = \frac{\gamma_v - 1}{\gamma_v} \alpha_v^0$  et  $\alpha_v^m = \frac{1 + (\gamma_l - 1)\alpha_v^0}{\gamma_l}$ , on vérifie aisément que l'on a  $0 < \alpha_v^M < \alpha_v^0 < \alpha_v^m < 1$ .

L'équation  $G(\alpha_v) = 0$  admet alors une unique solution dans l'intervalle  $]\alpha_v^M, \alpha_v^m[$ . De plus,

- si  $p_v^0 - p_l^0 \geq 0$ , alors la solution est dans l'intervalle  $[\alpha_v^0, \alpha_v^m[$  ;
- si  $p_v^0 - p_l^0 < 0$ , alors la solution est dans l'intervalle  $]\alpha_v^M, \alpha_v^0[$ .

Le schéma possède les propriétés suivantes :

- Le schéma préserve la positivité de la pression de la phase vapeur  $p_v$ .
- Le schéma préserve la positivité de  $p_l + (p_l)_\infty$  dans la phase liquide.
- Le schéma conserve l'énergie totale du mélange.

*Démonstration.* Dans un premier temps, on suppose qu'il existe (au moins) une solution  $\alpha_v \in ]\alpha_v^M, \alpha_v^m[$  telle que  $G(\alpha_v) = 0$  et on montre que les pressions résultantes  $P_l(\alpha_v) + (p_l)_\infty$  et  $P_v(\alpha_v)$  sont positives. On suppose également que les pressions initiales sont telles que :  $p_v^0 > 0$  et  $p_l^0 + (p_l)_\infty > 0$ ; et que les taux de présence initiaux sont dans  $]0, 1[$ . L'expression  $P_l(\alpha_v)$  définie ci-dessus (3.4.6) est telle que :

$$(P_l(\alpha_v) + (p_l)_\infty)(\alpha_v^m - \alpha_v) = (p_l^0 + (p_l)_\infty) \frac{1 - \alpha_v^0}{\gamma_l}$$

La loi thermodynamique liquide est valable si et seulement si  $P_l(\alpha_v) + (p_l)_\infty > 0$  ce qui d'après la relation ci-dessus est équivalent à avoir  $\alpha_v^m - \alpha_v > 0$ . La première équation de 3.4.5 permet d'exprimer la pression liquide en fonction de la pression vapeur et du titre :

$$P_l(\alpha_v) = P_v(\alpha_v) - \frac{(\alpha_v - \alpha_v^0)\theta^0}{\Delta t \alpha_l \alpha_v}$$

En utilisant cette relation pour éliminer la pression liquide de la dernière équation de 3.4.6, on obtient alors :

$$P_v(\alpha_v) \gamma_v (\alpha_v - \alpha_v^M) = \alpha_v^0 p_v^0 + (\gamma_v - 1) \frac{\theta^0 (\alpha_v - \alpha_v^0)^2}{\Delta t \alpha_l \alpha_v}$$

La positivité de  $P_v(\alpha_v)$  est alors assurée si et seulement si  $\alpha_v > \alpha_v^M$ . En conséquence, s'il existe une solution à  $G(\alpha_v) = 0$  sur l'intervalle  $]\alpha_v^M, \alpha_v^m[$  les lois thermodynamiques sont définies et les pressions sont admissibles au sens suivant :

$$P_l(\alpha_v) + (p_l)_\infty > 0 \quad \text{et} \quad P_v(\alpha_v) > 0.$$

L'appartenance de  $\alpha_v$  à l'intervalle délimité par les deux bornes  $\alpha_v^M$  et  $\alpha_v^m$  garantit alors ces conditions de positivité sur les pressions. On montre de la même manière, quand  $(p_v)_\infty \neq 0$ , que le schéma assure  $P_v(\alpha_v) + (p_v)_\infty > 0$ .

La suite de la démonstration prouve l'existence et l'unicité d'une telle solution sur  $]\alpha_v^M, \alpha_v^m[$ . On pose  $X_\phi^0 = p_\phi^0 + (p_l)_\infty$ ,  $\phi = l, v$  et  $\alpha_l^m = 1 - \alpha_v^m$ . La dérivée d'ordre deux de  $G(\alpha_v)$  par rapport  $\alpha_v$  s'écrit :

$$G''(\alpha_v) = 2\Delta t \gamma_v (p_l)_\infty + 2\Delta t \frac{\gamma_v}{\gamma_l} \alpha_l^0 X_l^0 \alpha_l^m (\alpha_v^m - \alpha_v^M) \frac{1}{(\alpha_v^m - \alpha_v)^3} \quad (3.4.7)$$

Comme on a  $\alpha_v^m - \alpha_v^M = \alpha_l^0/\gamma_l + \alpha_v^0/\gamma_v > 0$  on en déduit que  $G''(\alpha_v) > 0$  pour tout  $\alpha_v$  dans  $[0, \alpha_v^m[$ . D'autre part, comme  $X_l^0 > 0$ , on a :

$$\lim_{\alpha_v \rightarrow (\alpha_v^m)^-} G(\alpha_v) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha_v \rightarrow (\alpha_v^M)^+} G(\alpha_v) = -\theta \frac{\alpha_v^0}{\gamma_v} - \Delta t (1 - \alpha_v^M) \alpha_v^0 p_v^0 < 0$$

Donc  $G$  est strictement convexe sur  $]\alpha_v^M, \alpha_v^m[$ , et  $G$  est négative en  $\alpha_v^M$  et tend vers  $+\infty$  en  $\alpha_v^m$ . On en conclut donc que sur l'intervalle  $]\alpha_v^M, \alpha_v^m[$  il existe une unique solution  $\alpha_v$  telle que  $G(\alpha_v) = 0$ . Cette estimation peut être affinée en remarquant que l'on a :

$$G(\alpha_v^0) = -\Delta t \alpha_v^0 \alpha_l^0 (p_v^0 - p_l^0) \quad (3.4.8)$$

et qu'en conséquence

- si  $p_v^0 - p_l^0 \geq 0$ , alors la solution est dans l'intervalle  $[\alpha_v^0, \alpha_v^m[$ ;
- si  $p_v^0 - p_l^0 < 0$ , alors la solution est dans l'intervalle  $]\alpha_v^M, \alpha_v^0[$ .

Enfin, le dernier point de la proposition concernant la conservation de l'énergie totale est assuré par construction du schéma. Ce qui termine la démonstration de la proposition 3.4.1.  $\square$

Lorsque l'on est dans le cas d'une relaxation instantanée  $\tau_p = 0$  (ou quasi-instantanée  $\Delta t \gg \tau_p$ ), le schéma reste défini. On retrouve alors exactement le schéma de relaxation instantanée proposé dans [37, 25] (on rappelle ici que les expériences numériques réalisées dans ces références conduisent systématiquement à une divergence des calculs lorsque le pas de maillage tend vers 0). La fonction  $G$  s'annule alors lorsque l'équilibre en pression  $P_v(\alpha_v) = P_l(\alpha_v)$  est satisfait. En reprenant l'expression des pressions phasiques 3.4.6, on retrouve que  $\alpha_v$  est solution d'un polynôme de degré deux.

### Vérification du schéma dans le cadre des lois d'état SGG

On se propose maintenant de vérifier le schéma de relaxation en pression proposé dans cette section (et donc appliqué au cas SGG-GP). Les lois thermodynamiques choisies sont de type SG pour le liquide et GP pour la vapeur, mais on a vu précédemment que le schéma est identique dans le cas SGG, et les tests présentés ci-dessous ne perdent donc en rien leur généralité. Les paramètres des lois thermodynamiques sont :  $\gamma_v = 3$ ,  $(p_v)_\infty = 0$ ,  $\gamma_l = 2$ ,  $(p_l)_\infty = 10^9$ . Le temps de relaxation en pression  $\tau_p$  est égal à  $10^{-6}$ . Le terme de normalisation  $(|p_l| + |p_v|)$  a été choisi constant, contrairement à l'écriture plus générale proposée dans 3.4.1. Le paramètre  $\theta$  est donc constant :

$$\theta = \tau_p (|\bar{p}_l^0| + |\bar{p}_v^0|)$$

où  $(|\bar{p}_l^0| + |\bar{p}_v^0|)$  est pris égal à  $21 \times 10^5$ . Les conditions initiales sont  $Z(t = 0)$  :

$$\begin{aligned} Z(t = 0) &= (\alpha_v, \rho_v, u_v, p_v, \rho_l, u_l, p_l)(t = 0) \\ &= (\alpha_v^0, \rho_v^0, u_v^0, p_v^0, \rho_l^0, u_l^0, p_l^0) \\ &= (0.5, 1370, 5, 2 \times 10^8, 2.61, 5, 10^5) \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

On rappelle que, dans l'étape de relaxation en pression, les masses partielles et les vitesses restent constantes et que l'on se ramène à un sous-système 3.4.2. Contrairement au cas des lois de type GP [38], il n'est pas évident d'explicitement une solution analytique, et ce malgré la relative simplicité des lois d'état SGG. Pour obtenir une solution approchée du sous-système, on a utilisé une routine de discrétisation basée sur le schéma explicite Runge-Kutta d'ordre élevé (couple Dormand-Prince d'ordre 4 et 5) avec une tolérance de  $10^{-14}$ . Les résultats ainsi obtenus à  $t = 10^{-4}$  sont :

$$\begin{aligned} \alpha_l(t = 10^{-4}) &= 0.542382914939900, \\ p_l(t = 10^{-4}) &= 1.97864874828553 \times 10^7, \\ p_v(t = 10^{-4}) &= 1.97864874828522 \times 10^7. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Ces résultats seront considérés comme la solution de référence et comparés à ceux obtenus avec le schéma de relaxation en pression implicite et d'ordre 1.

Pour les trois variables  $\alpha_v$ ,  $p_\phi$ , et  $\phi = l, v$ , les erreurs en norme  $L^1$  entre les approximations numériques obtenues avec le schéma de relaxation en pression implicite et les résultats de référence 3.4.10 sont ensuite calculées. Les résultats pour différents pas de temps d'intégration du schéma de relaxation en pression implicite sont tracés sur la figure 3.1. On observe bien l'ordre de convergence asymptotique de 1 attendu pour un schéma Euler implicite (voir également [38]).

## 3.5 Un schéma de relaxation en température implicite

Le schéma implicite de prise en compte de l'effet de relaxation en température décrit ici est celui proposé dans [36]. Il est également basé sur un schéma d'Euler implicite. Ici aussi les lois d'état thermodynamiques interviennent explicitement dans le schéma. Le calcul de la mise à jour des variables est alors effectué *via* une équation non-linéaire résolvante qui devient linéaire pour des lois de type SGG.

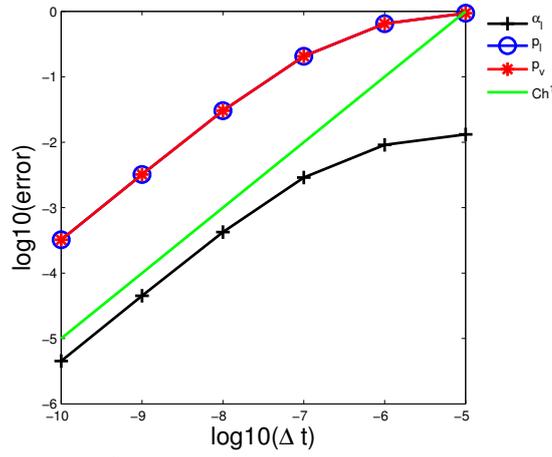


FIGURE 3.1 – Logarithme de la norme  $L^1$  des erreurs entre les approximations du schéma implicite de relaxation en pression et la solution de référence obtenue avec une méthode explicite d'ordre élevé en fonction du logarithme du pas de temps  $\Delta t$ .

### 3.5.1 Schéma implicite valable pour toutes les lois d'état thermodynamiques

L'étape de prise en compte de l'effet de retour à l'équilibre des températures (transfert de chaleur pur, *i.e.* sans transfert de masse ni transfert de quantité de mouvement) est basé sur la résolution approchée du système d'ODE suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_v & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_v E_v) & = (\tau_T)^{-1} \frac{m_v C_{V,v} m_l C_{V,l}}{m_v C_{V,v} + m_l C_{V,l}} (T_l - T_v) \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_v \rho_v u_v) & = 0 \\ \partial_t (\alpha_l E_l + \alpha_v E_v) & = 0 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

avec comme condition initiale les valeurs déterminées au pas de temps précédent :  $W(t=0) = W^{n,**}$ . Les solutions de ce système sont donc triviales en ce qui concerne le titre, les masses partielles et les vitesses :  $\forall t \geq 0$ ,  $\alpha_v(t) = \alpha_v^{n,**}$ ,  $u_l(t) = u_l^{n,**}$ ,  $u_v(t) = u_v^{n,**}$ ,  $m_l(t) = m_l^{n,**}$  et  $m_v(t) = m_v^{n,**}$ . En conséquence la mise à jour de ces variables à la fin de l'étape sera :

$$\alpha_v^{n,***} = \alpha_v^{n,**}, \quad u_l^{n,***} = u_l^{n,**}, \quad u_v^{n,***} = u_v^{n,**}, \quad m_l^{n,***} = m_l^{n,**} \quad \text{et} \quad m_v^{n,***} = m_v^{n,**}$$

Le sous-système permettant de déterminer les énergies internes est donc :

$$\begin{cases} \partial_t (m_v^{n,**} \varepsilon_v) & = (\tau_T)^{-1} \frac{m_v^{n,**} C_{V,v} m_l^{n,**} C_{V,l}}{m_v^{n,**} C_{V,v} + m_l^{n,**} C_{V,l}} (T_l - T_v) \\ \partial_t (m_l^{n,**} \varepsilon_l + m_v^{n,**} \varepsilon_v) & = 0 \end{cases} \quad (3.5.2)$$

On remarque que les capacités calorifiques  $C_{V,\phi}$  peuvent dépendre des grandeurs thermodynamiques. A l'instar du schéma de relaxation en pression, le cofacteur du terme en écart de température est explicité. La résolution du sous-système 3.5.2 est approchée par la résolution du système :

$$\begin{cases} \partial_t (m_v^{n,**} \varepsilon_v) & = \frac{(T_l - T_v)}{\theta_T^{n,**}} \\ \partial_t (m_l^{n,**} \varepsilon_l + m_v^{n,**} \varepsilon_v) & = 0 \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Où le terme  $\theta_T^{n,**}$  incorpore le temps caractéristique  $\tau_T$  ainsi que les capacités calorifiques :

$$(\theta_T^{n,**})^{-1} = (\tau_T)^{n,**-1} \frac{m_v^{n,**} C_{V,v}^{n,**} m_l^{n,**} C_{V,l}^{n,**}}{m_v^{n,**} C_{V,v}^{n,**} + m_l^{n,**} C_{V,l}^{n,**}}$$

Afin de garder le contrôle sur la conservation de l'énergie, le système 3.5.3 est vu comme un système portant sur les énergies internes. En lui appliquant un schéma d'Euler implicite pour un seul pas de temps égal à  $\Delta t$ , on a donc :

$$\begin{cases} m_l^{n,**} (\epsilon_l^{n,**} - \epsilon_l^{n,**}) = \frac{\Delta t}{\theta^{n,**}} (T_v(\epsilon_v^{n,**}, \rho_v^{n,**}) - T_l(\epsilon_l^{n,**}, \rho_l^{n,**})) \\ m_l^{n,**} (\epsilon_l^{n,**} - \epsilon_l^{n,**}) + m_v^{n,**} (\epsilon_v^{n,**} - \epsilon_v^{n,**}) = 0 \end{cases} \quad (3.5.4)$$

Il s'agit donc d'un système non linéaire à deux inconnues  $(\epsilon_l^{n,**}, \epsilon_v^{n,**})$ .

Il est possible de se ramener à la résolution d'une équation résolvente en utilisant l'équation discrète de conservation de l'énergie (*i.e* la deuxième équation de 3.5.4) pour exprimer de manière explicite  $\epsilon_l^{n,**}$  en fonction de  $\epsilon_v^{n,**}$  (ou inversement) dans la première équation de 3.5.4. Cette équation résolvente est à la base du schéma et permet de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 3.5.1.** *On suppose que les lois thermodynamiques des deux phases vérifient :*

$$\partial_{\epsilon_\varphi} (T_\varphi)_{|\rho_\varphi} > 0 \text{ et } \lim_{\epsilon_\varphi \rightarrow 0^+} T_\varphi(\epsilon_\varphi, \rho_\varphi) = 0 \quad (3.5.5)$$

pour  $\varphi = l, v$ . Le système 3.5.4 admet alors une unique solution  $(\epsilon_l^{n,**}, \epsilon_v^{n,**})$  pour toute valeur du pas de temps  $\Delta t$ . De plus, les solutions en énergie interne  $\epsilon_l^{n,**}, \epsilon_v^{n,**}$  sont comprises respectivement dans les intervalles :

$$\left[ 0, \frac{m_l^{n,**} \epsilon_l^{n,**} + m_v^{n,**} \epsilon_v^{n,**}}{m_l^{n,**}} \right] \quad \text{et} \quad \left[ 0, \frac{m_l^{n,**} \epsilon_l^{n,**} + m_v^{n,**} \epsilon_v^{n,**}}{m_v^{n,**}} \right].$$

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [40] et n'est donc pas rappelée ici. Il faut noter que dans la proposition 3.5.1, les hypothèses demandées sur les lois d'état thermodynamique sont physiquement raisonnables. Certaines lois d'état thermodynamique comme les GP par exemple satisfont ces hypothèses, et d'autres comme les SG ou les SGG ne les vérifient pas forcément (en fonction du choix des différents paramètres des lois d'état). Toutefois, on insiste sur le fait que ces hypothèses sont suffisantes et non nécessaires à l'obtention du résultat d'unicité de la solution du schéma 3.5.4.

Le schéma proposé assure par construction la conservation de l'énergie totale du mélange. Plus trivialement encore, il assure la conservation de la masse et du moment du mélange, ainsi que la positivité des taux de présence et des masses partielles. On notera également qu'il dégénère naturellement dans le cas d'une relaxation quasi-instantanée en température  $\Delta t \gg \tau_T$  et d'une relaxation instantanée  $\tau_T = 0$ .

### 3.5.2 Application du schéma au cadre des lois d'état de type SGG

On a vu précédemment que les lois d'état SGG ne rentrent pas dans le cadre de la proposition 3.5.1. En effet, la deuxième hypothèse peut potentiellement être mise en défaut puisque l'on a :

$$\lim_{\epsilon_\varphi \rightarrow 0^+} T_\varphi(\epsilon_\varphi, \rho_\varphi) = \frac{-Q_\varphi - (p_\varphi)_\infty / \rho_\varphi}{C_{V,\varphi}}$$

Toutefois, dans ce cas particulier on peut démontrer une autre proposition nous assurant de la validité du schéma. Pour cela, on définit pour chaque phase l'énergie minimum :

$$e_\varphi^m = Q_\varphi + \frac{(p_\varphi)_\infty}{\rho_\varphi^{n,**}}, \quad \varphi = l, v$$

En utilisant directement la définition de la température phasique pour les SGG, on en déduit que si  $\varepsilon_\varphi^{n,**} \geq e_\varphi^m$  alors la température  $T_\varphi^{n,**}$  est positive et que la température s'annule en  $e_\varphi^m : T_\varphi(e_\varphi^m, \rho_\varphi^{n,**}) = 0$ . On introduit également les énergies complémentaires aux  $e_\varphi^m$  conformément à la conservation de l'énergie du mélange :

$$e_l^M = \frac{(m_l^{n,**} \varepsilon_l^{n,**} + m_v^{n,**} \varepsilon_v^{n,**}) - m_v^{n,**} e_v^m}{m_l^{n,**}},$$

$$e_v^M = \frac{(m_l^{n,**} \varepsilon_l^{n,**} + m_v^{n,**} \varepsilon_v^{n,**}) - m_l^{n,**} e_l^m}{m_v^{n,**}}$$

Comme indiqué dans la démonstration de la proposition 3.5.2, les bornes  $e_\varphi^M$  sont liées à la positivité des températures solutions  $T_\varphi^{n,**}$ .

**Proposition 3.5.2.** *Si  $(\varepsilon_l^{n,**}, \varepsilon_v^{n,**}) \in [e_l^m, e_l^M] \times [e_v^m, e_v^M]$ , alors pour toute valeur de  $\Delta t$ , le système 3.5.4 admet une unique solution  $(\varepsilon_l^{n,**}, \varepsilon_v^{n,**})$  dans l'intervalle :  $[e_l^m, e_l^M] \times [e_v^m, e_v^M]$ . De plus, les températures résultantes*

$$T_\varphi^{n,**} = T_\varphi(\varepsilon_\varphi^{n,**}, \rho_\varphi^{n,**})$$

sont positives, quel que soit le pas de temps.

*Démonstration.* . On note  $X = \varepsilon_l^{n,**}$  et supposons  $(\varepsilon_l^{n,**}, \varepsilon_v^{n,**}) \in [e_l^m, e_l^M] \times [e_v^m, e_v^M]$ . On élimine  $\varepsilon_v^{n,**}$  de la première équation du système 3.5.4 en utilisant la deuxième équation de 3.5.4 pour former une équation non-linéaire résolvente  $q(X) = 0$  avec :

$$q(X) = m_l^{n,**} (X - \varepsilon_l^{n,**}) - \frac{\Delta t}{\theta^{n,**}} \left( T_v \left( \frac{(m_l^{n,**} \varepsilon_l^{n,**} + m_v^{n,**} \varepsilon_v^{n,**}) - m_l^{n,**} X}{m_v^{n,**}}, \rho_v^{n,**} \right) - T_l(X, \rho_l^{n,**}) \right) \quad (3.5.6)$$

Pour les lois thermodynamiques SGG, on a  $\partial_{\varepsilon_\varphi} T_\varphi(\varepsilon_\varphi, \rho_\varphi)|_{\rho_\varphi} > 0$ . Cela implique que la fonction  $q$  est strictement croissante. Par ailleurs, comme les températures sont positives sur l'intervalle considéré, on a :

$$\lim_{X \rightarrow (e_l^m)^+} q(X) = m_l^{n,**} (e_l^m - \varepsilon_l^{n,**}) \left( 1 + \frac{\Delta t}{\theta^{n,**} C_{v,v}} \right) - \frac{\Delta t}{\theta^{n,**}} T_v(\varepsilon_v^{n,**}, \rho_v^{n,**}) < 0$$

$$\lim_{X \rightarrow (e_l^M)^-} q(X) = m_l^{n,**} (e_l^M - \varepsilon_l^{n,**}) + \frac{\Delta t}{\theta^{n,**}} T_l(e_l^M, \rho_l^{n,**}) > 0$$

On en déduit que  $q(X) = 0$  admet une unique solution dans  $[e_l^m, e_l^M]$ . L'énergie interne  $\varepsilon_v^{n,**}$  est ensuite déduite en utilisant la conservation de la masse (i.e. la deuxième équation de 3.5.4) :

$$\varepsilon_v^{n,**} = \varepsilon_v^{n,**} - \frac{m_l^{n,**} (\varepsilon_l^{n,**} - \varepsilon_l^{n,**})}{m_v^{n,**}}$$

On en conclut donc que le système 3.5.4 admet une unique solution  $(\varepsilon_l^{n,**}, \varepsilon_v^{n,**})$  sur l'intervalle  $[e_l^m, e_l^M] \times [e_v^m, e_v^M]$ .

En utilisant 3.5.4 et les définitions des lois d'état SGG pour la température, on peut montrer que si  $\varepsilon_\varphi^{n,**} < e_\varphi^M$  alors la température  $T_\varphi^{n,**} = T_\varphi(\varepsilon_\varphi^{n,**}, \rho_\varphi^{n,**})$  est également positive.  $\square$

La proposition 3.5.2 nous assure donc de l'existence et de l'unicité de la solution de 3.5.4 dans  $[e_l^m, e_l^M] \times [e_v^m, e_v^M]$ . De plus, cet intervalle étant le seul à garantir la positivité des températures, on peut affirmer qu'il n'existe pas d'autre

solution physiquement admissible. Enfin, du point de vue de la mise en œuvre dans le code, l'équation résolvente 3.5.6 peut être résolue grâce à une méthode de dichotomie sur l'intervalle  $[e_l^m, e_l^M]$ , c'est ce qui a été fait en pratique.

Dans le cas d'une relaxation instantanée en température avec des lois d'état de type SGG, le schéma dégénère naturellement vers le schéma 3.5.7, pour lequel les formules de mise à jour des variables sont explicites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_v^{n,***} = \alpha_v^{n,**} \\ m_\varphi^{n,***} = m_\varphi^{n,**} \\ m_\varphi^{n,***} u_\varphi^{n,***} = m_\varphi^{n,**} u_\varphi^{n,**}, \varphi = l, v \\ \varepsilon_l^{n,***} = \left( \frac{m_l^{n,**} e_l^{n,**}}{m_v^{n,**} C_{V,v}} + \frac{Q_l}{C_{V,l}} + \frac{(p_l)_\infty}{\rho_l^{n,**} C_{V,l}} - \frac{Q_v}{C_{V,v}} - \frac{(p_v)_\infty}{\rho_v^{n,**} C_{V,v}} \right) / \left( \frac{m_l^{n,**}}{m_v^{n,**} C_{V,v}} + \frac{1}{C_{V,l}} \right) \\ \varepsilon_v^{n,***} = \varepsilon_v^{n,**} - \frac{m_l^{n,**} (\varepsilon_l^{n,***} - \varepsilon_l^{n,**})}{m_v^{n,**}} \end{array} \right. \quad (3.5.7)$$

En pratique, si on désire effectuer une simulation avec relaxation instantanée  $\tau_T = 0$ , il peut être avantageux en terme de coût de calcul d'utiliser le schéma 3.5.7.

### 3.6 Schémas de relaxation en potentiel chimique

Le terme de transfert de masse  $\Gamma$  intervient dans toutes les équations massiques : équations de masse, équations de quantité de mouvement et équations sur l'énergie totale. Son importance physique est donc grande et un soin tout particulier doit être apporté au schéma associé à sa prise en compte numérique. Historiquement un schéma explicite a tout d'abord été proposé [40]. Il présente les avantages non négligeables de la simplicité et de ne pas être adhérent aux lois d'état thermodynamiques. En contrepartie, l'équilibre des potentiels est assez mal discrétisé, ce qui peut détériorer la qualité et la représentativité physique des résultats de calcul. Un schéma implicite est donc introduit ici pour palier à ce défaut, ainsi que pour assurer la stabilité des approximations numériques sur les grands pas de temps.

Le système d'équation à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_v \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v u_v) \\ \partial_t (\alpha_v E_v) \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v) \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_v \rho_v u_v) \\ \partial_t (\alpha_l E_l + \alpha_v E_v) \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = \Gamma \\ = U_l \Gamma \\ = H_l \Gamma \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \quad (3.6.1)$$

avec comme condition initiale  $W(t=0) = W^{n,***}$ . On rappelle que l'on a les fermetures  $U_l = \frac{u_l + u_v}{2}$ ,  $H_l = \frac{u_l u_v}{2}$  et que le terme source de transfert de masse  $\Gamma$  s'écrit :

$$\Gamma = \frac{m_l m_v}{m_l + m_v} G, \text{ avec } G = \frac{1}{\tau_G} \frac{(\mu_l - \mu_v)}{|\mu_v| + |\mu_l|} \quad (3.6.2)$$

où  $\mu_\varphi$  désigne le potentiel chimique et où  $m_\varphi = \alpha_\varphi \rho_\varphi$ .

### 3.6.1 Un schéma de type Euler explicite

Le terme source  $\Gamma$  est donc fortement non linéaire, caractère partiellement hérité de sa forte adhérence aux lois d'état thermodynamiques. La définition des potentiels chimiques fait intervenir les entropies phasiques qui restent non-linéaires même pour des lois simples comme les SGG, les SG ou les GP. Ce point a motivé l'écriture du schéma explicite. Il a donc été choisi de résoudre le système approché :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_v \\ \partial_t (m_v) \\ \partial_t (m_v u_v) \\ \partial_t (\alpha_v E_v) \\ \partial_t (m_l + m_v) \\ \partial_t (m_l u_l + m_v u_v) \\ \partial_t (\alpha_l E_l + \alpha_v E_v) \end{array} \right. = \begin{array}{l} 0 \\ \frac{m_l m_v}{m_l + m_v} G^{n,***} \\ U_l \frac{m_l m_v}{m_l + m_v} G^{n,***} \\ H_l \frac{m_l m_v}{m_l + m_v} G^{n,***} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad (3.6.3)$$

dans lequel le terme  $G$  regroupant l'équilibre des potentiels chimiques et le temps caractéristique a été explicité en utilisant sa valeur pour la condition initiale  $W(t=0) = W^{n,***}$ . Le terme de  $\Gamma$  faisant intervenir les masses partielles n'a pas été explicité pour permettre d'assurer la positivité inconditionnelle des masses partielles.

Le système (3.6.3) peut alors être intégré exactement. Le schéma est alors basé sur la solution exacte de (3.6.3) à l'instant  $t = \Delta t$ , avec comme condition initiale  $W(t=0) = W^{n,***}$ . La mise à jour des variables s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_l^{n,***} = \alpha_l^{n,***} \\ m_l^{n,***} = m_l^{n,***} \frac{m^{n,***} e^{(\Delta t G^{n,***})}}{m_l^{n,***} e^{(\Delta t G^{n,***})} + m_v^{n,***}} \\ m_v^{n,***} = m_v^{n,***} \frac{m^{n,***}}{m_l^{n,***} e^{(\Delta t G^{n,***})} + m_v^{n,***}} \\ u_l^{n,***} = u_m^{n,***} - \frac{m_l^{n,***}}{m^{n,***}} e^{(\Delta t G^{n,***}/2)} u_r^{n,***} \\ u_v^{n,***} = u_m^{n,***} + \frac{m_v^{n,***}}{m^{n,***}} e^{-(\Delta t G^{n,***}/2)} u_r^{n,***} \\ m_l^{n,***} \mathcal{E}_l^{n,***} = m_l^{n,***} \mathcal{E}_l^{n,***} \\ m_v^{n,***} \mathcal{E}_v^{n,***} = m_v^{n,***} \mathcal{E}_v^{n,***} \end{array} \right. \quad (3.6.4)$$

où  $m^{n,***} = m_v^{n,***} + m_l^{n,***}$  est la masse totale du mélange et où les vitesses relative  $u_r^{n,***}$  et moyenne  $u_m^{n,***}$  sont telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m^{n,***} = \frac{m_v^{n,***} u_v^{n,***} + m_l^{n,***} u_l^{n,***}}{m^{n,***}} \\ u_r^{n,***} = u_v^{n,***} - u_l^{n,***} \end{array} \right. \quad (3.6.5)$$

On se contente de résumer les propriétés du schéma sans les démontrer.

- Le schéma assure inconditionnellement la positivité des taux de présence, des masses partielles. Si les énergies internes spécifiques sont positives au début du pas de temps, le schéma assure qu'elles sont positives en fin de pas de temps.
- Le schéma assure la conservation de la masse du mélange, de la quantité de mouvement du mélange quel que soit le pas de temps. Le schéma n'assure pas la conservation de l'énergie totale du mélange.
- Le schéma est d'ordre 1.

Pour de plus amples détails, le lecteur pourra se référer au document [40].

L'élément le plus important du terme source, à savoir l'écart des potentiels chimiques, a été explicité. On ne peut donc pas s'attendre à ce que les approximations numériques soient satisfaisantes pour des pas de temps trop grands,  $\Delta t > \tau_G$ . Or

dans l'algorithme global le pas de temps  $\Delta t$  est imposé par la convection, et les schémas de discrétisation doivent fournir des approximations satisfaisantes même pour de "grands" pas de temps. Ce point a motivé l'écriture du schéma implicite présenté ci-dessous.

### 3.6.2 Un schéma de type Euler implicite

Afin d'établir le schéma implicite, on part du système 3.6.1 en supposant que  $\tau_G$  est constant. Le schéma consiste donc à expliciter  $\tau_G = \tau_G(t = 0)$  et à trouver les solutions discrètes du modèle approché ainsi obtenu. La solution pour le taux de présence est triviale :

$$\alpha_v(t) = \alpha_v(t = 0)$$

On peut alors remarquer que le terme de transfert de masse  $\Gamma$  peut s'écrire uniquement en fonction des masses volumiques et des énergies internes spécifiques :

$$\Gamma = \tilde{\Gamma}(\rho_l, e_l, \rho_v, e_v)$$

De plus, on rappelle que les énergies internes sont constantes :

$$\partial_t(m_v e_v) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t(m_l e_l) = 0 \quad (3.6.6)$$

Pour obtenir ce résultat, il faut former l'équation sur l'énergie cinétique de chaque phase en multipliant l'équation de moment par la vitesse phasique et en utilisant l'équation de masse partielle, ce qui donne :

$$\partial_t \left( m_v \frac{u_v^2}{2} \right) = H_l \Gamma \quad \text{et} \quad \partial_t \left( m_l \frac{u_l^2}{2} \right) = -H_l \Gamma \quad (3.6.7)$$

La masse totale et l'énergie totale étant conservées, le terme de transfert de masse  $\Gamma$  peut en fait être écrit comme une simple fonction  $\tilde{\Gamma}$  dépendant de  $m_l$  (ou  $m_v$ ) :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \tilde{\Gamma}(\rho_l, e_l, \rho_v, e_v) \\ &= \tilde{\Gamma} \left( \frac{m_l}{\alpha_l(t=0)}, \frac{(m_l e_l)(t=0)}{m_l}, \frac{(m_l + m_v)(t=0) - m_l}{\alpha_v(t=0)}, \frac{(m_v e_v)(t=0)}{(m_l + m_v)(t=0) - m_l} \right) \\ &= \tilde{\Gamma}(m_l) \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

La conséquence directe de cette remarque est que l'équation sur la masse partielle liquide est indépendante du reste des équations de 3.6.1. De plus, une fois cette équation résolutive résolue, les autres équations peuvent être intégrées. Pour cela il faut commencer par le sous-système formé des équations de quantité de mouvement, puis le sous-système formé des équations d'énergie. Le schéma repose sur la résolution de cette équation résolutive. Celle-ci est discrétisée de manière implicite sur un pas de temps, fournissant l'équation non-linéaire suivante portant sur  $m_l^{n,****}$  :

$$m_l^{n,****} = m_l^{n,***} - \Delta t \tilde{\Gamma}(m_l^{n,****}), \quad \text{avec} \quad m_l^{n,****} \in [0, m_l^{n,***} + m_v^{n,***}]. \quad (3.6.9)$$

En pratique, la résolution de cette équation peut être réalisée à l'aide d'une dichotomie. De plus, étant donnée la forme de la fonction  $\Gamma$ , si les masses partielles  $m_\phi^{n,***}$  sont strictement positives, alors les masses partielles  $m_\phi^{n,****}$  sont également strictement positives. En effet, étant donné que  $\Gamma$  s'annule pour  $m_l = 0$  l'équation de masse liquide discrète donne :

$$m_l^{n,****} > 0 \quad \text{et} \quad m_l^{n,****} = 0 \Leftrightarrow 0 = \tilde{\Gamma}(m_l^{n,****}) = m_l^{n,***} > 0$$

ce qui est évidemment impossible. La même démonstration peut être utilisée pour la phase vapeur.

Une fois  $m_l^{n,****}$  calculée, on connaît  $\Gamma(m_l^{n,****})$  et les autres équations peuvent donc être résolues implicitement. Le

schéma s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_l^{n,****} = \alpha_l^{n,***} \\ m_l^{n,****} = m_l^{n,***} - \Delta t \bar{\Gamma}(m_l^{n,****}) \\ m_v^{n,****} = m_l^{n,***} + m_v^{n,***} - m_l^{n,****} \\ (m_l u_l)^{n,****} = (m_l u_l)^{n,***} - \Delta t U_l^{n,****} \bar{\Gamma}(m_l^{n,****}) \\ (m_v u_v)^{n,****} = (m_v u_v)^{n,***} + (m_l u_l)^{n,***} - (m_l u_l)^{n,****} \\ (\alpha_l E_l)^{n,****} = (\alpha_l E_l)^{n,***} - \Delta t H_l^{n,****} \bar{\Gamma}(m_l^{n,****}) \\ (\alpha_v E_v)^{n,****} = (\alpha_v E_v)^{n,***} + (\alpha_l E_l)^{n,***} - (\alpha_l E_l)^{n,****} \end{array} \right. \quad (3.6.10)$$

En effet, les deux équations de quantité de mouvement forment alors un système sous-système fermé qui est en fait un système linéaire de deux équations et à deux inconnues  $u_l^{n,****}$  et  $u_v^{n,****}$  :

$$\left( \begin{array}{cc} (m_l^{n,****} + \delta t \bar{\Gamma}(m_l^{n,****})/2) & \delta t \bar{\Gamma}(m_l^{n,****})/2 \\ m_l^{n,****} & m_v^{n,****} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_l^{n,****} \\ u_v^{n,****} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_l u_l)^{n,***} \\ (m_l u_l + m_v u_v)^{n,***} \end{pmatrix} \quad (3.6.11)$$

On insiste sur le fait qu'une fois  $m_l^{n,****}$  connue, la matrice et le second membre de 3.6.11 sont connus. Pour que ce système linéaire accepte une unique solution, il faut que le discriminant soit non nul pour tous les états admissibles. Le discriminant  $\Delta_{G,u}$  de la matrice de 3.6.11 est :

$$\Delta_{G,u} = m_l^{n,****} m_v^{n,****} + (m_v^{n,****} - m_l^{n,****}) \frac{\delta t \bar{\Gamma}(m_l^{n,****})}{2}$$

En utilisant les équations de masse discrètes de 3.6.10, celui-ci peut s'écrire en fonction des conditions initiales

$$\Delta_{G,u} = \frac{m_l^{n,***} m_v^{n,***} + m_l^{n,***} m_v^{n,***}}{2}$$

et est donc strictement positif si les masses partielles sont strictement positives (ce qui est nécessaire pour que le modèle soit valide). De même, une fois les vitesses  $u_l^{n,****}$  et  $u_v^{n,****}$  calculées le sous-système composé des deux équations d'énergie est trivial à résoudre en considérant les énergies totales  $E_l^{n,****}$  et  $E_v^{n,****}$  comme inconnues.

Toute la difficulté du schéma réside donc dans la résolution de l'équation 3.6.9. En pratique la fonction

$$m_l^{n,****} \rightarrow \bar{\Gamma}(m_l^{n,****})$$

est fortement non-linéaire, elle est *a priori* continue<sup>4</sup> mais n'est pas forcément dérivable en tout point. Aucun résultat général n'existe actuellement pour garantir l'existence et l'unicité de la solution de 3.6.9. On peut toutefois établir le résultat simple suivant en posant  $F(Y) = m_l^{n,****} - Y - \Delta t \bar{\Gamma}(Y)$ . Comme  $\Gamma$  s'annule pour  $m_l = 0$  ou  $m_v = 0$  on a de façon triviale que  $F(0) = m_l^{n,****}$  et  $F(m_l^{n,****} + m_v^{n,****}) = -m_v^{n,****}$ . Donc, si  $F$  est continue et strictement monotone sur  $[0, m_l^{n,****} + m_v^{n,****}]$ , alors il existe une unique solution à 3.6.9. Ces remarques permettent d'établir la proposition 3.6.1.

**Proposition 3.6.1.** *Si  $F : Y \rightarrow (m_l^{n,****} - Y - \Delta t \bar{\Gamma}(Y))$  est continue et strictement monotone sur  $[0, m_l^{n,****} + m_v^{n,****}]$ , alors il existe une unique solution à 3.6.9. Si tel est le cas, alors il existe une unique solution pour le schéma 3.6.10.*

*Démonstration.* Les éléments de la démonstration de la proposition 3.6.1 ont été donnés ci-dessus. La continuité de  $F$

4. La continuité est assurée pour des lois d'état thermodynamiques définies continuellement sur les plans thermodynamique. Cela n'est plus forcément le cas pour des lois d'état tabulées utilisées dans le domaine industriel.

assure l'existence d'au moins une solution. Si  $F$  est continue, l'unicité est assurée par la monotonie stricte.  $\square$

La proposition 3.6.1 permet donc d'affirmer que le schéma 3.6.10 fournit une unique solution  $W_v^{n,****}$  sous certaines conditions (suffisantes) portées par les lois d'état thermodynamiques. En ce qui concerne la positivité, on a déjà vu que la positivité des masses partielles est assurée. Les taux de présence restant constants, ils resteront donc positifs. En ce qui concerne les énergies internes, les équations 3.6.6 et les équations de masse garantissent au niveau continu que si les énergies internes spécifiques initiales sont positives, alors les énergies internes spécifiques resteront positives. Malheureusement le schéma ne permet pas de retrouver au niveau discret les équations 3.6.7 et les équations 3.6.6 ne sont donc pas conservées au niveau discret.

Le schéma implicite ainsi proposé possède des propriétés intéressantes mais doit encore être amélioré. On peut ainsi chercher à modifier le schéma pour que les vitesses  $u_v^{n,****}$  et  $u_l^{n,****}$  soient compatibles avec une forme discrète de 3.6.7, ce qui permettrait de retrouver 3.6.6 au niveau discret. D'autres variantes seraient à étudier, notamment celles obtenues en explicitant le terme de normalisation  $|\mu_v| + |\mu_l|$ . L'avantage de ce choix est d'obtenir une fonction  $F$  plus régulière dans le cas de lois d'état analytiques, et donc plus susceptible de rentrer dans le cadre de la proposition 3.6.1.

---

## Validation du modèle bifluide complet, comparaison bifluide/homogène/expérience

---

### 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'éprouver la représentativité physique du modèle bifluide à deux pressions précédemment détaillé. On considère, dans ce chapitre, uniquement le fluide sans la prise en compte d'éventuels couplages avec la structure.

Au cours d'un transitoire hydraulique, l'écoulement peut présenter plusieurs régimes très différents : monophasique, gaz ou liquide, diphasique, dispersé à bulles, gouttelettes ou stratifié. Il est donc, dans un premier temps, indispensable de vérifier dans quelles conditions le modèle bifluide permet de retrouver les phénomènes monophasiques, le taux de présence de vapeur (et celui du liquide) ne pouvant pas être nul pour ce modèle. Si cela est possible, il est nécessaire d'estimer la valeur seuil du taux de présence de vapeur en dessous de laquelle le comportement de l'écoulement peut être considéré comme étant monophasique liquide. Un cas-test de vérification représentant la fermeture brutale d'une vanne à l'extrémité d'un tuyau rempli d'eau liquide est ainsi retenu pour répondre à ces questions. De la même manière, afin d'examiner la capacité du modèle bifluide à représenter la célérité des ondes de pression dans un mélange liquide/air, un cas-test de propagation d'un signal de pression est également considéré. En effet, comme nous l'avons vu, le modèle bifluide est caractérisé par deux célérités phasiques. Il est donc pertinent d'analyser la vitesse de propagation d'un signal de pression dans un mélange. Pour ces deux cas-tests, comme il n'y a pas de changement de phase, seuls les termes de relaxation des pressions et des vitesses sont pris en compte. Par ailleurs, les équilibres associés sont supposés quasi instantanés dans ces deux cas.

La validation proprement dite du modèle bifluide est faite ensuite par l'intermédiaire de comparaisons avec, d'une part, des données expérimentales et, d'autre part, avec les résultats numériques obtenus avec des modélisations homogènes. Les modélisations homogènes retenues ici sont le modèle à cinq équations [70] et le modèle HRM utilisant une loi d'état basée sur les tables de l'eau [57]. Pour effectuer la validation du modèle bifluide, deux dispositifs expérimentaux sont examinés. Le premier est celui décrit par Simpson [72] pour étudier les coups de bélier dans les tuyauteries. Selon l'amplitude de la vitesse initiale du liquide, des changements de phase peuvent apparaître. Ce test est bien documenté avec des données expérimentales détaillées. Ce dispositif est d'ailleurs largement utilisé pour la validation d'outils numériques dédiés à la simulation des coups de bélier [24]. Le deuxième dispositif étudié est celui de l'expérience Canon [63] représentant la décompression rapide d'un fluide haute pression dans une tuyauterie. Ce type de phénomène est présent, par exemple, lors des transitoires hydrauliques intervenant en cas de rupture de tuyauterie. Là encore, les résultats numériques obtenus avec le modèle bifluide sont comparés aux résultats expérimentaux et aux résultats obtenus avec les modèles homogènes.

## 4.2 Vérifications préliminaires du modèle bifluide

### 4.2.1 Propagation d'une onde de pression dans un liquide monophasique

Le but de cette étude est de répondre aux questions suivantes :

- Le modèle bifluide à deux pressions permet-il de simuler un phénomène de coup de bélier quasi monophasique avec un taux de présence de vapeur  $\alpha_v$  très faible ?
- Si cela est possible, quelle est la sensibilité au choix de la valeur de  $\alpha_v$  ?
- Quelle est l'influence du choix de la loi d'état considérée pour le liquide ?
- Quelle est l'influence des effets de relaxation des pressions et des vitesses ?

Ces questions s'imposent car, comme nous le verrons par la suite, l'écoulement est quasi monophasique au début de l'expérience menée par Simpson. Nous considérons ici une tuyauterie rigide. Le gonflement du tuyau n'est pas pris en compte tout comme son influence sur la célérité des ondes dans le fluide.

#### Coups de bélier monophasiques

Des augmentations de pression apparaissent lors de la variation brusque de la vitesse d'un liquide à la fermeture/ouverture rapide d'une vanne/robinet, ou bien à la suite de l'arrêt d'une pompe. Ces phénomènes, nommés coups de bélier, sont très violents et rapides. Ils peuvent générer des efforts mécaniques importants sur les installations selon l'amplitude des surpressions générées par le coup de bélier. Une variation rapide de la vitesse du fluide provoque l'apparition d'une onde de pression qui se propage le long de la conduite. La célérité des ondes notée  $c_l$  dépend uniquement des caractéristiques du fluide pour une conduite supposée infiniment rigide. La variation de pression  $\Delta p_l$  en fonction de la variation de vitesse  $\Delta u_l$  est donnée par la formule de Joukowsky [46] :

$$\Delta p_l = \rho_l c_l \Delta u_l \quad (4.2.1)$$

La formule de Joukowsky est très souvent utilisée en ingénierie pour estimer l'amplitude des coups de bélier monophasiques dans les circuits de tuyauterie. Il s'agit d'une approximation de la solution exacte du problème de Riemann associé à l'onde de choc générée par la fermeture du tuyau. Par contre, pour les phénomènes diphasiques en présence de cavitation ou de condensation, l'estimation devient plus difficile.

#### Configuration et paramètres numériques

On considère une conduite de longueur  $L = 36$  m à l'intérieure de laquelle un écoulement monophasique liquide à pression et vitesse constantes est établi. On étudie les phénomènes résultant de la fermeture brusque d'une vanne située à la sortie du tuyau (cf. figure 4.1). On utilise ici un maillage unidimensionnel comportant entre  $10^2$  et  $10^5$  mailles.

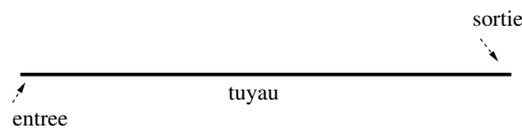


FIGURE 4.1 – Configuration étudiée pour la simulation de la propagation d'une onde de pression dans un liquide monophasique.

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_v(x, t = 0) &= (\rho_v)_0 &= 2.6121 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ \rho_l(x, t = 0) &= (\rho_l)_0 &= 997 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ u_v(x, t = 0) &= u_l(x, t = 0) &= u_0 = 0.4 \text{ (m/s)} \\ p_v(x, t = 0) &= p_l(x, t = 0) &= p_0 = 3.419 \text{ (bar)} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

où  $x$  désigne l'abscisse mesurée à partir de l'entrée du tuyau et  $t$  le temps.

On considère pour ce cas uniquement l'équilibre asymptotique des pressions et des vitesses entre les phases. Ainsi les relaxations des températures et des potentiels chimiques ne sont pas prises en compte (formellement  $\tau_T = \tau_g = +\infty$ ). Le temps de relaxation des pressions  $\tau_p$  est fixé à la valeur de  $10^{-10}$  s et celui de relaxation des vitesses  $\tau_u$  à  $10^{-10}$  s, afin que les pressions et les vitesses des deux phases soient en équilibre quasi-instantanément. En effet, dans ce cas, le pas de temps ( $\Delta t \approx 10^{-7}$  s pour le maillage le plus fin) est toujours beaucoup plus grand que les temps caractéristiques de relaxation. D'autre part, on applique des conditions aux limites de type Neumann à l'entrée (à gauche) et une condition de paroi en sortie (à droite) au temps  $t = 0$ .

Nous évaluons dans ce qui suit, les influences respectives de la valeur du taux de présence de la vapeur, de la loi d'état utilisée pour la phase liquide, des effets de la relaxation et de la finesse du maillage.

### Influence du taux de présence de vapeur sur le caractère monophasique de l'écoulement

Les résultats présentés dans cette section sont associés à un choix de thermodynamique gaz parfait (GP) pour la vapeur et "stiffened gas" (SG) pour la phase liquide. Les paramètres des lois d'états présentés ci-dessous sont issus des études de la dynamique des ondes de choc dans l'eau [56]. Dans notre cas, le paramètre  $(p_l)_\infty$  est modifié pour obtenir une meilleure approximation de la vitesse du son dans le liquide.

$$\begin{cases} \gamma_v = 1.43, \\ \gamma_l = 5.5, \quad (p_l)_\infty = 3.8078 \times 10^8 \text{ Pa}, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Le temps final a été fixé à  $t = 0.02$  s après la fermeture de la vanne située à l'extrémité du tuyau. Le nombre  $CFL$  choisi est 0.45. Les calculs ont été réalisés en utilisant 8 valeurs différentes de  $(\alpha_l)$  sur 3 maillages différents. Les valeurs de  $(\alpha_l)$  sont respectivement  $(1 - 10^{-2}, 1 - 10^{-3}, 1 - 10^{-4}, 1 - 10^{-5}, 1 - 10^{-6}, 1 - 10^{-7}, 1 - 10^{-8}, 1 - 10^{-9})$ . Les maillages comportent respectivement  $10^2, 10^3$  et  $10^4$  mailles.

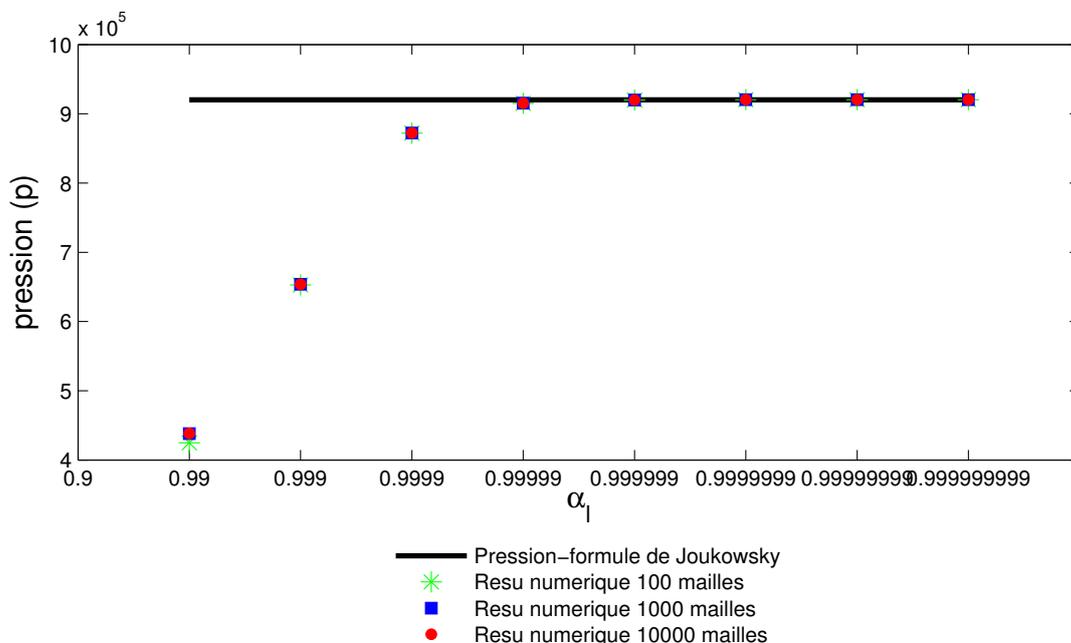


FIGURE 4.2 – Evaluation de l'accroissement de la pression du mélange  $p = \alpha_l p_l + \alpha_v p_v$  après la fermeture de la vanne située à l'extrémité du tuyau, pour le choix gaz-GP, liquide-SG, en fonction du taux de présence  $\alpha_l$  et pour différents maillages.

La valeur de l'amplitude de l'onde de pression réfléchie obtenue en utilisant la formule de Joukowsky est :

$$p_l = \Delta p_l + (p_l)_0 = 9.2016 \times 10^5 \text{ Pa}$$

où,

$$\Delta p_l = (\rho_l)_0 c_l \Delta u_l \quad (4.2.4)$$

$$c_l = \sqrt{\frac{\gamma_l((p_l)_0 + (p_l)_\infty)}{(\rho_l)_0}}$$

On compare maintenant la pression du mélange définie par  $p = \alpha_l p_l + \alpha_v p_v$  obtenue avec le modèle bifluide à cette valeur. En observant la figure 4.2, il apparaît que les résultats numériques issus de la simulation du modèle bifluide sont de plus en plus proches de la valeur donnée par la formule de Joukowsky, lorsque  $\alpha_l$  se rapproche de 1. Lorsque  $\alpha_l$  est supérieur à  $1 - 10^{-6}$ , l'écart est inférieur à 0.1% (cf. figure 4.3).

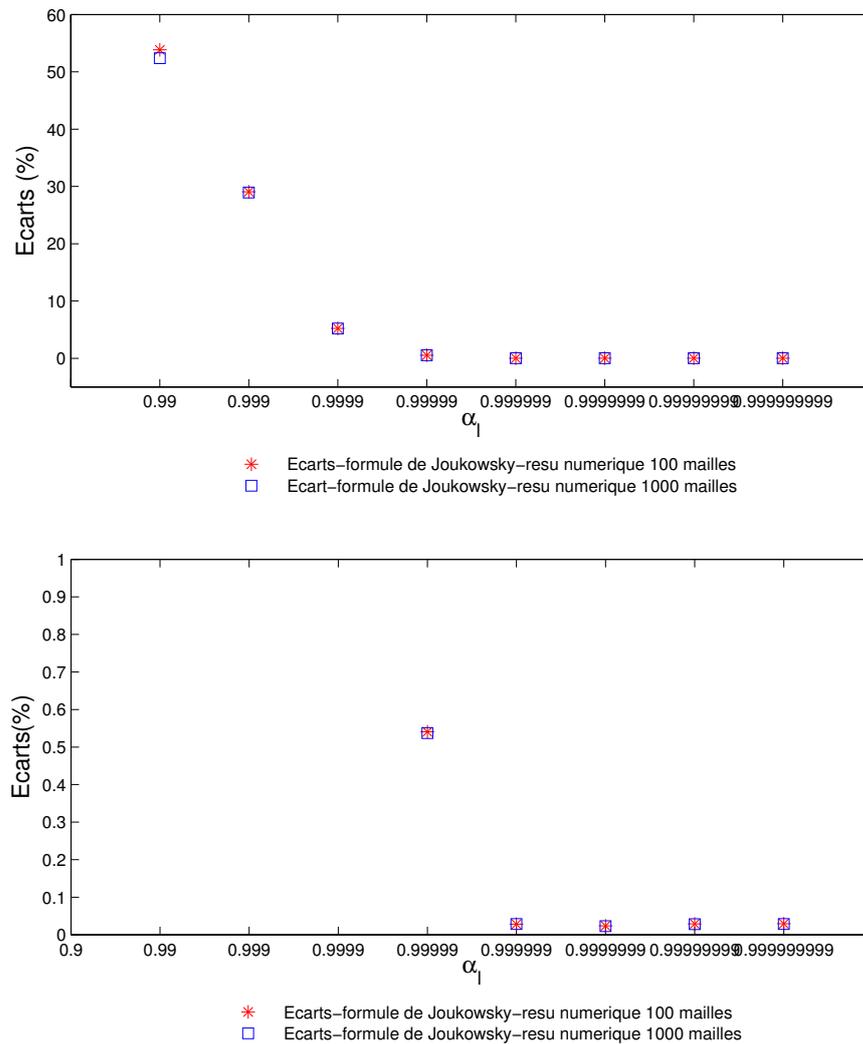


FIGURE 4.3 – Ecart relatif en pression entre la valeur donnée par la formule de Joukowsky et les valeurs numériques de la pression du mélange obtenues pour différentes valeurs de  $\alpha_l$  et différents maillages.

### Influence du choix de la loi d'état pour la phase liquide

Dans la littérature associée au modèle bifluide, les lois d'états utilisées pour les deux fluides sont, en général, toutes les deux de type GP [27, 39]. Nous souhaitons ici vérifier la représentativité physique de ce type de loi pour la phase

liquide. Par conséquent, nous comparons deux calculs effectués avec le modèle bifluide en conjonction avec une loi d'état GP pour la vapeur et pour le liquide (noté par la suite cas GPGP), et une loi d'état GP pour la vapeur et SG pour le liquide (noté cas GPSG). Les conditions initiales considérées sont identiques à celles précisées dans l'équation 4.2.2. Au vu des résultats précédents le taux de présence de la vapeur est initialement pris à  $(\alpha_v)_0 = 10^{-6}$  et le maillage retenu comporte  $10^5$  mailles.

Les paramètres des lois d'état sont :

– cas vapeur (GP) + liquide (GP) :

$$\begin{cases} \gamma_v = 1.4, \\ \gamma_l = 1.01, \end{cases} \quad (4.2.5)$$

– cas vapeur (GP) + liquide (SG) :

$$\begin{cases} \gamma_v = 1.43, \\ \gamma_l = 5.5, \quad (p_l)_\infty = 3.8078 \times 10^8 \text{ Pa}, \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Les approximations numériques du taux de présence  $\alpha_l$  et des variables du mélange  $m$ ,  $u$ ,  $p$  définies ci-dessous :

$$\begin{cases} m = \alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v \\ u = \frac{\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_v \rho_v u_v}{m} \\ p = \alpha_l p_l + \alpha_v p_v \end{cases} \quad (4.2.7)$$

sont présentées sur la figure 4.4 pour le cas GPSG et sur la figure 4.5 pour le cas GPGP.

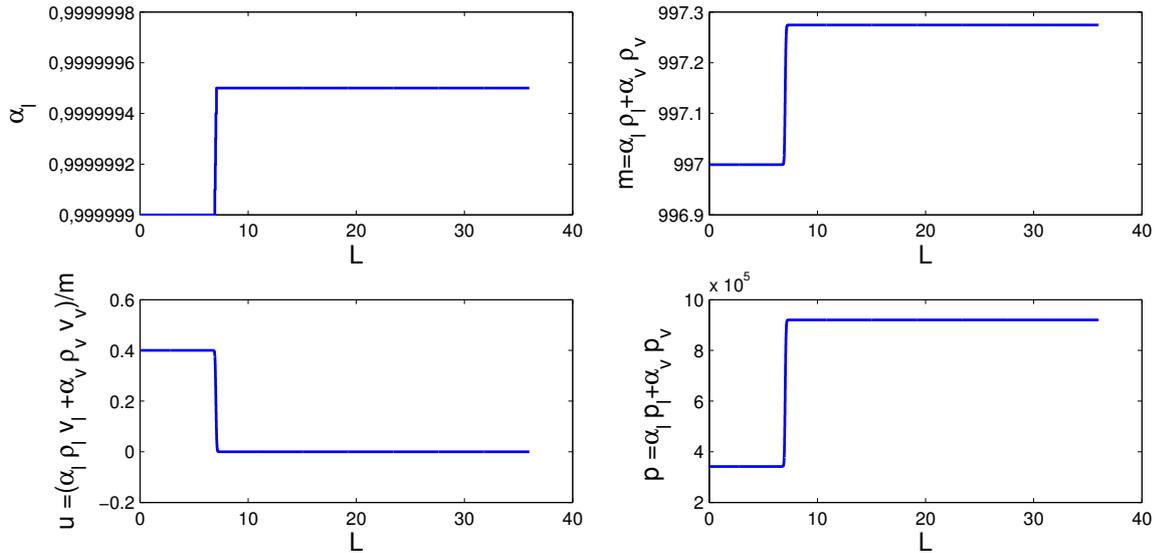


FIGURE 4.4 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l$ ,  $m$ ,  $u$ ,  $p$  pour le cas test du coup de bélier monophasique, avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-6}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.02 \text{ s}$ , avec un choix GPSG et un maillage de  $10^5$  mailles.

Les résultats du cas GPSG sont très différents de ceux du cas GPGP. La masse volumique du mélange dans le premier cas varie très peu ( $< 0.03\%$ ). On définit  $d$  la distance séparant l'abscisse du milieu du front d'onde à  $t = 0.02 \text{ s}$  et celle de la vanne à droite. En divisant  $d$  par le temps de propagation  $T = 0.02 \text{ s}$ , on obtient une approximation de la vitesse du front de l'onde de choc réfléchi. La valeur ainsi définie est environ de  $1449.0 \text{ m/s}$  pour le cas GPSG, et est donc très proche de la valeur afférente au cas monophasique liquide ( $1450 \text{ m/s}$ ) présentée dans le paragraphe précédent. De plus, comme nous l'avons déjà remarqué, la pression maximale obtenue après la fermeture de la vanne avec le choix des lois d'état GPSG, soit  $9.19 \text{ bar}$ , correspond bien à la valeur calculée avec la formule de Joukowsky 4.2.1, soit  $9.20 \text{ bar}$ .

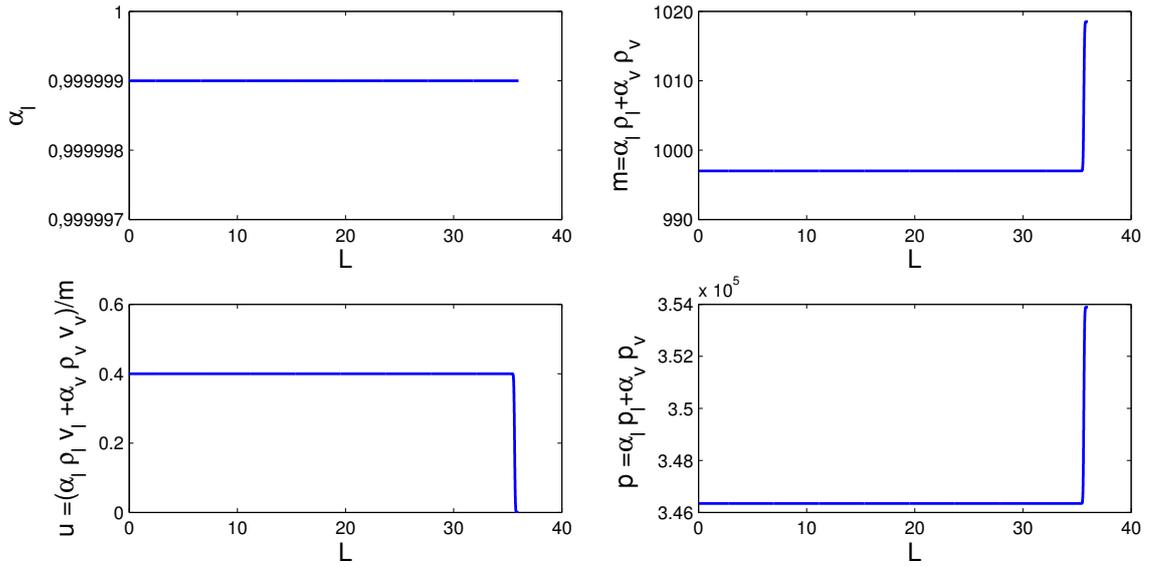


FIGURE 4.5 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l, m, u, p$  pour le cas test du coup de bélier monophasique, avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-6}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.02$  s, avec un choix GPGP et un maillage de  $10^5$  mailles.

Pour le cas GPGP, la masse volumique du mélange varie beaucoup plus que dans le cas précédent (de l'ordre de 3%), mais l'onde réfléchie se propage beaucoup plus lentement (environ  $18.55$  m/s), et le niveau de pression maximale est beaucoup plus faible. Ceci est lié à la loi d'état GP qui ne permet pas de retrouver la vitesse du son dans le liquide. En effet, la valeur de cette dernière est :

$$c_l^{GP} = \sqrt{\frac{\gamma_l(p_l)_0}{(\rho_l)_0}} = 18.61 \text{ m/s} \quad (4.2.8)$$

L'approximation de pression maximale obtenue après la fermeture de la vanne avec le choix des lois d'état GPGP ( $3.494 \times 10^5$  Pa) est très proche de celle calculée par la formule de Joukowsky (cf. équation 4.2.9).

$$\begin{aligned} \Delta p_l &= (\rho_l)_0 c_l \Delta u_l = 997 \times 0.4 \times 18.61 = 7.54 \times 10^3 \text{ Pa} \\ p_l &= \Delta p_l + (\rho_l)_0 = 3.493 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Ce cas-test montre l'importance d'obtenir une bonne approximation de la célérité des ondes dans la phase liquide pour représenter de manière satisfaisante un coup de bélier monophasique liquide.

Les résultats obtenus pour les différentes variables de chaque phase sont présentés pour les deux cas considérés sur les figures 4.6 et 4.7 respectivement. Pour tous les cas, on remarque que les pressions et les vitesses de chaque phase sont quasiment égales.

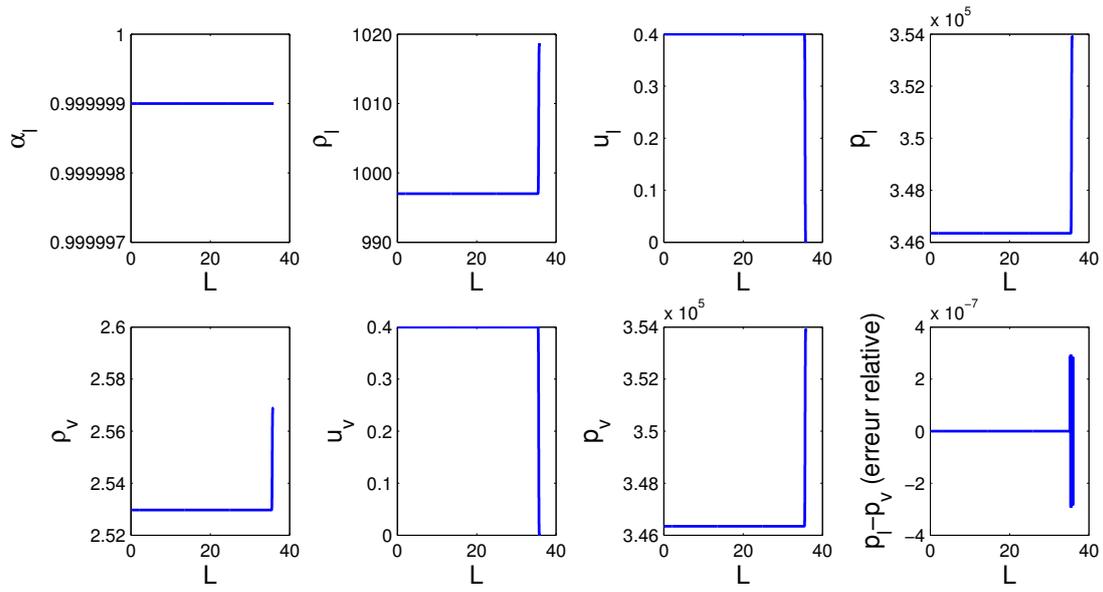


FIGURE 4.6 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l, \rho_\phi, u_\phi, p_\phi, \phi = l, v$ , pour le cas du coup de bélier monophasique, avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-6}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.02 s$ , avec un choix GPGP et un maillage de  $10^5$  mailles.

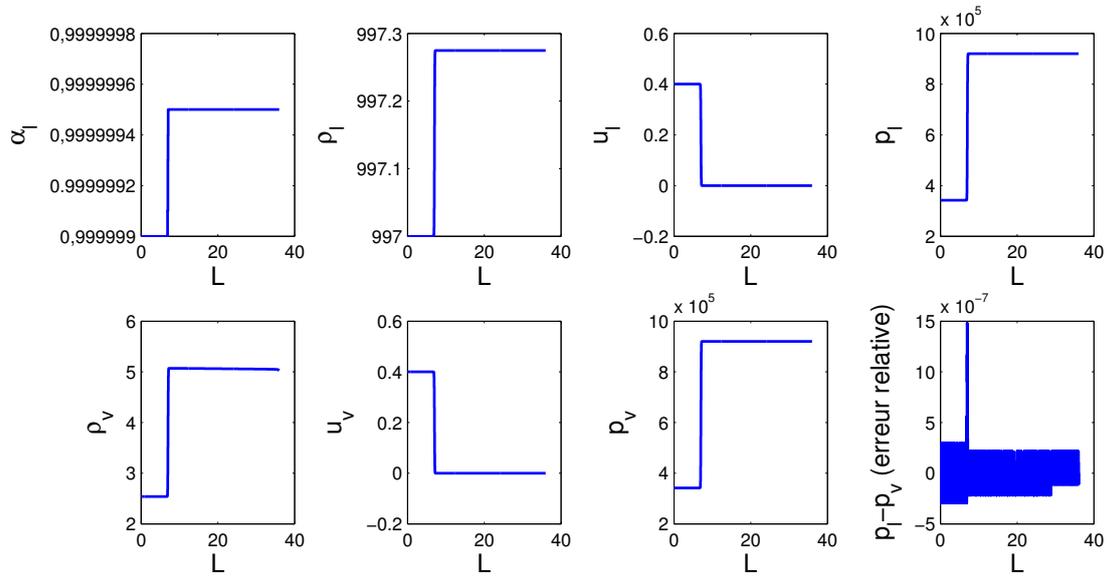


FIGURE 4.7 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l, \rho_\phi, u_\phi, p_\phi, \phi = l, v$  pour le cas du coup de bélier monophasique, avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-6}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.02 s$ , avec un choix GPSG et un maillage de  $10^5$  mailles.

### Influence de la relaxation

Les conditions initiales utilisées dans cette section sont légèrement différentes de celles données ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \rho_v(x, t = 0) &= (\rho_v)_0 &= 2.5296 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\
 \rho_l(x, t = 0) &= (\rho_l)_0 &= 995 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\
 u_v(x, t = 0) &= u_l(x, t = 0) &= u_0 = 5 \text{ (m/s)} \\
 p_v(x, t = 0) &= p_l(x, t = 0) &= p_0 = 3.4634 \text{ (bar)}
 \end{aligned}
 \tag{4.2.10}$$

Le taux de présence initial est  $(\alpha_l)_0 = 0.99$ . Les lois thermodynamiques sont de type GP pour les deux phases, les paramètres associés sont :

$$\begin{cases} \gamma_v = 1.4, \\ \gamma_l = 1.01, \end{cases}
 \tag{4.2.11}$$

Les résultats numériques à  $t = 0.1 \text{ s}$ ,  $1 \text{ s}$  pour le modèle bifluide sont présentés sur les figures 4.8, 4.9 et 4.10. Ils correspondent à deux simulations distinctes : la première ne prend pas en compte les termes sources de déséquilibre en pression et vitesse (formellement  $\tau_p = \tau_u = \infty$ ) ; la seconde considère des temps de relaxation en pression et en vitesse respectivement égaux à  $\tau_p = 10^{-6} \text{ s}$ ,  $\tau_u = 10^{-4} \text{ s}$ . Ces résultats sont obtenus avec un maillage de  $10^4$  mailles.

Sans les termes sources,  $\alpha_l$  reste constant selon  $x$  et  $t$  ; on peut donc calculer la solution exacte, en utilisant les relations de saut associées aux ondes de choc pour chaque phase. Les solutions exactes pour les différentes variables à droite des ondes de choc réfléchies sont données par :

$$\begin{aligned}
 \rho_l &= 1.29 \times 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}, & \rho_v &= 2.56 \text{ (kg/m}^3\text{)}, \\
 u_l &= 0 \text{ (m/s)}, & u_v &= 0 \text{ (m/s)}, \\
 p_l &= 4.53 \times 10^5 \text{ (Pa)}, & p_v &= 3.52 \times 10^5 \text{ (Pa)},
 \end{aligned}
 \tag{4.2.12}$$

L'erreur relative entre les approximations numériques obtenues avec un maillage de  $10^4$  mailles et les solutions exactes est toujours inférieure à 0.1%. Les pressions et les vitesses issues du calcul ne tenant pas compte des termes sources sont en fort déséquilibre, alors que celles provenant du calcul avec les termes de relaxation sont en quasi-équilibre. Les différentes variables du mélange  $m, u, p$  obtenues avec les deux calculs sont par contre très proches, ce qui n'était pas évident puisque le taux de présence de vapeur initial n'est pas totalement négligeable ( $(\alpha_v)_0 = 10^{-2}$ ).

### Influence du maillage

Pour ce test, les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned}
 \rho_v(x, t = 0) &= (\rho_v)_0 &= 2.6121 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\
 \rho_l(x, t = 0) &= (\rho_l)_0 &= 1396.2 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\
 u_v(x, t = 0) &= u_l(x, t = 0) &= u_0 = 5 \text{ (m/s)} \\
 p_v(x, t = 0) &= p_l(x, t = 0) &= p_0 = 3.4634 \text{ (bar)}
 \end{aligned}
 \tag{4.2.13}$$

Les lois d'état sont de type GP pour la vapeur et SG pour le liquide. Les paramètres associés sont :

$$\begin{cases} \gamma_v = 1.43, \\ \gamma_l = 2.35, (p_l)_\infty = 1 \times 10^9, \end{cases}
 \tag{4.2.14}$$

Le taux de présence initial du liquide vaut :  $(\alpha_l)_0 = 0.99$ . Les temps de relaxation sont  $\tau_p = 10^{-6} \text{ s}$ ,  $\tau_u = 10^{-4} \text{ s}$ . Les calculs sont présentés à  $t = 0.02 \text{ s}$ . Les résultats pour les différentes variables sont présentés sur les figures 4.11 et 4.12, en considérant 4 maillages de  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$  et  $10^5$  mailles. Pour avoir des valeurs stabilisées du débit vapeur, il est nécessaire d'avoir un maillage très fin comportant plus de  $10^4$  mailles (cf. figure 4.13).

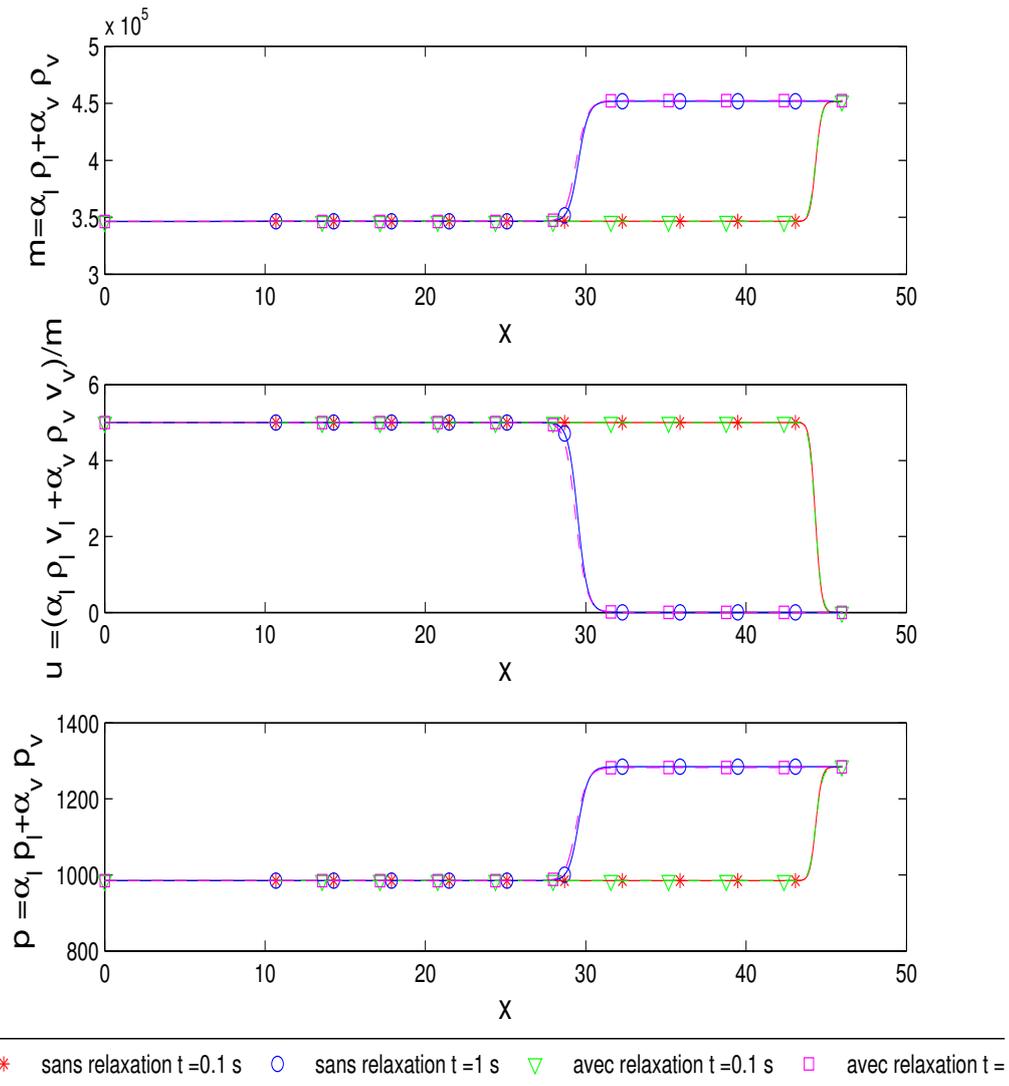


FIGURE 4.8 – Approximations numériques des variables  $m, u, p$  pour le cas test du coup de bélier monophasique avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-2}$ ,  $CFL = 0.4$ ,  $t = 0.1$  s, 1 s, sans prendre en compte les termes de relaxation, ou avec les termes de relaxation :  $\tau_p = 10^{-6}$  s,  $\tau_u = 10^{-4}$  s, avec un choix GPGP et un maillage de  $10^4$  mailles.

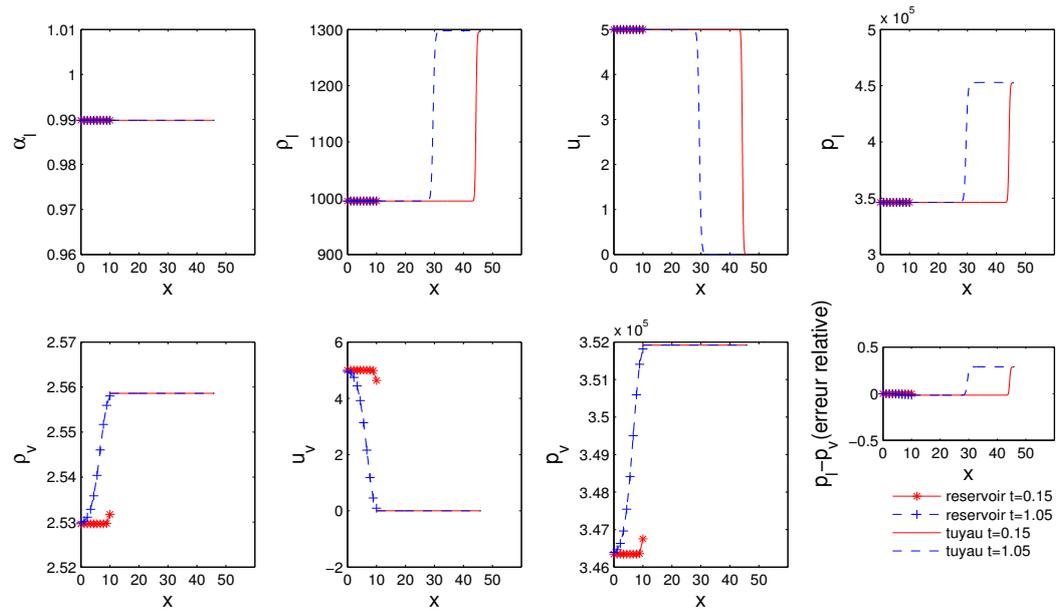


FIGURE 4.9 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l, \rho_\phi, u_\phi, p_\phi, \phi = l, v$ , pour le cas test du coup de bélier monophasique avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-2}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.1 s, 1 s$ , sans prendre en compte la relaxation, avec un choix GPGP et un maillage de  $10^4$  mailles.

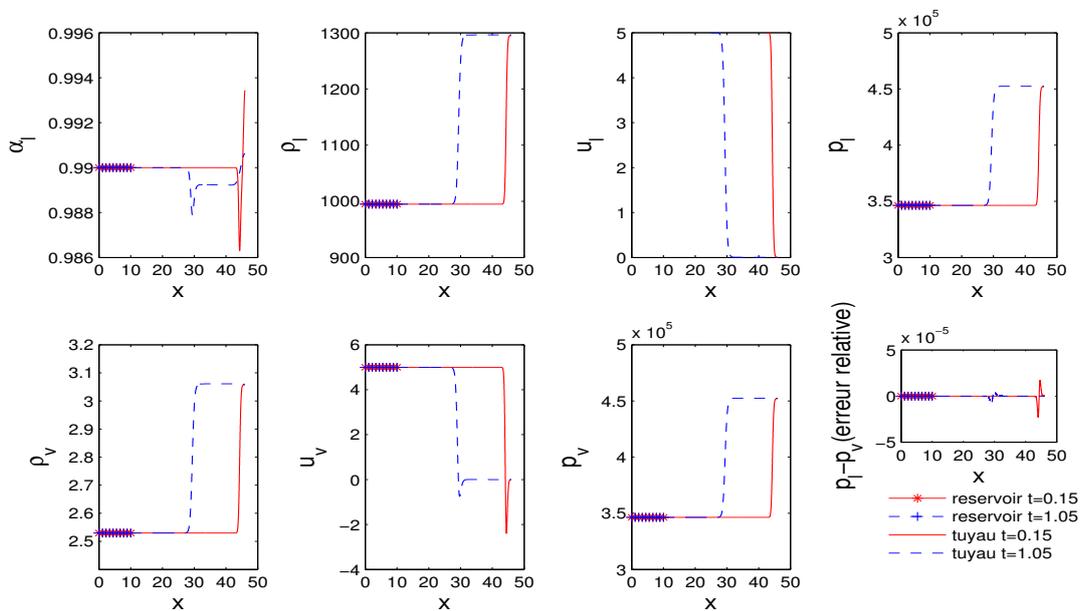


FIGURE 4.10 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l, \rho_\phi, u_\phi, p_\phi, \phi = l, v$ , pour le cas test de coup de bélier monophasique avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-2}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.1 s, 1 s$ , avec  $\tau_p = 10^{-6} s, \tau_u = 10^{-4} s$ , avec un choix GPGP et un maillage de  $10^4$  mailles.

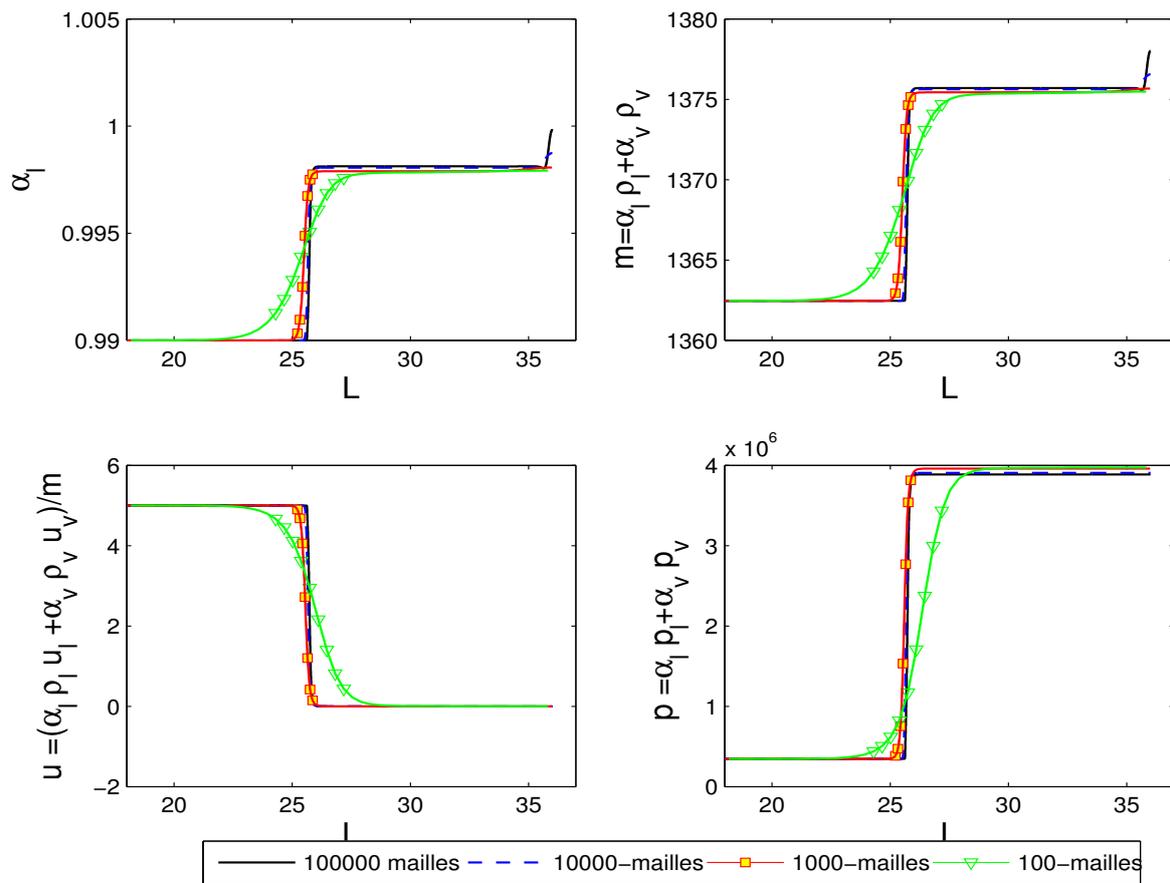


FIGURE 4.11 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l, m, u, p$ , pour le cas test du coup de bélier monophasique, avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-2}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.02$  s, avec un choix GPSG et des maillages comportant  $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$  mailles.

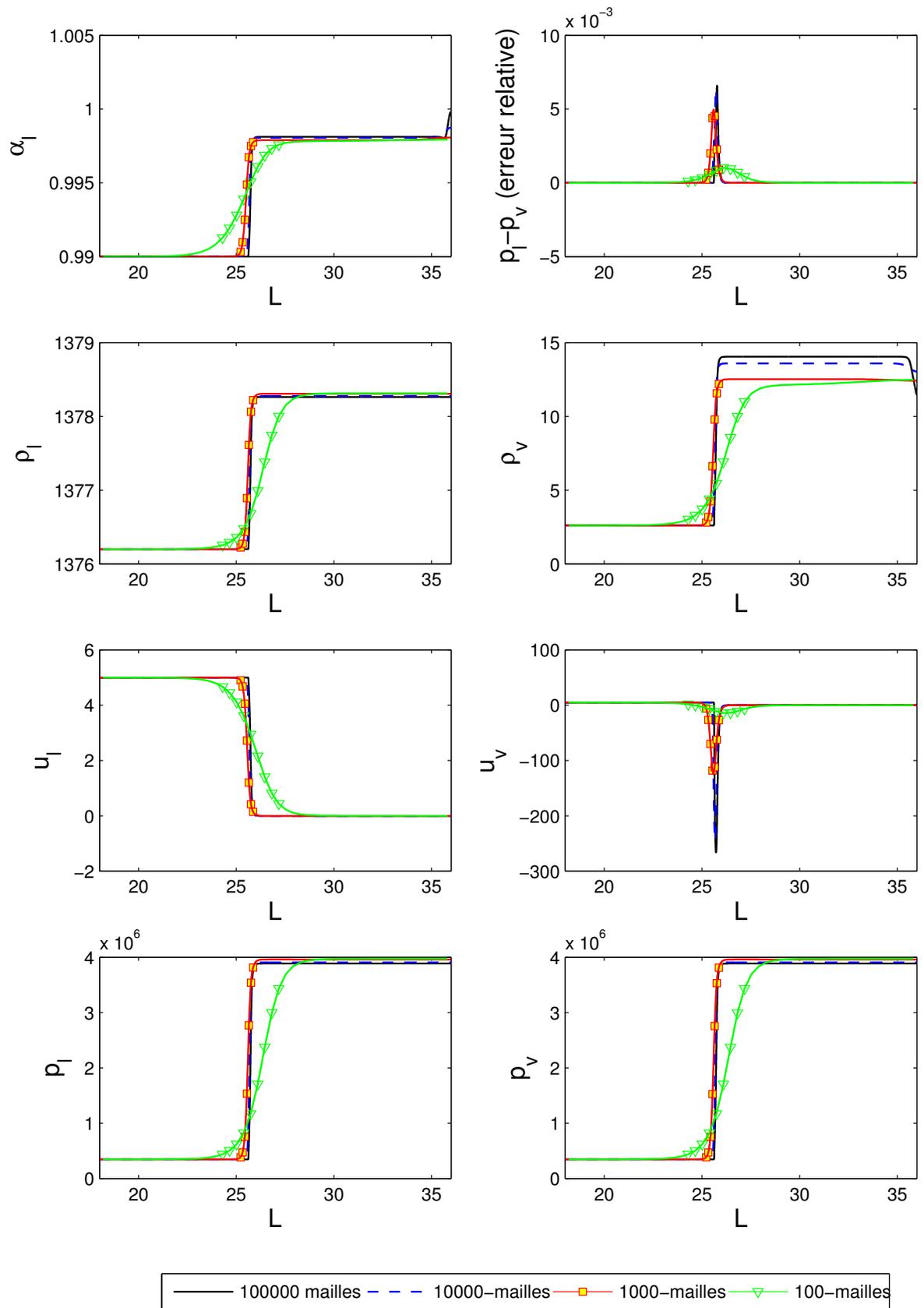


FIGURE 4.12 – Approximations numériques des variables  $\alpha_l, \rho_l, u_l, p_l, \alpha_v, \rho_v, u_v, p_v$ , pour le cas test du coup de bélier monophasique, avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-2}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.02$  s, avec un choix GPSG et des maillages comportant  $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$  mailles.

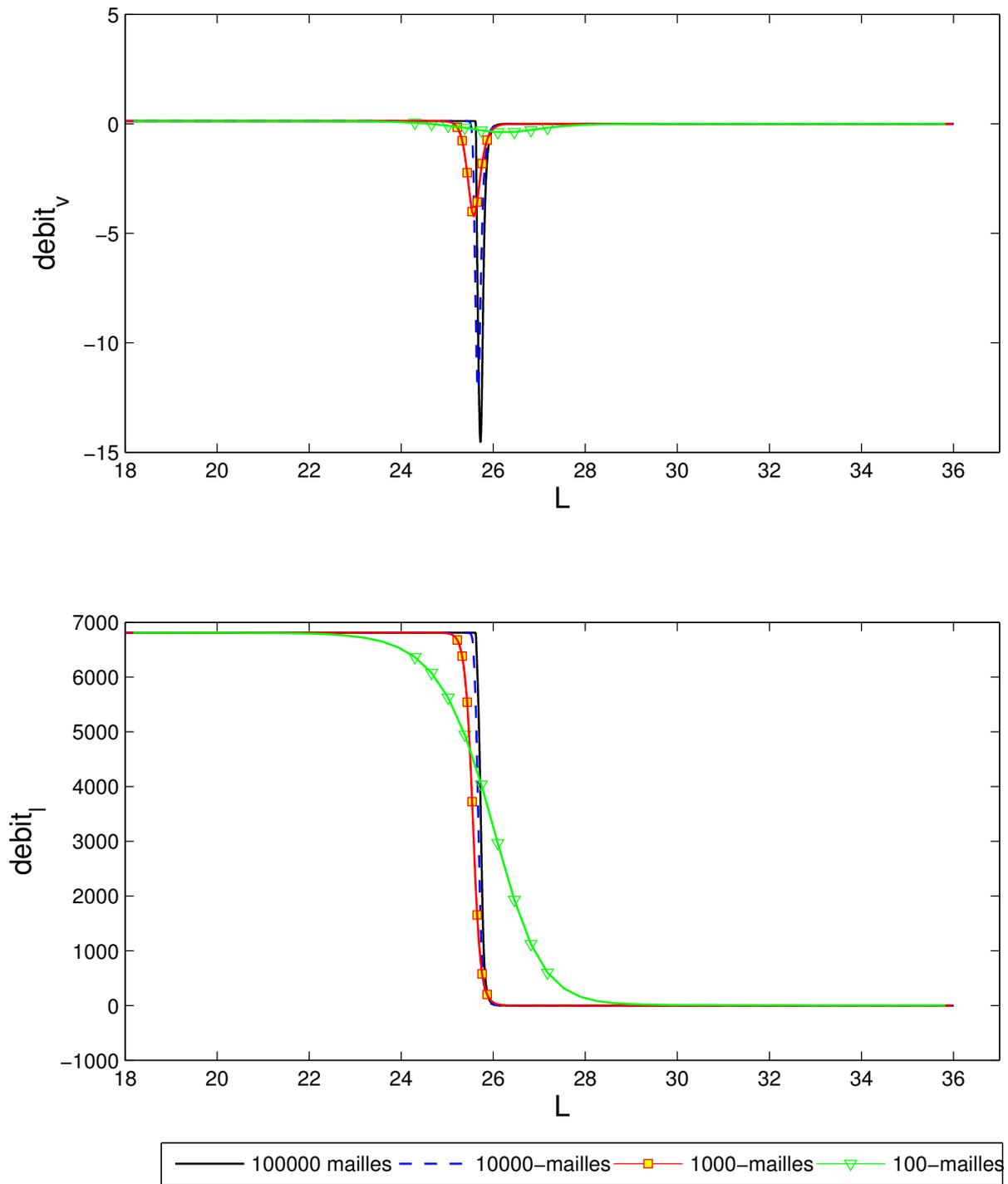


FIGURE 4.13 – Approximations numériques du débit volumique de chaque phase  $debit_\phi = \alpha_\phi \rho_\phi u_\phi$ ,  $\phi = l, v$ , pour le cas test du coup de bélier monophasique, avec  $(\alpha_l)_0 = 1 - 10^{-2}$ ,  $CFL = 0.45$ ,  $t = 0.02$  s, avec un choix GPSG et des maillages comportant  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  mailles.

## 4.2.2 Vitesse de propagation d'un signal de pression dans un mélange liquide/vapeur

Lors d'un coup de bélier, la pression dans le liquide peut varier fortement. Lorsque cette dernière atteint la pression de saturation, le phénomène de cavitation apparaît : de la vapeur est ainsi créée. La présence de vapeur dans le liquide influence fortement la célérité des ondes acoustiques qui peut être très largement inférieure aux célérités de chacune des phases [10]. Il est donc nécessaire d'évaluer la capacité du modèle bifluide à représenter ce phénomène. Or, il est à noter que le concept de vitesse du son du mélange n'est pas explicitement défini dans le modèle bifluide puisque ce dernier ne fait intervenir que les célérités de chacune des deux phases. Dans le cas où les relaxations de pressions et de vitesses sont quasi-instantanées, les pressions des deux phases se propagent pratiquement à la même vitesse. On peut donc, dans ce cas particulier, définir une "pseudo vitesse du son du mélange" comme cela va être décrit par la suite.

### Configuration et paramètres numériques

On considère un maillage 1D similaire à celui de la section 4.1. Sa longueur est  $L = 1$  m. Les conditions initiales utilisées pour le test sont :

$$\begin{aligned}\rho_v(x, t = 0) &= (\rho_v)_0 &= 1.2 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ \rho_l(x, t = 0) &= (\rho_l)_0 &= 997 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ u_v(x, t = 0) &= u_l(x, t = 0) &= u_0 = 0 \text{ (m/s)} \\ p_v(x, t = 0) &= p_l(x, t = 0) &= p_0 + \delta_p(x)\end{aligned}\quad (4.2.15)$$

avec

$$\begin{aligned}p_0 &= 10^5 \text{ (Pa)} \\ \delta_p(x) &= \varepsilon_p e^{-\left(\frac{x-x_m}{\sigma}\right)^2} \\ \varepsilon_p &= 100 \text{ (Pa)} \\ x_m &= 0.5 \text{ (m)} \\ \sigma &= \frac{1}{20} \text{ (m)}\end{aligned}\quad (4.2.16)$$

Là encore, seules les relaxations des pressions et des vitesses entre les deux phases sont considérées (formellement  $\tau_T = \tau_g = +\infty$ ). Les temps de relaxation des pressions et des vitesses sont :  $\tau_p = 10^{-10}$  s et  $\tau_u = 10^{-10}$  s pour avoir des relaxations quasi-instantanées. Les conditions aux limites sont de type Neumann homogène en entrée et sortie du domaine.

La solution régulière obtenue est symétrique par rapport à  $x_m$ . La gaussienne de pression initiale se scinde en deux structures analogues se déplaçant vers la droite et la gauche respectivement. Pour un maillage suffisamment fin (comportant plus de  $10^4$  mailles), les erreurs de dispersion ne sont plus visibles. On introduit une estimation de la vitesse de propagation du profil de pression initial en utilisant le rapport  $c_{pulse} = d/T$ , où  $d$  est la distance parcourue par le maximum de pression de la structure convectée à l'instant  $t = T$ . On cherche ici à voir l'influence du taux de présence d'air sur la vitesse de propagation ainsi définie. Les valeurs discrètes de la "pseudo célérité du mélange" ainsi obtenues sont comparées à celles calculées à l'aide de la formule de Wallis rappelée ci-dessous.

### Formule de Wallis

La formule de Wallis [78] propose une définition de la vitesse du son dans un mélange diphasique eau/air. Elle est exprimée en fonction des taux de présence, des densités et des vitesses du son de chaque phase et s'écrit sous la forme ci-dessous :

$$\frac{1}{m c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha_l}{\rho_l c_l^2} + \frac{\alpha_v}{\rho_v c_v^2}, \text{ avec } m = \alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v \quad (4.2.17)$$

Selon [10], cette formule fournit une bonne approximation de la vitesse du son d'un mélange d'eau et d'air pour de faibles valeurs de la fréquence du signal et lorsqu'il n'y a pas de transfert de masse entre les phases.

### Simulation et résultats

Les vitesses du son numériques  $c_{pulse}$  sont calculées avec 15 valeurs différentes de  $(\alpha_l)$  qui sont :  $(10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 0.3, 0.5, 0.7, 1 - 10^{-1}, 1 - 10^{-2}, 1 - 10^{-3}, 1 - 10^{-4}, 1 - 10^{-5}, 1 - 10^{-6}, 1 - 10^{-7})$  sur 3 maillages ( $10^2,$

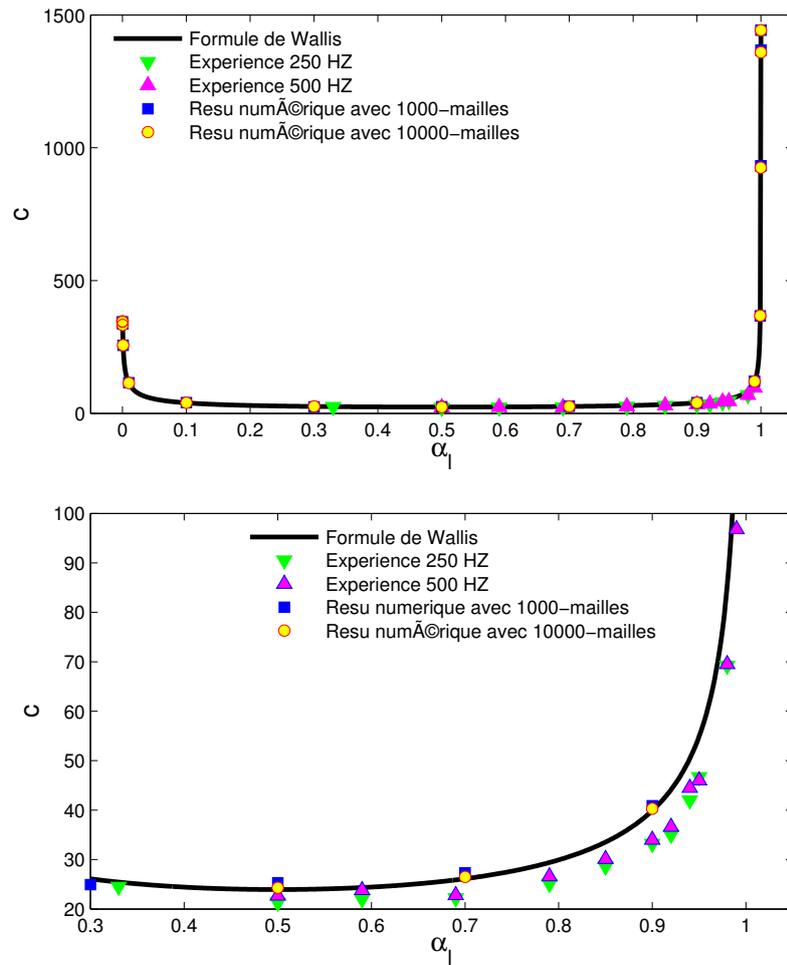


FIGURE 4.14 – Comparaison entre l’approximation numérique de la "pseudo vitesse du son du mélange" obtenue avec le modèle bifluide et  $\tau_p = \tau_u = 10^{-10}$  s et la valeur donnée par la formule de Wallis en fonction de la valeur de  $\alpha_1$ .

$10^3$  et  $10^4$  mailles). La  $CFL$  est fixée à 0.9. Les résultats numériques, présentés sur la figure 4.14, sont très proches de ceux donnés par la formule de Wallis. Les écarts entre les deux sont présentés sur la figure 4.15.

Signalons en outre que si l'on se base sur les résultats expérimentaux issus de [50], on peut estimer que les écarts entre ces mesures et les résultats de la formule de Wallis sont inférieurs à 20%. L'approximation obtenue avec le modèle bifluide semble donc très satisfaisante (lorsque les temps de relaxation  $\tau_u$  et  $\tau_p$  sont suffisamment petits).

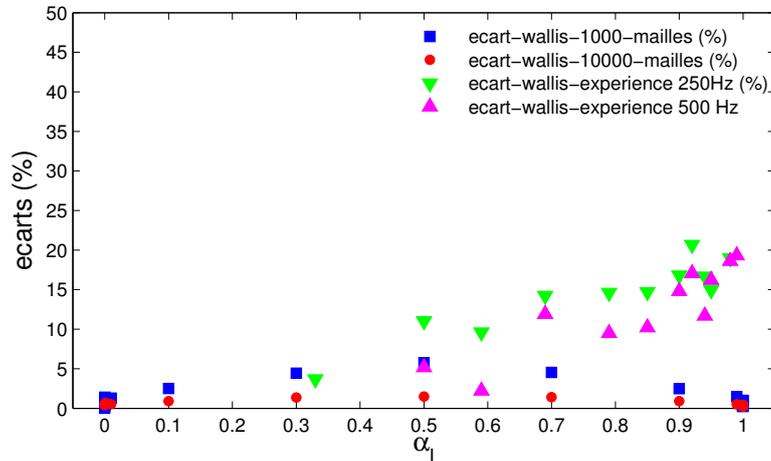


FIGURE 4.15 – Ecart entre l'approximation numérique de la "pseudo vitesse du son du mélange" obtenue avec le modèle bifluide et  $\tau_p = \tau_u = 10^{-10}$  s et la valeur donnée par la formule de Wallis en fonction de la valeur de  $\alpha_l$ .

### 4.2.3 Conclusion

Nous avons pu vérifier dans les tests qui précèdent que le modèle bifluide est un bon candidat pour la représentation des coups de bélier monophasiques et diphasiques. En effet, le modèle bifluide permet de retrouver l'amplitude d'un coup de bélier monophasique. On a toutefois observé la sensibilité du modèle aux lois d'état phasiques. De la même façon, l'influence du taux de présence de vapeur sur la célérité des ondes de pression dans un mélange est également bien reproduite. Nous allons maintenant confronter le modèle bifluide complet (en prenant en compte les relaxations de pressions/vitesses/températures/potentiels chimiques) à des données expérimentales. Par ailleurs, nous allons également comparer le modèle bifluide à des modèles diphasiques homogènes.

## 4.3 Simulation de l'expérience de Simpson

Dans cette section, les résultats obtenus avec le modèle bifluide à deux pressions sont comparés aux données expérimentales de Simpson [72]. Ils sont également confrontés aux approximations numériques obtenues avec deux modèles diphasiques homogènes différents. Le premier correspond au modèle à cinq équations prenant en compte les relaxations instantanées des températures et des potentiels chimiques [70]. Le second correspond au modèle eau homogène relaxé (HRM) munie d'une loi d'état de l'eau basée sur des tables [57], pour lequel il y a équilibre des pressions, des vitesses et des températures. Les calculs obtenus avec le modèle bifluide et les deux modèles homogènes sont effectués avec le code *Europlexus* [45].

### 4.3.1 Présentation du dispositif expérimental

L'expérience de Simpson est largement utilisée pour la validation d'outils numériques dédiés à la simulation des coups de bélier [24]. On considère un réservoir alimentant un tuyau horizontal de longueur  $L$  (cf. figure 4.16). Les données géométriques et les valeurs physiques pertinentes pour le fluide sont regroupées dans le tableau (4.1). La conduite est

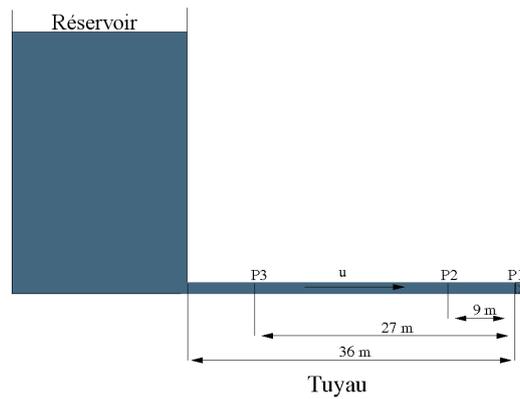


FIGURE 4.16 – Schéma du dispositif expérimental de Simpson.

équipée de trois capteurs de pression situés respectivement à 1/4 (capteur P3), à 3/4 de la longueur du tuyau (capteur P2) et au niveau de la vanne (capteur P1).

Paramètres	Circuit	Paramètres	Eau	Acier
Diamètre intérieur (mm)	19	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	997	7850
Épaisseur de coque (mm)	1.6	Célérité du son $c$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )	1450	5856
Longueur totale du tuyau (m)	36	Module d'Young $E$ (Gpa)	-	120

TABLE 4.1 – Paramètres géométriques du dispositif expérimental utilisé par Simpson (à gauche) et caractéristiques du fluide (à droite) extraits de [72].

Initialement, le réservoir est porté à une pression  $p_0$ . Un écoulement d'eau liquide à vitesse  $u_0$  s'établit dans le tuyau. La vanne située à l'extrémité du tuyau est ensuite fermée en un temps très court (inférieur à 1 ms). Les données initiales de l'expérience de Simpson sont reportées dans le tableau 4.2.

Vitesse initiale de l'eau dans le tuyau $u_0$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )	0.401
Température (K)	296.5
Pression du réservoir $p_0$ (bar)	3.419

TABLE 4.2 – Données initiales de l'écoulement pour l'expérience de Simpson [72].

À la fermeture de la vanne, une onde de choc est générée et se propage le long du tuyau en direction du réservoir. Les aller-retours des ondes de pressions entre le réservoir et l'extrémité fermée du tuyau peuvent conduire à l'apparition de vapeur en fonction de la vitesse initiale de l'écoulement. On trouvera dans [16] une description plus détaillée des divers phénomènes physiques mis en jeu.

### 4.3.2 Configuration et paramètres numériques

#### Maillages

On considère un maillage 2D qui comporte une partie 'tuyau' maillée de manière uniforme avec des éléments quadrangulaires et une partie 'réservoir' où la taille des mailles augmente graduellement en s'éloignant du tuyau (cf. figure 4.17).

#### Conditions initiales/aux limites

Avec le modèle bifluide, les deux phases liquide et vapeur sont toujours présentes. La valeur initiale du taux de présence de vapeur est ainsi imposée à  $10^{-6}$ , ce qui correspond à la valeur maximale estimée pour que le modèle bifluide

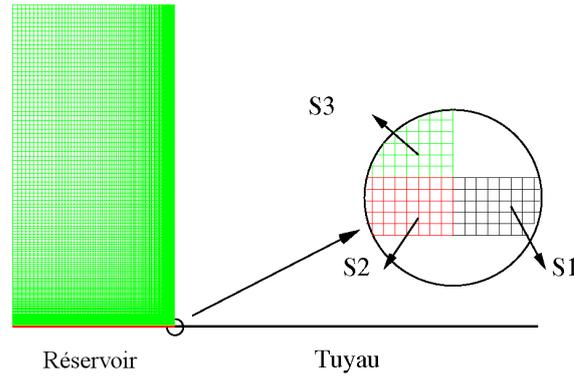


FIGURE 4.17 – Maillage du domaine de calcul du dispositif expérimental de Simpson composé de trois zones.

représente la dynamique d'un écoulement monophasique (cf. partie 4.2.1). Les densités des deux phases sont initialement constantes dans la totalité du domaine de calcul.

On impose une pression initiale  $p_0$  et une vitesse initiale  $u_0$  pour les deux phases dans le tuyau  $S_1$ . La partie réservoir est séparée en deux zones :  $S_2$  et  $S_3$  comme présentée sur la figure 4.17. On impose, dans  $S_2$ , les mêmes pressions et vitesses initiales que dans le tuyau et dans  $S_3$ , une vitesse nulle et une légère surpression  $p_0 + \delta p$  ( $\delta p \ll p_0$ ). Les températures des deux phases sont égales à celle de l'expérience (à savoir 296.5 K) et prises constantes dans la totalité du domaine de calcul. La valeur associée peut être obtenue à partir des conditions initiales mentionnées ci-dessus tout en considérant les lois thermodynamiques phasiques. Les conditions initiales sont répertoriées dans le tableau 4.3. Ces conditions initiales

Conditions initiales du test Simpson		Zone tuyau S1	Zone S2	Zone S3
Vapeur	taux de présence : $(\alpha_v)_0(x, y)$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
	densité : $(\rho_v)_0(x, y)$ ( $kg/m^3$ )	2.52	2.52	2.52
	vitesse suivant x : $(u_v)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	$u_0$	$u_0$	0
	vitesse suivant y : $(v_v)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	0	0	0
	pression : $(p_v)_0(x, y)$ ( $bar$ )	3.419	3.419	3.4198
Liquide	taux de présence : $(\alpha_l)_0(x, y)$	$1 - 10^{-6}$	$1 - 10^{-6}$	$1 - 10^{-6}$
	densité : $(\rho_l)_0(x, y)$ ( $kg/m^3$ )	997.8	997.8	997.8
	vitesse suivant x : $(u_l)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	$u_0$	$u_0$	0
	vitesse suivant y : $(v_l)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	0	0	0
	pression : $(p_l)_0(x, y)$ ( $bar$ )	3.419	3.419	3.4198

TABLE 4.3 – Conditions initiales pour la simulation de l'expérience de Simpson.

sont choisies pour assurer, au niveau du raccord entre le réservoir et le tuyau, une pression quasi-constante au cours de la simulation. Cependant, comme ces dernières ne sont pas en équilibre, des ondes parasites de faible amplitude sont générées.

Les hypothèses suivantes sont prises en compte :

- les pressions et les vitesses des deux phases sont mises en équilibre beaucoup plus rapidement que les températures et les potentiels chimiques :  $\tau_p, \tau_u \ll \tau_T, \tau_g$ ,
- la température reste quasi constante pendant l'expérience.

Par conséquent, seules les relaxations des pressions/vitesses/potentiels chimiques pour la simulation de l'expérience de Simpson sont prises en compte. Les temps caractéristiques associés sont  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7}$  s et  $\tau_g = 10^{-3}$  s. La relaxation des températures n'est pas prise en compte (formellement  $\tau_T = +\infty$ ). On rappelle que le modèle bifluide est résolu avec le schéma de Rusanov d'ordre un en temps et en espace pour la convection, les schémas de relaxation de pression implicite, de vitesse implicite et de potentiel chimique semi-implicite.

A partir de l'instant initial ( $t = 0$ ), on applique la condition limite de paroi pour tous les bords du maillage, y compris au niveau de la vanne située à l'extrémité du tuyau afin de modéliser la fermeture brutale de celle-ci.

### Lois thermodynamiques et formule d'Allievi

La loi "stiffened gas" est considérée pour les deux phases. Les principales grandeurs thermodynamiques sont ainsi définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{p + \gamma(p)_{\infty}}{\rho(\gamma - 1)} + Q, \\ T = \frac{p + (p)_{\infty}}{C_v \rho(\gamma - 1)}, \\ s = C_v \ln\left(\frac{P + (p)_{\infty}}{(C_v(\gamma - 1)\rho)^{\gamma}}\right) + Q', \\ g = H - sT, \\ H = \varepsilon + p/\rho, \end{cases} \quad (4.3.1)$$

où les paramètres  $C_v$ ,  $C_p$ ,  $Q$ ,  $\gamma$ ,  $Q'$ ,  $(p)_{\infty}$  sont constants. Ces derniers sont déterminés à partir d'un état de référence de l'eau (pression de saturation, densité, enthalpie, vitesse du son) pour la température de l'expérience  $T_{ref} = 296,5$  K [9].

L'élasticité de la tuyauterie modifie fortement la célérité des ondes de pression dans celle-ci [74]. La formule d'Allievi donne une estimation de cette influence en fonction des caractéristiques du matériau.

$$c_l^{Allievi} = \frac{c_l}{\sqrt{1 + \frac{\rho_l c_l^2 D_{int}}{eE}}} \quad (4.3.2)$$

avec  $c_l$  la vitesse du son du fluide,  $D_{int}$  le diamètre intérieur du tuyau,  $e$  l'épaisseur du tuyau et  $E$  le module de Young du tuyau. La vitesse du son obtenue avec la formule d'Allievi qui est de  $c_l^{Allievi} = 1319.6$  m/s est légèrement supérieure à la vitesse du son mesurée expérimentalement  $c_l^{exp} = 1256.4$  m/s.

Deux jeux de coefficients pour la loi d'état de type "stiffened gas" ont été déterminés.

Coeff. sans l'élasticité du tuyau $T_{ref} = 296,5$ K	$(p)_{\infty}$ Pa	$C_p$ J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	$C_v$ J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	$\gamma$	$Q$ J.kg <sup>-1</sup>	$Q'$ J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Liquide	794 425 663,35	4183,00	1496,69	2,79	-1142331,00	31585,14
Vapeur	0.00	1800,00	1344,06	1,34	2009800,00	1977,08

TABLE 4.4 – Coefficients des lois d'état de type "stiffened gas" utilisés pour la simulation de l'expérience de Simpson sans la prise en compte de l'élasticité du tuyau.

Le premier jeu de paramètres (cf. tableau 4.4) correspond à la vitesse de propagation des ondes dans le liquide sans prendre en compte l'influence de l'élasticité du tuyau sur la célérité des ondes.

Coeff. avec l'élasticité du tuyau $T_{ref} = 296,5$ K	$(p)_{\infty}$ Pa	$C_p$ J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	$C_v$ J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	$\gamma$	$Q$ J.kg <sup>-1</sup>	$Q'$ J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Liquide	692754002,87	4183,00	1840,48	2,27	-1142331,00	24218,87
Vapeur	0.00	1800,00	1344,06	1,34	2009800,00	1977,08

TABLE 4.5 – Coefficients des lois d'état de type "stiffened gas" utilisés pour la simulation de l'expérience de Simpson avec la prise en compte de l'élasticité du tuyau.

Le deuxième jeu de paramètres (cf. tableau 4.5) est déterminé pour retrouver la vitesse de propagation des ondes observée expérimentalement.

### 4.3.3 Convergence en maillage

Quatre résolutions en espace différentes ont été considérées afin de s'assurer de la convergence en maillage de l'algorithme de résolution numérique. Leurs caractéristiques sont données dans le tableau 4.6. Pour le maillage le plus fin, on conserve la même finesse de maillage pour le réservoir que celle du maillage 3 afin de réduire le nombre total de mailles. Ainsi seul le tuyau est raffiné entre les deux maillages. Tous les calculs sont ici effectués avec une valeur de CFL = 0,5. Les coefficients de la loi d'état utilisés ici sont ceux permettant de retrouver la vitesse de propagation des ondes observée expérimentalement (à savoir les coefficients du tableau 4.5).

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Taille de maille dans le tuyau	$10^{-2}$ m	$5 \times 10^{-3}$ m	$3 \times 10^{-3}$ m	$10^{-3}$ m
Nombre de cellules	$8 \times 10^4$	$3,2 \times 10^5$	$8,6 \times 10^5$	$8,8 \times 10^5$

TABLE 4.6 – Caractéristiques des quatres maillages considérés pour la simulation de l'expérience de Simpson.

La vitesse initiale de l'écoulement dans le tuyau pour ces calculs est  $u_0 = 0.401$  m/s. La figure 4.18 représente les historiques des pressions à la vanne obtenus pour les quatre maillages. Les résultats numériques sont comparés aux données expérimentales. Les écarts entre les approximations numériques et l'expérience diminuent en raffinant le maillage. Les solutions numériques sont en assez bon accord avec les résultats expérimentaux pour les deux maillages les plus fins. Le "décrochage" du premier plateau de pression observé à  $t \approx 30$  ms est lié à la génération d'ondes parasites de faible

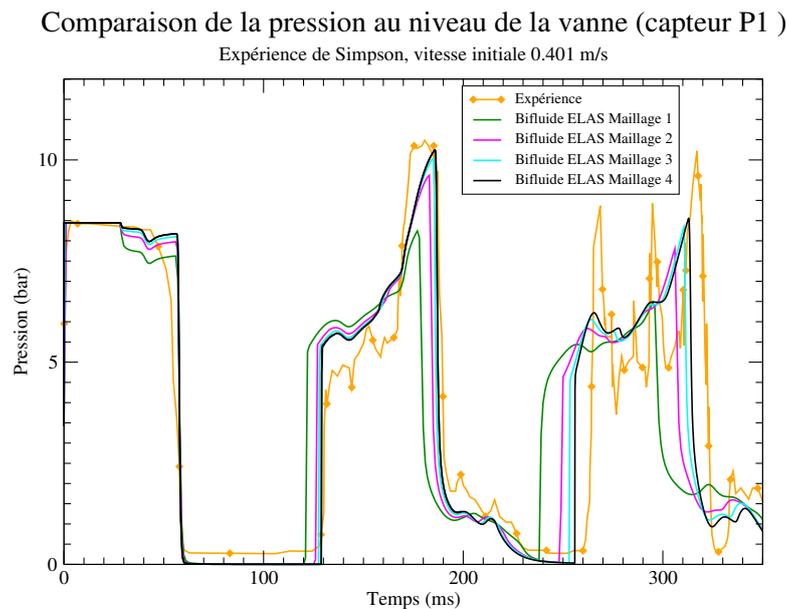


FIGURE 4.18 – Influence de la finesse du maillage sur la solution numérique du modèle bifluide pour l'expérience de Simpson.

amplitude à l'instant initial. Cet écart diminue en raffinant le maillage.

Par la suite, seul le Maillage 3 est utilisé pour les calculs. Le temps CPU associé est approximativement de 35h sur 16 processeurs de type Intel Xeon X5570 à 2.93GHz.

### 4.3.4 Comparaisons modèle bifluide - modèles homogènes - expérience

Dans cette section, les résultats numériques obtenus avec le modèle bifluide sont comparés avec ceux de l'expérience et ceux obtenus avec des modèles homogènes. Les deux modèles homogènes retenus ici sont dans un premier temps présentés.

### Modèle à cinq équations

Le modèle à cinq équations introduit dans [60, 70] est un modèle réduit du modèle “père” à sept équations de Baer et Nunziato. Ce modèle est en effet obtenu à partir d'un développement de Chapman Enskog en considérant les équilibres instantanés des pressions et des vitesses pour les deux phases [53]. Le modèle admet donc cinq équations en une dimension d'espace. Les termes sources présents représentent les transferts de masse et de chaleur entre les phases :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_v + u \partial_x \alpha_v & = K \partial_x u + \frac{\alpha_v \alpha_l}{\alpha_v \rho_l c_l^2 + \alpha_l \rho_v c_v^2} \left( \frac{\Gamma_v}{\alpha_v} + \frac{\Gamma_l}{\alpha_l} \right) Q_v + \frac{m \dot{Y}_v}{\rho_l} \\ \partial_t (\alpha_v \rho_v) + \partial_x (\alpha_v \rho_v u) & = m \dot{Y}_v \\ \partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u) & = -m \dot{Y}_v \\ \partial_t (mu) + \partial_x (mu^2) + \partial_x (p) & = 0 \\ \partial_t (mE) + \partial_x [(mE + p)u] & = 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

où :

$$K = \frac{\alpha_v \alpha_l (\rho_l c_l^2 - \rho_v c_v^2)}{\alpha_v \rho_l c_l^2 + \alpha_l \rho_v c_v^2},$$

$\dot{Y}_v$  représente le transfert de masse entre les phases,  
 $Q_v$  représente le transfert de chaleur entre les phases,  
 $\rho_l$  représente la densité d'interface,

et les variables sont :

- $\alpha_{l,v}$ , les fractions statistiques des phases liquide et vapeur, qui vérifient :

$$\alpha_v + \alpha_l = 1 \quad (4.3.4)$$

- $\rho_{l,v}$ , les densités de chacune des deux phases,
- $m = \alpha_v \rho_v + \alpha_l \rho_l$ , la densité du mélange,
- $u = u_l = u_v$ , la vitesse du mélange,
- $p = p_l = p_v$ , la pression du mélange,
- $c_{l,v}$ , les vitesses du son phasiques,
- $E = Y_v E_v + Y_l E_l$ , l'énergie totale spécifique,  $Y_v = \frac{\alpha_v \rho_v}{m}$  est la fraction massique,
- $\varepsilon_{l,v} = E_{l,v} - \frac{1}{2} u^2$ , les énergies internes spécifiques,
- $\Gamma_{l,v} = \frac{1}{\rho_{l,v}} \left( \frac{\partial p_{l,v}}{\partial \varepsilon_{l,v}} \right)_{\rho_{l,v}}$  les coefficients de Gruneisen phasiques.

Les lois thermodynamiques sont spécifiées par les relations  $\varepsilon_{l,v}(\rho_{l,v}, p_{l,v})$  qui peuvent être arbitraires. Avec les lois de “stiffened gas”, la pression du mélange est donnée par la relation :

$$p = p(\rho, e, \alpha_v, Y_v) = \frac{\rho(e - Y_v q_v - Y_l q_l) - \left( \frac{\alpha_v \gamma_v (p_v)_\infty}{\gamma_v - 1} + \frac{\alpha_l \gamma_l (p_l)_\infty}{\gamma_l - 1} \right)}{\frac{\alpha_v}{\gamma_v - 1} + \frac{\alpha_l}{\gamma_l - 1}}$$

et les coefficients de Gruneisen valent :  $\Gamma_{l,v} = \gamma_{l,v} - 1$ .

Le modèle admet les propriétés suivantes :

**Proposition 4.3.1.** *Le système 4.3.3 est hyperbolique non strict et non-conservatif. Les valeurs propres de ce système sont  $\lambda_1 = u + c$ ,  $\lambda_{2-4} = u$  et  $\lambda_5 = u - c$  avec  $\frac{1}{mc^2} = \frac{\alpha_l}{\rho_l c_l^2} + \frac{\alpha_v}{\rho_v c_v^2}$ . L'espace engendré par les vecteurs propres à droite associés à  $\lambda_{2-4}$  est de dimension trois.*

- Le champ associé à  $\lambda_{2-4} = u$  est linéairement dégénéré.
- Les champs associés à  $\lambda_{1,5} = u \pm c$  sont vraiment non-linéaires.

On remarque que : on ne peut pas définir de relations de saut uniques pour ce modèle.

### Modèle eau homogène

Le modèle eau homogène est basé sur les hypothèses d'équilibre de pressions, vitesses et températures entre la phase liquide et la phase vapeur. Le système s'écrit en une dimension d'espace sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t(mY_v) + \partial_x(mY_v u) & = m \dot{Y}_v \\ \partial_t(m) + \partial_x(mu) & = 0 \\ \partial_t(mu) + \partial_x(mu^2) + \partial_x(p) & = 0 \\ \partial_t(mE) + \partial_x[(mE + p)u] & = 0 \end{cases} \quad (4.3.5)$$

où :

- $m = \alpha_v \rho_v + \alpha_l \rho_l$  est la masse volumique du mélange,
- $Y_v = \frac{\alpha_v \rho_v}{m}$  est la fraction massique de vapeur,
- $\dot{Y}_v$  est le taux de production de vapeur,
- $u$  est la vitesse du mélange,
- $p$  est la pression du mélange,
- $E$  est l'énergie totale spécifique du mélange,
- $\varepsilon = E - \frac{1}{2}u^2$  est l'énergie interne spécifique du mélange.

La relation de fermeture thermodynamique qui peut s'écrire formellement sous la forme  $\varepsilon(m, p, Y_v)$  est une relation tabulée. Elle repose sur les tables de l'eau [57] où l'eau peut se présenter sous trois formes : monophasique liquide, monophasique vapeur ou diphasique équilibrée. Le taux de production de vapeur  $\dot{Y}_v$  est déterminé à l'aide des tables.

**Proposition 4.3.2.** *Le système 4.3.5 est hyperbolique non strict et conservatif. Les valeurs propres de ce système sont  $\lambda_1 = u + c$ ,  $\lambda_{2-3} = u$  et  $\lambda_4 = u - c$  avec  $c$  la célérité des ondes acoustiques déterminée par les tables. L'espace engendré par les vecteurs propres à droite associés à  $\lambda_{2-3}$  est de dimension deux.*

- Le champ associé à  $\lambda_{2-3} = u$  est linéairement dégénéré.
- Les champs associés à  $\lambda_{1,4} = u \pm c$  sont vraiment non-linéaires.

On remarque que : les relations de saut associées à ce système sont uniques.

### Lois d'état thermodynamiques utilisées pour les modèles homogènes

Les lois thermodynamiques phasiques retenues pour le modèle à cinq équations sont identiques à celles utilisées pour le modèle bifluide. Par la suite, seuls les coefficients permettant de retrouver la vitesse de propagation des ondes mesurée expérimentalement sont utilisés (cf. tableau 4.5). Concernant le modèle eau homogène, les grandeurs thermodynamiques sont déterminées directement à partir des tables de l'eau [57, 59].

### Méthodes numériques pour l'approximation des modèles homogènes

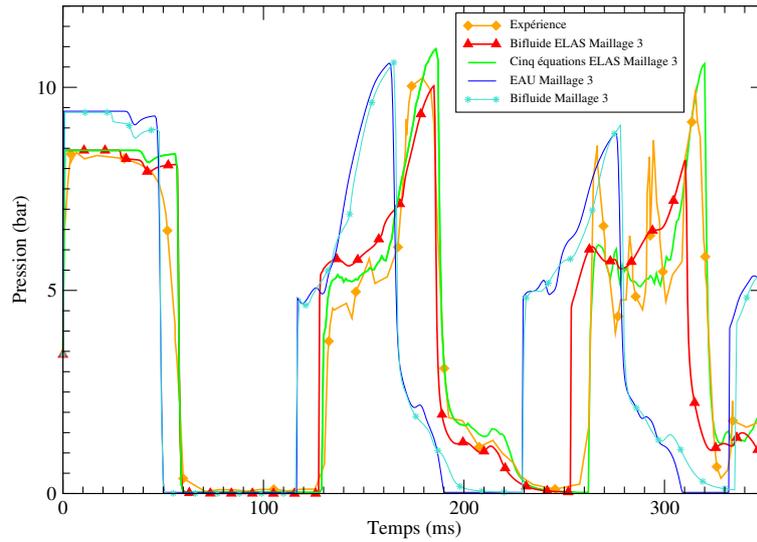
Les simulations de l'expérience de Simpson ont toutes été réalisées en utilisant un schéma d'ordre 1 en temps et en espace. Des solveurs de Riemann approchés de type HLLC [77] sont utilisés pour la résolution numérique de la partie convective des modèles homogènes [28, 44]. Les schémas de relaxation instantannés pour le modèle à cinq équations sont basés sur une méthode itérative [9] par analogie à ce qui a été proposé par Zein *et al.* [80]. La CFL a été fixée à 0.5 excepté pour les simulations qui utilisent le modèle à cinq équations. Dans ce cas la CFL a dû être réduite à 0.1 suite à des problèmes de robustesse du schéma de relaxation des potentiels chimiques.

### Conditions initiales pour les calculs homogènes

Comme initialement les équilibres de pression et de vitesse sont vérifiés, les conditions initiales utilisées pour la simulation avec le modèle à cinq équations sont identiques à celles du calcul bifluide excepté pour la valeur du taux de présence de vapeur. Cette dernière est initialement prise nulle pour tout le domaine de calcul. La température, la pression

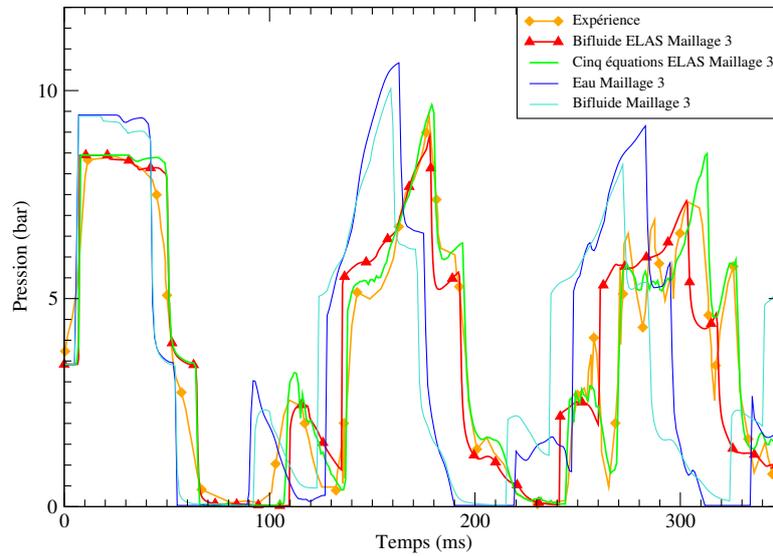
### Comparaison de la pression au niveau de la vanne (capteur P1)

Expérience de Simpson, vitesse initiale 0.401 m/s



### Comparaison de la pression au capteur P2

Expérience de Simpson, vitesse initiale 0.401 m/s



### Comparaison de la pression au capteur P3

Expérience de Simpson, vitesse initiale 0.401m/s

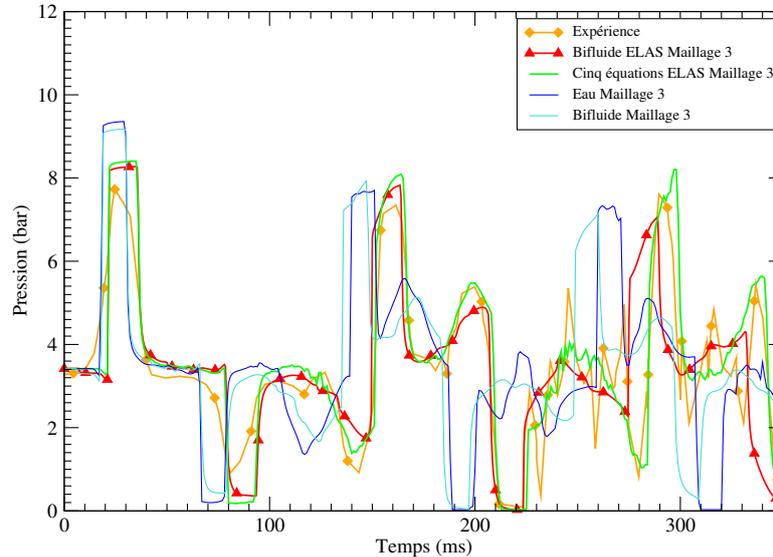


FIGURE 4.19 – Evolution de la pression en fonction du temps au niveau des trois capteurs pour l'expérience de Simpson : comparaison des différents modèles (avec ou sans correction de la vitesse du son) avec les résultats expérimentaux.

et la vitesse initiale utilisées pour la simulation avec le modèle eau homogène sont identiques à celles utilisées pour le modèle bifluide et le modèle à cinq équations.

### Analyse des résultats et comparaison avec l'expérience de Simpson pour une vitesse initiale $u_0 = 0.401 \text{ m/s}$

Les résultats numériques obtenus avec le modèle bifluide et les modèles homogènes sont comparés aux données expérimentales. Ces dernières ont été obtenues pour les trois capteurs de pression notés P1, P2 et P3. La figure 4.19 représente ainsi les historiques de pression mesurés expérimentalement et les historiques de pression obtenus avec les trois modèles diphasiques au niveau des trois capteurs. Pour le modèle bifluide, la pression du mélange définie par  $p = \alpha_v p_v + \alpha_l p_l$  est représentée.

Les résultats numériques obtenus avec le modèle eau homogène et le modèle bifluide ne prenant pas en compte la correction de la vitesse du son (cf. les coefficients du tableau 4.4) sont similaires mais très différents des résultats expérimentaux. Les ondes de pression se propagent plus rapidement dans le calcul, ce qui est dû à la non prise en compte de l'influence du gonflement du tuyau sur la célérité des ondes.

Les résultats numériques obtenus avec le modèle bifluide en considérant la correction de la célérité des ondes (cf. les coefficients du tableau 4.5) notés ELAS dans la figure 4.19 sont en bon accord avec l'expérience. En particulier, les deux premiers plateaux sont retrouvés. Toutefois, le troisième plateau apparaissant à  $t \approx 250 \text{ ms}$  au niveau du capteur P1 est légèrement décalé dans le temps par rapport à l'expérience. Cette différence est peut-être due à une accumulation de l'erreur numérique au cours du temps. Par contre, les résultats numériques du modèle à cinq équations retrouvent les trois plateaux de l'expérience. Cependant, pour le deuxième plateau de pression à  $t \approx 170 - 180 \text{ ms}$  au niveau du capteur P1, le calcul effectué avec le modèle à cinq équations surestime le résultat expérimental de 10%. Ce dernier plateau est bien retrouvé avec le modèle bifluide.

Les valeurs numériques du taux de présence de la vapeur sont très différentes selon les modèles considérés (cf. figure 4.20). La valeur maximale obtenue avec le modèle homogène à cinq équations est la plus grande. Bien que le taux de

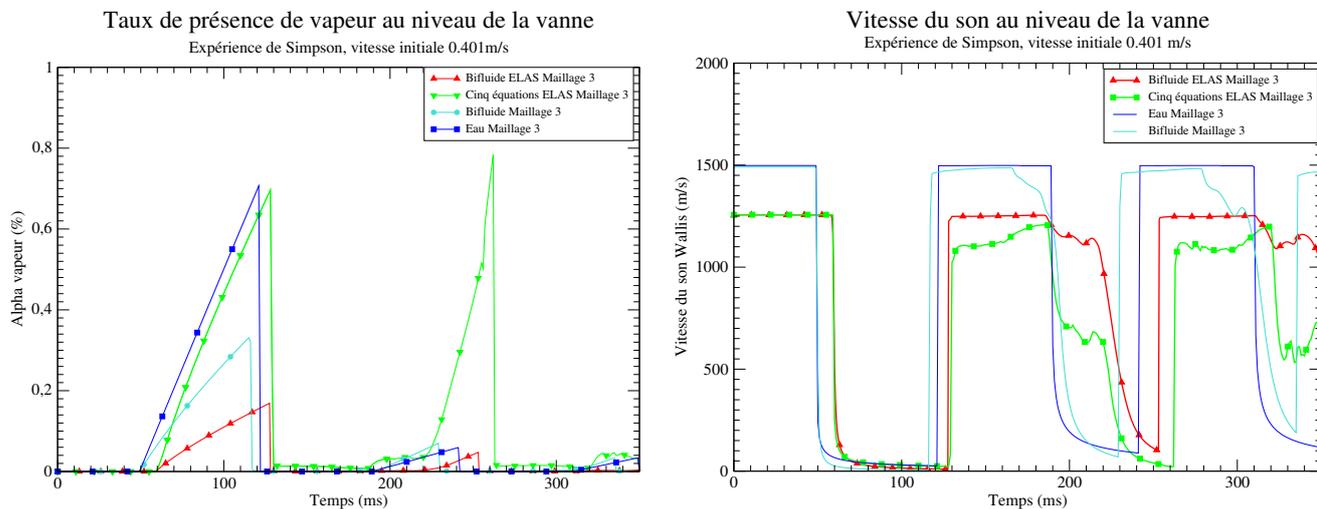


FIGURE 4.20 – Approximations numériques du taux de présence de la vapeur et de la célérité obtenue avec la formule de Wallis au niveau de la vanne pour une vitesse initiale à  $0.401 \text{ m/s}$  : comparaison des différents modèles.

présence de vapeur maximum soit très faible ( $< 1\%$ ) avec la vitesse initiale  $u_0 = 0.401 \text{ m/s}$ , la vitesse de propagation d'onde donnée par la formule de 'Wallis' varie beaucoup sur une plage de 20 m/s à 1500 m/s. On remarque que :

- la vitesse du son de 'Wallis' n'a un sens pour le modèle bifluide que si les équilibres mécaniques sont atteints presque instantanément ;

- la vitesse du son de ‘Wallis’ ne change pas seulement avec le taux de présence (cf. figure 4.14), mais aussi avec la vitesse du son de chaque phase dépendant de la pression et de la densité de la phase associée.

Les variations des températures phasiques en fonction du temps au niveau de la vanne (capteur P1) pour les trois modèles sont représentées sur la figure 4.21. La température de la phase liquide est quasi-constante au cours du temps pour

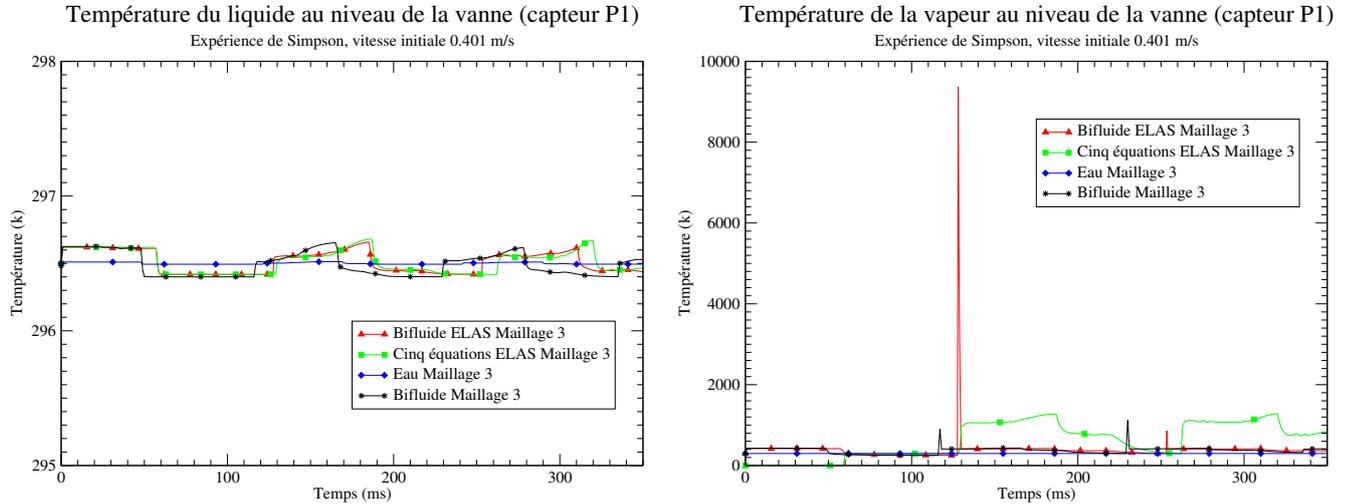


FIGURE 4.21 – Evolution des températures des deux phases en fonction du temps au niveau de la vanne du cas test Simpson : comparaison entre les différents modèles avec ou sans la correction de la célérité.

tous les modèles. Par opposition, celle de la vapeur subit de fortes variations pour le modèle bifluide et le modèle à cinq équations. Les pics de température de la phase vapeur apparaissent lorsqu’il y a recondensation de la vapeur ( $t \approx 130$  ms et  $t \approx 250$  ms pour le modèle bifluide cf. figure 4.20). Dans ce cas, la phase vapeur disparaît. Toutes les variables, plus particulièrement la température de la phase associée n’ont donc plus de sens physique. On retombe sur le problème classique des phases évanescences pour le modèle bifluide. Il en est de même pour le modèle à cinq équations où les variables sont toujours définies même si le taux de présence de la phase considérée est nul.

La valeur de la pression de saturation obtenue avec les différents modèles est représentée sur la figure 4.22. Il s’avère que celle obtenue avec le modèle bifluide est plus de 10 fois plus faible que celle donnée par les modèles homogènes. Ces derniers permettent de retrouver la valeur donnée par les tables de l’eau pour  $T_{ref} = 296,5$  K qui est d’environ 2800 Pa. Par ailleurs, les données expérimentales donnent une pression de saturation beaucoup plus grande que cette valeur. Cet écart pourrait s’expliquer par un mauvais calage des courbes expérimentales.

#### Analyse des résultats du modèle bifluide pour l’expérience de Simpson avec les vitesses initiales $u_0 = 0.239$ m/s et $u_0 = 1.125$ m/s

Le modèle bifluide retrouve bien l’expérience pour une vitesse de initiale  $u_0 = 0.239$  m/s (cf. figure 4.23). Dans ce cas la pression n’atteint jamais la pression de saturation, l’écoulement reste ainsi toujours monophasique liquide. Le troisième pic de pression est légèrement décalé dans le temps par rapport à l’expérience.

Pour la vitesse initiale  $u_0 = 1.1125$  m/s (cf. figure 4.24), les résultats numériques sont semblables à ceux issus de l’expérience. Toutefois, on remarque un décalage temporel au niveau du deuxième plateau de pression. L’apparition de ce dernier est observé aux alentours de 250 ms pour le calcul bifluide et aux alentours de 270 ms pour l’expérience. Cet écart est peut-être lié à l’erreur numérique de l’algorithme de résolution qui devrait diminuer en raffinant le maillage. Le taux de présence de vapeur maximal obtenu dans ce cas est bien plus grand que dans le cas précédent : 7% pour  $u_0 = 1.1125$  m/s

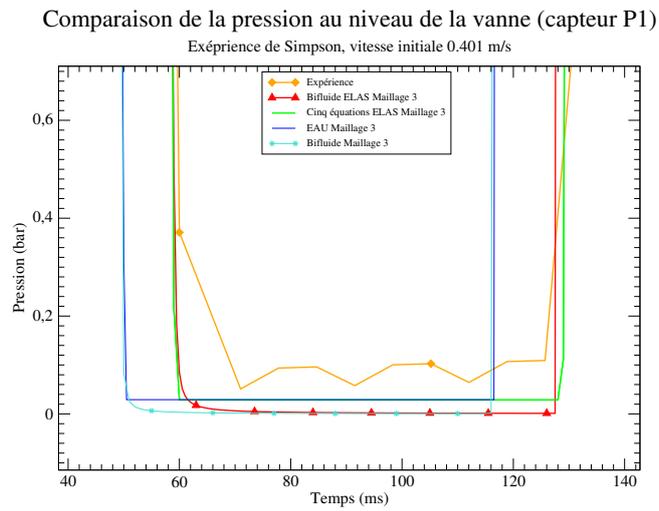


FIGURE 4.22 – Approximations numériques de la pression de saturation pour les trois modèles diphasiques à  $T = 296,5$  K.

contre 0.3% pour  $u_0 = 0.401\text{m/s}$ . Le minimum de la célérité obtenue avec la formule de Wallis est ainsi plus faible dans ce cas que dans le cas où  $u_0 = 0.401\text{m/s}$  (cf. figure 4.25).

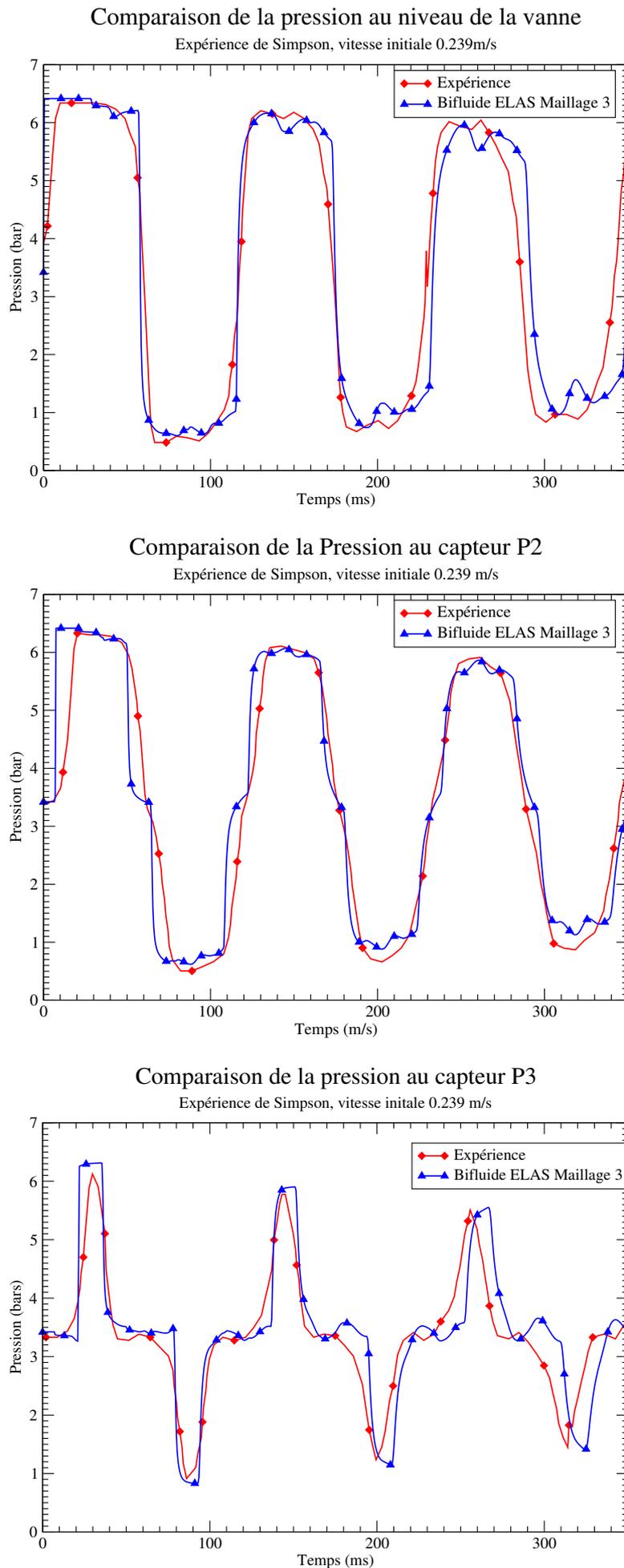


FIGURE 4.23 – Approximations numériques de la pression au niveau des trois capteurs pour l'expérience de Simpson avec une vitesse initiale de  $0.239\text{ m/s}$  : comparaison entre le modèle bifluide et l'expérience.

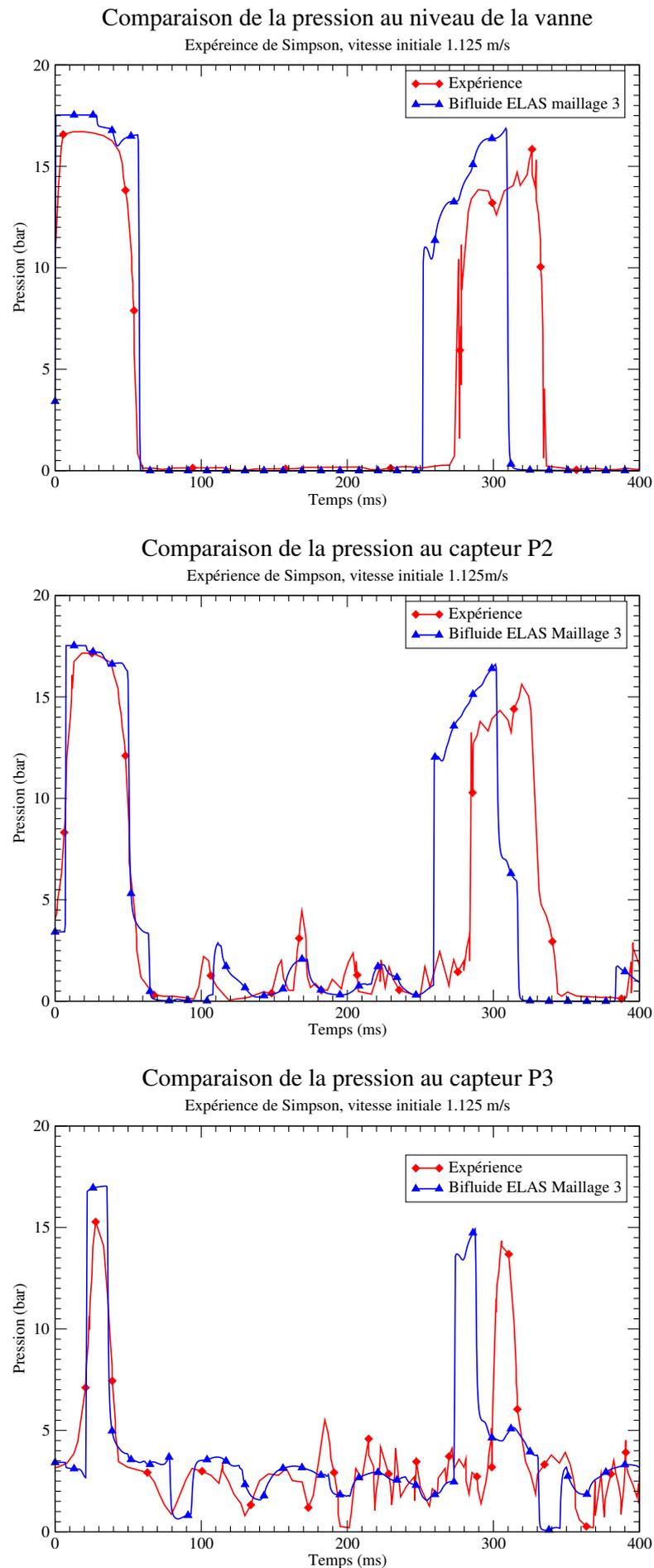


FIGURE 4.24 – Approximations numériques de la pression au niveau des trois capteurs pour l'expérience de Simpson avec une vitesse initiale de  $1.125\text{ m/s}$  : comparaison entre le modèle bifluide et l'expérience.

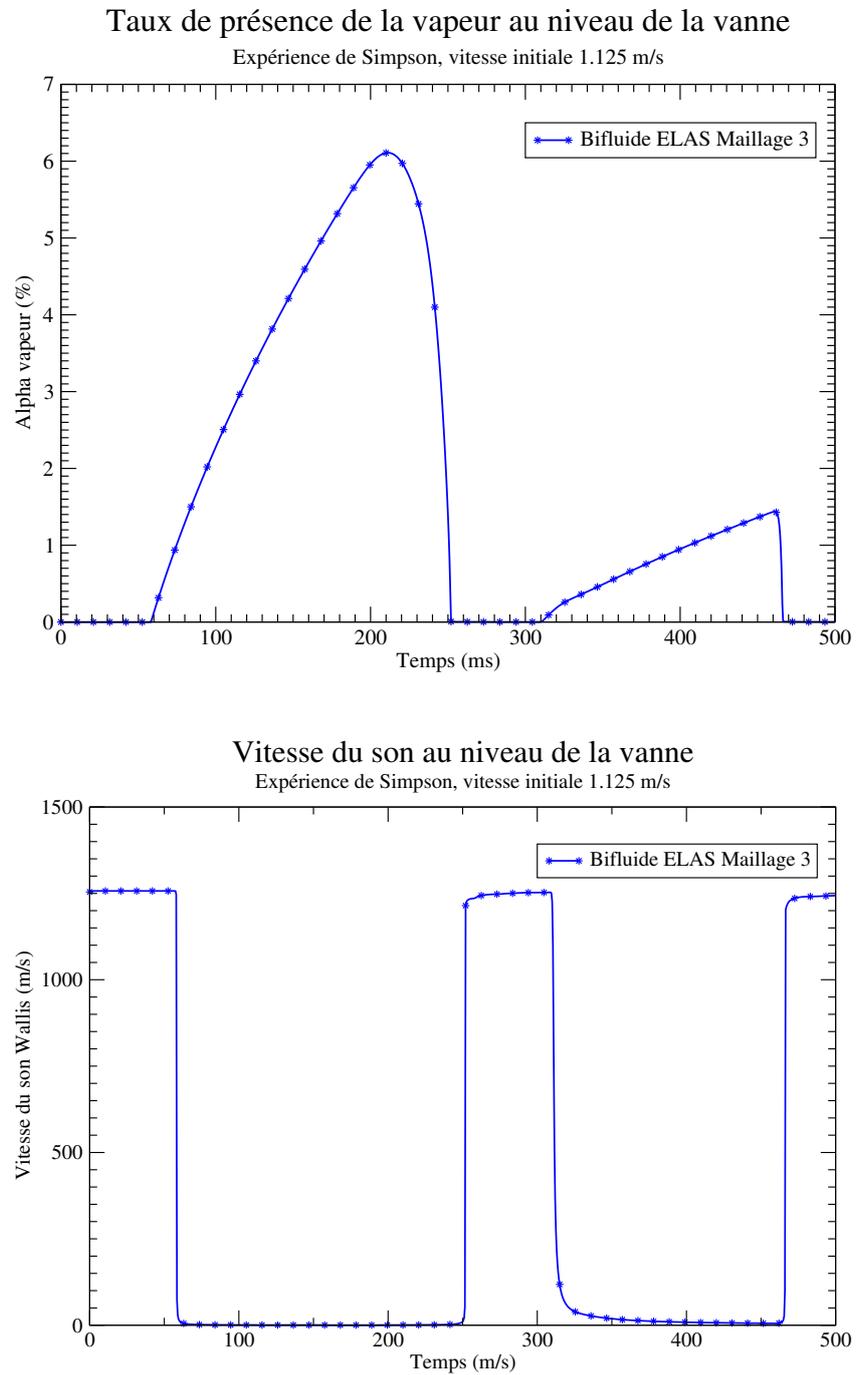


FIGURE 4.25 – Approximations numériques du taux de présence de vapeur et de la célérité associée à la formule de Wallis au niveau de la vanne pour l'expérience de Simpson avec une vitesse initiale à  $1.125\text{ m/s}$  : calcul bifluide.

## 4.4 Simulation de l'expérience Canon

L'expérience Canon a été réalisée au CEA de Grenoble par B. Riegel en 1978 dans le cadre de sa thèse [63]. Cette expérience simule une décompression rapide d'un fluide à haute pression, lorsqu'une brèche apparaît brusquement dans un tuyau. Comme pour l'expérience de Simpson, le modèle bifluide est comparé aux deux modèles homogènes et à l'expérience. Le dispositif expérimental est présenté ci-dessous. Là encore, les calculs effectués avec les trois modèles ont été réalisés avec le code *Europlexus* [45].

### 4.4.1 Présentation du dispositif expérimental

La section d'essai est composée d'un tube en acier inoxydable 304L, calorifugé afin de limiter les pertes thermiques. Le tube mesure 4.389 m de long à froid, avec un diamètre intérieur de 102.3 mm. L'épaisseur de la paroi est de 6 mm. L'une des extrémités du tuyau est fermée tandis qu'un système de membranes fixé à l'autre extrémité isole le tuyau du milieu extérieur. Le système de membranes éclate lorsque la pression et la température désirées sont atteintes dans le tuyau.

Cinq capteurs notés  $P_1, \dots, P_5$  ont été placés dans le tuyau pour mesurer la pression. La mesure du taux de présence de vapeur est effectué à 1.502 m de l'extrémité fermée au niveau du capteur noté  $P_t$ . Les points de mesures sont présentés sur la figure 4.26. Seul le couple  $(P_0, T_0) = (32 \text{ bar}, 493.15 \text{ K})$  est considéré ici.

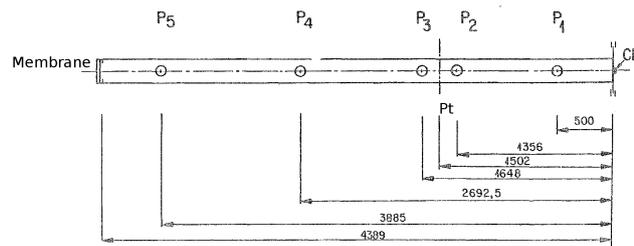


FIGURE 4.26 – Schéma des points de mesure du dispositif Canon.

### 4.4.2 Configuration et paramètres numériques

Un réservoir de grand volume est modélisé afin de représenter le milieu extérieur dans lequel le jet de vapeur se déverse. Son volume a été pris suffisamment grand pour que la pression reste pratiquement toujours égale à la pression du milieu extérieur pendant toute la durée du calcul.

L'air du milieu extérieur présent dans l'expérience est remplacé dans le calcul par de la vapeur d'eau à une pression de 1 bar et à une température de 493,15 K puisqu'il n'est pas possible de considérer un troisième constituant dans le modèle bifluide.

Pour simuler l'expérience Canon, les équilibres entre les deux phases sont exprimés au moyen des hypothèses suivantes :

- l'équilibre des températures est instantané (formellement  $\tau_T = 0$ ),
- l'équilibre des pressions et des vitesses est bien plus rapide que celui des potentiels chimiques :  $\tau_p, \tau_u \ll \tau_g$ .

Les temps caractéristiques des équilibres des pressions et des vitesses sont  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} \text{ s}$ . Ces temps caractéristiques sont très petits devant le pas de temps ( $\Delta t \approx 10^{-6} \text{ s}$ ), les variables associées sont ainsi en quasi équilibre à chaque itération

en temps. Le temps caractéristique de relaxation des potentiels chimiques est :  $\tau_g = 5 \times 10^{-5}$  s.

Pour information, en prenant une relaxation des températures non instantanée, des problèmes de robustesse apparaissent lorsque la relaxation des potentiels chimiques s'active.

Les solveurs utilisés ici sont identiques à ceux retenus pour l'expérience de Simpson, excepté le schéma de relaxation de température instantanée pour le modèle bifluide qui est décrit dans le Chapitre III. Les lois thermodynamiques pour le modèle à cinq équations sont identiques à celles utilisées pour le modèle bifluide et sont de type SG pour les deux phases (cf. équation 4.3.1).

### Maillage et condition initiale/aux limites

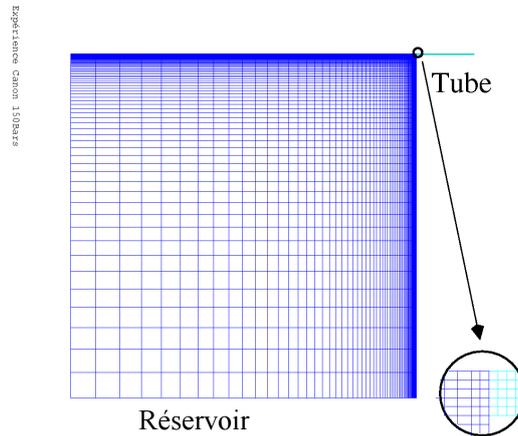


FIGURE 4.27 – Maillage du cas Canon.

Le domaine de calcul considéré est 2D. Le maillage comporte deux zones : le tube et le réservoir. Les mailles du tube sont quadrangulaires, alors que dans le réservoir la taille des mailles augmente au fur et à mesure en s'éloignant du tube. Les conditions initiales sont les suivantes : la pression dans le tube est de 32 bar et la température initiale de 493,15 K. La

Conditions initiales Canon 32 bar		Zone tube	Zone Réservoir
Vapeur	taux de présence : $(\alpha_v)_0(x,y)$	$10^{-3}$	0.999
	densité : $(\rho_v)_0(x,y)$ ( $kg/m^3$ )	16.72	0.52
	vitesse suivant x : $(u_v)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0
	vitesse suivant y : $(v_v)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0
	pression : $(p_v)_0(x,y)$ (bar)	32	1
Liquide	taux de présence : $(\alpha_l)_0(x,y)$	0.999	$10^{-3}$
	densité : $(\rho_l)_0(x,y)$ ( $kg/m^3$ )	841.12	837.74
	vitesse suivant x : $(u_l)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0
	vitesse suivant y : $(v_l)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0
	pression : $(p_l)_0(x,y)$ (bar)	32	1

TABLE 4.7 – Conditions initiales pour la simulation de l'expérience Canon.

température est calculée à partir des données initiales du tableau (4.7). Le taux de présence de la vapeur est fixé à  $10^{-3}$ . En effet, pour de plus petites valeurs du taux de présence de vapeur, des problèmes de robustesse apparaissent.

Les coefficients des lois d'état sont déterminés pour un état de référence de l'eau associé à la température de 493 K.

### 4.4.3 Convergence en maillage

Trois maillages notés Maillage 1, Maillage 2 et Maillage 3 sont utilisés ici. Le plus grossier comporte pour le tuyau  $10^3$  mailles dans le sens de l'écoulement et 5 mailles dans la largeur, les deux autres respectivement  $4 \times 10^3$  et  $8 \times 10^3$  mailles dans le sens de l'écoulement.

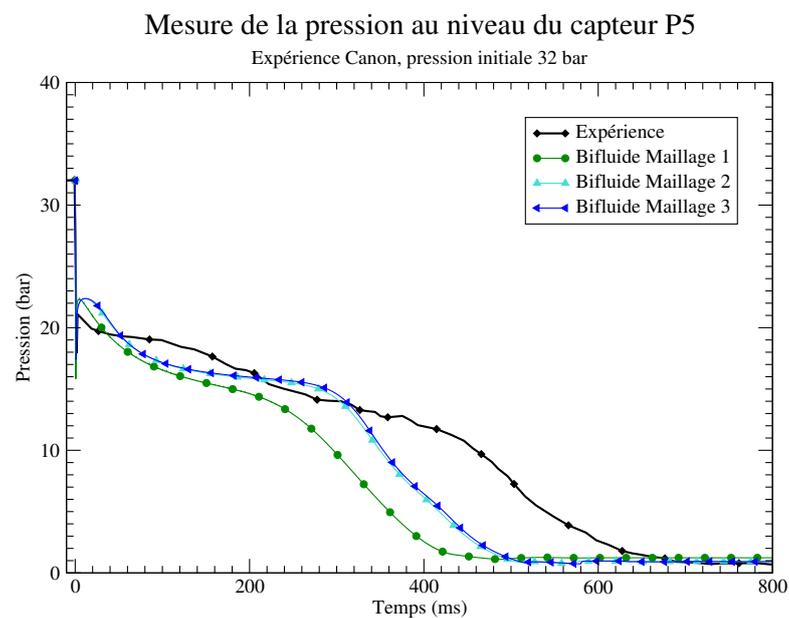
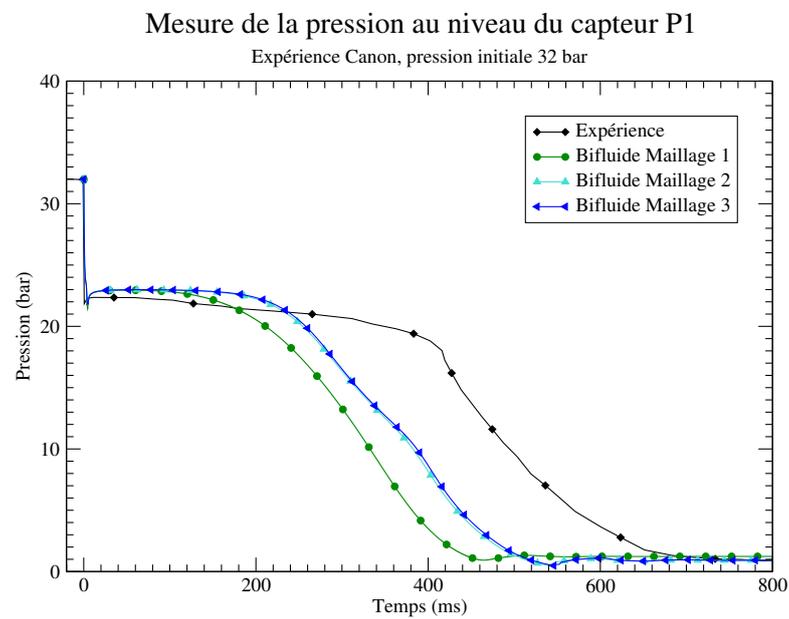
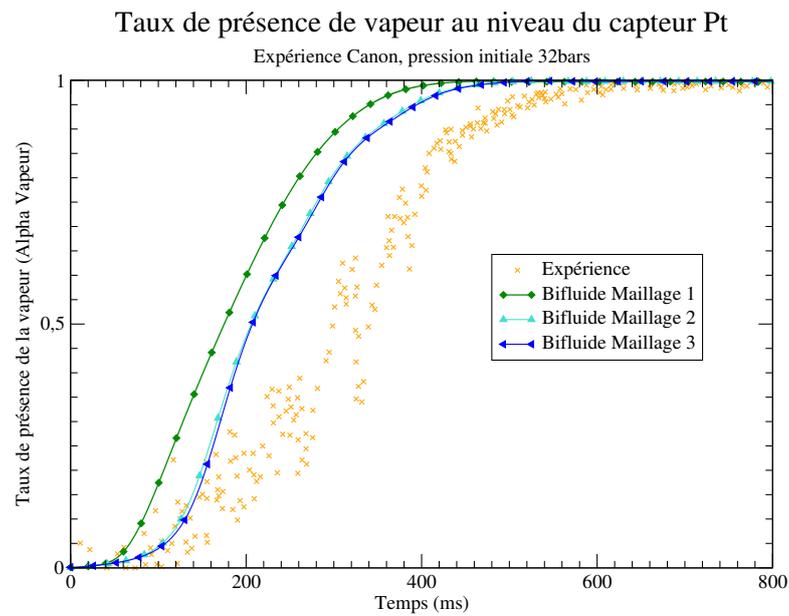


FIGURE 4.28 – Influence de la finesse du maillage pour la simulation du cas Canon sur la solution numérique du modèle bifluide avec  $\tau_g = 5 \times 10^{-5}$  s et  $\tau_T = 0$  s.

Coefficients Canon $T_{ref} = 493 \text{ K}$	$(p)_\infty$ Pa	$C_p$ $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$C_v$ $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\gamma$	$Q$ $\text{J.kg}^{-1}$	$Q'$ $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Liquide	769317123,86	4670,00	2807,61	1,66	-1359570,00	11671,61
Vapeur	0.00	1550,00	1162,00	1,33	2032350,00	2351,11

TABLE 4.8 – Coefficients des lois d'états "stiffened gas" des deux phases pour la simulation de l'expérience Canon.

La vaporisation dans le tube est plus rapide dans les calculs. Les résultats obtenus avec les deux maillages les plus fins (Maillage 2 et Maillage 3) sont très proches (cf. figure 4.28). Le calcul effectué avec le Maillage 3 est donc supposé convergé. Aussi, par la suite, seul ce maillage est utilisé.

#### 4.4.4 Comparaisons modèle bifluide - expérience - modèles homogènes

Dans cette section, les résultats obtenus avec le modèle bifluide sont comparés avec ceux des modèles homogènes et avec l'expérience. Dans un premier temps, les résultats expérimentaux sont décrits.

Les phénomènes suivants sont observés expérimentalement [63] :

- une chute brutale de pression depuis la pression initiale jusqu'à une pression inférieure à la pression de saturation, suivie d'une remontée jusqu'à la pression de saturation. Cette phase ne dure quelques millisecondes.
- une phase de décroissance "lente" de la pression, correspondant à une vaporisation intense, jusqu'à ce que l'on atteigne asymptotiquement la pression atmosphérique.
- la température reste pratiquement constante pendant la phase de vaporisation intense, puis amorce une décroissance plus rapide pour approcher la température de 373 K.

La figure 4.29 présente les historiques du taux de présence de vapeur au niveau du capteur  $P_7$  et les historiques de pression au niveau des capteurs  $P_1$  et  $P_5$ . Les trois modèles donnent des résultats assez proches : vaporisation au même instant, plateaux de pression semblables...

Quelques différences sont cependant à souligner. En effet, seule la simulation effectuée avec le modèle bifluide permet de retrouver la chute brutale de pression en dessous de la pression de saturation observée à l'arrivée de l'onde de décompression (cf. figure 4.29). L'influence du temps caractéristique de relaxation des potentiels chimiques sur ce phénomène est étudiée par la suite.

Les historiques de températures sont présentés sur les figures 4.30 et 4.31. Pour le modèle à cinq équations et le modèle à sept équations, la température du liquide est représentée. Comme, pour ces deux modèles, la relaxation des températures est instantanée, les températures des deux phases sont quasi identiques. Les historiques obtenus avec les trois modèles diphasiques sont très similaires. On retrouve, en particulier, le fait que la vaporisation s'effectue à température constante. Ceci est suivi d'une phase de décroissance rapide de la température pour finalement atteindre asymptotiquement la température de 373 K et la pression extérieure de 1 bar.

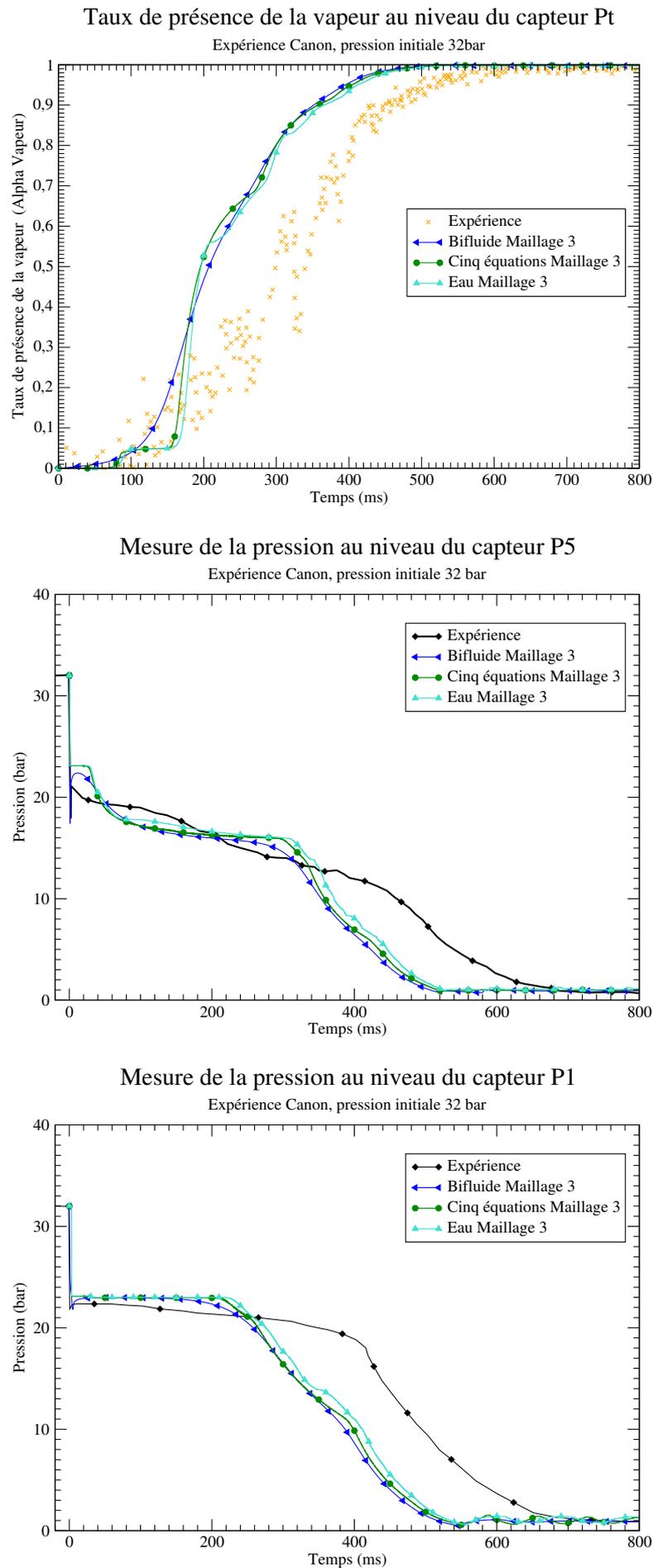


FIGURE 4.29 – Approximations numériques du taux de présence de vapeur et de la pression pour l'expérience Canon : comparaison entre le modèle bifluide avec  $\tau_g = 5 \times 10^{-5}$  s et  $\tau_T = 0$  s, les modèles homogènes et l'expérience.

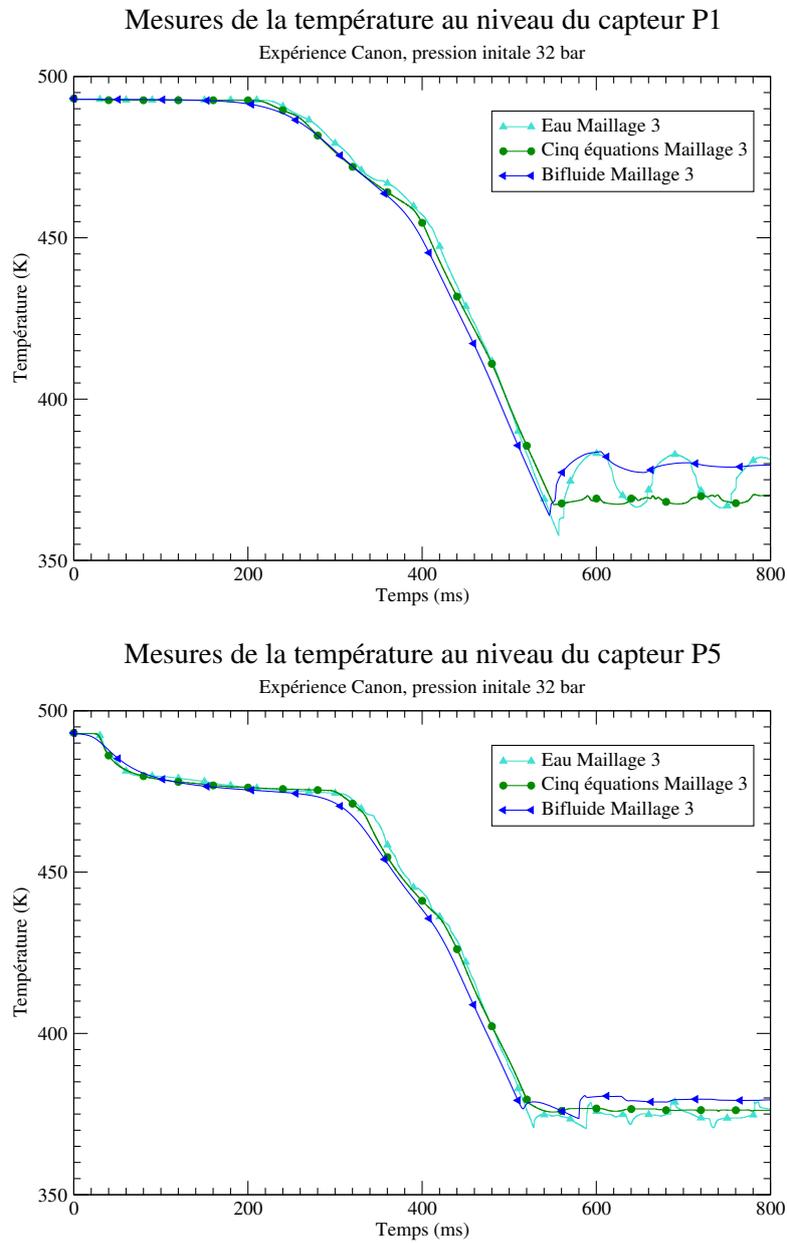


FIGURE 4.30 – Approximations numériques de la température au niveau des capteurs P1 et P5 pour l'expérience Canon : comparaison entre le modèle bifluide avec  $\tau_g = 5 \times 10^{-5}$  s et  $\tau_T = 0$  s et les modèles homogènes.

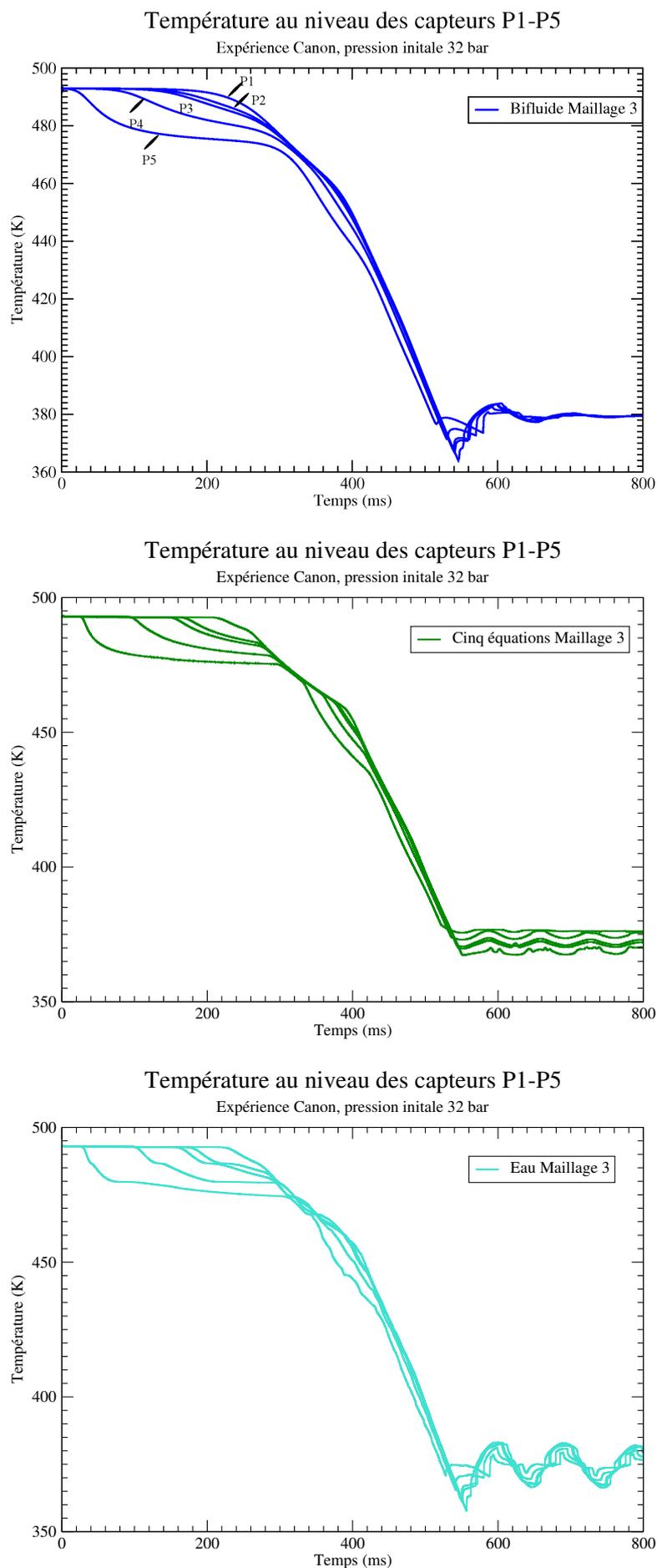


FIGURE 4.31 – Approximations numériques de la température au niveau des capteurs de l'expérience Canon obtenues avec le modèle bifluide pour  $\tau_g = 5 \times 10^{-5}$  s,  $\tau_T = 0$  s et avec les modèles homogènes.

### Influence du temps caractéristique de relaxation des potentiels chimiques du modèle bifluide

L'influence du temps caractéristique de relaxation des potentiels chimiques sur la chute de pression lors de l'arrivée de l'onde de décompression obtenue avec la simulation du modèle bifluide est étudiée ici. Pour cela, deux valeurs distinctes de  $\tau_g$  sont utilisées :  $\tau_g = 5 \times 10^{-5}$  s et  $\tau_g = 8 \times 10^{-6}$  s. La figure 4.32 présente les historiques de pression obtenus avec ces deux valeurs. Dans le cas où  $\tau_g = 5 \times 10^{-5}$  s, les résultats numériques permettent de retrouver la chute de pression en

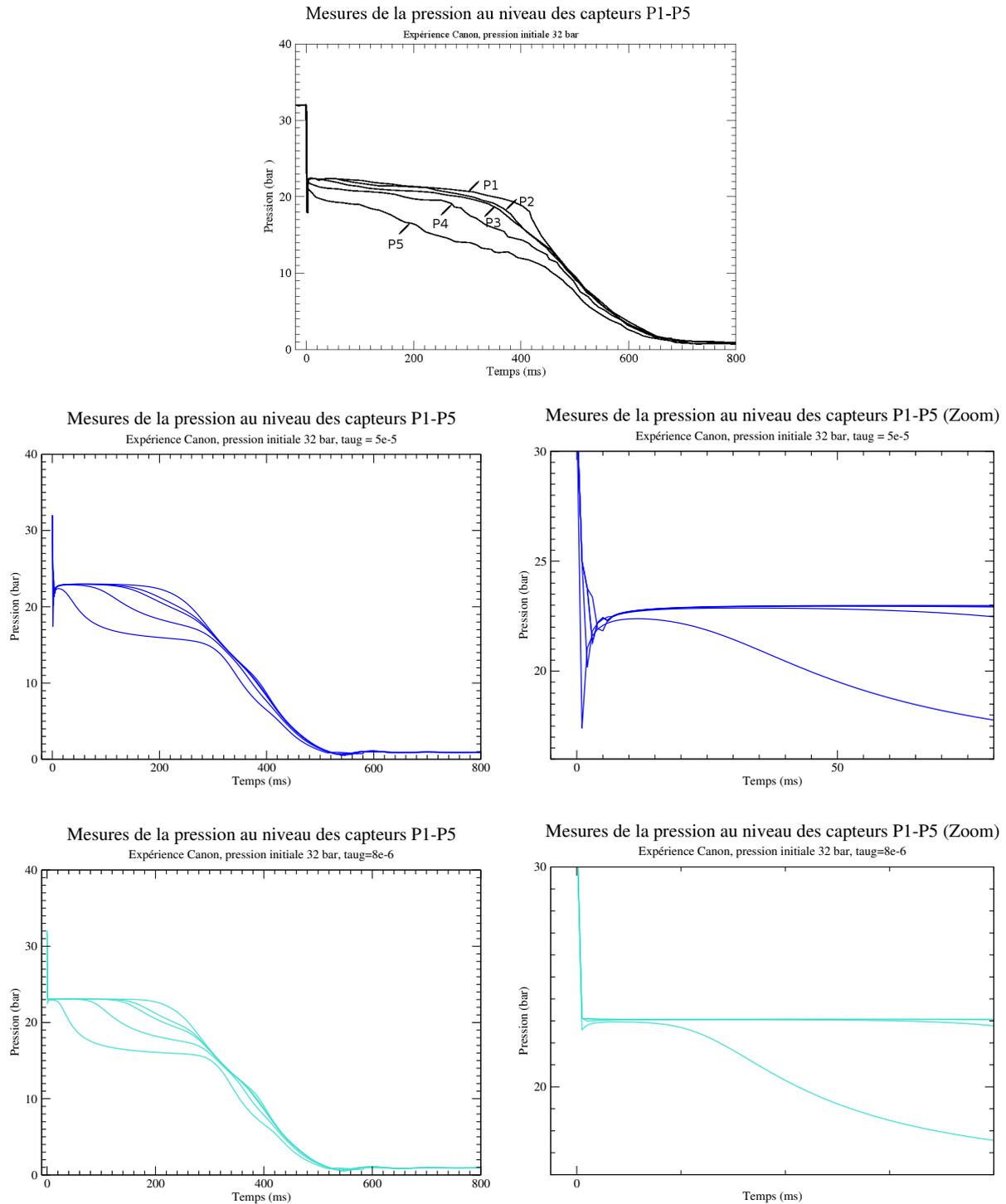


FIGURE 4.32 – Approximations numériques de la pression au niveau des différents capteurs de l'expérience Canon : comparaison entre les calculs bifluides avec  $(\tau_g, \tau_T) = (5 \times 10^{-5} \text{ s}, 0 \text{ s})$  et avec  $(\tau_g, \tau_T) = (8 \times 10^{-6} \text{ s}, 0 \text{ s})$  et l'expérience.

dessous de la pression de saturation. Ce n'est pas le cas pour la plus petite valeur de  $\tau_g$ , les résultats devenant proches de

ceux obtenus avec les deux modèles homogènes.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la capacité du modèle bifluide à retrouver la vitesse de propagation des ondes de pression à la fois dans un liquide monophasique faiblement compressible et dans un mélange liquide/air est dans un premier temps évaluée. Pour cela, seuls les équilibres de pression et de vitesse sont considérés. Dans un deuxième temps, le modèle bifluide est validé sur deux cas expérimentaux de transitoires hydrauliques : l'un présentant des chocs violents et l'autre une forte détente.

Sur ces deux configurations, les calculs effectués avec le modèle bifluide sont convergés et cohérents avec les résultats expérimentaux. Le modèle bifluide est également confronté à deux modèles homogènes. Le premier est basé sur le modèle à cinq équations [70] et prend en compte les relaxations instantanées des températures et des potentiels chimiques. Le deuxième est le modèle homogène non-équilibré (HRM) munie d'une loi de l'eau tabulée [57], pour lequel il y a équilibre instantané des pressions, des vitesses et des températures. Sur les deux configurations expérimentales, le modèle bifluide s'avère être un bon candidat pour la représentation des phénomènes physiques associés à des changements de phase violents en présence de transitoires rapides tels que les coups de bélier et les ruptures de tuyauteries. Des différences sont à noter entre les résultats du modèle bifluide et ceux du modèle à cinq équations. En effet, pour l'expérience de Simpson, les amplitudes des ondes de choc obtenues avec les deux modèles sont légèrement différentes même avec un maillage suffisamment fin. Un écart de moins de 10% a été observé. Pour l'expérience Canon, les tendances entre les deux modèles sont similaires. Cependant, la prise en compte de la relaxation des potentiels chimiques permet au modèle bifluide de retrouver la chute de pression en dessous de la pression de saturation lors de l'arrivée de l'onde de décompression. La comparaison en terme de temps CPU n'a pu être effectuée entre les différents modèles : certains schémas de résolution n'étant pas optimisés [9].

Les schémas numériques utilisés pour les simulations s'avèrent être stables et robustes. Du fait de la diffusion numérique inhérente aux schémas du premier ordre il est nécessaire d'utiliser des maillages relativement fins pour obtenir des résultats satisfaisants. Cependant des difficultés ont été rencontrées pour la modélisation de l'expérience Canon. Ces difficultés sont liées à un grand saut initial du taux de présence de vapeur entre le tuyau et le réservoir. En effet, pour réaliser cette simulation, ce saut a dû être réduit ( $\alpha_v = 10^{-3}$  dans le tuyau et  $\alpha_v = 1 - 10^{-3}$  dans le réservoir).

D'autre part, concernant les processus de relaxation, il n'y a pas de consensus sur les ordres de grandeur des temps caractéristiques associés. Les résultats numériques s'avèrent être très sensibles à ces paramètres. Par ailleurs, comme les relaxations interagissent entre elles, l'étude de l'influence des temps caractéristiques de relaxation sur la solution numérique n'est pas aisée.

Bien que relativement simples, les lois d'état de type "stiffened gas" permettent au modèle bifluide et au modèle homogène à cinq équations de retrouver les transitoires hydrauliques étudiés. Ces lois peuvent cependant poser des problèmes de simulation à cause de leur raideur comme cela a été observé pour la simulation de l'expérience Canon. Par ailleurs, la loi de type "stiffened gas" peut être facilement modifiée pour prendre en compte l'influence de l'élasticité du tuyau sur la célérité des ondes de pression. Ceci n'est pas possible avec les tables de l'eau : la célérité étant déterminée directement à partir des tables.

Lorsque les déformations de la structure deviennent importantes (plasticité, grandes déformations et/ou grands déplacements) la modification des coefficients de la loi d'état n'est plus suffisante. Il devient impératif, dans ce cas, de prendre en compte l'interaction fluide/structure, la dynamique du fluide étant décrite sur un maillage mobile qui suit les déplacements de la structure. Cet aspect est abordé dans le chapitre suivant.

---

## Prise en compte et validation de l'interaction fluide structure avec le modèle bifluide

---

### 5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est la prise en compte des phénomènes de couplage fluide/structure avec le modèle bifluide que nous venons d'examiner en détail. En effet, les transitoires hydrauliques tels que les coups de bélier peuvent avoir des conséquences mécaniques néfastes sur les structures et les matériels. Ces dernières doivent donc être également représentées dans la modélisation.

Pour cela, un prérequis indispensable est de pouvoir traiter la dynamique du fluide diphasique en maillage mobile ou déformable, ce dernier suivant les déformations de la structure sollicitée par les efforts de pression. Ceci est réalisé à l'aide de la formulation du modèle bifluide en ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*). Comme dans le cas monophasique, la préservation de la loi géométrique est indispensable. D'autre part, il est également impératif de prendre en compte sur maillage mobile/déformable les termes sources utiles à la modélisation des phénomènes de changement de phase. Cette formulation ALE résolue au niveau discret à l'aide du schéma de Rusanov pour la convection et des schémas de relaxation précédemment décrits est ensuite évaluée.

La propagation d'ondes de pression dans une conduite flexible est alors étudiée. Le but dans ce cas est de retrouver la variation de la célérité des ondes de pression dans le fluide liée au couplage entre le fluide et la structure. Dans un premier temps, le cas 'quasi-monophasique' de l'eau liquide obtenu avec une valeur très faible de taux de présence statistique de vapeur est examiné. Dans un deuxième temps, l'influence de la valeur du taux de présence de la vapeur sur la vitesse de propagation des ondes est étudiée.

Enfin, la validation a été effectuée sur l'expérience décrite dans Romander *et al.* [64]. Il s'agit d'étudier la réponse d'une tuyauterie remplie d'eau soumise à un pic de pression violent (140 bar). La tuyauterie comporte une première partie très rigide et une autre partie souple qui permet de mettre en évidence les effets de l'interaction fluide structure. Deux calculs ont été effectués avec le modèle bifluide en considérant ou non l'interaction fluide/structure. Les calculs réalisés avec le modèle bifluide sont comparés avec les résultats d'expérience et avec ceux relatifs au modèle HRM.

Toutes les simulations présentées dans cette partie ont été effectuées avec le code de dynamique rapide *Europlexus*.

## 5.2 Formulation ALE du modèle bifluide

L'extension ALE du modèle bifluide a été proposée et étudiée dans [17] pour la partie convective du modèle. Le lecteur pourra se reporter à ce travail pour plus de détails. Nous allons ici reprendre rapidement cette extension ALE et surtout l'étendre à la prise en compte des termes sources à l'aide d'une méthode à pas fractionnaires.

Le domaine de calcul  $\Omega(t)$  est divisé en  $K$  mailles dépendantes du temps notée  $C_i(t)$  dont la mesure est notée  $|C_i(t)|$  et l'enveloppe de la cellule considérée est notée  $\partial C_i(t)$ . De la même façon, le temps est discrétisé à partir du temps initial noté  $t^0$  par les intervalles  $T^n = [t^n, t^{n+1}]$ , avec le pas de temps :  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ . Nous proposons de discrétiser le système d'équations du modèle bifluide (cf. Chapitre 1) en prenant également en compte les termes sources  $S$  à l'aide d'une approche volumes-finis "cell-centered" sur maillage mobile. La forme intégrale du système sur le volume de contrôle  $C_i(t)$  et sur l'intervalle de temps  $T^n$  s'écrit :

$$\int_{T^n} \int_{C_i(t)} \partial_t W dV dt + \int_{T^n} \int_{C_i(t)} \nabla \cdot f(W) dV dt + \int_{T^n} \int_{C_i(t)} h(W) \nabla \alpha_v dV dt = \int_{T^n} \int_{C_i(t)} S(W) dV dt \quad (5.2.1)$$

En utilisant l'équation de transport de Reynolds et le théorème de la divergence, cela donne la formulation suivante :

$$\int_{T^n} \left( \frac{d}{dt} \int_{C_i(t)} W dD \right) dt + \int_{T^n} \left( \int_{\partial C_i(t)} [f(W) - W \otimes \vec{v}_{grille}] \vec{n} ds \right) dt + \int_{T^n} \int_{C_i(t)} h(W) \nabla \alpha_v dV dt = \int_{T^n} \int_{C_i(t)} S(W) dV dt \quad (5.2.2)$$

où  $\vec{v}_{grille}$  est le vecteur vitesse d'un point de l'enveloppe  $\partial C_i(t)$  de la maille  $C_i(t)$ ,  $\vec{n}$  est la normale orientée vers l'extérieur de  $C_i(t)$ . Ainsi, nous introduisons le vecteur flux ALE dans la direction  $\vec{n}$  (avec  $|\vec{n}| = 1$ ) de la façon suivante :

$$f^{ALE}(W, \vec{v}_{grille}, \vec{n}) = f(W) \vec{n} - (\vec{v}_{grille} \cdot \vec{n}) W \quad (5.2.3)$$

La matrice Jacobienne du vecteur-flux ALE dans la direction  $\vec{n}$  (avec  $|\vec{n}| = 1$ ) est :

$$A^{ALE}(W, \vec{v}_{grille}, \vec{n}) = \partial_W f(W) \vec{n} - (\vec{v}_{grille} \cdot \vec{n}) I_d \quad (5.2.4)$$

Le rayon spectral de la matrice  $A^{ALE}(W, \vec{v}_{grille}, \vec{n})$  (avec  $|\vec{n}| = 1$ ) est :

$$r^{ALE}(W, \vec{v}_{grille}, \vec{n}) = \max_{\phi} (|(\vec{u}_{\phi} - \vec{v}_{grille}) \cdot \vec{n}| + c_{\phi}), \quad \phi = l, v, \quad (\vec{u}_{\phi} : \text{vitesse de la phase } \phi) \quad (5.2.5)$$

Là encore, nous proposons de résoudre le système complet (5.2.2) à l'aide d'une méthode à pas fractionnaires. En pratique deux sous-systèmes sont résolus successivement à chaque pas de temps, soit :

$$\begin{cases} \int_{T^n} \left( \frac{d}{dt} \int_{C_i(t)} W dV \right) dt + \int_{T^n} \left( \int_{\partial C_i(t)} [f(W) - W \otimes \vec{v}_{grille}] \vec{n} ds \right) dt + \int_{T^n} \int_{C_i(t)} h(W) \nabla \alpha_v dV dt = 0 & (E1) \\ \int_{T^n} \left( \frac{d}{dt} \int_{C_i(t)} W dV \right) dt = \int_{T^n} \int_{C_i(t)} S(W) dV dt & (E2) \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Posons  $W_i(t)$  la moyenne du vecteur des variables conservatives  $W$  sur  $C_i(t)$  :

$$W_i(t) \stackrel{Def}{=} \frac{1}{|C_i(t)|} \int_{C_i(t)} W dV \quad (5.2.7)$$

ainsi pour la résolution du sous-système (E1) dans 5.2.6, on a

$$\int_{T^n} \left( \frac{d}{dt} \int_{C_i(t)} \partial_t W dV \right) dt = \int_{T^n} |C_i(t)| W_i(t) dt = |C_i(t^{n+1})| W_i(t^{n+1}) - |C_i(t^n)| W_i(t^n) \stackrel{Def}{=} |C_i^{n+1}| W_i^{n+1} - |C_i^n| W_i^n \quad (5.2.8)$$

où  $W_i^{n+1}$ ,  $W_i^n$  sont les variables conservatives et  $|C_i^{n+1}|$ ,  $|C_i^n|$  les mesures de  $C_i(t)$  aux temps  $t^n$  et  $t^{n+1}$ . L'intégrale de surface  $\int_{T^n} \left( \int_{\partial C_i(t)} f^{ALE}(W, \vec{v}_{grille}, \vec{n}) ds \right) dt$  dans l'équation (5.2.6 (E1)) est approchée en prenant la somme des flux

numériques  $\Phi^{ALE}$  traversant les faces du volume de contrôle. En plus, le flux est supposé ici constant sur l'intervalle de temps  $T^n$  pour chaque face. Pour la partie non conservative :  $\int_{T^n} \int_{C_i(t)} h(W) \nabla \alpha_v dV dt$ , nous supposons de façon similaire à ce qui est fait dans le cas de maillages fixes que le vecteur  $h(W)$  est constant sur la maille  $C_i(t)$  et sur l'intervalle de temps  $T^n$ . Ainsi, en utilisant la théorème de la divergence, on considère l'approximation :

$$\int_{T^n} \int_{C_i(t)} h(W) \nabla \alpha_v dV dt \approx h(W_i^n) \int_{T^n} \int_{\partial C_i(t)} \alpha_v \vec{n} ds dt \quad (5.2.9)$$

De la même façon que précédemment, l'intégrale  $\int_{T^n} \int_{\partial C_i(t)} \alpha_v \vec{n} ds dt$  est approximée par la somme de "flux" de  $\alpha_v$ , noté  $\vec{a}_v$  traversant les faces du volume de contrôle.

Pour la résolution du sous-système (E2) dans 5.2.6 ne prenant en compte que les termes sources, on suppose que le maillage est fixe. Ainsi, l'équation (5.2.6) devient :

$$\begin{cases} |C_i^{n+1}| W_i^{n+1} - |C_i^n| W_i^n + \Delta t^n \sum_{l \in \partial C_i} \Phi^{ALE}(W_L, W_R, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*) |l| + \Delta t^n h(W_i^n) \sum_{l \in \partial C_i} \vec{a}_v(W_L, W_R, \vec{n}_{i,l}^*) |l| = 0 \\ W_i^{n+1} - W_i^n = \Delta t^n S(W_i^{n+1}, W_i^n) \end{cases} \quad (5.2.10)$$

avec :

$l$  une face du volume de contrôle  $C_i(t)$  de mesure  $|l|$ ,

$\vec{n}_{i,l}$  la normale de  $l$  orientée vers l'extérieur de  $C_i(t)$  définie par :  $\vec{n}_{i,l} = \frac{1}{|l|} \int_l \vec{n} ds$ ,

$(W_L, W_R, \vec{v}_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*)$  l'état de référence pour calculer les flux spécifié plus tard,

$n_1$  une étape de calcul intermédiaire entre les dates  $t^n$  et  $t^{n+1}$ .

Comme le schéma de Rusanov [65] a été retenu pour résoudre la partie convective du modèle bifluide dans la thèse, le flux numérique utilisé ici est l'extension ALE de ce dernier [17] :

$$\begin{cases} \Phi^{Rusanov}(W_L, W_R, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*) = \frac{1}{2} [f^{ALE}(W_L, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*) + f^{ALE}(W_R, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*) - r_l^{ALE}(W_R - W_L)] \\ \vec{a}_v^{Rusanov}(W_L, W_R, \vec{n}_{i,l}^*) = \frac{1}{2} [(\alpha_v)_L + (\alpha_v)_R] \vec{n}_{i,l}^* \end{cases} \quad (5.2.11)$$

avec  $r_l^{ALE} = \max[r^{ALE}(W_L, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*), r^{ALE}(W_R, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*)]$ .

Pour spécifier la configuration de référence :  $(W_L, W_R, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^*)$ , il est à noter les points suivants :

- nous nous intéressons uniquement à des schémas numériques précis à l'ordre 1 en temps et en espace, donc nous prenons les valeurs de  $W_L$  et  $W_R$  tels que :

$$W_L = W_i^n, \quad W_R = W_{i,l}^n \quad (5.2.12)$$

où  $C_{i,l}$  est la cellule voisine de  $C_i$  séparée par l'interface  $l$ ,  $W_{i,l}^n$  est la moyenne de  $W$  sur la maille  $C_{i,l}$ .

- afin de spécifier  $v_{grille}^*$  et  $\vec{n}_{i,l}^*$ , il est impératif d'introduire la notion de loi de conservation géométrique [75] (ou *Geometric Conservation Law* (GCL)) qui est indispensable pour la conservativité et la stabilité du schéma numérique sur un maillage mobile. La loi de conservation géométrique exprime la variation du volume de contrôle au cours du temps en fonction des déplacements du bord de ce dernier :

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i(t)} dv - \int_{\partial C_i(t)} v_{grille}^* \cdot \vec{n} ds = 0, \quad (5.2.13)$$

Cette relation doit être respectée au niveau discret par le schéma numérique. On parle ainsi dans la littérature de DGCL pour *Discrete Geometric Conservation Law* en anglais [58, 52]. Ici nous présentons uniquement comment sont exprimés  $v_{grille}^*$  et  $\vec{n}_{i,l}^*$  afin que la DGCL soit implicitement vérifiée en 2D et 3D. Le lecteur pourra se reporter

à [58, 52] pour plus de détails.

Notons  $\vec{x}(t)$  le vecteur position, nous définissons  $\vec{x}_i$  et  $\vec{x}_l$  les barycentres de la maille  $C_i$  et de l'interface  $l$ , respectivement :

$$\vec{x}_i \stackrel{Def}{=} \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} \vec{x} dV \quad \text{et} \quad \vec{x}_l \stackrel{Def}{=} \frac{1}{|l|} \int_l \vec{x} ds$$

### Cas 2-D

La DGCL s'écrit en 2-D comme suit :

$$|C_i^{n+1}| - |C_i^n| = \Delta t^n \sum_{l \in \partial C_i} v_{grille}^* \cdot \vec{n}_{i,l}^* |l| \quad (5.2.14)$$

avec  $\partial C_i$ ,  $\vec{n}_{i,l}^*$ ,  $|l|$  calculés suivant la configuration :

$$\vec{x}^* = \frac{1}{2} (\vec{x}(t^n) + \vec{x}(t^{n+1}))$$

La vitesse de grille est quant à elle calculée de la manière suivante :

$$v_{grille}^* = \frac{1}{\Delta t^n} (\vec{x}(t^{n+1}) - \vec{x}(t^n)) \quad (5.2.15)$$

### Cas 3-D

De la même façon, la DGCL s'écrit en 3-D :

$$|C_i^{n+1}| - |C_i^n| = \frac{\Delta t^n}{2} \left( \sum_{l \in \partial C_i^{(1)}} v_{grille}^* \cdot \vec{n}_{i,l}^{*(1)} |l| + \sum_{l \in \partial C_i^{(2)}} v_{grille}^* \cdot \vec{n}_{i,l}^{*(2)} |l| \right) \quad (5.2.16)$$

avec  $\partial C_i$ ,  $\vec{n}_{i,l}^*$ ,  $|l|$  calculés en utilisant les deux configurations intermédiaires :

$$\vec{x}^{*(1)} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \vec{x}(t^n) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \vec{x}(t^{n+1}) \quad \text{et} \quad \vec{x}^{*(2)} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \vec{x}(t^n) + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \vec{x}(t^{n+1})$$

La vitesse de grille étant constante sur chaque intervalle de temps, elle est simplement calculée par :

$$v_{grille}^* = \frac{1}{\Delta t^n} (\vec{x}(t^{n+1}) - \vec{x}(t^n))$$

Le schéma pour résoudre la convection en 3-D s'écrit alors,

$$\begin{aligned} |C_i^{n+1}| W_i^{n+1} - |C_i^n| W_i^n &+ \Delta t^n \left( \sum_{l \in \partial C_i^{(1)}} \Phi^{ALE} (W_L, W_R, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^{*(1)}) |l| + \sum_{l \in \partial C_i^{(2)}} \Phi^{ALE} (W_L, W_R, v_{grille}^*, \vec{n}_{i,l}^{*(2)}) |l| \right) \\ &+ \Delta t^n h(W_i^n) \left( \sum_{l \in \partial C_i^{(1)}} \vec{a}_v(W_L, W_R, \vec{n}_{i,l}^{*(1)}) |l| + \sum_{l \in \partial C_i^{(2)}} \vec{a}_v(W_L, W_R, \vec{n}_{i,l}^{*(2)}) |l| \right) = 0 \end{aligned}$$

Le pas de temps est déterminé par la condition de stabilité :

$$\Delta t^n = CFL \min_i \left( \frac{|C_i^{n+1}| + |C_i^n|}{\sum_{l \in \partial C_i} r_l^{ALE} |l|} \right) \quad (5.2.17)$$

$$CFL < 1$$

**Proposition 5.2.1.** *L'écriture discrète de l'étape de convection de l'équation 5.2.10 sur maillage mobile préserve la positivité des taux de présence  $\alpha_\varphi$  et des masses partielles  $m_\varphi$   $\varphi = l, v$  sous la contrainte 5.2.17 sur le pas de temps  $\Delta t^n$ .*

Cette condition de stabilité dans le cas où  $C_i^{n+1} = C_i^n$  et  $\vec{v}_{grille} = \vec{0}$  est identique à la condition de stabilité en maillages fixes.

La formulation ALE ainsi décrite a été vérifiée sur plusieurs problèmes de Riemann à la fois sur des maillages fixes et mobiles [17] uniquement pour les termes de convection, c'est-à-dire la première étape de la méthode à pas fractionnaires. Nous souhaitons maintenant éprouver cette formulation en prenant en compte les termes sources.

### Couplage fluide structure

Nous ne rentrons pas ici dans les détails du couplage, seuls les deux points suivants sont à noter :

- la pression imposée par l'écoulement sur la structure est la pression de mélange définie par :

$$p = \alpha_v p_v + \alpha_l p_l$$

calculée au niveau des cellules adjacentes à la paroi. La force ainsi exercée sur la structure correspond à

$$\vec{\mathcal{F}} = \int_{\partial C_S} p \vec{n} ds$$

avec  $\vec{n}$  la normale dirigée vers l'extérieur du domaine fluide.

- la condition de paroi mobile est très simplement prise en compte en imposant des conditions aux limites de type 'miroir' pour l'état droit dans le repère lié à la face en mouvement. Connaissant l'état 'Gauche' (indice  $L$ ), on impose à l'état droit (indice  $R$ ) les valeurs suivantes (exprimées dans le repère local de la face) :

$$\begin{aligned} (\alpha_\varphi)_R &= (\alpha_\varphi)_L \\ (\rho_\varphi)_R &= (\rho_\varphi)_L \\ (u_\varphi^n)_R &= -(u_\varphi^n)_L + 2v_{grille} \cdot \vec{n}_l, \text{ composante normale à la face } l \text{ de la vitesse} \\ (u_\varphi^1)_R &= (u_\varphi^1)_L, \text{ composante tangentielle 1 à la face } l \text{ de la vitesse} \\ (u_\varphi^2)_R &= (u_\varphi^2)_L, \text{ composante tangentielle 2 à la face } l \text{ de la vitesse} \\ (p_\varphi)_R &= (p_\varphi)_L \end{aligned}$$

avec  $\varphi = v, l$  l'indice de la phase vapeur ou liquide. On remarque que les énergies totales peuvent être calculées de la manière suivante :

$$(E_\varphi)_R = (E_\varphi)_L + \frac{1}{2} \left( (\rho_\varphi)_R (u_\varphi^n)_R^2 - (\rho_\varphi)_L (u_\varphi^n)_L^2 \right)$$

on rappelle que  $E_\varphi = \rho_\varphi \varepsilon_\varphi + \frac{1}{2} \rho_\varphi \left( (u_\varphi^n)^2 + (u_\varphi^1)^2 + (u_\varphi^2)^2 \right)$  avec  $\varepsilon_\varphi$  l'énergie interne de chaque phase.

## 5.3 Vérifications préliminaires

### 5.3.1 Propagation d'ondes de pression

Comme nous l'avons déjà évoqué, l'élasticité de la tuyauterie modifie fortement la célérité des ondes de pression dans celle-ci [74]. La relation analytique traduisant ce phénomène est celle proposée par Allievi. L'objectif est ici de vérifier si la prise en compte du couplage fluide/structure à l'aide de l'approche ALE en conjonction avec le modèle bifluide permet de retrouver cette influence. Dans ce cas, seules les relaxations des vitesses et des pressions sont considérées (formellement  $\tau_T = \tau_g = +\infty$ ). Plusieurs épaisseurs de tuyauterie sont utilisées en conservant à la fois le diamètre intérieur et le module d'Young du tuyau. Dans un premier temps, un écoulement monophasique liquide est considéré en utilisant un taux de présence de vapeur très faible, soit  $\alpha_v = 10^{-6}$ . Puis différentes valeurs de  $\alpha_v$  sont ensuite utilisées afin d'examiner le cas d'un mélange eau/air.

### La relation d'Allievi

La formule d'Allievi donne une estimation de la célérité des ondes dans un écoulement monophasique liquide en fonction des caractéristiques géométriques et matérielles du tuyau. Cette formule est obtenue à l'aide de la théorie élastique des milieux continus tout en négligeant à la fois la contrainte axiale dans le tuyau et l'inertie de ce dernier. Cette relation s'exprime suivant :

$$c_l^{Allievi} = \frac{c_l}{\sqrt{1 + \frac{\rho_l c_l^2 D_{int}}{eE}}} \quad (5.3.1)$$

avec  $c_l$  la vitesse du son du fluide,  $D_{int}$  le diamètre intérieur,  $e$  l'épaisseur et  $E$  le module de Young du tuyau. La figure (cf. 5.1) illustre les influences respectives de ces différents paramètres sur la célérité.

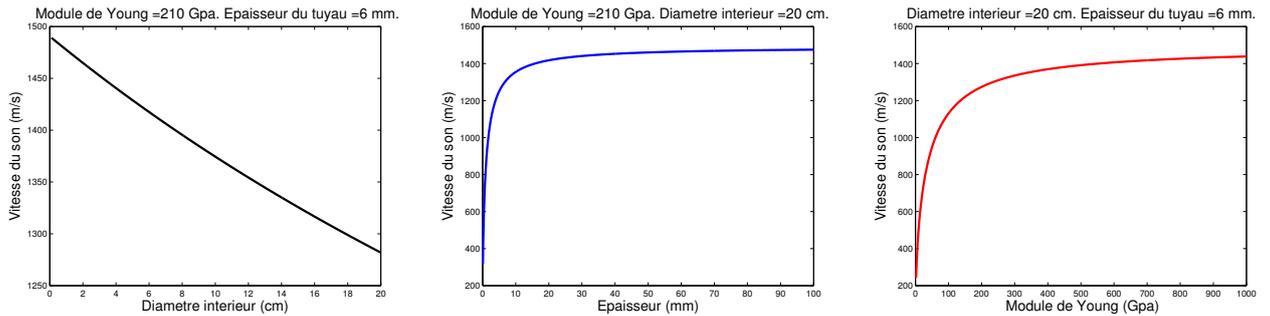


FIGURE 5.1 – Variation de la célérité des ondes en fonction des caractéristiques du matériau du tuyau ( $D_{int}$ ,  $e$  et  $E$ ) selon la relation d'Allievi.

### Configuration et paramètres numériques

Nous considérons un tuyau de 10 mètres de long séparé en son milieu par une membrane. Des conditions aux limites de type Neumann à l'entrée et à la sortie sont appliquées. Sur le côté gauche du tuyau, l'eau liquide a une pression légèrement supérieure à celle du côté droit du tuyau ( $\Delta p/p_0 = 0.01$ ). Le diamètre intérieur du tuyau est fixé à 20 cm. La loi de comportement du matériau constitutif de ce dernier est supposée être linéaire. Plusieurs épaisseurs sont considérées : 0.1 mm, 0.6 mm, 1 mm, 6 mm, 10 mm, 60 mm et 100 mm, respectivement.

Le maillage est tridimensionnel. Seul un quart de la section du tuyau est représenté afin de réduire le temps de restitution des calculs (cf. Figure (5.2)). Il convient alors d'imposer des conditions de symétrie à la coque représentant le

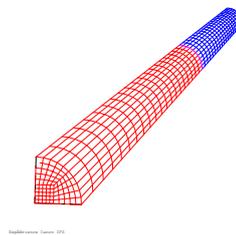


FIGURE 5.2 – Représentation du maillage 3D du tuyau pour l'estimation de la célérité des ondes de pression.

tube. Le domaine fluide est discrétisé par des cellules hexaédriques de façon à ce que la taille des mailles soit homogène dans le sens de la longueur du tube. Le tube est représenté par des éléments de coque 3-D à 4 noeuds. Trois finesses de maillage sont utilisées ici. Les maillages comportent respectivement 250, 500 et 1000 mailles homogènes dans la longueur du tuyau. Bien que ces maillages soient grossiers, il est attendu au vu des résultats du chapitre précédent (cf. figures 4.2,

4.3, 4.14, 4.15) que l'estimation des ondes rapides (de pression) soit correcte. On constate ici que les résultats obtenus avec 1000 mailles sont très proches de ceux obtenus avec 500 mailles. Les résultats sont donc considérés comme convergés.

Les conditions initiales sont présentées dans le tableau 5.1. La température de ces calculs est la température ambiante,

Conditions initiales		Zone S1	Zone S2	Zone tube (coque)
Vapeur	taux de présence : $(\alpha_v)_0(x, y)$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	-
	densité : $(\rho_v)_0(x, y)$ ( $kg/m^3$ )	2.52	2.52	-
	vitesse suivant x : $(u_v)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	vitesse suivant y : $(v_v)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	pression : $(p_v)_0(x, y)$ ( $bar$ )	1.01	1	-
Liquide	taux de présence : $(\alpha_l)_0(x, y)$	$1 - 10^{-6}$	$1 - 10^{-6}$	-
	densité : $(\rho_l)_0(x, y)$ ( $kg/m^3$ )	997.8	997.8	-
	vitesse suivant x : $(u_l)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	vitesse suivant y : $(v_l)_0(x, y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	pression : $(p_l)_0(x, y)$ ( $bar$ )	1.01	1	-
Acier (de construction)	Module d'Young (GPa)	-	-	210
	Densité : $(\rho_l)_0(x, y)$ ( $kg/m^3$ )	-	-	7800
	Coefficient de Poisson	-	-	0.3

TABLE 5.1 – Conditions initiales.

donc les coefficients des lois thermodynamiques pour les fluides sont ceux utilisés pour la simulation de l'expérience de Simpson (cf. Tableau 4.4). Pour ces deux premiers cas tests, seules les relaxations en pression et en vitesse sont considérées avec les temps caractéristiques  $\tau_p = 10^{-11}$  s et  $\tau_u = 10^{-11}$  s. Le nombre CFL est fixé à 0.9 pour tous les calculs. Ceci correspond à un pas de temps d'environ  $\Delta t^n = 10^{-6}$  s pour le calcul le plus fin comprenant 1000 mailles dans la direction du tuyau. Par conséquent, la pression et la vitesse sont mises en équilibre presque instantanément. On utilise les paramètres suivant  $\alpha_v = 10^{-6}$  et  $e = 6$  mm. A l'instant  $t = 0$  s, on enlève la membrane. Du fait de la différence de pression initiale, une onde de choc se propage dans l'eau liquide basse-pression (à droite) et une onde de détente se propage dans l'eau liquide haute-pression (à gauche).

Pour le cas monophasique liquide, nous supposons que le titre de vapeur  $\alpha_v$  ne change quasiment pas, ainsi on reste tout au long du calcul dans la configuration monophasique. Ainsi, d'après les inégalités de Lax [55], la vitesse de propagation d'un  $k$ -choc notée  $\sigma$  est bornée selon :

$$\lambda_k(W_d) < \sigma < \lambda_k(W_g)$$

avec  $\lambda_k$  la valeur propre associée au champ non-linéaire correspondant au  $k$ -choc,  $W_d$  et  $W_g$  les états droit et gauche du  $k$ -choc respectivement. Dans le cas présent, il s'agit d'un 3-choc liquide ainsi  $\lambda_k = u_l + c_l$ . Comme la vitesse  $u_l$  est largement inférieure à la célérité  $c_l$ , on peut considérer l'approximation :  $\lambda_k \approx c_l$ . Par ailleurs, l'eau liquide étant faiblement compressible, on a également l'approximation  $(c_l)_g \approx (c_l)_d$ . Ainsi, la célérité  $c_l$  est une bonne approximation de la vitesse de propagation du choc  $\sigma$ . Par ailleurs, pour une  $k$ -onde de raréfaction, on aura :

$$\lambda_k(W_g) < \lambda_k(W_d)$$

De plus, chaque point du profil de l'onde de raréfaction a sa vitesse de propagation comprise entre ces deux vitesses. Ici, il s'agit d'une 1-onde de détente liquide, ainsi  $\lambda_k = u_l - c_l$ . Pour les raisons déjà évoquées, les points du profil de cette onde de raréfaction ont une vitesse de propagation d'environ  $-c_l$ . Par conséquent, la vitesse de propagation des ondes de choc et de raréfaction permet de donner une bonne estimation de la célérité des ondes dans le fluide. Il faut noter que la vitesse de propagation de ces ondes est approximée à l'aide de la simulation du modèle bifluide par l'estimation suivante :  $\frac{x_{choc} - x_{détente}}{2T_{fin}}$ , où  $x_{choc/détente}$  est la distance entre le milieu du front d'onde de choc/détente à  $t = T_{fin}$  et le milieu du tuyau. Pour le cas diphasique ( $\alpha_v > 10^{-6}$ ), nous faisons la même estimation numérique basée sur les fronts d'ondes de pression du mélange.

### Propagation d'une onde de pression au sein d'un liquide monophasique dans un tuyau élastique

La figure (5.3) montre le profil de pression moyenne ( $p = \alpha_v p_v + \alpha_l p_l$ ) obtenu avec le modèle bifluide résolu en formulation ALE en utilisant différentes épaisseurs pour le tuyau flexible. Comme attendu, les fronts de pression correspondant à l'onde de raréfaction et à l'onde de choc se déplacent plus vite lorsque l'épaisseur du tuyau augmente. L'estimation de la célérité des ondes de pression ainsi obtenue avec le modèle bifluide est également comparée à la valeur donnée par la relation d'Allievi. Un très bon accord est ainsi trouvé. Les écarts relatifs entre les deux valeurs sont donnés en fonction de la finesse du maillage pour différentes épaisseurs. Ceci permet ainsi de valider la formulation ALE dans le contexte quasi-monophasique liquide du modèle bi-fluide, à savoir avec un taux de présence de vapeur très faible. Nous souhaitons maintenant effectuer le même test pour d'autres valeurs du taux de présence de vapeur.

### Propagation d'une onde de pression dans un mélange liquide/vapeur dans un tuyau

Le cas-test précédent est de nouveau considéré avec les mêmes conditions initiales, les mêmes finesses de maillages et les mêmes épaisseurs du tuyau. L'influence de la valeur du taux de présence de la vapeur est évaluée. Différentes valeurs de  $\alpha_v$  sont considérées :  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ , respectivement. Comme dans le cas d'une conduite rigide, la célérité des ondes de pression dépend fortement de la valeur de  $\alpha_v$ . La relation d'Allievi (Equation 5.3.1) étant valable pour une liquide monophasique, nous proposons une nouvelle relation analytique basée sur cette dernière mais faisant intervenir la célérité des ondes dans un mélange donnée par la formule de Wallis [78] ainsi que la densité du mélange, à savoir :

$$c_l^{Allievi-Diph} = \frac{c_{Wallis}}{\sqrt{1 + \frac{m c_{Wallis}^2 D_{int}}{e E}}} \quad (5.3.2)$$

avec

$$\frac{1}{m c_{Wallis}^2} = \frac{\alpha_l}{\rho_l c_l^2} + \frac{\alpha_v}{\rho_v c_v^2}, \quad m = \alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v$$

La figure (5.4) montre la bonne cohérence entre les résultats numériques et cette relation analytique. Ceci permet ainsi de valider la formulation ALE dans le contexte d'un mélange air/eau avec le modèle bi-fluide.

### 5.3.2 Synthèse

Nous avons pu vérifier dans les tests qui précèdent que l'extension du modèle bifluide à la prise en compte de maillages mobiles permet de retrouver les effets dus à l'IFS sur la vitesse de propagation des ondes dans un tuyau. Ceci est observé à la fois pour le cas monophasique liquide et pour le cas d'un mélange air/eau.

Nous allons maintenant confronter le modèle bifluide complet en maillage mobile (en prenant en compte les termes de relaxation) à des données expérimentales afin de mettre en évidence l'influence du couplage fluide/structure. Par ailleurs, le modèle bifluide sera également comparé au modèle HRM.

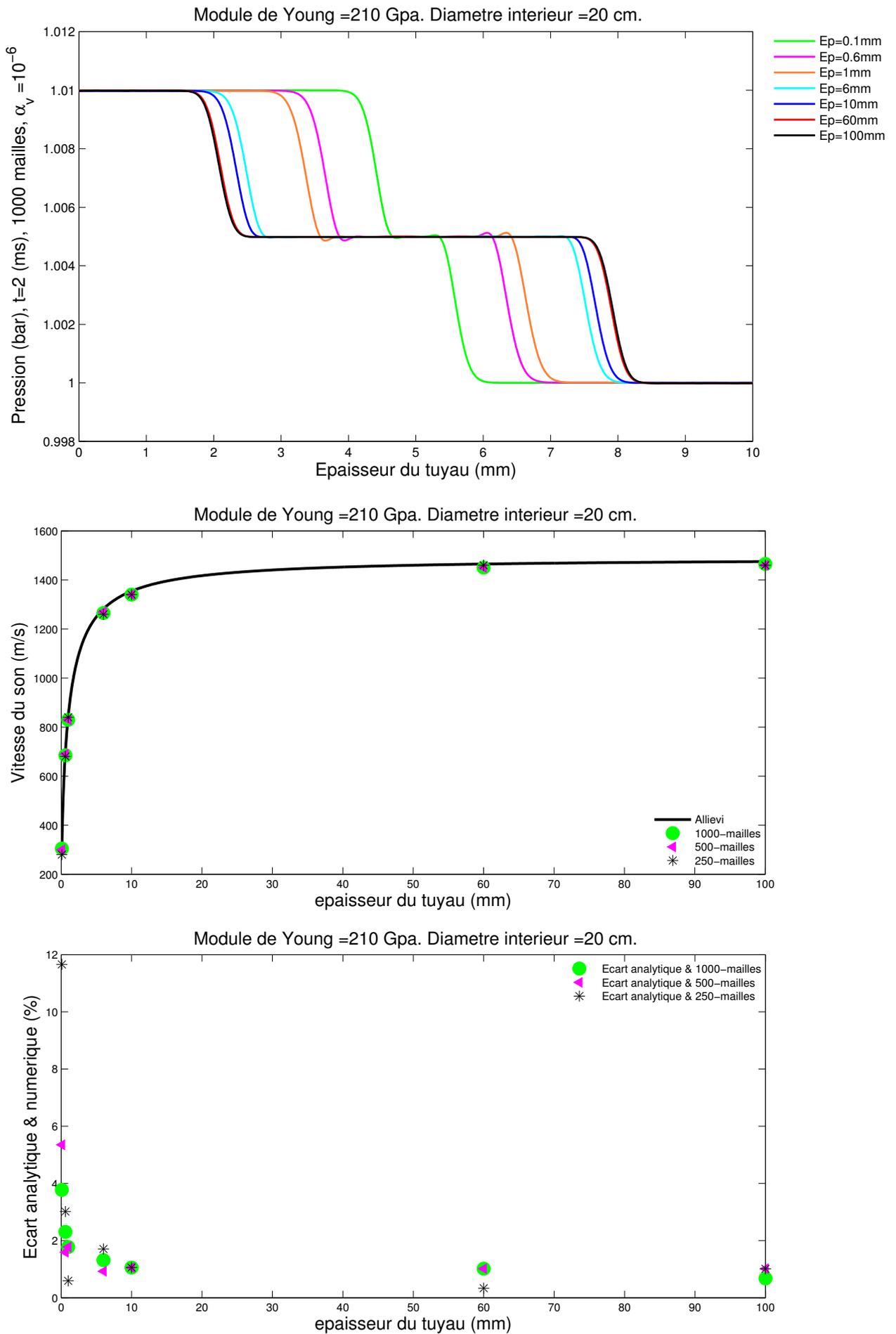


FIGURE 5.3 – Estimation de la célérité des ondes de pression dans une conduite élastique à l’aide de la simulation du modèle bifluide avec  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s pour  $\alpha_v = 10^{-6}$  : profil de pression, valeur de la célérité en fonction de l’épaisseur du tuyau et écarts relatifs.

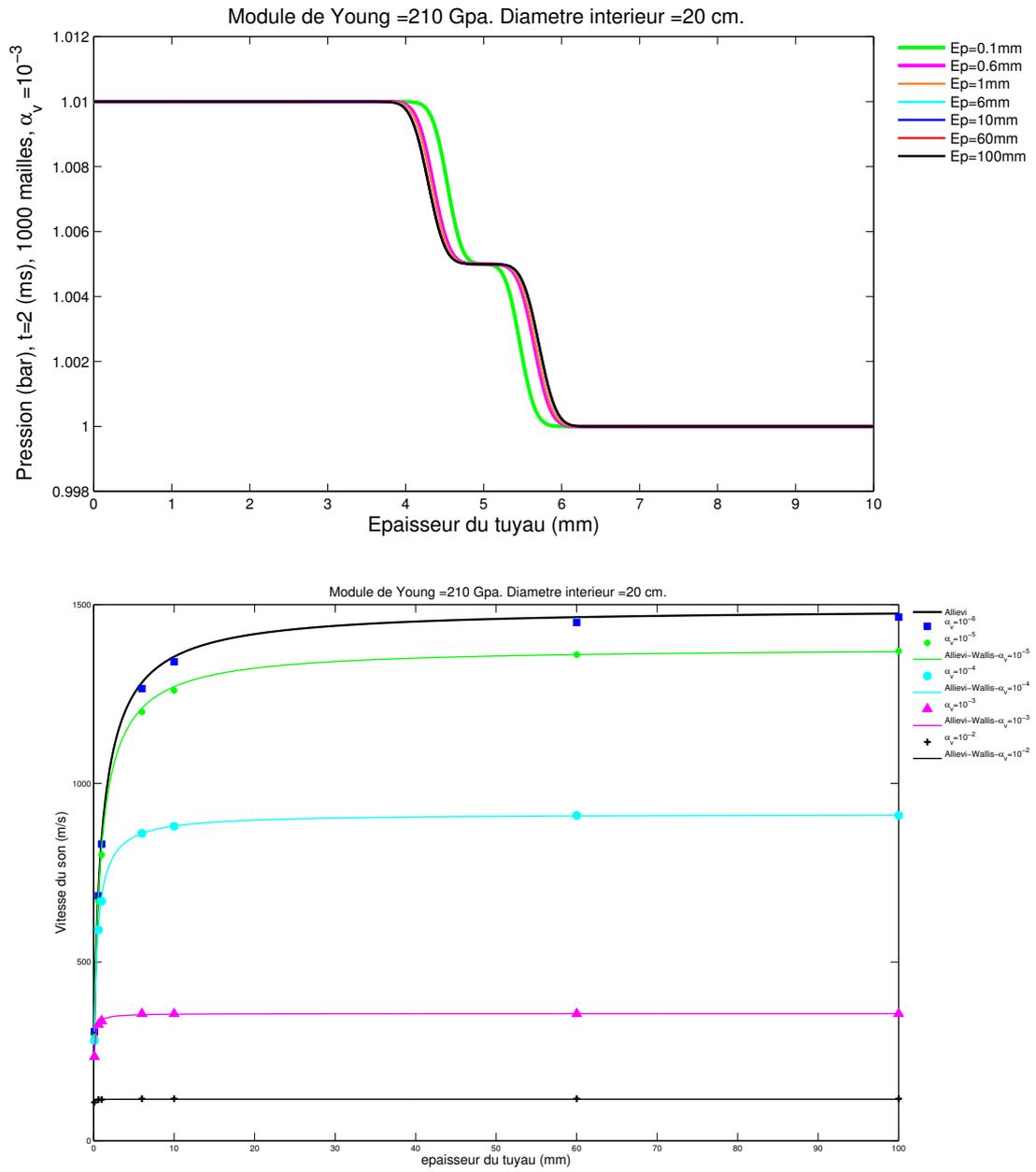


FIGURE 5.4 – Estimation de la célérité des ondes de pression dans une conduite élastique à l’aide de la simulation du modèle bifluide avec  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s pour  $\alpha_v = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  : profil de pression, valeur de la célérité en fonction de l’épaisseur du tuyau et écarts relatifs pour différentes valeurs de  $\alpha_v$ .

## 5.4 Simulation de l'expérience de Romander *et al.* [64]

Dans cette section, les résultats obtenus avec le modèle bifluide complet en considérant l'interaction fluide structure sont confrontés aux données expérimentales issues de [64]. On s'intéresse à la réponse d'une tuyauterie d'eau soumise à un pic de pression. Celui-ci se propage tout d'abord dans une tuyauterie très rigide et ensuite dans une partie souple où il est fortement atténué.

On s'intéresse ici à la validation des calculs utilisant le modèle bifluide complet en maillage mobile. Pour ce faire, les résultats obtenus avec le modèle bifluide sont comparés aux résultats expérimentaux et au modèle homogène non-équilibré (HRM). Par ailleurs, l'influence de la modélisation de l'interaction fluide/structure est également évaluée. Tous les calculs présentés ici sont effectués en 3D.

### 5.4.1 Présentation du dispositif expérimental

L'expérience de Romander *et al.* [64] comporte un tuyau droit formé de deux tubes de section circulaire remplis d'eau à température ambiante. Le premier tube de longueur  $L1 = 305$  cm est en acier inoxydable et a une épaisseur de 0.478 cm. Il est relié de manière rigide à un second tube en Nickel (Ni 200) d'épaisseur plus faible (0.165 cm) et de longueur  $L2 = 152$  cm. Le diamètre interne du tuyau est de 7.29 cm. Les deux extrémités du tuyau sont fixées à un massif en béton, qui permet d'obtenir une condition d'encastrement pratiquement parfaite. Le chargement en pression, qui engendre des déformations plastiques dans le tube en nickel est produit par un explosif de faible densité. L'amplitude maximale du pic de pression est de 138 bar et le temps caractéristique associé est de l'ordre de 3 ms (cf. Figure 5.5).

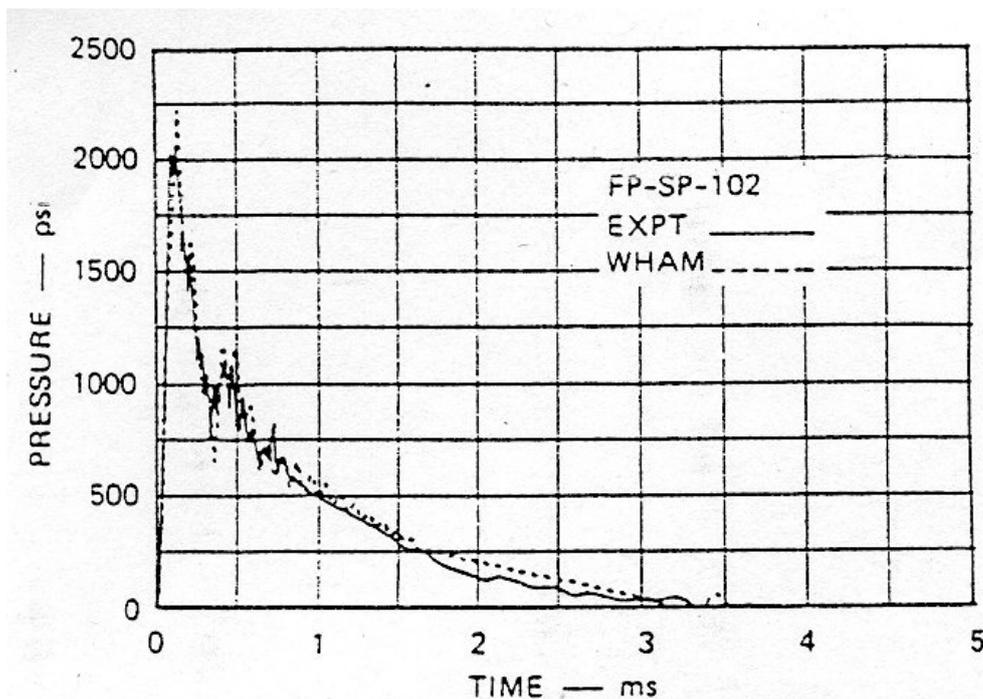


Fig. 8 Pressure at P1 location in thick-walled section of straight pipe system FP-SP-102

FIGURE 5.5 – Historique de pression dans le tube en acier inoxydable pour le premier capteur P1 issu de [64].

Plusieurs capteurs de pression sont montés le long de la tuyauterie, ainsi que des jauges de déformation. Trois capteurs de pression sont montés sur le tube rigide pour mesurer l'onde de pression incidente et l'onde de raréfaction qui se propage du tube mince vers le tube rigide. Dans la partie souple, on trouve 8 capteurs de pression et 20 jauges de déformation. Celles-ci sont situées sur quatre sections différentes de la tuyauterie notées A, B, C et D (voir Figure 5.6). Pour une même

section de la tuyauterie, cinq jauges sont utilisées pour mesurer la déformation circonférencielle du tube.

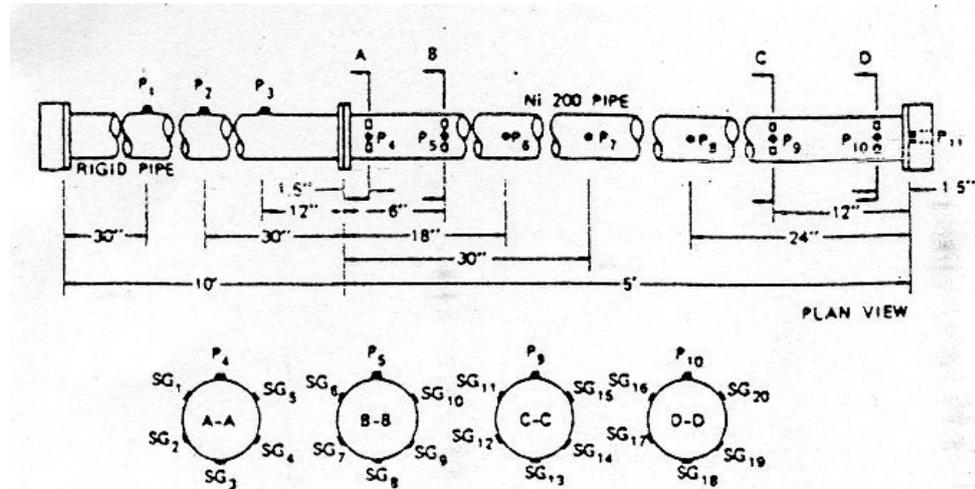


FIGURE 5.6 – Instrumentation de la tuyauterie : position des différents capteurs de pression et jauges de déformation utilisés dans [64].

## 5.4.2 Configuration et paramètres numériques

Compte tenu de l'épaisseur relativement importante du tube en acier inoxydable, celui-ci n'est pas représenté dans le calcul. Ainsi, dans cette partie rigide du tuyau, seul le fluide est représenté.

De plus, afin de représenter le chargement dû à l'explosion au niveau de la condition d'entrée de la tuyauterie, l'historique de pression observé expérimentalement au niveau du capteur P1 est imposé comme condition aux limites. Ainsi, la partie de la tuyauterie située à gauche du capteur P1 n'est pas modélisée (entre la source de pression et le capteur P1). De plus, la comparaison entre les calculs et l'expérience n'est possible que sur un laps de temps limité. En effet, la modélisation ainsi retenue pour l'explosion n'est plus valide lorsque les ondes de pression réfléchies atteignent la condition de pression imposée à l'entrée.

Quatre calculs différents ont été effectués. Pour le premier calcul, le fluide est modélisé à l'aide du modèle bifluide complet. Dans ce calcul, l'interaction fluide structure n'est pas prise en compte : la partie souple du tuyau est supposée infiniment rigide. Pour le deuxième calcul, la modélisation bifluide est de nouveau utilisée. Par contre, la partie souple du tuyau est représentée avec des éléments de coque 3D à 4 noeuds. Ceci va donc permettre de prendre en compte la dynamique de la structure induite par le chargement dû à l'écoulement et le couplage fluide/structure associé. Pour le troisième calcul, l'influence des temps de relaxation est étudiée par rapport au calcul précédent avec IFS. Pour le quatrième et dernier calcul, la partie souple du tuyau est également modélisée avec des éléments de coque 3D à 4 noeuds. Par contre, le modèle HRM muni d'une loi de l'eau tabulée est utilisé pour l'écoulement.

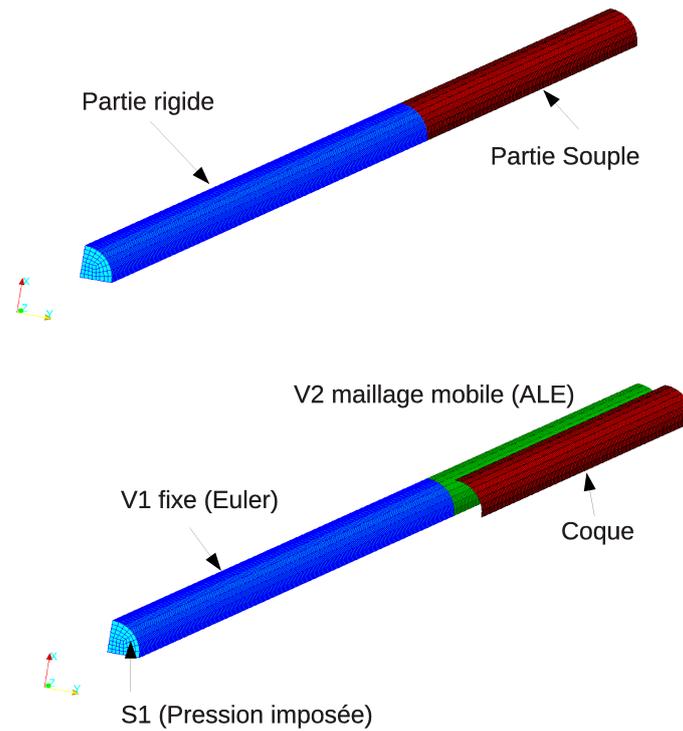
Pour limiter le temps de calcul, seul un quart de la tuyauterie est représenté.

### Maillages

Nous présentons ici les caractéristiques du maillage utilisé dans les calculs. Ce dernier (voir figure 5.7) comporte :

- les parties discrétisant le domaine fluide notées V1 et V2 utilisant des cellules hexaédriques (11 inconnues pour le modèle bifluide et 6 inconnues pour le modèle HRM dans chaque cellule),
- la partie discrétisant le tuyau souple notée C1 utilisant des éléments de coque à 4 noeuds et 6 degrés de liberté (3 translations notées  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  et 3 rotations notées  $\Theta_x$ ,  $\Theta_y$ ,  $\Theta_z$ ) à chaque noeud,
- la surface d'entrée notée S1 (éléments de conditions aux limites). La condition de pression imposée retenue ici est détaillée ultérieurement.

Comme nous le verrons par la suite, trois finesses de maillage sont utilisées.

FIGURE 5.7 – Représentation du maillage utilisé pour la simulation de l'expérience de Romander *et al.* [64].

### Conditions initiales/aux limites

Pour les calculs utilisant le modèle bifluide, les conditions initiales sont présentées dans le tableau 5.2 :

Conditions initiales		Zone V1	Zone V2	Zone tube (coque)
Vapeur	taux de présence : $(\alpha_v)_0(x,y)$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	-
	densité : $(\rho_v)_0(x,y)$ ( $kg/m^3$ )	2.52	2.52	-
	vitesse suivant x : $(u_v)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	vitesse suivant y : $(v_v)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	pression : $(p_v)_0(x,y)$ ( $bar$ )	1	1	-
Liquide	taux de présence : $(\alpha_l)_0(x,y)$	$1 - 10^{-5}$	$1 - 10^{-5}$	-
	densité : $(\rho_l)_0(x,y)$ ( $kg/m^3$ )	997.8	997.8	-
	vitesse suivant x : $(u_l)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	vitesse suivant y : $(v_l)_0(x,y)$ ( $m/s$ )	0	0	-
	pression : $(p_l)_0(x,y)$ ( $bar$ )	1	1	-
Nickel 200	Module d'Young (GPa)	-	-	137.8
	Densité : $(\rho_{Ni})_0(x,y)$ ( $kg/m^3$ )	-	-	8890
	Coefficient de poisson	-	-	0.3
	Limite Elastique (MPa)	-	-	82.7

TABLE 5.2 – Conditions initiales utilisées pour la simulation de l'expérience de Romander *et al.* avec le modèle bifluide.

Les coefficients des lois thermodynamiques de type 'Stiffened Gas' retenus ici sont ceux utilisés pour la simulation de l'expérience de Simpson et décrits dans le tableau 4.4. Ce choix est justifié par le fait que les deux expériences sont menées à des températures voisines : 296.5 K pour Simpson et 293.15 K pour la présente expérience. Seules les relaxations en pression, en vitesse et en potentiel chimique sont considérées. Deux jeux de temps caractéristiques sont considérés : d'une part,  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s et  $\tau_g = 10^{-4}$  s et, d'autre part,  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7}$  s et  $\tau_g = 10^{-4}$  s. La relaxation de température n'est pas été prise en compte ( $\tau_T = \infty$  formellement). Le nombre CFL est fixé à 0.4 pour les trois calculs (bifluide et HRM

avec IFS). Le nombre CFL est baissé à 0.3 pour le calcul sans IFS pour des problèmes de robustesse. En effet, pour ce cas l'onde de pression est beaucoup plus intense nécessitant de réduire légèrement le pas de stabilité. Ceci correspond à un pas de temps d'environ  $\Delta t^n \approx 1.8 \times 10^{-7} s$  pour les quatre calculs avec le maillage le plus raffiné utilisé ici. Par conséquent, la pression et la vitesse sont mises en équilibre presque instantanément pour le cas où  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ . Le titre de vapeur initial est pris égal à  $10^{-5}$ . Pour des valeurs inférieures, des problèmes de robustesse apparaissent.

Concernant le modèle homogène, les variables sont déterminées directement à partir des tables de l'eau [57, 59] et d'un état thermodynamique correspondant à une température de 293.15 K et une pression de 1 bar.

La courbe de traction du tube souple en Nickel 200 pour une vitesse de déformation de  $\dot{\epsilon} = 2.3 \times 10^{-2} s^{-1}$  représentée sur la figure 5.8 est utilisée ici pour la modélisation de la structure. La loi de comportement est de type von Mises isotrope. Ses caractéristiques mécaniques sont présentées dans le tableau 5.2.

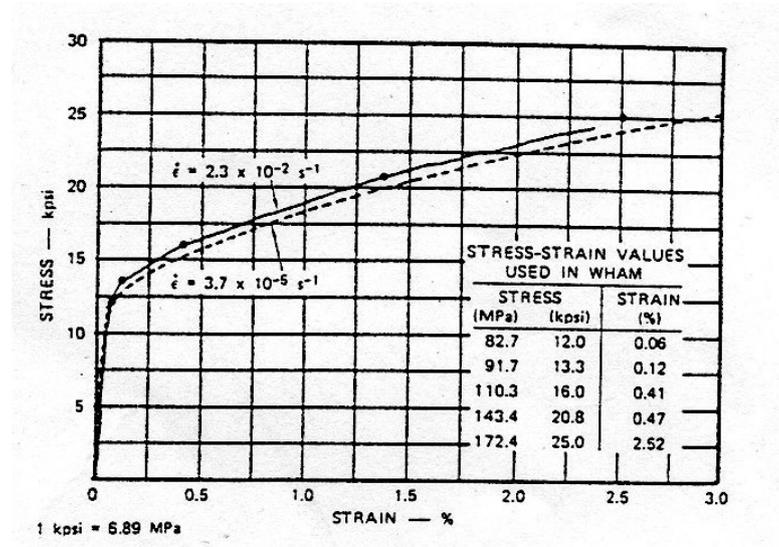


FIGURE 5.8 – Courbe de traction du Nickel 200 issue de la référence [64].

### Conditions aux limites

Pour les calculs effectués dans cette partie, seul un quart de la section du tuyau est modélisé. Il convient alors d'imposer des conditions de symétrie pour les parties mobiles du domaine de calcul. Celles-ci correspondent à la coque représentant le tube souple et à la partie fluide en ALE notée V2 (cf. figure 5.9). La condition de symétrie pour le plan  $y = 0$  consiste

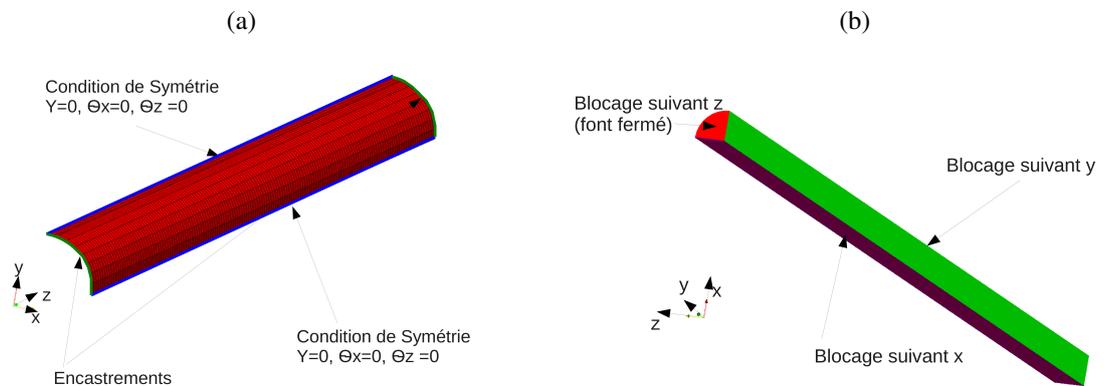


FIGURE 5.9 – Conditions de symétrie utilisées pour la coque (a) et pour le fluide dans la partie ALE (b).

à bloquer la vitesse selon l'axe  $y$  et les rotations autour des axes  $x$  et  $z$  pour la structure et la vitesse selon l'axe  $y$  pour le

fluide. De façon analogue, pour le plan  $x = 0$ , la vitesse selon l'axe  $x$  ainsi que les rotations autour des axes  $y$  et  $z$  sont bloquées pour la structure tandis que la vitesse selon l'axe  $x$  est bloquée pour l'écoulement.

La pression au niveau de la condition aux limites est imposée de la manière suivante : pour une interface de bord sur laquelle on souhaite imposer la pression (comme fonction du temps  $f_{imp}(t)$ ), un état droit fictif indicé  $R$  est créé à partir de l'état de la cellule de calcul voisine indicé  $L$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\alpha_\varphi)_R &= (\alpha_\varphi)_L \\(\rho_\varphi)_R &= (\rho_\varphi)_L \\(u_\varphi^n)_R &= (u_\varphi^n)_L, \text{ composante normale à l'interface } l \text{ de la vitesse} \\(u_\varphi^1)_R &= (u_\varphi^1)_L, \text{ composante tangentielle 1 à l'interface } l \text{ de la vitesse} \\(u_\varphi^2)_R &= (u_\varphi^2)_L, \text{ composante tangentielle 2 à l'interface } l \text{ de la vitesse} \\(p_\varphi)_R &= f_{imp}(t), \text{ fonction du temps que l'on impose}\end{aligned}$$

avec  $\varphi = v, l$  l'indice de la phase vapeur ou liquide.

### 5.4.3 Convergence en maillage

Pour étudier la convergence en maillage, nous considérons trois résolutions de maillage (à chaque fois la taille de maille est divisée par deux dans les trois directions d'espace). Le maillage le plus grossier (noté R1) contient 32 568 cellules, le maillage intermédiaire (noté R2) 255 648 cellules tandis que le maillage le plus fin (noté R3) contient 2 025 600 cellules. Ce dernier admet 2000 mailles homogènes dans la direction du tuyau pour la partie rigide et 612 pour la partie souple.

La figure 5.10 présente l'historique de pression moyenne obtenu au niveau du capteur P2 avec la simulation du modèle bifluide avec  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  en considérant l'IFS pour les trois raffinements considérés. Celui-ci est comparé aux données expérimentales.

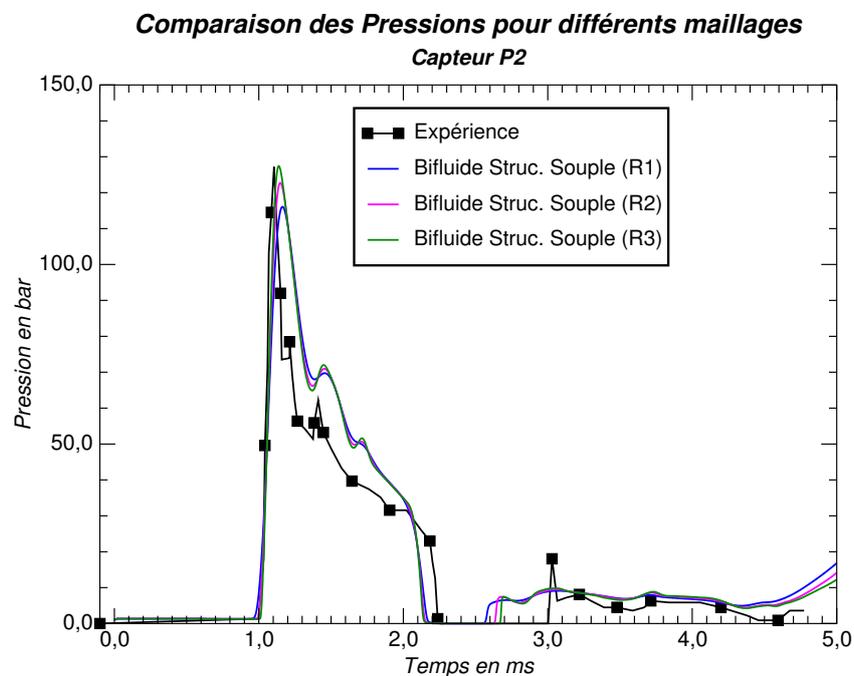


FIGURE 5.10 – Influence de la résolution du maillage sur l'historique de pression moyenne obtenu à l'aide de la simulation du modèle bifluide avec  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  prenant en compte l'IFS.

On remarque que les historiques de pression moyenne obtenus avec les maillages R2 et R3 sont similaires. On suppose

donc que les résultats obtenus avec le maillage R3 sont supposés convergés. Par la suite, les calculs sont tous réalisés avec le maillage R3.

#### 5.4.4 Comparaisons modèle bifluide - modèle homogène HRM - expérience

Dans cette partie, nous comparons les quatre calculs (bifluide avec/sans IFS avec/sans relaxation quasi instantannée et HRM avec IFS) effectués avec la même finesse de maillage (Maillage R3) aux essais. Les calculs ont tous été effectués en parallèle avec 48 processeurs Intel Xeon E5630 2.53 Ghz avec le code *Europlexus*. Les temps CPU associés sont de 8h pour le calcul bifluide avec relaxation quasi instantannée et avec IFS, 13h pour le calcul bifluide avec relaxation non instantannée et avec IFS, 9h pour le calcul bifluide avec relaxation quasi instantannée et sans IFS et de 4h pour le calcul HRM avec IFS.

##### Comparaisons mesures-calculs pour la pression

Le temps  $t = 0$  ms, pour les différentes courbes, correspond à l'arrivée du pic de pression au niveau du capteur P1. Les capteurs P1 à P3 sont situés dans la partie rigide de la tuyauterie, les autres étant placés dans la portion souple.

La figure 5.11 présente l'historique de pression au niveau du capteur P1. Les résultats numériques et expérimentaux sont confondus et correspondent à la pression que l'on souhaite imposer.

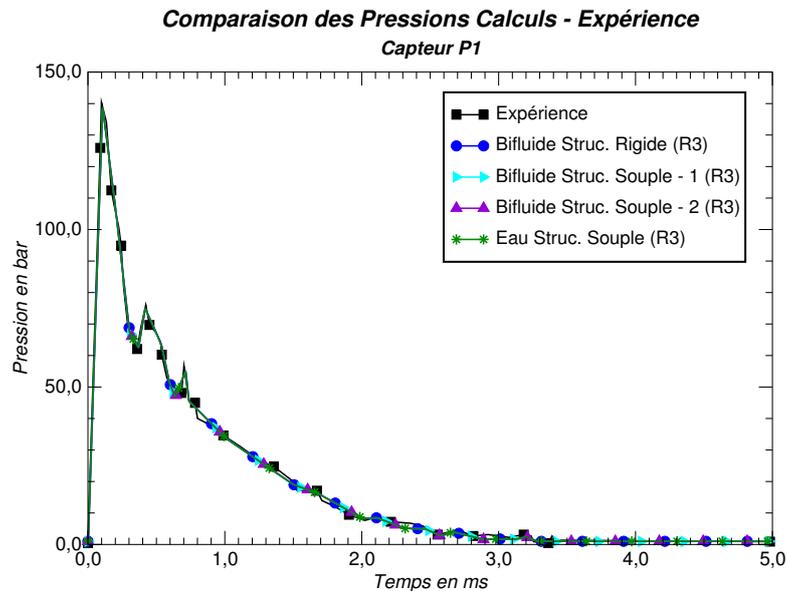


FIGURE 5.11 – Historique de pression au niveau du capteur P1 (partie rigide) :  
 - calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul HRM avec IFS et expérience.

Au niveau du capteur P2 (Figure 5.12), 1.2 ms après l'apparition du pic de pression une chute brutale de pression est observée à  $t = 2.2$  ms. Cette chute rapide est liée à l'onde de raréfaction générée par l'augmentation du diamètre de la tuyauterie flexible due au chargement de l'écoulement sur la structure. Cette onde se propage dans le sens inverse de l'écoulement et induit un phénomène de cavitation. Ceci est reproduit dans les calculs avec IFS donnant des résultats similaires. En effet, la chute de pression observée se produit à  $t = 2.15$  ms pour les calculs avec IFS contre  $t = 2.2$  ms pour l'expérience. Par contre, cette chute de pression n'est pas retrouvée avec le calcul bifluide sans IFS. En effet, dans ce cas, comme la tuyauterie ne se déforme pas, l'onde de détente n'est pas générée. De plus, l'onde réfléchie visible à  $t = 4$  ms a un profil très similaire à celui de l'onde incidente pour le calcul sans IFS tandis que l'amplitude de la pression est fortement atténuée par la déformation du tube souple dans l'expérience et dans les calculs avec IFS.

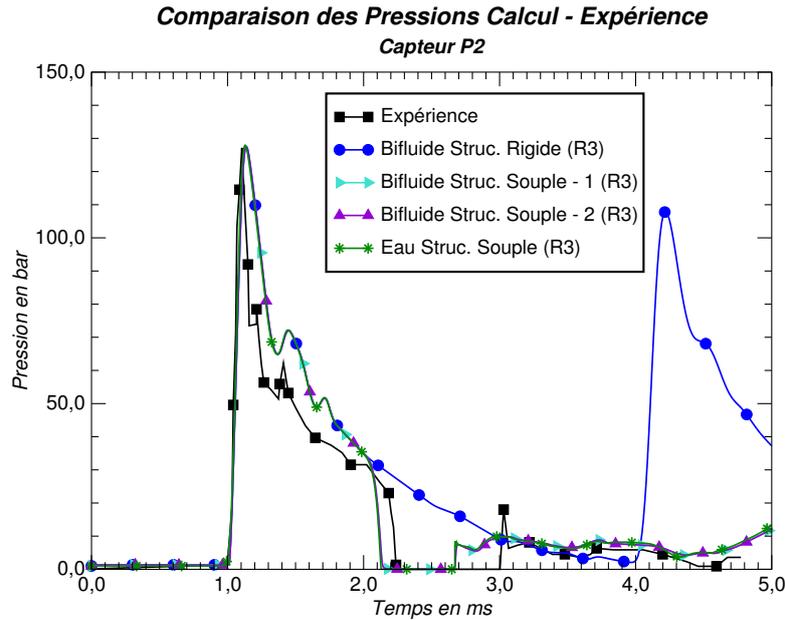


FIGURE 5.12 – Historique de pression au niveau de P2 (partie rigide) :

- calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul HRM avec IFS et expérience.

Au niveau du capteur P3 (Figure 5.13), un bon accord entre l'expérience et les calculs avec IFS est obtenu. Là encore, une chute brutale de pression est observée : elle se produit à  $t = 1.88$  ms dans les simulations contre  $t = 1.95$  ms dans l'expérience. Ce phénomène n'est pas retrouvé sans la prise en compte de l'IFS dans la modélisation.

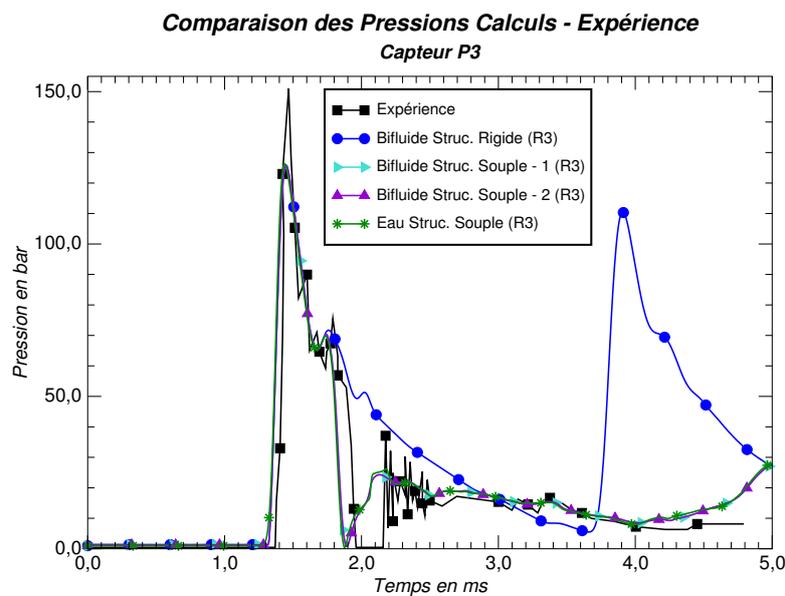


FIGURE 5.13 – Historique de pression au niveau de P3 (partie rigide) :

- calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul HRM avec IFS et expérience.

Pour le capteur P4 situé dans la partie déformable (Figure 5.14), une forte atténuation de l'onde incidente due au gonflement du tube est observée dans l'expérience. Ceci n'est retrouvé numériquement qu'avec la prise en compte de l'IFS.

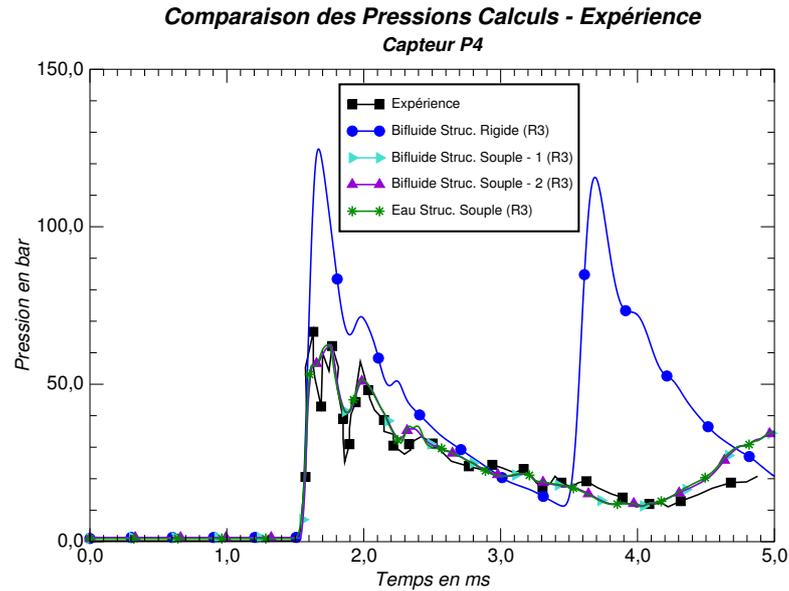


FIGURE 5.14 – Historique de pression au niveau de P4 (partie souple) :  
 - calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul HRM avec IFS et expérience.

La même observation est faite au niveau du capteur P5 (Figure 5.15). Les calculs tendent cependant à surestimer légèrement la pression observée expérimentalement. Ceci sera abordé lors de l'analyse des résultats concernant la structure.

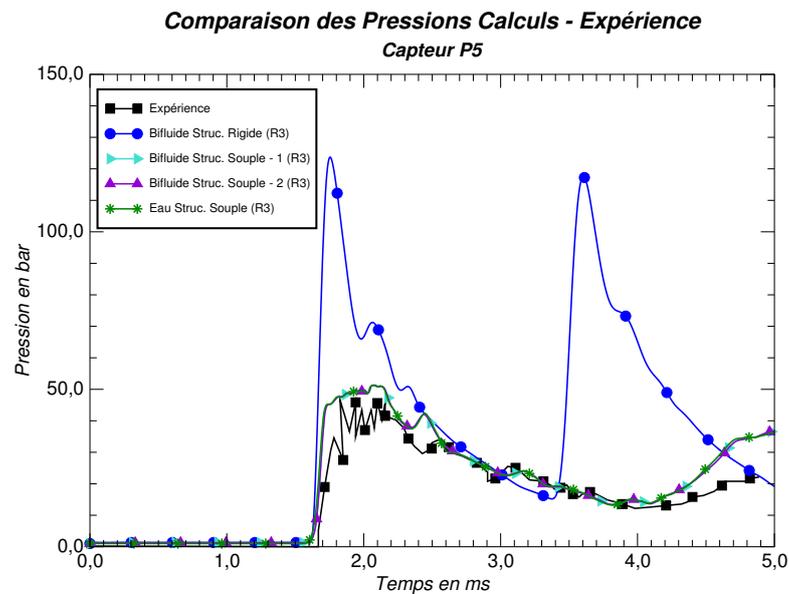


FIGURE 5.15 – Historique de pression au niveau de P5 (partie souple) :  
 - calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul HRM avec IFS et expérience.

Les résultats représentés dans les figures 5.16 à 5.20 montrent les mêmes tendances à savoir, d'une part, l'influence de la prise en compte de l'IFS sur l'intensité de la pression et d'autre part la surestimation de la pression par les calculs avec IFS. En effet, pour les capteurs P6 à P8, un plateau proche de 45 bar est obtenu dans les calculs tandis que la pression décroît de 40 à 30 bar dans l'expérience.

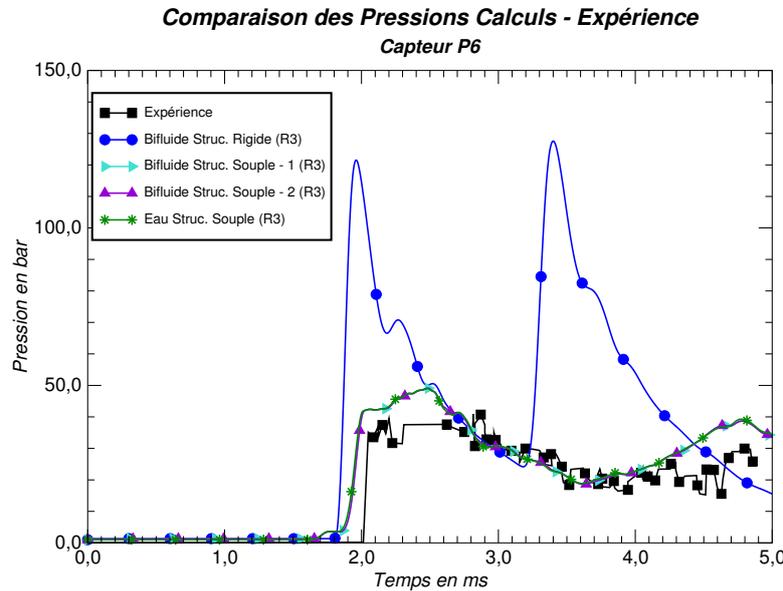


FIGURE 5.16 – Historique de pression au niveau de P6 (partie souple) :  
 - calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul HRM avec IFS et expérience.

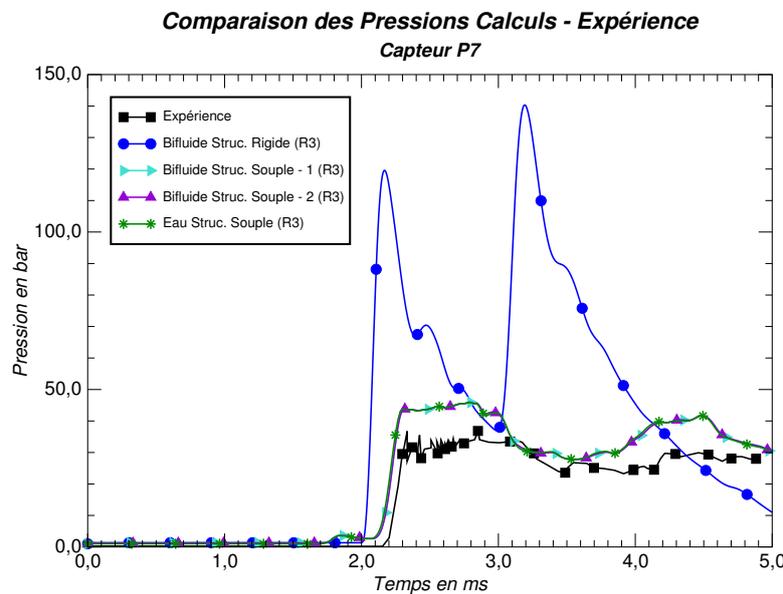


FIGURE 5.17 – Historique de pression au niveau de P7 (partie souple) :  
 - calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul HRM avec IFS et expérience.

On observe également un léger décalage au niveau de l'arrivée du pic de pression entre les calculs avec IFS et les essais.

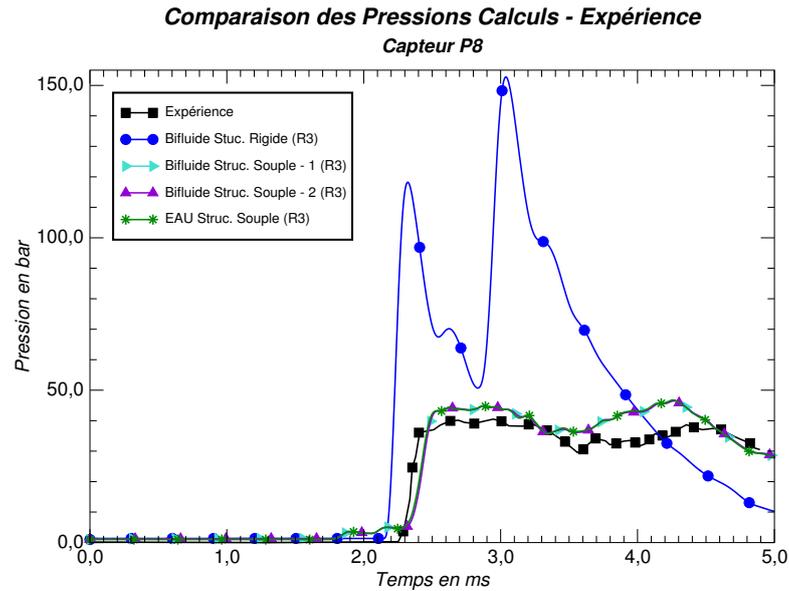


FIGURE 5.18 – Historique de pression au niveau de P8 (partie souple) :  
 - calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul HRM avec IFS et expérience.

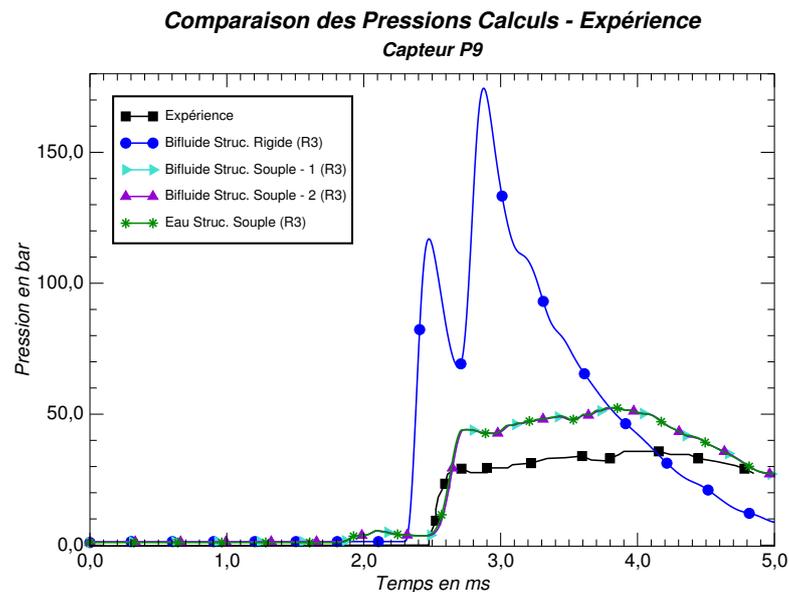


FIGURE 5.19 – Historique de pression au niveau de P9 (partie souple) :  
 - calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;  
 - calcul HRM avec IFS et expérience.

On remarque que pour les différents capteurs, un excellent accord entre les calculs du modèle bifluide avec IFS et le calcul HRM avec IFS est obtenu. Ceci était attendu lorsque les temps de relaxation en pression et en vitesse sont pris égaux à  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$  puisqu'il s'agit de relaxations presque instantanées. Cependant, la prise en compte de relaxations non instantanées ne modifie peu les résultats obtenus.

Le capteur P10 situé au niveau du fond du tube souple permet d'observer la réflexion de l'onde incidente (Figure

5.20). Il est à noter un décalage en temps notable au niveau de l'arrivée du pic de pression entre le calcul avec et sans IFS s'accompagnant également d'une réduction d'un facteur proche de 5 sur l'amplitude maximale de la pression.

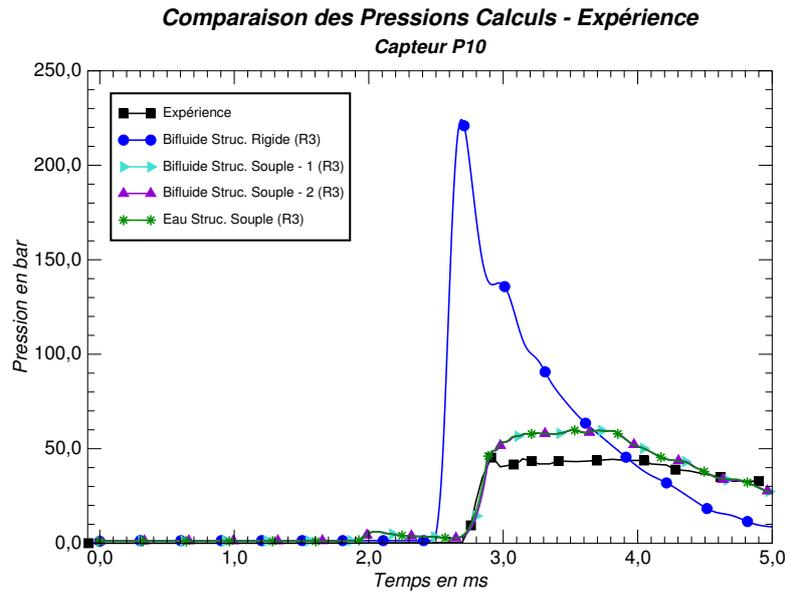


FIGURE 5.20 – Historique de pression au niveau de P9 (partie souple) :

- calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul HRM avec IFS et expérience.

### Comparaisons mesures-calculs pour la déformation de la structure

La figure 5.21 montre que les variations du rayon du tuyau souple en fonction de l'abscisse de la tuyauterie obtenues avec les calculs prenant en compte l'IFS sont très cohérentes avec les mesures expérimentales.

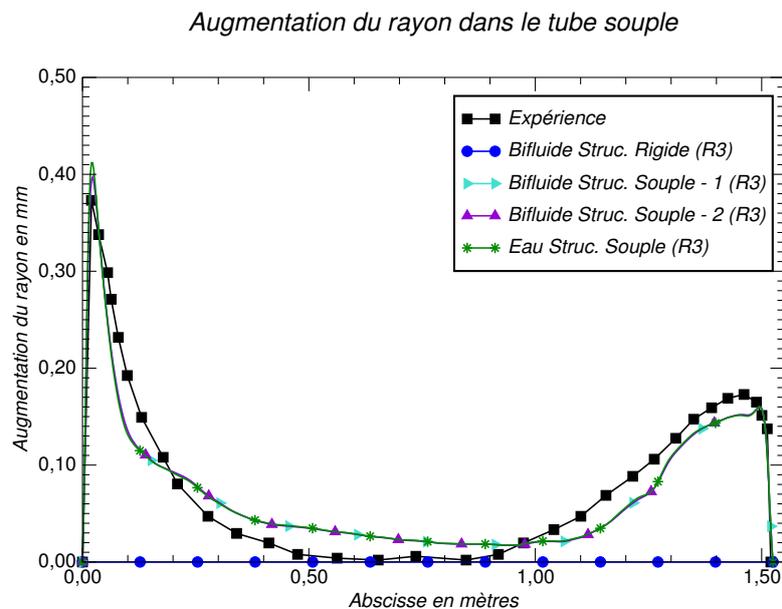


FIGURE 5.21 – Evolution longitudinale de l'augmentation du rayon du tuyau souple :

- calcul bifluide rigide et souple 1 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul bifluide souple 2 :  $\tau_p = \tau_u = 10^{-7} s$ ,  $\tau_g = 10^{-4} s$  et  $\tau_T = \infty$  ;
- calcul HRM avec IFS et expérience.

Là encore, un très bon accord entre les calculs bifluide et HRM considérant l'IFS est observé. Comme attendu, l'augmentation du rayon de la section souple est maximale au voisinage des deux encastrements. Il est à noter qu'à cet endroit la variation du rayon est globalement sous-estimée par les calculs avec IFS en comparaison avec l'expérience. Il semblerait donc que la loi de comportement du matériau utilisée pour les calculs induise un comportement plus raide que celui observé expérimentalement. Cette différence peut expliquer la surestimation numérique de l'onde de pression dans la partie souple du tuyau. En effet, le matériau se déformant moins, l'amortissement de l'onde est réduit.

La figure 5.22 représente la déformation plastique de la partie souple de la tuyauterie obtenue avec le calcul utilisant le modèle bifluide avec  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  et prenant en compte l'IFS. Pour des raisons de visibilité, la déformation a été multipliée par un facteur 100. Comme attendu, la déformation est plus importante au voisinage des deux encastrements de la partie souple du tuyau.

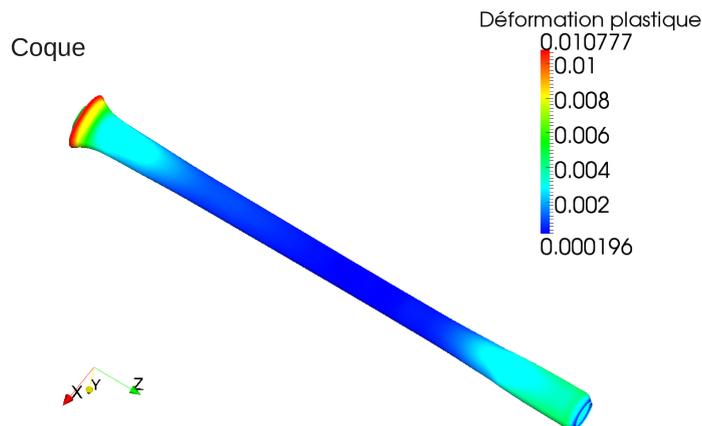


FIGURE 5.22 – Déformation plastique du coque dans le tuyau souple obtenue avec la simulation du modèle bifluide complet avec  $\tau_p = \tau_u = 10^{-11}$  s,  $\tau_g = 10^{-4}$  s et  $\tau_T = \infty$  prenant en compte l'IFS.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'extension du modèle bifluide complet à la prise en compte de maillages mobiles a été étudiée. Dans un premier temps, la sensibilité de la vitesse de propagation de l'onde de pression dans un tuyau en fonction de l'épaisseur de ce dernier a été examinée. Ceci a été réalisé à la fois pour un liquide monophasique faiblement compressible et pour un mélange liquide/air. Dans ce cas, seuls les termes de relaxation en pression et en vitesse sont considérés. Les résultats obtenus en maillage mobile sont satisfaisants. Dans un deuxième temps, le modèle bifluide complet est validé sur un cas expérimental d'un transitoire hydraulique où le couplage entre le fluide et la structure n'est pas négligeable.

Les calculs effectués avec le modèle bifluide sont convergés. La prise en compte de l'interaction fluide structure s'avère essentielle pour retrouver les résultats expérimentaux. Par ailleurs, le modèle bifluide est également confronté au modèle homogène non-équilibré (HRM) [57]. Les deux modèles donnent quasiment les mêmes résultats, en ce qui concerne les historiques de pression ainsi que les déplacements/déformations des structures. Ceci est également retrouvé lorsque des relaxations non instantanées sont considérées. Comme pour l'expérience de Simson, des problèmes de robustesse ont été observés lorsque toutes les relaxations sont mises en œuvre en même temps avec le modèle bifluide (en particulier le terme de transfert de masse).

Il est à noter que le surcoût de calcul engendré par le modèle bifluide avec IFS est raisonnable en comparaison du temps CPU du calcul HRM avec IFS. En effet, un facteur 2 est observé pour des relaxations instantanées.

---

## Conclusions et perspectives

---

L'objectif de cette thèse était de développer une méthode avancée pour modéliser les transitoires hydrauliques de façon précise, qui comporte deux tâches principales : la modélisation de la partie fluide avec le modèle bifluide et la prise en compte de l'interaction fluide/structure. Une part importante du travail a été consacrée à la vérification, et à la validation du modèle bifluide dans le cadre des transitoires hydrauliques.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la fermeture du modèle bifluide pour modéliser les phénomènes transitoires hydrauliques, notamment à la fermeture de la pression et la vitesse interfaciales, et à la fermeture des termes sources qui modélisent les échanges entre les deux phases. Dans le premier chapitre, le processus de moyenne statistique permettant d'obtenir le système d'EDP ouvert du modèle bifluide a été d'abord rappelé. Les lois de fermeture ont été ensuite discutées en considérant l'inégalité d'entropie du système et l'existence d'un jeu de relations de saut. Les conditions d'hyperbolicité et des remarques associées au respect de la positivité des solutions régulières ont aussi été évoquées.

La deuxième partie du travail visait à proposer des schémas numériques stables et robustes pour résoudre le modèle bifluide complet. Pour la partie convective, le schéma de Rusanov a été vérifié en utilisant des cas tests de la littérature et de nouveaux cas construits au cours de la thèse, en mettant l'accent sur l'onde de discontinuité de contact (où l'on considère le saut du taux de présence de la vapeur). Des problèmes de stabilité ont été observés avec le schéma de Rusanov lorsque l'on considère un grand saut du taux de présence de la vapeur et la loi stiffened gas pour décrire le liquide. Ainsi un nouveau schéma plus stable à pas fractionnaires a été proposé et vérifié. En ce qui concerne les termes sources, 4 sous-étapes qui représentent respectivement le retour à l'équilibre de pression et les transferts de quantité de mouvement, de chaleur et de masse, ont été étudiées successivement, en reprenant les travaux de Gallouët et *al.* [25], Hérard et *al.* [26, 38, 40, 41]. Chaque sous-étape est résolue avec un schéma non-instantané contrairement à la plupart des cas de la littérature, ce qui permet de simuler les déséquilibres entre les phases avec une grande flexibilité. Ces schémas ont été considérés pour les lois thermodynamiques stiffened gas étendues pour le changement de phase.

Le quatrième chapitre était consacré à la validation du modèle bifluide complet pour modéliser les phénomènes de transitoires hydrauliques. Après avoir retrouvé des phénomènes typiques des transitoires hydrauliques (approche monophasique, vitesse de propagation des ondes de pression dans un mélange d'eau et d'air) avec des cas tests simples, le modèle bifluide a été confronté avec l'expérience de Simpson [72] et l'expérience Canon [63]. La première expérience est largement utilisée pour la validation d'outils numériques dédiés à la simulation des coups de bélier [24]. La deuxième représente la décompression rapide d'un fluide à haute pression dans une tuyauterie, qui peut être présente, par exemple, lors des transitoires hydrauliques intervenant en cas de rupture de tuyauterie. Sur les deux configurations expérimentales, le modèle bifluide s'est avéré être un bon candidat pour la représentation des phénomènes physiques associés à des

changements de phase violents en présence de transitoires rapides tels que les coups de bélier et les ruptures de tuyauteries.

Les schémas numériques utilisés pour les simulations s'avèrent être stables et robustes. Du fait de la diffusion numérique inhérente aux schémas du premier ordre il est nécessaire d'utiliser des maillages relativement fins pour obtenir des résultats satisfaisants. Cependant des difficultés ont été rencontrées pour la modélisation de l'expérience Canon. Ces difficultés sont liées à un grand saut initial du taux de présence de vapeur entre le tuyau et le réservoir. En effet, pour réaliser cette simulation, ce saut a dû être réduit ( $\alpha_v = 10^{-3}$  dans le tuyau et  $\alpha_v = 1 - 10^{-3}$  dans le réservoir). D'autre part, concernant les processus de relaxation, il n'y a pas de consensus sur les ordres de grandeur des temps caractéristiques associés. Les résultats numériques s'avèrent être très sensibles à ces paramètres. Par ailleurs, comme les relaxations interagissent entre elles, l'étude de l'influence des temps caractéristiques de relaxation sur la solution numérique n'est pas aisée.

Bien que relativement simples, les lois d'état de type "stiffened gas" permettent au modèle bifluide et au modèle homogène à cinq équations de retrouver les transitoires hydrauliques étudiés. Ces lois peuvent cependant poser des problèmes de simulation à cause de leur raideur comme cela a été observé pour la simulation de l'expérience Canon. Par ailleurs, la loi de type "stiffened gas" peut être facilement modifiée pour prendre en compte l'influence de l'élasticité du tuyau sur la célérité des ondes de pression. Ceci n'est pas possible avec les tables de l'eau : la célérité étant déterminée directement à partir des tables.

Les résultats obtenus avec le modèle bifluide ont été comparés avec ceux de deux modèles homogènes : le modèle à cinq équations [70] et le modèle HRM utilisant une loi d'état basée sur les tables de l'eau [57]. Des différences sont à noter entre les résultats du modèle bifluide et ceux du modèle à cinq équations. En effet, pour l'expérience de Simpson, les amplitudes des ondes de choc obtenues avec les deux modèles sont légèrement différentes même avec un maillage suffisamment fin pour considérer que les solutions approchées sont convergées à l'échelle de visualisation. Un écart de moins de 10% a été observé. Pour l'expérience Canon, les tendances entre les deux modèles sont similaires. Cependant, la prise en compte de la relaxation des potentiels chimiques permet au modèle bifluide de retrouver la chute de pression en dessous de la pression de saturation lors de l'arrivée de l'onde de décompression. La comparaison en terme de temps CPU n'a pu être effectuée entre les différents modèles : tous les schémas de résolution n'étant pas optimisés de façon équivalente [9].

Le cinquième chapitre présentait la version ALE du modèle bifluide. Pour valider cette dernière, la propagation d'ondes de pression dans une conduite flexible a d'abord été étudiée. Le but dans ce cas était de retrouver la variation de la célérité des ondes de pression dans le fluide liée au couplage entre le fluide et la structure. Dans un premier temps, le cas 'quasi-monophasique' de l'eau liquide obtenu avec une valeur très faible de taux de présence statistique de vapeur a été examiné. Dans un deuxième temps, l'influence de la valeur du taux de présence de la vapeur sur la vitesse de propagation des ondes a été étudiée. Finalement, la validation a été effectuée sur l'expérience décrite dans les travaux de Romander *et al.* [64]. Il s'agit d'étudier la réponse d'une tuyauterie remplie d'eau soumise à un pic de pression violent (140 bar). Des calculs convergés (à l'échelle de visualisation) ont pu être effectués avec le modèle bifluide. La prise en compte de l'interaction fluide structure s'avère essentielle pour retrouver les résultats expérimentaux. Par ailleurs, le modèle bifluide a été également confronté au modèle homogène non-équilibré (HRM) [57]. Les deux modèles donnent quasiment les mêmes résultats en ce qui concerne les historiques de pression ainsi que les déplacements/déformations des structures. Il est à noter que le surcoût de calcul engendré par le modèle bifluide avec IFS est raisonnable en comparaison du temps CPU du calcul HRM avec IFS. En effet, un facteur 2 est observé pour des relaxations instantannées.

Si les résultats obtenus nous paraissent très encourageants, ils présentent inévitablement certaines limitations que nous n'avons pas pu traiter pendant ces trois années de thèse, et qui ouvrent la voie à de nombreuses perspectives :

Concernant les processus de relaxation, il n'y a pas de consensus sur les ordres de grandeur des temps caractéristiques associés, tandis que les résultats numériques s'avèrent être très sensibles à ces paramètres. Il serait intéressant dans l'avenir de proposer un travail plus physique de détermination de ces paramètres. Par ailleurs, il existe dans la littérature peu de travail sur la discrétisation des termes sources en non-instantané. Même si les schémas proposés sont satisfaisants, ils

---

restent assez "simples" (Euler implicite). Le "découplage numérique" des effets sources des différents termes (pression, vitesse, température, potentiel chimique) via la méthode à pas fractionnaires, peut dans certains cas détériorer la "qualité physique" de la réponse du code. Il peut être intéressant d'étudier des résolutions de relaxation "couplée" en température, pression et potentiel chimique ou a minima en température et potentiel chimique.

Bien que relativement simples, les lois d'état de type "stiffened gas" permettent au modèle bifluide de retrouver les transitoires hydrauliques étudiés. Ces lois peuvent cependant poser des problèmes de simulation à cause de leur raideur comme cela a été observé pour la simulation de l'expérience Canon. Il serait intéressant par la suite d'étudier en profondeur les lois thermodynamiques, afin de faciliter la simulation numérique et d'avoir une approche plus réaliste pour les phénomènes recherchés.

Afin de rendre cette méthode plus performante en vue d'applications industrielles, l'amélioration de la précision des schémas pour la partie convective du modèle s'avère être nécessaire. On pourrait éventuellement choisir d'étendre le schéma proposé dans [66, 14] par exemple aux lois thermodynamiques plus "réalistes", ou de travailler sur la mise en œuvre des schémas (schémas de la convection, schémas des termes sources) d'ordre plus élevé en temps et en espace utilisés dans cette thèse.



# Appendices



---

 Cas tests pour la partie convective du modèle bifluide
 

---

## A.1 Vérification numérique et étude de la convergence en maillage du schéma de Rusanov

### A.1.1 Étude du choix thermodynamique GPGP

#### Cas test GPGP1\_A3

Le cas test GPGP1\_A3 est un cas test qui admet une seule onde de discontinuité de contact (cf. chapitre 2), avec un choix thermodynamique GPGP : (vapeur et eau représentés par un Gaz parfait), avec une discontinuité de  $\alpha_v$  de 0.05 à 0.95. Les conditions initiales sont présentées dans le tableau A.1.

GPGP1_A3	Solution exacte		
		$w_G$	$w_D$
	$\alpha_v$	0.05	0.95
	$\rho_v$	0.1	0.1
	$u_v$	15	15
	$p_v$	$1 \times 10^4$	95044.7776983064
	$\rho_l$	1	0.956131036361501
	$u_l$	10	-84.3587660970787
	$p_l$	$1 \times 10^5$	95185.1409529552
Paramètre	Bord à gauche	Discontinuité initiale	Bord à droite
	0	500	1000
	$\gamma_v = 1.4$ (Gaz) $\gamma_l = 1.1$ (Liquide)		
Structure des ondes			

TABLE A.1 – Cas test GPGP1\_A3

Les courbes de convergence du schéma de Rusanov d'ordre un (SR1) et deux (SR1-ORDER2), sont présentées pour le cas test GPGP1\_A3 sur la figure A.1, avec un nombre CFL égal à 0.49, à  $t = 0.25$ . Le nombre de mailles utilisé vaut

respectivement  $K = 5 \times 10^2, 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 5 \times 10^4, 10^5$ . Les taux de convergence obtenus sont environ  $\frac{1}{2}$  (Rusanov, **SR1**),  $\frac{2}{3}$  (Rusanov d'ordre 2, **SR1-ORDER2**), et correspondent aux valeurs attendues.

Les solutions numériques des variables  $\alpha_v, \rho_\varphi, u_\varphi, p_\varphi, \varphi = l, v$  pour le cas test GPGP1\_A3 avec **SR1, SR1-ORDER2**, obtenues avec 200 et 500 mailles, sont présentées dans la figure A.2, pour un nombre CFL égal à 0.49 à  $t = 0.25$ .

Il est clair que *le schéma Rusanov ne préserve pas exactement sur tout maillage, la variable  $u_v$  au niveau de l'onde de couplage  $\lambda = u_v$* . On retrouve pour ce schéma sur le modèle Baer et Nunziato, l'analogie du problème classique de préservation des contacts du système des équations d'Euler.

### Cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila

Un cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila issu de [71] a été simulé avec le schéma de Rusanov (**SR1, SR1-ORDER2**). C'est un cas test avec deux discontinuités de contact, une onde de choc, trois ondes de détente. Les lois thermodynamiques sont de type Gaz Parfait pour les deux phases. La solution analytique à  $t = 0.2$  est présentée dans le tableau A.2, avec ses conditions initiales à gauche (Region L), et à droite (Region R). La discontinuité initiale est à  $x = 0.5$ .

Table 1

Etats initiaux et intermédiaires pour le problème de Riemann avec  $\gamma_v = \gamma_l = 1.4$

	Region L	Region l	Region 0	Region 2	Region R
$\alpha_v$	0.8	0.8	0.8	0.3	0.3
$\rho_v$	1.0	0.9436	0.9436	1.0591	1.0
$u_v$	0.0	0.0684	0.0684	0.0684	0.0
$p_v$	1.0	0.9219	0.9219	1.0837	1.0
$\rho_l$	0.2	0.3266	0.6980	0.9058	1.0
$u_l$	0.0	-0.7683	-0.7683	-0.1159	0.0
$p_l$	0.3	0.6045	0.6045	0.8707	1.0

TABLE A.2 – Solution exacte du cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila.

Les courbes de convergence pour un nombre CFL égal à 0.49 et à  $t = 0.2$  sont présentées dans la figure A.3. Les maillages comportent 200, 500,  $10^3, 5 \times 10^3, 10^4$  cellules. Les taux de convergence des deux schémas sont toujours voisin de  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ , pour **SR1, SR1-ORDER2** respectivement.

La solution exacte et les approximations numériques pour le cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila, obtenus avec des maillages de 200, 500 mailles sont présentées dans la figure A.4, pour un nombre CFL égal à 0.49 et à  $t = 0.2$ .

### A.1.2 Étude d'influence du choix thermodynamique plus complexe pour la phase liquide

Les cas tests GPSG1\_A3, GPSG1\_A4, GPSG1EQ\_A3, et deux cas tests issus de la littérature, avec un choix de lois thermodynamiques GPSG (vapeur en GP, eau en SG) ont été simulés dans cette section.

#### Cas tests avec une onde de discontinuité de contact $\lambda = u_v$

Les détails des cas tests GPSG1\_A3, GPSG1\_A4 sont présentés dans les tableaux A.3, A.4 ci-dessous. Ils sont construits avec la même condition initiale à gauche, et des valeurs de  $\alpha_v$  à droite distinctes. En observant ces deux tableaux ci-dessous, on note de forts déséquilibres de pression et de vitesse du liquide entre l'état à gauche et à droite dans le cas GPSG1\_A3.

Les courbes de convergence pour le cas test GPSG1\_A4 sont présentées sur la figure A.5, pour un nombre CFL égal à 0.49 et à  $t = 0.25$ . Le nombre de mailles utilisé vaut respectivement  $K = 5 \times 10^2, 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 5 \times 10^4, 10^5$ .

GPSG1_A3	Solution exacte		
		Etat à gauche( $w_G$ )	Etat à droite( $w_D$ )
	$\alpha_v$	0.05	0.95
	$\rho_v$	10	12
	$u_v$	15	15
	$p_v$	$1 \times 10^6$	786639.618489141
	$\rho_l$	1000	998.288925495528
	$u_l$	10	-80.1628306933727
	$p_l$	$1 \times 10^6$	-3511621.66716409
Paramètre	Bord à gauche	Discontinuité initiale	Bord à droite
	0	500	1000
	$\gamma_v = 1.4$ (Gaz) $\gamma_l = 4.4, (p_l)_\infty = 6 \times 10^8$ (Liquide)		
Structure des ondes			

TABLE A.3 – Cas test GPSG1\_A3 :  $(\alpha_v)_G = 0.05, (\alpha_v)_D = 0.95,$ 

GPSG1_A4	Solution exacte		
		Etat à gauche( $w_G$ )	Etat à droite( $w_D$ )
	$\alpha_v$	0.05	0.5
	$\rho_v$	10	12
	$u_v$	15	15
	$p_v$	$1 \times 10^6$	989874.793590249
	$\rho_l$	1000	999.987662005963
	$u_l$	10	5.49988278761049
	$p_l$	$1 \times 10^6$	967374.092892051
Paramètre	Bord à gauche	Discontinuité initiale	Bord à droite
	0	500	1000
	$\gamma_v = 1.4$ (Gaz) $\gamma_l = 4.4, (p_l)_\infty = 6 \times 10^8$ (Liquide)		
Structure des ondes			

TABLE A.4 – Cas test GPSG1\_A4 :  $(\alpha_v)_G = 0.05, (\alpha_v)_D = 0.5$ 

Les approximations numériques des variables  $\alpha_\varphi, \rho_\varphi, u_\varphi, p_\varphi, \varphi = l, v$  pour le cas test GPSG1\_A4 avec **SR1, SR1-ORDER2** sont présentées dans la figure A.6 sur 200 et 500 mailles, pour un nombre CFL égal à 0.49 à  $t = 0.25$ .

Le schéma de Rusanov ne permet pas de simuler le cas test GPSG1\_A3 à  $CFL = 0.49$ .

Un cas test équilibre défini dans le chapitre 2 (GPSG1EQ\_A3) a été simulé. Les détails de ce cas test sont introduits dans le tableau A.5. Pour  $CFL = 0.49$ , la simulation de ce cas test GPSG1EQ\_A3 explose également. Néanmoins ces deux cas peuvent être simulés à  $CFL = 0.1$ .

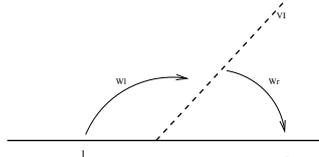
GPSG1EQ_A3	Solution exacte		
		Etat à gauche( $w_G$ )	Etat à droite( $w_D$ )
	$\alpha_v$	0.05	0.95
	$\rho_v$	5.4766	5.4766
	$u_v$	10	10
	$p_v$	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^6$
	$\rho_l$	1000	1000
	$u_l$	10	10
$p_l$	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^6$	
Paramètre	Bord à gauche	Discontinuité initiale	Bord à droite
	0	500	1000
	$\gamma_v = 1.43$ (Gaz) $\gamma_l = 2.35, (p_l)_\infty = 1 \times 10^9$ (Liquide)		
Structure des ondes			

TABLE A.5 – Cas test GPSG1EQ\_A3 :  $(\alpha_v)_G = 0.05, (\alpha_v)_D = 0.95,$ 

### Cas tests comportant plusieurs ondes

#### Cas test GPSG\_Tokareva\_Toro6

Le cas test suivant GPSG\_Tokareva\_Toro6 est extrait de [76]. C'est un cas test utilisant des lois thermodynamiques GPSG (vapeur en Gaz Parfait, eau en Stiffened Gas). La solution exacte à  $t = 0.007$  est présentée dans le tableau A.7 ([76](page 3856, 3601-3602)). La discontinuité initiale est fixé à  $x = 0.8$ .

Etats initiaux et intermédiaires pour le problème de Riemann avec $\gamma_v = 1.4, \gamma_l = 3, (p_l)_\infty = 100$					
	Region L	Region 1	Region 0	Region 2	Region R
$\alpha_v$	0.3	0.3	0.8	0.8	0.8
$\rho_v$	1.0	0.4684	0.5030	5.9991	1.0
$u_v$	-19.5975	6.7332	-1.7541	-1.7541	-19.5975
$p_v$	1000.0	345.8279	382.0858	382.0858	0.01
$\rho_l$	1.0	0.7687	1.6087	1.6087	1.0
$u_l$	-19.5975	-6.3085	-6.3085	-6.3085	-19.5975
$p_l$	1000.0	399.5878	466.7257	466.7257	0.01

TABLE A.6 – Solution exacte du cas test GPSG\_Tokareva\_Toro6

Les courbes de convergence pour un nombre CFL égal à 0.49 et à  $t = 0.007$  sont présentées dans la figure A.7. Les nombres de mailles utilisés sont 200, 500,  $10^3$ ,  $5 \times 10^3$ ,  $10^4$ ,  $5 \times 10^4$ ,  $10^5$ .

La solution exacte et les approximations numériques des différentes variables pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro6, obtenus avec 200 et 500 mailles sont présentées dans la figure A.8, avec un nombre CFL égal à 0.49 et à  $t = 0.007$ .

#### Cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2

Le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2 est issu de [76].

Les courbes de convergence pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2 avec un nombre CFL égal à 0.49 et à  $t = 0.15$  sont présentées dans la figure A.9. Les nombres de mailles utilisés sont 200, 500,  $10^3$ ,  $5 \times 10^3$ ,  $10^4$ ,  $5 \times 10^4$ .

La solution exacte et les approximations numériques des variables  $\alpha_v, \rho_\phi, u_\phi, p_\phi, \phi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2 avec **SR1**, **SR1-ORDER2** sur 200 et 500 mailles sont présentées dans la figure A.10, pour un nombre CFL égal à 0.49 et

Etats initiaux et intermédiaires pour le problème de Riemann avec  $\gamma_v = 1.35, \gamma_l = 3, (p_l)_\infty = 3400$

	Region L	Region 1	Region 0	Region 2	Region R
$\alpha_v$	0.8	0.8	0.1	0.1	0.1
$\rho_v$	2.0	2.1093	1.6733	1.8554	1.0
$u_v$	0.0	-0.0761	0.7912	0.7912	0.0
$p_v$	3.0	3.2235	2.3580	2.3580	1.0
$\rho_l$	1900.0	2040.1092	1821.4053	1821.4053	1950.0
$u_l$	0.0	-0.1716	-0.1716	-0.1716	0.0
$p_l$	10.0	824.4354	185.6560	185.6560	1000.0

TABLE A.7 – Solution exacte du cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2

à  $t = 0.2$ .

### A.1.3 Synthèse

Le taux de convergence observé pour le schéma de Rusanov est environ  $\frac{1}{2}$ , et celui du schéma de Rusanov d'ordre deux est environ  $\frac{2}{3}$ .

Pour le cas test qui admet une seule onde de discontinuité de contact, le schéma de Rusanov d'ordre deux n'améliore pas la précision. En observant la figure A.1, les erreurs des deux schémas sont du même niveau. Cela est aussi observé dans la figure de résultats A.2, où les erreurs locales produites par le schéma d'ordre deux sont plus importantes que celles produites par le schéma du premier ordre.

On n'a pas rencontré de problème de simulation avec le schéma de Rusanov pour les cas tests avec un choix de lois thermodynamiques GPGP, mais des difficultés apparaissent pour les cas tests avec un choix de lois thermodynamiques GPSG et avec un saut de  $\alpha_v$  grand. Ces difficultés ne sont pas dûes aux déséquilibres de pression et de vitesse, et n'ont pas été signalées dans la littérature.

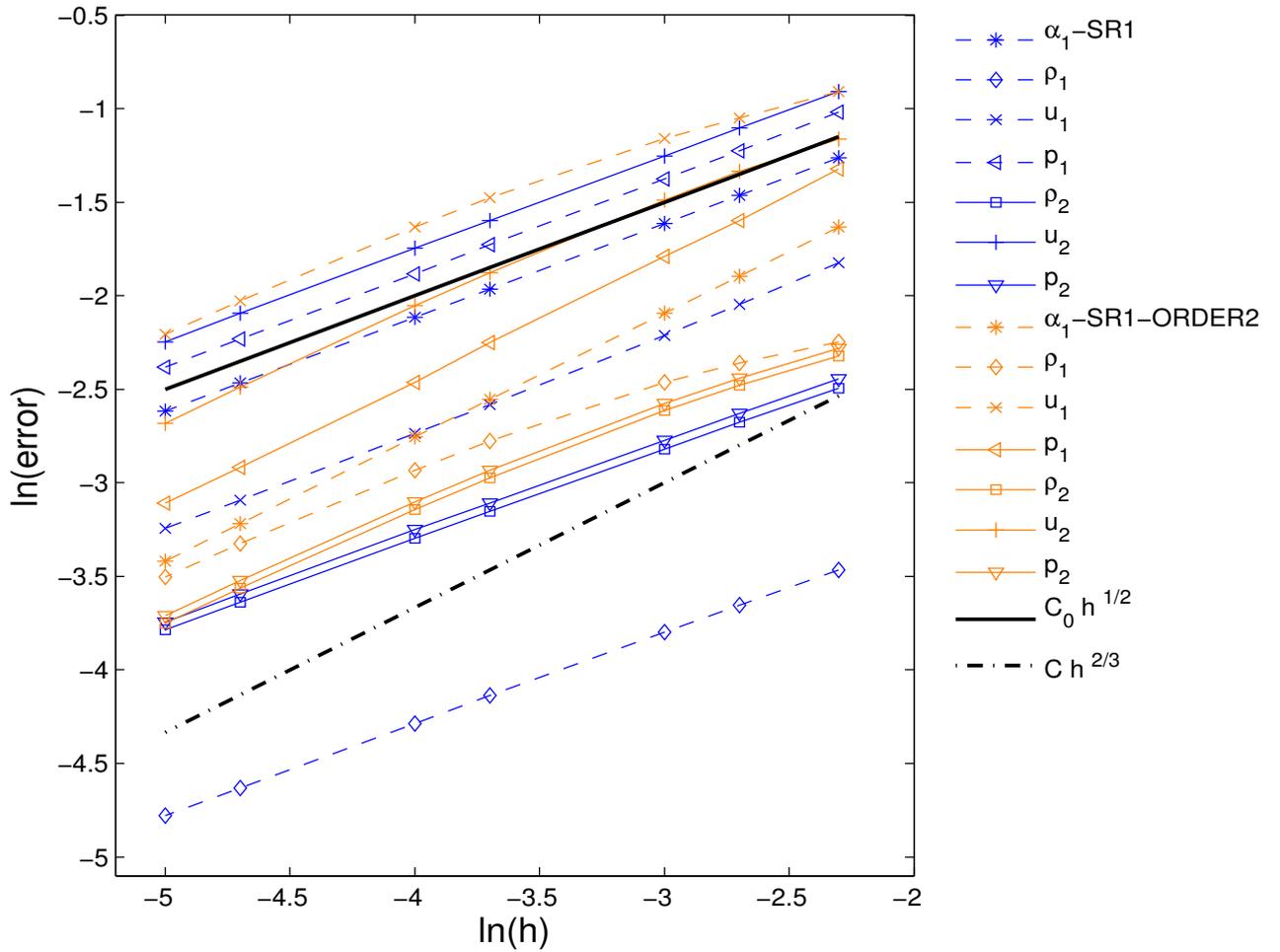


FIGURE A.1 – Courbes de convergence de  $\alpha_v$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPGP1\_A3, avec **SR1**, **SR1-ORDER2** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

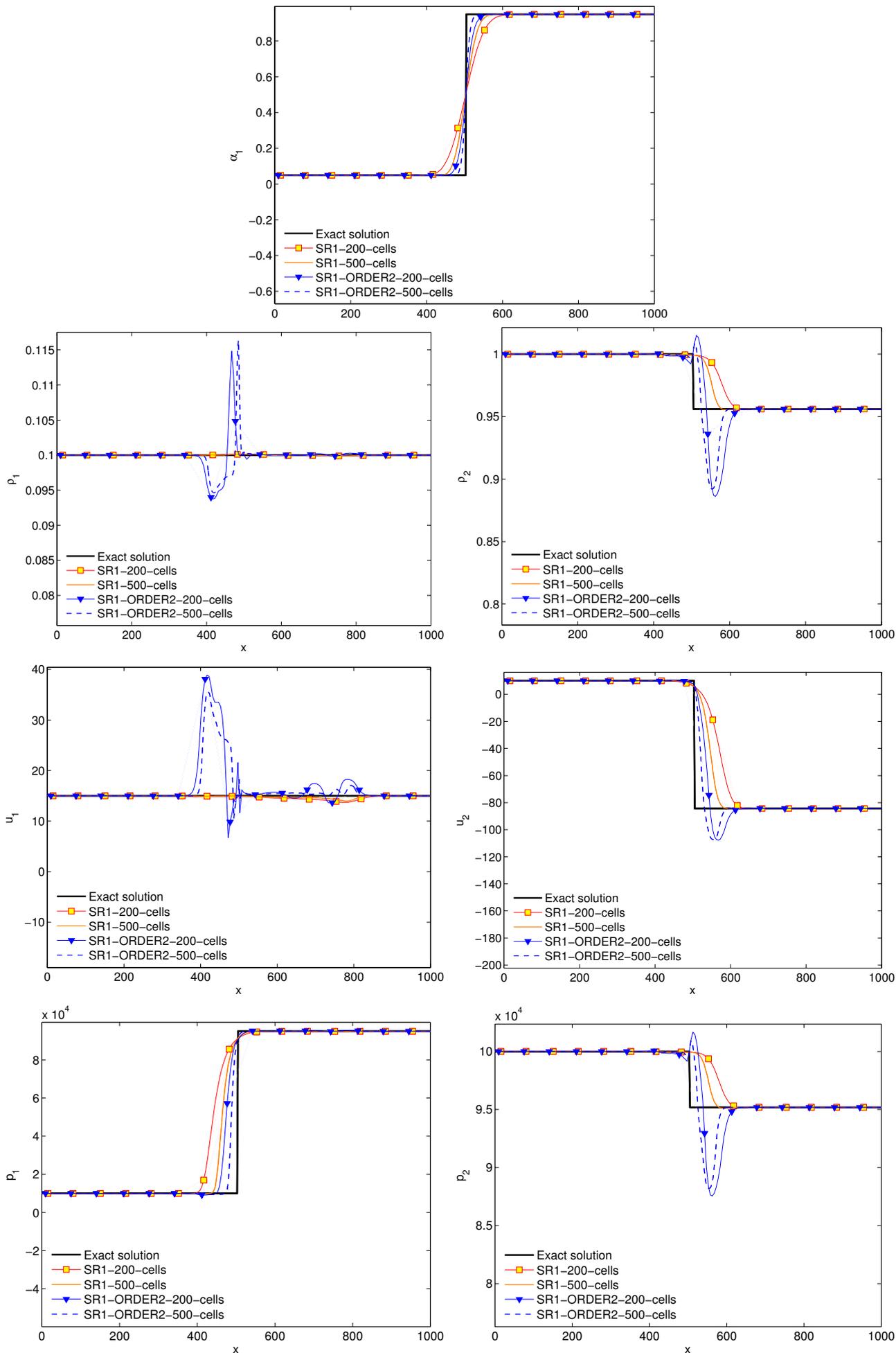


FIGURE A.2 – Solution exacte et approximations numériques des variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPGP1\_A3 avec SR1, SR1-ORDER2 avec des maillages de 200, 500 mailles, à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

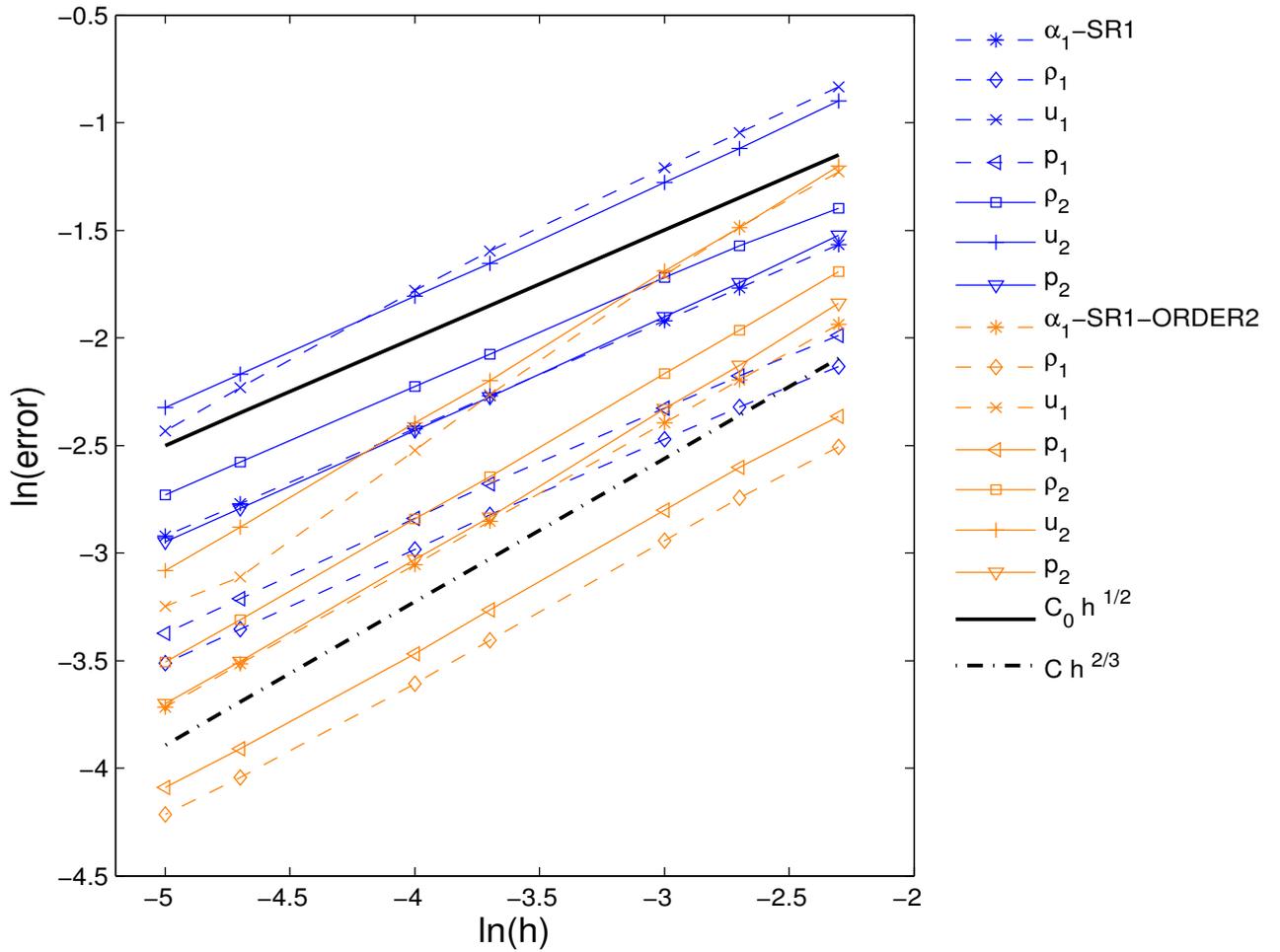


FIGURE A.3 – Courbes de convergence de  $\alpha_\nu$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila avec SR1, SR1-ORDER2 à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.2$ .

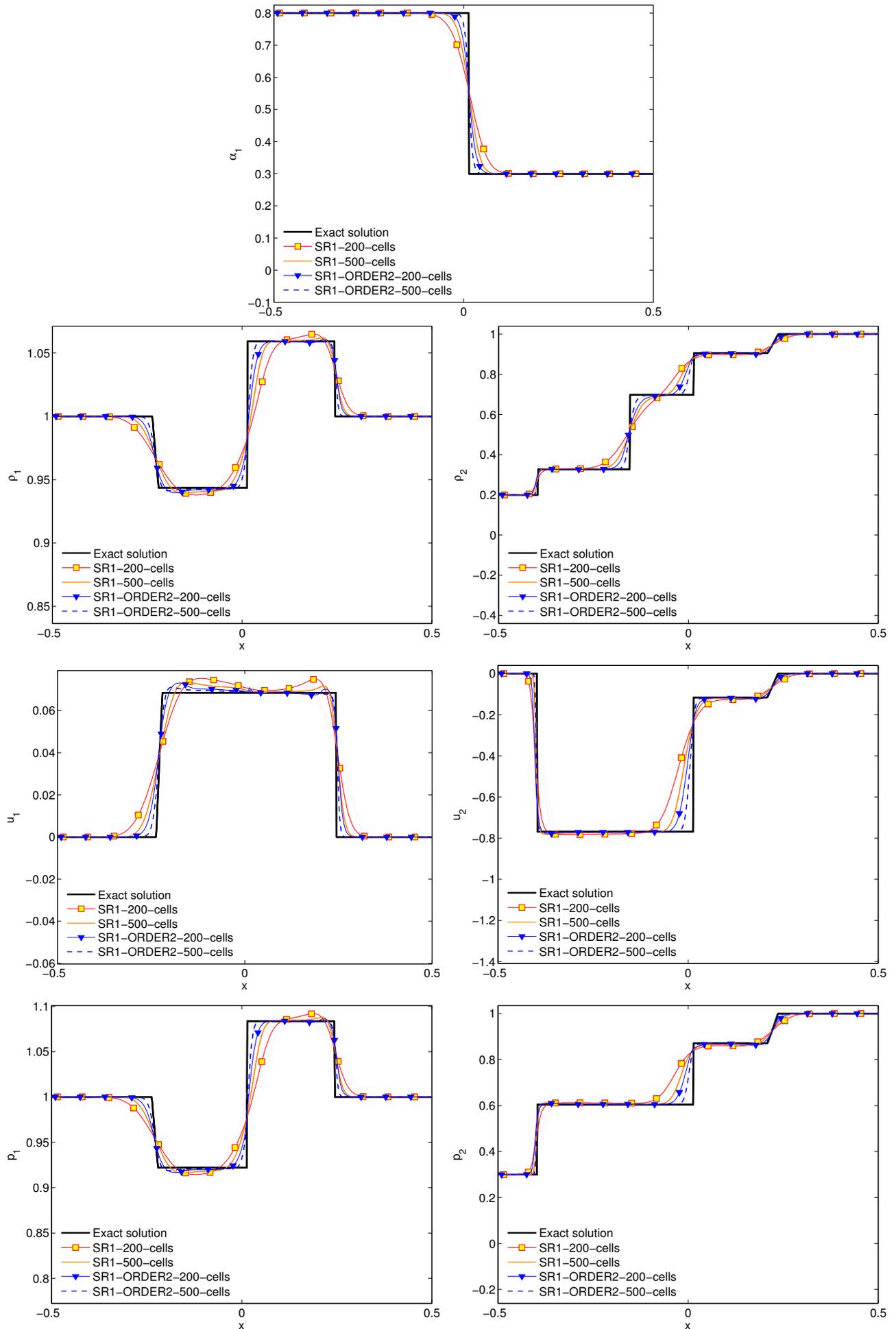


FIGURE A.4 – Solution exacte et approximations numériques des variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila, avec **SR1**, **SR1-ORDER2** sur 200, 500 mailles, à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.2$ .

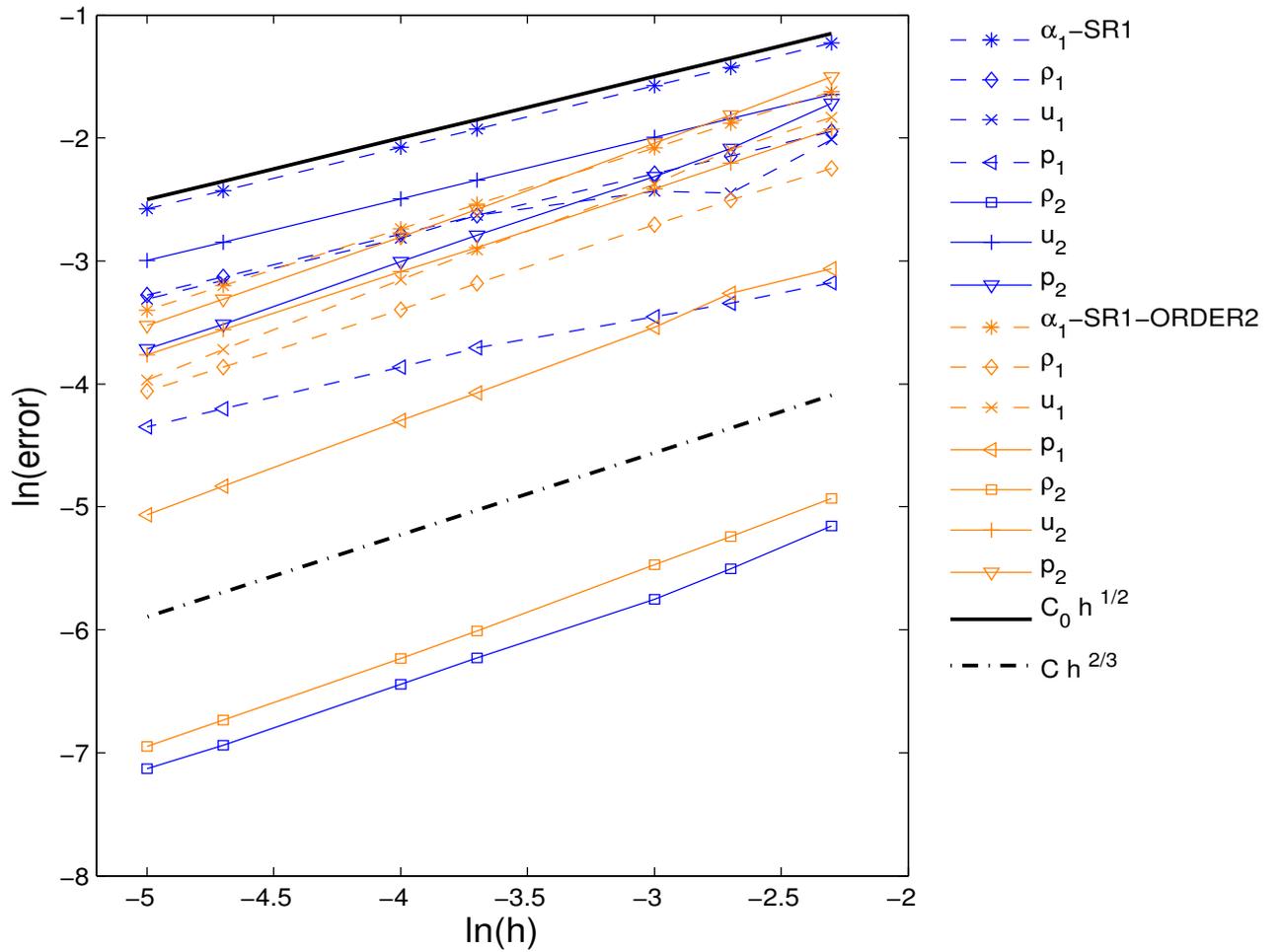


FIGURE A.5 – Courbes de convergence de  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG1\_A4, avec **SR1**, **SR1-ORDER2** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$

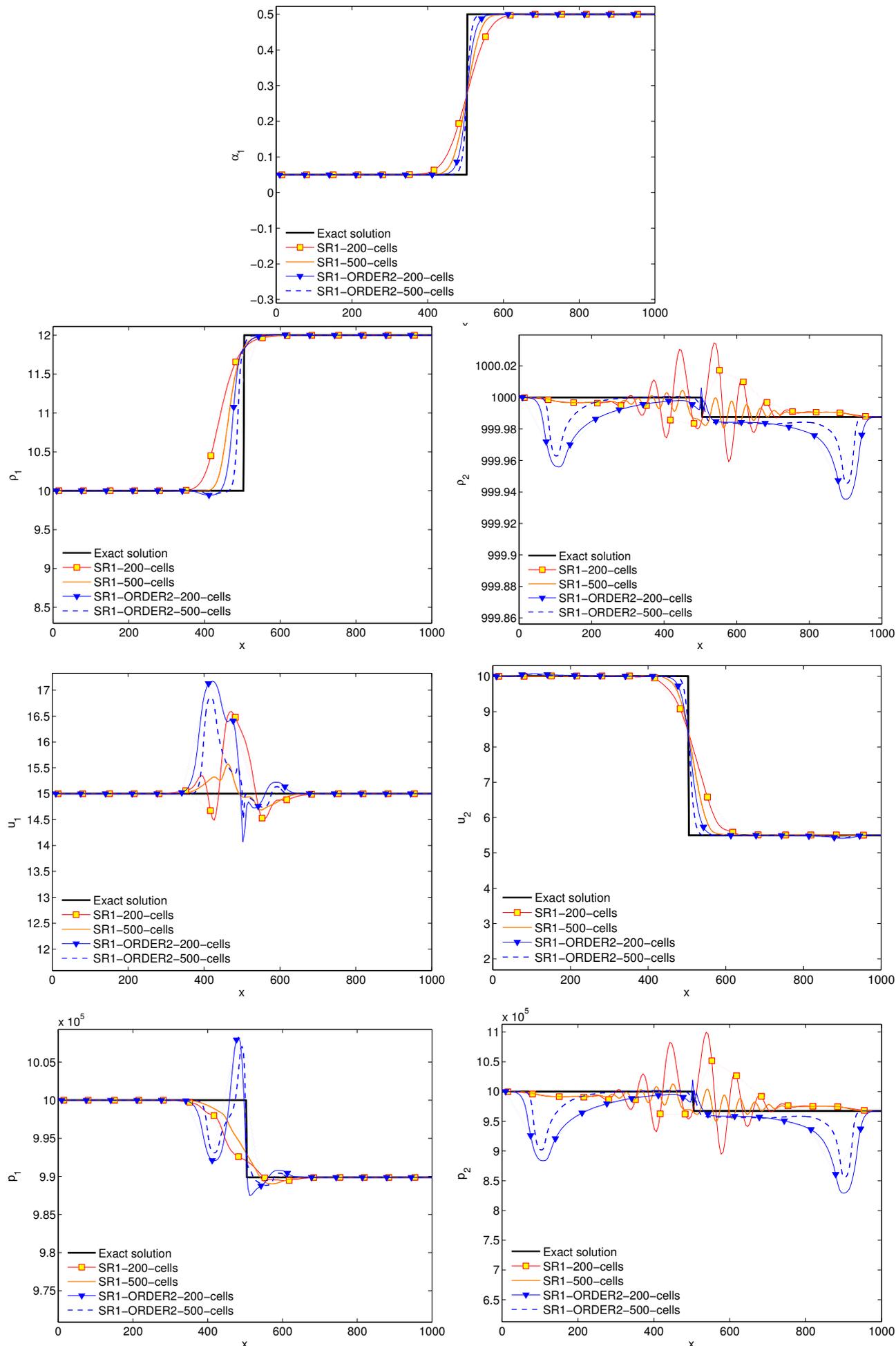


FIGURE A.6 – Solution exacte et approximations numériques des variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPSG1\_A4 avec **SR1**, **SR1-ORDER2** sur 200 et 500 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$

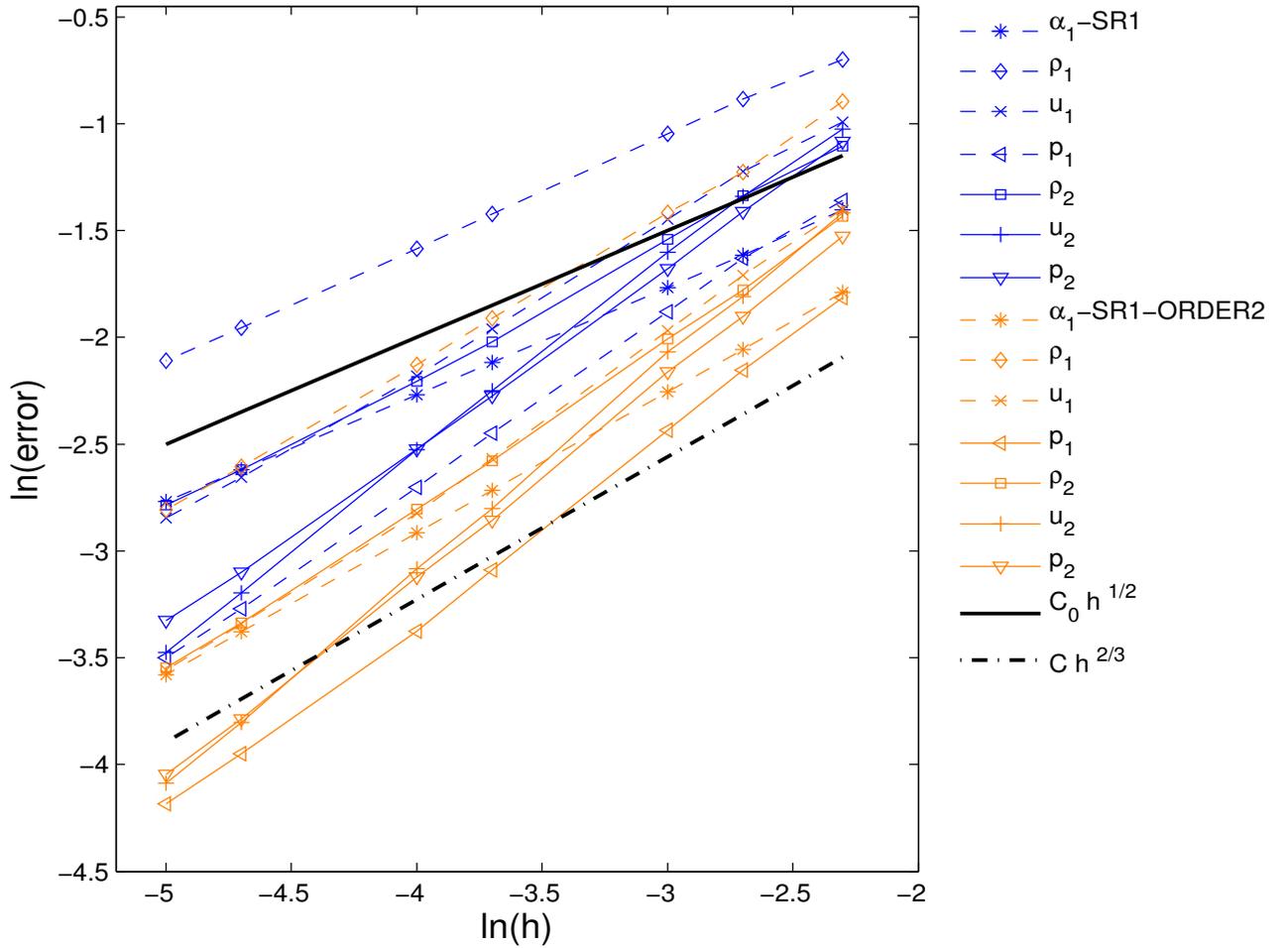


FIGURE A.7 – Courbes de convergence de  $\alpha_\nu$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro6 avec **SR1**, **SR1-ORDER2** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.007$ .

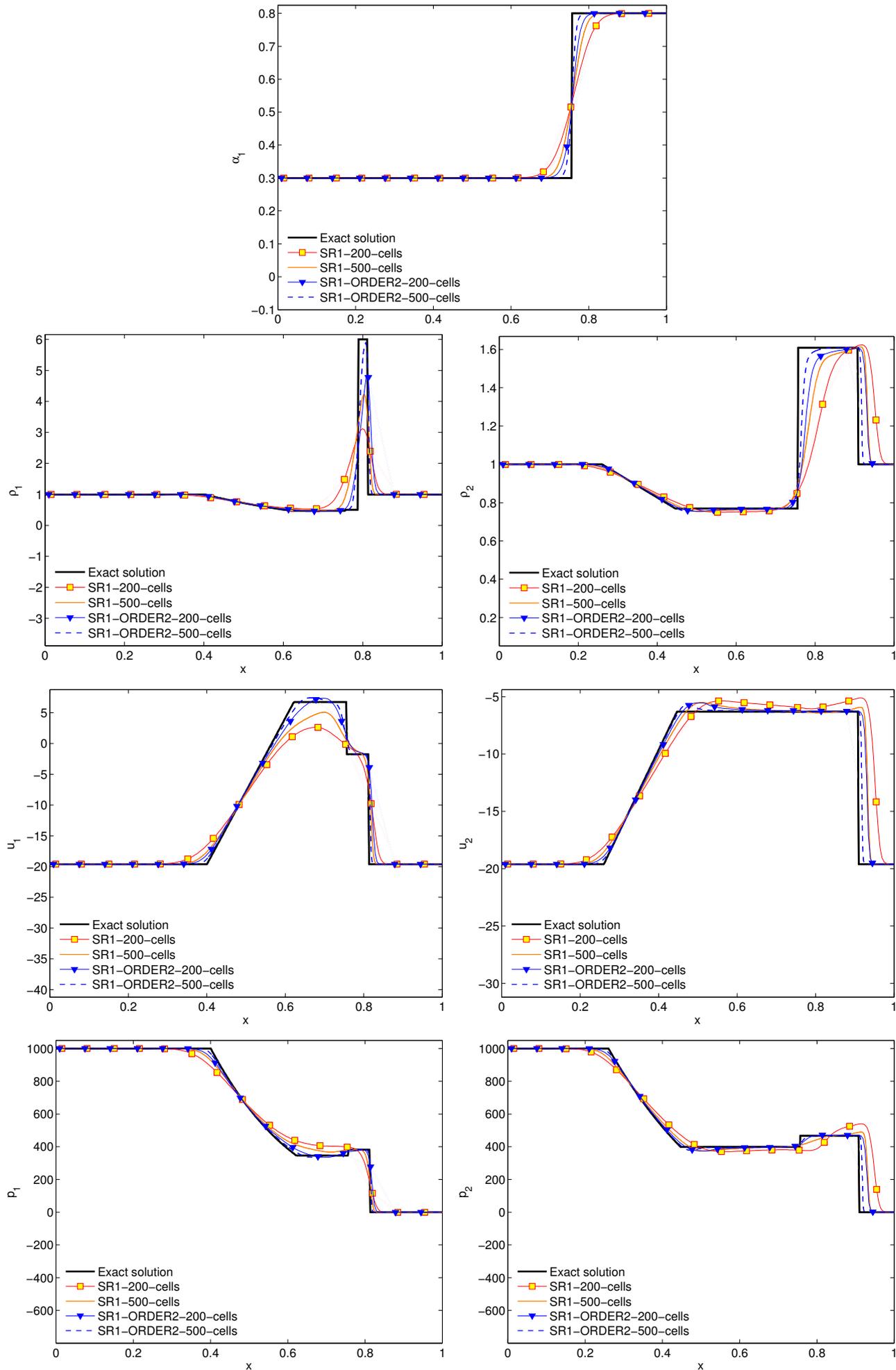


FIGURE A.8 – Solution exactes et approximations numériques des variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro6, avec **SR1**, **SR1-ORDER2** sur 200, 500 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.007$ .

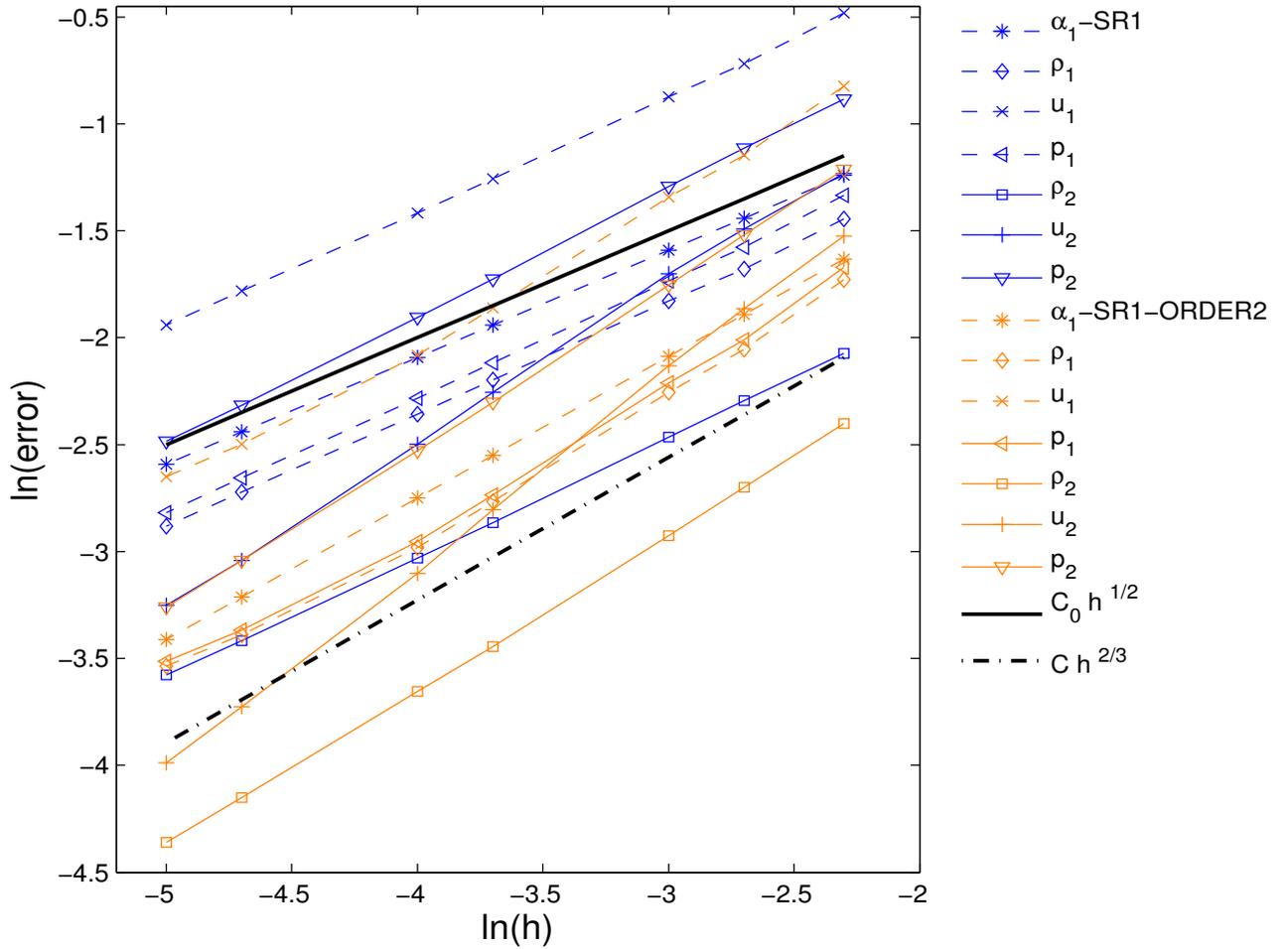


FIGURE A.9 – Courbes de convergence de  $\alpha_\nu$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2 avec **SR1**, **SR1-ORDER2** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.15$

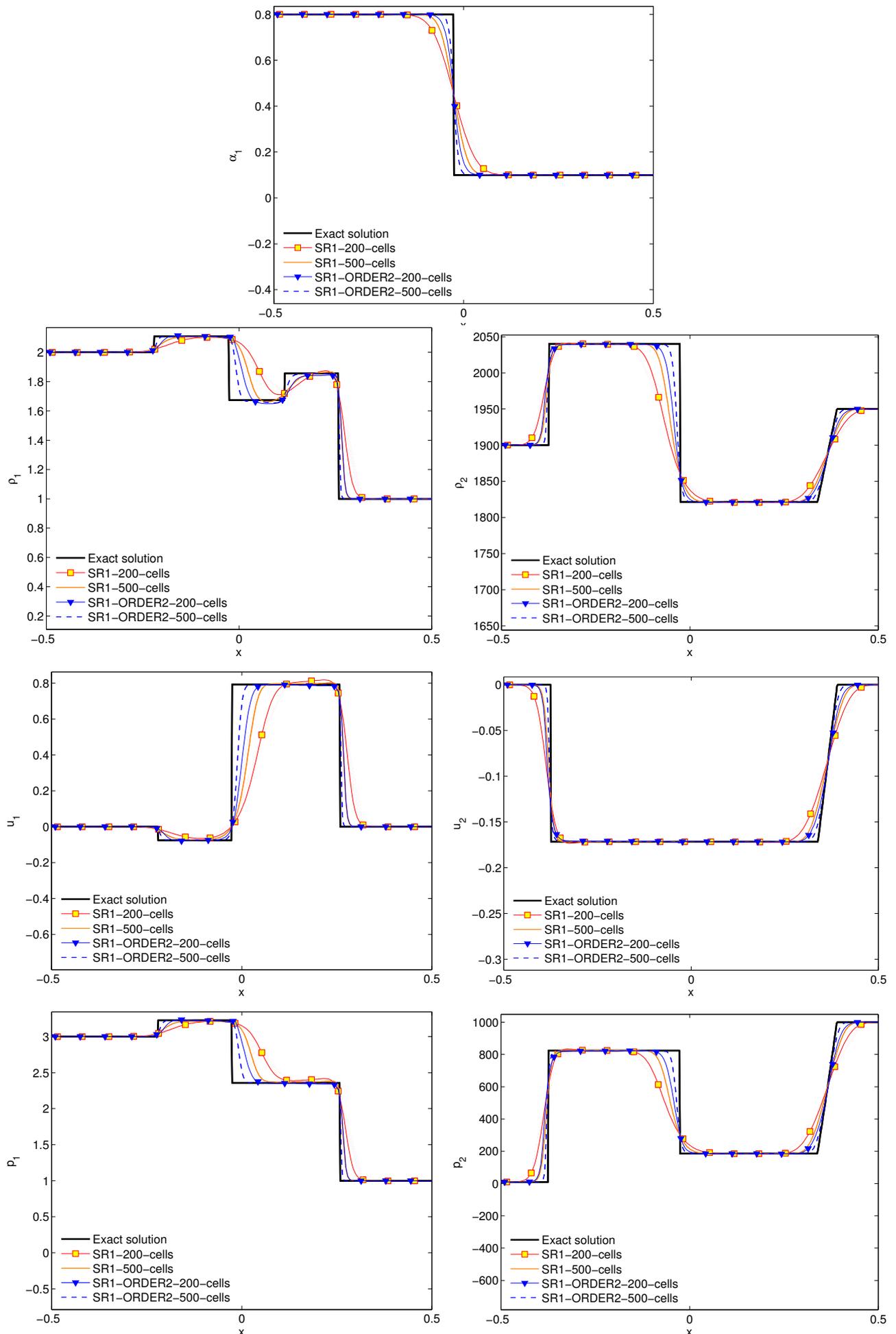


FIGURE A.10 – Solution exacte et approximations numériques des variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2, avec SR1, SR1-ORDER2 sur 200, 500 mailles, avec  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.15$ .

## A.2 Vérification numérique du schéma à pas fractionnaires et comparaison avec le schéma de Rusanov

Le schéma à pas fractionnaires, nommé **PFRAC3** par la suite, a été testé en utilisant les cas tests présentés dans le chapitre ci-dessus. Les résultats ont été comparés avec ceux du schéma de Rusanov (**SR1**).

### A.2.1 Cas tests avec une seule onde de discontinuité de contact

#### Cas test GPSG1\_A3, Cas test GPSG1EQ\_A3

Les courbes de convergence associées à **PFRAC3** pour les cas tests GPSG1\_A3, GPSG1EQ\_A3 sont présentées sur les figures A.11, A.12, pour un nombre  $CFL$  égal à 0.49 et à  $t = 0.25$ . Le nombre de mailles utilisé vaut respectivement  $K = 5 \times 10^2, 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 5 \times 10^4, 10^5, 2 \times 10^5$ . Le taux de convergence obtenu avec **PFRAC3** est environ  $\frac{1}{2}$ . Il est rappelé que le schéma de Rusanov ne permet pas de simuler ces deux cas tests à  $CFL = 0.49$ . Les approximations numériques des différentes variables obtenues avec **PFRAC3**, sur 5000 et 50000 mailles sont présentées dans les figures A.11, A.12.

#### Cas test GPSG1\_A4

Les courbes de convergence pour le cas test GPSG1\_A4 obtenues avec le schéma de Rusanov et le schéma à pas fractionnaires sont présentées sur la figure A.13, pour un nombre  $CFL$  égal à 0.49 et à  $t = 0.25$ . Le nombre de mailles utilisé est toujours  $K = 5 \times 10^2, 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 5 \times 10^4, 10^5$ . Pour ce cas test, le schéma **PFRAC3** est moins précis que celui de Rusanov. Les approximations numériques des différentes variables obtenues avec 500 et 5000 mailles sont présentées sur la figure A.14, pour un nombre  $CFL$  égal à 0.49 et à  $t = 0.25$ .

### A.2.2 Cas tests faisant intervenir plusieurs ondes

Pour le cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila, les courbes de convergence pour un nombre  $CFL$  égal à 0.49 et à  $t = 0.2$ , obtenues avec les schémas **SR1** et **PFRAC3** sont présentées sur la figure A.15. Les courbes correspondant aux cas tests GPSG\_Tokareva\_Toro6, GPSG\_Tokareva\_Toro2, avec  $CFL = 0.49$  et à  $t = 0.007$  ou  $t = 0.15$ , à l'aide des schémas **SR1** et **PFRAC3** sont données sur les figures A.17, A.19. Les nombres de mailles sont : 200, 500,  $10^3$ ,  $5 \times 10^3$ ,  $10^4$ ,  $5 \times 10^4$ ,  $10^5$ .

Les solutions exactes et les approximations numériques sur 500 et 5000 mailles sont présentées pour ces trois cas tests sur les figures A.16, A.18, A.20.

### A.2.3 Synthèse

Le taux de convergence observé pour le schéma à pas fractionnaires **PFRAC3** est d'environ  $\frac{1}{2}$ . Ce schéma permet de simuler le cas test à  $CFL = 0.49$  avec un saut de  $\alpha_v$  important pour un choix de thermodynamiques vapeur/eau de type GPSG, alors que le schéma **SR1** ne le permet pas. Cependant, en observant les résultats obtenus avec les cas tests qui admettent une seule onde de discontinuité de contact associée à  $\alpha_v$ , on note que le schéma **PFRAC3** est moins précis que le schéma **SR1**.

Concernant les cas tests qui comportent plusieurs ondes, la précision des deux schémas est du même ordre.

## A.3 Synthèse

Le schéma de Rusanov et un schéma à pas fractionnaires ont été vérifiés pour la simulation du modèle bifluide homogène.

- Les deux schémas convergent vers la bonne solution du système.

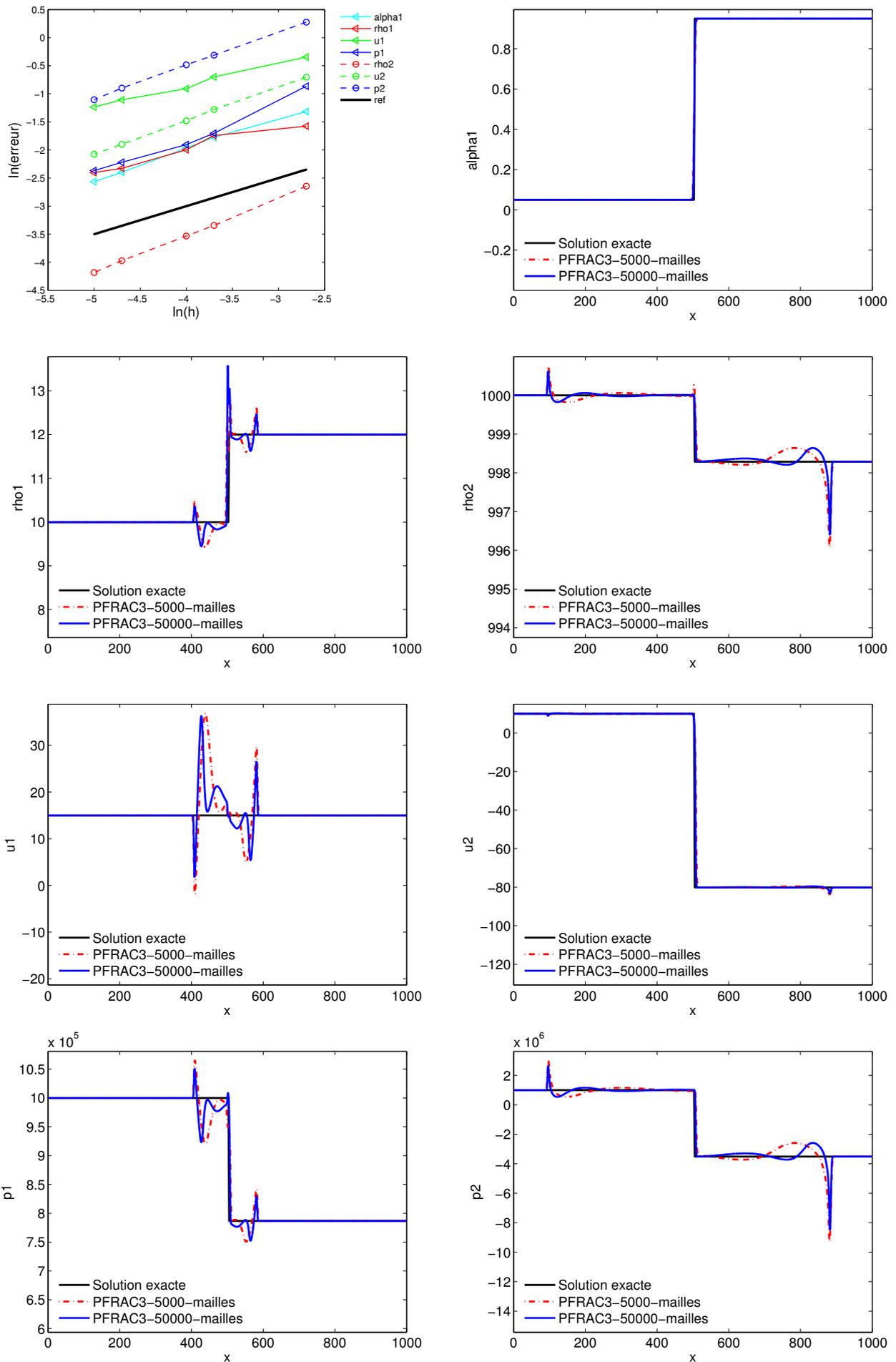


FIGURE A.11 – Solution des variables  $\alpha_\nu$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPSG1\_A3 avec PFRAC3 sur 5000 et 50000 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

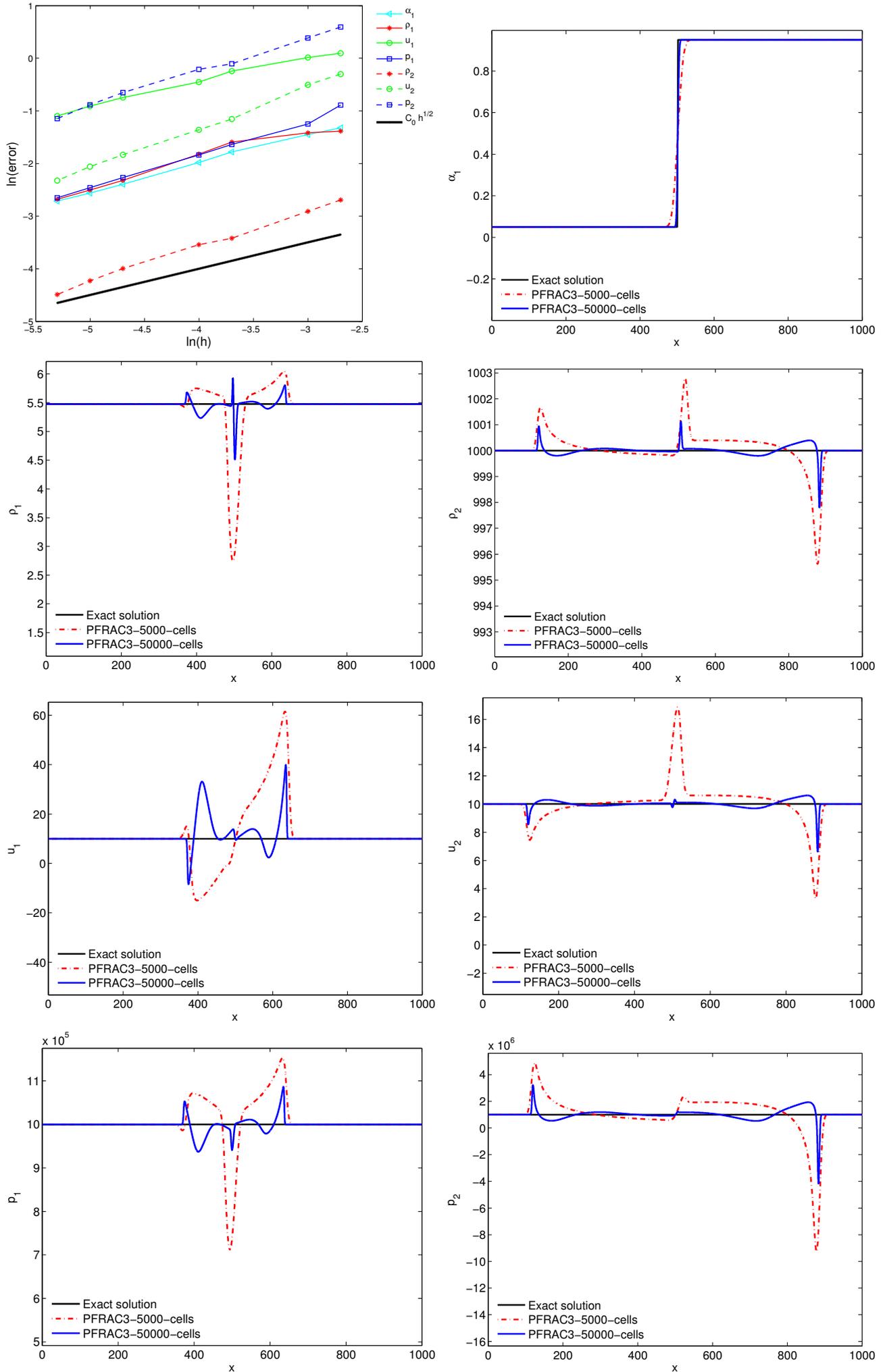


FIGURE A.12 – Courbes de convergence et solution des variables et  $\alpha_v$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPSG1EQ\_A3 avec PFRAC3 sur 5000 et 50000 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

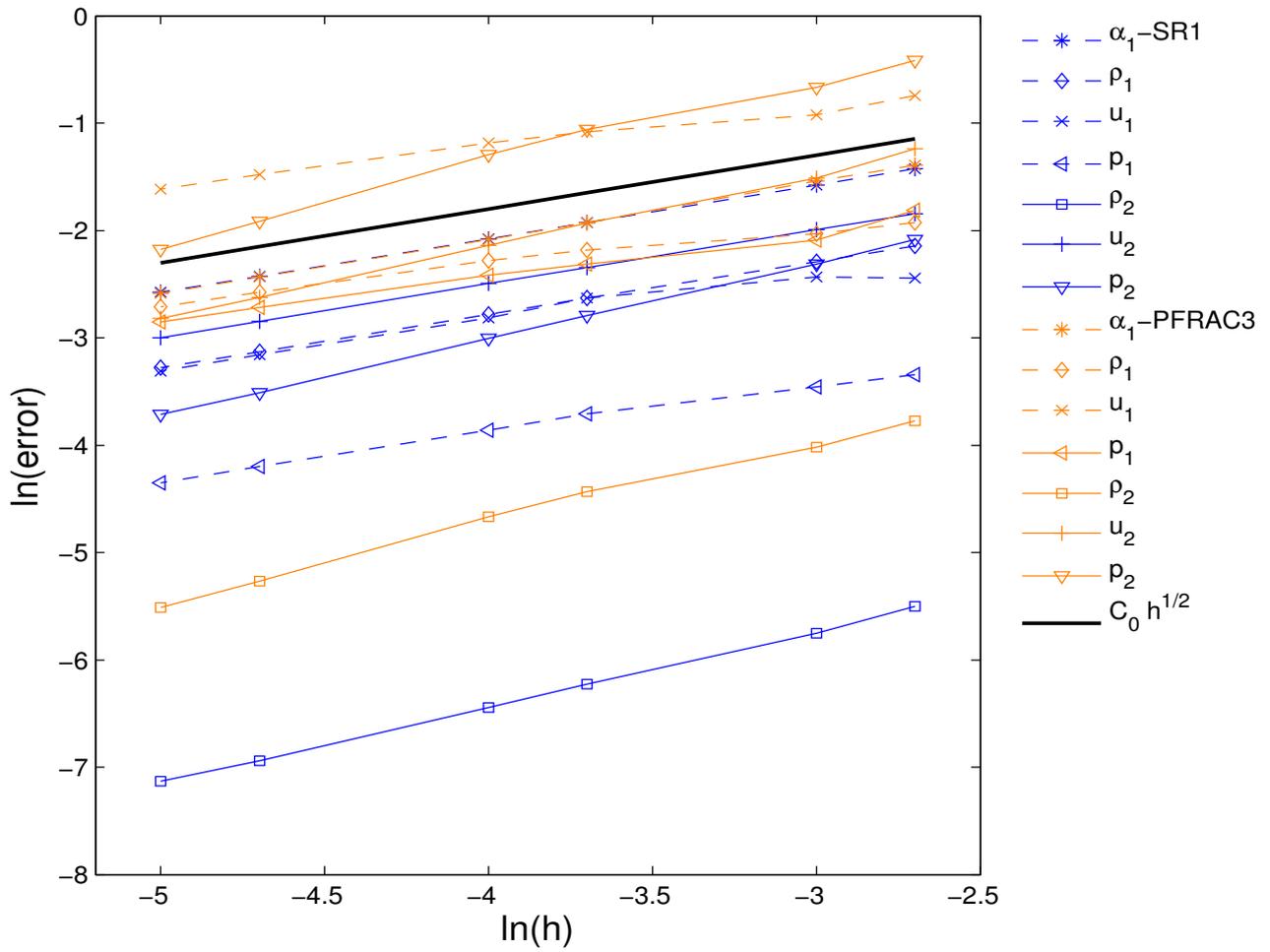


FIGURE A.13 – Courbes de convergence de  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG1\_A4, avec **SR1**, **PFRAC3** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

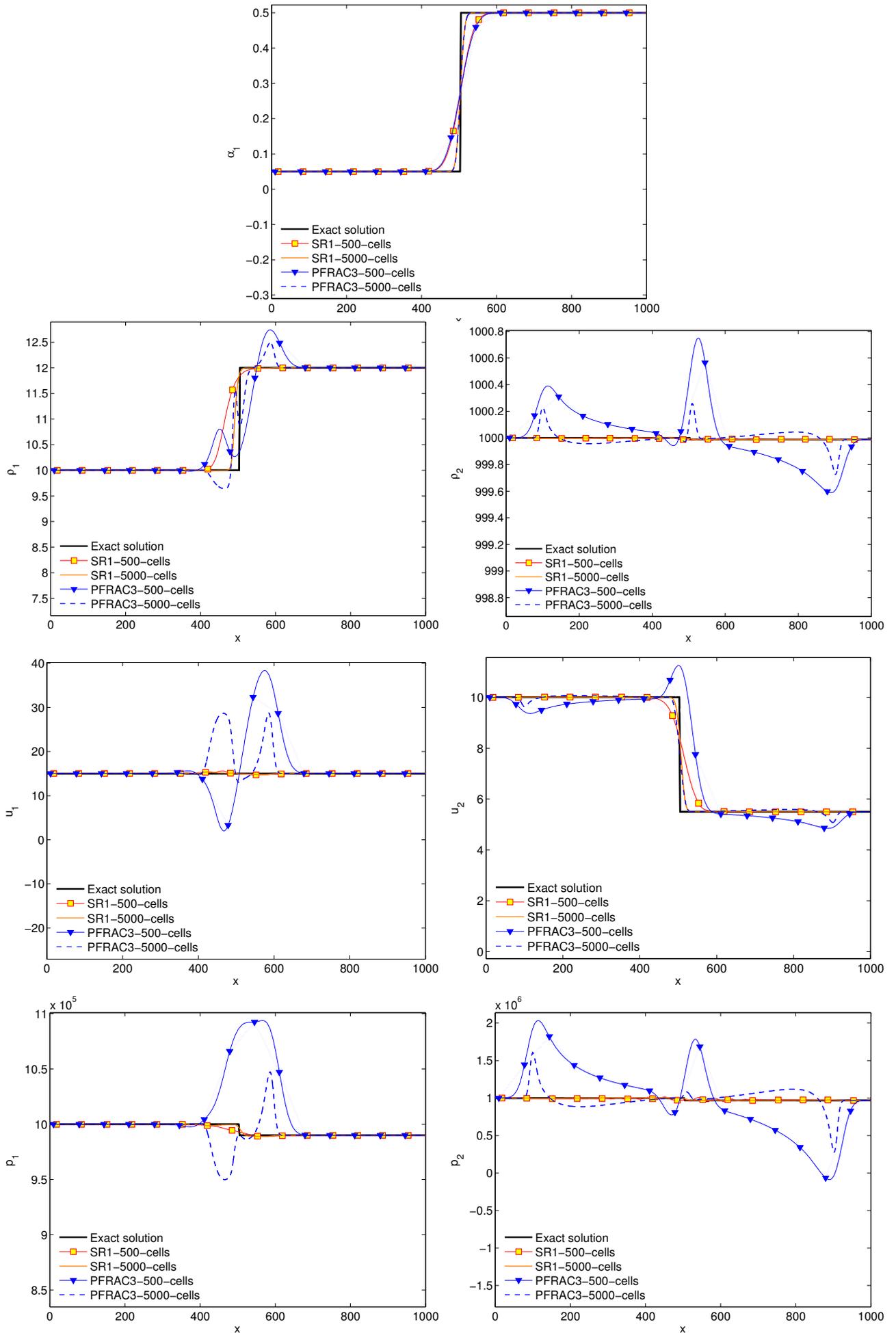


FIGURE A.14 – Solution exacte et approximations numériques des variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG1\_A4 avec SR1, PFRAC3, avec 500 et 5000 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.25$ .

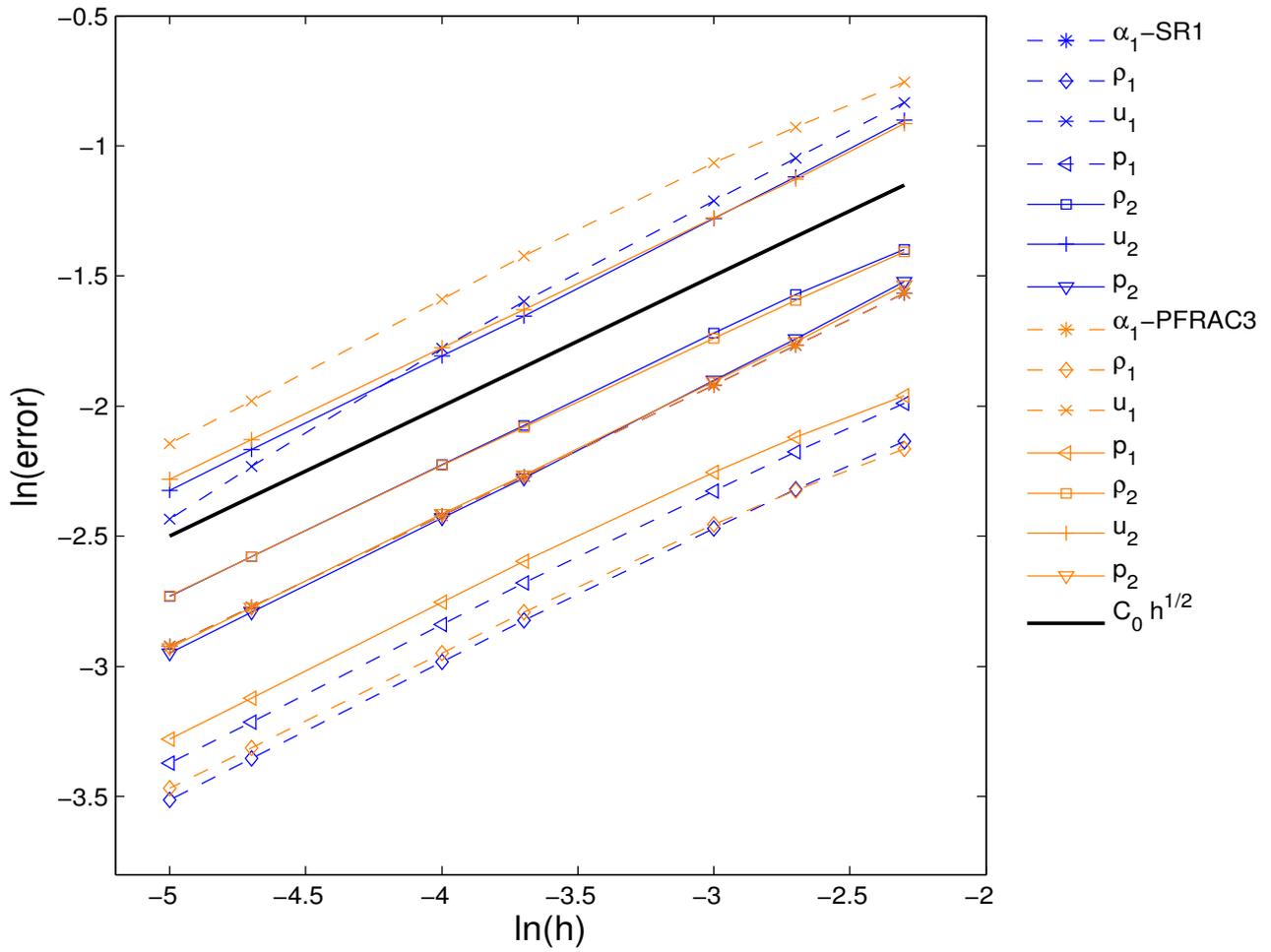


FIGURE A.15 – Courbes de convergence de  $\alpha_v$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila avec **SR1**, **PFRAC3** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.2$ .

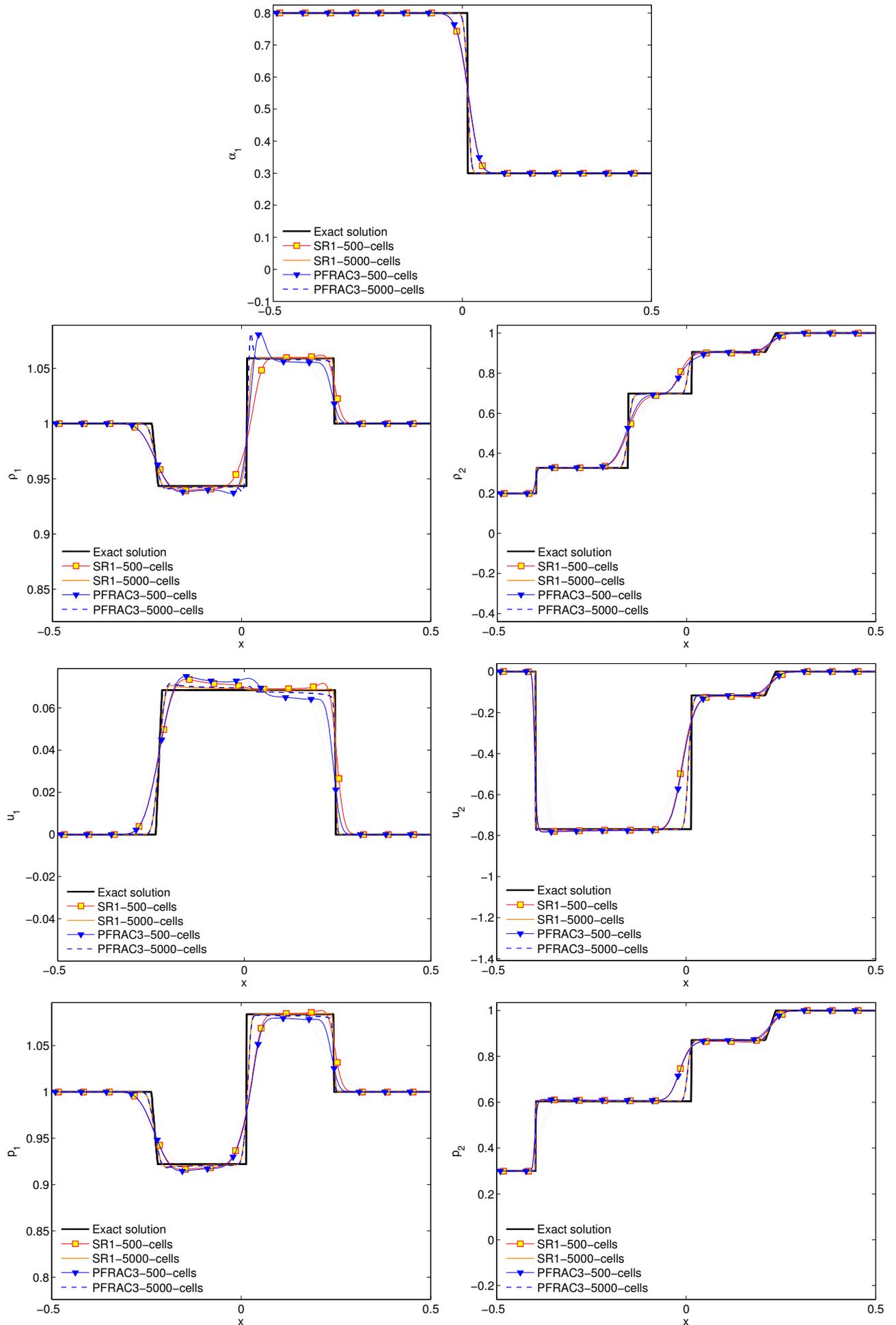


FIGURE A.16 – Solution exacte et approximations numériques des variables  $\alpha_\varphi$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPGP\_Schwendeman\_Wahle\_Kapila, avec SR1, PFRAC3 sur 500, 5000 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.2$ .

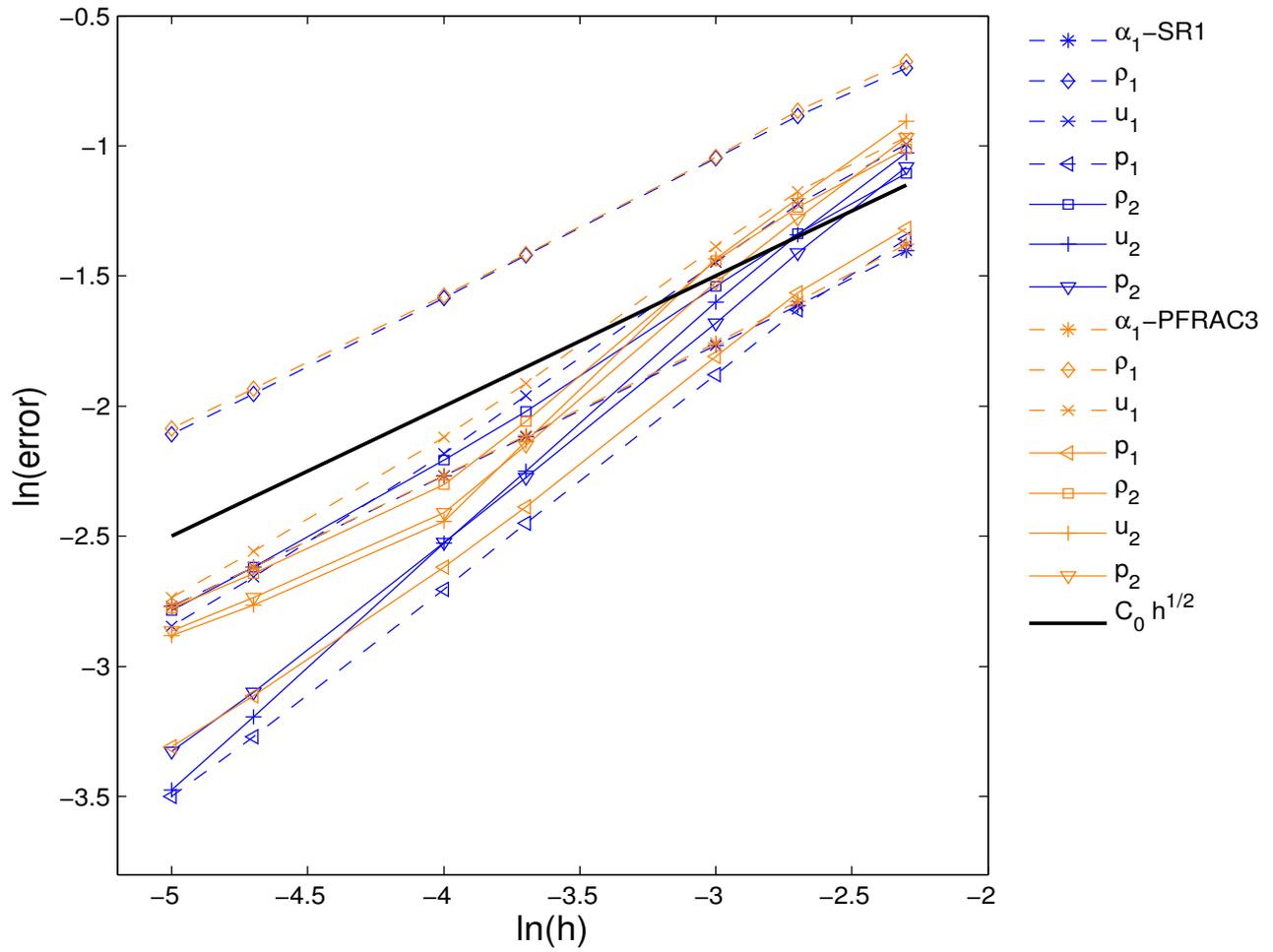


FIGURE A.17 – Courbes de convergence de  $\alpha_\nu$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, \nu$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro6 avec **SR1**, **PFRAC3** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.007$ .

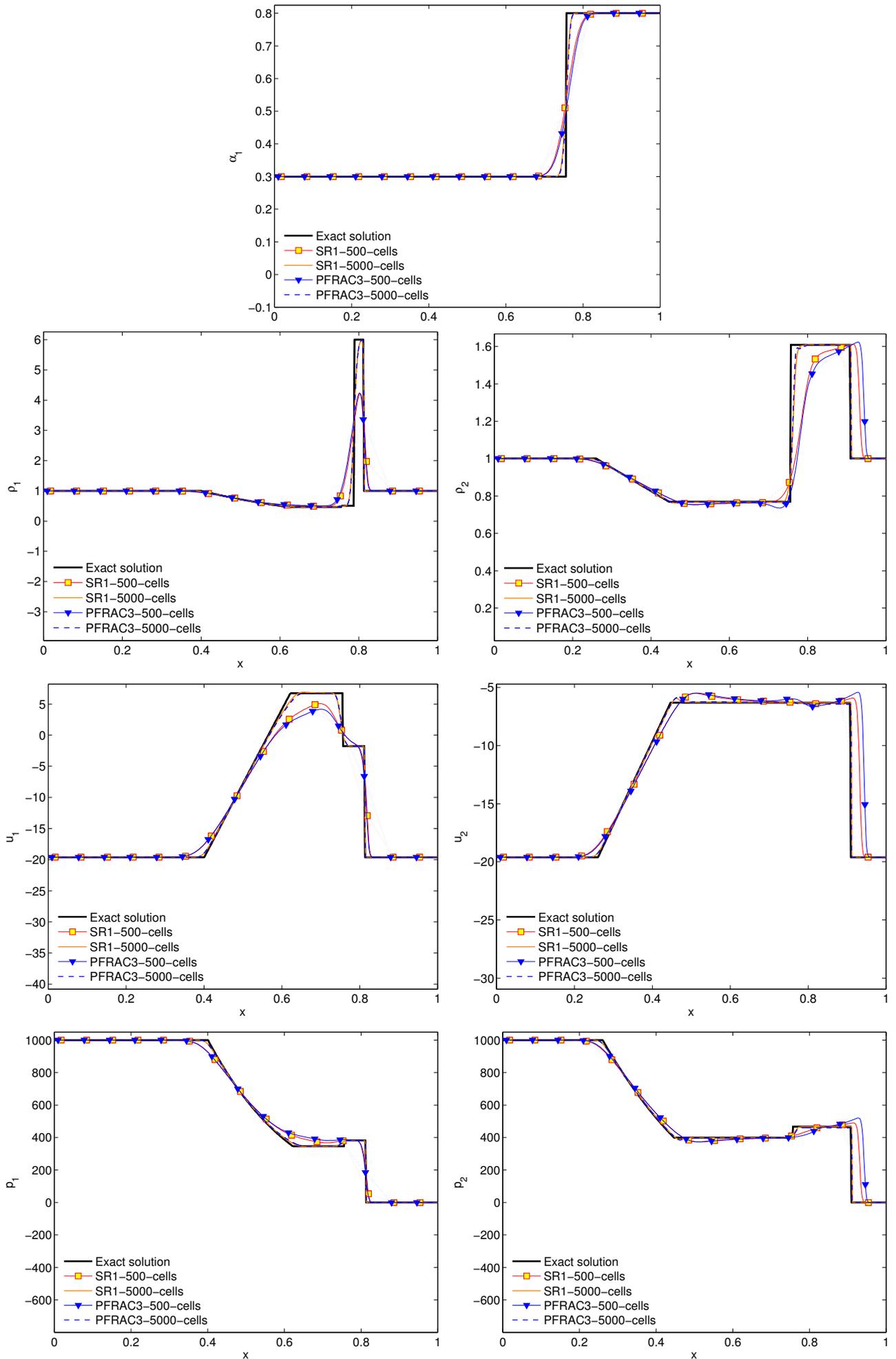


FIGURE A.18 – Solution exacte et approximations numériques des variables  $\alpha_\varphi$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro6, avec SR1, PFRAC3 sur 500, 5000 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.007$ .

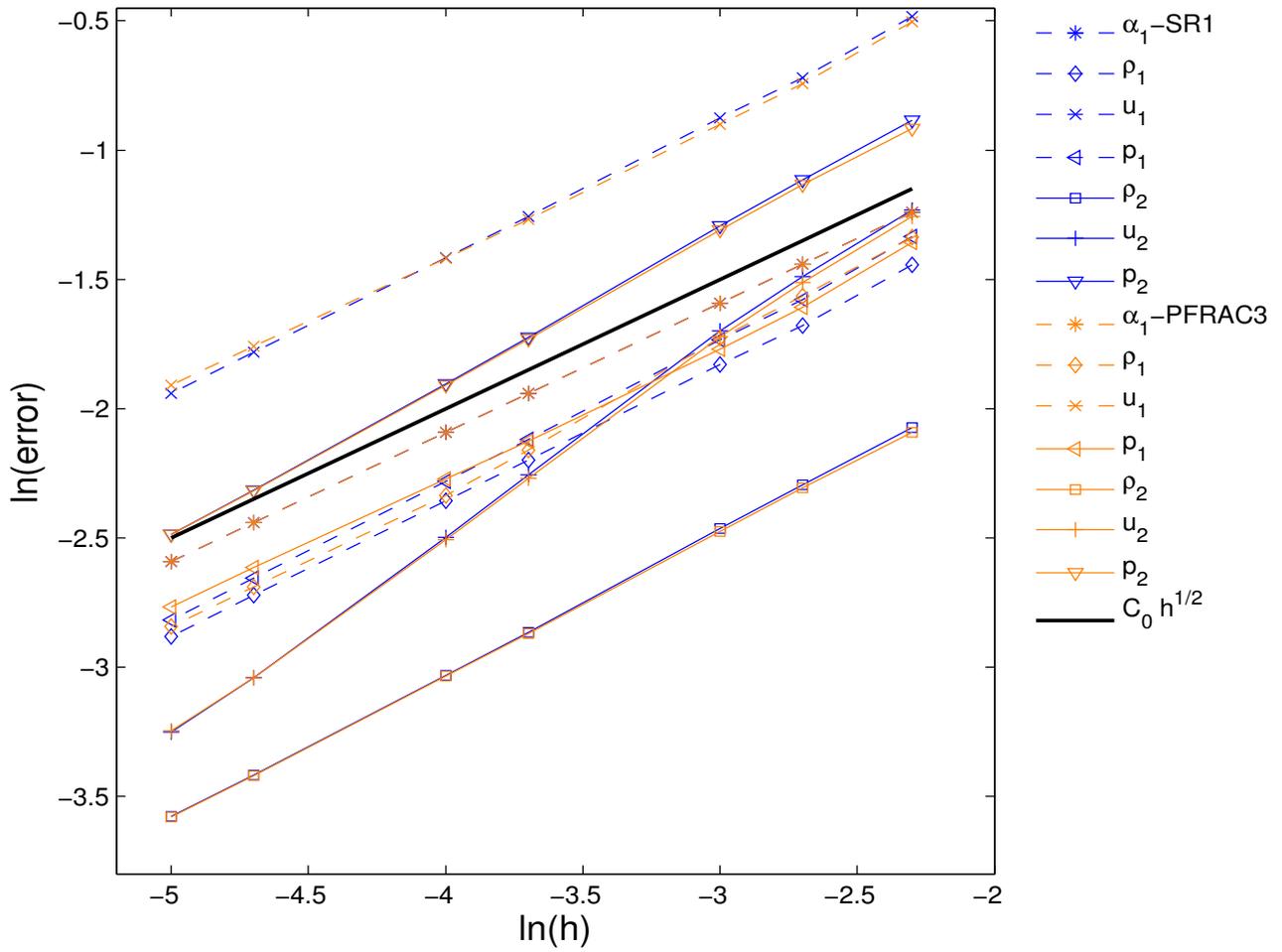


FIGURE A.19 – Courbes de convergence de  $\alpha_v$ ,  $\rho_\varphi$ ,  $u_\varphi$ ,  $p_\varphi$ ,  $\varphi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2 avec **SR1**, **PFRAC3** à  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.15$ .

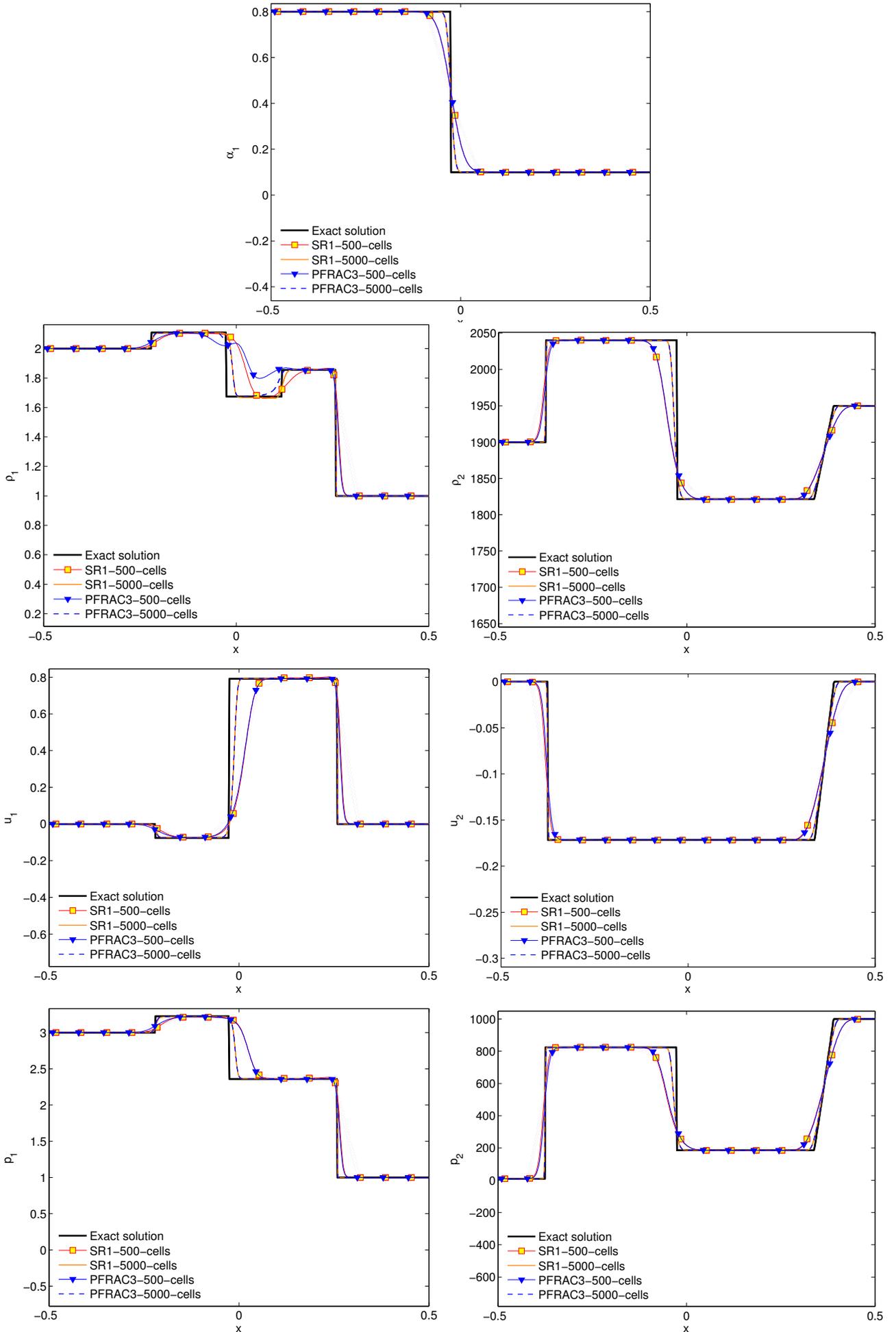


FIGURE A.20 – Solution exactes et approximations numériques des variables  $\alpha_v$ ,  $\rho_\phi$ ,  $u_\phi$ ,  $p_\phi$ ,  $\phi = l, v$  pour le cas test GPSG\_Tokareva\_Toro2, avec SR1, PFRAC3 sur 500, 5000 mailles,  $CFL = 0.49$ ,  $t = 0.15$ .

- Les deux schémas sont faciles à implémenter pour une loi thermodynamique quelconque.
- Les deux schémas ne sont pas très précis, mais le coût en temps CPU par itération est faible par rapport aux autres solveurs de Riemann approchés.
- Les deux schémas sont stables et robustes pour les lois thermodynamiques étudiées, mais le schéma de Rusanov connaît un problème de stabilité pour de grands sauts de  $\alpha_{v/l}$  pour la loi stiffened Gas. Le schéma à pas fractionnaires est plus stable mais par contre moins précis.



---

## Bibliographie

---

- [1] G. Allaire, S. Clerc, and S. Kokh. A Five-Equation Model for the Simulation of interfaces between Compressible Fluids. *Journal of Computational Physics*, 181(2) :577–616, 2002.
- [2] G. Allaire, G. Faccanoni, and S. Kokh. A strictly hyperbolic equilibrium phase transition model. *Comptes Rendus Mathématique*, 344(2) :135–140, 2007.
- [3] L. Allievi. ‘teoria del colpo d’ariete,’atti collegio ing. arch. english translation by halmos ee 1929,“the theory of waterhammer,”. *Trans. ASME*, 1913.
- [4] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, and T. Galié. Relaxation and numerical approximation of a two-fluid two-pressure diphasic model. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43(06) :1063–1097, 2009.
- [5] A. Ambroso, C. Chalons, and P. Raviart. A Godunov-type method for the seven-equation model of compressible two-phase flow. *Computers & Fluids*, 54 :67–91, 2012.
- [6] M. Baer and J. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *International journal of multiphase flow*, 12(6) :861–889, 1986.
- [7] T. Barberon and P. Helluy. Finite volume simulation of cavitating flows. *Computers & fluids*, 34(7) :832–858, 2005.
- [8] J. Bdzil, R. Menikoff, S. Son, A. Kapila, and D. Stewart. Two-phase modeling of a DDT in granular materials : a critical examination of modeling issues. *Physics of Fluids*, 11 :378–402, 1999.
- [9] E. Blaud, P. Galon, and F. Daude. Introduction et validation d’un modèle de changement de phase dans le code de dynamique rapide *Europlexus*. Technical Report en préparation, rapport interne CEA, 2013.
- [10] C. E. Brennen. *Fundamentals of Multiphase Flows*. Cambridge University Press, 2005.
- [11] M.-H. Chun and S.-O. Yu. A parametric study and a guide chart to avoid condensation-induced water hammer in a horizontal pipe. *Nuclear engineering and design*, 201(2) :239–257, 2000.
- [12] F. Coquel, T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Closure laws for a two-fluid two pressure model. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(10) :927–932, 2002.
- [13] F. Coquel, J.-M. Hérard, and K. Saleh. A splitting method for the isentropic Baer Nunziato two-phase flow model. In *ESAIM : Proceedings*, volume 38, pages 241–256. EDP Sciences, 2012.
- [14] F. Coquel, J.-M. Hérard, k. Saleh, and N. Seguin. A robust entropy-satisfying Finite volume scheme for the isentropic Baer-Nunziato model. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, à paraître 2013.
- [15] F. Crouzet, F. Daude, P. Galon, P. Helluy, J.-M. Hérard, O. Hurisse, and Y. Liu. Approximate solutions of the baer-nunziato model. *ESAIM : Proceedings*, 40 :63–82, 2013.
- [16] F. Daude. Modélisation des écoulements diphasiques compressibles et application aux transitoires hydrauliques avec *Europlexus*. Technical Report H-T63-2010-03134-FR, rapport interne EDF R&D, 2010.

- [17] F. Daude and P. Galon. Développement d'un modèle diphasique à deux pressions dans *Europlexus* et vérifications numériques - Partie convective. Technical Report H-T63-2012-01003-FR, rapport interne EDF R&D, 2013.
- [18] J. Delhaye, M. Giot, and M. Riethmuller. *Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering*, volume 5 of a Von Karman Institute Book. Mc Graw Hill Book Company, Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- [19] J.-P. Devos. Transitoires rapides en écoulement hydraulique dans les tuyauteries des centrales : proposition d'une terminologie pour la classification des phénomènes. Technical Report H-T63-2009-01669-FR, rapport interne EDF R&D, 2010.
- [20] J. Donea, S. Giuliani, and J. Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33(1) :689–723, 1982.
- [21] G. Faccanoni. *Étude d'un modèle fin de changement de phase liquide-vapeur. Contribution à l'étude de la crise d'ébullition*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2008.
- [22] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmont. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ale schemes for the solution of flow problems on moving grids. *Journal of Computational Physics*, 174(2) :669–694, 2001.
- [23] A. Forestier and S. Gavriluk. Criterion of hyperbolicity for non-conservative quasilinear systems admitting a partially convex conservation law. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(17) :2148–2158, 2011.
- [24] J. Gale and I. Tiselj. Water hammer in elastic pipes. In *International Conference Nuclear Energy for New Europe*, pages 0203.1–0203.8, Kranjska Gora, Slovenia, September 9-12 2002.
- [25] T. Gallouët, P. Helluy, J.-M. Hérard, and J. Nussbaum. Hyperbolic relaxation models for granular flows. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44(2) :371–400, 2010.
- [26] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Some recent finite volume schemes to compute Euler equations using real gas EOS. *International journal for numerical methods in fluids*, 39(12) :1073–1138, 2002.
- [27] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14(05) :663–700, 2004.
- [28] Z. Gao, P. Galon, and F. Daude. Introduction and validation of three different multiphase flows models in the fast transient dynamic code *Europlexus*. Technical Report DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/RT/10-019/A, rapport interne CEA, 2010.
- [29] S. Gavriluk and R. Saurel. Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia. *Journal of Computational Physics*, 175 :326–360, 2002.
- [30] L. Girault and J.-M. Hérard. A two-fluid hyperbolic model in a porous medium. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44(06) :1319–1348, 2010.
- [31] H. Guillard and F. Duval. A Darcy law for the drift velocity in a two-phase flow model. *Journal of Computational Physics*, 224(1) :288–313, 2007.
- [32] V. Guillemaud. *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions*. PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille I, le 27 mars 2007.
- [33] P. Helluy and N. Seguin. Relaxation models of phase transition flows. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(02) :331–352, 2006.
- [34] J.-M. Hérard. A three-phase flow model. *Mathematical Computer Modelling*, 45 :432–455, 2007.
- [35] J.-M. Hérard. Une classe de modèles diphasiques bi-fluides avec changement de régime. Technical Report H-I81-2010-0486-FR, EDF R&D, 2010.
- [36] J.-M. Hérard and O. Hurisse. A fraction step method to compute a class of compressible gas-liquid flows. *EDF report H-I81-2011-01361-EN, 2011 ; and Computers and Fluids, vol. 55, pp 57-69, 2012.*

- [37] J.-M. Hérard and O. Hurisse. A simple method to compute standard two-fluid models. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 19(7) :475–482, 2005.
- [38] J.-M. Hérard and O. Hurisse. Schémas d'intégration du terme source de relaxation des pressions phasiques pour un modèle bifluide hyperbolique. Technical Report H-I81-2009-1514-FR, rapport interne EDF R&D, 2009.
- [39] J.-M. Hérard and O. Hurisse. A fractional step method to compute a class of compressible gas-liquid flows. *Computers & Fluids*, 55 :57–69, 2012.
- [40] J.-M. Hérard and O. Hurisse. Computing two-fluid models of compressible water-vapour flows with mass transfer. In *contribution to the 42th AIAA FD conference*, number 2959, 2012.
- [41] O. Hurisse. Note de vérification d'un prototype de code multidimensionnel basé sur un modèle bifluide instationnaire. Technical Report en preparation, rapport interne EDF R&D, 2012.
- [42] J.-M. Hérard and Y. Liu. Une approche bifluide statistique de modélisation des écoulements diphasiques à phases compressibles. *EDF report H-I81-2013-01162-FR*, 2013.
- [43] M. Ishii. Thermofluid dynamic theory of two-phase flow. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 75 :29657.
- [44] E. Johnsen and T. Colonius. Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems. *Journal of Computational Physics*, 219(2) :715–732, 2006.
- [45] Joint Research Centre (JRC), Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA). *Europlexus user's manual*, <http://europlexus.jrc.ec.europa.eu/>, 2013.
- [46] N. Joukowsky. Über den hydraulischen Stoss in Wasserleitungsöhren. ("On the hydraulic hammer in water supply pipes"). *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg*, 8,9(5) :1–71, 1898.
- [47] A. Kapila, R. Menikoff, J. Bdzil, S. Son, and D. Stewart. Two-phase modeling of a DDT in granular materials : reduced equations. *Physics of Fluids*, 13 :3002–3024, 2001.
- [48] A. Kapila, S. Son, J. Bdzil, R. Menikoff, and D. Stewart. Two-phase modeling of a DDT : structure of the velocity relaxation zone. *Physics of Fluids*, 9(12) :3885–3897, 1997.
- [49] S. Karni and G. Hernandez-Duenas. A hybrid algorithm for the Baer Nunziato model using the Riemann invariants. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 45(1-3) :382–403, 2010.
- [50] H. B. Karplus. The velocity of sound in a liquid containing gas bubbles. *Armour Research Foundation of Illinois Institute of Technology*, C00-248 TID-4500, 1958.
- [51] W. Kirsner. Resolving waterhammer problems in boiler plants. *Heating/piping/air conditioning engineering*, 75(9) :89–96, 2003.
- [52] B. Koobus and C. Farhat. Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 170(1) :103–129, 1999.
- [53] M. Labois. *Modélisation des déséquilibres mécaniques pour les écoulements diphasiques : approches par relaxation et par modèle réduit*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, le 31 Octobre 2008.
- [54] M.-H. Lallemand and R. Saurel. Pressure relaxation procedures for multiphase compressible flows. *Rapport de recherche INRIA*, 4038, 2000.
- [55] P. D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, volume 11. SIAM Philadelphia, 1973.
- [56] O. Le Métayer, J. Massoni, and R. Saurel. Élaboration des lois d'état d'un liquide et de sa vapeur pour les modèles d'écoulements diphasiques. *International Journal of Thermal Sciences*, 43(3) :265–276, 2004.
- [57] M. Lepareux. Programme PLEXUS. Matériau "EAU". Modèle homogène équilibré. Technical Report DRN/DMT 94.398, rapport interne CEA, 1994.

- [58] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(1) :71–90, 1996.
- [59] M. Mougery and J. Flobert. Programme PLEXUS. Nouvelles tables de l'eau (0°-200° et 0 à 30Kbars). Technical Report DRN/DMT 91.218, rapport interne CEA, 1991.
- [60] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *Journal of Computational Physics*, 202(2) :664–698, 2005.
- [61] M. Papin and R. Abgrall. Fermetures entropiques pour les systèmes bifluïdes à sept équations. *Comptes-Rendus Mécanique*, 333(11) :838–842, 2005.
- [62] V. Ransom and D. Hicks. Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 53(1) :124–151, 1984.
- [63] B. Riegel. *Contribution à l'étude de la décompression d'une capacité en régime diphasique*. PhD thesis, L'Université Scientifique et Médicale et l'Institut National Polytechnique de Grenoble, le 8 Juin, 1978.
- [64] C. M. Romander, L. E. Schwer, and D. G. Cagliostro. Response of water-filled thin-walled pipes to pressure pulses : experiments and analysis. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, 102 :56–61, February 1980.
- [65] V. Rusanov. The calculation of the interaction of non-stationary shock waves and obstacles. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1(2) :304–320, 1962.
- [66] K. Saleh. *Analyse et Simulation Numérique par Relaxation d'Écoulements Diphasiques Compressibles. Contribution au Traitement des Phases Évanescentes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, le 26 Novembre 2012.
- [67] R. Saurel and R. Abgrall. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows. *Journal of Computational Physics*, 150(2) :425–467, 1999.
- [68] R. Saurel, S. Gavrilyuk, and F. Renaud. A multiphase model with internal degrees of freedom : application to shock-bubble interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 495(1) :283–321, 2003.
- [69] R. Saurel and O. LeMetayer. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation. *J. Fluid. Mech.*, 431 :239–471, 2002.
- [70] R. Saurel, F. Petitpas, and R. Abgrall. Modelling phase transition in metastable liquids : applications to cavitating and flashing flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 607(1) :313–350, 2008.
- [71] D. Schwendeman, C. Wahle, and A. Kapila. The Riemann problem and a high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 212(2) :490–526, 2006.
- [72] A. R. Simpson. *Large water hammer pressures due to column separation in sloping pipes (transient cavitation)*. PhD thesis, University of Michigan, 1987.
- [73] M. Souli, A. Ouahsine, and L. Lewin. Ale formulation for fluid–structure interaction problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(5) :659–675, 2000.
- [74] V. L. Streeter and E. B. Wylie. *Hydraulic transients*. McGraw-Hill, New-York, 1967.
- [75] P. D. Thomas and C. K. Lombard. Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids. *AIAA Journal*, 17(10) :1030–1037, 1979.
- [76] S. Tokareva and E. Toro. HLLC-type Riemann solver for the Baer–Nunziato equations of compressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 229(10) :3573–3604, 2010.
- [77] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer, troisième édition, 2009.
- [78] G. B. Wallis. *One Dimensional Two-Phase Flow*, volume 1. Mcgraw-Hill, New York, 1969.
- [79] N. Yanenko. *Méthodes à pas fractionnaires*. Armand Colin, 1968.

- 
- [80] A. Zein, M. Hantke, and G. Warnecke. Modeling phase transition for compressible two-phase flows applied to metastable liquids. *Journal of Computational Physics*, 229(8) :2964–2998, 2010.