



HAL
open science

Méthodes de construction des courbes de fragilité sismique par simulations numériques

Cong-Thuat Dang

► **To cite this version:**

Cong-Thuat Dang. Méthodes de construction des courbes de fragilité sismique par simulations numériques. Autre [cond-mat.other]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2014. Français. NNT : 2014CLF22458 . tel-01023973

HAL Id: tel-01023973

<https://theses.hal.science/tel-01023973v1>

Submitted on 15 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

No d'ordre : 2458

EDSPIC : 70

Université BLAISE PASCAL- Clermont II
École Doctorale
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

THÈSE

présentée par

Cong-Thuat DANG

en vue d'obtenir le grade de

Docteur d'Université

(Spécialité : Génie Mécanique)

Méthodes de construction des courbes de fragilité sismique par simulations numériques

Soutenue publiquement le 28 mai 2014 devant le jury :

Président : **M. Patrick PAULTRE**, Université de Sherbrooke, Canada

Rapporteurs : **M. Jean-Michel GÉNEVAUX**, Université du Maine
M. Pierre ARGOUL, École des Ponts ParisTech

Directeur de thèse : **M. Pascal RAY**, Institut Français de Mécanique Avancée

Co-encadrant : **M. Thien-Phu LE**, Institut Français de Mécanique Avancée

Institut Pascal - Axe Mécanique Matériaux et Structures
Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Pascal RAY, Professeur des universités à l'Institut Français de Mécanique Avancée, pour m'avoir accepté de travailler sous sa direction. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir transmis ses précieux conseils ainsi pour sa responsabilité, sa disponibilité et sa patience dont il a fait preuve durant toutes mes années de thèse.

Je n'oublie jamais de remercier à mon co-encadrant de thèse, Monsieur Thien-Phu LE, Maître de conférences à l'Institut Français de Mécanique Avancée pour son aide et ses orientations. Thien-Phu n'a jamais hésité de prendre le temps de m'expliquer, de discuter, d'échanger et de partager ses grandes connaissances. Ceci a contribué essentiellement pour m'avoir bien obtenu d'excellents résultats dans tous les thèmes de recherche de cette thèse.

Monsieur Jean-Michel GÉNEVAUX, Professeur des universités à l'Université du Maine et Monsieur Pierre ARGOUL, Professeur des universités à l'École des Ponts ParisTech, qui m'ont fait le grand plaisir d'être les rapporteurs de mon travail de thèse. Ses remarques et ses appréciations m'ont donné des améliorations importantes pour mon manuscrit. J'en suis honoré et je les en remercie sincèrement.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur Patrick PAULTRE, Professeur des universités à l'Université de Sherbrooke au Canada, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse, notamment pour ses contributions intéressantes sur la thèse.

Ce travail de thèse a été réalisé au sein de l'équipe Mécanique Probabiliste des Matériaux et des Structures (MPMS) de l'axe Mécanique, Matériaux et Structures (MMS) de l'Institut Pascal (IP) de Clermont Ferrand. Je remercie tous les membres de l'équipe pour leur accueil chaleureux.

Mes remerciements s'adressent également à Van-Chu MAI, doctorant à l'École polytechnique fédérale de Zurich pour son code du programme d'éléments finis OpenSees, qui m'a permis de valider et de développer ce travail.

Mes études en France ont été possibles grâce à des aides financières du Ministère de l'éducation et la Formation du Vietnam. J'exprime mes remerciements sincères.

Merci à mes amis qui ont passé bon nombre de leurs soirées à corriger les innombrables fautes grammaticales et coquilles présentes initialement dans ce manuscrit : Pham-Hoanh-Son NGUYEN, Julien BOUDET et Djily DANG. Je remercie aussi tous mes amis : Hong-Hiep HOANG, Van-Giang TRAN, Duc-Thuy LE, Pierre CHADAIGNE et Imad CHALFOUN pour la motivation ainsi que leur amitié et leur soutien qu'ils m'ont apportés pendant ces années d'études en France.

Enfin, je voudrais adresser mes immenses remerciements à mes parents pour m'avoir toujours soutenu et encouragé. Je dédie ce travail de thèse à ma famille bien-aimée, à mon épouse Thi-Thanh-Thao VO et à mon fils Cong-Phat DANG, qui ont toujours été avec moi durant ces trois années de thèse.

Table des matières

Acronymes	9
Introduction	11
1 Synthèse bibliographique et problématique générale	15
1.1 Introduction	16
1.2 Courbes de fragilité sismique	16
1.2.1 Définition	16
1.2.2 Courbes de fragilité à l'aide des dommages structurels réels (empiriques) . .	18
1.2.3 Courbes de fragilité à l'aide des opinions d'experts	19
1.2.4 Courbes de fragilité obtenues à partir des simulations numériques	20
1.2.5 Discussion sur les trois approches d'établissement des courbes de fragilité sismique	20
1.3 Composantes nécessaires pour l'approche numérique	22
1.3.1 Mouvement du sol des séismes	22
1.3.2 Modélisation du comportement sismique des structures	28
1.3.3 Évaluation de la probabilité de défaillance ou d'endommagement	31
1.4 Courbes de fragilité basées sur l'hypothèse de la loi log-normale	32
1.4.1 Loi log-normale et la courbe de fragilité	32
1.4.2 Méthode de normalisation de l'intensité sismique	34
1.4.3 Méthode du maximum de vraisemblance	34
1.4.4 Méthode basée sur le modèle de demande et de capacité sismique	35
1.4.5 Discussion sur les méthodes de construction des courbes de fragilité	36
1.5 Objectifs et organisation de la thèse	38
1.6 Conclusions	39

2	Étude comparative sur les méthodes existantes et amélioration	41
2.1	Introduction	43
2.2	Algorithmes des méthodes de construction des courbes de fragilité sismique	43
2.2.1	Méthode de normalisation de l'intensité sismique - SIS	43
2.2.2	Méthode du maximum de vraisemblance - MLE	45
2.2.3	Méthode basée sur le modèle de demande et capacité sismiques - PSDM/PSCM	47
2.2.4	Méthode de simulations de Monte Carlo - MCS	47
2.3	Comparaison des méthodes existantes sur des exemples numériques	50
2.3.1	Définition des critères de comparaison	50
2.3.2	Exemple 1 : Oscillateurs linéaire et non-linéaire	51
2.3.3	Exemple 2 : Bâtiment à 8 étages	60
2.3.4	Exemple 3 : Portique en acier de 3 étages	64
2.3.5	Discussions	67
2.4	Analyse approfondie sur la méthode MLE	68
2.4.1	Problématique	68
2.4.2	Démarche analytique entreprise	69
2.4.3	Implémentations	71
2.4.4	Discussion	76
2.5	Amélioration de la méthode MLE	77
2.5.1	Proposition d'une nouvelle fonction de vraisemblance	78
2.5.2	Procédure de la méthode MLE proposée (ERPM - Excitation and Response Probabilistic Models)	80
2.5.3	Validation par les tests analytiques	82
2.5.4	Validation par les exemples numériques	86
2.6	Conclusions	94
3	Évaluation des probabilités de défaillance faibles par la méthode de simulation par subsets	97
3.1	Introduction	99
3.2	Probabilité de défaillance par les méthodes de simulation	99
3.2.1	Principe des méthodes de simulation	100
3.2.2	Méthode de simulation de Monte Carlo (MCS)	100
3.3	Théorie de la méthode de simulation par subsets (SS)	101
3.3.1	Idée de base	102
3.3.2	Choix des domaines de défaillance intermédiaires	103
3.3.3	Simulation de Monte Carlo suivant les chaînes de Markov	104
3.3.4	Illustration de la méthode de simulation par subset	106

3.4	Implémentation numérique de la méthode de simulation par subsets	107
3.4.1	Procédure complète pas-à-pas	107
3.4.2	Tests d'illustration	108
3.5	Applications de la méthode subsets à l'analyse de risque sismique	111
3.5.1	Exemple 1 : Oscillateurs linéaire et non-linéaires	111
3.5.2	Exemple 2 : Bâtiment de 8 étages	118
3.5.3	Exemple 3 : Portique en acier de 3 étages	122
3.5.4	Discussion	125
3.6	Conclusion	126
4	Courbe de fragilité basée sur l'évolution de densité de probabilité	127
4.1	Introduction	128
4.2	Méthode de l'évolution de la densité de probabilité - PDEM	128
4.2.1	Équation de mouvement et l'évolution de la densité de probabilité	128
4.2.2	Méthode PDEM pour l'analyse de la réponse dynamique des structures	129
4.2.3	Méthode PDEM appliquée à l'évaluation de la fiabilité des structures	131
4.2.4	Algorithme de la méthode PDEM	133
4.2.5	Exemple d'illustration	135
4.3	Courbe de fragilité sismique à l'aide de la PDEM	139
4.3.1	Introduction	139
4.3.2	Développement analytique	139
4.3.3	Schéma numérique	141
4.4	Applications numériques	141
4.4.1	Exemple 1 : Oscillateurs non-linéaires de Bouc-Wen et de Coulomb	141
4.4.2	Exemple 2 : Portique en acier de 3 étages	143
4.4.3	Exemple 3 : Bâtiment de 8 étages	148
4.5	Conclusion	154
	Conclusions & Perspectives	155
	Annexes	159
A	Quelques lois de probabilité	159
A.1	Loi uniforme	159
A.2	Loi normale	159
A.3	Loi log-normale	159
A.4	Loi de Gumbel	160

A.5 Loi de Weibull	160
A.6 Loi Gamma	160
B Méthode du maximum de vraisemblance	161
Bibliographie	163

Acronymes

DDL	Degré De Liberté
MDDL	Multiple Degrés De Liberté
Sgn	Fonction de Signe
FDP	Fonction de Densité de Probabilités
SIS	Normalisation de l'intensité sismique
MLE	Maximum de vraisemblance
PSDM	Modèle probabiliste de demande sismique
PSCM	Modèle probabiliste de capacité sismique
MCS	Méthode de simulations de Monte-Carlo
ERPM	Excitation and Response Probabilistic Models
PDEM	Évolution des fonctions de densité de probabilité
SS	Simulation par subsets
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
ERR	ERreur Relative de la probabilité de défaillance
OpenSees	Système ouvert de simulation en génie parasismique

Introduction

La courbe de fragilité sismique, qui représente la probabilité de défaillance (ou d'un état d'endommagement) pour une structure ou un élément de la structure, joue un rôle très important dans les études probabilistes de sûreté sismique. Elle est l'un des trois ingrédients principaux pour l'évaluation probabiliste du risque sismique comme l'aléa sismique et les séquences dominantes conduisant à un endommagement du coeur du réacteur en application en génie nucléaire [1]. Une telle courbe est aussi très utile pour dimensionner les structures soumises à des séismes, prévoir les pertes potentielles sur des structures existantes ou évaluer rapidement l'état des structures après un séisme et donner les mesures d'intervention convenables [2].

Les approches, qui sont désormais largement connues et utilisées dans l'établissement des courbes de fragilité, sont basées sur l'observation post-sismique (empirique), sur les opinions d'experts (ou de jugement) ainsi que sur les simulations numériques. Les courbes de fragilité obtenues par la première approche sont construites sur la base de considérations statistiques (des composants ayant des propriétés similaires subiront des dommages similaires sous un chargement sismique donné), elles sont établies pour des pays particuliers comme les États-Unis et le Japon et ne sont pas nécessairement adaptées pour d'autres pays. La deuxième approche repose sur le jugement, basé sur les informations obtenues à partir d'opinions des experts. La fiabilité des courbes basées sur le jugement est douteuse en raison de leur dépendance à l'expérience individuelle des experts consultés. En plus de la subjectivité de l'opinion des experts impliqués dans la méthode, le caractère aléatoire des mouvements du sol, leur intensité, l'incertitude sur la réponse structurale rendent cette approche peu intéressante en comparaison avec les autres approches. La dernière approche est la manière la plus commune pour obtenir des courbes de fragilité. Elle utilise des simulations numériques pour une structure représentée par un modèle spécifique. Les données structurelles sont utilisées pour élaborer des courbes de fragilité en déterminant la probabilité de dépasser un état limite par des méthodes de calcul de fiabilité. Son avantage est la possibilité de construire des courbes de fragilité pour de nombreuses structures soumises aux séismes de nombreux pays ou régions. En considérant les moyens disponibles et la potentialité des approches, c'est l'approche par simulations numériques qui est retenue pour l'établissement des courbes de fragilité sismique dans cette thèse.

Par l'approche numérique, la construction de la courbe de fragilité n'est possible que si l'on peut (i) disposer d'enregistrements sismiques significatifs, (ii) modéliser adéquatement le comportement des structures et (iii) prendre en compte judicieusement les lois de probabilités de défaillance à travers les résultats obtenus des phases précédentes. Les mouvements du sol caractéristiques de chaque région et de différentes grandeurs sont enregistrés par des stations de mesures ou générés par un modèle d'excitation. Dans les zones de forte sismicité, des tremblements de terre de grandes et petites intensités ont été mesurés et enregistrés pour être utilisés dans les futures études d'atténuation. Cependant dans les zones de moyenne sismicité, les tremblements de terre de forte intensité

sont rares, et le nombre de mouvements du sol enregistrés est insuffisant pour le développement de courbes de fragilité. Pour pallier cet inconvénient, des enregistrements synthétiques peuvent être utilisés. Lorsque l'on a une réalisation issue d'un générateur ou un enregistrement réel, le calcul de la réponse dynamique est un calcul déterministe. La plupart des méthodes d'évaluation de probabilité de défaillance appliquée au calcul de courbes de fragilité sont développées en se basant sur l'hypothèse que les courbes de fragilité ont la forme d'une fonction de répartition de probabilité de la loi log-normale. Ces courbes peuvent ainsi être identifiées si l'on a deux paramètres de cette loi.

En utilisant l'hypothèse de la loi log-normale pour la courbe de fragilité, différentes méthodes ont été proposées : la méthode de normalisation de l'intensité sismique, la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode basée sur le modèle de demande/capacité sismique. Les courbes obtenues par les méthodes existantes sont-elles similaires pour les mêmes conditions de structures et d'excitations sismiques ? Existe-il une autre méthode sans utiliser l'hypothèse de la loi log-normale ?

La motivation principale de la thèse est la recherche des méthodes efficaces pour la construction des courbes de fragilité sismique. Le premier travail consiste à exploiter les algorithmes existants et à les comparer. Le deuxième travail se concentre sur les améliorations possibles des méthodes existantes dans le but d'arriver à la méthode plus fiable pour le développement des courbes de fragilité. Enfin, dans le dernier travail, on cherche à construire des courbes de fragilité par une méthode non-paramétrique en ne faisant aucune hypothèse sur la forme des courbes. L'ensemble des travaux permettra la compréhension approfondie du modèle exact des courbes de fragilité et les connaissances *a priori* du modèle pourront être utiles et prises en compte dans la procédure de leur construction.

La thèse se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre présente une synthèse bibliographique. Dans le contexte général, des approches d'établissement de courbes de fragilité sont abordées. Puis on se concentre sur l'approche numérique avec ses trois composantes principales. Des travaux existants sont recensés montrant que des améliorations restent nécessaires pour aboutir à des procédures plus consistantes. On en tire les problématiques générales et les idées à développer dans le cadre de la thèse.

Le deuxième chapitre consiste d'abord à réaliser une étude comparative des méthodes existantes, à savoir : la méthode de normalisation de l'intensité sismique, la méthode du maximum de vraisemblance, et la méthode basée sur les modèles de sollicitation et de résistance sismiques. Le point commun de ces méthodes est l'hypothèse log-normale. Le résultat d'analyse des méthodes existantes conduit à une amélioration de la méthode du maximum de vraisemblance dans le but d'atténuer l'influence des enregistrements sismiques utilisés sur la construction de la courbe de fragilité.

Le troisième chapitre cherche à appliquer la méthode de simulation par subsets qui est efficace pour estimer les probabilités faibles de défaillance avec un nombre important de variables aléatoires. Cette méthode permet de traiter deux sous problèmes : évaluation de la probabilité de défaillance d'un point sur la courbe de fragilité obtenue par la méthode de normalisation de l'intensité sismique et évaluation de probabilité de défaillance sur le site.

Le dernier chapitre est réservé au développement d'une nouvelle méthode pour la construction des courbes de fragilité basée sur la méthode d'évolution de densité de probabilité (Probability density evolution method en anglais - PDEM). On peut la qualifier comme la méthode non-paramétrique car elle permet d'obtenir la courbe de fragilité sismique sans utiliser l'hypothèse log-normale.

Enfin, des conclusions importantes sur les résultats obtenus sont tirées et on propose des idées pour une poursuite de ce travail.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique et problématique générale

Sommaire

1.1	Introduction	16
1.2	Courbes de fragilité sismique	16
1.2.1	Définition	16
1.2.2	Courbes de fragilité à l'aide des dommages structurels réels (empiriques)	18
1.2.3	Courbes de fragilité à l'aide des opinions d'experts	19
1.2.4	Courbes de fragilité obtenues à partir des simulations numériques	20
1.2.5	Discussion sur les trois approches d'établissement des courbes de fragilité sismique	20
1.3	Composantes nécessaires pour l'approche numérique	22
1.3.1	Mouvement du sol des séismes	22
1.3.2	Modélisation du comportement sismique des structures	28
1.3.3	Évaluation de la probabilité de défaillance ou d'endommagement	31
1.4	Courbes de fragilité basées sur l'hypothèse de la loi log-normale	32
1.4.1	Loi log-normale et la courbe de fragilité	32
1.4.2	Méthode de normalisation de l'intensité sismique	34
1.4.3	Méthode du maximum de vraisemblance	34
1.4.4	Méthode basée sur le modèle de demande et de capacité sismique	35
1.4.5	Discussion sur les méthodes de construction des courbes de fragilité	36
1.5	Objectifs et organisation de la thèse	38
1.6	Conclusions	39

1.1 Introduction

Les courbes de fragilité sismique, composantes fondamentales de la méthodologie d'évaluation du risque sismique, sont des outils probabilistes, utilisés pour évaluer les dommages potentiels sur des structures à un niveau donné de l'aléa sismique. Il y a trois différentes façons d'obtenir une courbe de fragilité sismique d'une structure compte tenu des données de réponse de la structure. Elles peuvent être déduites à partir de données empiriques, d'avis d'experts (ou de jugements) ou de résultats d'analyses numériques. Une comparaison de ces trois approches est d'abord réalisée. Elle conduit à concentrer notre étude sur l'approche numérique pour développer des courbes de fragilité. Trois composantes nécessaires de cette approche sont ensuite présentées : modèles de l'excitation sismique, modélisations dynamiques des structures sous excitations sismiques, et méthodes d'évaluation de la probabilité de défaillance. Toutes les méthodes numériques existantes de construction des courbes de fragilités sismiques sont recensées et analysées, ce qui permet d'établir un état de l'art et de proposer enfin des voies à explorer dans le cadre de la thèse.

1.2 Courbes de fragilité sismique

1.2.1 Définition

Une courbe de fragilité sismique d'une structure est définie comme la probabilité conditionnelle de défaillance pour une intensité d'excitation du sol A donnée [3] :

$$\text{Fragilité} = F_r(a) = P[X \geq x_0 | A = a] \quad (1.1)$$

où A est l'intensité caractéristique du mouvement du sol et a est sa valeur. Dans la formule (1.1), on considère que la défaillance se produit si la réponse X dépasse une limite critique x_0 du système. Lorsqu'on travaille avec la notion d'endommagement au lieu de la défaillance, on peut déterminer des courbes de fragilité relatives aux différents niveaux d'endommagement choisis comme léger, modéré, total...

En effet, un état de défaillance ou d'endommagement peut être atteint si la demande (solicitation) sismique imposée à la structure (D) est supérieure ou égale à la capacité (résistance) de la structure (C). La courbe de fragilité dans ce cas est la probabilité conditionnée à une intensité sélectionnée du mouvement sismique représentant le niveau de l'action sismique pour un état limite spécifique de dommage (*limit state LS*) [4] :

$$\text{Fragilité} = F_r(a) = P_{LS}[D \geq C | A = a] \quad (1.2)$$

Généralement, la défaillance (ou un état limite) des structures dans un contexte incertain peut être caractérisée par une fonction d'état limite ou fonction de performance des paramètres physiques, géométriques. Ils peuvent être des variables aléatoires : $G(\mathbf{Z}) = C(\mathbf{Z}) - D(\mathbf{Z})$. Le domaine de défaillance est défini par $D_f = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq 0\}$ et la courbe de fragilité est donc ré-écrite sous forme générale :

$$\text{Fragilité} = F_r(a) = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0 | A = a] \quad (1.3)$$

Par la définition donnée dans les équations (1.1), (1.2) et (1.3), la probabilité de défaillance ou du niveau d'endommagement d'une structure sous un séisme d'une intensité spécifique " a " est facilement déterminée à partir de sa courbe de fragilité sismique.

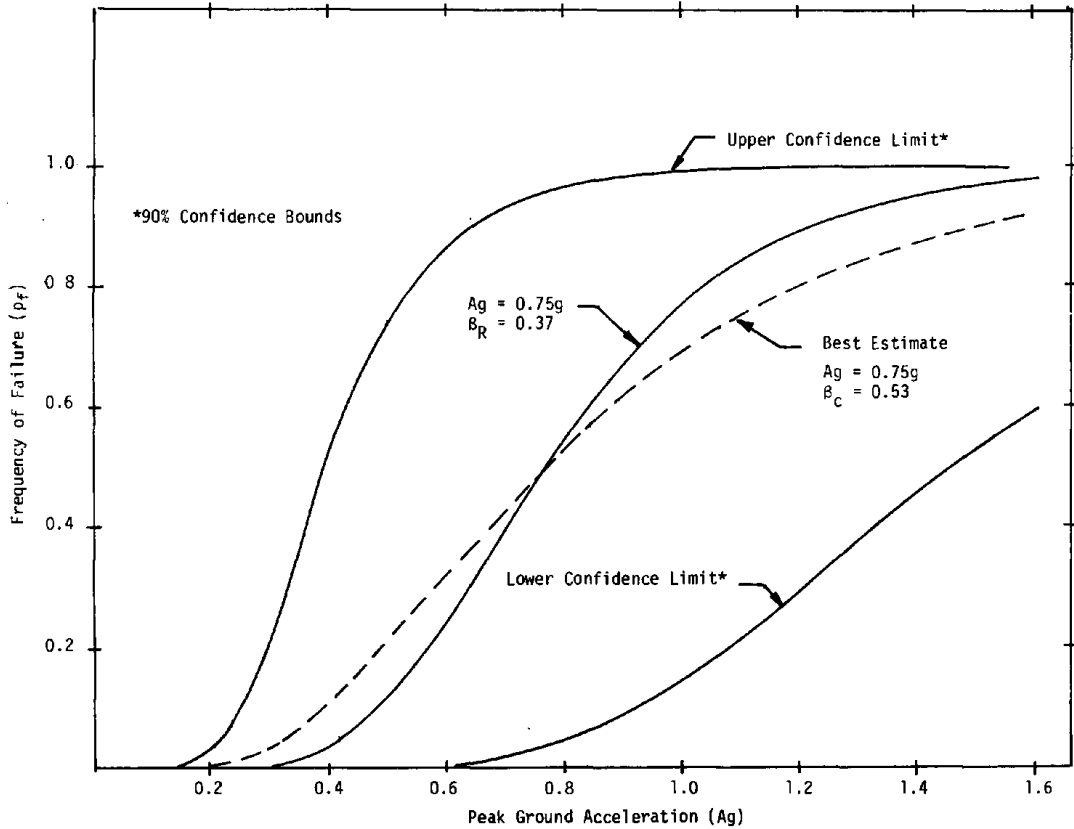


FIGURE 1.1. *Courbes de fragilité pour une centrale nucléaire en fonction de l'accélération maximale du sol (PGA) [5]*

De plus, si l'on connaît la distribution de l'intensité sismique A du site, on peut déduire la probabilité de défaillance de la structure au site par l'intégrale.

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} F_r(a) p_A(a) da \quad (1.4)$$

où $p_A(a)$ est la fonction de densité de probabilité de A .

Les courbes de fragilité sismique ont été utilisées d'abord pour les études de sécurité des centrales nucléaires afin d'éviter les rejets radioactifs. Un des premiers travaux dans ce domaine a été proposé par Kennedy *et al.* [5]. La Figure 1.1 présente des courbes de fragilité sismique correspondant à différents niveaux de confiance. Le pic d'accélération du sol (peak ground acceleration : PGA) a été choisi comme l'intensité caractéristique du mouvement du sol A dans les formules de définitions (1.1), (1.2) et (1.3).

L'idée de la courbe de fragilité sismique a été ensuite étendue pour différentes structures dans différents domaines, par exemple : équipement d'une centrale nucléaire ou système de refroidissement en génie nucléaire [6]; bâtiment [7, 8] ou pont [4, 9] en génie civil.

Il y a différentes façons d'obtenir les courbes de fragilité d'une structure. On peut les classer suivant les données de réponse structurale qui peuvent être obtenues à partir d'observations de terrain (dommages post-séisme de structure), d'avis d'experts (ou de jugements) ou de résultats d'analyses numériques en utilisant des modèles mécaniques. Ces trois sources de données constituent trois approches principales de construction des courbes de fragilité sismique.

1.2.2 Courbes de fragilité à l'aide des dommages structurels réels (empiriques)

- **Principe général**

Cette approche est basée principalement sur l'observation réelle des dommages structurels après un séisme (post-tremblement de terre) ou à partir d'expériences pour obtenir des informations sur la fragilité des structures. Cette courbe de fragilité reste proche des résultats exacts car elle est dérivée directement de structures réelles et de tremblements de terre réels. Cependant, son efficacité est encore limitée par le nombre de structures qui peuvent être examinées, et cette méthode ne prend pas en compte certains paramètres structuraux ou encore la variation de mouvement du sol en raison de la limitation des données.

Ce type de courbe de fragilité est devenu un outil pour caractériser la performance sismique d'un ensemble de structures similaires dans les zones sensibles à risque sismique. Des données d'intensité du séisme pour chaque structure et des données de dommages structurels correspondants sont collectées et statistiquement converties en courbes de fragilité. Ce processus nécessite généralement un grand nombre de données pour des estimations fiables de fragilité.

- **Travaux représentatifs**

Yamazaki *et al.* [10] ont construit une série de courbes de fragilité de ponts d'autoroutes au Japon en utilisant la base de données de dommages réels obtenue par le tremblement de terre Hyogoken-Nanbu (Kobe) survenu le 17 janvier 1995. Les données de dommages ont été rassemblées à partir de 216 ponts d'autoroutes, après subis les effets d'un tremblement de terre. Cinq seuils de dommages (aucun dommage, léger, modéré, étendu, effondrement total) ont été attribués à tous ces ponts. Les valeurs d'intensité en PGA ont été mesurées par les accélérogrammes durant le séisme ou à partir d'enregistrements disponibles. Basées sur ces données (endommagements et intensités sismiques), les courbes de fragilité, pour les ponts d'autoroutes, ont été construites en supposant une distribution log-normale pour la probabilité cumulative de dommages. Les résultats de cette étude ont été utilisés pour planifier le contrôle de la circulation appropriée après un tremblement de terre.

Une approche similaire a été proposée par Shinozuka *et al.* [11] pour appliquer des courbes de fragilité empiriques aux piliers du pont d'HEPC (Hanshin Expressway Public Corporation) au Japon. Les données résultant du séisme à Kobe en 1995 ont été utilisées en tant que base pour générer des courbes de fragilité. Les états des structures endommagées et les valeurs en PGA obtenues sur un ensemble de 770 colonnes en béton armé ont été pris en compte. On a également supposé que la courbe de fragilité pourrait être représentée par la loi log-normale. Contrairement au travail de Yamazaki *et al.* [10], qui a appliqué la méthode des moindres carrés, la méthode du maximum de vraisemblance a été utilisée pour estimer les paramètres (la médiane et l'écart-type logarithmique) de la distribution log-normale.

O'Rourke et So [12, 13] ont présenté une méthode pour développer des courbes de fragilité empiriques pour les réservoirs de stockage de liquides. Les courbes de fragilité sont basées sur les données des dommages sismiques de plus de 400 réservoirs de stockage durant 9 tremblements de terre différents. Un des cinq états d'endommagement et les PGA correspondants ont été observés pour chaque réservoir de stockage. Les courbes de fragilité ont été obtenues par une analyse de régression logistique. Ils ont constaté que les résultats de cette étude sont mieux adaptés que ceux trouvés dans les approches de l'ATC [14] et du FEMA [15].

En utilisant une base de données complète de dommages sismiques après les séismes de Northridge et de Loma Prieta, Basöz et Kiremidjian [16] ont généré des courbes de fragilité pour quantifier les fragilités sismiques des ponts au Northridge et Loma Prieta. Les descriptions de

dommages du pont ont été obtenues à partir des dossiers de dommages des ponts compilés par le Département des Transports de la Californie. Les ponts sont classés en quatre niveaux de dommages différentes (léger, modéré, majeur et effondrement). L'intensité d'un séisme sur les sites de ponts a été soit enregistrée, soit simulée. Similaire à l'approche de O'Rourke et So [12, 13], une analyse de régression logistique a été utilisée pour représenter la relation entre la probabilité conditionnelle de la défaillance et l'intensité PGA du séisme.

1.2.3 Courbes de fragilité à l'aide des opinions d'experts

- **Principe général**

Lorsque les informations disponibles sur les données enregistrées sont incomplètes ou insuffisantes, il est bon de s'appuyer sur des données provenant des avis d'ingénieurs et de chercheurs spécialisés. Un comité d'ingénieurs des structures est réuni pour faire des estimations de la probabilité de distribution des dommages pour les différents types de structure lorsqu'ils sont soumis à des séismes d'intensités différentes. Les fonctions de probabilité de distribution des prédictions d'experts, sont capable de représenter le niveau des dommages estimés des structures à chaque niveau d'intensité des mouvements du sol. La probabilité d'un état des dommages spécifié est établie à partir de la distribution des résultats et associée au niveau d'intensité des mouvements du sol correspondant pour obtenir un ensemble de courbes de vulnérabilité pour le type de structure associé.

- **Travaux représentatifs**

Le rapport de l'ATC (Applied Technology Council) [14] a présenté l'estimation des dommages d'un séisme aux installations de Californie. L'ATC a créé un comité de plus de 70 experts en génie parasismique pour faire des estimations de la distribution des dommages probables pour les composants d'une infrastructure de type californien pour différentes intensités sismiques. Dans cette étude, les courbes de fragilité ont été converties à partir des matrices de probabilité de dommages, qui décrivent leurs probabilités discrètes de dommages pour les différents états à différents niveaux de tremblement de terre.

D'une autre manière, dans la pratique en génie nucléaire, une méthode de l'EPRI (Electric Power Research Institute) des États-Unis [17] est utilisée. Cette méthode s'appuie sur des facteurs de marge (response factor method) pour obtenir les courbes de fragilité. La capacité s'écrit comme :

$$A = (\prod F_i) a_{SSE} \quad (1.5)$$

où a_{SSE} est l'accélération maximale du sol sous le séisme de référence (Safe Shutdown Earthquake) et les F_i représentent les facteurs de marge. Les facteurs de marge sont typiquement définis comme le rapport entre la capacité de la structure et la sollicitation. Le facteur de marge s'exprime comme une variable aléatoire log-normale telle que :

$$F_i = \check{F}_i \epsilon_{R_i} \epsilon_{U_i} \quad (1.6)$$

où \check{F}_i désigne la médiane de F_i et ϵ_R et ϵ_U sont des variables aléatoires log-normales de médiane unité et d'écart-type logarithmiques β_R et β_U . La probabilité conditionnelle de défaillance pour un niveau de confiance Q s'écrit :

$$F_r(a) = \Phi \left[\frac{\ln(a/A_m) + \beta_U \Phi^{-1}(Q)}{\beta_R} \right] \quad (1.7)$$

Ainsi, on a $A_m = \check{F}a_{SSE}$, avec $\check{F} = \prod_i \check{F}_i$ et $\beta = \sum_i \beta_i^2$. Il est clair que la quantification de ces coefficients, tout comme le choix des β_R et β_U en distinguant les incertitudes intrinsèques et épistémiques, n'est pas une tâche simple. Elle requiert en général de faire appel à l'avis d'experts.

1.2.4 Courbes de fragilité obtenues à partir des simulations numériques

- **Principe général**

Cette approche permet d'obtenir des courbes de fragilité à partir de réponses sismiques des modèles d'analyse des structures. La caractéristique commune à ces études est que la méthode numérique est constituée de trois étapes principales :

- Détermination de l'excitation sismique à considérer et identification d'un paramètre d'intensité sismique approprié. Généralement, le pic d'accélération du sol (PGA) est choisi.
- Modélisation et analyse de la structure pour calculer sa réponse, ainsi que l'identification de points d'états limites
- Construction de la courbe de fragilité par la mise en commun des méthodes d'évaluation de probabilité de défaillance des points discrets et/ou associées à des approches de régression pour obtenir la courbe continue en se basant sur l'hypothèse d'une loi de probabilité (log-normale).

À l'issue des simulations, on peut estimer les paramètres de la courbe de fragilité.

- **Travaux représentatifs**

Les travaux dans cette approche sont nombreux et constituent actuellement une voie de recherche active. Ils se distinguent par l'utilisation différente d'excitations sismiques, de méthodes d'analyse de structures ou d'évaluation de probabilités de défaillance. On va aborder plus en détails les travaux relatifs à cette approche dans les sections suivantes pour une meilleure cohérence du manuscrit.

1.2.5 Discussion sur les trois approches d'établissement des courbes de fragilité sismique

Les courbes de fragilité dérivées de données de dommages réels fournissent des informations précieuses de l'impact potentiel de futurs tremblements de terre. De plus, ces courbes sont souvent utilisées pour calibrer les courbes de fragilité développées par la méthode numérique [18]. Toutefois, la rareté des données et l'incohérence entre les niveaux de dommages constatés et les mouvements du sol, qui pourraient conduire à des résultats non fiables de la courbe de fragilité [19], sont des limites de cette approche.

L'approche basée sur l'avis d'experts est l'une des méthodes les plus simples pour obtenir une courbe de fragilité. Cependant, en plus de la subjectivité de l'avis des experts impliqués, le caractère aléatoire des mouvements du sol, leurs intensités, leurs synchronisations temporelles, l'incertitude sur la réponse structurale et la variété des classes de structures rendent cette approche peu intéressante par rapport aux autres c'est ce que l'on souhaite obtenir pour une structure précise donnée.

Ainsi, l'approche de simulation numérique est la seule option pour l'évaluation de la performance sismique des structures lorsque les données des dommages de structures ou les avis d'experts ne sont pas disponibles. Il est clair que les courbes de fragilité empiriques n'indiquent pas le type

de structure. Il s'agit, par exemple, de l'influence des paramètres mécaniques, de la performance structurelle (statique et dynamique); la variation de mouvement d'entrée (contenu de fréquence, durée) ne peuvent être adoptés pour estimer le niveau de dommages à un système spécifique sans expérience sismique. De plus, elles peuvent ne pas être applicables dans les régions sismiques qui ne connaissent pas suffisamment de tremblements de terre. Au contraire, les courbes de fragilité par approche numérique, obtenues en utilisant des simulations numériques ou une analyse stochastique des structures soumises à des enregistrements ou des modèles stochastiques de séismes, sont capables de prendre en compte le mouvement d'entrée et la variation de paramètres structuraux. Elles peuvent ainsi être adoptées efficacement pour exécuter l'évaluation de la vulnérabilité d'une structure spécifique, sans expérience sismique disponible.

Les avantages et inconvénients des trois approches pour le développement des courbes de fragilité sont résumés dans le tableau 1.1. En se basant sur l'analyse des trois approches abordées et sur les moyens disponibles, les développements visés de la thèse se trouvent dans l'approche de simulation numérique. La section suivante va fournir une bibliographie des travaux existants dans cette approche. Ses trois composantes importantes sont : (i) la simulation des mouvements du sol, (ii) la modélisation des structures et considération de l'incertitude dans les caractéristiques structurales, et (iii) l'évaluation de la fiabilité des structures en comportement dynamique aléatoire.

TABLEAU 1.1. *Avantages et inconvénients des approches*

Approche	Avantages	Inconvénients
Empirique	- Observation réelle des dommages structurels après un séisme	- Qualité limitée de données - Très spécifique à un environnement sismo-tectonique, géotechnique et notamment intégrée - Ne prend pas en compte la variation des paramètres structuraux et de mouvements du sol - Rareté des données et incohérence entre les niveaux de dommages
Opinions d'expert	- Données de dommages provenant des avis d'ingénieurs et de chercheurs spécialisés - Rapide	- Fiabilité des courbes dépend de l'expérience individuelle des experts consultés
Numérique	- Données de dommages obtenues à partir des analyses numériques - Prise en compte de la variation des paramètres structuraux et du mouvement du sol,	- Analyse temporelle non-linéaire avec plusieurs variables aléatoires coûteuse en temps - Sensible aux choix effectués pour la méthode d'analyse, l'idéalisation des structures, l'aléa sismique, et la définition des états de dommage.

1.3 Composantes nécessaires pour l'approche numérique

1.3.1 Mouvement du sol des séismes

La réponse (en accélération, ou vitesse ou déplacement...) des structures lors des tremblements de terre dépend d'une part des mouvements du sol et d'autre part, de leur propres caractéristiques. Elle peut être déterminée à partir d'accélérogrammes (en temps) ou de spectres de réponse (en période ou en fréquence propres des oscillateurs). Toutefois, si la structure présente un comportement non-linéaire qui est souvent le cas sous l'excitation sismique, seule l'analyse temporelle permet de déterminer la réponse structurale avec précision. Deux accélérogrammes $a(t)$ décrivent simplement la variation de l'accélération du sol autour de zéro dans une direction dont la durée totale peut varier de quelques secondes à quelques dizaines de secondes, comme le montre la figure 1.2.

- **Indicateur d'intensité du séisme**

L'établissement des courbes de fragilité nécessite une étape préliminaire qui est l'identification des paramètres caractéristiques importants du mouvement du sol, qui contribuent le plus à son potentiel de dommages. C'est le paramètre A dans les définitions (1.1), (1.2) et (1.3). Plusieurs chercheurs [20, 21, 22] ont étudié la quantification de potentiel de dommages des mouvements du sol. Ils ont constaté qu'il est très important de bien choisir les paramètres qui représentent les séismes. Sucuoglu *et al.* [23] et l'ATC-35 [21] ont identifié six caractéristiques importantes : le pic d'accélération du sol (PGA), le pic de vitesse du sol (PGV), la durée de mouvement fort, l'impulsion et la suite des impulsions, la forme spectrale pour une région spécifique et le type de structures. Les quatre premières caractéristiques sont directement liées aux propriétés cinématiques des traces d'accélérogrammes de mouvement fort, tandis que les deux dernières sont caractéristiques de réponses filtrées à travers les propriétés de systèmes dynamiques.

Dans la littérature, les courbes de fragilité sismique ont généralement été représentées comme des fonctions de l'accélération maximale du sol (PGA) [24]. Hirata *et al.* [25, 26] ont essayé d'illustrer la fragilité sismique en fonction de la vitesse maximale au sol (PGV) ainsi que la pseudo vitesse spectrale pour les structures d'un réacteur. Dimova et Hirata [27] ont étudié plusieurs paramètres d'intensité sismique, y compris la PGA, PGV et la pseudo vitesse spectrale (PS_v) pour l'analyse de la fragilité sismique des structures des bâtiments. Plus récemment, des fragilités sismiques ont été développées en fonction de la période de retour [28, 29].

À noter que la mesure de l'intensité sismique est le paramètre de référence du mouvement du sol contre laquelle la probabilité de dépassement d'un état limite donné est déterminée. Plusieurs mesures sismiques ont été développées, chacune peut décrire les différentes caractéristiques du mouvement, dont certaines peuvent être plus défavorables pour le type de structure étudié. On a montré [30] que le choix des paramètres de mouvement d'entrée en corrélation avec le dommage structurel est important, cependant, sa détermination n'est pas une tâche aisée.

Le pic d'accélération du sol (PGA) est une simple mesure sismique, mais elle peut donner des réponses structurales insatisfaisantes [3], et elle fournit parfois une faible corrélation par rapport aux réponses structurelles [23].

Kafali *et al.* [3] ont montré que l'utilisation de la pseudo accélération spectrale (PS_a) est intéressante. La courbe de fragilité en fonction de PS_a obtenue pour un oscillateur non-linéaire Duffing est de bonne qualité. Cependant, il ne l'est pas pour un oscillateur non-linéaire Bouc-Wen. Ce résultat semble évident puisque la pseudo accélération spectrale peut caractériser un système linéaire mais elle ne convient pas à un système non linéaire arbitraire.

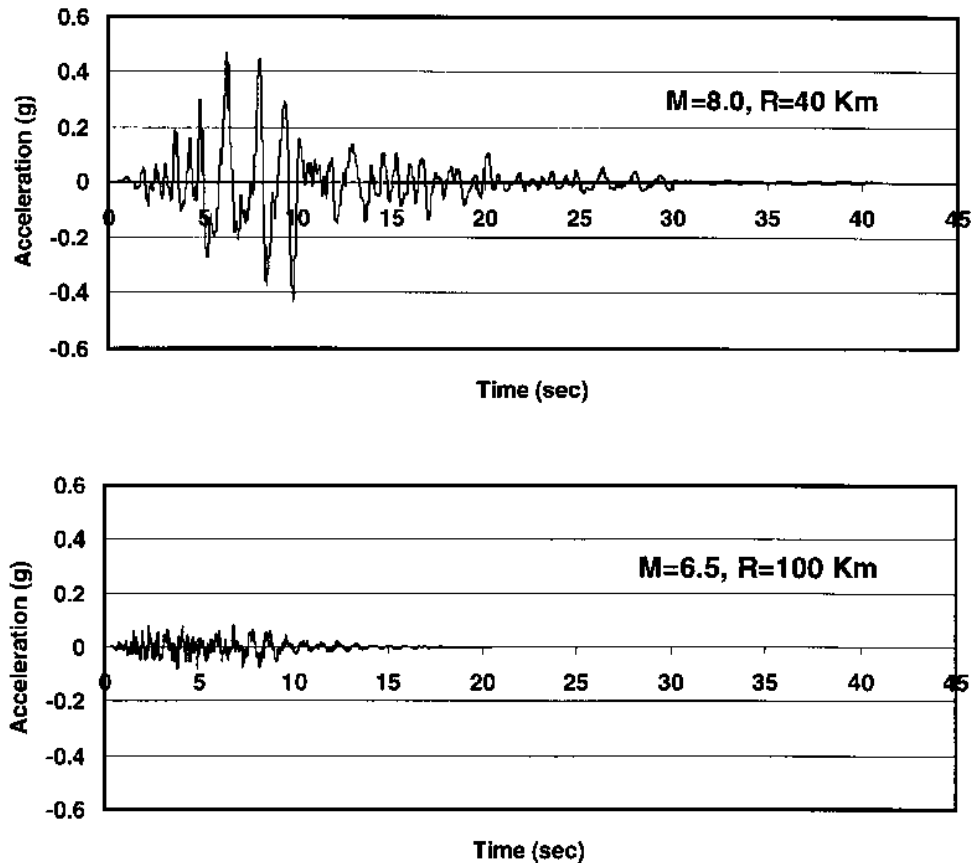


FIGURE 1.2. Exemple de deux accélérogrammes d'enregistrements réels

- **Séisme réel**

Les excitations sismiques réelles sont enregistrées par des stations de mesures partout dans le monde. Ces données sont souvent sous forme d'accélération temporelle, téléchargeable sur plusieurs sites internet [31] créé par l'université de Californie. Sur ce site, on peut également trouver les informations associées, telles que : PGA, PGV, PS_a , magnitude, distance à la source, . . . De même, le site "European strong-motion data" [32] contient plus de 3.000 enregistrements de séismes en Europe utilisés par Zentner *et al.* [33].

Karim *et al.* [30, 2] ont sélectionné un ensemble de 250 enregistrements de mouvements du sol à partir de 5 événements sismiques : Hyogoken-Nanbu 1995 ($M_W = 6.9$, $M_{JMA} = 7.2$), Northridge 1994 ($M_W = 6.7$), Kushiro-Oki 1993 ($M_{JMA} = 7.8$) et Chibaken-Toho-Oki 1987 ($M_{JMA} = 6.7$) pour estimer la variation du mouvement du sol d'entrée.

Une série de 60 enregistrements de mouvement du sol en Californie [34] a été sélectionnée à partir d'une collection de mouvements du sol rassemblés. Trois périodes de retour sont considérées (100, 500 et 2500 ans) correspondant à 50%, 10% et 2% de probabilité de dépassement sur 50 ans. Elles ont été utilisées pour construire des courbes de fragilité en fonction de la période de retour [28, 29].

Ces enregistrements sont disponibles dans les régions où il y a des stations de mesure et reflètent exactement la nature d'un séisme aux sites de mesure. Cependant, le nombre d'enregistrements est limité, et lorsqu'un nombre important d'enregistrements est nécessaire, on peut utiliser les enregistrements des stations différentes. Mais ces séismes n'appartiennent pas à une même famille et il y a toujours un aléa relié à la région où les données sont collectionnées. Les études

paramétriques sur l'influence des paramètres deviennent alors difficiles.

Comme les enregistrements réels sont limités par la quantité et la disponibilité, il est donc nécessaire d'étendre ces résultats aux régions n'ayant pas encore subies de tremblement de terre en créant un générateur d'excitations artificielles ayant des propriétés équivalentes à celles des autres séismes.

- **Séisme synthétique**

L'utilisation d'un générateur sismique est nécessaire lorsque l'on a besoin d'une population importante de séismes, ou dans le cas des régions à faible activité sismique, où les enregistrements sont peu nombreux. Le générateur peut donc pallier le problème de manque d'informations puisqu'il est capable de générer un nombre illimité de séismes artificiels ayant les mêmes propriétés (spectre, intensité) que les séismes réels.

Plusieurs chercheurs [35, 36, 37] ont développé des modèles pour créer des accélérations du sol basées sur la densité spectrale de puissance ou PSD (*Power Spectral Density en Anglais*). C'est-à-dire que le séisme est caractérisé par une fonction d'enveloppe déterministe et un processus aléatoire Gaussien stationnaire dont la densité spectrale de puissance dépend de la source, du chemin de la source au site, de l'effet du site et de la réponse du sol recherchée (accélération, vitesse, déplacement).

Certains modèles de densité spectrale de puissance de mouvement du sol ont été étudiés, par exemple ceux de Kanai [38] et de Clough et Penzien [35], et largement appliqués à l'analyse de la réponse sismique stochastique des structures. L'utilisation de ces modèles de densité spectrale de puissance incorporés à la représentation spectrale [39], à la décomposition de Karhunen-Loève [40], ou à la décomposition orthogonale, au mouvement du sol peuvent être explicitement représentés par des fonctions aléatoires. Cependant, ces types de modèles sont des modèles par essence phénoménologique [41].

Basée sur le scénario d'aléa sismique, Hwang [42] a développé une source artificielle pour avoir un séisme d'analyse de fragilité sismique. Shinozuka *et al.* [11, 43] ont repris cette source dans le développement des courbes de fragilité.

La série MCEER [44], utilisée par Cimellaro *et al.* [29], est composée de 100 accélérogrammes synthétiques considérés comme un bruit blanc généré à partir d'un spectre qui est basé sur le modèle de barrière spécifique (*Specific Barrier model*) [45]. Ils ont été divisés en quatre groupes (25 accélérogrammes par groupe) correspondant respectivement à des périodes de retour de 250, 500, 1000 et 2500 ans.

On remarque que la qualité du générateur est un facteur primordial pour les résultats de l'analyse sismique. Enfin, le modèle de mouvement du sol proposé par Boore [46], retenu pour simuler les séismes dans les exemples d'applications de cette thèse, est présenté plus en détails ci-dessous.

- **Simulation des séismes par le modèle de Boore**

Le séisme est caractérisé par une fonction d'enveloppe déterministe et un processus aléatoire Gaussien stationnaire dont la densité spectrale de puissance (PSD) dépend de la source, du chemin de la source au site, de l'effet du site et de la réponse du sol recherchée (accélération, vitesse, déplacement). Le PSD dans le modèle de Boore [46] est décrit par la formule suivante :

$$Y(M_0, R, f) = E(M_0, f)P(R, f)G(f)I(f) \quad (1.8)$$

où M_0 est le moment sismique qui est relié à la magnitude M ; R est la distance de l'épicentre sismique au site ; f est la fréquence (Hz) ; $E(M_0, f)$, $P(R, f)$ et $G(f)$ caractérisent respectivement

l'influence de la source, l'influence du chemin de la source au site et l'effet du site ; $I(f)$ traduit le mouvement que l'on veut obtenir au site : déplacement, vitesse ou accélération. Les termes nécessaires pour la formule (1.8) sont détaillés dans ce qui suit.

◦ **Influence de la source** $E(M_0, f)$

L'expression de $E(M_0, f)$ a la forme suivante :

$$E(M_0, f) = CM_0S(M_0, f) \quad (1.9)$$

où C est une constante qui considère l'influence : du rayon de référence de la zone de rupture pris égal à 1 km ; de la radiation ; du taux de l'onde totale aux composantes horizontales ; de l'effet de la surface libre ; de la densité et de la vitesse de propagation à la source. Le spectre de la source $S(M_0, f)$ peut avoir plusieurs formes données dans le tableau de référence de Boore [46]. Dans l'équation (1.9), M_0 est le moment sismique relié à la magnitude séismique M selon la relation suivante :

$$M = \frac{2}{3} \log(M_0) - 10.7 \quad (1.10)$$

La figure 1.3 illustre l'influence de la source en fonction de la fréquence pour $M = 7$.

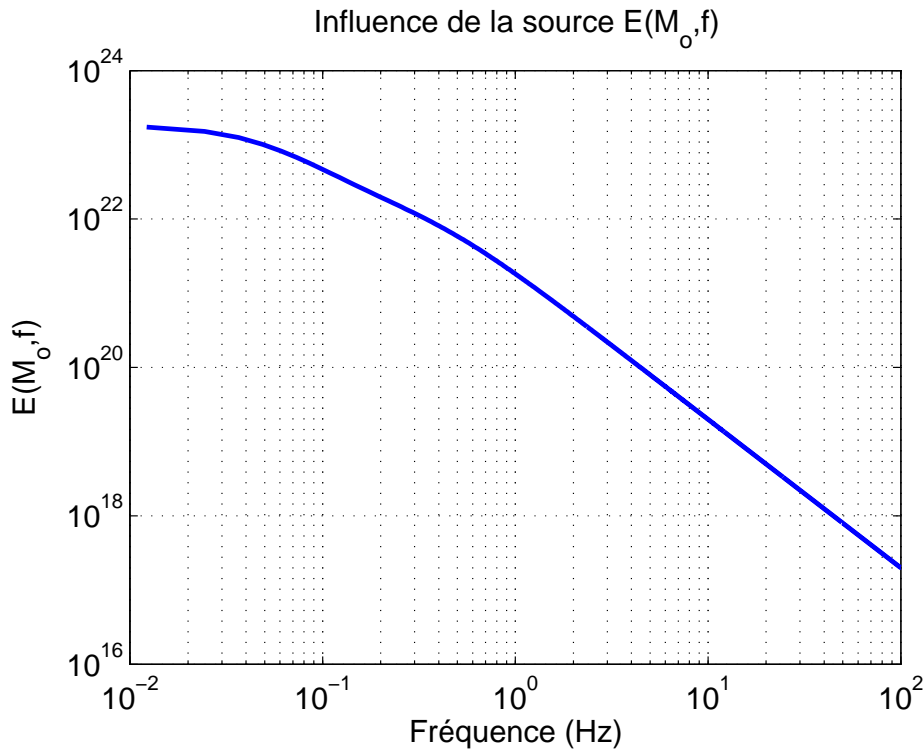


FIGURE 1.3. Influence de la source, $M = 7$

◦ **Influence du chemin : spectre $P(R, f)$ et durée du séisme**

Le chemin entre la source et le site a une influence sur le spectre du site et ainsi que sur la durée du séisme. On présente d'abord l'influence au spectre, puis l'influence à la durée. En principe, plus le site est loin, plus la durée du séisme est longue.

· **Influence au spectre $P(R, f)$** : La fonction $P(R, f)$ comporte deux composantes : une atténuation par divergence géométrique $Z(R)$ et une atténuation par le système entre le site et la source caractérisée par la fonction $Q(f)$. L'expression complète de $P(R, f)$ est la

suivante :

$$P(R, f) = Z(R) \exp \left[-\frac{\pi f R}{Q(f)} c_Q \right] \quad (1.11)$$

où c_Q est la vitesse de propagation d'onde. Boore propose $c_Q = 3.5$ km/s ; $Q(f)$ est la composante de l'atténuation par le système entre le site et la source : $Q(f) = 180f^{0.45}$; $Z(R)$ est la composante de l'atténuation par divergence géométrique, définie par des fonctions linéaires par morceaux. La figure 1.4 présente l'influence du chemin en fonction de la fréquence pour $R = 9$ km.

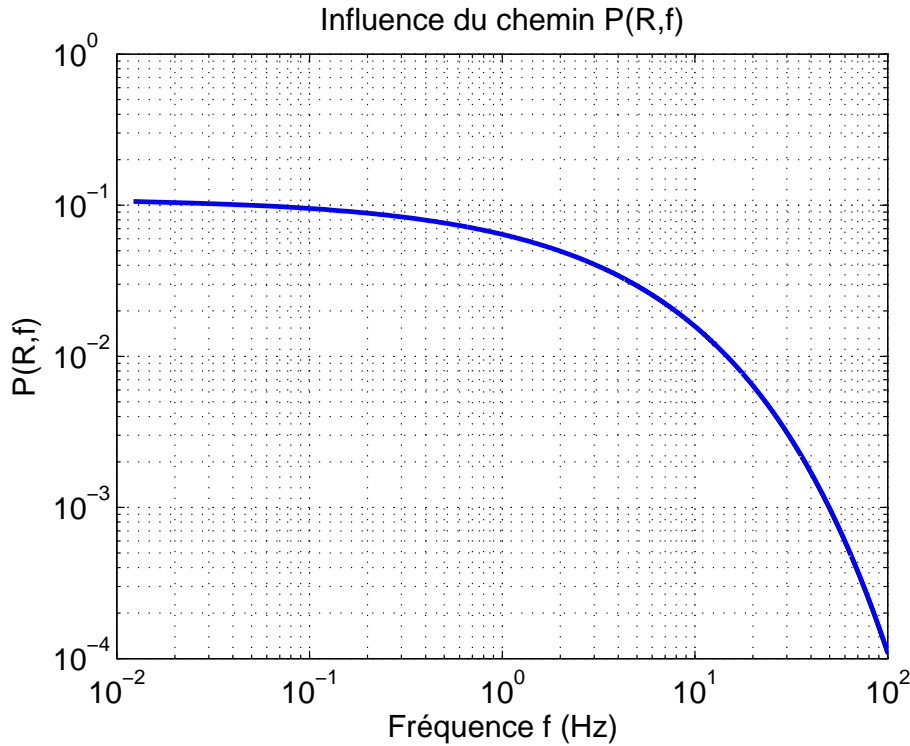


FIGURE 1.4. Influence du chemin, $R = 9$ km

- **Durée d'un séisme** : La durée d'un séisme est la somme de la durée de la source T_{source} et de la durée de propagation (ground motion) T_{gm} . On peut prendre : $T_{\text{source}} = \frac{0.5}{f_a}$ et $T_{\text{gm}} = 0.05R$, où le paramètre f_a est dépendant de la magnitude du séisme [46].
- **Influence de l'effet du site $G(f)$**

L'expression de $G(f)$ est composée de deux parties :

$$G(f) = A(f)D(f) \quad (1.12)$$

où $A(f)$ et $D(f)$ sont respectivement la fonction d'amplification et la fonction de diminution. L'amplification est mesurée par la racine carrée du rapport entre l'impédance proche de la source Z_s et l'impédance moyenne au site $\bar{Z}(f)$: $A(f) = \sqrt{\frac{Z_s}{\bar{Z}(f)}}$. À noter qu'il est possible de faire une régression linéaire pour avoir l'expression de $A(f)$ suivant le modèle $A(f) = a f^b$ à partir des nuages des points de mesures.

La diminution $D(f)$ reflétant la perte d'énergie, est exprimée par : $D(f) = \exp(-\pi \kappa_0 f)$ où κ_0 est proche de 0.04 et Boore suggère la valeur de 0.03. La figure 1.5 présente la variation de l'effet du site $G(f)$ en fonction de la fréquence.

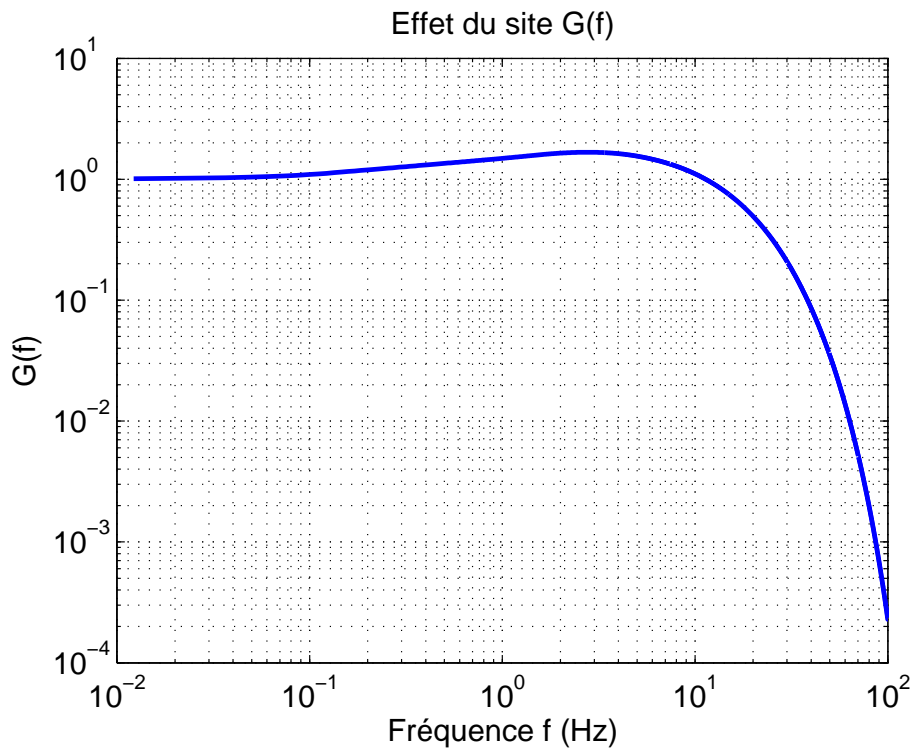


FIGURE 1.5. Influence de l'effet du site

○ **Type de réponse étudiée $I(f)$**

Le type de réponse est contrôlé par le filtre $I(f) = (2\pi if)^n$, où $n = 0, 1, 2$ pour le traitement de la réponse respectivement en déplacement, vitesse et accélération. Par exemple, pour l'accélération : $I(f) = -(2\pi f)^2$

Enfin, en combinant tous les composants ci-dessus selon la formule (1.8), on peut obtenir le spectre des séismes suivant le modèle de Boore. La figure 1.6 montre un exemple de spectre pour $M = 7$ et $R = 9$ km.

○ **Processus de simulation des séismes suivant le modèle de Boore**

La méthode de simulation de Boore pour générer une accélération sismique du sol se résume à l'aide des étapes suivantes :

- i. Etape 1 : Générer des bruits Gaussiens pour une durée égale à la durée d'un séisme.
- ii. Etape 2 : Fenêtrer le signal par une fonction de fenêtre.
- iii. Etape 3 : Passer dans le domaine des fréquences, et normaliser son amplitude par son écart-type.
- iv. Etape 4 : Multiplier ce spectre normalisé par le spectre d'un séisme.
- v. Etape 5 : Repasser dans le domaine temporel pour obtenir l'accélération du sol.

○ **Implémentation numérique**

En se basant sur la méthode de simulation suivant le modèle de Boore [46], une version du générateur sismique a été implémentée sous Matlab. La figure 1.7 présente une simulation d'un séisme de magnitude $M = 7$ à une distance de l'épicentre sismique au site $R = 9$ km. En haut de cette figure, on a l'accélération du sol, et en bas on a le spectre d'accélération du sol (ciblé), un spectre de la dernière simulation temporelle et un spectre moyen (la racine carrée de la moyenne quadratique des simulations).

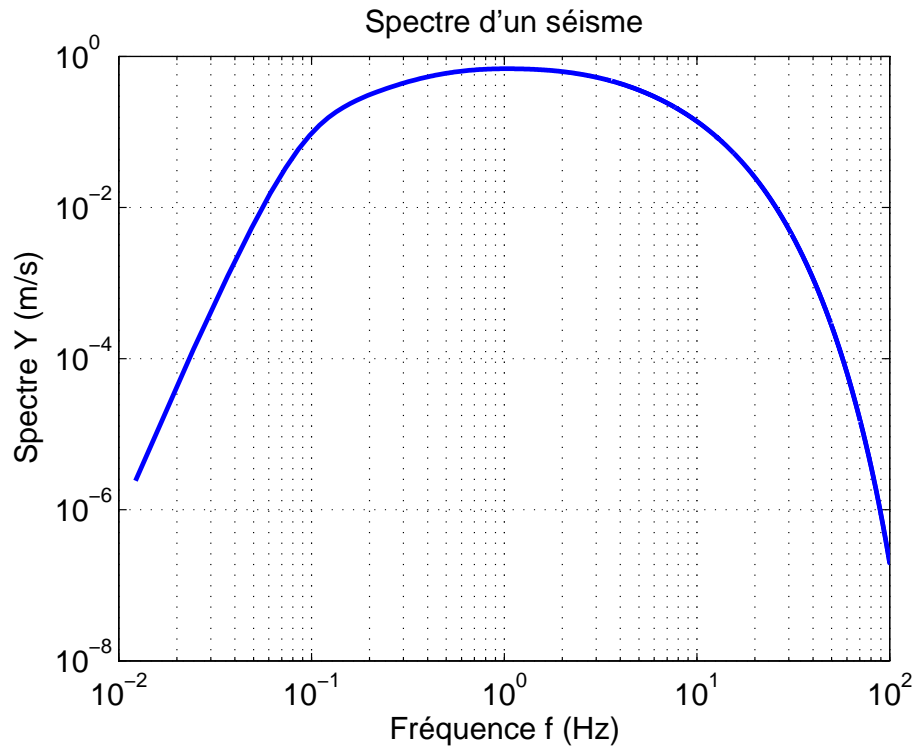


FIGURE 1.6. Spectre pour $M = 7$ et $R = 9$ km

1.3.2 Modélisation du comportement sismique des structures

Les structures et systèmes mécaniques peuvent être idéalisés ou discrétisés (par la méthode des éléments finis par exemple) en des systèmes à un seul degré de liberté (1DDL) ou systèmes à multiple degrés de liberté (MDDL). Lorsque le système étudié est simple ou lorsque l'on a besoin d'une analyse rapide, la modélisation par 1DDL avec seulement quelques paramètres peut permettre de nombreuses analyses dans un court laps de temps [47, 48]. Toutefois, lorsque le système mécanique est complexe, la modélisation par un modèle MDDL est nécessaire et donne une réponse plus précise [7, 8].

- **Méthodes d'analyse de la réponse**

Une variété de procédures d'analyse de la réponse, allant de l'analyse spectrale élastique équivalente à un système à 1DDL à l'analyse non linéaire dynamique des systèmes à MDDL ou des modèles 3D de structures spécifiques, a été suivie dans le développement de courbes de fragilité. Le choix d'une procédure d'analyse et d'un modèle de structures, influe directement sur les résultats de l'analyse de la réponse ainsi que sur les états de dommages pour le développement des courbes de fragilité.

La méthode spectrale élastique est l'approche la plus simple et la moins coûteuse en temps pour la génération de courbes de fragilité. En utilisant cette méthode, Hwang *et al.* [49], Jernigan et Hwang [50] ont développé des courbes de fragilité pour les ponts de Memphis. Les dommages des structures sont évalués par le rapport entre leurs capacités et leurs demandes sismiques où ces dernières ont été déterminées à partir d'une analyse spectrale élastique selon la méthode spécifiée de l'American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) [51]. Les résultats de ces calculs sont ensuite assemblés dans une matrice de fréquence des dommages, utilisée pour générer des courbes de fragilité.

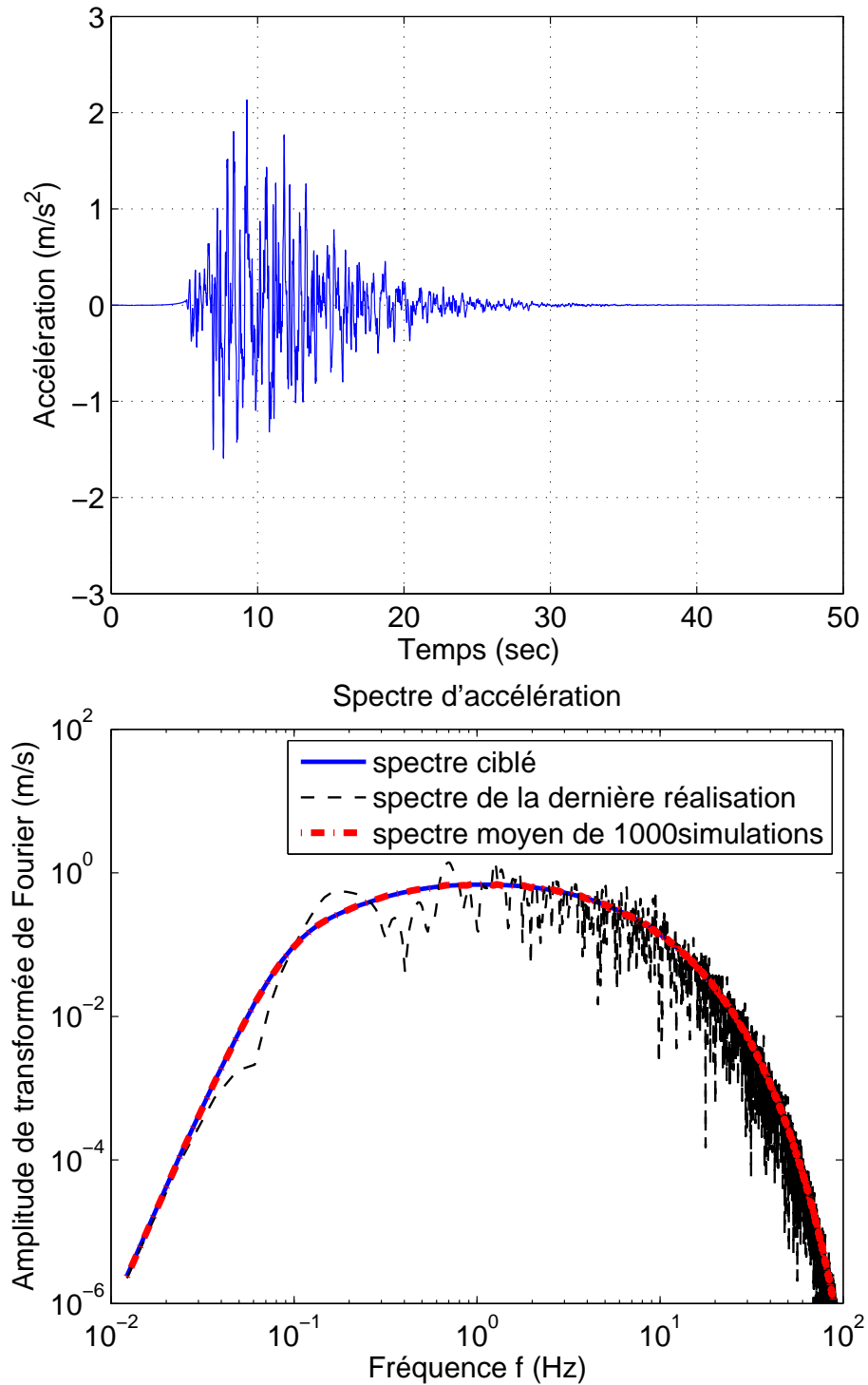


FIGURE 1.7. Une simulation de séisme ($M = 7, R = 9\text{km}$), l'accélération du sol en haut et le contenu spectral en bas

La méthode statique non linéaire (poussée progressive) est une approche alternative, souvent appelée méthode du spectre de capacité. Cette méthode a été utilisée pour établir des courbes de fragilité par différents chercheurs [52, 43, 53, 54]. Dans toutes ces études, ils ont considéré une méthodologie similaire qui utilise l'intersection d'un spectre de capacité obtenu par une analyse non linéaire pushover statique et un spectre de demande obtenu par la réduction du spectre

de réponse élastique. Dans une analyse déterministe, l'intersection des courbes de la capacité et de la demande est le point de performance. Cependant, les distributions de probabilité sont établies à la fois sur les courbes de capacité et de demande pour indiquer l'incertitude associée à l'évaluation de la performance. La probabilité de défaillance est déterminée à l'intersection de la distribution de la demande et de la capacité. Les courbes de fragilité peuvent être générées en utilisant ces spectres pour différents niveaux de l'intensité sismique et l'état limite donnés.

La méthode temporelle non linéaire (Non Linear Time history analysis) est considérée comme la méthode la plus rigoureuse pour estimer les demandes sismiques inélastiques des structures. Bien que l'analyse temporelle soit très compliquée et coûteuse en temps, les courbes de fragilité obtenues en utilisant cette procédure, sont soupçonnées d'avoir une meilleure fiabilité par rapport à celles sur les méthodes d'analyse mentionnées ci-dessus [43]. Cette méthode d'analyse a été utilisée par Hwang *et al.* [55], Karim et Yamazaki [2], Elnashai *et al.* [56], Choi *et al.* [57] et Mackie et Stojadinovic [58]...dans le but de développer des courbes de fragilité. La réponse structurale est obtenue via un code de calcul d'éléments finis (ANSYS, Code Aster, Opensees) pour des systèmes continus et/ou par des schémas numériques appropriés (Runge-Kutta, Newmark, ...) pour des systèmes discrets masses-ressorts-amortisseurs.

• États limites des structures

Un état limite est un critère défini comme la valeur de la demande structurelle qu'un système est incapable d'atteindre, à un niveau spécifié : endommagement ou défaillance. L'état d'endommagement ou de défaillance peut être spécifié à travers des limites sur n'importe quel paramètre de réponse tel que : contraintes, déformations, déplacements, accélérations. Selon les types de structure à l'étude, des paramètres correspondant aux trois manières suivantes peuvent être utilisés pour caractériser les états d'endommagements : (1) déformation maximale (déplacement maximal, rapport de ductilité, déplacement inter-étage) ; (2) dommage cumulatif (Cumulative damage) et (3) association de la déformation maximale et du dommage cumulatif (modèle de Park et Ang). Le tableau 1.2 présente la relation entre la performance sismique souhaitée et le taux maximum de déplacements inter-étages recommandé par FEMA-273 [59] pour des bâtiments en béton armé ou proposé par Ghobarah *et al.* [60, 61] pour des mixtes acier-béton. Trois principaux niveaux correspondent aux trois niveaux de risque :

- Immediate Occupancy (IO) : Le bâtiment reste sûr et habitable : les réparations sont mineures,
- Life Safety (LS) : La structure reste stable avec une marge de sécurité confortable ; les dommages sont non structuraux et restent localisés
- Collapse Prevention (CP) : Le bâtiment ne s'effondre pas ; les dommages ne sont pas limités.

TABLEAU 1.2. Valeurs limites de déplacement inter-étages (Δ) selon les niveaux de performance

Niveau de performance	Probabilité	Δ d'après FEMA-273	Δ d'après Ghobarah <i>et al.</i>
IO	50%/50 ans	0.7%	0.6%
LS	10%/50 ans	2.5%	1.5%
CP	2%/50 ans	5.0%	3.0%

Karim et Yamazaki [30, 2] ont utilisé l'indice de dommage (damage index -ID), obtenu en utilisant un modèle de dommages proposé par Park et Ang [62], pour l'évaluation des dommages aux piles. Les indices de dommage DI obtenus pour chaque excitation du mouvement du sol sont calibrés

par la méthode de Ghobarah *et al.* [63] afin d'avoir une relation entre l'indice de dommage (DI) et la classe de dommage (Damage Rank - DR) comme le montre le tableau 1.3

TABLEAU 1.3. Rapport entre l'indice de dommage DI et la classe de dommage DR

Indice de dommage (DI)	Classe de dommage (DR)	Définition
$0.00 < DI < 0.14$	D	Aucun dommage
$0.14 < DI \leq 0.40$	C	Dommages Légers
$0.40 < DI \leq 0.60$	B	Dommages Modérés
$0.60 < DI \leq 1.00$	A	Dommages Étendus
$1.00 < DI$	A_s	Dommages Complets

1.3.3 Évaluation de la probabilité de défaillance ou d'endommagement

Le calcul des courbes de fragilité intègre des notions de mesures de probabilités de défaillance ou d'endommagement. Sa mise en oeuvre nécessite de mettre en place un certain formalisme mathématique. Cette sous-section décrit la mise en place de la fonction d'état-limite, des variables aléatoires et les grandes familles de méthodes permettant de résoudre un problème de fiabilité.

• Fonction d'état limite

Soit \mathbf{Z} le vecteur dont les composantes représentent les variables structurales et le chargement intervenant dans le comportement de la structure (*variables de base*). L'aléa sur ces variables est défini par la densité conjointe de probabilité $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$.

Une fonction de performance ou fonction d'état limite $G(\mathbf{Z})$ est définie telle que $G(\mathbf{Z}) > 0$ soit le domaine de sûreté, et $G(\mathbf{Z}) \leq 0$ soit le domaine de défaillance, ceci pour un scénario de défaillance (ou un niveau d'endommagement) donné. La frontière entre les deux domaines $G(\mathbf{Z}) = 0$ est appelée l'état limite. Pour des éléments de structures, la fonction de performance est souvent définie comme suite :

$$G(\mathbf{Z}) = C(\mathbf{Z}) - D(\mathbf{Z}) \quad (1.13)$$

où $D(\mathbf{Z})$ est la réponse du système appelée *demande de sollicitation* et $C(\mathbf{Z})$ est la limite critique de la réponse étudiée appelée *capacité de résistance*.

• Mesure d'une probabilité de défaillance

La probabilité de défaillance p_f pour le scénario défini à l'équation (1.13) représente la probabilité que la réponse du système $D(\mathbf{Z})$ excède la limite critique $C(\mathbf{Z})$. Cette probabilité peut s'obtenir par intégration directe de la fonction de densité conjointe $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ sur le domaine de défaillance :

$$p_f = \int_{G(\mathbf{Z}) \leq 0} p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{G(\mathbf{Z}) \leq 0} p_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n \quad (1.14)$$

où $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = p_{Z_1, \dots, Z_n}(z_1, \dots, z_n)$ est la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires de base z_i .

• Deux familles de méthodes

En général, la probabilité de défaillance p_f peut être estimée par les deux types de méthodes suivantes :

- **Méthode basée sur l'état-limite** : Le but de la première famille est d'estimer l'intégrale (1.14). Elle est basée sur l'étude de l'état-limite. Ce qui comporte la forme de la frontière $G(\mathbf{Z}) = 0$. Cette méthode permet non seulement de calculer la probabilité de défaillance, mais également de définir d'autres indicateurs comme les indices de fiabilité ou encore le point de conception. Deux catégories se distinguent : (1) les méthodes basées sur le développement de Taylor de l'état limite au voisinage du point de conception : FORM (*First Order Reability Method*), pour un développement de Taylor au premier ordre, et SORM (*Second Order Reability Method*) pour un développement au second ordre ; (2) les méthodes utilisant la théorie statique, c'est-à-dire les dérivées des simulations de Monte Carlo. Ces dernières comprennent les méthodes orientées sur une description représentative de l'ensemble de la réponse : simulations d'importants (*Important Sampling*), simulations directionnelles (*Directional Sampling*). Toutefois, la fonction d'état limite $G(\mathbf{Z})$ étant non linéaire et non explicite, le calcul direct de l'intégrale multidimensionnelle (1.14) n'est pas possible en pratique.
- **Méthode basée sur la fonction de performance** : Cette famille est basée sur la fonction de performance $G(\mathbf{Z})$. La probabilité de défaillance est définie de la manière suivante :

$$p_f = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0] = P[C(\mathbf{Z}) - D(\mathbf{Z}) \leq 0] \quad (1.15)$$

Pour le calcul de cette probabilité, il n'est pas nécessaire de connaître la forme de l'état limite. Cette famille comprend les méthodes de simulation : simulation de Monte Carlo et simulation selon l'extension à n dimensions du carré latin (Latin Hypercube). Des échantillons de la population des variables de base sont générés pour obtenir une population représentative sur laquelle une analyse statistique peut être conduite.

- **Application au calcul de courbes de fragilité**

Dans l'application pratique, une courbe de fragilité sismique suivant la définition donnée à l'équation (1.3) est la probabilité de défaillance $P[C(\mathbf{Z}) - D(\mathbf{Z}) \leq 0]$ pour chaque intensité sismique donnée $A = a$. Puisqu'il est impossible de déterminer tous les points de la courbe $F_r(a)$ correspondant à toutes les probabilités de défaillance pour toutes les valeurs d'intensités sismiques a , une hypothèse commune pour la plupart des méthodes existantes de construction des courbes de fragilité a été acceptée : la courbe $F_r(a)$ a la forme de la fonction de probabilité cumulative de la loi log-normale. Il revient ainsi de simplement déterminer deux paramètres caractéristiques de la loi log-normale afin d'obtenir une courbe de fragilité sismique. Les différentes méthodes de construction se distinguent par la manière d'identification des deux paramètres de la loi log-normale. Elles sont présentées dans la section suivante.

1.4 Courbes de fragilité basées sur l'hypothèse de la loi log-normale

1.4.1 Loi log-normale et la courbe de fragilité

- **Rôle de loi log-normale**

Du point de vue théorique, les raisons qui poussent à utiliser la distribution log-normale sont que [64, 65] :

- seules les valeurs positives (de zéro à l'infini) de la variable aléatoire X sont considérées.
- il y a absence de densité de probabilité à $X = 0$.
- la loi log-normale est définie par le premier et second moments.

et dans le cadre de l'évaluation de la vulnérabilité sismique, la loi log normale joue un rôle très important. En effet, elle est utilisée pour :

- représenter le modèle des courbes de fragilité.
- établir la relation entre l'intensité du séisme à une large variété de réponses structurales [66, 67, 68].

• **Modèle de la loi log-normale pour les courbes de fragilité**

Dans la littérature, le modèle de distribution statistique retenu pour représenter les courbes de fragilité d'une structure est un modèle de type loi cumulative log-normale [1, 11]. Dans celui-ci deux paramètres (A_m, β) de la fonction cumulative de probabilité sont employés pour définir la probabilité de dépasser un état d'endommagement ou de défaillance :

$$F_r(a) = \Phi \left[\frac{\ln(a/A_m)}{\beta} \right] \quad (1.16)$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition de probabilité de la loi normale centrée réduite, A_m est la médiane et β est l'écart-type du logarithme naturel de l'intensité sismique A . La figure 1.8 présente un exemple des courbes de fragilité obtenues par l'hypothèse de la loi log-normale, où c_e et ζ_e désignent respectivement les deux paramètres A_m et β .

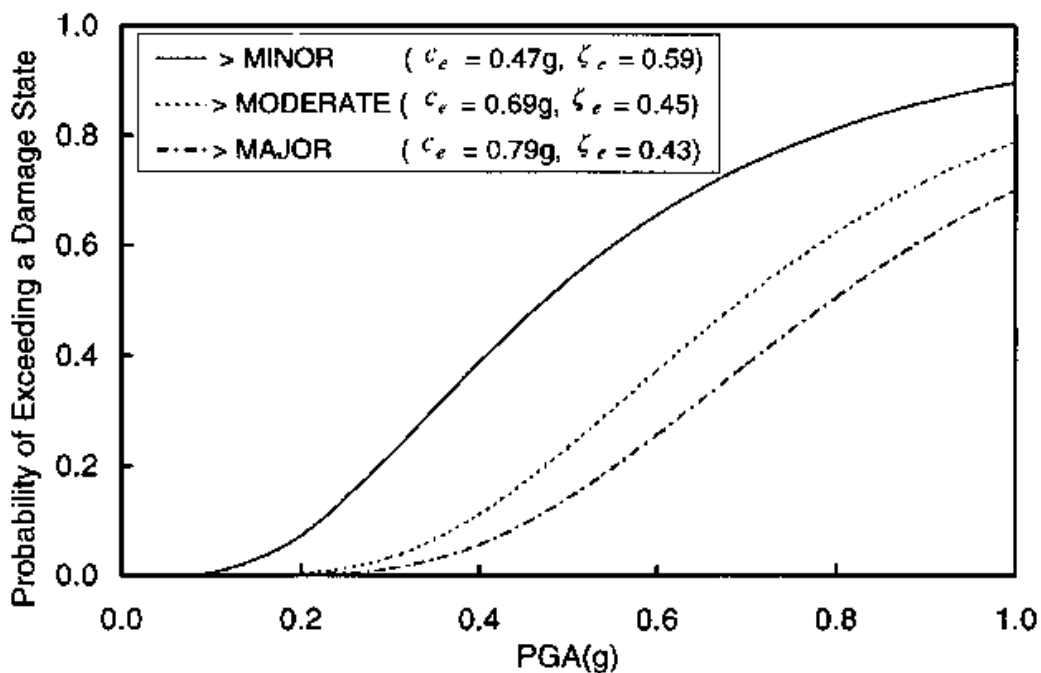


FIGURE 1.8. Courbes de fragilité suivant la loi log-normale [11]

En se basant sur l'hypothèse log-normale de la forme de courbes de fragilité, les méthodes existantes pour calculer deux paramètres du modèle sont classifiées sur la figure 1.9 et présentées dans les sous-sections suivantes.

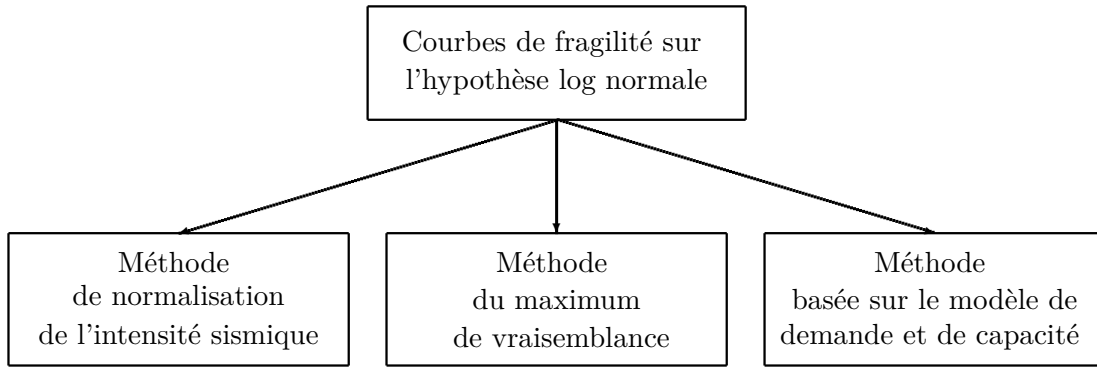


FIGURE 1.9. Méthodes numériques existantes pour construire les courbes de fragilité

1.4.2 Méthode de normalisation de l'intensité sismique

Cette méthode a été développée en se basant sur la technique qui consiste à la normalisation (scale en anglais) de l'ensemble des séismes de telle sorte qu'ils aient la même intensité sismique $A = \gamma, (\gamma > 0)$. Deux intensités sismiques : accélération maximale du sol $PGA = \max_t (|a(t)|)$ et pseudo spectre d'accélération $PS_a(\omega_0, \zeta) = \omega_0^2 \max_t (|x(t)|) = \omega_0^2 S_d$ sont couramment utilisées [42, 69, 70, 71, 72]. La version modifiée du mouvement du sol $a(t)$ est :

$$\tilde{a}(t) = a(t) \frac{\gamma}{PGA} \quad \text{ou} \quad \tilde{a}(t) = a(t) \frac{\gamma}{PS_a} \quad (1.17)$$

La détermination des probabilités de défaillance [3] ou des taux d'endommagement [30, 2, 73] pour différents niveaux d'intensité $A = \gamma$ est effectuée par la méthode de simulation de Monte Carlo. À partir de ces valeurs de défaillance correspondant à des points discrets de la courbe $F_r(a)$, la courbe de fragilité continue est obtenue par la régression suivant la loi log-normale par la méthode des moindres carrés.

On peut citer ici l'article de Kafali et Grigoriu [3] qui utilisent les séismes artificiels générés par le modèle non stationnaire Gaussien. PGA et PS_a sont utilisés pour l'intensité sismique et la probabilité de défaillance à chaque intensité normée est évaluée par la méthode de simulation de Monte Carlo. Karim et Yamazaki [30, 2, 73] utilisent les enregistrements sismiques réels collectés à partir des séismes du Japon, des États-Unis et de Taiwan au lieu de séismes artificiels. L'indice de dommages (DI) de Park-Ang [62] est utilisé pour définir l'état d'endommagement. Une corrélation entre l'indice de dommage et la réponse structurale est établie pour procéder au calibrage des paramètres des fonctions de fragilité (PGA, intensité du spectre SI). Le taux de dommages pour chaque intensité sismique est le rapport entre le nombre d'occurrences d'un rang de dommages et le nombre total de séismes.

1.4.3 Méthode du maximum de vraisemblance

Au lieu d'évaluer plusieurs points de défaillance sur la courbe de fragilité dans la méthode précédente, la méthode du maximum de vraisemblance permet d'identifier les deux paramètres de la loi log normale de la courbe de fragilité. La démarche suivie consiste alors à modéliser l'issue des expériences numériques par une variable aléatoire de Bernoulli Y . En effet, on considère $i = 1, \dots, N_s$ simulations, pour chaque simulation numérique, on a deux issues possibles : soit on a atteint le niveau critique et on a la défaillance ($y_i = 1$) soit il y a non défaillance ($y_i = 0$). La

fonction de vraisemblance à maximiser pour ce problème s'écrit :

$$L(A_m, \beta; y_i) = \prod_{i=1}^{N_s} [F_r(a_i)]^{y_i} [1 - F_r(a_i)]^{1-y_i} \quad (1.18)$$

La médiane A_m et l'écart-type logarithme β dans l'équation (1.18) sont estimés grâce au problème d'optimisation associé :

$$(\hat{A}_m, \hat{\beta}) = \arg \min_{A_m, \beta} (-\ln L) \quad (1.19)$$

Cette approche est proposée par Shinozuka *et al.* [11]. Elle a été initialement utilisée pour développer des courbes de fragilité de ponts à partir de données empiriques, comme les observations des dommages réels post-séismes [11]. Les auteurs ont ensuite continué d'appliquer cette méthode aux résultats obtenus par l'analyse numérique [43, 9, 74], où une conversion directe de réponses structurelles en données binaires correspondant en termes d'états de dommages, est effectuée. On peut aussi citer ici plusieurs études qui utilisent cette méthode comme celles de Zentner [6] et de Yi *et al.* [28].

1.4.4 Méthode basée sur le modèle de demande et de capacité sismique

Cette méthode a été développée en supposant un modèle probabiliste (loi log-normale) de la sollicitation sismique (Probabilistic seismic demand model - PSDM) et un modèle probabiliste (loi log-normale) de résistance sismique (Probabilistic seismic capacity model - PSCM). La courbe de fragilité est déduite par la relation :

$$F_r(a) = P[D \geq C | A = a] = \Phi \left(\frac{\ln(S_D(a)/S_C)}{\sqrt{\beta_D^2 + \beta_C^2}} \right) \quad (1.20)$$

où la sollicitation sismique D et la résistance sismique C suivent respectivement deux distributions log-normales : $D \sim \ln \mathcal{N}(S_D(a), \beta_D)$ et $C \sim \ln \mathcal{N}(S_C, \beta_C)$. $S_D(a)$ et β_D sont respectivement la médiane dépendant de l'intensité sismique A et l'écart-type de la sollicitation. S_C et β_C sont respectivement la médiane et l'écart-type de la résistance.

En effet, Cornell *et al.* [66] montrent que la valeur médiane de la demande sismique est censée suivre une loi de puissance $S_D = c_1 a^{c_2}$, et dans l'espace transformé logarithmique elle devient :

$$\ln(S_D) = \ln(c_1) + c_2 \ln(a) \quad (1.21)$$

où c_1 et c_2 sont les deux paramètres qui sont obtenus par régression avec la méthode des moindres carrés. En remplaçant S_D de l'équation (1.21) dans l'équation (1.20), on constate que :

$$F_r(a) = \Phi \left[\frac{\ln c_1 + c_2 \ln a - \ln S_C}{\sqrt{\beta_D^2 + \beta_C^2}} \right] = \Phi \left[\frac{\ln a - \left[\frac{\ln S_C - \ln c_1}{c_2} \right]}{\frac{\sqrt{\beta_D^2 + \beta_C^2}}{c_2}} \right] = \Phi \left[\frac{\ln(a/A_m)}{\beta} \right] \quad (1.22)$$

où $\ln A_m = \left[\frac{\ln S_C - \ln c_1}{c_2} \right]$ et $\beta = \frac{\sqrt{\beta_D^2 + \beta_C^2}}{c_2}$. On retrouve ici la forme de la loi log-normale comme dans l'équation (1.16). Cette méthode est présentée en détails dans l'article de Padgett et DesRoches [4]. Tavares *et al.* [75, 76] utilisent cette méthode pour le développement des courbes de fragilité des ponts au Canada.

1.4.5 Discussion sur les méthodes de construction des courbes de fragilité

On a présenté ci-dessus différentes méthodes pour le calcul numérique de la courbe de fragilité en utilisant l'hypothèse de la loi log-normale. Chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients qui sont résumés dans le tableau 1.4.

L'avantage de la méthode de normalisation de l'intensité sismique est que l'on peut déterminer n'importe quel point de défaillance (pour n'importe quel niveau d'intensité sismique) sur la courbe de fragilité que l'on souhaite. Elle ne dépend pas forcément de l'hypothèse de la courbe de fragilité car elle peut être obtenue par une régression des points de défaillance avec une autre loi que la loi log-normale si ce remplacement convient mieux. Toutefois, cette méthode nécessite de normaliser le mouvement du sol $a(t)$, la loi de distribution de probabilité de mouvements du sol originale $a(t)$ et ses versions normées $\tilde{a}(t)$ sont peut-être différentes [77]. Cela amène à la différence de la performance sismique actuelle de la structure par rapport à celle obtenue par $\tilde{a}(t)$. De plus, elle est assez coûteuse en temps car elle doit effectuer beaucoup de calculs numériques, surtout dans le cas de l'évaluation de probabilité faible.

Au contraire, la normalisation d'accélérogrammes n'est pas nécessaire pour la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode est en bon accord avec l'hypothèse de la loi log-normale, illustrée par le test d'ajustement [11]. Les données entrées sont simples car elles nécessitent seulement des informations binaires (défaillance ou non défaillance) sans prêter attention à la corrélation entre les paramètres de mouvements du sol et les réponses structurelles [6, 78]. Ainsi, elle dépend de la qualité de données disponibles (données observées). En raison de l'incertitude des données observées (par exemple : la manque d'événement observés, l'imprécision de l'observation réelle des dommages structurels après un séisme, ou la difficulté de convergence d'une structure lorsque elle soumise à de très hautes charges et l'effondrement numérique peut précéder la défaillance structurelle [79]) ; la méthode MLE devient moins efficace dans ce cas.

Pour la méthode basée sur le modèle de demande et de capacité sismique, on constate que celle-ci est fondée sur une régression, qui est une façon efficace d'établir une relation robuste entre l'intensité sismique et la réponse structurelle. Une fois que les paramètres des modèles sont obtenus, la déduction de la courbe de fragilité est immédiate. Toutefois, cette méthode introduit une hypothèse supplémentaire sur la relation entre le mouvement du sol et la réponse structurelle suivant la distribution log-normale. Par ailleurs, cette méthode ne peut être efficace dans le cas où les résultats de réponses sont mal corrélés avec l'excitation sismique. Un autre inconvénient de cette méthode est que l'écart-type β_D est souvent calculé sur toute la gamme de l'intensité sismique, il en résulte qu'il y a une même dispersion dans les courbes de fragilité pour les différents niveaux de dommages.

En résumé, il existe dans la littérature trois méthodes de construction des courbes de fragilité sismique pour l'approche de simulations numériques. Chaque méthode a des points forts et des points faibles comme nous avons évoqué dans le tableau 1.4. Il est difficile à l'heure actuelle de trouver une étude comparative approfondie sur ces méthodes. Pourtant, une telle recherche paraît importante et devrait apporter une réponse nécessaire pour le choix de la méthode d'analyse à prendre. Il faut noter que les courbes de fragilité déterminées par différentes méthodes peuvent avoir une incohérence importante pour une même structure et la même condition de l'aléa sismique.

La deuxième remarque concerne l'hypothèse de la loi log-normale qui est commune à toutes les méthodes de construction. La précision des courbes de fragilité dépend ainsi de la validité de cette hypothèse. À part la méthode classique de simulation de Monte Carlo, est-t-il possible d'avoir une autre méthode permettant d'ignorer l'hypothèse de la loi log-normale ?

TABLEAU 1.4. *Avantages et inconvénients des méthodes de construction des courbes de fragilité*

Méthodes	Avantages	Inconvénients
Normalisation	- La probabilité de défaillance peut être évaluée pour chaque intensité	- Assez coûteux en temps pour le cas de probabilité faible - Modification de la loi de probabilité de séismes par rapport aux versions originales
Vraisemblance	- Coût relativement faible (quelques centaines de calculs suffisent) - Les données d'entrées sont simples (défaillance ou non défaillance)	- Forte dépendance de l'hypothèse log-normale - Pas de prise en compte de la corrélation entre les paramètres de mouvements du sol et les réponses structurelles
Demande/capacité	- Méthodes robustes - Coût faible	- Hypothèse supplémentaire de la relation entre la demande et intensité sismique. - Même dispersion dans les courbes de fragilité pour les différents niveaux de dommages

La construction des courbes de fragilité sismique fait souvent appel à l'analyse dynamique non-linéaire qui est coûteuse en temps de calcul. D'autant plus qu'on doit associer à ce problème un nombre important de variables dû au fait que les probabilités de défaillance sont faibles. Peut-on appliquer des schémas numériques plus performants que la méthode de Monte Carlo afin de rendre la procédure de construction de courbe de fragilité plus efficace ?

En se basant sur ces analyses, le travail de cette thèse peut se décliner en des objectifs qui sont présentés dans le paragraphe suivant.

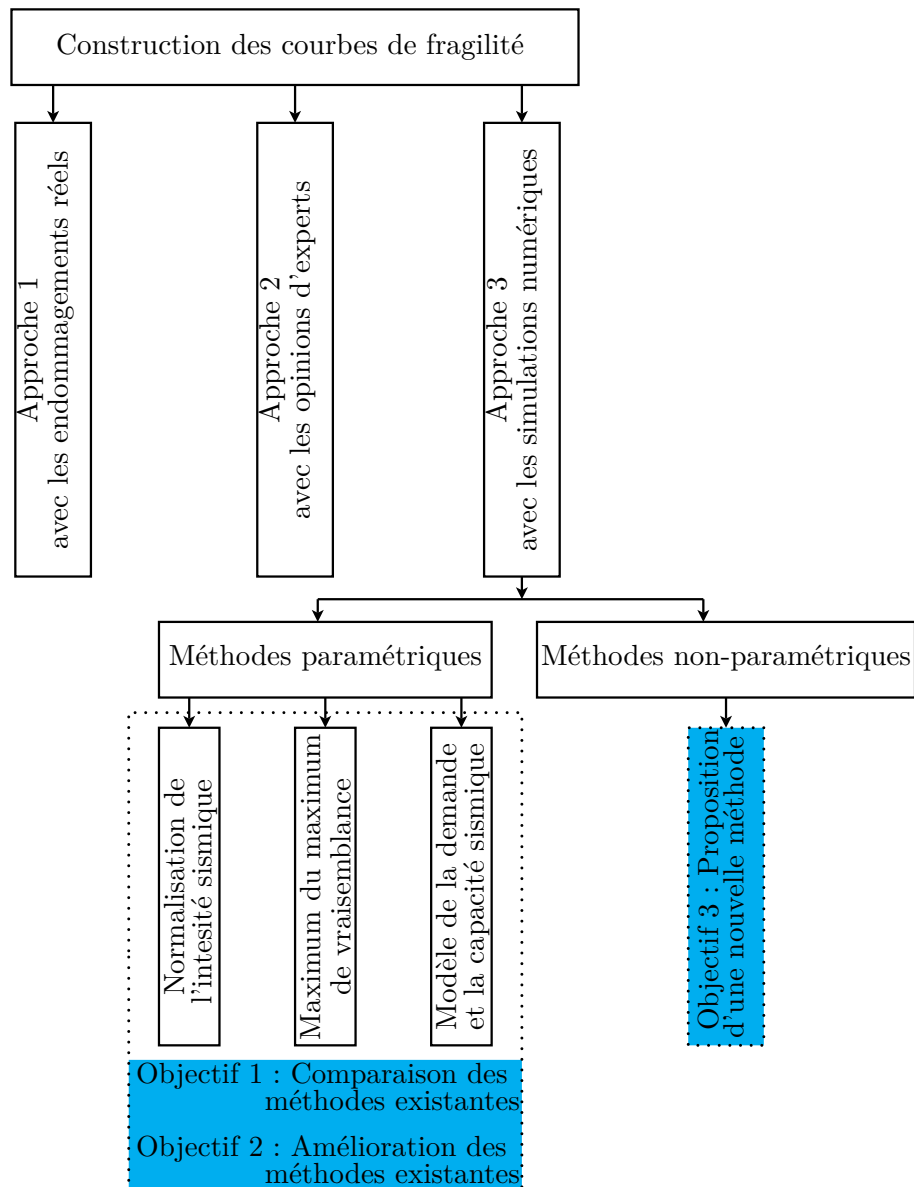


FIGURE 1.10. Objectifs de la thèse

1.5 Objectifs et organisation de la thèse

- **Premier objectif** : *comparaison des méthodes existantes.*

Le premier travail de la thèse consiste à une analyse des méthodes existantes et à effectuer une comparaison entre elles. On recense d'abord les procédures complètes des méthodes et puis on les applique à des exemples numériques concrets. Les courbes de fragilités obtenues sont enfin analysées et comparées. Les travaux concernant cet objectif sont présentés en chapitre 2.

- **Deuxième objectif** : *amélioration des méthodes existantes.*

Le résultat du premier objectif conduit à deux améliorations pour les méthodes existantes. La première amélioration concerne la méthode basée sur le maximum de vraisemblance dans le but d'atténuer l'influence de l'excitation sismique dans la procédure de construction des courbes de fragilité sismique. Elle fait partie du chapitre 2. La deuxième amélioration est relative à

l'évaluation efficace de la probabilité de défaillance lorsque cette probabilité est faible et le nombre de variables aléatoires est important. Il s'agit de l'application de la méthode de simulation par Subsets qui est réputée plus performante que la simulation de Monte Carlo. Elle est utile lorsque l'on a besoin de déterminer la probabilité de défaillance pour l'ensemble du site ou d'un point de la courbe de fragilité. Cette amélioration est décrite au chapitre 3.

- **Troisième objectif** : *proposition d'une méthode non-paramétrique.*

Elle vise à proposer une nouvelle méthode permettant de ne pas faire appel à l'hypothèse de la loi log-normale. L'idée principale de la méthode proposée est de calculer la distribution de la densité de probabilité de l'intensité sismique conditionnelle par la défaillance. On démontre que cela est possible en appliquant la méthode de calcul de l'évolution des fonctions de densité de probabilité (Probability Density Evolution Method - PDEM) récemment proposée par Li and Chen [80]. La présentation et la validation de la proposition sont données au chapitre 4.

Les trois objectifs mis en contexte actuel de la construction des courbes de fragilité sismique sont illustrés sur la figure 1.10.

1.6 Conclusions

Un aperçu des méthodes de construction des courbes de fragilité sismique a été présenté. Elles ont été développées suivant trois approches basées respectivement sur les endommagements réels, sur les opinions d'experts et sur les simulations numériques. En considérant les moyens disponibles et la potentialité dans cette thèse, on se concentre sur l'approche par les simulations numériques. Trois composantes nécessaires pour l'approche sont présentées, à savoir : simulation des mouvements du sol, modélisation de structures sous excitation sismique et évaluation de la probabilité de défaillance. Dans l'approche par simulations numériques choisie, les différentes méthodes basées sur l'hypothèse log-normale sont abordées et discutées. Cela permet de relever trois objectifs principaux de la thèse : comparaison, amélioration des méthodes existantes et proposition d'une nouvelle méthode non-paramétrique. Les travaux correspondant à ces objectifs sont présentés successivement dans les chapitres suivants de la thèse.

Chapitre 2

Étude comparative sur les méthodes existantes et amélioration pour l'analyse de fragilité

Sommaire

2.1	Introduction	43
2.2	Algorithmes des méthodes de construction des courbes de fragilité sismique	43
2.2.1	Méthode de normalisation de l'intensité sismique - SIS	43
2.2.2	Méthode du maximum de vraisemblance - MLE	45
2.2.3	Méthode basée sur le modèle de demande et capacité sismiques - PSDM/PSCM	47
2.2.4	Méthode de simulations de Monte Carlo - MCS	47
2.3	Comparaison des méthodes existantes sur des exemples numériques	50
2.3.1	Définition des critères de comparaison	50
2.3.2	Exemple 1 : Oscillateurs linéaire et non-linéaire	51
2.3.3	Exemple 2 : Bâtiment à 8 étages	60
2.3.4	Exemple 3 : Portique en acier de 3 étages	64
2.3.5	Discussions	67
2.4	Analyse approfondie sur la méthode MLE	68
2.4.1	Problématique	68
2.4.2	Démarche analytique entreprise	69
2.4.3	Implémentations	71
2.4.4	Discussion	76
2.5	Amélioration de la méthode MLE	77
2.5.1	Proposition d'une nouvelle fonction de vraisemblance	78
2.5.2	Procédure de la méthode MLE proposée (ERPM - Excitation and Response Probabilistic Models)	80
2.5.3	Validation par les tests analytiques	82
2.5.4	Validation par les exemples numériques	86
2.6	Conclusions	94

2.1 Introduction

La synthèse bibliographique du chapitre 1 a présenté une analyse qualitative des méthodes existantes. Dans la continuité de cette voie, ce chapitre consiste d'abord à réaliser une analyse quantitative par une étude comparative des méthodes existantes de l'approche par simulations numériques. Leur comparaison est illustrée par trois exemples numériques. La variabilité des résultats obtenus est discutée. Lors de la comparaison avec la méthode de simulations de Monte Carlo considérée comme "exacte", la méthode du maximum de vraisemblance donne le résultat le plus fiable. Toutefois, elle présente encore quelques défauts dont la dépendance aux mouvements du sol d'entrée. Cela conduit ensuite à une nouvelle proposition pour améliorer la méthode du maximum de vraisemblance existante. La méthode proposée permet d'atténuer la dépendance de la courbe de fragilité sismique par rapport à la qualité des données d'entrées. Enfin, sa validation est vérifiée par des exemples numériques.

2.2 Algorithmes des méthodes de construction des courbes de fragilité sismique

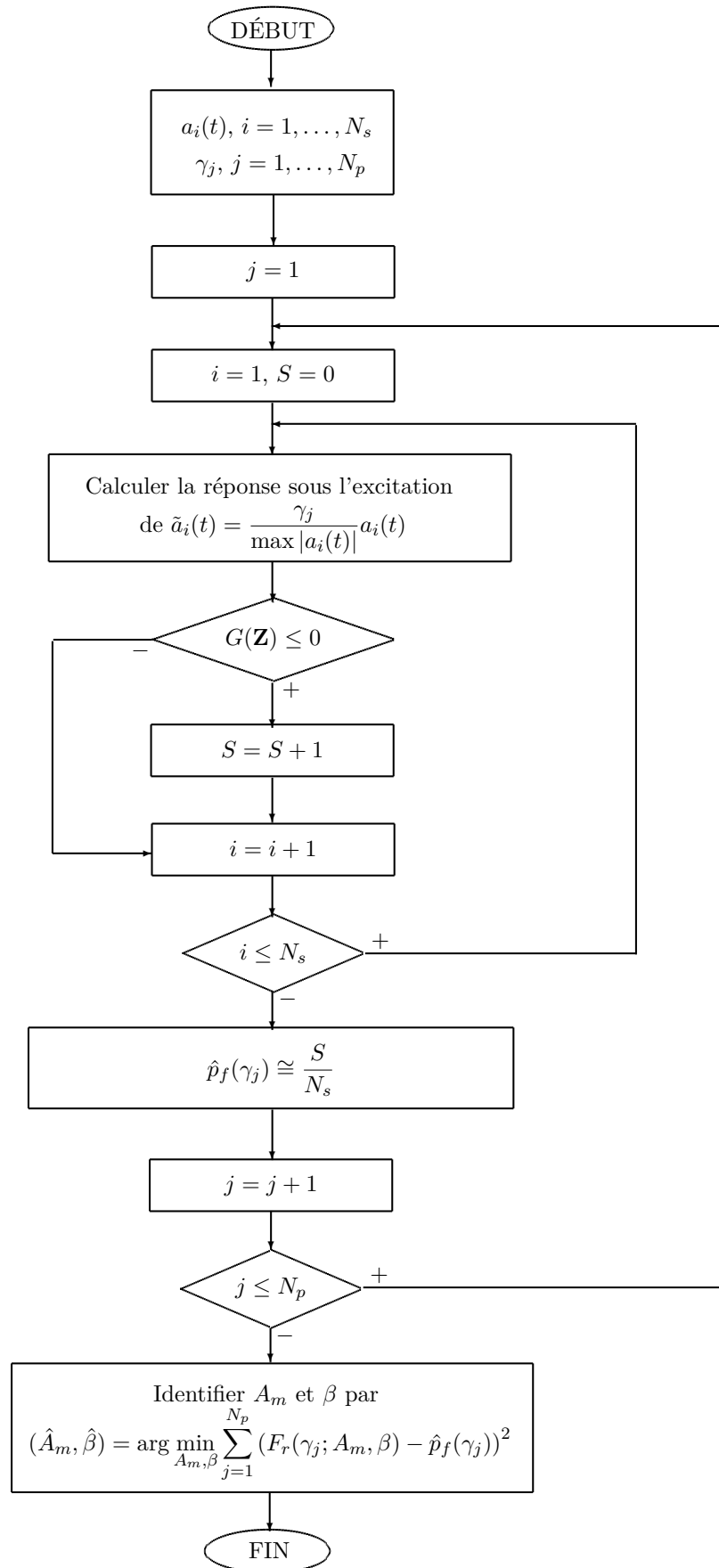
Une courbe de fragilité peut être déduite par l'identification de deux paramètres de la loi log-normale en utilisant l'hypothèse de la loi log-normale pour sa forme. Pour identifier ces paramètres, il existe trois méthodes dans la littérature : (i) la méthode de normalisation de l'intensité sismique [3], (ii) la méthode du maximum de vraisemblance [11] et (iii) la méthode basée sur le modèle de demande et capacité sismiques [4, 81]. Les méthodes brièvement présentées dans le chapitre 1 sont maintenant décrites en détails par une procédure complète pas-à-pas et un algorithme détaillé. En outre, la méthode classique de simulations de Monte Carlo conditionnelle à l'intensité sismique est également présentée puisqu'elle joue le rôle de méthode de référence lors de la comparaison des méthodes existantes. Tous ces algorithmes sont implémentés sous le logiciel de calcul Matlab. On note que pour faciliter la présentation, l'intensité caractéristique sismique choisie est le pic d'accélération du sol (PGA) mais les algorithmes sont aussi applicables pour d'autres intensités telles que PGV, PGD, PS_a ... Ce choix est justifié par la popularité de cette intensité dans le monde génie parasismique.

2.2.1 Méthode de normalisation de l'intensité sismique - SIS

En se basant sur l'hypothèse de la loi log-normale, les deux paramètres de sa fonction de répartition de probabilité sont déterminés par régression par la méthode des moindres carrés à partir des points discrets. Chaque point $F_r(a)$ représente une probabilité de défaillance $P[G(\mathbf{Z}) \leq 0 | A = a]$ correspondant à une valeur d'intensité sismique $A = a$. Cette probabilité est évaluée par la méthode de simulations de Monte Carlo. La procédure complète sous forme pas-à-pas de cette méthode est la suivante [3] :

- Étape 1 : Générer ou choisir N_s séismes indépendants $a_i(t), i = 1, \dots, N_s$,
- Étape 2 : Normaliser les séismes de telle sorte qu'ils aient la même intensité PGA = γ , ($\gamma > 0$), les versions modifiées des séismes sont alors :

$$\tilde{a}_i(t) = \frac{a_i(t)}{\max_t |a_i(t)|} \gamma_j \quad (2.1)$$

FIGURE 2.1. *Algorithme de la méthode de normalisation de l'intensité sismique (SIS)*

- Étape 3 : Calculer les réponses temporelles linéaires ou non linéaires sous excitations sismiques (séismes modifiés) $\tilde{a}_i(t), i = 1 \dots N_s$,
- Étape 4 : Estimer la probabilité de défaillance correspondant à $\text{PGA} = \gamma_j$ par la méthode de Monte Carlo, c-à-d. égale au rapport entre le nombre de séismes provoquant la défaillance sur le nombre total :

$$\hat{p}_f(\gamma) \cong \frac{\sum \mathbf{1}[G(\mathbf{Z}) \leq 0]}{N_s} \quad (2.2)$$

où $\mathbf{1}[\cdot]$ est la fonction indicatrice. Elle est égale à 1 s'il y a défaillance et 0 sinon,

- Étape 5 : Répéter les étapes de 2 à 4 pour N_p valeurs de PGA : $\gamma_j, j = 1, \dots, N_p$ et on obtient N_p valeurs de $\hat{p}_f(\gamma_j)$,
- Étape 6 : Faire une régression par la méthode des moindres carrés à partir N_p points discrets $p_f(\gamma_j)$ pour avoir la courbe de fragilité suivant l'hypothèse log-normale :

$$(\hat{A}_m, \hat{\beta}) = \arg \min_{A_m, \beta} \sum_j^{N_p} [F_r(\gamma_j; A_m, \beta) - \hat{p}_f(\gamma_j)]^2 \quad (2.3)$$

L'algorithme de la méthode est présenté à la figure 2.1.

2.2.2 Méthode du maximum de vraisemblance - MLE

Proposée par Shinozuka *et al.* [11], les deux paramètres de la courbe de fragilité sont identifiés par la méthode du maximum de vraisemblance. La démarche suivie consiste alors à modéliser l'issue des expériences numériques par une variable aléatoire de Bernoulli Y . En effet, pour chaque simulation numérique dont $\text{PGA} = a_i$, on a deux issues possibles : soit on a atteint le niveau critique et on a défaillance ($y_i = 1$), soit on n'a pas défaillance ($y_i = 0$). La fonction de vraisemblance à maximiser pour ce problème s'écrit :

$$L(A_m, \beta) = \prod_{i=1}^{N_s} [F_r(a_i; A_m, \beta)]^{y_i} [1 - F_r(a_i; A_m, \beta)]^{1-y_i} \quad (2.4)$$

La médiane A_m et l'écart-type logarithme β dans l'équation (2.4) sont la solution du problème d'optimisation associé :

$$(\hat{A}_m, \hat{\beta}) = \arg \min_{A_m, \beta} (-\ln L) \quad (2.5)$$

La procédure complète pas-à-pas de la méthode est présentée en 5 étapes :

- Étape 1 : Générer ou choisir N_s séismes indépendants $a_i(t), i = 1, \dots, N_s$, ayant leur PGA correspondant $\text{PGA}_i = a_i = \max_t |a_i(t)|$,
- Étape 2 : Calculer les réponses temporelles sous excitations $\{a_i(t)\}$ et vérifier la défaillance pour chaque cas d'excitation $\{a_i(t)\}$. Pour rappel, la défaillance est vérifiée à travers la fonction d'état limite : $G(\mathbf{Z}) \leq 0$ s'il y a la défaillance et $G(\mathbf{Z}) > 0$ sinon,
- Étape 3 : Considérer la variable aléatoire de Bernoulli Y , si l'accélération $\{a_i(t)\}$ de $\text{PGA}_i = a_i$, provoque la défaillance, Y prend la valeur $y_i = 1$ et $y_i = 0$ sinon,
- Étape 4 : Établir la fonction du maximum de vraisemblance avec deux paramètres A_m et β par l'équation (2.4),
- Étape 5 : Identifier A_m et β de la courbe de fragilité grâce au problème d'optimisation associé par l'équation (2.5).

L'algorithme de la méthode est présenté à la figure 2.2.

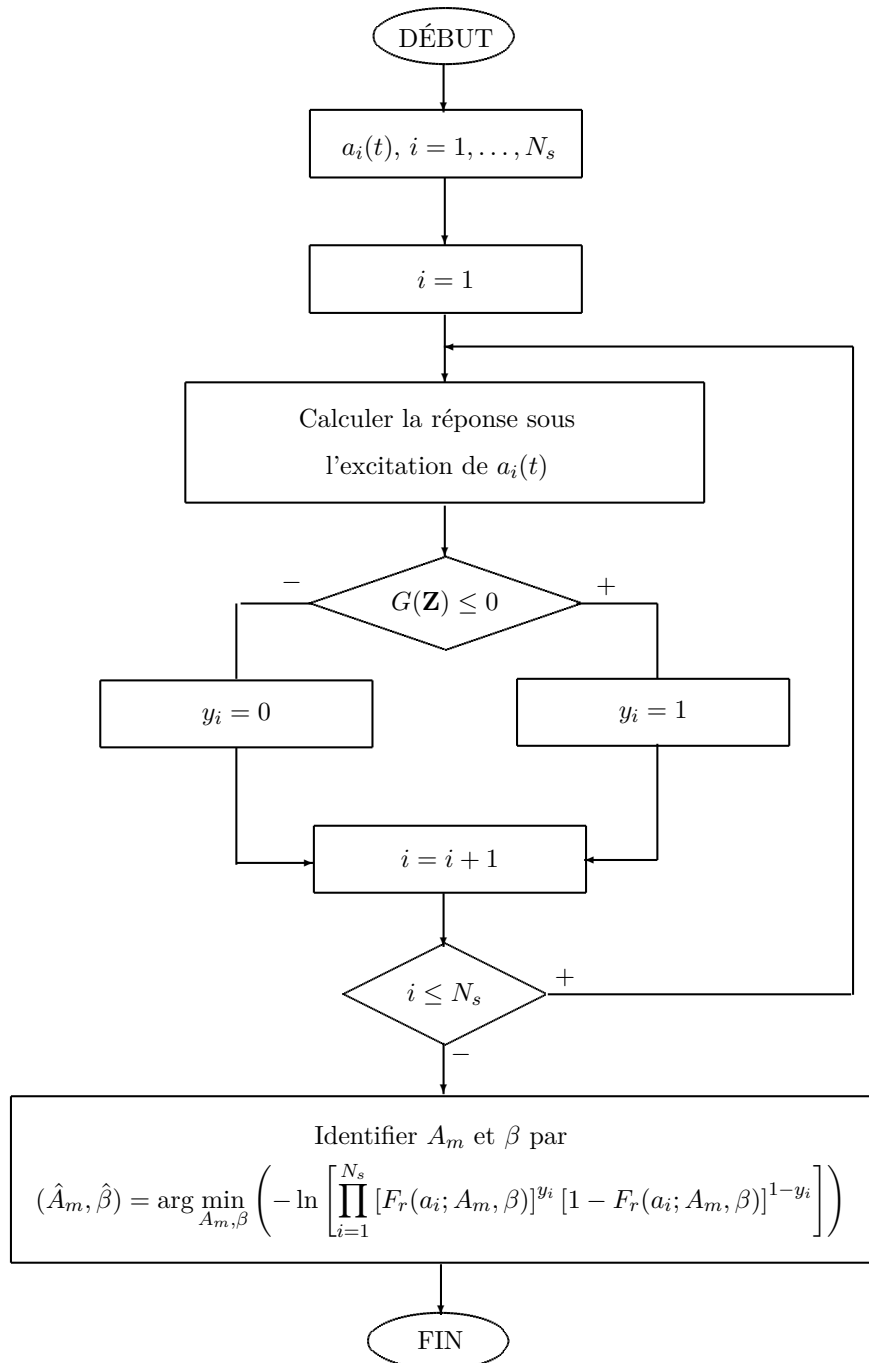


FIGURE 2.2. Algorithme de la méthode du maximum de vraisemblance (MLE)

2.2.3 Méthode basée sur le modèle de demande et capacité sismiques - PSDM/PSCM

On rappelle que cette méthode se base sur les modèles probabilistes (loi log-normale) de la sollicitation sismique $D \sim p_{LN}(\delta; S_D(a), \beta_D)$ et de la résistance sismique $C \sim p_{LN}(\delta; S_C, \beta_C)$. A partir des données et des simulations numériques, on obtient d'abord les paramètres de deux modèles. Étant donné que la défaillance est définie par : $G = C - D \leq 0$ ou lorsque $D \geq C$, on obtient facilement la probabilité de défaillance d'où la courbe de fragilité donnée par :

$$F_r(a) = P[D \geq C | A = a] = \Phi \left(\frac{\ln(S_D(a)/S_C)}{\sqrt{\beta_D^2 + \beta_C^2}} \right) \quad (2.6)$$

La procédure complète pas-à-pas de cette méthode se résume par les 5 étapes suivantes :

- Étape 1 : Générer ou choisir N_s séismes indépendants $a_i(t), i = 1, \dots, N_s$ ayant leur PGA correspondant $\text{PGA}_i = a_i = \max_t |a_i(t)|$.
- Étape 2 : Calculer les demandes sismiques δ_i (qui peuvent être les déplacements, contraintes maximum...) sous excitations $a_i(t)$ de $\text{PGA}_i = a_i$ avec $i = 1, \dots, N_s$,
- Étape 3 : Faire une régression linéaire à partir des nuages de points (a_i, δ_i) afin d'obtenir les coefficients c_1 et c_2 suivant le modèle $\ln(\delta) = \ln(c_1) + c_2 \ln(a)$. Et puis la valeur β_D est

$$\text{calculée par l'équation } \beta_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_s} [\ln \delta_i - \ln(c_1 a_i^{c_2})]^2}{N_s - 2}},$$

- Étape 4 : Identifier les deux paramètres de la capacité sismique de la structure suivant la loi log-normale S_C et β_C ,
- Étape 5 : Estimer les deux paramètres de la courbe de fragilité par $A_m = \exp \left[\frac{\ln S_C - \ln c_1}{c_2} \right]$
et $\beta = \frac{\sqrt{\beta_D^2 + \beta_C^2}}{c_2}$ et finalement, la courbe de fragilité sismique est : $F_r(a) = \Phi \left[\frac{\ln(a/A_m)}{\beta} \right]$

L'algorithme de la méthode est présenté à la figure 2.3.

2.2.4 Méthode de simulations de Monte Carlo - MCS

Dans le but de comparer des méthodes existantes, la méthode de simulations de Monte Carlo est considérée comme "exacte" avec un nombre de simulations suffisamment important. Elle découle de la définition de l'équation (1.1) où la fragilité sismique d'une structure est considérée comme la probabilité conditionnelle de défaillance pour une intensité du mouvement du sol. Chaque point de la courbe de fragilité $F_r(a)$ peut être déduit par l'évaluation de la probabilité de défaillance pour chaque niveau d'intensité du mouvement du sol a par la méthode de Monte Carlo :

$$F_r(a) = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0 | A = a] \cong \frac{\sum \mathbf{1}[G(\mathbf{Z}) \leq 0 | A = a]}{N_{s_a}} \quad (2.7)$$

où $\mathbf{1}[\cdot]$ est la fonction indicatrice qui est égale à 1 s'il y a la défaillance et 0 sinon. N_{s_a} est le nombre total de séismes ayant la même intensité sismique $\text{PGA} = a$ et $\sum \mathbf{1}[G(\mathbf{Z}) \leq 0 | A = a]$ est en fait le nombre des séismes d'intensité a provoquant la défaillance. La qualité de l'approximation dans l'équation 2.7 dépend de N_{s_a} qui doit être suffisamment grand en fonction de la probabilité de défaillance visée.

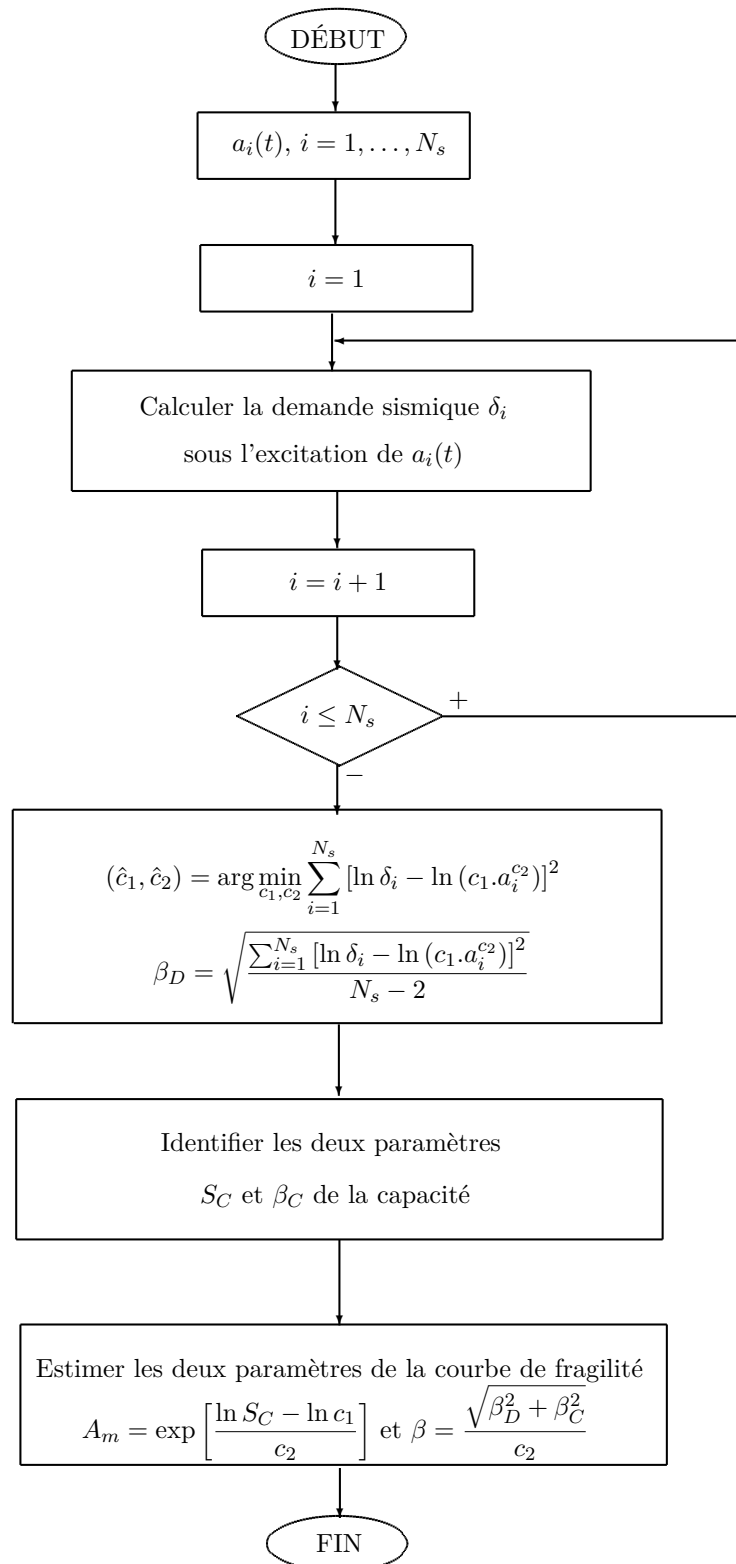


FIGURE 2.3. *Algorithme de la méthode basée sur le modèle de demande et capacité sismiques (PSDM/PSCM)*

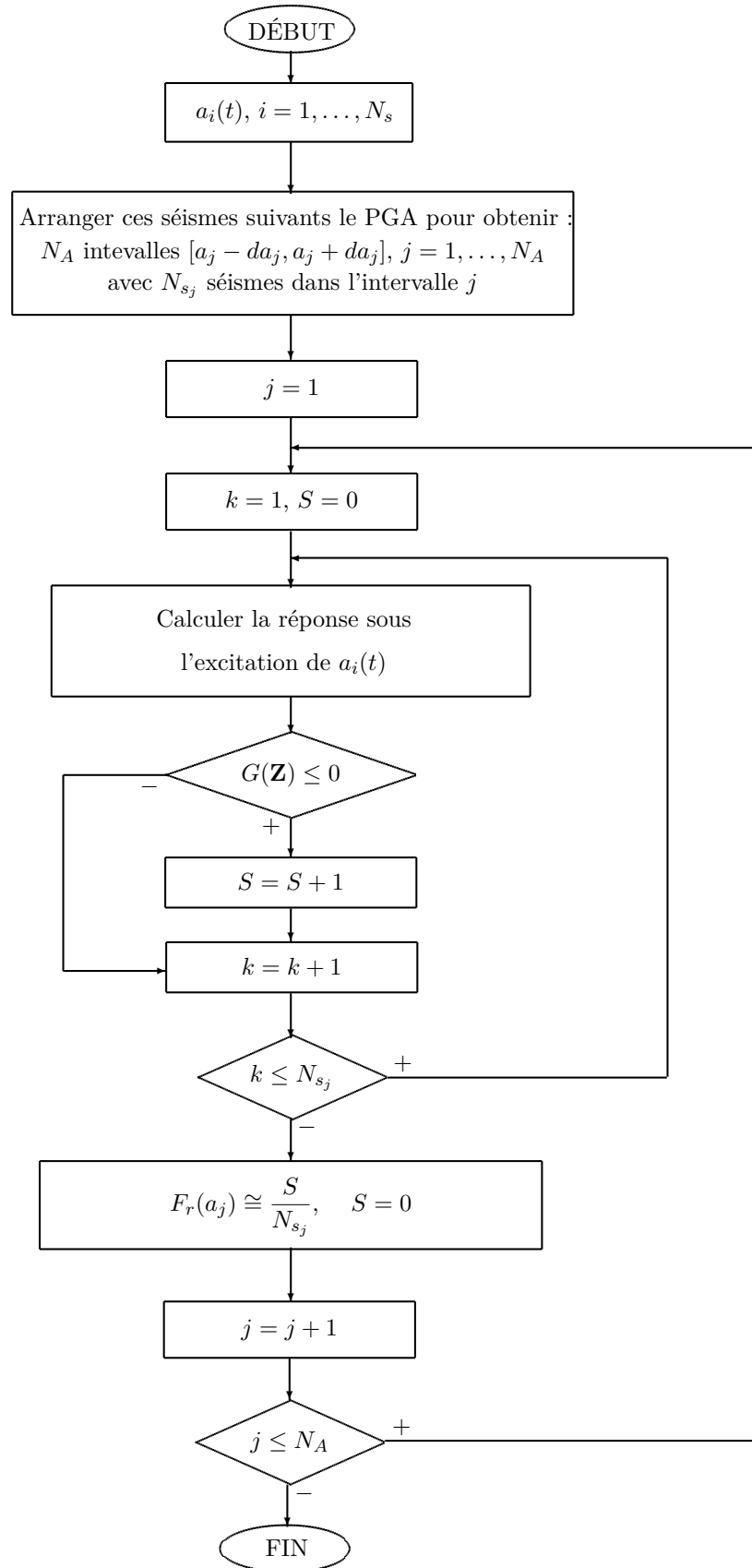


FIGURE 2.4. Algorithme pour le calcul de la fragilité par simulations de Monte Carlo (MCS)

À noter que l'intensité sismique notée par la variable A (ici le PGA) est aléatoire, donc la génération d'un ensemble de N_{s_a} accélérations de même PGA est impossible et cette condition est rendue plus souple si PGA appartient à l'intervalle $[a - da, a + da]$.

La procédure complète de la méthode est détaillée en 4 étapes [82] :

- Étape 1 : Générer un nombre important N_s de séismes indépendants $a_i(t), i = 1, \dots, N_s$,
- Étape 2 : Arranger les séismes en fonction de PGA qui appartiennent à l'intervalle $[a_j - da_j, a_j + da_j]$.

On obtient N_A intervalles et dans l'intervalle j , on a N_{s_j} séismes, ainsi $N_s = \sum_{j=1}^{N_A} N_{s_j}$,

- Étape 3 : Calculer les réponses sous excitations sismiques et vérifier s'il y a défaillance,
- Étape 4 : Estimer la probabilité de défaillance par la méthode de Monte Carlo pour chaque intervalle de PGA par

$$F_r(a_j) \cong \frac{\sum \mathbf{1}[G(\mathbf{Z} \leq 0 | A = a \in [a_j - da_j, a_j + da_j])]}{N_{s_j}}, j = 1 \dots N_A. \quad (2.8)$$

L'algorithme de la méthode de Monte Carlo est donné à la figure 2.4.

2.3 Comparaison des méthodes existantes sur des exemples numériques

2.3.1 Définition des critères de comparaison

Pour comparer de façon quantitative les trois méthodes existantes présentées ci-dessus lors de leur application aux exemples numériques, il est nécessaire de définir des critères de comparaison. A noter que les données de référence sont les résultats obtenus par la méthode de simulations de Monte Carlo (MCS) (voir la sous-section 2.2.4) qui sont :

- N_A valeurs de probabilité de défaillances : $F_r^{\text{MCS}}(a_i) i = 1, \dots, N_A$.
- De plus, MCS permet aussi de calculer la probabilité de défaillance du site par l'équation :

$$p_f^{\text{MCS}} = \frac{\text{Nombre de simulations provoquant la défaillance}}{\text{Nombre total de simulations}} \quad (2.9)$$

Plus les résultats d'une méthode sont proches de ceux de la MCS, plus la méthode est précise. Dans cette thèse, nous proposons deux critères suivants pour la comparaison des méthodes existantes.

- **Critère 1 : Erreur Quadratique Moyenne - EQM**

L'erreur quadratique moyenne est définie par :

$$\text{EQM} = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} [F_r^{\text{X}}(a_i) - F_r^{\text{MCS}}(a_i)]^2 \quad (2.10)$$

où $F_r^{\text{X}}(a)$ est la courbe de fragilité estimée par l'une des trois méthodes : SIS, MLE ou PSDM/PSCM. L'EQM peut être considérée comme une mesure de la distance entre les données obtenues par la méthode MCS et la courbe obtenue par une autre méthode. L'efficacité d'une méthode exige que cette valeur soit minimale.

- **Critère 2 : ERreur Relative de la probabilité de défaillance - ERR(%)**

À partir de la courbe de fragilité estimée par une méthode existante $F_r^{\text{X}}(a)$, la probabilité de

défaillance peut être calculée en réalisant la "convolution" de la courbe de fragilité et la densité de probabilité de l'aléa sismique comme l'équation (1.4) présentée dans le chapitre 1 :

$$p_f^X = \int_{-\infty}^{+\infty} F_r^X(a) p_A(a) da \quad (2.11)$$

où $p_A(a)$ est la fonction de densité de probabilité de l'intensité sismique A .

L'ERR est définie comme l'erreur relative entre la probabilité de défaillance p_f^X obtenue par la méthode X (parmi les trois méthodes existantes) suivant la formule (2.11) et la probabilité de défaillance obtenue par la méthodes de simulations de Monte Carlo p_f^{MCS} évaluée suivant la formule (2.9) :

$$\text{ERR} = \frac{|p_f^X - p_f^{\text{MCS}}|}{p_f^{\text{MCS}}} \times 100\% \quad (2.12)$$

On remarque que pour l'évaluation p_f^X par l'équation (2.11), il est nécessaire d'évaluer la distribution de l'intensité sismique $p_A(a)$. En général, cette distribution est dérivée par la courbe d'aléa sismique (qui présente la probabilité annuelle de dépassement de l'intensité sismique) pour une région spécifique [83, 84] ou par l'apprentissage des réalisations des mouvements du sol (réelles ou synthétiques) utilisées dans les simulations numériques.

Dans le cadre de cette étude, si les mouvements du sol sont générés à partir du modèle de Boore, la densité de l'intensité sismique $p_A(a)$ peut être déterminée à partir de ces mouvements du sol par deux approches : paramétrique et non-paramétrique. Si l'on connaît *a priori* la loi de distribution de l'intensité sismique, on peut identifier les paramètres de la loi par la méthode maximum de vraisemblance. En revanche, si on ne la connaît pas, l'approche non-paramétrique, par exemple la méthode d'estimation par noyau [85], doit être utilisée.

2.3.2 Exemple 1 : Oscillateurs linéaire et non-linéaire

• Excitation sismique

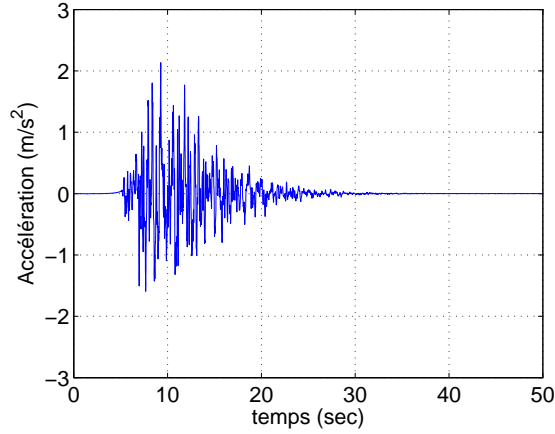
Le modèle de Boore [46] présenté dans le chapitre 1 est utilisé pour générer les mouvements du sol. La figure 2.5a présente une simulation de séisme de magnitude $M = 7$ à la distance de source au site $R = 9$ km. Pour estimer la densité du pic d'accélération $p_A(a)$, il faut d'abord générer une population importante des $N = 2 \times 10^5$ mouvements du sol, on obtient ensuite les PGA correspondants $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. En ce qui concerne la loi *a priori* inconnue du PGA, l'approche non-paramétrique est appliquée. Alors l'estimateur non-paramétrique par la méthode du noyau de la densité est :

$$p_A(a) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{a - a_i}{h}\right) \quad (2.13)$$

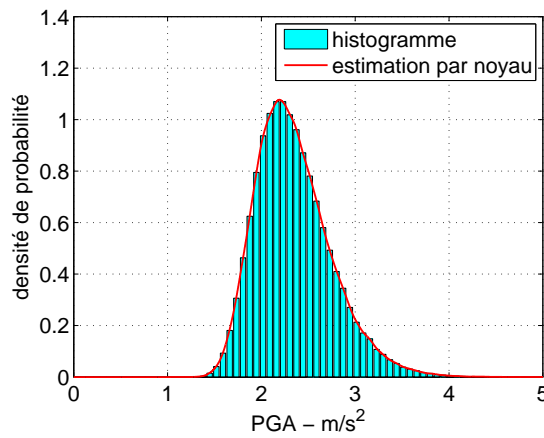
où K est un noyau (*kernel en anglais*) et h un paramètre nommé fenêtre, qui régit le degré de lissage de l'estimation. En pratique, on utilise souvent des noyaux symétriques et très fréquemment un noyau gaussien :

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (2.14)$$

On utilise cette approche pour estimer la densité de probabilité de PGA du site (M=7, R=9) avec $h = 0.01$ m/s². Le résultat obtenu est représentée dans la figure 2.5b. On note un bon accord entre elle et l'histogramme. Cette densité sera utilisée pour calculer le critère ERR(%) défini dans la sous-section 2.3.1.



(a) Accélération du sol



(b) Distribution de PGA

FIGURE 2.5. Illustration d'une simulation de séisme et distribution de pic d'accélération pour un site ($M = 7, R = 9$ km)

• Modèles de structures

On considère trois modèles de structure à 1DDL, souvent utilisés en génie parasismique. Il s'agit d'un oscillateur linéaire, d'un oscillateur non-linéaire d'hystérésis de Bouc-Wen [86] et d'un oscillateur non-linéaire avec frottement sec (ou amortissement de Coulomb). L'équation qui régit la dynamique des oscillateurs s'écrit :

$$\text{Linéaire} : \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = -a(t) \quad (2.15)$$

$$\text{Bouc-Wen} : \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2(\alpha x(t) + (1 - \alpha)w(t)) = -a(t) \quad (2.16)$$

$$\text{avec } \dot{w}(t) = C_1\dot{x}(t) - C_2|\dot{x}(t)||w(t)|^{n_d-1}w(t) - C_3\dot{x}(t)|w(t)|^{n_d}$$

$$\text{Coulomb} : \ddot{x}(t) + \mu g \text{Sgn}(\dot{x}(t)) + \omega_0^2x(t) = -a(t) \quad (2.17)$$

où ω_0 (rad/s) est la pulsation propre non amortie ; ζ est le taux d'amortissement ; pour le modèle de Bouc-Wen : $w(t)$ est le déplacement d'hystérésis, et $\alpha, C_1, C_2, C_3, n_d$ sont des constantes ; pour le modèle de Coulomb : μ est le coefficient de frottement, $a(t)$ est l'accélération du sol et g est l'accélération gravitationnelle. La figure 2.6 présente les trois modèles.

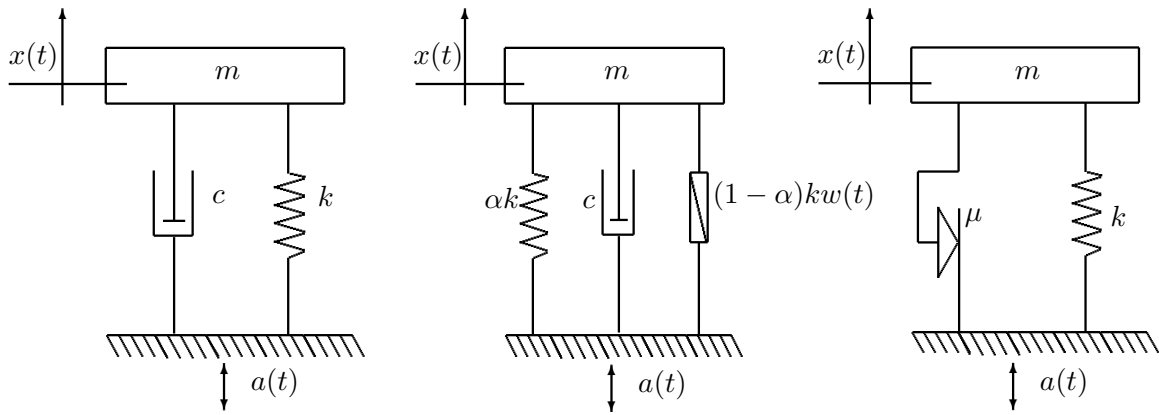
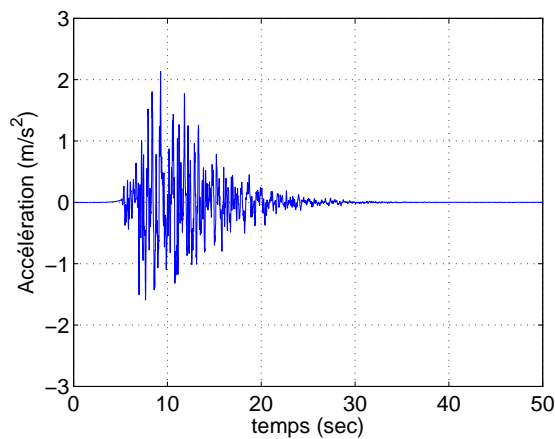
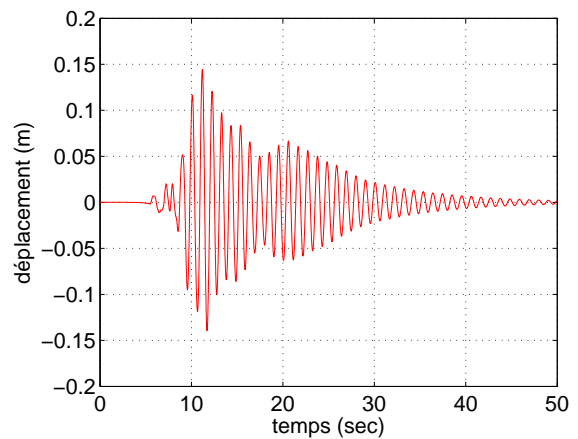


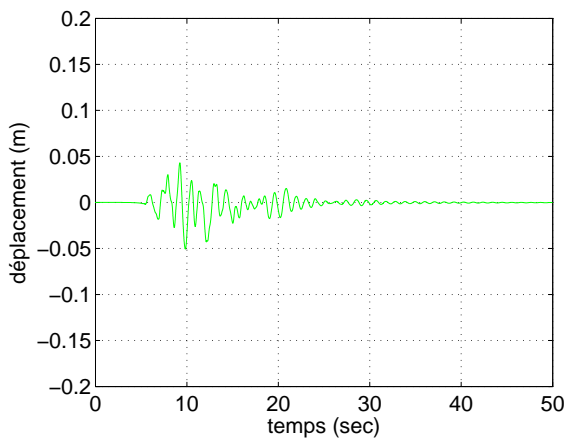
FIGURE 2.6. Oscillateurs



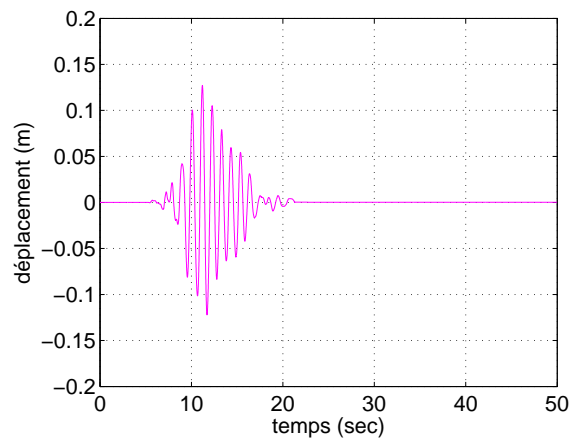
(a) Excitation sismique



(b) Linéaire



(c) Non-linéaire de Bouc-Wen



(d) Non-linéaire de Coulomb

FIGURE 2.7. Illustration d'une excitation sismique et réponses structurales obtenues

Dans l'application considérée, les valeurs numériques utilisées par Kafali et Grigoriu [3] sont réutilisées : $\omega_0 = 5.97$ (rad/s), $\zeta = 2\%$, et pour le modèle de Bouc-Wen $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0.5/\text{cm}^{n_d}$, $\alpha = 0.1$ et $n_d = 1$. Les paramètres ont pour valeurs numériques $\mu = 0.01$ et $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ pour le modèle de Coulomb.

La procédure d'évaluation de la réponse déterministe des oscillateurs correspondants à chaque

réalisation de l'excitation sismique générée à partir du modèle de Boore, se fait sur un schéma numérique de Runge-Kutta disponible sous le logiciel *Matlab*. La figure 2.7 donne un exemple d'excitation et des réponses temporelles correspondantes pour les trois systèmes.

La sûreté des systèmes est vérifiée par un critère de défaillance traduisant le passage à une limite critique x_0 et la défaillance est atteinte lorsque le déplacement maximum absolu est supérieur ou égal à x_0 , c'est-à-dire : $G(\mathbf{Z}) = x_0 - \max_t |x(t)|$. La limite critique est choisie pour les trois niveaux de dommages : $x_0 = 7$ cm, $x_0 = 10$ cm et $x_0 = 13$ cm.

• Analyse de fragilité

L'analyse de fragilité sismique des structures étudiées est d'abord réalisée par les trois méthodes présentées dans la section 2.2 : méthode de normalisation de l'intensité sismique (SIS), méthode du maximum de vraisemblance (MLE) et méthode basée sur les modèles de demande et capacité sismiques (PSDM/PSCM). Pour les trois méthodes, on utilise l'ensemble de $N_s = 5000$ enregistrements d'accélération du sol générés par le modèle de Boore.

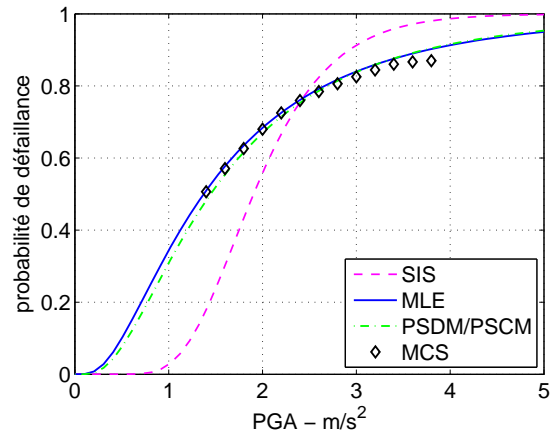
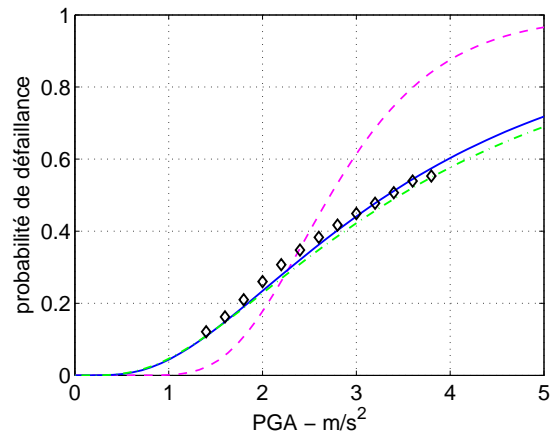
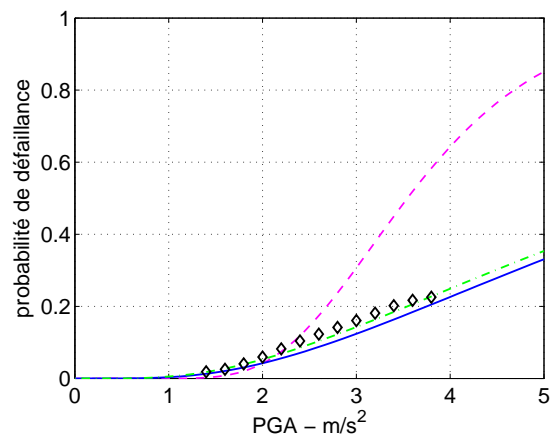
- Pour la méthode SIS, on choisit $N_p = 10$ points uniformément distribués sur la gamme de l'intervalle $[0.1, 5.2]$ m/s² du PGA. Les accélérations du sol sont normées à 1m/s² et puis en multipliant avec des intensités sismiques considérées γ_j avec $j = 1, \dots, 10$, on a ainsi des groupes de 5000 accélérations de même intensité et 5000 réponses structurales correspondantes. On estime le taux de défaillance pour chaque intensité sismique. Grâce à N_p taux de défaillance, les deux paramètres de la courbe de fragilité sont identifiés par régression avec la méthode des moindres carrés.
- Pour la méthode MLE et PSDM/PSCM, les accélérations du sol ne sont pas normées. Elles sont utilisées pour déterminer les réponses structurales. On obtient un ensemble de points (a_i, y_i) pour la méthode MLE et un nuage de points (a_i, δ_i) pour la méthode PSDM/PSCM, où $i = 1, \dots, 5000$. Deux paramètres de courbes de fragilité sont identifiés par la méthode MLE à partir des (a_i, y_i) ou par la méthode PSDM/PSCM à partir des (a_i, δ_i) .

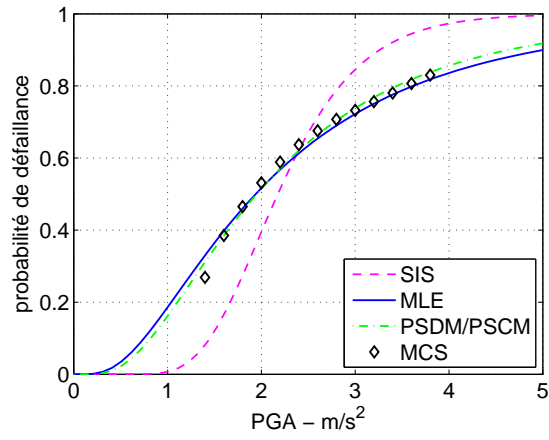
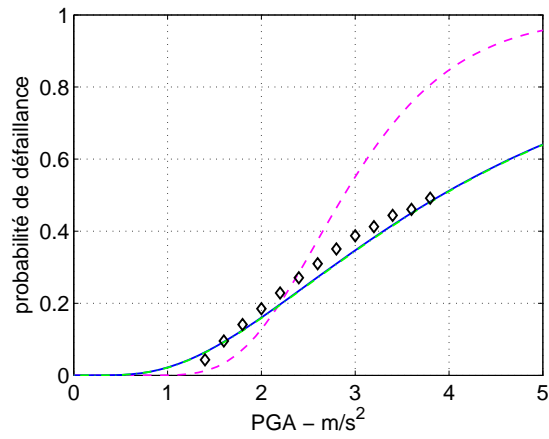
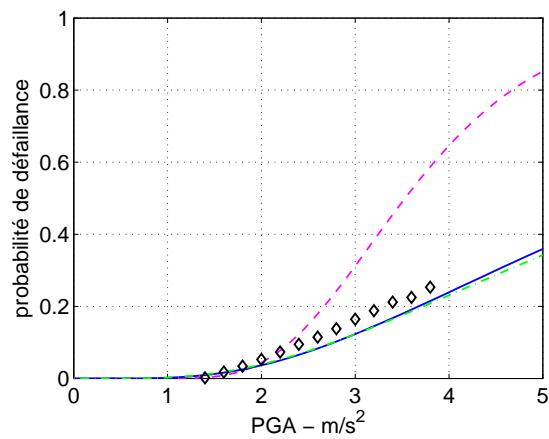
Puis la méthode MCS est aussi effectuée mais avec un nombre important de simulations 2×10^5 . À partir des mouvements du sol générés, on constate que les PGA correspondants sont distribués principalement dans l'intervalle $[1.5, 3.8]$ m/s², ils sont alors arrangés en $N_A = 13$ groupes dans cet intervalle. L'intervalle de PGA d'un groupe est de $[a_j - 0.1, a_j + 0.1]$ m/s² avec $j = 1, \dots, N_A$. Le taux de défaillance pour chaque groupe est ensuite estimé. On obtient $N_A = 13$ points de défaillance sur la courbe de fragilité.

En résumé, les paramètres pris par les méthodes sont les suivants :

- Méthode SIS : $N_s = 5000$ séismes, normés suivant les PGA = $[0.1, 0.4, 0.7, \dots, 5.2]$ m/s²,
- Méthode MLE : $N_s = 5000$ séismes, on obtient $\{a_i, y_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$,
- Méthode PSDM/PSCM : $N_s = 5000$ séismes, on obtient $\{a_i, \delta_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$,
- Méthode MCS : $N = 2 \times 10^5$ séismes, arrangés en 13 groupes $[a_i - 0.1; a_i + 0.1]$ m/s².

Les résultats des courbes de fragilité pour les trois systèmes mécaniques sont représentés dans les figures 2.8, 2.9 et 2.10. Pour chaque système, on obtient trois cas correspondants à trois critères de défaillance de $x_0 = 7$ cm, $x_0 = 10$ cm et $x_0 = 13$ cm. Les taux de défaillance obtenus par la méthode MCS sont aussi montrés et représentés par les symboles "diamants" sur les figures. Le tableau 2.1 détaille les paramètres des courbes obtenues par les trois méthodes SIS, MLE et PSDM/PSCM.

(a) $x_0 = 7cm$ (b) $x_0 = 10cm$ (c) $x_0 = 13cm$ FIGURE 2.8. *Oscillateur linéaire*

(a) $x_0 = 7\text{cm}$ (b) $x_0 = 10\text{cm}$ (c) $x_0 = 13\text{cm}$ FIGURE 2.9. *Oscillateur non-linéaire de Bouc-Wen*

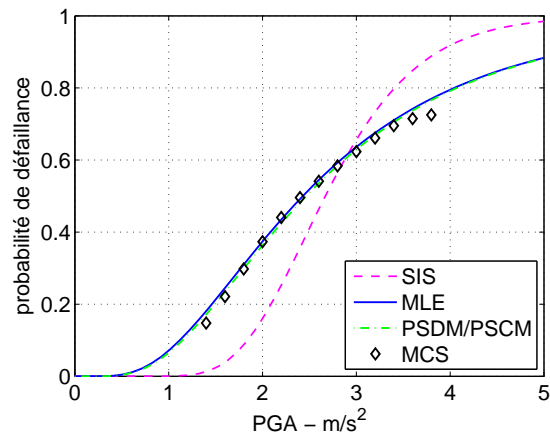
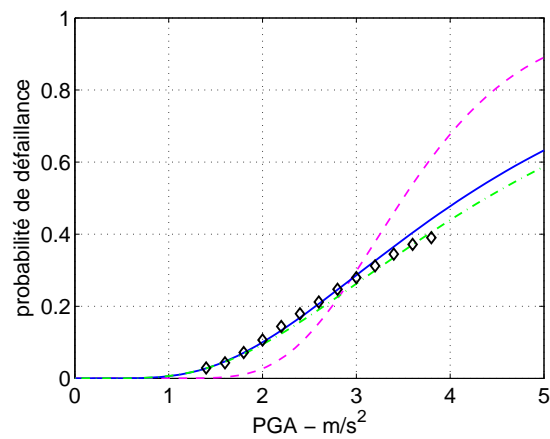
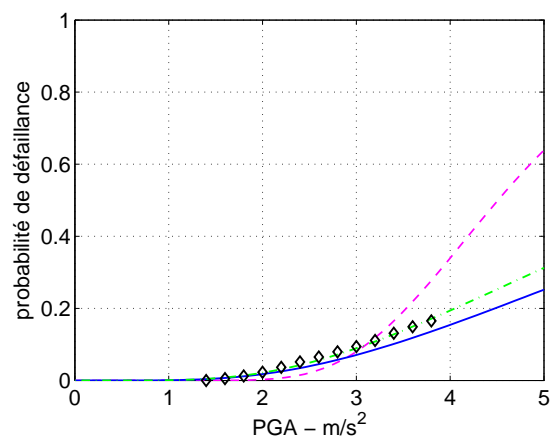
(a) $x_0 = 7cm$ (b) $x_0 = 10cm$ (c) $x_0 = 13cm$ FIGURE 2.10. *Oscillateur non-linéaire de Coulomb*

TABLEAU 2.1. Paramètres des courbes de fragilité

Systèmes	Seuil de défaillance	Méthode SIS		Méthode MLE		PSDM/PSCM	
		A_m	β	A_m	β	A_m	β
Linéaire	$x_0 = 7$	1.90	0.33	1.37	0.78	1.44	0.73
	$x_0 = 10$	2.72	0.33	3.33	0.70	3.46	0.73
	$x_0 = 13$	3.54	0.33	6.82	0.71	6.59	0.73
Bouc-Wen	$x_0 = 7$	2.17	0.31	1.93	0.74	1.95	0.67
	$x_0 = 10$	2.88	0.32	3.91	0.67	3.92	0.67
	$x_0 = 13$	3.53	0.33	6.29	0.63	6.57	0.67
Coulomb	$x_0 = 7$	2.67	0.29	2.42	0.60	2.46	0.59
	$x_0 = 10$	3.50	0.29	4.12	0.56	4.38	0.59
	$x_0 = 13$	4.51	0.29	7.65	0.63	6.69	0.59

- **Comparaison des résultats**

On constate que les courbes de fragilité obtenues sont très différentes. Les courbes obtenues par MLE et PSDM/PSCM sont les meilleures approximations des points discrets obtenus par la méthode MCS. Plus précisément, la courbe obtenue par la méthode SIS est très "raide" par rapport aux autres. La forte pente de cette courbe indique que sa dispersion n'est pas importante. En effet, avec les valeurs des paramètres représentés dans le tableau 2.1, on observe que les β obtenus par SIS sont plus petits ($\beta \leq 0.33$) que ceux obtenus par les méthodes MLE et PSDM/PSCM ($\beta \geq 0.56$).

TABLEAU 2.2. Oscillateurs : Comparaison de deux critères

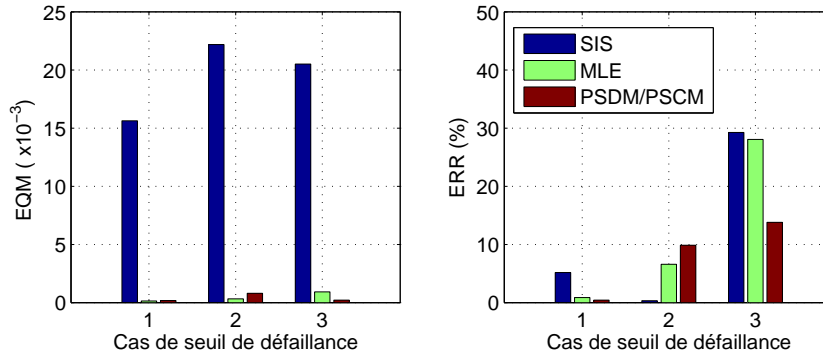
Systèmes	Seuil de défaillance	Méthode SIS		Méthode MLE		PSDM/PSCM	
		EQM $\times 10^{-3}$	ERR%	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%
Linéaire	$x_0 = 7$	22.43	5.17	0.19	0.87	0.28	0.42
	$x_0 = 10$	25.90	0.31	0.32	6.59	0.68	9.86
	$x_0 = 13$	27.24	29.27	0.81	28.05	0.18	13.80
Bouc-Wen	$x_0 = 7$	18.41	6.71	0.48	2.51	0.27	1.72
	$x_0 = 10$	27.36	6.24	0.78	11.95	0.86	12.62
	$x_0 = 13$	25.82	41.71	0.93	28.18	1.00	26.22
Coulomb	$x_0 = 7$	20.32	28.46	0.41	0.72	0.28	1.34
	$x_0 = 10$	9.71	35.28	0.36	3.08	0.21	10.07
	$x_0 = 13$	1.83	50.42	0.40	28.15	0.02	10.53

La comparaison est effectuée en considérant deux critères : erreur quadratique moyenne (EQM) et erreur relative (ERR(%)). Cette comparaison est résumée dans le tableau 2.2 et représentée aussi graphiquement dans la figure 2.11.

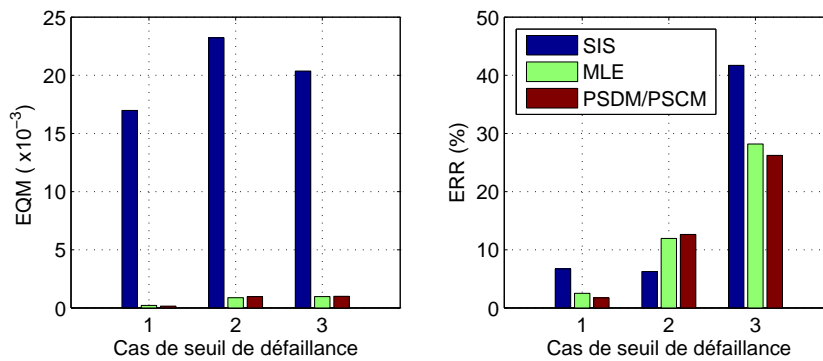
Les deux critères montrent très clairement que les méthodes MLE et PSDM/PSCM donnent des résultats plus précis que la méthode SIS. Les EQM de la méthode SIS sont très importants dans tous les cas. Un bon accord entre les deux méthodes MLE et PSDM/PSCM semble valide pour

les deux premiers cas de seuils $x_0 = 7\text{cm}$ et $x_0 = 10\text{cm}$, mais pas bon pour le dernier cas de seuil $x_0 = 13\text{cm}$ où la méthode PSDM/PSCM est meilleure que celle de MLE.

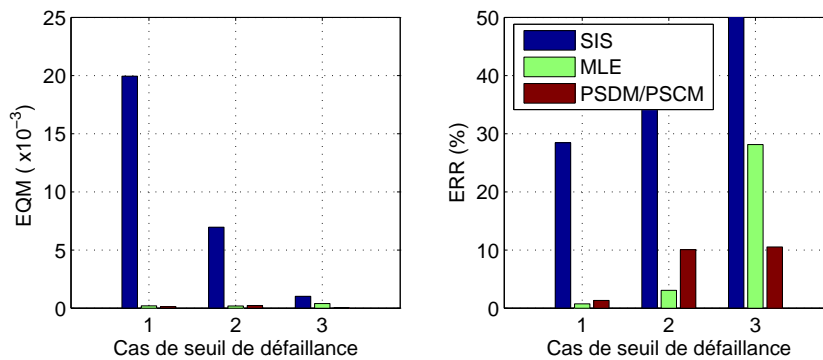
L'ERR de la méthode MLE qui croît très rapidement lorsque le seuil de défaillance augmente. Au dernier cas ($x_0 = 13\text{cm}$), l'ERR est très importante : ERR = 28.05% pour le cas linéaire, ERR = 28.18% pour le cas non-linéaire de Bouc-Wen et ERR = 28.15% pour le cas non-linéaire de Coulomb.



(a) Oscillateur linéaire



(b) Oscillateur non-linéaire de Bouc-Wen



(c) Oscillateur non-linéaire de Coulomb

FIGURE 2.11. Oscillateurs : Comparaison de deux critères EQM et ERR

2.3.3 Exemple 2 : Bâtiment à 8 étages

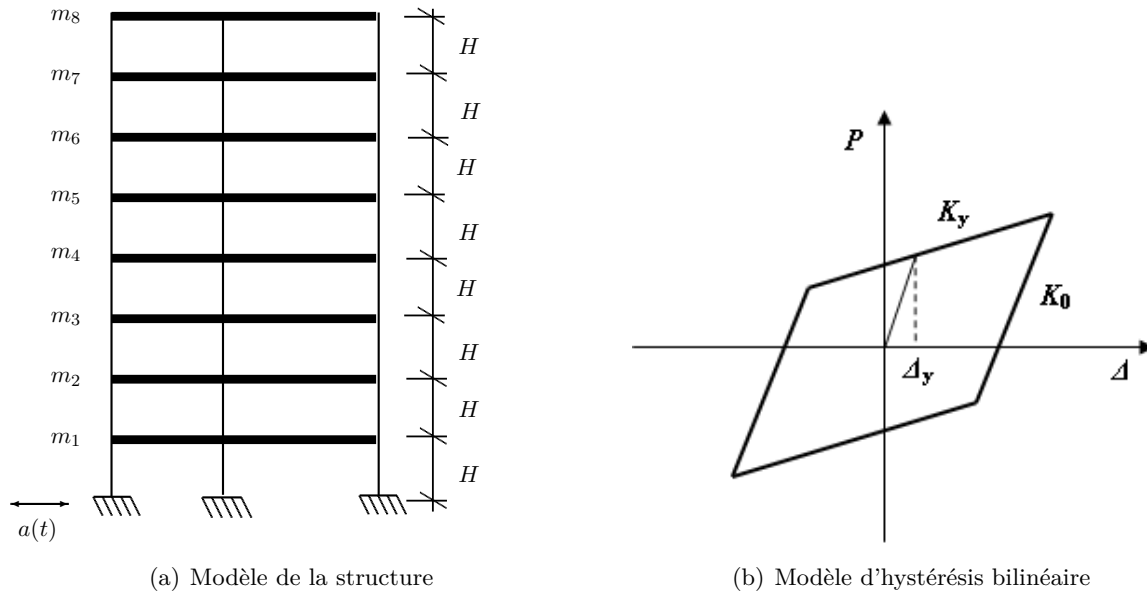


FIGURE 2.12. Bâtiment de 8 étages

- **Excitation sismique**

Les mouvements générés par le modèle de Boore [46] pour un site $M = 7$ et $R = 9$ km, présentés dans l'exemple 1, sont réutilisés dans cet exemple comme excitation sismique.

- **Modèle de la structure**

Un bâtiment de huit étages traité par Li et Chen [80, 87], est considéré dans cet exemple. La structure est représentée sur la figure 2.12. Les valeurs numériques des masses sont répertoriées dans le tableau 2.3. Le modèle d'hystérésis bilinéaire $K_y/K_0 = 0.1$ (figure 2.12 à droite) est considéré pour modéliser le comportement inélastique des rigidités de cisaillement \mathbf{K} .

TABLEAU 2.3. Masses concentrées de la structure

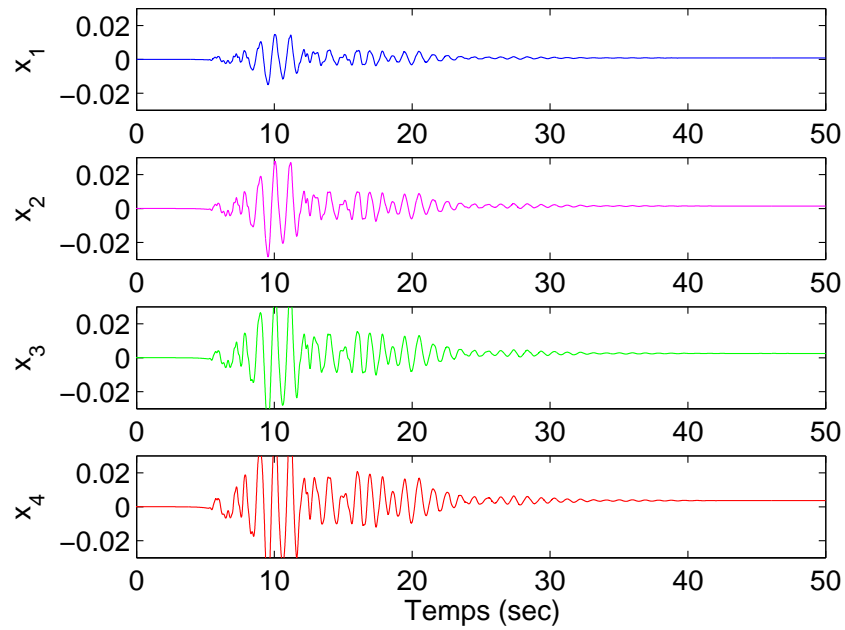
Étage	1	2	3	4	5	6	7	8
Masse $\times 10^5$ kg	1.2	1.2	1.2	1.1	1.1	1.0	0.9	0.8

La rigidité initiale vaut $K_0 = 2.1 \times 10^8$ N/m et le seuil élastique est $\Delta_y = 0.01$ m. L'amortissement de Rayleigh est alors une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur : $\mathbf{C} = 0.01\mathbf{M} + 0.005\mathbf{K}$. La hauteur de chaque niveau est $H = 3.0$ m.

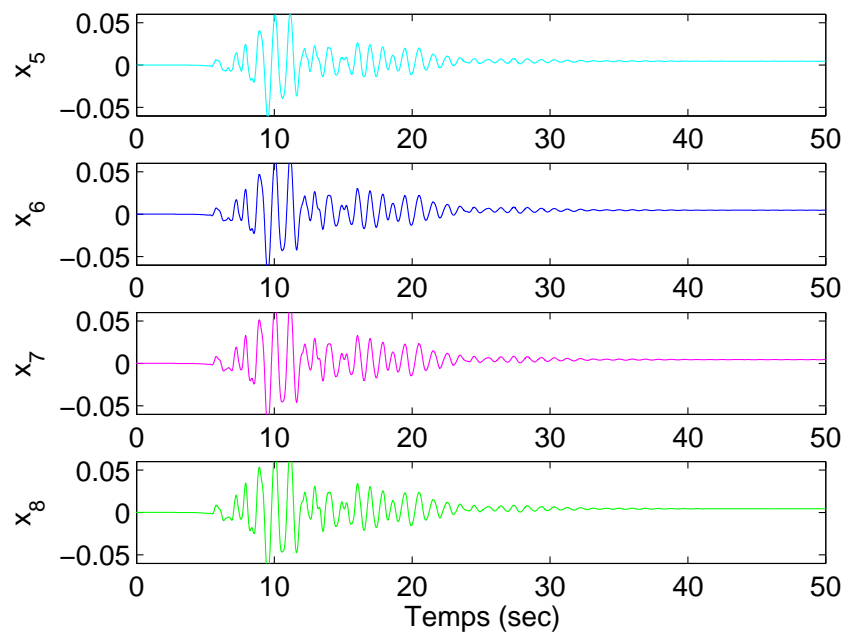
Le code de calcul par éléments finis ANSYS [88] est utilisé pour l'analyse structurale en dynamique non-linéaire. Le déplacement inter-étages temporel $\delta_i(t) = x_i(t) - x_{i-1}(t)$ à chaque étage est choisi pour caractériser la défaillance ou non défaillance du bâtiment. La défaillance est définie comme le déplacement inter-étage maximal $\delta = \max_{t,i} |\delta_i(t)|$ qui dépasse un seuil admissible δ_0 . On choisit trois niveaux de dommages : $\delta_0 = H/300$, $\delta_0 = H/200$ et $\delta_0 = H/100$.

- **Analyse de fragilité**

On prend les trois méthodes SIS, MLE et PSDM/PSCM présentées à la section 2.2 pour calculer les deux paramètres A_m et β de la courbe de fragilité de la structure. Des points sur la courbe



(a) Étage 1-4



(b) Étage 5-8

FIGURE 2.13. Illustration des déplacements du bâtiment

sont aussi obtenus par la méthode MCS. La procédure de calcul est la même que celle dans l'exemple 1. On résume ici les paramètres pris :

- Méthode SIS : $N_s = 5000$ séismes, normés suivant les PGA = $[0.1, 0.4, 0.7, \dots, 5.8]$ m/s².
- Méthode MLE : $N_s = 5000$ séismes, on obtient $\{a_i, y_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$,
- Méthode PSDM/PSCM : $N_s = 5000$ séismes, on obtient $\{a_i, \delta_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$
- Méthode MCS : $N = 1 \times 10^5$ séismes, arrangés en 13 groupes $[a_i - 0.1; a_i + 0.1]$ m/s²,

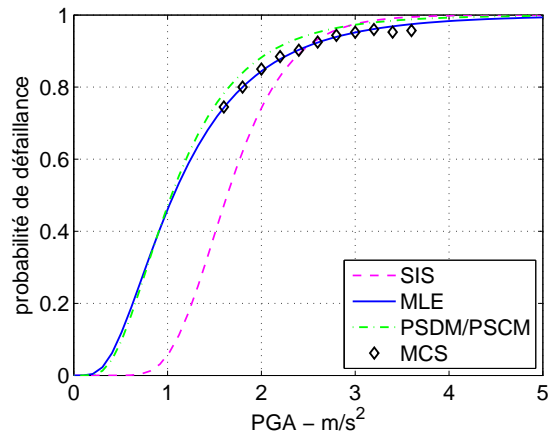
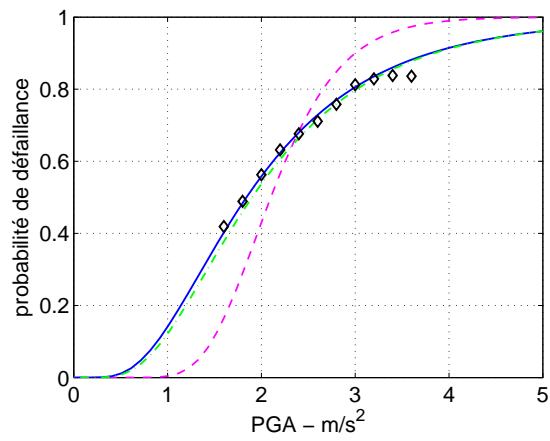
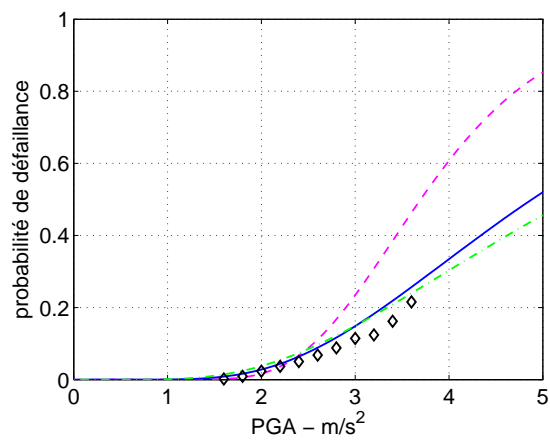
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/100$

FIGURE 2.14. Bâtiment de 8 étages : Courbes de fragilité

TABLEAU 2.4. Bâtiment de 8 étages : Paramètres des courbes de fragilité

Seuil de défaillance	Méthode SIS		Méthode MLE		PSDM/PSCM	
	A_m	β	A_m	β	A_m	β
$\delta_0 = H/300$	1.63	0.30	1.06	0.62	1.04	0.54
$\delta_0 = H/200$	2.10	0.27	1.84	0.56	1.90	0.54
$\delta_0 = H/100$	3.69	0.28	4.88	0.46	5.31	0.54

Les courbes de fragilité obtenues en utilisant les trois méthodes basées sur l'hypothèse log-normale sont présentées à la figure 2.14. Cette figure présente aussi les points discrets de fragilité obtenus à partir de la méthode MCS et ils sont représentés par les symboles "diamants". Les paramètres des courbes sont donnés dans le tableau 2.4.

• Comparaison des résultats

En observant la figure 2.14, on pourrait conclure que les courbes obtenues par MLE et PSDM/PSCM donnent les meilleures approximations des points discrets de fragilité. La courbe de fragilité par la méthode SIS est aussi très "raide", comme dans l'exemple 1. Les β obtenus par la méthode SIS présentés dans le tableau 2.4 sont inférieurs à ceux obtenus par les méthodes MLE et PSDM/PSCM. En revanche, les courbes obtenues par les méthodes MLE et PSDM/PSCM sont plus proches de celles obtenues par la méthode MCS.

TABLEAU 2.5. Bâtiment de 8 étages : Comparaison d'EQM et d'ERR

Seuil de défaillance	Méthode SIS		Méthode MLE		PSDM/PSCM	
	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%
$\delta_0 = H/300$	11.41	5.55	0.06	0.15	0.91	3.51
$\delta_0 = H/200$	17.48	5.13	0.32	0.40	0.57	2.14
$\delta_0 = H/100$	15.27	57.63	1.01	29.49	0.93	44.87

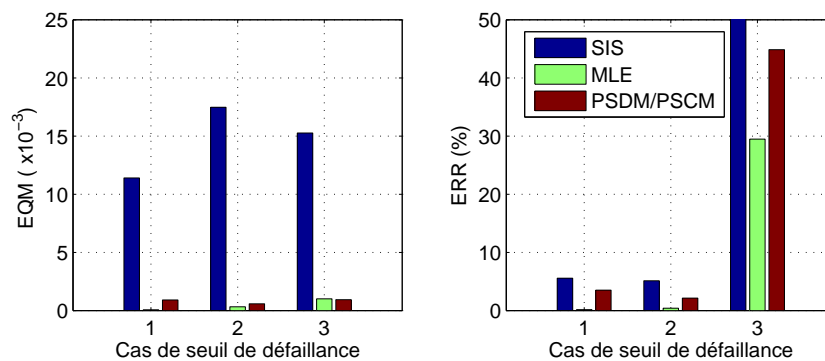


FIGURE 2.15. Bâtiment de 8 étages : Comparaison d'EQM et d'ERR

La comparaison est aussi effectuée en utilisant deux critères : erreur quadratique moyenne (EQM) et erreur relative de la probabilité de défaillance (ERR(%)). Cette comparaison est résumée dans le tableau 2.5 et illustrée par la figure 2.15. On constate que les résultats obtenus par les méthodes MLE et PSDM/PSCM sont meilleurs que ceux obtenus par la méthode SIS. Entre les

deux méthodes MLE et PSDM/PSCM, la méthode MLE est plus adaptée et meilleure que celle de PSDM/PSCM pour la plupart des critères de comparaison. Toutefois, l'ERR de la méthode MLE au dernier cas ($\delta_0 = H/100$) est très importante (ERR = 29.49%), comme dans l'exemple 1.

2.3.4 Exemple 3 : Portique en acier de 3 étages

- **Excitation sismique**

En ce qui concerne l'excitation sismique, le modèle de Boore [46] présenté dans l'exemple 1 est réutilisé dans cet exemple pour générer les mouvements de sol d'un site $M = 7$ et $R = 9$ km.

- **Modèle de structure**

On considère ici une structure de portique en acier fournie par Sudret et Mai [89]. Le matériau a un comportement non-linéaire non isotrope suivant le modèle de Giuffre-Menegotto-Pinto [90]. Nous présentons en figure 2.16 le modèle de la structure et le comportement non-linéaire. Il comporte trois travées de portées $L = 5$ m et trois étages. Chaque étage a une hauteur $H = 3$ m. Le code de calcul par éléments finis OpenSees [91] est utilisé pour l'analyse du système soumis à l'excitation sismique. La figure 2.17 donne un exemple d'excitation sismique horizontale et les réponses temporelles du portique.

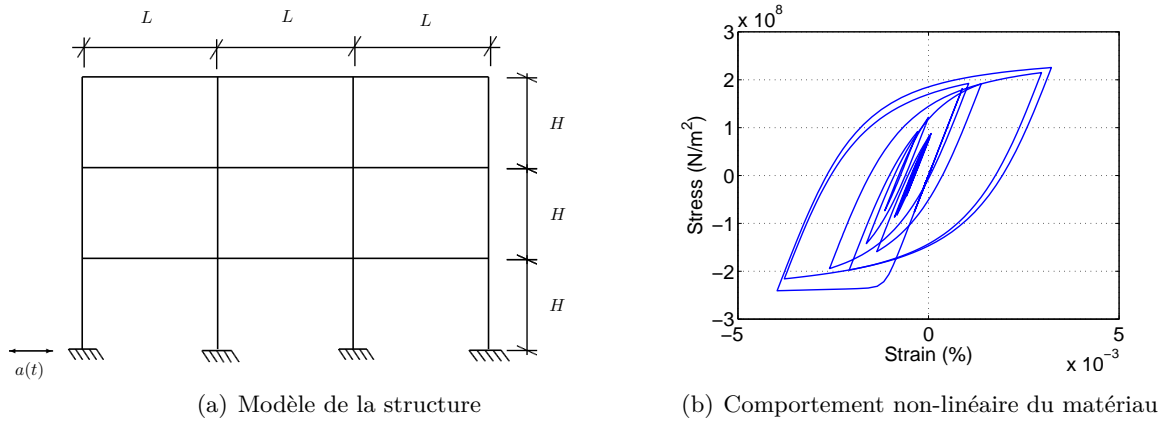


FIGURE 2.16. Portique en acier de 3 étages

- **Analyse de fragilité**

On prend les trois méthodes SIS, MLE et PSDM/PSCM présentées dans la section 2.2 pour calculer les deux paramètres A_m et β de la courbe de fragilité de la structure. Des points sur la courbe sont aussi obtenus par la méthode MCS. La procédure de calcul est la même que celle de l'exemple 1 et 2.

Les paramètres considérés sont les suivants :

- Méthode SIS : $N_s = 5000$ séismes, normés suivant les PGA = $[0.1, 0.4, 0.7, \dots, 5.8]$ m/s².
- Méthode MLE : $N_s = 5000$ séismes, on obtient $\{a_i, y_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$,
- Méthode PSDM/PSCM : $N_s = 5000$ séismes, on obtient $\{a_i, \delta_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$
- Méthode MCS : $N = 1 \times 10^5$ séismes, arrangés en 13 groupes $[a_i - da; a_i + da]$

La figure 2.18 présente les courbes de fragilité obtenues par les méthodes SIS, MLE et PSDM/PSCM et les points discrets par la méthode MCS. Les paramètres A_m et β des courbes de fragilité sont représentés dans le tableau 2.6.

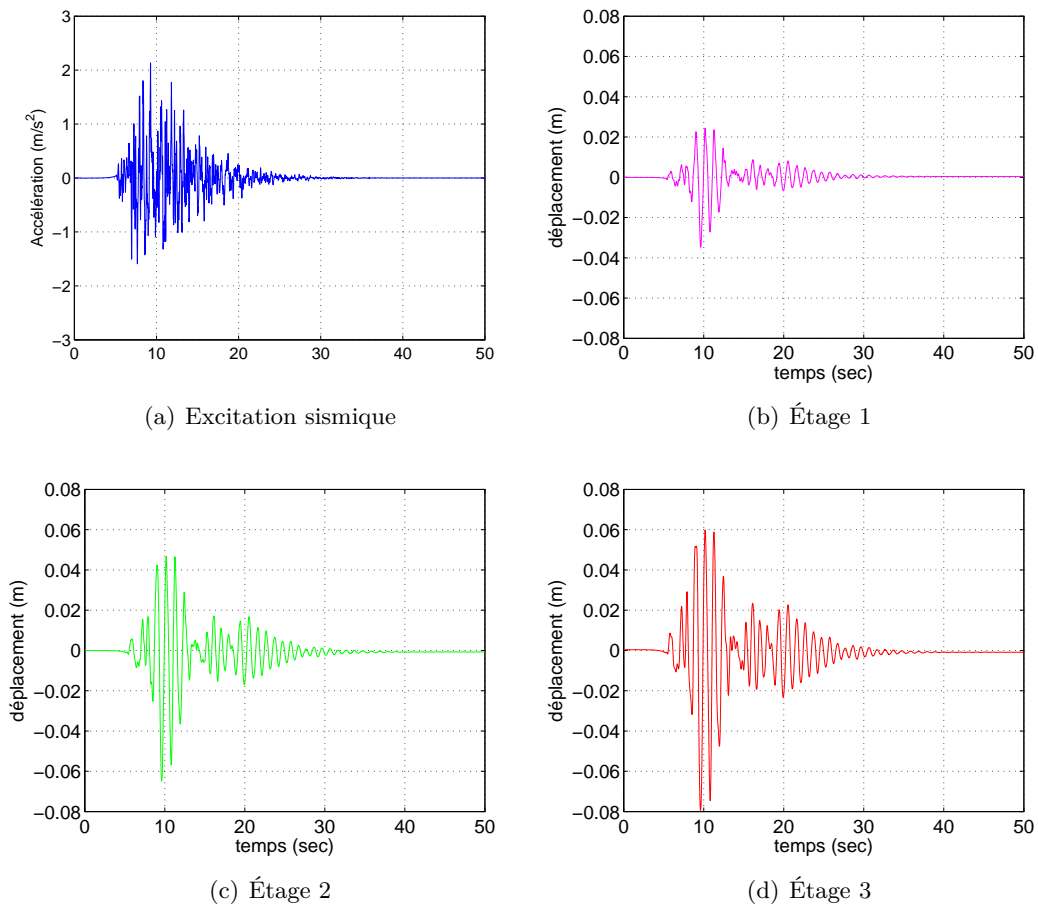


FIGURE 2.17. Illustration d'une excitation sismique et réponses structurales obtenues

• Comparaison de résultats

En observant la figure 2.18, on constate que les courbes de fragilité obtenues par les trois méthodes SIS, MLE et PSDM/PSCM sont éloignées. Avec les méthodes MLE et PSDM/PSCM, les courbes issues de deux méthodes se rapprochent aux deux premiers cas. Mais pour le dernier cas, l'écart entre les deux est significatif.

Les résultats des deux critères de comparaison sont détaillés dans le tableau 2.7 et illustrés dans la figure 2.19. L'EQM de la méthode SIS est plus grande par rapport à celle des deux méthodes MLE et PSDM/PSCM. Pour l'ERR des deux méthodes SIS et PSDM/PSCM, il est en accord pour les deux premiers cas de seuils de défaillance.

Les quantités montrent aussi que la méthode MLE est meilleure que la méthode PSDM/PSCM surtout pour le dernier cas. L'ERR de la méthode MLE dans ce cas est ainsi très importante (ERR = 19.78%).

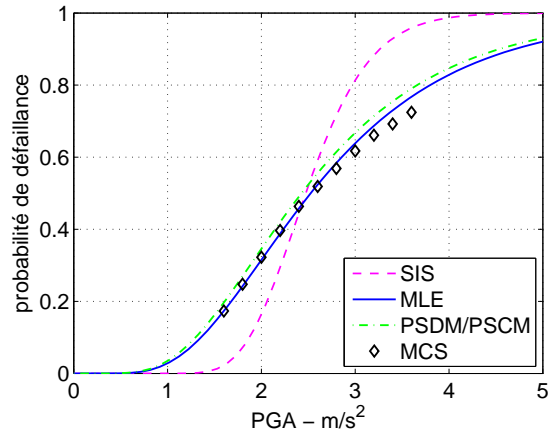
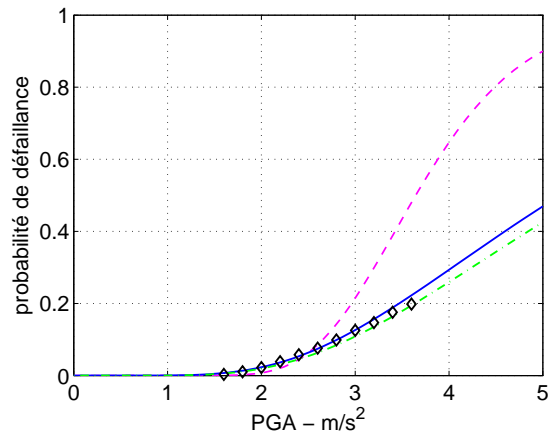
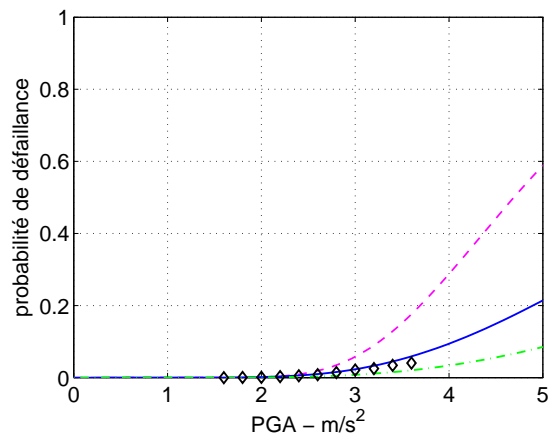
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/150$

FIGURE 2.18. Portique de 3 étages : Courbes de fragilité

TABLEAU 2.6. Portique de 3 étages : Paramètres des courbes de fragilité

Seuil de défaillance	Méthode SIS		Méthode MLE		PSDM/PSCM	
	A_m	β	A_m	β	A_m	β
$\delta_0 = H/300$	2.47	0.21	2.52	0.48	2.42	0.48
$\delta_0 = H/200$	3.64	0.24	5.18	0.47	5.48	0.48
$\delta_0 = H/150$	4.69	0.28	7.00	0.42	9.76	0.48

TABLEAU 2.7. Portique de 3 étages : Comparaison d'EQM et d'ERR

Seuil de défaillance	Méthode SIS		Méthode MLE		PSDM/PSCM	
	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%
$\delta_0 = H/300$	28.79	7.18	0.44	0.13	1.81	7.28
$\delta_0 = H/200$	14.37	14.74	0.08	1.18	0.10	15.83
$\delta_0 = H/150$	3.02	154.03	0.04	19.78	0.11	59.38

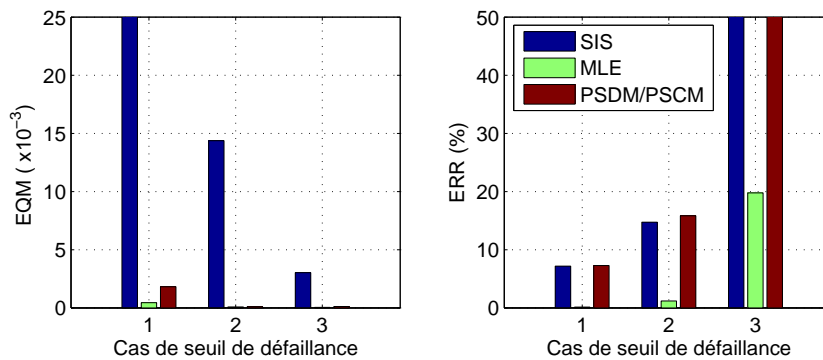


FIGURE 2.19. Portique de 3 étages : Comparaison d'EQM et d'ERR(%)

2.3.5 Discussions

À travers les trois exemples présentés, on peut conclure que la méthode SIS donne des résultats très différents des autres, ce qui signifie qu'elle est la moins adaptée. L'utilisation d'accélération normées dans la méthode SIS, qui change la loi de distribution de $\tilde{a}(t)$ par rapport à ses versions originales $a(t)$, amène à une réduction de l'incertitude de la courbe (représentée par l'écart-type β) par rapport aux autres méthodes. Toutefois, l'avantage de la méthode SIS est qu'elle permet de calculer n'importe quel point de fragilité sur la courbe et qu'elle ne dépend pas forcément de l'hypothèse log-normale. En outre, la technique de normalisation de l'intensité sismique ainsi utilisée est très populaire et pratiquée dans la littérature scientifique [92, 93, 94].

L'EQM et l'ERR(%) montrent que les méthodes MLE et PSDM/PSCM sont meilleures que la méthode SIS. La comparaison entre les deux méthodes MLE et PSDM/PSCM nous permet ensuite de constater une tendance que les courbes obtenues sont en très bon accord pour les deux premiers cas. Dans le dernier cas, c-à-d le seuil de défaillance le plus grand, les écarts entre les deux sont significatifs ; la meilleure précision entre les deux méthodes dépend des structures : la méthode PSDM/PSCM est meilleure pour les oscillateurs mais la méthode MLE l'est pour les structures de bâtiment à 8 étages et de portique de 3 étages.

On rappelle que la méthode PSDM/PSCM est basée sur la régression suivant la loi log-normale de la demande sismique. Une hypothèse supplémentaire doit alors être effectuée. C'est pourquoi la méthode PSDM/PSCM devient moins adaptée si le niveau de corrélation de régression linéaire de la réponse structurale et l'excitation sismique est faible.

Pour la méthode MLE, les résultats obtenus montrent un bon accord avec la méthode MCS dans la plupart des exemples, cela confirme bien sa meilleure précision par rapport aux autres méthodes. On constate aussi que la précision de la méthode MLE est diminuée lorsque le seuil de défaillance augmente. En particulier, pour le dernier cas de seuil de défaillance dans tous les exemples traités, les ERR sont très importantes.

En conclusion, par la comparaison des méthodes existantes pour les différents exemples et en associant les remarques dans la sous-section 1.4.5 et les travaux récents de Mandal *et al.* [95] ainsi que ceux de Gelh *et al.* [78], nous proposons d'utiliser la méthode MLE pour l'analyse de fragilité dans cette étude. Bien sûr, des problèmes restent à résoudre. La section suivante donnera une analyse approfondie de la méthode MLE avec une question permanente : est-t-il possible d'avoir une amélioration sur la méthode MLE ?

2.4 Analyse approfondie sur la méthode MLE

2.4.1 Problématique

Comme mentionné dans les chapitres précédents, le principe de la méthode MLE est d'utiliser l'algorithme d'optimisation pour maximiser la fonction de vraisemblance qui est calculée à partir de la loi de probabilité choisie (log-normale) et les données binaires (défaillance ou non) observées. Ainsi, la précision de la méthode MLE dépend forcément de deux choses : l'hypothèse log-normale et les données observées.

- **Dépendance de l'hypothèse log-normale**

Le choix d'une distribution appropriée est très importante dans la méthode de maximum de vraisemblance [64]. Plus la loi de distribution utilisée est proche de sa forme "réelle", plus la fiabilité des courbes obtenues augmente. La distribution la plus commune pour la construction des courbes de fragilité est la loi log-normale. Toutefois, certains travaux ont aussi utilisé la loi normale [96], la loi bêta [97] pour le développement. La question à laquelle nous devons répondre est de savoir quel serait le résultat des courbes obtenues par la méthode MLE lorsque la courbe "exacte" ne suit pas la loi log-normale.

- **Dépendance des données observées**

La fonction de vraisemblance est calculée avec les données binaires observées. Soient N_1 et N_2 respectivement le nombre de mouvements du sol observés provoquant la défaillance et la non défaillance. Les données observées dans le processus d'optimisation sont alors : $\{a_i, y_i\}$, $i = 1, \dots, N_s$, où $N_s = N_1 + N_2$, a_i est le PGA de l'accélérogramme $a_i(t)$ et $y_i = 1$ s'il y a défaillance et $y_i = 0$ sinon. Dans l'étude de Zentner [6], il a constaté, de façon intuitive, que les courbes de fragilité sismique étaient meilleures lorsque les PGA des accélérogrammes utilisés se concentrent autour du niveau de la médiane de la capacité sismique. Les événements de défaillance et de non défaillance sont ainsi bien observés, c-à-d. que l'apparition de ces événements est à l'égalité $N_1 \approx N_2$. Le rapport $\frac{N_1}{N_1 + N_2}$ représentant le taux de défaillance est approximativement égal à 0.5. Cependant, dans l'analyse du risque sismique, les événements de défaillance sont plus

rare que ceux de non défaillance. Si la taille d'observation n'est pas suffisamment grande, alors la défaillance peut ne pas être observée. Ce problème a déjà été abordé dans les exemples de la section 2.3. En effet, avec le même nombre de simulations N_s , on a une bonne concordance entre les résultats de la méthode MLE et ceux de la méthode MCS pour les premiers cas ($ERR < 2.51\%$). Or, ce n'est plus la même chose pour les derniers cas ($ERR > 19.78\%$) correspondant aux probabilités de défaillance plus faibles, donc la chance d'observer les événements de défaillance est plus faible. Cette remarque est faite en prenant la même structure, les mêmes accélérations temporelles mais avec des seuils de défaillance différents. Les données binaires observées changent donc. Cela montre que la méthode MLE dépend vraisemblablement des données observées, c-à-d. N_1 couples $\{a_i, y_i = 1\}$ provoquant la défaillance et N_2 couples $\{a_i, y_i = 0\}$ provoquant la non défaillance.

Avec les deux analyses mentionnées ci-dessus, il est alors nécessaire de réaliser une étude sur l'influence de l'hypothèse log-normale et des données observées sur la courbe de fragilité obtenue par la méthode MLE. Pour le faire de façon propre tout en évitant les erreurs éventuelles provenant de la simulation dynamique des structures et de la génération des séismes, nous proposons la démarche analytique ci-dessous. Suivant cette démarche, la distribution de PGA $p_A(a)$ et la courbe de fragilité sismique $F_a(a)$ sont supposées parfaitement connues. Les données binaires $\{a_i, y_i\}$ simulées à partir de $p_A(a)$ et $F_r(a)$, sont utilisées dans la méthode MLE pour retrouver la courbe de fragilité sismique. La différence entre le résultat exact et le résultat estimé donne ainsi une indication de la dépendance de l'hypothèse log-normale et des données observées.

2.4.2 Démarche analytique entreprise

La procédure proposée est basée sur les données artificielles d'informations binaires, qui sont générées par simulations analytiques à partir des fonctions $F_r(a)$ et $p_A(a)$ exactes au lieu d'être obtenues par calculs numériques des réponses dynamiques pour une structure spécifique.

La procédure complète se compose des étapes suivantes :

1. Supposer une courbe de fragilité $F_r(a)$ et une distribution de l'intensité sismique $p_A(a)$ exactes.
2. Simuler une population de données $\{a_i, y_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$ suivant le schéma présenté sur la figure 2.20, où N_s est la taille de la population. Pour la réalisation i :
 - (a) Générer une intensité a_i à partir de la densité $p_A(a)$,
 - (b) Générer un candidat u suivant la loi uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$,
 - (c) Vérifier la défaillance $y_i = 1$ si $u \leq F_r(a_i)$, sinon prendre $y_i = 0$,
3. Estimer deux paramètres \hat{A}_m et $\hat{\beta}$ de la courbe de fragilité \hat{F}_r par la méthode MLE.

En résumé, on a $F_r(a)$ et $p_A(a)$ comme données d'entrée et on a deux paramètres \hat{A}_m et $\hat{\beta}$ de la loi log-normale de la courbe de fragilité $\hat{F}_r(a)$ comme résultat de sortie. A noter que $F_r(a)$ en entrée est une fonction de même propriété qu'une fonction de répartition de probabilité (à valeur positive, monotonement croissante entre 0 et 1) mais elle n'est pas nécessairement la fonction de répartition de probabilité de la loi log-normale.

L'analyse d'influence de la loi log-normale et des données observées est basée sur la comparaison entre la courbe supposée $F_r(a)$ et celle estimée $\hat{F}_r(a)$ en variant les données d'entrée.

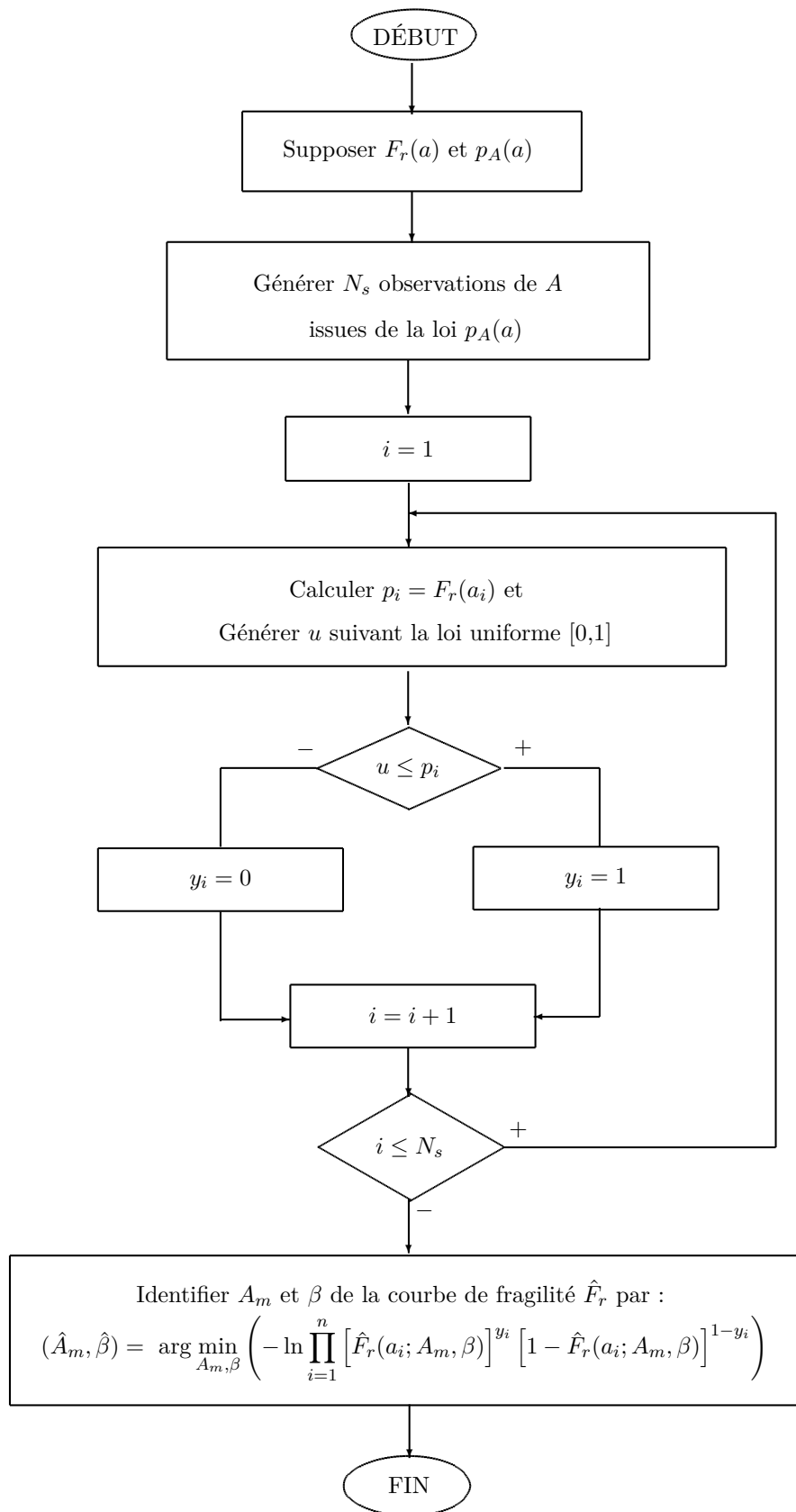


FIGURE 2.20. Schéma de la démarche analytique

2.4.3 Implémentations

On utilise dans les tests suivants les trois lois de probabilités courantes : uniforme, normale et log-normale. La définition de ces trois lois sont données dans le tableau 2.8.

TABLEAU 2.8. Définition des lois de probabilité

Loi	Paramètres	Fonction de densité	Fonction de répartition
Uniforme	a_1, a_2	$p_U(a; a_1, a_2) = \frac{1}{a_1 - a_2}$	$F_U(a; a_1, a_2) = \int_{-\infty}^a p_U(a) da$
Normale	μ, σ	$p_N(a; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$F_N(a; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^a p_N(a) da$
Log-normal	A_m, β	$p_{LN}(a; A_m, \beta) = \frac{1}{a\beta\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{\ln(a/A_m)^2}{2\beta^2}\right]}$	$F_{LN}(a; A_m, \beta) = \int_0^a p_{LN}(a) da$

• Test 1 : Influence de l'hypothèse log-normale et de la distribution de l'intensité sismique

Le test consiste en 18 jeux de données suivants :

- D'abord, la courbe de fragilité exacte $F_r(a)$ est supposée être une des fonctions de répartition de probabilité parmi les trois suivantes : log-normale, normale et uniforme.
- Ensuite, pour chaque loi de probabilité choisie pour $F_r(a)$, on a deux possibilités pour la distribution de l'intensité sismique $p_A(a)$: soit la loi log-normale, soit la loi uniforme.
- Enfin, pour chaque distribution $p_A(a)$, la courbe de fragilité exacte $F_r(a)$ peut avoir trois groupes de paramètres correspondant à trois situations de la distribution PGA autour de la partie : supérieure, approximativement égale et inférieure de la capacité médiane sismique, respectivement.

Chaque configuration est un cas de test et tous les paramètres de $3 \times 2 \times 3 = 18$ cas sont donnés dans le tableau 2.9.

Puisque c'est un test "analytique", dont le coût de calcul est faible, on peut prendre un nombre de simulations N_s suffisamment important pour obtenir une bonne estimation. On utilise $N_s = 50.000$ dans ce test. Après avoir simulé N_s données $\{a_i, y_i\}$ pour chaque cas, la méthode MLE est appliquée pour calculer les paramètres de la courbe de fragilité.

Les figures 2.21, 2.22, 2.23 présentent respectivement les cas de courbe de fragilité sismique suivant la loi log-normale, normale et uniforme. Pour chaque cas, on trouve sur les figures la courbe exacte $F_r(a)$, la courbe estimée $\hat{F}_r(a)$ ainsi que la distribution de l'intensité sismique utilisée $p_A(a)$. La quantification d'erreur entre la courbe estimée et la courbe exacte est réalisée à travers l'erreur quadratique moyenne (EQM) et l'erreur relative (ERR) précédemment définies par les équations (2.10) et (2.12) mais on remplace dans le test le résultat de la méthode MCS par le résultat exact car $F_r(a)$ et $p_A(a)$ sont parfaitement connues. Les résultats de EQM et ERR sont donnés au tableau 2.9. Les résultats obtenus nous permettent de noter les points suivants :

- Pour le cas de la courbe de fragilité exacte $F_r(a)$ suivante la loi log-normale cumulative (cas 1 à 6) : comme la loi log-normale est aussi l'hypothèse de la méthode MLE, un accord parfait entre les courbes estimées par rapport aux courbes de fragilité initiales est confirmé dans tous cas de distributions de l'intensité sismique $p_A(a)$. Bien que la distribution $p_A(a)$ varie de manière importante, on peut retrouver une bonne concordance entre les deux $F_r(a)$ et $\hat{F}_r(a)$. Cette propriété montre que, par la méthode MLE, la courbe de fragilité peut être exactement

TABLEAU 2.9. *Test 1 : Paramètres utilisés et résultats obtenus*

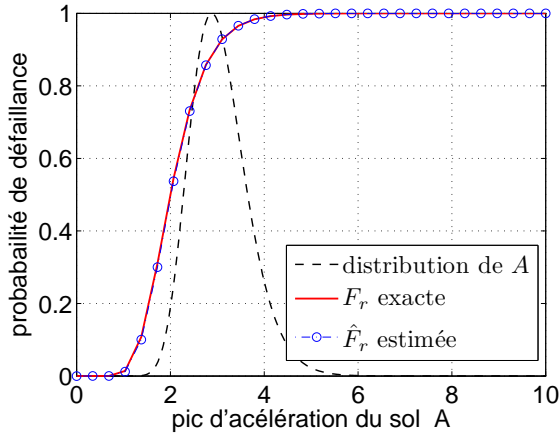
Cas	$F_r(a)$	$p_A(a)$	EQM $\times 10^{-3}$	ERR (%)
1	$F_{\mathcal{LN}}(a; 2.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.0010	0.06
2	$F_{\mathcal{LN}}(a; 3.5, 0.3)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.0002	0.00
3	$F_{\mathcal{LN}}(a; 5.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.0007	1.14
4	$F_{\mathcal{LN}}(a; 2.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.0010	0.11
5	$F_{\mathcal{LN}}(a; 3.5, 0.3)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.0048	0.94
6	$F_{\mathcal{LN}}(a; 5.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.0018	0.81
7	$F_{\mathcal{N}}(a; 2.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	1.71	0.09
8	$F_{\mathcal{N}}(a; 3.5, 1.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.82	0.09
9	$F_{\mathcal{N}}(a; 5.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	6.04	1.08
10	$F_{\mathcal{N}}(a; 2.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.65	0.46
11	$F_{\mathcal{N}}(a; 3.5, 1.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	2.75	0.57
12	$F_{\mathcal{N}}(a; 5.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	16.54	3.40
13	$F_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	1.32	0.48
14	$F_{\mathcal{U}}(a; 2.0, 6.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	1.93	0.46
15	$F_{\mathcal{U}}(a; 3.0, 8.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	7.34	1.14
16	$F_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	1.01	0.24
17	$F_{\mathcal{U}}(a; 2.0, 6.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	1.04	0.00
18	$F_{\mathcal{U}}(a; 3.0, 8.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	26.01	0.32

évaluée et ne dépend pas de la distribution de mouvements du sol à condition que la courbe de fragilité exacte suive la loi log-normale cumulative.

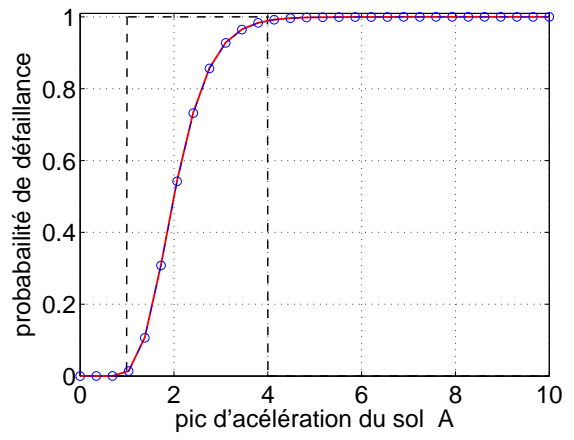
- Lorsque les courbes ne suivent pas la loi log-normale cumulative (cas 7 à 18), la précision des courbes de fragilité obtenues est limitée dans une certaine mesure. En effet, dans la figure 2.22 pour le cas de la loi normale cumulative ou la figure 2.23 pour le cas de la loi uniforme cumulative, sur une courbe obtenue, on retrouve seulement l'accord entre la courbe estimée et celle exacte pour une région proche de la valeur médiane de la distribution de mouvements du sol. Les résultats dans les autres régions sont très différents. De plus, pour une même courbe de fragilité exacte, si les distributions de l'intensité sismique $p_A(a)$ sont différentes (log-normale ou uniforme), les courbes estimées $\hat{F}_r(a)$ sont différentes. Cela souligne que la courbe de fragilité estimée par la méthode MLE dépend de la distribution de mouvements du sol. Elle donne seulement un résultat fiable pour la région concentrée de mouvements du sol, c-à-d. elle est proche de la médiane de mouvements du sol.
- D'après la comparaison des critères EQM et ERR(%), on constate que l'ERR(%) dans tous les cas est petite et inférieure à 5%. Toutefois, le rapport de l'EQM entre les cas de 1 à 6 et les cas de 7 à 18 est très important ($\approx 10^2$ fois). Ce qui implique que la méthode MLE dépend de l'hypothèse log-normale.

• Test 2 : Influence des données observées

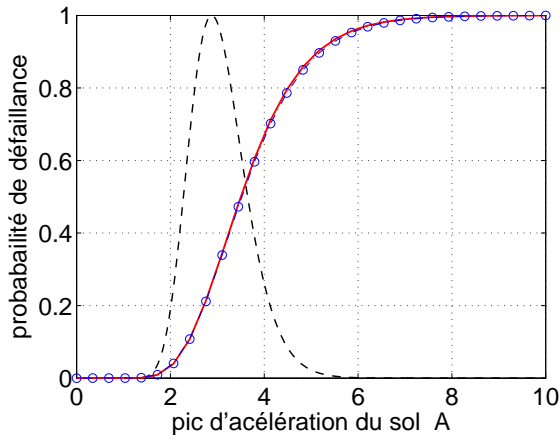
La méthode MLE estime la courbe de fragilité à partir des données observées $\{a_i, y_i\}$, $i = 1, \dots, N_s$, dans lesquelles, il y a N_1 simulations conduisant à la défaillance $\{a_i, y_i = 1\}$, $i = 1, \dots, N_1$ et N_2 conduisant à la non défaillance $\{a_i, y_i = 0\}$, $i = 1, \dots, N_2$. Dans le test 1 avec un nombre N_s important, on a constaté que lorsqu'on change la distribution de l'excitation sismique



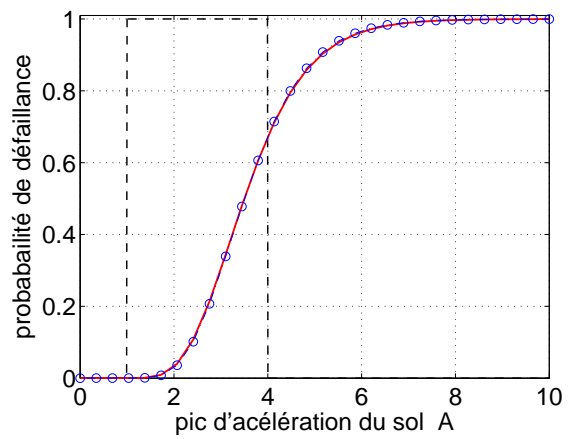
(a) Cas 1



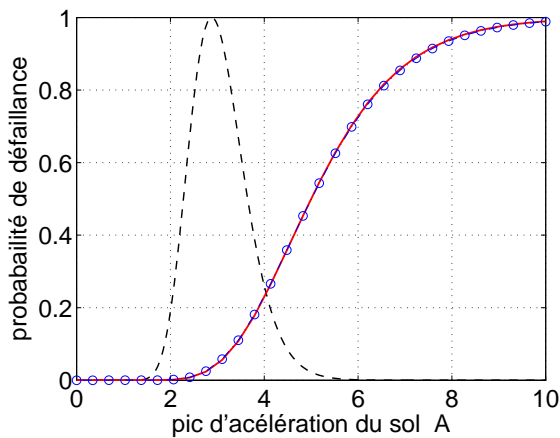
(b) Cas 4



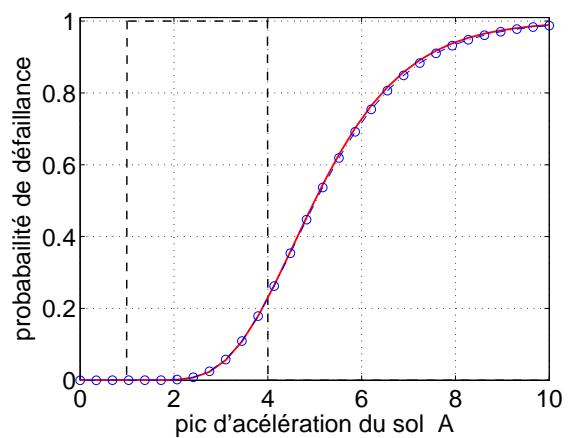
(c) Cas 2



(d) Cas 5

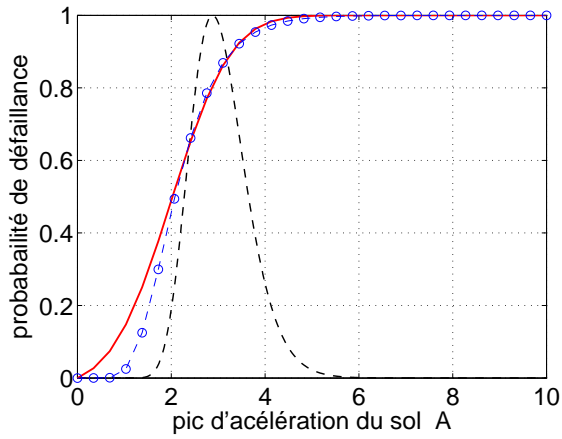


(e) Cas 3

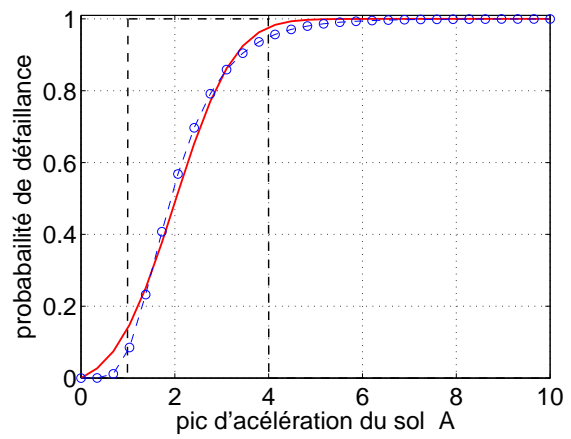


(f) Cas 6

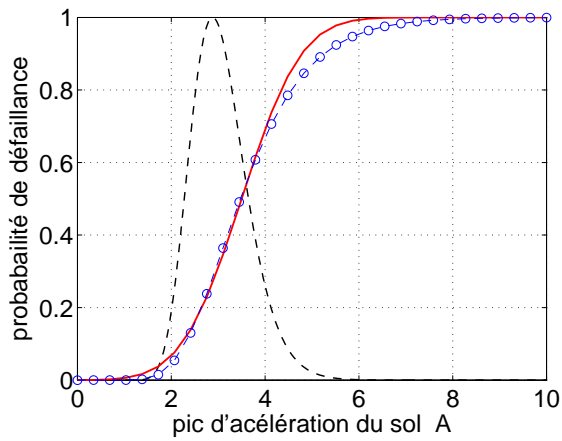
FIGURE 2.21. Test 1 : $F_r(a) \equiv F_{LN}(\cdot)$ avec $p_A(a) \equiv p_{LN}(\cdot)$ à gauche et $p_A(a) \equiv p_U(\cdot)$ à droite



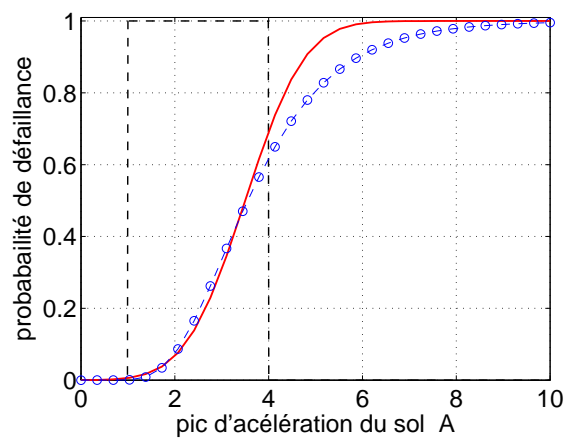
(a) Cas 7



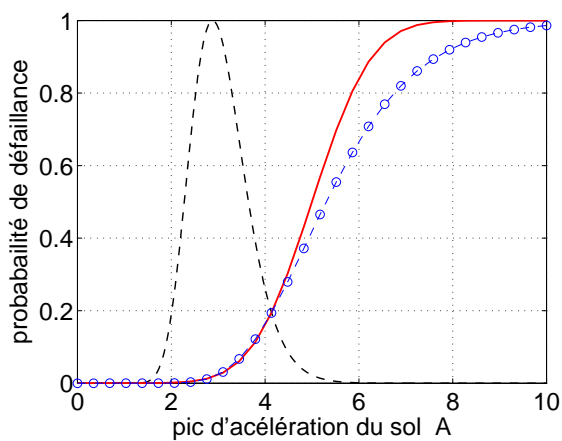
(b) Cas 10



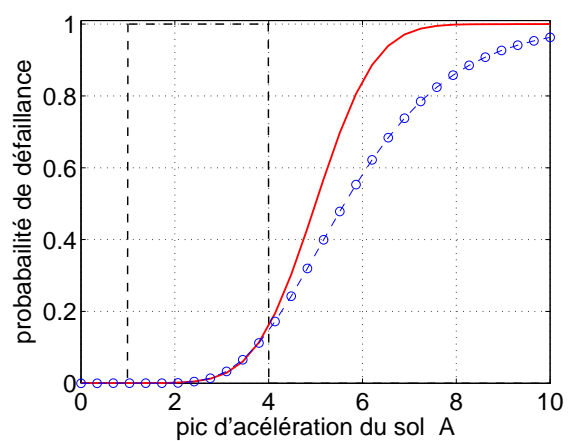
(c) Cas 8



(d) Cas 11

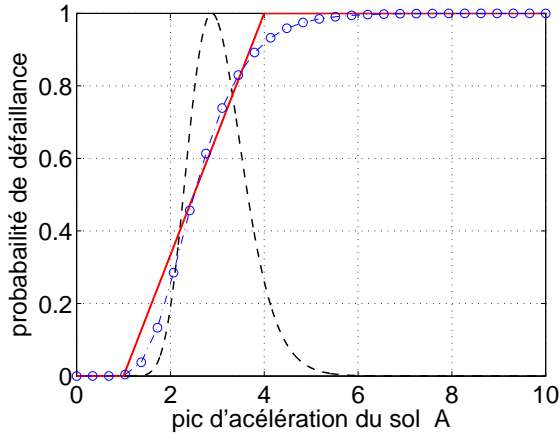


(e) Cas 9

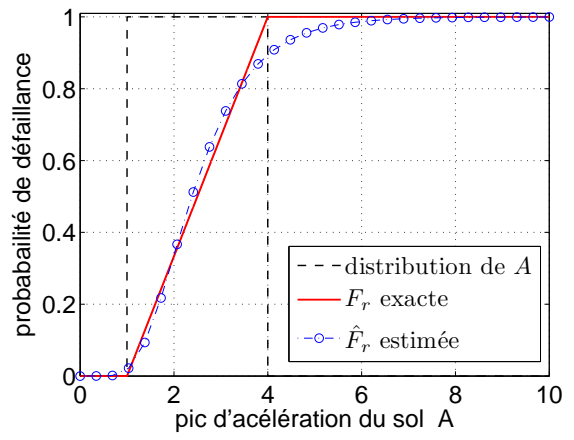


(f) Cas 12

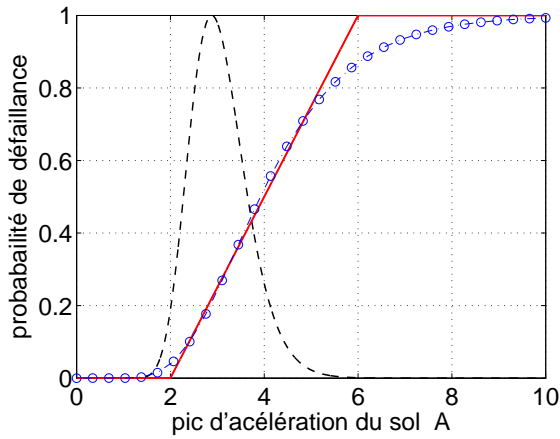
FIGURE 2.22. Test 1 : $F_r(a) \equiv F_N(\cdot)$ avec $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{LN}}(\cdot)$ à gauche et $p_A(a) \equiv p_U(\cdot)$ à droite



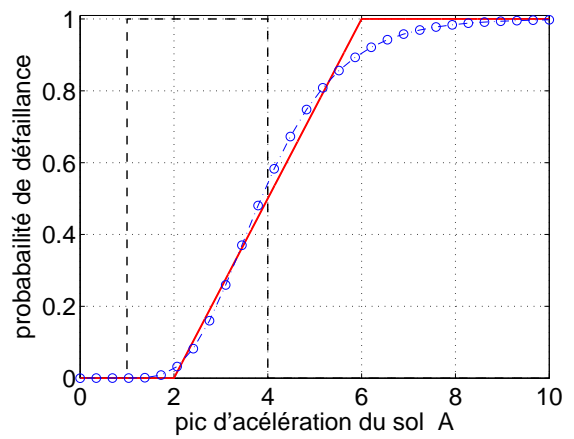
(a) Cas 13



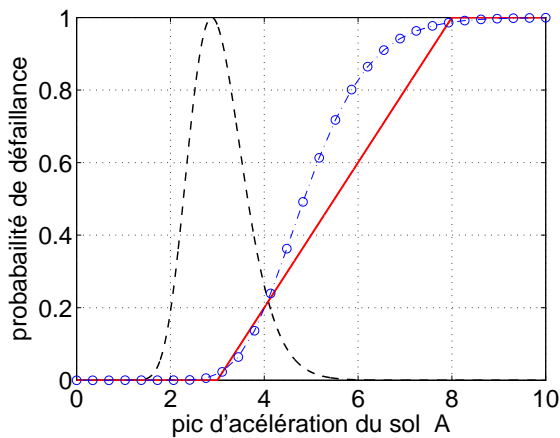
(b) Cas 16



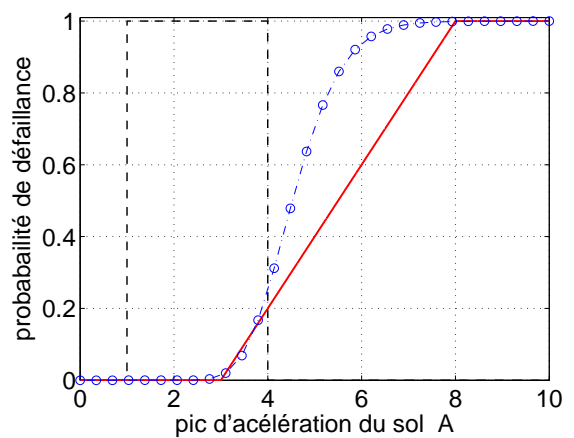
(c) Cas 14



(d) Cas 17



(e) Cas 15



(f) Cas 18

FIGURE 2.23. Test 1 : $F_r(a) \equiv F_U(\cdot)$ avec $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{LN}}(\cdot)$ à gauche et $p_A(a) \equiv p_U(\cdot)$ à droite

$p_A(a)$, si la courbe de fragilité exacte n'est pas une loi log-normale cumulative, alors la courbe de fragilité estimée change. Cette indication montre que la méthode MLE dépend des données observées.

En pratique, on ne peut pas prendre un nombre de simulations N_s très important. D'une part, parce que grande simulation des réponses dynamiques des structures non-linéaires est coûteux, et que l'on souhaite donc le limiter. D'autre part, si l'on utilise des enregistrements réels, on a aussi un nombre limité de séismes. Le fait d'avoir une valeur de N_s limitée influence sur les données observées $\{a_i, y_i\}_i$ $i = 1, \dots, N_s$ et cela peut avoir une conséquence sur le résultat de la méthode MLE. Le test 2 étudie cet aspect en faisant varier N_1 et N_2 , et en observant la variabilité des courbes de fragilité obtenues par rapport à la courbe "exacte".

On considère ici le cas le plus favorable : la courbe de fragilité exacte suit la loi log-normale cumulative $F_r(a) \equiv F_{\mathcal{LN}}(a; 7.0, 0.2)$ et la densité du PGA est aussi une loi log-normale $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.4)$. La probabilité de défaillance peut être calculée par la convolution suivant l'équation (1.4) $p_f = 0.0291$. Elle est beaucoup plus faible que $1/2$, c'est-à-dire que les événements de défaillance N_1 sont plus rares que ceux de non défaillance N_2 . On considère la variation des données observées à travers de la probabilité de défaillance observée $\hat{p}_f = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$. N_1 et N_2 peuvent varier ensemble. Toutefois, pour simplifier, dans ce test, N_2 est fixé et N_1 varie autour d'une valeur de telle sorte qu'il y ait une corrélation entre \hat{p}_f et p_f . Ils sont représentés dans la tableau 2.10.

L'algorithme présenté sur la figure 2.20 est appliqué pour $p_A(a)$ et $F_r(a)$ donnés afin de créer une population importante de simulations $\{a_i, y_i\}_i$ $i = 1, \dots, N_s$. On tire N_1 simulations conduisant à la défaillance et N_2 simulations conduisant à la non défaillance. Les paramètres \hat{A}_m , $\hat{\beta}$ et ses erreurs relatives sont ensuite évalués et donnés dans le tableau 2.10. La figure 2.24 présente une variation des erreurs en fonction de la probabilité de défaillance estimée. Les résultats obtenus permettent de faire deux remarques :

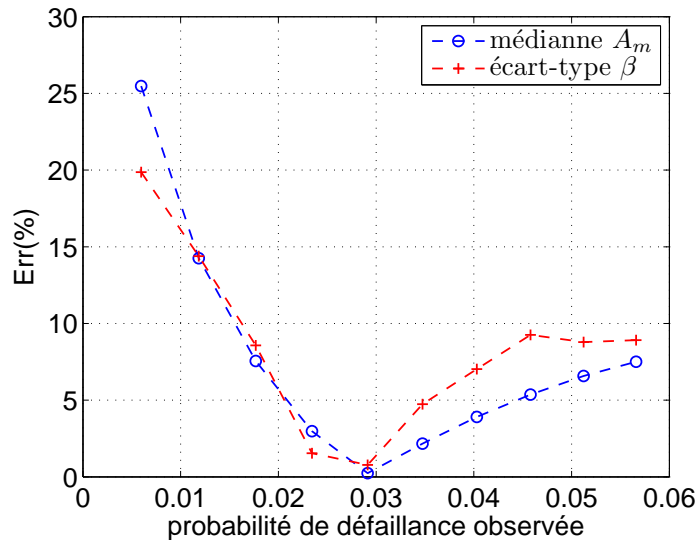
- Plus l'écart de la probabilité de défaillance observée par rapport à celle exacte diminue, plus la précision des courbes de fragilité estimées par la méthode MLE augmente. Le résultat le plus précis entre les paramètres estimés \hat{A}_m , $\hat{\beta}$ et ceux initiaux A_m , β est confirmée pour le cas $\hat{p}_f = p_f = 0.0291$.
- Dans le cas d'absence de défaillance ($N_1 = 0$), l'estimation par maximum de vraisemblance ne converge pas.

2.4.4 Discussion

L'objectif de cette partie est d'analyser la construction des courbes de fragilité par la méthode MLE en acceptant l'hypothèse de la loi log-normale. À travers deux tests analytiques, on peut constater que la méthode MLE dépend de l'hypothèse log-normale et des données observées. En effet, si l'hypothèse de la loi log-normale est valide et si le nombre de simulations N_s est important, la méthode MLE donne un résultat excellent de la courbe de fragilité quel que soit la distribution de mouvements du sol. Toutefois, si cette hypothèse n'est pas vérifiée ou si le nombre de simulations est limité, la méthode MLE dépend fortement de la distribution de mouvements du sol et de données disponibles (données observées). Elle peut donner un résultat biaisé voir non convergeant. Et dans ce cas, une seule région fiable sur la courbe de fragilité a été trouvée, qui est concentrée autour de la médiane de distribution de mouvements du sol.

TABLEAU 2.10. *Test 2 : Données d'entrées et résultats obtenus*

N_1	N_2	\hat{p}_f observée	p_f exacte	Fragilité estimée			
				\hat{A}_m	erreurs de A_m (%)	$\hat{\beta}$	erreurs de β (%)
0	10000	0.0000	0.0291	pas de convergence			
60	10000	0.0060	0.0291	8.78	25.4	0.239	19.8
120	10000	0.0119	0.0291	7.99	14.2	0.228	14.3
180	10000	0.0177	0.0291	7.52	7.5	0.217	8.5
240	10000	0.0234	0.0291	7.21	2.9	0.203	1.5
300	10000	0.0291	0.0291	7.01	0.2	0.198	0.7
360	10000	0.0347	0.0291	6.84	2.16	0.190	4.7
420	10000	0.0403	0.0291	6.72	3.9	0.185	7.0
480	10000	0.0458	0.0291	6.62	5.3	0.181	9.2
540	10000	0.0512	0.0291	6.53	6.5	0.182	8.7
600	10000	0.0566	0.0291	6.47	7.5	0.182	8.9

FIGURE 2.24. *Erreur des paramètres de la courbe de fragilité*

2.5 Amélioration de la méthode MLE

Un des inconvénients de la méthode MLE est la dépendance des données observées $\{a_i, y_i\}$, $i = 1, \dots, N_s$, particulièrement quand le nombre de simulations N_s est limité. On note que ces données observées dépendent à la fois de la résistance sismique de structure (défaillance ou non, c-à-d. $y_i = 1$ or 0) et de la probabilité d'apparition de l'intensité sismique a_i (relative à $p_A(a)$). Or dans la méthode MLE existante, la prise en compte explicite de la distribution de l'intensité sismique n'est pas présente.

On essaie dans cette partie d'améliorer la méthode MLE existante en utilisant les informations supplémentaires que donne la distribution des mouvements du sol $p_A(a)$. Il est à noter que $p_A(a)$ peut être déduite soit à partir des simulations d'accélération avec un coût de calcul faible, soit à partir d'une courbe d'aléa sismique disponible pour une région.

2.5.1 Proposition d'une nouvelle fonction de vraisemblance

Soit $p_{A|D_f}(a)$ et $p_{A|D_s}(a)$ qui sont respectivement les densités de probabilité conditionnelle de défaillance et de sûreté de l'intensité sismique A :

$$p_{A|D_f}(a) = p_A(a|G(\mathbf{Z}) \leq 0) \quad \text{et} \quad (2.18)$$

$$p_{A|D_s}(a) = p_A(a|G(\mathbf{Z}) > 0) \quad (2.19)$$

où $D_f = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq 0\}$, $D_s = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) > 0\}$ sont respectivement représentés les domaines de défaillance et de sûreté. En utilisant la règle de Bayes pour deux événements aléatoires " $A = a$ " et " $G(\mathbf{Z}) \leq 0$ ", la densité de probabilité conditionnelle de défaillance peut être calculée par :

$$p_{A|D_f}(a) = p_A(a|G(\mathbf{Z}) \leq 0) = \frac{p_A(a)P[G(\mathbf{Z}) \leq 0|A = a]}{\int_0^{+\infty} p_A(a)P[G(\mathbf{Z}) \leq 0|A = a] da} \quad (2.20)$$

où $p_A(a)$ est la densité de probabilité de la variable d'intensité sismique A . On remarque que $P[G(\mathbf{Z}) \leq 0|A = a]$ est la définition de la courbe de fragilité $F_r(a)$ dans l'équation (1.3) et l'expression d'intégrale désigne la probabilité de défaillance du site p_f comme l'équation (1.4). L'équation (2.20) devient :

$$p_{A|D_f}(a) = \frac{p_A(a)F_r(a)}{\int_0^{+\infty} p_A(a)F_r(a) da} = \frac{p_A(a)F_r(a)}{p_f} \quad (2.21)$$

De même, on peut obtenir la densité de probabilité conditionnelle de non-défaillance $p_{A|D_s}$ par l'expression :

$$p_{A|D_s}(a) = \frac{p_A(a)(1 - F_r(a))}{\int_0^{+\infty} p_A(a)(1 - F_r(a)) da} = \frac{p_A(a)(1 - F_r(a))}{1 - p_f} \quad (2.22)$$

On remarque qu'à partir de la distribution $p_A(a)$, les distributions de l'intensité sismique pour la sûreté $p_{A|D_s}(a)$ et pour la défaillance $p_{A|D_f}(a)$ peuvent être estimées si l'on connaît la courbe de fragilité $F_r(a)$.

• Exemple d'illustration

À titre d'exemple, on suppose que la densité de probabilité de l'intensité sismique A suit la loi log-normale $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.4)$ et la courbe de fragilité sismique est bien connue $F_r(a) \equiv F_{\mathcal{LN}}(a; 3.5, 0.3)$. En utilisant les équations (2.21) et (2.22), on peut évaluer la densité de A dans le domaine de défaillance $p_{A|D_f}(a)$ et de sûreté $p_{A|D_s}(a)$. La figure 2.25 présente les trois densités de probabilité de A : $p_A(a)$, $p_{A|D_s}(a)$ et $p_{A|D_f}(a)$.

De plus, à partir de la densité $p_A(a)$ et de la courbe de fragilité $F_r(a)$ bien connues, on utilise le schéma présenté sur la figure 2.20 pour générer N_s réalisations de données $\{a_i, y_i\}_{i=1, \dots, N_s}$. On obtient deux groupes : un groupe des intensités provoquant la défaillance (si $y = 1$) et un autre groupe de la non défaillance ($y = 0$). On calcule l'histogramme pour chaque groupe.

La figure 2.26 présente les deux histogrammes de distribution de la variable A (sûreté et défaillance) pour le cas $N_s = 5000$ réalisations. Les deux densités estimées par (2.21) et (2.22) sont également tracées sur la figure pour la comparaison. Les fonctions de probabilité cumulative sont aussi tracées en bas de cette figure. On constate un accord parfait entre les résultats obtenus théoriquement par les équations (2.21) et (2.22) et ceux de la simulation.

• Nouvelle fonction de vraisemblance proposée

Suite à l'analyse ci-dessus, on peut conclure que pour les données observées $\{a_i, y_i\}_{i=1, \dots, N_s}$:

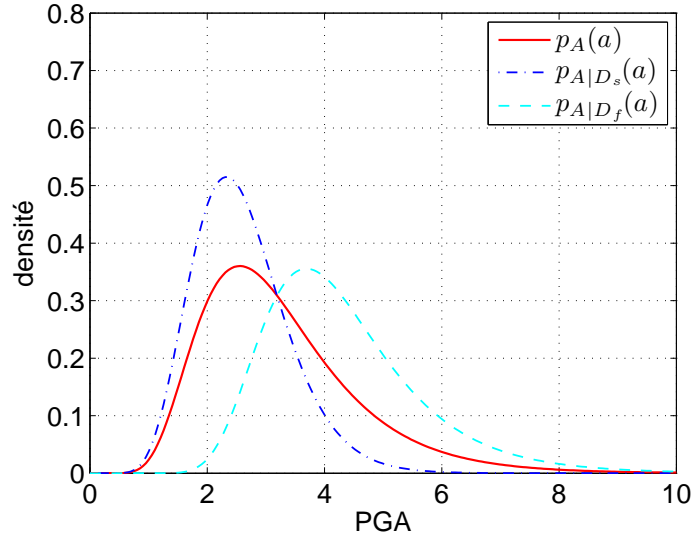


FIGURE 2.25. Illustration des densités de probabilité de pic d'accélération

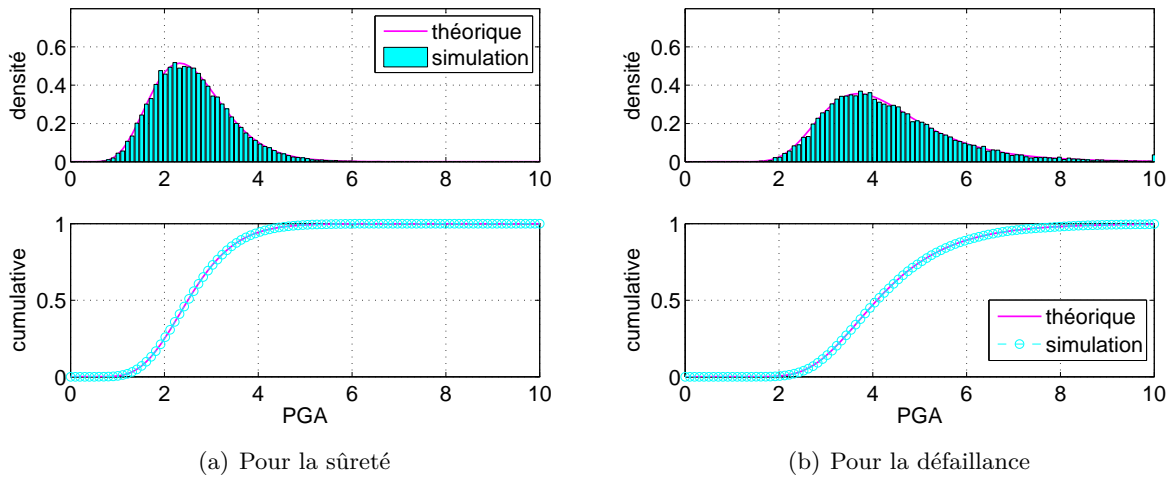


FIGURE 2.26. Distribution des intensités sismiques

- Si les données de défaillance, c-à-d, $\{a_i, y_i = 1\}$, $i = 1, \dots, N_1$, la distribution de a_i est la fonction $p_{A|D_f}(a)$ calculée par l'équation (2.21).
- Si les données de sûreté, c-à-d, $\{a_i, y_i = 0\}$, $i = 1, \dots, N_2$, la distribution de a_i est la fonction $p_{A|D_s}(a)$ calculée par l'équation (2.22).

En se basant sur le principe de la méthode de maximum de vraisemblance, la courbe de fragilité peut être déduite à partir des données de défaillance ou des données de non défaillance ou des données mixtes avec les fonctions de densité de probabilité bien établies : $p_{A|D_f}(a)$ ou $p_{A|D_s}(a)$ ou $p_A(a)$

Nous proposons d'utiliser l'optimisation de la vraisemblance de ces deux distributions représentées par les équations (2.21) et (2.22) pour profiter de l'ensemble des données observées. La

fonction de vraisemblance devient alors :

$$\begin{aligned} L(A_m, \beta) &= \prod_{i=1}^{N_s} [p_{A|D_f}(a_i)]^{y_i} [p_{A|D_s}(a_i)]^{1-y_i} \\ &= \prod_{i=1}^{N_s} \left[\frac{F_r(a_i; A_m, \beta) p_A(a_i)}{\int_0^{+\infty} F_r(a; A_m, \beta) p_A(a) da} \right]^{y_i} \left[\frac{(1 - F_r(a_i; A_m, \beta)) p_A(a_i)}{1 - \int_0^{+\infty} F_r(a; A_m, \beta) p_A(a) da} \right]^{1-y_i} \end{aligned} \quad (2.23)$$

On remarque que toute l'information probabiliste disponible des données observées est considérée dans la fonction de vraisemblance dans l'équation (2.23). La partie suivante aborde la procédure pour la construction des courbes de fragilité en utilisant la fonction proposée. Elle est ensuite appliquée à des tests et des exemples numériques pour la validation.

2.5.2 Procédure de la méthode MLE proposée (ERPM - Excitation and Response Probabilistic Models)

En se basant sur l'algorithme représenté dans la figure 2.2 de la méthode MLE existante, la procédure de construction d'une courbe de fragilité par la méthode MLE proposée (ERPM) consiste en 6 étapes :

- Étape 1 : Estimer la densité de probabilité de l'intensité sismique $p_A(a)$.
- Étape 2 : Générer ou choisir N_s séismes indépendants $a_i(t)$, $i = 1, \dots, N_s$, ayant leur PGA correspondant $\text{PGA}_i = a_i = \max_t |a_i(t)|$,
- Étape 3 : Calculer les réponses temporelles sous excitation $\{a_i(t)\}$ et vérifier la défaillance pour chaque cas d'excitation $\{a_i(t)\}$. Pour rappel, la défaillance est vérifiée à travers la fonction d'état limite : $G(\mathbf{Z}) \leq 0$ s'il y a la défaillance et $G(\mathbf{Z}) > 0$ sinon,
- Étape 4 : Considérer la variable aléatoire de Bernoulli Y , si l'accélération $\{a_i(t)\}$ de $\text{PGA}_i = a_i$, provoque la défaillance, Y prend la valeur $y_i = 1$ et $y_i = 0$ sinon,
- Étape 5 : Établir la fonction du maximum de vraisemblance avec deux paramètres A_m et β par l'équation (2.23),
- Étape 6 : Identifier A_m et β de la courbe de fragilité grâce au problème d'optimisation associé par l'équation (2.23).

L'algorithme de la méthode proposée est présenté à la figure 2.27. Pour valider la méthode MLE proposée (ERPM), les différents exemples sont considérés dans les sections suivantes. Ils sont classés suivants deux types : analytiques et numériques.

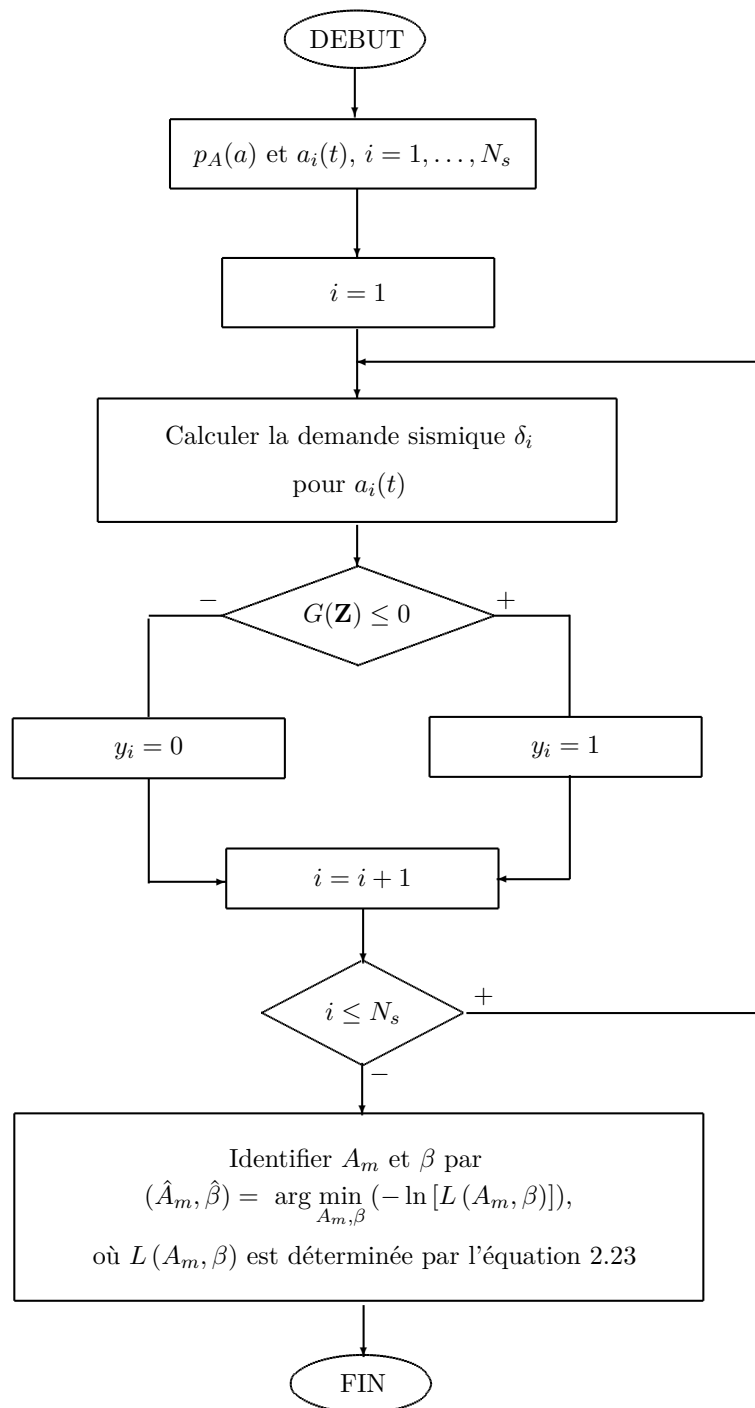


FIGURE 2.27. *Algorithme pour calcul de la fragilité par la méthode MLE proposée (ERPM)*

2.5.3 Validation par les tests analytiques

- **Test 1 : Influence de l'hypothèse log-normale**

TABLEAU 2.11. *Test 1 par MLE proposée (ERPM) : Paramètres utilisés et résultats obtenus*

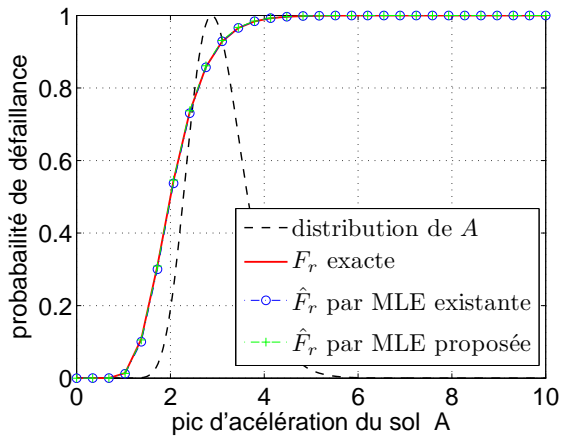
Cas	$F_r(a)$	$p_A(a)$	EQM $\times 10^{-3}$	ERR (%)
1	$F_{\mathcal{LN}}(a; 2.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.0021	0.02
2	$F_{\mathcal{LN}}(a; 3.5, 0.3)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.0010	1.44
3	$F_{\mathcal{LN}}(a; 5.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.0041	1.73
4	$F_{\mathcal{LN}}(a; 2.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.0002	0.14
5	$F_{\mathcal{LN}}(a; 3.5, 0.3)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.0000	0.51
6	$F_{\mathcal{LN}}(a; 5.0, 0.3)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.0102	4.07
7	$F_{\mathcal{N}}(a; 2.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	1.72	0.03
8	$F_{\mathcal{N}}(a; 3.5, 1.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	0.71	0.65
9	$F_{\mathcal{N}}(a; 5.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	5.48	1.51
10	$F_{\mathcal{N}}(a; 2.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	0.69	1.36
11	$F_{\mathcal{N}}(a; 3.5, 1.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	2.63	1.94
12	$F_{\mathcal{N}}(a; 5.0, 1.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	16.25	1.35
13	$F_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	1.23	1.88
14	$F_{\mathcal{U}}(a; 2.0, 6.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	2.01	1.25
15	$F_{\mathcal{U}}(a; 3.0, 8.0)$	$p_{\mathcal{LN}}(a; 3.0, 0.2)$	6.37	3.08
16	$F_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	1.01	0.25
17	$F_{\mathcal{U}}(a; 2.0, 6.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	1.08	0.00
18	$F_{\mathcal{U}}(a; 3.0, 8.0)$	$p_{\mathcal{U}}(a; 1.0, 4.0)$	26.01	0.24

On reprend ici les exemples représentés dans la sous-section 2.4.3. La densité de l'intensité sismique $p_A(a)$ et la courbe de fragilité $F_r(a)$ sont supposées. Les données artificielles sont générées par le schéma 2.20, consistant en N_s paires $\{a_i, y_i\}$ avec $i = 1, \dots, N_s$.

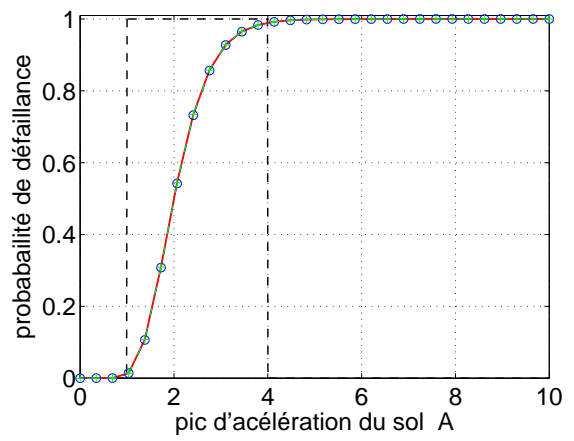
Les courbes obtenues par la méthode MLE existante et celles obtenues par la méthode MLE proposée (ERPM) pour le cas d'analyse d'influence de l'hypothèse log-normale sont représentées sur les figures 2.28, 2.29 et 2.30. Elles montrent un accord parfait entre les deux méthodes. C-à-d, que la méthode MLE proposée (ERPM) dépend encore forcément de l'hypothèse log-normale comme la méthode MLE existante les remarques ont été également faits dans la sous-section 2.4.3.

- **Test 2 : Influence des données observées**

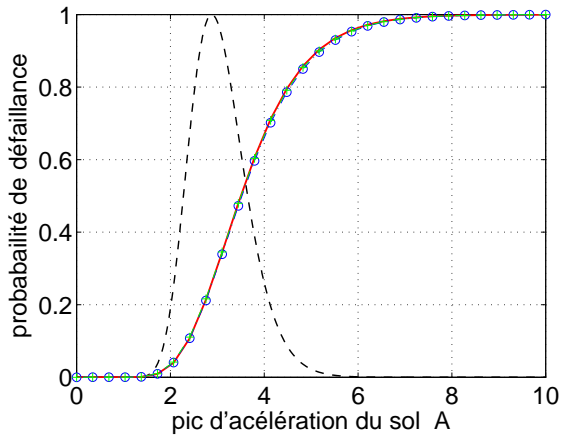
Dans le cas d'analyse d'influence des données observées, la figure 2.31 donne les erreurs des paramètres estimés \hat{A}_m et $\hat{\beta}$ par rapport aux paramètres exacts A_m et β . Ces résultats sont aussi montrés en détails dans le tableau 2.12. On constate que les erreurs des paramètres A_m et β estimés sont plus petites par rapport aux résultats de la méthode MLE existante donnés au tableau 2.10. Ce qui nous permet de confirmer une meilleure précision de la méthode MLE proposée (ERPM) par rapport à la méthode MLE existante. En particulier lors de l'absence de données de défaillance, l'optimisation de la fonction de vraisemblance donnée par l'équation 2.23 est toujours convergente et donne un bon résultat. On peut remarquer que l'efficacité de la méthode proposée est nette.



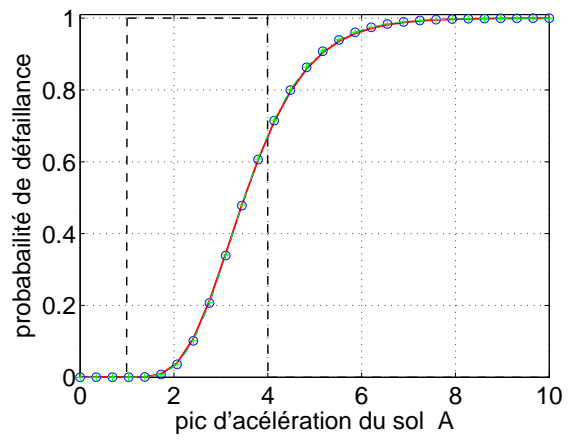
(a) Cas 1



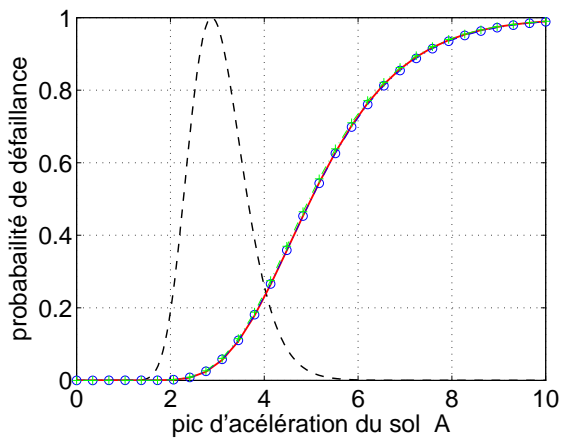
(b) Cas 4



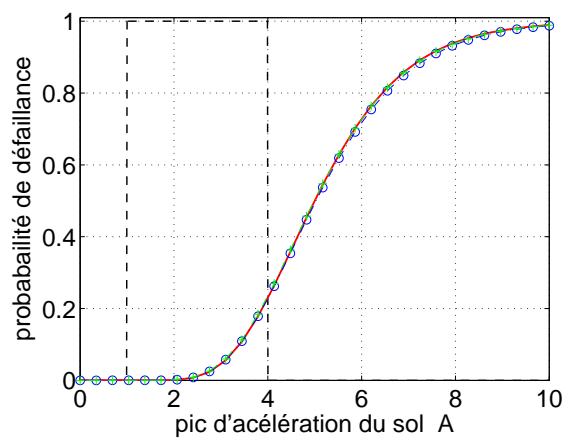
(c) Cas 2



(d) Cas 5

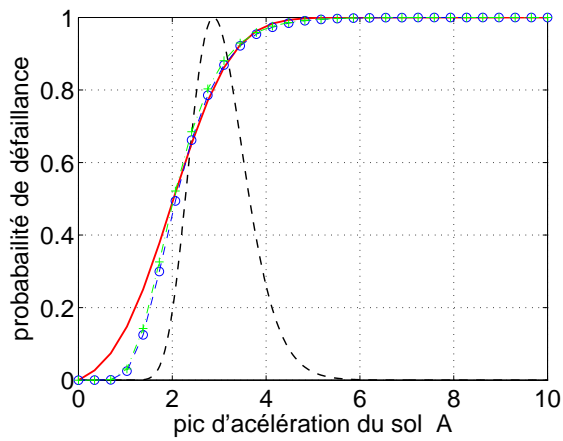


(e) Cas 3

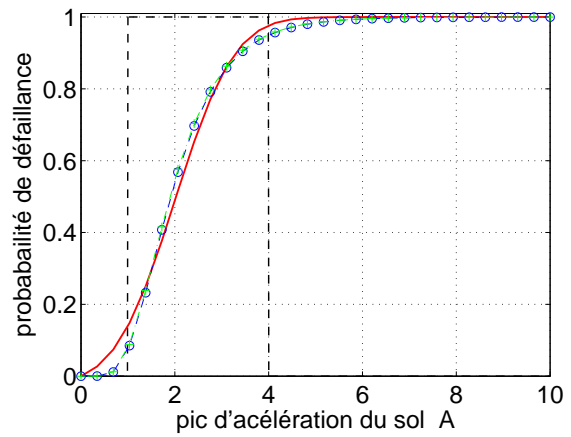


(f) Cas 6

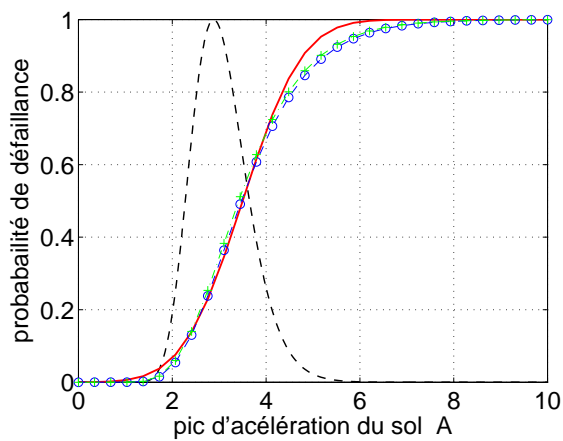
FIGURE 2.28. Test 1 par MLE proposée (ERPM) : $F_r(a) \equiv F_{LN}(\cdot)$ avec $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{LN}}(\cdot)$ à gauche et $p_A(a) \equiv p_U(\cdot)$ à droite



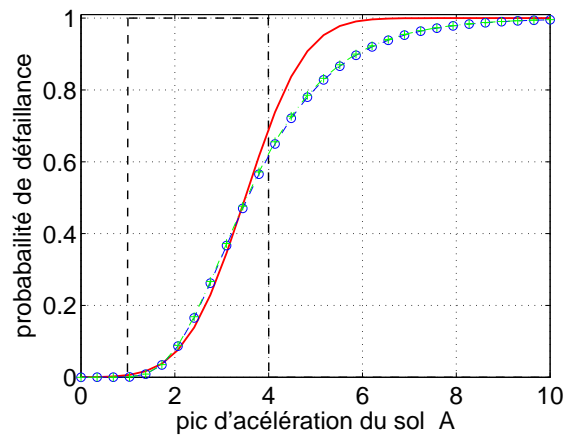
(a) Cas 7



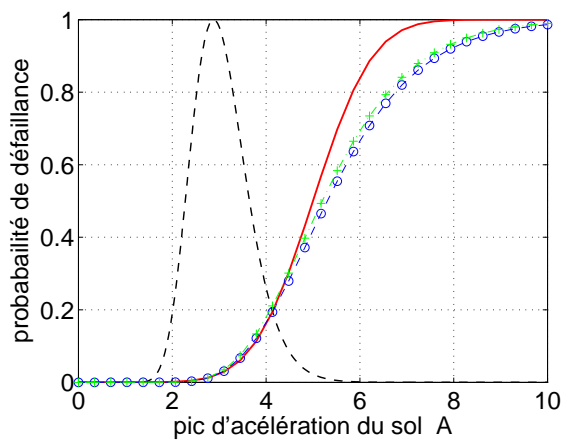
(b) Cas 10



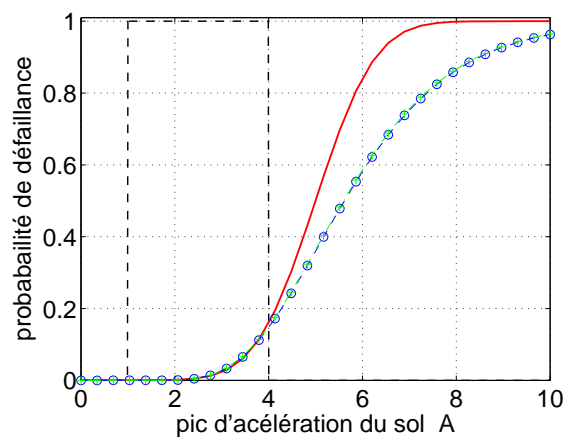
(c) Cas 8



(d) Cas 11

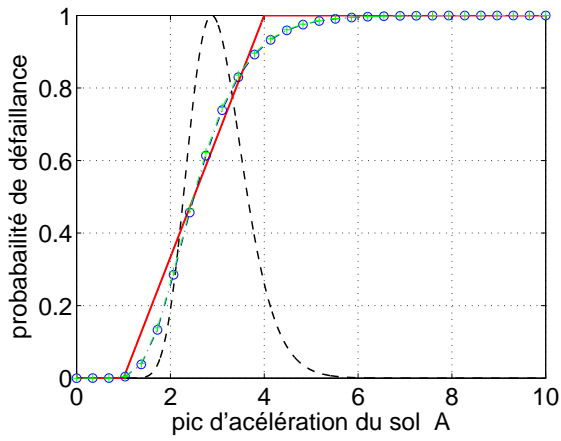


(e) Cas 9

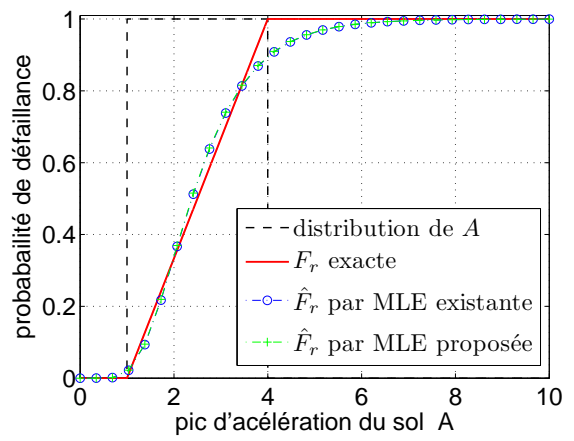


(f) Cas 12

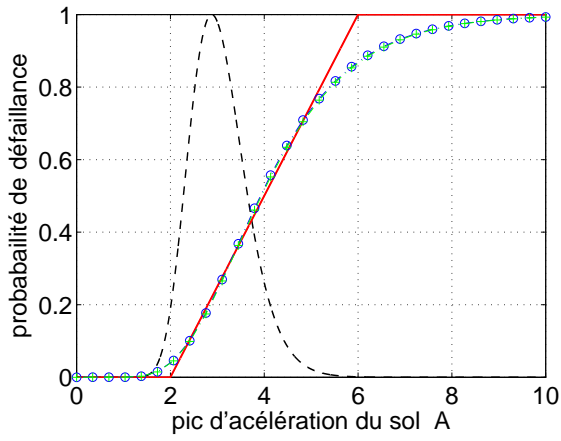
FIGURE 2.29. Test 1 par MLE proposée (ERPM) : $F_r(a) \equiv F_N(\cdot)$ avec $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{LN}}(\cdot)$ à gauche et $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{U}}(\cdot)$ à droite



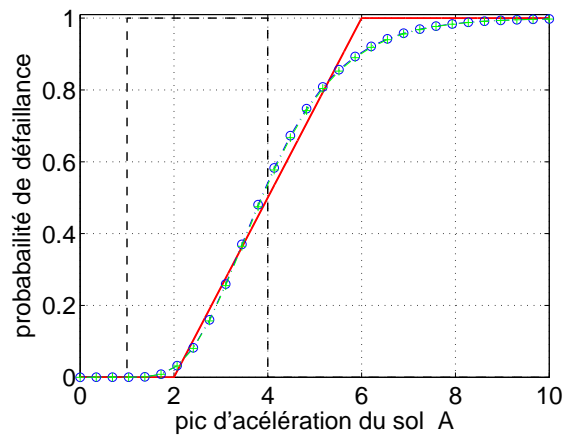
(a) Cas 13



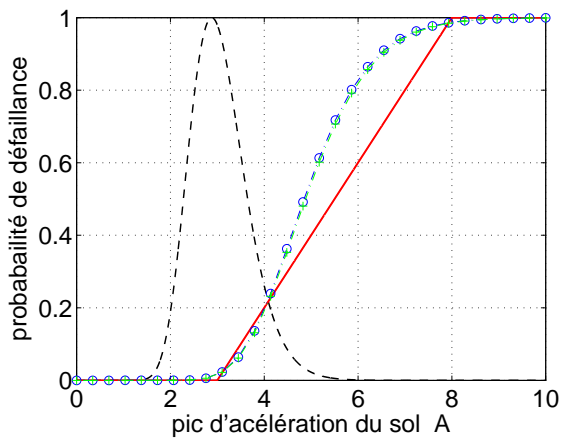
(b) Cas 16



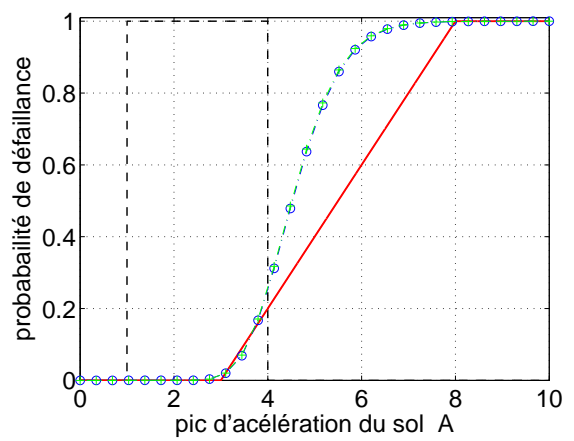
(c) Cas 14



(d) Cas 17



(e) Cas 15



(f) Cas 18

FIGURE 2.30. Test 1 par MLE proposée (ERPM) : $F_r(a) \equiv F_U(\cdot)$ avec $p_A(a) \equiv p_{\mathcal{LN}}(\cdot)$ à gauche et $p_A(a) \equiv p_U(\cdot)$ à droite

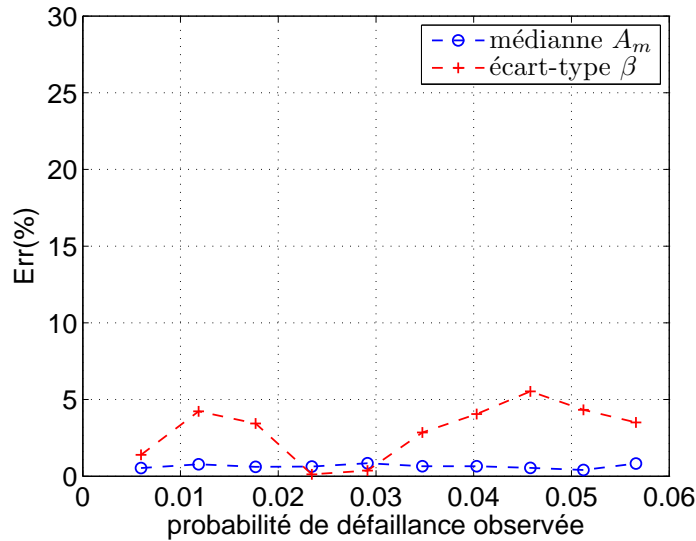


FIGURE 2.31. Test 2 : Erreur des paramètres de la courbe par MLE proposée (ERPM)

TABLEAU 2.12. Test 2 par MLE proposée (ERPM) : Données d'entrées et résultats obtenus

N_1	N_2	\hat{p}_f observée	p_f exacte	Fragilité estimée			
				\hat{A}_m	erreurs de A_m (%)	$\hat{\beta}$	erreurs de β (%)
0	10000	0.0000	0.0291	7.04	0.6	0.192	3.9
60	10000	0.0060	0.0291	7.03	0.5	0.202	1.3
120	10000	0.0119	0.0291	7.05	0.7	0.208	4.2
180	10000	0.0177	0.0291	7.04	0.6	0.206	3.4
240	10000	0.0234	0.0291	7.04	0.6	0.199	0.1
300	10000	0.0291	0.0291	7.05	0.8	0.199	0.3
360	10000	0.0347	0.0291	7.04	0.6	0.194	2.8
420	10000	0.0403	0.0291	7.04	0.6	0.191	4.0
480	10000	0.0458	0.0291	7.03	0.5	0.188	5.5
540	10000	0.0512	0.0291	7.02	0.4	0.191	4.3
600	10000	0.0566	0.0291	7.05	0.8	0.193	3.5

2.5.4 Validation par les exemples numériques

• Rappel sur les exemples

Les différents exemples numériques traités dans la section 2.3 sont réutilisés dans cette partie. Il s'agit de :

- **Structures** : Système linéaire, système non-linéaires de Bouc-Wen, système non-linéaire de Coulomb, bâtiment de 8 étages et portique en acier de 3 étages.
- **Excitation sismique** : Les mouvements du sol générés par le modèle de Boore pour un site $M = 7$ et $R = 9$ km.

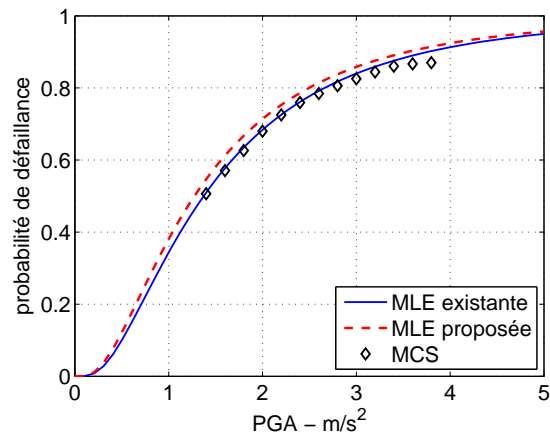
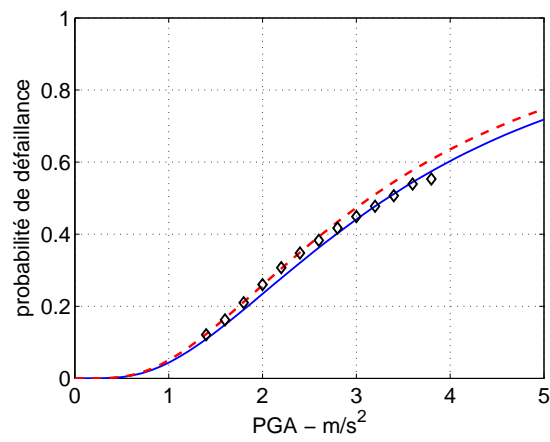
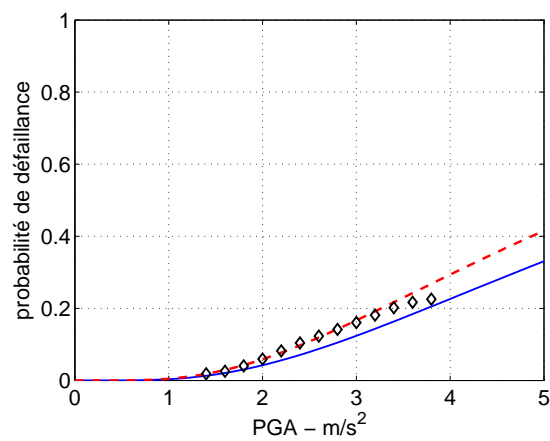
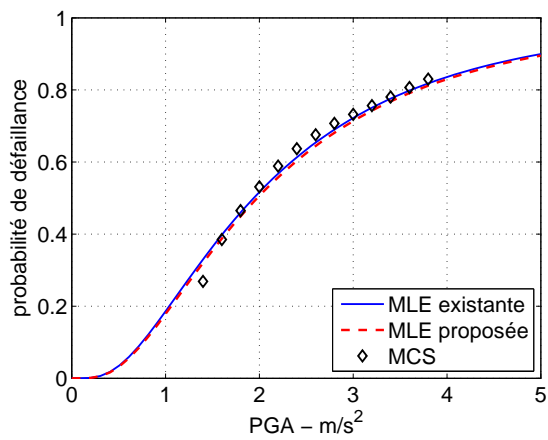
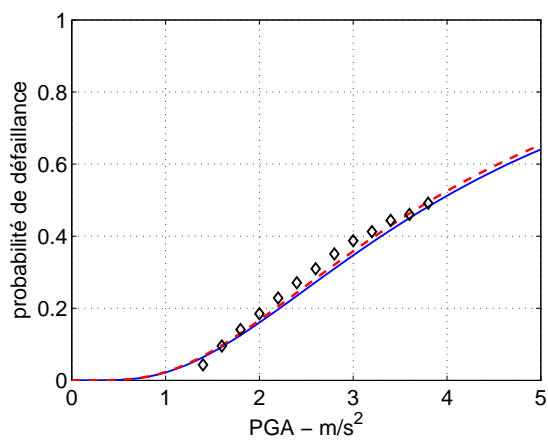
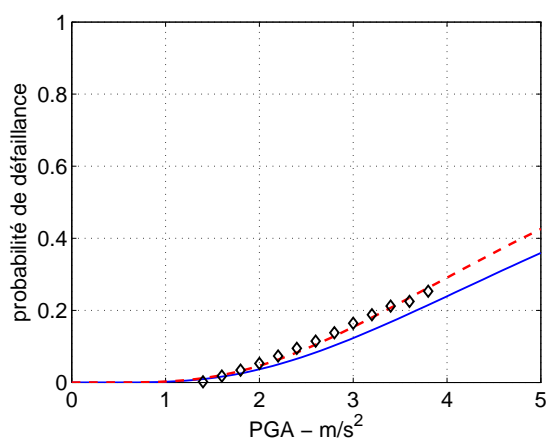
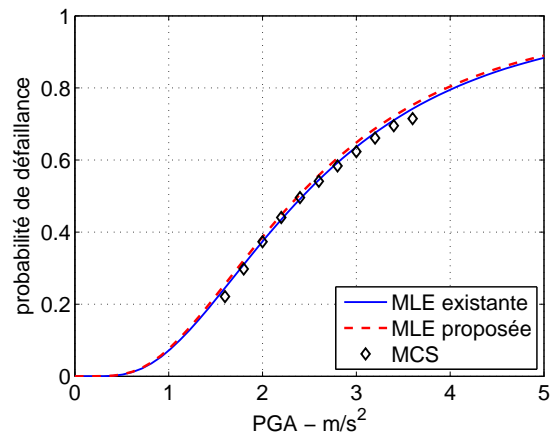
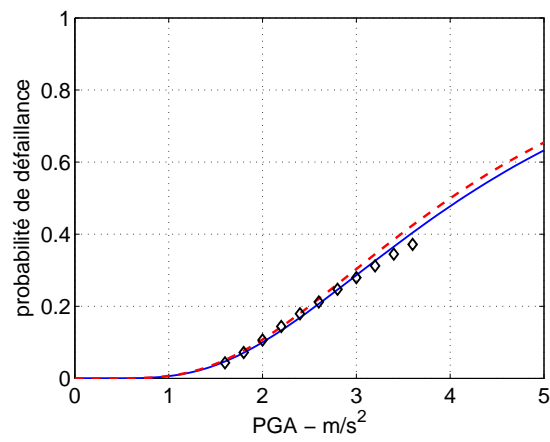
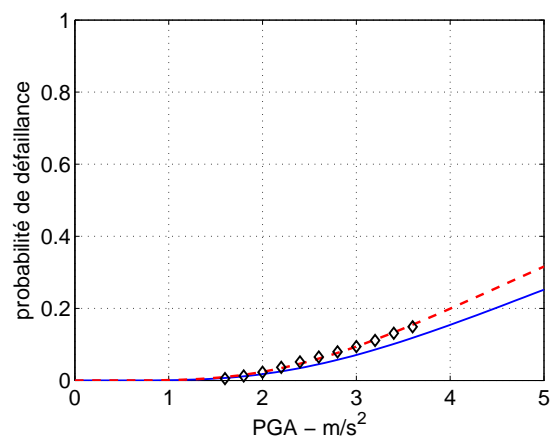
(a) $x_0 = 7cm$ (b) $x_0 = 10cm$ (c) $x_0 = 13cm$

FIGURE 2.32. Oscillateur linéaire

(a) $x_0 = 7cm$ (b) $x_0 = 10cm$ (c) $x_0 = 13cm$ FIGURE 2.33. *Oscillateur non-linéaire de Bouc-Wen*

(a) $x_0 = 7\text{cm}$ (b) $x_0 = 10\text{cm}$ (c) $x_0 = 13\text{cm}$ FIGURE 2.34. *Oscillateur non-linéaire de Coulomb*

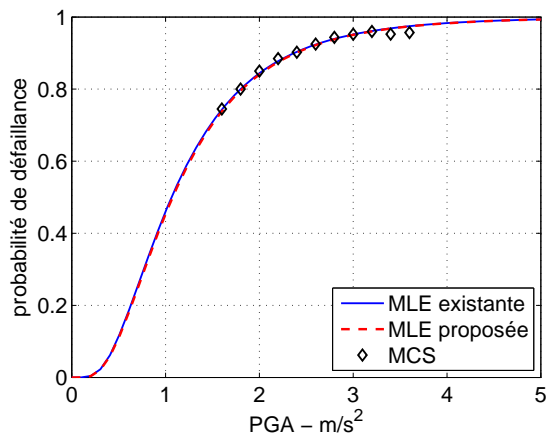
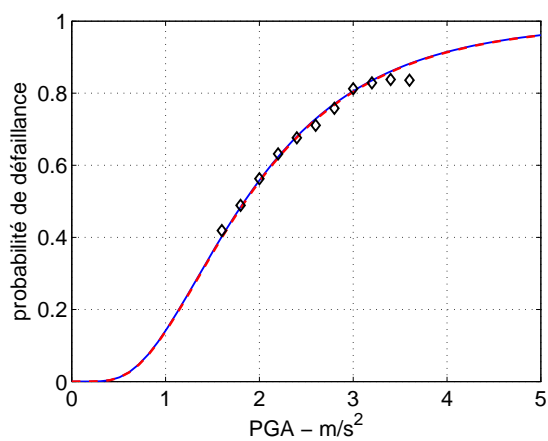
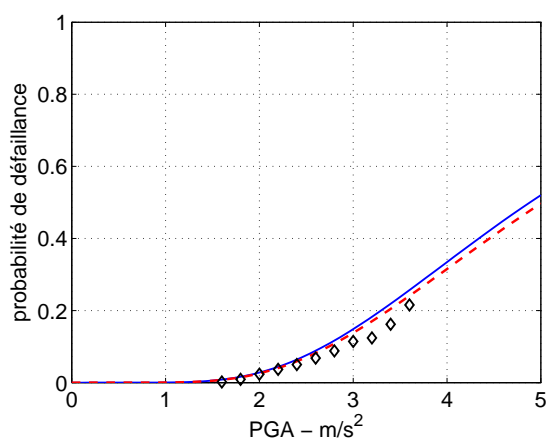
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/100$

FIGURE 2.35. Bâtiment de 8 étages

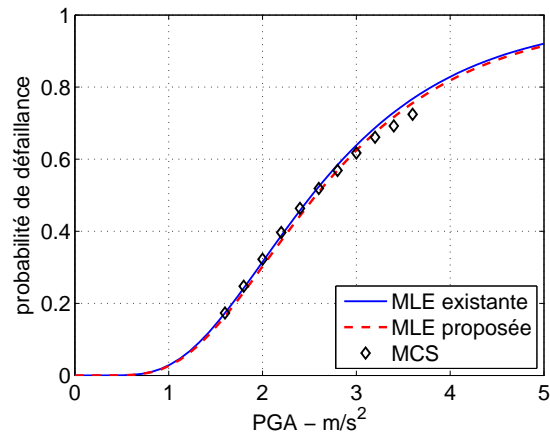
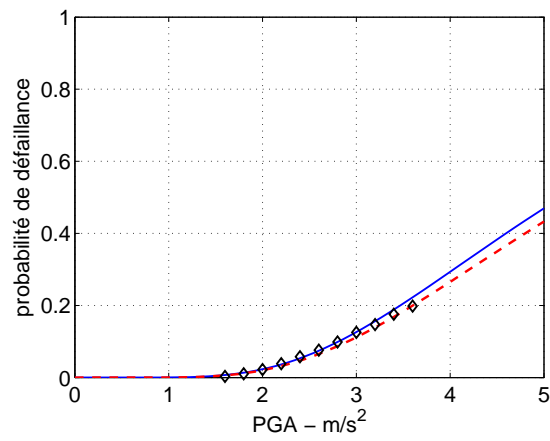
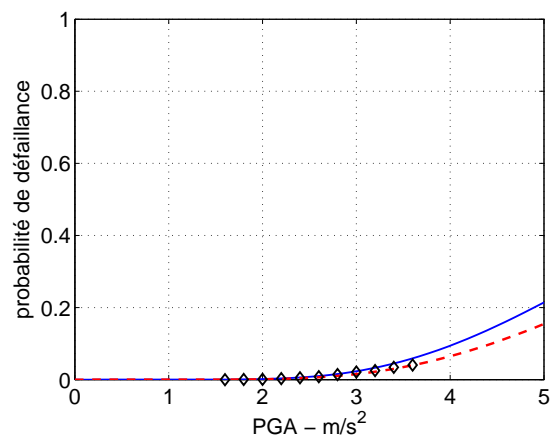
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/150$

FIGURE 2.36. Portique de 3 étages

TABLEAU 2.13. Paramètres des courbes de fragilité

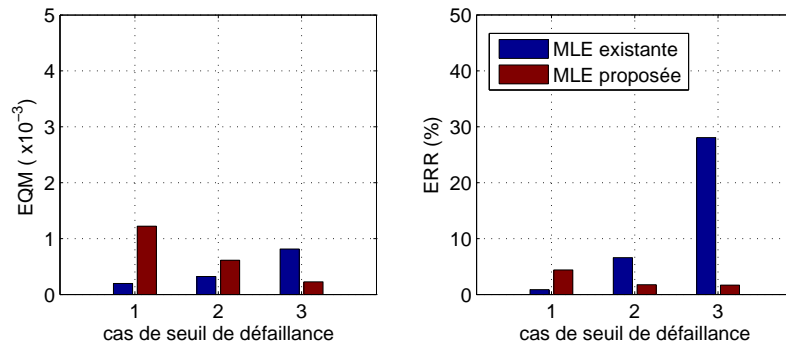
Systèmes	Seuil de défaillance	Méthode MLE existante		Méthode MLE proposée (ERPM)	
		A_m	β	A_m	β
Linéaire	$x_0 = 7$	1.37	0.78	1.27	0.79
	$x_0 = 10$	3.33	0.70	3.14	0.69
	$x_0 = 13$	6.82	0.71	5.77	0.67
Bouc-Wen	$x_0 = 7$	1.93	0.74	1.97	0.73
	$x_0 = 10$	3.91	0.67	3.83	0.67
	$x_0 = 13$	6.29	0.63	5.60	0.61
Coulomb	$x_0 = 7$	2.42	0.60	2.38	0.60
	$x_0 = 10$	4.12	0.56	4.00	0.56
	$x_0 = 13$	7.65	0.63	6.69	0.61
Bâtiment	$\delta_0 = H/300$	1.06	0.62	1.07	0.62
	$\delta_0 = H/200$	1.84	0.56	1.84	0.56
	$\delta_0 = H/100$	4.88	0.46	5.01	0.47
Portique	$\delta_0 = H/300$	2.52	0.48	2.57	0.48
	$\delta_0 = H/200$	5.18	0.47	5.43	0.48
	$\delta_0 = H/150$	7.00	0.42	7.87	0.44

Dans la section 2.3, pour la méthode MLE existante, avec $N_s = 5000$ accélérations du sol utilisées, on obtient d'abord les résultats $\{a_i, y_i\}, i = 1, \dots, N_s$ et les paramètres A_m et β de la courbe de fragilité sont ensuite obtenus par l'optimisation maximale de la fonction de vraisemblance. Dans cette partie, lesquels $\{a_i, y_i\}$ sont réutilisés, les paramètres de la courbe sont aussi estimés par la méthode MLE proposée (ERPM). Les résultats obtenus des courbes sont comparés avec ceux obtenus par la méthode MLE existante en utilisant les deux critères EQM et ERR.

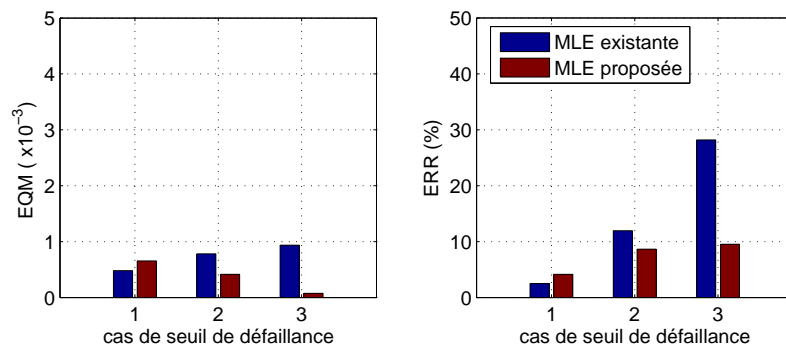
On rappelle que pour l'application de la méthode MLE proposée (ERPM), il est d'abord nécessaire d'estimer la densité de probabilité de l'intensité sismique $p_A(a)$. En considérant 2×10^5 simulations des mouvements du sol générés par le modèle de Boore, la densité du PGA $p_A(a)$ a été évaluée par l'estimation à noyau. Elle a été abordée dans la sous-section 2.3.2.

• Résultats des courbes de fragilité

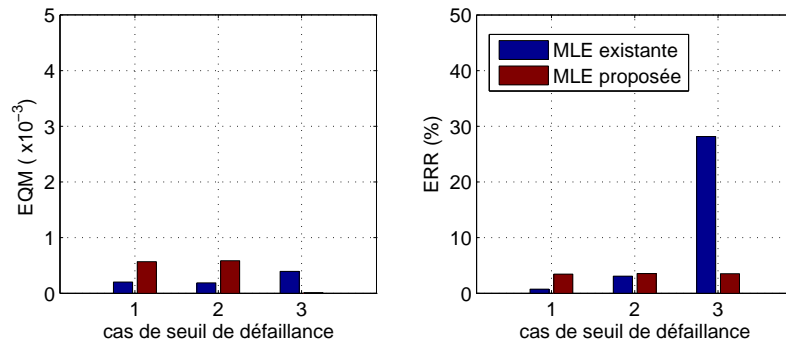
Les paramètres de ces courbes sont donnés dans le tableau 2.13. Les figures 2.32, 2.33, 2.34, 2.35 et 2.36 présentent les courbes de fragilité obtenues par la méthode MLE existante et celle proposée ainsi que les points de défaillance obtenus par la méthode MCS. On y observe que les courbes obtenues des deux méthodes se rapprochent pour tous les deux premiers cas dans tous exemples traités lorsque les événements de défaillance sont encore nombreux. Pour le troisième cas, l'écart entre les deux est significatif, et les courbes de fragilité obtenues par la méthode MLE proposée (ERPM) sont plus proches des points de défaillance obtenus par la méthode MCS que celles obtenues par la méthode MLE existante. Ceci est aussi validé par la comparaison des deux critères EQM et ERR. Le tableau 2.14 et les figures 2.37, 2.38 et 2.39 présentent les résultats obtenus pour la comparaison entre les deux méthodes. L'écart important entre eux est indiqué au dernier cas (le seuil de défaillance le plus grand). Les deux critères confirment que la méthode MLE proposée (ERPM) est plus précise et plus efficace que la méthode MLE existante.



(a) Linéaire



(b) Non-linéaire de Bouc-Wen



(c) Non-linéaire de Coulomb

FIGURE 2.37. Oscillateurs : Comparaison de deux critères EQM et ERR

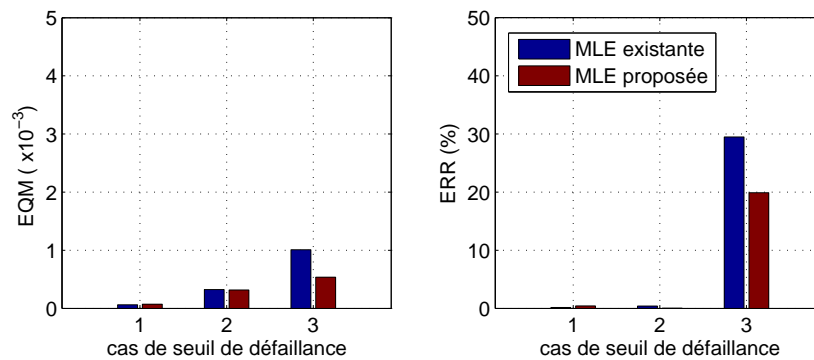


FIGURE 2.38. Bâtiment de 8 étages : Comparaison de deux critères EQM et ERR

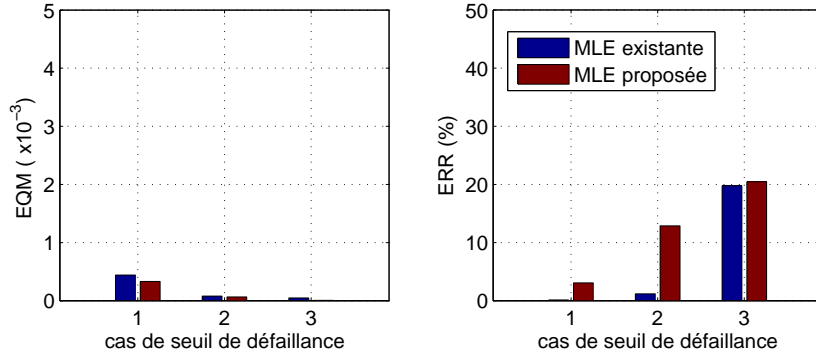


FIGURE 2.39. Portique de 3 étages : Comparaison de deux critères EQM et ERR

TABLEAU 2.14. Résultats des deux critères par les méthodes MLE

Systèmes	Seuil de défaillance	Méthode MLE existante		Méthode MLE proposée (ERPM)	
		EQM $\times 10^{-3}$	ERR%	EQM $\times 10^{-3}$	ERR%
Linéaire	$x_0 = 7$	0.19	0.87	1.22	4.39
	$x_0 = 10$	0.32	6.59	0.61	1.74
	$x_0 = 13$	0.81	28.05	0.22	1.68
Bouc-Wen	$x_0 = 7$	0.48	2.51	0.65	4.14
	$x_0 = 10$	0.78	11.95	0.41	8.65
	$x_0 = 13$	0.93	28.18	0.07	9.53
Coulomb	$x_0 = 7$	0.20	0.73	0.56	3.45
	$x_0 = 10$	0.18	3.07	0.58	3.55
	$x_0 = 13$	0.39	28.15	0.01	3.51
Bâtiment	$\delta_0 = H/300$	0.06	0.15	0.07	0.43
	$\delta_0 = H/200$	0.32	0.40	0.31	0.02
	$\delta_0 = H/100$	1.01	29.49	0.53	19.89
Portique	$\delta_0 = H/300$	0.44	0.13	0.33	3.06
	$\delta_0 = H/200$	0.08	1.18	0.06	12.89
	$\delta_0 = H/150$	0.04	19.78	0.01	20.45

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, une étude comparative des méthodes existantes pour la construction de courbes de fragilité a été menée. Elle est à la base de la proposition d'une amélioration de la méthode MLE.

Les procédures complètes pas-à-pas et les algorithmes détaillés des méthodes sont d'abord présentés. Une comparaison basée sur deux critères : erreur quadratique moyenne et erreur relative, a été considérée et illustrée par trois exemples numériques : oscillateurs (linéaire, non-linéaire), bâtiment à 8 étages bilinéaire et portique à 3 étages non-linéaire en acier. Les résultats obtenus montrent que la méthode SIS est la moins efficace par rapport à la méthode MLE et PSDM/PSCM. Entre la méthode MLE et la méthode PSDM/PSCM, la méthode MLE est plus précise que la méthode PSDM/PSCM dans la plupart des cas. Cette différence peut s'expliquer par une hypothèse

supplémentaire de la méthode PSDM/PSCM sur la relation entre la demande sismique et l'intensité sismique. La méthode MLE existante est alors retenue pour une étude approfondie.

Les deux tests analytiques permettent de mettre en évidence la dépendance de la méthode MLE de l'hypothèse log-normale et des données binaires observées. Si l'hypothèse log-normale de la courbe de fragilité est valide et si le nombre de simulations (c-à-d, données observées) est très important, la méthode MLE donne un excellent résultat. Or, il est difficile voire impossible d'avoir toutes ces deux conditions en pratique.

Dans le but d'atténuer la dépendance vis à vis des données observées, la méthode MLE améliorée a été proposée. Dans un premier temps, les distributions conditionnelles de l'intensité sismique de la défaillance et de la sûreté ont été développées. Elles sont ensuite utilisées dans une nouvelle fonction de vraisemblance de la méthode proposée. La procédure complète pas-à-pas et l'algorithme de la méthode proposée sont donnés et validés par des tests analytiques et exemples numériques. En comparant avec la méthode MLE existante, on note un résultat similaire lorsque les données observées sont complètes (nombre de simulations très importantes), et la méthode proposée donne un résultat nettement meilleur lorsque les données observées sont incomplètes (nombre de simulations limité, intensités manquantes, rareté des données de défaillance...). La supériorité de la méthode proposée vient de la prise en compte de l'information probabiliste supplémentaire relative à l'intensité sismique. Ayant validé son application, on peut conclure que la méthode MLE proposée (ERPM) est plus efficace que la méthode MLE existante.

Chapitre 3

Évaluation des probabilités de défaillance faibles par la méthode de simulation par subsets

Sommaire

3.1	Introduction	99
3.2	Probabilité de défaillance par les méthodes de simulation	99
3.2.1	Principe des méthodes de simulation	100
3.2.2	Méthode de simulation de Monte Carlo (MCS)	100
3.3	Théorie de la méthode de simulation par subsets (SS)	101
3.3.1	Idée de base	102
3.3.2	Choix des domaines de défaillance intermédiaires	103
3.3.3	Simulation de Monte Carlo suivant les chaînes de Markov	104
3.3.4	Illustration de la méthode de simulation par subset	106
3.4	Implémentation numérique de la méthode de simulation par subsets	107
3.4.1	Procédure complète pas-à-pas	107
3.4.2	Tests d'illustration	108
3.5	Applications de la méthode subsets à l'analyse de risque sismique	111
3.5.1	Exemple 1 : Oscillateurs linéaire et non-linéaires	111
3.5.2	Exemple 2 : Bâtiment de 8 étages	118
3.5.3	Exemple 3 : Portique en acier de 3 étages	122
3.5.4	Discussion	125
3.6	Conclusion	126

3.1 Introduction

La courbe de fragilité représente la probabilité de défaillance conditionnelle à chaque niveau d'intensité sismique. On réécrit ici la définition donnée dans le chapitre 1 :

$$\text{Fragilité} = F_r(a) = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0 | A = a] \quad (3.1)$$

Chaque point sur la courbe $F_r(a)$ est ainsi la probabilité de défaillance lorsque l'intensité sismique est égale à a . À partir des probabilités de défaillance pour différentes valeurs d'intensité sismique a , et grâce à la régression par la méthode des moindres carrés, on peut obtenir la courbe de fragilité entière suivant la méthode de normalisation de l'intensité sismique. Le point clé est d'évaluer de façon efficace les probabilités de défaillance pour certaines intensités sismiques a .

En outre, pour les études probabilistes du risque sismique, on doit souvent déterminer la probabilité de défaillance d'une structure sous excitation sismique pour un site donné, c'est-à-dire :

$$p_f = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0] \quad (3.2)$$

Dans les deux situations (3.1) et (3.2), l'évaluation de la probabilité de défaillance est nécessaire. Il est bien connu que la méthode classique pour évaluer la probabilité de défaillance est celle de simulation par Monte Carlo (SMC). Toutefois, cette méthode devient coûteuse en calcul quand l'estimation des probabilités de défaillance faibles doit être calculée ($p_f \leq 10^{-3}$), parce qu'elle requiert un grand nombre d'analyses du système pour atteindre une précision convenable. Pour surmonter cet inconvénient, la méthode de simulation par subsets (SS - Subsets Simulation) a été développée. C'est un algorithme de simulation stochastique pour calculer efficacement les probabilités relatives à des rares événements de défaillance [98].

L'objectif de ce chapitre est de vérifier l'applicabilité de la méthode de simulation par subset dans le contexte des études probabilistes du risque sismique ou plus précisément dans l'évaluation des probabilités de défaillance données par les équations (3.1) et (3.2). Il se structure de la manière suivante : Un rappel sur les méthodes de simulation pour évaluer les probabilités de défaillance est d'abord donné. Il est ensuite suivi par la description de la méthode de simulation par subsets et son algorithme proposé par Au et Beck [99, 100]. Une illustration de l'algorithme à travers deux exemples trouvés dans la littérature montre l'efficacité de la méthode de simulation par subsets et valide sa mise en œuvre. Enfin, la méthode de simulation par subsets est appliquée à des structures soumises à l'excitation sismique générée par le modèle de Boore.

3.2 Probabilité de défaillance par les méthodes de simulation

Soit \mathbf{Z} le vecteur des paramètres aléatoires qui reflètent l'incertitude en excitations aléatoires et en propriétés d'une structure mécanique. La probabilité de défaillance d'un système ou une structure, est déterminée par la formule suivante :

$$p_f = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0] = \int_{D_f = \{\mathbf{Z}: G(\mathbf{Z}) \leq 0\}} p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (3.3)$$

où $\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_n]$ représente le vecteur des variables aléatoires de dimension n (c'est-à-dire chacune des composantes Z_i est une variable aléatoire) avec la fonction de densité de probabilité conjointe $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$; D_f est le domaine de défaillance.

On peut toujours rendre indépendantes les variables aléatoires dépendantes. C'est pourquoi, sans perte de généralité, les composantes de \mathbf{Z} sont considérées comme indépendantes, c'est-à-dire :

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n p_{Z_i}(z_i) \quad (3.4)$$

où $p_{Z_i}(\cdot)$ est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Z_i .

La principale difficulté dans l'évaluation de la probabilité de défaillance suivant l'équation (3.3) est que le domaine d'intégration $D_f = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq 0\}$ est implicitement défini. En outre, la dimension de l'intégrale est égale au nombre de paramètres aléatoires qui est généralement de grande taille [101]. Pour éviter ces obstacles, les méthodes de simulation sont adaptées dans ce cas.

3.2.1 Principe des méthodes de simulation

Le principe des méthodes de simulation est d'effectuer un échantillonnage aléatoire dans l'espace des variables de base \mathbf{Z} . Pour chacun des tirages, la fonction d'état-limite est évaluée pour voir si la configuration tirée appartient au domaine de sûreté ou au domaine de défaillance. Un comptage des défaillances permettra d'estimer la probabilité recherchée.

Les étapes de la procédure [102] sont donc :

1. Engendrer des réalisations de variables aléatoires selon leur densité conjointe de probabilité ou, au moins, selon leurs lois marginales et leurs corrélations ;
2. Calculer la valeur de la fonction d'état-limite
3. Selon le cas :
 - s'il n'y a pas de défaillance, aller à l'étape 1 ;
 - s'il y a défaillance, incrémenter le compteur des cas défaillants ;
4. Répéter les étapes 1 à 3 jusqu'à ce qu'un nombre suffisant de tirages soit atteint ;
5. Estimer la probabilité de défaillance en fonction du nombre des cas défaillants par rapport au nombre total des réalisations effectuées.

3.2.2 Méthode de simulation de Monte Carlo (MCS)

La méthode de simulation MCS est l'approche de base universelle pour évaluer la probabilité de défaillance. En introduisant l'indicateur de défaillance \mathbf{I}_{D_f} , l'intégrale (3.3) peut être écrite sous la forme [103] :

$$p_f = \int_{R^n} \mathbf{I}_{D_f} p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = E[\mathbf{I}_{D_f}] \quad (3.5)$$

où $E[\cdot]$ est l'espérance mathématique et l'indicateur de défaillance est défini par :

$$\mathbf{I}_{D_f}(\mathbf{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{si } G(\mathbf{Z}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(\mathbf{Z}) > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

la probabilité de défaillance est égale à l'espérance de la fonction indicatrice du domaine de défaillance et la moyenne empirique de \mathbf{I}_F est une estimation non biaisée de p_f :

$$p_f = E[\mathbf{I}_{D_f}] \approx \tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{I}_{D_f}(\mathbf{z}^{(k)}) = \frac{N_f}{N} \quad (3.7)$$

où N est le nombre de tirages aléatoires et $\{z^{(k)}, k = 1, \dots, N\}$ sont les réalisations indépendantes simulées selon la distribution de la population correspondant à la fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ et N_f est le nombre de réalisations provoquant la défaillance. La figure 3.1 illustre le principe de la méthode MCS. Dans l'espace des variables aléatoires, à chaque vecteur généré $z^{(k)}$ est associé un point aléatoire. La simulation directe consiste à dénombrer les points appartenant au domaine de défaillance et à appliquer la formule (3.7) pour obtenir la probabilité de défaillance.

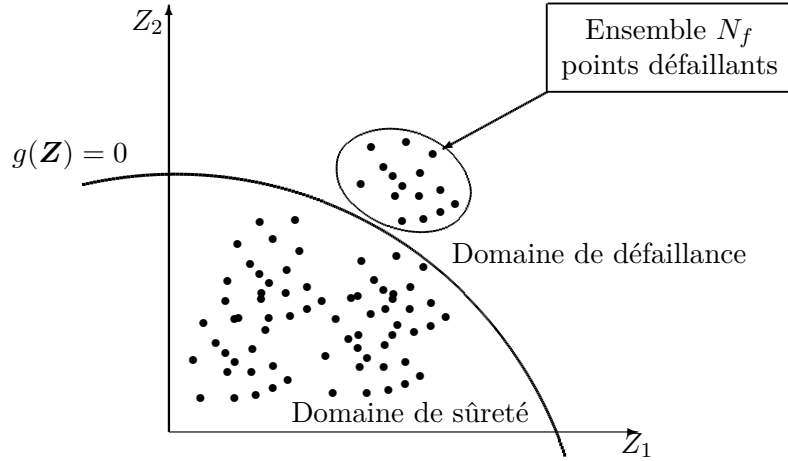


FIGURE 3.1. Illustration de la simulation de Monte Carlo

La variance est donc obtenue par le calcul suivant :

$$\text{Var}[\tilde{p}_f] = \frac{1}{N} p_f (1 - p_f) \quad (3.8)$$

et le coefficient de variation de l'estimateur s'écrit alors :

$$c_v \equiv \frac{\sqrt{\text{Var}[\tilde{p}_f]}}{\text{E}[\tilde{p}_f]} = \sqrt{\frac{1 - p_f}{N p_f}} \approx \sqrt{\frac{1}{N p_f}} \Big|_{p_f \rightarrow 0} \quad (3.9)$$

Par exemple, pour un objectif $c_v = 10\%$, et une probabilité $p_f = 10^{-n}$, on obtient $N \approx \frac{1}{p_f c_v^2} = 10^{n+2}$. Cette méthode n'est pas convenable pour estimer les probabilités faibles parce que le nombre de simulations est inversement proportionnel à p_f .

Différentes méthodes dérivées de la méthode de MCS dans le but d'améliorer la convergence ont été alors proposées afin d'évaluer efficacement la probabilité de défaillance telles que : simulations directionnelles [104, 105], tirages d'importance [106, 107, 108, 109] et plus récemment, simulations par subsets [99, 110, 111].

Dans ce chapitre, on s'intéresse particulièrement à la méthode de simulation par subsets qui est très efficace pour les probabilités de défaillance faibles ($p_f \leq 10^{-3}$) et avec un nombre important de variables aléatoires.

3.3 Théorie de la méthode de simulation par subsets (SS)

La méthode de simulation par Subsets est une méthode d'évaluation de la probabilité de défaillance par simulation, appliquée à la fiabilité, proposée par Au et Beck [99, 100]. Les auteurs

ont combiné le concept de sous-ensemble avec la méthode MCS suivant les chaînes de Markov connues comme étant une technique MCS très flexible pour générer des nombres aléatoires suivant les densités de probabilité arbitraires [112]. La méthode SS est une technique de simulation très efficace pour l'analyse de la fiabilité des structures.

3.3.1 Idée de base

On rappelle que la défaillance est atteinte lorsque l'évaluation de la fonction de performance est non positive $G(\mathbf{Z}) \leq 0$. Le domaine de défaillance est donc $D_f = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq 0\}$. Il existe toujours une séquence des domaines de "défaillance" intermédiaires imbriqués, de tailles décroissantes de plus en plus petite (subsets) et inclus l'un dans l'autre comme suivant :

$$D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_m = D_f \quad (3.10)$$

où le domaine D_i avec $i = 1, \dots, m$ est défini de la manière suivante : $D_i = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq y_i\}$ et $D_m = D_f$ est le dernier sous-ensemble supposé dans le calcul de p_f . Les valeurs y_i sont des valeurs positives décroissantes de la fonction de performance et $y_m = 0$. Cette décomposition en sous-domaines est illustrée sur la figure 3.2.

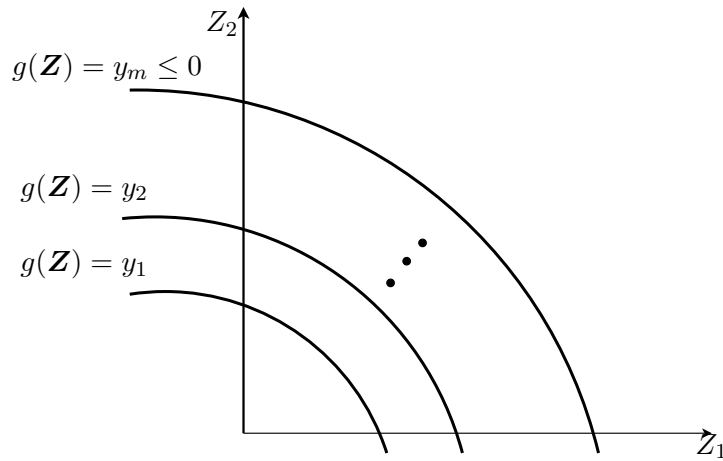


FIGURE 3.2. Ensemble de domaines D_i

La définition des probabilités conditionnelles permet d'écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} p_f = P(D_m) &= P(D_m|D_{m-1})P(D_{m-1}) \\ &= P(D_m|D_{m-1})P(D_{m-1}|D_{m-2})P(D_{m-2}) \\ &= \dots \\ &= P(D_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(D_{i+1}|D_i) \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) exprime la probabilité de défaillance sous la forme d'un produit d'une séquence des probabilités conditionnelles $\{P(D_{i+1}|D_i) : i = 1, \dots, m - 1\}$ et $P(D_1)$. L'idée de base de la méthode SS est d'estimer la probabilité de défaillance p_f en évaluant ces quantités, d'abord $P(D_1)$ et puis $\{P(D_{i+1}|D_i) : i = 1, \dots, m - 1\}$. De cette façon, même si $p_f = P(D_f)$ est très faible, en choisissant judicieusement la valeur des seuils intermédiaires, les différents facteurs à évaluer peuvent être assez grands et ainsi évalués de manière efficace par simulations.

Par exemple, on suppose les probabilités $P(D_1)$, $P(D_{i+1}|D_i) \approx 0.1$ correspondant à trois domaines intermédiaires, la probabilité de défaillance est alors égale à $P(D) = 10^{-4}$. Si on vise le coefficient de variation $c_v = 0.1$, le nombre de simulations est environ $\frac{1}{10^{-1} \times 0.1^2} = 1 \times 10^3$ pour la probabilité de 0.1 ; et alors pour obtenir $p_f = 10^{-4}$ on n'utilise que $N = 4 \times 10^3$ simulations. Par contre, cette probabilité est trop faible pour être estimée efficacement par la méthode MCS. En effet, on a besoin d'un nombre de simulations qui est approximativement $N \approx \frac{1}{10^{-4} \times 0.1^2} = 10^6$. Cela implique que l'on remplace alors le calcul de probabilité faible de 10^{-4} par un produit de probabilités de valeurs plus grandes de 10^{-1} , associées à des événements "défaillants" intermédiaires et imbriqués. Des probabilités de valeurs plus grandes sont donc estimées à un coût de calcul plus raisonnable.

On constate que pour calculer p_f selon l'équation (3.11), il faut déterminer $P(D_1)$ et $P(D_{i+1}|D_i)$. $P(D_1)$ est estimée par la méthode MCS suivant l'expression (3.7). On détermine aussi les probabilités conditionnelles $P(D_{i+1}|D_i)$ par la méthode MCS. On note que la simulation d'un échantillon correspond à une distribution conditionnelle de $\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_n]$, qui est dans le domaine de D_i avec la fonction de densité de forme :

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}|D_i) = p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \frac{I_{D_i}(\mathbf{z})}{P(D_i)} = \left[\prod_{j=1}^n p_{Z_j}(z_j) \right] \frac{I_{D_i}(\mathbf{z})}{P(D_i)} \quad (3.12)$$

En résumé l'estimation de la probabilité de défaillance par la méthode SS nécessite deux étapes : (1) établissement de certains domaines de "défaillance" intermédiaires D_i et (2) estimation des probabilités de défaillance conditionnelles $P(D_{i+1}|D_i)$. Pour la première étape, le choix des domaines est basé sur la sélection adaptative des y_i . Quant à la deuxième étape, il nécessite de générer des réalisations suivant une loi de probabilité conditionnelle. Et cette tâche est effectuée par la méthode MCS suivant les chaînes de Markov.

3.3.2 Choix des domaines de défaillance intermédiaires

Un domaine de défaillance intermédiaire D_i est défini par la formule suivante :

$$D_i = \{ \mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq y_i \} \quad (3.13)$$

où $y_1 > y_2, \dots, y_{m-1} > y_m = 0$ forment une séquence décroissante des valeurs des seuils intermédiaires, qui jouent un rôle clé dans la procédure de la méthode SS, car elles affectent l'estimation des probabilités conditionnelles. Ces valeurs sont choisies de telle sorte que les probabilités conditionnelles ne sont pas négligeables si $y_i \gg y_{i+1}$, ce qui impliquerait à nouveau le problème de la simulation d'événements rares [113]. En revanche, si elles sont très proches $y_{i+1} \approx y_i$, il faudra un plus grand nombre de niveaux m (grand coût de calcul), pour considérer le domaine de défaillance d'intérêt.

Par conséquent, il est difficile de savoir a priori quelles valeurs de seuils intermédiaires optimales il faut choisir afin d'obtenir une estimation raisonnable des probabilités conditionnelles. À l'inverse, on peut choisir les domaines de défaillance D_i de telle manière que les probabilités $P(D_1)$ et $P(D_{i+1}|D_i)$ soient visées égales à une valeur spécifiée commune p_0 . La sélection adaptative de y_i dépend de cette valeur p_0 et est donc appliquée de sorte que la probabilité de défaillance corresponde à p_0 . L'expérience de Au *et al.* [113] montre que $p_0 \in [0.1, 0.2]$ est un choix raisonnable.

En pratique, le choix des valeurs de y_i pour les domaines D_i s'effectue dans cette étude par le procédé suivant :

- On simule N points et obtient ainsi une série de N valeurs de la fonction de performance $G : \{g^{(1)}, \dots, g^{(N)}\}$. Cette série est ensuite rangée selon l'ordre croissant : $\{g^{(1)} \leq g^{(2)} \leq \dots \leq g^{(N)}\}$. On choisit la valeur de $y_1 = 0.5 \times (g^{(p_0 N)} + g^{(p_0 N + 1)})$. Alors le nombre de réalisations de la fonction de performance étant inférieur ou égal à y_1 est de $p_0 N$ et l'estimation de la première probabilité $P(D_1) \approx \tilde{P}(D_1) = p_0 N / N = p_0$.
- On garde $p_0 N$ points étant dans le domaine D_1 . De chacun de ces points, on génère $(1/p_0 - 1)$ points en utilisant la chaîne de Markov avec l'algorithme de Metropolis modifié. On a alors : $p_0 N + p_0 N \times (1/p_0 - 1) = N$ nouveaux points qui sont dans le domaine D_1 et une nouvelle série de N valeurs de la fonction de performance $G : \{g^{(1)}, \dots, g^{(N)}\}$. De la même manière que l'étape précédente, on réorganise cette série en ordre croissant $\{g^{(1)} \leq g^{(2)} \leq \dots \leq g^{(N)}\}$. La valeur du deuxième seuil y_2 est prise par $y_2 = 0.5 \times (g^{(p_0 N)} + g^{(p_0 N + 1)})$. Il est facile de vérifier que $P(D_2|D_1) \approx \tilde{P}(D_2|D_1) = p_0$.
- La boucle ci-dessus est répétée et nous donne les valeurs successives des seuils $\{y_1, y_2, \dots\}$. Elle est terminée quand une valeur négative y_m apparaît. On garde $y_m = 0$. Et la dernière probabilité conditionnelle $P(D_m|D_{m-1})$ estimée par la méthode MCS est égale au rapport entre le nombre de valeurs non positives de la fonction de performance et le nombre total N . En résumé, les probabilités estimées sont :

$$\begin{cases} P(D_1) & \approx \tilde{P}(D_1) = p_0 = 0.1 \\ P(D_{i+1}|D_i) & \approx \tilde{P}(D_{i+1}|D_i) = p_0 = 0.1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-2 \\ P(D_m|D_{m-1}) & \approx \tilde{P}(D_m|D_{m-1}) \end{cases} \quad (3.14)$$

Ce choix des valeurs des seuils intermédiaires implique qu'elles sont dépendantes des échantillons conditionnels et peuvent varier dans les différentes simulations effectuées [99]. De plus, $P(D_{i+1}|D_i)$ n'est pas actuellement égal à p_0 , étant donné qu'il s'agit d'une estimation de la probabilité conditionnelle. N doit donc être choisi suffisamment grand pour que la variabilité de y_i , et donc l'erreur de $P(D_{i+1}|D_i) \approx p_0$ soit limitée à une valeur de tolérance [113]. Par conséquent, on constate que le choix des niveaux des seuils intermédiaires est un compromis entre le nombre d'échantillons requis pour chaque niveau de la simulation de N , le nombre de niveaux de simulation m et la valeur de probabilité conditionnelle prescrite p_0 .

3.3.3 Simulation de Monte Carlo suivant les chaînes de Markov

La méthode la plus répandue pour estimer la probabilité conditionnelle $P(D_{i+1}|D_i)$ est l'utilisation de la méthode des chaînes de Markov via l'algorithme de Métropolis [114] ou Métropolis-Hastings [115]. Elle est aussi une des techniques puissantes de simulation pour produire un échantillon selon n'importe quelle distribution de probabilité donnée. Dans le contexte de la méthode SS, l'algorithme de Métropolis a été appliqué dans la référence [99], et celui de Métropolis-Hastings a aussi été appliqué dans la référence [100].

Le principe de l'algorithme de Metropolis [114, 115] permet, à partir d'échantillons distribués selon la densité $p(\cdot|D_i)$, de générer aisément d'autres points selon la même densité $p(\cdot|D_i)$. Les premiers points sont appelés germes de la chaîne de Markov. Considérons que nous possédons un germe $\mathbf{z}^{(1)}$. Il s'agit de générer une chaîne d'échantillons $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots$ de manière itérative en calculant $\mathbf{z}^{(k+1)}$ à partir de $\mathbf{z}^{(k)} = [z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}]$. Toutefois, la probabilité d'acceptation dans l'étape "acceptation/rejet" est très petite lorsque la dimension n augmente, donc un grand nombre d'échantillons répétés sont obtenus; ce qui influence fortement sur le choix des domaines de défaillance

intermédiaires [116]. Cette difficulté est mise en évidence lors de la simulation des variables aléatoires avec de nombreuses composantes indépendantes. Ainsi, l'algorithme devient inefficace dans les problèmes de grande dimension [100].

L'algorithme de Metropolis-Hastings utilisé dans la méthode SS de Au et Beck [99], diffère un peu de sa version originale. Dans la suite, on présente l'algorithme, et puis on démontre que l'échantillon simulé suit la distribution de $p(\cdot|D_i)$.

- **Algorithme de Metropolis modifié par Au et Beck (voir figure 3.3)**

Considérons n variables aléatoires qui sont des composantes du vecteur $\mathbf{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$. Pour une variable aléatoire Z_j , $j = 1, 2, \dots, n$, on définit une densité de probabilité candidate $p_j^*(\xi|Z_j)$ pour ξ centrée sur Z_j avec la propriété de symétrie : $p_j^*(\xi|Z_j) = p_j^*(Z_j|\xi)$. On génère une séquence $\{\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots\}$ à partir d'une réalisation initiale $\mathbf{z}^{(1)}$ en calculant $\mathbf{z}^{(k+1)}$ à partir de $\mathbf{z}^{(k)} = [z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}]$, $k = 1, 2, \dots$ de la manière suivante :

- **Génération d'un point candidat $\tilde{\mathbf{z}}$**

Pour chaque composante $j = 1, 2, \dots, n$, on simule ξ_j à partir de la densité $p_j^*(\xi|z_j^{(k)})$. On calcule le rapport $r_j = p_{Z_j}(\xi_j)/p_{Z_j}(z_j^{(k)})$. On prend $\tilde{z}_j = \xi_j$ avec la probabilité $\min(1, r_j)$ et $\tilde{z}_j = z_j^{(k)}$ avec la probabilité complémentaire : $1 - \min(1, r_j)$.

- **Acceptation ou refus de point $\tilde{\mathbf{z}}$**

On vérifie la localisation de $\tilde{\mathbf{z}}$ si $\tilde{\mathbf{z}} \in D_i$, on accepte le candidat $\mathbf{z}^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{z}}$; sinon on le rejette et on prend le point courant $\mathbf{z}^{(k)}$ comme nouveau point $\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)}$.

- **Distribution de l'échantillon simulé**

On suppose que la distribution de $\mathbf{z}^{(k)}$ est $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}|D_i)$, on va démontrer que celle de $\mathbf{z}^{(k+1)}$ est aussi de $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}|D_i)$.

En effet, dans l'étape 1 de l'algorithme de Metropolis modifié, les composantes de $\mathbf{z}^{(k)}$ sont indépendantes, on a alors :

$$p(\mathbf{z}^{(k+1)}|\mathbf{z}^{(k)}) = \prod_{j=1}^n p_j(z_j^{(k+1)}|z_j^{(k)}) \quad (3.15)$$

où $p_j(\cdot)$ est la fonction de densité de probabilité de la composante j . Pour $z_j^{(k+1)} \neq z_j^{(k)}$, on a :

$$p_j(z_j^{(k+1)}|z_j^{(k)}) = p_j^*(z_j^{(k+1)}|z_j^{(k)}) \times \min \left\{ 1, \frac{p_{Z_j}(z_j^{(k+1)})}{p_{Z_j}(z_j^{(k)})} \right\} \quad (3.16)$$

Notons qu'une relation $\min\{1, a/b\} \times b = \min\{1, b/a\} \times a$ pour les nombres positifs a, b existe toujours. Ainsi, on trouve facilement que :

$$\min \left\{ 1, \frac{p_{Z_j}(z_j^{(k+1)})}{p_{Z_j}(z_j^{(k)})} \right\} \times p_{Z_j}(z_j^{(k)}) = \min \left\{ 1, \frac{p_{Z_j}(z_j^{(k)})}{p_{Z_j}(z_j^{(k+1)})} \right\} \times p_{Z_j}(z_j^{(k+1)}) \quad (3.17)$$

Par ailleurs, la fonction $p_j^*(\cdot|\cdot)$ est symétrique. Alors, on peut déduire :

$$p_j(z_j^{(k+1)}|z_j^{(k)})p_{Z_j}(z_j^{(k)}) = p_j(z_j^{(k)}|z_j^{(k+1)})p_{Z_j}(z_j^{(k+1)}) \quad (3.18)$$

On note que cette équation est triviale quand $z_j^{(k+1)} = z_j^{(k)}$. À partir des expressions (3.15) et (3.18), on a :

$$p(\mathbf{z}^{(k+1)}|\mathbf{z}^{(k)})p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(k)}|D_i) = p(\mathbf{z}^{(k)}|\mathbf{z}^{(k+1)})p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(k+1)}|D_i) \quad (3.19)$$

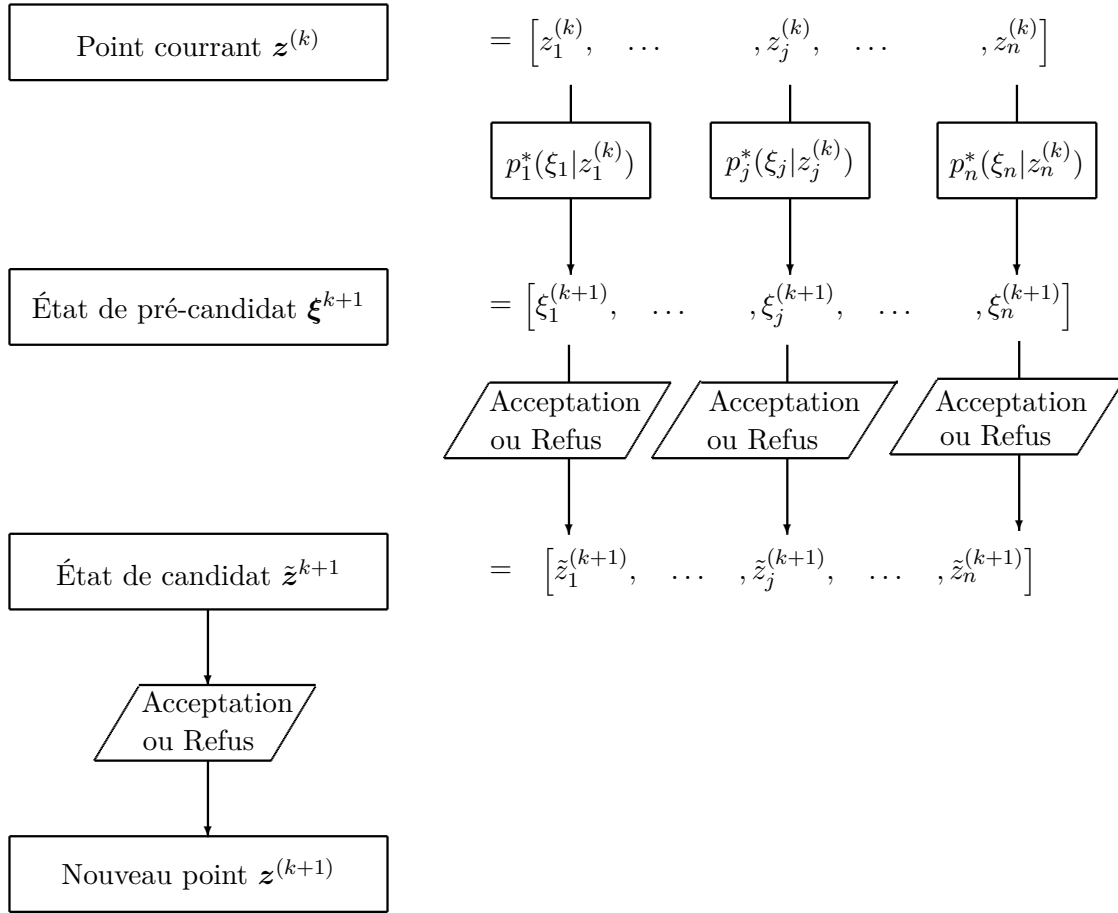


FIGURE 3.3. *Algorithme de Metropolis modifié*

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{z}^{(k+1)}) &= \int p(\mathbf{z}^{(k+1)} | \mathbf{z}^{(k)}) p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(k)} | D_i) d\mathbf{z}^{(k)} = \int p(\mathbf{z}^{(k)} | \mathbf{z}^{(k+1)}) p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(k+1)} | D_i) d\mathbf{z}^{(k)} \\
 &= p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(k+1)} | D_i) \int p(\mathbf{z}^{(k)} | \mathbf{z}^{(k+1)}) d\mathbf{z}^{(k)} = p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}^{(k+1)} | D_i)
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

où $\int p(\mathbf{z}^{(k)} | \mathbf{z}^{(k+1)}) d\mathbf{z}^{(k)} = 1$ parce que $\mathbf{z}^{(k)}$ est distribuée selon $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z} | D_i)$.

Alors la distribution de $\mathbf{z}^{(k+1)}$ est aussi celle de $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z} | D_i)$.

Enfin, on peut conclure que si la réalisation initiale $\mathbf{z}^{(1)}$ est distribuée selon la fonction de densité conditionnelle $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z} | D_i)$, alors la séquence générée $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots$ est aussi distribuée selon la même fonction de densité $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z} | D_i)$.

3.3.4 Illustration de la méthode de simulation par subsest

Le principe de calcul de la probabilité de défaillance par la méthode SS est représenté ici de manière succincte et est illustré à la figure 3.4. Le processus effectué pour atteindre la région cible de défaillance est comme suit :

1. Simulations de Monte-Carlo pour évaluer la première probabilité.

2. Sélection adaptative d'une valeur y_1 de l'état-limite tel que $P(G(\mathbf{z}) \leq y_1) \approx p_0$.
3. Sélection des points (des réalisations) \mathbf{z} tels que $G(\mathbf{z}) \leq y_1$. Ces points sélectionnés vont servir de germes pour former des chaînes de Markov permettant de générer l'ensemble $\{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq y_1\}$. La simulation conditionnelle à la figure 3.3 est faite par l'algorithme de Métropolis à partir des germes.
4. Sélection d'une valeur y_2 de l'état-limite tel que $P(D_2|D_1) \equiv P(G(\mathbf{z}) \leq y_2 | G(\mathbf{z}) \leq y_1) \approx p_0$.

On répète ce processus pour estimer les autres probabilités conditionnelles. La probabilité de défaillance finale correspond au produit des probabilités obtenues à chaque étape.

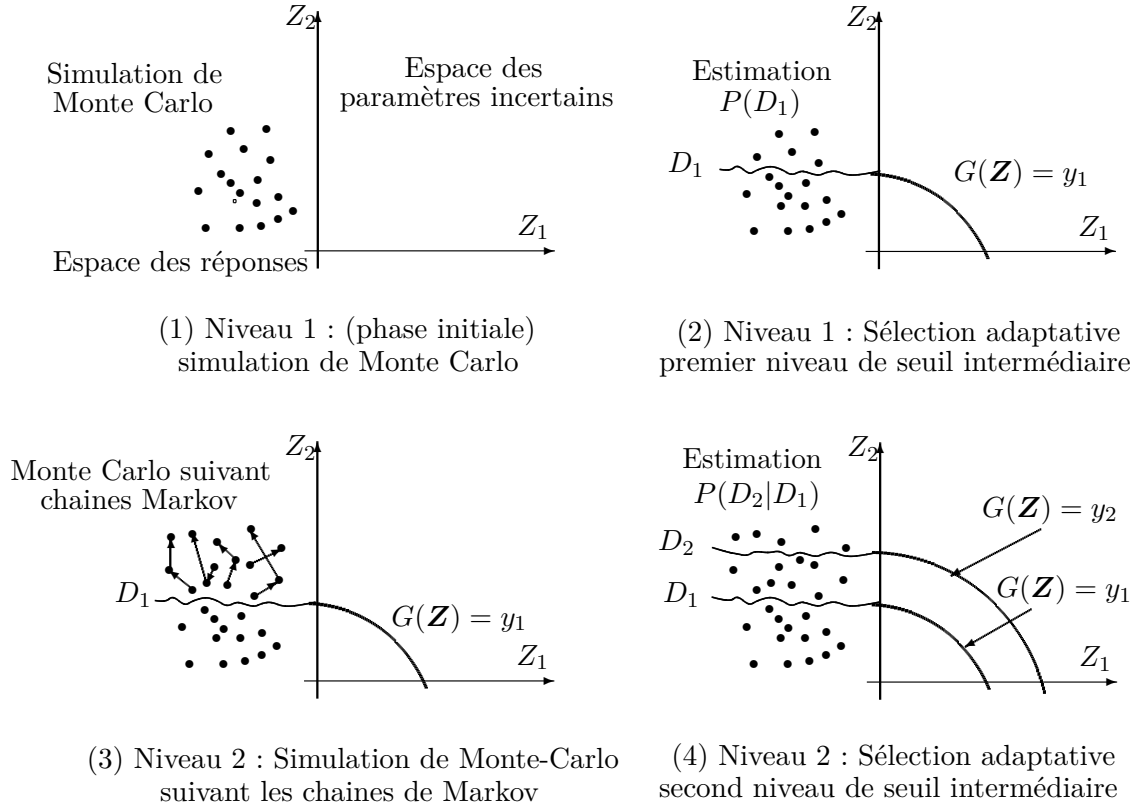


FIGURE 3.4. *Processus de la méthode de simulation par subsets*

3.4 Implémentation numérique de la méthode de simulation par subsets

3.4.1 Procédure complète pas-à-pas

L'algorithme implémenté se base sur celui proposé par Au et Beck [99] qui comprend les étapes suivantes :

1. Définir le nombre de variables aléatoires n , le nombre total d'échantillons dans chaque niveau N et la valeur de probabilité conditionnelle p_0 .
2. Générer N échantillons $\mathbf{z}_1^{(k)}$ avec $k = 1, \dots, N$ suivant la fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ en utilisant la méthode MCS,

3. Obtenir les valeurs de la fonction de performance $G(z_1^{(k)}) : \{g^{(1)}, \dots, g^{(N)}\}$ et ranger selon le sens croissant : $\{g^{(1)} \leq g^{(2)} \leq \dots \leq g^{(N)}\}$.
4. Choisir la première valeur seuil de y_1 en tant que position entre p_0N -ème et $(p_0N + 1)$ -ème dans la liste par ordre croissant $\{g^{(1)} \leq g^{(2)} \leq \dots \leq g^{(N)}\}$. On peut prendre par exemple : $y_1 = 0.5 \times (g^{(p_0N)} + g^{(p_0N+1)})$.
5. Définir le premier domaine de défaillance intermédiaire $D_1 = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) < y_1\}$. La probabilité de défaillance $P_1 = P(D_1)$ peut être estimée par $\tilde{P}_1 = p_0$,
6. À partir de ces échantillons initiaux p_0N qui se trouvent en D_1 , utiliser l'algorithme de Métropolis modifié pour générer $N(1 - p_0)$ des échantillons conditionnels supplémentaires de sorte qu'il y ait un total de N échantillons dans le niveau i -ème, $i = 2, \dots, m$.
7. Obtenir les valeurs de la fonction de performance $G(z_i^{(k)})$ correspondantes,
8. Choisir la valeur seuil d'état intermédiaire y_i en tant que position entre le p_0N -ème et $(p_0N + 1)$ -ème dans la liste par ordre croissant de valeurs de la fonction de performance $G(z_i^{(k)})$,
9. Définir le domaine i -ème de défaillance intermédiaire $D_i = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq y_i\}$. La probabilité conditionnelle de défaillance $P_i = P(D_i | D_{i-1})$ peut être estimée par $\tilde{P}_i = p_0$,
10. Répéter ce processus jusqu'à ce que le seuil d'état intermédiaire y_m soit inférieur à zéro. On met $y_m = 0$ et la probabilité recherchée $P(D_f) = P(D_m)$ est atteinte. La probabilité conditionnelle $P_m = P(D_m | D_{m-1})$ est estimée par $\tilde{P}_m = \frac{N_f}{N}$, où N_f est le nombre d'échantillons qui donne la valeur de la fonction de performance inférieure ou égale à zéro.
11. La probabilité de défaillance $p_f = P(D_f) = P(D_m)$ est calculée par $\tilde{p}_f = p_0^{m-1} \times \frac{N_f}{N}$
12. Le nombre total de simulations : $N_{\text{sim}} = mN - (m - 1)p_0N$

3.4.2 Tests d'illustration

Deux tests simples déjà traités par Phoon [117] sont repris ici dans le but d'illustrer la méthode de simulation par subsets et de valider la mise en oeuvre de cette méthode dans le logiciel Matlab.

• Test 1 : fonction linéaire de performance

On considère une défaillance définie par l'état limite $G(\mathbf{Z}) = Z_1 - Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes. Z_1 est la résistance et Z_2 la sollicitation. Les événements de défaillance sont donnés par la fonction de performance $G(Z_1, Z_2) = Z_1 - Z_2 \leq 0$. La probabilité de défaillance exacte est obtenue par la relation :

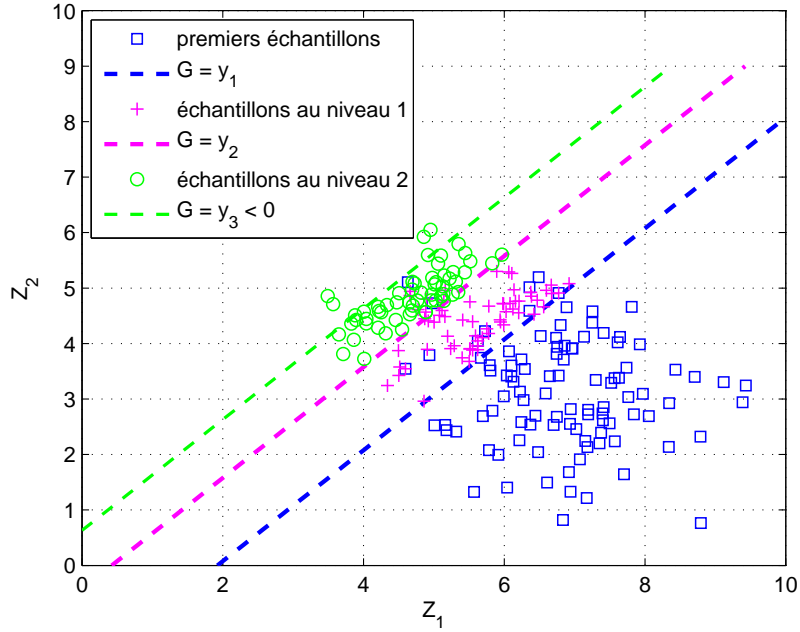
$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_{Z_2}(x)) p_{Z_1}(x) dx \quad (3.21)$$

À titre d'illustration, on suppose que Z_1 suit la loi normale $p_{Z_1}(z_1) \equiv p_{\mathcal{N}}(z_1; 7.0, 1.0)$ et Z_2 la loi normale $p_{Z_2}(z_2) \equiv p_{\mathcal{N}}(z_2; 3.0, 1.0)$. En utilisant l'équation (3.21), la probabilité de défaillance exacte est obtenue et est égale à $p_f = 2.339 \times 10^{-3}$.

TABLEAU 3.1. Test 1 : probabilités de défaillance

N	100	200	500	1000	2000
$\tilde{p}_f \times 10^{-3}$	2.72	2.53	2.43	2.35	2.34
ERR ¹ (%)	16.67	8.20	3.97	0.64	0.42

¹ ERR = $\frac{|\tilde{p}_f - p_f|}{p_f} \times 100\%$, où $p_f = 2.339 \times 10^{-3}$ est la probabilité de défaillance obtenue par l'équation (3.21).

FIGURE 3.5. *Domaines intermédiaires de défaillance*

D'autre part, cette probabilité de défaillance peut aussi être évaluée par simulations. La méthode SS et celle de Monte Carlo sont appliquées pour l'évaluer. Pour la méthode MCS, le nombre total d'échantillons est $N = 10^7$, la probabilité de défaillance $p_f^{\text{MCS}} = 2.34 \times 10^{-3}$.

Dans la procédure de la méthode SS, on choisit les domaines de défaillance $D_i = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) - y_i \leq 0\}$ de telle manière que les probabilités $P(D_1)$ et $P(D_i|D_{i-1})$ soient visées égales à $p_0 = 0.1$. Pour les densités de probabilité des candidats $p_i^*(\cdot)$, $i = 1, 2$, la loi de probabilité choisie est uniforme autour du point de départ (le germe). Il convient alors de fixer la largeur de l'intervalle. Une valeur comprise de la largeur de l'intervalle entre 1 et 3 apparaît satisfaisante [118]. On choisit donc la densité uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec la longueur de 2, ou bien $p_i^*(\cdot) = 0.5$ dans cette étude.

On utilise d'abord un nombre d'échantillons $N = 100$ dans chaque domaine intermédiaire. La figure 3.5 présente une évolution des échantillons et les frontières des domaines intermédiaires pour la méthode SS. Il existe deux domaines intermédiaires avant d'atteindre le niveau cible de défaillance. Les seuils intermédiaires correspondants sont $y_1 = 2.213$, $y_2 = 0,7449$. On répète le même calcul avec un grand nombre de fois (1000 fois). Cela donne une estimation moyenne de la probabilité de défaillance $\bar{p}_f = 2.72 \times 10^{-3}$ et l'intervalle de confiance de 95% : $[2.41, 3.03] \times 10^{-3}$. Ensuite, le nombre d'échantillons augmente respectivement à $N = 200, 500, 1000, 2000$. Le tableau 3.1 présente les résultats obtenus des probabilités de défaillance. L'erreur relative (ERR (%)) entre la probabilité de défaillance exacte (estimée par l'équation 3.21) et la probabilité estimée est déterminée. On observe que plus le nombre d'échantillon N augmente, plus l'ERR de la probabilité de défaillance estimée diminue. L'ERR pour les deux derniers cas $N = 1000$ et $N = 2000$ est moins de 1%.

- **Test 2 : fonction non-linéaire de performance**

Le deuxième test utilise la fonction de performance parabolique $G(\mathbf{Z}) = (Z_1 - 11)^2 - (Z_2 - 6)$. Ici, le nombre des variables aléatoires est $n = 2$. Z_1 suit la loi normale $p_{Z_1}(z_1) \equiv p_{\mathcal{N}}(z_1; 8.5, 0.707)$ et Z_2 la loi normale $p_{Z_2}(z_2) \equiv p_{\mathcal{N}}(z_2; 5.0, 0.707)$. Les probabilités $P(D_1)$ et $P(D_i|D_{i-1})$ sont

visées égales à $p_0 = 0.1$. Pour les densités de probabilité des candidates $p_i^*(\cdot)$, $i = 1, 2$, on choisit la densité uniforme sur l'intervalle $[-1,1]$ avec la longueur de 2, soit $p_i^*(\cdot) = 0.5$.

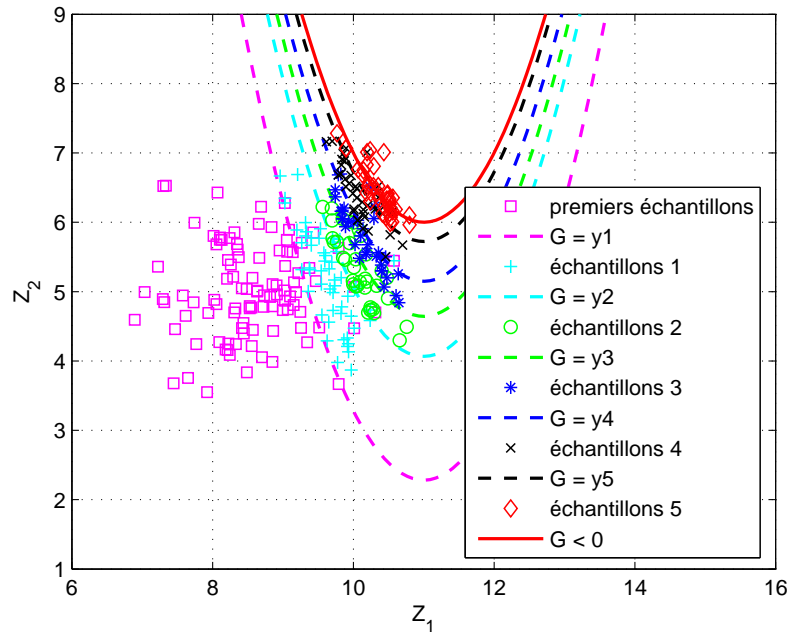


FIGURE 3.6. *Domaines intermédiaires de défaillance*

TABEAU 3.2. *Test 2 : probabilités de défaillance*

N	100	200	500	1000	2000
$\bar{p}_f \times 10^{-4}$	2.67	3.47	3.34	3.05	3.202
ERR ¹ (%)	15.10	10.33	6.2	3.0	1.81

¹ ERR = $\frac{|\bar{p}_f - p_f^{\text{MCS}}|}{p_f^{\text{MCS}}} \times 100\%$, où $p_f^{\text{MCS}} = 3.14 \times 10^{-4}$ est la probabilité de défaillance obtenue par la méthode MCS pour 10^7 simulations.

La procédure de calcul par la méthode subsets est la même que le test 1. La figure 3.6 présente une illustration de l'évolution des domaines intermédiaires pour un calcul avec $N = 100$. Cinq subsets sont formés avant d'atteindre le niveau cible de défaillance, les valeurs de seuils correspondants sont respectivement $y_1 = 3.71$, $y_2 = 1.93$, $y_3 = 1.35$, $y_4 = 0.85$ et $y_5 = 0.27$. La probabilité de défaillance par la méthode MCS avec 10^7 simulations est égale à 3.14×10^{-4} . Le tableau 3.6 présente les résultats obtenus. Ainsi, l'augmentation du nombre d'échantillons entraîne une diminution proportionnelle de l'erreur de probabilité de défaillance estimée. L'erreur pour les deux derniers cas $N = 1000$ et $N = 2000$ est moins de 5%.

• **Discussions**

Les deux tests simples nous permettent de confirmer une bonne concordance entre les résultats obtenus par la méthode subsets et ceux calculés soit par la formule analytique (test 1) soit par la méthode MCS avec un nombre important de simulations (test 2). La précision de la méthode SS augmente avec le nombre d'échantillons dans chaque domaine intermédiaire. On note également la convergence rapide de la méthode SS par rapport à celle de MCS. Cela montre que la mise en œuvre numérique de la méthode dans le logiciel Matlab est validée. La partie suivante aborde

l'application de la méthode SS au calcul de la probabilité de défaillance faible dans l'analyse du risque sismique.

3.5 Applications de la méthode subsets à l'analyse de risque sismique

La méthode de simulation par subsets est appliquée à différentes structures en comportements linéaire et non-linéaire. Elles sont soumises à l'excitation sismique aléatoire générée par le modèle de Boore. Ce modèle stochastique de mouvements du sol est d'abord rappelé pour identifier ses paramètres aléatoires. On suppose d'ailleurs que l'incertitude n'existe que dans l'excitation sismique. La méthode SS est ensuite appliquée pour évaluer la probabilité de défaillance. Enfin, les résultats obtenus sont comparés avec ceux de la méthode MCS pour illustrer l'efficacité de la méthode de simulations par subsets.

3.5.1 Exemple 1 : Oscillateurs linéaire et non-linéaires

• Modèles de structure

On rappelle trois modèles de structure à 1DDL. Il s'agit d'un oscillateur non-linéaire, d'un

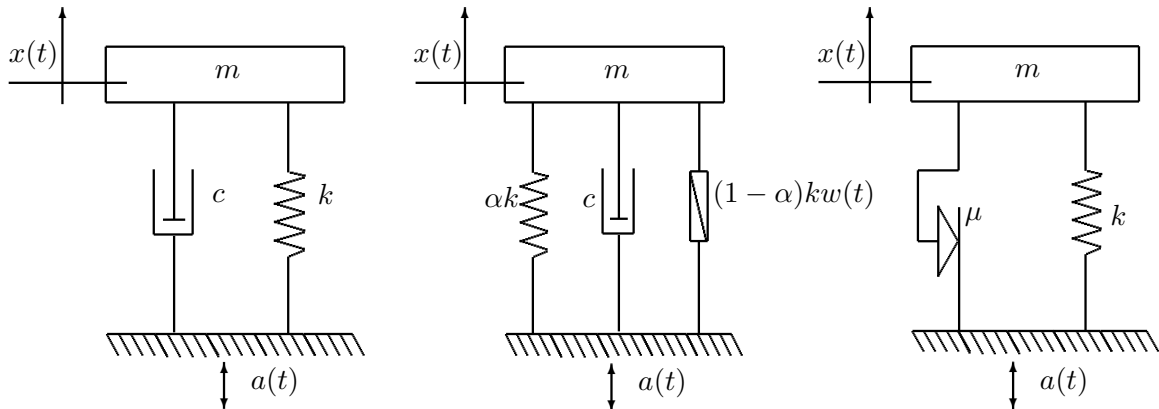


FIGURE 3.7. Modèles mécaniques à 1DDL

oscillateur non-linéaire d'hystérésis de Bouc-Wen [86] et d'un oscillateur linéaire avec frottement sec (ou amortissement de Coulomb). L'équation qui régit la dynamique des oscillateurs s'écrit :

$$\underline{\text{Linéaire}} : \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = -a(t) \quad (3.22)$$

$$\underline{\text{Bouc-Wen}} : \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2(\alpha x(t) + (1-\alpha)w(t)) = -a(t) \quad (3.23)$$

$$\text{avec } \dot{w}(t) = C_1\dot{x}(t) - C_2|\dot{x}(t)||w(t)|^{n_d-1}w(t) - C_3\dot{x}(t)|w(t)|^{n_d}$$

$$\underline{\text{Coulomb}} : \ddot{x}(t) + \mu g \text{Sgn}(\dot{x}(t)) + \omega_0^2x(t) = -a(t) \quad (3.24)$$

où la pulsation propre non amortie $\omega_0 = 5.97$ (rad/s), le taux d'amortissement $\zeta = 2\%$, les constantes définies par le modèle de Bouc-Wen $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0.5/\text{cm}^n$, $\alpha = 0.1$ et $n_d = 1$. Les paramètres ont pour valeurs numériques $\mu = 0.01$ et $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ dans le modèle de Coulomb. La figure 3.7 présente les trois modèles.

• **Excitation sismique**

Concernant l'excitation sismique $a(t)$ dans les équations (3.22), (3.23) et (3.24), elle est générée par le modèle de Boore [46]. On rappelle que, pour générer une accélération temporelle du sol pour un site donné de magnitude M à une distance R de l'épicentre, le modèle de Boore se résume en des différentes étapes suivantes :

- Étape 1 : Générer un bruit Gaussien pour une durée égale à la durée d'un séisme.
- Étape 2 : Fenêtrer le signal par une fonction de fenêtre qui dépend de M et R .
- Étape 3 : Passer dans le domaine de fréquence, et normaliser son amplitude par son écart-type.
- Étape 4 : Multiplier ce spectre normalisé par le spectre d'un séisme.
- Étape 5 : Repasser dans le domaine temporel pour obtenir l'accélération du sol.

L'incertitude du modèle est caractérisée par un processus aléatoire Gaussien stationnaire dont la densité spectrale de puissance (PSD). La figure 3.8 présente une séquence de bruit Gaussiens générée à partir du modèle de Boore. Elle consiste en $n_t = 2192$ points. Chaque point est une variable aléatoire, notée Z_i et suivant la loi normale centrée réduite. La figure 3.9 présente la densité d'une variable Z . On a alors le vecteur des variables aléatoires du modèle de Boore $\{Z_i\}, i = 1, \dots, n_t$.

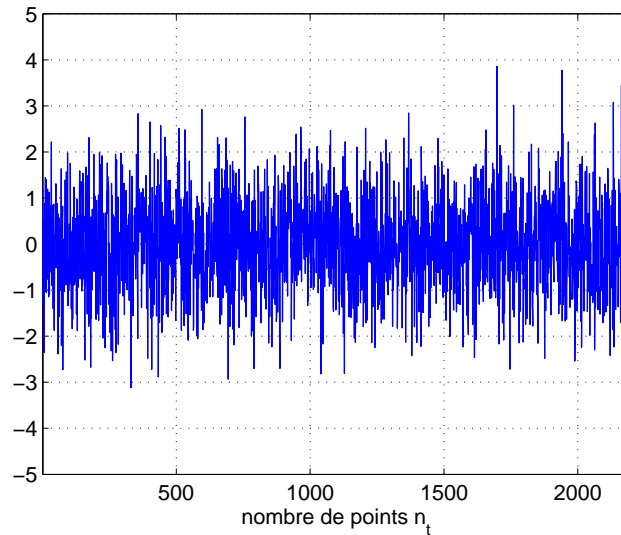


FIGURE 3.8. Séquence de bruit Gaussiens de 2192 points du modèle de Boore

Dans cette étude, on considère un scénario de risque sismique unique correspondant à un seul couple de magnitude $M = 7$ et $R = 9$ km, c'est-à-dire que M et R sont fixés. L'incertitude du modèle ne dépend que du vecteur des variables aléatoires $\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_{n_t}]$.

• **Paramètres de la méthode de simulation par subsets**

◦ **Vecteur de variables aléatoires :**

Comme on l'a présenté, l'aléa n'existe que dans l'excitation sismique. Les variables aléatoires dans le processus d'excitation sismique sont notées par le vecteur \mathbf{Z} . La réponse du système ne dépend ainsi que de ce vecteur.

Lorsque on utilise le modèle de Boore, il s'agit de $n_t = 2192$ variables aléatoires normales centrées réduites [46]. Le vecteur de variables aléatoires est alors :

$$\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_{n_t}]; \quad \text{où } p_{Z_i}(z_i) \equiv p_{\mathcal{N}}(z_i; 0, 1) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_t \quad (3.25)$$

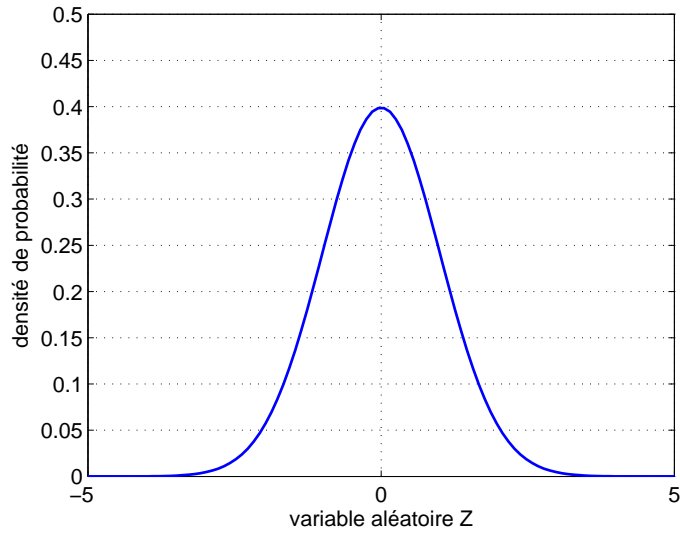


FIGURE 3.9. Densité d'une variable aléatoire du modèle de Boore

- **Choix de la densité de probabilité des candidats**

La densité de probabilité des candidats $p_i^*(\cdot)$ suit une loi de densité uniforme sur l'intervalle $[-1,1]$ avec la longueur égale à 2, c'est-à-dire $p_i^*(\cdot) = 0.5$, $i = 1, \dots, n_t$.

- **Choix des domaines de défaillance intermédiaires :**

Rappelons que la défaillance est vérifiée par un critère traduisant le passage à une limite critique. Celle-ci peut être représentée par le déplacement maximum pour les oscillateurs. On choisit la valeur critique $x_0 = 22$ cm. La fonction de performance ou fonction d'état limite s'écrit :

$$G(\mathbf{Z}) = x_0 - X(\mathbf{Z}) \quad (3.26)$$

Le domaine de défaillance D_f est donné par $D_f = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq 0\}$ et la probabilité de défaillance est donnée par :

$$p_f = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0] \quad (3.27)$$

Pour la méthode SS, le domaine de défaillance D_f est défini par m domaines intermédiaires $D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_m = D_f$, où $D_i = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq y_i\}$ et y_i représente le seuil intermédiaire. Les y_i sont choisis de façon adaptative pour que les probabilités des domaines intermédiaires de défaillance $P(D_1)$, $P(D_{i+1}|D_i)$ soient visées égales à $p_0 = 0.1$.

- **Estimation de la probabilité de défaillance**

On utilise d'abord la méthode MCS pour le calcul. Elle est effectuée avec 2×10^5 simulations pour les trois systèmes linéaire et non-linéaires. Les figures 3.10, 3.11 et 3.12 donnent trois représentations de convergence de la probabilité de défaillance en fonction du nombre de simulations. L'intervalle de confiance au niveau 95% y est également présenté.

Les probabilités de défaillance estimées par la méthode MCS avec avec 2×10^5 simulations sont respectivement égales à 0.30×10^{-3} pour l'oscillateur linéaire, 2.00×10^{-3} pour l'oscillateur de Bouc-Wen et 0.42×10^{-3} pour l'oscillateur de Coulomb. Elles peuvent s'appeler également probabilités ciblées.

La méthode de simulation par subsets est ensuite appliquée. Dans le but de comparer la convergence à la méthode MCS, on choisit respectivement $N = 100$, $N = 200$, $N = 500$, $N = 1000$,

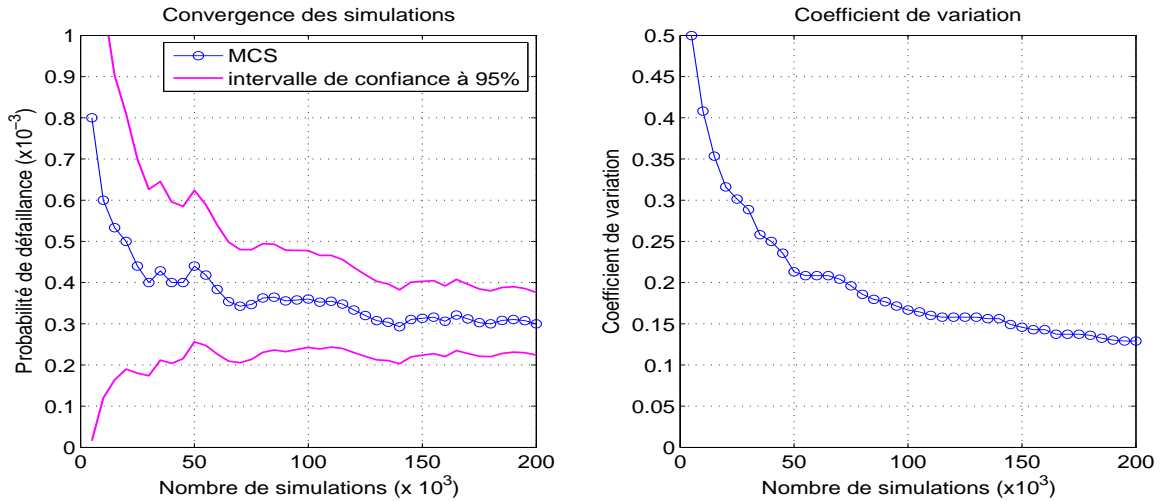


FIGURE 3.10. *Oscillateur linéaire : Simulations de Monte Carlo*

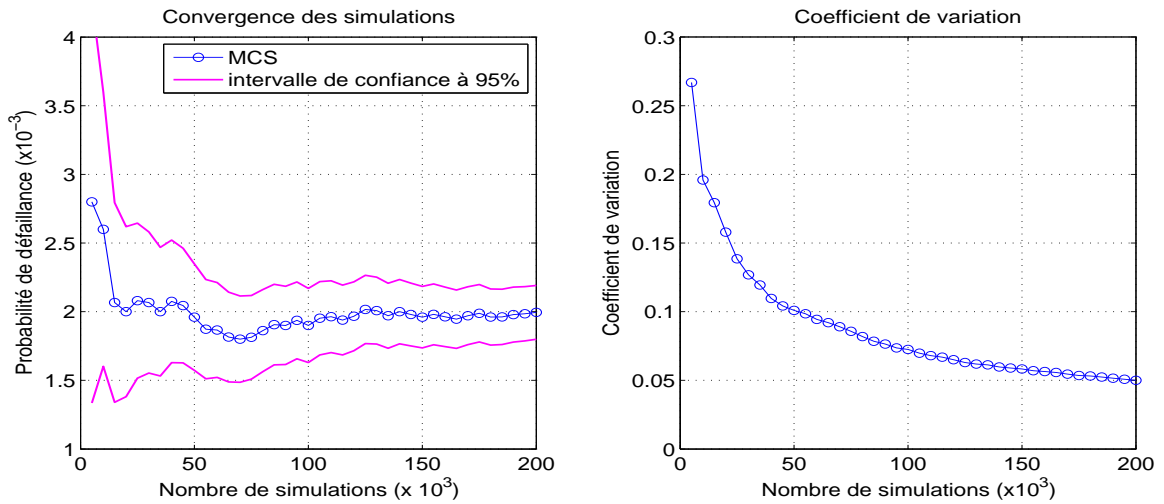


FIGURE 3.11. *Oscillateur de Bouc-Wen : Simulations de Monte Carlo*

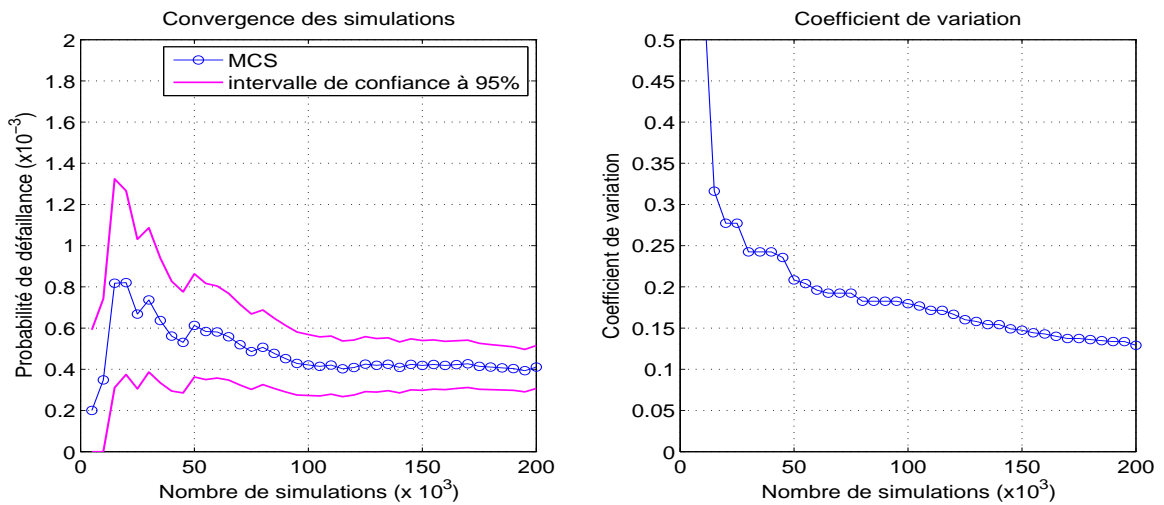


FIGURE 3.12. *Oscillateur de Coulomb : Simulations de Monte Carlo*

$N = 1500$ et $N = 2000$ dans la méthode de subsets. Rappelons que N est le nombre de simulations pour chaque subset (domaine intermédiaire), si l'on a m subsets, le nombre total de simulations dans la méthode SS est alors $N_{\text{sim}} = mN - (m - 1)p_0N$.

Les résultats obtenus de la probabilité de défaillance par la méthode SS sont représentés dans les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5 et illustrés sur la figure 3.13. On utilise aussi le même nombre de simulations N_{sim} pour la méthode MCS.

La comparaison entre les probabilités estimées par les deux méthodes nous permet de remarquer les points suivants : (i) les valeurs estimées par la méthode SS convergent rapidement selon le nombre de simulations par rapport à la méthode MCS ; (ii) pour le cas de probabilité de défaillance ciblée très faible (oscillateur linéaire et Coulomb), l'écart entre MCS et SS est important, et les probabilités de défaillance par la méthode MCS est égale à 0 pour deux premiers cas (linéaire) ou trois premiers cas (Coulomb), c'est-à-dire que l'événement de défaillance n'apparaît presque pas pour les premières simulations ; (iii) pour les trois oscillateurs au dernier cas (avec $N = 2000$), les erreurs relatives entre la probabilité ciblée et celle de la méthode SS ne sont pas importantes ; et les probabilités obtenues par la méthode SS appartiennent bien à l'intervalle de confiance au niveau 95% de la méthode MCS avec 2×10^5 simulations. Cela signifie que l'on peut trouver une estimation fiable de la probabilité faible avec un nombre de simulations raisonnable.

TABLEAU 3.3. *Oscillateur linéaire : \tilde{p}_f obtenues par Subsets et Monte Carlo*

Nombre dans chaque subset N	100	200	500	1000	1500	2000	-
Domaines intermédiaires m	5	4	4	4	4	4	-
Nombre total de simulations N_{sim}	460	740	1850	3700	5550	7400	2×10^5
$\tilde{p}_f^{\text{SS}} \times 10^{-3}$	0.03	0.15	0.11	0.18	0.32	0.22	-
$\tilde{p}_f^{\text{MC}} \times 10^{-3}$	0	0	1.08	0.54	0.72	0.54	0.30 ^a

^a Intervalle de confiance $[0.22, 0.38] \times 10^{-3}$ au niveau de 95%.

TABLEAU 3.4. *Oscillateur de Bouc-Wen : \tilde{p}_f obtenues par Subsets et Monte Carlo*

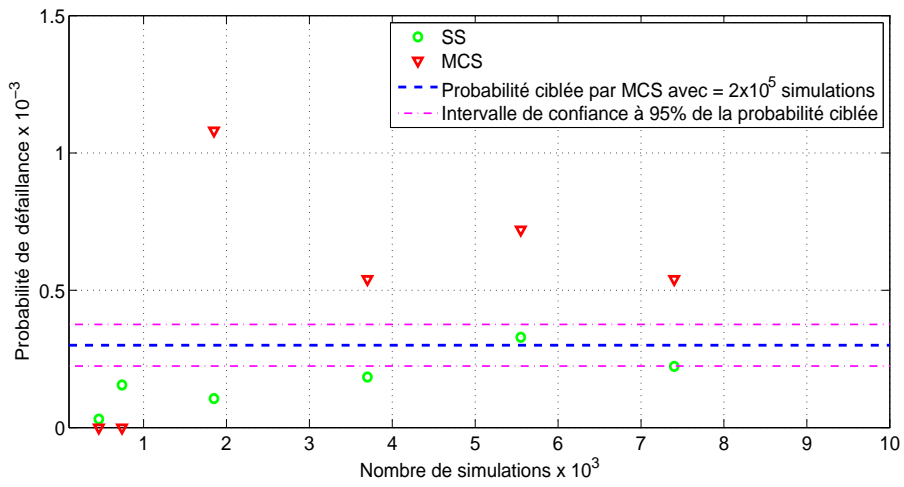
Nombre dans chaque subset N	100	200	500	1000	1500	2000	-
Domaines intermédiaires m	3	3	3	3	3	3	-
Nombre total de simulations N_{sim}	280	560	1400	2800	4200	5600	2×10^5
$\tilde{p}_f^{\text{SS}} \times 10^{-3}$	4.10	3.45	2.20	1.16	1.78	1.85	-
$\tilde{p}_f^{\text{MC}} \times 10^{-3}$	7.14	3.57	3.57	2.85	2.85	2.50	2.00 ^a

^a Intervalle de confiance $[1.80, 2.20] \times 10^{-3}$ au niveau de 95%.

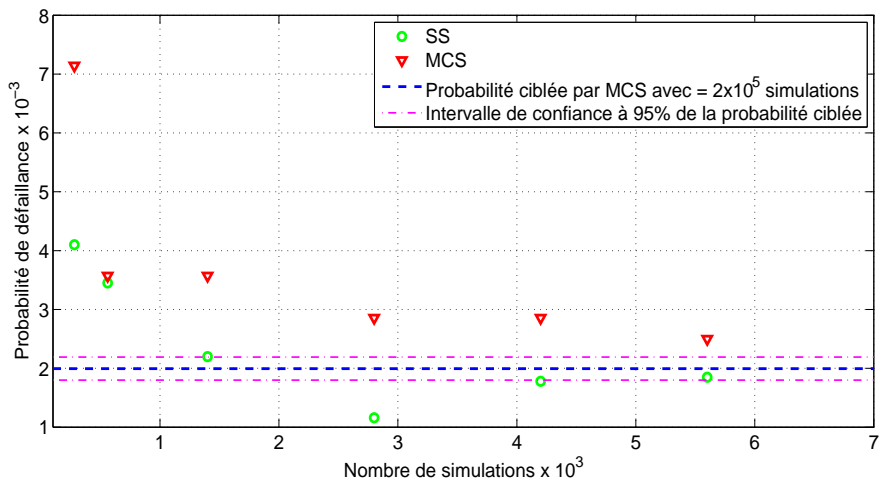
TABLEAU 3.5. *Oscillateur de Coulomb : \tilde{p}_f obtenues par Subsets et Monte Carlo*

Nombre dans chaque subset N	100	200	500	1000	1500	2000	-
Domaines intermédiaires m	5	4	5	4	4	4	-
Nombre total de simulations N_{sim}	460	740	2300	3700	5550	7400	2×10^5
$\tilde{p}_f^{\text{SS}} \times 10^{-3}$	0.05	0.28	0.05	0.22	0.34	0.40	-
$\tilde{p}_f^{\text{MC}} \times 10^{-3}$	0	0	0	0.27	0.18	0.27	0.42 ^a

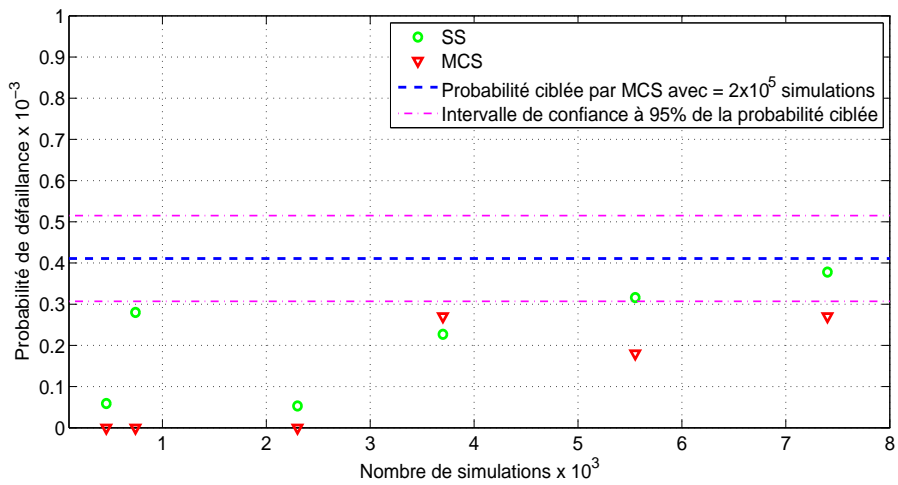
^a Intervalle de confiance $[0.29, 0.54] \times 10^{-3}$ au niveau de 95%.



(a) Oscillateur linéaire



(b) Oscillateur de Bouc-Wen



(c) Oscillateur de Coulomb

FIGURE 3.13. Comparaison de la convergence par la méthodes MCS et SS

De plus, à partir des résultats obtenus par la méthode SS, la probabilité de défaillance en fonction du seuil de défaillance des oscillateurs est facilement établie et représentée dans les figures 3.14, 3.15 et 3.16. Notons que cette relation est très intéressante lorsqu'on cherche une probabilité de défaillance pour chaque seuil de défaillance (inférieur à la limite critique $x_0 = 22$ cm). Dans chaque figure, les résultats obtenus par la méthode SS ($N = 2000$) au dernier cas et par la méthode MCS sont donnés à gauche, où les seuils intermédiaires de la méthode SS sont représentés par les cercles ; et l'évolution de cinq cas de la méthode SS est montrée à droite. En observant les courbes issues des deux méthodes MCS et SS, on peut remarquer les points suivants : (i) un bon accord de la méthode SS au dernier cas et celle de MCS ; (ii) une tendance de rapprochement entre elles lorsque le nombre de simulation dans chaque subset N augmente.

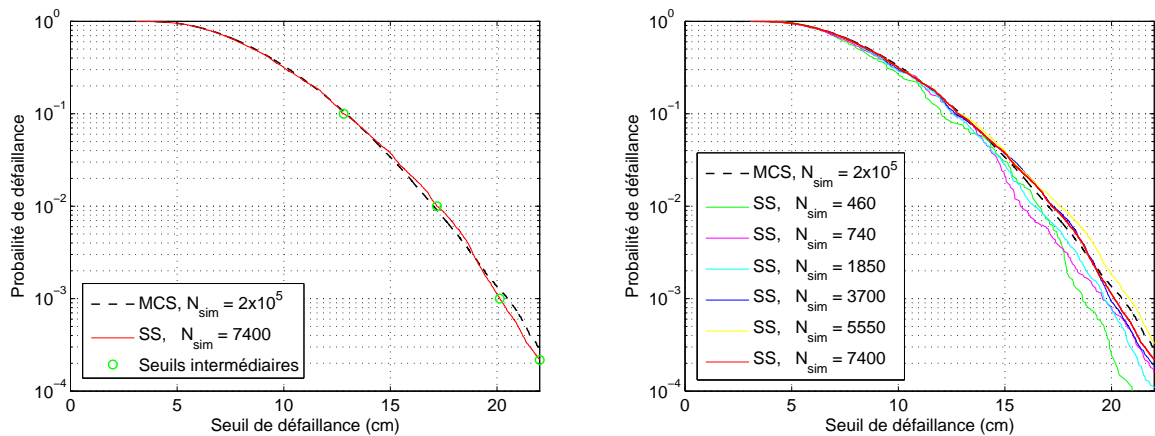


FIGURE 3.14. *Oscillateurs linéaire : Relation entre le seuil de défaillance et la probabilité de défaillance*

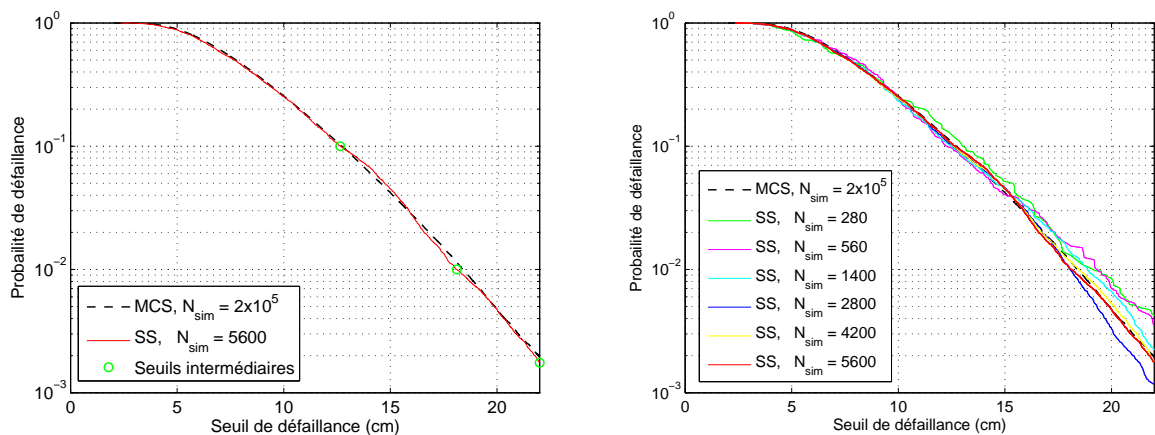


FIGURE 3.15. *Oscillateurs de Bouce-Wen : Relation entre le seuil de défaillance et la probabilité de défaillance*

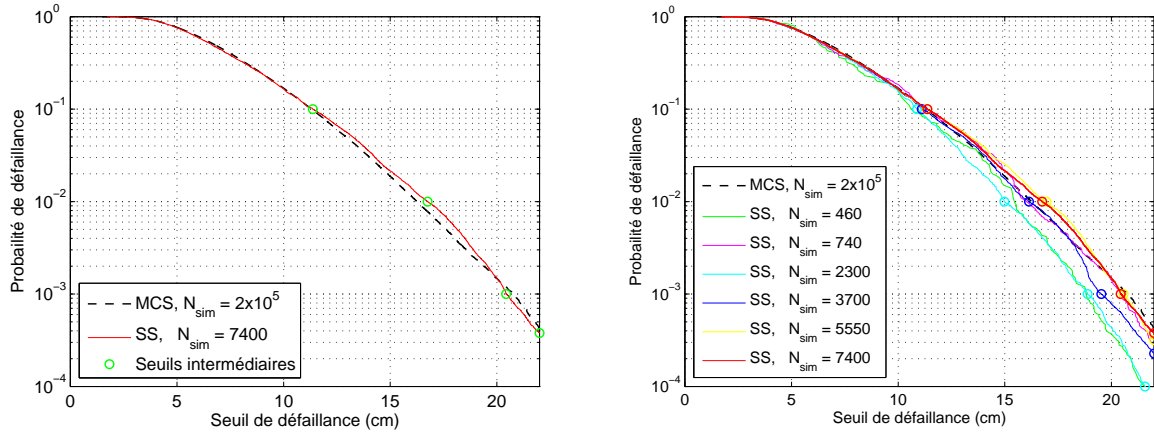


FIGURE 3.16. *Oscillateurs de Coulomb : Relation entre le seuil de défaillance et la probabilité de défaillance*

3.5.2 Exemple 2 : Bâtiment de 8 étages

• Modèle de structure

Un bâtiment de 8 étages avec le comportement non-linéaire de Bouc-Wen est considéré dans cet exemple. Cette structure, après une discrétisation par la méthode des éléments finis par exemple, est considérée comme un système à 8DDL présenté dans la figure 3.17. L'équation dynamique du système s'écrit :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + \alpha(k_1 + k_2)x_1 - \alpha k_2 x_2 + (1 - \alpha)k_1 w_1 - (1 - \alpha)k_2 w_2 & = -m_1 a \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3\dot{x}_3 - \alpha k_2 x_1 + \\ + \alpha(k_2 + k_3)x_2 - \alpha k_3 x_3 + (1 - \alpha)k_2 w_2 - (1 - \alpha)k_3 w_3 & = -m_2 a \\ \dots & = \dots \\ m_7\ddot{x}_7 - c_7\dot{x}_6 + (c_7 + c_8)\dot{x}_7 - c_8\dot{x}_8 - \alpha k_7 x_6 + \\ + \alpha(k_7 + k_8)x_7 - \alpha k_8 x_8 + (1 - \alpha)k_7 w_7 - (1 - \alpha)k_8 w_8 & = -m_7 a \\ m_8\ddot{x}_8 - c_8\dot{x}_7 + c_8\dot{x}_8 - \alpha k_8 x_7 + \alpha k_8 x_8 + (1 - \alpha)k_8 w_8 & = -m_8 a \end{cases} \quad (3.28)$$

où $w_{i=1,\dots,8}$ présentent le comportement de Bouc-Wen et sont définis par :

$$\begin{cases} \dot{w}_1 & = C_1 \dot{x}_1 & - C_2 |\dot{x}_1| |w_1|^{n_d-1} w_1 & - C_3 \dot{x}_1 |w_1|^{n_d} \\ \dot{w}_2 & = C_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) & - C_2 |(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)| |w_2|^{n_d-1} w_2 & - C_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) |w_2|^{n_d} \\ \dots & & & \\ \dot{w}_8 & = C_1 (\dot{x}_8 - \dot{x}_7) & - C_2 |(\dot{x}_8 - \dot{x}_7)| |w_8|^{n_d-1} w_8 & - C_3 (\dot{x}_8 - \dot{x}_7) |w_8|^{n_d} \end{cases}$$

L'équation (3.28) peut être présentée sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \alpha\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + (1 - \alpha)\mathbf{G}\mathbf{w}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{i}a(t) \quad (3.29)$$

où :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

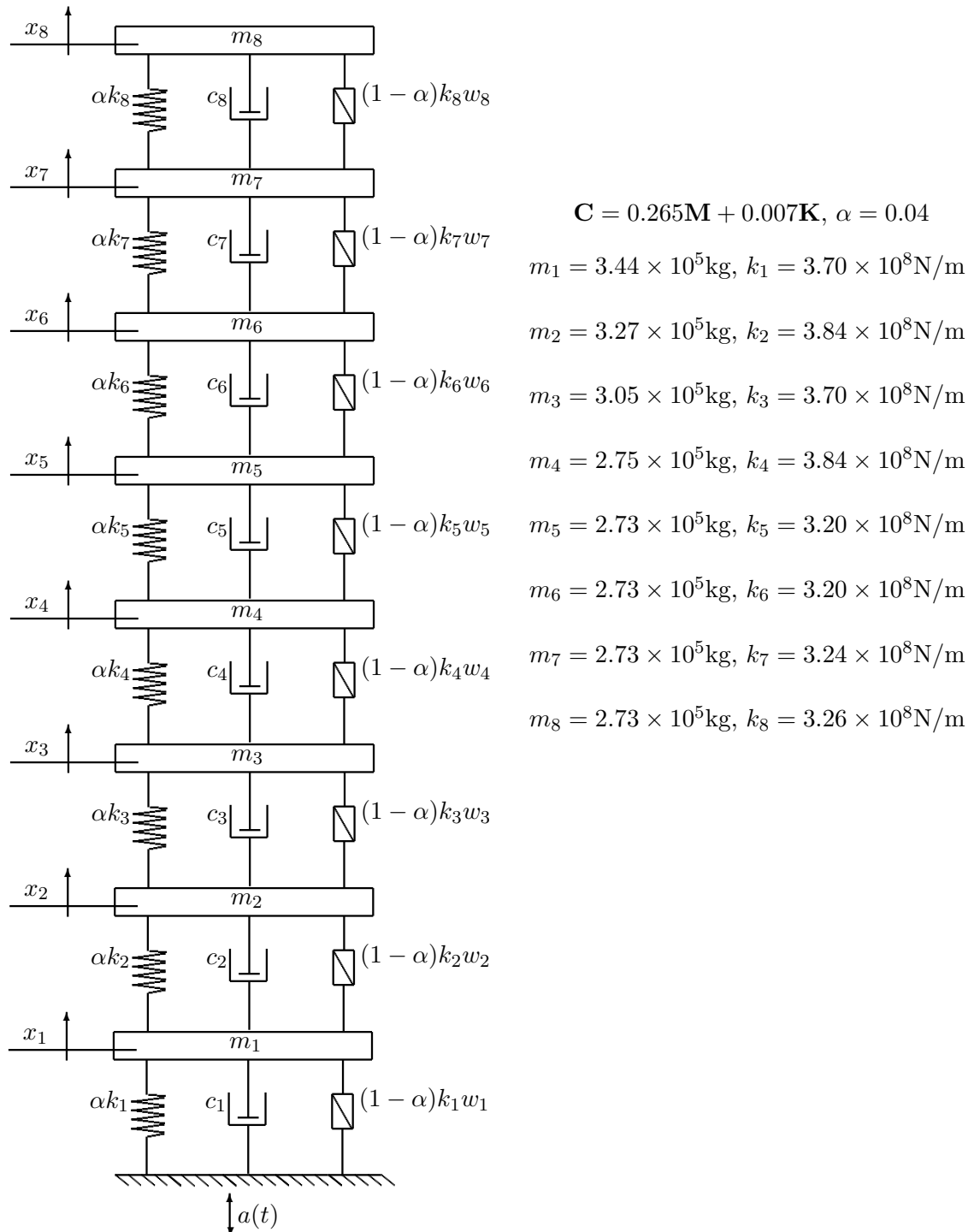


FIGURE 3.17. Système à 8DDL

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_n \end{pmatrix}$$

Les paramètres du système sont repris de l'étude de Chen et Li [119], où $\alpha = 0.04$, $C_1 = 1$, $C_2 = 30/m^n$, $C_3 = 10/m^n$, $n_d = 1$. Les déplacements sur les masses sont obtenus par la méthode Runge-Kutta.

- **Excitation sismique**

Le modèle de Boore abordé dans l'exemple 1 est utilisé pour générer les mouvements du sol.

- **Paramètres de la méthode de simulation par subsets :**

- **Vecteur de variables aléatoires :**

Les variables aléatoires dans le processus d'excitation sismique sont notées par le vecteur \mathbf{Z} . Lorsqu'on utilise le modèle de Boore, il s'agit de $n_t = 2192$ variables aléatoires normales centrées réduites [46]. Le vecteur de variables aléatoires est alors :

$$\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_{n_t}]; \quad \text{où } p_{Z_i}(z_i) \equiv p_{\mathcal{N}}(z_i; 0, 1) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_t \quad (3.30)$$

On note que la réponse du système ne dépend ainsi que de ce vecteur.

- **Choix de la densité de probabilité des candidats**

La densité de probabilité des candidats p_i^* suit une loi de densité uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec la longueur de 2, c'est-à-dire que $p_i^* = 0.5$, $i = 1, \dots, n_t$.

- **Choix des domaines de défaillance intermédiaires :**

Le seuil de défaillance est représentée par le déplacement inter-étage maximal limite δ_0 . La fonction de performance ou fonction d'état limite s'écrit :

$$G(\mathbf{Z}) = \delta_0 - \Delta(\mathbf{Z}) \quad (3.31)$$

Le domaine de défaillance D_f est donné par $D_f = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq 0\}$ et la probabilité de défaillance par :

$$p_f = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0] \quad (3.32)$$

Les probabilités des domaines intermédiaires de défaillance $P(D_1)$, $P(D_{i+1}|D_i)$ sont visées égales à $p_0 = 0.1$.

• Estimation de la probabilité de défaillance

La procédure de calcul est réalisée comme celle de l'exemple 1.

On utilise un nombre de 1×10^5 simulations pour la méthode MCS. La probabilité de défaillance en fonction du nombre de simulations est représentée dans la figure 3.18. L'intervalle de confiance à 95% est aussi estimé. La probabilité de défaillance ciblée, obtenue par la méthode MCS avec 1×10^5 simulations, est égale à 0.68×10^{-3} .

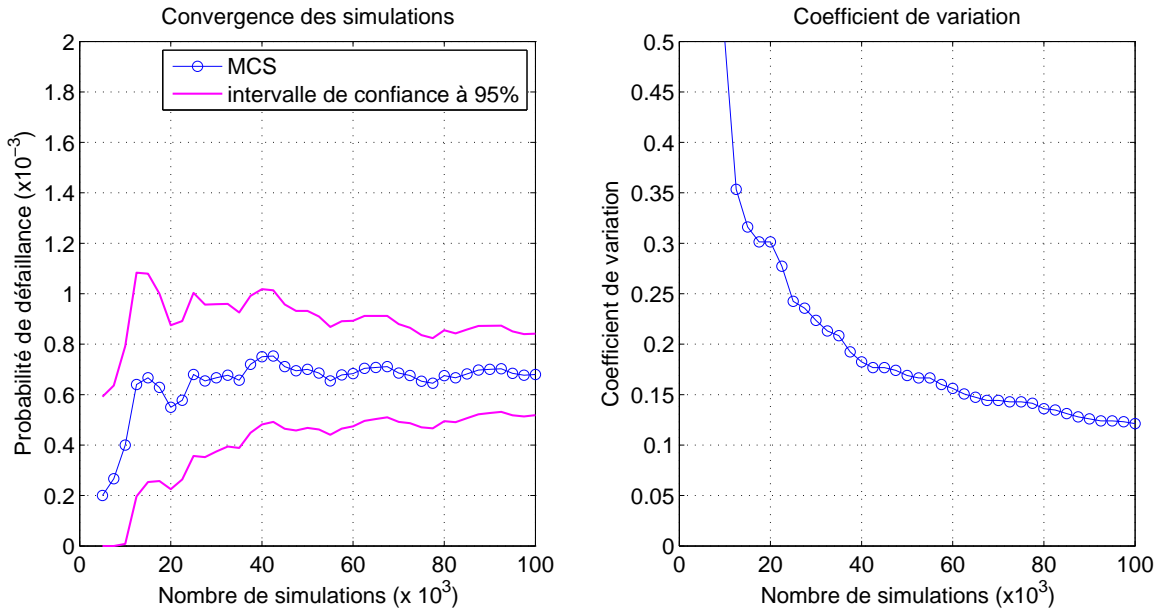


FIGURE 3.18. *Bâtiment de 8 étages : Simulations de Monte Carlo*

Pour la méthode SS, les nombres de simulations dans chaque subset sont respectivement égaux à $N = 100$, $N = 200$, $N = 500$, $N = 1000$, $N = 1500$ et $N = 2000$. La figure 3.19 et le tableau 3.6 donnent une comparaison de convergence entre les méthodes MCS et SS. On trouve que les valeurs estimées par la méthode SS convergent rapidement selon le nombre de simulations par rapport à la méthode MCS. Bien que l'erreur relative de la méthode SS pour le dernier cas $N = 2000$ soit supérieure à 10%, elle appartient encore à l'intervalle de confiance au niveau 95% de la méthode MCS avec 1×10^5 simulations ($[0.52, 0.84] \times 10^{-3}$).

TABLEAU 3.6. *Bâtiment de 8 étages : \tilde{p}_f obtenues par Subsets et Monte Carlo*

Nombre dans chaque subset N	100	200	500	1000	1500	2000	-
Domaines intermédiaires m	3	4	4	4	4	4	-
Nombre total de simulations N_{sim}	280	740	1850	3700	5550	7400	1×10^5
$\tilde{p}_f^{\text{SS}} \times 10^{-3}$	2.10	0.27	0.48	0.60	0.69	0.61	-
$\tilde{p}_f^{\text{MC}} \times 10^{-3}$	0	0	0	0	0.18	0.27	0.68 ^a

^a L'intervalle de confiance au niveau de 95% est de $[0.52, 0.84] \times 10^{-3}$

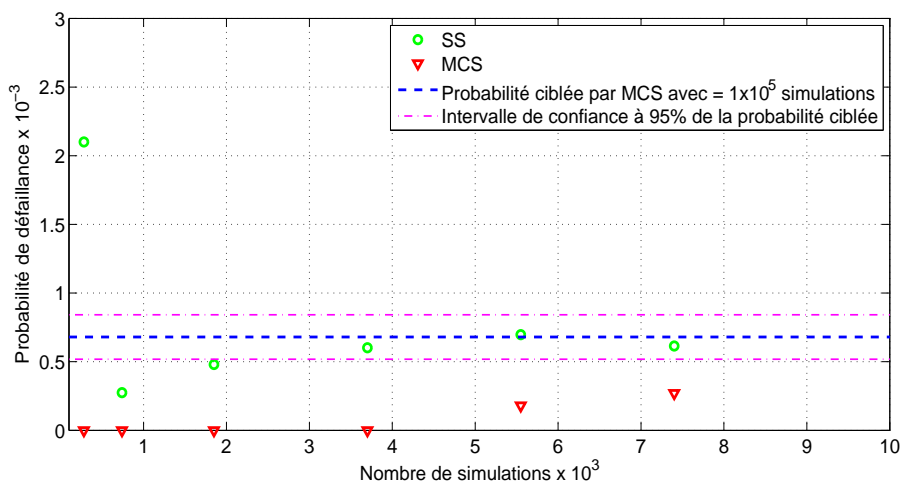


FIGURE 3.19. Bâtiment de 8 étages : Comparaison de la convergence

La figure 3.20 présente les probabilités de défaillance en fonction du seuil de défaillance par la méthode MCS et les cas de la méthode SS. On y observe que la courbe issue de la méthode SS au cas de $N = 2000$ et celle obtenue par la méthode MCS coïncident, comme l'exemple 1.

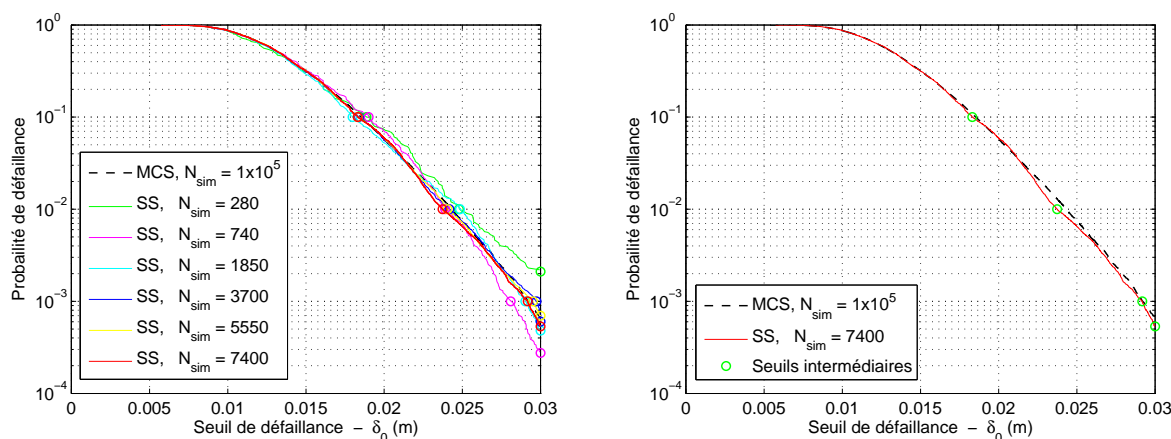


FIGURE 3.20. Bâtiment de 8 étages : Relation entre le seuil de défaillance et la probabilité de défaillance

3.5.3 Exemple 3 : Portique en acier de 3 étages

• Modèle de structure

On reprend ici le portique traité dans le chapitre 2. Le matériau a un comportement non-linéaire non isotrope suivant le modèle de Giuffre-Menegotto-Pinto [90]. Nous présentons en figure 3.21 le modèle de la structure. Il est inspiré et fourni par Sudret et Mai [89]. Le portique comporte trois travées de portées $L = 5$ m et trois étages. Chaque étage a une hauteur $H = 3$ m.

On utilise le code de calcul par éléments finis OpenSees [91] pour l'analyse de la réponse du système soumis à l'excitation sismique. La défaillance du système est définie lorsque le déplacement inter-étage maximal dépasse un niveau de seuil $\delta_0 = 0.025$ (m).

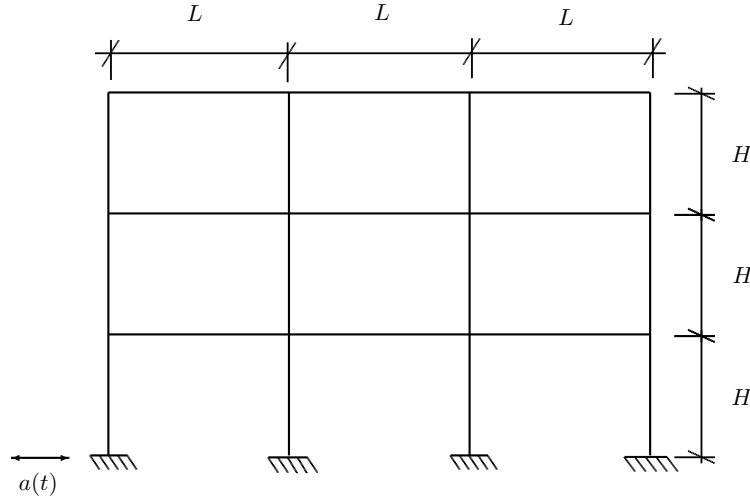


FIGURE 3.21. Modèle du portique en acier

- **Excitation sismique**

Comme dans l'exemple 1 et l'exemple 2, l'excitation sismique est générée par le modèle de Boore pour le site $M = 7$ et $R = 9$ km.

- **Paramètres de la méthode de simulation par subsets :**

- **Vecteur de variables aléatoires :**

Les variables aléatoires dans le processus d'excitation sismique sont notées par le vecteur \mathbf{Z} . Lorsque l'on utilise le modèle de Boore, il s'agit de $n_t = 2192$ variables aléatoires normales centrées réduites [46]. Le vecteur de variables aléatoires est alors :

$$\mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_{n_t}]; \quad \text{où } p_{Z_i}(z_i) \equiv p_{\mathcal{N}}(z_i; 0, 1) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_t \quad (3.33)$$

On note que la réponse du système ne dépend ainsi que de ce vecteur.

- **Choix de la densité de probabilité des candidats**

La densité de probabilité des candidats p_i^* suit une loi de densité uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec la longueur de 2, c'est-à-dire $p_i^* = 0.5$, $i = 1, \dots, n_t$.

- **Choix des domaines de défaillance intermédiaires :**

La limite critique est représentée par le déplacement inter-étage maximal δ_0 . La fonction de performance ou fonction d'état limite s'écrit :

$$G(\mathbf{Z}) = \delta_0 - \Delta(\mathbf{Z}) \quad (3.34)$$

Le domaine de défaillance D_f est donné par $D_f = \{\mathbf{Z} : G(\mathbf{Z}) \leq 0\}$ et la probabilité de défaillance par :

$$p_f = P[G(\mathbf{Z}) \leq 0] \quad (3.35)$$

Les probabilités des domaines intermédiaires de défaillance $P(D_1)$, $P(D_{i+1}|D_i)$ sont visées égales à $p_0 = 0.1$.

- **Estimations de la probabilité de défaillance**

On utilise d'abord la méthode MCS avec 1×10^5 simulations. La figure 3.22 montre la convergence de la probabilité de défaillance en fonction du nombre de simulations. L'intervalle de confiance à 95% y est aussi montré. La probabilité ciblée dans ce cas est égale à 0.72×10^{-3} pour 1×10^5 simulations.

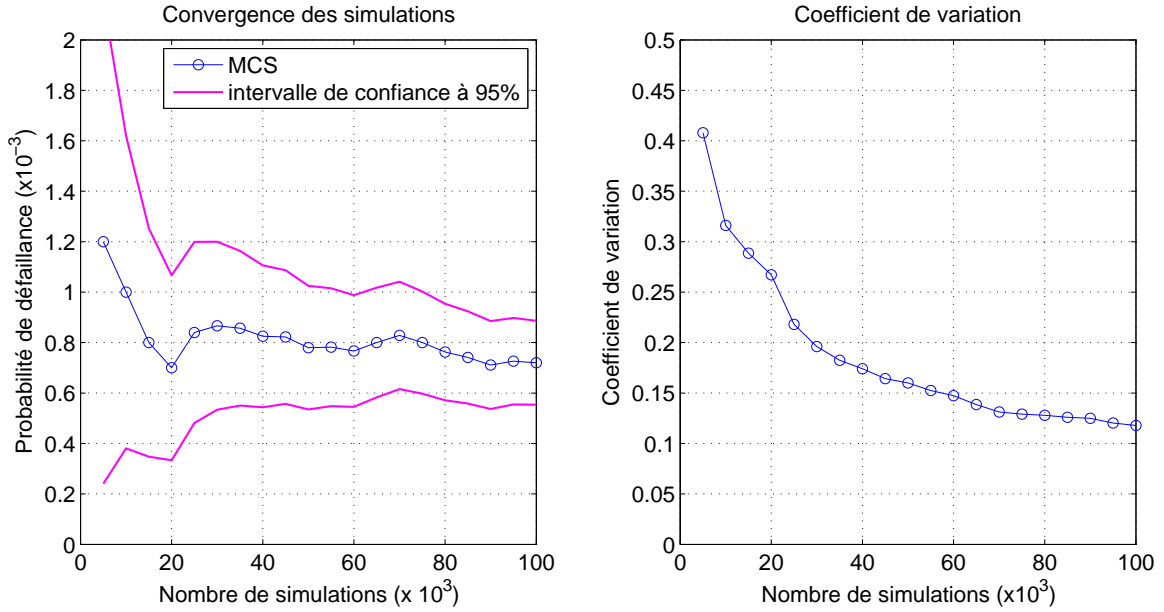


FIGURE 3.22. Portique de 3 étages : Simulations de Monte Carlo

La méthode SS est appliquée avec différents nombres de simulations dans chaque subset $N = 100$, $N = 200$, $N = 500$, $N = 1000$, $N = 1500$ et $N = 2000$. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau 3.7 et la figure 3.23.

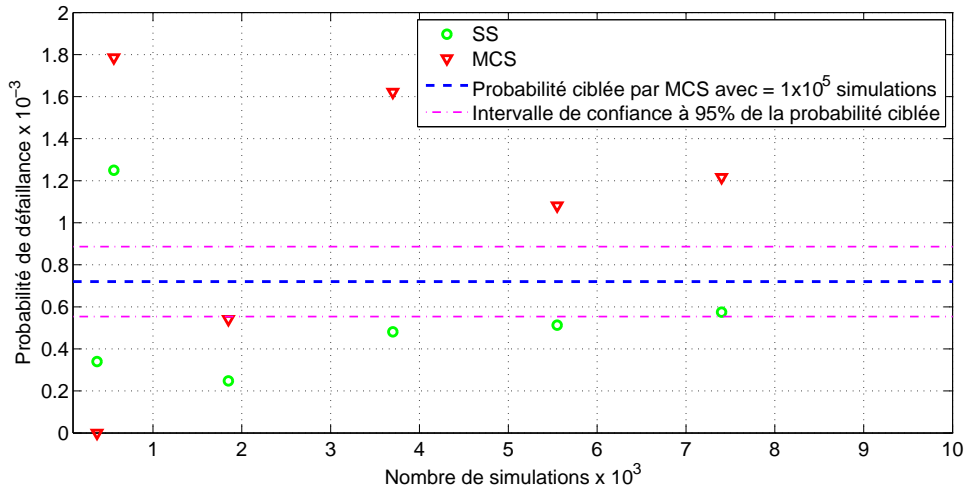


FIGURE 3.23. Portique de 3 étages : Comparaison de la convergence

TABLEAU 3.7. Portique de 3 étages : \hat{p}_f obtenues par Subsets et Monte Carlo

Nombre dans chaque subset N	100	200	500	1000	1500	2000	-
Domaines intermédiaires m	4	3	4	4	4	4	-
Nombre total de simulations N_{sim}	370	560	1850	3700	5550	7400	1×10^5
$\hat{p}_f^{SS} \times 10^{-3}$	0.34	1.25	0.24	0.48	0.57	0.67	-
$\hat{p}_f^{MC} \times 10^{-3}$	0	0	0	0.27	0.18	0.13	0.72 ^a

^a L'intervalle de confiance au niveau de 95% est de $[0.55, 0.88] \times 10^{-3}$

On note facilement la convergence plus rapide de la méthode de subsets vers la probabilité ciblée par rapport à la méthode de Monte Carlo. On remarque également qu'aucun événement de défaillance n'apparaît pour les 1850 premières simulations dans la méthode MCS, tandis que pour la méthode SS, les probabilités estimées sont proches de la valeur ciblée. L'erreur relative entre la probabilité estimée par la méthode SS au dernier cas $N = 2000$ et la probabilité ciblée est égale à 6.9%, elle appartient aussi à l'intervalle de confiance de 95% [0.55×10^{-3} ; 0.88×10^{-3}] de la méthode MCS avec 1×10^5 simulations.

Les probabilités de défaillance en fonction du seuil de défaillance sont données dans la figure 3.24. Ces résultats montrent aussi une bonne concordance entre la probabilité estimée par la méthode SS au dernier cas $N = 2000$ (la ligne rouge continue) et la méthode MCS (la ligne noire discontinue).

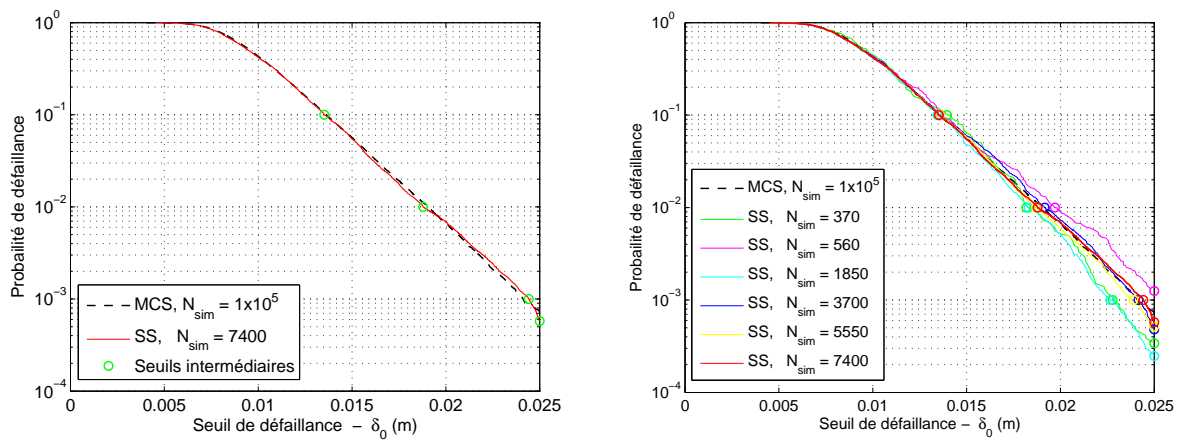


FIGURE 3.24. Portique de 3 étages : Relation entre le seuil de défaillance et la probabilité de défaillance

3.5.4 Discussion

Dans cette section, on a présenté l'application de la méthode de subsets à l'évaluation de la probabilité de défaillance. L'incertitude du problème n'existe qu'en excitation sismique générée par le modèle de Boore avec un nombre important de variables aléatoires ($n_t = 2192$). Différentes structures avec plusieurs types de comportements linéaire et non-linéaires ont été traitées.

En utilisant la variation du nombre de simulation N dans chaque subsets de la méthode SS, on a pu observer la convergence de la probabilité de défaillance estimée. Plus particulièrement, les résultats obtenus nous permettent de constater une convergence plus rapide de la probabilité de défaillance estimée par la méthode SS que par la méthode MCS.

De plus, on peut aisément établir la relation de la probabilité de défaillance en fonction du seuil de défaillance avec un nombre de simulation acceptable. Cette relation se montre très intéressante car elle nous aide à estimer la probabilité de défaillance pour chaque seuil de défaillance lorsqu'il est inférieur à la limite critique.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'implémentation numérique de la méthode SS dans le logiciel *Matlab* est d'abord vérifiée par les deux tests simples avec les fonctions de performance connues trouvés dans la littérature. L'utilisation de ces tests a également pour but d'illustrer le concept de la méthode de simulations par Subsets.

La méthode SS est ensuite appliquée aux trois structures : oscillateurs (linéaire, non-linéaires), bâtiment de 8 étages de comportement non-linéaire avec modèle d'hystérésis de Bouc-Wen et un portique de 3 étages en acier non-linéaire. L'excitation sismique aléatoire est générée par le modèle de Boore. Ces trois exemples numériques appartiennent entièrement au problème général, difficilement traitable par la méthode MCS, à cause d'une faible probabilité de défaillance et d'un grand nombre de variables aléatoires. Les résultats de la méthode SS sont comparés avec ceux donnés par la méthode MCS. On note une convergence plus rapide de la probabilité de défaillance de la méthode SS vers la valeur ciblée qu'on a déterminée préalablement par la méthode MCS mais avec un nombre de simulations très élevé. Cette performance de la méthode SS est particulièrement utile dans l'évaluation du risque sismique. Elle peut s'utiliser pour calculer la probabilité de défaillance de façon indépendante avec celle estimée par la courbe de fragilité dans la formule (1.4). Elle peut aussi s'adapter pour évaluer la probabilité de défaillance d'un point particulier de la courbe de fragilité.

Chapitre 4

Courbe de fragilité basée sur l'évolution de densité de probabilité

Sommaire

4.1	Introduction	128
4.2	Méthode de l'évolution de la densité de probabilité - PDEM	128
4.2.1	Équation de mouvement et l'évolution de la densité de probabilité	128
4.2.2	Méthode PDEM pour l'analyse de la réponse dynamique des structures	129
4.2.3	Méthode PDEM appliquée à l'évaluation de la fiabilité des structures	131
4.2.4	Algorithme de la méthode PDEM	133
4.2.5	Exemple d'illustration	135
4.3	Courbe de fragilité sismique à l'aide de la PDEM	139
4.3.1	Introduction	139
4.3.2	Développement analytique	139
4.3.3	Schéma numérique	141
4.4	Applications numériques	141
4.4.1	Exemple 1 : Oscillateurs non-linéaires de Bouc-Wen et de Coulomb	141
4.4.2	Exemple 2 : Portique en acier de 3 étages	143
4.4.3	Exemple 3 : Bâtiment de 8 étages	148
4.5	Conclusion	154

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté des améliorations permettant d'établir une courbe de fragilité par des méthodes existantes. Ces dernières sont basées sur l'hypothèse de la loi log-normale pour la forme de la courbe de fragilité. Ce sont des méthodes dites *paramétriques* puisqu'il suffit de déterminer les paramètres de la fonction cumulative de probabilité de la loi log-normale. Il est ainsi naturel de voir s'il existe des méthodes *non-paramétriques* pour la construction de courbes de fragilité. Ce chapitre est donc réalisé dans cette optique. Plus précisément, nous proposons une nouvelle technique de construction des courbes de fragilité, basée sur le calcul de l'évolution des densités de probabilité (Probability Density Evolution Method - PDEM). Cette nouvelle technique permet de déduire les courbes de fragilité en ne faisant aucune hypothèse sur la forme des courbes. Ce chapitre se structure de manière suivante : La section 2 est réservée à la présentation des bases de la méthode PDEM. Elle est ensuite suivie en section 3 par le développement analytique et une procédure détaillée étape-par-étape de la nouvelle technique de construction des courbes de fragilité. La validation de la proposition est réalisée sur trois exemples numériques et fera l'objet de la section 4. Enfin, des conclusions sur les résultats obtenus sont présentés.

4.2 Méthode de l'évolution de la densité de probabilité - PDEM

Dans le cadre d'analyse de la réponse et d'évaluation de la fiabilité en comportement dynamique des structures et des systèmes mécaniques où l'incertain peut exister à la fois dans les paramètres physiques et/ou géométriques et dans l'excitation, quelques approches sont proposées, y compris l'approche statistique [120] et les approches non statistiques telles que la méthode de perturbation aléatoire [121] et la méthode de développement en série de polynômes orthogonaux [122]. Toutefois, la possibilité d'obtenir des informations probabilistes de la performance des structures non-linéaires en comportement dynamique aléatoire est difficile. Une famille de méthodes d'évolution de densité de probabilité (PDEM), récemment développée par Li et Chen [80, 87, 123, 124, 125], permet d'évaluer la probabilité conjointe entre la réponse structurale et les variables aléatoires du système et de l'excitation. Cette section vise à présenter les bases de la méthode PDEM et son application à l'évaluation de la probabilité de défaillance des structures.

4.2.1 Équation de mouvement et l'évolution de la densité de probabilité

L'équation de mouvement d'une structure à n degrés de liberté soumise à une des excitations stochastiques peut être écrite sous forme

$$\mathbf{M}(\mathbf{Z})\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{Z})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{Z})\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{Z}, t) \quad (4.1)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t)|_{t=0} = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (4.2)$$

où $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ et $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ sont respectivement les vecteurs de dimension $n \times 1$ de réponse en déplacement, en vitesse et en accélération au temps t ; \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} sont respectivement les matrices de dimension $n \times n$ de masse, d'amortissement et de rigidité tandis que \mathbf{f} est le vecteur $n \times 1$ de force d'excitation. \mathbf{Z} est le vecteur des n_Z paramètres aléatoires qui reflètent l'incertitude en excitations aléatoires (séismes, vent...) et en propriétés des structures mécaniques (module Young, dimensions...).

Dans le cas où l'excitation aléatoire n'est issue que du mouvement du sol, représentée via un modèle stochastique physique, le vecteur d'excitation $\mathbf{f}(\cdot)$ dans l'équation (4.1) devient :

$$\mathbf{M}(\mathbf{Z})\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{Z})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{Z})\mathbf{x}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{i}a(\mathbf{Z}, t) \quad (4.3)$$

où \mathbf{i} est le vecteur colonne des coefficients d'influence qui sont les déplacements résultant d'un déplacement unitaire de la base dans la direction de l'excitation sismique. Toutes les composantes du vecteur \mathbf{i} sont égales à l'unité si tous les degrés de liberté sont dans la même direction que le séisme. $a(\mathbf{Z}, t)$ est l'accélération du mouvement du sol à la base.

Il est évident que la réponse $\mathbf{x}(t)$ est un processus aléatoire. Elle est dépendante et déterminée par \mathbf{Z} , et elle peut être représentée sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{Z}, t) \quad (4.4)$$

où \mathbf{H} est un opérateur vectoriel déterministe. Il existe toujours et est unique. En se basant sur la relation déterministe entre \mathbf{Z} et $\mathbf{x}(t)$ montrée par les équations (4.4), la fonction de densité de probabilité (FDP) conjointe de $\mathbf{x}(t)$ notée par $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ peut être déterminée par la FDP conjointe de \mathbf{Z} notée par $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$:

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) = L_t(p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})) \quad (4.5)$$

où $L_t(\cdot)$ est un opérateur déterministe. Par exemple, quand la relation (4.4) est réduite à une dimension ,c-à-d,

$$x(t) = H(\mathbf{Z}, t) \quad (4.6)$$

la FDP de $x(t)$ notée par $p_X(x, t)$ est déterminée par la FDP de Z notée par $p_Z(z)$ par la relation :

$$p_X(x, t) = \begin{cases} \sum_j p_{Z_j}(z = H_j^{-1}(x, t)) |J_j| & \text{si } H_j^{-1} \text{ existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

où $H_j^{-1}(\cdot)$ est la $j^{\text{ième}}$ fonction inverse de $H(\cdot)$ si la transformation donnée par l'équation (4.6) n'est pas bijective un-à-un et $|J_j|$ est le jacobien de la matrice correspondante.

Les équations (4.5) - (4.7) montrent bien que la densité de probabilité instantanée de la réponse $\mathbf{x}(t)$ existe. Toutefois, il est difficile de la déterminer suivant ces équations car en général, l'expression analytique explicite de $\mathbf{H}(\cdot)$ n'est pas disponible. Li et Chen [80, 87] ont développé la méthode PDEM permettant l'évaluation de la FDP instantanée en combinant les résultats de simulations numériques avec la résolution numérique d'équations différentielles. Cette méthode est ainsi considérée comme une méthode hybride ou mixte, et fera l'objet des sous-sections suivantes.

4.2.2 Méthode PDEM pour l'analyse de la réponse dynamique des structures

Comme précédemment mentionné, la FDP de la réponse dynamique $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ dépend du temps et évolue dans le temps. L'un des objectifs de la méthode PDEM est de déterminer $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ à partir de la distribution $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$. Afin de simplifier la présentation de la méthode, on considère ici juste une réponse $x(t)$ qui peut être une composante du vecteur de réponse $\mathbf{x}(t)$ ou une réponse dérivée de $\mathbf{x}(t)$ telle que déplacement maximum, déplacement inter-étage... Ainsi, le problème revient à déterminer $p_X(x, t)$ à partir de $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$. La fonction de densité de probabilité conditionnelle de $x(t)$ sachant $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ en considérant l'équation (4.4) est :

$$p_{X|\mathbf{Z}}(x, t|\mathbf{z}) = \delta(x - H(\mathbf{z}, t)) \quad (4.8)$$

où $\delta(\cdot)$ est la fonction de Dirac. La fonction de densité de probabilité conjointe $p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)$ est déduite :

$$p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t) = p_{X|Z}(x, t|\mathbf{z}) p_Z(\mathbf{z}) = \delta(x - H(\mathbf{z}, t)) p_Z(\mathbf{z}) \quad (4.9)$$

en dérivant les deux côtés de l'équation (4.9) par rapport à t , on arrive à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial [\delta(x - H(\mathbf{z}, t)) p_Z(\mathbf{z})]}{\partial t} \\ &= p_Z(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial t} [\delta(x - H(\mathbf{z}, t))] \\ &= -p_Z(\mathbf{z}) \left(\dot{H}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - H(\mathbf{z}, t))] \right) \\ &= -\dot{H}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - H(\mathbf{z}, t)) p_Z(\mathbf{z})] \\ &= -\dot{H}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.10)$$

L'équation d'évolution de la densité de probabilité est finalement obtenue :

$$\frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial t} + \dot{H}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

où $\dot{H}(\mathbf{z}, t) = \dot{x}(\mathbf{z}, t)$, il s'agit de la "vitesse" de la réponse pour une réalisation de $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ donnée, l'équation (4.11) devient :

$$\frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial t} + \dot{x}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

On constate que par rapport à la difficulté de la formulation initiale pour déterminer $p_X(x, t)$ dans l'équation (4.7), la FDP conjointe $p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)$ peut être obtenue par une méthode numérique à partir de l'équation (4.12) avec la condition initiale correspondante :

$$p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t) = \delta(x - x_0) p_Z(\mathbf{z}) \text{ pour } t = t_0 = 0 \quad (4.13)$$

où x_0 est la valeur initiale déterministe de $x(t)$.

Enfin, la FDP instantanée $p_X(x, t)$ de la réponse $x(t)$ peut alors être obtenue par :

$$p_X(x, t) = \int_{D_Z} p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t) d\mathbf{z} \quad (4.14)$$

où D_Z est le domaine de distribution des variables aléatoires \mathbf{Z} .

• Discussion

- L'équation (4.12) peut être vue comme une équation de conservation qui implique le principe de conservation de la probabilité, c'est-à-dire que l'incrément total de probabilité dans l'espace d'état est égal à la probabilité nette «importée» passée par la frontière du domaine.

- L'équation (4.12) est écrite pour une réponse $x(t)$ qui est une composante du vecteur $\mathbf{x}(t)$ mais elle reste encore vraie pour n'importe quelle réponse structurale telle que déplacement, contrainte, etc. Cette réponse structurale peut être déduite à partir d'une analyse standard après avoir obtenu les déplacements $\mathbf{x}(t)$. Par exemple, si l'on s'intéresse au déplacement relatif entre le degré de liberté i et le degré de liberté $(i - 1)$. Alors, on a $X(\mathbf{z}, t) = x_i(\mathbf{z}, t) - x_{i-1}(\mathbf{z}, t)$ l'équation (4.12) s'écrit :

$$\frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial t} + \dot{x}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.15)$$

ou plus explicitement :

$$\frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial t} + (\dot{x}_i(\mathbf{z}, t) - \dot{x}_{i-1}(\mathbf{z}, t)) \frac{\partial p_{XZ}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

- La vitesse $\dot{x}(z, t)$ dans l'équation (4.12) est découplée de $p_{XZ}(x, z, t)$ et considérée comme un coefficient de l'équation. Cette vitesse est facilement obtenue à partir d'une simulation numérique par des logiciels d'éléments finis par exemple.

4.2.3 Méthode PDEM appliquée à l'évaluation de la fiabilité des structures

En vibration aléatoire, la ruine d'une structure est souvent considérée suivant deux modes : (i) par le dépassement d'un seuil et (ii) par la fatigue ou l'accumulation de dommages. On se limite ici au premier mode de ruine puisque les excitations considérées le long de la thèse sont des séismes. Ils ont en général une durée plus courte et une amplitude plus importante que d'autres types d'excitations aléatoires telles que vague, vent, etc. Le deuxième mode de ruine est donc moins approprié que le premier. Suivant le premier mode, la défaillance survient lorsque la réponse du système (contrainte, déformation ou déplacement, etc) dépasse une limite critique. C'est le problème du premier passage ou premier franchissement.

• Fiabilité pour le problème du premier franchissement

Considérons la réponse caractéristique d'un système dynamique stochastique $X(t)$, la définition générale du problème de premier franchissement est la probabilité que cette réponse reste dans le domaine de sûreté de D_s pour une durée d'observation.

$$R(t) = P [X(\tau) \in D_s, \tau \in [0, t]] \quad (4.17)$$

L'équation (4.17) signifie que la réponse ne va jamais dépasser la frontière de D_s pendant la durée de temps $[0, t]$. Autrement dit, une fois que la réponse dépasse cette frontière, la structure est en défaillance. Pour un problème de frontière simple et symétrique $D_s = \{-x_0 < X < x_0\}$, la fiabilité dynamique instantanée est définie par :

$$R(-x_0, x_0, t) = P \{-x_0 < X(\tau) < x_0\}, \quad 0 \leq \tau \leq t] \quad (4.18)$$

dans laquelle $-x_0$ et x_0 ($x_0 > 0$) sont respectivement la valeur limite inférieure et supérieure de la réponse caractéristique de la structure.

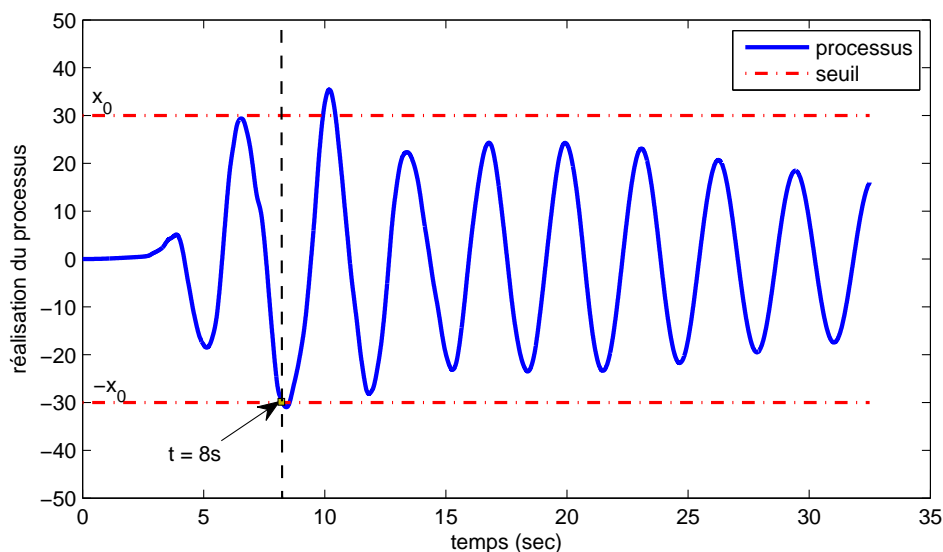


FIGURE 4.1. Exemple de trajectoire d'un processus et de franchissement d'un seuil

La figure 4.1 présente un exemple de trajectoire d'un processus stochastique représentant la réponse $X(t)$ ainsi que deux seuils $-x_0$ et x_0 constants dans le temps. Au temps $t = 8$ secondes, la réponse franchit le seuil pour la première fois et entraîne ainsi la défaillance du système.

- **Fiabilité calculée par la formule de Rice**

En général, la fiabilité $R(-x_0, x_0, t)$ est évaluée par le taux de franchissement $\lambda(t)$ [41] :

$$R(-x_0, x_0, t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t [\lambda_{-x_0}(\tau) + \lambda_{x_0}(\tau)] d\tau \right\} \quad (4.19)$$

La première expression permettant le calcul du taux de franchissement a été proposée par Rice [126] :

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^0 \dot{x} p_{X\dot{X}}(-x_0, \dot{x}, t) d\dot{x} + \int_0^{\infty} \dot{x} p_{X\dot{X}}(x_0, \dot{x}, t) d\dot{x} \quad (4.20)$$

où $p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t)$ est la FDP conjointe de la réponse considérée et de sa vitesse.

On constate que, d'une part, $p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t)$ n'est disponible que par la théorie classique des vibrations aléatoires ou par la méthode des éléments finis stochastiques. C'est pourquoi dans les applications réelles, il faut généralement supposer une distribution régulière comme la distribution normale ou de Rayleigh, qui produira certainement l'écart entre la FDP réelle et celle donnée par l'hypothèse du problème général.

D'autre part, même si $p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t)$ est connue et peut être déterminée par la méthode PDEM, la solution donnée par les équations (4.19) et (4.20) peut contenir d'autres erreurs dans l'évaluation de la fiabilité car elle se base sur l'hypothèse de Poisson ou l'hypothèse de Markov [80, 41].

- **Fiabilité par la méthode PDEM**

Au contraire de la formule de Rice [126], la méthode PDEM n'a pas besoin de calculer le taux de franchissement et ne nécessite ainsi pas l'hypothèse de Poisson ou l'hypothèse de Markov.

En effet, l'équation (4.17) signifie que la fiabilité dynamique est la probabilité totale des événements aléatoires qui sont toujours dans le domaine de sûreté sur l'intervalle de temps. Par contre, les autres événements aléatoires dans le domaine de défaillance seront obligés d'être considérés comme "*disparus*". Il s'agit d'une condition aux limites absorbantes. Similairement l'application de cette propriété pour le problème de fiabilité peut être associée à l'équation (4.12) avec la condition aux limites *absorbantes* reflétant le domaine de défaillance D_f :

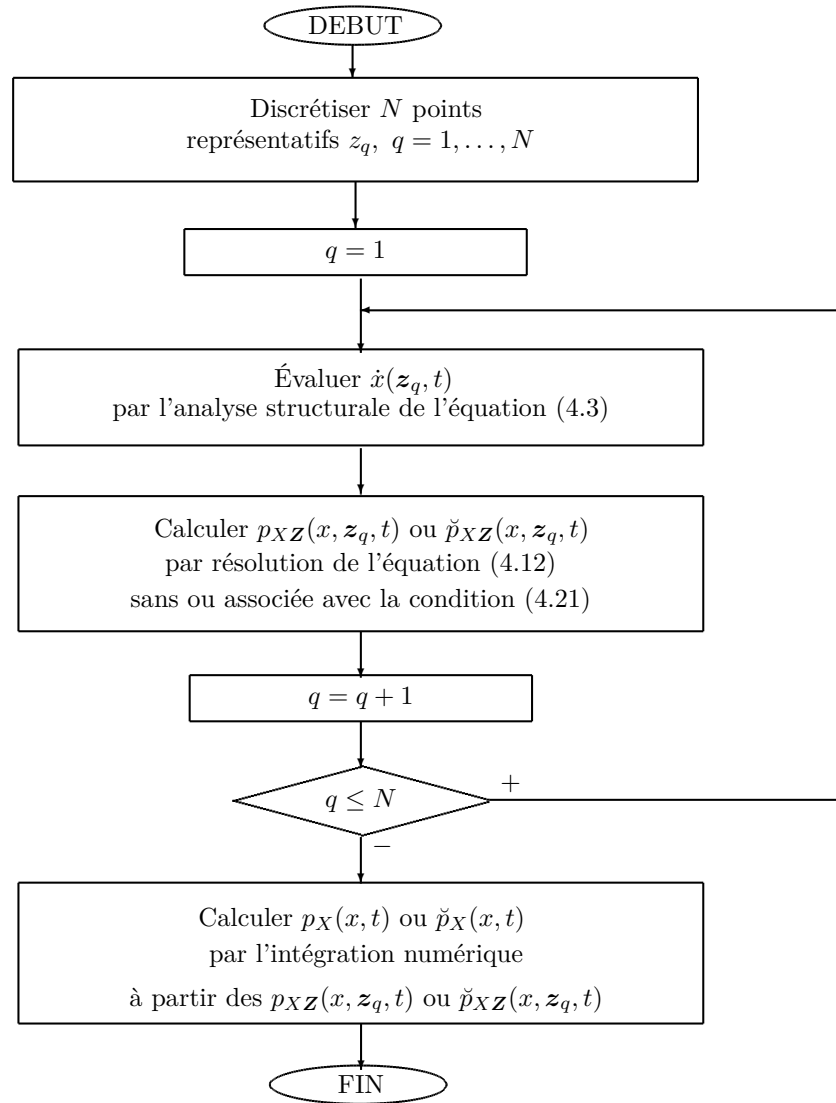
$$p_{XZ}(x, z, t) = 0 \text{ si } x \in D_f \quad (4.21)$$

La résolution de l'équation (4.12) avec la condition initiale (4.13) et la condition aux limites (4.21) permet d'obtenir une densité de probabilité conjointe de X et Z sachant que la réponse est dans le domaine de sûreté. Elle est en fait la densité de probabilité conjointe conditionnée par la sûreté ($X(\tau) \in D_s, \tau \in [0, t]$), notée par $\check{p}_{XZ}(x, z, t)$. Cela veut dire que $\check{p}_{XZ}(x, z, t)$ est la probabilité conjointe définie pour X et Z mais X est limitée seulement dans le domaine de sûreté D_s . On obtient ensuite la densité de probabilité de X dans le domaine D_s par l'intégrale :

$$\check{p}_X(x, t) = \int_{D_Z} \check{p}_{XZ}(x, z, t) dz \quad (4.22)$$

La fiabilité (probabilité de sûreté) temporelle peut être déduite par l'expression :

$$R(t) = P[-x_0 < X(\tau) < x_0; \tau \in [0, t]] = \int_{D_s} \check{p}_X(x, t) dx = \int_{-x_0}^{+x_0} \check{p}_X(x, t) dx \quad (4.23)$$

FIGURE 4.2. *Algorithme numérique pour la méthode PDEM*

4.2.4 Algorithme de la méthode PDEM

La procédure de la méthode PDEM combine à la fois la simulation numérique et la résolution d'équations différentielles par la méthode des différences finies. Elle comprend les étapes principales suivantes [41] :

- Étape 1 : sélectionner les points représentatifs du domaine D_Z . Notons un point du domaine par z_q , $q = 1, 2, \dots, N$ où N est le nombre total des points sélectionnés.
- Étape 2 : pour chaque point z_q donné, faire une analyse structurale suivant l'équation (4.1) ou (4.3) afin d'obtenir la vitesse $\dot{x}(z_q, t)$. L'utilisation d'un code de calcul par éléments finis est recommandée à cette étape pour une structure complexe. À noter que la vitesse est obtenue pour le temps discrétisé, c-à-d, $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ où Δt est le pas de temps.
- Étape 3 : Résoudre l'équation différentielle (4.12) pour $Z = z_q$ avec la condition initiale (4.13) avec ou sans condition aux limites absorbantes (4.21).
- Étape 4 : Effectuer l'intégration numérique suivant (4.14) pour l'analyse dynamique de la réponse ou suivant (4.23) pour l'analyse de la fiabilité.

Cette procédure est représentée par un schéma algorithmique donné à la figure 4.2.

- **Choix des points de discrétisation**

On suppose que \mathbf{Z} consiste en n variables $\{Z_1, \dots, Z_n\}$. Les points représentatifs \mathbf{z} du domaine $D_{\mathbf{Z}}$ doivent d'abord être déterminés. Les variables $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ sont discrétisées respectivement par N_1, \dots, N_n points. Le nombre total de points représentatifs discrétisés est $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$. Pour une réalisation \mathbf{z}_q , où $q = 1, \dots, N$, la FDP conjointe de l'équation (4.12) devient :

$$\frac{\partial p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}_q, t)}{\partial t} + \dot{x}(\mathbf{z}_q, t) \frac{\partial p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}_q, t)}{\partial x} = 0 \quad (4.24)$$

On constate que le nombre total N peut augmenter rapidement avec l'augmentation de n . Par conséquent, il est nécessaire d'avoir des stratégies spécifiques de sélection des points. Lorsque le nombre de variables aléatoires est encore petit, par exemple $n = 1, 2, 3$, un maillage uniforme est adapté, c'est-à-dire que le domaine $D_{\mathbf{Z}}$ est uniformément maillé et tous les points de la grille sont ensuite sélectionnés comme des points représentatifs. La tableau 4.1 présente le nombre total de points nécessaires N suggéré par Li et Chen. Toutefois, lorsque n est grand, un algorithme spécial développé par Li et Chen [127] doit être appliqué.

TABLEAU 4.1. *Nombre total de points nécessaires*

Nombre de variables aléatoires n	Nombre de points nécessaires N
1	50 – 100
2	200 – 300
3	250 – 600

- **Schéma numérique TVD**

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles [128]. Dans le cas de l'équation (4.24), le schéma Lax-Wendroff associé à l'algorithme " *Variation Totale Décroissante* " (en Anglais : Total Variation Diminishing TVD) est utilisé ici, comme le suggère Li et Chen [80, 123].

Avec le schéma TVD, l'équation (4.12) est discrétisée sous la forme :

$$\begin{aligned} p_{j,k+1} = & p_{j,k} - r_L \left[\frac{1}{2} (g_k + |g_k|) (p_{j,k} - p_{j-1,k}) + \frac{1}{2} (g_k - |g_k|) (p_{j+1,k} - p_{j,k}) \right] - \\ & - \frac{1}{2} (1 - |r_L g_k|) |r_L g_k| \times \\ & \times \left[\psi \left(r_{j+1/2}^+, r_{j+1/2}^- \right) (p_{j+1,k} - p_{j,k}) - \psi \left(r_{j-1/2}^+, r_{j-1/2}^- \right) (p_{j,k} - p_{j-1,k}) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

où $p_{X\mathbf{Z}}(x_j, \mathbf{z}_q, t_k)$ est notée par $p_{j,k}$, $x_j = j\Delta x$, $g_k = \frac{1}{2} [\dot{x}(\mathbf{z}_q, t_{k-1}) + \dot{x}(\mathbf{z}_q, t_k)]$ et $t_k = k \times \Delta \hat{t}$. On remarque que Δx est le pas de la réponse, $\Delta \hat{t}$ le pas de temps dans la méthode des différences finies, $r_L = \Delta \hat{t} / \Delta x$ le rapport de maille, et $\psi(r^+, r^-)$ le limiteur de flux, où :

$$\begin{aligned} r_{j+1/2}^+ &= \frac{p_{j+2,k} - p_{j+1,k}}{p_{j+1,k} - p_{j,k}}, \\ r_{j+1/2}^- &= \frac{p_{j,k} - p_{j-1,k}}{p_{j+1,k} - p_{j,k}}, \\ r_{j-1/2}^+ &= \frac{p_{j+1,k} - p_{j,k}}{p_{j+1,k} - p_{j,k}}, \\ r_{j-1/2}^- &= \frac{p_{j,k} - p_{j-1,k}}{p_{j-1,k} - p_{j-2,k}} \end{aligned}$$

La condition de Courant-Friedrichs-Lewy pour l'équation (4.25) est :

$$|r_L g_k| \leq 1 \quad (4.26)$$

Afin de construire le limiteur de flux dans l'équation (4.25), on adopte le limiteur de flux de Roe-Sweby avec la dissipation relativement faible.

$$\psi_{sb}(r^-) = \max(0, \min(2r^-, 1), \min(r^-, 2)) \quad (4.27)$$

Puisque le signe de $\dot{x}(z_q, t)$ varie en temps, le limiteur de flux doit être adaptatif et capable de choisir une direction différente, pour ce faire on utilise la forme suivante :

$$\psi(r^+, r^-) = f_H(-g_k) \psi_{sb}(r^+) + f_H(g_k) \psi_{sb}(r^-) \quad (4.28)$$

où $f_H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside

$$f_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.29)$$

En pratique, pour assurer la relation (4.26), $|g_k|_{\max}$ est d'abord estimé. Et le rapport de maille est ensuite déterminé par $r_L = r_0 / |g_k|_{\max}$, où r_0 est un coefficient pris dans l'intervalle $[0, 1]$. On remarque que le pas de temps Δt en analyse de structure de l'étape 2 peut être différent du pas de temps de la méthode des différences finies $\Delta \hat{t}$ en étape 3. En général, Δt est plus grand que $\Delta \hat{t}$; et les vitesses de l'étape 3 sont interpolées linéairement avec les vitesses obtenues lors de l'étape 2.

La méthode PDEM a été implémentée à l'aide du logiciel de calcul Matlab.

4.2.5 Exemple d'illustration

Dans le but de vérifier la mise en œuvre numérique de la procédure et d'illustrer la méthode PDEM, on traite ici un exemple numérique. La précision de la méthode PDEM est vérifiée par la comparaison avec la méthode de simulations de Monte Carlo (MCS).

• Structure

On reprend ici les deux oscillateurs non-linéaires traités au chapitre 2. Il s'agit d'un oscillateur

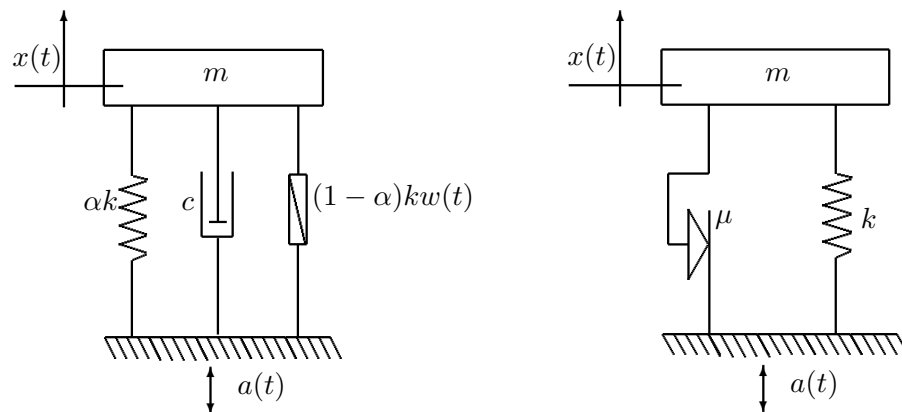


FIGURE 4.3. Oscillateurs

non-linéaire d'hystérésis de Bouc-Wen [86] et d'un oscillateur non-linéaire avec frottement sec (ou amortissement de Coulomb). L'équation qui régit la dynamique des oscillateurs s'écrit :

$$\text{Bouc-Wen} : \ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2(\alpha x(t) + (1-\alpha)w(t)) = -a(t) \quad (4.30)$$

$$\text{avec } \dot{w}(t) = C_1\dot{x}(t) - C_2|\dot{x}(t)||w(t)|^{n_d-1}w(t) - C_3\dot{x}(t)|w(t)|^{n_d}$$

$$\text{Coulomb} : \ddot{x}(t) + \mu g \text{Sgn}(\dot{x}(t)) + \omega_0^2 x(t) = -a(t) \quad (4.31)$$

où $\omega_0 = 5.97$ (rad/s) est la pulsation propre non amortie, $\zeta = 2\%$ le taux d'amortissement. Pour l'oscillateur de Bouc-Wen : $w(t)$ est le déplacement d'hystérésis ; $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0.5/\text{cm}^{n_d}$, $\alpha = 0.1$ et $n_d = 1$ sont des constantes. Pour l'oscillateur de Coulomb : μ est le coefficient de frottement sec ; $a(t)$ l'accélération du sol ; et $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ l'accélération de la pesanteur.

La figure 4.3 présente les deux modèles.

• Variables aléatoires et discrétisation des points représentatifs

Concernant l'excitation sismique, elle consiste en $N = 20$ accélérogrammes générés par le modèle de Boore [46] et la densité de PGA suit une loi log-normale $p_A(a) = p_{\mathcal{LN}}(a, 1.4, 0.4) \text{ m/s}^2$. La population de mouvements du sol peut être créée à partir de la normalisation de ces accélérogrammes selon la distribution de *PGA*.

En résumé, l'aléa de l'excitation sismique se compose de la distribution de *PGA* $p_A(a)$ et de N accélérogrammes. Et si S désigne l'événement d'apparition d'un séisme contenu dans un ensemble de N accélérogrammes, la distribution de S suit une loi uniforme discrète qui est déterminée par $p_S(s) = \frac{1}{N}$. Il existe alors deux variables aléatoires $\mathbf{Z} = [A, S]$.

On suppose que dans cet exemple l'incertitude n'existe que pour cette excitation sismique.

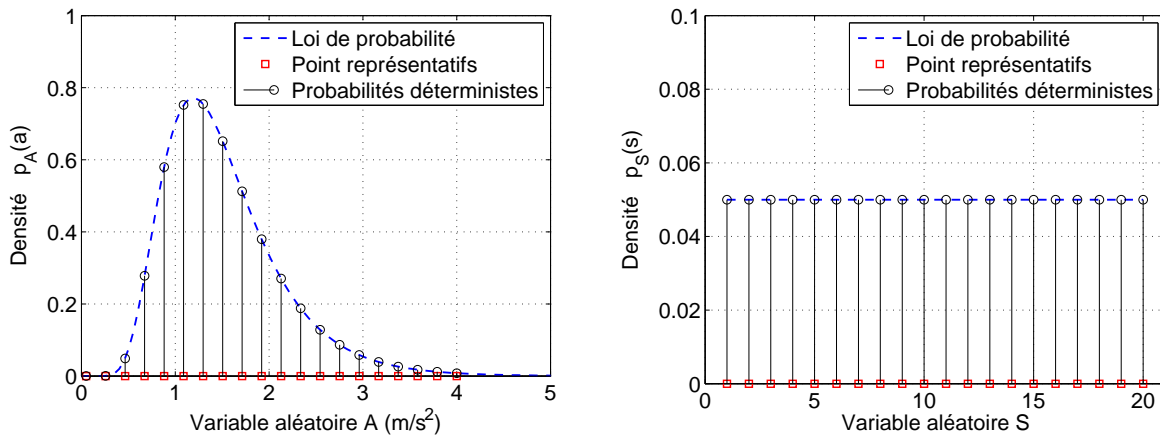


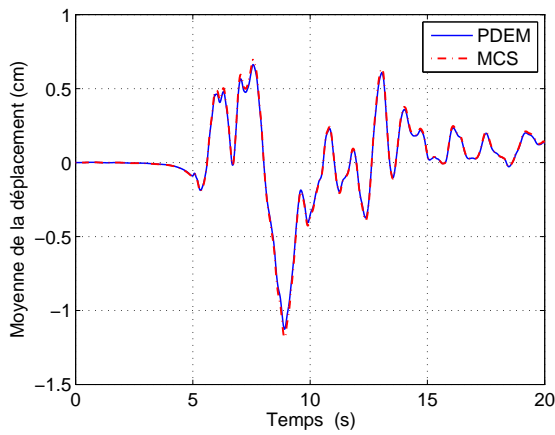
FIGURE 4.4. *Oscillateurs : Discrétisation des variables aléatoires*

Pour la méthode PDEM, les variables aléatoires sont discrétisées en des points représentatifs correspondants à leurs fonctions de densité de probabilité. La figure 4.4 présente la discrétisation des variables aléatoires A et S . Lorsque la variable aléatoire A est discrétisée en 30 points, le nombre total de points est égal à $20 \times 30 = 600$ points.

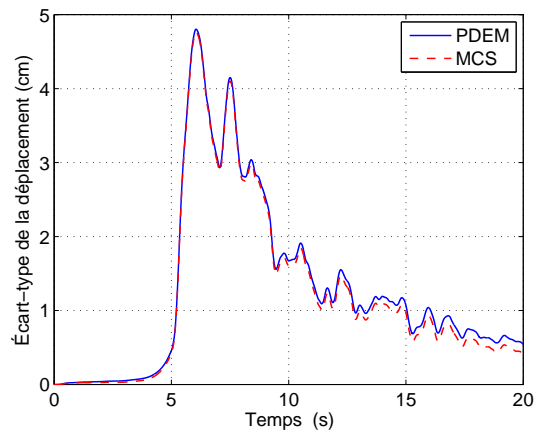
• Réponse dynamique stochastique

On utilise la méthode PDEM et la méthode MCS avec 1×10^5 simulations pour l'analyse de réponse dynamique stochastique des oscillateurs. Les figures 4.5 et 4.6 représentent les résultats obtenus pour la moyenne et l'écart-type du déplacement $x(t)$. On constate que les courbes issues des deux méthodes PDEM et MCS se rapprochent.

De plus, grâce aux résultats obtenus par la méthode PDEM, on peut aisément obtenir la FDP de la réponse à chaque instant. Cette dernière est illustrée dans les figures 4.7 et 4.8 pour l'intervalle de temps $[7,13]$ secondes (à gauche) et pour certains instants $t = 7, 10, 13$ secondes (à droite).

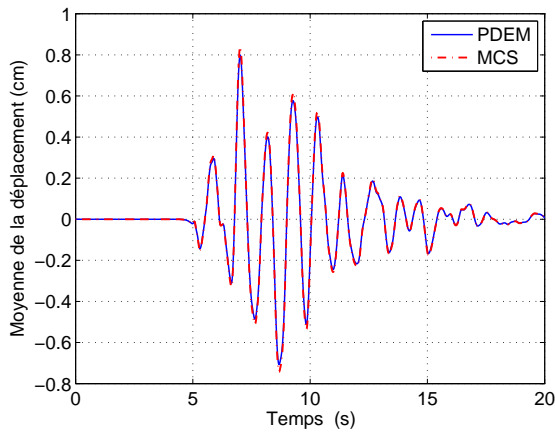


(a) Moyenne de la réponse

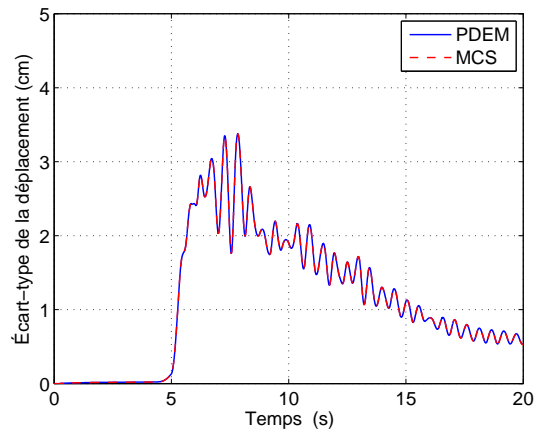


(b) Écart-type de la réponse

FIGURE 4.5. Oscillateur de Bouc-Wen : Réponse dynamique stochastique

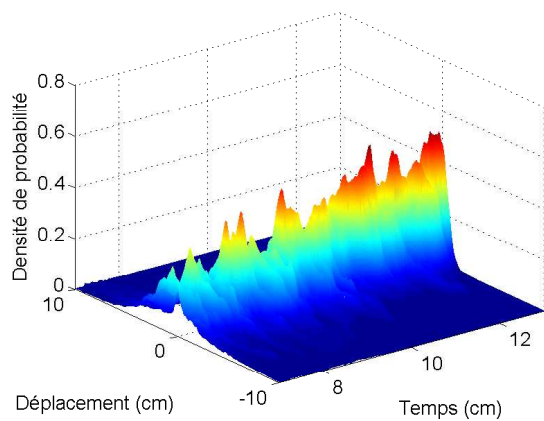


(a) Moyenne de la réponse

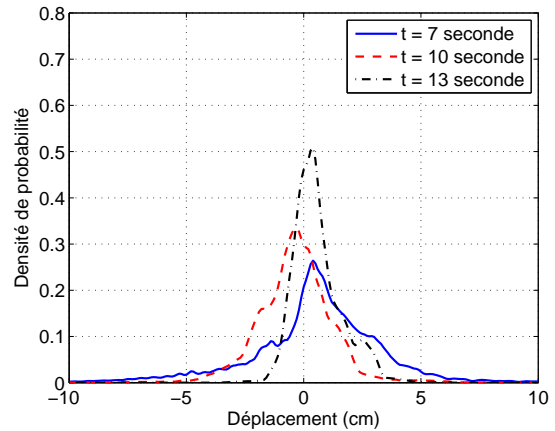


(b) Écart-type de la réponse

FIGURE 4.6. Oscillateur de Coulomb : Réponse dynamique stochastique

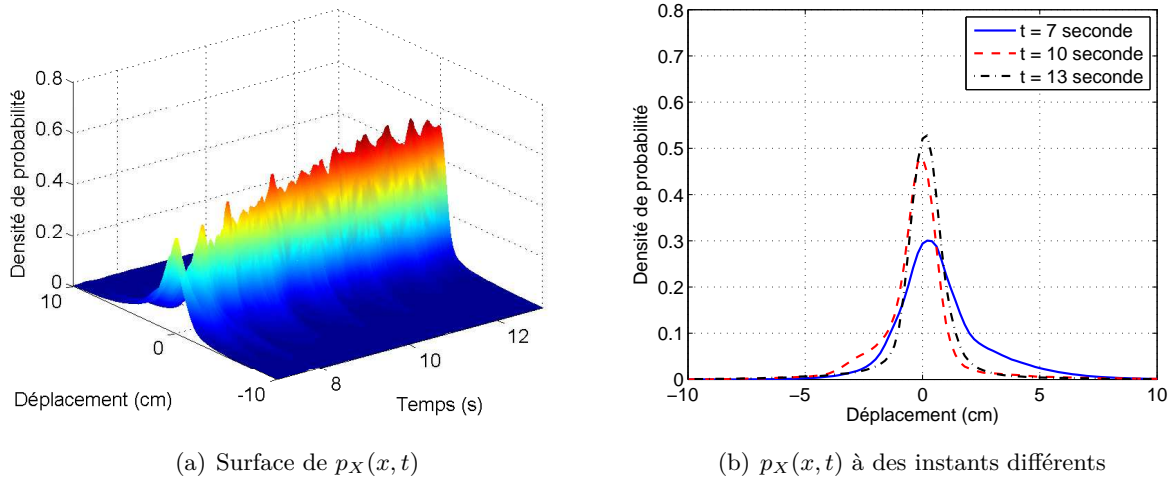
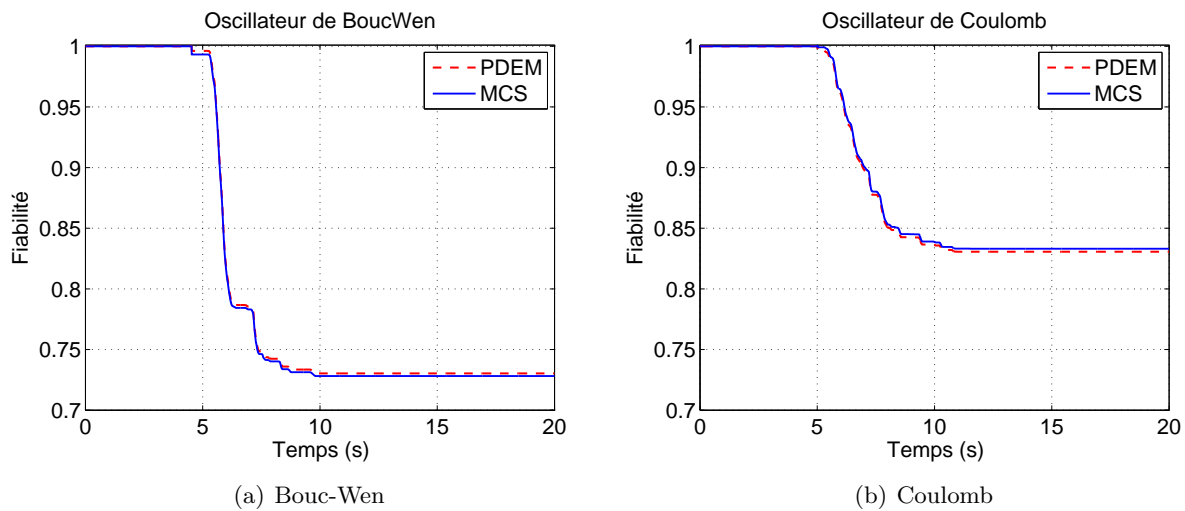


(a) Surface de $p_X(x, t)$



(b) $p_X(x, t)$ à des instants différents

FIGURE 4.7. Oscillateur de Bouc-Wen : Densité de la réponse $p_X(x, t)$

FIGURE 4.8. *Oscillateur de Coulomb : Densité de la réponse $p_X(x, t)$* FIGURE 4.9. *Fiabilité dynamique des oscillateurs*

• Fiabilité dynamique

La défaillance du système est définie par le dépassement d'un seuil x_0 de la réponse dynamique. Ce critère de défaillance se traduit par la fonction de performance $G(\mathbf{Z}) = x_0 - |X(\mathbf{Z})|$. Et il y a défaillance si $G(\mathbf{Z}) \leq 0$. Dans cet exemple, on considère deux variables aléatoires, donc $\mathbf{Z} = [A, S]$; et le seuil critique de défaillance est $x_0 = 7$ cm. On a ainsi la fonction de performance en unité de cm : $G(\mathbf{Z}) = 7 - |X(\mathbf{Z})|$.

La fiabilité (ou probabilité de sûreté) temporelle dans l'intervalle de temps $[0, 20]$ secondes est déterminée par les méthodes PDEM et MCS. Les résultats obtenus de la fiabilité sont représentés dans la figure 4.9. On note un bon accord entre la méthode PDEM et la méthode MCS avec 1×10^5 simulations.

• Discussion

Par cet exemple, on a présenté les résultats de calcul de la réponse dynamique stochastique et de la fiabilité dynamique en se basant sur la méthode PDEM. La comparaison de ces résultats avec ceux de la méthode MCS nous permet de confirmer la précision de la méthode PDEM et de valider ainsi son implémentation numérique sous Matlab.

En utilisant la méthode PDEM, la probabilité conjointe des variables aléatoires \mathbf{Z} dans le domaine de sûreté (ou défaillance) peut être déterminée. Grâce à cette probabilité riche en informations, une procédure pour l'établissement des courbes de fragilité est proposée dans la section suivante.

4.3 Courbe de fragilité sismique à l'aide de la PDEM

4.3.1 Introduction

Une courbe de fragilité sismique est représentée par la probabilité conditionnelle de défaillance en fonction de l'intensité des séismes ($A \equiv \text{PGA}$). Dans les chapitres précédents, on a présenté sa construction en se basant sur les méthodes de simulations (par exemple : MCS, Subsets) ou sur les méthodes d'approximation suivant l'hypothèse de la loi log-normale (par exemple : normalisation de l'intensité sismique, maximum de vraisemblance, modèle de demande/capacité sismiques). On remarque que la probabilité de défaillance sur la courbe de fragilité peut être déterminée à partir de sa densité de probabilité conditionnelle de défaillance. Cette dernière quantité est difficile à déterminer, mais peut être obtenue avec la méthode PDEM. La réussite de cette nouvelle approche permettra la construction directe de la courbe de fragilité sismique dite "non paramétrique" sans utiliser l'hypothèse de la loi log-normale. Dans la suite, le développement analytique est d'abord présenté et suivi ensuite par un schéma numérique de la méthode proposée. Cette approche est enfin validée sur des exemples numériques dans la section 4.4.

4.3.2 Développement analytique

Afin de faciliter l'écriture des formules, le vecteur des paramètres aléatoires défini dans la section 4.2 est séparé en deux parties : une variable aléatoire caractérisant l'intensité sismique (le pic d'accélération du sol utilisé dans cette étude PGA), notée par A , et les autres variables aléatoires \mathbf{Z} . L'inconnu du problème modifié sera alors $p_{XZA}(x, \mathbf{z}, a, t)$ dans l'équation (4.12).

La densité de probabilité conjointe conditionnée par la sûreté $\check{p}_{XZA}(x, \mathbf{z}, a, t)$ est déterminée par la résolution du problème (4.12) avec la condition initiale (4.13) et les conditions aux limites *absorbantes* (4.21).

La densité de probabilité de l'intensité sismique A dans le domaine de sûreté D_s est évaluée par l'intégrale :

$$\check{p}_A(a, t) = \int_{D_s} \int_{D_Z} \check{p}_{XZA}(x, \mathbf{z}, a, t) dz dx \quad (4.32)$$

Comme le domaine de défaillance D_f et le domaine de sûreté D_s sont disjoints, si l'on appelle $p_A(a)$ la distribution de probabilité initiale connue du paramètre aléatoire A , on a la relation suivante :

$$\hat{p}_A(a, t) = p_A(a) - \check{p}_A(a, t) \quad (4.33)$$

On note que $\hat{p}_A(a, t)$ signifie la densité de probabilité conjointe de l'événement de défaillance $|X| > x_0$ et l'événement " $A = a$ " en temps t . La probabilité conjointe est alors évaluée par sa densité :

$$P[|X| > x_0, a \leq A \leq a + da; t] = \hat{p}_A(a, t) da \quad (4.34)$$

et

$$P[a \leq A \leq a + da; t] = p_A(a, t) da \quad (4.35)$$

Suivant la définition, la fragilité instantanée $F_r(a; t)$ représente la probabilité conditionnelle $P[|X| > x_0 | A = a; t]$. Elle peut être calculée à travers l'expression de la probabilité conditionnelle de Bayes :

$$\begin{aligned} F_r(a; t) &= P(|X| \geq x_0 | A = a; t) \approx P(|X| \geq x_0 | a \leq A \leq a + da; t) \\ &= \frac{P(|X| \geq x_0, a \leq A \leq a + da; t)}{P(a \leq A \leq a + da)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

En remplaçant la solution des équation (4.34) et (4.35) dans l'équation (4.36), on obtient la fragilité :

$$F_r(a; t) = \frac{\hat{p}_A(a, t) da}{p_A(a, t) da} = \frac{\hat{p}_A(a, t)}{p_A(a, t)} = 1 - \frac{\check{p}_A(a, t)}{p_A(a)} \quad (4.37)$$

L'équation (4.37) nous permet de construire une *surface* de fragilité $F_r(a, t)$. Comme l'on doit étudier la probabilité de défaillance sur toute la durée de l'excitation, nous proposons donc de prendre la valeur maximale de $F_r(a, t)$ durant les séismes :

$$F_r(a) = \max_t F_r(a; t) \quad (4.38)$$

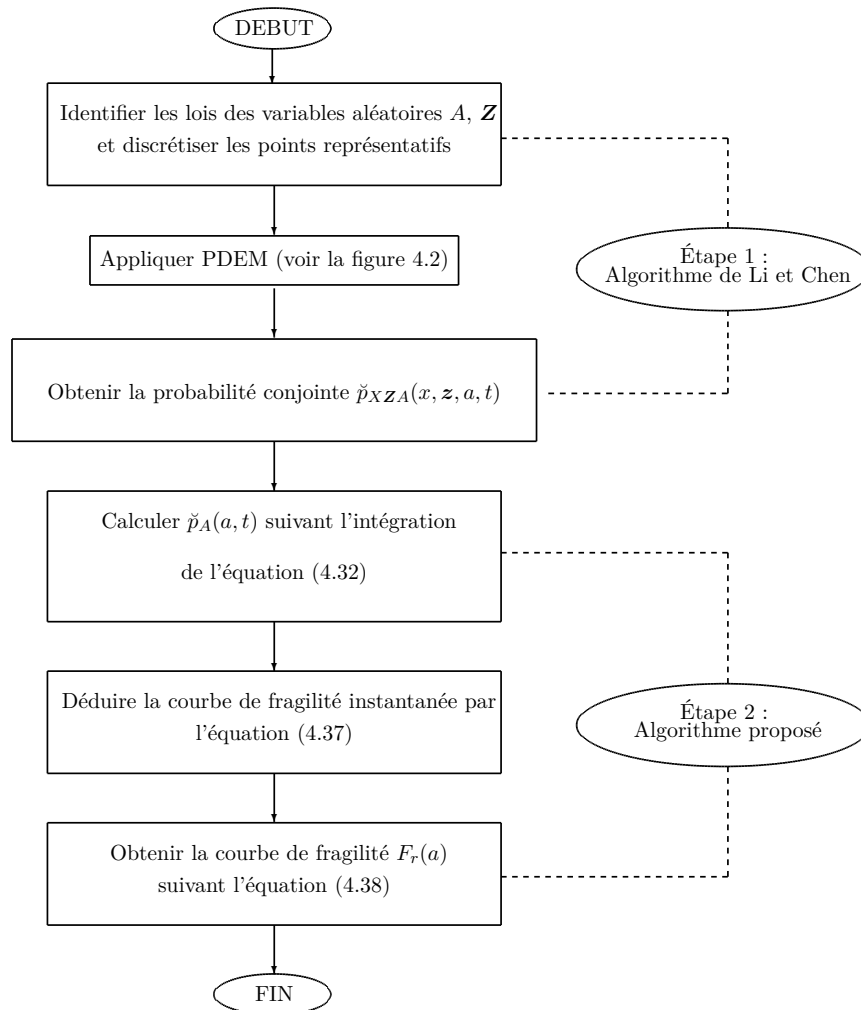


FIGURE 4.10. *Algorithme numérique de construction de la courbe de fragilité*

4.3.3 Schéma numérique

Le schéma numérique pas-à-pas pour construire une courbe de fragilité sismique à l'aide de la méthode PDEM comprend deux étapes principales [129] :

- **Étape 1** : Le but de cette étape est de calculer la probabilité conjointe entre la réponse structurale et les variables aléatoires du système et de l'excitation. Le schéma numérique de Li et Chen présenté dans la figure 4.2 est utilisé pour résoudre l'équation différentielle avec les conditions aux limites absorbantes,
- **Étape 2** : Grâce à la probabilité conjointe $\check{p}_{XZA}(x, z, a, t)$, on peut déterminer la probabilité de l'intensité sismique A dans le domaine de sûreté (D_s) par l'équation (4.32). La courbe de fragilité est obtenue par intégration numérique selon l'équation (4.37) et par la recherche de maximum en temps suivant l'équation (4.38).

Ce schéma numérique est présenté dans la figure 4.10.

4.4 Applications numériques

L'application de la méthode proposée pour la construction des courbes de fragilité est illustrée à l'aide de trois exemples numériques. L'objectif est d'abord de valider l'application de la méthode proposée pour la construction des courbes de fragilité. Il est ensuite suivi par la vérification de l'hypothèse log normale de la courbe dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance (MLE).

4.4.1 Exemple 1 : Oscillateurs non-linéaires de Bouc-Wen et de Coulomb

- **Description du problème**

Dans la continuité de l'exemple présenté dans la sous-section 4.2.5, il s'agit de deux oscillateurs non-linéaires de Bouc-Wen et de Coulomb. Ils sont soumis à l'excitation sismique générée par le modèle de Boore.

On note que dans cet exemple l'incertitude de l'excitation sismique se compose de la distribution de l'intensité sismique A et de N accélérogrammes. Il existe alors deux variables aléatoires $\mathbf{Z} = [A, S]$, où $p_A(a) = p_{\mathcal{LN}}(a, 1.4, 0.4) \text{ m/s}^2$ et $p_S(s) = \frac{1}{N}$.

Dans la partie précédente, on a déterminé la réponse et la fiabilité dynamiques stochastiques des deux oscillateurs. Les résultats obtenus dans le problème de fiabilité seront utilisés pour construire des courbes de fragilité. En effet, les courbes de fragilité $F_r(a)$ sont déduites des équations (4.37) et (4.38) après avoir obtenu les FDP conjointes $\check{p}_{XAS}(x, a, s, t)$ dans les cas correspondants de calcul de la fiabilité.

- **Analyse de fragilité**

Outre le cas $N = 20$ séismes considérés, on prend également en considération quatre autres cas correspondants à quatre jeux de données $N = 50$, $N = 75$, $N = 100$ et $N = 150$. Au total, le nombre de jeux de données traités s'élève ainsi à cinq.

On rappelle que pour la méthode PDEM, le schéma présenté sur la figure 4.10 est appliqué pour le calcul des courbes de fragilité. Le nombre total de points représentatifs des variables aléatoires est respectivement égal à $20 \times 30 = 600$, $50 \times 30 = 1500$, $75 \times 30 = 2250$, $100 \times 30 = 3000$ et $150 \times 30 = 4500$ points.

La simulation de Monte Carlo est aussi effectuée avec 1×10^5 calculs pour chaque cas de données. Les données de réponses structurales obtenues sont également utilisées par les méthodes PDEM, MLE existante, MLE proposée et MCS pour la construction de courbes de fragilité. Pour rappel, les méthodes MLE existante, MLE proposée et MCS ont été présentées de manière détaillée dans le chapitre 2.

• Résultats pour les courbes de fragilité

Pour le premier cas $N = 20$, la figure 4.11 présente les résultats obtenus pour les deux oscillateurs. La courbe de fragilité obtenue par la méthode PDEM y est montrée par la ligne violette, celles obtenues par les méthodes MLE par les lignes bleu et noire. Les points de défaillance évalués par la méthode MCS y sont également présentés pour la comparaison.

On note un bon accord entre la méthode PDEM et la méthode MCS. La courbe obtenue par la PDEM sont plus proches des points obtenus par la méthode MCS que celles obtenues par les MLE existante et proposée, ce qui confirme bien la validité de la méthode PDEM et sa meilleure précision par rapport à les méthodes MLE.

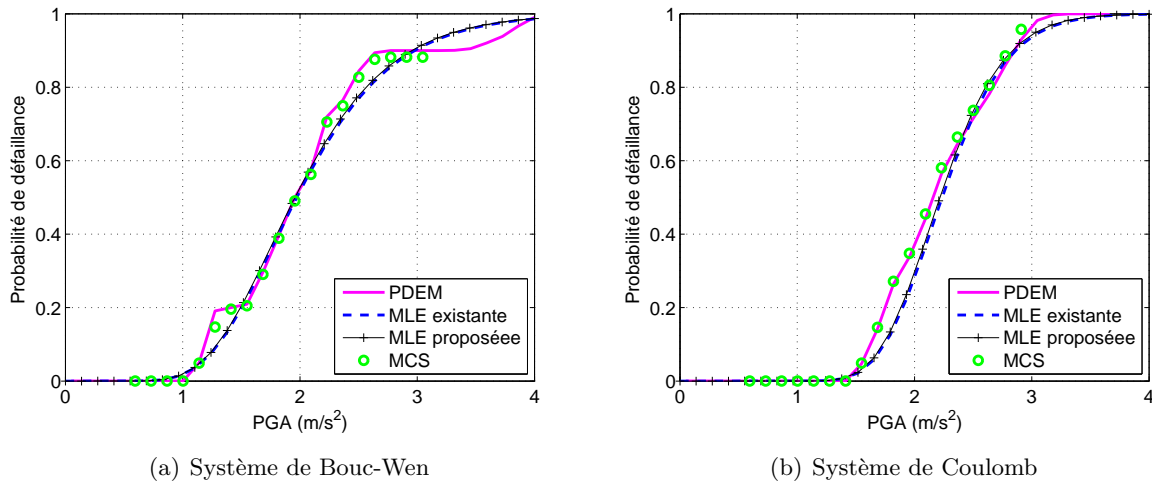


FIGURE 4.11. Exemple 1 : Courbes de fragilité obtenues pour le cas 1 (20 séismes)

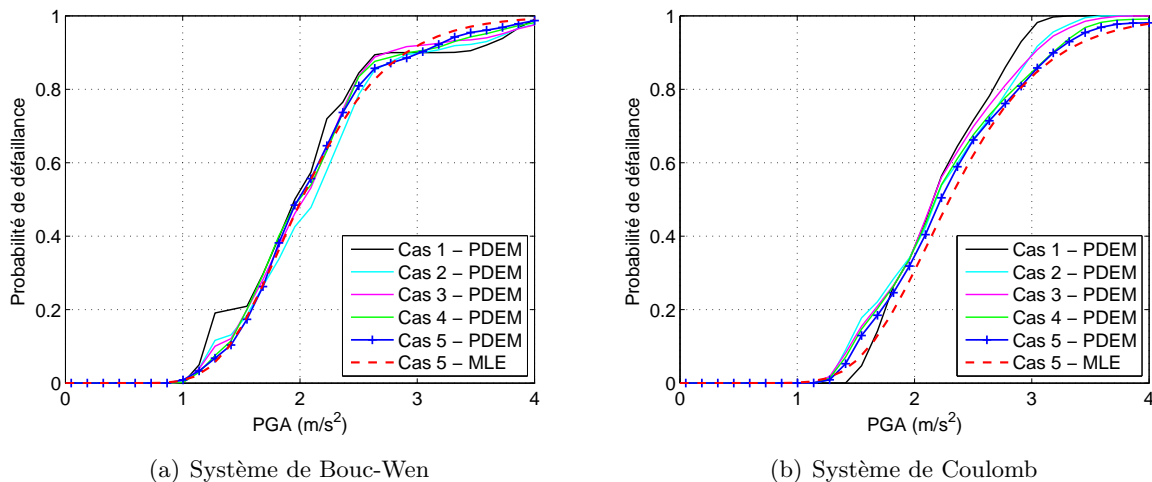


FIGURE 4.12. Exemple 1 : Courbes de fragilité pour différents jeux de données

De plus, lorsqu'on augmente le nombre de séismes ($N = 50$, $N = 75$, $N = 100$ et $N = 150$), la figure 4.12 présente les courbes de fragilité par la méthode PDEM pour cinq jeux de données et une courbe de fragilité par la méthode MLE (ligne rouge discontinue) correspondant au dernier cas. On constate que les résultats obtenus par les deux méthodes PDEM et MLE sont de plus en plus proches l'un de l'autre. Cette tendance montre que : (i) l'hypothèse de la loi log-normale de la courbe de fragilité semble valide avec un nombre important d'enregistrements ; (ii) la méthode PDEM a besoin d'un nombre d'enregistrements plus faible que la méthode de MLE pour donner un résultat satisfaisant.

4.4.2 Exemple 2 : Portique en acier de 3 étages

• Modèle de structure

Le portique traité dans les chapitres 2 et 3 est repris dans cet exemple. Le portique comporte trois travées de portées $L = 5$ m et trois étages. Chaque étage a une hauteur $H = 3$ m. Le matériau a un comportement non-linéaire non isotrope suivant le modèle de Giuffre-Menegotto-Pinto [90]. Nous présentons en figure 4.13 le modèle de la structure et le comportement non linéaire, il est fourni par Sudret et Mai [89].

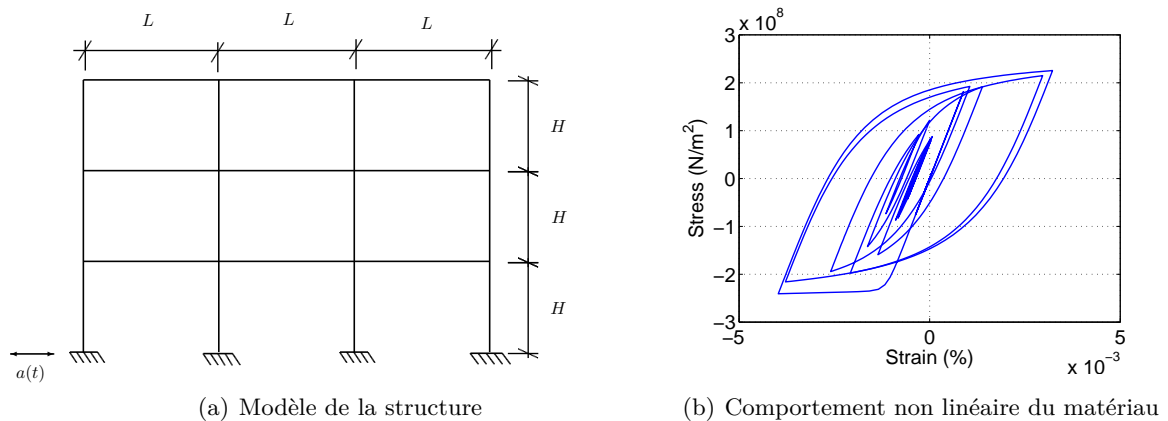


FIGURE 4.13. Portique en acier de 3 étages

Le code de calcul par éléments finis OpenSees [91] est utilisé pour l'analyse du système soumis à l'excitation sismique.

• Excitation sismique

Un ensemble de 60 accélérations temporelles du sol obtenues par le séisme de Northridge en 1994 [22] a été collecté par la Federal Emergency Management Agency (FEMA) pour le projet FEMA SAC [130]. Ces accélérations se composent de trois groupes (chacun constitué de 20 accélérations temporelles) ayant respectivement des probabilités de dépassement de 10% en 50 ans, 2% en 50 ans et de 50% en 50 ans. Elles ont été utilisées pour développer les courbes de fragilité dans les travaux [74, 28].

Dans cet exemple, on utilise 20 accélérations du groupe ayant des probabilités de dépassement de 10% en 50 ans ; et l'aléa sismique représenté par la densité de PGA est supposé suivre la distribution de la loi log-normale $p_A(a) = p_{\mathcal{LN}}(a, 2.4, 0.4)$ m/s². On note ici que les accélérations du sol et l'aléa sismique sont indépendants dans cette étude. Les mouvements du sol sont créés lors que ces 20 accélérations sont normées par échantillonnage aléatoire de l'intensité de PGA.

- **Variables aléatoires et discrétisation**

Comme l'exemple 1, on suppose que l'incertitude n'existe que dans l'excitation sismique qui se traduit par la distribution de l'intensité sismique A et les $N = 20$ accélérogrammes. Il existe alors deux variables aléatoires $\mathbf{Z} = [A, S]$ dans cet exemple.

Pour la méthode PDEM, on utilise 50 points discrets de $p_A(a)$ et en combinaison avec 20 séismes, le nombre total des points est alors égal à 1000. La discrétisation des variables aléatoires est représentée dans la figure 4.14.

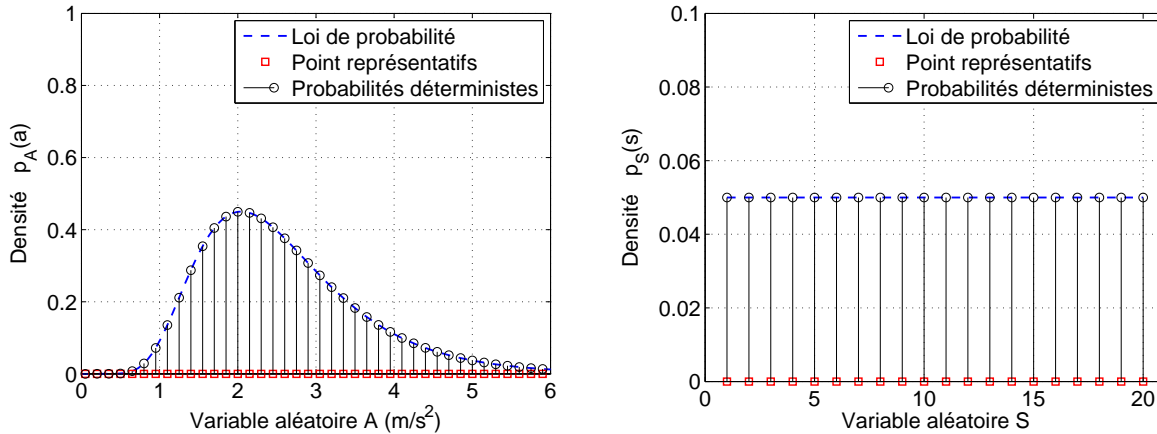


FIGURE 4.14. Portique : Discretisation des variables aléatoires

- **Analyse de la réponse dynamique stochastique**

Le déplacement inter-étage au deuxième étage $\delta_2(t) = x_2(t) - x_1(t)$ est choisi pour être considéré comme la réponse structurale dans ce cas, où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les déplacements de premier et de deuxième étage, respectivement.

La moyenne et l'écart-type de la réponse dynamique stochastique sont évalués par la méthode PDEM et la méthode MCS avec 1×10^5 simulations. Ils sont représentés dans la figure 4.15. Les résultats obtenus nous permettent de confirmer la précision de la méthode PDEM avec celle de MCS.

La FDP de la réponse structurale à certains instants est facilement obtenue et montrée dans la figure 4.16.

- **Analyse de la fiabilité dynamique stochastique**

Le critère de défaillance de la structure est défini en se basant sur la comparaison entre le maximum des déplacements inter-étages temporels et un déplacement admissible δ_0 :

$$G(\mathbf{Z}) = \delta_0 - \Delta(\mathbf{Z}) = \delta_0 - \max_{i,t} |\delta_i(t)| \quad (4.39)$$

Dans cet exemple, le seuil de défaillance est considéré sur trois niveaux $\delta_0 = H/300$, $\delta_0 = H/200$ et $\delta_0 = H/150$.

La fiabilité (probabilité de sûreté) temporelle $R(t)$ de la structure est évaluée par les méthode PDEM et MCS. La probabilité de défaillance est aussi déterminée par $p_f(t) = 1 - R(t)$. Les résultats obtenus dans l'intervalle de temps $[0,40]$ secondes sont montrés sur la figure 4.17. On constate une bonne concordance entre les deux méthodes, ce qui valide ainsi la précision de la méthode PDEM.

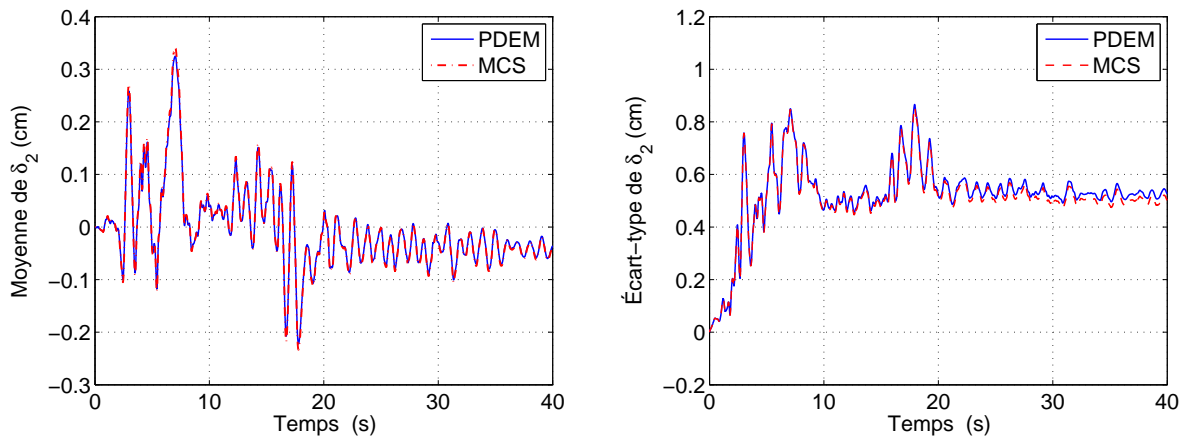


FIGURE 4.15. Moyenne et écart-type instantanés de la réponse stochastique

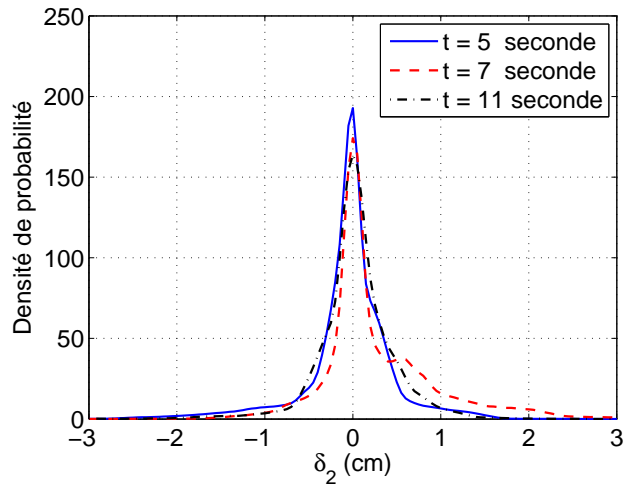


FIGURE 4.16. Densité de probabilité de la réponse à des instants différents

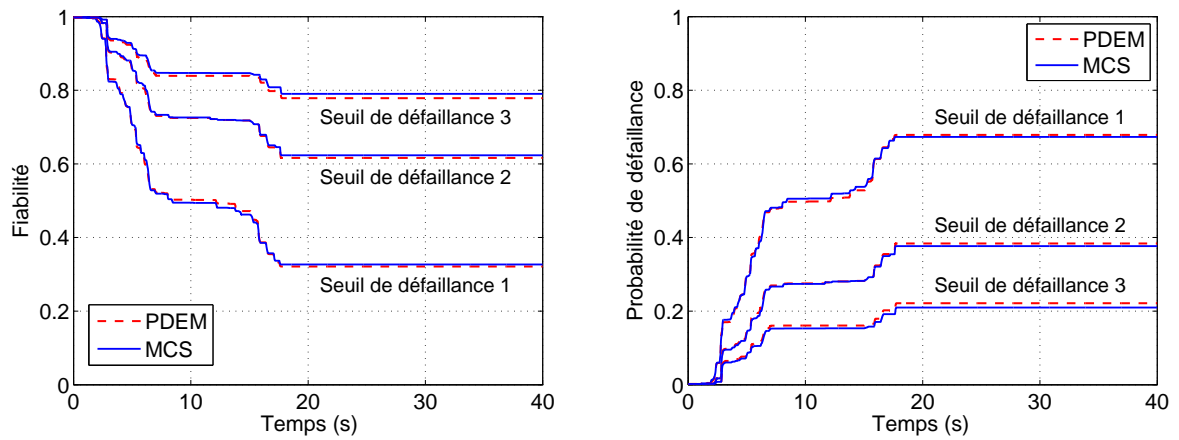


FIGURE 4.17. Fiabilité et probabilité de défaillance par PDEM et Monte Carlo

• Résultats de courbes de fragilité

En utilisant les résultats des probabilités conjointes $\check{p}_{XZA}(x, z, a, t)$ dans le problème d'analyse

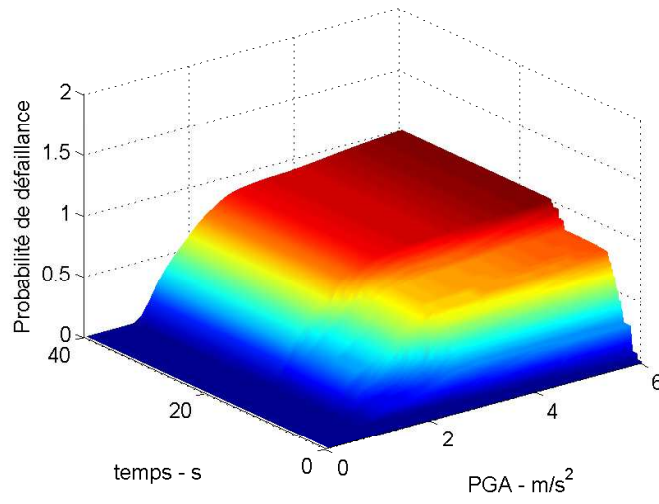
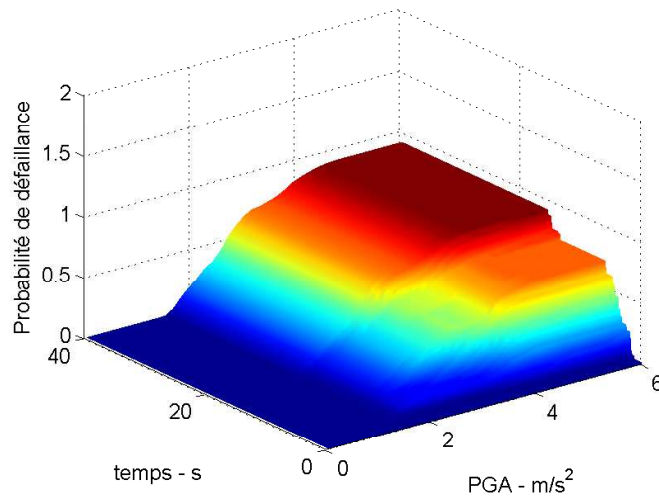
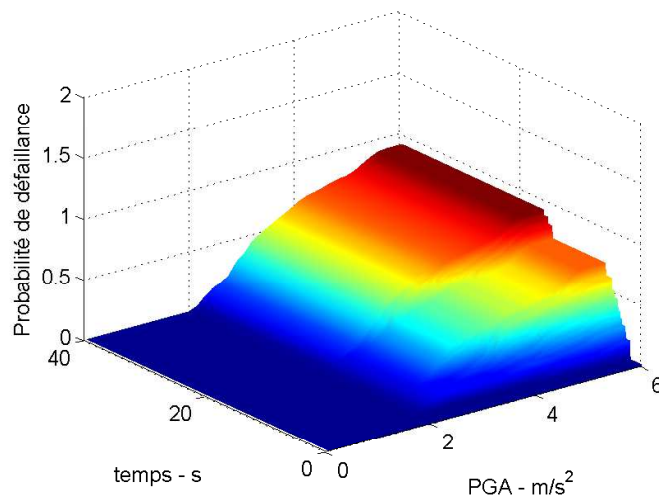
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/150$

FIGURE 4.18. Surfaces de fragilité en fonction du temps

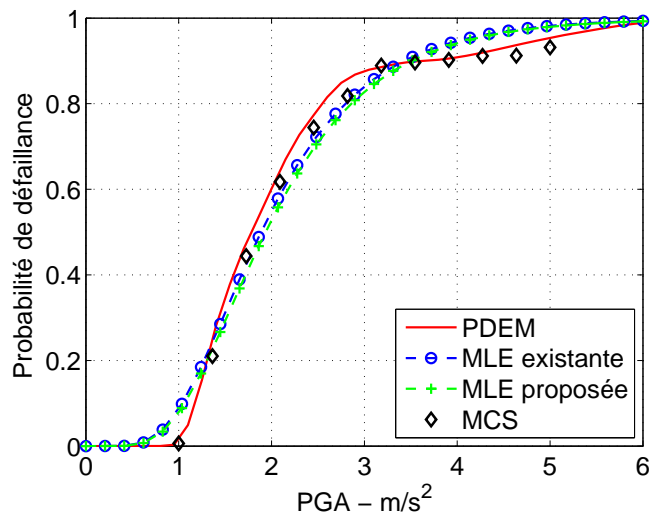
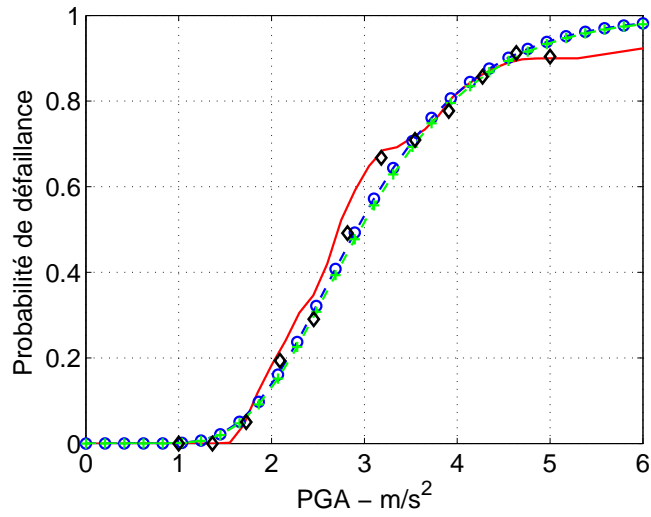
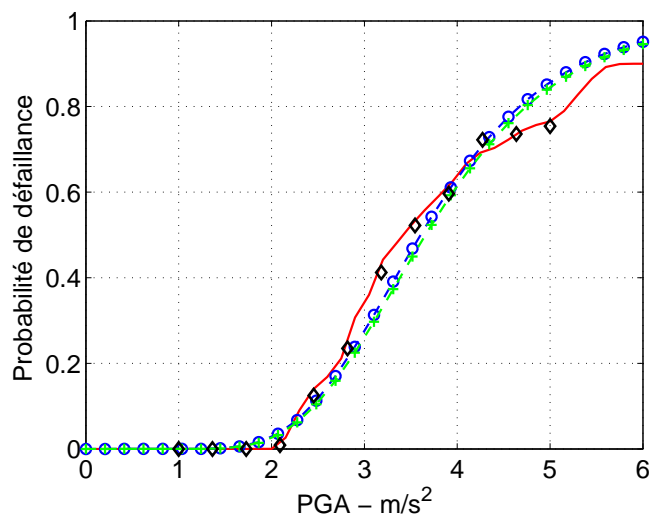
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/150$

FIGURE 4.19. Portique : Courbes de fragilité obtenues

de la fiabilité, les courbes de fragilité $F_r(a)$ pour les trois seuils de défaillance sont déduites en appliquant l'étape 2 du schéma 4.10 au calcul.

En effet, les surfaces de fragilité $F_r(a, t)$ en fonction du temps sont d'abord établies par l'équation (4.36) et représentées dans la figure 4.18. Trois courbes de fragilité $F_r(a)$ correspondantes à trois seuils sont ensuite évaluées par la valeur maximale de $F_r(a, t)$ durant les séismes. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure 4.19. Dans cette figure, les courbes de fragilité obtenues par la méthode MCS et les méthodes MLE existante et MLE proposée sont aussi données à titre de comparaison.

Par la comparaison avec la méthode MCS, on note facilement que la méthode PDEM est plus précise que les autres méthodes. L'écart entre les courbes par la méthode PDEM et celles par les méthodes MLE dans la région proche de la valeur médiane de l'intensité sismique variant dans l'intervalle $[1.4, 3.8]$ m/s^2 , n'est pas important.

4.4.3 Exemple 3 : Bâtiment de 8 étages

- Structure et mouvements du sol

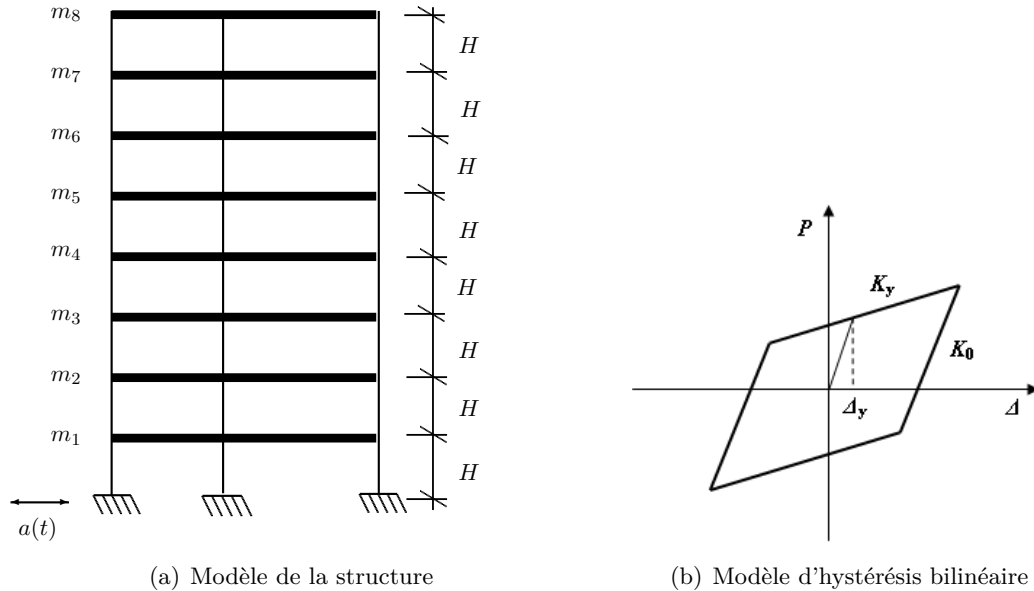


FIGURE 4.20. Bâtiment de 8 étages

Un bâtiment de huit étages traité par Li et Chen [80, 87] est considéré dans cet exemple. La structure est représentée sur la figure 4.20. Les valeurs numériques des masses sont répertoriées dans le tableau 4.2. Le modèle d'hystérésis bilinéaire $K_y/K_0 = 0.1$ est considéré afin de modéliser le comportement inélastique des rigidités de cisaillement \mathbf{K} . Ces dernières sont les mêmes pour

TABLEAU 4.2. *Masses concentrées de la structure*

Etage	1	2	3	4	5	6	7	8
Masse $\times 10^5 \text{kg}$	1.2	1.2	1.2	1.1	1.1	1.0	0.9	0.8

tous les étages. En effet, la rigidité initiale K_0 est une variable aléatoire distribuée par la loi normale tronquée $p_{K_0}(k_0) = p_{\mathcal{N}}(k_0, 2.1 \times 10^8, 1.05 \times 10^7)$ N/m avec une valeur de troncature ($K_0 > 0$) et le seuil élastique $\Delta_y = 1\text{cm}$. L'amortissement de Rayleigh est alors une combinaison

linéaire des matrices de masse et de raideur : $\mathbf{C} = 0.01\mathbf{M} + 0.005\mathbf{K}$. La hauteur de chaque niveau est de $H = 3,0(\text{m})$.

Concernant l'excitation sismique, le modèle de Boore [46] est utilisé pour générer des mouvements du sol. Dans cet exemple, un ensemble de 20 enregistrements d'accélérogrammes est pris en compte, ils sont normés par la distribution suivant la loi log-normale $p_A(a) = p_{\mathcal{LN}}(a, 1.4, 0.2) \text{ m/s}^2$.

Le code de calcul par éléments finis ANSYS [88] est utilisé pour l'analyse structurale en dynamique non-linéaire. Le déplacement inter-étages temporels $\delta_i(t) = x_i(t) - x_{i-1}(t)$ à chaque étage est choisi pour caractériser la défaillance ou non de la structure.

• **Discrétisation des variables aléatoires**

La variabilité des paramètres de la structure et l'incertitude des paramètres de mouvements du sol sont introduites par la distribution aléatoire de la rigidité initiale K_0 , du jeu d'accélération S et du pic d'accélération A . Le tableau 4.3 résume les lois de distribution de ces variables.

TABLEAU 4.3. Variables aléatoires

Paramètres	Loi de distribution	Moyenne	Écart-type	Remarque
Rigidité K_0 (N/m)	Normale tronquée	3.0×10^{10}	3.0×10^9	$K_0 > 0$
Pic d'accélération A (m/s ²)	Log normale	1.4	0.2	
Ensemble de séismes S	Uniforme	FDP = $\frac{1}{20} = 0.05$		$1 \leq S \leq 20$

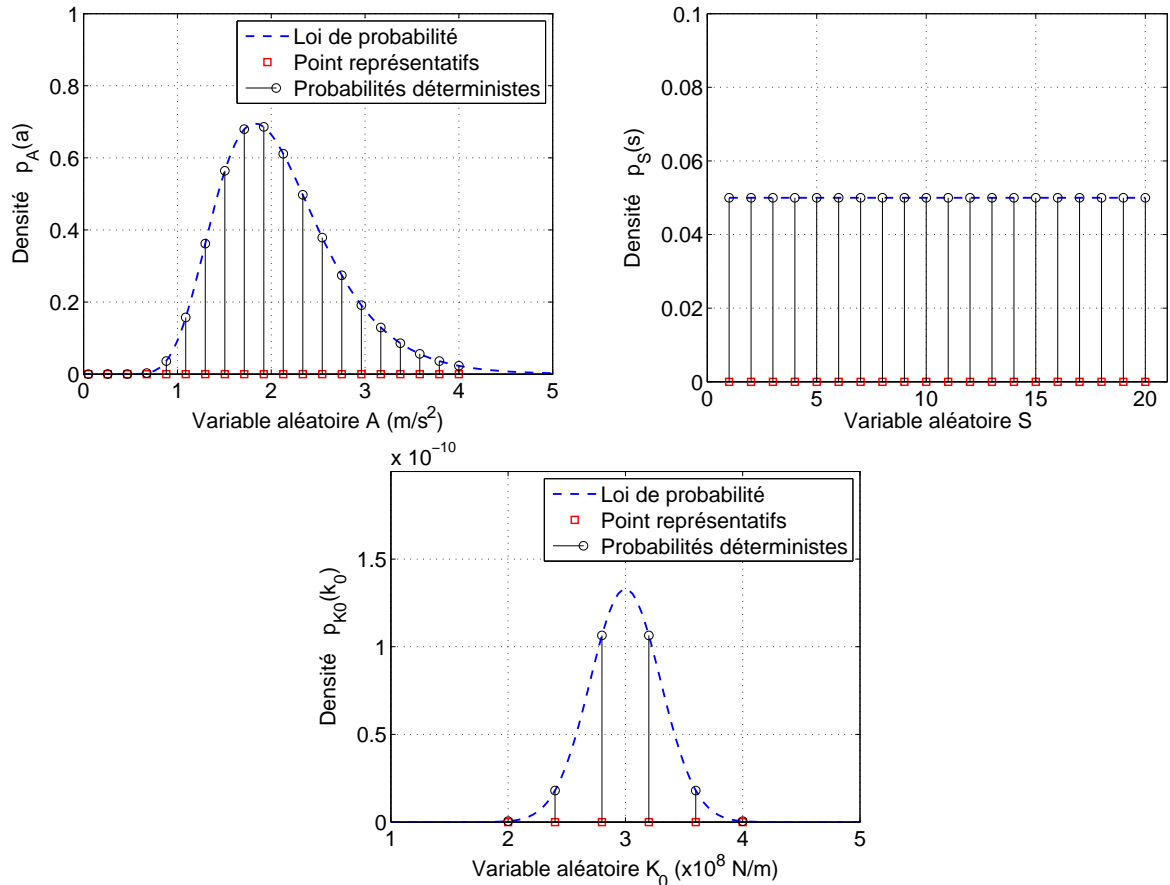


FIGURE 4.21. Bâtiment : Discrétisation des variables aléatoires

Comme on l'a mentionné dans le schéma numérique de la méthode PDEM (section 4.2.4), les variables aléatoires sont discrétisées en des points représentatifs correspondant à leurs fonctions de densité de probabilité déterministes bien connues.

En comparant avec l'expérience de Li et Chen dans le tableau 4.1, il faut discrétiser uniformément chaque variable en 6 ou 7 points. Pour notre cas, la variable K_0 est discrétisée en $N_1 = 6$ points. La variable du pic d'accélération du sol A est représentée par $N_2 = 20$. Le nombre de points représentatifs de la variable "séismes" S dépend du jeu des accélérations d'entrée, il est pris égal à $N_3 = 20$. Le nombre total de points est alors de $N = N_1 \times N_2 \times N_3 = 6 \times 20 \times 30 = 3600$. La figure 4.21 présente la discrétisation des variables aléatoires dans cette exemple.

- **Analyse de la réponse dynamique stochastique**

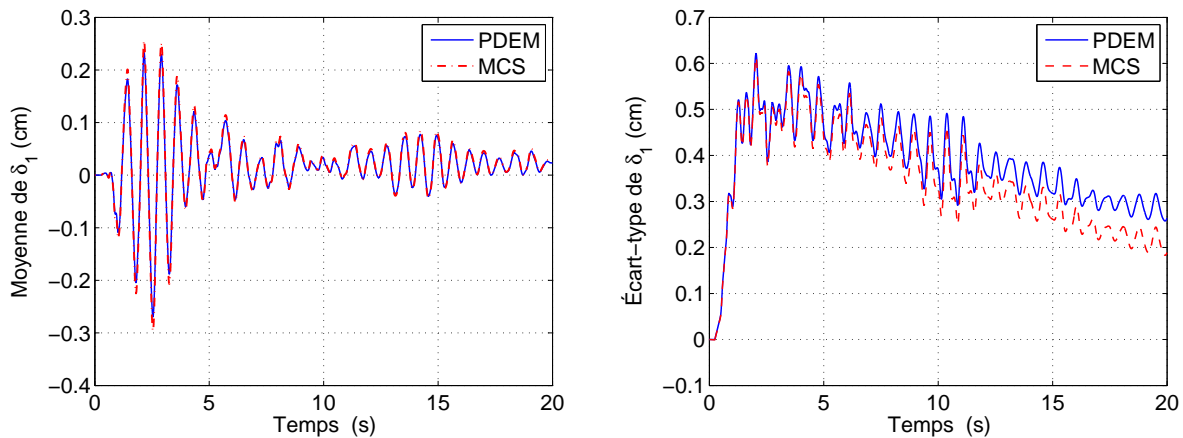


FIGURE 4.22. Moyenne et écart-type instantanée de la réponse stochastique

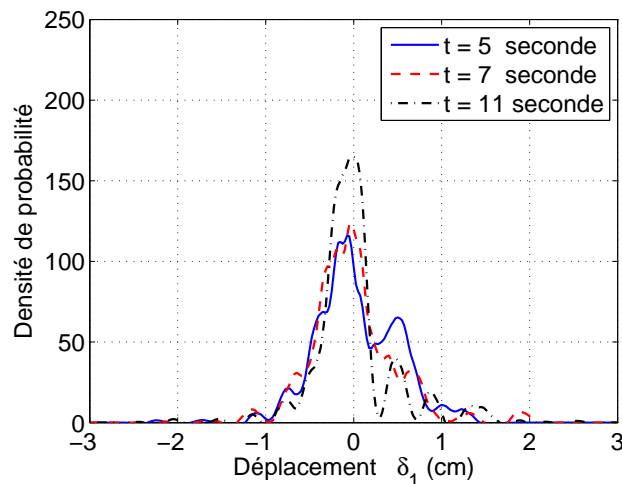


FIGURE 4.23. Densités de probabilité de la réponse à des instants différents

Pour la méthode PDEM, 3600 calculs déterministes sont réalisés sous le logiciel ANSYS pour obtenir le déplacement à chaque étage et sa vitesse. À partir de ces réponses, l'algorithme représenté dans la figure 4.2 est appliqué pour d'abord calculer les FDP $p_{XZA}(x, z, a, t)$ et ensuite

d'obtenir la moyenne et l'écart-type du déplacement inter-étage au première étage $\delta_1(t)$. D'autre part, la méthode MCS est aussi effectuée avec 20.000 échantillons.

Les résultats obtenus de la moyenne et l'écart-type de la réponse dynamique stochastique par les méthodes PDEM et MCS sont représentés dans la figure 4.22. Les résultats des deux méthodes sont proches. Il y a encore peu d'écart pour l'écart-type car 20.000 simulations ne sont pas encore suffisantes pour MCS.

La figure 4.23 montre la FDP de la réponse à certains instants. On y voit bien que les FDP instantanées sont complexes et irrégulières et que leurs courbes présentent souvent plusieurs pics. Ce résultat est loin des distributions de densité de probabilité régulières couramment supposées et utilisées telles que la loi normale, la loi log-normale, etc.

• Analyse de la fiabilité dynamique stochastique

Le critère de défaillance est évalué en se basant sur la comparaison entre le maximum des

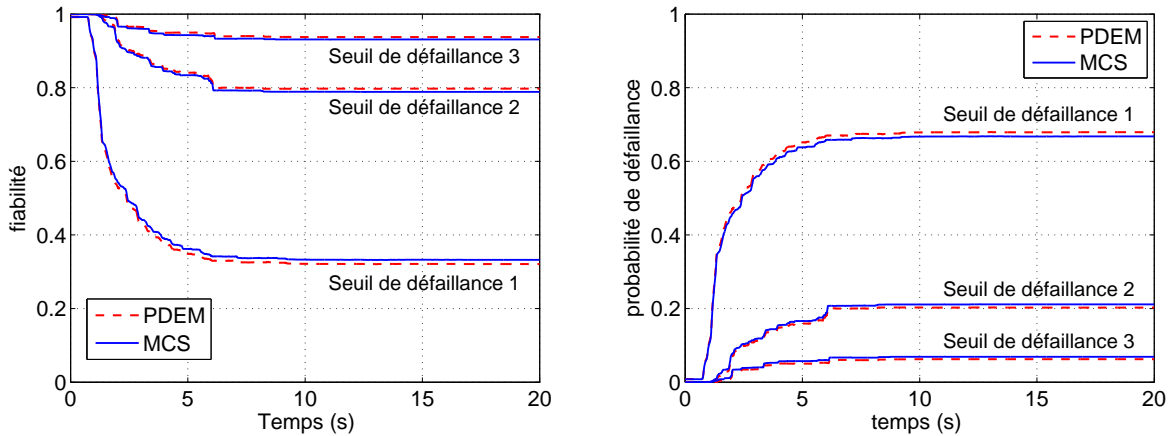


FIGURE 4.24. *Fiabilité et probabilité de défaillance par PDEM et Monte Carlo*

déplacements inter-étages temporels et un déplacement admissible δ_0 :

$$G(\mathbf{Z}) = \delta_0 - \Delta(\mathbf{Z}) = \delta_0 - \max_{i,t} |\delta_i(t)| \quad (4.40)$$

Suivant l'équation (4.40), si $G(\mathbf{Z}) < 0$ le déplacement inter-étage maximale dépasse le seuil admissible x_0 et il y a défaillance. Dans cet exemple, le seuil de défaillance est considéré sur trois niveaux $\delta_0 = H/300$, $\delta_0 = H/200$ et $\delta_0 = H/150$.

En appliquant l'algorithme 4.2 associé à la condition absorbante $p_{XZA}(x, z, a, t) = 0$ si $x \in D_f$, la densité conjointe $\check{p}_{XZA}(x, z, a, t)$ est déterminée. La fiabilité (probabilité de sûreté) temporelle de la structure est évaluée par l'équation (4.23). La probabilité de défaillance est aussi déduite par $p_f(t) = 1 - R(t)$. Les fiabilités obtenues dans l'intervalle de temps $[0, 20]$ secondes par les deux méthodes PDEM et MCS sont montrées sur la figure 4.24. Les deux résultats sont en accord.

• Résultats des courbes de fragilité

Les probabilités conjointes $\check{p}_{XZA}(x, z, a, t)$ pour les trois seuils de défaillance sont d'abord déterminées. La construction des courbes de fragilité est ensuite traitée lors de l'étape 2 du schéma 4.10.

Les surfaces de fragilité $F_r(a, t)$ sont établies par l'équation (4.36) en fonction du temps et représentées dans la figure 4.25.

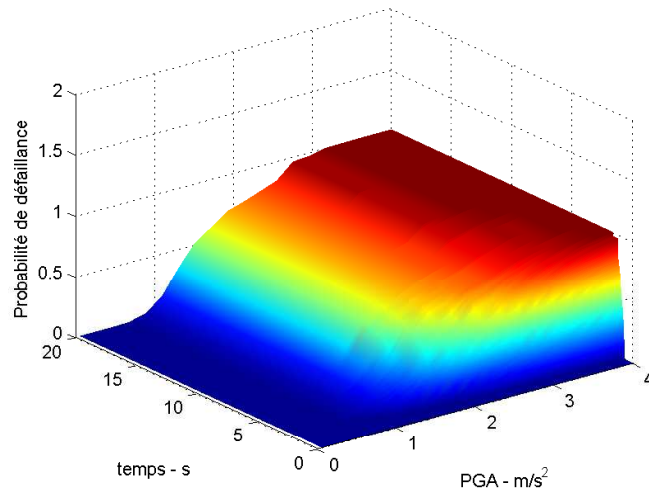
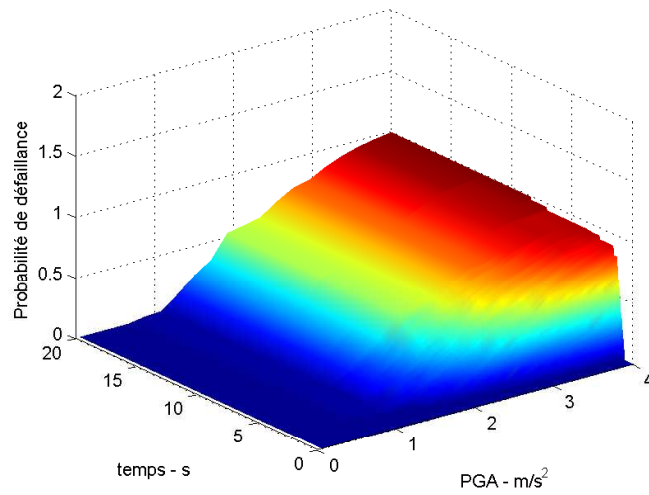
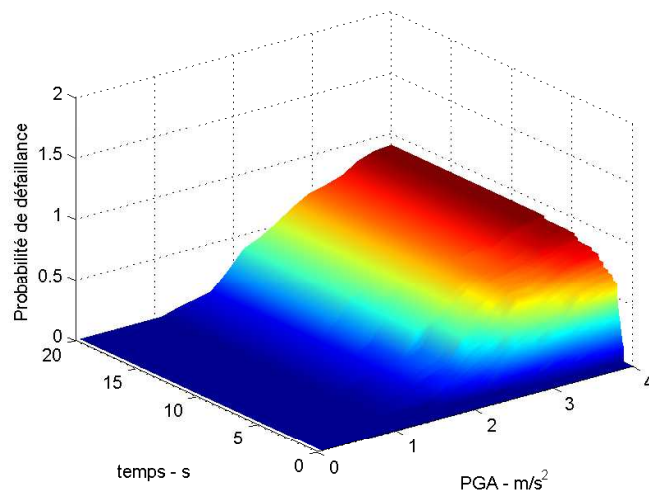
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/150$

FIGURE 4.25. Bâtiment à 8 étages : Surfaces de fragilité en fonction du temps

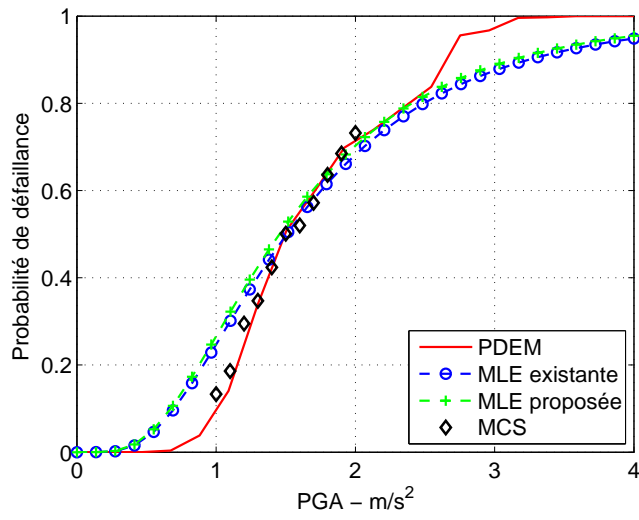
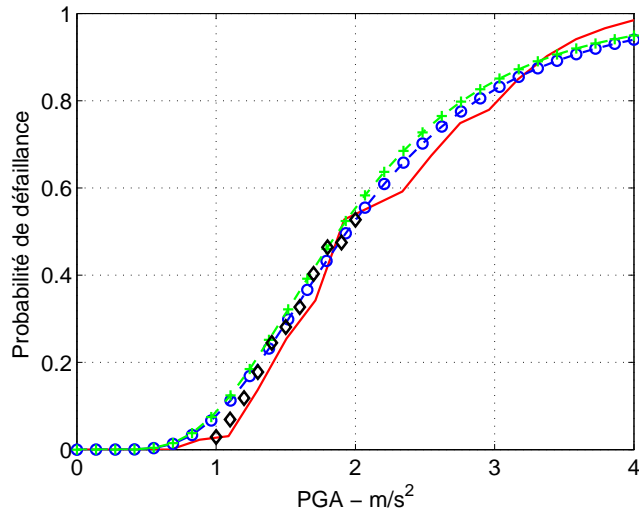
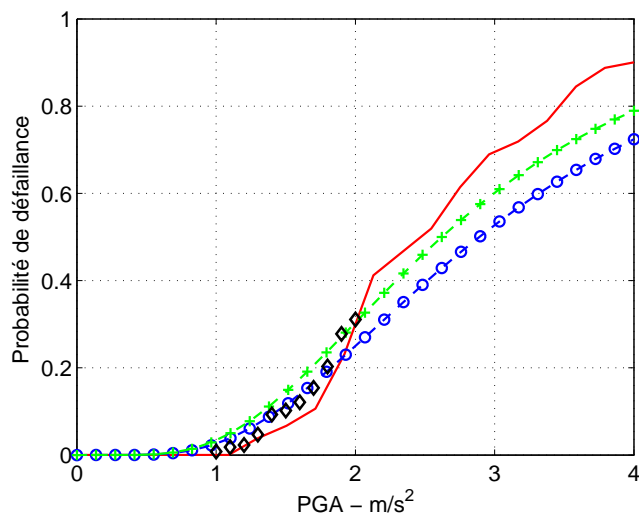
(a) $\delta_0 = H/300$ (b) $\delta_0 = H/200$ (c) $\delta_0 = H/150$

FIGURE 4.26. Bâtiment à 8 étages : Courbes de fragilité obtenues

Trois courbes de fragilité $F_r(a)$ correspondantes à trois seuils sont évaluées par la valeur maximale de $F_r(a, t)$ durant les séismes. D'autre part, grâce aux réponses disponibles par simulation de Monte Carlo, les courbes de fragilité sont également déduites par les méthode MCS, MLE existante et MLE proposée pour la comparaison. Les résultats obtenus des courbes de fragilité sont représentés dans la figure 4.26.

Dans la région proche de la médiane de l'intensité sismique valant 1.4 m/s^2 , on note sur la figure 4.26 que les courbes correspondantes aux trois seuils de défaillance sont proches des points de défaillance obtenus par la méthode MCS. Mais ce n'est pas la même chose pour les autres régions. Les écarts entre la courbe de la méthode PDEM avec les courbes des méthodes MLE dépendent des situations : très bon pour le deuxième cas mais plus médiocre pour le premier et le troisième cas. Au dernier cas $\delta_0 = H/150$ et par rapport à la méthode PDEM, la précision de la méthode MLE proposée est meilleure que celle de la méthode PDEM existante.

4.5 Conclusion

Une nouvelle méthode non-paramétrique pour la construction des courbes de fragilité a été proposée dans ce chapitre. Elle est basée sur la méthode d'évolution des fonctions de densité de probabilité (PDEM). La nouveauté de cette méthode est qu'elle ne fait pas appel à l'hypothèse de la loi log-normale, base de la plupart des méthodes existantes. De plus, la surface de fragilité en fonction de temps peut être déduite facilement. Elle est très intéressante pour l'évaluation de la sécurité de la structure durant les séismes.

La méthode PDEM implémentée dans le logiciel Matlab est d'abord validée par un exemple d'illustration à 1DDL non-linéaire de type Bouc-Wen. La réponse dynamique stochastique (densité temporelle, moyenne, écart-type) et la fiabilité sont vérifiées par rapport aux résultats donnés par la méthode de Monte Carlo. Elle est ensuite utilisée pour établir des courbes de fragilité sismique. Les applications numériques consistent en trois exemples : oscillateurs non-linéaires, bâtiment à 8 étages bilinéaire et portique en acier non-linéaire. La précision de la méthode proposée est examinée à l'aide d'une comparaison avec les probabilités de défaillance issues de la méthode de Monte Carlo. On note une bonne estimation des courbes de fragilité sismique dans tous les trois exemples numériques traités.

Grâce à la méthode PDEM proposée, on a eu l'occasion de revoir les méthodes basées sur l'hypothèse log-normale : MLE existante et MLE proposée. Les résultats obtenus confortent les conclusions du chapitre 2, à savoir : une meilleure précision de la méthode MLE proposée par rapport à celle de la méthode MLE existante, la région fiable de la courbe de fragilité sismique issue de l'hypothèse log-normale se concentre autour de la médiane des mouvements du sol. Comme la méthode PDEM ne dépend pas de l'hypothèse log-normale, elle donne une meilleure précision des courbes de fragilité sismique.

Conclusions & Perspectives

Conclusions

Cette thèse s'intéresse aux méthodes de construction de la courbe de fragilité sismique qui est un outil très important dans les études probabilistes du risque sismique des structures et des systèmes mécaniques.

Dans la première partie de ce travail, nous avons présenté une étude détaillée sur les méthodes existantes de construction des courbes de fragilité sismique dans l'approche numérique. L'hypothèse commune de ces méthodes est que la courbe de fragilité est une fonction cumulative de la loi log-normale. Grâce à cette hypothèse, les méthodes ont été développées pour identifier les paramètres A_m et β de la loi log-normale. Les études comparatives de ces méthodes ont été effectuées à travers des exemples numériques. On constate une différence notable entre les courbes de fragilité sismique obtenues par les trois méthodes existantes, à savoir : méthode de normalisation de l'intensité sismique, celle du maximum de vraisemblance et celle basée sur les modèles de demande et de capacité sismiques. On note également que parmi les trois, la méthode du maximum de vraisemblance est la plus précise. Toutefois, cette méthode doit être encore améliorée car elle dépend fortement des enregistrements utilisés dans les simulations et de l'hypothèse de la loi log-normale.

La deuxième partie de ce travail présente d'abord une analyse approfondie de la méthode MLE en étudiant l'influence de l'hypothèse log normale et les données disponibles. La base de données est simulée à partir d'un schéma analytique. La fiabilité de la courbe de fragilité obtenue par la méthode MLE dépend de chaque région sur la courbe. La région la plus fiable de la courbe est proche de la médiane de l'intensité sismique tandis que les autres régions dépendent de la "qualité" de l'hypothèse log-normale supposée. Cette analyse nous permet de constater l'influence des données disponibles sur l'estimation MLE, surtout dans le cas de l'absence ou rareté d'événements de défaillance. Cette deuxième partie présente ensuite une amélioration de la méthode du maximum de vraisemblance existante en proposant une nouvelle fonction de vraisemblance. Cette fonction est capable de prendre en considération la distribution de mouvements du sol d'entrées (aléa sismique) au cours de l'optimisation de vraisemblance. La méthode MLE proposée (ERPM) est vérifiée tant du point de vue analytique et numérique. Bien que la méthode modifiée du maximum de vraisemblance repose encore sur l'hypothèse log-normale, elle permet d'atténuer l'influence des données d'entrées de mouvements du sol. Les résultats obtenus par les exemples analytiques et numériques permettent de conclure que la méthode proposée est plus adaptée que celle existante.

Dans la troisième partie, nous avons étudié l'application de la méthode de simulation par subsets qui est efficace pour le problème d'évaluation de la probabilité de défaillance faible et le nombre important de variables aléatoires. D'abord, l'utilisation de l'algorithme proposée par Au et Beck à travers deux exemples simples avec des fonctions de performance bien connues, nous permet de vérifier l'efficacité de la méthode subsets et de valider sa mise en œuvre. Puis, dans le contexte de notre étude, la méthode de simulation par subsets peut être appliquée à la détermination de

la probabilité de défaillance correspondant à un point sur la courbe de fragilité sismique ou à la probabilité de défaillance p_f de l'ensemble du site. Différentes structures soumises à l'excitation sismique ont été traitées. Le calcul numérique a montré que : la méthode de simulation par subsets est particulièrement efficace lorsque la probabilité de défaillance est très faible, inférieure à 10^{-3} , et que la méthode de Monte Carlo devient trop coûteuse.

La quatrième et dernière partie est réservée au développement d'une nouvelle méthode appelée *non-paramétrique*, ce qui signifie que la construction des courbes de fragilité est directe, sans utiliser l'hypothèse de la loi log-normale. Elle est développée en se basant sur le calcul de l'évolution des densités de probabilité (PDEM). Sa validation est effectuée par comparaison avec les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo, et ce à travers des exemples numériques. On compare aussi les courbes de fragilité obtenues avec celles de la méthode du maximum de vraisemblance dans le but de revoir l'hypothèse de la loi log-normale, une hypothèse que toutes les méthodes classiques acceptent. Cette comparaison nous permet de constater une tendance de rapprochement entre les courbes issues de ces deux méthodes, une fois que le nombre d'enregistrements des séismes augmente. Cela montre que l'hypothèse de la loi log normale des courbes de fragilité semble valide lorsque le nombre de séismes est suffisamment élevé. À noter que l'on a pas encore, à notre connaissance, une démonstration explicite de cette hypothèse. De plus, la surface de fragilité en fonction du temps est facilement obtenue dans le calcul de fragilité. Elle est très intéressante car elle permet d'analyser la performance des structures pendant toute la durée du séisme.

Perspectives

La méthode MLE proposée (ERPM) a été validée et donne une meilleure précision de la courbe de fragilité sismique par rapport sur la méthode MLE existante lors des simulations numériques. On souhaiterait, après ce travail de thèse, faire le point sur la méthode MLE proposée (ERPM) à la courbe de fragilité qui permet d'utiliser les données empiriques avec différents états d'endommagement. Dans ce contexte, la prise en compte de l'information probabiliste de l'aléa sismique de la région dans la fonction de vraisemblance pourra aider à surmonter le problème relatif aux données manquantes ou de petites tailles.

La méthode de simulations par subsets a bien montré son efficacité dans l'évaluation de la probabilité de défaillance faible d'une structure sous excitation sismique modélisée avec plusieurs variables aléatoires. Une suite prometteuse serait d'adapter cette méthode pour estimer efficacement des probabilités de défaillance correspondant à des valeurs particulières de l'intensité sismique. La courbe de fragilité serait ensuite déduite par régression suivant la loi log-normale cumulative. Cette méthode devrait améliorer nettement la méthode de normalisation d'intensité sismique existante.

La méthode PDEM a été appliquée pour un nombre de variables aléatoires limité. Pour simplifier, on a fait appel à la normalisation de l'intensité sismique. Or cette technique n'est pas toujours encouragée. Le développement futur de la méthode PDEM devrait être combiné avec le développement d'un modèle de mouvements du sol ayant un nombre de variables aléatoires plus faible que celui du modèle de Boore.

Finalement, nous avons utilisé le pic d'accélération pour caractériser l'intensité sismique. Une autre perspective serait encore de continuer ce travail avec d'autres indicateurs pour favoriser les applications en génie parasismique. La période de retour est alors une solution envisageable.

Annexes

Annexe A

Quelques lois de probabilité

A.1 Loi uniforme

La densité de probabilité de la loi uniforme continue est une fonction porte sur l'intervalle $[a_1, a_2]$:

$$p_U(a; a_1, a_2) = \begin{cases} \frac{1}{a_2 - a_1} & \text{pour } a_1 \leq a \leq a_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La fonction de répartition est donnée par

$$F_U(a; a_1, a_2) = \int_{-\infty}^a p_U(a; a_1, a_2) da = \begin{cases} 0 & \text{pour } a < a_1 \\ \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} & \text{pour } a_1 \leq a < a_2 \\ 1 & \text{pour } a \geq a_2 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Loi normale

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. La loi normale est définie par une moyenne μ et un écart type β .

La fonction de densité :

$$p_N(a; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{a - \mu}{\sigma}\right]^2\right) \quad (\text{A.3})$$

La fonction de répartition :

$$F_N(a; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^a p_N(a; \mu, \sigma) da = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{a - \mu}{\sigma}\right]^2\right) da \quad (\text{A.4})$$

A.3 Loi log-normale

Une variable aléatoire continue et positive A est distribuée selon une loi log-normale si son logarithme est distribué suivant une loi normale. La loi log-normale a deux paramètres A_m et β .

La fonction de densité :

$$p_{LN}(a; A_m, \beta) = \frac{1}{a\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[\ln(a/A_m)]^2}{2\beta^2}\right) \quad (\text{A.5})$$

Par intégration de la fonction de densité, il vient que la fonction de répartition s'exprime en fonction de la fonction d'erreur erf :

$$F_{LN}(a; A_m, \beta) = \int_0^a p_{LN}(a; A_m, \beta) da = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left[\frac{\ln(a/A_m)}{\beta\sqrt{2}} \right] \quad (\text{A.6})$$

A.4 Loi de Gumbel

La densité de probabilité de la loi de Gumbel (GU) avec les paramètres : un paramètre de position μ , un paramètre de dispersion σ est décrite ci-dessous :

$$p_{EV}(a; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \exp\left(-\exp\left[-\frac{a-\mu}{\sigma}\right]\right) \quad (\text{A.7})$$

La fonction de répartition :

$$F_{GU}(a; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^a p_{GU}(a; \mu, \sigma) da = \exp\left(-\exp\left[-\frac{a-\mu}{\sigma}\right]\right) \quad (\text{A.8})$$

A.5 Loi de Weibull

La loi de Weibull est définie par deux paramètres k (paramètre d'échelle) et λ (paramètre de forme).

$$p_W(a; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-[a/\lambda]^k\right) \quad (\text{A.9})$$

où $k > 0$ est le paramètre de forme et $\lambda > 0$ le paramètre d'échelle de la distribution.

La fonction de répartition :

$$F_W(a; k, \lambda) = \int_{-\infty}^a p_W(a; k, \lambda) da = \exp\left(-[a/\lambda]^k\right) \quad (\text{A.10})$$

A.6 Loi Gamma

Une variable aléatoire A suit une loi Gamma de paramètres k et θ (strictement positifs), si sa fonction de densité de probabilité peut se mettre sous la forme :

$$p_{GA}(a; k, \theta) = \frac{a^{k-1} e^{-\frac{a}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k} \quad (\text{A.11})$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par : $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{a-1} du$

La fonction de répartition :

$$F_{GA}(a; k, \theta) = \int_{-\infty}^a p_{GA}(a; k, \theta) da = \quad (\text{A.12})$$

Annexe B

Méthode du maximum de vraisemblance

Considérons un échantillon de données a_1, a_2, \dots, a_N , la modélisation statistique consiste à supposer que ces données sont issues d'une loi de probabilité inconnue de densité $p_A(a; \theta)$, θ étant un paramètre vectoriel inconnu à estimer à partir de (a_1, a_2, \dots, a_N) .

La fonction de vraisemblance de ce problème est :

$$\mathcal{L}(\theta; A) = p_A(a_1, a_2, \dots, a_N; \theta) = \prod_{i=1}^N p_A(a_i; \theta) \quad (\text{B.1})$$

La valeur estimée $\hat{\theta}$ qui rend maximum la fonction de vraisemblance \mathcal{L} est donc la solution de :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta; A) \quad (\text{B.2})$$

ou on préférera maximiser le logarithme de la vraisemblance :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ln \mathcal{L}(\theta; A) \quad (\text{B.3})$$

Exemple

Cet exemple donne une estimation de densité de probabilité $p_A(a)$ de l'intensité sismique (PGA) par la méthode du maximum de vraisemblance.

Une population importante des séismes est d'abord générée par le modèle de Boore. On utilise ici $N = 2 \times 10^5$ enregistrements. C'est-à-dire que l'on a un échantillon a_1, a_2, \dots, a_N de la variable aléatoire A .

On suppose que la distribution des données A suit quelque lois suivantes : log-normale, normale, extreme value, Weibull et Gamma.

La méthode du maximum de vraisemblance est utilisée pour calculer les paramètres de ces lois en utilisant le "statistic toolbox" disponible dans le logiciel **Matlab**.

La figure B.1 présente les résultats obtenus de la fonction de densité par la méthode du maximum de vraisemblance.

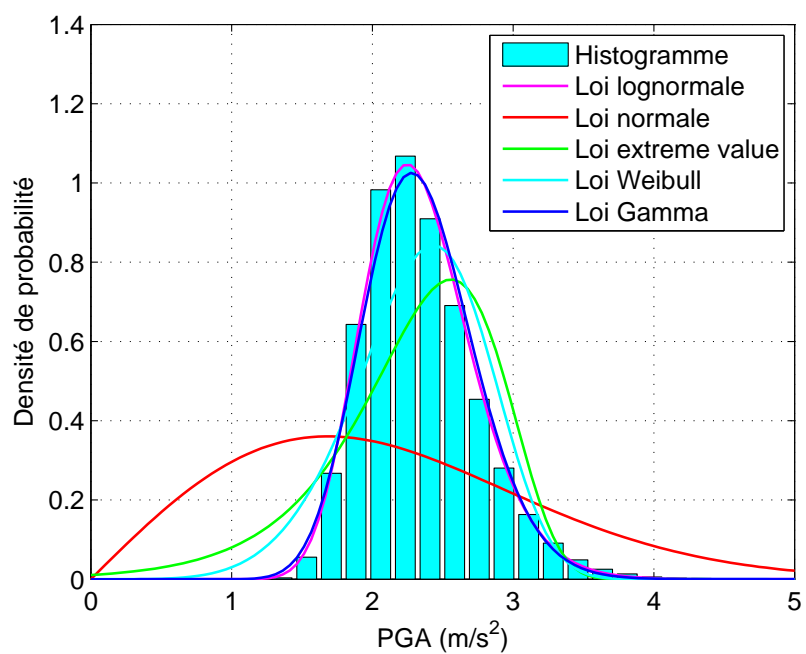


FIGURE B.1. *Différentes fonctions de densité pour différentes lois de probabilité*

Bibliographie

- [1] B. Ellingwood. Validation studies of seismic PRAs. *Nuclear Engineering and Design*, 123(2-3) :189–196, 1990.
- [2] Kazi R Karim and Fumio Yamazaki. A simplified method of constructing fragility curves for highway bridges. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 32(10) :1603–1626, 2003.
- [3] C. Kafali and M. Grigoriu. Seismic fragility analysis : Application to simple linear and nonlinear systems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 36(13) :1885–1900, 2007.
- [4] J. E. Padgett and R. DesRoches. Methodology for the development of analytical fragility curves for retrofitted bridges. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 37(8) :1157–1174, 2008.
- [5] Robert P Kennedy, CA Cornell, RD Campbell, S Kaplan, and HF Perla. Probabilistic seismic safety study of an existing nuclear power plant. *Nuclear Engineering and Design*, 59(2) :315–338, 1980.
- [6] I. Zentner. Numerical computation of fragility curves for NPP equipment. *Nuclear Engineering and Design*, 240(6) :1614–1621, 2010.
- [7] K. Kinali and B. R. Ellingwood. Seismic fragility assessment of steel frames for consequence-based engineering : A case study for memphis, TN. *Engineering structures*, 29(6) :1115–1127, 2007.
- [8] B. R. Ellingwood. Earthquake risk assessment of building structures. *Reliability Engineering & System Safety*, 74(3) :251–262, 2001.
- [9] Masanobu Shinozuka, Sang-Hoon Kim, Shigeru Kushiya, and Jin-Hak Yi. Fragility curves of concrete bridges retrofitted by column jacketing. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1(2) :195–205, 2002.
- [10] F. Yamazaki, T. Hamada, H. Motoyama, and H. Yamauchi. Earthquake damage assessment of expressway bridges in japan. In *Proceedings of the 5th U.S. Conference on Lifeline Earthquake Engineering, Seattle, WA*, pages 361–370, 1999.
- [11] M. Shinozuka, M. Feng, J. Lee, and T. Naganuma. Statistical analysis of fragility curves. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(12) :1224–1231, 2000.
- [12] M. J. O’Rourke and P. So. Seismic behavior of on-grade steel tanks : Fragility curves. In *Proceedings of the 5th U.S. Conference on Lifeline Earthquake Engineering, Seattle, WA*, pages 849–858, 1999.
- [13] M. J O’Rourke and P. So. Seismic fragility curves for on-grade steel tanks. *Earthquake spectra*, 16(4) :801–815, 2000.
- [14] ATC. *Earthquake damage evaluation data for California*. Report ATC-13, Applied Technology Council, Redwood City, CA, 1985.

- [15] FEMA. Earthquake loss estimation methodology. Technical report, Technical Manual, Federal Emergency Management Agency, Washington D.C., 1999, 1999.
- [16] Nesrin Basöz and Anne S Kiremidjian. Development of empirical fragility curves for bridges. In *Proceedings of the 5th U.S. Conference on Lifeline Earthquake Engineering, Seattle, WA*, pages 693–702, 1999.
- [17] D. Wakefield, M. Ravindra, K. Merz, and G. Hardy. Seismic probabilistic risk assessment implementation guide. Technical report, Final Report 1002989, EPRI, 2003.
- [18] S. Banerjee and M. Shinozuka. Mechanistic quantification of rc bridge damage states under earthquake through fragility analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(1) :12–22, 2008.
- [19] N. Basoz and A. S. Kiremidjian. Risk assessment of bridges and highway systems from the northridge earthquake. In *Second National Seismic Conference on Bridges and Highways*, 1997.
- [20] H. Sucuoglu and A. Nurtug. Earthquake ground motion characteristics and seismic energy dissipation. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 24(9) :1195–1213, 1995.
- [21] ATC. Enhancing the transfer of us geological survey research results into engineering practice. Technical report, Applied Technology Council, ATC-35, Redwood City, CA,, 1994.
- [22] SAC. Characterization of ground motions during the Northridge earthquake of January 17, 1994. Technical report, SAC-95-03, Sacramento, CA, 1995.
- [23] H. Sucuoglu, S. Yucemen, A. Gezer, and A. Erberik. Statistical evaluation of the damage potential of earthquake ground motions. *Structural Safety*, 20(4) :357–378, 1998.
- [24] R.P. Kennedy and M.K. Ravindra. Seismic fragilities for nuclear power plant risk studies. *Nuclear Engineering and Design*, 79 :47–68, 1984.
- [25] K. Hirata, Y. Kobayashi, H. Kameda, and H. Shiojiri. Fragility of seismically isolated FBR structure. *Nuclear engineering and design*, 128(2) :227–236, 1991.
- [26] K. Hirata, Y. Ootori, and T. Somaki. Seismic fragility analysis for base-isolated structure. *J. Struct. Constr. Eng*, 452 :11–19, 1993.
- [27] Silvia L. Dimova and Kazuta Hirata. Simplified seismic fragility analysis of structures with two types of friction devices. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 29(8) :1153–1175, 2000.
- [28] Jin-Hak Yi, Sang-Hoon Kim, and Shigeru Kushiyama. PDF interpolation technique for seismic fragility analysis of bridges. *Engineering Structures*, 29(7) :1312–1322, 2007.
- [29] G. P Cimellaro and A. M Reinhorn. Multidimensional performance limit state for hazard fragility functions. *Journal of Engineering Mechanics*, 137(1) :47–60, 2010.
- [30] Kazi R. Karim and Fumio Yamazaki. Effect of earthquake ground motions on fragility curves of highway bridge piers based on numerical simulation. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(12) :1839–1856, 2001.
- [31] University of California. Peer nga database.
- [32] NN Ambraseys, P Smit, J Douglas, B Margaris, R Sigbjörnsson, S Olafsson, P Suhadolc, and G Costa. Internet site for european strong-motion data. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata*, 45(3) :113–129, 2004.
- [33] Irmela Zentner and Fabrice Poirion. Enrichment of seismic ground motion databases using Karhunen - Loève expansion. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(14) :1945–1957, 2012.

- [34] P. Somerville, N. Smith, S. Punyamurthula, and J. Sun. Development of ground motion time history for phase 2 of the FEMA SAC steel project. Technical report, SAX/BD-97, 1997.
- [35] R. W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of structures*, volume 2. McGraw-Hill New York, 1993.
- [36] G. Rodolfo Saragoni and G.C. Hart. Simulation of artificial earthquakes. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2(3) :249–267, 1973.
- [37] Sanaz Rezaeian and Armen Der Kiureghian. Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 39(10) :1155–1180, 2010.
- [38] K. Kanai. Semi empirical formula for seismic characterisation of the ground. *Bull Earthquake Res Inst Univ Tokyo*, 35, 1957.
- [39] M. Shinozuka and G. Deodatis. Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Applied Mechanics Reviews*, 44 :191, 1991.
- [40] M. Loève. *Probability Theory. Foundations. Random Sequences*. Van Nostrand Company, New York, 1955.
- [41] J. Li and J. B. Chen. *Stochastic dynamics of structures*. John Wiley & Sons, 2009.
- [42] H.H.M. Hwang and J.R. Huo. Generation of hazard-consistent fragility curves. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 13(5) :345–354, 1994.
- [43] M. Shinozuka, M. Feng, H. Kim, and S. Kim. Nonlinear static procedure for fragility curve development. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(12) :1287–1295, 2000.
- [44] A. Filiatrault and Wanitkorkul A. *Simulation of strong ground motions for seismic fragility evaluation of nonstructural components in hospitals*. Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research MCEER, University at Buffalo, State University of New York, 2005.
- [45] A. S. Papageorgiou and K. Aki. A specific barrier model for the quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. i. description of the model. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(3) :693–722, 1983.
- [46] D. M. Boore. Simulation of ground motion using the stochastic method. *Pure and Applied Geophysics*, 160(3) :635–676, 2003.
- [47] L. F. Ibarra. *Global collapse of frame structures under seismic excitations*. PhD thesis, Stanford University, 2003.
- [48] S. H. Jeong and A. S. Elnashai. Fragility analysis using a new 3D damage index. In *Proceedings of the 2004 Ancer Annual Meeting*, 2004.
- [49] H. Hwang, J.B. Jernigan, and Y.W. Lin. Evaluation of seismic damage to memphis bridges and highway systems. *Journal of Bridge Engineering*, 5(4) :322–330, 2000.
- [50] J.B. Jernigan and H. Hwang. Development of bridge fragility curves. In *7th US National Conference on Earthquake Engineering*, 2002.
- [51] American Association of State Highway and Transportation Officials. Subcommittee on Bridges. *AASHTO Guide Specifications for LFRD Seismic Bridge Design*. AASHTO, 2011.
- [52] J.B. Mander. Fragility curve development for assessing the seismic vulnerability of highway bridges. *Research Progress and*, page 89, 1999.
- [53] Giorgio Monti and Nicola Nisticò. Simple probability-based assessment of bridges under scenario earthquakes. *Journal of Bridge Engineering*, 7(2) :104–114, 2002.

- [54] S Banerjee and M Shinozuka. Nonlinear static procedure for seismic vulnerability assessment of bridges. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 22(4) :293–305, 2007.
- [55] Howard Hwang, Jing Bo Liu, Yi-Huei Chiu, and Mid-America Earthquake Center. *Seismic fragility analysis of highway bridges*. Mid-America Earthquake Center, 2001.
- [56] AS Elnashai, B Borzi, and S Vlachos. Deformation-based vulnerability functions for rc bridges. *Structural Engineering and Mechanics*, 17(2) :215–244, 2004.
- [57] Eunsoo Choi, Reginald DesRoches, and Bryant Nielson. Seismic fragility of typical bridges in moderate seismic zones. *Engineering Structures*, 26(2) :187–199, 2004.
- [58] Kevin Mackie and Bozidar Stojadinovic. Fragility curves for reinforced concrete highway overpass bridges. In *13th World Conference on Earthquake Engineering*, pages 1–6, 2004.
- [59] FEMA 273. *NEHRP guidelines for the seismic rehabilitation of buildings*. Federal Emergency Management Agency, 1997.
- [60] A. Ghobarah, H. Abou-Elfath, and A. Biddah. Response-based damage assessment of structures. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 28(1) :79–104, 1999.
- [61] A. Ghobarah and K.E. Galal. Seismic rehabilitation of short rectangular rc columns. *Journal of earthquake engineering*, 8(01) :45–68, 2004.
- [62] Young-Ji Park, Alfredo H-S Ang, and Yi Kwei Wen. Seismic damage analysis of reinforced concrete buildings. *Journal of Structural Engineering*, 111(4) :740–757, 1985.
- [63] A Ghobarah, NM Aly, and M El-Attar. Performance level criteria and evaluation. *Seismic Design Methodologies for the Next Generation of Codes*, pages 207–215, 1997.
- [64] J Goodman. Structural fragility and principle of maximum entropy. *Structural safety*, 3(1) :37–46, 1985.
- [65] RJ Torrent. The log-normal distribution : a better fitness for the results of mechanical testing of materials. *Matériaux et Construction*, 11(4) :235–245, 1978.
- [66] C Allin Cornell, Fatemeh Jalayer, Ronald O Hamburger, and Douglas A Foutch. Probabilistic basis for 2000 sac federal emergency management agency steel moment frame guidelines. *Journal of Structural Engineering*, 128(4) :526–533, 2002.
- [67] JL Beck, KA Porter, R Shaikhutdinov, T Moroi, Y Tsukada, and M Masuda. Impact of seismic risk on lifetime property values, final report, curee-kajima joint research program phase iv, 2002.
- [68] Catherine A Pagni and Laura N Lowes. Fragility functions for older reinforced concrete beam-column joints. *Earthquake Spectra*, 22(1) :215–238, 2006.
- [69] M.I.J. Schotanus, P. Franchin, A. Lupoi, and P.E. Pinto. Seismic fragility analysis of 3D structures. *Structural Safety*, 26(4) :421–441, 2004.
- [70] Jianlin Song and Bruce R Ellingwood. Seismic reliability of special moment steel frames with welded connections : Ii. *Journal of Structural Engineering*, 125(4) :372–384, 1999.
- [71] P. G. Somerville, N. Smith, and S. Punyamurthula. *Development of ground motion time histories for phase 2 of the FEMA/SAC steel project*. SAC Background Report SAC/BD-97/04, SAC Joint Venture, 1997.
- [72] J. M. O’connor and B. R. Ellingwood. Site-dependent models of earthquake ground motion. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 21(7) :573–589, 1992.

- [73] Kazi Rezaul Karim and Fumio Yamazaki. Effect of isolation on fragility curves of highway bridges based on simplified approach. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27 :414–426, 2007.
- [74] S.H. Kim and M. Shinozuka. Development of fragility curves of bridges retrofitted by column jacketing. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19(1-2) :105–112, 2004.
- [75] D.H. Tavares, J.E. Padgett, and P. Paultre. Fragility curves of typical as-built highway bridges in eastern canada. *Engineering Structures*, 40 :107–118, 2012.
- [76] D.H. Tavares, J.R. Suescun, P. Paultre, and J.E. Padgett. Seismic fragility of a highway bridge in quebec. *Journal of Bridge Engineering*, 2013.
- [77] M. Grigoriu. To scale or not to scale seismic ground-acceleration records. *Journal of engineering mechanics*, 137(4) :284, 2010.
- [78] P. Gehl, J. Douglas, and D. Seyed. Influence of the number of dynamic analyses on the accuracy of structural response estimates. *Earthquake Spectra*, 2013.
- [79] T Rossetto and A Elnashai. Derivation of vulnerability functions for european-type rc structures based on observational data. *Engineering structures*, 25(10) :1241–1263, 2003.
- [80] J. Li and J. B. Chen. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters. *Computational Mechanics*, 34(5) :400–409, 2004.
- [81] Bryant G Nielson and Reginald DesRoches. Analytical seismic fragility curves for typical bridges in the central and southeastern united states. *Earthquake Spectra*, 23(3) :615–633, 2007.
- [82] C.T. Dang, T.P. Le, and P. Ray. Fragilité sismique des structures basées sur l’approche stochastique et des méthodes d’approximation. In *Proceedings of Conférence Internationale Géotechnique - Ouvrage - Structure, Lyon, France*, 2013.
- [83] C.A. Cornell. Engineering seismic risk analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(5) :1583–1606, 1968.
- [84] H.H.M. Hwang and J.R. Huo. Generation of hazard-consistent ground motion. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 13(6) :377–386, 1994.
- [85] Bilal Nehme. *Techniques non-additives d’estimation de la densité de probabilité*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2010.
- [86] Yi-Kwei Wen. Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(2) :249–263, April 1976.
- [87] J. B. Chen and J. Li. Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20(1) :33–44, 2005.
- [88] ANSYS. Release 13.0 - user manual, 2010.
- [89] B. Sudret and C.V. Mai. Calcul des courbes de fragilité sismique par approches non-paramétriques. In *Proceedings of Congrès Français de Mécanique 2013, Bordeaux, France*, 2013.
- [90] CEB Comité Euro internationale du béton. *RC elements under cyclic loading, state of the art report*. Thomas Telford, 1996.
- [91] Silvia Mazzoni, Frank McKenna, Michael H Scott, Gregory L Fenves, and B Jeremic. Open system for earthquake engineering simulation (opensees). *User command language manual, Version*, 1(3), 2006.

- [92] J. Watson-Lamprey and N. Abrahamson. Selection of ground motion time series and limits on scaling. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(5) :477–482, 2006.
- [93] J. Hancock, J.J. Bommer, and P.J. Stafford. Numbers of scaled and matched accelerograms required for inelastic dynamic analyses. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 37(14) :1585–1607, 2008.
- [94] N. Buratti, P.J. Stafford, and J.J. Bommer. Earthquake accelerogram selection and scaling procedures for estimating the distribution of drift response. *Journal of Structural Engineering*, 137(3) :345–357, 2010.
- [95] T.K. Mandal, N.N. Pujari, and S. Ghosh. A comparative study of seismic fragility estimates using different numerical methods. In *4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, 2013.
- [96] J.R. Benjamin. The art of probabilistic modeling. *Nuclear Engineering and Design*, 71(3) :265–270, 1982.
- [97] K. Jaiswal, D. Wald, and D. D’Ayala. Developing empirical collapse fragility functions for global building types. *Earthquake Spectra*, 27(3) :775–795, 2011.
- [98] C.T. Dang, T.P. Le, and P. Ray. Évaluation de la fiabilité d’une structure mécanique en comportement dynamique aléatoire. In *Le 12ème Colloque National AIP PRIMECA, Mont Dore, France*, 2012.
- [99] Siu-Kui Au and James L. Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4) :263–277, 2001.
- [100] SK Au and JL Beck. Subset simulation and its application to seismic risk based on dynamic analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(8) :901–917, 2003.
- [101] B. Sudret. Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification. In *Asian-Pacific symposium on structural reliability and its applications, Singapore*, 2012.
- [102] M. Lemaire. *Structural reliability*, volume 84. John Wiley & Sons, 2010.
- [103] R. Y. Rubinstein and D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, volume 707. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley., 2011.
- [104] O Ditlevsen, R Olesen, and G Mohr. Solution of a class of load combination problems by directional simulation. *Structural Safety*, 4(2) :95–109, 1987.
- [105] Peter Bjerager. Probability integration by directional simulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(8) :1285–1302, 1988.
- [106] Michael Hohenbichler and Ruediger Rackwitz. Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(12) :2195–2199, 1988.
- [107] RE Melchers. Radial importance sampling for structural reliability. *Journal of engineering mechanics*, 116(1) :189–203, 1990.
- [108] Marc A Maes, Karl Breitung, and Debbie J Dupuis. Asymptotic importance sampling. *Structural Safety*, 12(3) :167–186, 1993.
- [109] SK Au and JL Beck. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations. *Structural Safety*, 21(2) :135–158, 1999.
- [110] L. Katafygiotis and S.H. Cheung. A two-stage subset simulation-based approach for calculating the reliability of inelastic structural systems subjected to gaussian random excitations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(12) :1581–1595, 2005.

- [111] W.C. Hsu and J. Ching. Evaluating small failure probabilities of multiple limit states by parallel subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(3) :291–304, 2010.
- [112] W.R. Gilks, S. Richardson, and D.J. Spiegelhalter. *Markov chain Monte Carlo in practice*, volume 2. CRC press, 1996.
- [113] S.K. Au, J. Ching, and J.L. Beck. Application of subset simulation methods to reliability benchmark problems. *Structural Safety*, 29(3) :183–193, 2007.
- [114] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21 :1087, 1953.
- [115] W.K. Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1) :97–109, 1970.
- [116] S.K. Au, J.L. Beck, K.M. Zuev, and L.S. Katafygiotis. Discussion of paper by f. miao and m. ghosn "modified subset simulation method for reliability analysis of structural systems", structural safety, 33 :251-260 2011. *Structural Safety*, 34(1) :379 – 380, 2012.
- [117] K.K. Phoon. *Reliability-based design in geotechnical engineering : computations and applications*. Psychology Press, 2008.
- [118] François Deheeger. *Couplage mécano-fiabiliste : 2 SMART-méthodologie d'apprentissage stochastique en fiabilité*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2008.
- [119] J. B. Chen and J. Li. Stochastic seismic response analysis of structures exhibiting high nonlinearity. *Computers & structures*, 88(7) :395–412, 2010.
- [120] M. Shinozuka. Monte carlo solution of structural dynamics. *Computers & Structures*, 2(5) :855–874, 1972.
- [121] M. Kleiber and T.D. Hien. *The stochastic finite element method*. 1992.
- [122] J. Li. *Stochastic structural systems : analysis and modeling*, 1996.
- [123] J. Li and J. B. Chen. The probability density evolution method for dynamic response analysis of non-linear stochastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(6) :882–903, 2006.
- [124] J. B. Chen and J. Li. Joint probability density function of the stochastic responses of nonlinear structures. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 6 :35–47, 2007.
- [125] J. Li and J. B. Chen. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation. *Structural Safety*, 30(1) :65–77, 2008.
- [126] S.O. Rice. Mathematical analysis of random noise, part i and ii. *Bell Systems Tech. J.*, 23 :282–332, 1944.
- [127] Jie Li and Jian-bing Chen. The number theoretical method in response analysis of nonlinear stochastic structures. *Computational Mechanics*, 39(6) :693–708, 2007.
- [128] J.D. Anderson. *Computational fluid dynamics*, volume 206. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [129] C.T. Dang, T.P. Le, and P. Ray. Construction des courbes de fragilité sismique basée sur la méthode de calcul de l'évolution des fonctions de densité de probabilité. In *Le 21ème Congrès Français de Mécanique - CFM, Bordeaux, France*, 2013.
- [130] FEMA. Sac project (1994).

Résumé

MÉTHODES DE CONSTRUCTION DES COURBES DE FRAGILITÉ SISMIQUE PAR SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Une courbe de fragilité sismique qui présente la probabilité de défaillance d'une structure en fonction d'une intensité sismique, est un outil performant pour l'évaluation de la vulnérabilité sismique des structures en génie nucléaire et génie civil. On se concentre dans cette thèse sur l'approche par simulations numériques pour la construction des courbes de fragilité sismique. Une étude comparative des méthodes paramétriques existantes avec l'hypothèse log-normale est d'abord réalisée. Elle permet ensuite de proposer des améliorations de la méthode du maximum de vraisemblance dans le but d'atténuer l'influence de l'excitation sismique lors de son processus de construction. Une autre amélioration est l'application de la méthode de simulations par subsets pour l'évaluation de la probabilité de défaillance faible. Enfin, en utilisant la méthode de calcul de l'évolution des fonctions de densité de probabilité qui permet d'évaluer la probabilité conjointe entre la réponse structurale et les variables aléatoires du système et de l'excitation, nous proposons également une nouvelle technique non-paramétrique de construction des courbes de fragilité sismique sans utiliser l'hypothèse de la loi log-normale. La validation des améliorations et de la nouvelle technique est réalisée sur des exemples numériques.

Mots clefs : courbe de fragilité sismique, simulation numérique, probabilité de défaillance, modèle de Boore, simulations par subsets, évolution des fonctions de densité de probabilité.

Abstract

DEVELOPMENT OF SEISMIC FRAGILITY CURVES BASED ON NUMERICAL SIMULATIONS

A seismic fragility curve that shows the failure probability of a structure in function of a seismic intensity is a powerful tool for the evaluation of the seismic vulnerability of structures in nuclear engineering and civil engineering. We focus in this thesis on the numerical simulations-based approach for the construction of seismic fragility curves. A comparative work between existent parametric methods with the lognormal assumption of the fragility curves is first performed. It then allows proposing improvements to the maximum likelihood method in order to mitigate the influence of seismic excitation during its construction process. Another improvement is the application of the subsets simulation method for the evaluation of the low probability of failure. Finally, using the Probability Density Evolution Method (PDEM) for evaluating the joint probability between a structural response and random variables of a system and/or excitations, a new technique for construction of seismic fragility curves was proposed. The seismic fragility curve can be derived without the assumption of lognormal law. The improvements and the new technique are all validated by numerical examples.

Keywords : fragility curves, numerical simulation, failure probability, Boore's model, subsets simulations, probability density evolution method