Modélisation de la propagation des ondes élastiques générées par un séisme proche ou éloigné à l'intérieur d'une ville

Jean-Philippe Groby

▶ **To cite this version:**

Jean-Philippe Groby. Modélisation de la propagation des ondes élastiques générées par un séisme proche ou éloigné à l'intérieur d'une ville. Physique mathématique [math-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2005. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-00115636⟩

HAL Id: tel-00115636

https://theses.hal.science/tel-00115636v1

Submitted on 22 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HAL Authorization

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

présentée

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

par

Jean-Philippe Groby

Discipline : MÉCANIQUE
Option : ACOUSTIQUE

Modélisation de la propagation des ondes élastiques générées par un séisme proche ou éloigné à l'intérieur d'une ville

Soutenue le 27 Septembre 2005 devant le jury composé de

Patrick Chabrand	Professeur, Université de la Méditerranée	Président
Éliane Bécache	Chargée de Recherche, I.N.R.I.A.	Examinateur
Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia	Directeur de Recherche, E.N.S.T.A.	Rapporteur
Chrysoula Tsogka	Assistant Professor, Université de Chicago	Invitée, Co-directrice de thèse
Jean-François Semblat	Professeur, L.C.P.C./École Polytechnique	Rapporteur
Armand Wirgin	Directeur de Recherche, L.M.A.	Directeur de thèse

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

présentée

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

par

Jean-Philippe Groby

Discipline : MÉCANIQUE
Option : ACOUSTIQUE

Modélisation de la propagation des ondes élastiques générées par un séisme proche ou éloigné à l'intérieur d'une ville

Soutenue le 27 Septembre 2005 devant le jury composé de

Patrick Chabrand	Professeur, Université de la Méditerranée	Président
Éliane Bécache	Chargée de Recherche, I.N.R.I.A.	Examinateur
Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia	Directeur de Recherche, E.N.S.T.A.	Rapporteur
Chrysoula Tsogka	Assistant Professor, Université de Chicago	Invitée, Co-directrice de thèse
Jean-François Semblat	Professeur, L.C.P.C./École Polytechnique	Rapporteur
Armand Wirgin	Directeur de Recherche, L.M.A.	Directeur de thèse

À mes parents,

À mes grands-parents,

Aux Jean-Marc

Je tiens d'abord à remercier Armand Wirgin et Chrysoula Tsogka. Il semble inhabituel qu'une thèse puisse être dédiée aux encadrants et pourtant ... tous deux le mériteraient. Ils m'ont beaucoup soutenu pendant ces trois années, chacun à sa manière.

J'ai toujours vouvoyé Armand car j'ai beaucoup trop d'estime et de respect pour lui pour le tutoyer. Il m'a transmis son immense passion pour les sciences et j'ai énormément profité de son excellent "sens scientifique". En retour, je ne peux qu'essayer de ne pas le décevoir. J'ai beaucoup appris à son contact, tant d'un point de vue scientifique que d'un point de vue humain.

Chrysoula a toujours été présente, que ce soit pour des questions scientifiques ou pour des questions personnelles, malgré son éloignement physique. Je tiens également à la remercier de m'avoir invité à l'université de Chicago pour quelques jours qui ont été enrichissants pour la rédaction de cette thèse.

Je tiens ensuite à remercier Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Jean-François Semblat d'avoir accepté si rapidement d'être rapporteurs de cette thèse.

J'aimerais remercier également Patrick Chabrand et Éliane Bécache d'avoir accepté avec enthousiasme d'être examinateurs.

Je tiens à remercier ensuite, Erick Ogam et Zine Fellah, qui ont participé à la bonne entente et à l'ambiance joyeuse qui règnait dans l'OR. En particulier, je tiens à remercier Zine pour les parties de pêche à 5 heures du matin dans les calanques et pour ses conseils toujours avisés.

J'aimerais également remercier tous les membres de l'équipe P.I., en particulier Jean-Pierre Lefebvre, de m'avoir accueilli si chaleureusement.

Peu de jours après cet épisode aux thermes de Tingo, elle avait connu la première secousse sismique de sa vie. Elle se trouvait dans son antichambre à écrire une lettre quand, quelques secondes avant que tout ne se mît à trembler, elle avait entendu en ville un tumulte d'aboiements éperdus -on lui avait dit que les chiens étaient les premiers à sentir ce qui arrivait- et vu, sur l'instant, son esclave Dominga tomber à genoux, les bras en croix et les yeux épouvantés, priant à grands cris le Seigneur des Tremblements. (...) La terre avait tremblé deux minutes d'affilée, avec un ronflement sourd, profond, tandis que Flora, paralysée, oubliait de courir s'abriter dans l'embrasure de la porte, comme le lui avaient enseigné ses parents. Ce tremblement de terre n'avait pas fait beaucoup de dégâts à Arequipa, mais il avait détruit deux villes de la côte, Tacna et Arica. Les trois ou quatre secousses qui se produisirent par la suite furent insignifiantes en comparaison de ce tremblement de terre. Tu n'oublierais jamais l'impression d'impuissance et de catastrophe vécue durant cette interminable secousse. Ici à Marseille, onze ans après, tu en avais encore des frissons.

Extrait de "Le paradis- un peu plus loin", Mario Vargas Llosa

Table des matières

1 Introduction **7**
1.1 Historique de certaines villes . . . 8
1.1.1 Mexico . . . 8
1.1.1.1 Tenochtitlan . . . 9
1.1.1.2 La ville de Mexico [3] . . . 10
1.1.2 Bam [59] . . . 10
1.1.3 Izmit (Nicomédie) [2, 4] . . . 12
1.2 Quelques séismes . . . 13
1.3 Historique du Sujet . . . 14
1.4 Le modèle mathématique: l'equation d'ondes viscoélastiques . . . 18
1.4.1 Les mouvements de cisaillement anti-plans . . . 19
1.4.2 Les mouvements dans le plan . . . 19
1.4.3 Les constantes matérielles décrivant un matériau viscoélastique . . . 20
1.4.4 Modèle de module viscoélastique pour la propagation à facteur de qualité $Q(\mathbf{x})$ constant . . . 23

I La propagation des ondes dans des milieux dissipatifs **25**

1 La propagation des ondes dans les milieux viscoacoustiques **26**
1.1 La relation constitutive pour la propagation des ondes viscoacoustiques . . . 29
1.2 Approximation du module viscoacoustique $\mu(\mathbf{x}, \omega)$ . . . 31
1.2.1 Approximation de Padé . . . 32
1.2.2 Approximation par éléments de Maxwell généralisés . . . 35
1.2.3 Approximation par la "τ-method" . . . 38
1.2.4 Comparaison des différentes méthodes d'approximation . . . 40
1.2.5 Méthode proposée . . . 43
1.3 Formulation mixte vitesse-pression . . . 44
1.4 Analyse du problème continu . . . 45
1.4.1 Analyse de la stabilité du problème continu . . . 45
1.4.2 Relation de dispersion . . . 46
1.5 Discrétisation . . . 47
1.6 Analyse du système discrétisé . . . 49
1.6.1 Analyse de la stabilité du problème discret . . . 49
1.6.2 Relation de dispersion . . . 51
1.7 Traitement des surfaces libres . . . 53
1.8 Traitement des bords . . . 55

1.9 Résultats numériques . . . 58
1.9.1 Diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire viscoacoustique . . . 58
1.9.2 Diffraction d'une onde cylindrique par une digue, avec fondation flexible dans un demi-espace. . . . 61

2 La propagation des ondes viscoélastiques 65
2.1 Ondes viscoélastiques SH . . . 65
2.1.1 Le système à discrétiser . . . 65
2.2 Ondes viscoélastiques P-SV . . . 68
2.3 Analyse du système continu . . . 72
2.3.1 Analyse énergétique . . . 72
2.3.2 Relation de dispersion . . . 73
2.4 Discrétisation du problème . . . 74
2.5 Analyse du système discrétisé . . . 77
2.5.1 Analyse de la stabilité du système par méthode énergétique . . . 77
2.5.2 Relation de dispersion . . . 79
2.6 Traitement des surfaces libres . . . 83
2.7 Validation du problème numérique P-SV : Diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre circulaire . . . 86
2.7.1 Formulation du problème . . . 87
2.7.2 Représentation des potentiels . . . 88
2.7.3 Application des conditions aux limites et détermination des champs . . . 88
2.7.4 Résultats et comparaison numérique/semi-analytique . . . 91

II Les effets régionaux et site-ville dans le cadre des mouvements anti-plans 92

1 Les effets régionaux 93
1.1 Problème à une couche : les modes de Love . . . 99
1.1.1 Formulation du problème : la source est localisée dans le substratum (c.à.d. $x_2^s > h$) . . . 100
1.1.2 Représentation des champs . . . 100
1.1.3 Application des conditions aux limites et obtention des champs dans la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et dans le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$ . . . 101
1.1.4 Structure des champs de déplacement . . . 102
1.1.4.1 Structure du champ de déplacement dans la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ dans le domaine fréquentiel . . . 102
1.1.4.2 Structure du champ de déplacement dans le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$ dans le domaine fréquentiel . . . 104
1.1.5 Amplitude des ondes dans la couche . . . 106
1.1.5.1 Amplitude des ondes SOP1, liées aux phénomènes d'interférence . . . 106
1.1.5.2 Amplitude des ondes SOP2, liées à l'excitation des modes de Love . . . 108
1.1.5.3 Amplitude des ondes SOS3 . . . 111
1.1.6 Résultats semi-analytiques par intégration "directe" . . . 112
1.1.6.1 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g},\omega)$ dans le cas de la ville de Nice . . . 113
1.1.6.2 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g},\omega)$ dans le cas de la ville de Mexico . . . 115

1.1.6.3 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Mexico Modifié MMC1 . . . 124
1.1.6.4 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Mexico Modifié MMC2 . . . 125
1.1.7 Application du théorème des résidus, pour un nouvel éclairage sur les modes de Love . . . 127
1.1.7.1 Détermination du contour C . . . 127
1.1.7.2 Application du Théorème des résidus . . . 128
1.1.7.3 Évaluation des intégrales de branche . . . 128
1.1.7.4 Détermination non-ambiguë du premier mode de Love pour un matériau dissipatif M^1 occupant la couche . . . 130
1.1.7.5 Structure du résidu relatif au premier mode de Love . . . 132
1.1.7.6 Combinaison des contributions $u^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \omega)$, liée au résidu et $u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \omega)$, liée aux intégrales de branche . . . 133
1.1.8 Analyse directe en temps de la réponse sur le sol dans le cas non-dissipatif ou purement atténuant . . . 134
1.1.8.1 Ingrédients généraux de la réponse temporelle sur le sol . . . 134
1.1.8.2 Ingrédients spécifiques de la réponse temporelle sur le sol . . . 136
1.1.8.3 Champ de déplacement $u^1_1(\mathbf{x}, t)$ lié aux phénomènes d'interférence . 138
1.1.8.4 Champ de déplacement $u^1_2(\mathbf{x}, t)$, lié à l'excitation de modes de Love 139
1.1.8.5 Condition d'existence de $u^1_1(\mathbf{x}, t)$ et $u^1_2(\mathbf{x}, t)$ . . . 140
1.1.9 Conclusion sur l'excitation des modes de Love pour $x^s_2 > h$ . . . 140
1.1.10 Formulation du problème: la source est localisée dans la couche (c.à.d. $0 \leq x^s_2 < h$) . . . 142
1.1.11 Représentation des champs . . . 142
1.1.12 Application des conditions aux limites et obtention des champs de déplacement dans la couche $u^1(\mathbf{x}, \omega)$ et dans le substratum $u^0(\mathbf{x}, \omega)$ . . . 143
1.1.13 Champ de déplacement sur le sol . . . 144
1.1.14 Utilisation de la théorie des modes de Love pour l'étude des effets régionaux . 145
1.2 Problème à deux couches . . . 149
1.2.1 La source est localisée dans le substratum (c.à.d. $x^s_2 > h + H$) . . . 150
1.2.1.1 Formulation du problème . . . 150
1.2.1.2 Représentation des champs . . . 150
1.2.1.3 Application des conditions aux limites . . . 151
1.2.1.4 Champ de déplacement sur le sol . . . 152
1.2.2 La source est localisée dans la couche supérieure (c.à.d. $0 \leq x^s_2 < h < H$) . . . 157
1.2.2.1 Formulation du problème . . . 157
1.2.2.2 Représentation des champs . . . 157
1.2.2.3 Application des conditions aux limites . . . 158
1.2.2.4 Champ de déplacement sur le sol . . . 159
1.2.3 Est-il possible d'exciter un mode de Love avec une onde plane, dans une configuration à deux couches? . . . 161
1.2.3.1 Champ dans la couche supérieure . . . 161
1.2.3.2 Quelle configuration doit-on considérer? . . . 162
1.2.3.3 Résultats . . . 164
1.3 Configuration à $N = 4$ pour l'étude des effets régionaux dans la cas de la ville de Mexico . . . 166

2 L'effet site-ville **172**
2.1 Problème à N bâtiments non-identiques, non-équidistants, sur sous-sol avec couche . 178
2.1.1 Formulation du problème 178
2.1.2 Représentation des champs 178
2.1.3 Application des conditions aux limites 179
2.1.4 Obtention des champs dans les blocs Ω_2, la couche Ω_1 et le substratum Ω_0 . . 181
2.1.5 Déplacement dans le substratum et dans la couche dans une configuration sans bâtiment induit par une source de type ruban, localisée dans la couche . 185
2.1.6 Les bâtiments comme sources induites 187
2.1.6.1 Le champ induit par la présence des bâtiments 188
2.1.6.2 Le champ induit par chaque résonance fondamentale 190
2.1.7 Analyse modale 191
2.1.7.1 Système matriciel 191
2.1.7.2 Mode naturel du système : mise en évidence des modes de bloc à base fixe 192
2.1.7.3 Modes naturels du système : mise en évidence des modes quasi-Love 195
2.2 Un bâtiment sur sous-sol avec couche 198
2.2.1 Les champs de déplacement dans le bloc $u^2(\mathbf{x},\omega)$, la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$ 198
2.2.2 Ordre du dévelopement pseudo-modal à considérer 199
2.2.3 Analyse modale 201
2.2.4 Résultats numériques 206
2.2.4.1 Un bâtiment $b \times w = 40\ m \times 40\ m$ 206
2.2.4.2 Un bâtiment $b \times w = 50\ m \times 30\ m$ 208
2.2.4.3 Un bâtiment $b \times w = 50\ m \times 60\ m$ 220
2.3 Deux bâtiments sur sous-sol avec couche, mise en évidence des matrices de couplage 222
2.3.1 Les champs de déplacement dans les blocs $u^{2j}(\mathbf{x},\omega)$, $j = 1,2$, la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$ 222
2.3.2 Ordre du développement pseudo-modal à considérer 223
2.3.3 Analyse des matrices de couplage 225
2.3.4 Analyse modale 228
2.3.5 Résultats 229
2.3.5.1 Deux blocs identiques $b \times w = 40\ m \times 40\ m$ 229
2.3.5.2 Deux blocs identiques $b \times w = 50\ m \times 30\ m$ 232
2.3.5.3 Deux blocs de caractéristiques géométriques différentes $b_1 \times w_1 = 50\ m \times 30\ m$ et $b_2 \times w_2 = 40\ m \times 40\ m$ 238
2.4 Nombre infini ou fini de bâtiments identiques, espacés par une distance d constante sur sous-sol avec couche 242
2.4.1 La formulation analytique pour le cas d'un nombre infini de blocs 242
2.4.1.1 Formulation du problème 242
2.4.1.2 Représentation des champs 243
2.4.1.3 Application des conditions aux limites 244
2.4.1.4 Obtention des champs de déplacement dans les blocs $u^2(\mathbf{x},\omega)$, la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$ 245
2.4.1.5 Interprétation des expressions des champs de déplacement dans la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$ 247
2.4.2 Analyse modale 249

2.4.2.1 Mise en évidence des modes Cutler, Cutler-Love et Cutler-Haskell . 249
2.4.2.2 Mise en évidence des modes quasi-Love 253
2.4.3 Résultats numériques 254
2.4.3.1 Nice (cas C2P-2-E30 proposé par l'ACI CATNAT) 254
2.4.3.2 Mexico 256

3 Étude de quelques cas "réalistes" 268
3.1 Validation de l'approximation couche d'étendue latérale infinie 269
3.1.1 Comparaison des réponses sur le sol dans le cas du bassin et dans le cas d'une couche 270
3.1.2 Comparaison des résultats en présence de blocs 274
3.2 Exemple d'une ville de 10 bâtiments non-équidistants 279
3.2.1 Méthode d'analyse 280
3.2.2 Discussion 280

III Investigation des effets régionaux et site-ville dans le cadre des mouvements dans le plan 283

1 Les effets régionaux 284
1.1 Les ondes de Rayleigh 287
1.1.1 Formulation du problème 287
1.1.2 Représentation des potentiels 288
1.1.3 Application des conditions aux limites et obtention du champ de vitesse . . . 288
1.1.4 Relation de dispersion des modes de Rayleigh 290
1.1.5 Résultats et comparaison numérique/semi-analytique 293
1.2 Les modes de Rayleigh généralisés 294
1.2.1 Formulation du problème 294
1.2.2 Représentation des champs 295
1.2.3 Application des conditions aux limites et obtention du champ de déplacement 296
1.2.4 Relation de Dispersion des modes de Rayleigh généralisés 298
1.2.5 Résultats semi-analytiques 301
1.2.5.1 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Nice 303
1.2.6 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Mexico . 306
1.3 Utilisation de la théorie des modes de Rayleigh généralisés pour l'étude des effets régionaux 314

2 L'effet site-ville 321
2.1 Pourquoi n'est-il pas possible de traiter le problème de façon analytique? 322
2.1.1 Formulation du problème 322
2.1.2 Représentation des potentiels 324
2.1.3 Mode de Lamb 324
2.1.3.1 Formulation du problème de Rayleigh-Lamb 324
2.1.3.2 Application des conditions aux limites et obtention des modes symétriques et anti-symétriques 325
2.1.3.3 Obtention de la représentation modale des champs de déplacement et des contraintes 327

2.1.3.4 Réflexion des modes de Lamb sur le bord d'une plaque : plaque semi-infinie . . . 331
2.2 Étude numérique . . . 333
2.2.1 Réponse du bassin sans bloc à une onde cylindrique polarisée en onde SV . . 333
2.2.2 Un bâtiment sur sous-sol de type bassin . . . 335

IV Annexes **344**

A Un problème canonique : description du champ transmis et du champ refléchi par une interface plane excitée par une onde plane incidente **345**
A.1 Description et formulation du problème . . . 345
A.2 Représentation des champs . . . 346
A.3 Application des conditions aux limites et obtention des champs . . . 346
A.3.1 Champ transmis et champ réfléchi dans le cas de faibles angles d'incidences . 348
A.3.2 Champ transmis et champ réfléchi dans le cas de grands angles d'incidence . . 348

B Méthode adoptée pour l'intégration sur la variable k_1 **350**
B.1 Intégrale de type $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(k_1)}{D(k_1)} \frac{dk_1}{k_2}$ . . . 350
B.2 Intégrale de type $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(k_1)\mathrm{sinc}\left(k_1 \frac{w}{2}\right)}{D(k_1)} \frac{dk_1}{k_2}$ . . . 351

C Modes de Love et modes de fuite ("Leaky modes") dans le cas non-dissipatif et purement atténuant, $\eta(\zeta)$ **353**
C.1 Racines complexes de $\mathcal{D}_1$ . . . 353
C.2 Racines complexes de $\mathcal{D}_2$ . . . 355
C.3 Racines complexes de $\mathcal{D}_3$ . . . 356

D Résultats pour une ville idéalisée composée de 10 blocs non identiques et non-équidistants **357**
D.1 Cas $\mathcal{C}^1$ . . . 357
D.2 Cas $\mathcal{C}^2$ . . . 361
D.3 Cas $\mathcal{C}^3$ . . . 365

Chapitre 1

Introduction

Le présent document comprend la résolution de certains problèmes mathématiques et physiques en relation directe avec les effets des séismes. Ce travail vise à contribuer à donner un nouvel éclairage sur la propagation des ondes sismiques à l'intérieur d'une ville et à dégager les mécanismes de certains aspects dévastateurs des séismes. Bien loin de la fatalité que la plupart des gens peut ressentir face au terrible désastre humain engendré lors d'un tremblement de terre, nous essayons de comprendre pourquoi cela constitue une catastrophe.

Certes, un séisme ne peut aujourd'hui être prévu. Cependant, une meilleure compréhension des mécanismes mis en jeu, plus particulièrement celle des mécanismes de propagation d'ondes entre le foyer (la source) et un lieu d'habitation (une ville), et à l'intérieur même de la ville, peut conduire, à terme, à une meilleure conception de l'urbanisme afin que ces désastres (témoin le séisme de Kobé en 1995 qui a tué 6000 personnes et détruit de nombreuses infrastructures contre toute attente) soient moindres. Les supprimer n'est pas possible pour deux raisons majeures. D'abord, parce que si l'on souhaite ne plus s'exposer dangereusement à un séisme, il faudrait habiter dans des lieux déserts (où rien ne peut tomber) et les habitats devraient être construits en matériaux légers (de façon à ne pas engendrer de blessure en cas d'effondrement) ; en quelque sorte vivre sous des tipis, au milieu de prés sans arbre. Cela ne nous semble pas constituer une réponse correcte compte tenu de l'évolution de nos sociétés. Effectivement, si l'habitat, ou groupe d'habitats (ville) n'existe pas, il ne peut être détruit et par là-même tuer des centaines de personnes (vérité de Lapalisse). Pour autant, les villes existent. Ensuite, parce que resteront toujours des inconnues et des impondérables, tels que la position du foyer, le moment sismique de la source, la composition du sous-sol, les monuments et habitats historiques...

Deux interrogations majeures émergent donc : i) quels sont les mécanismes mis en jeu lors de la propagation d'ondes entre le foyer et une ville, c'est-à-dire pourquoi certains séismes peuvent être dévastateurs à plusieurs centaines de kilomètres de l'épicentre, nommés "effets-régionaux", et pourquoi d'autres ne le sont qu'à quelques dizaines de kilomètres, ii) quels sont les mécanismes mis en jeu lors de la propagation d'ondes à l'intérieur de la ville, nommés "effet site-ville". Il a été montré [69, 120, 135], en particulier pour le séisme de Guerrero-Michoacan qui a touché la ville de Mexico en 1985, que les effets dévastateurs étaient bien souvent liés à une durée de la coda importante et à des battements dans cette dernière.

Deux aspects fondamentaux de l'homme nous intéressent vivement ici. Le premier, est que, contrairement à certains animaux [100], nous ne sommes pas capables de pressentir qu'un événement

sismique va se produire. Pourquoi les animaux sont excités et bien souvent s'éloignent lorsqu'une catastrophe s'annonce et pourquoi l'homme qui est censé être la créature la plus évoluée actuellement, est incapable de percevoir certains signes? La mythologie grecque en donne une raison simple. Le pauvre Épiméthé avait oublié l'homme lors de la distribution des dons. En compensation, nous, les hommes, avons reçu la position debout et le feu, et son frère Prométhé, tenu responsable de cet oubli et de ses conséquences (vol du feu à Héphaïstos) des maux d'estomac (ce n'est pas agréable de se faire manger chaque jour le foie par un aigle). Ces qualités, si importantes soient-elles, ne nous disposaient pas à composer avec la nature. Nous l'avons pourtant fait, mais sommes, a priori, incapables de l'écouter. Ainsi donc, nous ne pouvons que subir ces catastrophes, sans en être avertis par quelque sentiment d'oppression ou de malaise que ce soit. Nous avons réussi à dompter la nature. Nous construisons des barrages, dévions des rivières, construisons des tunnels, mais nous ne pouvons que tenter de nous prémunir lorsque "la terre ou les éléments se déchaînent". Cette personnalisation dans cette expression renforce le sentiment de fatalité qui nous poursuit.

Le second aspect est que nous sommes sédentaires, en partie grâce à l'agriculture. La sédentarisation est la norme, témoin la marginalité que notre société fait peser sur les épaules de tout individu non sédentaire, d'où peut-être, notre incapacité à vivre sous des tipis. Ce qui nous intéresse, c'est la cause de notre sédentarité. Schématiquement -nous serions bien incapables d'entrer dans les détails- l'homo érectus vivait de cueillette et de chasse, ce qui le contraignait (terme qui constitue à lui seul une trace visible de la marginalité précédemment citée) à une vie nomade. Puis il a découvert l'agriculture, ce qui lui a permis de faire pousser fruits et légumes à l'endroit où il le souhaitait, ou presque. Effectivement, pour faire pousser des végétaux (à quelques exceptions près), il faut de l'eau et une terre cultivable. Or, en l'absence d'engrais, les bassins sédimentaires (exemple bassin parisien à l'heure actuelle) constituent les terres les plus cultivables. Nous voilà donc installés, en grande majorité, aux bords de lacs, de rivières, au beau milieu de bassins sédimentaires ou lacustres. Si ce sont des sites où l'agriculture est possible, il apparaît, après étude de quelques cas, que ces lieux, où au fur et à mesure du temps les campements se sont mus en villages et ces villages en villes, constituent des sites à haut risque lors d'un séisme. Physiquement, les bassins sédimentaires ou lacustres sont caractérisés par des sols mous de quelques dizaines ou centaines de mètres de profondeur, liés en particulier à des vitesses de propagation des ondes de cisaillement très faibles par rapport aux couches sous-jacentes, ce qui donne lieu à une forte amplification du champ, mais aussi à un allongement de la durée et à la possible génération de battements. Ce sont ces mécanismes que nous allons tenter de comprendre à travers ce travail.

Dans un premier temps, étudions quelques sites où les séismes ont été très destructeurs ces dernières années, de façon i) à étayer le fait que beaucoup de villes sont construites sur des bassins sédimentaires ou lacustres avec un rapport à l'eau et à l'agriculture important, et ii) à dégager certaines configurations d'études.

1.1 Historique de certaines villes

1.1.1 Mexico

Cette ville est probablement celle dont tant l'histoire que le tremblement de terre qui l'a touchée en 1985, sont marquants. Effectivement, c'est ce séisme qui fut à l'origine, semble-t-il, de l'étude de "l'effet site-ville".
Pour mieux comprendre la forme actuelle de la ville, il faut remonter aux Aztèques [4, 1].

1.1.1.1 Tenochtitlan

Nous pouvons sommairement distinguer quatre grandes périodes dans la passé mexicain :

- Époque précéramique (de 15000 à 1500 avant J.C.) : le pays était peuplé de tribus nomades, chasseurs-collecteurs, suivant les migrations du gibier et se réfugiant dans des abris naturels.

- Époque préclassique ou formative (de 1500 avant J.C. à 300 après J.C.) : La phase précédente se termine avec l'apparition de l'agriculture (maïs) qui modifie en profondeur les conditions de vie. Les nomades se fixent, les premiers villages apparaissent. Ces sédentaires construisent les premiers temples "en dur" et rendent un culte aux dieux et déesses de la fertilité (en particulier Huehueteotl, dieu du feu).

- Époque classique (de 300 à 900) : la stabilité nouvelle des conditions de vie engendre ce que l'on nomme les "grandes civilisations" de l'époque classique. Sur l'ensemble du territoire naissent de grands centres religieux qui indiquent l'existence d'un clergé et d'une hiérarchie déjà développés. Citons par exemple Teotihuacan, capitale de la tribu du même nom dans les hautes terres. Ces sites s'associent à la naissance du phénomène urbain. **Teotihuacan comptait** 200000 **habitants en 350, et était probablement la plus grande ville au monde**. Pour des raisons qui restent encore à expliquer, la plupart de ces grandes cités connurent un déclin brutal aux alentours de l'an 900.

- Époque postclassique : avec l'effondrement de ces centres religieux, une nouvelle ère commence. Pendant que s'établissaient, à l'époque précédente, des civilisations déjà très avancées, des chasseurs-collecteurs, vivant selon un mode de vie très rudimentaire, continuaient à errer dans les plaines désertiques du Nord. Au moment du déclin des puissances urbaines, ils commencèrent à envahir les zones centrales, plus riches et plus civilisées. La première vague d'envahisseurs est représentée par les Toltèques qui fondèrent leur propre ville, Tula, dans l'actuel État de Hidalgo, en 980.
  D'autres vagues de Barbares se succèdent et luttent en vue de l'hégémonie, les Otomis, les Tépanèques et les Chichimèques. Les tribus chichimèques qui envahirent l'Anahuac étaient au nombre de sept. L'une de ces sept tribus avait continué vers l'est, les autres s'étaient fixées sur le plateau central. Là, elles rencontrèrent des peuples sédentaires, ayant déjà atteint un degré de culture bien supérieur, connaissant l'agriculture, modelant la céramique. Il s'agit des héritiers de Teotihuacan, de Tula, qui durent alors affronter ces Barbares nouveaux venus, héritiers des cultures du désert avides de terre, de stabilité, de conquêtes et d'expansion. Parmi ceux-ci la petite tribu des Aztèques.

Après la chute de Tula, une petite tribu chichimèque se mit en marche. Les hommes quittèrent leur ville, Aztlan (aujourd'hui dans l'État de Nayarit), où ils avaient passé 1000 ans et partirent vers le sud. Ils étaient conduits par quatre prêtres, portant sur leurs épaules l'effigie de leur dieu Huitzilopochtli, "le colibri de gauche", qui guidait leur migration. Lorsqu'ils parvinrent dans la vallée, ils trouvèrent les terres occupées et furent traités comme des parias. Le souverain toltèque de Colhuacan les autorisa à se fixer à la limite de son royaume d'où ils furent chassés, après avoir déifié la fille de ce souverain (écorchée vive)...

En 1345, s'accomplit la prophétie de leur dieu Huitzilopochtli : leur migration devait s'arrêter le

jour où ils verraient un aigle, debout sur un cactus, dévorant un serpent. Cette vision leur apparut dans un groupe d'îlots inhospitaliers, perdus au milieu des **marécages de la côte ouest de la grande lagune de Texcoco**.

C'est pourtant là qu'ils fondèrent la ville de Tenochtitlan. Les architectes aztèques tirèrent des prodiges de ce sol ingrat : pour se procurer de la terre à cultiver, ils inventèrent les **chinampas**, sortes de légers radeaux de branches, sur lesquels la boue prise au fond du lac était entassée. Ces radeaux d'abord flottants, se fixèrent peu à peu avec l'assèchement de la lagune. C'est donc sur un archipel semi artificiel que fut construite la ville. Au moment de la conquête en 1519 par Cortés, Tenochtitlan était un magnifique ensemble de palais, de temples, de jardins. L'eau était partout présente, les rues moitié chaussées, moitié canaux. Un grand aqueduc traversait la ville, apportant l'eau potable de Coyoacan. La capitale aztèque s'était adaptée à la situation semi-lacustre du lac Texcoco en aménageant les marécages en cultures intensives drainées et parcourus de canaux. Dans une lettre à Charles Quint, Cortés décrivit la ville comme "la plus belle ville du monde, une nouvelle Venise".

1.1.1.2 La ville de Mexico [3]

Ces mots écrits, Cortés s'empressa de détruire la ville de Tenochtitlan et se livra à une quasi éradication de la population native de la vallée. Sur les ruines de Tenochtitlan, il fit reconstruire une ville à l'architecture espagnole, qui devint en 1550 la capitale de la Nouvelle Espagne, Mexico. Ils comblèrent les **marécages** et cherchèrent à se protéger des **inondations** par un système de drainage en direction du nord. Le **sol fut complètement asséché à partir de 1900**, permettant une plus grande expansion. Malgré son site lacustre, les problèmes politiques du Mexique ont eu pour conséquence un mauvais entretien du réseau d'eau potable et de drainage. L'approvisionnement en eau potable et le traitement des eaux usées étaient devenus un véritable enjeu. Les habitants de certains bidonvilles vivaient constamment dans quelques centimètres d'eau.

En 1940, Mexico comptait 1.7 million d'habitants, industries et buildings émergeaient. Mais les offres de logement et d'emploi ne suffirent pas à endiguer la demande et les bidonvilles se développèrent aux abords de la ville (difficile à cacher, même derrière un mur longeant l'autoroute qui menait les athlètes au stade lors des Jeux Olympiques de 1968). La croissance économique continua, le trafic, les problèmes de pollution (témoin le plan d'urgence de 1992) et de pauvreté (exacerbé après la crise de 1990) s'aggravèrent.

Aujourd'hui **Mexico compte près de 23 millions d'habitants** et l'on estime que 1100 nouveaux habitants arrivent en ville quotidiennement. Mexico, comme toute grande capitale, a d'importantes fonctions politiques, administratives, culturelles et intellectuelles. Elle compte d'autres fonctions tertiaires très développées, des activités de service diverses. Enfin Mexico est un grand centre industriel (construction, produits chimiques, plastique, cimenteries, textiles) : 30000 usines (soit 80% du parc industriel mexicain) sont concentrées dans la capitale ; elles représentent plus de 30% du produit intérieur brut.

1.1.2 Bam [59]

Localisé au sud-est de l'Iran, à 200 km de Kerman, l'ancienne citée de Arg-e-bam est entièrement construite à l'aide de techniques traditionnelles superposant des couches de terre (chimeh) et des briques de terre séchées au soleil (khesht). Bam et son paysage culturel s'inscrivent dans

un **environnement désertique**, à la lisière sud du **haut plateau iranien**. On peut retracer les origines de Bam jusqu'à la période achéménide ($VI^{\text{ème}}$ au $IV^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C.).

Les débuts du développement du site de Bam sont indissociablement liés à l'invention et au développement du système de quanats (canaux d'irrigation souterrains), qui permettaient d'irriguer les champs agricoles du sud de la ville. Certains quanats retrouvés près de la faille remontent à la période parthe ($II^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.). Ce sont les plus vieux quanats retrouvés à ce jour.

Une croyance populaire attribue la fondation de la ville à Haftvad, comptemporain d'Ardachir Babakan, fondateur de l'empire sassanide (224 à 637, dernier empire Perse) dont les lois et l'ordre social furent renforcés par l'adoption du zoroastrisme comme religion d'état. Haftvad est présenté comme celui qui introduisit la soie et le tissage du coton à Bam ; les vêtements de grande qualité devinrent une marchandise d'exportation importante pour la ville. La croyance populaire associe d'ailleurs le nom de Bam à "l'éclosion du ver" (ver à soie).
Les auteurs islamiques mentionnent pour la première fois le nom de Bam au $X^{\text{ème}}$ siècle ; à l'époque c'était déjà une place marchande bien établie, apparemment entourée, selon leurs écrits, de peuplements agricoles. Elle comptait trois mosquées. **Bam était alors célèbre pour la production d'élégants vêtements en coton, pour la puissance de sa forteresse (l'Arg), pour ses bazars et ses palmiers**. Les écrivains faisaient référence au système de **quanats**, fournissant l'eau potable et irriguant les cultures. À la mort de Toqrol Shah le Seldjoukide à Jiroft, en 1169, une guerre de succession se déclencha entre ses fils. La situation politique empira et en 1179, le province de Kerman, englobant Bam, subit une invasion destructrice des nomades Ghuz, tribu turque apparentée aux Seldjoukides.

En 1213, le grand seigneur maître de Zuzan conquit la totalité du sud-est de la Perse. À Bam, les murailles furent détruites. Les attaques mongoles qui commencèrent en 1220 étaient essentiellement concentrées vers le nord de la Perse, mais l'instabilité se fit sentir jusque dans le sud. Bam fut libérée des impôts et les fortifications reconstruites. En 1342, le roi Amir Mobarez al-Din reprit la citadelle et les murs furent à nouveau restaurés. Vers 1408- 1409, un général timuride occupa Bam. Il commanda la restauration de la citadelle, ordonna au peuple de construire les maisons à l'intérieur de l'enceinte.

Du $XVI^{\text{ème}}$ au $XVIII^{\text{ème}}$, la Perse connut une période de calme et de prospérité (période Séfévide). Bam était toujours le centre du commerce des vêtements de soie et de laine ainsi que du cachemire. Au $XVIII^{\text{ème}}$, elle jouait également un rôle stratégique en tant que forteresse frontière. Elle fut occupée deux fois par les Afghans, en 1719 et 1721-1730. Elle fut reprise par le gouvernement Perse sous la dynastie Kadjar. En 1841, pendant la période Kadjar, Bam et Kerman furent brièvement sous l'influence de la secte des Ismaïliens.

À partir du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, la ville s'étendit en dehors des fortifications et un nouveau peuplement fut établi à environ 1 km au sud-ouest de l'Arg. À l'intérieur de la zone fortifiée, les quartiers résidentiels furent réduits progressivement à l'état de ruines. En 1881 du fait de l'expansion du contrôle du gouvernement central perse vers les provinces isolées de l'est, Bam perdit son statut de siège du gouvernement en faveur de Bampur, dans le sud-est ; elle demeura toutefois sa résidence d'été. La population et les activités commerciales continuèrent de croître. De 6.000 habitants environ en 880, le nombre passa à 13.000 en 1895 et à 30.000 en 1976. **En 2003, la ville comptait** 100.000 **habitants**. Arg-e-Bam resta essentiellement une base militaire jusqu'en 1930. Le site fut

déclaré site protégé en vertu de la législation nationale iranienne en 1945 et la première restauration eut lieu en 1948. Une campagne de restauration plus vaste commença en 1976.

Bam renferme de nombreux sites archéologiques et de nombreux monuments retraçant l'histoire de la Perse. Aujourd'hui les quanats continuent de fonctionner et apportent l'eau depuis les sources et les montagnes de l'ouest et du nord-ouest de la ville. Le plus récent développement urbain s'étend au sud et au sud-ouest. Le pricipal cours d'eau, Posht-e Rud, est un chenal d'inondation au nord d'Arg-e-Bam, à sec la plus grande partie de l'année. Sur les terres à l'ouest et à l'est se situent les zones cultivées.

Pour autant, il a fallu attendre 2004, pour que la ville soit classée par l'UNESCO.

1.1.3 Izmit (Nicomédie) [2, 4]

Izmit est située au bord de la mer de Marmara. Les origines d'Izmit remontent au paléolithique, mais la ville tire sa magnificence de sa position privilégiée dans le monde gréco-romain.

La Bithynie est un ancien royaume au nord-ouest de l'Asie Mineure. Elle était limitée par le Pont-Euxin au nord, la Paphlagonie à l'est, la Galatie et la Phrygie au sud, la Propontide et la Mysie à l'ouest. Les Bithyniens sont, selon Hérodote et Xénophon, d'origine thrace. Ils forment d'abord un État indépendant avant d'être annexés par Crésus qui ajoute leur territoire à la Lydie. Ils passent ensuite sous domination Perse. La Bithynie est alors incluse dans la satrapie de Phrygie. Mais dès Alexandre le Grand, la Bithynie retrouve son indépendance. Nicomède I^{er} se proclame roi. Durant son long règne (-281/-250), le royaume connaît la prospérité et jouit d'une position respectée parmi les petits royaumes d'Asie Mineure.

Les Bithyniens réussisent là ou Alexandre et ses généraux ont échoué : soumettre la région à l'empire. Nicomède conquiert Nicée (aujourd'hui Izmik, construite au bord d'un lac) et bâtit à quelques kilomètres au nord, la ville de Nicomédie qui absorbe une vieille colonie mégarienne, la cité d'Astacos.

Nicomédie fut capitale du royaume de Bithynie. Dioclétien y établit sa résidence. En 74 avant J.C. la Bithynie devint l'état central de Rome. Au $IV^{\text{ème}}$ siècle, elle fut un haut lieu de l'arianisme. Un prêtre d'Alexandrie nommé Arius se mit à prêcher une doctrine hétérodoxe vers 320. Il professe que Jésus-Christ et le Saint Esprit sont subordonnés à leur créateur, Dieu le Père. Selon le patriarche d'Alexandrie, Jésus serait né homme et ne serait véritablement Fils de Dieu qu'au jour de sa résurrection. Cette doctrine fut condamnée lors du premier concile de l'histoire, celui de Nicée (en 325), sous Constantin le Grand, concile qui pour certains fut le lieu d'un total remaniement des évangiles, et de la réécriture de la Bible. La ville devint turque en 1078. Nicomédie fut le berceau de plusieurs courants de pensée très influents à l'époque.

Aujourd'hui Izmit est une ville de 300.000 **habitants** ainsi que le centre administratif du Kocaeli (qui compte 20 millions d'habitants, 33% de la population turque). **Izmit et son agglomération comptent** 1 **million d'habitants. C'est le centre industriel de la Turquie, avec des milliers d'industries de tailles variées dont les plus grandes industries turques** telles que Tupras (raffinerie), automobile... **C'est la ville la plus riche du pays.**

Ces quelques exemples prouvent que i) les villes qui sont sujettes à de forts risques sismiques ont toutes un rapport à l'eau ii) ces villes ont toutes un rapport particulier avec l'agriculture iii) ces

villes sont toutes des villes riches qui concentrent les industries et par conséquent les hommes, d'où des dégâts importants et un grand nombre de morts lors des séismes.

Penchons nous maintenant sur les séismes qui les ont touchées.

1.2 Quelques séismes

Un séisme peut-être caractérisé par différentes grandeurs selon que l'on souhaite porter l'accent sur la physique y ayant trait ou sur ses conséquences. La position de la source en est une commune à ces deux aspects. Elle peut être caractérisée par deux grandeurs : l'**épicentre** qui indique un positionnement 2D de la source exprimé en terme de longitude et de latitude (ou de façon plus pratique, en km par rapport à une origine, en général une ville) c'est-à-dire les coordonnées du point situé à la surface de la terre directement au-dessus de la source ; l'**hypocentre** qui ajoute au positionnement 2D de l'épicentre, la profondeur de la source. La position de l'épicentre se réduit bien souvent à la donnée de la distance de la source à la ville ayant subi les dégâts les plus importants, alors que l'hypocentre se réduit, lui, à un couple : la donnée caractéristique de l'épicentre et la profondeur. De façon physique, l'amplitude d'un séisme est caractérisée soit par sa magnitude (Richter), soit par le moment sismique de la source (Aki). Ses conséquences c'est-à-dire son "intensité", façon dont le séisme est ressenti (impact psychologique), destruction des habitations,... sont mesurées par l'Échelle Macrosismique Européenne EMS-98 (European Macroseismique Scale) qui s'inspire de l'échelle MSK, du nom des trois sismologues Medvedev, Sponheuer et Karnik, et comporte 12 Niveaux.

Déjà, nous pouvons voir à travers ces deux classes d'échelles, que l'approche d'un séisme est tout à fait différente selon que l'auteur d'une étude est géophysicien, celui-ci mettant l'accent sur le sous sol et la caractérique physique de la source, ou un ingénieur du génie civil, celui-là mettant l'accent sur l'endommagement des bâtiments. N'étant ni l'un, ni l'autre, nous oscillerons dans ce manuscrit, entre ces deux approches et montrerons qu'elles sont complémentaires.

Nous allons sous la forme d'un tableau, donner les caratéristiques fondamentales de quelques séismes.

Ville	Date	Hypocentre dist.(km)×prof.(km)	Magnitude M_w	Position tectonique	Sous sol	Nombre de morts
Mexico	19/09/1985	(400,17-23)	8	Amérique du Nord-Cocos -Pacifique-Caraïbe	lacustre	30.000
Bam	26/12/2003	(10,8-10)	6.5	Eurasie-Afrique -Australie-Arabic	sédiment	30.000
Izmit	17/08/1999	Golcük (?,20-17)	7.4	Eurasie-Anatolienne -Arabique-Afrique	sédiment	18.000
Kobe	17/01/1995	(10,16-25)	6.8	Eurasie-Amérique du nord -Pacifique-Philippine	sédiment	6.000
Alger	21/05/2003	Boumerdes (10,?)	6.7	Eurasie-Afrique	sédiment	2.300
San-Francisco	18/04/1906	sud de Daly (?,20)	8.25	Pacifique-Amérique du nord	sédiment	3.000

Ces quelques exemples montrent la diversité des configurations possibles et prouvent l'importance d'étudier ce phénomène naturel. La génèse du sujet est surtout lié au séisme de Michoacan qui a touché la ville de Mexico (première ligne du tableau précédent).

1.3 Historique du Sujet

Le tremblement de terre de Michoacan a causé de très importants dégats dans la ville de Mexico et par conséquent a engendré de nombreuses pertes humaines. Nous avons montré, section 1.1.1 que la ville était en partie construite sur un site lacustre. Les dégâts les plus importants ayant été relevés dans cette zone, la première approche consista à attribuer la sévérité des destructions à des **phénomènes d'amplification dus à la présence d'une couche superficielle d'argile peu profonde** ($\approx 50m$) **dans laquelle la vitesse des ondes de cisaillement est très faible** ($\approx 60m.s^{-1}$), [163, 144] (un phénomène identique a été constaté à Izmit).

Non seulement les dégâts semblaient être circonscrits dans cette zone, mais en plus, **les destructions étaient réparties de façon très hétérogène** à l'intérieur de celle-ci, [69], **la durée des secousses était extraordinairement longue**, [135], et **la coda était caractérisée** (outre sa longue durée) **par des battements caractéristiques**, [120].

On sait depuis Haskell, [92], que la présence d'une couche superficielle molle donne lieu à d'importants déplacements en surface (comparativement à ceux sans couche), d'autant plus importants que le contraste des paramètres élastiques des milieux en présence est élevé. Ce phénomène mono-dimensionnel -la couche étant considérée d'épaisseur constante- est associé à un effet de confinement et d'interférences d'ondes (dans la couche). L'amplification du champ, de l'ordre de 10 (par rapport à l'amplitude de l'onde incidente), ne se produit qu'aux voisinages de fréquences bien déterminées, et redevient "normal" (amplification de l'ordre de 2) en dehors de ces fréquences. Pour autant, selon Love [118], cette même configuration peut donner lieu à l'excitation de modes non associés, eux, à un phénomène mono-dimensionel. Cette approche ne fut pas privilégiée, **celle mono-dimensionnelle d'Haskell** restant grandement attractive par sa simplicité. Pourtant, bien qu'elle explique l'amplification, elle **n'explique ni la variablilité spatiale des destructions, ni la durée, ni les battements observés**. Deux approches distinctes émergent alors.

Une approche "géophysique", [40], selon laquelle la variabilité des destructions serait due à une variabilité de l'épaisseur de la couche induite par une forme irrégulière de l'interface couche-substratum. En termes 1D, cela signifie que les maxima de déplacement superficiel se produiront à des fréquences différentes selon que l'on est au-dessus de x ou y mètres d'argile. Ce type de configuration peut conduire à l'excitation de modes dont la structure est proche de ceux des modes de Love, de manière similaire à ce que nous allons montrer dans le chapitre II.2. Toutefois, nous n'expliquons pas ainsi la longue durée et les battements dans la coda. **L'autre approche, plus "génie civil"**, consiste à attribuer la variabilité des destructions à la variabilité des fréquences naturelles des structures bâties, tantôt proches et tantôt loin des maxima de déplacement superficiel dus à la présence de la couche, [139] (paradigme de la double résonance). Pourtant, il est connu que les fréquences naturelles d'un système complexe ne sont pas l'union des fréquences naturelles des sous-systèmes le composant et cette explication ne tient plus si les structures bâties ont toutes des fréquences de résonance à peu près égales. Or, durant le séisme de Mexico, des immeubles identiques et localisés l'un à côté de l'autre ont subi des dégâts très différents, voir figure 1.1.

FIG. 1.1 – *Mexico, tremblement de terre de Michacan, le 19 Septembre 1985. Effondrement total d'un immeuble de 21 étages.*

Une autre approche consiste à considérer non plus une couche d'épaisseur variable ou non, mais un **bassin**, pour lequel le site comporte des couches latéralement variables, [18, 145]. Ceci est particulièrement flagrant dans un bassin sédimentaire où se produisent, en plus des effets d'interférences, des effets de résonance [69, 19], de focalisation et d'émission d'ondes [18] ayant les attributs d'ondes de Rayleigh généralisées et de Love. Ces phénomènes peuvent être isolés dans les réponses, [95, 18, 19, 38, 41, 146], mais il est difficile de les mettre en évidence mathématiquement, mis à part dans certaines configurations idéalisées, [187]. Une approche hautes fréquences permettant l'utilisation de la théorie des rayons, même si elle n'explique pas les phénomènes basses fréquences lors d'un séisme, permet de mieux comprendre l'idée d'ondes focalisées [145]. En ce qui concerne les ondes localisées, tout ce que l'on sait c'est qu'elles semblent provenir d'une conversion d'ondes de volume en ondes de "surface" au niveau de discontinuités. Ce qui semble différencier la réponse d'un bassin de celle d'une couche se résume en trois points : 1) un déplacement fréquentiel des maxima (par rapport aux effets 1D 2) l'apparition de pics secondaires peut être associée à l'excitation de modes 3) l'hétérogénéité de la réponse en surface. Ce point sera discuté dans les chapitres II.2, et II.3.1. Toutefois, des études purement numériques, [19, 139, 7] semblent indiquer des réponses importantes au voisinage des fréquences propres qui sont fortement atténuées, sauf en ce qui concerne le premier pic de résonance. En fait, il semble que ces phénomènes soient liés [19] à des ondes se propageant transversalement, d'où un allongement possible de la durée lié à des réflexions multiples sur les bords latéraux du bassin. Or, à l'échelle d'un bassin (quelques dizaines de kilomètres dans le cas de Mexico), ces ondes sont largement atténuées et semblent à peine réaliser un seul aller depuis les extrémités du bassin. Cette idée reste donc à creuser mais **n'explique toujours pas la durée importante de la coda du fait de l'atténuation de ces ondes.**

D'autres idées consistent à considérer, toujours pour une configuration de type bassin, non plus un bassin homogène, mais un bassin constitué d'un empilement de couches, en particulier deux, [147]. Le calcul de la réponse de ce bassin fournit des signaux de longue durée comportant des battements qui ressemblent à ceux enregistrés in situ. Pour autant, la correspondance entre les amplitudes théoriques et réelles semble douteuse. Une dernière classe d'idées liées à la géométrie latérale du bassin, est celle de [69] dans lequel les auteurs s'attellent surtout au problème de la

variation spatiale des destructions. Dans ce modèle, les ondes P sont dominantes et se propagent horizontalement. Cette théorie semble pour le moins à la marge puisque la quasi totalité des ouvrages traitant ce problème attribuent l'essentiel des effets aux ondes de cisaillement. Ce modèle à deux couches plates et parallèles (il n'est pas question de bassin ici), fournit cependant des réponses sur sol relativement similaires à celles rencontrées avec une seule couche, mais avec un pic doublé très amplifié par rapport à celui du modèle à une couche.

Ainsi, la question des effets "géophysiques" liés à la forme et à la structure du bassin de Mexico reste ouverte. Une autre classe d'approches consiste à **considérer les bâtiments**. Effectivement, dans l'approche "géophysique", la masse conséquente des bâtiments et autres constructions est négligée. Or, il est connu [115, 96] que les irrégularités d'interface, lorsqu'elles sont multipliées, comme à l'intérieur d'une ville, induisent une modification notable de la réponse.

Un bâtiment peut constituer une source sismique très efficace, soit lorsqu'il est excité artificiellement par un vibreur installé sur son toit, [103, 192], soit lorsqu'il réémet les vibrations reçues de l'onde incidente lors d'un séisme ou après une explosion nucléaire souterraine, [161, 62]. D'ailleurs, les mouvements induits des bâtiments pourraient expliquer la durée très longue de la coda lors de certains séismes. Différentes approches du problème furent développées, dans un premier temps, dans une configuration sans couche pour laquelle les bâtiments sont construits sur un demi-espace homogène [119, 176, 192]. Les bâtiments sont associés à des blocs homogénéisés (shear wall), avec fondations circulaires. Il ressort que pour un seul bloc, [176], l'onde diffractée contribue de façon significative au déplacement sur le sol proche du bloc (**interaction sol-structure**), et que lorsque plusieurs blocs sont considérés, [119, 192], le couplage entre ces blocs (**interaction structure-sol-structure**), induit des modifications significatives de la réponse, à la fois sur le sol et dans ces blocs. En particulier, il ressort de ces études que les fréquences à bases-rigides de ces blocs contribuent de façon importante aux modifications induites. En toile de fond, la notion de champ libre (enregistrement réalisé in-situ sur un sol rigide considéré comme représentatif de l'onde incidente) est remise en cause puisque les bâtiments modifient substantiellement les champs de déplacement sur le sol. La configuration qui nous intéresse (présence d'une couche superficielle) est différente au sens où, pour une polarisation SH, des modes peuvent être excités dans la couche, alors qu'aucun mode ne peut l'être lorsque la structure géophysique se réduit simplement à un demi-espace homogène. Cette question fut adressée dans [21] dans le cas d'une répartition périodique de blocs en contact parfait avec une couche d'étendue latérale infinie. Il ressort que les irrégularités de surface constituées par les blocs, induisent l'excitation de modes ayant une structure très proche de celle de modes de Love et induisent une amplification des battements et une durée très importante de la coda, non-seulement sur le sol, mais aussi dans les bâtiments. Ceci explique les caractéristiques de la coda et les destructions massives mais n'explique pas la variabilité spatiale de celles-ci, cette variabilité pouvant être attribuée à des "effets non-linéaires". De plus, la distance entre les blocs doit être relativement importante pour exhiber des signaux similaires à ceux enregistrés in situ. Dans, [180], les auteurs considèrent 10 blocs relativement proches mais de caratéristiques variables. Il ressort une variabilité spatiale des réponses d'un bloc à l'autre, les réponses conservant les caractéristiques similaires aux signaux réels. Pour autant, ce sont des résultats numériques et le calcul est réalisé sans tenir compte de l'atténuation des matériaux. D'autres auteurs, se penchant sur d'autres sites (Nice) [155, 108], ont étudié ce problème de façon numérique et exhibent tantôt une amplification du champ, tantôt une désamplification. D'autres encore proposent des modèles théoriques en incorporant une variabilité des caractéristiques géométriques des bâtiments, considérant que l'ordonnancement de ceux-ci à l'intérieur d'une ville est aléatoire [117, 53]. Les conclusions sont identiques sur l'amplification ou la

désamplification. D'autres enfin [37, 90], exhibent deux pics de résonance très proches l'un de l'autre en basses fréquences, induisant des battements dans la coda, avec des oscillateurs à un degré de liberté, répartis de façon périodique ou non, à la surface. Une classe ad hoc d'explications consiste à considérer les réponses d'ensembles plus imposants d'irrégularités de surface que des bâtiments tels que montagnes ou collines, [111, 186].

Ainsi, l'explication des destructions du séisme de Michoacan reste une question ouverte et semble s'orienter vers une complexification des études incorporant un nombre de plus en plus important d'inconnues et de phénomènes [67]. Cela ne facilite pas l'identification des paramètres et phénomènes réellement importants. **Une question n'avait pourtant pas encore été abordée de manière approfondie : celle de la propagation de l'onde entre l'hypocentre et la ville sur quelques 400km. Cette distance remarquablement importante nous renvoie à ce qui est communément appelé "effets régionaux".** Des études ont montré, [70, 67] que l'onde entrant dans la ville comportait déjà les caractéristiques (longue durée, battements) du séisme. D'une façon générale, il s'avère que la durée de la coda augmente linéairement avec la distance épicentrale dans le cas de milieu stratifié [126], et plus particulièrement, dans le cas de Mexico, et pour certaines localisations de l'épicentre, que l'amplitude et la durée augmentent largement à une centaine de kilomètres de la ville [70].

Il semble donc que l'explication réside dans une combinaison de différentes idées et une **interaction complexe entre elles, en particulier entre effets régionaux et effet site-ville**. Néanmoins, ces quelques exemples et tentatives d'explications, nous amènent à nous poser un certain nombre de questions.

- i) Quelle est la pertinence d'une sollicitation par une onde plane en incidence normale? Effectivement, y compris pour les séismes proches, il nous semble que la position de la source par rapport à la ville est telle que les ondes arrivant au site ne sont, en tout cas, pas en incidence normale, sauf lorsque les sources sont profondes.

- ii) Peut-on modéliser le bassin par une couche d'étendue infinie, ce qui permettrait de réaliser des études analytiques?

- iii) La modélisation d'une partie de la ville par un réseau est-elle réaliste?

- iv) Quelle est la proportion de l'effet "site-ville" par rapport aux "effets régionaux"?

- v) Quelle est la meilleure configuration pour étudier l'effet "site-ville"?

- vi) Quelle est la meilleure configuration pour étudier les "effets régionaux"?

Nous allons tenter, à travers ce manuscrit, d'apporter des réponses à ces différentes questions en étudiant des configurations de plus en plus "complexes". D'abord nous nous intéresserons aux "effets régionaux" liés à une configuration composée d'un nombre variable de couches, puis nous nous intéresserons à "l'effet site-ville" en adjoignant à une configuration à une couche, des blocs de caractéristiques géométriques variables. Ces différents problèmes, uniquement en 2D, sont tous relatifs à la propagation d'ondes élastiques (viscolastiques) dans des milieux complexes.

Cette étude est inscrite dans l'Action Concertée Incitative CATNAT soutenue par le Ministère de la Recherche. Cette ACI visait à caractériser le mouvement sismique en milieu urbain, en particulier l'interaction entre le sous-sol et un ensemble dense d'immeubles. Cette caractérisation a été menée conjointement sous les aspects numériques, théoriques et expérimentaux. En particulier, des mesures in situ ont été réalisées sur les sites de Volvi (Grèce) et à Vaux-en-Velin, initialement prévues à différentes échelles, locale, intermédiaire et globale. Les expérimentations à l'échelle locale consistaient en la caractérisation du champ rayonné et des vibrations induites par l'excitation active d'un bâtiment, celles à l'échelle intermédiaire, en l'excitation active d'un groupe de bâtiments, et enfin à l'échelle globale (c.à.d.)d'une ville excitée passivement (Mexico était pressentie). Une étude du sous-sol du site de Volvi a été menée dans [108].

1.4 Le modèle mathématique: l'equation d'ondes viscoélastiques

Lors d'un séisme, les ondes se propagent dans les couches supérieures de l'écorce terrestre qui sont des milieux solides, dissipatifs. La présente étude trouve l'essentiel de son fondement théorique dans la propagation des ondes dans des milieux élastiques (viscoélastiques). Nous allons développer ici les aspects fondamentaux des équations de la viscoélasticité en deux dimensions, [6, 45].

Dans un solide viscoélastique, homogène, linéaire et isotrope, occupant le domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$, le tenseur des contraintes $\sigma_{kl}(\mathbf{x},t)$ est relié au tenseur des déformations $\epsilon_{kl}(\mathbf{x},t)$ (où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine O jusqu'à un point générique du repère $Ox_1x_2x_3$, et t est la variable de temps) par la relation constitutive de Hooke-Cauchy :

$$\sigma_{kl}(\mathbf{x},t) = \lambda(t) \star_t \epsilon_{mm}(\mathbf{x},t)\delta_{kl} + 2\mu(t) \star_t \epsilon_{kl}(\mathbf{x},t),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

relation dans laquelle, la convention de sommation d'Einstein est implicite, δ_{kl} est le symbole de Kronecker, $\star_t$ est un produit de convolution temporel et $\epsilon_{kl}(\mathbf{x},t)$ est relié au déplacement particulaire (dont les éléments sont $u_k(\mathbf{x},t)$) par la relation (sous l'hypothèse des petites déformations),

$$\epsilon_{kl}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\left(u_{k,l}(\mathbf{x},t) + u_{l,k}(\mathbf{x},t)\right),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

où $u_{k,l}(\mathbf{x},t)$ est la dérivée partielle de $u_k(\mathbf{x},t)$ par rapport à la $l^{\text{ème}}$ coordonnée cartésienne x_l. De plus, $\lambda(t)$ est le module de compressibilité et $\mu(t)$ la rigidité (coefficients de Lamé), uniquement fonction de la position pour l'élasticité, mais également fonction du temps dans le cas dissipatif. **Cette dépendance temporelle est liée à un phénomène de mémoire des matériaux viscoélastiques, qui se traduit dans la relation de Hooke-Cauchy par les produits de convolution $\star_t$.**

Si l'on ajoute à l'équation constitutive (1.1), l'équation de conservation de la quantité de mouvement, nous obtenons le système,

$$\mathcal{P}_t = \begin{cases} \sigma_{kl}(\mathbf{x},t) = \lambda(t) \star_t \delta_{kl}\epsilon_{mm}(\mathbf{x},t) + 2\mu(t) \star_t \epsilon_{kl}(\mathbf{x},t) & ,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \rho\dfrac{\partial^2 u_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \sigma_{kl,k}(\mathbf{x},t) = -\rho f_l(\mathbf{x},t) & ,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.3}$$

où ρ est la densité et f_l est un terme source. De ce système, nous pouvons extraire l'équation des ondes $3D$, pour un matériau viscoélastique, homogène, linéaire et isotrope,

$$\rho\frac{\partial^2 u_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - (\lambda(t) + \mu(t)) \star_t u_{k,kl}(\mathbf{x},t) - \mu(t) \star_t u_{l,kk}(\mathbf{x},t) = -\rho f_l(\mathbf{x},t),\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.4}$$

Pour les problèmes à deux dimensions, la force et les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes d'une des coordonnées, ici x_3 (désormais $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Alors, l'équation du mouvement peut être écrite en considérant dans l'équation (1.4) $\dfrac{\partial}{\partial x_3} = 0$. Cette équation se scinde alors en deux systèmes découplés [6],

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_3(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \sigma_{3l,l}(\mathbf{x},t) = -\rho f_3(\mathbf{x},t) \quad , \forall l \in [1,2],\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad (i) \\ &\frac{\partial^2 u_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \sigma_{lk,k}(\mathbf{x},t) = -\rho f_l(\mathbf{x},t) \quad , \forall (k,l) \in [1,2],\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (ii) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Puisque nous considèrerons des problèmes relatifs à des milieux viscoélastiques $2D$ de dimensions finies ou semi-infinies, il convient, de façon à établir les équations d'ondes vérifiées par le champ de déplacement, de distinguer le cas des mouvements anti-plans et des mouvements dans le plan.

1.4.1 Les mouvements de cisaillement anti-plans

Les déplacements décrits par $u_3(\mathbf{x},t)$ sont appelés mouvements de cisaillement anti-plans. Le tenseur des contraintes correspondant est alors,

$$\sigma_{3l} = \mu(t) \star_t u_{3,l}\,(\mathbf{x},t) \tag{1.6}$$

L'équation du mouvement (1.4) se réduit donc à l'équation des ondes scalaires,

$$\frac{\partial^2 u_3(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - c_S^2(t) \star_t u_{3,ll}(\mathbf{x},t) = -f_3(\mathbf{x},t),\ \forall l \in [1,2],\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{1.7}$$

où $c_S(t) = \sqrt{\dfrac{\mu(t)}{\rho}}$. Ces ondes de cisaillement sont appelées ondes SH (Horizontally polarized Shear waves).

Remarque : Dans ce cas, c'est directement le déplacement $u_3(\mathbf{x},t)$ qui vérifie l'équation des ondes. Nous nous ramenons donc à la résolution d'un problème scalaire qui est fort ressemblant au problème acoustique (viscoacoustique) classique.

1.4.2 Les mouvements dans le plan

En ce qui concerne les déformations planes, toutes les variables sont indépendantes de la coordonnée x_3 et le déplacement suivant x_3 est nul. Alors la loi de Hooke-Cauchy s'écrit,

$$\begin{aligned} &\sigma_{kl}(\mathbf{x},t) = \lambda(t) \star_t u_{m,m}(\mathbf{x},t)\delta_{kl} + \mu(t) \star_t (u_{k,l}(\mathbf{x},t) + u_{k,l}(\mathbf{x},t))\ , \forall (m,k,l) \in [1,2],\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ &\sigma_{33}(\mathbf{x},t) = \lambda(t) \star_t u_{m,m},\ \forall m \in [1,2] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Alors l'équation du mouvement (1.4) devient,

$$\rho \frac{\partial^2 u_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \mu(t) \star_t u_{l,kk}(\mathbf{x},t) + (\lambda(t) + \mu(t)) \star_t u_{k,kl}(\mathbf{x},t) = \rho f_l(\mathbf{x},t),\ \forall (k,l) \in [1,2],\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{1.9}$$

Équation qui revient à imposer $u_3(\mathbf{x},t) = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_3} = 0$ dans (1.4).

Il est en général plus simple de considérer la décomposition du champ de déplacement en potentiels scalaire et vecteur, avec $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \nabla \cdot \phi(\mathbf{x},t) + \nabla \wedge \langle 0,0,\psi_3(\mathbf{x},t)\rangle$, de sorte que la solution peut être recherchée sous la forme,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c_P^2(t) \star_t \triangle\right) \phi(\mathbf{x},\mathbf{t}) = -F(\mathbf{x},t) & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c_S^2(t) \star_t \triangle\right) \psi_3(\mathbf{x},t) = -G_3(\mathbf{x},t) & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.10}$$

où $c_P(t) = \sqrt{\dfrac{\lambda(t)+2\mu(t)}{\rho}}$ est la vitesse des ondes de compression ($c_S(t)$ étant toujours la vitesse des ondes de cisaillement), et où $F(\mathbf{x},t)$ et $G_3(\mathbf{x},t)$ (unique composante non-nulle du vecteur $\mathbf{G}(\mathbf{x},t) = G_3(\mathbf{x},t)\mathbf{i}_3$) sont les termes sources tels que $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \nabla \cdot F(\mathbf{x},t) + \nabla \wedge \mathbf{G}(\mathbf{x},t)$.

Remarque : Il peut alors être intéressant d'introduire la quantité $\Pi(t) = \lambda(t) + 2\mu(t)$, [141], de façon à nous ramener à une variable directement liée aux ondes de compression telle que $c_P(t) = \sqrt{\dfrac{\lambda(t)+2\mu(t)}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{\Pi(t)}{\rho}}$.

Dans le cas des mouvements dans le plan, ce sont les potentiels scalaire et vecteur qui vérifient l'équation des ondes scalaires. Les deux types d'ondes cohabitent, c'est-à-dire ondes de compression appelées ondes P (Pressure waves), et ondes de cisaillement appelées ondes SV (Vertically polarized Shear waves).

1.4.3 Les constantes matérielles décrivant un matériau viscoélastique

Dans tout le manuscrit, la transformée de Fourier d'une quantité $a(\mathbf{x},t)$, notée $a(\mathbf{x},\omega)$ est définie comme,

$$a(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\mathbf{x},\omega) \exp(-\mathrm{i}\omega t)\, d\omega \tag{1.11}$$

La résolution temporelle des équations, (1.7) et (1.9) ou (1.10) fera l'objet du chapitre 2. Dans le domaine fréquentiel, les équations (1.7) et (1.10) prennent la forme de l'équation d'Helmholtz dont la solution est la fonction de Green, si la sollicitation est délivrée par une source cylindrique localisée à $\mathbf{x^s} = (x_1^s, x_2^s)$, vérifiant

$$\begin{gathered} \left(\nabla \cdot \nabla + k^2(\omega)\right) G(\mathbf{x},\mathbf{x^s},\omega) = f(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x^s}) \\ \text{et la condition de rayonnement à l'infini} \end{gathered} \tag{1.12}$$

où $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x^s})$ est le symbole de Dirac. La condition de rayonnement à l'infini exprime le fait que les ondes vont se propager de la source vers l'infini et non l'inverse.

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x^s},\omega) \approx \frac{\exp(\mathrm{i}k(\omega)\|\mathbf{x}-\mathbf{x^s}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x^s}\|^{\frac{1}{2}}};\ \|\mathbf{x}\| \to \infty \tag{1.13}$$

sachant que $k(\omega)$ est le nombre d'onde tel que $k(\omega) = \dfrac{\omega}{c(\omega)}$, où $c(\omega) = c_S(\omega)$ pour les ondes de cisaillement et $c(\omega) = c_P(\omega)$ pour les ondes de compression. Le nombre d'onde est pour un milieu élastique, homogène linéaire, une quantité réelle dépendant linéairement de la fréquence, alors que

pour un milieu dissipatif, cette quantité est complexe et n'admet pas de dépendance linéaire vis-à-vis de la fréquence ω.

La résolution de l'équation (1.12), bien que classique, présente un aspect particulier dans le cas dissipatif, car il ne faut pas utiliser le **principe de la phase stationnaire** mais la **méthode du col**, pages 735-739 de [54] pour obtenir la formulation asymptotique permettant de choisir la bonne formule. Finalement, la fonction de Green, sous sa forme intégrale en coordonnées cartésiennes, est,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x^s}, \omega) = G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x^s}, \omega) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}\left(\kappa_1 \left(x_1 - x_1^s\right) + \kappa_2 \left| x_2 - x_2^s \right|\right)\right) \frac{d\kappa_1}{\kappa_2} \tag{1.14}$$

avec $\kappa_2 = \sqrt{k^2(\omega) - \kappa_1^2}$, tel que $\kappa_1 \in \mathbb{R}$ et $\kappa_2 \in \mathbb{C}$, tel que $\Re\left(\kappa_2\right) \geqq 0$ et $\Im\left(\kappa_2\right) \geqq 0$ de façon à vérifier la condition de rayonnement à l'infini (1.13).

$k(\omega) = k_r(\omega) + \mathrm{i}k_i(\omega)$, où par convention $k_r(\omega) \in \mathbb{R}$, tel que $k_r(\omega) \geqq 0$, et $k_i(\omega) \in \mathbb{R}$, tel que $k_i(\omega) \geqq 0$.
La relation entre la partie réelle et la partie imaginaire du nombre d'onde $k(\omega)$ prend la forme,

$$\frac{1}{\alpha(\omega)} = \frac{\Re\left(k(\omega)\right)}{\Im\left(k(\omega)\right)} \tag{1.15}$$

où $\alpha(\omega)$ est appelé atténuation, si bien que,

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k_r(\omega)\left(1 + \mathrm{i}\alpha(\omega)\right) \quad (i) \\ &= \frac{\omega}{c(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}}} \quad (ii) \end{aligned} \tag{1.16}$$

où $c(\omega)$ est la vitesse de phase, $M(\omega)$ est le module de rigidité $\mu(\omega)$ dans le cas des ondes de cisaillement ou $\Pi(\omega) = \lambda(\omega) + 2\mu(\omega)$ dans le cas des ondes de compression et ρ la masse volumique.

Remarque : Dans [8], $\alpha(\omega)$ est défini comme $\alpha_{Aki}(\omega) = k_r(\omega)\alpha(\omega)$ si bien que les relations sont légèrement différentes.

Oublions dans un premier temps les dépendances de α, c, et M par rapport à la fréquence. En se référant à la formule (ii) de l'équation (1.16), seule la quantité M peut être complexe. Nous pouvons alors écrire,

$$M = M_r - \mathrm{i}M_i; \text{ avec pour l'instant } M_r \geqq 0 \tag{1.17}$$

de façon à garder l'aspect de positivité du module. Introduisant alors (1.17) dans (1.16), nous obtenons,

$$k = \omega \left(\frac{M_r}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \mathrm{i}\frac{M_i}{M_r}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.18}$$

Nous supposons maintenant, comme c'est généralement le cas pour des matériaux modérément atténuants, que la quantité $\left|\frac{M_i}{M_r}\right| << 1$, si bien que le développement en série de Taylor de (1.18) conduit à,

$$k \approx \frac{\omega}{c_r}\left(1 + \mathrm{i}\frac{M_i}{2M_r}\right) \tag{1.19}$$

expression dans laquelle nous posons $c_r = \left(\frac{M_r}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}}$. En comparant les équations (1.18) et (1.16), nous avons,

$$M = M_r - \mathrm{i}M_i; \text{ avec } M_r \geqq 0 \text{ et } M_i \geqq 0 \tag{1.20}$$

Remarque : Cette relation implique que le module de rigidité prend la forme $\mu = \mu_r - \mathrm{i}\mu_i$, avec $\mu_r \geqq 0$ et $\mu_i \geqq 0$ et que $\Pi = \Pi_r - \mathrm{i}\Pi_i$, avec $\Pi_r \geqq 0$ et $\Pi_i \geqq 0$. La seule chose qui soit imposée sur la partie imaginaire du coefficient $\lambda = \lambda_r - \mathrm{i}\lambda_i$, tel que $\lambda_r \geqq 0$ (de façon à conserver l'aspect positif de ce coefficient pour un matériau élastique) est $\lambda_i \geqq -2\mu_i$, c'est-à-dire que la partie imaginaire de ce coefficient peut théoriquement être négative.

En géophysique, nous préférons souvent à la relation (1.15) reliant la partie réelle à la partie imaginaire du module M,

$$Q = \frac{M_r}{M_i} \tag{1.21}$$

où Q est le facteur de qualité, relié à α par la relation quadratique,

$$\frac{\mathrm{i}}{Q} = \frac{\alpha\,(\alpha - 2\mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i}\alpha)^2} \tag{1.22}$$

La relation (1.21) est nommée, improprement dans [63], relation de Kramers-Kronig [8, 36]. Au mieux elle est la conséquence d'une telle relation, celle-ci exprimant effectivement une relation entre la partie réelle et la partie imaginaire d'une quantité mais sous forme intégrale.

La dernière quantité à considérer est la vitesse complexe. Écrivons $c = c_r - \mathrm{i}c_i$, avec $c_r \geqq 0$ définie par $c_r = \left(\frac{M_r}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}}$ puisque la vitesse d'une onde dans un matériau non-atténuant est une quantité positive. Alors en remplaçant dans (1.15), nous obtenons,

$$k = \frac{\omega\,(c_r + \mathrm{i}c_i)}{\|c\|^2} \tag{1.23}$$

Équation de laquelle nous déduisons que :

$$c = c_r - \mathrm{i}c_i; \text{ avec } c_r \geqq 0 \text{ et } c_i \geqq 0 \tag{1.24}$$

Nous venons d'écrire les relations qui impliquent une décroissance de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation dans un milieu M, k étant complexe, phénomème communément appelé **atténuation**. Or, considérer, comme nous venons de le faire, les variables physiques du problème (c.à.d c, M, ρ), toutes indépendantes de la fréquence, implique un problème de causalité [8] et conduit à la non-conservation de l'énergie d'après [71]. Une façon d'assurer cette conservation est de prendre en compte la dépendance de certains paramètres vis-à-vis de la fréquence ω, phénomème communément appelé **dispersion**. Le phénomène physique qui englobe l'**atténuation** et la **dispersion**, est appelé **dissipation**.

La seule variable physique qu'il semble a priori opportun de considérer dépendante de la fréquence est $M(\omega)$ ($c(\omega)$ dépendant de fait de ω), alors que la densité ρ est, elle, toujours considérée indépendante de la fréquence. Ceci conduit à $\alpha(\omega)$ et $Q(\omega)$. Pour autant, il faut préciser qu'un facteur de qualité Q peut être indépendant de la fréquence, en première approximation et sur certaines plages

de fréquences, alors que l'atténuation $\alpha(\omega)$ est nécessairement dépendante de ω.

Les valeurs de ces paramètres sont alors le plus souvent données à une fréquence de référence. M étant initialement un paramètre mécanique, sa définition est donnée de façon statique (relaxée en dynamique), c'est-à-dire à $\omega = 0$, si bien que nous avons,

$$\begin{aligned} M(\omega) = M_0 h(\omega) = M_R h(\omega) \quad &\rightarrow c(\omega) = \sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}} = \sqrt{\frac{M_R}{\rho} h(\omega)} = c_R \sqrt{h(\omega)} \\ &\rightarrow k(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} = \frac{\omega}{c_R} \left(h(\omega)\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.25}$$

où, $h(\omega)$ est une fonction complexe de la fréquence, telle que $\Re\left(h(\omega)\right) \geqq 0$ et $\Im\left(h(\omega)\right) \geqq 0$.

En géophysique, il est souvent considéré que l'aspect dissipatif des matériaux est correctement décrit sur une plage de fréquences donnée et en première approximation, par un facteur de qualité constant $Q(\mathbf{x})$ indépendant de la fréquence ou "quasi-constant" pour assurer la causalité [106].

1.4.4 Modèle de module viscoélastique pour la propagation à facteur de qualité $Q(\mathbf{x})$ constant

Pour un facteur de qualité constant, les pertes sur un cycle de déformation sinusoïdale sont indépendantes de l'échelle temporelle des oscillations. Kjartansson, [109], postule une fonction de fluage $\Psi(t)$ (déformation induite par un échelon unitaire en contrainte) proportionnelle à $t^{2\gamma}$ (où t est la variable de temps) et montre que cette forme conduit à l'indépendance du facteur de qualité par rapport à la fréquence. La fonction de fluage qu'il considère prend la forme,

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{1}{M_{ref}\Gamma\left(1+2\gamma\right)} \left(\frac{t}{t_{ref}}\right)^{2\gamma} \quad && t > 0 \\ \Psi(t) &= 0 && t < 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

où Γ est la fonction gamma qui est proche de l'unité, t_{ref} est un temps de référence et M_{ref} a la dimension d'un module. Cette expression conduit à une expression du module $M(\omega)$ de la forme

$$\begin{aligned} M(\omega) &= M_{ref} \left(\frac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{2\gamma} \\ &= M_{ref} \left|\frac{\omega}{\omega_{ref}}\right| \exp\left(-\mathrm{i}\pi\gamma \mathrm{sgn}\left(\omega\right)\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

où sgn est la fonction signe. Or, le facteur de qualité est relié à la phase $\Phi(\omega)$ entre la contrainte et la déformation, c'est-à-dire à la phase de $M(\omega)$ par la relation,

$$\frac{1}{Q} = \left|\tan\left(\Phi(\omega)\right)\right| \tag{1.28}$$

Pour un facteur de qualité constant, la phase $\Phi(\omega)$ est également indépendante de la fréquence, notée Φ. Alors, en identifiant Φ dans l'expression (1.27), il vient

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{Q}\right) \tag{1.29}$$

si bien que l'expression finale de $M(\omega)$ pour une facteur de qualité Q indépendant de la fréquence est

$$M(\omega) = M_{ref} \left(\frac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}} \right)^{\frac{2}{\pi} \arctan\left(Q^{-1}\right)} \tag{1.30}$$

Cette formule analytique servira à comparer les différentes méthodes d'introduction de la dissipation dans les codes temporels, à valider les méthodes numériques developées pour la résolution des équations d'ondes et à réaliser la quasi-totalité des calculs analytiques de ce manuscrit.

Une autre approche de cette formule, [45], consiste à considérer que le module $M(\omega)$ est complètement déterminé par deux paramètres, la vitesse de phase considérée à la fréquence ω_{ref},

$$v_p = \Re \left(\sqrt{\frac{M(\mathbf{x},\omega)}{\rho}} \right) = \sqrt{\frac{\mu_{ref}}{\rho}} \left[\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \right]^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{ref}} \right)^{\gamma} \tag{1.31}$$

et le facteur de qualité Q.

Deux cas seront considérés dans notre manuscrit: le cas des ondes SH et le cas des ondes P-SV. La résolution temporelle des équations dans le cadre de matériaux viscoélastiques est difficile du fait des produits de convolution. Ne perdons pas de vue pour autant que nous aurons à traiter des problèmes qui n'admettent pas de solutions analytiques, et/ou qui se révèlent "gourmands" en temps de calcul. Dans cette optique, il apparaît nécessaire de disposer de codes de calcul qui nous permettrons de réaliser des simulations.

Nous disposons initialement de deux codes éléments finis :

- FLUID 2D qui calcule la solution de l'équation d'ondes acoustiques 2D pour un milieu hétérogène isotrope avec des fissures de géométries complexes. Ce code à été développé au LMA par C. Tsogka.

- ELAST 2D qui calcule la solution de l'équation d'ondes élastiques P-SV pour un milieu hétérogène anisotrope avec des fissures de géométrie complexe. Ce code nous a été gracieusement prêté et a été réalisé à l'INRIA [179].

Nous avons modifié ces deux codes pour tenir compte de l'aspect dissipatif des matériaux dans les chapitres 1 et 2 de la partie I de la thèse. Dans un souci de clarté nous allons nous intéresser dans le corps de notre manuscrit à un problème scalaire proche de celui vérifié par les ondes SH: le problème de la propagation des ondes viscoacoustiques. Nous allons détailler sur ce problème "simple", la méthodologie que nous emploierons pour prendre en compte la dissipation dans les différents codes de propagation dont nous disposons.

Première partie

La propagation des ondes dans des milieux dissipatifs

Chapitre 1

La propagation des ondes dans les milieux viscoacoustiques

Nous proposons une méthode numérique pour la résolution de l'équation d'ondes **viscoacoustiques** dans le **domaine temporel**. Nous analysons et comparons plusieurs méthodes qui permettent de rendre compte des phénomènes de **dissipation** (atténuation et dispersion d'une onde) de façon à dégager la méthode la plus adaptée à nos applications. Nous montrons ensuite la façon dont cette méthode peut être implémentée dans un code **Éléments-Finis**, couplé avec la méthode des couches parfaitement adaptées **PML (Perfectly Matched Layer)** et avec la méthode des **Domaines Fictifs**. Le matériel de ce chapitre a donné lieu aux publications [80] et [79].

Introduction

Les matériaux réels dispersent et atténuent les ondes, [71]. Notre but, ici, est de développer une méthode numérique pour modéliser de tels phénomènes. Dans un premier temps, nous allons étudier un problème modèle : celui de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu linéaire et dissipatif occupant un domaine Ω, dénomination générale des milieux atténuants et dispersifs. Ainsi, nous nous intéressons à la résolution, en temps, de l'équation des ondes viscoacoustiques qui peut être écrite sous la forme d'un système au premier ordre en temps,

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \nabla p(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) & \in \Omega\times]0,T] \\ p(\mathbf{x},t) = \mu(\mathbf{x},t) \star_t \nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) & \in \Omega\times]0,T] \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\star_t$ est un produit de convolution temporel. Dans ce système, la première équation est la loi de conservation de la quantité de mouvement et la seconde, la relation constitutive. Cette dernière prend la forme d'un produit de convolution, le **module viscoacoustique $\mu(\mathbf{x},t)$ dépendant du temps**. Ainsi, l'incorporation d'une loi de dissipation demande des calculs significatifs. La façon usuelle de contourner cette difficulté est d'approcher le module viscoacoustique, dans le domaine fréquentiel, par une fonction rationnelle de la fréquence, [58, 63, 42, 32]. Cela conduit au remplacement de l'intégrale relative à la convolution par un ensemble de variables, communément appelées variables de mémoire. Celles-ci satisfont chacune une équation différentielle qui peut être discrétisée simplement en temps.

Différentes méthodes sont proposées dans la littérature pour incorporer des **lois de dissipation**

réalistes (c.à.d. un facteur de qualité indépendant ou faiblement dépendant de la fréquence, sur une plage de fréquences donnée) dans des méthodes de résolution dans le domaine temporel, [58, 63, 42, 32, 43, 44]. Nous nous pencherons plus particulièrement sur les méthodes proposées dans [58, 63, 32]. Ces méthodes utilisent toutes une approximation du module viscoacoustique, dans le domaine fréquentiel, par une fonction rationnelle de la fréquence. Le fondement de la première approche réside dans l'**approximation de Padé**. Les **coefficients** résultants de l'approximation sont alors **connus analytiquement**. Les résultats numériques obtenus à l'aide de cette méthode montrent qu'elle ne fournit une bonne approximation que lors d'une **propagation sur des distances relativement courtes** (par rapport à la longueur d'onde). Le fondement de la seconde approche réside dans le modèle rhéologique appelé **éléments de Maxwell généralisés** ("generalized Maxwell body" en anglais), qui fournit une interprétation physique des coefficients relatifs à l'approximation. Cette méthode donne lieu à des résultats numériques tout à fait convenables, y compris lors de la **propagation** d'une onde **sur de grandes distances**, mais certains paramètres (les **fréquences de relaxation**) restent **déterminés empiriquement**. Le fondement de la troisième méthode (**"τ-method"**) réside dans l'observation de la **faible variation des valeurs des poids d'un élément de Maxwell à l'autre**. Par conséquent, elles peuvent être considérées **constantes** dans le cas où le facteur de qualité est indépendant de la fréquence, et pour des matériaux faiblement dissipatifs. Cette méthode fournit également des résultats numériques tout à fait convenables mais **requiert un choix empirique d'un nombre plus important de paramètres**.

Les méthodes précédemment citées fournissent des résultats satisfaisants (dans leur cadre d'application) pour des matériaux faiblement atténuants, mais ces résulats se dégradent vite pour des matériaux fortement atténuants. Ce cas est considéré dans un article récent, [10], dans lequel les auteurs proposent des méthodes analytiques de calcul de l'approximation optimale par une fonction rationnelle lorsque le facteur de qualité est indépendant de la fréquence. Ils proposent donc une généralisation de l'algorithme présenté dans [63] qui fournit des résultats satisfaisants lorsqu'une onde se propage dans un matériau fortement dissipatif, avec un facteur de qualité constant sur la plage de fréquences considérée.

Après un bref exposé des fondements théoriques de la propagation d'une onde dans un matériau viscoacoustique, nous décrivons les approximations proposées dans [58], [63], et [32].

En considérant la propagation d'une onde sur de grandes distances, nous testons la performance des différentes approches et montrons que la méthode fournissant un compromis correct entre nombre d'inconnues, précision et simplicité de mise en oeuvre est celle proposée dans [63]. Nous choisissons donc cette méthode pour l'approximation du module viscoacoustique, en modifiant quelque peu la façon dont les fréquences de relaxation sont déterminées en fonction du spectre de l'onde incidente.

Nous incorporons alors cette approximation dans une formulation vitesse-pression du problème viscoacoustique. Le choix d'un système d'équations du premier ordre en temps, au lieu du plus classique système du second ordre, est motivé par l'emploi de la méthode des **domaines fictifs** et de la méthode des **couches parfaitement adaptées**.

La terminologie "domaines fictifs" fut initialement introduite dans [151], article dans lequel la solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique dans un domaine à géométrie complexe est considérée. L'idée principale de cette méthode consiste à remplacer le problème d'origine par un problème équivalent pour lequel une solution est recherchée dans un domaine plus large (contenant

le domaine initial) à géométrie simple. L'emploi des multiplicateurs de Lagrange dans le contexte de cette méthode fut, lui, introduit dans [61]. Depuis, cette méthode a été utilisée dans différentes applications pour résoudre des problèmes comportant des géométries complexes [75, 76, 73, 74], et en particulier pour le problème de la propagation d'ondes [55, 72, 138, 26]. Pour la propagation d'une onde sismique, nous appliquons cette méthode pour modéliser la surface de la terre, lieu où le champ obéit à une condition de surface libre. Les solutions sont recherchées dans un domaine élargi de forme simple, indépendant de la complexité de la géométrie du problème initial et la condition aux limites est imposée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Dans ces conditions, la solution regroupe deux types d'inconnues : les inconnues étendues au domaine élargi et l'inconnue auxiliaire liée à la géométrie complexe de la condition de surface libre. L'avantage majeur de cette méthode est que le maillage pour le calcul des inconnues étendues au domaine élargi peut être choisi indépendamment de la géométrie du bord du domaine.

La méthode des couches parfaitement adaptées (PML pour perfectly matched layer en anglais) fut introduite dans [29, 30] pour la résolution des équations de Maxwell et est maintenant largement utilisée pour simuler la propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux non-bornés, [169, 181, 136]. Elle a été appliquée au cas de la propagation des ondes acoustiques en milieu anisotrope, [24], et isotrope, [93], et des ondes élastiques en milieu anisotrope [56, 25]. Cette méthode consiste en la conception d'une couche absorbante, appelée "parfaitement adaptée", ayant la propriété de ne générer aucune réflexion à l'interface entre le milieu de propagation et le milieu absorbant artificiel. Un coefficient d'amortissement très important peut alors être considéré dans cette couche et par conséquent l'épaisseur de cette dernière peut être choisi relativement faible alors qu'elle réalise une absorption quasi-parfaite des ondes. Nous appliquons ici cette technique aux cas des ondes viscoacoustiques.

Un autre avantage d'une formulation du premier ordre est qu'elle est d'une plus grande facilité à implémenter dans le cas de milieux hétérogènes puisqu'elle ne nécessite pas de dérivation spatiale des paramètres physiques caractéristiques. Pour discrétiser en espace cette formulation, nous utilisons une méthode éléments finis mixtes qui est une modification de la méthode proposée dans [25]. Plus précisément, dans [25], les auteurs conçoivent de nouveaux éléments finis mixtes, appelés éléments $Q_{k+1}^{\mathrm{div}} - Q_k$ et inspirés par la seconde famille d'éléments de Nédélec [124] qui sont compatibles avec la condensation de masse et permettent ainsi l'obtention d'un schéma explicite en temps. Une étude de convergence non-conventionnelle de ces éléments est menée dans [25]. Cependant, des résultats numériques obtenus récemment, [27], montrent que lorsque ces éléments sont couplés à la méthode des domaines fictifs, les résultats ne sont pas satisfaisants. C'est pourquoi, nous utilisons ici les éléments $Q_{k+1}^{\mathrm{div}} - P^{k+1}$ pour lesquels la convergence de la méthode des domaines fictifs a été obtenue, [27].

Enfin pour montrer l'efficacité et la robustesse de la méthode, nous présentons des résultats numériques. En particulier, résultats numériques et semi-analytiques sont comparés et nous obtenons un bon accord entre ces deux formulations.

1.1 La relation constitutive pour la propagation des ondes viscoacoustiques

Oublions dans un premier temps, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement et intéressons-nous à la relation constitutive. Dans le domaine fréquentiel, cette relation constitutive entre la pression $p(\mathbf{x},\omega)$ et le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$ pour un matériau linéaire, isotrope et viscoacoustique occupant un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ prend la forme,

$$p(\mathbf{x},\omega) = \mu(\mathbf{x},\omega)\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},\omega). \tag{1.2}$$

où $\mu(\mathbf{x},\omega)$ est le module viscoacoustique qui est **dépendant de la fréquence** et est **complexe**. Pour faire le parallèle avec l'acoustique "classique", $\mu(\mathbf{x},\omega) = \frac{1}{\chi(\mathbf{x},\omega)}$, où $\chi(\mathbf{x},\omega)$ est la compressibilité isentropique.

L'aspect dissipatif d'un matériau est souvent décrit par le facteur de qualité $Q(\mathbf{x},\omega)$ par l'intermédiaire d'une relation de Kramers-Kronig. Il est défini comme le rapport de la partie réelle sur la partie imaginaire du module viscoacoustique et exprime de façon mathématique la manière dont un matériau atténue (et dissipe) une onde. Ce facteur correspond à la distance, exprimée en nombre de longueur d'onde, le long de laquelle une onde s'est propagée avant que son amplitude n'ait décru de $\mathrm{e}^{-\pi}$.

$$Q(\mathbf{x},\omega) = \left| \frac{\Re\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Im\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)} \right| = \left| \frac{1}{\tan\left(\Phi(\mathbf{x},\omega)\right)} \right| \tag{1.3}$$

où $\Phi(\mathbf{x},\omega)$ est la phase de $\mu(\mathbf{x},\omega)$.

Pour des applications en sismologie, $Q(\mathbf{x},\omega)$ est souvent supposé indépendant de la fréquence ou très peu dépendant de la fréquence, de sorte que $Q(\mathbf{x},\omega) = Q(\mathbf{x})$ sur une plage de fréquences donnée. Ainsi, plus le facteur de qualité (souvent représenté par un entier, i.e. valeur "ronde") du milieu considéré est petit, plus le milieu est dissipatif, et inversement.

Dans le domaine temporel, la relation constitutive (I.1.2) est exprimée à l'aide d'un opérateur de convolution temporel, noté $\star_t$, comme suit,

$$p(\mathbf{x},t) = \mu(\mathbf{x},t) \star_t \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(\mathbf{x},t-\tau)\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},\tau)d\tau \tag{1.4}$$

La discrétisation de cette équation présente une difficulté puisqu'elle impose de sauvegarder la totalité de l'histoire des variables $\mu(\mathbf{x},t)$ et $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (c.à.d. à chaque pas de temps) et ce, à chaque point du maillage spatial, de façon à réaliser le produit de convolution. Cette opération n'est pas réalisable en pratique du fait de l'espace de stockage qu'elle nécessiterait. Une façon de contourner ce problème est d'approcher le module viscoacoustique (dans le domaine fréquentiel) par une fonction rationnelle de la fréquence avant de revenir dans le domaine temporel, comme il l'est proposé dans [58, 63, 42, 32]. Dans cette optique, il est opportun d'introduire la fonction de relaxation $\mathrm{R}(\mathbf{x},t)$, telle que $\mu(\mathbf{x},t) = \dfrac{\partial \mathrm{R}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$, dont une représentation de l'allure générale est donnée en figure I.1.1. La fonction de relaxation est la contrainte résultant d'un échelon de déformation et est reliée à la fonction de fluage par la relation,

$$R(t)\Psi(t) = \delta(t) \tag{1.5}$$

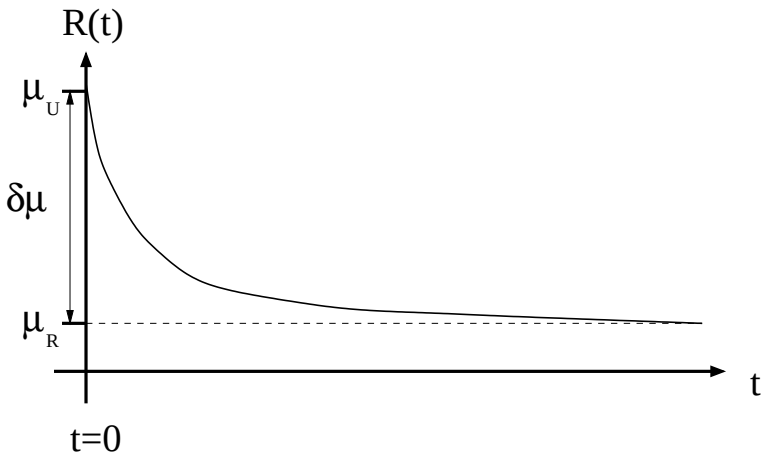


FIG. 1.1 – *Allure générale de la fonction de relaxation* $R(\mathbf{x},t)$

$\mathrm{R}(\mathbf{x},t)$ est alors défini telle que,

$$\mathrm{R}(\mathbf{x},t) = \left(\mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \int_0^{+\infty} r(\mathbf{x},\omega')\mathrm{e}^{-\omega' t} d\omega'\right) \mathrm{H}(t), \tag{1.6}$$

où $\mu_R(\mathbf{x})$ est le module relaxé,

$$\mu_R(\mathbf{x}) = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{R}(\mathbf{x},t), \tag{1.7}$$

$\mu_U(\mathbf{x})$ le module non-relaxé,

$$\mu_U(\mathbf{x}) = \mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \mathrm{R}(\mathbf{x},t), \tag{1.8}$$

$r(\mathbf{x},\omega')$ le spectre de relaxation normalisé satisfaisant la relation de normalisation,

$$\int_0^{+\infty} r(\mathbf{x},\omega')d\omega' = 1, \tag{1.9}$$

et $\mathrm{H}(t)$ la fonction Heaviside, telle que

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geqq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Alors, $\mu(\mathbf{x},t)$ a pour expression

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathrm{R}(\mathbf{x},t)}{\partial t} &= \left(\mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x})\right)\delta(t) - \delta\mu(\mathbf{x}) \left(\int_0^{+\infty} \omega' r(\mathbf{x},\omega')\mathrm{e}^{-\omega' t} d\omega'\right) \mathrm{H}(t) \\ &= \mu_U(\mathbf{x})\delta(t) - \delta\mu(\mathbf{x}) \left(\int_0^{+\infty} \omega' r(\mathbf{x},\omega')\mathrm{e}^{-\omega' t} d\omega'\right) \mathrm{H}(t) \end{aligned} \tag{1.11}$$

et l'introduction de (I.1.11) dans (I.1.2) donne,

$$p(\mathbf{x},t) = \mu_U(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) - \delta\mu(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{t} \int_0^{+\infty} \omega' r(\mathbf{x},\omega') e^{-\omega'(t-\tau)} \nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},\tau) d\omega' d\tau. \tag{1.12}$$

C'est alors le spectre de relaxation normalisé $r(\mathbf{x},\omega')$ qui est approché.

1.2 Approximation du module viscoacoustique $\mu(\mathbf{x},\omega)$

Nous approchons le spectre de relaxation normalisé $r(\mathbf{x},\omega')$ par L pics d'amplitude $\alpha_l(\mathbf{x})$, $l \in [1,2,..,L]$, aux fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x})$, $l \in [1,2,..,L]$,

$$r(\mathbf{x},\omega) = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l(\mathbf{x})\delta(\omega - \omega_l(\mathbf{x}))\,; \text{ avec la relation de normalisation } \sum_{l=1}^{L} \alpha_l(\mathbf{x}) = 1, \tag{1.13}$$

Alors, l'équation (I.1.6) peut-être approximée par,

$$\mathrm{R}(\mathbf{x},t) \approx \mathrm{R}_L(\mathbf{x},t) = \left(\mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^{L} \alpha_l(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\omega_l(\mathbf{x})t}\right)\mathrm{H}(t), \tag{1.14}$$

Puisque nous ne disposons que du facteur de qualité $Q(\mathbf{x},\omega)$ (donnée fréquentielle) pour représenter le caractère dissipatif du milieu considéré, il est plus simple de rester dans le domaine fréquentiel pour approximer $\mu(\mathbf{x},\omega)$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{x},\omega) \approx \mu_L(\mathbf{x},\omega) &= -\mathrm{i}\omega \mathrm{R}_L(\mathbf{x},\omega) \\
&= -\mathrm{i}\omega \left(\frac{\mu_R(\mathbf{x})}{-\mathrm{i}\omega} - \delta\mu(\mathbf{x}) \sum_{l}^{L} \frac{\alpha_l(\mathbf{x})}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})}\right) \\
&= \mu_R(\mathbf{x}) \left(1 + \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})} \sum_{l}^{L} \frac{\alpha_l(\mathbf{x})\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})}\right)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Une façon équivalente de procéder consiste à prendre directement la transformée de Fourier de (I.1.11),

$$\mu(\mathbf{x},\omega) = \mu_U(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \int_0^{+\infty} \frac{\omega' r(\mathbf{x},\omega')}{\mathrm{i}\omega - \omega'} d\omega' \tag{1.16}$$

Introduisant ensuite l'approximation (I.1.13), nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{x},\omega) \approx \mu_L(\mathbf{x},\omega) &= \mu_U(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^{L} \frac{\omega_l(\mathbf{x})\alpha_l(\mathbf{x})}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})} \\
&= \mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^{L} \frac{\omega_l(\mathbf{x})\alpha_l(\mathbf{x})}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})} \\
&= \mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^{L} \left(\alpha_l(\mathbf{x}) + \frac{\omega_l(\mathbf{x})\alpha_l(\mathbf{x})}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})}\right) \\
&= \mu_R(\mathbf{x}) \left(1 + \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})} \sum_{l}^{L} \frac{\alpha_l(\mathbf{x})\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})}\right)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Appelons alors

$$y_l(\mathbf{x}) = \frac{\delta\mu(\mathbf{x})\alpha_l(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})} : \text{avec la relation de normalisation } \sum_{l=1}^{L} y_l(\mathbf{x}) = \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})}, \tag{1.18}$$

il vient,

$$\mu(\mathbf{x},\omega) \approx \mu_L(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_l^L \frac{y_l(\mathbf{x})\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})}\right) \tag{1.19}$$

Notons que l'équation (I.1.19) peut être obtenue si nous supposons que $\mu(\mathbf{x},\omega)$ est approché par une fonction rationnelle de $\mathrm{i}\omega$,

$$\mu(\mathbf{x},\omega) \approx \mu_L(\mathbf{x},\omega) = \frac{P_L(\mathbf{x},\omega)}{N_L(\mathbf{x},\omega)} \tag{1.20}$$

avec $N_L(\mathbf{x},\omega)$ et $P_L(\mathbf{x},\omega)$ deux polynômes de degré L en $\mathrm{i}\omega$, dont les coefficients dépendent de $\mathbf{x}$. L'équation (I.1.19) peut être interprétée comme l'expansion de l'équation (I.1.20) par des fractions partielles, [63]. Ainsi approchée par une fonction rationnelle de la fréquence, l'expression du module viscoacoustique est équivalente à une discrétisation du spectre de relaxation normalisé.

Il convient ici de comptabiliser les données du problème, au nombre de trois pour un milieu viscoacoustique: la densité $\rho(\mathbf{x})$, la vitesse relaxée $c_R(\mathbf{x})$, qui sont deux constantes de la fréquence, et le facteur de qualité $Q(\mathbf{x},\omega)$. Il est aisé de montrer, section 1.4.3, que

$$c_R(\mathbf{x}) = TF\left[\lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{\mu(\mathbf{x},t)}{\rho(\mathbf{x})}}\right] = \lim_{\omega\to 0}\sqrt{\frac{\mu(\mathbf{x},\omega)}{\rho(\mathbf{x})}} = \sqrt{\frac{\mu_R(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})}}. \tag{1.21}$$

Remarque : Deux cas sont à distinguer selon l'application désirée. Pour les problèmes en sismique (viscoélasticité), où seules les ondes de compression sont prises en compte, c'est la vitesse relaxée qui sera considérée, alors que pour les problèmes en milieu fluide, c'est la vitesse non-relaxée qui sera, elle, considérée. Nous pouvons alors retrouver l'expression de c_R à partir de la donnée de c_U à l'aide de la relation

$$c_U = \sqrt{\frac{\mu_U}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_R\left(1+\sum_{l=1}^L y_l\right)}{\rho}} = c_R\sqrt{1+\sum_{l=1}^L y_l}. \tag{1.22}$$

Effectivement, la vitesse de phase a une valeur plus grande dans un solide viscoélastique (et varie, dans le cas général, avec la fréquence) que dans un solide élastique, alors qu'elle a une valeur moins grande dans un fluide visqueux que dans un fluide non-visqueux.

Ainsi, les seules inconnues de l'équation (I.1.19) sont les fréquences de relaxation ω_l, $\forall l \in [1,L]$, les poids y_l, $\forall l \in [1,L]$, et l'ordre de l'approximation L, dont la détermination est liée à la donnée du facteur de qualité (au travers de la relation (I.1.3)) et à nos applications numériques.

Il est naturel de rechercher une approximation du module viscoacoustique qui réalise le meilleur compromis entre le nombre d'inconnues et la précision du résultat.

1.2.1 Approximation de Padé

L'emploi de l'approximation de Padé pour modéliser les phénomènes dissipatifs fut proposé dans [58]. Nous allons présenter brièvement dans ce qui suit cette méthode. Posons $z = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}$ et introduisons $\chi(\mathbf{x},z)$, telle que,

$$\chi(\mathbf{x},z) = \int_0^{+\infty} \frac{\omega' r(\mathbf{x},\omega')}{1-\omega' z} d\omega' \tag{1.23}$$

L'équation (I.1.16) s'écrit,

$$\mu(\mathbf{x},\omega) = \mu_U(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x})\, z\, \chi(\mathbf{x},z) \tag{1.24}$$

La fonction $\chi(\mathbf{x},z)$ est alors développée à l'aide d'une approximation de Padé en une fonction rationnelle avec un numérateur de degré $L-1$ et un dénominateur de degré L. En utilisant les relations entre l'approximation de Padé et les polynômes orthogonaux, [168, 39], nous obtenons,

$$\chi(\mathbf{x},z) \approx \chi_L(\mathbf{x},z) = \sum_l^L \frac{\lambda_l(\mathbf{x})}{1-\omega_l(\mathbf{x})z} \tag{1.25}$$

où les fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x})$ sont les zéros du polynôme orthogonal P_L, et les poids $\lambda_l(\mathbf{x})$, tels que $\lambda_l(\mathbf{x}) = \omega_l(\mathbf{x})\alpha_l(\mathbf{x})$, sont les résidus donnés par la relation,

$$\lambda_l(\mathbf{x}) = \frac{k_L}{k_{L-1}P_{L-1}(\omega_l(\mathbf{x}))P'_L(\omega_l(\mathbf{x}))}, \tag{1.26}$$

relation dans laquelle k_L est le coefficient dominant du polynôme P_L, le prime représentant la dérivée de ce polynôme P_L. Celui-ci est déterminé par la relation,

$$\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} P_n(\omega')P_m(\omega')\omega' r(\mathbf{x},\omega') = \delta_{nm} \tag{1.27}$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker, et où les bornes d'intégration, Ω_1 et Ω_2, correspondent à la plage de fréquences de relaxation $[\Omega_1,\Omega_2]$ sur laquelle nous souhaitons approximer $r(\mathbf{x},\omega')$ de façon à approximer au mieux $Q(\mathbf{x},\omega)$ et $\mu(\mathbf{x},\omega)$.

Pour un cas général de spectre de relaxation $r(\mathbf{x},\omega)$, les polynômes P_L, doivent être déterminés numériquement. Or, si $Q(\mathbf{x},\omega)$ est constant sur une bande de fréquences et si $Q(\mathbf{x}) >> 1$, alors $r(\mathbf{x},\omega)$ est proportionnel à $(\omega)^{-1}$. Si nous supposons que $r(\mathbf{x},\omega)$ est nul à l'extérieur de l'intervalle $[\Omega_1,\Omega_2]$, et si nous prenons en compte la relation de normalisation, nous pouvons écrire,

$$\omega r(\mathbf{x},\omega) = \left(\ln\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{-1} = \text{Constante.} \tag{1.28}$$

Alors,

$$\chi(z) = \left(\ln\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{-1} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{d\omega'}{1-\omega' z} \quad , \tag{1.29}$$

et le module viscoacoustique peut s'écrire

$$\mu(\mathbf{x},\omega) = \mu_U(\mathbf{x})\left(1 - \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_U(\mathbf{x})}\left(\ln\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{-1} \ln\frac{\mathrm{i}\omega+\Omega_2}{\mathrm{i}\omega+\Omega_1}\right). \tag{1.30}$$

si bien que si nous considérons $\frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_U(\mathbf{x})} << 1$ et ω tel que $\Omega_1 << \omega << \Omega_2$, il vient,

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{\Re\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Im\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)} = \frac{2}{\pi}\frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_U(\mathbf{x})}\ln\frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \tag{1.31}$$

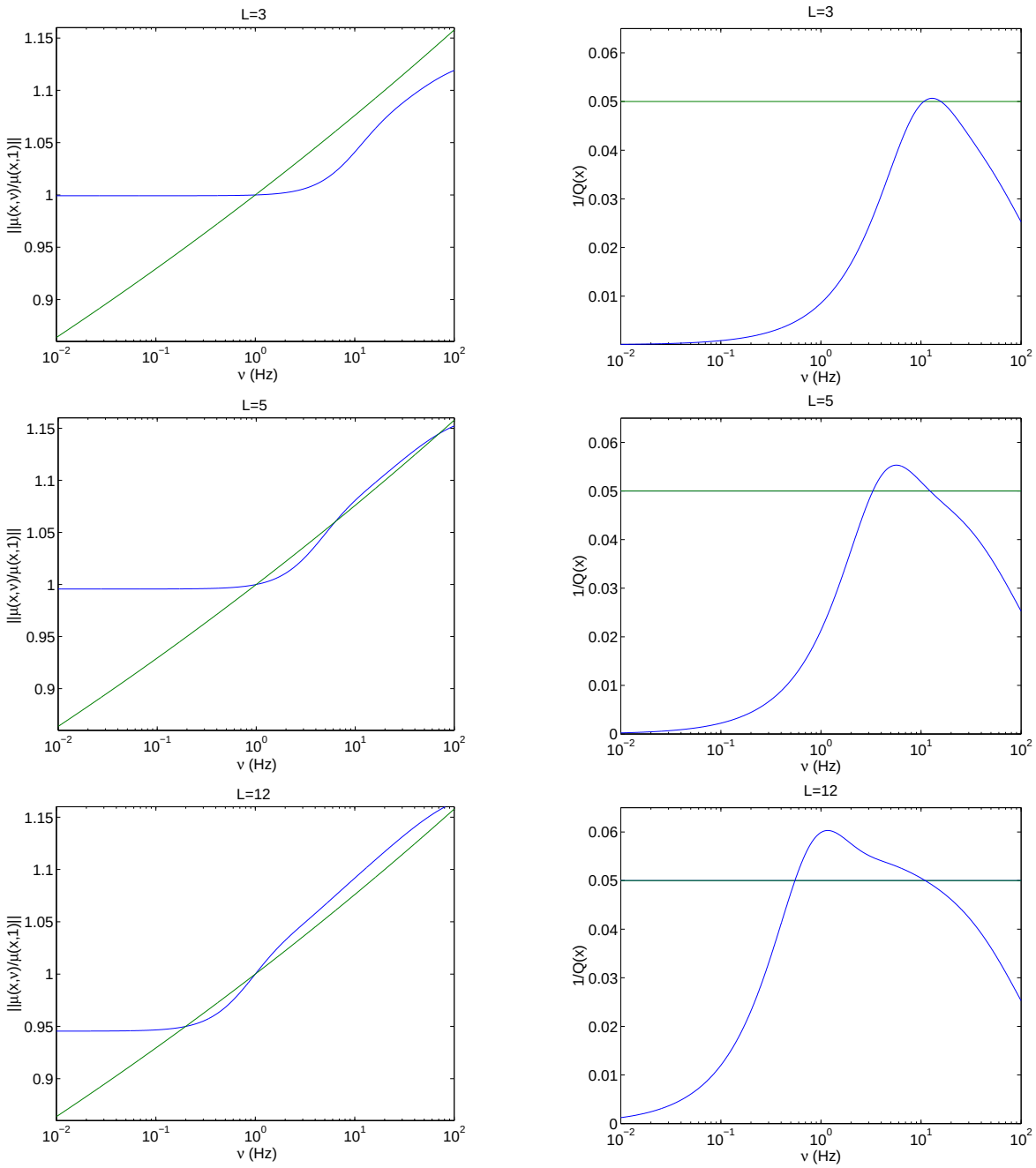


FIG. 1.2 – *Valeur exacte (courbe verte), et valeur approchée (courbe bleue) de la norme de* $\mu(\mathbf{x}, \nu)$, *normalisée par sa valeur à* $\nu = 1Hz$ *(gauche), et de* $\dfrac{1}{Q(\mathbf{x})}$, $Q(\mathbf{x}) = 20$ *(droite)*

L'expression de $\chi(z)$ suivant l'équation (I.1.25), avec $r(\mathbf{x}, \omega')$ de la forme (I.1.28), implique que les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Legendre. Réalisons le changement de variable

$$\zeta = \frac{2\omega' - (\Omega_1 + \Omega_2)}{\Omega_2 - \Omega_1}, \tag{1.32}$$

qui permet de considérer l'intervalle $[-1, 1]$ plutôt que $[\Omega_1, \Omega_2]$. Les poids $\lambda_l(\mathbf{x})$ et les fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x})$ sont alors exprimés en fonction des racines $\zeta_l(\mathbf{x})$ et des coefficients $\xi_l(\mathbf{x})$ du

polynôme de Legendre ([5]). L'expression finale du module viscoacoustique est alors, en utilisant l'équation (I.1.31),

$$\mu(\mathbf{x},\omega) \simeq \mu_l(\omega) = \mu_U \left(1 + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)}{\pi Q} \sum_{l=1}^{L} \frac{\xi_l(\mathbf{x})}{i\omega - \omega_l(\mathbf{x})}\right) \tag{1.33}$$

avec $\omega_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\zeta_l(\mathbf{x})\left(\Omega_2 - \Omega_1\right) + \Omega_2 + \Omega_1\right)$. Les fréquences de relaxation sont **équidistantes sur une échelle linéaire**.

Par exemple, les approximations de $\mu(\mathbf{x},\omega)$, et celles de $Q(\mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{20}$, sur la bande de fréquences $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = [10^{-2}, 10^{2}]$ sont données figures I.1.2 pour différents ordres d'approximation L.

Les fréquences de relaxation, $\omega_l(\mathbf{x})$, $l \in [1, L]$, et les poids, ici $\xi_l(\mathbf{x})$, $l \in [1, L]$ sont **déterminés de façon analytique**, ce qui présente l'**avantage majeur de cette méthode**. Par contre, l'hypothèse $\Omega_1 << \omega << \Omega_2$ est relativement réductrice. **L'approximation de $\frac{1}{Q(\mathbf{x})}$ est relativement correcte au centre de la plage considérée, mais peu en dehors de celle-ci, cf. figures I.1.2**. De plus, cette méthode est particulièrement adaptée au cas $Q(\mathbf{x}) >> 1$ indépendant de la fréquence, du fait de l'emploi de la formule (I.1.28). Pour plus de détails, voir [58].

1.2.2 Approximation par éléments de Maxwell généralisés

Nous décrivons ici la méthode exposée dans [63]. Tout d'abord réécrivons l'équation (I.1.15), comme suit,

$$\mu_L(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^{L} \frac{\alpha_l(\mathbf{x})\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})} \tag{1.34}$$

Chaque terme $l \in [1, L]$ de cette équation peut être interprété à l'aide de la formulation rhéologique classique d'un élément de Maxwell, avec une viscosité $\frac{\delta\mu(\mathbf{x})\alpha_l(\mathbf{x})}{\omega_l(\mathbf{x})}$ et un module élastique $\delta\mu(\mathbf{x})\alpha_l(\mathbf{x})$, le premier terme $\mu_R(\mathbf{x})$ représentant un module élastique supplémentaire,voir figure I.1.3. Cette analyse donne une interprétation physique à l'approximation et au phénomène de dissipation.

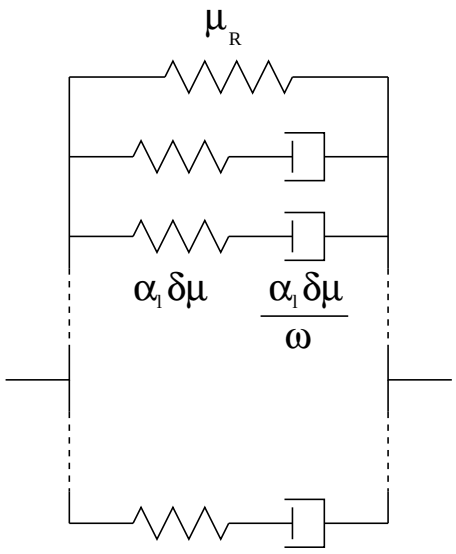


FIG. 1.3 – *Éléments de Maxwell généralisés*

Ainsi, l'approximation d'une loi générale $Q(\mathbf{x},\omega)$ pour cette formulation devient,

$$Q(\mathbf{x},\omega)^{-1} \approx Q_L(\mathbf{x},\omega)^{-1} = \left|\frac{\Im\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Re\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}\right| = \frac{\sum_{l=1}^{L} y_l(\mathbf{x}) \frac{\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)^2}}{1+\sum_{l=1}^{L} y_l(\mathbf{x}) \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)^2}} \tag{1.35}$$

L'hypothèse $\delta\mu(\mathbf{x}) << \mu_R(\mathbf{x})$, qui peut être interprétée dans le cas d'un $Q(\mathbf{x})$ indépendant de la fréquence comme $Q(\mathbf{x}) >> 1$, est particulièrement intéressante car elle permet de fournir une idée de l'ordre minimum L à considérer. Effectivement, sous cette condition $\left(1+\sum_{l=1}^{L} y_l(\mathbf{x}) \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)^2}\right)^{-1} \approx 1$, et l'équation (I.1.35) devient,

$$Q_L(\mathbf{x},\omega)^{-1} \approx \sum_{l=1}^{L} y_l(\mathbf{x}) \frac{\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)^2} = \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_R(\mathbf{x})} \sum_{l=1}^{L} \alpha_l(\mathbf{x}) \frac{\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)^2} \tag{1.36}$$

Alors $Q_L(\mathbf{x},\omega)^{-1}$ est approximativement la somme de L fonctions de Debye dont les maxima $\alpha_l \frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{2\mu_R(\mathbf{x})}$, $l \in [1,L]$, sont localisés aux fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x},\omega)$, $l \in [1,L]$. Dans ce cas, et si le facteur de qualité est constant sur la plage de fréquences considérée, les fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x},\omega)$, $l \in [1,L]$, sont choisies **équidistantes sur une échelle logarithmique**. Pour obtenir une approximation correcte de $Q(\mathbf{x})^{-1}$, la distance entre deux fréquences de relaxation adjacentes doit être au plus égale à la moitié de la largeur d'une fonction de Debye, c'est-à-dire 1.144 décades. Nous nommerons cette condition, condition minimum sur l'ordre du développement.

Dans [63], deux méthodes de détermination de $\omega_l(\mathbf{x},\omega)$, $l \in [1,L]$ sont proposées, toutes deux pour approcher $\mu(\mathbf{x},\omega)$, avec $Q(\mathbf{x}) = 20$ sur $[10^{-2},10^{2}]$. Une première (M1) que nous pouvons qualifier d'empirique, pour laquelle les fréquences de relaxation sont approchées entre $[10^{-1.5},10^{1.5}]$, avec L déterminé de façon à satisfaire la condition minimum sur l'ordre du développement ($L \geqq 3$) et une seconde (M2), directement reliée au spectre de la source $S(\omega)$ (qui définit la plage de fréquences réellement utilisée dans les calculs), pour laquelle les fréquences de relaxation sont choisies comme suit $\omega_l(\mathbf{x},\omega) = \frac{2\omega_{dom}}{10^l}$, avec L déterminé comme précédemment, et avec ω_{dom} la fréquence dominante (centrale) de $S(\omega)$. Dans ces deux cas, les poids $y_l(\mathbf{x})$, $\forall l \in [1,L]$, sont determinés en résolvant le système linéaire surdimensionné, $Q(\mathbf{x})$ étant une donnée du problème,

$$\sum_{l=1}^{L} y_l(\mathbf{x}) \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}) \frac{\omega_l(\mathbf{x}) - Q^{-1}(\mathbf{x},\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}))\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x})}{\omega_l(\mathbf{x})^2 + \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x})^2} = Q^{-1}(\mathbf{x},\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x})),\ k\ \in [1,2,..K=2L-1], \tag{1.37}$$

où, les fréquences $\widetilde{\omega}_k(\mathbf{x})$ sont déterminées par

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_1(\mathbf{x}) = \Omega_1 = 10^{-2} \\ \widetilde{\omega}_{k+1}(\mathbf{x}) = \widetilde{\omega}_k(\mathbf{x}) \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{1.38}$$

c'est-à-dire qu'elles sont équidistantes sur une échelle logarithmique, distante chacune de $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\omega_{l+1}(\mathbf{x})}{\omega_l(\mathbf{x})}\right)$.

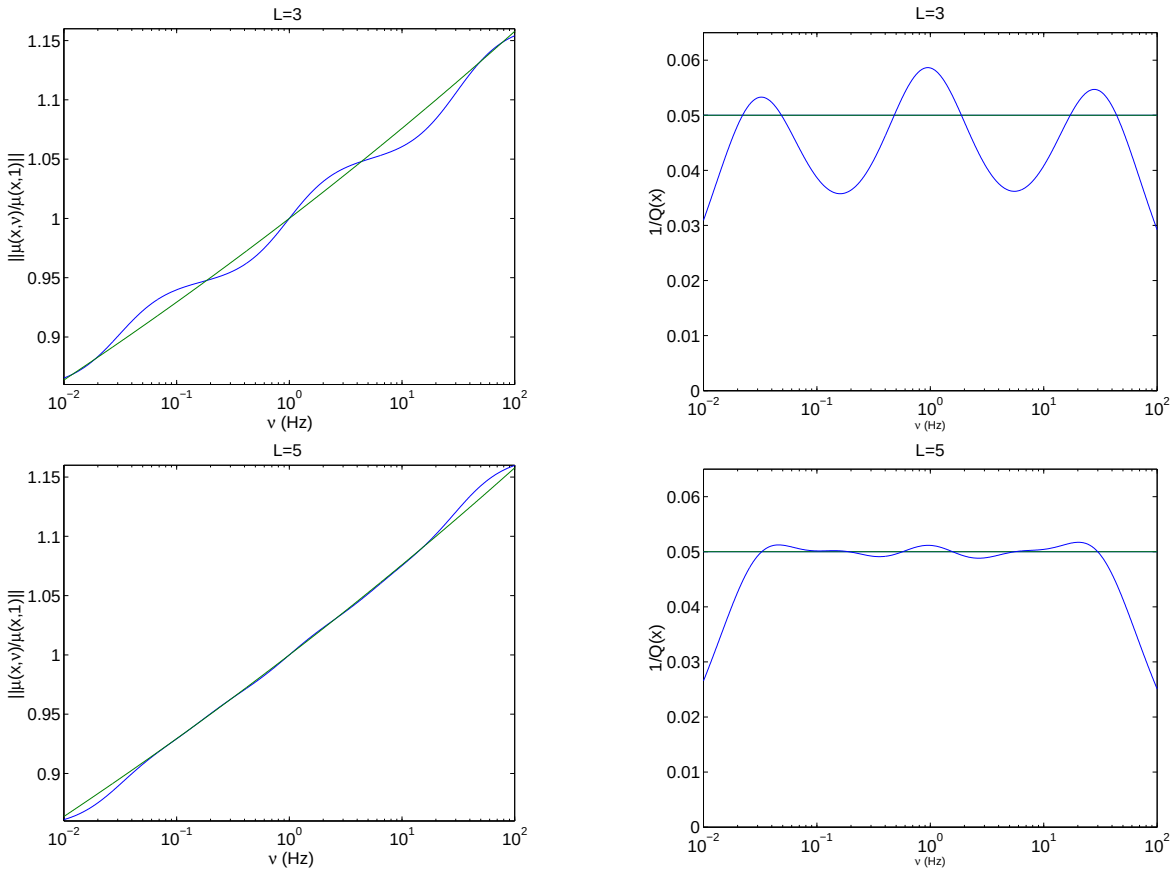


FIG. 1.4 – *Valeur exacte (courbe verte), et valeur approchée (courbe bleue) de la norme de* $\mu(\mathbf{x},\nu)$, *normalisé par sa valeur à* $\nu = 1Hz$ *(gauche), et de* $\dfrac{1}{Q(\mathbf{x})}$, $Q(\mathbf{x}) = 20$ *(droite). Les* $\omega_l(\mathbf{x})$, $l \in [1, L]$ *sont déterminées sur* $[10^{-1.5}, 10^{1.5}]$, *méthode (M1)*

Nous présentons des exemples d'approximations de $\mu(\mathbf{x},\omega)$ et de $Q(\mathbf{x},\omega)^{-1} = Q(\mathbf{x})^{-1} = \dfrac{1}{20}$, pour les deux méthodes précédentes. Dans le cas de la méthode (M1), figures I.1.4, et pour $L = 3$, la condition minimum sur l'ordre du développement n'est pas respectée, ce qui conduit à des oscillations autour des quantités à approximer. Pour autant, les résultats de simulations, avec cet ordre, sont plutôt corrects, [63]. Dans le cas de la méthode (M2), figures I.1.5, nous avons choisi $\omega_{dom} = \dfrac{2\pi}{0.3} rad.s^{-1}$, ce qui correspond à une période dominante $T_{dom} = 0.3s$. Dans les deux cas, les **approximations sont meilleures** que celles obtenues avec l'approximation de Padé, section I.1.2.1.

Contrairement à l'approximation de Padé, ces deux méthodes peuvent être employées dans le cas où $Q(\mathbf{x},\omega)$ dépend de la fréquence, et ne nécessitent pas, a priori, d'approximation telle que $\delta\mu(\mathbf{x}) << \mu_R(\mathbf{x})$. Pour nos applications (c.à.d. $Q(\mathbf{x})$ = Constante), cela signifie que nous pouvons considérer, a priori, n'importe quelle valeur du facteur de qualité. La différence majeure avec l'approximation de Padé est que les fréquences de relaxation sont déterminées de façon équidistantes sur une échelle logarithmique, avec un ordre d'idée de l'ordre minium à considérer, de sorte que la distance entre deux fonctions de relaxation adjacentes soit au plus égale à 1.144 décades. Néanmoins, ces méthodes présentent le désavantage d'être plus ou moins empiriques pour la détermination des

fréquences de relaxation : pourquoi considérer une plage $[10^{-1.5}, 10^{1.5}]$ alors que l'on souhaite traiter $[10^{-2}, 10^{2}]$, et pourquoi considérer deux fois la pulsation dominante de la source?

Remarque : D'autres modèles rhéologiques peuvent être utilisés pour interpréter les termes de l'approximation (I.1.34). Citons par exemple le modèle de Zener qui a été étudié dans [22]. Pour autant, il est à noter que lorsque les modèles rhéologiques sont généralisés, ils peuvent être interprétés de façon identique.

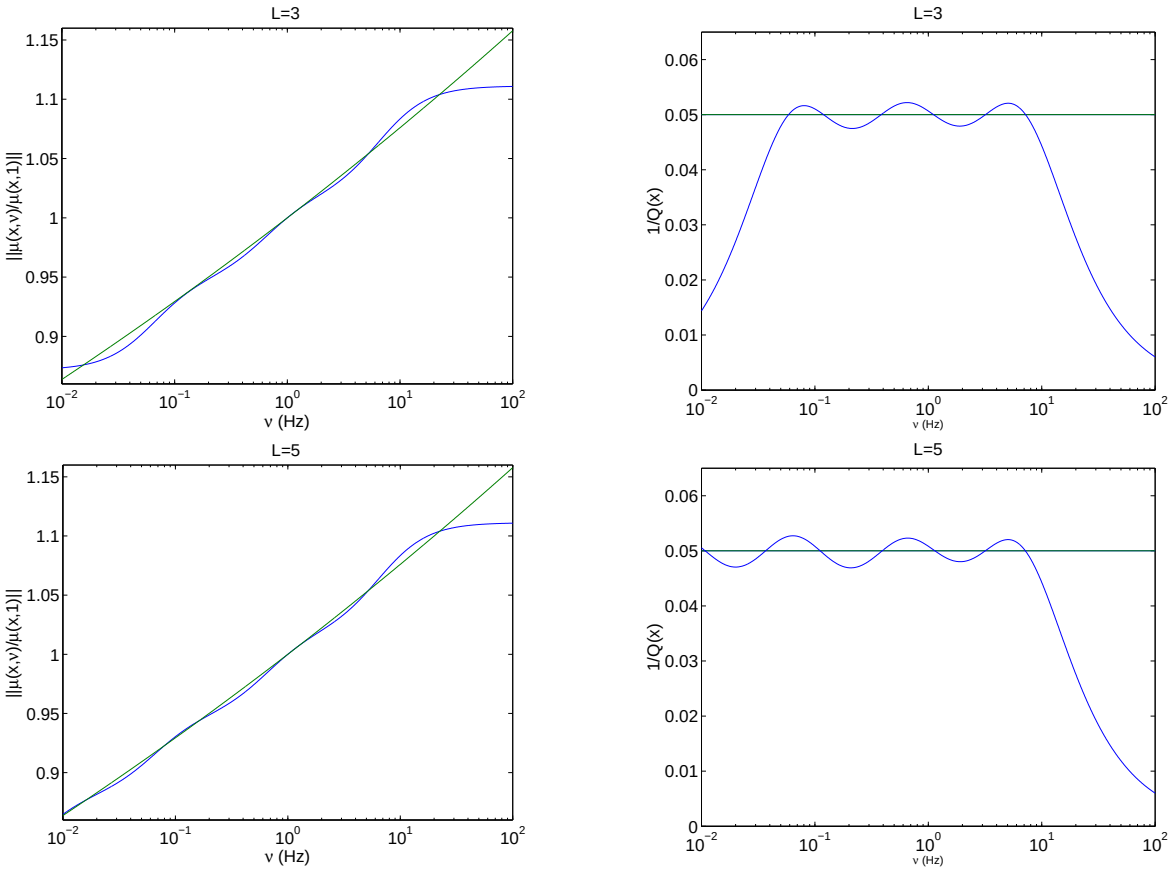


FIG. 1.5 – *Valeur exacte (courbe verte), et valeur approchée (courbe bleue) de la norme de* $\mu(\mathbf{x},\nu)$, *normalisé par sa valeur à* $\nu = 1Hz$ *(gauche), et de* $\dfrac{1}{Q(\mathbf{x})}$, $Q(\mathbf{x}) = 20$ *(droite). Les* $\omega_l(\mathbf{x})$, $l \in [1, L]$ *sont déterminées à l'aide de* $\omega_{dom} = \dfrac{2\pi}{0.3}$, *méthode (M2)*

1.2.3 Approximation par la "τ-method"

Cette méthode, exposée dans [32], se fonde sur l'observation suivante: la dissipation due à un seul et unique élément de Maxwell (une cellule de Maxwell en parallèle avec un ressort) peut être interprétée à l'aide d'un seul et unique paramètre adimenssionnel τ. Plus précisément, pour $Q(\mathbf{x}) >> 1$, indépendant de la fréquence, et $L = 1$, l'équation (I.1.36) devient,

$$Q(\mathbf{x},\omega)^{-1} \approx Q_1(\mathbf{x},\omega)^{-1} = \frac{\frac{\omega}{\omega_1(\mathbf{x})}\tau(\mathbf{x})}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1(\mathbf{x})}\right)^2} = \frac{1}{Q_{zener}} \tag{1.39}$$

avec $\tau(\mathbf{x}) = \tau_1(\mathbf{x}) = y_1(\mathbf{x}) << 1$. Nous pouvons remarquer [32] que $\omega_1(\mathbf{x})$ détermine essentiellement le comportement fréquentiel de l'approximation de $Q(\mathbf{x},\omega)^{-1}$ alors que $\tau(\mathbf{x})$ détermine son amplitude. Dans le cas général (c.à.d. $L > 1$) et lorsque l'on cherche une approximation pour un facteur de qualité constant $Q(\mathbf{x})$, les poids $y_l(\mathbf{x})$, $l \in [1, L]$ sont quasiment constants en fonction de l, cf. figures I.1.6 et I.1.7, et l'équation (I.1.36) peut s'écrire,

$$Q_L(\mathbf{x},\omega)^{-1} \approx (Q_L^\tau)^{-1} = \tau(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^{L} \frac{\frac{\omega}{\omega_1(\mathbf{x})}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1(\mathbf{x})}\right)^2} \tag{1.40}$$

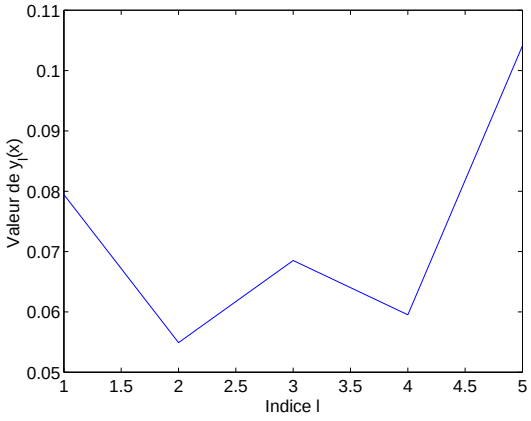


FIG. 1.6 – $y_l(\mathbf{x})$ *en fonction de* $l \in [1, L]$, $L = 5$, *méthode (M1)*

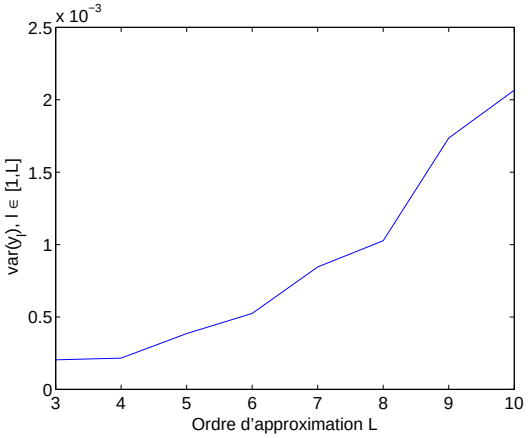


FIG. 1.7 – *Variance des* $y_l(\mathbf{x})$, $l \in [1, L]$, *en fonction de* L, *méthode (M1)*

L'équation (I.1.40) est linéaire par rapport à $\tau(\mathbf{x})$. Nous pouvons donc trouver la meilleure approximation d'un $Q(\mathbf{x}) = \text{Constante} >> 1$, au sens des moindres carrés, sur une plage de fréquences prédéfinie, ici $[\omega_1, \Omega_2]$, en minimisant sur $\tau(\mathbf{x})$ l'expression,

$$J = \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \left((Q_L^\tau)^{-1}(\omega, \omega_l(\mathbf{x}), \tau(\mathbf{x})) - Q^{-1} \right)^2 d\omega \tag{1.41}$$

les fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x})$, $\forall l \in [1, L]$ étant choisies comme dans la section I.1.2.2, équidistantes sur une échelle logarithmique (ici nous avons pris $[10^{-2}, 10^2]$, ce qui implique $L \geqq 5$). La "τ-method" conduit à une approximation du module viscoacoustique $\mu(\mathbf{x},\omega)$,

$$\mu_L^\tau(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}) \sum_{l}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega - \omega_l(\mathbf{x})} \tag{1.42}$$

L'équation (I.1.41) induit, en général, une surestimation de la valeur souhaitée de $Q(\mathbf{x}) = \text{Constante}$. Les auteurs de [32] suggèrent de minimiser J (I.1.41) avec une valeur $\widetilde{Q}^{-1}$ légèrement différente de la valeur souhaitée $Q(\mathbf{x}) = \text{Constante}$, qui est déterminée empiriquement. Par exemple, pour approximer $Q(\mathbf{x}) = 20$, ils suggèrent de considérer $\widetilde{Q} \approx 18$. Nous avons pris la liberté de prendre pour nos tests $\widetilde{Q} \approx 17.6$.

Les courbes, figure I.1.8, pour $L = 3$, ne satisfont pas la condition sur la distance maximale devant

séparer deux fréquences adjacentes. Cependant, le but est de trouver un compromis entre ordre d'approximation et précision des résultats. Nous ne pouvons pas nous permettre de prendre L trop grand puisque cela augmenterait le nombre d'inconnues, même si pour cette méthode, ce nombre est plus faible que pour les autres.

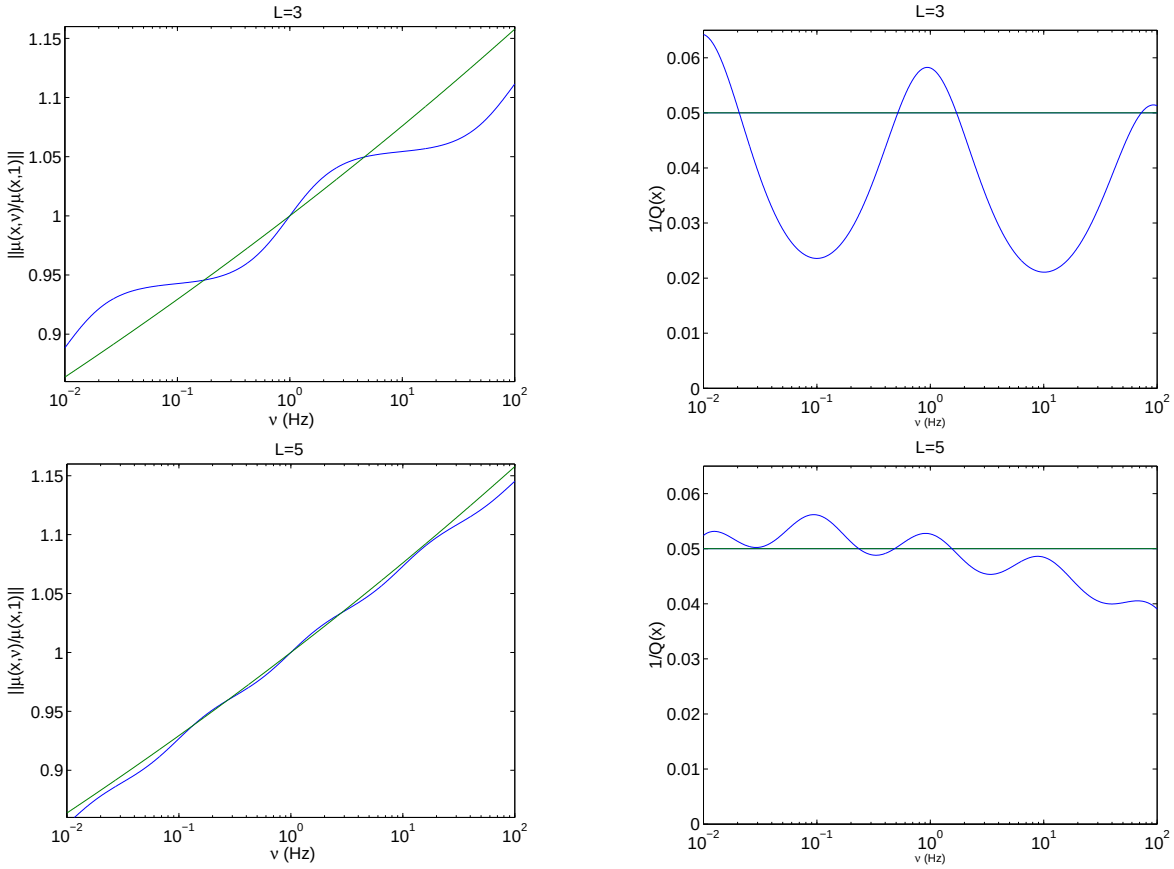


FIG. 1.8 – *Valeur exacte (courbe verte), et valeur approchée (courbe bleue) de la norme de* $\mu(\mathbf{x}, \nu)$*, normalisé par sa valeur à* $\nu = 1Hz$ *(gauche), et de* $\dfrac{1}{Q(\mathbf{x})}$*,* $Q(\mathbf{x}) = 20$*,* $\widetilde{Q}(\mathbf{x}) = 17.6$ *(droite). Les* $\omega_l(\mathbf{x})$*,* $l \in [1, L]$ *sont déterminées sur* $[10^{-2}, 10^2]$

Cette méthode présente l'**avantage de réduire le nombre d'inconnues**, mais les **fréquences de relaxation sont déterminées empiriquement** et la minimisation de la fonction (I.1.41) nécessite une **étude empirique préalable** pour déterminer un $\widetilde{Q}(\mathbf{x})$ correct. De plus, elle n'est valide que pour $Q(\mathbf{x}) >> 1$.

1.2.4 Comparaison des différentes méthodes d'approximation

De façon à tester la précision de ces approximations, car il ne faut pas oublier que nous souhaitons modéliser la propagation d'une onde dans un milieu viscoacoustique et non approcher $\|\mu(\mathbf{x}, \omega)\|$ (même si ces deux objectifs sont liés), nous avons étudié les réponses ($p(\mathbf{x}, t)$ ou $v(\mathbf{x}, t)$) analytiques, monodimensionnelles, d'un matériau viscoacoustique soumis à une sollicitation modélisée par un

terme source tel que,

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 0.5\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \text{ for } 0 < t < T,\ T = 0.3s. \tag{1.43}$$

Puisque nous traitons un problème de propagation en milieu homogène, la dépendance en $\mathbf{x}$ des données de ce milieu (vitesse, module viscoacoustique, ...) est omise dans ce qui suit.

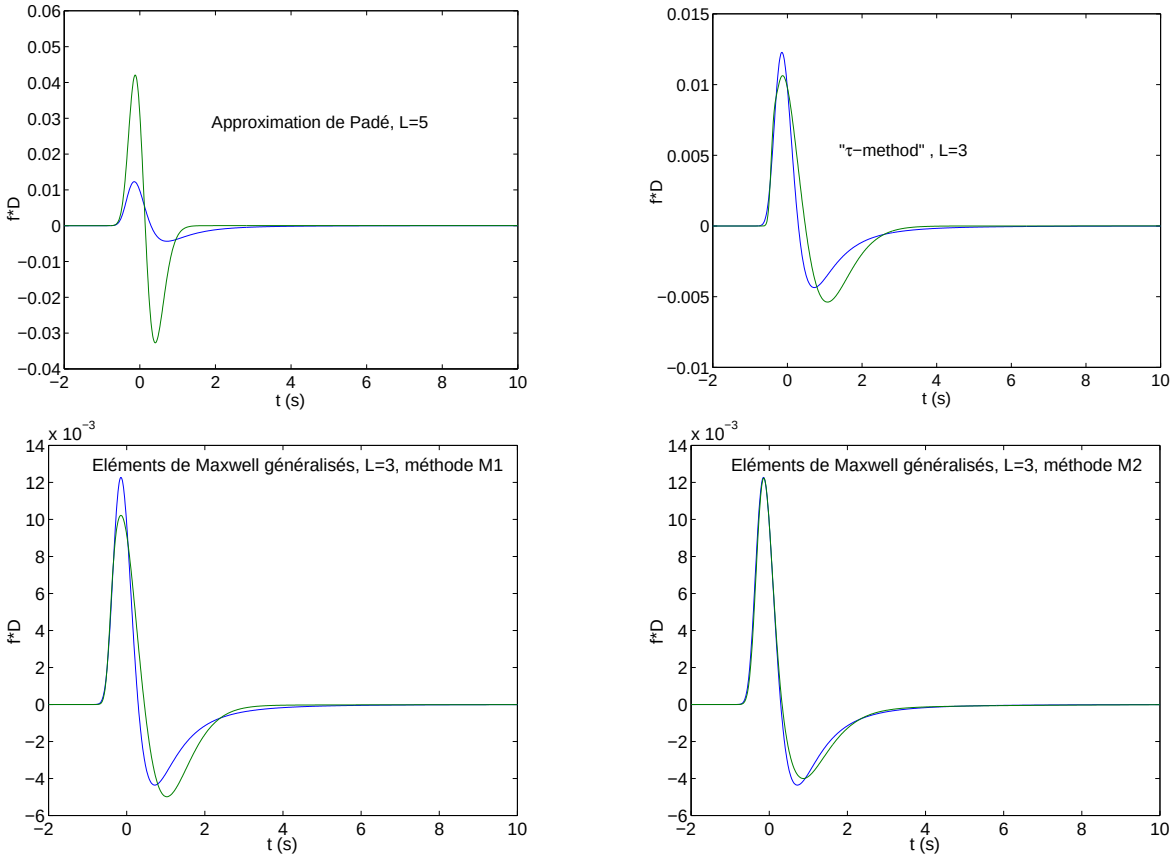


FIG. 1.9 – *Comparaison de la réponse du milieu à l'impulsion (I.1.43), à $t^\star = 1s$. Les courbes bleues sont les réponses analytiques obtenues par transformée de Fourier inverse de $D(\omega)f(\omega)$, et les courbes vertes les réponses approchées : en haut à gauche, approximation de Padé avec L=5, en haut à droite, τ − method avec L=3, en bas, approximation par Éléments de Maxwell généralisés avec L=3, à gauche avec la méthode $M1$ et, à droite, avec la méthode $M2$.*

La solution est obtenue en convoluant la fonction source $f(t)$ avec un opérateur de dissipation $D(t)$ (qui n'est autre que la fonction de Green du problème). Plutôt que de traiter le problème dans le domaine temporel, nous préférons traiter celui-ci dans le domaine fréquentiel (le produit de convolution devenant une simple multiplication). Pour une loi de dissipation arbitraire, la transformée de Fourier $D(\omega)$ de l'opérateur $D(t)$ est, [63],

$$D(\omega) = \exp\left(-\mathrm{i}\omega t^\star Q(\omega_{ref})\left(1 - \frac{c_{ref}}{c(\omega)}\right)\right) \tag{1.44}$$

où $c_{ref} = c(\omega_{ref})$ est la vitesse de référence à la fréquence ω_{ref}, $c(\omega)$ est la vitesse complexe et $t^\star = \dfrac{x}{c_{ref}Q(\omega_{ref})}$ le temps de dissipation. Pour un facteur de qualité indépendant de ω, la valeur de

$\frac{c_{ref}}{c(\omega)} = \frac{\|\mu(\omega_{ref})\|}{\mu(\omega)}$ peut être déterminée à partir des équations (1.30) pour le problème non approché, (I.1.33) pour l'approximation de Padé, (I.1.34) pour les deux méthodes utilisant l'approximation par éléments de Maxwell généralisés, et (I.1.42) pour l'approximation avec la "τ-method".

Dans les exemples numériques, nous considérons un milieu avec un facteur de qualité constant $Q(\mathbf{x}) = 20$ sur une plage de fréquences $[10^{-2}, 10^{2}]$, comme dans [63], figure I.1.9.

De façon à mieux illustrer la comparaison, nous présentons, figure I.1.10, l'évolution du coefficient de corrélation entre la solution exacte S_n et les solutions obtenues à l'aide des différentes approximations S_n^a, en fonction du temps de dissipation. Ce coefficient est calculé de la façon suivante $\frac{\sum_n (S_n - \text{mean}\,(S_n))\,(S_n^a - \text{mean}\,(S_n^a))}{\sqrt{(\sum_n (\,S_n - \text{mean}\,(S_n)\,)^2)\,(\sum_n (\,S_n^a - \text{mean}\,(S_n^a)\,)^2)}}$, où mean$(A_n)$ est la valeur moyenne des éléments du vecteur A_n.
Plus précisément, nous comparons les résultats analytiques avec,

- l'approximation de Padé, $L = 5$
- la "$\tau - method$", $L = 3$
- l'approximation avec les éléments de Maxwell généralisés, $L = 3$, les fréquences de relaxation étant déterminées à l'aide de la méthode (M1)
- l'approximation avec les éléments de Maxwell généralisés, $L = 3$, les fréquences de relaxation étant déterminées à l'aide de la méthode (M2)

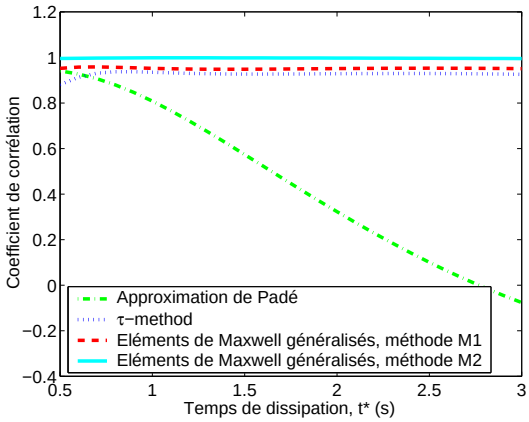


FIG. 1.10 – *Comparaison entre les différentes approximations. Coefficient de corrélation entre la solution exacte et les solutions approchées en fonction du temps de dissipation* $t^\star = \frac{x}{c_{ref} Q(\omega_{ref})}$.

Les résultats, figure I.1.10, montrent que l'**approximation de Padé fournit une bonne approximation de la solution pour des temps de dissipation faibles**, comme il l'est montré dans [63]. La **"τ-method" fournit de bons résultats, mais nous ne l'avons pas retenue car la détermination de $Q_0(\mathbf{x})$ reste empirique**. Les **méthodes utilisant les éléments de Maxwell généralisés** semblent, quant à elles, fournir un **compromis correct entre nombre d'inconnues, précision et simplicité de mise en oeuvre**. Pour autant, la **détermination des fréquences de relaxation reste empirique mais semble pouvoir être reliée au spectre de la source considérée**.

1.2.5 Méthode proposée

En pratique, le type de source dépend de l'application souhaitée. Dans notre cas, l'application principale est la propagation d'ondes sismiques pour laquelle les ondelettes de type Ricker (où leurs dérivées) sont souvent utilisées comme fonction source,

$$f(t) = -2\alpha^2\left(1-2\alpha^2\left(t-\frac{1}{\nu_0}\right)^2\right)\exp\left(-\alpha^2\left(t-\frac{1}{\nu_0}\right)^2\right), \text{ pour } 0<t\leq\frac{2}{\nu_0}, \text{ avec } \alpha=\pi\nu_0. \quad (1.45)$$

Comparativement à la source définie à l'équation (I.1.43), l'ondelette de type Ricker est à plus large bande, si bien que la méthode de détermination des fréquences de relaxation $M2$ ne fournit pas d'aussi bons résultats que ceux présentés à la section I.1.2.4. Toujours dans l'optique de [63], nous souhaitons choisir les fréquences de relaxation permettant de modéliser au mieux la propagation d'une ondelette de type Ricker dans un milieu viscoacoustique caractérisé par $Q(\mathbf{x}) =$ Constante sur une plage de fréquences $[\Omega_1, \Omega_2]$ donnée. Les **fréquences de relaxation** ω_l, $\forall l \in [1, L]$, peuvent alors être choisies **équidistantes logarithmiquement entre** $\left[\frac{\omega_{max}}{100}, \omega_{max}\right]$**, où** ω_{max} **est la fréquence maximale du spectre de l'ondelette considérée** (définie comme la fréquence au-dessus de laquelle $\|S(\omega)\|$ est inférieure à 0.1% de la valeur maximale de $\|S(\omega)\|$). Ainsi, pour satisfaire la condition sur la distance minimale entre deux fréquences de relaxation adjacentes, $L \geqq 3$, **nous choisirons pour nos calculs** $L = 4$, de sorte que les fréquences de relaxation seront considérées identiques dans tout le domaine discrétisé, si bien que $\omega_l(\mathbf{x}) = \omega_l$, $\forall l \in [1, L]$ et $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.

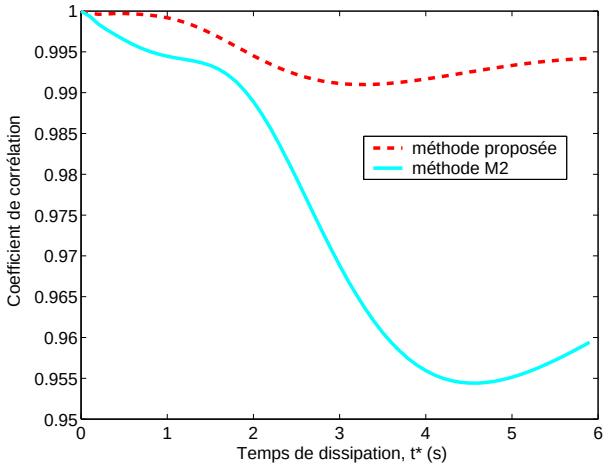


FIG. 1.11 – *Comparaison entre les différentes approximations par la méthode $M2$ et la méthode proposée pour un terme source de type Ricker, centré à $f_0 = 2.5Hz$. Coefficient de corrélation entre la solution exacte et les solutions approchées en fonction du temps de dissipation $t\star$.*

Aucune des approximations précédentes n'est complètement satisfaisante, selon nous, car le choix des fréquences de relaxation reste toujours empirique. Une façon de résoudre ce problème serait de considérer une minimisation non-linéaire qui permettrait de déterminer la totalité des coefficients y_l et ω_l, $\forall l \in [1, L]$, comme il l'est proposé dans [10]. Cette méthode, plus gourmande en temps de calcul, accroît la précision de la solution pour des matériaux à facteur de qualité ($Q(\mathbf{x})$) inférieur à 10 mais fournit des résultats similaires pour des facteurs de qualité supérieur [10]. Or, les matériaux que nous aurons à traiter ont tous des facteurs de qualité au moins égaux à $Q(\mathbf{x}) = 10$, si bien que cette méthode ne permet pas de réelles améliorations pour nos applications.

1.3 Formulation mixte vitesse-pression

En incorporant l'approximation (I.1.19) dans l'équation constitutive (I.1.2), il vient

$$p(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) + \mu_R(\mathbf{x})\sum_{l=1}^{L}\frac{y_l(\mathbf{x})\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega-\omega_l}\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega) \tag{1.46}$$

Nous introduisons les variables mémoires $\eta_l(\mathbf{x},\omega)$ définies par

$$(\mathrm{i}\omega-\omega_l)\eta_l(\mathbf{x},\omega) = -\mu_R(\mathbf{x})y_l(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},\omega), \tag{1.47}$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{x},\omega)$ est la vitesse, c'est-à-dire la dérivée temporelle du déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x},\omega)$. Alors, en utilisant la définition de $\eta_l(\mathbf{x},\omega)$ et en multipliant l'équation (I.1.46) par $-\mathrm{i}\omega$, nous obtenons,

$$(-\mathrm{i}\omega)p(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},\omega) + \sum_{l=1}^{L}(-\mathrm{i}\omega)\eta_l(\mathbf{x},\omega) \tag{1.48}$$

La combinaison de la transformée inverse de ces deux équations, (I.1.47) et (I.1.48), avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement nous permet d'approcher le système (I.1.1) par le système de trois équations du premier ordre en temps,

$$\mathcal{P}(t) = \begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \nabla p(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T], \\ \dfrac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial\eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mu_R(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T], \\ \dfrac{\partial\eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \omega_l\eta_l(\mathbf{x},t) = \mu_R(\mathbf{x})y_l(\mathbf{x})\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},t), \forall l & \text{dans } \Omega\times]0,T], \end{cases} \tag{1.49}$$

avec les conditions initiales $\mathbf{v}(\mathbf{x},t=0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x},t=0) = p^0(\mathbf{x})$, $\eta_l(\mathbf{x},t=0) = \eta_l^0(\mathbf{x})$ $\forall l\in[1,L]$, qui seront systématiquement prises à zéro, ainsi que des conditions aux frontières $\partial\Omega$ du domaine Ω. Dans ce système **les données sont la densité $\rho(\mathbf{x})$, le module relaxé $\mu_R(\mathbf{x})$, les fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x})$ et les poids** $y_l(\mathbf{x})$, tous deux obtenus à l'aide de la méthode décrite dans la section I.1.2.5, et les inconnues sont la pression $p(\mathbf{x},t)$, la vitesse particulaire $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ et les variables mémoires $\eta_l(\mathbf{x},t)$, $\forall l\in[1,L]$.

Remarque : La résolution du système pour $y_l = 0$, $\forall l\in[1,L]$, conduit à la résolution du système classique de la propagation d'ondes acoustiques.

Nous pourrions choisir d'éliminer la pression de façon à obtenir une équation du second ordre en temps, en incorporant les variables de mémoire adéquates, [63], mais nous préférons une formulation du premier ordre en vitesse-pression car,

- elle peut être couplée à la méthode des Domaines Fictifs qui permet de modéliser la diffraction d'une onde par des objets de géométrie compliquée,

- elle peut être couplée au modèle des couches parfaitement absorbante PML (pour Perfectly Matched Layer) qui permet de réaliser des simulations en milieux non-bornés,

Un système vitesse-pression équivalent est proposé dans [42] et [32]. Dans [42] les auteurs utilisent une méthode pseudo-spectrale pour la discrétisation alors que dans [32], les auteurs utilisent un schéma de différences finies. Un de nos buts étant de coupler ce système avec la méthode des Domaines Fictifs, nous utiliserons une discrétisation spatiale à l'aide d'éléments finis mixtes sur une grille régulière.

1.4 Analyse du problème continu

La première étape consiste à analyser le système (I.1.49) de façon à vérifier la décroissance de l'énergie et à dégager une relation de dispersion. Nous traiterons le cas d'un milieu homogène, si bien que les dépendances $\mathbf{x}$ et t seront systématiquement omises dans cette section.

1.4.1 Analyse de la stabilité du problème continu

Nous réécrivons le système continu (I.1.49), sans terme source $\mathbf{f} = 0$,

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla p = 0 & (i) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \eta_l}{\partial t} = \mu_R \nabla \cdot \mathbf{v} & (ii) \\ \dfrac{\partial \eta_l}{\partial t} + \omega_l \eta_l = \mu_R y_l \nabla \cdot \mathbf{v}, \forall l & (iii) \end{cases} \tag{1.50}$$

En appliquant le produit scalaire (dans L^2) de l'équation (i) avec $\mathbf{v}$, de l'équation (ii) avec $\left(p - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \eta_l\right)$ et de l'équation (iii) avec η_l, nous obtenons,

$$\begin{cases} \left(\rho\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) = (\nabla p, \mathbf{v}) & (i') \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\left(p - \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \eta_l\right), \left(p - \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \eta_l\right)\right) = \left(\mu_R \nabla \cdot \mathbf{v}, \left(p - \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \eta_l\right)\right) & (ii') \\ \left(\dfrac{\partial \eta_l}{\partial t}, \eta_l\right) + (\omega_l \eta_l, \eta_l) = (\mu_R y_l \nabla \cdot \mathbf{v}, \eta_l), \forall l & (iii') \end{cases} \tag{1.51}$$

En additionnant $(i') + \dfrac{(ii')}{\mu_R} + \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{(iii')}{\mu_R y_l}$, il vient,

$$\begin{aligned} &\left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \frac{1}{\mu_R}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(p - \sum_{l=1}^{n} \eta_l\right), \left(p - \sum_{l=1}^{n} \eta_l\right)\right) + \\ &\sum_{l=1}^{L} \frac{1}{y_l \mu_R}\left(\frac{\partial \eta_l}{\partial t}, \eta_l\right) = -\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega_l}{\mu_R y_l}(\eta_l, \eta_l) \end{aligned} \tag{1.52}$$

Alors, l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2}(\rho \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2\mu_R}\left((p - \sum_{l=1}^{L} \eta_l), (p - \sum_{l=1}^{L} \eta_l)\right) + \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2 y_l \mu_R}(\eta_l, \eta_l) \tag{1.53}$$

associée à la solution du système homogène (I.1.50) vérifie

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = -\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega_l}{\mu_R y_l} \|\eta_l\|^2 \leq 0 \tag{1.54}$$

Cette relation implique que l'énergie $E(t)$ du système décroît au cours du temps lorsque ω_l, $\forall l \in [1, L]$, y_l, $\forall l \in [1, L]$, et μ_R sont des quantités positives. Les fréquences de relaxation ω_l sont toujours des quantités positives, tout comme le module viscoacoustique μ_R. Certains coefficients y_l peuvent être négatifs (ce qui n'a pas de signification physique puisque cela revient à dire que les éléments de Maxwell associés à ces poids apportent de l'énergie au système), en pratique, pour L grand si nous ne minimisons pas un problème sous contrainte. Néanmoins, nous n'avons jamais rencontré en pratique un cas pour lequel $-\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega_l}{\mu_R y_l} \|\eta_l\|^2 \geq 0$.

1.4.2 Relation de dispersion

Nous menons dans cette section, une analyse par ondes planes. Les quantités $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ et $\eta_l(\mathbf{x}, t)$, $\forall l \in [1, L]$ s'écrivent alors

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v^0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\right)\mathbf{d} \\ p(\mathbf{x}, t) = p^0(\mathbf{x}, t) \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\right) \\ \eta_l(\mathbf{x}, t) = \eta_l^0(\mathbf{x}, t) \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\right) \end{cases} \tag{1.55}$$

avec $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k x_1$ en 1D et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2$ en 2D. En introduisant ces expressions dans le système homogène ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$) (I.1.49), nous obtenons après simplification

$$\omega^2 \mathbf{d} = c_R^2 \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega}{\mathrm{i}\omega - \omega_l}\right) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})\, \mathbf{k} \tag{1.56}$$

avec $c_R^2 = \dfrac{\mu_R}{\rho}$. Dans le cas d'une onde viscoacoustique, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} \neq 0$, et nous pouvons montrer (conséquence de I.1.56) que $\mathbf{k}$ et $\mathbf{d}$ sont colinéaires, si bien qu'il vient

$$\omega^2 = c_R^2 \|k\|^2 \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega y_l}{\mathrm{i}\omega - \omega_l}\right) \tag{1.57}$$

Remarque : En prenant $y_l = 0$, $\forall l \in [1, L]$, nous retrouvons la relation de dispersion d'une onde plane acoustique classique

$$\omega^2 = c_R^2 \|k\|^2 \tag{1.58}$$

La résolution de la relation de dispersion (I.1.57) revient à la résolution d'une équation d'ordre $L + 2$.

1.5 Discrétisation

Une formulation mixte associée au système (I.1.49) est,

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } (\mathbf{v},p,H) :]0,T[\longmapsto X\times M\times (M)^L \text{ tels que:} & \\ \dfrac{d}{dt}(\rho\mathbf{v},\mathbf{w})+b(\mathbf{w},p)=(\mathbf{f},\mathbf{w}), & \forall \mathbf{w}\in X,\\ \dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{\mu_R}p,q)-\displaystyle\sum_{l=1}^{L}\dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{\mu_R}\eta_l,q)-b(\mathbf{v},q)=0, & \forall q\in M,\\ \dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{\mu_R y_l}\eta_l,q)+(\dfrac{\omega_l}{\mu_R y_l}\eta_l,q)-b(\mathbf{v},q)=0,\ \forall l, & \forall q\in M, \end{array}\right. \tag{1.59}$$

où H est un vecteur de dimension L de composante η_l, et

$$b(\mathbf{w},q)=\int_\Omega q\ \nabla\cdot\mathbf{w}\ d\mathbf{x},\quad \forall(\mathbf{w},q)\in X\times M. \tag{1.60}$$

Les espaces fonctionnels sont $X=H(\mathrm{div};\Omega)$ et $M=L^2(\Omega)$.
Nous introduisons maintenant les espaces des éléments finis $X_h\subset X$ et $M_h\subset M$ avec respectivement les fonctions de bases $B_{N_1}=\{w_i\}_{i=1}^{N_1}$ et $B_{N_2}=\{q_i\}_{i=1}^{N_2}$ (N_1 et N_2 étant les dimensions respectives de X_h et de M_h). Les coordonnées des inconnues discrètes v_h, p_h et η_h^l sur les bases B_{N_1} et B_{N_2} sont $[V_h]=(V_1,...,V_{N_1})$, $[P_h]=(P_1,...,P_{N_2})$ et $\left[H_h^l\right]=\left(H_1^l,...,H_{N_2}^l\right)$. Sur ces bases, le système semi-discrétisé en espace s'écrit,

$$\left\{\begin{array}{l} (V_h,P_h,H_h^l)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_1})\times L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_2})\times L^2(0,T;(\mathbb{R}^{N_2})^L) \text{ tels que:}\\ M_v\dfrac{dV_h}{dt}+B_hP_h=F_h,\\ M_p\dfrac{dP_h}{dt}-\displaystyle\sum_{l=1}^{L}M_p\dfrac{dH_h^l}{dt}-B_h^TV_h=0,\\ M_y^l\dfrac{dH_h^l}{dt}+M_\omega^lH_h^l-B_h^TV_h=0,\ \forall l, \end{array}\right. \tag{1.61}$$

avec

$$\begin{array}{ll} (M_v)_{ij}=(\rho\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j)\,, & \forall i,j=1,\dots N_1\\ (M_p)_{ij}=\left(\dfrac{1}{\mu_R}q_i,q_j\right), & \forall i,j=1,\dots N_2\\ \left(M_y^l\right)_{ij}=\left(\dfrac{1}{\mu_R y_l}q_i,q_j\right), & \forall i,j=1,\dots N_2\\ \left(M_\omega^l\right)_{ij}=\left(\dfrac{\omega_l}{\mu_R y_l}q_i,q_j\right), & \forall i,j=1,\dots N_2\\ (B_h)_{ij}=(\nabla\cdot\mathbf{w}_i,q_j)\,, & \forall i=1,\dots N_1,\ j=1,\dots,N_2 \end{array} \tag{1.62}$$

et où B_h^T désigne la transposée de la matrice B_h.
En pratique, nous considérerons uniquement des **domaines rectangulaires** dans $\mathbb{R}^d$, $d=1,2$, qui peuvent être **discrétisés avec un maillage uniforme** $\mathcal{T}_h$, composé de segments ou de carrés de taille h dépendant des dimensions du problème. Les éléments finis mixtes que nous utilisons ici sont,

$$X_h=\left\{\mathbf{w}_h \text{ dans } X\ /\ \forall K\in\mathcal{T}_h,\mathbf{w}_h|_K\in(Q_1)^d\right\}, \tag{1.63}$$

et

$$M_h = \left\{ q_h \in L^2(\Omega) \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|_K} \in P_0(K) \right\}, \tag{1.64}$$

Ils ont été introduits dans [25] et sont illustrés sur la figure I.1.12.

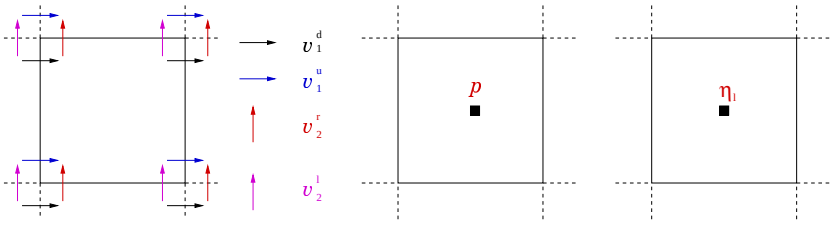


FIG. 1.12 – *Éléments finis mixtes* $v_h \in X_h$, $(p_h, (\eta_l)_h) \in M_h \times M_h$

Lorsque ce système est couplé avec la méthode des Domaines Fictifs, le choix de ces éléments finis présente des inconvénients. En particulier, pour le problème classique de l'équation de l'acoustique, la convergence de la méthode n'a pas été démontrée. De plus, les résultats numériques montrent que la méthode converge sous des conditions restrictives sur les paramètres de discrétisation. **C'est pourquoi, lorsque nous utiliserons la méthode des Domaines Fictifs, nous remplacerons M_h, l'espace de discrétisation de p_h, par M_h^1,**

$$M_h^1 = \left\{ q_h \in L^2(\Omega) \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|_K} \in P_1(K) \right\}. \tag{1.65}$$

Ces éléments sont présentés figure I.1.13. Dans ce cas, les degrés de liberté sont les valeurs du champ de pression et leurs dérivées $(p, \partial_{x_1} p, \partial_{x_2} p)$, [27]. La convergence de la méthode, avec ce choix d'espace de discrétisation, lorsqu'elle est couplée à celle des Domaines Fictifs, est étudiée dans [27] pour le problème acoustique.
Cependant pour des raisons numériques, il est naturel de rechercher une discrétisation qui nécessite le nombre d'inconnues le moins important. C'est pourquoi nous n'avons discrétisé sur cet espace que la pression, les variables de dissipation restant, elles, discrétisées sur M_h.

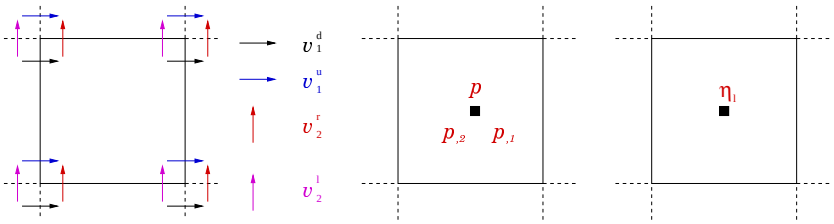


FIG. 1.13 – *Éléments finis mixtes* $v_h \in X_h$, $(p_h, (\eta_l)_h) \in M_h^1 \times M_h$

Le système semi-discrétisé en espace devient alors, (N_3 étant la dimension de M_h^1)

$$\begin{cases} (V_h, P_h, H_h^l) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_1}) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_3}) \times L^2(0,T;(\mathbb{R}^{N_2})^L) \text{ tels que :} \\ M_v \dfrac{dV_h}{dt} + B_h^1 P_h = F_h, \\ M_p^1 \dfrac{dP_h}{dt} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} M_p \dfrac{dH_h^l}{dt} - \left(B_h^1\right)^T V_h = 0, \\ M_y^l \dfrac{dH_h^l}{dt} + M_\omega^l H_h^l - B_h^T V_h = 0, \ \forall l, \end{cases} \tag{1.66}$$

où nous introduisons l'exposant 1 de façon à différencier les matrices relatives à la discrétisation sur M_h^1 de celles discrétisées sur M_h.

Dans tous les cas (pression discrétisée sur M_h^1 et sur M_h), nous utilisons pour la discrétisation temporelle un schéma de différences finies centré du second ordre (ici nous présentons le système discrétisé en temps dans le cas le plus compliqué, c'est-à-dire lorsque la pression est discrétisée sur M_h^1),

$$\left\{\begin{array}{l} (V_h^{n+\frac{1}{2}}, P_h^{n+1}, H_h^{n+1}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3} \times (\mathbb{R}^{N_2})^L, \\ M_v \dfrac{V_h^{n+\frac{1}{2}} - V_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + B_h^1 P_h^n = (F_h)^{n+1/2}, \\ M_p^1 \dfrac{P_h^{n+1} - P_h^n}{\Delta t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} M_p \dfrac{(H_h^l)^{n+1} - (H_h^l)^n}{\Delta t} - \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ M_y^l \dfrac{(H_h^l)^{n+1} - (H_h^l)^n}{\Delta t} + M_\omega^l \dfrac{(H_h^l)^{n+1} + (H_h^l)^n}{2} - B_h^T V_h^{n+\frac{1}{2}} = 0, \forall l. \end{array}\right. \tag{1.67}$$

Ce schéma numérique, (I.1.67), devient explicite en temps lorsqu'une formule de quadrature adéquate est utilisée pour approcher la matrice M_v. Il est important de noter que les matrices de masse (M_p, M_p^1, M_y^l, et M_ω^l) sont diagonales par blocs puisque les espaces M_h et M_h^1 sont composés de fonctions discontinues. Pour plus de détails sur les formules de quadrature voir [25].

1.6 Analyse du système discrétisé

1.6.1 Analyse de la stabilité du problème discret

Nous considérons le problème le plus général, pour lequel la pression est discrétisée sur M_h^1. Remarquons tout d'abord que l'espace de discrétisation M_h^1 admet la décomposition suivante dans L^2,

$$M_h^1 = M_h \oplus (M_h)^\perp, \tag{1.68}$$

où M_h est l'espace des fonctions constantes par morceaux et $(M_h)^\perp$ son complément orthogonal dans M_h^1. Nous noterons par $\mathbf{P_h}$ l'inconnue discrète associée au champ de pression $\mathbf{P_h} \in M_h^1$, si bien que nous pourrons écrire $\mathbf{P_h} = [P_h, P_h^\perp]$, avec P_h la projection de la pression sur M_h et $P_h^\perp$ la projection de la pression sur $(M_h)^\perp$. De même les matrices M_p^1, et B_h^1 admettent les décompositions $M_p^1 = [M_p, M_p^\perp]$ et $B_h^1 = [B_h, B_h^\perp]$. Dans ce cas, nous pouvons écrire le sytème discrétisé (I.1.67) sous la forme,

$$\left\{\begin{array}{ll} M_v \dfrac{V_h^{n+\frac{1}{2}} - V_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -B_h P_h^n - B_h^\perp (P_h^\perp)^n & (i) \\ M_p \dfrac{P_h^{n+1} - P_h^n}{\Delta t} - M_p \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{(H_h^l)^{n+1} - (H_h^l)^n}{\Delta t} = B_h^T V^{n+\frac{1}{2}} & (ii) \\ M_p^\perp \dfrac{(P_h^\perp)^{n+1} - (P_h^\perp)^n}{\Delta t} = (B_h^\perp)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} & (iii) \\ M_y^l \dfrac{(H_h^l)^{n+1} - (H_h^l)^n}{\Delta t} + M_\omega^l \dfrac{(H_h^l)^{n+1} + (H_h^l)^n}{2} = B_h^T V_h^{n+\frac{1}{2}}, \forall l & (iv) \end{array}\right. \tag{1.69}$$

Nous définissons un nouveau produit scalaire, ici par exemple sur V_h

$$\left(V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v} = \left(M_v V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right) \tag{1.70}$$

avec la norme associée

$$\left\|V_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2 = \left(M_v V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n+\frac{1}{2}}\right) \tag{1.71}$$

Considérons ensuite les produits scalaires de ((i) écrite au temps $(n+1)$ + (i) écrite au temps (n)) avec $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, de (ii) avec $\left(P_h^{n+1} - \sum_{l=1}^{L}(H_h^l)^{n+1} + P_h^n - \sum_{l=1}^{L}(H_h^l)^n\right)$, de (iii) avec $\left((P_h^\perp)^{n+1} + (P_h^\perp)^n\right)$, et de (iv) avec $\left((H_h^l)^{n+1} + (H_h^l)^n\right)$. Nous obtenons,

$$\begin{cases} \left(V_h^{n+\frac{3}{2}}, V_h^{n+\frac{1}{2}}\right)_{M_v} = \left(V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v} - \\ \Delta t\left(B_h(P_h^n + P_h^{n+1}), V_h^{n+\frac{1}{2}}\right) - \Delta t\left(B_h^\perp((P_h^\perp)^n + (P_h^\perp)^{n+1}), V_h^{n+\frac{1}{2}}\right) & (i') \\ \left\|P_h^{n+1} - \sum_{l=1}^{L}(H_h^l)^{n+1}\right\|_{M_p}^2 = \left\|P_h^n - \sum_{l=1}^{L}(H_h^n)^n\right\|_{M_p}^2 + \\ \Delta t\left(B_h^T V_h^{n+\frac{1}{2}}, P_h^{n+1} + P_h^n\right) - \Delta t\left(B_h^T V_h^{n+\frac{1}{2}}, \sum_{l=1}^{L}(H_h^l)^{n+1} + (H_h^l)^n\right) & (ii') \\ \left\|(P_h^\perp)^{n+1}\right\|_{M_p^\perp}^2 = \left\|(P_h^\perp)^n\right\|_{M_p^\perp}^2 + \Delta t\left((B_h^\perp)^T V_h^{n+\frac{1}{2}}, (P_h^\perp)^{n+1} + (P_h^\perp)^n\right) & (iii') \\ \left\|(H^l)^{n+1}\right\|_{M_y^l}^2 = \left\|(H^l)^n\right\|_{M_y^l}^2 - \\ \Delta t\dfrac{\left\|(H_h^l)^{n+1} - (H_h^l)^n\right\|_{M_\omega^l}^2}{2} + \Delta t\left(B_h^T V_h^{n+\frac{1}{2}}, (H_h^l)^{n+1} + (H_h^l)^n\right), \forall l & (iv') \end{cases} \tag{1.72}$$

En additionnant $(i') + (ii') + (iii') + \sum_{l=1}^{L}(iv')$, nous obtenons

$$\frac{E_h^{n+1} - E_h^n}{\Delta t} = -\sum_{l=1}^{L}\frac{\left\|(H_h^l)^{n+1} + (H_h^l)^n\right\|_{M_\omega^l}^2}{4} \tag{1.73}$$

avec l'énergie discrète définie comme,

$$2E_h^n = \left(V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v} + \left\|(P_h^\perp)^n\right\|_{M_p^\perp}^2 + \left\|P_h^n - \sum_{l=1}^{L}(H_h^l)^n\right\|_{M_p}^2 + \sum_{l=1}^{L}\left\|(H_h^l)^n\right\|_{M_y^l}^2. \tag{1.74}$$

L'équation (I.1.73) prouve que l'énergie décroit en fonction du temps, sous les hypothèses sur y_l, $\forall l \in [1, L]$ exposées dans la section I.1.4.1.

De façon à montrer sous quelle condition, la quantité (I.1.74) est positive et par conséquent qu'elle est une énergie, nous utilisons la relation d'orthogonalité entre P et $P^\perp$ (H^l étant par construction également orthogonale à $P^\perp$). En remarquant que,

$$\begin{aligned} \left\|V_h^{n+\frac{1}{2}} + V_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2 &= \left(\left(V_h^{n+\frac{1}{2}} + V_h^{n-\frac{1}{2}}\right), \left(V_h^{n+\frac{1}{2}} + V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)\right)_{M_v} \\ &= \left\|V_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2 + \left\|V_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2 + 2\left(V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v} \end{aligned} \tag{1.75}$$

et que

$$\begin{aligned}&\left(\left(V_h^{n+\frac{1}{2}}-V_h^{n-\frac{1}{2}}\right),\left(V_h^{n+\frac{1}{2}}-V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)\right)_{M_v}=-\Delta t\left(B_h^1\mathbf{P}^n,\left(V_h^{n+\frac{1}{2}}-V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)\right)\\&\Longrightarrow\left\|V_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2+\left\|V_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2-2\left(V_h^{n+\frac{1}{2}},V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v}=\Delta t^2\left(B_h^1{\mathbf{P_h}}^n,M_v^{-1}B_h^1{\mathbf{P_h}}^n\right)\end{aligned}\tag{1.76}$$

et faisant l'opération $\frac{(\text{I.1.75})+(\text{I.1.76})}{4}$, nous obtenons

$$\left(V_h^{n+\frac{1}{2}},V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v}=\frac{1}{4}\left\|V_h^{n+\frac{1}{2}}+V_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2-\frac{\Delta t^2}{4}\left(B_h^1{\mathbf{P_h}}^n,M_v^{-1}B_h^1{\mathbf{P_h}}^n\right)\tag{1.77}$$

En remplaçant (I.1.77) dans (I.1.74), $P_h^\perp$ et H_h^l étant orthogonaux, nous pouvons écrire $\left\|H_h^l\right\|_{M_p}^2=\left\|H_h^l\right\|_{M_p^1}^2$ et $\left(P_h,\sum_l^L H_h^l\right)_{M_p}=\left(\mathbf{P_h},\sum_l^L H_h^l\right)_{M_p^1}$, si bien que nous obtenons

$$\begin{aligned}2E_h^n=\;&\frac{1}{4}\left\|V_h^{n+\frac{1}{2}}+V_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2-\frac{\Delta t^2}{4}\left(B_h^1{\mathbf{P_h}}^n,M_v^{-1}B_h^1{\mathbf{P_h}}^n\right)+\\&\|{\mathbf{P_h}}^n\|_{M_p^1}^2+\left\|\sum_{l=1}^L(H^l)^n\right\|_{M_p^1}^2-2\left(\mathbf{P_h}^n,\sum_{l=1}^L(H_h^l)^n\right)_{M_p^1}+\sum_{l=1}^L\left\|(H_h^l)^n\right\|_{M_y^l}^2\\\leqq&\left[\begin{array}{l}\left(1-\dfrac{\Delta t^2\left\|(M_p^1)^{-1}(B_h^1)^TM_v^{-1}B_h^1\right\|}{4}\right)\|{\mathbf{P_h}}^n\|_{M_p^1}^2+\left\|\sum_{l=1}^L(H_h^l)^n\right\|_{M_p^1}^2-\\2\left(\mathbf{P_h}^n,\sum_{l=1}^L(H_h^l)^n\right)+\sum_{l=1}^L\left((M_p^1)^{-1}M_y^l(H^l)^n,(H^l)^n\right)_{M_p^1}\end{array}\right]\end{aligned}\tag{1.78}$$

En écrivant cette équation comme une matrice associée à une formule quadratique, nous pouvons montrer que les valeurs propres de cette matrice sont positives sous la **condition CFL** (Courant-Friederich-Lévy)

$$\frac{\Delta t^2}{4}\left\|M_p^{-1}(B_h^1)^TM_v^{-1}B_h^1\right\|\left(1+\sum_{l=1}^L\left(M_p^{-1}M_y^l\right)^{-1}\right)\leqq 1\tag{1.79}$$

ou encore,

$$\frac{\Delta t^2}{4}\left\|M_p^{-1}(B_h^1)^TM_v^{-1}B_h^1\right\|\left(1+\sum_{l=1}^L y_l\right)\leqq 1\tag{1.80}$$

avec $\left\|M_p^{-1}(B_h^1)^TM_v^{-1}B_h^1\right\|\geqq\frac{4}{h^2}\frac{\mu_R}{\rho}$, en 1D et $\left\|M_p^{-1}(B_h^1)^TM_v^{-1}B_h^1\right\|\geqq\frac{8}{h^2}\frac{\mu_R}{\rho}$, en 2D.

1.6.2 Relation de dispersion

Nous menons dans cette section une analyse par ondes planes. Les quantités $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, P_h^{n+1} et $(H_h^l)^{n+1}$, $\forall l\in[1,L]$ s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{l}V_h^{n+\frac{1}{2}}=V_h^0\exp\left(-\mathrm{i}\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right)\\{\mathbf{P_h}}^{n+1}={\mathbf{P_h}}^0\exp\left(-\mathrm{i}\omega\left(n+1\right)\Delta t\right)\\(H_h^l)^{n+1}=(H_h^l)^0\exp\left(-\mathrm{i}\omega\left(n+1\right)\Delta t\right)\end{array}\right.\tag{1.81}$$

Alors, en reportant dans le sytème (I.1.69), nous obtenons

$$\begin{cases} M_v \dfrac{-2\mathrm{i}V_h^0 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = -B_h^1 \mathbf{P_h}^0 & (i) \\ M_p \dfrac{-2\mathrm{i}P_h^0 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} - M_p \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{-2\mathrm{i}(H_h^l)^0 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = B_h^T V_h^0 & (ii) \\ M_p^{\perp} \dfrac{-2\mathrm{i}(P_h^{\perp})^0 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = (B_h^{\perp})^T V_h^0 & (iii) \\ \left(M_y^l \dfrac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} + M_\omega^l \cos\left(\dfrac{\omega\Delta t}{2}\right) \right) (H_h^l)^0 = B_h^T V_h^0, \forall l & (vi) \end{cases} \tag{1.82}$$

Après simplification, et en remarquant que $M_p^{-1} M_y^l = \dfrac{1}{y_l}$ et que $M_p^{-1} M_\omega^l = \dfrac{\omega_l}{y_l}$, il vient

$$\begin{aligned} &\sin^2(\chi_t) V^0 = \\ &\frac{\Delta t^2}{4} \left(\left(M_v^{-1} B_h^1 (M_p^1)^{-1} (B_h^1)^T \right) + \sum_{l=1}^{L} \left(M_v^{-1} B_h^1 (M_p^1)^{-1} B_h^T \right) \frac{2\mathrm{i}y_l \tan(\chi_t)}{2\mathrm{i}\tan(\chi_t) - \Delta t \omega_l} \right) V^0 \end{aligned} \tag{1.83}$$

où $\chi_t = \dfrac{\omega\Delta t}{2}$. Nous traitons alors un problème aux valeurs propres qui conduit à l'équation,

$$\sin^2(\chi_t) = \frac{\Delta_t^2}{4} \lambda \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{2\mathrm{i}y_l \tan(\chi_t)}{2\mathrm{i}\tan(\chi_t) - \Delta_t \omega_l} \right) \tag{1.84}$$

où λ est la plus grande valeur propre de $\left(M_v^{-1} B_h^1 (M_p^1)^{-1} (B_h^1)^T \right)$ qui est aussi la plus grande valeur propre de $\left(M_v^{-1} B_h^1 (M_p^1)^{-1} B_h^T \right)$, valeur qui est identique pour ces deux matrices. Nous avons,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{4c_R^2 \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right)}{h^2} && \text{en 1D} \\ \lambda &= \frac{4c_R^2 \left(\sin^2\left(\frac{k_1 h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_2 h}{2}\right) \right)}{h^2} && \text{en 2D} \end{aligned} \tag{1.85}$$

L'équation (I.1.83) revient alors à résoudre un système d'ordre $L+2$ en Y, ($Y = \frac{2\mathrm{i}\tan(\chi_t)}{\Delta t}$) obtenu à partir de l'équation,

$$\frac{-Y^2 \Delta t^2}{4 - Y^2 \Delta t^2} = \frac{\Delta_t^2 c_R^2}{4} \lambda \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{y_l Y}{Y - \omega_l} \right) \tag{1.86}$$

Nous traçons, figure I.1.14 les courbes d'atténuation et de dispersion en fonction du paramètre $\dfrac{1}{N}$ (N étant le nombre de points par longueur d'onde utilisée pour la discrétisation) pour une onde plane avec $\theta = \arctan\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)$ égal à 0 et $\dfrac{\pi}{4}$. En particulier, le schéma 1D reste exact, sous la condition CFL de la section (I.1.80), comme dans le cas d'un milieu non-dissipatif.

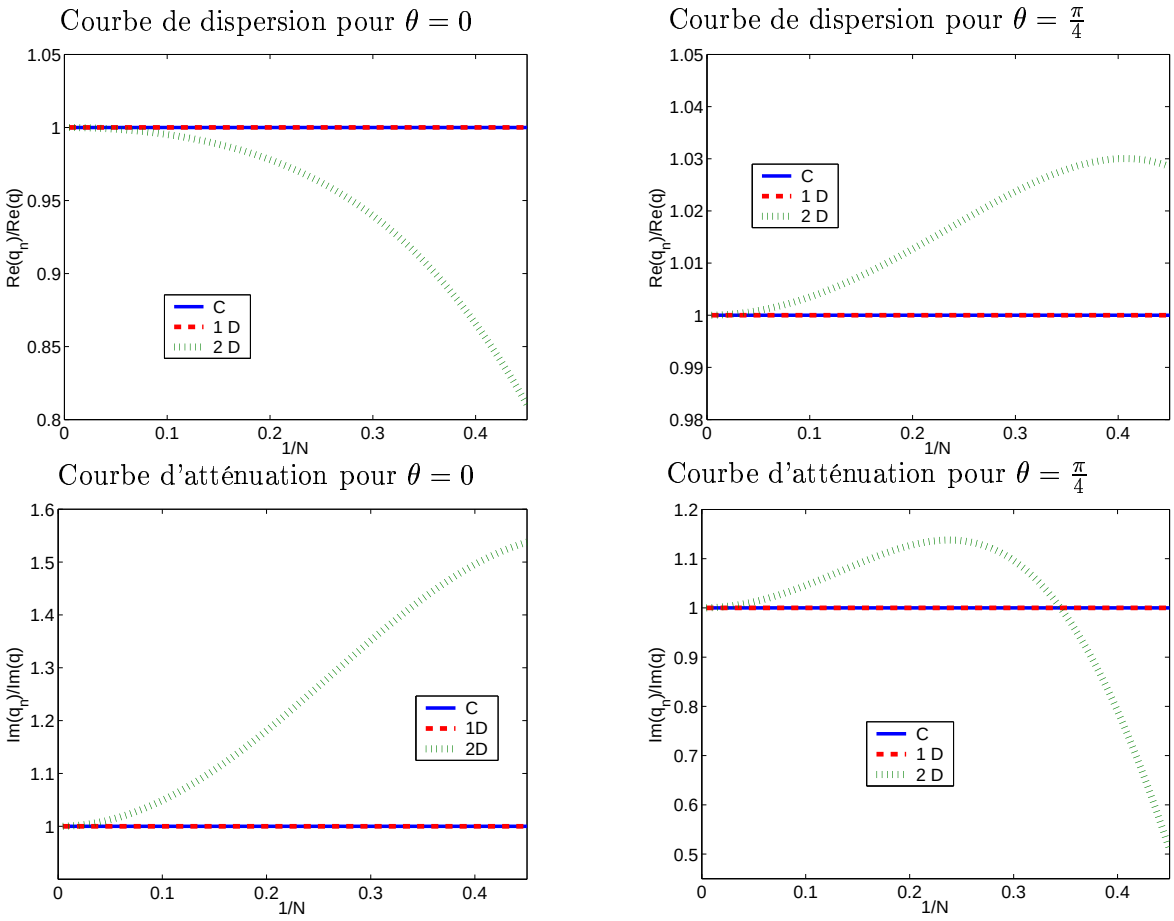


FIG. 1.14 – *Courbes de dispersion et d'atténuation pour une onde plane telle que* $\theta = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = 0$ *et* $\theta = \frac{\pi}{4}$*, en 1D et 2D normalisées par leur valeur pour le problème continu* ($L = 3$)

1.7 Traitement des surfaces libres

De façon à modéliser la **condition de surface libre** rencontrée en sismique sur le sol, nous utiliserons la méthode des **Domaines Fictifs** qui a été développée pour résoudre des problèmes à géométrie complexe [15, 75, 76, 73, 74], et en particulier pour les problèmes de diffraction d'ondes [55, 72, 138, 26]. Ici, nous adopterons l'approche exposée dans [26].

Considérons le problème de la propagation d'une onde viscoacoustique dans un domaine à géométrie complexe tel que celui représenté figure I.1.15. Le problème initial est posé dans le domaine

Ω, avec une condition de surface libre, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ sur Γ et peut être modélisé ainsi

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \eta_l}{\partial t} = \mu_R \nabla\cdot\mathbf{v} & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \eta_l}{\partial t} + \omega_l \eta_l = \mu_R y_l \nabla\cdot\mathbf{v}, \forall l & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ p = 0, & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \tag{1.87}$$

L'**idée principale de la méthode des Domaines Fictifs est d'étendre la solution à un domaine de forme simple, indépendant de la complexité de la géométrie de Γ et d'imposer cette condition de façon faible** en introduisant un multiplicateur de Lagrange. Dans cette optique, nous étendons la solution $(\mathbf{v}, p, \eta_l)$ par zéro au domaine C (ici un rectangle, voir figure I.1.15). Nous notons alors la solution étendue à ce domaine $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}, \tilde{\eta_l})$ et avons

$$[\tilde{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n}]_\Gamma = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} \in H(\mathrm{div}, C),\ [\tilde{p}]_\Gamma \neq 0,\ [\tilde{\eta_l}]_\Gamma \neq 0. \tag{1.88}$$

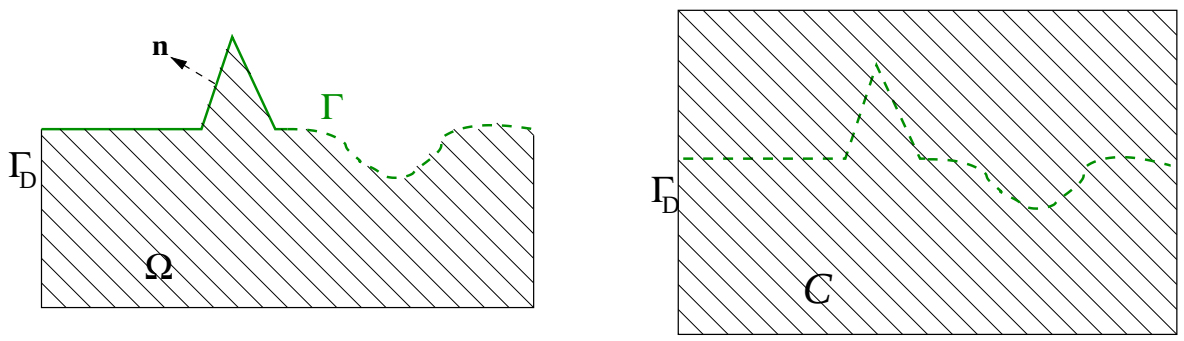


FIG. 1.15 – *Géométrie du problème : sur la gauche, le domaine initial Ω ; sur la droite, le domaine étendu C*

Alors, la solution du système (I.1.87) étendue au domaine C devient solution du système,

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} - \nabla \tilde{p} = \mathbf{f} + [\tilde{p}]\vec{n}\delta_\Gamma & \text{dans } C, \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \tilde{\eta_l}}{\partial t} = \mu_R \nabla\cdot\tilde{\mathbf{v}} & \text{dans } C, \\ \dfrac{\partial \tilde{\eta_l}}{\partial t} + \omega_l \tilde{\eta_l} = \mu_R y_l \nabla\cdot\mathbf{v}, \forall l & \text{dans } C, \\ \tilde{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ p = 0, & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \tag{1.89}$$

Le système (I.1.89) admet deux types d'inconnues : les inconnues étendues au domaine C et l'inconnue auxiliaire $[\tilde{p}]$ définie sur la frontière Γ. Nous introduisons donc une nouvelle inconnue $\lambda = [\tilde{p}]$

sur Γ qui peut être interprétée comme un multiplicateur de Lagrange associé à la condition aux limites de la frontière Γ. La fomulation variationnelle du problème s'exprime ainsi,

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } (\mathbf{v},p,H,\lambda) :]0,T[\longmapsto H(\mathrm{div};\mathbf{C}) \times L^2(\mathbf{C}) \times (L^2(\mathbf{C}))^L \times H^{1/2}(\Gamma) \text{ tels que} & \\ \frac{d}{dt}(\rho\mathbf{v},\mathbf{w}) + b(\mathbf{w},p) - b_\Gamma(\lambda,\mathbf{w}) = (\mathbf{f},\mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in H(\mathrm{div};\mathbf{C}), \\ \frac{d}{dt}(\frac{1}{\mu_R}p,q) - \sum_{l=1}^{L} \frac{d}{dt}(\frac{1}{\mu_R}\eta_l,q) - b(\mathbf{v},q) = 0, & \forall q \in L^2(\mathbf{C}), \\ \frac{d}{dt}(\frac{1}{\mu_R y_l}\eta_l,q) + (\frac{\omega_l}{\mu_R y_l}\eta_l,q) - b(\mathbf{v},q) = 0, \ \forall l, & \forall q \in L^2(\mathbf{C}), \\ b_\Gamma(\mu,\mathbf{v}) = 0, & \forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma), \end{array}\right. \tag{1.90}$$

où

$$b_\Gamma(\mu,\mathbf{w}) = \int_\Gamma \mu \ \mathbf{w}\cdot\mathbf{n} ds, \quad \forall (\mu,\mathbf{w}) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H(\mathrm{div};C). \tag{1.91}$$

Pour la discrétisation de ce système, nous considérons un maillage volumique τ_h du domaine $\mathbf{C}$ et un maillage irrégulier $\mathcal{G}_{h_s}$ sur Γ. L'avantage de cette formulation est que le maillage pour le calcul de la solution étendue peut être maintenant régulier, alors que le maillage de Γ est, lui, irrégulier. Ceci permet une approximation très correcte de la géométrie (figure I.1.16).

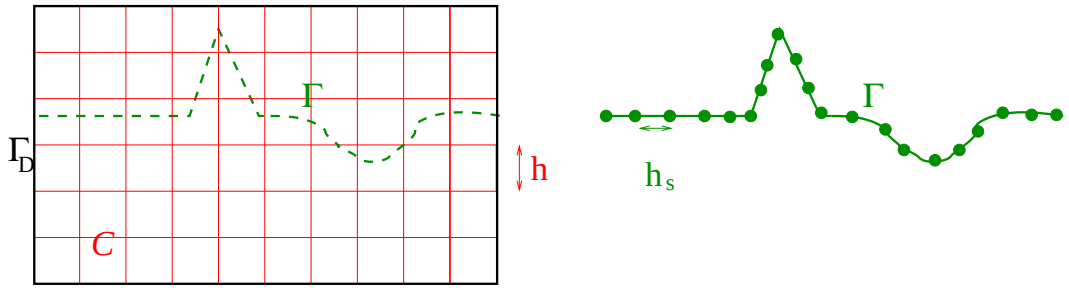


FIG. 1.16 – *Les deux maillages utilisés dans la méthode des Domaines Fictifs : un maillage volumique structuré du domaine* $\mathbf{C}$ *et un maillage surfacique irrégulier de* Γ

Nous discrétisons les inconnues volumiques $\mathbf{v}, p, H$ à l'aide des éléments finis présentés dans la section I.1.5, alors que pour le multiplicateur de Lagrange λ, nous utilisons des fonctions continues par morceaux, c'est-à-dire que l'espace d'approximation est,

$$G_{h_s} = \left\{ \mu_{h_s} \in H^{1/2}(\Gamma) \,/\, \forall S(\text{segment}) \in \mathcal{G}_{h_s}, \mu_{h_s}|_S \in P_1(S) \right\}. \tag{1.92}$$

Remarque : La formulation des domaines fictifs n'est pas modifiée dans le cas viscoacoustique par rapport au cas acoustique classique.

De façon à simplifier la présentation, nous avons considéré sur Γ_D une condition de type Dirichlet. En pratique, les domaines de propagation sont infinis et nous utiliserons la méthode PML.

1.8 Traitement des bords

Le modèle des **Couches Parfaitement Adaptées PML**, fut introduit par Bérenger [29, 30] pour les équations de Maxwell et est maintenant la méthode la plus communément utilisée pour

simuler la propagation d'une onde dans un milieu non-borné. Le lecteur peut se reporter à [194, 169, 136] pour l'utilisation de cette méthode pour les ondes électromagnétiques, à [24] pour les ondes acoustiques anisotropes, et à [56, 24] pour les ondes élastiques. La popularité de cette méthode est largement due à sa simplicité de mise en oeuvre et à son efficacité. Sa propriété majeure est, pour le problème continu, que le coefficient de réflexion à l'interface entre le milieu et la couche est quasiment nul pour toutes les fréquences et pour tous les angles d'incidence. Pour adapter cette méthode au problème de la propagation d'une onde viscoacoustique, nous adopterons la formulation exposée dans [56] qui peut être appliquée à n'importe quel système du premier ordre hyperbolique linéaire. Nous présentons ici la construction d'une couche PML dans le cas 2D suivant la direction $\mathbf{i}_1$ (figure I.1.17), la construction sur les autres bords et dans les coins étant alors triviale.

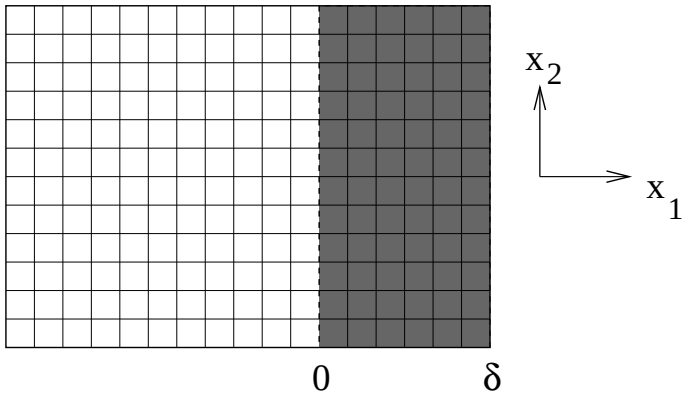


FIG. 1.17 – *Couche PML dans la direction* $\mathbf{i}_1$*, le domaine physique est à gauche et le milieu absorbant est la couche de largeur* δ*.*

Nous construisons la couche PML en deux étapes,

- nous séparons la solution $(\mathbf{v}, p, \{\eta_l\})$ en deux parties, $(\mathbf{v}^{\|}, p^{\|}, \{\eta_l^{\|}\})$ associée aux dérivées dans la direction parallèle à l'interface entre la PML et le milieu physique (c.à.d. la direction x_2), et $(\mathbf{v}^{\perp}, p^{\perp}, \{\eta_l^{\perp}\})$ associée aux dérivées dans la direction orthogonale à cette interface (c.à.d. la direction x_1)

- nous introduisons un amortissement seulement sur la partie orthogonale de la solution.

Ainsi, lorsque nous appliquons la première étape au système (I.1.49), en remarquant que $\mathbf{v}^{\perp} = (0, v_2)$ et $\mathbf{v}^{\|} = (v_1, 0)$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = \dfrac{\partial p}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial p^{\|}}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \eta_l^{\|}}{\partial t} = \mu_R \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \eta_l^{\|}}{\partial t} + \omega_l \eta_l^{\|} = \mu_R y_l \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}, \end{array} \right. \tag{1.93}$$

et

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial p^\perp}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \eta_l^\perp}{\partial t} = \mu_R \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \eta_l^\perp}{\partial t} + \omega_l \eta_l^\perp = \mu_R y_l \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}, \end{cases} \tag{1.94}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\|} + \mathbf{v}^{\perp} \\ p = p^{\|} + p^{\perp} \\ \eta_l = \eta_l^{\|} + \eta_l^{\perp}, \forall l. \end{cases} \tag{1.95}$$

Il est plus aisé d'appliquer l'amortissement à la composante orthogonale (I.1.94) dans le domaine fréquentiel

$$\begin{cases} -\mathrm{i}\omega\rho v_1 = \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ -\mathrm{i}\omega p^\perp - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \mathrm{i}\omega\eta_l^\perp = \mu_R \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ -\mathrm{i}\omega\eta_l^\perp + \omega_l \eta_l^\perp = \mu_R y_l \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}, \end{cases} \tag{1.96}$$

Alors la méthode consiste à remplacer les dérivées $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ par $\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{-\mathrm{i}\omega + d(x_1)}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ [56] où $d(x_1)$ est le paramètre d'atténuation dont la valeur est zéro dans le milieu physique et positive dans la couche absorbante. Ainsi, le système (I.1.96) devient,

$$\begin{cases} \rho\left(-\mathrm{i}\omega + d(x_1)\right) v_1 = \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \left(-\mathrm{i}\omega + d(x_1)\right) p^\perp - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \left(-\mathrm{i}\omega + d(x_1)\right) \eta_l^\perp = \mu_R \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ -\mathrm{i}\omega\left(-\mathrm{i}\omega + d(x_1)\right)\eta_l^\perp + \omega_l\left(-\mathrm{i}\omega + d(x_1)\right)\eta_l^\perp = \mu_R y_l\left(-\mathrm{i}\omega\right)\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}, \end{cases} \tag{1.97}$$

Nous introduisons alors une nouvelle variable $\tilde{\eta_l}^\perp, \forall l \in [1, L]$, telle que,

$$-\mathrm{i}\omega\tilde{\eta_l} = \left(-\mathrm{i}\omega + d(x_1)\right)\eta_l^\perp, \forall l \in [1, L] \tag{1.98}$$

ou de façon équivalente dans le domaine temporel

$$\frac{\partial \tilde{\eta_l}^\perp}{\partial t} = \frac{\partial \eta_l^\perp}{\partial t} + d(x)\eta_l^\perp, \forall l \in [1, L] \tag{1.99}$$

si bien que le système (I.1.97) s'écrit dans le domaine temporel,

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \rho d(x_1) v_1 = \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial p^\perp}{\partial t} + d(x_1)p^\perp - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \widetilde{\eta}_l^\perp}{\partial t} = \mu_R \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \widetilde{\eta}_l^\perp}{\partial t} + \omega_l \widetilde{\eta}_l^\perp = \mu_R y_l \dfrac{\partial v_x}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{1.100}$$

Le système d'équations final pour la méthode PML est l'union des deux systèmes (I.1.93) et (I.1.100). Il est important de noter que les variables de mémoire η_l, $\forall l \in [1, L]$, n'interviennent pas. Seules les deux variables $\widetilde{\eta}_l^{\perp}$ et $\eta_l^{\parallel}$, $\forall l \in [1, L]$, apparaissent.
Si nous réalisions une analyse par ondes planes, il serait possible de montrer, [56], que ce modèle ne génère aucune réflexion à l'interface entre le milieu physique et la couche, et que l'amplitude de l'onde décroit exponentiellement à l'intérieur de cette dernière. Cette propriété nous permet de considérer un paramètre d'amortissement élevé à l'intérieur de la couche et par conséquent de considérer une épaisseur de couche relativement fine de façon à obtenir une absorption quasi-parfaite des ondes. Il est important de noter aussi que pour une largeur finie de la couche PML, la réflexion n'est pas nulle, cette réflexion s'opérant sur la frontière extérieure de la couche.

Nous discrétisons le système précédent en utilisant le même schéma que pour l'intérieur du domaine et nous considérons un paramètre d'amortissement $d(x_1)$ nul à l'interface entre le milieu physique et la couche, et positif dans la couche. Un jeu de paramètres peut être, [56],

$$d(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } x_1 < 0 \\ \ln\left(\frac{1}{R}\right) \frac{(n+1)\sqrt{\frac{\mu_R}{\rho}}}{2\delta} \left(\frac{x_1}{\delta}\right)^n & \text{for } x \geq 0 \end{cases} \tag{1.101}$$

où R est le coefficient de réflexion théorique, δ est la largeur de la couche PML, et $n = 4$. En pratique, nous considérons $R = 5.0\ 10^{-7}$, et $\delta \approx 30h$, valeur qui dépend de la longueur d'onde de l'onde se propageant dans le milieu physique, c'est-à-dire de la fréquence de l'onde et de la vitesse de propagation du milieu.

1.9 Résultats numériques

1.9.1 Diffraction d'une onde plane par un cylindre circulaire viscoacoustique

Nous traitons, dans cette section, le problème canonique représenté en figure I.1.18. Un cylindre homogène viscoacoustique de rayon a (domaine Ω_2) est entouré par un milieu ambiant homogène non-dissipatif (domaine Ω_1). L'interface entre les deux domaines Ω_1 et Ω_2 est notée Γ_1. Les paramètres physiques des milieux sont $\rho^1 = 1000kg.m^{-3}$, $c^1 = 1500m.s^{-1}$, $Q^1 = +\infty$ dans Ω_1 et $\rho^2 = 1800kg.m^{-3}$, $c_R^2 = 3050m.s^{-1}$, $Q_2 = 30$ dans Ω_2. La fonction source (Ricker) utilisée dans cet exemple est définie équation (I.1.45), avec $\nu_0 = 2.5Hz$. Numériquement, nous considérerons un domaine de $3500m \times 3500m$ discrétisé avec un pas régulier h et entouré par des couches PML, de largeur $\delta = 29h$.

Afin de valider la méthode numérique developée précédement nous proposons ici sa comparaison avec une méthode semi-analytique que nous décrivons dans la suite.

Le problème est de trouver le champ de pression total (c.à.d. incident + diffracté), noté $p(\mathbf{x}, t)$ (où $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (\theta, r)$ est le vecteur partant de l'origine 0 et pointant un point générique du plan x_1x_2, et où t est la variable de temps).

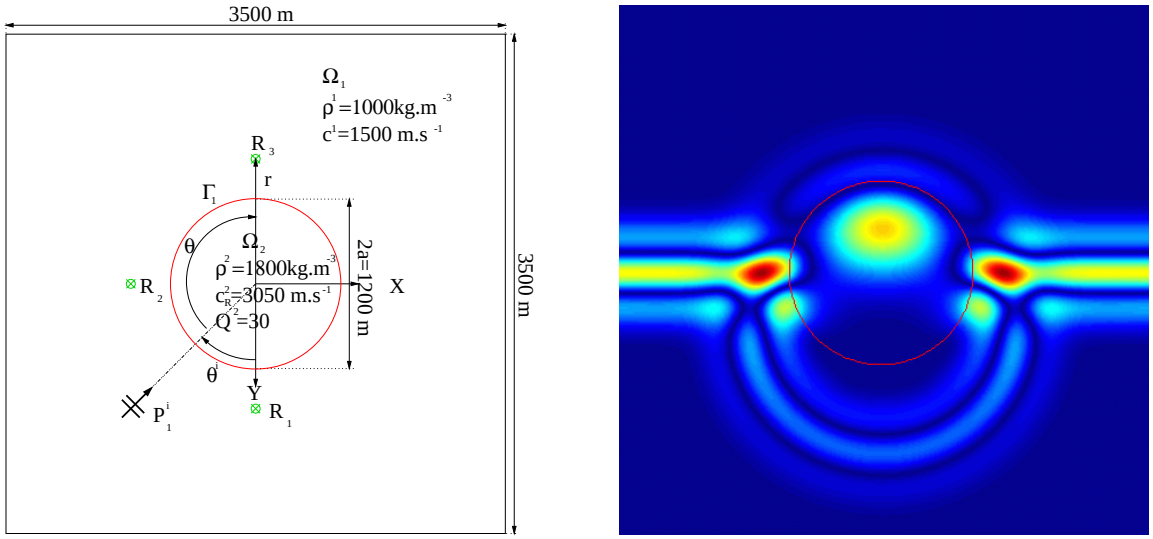


FIG. 1.18 – *À gauche, géométrie du problème : diffraction d'une onde plane par un cylindre viscoacoustique. À droite, instantané du champ de pression solution du problème, pour* $\theta^i = 0$.

Plutôt que de trouver directement $p_j(\mathbf{x},t)$; $\mathbf{x} \in \Omega_j$, $j = 1,2$, nous nous focaliserons sur $p_j(\mathbf{x},\omega)$ défini tel que,

$$p_j(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_j(\mathbf{x},\omega) \exp(-\mathbf{i}\omega t)\, d\omega;\ \mathbf{x} \in \Omega_j;\ j = 1,2 \tag{1.102}$$

vérifiant

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_j^2\right) p_j(\mathbf{x},\omega) = -\delta_{j,1} s(\omega);\ \mathbf{x} \in \Omega_j;\ j = 1,2 \tag{1.103}$$

avec $k_1(\omega) = \frac{\omega}{c_1}$ dans Ω_1 et $k_2(\omega) = \frac{\omega}{c_2(\omega)}$ dans Ω_2 avec

$$c_2(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_2(\omega)}{\rho_2}} = c_2 \left(\frac{-\mathbf{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_2}\right)} \quad \text{dans } \Omega_1. \tag{1.104}$$

Ces champs vérifient, en coordonnées polaires (r,θ), les conditions de continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface Γ_1 telles que

$$\begin{aligned} p_2(\mathbf{x},\omega) - p_1(\mathbf{x},\omega) &= 0 && \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2(\mathbf{x},\omega)}{\partial r} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1(\mathbf{x},\omega)}{\partial r} &= 0 && \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \end{aligned} \tag{1.105}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

Alors, la représentation des champs est, [189]

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= p_1^i(\mathbf{x}) + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_{1n} H_n^{(1)}(k_1 r)\exp(\mathbf{i}n\theta), && \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ p_2(\mathbf{x}) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} b_{2n} J_n(k_2(\omega) r)\exp(\mathbf{i}n\theta), && \forall \mathbf{x} \in \Omega_2, \end{aligned} \tag{1.106}$$

où

$$p_1^i(\mathbf{x}) = p_1^i(\mathbf{x}) = A_1^i \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\mathbf{i}n(\theta^i+\frac{\pi}{2})} J_n(k_1 r)\exp(\mathbf{i}n\theta); \forall \mathbf{x} = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \Omega_1. \tag{1.107}$$

avec $H_n^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce d'ordre n, et J_n la fonction de Bessel d'ordre n.

En reportant dans les conditions de continuité, et après avoir projeté sur la base de Fourier $\left(\frac{1}{2\pi}\exp(-\mathbf{i}m\theta);\, m \in \mathbf{Z}\right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_{1n} &= \frac{\gamma_1 \dot{J}_n(\chi_1) J_n(\chi_2) - \gamma_2 J_n(\chi_1)\dot{J}_n(\chi_2)}{-\gamma_1 \dot{H}_n^{(1)}(\chi_1) J_n(\chi_2) + \gamma_2 \dot{J}_n(\chi_2) H_n^{(1)}(\chi_1)} A_1^i \exp\left(-\mathbf{i}n(\theta^i + \frac{\pi}{2})\right) \\ b_{2n} &= \frac{\gamma_1 \dot{J}_n(\chi_1) H_n^{(1)}(\chi_1) - \gamma_1 J_n(\chi_1)\dot{H}_n^{(1)}(\chi_1)}{\gamma_2 \dot{J}_n(\chi_2) H_n^{(1)}(\chi_1) - \gamma_1 \dot{H}_n^{(1)}(\chi_1) J_n(\chi_2)} A_1^i \exp\left(-\mathbf{i}n(\theta^i + \frac{\pi}{2})\right), \end{aligned} \tag{1.108}$$

avec $\dot{Z}_n(z) = \dfrac{dZ_n(z)}{dz}$, $j = 1, 2$, $\chi_j = k_j a$, et $\gamma_j = \dfrac{k_j}{\rho_j}$, $j = 1, 2$.

La comparaison des résultats obtenus de façon semi-analytique (du fait de la troncature des sommes dans (I.1.106)), avec ceux obtenus de façon numérique par la méthode d'Éléments-Finis, cf. figure I.1.18, montre un bon accord entre les deux, avec une erreur relative inférieure à 4% au point R_1. Ce calcul est obtenu avec un pas de discrétisation $h = 5m$, pas relativement faible de façon à représenter au mieux l'interface Γ_1, et le pas temporel est choisi de façon à satisfaire la condition CFL

$$\Delta t = \frac{\sqrt{2}}{2c_{\max}} h, \;\; c_{\max} = \max\left(c^1, c_R^2\sqrt{1+\sum_{l=1}^{L} y_l}\right) = 3050\sqrt{1+\sum_{l=1}^{L} y_l}\ \text{m.s}^{-1}.$$

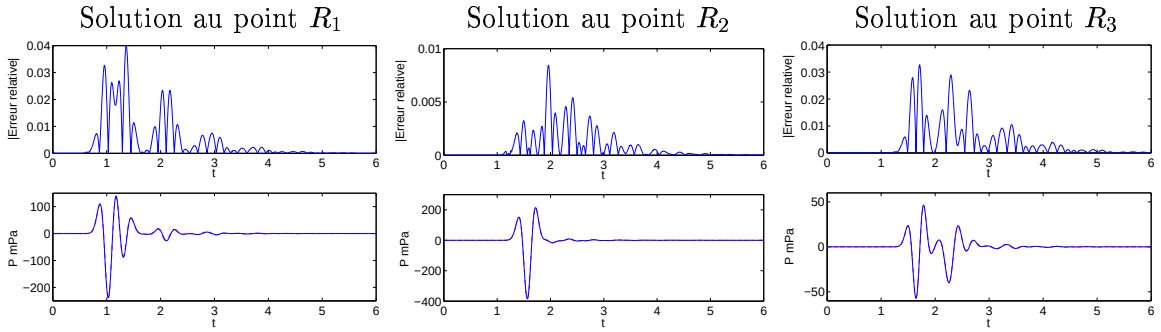


FIG. 1.19 – *Comparaison entre la solution semi-analytique (courbes mauves) et la solution numérique (courbes bleues) aux différents points d'observation R_1, R_2 et R_3. En haut nous présentons les erreurs relatives correspondantes*

De façon à tester numériquement la convergence de la méthode, nous comparons les solutions semi-analytiques et numériques pour différents pas de discrétisation $h = 25$m, 10m et 5m au point R_i, $i = 1, 2, 3$. Plus précisément nous introduisons la mesure de l'erreur comme suit

$$E = \sqrt{\left(\sum_{R_1,R_2,R_3} \sum_{t} (P_{an}(\mathbf{x},t) - P_{num}(\mathbf{x},t))^2 dt\right)} \tag{1.109}$$

où $P_{an}(\mathbf{x},t)$ correspond au champ de pression calculé semi-analytiquement et $P_{num}(\mathbf{x},t)$ correspond au champ de pression calculé à l'aide de la méthode numérique. Nous traçons, figure I.1.20, le logarithme de E en fonction du logarithme de h. La pente de cette courbe nous donne une indication de l'ordre de convergence de la méthode (ici la pente est de 1.9).

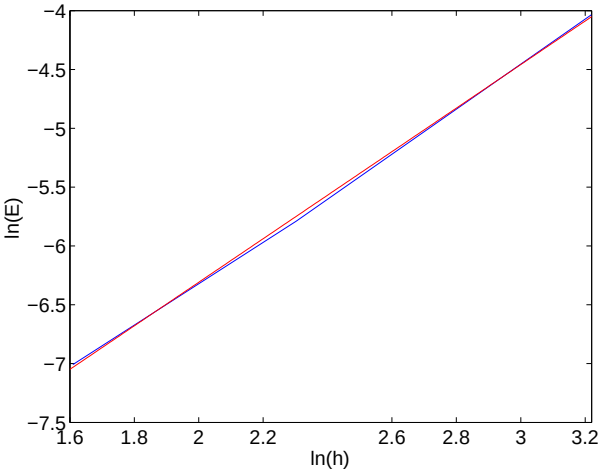


FIG. 1.20 – $\ln(E)$ *en fonction de* $\ln(h)$, *courbe bleue. La pente estimée, courbe rouge, vaut* 1.9.

La question de la convergence du schéma lorsqu'il est couplé avec la méthode des Domaines Fictifs est adressée dans [27]. Dans ce cas, nous observons numériquement que le taux de convergence est plus faible aux alentours de la frontière Γ sur laquelle est appliquée la méthode des Domaines Fictifs, puisque la solution est moins régulière sur les éléments ayant une intersection avec Γ.

1.9.2 Diffraction d'une onde cylindrique par une digue, avec fondation flexible dans un demi-espace.

De façon à illustrer l'efficacité de la méthode des Domaines Fictifs, nous calculons la réponse, à une onde cylindrique, d'une digue avec fondation flexible. Ce problème particulier a été traité dans le cas des ondes SH, pour des matériaux non-dissipatifs, dans [170]. Dans cet article, les auteurs étudient cet exemple pour différents paramètres de matériaux, de façon à déterminer le rapport de la raideur de la fondation sur la raideur du demi-espace, nécessaire à l'utilisation de l'hypothèse d'une fondation rigide. Ils concluent qu'un matériau occupant la fondation ayant une densité identique à celle du demi-espace, mais un module de cisaillement 50 fois plus grand, conduit à l'emploi de cette hypothèse. En dessous d'un rapport de 16, ce modèle n'est plus valide. Dans ce cas, l'emploi du modèle à base rigide conduit à une sous-estimation des contraintes dans la structure, [170]. Nous considérons ici un rapport de 4 pour le module viscoacoustique, si bien que nous nous retrouvons dans le cas d'une interaction sol-structure forte.

La sollicitation est délivrée au site par une source linéique suivant x_3 telle que,

$$g(\mathbf{x},t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}\left(1-\frac{r^2}{r_s^2}\right)\mathcal{I}_{B_s} \tag{1.110}$$

où $f(t)$ est la fonction définie par l'équation (I.1.45), avec $\nu_0 = 1Hz$ où r est la coordonnée radiale dans le plan sagittal (origine au centre de la source) et où $\mathcal{I}_{B_s}$ est la fonction caractéristique du

disque B_s centré à $\mathbf{x_s}$ (localisation de la source) de rayon r_s. La fonction multipliant $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$ dans l'équation (I.1.110) est une approximation régulière de la fonction $\delta(r_s)$. Le rayon r_s est petit, typiquement quelques pas de discrétisation. La géométrie du problème est illustrée figure I.1.21. Une condition de surface libre $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ est appliquée sur Γ ($\mathbf{n}$ vecteur normal à Γ), Ω_0 est le substratum, Ω_1 la fondation flexible, et Ω_2 la digue. Les paramètres physiques de la simulation sont $\rho^0 = 1000 kg.m^{-3}$, $c^0 = 1450 m.s^1$, $Q^0 = \infty$ dans Ω_0, $\rho^1 = 1000 kg.m^{-3}$, $c_R^1 = 2900 m.s^1$, $Q^1 = 30$ dans Ω_1, et $\rho^2 = 250 kg.m^{-3}$, $c_R^2 = 725 m.s^1$, $Q^2 = 100$ dans Ω_2. L'angle θ est égal à $\frac{\pi}{2}$.

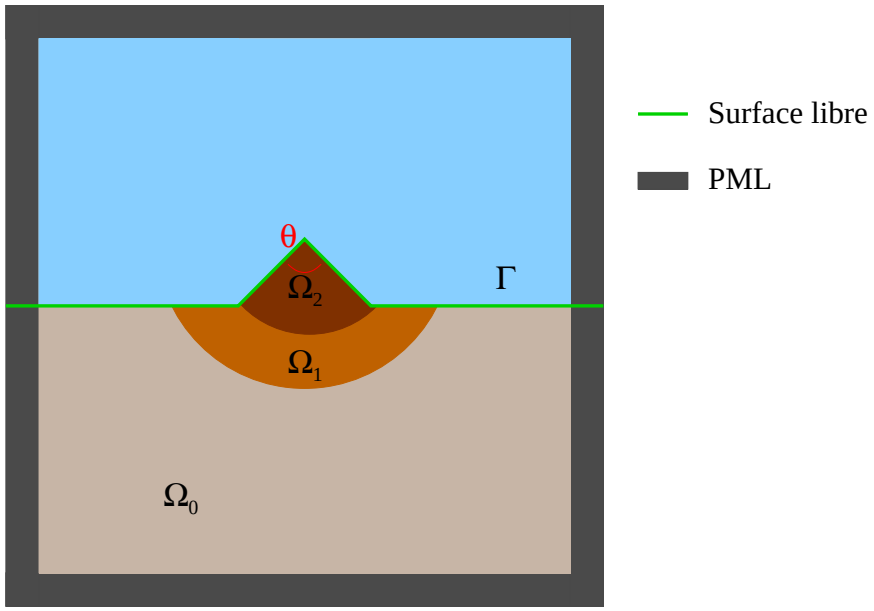


FIG. 1.21 – *Géométrie du problème : une digue construite sur une fondation flexible*

Nous représentons figure I.1.22, des instantanés du champ de pression, solution de ce problème, à différents temps. La diffraction par la surface libre est modélisée à l'aide de la méthode des domaines fictifs. La propagation dans le milieu semi-infini est modélisée à l'aide de la méthode PML. Bien que ce problème puisse être résolu semi-analytiquement à l'aide d'une méthode basée sur celle employée en onde SH dans [170], la méthode numérique employée ici est plus générale dans le sens où elle peut être appliquée à n'importe quelle géométrie de la surface libre et avec n'importe quel jeu de paramètres physiques. Notre méthode est, en effet, d'un intérêt particulier puisqu'elle permet de réaliser des calculs pour lesquels l'hypothèse de base rigide n'est pas valide, et par là-même, de fournir des résultats réalistes de la contrainte dans la structure.

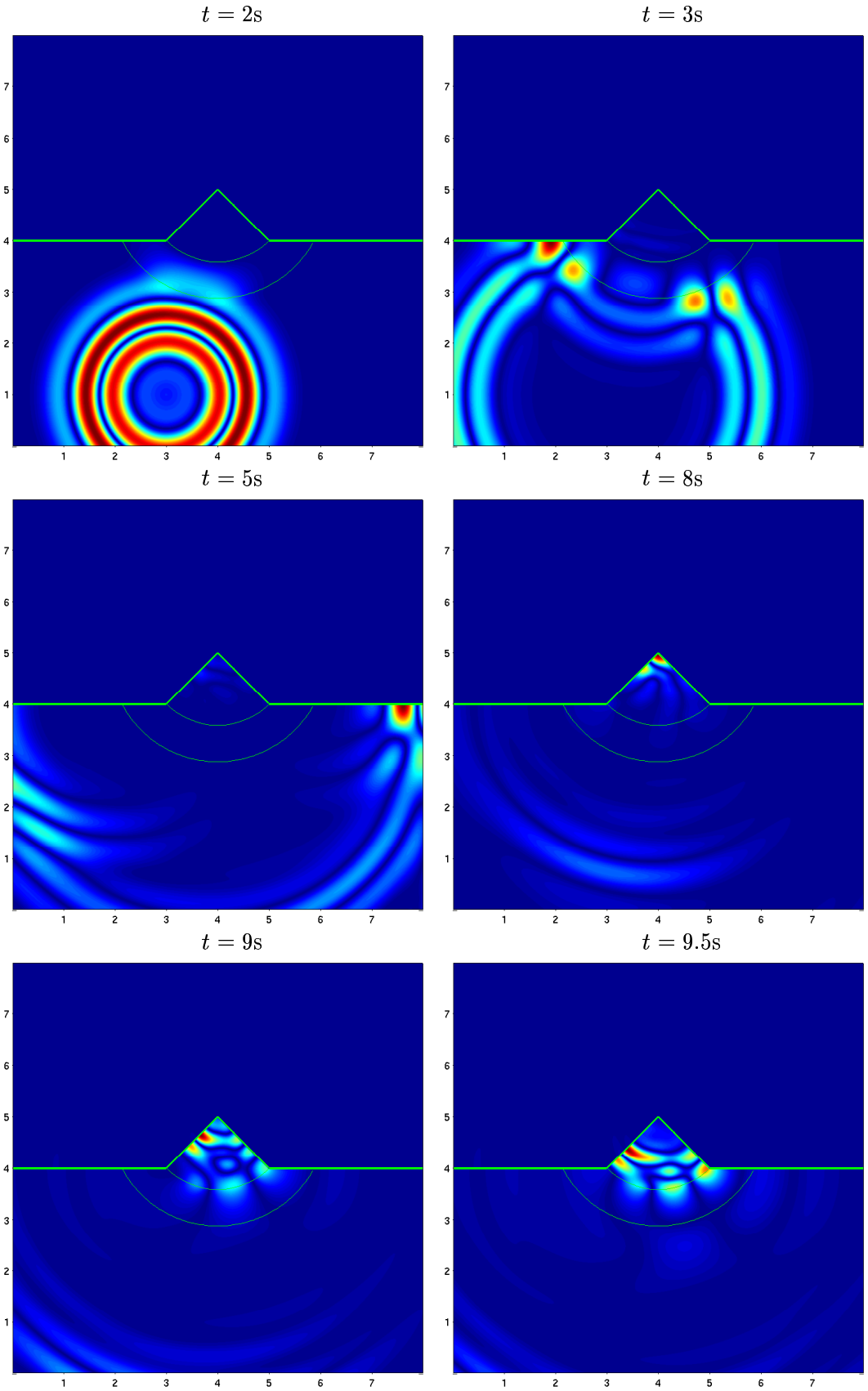


FIG. 1.22 – *Instantanés du champ de pression, solution du problème à différents temps*

Conclusion

Nous employons une approximation du module viscoacoustique dans le domaine fréquentiel de façon à introduire la dissipation dans une méthode de calcul dans le domaine temporel. Nous suivons l'approche exposée dans [63] et choisissons les fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x})$, $l \in [1, L]$ équidistantes sur une échelle logarithmique sur la plage de fréquences $\left[\frac{\omega_{\max}}{100}, \omega_{\max}\right]$, où $\omega_{\max}$ est la fréquence maximale du spectre de la source considérée. Cette approche est appropriée pour modéliser la propagation d'une onde dans un milieu faiblement dissipatif (caractérisé par un facteur de qualité plus grand que 10). Si l'aspect dissipatif du milieu est caractérisé par un facteur de qualité inférieur à cette valeur (milieu fortement dissipatif), il sera nécessaire de considérer une méthode de minimisation non-linéaire pour déterminer l'approximation du module viscoacoustique par une fonction rationnelle de la fréquence optimale, comme celle qui est proposée dans [10].

Nous obtenons un système d'équations du premier ordre en temps, en introduisant l'approximation du module viscoacoustique dans une formulation vitesse-pression. Nous discrétisons ce système à l'aide d'une méthode éléments finis mixtes en espace et à l'aide d'un schéma de différences finies centré du second ordre en temps.

Cette formulation vitesse-pression est couplée avec la méthode des domaines fictifs de façon à modéliser la condition de surface libre rencontrée à la surface de la terre qui peut être de géométrie compliquée, et avec la méthode des couches parfaitement adaptées de façon à simuler la propagation d'une onde dans un milieu non-borné.

Chapitre 2

La propagation des ondes viscoélastiques

Nous considerons ici la propagation des **ondes viscoélastiques (SH et P-SV)**. Notre objectif dans ce chapitre est de montrer comment nous pouvons **adapter la méthode proposée précédement** au cas des ondes viscoélastiques. Nous montrons en particulier, que le code de calcul viscoacoustique, peut-être utilisé, moyennant quelques modifications, pour modéliser la propagation d'une onde viscoélastique SH. Pour le cas P-SV le point de depart étant le code ELAST 2D (réalisé à l'INRIA [179]), nous décrivons comment nous avons adapté ce code au cas disspatif. Ces codes nous permettent de réaliser des **simulations pour l'étude de l'effet site-ville**, mais également de **contrôler certains de nos calculs semi-analytiques.** Ils sont à nouveau couplés à la méthode **PML** et à la méthode des **Domaines Fictifs**. Ce chapitre a donné lieu aux publications [83], [82] et au proceeding [86].

2.1 Ondes viscoélastiques SH

À la lumière de notre travail d'investigation dans le chapitre I.1, sur une méthode d'approximation efficace permettant de modéliser la propagation dans un milieu dissipatif, nous montrons comment nous pouvons adapter la méthode proposée précédemment, au calcul du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = u_3(\mathbf{x},t)\mathbf{i}_3$ dans le cas viscoélastique 2D SH. Ceci nous permet de réaliser des simulations pour l'étude des effets site-ville et régionaux, mais il est également un élément de contrôle de nos calculs semi-analytiques (validant par là-même ce code et les formulations analytiques). La méthode est à nouveau couplée à la méthode PML et à la méthode des Domaines Fictifs (pour modéliser la condition de surface libre de la surface).

2.1.1 Le système à discrétiser

En nous référant à la section 1.4.1, la propagation d'une onde SH dans un milieu viscoélastique $\Omega \in \mathbb{R}^2$ peut être représentée (sous l'hypothèse des petites perturbations) par le sytème d'équations,

$$\mathcal{P}_t \begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 u_3(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \sigma_{3k,k}(\mathbf{x},t) = -\rho(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T],\ \forall k \in [1,2] \\ \sigma_{3k}(\mathbf{x},t) = \mu(\mathbf{x},t) \star_t u_{3,k}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T],\ \forall k \in [1,2] \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ est la coordonnée du point générique du plan sagittal x_1x_2, t la variable de temps, $\sigma_{3l}(\mathbf{x},t), \forall l \in [1,2]$ le tenseur des contraintes, $u_3(\mathbf{x},t)$ la composante suivant x_3 du vecteur déplacement (les autres composantes étant nulles), $\mu(\mathbf{x},t)$ le **module de rigidité viscoélastique**

(**dépendant du temps**), et $\star_t$ le produit de convolution temporel. De la même manière qu'un matériau viscoacoustique, le caractère dissipatif d'un matériau viscoélastique est représenté, dans le domaine fréquentiel, par la relation,

$$Q_S(\mathbf{x},\omega) = \left| \frac{\Re\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Im\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)} \right| \tag{2.2}$$

où $Q_S(\mathbf{x},\omega)$ est le facteur de qualité associé aux ondes de cisaillement, dépendant des coordonnées du point $\mathbf{x}$ et de la fréquence. Pour nos applications (propagation d'une onde sismique), ce facteur de qualité est considéré constant sur la plage de fréquences utiles (au sens de fréquences excitées par une source). Ainsi, nous considérerons que le facteur de qualité associé aux ondes de cisaillement s'écrit $Q_S(\mathbf{x})$.

La résolution du système (I.2.1) dans le domaine temporel est alors difficile du fait du produit de convolution temporel. Nous approchons donc le module de rigidité viscoélastique $\mu(\mathbf{x},\omega)$ dans le domaine fréquentiel comme nous l'avons fait à la section I.1.4, par $\mu_L(\mathbf{x},\omega)$,

$$\mu(\mathbf{x},\omega) \approx \mu_L = \mu_R(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega y_l}{\mathrm{i}\omega - \omega_l} \right), \forall l \in [1,...,L] \text{ et } \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.3}$$

de sorte que la relation constitutive de Hooke-Cauchy peut être approchée dans le domaine fréquentiel par,

$$\sigma_{3k,k}(\mathbf{x},\omega) \approx \left(\sigma_{3,k}\right)_L(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega y_l}{\mathrm{i}\omega - \omega_l} \right) u_{3,k}(\mathbf{x},\omega),\ \forall l \in [1,...,L],\ \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.4}$$

Dans ces deux équations, $\mu_R(\mathbf{x})$ est le module de rigidité viscoélastique relaxé. Les poids $y_l(\mathbf{x})$, $\forall l \in [1,L]$, et les fréquences de relaxation $\omega_l(\mathbf{x})$, $\forall l \in [1,L]$ sont déterminés par la donnée d'un facteur de qualité $Q_S(\mathbf{x})$ à l'aide de la méthode proposée dans la section I.1.2.5.
Dans le cas des ondes SH, le tenseur des contraintes étant symétrique, nous pouvons le réduire, à un vecteur $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ tel que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = (\sigma_{1,3}(\mathbf{x},t), \sigma_{2,3}(\mathbf{x},t))$, de sorte qu'en notant $u(\mathbf{x},t) = u_3(\mathbf{x},t)$, l'équation (I.2.4) s'écrit,

$$\boldsymbol{\sigma}_L(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x}) \left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega y_l}{\mathrm{i}\omega - \omega_l} \right) \nabla u(\mathbf{x},\omega),\ \forall x \in \Omega \tag{2.5}$$

Nous introduisons alors les vecteurs $\boldsymbol{\zeta}_l(\mathbf{x},\omega)$, $l \in [1,L]$, tel que,

$$\boldsymbol{\zeta}_l(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x}) \frac{\mathrm{i}\omega y_l(\mathbf{x})}{\mathrm{i}\omega - \omega_l} \nabla u(\mathbf{x},\omega),\ \forall l \in [1,L] \text{ et } \forall \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.6}$$

En revenant dans le domaine temporel, le système (I.2.1) peut être approché par le système,

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}) \dfrac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = -\rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{x},t) & \text{in } \Omega \times]0,T] \quad (i) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = \mu_R(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x},t) + \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \boldsymbol{\zeta}_l(\mathbf{x},t) & \text{in } \Omega \times]0,T] \quad (ii) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}_l(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \omega_l \boldsymbol{\zeta}_l(\mathbf{x},t) = y_l(\mathbf{x}) \mu_R(\mathbf{x}) \nabla \dfrac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t} & \forall l \in [1,L], \text{ in } \Omega \times]0,T] \quad (iii) \end{cases} \tag{2.7}$$

Nous pourrions discrétiser directement ce système ; néanmoins, il apparaît que les équations des problèmes viscoacoustique et viscoélastique 2D pour les ondes SH sont très proches. En effet, le problème élastique 2D SH, est souvent traité comme un problème scalaire, tout comme le problème acoustique. De plus, nous avons à faire à un système où $L+1$ tenseurs $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ et $\boldsymbol{\zeta}_l(\mathbf{x},t)$, $\forall l \in [1,L]$ sont impliqués, ce qui introduit un nombre important d'inconnues. Enfin, nous rappelons que numériquement $L=4$ dans la totalité du domaine discrétisé, si bien que **les fréquences de relaxations ω_l, $\forall l \in [1,L]$ sont indépendantes de $\mathbf{x}$.**

Ainsi, considérons la divergence de l'équation (iii) du système (I.2.7) et introduisons la variable scalaire $\eta_l(\mathbf{x},t)$, telle que $\rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 \eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}_l(\mathbf{x},t)$, $\forall l \in [1,L]$,

$$\frac{\partial^2 \eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} + \omega_l \frac{\partial \eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \cdot (y_l(\mathbf{x}) \mu_R(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x},t)) = 0, \ \forall l \in [1,L], \text{ dans } \Omega \times]0,T] \tag{2.8}$$

En remplaçant l'expression de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ de l'équation (ii) dans (i), il vient,

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\mu_R(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x},t)) - \sum_{l}^{L} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = -\rho(\mathbf{x}) f(\mathbf{x},t), \text{ dans } \Omega \times]0,T] \tag{2.9}$$

Introduisons enfin le vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$, tel que $\dfrac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mu_R(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x},t)$. Le système (I.2.7) s'écrit donc, avec $\dfrac{\partial g(\mathbf{x},t)}{\partial t} = f(\mathbf{x},t)$,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_R(\mathbf{x})} \dfrac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \nabla u(\mathbf{x},t) = 0 & \text{dans } \Omega \times]0,T] \\ \dfrac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x},t) - g(\mathbf{x},\mathbf{t}) & \text{dans } \Omega \times]0,T] \\ \dfrac{\partial \eta_l(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \omega_l \eta_l(\mathbf{x},t) = \dfrac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \cdot (y_l(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x},t)) = 0 & \forall l \in [1,L], \text{ dans } \Omega \times]0,T] \end{cases} \tag{2.10}$$

En le comparant au système discrétisé et étudié pour la propagtion d'une onde dans un milieu viscoacoustique (I.1.49), ce sytème est identique avec les correspondances,

Ondes Viscoacoustiques		Ondes Viscoélastiques 2D SH		
$\rho(\mathbf{x})$	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{\mu_R(\mathbf{x})}$	(i)	
$\mu_R(\mathbf{x})$	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{\rho(\mathbf{x})}$	(ii)	
$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$	$\rightarrow$	$\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$	(iii)	(2.11)
$p(\mathbf{x},t)$	$\rightarrow$	$u(\mathbf{x},t)$	(iv)	
$f(\mathbf{x},t)$ source en vitesse	$\rightarrow$	$g(\mathbf{x},t)$ source en déplacement $\dfrac{\partial g(\mathbf{x},t)}{\partial t} = f(\mathbf{x},t)$	(v)	
$y_l(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x},t)$	$\rightarrow$	$\nabla \cdot (y_l(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x},t))$	(vi)	

La seule différence significative réside dans la dernière équation du système (I.2.10). Pour un milieu homogène la discrétisation est identique au cas viscoacoustique, puisque dans ce

cas $y_l(\mathbf{x}) = y_l$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, ce qui implique $\mathrm{div}\,(y_l(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x},t)) = y_l \mathrm{div}\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$. Par contre, l'équation à discrétiser est différente dans le cas d'un milieu hétérogène.

La discrétisation se fait à l'aide des éléments $Q_{k+1}^{\mathrm{div}} - Q_k$ et $Q_{k+1}^{\mathrm{div}} - P^{k+1}$. **Rigoureusement, l'utilisation de ces éléments nécessiterait ici la continuité des quantités $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ et $y_l(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$, $\forall l \in [1,L]$.** Or nous n'avons pas pu montrer celle-ci, les quantités $y_l(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$, $\forall l \in [1,L]$ apparaissant discontinues. Les milieux que nous considérerons sont par définition **faiblement dissipatifs** (i.e. caractérisés par un facteur de qualité supérieur à 10), et de surcroît, notre méthode d'approximation des modules viscoélastiques a été développée pour de tels milieux. La **discontinuité introduite au niveau d'une interface, liée aux termes $y_l(\mathbf{x})$ est donc faible**, de sorte que la discrétisation à l'aide de ces éléments, et pour les caractéristiques des matériaux considérés dans nos problèmes, fournit des résultats plus que satisfaisants, y compris en des points localisés aux interfaces, se reporter par exemple aux figures II.2.8, II.2.22, II.2.57 et II.2.61.

2.2 Ondes viscoélastiques P-SV

En se référant à la section 1.4.1, la propagation d'une onde P-SV dans un milieu viscoélastique isotrope $\Omega \in \mathbb{R}^2$ peut être représentée (sous l'hypothèse des petites perturbations) par le sytème d'équations,

$$\mathcal{P}_t \begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 u_l(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} - \sigma_{lk,k}(\mathbf{x},t) = -\rho(\mathbf{x}) f_l(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T],\ \forall (k,l) \in [1,2]^2 \\ \sigma_{kl}(\mathbf{x},t) = \lambda(\mathbf{x},t) \star_t \delta_{kl}\epsilon_{mm}(\mathbf{x},t) + 2\mu(\mathbf{x},t) \star_t \epsilon_{kl}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T],\ \forall (k,l) \in [1,2]^2 \\ \sigma_{33}(\mathbf{x},t) = \lambda \star_t u_{m,m} & \text{dans } \Omega\times]0,T],\ \forall m \in [1,2] \end{cases} \tag{2.12}$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ est la coordonnée du point générique du plan sagittal x_1x_2, t la variable de temps, $\sigma_{kl}(\mathbf{x},t)$, $\forall (k,l) \in [1,2]\times[1,2]$ les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$, $\epsilon_{kl}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)$, $\forall (k,l) \in [1,2]\times[1,2]$ les composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x},t)$, $u_l(\mathbf{x},t)$, $\forall l \in [1,2]$, les composantes suivant x_1 et x_2 du vecteur déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (la composante suivant x_3 étant nulle), $\mu(\mathbf{x},t)$ le **module de rigidité viscoélastique (dépendant du temps)**, $\lambda(\mathbf{x},t)$ le **module de compressibilité viscoélastique** (également **dépendant du temps**), et $\star_t$ le produit de convolution temporel. De la même manière qu'un materiau viscoacoustique et viscoélastique SH, le caractère dissipatif d'un matériau viscoélastique est représenté, dans le domaine fréquentiel, par deux relations directement associées aux ondes de compression (P wave) et aux ondes de cisaillement vertical (SV wave), [42],

$$Q_S(\mathbf{x},\omega) = \left|\frac{\Re\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Im\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}\right| \quad Q_P(\mathbf{x},\omega) = \left|\frac{\Re\left(\lambda(\mathbf{x},\omega) + 2\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Im\left(\lambda(\mathbf{x},\omega) + 2\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}\right| \tag{2.13}$$

Il est alors opportun d'**introduire la quantité $\Pi(\mathbf{x},\omega)$**, associée dans le domaine temporel à $\Pi(\mathbf{x},t)$ définie par, [42],

$$\Pi(\mathbf{x},\omega) = \lambda(\mathbf{x},\omega) + 2\mu(\mathbf{x},\omega) \tag{2.14}$$

Il est de plus communément admis d'omettre le terme du tenseur des contraintes σ_{33}, si bien que le système (I.2.12) s'écrit, dans le domaine fréquentiel

$$\mathcal{P}_\omega \begin{cases} -\omega^2 \rho(\mathbf{x}) u_l(\mathbf{x},\omega) - \sigma_{lk,k}(\mathbf{x},\omega) = -\rho(\mathbf{x}) f_l(\mathbf{x},\omega) & \text{dans } \Omega,\ \forall (k,l) \in [1,2]\times[1,2] \\ \sigma_{kl}(\mathbf{x},\omega) = \left(\Pi(\mathbf{x},\omega) - 2\mu(\mathbf{x},\omega)\right)\delta_{kl}\epsilon_{pp}(\mathbf{x},\omega) + 2\mu(\mathbf{x},\omega)\epsilon_{kl}(\mathbf{x},\omega) & \text{dans } \Omega,\ \forall (k,l) \in [1,2]\times[1,2] \end{cases} \tag{2.15}$$

avec les deux relations, équation (I.2.13)

$$Q_S(\mathbf{x},\omega) = \left|\frac{\Re\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Im\left(\mu(\mathbf{x},\omega)\right)}\right| \quad Q_P(\mathbf{x},\omega) = \left|\frac{\Re\left(\Pi(\mathbf{x},\omega)\right)}{\Im\left(\Pi(\mathbf{x},\omega)\right)}\right| \tag{2.16}$$

Le problème réside dans la relation constitutive, seconde équation du système (I.2.15), dans le domaine temporel. Une façon de résoudre ce problème est d'approcher, dans le domaine fréquentiel, les quantités $\Pi(\mathbf{x},\omega)$ et $\mu(\mathbf{x},\omega)$ par deux fonctions rationnelles de la fréquence, suivant une méthode analogue à celle que nous avons déja utilisée pour les cas viscoacoustique et viscoélastique en ondes SH. Il vient donc,

$$\mu(\mathbf{x},\omega) \approx \mu_R(\mathbf{x})\left(1 + \sum_{l=1}^{L^S} \frac{\mathrm{i}\omega y_l^S}{\mathrm{i}\omega - \omega_l^S}\right), \quad \Pi(\mathbf{x},\omega) \approx \Pi_R(\mathbf{x})\left(1 + \sum_{l=1}^{L^P} \frac{\mathrm{i}\omega y_l^P}{\mathrm{i}\omega - \omega_l^P}\right) \tag{2.17}$$

où ω_l^P, $\forall l \in [1, L^P]$, et ω_l^S, $\forall l \in [1, L^S]$, sont les fréquences de relaxation associées respectivement aux ondes de compression, repérées par l'exposant P, et aux ondes de cisaillement, repérées par l'exposant SV, déterminées de façon unique par le spectre de la source utilisée pour les simulations ; y_l^P et y_l^S sont des poids déterminés de façon unique par les données des facteurs de qualité Q_S et Q_P ; $\mu_R(\mathbf{x})$ et $\Pi_R(\mathbf{x})$ sont respectivement les modules de rigidité relaxés et modules associés aux ondes de compression relaxés.

Du fait des conversions des modes et des propriétés des ondes P et SV, la plage fréquentielle "utile" des ondes P et celle des ondes SV sont identiques. Elles sont déterminées par le spectre de la source. Ainsi, il n'est pas nécessaire de considérer des nombres différents de corps de Maxwell pour les approximations de $\mu(\mathbf{x},\omega)$ et $\Pi(\mathbf{x},\omega)$ et les fréquences de relaxation associées aux ondes de compression et de cisaillement sont identiques, déterminées de façon équidistantes logarithmiquement entre $\left[\frac{\omega_{\max}}{100}, \omega_{\max}\right]$, $\omega_{\max}$ étant la fréquence maximale du spectre de la source considérée. En d'autres termes, nous considérerons $L^P = L^S = L$ et $\omega_l^S = \omega_l^P = \omega_l$, si bien que,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{x},\omega) &\approx \mu_L(\mathbf{x},\omega) = \mu_R(\mathbf{x})\left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega y_l^S}{\mathrm{i}\omega - \omega_l}\right) \\ \Pi(\mathbf{x},\omega) &\approx \Pi_L(\mathbf{x},\omega) = \Pi_R(\mathbf{x})\left(1 + \sum_{l=1}^{L} \frac{\mathrm{i}\omega y_l^P}{\mathrm{i}\omega - \omega_l}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Les poids sont alors déterminés en résolvant deux systèmes surdéterminés, obtenus en égalant les facteurs de qualité souhaités $Q_j(\mathbf{x})$, $j = S$ ou $j = P$, et approchés $Q_j^N(\mathbf{x})$ (obtenu en introduisant

les approximations $\mu_L(\mathbf{x},\omega)$ et $\Pi_L(\mathbf{x},\omega)$ dans les relations (I.2.16)),

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{L} y_l^P(\mathbf{x})\tilde{\omega}_k \frac{\omega_l - \left(\tilde{Q}_P(\mathbf{x},\tilde{\omega}_k)\right)^{-1}\tilde{\omega}_k}{\omega_l^2+\tilde{\omega}_k^2} = \left(\tilde{Q}_P(\mathbf{x},\tilde{\omega}_k)\right)^{-1},\ k\in[1,2L-1]\\
&\sum_{l=1}^{L} y_l^S(\mathbf{x})\tilde{\omega}_k \frac{\omega_l - \left(\tilde{Q}_S(\mathbf{x},\tilde{\omega}_k)\right)^{-1}\tilde{\omega}_k}{\omega_l^2+\tilde{\omega}_k^2} = \left(\tilde{Q}_S(\mathbf{x},\tilde{\omega}_k)\right)^{-1},\ k\in[1,2L-1]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

où les fréquences $\tilde{\omega}_k$ sont déterminées par,

$$\begin{cases}
\tilde{\omega}_k = \Omega_1 \dfrac{\omega\max}{100}\\
\tilde{\omega}_{k+1} = \tilde{\omega}_k \left(\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{2N}} = \tilde{\omega}_k\,(100)^{\frac{1}{2N}}
\end{cases} \tag{2.20}$$

où $\Omega_2 = \omega_{\max}$ et $\Omega_1 = \dfrac{\omega\max}{100}$.
En introduisant les approximations $\mu_L(\mathbf{x},\omega)$, et $\Pi_L(\mathbf{x},\omega)$, équations (I.2.18), dans la relation constitutive de Hooke-Cauchy, seconde équation du système (I.2.15), il vient,

$$\begin{aligned}
\sigma_{km}(\mathbf{x},\omega) \approx{}& \left(\Pi_R(\mathbf{x})\left(1+\sum_{l=1}^{L}\frac{\mathrm{i}\omega y_l^P}{\mathrm{i}\omega-\omega_l}\right) - 2\mu_R(\mathbf{x})\left(1+\sum_{l=1}^{L}\frac{\mathrm{i}\omega y_l^S}{\mathrm{i}\omega-\omega_l}\right)\right)\delta_{km}\epsilon_{pp}(\mathbf{x},\omega) +\\
&2\mu_R(\mathbf{x})\left(1+\sum_{l=1}^{L}\frac{\mathrm{i}\omega y_l^S}{\mathrm{i}\omega-\omega_l}\right)\epsilon_{km}(\mathbf{x},\omega)\text{dans }\Omega,\ \forall(k,m)\in[1,2]\times[1,2]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Nous introduisons maintenant L nouveaux tenseurs $\boldsymbol{\zeta}^l$, $\forall l\in[1,L]$, dont les composantes, $\zeta_{km}^l(\mathbf{x},\omega)$, sont associées aux termes de dissipation tels que,

$$\begin{aligned}
\zeta_{km}^l(\mathbf{x},\omega) &= \left(\Pi_R(\mathbf{x})\frac{\mathrm{i}\omega y_l^P}{\mathrm{i}\omega-\omega_l} - 2\mu_R(\mathbf{x})\frac{\mathrm{i}\omega y_l^S}{\mathrm{i}\omega-\omega_l}\right)\delta_{km}\epsilon_{pp}(\mathbf{x},\omega) + 2\mu_R(\mathbf{x})\frac{\mathrm{i}\omega y_l^S}{\mathrm{i}\omega-\omega_l}\epsilon_{km}(\mathbf{x},\omega)\\
&= \frac{\left(\Pi_R(\mathbf{x})y_l^P - 2\mu_R(\mathbf{x})y_l^S\right)\delta_{km}\mathrm{i}\omega\epsilon_{pp}(\mathbf{x},\omega) + 2\mu_R(\mathbf{x})y_l^S\mathrm{i}\omega\epsilon_{km}(\mathbf{x},\omega)}{\mathrm{i}\omega-\omega_l}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

si bien qu'en introduisant le tenseur taux de déformation $\mathbf{d}(\mathbf{x},\omega)$, de composantes $d_{km}(\mathbf{x},\omega)$, $(k,m)\in[1,2]\times[1,2]$, tel que $d_{km}(\mathbf{x},\omega) = -\mathrm{i}\omega\epsilon_{km} = \frac{1}{2}\left(v_{k,m}(\mathbf{x},\omega)+v_{m,k}(\mathbf{x},\omega)\right)$, (où $\mathbf{v}(\mathbf{x},\omega)$ est la vitesse particulaire), et en multipliant la relation constitutive par $-\mathrm{i}\omega$, cette dernière s'écrit sous la forme d'un système de deux équations tensorielles,

$$\begin{cases}
-\mathrm{i}\omega\sigma_{km}(\mathbf{x},\omega) + \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\mathrm{i}\omega\zeta_{km}^l(\mathbf{x},\omega) = & \\
\left(\Pi_R - 2\mu_R\right)\delta_{km}d_{pp}(\mathbf{x},\omega) + 2\mu_R d_{km}(\mathbf{x},\omega) & \text{dans }\Omega,\ \forall(k,m)\in[1,2]^2\\
-\mathrm{i}\omega\zeta_{km}^n(\mathbf{x},\omega) + \omega_l\zeta_{km}^l(\mathbf{x},\omega) = 2\mu_R y_l^S d_{km}(\mathbf{x},\omega) + & \\
\left(\Pi_R y_l^P - 2\mu_R y_l^S\right)\delta_{km}d_{pp}(\mathbf{x},\omega) & \text{dans }\Omega,\ \forall(k,m)\in[1,2]^2,\ \forall l\in[1,L]
\end{cases} \tag{2.23}$$

Alors en revenant dans le domaine temporel, notre système $\mathcal{P}_t$ initial, équation (I.2.12), s'écrit sous la forme d'un système de trois équations dont deux équations tensorielles,

$$\mathcal{P}_t \begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial v_l(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \sigma_{lk,k}(\mathbf{x},t) = -\rho(\mathbf{x}) f_l(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T] \\ \dfrac{\partial \sigma_{km}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \zeta^l_{km}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left(\Pi_R(\mathbf{x}) - 2\mu_R(\mathbf{x})\right)\delta_{km} d_{pp}(\mathbf{x},t) + 2\mu_R(\mathbf{x}) d_{km}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T] \\ \dfrac{\partial \zeta^l_{km}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \omega_l \zeta^l_{km}(\mathbf{x},t) = \left(\Pi_R y_l^P - 2\mu_R y_l^S\right)\delta_{km} d_{pp}(\mathbf{x},t) + 2\mu_R y_l^S d_{km}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T] \end{cases} \tag{2.24}$$

En introduisant les matrices associées aux inconnues de ce système, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ de composante $\sigma_{km}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$ de composante $d_{km}(\mathbf{x},t)$, $\boldsymbol{\zeta}^l$ de composante ζ^l_{km}, $\forall l \in [1,L]$, et $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ de composante $v_l(\mathbf{x},t)$, le système (I.2.24) s'écrit,

$$\mathcal{P}_t \begin{cases} \rho(\mathbf{x})\dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = -\rho(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T] \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}^n(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mathbf{C}_R(\mathbf{x})\mathbf{d}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T] \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}^n(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \omega_n \boldsymbol{\zeta}^n(\mathbf{x},t) = \mathbf{C}^n_U(\mathbf{x})\mathbf{d}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega\times]0,T],\ \forall n \in [1,N] \end{cases} \tag{2.25}$$

où les tenseurs d'ordre 4, $\mathbf{C}_R(\mathbf{x})$ et $\mathbf{C}^n_U(\mathbf{x})$, $\forall n \in [1,N]$, sont les tenseurs associés à la partie relaxée et aux composantes liées au modèle de dissipation retenu du tenseur de Christoffel.

Or, le tenseur des contraintes, taux de déformations, et ceux associés aux termes de dissipation, sont symétriques, si bien que le système (I.2.25) peut s'écrire de façon identique en réduisant ces tenseurs à des vecteurs $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) =< \sigma_{11}(\mathbf{x},t), \sigma_{22}(\mathbf{x},t), \sigma_{12}(\mathbf{x},t) >$, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x},t) =< \epsilon_{11}(\mathbf{x},t), \epsilon_{22}(\mathbf{x},t), \epsilon_{12}(\mathbf{x},t) >$, et $\boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x},t) =< \zeta^l_{11}(\mathbf{x},t), \zeta^l_{22}(\mathbf{x},t), \zeta^l_{22}(\mathbf{x},t) >$, $\forall l \in [1,L]$. Les deux tenseurs d'ordre 4, $\mathbf{C}_R(\mathbf{x})$ et $\mathbf{C}^l_U(\mathbf{x})$ prennent alors la forme de deux matrices 3×3. C'est sous cette forme que sera réalisée la discrétisation, [179].

Ce système est donc une formulation mixte contrainte-vitesse du problème. Dans [141], les auteurs proposent une autre formulation vitesse-contrainte, relativement similaire à celle que nous venons d'écrire. Ils considèrent une fonction de relaxation, relativement générale, [33] correspondant à L éléments standards en parallèle, c'est-à-dire à la meilleure approximation de Padé possible pour la modélisation de la propagation dans un milieu viscoélastique à facteur de qualité constant [58]. Les différences majeures résident dans l'approximation utilisée (nous employons une approximation par "Generalized Maxwell body"), dans l'équation sur $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ où les coefficients μ_R et Π_R sont multipliés par des quatités dépendant de l, et dans la méthode de discrétisation, puisque les auteurs utilisent une méthode de différences finies.

Un système similaire est discrétisé dans [22, 23, 65]. Les différences cette fois-ci avec la méthode numérique décrite dans ce qui suit (afin de préserver la complètude de ce document) sont minimes. Nous renvoyons d'ailleurs à la thèse [65], pour une analyse plus complète de la méthode numérique employée ici. Dans [22, 23], les seules différences résident dans la méthode d'approximation utilisée, puisques les auteurs emploient une approximation avec un seul élément de Zener. Dans [65], l'auteur

considère un système contrainte-déplacement, si bien que le système à dicrétiser est du second ordre en temps.

2.3 Analyse du système continu

Nous vérifions ici la décroissance de l'énergie et dégageons une formulation de la relation de dispersion. Nous traitons le cas d'un problème homogène, si bien que les dépendances spatiales $\mathbf{x}$ sont omises. Nous omettrons également la dépendance temporelle t par simplification.

2.3.1 Analyse énergétique

Nous réécrivons le système continu (I.2.25), sans terme source $\mathbf{f} = 0$

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0 & (i) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}^l}{\partial t} = \mathbf{C}_R\mathbf{d} & (ii) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}^l}{\partial t} + \omega_l\boldsymbol{\zeta}^l = \mathbf{C}_U^l\mathbf{d}, \forall l & (iii) \end{cases} \tag{2.26}$$

En appliquant le produit scalaire (dans L^2) de l'équation (i) avec $\mathbf{v}$, de l'équation (ii) avec $\left(\boldsymbol{\sigma} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right)$, et de l'équation (iii) avec $\boldsymbol{\zeta}^l$, nous obtenons,

$$\begin{cases} \left(\rho\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla\mathbf{v}) = 0 & (i') \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\sigma} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right), \left(\boldsymbol{\sigma} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right)\right) = \left(\mathbf{C}_R\mathbf{d}, \left(\boldsymbol{\sigma} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right)\right) & (ii') \\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}^l}{\partial t}, \boldsymbol{\zeta}^l\right) + \left(\omega_l\boldsymbol{\zeta}^l, \boldsymbol{\zeta}^l\right) = \left(\mathbf{C}_U^l\mathbf{d}, \boldsymbol{\zeta}^l\right), \forall l & (iii') \end{cases} \tag{2.27}$$

En remarquant que $\nabla\mathbf{v} = \mathbf{d} + \dot{\mathbf{w}}$, où $\dot{\mathbf{w}} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$, $\mathbf{w}$ le tenseur des rotations antisymétriques, tel que $\dot{\mathbf{w}} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^t\right)$, et que le produit tensoriel d'un tenseur symétrique avec un tenseur antisymétrique est nul, nous pouvons écrire,

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla\mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \tag{2.28}$$

Alors, en intoduisant (I.2.28) dans l'équation (i') et en additionnant comme suit $(i') + \mathbf{C}_R^{-1}(ii') + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\mathbf{C}_U^{-1}(iii')$, il vient,

$$\begin{aligned} &\left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C}_R^{-1}\left(\boldsymbol{\sigma} - \sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right), \left(\boldsymbol{\sigma} - \sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right)\right) + \sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\partial}{\partial}\mathbf{C}_U^{-1}\boldsymbol{\zeta}^l, \boldsymbol{\zeta}^l\right) = \\ &-\sum_{l=1}^{L}\left(\omega_l\mathbf{C}_U^{-1}\boldsymbol{\zeta}^l, \boldsymbol{\zeta}^l\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

si bien que la quantité d'énergie,

$$E(t)) = \frac{1}{2}(\rho \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_R^{-1}\left(\boldsymbol{\sigma} - \sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right), \left(\boldsymbol{\sigma} - \sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\zeta}^l\right)\right) + \sum_{l=1}^{L}\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_U^{-1}\boldsymbol{\zeta}^l, \boldsymbol{\zeta}^l\right) \tag{2.30}$$

associée à la solution du système homogène (I.2.26) vérifie

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = -\sum_{n=1}^{N}\left(\omega_l \mathbf{C}_U^{-1}\boldsymbol{\zeta}^l, \boldsymbol{\zeta}^l\right) \leqq 0 \tag{2.31}$$

Cette relation implique que l'énergie du système décroît au cours du temps lorsque ω_l, y_l^P et y_l^S, $\forall l \in [1, L]$, μ_R et Π_R sont des quantités positives, $\Pi_R y_l^P \geqq 2\mu_R y_l^S$ et $\Pi_R \geqq 2\mu_R$. Ces conditions, certes restrictives, sont en fait toujours vérifiées, et nous n'avons pas exhibé de cas, en pratique, où la quantité (I.2.31) est positive, même lorsque certains poids sont négatifs, section I.1.4.1.

2.3.2 Relation de dispersion

Nous menons dans cette section une analyse par onde plane. Les quantités $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ et $\boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x}, t)$ s'écrivent donc,

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v^0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\right)\mathbf{d} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \sigma^0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\right)\mathbf{D} \\ \boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x}, t) = \left(\zeta^l\right)^0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\right)\mathbf{D},\ \forall l \in [1, L] \end{cases} \tag{2.32}$$

avec $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, et $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

En remplaçant dans le système (I.2.24), sans terme source, et après quelques calculs élémentaires, on obtient

- Les ondes de compression, ondes P : $\mathbf{k}\cdot\mathbf{d} \neq 0$. Dans ce cas, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{d}$ sont colinéaires, et la relation de dispersion des ondes P est,

$$\omega^2 = (c_P)_R^2 \|\mathbf{k}\|^2 \left(1 + \sum_{l}^{L}\frac{\mathrm{i}\omega y_l^P}{\mathrm{i}\omega - \omega_l}\right) \tag{2.33}$$

- Les ondes de cisaillement, ondes SV : $\mathbf{k}\cdot\mathbf{d} = 0$. Dans ce cas, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{d}$ sont orthogonaux et la relation de dispersion des ondes SV est,

$$\omega^2 = (c_S)_R^2 \|k\|^2 \left(1 + \sum_{l}^{L}\frac{\mathrm{i}\omega y_l^S}{\mathrm{i}\omega - \omega_l}\right) \tag{2.34}$$

Remarque : En prenant respectivement $y_l^P = 0$, $\forall l \in [1, L]$ et $y_l^S = 0$, $\forall l \in [1, L]$, nous retrouvons les relations de dispersion d'une onde plane élastique classique,

$$\begin{array}{ll} \text{Ondes P} & \omega^2 = (c_P)_R^2 |k|^2 \\ \text{Ondes SV} & \omega^2 = (c_S)_R^2 |k|^2 \end{array} \tag{2.35}$$

Remarque : Les deux relations de dispersion, équations (I.2.33) et (I.2.34) ont la même forme que celles déjà rencontrées dans les cas viscoacoustique et viscoélastique SH. Leur résolution ne présente donc pas de difficulté nouvelle.

2.4 Discrétisation du problème

Nous réécrivons le système (I.2.25) sous la forme,

$$\mathcal{P}_t \begin{cases} \rho(\mathbf{x}) \dfrac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) = -\rho(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega \times]0,T] \\ \mathbf{C}_R(\mathbf{x})^{-1} \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - \mathbf{C}_R(\mathbf{x})^{-1} \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mathbf{d}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega \times]0,T] \\ \left(\mathbf{C}_U^l(\mathbf{x})\right)^{-1} \dfrac{\partial \boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \omega_l \left(\mathbf{C}_U^l(\mathbf{x})\right)^{-1} \boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x},t) = \mathbf{d}(\mathbf{x},t) & \text{dans } \Omega \times]0,T],\ \forall l \in [1,L] \end{cases} \tag{2.36}$$

Nous introduisons alors les espaces fonctionels tels que,

$$M = \left(L^2(\Omega)\right)^2,\ H = L^2(\Omega) \tag{2.37}$$

l'espace des tenseurs

$$X = \{\sigma_{km} \in H, \forall (k,m) / \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \in M\} \tag{2.38}$$

et l'espace des tenseurs symétriques

$$X^{sym} = \{\sigma \in X / \sigma_{km} = \sigma_{mk}, \forall (k,m)\} \tag{2.39}$$

Une formulation mixte associée à ce système est alors,

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\zeta}^l, v) : [0,T] \to X^{sym} \times (X^{sym})^L \times M \text{ tels que:} \\ \dfrac{d}{dt} c(\mathbf{v},\mathbf{w}) - b(\mathbf{w},\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{f},\mathbf{w}) & \forall \mathbf{w} \in M \\ \dfrac{d}{dt} a_R(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}) - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{d}{dt} a_R(\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{q}) + b(\mathbf{v},\mathbf{q}) = 0 & \forall \mathbf{q} \in X^{sym} \\ \dfrac{d}{dt} a_U(\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{q}) + \omega_l a_U(\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{q}) + b(\mathbf{v},\mathbf{q}) = 0 & \forall \mathbf{q} \in X^{sym} \end{cases} \tag{2.40}$$

avec

$$\begin{cases} a_R(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}) = \displaystyle\int_\Omega \mathbf{C_R}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{q} d\Omega \\ a_U(\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{q}) = \displaystyle\int_\Omega \left(\mathbf{C_U^l}\right)^{-1} \boldsymbol{\zeta}^l : \mathbf{q} d\Omega \\ c(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \displaystyle\int_\Omega \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ b(\mathbf{v},\mathbf{q}) = \displaystyle\int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} d\Omega \end{cases} \tag{2.41}$$

Nous introduisons maintenant les espaces des éléments finis $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$ avec les fonctions de bases $B_{N_1} = w_i{}_{i=1}^{N_1}$ et $B_{N_2} = q_i{}_{i=1}^{N_2}$ respectivement (N_1 et N_2 étant la dimension de X_h et de M_h). Les coordonnées des inconnues discrètes v_h, σ_h, et ζ_n^l, $\forall l \in [1, L]$ sont $[V_h] = (V_1 ..., V_{N_1})$, $[\Sigma_h] = (\Sigma_1, ..., \Sigma_{N_2})$ et $[Z_h] = (Z_1^l, ..., Z_{N_2}^l)$, $\forall l \in [1, L]$. Sur ces bases le système semi-discrétisé en espace s'écrit,

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\Sigma_h, Z_h, V_h) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_2}) \times L^2(0,T;(\mathbb{R}^{N_2})^L) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_1}) \text{ tels que :} \\ M_v \dfrac{dV_h}{dt} - B_h \Sigma_h = F_h \\ M_\Sigma \dfrac{d\Sigma_h}{dt} - M_\Sigma \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{dZ_h^l}{dt} + B_h^T V_h = 0 \\ M_y^l \dfrac{dZ_h^l}{dt} + M_\omega^l Z_h^l + B_h^T V_h = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

avec

$$\begin{aligned} (M_v)_{ij} &= (\rho \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)\,, && \forall i,j = 1, ..., N_1 \\ (M_\Sigma)_{i,j} &= \left((\mathbf{C_R})^{-1} \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \right), && \forall i,j = 1, ..., N_2 \\ (M_y^l)_{i,j} &= \left(\left(\mathbf{C_U^l} \right)^{-1} \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \right), && \forall i,j = 1, ..., N_2 \\ (M_\omega^l)_{i,j} &= \left(\omega_l \left(\mathbf{C_U^l} \right)^{-1} \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \right), && \forall i,j = 1, ..., N_2 \\ (B_h)_{ij} &= (\nabla \cdot \mathbf{w}_i, \mathbf{q}_j), && \forall i = 1, ..., N_1,\ \forall j = 1, ..., N_2 \end{aligned} \tag{2.43}$$

En pratique, nous considérerons uniquement des domaines rectangulaires dans $\mathbb{R}^2$ qui peuvent être discrétisés avec un maillage uniforme $\mathcal{T}_h$, composé de carrés de taille h, dépendant des dimensions du problème. Les Éléments-Finis mixtes que nous utilisons ici sont,

$$X_h^{sym} = \left\{ \mathbf{q}_h \text{ dans } X^{sym} \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{q}_h\,|_K \in (Q_1)^4 \right\}, \tag{2.44}$$

et

$$M_h = \left\{ \mathbf{w}_h \in (L^2(\Omega))^2 \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{w}_{h|_K} \in (P_0(K))^2 \right\}, \tag{2.45}$$

furent introduits dans [25] et sont illustrés figure I.2.1.

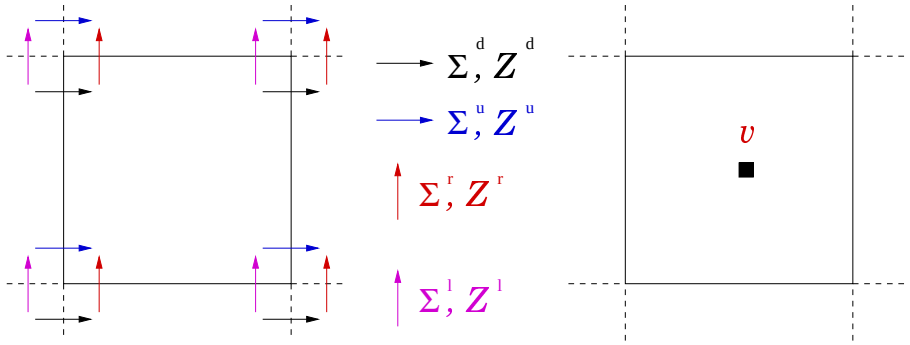


FIG. 2.1 – *Éléments-Finis mixtes* $v_h \in M_h$, $\left(\Sigma_h, Z_h^l\right) \in X_h^{sym} \times (X_h^{sym})^L$

De la même façon que pour les cas viscoacoustique et viscoélastique SH, le choix de ces éléments présentent des inconvénients lorsque le système est couplé avec la méthode des Domaines Fictifs.

C'est pourquoi nous remplaçons, lorsque nous utilisons la méthode des Domaines Fictifs, M_h, par M_h^1 [27, 142];

$$M_h^1 = \left\{ \mathbf{w}_h \in (L^2(\Omega))^2 \,/\, \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{w}_{h|_K} \in (P_1(K))^2 \right\}, \tag{2.46}$$

Ces éléments sont présentés figure I.2.2. Dans ce cas les dégrés de liberté sont les valeurs du champ de vitesse et leurs dérivées spatiales.

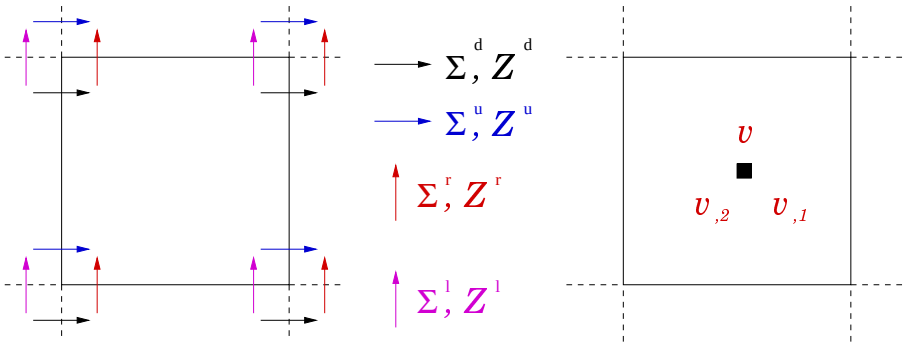


FIG. 2.2 – *Éléments Finis mixtes* $v_h \in M_h^1$, $\left(\Sigma_h, Z_h^l\right) \in X_h^{sym} \times (X_h^{sym})^L$

Dans ce cas le système semi-discrétisé prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Sigma_h, Z_h, V_h) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_2}) \times L^2(0,T;(\mathbb{R}^{N_2})^L) \times L^2(0,T;\mathbb{R}^{N_1}) \text{ tels que :} \\ M_v^1 \dfrac{dV_h}{dt} - B_h^1 \Sigma_h = F_h \\ M_\Sigma \dfrac{d\Sigma_h}{dt} - M_\Sigma \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{dZ_h^l}{dt} + \left(B_h^1\right)^T V_h = 0 \\ M_y^l \dfrac{dZ_h^l}{dt} + M_\omega^l Z_h^l + \left(B_h^1\right)^T V_h = 0 \end{array} \right. \tag{2.47}$$

où l'exposant 1 est introduit de façon à différencier les Éléments-Finis mixtes avec lesquels nous discrétisons.

Dans tous les cas, nous utilisons un schéma de différences finies centré du second ordre pour la discrétisation temporelle

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Sigma_h, Z_h, V_h) \in \mathbb{R}^{N_2} \times (\mathbb{R}^{N_2})^L \times \mathbb{R}^{N_1}, \\ M_v^1 \dfrac{V_h^{n+\frac{1}{2}} - V_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_h^1 \Sigma_h^n = F_h \\ M_\Sigma \dfrac{\Sigma_h^{n+1} - \Sigma_h^n}{\Delta t} - M_\Sigma \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ M_y^l \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + M_\omega^l \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} + (Z_h^l)^n}{2} + \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} = 0 \end{array} \right. \tag{2.48}$$

2.5 Analyse du système discrétisé

2.5.1 Analyse de la stabilité du système par méthode énergétique

Nous considérons le système le plus général, c'est-à-dire celui où la vitesse est discrétisée sur M_h^1. Rappelons que cet espace admet la décomposition, dans L^2,

$$M_h^1 = M_h \oplus (M_h)^\perp \tag{2.49}$$

où M_h est l'espace des fonctions constantes par morceaux et $M_h^\perp$ son complément orthogonal dans M_h^1. Nous noterons $\mathbf{V_h}$, l'inconnue discrète associée au champ de vitesse $\mathbf{V_h} = v_h \in M_h^1$, si bien que nous pouvons écrire $\mathbf{V_h} = [V_h, V_h^\perp]$, avec V_h la projection de la vitesse sur M_h et $V_h^\perp$ la projection sur $M_h^\perp$. De même les matrices M_v^1 et B_h^1 admettent les décompositions $M_v^1 = [M_v, M_v^\perp]$ et $B_h^1 = [B_h, B_h^\perp]$. Dans ce cas, nous pouvons écrire le système (I.2.48).

$$\left\{\begin{array}{ll}
(\Sigma_h, Z_h, V_h) \in \mathbb{R}^{N_2} \times (\mathbb{R}^{N_2})^L \times \mathbb{R}^{N_1} & \\
M_v \dfrac{V_h^{n+\frac{1}{2}} - V_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_h \Sigma_h^n = 0 & (i) \\
M_v^\perp \dfrac{(V_h^\perp)^{n+\frac{1}{2}} - (V_h^\perp)^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_h^\perp \Sigma_h^n = F_h & (ii) \\
M_\Sigma \dfrac{\Sigma_h^{n+1} - \Sigma_h^n}{\Delta t} - M_\Sigma \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + & \\
(B_h)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(B_h^\perp\right)^T (V_h^\perp)^{n+\frac{1}{2}} = 0 & (iii) \\
M_y^l \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + M_\omega^l \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} + (Z_h^l)^n}{2} + & \\
(B_h)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(B_h^\perp\right)^T (V_h^\perp)^{n+\frac{1}{2}} = 0 & (vi)
\end{array}\right. \tag{2.50}$$

Nous définissons un nouveau produit scalaire, ici défini, par exemple, pour V_h,

$$\left(M_v V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right) = \left(V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v} \tag{2.51}$$

et la norme associée

$$\left(M_v V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n+\frac{1}{2}}\right) = \left\| V_h^{n+\frac{1}{2}} \right\|_{M_v} \tag{2.52}$$

Considérons ensuite le produit scalaire de ((i) écrite au temps $(n+1)$+(i) écrite au temps (n)) avec $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, ((ii) écrite au temps $(n+1)+(ii)$ écrite au temps (n)) avec $(V_h^{n+\frac{1}{2}})^\perp$, le produit scalaire de

(iii) avec $\left(\Sigma_h^{n+1} - \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^{n+1} + \Sigma_h^n - \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right)$, et le produit scalaire de (vi) avec $\left((Z_h)^{n+1} + (Z_h)^n\right)$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\left(V_h^{n+\frac{3}{2}}, V_h^{n+\frac{1}{2}}\right)_{M_v} = \left(V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v} - \Delta t\left(B_h\left(\Sigma_h^{n+1} + \Sigma_h^n\right), V_h^{n+\frac{1}{2}}\right) = 0 & (i') \\
\left((V_h^{\perp})^{n+\frac{3}{2}}, (V_h^{\perp})^{n+\frac{1}{2}}\right)_{M_v^{\perp}} = \left((V_h^{\perp})^{n+\frac{1}{2}}, (V_h^{\perp})^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v^{\perp}} - & \\
\Delta t\left(B_h^{\perp}\left(\Sigma_h^{n+1} + \Sigma_h^n\right), (V_h^{\perp})^{n+\frac{1}{2}}\right) = 0 & (ii') \\
\left\|\Sigma_h^{n+1} - \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^{n+1}\right\|_{M_\Sigma}^2 = \left\|\Sigma_h^n - \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right\|_{M_\Sigma}^2 + & \\
\Delta t\left(\left((B_h)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(B_h^{\perp}\right)^T (V_h^{\perp})^{n+\frac{1}{2}}\right), \left(\Sigma_h^{n+1} - \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^{n+1} + \Sigma_h^n - \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right)\right) = 0 & (iii') \\
\left\|(Z_h^l)^{n+1}\right\|_{M_y^l}^2 = \left\|(Z_h^l)^n\right\|_{M_y^l}^2 - \Delta t\dfrac{\left\|(Z_h^l)^{n+1} + (Z_h^l)^n\right\|_{M_\omega^l}^2}{2} + & \\
\Delta t\left(\left((B_h)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} + \left(B_h^{\perp}\right)^T (V_h^{\perp})^{n+\frac{1}{2}}\right), \left((Z_h^l)^{n+1} + (Z_h^l)^n\right)\right) = 0 & (vi')
\end{array}\right. \tag{2.53}$$

En additionnant $(i') + (ii') + (iii') + \sum_{l=1}^{L}(iv')$, nous obtenons,

$$\frac{E_h^{n+1} - E_h^n}{\Delta t} = -\frac{\left\|(Z_h^l)^{n+1} + (Z_h^l)^n\right\|_{M_\omega^l}^2}{4} \tag{2.54}$$

avec l'énergie discrète définie comme

$$2E_h^n = \left(V_h^{n+\frac{1}{2}}, V_h^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v} + \left((V_h^{\perp})^{n+\frac{1}{2}}, (V_h^{\perp})^{n-\frac{1}{2}}\right)_{M_v^{\perp}} + \left\|\Sigma_h^n - \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right\|_{M_\Sigma}^2 + \sum_{l=1}^{L}\left\|(Z_h^l)^n\right\|_{M_y^l}^2 \tag{2.55}$$

Ceci prouve que l'énergie décroît en fonction du temps, sous les mêmes hypothèses sur y_l^P et y_l^S, $l \in [1, L]$, que pour la condition pour le problème continu.

De façon à exhiber la condition pour laquelle la quantité (I.2.54) est positive et par conséquent est une énergie, réécrivons cette équation sous la forme (pour plus de détails voir section I.1.6.1),

$$\begin{aligned}
2E_h^n &= \frac{1}{4}\left\|\mathbf{V_h}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{V_h}^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{M_v}^2 - \frac{\Delta t^2}{4}\left(B_h^1\Sigma_h^n, M_v^{-1}B_h\Sigma_h^n\right) + \|\Sigma_h^n\|_{M_\Sigma}^2 + \left\|\sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right\|_{M_\Sigma}^2 - \\
&\quad 2\left(\Sigma_h^n, \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right)_{M_\Sigma} + \sum_{l=1}^{L}\left\|(Z_h^l)^n\right\|_{M_y^l}^2 \\
&\geqq \left[\begin{array}{l}
\left(1 - \dfrac{\Delta t^2\left\|M_\Sigma^{-1}(B_h^1)^T M_v^{-1}B_h^1\right\|}{4}\right)\|\Sigma_h^n\|_{M_\Sigma}^2 + \\
\left\|\sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right\|_{M_\Sigma}^2 - 2\left(\Sigma_h^n, \sum_{l=1}^{L}(Z_h^l)^n\right)_{M_\Sigma} + \sum_{l=1}^{L}\left(M_\Sigma^{-1}M_y^l(Z_h^l)^n, (Z_h^l)^n\right)_{M_\Sigma}
\end{array}\right]
\end{aligned} \tag{2.56}$$

En écrivant cette équation comme une matrice associée à une formulation quadratique, nous pouvons montrer que les valeurs propres de cette matrice sont positives sous la condition CFL (Courant-Friedrich-Lévy)

$$\frac{\Delta t^2}{4}\left\|M_\Sigma^{-1}(B_h^1)^T M_v^{-1} B_h^1\right\|\left(1+\sum_l^L\left\|M_\Sigma^{-1}M_y^l\right\|^{-1}\right)\leqq 1 \tag{2.57}$$

Alors la **condition CFL** est

$$\max\left((c_S)_R\sqrt{1+\sum_{l=1}^{l} y_l^S},(c_P)_R\sqrt{1+\sum_{l=1}^{l} y_l^P}\right)\geqq\frac{\Delta t}{h} \tag{2.58}$$

2.5.2 Relation de dispersion

Nous menons dans cette section une analyse par ondes planes du système discétisé avec les éléments finis $X_h^{sym} - M_h$. Les quantités $V_h^{n+\frac{1}{2}}$, Σ_h^{n+1} et $(Z_h^l)^{n+1}$, $\forall l \in [1, L]$ s'écrivent alors

$$\begin{cases} V_h^{n+\frac{1}{2}} = V_h^0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right) \\ \Sigma_h^{n+1} = \Sigma_h^0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega\left(n+1\right)\Delta t\right) \\ (Z_h^l)^{n+1} = (Z_h^l)^0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega\left(n+1\right)\Delta t\right),\ \forall l\in[1,L] \end{cases} \tag{2.59}$$

En introduisant ces expressions dans le système (I.2.48) et en remarquant que $M_\omega^l = \omega_l M_y^l$, $\forall l \in [1, L]$, il vient

$$\begin{cases} -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)V_h^0 = \Delta t M_v^{-1}B_h\Sigma_h^0 & (i) \\ -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\left(\Sigma_h^0 - \sum_{l=1}^{l}(Z_h^l)^0\right) = -\Delta t M_\Sigma^{-1}B_h^T V_h^0 & (ii) \\ 2(Z_h^l)^0\left(-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)+\Delta t\omega_l\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right) = -\Delta t\left(M_y^l\right)^{-1}B_h^T V_h^0,\ \forall l\in[1,L] & (iii) \end{cases} \tag{2.60}$$

En remplaçant successivement $(Z_h^l)^0$ de (iii) dans (ii), puis Σ_h^0 de (ii) dans (i), il vient

$$4\sin^2(\chi_t)\,V_0 = \Delta t^2\left(M_v^{-1}B_h M_\Sigma^{-1}B_h^T + \sum_{l=1}^{L}\frac{M_v^{-1}B_h(M_y^l)^{-1}B_h^T 2\mathrm{i}\tan(\chi_t)}{2\mathrm{i}\tan(\chi_t)-\omega_l\Delta t}\right) \tag{2.61}$$

où $\chi_t = \frac{\omega\Delta t}{2}$. Introduisons maintenant les matrices $K_h = M_v^1 B_h M_\Sigma^{-1} B_h^T$ et $K_y^l = M_v^1 B_h (M_y^l)^{-1} B_h^T$ similairement à [179]. Après simplification, nous obtenons

$$\begin{aligned} K_h[1,1] &= \frac{1}{h^2}\left(4\,(c_P)_R^2\,X_1\,(1-4AX_2)+4\,(c_S)_R^2\,X_2\,(1-4BX_1)\right) \\ K_h[2,2] &= \frac{1}{h^2}\left(4\,(c_P)_R^2\,X_2\,(1-4AX_1)+4\,(c_S)_R^2\,X_1\,(1-4BX_2)\right) \\ K_h[1,2] &= K_h[2,1] = \frac{4}{h^2}\left((c_P)_R^2-(c_S)_R^2\right)\sqrt{X_1\,(1-X_2)}\sqrt{X_2\,(1-X_1)} \end{aligned} \tag{2.62}$$

et

$$\begin{aligned}
K_y^l[1,1] &= \frac{1}{h^2}\left(4\left(c_P\right)_R^2 y_l^P X_1\left(1-4A_l X_2\right)+4\left(c_S\right)_R^2 y_l^S X_2\left(1-4BX_1\right)\right)\\
K_y^l[2,2] &= \frac{1}{h^2}\left(4\left(c_P\right)_R^2 y_l^P X_2\left(1-4A_l X_1\right)+4\left(c_S\right)_R^2 y_l^S X_1\left(1-4BX_2\right)\right)\\
K_y^l[1,2] &= K_y^l[2,1] = \frac{4}{h^2}\left(\left(c_P\right)_R^2 y_l^P-\left(c_S\right)_R^2 y_l^S\right)\sqrt{X_1\left(1-X_2\right)}\sqrt{X_2\left(1-X_1\right)}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

où $X_1=\sin^2\left(\frac{k_1 h}{2}\right)$, $X_2=\sin^2\left(\frac{k_2 h}{2}\right)$, $B=\frac{1}{4}$, $A=\frac{\left(\left(c_P\right)_R^2-2\left(c_S\right)_R^2\right)^2}{4\left(c_P\right)_R^4}$, et $A_l=\frac{\left(\left(c_P\right)_R^2 y_l^P-2\left(c_S\right)_R^2 y_l^S\right)^2}{4\alpha^4 (y_l^P)^2}$.

La résolution de l'équation (I.2.61) passe donc par la résolution d'un problème aux valeurs propres. Les matrices K_h et K_y^l, $\forall l\in[1,L]$ possèdent les mêmes vecteurs propres Eigv_1 et Eigv_2

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eigv}_1 &= \left\{\frac{\sqrt{X_1\left(1-X_2\right)}}{\sqrt{X_2\left(1-X_1\right)}},1\right\}\\
\mathrm{Eigv}_2 &= \left\{-\frac{\sqrt{-X_2\left(1-X_1\right)}}{\sqrt{X_1\left(1-X_2\right)}},1\right\}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

qui dépendent uniquement de X_1 et X_2, c'est-à-dire de l'orientation de l'onde. Alors, en se référant à [179], ces deux matrices admettent comme valeurs propres

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Eigval}\right)_{1,2} &= \frac{2}{h^2}\left[\left(\left(c_P\right)_R^2+\left(c_S\right)_R^2\right)\left(X_1+X_2\right)-8\left(A\left(c_P\right)_R^2+B\left(c_S\right)_R^2\right)X_1X_2\right]\\
&\pm\frac{2}{h^2}\left(\left(c_P\right)_R^2-\left(c_S\right)_R^2\right)\sqrt{\left(X_1-X_2\right)^2+4(X_1-X_1^2)(X_2-X_2^2)}\\
\left(\mathrm{Eigval}^l\right)_{1,2} &= \frac{2}{h^2}\left[\left(y_l^P\left(c_P\right)_R^2+y_l^S\left(c_S\right)_R^2\right)\left(X_1+X_2\right)-8\left(A\left(c_P\right)_R^2 y_l^P+B\left(c_S\right)_R^2 y_l^S\right)X_1X_2\right]\\
&\pm\frac{2}{h^2}\left(y_l^P\left(c_P\right)_R^2-\left(c_{PS}\right)_R^2 y_l^S\right)\sqrt{\left(X_1-X_2\right)^2+4(X_1-X_1^2)(X_2-X_2^2)}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

qui correspondent aux deux ondes planes physiques. Alors, en faisant le changement de variable $Y=\frac{2\mathrm{i}\tan\left(\chi_t\right)}{\Delta t}$, nous obtenons les deux relations de dispersion correspondant aux ondes de compression et de cisaillement

$$\frac{-Y^2\Delta t^2}{4-Y^2\Delta t^2}=\frac{\Delta t^2}{4}\left(\left(\mathrm{Eigval}\right)_j+\sum_{l=1}^{L}\frac{\left(\mathrm{Eigval}^l\right)_j T}{Y-\omega_l}\right),\ j=1,2 \tag{2.66}$$

Nous traçons, figures I.2.3, I.2.4, I.2.5 et I.2.6, les courbes de dispersion et d'atténuation en fonction du paramètre $\frac{1}{N}$ (N étant le nombre de points par longueur d'onde utilisée pour la discrétisation), pour différentes valeurs du paramètre $\phi=\arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$ et différentes valeurs du coefficient de Poisson $\nu=\frac{\lambda_R}{2\left(\lambda_R+\mu_R\right)}$.

.

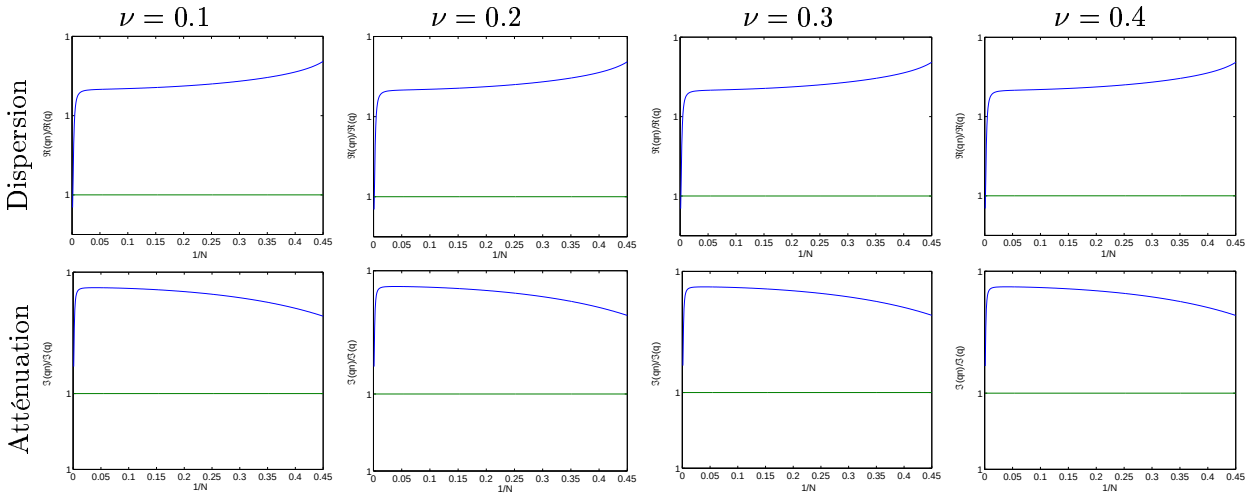


FIG. 2.3 – *Courbes de dispersion et d'atténuation pour les ondes P, pour différentes valeurs du coefficient de Poisson et pour* $\phi = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = 0$

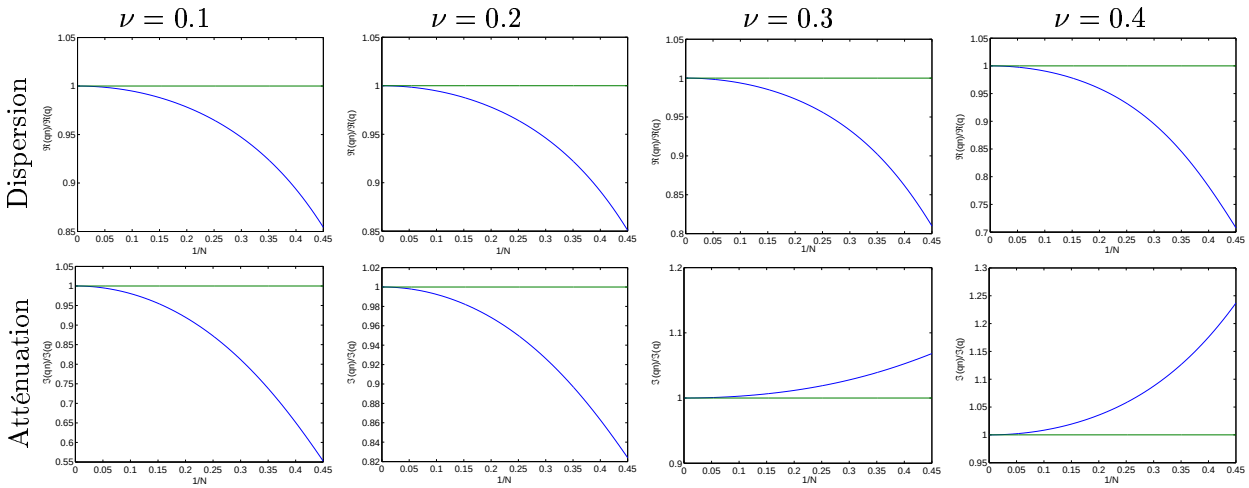


FIG. 2.4 – *Courbes de dispersion et d'atténuation pour les ondes P, pour différentes valeurs du coefficient de Poisson et pour* $\phi = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{\pi}{4}$

.

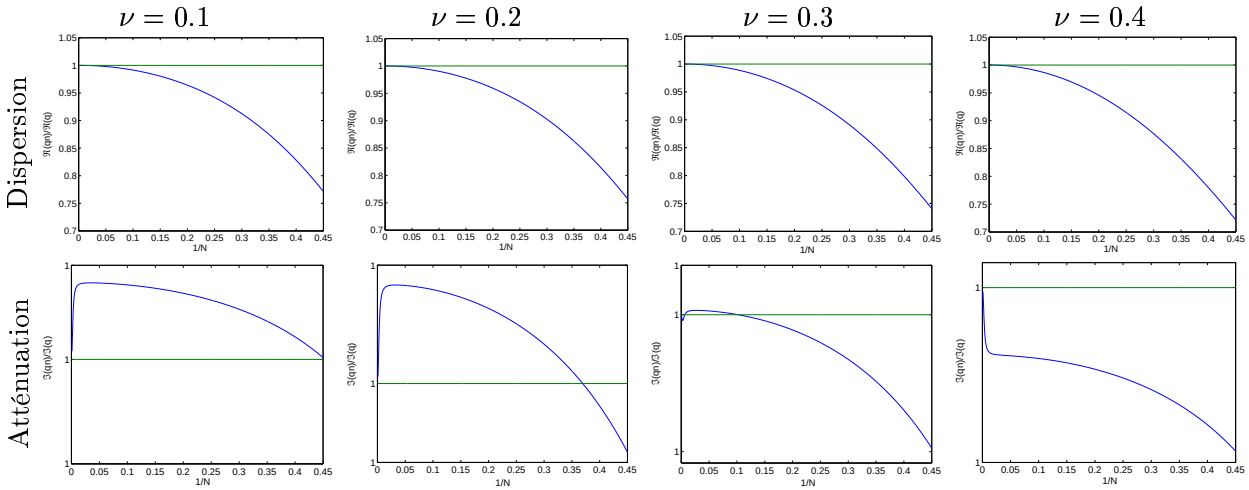


FIG. 2.5 – *Courbes de dispersion et d'atténuation pour les ondes SV, pour différentes valeurs du coefficient de Poisson et pour* $\phi = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = 0$

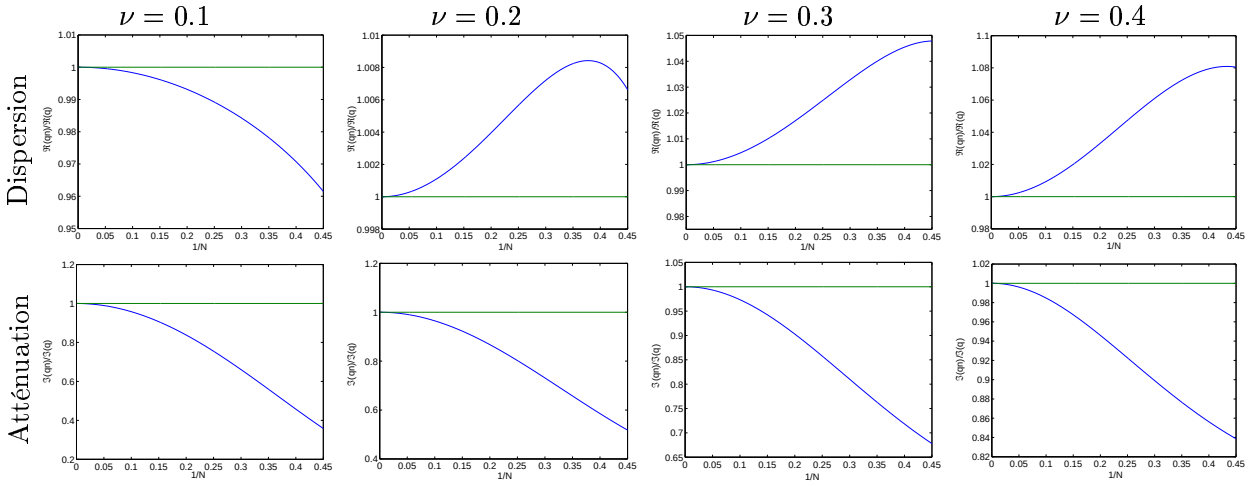


FIG. 2.6 – *Courbes de dispersion et d'atténuation pour les ondes SV, pour différentes valeurs du coefficient de Poisson et pour* $\phi = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{\pi}{4}$

De façon à simuler la propagation des ondes P-SV dans des domaines non-bornés et la diffraction de ces ondes par des objets de géométries complexes, nous couplons le sytème (I.2.48) avec respectivement la méthode PML et la méthode des Domaines Fictifs.

2.6 Traitement des surfaces libres

Considérons le problème de la propagation d'une onde viscoélastique P-SV dans un domaine à géométrie complexe tel que celui décrit et représenté figure I.2.7. Nous étudions ici la généralisation de la méthode présentée dans [179] au cas viscoélastique. Le problème initial est posé dans le domaine Ω, avec une condition de surface libre, en nous référant à [140], qui prend la forme pour ce système $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}=0$ et $\boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}=0$, $\forall l\in[1,L]$ sur l'interface Γ. La **différence par rapport au cas élastique vient des conditions** $\boldsymbol{\zeta}^l(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}=0$ que nous avons admis ici, en vérifiant numériquement leur validité.

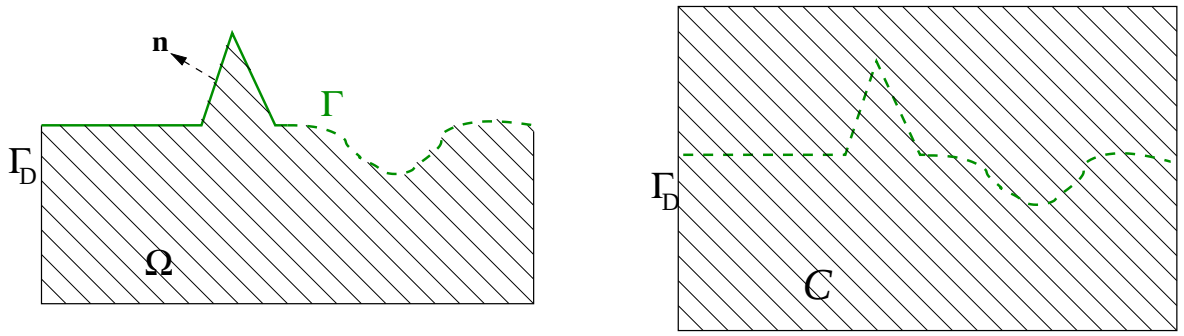


FIG. 2.7 – *Géométrie du problème (sur la gauche, le domaine initial Ω; sur la droite, le domaine étendu C)*

Ce problème peut être modélisé

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{C}_R^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial t}-\mathbf{C}_R^{-1}\displaystyle\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial\boldsymbol{\zeta}^l}{\partial t}=\mathbf{d} & \text{dans } \Omega \\ \left(\boldsymbol{C}_U^l\right)^{-1}\dfrac{\partial\boldsymbol{\zeta}^l}{\partial t}+\omega_l\left(\mathbf{C}_U^l\right)^{-1}\zeta^l=\mathbf{d} & \text{dans } \Omega \\ \left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=0\\ \boldsymbol{\zeta}^l\cdot\mathbf{n}=0,\ \forall l\in[1,L]\end{array}\right\} & \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \tag{2.67}$$

L'idée est d'étendre la solution à un domaine de forme simple, indépendant de la complexité de la géométrie de la condition à modéliser et d'imposer cette condition d'une façon faible en introduisant un multiplicateur de Lagrange. Dans cette optique nous étendons la solution $(\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\zeta}^l)$ par zéro au domaine C. Notons alors la solution étendue à ce domaine $(\tilde{\mathbf{v}},\tilde{\boldsymbol{\sigma}},\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^l)$ et

$$\left.\begin{array}{l}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{n}]_\Gamma=0\\ [\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^l\cdot\mathbf{n}]_\Gamma=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\in H(\nabla\cdot,C)\\ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^l\in H(\nabla\cdot,C)\end{array}\right\},\ [\tilde{\mathbf{v}}]_\Gamma\neq 0 \tag{2.68}$$

Alors, la solution du système (I.2.67) étendue au domaine C devient solution du système

$$\left\{\begin{array}{ll}
\rho\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}-\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{f} & \text{dans } \mathbf{C}\\
\mathbf{C}_R^{-1}\dfrac{\partial\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial t}-\mathbf{C}_R^{-1}\displaystyle\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^l}{\partial t}=\tilde{\mathbf{d}} & \text{dans } \mathbf{C}\\
\left(\mathbf{C}_U^l\right)^{-1}\dfrac{\partial\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^l}{\partial t}+\omega_l\left(\mathbf{C}_U^l\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^l=\mathbf{d} & \text{dans } \mathbf{C}\\
\left.\begin{array}{l}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{n}=0\\ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^l\cdot\mathbf{n}=0,\ \forall l\in[1,L]\end{array}\right\} & \text{sur } \Gamma\\
\tilde{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n}=0 & \text{sur } \Gamma_D
\end{array}\right. \tag{2.69}$$

Deux types de solutions sont exhibées, les solutions étendues au domaine C et la variable auxiliaire $[\tilde{\mathbf{v}}.\mathbf{n}]$. Nous introduisons donc $L+1$ nouvelles inconnues λ et λ_l, $\forall l\in[1,L]$ sur Γ qui peuvent être interprétées comme des multiplicateurs de Lagrange associés à la condition aux limites de la frontière Γ. La formulation variationelle du problème est

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Trouver } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{v},\lambda,\lambda_l):[0,T]\to X^{sym}\times(X^{sym})^L\times M\times G\times(G)^L \text{ tels que:} & \\
\dfrac{d}{dt}c(\mathbf{v},\mathbf{w})-b(\mathbf{w},\boldsymbol{\sigma})=(\mathbf{f},\mathbf{w}) & \forall\mathbf{w}\in M\\
\dfrac{d}{dt}a_R(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q})-\displaystyle\sum_{l=1}^{L}\frac{d}{dt}a_R(\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{q})+b(\mathbf{v},\mathbf{q})-b_\Gamma(\mathbf{q},\lambda)=0 & \forall\mathbf{q}\in X^{sym}\\
\dfrac{d}{dt}a_U(\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{q})+\omega_l a_U(\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{q})+b(\mathbf{v},\mathbf{q})-b_\Gamma(\mathbf{q},\lambda_l)=0 & \forall\mathbf{q}\in X^{sym}\\
b_\Gamma(\boldsymbol{\sigma},\mu)=0 & \forall\mu\in G\\
b_\Gamma(\boldsymbol{\zeta}^l,\mu)=0 & \forall\mu\in G
\end{array}\right. \tag{2.70}$$

où

$$b_\gamma(\boldsymbol{\sigma},\mu)=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n},\mu)_\gamma\,,\ \forall(\boldsymbol{\sigma},\mu)\in X\times G \tag{2.71}$$

Pour la discrétisation de ce système nous considérons un maillage volumique $\mathcal{T}_h$ du domaine C et un maillage irrégulier $\mathcal{G}_{h_S}$ sur Γ. L'avantage de cette formulation est que le maillage pour le calcul de la solution étendue peut être maintenant régulier, alors que le maillage de Γ est lui irrégulier, ce qui permet une approximation très correcte de la géométrie.

Nous discrétisons les inconnues volumiques $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\zeta}^l,\mathbf{v})$ à l'aide des Éléments-Finis utilisés dans la section I.2.4, alors que pour les multiplicateurs de Lagrange λ et λ_l, $l\in[1,L]$, nous utilisons des fonctions continues par morceaux, c'est-à-dire que l'espace de projection est

$$G_{h_S}=\left\{\mu_{h_S}\in H^{1/2}(\Gamma)/\forall S(\text{segments})\in\mathcal{G}_{h_S},\mu_{h_S}|_S\in P_1(S)\right\} \tag{2.72}$$

Les fonctions de base de G_{h_S} sont $B_{N_3}=\mu_I{}_{I=1}^{N_3}$ où N_3 est la dimension de G_{h_S}. Les coordonnées discrètes λ_{h_S} sont $[\Lambda]=(\Lambda_1,...\Lambda_{N_3})$.
La discrétisation temporelle est réalisée à l'aide d'un schéma de différences finies centré d'ordre

deux. Alors le système discrétisé est

$$\left\{\begin{array}{ll}
(\Sigma_h, Z_h^l, V_h, \Lambda_h, \Lambda_h^l) \in \mathbb{R}^{N_2} \times \left(\mathbb{R}^{N_2}\right)^L \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3} \times \left(\mathbb{R}^{N_3}\right)^L, & \\
M_v^1 \dfrac{V_h^{n+\frac{1}{2}} - V_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - B_h^1 \Sigma_h^n = F_h & (i) \\
M_\Sigma \dfrac{\Sigma_h^{n+1} - \Sigma_h^n}{\Delta t} - M_\Sigma \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} - & \\
\left(B_h^\Gamma\right)^T \Lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 0 & (ii) \\
M_y^l \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + M_\omega^l \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} + (Z_h^l)^n}{2} + \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} - & \\
\left(B_h^\Gamma\right)^T \left(\Lambda_h^l\right)^{n+\frac{1}{2}} = 0 & (iii) \\
B_h^\Gamma \Sigma_h^n = 0 & (vi) \\
B_h^\Gamma (Z_h^l)^n = 0 & (vii)
\end{array}\right. \tag{2.73}$$

De l'équation (ii) nous avons

$$M_\Sigma^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \Lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Sigma_h^{n+1} - \Sigma_h^n}{\Delta t} - \sum_{l=1}^{L} \frac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + M_\Sigma^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.74}$$

En multipliant l'équation (I.2.74) par B_h^Γ et en utilisant l'équation (vi) du système (I.2.73) qui est vraie pour tout n, alors

$$B_h^\Gamma M_\Sigma^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \Lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = M_\Sigma^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.75}$$

De même, de l'équation (iii), nous avons

$$\begin{array}{rl}
\left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \left(\Lambda_h^l\right)^{n+\frac{1}{2}} & = \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n}{\Delta t} + \\
& \left(\left(M_y^l\right)^{-1} M_\omega^l\right) \dfrac{(Z_h^l)^{n+1} + (Z_h^l)^n}{2} + \left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}}
\end{array} \tag{2.76}$$

En nous servant du fait que $\left(\left(M_y^l\right)^{-1} M_\omega^l\right)$ est un scalaire, en multipliant l'équation (I.2.76) par B_h^Γ et en utilisant l'équation (vii) du système (I.2.73) qui est vraie pour tout n, il vient

$$B_h^\Gamma \left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \left(\Lambda_h^l\right)^{n+\frac{1}{2}} = B_h^\Gamma \left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.77}$$

Cela signifie que le calcul de $\Lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$ est modifié par rapport au cas purement élastique. La résolution du système s'opère donc de la façon suivante,

- calcul de $\left(\Lambda_h^l\right)^{n+\frac{1}{2}}$ par,

$$B_h^\Gamma \left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \left(\Lambda_h^l\right)^{n+\frac{1}{2}} = B_h^\Gamma \left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} \tag{2.78}$$

– calcul de Z_h^{n+1} par

$$Z_h^{n+1} = Z_h^n \frac{\frac{1}{\Delta t} - \frac{\omega_l}{2}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{\omega_l}{2}} - \frac{\left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \left(\Lambda_h^l\right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(M_y^l\right)^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{\omega_l}{2}}, \forall l \in [1, L] \quad (2.79)$$

– calcul de $\Lambda_h^{n+\frac{1}{2}}$ par

$$B_h^\Gamma M_\Sigma^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \Lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = B_h^\Gamma M_\Sigma^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.80)$$

– calcul de Σ_h^{n+1} par

$$\Sigma_h^{n+1} = \Sigma_h^n + \sum_{l=1}^{L} \left((Z_h^l)^{n+1} - (Z_h^l)^n \right) - \Delta t M_\Sigma^{-1} \left(B_h^1\right)^T V_h^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t M_\Sigma^{-1} \left(B_h^\Gamma\right)^T \Lambda_h^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.81)$$

De façon à simplifier la présentation, nous avons considéré une condition de type Dirichlet sur Γ_D. En pratique, les domaines de propagation sont infinis et nous utiliserons la méthode PML.

Nous validons le code Élément-Finis que nous venons de réaliser sur deux exemples simples : celui de la diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre circulaire qui nous permet de valider l'aspect propagatif de ce code, et celui des ondes de Rayleigh, section III.1.1, qui nous permet de valider le double aspect de la propagation et de l'implémentation des Domaines Fictifs.

2.7 Validation du problème numérique P-SV : Diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre circulaire

Nous traitons ici le problème "canonique" représenté figure I.2.8. Un cylindre homogène visco-élastique de rayon $a = 500m$ (domaine Ω_1) est entouré par un milieu ambiant homogène également dissipatif (domaine Ω_0). Les deux domaines sont en contact parfait au niveau d'une interface notée Γ_c. Le domaine Ω_0 est occupé par un matériau M^0 dissipatif, de caractéristiques $\rho^0 = 1300kg.m^{-3}$, $\left(c_P^0\right)_R = 1500m.s^{-1}$, $Q_P^0 = 150$, $\left(c_S^0\right)_R = 500m.s^{-1}$, $Q_S^0 = 100$, et le domaine Ω_1 est occupé par un matériau M^1 également dissipatif de caractéristiques $\rho^1 = 1800kg.m^{-3}$, $\left(c_P^1\right)_R = 3050m.s^{-1}$, $Q_P^1 = 50$, $\left(c_S^1\right)_R = 1800m.s^{-1}$, $Q_S^1 = 30$. La fonction source est un Ricker centré à $1Hz$.

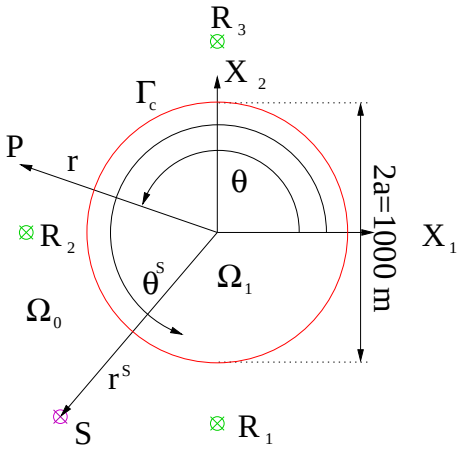


FIG. 2.8 – *Géométrie du problème : diffraction d'une onde cylindrique par un cylindre circulaire*

2.7.1 Formulation du problème

Le problème, résolu de manière explicite dans [77] est de déterminer le champ de vitesse total (c.à.d. incident + diffracté) noté $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ (où $\mathbf{x}=(r,\theta)$ est le vecteur partant de l'origine et pointant un point générique du plan x_1x_2, et où t est la variable de temps). Plutôt que de rechercher directement $\mathbf{v}^j(\mathbf{x},t)$, $\forall \mathbf{x}\in\Omega_j$, $j=0,1$, nous nous focaliserons sur les transformées de Fourier des potentiels scalaire et vecteur $\phi_j(\mathbf{x},\omega)$ et $\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x},\omega)=\psi_j(\mathbf{x},\omega)\mathbf{i}_3$, tels que $\mathbf{v}(\mathbf{x},\omega)=\mathrm{i}\omega\left(\nabla\phi(\mathbf{x},\omega)+\nabla\wedge\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x},\omega)\right)$, vérifiant,

$$\left.\begin{aligned}\phi_j(\mathbf{x},t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_j(\mathbf{x},\omega)\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)d\omega\\ \psi_j(\mathbf{x},t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_j(\mathbf{x},\omega)\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)d\omega\end{aligned}\right\}\quad \mathbf{x}\in\Omega_j\ ;j=0,1 \tag{2.82}$$

vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ll}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2}+\left(k_\phi^j\right)^2\right)\phi_j(\mathbf{x},\omega)=-f^\phi(\mathbf{x},\omega)\delta_{j,0} & ;\mathbf{x}\in\Omega_j;\ j=0,1\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2}+\left(k_\psi^j\right)^2\right)\psi_j(\mathbf{x},\omega)=-f^\psi(\mathbf{x},\omega)\delta_{j,0} & ;\mathbf{x}\in\Omega_j;\ j=0,1\end{array}\right. \tag{2.83}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{ll}k_\phi^j=\dfrac{\omega}{c_P^j(\omega)};\ c_P^j(\omega)=\left(c_P^j\right)_R\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_P^j}\right)} & ;\mathbf{x}\in\Omega_j;\ j=0,1\\ k_\psi^j=\dfrac{\omega}{c_S^j(\omega)};\ c_S^j(\omega)=\left(c_S^j\right)_R\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S^j}\right)} & ;\mathbf{x}\in\Omega_j;\ j=0,1\end{array}\right. \tag{2.84}$$

Alors, en coordonnées polaires, les composantes du vecteur vitesse sont

$$\begin{aligned}v_\theta^j=\mathrm{i}\omega u_\theta^j&=\mathrm{i}\omega\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi^j}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi^j}{\partial r}\right)\ ;j=0,1\\ v_r^j=\mathrm{i}\omega u_r^j&=\mathrm{i}\omega\left(\frac{\partial\phi^j}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^j}{\partial\theta}\right)\ ;j=0,1\end{aligned} \tag{2.85}$$

Les conditions de continuité sur l'interface Γ_c s'écrivent, en coordonnées cylindriques

$$\begin{array}{ll}\forall\mathbf{x}\in\Gamma_c\left\{\begin{array}{ll}u_\theta^1(\mathbf{x},\omega)-u_\theta^0(\mathbf{x},\omega)=0 & (i)\\ u_r^1(\mathbf{x},\omega)-u_r^0(\mathbf{x},\omega)=0 & (ii)\end{array}\right.\\ \forall\mathbf{x}\in\Gamma_c\left\{\begin{array}{ll}\sigma_{rr}^1-\sigma_{rr}^0=0 & (iii)\\ \sigma_{\theta r}^1-\sigma_{\theta r}^0=0 & (vi)\end{array}\right.\\ +\text{Condition de rayonnement à l'infini}\end{array} \tag{2.86}$$

Il faut rappeler ici que

$$\begin{aligned}u_\theta^j&=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi^j}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi^j}{\partial r}\ ;j=0,1\\ u_r^j&=\frac{\partial\phi^j}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^j}{\partial\theta}\ ;j=0,1\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^j &= \lambda^j \left(\frac{\partial u_r^j}{\partial r} + \frac{u_r^j}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^j}{\partial \theta} \right) + 2\mu^j \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
&= \Pi^j \left(\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi^j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial \theta^2} \right) - 2\mu^j \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi^j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\psi^j}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi^j}{\partial r \partial \theta} \right) \\
\sigma_{\theta r}^j &= \mu^j \left(\frac{\partial u_\theta^j}{\partial r} - \frac{u_\theta^j}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\
&= \mu^j \left(\frac{-2}{r^2}\frac{\partial \phi^j}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \phi^j}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi^j}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi^j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi^j}{\partial r} \right)
\end{aligned} \tag{2.88}$$

où $j = 0, 1$

2.7.2 Représentation des potentiels

En séparant les variables en cordonnées cylindriques et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, il vient,

$$\left.\begin{aligned}
\phi^0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n0} H_n^{(1)}(k_\phi^0 r) \exp(\mathrm{i}n\theta) + \phi^{i,0} \\
\psi^0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{n0} H_n^{(1)}(k_\psi^0 r) \exp(\mathrm{i}n\theta) + \psi^{i,0}
\end{aligned}\right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^0 \tag{2.89}$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi^{i,0}(r,\theta,\omega) = \; & \phi^i(\omega)\frac{\mathrm{i}}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[H(r^s - r) J_n(k_\phi^0 r) H_n^{(1)}(k_\phi^0 r^s) + \\
& H(r - r^s) J_n(k_\phi^0 r^s) H_n^{(1)}(k_\phi^0 r) \Big] \exp(\mathrm{i}n(\theta - \theta^s)) \\
\psi^{i,0}(r,\theta,\omega) = \; & \psi^i(\omega)\frac{\mathrm{i}}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big[H(r^s - r) J_n(k_\psi^0 r) H_n^{(1)}(k_\psi^0 r^s) + \\
& H(r - r^s) J_n(k_\psi^0 r^s) H_n^{(1)}(k_\psi^0 r) \Big] \exp(\mathrm{i}n(\theta - \theta^s))
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Cette formulation est la formulation générale, pour un point d'observation tel que $r \geq r^s$ ou $r \leq r^s$, pour les deux types d'ondes incidentes. Si maintenant, nous souhaitons que l'onde incidente corresponde à un seul type d'onde, alors, pour une onde incidente de compression $\psi^i(\omega) = 0$, $\forall \omega$, et pour une onde incidente de cisaillement $\phi^i(\omega) = 0$, $\forall \omega$.

$$\left.\begin{aligned}
\phi^1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n1} J_n(k_\phi^1 r) \exp(\mathrm{i}n\theta) \\
\psi^1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{n0} J_n(k_\psi^1 r) \exp(\mathrm{i}n\theta)
\end{aligned}\right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^1 \tag{2.91}$$

2.7.3 Application des conditions aux limites et détermination des champs

En introduisant les expressions des potentiels scalaire et vecteur (I.2.89) et (I.2.91) dans les expressions de la continuité du déplacement et de la contrainte normale, équations (i), (ii), (iii) et

(iv) du système (I.2.86), ces équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} A^1 & B^1 & -A^0 & -B^0 \\ C^1 & D^1 & -C^0 & -D^0 \\ E^1 & F^1 & -E^0 & -F^0 \\ G^1 & L^1 & -G^0 & -L^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \psi^1 \\ \phi^0 \\ \psi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0\ \phi^{i,0}\big|_{r=a} + B^0\ \psi^{i,0}\big|_{r=a} \\ C^0\ \phi^{i,0}\big|_{r=a} + D^0\ \psi^{i,0}\big|_{r=a} \\ E^0\ \phi^{i,0}\big|_{r=a} + F^0\ \psi^{i,0}\big|_{r=a} \\ G^0\ \phi^{i,0}\big|_{r=a} + L^0\ \psi^{i,0}\big|_{r=a} + \end{pmatrix} \tag{2.92}$$

avec

$$\begin{aligned} A^j &= \Pi^j \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Big|_{r=a} - 2\mu^j \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Big|_{r=a} \\ B^j &= 2\mu^j \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\Big|_{r=a} \\ C^j &= B^j = \mu^j \left(\frac{-2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\right)\Big|_{r=a} \\ D^j &= \mu^j \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} \\ E^j &= \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=a} \\ F^j &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{r=a} \\ G^j &= F^j = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{r=a} \\ L^j &= -E^j = -\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=a} \end{aligned} \tag{2.93}$$

Or $a < r^s$, ce qui signifie que $\phi^{i,0}\big|_{r=a} = \frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_\phi^0 r) H_n^{(1)}(k_\phi^0 r^s) \exp\left(\mathrm{i}n(\theta - \theta^s)\right)\Big|_{r=a}$, et $\psi^{i,0}\big|_{r=a} = \frac{\mathrm{i}}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_\psi^0 r) H_n^{(1)}(k_\psi^0 r^s) \exp\left(\mathrm{i}n(\theta - \theta^s)\right)\Big|_{r=a}$. Ce système s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} A_n^1 & B_n^1 & -A_n^0 & -B_n^0 \\ C_n^1 & D_n^1 & -C_n^0 & -D^0 \\ E_n^1 & F_n^1 & -E_n^0 & -F_n^0 \\ G_n^1 & L_n^1 & -G_n^0 & -L_n^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n^1 \\ b_n^1 \\ a_n^0 \\ b_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(A_n^0 \phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} + \left(B_n^0 \psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} \\ \left(C_n^0 \phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} + \left(D_n^0 \psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} \\ \left(E_n^0 \phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} + \left(F_n^0 \psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} \\ \left(G_n^0 \phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} + \left(L_n^0 \psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} \end{pmatrix} \tag{2.94}$$

avec

$$\begin{aligned} A^1 &= \Pi^1 \left(a^2 (k_\phi^1)^2 \ddot{J}_n(k_\phi^1 a) + a k_\phi^1 \dot{J}_n(k_\phi^1 a) - n^2 J_n(k_\phi^1 a)\right) - 2\mu^1 \left(a k_\phi^1 \dot{J}_n(k_\phi^1 a) - n^2 J_n(k_\phi^1 a)\right) \\ A^0 &= \Pi^0 \left(a^2 (k_\phi^0)^2 \ddot{H}_n^{(1)}(k_\phi^0 a) + a k_\phi^0 \dot{H}_n^{(1)}(k_\phi^0 a) - n^2 H_n^{(1)}(k_\phi^0 a)\right) - \\ & 2\mu^0 \left(a k_\phi^0 \dot{H}_n^{(1)}(k_\phi^0 a) - n^2 H_n^{(1)}(k_\phi^0 a)\right) \\ B^1 &= \mathrm{i}n 2\mu^1 \left(a k_\psi^1 \dot{J}_n(k_\psi^1 a) - J_n(k_\psi^1 a)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B^0 &= \mathrm{i}n2\mu^0\left(ak_\psi^0\dot{H}_n^{(1)}(k_\psi^0 a) - H_n^{(1)}(k_\psi^0 a)\right)\\
C^1 &= \mathrm{i}n2\mu^1\left(ak_\phi^1\dot{J}_n(k_\phi^1 a) - J_n(k_\phi^1 a)\right)\\
C^0 &= \mathrm{i}n2\mu^0\left(ak_\phi^0\dot{H}_n^{(1)}(k_\phi^0 a) - H_n^{(1)}(k_\phi^0 a)\right)\\
D^1 &= \mu^1\left(-n^2 J_n^1(k_\psi^1 a) - a^2(k_\psi^1)^2\ddot{J}_n^1(k_\psi^1 a) + ak_\psi^1\dot{J}_n^1(k_\psi^1 a)\right)\\
D^0 &= \mu^0\left(-n^2 H_n^{(1)}(k_\psi^0 a) - a^2(k_\psi^0)^2\ddot{H}_n^{(1)}(k_\psi^0 a) + ak_\psi^0\dot{H}_n^{(1)}(k_\psi^0 a)\right)\\
E_n^1 &= ak_\phi^1\dot{J}_n(k_\phi^1 a) \qquad F_n^1 = \mathrm{i}nJ_n(k_\psi^1 a)\\
E_n^0 &= ak_\phi^0\dot{H}_n^{(1)}(k_\phi^0 a) \quad F_n^0 = \mathrm{i}nH_n^{(1)}(k_\psi^0 a)\\
G_n^1 &= \mathrm{i}nJ_n(k_\phi^1 a) \qquad L_n^1 = -ak_\psi^1\dot{J}_n(k_\psi^1 a)\\
G_n^0 &= \mathrm{i}nH_n^{(1)}(k_\phi^0 a) \qquad L_n^0 = -ak_\psi^0\dot{H}_n^{(1)}(k_\psi^0 a)\\
\left(A_n^0\phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \phi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\phi^0 r^s)}{4}\times\\
&\left(\Pi^0\left(a^2(k_\phi^0)^2\ddot{J}_n(k_\phi^0 a) + ak_\phi^0\dot{J}_n(k_\phi^0 a) - n^2 J_n(k_\phi^0 a)\right) - 2\mu^0\left(ak_\phi^0\dot{J}_n(k_\phi^0 a) - n^2 J_n(k_\phi^0 a)\right)\right) \qquad (2.95)\\
\left(B_n^0\psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \psi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\psi^0 r^s)}{4}\mathrm{i}n2\mu^0\left(ak_\psi^0\dot{J}_n(k_\psi^0 a) - J_n(k_\psi^0 a)\right)\\
\left(C_n^0\phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \phi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\phi^0 r^s)}{4}\mathrm{i}n2\mu^0\left(ak_\phi^0\dot{J}_n(k_\phi^0 a) - J_n(k_\phi^0 a)\right)\\
\left(D_n^0\psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \psi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\psi^0 r^s)}{4}\mu^0\times\\
&\left(-n^2 J_n(k_\psi^0 a) - a^2(k_\psi^0)^2\ddot{J}_n(k_\psi^0 a) + ak_\psi^0\dot{J}_n(k_\psi^0 a)\right)\\
\left(E_n^0\phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \phi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\phi^0 r^s)}{4}ak_\phi^0\dot{J}_n(k_\phi^0 a)\\
\left(F_n^0\psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \psi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\phi^0 r^s)}{4}\mathrm{i}nJ_n(k_\psi^0 a)\\
\left(G_n^0\phi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \phi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\phi^0 r^s)}{4}\mathrm{i}nJ_n(k_\phi^0 a)\\
\left(L_n^0\psi^{i,0}\right)\big|_{r=a} &= \psi^i\frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}n\theta^s\right)H_n^1(k_\phi^0 r^s)}{4}\left(-ak_\psi^0\dot{J}_n(k_\psi^0 a)\right)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{C}}_\nu(z) &= \tfrac{d\mathcal{C}_\nu(z)}{dz} = \tfrac{1}{2}\left(\mathcal{C}_{\nu-1}(z) - \mathcal{C}_{\nu+1}(z)\right)\\
\ddot{\mathcal{C}}_\nu(z) &= \tfrac{d^2\mathcal{C}_\nu(z)}{dz^2} = \tfrac{1}{4}\left(\mathcal{C}_{\nu-2}(z) - 2\mathcal{C}_\nu(z) + \mathcal{C}_{\nu+2}(z)\right)
\end{aligned} \qquad (2.96)
$$

où $\mathcal{C}_\nu = H_\nu^{(1)} = J_\nu = Y_\nu$.

La résolution de ce système n'est pas d'un grand intérêt pour nous. Pour autant, il existe une formulation analytique complète dans le cas où le matériau M^0 est non-dissipatif et où l'onde incidente est une onde plane de compression, [116]. Nous résolvons donc ce système numériquement, en inversant la matrice de propagation, de façon à obtenir les coefficients a_n^1, b_n^1, a_n^0, et b_n^0. Le champ

de vitesses a donc pour expression

$$
\begin{aligned}
v_r &= -\mathrm{i}\omega u_r \\
&= -\mathrm{i}\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}n\theta) \Big(a_n^0 \dot{H}_n^{(1)}(k_\phi^0 r) k_\phi^0 + \\
&\phi^i \frac{\mathrm{i}k_\phi^0}{4} \left[H(r^s - r) \dot{J}_n(k_\phi^0 r) H_n^{(1)}(k_\phi^0 r^s) + H(r - r^s) J_n(k_\phi^0 r^s) \dot{H}_n^{(1)}(k_\phi^0 r) \right] \exp(-\mathrm{i}n\theta^s) + \\
&\frac{\mathrm{i}n}{r} b_n^0 H_n^{(1)}(k_\psi^0 r) + \\
&\psi^i \frac{\mathrm{i}n}{r} \frac{\mathrm{i}}{4} \left[H(r^s - r) J_n(k_\psi^0 r) H_n^{(1)}(k_\psi^0 r^s) + H(r - r^s) J_n(k_\psi^0 r^s) H_n^{(1)}(k_\psi^0 r) \right] \exp(-\mathrm{i}n\theta^s) \Big) \\
v_\theta &= -\mathrm{i}\omega u_\theta \\
&= -\mathrm{i}\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}n\theta) \Big(\frac{\mathrm{i}n}{r} a_n^0 H_n^{(1)}(k_\phi^0 r) + \\
&\frac{\mathrm{i}n}{4r} \left[H(r^s - r) J_n(k_\phi^0 r) H_n^{(1)}(k_\phi^0 r^s) + H(r - r^s) J_n(k_\phi^0 r^s) H_n^{(1)}(k_\phi^0 r) \right] \exp(-\mathrm{i}n\theta^s) - \\
&k_\psi^0 b_n^0 \dot{H}_n^{(1)}(k_\psi^0 r) - \\
&\psi^i \frac{\mathrm{i}k_\psi^0}{4} \left[H(r^s - r) \dot{J}_n(k_\psi^0 r) H_n^{(1)}(k_\psi^0 r^s) + H(r - r^s) J_n(k_\psi^0 r^s) \dot{H}_n^{(1)}(k_\psi^0 r) \right] \exp(-\mathrm{i}n\theta^s) \Big)
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

2.7.4 Résultats et comparaison numérique/semi-analytique

La source linéique est située à $(r^s, \theta^s) = (2000m, \frac{3\pi}{2})$ et délivre une sollicitation sous la forme d'une onde de compression. Nous comparons les résultats semi-analytiques et numériques en trois points, $R^1 = (1000m, \frac{3\pi}{2})$, $R^2 = (1000m, \pi)$ et $R^3 = (1000m, \frac{\pi}{2})$. Nous nous ramenons aux coordonnées cartésiennes en projetant sur les axes x_1 et x_2 tels que :

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v_r \cos(\theta) - v_\theta \sin(\theta) \\
v_2 &= v_r \sin(\theta) + v_\theta \cos(\theta)
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

Les résultats sont présentés figure I.2.9. Nous obtenons un bon accord entre les résultats semi-analytiques et numériques.

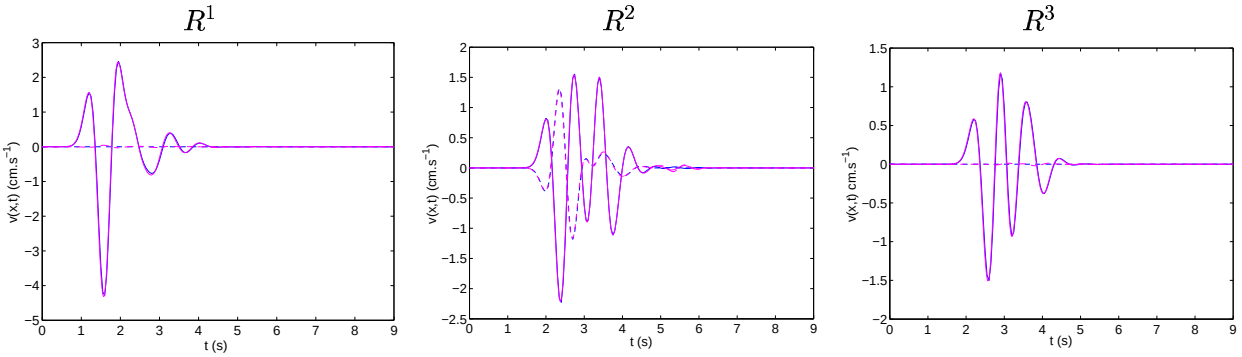


FIG. 2.9 – *Les courbes bleues se réfèrent aux résultats semi-analytiques, les coubes magenta aux résultats numériques. Les courbes en trait continu correspondent aux composantes v_1 et les courbes en tirets correspondent aux composantes v_2*

Deuxième partie

Les effets régionaux et site-ville dans le cadre des mouvements anti-plans

Chapitre 1

Les effets régionaux

Nous considérons, théoriquement et numériquement, la réponse d'un site comprenant N couches horizontales, d'étendue latérale infinie, homogènes, viscoélastiques, en contact parfait entre elles et avec un demi-espace infini plus rigide, supposé modéliser le substratum. Nous montrons, dans le cas d'ondes SH, que : 1) **les modes** (modes de Love si $N = 1$) **sont d'autant moins excités que la source** (modélisée comme une ligne dans le substratum) **est profonde par rapport à l'interface** entre le substratum et la couche inférieure, 2) **la réponse à la surface**, lorsque l'onde cylindrique produite par **une source linéique est proche de l'interface**, est caractérisée par de **possibles phénomènes de battements** et **une durée beaucoup plus longue** que lorsque l'onde cylindrique provient d'une source linéique profonde. Cela signifie que les effets à grande échelle (effets régionaux) et locaux (aléa local) ne sont pas dissociables alors qu'ils sont, en pratique, traités de façon dissociée. Ce chapitre a donné lieu aux publications [89], [88] et à la présentation orale [87].

Introduction

Cette partie est relative à différents sujets d'un intérêt majeur pour ce qui concerne la propagation des ondes sismiques :

- a) les effets relatifs aux trajectoires régionales, en lien direct avec les réponses sismiques en environnement urbain ([70, 97, 46, 164, 125, 67, 66, 126, 158, 159, 160, 16, 132, 48, 162, 152])

- b) les effets de la présence de couches molles, des variations latérales et verticales de la géométrie et des matériaux constituant du sol et de la roche, et des constructions sur la réponse sismique en des sites (en particulier les milieux urbains) variés ([175, 97, 52, 180, 154, 48, 149, 143, 70, 131, 130, 35, 67, 66, 155])

- c) l'analyse de la réponse sur le sol, d'ondes de surface, de façon à déterminer la structure et la composition de la croûte [28, 52, 137, 152] et des zones de failles [99, 101]

- d) l'analyse de la réponse sur le sol, d'ondes de surface, de façon à identifier la source ([121, 105, 28])
- e) les vibrations induites par les transports, tels que métro, train, atterrissages d'avion dans les aéroports ou induites par des événements plus sporadiques tels que les explosions durant

les essais nucléaires souterrains.

Les recherches concernant le sujet a) sont actuellement mises en avant pour expliquer certains aspects particuliers du séisme de Michoacan qui a touché la ville de Mexico en 1985 ([70], mais il faut aussi se référer à [102] pour la réponse dans la ville de Mexico durant d'autres séismes régionaux). Outre le fait que la réponse dans la ville de Mexico était spatialement variable, d'amplitude élevée et de durée très longue -$\approx 3min$- (voir [178, 177] pour la définition de la durée) à certains emplacements, et qu'elle prenait souvent la forme d'un signal quasi-monochromatique avec des battements, **une caractéristique remarquable de ce séisme était qu'une amplitude si importante ait été enregistrée bien que la sollicitation sismique soit si éloignée (son épicentre était localisé sur la zone de subduction sur la côte Pacifique à environ 400km) de la ville** ([49, 50, 67, 66, 70]). Une partie de la cause de l'importante amplitude et de la longue durée fut attribuée [164] à des trajets multiples entre la source et la ville. Cette hypothèse fut également explorée dans [49, 50] et [70], en l'associant à la propagation d'ondes de "surface" de type Rayleigh et Love, entre la source et l'entrée du bassin de la ville de Mexico, via la croûte.

Dans une étude numérique 3D plus complète (bien que l'atténuation soit négligée), les auteurs de [158] attribuent la longue durée et l'amplitude importante à différentes distances de la zone de subduction (localisation de la source), au piègeage de l'onde dans un prisme d'accrétion de la croûte (hétérogénéité à forme angulaire) et à sa propagation en aval de ce prisme jusqu'au point d'observation. Ces mêmes auteurs, dans un travail ultérieur, ainsi que les auteurs de [70], mettent en avant le rôle des ondes de surface d'ordre élevé qui se propagent dans la couche relativement peu dissipative de la ceinture volcanique trans-mexicaine TMVB (Trans Mexican Volcanic Belt en anglais), sous-jacente au bassin de Mexico. Ces ondes de surface induisent une réponse importante dans la ville (en particulier du point de vue de la durée). Plus récemment, une analyse ([46]) des sismogrammes enregistrés en différents lieux du Mexique, lors de séismes dont les épicentres étaient localisés sur la zone de subduction de la côte pacifique ([102]), a montré que la structure de la croûte (incluant la TMVB, composée de lave volcanique et de tuf, caractérisée par des vitesses de propagation faibles au-dessous de laquelle se trouve de la castine caractérisée par des vitesses de propagation élevées) entre la source et les points d'observation, est telle que cette dernière agit comme un guide d'onde pour les ondes de surface provenant d'une distance de plus de $200km$. Cela conduit, par un mécanisme non expliqué, à une amplification et à une augmentation de la durée du mouvement aux différents endroits, notamment à Mexico. Les résultats numériques obtenus dans des études précédentes ([67, 66]) pour des configurations relativement complètes, utilisant une méthode hydride pour la propagation entre la source et le bassin de Mexico et pour l'action de l'onde incidente sur le bassin, mettent l'accent sur le rôle important des effets régionaux sur la réponse anormale enregistrée dans la ville. Ces résultats sont confortés par les simulations 3D menées dans [70].

Les réponses anormales dans d'autres villes, Beijing, Bucarest, Rome, ont été étudiées en détail, principalement de façon numérique, dans le projet 414 UNESCO-IGCP ([132, 131]). Les spécificités de ces réponses furent attribuées (comme dans [40]) à des paramètres particuliers de la source, à des effets liés aux trajectoires régionales et aux caractéristiques particulières de la composition et de la géométrie du sous-sol à l'intérieur des bassins urbains. Ces hypothèses ont été justifiées dans une étude plus récente, [35].

Le sujet b) concerne une classe alternative et complémentaire de paradigmes dans l'explication

des mouvements sismiques dans les villes construites sur des sols mous. **Bien que l'épicentre, lors du séisme Michoacan en 1985 ait été situé à 400km de la ville de Mexico, les explications des phénomènes ont souvent été recherchées en sollicitant les modèles avec des ondes se propageant verticalement ou quasiment verticalement** (tout comme dans le cas d'autres villes, par exemple Nice [154, 155] et Bucarest [149]). Ce type d'excitation, pour être réaliste, requiert une profondeur focale de la source importante et une distance épicentrale de la source à la ville faible. Bien que ces deux conditions ne soient, en général, pas réunies en pratique (en particulier, pour le séisme de Michoacan 1985), la sollicitation d'une configuration par une onde plane en incidence verticale est souvent prédominante dans les études, qu'elles soient numériques ou théoriques ([149, 16, 156, 108, 117]), apparemment parce que cela simplifie l'analyse et facilite la comparaison avec la réponse du modèle 1D (c.à.d. la réponse à une onde plane en incidence normale se propageant dans un demi-espace composé de couches horizontales). Ce type d'analyse met donc l'accent sur les phénomènes se produisant dans le sous-sol juste en dessous de la ville. Ainsi, un nombre important d'études porte sur l'effet local des bassins sur lesquels sont construites les villes. Mais à présent on sait que ces effets locaux n'ont qu'une influence partielle sur les réponses anormales en milieu urbain ([178, 49, 50, 70, 132, 130, 46, 35]). De plus, dans [97] les auteurs montrent que la position relative de la source par rapport au bassin est un facteur critique pour la détermination correcte de la réponse à l'intérieur de ce dernier. Une autre possibilité est que les immeubles de la ville, interagissant avec le sous-sol et entre eux, jouent un rôle important dans l'amplification et l'augmentation de la durée du mouvement sismique ([180, 21, 155]). Ces études mettent en avant les ondes de "surface", qualifiées soit d'ondes "générées localement" par les extrémités d'un bassin ou par les hétérogénités du sous-sol [18, 20, 66, 35], soit d'ondes quasi-Love excitées à la base d'immeubles et réamplifiées par l'action des immeubles voisins ([180, 21, 155]), comme une cause possible des réponses anormales. Cependant, peu de ces études [190, 188] avancent les éléments théoriques qui pourraient justifier réellement cette hypothèse.

Le sujet c) est classique en géophysique ([64]). Les signaux sismiques associés aux différentes ondes de surface (Love et Rayleigh) sont souvent utilisés dans les problèmes inverses pour la reconstruction de certains paramètres de la croûte, tels que l'épaisseur des différentes couches, leur composition ([64, 129]), et les hétérogénéités latérales ([185, 52]). Plus récemment ([28, 99, 101]), il a été montré que lorsque les sources sismiques sont localisées à proximité d'une zone de faille (FZ pour fault zone en anglais, c.à.d. une couche quasi-verticale emplie d'un matériau mou et entourée de roche dure), des ondes de surface sont excitées (qualifiées "d'emprisonnées") dans une zone proche de la FZ, et se propagent sur le sol où elles peuvent être détectées et employées pour obtenir une information sur les paramètres physiques et géométriques de la FZ. La résolution de manière non-ambiguë de ce problème inverse nécessite une bonne compréhension de la façon dont la source interagit avec les hétérogénéités.

Le sujet d) est également un sujet classique en sismologie, en particulier la qualification, c.à.d. la détermination du moment sismique et la localisation de la source sismique, [121, 105]. Puisque les ondes sismiques, y compris les composantes d'ondes de surface, se propagent latéralement (quelque fois sur de longues distances) à l'interieur de la croûte avant d'atteindre la surface de la terre, le problème inverse est rendu difficile du fait que les caractéristiques tant physiques que géométriques de la croûte ne sont pas connues. Dans tous les cas, il est important de déterminer l'influence de l'erreur portant sur le modèle de croûte, sur l'obtention de la position et du moment de la source. Cela nécessite donc une analyse théorique appropriée.
Le sujet e) est une classe ad hoc du sujet b), puisque les vibrations considérées ici, sont produites

par des sources sismiques "artificielles", au sens source induite par une activité humaine, mais dont les effets sont non désirés et/ou oubliés volontairement ou involontairement.

L'étude théorique suivante se concentre sur les sujets a), b), et e). Par opposition aux sujets c) et d) où la réponse est connue et la composition du milieu et/ou la source doivent être déterminés, nous nous intéressons aux problèmes directs : les caractéristiques de la source et des milieux sont connues et nous recherchons la réponse.

Plus particulièrement, **cette partie est relative aux phénomènes se produisant entre la source et une ville**, c'est-à-dire aux **effets régionaux/locaux** mais aussi à la caractérisation des phénomènes liés à la structure géophysique sous-jacente d'une ville. Nous considérons différents cas, tous relatifs à la réponse sur le sol, dans des configurations comportant un nombre $N \geq 1$ de couches en dessous de la surface, en contact parfait entre elles (si $N > 1$), et dont la plus profonde est en contact parfait avec un demi-espace, supposé modéliser le substratum.

Glossaire

Dans ce chapitre, nous emploierons les notations principales suivantes :

N le nombre de couches considérées dans la configuration
h l'épaisseur de la couche supérieure
H l'épaisseur de la couche inférieure lorsque deux couches sont considérées
$A^i(\omega)$ le spectre de l'onde incidente
$u^0(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacement dans le substratum dans le domaine temporel
$u^0(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement dans le substratum dans le domaine fréquentiel
$u^{0d}(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement diffracté dans le substratum dans le domaine fréquentiel
$u^i(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement incident dans le domaine fréquentiel
$u^s(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement spéculairement réfléchi dans le domaine fréquentiel
$u^j(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacement dans la couche j, $j = 1, .., N$ dans le domaine temporel
$u^j(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement dans la couche j, $j = 1, .., N$ dans le domaine fréquentiel
$u^{jd}(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement diffracté dans la couche j, $j = 1, .., N$ dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{x}$ la position d'un point générique dans le plan sagittal $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$
$\mathbf{x_g}$ la position d'un point générique sur le sol $\mathbf{x_g} = (x_g, 0)$
$\mathbf{x^s}$ la localisation de la source linéique dans le plan sagittal $\mathbf{x} = (x_1^s, x_2^s)$
k^j le nombre d'onde dans le domaine Ω_j, $j = 0, 1, ..., N$
k_1 la composante horizontale du nombre d'onde
k_1^i la composante horizontale du nombre d'onde incident lorsque la sollicitation prend la forme d'une onde plane
k_2^j la composante verticale du nombre d'onde dans le domaine Ω^j, $j = 0, 1, ..., 4$, telle que $k_2^j = \sqrt{(k^j)^2 - k_1^2}$, $\Re\left(k_2^j\right) \geqq 0$, et $\Im\left(k_2^j\right) \geqq 0$
$k_2^j = K_2^j$, dans le cas non-dissipatif, avec $K_2^j \in \mathbb{R}^+$, $j = 0, 1, ..., N$
$k_2^j = \mathrm{i}\kappa_2^j$, dans le cas non-dissipatif, avec $\kappa_2^j \in \mathbb{R}^+$, $j = 0, 1, ..., N$
k_2^{ji} la composante verticale du nombre d'onde incident dans le domaine Ω^j, $j = 0, 1, ..., N$ lorsque la solliciation prend la forme d'une onde plane
$\mathcal{I}_j$, $j = 1, 2, ..., N + 1$ les intervalles d'intégration correspondants aux différents types d'ondes - propagatives ou évanescentes- intervenant dans les domaines Ω_l, $l = 1, 2, ..., N$
$I_j^l(\mathbf{x}, \omega)$ les composantes des champs de déplacement $u^i(\mathbf{x}, \omega)$ dans les domaines Ω_l, $l = 1, 2, ..., N$, relatives aux intervalles $\mathcal{I}_j$, $j = 1, 2, ..., N + 1$
$du_j^l(\mathbf{x}, k_1\omega)$, les intégrandes des intégrales $I_j^l(\mathbf{x}, \omega)$
$E_j^1(\zeta, \eta)$ le facteur d'interférence ou de résonance (selon l'intervalle d'intégration) relatif à $I_j^1(\mathbf{x}, \omega)$, $j = 1, 2, ..., N + 1$ dans le plan $(\eta = k^0 h, \zeta = \dfrac{k_1}{k^0})$
$\eta_m^{\mathrm{Be}}(\zeta)$ les lieux des maxima d'interférence pairs, correspondant aux "résonances" d'Haskell dans le plan (η, ζ)
$\eta_m^{\mathrm{Bo}}(\zeta)$ les lieux des maxima d'interférence impairs, correspondant aux "résonances" d'Haskell dans le plan (η, ζ)
$\eta_m^{\mathrm{Le}}(\zeta)$ les modes de Love pairs dans le plan (η, ζ)
$\eta_m^{\mathrm{Lo}}(\zeta)$ les modes de Love impairs dans le plan (η, ζ)
$TF^j(\mathbf{x}, \omega)$ la fonction de transfert dans le domaine j, $j = 0, 1, ..., N$ définie par $TF^j(\mathbf{x}, \omega)\dfrac{u^j(\mathbf{x}, \omega)}{A^i(\omega)}$
$TF^{jd}(\mathbf{x}, \omega)$ la fonction de transfert dans le domaine j, $j = 0, 1, ..., N$ associée aux champs de dépla-

cement diffracté et définie par $TF^{jd}(\mathbf{x},\omega)\dfrac{u^{jd}(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$
$k_1^\star(\omega) = k_1^{\star'} + \mathrm{i}k_1^{\star''}$ le premier mode de Love (impair) dans le plan complexe (k_1', k_1'')
$u_{\mathcal{B}}^1(\mathbf{x},\omega)$ la contribution des intégrales de branche au champ de déplacement dans la couche
$TF\mathcal{B}^1(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert relative à la contribution des intégrales de branche au champ de déplacement dans la couche
$u_{\mathcal{R}}^1(\mathbf{x},\omega)$ la contribution des résidus au champ de déplacement dans la couche
$TF_{\mathcal{R}}^1(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert relative à la contribution des résidus au champ de déplacement dans la couche
$J_j^1(\mathbf{x},t,\zeta)$ la contribution de l'intégrale sur η relative aux intervalles $\mathcal{I}_j$, $j = 1,2,..,N+1$
$\eta_m^{\mathrm{Be}} = \eta_m^{\mathrm{Be}'} + \mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Be}''}$ racines complexes, correspondant aux phénomènes d'interférence (où "Leaky-mode") pairs
$\eta_m^{\mathrm{Bo}} = \eta_m^{\mathrm{Bo}'} + \mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Bo}''}$ racines complexes, correspondant aux phénomènes d'interférence (où "Leaky-mode") impairs
$\eta_m^{\mathrm{Le}} = \eta_m^{\mathrm{Le}'} + \mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Le}''}$ racines complexes, correspondant aux modes de Love pairs
$\eta_m^{\mathrm{Lo}} = \eta_m^{\mathrm{Lo}'} + \mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Lo}''}$ racines complexes, correspondant aux modes de Love impairs
κ^{ij} le rapport défini par $\kappa^{ij} = \dfrac{\mu^i k_2^i}{\mu^j k_2^j}$

1.1 Problème à une couche : les modes de Love

Nous nous intéressons ici à un problème qui devrait être canonique en géophysique : celui de la réponse d'une couche molle homogène, horizontale et d'étendue latérale infinie, délimitée sur sa partie supérieure par une condition de surface libre et sur sa partie inférieure, par une interface avec un demi-espace homogène, plus rigide, à une source cylindrique polarisée en cisaillement horizontal située dans ce demi-espace. Nous montrerons que cette réponse est composée de la combinaison de deux types d'ondes dans la couche (S.L. pour soft layer en anglais) et dans le substratum plus rigide (H.H.S. pour hard half space en anglais) :

- (i) des ondes propagatives stationnaires (SOP) dans S.L. et des ondes propagatives (OP) dans H.H.S.
- (ii) des ondes propagatives stationnaires dans S.L. et des ondes de surface (OS) dans H.H.S.
- (iii) des ondes de surface stationnaires dans S.L. (SOS) et des ondes de surface dans H.H.S.

Seul le type (ii) donne lieu à une excitation des modes de Love.

La figure 1.1 représente une coupe dans le plan sagittal de la configuration. Γ_g est la surface du sol, supposée horizontale, au dessus de laquelle se trouve l'air, supposé être le vide. Ω_1 est un domaine d'étendue latérale infinie, d'épaisseur h et occupé par un matériau M^1. Ω_0 est un domaine semi-infini, supposé modéliser le substratum, occupé par un matériau M^0 plus rigide que M^1. L'interface Γ_h entre Ω_1 et Ω_0 est horizontale. Un repère cartésien $Ox_1x_2x_3$ est attaché à la configuration tel que O est situé sur la surface, x_2 croît avec la profondeur et x_3 est perpendiculaire au plan de la coupe. En appelant $\mathbf{i}_j$ le vecteur unitaire associé à l'axe positif x_j, $j = 1, 2, 3$, le vecteur normal aux interfaces Γ_g et Γ_h est $\mathbf{i}_2$. Les matériaux M^0 et M^1 sont supposés être linéaires, isotropes, homogènes, et initialement au repos. **Nous supposons que M^0 est non dissipatif, alors que M^1 est dissipatif** (à moins d'une spécification particulière).

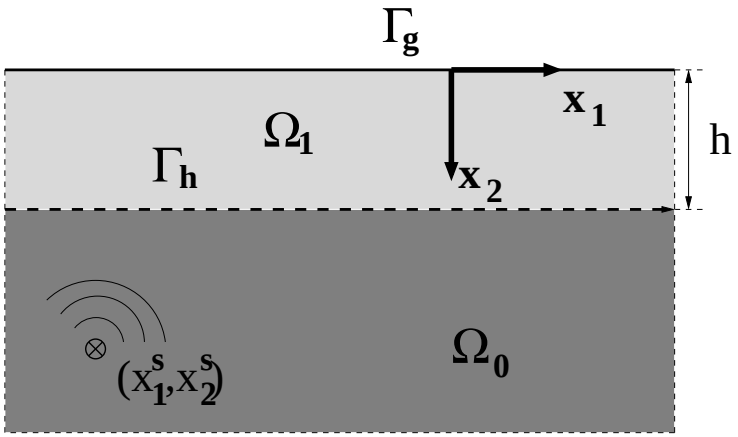


FIG. 1.1 – *Vue en coupe de la configuration*

La sollicitaion sismique est délivrée au site par une source cylindrique le long de l'axe x_3 et localisée à $\mathbf{x^s} = (x_1^s, x_2^s)$, sous la forme d'une onde cylindrique polarisée en cisaillement horizontal.

La nature SH de l'onde cylindrique incidente ainsi que l'invariance de la géométrie suivant x_3, nous permettent de traiter un problème 2D. Dès lors $\mathbf{x}$, le vecteur partant de l'origine et pointant un point générique du plan sagittal a pour coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

1.1.1 Formulation du problème : la source est localisée dans le substratum (c.à.d. $x_2^s > h$)

Nous recherchons le champ de déplacement total (incident + diffracté) suivant l'axe x_3, $u_3(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t)$ (les autres composantes étant nulles), où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine O et pointant un point générique (x_1, x_2), et où t est la variable de temps. Plutôt que de rechercher directement $u(\mathbf{x}, t)$, nous lui préférons sa transformée de Fourier $u(\mathbf{x}, \omega)$, vérifiant le système (méthode de **décomposition de domaine**):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla \cdot \nabla + \left(k^j(\omega)\right)^2\right) u^j(\mathbf{x}, \omega) = -f(\mathbf{x}, \omega)\delta_{j0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0, 1 \\ \text{avec} \\ k^0(\omega) = \dfrac{\omega}{c_S^0};\ k^1(\omega) = \dfrac{\omega}{\left(c_S^1\right)_R} \left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S^1}\right)},\ \omega_{ref} = 0.09 rad.s^{-1} \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où $c_S^0 = \sqrt{\dfrac{\mu^0}{\rho^0}}$, et $\left(c_S^1\right)_R = \sqrt{\dfrac{\mu_R^1}{\rho^1}}$, μ^j et ρ^j, $j = 0, 1$ étant respectivement le module de rigidité (matériau M^0) et le module de rigidité relaxé (matériau M^1), ainsi que la densité des matériaux M^j, $j = 0, 1$. Nous avons considéré $\omega_{ref} = 0.09 rad.s^{-1}$ (c'est-à-dire une valeur proche de zéro) car le module de rigidité relaxé μ^1 est une valeur statique (module relaxé c'est-à-dire la valeur du module à $\omega_{ref} = 0$), ce qui est compatible avec la formule de Kjartansson.

Les champs de déplacement $u^j(\mathbf{x}, \omega)$, $j = 0, 1$, doivent vérifier les conditions aux limites :

$$\begin{array}{ll} \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \left\{ \begin{array}{ll} \mu^1(\omega) \dfrac{\partial u^1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_2} = 0 & (i) \end{array} \right. \\ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h \left\{ \begin{array}{ll} u^1(\mathbf{x}, \omega) - u^0(\mathbf{x}, \omega) = 0 & (ii) \\ \mu^1(\omega) \dfrac{\partial u^1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_2} - \mu^0 \dfrac{\partial u^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_2} = 0 & (iii) \end{array} \right. \end{array} \tag{1.2}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini. Cette condition exprime le fait que les ondes refléchies par la couche se propagent de la couche à l'infini et non l'inverse, et que les ondes dans la couche se propagent en direction des extrémités latérales de cette dernière.

1.1.2 Représentation des champs

En séparant les variables en coordonnées cartésiennes et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, nous obtenons les représentations de champs suivantes :

$$u^0(\mathbf{x}, \omega) = u^i(\mathbf{x}, \omega) + u^{0d}(\mathbf{x}, \omega), \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \tag{1.3}$$

avec, le champ diffracté

$$u^{0d}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B^0(k_1) \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1 x_1 + k_2^0 x_2\right)\right) \frac{dk_1}{k_2^0}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \tag{1.4}$$

et le champ incident, en nous référant à la formule (1.14)

$$u^i(\mathbf{x},\omega) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1-x_1^s)+k_2^0|x_2-x_2^s|\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_0 \tag{1.5}$$

et

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^1(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1x_2\right)+B^1(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^1x_2\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^1}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_1 \tag{1.6}$$

1.1.3 Application des conditions aux limites et obtention des champs dans la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et dans le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$

Introduisons tout d'abord l'expression du champ (II.1.6) dans l'équation sur Γ_g, (II.1.4) (i), et projetons tel que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.1.4) (i) $\exp(-\mathrm{i}k_1'x_1)dx_1$:

$$A^1(k_1) = B^1(k_1) = \frac{C^1(k_1)}{2} \tag{1.7}$$

si bien que (II.1.6) s'écrit :

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^1(k_1)\cos\left(k_2^1x_2\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^1}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_1 \tag{1.8}$$

Si maintenant nous appliquons les autres conditions aux limites, toujours en projection telle que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.1.4) (ii) ou (iii) $\exp(-\mathrm{i}k_1'x_1)dx_1$, le système obtenu peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} C^1 \\ B^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\mathrm{i}A^i(\omega)k_2^1}{4\pi k_2^0}\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1x_1^s+k_2^1h\right)\right)\cos\left(k_2^1x_2^s\right) \\ \dfrac{-A^i(\omega)\mu^1}{4\pi\mu^0}\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1x_1^s+k_2^1h\right)\right)\cos\left(k_2^1x_2^s\right) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

avec

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \cos\left(k_2^1h\right) & -\dfrac{k_2^1}{k_2^0}\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right) \\ \dfrac{\mu^1}{\mu^0}\sin\left(k_2^1h\right) & \mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right) \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

La façon d'obtenir les modes du système est d'annuler le déterminant $\Delta = \det(\mathcal{D})$ de la matrice $\mathcal{D}$, (II.1.10). Il en découle :

$$\cos\left(k_2^1h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right) = 0 \tag{1.11}$$

qui est la relation de dispersion des modes de Love.

La résolution du système (II.1.9) conduit aux expressions des champs $u^0(\mathbf{x},\omega)$ et $u^1(\mathbf{x},\omega)$ suivantes :

$$\begin{aligned} u^0(\mathbf{x},\omega) = \ & \frac{\mathrm{i}A^i(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos(k_2^1h)+\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}{\cos(k_2^1h)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\right)\times \\ & \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)+k_2^0\left(x_2+x_2^s-2h\right)\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{1.12}$$

et

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{\mathrm{i}A^i(\omega)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)+k_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)\right)\cos\left(k_2^1x_2\right)}{\cos(k_2^1h)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{1.13}$$

La réponse $u^1(\mathbf{x_g},\omega)$, sur le sol tel que $\mathbf{x}=\mathbf{x_g}=(x_1,0)$, nous intéresse particulièrement puisqu'elle a une incidence directe sur les structures lors d'un séisme. Son expression est :

$$u^1(\mathbf{x_g},\omega) = \frac{\mathrm{i}A^i(\omega)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)+k_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)\right)}{\cos(k_2^1h)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{1.14}$$

1.1.4 Structure des champs de déplacement

1.1.4.1 Structure du champ de déplacement dans la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ dans le domaine fréquentiel

Lorsque le matériau M^1 occupant le domaine Ω_1 n'est pas dissipatif, c'est-à-dire purement élastique, μ^1 est réel et ne dépend pas de la fréquence ω. Par conséquent, sur l'intervalle d'intégration pour obtenir $u^1(\mathbf{x},\omega)$, nous rencontrons des intervalles auxquels appartient k_1 sur lesquels k_2^0 et k_2^1 sont soit réels, soit imaginaires purs :

$$\begin{aligned} k_2^j &= K_2^j = \left|\sqrt{(k^j)^2-k_1^2}\right| \quad ;\ |k_1|<k^j \quad ;\ j=0,1 \\ k_2^j &= \mathrm{i}\kappa_2^j = \mathrm{i}\left|\sqrt{k_1^2-(k^j)^2}\right| \quad ;\ |k_1|>k^j \quad ;\ j=0,1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Il est important de noter ici que les termes couche molle et substratum plus rigide signifient dans ce contexte :

$$c_S^0 > c_S^1 \Rightarrow k^0 < k^1,\ \mu^0 > \mu^0 \tag{1.16}$$

si bien que le champ dans la couche s'écrit

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \mathrm{I}_1^1\left(\mathbf{x_g},\omega\right)+\mathrm{I}_2^1\left(\mathbf{x},\omega\right)+\mathrm{I}_3^1\left(\mathbf{x},\omega\right) \tag{1.17}$$

chaque terme $\mathrm{I}_j^1\left(\mathbf{x_g},\omega\right)$, $j=1,2,3$ correspondant aux différents intervalles $\mathcal{I}_1=[-k^0,k^0]$, $\mathcal{I}_2=[-k^1,-k^0[\cup]k^0,k^1]$ et $\mathcal{I}_3=[-\infty,-k^1[\cup]k^1,\infty]$, tels que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_1^1\left(\mathbf{x},\omega\right) = \int_{-k^0}^{k^0} du_1^1\left(\mathbf{x},k_1,\omega\right) = \\ &\frac{-A^i(\omega)}{2\pi}\int_{-k^0}^{k^0}\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)+K_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)\right)F_1^1(k_1,\omega)\cos\left(K_2^1x_2\right)dk_1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

avec

$$F_1^1(k_1,\omega) = \frac{\mu^0}{\mathrm{i}\mu^0K_2^0\cos(K_2^1h)+\mu^1K_2^1\sin\left(K_2^1h\right)} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_2^1\left(\mathbf{x},\omega\right) = \left[\int_{-k^1}^{-k^0}+\int_{k^0}^{k^1}\right]du_2^1\left(\mathbf{x},k_1,\omega\right) = \\ &\frac{-A^i(\omega)}{2\pi}\left[\int_{-k^1}^{-k^0}+\int_{k^0}^{k^1}\right]\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)\right)\exp\left(-\kappa_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)F_2^1(k_1,\omega)\cos\left(K_2^1x_2\right)dk_1 \end{aligned} \tag{1.20}$$

avec

$$F_2^1(k_1,\omega) = \frac{\mu^0}{-\mu^0\kappa_2^0\cos(K_2^1 h) + \mu^1 K_2^1 \sin\left(K_2^1 h\right)} \tag{1.21}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_3^1(\mathbf{x},\omega) = &\left[\int_{-\infty}^{-k^1} + \int_{k^1}^{\infty}\right] du_3^1(\mathbf{x},k_1,\omega) = \\ &\frac{-A^i(\omega)}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{-k^1} + \int_{k^1}^{\infty}\right] \exp\left(\mathrm{i}k_1(x_1 - x_1^s)\right)\exp\left(-\kappa_2^0(x_2^s - h)\right) F_3^1(k_1,\omega)\cosh\left(\kappa_2^1 x_2\right) dk_1 \end{aligned} \tag{1.22}$$

avec

$$F_3^1(k_1,\omega) = \frac{-\mu^0}{\mu^0\kappa_2^0\cosh(\kappa_2^1 h) + \mu^1\kappa_2^1\sinh\left(K_2^1 h\right)} \tag{1.23}$$

En particulier, nous pouvons écrire $du_1^1(\mathbf{x},k_1,\omega)$ sous la forme:

$$du_1^1(\mathbf{x},k_1,\omega) = \left(G_1^1(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 + K_2^1x_2\right)\right) + G_1^1(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 - K_2^1x_2\right)\right)\right) dk_1 \tag{1.24}$$

avec

$$G_1^1(\mathbf{x}) = \frac{-A^i}{4\pi}F_1^1(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1x_1^s + K_2^0(h - x_2^s)\right)\right) \tag{1.25}$$

qui, introduite dans l'équation (II.1.18) exprime le fait que **sur l'intervalle $\mathcal{I}_1$, le champ de déplacement dans la couche est composé d'une somme d'ondes propagatives interférant entre elles (SOP)**, chacune d'elles étant composée de deux ondes planes ayant la même longueur de vecteur d'onde.

De la même manière, nous pouvons écrire $du_2^1(\mathbf{x},k_1,\omega)$ sous la forme:

$$du_2^1(\mathbf{x},k_1,\omega) = \left(G_2^1(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 + K_2^1x_2\right)\right) + G_2^1(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 - K_2^1x_2\right)\right)\right) dk_1 \tag{1.26}$$

avec

$$G_2^1(\mathbf{x}) = \frac{-A^i}{4\pi}F_2^1(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}k_1x_1^s + \kappa_2^0(h - x_2^s)\right) \tag{1.27}$$

qui, introduite dans l'équation (II.1.20) exprime le fait que **sur l'intervalle $\mathcal{I}_2$, le champ de déplacement dans la couche est encore une fois composé d'ondes propagatives interférant entre elles (SOP)**, chacune d'elles étant composée de deux ondes planes ayant la même longueur de vecteur d'onde. Il faut cependant noter que ni les vecteurs d'ondes, ni les amplitudes de ces SOP ne sont identiques à ceux du cas précédent pour les ondes SOP1 (c.à.d. sur $\mathcal{I}_1$). En fait, l'équation (II.1.27) nous indique que **l'amplitude** de la fonction $G_2^1(\mathbf{x})$ des SOP2 sur l'intervalle $\mathcal{I}_2$ **décroit exponentiellement lorsque la profondeur focale** (plus exactement $x_2^s - h$) **croît**, c'est-à-dire que les SOP2 décroissent lorsque la profondeur de la source augmente, alors que l'équation (II.1.25) indique que la fonction $G_1^1(\mathbf{x})$ est une fonction sinusoïdale de la profondeur focale, c'est-à-dire que les SOP1 existent pour une large variété de profondeurs de la source.

Finalement, nous pouvons écrire $du^3(\mathbf{x},k_1,\omega)$ sous la forme:

$$du_3^1(\mathbf{x},k_1,\omega) = \left(G_3^1(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1 + \kappa_2^1x_2\right) + G_3^1(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1 - \kappa_2^1x_2\right)\right) dk_1 \tag{1.28}$$

avec

$$G_3^1(\mathbf{x}) = \frac{-A^i}{4\pi}F_2^1(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}k_1x_1^s + \kappa_2^0(h - x_2^s)\right) \tag{1.29}$$

qui, introduite dans l'équation (II.1.22), exprime le fait que **sur l'intervalle $\mathcal{I}_3$, le champ de déplacement dans la couche est composé d'une somme d'ondes de surface interférant entre elles SOS**, chacune d'elles étant composée de deux ondes de surface ayant la même longueur de vecteur d'onde. Chacune de ces ondes de surface est une onde inhomogène (c'est-à-dire que le vecteur d'onde est complexe), dont la phase est constante pour $x_1 =$ Constante et dont l'amplitude croît ou décroît lorsque x_2 approche de la surface. En fait, l'équation (II.1.29) nous indique que **l'amplitude** de la fonction $G_3^1(\mathbf{x})$ des SOS sur l'intervalle $\mathcal{I}_3$ **décroit exponentiellement lorsque la profondeur focale** (c.à.d. $x_2^s - h$) **croît**, c'est-à-dire que les SOS3 décroissent lorsque la profondeur de la source augmente.

Ainsi, pour d'importantes valeurs de la distance entre l'interface Γ_h et la source (c'est à dire $x_2^s - h$) la réponse dans la couche est largement dominée par le terme $\mathrm{I}_1^1(\mathbf{x},\omega)$ et est composée d'une somme de SOP1. Cette situation correspond, plus ou moins, à la situation de l'analyse communément appelée $1D$ du problème. Cependant, elle ne constitue pas forcément une bonne représentation de la réponse lorsque la distance $x_2^s - h$ est plus petite.

1.1.4.2 Structure du champ de déplacement dans le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$ dans le domaine fréquentiel

Nous concentrons ici notre attention sur le sous-domaine Ω_0^- de Ω_0 compris entre les profondeurs h et x_2^s. De façon analogue à la section II.1.1.4.1, nous décomposons le champ diffracté dans Ω_0 tel que:

$$u^0(\mathbf{x},\omega) = \mathrm{I}_1^0(\mathbf{x},\omega) + \mathrm{I}_2^0(\mathbf{x},\omega) + \mathrm{I}_3^1(\mathbf{x},\omega) \tag{1.30}$$

chaque terme correspondant aux différents intervalles $\mathcal{I}_1 = [-k^0, k^0]$, $\mathcal{I}_2 = [-k^1, -k^0[\cup]k^0, k^1]$ et $\mathcal{I}_3 = [-\infty, -k^1[\cup]k^1, \infty]$, tels que:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_1^0(\mathbf{x},\omega) = \int_{-k^0}^{k^0} du_1^0(\mathbf{x},k_1,\omega) = \\ &\frac{A^i(\omega)}{4\pi}\int_{-k^0}^{k^0} \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1 - x_1^s) + K_2^0(x_2 + x_2^s - 2h)\right)\right) F_1^0(k_1,\omega)dk_1 \end{aligned} \tag{1.31}$$

avec

$$F_1^0(k_1,\omega) = \frac{\mathrm{i}}{K_2^0}\frac{\mathrm{i}\mu^0 K_2^0\cos(K_2^1 h) - \mu^1 K_2^1 \sin\left(K_2^1 h\right)}{\mathrm{i}\mu^0 K_2^0\cos(K_2^1 h) + \mu^1 K_2^1 \sin\left(K_2^1 h\right)} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_2^0(\mathbf{x},\omega) = \left[\int_{-k^1}^{-k^0} + \int_{k^0}^{k^1}\right] du_2^0(\mathbf{x},k_1,\omega) = \\ &\frac{A^i(\omega)}{4\pi}\left[\int_{-k^1}^{-k^0} + \int_{k^0}^{k^1}\right] \exp\left(\mathrm{i}k_1(x_1 - x_1^s)\right)\exp\left(-\kappa_2^0(x_2 + x_2^s - 2h)\right) F_2^0(k_1,\omega)dk_1 \end{aligned} \tag{1.33}$$

avec

$$F_2^0(k_1,\omega) = \frac{1}{\kappa_2^0}\frac{-\mu^0\kappa_2^0\cos(K_2^1 h) - \mu^1 K_2^1\sin\left(K_2^1 h\right)}{-\mu^0\kappa_2^0\cos(K_2^1 h) + \mu^1 K_2^1\sin\left(K_2^1 h\right)} \tag{1.34}$$

et

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}_3^0(\mathbf{x},\omega) = \left[\int_{-\infty}^{-k^1} + \int_{k^1}^{\infty}\right] du_3^1(\mathbf{x},k_1,\omega) = \\ &\frac{-A^i(\omega)}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{-k^1} + \int_{k^1}^{\infty}\right] \exp\left(\mathrm{i}k_1(x_1 - x_1^s)\right)\exp\left(-\kappa_2^0(x_2 + x_2^s - 2h)\right) F_3^0(k_1,\omega)dk_1 \end{aligned} \tag{1.35}$$

avec

$$F_3^1(k_0,\omega) = \frac{1}{\kappa_2^0}\frac{-\mu^0\kappa_2^0\cosh(\kappa_2^1 h)+\mu^1\kappa_2^1\sinh\left(\kappa_2^1 h\right)}{-\mu^0\kappa_2^0\cosh(\kappa_2^1 h)-\mu^1\kappa_2^1\sinh\left(\kappa_2^1 h\right)} \tag{1.36}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$du_1^0(\mathbf{x},k_1,\omega) = G_1^0(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1+K_2^1x_2\right)\right)dk_1 \tag{1.37}$$

avec

$$G_1^0(\mathbf{x}) = \frac{A^i}{4\pi}F_1^0(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1x_1^s+K_2^0(2h-x_2^s)\right)\right) \tag{1.38}$$

qui, introduite dans l'équation (II.1.31) exprime le fait que **sur l'intervalle $\mathcal{I}_1$, le champ diffracté dans le substratum est composé d'une somme d'ondes planes OP**.
De la même manière, nous pouvons écrire $du_2^0(\mathbf{x},k_1,\omega)$ sous la forme :

$$du_2^0(\mathbf{x},k_1,\omega) = G_2^0(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1-\kappa_2^0x_2\right) \tag{1.39}$$

avec

$$G_2^0(\mathbf{x}) = \frac{A^i}{4\pi}F_2^0(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}k_1x_1^s+\kappa_2^0(2h-x_2^s)\right) \tag{1.40}$$

qui, introduite dans l'équation (II.1.33) exprime le fait que **sur l'intervalle $\mathcal{I}_2$, le champ diffracté dans le substratum est une somme d'ondes de surface OS2**. L'équation (II.1.40) nous indique que **l'amplitude** de la fonction $G_2^0(\mathbf{x})$ des OS2 sur l'intervalle $\mathcal{I}_2$ **décroit exponentiellement lorsque la profondeur focale** (plus exactement x_2^s-2h) **croît**, c'est-à-dire que les OS décroissent lorsque la profondeur de la source augmente, alors que l'équation (II.1.37) indique que la fonction $G_1^0(\mathbf{x})$ est une fonction sinusoïdale de la profondeur focale, c'est-à-dire que les OP existent pour une large variété de profondeurs de la source. Finalement, nous pouvons écrire $du_3^0(\mathbf{x},k_1,\omega)$ sous la forme :

$$du_3^0(\mathbf{x},k_1,\omega) = G_3^1(\mathbf{x})\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1-\kappa_2^0x_2\right)dk_1 \tag{1.41}$$

avec

$$G_3^0(\mathbf{x}) = \frac{A^i}{4\pi}F_2^0(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}k_1x_1^s+\kappa_2^0(2h-x_2^s)\right) \tag{1.42}$$

qui, introduite dans l'équation (II.1.35), exprime le fait que **sur l'intervalle $\mathcal{I}_3$, le champ diffracté dans le substratum est composé d'une somme d'ondes de surface OS3**. En fait, l'équation (II.1.42) nous indique que **l'amplitude** de la fonction $G_3^0(\mathbf{x})$ des OS3 sur l'intervalle $\mathcal{I}_3$ **décroit exponentiellement lorsque la profondeur focale** (c.à.d. x_2^s-2h) **croît**, c'est-à-dire que les OS3 décroissent lorsque la profondeur de la source augmente. Il faut cependant noter que les vecteurs d'onde associés aux ondes OS3 sont différents des vecteurs d'onde associés aux ondes OS2.

Il faut noter également que pour la totalité des intervalles considérés ici, à chaque k_1 correspond une seule et unique onde plane propagative OP, ou de surface OS2 ou OS3.

Comme dans la section précédente, pour d'importantes valeurs de la distance entre l'interface Γ_h et la source (c'est-à-dire x_2^s-h) le champ diffracté dans le substratum est largement dominé par le terme $\mathrm{I}_1^0(\mathbf{x},\omega)$ et est composé d'une somme de OP. Cette situation correspond plus ou moins à la situation de l'analyse communément appelée $1D$ du problème, mais encore une fois, ne constitue pas forcément une bonne représentation de la réponse lorsque la distance x_2^s-h est plus petite.
Intéressons nous plus particulièrement à l'amplitude du champ de déplacement $u^1(\mathbf{x},\omega)$ dans la couche et plus particulièrement aux trois types d'ondes SOP1, SOP2, et SOS3.

1.1.5 Amplitude des ondes dans la couche

1.1.5.1 Amplitude des ondes SOP1, liées aux phénomènes d'interférence

L'amplitude des ondes SOP1 est constituée du produit de trois facteurs : un facteur A^i associé au spectre de la source, un facteur géométrique associé à la localisation de la source, au point d'observation et à l'épaisseur h de la couche, celui-ci étant lui-même composé d'un facteur directement relié à la géométrie horizontale (projection de la configuration sur l'axe x_1), et verticale (projection de la configuration sur l'axe x_2), et enfin, un facteur d'interférence $F_1^1(k_1,\omega)$.

Commençons par étudier le facteur $F_1^1(k_1,\omega)$. Le champ $\mathrm{I}_1^1(\mathbf{x},\omega)$ s'écrit :

$$I_1^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{-A^i(\omega)}{\pi}\int_0^{k^0} F_1^1(k_1,\omega)\cos\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)\right)\cos\left(K_2^1(x_2)\right)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^0(h-x_2^s)\right)dk_1 \quad (1.43)$$

Nous faisons le changement de variables :

$$\eta = k^0 h = \frac{\omega}{c_S^0}h \quad ; \zeta = \frac{k_1}{k^0} \quad (1.44)$$

si bien que $\eta \in \mathbb{R}$ et $\zeta \in \mathbb{R}$. Introduisons les quantités v, γ, ψ et ϕ telles que :

$$v = \frac{\mu^1}{\mu^0} \quad ; \gamma = \frac{k^1}{k^0} = \frac{c_S^0}{c_S^1} \quad ; \psi(\zeta) = \sqrt{1-\zeta^2} \quad ; \phi(\zeta) = \sqrt{\gamma^2-\zeta^2} \quad (1.45)$$

Alors, $\gamma > 1$, $v < 1$, et $(\gamma, \phi(\zeta)) \in \mathbb{R}^2$, tels que $\gamma > 0$ et $\phi > 0$.
L'équation (II.1.43) s'écrit :

$$I_1^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{-A^i(\omega)}{\pi}\int_0^1 E_1^1(\zeta,\eta)\cos\left(\zeta\nu\frac{x_1-x_1^s}{h}\right)\cos\left(\phi(\zeta)\nu\frac{x_2}{h}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\psi(\zeta)\nu\frac{h-x_2^s}{h}\right)d\zeta \quad (1.46)$$

avec

$$E_1^1(\zeta,\eta) = \frac{1}{\mathrm{i}\psi\cos(\phi\eta) + v\phi\sin(\phi\eta)} \quad (1.47)$$

Examinons le facteur d'interférence $E_1^1(\zeta,\eta)$, $\zeta \in [0,1]$. Puisque les quantités ζ et η sont réelles, **le dénominateur de $E_1^1(\zeta,\eta)$ ne peut pas s'annuler ; cependant il peut présenter des minima** pour certains couples de ces paramètres. Considérons ζ fixé dans l'intervalle $[0,1]$. Alors,

$$\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|^{-2} = \psi^2\cos^2(\phi\eta) + v^2\phi^2\sin^2(\phi\eta) \quad (1.48)$$

Une condition nécessaire pour que la fonction de η (II.1.48) présente un minimum est :

$$\frac{\partial\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|^{-2}}{\partial\eta} = 0 = \phi(\zeta)\left(v^2\phi(\zeta)^2 - \psi(\zeta)^2\right)\sin(2\phi(\zeta)\eta) \quad (1.49)$$

Pour que l'équation (II.1.49) soit satisfaite, nous avons trois possibilités :

- soit $\phi(\zeta) = 0$, mais cela implique $\zeta = \gamma > 1$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\zeta \in [0,1]$
- soit $\nu\phi(\zeta) = \psi(\zeta)$, condition qui sera détaillée plus loin

– soit $\sin(2\phi(\zeta)\eta) = 0$ qui conduit à $\eta = \dfrac{n\pi}{2\phi(\zeta)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pour déterminer les entiers n auxquels correspondent les minima, ces valeurs doivent satisfaire la condition :

$$\left.\frac{\partial^2 \left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|^{-2}}{\partial\eta^2}\right|_{\phi(\zeta)\eta=\frac{n\pi}{2}} \geqq 2\phi(\zeta)^2\left(v^2\phi(\zeta)^2 - \psi(\zeta)^2\right)\cos(n\pi) \tag{1.50}$$

Cette condition donne lieu à deux types de solutions selon le signe de la quantité $v^2\phi(\zeta)^2 - \psi(\zeta)^2$:

– des solutions paires, désignées par l'exposant $^{\mathrm{Be}}$,

$$\eta = \eta_m^{\mathrm{Be}} = \frac{m\pi}{\phi(\zeta)},\ m \in \mathbb{N} \text{ lorsque } v\phi(\zeta) > \psi(\zeta). \tag{1.51}$$

– des solutions impaires, désignées par l'exposant $^{\mathrm{Bo}}$,

$$\eta = \eta_m^{\mathrm{Bo}} = \frac{(2m+1)\pi}{2\phi(\zeta)},\ m \in \mathbb{N} \text{ lorsque } v\phi(\zeta) < \psi(\zeta). \tag{1.52}$$

Appelons ζ^{B} la valeur de ζ pour laquelle $v\phi = \psi$, c'est-à-dire :

$$\zeta^{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{1-v^2\gamma^2}{1-v^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\gamma^2-1)v^2}{1-v^2}} \tag{1.53}$$

Ainsi, $\zeta^{\mathrm{B}} < 1$ ce qui n'est pas en contradiction avec le fait que $\zeta \in [0,1]$. Elle ne vérifie pas la condition (II.1.50) ($\dfrac{\partial^2 \left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|^{-2}}{\partial\eta^2} = 0$, $\forall\eta$ pour $\zeta = \zeta^{\mathrm{B}}$), mais se trouve à la borne inférieure ce qui confère à cette valeur un statut particulier.

Ainsi, les trois types de solutions conduisant à des minima de $\left\|E_1^1(\mathbf{x},\omega)\right\|^{-1}$ sont:

– pour $\zeta > \zeta^{\mathrm{B}}$: $\eta = \eta_m^{\mathrm{Be}} = \dfrac{m\pi}{\phi(\zeta)}$, $m = 1, 2, ...$

– pour $\zeta = \zeta^{\mathrm{B}}$: $\forall\eta$

– pour $\zeta < \zeta^{\mathrm{B}}$: $\eta = \eta_m^{\mathrm{Bo}} = \dfrac{(2m+1)\pi}{2\phi(\zeta)}$, $m = 1, 2, ...$

Ainsi, la fonction $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$ présente des maxima régulièrement espacés pour toutes les valeurs de $\zeta \in [0,1]$, c'est-à-dire que $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$, fonction de η à ζ constant, présente des maxima à une périodicité constante, égale à $\dfrac{\pi}{\phi(\zeta)}$. Pour autant, cette fonction prend différentes valeurs en fonction des trois précédents cas :

– (i) pour $\zeta < \zeta^{\mathrm{B}}$ la fonction $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$ présente des maxima égaux à $\psi(\zeta)^{-1}$, pour $\eta = \dfrac{m\pi}{\phi(\zeta)}$ et des minima égaux à $(v\phi(\zeta))^{-1}$ pour $\eta = \dfrac{(2m+1)\pi}{2\phi(\zeta)}$

– (ii) pour $\zeta = \zeta^{\mathrm{B}}$ la fonction $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$ est constante égale à $\psi(\zeta)^{-1} = (v\phi(\zeta))^{-1}$, $\forall\eta$

– (iii) pour $\zeta < \zeta^{\mathrm{B}}$ la fonction $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$ présente des minima égaux à $\psi(\zeta)^{-1}$, pour $\eta = \dfrac{m\pi}{\phi(\zeta)}$ et des maxima égaux à $(v\phi(\zeta))^{-1}$ pour $\eta = \dfrac{(2m+1)\pi}{2\phi(\zeta)}$

Pour donner une mesure de l'importance relative de ces trois types de solutions, nous considérons un exemple numérique, avec $c_S^0 = 1000m.s^{-1}$, $\rho^0 = 1500kg.m^{-3}$, $c_S^1 = 100m.s^{-1}$, $\rho^1 = 1000kg.m^{-3}$, valeurs qui correspondent à $v = 0.67 \times 10^{-2}$ et $v\gamma = 0.67 \times 10^{-1}$, et par conséquent $\zeta^{\mathrm{B}} = 0.995$. Ainsi, la fonction $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$ prend la forme de (iii) sur quasiment la totalité de l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire sur $[0, 0.995]$. En particulier, pour les ondes dont le vecteur d'onde est quasiment vertical (c.à.d. $0 \geqq \zeta << 1$), la valeur maximum de la fonction $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$ est :

$$\frac{1}{v\phi(\zeta)} = \frac{1}{v\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}} \approx \frac{1}{v\gamma} = \frac{\mu^0 c_S^0}{\mu^1 c_S^1} \tag{1.54}$$

qui vaut, pour notre présent exemple 15. La plus petite valeur de la fréquence ($\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$) pour laquelle cette valeur est atteinte, obtenue à l'aide de $\nu = \dfrac{\pi}{2\phi(\zeta)} \approx \dfrac{\pi}{2\gamma}$ est :

$$\nu = \frac{c_S^1}{4h} \tag{1.55}$$

valeur qui est souvent appelée **fréquence fondamentale de résonance de Haskell**, [18], ou **fréquence de résonance 1D** de la configuration couche sur substratum plus rigide, [19, 154]. Cependant, une réponse sinusoïdale du type de E_1^1 **n'est pas consistante avec une réponse résonante** (qui est infinie aux fréquences de résonance en absence de dissipation). Ce type de réponse résulte en fait d'interférences d'ondes propagatives qui est la raison pour laquelle nous avons nommé E_1^1, terme d'interférence.

Pour conclure cette discussion, considérons le facteur spectral $A^i(\omega)$. Il va de soi que si $A^i(\omega) = A^i(\dfrac{\nu c_S^0}{h})$ est important aux alentours des fréquences $\nu = \dfrac{(2m+1)\pi}{2\phi(\zeta)}$, $m = 0, 1, 2, ...$ pour lesquels E_1^1 est grand, alors le produit de ces deux fonctions sera grand. En particulier, si le spectre $A^i(\omega)$ est maximum près de la fréquence correspondant à $\nu = \dfrac{\pi}{2\phi(\zeta)}$, alors la réponse sera grande pour un grand nombre de nombres d'onde horizontaux k_1. Cela a été noté de façon répétée dans le passé, [18, 19, 17], mais mal nommé 'réponse résonante'.

1.1.5.2 Amplitude des ondes SOP2, liées à l'excitation des modes de Love

Intéressons nous maintenant aux ondes SOP2. L'amplitude de ces ondes est à nouveau constituée du produit de trois facteurs : le facteur associé au spectre, le facteur géométrique et le facteur "d'interférence" $F_2^1(k_1,\omega)$. Commençons par étudier ce dernier facteur.

Le champ $\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x},\omega)$ s'écrit :

$$I_2^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{-A^i(\omega)}{\pi}\int_{k^0}^{k^1} F_2^1(k_1,\omega)\cos\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)\right)\cos\left(K_2^1(x_2)\right)\exp\left(\kappa_2^0(h-x_2^s)\right)dk_1 \tag{1.56}$$

Réalisons le même changement de variables que dans la section précédente et introduisons $\theta(\zeta)$ tel que :

$$\theta(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-1} \tag{1.57}$$

L'équation (II.1.56) s'écrit alors :

$$I_2^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{-A^i(\omega)}{\pi}\int_1^\gamma E_2^1(\zeta,\eta)\cos\left(\zeta\eta\frac{x_1-x_1^s}{h}\right)\cos\left(\phi(\zeta)\frac{x_2}{h}\right)\exp\left(\theta\eta\frac{h-x_2^s}{h}\right)d\zeta \tag{1.58}$$

avec

$$E_2^1(\zeta,\eta) = \frac{1}{-\theta(\zeta)\cos\left(\phi(\zeta)\eta\right)+v\phi(\zeta)\sin(\phi(\zeta)\eta)} \tag{1.59}$$

Examinons le terme $E_2^1(\zeta,\eta)$ pour $\zeta\in[1,\gamma]$. Contrairement au cas précédent **le dénominateur s'annule** pour $\eta\in\mathbb{R}$:

$$-\theta(\zeta)\cos\left(\phi(\zeta)\eta\right)+v\phi(\zeta)\sin(\phi(\zeta)\eta) = 0 \tag{1.60}$$

équation, qui n'est autre que la relation de dispersion des modes de Love. Les racines de cette équation sont :

$$\eta_m = \frac{1}{\phi(\zeta)}\left[\arctan\left(\frac{\theta(\zeta)}{v\phi(\zeta)}\right)+m\pi\right],\ m=0,1,2,... \tag{1.61}$$

où la fonction arctan est définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et peut être exprimée, soit par la série :

$$\arctan(y) = y+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{y^{2l+1}}{2l+1};\ y^2<1, \tag{1.62}$$

soit par la série :

$$\arctan(y) = \frac{\pi}{2}-\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{y^{-(2l+1)}}{2l+1};\ y^2>1 \tag{1.63}$$

en fonction du signe de y^2-1. L'argument de la fonction arctan dans l'équation (II.1.60) est égal à 1 lorsque $\theta(\zeta)=v\phi(\zeta)$, expression qui est équivalente à :

$$\zeta=\zeta^{\mathrm{L}}=\sqrt{1+\frac{(\gamma^2-1)\,v^2}{1+v^2}} \tag{1.64}$$

Cette valeur est supérieure à 1 et par conséquent est en accord avec le fait que $\zeta\in[1,\gamma]$. Alors les trois types de solutions conduisant à l'annulation de la relation (II.1.60) sont :

- pour $\zeta<\zeta^{\mathrm{L}}$, $\eta=\eta_m^{\mathrm{Le}}=\dfrac{m\pi}{\phi(\zeta)}+\dfrac{1}{\phi(\zeta)}\left[\dfrac{\theta(\zeta)}{v\phi(\zeta)}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\theta}{v\phi(\zeta)}\right)^3+...\right]$
- pour $\zeta=\zeta^{\mathrm{L}}$, $\eta=\eta_m^{\mathrm{L}}=\dfrac{(4m+1)\,\pi}{4\phi(\zeta)}$
- pour $\zeta>\zeta^{\mathrm{L}}$, $\eta=\eta_m^{\mathrm{Lo}}=\dfrac{(2m+1)\,\pi}{2\phi(\zeta)}+\dfrac{1}{\phi(\zeta)}\left[-\dfrac{v\phi(\zeta)}{\theta(\zeta)}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{v\phi(\zeta)}{\theta(\zeta)}\right)^3+...\right]$

qui correspondent à trois types de modes de Love, les modes neutres η^{L}, les modes pairs η^{Le} et les modes impairs η^{Lo}.

Ainsi, $|E_2^1(\zeta,\eta)|$, fonction de η à ζ constant, présente des maxima (en fait des Diracs dans le cas non-dissipatif) à une périodicité constante, égale à $\frac{\pi}{\phi(\zeta)}$. Pour autant, cette fonction prend différentes valeurs en fonction des trois précédents cas :

- (i) pour $\zeta<\zeta^{\mathrm{L}}$ la fonction $\left|E_2^1(\zeta,\eta)\right|$ présente des maxima égaux à ∞, pour $\eta=\eta_m^{\mathrm{Le}}$

- (ii) pour $\zeta = \zeta^{\mathrm{L}}$ la fonction $\left|E_2^1(\zeta,\eta)\right|$ présente des maxima égaux à ∞, pour $\eta = \eta_m^{\mathrm{L}}$
- (iii) pour $\zeta > \zeta^{\mathrm{L}}$ la fonction $\left|E_2^1(\zeta,\eta)\right|$ présente des maxima égaux à ∞ pour $\eta = \eta^{\mathrm{Lo}}$.

Pour donner une mesure de l'importance relative de ces trois types de solutions, considérons l'exemple numérique de la section précédente, avec $c_S^0 = 1000m.s^{-1}$, $\rho^0 = 1500kg.m^{-3}$, $c_S^1 = 100m.s^{-1}$, $\rho^1 = 1000kg.m^{-3}$, valeurs qui correspondent à $\gamma = 10$ $v = 0.67\times10^{-2}$ et $v\gamma = 0.67\times10^{-1}$, et par conséquent $\zeta^{\mathrm{L}} = 1.0044$. Ainsi, la fonction $\left|E_2^1(\zeta,\eta)\right|$ prend la forme de (iii) sur quasiment la totalité de l'intervalle $[1,\gamma]$, c'est-à-dire sur $[1.0044, 10]$.

Remarque : L'intégrale (II.1.56) est, dans le cas non-dissipatif, une intégrale divergente qu'il faut considérer au sens des valeurs principales. Pour autant, dans nos calculs le matériau M^1 sera systématiquement considéré comme dissipatif, ce qui a pour effet un léger décalage des pôles de la relation de dispersion de l'axe des réels dans le plan complexe. L'intégrale (II.1.56) n'est donc plus divergente.

Ce résultat amène quelques remarques :

- contrairement à ce qui a pu être affirmé dans les travaux [18, 19, 17, 49], **les modes de Love n'ont pas la structure d'une onde de surface dans la couche** puisqu'ils sont composés d'ondes SOP2. Par contre, **ils sont associés à des ondes de surface dans le substratum OS2** dont la vitesse de phase est :
$$c_S^{\mathrm{L}} = \frac{c_S^0}{\zeta} \tag{1.65}$$
Or, dans ce cas, $\zeta \in [1,\gamma]$, si bien que nous pouvons conclure que :
$$c_S^1 < c_S^{\mathrm{L}} < c_S^0 \tag{1.66}$$
c'est-à-dire que la vitesse de phase des ondes de Love est plus petite que la vitesse de phase des ondes propagatives dans le substratum, mais plus grande que la vitesse de phase des ondes propagatives dans la couche.

- contrairement aux phénomènes associés aux ondes SOP1, **l'excitation des ondes de Love est effectivement un processus résonnant**, puisque ces ondes sont effectivement associées à des modes de la structure couche sur substratum plus rigide et parce que le déplacement, dans le domaine fréquentiel associé à chacun de ces modes est infini en absence de dissipation, dans les deux domaines de la configuration.

- **les fréquences de résonance des modes de Love ne sont pas identiques à celles où la fonction $\left\|E_1^1\right\|$ atteint ses maxima**. La différence entre les fréquences pour la $m^{\text{ème}}$ fréquence impaire η_m^{Bo} et η_m^{Lo} est :
$$\eta_m^{\mathrm{Bo}} - \eta_m^{\mathrm{Lo}} = \frac{1}{\phi(\zeta)}\left[\frac{v\phi(\zeta)}{\theta(\zeta)} - \frac{1}{3}\left(\frac{v\phi(\zeta)}{\theta(\zeta)}\right)^3 + ...\right] \tag{1.67}$$
ce qui veut dire que la $m^{\text{ème}}$ fréquence donnant naissance à des maxima de $\|E_1^1(\zeta,\eta)\|$ est plus élevée que la $m^{\text{ème}}$ fréquence de résonance des modes de Love.

Pour conclure cette discussion, des remarques identiques à celles formulées dans la section précédente peuvent être faites en ce qui concerne le facteur $A^i(\omega)$, à la différence près que dans le cas non dissipatif, le facteur "d'interférence" $\left|E_2^1(\zeta,\eta)\right|$, qui devrait être qualifié plus proprement de facteur de résonance, est infini aux fréquences η_m^{Le}, η_m^{Lo}, et η_m^{L}.

1.1.5.3 Amplitude des ondes SOS3

Intéressons nous maintenant aux ondes SOS3. L'amplitude de ces ondes est à nouveau constituée du produit de trois facteurs: le facteur associé au spectre, le facteur géométrique et le facteur "d'interférence" $F_3^1(k_1,\omega)$. Commençons par étudier ce dernier facteur.

Le champ $\mathrm{I}_3^1(\mathbf{x},\omega)$ s'écrit:

$$I_3^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{-A^i(\omega)}{\pi}\int_{k^0}^{k^1} F_3^1(k_1,\omega)\cos\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)\right)\cosh\left(\kappa_2^1(x_2)\right)\exp\left(\kappa_2^0(h-x_2^s)\right)dk_1 \tag{1.68}$$

Réalisons le même changement de variables que dans la section précédente et introduisons $\chi(\zeta)$ tel que:

$$\chi(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-\gamma^2} \tag{1.69}$$

si bien que l'équation (II.1.68) peut-être réécrite:

$$I_3^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{-A^i(\omega)}{\pi}\int_1^{\gamma} E_3^1(\zeta,\eta)\cos\left(\zeta\eta\frac{x_1-x_1^s}{h}\right)\cosh\left(\chi(\zeta)\frac{x_2}{h}\right)\exp\left(\theta\eta\frac{h-x_2^s}{h}\right)dk_1 \tag{1.70}$$

avec

$$E_3^1(\zeta,\eta) = \frac{-1}{\theta(\zeta)\cosh\left(\phi(\zeta)\eta\right)+v\phi(\zeta)\sinh(\phi(\zeta)\eta)} \tag{1.71}$$

Puisque $\chi(\zeta) > 0$ pour $\zeta \in [\gamma,\infty]$, $\cosh\left(\chi(\zeta)\eta\right) > 0$, et $\eta > 0$, si bien que $\sinh\left(\chi(\zeta)\eta\right) > 0$, le dénominateur de l'équation (II.1.71) ne peut s'annuler pour des valeurs réelles de η et ζ. Considérons ζ constant dans l'intervalle $[\gamma,\infty[$. Une condition pour que le dénominateur de $|E_3^1(\zeta,\eta)|$ présente des minima, est:

$$\frac{\partial\left|E_3^1(\zeta,\eta)\right|^{-1}}{\partial\eta} = \chi(\zeta)\left[\theta(\zeta)\cosh\left(\chi(\zeta)\eta\right)+v\chi(\zeta)\sinh\left(\chi(\zeta)\eta\right)\right] = 0 \tag{1.72}$$

La quantité $\left[\theta(\zeta)\cosh\left(\chi(\zeta)\eta\right)+v\chi(\zeta)\sinh\left(\chi(\zeta)\eta\right)\right] \neq 0$, excepté pour $\chi(\zeta)=0$, c'est-à-dire $\zeta=\gamma$. Pour cette valeur de ζ, $\left|E_3^1\right|^{-1} = \theta(\zeta)$. Puisque $\sinh\left(\chi(\zeta)\eta\right) > 0$ et $\cosh\left(\chi(\zeta)\eta\right) > 0$ pour $\zeta \in [\gamma,\infty[$, nous pouvons en conclure que $\left(\left|E_3^1\right|\right)^{-1} \geqq \theta(\zeta)$. Cela veut dire que $\zeta=\gamma$ correspond à la localisation d'un minimum de la fonction $\left(\left|E_3^1\right|\right)^{-1} \geqq \theta(\zeta)$, $\forall\eta$.

Ainsi la fonction $\left(\left|E_3^1\right|\right) \geqq \theta(\zeta)$ est une **fonction continûment décroissante** de ζ, pour $\zeta \in [\gamma,\infty[$ et atteint sa valeur maximale $\theta(\zeta)^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}}$ pour $\zeta=\gamma$. Pour avoir une idée de l'amplitude de cette fonction, en particulier par rapport à celle de $\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\|$, considérons le même exemple numérique que dans les deux précédentes sections. Il vient $\left|E_3^1\right| \leqq 0.1005$, $\forall(\zeta,\eta) \in \mathbb{R}^+$ qui est à mettre en rapport avec $\max\left\|E_1^1(\zeta,\eta)\right\| = 15$. Notons de plus que puisque les maxima sont atteints pour n'importe quelle valeur de η, le facteur associé au spectre $A^i(\omega)$, n'a que peu d'incidence sur $\mathrm{I}_3^1(\mathbf{x},\omega)$.

Pour conclure cette discussion, nous pouvons dire que les ondes SOS3 ne contribuent que très peu au champ total par rapport aux ondes SOP1 et SOP2.

1.1.6 Résultats semi-analytiques par intégration "directe"

Dans le but de valider certains aspects controversés, contenus dans les discussions précédentes, nous réalisons une étude numérique pour différentes valeurs des paramètres h, $\mathbf{x^s}$, $\mathbf{x}$, et des paramètres des matériaux M^0, et M^1, mais aussi, nous adressons plusieurs questions qui trouvent leur réponse ici:

- est-il possible d'obtenir, au sens des caractéristiques des réponses sismiques rencontrées dans la ville de Mexico, des champs de déplacement anormaux, sans aucune hétérogénéité latérale?
- quelle est la relation entre les réponses 1D et 2D du système et dans quelle mesure la réponse 1D fournit-elle une bonne représentation des phénomènes?
- quelle est l'influence de la profondeur focale?
- quelle est l'influence de la distance épicentrale?
- quelle est l'influence du contraste entre les propriétés mécaniques de la couche et celles du substratum?
- quelle est l'influence de l'épaisseur de la couche?
- quelle est l'influence des caractéristiques du champ incident?

Les calculs sont réalisés, à l'aide de l'algorithme présenté en annexe B. **Pour les besoins de l'évaluation numérique des intégrales I_1^1, I_2^1 et I_3^1, et pour rendre ces calculs plus réalistes, nous considérons que le matériau M^1 emplissant le domaine Ω_1, est un matériau dissipatif. En considérant que cette approche est une perturbation du cas non-dissipatif, les bornes d'intégration des quantités I_2^1 et I_3^1 deviennent $[k^0, \Re\left(k^1\right)]$, et $[\Re\left(k^1\right), \infty[$.**

Paramètre/Site	Nice (N)	Mexico (MC)	Mexico modifié (MMC)	Mexico modifié (MMC2)
$\rho^0\ (kg.m^{-3})$	2000	2000	2000	2000
$c_S^0\ (m.s^{-1})$	1000	600	1500	600
Q^0	∞	∞	∞	∞
$\rho^1\ (kg.m^{-3})$	1800	1300	1300	1300
$\left(c_S^1\right)_R\ (m.s^{-1})$	200	60	60	200
Q_S^1	30	30	30	30
h (m)	50	20, 40, 50, 60, 90	50	50
Profondeur focale (m)	100, 3000	100, 3000	100, 3000	100, 3000
Distance épicentrale (m)	100, 3000	100-7000	100, 3000	100, 3000
ν_0 (Hz)	0.5, 0.9, 1	0.1, 0.25, 0.3, 0.5	0.5	0.5

Dans chaque cas, nous allons successivement comparer, la **fonction de transfert, définie comme** $TF^1(\mathbf{x_g}, \omega) = \dfrac{u^1(\mathbf{x_g}, \omega)}{A^i(\omega)}$, le spectre du déplacement $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ et le déplacement $u^1(\mathbf{x_g}, t)$.

Notons que nous avons adopté la définition de la fonction de transfert par extrapolation du cas

où l'excitation est une onde plane. Il est possible de définir également cette quantité comme $TF^1(\mathbf{x_g},\omega) = \dfrac{u^1(\mathbf{x_g},\omega)}{u^i(\mathbf{x_g},\omega)}$ (où $u^i(\mathbf{x},\omega)$ est le champ incident (II.1.5) au point $\mathbf{x_g}$) de façon à nous ramener à ce qui est communément appelé le déplacement en champ libre en géophysique. Pour autant, cela correspond à

$$TF^1(\mathbf{x_g},\omega) = \frac{u^1(\mathbf{x_g},\omega)}{u^i(\mathbf{x_g},\omega)} = \frac{4u^1(\mathbf{x_g},\omega)}{\mathrm{i}A^i(\omega)H_0^{(1)}(k^0R)}$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de premier espèce d'ordre zéro, et R est la distance séparant le point où est localisée la source, du point où l'enregistrement est réalisé, c'est-à-dire $R = \|\mathbf{x}-\mathbf{x^s}\|$. Autrement dit, la comparaison de fonctions de transfert pour des distances focales identiques, avec cette définition, est similaire à la comparaison que nous ferons à l'aide de notre définition (puisque les $H_0^{(1)}(k^0R)$ sont identiques).

Pour la totalité des courbes relatives aux fonctions de transfert, les courbes en trait continu représentent la quantité $2\pi\|TF(\mathbf{x_g},\omega)\| = 2\pi\left\|\dfrac{u^1(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)}\right\|$, les courbes en pointillés représentent la quantité $2\pi\left\|\frac{\mathrm{I}_1^1(\mathbf{x_g},\omega)}{u^i(\mathbf{x_g},\omega)}\right\|$, les courbes en tirets représentent la quantité $2\pi\left\|\frac{\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)}\right\|$, et les courbes en tirets et pointillés représentent la quantité $2\pi\left\|\frac{\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x_g},\omega)+\mathrm{I}_3^1(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)}\right\|$.

1.1.6.1 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g},\omega)$ dans le cas de la ville de Nice

Les résultats présentés ici sont relatifs à une configuration supposée représentative du sous-sol de la partie centrale de la ville de Nice (N).

Intéressons nous tout d'abord aux fonctions de transfert, figure II.1.2.

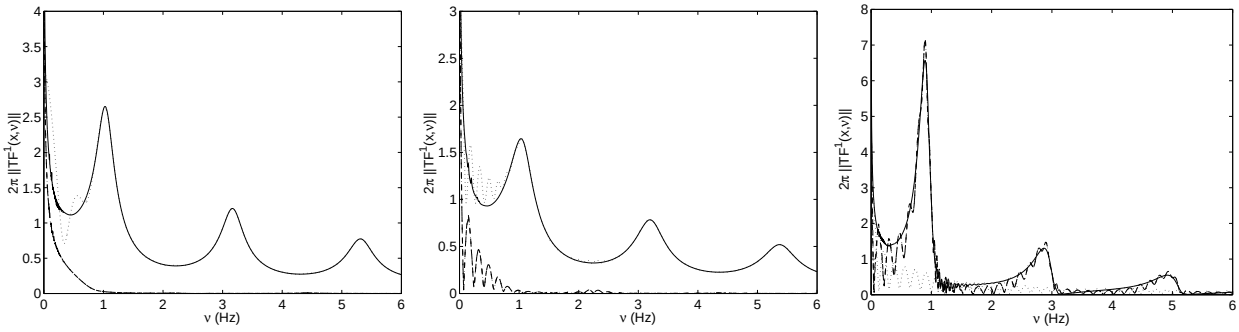


FIG. 1.2 – *Nice (N) - 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour différentes positions de la source $\mathbf{x^s}$ et du point d'observation $\mathbf{x_g}$. Sur la gauche, profondeur focale importante et petite distance épicentrale $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et $\mathbf{x_g} = (100, 0)$. Au milieu profondeur focale importante et distance épicentrale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$. Sur la droite, profondeur focale faible et distance épicentrale importante $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$*

Une première remarque concerne les courbes relatives aux quantités $\left\|\dfrac{\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x_g},\omega)+\mathrm{I}_3^1(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)}\right\|$ et

$\left\| \frac{\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)} \right\|$. Quel que soit le jeu de paramètres $\mathbf{x^s}$ et $\mathbf{x_g}$ considéré ici, ces courbes sont confondues. La partie de l'intégrale $\mathrm{I}_3^1(\mathbf{x_g},\omega)$ **n'intervient donc quasiment pas dans le calcul total du champ de déplacement sur** Γ_g, ce qui est une autre façon de dire que **les ondes de surface SOS3 dans la couche sont quasiment inexistantes**, confirmant par là-même l'analyse théorique de la section 1.1.5.3. Ainsi, notre discussion portera essentiellement sur les ondes SOP1 et SOP2.

Les figures à gauche et au centre (figure II.1.2) représentent la fonction de transfert lorsque la **profondeur focale est grande** pour une distance épicentrale respectivement faible et importante. $\mathrm{I}^1(\mathbf{x_g},\omega)$ est **dominée par les ondes SOP1** (c.à.d. par $\mathrm{I}_1^1(\mathbf{x_g},\omega)$), les ondes SOP2 ayant une très faible contribution en dessous de $\nu \approx 1Hz$ et étant négligeables au-dessus de cette fréquence. Pour une **profondeur focale faible** et un point d'observation à $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$, figure à droite, le résultat est totalement opposé. $\mathrm{I}^1(\mathbf{x_g},\omega)$ est **dominée par les ondes SOP2** (c.à.d. par $\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x_g},\omega)$), les ondes SOP1 ayant une très faible contribution en dessous de $\nu \approx 1Hz$ et étant négligeables au-dessus de cette fréquence. Les fonctions $\mathrm{I}^1(\mathbf{x_g},\omega)$, et $\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x_g},\omega)$ présentent des oscillations importantes lorsque la distance épicentrale est importante et peu d'oscillations lorsque cette même distance est faible, et ceci quelle que soit la position de la source. Ces oscillations peuvent être expliquées par le terme $\cos\left(k_1\left(x_1 - x_1^s\right)\right)$ qui intervient dans la totalité des intégrales $\mathrm{I}_j^1(\mathbf{x_g},\omega)$, $j = 1, 2, 3$.

Les réponses totales présentent des différences notables selon la position de la source comme l'indique la figure II.1.3.

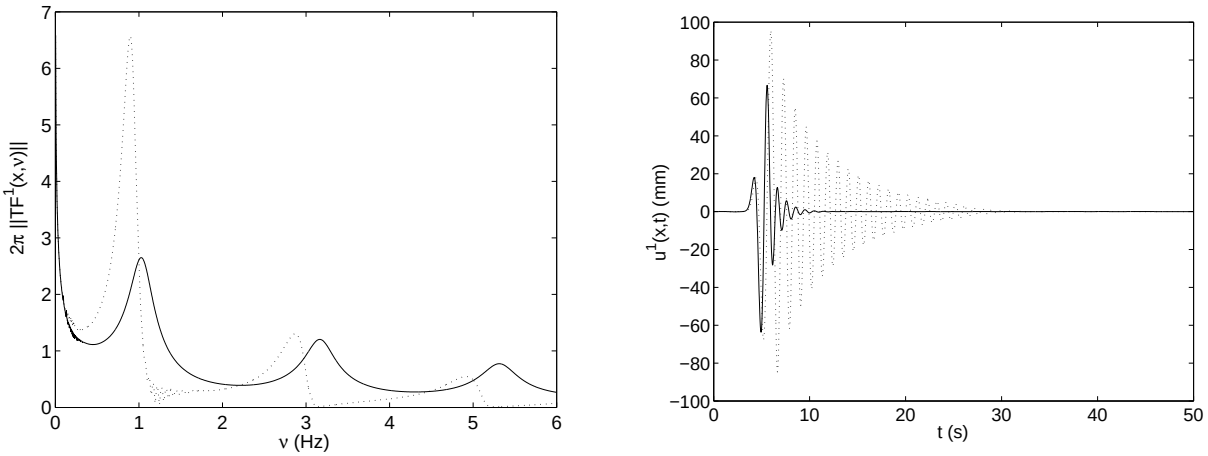


FIG. 1.3 – *Nice (N) - Sur la gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour une distance focale identique, mais pour des jeux de paramètres $\mathbf{x_g}$ et $\mathbf{x^s}$ différents. Courbes en trait continu, profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et distance épicentrale faible $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$. Courbes en pointillés, profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$. À droite, les sismogrammes (déplacements) correspondants ($\nu_0 = 0.5Hz$).*

Sur la figure de gauche, **le premier pic intervient pour une fréquence plus faible lorsque la source est proche de l'interface Γ_h que lorsque la source est plus éloignée de cette interface**. Cela suggère, que **le premier pic** rencontré lorsque **la source est proche de** Γ_h est dû à l'**excitation (résonnante) du premier mode de Love** (SOP2), alors que **le premier pic**

rencontré lorsque la **source est éloignée de Γ_h** est un **pic d'interférence (non-résonnant)**, section II.1.1.5. Lorsque **la source est proche de Γ_h**, le **premier pic n'est pas symétrique** (croissance "douce" et décroissance rapide), et **relativement abrupt** (caractéristique d'excitation de mode), alors que lorsque la **source est éloignée de Γ_h**, le **pic est relativement symétrique et doux** (caractéristique de phénomènes d'interférence). Le qualificatif abrupt vient du fait que l'amplitude du premier pic de la fonction de transfert pour une faible profondeur focale est plus du double de celle relevée pour une profondeur focale importante, alors que sa largeur est plus faible. Cela signifie que le rapport hauteur sur largeur du premier pic (finesse) est plus important lorsque la source est proche de Γ_h. Nous pouvons observer également des oscillations rapides après chaque pic de résonance lorsque la profondeur focale est faible. Des remarques identiques peuvent être formulées en ce qui concerne les pics d'ordre supérieur.

Cette caractéristique se traduit dans le **domaine temporel**, figure de droite, par **une amplitude et une durée plus importantes**, ces tracés temporels étant associés au mode fondamental de Love et au pic fondamental d'interférence. Cette remarque peut être tempérée puisque le maximum d'amplitude du spectre considéré ici, n'est pas proche des fréquences où ces pics sont rencontrés, mais les englobe. Lorsque ce maximum intervient pour une fréquence proche des premiers pics de résonance et d'interférence, figure II.1.4, les sismogrammes sont de durée plus importante et d'amplitude plus grande (mais également due à l'amplitude plus importante du spectre), et peuvent être imputés aux deux premiers pics. Néanmoins, cette figure montre la **génération possible de phénomènes de battements**.

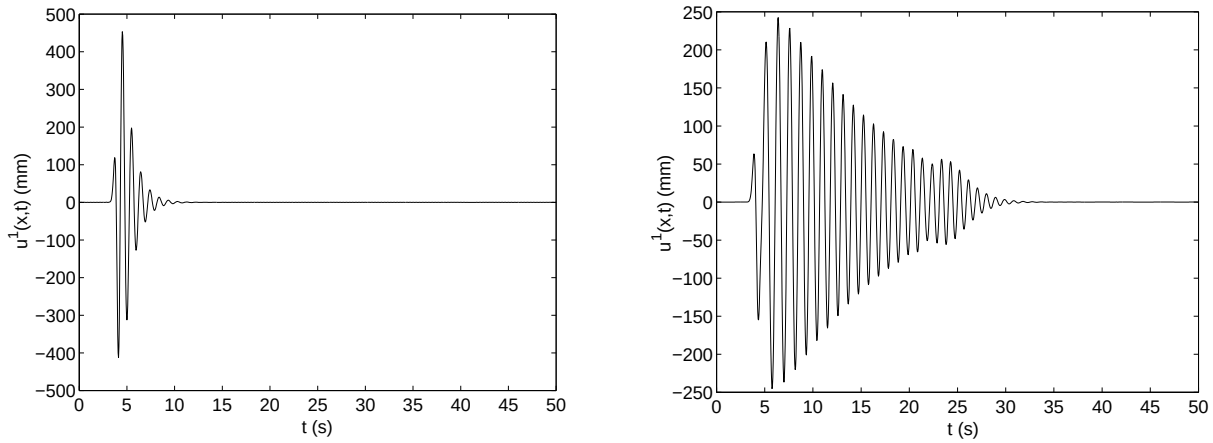


FIG. 1.4 – *Nice (N) - $u^1(\mathbf{x_g}, t)$ pour une distance focale identique : sur la gauche, $\mathbf{x^s} = (3000m, 0)$, $\mathbf{x_g} = (0, 100m)$, et $\nu_0 = 1Hz$; sur la droite, $\mathbf{x^s} = (100m, 0)$, $\mathbf{x_g} = (0, 3000m)$, et $\nu_0 = 0.9Hz$*

1.1.6.2 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Mexico

Les valeurs des matériaux sont ici tirées de [180, 21], supposées représentatives du sous-sol de la ville de Mexico.

Intéressons nous tout d'abord aux fonctions de transfert, II.1.5. Une fois encore, pour une profondeur focale importante, les ondes SOP1 sont dominantes, et les pics rencontrés correspondent à des maxima d'interférence, alors que pour une profondeur focale faible, les ondes SOP2 sont dominantes et les pics rencontrés correspondent à l'excitation des modes de Love. Le fait important ici, est que **les deux types d'ondes peuvent coexister de façon importante**, pour une faible

profondeur focale et une faible distance épicentrale, donnant lieu à un seul pic si l'on considère la norme de la fonction de transfert, ce pic étant lui-même composé de deux pics, un d'interférence ("mode" fondamental d'Haskell), et l'autre résonnant (mode fondamental de Love). Ce phénomène laisse supposer qu'il est **possible d'obtenir un "scindage" du premier pic**, caractéristique des phénomènes anormaux rencontrés lors de certains séismes, et dans certaines conditions.

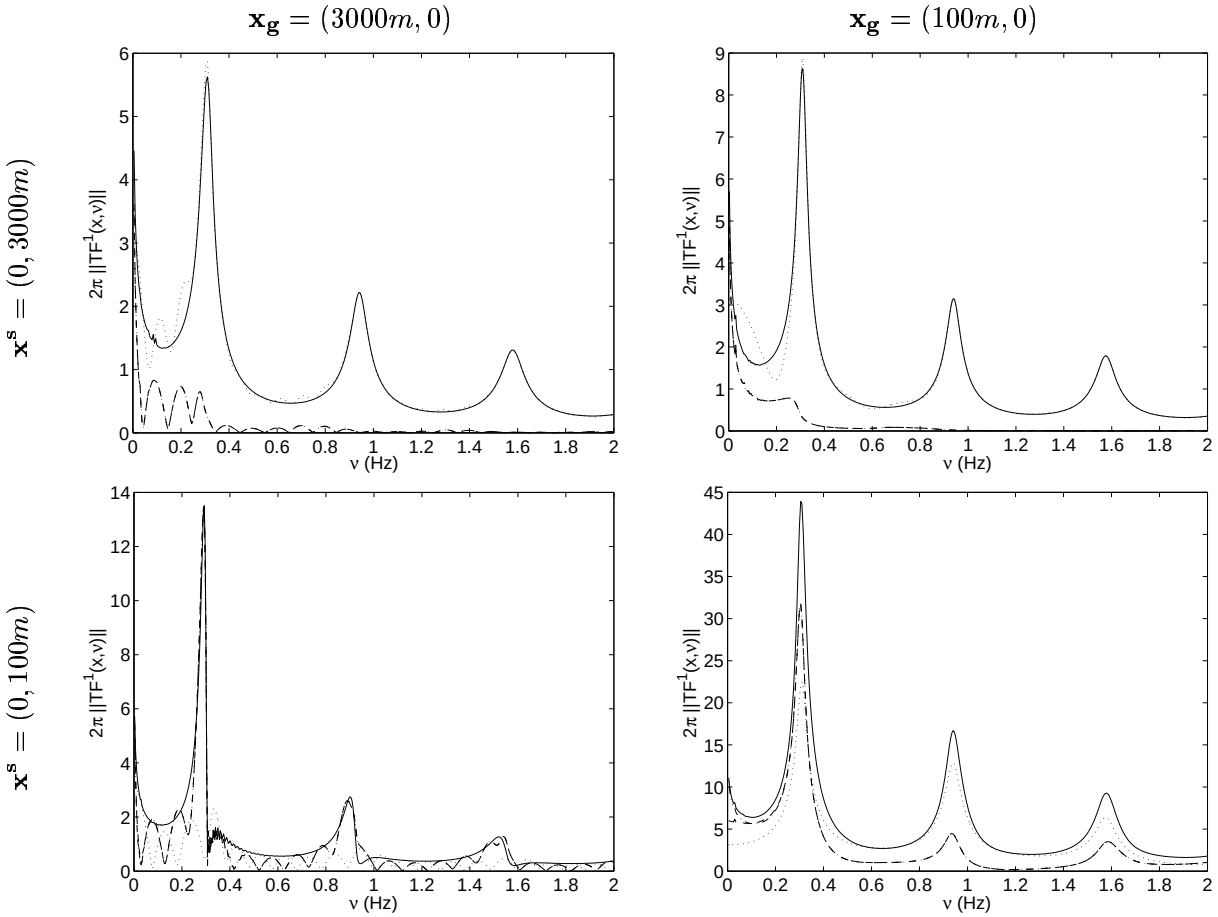


FIG. 1.5 – *Mexico (MC)- 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour différentes positions de la source $\mathbf{x^s}$ et du point d'observation $\mathbf{x_g}$. En haut, profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$, à gauche distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$ et à droite faible distance épicentrale $\mathbf{x_g} = (100, 0)$. En bas, faible profondeur focale $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$, à gauche distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$ et à droite faible distance épicentrale $\mathbf{x_g} = (100, 0)$*

Intéressons-nous à l'influence de l'épaisseur de la couche sur l'excitation des modes de Love. La figure II.1.6 représente la fonction de transfert, pour différentes épaisseurs de couche (rappelons que la ville de Mexico n'est pas construite sur une couche d'épaisseur constante, mais sur un bassin dont l'épaisseur varie). Dans tous les cas, c'est-à-dire pour $h = 20m$, $h = 40m$, $h = 60m$ et $h = 90m$ les réponses sont dominées par les ondes SOP2. La période, mais aussi la fréquence du premier mode diminuent lorsque l'épaisseur de la couche augmente, alors que la finesse (rapport de l'amplitude sur la largeur du pic) et l'amplitude des pics augmentent avec l'épaisseur de la couche. Il est alors facile de vérifier que $\nu_m^{\mathrm{Lo}} = \dfrac{\alpha}{h}$, et par conséquent que la périodicité est également proportionnelle à $\dfrac{1}{h}$, comme le prévoient les formules de la section II.1.1.5.2.

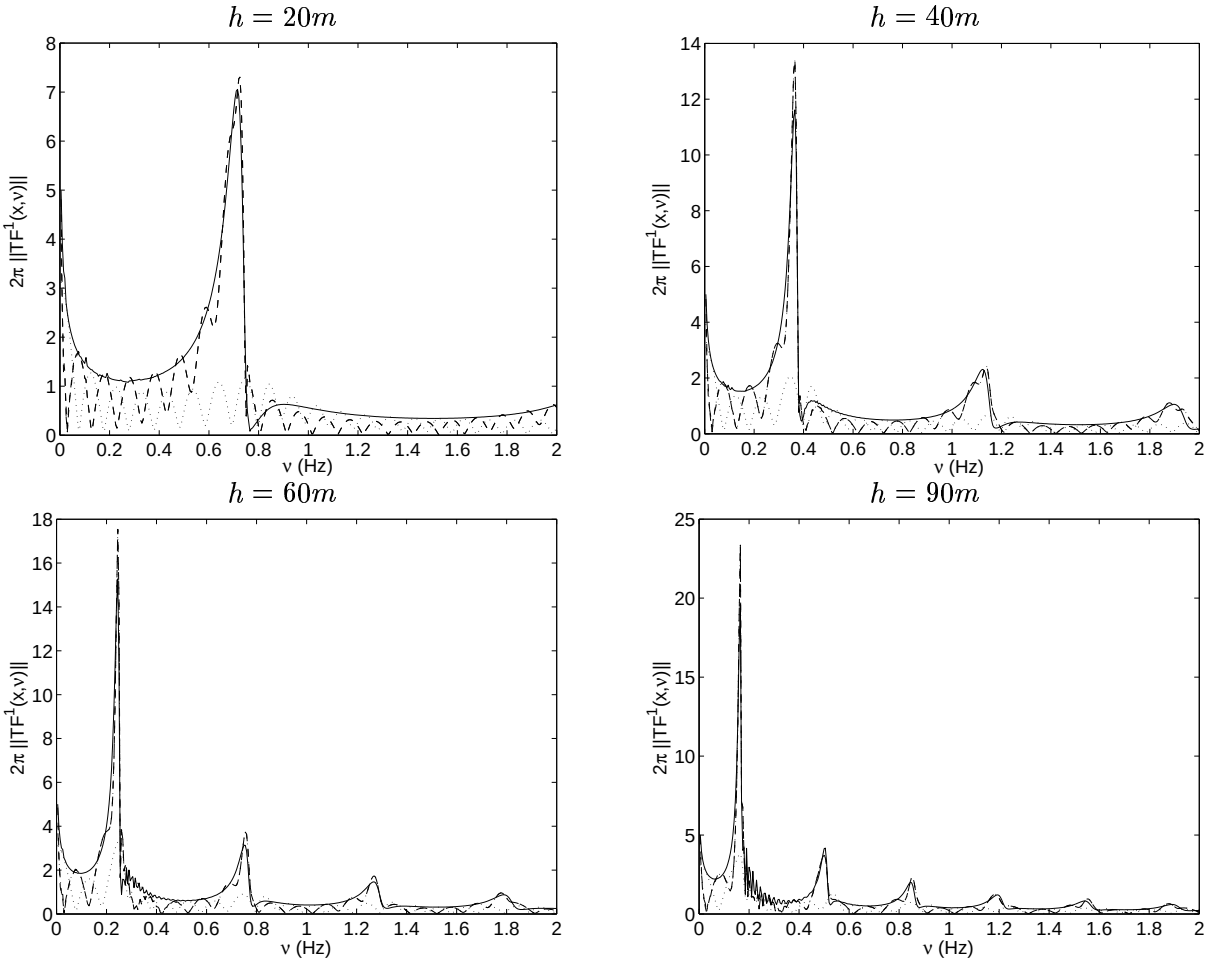


FIG. 1.6 – *Mexico (MC)- 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour une faible profondeur focale $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et une distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$. En haut à gauche, l'épaisseur de la couche est $h = 20$, en haut à droite $h = 40m$, en bas à gauche $h = 60$, et en bas à droite $h = 90m$.*

Une comparaison des tracés temporels et des fonctions de transfert pour une même distance focale, mais tels que $\mathbf{x^s} = (3000m, 0)$ et $\mathbf{x_g} = (100, 0m)$, et $\mathbf{x^s} = (100m, 0)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0m)$, donne lieu aux mêmes conclusions que dans les deux cas précédents. Ceci prouve le caractère systématique de la modification des sismogrammes (augmentation de la durée et possibles battements), et de la fonction de transfert (augmentation de la finesse et de l'amplitude et léger décalage vers les basses fréquences de la position des pics), lorsque les modes de Love sont excités par rapport au cas où les seuls phénomènes d'interférence le sont, figure II.1.7.

La figure II.1.8 montre des instantanés de ces deux configurations. En haut, nous représentons le champ de déplacement lorsque **la source est localisée en profondeur** à $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$. Nous voyons un **front d'onde se déplaçant de haut en bas dans la couche**. Cela est **caractéristique de phénomènes d'interférence**. En bas, nous représentons le champ de déplacement lorsque **la source est localisée proche de l'interface couche-substratum**, à $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$. Nous voyons des **"boules" se déplacer vers la droite**. Cela est **caractéristique d'excitation de mode**.

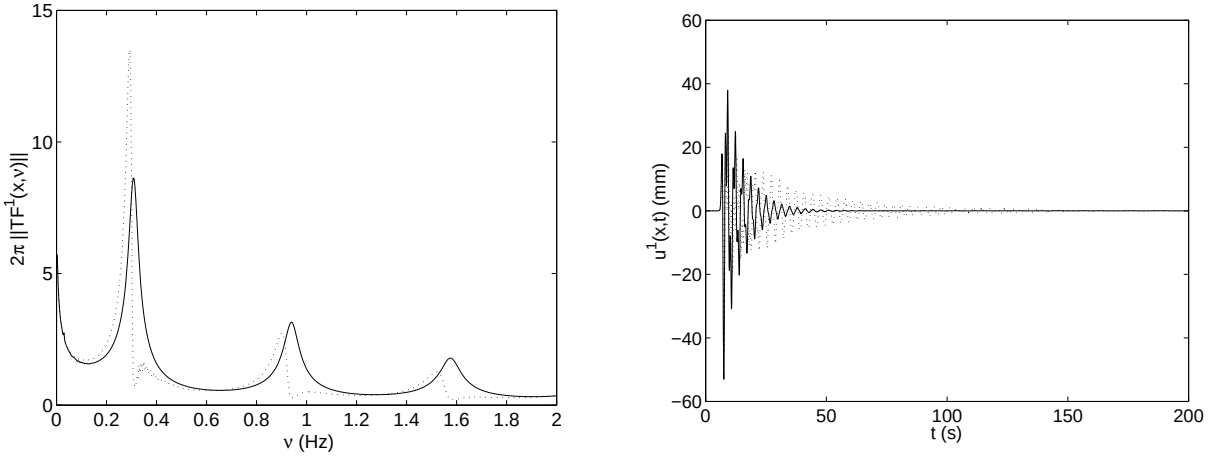


FIG. 1.7 – *Mexico (MC) - Sur la gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour une distance focale identique, mais pour des jeux de paramètres $\mathbf{x_g}$ et $\mathbf{x^s}$ différents. Courbes en trait continu, profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et distance épicentrale faible $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$. Courbes en pointillés, profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$. Sur la droite, les sismogrammes (déplacements) correspondants ($\nu_0 = 0.5Hz$).*

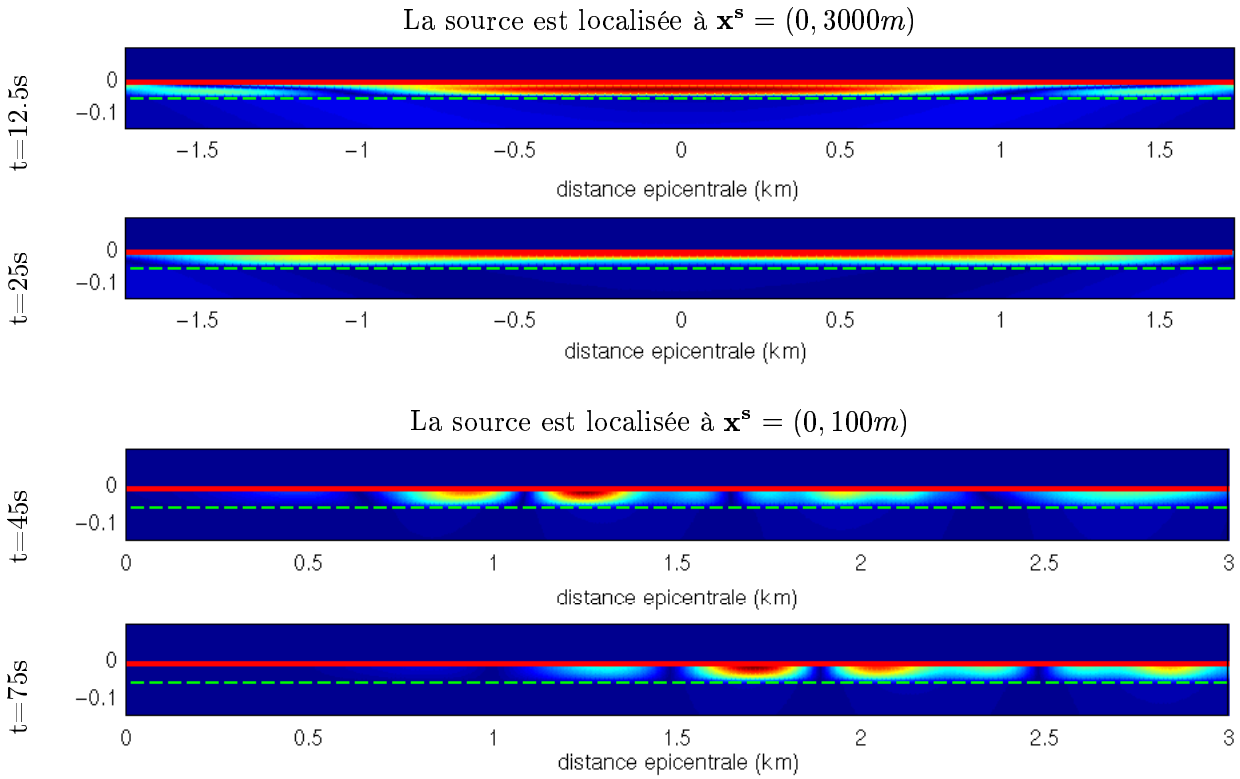


FIG. 1.8 – *Instantanés du champ de déplacement. Les deux premières figures correspondent à la configuration où la source est profonde $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ à $t = 12.5s$ et $t = 25s$, et les deux suivantes à la configuration où la source est peu profonde $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ à $t = 45s$ et $t = 75s$. L'échelle des couleurs varie d'une figure à l'autre.*

La comparaison des sismogrammes pour une faible distance épicentrale et une faible profondeur focale, avec les sismogrammes pour une importante profondeur focale, est plus troublante. Bien que les fonctions de transfert soient qualitativement similaires, figure II.1.5, les ondes impliquées dans cette réponse ne sont pas identiques : dans le cas où la profondeur focale est importante, il n'y a que des SOP1 et dans le cas où celle-ci est faible, il y a des SOP1 et SOP2. Les sismogrammes correspondants ont par ailleurs une forme assez similaire, figure II.1.9.

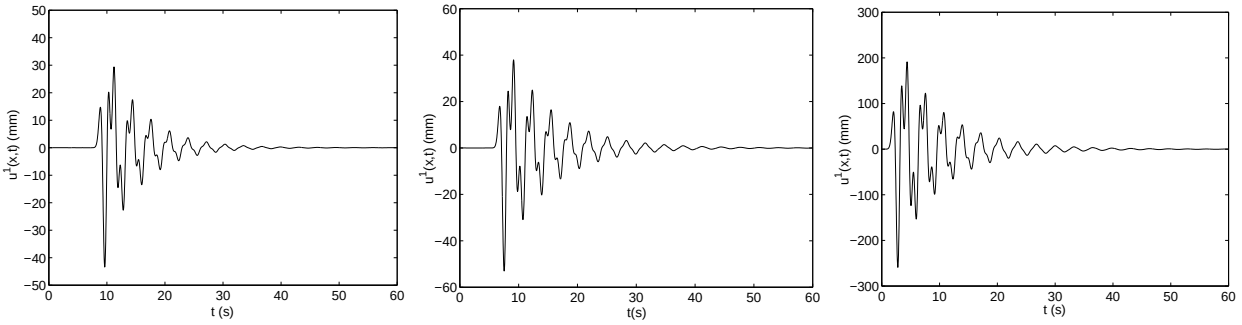


FIG. 1.9 – *Mexico (MC) - À gauche et au milieu,* $u^1(\mathbf{x_g}, t)$ *(*$\nu_0 = 0.5Hz$*), pour une grande profondeur focale* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$*, respectivement pour une grande distance épicentrale* $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$ *et pour une faible distance épicentrale* $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$*, et à droite pour une faible profondeur focale* $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ *et une faible distance épicentrale* $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$.

Varions maintenant la fréquence d'excitation pour différentes épaisseurs de couche, de façon à mieux percevoir l'influence du terme source $A^i(\omega)$.

Nous observons, figure II.1.10, des sismogrammes différents selon la fréquence d'excitation et l'épaisseur de la couche, variant d'une forme relativement similaire à l'onde incidente, à une forme de durée beaucoup plus longue (plus de $200s$, par rapport à une onde incidente portant sur environ $4s$) avec des battements. Ces résultats s'expliquent simplement ; pour les formes similaires à l'onde incidente le spectre atteint son maximum pour une fréquence bien inférieure au mode fondamental de Love, si bien que celui-ci n'est pas "perçu", alors que dans les cas où les déplacements sont de durée plus longue et comportent des battements, au moins un pic se trouve dans la bande "utile" du spectre. Cela signifie que pour une périodicité importante des modes de Love, c'est-à-dire pour une couche relativement épaisse, nous pouvons rencontrer des battements, soit dus à l'interférence entre les modes de Love adjacents soit dus à l'interférence entre le pic principal de Love et les pics satellites directement localisés en aval de celui-ci.

.

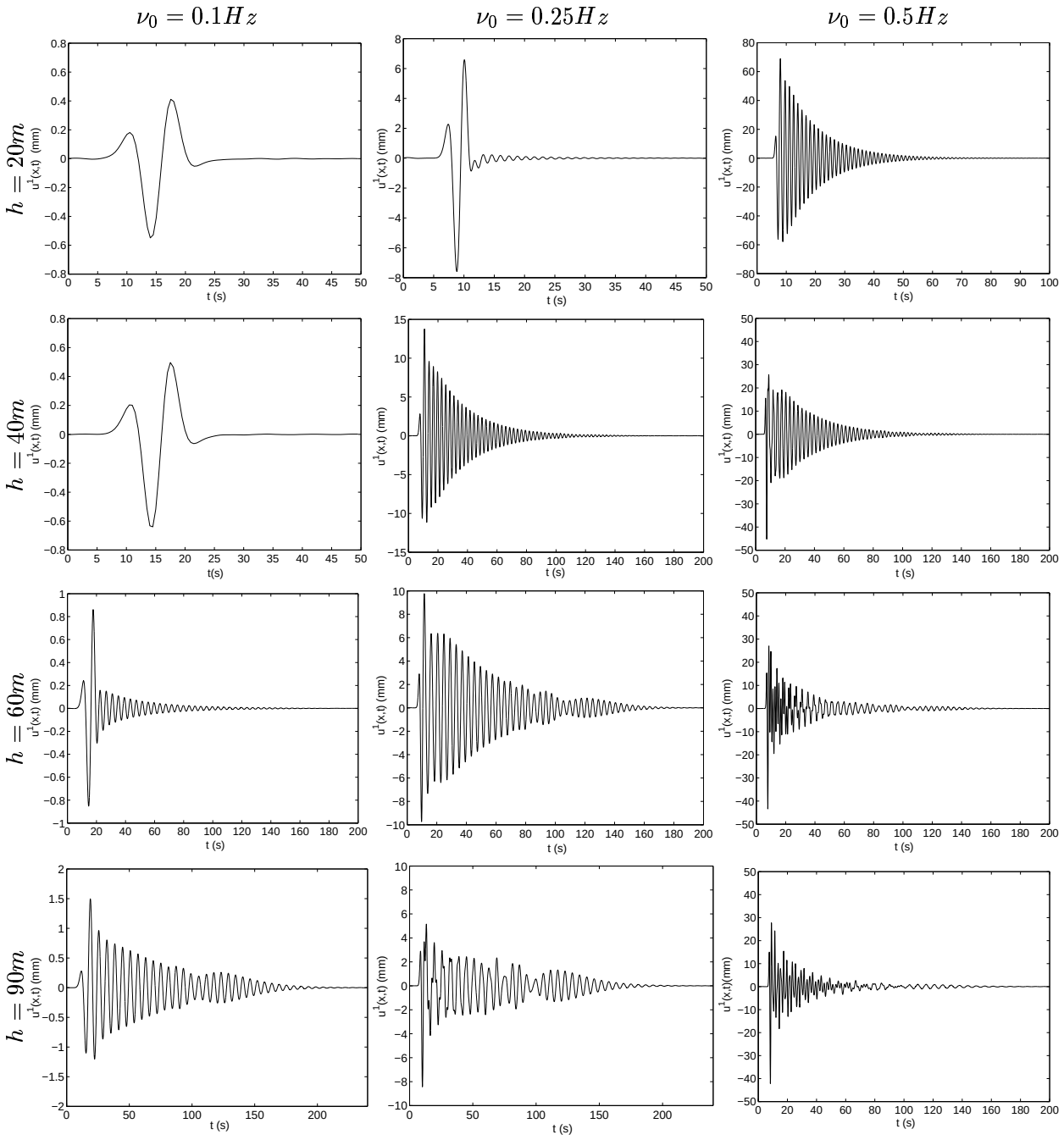


FIG. 1.10 – *Mexico (MC) - $u^1(\mathbf{x}, t)$, pour différentes épaisseurs de couche et pour différentes valeurs de ν_0. Première ligne pour une épaisseur de la couche $h = 20m$, seconde ligne pour une épaisseur de la couche $h = 40m$, troisième ligne pour une épaisseur de la couche $h = 60m$, quatrième ligne pour une épaisseur de la couche $h = 90m$. Première colonne $\nu_0 = 0.1Hz$, seconde colonne $\nu_0 = 0.25Hz$, et troisième colonne $\nu_0 = 0.5Hz$. La source et le point d'observation sont fixes, localisés à $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$, $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$*

Les **déplacements $u^1(\mathbf{x},t)$ sont donc, si au moins un mode de Love se trouve dans la bande "utile" du spectre de l'onde incidente, de durée importante et peuvent comporter des battements**. Suivons l'évolution de $u^1(\mathbf{x},t)$, la source étant localisée à $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$, pour différentes valeurs de $\mathbf{x_g} = (x_g, 0)$, $200m \leqq x_g \leqq 7000m$, l'épaisseur de la couche étant $h = 50m$, figures II.1.12 et II.1.13.

Pour des distances épicentrales très petites, les ondes SOP1 et SOP2 contribuent ensemble au pic principal. Plus la distance épicentrale augmente, plus l'importance relative du pic d'interférence dû aux ondes SOP1 par rapport au pic du mode fondamental de Love dû aux ondes SOP2, est faible. Ainsi, **pour de grandes distances épicentrales, le premier pic est quasiment un mode de Love pur**. Pour de faibles distances épicentrales, la finesse du pic est comparable à celle rencontrée dans le cas où la profondeur focale est importante et devient de plus en plus élevée au fur et à mesure que nous excitons un mode de Love pur. Des oscillations après la borne haute fréquence du premier pic apparaissent pour une distance épicentrale relativement faible $x_g < 400m$, et deviennent de plus en plus oscillantes au fur et à mesure que x_g augmente. L'explication de ces pics satellites réside donc, soit dans une interaction entre le pic d'interférence et le pic du mode fondamental de Love, soit dans le terme $\exp\left(ik_1\left(x_1 - x_1^s\right)\right)$ de l'intégrande de l'équation (II.1.14).

Ces **pics satellites donnent lieu à des battements** observés dans les sismogrammes. La finesse du premier pic augmentant, la **durée de $u^1(\mathbf{x},t)$ augmente linéairement**, ([126]), jusqu'à saturation, figure II.1.11. Effectivement, la finesse et l'amplitude du premier pic semblent rester quasi constantes pour des distances épicentrales supérieures à $x_g = 4300m$.

Contrairement à ce qui a été observé dans le cadre du séisme de Michoacan en 1985 -effet régional-, [70], **l'amplitude maximale de la vitesse, figure II.1.11 décroît** (en $\frac{1}{\sqrt{x_g}}$) **en fonction de la distance épicentrale**. Cela tend à prouver que **l'augmentation de l'amplitude maximale de la vitesse à environ 100km de la ville de Mexico est due à une hétérogénéité**, quelle soit **matérielle ou géométrique**. Cela sera développé dans la section II.1.3.

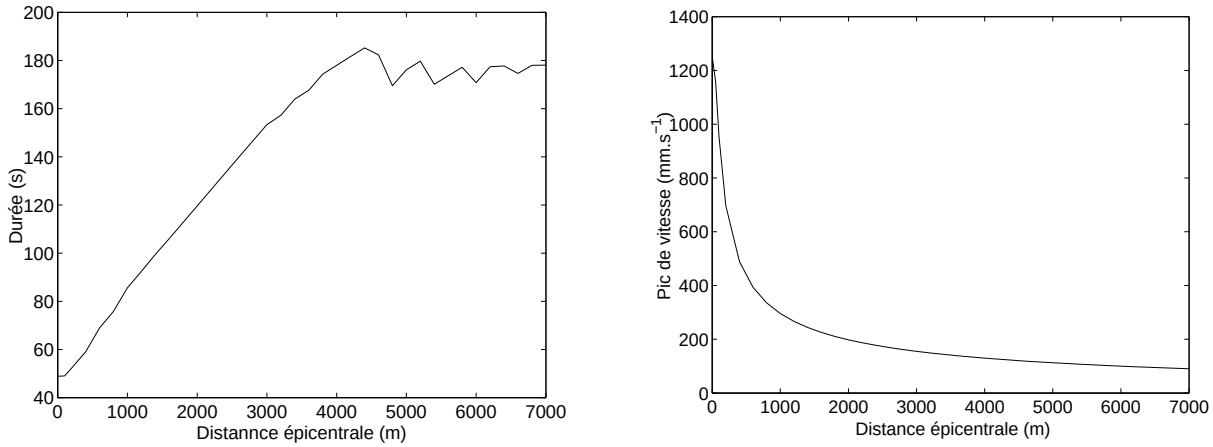


FIG. 1.11 – *Mexico (MC) - À gauche, évolution de la durée du sismogramme en fonction de la distance épicentrale, et à droite, évolution de la vitesse maximale en fonction de la distance épicentrale.*

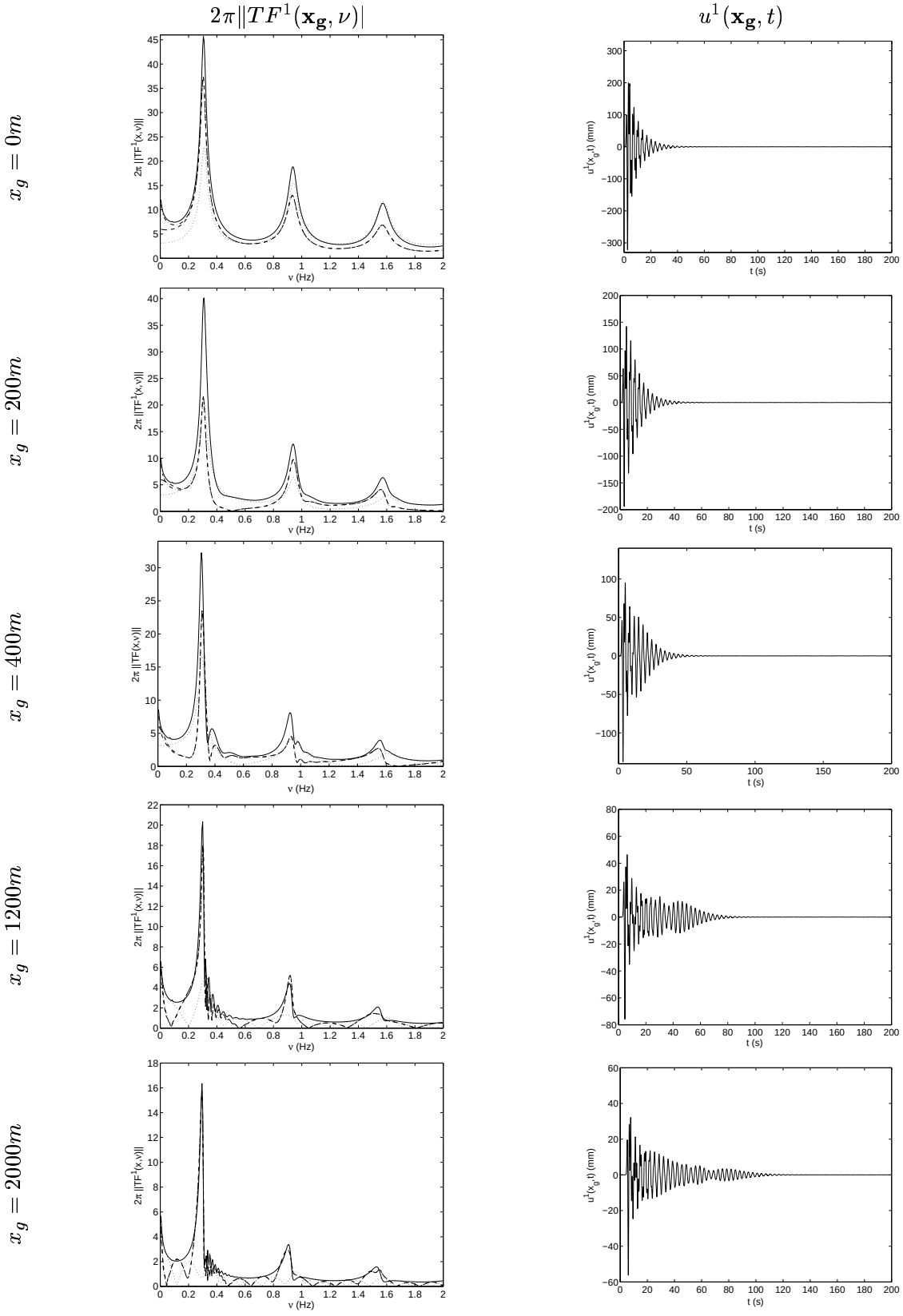


FIG. 1.12 – *Mexico (MC) - À gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement et à droite $u^1(\mathbf{x},t)$ pour différentes distances épicentrales, la source étant localisée à une faible distance focale ($\mathbf{x^s} = (0, 100m)$)*

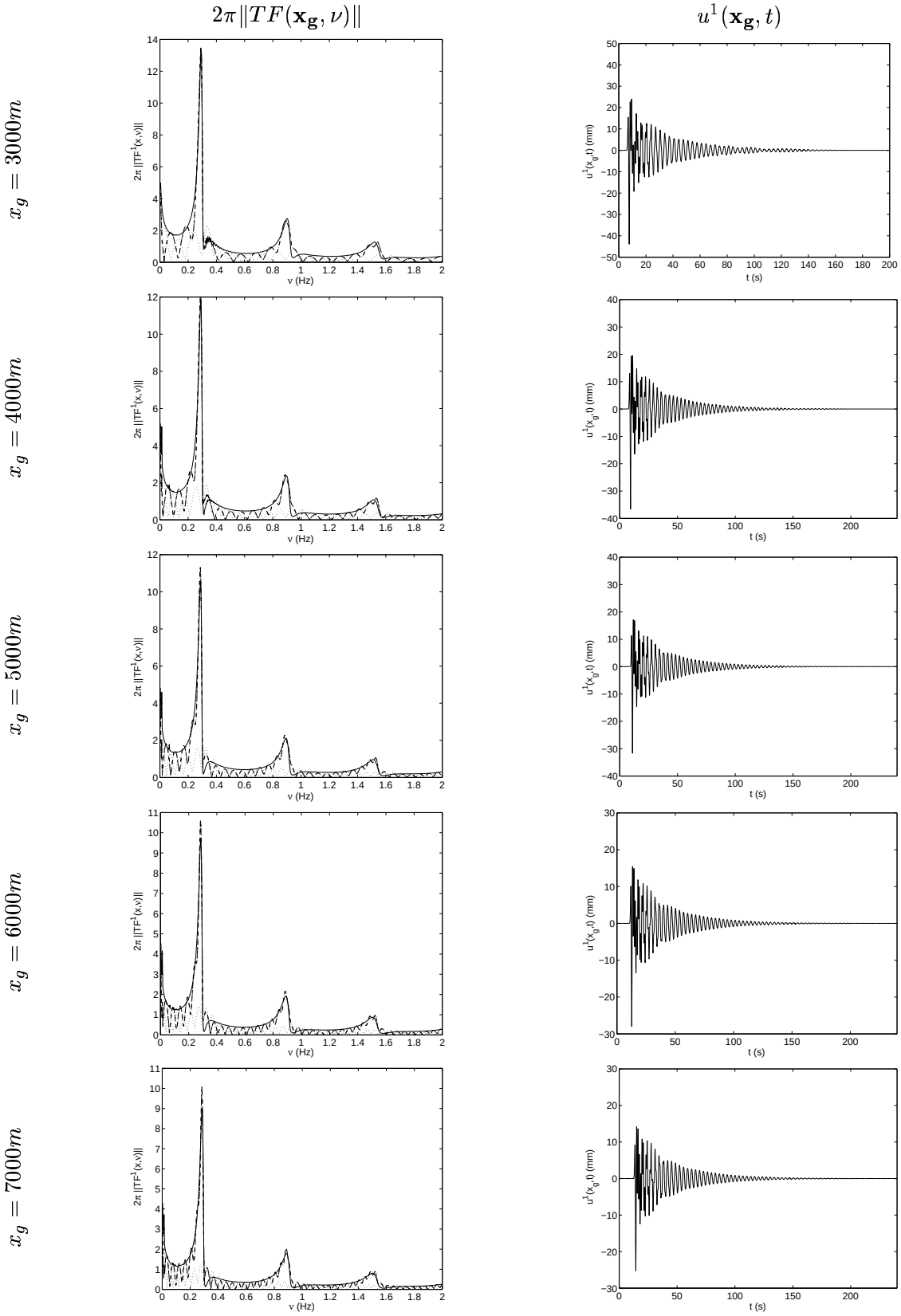


FIG. 1.13 – *Mexico (MC) - À gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement et à droite $u^1(\mathbf{x},t)$ pour différentes distances épicentrales ($\mathbf{x_g}$ compris entre 3000 et $7000m$), la source étant localisée à une faible distance focale ($\mathbf{x^s} = (0, 100m)$)*

1.1.6.3 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Mexico Modifié MMC1

Les résultats présentés ici sont relatifs à une configuration où le contraste de vitesse entre les matériaux occupant le substratum et la couche est plus important: $c_S^0 = 1500m.s^1$ au lieu de $c_S^0 = 600m.s^1$, les valeurs de la vitesse relaxée $\left(c_S^1\right)_R$, des densités et des facteurs de qualité étant conservées.

Intéressons nous, tout d'abord, aux fonctions de transfert, figure II.1.16

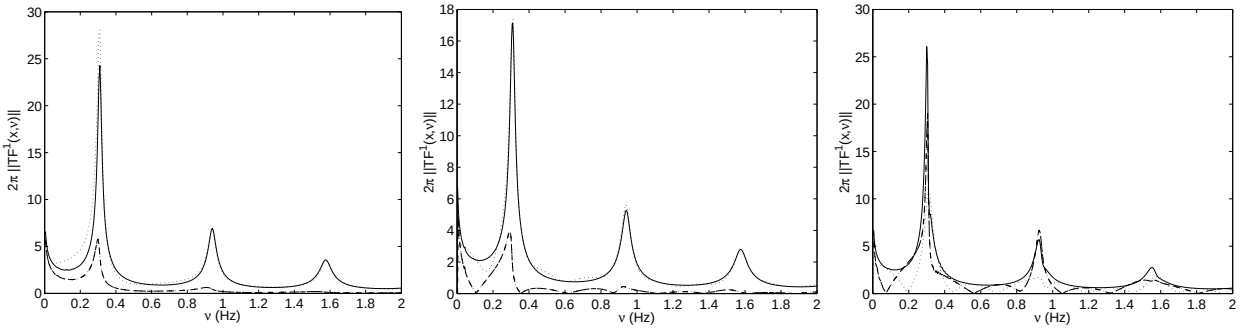


FIG. 1.14 – *Mexico Modifié (MMC1) - 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour différentes positions de la source $\mathbf{x^s}$ et du point d'observation $\mathbf{x_g}$. Sur la gauche, profondeur focale importante et faible distance épicentrale $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et $\mathbf{x_g} = (100, 0)$. Au milieu profondeur focale importante et distance épicentrale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$. Sur la droite, profondeur focale faible et distance épicentrale importante $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$.*

Les conclusions sur les ondes dominantes et sur les phénomènes mis en jeu pour différentes localisations de la source et du point d'observation sont relativement identiques à la section précédente. La seule différence est que, pour un contraste plus important, le premier pic rencontré lorsque la profondeur focale est importante a une composante SOP2 plus élevée que pour le cas précédent, son amplitude relative restant faible par rapport au pic d'interférence.

Pour autant, une comparaison avec les résultats précédents est informative. La position fréquentielle du premier pic d'interférence, lorsque la distance focale est grande, est quasiment inchangée, en particulier pour le point d'observation situé à un emplacement quasi à la verticale de la source. Ceci tendrait à valider la formule d'Haskell ($\nu^{\mathrm{Bo}} = \dfrac{c_S^1}{4h}$), qui ne fait intervenir que la hauteur de la couche et la vitesse de phase c_S^1, au moins pour le premier pic d'interférence et en incidence quasi normale. Les modes de Love sont eux décalés vers les hautes fréquences.

La remarque la plus importante concerne l'amplitude qui croît lorsque le rapport $\dfrac{c_S^1}{c_S^0}$, c'est-à-dire $\dfrac{\mu^1}{\mu^0}$ puisque les densités sont considérées comme constantes, croît. Ceci corrobore le fait que l'amplitude de $\|E_1^1\| \approx \dfrac{\mu^0 c_S^0}{\mu^1 c_S^1}$ en incidence normale. La même remarque peut être faite en ce qui concerne les pics des modes Love.

Ceci se traduit sur les tracés temporels de $u^1(\mathbf{x_g}, t)$ par une amplitude plus importante, figure

II.1.15, les conclusions sur les amplitudes et les durées en fonction de la profondeur focale de la source étant identiques à la section précédente.

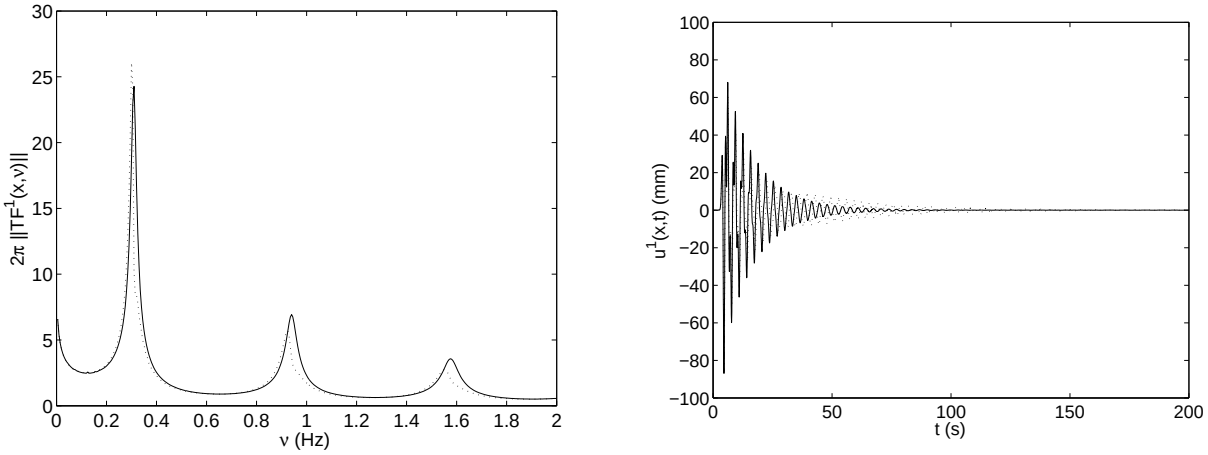


FIG. 1.15 – *Mexico Modifié (MMC1) - À gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour une distance focale identique, mais pour des jeux de paramètres* $\mathbf{x_g}$ *et* $\mathbf{x^s}$ *différents. Courbes en trait continu, profondeur focale importante* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ *et distance épicentrale faible* $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$*. Courbes en pointillés, profondeur focale faible* $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ *et distance épicentrale importante* $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$*. À droite, les sismogrammes correspondants* $(\nu_0 = 0.5Hz)$*.*

1.1.6.4 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Mexico Modifié MMC2

Les résultats présentés ici sont relatifs à une configuration où le contraste de vitesse entre les matériaux occupant le substratum et la couche est moins important. $\left(c_S^1\right)_R = 200m.s^1$ au lieu de $\left(c_S^1\right)_R = 60m.s^1$, la valeur de la vitesse c_S^0, des densités et des facteurs de qualité étant conservés.

Intéressons-nous tout d'abord aux fonctions de transfert, figure II.1.16.

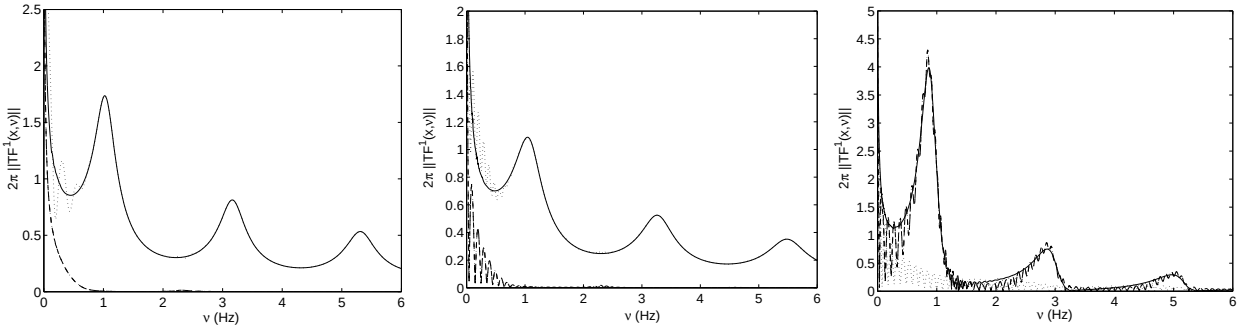


FIG. 1.16 – *Mexico Modifié MMC2 - 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour différentes positions de la source* $\mathbf{x^s}$ *et du point d'observation* $\mathbf{x_g}$*. À gauche, profondeur focale importante et faible distance épicentrale* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ *et* $\mathbf{x_g} = (100, 0)$*. Au milieu profondeur focale importante et distance épicentrale importante* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ *et* $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$*. À droite, profondeur focale faible et distance épicentrale importante* $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ *et* $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$*.*

Les conclusions sur les ondes dominantes et sur les phénomènes mis en jeu pour différentes localisations de la source sont identiques à la section II.1.1.6.2.

Pour autant, une comparaison avec ces résultats est informative. La position fréquentielle du premier pic d'interférence, lorsque la distance épicentrale est grande, est décalée vers les basses fréquences, en particulier, pour le point d'observation situé de façon quasi à la verticale de la source. Ce résultat tendrait à valider la formule d'Haskell ($\nu^{\mathrm{Bo}} = \frac{c_S^1}{4h}$), qui ne fait intervenir que la hauteur de la couche et la vitesse de phase c_S^1, au moins pour le premier pic d'interférence et en incidence quasi normale. Une remarque identique peut être faite pour le pic correspondant au mode fondamental de Love.

La remarque la plus importante concerne l'amplitude, qui décroît lorsque le contraste entre les deux matériaux décroît, ce qui corrobore le fait que l'amplitude de $\left\|E_1^1\right\| \approx \frac{\mu^0 c_S^0}{\mu^1 c_S^1}$ en incidence normale. La même remarque peut être faite en ce qui concerne les pics des modes de Love.

Ceci se traduit sur les tracés temporels de $u^1(\mathbf{x_g}, t)$ par une amplitude moins importante, figure II.1.17, les conclusions sur les amplitudes et les durées en fonction de la profondeur focale de la source étant identiques à la section précédente.

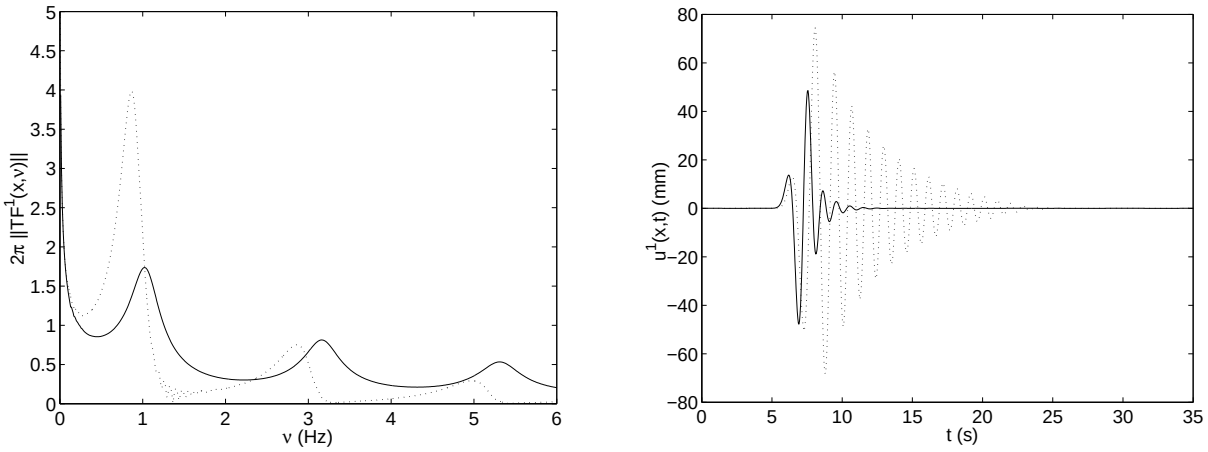


FIG. 1.17 – *Mexico Modifié MMC2 - À gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert associée au déplacement pour une distance focale identique, mais pour des jeux de paramètres $\mathbf{x_g}$ et $\mathbf{x^s}$ différents. Courbes en trait continu, profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et distance épicentrale faible $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$. Courbes en pointillés, profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$. À droite, les sismogrammes correspondants $(\nu_0 = 0.5Hz)$.*

La façon dont la distance épicentrale affecte la fonction de transfert reste en suspens, en particulier l'origine des pics satellites reste floue. Une façon de lever l'ambiguité est d'appliquer le théorème des résidus pour résoudre l'intégrale (II.1.13).

1.1.7 Application du théorème des résidus, pour un nouvel éclairage sur les modes de Love

Afin d'identifier la cause des pics satellites observés dans la section II.1.1.6.2 pour des distances épicentrales moyennes, nous allons appliquer le **théorème des résidus** pour évaluer l'intégrale (II.1.13), en particulier pour $\mathbf{x_g} = (x_g, 0m)$. L'application du théorème des résidus fournit une autre représentation du déplacement $u^1(\mathbf{x}, \omega)$ dans le domaine fréquentiel : elle **met l'accent sur les termes de chaque mode de Love**. Les pics satellites les plus prononcés étant rencontrés après la borne haute fréquence du premier pic de résonance, nous nous concentrerons sur les termes relatifs au mode fondamental de Love.

1.1.7.1 Détermination du contour C

Nous souhaitons résoudre l'intégrale associée au champ de déplacement dans la couche :

$$u^1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-A^i(\omega)\mu^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0(x_2^s - h)\right)}{\mathrm{i}\mu^0 k_2^0 \cos\left(k_2^1 h\right) + k_2^1 \mu^1(\omega) \sin\left(k_2^1 h\right)} \cos\left(k_2^1 x_2\right) dk_1 \tag{1.73}$$

avec, $k_2^0 = \sqrt{\left(k^0\right)^2 - k_1^2}$ et $k_2^1 = \sqrt{\left(k^1\right)^2 - k_1^2}$.
μ^0 et c_S^0 sont réels alors que μ^1 et c_S^1 sont considérés comme des quantités complexes, dépendantes de la fréquence. Ainsi, $k^0 \in \mathbb{R}$ et $k^1 \in \mathbb{C}$. Menons l'intégration (II.1.73) dans le plan complexe $k_1 = k_1' + \mathrm{i}k_1''$, via le théorème des résidus ([183, 47]). Intéressons-nous dans un premier temps à l'intégrale :

$$\mathrm{I}^1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-A^i(\omega)\mu^0}{2\pi} \int_C \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0(x_2^s - h)\right)}{\mathrm{i}\mu^0 k_2^0 \cos\left(k_2^1 h\right) + k_2^1 \mu^1(\omega) \sin\left(k_2^1 h\right)} \cos\left(k_2^1 x_2\right) dk_1 = \int_C F(k_1, \mathbf{x}, \omega) dk_1 \tag{1.74}$$

Les fonctions, $\cos\left(k_2^1 h\right)$, $\cos\left(k_2^1 x_2\right)$,et $k_2^2 \sin\left(k_2^1 h\right)$ sont des fonctions paires. Ainsi le signe de k_2^1 n'a aucune influence sur l'évaluation de (II.1.74). Par contre, l'intégrande $F(k_1, \mathbf{x}, \omega)$ peut être une fonction à plusieurs valeurs en fonction de k_1, à cause des deux branches de la fonction $k_2^0 = \left(k^0 + k_1\right)^{\frac{1}{2}} \left(k^0 - k_1\right)^{\frac{1}{2}}$. En nous référant à la discussion menée pages 730-731 de [54], le contour d'intégration C peut prendre la forme de la figure II.1.18

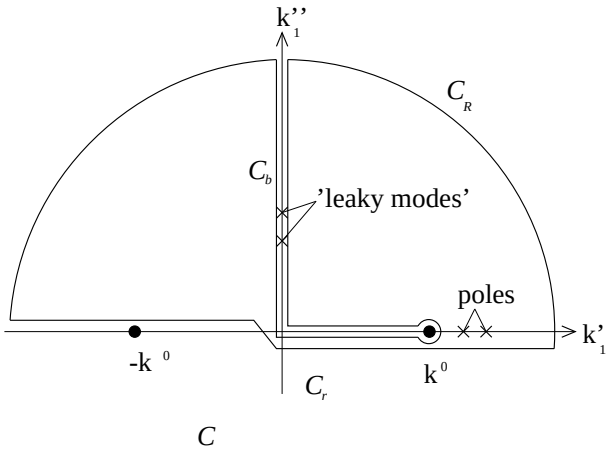


FIG. 1.18 – *Description du coutour d'intégration C. Ici, nous avons décrit la position des pôles et des "leaky modes" (correspondant au pic d'interférence) dans le cas d'un matériau non dissipatif*

Il existe une grande variété de choix pour la branche de coupure. Par exemple, les branches de coupure de Pekeris ([104, 134]) présentent l'avantage de fournir une représentation adaptée de la réponse du sol pour de faibles distances épicentrales. Cependant, ce choix est moins souhaitable pour de larges distances épicentrales du fait de l'obtention, peu aisée, des "leaky modes" ([104, 9]). Ce terme qualifie des pôles purement imaginaires, ou ayant une partie imaginaire très importante, dans le cas non-dissipatif. En ce sens ils ne peuvent être appelés modes, ceux-ci étant localisés sur l'axe réel, toujours dans le cas non-dissipatif. Ces "leaky modes" correspondent aux pôles donnant lieu aux phénomènes d'interférence d'Haskell. Nous renvoyons aux discussions de l'ouvrage [104] et à la section II.1.1.8 pour plus d'explications.

Les **branches de coupure EJP**, [64, 104], constituent une autre, et probablement plus judicieuse approche dans le cas de distance épicentrale importante. Puisque nous supposons que $x_1 - x_1^s \geqq 0$ et que le point d'observation se trouve sur la surface, le contour le plus approprié est celui décrit figure 1.18, qui n'englobe que la banche du quadrant supérieur droit, correspondant au contour C_b. Ce choix de contour présente les avantages suivants : pour des milieux non-dissipatifs, les "leaky modes" sont situés sur une des branches de coupure, et pour l'intégrale sur le demi-cercle de rayon R, correspondant au contour C_R, s'annule lorsque $R \to \infty$.

1.1.7.2 Application du Théorème des résidus

L'application du théorème de Cauchy à l'intégrale complexe (1.74) conduit à :

$$\int_C F(k_1, \mathbf{x_g}, \omega) dk_1 = \left[\int_{C_r} + \int_{C_b} + \int_{C_R} \right] F(k_1, \mathbf{x_g}, \omega) dk_1 = 2\pi \mathrm{i} \sum_j r_j(\mathbf{x_g}, \omega) \tag{1.75}$$

où $r_j(\mathbf{x_g}, \omega)$ est le résidu du $j^{\text{ème}}$ pôle inclus dans le contour C. Alors, l'équation (1.75) implique :

$$\int_{C_r} F(k_1, \mathbf{x_g}, \omega) dk_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1, \mathbf{x_g}, \omega) dk_1 = 2\pi \mathrm{i} \sum_j r_j(\mathbf{x_g}, \omega) - \int_{C_b} F(k_1, \mathbf{x_g}, \omega) dk_1 \tag{1.76}$$

La résolution de cette équation se réalise donc en deux étapes, l'évaluation (numérique) de l'intégrale de branche et l'évaluation des résidus qui nécessite la détermination exacte des pôles dans le plan complexe.

Remarque : Rigoureusement, les pôles correspondant aux "leaky modes" ne sont pas localisés sur l'intégrale de branche lorsque le matériau M^1 est dissipatif. Cependant, pour une distance épicentrale importante, leur contribution est quasi-nulle, [104], de sorte que seuls les résidus correspondant aux modes de Love seront considérés ici (voir également section II.1.1.8).

1.1.7.3 Évaluation des intégrales de branche

Notons $u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \omega)$ le déplacement relatif à l'intégrale de branche $\int_{C_b}$ sur le sol. Il vient :

$$u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \omega) = \left[\int_{\mathrm{i}\infty}^{0} + \int_{0}^{k^0} + \int_{k^0}^{0} + \int_{0}^{\mathrm{i}\infty} \right] F(k_1, \mathbf{x_g}, \omega) dk_1 \tag{1.77}$$

Alors, sur chacun des intervalles d'intégration de (II.1.77), nous avons,

$$k_2^0 = \sqrt{(k^0)^2 - k_1^2} = \begin{cases} -\sqrt{(k^0)^2 + (k_1'')^2} = -\left|k_2^0\right|_{\Im} & : \text{première intégrande} \\ -\sqrt{(k^0)^2 - (k_1')^2} = -\left|k_2^0\right|_{\Re} & : \text{seconde intégrande} \\ \sqrt{(k^0)^2 - (k_1')^2} = \left|k_2^0\right|_{\Re} & : \text{troisième intégrande} \\ \sqrt{(k^0)^2 + (k_1'')^2} = \left|k_2^0\right|_{\Im} & : \text{quatrième intégrande} \end{cases} \tag{1.78}$$

Si bien que le déplacement relatif à l'intégrale de branche $u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \omega)$ a pour expression :

$$u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \omega) = \frac{-A^i(\omega)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-k_1''(x_1 - x_1^s)\right)\mathcal{N}_{\Im}}{\left|k_2^0\right|_{\Im} \mathcal{D}^2_{\Im}} dk_1'' - \frac{\mathrm{i}A^i(\omega)}{\pi} \int_0^{k^0} \frac{\exp\left(\mathbf{i}k_1'(x_1 - x_1^s)\right)\mathcal{N}_{\Re}}{\left|k_2^0\right|_{\Re} \mathcal{D}^2_{\Re}} dk_1' \tag{1.79}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2_{\text{type}} = & \cos^2\left(k^1_{2,\text{type}} h\right) + \left(\frac{\mu^1 k^1_{2,\text{type}}}{\mu^0 \left|k_2^0\right|_{\text{type}}}\right)^2 \sin^2\left(k^1_{2,\text{type}} h\right) \\ \mathcal{N}_{\text{type}} = & \cos\left(k^1_{2,\text{type}} h\right) \cos\left(\left|k_2^0\right|_{\text{type}} (x_2^s - h)\right) - \\ & \frac{\mu^1 k^1_{2,\text{type}}}{\mu^0 \left|k_2^0\right|_{\text{type}}} \sin\left(k^1_{2,\text{type}} h\right) \sin\left(\left|k_2^0\right|_{\text{type}} (x_2^s - h)\right) \end{aligned} \tag{1.80}$$

avec type $= \Re$ où $\Im$, $k^1_{2,\Im} = \sqrt{(k^j)^1 + (k_1'')^2}$, $k^1_{2,\Re} = \sqrt{(k^1)^2 - (k_1')^2}$, et $k^0_{2,\Im}$ et $k^0_{2,\Re}$ définis au système (II.1.78).

Nous traitons, figure II.1.19, deux cas distincts de distance épicentrale $\mathbf{x_g} = (1200m, 0)$ et $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$, pour une source cylindrique localisée à $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$, la configuration étant celle de la ville Mexico dont l'épaisseur de couche est $h = 50m$. De façon analogue à ce que nous avons défini pour le champ de déplacement total, nous introduisons la fonction de transfert associée au déplacement issu de l'évaluation de l'intégrale de branche $TF^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}, \omega) = \dfrac{u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}, \omega)}{A^i(\omega)}$

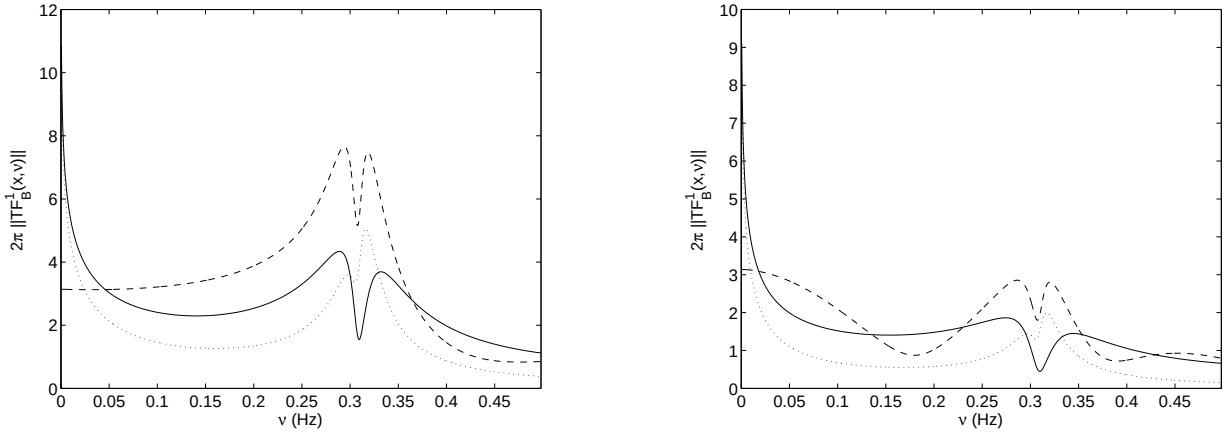


FIG. 1.19 – *Mexico (MC) - À gauche,* $2\pi \left\|TF^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \nu)\right\|$ *pour* $\mathbf{x_g} = (1200m, 0)$ *et à droite* $2\pi \left\|TF_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \nu)\right\|$ *pour* $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$. *Courbe en tirets :* 2π *fois la contribution de l'intégrale* $[0, k^0]$, *courbe en pointillés :* 2π *fois la contribution de l'intégrale* $[0, i\infty]$. *Courbe en trait continu :* 2π *fois* $TF_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \nu)$

L'amplitude de l'intégrale de branche décroît lorsque la distance épicentrale augmente.

1.1.7.4 Détermination non-ambiguë du premier mode de Love pour un matériau dissipatif M^1 occupant la couche

La dissipation peut être interprétée comme une perturbation du cas non-dissipatif, ce qui suggère de rechercher les zéros de la relation de dispersion, dans le cas où les matériaux sont dissipatifs, à partir des valeurs obtenues dans le cas où les matériaux sont non-dissipatifs. Nous rappelons que la relation de dispersion des modes de Love prend la forme :

$$\mathrm{i}\mu^0 k_2^0 \cos\left(k_2^1 h\right) + \mu^1 k_2^1 \sin\left(k_2^1 h\right) = 0 \tag{1.81}$$

Réalisons le changement de variable, de la même façon que dans la section II.1.1.5, et en particulier dans la section II.1.1.5.2 :

$$\eta = k^0 h = \frac{\omega}{c_S^0} h \quad ; \zeta = \frac{k_1}{k^0} \quad ; \phi(\zeta) = \sqrt{\left(\frac{c_S^0}{c_S^1}\right)^2 - \zeta^2} \quad ; \theta(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{1.82}$$

La procédure générale d'obtention des modes et des leaky modes, η_n fonction de ζ, est décrite dans l'annexe C. Dans le cas non-dissipatif, il vient de façon exacte :

$$\eta_1^\star = \frac{1}{\phi(\zeta)} \arctan\left(\frac{\mu^0 \theta(\zeta)}{\mu^1 \phi(\zeta)}\right), \zeta \in \left[1, \frac{c_S^0}{c_S^1}\right] \tag{1.83}$$

valeur du premier mode de Love, représenté figure II.1.20

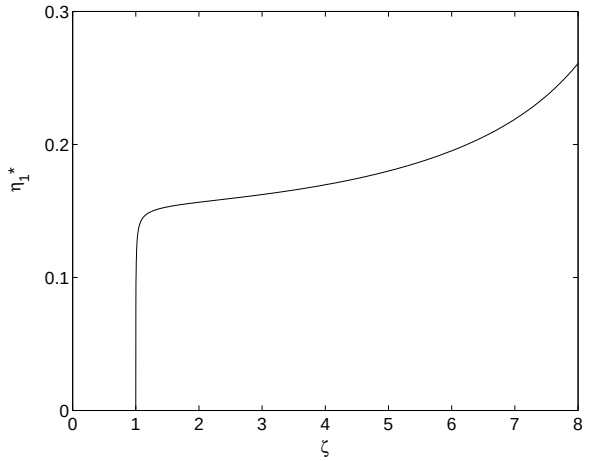


FIG. 1.20 – $\eta_1^\star$ *fonction de* ζ

Les difficultés relatives à cette procédure sont les suivantes, dans le cas non-dissipatif :

- nous recherchons une racine complexe $k_1^\star$ (quantité reliée à ζ par la relation $c_S^0 k_1^\star = \zeta\omega$), en fonction de ω (quantité reliée à $\eta_1^\star$ par la relation $c_S^0 \eta_1^\star = \omega h$) dans le cas dissipatif. Une façon d'obtenir ζ en fonction de η, est d'inverser simplement la lecture du fichier.

- le comportement asymptotique de $\eta_1^\star$ en fonction de ζ aux alentours de $\zeta = 1$ montre que le pas fréquentiel n'est pas linéaire dans cet intervalle. Nous réaliserons donc une interpolation linéaire de façon à le rendre linéaire.

Le résultat de cette procédure dans le cas non-dissipatif est représenté figure II.1.21.

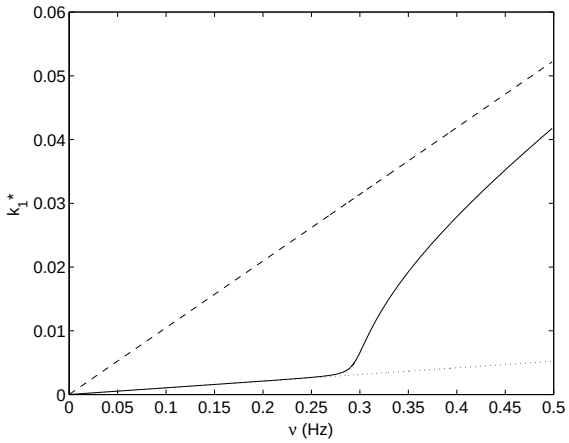


FIG. 1.21 – *Mexico (MC) - Racine de l'équation de dispersion du mode de Love, $Q^1 = \infty$. La courbe en traits pointillés représente k^0, la courbe en tirets représente k^1 et la courbe en trait continu représente $k_1^\star$, en fonction de $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$*

Retournons maintenant au cas où $Q_S^1 \neq \infty$. Un moyen de trouver le mode fondamental de l'équation (II.1.81) dans le cas dissipatif est d'utiliser l'algorithme de Müller (une variante de la méthode de la sécante, [60]) qui permet de déterminer les racines complexes d'une fonction complexe. Appliqué directement à la détermination de $k_1^\star$ avec comme itérée initiale le mode dans le cas non-dissipatif, la solution fournie n'est pas satifaisante. Une méthode plus appropriée est de rechercher le nombre d'onde vertical k_2^0 (variable déterminant le feuillet propre de Riemann). La relation de dispersion prend donc la forme :

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\mu^0 k_2^0 \cos\left(h\sqrt{(k^1)^2-(k^0)^2+(k_2^0)^2}\right)+ \\ &\mu^1\sqrt{(k^1)^2-(k^0)^2+(k_2^0)^2}\sin\left(\sqrt{(k^1)^2-(k^0)^2+(k_2^0)^2}h\right)=0 \end{aligned} \tag{1.84}$$

ce qui nous permet d'obtenir le résultat, figure II.1.22.

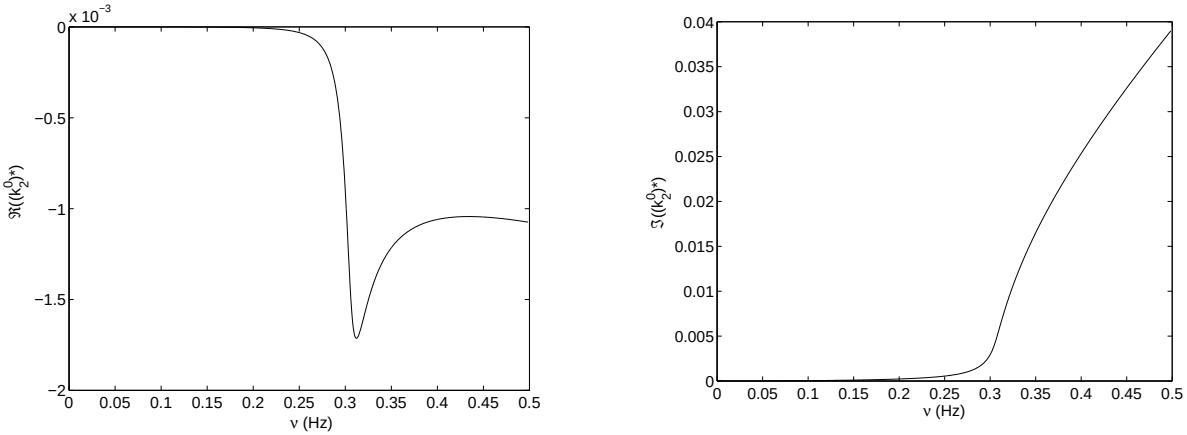


FIG. 1.22 – *Mexico (MC) -À gauche $\Re\left((k_2^0)^\star\right)$ et à droite $\Im\left((k_2^0)^\star\right)$, solution de la relation de dispersion (II.1.84) obtenue à l'aide de l'algorithme de Müller*

La partie imaginaire $(k_2^0)^\star$ est d'amplitude plus importante que sa partie réelle, ce qui est en accord avec le fait que nous considérons le cas dissipatif comme une perturbation du cas non-dissipatif, cette quantité étant pour ce dernier cas imaginaire pure. Un élément intéressant est que le mode implique $\Re\left((k_2^0)^\star\right) < 0$ sur une grande partie de l'intervalle de fréquences considéré. **L'aspect dissipatif a donc tendance**, la quantité $x_2^s - h$ étant positive, **à faire remonter les ondes propagatives vers la surface**.

Une fois déterminée $(k_2^0)^\star$ solution de II.1.22, la solution $k_1^\star$ s'en déduit via $k_1^\star = \sqrt{(k^0)^2 - \left((k_2^0)^\star\right)^2}$, figure II.1.23.

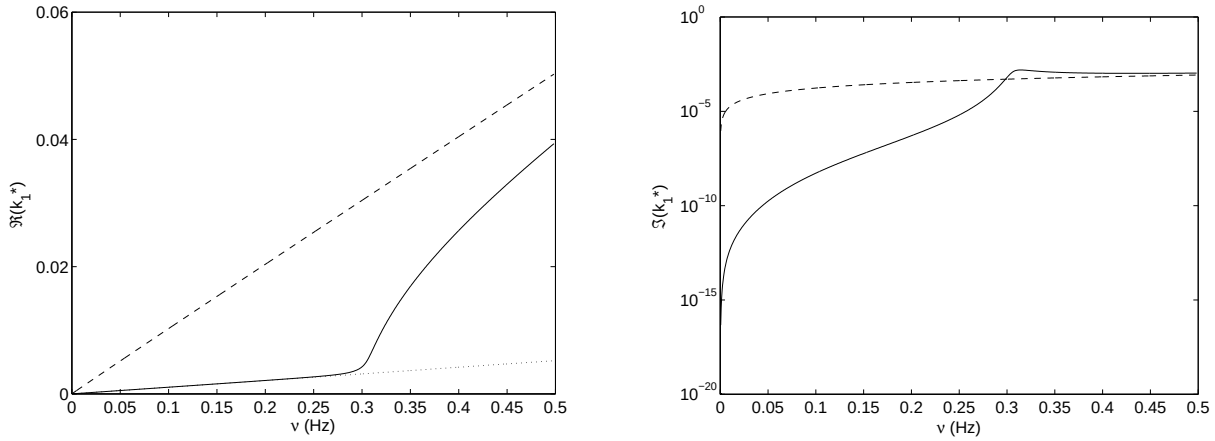


FIG. 1.23 – *Mexico (MC) -À gauche* $\Re(k_1^\star)$ *et à droite* $\Im(k_1^\star)$*, solution de la relation de dispersion (II.1.81)*

1.1.7.5 Structure du résidu relatif au premier mode de Love

En supposant que la fréquence est suffisamment faible pour que seul le mode fondamental de Love $k_1^\star$ puisse être excité, le déplacement associé au résidu de ce pôle $u_{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \omega)$, s'écrit sur le sol :

$$u_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \omega) = 2\pi i r_1(\mathbf{x_g}, \omega) = A^i(\omega) \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1^\star(x_1 - x_1^s) + \mathrm{i}(k_2^0)^\star(x_2^s - h)\right)}{\mathcal{D}(k_1^\star, \omega)} \tag{1.85}$$

avec $(k_2^j)^\star = \sqrt{(k^j)^2 - (k_1^\star)^2}$, $j = 0, 1$ et

$$\mathcal{D}(k_1^\star, \omega) = \frac{k_1^\star}{(k_2^0)^\star}\left(1 - \mathrm{i}\frac{\mu^1 h (k_2^0)^\star}{\mu^0}\right)\cos\left((k_2^1)^\star h\right) + \frac{k_1^\star}{(k_2^1)^\star}\left(-(k_2^0)^\star h - \mathrm{i}\frac{\mu^1}{\mu^0}\right)\sin\left((k_2^1)^\star h\right) \tag{1.86}$$

Introduisons alors, en prenant garde au signe de $\Re\left((k_2^0)^\star\right)$:

$$k_1^\star = k_1^{\star\prime} + \mathrm{i}k_1^{\star\prime\prime}, \quad (k_2^0)^\star = -(k_2^0)^{\star\prime} + \mathrm{i}(k_2^0)^{\star\prime\prime}, \quad (k_2^1)^\star = (k_2^1)^{\star\prime} + \mathrm{i}(k_2^1)^{\star\prime\prime} \tag{1.87}$$

toutes les quantités introduites ici étant réelles positives. Alors, l'équation (II.1.85) peut s'écrire :

$$u_{\mathcal{R}}^1(\mathbf{x_g}, \omega) = \mathcal{A}(\mathbf{x_g}, \omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1^{\star\prime}(x_1 - x_1^s) - (k_2^0)^{\star\prime}\mathrm{i}(x_2^s - h)\right) \tag{1.88}$$

où

$$\mathcal{A}(\mathbf{x_g}, \omega) = \frac{A^i(\omega)}{\mathcal{D}(k_1^\star, \omega)}\exp\left(-k_1^{\star\prime\prime}(x_1 - x_1^s) - (k_2^0)^{\star\prime\prime}\mathrm{i}(x_2^s - h)\right) \tag{1.89}$$

Ces résultats montrent que le terme associé au résidu du mode fondamental de Love $u^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \omega)$ prend la forme d'une onde plane inhomogène. L'amplitude $\mathcal{A}(\mathbf{x_g}, \omega)$ et la période d'oscillation de cette onde décroîssent lorsque $x_1 - x_1^s$ augmente. De plus, $\mathcal{A}(\mathbf{x_g}, \omega)$ est d'autant plus grand que la source est proche de l'interface Γ_h.

Remarque : Nous voyons ici pourquoi les **"leaky modes" sont négligeables pour de grandes distances épicentrales**. Appelons $k_1^{l\star}$ le premier "leaky mode". Il a pour expression $k_1^{l\star} = k_1^{l\star\prime} + \mathrm{i}k_1^{l\star\prime\prime}$, avec $\mathrm{i}k_1^{l\star\prime\prime}$ d'amplitude très importante (en particulier beaucoup plus importante que celle de la partie imaginaire du premier mode de Love). L'introduction de ce pôle dans l'expression du résidu associé fait intervenir le terme $\exp\left(-k_1^{l\star\prime\prime}\left(x_1 - x_1^s\right)\right)$, qui réduit sa contribution de manière drastique en fonction du terme $x_1 - x_1^s$. C'est pour cette raison que les résidus associés aux "leaky modes" sont négligeables et sont négligés pour de grandes distances épicentrales. Par contre, ils ne le sont pas pour des valeurs faibles de cette distance [104] (voir aussi la section II.1.1.8).

1.1.7.6 Combinaison des contributions $u^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \omega)$, liée au résidu et $u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \omega)$, liée aux intégrales de branche

La contribution associée au résidu $u^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}\omega)$ a une forme assez simple (onde plane inhomogène), ce qui n'est pas le cas de la contribution associée aux branches de coupure $u^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}\omega)$ (forme intégrale). Néanmoins, certains traits typiques émergent des résultats numériques obtenus à l'aide de cette formulation. Considérons les fonctions de transfert, figure II.1.24. La contribution dominante du champ de déplacement total, notamment aux alentours du pic de la résonance fondamentale de Love, vient de $u^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \omega)$. Plus la distance épicentrale est importante, plus le pic associé à la fonction de transfert $TF^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \omega)$ est d'amplitude proche du premier pic de résonance de la fonction de transfert totale $TF^1(\mathbf{x_g}, \omega)$, et plus la contribution des intégrales de branche, $TF^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \omega)$, est faible comparativement à $TF^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \omega)$. Cela signifie que **pour une distance épicentrale assez importante, seul le terme associé au résidu contribuera à la réponse totale**, [104].

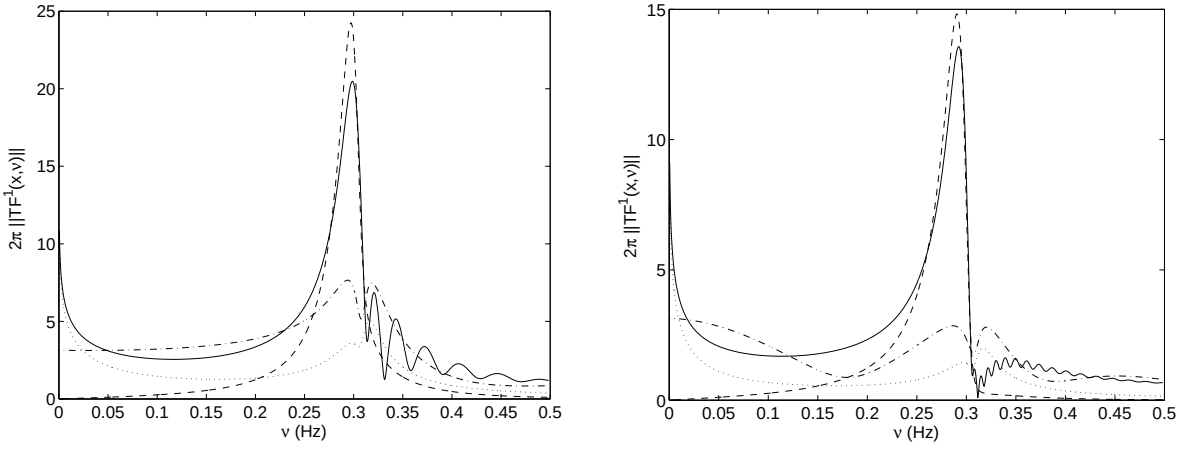


FIG. 1.24 – *Mexico (MC) - 2π fois le module de la fonction de transfert ; courbe en trait continu, $2\pi \left\|TF^1(\mathbf{x_g}, \nu)\right\|$, courbe en tirets $2\pi \left\|TF^1_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \nu)\right\|$, courbe en pointillés composante $[0, i\infty]$ de $2\pi \left\|TF^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \nu)\right\|$ et courbe en pointillés et tirets composante $[0, k^0]$ de $2\pi \left\|TF^1_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \nu)\right\|$. Á gauche pour $\mathbf{x_g} = (1200m, 0m)$ et à droite pour $\mathbf{x_g} = (3000m, 0m)$*

À première vue, figure II.1.24, les pics satellites après le pic fondamental sont dus à une in-

teraction entre $TF_{\mathcal{R}}(\mathbf{x_g}, \nu)$ et $TF_{\mathcal{B}}(\mathbf{x_g}, \nu)$. Pour autant, figure II.1.25, seules les parties réelle et imaginaire de la composante associée au résidu oscillent autour des valeurs des pics satellites.

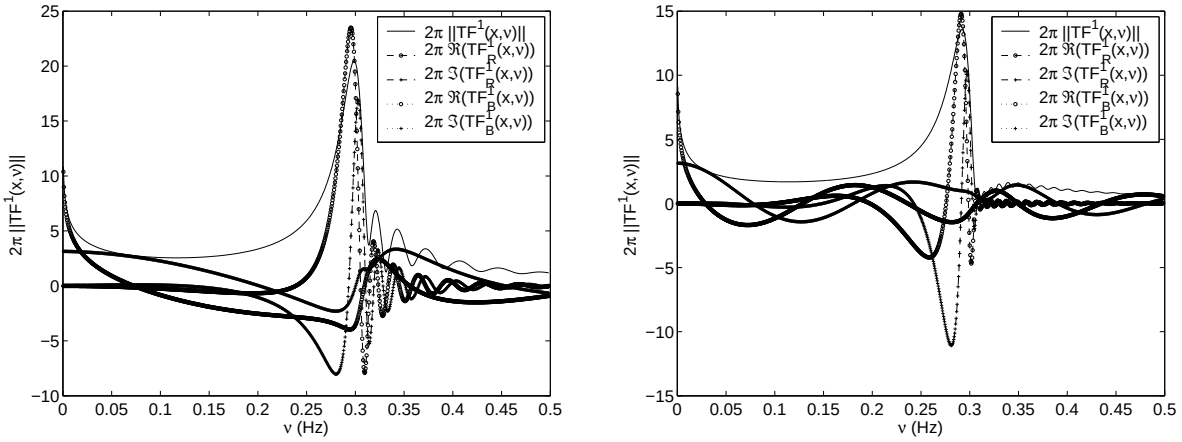


FIG. 1.25 – *Mexico (MC) - À gauche pour* $\mathbf{x_g} = (1200m, 0m)$ *et à droite pour* $\mathbf{x_g} = (3000m, 0m)$

Ainsi, **les pics satellites donnant lieu à des battements dans la domaine temporel, sont également dus à l'excitation des modes de Love**. Plus exactement, ils sont liés au terme $\exp\left(\mathrm{i}k_1^\star\left(x_1 - x_1^s\right)\right)$ si bien que ces pics sont de plus en plus oscillants et de plus en plus amortis lorsque la distance épicentrale $x_1 - x_1$ augmente.

Il ne faut pas oublier que la quantité qui nous intéresse particulièrement est $u^1(\mathbf{x_g}, t)$.

1.1.8 Analyse directe en temps de la réponse sur le sol dans le cas non-dissipatif ou purement atténuant

Les dévelopements réalisés ici se réfèrent au cas où le matériau emplissant M^1 est non-dissipatif, c'est-à-dire $k^1 = \dfrac{\omega}{c_S^1}$, $c_S^1 \in \mathbb{R}$ ou purement atténuant, c'est-à-dire $k^1 = \dfrac{\omega}{c_S^1} = \dfrac{\omega}{c_S^{1'}}\left(1 + \dfrac{1}{2Q_S^1}\right)$, Q_S^1 étant constant sur la plage de fréquences considérée et $c_S^1 \in \mathbb{C}$ telle que $c_S^1 = c_S^{1'} - \mathrm{i}c_S^{1''}$, $(c_S^{1'}, c_S^{1''}) \in \mathbb{R}^+$, indépendants de la fréquence.

1.1.8.1 Ingrédients généraux de la réponse temporelle sur le sol

Nous rappelons que nous recherchons $u^1(\mathbf{x_g}, t)$, tel que :

$$u^1(\mathbf{x_g}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^1(\mathbf{x_g}, \omega) \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) d\omega \tag{1.90}$$

Or la quantité $u^1(\mathbf{x_g}, t)$ est réelle, ce qui implique que $\left[u^1(\mathbf{x_g}, \omega)\right]^\star = u^1(\mathbf{x_g}, -\omega)$, si bien que :

$$u^1(\mathbf{x_g}, t) = 2\Re \int_0^{\infty} u^1(\mathbf{x_g}, \omega) \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) d\omega \tag{1.91}$$

En réalisant le changement de variable décrit équations (II.1.44) et (1.45), l'équation (1.73) s'écrit :

$$u^1(\mathbf{x_g}, t) = 2\Re \int_0^{\infty} u^1\left(\mathbf{x_g}, \frac{\eta c_S^0}{h}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\eta \frac{c_S^0}{h} t\right) d\omega \tag{1.92}$$

expression dans laquelle, en vertu de l'équation (II.1.14) :

$$u^1\left(\mathbf{x_g}, \frac{\eta c_S^0}{h}\right) = \frac{-A^i\left(\frac{\eta c_S^0}{h}\right)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}\eta\left(\zeta\frac{x_1-x_1^s}{h} + \psi(\zeta)\frac{x_2^s-h}{h}\right)\right)}{\mathrm{i}\psi(\zeta)\cos\left(\eta\phi(\zeta)h\right) + v\phi(\zeta)\sin\left(\eta\phi(\zeta)h\right)} d\zeta \tag{1.93}$$

Interchangeons maintenant l'ordre d'intégration sur η et ζ. Il vient :

$$u^1(\mathbf{x_g}, t) = -\frac{c_S^0}{\pi h}\int_{-\infty}^{\infty} J^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) d\zeta \tag{1.94}$$

où

$$J^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) = \Re\int_0^{\infty} A^i\left(\frac{\eta c_S^0}{h}\right) \frac{\exp\left(\mathrm{i}\eta\left(\zeta\frac{x_1-x_1^s}{h} + \psi(\zeta)\frac{x_2^s-h}{h} - \frac{c_S^0}{h}t\right)\right)}{\mathrm{i}\psi(\zeta)\cos\left(\eta\phi(\zeta)h\right) + v\phi(\zeta)\sin\left(\eta\phi(\zeta)h\right)} d\eta \tag{1.95}$$

Nous rappelons que $\psi(\zeta) \in \mathbb{R}$ pour $|\zeta| < 1$ et est imaginaire pure pour $|\zeta| > 1$. Nous définissons donc :

$$\psi(\zeta) = \mathrm{i}\theta(\zeta) = \mathrm{i}|\sqrt{\zeta^2 - 1}|;\ |\zeta| > 1 \tag{1.96}$$

et de façon équivalente

$$\phi(\zeta) = \mathrm{i}\chi(\zeta) = \mathrm{i}|\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}|;\ |\zeta| > \Re(\gamma) \tag{1.97}$$

Alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x_g}, t) &= -\frac{c_S^0}{\pi h}\left(\int_{-1}^{1} J_1^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) d\zeta + \left[\int_{-\Re(\gamma)}^{-1} + \int_1^{\Re(\gamma)}\right] J_2^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) d\zeta + \right. \\ &\quad \left. \left[\int_{-\infty}^{-\Re(\gamma)} + \int_{\Re(\gamma)}^{\infty}\right] J_3^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) d\zeta\right) \\ &= u_1^1(\mathbf{x_g}, t) + u_2^1(\mathbf{x_g}, t) + u_3^1(\mathbf{x_g}, t) \end{aligned} \tag{1.98}$$

où

$$\begin{aligned} J_1^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) &= \Re\int_0^{\infty} A^i\left(\frac{\eta c_S^0}{h}\right) \mathcal{D}_1^{-1}(\zeta, \eta) \exp\left(\mathrm{i}\eta\left(\zeta\frac{x_1 - x_1^s}{h} + \psi(\zeta)\frac{x_2^s - h}{h} - \frac{c_S^0}{h}t\right)\right) d\eta \\ J_2^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) &= \Re\int_0^{\infty} A^i\left(\frac{\eta c_S^0}{h}\right) \mathcal{D}_2^{-1}(\zeta, \eta) \exp\left(\mathrm{i}\eta\left(\zeta\frac{x_1 - x_1^s}{h} + \mathrm{i}\theta(\zeta)\frac{x_2^s - h}{h} - \frac{c_S^0}{h}t\right)\right) d\eta \\ J_3^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) &= \Re\int_0^{\infty} A^i\left(\frac{\eta c_S^0}{h}\right) \mathcal{D}_3^{-1}(\zeta, \eta) \exp\left(\mathrm{i}\eta\left(\zeta\frac{x_1 - x_1^s}{h} + \mathrm{i}\theta(\zeta)\frac{x_2^s - h}{h} - \frac{c_S^0}{h}t\right)\right) d\eta \end{aligned} \tag{1.99}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\zeta, \eta) &= \mathrm{i}\psi(\zeta)\cos\left(\eta\phi(\zeta)h\right) + v\phi(\zeta)\sin\left(\eta\phi(\zeta)h\right) \\ \mathcal{D}_2(\zeta, \eta) &= -\theta(\zeta)\cos\left(\eta\phi(\zeta)h\right) + v\phi(\zeta)\sin\left(\eta\phi(\zeta)h\right) \\ \mathcal{D}_3(\zeta, \eta) &= -\theta(\zeta)\cosh\left(\eta\chi(\zeta)h\right) - v\chi(\zeta)\sinh\left(\eta\chi(\zeta)h\right) \end{aligned} \tag{1.100}$$

L'analyse théorique de la section II.1.1.5.3 et les résultats numériques de la section II.1.1.6, nous permettent de négliger directement la contribution de $u_3^1(\mathbf{x_g}, t)$, et de ne considérer que les quantités $J_1^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta)$ et $J_2^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta)$.

1.1.8.2 Ingrédients spécifiques de la réponse temporelle sur le sol

La réponse temporelle sur le sol se réduit à une somme d'intégrales du type :

$$J(\zeta) = \int_0^\infty A^i\left(\frac{c_S^0\eta'}{h}\right)\frac{\mathcal{N}(\zeta,\eta')}{\mathcal{D}(\zeta,\eta')}d\eta' \tag{1.101}$$

intégrale dans laquelle η à été remplacé par η' pour mettre en évidence le fait que nous intégrons sur une variable réelle et dans laquelle nous employons la forme générique $\mathcal{N}(\zeta,\eta') = \exp\left(-\mathrm{i}\eta' T(\zeta)\right)$, $T(\zeta) \in \mathbb{C}$.
Les racines de $\mathcal{D}(\zeta,\eta)$ sont déterminées en annexe C et sont telles que :

$$\mathcal{D}(\zeta,\eta) = 0 \text{ pour } \eta = \eta_m = \eta'_m + \mathrm{i}\eta''_m,\ m = 0,1,2,3 \tag{1.102}$$

avec $\eta'_m \geqq 0$ et $\eta''_m \leqq 0$. Développons maintenant $\mathcal{D}(\zeta,\eta')$ en série de Taylor autour des quantités $\eta = \eta_m$:

$$\mathcal{D}(\zeta,\eta') \approx \mathcal{D}(\zeta,\eta_m) + \left(\eta' - \eta_m\right)\left.\frac{\mathcal{D}(\zeta,\eta)}{\eta}\right|_{\eta-\eta_m} + ... = \mathcal{D}(\zeta,\eta_m) + \left(\eta' - \eta_m\right)\left.\dot{\mathcal{D}}(\zeta,\eta)\right|_{\eta-\eta_m} + ... \tag{1.103}$$

En introduisant ce développement dans l'équation (II.1.101) et en utilisant (II.1.102), il vient :

$$J(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\eta'^m}^{\eta'^{m+1}} A^i\left(\frac{c_S^0\eta'}{h}\right)\frac{\mathcal{N}(\zeta,\eta')}{\dot{\mathcal{D}}(\zeta,\eta_m)\left(\eta' - \eta'_m - \mathrm{i}\eta''_m\right)}d\eta' \tag{1.104}$$

où $\eta^{0'} = 0$, et les $\eta^{m'}$ sont des points sur l'axe η' tels que $\eta^{m'} = \dfrac{\eta'_m - \eta'_{m-1}}{2}$. Deux possibilités de résolution s'offrent alors à nous. Soit une analytique qui fait intervenir les fonctions $\mathrm{E_i}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, [5], soit une résolution approchée, plus aisée pour l'analyse. Nous développerons ici la seconde possibilité. Appelons $\mathcal{G}_m(\eta')$ la gaussienne :

$$\mathcal{G}_m(\eta') = \frac{1}{\sqrt{\pi}\eta''_m \exp\left(\frac{(\eta'-\eta'_m)^2}{(\eta''_m)^2}\right)}. \tag{1.105}$$

Le développement en série de Taylor du terme exponentiel donne :

$$\exp\left(\frac{(\eta'-\eta'_m)^2}{(\eta''_m)^2}\right) = 1 + \frac{(\eta'-\eta'_m)^2}{(\eta''_m)^2} + ... \approx \frac{\left((\eta'-\eta'_m)^2 + (\eta''_m)^2\right)}{(\eta''_m)^2} \tag{1.106}$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{G}_m(\eta') \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\eta''_m}{\left((\eta'-\eta'_m)^2 + (\eta''_m)^2\right)} \tag{1.107}$$

En supposant que le spectre varie très faiblement par rapport aux gaussiennes centrées en η'_m, et que chaque gaussienne est telle que sa contribution sur l'intervalle étendu est négligeable, nous pouvons écrire :

$$J(\zeta) \approx \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}A^i\left(\frac{c_S^0\eta'_m}{h}\right)}{\eta''_m\dot{\mathcal{D}}(\zeta,\eta_m)}\int_0^\infty \mathcal{G}_m(\eta')\mathcal{N}(\zeta,\eta')\left(\eta' - \eta'_m + \mathrm{i}\eta''_m\right)d\eta' \tag{1.108}$$

c'est-à-dire

$$J(\zeta) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} A^i\left(\frac{c_S^0 \eta'_m}{h}\right)}{\eta''_m \dot{\mathcal{D}}(\zeta, \eta_m)} \left(K_1(\zeta) + \left(-\eta'_m + \mathrm{i}\eta''_m\right) K_2(\zeta)\right) d\eta' \tag{1.109}$$

avec

$$\begin{aligned} K_1(\zeta) &= \int_0^{\infty} \mathcal{G}_m(\eta')\mathcal{N}(\zeta,\eta')\eta' d\eta' = \frac{1}{\eta''_m\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\mathrm{i}\eta' T(\zeta) - \frac{(\eta'-\eta'_m)^2}{(\eta''_m)^2}\right) \eta' d\eta' \\ K_2(\zeta) &= \int_0^{\infty} \mathcal{G}_m(\eta')\mathcal{N}(\zeta,\eta') d\eta' = \frac{1}{\eta''_m\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\mathrm{i}\eta' T(\zeta) - \frac{(\eta'-\eta'_m)^2}{(\eta''_m)^2}\right) d\eta' \end{aligned} \tag{1.110}$$

Réalisons les changements de variable :

$$\varpi = \frac{2\eta'_m - \mathrm{i}\,(\eta''_m)^2 T(\zeta)}{2} \quad \xi = \frac{\eta' - \varpi}{\eta''_m} \tag{1.111}$$

Alors les intégrales $K_1(\zeta)$ et $K_2(\zeta)$ deviennent :

$$\begin{aligned} K_1(\zeta) = \; & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\mathrm{i}\eta'_m T(\zeta) - \left(\frac{\eta''_m T(\zeta)}{2}\right)^2\right) \times \\ & \int_{-\frac{\varpi}{\eta''_m}}^{\infty} \left(\eta''_m \xi + \left(\eta'_m - \mathrm{i}\frac{(\eta''_m)^2 T(\zeta)}{2}\right)\right) \exp\left(-\xi^2\right) d\xi \\ K_2(\zeta) = \; & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\mathrm{i}\eta'_m T(\zeta) - \left(\frac{\eta''_m T(\zeta)}{2}\right)^2\right) \int_{-\frac{\varpi}{\eta''_m}}^{\infty} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi \end{aligned} \tag{1.112}$$

En nous référant à [5], p297, nous avons :

$$\int_0^z \exp\left(-\xi^2\right) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \; \mathrm{erf}(\infty) = 1 \tag{1.113}$$

si bien que, supposant $\eta''_m << \varpi$, il vient :

$$\begin{aligned} K_2(\zeta) &= \exp\left(-\mathrm{i}\eta'_m T(\zeta) - \left(\frac{\eta''_m T(\zeta)}{2}\right)^2\right) \\ K_1(\zeta) &= \left(\left(\eta'_m - \mathrm{i}\frac{(\eta''_m)^2 T(\zeta)}{2}\right)\right) K_2(\zeta) \end{aligned} \tag{1.114}$$

L'expression de $J(\zeta)$ est donc approchée par :

$$J(\zeta) \approx \mathrm{i}\sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^i\left(\frac{c_S^0 \eta'_m}{h}\right)}{\dot{\mathcal{D}}(\zeta, \eta_m)} \left(1 - \frac{\eta''_m T(\zeta)}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\eta'_m T(\zeta) - \left(\frac{\eta''_m T(\zeta)}{2}\right)^2\right) \tag{1.115}$$

En appliquant cette approximation aux quantités $J_1^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta)$ et $J_2^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta)$, il vient :

$$\begin{aligned} & J_1^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) \approx \\ & -\Im\sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^i\left(\frac{c_S^0 \eta^{\mathrm{Be}'}_m}{h}\right)}{\dot{\mathcal{D}}(\zeta, \eta^{\mathrm{Be}}_m)} \left(1 - \frac{\eta^{\mathrm{Be}''}_m T(\zeta)}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\eta^{\mathrm{Be}'}_m T_1(\zeta) - \left(\frac{\eta^{\mathrm{Be}''}_m T_1(\zeta)}{2}\right)^2\right) - \\ & \Im\sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^i\left(\frac{c_S^0 \eta^{\mathrm{Bo}'}_m}{h}\right)}{\dot{\mathcal{D}}(\zeta, \eta^{\mathrm{Bo}}_m)} \left(1 - \frac{\eta^{\mathrm{Bo}''}_m T_1(\zeta)}{2}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\eta^{\mathrm{Bo}'}_m T(\zeta) - \left(\frac{\eta^{\mathrm{Bo}''}_m T_1(\zeta)}{2}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{1.116}$$

avec

$$T_1(\zeta) = -\frac{x_1 - x_1^s}{h}\zeta - \frac{x_2^s - h}{h}\psi(\zeta) + \frac{c_S^0 t}{h} \tag{1.117}$$

et

$$\begin{aligned} &J_2^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) \approx \\ &-\Im\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^i\left(\frac{c_S^0 \eta_m^{\mathrm{Le}'}}{h}\right)}{\dot{\mathcal{D}}(\zeta, \eta_m^{\mathrm{Le}})}\left(1 - \frac{\eta_m^{\mathrm{Le}''} T(\zeta)}{2}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Le}''} T_2(\zeta) - \left(\frac{\eta_m^{\mathrm{Le}'} T_2(\zeta)}{2}\right)^2\right) - \\ &\Im\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^i\left(\frac{c_S^0 \eta_m^{\mathrm{Lo}'}}{h}\right)}{\dot{\mathcal{D}}(\zeta, \eta_m^{\mathrm{Lo}})}\left(1 - \frac{\eta_m^{\mathrm{Lo}''} T_2(\zeta)}{2}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Lo}'} T(\zeta) - \left(\frac{\eta_m^{\mathrm{Lo}''} T_2(\zeta)}{2}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{1.118}$$

avec

$$T_2(\zeta) = -\frac{x_1 - x_1^s}{h}\zeta - \mathrm{i}\frac{x_2^s - h}{h}\theta(\zeta) + \frac{c_S^0 t}{h} \tag{1.119}$$

1.1.8.3 Champ de déplacement $u_1^1(\mathbf{x}, t)$ lié aux phénomènes d'interférence

Nous posons :

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{x_g}, \mathbf{x}^s, \zeta) &= -X_1\zeta - X_2\psi(\zeta) \\ X_1 = \frac{x_1 - x_1^s}{h},\ X_2 &= \frac{x_2^s - h}{h} \end{aligned} \tag{1.120}$$

En introduisant l'expression de $J_1^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta)$ (II.1.116) dans l'équation de $u_1^1(\mathbf{x}, t)$ (II.1.98), il vient :

$$\begin{aligned} &u_1^1(\mathbf{x}, t) = \\ &\Im\sum_{m=0}^{\infty} A^i\left(\frac{c_S^0 \eta_m^{\mathrm{Be}'}}{h}\right)\int_{-1}^{1} \mathcal{Q}_{1m}^{\mathrm{Be}}(\mathbf{x_g}, \mathbf{x}^s, \zeta)\exp\left(\mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Be}'}\left(X_1\zeta + X_2\psi(\zeta) - \frac{c_S^0}{h}t\right)\right)d\zeta + \\ &\Im\sum_{m=0}^{\infty} A^i\left(\frac{c_S^0 \eta_m^{\mathrm{Bo}'}}{h}\right)\int_{-1}^{1} \mathcal{Q}_{1m}^{\mathrm{Bo}}(\mathbf{x_g}, \mathbf{x}^s, \zeta)\exp\left(\mathrm{i}\eta_m^{\mathrm{Bo}'}\left(X_1\zeta + X_2\psi(\zeta) - \frac{c_S^0}{h}t\right)\right)d\zeta \end{aligned} \tag{1.121}$$

avec

$$\begin{aligned} &\mathcal{Q}_{1m}^{\mathrm{B}}(\mathbf{x_g}, \mathbf{x}^s, \zeta) = \frac{c_S^0}{h\sqrt{\pi}}\frac{\left(1 + \frac{\eta_m^{\mathrm{B}''}}{2}\left(X_1\zeta + X_2\psi(\zeta) - \frac{c_S^0 t}{h}\right)\right)}{\dot{\mathcal{D}}_1(\zeta, \eta_m^{\mathrm{B}})}\times \\ &\exp\left(-\frac{(\eta_m^{\mathrm{B}''})^2}{4}\left(X_1^2\zeta^2 + X_2^2\psi^2(\zeta) + 2x_1X_2\zeta\psi(\zeta) - 2\left(X_1\zeta + X_2\psi(\zeta)\right)\frac{c_S^0 t}{h} + \left(\frac{c_S^0 t}{h}\right)^2\right)\right) \end{aligned} \tag{1.122}$$

Cette formule amène plusieurs remarques.

$u_1^1(\mathbf{x}, t)$ est la réponse dans le domaine temporel correspondant à $\mathrm{I}_1^1(\mathbf{x}, t)$, équation (II.1.43), qui prenait la forme d'une intégrale sur ζ (où plus exactement sur k_1) d'interférence d'ondes propagatives SOP1. Ici, une intégrale du même type apparaît, mais sous la forme d'une fonction d'onde de la forme

$$\mathcal{U}_{1m}^1(\mathbf{x_g}, t, \zeta) = \Im\mathcal{Q}_{1m}^{\mathrm{B}}(\mathbf{x_g}, \mathbf{x}^s, \zeta)\exp\left(\mathrm{i}\eta_m^{B'}\left(X_1\zeta + X_2\psi(\zeta) - \frac{c_S^0}{h}t\right)\right) \tag{1.123}$$

Puisque $\eta_m^{B'}$ et $\eta_m^{B''}$ sont des quantités positives, le facteur $\exp\left(\mathrm{i}\eta_m^{B'}[\ ]\right)$ représente une fonction sinusoïdale des variables de temps et d'espace, et le facteur $\exp\left(-\left(\eta_m^{B'}\right)^2[\ ]\right)$ est un terme d'atténuation. Le taux d'atténuation peut varier d'une fonction linéaire du temps, pour t petit, à une fonction quadratique du temps pour t grand. Le terme $U_{1m}^1(\mathbf{x_g},t,\zeta)$ correspond au $m^{\text{ème}}$ "mode" d'Haskell. Nous avons écrit le terme mode entre cotes, car le statut de ces modes est un peu particulier. Effectivement, ce sont toujours des modes avec une partie imaginaire non-nulle, en particulier dans le cas non-dissipatif. En ce sens, ils peuvent être associés à des phénomènes d'interférence ou à des quantités communément appelées "leaky modes".

1.1.8.4 Champ de déplacement $u_2^1(\mathbf{x},t)$, lié à l'excitation de modes de Love

Nous posons :

$$\begin{aligned} U_2(\mathbf{x_g},\mathbf{x}^s,\zeta) &= -X_1\zeta - \mathrm{i}X_2\theta(\zeta) \\ X_1 &= \frac{x_1-x_1^s}{h},\ X_2 = \frac{x_2^s-h}{h} \end{aligned} \tag{1.124}$$

En introduisant l'expression de $J_2^1(\mathbf{x_g},t,\zeta)$ (II.1.116) dans l'équation de $u_2^1(\mathbf{x},t)$ (II.1.98), il vient :

$$\begin{aligned} &u_2^1(\mathbf{x},t) = \\ &\Im\sum_{m=0}^{\infty} A^i\left(\frac{c_S^0\eta_m^{\mathrm{Le}'}}{h}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{Q}_{2m}^{\mathrm{Le}}(\mathbf{x_g},\mathbf{x}^s,\zeta)\exp\left(\mathrm{i}\left(X_1\zeta-\frac{c_S^0t}{h}\right)\left(\eta_m^{\mathrm{Le}'}-X_2\theta(\zeta)\frac{(\eta_m^{\mathrm{Le}''})^2}{2}\right)\right)d\zeta + \\ &\Im\sum_{m=0}^{\infty} A^i\left(\frac{c_S^0\eta_m^{\mathrm{Lo}'}}{h}\right)\int_{-1}^{1}\mathcal{Q}_{2m}^{\mathrm{Lo}}(\mathbf{x_g},\mathbf{x}^s,\zeta)\exp\left(\mathrm{i}\left(X_1\zeta-\frac{c_S^0t}{h}\right)\left(\eta_m^{\mathrm{Lo}'}-X_2\theta(\zeta)\frac{(\eta_m^{\mathrm{Lo}''})^2}{2}\right)\right)d\zeta \end{aligned} \tag{1.125}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{2m}^{\mathrm{L}}(\mathbf{x_g},\mathbf{x}^s,\zeta) = \frac{c_S^0}{h\sqrt{\pi}}&\frac{\left(1+\frac{\eta_m^{\mathrm{L}''}}{2}\left(X_1\zeta+\mathrm{i}X_2\theta(\zeta)-\frac{c_S^0t}{h}\right)\right)}{\dot{\mathcal{D}}_2(\zeta,\eta_m^{\mathrm{L}})}\times \\ &\exp\left(-\left(\eta_m^{\mathrm{L}'}X_2\theta(\zeta)+\frac{\eta_m^{\mathrm{L}''}}{4}\left(X_1^2\zeta^2-X_2\theta^2-2X_1\zeta\frac{c_S^0t}{h}+\left(\frac{c_S^0t}{h}\right)^2\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{1.126}$$

Cette formule amène plusieurs remarques.

$u_2^1(\mathbf{x},t)$ est la réponse dans le domaine temporel correspondant à $\mathrm{I}_2^1(\mathbf{x},t)$, équation (II.1.56), qui prenait la forme d'une intégrale sur ζ (où plus exactement sur k_1) d'ondes de Love SOP2. Ici, une intégrale du même type apparaît, mais sous la forme d'une fonction d'onde de la forme

$$\mathcal{U}_{2m}^1(\mathbf{x_g},t,\zeta) = \Im\mathcal{Q}_{2m}^{\mathrm{L}}(\mathbf{x_g},\mathbf{x}^s,\zeta)\exp\left(\mathrm{i}\left(X_1\zeta-\frac{c_S^0t}{h}\right)\left(\eta_m^{\mathrm{L}'}-X_2\theta(\zeta)\frac{(\eta_m^{\mathrm{L}''})^2}{2}\right)\right) \tag{1.127}$$

Puisque $\left|\eta_m^{\mathrm{L}'}\right| >> \left|\eta_m^{\mathrm{L}''}\right|$ le facteur $\exp\left(\mathrm{i}[\ ]\left(\eta_m^{\mathrm{L}'}-X_2\theta(\zeta)\frac{(\eta_m^{\mathrm{L}''})^2}{2}\right)\right) \approx \exp\left(\mathrm{i}[\ ]\eta_m^{\mathrm{L}'}\right)$ qui représente une fonction sinusoïdale du temps et de la distance épicentrale. De plus, le terme $\exp(-[\ ])$ est une exponentielle décroissante, ce qui signifie que $\mathcal{U}_{2m}^1(\mathbf{x_g},t,\zeta)$ est une sinusoïde exponentiellement attenuée.
L'atténuation varie d'une fonction linéaire en temps pour t faible à une fonction quadratique en temps pour t grand. Le terme $U_{2m}^1(\mathbf{x_g},t,\zeta)$ correspond au $m^{\text{ème}}$ mode de Love.

1.1.8.5 Condition d'existence de $u_1^1(\mathbf{x},t)$ et $u_2^1(\mathbf{x},t)$

Nous raisonnerons ici uniquement sur les exponentielles décroîssantes intervenant dans les expressions (II.1.126) et (II.1.122). En ce qui concerne les "leaky modes", pour au moins une des quantités X_1, X_2 supérieure à 1, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\frac{(\eta_m^{\mathrm{B}''})^2}{4}\left(X_1^2\zeta^2+X_2^2\psi^2(\zeta)+2X_1X_2\zeta\psi(\zeta)-2\left(X_1\zeta+X_2\psi(\zeta)\right)\frac{c_S^0 t}{h}+\left(\frac{c_S^0 t}{h}\right)^2\right)\right)\approx\\&\exp\left(-\frac{(\eta_m^{\mathrm{B}''})^2}{4}\left(X_1^2\zeta^2+X_2^2\psi^2(\zeta)\right)\right)\times f(t)\end{aligned} \tag{1.128}$$

où $f(t)$ est une fonction du temps. Alors la fonction de l'espace est une exponentielle faiblement décroissante, si $X_2 >> X_1$ et X_1 faible, c'est-à-dire que ce terme sera excité pour de faibles distances épicentrales, en particulier pour X_2 grand.

En ce qui concerne les modes de Love, puisque $\eta_m^{\mathrm{L}'} >> \eta_m^{\mathrm{L}''}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\left(\eta_m^{\mathrm{L}'}X_2\theta(\zeta)+\frac{\eta_m^{\mathrm{L}''}}{4}\left(X_1^2\zeta^2-X_2\theta^2-2X_1\zeta\frac{c_S^0 t}{h}+\left(\frac{c_S^0 t}{h}\right)^2\right)\right)\right)\approx\\&\exp\left(-\eta_m^{\mathrm{L}'}X_2\theta(\zeta)\right)\times g(t)\end{aligned} \tag{1.129}$$

où $g(t)$ est une fonction du temps. Ce terme sera donc grand pour de faibles profondeurs focales.

En conclusion, **deux régimes distincts coexistent** :

- si la **distance épicentrale est faible**, pour $X_2 >> X_1$, **les "leaky modes" sont excités**
- si la **profondeur focale est faible, les modes de Love sont excités**

Les deux types de modes peuvent donc exister en même temps et être d'importance comparable si la profondeur focale et la distance épicentrale sont toutes deux faibles, ce qui peut théoriquement conduire à des battements prononcés.

1.1.9 Conclusion sur l'excitation des modes de Love pour $x_2^s > h$

Nous pouvons maintenant fournir des réponses aux différentes interrogations évoquées en section II.1.1.6.

La première question était : est-il possible d'obtenir, au sens des caractéristiques des réponses sismiques rencontrées dans la ville de Mexico, des champs de déplacement anormaux, sans aucune hétérogénéité latérale?
La configuration étudiée ici était celle d'une couche d'étendue latérale infinie sur un demi-espace plus rigide. Nous avons montré que **la réponse 1D ne rend compte que de phénomènes d'interférence** et qu'il est **impropre** de nommer ces phénomènes **phénomènes résonants**, car ils sont liés à des entités qui ne sont pas des modes "réels" du système mais des leaky modes. Cette réponse **correspond à une grande profondeur focale**.
Lorsque la **profondeur focale**, c'est-à-dire lorsque la distance $x_2^s - h$, est **faible**, les **modes de**

Love sont excités. Cela conduit à des phénomènes de **battements**, section II.1.1.6, dus à une fonction oscillante de la distance épicentrale, section II.1.1.7, à une **amplification** (par rapport à l'analyse 1D) et à une **durée importante**, toujours **par rapport aux résultats de l'analyse 1D**, II.1.1.6. Ces phénomènes sont dus à l'excitation de **modes réels du système**, les modes de Love, qui **ne peuvent être excités** (et mis en évidence dans une analyse 2D (où 3D)), **que par une source cylindrique proche de l'interface** Γ_h.
Lorsque ces modes sont excités, la réponse à la question est donc positive.

La seconde interrogation était : quelle est la relation entre les réponses 1D et 2D du système, et dans quelle mesure la réponse 1D fournit-elle une bonne représentation des phénomènes?
La réponse 1D correspond à une profondeur focale importante et à une distance épicentrale faible. Aucun phénomène réel de résonance n'est associé à cette configuration. Ainsi, **la réponse 1D ne fournit une bonne représentation des phénomènes que dans la cas d'une source profonde**.

La troisième question était : quelle est l'influence de la profondeur focale?
La réponse à cette question réside dans les deux précédentes.

La quatrième question était : quelle est l'influence de la distance épicentrale?
Pour de faibles distances épicentrales, les réponses 1D et 2D peuvent coexister pour une faible profondeur focale, section II.1.1.6 et II.1.1.8. Pour de grandes distances épicentrales, seuls les modes de Love peuvent exister, ce qui conduit à une réponse quasi-monochromatique (selon le spectre incident) et à une durée importante. Pour des distances épicentrales moyennes, des phénomènes de battements peuvent-être observés. Il sont dus à l'excitation des modes de Love, en particulier aux pics satellites, section II.1.1.6 et II.1.1.7.

La cinquième interrogation était : quelle est l'influence du contraste entre les propriétés mécaniques de la couche et celles du substratum?
La position des pics correspondants aux phénomèmes d'interférence, "leaky modes", n'est influencée que par la vitesse des ondes propagatives dans la couche (validation de la formule d'Haskell). **Lorsque le contraste augmente, l'amplitude des ondes augmente d'autant plus**, section II.1.1.5 et II.1.1.6.

La sixième question était : quelle est l'influence de l'épaisseur de la couche?
Plus l'épaisseur de la couche est importante, plus les fréquences fondamentales des modes de Love et des "leaky modes" sont faibles et plus la période de ces pics est élevée.

La septième question était : quelle est l'influence des caractéristiques du champ incident?
Si la bande de fréquences excitées par le champ incident inclut au moins un pic, qu'il soit d'interférence ou de résonance, alors la réponse temporelle qui lui est associée a les caractéristiques décrites dans les réponses aux questions 1 et 2. Si par contre, aucun pic n'est inclus, alors la réponse temporelle est très proche du champ incident. Cela souligne la grande variabilité des résultats.

Une autre configuration est importante à étudier : celle où la source est située dans la couche. Effectivement, les vibrations induites par les transports, les explosions nucléaires souterraines, le

sont pour des sources bien souvent localisées dans la couche. Mais, plus pragmatiquement par rapport au sujet initial, les bâtiments, localisés en surface, induisent une modification locale du champ [176, 119, 21]. En ce sens, il y a fort à parier qu'ils puissent apparaître comme des sources induites, localisées en surface, donc se rapportant à la couche dans la méthode de décomposition de domaine.

1.1.10 Formulation du problème : la source est localisée dans la couche (c.à.d. $0 \leq x_2^s < h$)

Nous recherchons le champ de déplacement total (incident + diffracté) suivant l'axe x_3, $u_3(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t)$ (les autres composantes étant nulles), où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine O et pointant un point générique (x_1, x_2), et où t est la variable de temps. Plutôt que de rechercher directement $u(\mathbf{x},t)$, nous lui préférons sa transformée de Fourier $u(\mathbf{x},\omega)$, vérifiant le système (nous appliquons la décomposition de domaine):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla\cdot\nabla + \left(k^j(\omega)\right)^2\right) u^j(\mathbf{x},\omega) = -f(\mathbf{x},\omega)\delta_{j1} \quad \forall \mathbf{x}\in\Omega_j,\ j=0,1 \\ \text{avec} \\ \\ k^0(\omega) = \dfrac{\omega}{c_S^0};\ k^1(\omega) = \dfrac{\omega}{\left(c_S^1\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q^1}\right)} \end{array} \right. \tag{1.130}$$

Les champs de déplacement $u^j(\mathbf{x},\omega)$, $j=0,1$, doivent vérifier les mêmes conditions aux limites que celles énoncées dans la section précédente, équations (II.1.2), ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

1.1.11 Représentation des champs

En séparant les variables en coordonnées cartésiennes et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, nous obtenons les représentations de champs suivantes :

$$u^0(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B^0(k_1)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 + k_2^0x_2\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_0 \tag{1.131}$$

Plutôt que de considérer une décomposition classique du champ telle que:

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = u^i(\mathbf{x},\omega) + u^{1d}(\mathbf{x},\omega) \tag{1.132}$$

où $u^i(\mathbf{x},\omega)$ est le champ incident et $u^{1d}(\mathbf{x},\omega)$ le champ diffracté, nous lui préférons une décomposition

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = u^i(\mathbf{x},\omega) + u^s(\mathbf{x},\omega) + u^{1d}(\mathbf{x},\omega) \tag{1.133}$$

où $u^i(\mathbf{x},\omega)$ est le champ incident, $u^s(\mathbf{x},\omega)$ est le champ spéculairement réfléchi par Γ_g et $u^{1d}(\mathbf{x},\omega)$ le champ diffracté. L'intérêt majeur d'une telle décomposition réside dans l'application de la condition de surface libre sur Γ_g pour laquelle nous pouvons éliminer directement une des inconnues du champ diffracté. Les champs incident et spéculairement réfléchi s'écrivent :

$$\begin{array}{l} u^i(\mathbf{x},\omega) = \dfrac{\mathrm{i}}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1-x_1^s) + k_2^1|x_2-x_2^s|\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^1}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_1 \\ u^s(\mathbf{x},\omega) = \dfrac{\mathrm{i}}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1-x_1^s) + k_2^1|x_2+x_2^s|\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^1}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_1 \end{array} \tag{1.134}$$

et le champ diffracté :

$$u^{1d}(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^1(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1x_2\right) + B^1(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^1x_2\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^1}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_1 \tag{1.135}$$

1.1.12 Application des conditions aux limites et obtention des champs de déplacement dans la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et dans le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$

Introduisons tout d'abord l'expression du champ (1.133) dans l'équation sur Γ_g, (1.2) (i), et projetons tel que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (1.2) (i) $\exp(-\mathrm{i}k_1' x_1)dx_1$:

$$A^1(k_1) = B^1(k_1) = \frac{C^1(k_1)}{2} \tag{1.136}$$

si bien que (1.133) s'écrit :

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^1(k_1)\cos\left(k_2^1 x_2\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^1} + u^i(\mathbf{x},\omega) + u^s(\mathbf{x},\omega), \forall \mathbf{x}\in\Omega_1 \tag{1.137}$$

Si maintenant nous appliquons les autres conditions aux limites, toujours en projection telle que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (1.4) (ii) ou (iii) $\exp(-\mathrm{i}k_1' x_1)dx_1$, le système obtenu peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} C^1 \\ B^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{i}A^i(\omega)k_2^1}{4\pi k_2^0}\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1 x_1^s + k_2\left(h - x_2^s\right)\right)\right) \\ \dfrac{-A^i(\omega)}{4\pi k_2^0}\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1 x_1^s + k_2\left(h - x_2^s\right)\right)\right) \end{pmatrix} \tag{1.138}$$

avec

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 2\cos\left(k_2^1 h\right) & -\dfrac{k_2^1}{k_2^0}\exp\left(\mathrm{i}k_2^0 h\right) \\ \dfrac{2\mu^1}{\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right) & \mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}k_2^0 h\right) \end{bmatrix} \tag{1.139}$$

Nous pouvons facilement vérifier que la relation de dispersion des modes du système est identique à l'équation (II.1.11), le système restant inchangé. Les modes sont donc les modes de Love.

La résolution du système (II.1.139) conduit aux expressions des champs $u^0(\mathbf{x},\omega)$ et $u^1(\mathbf{x},\omega)$ suivantes :

$$u^0(\mathbf{x},\omega) = \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 - h\right)\right)\cos\left(k_2^1 x_2^s\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{1.140}$$

et

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x},\omega) = \;& u^i(\mathbf{x},\omega) + u^s(\mathbf{x},\omega) + \\ & \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^1 h\right)\cos\left(k_2^1 x_2^s\right)\cos\left(k_2^1 x_2\right)\left(\frac{\mu^1}{\mu^0} - \frac{k_2^0}{k_2^1}\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{1.141}$$

Une autre façon d'écrire le champ dans la couche est de rassembler les champs spéculairement réfléchi, incident et diffracté. Deux cas sont alors possibles :

– si $x_2 \leqq x_2^s$

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x},\omega) = \;& \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right)\right)\cos\left(k_2^1 x_2\right)\cos\left(k_2^1 x_2\right)\times \\ & \frac{\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2^s - h\right)\right) + \mathrm{i}\frac{k_2^0\mu^0}{k_2^1\mu^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2^s - h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{1.142}$$

– si $x_2 \geqq x_2^s$

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right)\right)\cos\left(k_2^1 x_2^s\right)\cos\left(k_2^1 x_2\right)\times \frac{\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right) + \mathrm{i}\frac{k_2^0\mu^0}{k_2^1\mu^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{1.143}$$

1.1.13 Champ de déplacement sur le sol

La forme que prend le champ $u^1(\mathbf{x},\omega)$ en un point $\mathbf{x_g}$ de la surface Γ_g est :

$$u^1(\mathbf{x_g},\omega) = \quad u^i(\mathbf{x_g},\omega) + u^s(\mathbf{x_g},\omega) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^1 h\right)\cos\left(k_2^1 x_2^s\right)\left(\frac{\mu^1}{\mu^0} - \frac{k_2^0}{k_2^1}\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{1.144}$$

Nous pouvons alors séparer cette intégrale sur les trois intervalles $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_3$, de façon à exhiber les ondes SOP1, SOP2 et SOS3. Une première remarque concerne alors les amplitudes de ces ondes. Dans le cas non-dissipatif, seules les ondes SOS3 sont atténuées par le truchement des cosh et sinh, les ondes SOP1 et SOP2 ne sont, elles, pas atténuées. Cela signifie que les trois types d'ondes peuvent exister dans cette configuration, y compris, sur de faibles distances, les ondes de surface.

Nous définissons le fonction de transfert associée au champ diffracté dans la couche $TF^{1d}(\mathbf{x},\omega) = \frac{u^{1d}(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$. Par exemple, pour une source localisée à $\mathbf{x^s} = (0, 25m)$, l'épaisseur de la couche étant $h = 50m$ et les paramètres des matériaux étant ceux de la ville de Mexico, nous obtenons pour les champs diffractés $u^{1d}(\mathbf{x_g},\omega)$, figure II.1.26.

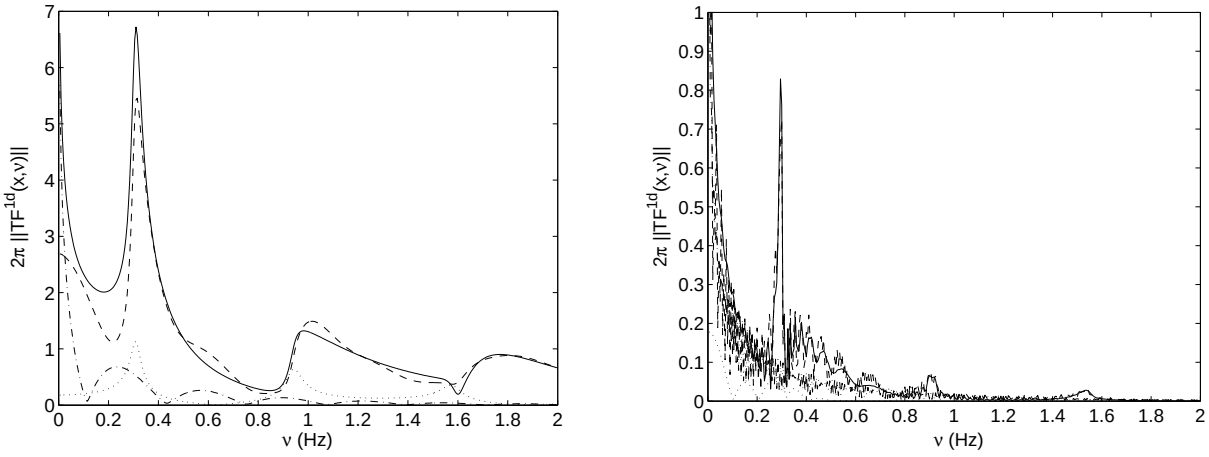


FIG. 1.26 – *Mexico (MC) - 2π fois le module la fonction de transfert du champ diffracté. Courbe en trait continu, $2\pi\left\|TF^{1d}(\mathbf{x},\nu)\right\|$, courbe en pointillés, la composante correspondant à l'intervalle $\mathcal{I}_1$, courbe en tirets, la composante correspondant à l'intervalle $\mathcal{I}_2$, courbe en tirets et pointillés la composante correspondant à l'intervalle $\mathcal{I}_3$. À gauche pour $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$ et à droite pour $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$, la source étant localisée à $\mathbf{x^s} = (0, 25m)$.*

Les ondes SOP2 dominent au niveau des pics. Ainsi les modes de Love sont excités. Les ondes SOP1 et SOS3 existent également. En particulier, des pics satellites sont encore rencontrés, cette fois pour une distance épicentrale relativement importante. Dans le domaine temporel, nous observons une durée importante et des battements dans le second cas, figure II.1.27.

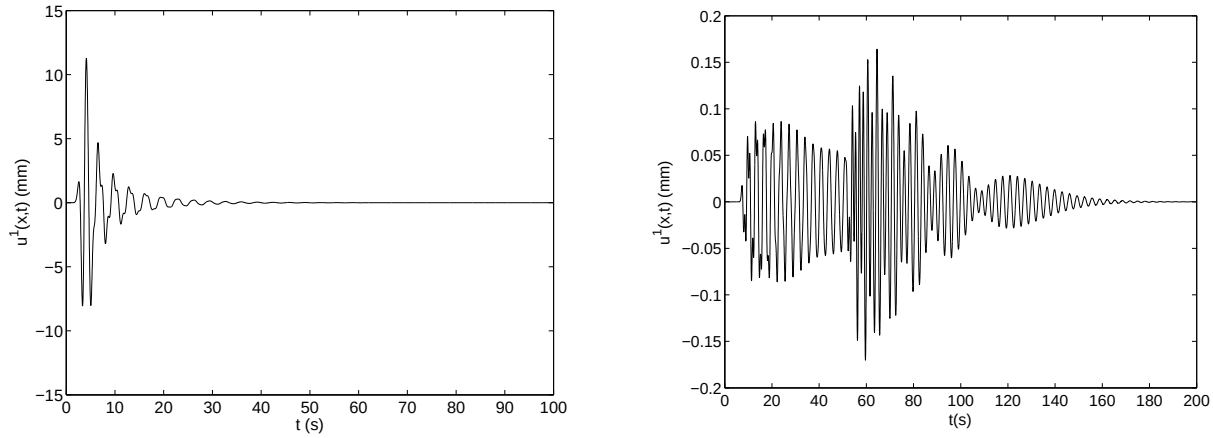


FIG. 1.27 – *Mexico (MC) - $u^1(\mathbf{x_g}, t)$; à gauche pour $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$ et à droite pour $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$.*

Ainsi, **pour une source dans la couche, les modes de Love sont toujours excités et dominants. Des ondes de surface dans la couche sont générées et les sismogrammes présentent des battements prononcés pour des distances épicentrales importantes.**

1.1.14 Utilisation de la théorie des modes de Love pour l'étude des effets régionaux

Nous examinons maintenant la façon dont une onde provenant d'une source située en dessous de la croûte, mais proche de celle-ci se propage sur de grandes distances.

Nous construisons un modèle plausible de croûte en partant des paramètres d'une couche mince, telle que $\rho^0 = 2000kg.m^{-3}$, $\rho^1 = 1300kg.m^{-3}$, $c_S^0 = 600m.s^{-1}$, $\left(c_S^1\right)_R = 200m.s^{-1}$, $Q_S^0 = \infty$ et $Q_S^1 = 30$, et $h = 80m$ et en supposant la conservation des quantités $k^1 h$, $\dfrac{\rho^0}{\rho^1}$. Considérons que nous disposons de deux configurations, une première correspondant à une couche mince et connue, distinguée par l'indice 1, et une seconde correspondant à une couche plus épaisse inconnue, distinguée par l'indice 2. La configuration 1 est composée d'une couche relativement mince, dissipative et molle, alors que la couche de la configuration 2 est plus dure. Puisqu'un matériau dur est moins dissipatif que ne l'est un matériau plus mou, nous supposons un facteur de qualité arbitraire $Q_{S,2}^1 = 500$, alors que le facteur de qualité du substratum est toujours considéré infini $Q_{S,2}^0 = \infty$. La conservation de la quantité $k_1 h$ signifie $k_1^1 h_1 = k_2^1 h_2$, c'est-à-dire, pour un milieu non-dissipatif $\left(c_S^1\right)_2 = \dfrac{\left(c_S^1\right)_1 h_2 \nu_2}{h_1 \nu_1}$. Si nous choisissons $\nu_1 = 1Hz$ et $\nu_2 = 0.08Hz$, et $h_2 = 10 \times 10^3 m$, cela implique $\left(c_S^1\right)_2 = 2000m.s^1$. La conservation du rapport des densités $\dfrac{\rho_1^0}{\rho_1^1} = \dfrac{\rho_2^0}{\rho_2^1}$, avec $\rho_2^0 = 2600kg.m^3$ (densité proche de celle du granite), conduit à $\rho_2^1 = 1690kg.m^{-3}$. Nous choisissons alors $\left(c_S^0\right)_2 = 3000m.s^{-1}$, vitesse des ondes de cisaillement proche de celle du granite. Finalement, nous choisissons de conserver la distance

relative de la source à la couche sur la profondeur focale $\frac{(x_2^s - h)}{x_2^s}$, ce qui conduit à $x_1^s = 12 \times 10^3 m$.

Notre but est à la fois 1) de comprendre l'augmentation de l'amplitude observée dans [70], et 2) de dégager une tentative d'explication des résultats obtenus en champ libre à $250km$ de la source dans [48].

Intéressons-nous tout d'abord aux fonctions de transfert pour des points d'observation localisés entre 0 et $350 \times 10^3 m$, figure , figure II.1.29. De façon similaire à ce que nous avons pu observer dans le cas de la couche mince, **la fonction de transfert pour une distance épicentrale faible est dominée par la présence de deux types d'ondes**, les ondes SOP1 et SOP2. **L'amplitude des ondes SOP1 décroît rapidement, alors que celle des ondes SOP2 décroît beaucoup moins rapidement puisqu'elles sont associées à des modes de Love**. Ainsi, dès une distance de $50km$, les phénomènes dominants sont l'excitation des modes de Love. **Cela explique pourquoi les ondes se propagent sur une si longue distance.**

Intéressons-nous maintenant aux accélérations correspondantes, la sollicitation étant délivrée au site sous la forme d'une onde cylindrique de type pseudo-Ricker centrée à $\nu_0 = 0.2Hz$, figure II.1.30. Nous remarquons un **allongement signicatif de la durée au fur et à mesure que la distance épicentrale augmente**. La forme de l'accélération est relativement comparable à celle obtenue en champ libre dans [48]. Cela signifie que **certains traits relatifs à la propagation régionale sont liés, non seulement à la source, mais aussi à des phénomènes d'excitation de modes de couches**. Les accélérogrammes présentent également plusieurs **battements**, ce qui signifie que les traits caractéristiques de certains effets, initialement imputés aux seuls "effets site-ville", sont déjà présents dans la coda touchant la ville.

Par contre, l'excitation des modes de Love ne semble pas conduire, comme il a été observé dans [70], à une **augmentation de l'amplitude maximale de la vitesse**, figure II.1.28. Elle est **certainement imputable, soit à une modification de l'épaisseur de la couche, soit à une hétérognéité de celle-ci, soit aux deux**.

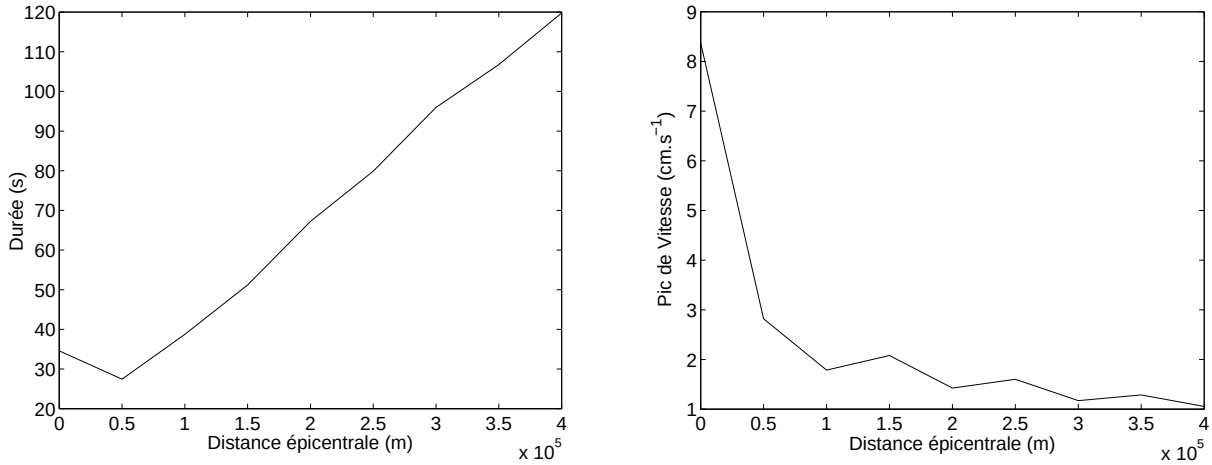


FIG. 1.28 – *À gauche, évolution de la durée du sismogramme en fonction de la distance épicentrale, et à droite, évolution de la vitesse maximale en fonction de la distance épicentrale.*

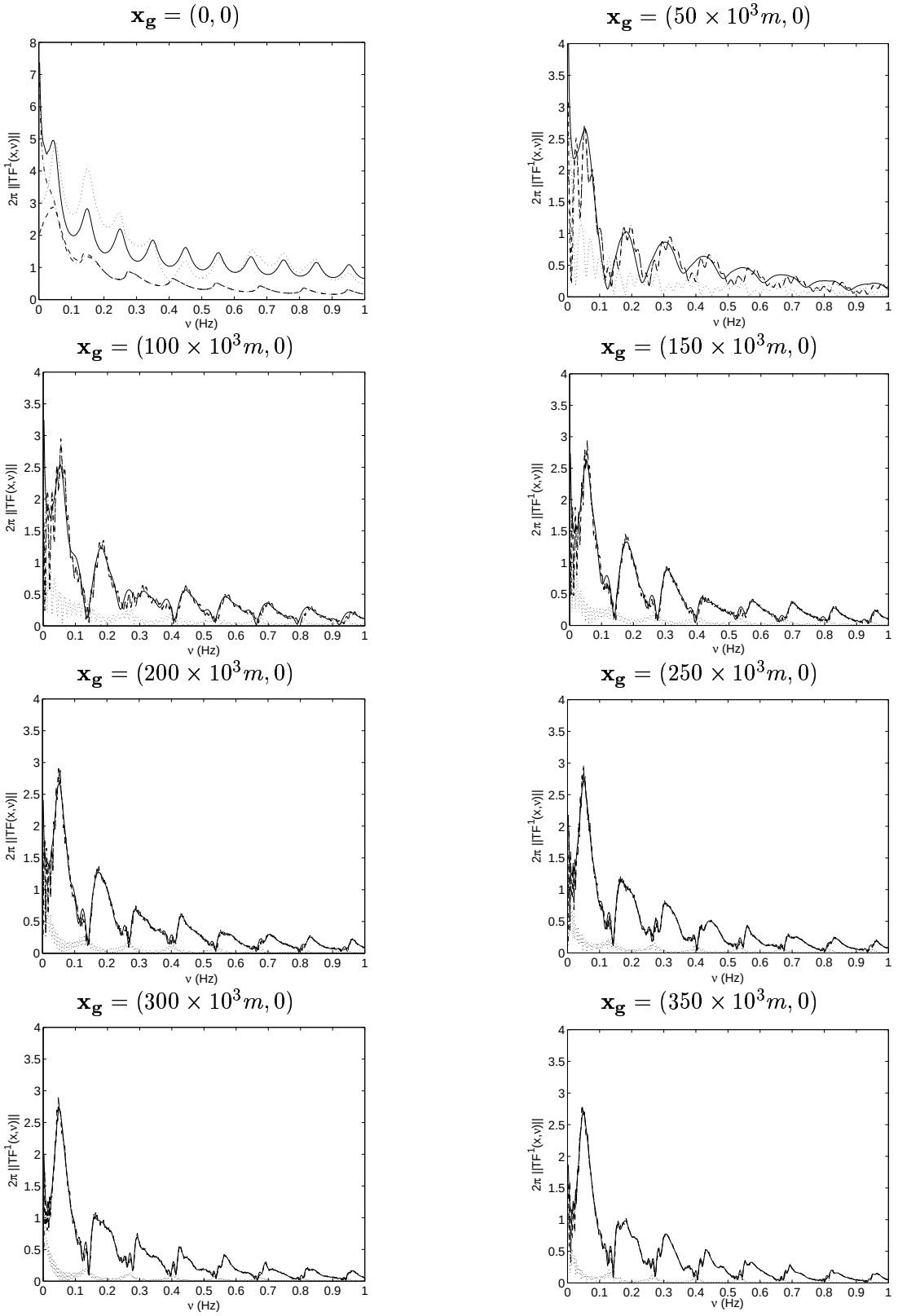


FIG. 1.29 – 2π *fois le module des fonctions de transfert (déplacement,* $TF^1(\mathbf{x}, \nu)$*) entre les points* $\mathbf{x_g} = (0, 0)$ *et* $\mathbf{x_g} = (350km, 0)$

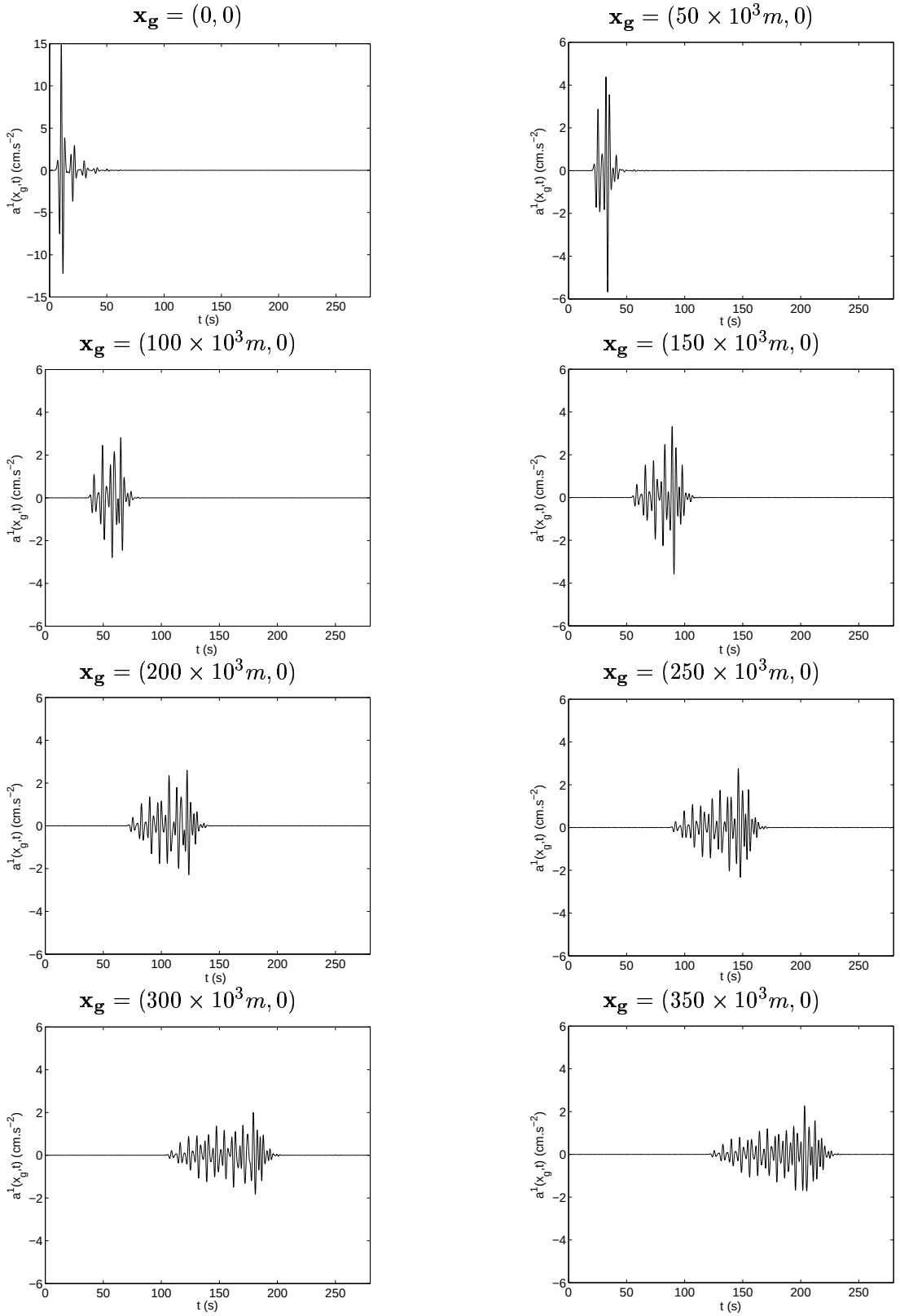


FIG. 1.30 – *Accélération sur le sol entre les points* $\mathbf{x_g} = (0, 0)$ *et* $\mathbf{x_g} = (350km, 0)$

1.2 Problème à deux couches

Le bassin sur lequel est construite la ville de Mexico est souvent modélisé avec deux milieux, [66, 67]. Dès lors, une étude simplifiée de la configuration à deux couches peut-être porteuse d'informations. Ce cas fut précédemment étudié [166, 167, 150], toujours pour une onde plane incidente. Une condition d'existence d'une onde de Love pour ce problème est que la vitesse des ondes de cisaillement de l'une au moins des couches soit inférieure à celle du substratum, [150].

Comme dans le cas des ondes de Love II.1.31, nous étudierons un premier problème où la source cylindrique est placée dans le subtratum, et un second où cette même source est placée dans la couche supérieure. De plus, nous nous pencherons sur la possibilité d'exciter les modes de Love de la couche supérieure avec une onde plane, dans cette configuration.

La figure II.1.31 représente une section orthogonale à la surface (plan sagittal) du site. Γ_g est la surface, supposée horizontale, au-dessus de laquelle le matériau est l'air (supposé être le vide). Ω_2 (respectivement Ω_1) est un domaine d'étendue latérale infinie, d'épaisseur h (respectivement H). Ω_0 est un domaine semi-infini, supposé représenter le substratum (H.H.S.). L'interface entre les domaines Ω_2 et Ω_1 (respectivement Ω_1 et Ω_0) est appelée Γ_{21} (respectivement Γ_{10}). Un système de coordonnées cartésiennes $Ox_1x_2x_3$ est attaché à cette configuration tel que le point O est situé sur la surface, x_2 croît avec la profondeur et x_3 est perpendiculaire au plan de la figure. En appelant $\mathbf{i}_j$ le vecteur unité associé à l'axe x_j, $j = 1, 2$ dans le plan sagittal, le vecteur unitaire normal aux interfaces Γ_g, Γ_{21} et Γ_{10} est $\mathbf{i}_2$. Les matériaux, M^0, M^1, et M^2, occupant les domaines Ω_0, Ω_1, et Ω_2 sont supposés ordonnés par ordre décroissant de leur module de rigidité, tels que $\mu^0 > \mu^1_R > \mu^2_R$. Ils sont supposés être linéaires, isotropes, homogènes et au repos à l'état initial. Nous supposons que M^0 est un matériau non-dissipatif, alors que M^1 et M^2 sont des matériaux dissipatifs.

M^0 est caractérisé par $\rho^0 = 2670 kg.m^{-3}$, $c^0_S = 2530 m.s^{-1}$, et $Q^0_S = \infty$, M^1 par $\rho^1 = 1800 kg.m^{-3}$, $\left(c^1_S\right)_R = 500 m.s^{-1}$ et $Q^1_S = 50$, et enfin M^2 par $\rho^2 = 1300 kg.m^{-3}$, $\left(c^2_S\right)_R = 80 m.s^{-1}$ et $Q^2_S = 25$, [66, 67].

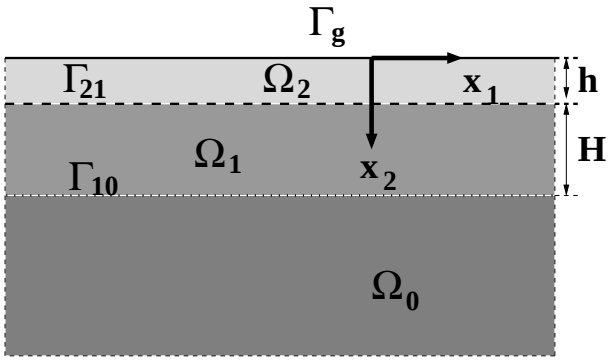


FIG. 1.31 –

La sollicitation sismique est supposée être délivrée par une source cylindrique suivant l'axe x_3, polarisée en onde de cisaillement horizontal, située au point $\mathbf{x^s} = (x^s_1, x^s_2)$. La polarisation SH et l'invariance du champ incident suivant x_3, nous permettent de traiter un problème $2D$ (les déplacements dépendant alors exclusivement des coordonnées x_1 et x_2, et orientés suivant l'axe x_3). Nous nous intéresserons uniquement à une description du champ de déplacement sur la surface Γ_g.

1.2.1 La source est localisée dans le substratum (c.à.d. $x_2^s > h + H$)

1.2.1.1 Formulation du problème

Nous recherchons le champ de déplacement total (incident + diffracté) suivant l'axe x_3 $u_3(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t)$ (les autres composantes étant nulles), où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine O et pointant un point générique (x_1, x_2), et où t est la variable de temps. Plutôt que de rechercher directement $u(\mathbf{x},t)$, nous lui préférons sa transformée de Fourier $u(\mathbf{x},\omega)$, vérifiant le système (nous appliquons la décomposition de domaine):

$$\begin{cases} \left(\nabla\cdot\nabla + \left(k^j(\omega)\right)^2\right) u^j(\mathbf{x},\omega) = -f(\mathbf{x},\omega)\delta_{j0} \quad \forall \mathbf{x}\in\Omega_j,\ j=0,1,2 \\ \text{avec} \\ k^0(\omega) = \dfrac{\omega}{c_S^0};\ k^j(\omega) = \dfrac{\omega}{\left(c_S^j\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S^j}\right)},\ j=1,2,\ w_{ref}=0.09 rad.s^1 \end{cases} \tag{1.145}$$

Les champs de déplacement $u^j(\mathbf{x},\omega)$, $j=0,1,2$, doivent vérifier les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{x}\in\Gamma_g \begin{cases} \mu^2(\omega)\dfrac{\partial u^2(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2} = 0 & (i) \end{cases} \\ &\forall \mathbf{x}\in\Gamma_{21} \begin{cases} u^2(\mathbf{x},\omega) - u^1(\mathbf{x},\omega) = 0 & (ii) \\ \mu^2(\omega)\dfrac{\partial u^2(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2} - \mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2} = 0 & (iii) \end{cases} \\ &\forall \mathbf{x}\in\Gamma_{10} \begin{cases} u^1(\mathbf{x},\omega) - u^0(\mathbf{x},\omega) = 0 & (iv) \\ \mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2} - \mu^0(\omega)\dfrac{\partial u^0(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2} = 0 & (v) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.146}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

1.2.1.2 Représentation des champs

En séparant les variables dans les coordonnées cartésiennes et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, nous obtenons les représentations de champs suivantes :

$$u^0(\mathbf{x},\omega) = u^i(\mathbf{x},\omega) + u^{0d}(\mathbf{x},\omega), \forall \mathbf{x}\in\Omega_0 \tag{1.147}$$

avec

$$\begin{aligned} u^{0d}(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B^0(k_1)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 + k_2^0x_2\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_0, \text{ le champ diffracté et} \\ u^i(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1-x_1^s) + k_2^0|x_2-x_2^s|\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_0, \text{ le champ incident} \end{aligned} \tag{1.148}$$

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^1(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1x_2\right) + B^1(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^1x_2\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^1}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_1 \tag{1.149}$$

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^2(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^2x_2\right) + B^2(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^2x_2\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^2}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_2 \tag{1.150}$$

1.2.1.3 Application des conditions aux limites

Introduisons tout d'abord l'expression du champ (II.1.150) dans l'équation sur Γ_g, (II.1.146) (i), et projetons tel que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.1.146) (i) $\exp(-\mathrm{i}k_1' x_1)dx_1$:

$$A^2(k_1) = B^2(k_1) = \frac{C^2(k_1)}{2} \tag{1.151}$$

si bien que (II.1.150) s'écrit :

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_1)^2 \cos\left(k_2^2 x_2\right) \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \frac{dk_1}{k_2^2}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \tag{1.152}$$

Si maintenant nous appliquons les autres conditions aux limites, toujours en projection telle que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.1.146) (ii), (iii), ou (iv) $\exp(-\mathrm{i}k_1' x_1)dx_1$, le système obtenu peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} C^1 \\ B^1 \\ A^1 \\ B^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\mathrm{i}A^i(\omega)}{4\pi k_2^0} \exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1 x_1^s + k_2\left(h + H - x_2^s\right)\right)\right) \\ \dfrac{-\mathrm{i}\mu_1 A^i(\omega)}{4\pi k_2^0} \exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1 x_1^s + k_2\left(h + H - x_2^s\right)\right)\right) \end{pmatrix} \tag{1.153}$$

avec

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\left(k_2^2 h\right)}{k_2^2} & \dfrac{-\exp\left(\mathrm{i}k_2^1 h\right)}{k_2^1} & \dfrac{-\exp\left(-\mathrm{i}k_1^1 h\right)}{k_2^1} & 0 \\ \mathrm{i}\mu_2 \sin\left(k_2^2 h\right) & -\mu_1 \exp\left(\mathrm{i}k_1^1 h\right) & \mu_1 \exp\left(-\mathrm{i}k_1^1 h\right) & 0 \\ 0 & \dfrac{\exp\left(\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right)}{k_2^1} & \dfrac{\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right)}{k_2^1} & \dfrac{-\exp\left(\mathrm{i}k_2^0\left(h+H\right)\right)}{k_2^0} \\ 0 & \mu_1 \exp\left(\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right) & -\mu_1 \exp\left(-\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right) & -\mu_0 \exp\left(\mathrm{i}k_2^0\left(h+H\right)\right) \end{bmatrix} \tag{1.154}$$

Remarque : La matrice carrée composée des deux premières colonnes et des deux premières lignes correspond au cas des modes de Love de la couche supérieure.

La façon d'obtenir les modes du système est d'annuler le déterminant $\Delta = \det(\mathcal{D})$ de la matrice $\mathcal{D}$, (II.1.154). La relation de dispersion qui en découle est :

$$\cos\left(k_2^2 h\right)\left(\cos\left(k_2^1 H\right) - \mathrm{i}\kappa^{10}\sin\left(k_2^1 H\right)\right) - \mathrm{i}\kappa^{20}\sin\left(k_2^2 h\right)\left(\cos\left(k_2^1 H\right) - \mathrm{i}\kappa^{01}\sin\left(k_2^1 H\right)\right) = 0 \tag{1.155}$$

où $\kappa^{ij} = \dfrac{k_2^i \mu_i}{k_2^j \mu_j}$, $i \neq j$, $(i,j) = 0,1,2$. Nous pouvons alors vérifier la véracité de cette relation de dispersion :

- si $H = 0$, l'équation (II.1.155) devient :

$$\cos\left(k_2^2 h\right) - \mathrm{i}\kappa^{20}\sin\left(k_2^2 h\right) = 0 \tag{1.156}$$

qui est la relation de dispersion des modes de Love pour une couche Ω_2 d'épaisseur h sur un substratum Ω_0.

- si $h = 0$, l'équation (II.1.155) devient :

$$\cos\left(k_2^1 H\right) - \mathrm{i}\kappa^{10}\sin\left(k_2^1 H\right) = 0 \tag{1.157}$$

qui est la relation de dispersion des modes de Love pour une couche Ω_1 d'épaisseur H sur un substratum Ω_0.

- si les matériaux M^2 et M^1 sont identiques, l'équation (II.1.155) devient :

$$\cos\left(k_2^1 (h+H)\right) - \mathrm{i}\kappa^{10}\sin\left(k_2^1 (h+H)\right) = 0 \tag{1.158}$$

qui est la relation de dispersion des modes de Love pour une couche Ω_1 d'épaisseur $H+h$ sur un subtsratum Ω_0.

1.2.1.4 Champ de déplacement sur le sol

La résolution du système linéaire (II.1.152) conduit à :

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + k_2^0\left(x_2^s - (h+H)\right)\right)\right)\cos\left(k_2^2 x_2\right)}{\left(\cos\left(k_2^1 H\right) - \mathrm{i}\kappa^{10}\sin\left(k_2^1 H\right)\right)} \times \frac{1}{\cos\left(k_2^2 h\right) - \mathrm{i}\kappa^{20}\sin\left(k_2^2 h\right)\frac{\left(\cos\left(k_2^1 H\right) - \mathrm{i}\kappa^{01}\sin\left(k_2^1 H\right)\right)}{\left(\cos\left(k_2^1 H\right) - \mathrm{i}\kappa^{10}\sin\left(k_2^1 H\right)\right)}} \frac{dk_1}{k_2^0} \tag{1.159}$$

Remarque : Si $H = 0$ (respectivement $h = 0$) dans l'équation (II.1.159), nous retrouvons l'expression du champ dans le cas d'une couche d'épaisseur h (respectivement H), équation (II.1.13).

De façon analogue à la section II.1.1, nous ponvons séparer cette intégrale, sur les différents intervalles $\mathcal{I}_1 = [-k^0, k^0]$, $\mathcal{I}_2 = [-\Re\left(k^1\right), -k^0[\cup]k^0, \Re\left(k^1\right)]$, $\mathcal{I}_3 = [-\Re\left(k^2\right), -\Re\left(k^1\right)[\cup]\Re\left(k^1\right), \Re\left(k^2\right)]$, et $\mathcal{I}_4 =]-\infty, -\Re\left(k^2\right)[\cup]\Re\left(k^2\right), \infty[$, les nombres d'onde k^j des domaines Ω_j, $j = 0, 1, 2$, étant ordonnés de telle sorte que $k^0 < \Re\left(k^1\right) < \Re\left(k^2\right)$. Alors, dans le cas où M^1 et M^2 sont des matériaux non-dissipatifs et sur les intervalles d'intégration $\mathcal{I}_j$, $j = 2, 3, 4$, le nombre d'onde $k_2^0 = \mathrm{i}\left|k_2^0\right|$ est imaginaire pur et le terme au numérateur $\exp\left(\mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s - (h+H)\right)\right)$ devient une exponentielle décroissante $\left(\exp\left(-\left|k_2^0\right|\left(x_2^s - (h+H)\right)\right)\right)$. **Similairement à l'excitation des modes de Love, nous ne pourrons exciter** "correctement" des **modes** pour lesquels $k_1 > k^0$, que si la quantité $\left(x_2^s - (h+H)\right)$ est faible, c'est-à-dire, **si la source est proche de l'interface** Γ_{10}. **La relation de dispersion**, (II.1.155), de façon similaire à celle des modes de Love, ne **s'annule**, dans notre cas (c.à.d. $k^0 < k^1 < k^2$), que **sur les intervalles** $\mathcal{I}_2$**, et** $\mathcal{I}_3$, [64] qui correspondent à :

- $\mathcal{I}_2$: ondes de surface (OS) dans le substratum (HS), et ondes propagatives (OP) dans les deux couches (SL1 et SL2)

- $\mathcal{I}_3$: ondes de surface (OS) dans le substratum (HS) et dans la couche inférieure (SL1), et ondes propagatives (OP) dans la couche supérieure (SL2)

De façon similaire à la section II.1.1, nous définissons la fonction de transfert $TF^2(\mathbf{x},\omega)$ associée au déplacement dans la couche supérieure, par $TF^2(\mathbf{x},\omega) = \dfrac{u^2(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$.

Par exemple, si nous plaçons la source à $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$ et regardons le champ de déplacement au point $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$:

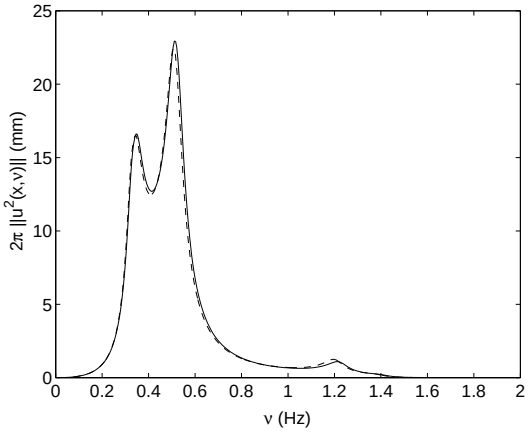


FIG. 1.32 – *Mexico - 2π fois le module du spectre $\left\|u^2(\mathbf{x},\nu)\right\|$, où $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$, la source étant placée à $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$. Courbe en trait continu : résultats semi-analytiques. Courbe en tirets : résultats numériques.*

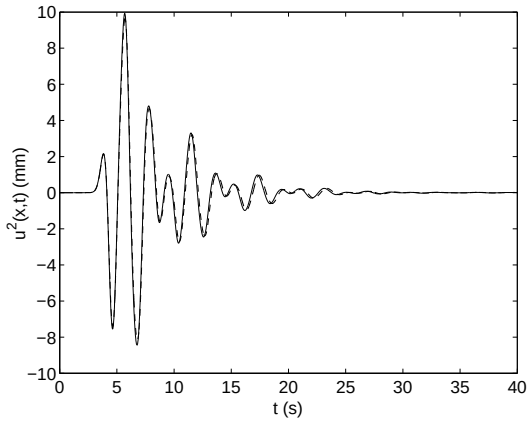


FIG. 1.33 – *Mexico - $u^2(\mathbf{x},t)$, où $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$, la source étant placée à $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$. Courbe en trait continu : résultats semi-analytiques. Courbe en tirets : résultats numériques.*

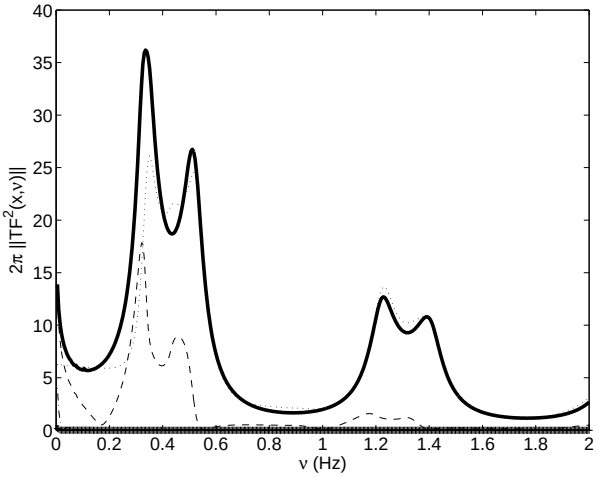


FIG. 1.34 – *Mexico - $2\pi \left\|TF^2(\mathbf{x},\nu)\right\|$, où $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$, la source étant placée à $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$. Courbe en trait continu épais : $2\pi \left\|TF^2(\mathbf{x},\nu)\right\|$. Courbe en pointillés : $\mathcal{I}_1$. Courbe en tirets : $\mathcal{I}_2$. Courbe en tirets et pointillés : $\mathcal{I}_3$. Courbe en trait continu avec marqueur ++ : $\mathcal{I}_4$.*

Les figures II.1.32 et II.1.33, représentent une comparaison du module du spectre $\left\|u^2(\mathbf{x},\omega)\right\|$ (figure II.1.32) et du sismogramme correspondant $u^2(\mathbf{x},t)$ (figure II.1.33) obtenus à l'aide du code Éléments-Finis (section II.2), avec les mêmes quantités obtenues semi-analytiquement à l'aide de la formule (II.1.159). Le spectre $\left\|u^2(\mathbf{x},\omega)\right\|$ présente des **pics assez doux**, semblant apparaître de

façon **périodique**, par **paires**. Cette forme assez douce est caractéristique de phénomènes d'interférence. Chaque paire de pics correspond à des **phénomènes d'interférence** à l'intérieur et entre les couches SL1 et SL2, figure II.1.34. La durée, figure II.1.33, n'excède pas $25s$.

Effectivement, **ces pics sont majoritairement dus à la partie de l'intégrale** $\mathcal{I}_1$ qui correspond à des **ondes propagatives dans les trois domaines**. Aucun mode ne peut être excité dans cet intervalle, [64]. Les composantes $\mathcal{I}_3$ et $\mathcal{I}_4$, correspondant à des ondes de surface dans les deux couches, n'interviennent pas. Il ne peut y avoir, dans cette configuration, d'ondes de surface au niveau de Γ_g.

Si maintenant, nous rapprochons la source de l'interface Γ_{10}, alors la quantité $x_2^s - (h + H)$, est plus faible, et nous pouvons mieux exciter les composantes correspondant à $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_3$. Plaçons par exemple la source au point $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$ et intéressons-nous au champ de déplacement au point $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$.

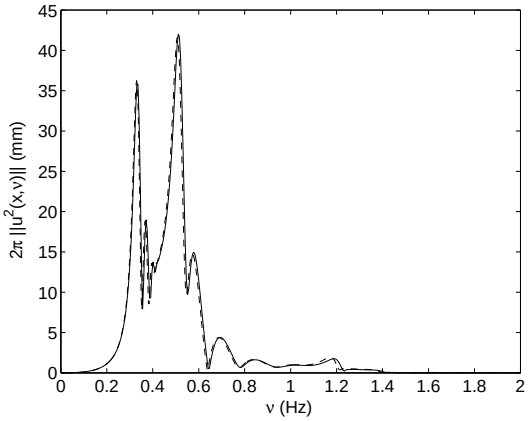


FIG. 1.35 – *Mexico - 2π fois le module du spectre $\left\|u^2(\mathbf{x},\nu)\right\|$, où $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$, la source étant placée à $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$. Courbe en trait continu : résultats semi-analytiques. Courbe en tirets : résultats numériques.*

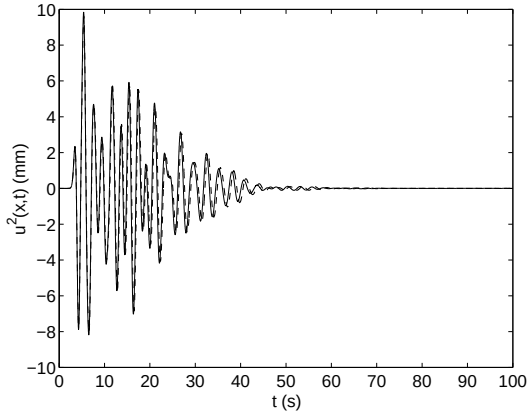


FIG. 1.36 – *Mexico - $u^2(\mathbf{x},t)$, où $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$, la source étant placée à $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$. Courbe en trait continu : résultats semi-analytiques. Courbe en tirets : résultats numériques.*

Les figures II.1.35 et II.1.36, représentent respectivement une comparaison du spectre $\left\|u^2(\mathbf{x},\omega)\right\|$ (figure II.1.35) et du sismogramme correspondant $u^2(\mathbf{x},t)$ (figure II.1.36) obtenus à l'aide du code Éléments-Finis (2), et obtenus semi-analytiquement en implémentant la formule (II.1.159). Le module du spectre $\left\|u^2(\mathbf{x},\omega)\right\|$ présente des **pics prononcés avec décroissances abruptes**, semblant apparaître de façon **périodique par paires**, caractéristiques d'**excitation de modes**. Chaque paire de pics correspond à une interférence d'ondes propagatives dans les couches, les ondes dans le substratum étant évanescentes, figure II.1.37. **Ces pics sont légèrement déplacés vers les basses fréquences par rapport à ceux observés dans le cas où la source est loin de** Γ_{10}. La durée, figure II.1.36, est d'environ $55s$ et les sismogrammes présentent des **battements** caractéristiques d'un **"scindage" dans le domaine fréquentiel**. Ce "scindage" semble provenir de la première paire de pics. La composante correspondant à l'intervalle $\mathcal{I}_3$ admet un pic d'amplitude très faible aux environs de $0.4Hz$, qui est la fréquence à laquelle apparaitrait le mode de Love dans le cas où la couche inférieure serait d'épaiseur infinie ($\nu_0^{\mathrm{Lo}} \approx \nu_0^{\mathrm{Bo}} = \dfrac{c_S^2}{4h} = 0.4Hz$). La faible importance

de cette composante est due au fait que l'onde générée par la source **ne peut pas exciter d'ondes de surface au niveau de** Γ_{10}, ces ondes étant rapidement atténuées.

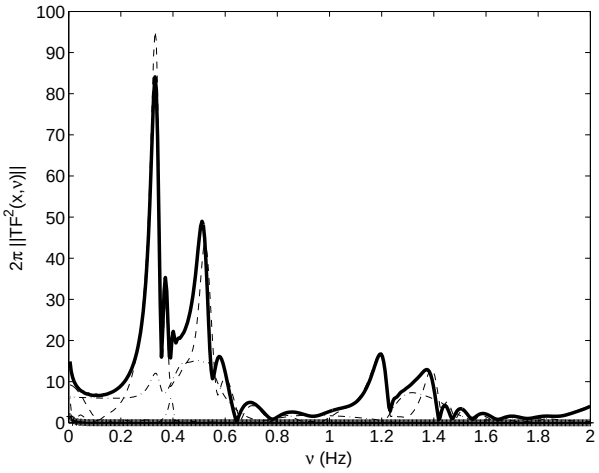


FIG. 1.37 – *Mexico* - $2\pi \left\|TF^2(\mathbf{x},\omega)\right\|$, *où* $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$, *la source étant placée à* $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$. *Courbe en trait continu épais :* $2\pi \left\|TF^2(\mathbf{x},\omega)\right\|$. *Courbe en pointillés :* $\mathcal{I}_1$. *Courbe en tirets :* $\mathcal{I}_2$. *Courbe en tirets et pointillés :* $\mathcal{I}_3$. *Courbe en trait continu avec marqueur ++ :* $\mathcal{I}_4$.

Effectivement, **ces pics sont majoritairement dus à l'intégrale sur** $\mathcal{I}_2$, qui correspondent à des **ondes de surface dans le substratum** et des **ondes propagatives dans les deux couches**. Ainsi, ces pics sont réellement associés aux modes, [64]. **La composante** $\mathcal{I}_4$**, correspondant à des ondes de surface dans la couche supérieure SL1, n'intervient pas.**

Dans cette configuration, **les modes que nous pouvons exciter correspondent à des ondes évanescentes dans le substratum et à une interférence** (d'où les paires de pics) **d'ondes propagatives dans les deux couches**. La structure de ces modes est donc proche de celle des modes de Love. Nous les appellerons donc modes de **Love généralisés**.

La comparaison des sismogrammes pour des points d'observation $\mathbf{x_g}$ identiques, permet de mieux comprendre l'impact de la position de la source, et par conséquent celui des phénomènes mis en jeu :

– pour une source située à $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$,

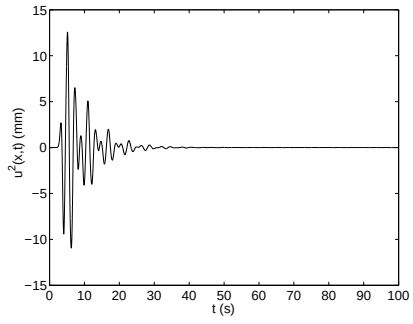


FIG. 1.38 – $u^2(100m, 0m, t)$

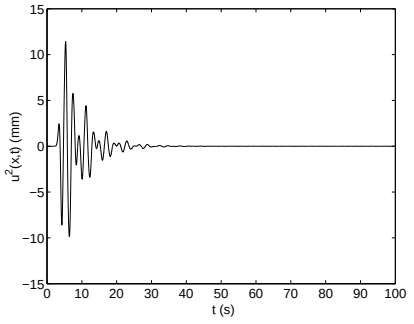


FIG. 1.39 – $u^2(1700m, 0m, t)$

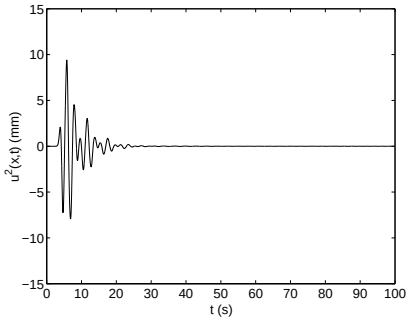


FIG. 1.40 – $u^2(3300m, 0m, t)$

– pour une source située à $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$,

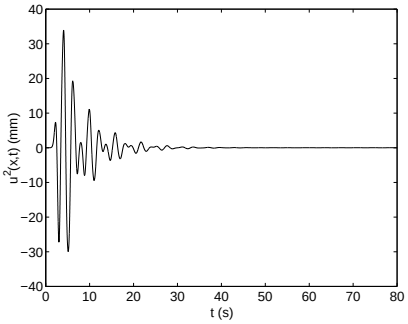


FIG. 1.41 – $u^2(100m, 0m, t)$

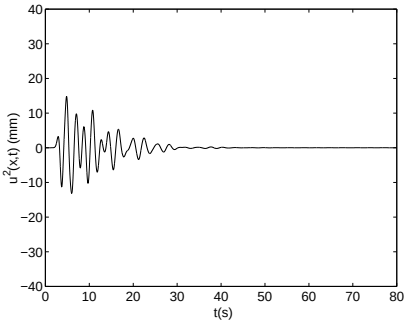


FIG. 1.42 – $u^2(1700m, 0m, t)$

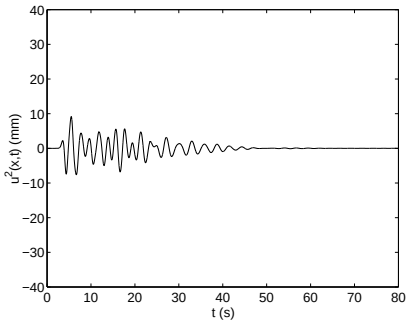


FIG. 1.43 – $u^2(3300m, 0m, t)$

Dans le cas où **la source est loin de l'interface** Γ_{10} (figure II.1.38, II.1.39, II.1.40), aucun mode n'est excité et nous avons à faire à des **phénomènes d'interférence**. Les sismogrammes ont des caractéristiques similaires le long de Γ_g, avec **une durée et une amplitude décroissantes au fur et à mesure que nous nous éloignons de la source**. En particulier, la durée varie d'environ 30s au point $\mathbf{x_g} = (100m, 0m)$, à environ 20s au point $\mathbf{x_g} = (3300m, 0m)$.

Dans le cas où **la source est proche de l'interface** Γ_{10} (figures II.1.41, II.1.42, II.1.43), des **modes sont excités**. Les sismogrammes ont des tracés qui varient, d'une forme proche de ceux obtenus lorsque la source est loin de Γ_{10}, à la quasi-verticale de la source, à la **présence de battements**, lorsque la distance épicentrale est grande. **L'amplitude décroît lorsque la distance épicentrale augmente, alors que la durée**, elle, **augmente** d'environ 30s au point $\mathbf{x_g} = (100m, 0m)$ à environ 55s au point $\mathbf{x_g} = (3300m, 0m)$.

Nous pouvons, par exemple, comparer les spectres et les sismogrammes à une distance hypocentrale quasi-équivalente :

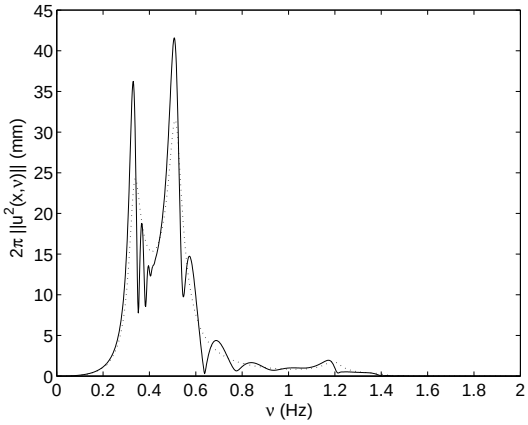


FIG. 1.44 – *Mexico* - 2π *fois le module du spectre* $\left\|u^2(\mathbf{x}, \omega)\right\|$ *: courbe en trait continu,* $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$ *et* $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$ *; courbe en pointillés,* $\mathbf{x_g} = (900m, 0m)$ *et* $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$

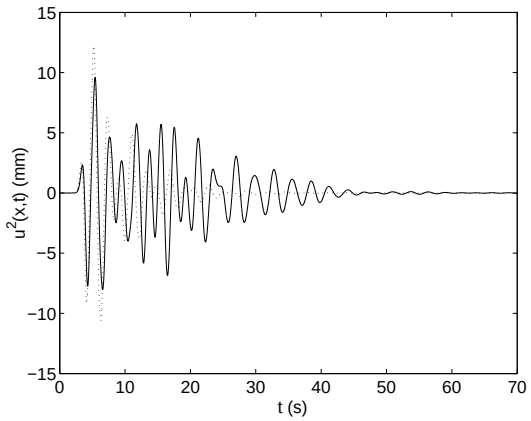


FIG. 1.45 – *Mexico* - $u^2(\mathbf{x}, t)$ *: courbe en trait continu,* $\mathbf{x} = (3100m, 0m)$ *et* $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$ *; courbe en pointillés,* $\mathbf{x} = (900m, 0m)$ *et* $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$

Effectivement, si le point d'observation est situé à $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$ et la source est située à $\mathbf{x^s} = (0m, 450m)$, la distance hypocentrale vaut $r_1^s = \sqrt{(x_1 - x_1^s)^2 + (x_2 - x_2^s)^2} \approx 3132,5m$, alors que si le point d'observation est situé à $\mathbf{x_g} = (900m, 0m)$ et la source est située à $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$, la distance hypocentrale est alors $r_2^s = \sqrt{(x_1 - x_1^s)^2 + (x_2 - x_2^s)^2} \approx 3132,1m$. Les pics sont décalés vers les basses fréquences lorsque les modes sont excités , figure II.1.44. Les sismogrammes présentent des battements et sont d'une durée largement plus grande (environ le double) si la source est proche de l'interface Γ_{10}. Les amplitudes maximales sont quasiment identiques.
Ainsi, les conclusions concernant les modes de Love et la critique des différentes études menées en excitant les configurations, aussi compliquées soient-elles, avec des ondes planes en incidence normale, restent valables pour un nombre de couches supérieur à $N = 1$. Pis encore, les sismogrammes présentent des battements plus prononcés.

Considérons maintenant le cas où la source est située dans la couche. L'idée sous-jacente est toujours que les bâtiments peuvent apparaître comme des sources induites.

1.2.2 La source est localisée dans la couche supérieure (c.à.d. $0 \leq x_2^s < h < H$)

1.2.2.1 Formulation du problème

Nous recherchons le champ de déplacement total (incident + diffracté) suivant l'axe x_3, $u_3(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t)$ (les autres composantes étant nulles), où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine O et pointant un point générique (x_1, x_2), et où t est la variable de temps. Plutôt que de rechercher directement $u(\mathbf{x}, t)$, nous lui préférons sa transformées de Fourier $u(\mathbf{x}, \omega)$, vérifiant le système (nous appliquons la décomposition de domaine):

$$\begin{cases} \left(\nabla \cdot \nabla + \left(k^j(\omega)\right)^2\right) u^j(\mathbf{x}, \omega) = -f(\mathbf{x}, \omega)\delta_{j2} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0, 1, 2 \\ \text{avec} \\ k^0(\omega) = \dfrac{\omega}{c_S^0};\ k^j(\omega) = \dfrac{\omega}{\left(c_S^j\right)_R} \left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S^j}\right)},\ j = 1, 2,\ w_{ref} = 0.09 rad.s^1 \end{cases} \tag{1.160}$$

Les champs de déplacement $u^j(\mathbf{x}, \omega)$, $j = 0, 1, 2$, doivent vérifier les mêmes conditions aux limites que celles énoncées dans la section précédente, équations (II.1.146), ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

1.2.2.2 Représentation des champs

En séparant les variables dans les coordonnées cartésiennes, et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, nous obtenons les représentations de champs suivantes :

$$u^0(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B^0(k_1) \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1 x_1 + k_2^0 x_2\right)\right) \frac{dk_1}{k_2^0}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \tag{1.161}$$

$$u^1(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A^1(k_1) \exp\left(-\mathrm{i}k_2^1 x_2\right) + B^1(k_1) \exp\left(\mathrm{i}k_2^1 x_2\right)\right) \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \frac{dk_1}{k_2^1}, \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \tag{1.162}$$

Plutôt que de considérer une décomposition classique du champ telle que:

$$u^2(\mathbf{x}, \omega) = u^i(\mathbf{x}, \omega) + u^{2d}(\mathbf{x}, \omega) \tag{1.163}$$

où $u^i(\mathbf{x},\omega)$ est le champ incident et $u^{2d}(\mathbf{x},\omega)$ le champ diffracté, nous lui préférons une décomposition

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = u^i(\mathbf{x},\omega) + u^s(\mathbf{x},\omega) + u^{2d}(\mathbf{x},\omega) \tag{1.164}$$

où $u^i(\mathbf{x},\omega)$ est le champ incident, $u^s(\mathbf{x},\omega)$ est le champ spéculairement réfléchi par Γ_g et $u^{2d}(\mathbf{x},\omega)$ le champ diffracté. L'intérêt majeur d'une telle décomposition réside dans l'application de la condition de surface libre sur Γ_g pour laquelle nous pouvons éliminer directement une des inconnues du champ diffracté. Les champs incident et spéculairement réfléchi s'écrivent :

$$\begin{aligned} u^i(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1-x_1^s)+k_2^2|x_2-x_2^s|\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^2}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_2 \\ u^s(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1-x_1^s)+k_2^2|x_2+x_2^s|\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^2}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_2 \end{aligned} \tag{1.165}$$

et le champ diffracté :

$$u^{2d}(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^2(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^2x_2\right)+B^2(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^2x_2\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^2}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_2 \tag{1.166}$$

1.2.2.3 Application des conditions aux limites

Introduisons tout d'abord l'expression du champ (II.1.150) dans l'équation sur Γ_g, (II.1.146) (i), et projetons tel que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.1.146) (i) $\exp(-\mathrm{i}k_1'x_1)dx_1$:

$$A^2(k_1) = B^2(k_1) = \frac{C^2(k_1)}{2} \tag{1.167}$$

si bien que (II.1.164) s'écrit :

$$u^{2d}(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_1)^2\cos\left(k_2^2x_2\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^2}, \forall \mathbf{x}\in\Omega_2 + u^i(\mathbf{x},\omega) + u^s(\mathbf{x},\omega) \tag{1.168}$$

Si maintenant nous appliquons les autres conditions aux limites, toujours en projection telle que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.1.146) (ii), (iii) ou (iv) $\exp(-\mathrm{i}k_1'x_1)dx_1$, le système obtenu peut-être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} C^1 \\ B^1 \\ A^1 \\ B^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\mathrm{i}A^i(\omega)}{2\pi k_2^2}\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1x_1^s+k_2h\right)\right)\cos\left(k_2^2x_2^s\right) \\ \dfrac{-\mathrm{i}\mu_2A^i(\omega)}{2\pi k_2^0}\exp\left(-\mathrm{i}\left(k_1x_1^s+k_2h\right)\right)\cos\left(k_2^2x_2^s\right) \end{pmatrix} \tag{1.169}$$

avec

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\left(k_2^2h\right)}{k_2^2} & \dfrac{-\exp\left(\mathrm{i}k_2^1h\right)}{k_2^1} & \dfrac{-\exp\left(-\mathrm{i}k_1^1h\right)}{k_2^1} & 0 \\ \mathrm{i}\mu_2\sin\left(k_2^2h\right) & -\mu_1\exp\left(\mathrm{i}k_1^1h\right) & \mu_1\exp\left(-\mathrm{i}k_1^1h\right) & 0 \\ 0 & \dfrac{\exp\left(\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right)}{k_2^1} & \dfrac{\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right)}{k_2^1} & \dfrac{-\exp\left(\mathrm{i}k_2^0\left(h+H\right)\right)}{k_2^0} \\ 0 & \mu_1\exp\left(\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right) & -\mu_1\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1\left(h+H\right)\right) & -\mu_0\exp\left(\mathrm{i}k_2^0\left(h+H\right)\right) \end{bmatrix} \tag{1.170}$$

Remarque : La matrice carrée composée des deux premières colonnes et des deux premières lignes correspond au cas des modes de Love de la couche supérieure.

La matrice de propagation $\mathcal{D}$ est identique à celle de l'équation (II.1.170). Seul le terme source est modifié, la source se trouvant maintenant dans le domaine Ω_2. Les modes sont, par essence, identiques à ceux de la section précédente.

1.2.2.4 Champ de déplacement sur le sol

La résolution du système linéaire (II.1.168) conduit à :

$$\begin{aligned} u^{2d}(\mathbf{x},\omega) \quad &= \frac{\mathrm{i}\mu^2}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1\left(x_1-x_1^s\right)+k_2^2h\right)\right)\cos\left(k_2^2x_2\right)\cos\left(k_2^2x_2^s\right)}{\cos\left(k_2^1H\right)-\mathrm{i}\kappa^{10}\sin\left(k_2^1H\right)}\times \\ &\frac{\left(\cos(k_2^1H)-\mathrm{i}\kappa^{01}\sin(k_2^1H)\right)-\kappa^{02}\left(\cos(k_2^1H)-\mathrm{i}\kappa^{10}\sin(k_2^1H)\right)}{\cos\left(k_2^2h\right)-\mathrm{i}\kappa^{20}\sin\left(k_2^2h\right)\frac{\cos\left(k_2^1H\right)-\mathrm{i}\kappa^{01}\sin\left(k_2^1H\right)}{\cos\left(k_2^1H\right)-\mathrm{i}\kappa^{10}\sin\left(k_2^1H\right)}}\frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{1.171}$$

Remarque : Si $H=0$, alors nous retrouvons l'expression du champ diffracté dans le cas d'une seule couche, équation (II.1.144).

Nous séparons, comme précédemment, l'intégrale sur les intervalles $\mathcal{I}_1=[-k^0,k^0]$, $\mathcal{I}_2=[-\Re\left(k^1\right),-k^0[\cup]k^0,\Re\left(k^1\right)]$, $\mathcal{I}_3=[-\Re\left(k^2\right),-\Re\left(k^1\right)[\cup]\Re\left(k^1\right),\Re\left(k^2\right)]$, et $\mathcal{I}_4=]-\infty,-\Re\left(k^2\right)[\cup]\Re\left(k^2\right),\infty[$, les nombres d'onde k^j des domaines Ω_j, $j=0,1,2$, étant ordonnés tels que $k^0<\Re\left(k^1\right)<\Re\left(k^2\right)$. Si les nombres d'onde sont complexes (dans le cas d'une étude avec des matériaux non-dissipatifs), les fonctions cos et sin deviennent des fonctions cosh et isinh. Seul le terme $\exp\left(\mathrm{i}k_2^2h\right)$ au numérateur devient une exponentielle décroissante, $\exp\left(-\left|k_2^2\right|h\right)$. Ainsi, de réelles ondes de surface, c'est-à-dire, des ondes évanescentes de la couche supérieure, peuvent être excitées dans cette configuration. Cependant, elles ne correspondent pas à des modes, si bien qu'elles sont rapidement atténuées. Ces ondes sont d'autant mieux excitées que l'épaisseur de la couche est faible. La localisation de la source dans la couche supérieure a pour effet un couplage fort entre les ondes évanescentes générées par celle-ci avec celles dans la couche inférieure. Cela a pour effet de mettre en avant les quasi-modes de Love (quasi-mode puisque rigoureusement, ils ne correspondent pas cette à configuration) de la couche supérieure apparaissant à une fréquence légèrement inférieure à $\nu_0^{Bo}=0.4Hz$.

Nous définissons le fonction de transfert associée au champ diffracté dans la couche supérieure $TF^{2d}(\mathbf{x},\omega)=\dfrac{u^{2d}(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$.

Les pics sont majoritairement, figure II.1.46, dus aux intégrales sur $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_3$, qui correspondent à des ondes de surface dans le substratum et dans la couche inférieure. Cela signifie que ce sont bien les modes de la configuration qui sont excités. En particulier, un pic à l'intervalle $\mathcal{I}_3$ est relevé aux alentours de $\nu=0.4Hz$ qui correspond au modes quasi-Love. Deux autres pics (ou groupe de pics) apparaissent aux environs de $\nu=0.3Hz$ et $\nu=0.5Hz$ qui sont les fréquences que nous avons relevées pour l'excitation des modes dans la section précédente. Nous pouvons observer un certain nombre de **pics satellites** qui relèvent certainement d'un effet géométrique et d'une interférence entre les modes quasi-Love et les modes excités dans la section précédente. La notion de mode de

Love généralisée englobe la notion de mode quasi-Love. **Des ondes de surface, correspondant à la partie $\mathcal{I}_4$ sont excitées, contrairement au cas où la source est localisée dans le subtratum.** Les réponses correspondantes sont représentées figure II.1.48 et 1.47.

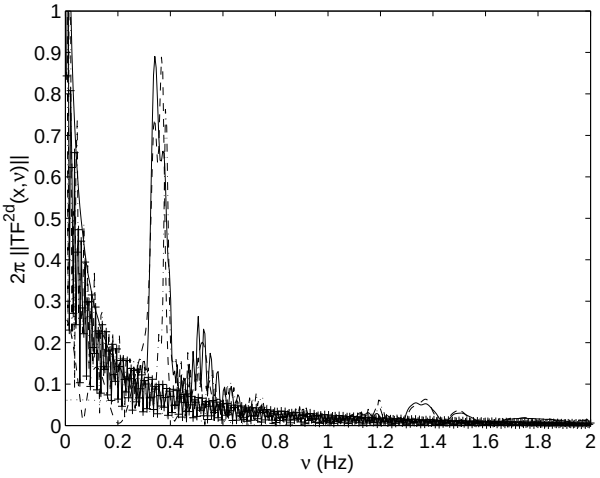


FIG. 1.46 – *Mexico* - $2\pi \left\| TF^{2d}(\mathbf{x},\omega) \right\|$, *où* $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$, *la source étant placée à* $\mathbf{x^s} = (0m, 25m)$. *Courbe en trait continu épais :* $2\pi \left\| TF^{2}(\mathbf{x},\omega) \right\|$. *Courbe en pointillés :* $\mathcal{I}_1$. *Courbe en tirets :* $\mathcal{I}_2$. *Courbe en tirets et pointillés :* $\mathcal{I}_3$. *Courbe en trait continu avec marqueur ++ :* $\mathcal{I}_4$.

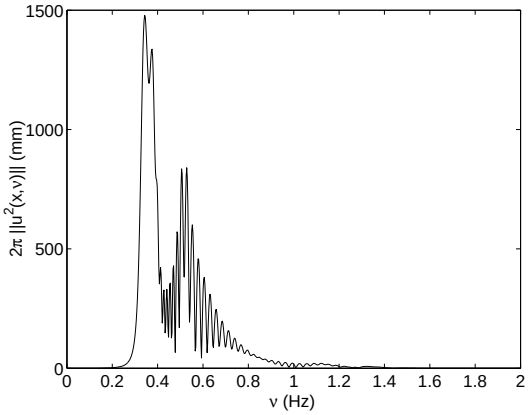


FIG. 1.47 – *Mexico* - 2π *fois le module du spectre* $\left\| u^2(\mathbf{x},\omega) \right\|$ *:* $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$ *et* $\mathbf{x^s} = (0m, 25m)$.

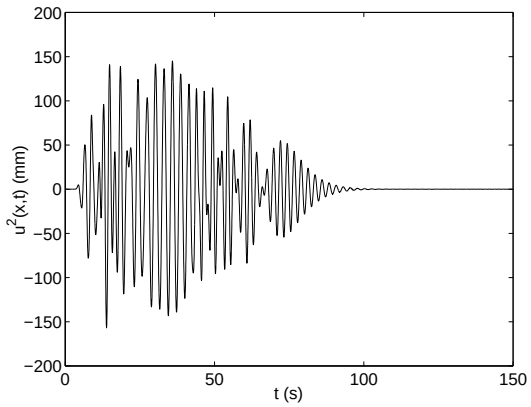


FIG. 1.48 – $u^2(\mathbf{x},t)$ *:* $\mathbf{x_g} = (3100m, 0m)$ *et* $\mathbf{x^s} = (0m, 25m)$.

Dans le domaine fréquentiel, la réponse présente les deux premiers pics caractéristiques de l'excitation des modes de la configuration, ainsi que des pics satellites. La finesse des premiers pics est importante. Cela conduit, dans le domaine temporel, à une durée importante, environ $100s$ et à des battements.

1.2.3 Est-il possible d'exciter un mode de Love avec une onde plane, dans une configuration à deux couches?

Nous avons vu, dans la section II.1.1, qu'un mode de Love est composé d'une onde évanescente (de surface) dans le substratum et de deux ondes propagatives dans la couche. Dès lors, il est impossible d'exciter des modes de Love avec une onde plane incidente provenant du substratum dans le cas d'une seule et unique couche. Il faut nécessairement exciter cette configuration avec une onde incidente cylindrique, de préférence proche de l'interface entre le substratum et la couche.

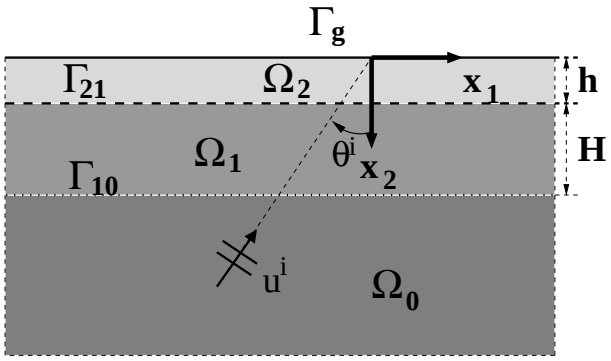


FIG. 1.49 –

En considérant la structure d'une onde de Love, nous montrons qu'il est possible, sous certaines conditions, d'exciter au moins le premier mode de Love avec une onde plane en incidence à un angle θ^i dans le substratum pour une configuration à deux couches, figure II.1.49.

1.2.3.1 Champ dans la couche supérieure

Le problème a déjà été traité dans la section II.1.2.1. Seul le terme source de l'équation (II.1.145) est modifié, le champ de déplacement vérifiant l'équation d'Helmholtz homogène (sans terme source). L'onde incidente s'écrit dans le cas où elle prend la forme d'une onde plane :

$$u^{0i} = A^i(\omega) \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1^i x_1 - k_2^{0i} x_2\right)\right) \tag{1.172}$$

avec $k_1^i = k^0 \sin\left(\theta^i\right)$, et $k_2^{0i} = k^0 \cos\left(\theta^i\right)$. De façon à nous ramener au problème de la section II.1.2.1, nous réécrivons (II.1.172) telle que:

$$u^{0i} = A^i(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1 x_1 - k_2^0 x_2\right)\right) \delta\left(k_1 - k_1^i\right) dk_1 \tag{1.173}$$

Ainsi, en identifiant avec la formule du champ incident pour une onde cylindrique (II.1.148), il suffit de remplacer $A^i(\omega)$, par

$$A^i(\omega) \Leftarrow \mathcal{A}^i(\omega, k_1, \mathbf{x^s}) = -4\pi\mathrm{i} A^i(\omega) \delta\left(k_1 - k_1^i\right) k_2^0 \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1 x_1^s - k_2 x_2^s\right)\right) \tag{1.174}$$

la quantité $x_2 - x_2^s$ étant négative dans le cas qui nous intéresse. Le champ de déplacement dans Ω_2 s'écrit alors :

$$u^2(\mathbf{x}, \omega) = \frac{2A^i(\omega) \exp\left(\mathrm{i}\left(k_1^i x_1 - k_2^{0i}\left(h + H\right)\right)\right) \cos\left(k_2^{2i} x_2\right)}{\left(\cos\left(k_2^{1i} H\right) - \mathrm{i}\kappa^{10i} \sin\left(k_2^{1i} H\right)\right)} \times \frac{1}{\left(\cos\left(k_2^{2i} h\right) - \mathrm{i}\kappa^{21i} \sin\left(k_2^{2i} h\right) \frac{\mu^1 k_2^{1i} \cos\left(k_2^{1i} H\right) - \mathrm{i}\mu^0 k_2^{0i} \sin\left(k_2^{1i} H\right)}{\mu^0 k_2^{0i} \cos\left(k_2^{1i} H\right) - \mathrm{i}\mu^1 k_2^{1i} \sin\left(k_2^{1i} H\right)}\right)} \tag{1.175}$$

1.2.3.2 Quelle configuration doit-on considérer?

Considérons pour un temps que les milieux sont non-dissipatifs.

La première contrainte que nous allons étudier est la génération d'une onde évanescente dans le milieu Ω_1. En se référant à l'annexe A, et en assimilant le domaine Ω_1 à un demi-espace homogène, isotrope, linéaire :

- si l'angle d'incidence θ^i est inférieur à l'angle de Brewster θ^B, tel que $\theta^B = \arcsin\left(\frac{k^1}{k^0}\right)$, nous générons une onde plane propagative dans le domaine Ω_1, de la forme :

$$u^{1t} = A^i(\omega)T(\omega,\theta^i)\exp\left(\mathrm{i}\left(k^1\sin\theta^{1t}x_1 - k^1\cos\theta^{1t}x_2\right)\right) \tag{1.176}$$

  avec θ^{1t} l'angle de transmission, vérifiant la loi de Snell-Descartes $\frac{k^0}{k^1}\sin\theta^i = \sin\theta^{1t}$ et $T(\omega,\theta^i)$ le coefficient de transmission

- si l'angle d'incidence θ^i est supérieur à l'angle de Brewster θ^B, tel que $\theta^B = \arcsin\left(\frac{k^1}{k^0}\right)$, nous générons une onde plane évanescente dans le domaine Ω_1, de la forme :

$$u^{1t} = A^i(\omega)T(\omega,\theta^i)\exp\left(\mathrm{i}k^1\cosh\theta^{1t}x_1 + k^1\sinh\theta^{1t}x_2\right) \tag{1.177}$$

  avec θ^{1t} l'angle de transmission, vérifiant la loi de Snell-Descartes $\frac{k^0}{k^1}\sin\theta^i = \cosh\theta^{1t}$ et $T(\omega,\theta^i)$ le coefficient de transmission. Dans la configuration étudiée dans l'annexe A, $k^1x_2\sinh(\theta^{1t}) < 0$, puisque $x_2 < 0$ et $\theta^t > 0$, cela signifie que le champ dans Ω_1 est une onde de surface dont l'amplitude décroît lorsque la distance entre le point d'observation et l'interface croît.

Remarque : Pour $\theta^i > \theta^B$, l'amplitude du champ réfléchi est égale à l'amplitude du champ incident ($\|R(k_{0i},\omega)\| = 1$, où $R(k_{0i},\omega)$ est le coefficient de réflexion). Ce phénomène est appelé réflexion totale.

Si nous souhaitons générer une onde évanescente dans le milieu Ω_1, nous devons considérer que les vitesses des ondes de cisaillement dans les milieux Ω_1 et Ω_0, ainsi que l'angle d'incidence vérifient :

$$1 < \frac{k^0}{k^1}\sin\theta^i = \frac{c_S^1}{c_S^0}\sin\theta^i \rightarrow c_S^1\sin\theta^i > c_S^0 \tag{1.178}$$

Penchons-nous maintenant sur la manière de générer une onde propagative dans Ω_2 à partir d'une onde évanescente incidente dans le domaine Ω_1 de la forme (II.1.177), les deux milieux étant encore une fois considérés comme semi-infinis.

Nous souhaitons générer une onde propagative dans Ω_2, ce qui signifie que k_2^2 est réel, de la forme $k_2^2 = k^2\cos(\theta^{2t})$. La relation de Snell-Descartes s'écrit :

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^{1t}}{k^2}} = \cos\theta^{2t} \tag{1.179}$$

Si nous souhaitons générer une onde propagative dans le milieu Ω_2, nous devons considérer les vitesses des ondes de cisaillement dans les milieux Ω_1 et Ω_2, ainsi que l'angle d'incidence tels que :

$$1 - \left(\frac{k^1}{k^2}\cosh\left(\theta^{1t}\right)\right)^2 > 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow c_S^1 > c_S^2 \cosh\theta^{1t} \\ \rightarrow c_S^2 \sin\theta^i < c_S^0 \end{array} \tag{1.180}$$

Nous souhaitons générer des modes de Love dans la couche supérieure. La relation de dispersion des modes dans le cas de deux couches doit donc vérifier :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} & = & \left(\cos\left(k_2^{1i}H\right) - \mathrm{i}\kappa^{10i}\sin\left(k_2^{1i}H\right)\right) \\ & & \left(\cos\left(k_2^{2i}h\right) - \mathrm{i}\kappa^{21i}\sin\left(k_2^{2i}h\right)\frac{\mu^1 k_2^{1i}\cos\left(k_2^{1i}H\right) - \mathrm{i}\mu^0 k_2^{0i}\sin\left(k_2^{1i}H\right)}{\mu^0 k_2^{0i}\cos\left(k_2^{1i}H\right) - \mathrm{i}\mu^1 k_2^{1i}\sin\left(k_2^{1i}H\right)}\right) \\ & \approx & F(\omega,k_1^i)\left(\cos\left(k_2^{2i}h\right) - \mathrm{i}\kappa^{21i}\sin\left(k_2^{2i}h\right)G(\omega,k_1^i)\right) \end{array} \tag{1.181}$$

avec $F(\omega,k_1^i) \neq 0$, $\forall(\omega,k_1^i) \in \mathbb{R}^{2+}$ et $G(\omega,k_1^i) \approx 1$, $\forall(\omega,k_1^i) \in \mathbb{R}^{2+}$. Ainsi, l'épaisseur de la couche SL2 H doit vérifier :

$$\begin{array}{l} \dfrac{\mu^1 k_2^{1i}\cos\left(k_2^{1i}H\right) - \mathrm{i}\mu^0 k_2^{0i}\sin\left(k_2^{1i}H\right)}{\mu^0 k_2^{0i}\cos\left(k_2^{1i}H\right) - \mathrm{i}\mu^1 k_2^{1i}\sin\left(k_2^{1i}H\right)} \approx 1 \\ \Rightarrow \kappa^{10i}\left(\exp\left(\mathrm{i}k_2^{1i}H\right)\right) \approx \exp\left(\mathrm{i}k_2^{1i}H\right) \end{array} \tag{1.182}$$

Mais, nous souhaitons que $k_2^{1i} = \mathrm{i}\left|k_2^{1i}\right| = \mathrm{i}\kappa_2^{1i}$, $\kappa_2^{1i} \in \mathbb{R}^+$ et $\mu^1 k_2^{1i} \neq \mu^0 k_2^{0i}$. Ainsi, la seule façon de remplir cette condition est de considérer :

$$\exp\left(-\kappa_2^{1i}H\right) << 1 \tag{1.183}$$

c'est-à-dire $\kappa_2^{1i}H >> 1$. Or, $\kappa_2^{1i} = k^1\sinh(\theta^{1t}) = k^1\sqrt{\left(\frac{k^0}{k^1}\sin(\theta^i)\right)^2 - 1}$, si bien que si nous souhaitons que seuls les modes de Love puissent être excités, l'épaisseur de la couche inférieure H doit vérifier :

$$H >> \frac{c_S^1}{\omega\sqrt{\left(\frac{c_S^1}{c_S^0}\sin(\theta^i)\right)^2 - 1}} \tag{1.184}$$

Sous cette condition, la fonction $F(\omega,k_1^i)$ vaut :

$$\cos\left(k_2^{1i}H\right) - \mathrm{i}\kappa^{10i}\sin\left(k_2^{1i}H\right) \approx \cosh\left(\left|k_2^{1i}\right|H\right)\left(1+\kappa^{10i}\right) \neq 0 \tag{1.185}$$

qui complète la condition.

Ainsi, une façon d'exciter les modes de Love de la couche supérieure est que les vitesses des ondes de cisaillement c_S^j, $j = 0,1,2$, l'angle d'incidence θ^i et l'épaisseur H de la couche inférieure SL1 vérifient les conditions suivantes :

- (i) $c_S^1 \sin\theta^i > c_S^0$ pour générer une onde évanescente dans le domaine Ω_1
- (ii) $c_S^0 > c_S^2 \sin\theta^i$ pour générer une onde propagative dans le domaine Ω_2

– (iii) $H = \dfrac{Ac_S^1}{\omega\sqrt{\left(\frac{c_S^1}{c_S^0}\sin(\theta^i)\right)^2 - 1}} = AH_{\min}$, $\forall\omega$, avec $A >> 1$.

La difficulté est de trouver un compromis sur l'épaisseur H qui doit être assez importante pour que seuls les modes soient excités, mais assez fine pour que des ondes soient excitées dans la couche. Effectivement, nous générons des ondes évanescentes dans la couche SL1 dont l'amplitude décroît exponentiellement en fonction de l'éloignement de l'interface Γ_{10}. Or la condition sur l'épaisseur H est imposée par la décroissance rapide d'une exponentielle décroissante. Ainsi, nous pouvons considérer la quantité A de l'ordre de 2 ou 3.

Ce que nous venons d'énoncer dans le cas de matériaux non dissipatifs, peut être étendu au cas des matériaux dissipatifs en considérant les parties réelles des quantités c_S^j, $j = 0, 1, 2$.

1.2.3.3 Résultats

Les choix des matériaux M^0, tel que $\rho^0 = 1600kg.m^{-3}$, $c_S^0 = 200m.s^{-1}$, et $Q_S^0 = \infty$, M^1, tel que $\rho^1 = 2000kg.m^{-3}$, $c_S^1 = 600m.s^{-1}$, et $Q_S^1 = \infty$, et M^2, tel que $\rho^2 = 1300kg.m^{-3}$, $\left(c_S^2\right)_R = 60m.s^{-1}$, et $Q_S^2 = 30$, avec l'épaisseur de la couche supérieure SL2 $h = 50m$, nous permettent de nous ramener au cas étudié dans la section II.1.1, et vérifient les conditions (i) et (ii). Ces choix imposent $\theta^i > \theta^B \approx 20°$, et $H >> AH_{\min} \approx A \times 850m$. Nous considérerons donc $\theta^i = \dfrac{\pi}{6}rad = 30°$, et les cas $A = 2$, $A = 2.5$ et $A = 3$. Nous considérons le champ $u^2(\mathbf{x}, \omega)$ sur le sol, c'est-à-dire $\mathbf{x} = (x_1, 0m)$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$.

Les figures II.1.50, II.1.51 et II.1.52 représentent la valeur absolue, la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction $G(\omega, k_1^i)$ pour différentes valeurs du paramètre A, c'est-à-dire pour différentes valeurs de l'épaisseur de la couche inférieure SL1. Pour les fréquences supérieures à $0.1Hz$, $G(\omega, k_1^i) \approx 1$. Plus, le paramètre A est grand, plus la fréquence à partir de laquelle nous pouvons faire cette approximation est faible. Les figures II.1.53, II.1.54 et II.1.55, représentent 2π fois la fonction de transfert associée au champ $u^2(\mathbf{x}, \omega)$. Un seul pic est présent aux environs de $0.29Hz$. Il correspond au premier mode de Love. Plus l'épaisseur H est grande, plus le pic est proche d'un mode de Love pur ; cependant, l'amplitude maximale décroît rapidement. Seul le premier mode de Love semble pouvoir être excité, les modes d'ordre supérieur étant très atténués. Les figures II.1.56, II.1.57 et II.1.58 représentent les sismogrammes correspondants, $A^i(\omega)$ étant la dérivée première d'un Ricker, telle que $\nu_0 = 0.5Hz$. Plus l'épaisseur H est grande, plus le sismogramme se réduit à l'onde incidente, et plus l'amplitude est faible. La figure II.1.56 est caractéristique d'une réponse à une fréquence pure, le premier mode de Love.

Ainsi, il est possible d'exciter un mode de Love avec une onde plane, pour une configuration à deux couches, en générant une onde évanescente dans la couche inférieure. Même si il est théoriquement possible d'exciter ces modes, les amplitudes résultantes sont très petites, comparées au cas d'une excitation avec une onde incidente cylindrique.

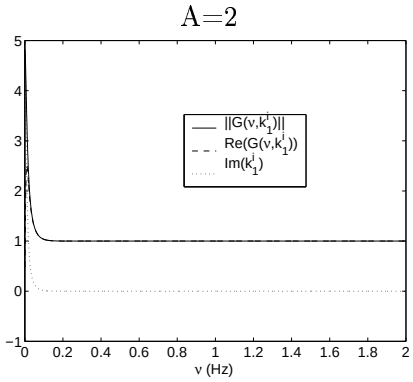


FIG. 1.50 – *Module de* $G(\omega, k_1^i)$.

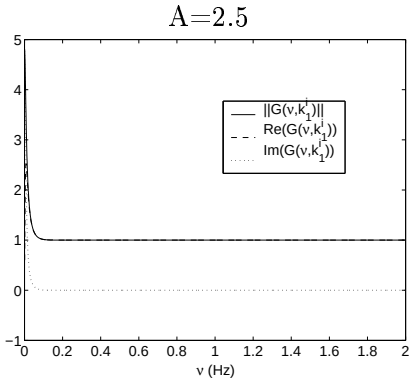


FIG. 1.51 – *Module de* $G(\omega, k_1^i)$.

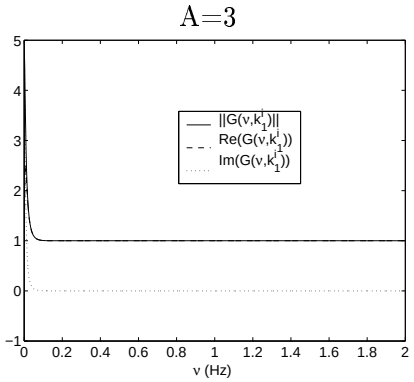


FIG. 1.52 – *Module de* $G(\omega, k_1^i)$.

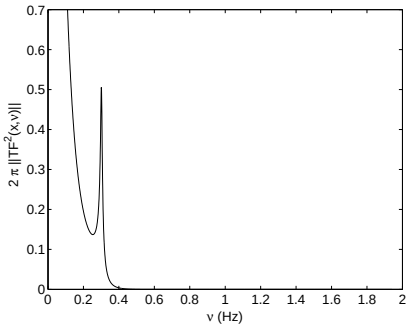


FIG. 1.53 – $2\pi \times \left\|TF^2(\mathbf{x}, \nu)\right\|$.

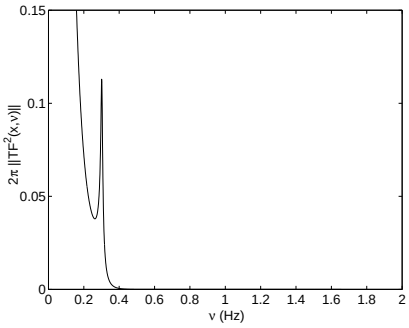


FIG. 1.54 – $2\pi \times \left\|TF^2(\mathbf{x}, \nu)\right\|$.

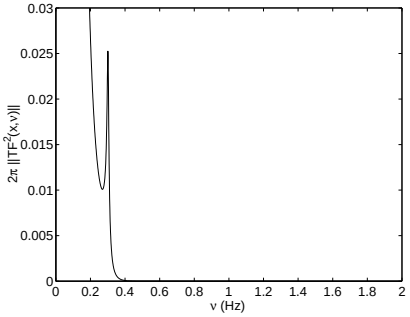


FIG. 1.55 – $2\pi \times \left\|TF^2(\mathbf{x}, \nu)\right\|$.

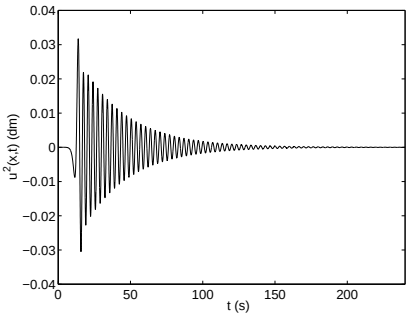


FIG. 1.56 – $u^2(0m, 0m, t)$.

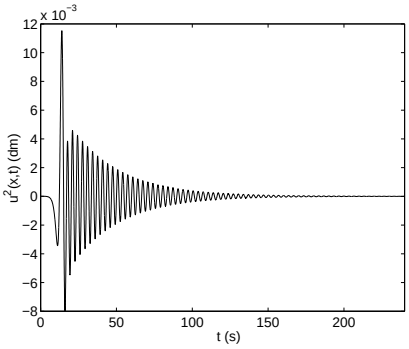


FIG. 1.57 – $u^2(0m, 0m, t)$.

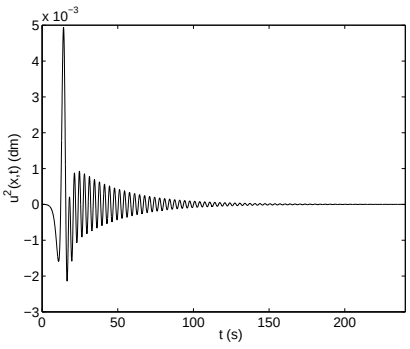


FIG. 1.58 – $u^2(0m, 0m, t)$.

1.3 Configuration à $N = 4$ pour l'étude des effets régionaux dans la cas de la ville de Mexico

L'hypocentre du séisme Guerrerro-Michoacan qui toucha la ville de Mexico en 1985 était situé au bord de l'océan Pacifique, près de Guerrerro, à plus de $400km$ **et à une profondeur comprise entre** 10 **et** $22km$**.** Une explication pour qu'une onde se propage sur une telle distance, sans être complètement atténuée, est que cette onde corresponde à un mode. Effectivement, les modes sont plus énergétiques et sont beaucoup moins atténués que les ondes propagatives. Pour avoir une idée de l'onde incidente dans la ville, nous avons réalisé deux simulations, les valeurs des vitesses, densité et facteurs de qualité étant tirées de [67, 40].

La figure II.1.59 représente une coupe dans le plan sagittal x_1x_2 de le configuration retenue. La surface libre Γ_g est horizontale, en dessous de laquelle s'empilent les couches d'étendue latérale infinie occupant respectivement les domaines Ω_j, $j = 1, 2, 3, 4$ d'épaisseur h^j. Chaque couche occupant Ω_j est supposée en contact parfait avec la couche occupant Ω_{j-1} au niveau de l'interface Γ_{jj-1}, supposée horizontale. Le domaine Ω_0 est semi-infini et est supposé modéliser le substratum. Les matériaux emplissant les domaines Ω_j, d'épaisseur h^j sont M^j tels que :

- Ω_4 d'épaisseur $h^4 = 4.8km$, M^4 caractérisé par $\rho^4 = 2670kg.m^{-3}$, $c_S^4 = 2530m.s^{-1}$, $Q_S^4 = 500$
- Ω_3 d'épaisseur $h^3 = 10.4km$, M^3 caractérisé par $\rho^3 = 2770kg.m^{-3}$, $c_S^3 = 3300m.s^{-1}$, $Q_S^3 = 500$
- Ω_2 d'épaisseur $h^2 = 14.8km$, M^3 caractérisé par $\rho^2 = 3090kg.m^{-3}$, $c_S^2 = 4030m.s^{-1}$, $Q_S^2 = 500$
- Ω_1 d'épaisseur $h^1 = 14.8km$, M^1 caractérisé par $\rho^1 = 3090kg.m^{-3}$, $c_S^1 = 4100m.s^{-1}$, $Q_S^1 = 500$
- $M^0 : \rho^0 = 3300kg.m^{-3}$, $c_S^0 = 4820m.s^{-1}$, $Q_S^4 = \infty$

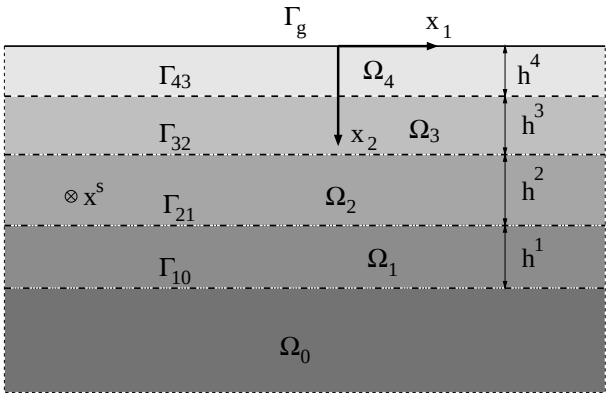


FIG. 1.59 – *Coupe sagittale de la configuration régionale, Séisme de Michoacan 1985*

L'excitation sismique est délivrée par une source cylindrique située au point $\mathbf{x^s}$, polarisée en ondes de cisaillement horizontal. Nous traitons deux cas de profondeur de source (dérivée de Ricker telle que $f_0 = 0.25Hz$), un premier où la source est positionnée à $\mathbf{x^s} = (0m, 18km)$ (cas plus réaliste) et un second où $\mathbf{x^s} = (0m, 10km)$ (cas traité dans [67]).

$\mathbf{x_s} = (0, 10km)$

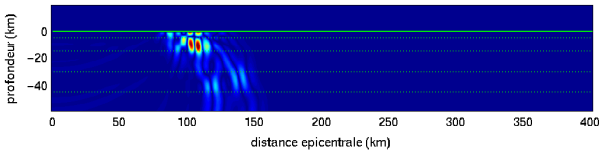


FIG. 1.60 – *t=40s*

$\mathbf{x_s} = (0, 18km)$

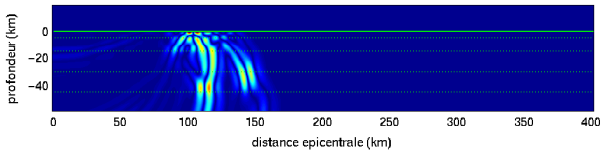


FIG. 1.61 – *t=40s*

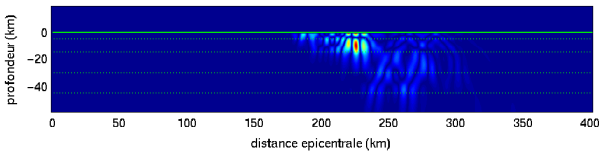


FIG. 1.62 – *t=80s*

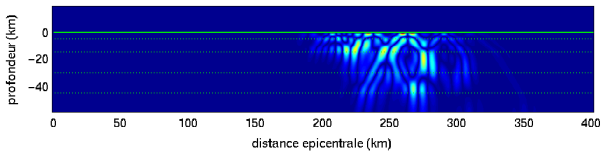


FIG. 1.63 – *t=80s*

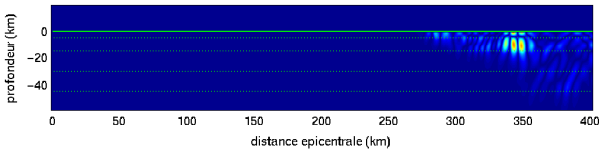


FIG. 1.64 – *t=120s*

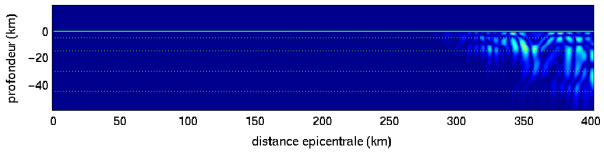


FIG. 1.65 – *t=120s*

Les figures II.1.60, II.1.62 et II.1.64 représentent les photos instantanées du champ de déplacement, aux temps $t = 40s$, $t = 80s$ et $120s$, pour une source à $\mathbf{x^s} = (0, 10km)$. Le maximun d'amplitude pour les trois photos est $60mm$. Les figures II.1.61, II.1.63 et II.1.65 représentent les photos instantanées du champ de déplacement, aux temps $t = 40s$, $t = 80s$ et $120s$, pour une source à $\mathbf{x^s} = (0, 18km)$. Le maximun d'amplitude pour les trois photos est $30mm$. Bien que les amplitudes soient différentes, puisque la source n'est pas localisée à la même profondeur, ni même dans la même couche, les photos instantanées sont relativement similaires. Nous observons des sortes de **"boules" se déplaçant transversalement, typiques d'excitation de modes de Love**. Pour autant, ce ne sont pas des modes de Love, puisque la configuration ne comporte pas qu'une seule couche. Nous les appelerons donc **modes de Love généralisés**. Ainsi, notre hypothèse d'une excitation des modes entre l'hypocentre et la ville de Mexico semble encore valide.

Les figures II.1.66 et II.1.67 représentent 2π fois le spectre de $\|u^4(\mathbf{x_g}, \omega)\|$ à $\mathbf{x_g} = (400km, 0)$, c'est-à-dire à l'entrée du bassin de Mexico City. Nous observons une série de **pics très fins**, **caractéristiques** d'excitation et de couplage de **modes de Love généralisés**. Les figures II.1.68 et 1.69 représentent les tracés temporels correspondants. Les **durées**, dans les deux cas de position de la source, sont **importantes**, de l'ordre de $80s$, et les sismogrammes présentent des **battements**. Ainsi, une partie des caractéristiques fondamentales des sismogrammes enregistrés à Mexico semblent déjà avoir été présentes à l'entrée de la ville.

$\mathbf{x^s} = (0, 10km)$

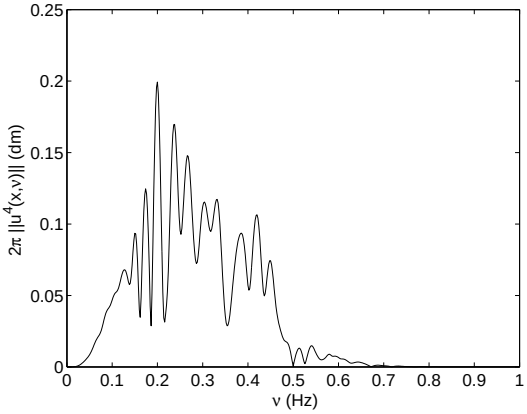


FIG. 1.66 – $2\pi \left\| u^4((400km, 0), \nu) \right\|$

$\mathbf{x^s} = (0, 18km)$

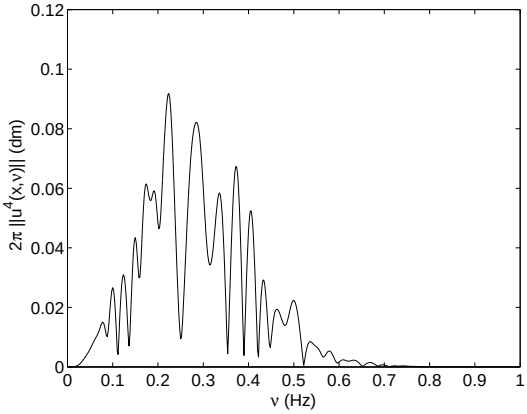


FIG. 1.67 – $2\pi \left\| u^4((400km, 0), \nu) \right\|$

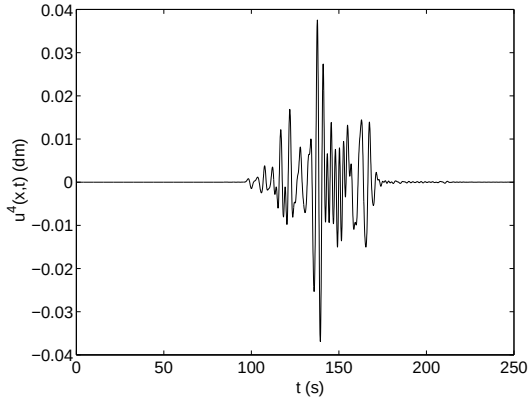


FIG. 1.68 – $u^4((400km, 0), t)$

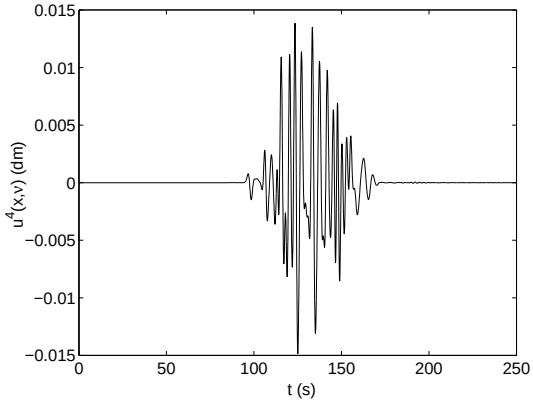


FIG. 1.69 – $u^4((400km, 0), t)$

Conclusion

À l'origine de ce chapitre est le constat qu'aucune explication théorique ne fournit de réponses satisfaisantes (au sens ou aucune n'explique la totalité des caractéristiques du séisme de Michoacan en 1985) à la réponse sismique anormale rencontrée en milieu urbain, lorsque la ville est construite sur une couche ou un bassin mou, au-dessus d'un substratum plus rigide. La principale raison de ce manque réside probablement dans la complexité des configurations examinées dans les précédentes études (essentiellement numériques) : 1) un bassin homogène ou composé de plusieurs couches de géométries compliquées sous-jacent à une ville, mais sans tenir compte des bâtiments ([156, 66, 128]), 2) une couche homogène surmontée par des blocs ou des immeubles périodiques ou non ([180, 82, 117, 53, 21]), 3) un modèle de croûte multi-composants, incluant des variations latérales de propriétés des matériaux pour la description de la contribution du champ régional au champ total dans un site urbain ([70, 152]). **Dans un premier temps, section 1.1, nous avons choisi de simplifier au maximum la configuration étudiée et son excitation, tout en conservant ses principales caractéristiques (une simple couche molle sur un substratum plus rigide)**. Nos postulats étaient : i) le problème doit être traité au moins en deux dimensions ii) la sollicitation ne doit pas prendre la forme d'une onde plane (pour laquelle l'excitation de mode de Love n'est pas possible dans la configuration retenue) mais plutôt celle d'une onde cylindrique (la source générant ces ondes pouvant être représentative d'une source induite dans le cas d'une configuration plus compliquée), iii) la composante molle de la configuration peut être une couche homogène (plutôt qu'une couche hétérogène, ou un bassin), avec des interfaces planes et horizontales (c.à.d. une condition de surface libre plane plutôt qu'irrégulière, comme ce à quoi conduirait la présence d'immeubles ; une interface plane avec le substratum plutôt qu'irrégulière, comme ce à quoi conduirait la forme d'un bassin, ou une interface rugueuse).

Alors que la configuration retenue peut frapper par sa simplicité, la résolution du problème attenant n'est pas directe. Les sismogrammes sont obtenus par transformées inverses de Fourier d'une réponse dans le domaine fréquentiel qui prend la forme d'une intégrale par rapport à la composante horizontale du nombre d'onde.

Cette intégrale sur le nombre d'onde se scinde naturellement en trois composantes correspondant soit à des ondes propagatives dans la couche (SOP1) et des ondes propagatives dans le substratum (OP1), soit à des ondes propagatives dans la couche (SOP2) et des ondes de surface dans la substratum (OS2), soit à des ondes de surface (SOS3) dans la couche et (OS3) dans le substratum. Il s'en suit que l'amplitude des ondes SOP2 et SOS3 décroît exponentiellement lorsque la projection verticale de la distance entre la source et l'interface couche-substratum décroît (dans le cas où la source est localisée dans le substratum), ce qui a pour effet de mettre en avant les composantes SOP1 pour de larges distances focales. Ce fait fournit une bonne explication du succès relatif du **modèle 1D** (l'onde arrivant à la couche ayant dans ces conditions pratiquement les mêmes attributs qu'une

onde plane), mais également en fournit ces limites : ce modèle **est inapproprié lorsque la source est proche de l'interface couche-substratum** puisqu'en particulier les ondes SOP2 ne sont pas prises en compte. Nous avons montré que les ondes SOP1, prépondérantes dans le modèle 1D, conduisent à des **maxima d'amplitude aux fréquences d'Haskell, mais ne correspondent pas à des modes du système** (ce sont des "Leaky modes"). Elles sont liées à des **phénomènes d'interférence d'ondes propagatives**. À contrario, les ondes SOP2, correspondent, elles, à l'excitation des modes du système, les **modes de Love**, et conduisent à des amplitudes bien plus importantes (dans le cas dissipatif) que les maxima des ondes SOP1 relevées à des **fréquences légèrement plus basses que celles d'Haskell**. L'amplitude des ondes SOS3 est négligeable par rapport à celle des ondes SOP1 et SOP2 dans le cas où la source est localisée dans le substratum, alors que ces ondes peuvent exister dans le cas où la source est localisée dans la couche.

Une méthode alternative consiste à employer le théorème des résidus, pour l'évaluation de l'intégrale sur le nombre d'onde horizontal. Le champ admet deux composantes (lorsque la distance épicentrale est importante) : une première liée au mode de Love (à basses fréquences), ou à une série de modes de Love (à plus hautes fréquences) résultant de la contribution des résidus des pôles leur étant associés, et une seconde liée à des intégrales de branche. Cette dernière décroît de sorte qu'elle devient de seconde importance par rapport à la composante liée au mode de Love, lorsque la distance épicentrale augmente. Ce fait explique la durée anormalement longue du déplacement (comparativement à la durée "normale" de la réponse pour des phénomènes d'interférence) pour des trajectoires régionales.

L'analyse théorique atteint ses limites lorsque l'intégrale sur le nombre d'onde horizontal est employée. Pour autant, l'inversion de l'ordre d'intégration, sur la fréquence, provenant de la transformée inverse de Fourier, et sur le nombre d'onde, permet de mieux comprendre les phénomènes liés aux modes de la configuration, modes de Love et aux "Leaky modes" (nommés improprement "résonance" d'Haskell). Il ressort de cette étude que l'importance des Leaky modes est liée à la distance épicentrale -ils sont négligeables lorsque cette distance est grande- alors que l'importance des modes de Love est liée à la distance en projection verticale entre la source et l'interface couche-substratum -ils sont négligeables lorsque cette distance est grande-. Alors, pour des distances focale et épicentrale faibles, ces deux types de phénomènes peuvent exister et conduire à un "scindage" du premier pic.

Les sismogrammes obtenus dans le cas où les modes de Love sont excités présentent une durée importante (environ 150s contre à peine 50s dans le cas du modèle 1D), des battements et une légère amplification par rapport aux résultats du modèle 1D.

Une analyse analogue, en séparant l'intervalle d'intégration sur le nombre d'onde horizontal sur 4 intervalles cette fois, est menée dans le cas de deux couches. Les phénomènes attachés à cette configuration sont semblables à ceux rencontrés pour une couche. Les pics de résonance et d'interférence sont pour autant doublés. Nous avons également montré que cette configuration, lorsqu'elle est sollicitée par une onde plane, la couche inférieure étant d'épaisseur suffisante et l'angle d'incidence étant supérieur à l'angle de Brewster, conduit à l'excitation au moins du premier mode de Love.

La transposition de nos calculs au cas d'une trajectoire régionale, laisse penser que les caractéristiques fondamentales de la réponse anormale enregistrée à Mexico peuvent avoir été déjà présentes dans le signal, à l'entrée de la ville. **Un modèle à une ou plusieurs couches ne semble pas**

expliquer l'augmentation d'amplitude relevée dans [70] à environ 200km de la ville. Cette observation ne semble s'envisager que par la présence d'une **hétérogénéité** (cas que nous n'avons pas examiné ici) **de propriétés matérielles ou de géométrie** (par exemple épaisseur de couche variable) de la croûte. Par contre, l'excitation des modes de Love conduit à une augmentation notable de la durée au cours de la propagation de l'onde sur les 400km entre la zone de subduction et la ville de Mexico, ainsi qu'à des battements.

Chapitre 2

L'effet site-ville

Nous étudions ici, de façon **semi-analytique**, l'interaction d'ondes sismiques avec une ville modélisée par des blocs homogènes. Nous montrons que les **blocs induisent une excitation ou une réexcitation des modes de Love (quasi-Love dans le cas qui nous intéresse)**. Cela a pour conséquence, une amplification du champ à l'intérieur des blocs, une désamplification du champ sur le sol proche d'un seul bloc, mais une amplification de celui-ci si plusieurs blocs sont considérés. Nous montrons en particulier que les effets les plus dévastateurs semblent être générés par une configuration périodique ou quasi-périodique finie qui peut être étudiée à l'aide de la configuration correspondante infinie. Cette configuration génère des modes Cutler-Haskell ou des modes liés à l'aspect fini du réseau, peu atténués, pouvant être proches du mode fondamental quasi-Love. Ce chapitre a donné lieu aux séminaires [85, 84] et prolonge les développements de [188].

Remarque : À partir de ce chapitre, les discussions relatives aux modes deviennent difficiles. Dans un souci de clarté, nous avons appelé **"mode" un mode d'un système complet**, **"pseudo-mode" un mode qui ne vérifie qu'une partie des conditions aux limites d'un système**, et **"quasi-mode" un mode d'un système complet de caractéristiques et de structures proches de celles d'un mode d'un sous-système le composant**.

Introduction

Nous nous concentrons sur une portion d'une ville moderne caractérisée, dans un premier temps, par des blocs (c.à.d., chaque bloc est constitué d'un immeuble ou d'un groupe d'immeubles) non identiques et non arrangés de façon périodique, figure 2.1. Cette ville a une géométrie 2D telle que la coordonnée x_3 est ignorée dans le repère cartésien attaché à la configuration, figure 2.1. Les blocs sont en contact parfait avec le sol au-dessous duquel est localisée une couche molle d'étendue latérale infinie, elle-même localisée au-dessus d'un demi-espace dur. **Un bloc**, occupant un domaine Ω_j **est constitué d'un ou plusieurs immeubles**. Il est caractérisé par une largeur w_j et une hauteur b_j (géométrie rectangulaire), et est occupé par un matériau M^j. Sa base est localisée à l'abscisse $x_1 = d_j$ de sorte que ce bloc est séparé du bloc occupant le domaine Ω_{j+1}, par une distance $d_{jj+1} = d_j - d_{j+1}$. Pour les besoins de l'analyse, chaque bloc est **homogénéisé**, si bien que la géométrie finale de la ville est représentée figure 2.2. La figure 2.3 représente une coupe (plan sagittal) de la ville. $j \in \mathbb{B} \subset \mathbb{Z}$ est l'indice par lequel les blocs sont identifiés (c.à.d. par exemple pour 3 blocs : $\mathbb{B} = \{1, 2, 3\}$ ou $\{-1, 0, 1\}$). Le cardinal N de $\mathbb{B}$ désigne le nombre de blocs de la configuration, ce nombre pouvant être fini ou infini. Γ_f est la surface libre composée d'une portion

Γ_g horizontale, et d'une portion $\Gamma_{ag} = \bigcup \Gamma_{ag}^j$, $j \in \mathbb{B}$. Le sol Γ_G est l'union de Γ_g et de la base des blocs Γ_{bs}^j; $j \in \mathbb{B}$ (cette portion pouvant ne pas être horizontale si nous considérons une fondation). Le matériau en contact avec Γ_f est l'air, supposé être le vide. Le matériau en contact avec et en dessous de Γ_G est une couche molle occupant le domaine Ω_1, d'étendue latérale infinie et d'épaisseur h et dont la limite inférieure est Γ_h, supposée plate et horizontale. Le matériau mou dans la couche est en contact parfait, au niveau de Γ_h, avec un matériau mécaniquement dur occupant le domaine semi-infini (substratum) Ω_0. Les matériaux M^{2j} occupant chaque bloc (domaines Ω_2^j, $j \in \mathbb{B}$) sont en contact parfait avec la couche molle au niveau des interfaces Γ_{bs}^j, $j \in \mathbb{B}$.

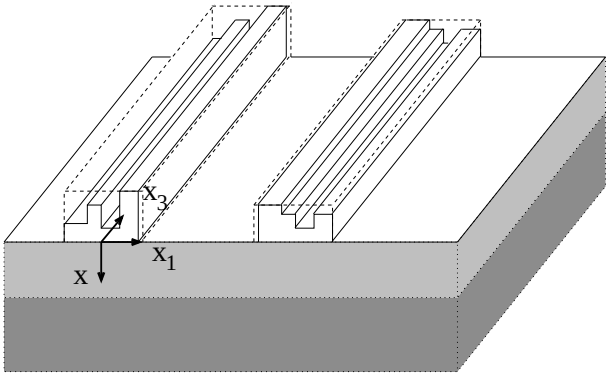


FIG. 2.1 – *Vue d'une ville 2D (seuls deux blocs sont représentés).*

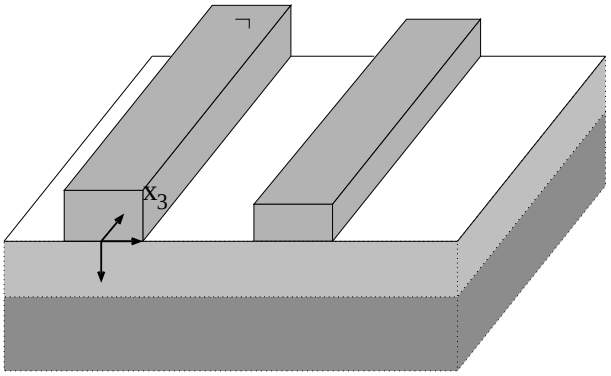


FIG. 2.2 – *Vue d'une ville 2D avec les blocs homogénéïsés (seuls deux blocs sont représentés).*

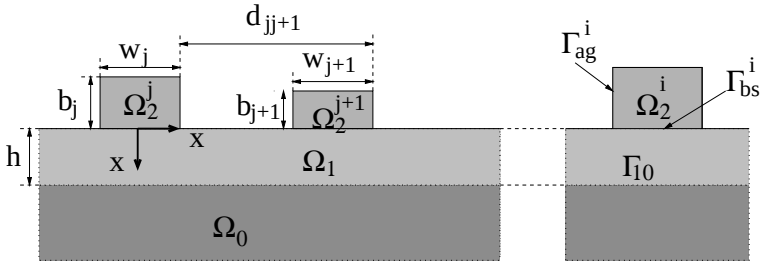


FIG. 2.3 – *Coupe de la ville 2D.*

L'origine O du repère cartésien attaché à la configuration est située sur le sol, x_2 croît avec la

profondeur et x_3 est perpendiculaire au plan (sagittal) de la figure. En notant $\mathbf{i}_j$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe x_j, le vecteur normal à Γ_h et à Γ_g (Γ_G s'il n'y a pas de fondation) est i_2. Les matériaux occupant les domaines Ω_2^j, $j \in \mathbb{B}$, Ω_1 et Ω_0 sont M^{2j}, M^1 et M^0 respectivement et sont supposés être linéaires, isotropes, homogènes (chacun étant homogénéisé) et initialement au repos. Nous supposons que M^0 est non-dissipatif alors que M^1 et M^2 sont dissipatifs.

L'excitation sismique est délivrée au site sous la forme d'**une onde cylindrique** (générée par une source linéique le long de l'axe x_3) ou d'**une onde plane**, polarisée en **cisaillement horizontal**, toutes deux se propagageant à l'instant initial dans la domaine Ω_0. La nature SH de l'onde incidente, repérée par l'exposant i, signifie que le mouvement induit est strictement transverse (c.à.d. dans la direction x_3, et indépendant de la coordonnée x_3). La géométrie de la configuration, celle de l'excitation ainsi que la polarisation de la source nous permettent de réaliser une analyse 2D en onde SH, dépendant uniquement des coordonnées cartésiennes x_1 et x_2, le mouvement s'effectuant suivant la direction pointée par l'axe x_3.

Nous formulons plusieurs questions qui trouveront leurs réponses ici :

- combien de pseudo-modes est-il nécessaire de considérer pour obtenir une représentation correcte du champ dans les blocs et dans la couche, c'est-à-dire combien de pseudo-modes sont excités dans les blocs et par conséquent quels sont leurs mouvements?

- quels sont les modes de la superstructure (blocs)?

- quelle est l'ordonnancement des modes des blocs (superstructure) par rapport à ceux du sous-sol (structure géophysique)?

- quels sont les modes de la structure globale, c'est-à-dire quels sont les modes de la structure réunissant la superstructure et la structure géophysique?

- quelles sont les influences respectives de la largeur et de la hauteur des blocs?

- quelles sont les modifications induites par la présence d'un bloc?

- quels phénomènes sont mis en jeu dans ce qui est communément appelé **interaction sol-structure**?

- quelles sont les modifications induites par la présence de plusieurs blocs?

- quels phénomènes sont mis en jeu dans ce qui est communément appelé **interaction struture-sol-structure**?

- quelle est l'influence de la distance séparant les blocs?

- quelle est l'influence de la position de la source?

- quelle est la validité de la représentation d'un groupe de blocs par un réseau infini?
- quels sont les modes d'un réseau infini?
- quels sont les modes d'un réseau fini?
- quelle est l'influence de la distance séparant les blocs d'un réseau?

Une remarque concerne le modèle de bâtiment que nous avons considéré, c'est-à-dire par homogénéisation. Ce modèle est souvent utilisé dans les études théoriques, [119, 176, 188, 21], ou numériques [155, 108], et présente l'avantage majeur de fournir une réponse convenable en prenant en considération plusieurs modes du bâtiment. Certains ont complexifié ce modèle en considérant des blocs hétérogènes comportant plusieurs couches homogénisées horizontales, [171]. Ces modèles fournissent une meilleure approximation, surtout lorsque le bâtiment est sollicité en hautes fréquences (longueur d'onde faible par rapport à la fondation), ce qui n'est pas notre cas. Une autre classe de modèles, que nous n'avons pas retenue, consiste à considérer qu'un bâtiment va essentiellement répondre sur son mode fondamental. Il est alors modélisé par un système masse-ressort, [91, 90, 37, 117]. Ce modèle présente l'avantage que la fondation peut être prise en compte, simplement [91, 90, 117] en ajoutant des systèmes RC à la surface. Nous devons avouer que nous ne comprenons pas comment réellement nous pouvons prendre en compte l'influence d'une fondation qui par essence s'enfonce dans le sous-sol, en agissant sur un élément de surface, mais ce modèle fournit de bons résultats, [91].

Dans ce qui suit, nous n'avons pas considéré de fondation, celle-ci donnant lieu à un problème de détermination de valeurs propres pour la représentation des champs dans les blocs homogénéisés.

Glossaire

Dans ce chapitre, nous emploierons les notations principales suivantes :

N le nombre de blocs considéré dans la configuration
h l'épaisseur de la couche
le bloc j, $j \in \mathbb{B}$ est de hauteur b_j, de largeur w_j, localisé à l'abscisse d_j de sorte qu'il est séparé du bloc k par la distance algébrique $d_{jk} = d_j - d_k$
$\mathbf{x}$ la position d'un point générique dans le plan sagittal $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$
$\mathbf{x_g}$ la position d'un point générique sur le sol $\mathbf{x_g} = (x_g, 0)$
$\mathbf{x_s}$ la position d'un point générique à l'interface substratum-couche $\mathbf{x_s} = (x_s, h)$
$\mathbf{x^s}$ la localisation de la source linéique dans le plan sagittal $\mathbf{x} = (x_1^s, x_2^s)$
$u^0(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacement dans le substratum dans le domaine temporel
$u^0(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement dans le substratum dans le domaine fréquentiel
$u^{0d}(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement diffracté dans le substratum dans le domaine fréquentiel
$u^0_{\text{cou}}(\mathbf{x}, \omega)$ la composante du champ de déplacement dans le substratum dans le domaine fréquentiel sans bloc
$u^{0q}_{\text{bat}m}(\mathbf{x}, \omega)$ la composante du champ de déplacement dans la substratum relative au pseudo-mode m du bloc q (source induite)
$u^i(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement incident dans le substratum dans le domaine fréquentiel
$u^1(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacement dans la couche dans le domaine temporel
$u^1(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement dans la couche dans le domaine fréquentiel
$u^1_{\text{cou}}(\mathbf{x}, \omega)$ la composante du champ de déplacement dans la couche dans le domaine fréquentiel sans bloc
$u^{1q}_{\text{bat}m}(\mathbf{x}, \omega)$ la composante du champ de déplacement dans la couche relative au pseudo-mode m du bloc q (source induite)
$u^{2j}(\mathbf{x}, t)$ le champ de déplacement dans le bloc j, $j \in \mathbb{B}$, dans le domaine temporel (si un seul bloc est présent nous noterons $u^{2j}(\mathbf{x}, t) = u^2(\mathbf{x}, t)$)
$u^{2j}(\mathbf{x}, \omega)$ le champ de déplacement dans le bloc j, $j \in \mathbb{B}$, dans le domaine fréquentiel (si un seul bloc est présent nous noterons $u^{2j}(\mathbf{x}, \omega) = u^2(\mathbf{x}, \omega)$)
$k^{2j}_{1m} = \dfrac{m\pi}{w_j}$ le pseudo-mode d'odre m de la décomposition pseudo-modale dans le bloc j, $j \in \mathbb{B}$
$k^{2j}_{2m} = \sqrt{(k^2)^2 - (k^{2j}_{2m})^2}$ le nombre d'onde horizontal associé au pseudo-mode d'ordre m de la décomposition pseudo-modale dans le bloc j, $j \in \mathbb{B}$ tel que $\Re\left(k^{2j}_{2m}\right) \geqq 0$, et $\Im\left(k^{2j}_{2m}\right) \geqq 0$
B^{2j}_m le coefficient pseudo-modal relatif au pseudo mode d'odre m dans le bloc j, $j \in \mathbb{B}$
k^j le nombre d'onde dans le domaine Ω^j, $j = 0, 1, ..., N$
k_1 la composante horizontale du nombre d'onde
k^j_2 la composante verticale du nombre d'onde dans le domaine Ω^j, $j = 0, 1$, telle que $k^j_2 = \sqrt{(k^j)^2 - k_1^2}$, $\Re\left(k^j_2\right) \geqq 0$, et $\Im\left(k^j_2\right) \geqq 0$
$\mathcal{F}^j_1$ le terme relatif à la superstructure (bloc j) pour l'analyse modale
$\mathcal{F}^j_2$ le terme relatif à la structure géophysique (bloc j) pour l'analyse modale
$\mathcal{F}^{ij}_2$ le terme relatif au couplage entre les blocs i et j pour l'analyse modale
$\omega^{\text{bf}}_{nm} = 2\pi\nu^{\text{bf}}_{nm}$ la fréquence des modes de bloc à base fixe
$\omega^{\text{qbf}}_{nm} = 2\pi\nu^{\text{qbf}}_{nm}$ la fréquence des modes de bloc à quasi-base fixe
$\omega^{\text{br}}_{nm} = 2\pi\nu^{\text{br}}_{nm}$ la fréquence des modes de bloc à base rigide

$\omega_{nm}^{\text{qbr}} = 2\pi\nu_{nm}^{\text{qbr}}$ la fréquence des modes de bloc à quasi-base rigide
$TF^{2j}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert dans le bloc j au champ de déplacement $u^{2j}(\mathbf{x},\omega)$ (si un seul bloc est présent nous noterons $TF^{21}(\mathbf{x},\omega) = TF^{2}(\mathbf{x},\omega)$)
$TF^{1}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert associée au champ de déplacement dans la couche
$TF^{1}_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert associée au déplacement dans la couche sans bloc
$TF^{1j}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert associée au déplacement dans la couche induit par la présence d'un bloc j (si un seul bloc est présent nous noterons $TF^{1j}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) = TF^{1}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)$)
$TF^{d0}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert associée au champ de déplacement diffracté dans le substratum
$TF^{0d}_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert associée au champ de déplacement diffracté dans le substratum sans bloc
$TF^{0j}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert associée au champ de déplacement dans le substratum induit par la présence d'un bloc j (si un seul bloc est présent nous noterons $TF^{0j}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) = TF^{0}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)$)
d l'espacement entre blocs identiques adjacents pour un réseau de blocs
$k_{n1} = k_1^i + \dfrac{2n\pi}{d}$, $n \in \mathbb{Z}$, les nombres d'onde horizontaux dans le cas d'un réseau infini de blocs sollicité par une onde plane. k_1^i est le nombre d'onde horizontal de l'onde plane incidente
$k_{n2}^j = \sqrt{(k^j)^2 - k_{n1}^2}$ la composante verticale du nombre d'onde dans le domaine Ω_j, $j = 0,1$ telle que , $\Re\left(k_{2n}^j\right) \geqq 0$, et $\Im\left(k_{2n}^j\right) \geqq 0$
$\omega_{nm}^{\text{CH}} = 2\pi\nu_{nm}^{\text{CH}}$ la fréquence des modes de Cutler-Haskell

2.1 Problème à N bâtiments non-identiques, non-équidistants, sur sous-sol avec couche

2.1.1 Formulation du problème

Nous recherchons le champ de déplacement total $u(\mathbf{x},t)$(incident + diffracté) suivant l'axe x_3, où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine du repère O et pointant un point générique (x_1,x_2), et t la variable de temps. Plutôt que de rechercher directement $u(\mathbf{x},t)$, nous lui préfèrerons sa transformée de Fourier $u(\mathbf{x},\omega)$, vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\nabla\cdot\nabla+\left(k^j(\omega)\right)^2\right)u^j(\mathbf{x},\omega)=-f(\mathbf{x},\omega)\delta_{j0}\quad\forall\mathbf{x}\in\Omega_j,\ j=0,1,2 \\ \text{avec} \\ k^0(\omega)=\dfrac{\omega}{c_S^0};\ k^{ji}(\omega)=\dfrac{\omega}{\left(c_S^{ji}\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S^{ji}}\right)},\ j=1,2,\ i\in\mathbb{B},\ w_{ref}=0.09rad.s^{-1} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Les champs de déplacement $u^j(\mathbf{x},\omega)$, $j=0,1,2$, doivent vérifier les conditions aux limites :

$$\begin{array}{lll} \forall\mathbf{x}\in\Gamma_g\left\{\right. & \mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}=0 & (i) \\ \forall\mathbf{x}\in\Gamma_{ag}^j\left\{\right. & \mu^{2j}(\omega)\dfrac{\partial u^{2j}(\mathbf{x},\omega)}{\partial n}=0,\ \forall j\in\mathbb{B},\text{ où }\partial_n\text{ est la dérivée normale} & (ii) \\ \forall\mathbf{x}\in\Gamma_{bs}^j\left\{\right. & u^{2j}(\mathbf{x},\omega)-u^1(\mathbf{x},\omega)=0 & (iii) \\ & \mu^{2j}(\omega)\dfrac{\partial u^{2j}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}-\mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}=0 & (iv) \\ \forall\mathbf{x}\in\Gamma_h\left\{\right. & u^1(\mathbf{x},\omega)-u^0(\mathbf{x},\omega)=0 & (v) \\ & \mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}-\mu^0(\omega)\dfrac{\partial u^0(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}=0 & (vi) \end{array} \tag{2.2}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

2.1.2 Représentation des champs

En séparant les variables dans les coordonnées cartésiennes et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, nous obtenons les représentations des champs suivantes :

$$u^0(\mathbf{x},\omega)=u^i(\mathbf{x},\omega)+u^{0d}(\mathbf{x},\omega),\forall\mathbf{x}\in\Omega_0 \tag{2.3}$$

avec le champ diffracté

$$u^{0d}(\mathbf{x},\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}B^0(k_1)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1+k_2^0x_2\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0},\forall\mathbf{x}\in\Omega_0 \tag{2.4}$$

et le champ incident

$$u^i(\mathbf{x},\omega)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A^i(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1(x_1-x_1^s)+k_2^0|x_2-x_2^s|\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0},\forall\mathbf{x}\in\Omega_0 \tag{2.5}$$

Remarque : La forme du champ incident $u^i(\mathbf{x},\omega)$ fait intervenir le terme $A^i(k_1,\omega)$. Nous nous intéressons uniquement à des déplacements pour des valeurs de x_2 telles que $x_2 < x_2^s$. Si nous souhaitons exciter cette configuration à l'aide d'une onde plane, alors les champs vérifient tous l'équation d'Helmholtz homogène (sans terme source). Dans ce cas l'onde incidente prend la forme $u^i(\mathbf{x}) = A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1^i x_1 - \mathrm{i}k_2^{0i}x_2\right)$, où $k_1^i = k^0\sin\left(\theta^i\right)$ (l'onde incidente étant en incidence à θ^i). Dans ces conditions, et en identifiant la forme des champs incidents dans ces deux formulations, il est possible de se ramener au problème lorsque l'onde incidente est plane, à partir de la solution du problème lorsque l'onde incidente est cylindrique par la transformation
$A^i(\omega,k_1) = -4\pi\mathrm{i}A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1^s - k_2^0x_2^s\right)k_2^0\delta\left(k_1-k_1^i\right)$.

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^1(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1x_2\right) + B^1(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^1x_2\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\frac{dk_1}{k_2^1}, \forall\mathbf{x}\in\Omega_1 \tag{2.6}$$

et

$$u^{2j}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{m=0}^{l=\infty} B_m^{2j}\cos\left(k_{1m}^{2j}\left(x_1 - d_j + \frac{w_j}{2}\right)\right)\cos\left(k_{2m}^{2j}\left(x_2+b_j\right)\right),\ \forall\mathbf{x}\in\Omega_{2j},\ j\in\mathbb{B} \tag{2.7}$$

avec

$$\begin{aligned} k_{1m}^{2j} &= \frac{m\pi}{w_j} &&,\ j\in\mathbb{B} \\ k_{2m}^{2j} &= \sqrt{(k^{2j})^2 - \left(k_{1m}^{2j}\right)^2} &&,\ \Re\left(k_{2m}^{2j}\right)\geqq 0,\ \Im\left(k_{2m}^{2j}\right)\geqq 0,\ j\in\mathbb{B} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Remarque : Cette représentation de champ vérifie la condition (II.2.2) (ii). C'est une représentation pseudo-modale rigoureuse du champ dans les blocs. Nous employons le terme pseudo-mode associé aux termes k_{1m}^{2j}, ceux-ci ne vérifiant pas les conditions aux limites (II.2.2) (iii) et (iv) de la configuration globale.

2.1.3 Application des conditions aux limites

Commençons par appliquer les conditions de surface libre (i) sur Γ_g et de continuité de la contrainte normale (iv) sur $\cup\Gamma_{bs}^j$. Nous projetons comme nous l'avons fait jusqu'alors, c.à.d., $\int_{-\infty}^{+\infty}$ (II.2.2) (i) et (iv) $\exp\left(-\mathrm{i}k_1x_1\right)dx_1$:

$$\begin{aligned} &\mu_1\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1 - \\ &\sum_{q\in\mathbb{B}}\mu_2^q\int_{d_q-\frac{w_q}{2}}^{d_q+\frac{w_q}{2}}\left.\frac{\partial u^{2q}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1 = 0 \quad ;\forall K_1\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.9}$$

En remplaçant les expressions des champs $u^1(\mathbf{x},\omega)$, équation (II.2.6), et $u^{2q}(\mathbf{x},\omega)$, équation (II.2.7), et en utilisant la relation d'orthogonalité $\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1-K_1\right)x_1\right)dx_1 = 2\pi\delta\left(k_1-K_1\right)$, il vient :

$$\begin{aligned} \left(A^1(k_1) - B^1(k_1)\right) = \ & \frac{1}{2\mu^1\pi\mathrm{i}}\sum_{q\in\mathbb{B}}\mu^{2q}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{2q}k_{2m}^{2q}\sin\left(k_{2m}^{2q}b_q\right)\times \\ & w^q\mathrm{I}_m^-\left(k_1,w^q\right)\exp\left(-\mathrm{i}k_1\left(d_q-\frac{w_q}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

expression dans laquelle nous avons introduit la fonction $\mathrm{I}_m\left(k_1, w^q\right)^{\pm}$, définie par :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_m^{\pm}(k_1, w_q) &= \int_0^1 \exp\left(\pm \mathrm{i} k_1 w_q \eta\right) \cos\left(k_{1m}^{2q} w_q \eta\right) d\eta \\ &= \frac{\exp\left(\pm \mathrm{i} k_1 \frac{w_q}{2}\right)}{2}\left(\exp\left(\mathrm{i} k_{1m}^{2q} \frac{w_q}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\left(k_{1m}^{2q} \pm k_1\right)\frac{w_q}{2}\right) + \right. \\ &\left. \exp\left(-\mathrm{i} k_{1m}^{2q} \frac{w_q}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\left(-k_{1m}^{2q} \pm k_1\right)\frac{w_q}{2}\right)\right)\end{aligned} \tag{2.11}$$

De même, appliquons la condition de continuité des déplacements sur $\cup\Gamma_{bs}^j$, cette fois en projection tel que $\int_{d_j-\frac{w_j}{2}}^{d_j+\frac{w_j}{2}}$ (II.2.2) (iii) $\cos\left(k_{1n}^{2j}\left(x_1 - d_j + \frac{w_j}{2}\right)\right) dx_1$, $\forall j \in \mathbb{B}$:

$$\begin{aligned}&\int_{d_j-\frac{w_j}{2}}^{d_j+\frac{w_j}{2}} u^1(\mathbf{x}, \omega)\big|_{x_2=0} \cos\left(k_{1n}^{2j}\left(x_1 - d_j + \frac{w_j}{2}\right)\right) dx_1 - \\ &\int_{d_j-\frac{w_j}{2}}^{d_j+\frac{w_j}{2}} u^{2j}(\mathbf{x}, \omega)\big|_{x_2=0} \cos\left(k_{1n}^{2j}\left(x_1 - d_j + \frac{w_j}{2}\right)\right) dx_1 = 0 \quad ; \forall j \in \mathbb{B}\end{aligned} \tag{2.12}$$

En introduisant les expressions des champs, et en utilisant la relation d'orthogonalité des modes $\int_{d_j-\frac{w_j}{2}}^{d_j+\frac{w_j}{2}} \cos\left(k_{1m}^{2j}\left(x_1 - d_j + \frac{w_j}{2}\right)\right)\cos\left(k_{1n}^{2j}\left(x_1 - d_j + \frac{w_j}{2}\right)\right) = \frac{w_j \delta_{mn}}{\epsilon_m}$, où δ_{mn} est le symbole de Kronecker et où $\epsilon_m = 1$ pour $m = 0$ et $\epsilon_m = 2$, $m > 0$ il vient :

$$\frac{B_m^j \delta_{mn} \cos\left(k_{2m}^{2j} b_j\right)}{\epsilon_m} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A^1(k_1) + B^1(k_1)\right) \mathrm{I}_n^+(k_1, w_j) \exp\left(\mathrm{i} k_1\left(d_j - \frac{w_j}{2}\right)\right) \frac{dk_1}{k_2^1} \tag{2.13}$$

Si l'on s'intéresse maintenant à la condition de continuité de la contrainte normale à Γ_h, toujours en projection tel que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.2.2) (vi) $\exp\left(-\mathrm{i} k_1 x_1\right) dx_1$:

$$\begin{aligned}&\mu^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial u^1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=h} \exp\left(-\mathrm{i} K_1 x_1\right) dx_1 - \\ &\mu^0 \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial u^0(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=h} \exp\left(-\mathrm{i} K_1 x_1\right) dx_1 = 0; \forall K_1 \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{2.14}$$

il vient :

$$\begin{aligned}&2\pi \mathrm{i} \mu^1 \left(A^1(k_1) \exp\left(-\mathrm{i} k_2^1\right) - B^1(k_1) \exp\left(\mathrm{i} k_2^1\right)\right) = \\ &-2\pi \mathrm{i} \mu^0 B^0(k_1) \exp\left(\mathrm{i} k_2^0 h\right) - \mu^0 \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial u^i(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=h} \exp\left(-\mathrm{i} K_1 x_1\right) dx_1\end{aligned} \tag{2.15}$$

Et enfin, en appliquant la condition de continuité du déplacement sur Γ_h,
$\int_{-\infty}^{\infty}$ (II.2.2) (v) $\exp\left(-\mathrm{i} k_1 x_1\right) dx_1$,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} u^1(\mathbf{x}, \omega)\big|_{x_2=h} \exp\left(-\mathrm{i} K_1 x_1\right) dx_1 - \\ &\int_{-\infty}^{\infty} u^0(\mathbf{x}, \omega)\big|_{x_2=h} \exp\left(-\mathrm{i} K_1 x_1\right) dx_1 = 0; \forall K_1 \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{2.16}$$

il vient

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{k_2^1}\left(A^1(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1h\right)+B^1(k_1)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1h\right)\right)=\\&\frac{2\pi}{k_2^0}B^0(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right)+\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1\end{aligned}\tag{2.17}$$

2.1.4 Obtention des champs dans les blocs Ω_2, la couche Ω_1 et le substratum Ω_0

La première étape est d'obtenir une expression des coefficients $A^1(k1)$ et $B^1(k1)$ en fonction de $B^0(k_1)$. Des équations (II.2.15) et (II.2.17), il vient :

$$\begin{aligned}A^1(k^1)=\;&\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_2^1h\right)}{2}B^0(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right)\left(\frac{k_2^1}{k_2^0}-\frac{\mu^0}{\mu^1}\right)-\\&\frac{\mu^0\exp\left(\mathrm{i}k_2^1h\right)}{4\pi\mathrm{i}\mu^1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1+\\&\frac{k_2^1\exp\left(\mathrm{i}k_2^1h\right)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1\end{aligned}\tag{2.18}$$

et

$$\begin{aligned}B^1(k^1)=\;&\frac{\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1h\right)}{2}B^0(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right)\left(\frac{k_2^1}{k_2^0}+\frac{\mu^0}{\mu^1}\right)+\\&\frac{\mu^0\exp\left(\mathrm{i}k_2^1h\right)}{4\pi\mathrm{i}\mu^1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1+\\&\frac{k_2^1\exp\left(\mathrm{i}k_2^1h\right)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1\end{aligned}\tag{2.19}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}A^1(k_1)+B^1(k_1)=\;&B^0\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right)\left(\frac{k_2^1}{k_2^0}\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0}{\mu^1}\sin\left(k_2^1h\right)\right)-\\&\frac{\mu^0\sin\left(k_2^1h\right)}{2\pi\mu^1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1+\\&\frac{k_2^1\cos\left(k_2^1h\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1\end{aligned}\tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned}A^1(k_1)-B^1(k_1)=\;&B^0\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right)\left(\mathrm{i}\frac{k_2^1}{k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)-\frac{\mu^0}{\mu^1}\cos\left(k_2^1h\right)\right)+\\&\frac{\mathrm{i}\mu^0\cos\left(k_2^1h\right)}{2\pi\mu^1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1+\\&\frac{\mathrm{i}k_2^1\sin\left(k_2^1h\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1\end{aligned}\tag{2.21}$$

Alors, en introduisant l'équation (II.2.20) dans l'équation (II.2.13), nous obtenons une expression pour les coefficients pseudo-modaux $B_{2m}^{2q}(k_1)$ en fonction de $B^0(k_1)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{B_m^{2j}\delta_{mn}\cos\left(k_{2m}^{2j}b_j\right)}{\epsilon_m} = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} B^0\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right)\left(\frac{k_2^1}{k_2^0}\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0}{\mu^1}\sin\left(k_2^1h\right)\right)\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(d_j-\frac{w_j}{2}\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^1}+ \\
&\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{\mu^0\sin\left(k_2^1h\right)}{2\pi\mu^1}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial u^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1+\right. \\
&\left.\frac{k_2^1\cos\left(k_2^1h\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1\right]\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(d_j-\frac{w_j}{2}\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^1}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

De même, en introduisant l'équation (II.2.21) dans l'équation (II.2.10), il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\mu^1}\sum_{q\in\mathbb{B}}\mu^{2q}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{2q}k_{2m}^{2q}\sin\left(k_{2m}^{2q}b_q\right)w_q\mathrm{I}_m^-\left(k_1,w^q\right)\exp\left(-\mathrm{i}k_1\left(d_q-\frac{w_q}{2}\right)\right) = \\
&B^0\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right)\left(\mathrm{i}\frac{k_2^1}{k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)-\frac{\mu^0}{\mu^1}\cos\left(k_2^1h\right)\right)+ \\
&\frac{\mathrm{i}\mu^0\cos\left(k_2^1h\right)}{2\pi\mu^1}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial u^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1+ \\
&\frac{\mathrm{i}k_2^1\sin\left(k_2^1h\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Deux choix se présentent à nous : soit, nous introduisons l'expression de B_m^{2j}, équation (II.2.22), dans l'équation (II.2.23) de façon à obtenir une **équation intégrale pour la résolution de** $B^0(k_1)$, soit nous introduisons l'expression de B^0, obtenue à partir de l'équation (II.2.22), dans (II.2.23), de façon à obtenir un **système matriciel pour la résolution des coefficients pseudo-modaux** B_m^{2j}, $\forall j\in\mathbb{B}$, $\forall m\in\mathbb{R}^+$. La première solution présente un intérêt du point de vue de la détermination des modes du système. Elle sera développée dans la section suivante. Nous allons développer, pour l'instant, la seconde.

De l'équation (II.2.23), nous tirons $B^0(k_1)\exp\left(\mathrm{i}k_2^0\right)$:

$$\begin{aligned}
&B^0\exp\left(\mathrm{i}k_2^0h\right) = \frac{\sum_{q\in\mathbb{B}}\mu^{2q}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{2q}k_{2m}^{2q}\sin\left(k_{2m}^{2q}b_q\right)w_q\mathrm{I}_m^-\left(k_1,w^q\right)\exp\left(-\mathrm{i}\left(d_q-\frac{w_q}{2}\right)\right)}{2\pi\mu^1\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\frac{k_2^1}{k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)-\frac{\mu^0}{\mu^1}\cos\left(k_2^1h\right)\right)}- \\
&\mathrm{i}\left(\frac{\mu^0\cos\left(k_2^1h\right)}{\mu^1}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial u^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\right|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1+\right. \\
&\left.k_2^1\sin\left(k_2^1h\right)\int_{-\infty}^{\infty}u^i(\mathbf{x},\omega)\big|_{x_2=h}\exp\left(-\mathrm{i}K_1x_1\right)dx_1\right)\frac{1}{2\pi\left(\mathrm{i}\frac{k_2^1}{k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)-\frac{\mu^0}{\mu^1}\cos\left(k_2^1h\right)\right)}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

En introduisant cette expression dans l'équation (II.2.22), il vient le système matriciel :

$$B_n^{2j} = P_n^j+\sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty}Q_{nm}^{jq}B_m^{2q};\ \forall j\in\mathbb{B};\ \forall n\in\mathbb{Z} \tag{2.25}$$

avec

$$Q_{nm}^{jq} = \frac{\mathrm{i}w_q k_{2m}^{2q}\mu^{2q}\epsilon_n \sin\left(k_{2m}^{2q}b_q\right)}{2\pi\mu^0\cos\left(k_{2n}^{2j}b_j\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\times \\ \mathrm{I}_m^-\left(k_1,w_q\right)\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(\left(d_j-d_q\right)-\frac{w_j-w_q}{2}\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.26}$$

et

$$P_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^i\left(k_1,\omega\right)\mathrm{i}\epsilon_n\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(\left(d_j-\frac{w_j}{2}\right)-x_1^s\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)}{2\pi\cos\left(k_{2n}^{2j}b_j\right)\left(\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1 k_1^1}{\mu^0 k_1^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.27}$$

Cette formulation nous permet de mettre en évidence les **termes relatifs à chaque bloc** j : Q_{nm}^{jj}, $j\in\mathbb{B}$, et les **termes de couplage entre chaque bloc** j **et** q, $q\neq j$: Q_{nm}^{jq}.

Remarque : Du fait que

$$\mathrm{I}_n^{\pm}(k_1,w_q) = (-1)^n\exp\left(-2\mathrm{i}\left(\pm k_1\right)\frac{w_q}{2}\right)\mathrm{I}_n^{\pm}(-k_1,w_q) \tag{2.28}$$

il vient,

$$Q_{nm}^{jq} = \frac{\mathrm{i}w_q k_{2m}^{2q}\mu^{2q}\epsilon_n \sin\left(k_{2m}^{2q}b_q\right)}{2\pi\mu^0\cos\left(k_{2n}^{2j}b_j\right)}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\mathrm{I}_m^-\left(k_1,w_q\right)\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right) \\ \exp\left(-\mathrm{i}k_1\frac{w_j-w_q}{2}\right)\left(\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(d_j-d_q\right)\right)+(-1)^{m+n}\exp\left(-\mathrm{i}k_1\left(d_j-d_q\right)\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.29}$$

Ce qui signifie que si $d_j = d_q$, alors $Q_{nm}^{jq} = 0$ pour $m+n = 2p+1$, $p\in\mathbb{N}$.
De même, nous avons

$$P_n^j = \int_{0}^{+\infty}\frac{A^i\left(k_1,\omega\right)\mathrm{i}\epsilon_n\exp\left(-\mathrm{i}k_1\left(\frac{w_j}{2}+x_1^s\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)}{2\pi\cos\left(k_{2n}^{2j}b_j\right)\left(\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1 k_1^1}{\mu^0 k_1^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\times \\ \left(\exp\left(\mathrm{i}k_1 d_j\right)+(-1)^n\exp\left(-\mathrm{i}k_1 d_j\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.30}$$

Ce qui signifie que si $d_j = 0$, alors $P_n^j = 0$ pour $n = 2p+1$, $p\in\mathbb{N}$.
Ainsi, en regroupant les deux conditions d'annulation de P_n^j et de Q_{nm}^{jq}, les coefficients pseudo-modaux impairs B_{2n+1}^{2j} sont nuls si la source est située à la verticale (c.à.d. $x_1^s = d_j = 0$) du bâtiment j, lui-même situé à l'abscisse zéro.

Remarque : Au terme $\dfrac{\epsilon_n \mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)}{\cos\left(k_{2n}^{2j}b_j\right)}$ près, le terme source P_n^j, équation (II.2.27), est le déplacement sur la surface dans la configuration d'une couche molle sur un substratum plus rigide déjà rencontré dans la section II.1.1.

Remarque : Le dénominateur de l'intégrande de l'équation (II.2.26) est, lorsqu'elle s'annule, la relation de dispersion des modes de Love.

Il suffit alors de résoudre ce système matriciel pour connaître l'expression de B_m^{2j}, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in \mathbb{B}$ et par conséquent, obtenir l'expression des champs $u^{2j}(\mathbf{x},\omega)$, $\forall j \in \mathbb{B}$.

Supposons cette opération réalisée, c'est-à-dire que les coefficients pseudo-modaux B_m^{2j}, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in \mathbb{B}$ sont connus. Il vient alors, équation (II.2.24) :

$$B^0 = \frac{\sum_{q\in\mathbb{B}} \mu^{2q} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w^q\right) \exp\left(-\mathrm{i}k_1\left(d_q - \frac{w_q}{2}\right) - \mathrm{i}k_2^0 h\right)}{2\pi\mu^1 \mathrm{i}\left(\mathrm{i}\frac{k_2^1}{k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right) - \frac{\mu^0}{\mu^1}\cos\left(k_2^1 h\right)\right)} + \frac{\mathrm{i}A^{i0}(k_1,\omega)}{4\pi} \frac{\exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1^s + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s - 2h\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \tag{2.31}$$

Alors, en introduisant cette expression dans l'équation (II.2.4), le champ $u^0(\mathbf{x},\omega)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} u^0(\mathbf{x},\omega) = u^{i0}(\mathbf{x},\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} & \frac{\mathrm{i}\sum_{q\in\mathbb{B}} \mu^{2q} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w^q\right)}{2\pi\mu^0\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \times \\ & \exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - \left(d_q - \frac{w_q}{2}\right)\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 - h\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0} + \\ \int_{-\infty}^{\infty} & \frac{\mathrm{i}A^{i0}(k_1,\omega)}{4\pi} \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 + x_2^s - 2h\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Remarque : Le dernier terme, que nous appellerons $u_{\mathbf{cou}}^{0d}(\mathbf{x},\omega)$**, correspond à l'excitation par une source dans le domaine** Ω_0 **de la configuration sans bâtiment**, c'est-à-dire une couche molle sur un substratum infini plus dur. Il correspond au déplacement que nous avons recontré dans le cas de l'étude des modes de Love.

Introduisons maintenant l'expression de B^0, équation (II.2.31), dans l'équation (II.2.18) de façon à obtenir une expression pour A^1 :

$$\begin{aligned} A^1 = & \frac{\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}k_2^1 h\right)}{4\pi}\left(\frac{k_2^1}{k_2^0} - \frac{\mu^0}{\mu^1}\right) \times \\ & \left(\frac{\sum_{q\in\mathbb{B}} \mu^{2q} \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w^q\right) \exp\left(-\mathrm{i}k_1\left(d_q - \frac{w_q}{2}\right)\right)}{\mu^0\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\right) + \\ & \frac{\mathrm{i}A^{i0}(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1^s + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s - h\right)\right)}{8\pi} \times \\ & \left(\frac{\cos\left(k_2^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}\left(\frac{k_2^1}{k_2^0} - \frac{\mu^0}{\mu^1}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_2^1 h\right) + \left(\frac{k_2^1}{k_2^0} + \frac{\mu^0}{\mu^1}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_2^1 h\right)\right) \end{aligned} \tag{2.33}$$

et faisons de même dans l'équation (II.2.19) de façon à obtenir une expression pour B^1

$$\begin{aligned}
B^1 = & \frac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1 h\right)}{4\pi}\left(\frac{k_2^1}{k_2^0}+\frac{\mu^0}{\mu^1}\right)\times \\
& \left(\frac{\sum_{q\in\mathbb{B}}\mu^{2q}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{2q}k_{2m}^{2q}\sin\left(k_{2m}^{2q}b_q\right)w_q\mathrm{I}_m^-\left(k_1,w^q\right)\exp\left(-\mathrm{i}k_1\left(d_q-\frac{w_q}{2}\right)\right)}{\mu^0\left(\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1h\right)\right)}\right)+ \\
& \frac{\mathrm{i}A^{i0}(k_1,\omega)\exp\left(-\mathrm{i}k_1x_1^s+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)}{8\pi}\times \\
& \left(\frac{\cos\left(k_2^1h\right)+\mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1h\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\left(\frac{k_2^1}{k_2^0}+\frac{\mu^0}{\mu^1}\right)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1h\right)+\left(\frac{k_2^1}{k_2^0}-\frac{\mu^0}{\mu^1}\right)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^1h\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

L'expression du champ $u^1(\mathbf{x},\omega)$ est alors :

$$\begin{aligned}
u^1(\mathbf{x},\omega) = & \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{A^{i0}(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)\cos\left(k_2^1x_2\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}+ \\
& \sum_{q\in\mathbb{B}}\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-\left(d_q-\frac{w_q}{2}\right)\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}\times \\
& \frac{\mu^{2q}}{\mu^0}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{2q}k_{2m}^{2q}\sin\left(k_{2m}^{2q}b_q\right)w_q\mathrm{I}_m^-\left(k_1,w_q\right)\frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Remarque : Le premier terme, que nous appellerons $u^1_{\mathbf{cou}}(\mathbf{x},\omega)$**, correspond à l'excitation par une source dans le domaine** Ω_0 **de la configuration sans bâtiment**, c'est-à-dire d'une couche molle sur un substratum infini plus dur. Il correspond au déplacement que nous avons rencontré dans le cas de l'étude des modes de Love.

Nous disposons donc d'une représentation des champs dans les différents domaines Ω_0, Ω_1 et $\Omega_2 = \cup\Omega_j$. La représentation adoptée dans cette section fait appel à la résolution d'un système matriciel pour obtenir les coefficients pseudo-modaux B_m^{2j}, $m\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{B}$. Une fois ces coefficients connus, nous en déduisons les formulations des champs $u^0(\mathbf{x},\omega)$ dans le substratum et $u^1(\mathbf{x},\omega)$ dans la couche. Ces deux formulations font apparaître les champs calculés dans le cas d'une simple couche sur un substratum plus rigide, sans bâtiment, $u^0_{\mathrm{cou}}(\mathbf{x},\omega)$, et $u^1_{\mathrm{cou}}(\mathbf{x},\omega)$. À ces termes s'additionnent d'autres termes, tous relatifs à la présence des bâtiments. Une façon de comprendre, au moins une partie de ces termes, est de considérer le problème canonique d'une couche d'étendue latérale infinie, sur un substratum infini, excitée par une source de type ruban, localisée dans la couche.

2.1.5 Déplacement dans le substratum et dans la couche dans une configuration sans bâtiment induit par une source de type ruban, localisée dans la couche

Considérons le problème décrit à la section II.1.1.10. Nous souhaitons obtenir une formulation du champ dans le domaine Ω_1, supposé modéliser une couche d'épaisseur h, et dans le domaine semi-infini Ω_0, supposé modéliser le substratum plus rigide. La sollicitation est cette fois délivrée par une source cylindrique (suivant l'axe x_3) de type ruban de largeur w suivant l'axe x_1, centrée au point $\mathbf{x_s} = (x_1^s, x_2^s)$, polarisée en onde de cisaillement horizontal, figure II.2.4.

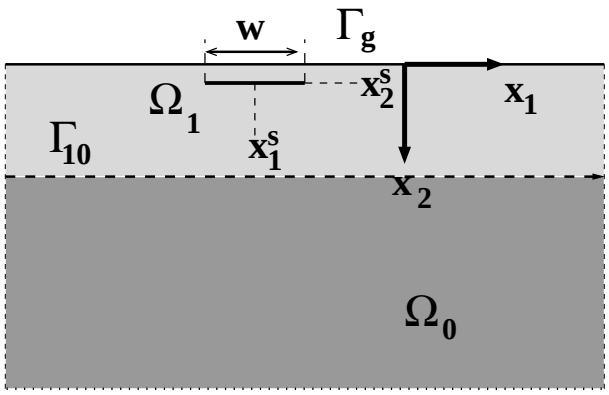


FIG. 2.4 – *Coupe dans le plan sagittal*

La formulation du problème, ainsi que les représentations des champs sont identiques à celles exposées section II.1.1.10. Seuls les champs incident et spéculairement réfléchi sont modifiés, la source ayant un support spatial non-nul. Le champ incident s'écrit dans notre cas :

$$u^{i1}(\mathbf{x},\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega) s^{i1}(\mathbf{y},\omega) d\mathbf{y}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{2.36}$$

où $\mathbf{y}$ est le vecteur partant de l'origine et pointant un point du plan sagittal de coordonnées (χ,ζ), $G(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)$ est la fonction de Green de l'espace libre (empli d'un matériau M^1) et $s^{i1}(\mathbf{y},\omega)$ la densité de source, telle que :

$$s^{i1}(\mathbf{y},\omega) = \frac{A^{i1}(\omega)}{w}\left(\mathrm{H}\left(x_1^s - \frac{w}{2}\right) + \mathrm{H}\left(x_1^s + \frac{w}{2}\right) - 1\right)\delta(\zeta - x_2^s) \tag{2.37}$$

où $\mathrm{H}(x)$ est la fonction Heaviside. Le champ incident est donc :

$$\begin{aligned} u^{i1}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^1|x_2 - x_2^s|\right)\left(\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\exp\left(-\mathrm{i}k_1\chi\right)}{w}\right) d\chi \frac{dk_1}{k_2^1} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^1|x_2 - x_2^s|\right)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\frac{dk_1}{k_2^1} \end{aligned} \tag{2.38}$$

où $\mathrm{sinc}\,(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est la fonction sinus cardinal.
De façon identique, le champ spéculairement réfléchi prend la forme :

$$\begin{aligned} u^{s1}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^1|x_2 + x_2^s|\right)\left(\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\exp\left(-\mathrm{i}k_1\chi\right)}{w}\right) d\chi \frac{dk_1}{k_2^1} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^1|x_2 + x_2^s|\right)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\frac{dk_1}{k_2^1} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Alors, il est possible de se ramener au cas traité dans la section II.1.1.10, en posant :

$$A^{i1}(k_1\omega) = A^{i1}(\omega)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right) \tag{2.40}$$

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
u^0(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2-h\right)\right)\cos\left(k_2^1x_2^s\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}\\
u^1(\mathbf{x},\omega) &= u^{i1}(\mathbf{x},\omega)+u^{s1}(\mathbf{x},\omega)+\\
&\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)+\mathrm{i}k_2^1h\right)\cos\left(k_2^1x_2\right)\cos\left(k_2^1x_2^s\right)\left(\frac{\mu^1}{\mu^0}-\frac{k_2^0}{k_2^1}\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Pour les besoins de l'analyse, il est plus intéressant de formuler le champ dans Ω_1 sous la forme d'une seule intégrale (c.à.d. inclure les champs incident et spéculairement réfléchi dans l'intégrale du champ diffracté). Deux cas se présentent alors selon le signe de la quantité $x_2 - x_2^s$:

– si $x_2 \geqq x_2^s$

$$
\begin{aligned}
u^1(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)\right)\cos\left(k_2^1x_2\right)\times\\
&\frac{\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2^s-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2^s-h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

– si $x_2 \leqq x_2^s$

$$
\begin{aligned}
u^1(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)\right)\cos\left(k_2^1x_2^s\right)\times\\
&\frac{\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Considérons maintenant le cas où la source ruban est située au niveau de l'interface Γ_g, c'est-à-dire $x_2^s = 0$. Seul le cas $x_2 \leqq x_2^s$ existe dans cette configuration et il vient :

$$
\begin{aligned}
u^0(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2-h\right)\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}\\
u^1(\mathbf{x},\omega) &= \frac{\mathrm{i}\mu^1}{2\pi\mu^0}\int_{-\infty}^{\infty} A^{i1}(\omega)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)\right)\times\\
&\frac{\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

2.1.6 Les bâtiments comme sources induites

La quantité $\mathrm{I}_m^-(\mathbf{x}, w_q)$, intervenant dans les équations (II.2.32) et (II.2.35) peut s'écrire :

$$
\mathrm{I}_m^-(\mathbf{x},w_q) = \frac{k_1\exp\left(-\mathrm{i}k_1\frac{w_q}{2}\right)}{\left(\left(k_1\right)^2-\left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)^{\frac{w_q}{2}}}\left(-\mathrm{i}\cos\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\delta_{2n+1}+\sin\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\delta_{2n}\right) \tag{2.45}
$$

si bien qu'en nommant $u^1_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)$ et $u^0_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega) = u^{i0}_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega) + u^{d0}_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)$ les expressions des champs de déplacement dans les milieux Ω_1 et Ω_0 dans la configuration sans bâtiment, les champs de déplacement dans les domaines Ω_1 et Ω_0, en présence de bâtiments, peuvent s'écrire :

$$
\begin{aligned}
&u^0(\mathbf{x},\omega) = u^0_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega) + \\
&\sum_{q\in\mathbb{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-d_q\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2-h\right)\right)}{2\pi\mu^0\left(\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\times \\
&\sum_{m=0}^{\infty} \mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q \frac{k_1\left(-\mathrm{i}\cos\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\delta_{2n+1}+\sin\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\delta_{2n}\right)}{\left(\left(k_1\right)^2-\left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)\frac{w_q}{2}}\frac{dk_1}{k_2^0} \\
&u^1(\mathbf{x},\omega) = u^1_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega) + \\
&\sum_{q\in\mathbb{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-d_q\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{2\pi\mu^0\left(\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\times \\
&\mu^{2q}\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q \frac{k_1\left(-\mathrm{i}\cos\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\delta_{2n+1}+\sin\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\delta_{2n}\right)}{\left(\left(k_1\right)^2-\left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)\frac{w_q}{2}}\frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Notons $u^1_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m}^{\infty} u^{1q}_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega)$, et $u^0_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty} u^{0q}_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega)$ les champs relatifs à la présence des bâtiments dans les domaines Ω_1 et Ω_0.

2.1.6.1 Le champ induit par la présence des bâtiments

Intéressons-nous aux champs $u^1_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)$ et $u^0_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty} u^{0q}_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega)$. Les expressions (II.2.46) font apparaître une différence claire entre les termes relatifs aux modes pairs et ceux relatifs aux modes impairs.

– Pour les **pseudo-modes pairs**, $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
&u^{0q}_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q}{\left(1-\left(\frac{k_{1m}^{2q}}{k_1}\right)^2\right)}\times \\
&\frac{\operatorname{sinc}\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-d_q\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2-h\right)\right)}{2\pi\mu^0\left(\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \\
&u^{1q}_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q}{\left(1-\left(\frac{k_{1m}^{2q}}{k_1}\right)^2\right)}\times \\
&\frac{\operatorname{sinc}\left(k_1\frac{w_q}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-d_q\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{2\pi\mu^0\left(\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

La forme de ces champs peut-être interprétée à l'aide des équations (II.2.44). Ainsi, les champs dans Ω_1 et Ω_0, au terme $\left(1-\left(\frac{k_{1m}^{2q}}{k_1}\right)^2\right)$ près, peuvent être interprétés comme ceux générés par des **sources de type ruban de largeur w_q, localisées à d_q**, $\forall q \in \mathbb{B}$ et de spectre $A^q(\omega) = \frac{\mu^{2q}}{\mu^1} B_0^{2q} k_{20}^{2q} \sin\left(k_{20}^{2q} b_q\right) w_q$.

Le terme au dénominateur $\left(1-\left(\frac{k_{1m}^{2q}}{k_1}\right)^2\right)$ correspond à une gaussienne (dans le cas dissipatif), mettant en évidence le pseudo-mode $k_1 = k_{1m}^{2q}$ du bâtiment considéré.

– Pour les **pseudo-modes impairs**, $m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{bat}m}^{0q}(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q}{\left((k_1)^2 - \left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)} \times \\
&\frac{k_1 \cos\left(k_1 \frac{w_q}{2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_1 (x_1 - d_q) + \mathrm{i}k_2^0 (x_2 - h)\right)}{2\pi\mu^0 \left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1 \mu^1}{k_2^0 \mu^0} \sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q}{\left((k_1)^2 - \left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)} \frac{k_1 \exp\left(\mathrm{i}k_1 \left(x_1 - d_q + \frac{w_q}{2}\right) + \mathrm{i}k_2^0 (x_2 - h)\right)}{4\pi\mu^0 \left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1 \mu^1}{k_2^0 \mu^0} \sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} + \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q}{\left((k_1)^2 - \left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)} \frac{k_1 \exp\left(\mathrm{i}k_1 \left(x_1 - d_q - \frac{w_q}{2}\right) + \mathrm{i}k_2^0 (x_2 - h)\right)}{4\pi\mu^0 \left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1 \mu^1}{k_2^0 \mu^0} \sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} \\
u_{\mathrm{bat}m}^{1q}(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q}{\left((k_1)^2 - \left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)} \times \\
&\frac{k_1 \exp\left(\mathrm{i}k_1 \left(x_1 - d_q + \frac{w_q}{2}\right)\right) \left(\cos\left(k_2^1 (x_2 - h)\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 (x_2 - h)\right)\right)}{4\pi\mu^0 \left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} + \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{2q} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q}{\left((k_1)^2 - \left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)} \times \\
&\frac{k_1 \exp\left(\mathrm{i}k_1 \left(x_1 - d_q - \frac{w_q}{2}\right)\right) \left(\cos\left(k_2^1 (x_2 - h)\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 (x_2 - h)\right)\right)}{4\pi\mu^0 \left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

La forme de ces champs peut-être interprétée à l'aide des équations présentées dans la section II.1.1. Ainsi, les champs dans Ω_1 et Ω_0, au terme $\dfrac{k_1}{\left((k_1)^2 - \left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)}$ près, peuvent être interprétés comme ceux générés par des **sources cylindriques le long de l'axe x_3, localisées à $d_q \pm \dfrac{w_q}{2}$**, $\forall q \in \mathbb{B}$ et de spectre $A_m^q(\omega) = \dfrac{-\mathrm{i}\mu^{2q}}{\mu^1} B_m^{2q} k_{2m}^{2q} \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right) w_q$.

Le terme au dénominateur $\left((k_1)^2 - \left(k_{1m}^{2q}\right)^2\right)$ correspond à une gaussienne (dans le cas dissipatif), mettant en évidence le pseudo-mode $k_1 = k_{1m}^{2q}$ du bâtiment considéré.

Ainsi, les modifications des champs dans la couche et le substratum, induites par la présence de chaque bâtiment, peuvent être interprétées comme des champs dus à des sources induites. Pour les modes pairs, ces sources sont des sources de type ruban de largeur égale à la largeur du bâtiment considéré et localisées au centre des bâtiments, et pour les modes impairs, ces sources sont des sources cylindriques le long de l'axe x_3, de spectres identiques pour un même bâtiment, localisées dans les coins des bâtiments. Nous faisons apparaître clairement des gaussiennes correspondant aux excitations des modes de chaque bâtiment.

Un cas intéressant intervient si l'on considére que les modes fondamentaux de chaque bâtiment sont prépondérants.

2.1.6.2 Le champ induit par chaque résonance fondamentale

Il est souvent admis, [117, 53, 37, 90], que les termes correspondant aux modes fondamentaux des bâtiments sont prépondérants par rapport aux termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire $u^i_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) \approx \sum_{q\in\mathbb{B}} u^{iq}_{\text{bat}0}(\mathbf{x},\omega)$, $i = 0, 1$. L'expression des champs induits par la présence des bâtiments se réduit alors à :

$$\begin{aligned}
u^1_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) &\approx \sum_{q\in\mathbb{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mu^{2q}}{2\pi\mu^0} B_0^{2q} k_{20}^{2q} \sin\left(k_{20}^{2q} b_q\right) w_q \mathrm{sinc}\left(k_1 \frac{w_q}{2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - d_q\right)\right) \times \\
&\quad \frac{\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} \\
u^0_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) &\approx \sum_{q\in\mathbb{B}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mu^{2q}}{2\pi\mu^0} B_0^{2q} k_{20}^{2q} \sin\left(k_{20}^{2q} b_q\right) w_q \mathrm{sinc}\left(k_1 \frac{w_q}{2}\right) \times \\
&\quad \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - d_q\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 - h\right)\right)}{\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1 \mu^1}{k_2^0 \mu^0} \sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Nous pouvons identifier ces expressions aux champs de déplacement dans une couche et dans le substratum obtenus dans le cas d'une excitation par N **sources de type ruban localisées aux abscisses $\mathbf{x^{sj}} = (d_j, 0m)$, et de largeur** w_j, $j \in \mathbb{B}$, équation (II.2.44). Les spectres de ces sources sont alors :

$$A^q(\omega) = \frac{\mu^{2q}}{\mu^1} B_0^{2q} k_{20}^{2q} \sin\left(k_{20}^{2q} b_q\right) w_q \tag{2.50}$$

Ainsi, un bâtiment, dans l'hypothèse où sa réponse fondamentale est prépondérante, agit comme une source induite. **Cette source induite n'apporte, par définition, aucune énergie au système mais implique une nouvelle répartition de celle-ci.** En particulier, nous avons montré section II.1.1 qu'une source (cylindrique), si elle est localisée dans la couche, excite des modes de Love, et excite des ondes de surface (qui ne sont, il faut le rappeler, pas des modes de Love). Nous pouvons nous attendre à des phénomènes similaires en ce qui concerne cette source induite.

2.1.7 Analyse modale

Les modes d'un système, ne sont pas l'union des modes de chaque sous-système le composant, c'est-à-dire dans notre cas, les modes ne peuvent pas être l'union des modes de Love avec les modes des bâtiments. Deux possibilités d'analyse s'offrent à nous et nous allons les explorer toutes deux.

2.1.7.1 Système matriciel

Le première possibilité est de revenir au système matriciel (II.2.25) permettant d'obtenir les coefficients pseudo-modaux de chaque bâtiment, que nous rappelons ici :

$$B_n^{2j} = P_n^j + \sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty} Q_{nm}^{jq} B_m^{2j};\ \forall j \in \mathbb{B};\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Considérons $\mathbb{B} = \{1, 2, 3, ..., N\}$ et

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{21}\ \mathbf{b}^{22}...\mathbf{b}^{2N})^T \tag{2.51}$$

où ^{T} désigne la transposée et où

$$\mathbf{b}^{2j} = (B_0^{2j}\ B_1^{2j}\ B_2^{2j}...)^T \tag{2.52}$$

De façon similaire, nous posons :

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}^1\ \mathbf{p}^2...\mathbf{p}^N)^T$$

$$\mathbf{p}^j = \left(P_0^j\ P_1^j\ P_2^j...\right)^T$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{11} & \mathbf{Q}^{12} & ... & \mathbf{Q}^{1N} \\ \mathbf{Q}^{21} & \mathbf{Q}^{22} & ... & \mathbf{Q}^{2N} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ \mathbf{Q}^{N1} & \mathbf{Q}^{N2} & ... & \mathbf{Q}^{NN} \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

$$\mathbf{Q}^{jq} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{00}^{jq} & \mathbf{Q}_{01}^{jq} & \mathbf{Q}_{02}^{jq} & ... \\ \mathbf{Q}_{10}^{jq} & \mathbf{Q}_{11}^{jq} & \mathbf{Q}_{12}^{jq} & ... \\ \mathbf{Q}_{20}^{jq} & \mathbf{Q}_{21}^{jq} & \mathbf{Q}_{22}^{jq} & ... \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \end{pmatrix}$$

Le système (II.2.25) s'écrit donc :

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{b} \tag{2.54}$$

Ce système permet la résolution de $\mathbf{b}$ et peut être écrit :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\,\mathbf{b} = \mathbf{p} \tag{2.55}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité (c'est à dire une matrice de la même dimension que $\mathbf{Q}$ comportant des un sur sa diagonale et des zéros ailleurs). Les modes de la ville sont obtenus en annulant le terme d'excitation, c'est-à-dire chaque composante du vecteur $\mathbf{p}$. La solution non-triviale de cette équation est obtenue si et seulement si le déterminant de $\mathbf{I} - \mathbf{Q}$ est nul:

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = 0 \tag{2.56}$$

ce qui n'est pas une opération aisée dans le cas général.

2.1.7.2 Mode naturel du système : mise en évidence des modes de bloc à base fixe

Une procédure itérative de résolution du système (non employée en pratique) est porteuse de signification. Effectivement, le système matriciel revient à résoudre :

$$B_n^{2j} = \frac{P_n^j + \sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty}(1-\delta_{nm}\delta_{jq})\,B_n^{2q}}{1-Q_{nn}^{jj}},\ \forall j\in\mathbb{B},\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{2.57}$$

Une procédure itérative de résolution de cette équation conduit à :

$$\begin{cases} B_n^{2j(0)} = \dfrac{P_n^j}{1-Q_{nn}^{jj}},\ \forall j\in\mathbb{B},\ \forall n\in\mathbb{N} \\ B_n^{2j(p)} = \dfrac{P_n^j + \sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty}(1-\delta_{nm}\delta_{jq})\,B_n^{2q(p-1)}}{1-Q_{nn}^{jj}},\ \forall j\in\mathbb{B},\ \forall n\in\mathbb{N},\ p=1,2... \end{cases} \tag{2.58}$$

Cette équation signifie que chaque coefficient modal $B_n^{2j(p)}$ devient important lorsque $1-Q_{nn}^{jj}$ devient petit, et ceci pour tout $p = 0,1,2,....$ Le fait que $B_n^{2j(p)}$ devienne important est associé à l'excitation de ce qui est proche d'un mode naturel de la configuration, au sens où les termes de couplage entre blocs n'interviennent pas directement dans cette relation . Examinons plus en détail l'équation $1-Q_{nn}^{j}=0$. Celle-ci peut s'écrire :

$$\cot\left(k_{2n}^{2j}b_j\right) - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mu^{2j}k_2^{2j}w_j}{2\pi\mu^0}\mathrm{I}_n^-(k_1,\omega)\,\mathrm{I}_n^+(k_1,\omega)\left(\frac{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\right)\frac{dk_1}{k_2^0} = 0 \tag{2.59}$$

Cette relation montre que **les modes naturels de la configuration résultent de l'interaction entre les champs dans les deux sous-structures** :

- la **superstructure**, c'est-à-dire les blocs, associée aux termes :

$$\mathcal{F}_{1n}\left(b_j,\mu^{2j},\rho^{2j},\omega\right) = \cot\left(k_{2n}^{2j}b_j\right) \tag{2.60}$$

– la **structure géophysique**, c'est-à-dire sous la surface, la couche sur le substratum plus rigide, associée aux termes :

$$\mathcal{F}_{2n}\left(h,\mu^0,\rho^0,\mu^1,\rho^1,\mu^{2j},\rho^{2j},w_j,\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\epsilon_n\mu^{2j}k_2^{2j}w_j}{2\pi\mu^0}\mathrm{I}_n^-\left(k_1,w_j\right)\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)\times \left(\frac{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\right)\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.61}$$

Chacune de ces sous-structures possède ses propres modes naturels qui proviennent de l'annulation de

$$\mathcal{F}_{1n}\left(b_j,\mu^{2j},\rho^{2j},\omega\right)=0 \tag{2.62}$$

pour la superstructure, et de

$$\mathcal{F}_{2n}\left(h,\mu^0,\rho^0,\mu^1,\rho^1,\mu^{2j},\rho^{2j},w_j,\omega\right)=0 \tag{2.63}$$

pour la structure géophysique, mais les modes naturels de la structure complète ne sont ni les modes de la superstructure, ni les modes de la structure géophysique, puisque qu'ils sont définis par :

$$\mathcal{F}_{1n}\left(b_j,\mu^{2j},\rho^{2j},\omega\right)-\mathcal{F}_{2n}\left(h,\mu^0,\rho^0,\mu^1,\rho^1,\mu^{2j},\rho^{2j},w_j,\omega\right)=0 \tag{2.64}$$

qui met en évidence le fait qu'un mode naturel de la structure totale provient de l'interaction des modes naturels de la superstructure et de la structure géophysique. Il faut noter que les solutions de l'équation (II.2.64) peuvent être très différentes de celles des équations (2.63) et (II.2.62).

De façon à établir les fréquences naturelles de la structure complète, intéressons-nous, tout d'abord, aux fréquences naturelles de chaque sous-structure et supposons que les matériaux sont non-dissipatifs.

Les solutions de la relation de dispersion de la superstructure (II.2.62) sont :

$$\cot\left(k_{2n}^{2j}b_j\right)=0\Leftrightarrow k_{2n}^{2j}b_j=\left(2m+1\right)\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\omega=\omega_{nm}^{\mathrm{bf}}=\sqrt{\frac{\mu^{2j}}{\rho^{2j}}}\times\sqrt{\left(\frac{\left(2m+1\right)\pi}{2b_j}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{w_j}\right)^2} \tag{2.65}$$

qui sont les fréquences naturelles d'un bloc où nous avons imposé un **déplacement nul à sa base** (c.à.d., les fréquences naturelles, pour lesquelles $u^{2j}\big|_{x_2=0}=0$). Cette relation démontre qu'au $n^{\text{ième}}$ pseudo-mode correspond une infinité de sous modes, identifiés par l'indice m. Ces modes sont communément appelés **modes à base fixe**, [176, 119]. Une remarque identique peut être faite en ce qui concerne les modes de la structure complète.

Remarque : : Les résultats numériques présentés dans section II.2.2, II.2.3 et II.2.4, sont réalisés avec une vitesse des ondes de cisaillement dans les blocs égale à $\left(c_S^{2j}\right)_R=100m.s^{-1}$, $\forall j\in\mathbb{B}$. Un calcul rapide du mode fondamental de bloc à base fixe ν_{00}^{bf}, montre que $\nu_{00}^{\mathrm{bf}}=\dfrac{\omega_{00}^{\mathrm{bf}}}{2\pi}=\dfrac{\left(c_S^{2j}\right)_R}{4b_j}=\dfrac{25}{b_j}$, valeur qui est proche de celle utilisée empiriquement, [37] ($\nu_{00}^{\mathrm{bf}}\approx\dfrac{30}{b_j}$).

Remarque : : la terminologie "base fixe", n'est pas celle qui caractérise le mieux la condition aux limites sur la base du bloc à laquelle ce mode satisfait. Effectivement, une **condition de Dirichlet du type** $u^{2j}\big|_{x_2=0} = 0$ correspond plutôt à une condition rigide.

Intéressons-nous maintenant à la relation de dispersion de la structure géophysique (II.2.62).

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2n}\left(h,\mu^0,\rho^0,\mu^1,\rho^1,\mu^{2j},\rho^{2j},w_j,\omega\right) = \frac{\mathrm{i}\epsilon_n\mu^{2j}k_2^{2j}w_j}{\pi\mu^0}\int_0^\infty \times \\ \mathrm{I}_n^-\left(k_1,w_q\right)\mathrm{I}_n^+\left(k_1,w_j\right)\left(\frac{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\right)\frac{dk_1}{k_2^0} = 0\end{aligned} \tag{2.66}$$

Celle-ci fait intervenir la relation de dispersion des modes de Love, mais les modes de la structure géophysique ne sont pas ceux-ci. Effectivement, les modes de la structure géophysique vérifient $\mathcal{F}_{2n} = 0$, qui n'implique pas que le dénominateur de l'intégrande soit nul, c'est-à-dire que la relation de dispersion des modes de Loves soit vérifiée.

Cette relation est vérifiée si l'intégrale est nulle, ou si $k_2^{2j} = 0$. La première condition, qui n'est pas évidente à étudier, rend compte du sous-sol, alors que la seconde est directement liée aux bâtiments. Nous nous concentrons sur cette dernière :

$$k_2^{2j} = 0 \Leftrightarrow k^{2j} = k_{1m}^{2j} \Leftrightarrow \omega = \omega_m = \sqrt{\frac{\mu^{2j}}{\rho^{2j}}}\frac{m\pi}{w_j} \tag{2.67}$$

Ainsi, les fréquences naturelles correspondant à la présence des bâtiments sont directement liées aux pseudo-modes k_{1m}^{2j} du bâtiment. Nous avons en effet découpé la relation de dispersion $\mathcal{F}_{1n} - \mathcal{F}_{2n} = 0$ de sorte que la hauteur des bâtiments intervienne dans le terme $\mathcal{F}_{1n}$ et la largeur dans le terme associé à la structure géophysique $\mathcal{F}_{2n}$. Le second terme met en exergue le couplage entre les blocs et le sous-sol.

Intéressons-nous maintenant à la relation de dispersion $\mathcal{F}_{1n} - \mathcal{F}_{2n} = 0$. Cette relation est vérifiée si $\mathcal{F}_{1n} = \mathcal{F}_{2n}$. Le terme $\mathcal{F}_{2n}$ devient infini lorsque les modes de Love sont excités. Cela intervient à une fréquence proche des fréquences de Haskell :

$$\nu_l^{\mathrm{Lo}} \approx \nu_l^{\mathrm{Bo}} = \frac{(2l+1)\,\beta^1}{4h} \tag{2.68}$$

Si le signe des quantités $\Re\left(\mathcal{F}_{1n}\right)$ et $\Re\left(\mathcal{F}_{2n}\right)$ est identique, alors la relation de dispersion est vérifiée deux fois (une fois lorsque $\mathcal{F}_{2n}$ part d'une valeur finie vers une valeur infinie, et une autre fois pour le parcours inverse) à une très faible différence de fréquences, la finesse du pic du mode fondamental de Love étant importante. Cela peut être une première explication du "scindage" rencontré dans l'effet site-ville. En ce qui concerne les phénomènes d'interférence associés aux fréquences d'Haskell, le pic correspondant peut également donner lieu à un "scindage" selon la hauteur du bâtiment.

Un autre fait remarquable intervient dans le cas dissipatif. Dans ce cas, la fonction $\Re\left(\cot(k_2^{2j})\right)$ est continue. Aux fréquences $\nu_{mn}^{\mathrm{br}} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi}$, cette fonction part d'une valeur proche de $+\infty$ pour aller à une valeur proche de $-\infty$ et par conséquent la relation $\mathcal{F}_{1n} = \mathcal{F}_{2n}$ est vérifiée pour au moins une valeur.

Ainsi, au moins certains modes naturels de la configuration sont proches des fréquences ν_{mn} et $\nu_l^{\text{Lo}} \pm \Delta f^{\pm}$, avec $\Delta f^{\pm}$ petit.

2.1.7.3 Modes naturels du système : mise en évidence des modes quasi-Love

Revenons à la résolution du problème initial, II.2.1.4. En introduisant l'expression de B_m^{2q}, équation (II.2.22) dans l'équation (II.2.23) nous obtenons une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce pour la résolution de $\mathcal{B}^0(k_1,\omega) = B^0(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_2^0 h\right)$:

$$C(k_1,\omega)\mathcal{B}^0(k_1,\omega) - \int_{-\infty}^{\infty} D(k_1,K_1,\omega)\mathcal{B}^0(K_1,\omega)dK_1 = F(k_1,\omega) \tag{2.69}$$

avec

$$C(k_1,\omega) = \cos(k_2^1 h) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin(k_2^1 h) \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} D(k_1,K_1,\omega) = {} & \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\epsilon_m\mu^{2q}k_{2m}^{2q}}{\mu^0 K_2^0}\tan(k_{2m}^{2q}b_q)w_q\left(\cos(K_2^1 h) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 K_2^0}{\mu^1 K_2^1}\sin(K_2^1 h)\right)\times \\ & \mathrm{I}_m^-(k_1,w_q)\,\mathrm{I}_m^+(K_1,w_q)\exp\left(\mathrm{i}\left(K_1-k_1\right)\left(d_q - \frac{w_q}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.71}$$

et

$$\begin{aligned} F(k_1,\omega) = {} & \frac{\mathrm{i}A^i(k_1,\omega)}{4\pi}\left(\cos(k_2^1 h) + \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin(k_2^1 h)\right)\exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1^s - \mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s - h\right)\right) + \\ & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A^i(K_1,\omega)}{2\pi}\sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\epsilon_m\mu^{2q}k_{2m}^{2q}}{\mu^0 K_2^0}\tan(k_{2m}^{2q}b_q)w_q\left(\cos(K_2^1 h) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 K_2^0}{\mu^1 K_2^1}\sin(K_2^1 h)\right)\times \\ & \mathrm{I}_m^-(k_1,w_q)\,\mathrm{I}_m^+(K_1,w_q)\exp\left(\mathrm{i}\left(K_1-k_1\right)\left(d_q - \frac{w_q}{2}\right)\right)\frac{\exp\left(-\mathrm{i}K_1 x_1^s - \mathrm{i}K_2^0\left(x_2^s - h\right)\right)}{4\pi}\frac{dK_1}{K_2^0} \end{aligned} \tag{2.72}$$

La résolution de l'équation (II.2.69) peut s'opérer de la façon suivante. Réécrivons (II.2.69) sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(C(k_1,\omega) - D(k_1,k_1,\omega)\right)\mathcal{B}^0(k_1,\omega) = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} D(k_1,K_1,\omega)\left(1-\delta\left(K_1-k_1\right)\right)\mathcal{B}^0(K_1,\omega)dK_1 + F(k_1,\omega) \end{aligned} \tag{2.73}$$

Cette équation peut être résolue de façon itérative (méthode non utilisée en pratique [34]) :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{0(0)} = \dfrac{F(k1,\omega)}{C(k_1,\omega) - D(k_1,k_1,\omega)} \\ \mathcal{B}^{0(p)} = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} D(k_1,K_1,\omega)\left(1-\delta\left(K_1-k_1\right)\right)\mathcal{B}^{0(p-1)}(K_1,\omega)dK_1 F(k1,\omega)}{C(k_1,\omega) - D(k_1,k_1,\omega)} \end{cases} \tag{2.74}$$

De façon identique à ce que nous avons fait dans la section précédente, chaque $\mathcal{B}^{0(p)}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ devient grand lorsque $C(k_1,\omega) - D(k_1,k_1,\omega)$ devient petit. Nous pouvons donc mettre en évidence les modes naturels du système qui vérifient $C(k_1,\omega) - D(k_1,k_1,\omega) = 0$. Cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \cos(k_2^1 h) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin(k_2^1 h) - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\left(\cos(k_2^1 h) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin(k_2^1 h)\right)\times \\ & \sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\epsilon_m\mu^{2q}k_{2m}^{2q}}{\mu^0 k_2^0}\tan(k_{2m}^{2q}b_q)w_q\mathrm{I}_m^-(k_1,w_q)\,\mathrm{I}_m^+(k_1,w_q) = 0 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Nous mettons en exergue, cette fois, deux termes caractéristiques de l'interaction de champs entre deux sous-structures : la **superstructure**, associée au terme $\mathcal{F}_1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 = &\left(\cos(k_2^1 h) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin(k_2^1 h)\right) \times \\ &\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sum_{q\in\mathbb{B}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\epsilon_m \mu^{2q} k_{2m}^{2q}}{\mu^0 k_2^0}\tan(k_{2m}^{2q} b_q) w_q \mathrm{I}_m^-(k_1, w_q)\,\mathrm{I}_m^+(k_1, w_q)\end{aligned} \tag{2.76}$$

et la **structure géologique**, associée au terme $\mathcal{F}_2$:

$$\mathcal{F}_2 = \cos(k_2^1 h) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin(k_2^1 h) \tag{2.77}$$

Les modes de la structure complète ne sont pas l'union des modes des sous-structures. Pour autant, pour de faibles valeurs de l'un des paramètres $k_{2m}^{2q} b$, $\frac{\mu^2}{\mu^0}$, ou $k_{2m}^q w_q$, la relation de dispersion équation (II.2.75) est proche de la relation de dispersion $\mathcal{F}_2 = 0$ qui n'est autre que la relation de dispersion des modes de Love.

Alors, les modes naturels du système complexe peuvent-être qualifiés de **modes quasi-Love**, puisque la relation de dispersion vérifiée par ces modes est une perturbation de celle vérifiée par les modes de Love.

D'autre part, une façon d'annuler $\mathcal{F}_1$ correspond aux **modes des bâtiments à base rigide**, [119] :

$$\tan\left(k_2^{2q} b_q\right) = 0 \Leftrightarrow k_2^{2q} = \frac{m\pi}{b_q} \Leftrightarrow w = w_{mn}^{br} = \sqrt{\frac{\mu^{2q}}{\rho^{2q}}} \times \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b_q}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{w_q}\right)^2} \tag{2.78}$$

qui correspondent aux fréquences naturelles d'un bloc où nous avons imposé une condition de **contrainte nulle à sa base** (c.à.d. les fréquences naturelles, pour lesquelles $\left.\frac{\partial u^{2j}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0$). Cette relation démontre à nouveau qu'au $n^{\text{ième}}$ pseudo-mode correspond une infinité de sous modes, identifés par l'indice m.

Remarque : : la terminologie "base rigide", n'est pas celle qui caractérise le mieux la condition aux limites sur la base du bloc à laquelle ce mode satisfait. Effectivement, en plus de la remarque faite à la section précédente en ce qui concerne le mode de bloc à base fixe, une **condition de Neumann du type** $\left.\frac{\partial u^{2j}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0$ correspond plutôt à une condition de surface libre. Il serait alors plus opportun de nommer ce mode "mode de bloc à base libre".

Ainsi, nous avons dégagé deux aspects des modes naturels du sytème. Dans ces deux aspects, les modes de Love interviennent. Pour autant, selon que l'on se place du point de vue de la superstructure, section II.2.1.7.2, ou du point de vue de la structure géophysique, section II.2.1.7.3, nous exhibons soit des **modes de blocs à base rigide**, soit des **modes de blocs à base fixe**. Cet aspect peut être éclairé par l'exemple suivant. Considérons l'interface eau-air. Les conditions d'interface sont pour une onde générée dans l'eau une condition de Dirichlet $p(\mathbf{x}, t) = 0$ et pour

une onde générée dans l'air une condition de Neuman $\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial n} = 0$, où n est la normale à la surface. D'un point de vue des bâtiments, la structure géologique apparaît comme un perturbation des modes à base fixe, [176, 90], alors que du point de vue du sous-système géophysique, les bâtiments apparaissent comme des perturbations des modes de Love.

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux déplacements dans le cas d'un bâtiment, puis de deux bâtiments. Nous appellerons, figure II.2.5, déplacement au sommet du bloc, le déplacement calculé au centre du bloc sur le toit, et déplacement à la base du bloc, le déplacement au centre du bloc au niveau du sol (aucune fondation n'étant considérée).

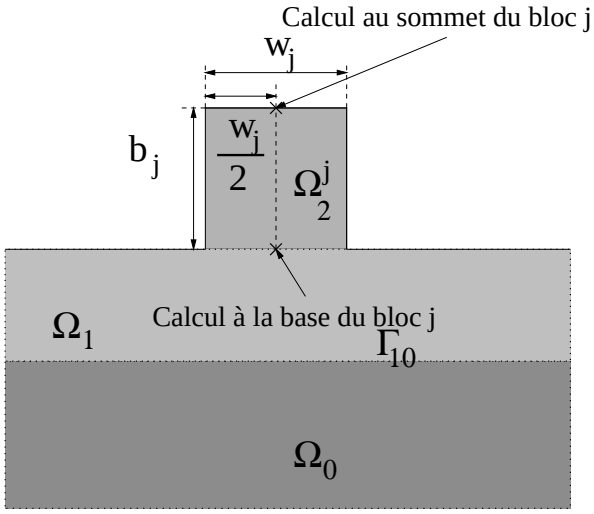


FIG. 2.5 – *Calcul au sommet et à la base du bloc* $j \in \mathbb{B}$

2.2 Un bâtiment sur sous-sol avec couche

Nous considérons ici, le cas d'un seul bâtiment homogénéisé, occupé par un matériau M^2, tel que $\rho^2 = 325kg.m^{-3}$, $\left(c_S^2\right)_R = 100m.s^{-1}$, et $Q_S^2 = 100$ (valeurs utilisées dans [21]) et de caractéristiques géométriques b et w, centré sur l'origine du repère cartésien attaché à la configuration. Les matériaux M^1 et M^2 sont ceux utilisés pour modéliser le sous-sol de Mexico, section II.1.1.6, l'épaisseur de la couche étant constante, égale à $h = 50m$. Cette configuration est sollicitée par une onde cylindrique suivant x_3 localisée dans le plan sagittal à $\mathbf{x}^s = (x_1^s, x_2^s)$.

2.2.1 Les champs de déplacement dans le bloc $u^2(\mathbf{x},\omega)$, la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$

La technique de résolution est celle exposée dans la section précédente, II.2.1. Les coefficients pseudo-modaux $B_n^2(\omega)$ sont obtenus par résolution du système matriciel :

$$B_n^2 = P_n + \sum_{m=0}^{\infty} Q_{nm} B_m^2;\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.79}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{nm} \quad &= \left(1+(-1)^{n+m}\right) \frac{\mathrm{i}wk_{2m}^2\mu^2\epsilon_n \sin\left(k_{2m}^2 b\right)}{2\pi\mu^0 \cos\left(k_{2n}^2 b\right)} \\ &\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w\right) \mathrm{I}_n^+\left(k_1, w\right) \frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{2.80}$$

et

$$P_n = \left(1+(-1)^n\right) \int_0^{+\infty} \frac{A^i(\omega)\,\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(\left(-\frac{w}{2}\right) - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s - h\right)\right) \mathrm{I}_n^+\left(k_1, w\right)}{2\pi\cos\left(k_{2n}^2 b\right)\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_1^1}{\mu^0 k_1^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.81}$$

Une fois ces coefficients obtenus, nous pouvons calculer les champs $u^2(\mathbf{x},\omega)$, $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et $u^0(\mathbf{x},\omega)$:

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} B_n^2(\omega) \cos\left(k_{2m}^2 + b\right) \cos\left(k_{1m}^2\left(x_1 - \frac{w}{2}\right)\right) \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x},\omega) = &\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \frac{A^{i0}(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s\right)\cos\left(k_2^1 x_2\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} + \\ &\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 + \frac{w_q}{2}\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)} \times \\ &\frac{\mu^2}{\mu^0}\sum_{m=0}^{\infty} B_m^2 k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) w\mathrm{I}_m^-\left(k_1, w\right) \frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned} u^0(\mathbf{x},\omega) = u^{i0}(\mathbf{x},\omega) + &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}A^{i0}(k_1,\omega)}{4\pi}\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 + x_2^s - 2h\right)\right) \\ &\frac{\left(\cos\left(k_2^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} + \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mu^2\sum_{m=0}^{\infty} B_m^2 k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) w\mathrm{I}_m^-\left(k_1, w\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 + \frac{w_q}{2}\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 - h\right)\right)}{2\pi\mu_0\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{2.84}$$

2.2.2 Ordre du dévelopement pseudo-modal à considérer

Il est souvent admis, [37, 117, 53], que la réponse, en présence d'un bâtiment, est dominée par le mode fondamental de ce dernier, ceci représentant le comportement réel d'un bâtiment **"abstraction faite du sol"**. Cette hypothèse est en fait le fondement des modèles de bâtiments à l'aide de système masse-ressort. Une première étape, dans la vérification de cette assertion, est de montrer que la réponse dans le bloc est correctement représentée par sa réponse sur le pseudo-mode fondamental (la seconde consistant à vérifier que seul un mode à base fixe est excité dans la plage de fréquences considérée). Pour ce faire, nous comparons le résultat obtenu à l'aide du modèle section II.2.2.1, en augmentant régulièrement le nombre de pseudo-modes maximal retenu pour effectuer le calcul, avec le résultat obtenu à l'aide de notre code Éléments-Finis, section 2.1, considéré comme la solution exacte. Nous allons, dans cette section, nous intéresser à la description du champ pour trois bâtiments de caractéristiques géométriques différentes. Le premier bloc est de hauteur $b = 50m$ et de largeur $w = 30m$, le second de hauteur $b = 40m$ et de largeur $w = 40m$, et le troisième de hauteur $b = 50m$ et de largeur $w = 60m$. Les blocs $b \times w = 50m \times 30m$ et $b \times w = 50m \times 60m$ sont sollicités par une source cylindrique localisée à $\mathbf{x^s} = (0m, 3000m)$, alors que le bloc $b \times w = 40m \times 40m$ est lui, sollicité par une source cylindrique localisée à $\mathbf{x^s} = (-65m, 3000m)$.

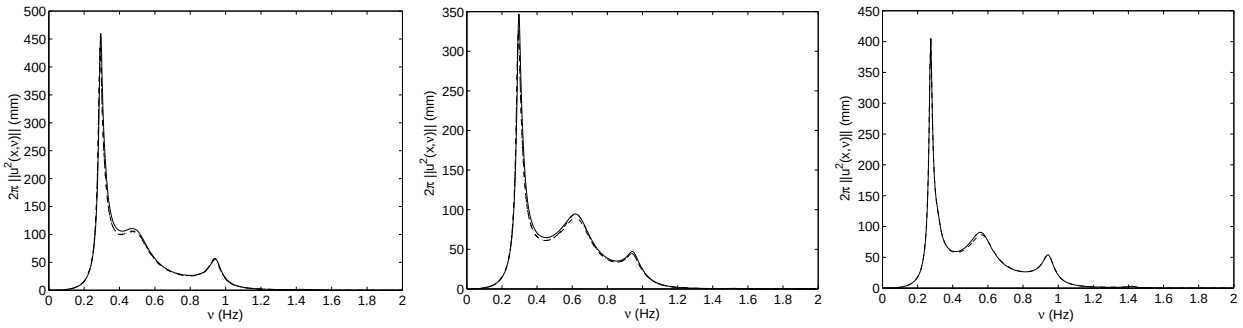


FIG. 2.6 – *Mexico - 2π fois le module du spectre $u^2(\mathbf{x}, \omega)$ au sommet de chacun des trois blocs, à gauche $b = 50m$ et $w = 30m$, au milieu $b = 40m$ et $w = 40m$ et à droite $b = 50m$ et $w = 60m$. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats du calcul Éléments-Finis, les courbes en tirets aux résultats semi-analytiques avec seulement le pseudo-mode fondamental de chaque bloc considéré et les courbes en pointillés et tirets aux résultats semi-analytiques pour 5 pseudo-modes considérés.*

La figure représente le module des spectres $2\pi \left\| u^2(\mathbf{x}, \omega) \right\|$ au sommet des trois bâtiments. Il apparaît clairement que le calcul mené en ne prenant en compte que **le pseudo-mode fondamental du bâtiment fournit une bonne représentation du champ** dans le domaine spectral.

Remarque : Dans le cas des bâtiments de hauteur $b = 50m$, seuls les coefficients pseudo-modaux pairs sont non-nuls, puisque les termes $\cos\left(k_{2n}^2 b\right) Q_{nm} = 0$ pour $m + n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, et que les termes sources $\cos\left(k_{2n}^2 b\right) P_m$ sont également nuls pour $m = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, la source étant localisée directement en dessous des blocs.

Les réponses temporelles correspondantes sont présentées figure II.2.7. La même conclusion peut être formulée en ce qui concerne le nombre de pseudo-modes qu'il faut considérer pour obtenir une réponse convenable.

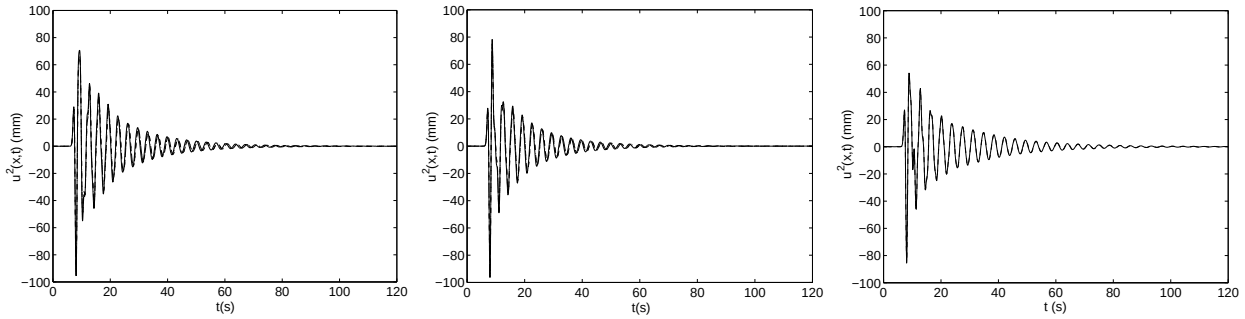


FIG. 2.7 – *Mexico - $u^2(\mathbf{x},t)$ au sommet de chacun des trois blocs, à gauche $b = 50m$ et $w = 30m$, au milieu $b = 40m$ et $w = 40m$ et à droite $b = 50m$ et $w = 60m$. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats du calcul Éléments-Finis, les courbes en tirets aux résultats semi-analytiques avec seulement le pseudo-mode fondamental de chaque bloc considéré et les courbes en pointillés et tirets aux résultats semi-analytiques pour 5 pseudo-modes considérés*

On pourrait nous rétorquer que ces calculs sont réalisés au sommet des blocs. La réponse en bas du bloc de hauteur $b = 50m$ et de largeur $w = 30m$, figure II.2.8, prouve que la conclusion précédente est valable en n'importe quel point du bloc.

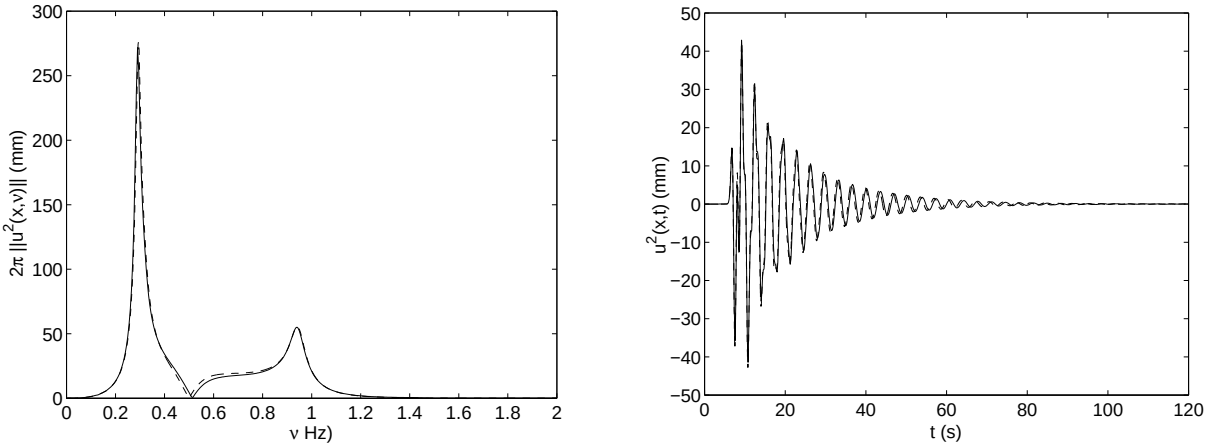


FIG. 2.8 – *Mexico - À gauche, 2π fois le module du spectre $u^2(\mathbf{x},\omega)$ et à droite $u^2(\mathbf{x},t)$ à la base du bloc $b \times w = 50m \times 30m$. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats du calcul Éléments Finis, les courbes en tirets aux résultats semi-analytiques avec seulement le pseudo-mode fondamental du bloc considéré et les courbes en pointillés et tirets aux résultats semi-analytiques pour 5 pseudo-modes pris en compte.*

Si la réponse sur le pseudo-mode fondamental suffit à décrire correctement le champ dans le bloc, cela signifie que le **bloc produit un rayonnement de type piston** et que **les coefficients pseudo-modaux $B_m^2(\omega)$, $m > 0$, sont négligeables par rapport au coefficient $B_0^2(\omega)$**. Cette seconde remarque nous permet de prétendre que dans ces conditions, les champs $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et $u^0(\mathbf{x},\omega)$ sont également bien représentés par leur valeur pour l'unique pseudo-mode fondamental.

$B_0^2(\omega)$ vérifie l'équation :

$$\left(1-\frac{\mathrm{i}wk^2\mu^2\sin\left(k^2b\right)}{\pi\mu^0\cos\left(k^2b\right)}\int_0^\infty\frac{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\mathrm{sinc}^2\left(k_1\frac{w}{2}\right)\frac{dk_1}{k_2^0}\right)B_0^2=$$
$$\frac{A^i\left(\omega\right)\mathrm{i}}{\pi\cos\left(k^2b\right)}\int_0^{+\infty}\frac{\exp\left(-\mathrm{i}k_1x_1^s+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s-h\right)\right)\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)}{\left(\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_1^1}{\mu^0k_1^0}\sin\left(k_2^1h\right)\right)}\frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.85}$$

Si la réponse est régie par cette équation, cela signifie que les termes relatifs aux modes de Love sont correctement représentés, c'est-à-dire qu'au moins le premier mode de Love est excité pour une valeur de k_1 pour laquelle la fonction $\mathrm{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)$ est proche de 1. En appelant $k_1^\star$ (solution de l'équation de dispersion des modes de Love) le premier mode de Love, cela signifie que $k_1^\star\frac{w}{2}<\pi$. Or $k_1^\star\leqq k^1=\dfrac{2\pi\nu}{c_S^1}$, si bien que cette approximation est valable pour les fréquences ν telles que :

$$\nu<\frac{c_S^1}{w} \tag{2.86}$$

C'est-à-dire que, plus le bâtiment est large, plus il faudra considérer de modes pour obtenir une bonne représentation du champ de déplacement. Ceci semble classique en dynamique des structures car la représentation d'un bâtiment par un/des système(s) masse-ressort est employée pour des bâtiments raisonnablement élancés. Pour un bâtiment de largeur $w=40m$, le pseudo-mode fondamental sera dominant pour $\nu<1.5Hz$. En réalité, le mode de Love atteint son maximum en fréquences, pour une valeur de $k_1^\star$ proche de k^0, section II.1.1.7, c'est-à-dire qu'une condition, moins restrictive est :

$$\nu<\frac{c_S^0}{w} \tag{2.87}$$

qui correspond à la condition $\nu<15Hz$ dans le cas considéré ici.

2.2.3 Analyse modale

Pour un bâtiment, les solutions non-triviales de l'équation de dispersion (en se concentrant sur l'aspect superstructure) sont solutions de l'équation, section II.2.1.7.2 :

$$\det\begin{pmatrix}1-Q_{00}&-Q_{01}&-Q_{02}&.\\-Q_{10}&1-Q_{11}&-Q_{12}&.\\-Q_{20}&-Q_{21}&1-Q_{22}&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\\.&.&.&.\end{pmatrix}=0 \tag{2.88}$$

Or, pour des bâtiments de largeur raisonnable, section II.2.2.2 nous pouvons considérer que le terme $1-Q_{00}$ est dominant. Ainsi la relation de dispersion prend la forme :

$$\cot(k^2b)-\frac{\mathrm{i}wk_2^2\mu^2}{\pi\mu^0}\int_0^\infty\frac{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0k_2^0}{\mu^1k_2^1}\sin\left(k_2^1h\right)}{\cos\left(k_2^1h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1k_2^1}{\mu^0k_2^0}\sin\left(k_2^1h\right)}\mathrm{sinc}^2\left(k_1\frac{w}{2}\right)\frac{dk_1}{k_2^0}=0 \tag{2.89}$$

.

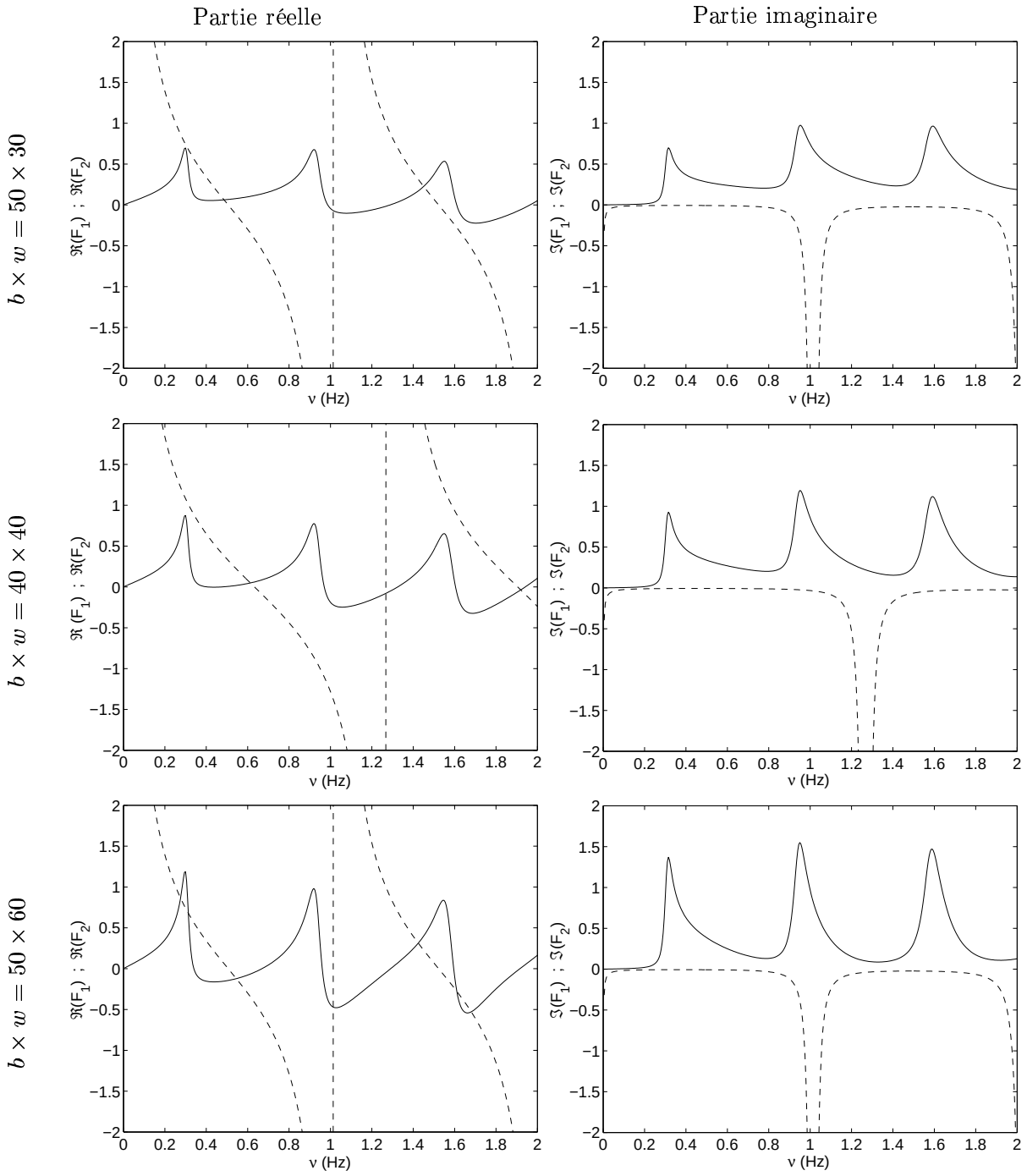


FIG. 2.9 – *Mexico - Courbes en tirets* $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$ *et courbes en traits continus* $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$. *À gauche la partie réelle, et à droite la partie imaginaire de ces quantités, en haut pour un bloc de hauteur* $b = 50m$ *et de largeur* $w = 30m$, *au milieu pour un bloc de hauteur* $b = 40m$ *et de largeur* $w = 40m$, *et en bas pour un bloc de hauteur* $b = 50m$ *et de largeur* $w = 60m$

Nous pouvons donc séparer cette relation en deux termes, un premier $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$ associé à la superstructure et un second $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$ associé à la structure géophysique. Cette formulation présente également l'avantage de découpler les termes relatifs à la hauteur du bâtiment de ceux relatifs à sa largeur et aux modes de Love.

Les modes du système peuvent alors être déterminés à partir des courbes de $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$ et de $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$. **L'intersection de la partie réelle de $\mathcal{F}_1$ avec celle de $\mathcal{F}_2$ fournit une valeur des fréquences de résonance et la différence de la partie imaginaire de $\mathcal{F}_1$ avec celle de $\mathcal{F}_2$ fournit, elle, une valeur de l'amortissement correspondant à ce mode.**

La figure II.2.9 présente les modes des systèmes à un bâtiment, un premier de hauteur $b = 50m$ et de largeur $w = 30m$, un second de hauteur $b = 40m$ et de largeur $w = 40m$, et un troisième de hauteur $b = 50m$ et de largeur $w = 60m$.

Pour mieux comprendre ces figures, il est nécessaire de qualifier les pics de $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$, en particulier, de déterminer si ce sont des pics d'interférence ou des pics dus à l'excitation des modes de Love. Pour ce faire, nous allons réaliser la décomposition sur les intervalles $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I}_3$ de l'intégrale incluse dans l'expression de $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$.

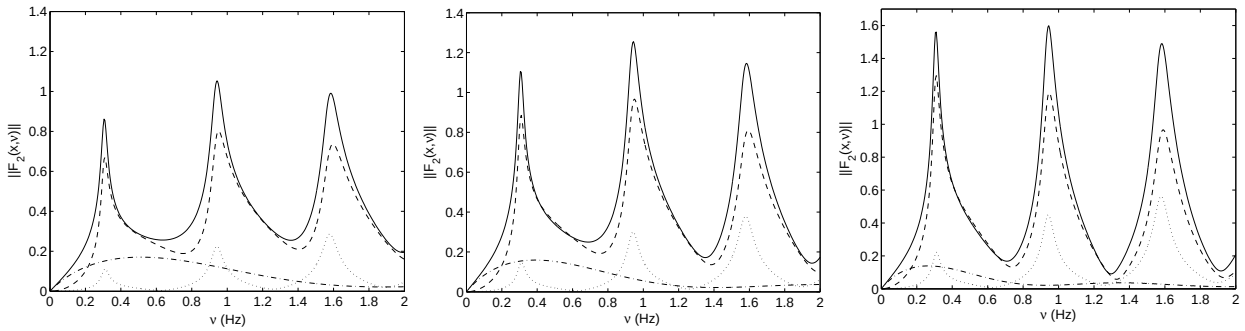


FIG. 2.10 – *Mexico - Courbes en trait continu* $\left\|\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)\right\|$*, courbes en pointillés la composante correspondant à l'intervalle* $\mathcal{I}_1$*, courbes en tirets la composante correspondant à l'intervalle* $\mathcal{I}_2$*, et courbes en tirets et pointillés la composante correspondant à l'intervalle* $\mathcal{I}_3$*. À gauche pour un bloc de hauteur* $b = 50m$ *et de largeur* $w = 30m$*, au milieu pour un bloc de hauteur* $b = 40m$ *et de largeur* $w = 40m$*, et à droite pour un bloc de hauteur* $b = 50m$ *et de largeur* $w = 60m$*.*

La figure II.2.10, montre que les pics de la fonction $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$ sont **dominés par les ondes SOP2**, c'est-à-dire que ces pics correspondent au mode de Love. D'autre part, la composante correspondant à l'intervalle $\mathcal{I}_3$ est non négligeable, c'est-à-dire que, moyennant certaines conditions (à préciser ultérieurement) sur le terme source $P_m(\mathbf{x}, \omega)$, nous pouvons nous attendre à ce que le bâtiment permette d'exciter des ondes de surface.

Les figures II.2.9 et II.2.10 amènent plusieurs remarques :

- Pour un milieu dissipatif, les **modes de blocs à base rigide** sont toujours excités. Ils correspondent à des fréquences telles que $\tan(k_2 b) = 0$, c'est-à-dire $\nu_m^{\text{br}} = \dfrac{mc_S^2}{2b}$, et ne dépendent que de la hauteur du bloc. Par exemple, pour un bloc de hauteur $b = 50m$, la fréquence fondamentale est $\nu_1^{\text{br}} \approx 1Hz$ (en supposant que la dépendance de la vitesse $c_S^2(\omega)$ en ω, ainsi

que sa partie imaginaire soient faibles) et pour un bloc de hauteur $b = 40m$, la fréquence fondamentale est $\nu_1^{\text{br}} \approx 1.25Hz$. Ces modes sont en moyenne **assez élevés en fréquence** pour des bâtiments de hauteur correcte, et ne peuvent expliquer le "scindage" rencontré en basses fréquences lors du séisme de Michoacan en 1985. Effectivement, en posant comme hypothèse que ces modes doivent induire une résonance aux alentours de $\nu \approx 0.3Hz$, cela impliquerait une hauteur de bâtiment d'environ $b = 170m$, ce qui n'est pas le cas pour la majorité des immeubles. Par contre, des hauteurs de ce type peuvent se rencontrer pour des grattes-ciel. Par exemple considérons un gratte-ciel de largeur $w = 30m$ et de hauteur $h = 170m$.

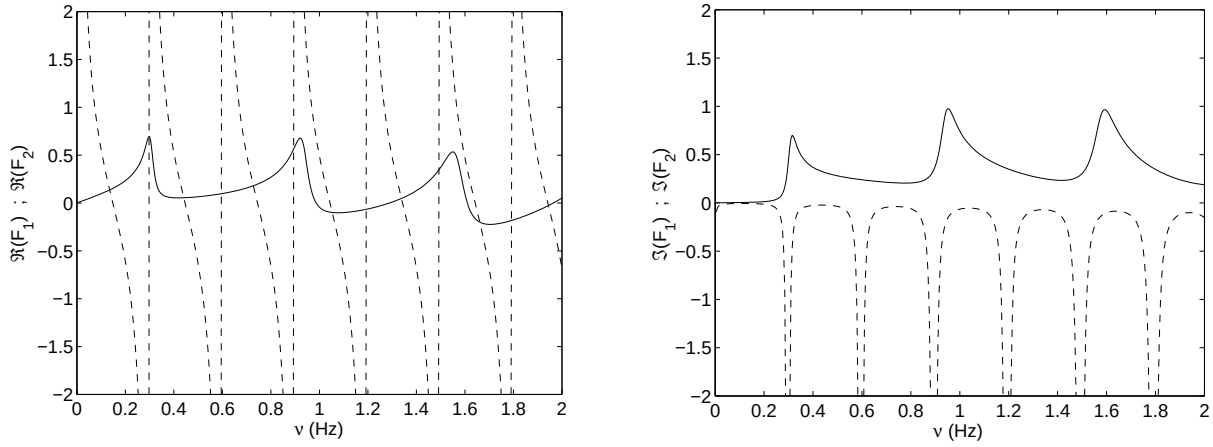


FIG. 2.11 – *Courbes en trait continu $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$ et courbes en tirets $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$. À gauche la partie réelle, et à droite la partie imaginaire de ces quantités, pour un bloc de hauteur $b = 170m$ et de largeur $w = 30m$.*

La résonance aux alentours de $0.3Hz$ correspond alors au mode à base rigide, et non plus à un mode de la structure géophysique. Cela souligne bien le fait que les modes de la structure complète ne sont pas l'union des modes des sous-structures. Or, l'**atténuation** liée à ces modes est **très importante**, ce qui signifie que le "scindage" du premier pic en basses fréquences ne peut être dû aux modes de blocs à quasi-base rigide.

– Toujours pour des bâtiments de largeur convenable, un autre type de mode semble se dessiner : les **modes à base fixe**. Effectivement, les courbes $\Re(\mathcal{F}_1)$ et $\Re(\mathcal{F}_2)$ se croisent, non loin de la valeur pour laquelle $\Re(\mathcal{F}_1) = 0$, c'est-à-dire pour les fréquences de l'ordre de $\nu_m^{\text{bf}} = \dfrac{(2m+1)\, c_S^2}{4b}$. Par exemple, pour un bloc de hauteur $b = 50m$, la fréquence fondamentale est $\nu_1^{\text{bf}} \approx 0.5Hz$ (en supposant que la dépendance de la vitesse $c_S^2(\omega)$) et pour un bloc de hauteur $b = 40m$, la fréquence fondamentale est $\nu_1^{\text{bf}} \approx 0.625Hz$. Ils peuvent donc expliquer le "scindage" en basses fréquences rencontré lors du séisme de Michoacan en 1985. Pour obtenir une fréquence de résonance à environ $\nu \approx 0.3Hz$, il faudrait que la hauteur du bâtiment soit d'environ $b = 70m$. Par exemple, pour un gratte-ciel de hauteur $b = 70m$ et de largeur $w = 30m$, nous obtenons le résultat de la figure II.2.12

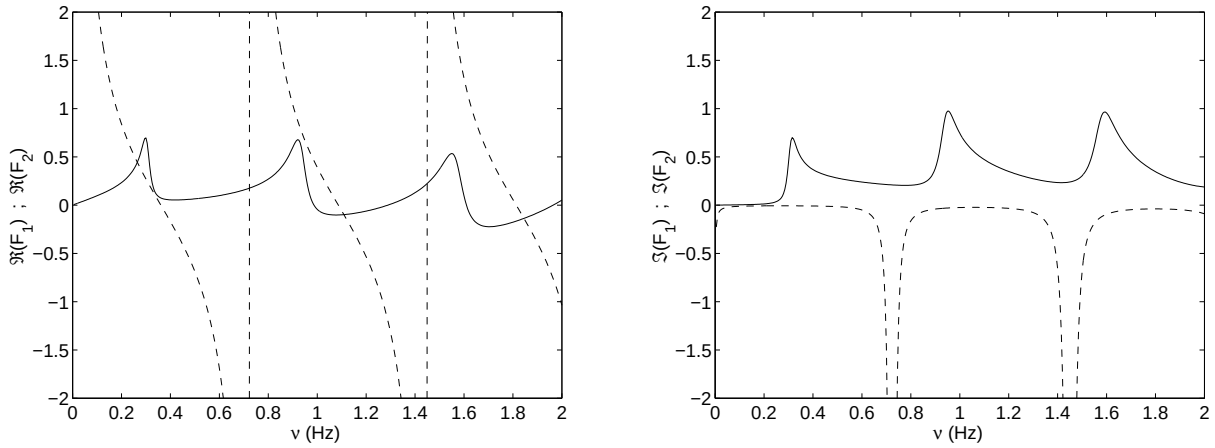


FIG. 2.12 – *Courbes en trait continu $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$ et courbes en tirets $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$. À gauche la partie réelle, et à droite la partie imaginaire de ces quantités, pour un bloc de hauteur $b = 70m$ et de largeur $w = 30m$.*

Nous sommes à la limite d'un minimum et non d'un mode pour la fréquence $\nu_0 = 0.3571Hz$. Or, pour une telle valeur, l'atténuation de ce mode, c'est-à-dire la différence entre les parties imaginaires de $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$ et $\mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)$ est très importante, si bien que ces modes sont relativement atténués (beaucoup moins que les modes de bloc à quasi-base rigide) et ne peuvent conduire qu'à un "scindage" très faible.

- Toujours pour des blocs de largeur relativement convenable, les pics correspondant aux modes de Love possèdent au moins une intersection avec la partie réelle de $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$. Cela signifie que les modes de Love peuvent être des modes du système. Pour autant, comme il a été souligné dans la section II.2.1, ce ne peut être des modes de Love, mais plutôt des **modes quasi-Love**. Pour un bloc $b \times w = 50 \times 60m^2$ la courbe de la partie réelle de $\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega)$ présente une double intersection au niveau du pic du mode de Love, ce qui peut créer un "scindage" en basses fréquences. Pour autant, l'atténuation correspondant au second pic est importante et la finesse du second pic sera par conséquent faible.

Cette analyse montre que les modes du système pour un bâtiment ne sont en aucun cas l'union des modes des sous-systèmes. Devant l'extrême diversité des paramètres géométriques des bâtiments, nous pouvons quand même distinguer certains types de modes :

- les **modes de bloc à quasi-base rigide** proches des modes de la superstructure à base rigide
- les **modes de bloc à quasi-base fixe** proches des modes de la superstructure à base fixe
- les **modes quasi-Love** proches des modes de la structure géophysique

Les modes de la structure complète peuvent alors être interprétés comme un mélange de ces trois types de quasi-modes. **Certaines configurations peuvent conduire à des modes très proches qui pourraient être la cause d'un "scindage", mais en général l'atténuation d'un de ces modes est importante**, ce qui semble incompatible avec un "scindage" prononcé qui se traduirait par des battements également prononcés dans le domaine temporel.

Pour conclure sur les modèles de bâtiments par système masse-ressort, sur la plage de fréquences considérée pour le calcul des réponses (à un pseudo Ricker centré à $\nu_0 = 0.5Hz$), c'est-à-dire $[0, 1.3Hz]$, seul le mode fondamental de bloc à base-fixe est excité pour les caractéristiques des blocs retenus. Le modèle de bâtiments par un système masse-ressort [37, 90, 117] est donc valide. Par contre, pour des fréquences supérieures, il faut non seulement prendre en compte les modes de bloc à base fixe d'ordre supérieur, mais en plus, il faut prendre en compte les pseudo-modes d'ordre supérieur dans la décomposition pseudo-modale. Les modèles de bâtiments par système masse-ressort ne sont alors plus valides.

2.2.4 Résultats numériques

Nous allons étudier ici, les réponses à l'intérieur de plusieurs types de bâtiments, ainsi que les réponses induites dans la couche et dans le substratum par la présence d'un bâtiment. Les réponses sur le mode fondamental du bloc considéré suffisent à fournir une bonne représentation des champs de déplacement dans les domaines Ω_0, Ω_1 et Ω_2. En pratique, la résolution du système se réalise par commodité comme suit :

$$\cos(k_{2n}^2 b)\,(\delta_{mn} - Q_{nm})\,B_m^2 = \cos\left(k_{2n}^2 b\right) P_n(\mathbf{x},\omega) = G_n(\mathbf{x},\omega) \tag{2.90}$$

L'inversion du système se réalise par décomposition LU, avec normalisation de la diagonale de la matrice U, de façon à éviter tout problème de conditionnement.
L'équation (II.2.90) s'écrit alors pour le fondamental

$$\sin(k_2^2 b)\left(\mathcal{F}_1(b,\mu^2,\rho^2,\omega) - \mathcal{F}_2(h,\mu^0,\rho^0,\mu^1,\rho^1,w,\omega)\right) B_0^2 = G_0(\mathbf{x},\omega) \tag{2.91}$$

Nous définissons la fonction dans le bloc comme $TF^2(\mathbf{x},\omega) = \dfrac{u^2(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$.

2.2.4.1 Un bâtiment $b \times w = 40\ m\ \times 40\ m$

Commençons par étudier les termes $\sin(k_2^2 b)\,(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)$ et $G_0(\mathbf{x},\omega)$, en particulier le terme source (l'étude du terme $\sin(k_2^2 b)\,(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)$ ayant déjà été largement réalisée lors de l'étude modale). Plus exactement, nous allons étudier la fonction de transfert, c'est-à-dire $\dfrac{G_0(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$. La source est une source cylindrique polarisée en onde de cisaillement horizontal localisée dans le plan sagittal au point $\mathbf{x}^s = (-65m, 3000m)$. Nous avons séparé les termes des intégrales de façon à mettre en évidence les ondes mises en jeu.

Le terme source $G_0(\omega)(\mathbf{x},\omega)$ est la réponse de la couche, section II.1.1, sans autre modification. Cela signifie que le terme $\mathrm{sinc}(k_1 \frac{w}{2})$ est proche de un. Les ondes dominantes dans cette configuration sont les ondes SOP1, c'est-à-dire que la quantité $k^0 \dfrac{w}{2}$ est très petite devant π. Pour des blocs de largeur raisonnable, et en tout cas pour une configuration avec une source telle que sa profondeur focale soit grande et la distance épicentrale faible, **l'excitation de ce bloc n'est autre que la réponse de la couche sans modification par rapport à la présence du bâtiment**. Cela implique que le bâtiment peut agir comme une **source induite**, section II.2.1.6, mais aussi que les bâtiments agissent comme une perturbation de la configuration sans bâtiment.

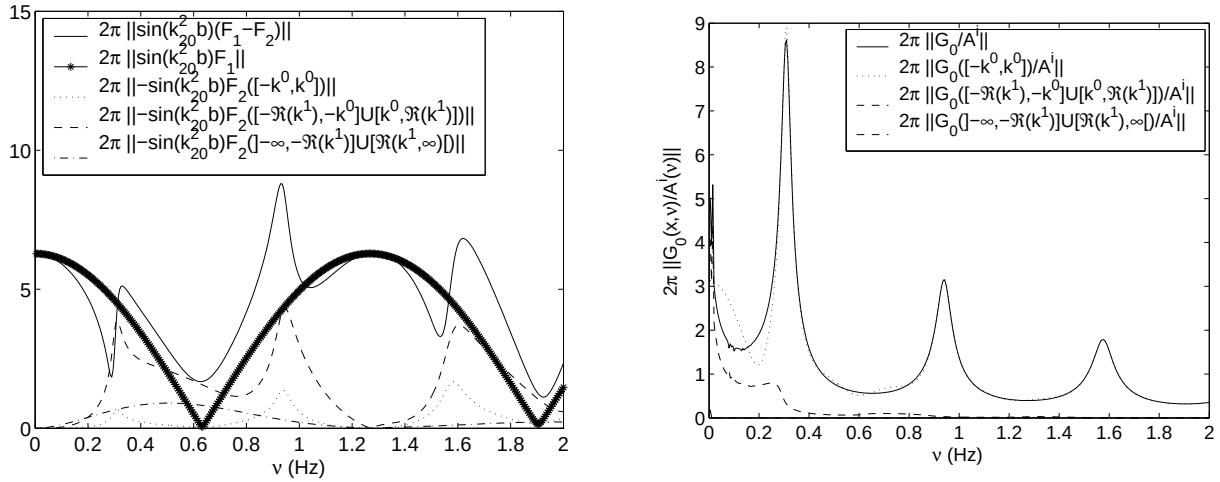


FIG. 2.13 – *Mexico : bloc* $b \times w = 40m \times 40m$ - *À gauche,* $2\pi \left\| \sin(k_2^2 b) \left(\mathcal{F}_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega) - \mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega) \right) \right\|$ *et à droite* $2\pi \left\| \dfrac{G_0(\mathbf{x}, \omega)}{A^i(\omega)} \right\|$.

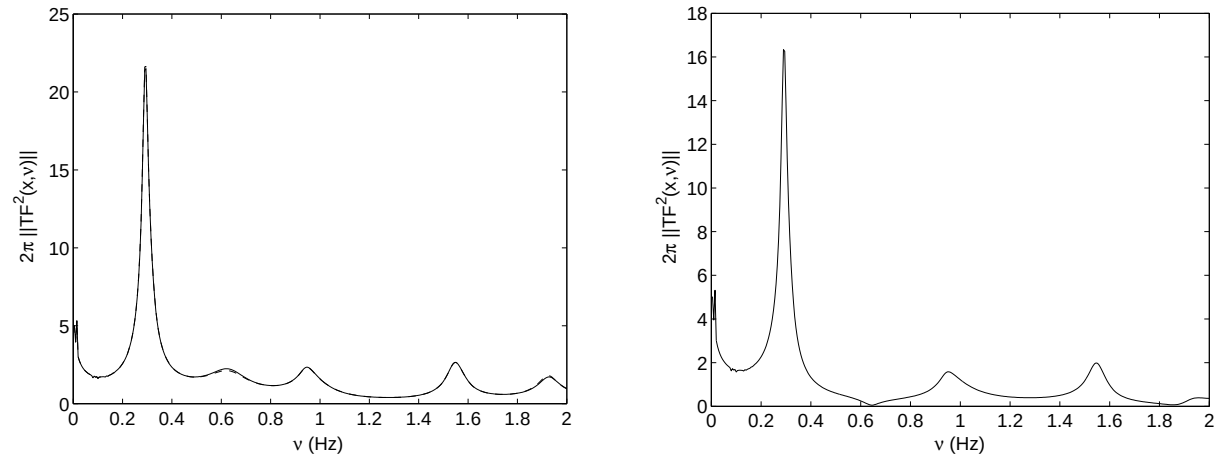


FIG. 2.14 – *À gauche* 2π *fois le module de la fonction de transfert au sommet du bâtiment, et à droite* 2π *fois le module de la fonction de transfert à la base du bâtiment. La source est localisée en profondeur quasiment à la verticale du bloc à* $\mathbf{x}^s = (-65m, 3000m)$.

Nous nous concentrons ici sur les premiers pics rencontrés. La figure II.2.14 représente les fonctions de transfert du déplacement $u^2(\mathbf{x}, \omega)$ au sommet et à la base du bloc. Le premier pic correspond au premier **mode quasi-Love**, le second au **mode de bloc à quasi-base fixe**. Le troisième pic rencontré n'est pas un mode du système. Il correspond à un phénomène d'interférence. Le pic relatif au **mode de bloc à quasi-base rigide n'apparaît pas, car son atténuation est très importante**. Il faut noter que la fréquence de résonance correspondant au mode de bloc à quasi-base fixe est coupée à la base du bloc. Rappelons que la quantité ici représentée l'est pour le mode fondamental et à la fréquence quasi-base fixe:

$$TF^2(\mathbf{x}, \omega_{00}^{\mathrm{qbr}}) = \frac{u^2(\mathbf{x}, \omega_{00}^{\mathrm{qbf}})}{A^i(\omega_{00}^{\mathrm{qbf}})} = \frac{B^2(\omega_{00}^{\mathrm{qbf}})}{A^i(\omega_{00}^{\mathrm{qbf}})} \cos\left(\frac{\pi}{2b}(x_2 + b)\right)$$

quantité qui s'annule pour $x_2 = 0$ et qui est maximum pour $x_2 = b$. Ainsi les **modes de bloc à quasi-base fixe**, s'ils sont excités, **se traduisent dans le domaine fréquentiel, soit par un pic de résonance maximal au sommet du bloc, soit par une fréquence nulle à la base du bloc**.

Comparons maintenant les déplacements et les spectres correspondant dans la configuration avec et sans bloc.

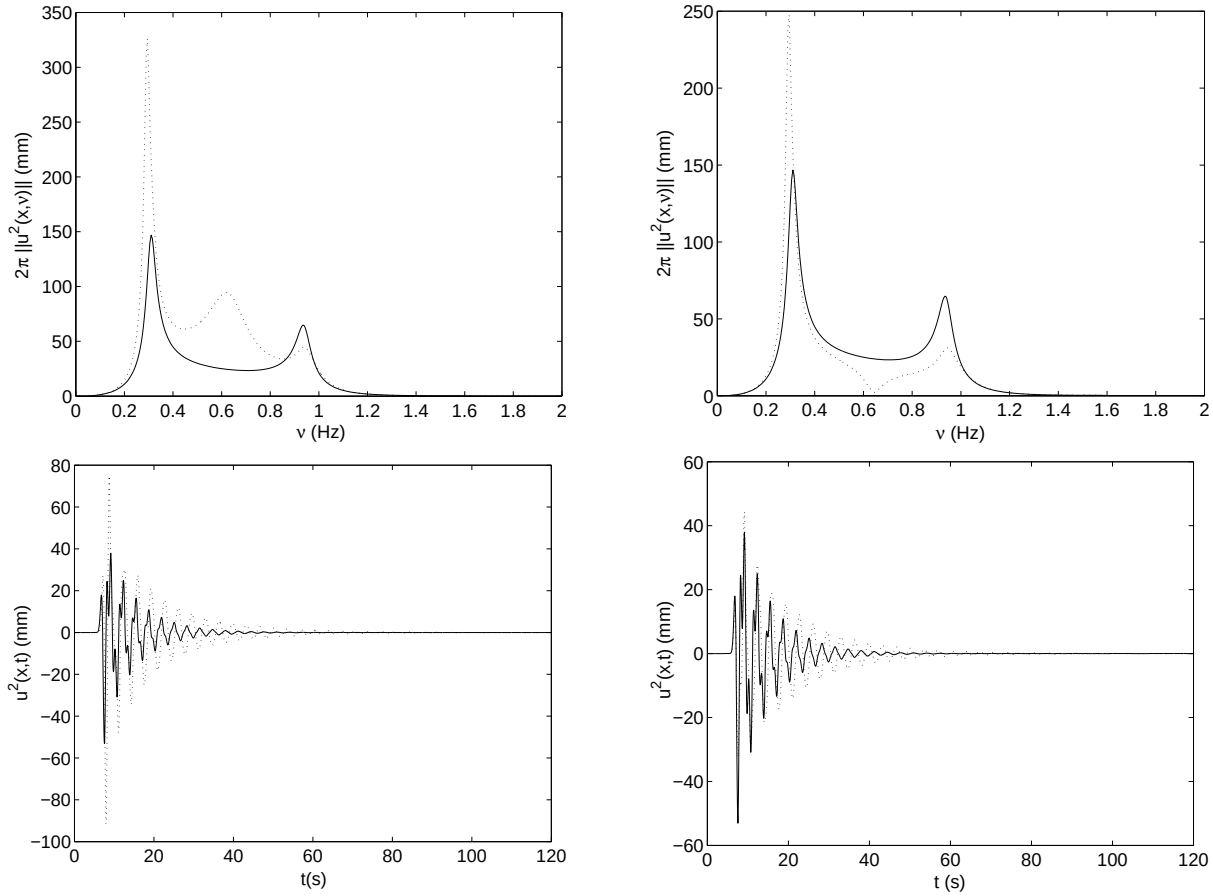


FIG. 2.15 – *Mexico : bloc $b \times w = 40m \times 40m$ - Réponses à une dérivée troisième de Gaussienne telle que $v_0 = 0.5Hz$. La colonne de gauche correspond à la réponse au sommet du bloc, celle de droite à la réponse à la base du bloc, en haut 2π fois le module des spectres et en bas les sismogrammes (déplacements) correspondants. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, les courbes en pointillés à la configuration avec bloc. La source est localisée en profondeur quasiment à la verticale du bloc à $\mathbf{x}^s = (-65m, 3000m)$.*

Le premier pic est déplacé vers les basses fréquences en présence du bloc. C'est donc bien un mode de Love. Nous avons amplification et allongement de la durée en présence d'un seul bâtiment, par contre, il n'y a pas de battements réellement perceptibles.

2.2.4.2 Un bâtiment $b \times w = 50\ m\ \times 30\ m$

Ce bâtiment est dans un premier temps soumis à une sollicitation sismique imposée par une source cylindrique localisée directement sous le bloc supposé représenter le bâtiment, telle que $\mathbf{x}^s =$

$(0, 3000m)$. Les termes $\sin(k_2^2 b)\left(F_1(b,\mu^2,\rho^2,\omega) - \mathcal{F}_2(h,\mu^0,\rho^0,\mu^1,\rho^1,w,\omega)\right)$ et $\dfrac{G_0(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$ prennent alors la forme, figure II.2.16.

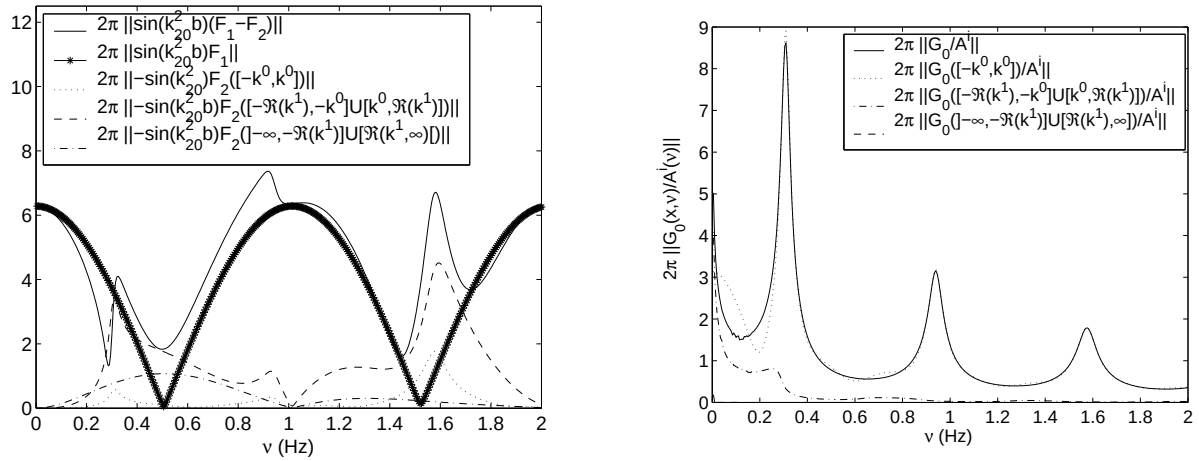


FIG. 2.16 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 30m$ *- À gauche,* $2\pi \left\|\sin(k_2^2 b)\left(F_1(b,\mu^2,\rho^2,\omega) - \mathcal{F}_2(h,\mu^0,\rho^0,\mu^1,\rho^1,w,\omega)\right)\right\|$ *et à droite* $2\pi \left\|\dfrac{G_0(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}\right\|$.

Comme dans la section précédente, le terme source correspond au déplacement que nous obtenons dans la cas d'une simple couche, sans bâtiment. Ce résultat va dans le sens des conditions, (II.2.86) et (II.2.87), puisque la largeur de ce bloc est moins importante que celle du bloc précédemment étudié (c.à.d. $w = 40m$).

Dans ce cas, les réponses dans le bâtiment sont :

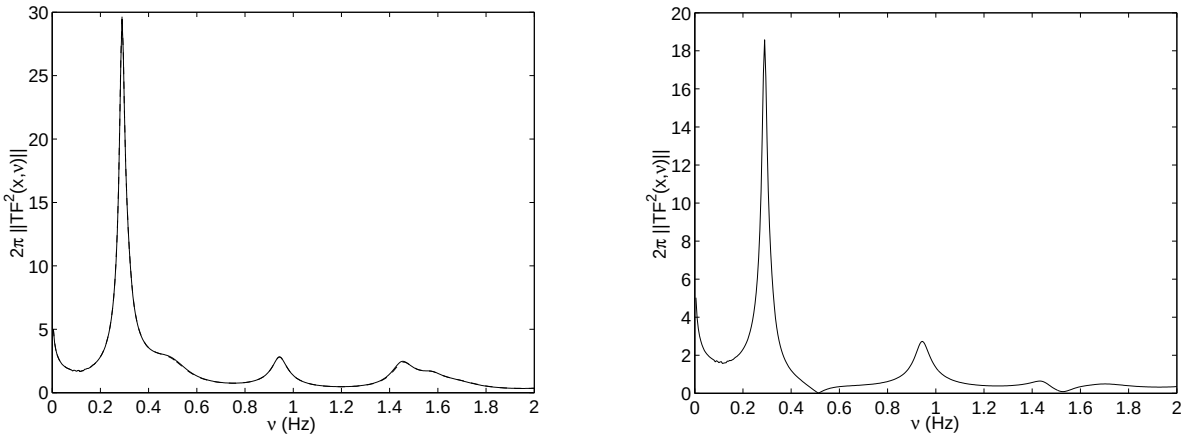


FIG. 2.17 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 30m$ *- À gauche* 2π *fois le module de la fonction de transfert au sommet du bâtiment, et à droite* 2π *fois le module de la fonction de trasnfert à la base du bâtiment. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à* $\mathbf{x}^s = (0, 3000m)$.

De la même façon que précédemment, le premier pic correspond au mode **quasi-Love**, le second au **mode de bloc à quasi-base fixe**, le troisième n'est pas un mode, ni les suivants. Le **mode de bloc à quasi-base rigide n'est pas perceptible car l'atténuation qui lui est associée**

est importante. Pour la fréquence du mode quasi-base rigide nous observons un pic au sommet du bloc et une réponse nulle à sa base. La comparaison des réponses en présence et en absence du bloc est représentée figure II.2.18

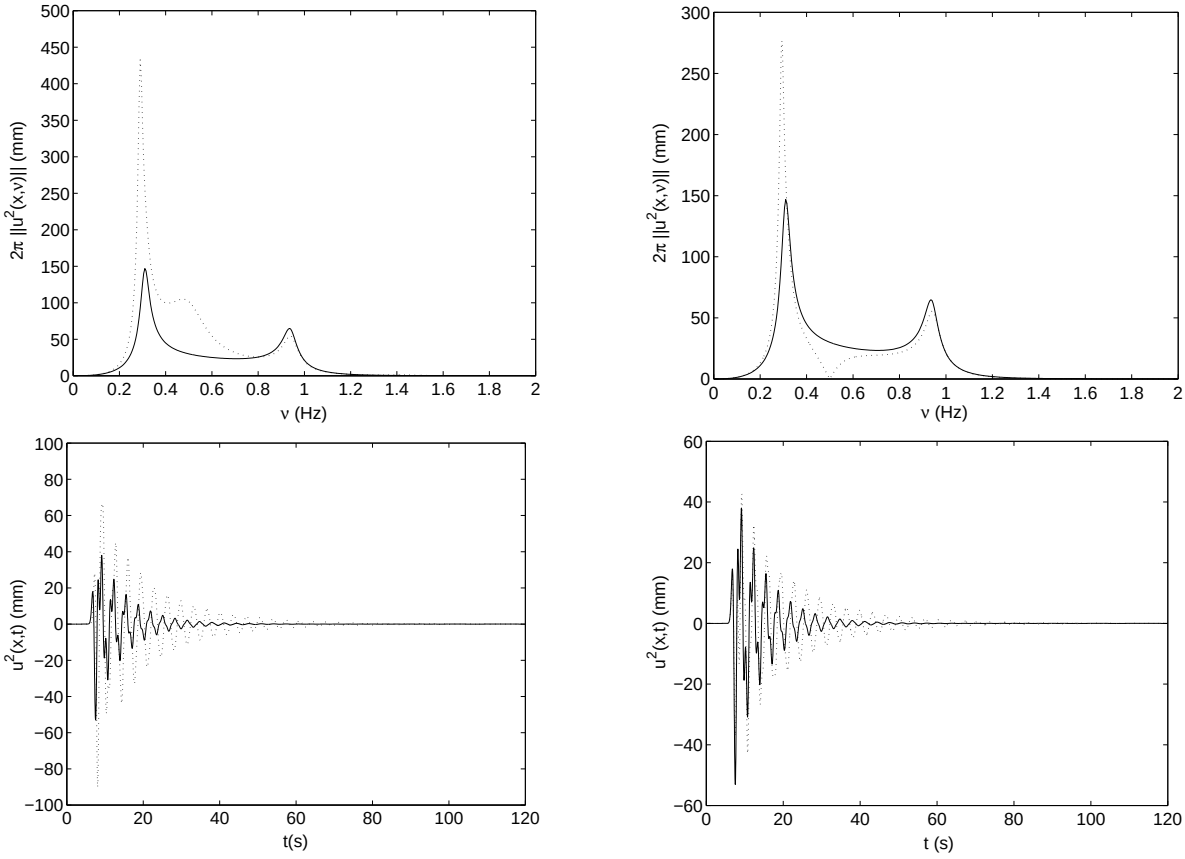


FIG. 2.18 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 30m$ *- Réponses à une dérivée troisième de Gaussienne telle que* $v_0 = 0.5Hz$. *La colonne de gauche correspond au point au sommet du bloc, celle de droite au point à la base du bloc, en haut* 2π *fois le module des spectres et en bas les sismogrammes (déplacements) correspondants. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, les courbes en pointillés à la configuration avec bloc. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à* $\mathbf{x}^s = (0, 3000m)$

Nous obtenons **une amplification et un allongement de la durée en présence d'un seul bâtiment** ; par contre, il n'y a **pas de battements réellement perceptibles**.

Jusqu'à maintenant nous nous sommes intéressés aux réponses à l'intérieur des blocs. Or, puisque le premier mode quasi-Love est excité, et qu'il est raisonnable de supposer que des ondes de surface dans la couche sont également excitées, au moins localement, nous allons nous intéresser aux réponses sur le sol à différentes distances du bloc. Nous rappelons que la réponse dans la couche, pour un seul bâtiment et en ne considérant qu'un développement sur le fondamental du bloc, est la somme de la réponse sans le bloc et de la réponse d'une source induite de type ruban, centrée sur le bloc, de largeur identique à celui-ci et de spectre $\frac{\mu^2}{\mu^1} B_0^2 k^2 \sin\left(k^2 b\right) w$. Le spectre de la source induite présente une fréquence nulle pour les fréquences $nu_{0m}^{\text{qbr}} = \frac{mc_S^2}{2b}$, c'est-à-dire pour les fréquences des

modes de bloc à base rigide. Dans la section II.2.1.7, nous avons effectivement souligné le fait que du point de vue de la structure géophysique, ce sont les modes de bloc à quasi-base rigide qui entrent en jeu dans la relation de dispersion.

Notons $TF^1_{\text{cou}}(\mathbf{x_g},\omega) = \dfrac{u^1_{\text{cou}}(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)}$ la fonction de transfert de la réponse de la couche,
$TF^1_{\text{bat}}(\mathbf{x_g},\omega) = \displaystyle\sum_{m=0}^{M} \frac{A^i(\omega)u^1_{\text{bat}m}(\mathbf{x_g},\omega)}{B^2_m(\omega)}$ la fonction de transfert de la réponse à la source induite
et $TF^1(\mathbf{x_g},\omega) = \dfrac{u^1_{\text{cou}}(\mathbf{x_g},\omega) + u^1_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$ la fonction de transfert "totale".

Remarque : La fonction de transfert $TF^1_{\text{bat}}(\mathbf{x_g},\omega)$ est définie par $\dfrac{A^i(\omega)u^1_{\text{bat}m}(\mathbf{x_g},\omega)}{B^2(\omega)}$, car le spectre incident $A^i(\omega)$ est inclus dans le calcul des coefficients pseudo-modaux $B^2_m(\omega)$, au travers de la résolution du système matriciel (II.2.79).

Alors, pour des distances par rapport au bloc $\mathbf{x_g} = (x_g, 0)$ telles que $x_g = 20m$, $x_g = 30m$, $x_g = 150m$ et $x_g = 300m$, nous obtenons les fonctions de transfert, figure II.2.19. Les courbes représentées sur la colonne de gauche, correspondent à $\|TF_{\text{cou}}(\mathbf{x_g},\omega)\|$. La source étant à une distance épicentrale faible et à une profondeur focale importante, les phénomènes sont des interactions d'ondes SOP1, section II.1.1.5. Les pics rencontrés correspondent aux "Leaky modes", c'est-à-dire aux fréquences de "résonance" d'Haskell. Aucune des ondes SOS3 n'est excitée. La colonne centrale correspond à $\left\|TF_{\text{bat}}(\mathbf{x_g},\omega)\right\|$. La source est une source ruban induite localisée sur Γ_{bs}. Les deux premiers pics correspondent aux modes de Love. Les ondes SOP2 sont dominantes pour ces deux fréquences. La fréquence $\nu^{\text{qbr}}_{01} \approx 1Hz$ est systématiquement coupée. Des ondes SOS3 sont générées, comme nous l'attendions, compte tenu des remarques sections II.1.1.10 et II.2.1.6. Ces ondes ont une amplitude relative d'autant plus faible que le point d'observation est plus éloigné du bloc. Elles sont donc générées par la présence du bloc. La troisième colonne représente la fonction de transfert "totale". Les ondes SOS3 proviennent de la source induite par le bloc. Les ondes de Love SOP2 sont dominantes près du bloc, bien que l'amplitude des ondes SOP1 ne soit pas négligeable. Au fur et à mesure que le point d'observation s'éloigne du bloc, l'amplitude des ondes SOP2 décroît, l'amplitude des ondes SOP1 restant relativement constante. Cela induit un **"scindage" du premier pic aux alentours de** $x_g = 150m$. Encore plus loin, des pics satellites apparaissent qui sont certainement dus à des phénomènes géométriques liés à la distance épicentrale. Le résultat aux environs de $x_g = 150m$ est particulièrement intéressant. Il montre que nous pouvons obtenir un "scindage" du premier pic qui se traduira par des battements dans le domaine temporel, simplement en considérant le mode de Love et le pic d'interaction. **Cela prouve que nous pouvons obtenir une réponse anormale sur le sol**, avec un seul bloc, ce qui semble être en contradiction avec les résultats exposés dans [108, 180]. La cause en est simple. La configuration considérée (géométrie, sollicitation et paramètres des matériaux) est différente et/ou les résultats présentés dans ces travaux sont essentiellement les réponses dans les bâtiments, et pour quelques unes celles sur le sol en dehors des bâtiments. Ce résultat **remet en cause la définition même du "champ libre"**. En pratique, ce champ est supposé être enregistré sur un sol relativement dur, sans qu'il ait été modifié par un quelconque objet. Un champ libre ne peut donc pas, a priori, être mesuré puisqu'il existe toujours des irrégularités de surface (c.à.d. montagne, colline, [111, 186], bâtiments) qui vont modifier assez loin le sismogramme.

.

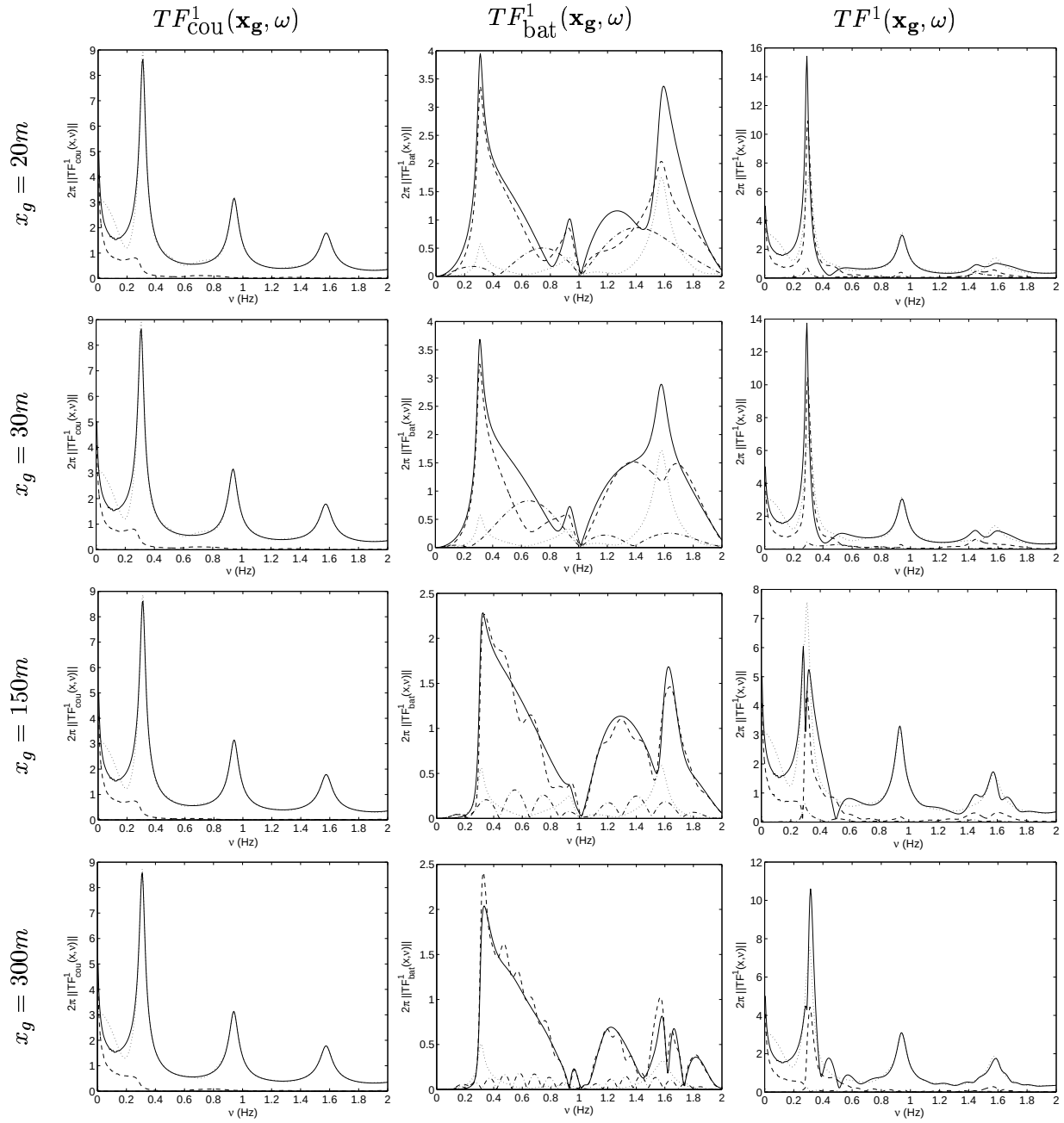


FIG. 2.19 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 30m$ - 2π *fois le module des fonctions de transfert* $\left\|TF^1_{cou}(\mathbf{x_g},\omega)\right\|$ *(colonne de gauche),* $\left\|TF^1_{bat}(\mathbf{x_g},\omega)\right\|$ *(colonne centrale) et* $\left\|TF^1(\mathbf{x_g},\omega)\right\|$ *(colonne de droite). La première ligne regroupe les résultats pour* $x_g = 20m$*, la seconde pour* $x_g = 30m$ *la troisième pour* $x_g = 150m$ *et la quatrième pour* $x_g = 300m$*. Les courbes en trait continu représentent la fonction de transfert totale, les courbes en pointillés la composante sur* $\mathcal{I}_1$*, les courbes en tirets la composante sur* $\mathcal{I}_2$*, et les courbes en tirets et pointillés la composante sur* $\mathcal{I}_3$*. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à* $\mathbf{x}^s = (0, 3000m)$

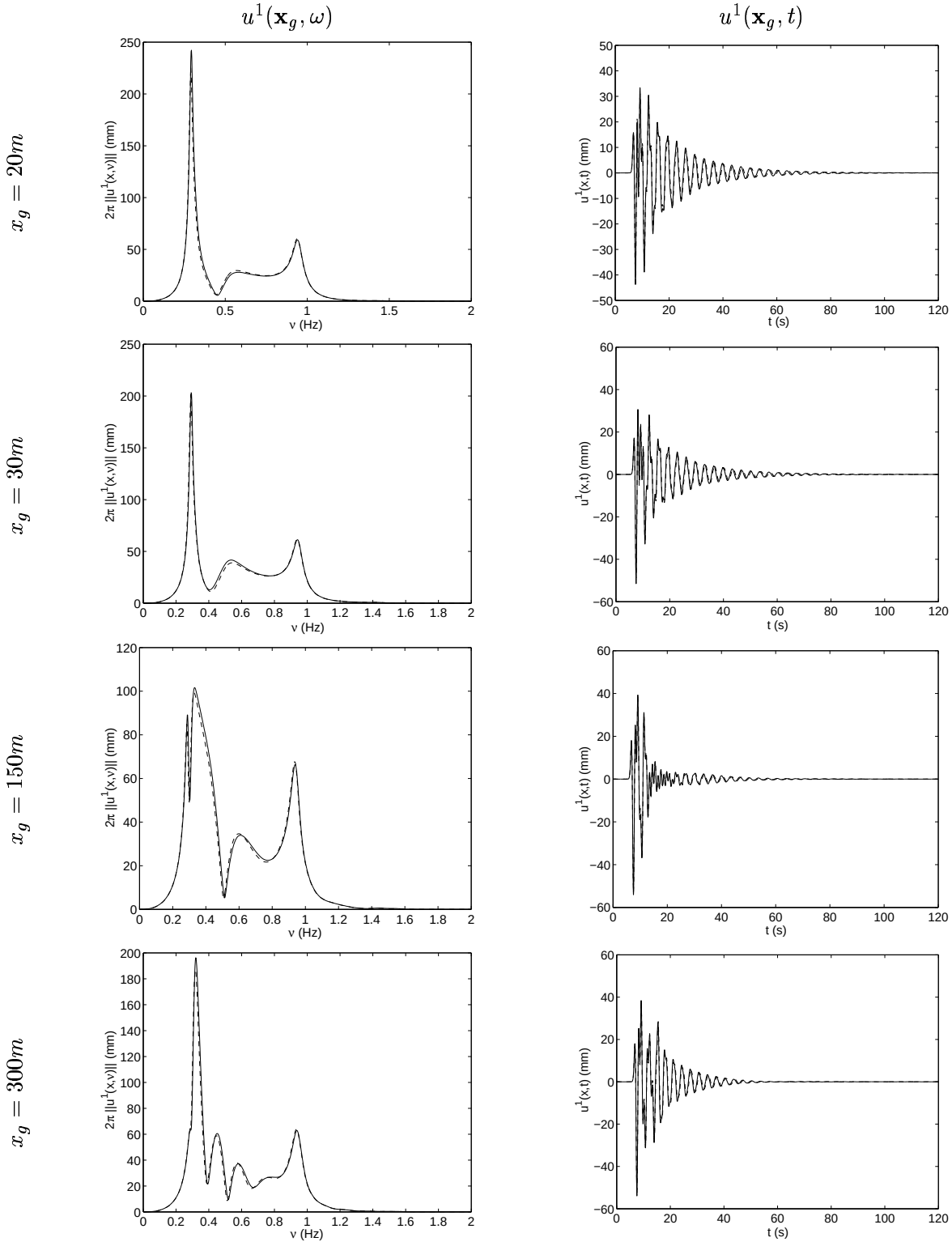


FIG. 2.20 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 30m$ *- À gauche,* 2π *fois le module du spectre du déplacement* $u^1(\mathbf{x}_g, \omega)$*, et à droite les sismogrammes (déplacements) correspondant* $u^1(\mathbf{x}_g, t)$*. Les courbes en trait continu sont les résultats de notre code numérique, les courbes en pointillés sont les résultats obtenus semi-analytiquement, en considérant que le mode fondamental du bâtiment est dominant. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à* $\mathbf{x}^s = (0, 3000m)$*.*

Curieusement, les **modes quasi-Love ont une atténuation plus importante lorsqu'ils sont excités par une source induite**, que lorsque les modes de Love sont réellement excités dans leur configuration originelle (c.à.d. sans bloc). L'explication réside dans le fait que ce sont des quasi-modes et non des modes réels de Love, mais également dans le fait qu'ils sont générés par une source induite et non par une source active. Une source induite produit localement un réarrangement spectral du champ qui la crée mais ne crée, elle-même rien.

Voyons comment cela se traduit, en particulier dans le domaine temporel, pour une onde incidente de type dérivée troisième de gaussienne telle que $\nu_0 = 0.5Hz$. Les **durées sont toujours plus importantes lorsqu'il y a des blocs** que lorsqu'il n'y a pas de bloc (comparaison avec les deux premières figures II.1.9, chapitre II.1). De même, **les amplitudes sont également plus importantes**. Nous pouvons noter pour les distances $x_g = 150m$ et $x_g = 300m$ des **battements**. Ceux-ci sont relativement faibles car le second pic du "scindage" est relativement large, donc atténué. Dans sa globalité, **le sismogramme à $x_g = 150m$ présente une désamplification**, [108], par rapport au cas sans bloc. Ceci est dû à un **effet géométrique induisant des interférences destructives entre les ondes SOP1 et SOP2**.

Une dernière chose reste à étudier : la réponse dans le substratum. Notons $TF^{0d}_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert correspondant au champ diffracté dans le cas d'une simple couche, c'est-à-dire $\dfrac{u^{0d}_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$, $TF^0_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert de la réponse à la source induite, c'est à dire $\displaystyle\sum_{m=0}^{M} \frac{A^i(\omega) u^0_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega)}{B^2_m(\omega)}$ et $TF^{0d}(\mathbf{x},\omega)$ la fonction de transfert du champ diffracté "total" telle que $\dfrac{u^{d0}_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega) + u^0_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$.
Par exemple, en dessous du bâtiment, au niveau de l'interface Γ_h, c'est-à-dire au point $\mathbf{x_s} = (0, 50m)$, nous obtenons

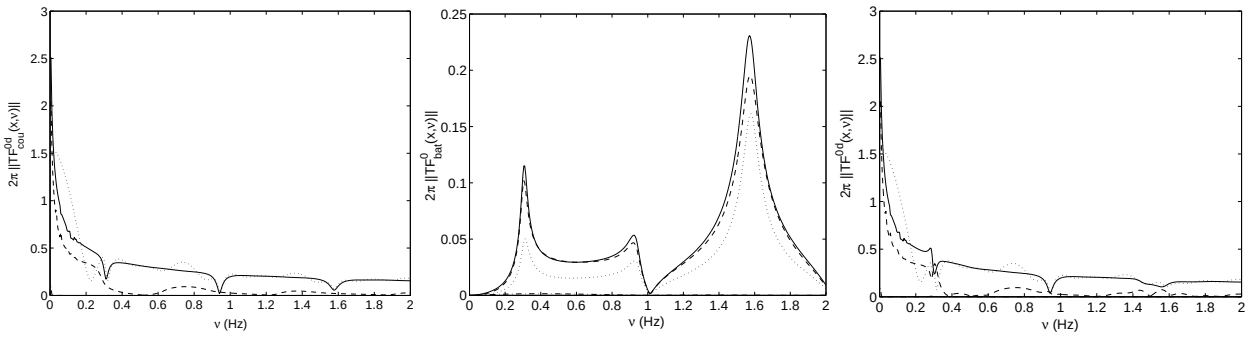


FIG. 2.21 – 2π *fois le module des fonctions de transfert* $\left\|TF^{0d}_{cou}(\mathbf{x_s},\omega)\right\|$ *(colonne de gauche),* $\left\|TF^{0}_{bat}(\mathbf{x_s},\omega)\right\|$ *(colonne centrale) et* $\left\|TF^{0d}(\mathbf{x_s},\omega)\right\|$ *(colonne de droite). Les courbes en trait continu représentent la fonction de transfert totale, les courbes en pointillés la composante sur* $\mathcal{I}_1$*, les courbes en tirets la composantes sur* $\mathcal{I}_2$*, et les courbes en tirets et pointillés la composante sur* $\mathcal{I}_3$*. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à* $\mathbf{x}^s = (0, 3000m)$.

Le champ de déplacement sans le bloc est essentiellement composé d'ondes propagatives alors que **le champ de déplacement induit par le bloc est essentiellement composé d'ondes évanescentes**. Ce champ présente des pics aux fréquences de résonance de Love et la fréquence correspondant au mode de bloc à quasi base-rigide est coupée. Nous n'avons représenté que les

champs diffractés car l'onde incidente est très importante par rapport à l'amplitude du champ diffracté.
Dans le domaine temporel, le champ est majoritairement composé de l'onde incidente de laquelle il est par conséquent difficile de distinguer l'onde de surface associée au mode de Love.

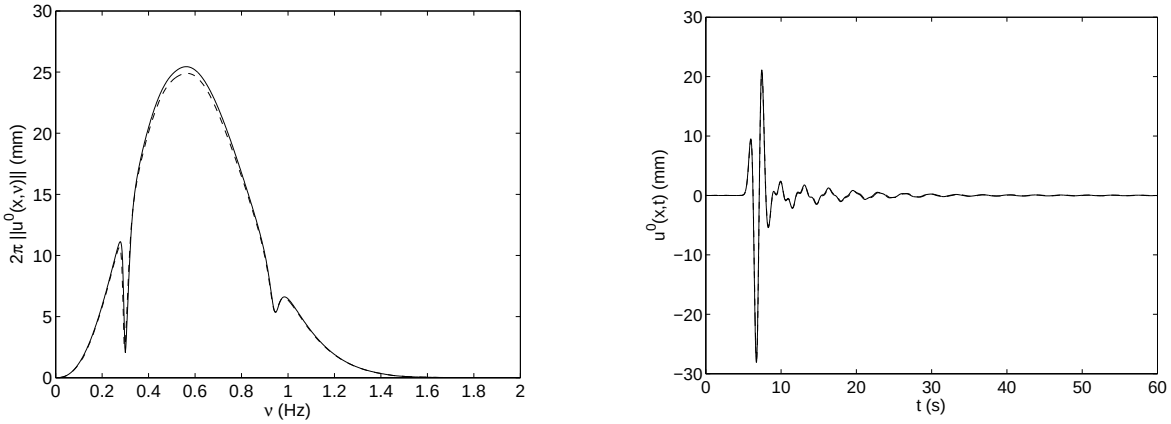


FIG. 2.22 – *Mexico : bloc $b \times w = 50m \times 30m$ - À gauche, 2π fois le module du spectre du déplacement $\left\|u^0(\mathbf{x}_s, \omega)\right\|$, et à droite le sismogramme correspondant $u^0(\mathbf{x}_s, t)$. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats de notre code numérique, et les courbes en pointillés aux résultats obtenus semi-analytiquement, en considérant que le mode fondamental du bâtiment est dominant. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à $\mathbf{x}^s = (0, 3000m)$.*

Nous représentons figure, II.2.23 des instantanés de la réponse. Nous remarquons que le bloc admet un rayonnement de type piston, comme nous l'avons montré théoriquement, et que des **"boules" se propagagent dans la couche**. Elles sont le signe de l'**excitation de mode quasi-Love**.

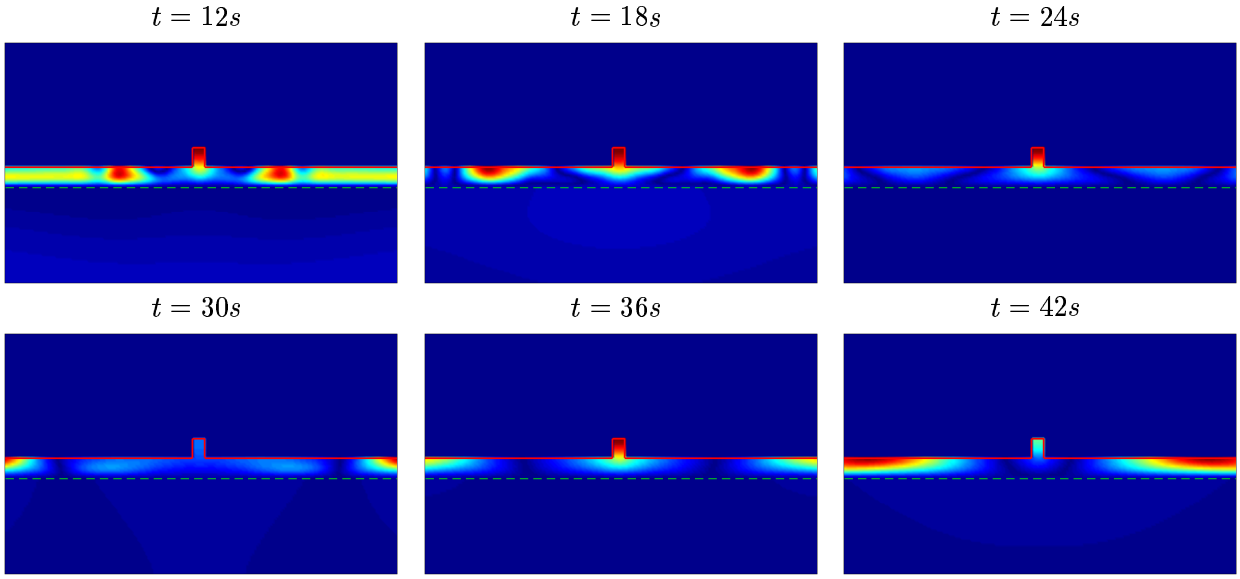


FIG. 2.23 – *Instantanés du champ de déplacement solution du problème. Sur la première ligne, à gauche, à $t = 12s$, au milieu à $t = 18s$, et à droite à $t = 24s$ et sur la seconde, à gauche à $t = 30s$, au milieu à $t = 36s$, et à droite à $t = 42s$. L'échelle des couleurs varie d'une figure à l'autre. La source est localisée en profondeur à $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.*

Le **"scindage"** sur le sol à une distance d'environ $x_g = 150m$ du bloc, est dû à une **interférence entre les modes quasi-love générés localement au niveau du bloc et les phénomènes d'interférence générés au niveau de la couche**.

Modifions la position de la source de façon à voir quelle est l'action du bâtiment lorsque les modes de Love sont déjà excités, c'est-à-dire pour une source telle que sa profondeur focale soit faible et sa distance épicentrale (c'est-à-dire la distance entre la source et le bloc projetée sur l'axe des abscisses) soit importante. En nous référant à la section II.1.1.6.2 qui traite des résultats numériques pour le sous-sol de Mexico, si nous plaçons la source telle que $\mathbf{x^s} = (-3000m, 100m)$, alors **les ondes qui atteindront le bloc seront des ondes de Love quasiment pures**. Encore une fois, le terme source $G_0(\nu)$ correspond simplement à la réponse de la couche sans le bloc, figure II.2.24.

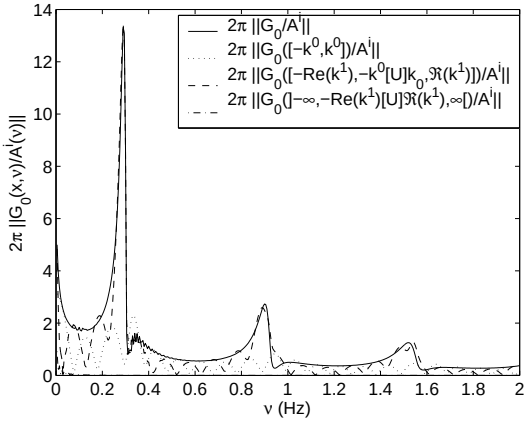


FIG. 2.24 – *Mexico : bloc $b \times w = 50m \times 30m$ - La courbe en trait continu représente $2\pi \left\| \dfrac{G_0}{A^i(\omega)} \right\|$, la courbe en pointillés correspond à la composante sur l'intervalle $\mathcal{I}_1$, la courbe en tirets correspond à la composante sur l'intervalle $\mathcal{I}_2$, et la courbe en tirets et pointillés correspond à la composante sur l'intervalle $\mathcal{I}_3$.*

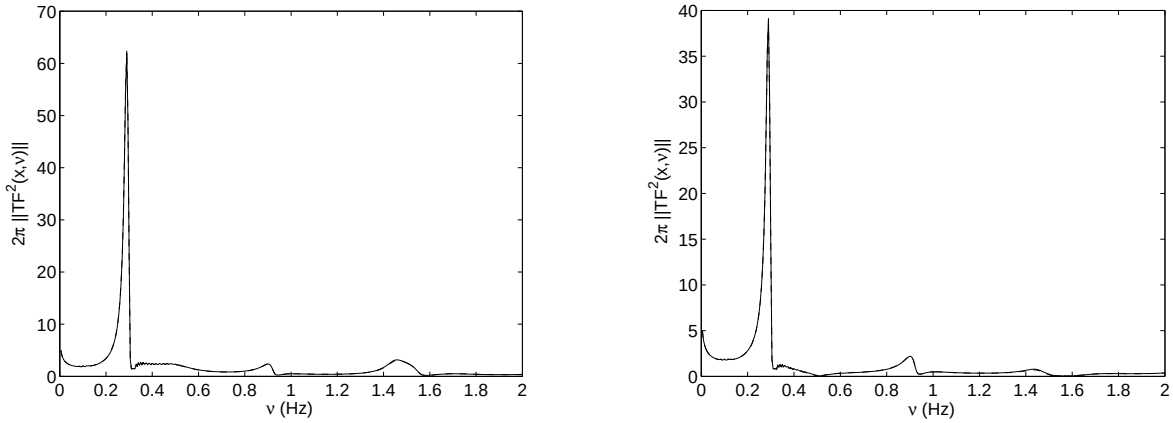


FIG. 2.25 – *Mexico : bloc $b \times w = 50m \times 30m$ - 2π fois le module des fonctions de transfert au sommet (à gauche) et à la base du bâtiment (à droite). La source est peu profonde et loin latéralement du bloc à $\mathbf{x}^s = (-3000m, 100m)$.*

À l'intérieur du bloc, les fonctions de transfert prennent la forme de la figure II.2.25. Comparativement aux fonctions de transfert du cas où la source a une profondeur focale importante, le premier pic correspondant au mode quasi-Love a une amplitude importante et une finesse élevée. Cela vient du fait qu'un bloc à tendance à exciter ces modes alors qu'ils le sont déjà. Le pic aux alentours de $\nu = 0.9Hz$ n'est, lui, pas plus excité car ce n'est pas un mode du système global. Nous observons, comme dans le cas étudié section II.1.1, des pics satellites, extrêmement oscillants après la borne supérieure du premier mode quasi-Love. Les réponses prennent alors la forme de la figure II.2.26.

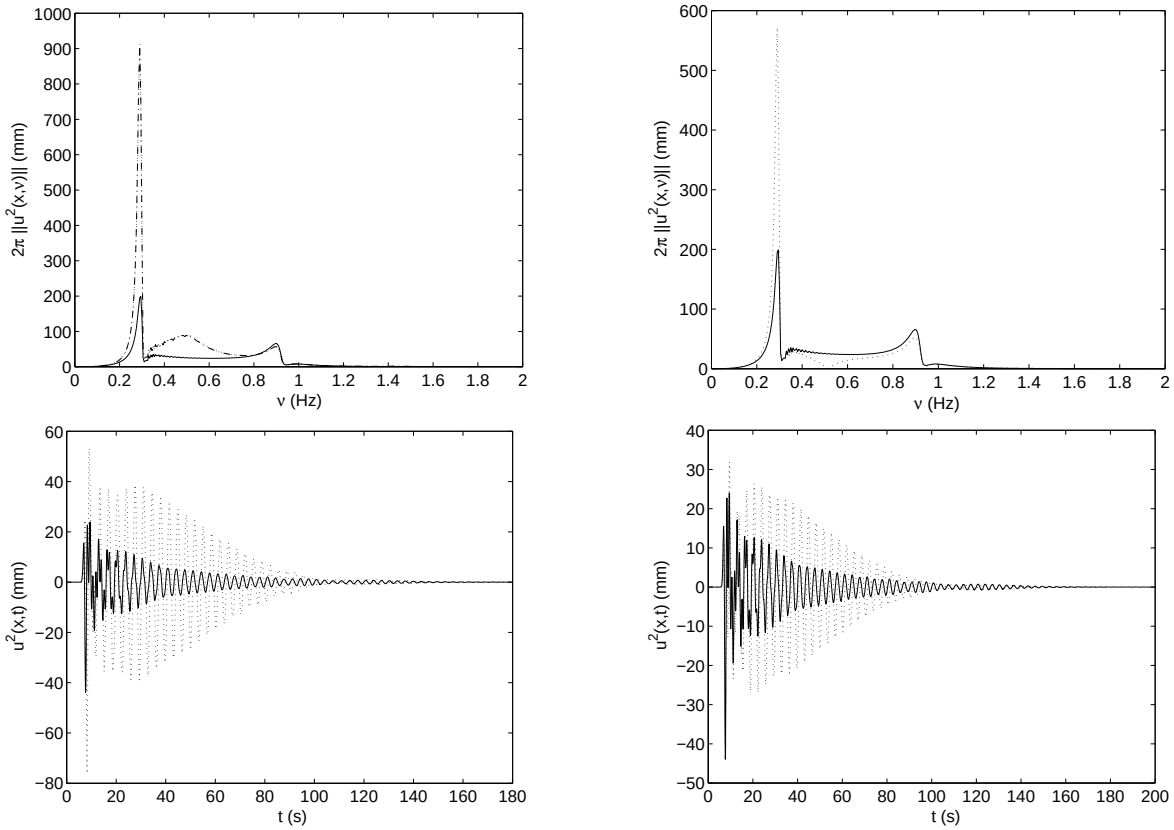


FIG. 2.26 – *Mexico : bloc $b \times w = 50m \times 30m$ - Réponses à une dérivée troisième de Gaussienne telle que $v_0 = 0.5Hz$. La colonne de gauche correspond au sommet du bloc, celle de droite à la base du bloc, en haut 2π fois le module des spectres et en bas les sismogrammes correspondants. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration en absence du bloc, et les courbes en pointillés correspondent à la configuration en présence du bloc. La source est peu prodonde et loin latéralement du bloc à $\mathbf{x}^s = (-3000m, 100m)$.*

Comparativement au cas sans bloc, le premier pic correspondant à l'excitation du mode de Love est d'amplitude plus importante et par conséquent a une finesse plus importante. Les durées sont sensiblement identiques, bien que la finesse du pic associé au mode fondamental quasi-Love soit plus importante. Nous notons cependant **une forte amplification au sommet du bloc**, et un **battement prononcé**. Le fait que la finesse du premier pic soit plus importante et que la durée du signal ne soit, elle, pas plus importante, est un phénomène paradoxal, car la durée devrait être également plus importante. Cela signifierait que la durée du signal n'est pas forcément associée à la finesse d'un pic ou que la définition adoptée pour le terme finesse est à revoir. En realité, cette notion

n'est pas associée directement à un rapport hauteur sur largeur du pic, mais plutôt à la largeur à mi-hauteur. Pour cet exemple, cette largeur du pic relatif au mode fondamental quasi-Love est très proche dans les cas avec et sans bâtiment. La durée est donc sensiblement égale d'une configuration à l'autre.

Si maintenant nous nous intéressons à la réponse sur le sol, au point $x_g = 150m$ et $x_g = 300m$, figure II.2.27.

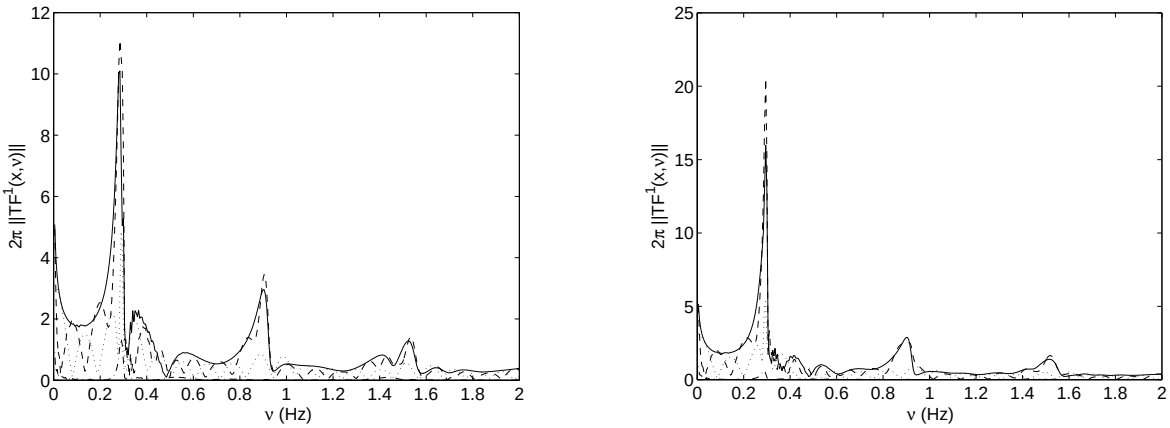


FIG. 2.27 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 30m$ - 2π *fois le module des fonctions de transfert à gauche au point* $x_g = 150m$ *et à droite au point* $x_g = 300m$. *La source est peu profonde et loin latéralement du bloc à* $\mathbf{x}^s = (-3000m, 100m)$.

Le premier pic correspond à l'excitation du mode de Love. Au point $x_g = 150m$, le premier pic semble scindé. Il semble être composé d'ondes SOP2. Le second semble être composé à la fois d'ondes SOP2 et SOP1. Pour autant, le second pic est très atténué. Il ne correspond pas à un mode du sysème total. Les ondes SOS3 sont encore une fois excitées localement. Ainsi, il semble que la présence du bloc induise aussi, une forte interaction entre les ondes SOP1 et SOP2. Elle peut induire un léger "scindage".
Les réponses, en ces points, sont représentées figures II.2.28. **Le "scindage" du premier pic pour** $x_g = 150m$ **induit des battements dans le domaine temporel**. Le même phénomème est rencontré pour $x_g = 300m$, mais plus prononcé.

Nous venons en fait d'étudier la réponse en présence d'un bloc, pour les deux cas (séismes épicentraux et éloignés) de séismes possibles. Dans tous les cas, la notion même de champ libre nous paraît nébuleuse. Pour autant, dans le cas de **séismes qualifiés d'épicentraux**, c'est-à-dire lorsque le **source à une profondeur focale importante** et que le bloc est proche de l'épicentre, en projection sur l'axe des abscisses, des battements peuvent être observés sur le sol. Ils sont dus à une **interaction entre les ondes SOP1**, normalement générées dans la configuration sans bloc, **et les modes quasi-Love générés localement par la présence du bloc**. Dans le cas de **séismes régionaux**, les battements proviennent d'un phénomème que nous pourrions qualifier d'inverse. La présence du bloc induit une **interaction entre le mode quasi-love largement amplifié par la présence du bloc**, existant déjà en son absence, **et les ondes SOP1**.

Nous représentons figure II.2.29 des instantanés du champ de déplacement solution du problème. Nous pouvons voir que l'onde incidente prend la forme d'onde de Love.

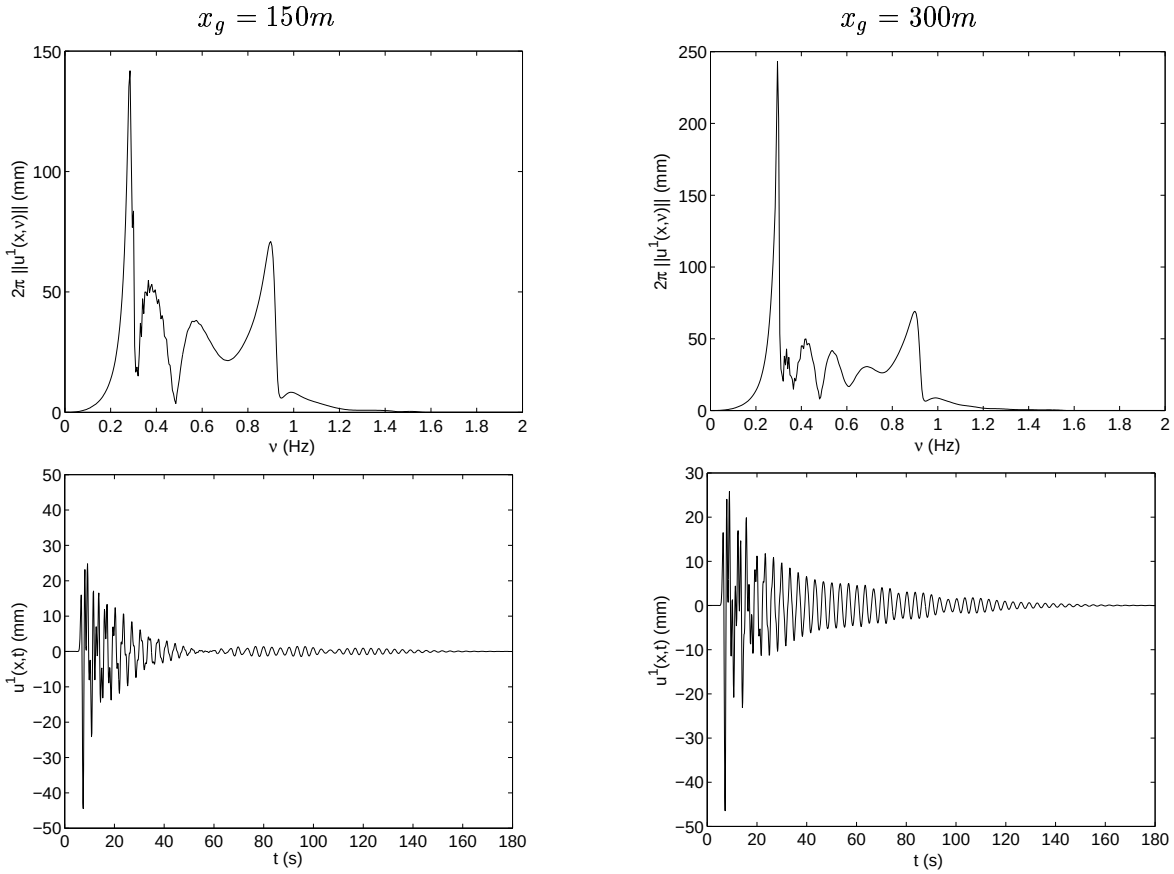


FIG. 2.28 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 30m$ *- Réponses à une dérivée troisième de Gaussienne telle que* $\nu_0 = 0.5Hz$*. La colonne de gauche correspond au point* $x_g = 150m$*, celle de droite au point* $x_g = 300m$ *; en haut* 2π *fois le module des spectres et en bas les sismogrammes correspondants. La source est peu profonde et loin latéralement du bloc à* $\mathbf{x}^s = (-3000m, 100m)$*.*

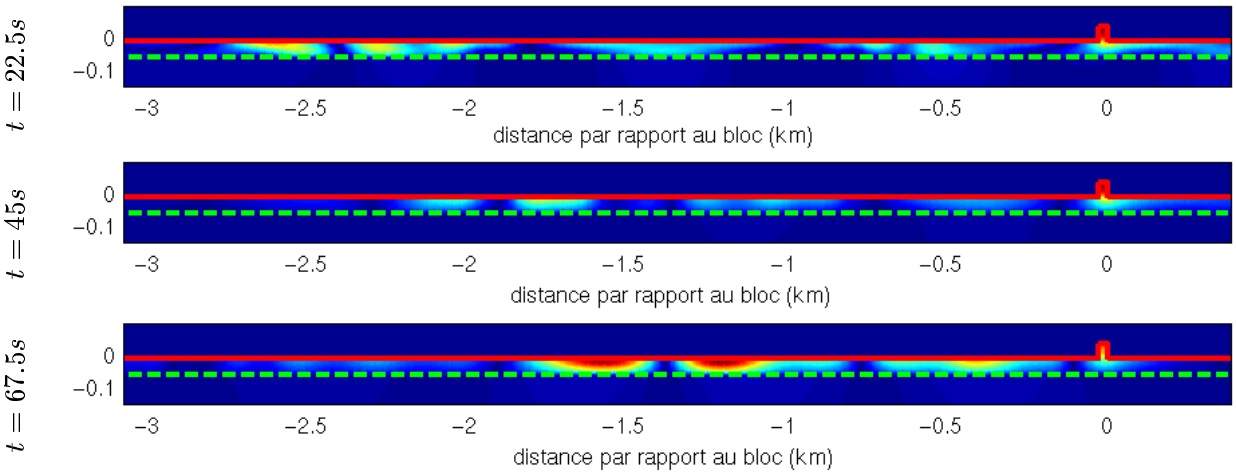


FIG. 2.29 – *Instantanés du champ de pression solution du problème. La source est localisée proche de l'interface à* $\mathbf{x^s} = (-3000m, 100m)$*. L'échelle des couleurs varie d'une figure à l'autre.*

2.2.4.3 Un bâtiment $b \times w = 50\ m \times 60\ m$

Penchons-nous maintenant, sur le cas où l'étude modale nous indique que deux modes sont extrêmement proches l'un de l'autre aux environs de $\nu = 0.3Hz$. Les termes $G_0(\mathbf{x}, \omega)$ et $\sin(k_2^2 b)\,(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)$ prennent la forme de la figure II.2.30. Le bloc est tel que $b \times w = 50m \times 60m$ et la source est localisée au point $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

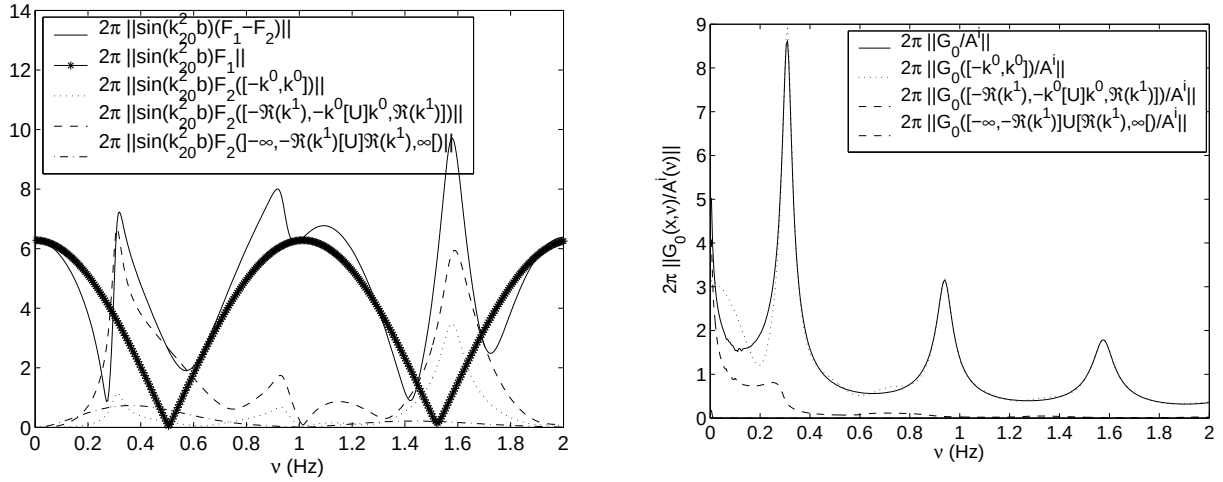


FIG. 2.30 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 60m$ - *À gauche,* $2\pi \left\|\sin(k_2^2 b)\left(F_1(b, \mu^2, \rho^2, \omega) - \mathcal{F}_2(h, \mu^0, \rho^0, \mu^1, \rho^1, w, \omega)\right) B_0^2\right\|$ *et à droite* $2\pi \left\|\dfrac{G_0}{A^i(\omega)}\right\|$

Le terme source correspond, encore une fois, au terme de la réponse de la couche. Il commence cependant à être modifié, les ondes SOP2 n'étant plus quasiment inexistantes au-dessus de $\nu = 0.3Hz$. Cela est dû au fait que la largeur du bloc est plus importante.

Voyons comment cela se traduit sur la fonction de transfert au sommet du bloc, figure II.2.31.

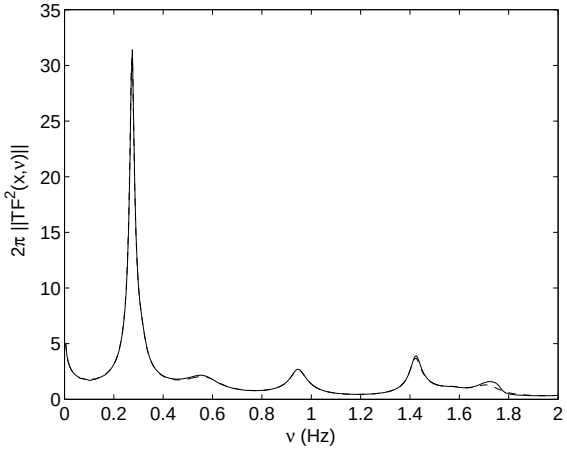


FIG. 2.31 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 60m$ - 2π *fois le module de la fonction de transfert au sommet du bloc. Courbe en trait continu :* 5 *modes sont considérés dans les calculs ; courbes en tirets : seul le mode fondamental est considéré. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Nous n'observons qu'un seul pic aux environs de $0.3Hz$. À la seconde intersection, figure de droite II.2.9, correspond une partie imaginaire importante, donc le second pic est très atténué et c'est pour cela que nous ne le voyons pas, figure II.2.31. Le second pic perceptible, correspond au mode fondamental de bloc à quasi-base fixe. Le troisième pic ne correspond pas à un mode et est par conséquent un phénomène d'interférence. Le mode de bloc à quasi-base rigide n'apparaît pas. Les deux pics suivants sont des modes. Nous pouvons remarquer qu'en hautes fréquences, pic aux environs de $1.8Hz$, des différences commencent à apparaître en fonction du nombre de pseudo-modes considérés dans le calcul. Cela est dû au fait que la largeur du bloc commence à être importante. Pour autant, le spectre de la source étant centré sur $\nu_0 = 0.5Hz$, le pseudo-mode fondamental suffit à fournir une bonne représentation de la réponse, figure II.2.32.

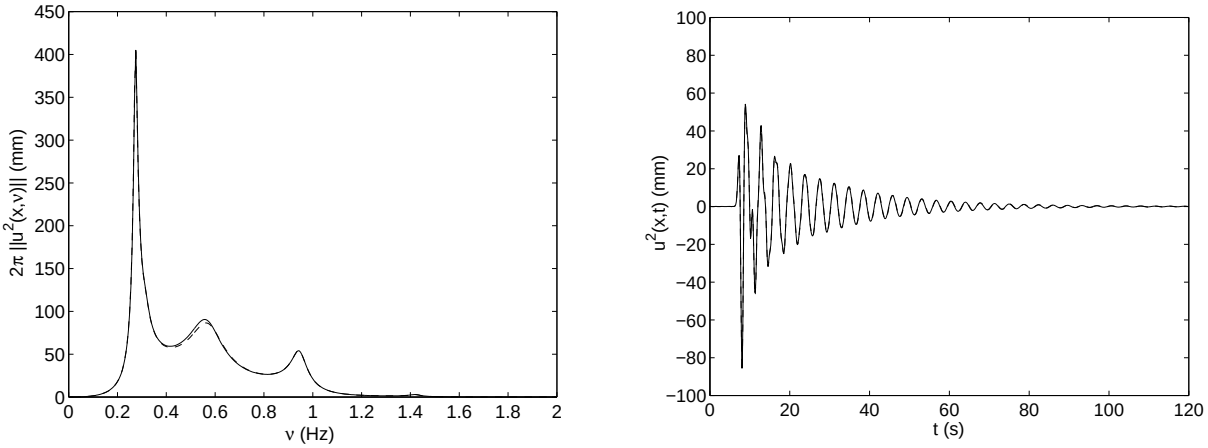


FIG. 2.32 – *Mexico : bloc* $b \times w = 50m \times 60m$ *- À gauche,* 2π *fois le module du spectre du déplacement au sommet du bloc, et à droite le sismogramme correspondant* $u^1(x,t)$*. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$*.*

La réponse au mode de bloc à quasi-base fixe semble plus importante que dans le cas du bloc de largeur $w = 30m$ et $w = 40m$. Cela est dû au fait que le mode, dans ce cas, est plus proche du maximum du spectre de l'onde incidente, mais également au fait que la partie imaginaire lui correspondant est légèrement plus faible. Ce mode est un peu moins atténué que pour les autres blocs considérés. Ainsi, dans les cas où nous pourrions nous attendre à un "scindage" en basses fréquences, il se peut que la réponse n'en comporte pas, du fait d'une atténuation importante d'un des deux modes.

2.3 Deux bâtiments sur sous-sol avec couche, mise en évidence des matrices de couplage

Dans cette section, nous considérons que les matériaux M^{2j} sont identiques quelque soit $j \in \mathbb{B}$, tels que $\rho^2 = 325kg.m^{-3}$, $\left(c_S^2\right)_R = 100m.s^{-1}$ et $Q_S^2 = 100$. Les matériaux occupant les domaines Ω_0 et Ω_1 sont encore une fois ceux considérés pour modéliser le sous-sol de la ville de Mexico.

Deux cas se présentent alors : soit les deux blocs sont de géométries identiques $b \times w$, soit de géométries distinctes $b^1 \times w^1$ pour le bloc repéré 1, et $b^2 \times w^2$ pour le bloc repéré 2.

Nous nous intéressons aux deux types de blocs dont les réponses ont été étudiées à la section précédente, le bloc $b \times w = 40m \times 40m$ et le bloc $b \times w = 50m \times 30m$. Alors, trois configurations sont possibles : i) deux blocs identiques $b \times w = 40m \times 40m$, ii) deux blocs identiques $b \times w = 50m \times 30m$, iii) deux blocs de caractéristiques géométriques distinctes un premier $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$ et un second $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$. Dans tous les cas, la distance séparant les blocs est $d = 65m$. Nous noterons bloc 1, le bloc dont la distance par rapport à l'épicentre est la plus faible, et par conséquent bloc 2, le bloc dont la distance par rapport à l'épicentre est la plus grande. L'origine du repère est fixé à la base du bloc 1. Cette configuration est sollicitée par une onde cylindrique générée par une source linéique suivant x_3 localisée dans le plan sagittal à $\mathbf{x}^s = (x_1^s, x_2^s)$.

2.3.1 Les champs de déplacement dans les blocs $u^{2j}(\mathbf{x}, \omega)$, $j = 1, 2$, la couche $u^1(\mathbf{x}, \omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x}, \omega)$

Nous rappelons que les champs dans les blocs 1 et 2 s'écrivent :

$$u^{2j}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=0}^{l=\infty} B_m^{2j} \cos\left(k_{1m}^{2j}\left(x_1 - d_j + \frac{w_j}{2}\right)\right) \cos\left(k_{2m}^{2j}\left(x_2 + b_j\right)\right), \forall \mathbf{x} \in \Omega_{2j},\ j = 1, 2 \tag{2.92}$$

les coefficients pseudo-modaux s'obtenant en résolvant le système matriciel :

$$B_n^{2j} = P_n^j + \sum_{q \in \mathbb{B}} \sum_{m=0}^{\infty} Q_{nm}^{jq} B_m^{2q};\ \forall j = 1, 2;\ \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.93}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{nm}^{jq} = & \frac{\mathrm{i} w_q k_{2m}^{2q} \mu^{2q} \epsilon_n \sin\left(k_{2m}^{2q} b_q\right)}{2\pi\mu^0 \cos\left(k_{2n}^{2j} b_j\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0} \sin\left(k_2^1 h\right)} \times \\ & \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w_q\right) \mathrm{I}_n^+\left(k_1, w_j\right) \exp\left(\mathrm{i} k_1 \left(\left(1 - 2\delta_{j2}\right)\left(1 - \delta_{j1}\delta_{q1} - \delta_{j2}\delta_{q2}\right) d - \frac{w_j - w_q}{2}\right)\right) \frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{2.94}$$

Ainsi, la distance d séparant les deux blocs, n'intervient que dans les matrices de couplage Q_{nm}^{12} et Q_{nm}^{21}.

Les termes sources P_n^j prennent la forme :

$$P_n^j = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^i\left(k_1, \omega\right) \mathrm{i} \exp\left(\mathrm{i} k_1 \left(\left(d\delta_{j2} - \frac{w_j}{2}\right) - x_1^s\right) + \mathrm{i} k_2^0 \left(x_2^s - h\right)\right) \mathrm{I}_n^+\left(k_1, w_j\right)}{2\pi \cos\left(k_{2n}^{2j} b_j\right)\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_1^1}{\mu^0 k_1^0} \sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} \tag{2.95}$$

Alors le champ $u^0(\mathbf{x},\omega)$ s'écrit :

$$
\begin{aligned}
u^0(\mathbf{x},\omega) = u^{i0}(\mathbf{x},\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}A^{i0}(k_1,\omega)}{4\pi} \exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 + x_2^s - 2h\right)\right) \times \\
\frac{\left(\cos\left(k_2^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} + \\
\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mu^2 B_m^{21} k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_1\right) w_1 \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w_1\right) \exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 + \frac{w_1}{2}\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 - h\right)\right)}{2\pi\mu_0\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} + \\
\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\mu^2 B_m^{22} k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_2\right) w_2 \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w_2\right) \exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 + \frac{w_2}{2} - d\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2 - h\right)\right)}{2\pi\mu_0\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)} \frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

et le champ $u^1(\mathbf{x},\omega)$

$$
\begin{aligned}
u^1(\mathbf{x},\omega) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \frac{A^{i0}(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^0\left(x_2^s\right)\cos\left(k_2^1 x_2\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \frac{dk_1}{k_2^0} + \\
\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 + \frac{w_1}{2}\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)} \times \\
\frac{\mu^2}{\mu^0}\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{21} k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_1\right) w_1 \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w_1\right) \frac{dk_1}{k_2^0} + \\
\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1 - \left(d - \frac{w_2}{2}\right)\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2 - h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)} \times \\
\frac{\mu^2}{\mu^0}\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{22} k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_2\right) w_2 \mathrm{I}_m^-\left(k_1, w_2\right) \frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

C'est-à-dire que les réponses dans les domaines Ω_1 et Ω_0 sont la somme des réponses dans la couche en l'absence de bloc, et des réponses aux sources induites par la présence des blocs. Le couplage entre ces blocs n'intervient pas explicitement dans ces expressions, mais à travers les spectres des sources induites, $\frac{\mu^2}{\mu^1} B_m^{2j} k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2\right) w_j$, $j = 1, 2$, plus particulièrement au travers des termes B_m^{21} et B_m^{22}, $m \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Ordre du développement pseudo-modal à considérer

Nous comparons ici, les réponses obtenues semi-analytiquement en variant le nombre de pseudo-modes pris en compte pour le calcul avec les réponses obtenues numériquement, à l'aide de notre code Éléments-Finis, section II.2.

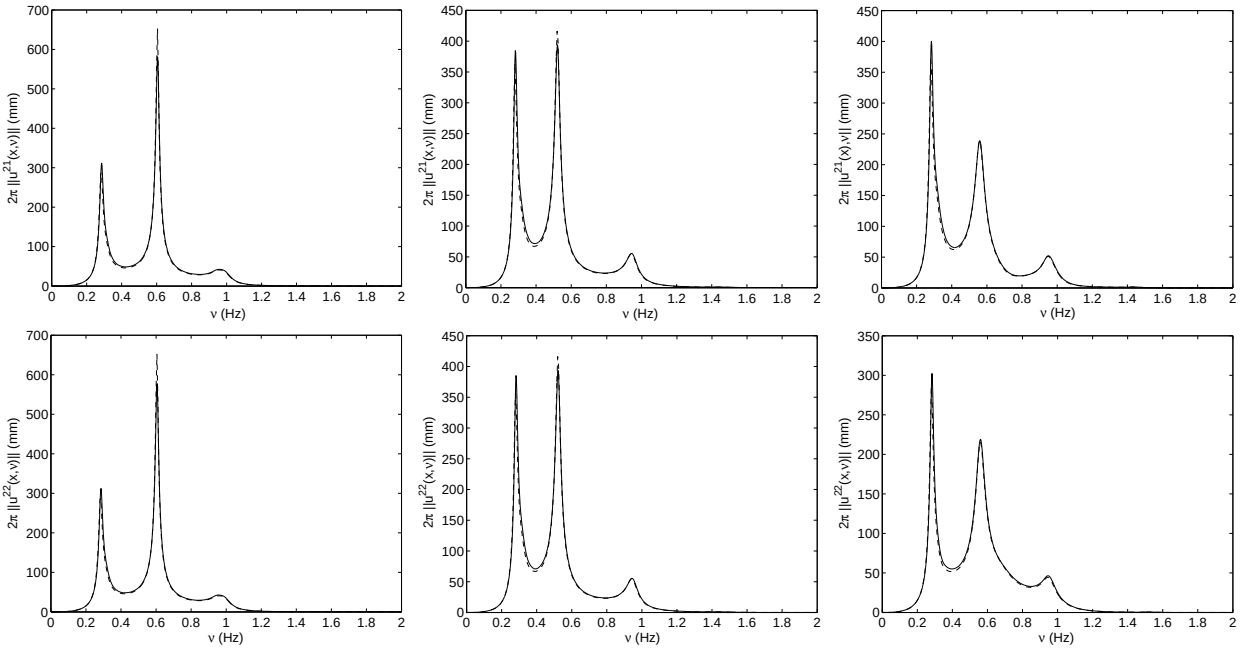


FIG. 2.33 – *Mexico - 2π le module des spectres des déplacements au sommet des blocs : première colonne, 2 blocs identiques $b\times w = 40m\times 40m$, seconde colonne, 2 blocs identiques $b\times w = 50m\times 30m$, et troisième colonne 2 blocs distincts $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$ et $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$. La première ligne correspond au bloc 1, la seconde au bloc 2. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats numériques, les courbes en pointillés aux résultats semi-analytiques calculés uniquement avec le pseudo-mode fondamental de chaque bloc.*

La comparaison de ces courbes avec celles obtenues pour un seul bloc, figure II.2.6, montre que l'amplitude du pic associé à ce que nous allons appeler pour le moment modes de bloc à quasi-base fixe est plus importante dans le cas de deux blocs. De même, le pic associé au mode fondamental quasi-Love semble avoir une finesse plus importante.

Les résultats, figure II.2.33 prouvent que **pour des blocs de largeur correcte, la réponse est dominée par la réponse des blocs sur leur pseudo-mode fondamental respectif**. Ce résultat s'appuie analytiquement sur les mêmes considérations que dans la section précédente en fonction des valeurs de la fonction sinc $\left(k_1 \frac{w_j}{2}\right)$, $j = 1, 2$.

Dans le domaine temporel, cela est confirmé, figure II.2.34. La comparaison de ces courbes avec celles obtenues pour un seul bloc, figure II.2.7, montre que l'amplitude de la réponse, ainsi que sa durée, sont plus importantes dans le cas de deux blocs et que, toujours dans ce cas, des battements semblent être perceptibles.

Ainsi, nous pouvons réduire les équations (II.2.92), (II.2.96) et (II.2.97) à leur expression pour $m = 0$.

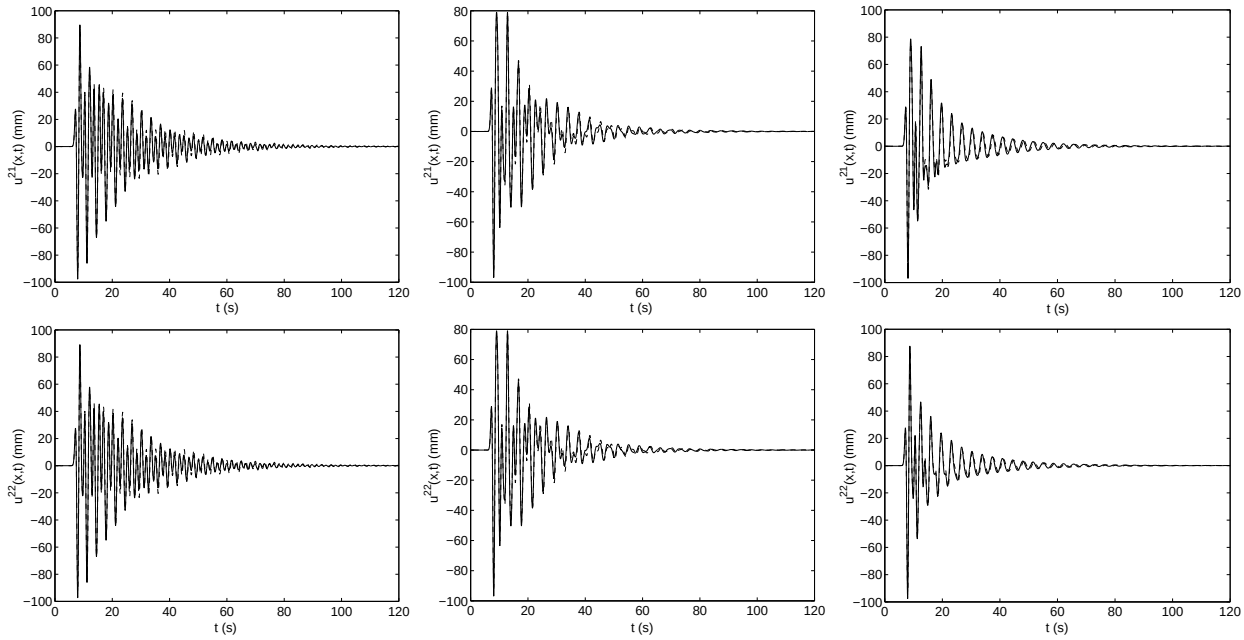


FIG. 2.34 – *Mexico - Sismogrammes (déplacements) au sommet des blocs : première colonne, 2 blocs identiques $b \times w = 40m \times 40m$; seconde colonne, 2 blocs identiques $b \times w = 50m \times 30m$; troisième colonne, deux blocs distincts $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$ et $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$. La première ligne correspond au bloc 1 et la seconde au bloc 2. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats numériques, les courbes en pointillés aux résultats semi-analytiques calculés uniquement avec le mode fondamental de chaque bloc.*

2.3.3 Analyse des matrices de couplage

La section précédente nous permet de ne considérer parmi les termes de couplage que les termes Q_{00}^{12} et Q_{00}^{21} :

$$\begin{aligned} Q_{00}^{12} &= \frac{\mathrm{i}w_2 k_{2m}^2 \mu^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_2\right)}{2\pi\mu^0 \cos\left(k_{2n}^{2j} b_1\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0} \sin\left(k_2^1 h\right)} \times \\ &\quad \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_1}{2}) \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_2}{2}) \exp\left(\mathrm{i}k_1 d\right) \frac{dk_1}{k_2^0} \\ Q_{00}^{21} &= \frac{\mathrm{i}w_1 k_{2m}^2 \mu^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_1\right)}{2\pi\mu^0 \cos\left(k_{2n}^{2j} b_2\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0} \sin\left(k_2^1 h\right)} \times \\ &\quad \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_1}{2}) \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_2}{2}) \exp\left(-\mathrm{i}k_1 d\right) \frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{2.98}$$

Il n'est pas aisé de déterminer l'influence de l'espacement entre les blocs, ce qui tendrait à prouver l'hypothèse selon laquelle il ne semble pas y avoir une influence déterminée de cette distance [90]. En particulier, il est difficile de montrer que lorsque la distance d est grande (par rapport à quelle variable, par exemple la longueur d'onde sur la largeur d'un bloc), les blocs vont agir de façon découplée. On peut émettre l'hypothèse que **ce couplage, s'opérant par l'intermédiaire de la couche, n'est pas directement lié aux paramètres des blocs** (par exemple, il y aurait découplage lorsque $d >> w_j$, $j = 1, 2$), **mais plutôt à la modification induite par la présence d'un, ou plusieurs blocs sur le type d'ondes se propageant dans la couche**. Celle-ci, comme nous

l'avons montré section II.2.1 et II.2.2, prend la forme d'une excitation (dans le cas où la source est profonde), ou une "surexcitation" (dans le cas où la source est peu profonde) des modes quasi-Love (dont, nous le rappelons, la structure est proche de celle des modes de Love). Or, nous avons montré, chapitre II.1, que les modes de Love, lorsqu'ils sont excités, peuvent se propager sur de grandes distances. Ainsi, la détermination de la condition de découplage entre deux ensembles ne semble pouvoir se réaliser que par une analyse dans le plan complexe, des termes Q_{00}^{ij}, $i \neq j$, $(i,j) \in [1,2]^2$, ou de l'équation (II.2.97). En particulier, le découplage serait lié à la décroissance exponentielle de l'amplitude des modes de Love (quasi-Love), elle-même liée à la partie imaginaire de ce mode. Si à partir d'une distance l, nous pouvons montrer que le terme $\exp(-k_1^{\star''} l)$ (où $k_1^\star = k_1^{\star'} + \mathbf{i} k_1^{\star''}$ est le premier mode de Love) rend l'amplitude de l'onde de Love (dans le cas d'une source profonde), où l'amplification de cette onde (dans le cas où la source est peu profonde) négligeable, alors pour $d > 2 \times l$, les blocs seront découplés. Cette distance, d'après II.1 sera grande, condition qui n'est jamais réalisée en pratique. Ainsi, il semble que les blocs, considérés dans leur environnement (c.à.d. entourés de montagnes, collines...) sont toujours couplés en pratique.

Numériquement, il est plus aisé d'intégrer sur l'intervalle $[0,\infty]$. L'expression des termes Q_{00}^{12} et Q_{00}^{21} est alors :

$$
\begin{aligned}
Q_{00}^{12} &= \frac{\mathrm{i} w_2 k_{2m}^2 \mu^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_2\right)}{\pi \mu^0 \cos\left(k_{2n}^{2j} b_1\right)} \int_0^\infty \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0} \sin\left(k_2^1 h\right)} \\
&\quad \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_1}{2}) \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_2}{2}) \cos\left(k_1 d\right) \frac{dk_1}{k_2^0} \\
Q_{00}^{21} &= \frac{\mathrm{i} w_1 k_{2m}^2 \mu^2 \sin\left(k_{2m}^2 b_1\right)}{\pi \mu^0 \cos\left(k_{2n}^{2j} b_2\right)} \int_0^\infty \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1} \sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0} \sin\left(k_2^1 h\right)} \\
&\quad \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_1}{2}) \mathrm{sinc}(k_1 \frac{w_2}{2}) \cos\left(k_1 d\right) \frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned}
\tag{2.99}
$$

Si les deux bâtiments sont identiques, les termes de couplage Q_{00}^{12} et Q_{00}^{21} sont identiques, $Q_{00}^{12} = Q_{00}^{21} = Q_{00}^{\mathrm{coupl}}$.

Une façon d'étudier les matrices de couplage est de séparer l'intervalle d'intégration sur les trois intervalles $\mathcal{I}_1 = [-k_0, k_0]$, $\mathcal{I}_2 = [-\Re(k_1), -k_0] \bigcup [k_0, \Re(k_1)]$, et $\mathcal{I}_3 = [-\infty, -\Re(k_1)] \bigcup [\Re(k_1), \infty]$, comme nous l'avons précédemment fait pour l'étude des modes de Love et l'étude de la réponse d'un seul bloc.

L'influence du terme $\cos(k_1 d)$ est peu marquée. Effectivement, si nous comparons ces figures avec les composantes relatives à $2\pi \left\| \cos(k^2 b) Q_{00} \right\|$ dans le cas d'un seul bloc qui correspondent ici à $2\pi \left\| \cos(k^2 b) Q_{00}^{11} \right\|$ et $2\pi \left\| \cos(k^2 b) Q_{00}^{22} \right\|$, figures II.2.13, et II.2.16 les amplitudes sont similaires et les pics semblent être situés aux mêmes fréquences. Ainsi, **les termes de couplage ne peuvent être négligés**, puisque leurs amplitudes sont similaires à celles des termes des matrices diagonales. Par contre, les composantes $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_3$ présentent des fréquences de coupure qui correspondent à des maxima de $\mathcal{I}_2$, en particulier aux alentours de $0.6Hz$. Ces fréquences sont indépendantes de la largeur et de la hauteur des blocs si bien qu'elles peuvent être attribuées au terme $\cos(k_1 d)$.

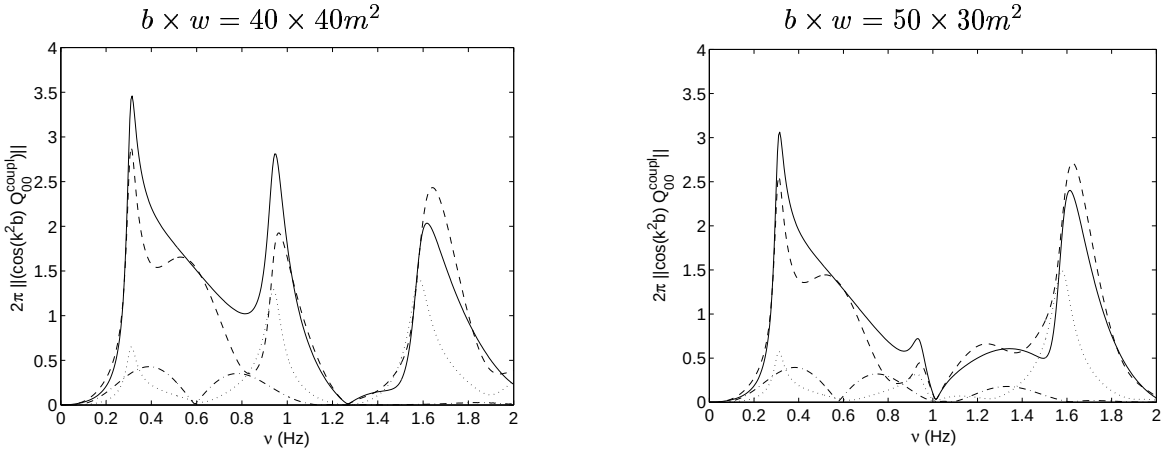


FIG. 2.35 – *Mexico - 2π fois la valeur absolue de $\cos(k^2 b) Q_{00}^{coupl}$ pour deux blocs identiques distants de $d = 65m$. À gauche, deux blocs de caractéristiques géométriques $b \times w = 40m \times 40m$, et à droite deux blocs de caractéristiques géométriques $b \times w = 50m \times 30m$. Les courbes en trait continu représentent $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b\right) Q_{00}^{coupl} \right\|$, les courbes en pointillés représentent la composante de $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b\right) Q_{00}^{coupl} \right\|$ relative à $\mathcal{I}_1$, les courbes en tirets représentent la composante de $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b\right) Q_{00}^{coupl} \right\|$ relative à $\mathcal{I}_2$ et les courbes en tirets et pointillés représentent la composante de $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b\right) Q_{00}^{coupl} \right\|$ relative à $\mathcal{I}_3$.*

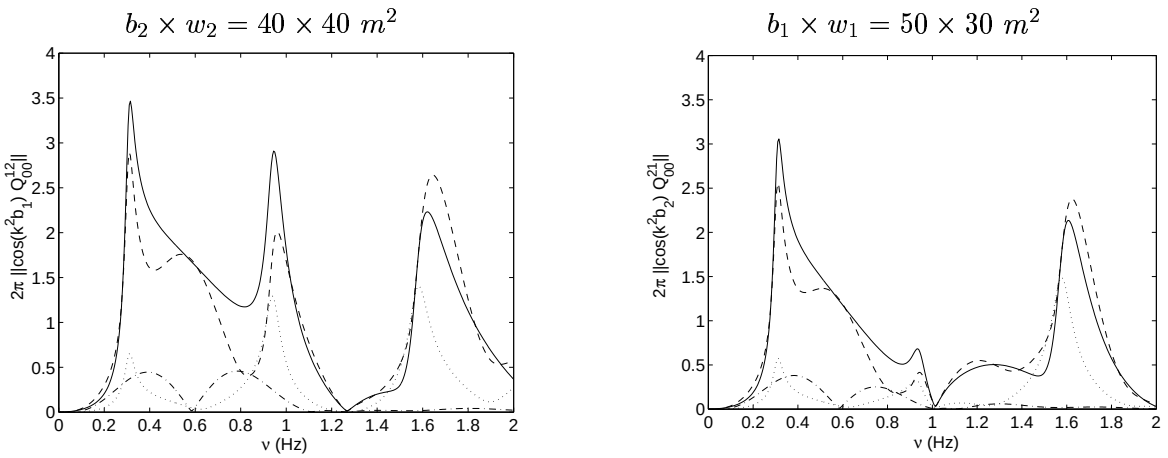


FIG. 2.36 – *Mexico - 2π fois la valeur absolue de $\cos(k^2 b_i) Q_{00}^{ij}$, $(i,j) \in [1,2]^2$, $i \neq j$, pour deux blocs de caractéristiques géométriques différentes séparés d'une distance $d = 65m$. À gauche, la matrice de couplage relative au bloc de caractéristique géométrique $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$, et à droite la matrice de couplage relative au bloc de caractéristique géométrique $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$. Les courbes en trait continu resprésentent $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b_i\right) Q_{00}^{ij} \right\|$, les courbes en pointillés représentent la composante de $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b_i\right) Q_{00}^{ij} \right\|$ relative à $\mathcal{I}_1$, les courbes en tirets représentent la composante de $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b_i\right) Q_{00}^{ij} \right\|$ relative à $\mathcal{I}_2$ et les courbes en tirets et pointillés représentent la composante de $2\pi \left\| \cos\left(k^2 b_i\right) Q_{00}^{ij} \right\|$ relative à $\mathcal{I}_3$.*

Des remarques identiques peuvent être formulées en ce qui concerne les matrices de couplage pour deux blocs de caractéristiques géométriques différentes. Pour autant, ces courbes sont très proches de celles présentées figure II.2.35. Ceci est dû au fait que pour les deux largeurs des blocs w_1 et w_2 sont très proches et sont toutes deux telles que $\text{sinc}\left(k_1^\star \frac{w_1}{2}\right) \approx \text{sinc}\left(k_1^\star \frac{w_2}{2}\right)$, où $k_1^\star$ est le mode fondamental de Love.

Dans tous les cas, les trois types d'ondes $SOP1$, $SOP2$, et $SOS3$ sont présentes dans ces matrices de couplage.

2.3.4 Analyse modale

Pour des largeurs de bloc correctes, comme nous l'avons vu à la section II.2.3.1, nous pouvons ne considérer que le terme relatif aux pseudo-modes fondamentaux de chaque bloc. Ainsi, les solutions non-triviales de la relation de dispersion sont solutions de

$$\det \begin{pmatrix} 1 - Q_{00}^{11} & -Q_{00}^{12} \\ -Q_{00}^{21} & 1 - Q_{00}^{22} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.100}$$

En d'autres termes la relation de dispersion prend la forme

$$\left(1 - Q_{00}^{11}\right)\left(1 - Q_{00}^{22}\right) - Q_{00}^{12} Q_{00}^{21} = 0 \tag{2.101}$$

En multipliant cette équation par $\cot\left(k^2 b_1\right)\cot\left(k^2 b_2\right)$, cette équation peut s'écrire

$$\mathcal{F}(\omega) = \left(\mathcal{F}_1^1 - \mathcal{F}_2^1\right)\left(\mathcal{F}_1^2 - \mathcal{F}_2^2\right) - \mathcal{F}_2^{12}\mathcal{F}_2^{21} = 0 \tag{2.102}$$

où $\mathcal{F}_1^j$, $j = 1, 2$ correspondent aux termes relatifs aux deux superstructures, $\mathcal{F}_2^j$ $j = 1, 2$ correspondent aux termes relatifs à la structure géophysique sous-jacente aux deux superstructures, définis dans les sections II.2.1 et II.2.2, et où $\mathcal{F}_1^{ij}$, $(i, j) \in [1, 2]^2$, $i \neq j$ correspondent aux termes relatifs au couplage entre les deux superstructures :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2^{12} &= \frac{\mathrm{i} w_2 k_{2m}^2 \mu^2}{\pi \mu^0} \int_0^\infty \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \text{sinc}(k_1 \frac{w_1}{2})\text{sinc}(k_1 \frac{w_2}{2}) \cos\left(\mathrm{i} k_1 d\right) \frac{dk_1}{k_2^0} \\
\mathcal{F}_2^{21} &= \frac{\mathrm{i} w_1 k_{2m}^2 \mu^2}{\pi \mu^0} \int_0^\infty \frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)} \text{sinc}(k_1 \frac{w_1}{2})\text{sinc}(k_1 \frac{w_2}{2}) \cos\left(\mathrm{i} k_1 d\right) \frac{dk_1}{k_2^0}
\end{aligned} \tag{2.103}$$

termes qui sont très proches des termes relatifs à la structure géophysique sous-jacente de chaque superstructure considérée indépendamment, ce qui prouve que le couplage entre les deux superstructures se réalise par l'intermédiare de la structure géophysique.

L'équation (II.2.102) n'est pas évidente à résoudre. Une façon graphique de le faire consiste à répérer les zéros des fonctions :

$$\mathcal{R}e(\omega) = \Re(\mathcal{F}(\omega)); \; \mathcal{I}m(\omega) = \Im(\mathcal{F}\omega)) \tag{2.104}$$

Alors, à la manière de [191], **un mode correspondra à un zéro de la fonction $\mathcal{R}e(\omega)$, associé à une valeur faible de $\mathcal{I}m(\omega)$**. Pour les trois configuations étudiées précédemment, ces courbes sont représentées figure II.2.37.

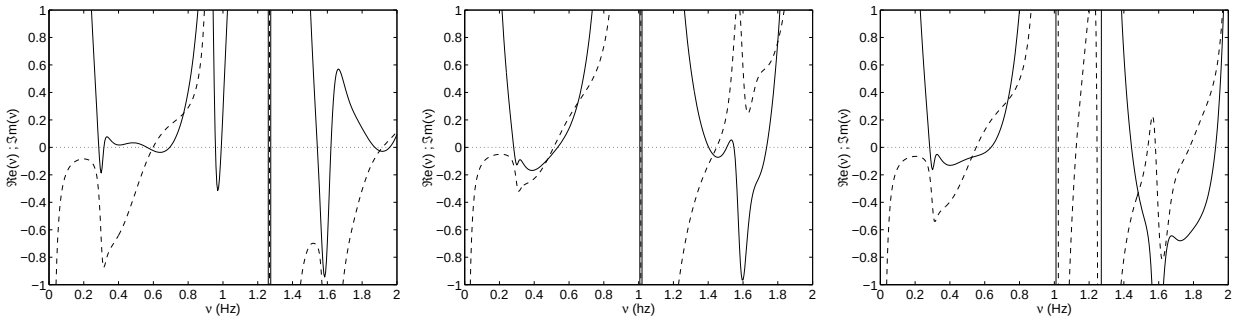


FIG. 2.37 – *Mexico - Les fonctions $\mathcal{R}e(\omega)$ (courbes en trait continu) et $\mathcal{I}m(\omega)$ (courbes en pointillés), à gauche pour deux blocs identiques $b \times w = 40m \times 40m$, au milieu pour deux blocs identiques $b \times w = 50m \times 30m$, et à droite pour deux blocs de caractéristiques géométriques différentes $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$ et $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$*

Nous retrouvons les caractéristiques des modes pour un bloc, en particulier les **modes quasi-Love** ainsi que les modes de bloc à quasi-base fixe, et quasi-base rigide. Dans le cas de **deux blocs de caractéristiques géométriques différentes**, les modes de bloc à base rigide des deux blocs considérés indépendamment sont relevés à $\nu^{\text{qbr}} \approx 1Hz$ et $\nu^{\text{qbr}} \approx 1,25Hz$. Par contre, **les modes de bloc à quasi-base fixe des deux blocs considérés indépendamment ne sont, eux, pas relevés** ni à $\nu^{\text{qbf}} \approx 0.5Hz$ ni à $\nu^{\text{qbf}} \approx 0.625Hz$. Effectivement, **la courbe $\mathcal{R}e$ ne s'annule qu'en un seul point aux alentours de ces fréquences**. Ainsi, le concept de bloc élancé semble plus aisé à étudier, puisque dans ce cas, seuls les modes de quasi-Love et de bloc à quasi-base-rigide interviennent, [53]. Cela est dû au fait que dans un cas, nous avons à faire à une limite divergente, et dans l'autre à un zéro. Pour autant, il semble que les modes quasi-Love soient ici plus excités que dans le cas d'un seul bloc (ces modes pouvant correspondre en fait à des minima). En particulier, pour deux blocs identiques $b \times w = 40m \times 40m$, il y a un "scindage" possible de ce mode. Le second mode, très proche, a une partie imaginaire beaucoup plus grande que le premier et est, par conséquent, plus amorti que celui-ci. Il y a donc fort à parier que ce "scindage" ne soit pas perceptible.

Il faut avouer que l'étude modale dans le cas d'un nombre de blocs supérieur à $N = 1$ est relativement compliquée, et qu'il est assez difficile d'analyser de façon systématique et de façon sûre les courbes de la figure II.2.37.

2.3.5 Résultats

Nous allons nous concentrer sur les résultats à l'intérieur des blocs. Nous introduisons les fonctions de transfert $TF^{2j}(\mathbf{x}, \omega)$ associées aux déplacements $u^{2j}(\mathbf{x}, \omega)$ dans le bloc j, $j = 1, 2$. Elles sont définies par $TF^{2j}(\mathbf{x}, \omega) = \dfrac{u^{2j}(\mathbf{x}, \omega)}{A^i(\omega)}$, $j = 1, 2$.

2.3.5.1 Deux blocs identiques $b \times w = 40\ m\ \times 40\ m$

Les termes d'excitation sont identiques à ceux d'un seul bloc. La source est localisée au point $\mathbf{x}^s$=(0,3000m), directement en dessous du bâtiment repéré 1. La configuration n'est donc pas symétrique.

Commençons par nous intéresser aux fonctions de transfert. Les deux blocs sont centrés aux abscisses $\mathbf{x}_b^1 = (0, 0)$ et $\mathbf{x}_b^2 = (-65m, 0)$.

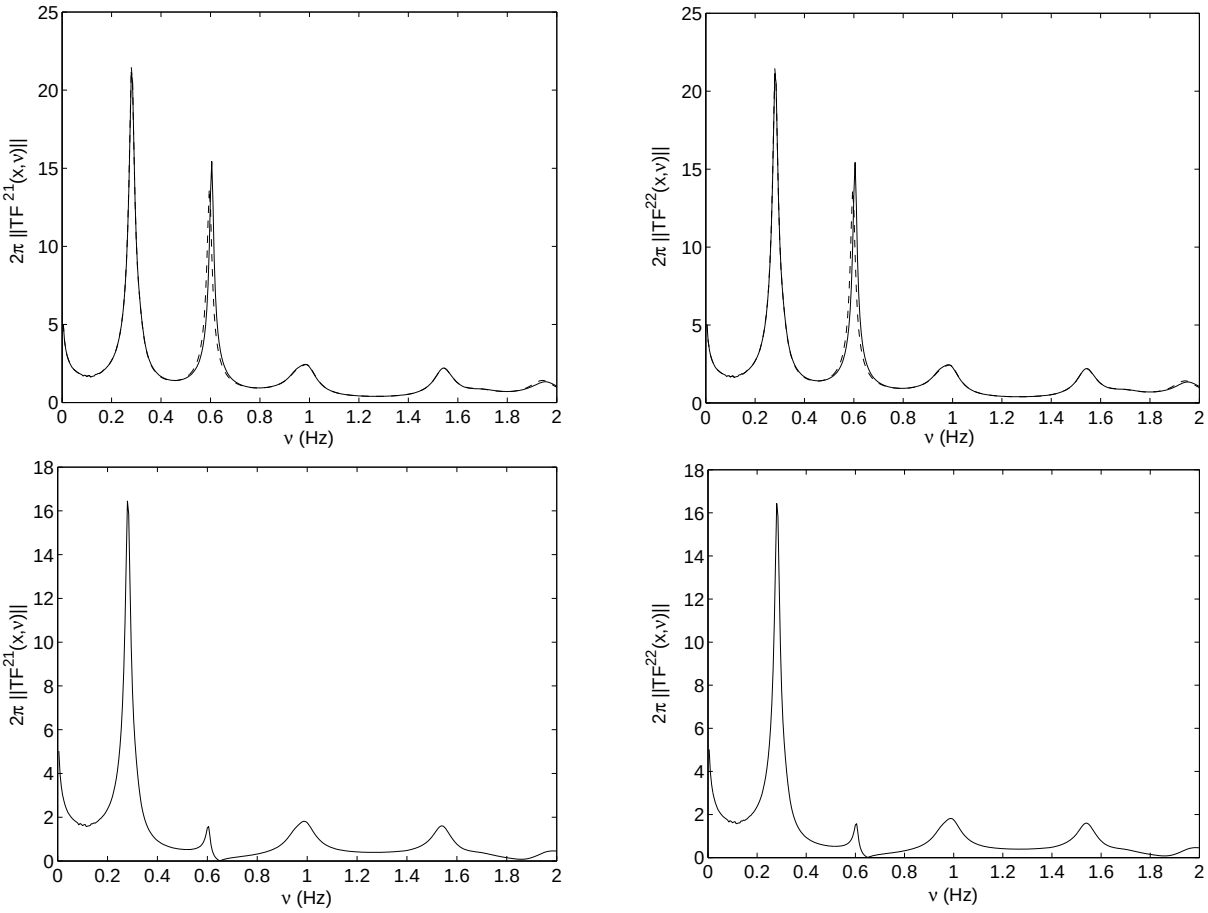


FIG. 2.38 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 40m \times 40m$ - 2π *fois le module des fonctions de transfert, à gauche pour le bloc* 1 *et à droite pour le bloc* 2. *En haut, au sommet du bloc et en bas à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la prise en compte de 5 pseudo-modes, et les courbes en tirets correspondent à la prise en compte du seul pseudo-mode fondamental. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Le premier pic de chaque fonction de transfert correspond au premier mode quasi-Love. Le second, identique pour les deux blocs, correspond aux modes de bloc à quasi-base fixe, rencontré aux alentours de $0.6Hz$, fréquence qui est coupée à la base des blocs. Cette fréquence est légèrement décalée vers les basses fréquences, par rapport aux résultats pour un seul bloc, figure II.2.13 ($\nu^{\text{qbr}} \approx 0.625Hz$). Cela explique pourquoi, les fonctions de transfert à la base des blocs, présentent un pic avant les fréquences de coupure. Le **mode** total dans ce cas, **n'est pas concomitant avec le mode d'un bloc à base-fixe**, mais est légèrement décalé vers les basses fréquences. Cela prouve encore une fois que les modes du système total ne sont pas l'union des modes des sous-systèmes qui le composent. Ces modes sont dus à l'**interaction entre les modes à quasi-base fixe des blocs considérés indépendamment**. Une appellation correcte serait donc **modes de blocs à multi-base fixe**. Le pic correspondant à ce mode a une **finesse beaucoup plus importante** que dans le cas des modes de bloc à quasi-base fixe.

Le "scindage" du premier pic que nous pouvions attendre compte tenu de l'analyse modale, n'est pas visible, car l'atténuation du second mode est trop importante.

Le pic correspondant au mode fondamental de blocs à multi-base fixe est légèrement décalé vers les basses fréquences lorsque le nombre de pseudo-modes considéré dans le calcul augmente. Cela signifie que ce mode est non seulement le résultat d'une interaction entre les modes fondamentaux à quasi-base fixe, mais aussi de ceux correspondant aux pseudo-modes d'ordre supérieur. Ce résultat limiterait donc la validité des modèles de bâtiments à l'aide du système masse-ressort, [90, 37, 117].

Considérons maintenant les réponses, dans les blocs, figure II.2.39 et II.2.40.

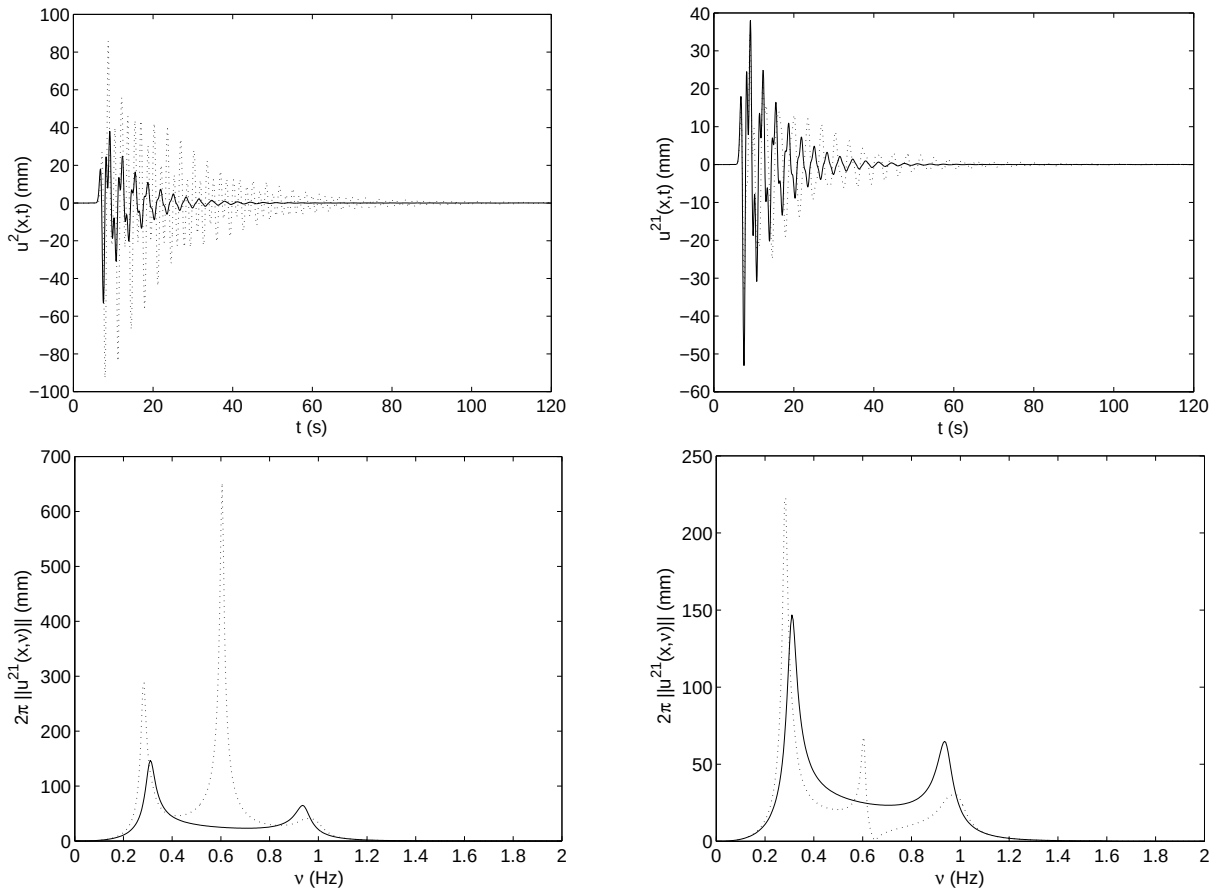


FIG. 2.39 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 40m \times 40m$ *- En haut, les déplacements dans le bloc* 1 *et en bas,* 2π *fois le module des spectres correspondants, à gauche au sommet du bloc et à droite à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en pointillés à la configuration avec 2 blocs. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Les **déplacements** sont quasiment identiques d'un bloc à l'autre. En ce qui concerne les déplacements au sommet des blocs, ils présentent **une amplification et un allongement de la durée par rapport au cas sans bloc**. Il est possible de distinguer des phénomènes de battements. En ce qui concerne les déplacements à la base des blocs, seul un allongement de la durée est constaté. Toujours est-il que **les déplacements sont d'amplitude et de durée légèrement plus grandes dans le cas de deux blocs, comparativement au cas d'un seul bloc**. Le premier pic est décalé vers les basses fréquences par rapport au cas sans bloc ; c'est donc bien un mode quasi-Love

qui est très proche d'un mode de Love pur, alors que le second pic quasi-Love, aux alentours de $0.9Hz$, apparaît à une fréquence plus élevée que dans le cas sans bloc. Ce pic est en fait le résultat d'une interaction entre le second mode quasi-Love et les modes fondamentaux à quasi-base rigide de chacun des blocs.

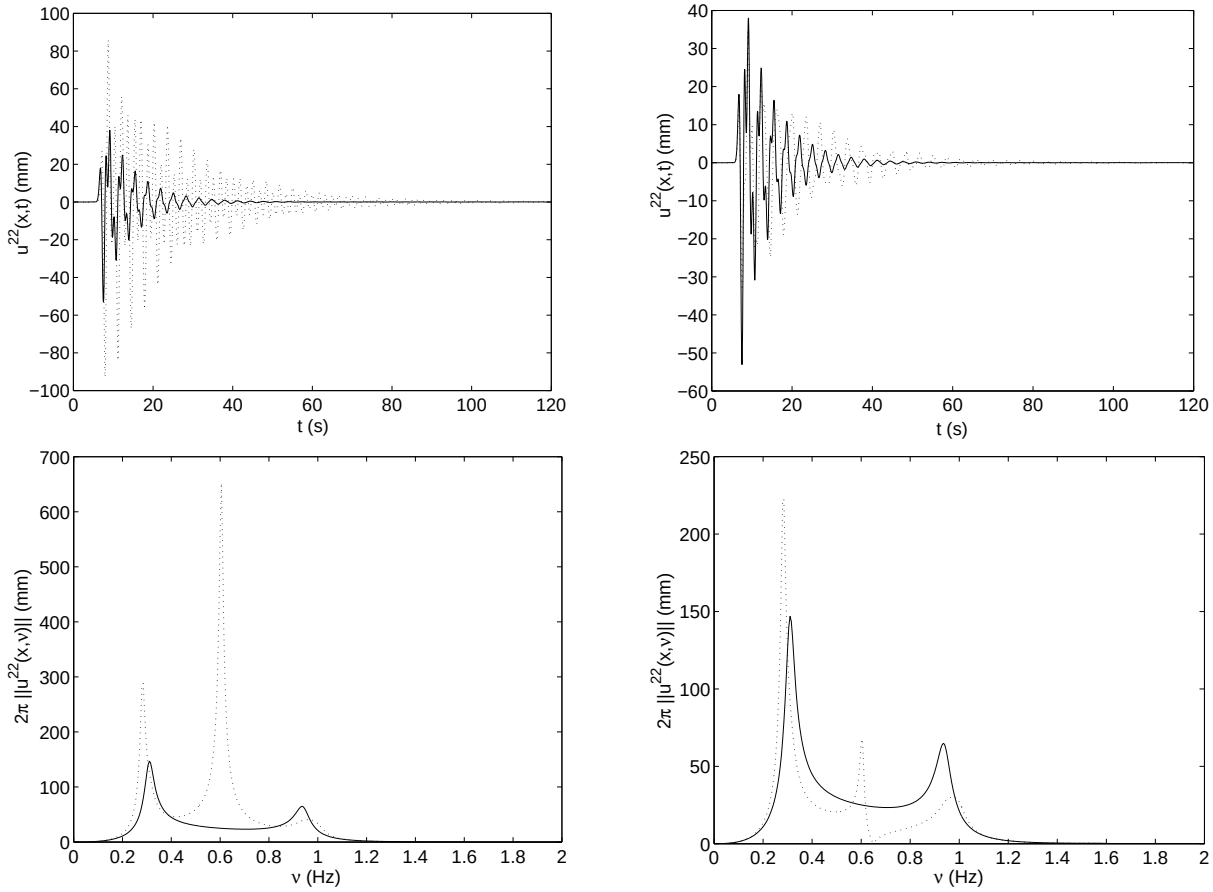


FIG. 2.40 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 40m \times 40m$ *- En haut, les déplacements dans le bloc 2 et en bas* 2π *fois les spectres correspondants, à gauche au sommet du bloc et à droite à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en pointillés à la configuration avec blocs. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

2.3.5.2 Deux blocs identiques $b \times w = 50\ m\ \times 30\ m$

De même considérons dans un premier temps les fonctions de transfert, figure II.2.41. Les remarques concernant l'**excitation des modes quasi-Love** sont identiques à celles du cas précédent. Concernant l'excitation des **modes de blocs à multi-base fixe**, il apparaît que le premier de ces modes semble être légèrement décalé vers les hautes fréquences par rapport aux modes quasi-base fixe de chaque bloc considéré indépendamment, mais qu'il est très près de ces derniers. Effectivement, les fonctions de transfert à la base des blocs laissent apparaître un léger pic pour une fréquence juste supérieure à la fréquence coupée du mode quasi-base fixe d'un bloc. Ce pic est d'amplitude très petite car il intervient à une fréquence très proche de celle qui est coupée. Le pic correspondant au mode de blocs à multi-base fixe ne semble pas décalé lorsque le nombre de modes considéré pour le calcul du champ augmente. Nous avons donc un résultat qui dépend de la caractéristique

géométrique des blocs. Il est par conséquent très difficile à interpréter. Nous nous trouvons dépassé par la **complexité et la variété des phénomènes** que nous rencontrons.

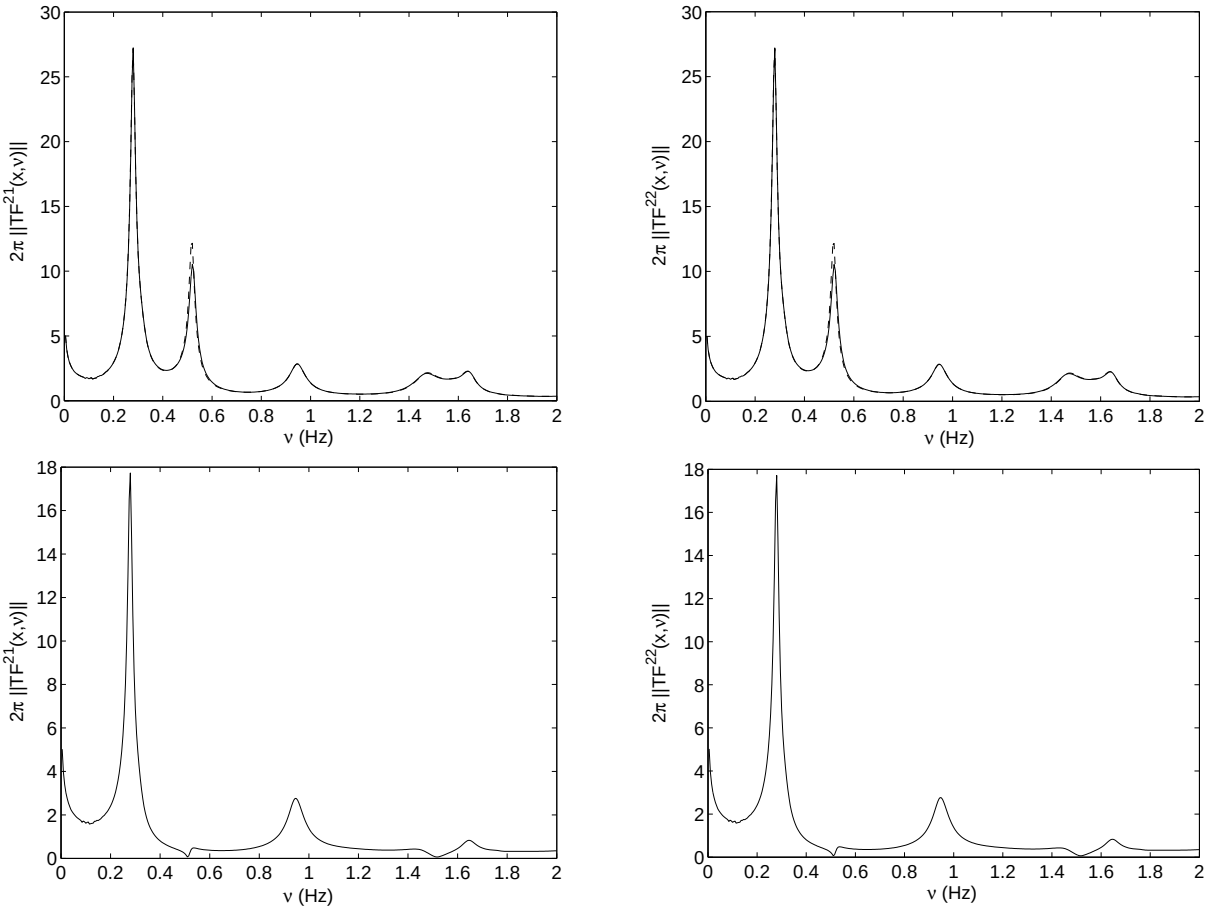


FIG. 2.41 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 50m \times 30m$ - 2π *fois le module des fonctions de transfert, à gauche pour le bloc* 1 *et à droite pour le bloc* 2. *En haut, au sommet du bloc et en bas à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la prise en compte de 5 modes, et les courbes en tirets à la prise en compte d'un seul mode. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Intéressons-nous maintenant aux déplacements au sommet et à la base de chaque bloc, figure II.2.42 et II.2.43. En ce qui concerne les déplacements au sommet des blocs, l'amplitude maximale du déplacement et la durée sont plus importantes que dans le cas sans bloc. Des battements semblent se dessiner, mais sans être réellement prononcés. Les déplacements à la base des pics sont de durée plus importante, mais l'amplitude maximale du déplacement est moindre lorsqu'il y des blocs.

.

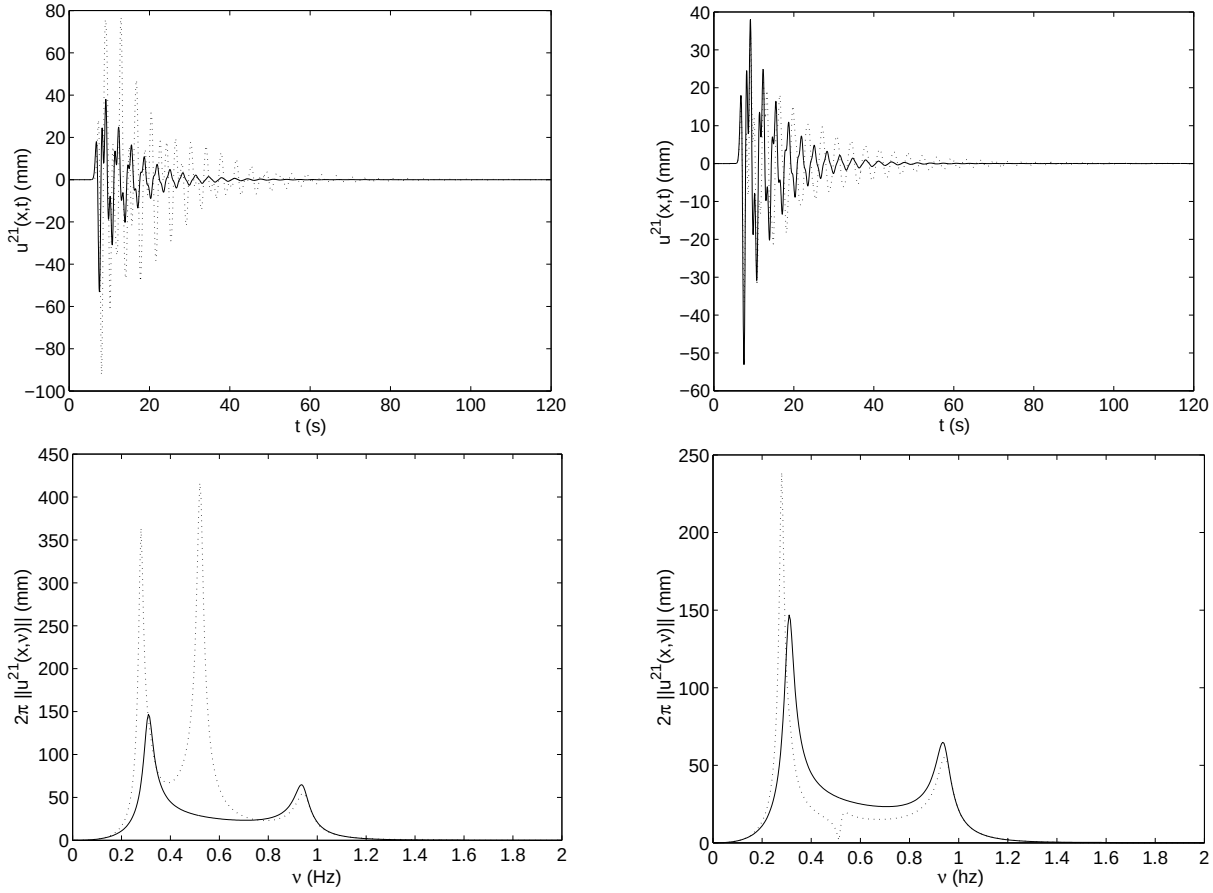


FIG. 2.42 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 50m \times 30m$ *- En haut, les déplacements dans le bloc* 1 *et en bas* 2π *fois le module des spectres correspondants, à gauche au sommet du bloc et à droite à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en pointillés à la configuration avec 2 blocs. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

.

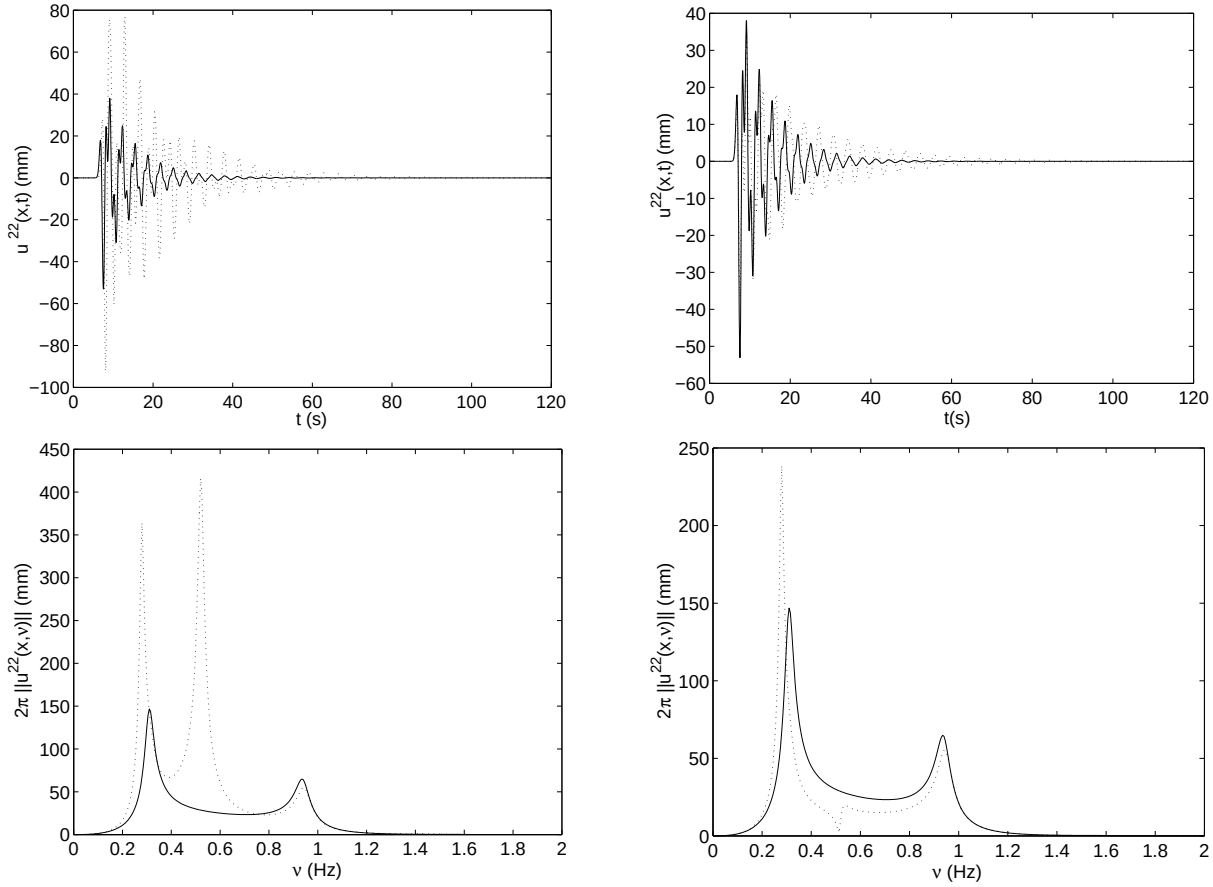


FIG. 2.43 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 50m \times 30m$ *- En haut, les déplacements dans le bloc 2 et en bas* 2π *fois les spectres correspondants, à gauche au sommet du bloc et à droite à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en pointillés à la configuration avec 2 blocs. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Intéressons-nous maintenant aux déplacements sur le sol. De manière identique à ce que nous avons réalisé dans le cas d'un seul bloc, nous considérons, pour l'étude des fonctions de transfert, une décomposition en trois fonctions différentes : la fonction de transfert associée à la couche sans bloc $TF^1_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega) = \dfrac{u^1_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$; une fonction de transfert associée à chaque source induite correspondant à la présence des blocs 1 et 2, $TF^{11}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) = \displaystyle\sum_{m=0}^{M} \frac{A^i(\omega) u^{11}_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega)}{B^{21}_m(\omega)}$, et $TF^{12}_{\text{bat}}(\mathbf{x},\omega) = \displaystyle\sum_{m=0}^{M} \frac{A^i(\omega) u^{12}_{\text{bat}m}(\mathbf{x},\omega)}{B^{22}_m(\omega)}$. Pour finir nous nommons fonction de transfert "totale" la quantité $TF^1(\mathbf{x},\omega) = \dfrac{u^1(\mathbf{x},\omega)}{A^i(\omega)}$.

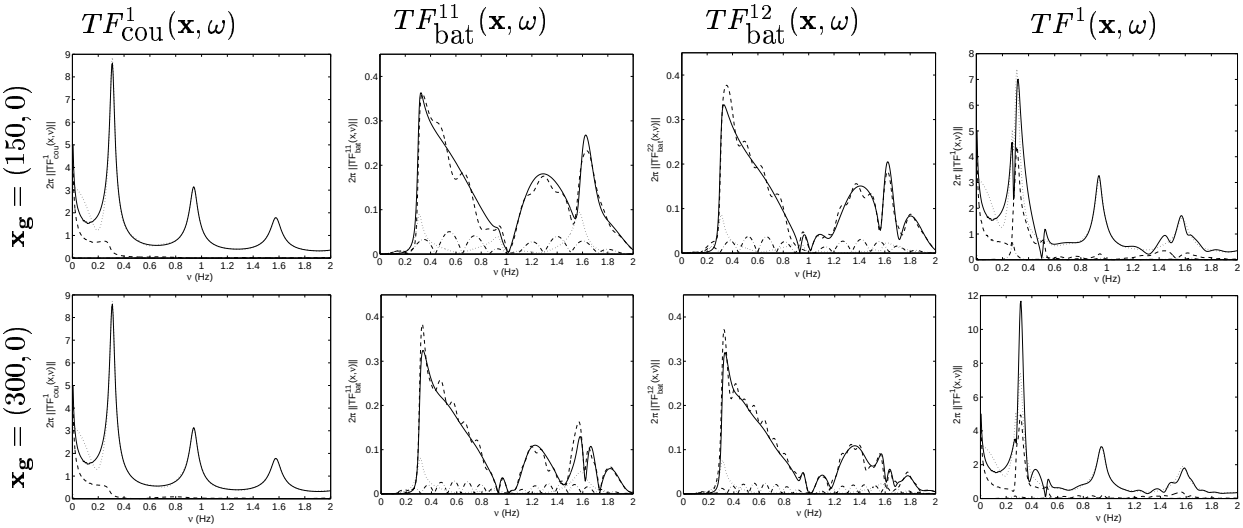


FIG. 2.44 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 50m \times 30m$ - 2π *fois le module des fonctions de transfert, de gauche à droite, associées à la réponse de la couche sans les blocs, de la source induite par le bloc* 1*, de la source induite par le bloc* 2*, et enfin la fonction de transfert totale. En haut, au point* $\mathbf{x_g} = (150m, 0)$ *et en bas au point* $\mathbf{x_g} = (300m, 0)$*. Les courbes en trait continu représentent l'intégrale totale, les courbes en pointillés la composante sur l'intervalle* I_1*, les courbes en tirets la composante sur l'intervalle* I_2 *et les courbes en tirets et pointillés, la composante sur l'intervalle* I_3*. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$*.*

La figure II.2.44 représente les différentes fonctions de transfert donnant lieu à la réponse sur le sol en deux points $\mathbf{x_g} = (150m, 0)$ et $\mathbf{x_g} = (300m, 0)$, la source étant localisée au point $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$. Les fonctions de transfert de la couche, $TF_{\text{cou}}(\mathbf{x},\omega)$, sont inchangées par rapport au cas avec un bloc, puisque leur présence n'intervient pas dans celles-ci. De même, les fonctions de transfert associées à la source induite par le bloc 1 sont identiques au cas avec un seul et unique bloc, puisque seule la quantité relative au spectre B^{22}_m est modifiée dans le cas d'un nombre de blocs supérieur à $N = 1$. Ainsi les fonctions de transfert associées à la source induite par la présence du bloc 2 constituent le résultat nouveau. D'un bloc à l'autre, ces fonctions de transfert sont d'amplitudes comparables. Les ondes dominantes sont également, dans le cas du bloc 2, les ondes $SOP2$ et les ondes de surface ne sont encore une fois pas négligeables. Cela implique que la fonction de transfert totale présente les trois types d'ondes SOP1, SOP2 et SOS3. De façon similaire au cas avec un

seul bloc, les ondes SOP1 sont présentes du fait de la position de la source et de la présence de la couche, les ondes SOP2 et SOS3 sont excitées localement, à cause de la présence des blocs. Cela conduit, en particulier pour le résultat au point $\mathbf{x_g} = (150m, 0)$, à un **"scindage" du premier pic, constitué d'un pic correspondant aux ondes SOP1 et d'un pic correspondant aux ondes SOP2**. L'amplitude du pic correspondant aux ondes SOP2 décroît lorsque la distance séparant le point d'observation des blocs augmente, alors que l'amplitude du pic relatif aux ondes SOP1 reste relativement constante (sur une faible distance), si bien qu'au point $\mathbf{x_g} = (300m, 0)$, nous ne rencontrons plus qu'un "scindage" léger du premier pic. La fréquence $\nu = 0.5Hz$, correspondant aux modes quasi-base fixe des blocs est cette fois coupée pour les deux points d'observation. Les réponses correspondantes sont présentées figure II.2.45, la fonction source étant un Pseudo-Ricker centré à $\nu_0 = 0.5Hz$.

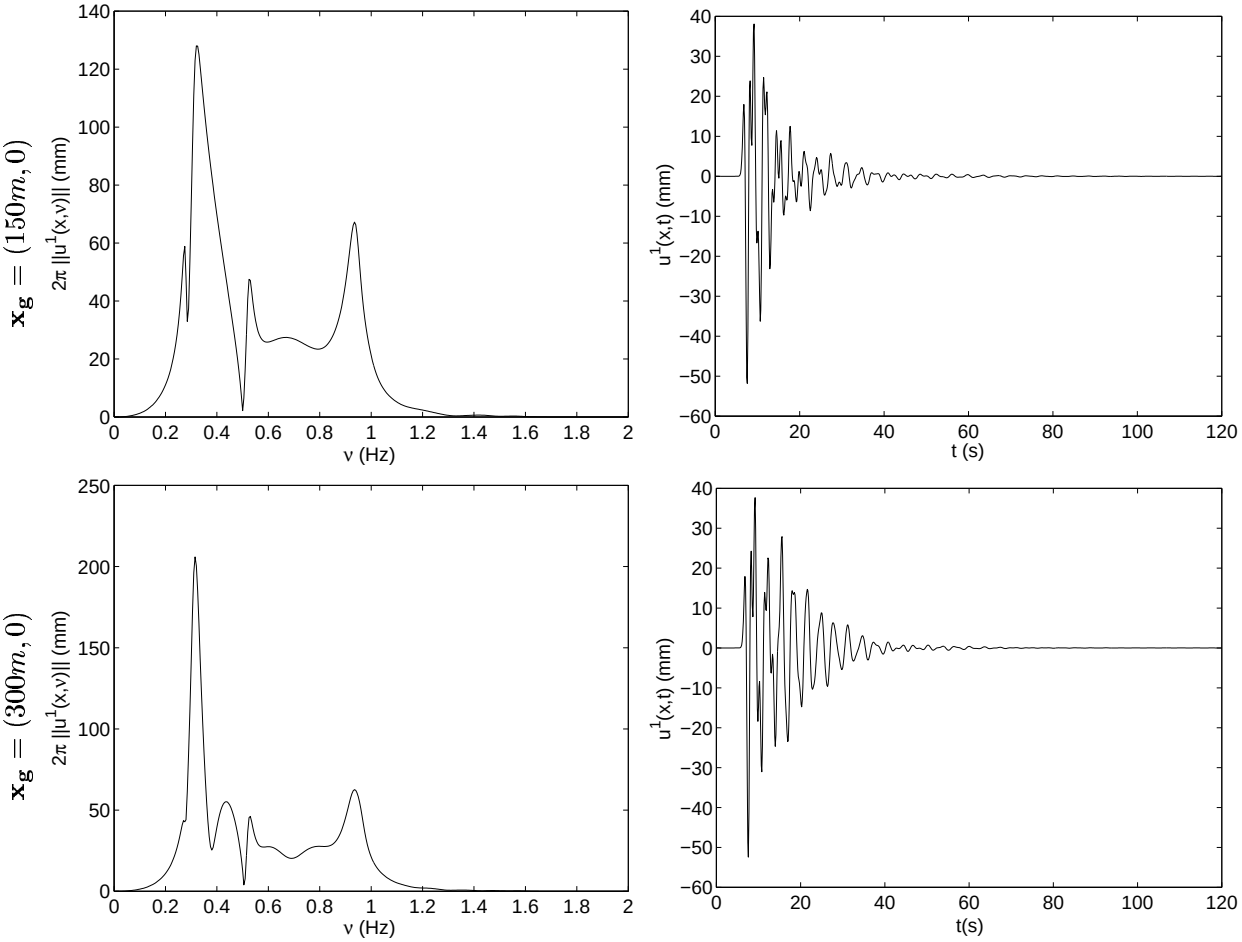


FIG. 2.45 – *Mexico : deux blocs identiques* $b \times w = 50m \times 30m$ *- À gauche,* 2π *fois le module du spectre, et à droite le sismogramme (déplacement) correspondant. En haut, au point* $\mathbf{x_g} = (150m, 0)$ *et en bas au point* $\mathbf{x_g} = (300m, 0)$*. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Les durées et les amplitudes sont plus importantes qu'en l'absence des blocs. Nous pouvons noter des prémices de battements. Par contre, une comparaison rapide des résultats avec et sans blocs, montre que sur l'ensemble du signal, nous avons désamplification, en particulier, pour $\mathbf{x_g} = (150m, 0)$.

Nous représentons figure II.2.46, les instantanés des champs de déplacement pour $t = 21s$, $t = 42s$ et $t = 56s$. Les **modes quasi-Love** qui correspondent aux **"boules"** dans la couche, sont excités. **Les blocs ont un rayonnement de type piston**. Il semble que pour certaines composantes, ces blocs induisent un déplacement dans la couche, comme si un seul bloc était présent.

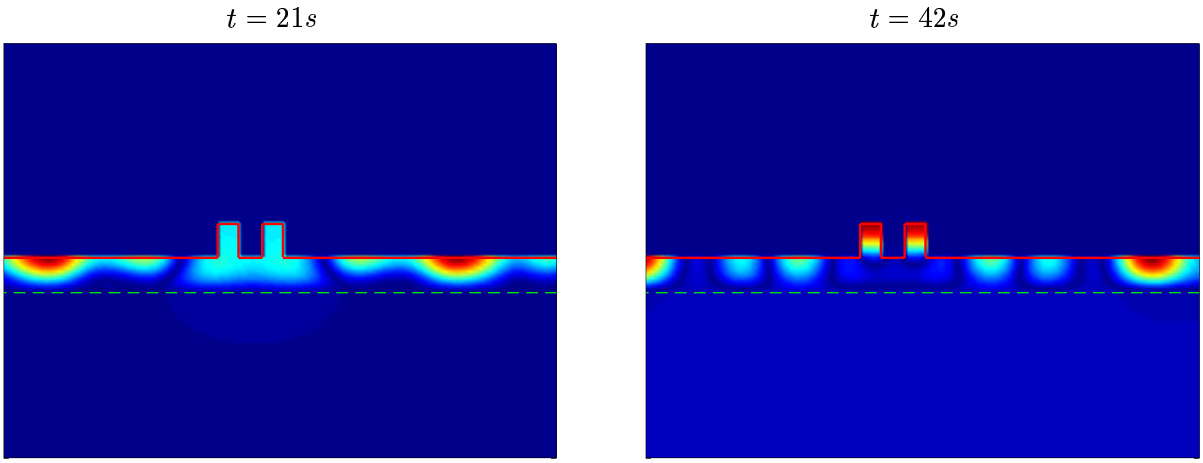


FIG. 2.46 – *Instantanés du champ de déplacement solution du problème. À gauche à* $t = 21s$*, et à droite à* $t = 42s$*. L'échelle des couleurs varie d'une figure à l'autre. La source est localisée à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

2.3.5.3 Deux blocs de caractéristiques géométriques différentes $b_1 \times w_1 = 50\ m\ \times 30\ m$ et $b_2 \times w_2 = 40\ m\ \times 40\ m$

De même considérons, dans un premier temps, les fonctions de transfert, figure II.2.47.

Le premier pic correspond au mode quasi-Love. Le second pic correspond au mode multi-base fixe de la configuration, et le troisième pic correspond à l'interaction entre le second mode quasi-Love et le mode quasi-base rigide du bloc 1. De la même manière que précédemment (fréquence plus haute pour le bloc 1 et plus basse pour le bloc 2), le mode de blocs à multi-base fixe est situé entre les deux modes de bloc à quasi-base fixe de chaque bloc considéré indépendamment.

.

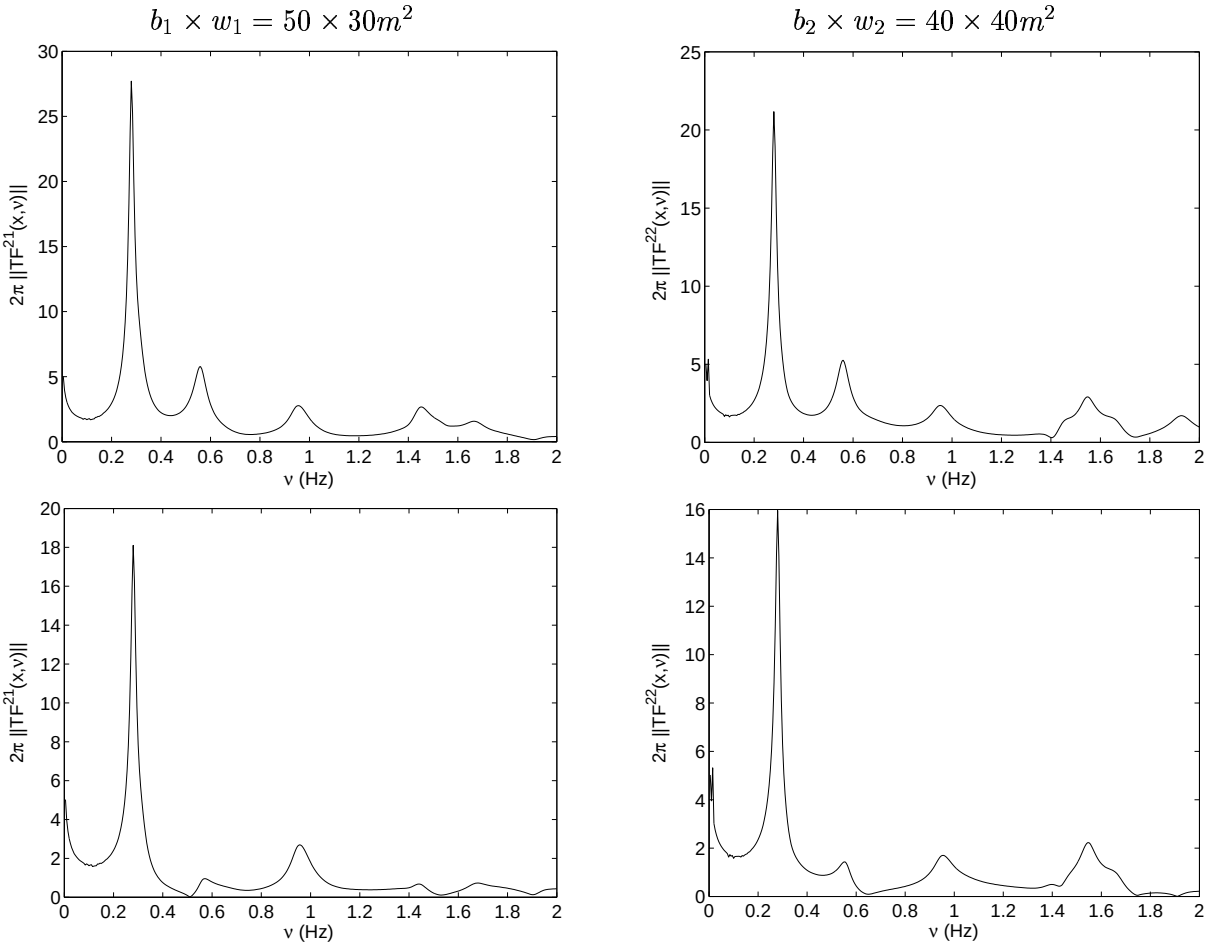


FIG. 2.47 – *Mexico : deux blocs de caractéristiques géométriques différentes* $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$ *et* $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$ *- 2π fois le module des fonctions de transfert, à gauche pour le bloc 1 et à droite pour le bloc 2. En haut, au sommet du bloc et en bas à la base du bloc. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Intéressons-nous maintenant aux déplacements au sommet et à la base de chaque bloc, figure II.2.42 et II.2.43.

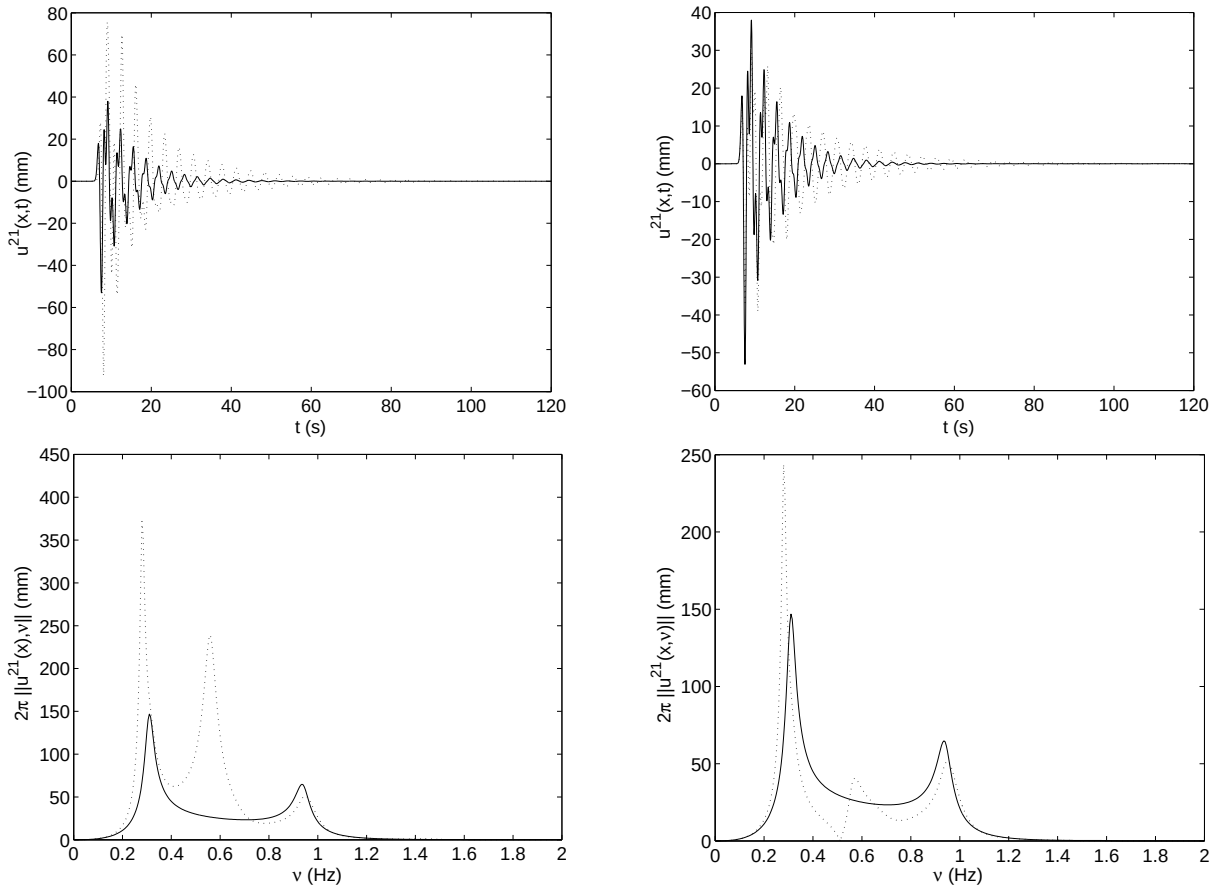


FIG. 2.48 – *Mexico : deux blocs de caractéristiques géométriques différentes* $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$ *et* $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$ *- En haut, les déplacements dans le bloc* 1 *et en bas* 2π *fois le module des spectres correspondants, à gauche au sommet du bloc et à droite à la base du bloc. Les courbes en traits continus correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en pointillés à la configuration avec 2 blocs. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Les réponses sont, et cela n'est pas étonnant puisque nous considérons deux blocs non-identiques, différentes d'un bloc à l'autre. En particulier, les effets (amplification et augmentation de la durée) du bloc 2 sont plus prononcés que pour le bloc 1. Cela est déjà le cas si l'on compare les résultats pour un seul ou deux blocs identiques ayant les caractéristiques des blocs 1 ou 2. Cela signifie que la proximité de la fréquence fondamentale du bloc à base-fixe et de la fréquence fondamentale de Love n'induit pas obligatoirement une augmentation de l'amplitude [37]. Effectivement, les effets sont plus importants dans le bloc 2 dont la fréquence du mode fondamental de bloc à base fixe est $\nu_{00}^{\mathrm{bf}} = 0.625Hz$, que dans le bloc 1 dont la fréquence du mode fondamental de bloc à base fixe est $\nu_{00}^{\mathrm{bf}} = 0.5Hz$. La fréquence du mode quasi-Love étant $\nu_0^{\mathrm{Lo}} \approx 0.29Hz$, ceci constitue un contre-exemple à [37]. Nous obtenons un résultat similaire dans le cas de deux blocs identiques. Par contre, ces effets sont moindres lorsque les blocs sont différents comparativement aux cas où ils sont identiques (cas évoqués dans les deux précédentes sections). Ainsi, il semble possible d'amoindrir les effets d'un séisme en modifiant l'organisation des immeubles d'une ville, en tout cas de les rendre

moins dévastateurs qu'ils ne le sont. Nous pouvons penser, par exemple, à ne pas construire des bâtiments identiques l'un à coté de l'autre.

Il semble que ces effets soient d'autant plus importants que la configuration est répétée à l'identique. Ce dernier point semble malheureusement être prégnant dans l'urbanisation moderne depuis ces 30 dernières années.

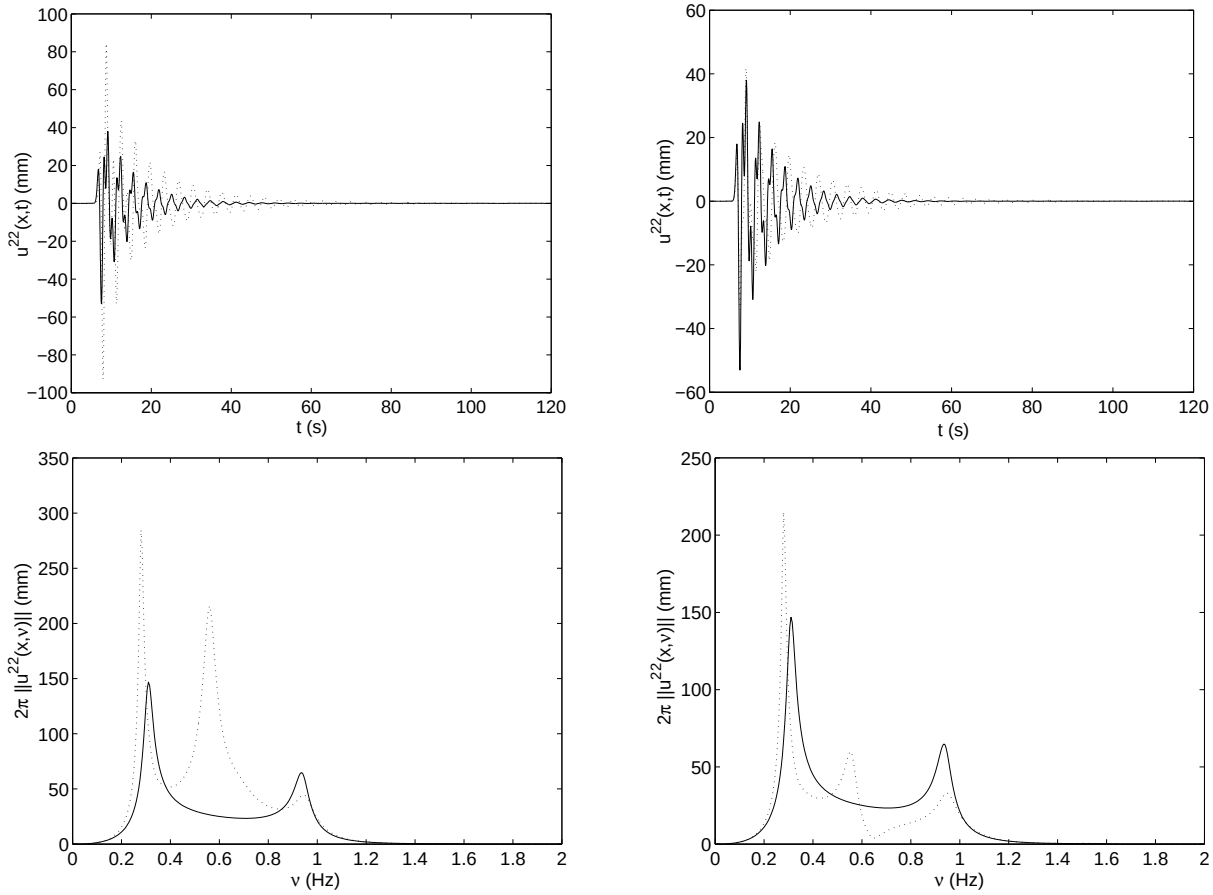


FIG. 2.49 – *Mexico : deux blocs de caractéristiques géométriques différentes* $b_1 \times w_1 = 50m \times 30m$ *et* $b_2 \times w_2 = 40m \times 40m$ *- En haut, les déplacements dans le bloc 2 et en bas* 2π *fois le module des spectres correspondants, à gauche au sommet du bloc et à droite à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en tirets à la configuration avec 2 blocs. La source est localisée en profondeur à la verticale du bloc 1 à* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$.

Ainsi, il apparaît qu'il devient très difficile de réaliser une étude exhaustive du cas avec un bâtiment, étude qui devient uniquement graphique, dans le cas de deux blocs et plus. La périodicité semble jouer un grand rôle dans l'effet site-ville. Une façon de s'affranchir des intégrales qui rendent compliquée l'accession à l'essence même de l'effet, est de considérer un réseau de blocs identiques.

2.4 Nombre infini ou fini de bâtiments identiques, espacés par une distance d constante sur sous-sol avec couche

Les **villes actuelles**, en plus d'un aspect organisationnel global en fonction de la hauteur des bâtiments (bâtiments élevés au centre et de hauteur plus raisonnable en périphérie (sauf à la Défense) avec une gradation entre ces deux sous-ensembles), semblent, à l'échelle d'un **quartier** avoir une **organisation relativement périodique**. Nous allons ici **comparer les résultats** de deux analyses distinctes : une **analyse théorique d'une configuration infinie (réseau)**, et une **analyse numérique** de la même configuration mais avec **un nombre fini de bâtiments**.

FIG. 2.50 – *Vue de San-Francisco, à gauche aux environs de 1906 et à droite en 2004*

L'étude semi-analytique se simplifie lorsque l'onde incidente est une onde plane. Nous traiterons donc dans ce chapitre le cas de **séismes proches**, tels qu'il soit valide d'exciter la configuration avec une **onde plane** ayant un angle d'incidence θ^i. Cette étude a pour but d'analyser la validité de l'hypothèse d'une ville infinie pour l'étude d'une ville, finie par définition, et d'analyser les modes excités dans le cas d'un réseau fini et infini. Dans le cas du réseau fini comportant N blocs, les blocs sont numérotés de 1 à N de gauche à droite comme représenté figure II.2.51.

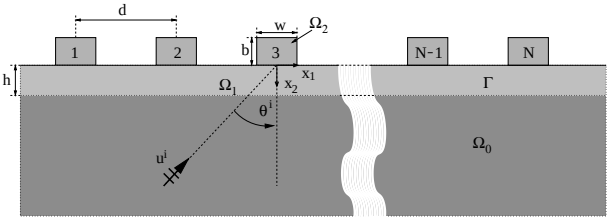


FIG. 2.51 – *Coupe de la configuration finie dans le plan sagittal*

2.4.1 La formulation analytique pour le cas d'un nombre infini de blocs

2.4.1.1 Formulation du problème

Nous recherchons la composante champ de déplacement total $u(\mathbf{x}, t)$ (incident + diffracté) suivant l'axe x_3, où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine du repère 0 et pointant un point générique (x_1, x_2) solution du problème dont une représentation est fournie figure II.2.52.

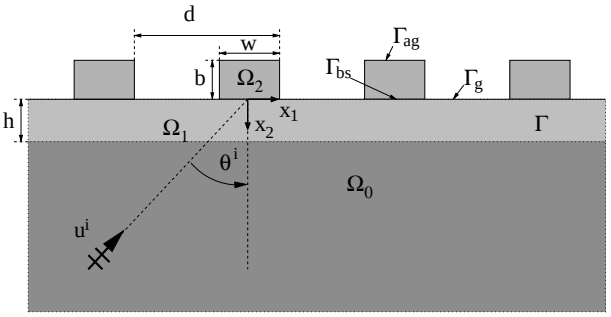


FIG. 2.52 – *Coupe de la configuration dans le plan sagittal*

Plutôt que de rechercher directement $u(\mathbf{x},t)$, nous lui préférons sa transformée de Fourier $u(\mathbf{x},\omega)$, vérifiant

$$\begin{cases} \left(\nabla\cdot\nabla+\left(k^j(\omega)\right)^2\right)u^j(\mathbf{x},\omega)=0 \quad \forall \mathbf{x}\in\Omega_j,\ j=0,1,2 \\ \text{avec} \\ k^0(\omega)=\dfrac{\omega}{c_S^0};\ k^{ji}(\omega)=\dfrac{\omega}{\left(c_S^{ji}\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S^{ji}}\right)},\ j=1,2,\ i\in\mathbb{B},\ w_{ref}=0.09rad.s^1 \end{cases} \tag{2.105}$$

Les champs de déplacement $u^j(\mathbf{x},\omega)$, $j=0,1,2$, doivent vérifier les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
&\forall \mathbf{x}\in\Gamma_g \begin{cases} \mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}=0 & (i) \end{cases} \\
&\forall \mathbf{x}\in\Gamma_{ag}^j \begin{cases} \mu^{2j}(\omega)\dfrac{\partial u^{2j}(\mathbf{x},\omega)}{\partial n}=0,\ \forall j\in\mathbb{B}, \text{ où } \partial_n \text{ est la dérivée normale} & (ii) \end{cases} \\
&\forall \mathbf{x}\in\Gamma_{bs}^j \begin{cases} u^{2j}(\mathbf{x},\omega)-u^1(\mathbf{x},\omega)=0,\ \forall j\in\mathbb{B} & (iii) \\ \mu^{2j}(\omega)\dfrac{\partial u^{2j}(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}-\mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}=0,\ \forall j\in\mathbb{B} & (iv) \end{cases} \\
&\forall \mathbf{x}\in\Gamma_h \begin{cases} u^1(\mathbf{x},\omega)-u^0(\mathbf{x},\omega)=0 & (v) \\ \mu^1(\omega)\dfrac{\partial u^1(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}-\mu^0(\omega)\dfrac{\partial u^0(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}=0 & (vi) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.106}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

2.4.1.2 Représentation des champs

L'élément nouveau, par rapport aux chapitres précédents, est la structure strictement périodique de Γ_g, les blocs étant supposés identiques de hauteur b, de largeur w et espacés d'une distance d constante. Ainsi, le champ incident prenant la forme d'une onde plane, Γ_g étant périodique et les blocs étant identiques tant du point de vue de la composition que de la géométrie, nous pouvons montrer que le **champ est quasi-périodique (Théorème de Floquet)**, c'est à dire :

$$u^j(x_1+nd,x_2)=u^j(x_1,x_2)\exp\left(\mathrm{i}k_1^i nd\right);\ \forall \mathbf{x},\in\Omega_j;\ \forall n\in\mathbb{Z};\ j=0,1. \tag{2.107}$$

où $k_1^i=k^0\sin(\theta^i)$. Nous pouvons alors appliquer les conditions de continuité des champs et des contraintes normales uniquement sur une période d.

En utilisant la **formule de Poisson** [123], nous obtenons les représentations de champs suivantes :

$$u^0(\mathbf{x},\omega) = u^{i0}(\mathbf{x},\omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^0 \exp\left(\mathrm{i}\left(k_{n1}x_1 + k_{n2}^0 x_2\right)\right),\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \tag{2.108}$$

avec

$$u^{i0}(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^i \exp\left(\mathrm{i}\left(k_{n1}x_1 - k_{n2}^0 x_2\right)\right) \text{ où } A_n^i = A^i(\omega)\delta_{n0},\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \tag{2.109}$$

où $k_{n1} = k_1^i + \dfrac{2n\pi}{d}$, et $k_{n2}^0 = \sqrt{(k^0)^2 - k_{n1}^2}$, tel que $\Re\left(k_{n2}^0\right) \geqq 0$ et $\Im\left(k_{n2}^0\right) \geqq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_n^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^1 x_2\right) + A_n^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^1 x_2\right)\right) \exp\left(\mathrm{i}k_{n1}x_1\right),\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \tag{2.110}$$

où $k_{n2}^1 = \sqrt{(k^1)^2 - k_{n1}^2}$, tel que $\Re\left(k_{n2}^1\right) \geqq 0$ et $\Im\left(k_{n2}^1\right) \geqq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et enfin

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^2 \cos\left(k_{m1}^2\left(x_1 + \frac{w}{2}\right)\right) \cos\left(k_{m2}^2\left(x_2 + b\right)\right),\ \forall \mathbf{X} \in \Omega_0,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \tag{2.111}$$

où $k_{m1}^2 = \frac{m\pi}{w}$ et $k_{m2}^2 = \sqrt{(k^2)^2 - k_{m1}^2}$, tel que $\Re\left(k_{m2}^2\right) \geqq 0$ et $\Im\left(k_{m2}^2\right) \geqq 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$

2.4.1.3 Application des conditions aux limites

Sur une période spatiale d, la projection des conditions (v) et (vi) du système (II.2.106) telle que $\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$ (II.2.106) (v) $\exp\left(-\mathrm{i}k_{l1}x_1\right) dx_1$ et $\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$ (II.2.106) (vi) $\exp\left(-\mathrm{i}k_{l1}x_1\right) dx_1$, en remarquant que $\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \exp\left(\mathrm{i}\left(k_{n1} - k_{l1}\right)x_1\right) dx_1 = d\delta_{ln}$, founit les deux équations :

$$B_n^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^1 h\right) + A_n^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^1 h\right) - A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right) - B_n^0 \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right) = 0 \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned} &\mu^1 k_{n2}^1 B_n^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^1 h\right) - \mu^1 k_{n2}^1 A_n^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^1 h\right) + \\ &\mu^0 k_{n2}^0 A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right) - \mu^0 k_{n2}^0 B_n^0 \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.113}$$

La projection de la condition de continuité du déplacement sur Γ_{bs}, équation (iii) du système (II.2.106) telle que $\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}$ (II.2.106) (iii) $\cos\left(k_{l1}^2\left(x_1 + \frac{w}{2}\right)\right) dx_1$, et utilisant la relation d'orthogonalité des pseudo modes du bloc $\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \cos\left(k_{m1}^2\left(x_1 + \frac{w}{2}\right)\right) \cos\left(k_{l1}^2\left(x_1 + \frac{w}{2}\right)\right) dx_1 = \dfrac{w\delta_{ml}}{\epsilon_m}$ (où $\epsilon_m = 1$, pour $m = 0$ et $\epsilon_m = 2$, pour $m > 0$), donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n^1 + B_n^1\right) \mathrm{I}_{ln}^+ \exp\left(-\mathrm{i}k_{n1}\frac{w}{2}\right) = \frac{\delta_{ml} B_m^1 \cos\left(k_{2m}^2 b\right)}{\epsilon_m} \tag{2.114}$$

équation dans laquelle nous avons introduit la quantité $\mathrm{I}_{ln}^{\pm}$ définie comme :

$$\mathrm{I}_{ln}^{\pm} = \int_0^1 \exp\left(\pm \mathrm{i} k_{n1} \eta w\right) \cos\left(k_{l1}^2 \eta w\right) d\eta \tag{2.115}$$

Enfin la projection de la continuité de la contrainte normale à Γ_{bs} ainsi que la condition de surface libre sur Γ_g, équation (i) et (iv) du système (II.2.106), telle que $\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$ (II.2.106) (i) et (ii) $\exp\left(-k_{l1} x_1\right) dx_1$, donne :

$$\mathrm{i}\mu^1 k_{n2}^1 \left(A_n^1 - B_n^1\right) d = \sum_{m=0}^{\infty} w B_m^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) \mu^2 k_{2m}^2 \exp\left(\mathrm{i} k_{n1} \frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{mn}^{-} \tag{2.116}$$

2.4.1.4 Obtention des champs de déplacement dans les blocs $u^2(\mathbf{x},\omega)$, la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$

Des équations (II.2.112) et (II.2.113), il vient :

$$A_n^1 = \frac{\exp\left(\mathrm{i} k_{n2}^1 h\right)}{2\mu^1 k_{n2}^1} \left(A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mu^1 k_{n2}^1 + \mu^0 k_{n2}^0\right) + B_n^0 \exp\left(\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mu^1 k_{n2}^1 - \mu^0 k_{n2}^0\right)\right) \tag{2.117}$$

et

$$\begin{aligned} B_n^1 \quad = & \frac{\exp\left(-\mathrm{i} k_{n2}^1 h\right)}{2\mu^1 k_{n2}^1} \left(A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mu^1 k_{n2}^1 - \mu^0 k_{n2}^0\right) + \right. \\ & \left. B_n^0 \exp\left(\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mu^1 k_{n2}^1 + \mu^0 k_{n2}^0\right)\right) \end{aligned} \tag{2.118}$$

si bien que les quantités $A_n^1 + B_n^1$ et $A_n^1 - B_n^1$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_n^1 + B_n^1 = \quad & A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i} \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right) + \\ & B_n^0 \exp\left(\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i} \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right) \end{aligned} \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned} A_n^1 - B_n^1 = \quad & A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mathrm{i} \sin\left(k_{n2}^1 h\right) + \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \cos\left(k_{n2}^1 h\right)\right) + \\ & B_n^0 \exp\left(\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mathrm{i} \sin\left(k_{n2}^1 h\right) - \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \cos\left(k_{n2}^1 h\right)\right) \end{aligned} \tag{2.120}$$

En introduisant l'équation (II.2.119) dans l'équation (II.2.115), il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_{ml} B_m^1 \cos\left(k_{2m}^2 b\right)}{\epsilon_m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i} \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right) + \right. \\ & \left. B_n^0 \exp\left(\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i} \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)\right) \mathrm{I}_{ln}^{+} \exp\left(-\mathrm{i} k_{n1} \frac{w}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.121}$$

De même, en introduisant l'équation (II.2.120) dans (II.2.116), il vient :

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\mu^1 k_{n2}^1 d \left(A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mathrm{i} \sin\left(k_{n2}^1 h\right) + \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \cos\left(k_{n2}^1 h\right)\right) + \right. \\ & \left. B_n^0 \exp\left(\mathrm{i} k_{n2}^0 h\right) \left(\mathrm{i} \sin\left(k_{n2}^1 h\right) - \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \cos\left(k_{n2}^1 h\right)\right)\right) = \\ & \sum_{m=0}^{\infty} w B_m^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) \mu^2 k_{2m}^2 \exp\left(\mathrm{i} k_{n1} \frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{mn}^{-} \end{aligned} \tag{2.122}$$

De façon équivalente à ce que nous avons écrit section II.2.1, **deux solutions** s'offrent à nous : soit éliminer les inconnues B_m^2, ce qui conduit à **un système matriciel dont les inconnues sont** B_n^0, $\forall n \in \mathbb{Z}$, soit éliminer l'inconnue B_n^0, ce qui conduit à **un autre système matriciel d'inconnues** B_m^2, $\forall m \in \mathbb{N}$. Pour la résolution, nous préférons la seconde option, la première pouvant nous indiquer certains traits de l'analyse modale. De l'équation (II.2.122), il vient :

$$\begin{aligned} B_n^0 \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w B_m^2 k_{2m}^2 \mu^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) \exp\left(\mathrm{i}k_{n1}\frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{mn}^-}{\mathrm{i}\mu^1 k_{n2}^1 d\left(\mathrm{i}\sin\left(k_{n2}^1 h\right) - \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\cos\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} - \\ A_n^{i0} \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right) \frac{\mathrm{i}\sin\left(k_{n2}^1 h\right) + \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\cos\left(k_{n2}^1 h\right)}{\mathrm{i}\sin\left(k_{n2}^1 h\right) - \frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\cos\left(k_{n2}^1 h\right)} \end{aligned} \tag{2.123}$$

En introduisant l'expression de $B_n^0 \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right)$, dans l'équation (II.2.121), le système permettant la résolution des coefficients pseudo-modaux B_m^2 prend la forme :

$$B_l^2 = P_l + \sum_{m=0}^{\infty} Q_{ml} B_m^2 \tag{2.124}$$

avec

$$Q_{ml} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_l w \mathrm{i}\sin\left(k_{2m}^2 b\right) k_{2m}^2 \mu^2 \mathrm{I}_{mn}^- \mathrm{I}_{ln}^+ \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 d\cos\left(k_{2l}^2 b\right)\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} \tag{2.125}$$

et

$$\begin{aligned} P_l &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2A_n^{i0} \frac{\epsilon_l \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right) \exp\left(-\mathrm{i}k_{n1}\frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{ln}^+}{\cos\left(k_{2l}^2 b\right)\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} \\ &= 2A^i(\omega) \frac{\epsilon_l \exp\left(-\mathrm{i}k_2^i h\right) \exp\left(-\mathrm{i}k_1^i \frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{l0}^+}{\cos\left(k_{2l}^2 b\right)\left(\cos\left(k_{02}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{02}^1}{\mu^0 k_{02}^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)\right)} \end{aligned} \tag{2.126}$$

Supposons maintenant que les coefficients pseudo-modaux, B_m^2, $m \in \mathbb{N}$ sont connus. Le champ $u^0(\mathbf{x}, \omega)$ s'écrit alors, en introduisant l'équation (II.2.123), dans l'expression du champ (II.2.108) :

$$\begin{aligned} u^0(\mathbf{x},\omega) = A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1^i x_1 + k_{02}^0\left(x_2 - 2h\right)\right)\right) \frac{\cos\left(k_{02}^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{02}^1}{\mu^0 k_{02}^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)}{\cos\left(k_{02}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{02}^1}{\mu^0 k_{02}^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)} + \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}\left(k_{n1}x_1 + k_{n2}^0\left(x_2 - h\right)\right)\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w\mu_2 B_m^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) k_{2m}^2 \exp\left(\mathrm{i}k_{n1}\frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{mn}^-}{\mu^0 k_{n2}^0 d\left(\cos\left(k_{02}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{02}^1}{\mu^0 k_{02}^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)\right)} + \\ u^i(\mathbf{x},\omega) \end{aligned} \tag{2.127}$$

En introduisant l'expression de $B_n \exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^2 h\right)$, équation (II.2.123), dans (II.2.117) et (II.2.118), il vient :

$$\begin{aligned} A_n^1 = \frac{A_n^i \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right)}{\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)} + \\ \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_{n2}^1 h\right)\left(\mu^1 k_{n2}^1 - \mu^0 k_{n2}^0\right)}{2\mu^1 k_{n2}^1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}w B_m^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) k_{2m}^2 \exp\left(\mathrm{i}k_{n1}\frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{mn}^- \mu^2}{\mu^0 k_{n1}^0 d\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}\right) \end{aligned} \tag{2.128}$$

et

$$B_n^1 = \frac{A_n^i \exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^0 h\right)}{\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)} + \frac{\exp\left(-\mathrm{i}k_{n2}^1 h\right)\left(\mu^1 k_{n2}^1 + \mu^0 k_{n2}^0\right)}{2\mu^1 k_{n2}^1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}wB_m^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) k_{2m}^2 \exp\left(\mathrm{i}k_{n1}\frac{w}{2}\right) \mathrm{I}_{mn}^- \mu^2}{\mu^0 k_{n1}^0 d\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}\right) \tag{2.129}$$

En introduisant ces expressions dans l'expression du champ $u^1(\mathbf{x},\omega)$, équation (II.2.110), celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x},\omega) &= \frac{2A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1^i x_1 - k_{02}^2 h\right)\right)\cos\left(k_{02}^1 x_2\right)}{\cos\left(k_{02}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{02}^1}{\mu^0 k_{02}^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)} + \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mu^2 wB_m^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) k_{2m}^2 \exp\left(\mathrm{i}k_{n1}\left(\frac{w}{2}+x_1\right)\right)\mathrm{I}_{mn}^-}{\mu^0 k_{n2}^0 d\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} \times \\ &\left(\cos\left(k_{n2}^1\left(x_2 - h\right)\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\sin\left(k_{n2}^1\left(x_2 - h\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{2.130}$$

L'avantage de cette formulation est double :

- les intégrales sont remplacées par des sommes
- la **distance séparant chaque bloc intervient de façon explicite**

2.4.1.5 Interprétation des expressions des champs de déplacement dans la couche $u^1(\mathbf{x},\omega)$ et le substratum $u^0(\mathbf{x},\omega)$

Revenons aux formules générales des champs dans $u^0(\mathbf{x},\omega)$ et $u^1(\mathbf{x},\omega)$, équation (II.2.32) et (II.2.35). Considérons que :

- l'onde incidente est une onde plane, c'est-à-dire qu'en identifiant la forme des champs incidents, il est possible d'obtenir les champs de déplacement dans la couche et dans le substratum en réalisant le changement de variable
  $A^i(k_1,\omega) \Leftarrow -4\pi\mathrm{i}A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1^s - \mathrm{i}k_2^0 x_2^s\right) k_2^0 \delta\left(k_1 - k_1^i\right)$
- les matériaux M^{2j} sont identiques, $\forall j \in \mathbb{B}$
- les caractéristiques géométriques des bâtiments sont identiques, c'est-à-dire $b^j = b$ et $w^j = w$, $\forall j \in \mathbb{B}$
- le cardinal N de $\mathbb{B}$ est infini, c'est-à-dire que nous avons à faire à une infinité de blocs
- la distance séparant chaque bloc est identique $d^j = jd$, $\forall j \in \mathbb{B}$.

De toutes ces hypothèses, il ressort que pour une onde plane en incidence avec un angle θ^i $B_m^{2j} = B_m^2 \exp(\mathrm{i}jd)$, $\forall j \in \mathbb{B}$ (Théorème de Floquet) :

$$\begin{aligned} u^0(\mathbf{x},\omega) = & \frac{A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1^i x_1 + \mathrm{i}k_{02}^0\left(x_2-2h\right)\right)\left(\cos\left(k_{02}^1 h\right)+\mathrm{i}\frac{k_{02}^1\mu^1}{k_{02}^0\mu^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)\right)}{\cos\left(k_{02}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_{02}^1\mu^1}{k_{02}^0\mu^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)} + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\mu^2\sum_{m=0}^{\infty}B_m^2\exp\left(\mathrm{i}(k_1^i-k_1)qd\right)k_{2m}^2\sin\left(k_{2m}^2 b\right)}{2\pi\mu_0\left(\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_2^1\mu^1}{k_2^0\mu^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right)}\times \\ & w\mathrm{I}_m^-(k_1,w)\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1+\frac{w}{2}\right)+\mathrm{i}k_2^0\left(x_2-h\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^0} + u^{i0}(\mathbf{x},\omega) \end{aligned} \tag{2.131}$$

et

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x},\omega) = & \frac{2A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1^i x_1 - \mathrm{i}k_{02}^0 h\right)\cos\left(k_{20}^1 x_2\right)}{\cos\left(k_{20}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{02}^1}{\mu^0 k_{02}^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)} + \\ & \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1+\frac{w_g}{2}\right)\right)\left(\cos\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)}\times \\ & \sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{\mu^2}{\mu^0}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^2\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1^i-k_1^1\right)qd\right)k_{2m}^2\sin\left(k_{2m}^2 b\right)w\mathrm{I}_m^-(k_1,w)\frac{dk_1}{k_2^0} \end{aligned} \tag{2.132}$$

Alors en utilisant la formule de Poisson [123] :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}nd\left(k_1^i-k_1\right)\right) = \frac{2\pi}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(k_{1n}-k_1\right) \tag{2.133}$$

avec $k_{1n} = k_1^i + \frac{2n\pi}{d}$, ces deux champs s'écrivent :

$$\begin{aligned} u^0(\mathbf{x},\omega) = & \frac{A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1^i x_1 + \mathrm{i}k_{02}^0\left(x_2-2h\right)\right)\left(\cos\left(k_{02}^1 h\right)+\mathrm{i}\frac{k_{02}^1\mu^1}{k_{02}^0\mu^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)\right)}{\cos\left(k_{02}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_{02}^1\mu^1}{k_{02}^0\mu^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)} + \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\mu^2\sum_{m=0}^{\infty}B_m^2 k_{2m}^2\sin\left(k_{2m}^2 b\right)w\mathrm{I}_m^-(k_{n1},w)\exp\left(\mathrm{i}k_{n1}\left(x_1+\frac{w}{2}\right)+\mathrm{i}k_{n2}^0\left(x_2-h\right)\right)}{d\mu_0 k_{n2}^0\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_{n2}^1\mu^1}{k_{n2}^0\mu^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} + \\ & u^{i0}(\mathbf{x},\omega) \end{aligned} \tag{2.134}$$

et

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x},\omega) = & \frac{2A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_1^i x_1 - \mathrm{i}k_{02}^0 h\right)\cos\left(k_{20}^1 x_2\right)}{\cos\left(k_{20}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{02}^1}{\mu^0 k_{02}^0}\sin\left(k_{02}^1 h\right)} + \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}k_{n1}\left(x_1+\frac{w}{2}\right)\right)\left(\cos\left(k_{n2}^1\left(x_2-h\right)\right)+\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\sin\left(k_{n2}^1\left(x_2-h\right)\right)\right)}{\cos\left(k_{n2}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)}\times \\ & \frac{\mu^2 k_{2m}^2 w}{\mu^0 k_{n2}^0 d}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^2\sin\left(k_{2m}^2 b\right)\mathrm{I}_m^-(k_{n1},w) \end{aligned} \tag{2.135}$$

qui sont les expressions des champs dans les domaines Ω_0 et Ω_1. Alors l'analyse de la composition des champs dans ces domaines, réalisée section II.2.1.6 est applicable au cas ici étudié, à savoir que

les **blocs agissent comme des sources induites** telles que :

- pour les **modes pairs**, ces sources sont des **sources rubans de largeur égale à la largeur du bâtiment considéré et localisées à la base des bâtiments**

- pour les **modes impairs**, ces sources sont des **sources cylindriques le long de l'axe x_3, de spectres identiques pour un même bâtiment, et localisées dans les coins des bâtiments**.

2.4.2 Analyse modale

2.4.2.1 Mise en évidence des modes Cutler, Cutler-Love et Cutler-Haskell

Revenons à la formule (II.2.124) :

$$B_l^2 = P_l + \sum_{m=0}^{\infty} Q_{ml} B_m^2 \tag{2.136}$$

Une façon de résoudre ce problème est de procéder par itération :

$$\begin{aligned} B_l^{2(0)} &= \frac{P_l}{1-Q_{ll}} \\ B_l^{2(p+1)} &= \frac{P_l + \sum_{m=0}^{\infty} Q_{ml} B_m^{2(p)}}{1-Q_{ll}} \end{aligned} \tag{2.137}$$

À chaque itération, les termes $B_l^{2(p+1)}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, deviennent infinis (dans un cas non dissipatif) pour $1 - Q_{ll} = 0$, ce qui est indicatif des modes du système. Certes, cette relation peut se scinder, comme nous l'avons fait dans la section II.2.1.7.2, en deux sous-systèmes : un système relatif à la **superstructure**, et un système relatif à la **structure géophysique** tels que

$$\begin{aligned} &\cot(k_{2m}^2 b) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_m w \mathrm{i} k_{2m}^2 \mu^2 \mathrm{I}_{mn}^- \mathrm{I}_{mn}^+ \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 d \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} = \\ &\mathcal{F}_1(m, \beta^2, \rho^2, b) - \mathcal{F}_2(m, \beta^1, \rho^1, \beta^0, \rho^0, \beta^2, \rho^2, b, w, h) = 0 \end{aligned} \tag{2.138}$$

L'avantage ici est que la quantité $\mathcal{F}_2(m, \beta^1, \rho^1, \beta^0, \rho^0, \beta^2, \rho^2, b, w, h)$ est sous la forme d'une somme. Une discussion similaire à celle de la section II.2.1.7.2 peut-être engagée ; pour autant, nous préférons à cette formulation, la suivante :

$$1 - \frac{w}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_m \mathrm{i} \mu^2 k_{2m}^2 \tan\left(k_{2m}^2 b\right) \mu^2 \mathrm{I}_{mn}^- \mathrm{I}_{mn}^+ \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 d \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} = 0 \tag{2.139}$$

Compte tenu de nos assertions section II.2.2 et II.2.3, nous pouvons supposer que le mode fondamental de chaque bloc sera prépondérant. Alors l'équation (II.2.139) se présente sous la forme :

$$1 - \frac{w}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i} k^2 \mu^2 \tan\left(k^2 b\right) \operatorname{sinc}\left(k_{n1} \frac{w}{2}\right) \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} = 0 \tag{2.140}$$

Si l'on considère que les matériaux M^2 et M^0 sont identiques $M^2 = M^0 = M$, et que l'épaisseur de la couche h est nulle, c'est-à-dire que la couche n'existe plus, alors il vient :

$$1 - \frac{w}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}k \tan(kb) \operatorname{sinc}^2\left(k_{n1}\frac{w}{2}\right)}{k_{n2}} = 0 \tag{2.141}$$

relation qui n'est autre que celle trouvée, dans le cas d'un réseau dans [13]. Cette relation ne pouvant s'annuler que pour $k_{n2} = \mathrm{i}|k_{n2}|$, $|k_{n2}| \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que le réseau crée des modes qui lui sont propres, correspondant à une onde de surface. Nous pouvons également considérer la décomposition :

$$1 - \frac{w}{d} \frac{k \tan(kb) \operatorname{sinc}^2\left(k_{l1}\frac{w}{2}\right)}{|k_{l2}|} + R_n = 0 \tag{2.142}$$

avec $R_n = \dfrac{w}{d} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k \tan(kb) \operatorname{sinc}^2\left(k_{n1}\frac{w}{2}\right)}{|k_{n2}|} (1 - \delta_{nl})$. Si le reste R_n est négligeable et que $k_{l1}\dfrac{w}{2} << 1$, alors cette relation s'écrit :

$$1 - \frac{w}{d} \frac{k \tan(kb)}{|k_{l2}|} = 0 \tag{2.143}$$

qui est la relation de dispersion des modes de Cutler [57].

Remarque : Les modes de Cutler correspondent en fait à $n = 0$, mais dans ce cas, pour un milieu non-dissipatif, $k_{n2} \in \mathbb{R}$, ne permet pas que la relation s'annule.

Revenons à la relation (II.2.139), et considérons **le terme** $n = 0$:

$$\begin{aligned} &\cos(k^2 b)\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)\right) - \\ &\mathrm{i}\frac{w\mu^2 k^2}{d\mu^0 k_2^0}\sin(k^2 b)\left(\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.144}$$

qui ressemble beaucoup à la relation (II.1.155), au terme $\dfrac{w}{d}$ près. Ainsi, l'équation (II.2.139) peut être interprétée comme une **perturbation de la relation de dispersion d'une configuration à deux couches**, [117]. Néanmoins, cela n'est exact qu'en incidence normale. Effectivement, ce sont les nombres d'onde du milieu M^2 qui interviennent et non k_2^2. Si nous souhaitons que la relation soit la relation de dispersion dans le cas d'une double couche, alors il faut nécessairement $k_2^1 = \sqrt{(k^1)^2 - (k_1^i)^2} = k^1$, c'est-à-dire que $\theta^i = 0$. Ceci étant, cette relation ne peut fournir que deux pics assez doux, puisque (II.1.155) ne peut s'annuler pour des ondes propagatives dans les trois milieux (même si dans ce cas M^2 est plus rigide que M^1). D'autre part, cela signifie que pour une onde plane en incidence normale, seuls les modes fondamentaux se propagent dans le bloc, et pour $w = d$, c'est-à-dire le cas d'une couche, alors le champ dans Ω_2 ne peut-être qu'une onde propagative plane. Effectivement dans ce cas :

$$\begin{aligned} u^2\big|_{n=0}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{P_0|_{n=0}}{1 - Q_{00}|_{n=0}} \cos\left(k^2 (x_2 - b)\right) \\ &= \frac{A^i(\omega)\exp\left(-\mathrm{i}k_2^0 h\right)\cos\left(k^2 (x_2 - b)\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)} \times \\ &\qquad \frac{2}{\cos(k^2 b) - \mathrm{i}\frac{w\mu^2 k^2}{d\mu^0 k_2^0}\sin(k^2 b)\frac{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_2^1}{\mu^0 k_2^0}\sin\left(k_2^1 h\right)}{\cos\left(k_2^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_2^0}{\mu^1 k_2^1}\sin\left(k_2^1 h\right)}} \end{aligned} \tag{2.145}$$

qui pour $w = d$ est la formule du champ dans la couche supérieure, pour une onde plane en incidence normale, en faisant le changement de repère $x_2 = x_2 - h$ déjà rencontré (II.1.159). Alors, le champ dans les blocs peut être interprété, en considérant un matériau équivalent $M^{2'}$ tel que $\mu^{2'} = \frac{\mu^2 w}{d}$ et $\rho^{2'} = \frac{\rho^2 w}{d}$, comme la somme de la réponse de deux couches Ω^1 et $\Omega^{2'}$ plus des termes dus au fait que la couche supérieure n'est pas pleine :

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = u^2_{\text{deux couches}}(\mathbf{x},\omega) + \mathrm{u}^2_n(\mathbf{x},\omega) \tag{2.146}$$

Il faut remarquer ici, que la vitesse des ondes dans le matériau équivalent est identique à celle du matériau initial M^2, mais que le matériau $M^{2'}$ est moins rigide et moins dense que M^2, $d \geq w$. C'est, en fait, un facteur géométrique qui permet d'homogénéiser.

Ceci n'est valable qu'en incidence normale et si le mode fondamental de chaque bloc est prépondérant.

Mais **les termes $\mathbf{u}^2_n(\mathbf{x},\omega)$ ne sont pas négligeables** et les modes de cette couche équivalente ne peuvent être excités puisque sollicités par une onde plane. Cela ne nous renseigne donc en aucune façon sur les modes du système.

Revenons à l'équation (II.2.140). Une première remarque concerne le terme $\mathrm{sinc}^2\left(k_{n1}\frac{w}{2}\right) = \mathrm{sinc}^2\left(\left(k_1^i + \frac{2n\pi}{d}\right)\frac{w}{2}\right)$. Plus la distance d est grande par rapport à la largeur des blocs w, plus le nombre de termes qui peuvent être prépondérants dans la somme est important. Effectivement, le terme en sinc a pour effet de faire décroître rapidement les termes sur lesquels nous sommons, si bien que moins ce terme est décroissant, plus le nombre de termes que nous pouvons considérer dans la somme est important.

Introduisons K^0_{n2}, tels que :

$$K^0_{n2} = \frac{\mathrm{i}k^0_{n2}\left(\cos\left(k^1_{n2}h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k^1_{n2}}{\mu^0 k^0_{n2}}\sin\left(k^1_{n2}h\right)\right)}{\cos\left(k^1_{n2}h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k^0_{n2}}{\mu^1 k^1_{n2}}\sin\left(k^1_{n2}h\right)} \tag{2.147}$$

La relation (II.2.140) s'écrit alors :

$$1 - \frac{w}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mu^2 k^2 \tan\left(k^2 b\right)\mu^2 \mathrm{sinc}^2\left(k_{n1}\frac{w}{2}\right)}{\mu^0 K^0_{n2}} = 0 \tag{2.148}$$

En se référant au **mode de Cutler**, cette relation s'annule aux **anomalies de Wood**, [193, 184], c'est-à-dire aux lieux correspondant à $K^0_2 \in \mathbb{R}$, et $K^0_2 \approx 0$. Ceci peut avoir lieu, en se référant à la discussion sur les modes de Love, section II.1.1, uniquement si $k^0_{n2} = \mathrm{i}|k^0_{n2}|$. Pour $k^0_{n2} = \mathrm{i}|k^0_{n2}|$ et $k^1_2 = \mathrm{i}|k^1_2|$ la relation est réelle, mais ne peut s'annuler. Alors, nous recherchons les modes sous la forme :

$$\frac{|k^0_{n2}|\left(1 - \frac{\mu^1 k^1_{n2}}{\mu^0 |k^0_{n2}|}\tan\left(k^1_{n2}h\right)\right)}{1 + \frac{\mu^0 |k^0_{n2}|}{\mu^1 k^1_{n2}}\tan\left(k^1_{n2}h\right)} \approx 0 \tag{2.149}$$

Cette relation est vérifiée pour :

- $|k_{n2}^0| \approx 0$, ce qui correspond aux modes quasi-Cutler (du fait que les milieux ne sont pas identiques)
- $\left(1 - \frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 |k_{n2}^0|} \tan\left(k_{n2}^1 h\right)\right) \approx 0$, ce qui correspond aux modes de Love
- $1 + \frac{\mu^0 |k_{n2}^0|}{\mu^1 k_{n2}^1} \tan\left(k_{n2}^1 h\right) \approx \infty$, c'est-à-dire $\tan\left(k_{n2}^1 h\right) \approx \infty$, ou encore $\nu_{nm}^{\mathrm{CH}} = \frac{\beta^1}{2\pi}\left(\left(\frac{(2m+1)\pi}{2h}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{d}\right)^2\right)$, ce qui correspond à une modification due au réseau, des "modes" d'Haskell.

À ces modes s'ajoutent les modes de bloc à quasi-base fixe, section II.2.1. Ainsi quatre types de modes peuvent-être excités :

- les **modes quasi-Cutler**
- les **modes de Cutler-Love**
- les modes provenant de l'interaction couche-réseau : **modes Cutler-Haskell**
- les **modes de bloc à quasi-base fixe**

Nous avons vu qu'il était très difficile d'obtenir un "scindage" du premier pic à l'aide des modes quasi-Love et quasi-base rigide. En se référant à [21], il est **possible d'obtenir un "scindage" important à l'aide d'un réseau**. Par exemple, dans le cas de Mexico et pour différentes valeurs du paramètre d, nous obtenons les résultats de la figure II.2.53.

Pour un espacement $d = 65m$, deux modes sont très proches aux environs de $\nu \approx 0.3Hz$: le premier correspond au mode fondamental de Cutler-Love et le second au mode fondamental de Cutler-Haskell $\nu_{00}^{\mathrm{CH}} = 0.3Hz$. Pour $\nu \approx 1Hz$, un autre mode est rencontré. Il correspond à $\nu_{01}^{\mathrm{CH}} = 1Hz$. Le mode aux environs de $\nu^{\mathrm{qbf}} \approx 0.5Hz$ correspond au premier mode quasi-base fixe des blocs.

Pour un espacement $d = 150m$, les modes fondamentaux de Cutler-Love et Cutler-Haskell sont encore proches aux environs de $\nu \approx 0.3Hz$. Le mode fondamental de bloc à quasi-base fixe ($\nu_0^{\mathrm{qbf}} \approx 0.5Hz$) et le mode du réseau ($\nu_{01}^{\mathrm{CH}} = 0.6Hz$) le sont aussi.

Le cas le plus intéressant correspond à $d = 300$ pour lequel nous avons le mode Cutler-Love aux environs de $0.28Hz$ et le mode $\nu_{01}^{\mathrm{CH}} \approx 0.36Hz$. Ces deux modes sont très proches et par conséquent peuvent donner lieu à un "scindage" prononcé.

Ainsi, il apparaît possible de générer un **"scindage" prononcé du premier pic, à l'aide des modes quasi-Love** (Cutler-Love ici) **et des modes d'interférence réseau-couche Cutler-Haskell**.

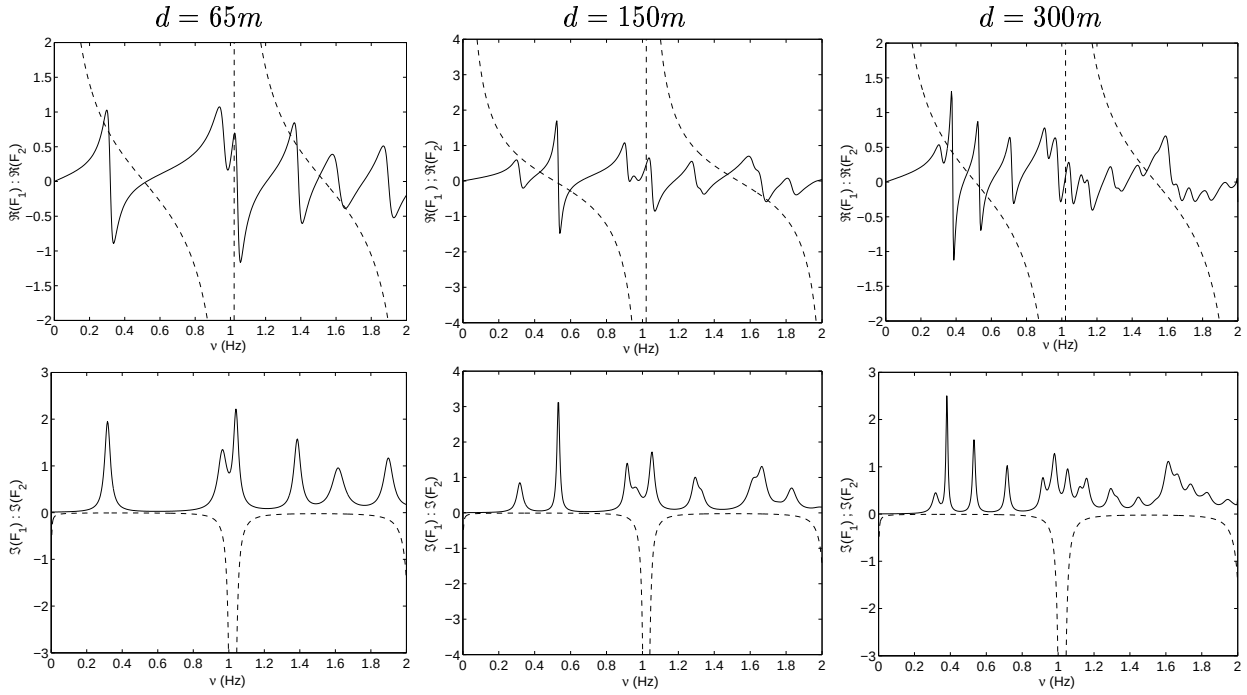


FIG. 2.53 – *Mexico - Partie réelle (première ligne) et partie imaginaire (seconde ligne) des quantités* $\mathcal{F}_1(m, \beta^2, \rho^2, b)$ *(en tirets) et* $\mathcal{F}_2(m, \beta^1, \rho^1, \beta^0, \rho^0, \beta^2, \rho^2, b, w, h)$ *(en trait continu) pour différentes valeurs de l'espacement* d*: première colonne* $d = 65m$*, seconde colonne* $d = 150m$ *et troisième colonne* $d = 300m$

2.4.2.2 Mise en évidence des modes quasi-Love

Un autre point de vue est celui consistant à introduire l'expression de B_m^2 tirée de l'équation (II.2.121) dans l'équation (II.2.122), de façon à obtenir une équation pour la résolution de $\mathcal{B}_n^0 = B_n^0 \exp\left(\mathrm{i}k_n^0 h\right)$, qui prend la forme :

$$C_n \mathcal{B}_n^0 = \sum_{N=-\infty}^{\infty} Q_{nN} \mathcal{B}_N^0 + P_n \tag{2.150}$$

où

$$C_n = \cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0} \sin\left(k_{n2}^1 h\right) \tag{2.151}$$

$$\begin{aligned} Q_{nN} \quad &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\epsilon_m w \mu^2 k_{2m}^2 I_{mn}^- I_{mN}^+ \tan\left(k_{2m}^2 b\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 d} \times \\ &\left(\cos\left(k_{N2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{N2}^0}{\mu^1 k_{N2}^1} \sin\left(k_{N2}^1 h\right)\right) \exp\left(\mathrm{i}\left(k_{n1} - K_{N1}\right)\frac{w}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.152}$$

et

$$\begin{aligned} P_n \quad &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^i(\omega) \exp\left(-\mathrm{i}k_{02}^0 h\right) \mathrm{i} w \mu^2 \epsilon_m k_{2m}^2 \sin\left(k_{2m}^2 b\right) \mathrm{I}_{mn}^- \mathrm{I}_{m0}^+}{\mu^0 k_{n2}^0 d} \times \\ &\left(\cos\left(k_{02}^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{02}^0}{\mu^1 k_{02}^1} \sin\left(k_{02}^1 h\right)\right) \exp\left(\mathrm{i}\left(k_{n1} - k_1^i\right)\frac{w}{2}\right) + \\ &A^i(\omega) \exp\left(-\mathrm{i}k_{02}^0 h\right) \left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) + \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0} \sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right) \end{aligned} \tag{2.153}$$

L'équation (II.2.150) peut également s'écrire :

$$(C_n - Q_{nn})\,\mathcal{B}_n^0 = \sum_{N=-\infty}^{\infty} Q_{nN}\mathcal{B}_N^0\,[1-\delta(n-N)] + P_n \tag{2.154}$$

Une façon de résoudre cette équation est de procéder par itération :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{n(0)}^0 = \dfrac{P_n}{C_n - Q_{nn}} \\ \mathcal{B}_n^{0(p+1)} = \dfrac{\sum_{N=-\infty}^{\infty} Q_{nN}\mathcal{B}_N^{0(p)}\,[1-\delta(n-N)] + P_n}{C_n - Q_{nn}} \end{cases} \tag{2.155}$$

Ainsi, tous les termes $B_n^{0(p)}$, $p \in \mathbb{N}$ deviennent grands pour $C_n - Q_{nn} = 0$. Cette relation constitue donc une bonne approche des modes du système. Elle prend la forme :

$$\begin{aligned} &\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right) - \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\epsilon_m w\mu^2 k_{2m}^2 I_{mn}^- I_{mn}^+ \tan\left(k_{2m}^2 b\right)\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 d} = 0 \end{aligned} \tag{2.156}$$

En particulier, pour $m = 0$, constituant le mode prédominant dans les blocs, il vient :

$$\begin{aligned} &\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right) - \\ &\frac{\mathrm{i}w\mu^2 k^2 \mathrm{sinc}\left(k_{n1}\frac{w}{2}\right)\tan(2b)\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 d} \end{aligned} \tag{2.157}$$

Pour de faibles valeurs de la hauteur b des blocs, cette relation constitue une perturbation de celle relative aux modes de Love (lié aux paramètres du réseau par l'intermédare des nombres d'onde k_{n1}). De plus, elle peut se mettre sous la forme :

$$1 - \frac{\mathrm{i}w\mu^2 k^2 \mathrm{sinc}\left(k_{n1}\frac{w}{2}\right)\tan(2b)\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^0 k_{n2}^0}{\mu^1 k_{n2}^1}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)}{\mu^0 k_{n2}^0 d\left(\cos\left(k_{n2}^1 h\right) - \mathrm{i}\frac{\mu^1 k_{n2}^1}{\mu^0 k_{n2}^0}\sin\left(k_{n2}^1 h\right)\right)} = 0 \tag{2.158}$$

qui est la relation (II.2.140), en ne conservant que le terme n dans la somme.
Ainsi, ne considérer que les termes prédominants, c'est-à-dire considérer que les termes correspondant aux entiers relatifs n donnant lieu aux anomalies de Wood sont dominants dans la relation (II.2.140), est valide, puisque du point de vue de la structure géophysique, à chaque $n \in \mathbb{Z}$ peut correspondre un mode, ou plusieurs modes.

2.4.3 Résultats numériques

2.4.3.1 Nice (cas C2P-2-E30 proposé par l'ACI CATNAT)

Nous considérons ici la comparaison des résultats pour une ville idéalisée composée de 10 bâtiments (cas C2P-2-E30), modélisée par des blocs de caractéristiques géométriques $b \times w = 30m \times 10m$ et occupés par un matériau M^2, dissipatif, tel que $\rho^2 = 250kg.m^{-3}$, $\left(c_S^2\right)_R = 240m.s^{-1}$, et $Q_S^2 = 10$. Ces blocs sont séparés d'une distance $d = 50m$ et en contact parfait avec la couche, Ω_1, occupée

par un matériau dissipatif M^1 tel que $\rho^1 = 1800kg.m^{-3}$, $\left(c_S^1\right)_R = 200m.s^{-1}$, et $Q_S^1 = 25$, le milieu Ω^1 étant lui-même en contact parfait avec un demi-espace Ω^0 occupé par un matériau M^0, tel que $\rho^0 = 2200kg.m^{-3}$, $c_S^0 = 1000m.s^{-1}$, et $Q_S^0 = \infty$. La solliciation est une onde plane impulsive, telle que $\theta^i = 0$, de type Ricker-ACI, de support temporel S(t) défini tel que :

$$f(t) = \left(1 - 2\pi^2 \left(1 - \frac{1}{\nu_0}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\pi\nu_0 \left(t - \frac{1}{\nu_0}\right)^2\right)\right) \tag{2.159}$$

Une analyse modale rapide de cette configuration, figure II.2.54, pour une infinité de blocs, montre que nous nous trouvons dans le cas où seuls les modes quasi-base rigide sont excités, les modes quasi-Love deviennent eux, des "Leaky modes", c'est-à-dire qu'ils correspondent à un minimum de la partie réelle, et qu'ils conduisent à une annulation de la relation de dispersion dans le plan complexe. Ainsi, la réponse sur les modes de bloc à quasi-base fixe est cette fois-ci, privilégiée.

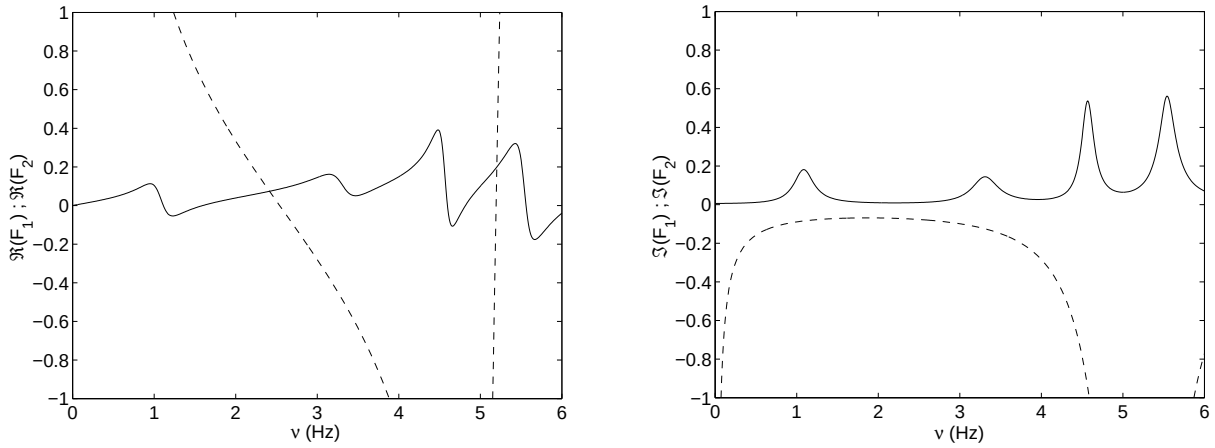


FIG. 2.54 – *Nice (C2P-2-E30) - À gauche, partie réelle des fonctions $\mathcal{F}_1$ (en tirets) et $\mathcal{F}_2$ (en trait continu) et à droite, partie imaginaire des fonctions $\mathcal{F}_1$ (en tirets) et $\mathcal{F}_2$ (en trait continu).*

La comparaison entre les résultats numériques pour 10 blocs et ceux semi-analytiques pour une infinité de blocs, figure II.2.55 est assez étonnante. Les résultats sont similaires, à l'intérieur du bloc, aussi bien pour le bloc 1 (situé le plus à l'extérieur) que pour le bloc 5 (situé au milieu) de la configuration.

Cela signifie que **pour un espacement faible entre les blocs, et dans le cas où les modes Cutler-Love sont atténués, la réponse, pour tous les blocs** (nous l'avons vérifié pour les blocs 1 et 5, donc cela est aussi vrai pour les blocs intermédiaires) **d'une configuration finie comportant un nombre suffisant de blocs** (ici 10), **peut être correctement représentée par celle obtenue pour une infinité de blocs**.

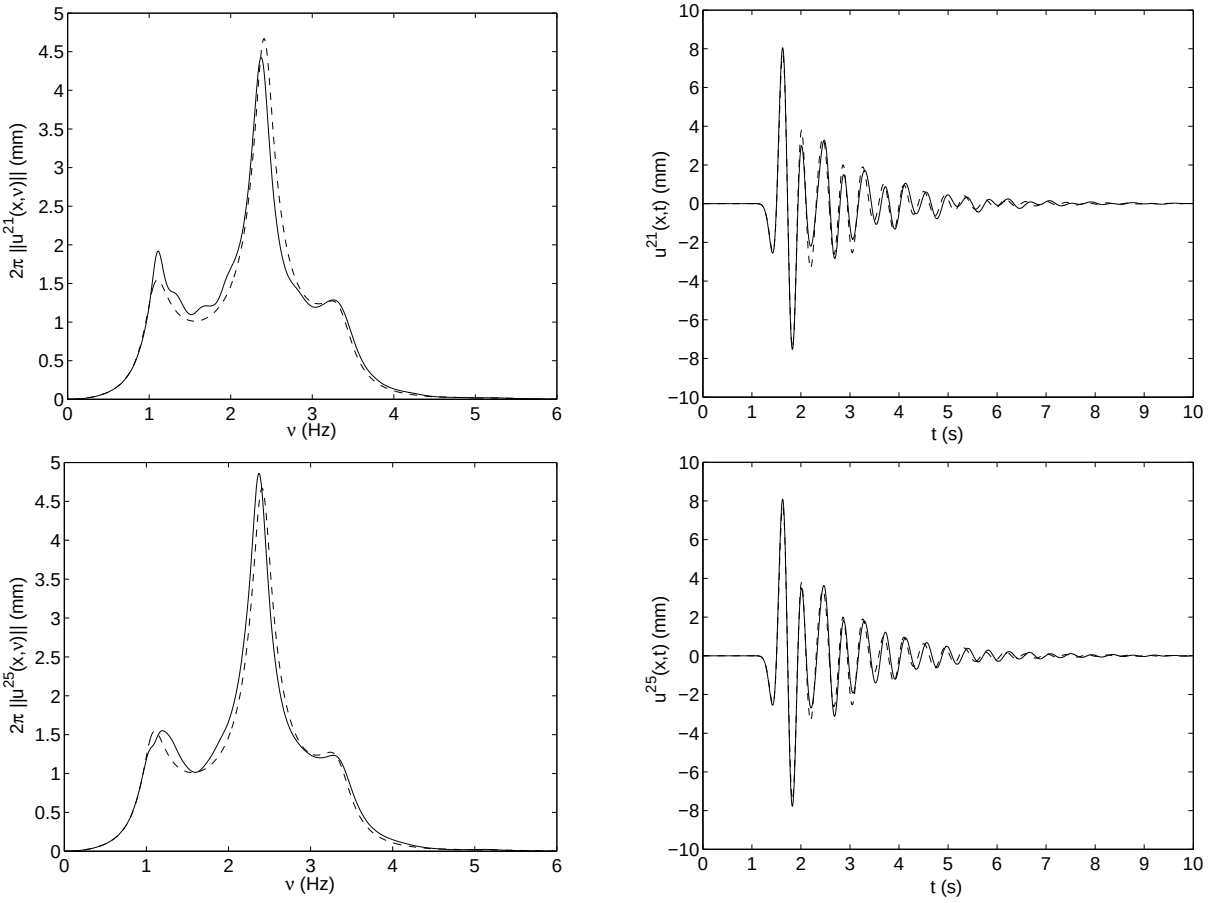


FIG. 2.55 – *Nice (C2P-2-E30) - À gauche 2π fois le module du spectre, et à droite le sismogramme (déplacement) correspondant, en haut au sommet du bloc 1 et en bas au sommet du bloc 5. Les courbes en trait continu correspondent aux résultats numériques et les courbes en tirets, aux résultats semi-analytiques.*

2.4.3.2 Mexico

Nous considérons ici la comparaison des résultats pour une ville idéalisée composée de 10 bâtiments, modélisée par des blocs de caractéristiques géométriques $b \times w = 50m \times 30m$, occupés par un matériau M^2, dissipatif, tel que $\rho^2 = 325kg.m^{-3}$, $\left(c_S^2\right)_R = 60m.s^{-1}$, et $Q_S^2 = 100$. Ces blocs sont en contact parfait avec la couche, Ω_1, occupée par un matériau dissipatif M^1 tel que $\rho^1 = 1300kg.m^{-3}$, $\left(c_S^1\right)_R = 60m.s^{-1}$, et $Q_S^1 = 30$, le milieu Ω^1 étant lui-même en contact parfait avec un demi-space Ω^0 occupé par un matériau M^0, tel que $\rho^0 = 2000kg.m^{-3}$, $c_S^0 = 600m.s^{-1}$, et $Q_S^0 = \infty$. La sollicitation est une onde plane de type Ricker-ACI, telle que $\theta^i = 0$.

Le cas le plus intéressant, c'est-à-dire celui semblant donner lieu théoriquement à un "scindage" prononcé du premier pic, correspond à une distance $d = 300m$.

Tout d'abord, penchons-nous sur les fonctions de transfert dans le cas d'une infinité de blocs, figure II.2.56.

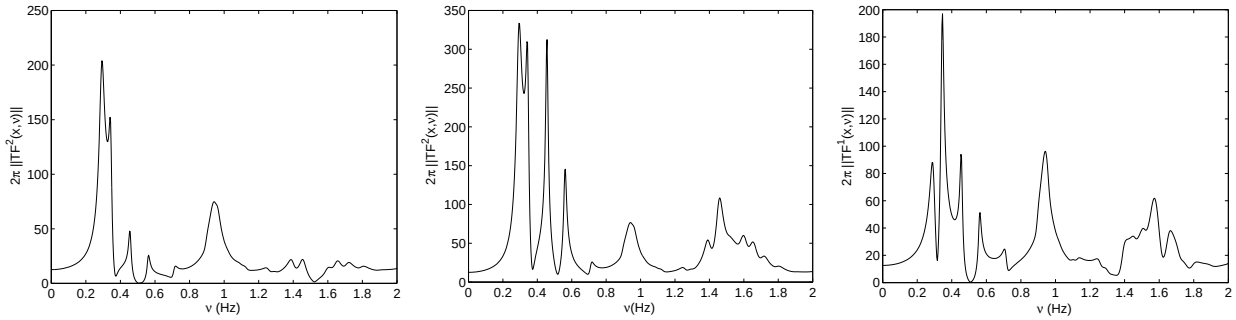


FIG. 2.56 – *Mexico $d = 300m$ - 2π fois le module de la fonction de transfert, à gauche à la base du bloc générique, au milieu au sommet du bloc générique, et à droite sur le sol entre deux blocs adjacents*

Nous avons de gauche à droite, le mode Cutler-Love, couplé avec le mode fondamental Cutler-Haskell, puis le second et le troisième mode Cutler-Haskell, ce dernier étant proche du mode fondamental de bloc à quasi-base fixe, et ainsi de suite. De la même façon que dans le section précédente, le mode de bloc à quasi-base fixe donne lieu à un maximum au sommet du bloc et est coupé à sa base. Le fait que nous ayons une infinité de blocs, et que le troisième mode de Cutler-Haskell se trouve proche du mode fondamental de bloc à quasi-base fixe, induit un pic en aval de la fréquence coupée à la base du bloc. Entre les blocs, le "scindage" du premier pic est plus prononcé qu'à l'intérieur des blocs. Ceci est dû au fait que nous nous trouvons dans la couche, c'est-à-dire dans la sous-structure géophysique qui a tendance à mettre l'accent sur les modes de Cutler-Love, section II.2.4.2.2.

Venons-en maintenant à la comparaison avec un nombre de blocs fini (ici 10). Puisque l'onde incidente est en **incidence à $\theta^i = 0$**, les résultats sont symétriques si bien que nous pouvons nous contenter de la comparaison sur les 5 premiers blocs. En particulier, nous obtenons à l'intérieur des blocs, 1 et 5 les résultats figure II.2.57

Les **sismogrammes** présentent des **battements prononcés**, sont **d'une durée d'environ 120s (soit environ 70s de plus qu'en l'absence des blocs)**, et ont une **amplitude maximale supérieure à celle relevée en l'absence de bloc**. Les champs de déplacement dans les blocs au centre d'une dizaine de blocs sont quasiment identiques à ceux obtenus pour une infinité de blocs. Au fur et à mesure que l'on s'écarte des blocs centraux, les résultats divergent, en particulier, le "scindage" du premier pic s'atténue.

Intéressons-nous aux déplacements entre les blocs, figure II.2.58.

Les remarques sont identiques à celle formulées pour les champs à l'intérieur des blocs. Le champ pour une configuration finie diffère davantage du champ pour une configuration avec une infinité de blocs lorsqu'il est relevé à l'extérieur de la configuration finie que lorsqu'il est relevé à l'intérieur de celle-ci. En particulier, le second pic, mode de Cutler-Haskell se scinde en deux pics d'amplitudes faibles, ce qui semble signifier qu'un mode lié au caractère fini de la configuration peut être excité.

Ainsi, pour des **blocs relativement éloignés**, c'est-à-dire dans le cas où le mode 1 de Cutler-Haskell est proche du mode de Cutler-Love, **le champ au centre d'une dizaine de blocs peut tout à fait être analysé à l'aide d'un modèle comportant une infinité de blocs**.

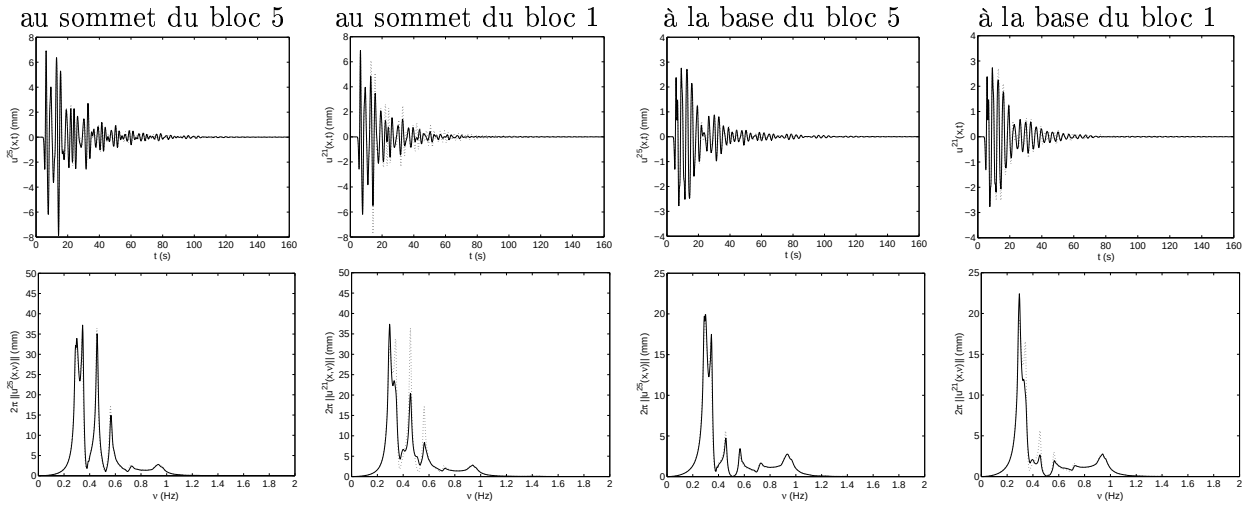


FIG. 2.57 – *Mexico $d = 300m$ - En haut les sismogrammes (déplacements), et en bas 2π fois les spectres correspondants. De gauche à droite comparaison des résultats au sommet du bloc 5, au sommet du bloc 1, à la base du bloc 5 et à la base du bloc 1. Les courbes en pointillées correspondent au calcul semi-analytique avec une infinité de blocs, alors que les courbes en trait continu correspondent au calcul numérique avec 10 blocs identiques.*

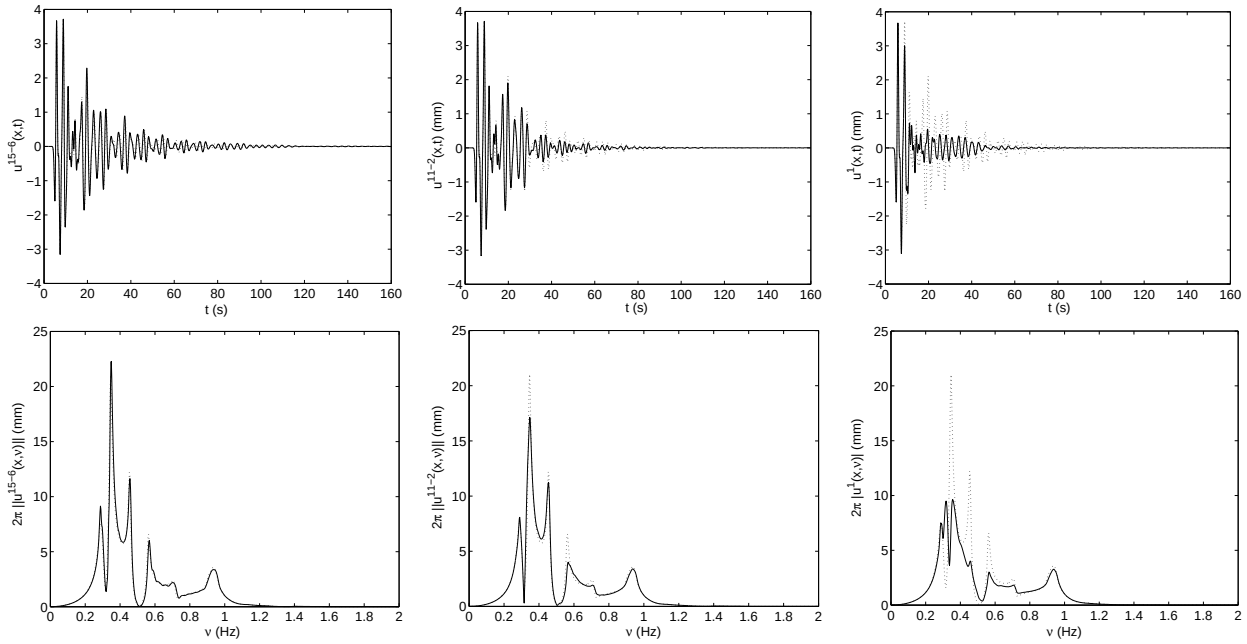


FIG. 2.58 – *Mexico $d = 300m$ - En haut les sismogrammes (déplacements), et en bas 2π fois le module des spectres correspondants. De gauche à droite comparaison des résultats sur le sol entre les blocs 5 et 6, sur le sol entre les blocs 1 et 2, et sur le sol à une distance de 150m (demi-distance séparant deux blocs adjacents) à gauche du bloc 1. Les courbes en pointillés correspondent au calcul semi-analytique avec une infinité de blocs, alors que les courbes en trait continu correspondent au calcul numérique avec 10 blocs indentiques.*

Voyons maintenant le cas où le mode 1 de Cutler-Haskell est excité à une fréquence plus élevée que celle du mode de Cutler-Love. Nous considérons ici une distance entre deux blocs adjacents de $d = 65m$.

Commençons par nous intéresser aux fonctions de transfert dans le cas d'une infinité de blocs, figure II.2.59.

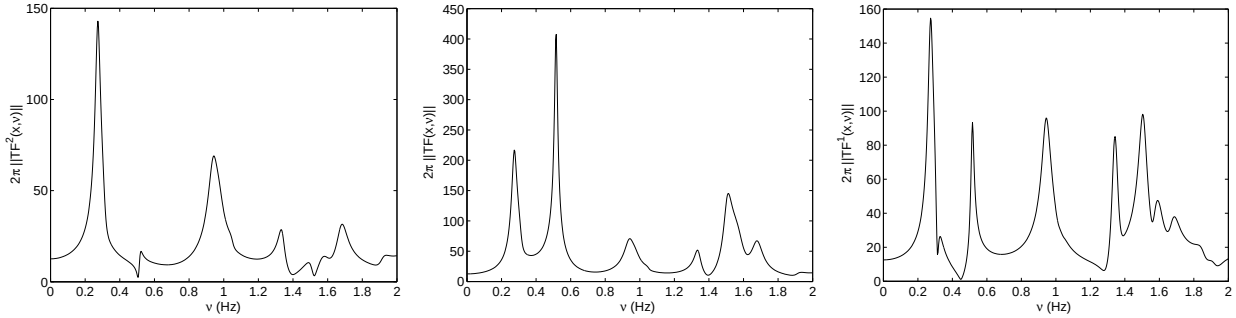


FIG. 2.59 – *Mexico $d = 65m$ - 2π fois le module de la fonction de transfert, à gauche à la base du bloc, au milieu au sommet du bloc, et à droite sur le sol entre deux blocs adjacents*

Le premier pic correspond aux modes Cutler-Love et mode fondamental Cutler-Haskell. Le second pic correspond au mode fondamental à quasi-base fixe des blocs. Les modes de Cutler-Haskell d'ordre supérieur se situent beaucoup plus haut en fréquences. Ainsi, mise à part la réponse au mode fondamental de bloc à quasi-base fixe qui doit être plus importante, ce système devrait se comporter comme le système avec un ou deux blocs, les modes étant identiques en basses fréquences. Une remarque concerne la fonction de transfert sur le sol entre les blocs : nous observons deux pics, un premier qui correspond au mode fondamental Cutler-Love et un second au mode fondamental Cutler-Haskell.

Si maintenant nous nous intéressons à la comparaison avec un nombre fini de blocs, figures II.2.60, II.2.61 et II.2.62, il apparaît que le nombre de blocs considérés dans la configuration finie doit être supérieur à 40 pour qu'au moins les résultats pour le bloc central soient "identiques" à ceux obtenus avec la configuration infinie.

Pour un **nombre de blocs faible**, un **mode** correspondant à l'**aspect fini du réseau** semble être excité. Il a pour effet de produire un décalage vers les basses fréquences de l'ensemble du spectre et des pics satellites après le mode Cutler-Love. Plus le nombre de blocs est important, plus la fréquence d'apparition de ces pics est élevée, ce qui signifie qu'il est en relation avec la largeur du réseau. Ainsi, il semble que ce soit non pas le nombre de blocs lui-même qui soit la cause de cette excitation mais un **rapport entre la largeur du réseau et une longueur caractéristique de phénomènes liés à la couche** (du type de ceux évoqués section II.2.3.3). En effet, pour 40 blocs, la largeur est légèrement inférieure à celle considérée dans le cas de 10 blocs espacés de $d = 300m$. Dans le domaine temporel, les pics satellites induisent des battements qui semblent être le plus prononcés dans le cas de 20 blocs.

Ainsi, dans le cas de **blocs relativement proches**, une analyse à l'aide d'un **réseau infini fournit une bonne approximation pour une largeur du réseau relativement importante**, ici supérieure à $2630m$. Or, cette **grandeur** est, **à l'échelle d'un quartier réaliste**, ce qui semble indiquer que l'analyse à l'aide d'une infinité de blocs serait valide pour l'analyse des résultats au centre du groupe.

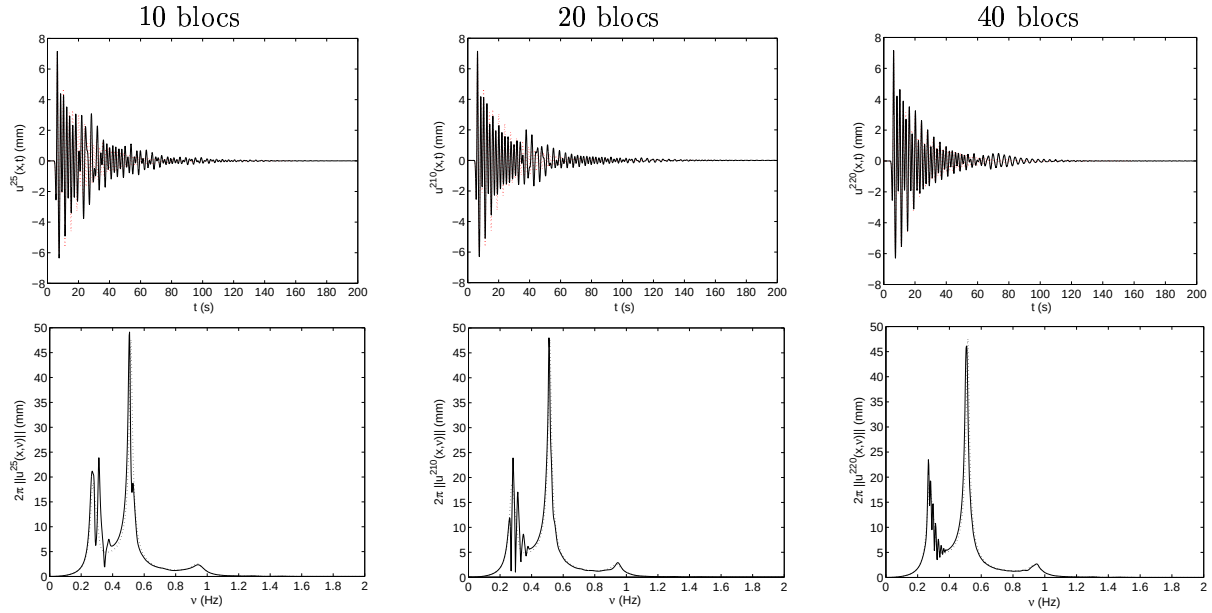


FIG. 2.60 – *Mexico $d = 65m$ - En haut, les sismogrammes au sommet du bloc central (c.à.d. pour 10 blocs, le bloc 5, pour 20 blocs, le bloc 10, et pour 40 blocs, le bloc 20), et en bas 2π fois le module des spectres correspondants. De gauche à droite comparaison des résultats pour 10 blocs, 20 blocs et 40 blocs. Les courbes en pointillés correspondent aux calculs semi-analytiques avec une infinité de blocs, alors que les courbes en trait continu correspondent aux calculs numériques avec 10, 20 et 40 blocs indentiques.*

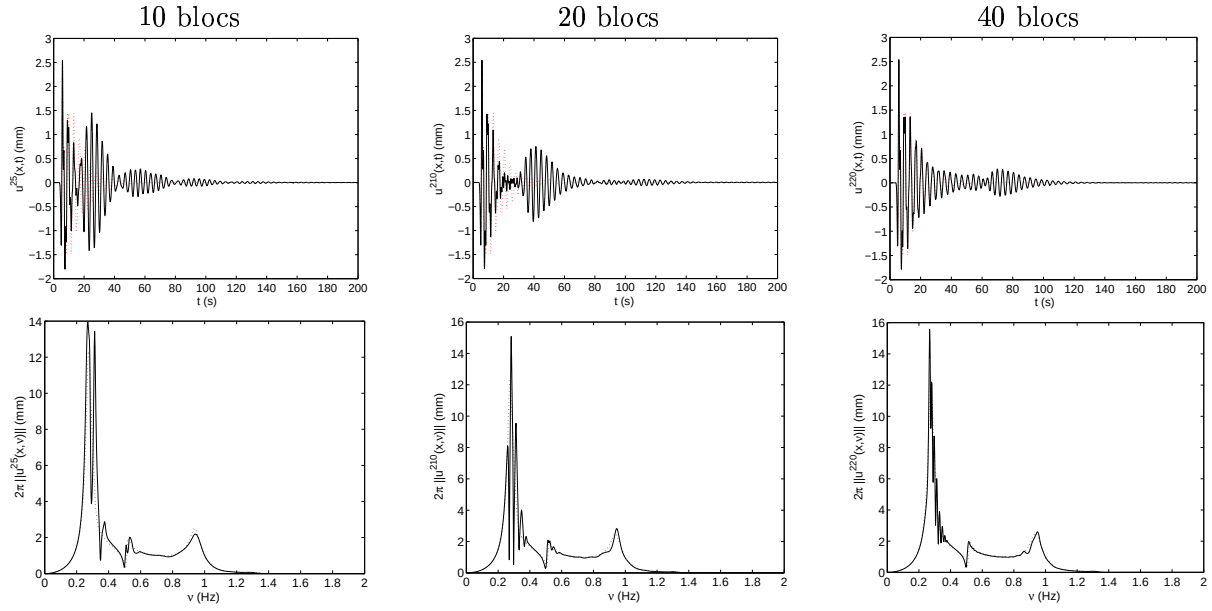


FIG. 2.61 – *Mexico $d = 65m$ - En haut, les sismogrammes à la base du bloc central (c.à.d. pour 10 blocs, le bloc 5, pour 20 blocs, le bloc 10, et pour 40 blocs, le bloc 20), et en bas, 2π fois le module des spectres correspondants. De gauche à droite comparaison des résultats pour 10 blocs, 20 blocs et 40 blocs. Les courbes en pointillés correspondent aux calculs semi-analytiques avec une infinité de blocs, alors que les courbes en trait continu correspondent aux calculs numériques avec 10, 20 et 40 blocs indentiques.*

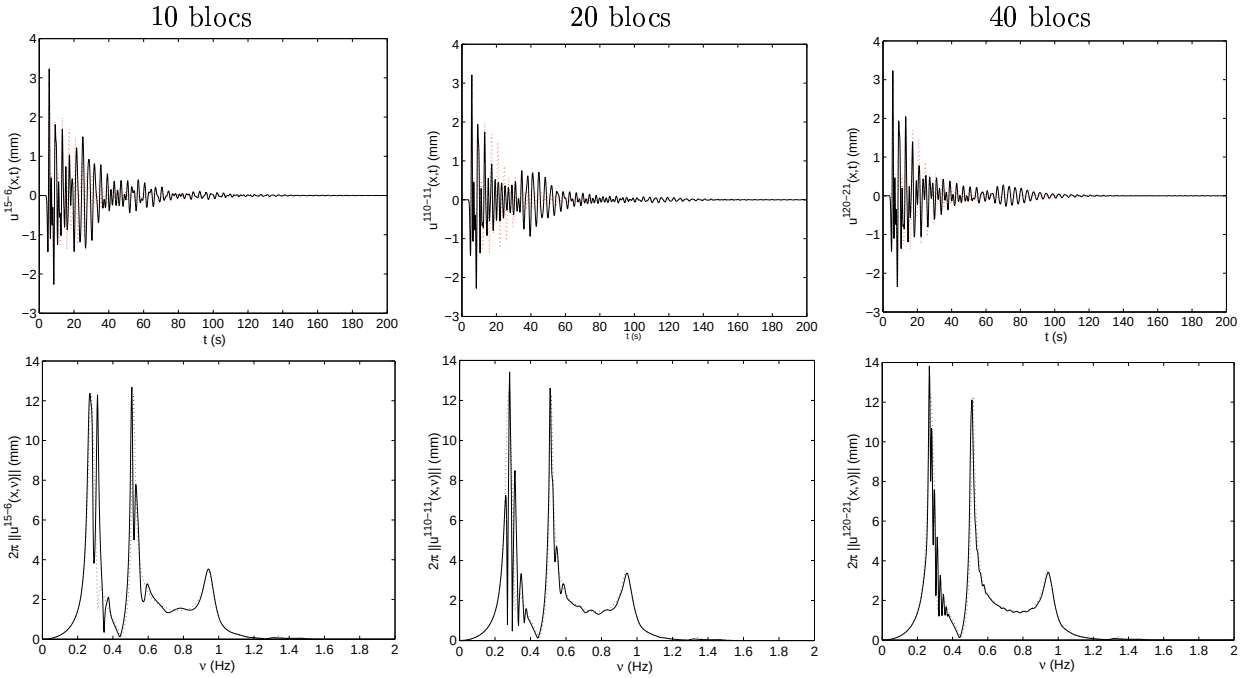


FIG. 2.62 – *Mexico $d = 65m$ - En haut, les sismogrammes sur le sol entre les blocs (c.à.d. pour 10 blocs, entre les blocs 5 et 6, pour 20 blocs, entre les blocs 10 et 11, et pour 40 blocs, entre les blocs 20 et 21), et en bas 2π fois le module des spectres correspondants. De gauche à droite comparaison des résultats pour 10 blocs, 20 blocs et 40 blocs. Les courbes en pointillés correspondent aux calculs semi-analytiques avec une infinité de blocs, alors que les courbes en trait continu correspondent aux calculs numériques avec 10, 20 et 40 blocs indentiques.*

Pour fixer les idées, nous représentons les instantanés des champs de déplacement dans le cas de 10 blocs, pour une distance $d = 300m$ figure II.2.63 et pour une distance $d = 65m$ figure II.2.64.

Une comparaison des figures II.2.63 et II.2.64, montre que pour un espacement $d = 300m$, configuration pour laquelle plusieurs modes Cutler-Haskell sont excités, en particulier pour les trois blocs centraux, des "paquets" d'ondes sont observés entre les blocs ($t = 50s$), alors que pour un espacement $d = 65m$, pour lequel seul le fondamental de Cutler-Haskell mais aussi et surtout des modes liés à l'aspect fini du réseau sont excités, certains blocs semblent "agir" en groupe. Cela prouve qu'il y a bien un effet lié à l'aspect fini du réseau (et au rapport de la distance séparant les blocs sur la largeur totale du réseau). En particulier, pour $t = 25s$, le déplacement dans la couche ressemble à celui qui serait rayonné par un seul bloc. Cela signifie que pour certaines composantes du déplacement, lorsque les blocs sont proches et pour une configuration finie, une des composantes du champ de déplacement peut être interprétée comme celle provenant d'un seul bloc de largeur quasiment égale à celle du réseau. Dans ce cas, plusieurs pseudo-modes sont nécessaires à la décomposition du champ dans cet hypothétique bloc, ce qui explique peut-être les pics satellites rencontrés après la fréquence coupée du mode fondamental à quasi base-fixe ($\approx 0.5Hz$), figure II.2.62. Ces phénomènes doivent avoir un lien avec les aspects de cohérence, que nous ne comprenons pas réellement, exposés dans [108].

.

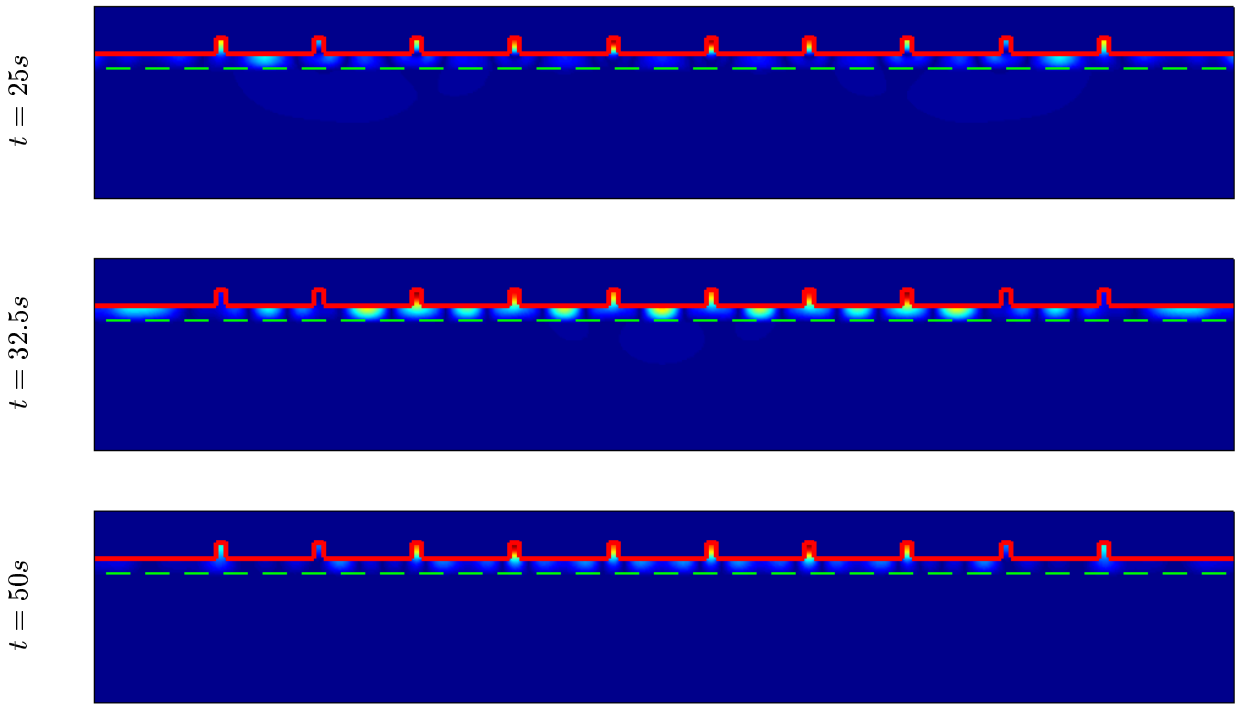


FIG. 2.63 – *Instantanés du champ de déplacement, dans le cas de 10 blocs pour un espacement* $d = 300m$. *En haut au temps* $t = 25s$, *au milieu au temps* $t = 32.5s$ *et en bas au temps* $t = 50s$. *L'échelle des couleurs varie d'une figure à l'autre.*

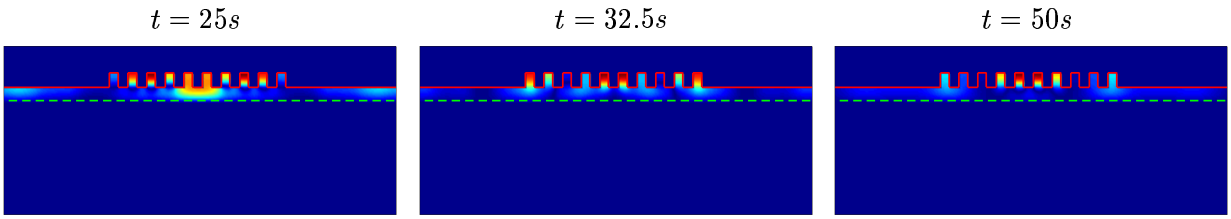


FIG. 2.64 – *Instantanés du champ de déplacement, dans le cas de 10 blocs pour un espacement* $d = 65m$. *À gauche au temps* $t = 25s$, *au milieu au temps* $t = 32.5s$ *et a droite au temps* $t = 50s$. *L'échelle des couleurs varie d'une figure à l'autre.*

Conclusion

Nous pouvons maintenant fournir des réponses aux différentes interrogations posées en introduction.

La première question était : combien de pseudo-modes est-il nécessaire de considérer pour obtenir une représentation correcte du champ dans les blocs et dans la couche, c'est-à-dire combien de pseudo-modes sont excités dans les blocs et par conséquent quels sont leurs mouvements?
La configuration étudiée ici était celle d'un bloc ou de plusieurs blocs, en contact parfait avec une couche d'étendue latérale infinie sur un demi-espace plus rigide. La représentation du champ dans les blocs prend la forme d'une représentation pseudo-modale (représentation rigoureuse), avec $k_{m1}^j = \frac{m\pi}{w_j}$, $j \in \mathbb{B}$, $m = 0, 1..., M$. Le nombre de pseudo-modes M nécessaire à une bonne représentation est lié : i) à la largeur du bloc et non à sa hauteur, ii) à la représentation correcte des champs (et des phénomènes qui leur sont associés), non seulement dans le bloc, mais aussi dans la couche. Nous exhibons des termes de la forme $\text{sinc}\left((k_{m1}^j \pm k_1)\frac{w}{2}\right)$, dans des intégrales portant sur la variable réelle k_1, qui vont limiter l'importance des termes relatifs à k_1 à l'extérieur du maximum de cette fonction. Ainsi, une condition nécessaire est que les modes de Love, en particulier le premier, soient inclus dans cet intervalle. Pour des largeurs de blocs $w_j < 60m$, $j \in \mathbb{B}$, pour les jeux de paramètres considérés (Nice et Mexico), et pour des fréquences inférieures à $\approx 1.5Hz$ dans le cas de Mexico, et inférieures à $\approx 5.0Hz$ dans le cas de la ville de Nice, **il est valide de ne considérer que le mode fondamental horizontal**, $k_{01} = 0$. Dans ces conditions, le champ dans les blocs admet un mouvement de type piston. Le nombre M ne semble pas, a priori, dépendre du nombre de blocs considéré, si chaque bloc (si $N > 1$) vérifie la condition précédente indépendamment des autres blocs. Pour une représentation correcte dans le cas de blocs de largeurs supérieures ou à de plus hautes fréquences, il sera nécessaire de considérer un nombre plus élevé de modes.

La seconde question était : quels sont les modes de la superstructure (blocs)?
Pour un bloc particulier, à chaque pseudo-mode, correspond une infinité de modes liés à sa hauteur. Ces modes sont soit des modes à base fixe (limite convergente), soit des modes à base rigide (limite divergente). Plus exactement, selon que nous considérons le problème d'un point de vue structurel ou géophysique, les modes des blocs apparaissent soit sous la forme de modes à base fixe, soit sous la forme de modes à base rigide. Ce sont ces modes qui interviennent, sous une forme modifiée par la présence de la structure géophysique, dans l'effet "site-ville".
Pour des blocs de hauteur raisonnable, $b_j \leqq 60m$, et pour les fréquences considérées, seuls les modes fondamentaux à base fixe et rigide des blocs, peuvent être excités. Les modes à base fixe, correspondant à des limites divergentes, sont très atténués et ne sont en général pas perceptibles.

La troisième question était : quelle est l'ordonnancement des modes des blocs (superstructure) par rapport à ceux du sous-sol (structure géophysique)?
Les modes à base fixe correspondant au pseudo-mode fondamental, apparaissent aux fréquences (milieu non-dissipatif) $\nu_{0n}^{\text{bf}} = \frac{c_S^2(2n+1)}{4b_j}$, alors que les fréquences de résonance du sous-sol, modes de Love, apparaissent à des fréquences proches de celles d'Haskell (toujours pour un milieu dissipatif) $\nu_l^{\text{Lo}} \approx \nu_l^{\text{Bo}} = \frac{c_S^1(2l+1)}{4h}$. Ainsi, pour les paramètres des matériaux considérés dans notre étude et pour des hauteurs raisonnables des blocs $b_j \leqq 60m$, il n'existe qu'un seul mode à base fixe, entre les deux premiers modes de Love. Dans la plage de fréquence considérée, $[0, 1.5Hz]$, la réponse sur "le mode fondamental" d'un bloc, c'est-à-dire la modélisation d'un bloc par un système masse-ressort

[90, 37, 117] est une approximation valide.

La quatrième question était : quels sont les modes de la structure globale, c'est-à-dire quels sont les modes de la structure réunissant la superstructure et la structure géophysique?
Les modes de la structure globale ne sont pas l'union des modes des structures qui la composent puisqu'ils ne satisfont pas la même relation de dispersion. Nous pouvons cependant exhiber deux représentations de celle-ci : une du point de vue de la superstructure et une du point de vue de la structure géophysique. Pour la première, les **modes** apparaissent comme une **perturbation des modes de bloc à base fixe** que nous appelons **modes de bloc à quasi-base fixe**. Du point de vue de la structure géophysique, les modes apparaissent comme une **perturbation des modes de Love** que nous appelons **modes quasi-Love**. Une relation proche de la relation de dispersion des modes à base rigide, intervient dans ces deux formulations, en particulier du point de vue géophysique. Les modes correspondant sont appelés modes de bloc à quasi-base rigide. Il faut ici distinguer les effets géométriques qui peuvent induire localement, c'est-à-dire à l'intérieur d'une sous-structure, une réponse importante sur les modes de celle-ci considérée indépendamment de l'ensemble, des réels effets résonants de la structure globale qui interviennent pour des fréquences légèrement différentes. D'autre part, certains modes d'une sous-structure peuvent ne pas être excités, même sous une forme modifiée, dans le cas de la configuration globale.

La cinquième question était : quelles sont les influences respectives de la largeur et de la hauteur des blocs?
La réponse à cette question est comprise dans celles des questions une et deux.

La sixième question était : quelles sont les modifications induites par la présence d'un bloc?
Cette question se réfère à la comparaison de la configuration comportant une couche d'étendue latérale infinie sur un demi-espace plus rigide, avec la configuration comportant un bloc en contact parfait avec la couche. Il faut distinguer **deux cas** : i) le cas d'un **séisme épicentral**, ii) le cas d'un **séisme régional**.
Dans le cas d'un **séisme proche**, le phénomène dominant, en l'absence du bloc, est un phénomène d'interférence d'ondes propagatives dans la couche. La présence du bloc induit localement une **excitation des modes de Love** et une excitation d'ondes de surface. Ainsi, il peut y avoir "scindage" très net du premier pic sur le sol : le pic d'interférence et le pic du mode fondamental de Love. Des modifications sont perceptibles, jusqu'à une distance relativement éloignée du bloc. Ainsi, des battements, un allongement de la durée et une amplification peuvent être relevés sur le sol, relativement loin du bloc, alors que relativement proche de celui-ci, seuls des battements sont relevés. Il apparaît qu'il y a désamplification, sur la totalité du signal, à une distance relativement proche du bloc. Par contre, à l'intérieur du bloc, nous relevons une amplitude plus importante et une durée plus élevée mais pas de battements.
Dans le cas d'un **séisme éloigné**, le phénomène dominant, en l'absence du bloc, est l'excitation de modes de Love dans la couche. La présence du bloc induit une **amplification des ondes de Love** mais également une **excitation locale d'ondes d'interférence** et de surface dans la couche. Le même phénomène de "scindage" peut donc se manifester sur le sol. Les conclusions sur l'amplitude et les durées sur le sol et dans le bloc sont relativement identiques à celles du cas d'un séisme épicentral.

La septième question était : quels phénomènes sont mis en jeu dans ce qui est communément appelé interaction sol-structure?
Le phénomène appelé **interaction sol-structure** semble se référer au cas des séismes épicentraux,

au sens où il est souvent expliqué à l'aide d'une configuration sollicitée par une onde plane. Pour autant, nous pouvons l'exhiber également dans la cas de séismes régionaux. La présence d'un bloc induit un décalage et une finesse plus importante du premier pic relatif à la structure géophysique. Cela est dû à une **modification des phénomènes mis en jeu**, c'est-à-dire, en l'absence du bloc, nous observons un pic correspondant à un maximum d'interférence, assez doux ; en présence du bloc, nous observons un pic correspondant à un phénomène résonant (**modes quasi-Love**), de finesse plus importante et légèrement décalé vers les basses fréquences, section II.1.1.

La huitième question était : quelles sont les modifications induites par la présence de plusieurs blocs?
Une première remarque concerne les modes de bloc à quasi-base fixe de chaque bloc considéré indépendamment. À l'intérieur de chaque bloc, ces "modes" semblent être excités. Pour autant, l'analyse modale relative à la structure globale, c'est-à-dire dans le cas de plusieurs blocs, semble n'exhiber qu'un seul mode, légèrement différent de ceux-ci et que nous appelons **mode multi-base fixe**. Ainsi, il n'est pas exclu, même si nous n'avons pas réussi à trouver un tel cas, qu'il puisse y avoir un "scindage" dû à ce mode de la structure globale et à un effet géométrique conduisant à un maximum de réponse sur le mode à base quasi-fixe d'un bloc considéré indépendamment. De même, il n'est pas exclu qu'il puisse y avoir, dans certaines configurations, plusieurs modes à multi-base fixe. Les modes quasi-Love et multi-base fixe semblent avoir une réponse plus importante que dans le cas d'un seul bloc. Sur le sol, entre les blocs, nous relevons une amplification, une augmentation de la durée et des battements.

La neuvième question était : quels phénomènes sont mis en jeu dans ce qui est communément appelé interaction structure-sol-structure?
Le "phénomène" mis en jeu dans l'**interaction structure-sol-struture** est un **couplage entre les blocs qui s'opère par l'intermédiare de la couche** et conduit à une modification des modes à quasi-base fixe de chaque bloc, en **modes multi-base fixe**, section II.2.3. De façon plus pratique, la présence d'un bloc va induire l'excitation d'un mode quasi-Love. L'onde correspondante va se propager dans la couche et va interagir avec les autres structures, en particulier les autres blocs. Il en va de même pour chaque bloc, cela induisant un couplage entre ceux-ci.

La dixième question était : quelle est l'influence de la distance séparant les blocs?
La **distance séparant les blocs intervient surtout dans le phénomène d'interaction structure-sol-structure**. Elle intervient **de façon peu claire dans une formulation intégrale**, ce qui tendrait à prouver ce qui est énoncé dans [90]. Pis encore, nous ne pouvons pas déterminer la distance pour laquelle les blocs réagissent indépendamment. Une hypothèse est que le couplage entre deux blocs (interaction structure-sol-structure) se réalisant par l'intermédiare de la couche, les ondes de Love excitées, ou "surexcitées", par la présence d'un bloc vont interagir avec l'autre bloc (et inversement). Or, ces ondes se propagent sur une distance importante, si bien que le couplage entre ces blocs devrait s'opérer même si ils sont éloignés l'un de l'autre. C'est, entre autre, pour faire **apparaître plus clairement cette variable**, que nous avons réalisé l'étude d'une **configuration de type réseau**. En particulier, il semble que l'influence de la distance entre les blocs ait été qualifiée de peu claire ou ne modifiant que peu les réponses car les blocs sont proches les uns des autres dans [90, 37].

La onzième question était : quelle est l'influence de la position de la source?
La réponse à cette question réside dans la section II.1.1, et dans la réponse à la quatrième question.

La douzième question était : quelle est la validité de la représentation d'un groupe de blocs par un réseau infini?
Cette question est double. D'abord il apparaît, si l'on regarde les plans ou des vues de beaucoup de villes, que l'**urbanisation est quasi-périodique, au moins à l'échelle d'un quartier** (Mannheim ou le quartier central de Barcelone sont de très beaux exemples). Ainsi, l'interrogation ne porte donc pas sur la réalité d'un tel modèle mais sur l'**aspect fini** d'une ville par rapport à l'**aspect infini** d'un réseau. Différents cas peuvent se présenter. Les phénomènes sont correctement représentés pour tous les blocs, si les modes de bloc à base quasi-fixe sont excités et les modes quasi-Love sont des "Leaky modes". Dans le cas plus général où les modes quasi-Love sont excités, la réponse est **correctement représentée si les blocs sont espacés d'une distance relativement importante**, de sorte que les **modes de Cutler-Haskell ont une périodicité fréquentielle importante**, et ce sur les blocs localisés au centre de la configuration finie. Il serait intéressant de voir si une telle configuration peut être représentative de ce qui se passerait dans de grands immeubles, espacés d'une grande distance, entre lesquels sont construits de petits bâtiments : par exemple, cela semble être le cas de Beijing. Par contre, les phénomènes sont **mal représentés**, au sens où des **modes liés au caractère fini du réseau** sont excités lorsque la largeur de la configuration est peu importante, dans le cas où la **distance entre les blocs est faible**. C'est peut-être pour cette raison que pour des configurations où les blocs sont proches, la distance entre ceux-ci n'intervient pas de façon claire [90], puisque c'est la **largeur du réseau** qui peut intervenir dans ce cas. Effectivement, dans le cas de blocs proches, les pics correspondants aux **modes de Cutler-Haskell sont éloignés** les uns des autres, si bien que sur la plage de fréquences excitées, $[0, 1.3Hz]$, seul le mode fondamental intervient (mais le pic correspondant est très proche de celui du mode de Love). Dans [37], c'est un réseau infini qui est considéré, si bien que ces modes ne se manifestent pas et qu'aucun mode lié à l'aspect fini du réseau n'est excité.

La treizième question était : quels sont les modes d'un réseau infini?
Nous rencontrons selon les cas, des modes quasi-Love (Cutler-Love), des modes quasi-base rigide mais aussi des **modes Cutler-Haskell** qui sont dus à l'**aspect périodique** de la configuration. Ces derniers conduisent, dans le cas d'une périodicité spatiale relativement grande, à un **"scindage" du premier pic induisant des battements dans le domaine temporel**.

La quatorzième question était : quels sont les modes d'un réseau fini?
Ceux-ci semblent être relativement proches de ceux d'une configuration infinie. Seul, le cas où les modes quasi-Love sont excités et la périodicité spatiale ainsi que le nombre de blocs sont faibles, laisse apparaître des modes liés au caratère fini du réseau, relativement comparables aux modes Cutler-Haskell. Pour autant, à l'échelle d'une ville, l'étendue spatiale du réseau est faible, inférieure à $3.10^3 m$. Pour un nombre de blocs plus important, c'est-à-dire une étendue spatiale plus importante, la réponse au centre de la configuration semble être correctement représentée par celle obtenue dans le cas du réseau infini. Ce phénomène est en fait dû à la présence de la couche.

La quinzième question était : quelle est l'influence de la distance séparant les blocs d'un réseau?
La réponse à cette question réside dans les trois précédentes réponses. Une précision reste à apporter concernant la représentation correcte des phénomènes. Celle-ci est d'autant plus correcte que le nombre de blocs considéré est important. Par contre, il apparaît que ce n'est ni directement le nombre de blocs qui entre en jeu dans notre cas (c'est-à-dire avec une couche), ni une densité de blocs (liée à la distance les séparant), mais un rapport entre la largeur totale de la configuration

finie sur une quantité relative à un ou des phénomènes se localisant dans la couche (mode quasi-Love). En d'autre termes, une **représentation correcte des résultats est liée à un rapport entre la surface occupée par la ville sur une quantité proche de la longueur d'onde des ondes associées aux modes de Cutler-Love** (phénomène proche de celui exposé en réponse à la dixième question).

Nous avons mené l'étude théorique et numérique, dans le cas des mouvements anti-plans, à l'échelle locale -un bâtiment-, à l'échelle intermédiare -deux bâtiments- et à l'échelle globale -réseau fini et infini-. D'une façon générale il en ressort que **les phénomènes liés à une échelle** (de plus en plus complexes au fur et à mesure que l'échelle est importante même si ils ont un lien fort entre-eux) **sont en réalité découplés chacun d'une échelle à l'autre**. En particulier, les modes d'une configuration comportant un bâtiment ne sont pas ceux d'un groupe de bâtiments, eux-mêmes n'étant pas représentatifs de ceux d'un réseau. Ces trois études à différentes échelles sont toutes intéressantes, et méritent que l'on s'y attache, mais nous avons montré, à faible coût(avantage de la théorie), qu'il est impossible de souhaiter caractériser les mouvements du sol en milieu urbain dense, à partir de l'étude d'un seul bâtiment.

Chapitre 3

Étude de quelques cas "réalistes"

À la lumière de l'étude des effets régionaux et surtout site-ville, chapitre II.1, et II.2, nous nous intéressons ici à des cas plus réalistes de ville et de sous-sol. Dans un premier temps, nous montrons que l'étude de l'effet site-ville peut-être conduite avec l'aide d'un modèle comportant une couche homogène, alors qu'en réalité cette ville est construite sur un bassin relativement étendu, présenté dans [81]. Dans un second temps, nous nous intéressons à une configuration peu étendue comportant 10 blocs, non-identiques, non-équidistants et montrons que la distance séparant ces blocs n'influe que peu sur les résultats présentés dans [82] et publié dans [83].

3.1 Validation de l'approximation couche d'étendue latérale infinie

Nous avons considéré, dans les développements théoriques des chapitres II.1 et II.2, une couche d'étendue latérale infinie, sur un substratum plus rigide, car les développements théoriques pour cette configuration sont "aisés" et possibles. Une configuration plus proche de la réalité consiste en une couche d'étendue latérale finie, c.à.d. modèle d'un bassin. Dans ce cas, les développements théoriques "exacts" ou approchés ne sont possibles que pour des géométries de bassin spécifiques : un bassin semi-circulaire [187], un bassin rectangulaire. Nous allons dans cette section, considérer un modèle plus conforme à la réalité composé d'un bassin semi-ovoïdal de largeur variable w_b, sur lequel est construite une ville modélisée par $N = 11$ blocs, et de largeur w_c, figure II.3.1.

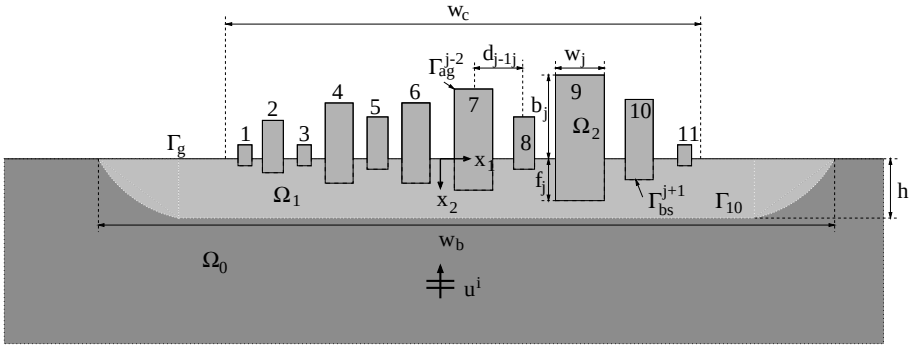


FIG. 3.1 – *Coupe d'une ville 2D construite sur un bassin*

Chaque bloc, de largeur w_j, $j = 1, 2, ..., 11$, occupant un domaine Ω_j, tel que $\Omega_2 = \cup\Omega_j$, est enterré d'une profondeur f_j, $j = 1, 2, ..., 11$, (supposée modéliser la fondation) dans le domaine Ω_1, dépendant de la hauteur du bloc b_j, $j = 1, 2, ..., 11$ considéré. La surface libre Γ_f est composée d'une portion horizontale Γ_g, le sol à proprement parler, et d'une portion délimitant les bâtiments Γ^j_{ag}, homogénéisés pour les besoins de l'étude. Le domaine Ω_1 est d'étendue latérale finie w_b et d'épaisseur maximale h. Ce bassin est en contact, au niveau de l'interface convexe Γ_{10}, avec le domaine semi-infini Ω_0. Le matériau M^2 occupant Ω_2 est en contact parfait avec le matériau M^1 occupant la couche molle au niveau des interfaces Γ^j_{bs}, $j = 1, 2, ...11$. Le matériau M^1 est en contact parfait avec le matériau M^0 occupant Ω_0 au niveau de l'interface Γ_{10}. Les matériaux M^2, M^1, et M^0 sont supposés linéaires, isotropes, homogènes, et initialement au repos. Nous supposons que M^0 est non-dissipatif, alors que M^1 et M^2 sont dissipatifs.

M^0 est caractérisé par $\rho^0 = 2200kg.m^{-3}$, $c^0_S = 1000m.s^{-1}$, et $Q^0_S = \infty$, M^1 est caractérisé par $\rho^1 = 1800kg.m^{-3}$, $c^1_S = 200m.s^{-1}$, et $Q^1_S = 25$, et M^2 est caractérisé par $\rho^2 = 325kg.m^{-3}$, $c^2_S = 100m.s^{-1}$, et $Q^2_S = 50$.

Nous étudions ici le cas de la **ville de Nice**, de sorte qu'il est réaliste d'exciter la configuration avec une onde plane. Ainsi, l'excitation sismique est délivrée au site sous la forme d'une **onde plane polarisée en cisaillement horizontal** (ondelette de type Ricker telle que $\nu_0 = 1.0Hz$) se propageant initialement dans Ω_0. Nous traitons donc un problème 2D, indépendant de le coordonnée x_3. Dès lors, l'origine O du repère cartésien x_1x_2 attaché à la configuration est située sur le sol, tel que x_2 croît avec la profondeur.

De façon à simplifier l'étude, nous considérons le bassin symétrique par rapport à l'origine O de ce

repère, la disposition des blocs, elle, étant quelconque. Les blocs ont pour caractéristiques géométriques :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w_j(m)$	10	10	10	20	10	20	20	10	30	20	10
b_j (m)	10	20	10	30	20	30	40	20	40	30	10
f_j (m)	5	10	5	15	10	15	15	10	20	10	5
d_{jj+1} (m)	30	30	25	25	35	40	35	30	40	35	
ν_{00}^{bf} (ν_{01}^{bf}) (Hz) sans fondation	2.5	1.25	2.5	0.83	1.25	0.83 (2.5)	0.625 (1.875)	1.25	0.625 (1.875)	0.83 (2.5)	2.5

si bien que la largeur de la ville est $w_c = 360m$. Cela représente donc une densité urbaine $\theta_B = 0.55$ (en 2D, rapport de la somme des largeurs de chaque bloc sur la largeur totale de la ville), ce qui correspond à la densité urbaine d'un centre ville, [37]. Nous varions la largeur du bassin w_b de deux à sept fois w_c. Il est naturel de penser que plus le bassin est large, plus les résultats seront proches de ceux obtenus pour une couche. Nous voulons analyser à quel point les résultats sont modifiés par le caractère fini du bassin. La hauteur maximale du bassin ici prise, égale à la hauteur de la couche, est de $h = 50m$.

Remarque : Certains blocs admettent des fréquences de mode de bloc à base fixe autre que fondamentale dans la plage de fréquences excitées par la source. Ces blocs vont donc "répondre" sur d'autres modes que leur fondamental.

Commençons par étudier le cas sans bloc de façon à voir comment le champ sans bloc est modifié par le caractère fini du bassin, par rapport au cas d'une couche infinie.

3.1.1 Comparaison des réponses sur le sol dans le cas du bassin et dans le cas d'une couche

Nous comparons les déplacements dans le cas du bassin et dans le cas d'une couche (étendue latérale infinie), dans un premier temps, sans bloc. Effectivement, le caractère fini du bassin induit des modifications, si celui-ci est relativement peu large. Ces modifications s'estompent au fur et à mesure que nous élargissons le bassin. Nous considérons ici le cas où la largeur du bassin est $3 * w_c$, c'est-à-dire un bassin de largeur $w_b = 1080m$.

Nous enregistrons le déplacement entre les deux extrémités du bassin. Le bassin étant symétrique et l'excitation étant délivrée sous la forme d'une onde plane SH en **incidence normale**, le champ de déplacement est donc symétrique, dans le cas sans bloc. Le sismogramme synthétique est présenté figure II.3.2. Le bassin est centré à l'abscisse $1750m$.

Nous voyons clairement des ondes générées à chaque extrémité du bassin et se propager transversalement [148]. Des phénomènes similaires s'observent en électromagnétisme [182]. Ces ondes sont ensuite réfléchies sur le bord opposé. Ainsi, le caractère fini du bassin (peu large) induit des battements au sein même du bassin, du fait des multiples réflexions d'ondes se propageant transversalement et générées aux extrémités, [156]. Certains auteurs, [18], ont suggéré de rendre compte de l'effet des extrémités des bassins par des sources. Il faut préciser que ces sources ne peuvent être que des sources induites et par conséquent ne peuvent qu'induire un réarrangement spectral

différent du cas où elles ne sont pas présentes. Pour autant, selon certains auteurs, [18], ces sources vont induire l'excitation d'ondes de surface, celles-ci se propageant dans la couche. Il est indéniable que localement, ces sources induites génèrent des ondes de surface, à la manière d'un bloc, section II.1.1.10, II.2.2. Pour autant, un calcul rapide de la vitesse des ondes transversales, montre que ces ondes se propagent à une vitesse de $c_S \approx 350 m.s^{-1}$. Cette vitesse est comprise entre la vitesse des ondes de cisaillement dans le substratum $c_S^0 = 1000 m.s^{-1}$, et dans le bassin $c_S^1 = 200 m.s^{-1}$. Cela signifie que ces **ondes sont des ondes évanescentes dans le substratum et en aucun cas dans la couche**. Puisqu'elles ont des caractéristiques identiques à celles des ondes de Love, mais qu'elles ne peuvent-être qualifiées de la sorte (cette terminologie se référant à la configuration de couche), nous les nommerons **ondes pseudo-Love**.

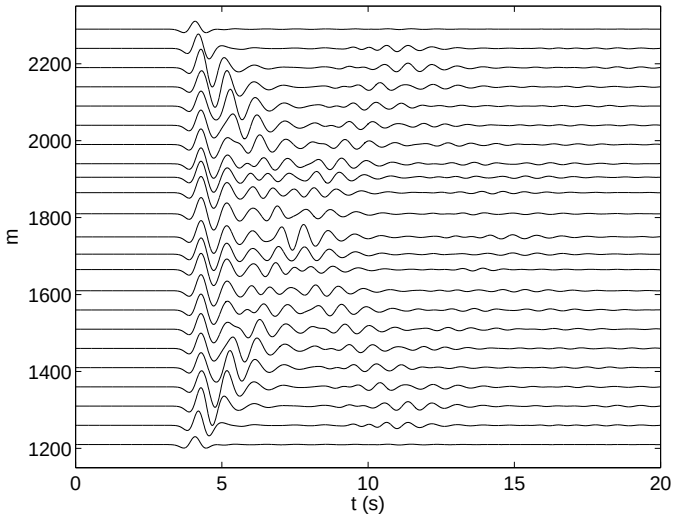


FIG. 3.2 – *Sismogramme synthètique. En abscisse le temps et en ordonnée la position du point de calcul sur le sol.*

Nous comparons les sismogrammes de la configuration avec couche de même épaisseur et de même composition que celles du bassin (seul les ondes SOP1 peuvent être excitées ici puisque l'excitation est délivrée sous la forme d'une onde plane) avec ceux enregistrés dans le cas du bassin, sur la figure II.3.3.

D'une façon générale, nous observons des **battements et un allongement de la durée**, mais **pas d'amplification** dans le cas d'un bassin par rapport au cas de la couche. Cet allongement et les battements sont dus aux ondes pseudo-Love qui se propagent transversalement à l'intérieur du bassin. À l'extrémité du bassin, le déplacement relevé est quasiment le champ incident. Les battements et l'allongement de le durée sont maximum au centre du bassin.

Dans le domaine fréquentiel, figure II.3.4, les battements se traduisent par des pics satellites pour des fréquences supérieures à celles des premiers pics, [31]. Ce dernier apparaît pour une fréquence légèrement inférieure à la fréquence d'Haskell (pic dans le cas de la couche), ce qui est caractéristique de l'excitation d'un mode similaire aux modes de Love.

Ainsi, il apparaît très clairement qu'**en aucun cas, nous ne pouvons approcher les résultats obtenus dans le cas d'un bassin, par ceux obtenus dans le cas d'une couche**, pour des largeurs de bassin faibles. Qu'en est-il lorsque nous adjoignons des blocs?

.

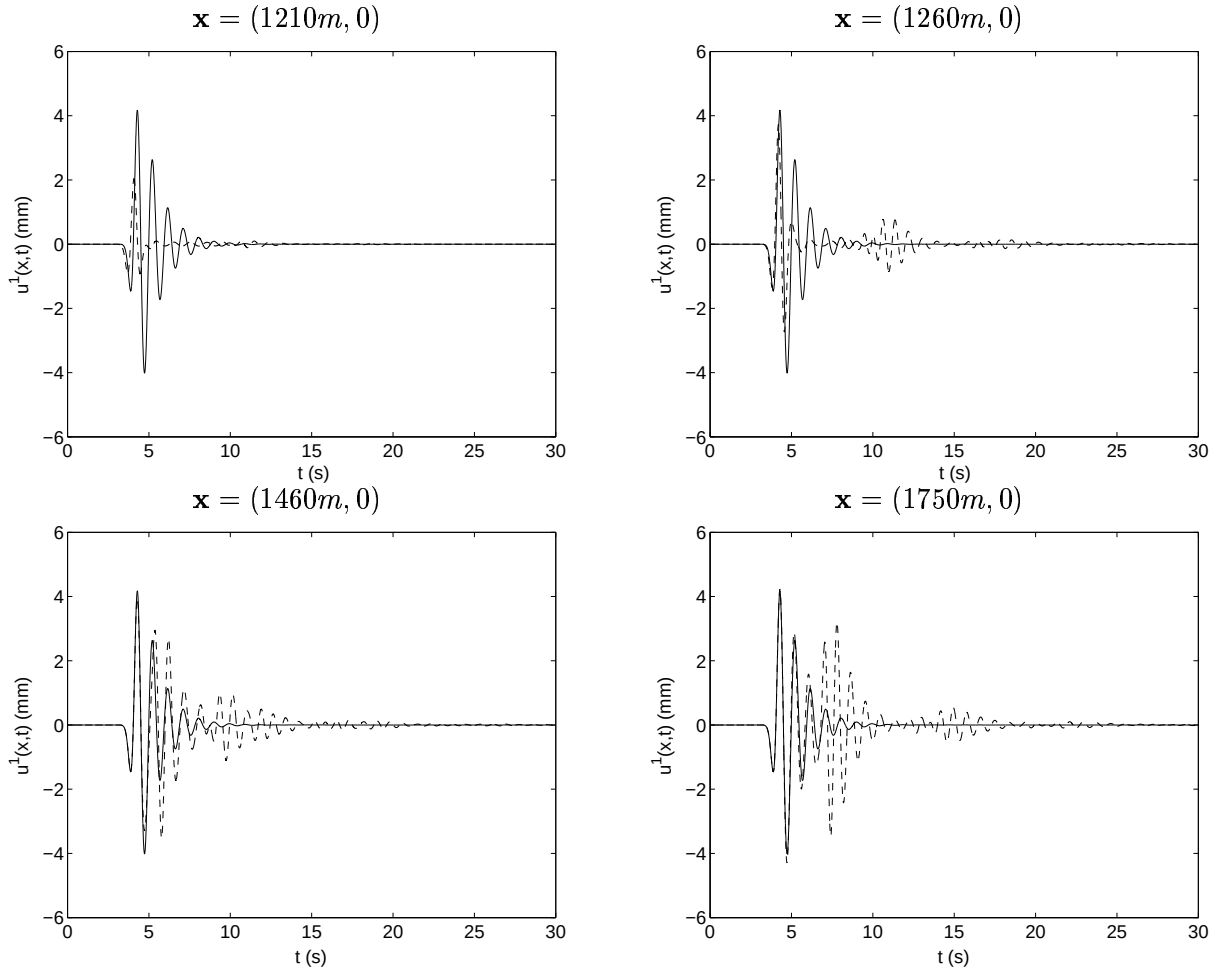


FIG. 3.3 – *Les courbes en trait continu correspondent aux déplacements dans le cas d'une couche, les courbes en pointillés correspondent aux déplacements enregistrés dans le cas du bassin. En haut à gauche, dans l'angle du bassin, en haut à droite dans la courbure du bassin, en bas à gauche au niveau du bassin, et en bas à droite au milieu du bassin*

.

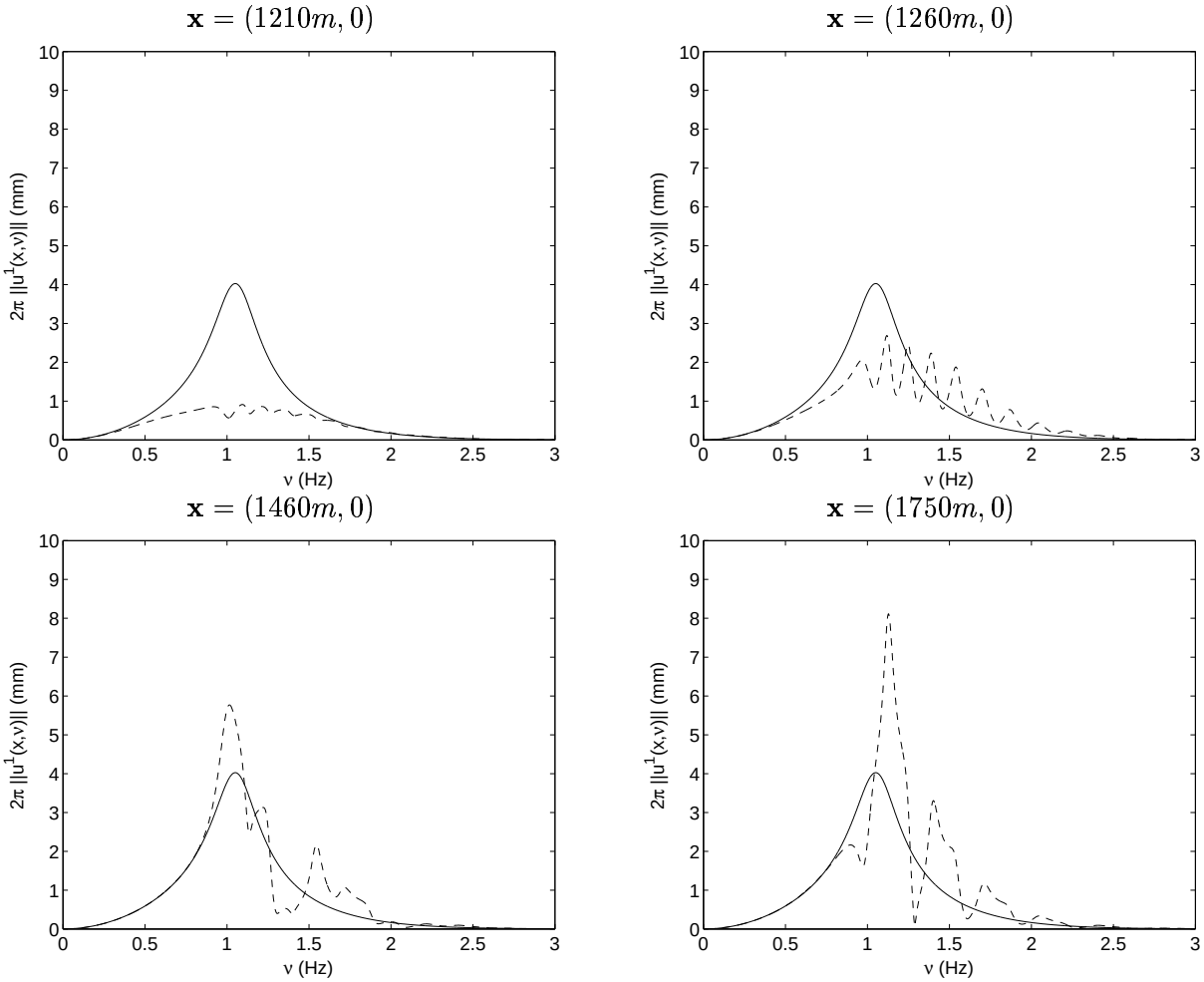


FIG. 3.4 – *Les courbes en trait continu correspondent à 2π fois le module des spectres des déplacements dans le cas d'une couche, les courbes en pointillés correspondent aux spectres des déplacements enregistrés dans le cas du bassin. En haut à gauche, dans l'angle du bassin, en haut à droite dans la courbure du bassin, en bas à gauche au niveau du bassin et en bas à droite au milieu du bassin*

3.1.2 Comparaison des résultats en présence de blocs

Nous varions linéairement la largeur du bassin w_b de $2w_c$ à $7w_c$. La figure II.3.5 représente les sismogrammes au sommet des blocs 3 et 8 et la figure II.3.6 les sismogrammes sur le sol entre les blocs 7 et 8 et à $20m$ du premier bloc.

Les sismogrammes enregistrés pour les bassins de différentes largeurs, ne présentent ni amplification, ni augmentation de durée par rapport à ceux enregistrés pour une couche. Cela signifie que les effets sont majoritairement dus à la présence des blocs et non au caractère fini du bassin. Par contre, les sismogrammes présentent des battements de plus forte amplitude, qui sont dus à des ondes transversales réfléchies sur les bords du bassin, et/ou diffractées aux angles de ce dernier.

La comparaison est plus parlante en ce qui concerne les spectres correspondants, figure II.3.7, et II.3.8.

La convergence des résultats pour les bassins lorsque nous augmentons la largeur de ceux-ci, vers les résultats correspondants au cas d'une couche, semble se réaliser de façon non linéaire. Des oscillations, voire des pics supplémentaires, sont observés dans le cas de bassins avec une faible largeur, et s'estompent rapidement. Ils sont la traduction des ondes réfléchies transversalement et diffractées par les extrémités du bassin.

Ainsi, il apparaît que l'**hypothèse d'une couche** (d'étendue latérale infinie) **pour l'étude de l'effet "site-ville" est tout à fait admissible car les résultats sont majoritairement, dans le cas d'un bassin, dus à la présence des blocs**, et non au caractère fini du bassin. Ceci est faux dans le cas d'une étude en absence de bloc, pour de faibles largeurs du bassin, car les modes de Love ne peuvent être excités par une onde plane incidente. Pour autant, il apparaît que les résultats en présence d'une ville de largeur w_c dans le cas d'un bassin d'une largeur w_b égale à 6 où 7 fois w_c, sont très proches de ceux obtenus dans le cas d'une couche. Cela signifie que dans le cas où une ville est construite sur un bassin bien plus large que la largeur de la ville, nous pouvons approcher les résultats par ceux obtenus dans le cas d'une couche, à l'excitation près.

.

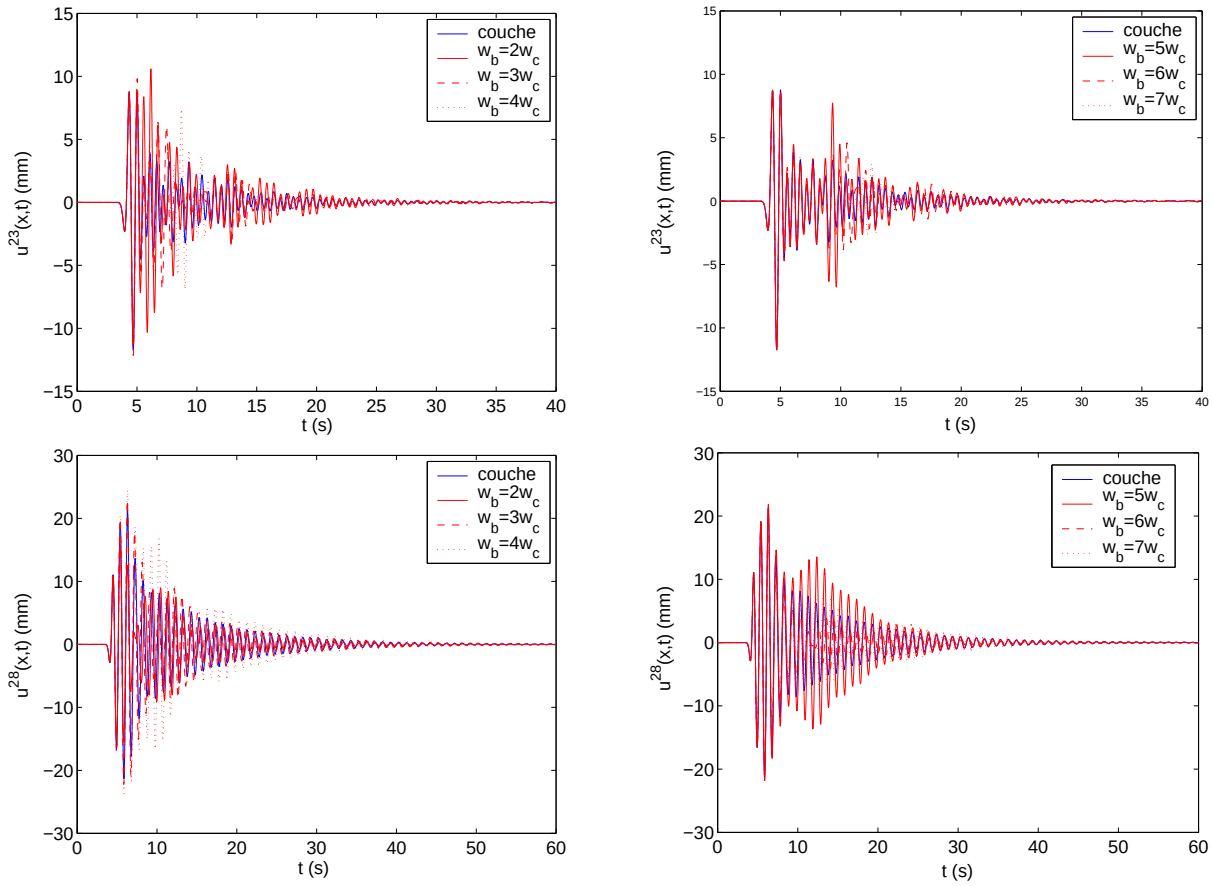


FIG. 3.5 – *Déplacements au sommet du bloc 3, première ligne et au sommet du bloc 8, seconde ligne. La première colonne correspond à la comparaison des déplacements pour une couche et w_b égale à 2, 3 et $4w_c$, alors que le seconde colonne correspond à la comparaison des déplacements pour une couche et w_b égale à 5, 6 et $7w_c$*

.

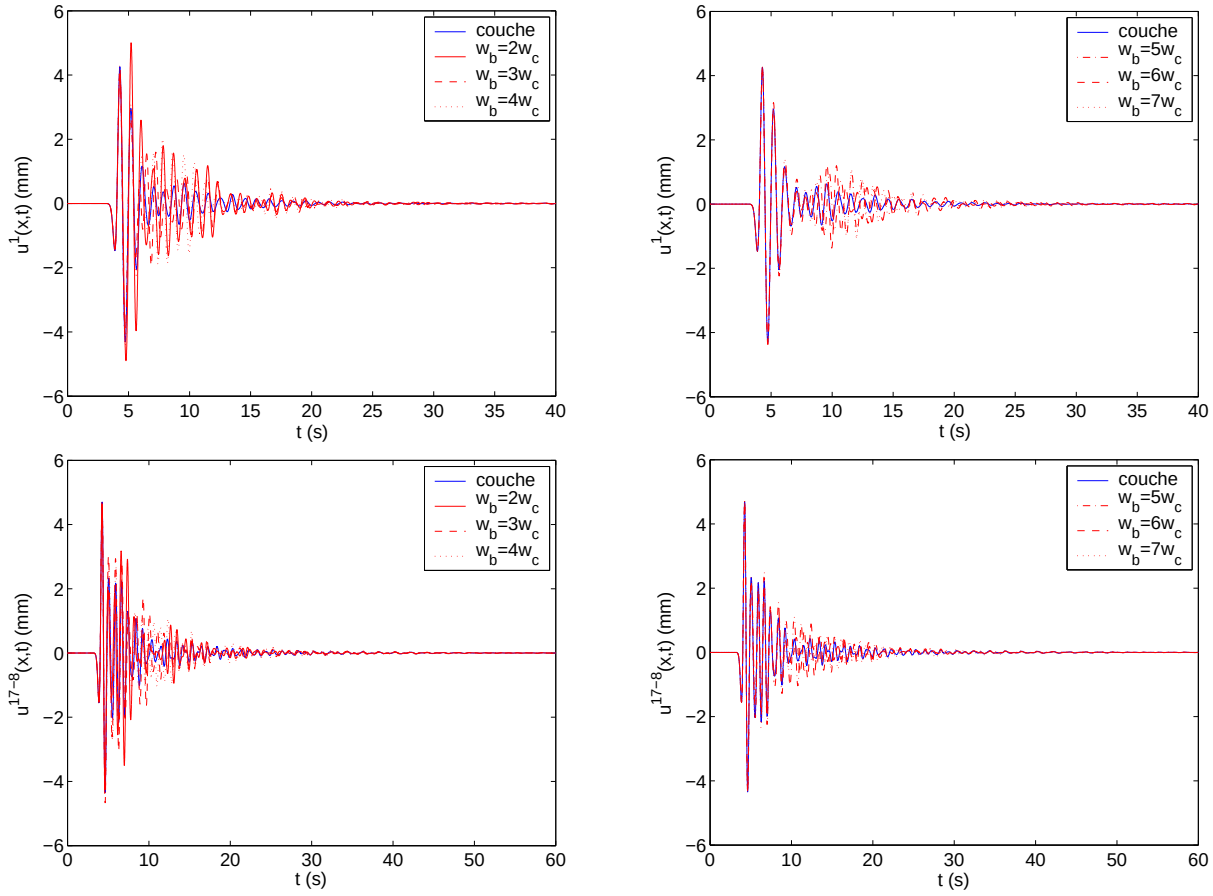


FIG. 3.6 – *Déplacements à 20m du premier bloc, premier ligne et entre les blocs 7 et 8, seconde ligne. La première colonne correspond à la comparaison des déplacements pour une couche et w_b égale à 2, 3 et $4w_c$ alors que la seconde colonne correspond à la comparaison des déplacements pour une couche et w_b égale à 5, 6 et $7w_c$*

.

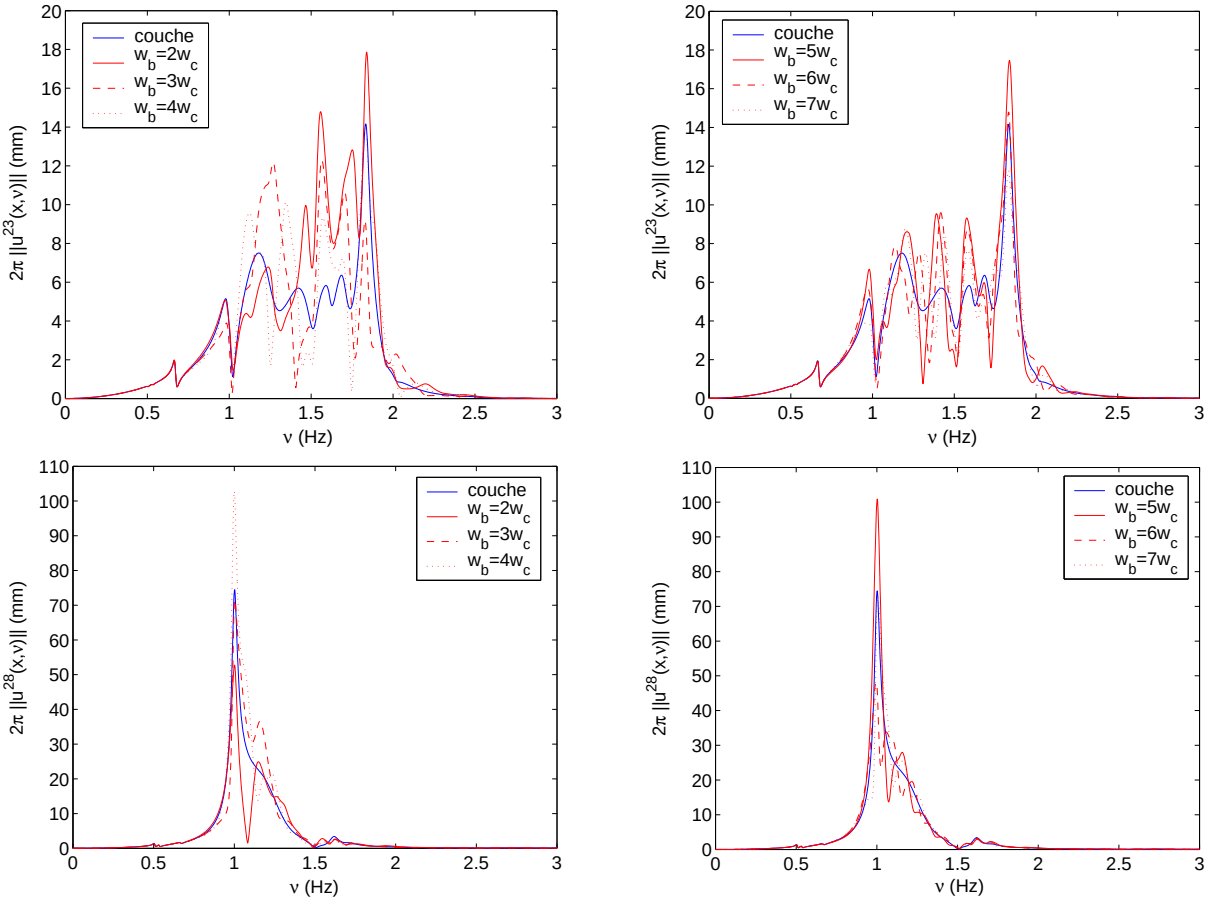


FIG. 3.7 – 2π *fois le module des spectres des déplacements au sommet du bloc 3, première ligne et au sommet du bloc 8, seconde ligne. La première colonne correspond à la comparaison des spectres pour une couche et* w_b *égale à* 2, 3 *et* $4w_c$ *alors que la seconde colonne correspond à la comparaison des spectres pour une couche et* w_b *égale à* 5, 6 *et* $7w_c$

.

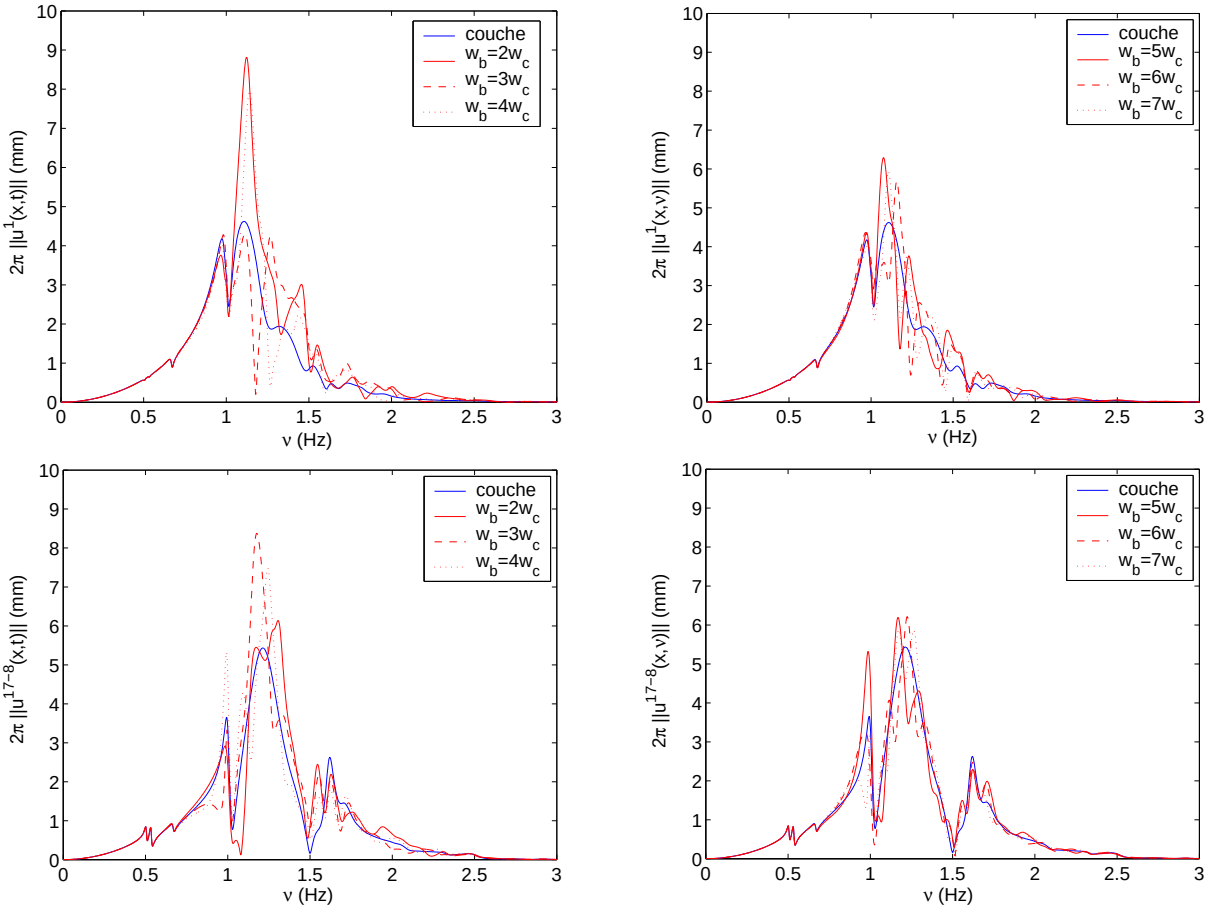


FIG. 3.8 – 2π *fois le module des spectres des déplacements à* $20m$ *du premier bloc, première ligne et entre les blocs* 7 *et* 8*, seconde ligne. La première colonne correspond à la comparaison des spectres pour une couche et* w_b *égale à* 2, 3 *et* $4w_c$ *alors que la seconde colonne correspond à la comparaison des spectres pour une couche et* w_b *égale à* 5, 6 *et* $7w_c$

3.2 Exemple d'une ville de 10 bâtiments non-équidistants

Compte tenu de la conclusion de la section précédente, nous étudions le réponse d'une ville assez réaliste, peu étendue, et composée de 10 bâtiments de géométries non-identiques et non-équidistants, avec fondations, construite sur une couche d'étendue latérale infinie. La configuration est représentée figure 3.9.

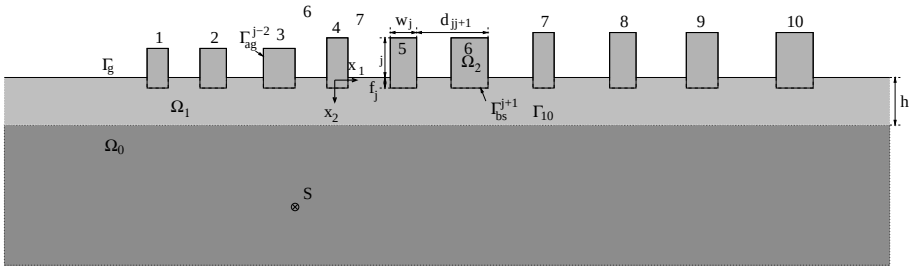


FIG. 3.9 – *Coupe de la configuration retenue dans le plan sagittal*

La description géométrique de la configuration est similaire à celle du chapitre précédent dans le cas d'une couche d'étendue latérale infinie. Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont modifiées de façon à ce qu'elles soient représentatives de la ville de Mexico. Le matériau M^0 a pour caractéristiques $\rho^0 = 2000kg.m^{-3}$, $c_S^0 = 600m.s^{-1}$, et $Q_S^0 = \infty$, le matériau M^1 a pour caractéristiques $\rho^1 = 1300kg.m^{-3}$, $\left(c_S^1\right)_R = 60m.s^{-1}$, et $Q_S^1 = 30$, et le matériau M^2 a pour caractéristiques $\rho^2 = 325kg.m^{-3}$, $\left(c_S^2\right)_R = 100m.s^{-1}$, et $Q_S^2 = 100$.

Le tableau ci-dessous regroupe les caractéristiques géométriques des blocs. De façon à analyser l'influence de la distance séparant deux blocs adjacents dans le cas d'une ville finie dont les blocs sont de caractéristiques géométriques différentes, nous allons considérer trois cas différents pour lesquels l'espacement entre les blocs est réduit de moitié d'un cas à l'autre. Le cas $\mathcal{C}^1$, considéré dans [180], mais ici avec les matériaux M^1 et M^2 dissipatifs, correspond à l'espacement le plus important, les cas $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^3$ correspondant chacun à une décroissance de la distance d_{jj+1} séparant les blocs j et $j+1$, $j = 1, 9$.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_j	30	40	50	30	40	60	30	40	50	60
b_j	50	50	50	60	60	60	70	70	70	70
f_j	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
d_{jj+1}^1	105	135	100	115	145	100	135	125	115	
d_{jj+1}^2	65	85	70	75	95	70	75	85	85	
d_{jj+1}^3	45	65	50	55	75	50	45	65	65	
$\nu_{00}^{\mathrm{bf}} - \nu_{01}^{\mathrm{bf}}$ (ν_{02}^{bf}) (Hz) sans fondation	0.5-1.5	0.5-1.5	0.5-1.5	0.42-1.25	0.42-1.25	0.42-1.25	0.36-1 (1.78)	0.36-1 (1.78)	0.36-1 (1.78)	0.36-1 (1.78)

Ceci conduit à un taux d'urbanisation θ_b de 0.37, 0.54, et 0.71. La profondeur des fondations est ici constante, égale à $10m$, et l'épaisseur de la couche $h = 45m$.

Remarque : Certains blocs admettent des fréquences de mode de bloc à base fixe autre que

fondamentale dans la plage de fréquences excitée par la source. Ces blocs vont donc "répondre" sur d'autres modes que leur fondamental.

3.2.1 Méthode d'analyse

Nous adopterons la méthode d'analyse décrite dans [180]. Elle consiste à comparer des quantités liées à de l'énergie cinétique en l'absence et en présence de la ville modélisée. Pour ceci, les auteurs de [180] ont introduit la notion d'**indice de vulnérabilité** (noté R). Deux types d'indice de vulnérabilité sont distingués : un indice relatif à une vitesse dans un bloc et un indice relatif à une vitesse sur le sol entre deux blocs adjacents.

Le premier consiste à comparer une quantité liée à de l'énergie cinétique à la base d'un hypothétique bloc, en l'absence de bloc, avec celle au sommet du bloc, précédemment hypothétisé, en présence des blocs :

$$R_j^i = \frac{\int_0^T |\partial_t u(\mathbf{x}^j, t)|^2 dt}{\int_0^T |\partial_t u(\mathbf{x}_0^j, t)|^2 dt}; \forall j = 1, ..., 10;\ i = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

et la seconde à comparer une quantité liée à de l'énergie cinétique entre deux hypothétiques blocs, en l'absence de bloc, avec celle entre ces blocs, précédemment hypothétisés, en présence des blocs :

$$R_{j,j+1}^i = \frac{\int_0^T |\partial_t u(\mathbf{x}^{j,j+1}, t)|^2 dt}{\int_0^T |\partial_t u(\mathbf{x}_0^{j,j+1}, t)|^2 dt}; \forall j = 1, ..., 9;\ i = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

où l'exposant i se réfère au cas $\mathcal{C}^i$, l'indice 0 au déplacement dans la configuration sans bloc.

Dans ces deux expressions T est tel que la vitesse est quasiment nulle pour $t \geq T$.

De façon plus explicite, les points pour lesquels ces quantités sont calculées, sont représentés figure 3.10.

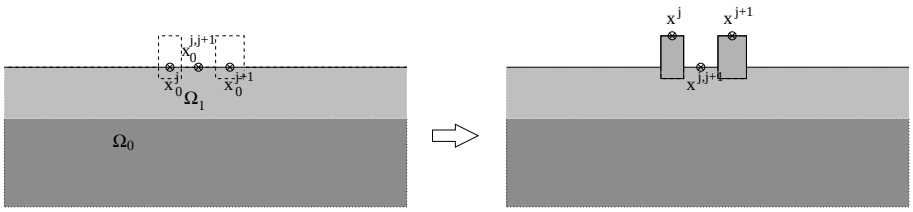


FIG. 3.10 – *Points de comparaison pour le calcul des Indices de vulnérabilité*

3.2.2 Discussion

La totalité des résultats, évolution de la vitesse et son spectre, est reportée en annexe D. Certains résultats sont extraits pour illustrer la discussion, figure II.3.11.

D'une manière générale, nous sommes en présence de l'excitation des modes quasi-Love. Nous pouvons repérer les modes quasi-base rigide de chaque bloc, à l'aide des fréquences coupées à leur base, $\nu_0^{qbr} \approx 0.5Hz$ pour les blocs 1, 2 et 3, $\nu_0^{qbr} \approx 0.4167Hz$ pour les blocs 4, 5 et 6 et $\nu_0^{qbr} \approx 0.3571Hz$ pour les blocs 7, 8, 9 et 10. Les autres pics résultent de l'interaction entre les blocs. Ces résultats

peuvent également être perçus comme une perturbation d'un cas périodique, à largeur finie. Alors, la période moyenne des différents cas est $d^1_{\text{moy}} = 76,67m$, $d^2_{\text{moy}} = 36,67m$ et $d^1_{\text{moy}} = 15m$, avec des blocs de caractéristiques moyennes $b_{\text{moy}} = 61m$ et $w_{\text{moy}} = 43m$. C'est-à-dire que nous sommes dans le cas où les modes liés au caractère fini du réseau seraient dominants. Nous observons d'ailleurs sur les spectres, des pics "supplémentaires" après le mode quasi-Love qui sont de moins en moins oscillants au fur et à mesure que nous rapprochons les blocs. Ceci n'a pourtant pas d'effet notable sur les déplacements [90], ce qui tendrait à prouver que les phénomènes réellement prépondérants sont des phénomènes complexes d'interaction entre blocs. Une hypothèse est que le phénomène prépondérant soit lié à l'excitation d'un mode en rapport avec le caractère fini de la configuration, si bien que la distance séparant les blocs n'intervient pas directement.

Quoiqu'il en soit, les sismogrammes présentent une **amplification notable par rapport au cas sans bloc**, des **battements prononcés**, et admettent des **durées** avoisinant les $150s$. Ces résultats tendent donc à prouver que dans le cas d'une ville dense, les phénomènes d'interaction entre bâtiments, couplés avec un phénomène de périodisation plus où moins important et à caractère fini, sont les phénomènes prépondérants et donnent lieu à l'effet "site-ville". Pour que ces phénomènes aient lieu de façon prononcée, un nombre de blocs supérieur à 2 est nécessaire.

Les indices de vulnérabilité de chaque bloc sont reportés dans le tableau ci-dessous :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R^1_j	7.5	7.1	4.0	6.7	5.9	3.2	6.0	5.4	4.0	3.3
R^2_j	4.2	9.5	5.9	5.6	7.6	4.0	5.0	6.6	4.0	2.7
R^3_j	2.6	6.2	4.9	3.8	6.1	4.8	5.7	7.5	4.6	2.7

La totalité des **indices de vunérabilité est très supérieure à** 1, c'est-à-dire que l'énergie cinétique normalisée par rapport à la densité du milieu est nettement plus importante lorsque les blocs sont présents. Les effets du séisme sont donc plus dévastateurs (même si les efforts et donc l'endommagement les plus importants sont localisés aux lieux où les déplacements sont le moins importants -il faudrait prendre en compte des effets non-linéaires-), du fait de la présence et/ou de l'organisation des blocs. Les blocs subissant la plus forte augmentation de l'énergie cinétique normalisée diffèrent d'un cas d'espacement à un autre, ce qui prouve que l'effet site-ville n'est pas dû stricto-sensu au fait qu'un bloc ait une fréquence fondamentale proche de la "résonance" de la structure géophysique, mais est un effet relativement global d'une organisation donnée. Les indices de vulnérabilité moyens des différents cas sont à peu près identiques, seuls les indices minimum et maximum varient largement. Cela signifie que du point de vue de l'effet, **il existe des configurations plus dangereuses que d'autres, avec une grande variabilité des résultats**.

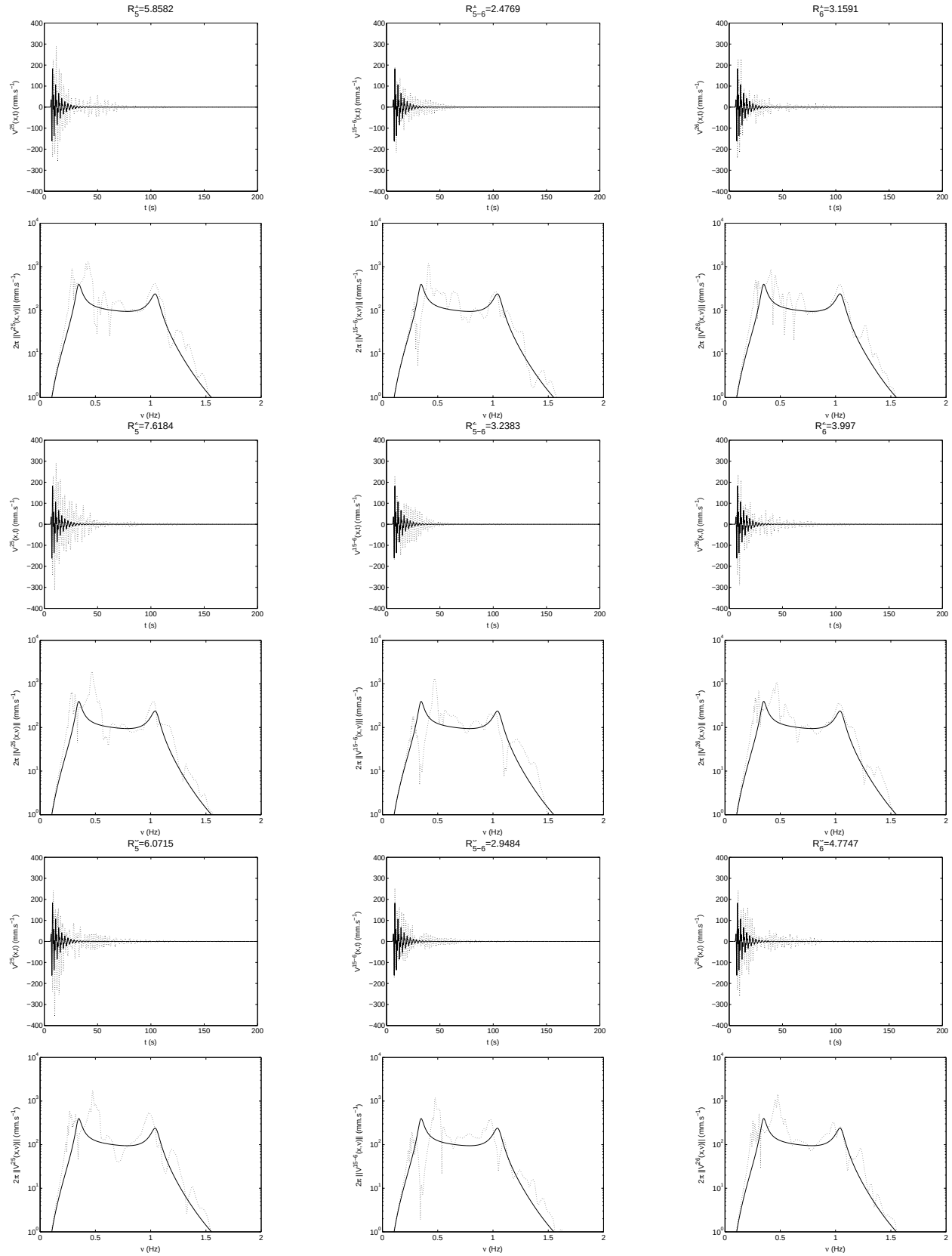


FIG. 3.11 – *Sismogramme (vitesse) pour les villes $\mathcal{C}^{\infty}$ (deux premières lignes), $\mathcal{C}^{\in}$ (deux ligne intermédiaires) et $\mathcal{C}^{\in}$ (deux dernières lignes). Chaque colonne représente la vitesse particulaire (en $mm.s^{-1}$) : au sommet du 5^{me} bloc (gauche), entre les 5^{me} et 6^{me} blocs (centre) et au sommet du 6^{me} bloc (droite). Les courbes en traits continu représentent la vitesse particulaire sur le sol en l'absence de bloc. En dessous de chaque sismogramme, nous avons représenté le module du spectre de la vitesse correspondant.*

Troisième partie

Investigation des effets régionaux et site-ville dans le cadre des mouvements dans le plan

Chapitre 1

Les effets régionaux

Nous considérons ici deux problèmes consécutifs et relatifs aux effets régionaux. Dans un premier temps, nous considérons une configuration composée d'un demi-espace homogène, viscoélastique, limité par une surface plane sur laquelle est appliquée une condition de surface libre, qui, sollicitée par une source linéique, peut donner lieu à l'excitation d'une onde de Rayleigh. Nous montrons, que cette onde est une réelle onde de surface [64, 6, 98, 77] (par opposition à l'onde de Love), qui par conséquent : 1) ne peut être excitée que par une source linéique (aspect 2D), phénomène déjà mentionné dans le chapitre II.2 mais aussi dans [64] 2) est d'autant mieux excitée que la source est plus proche de la surface. Ce problème modèle, nous sert également à valider les modifications apporter à la méthode des domaines fictifs dans le cas dissipatif, section I.2.2.

Dans un second temps, et de façon plus proche de la propagation des ondes sur des trajectoires régionales, nous considérons la réponse sismique d'un site comportant une couche horizontale d'étendue latérale infinie, homogène, viscoélastique, en contact parfait avec un demi-espace infini plus rigide, supposé modéliser le substratum. La source est une source linéique localisée dans ce dernier et rayonnant une onde P et/ou SV. Cette configuration, sous certaines conditions, donne lieu à l'excitation des modes de Rayleigh généralisés. Nous montrons que : 1) tout comme les modes de Love, les modes de Rayleigh généralisés prennent la forme, le plus souvent, d'ondes de surface dans le substratum et non dans la couche (pour nos paramètres de matériaux) ; 2) ces modes sont d'autant moins excités que la source est plus profonde ; 3) la réponse sur la surface, lorsque l'onde cylindrique est générée par une source localisée proche de l'interface entre la couche et le substratum, est caractérisée par de possibles battements, et par une durée plus longue que lorsque la source est localisée en profondeur.

Introduction

Cette partie de la thèse est le pendant, dans le cas des mouvements dans le plan, de l'étude réalisée au chapitre II.2. Pour ce type de mouvement, un **mode peut être excité** lorsqu'est considérée une configuration comportant un **demi-espace homogène** limité par une surface horizontale sur laquelle est appliquée une condition de surface libre. Cet aspect constitue une différence majeure entre les mouvements anti-plans et ceux dans le plan. L'**onde de surface** associée à ce mode est appelée **onde de Rayleigh**. Elle se propage sur de grandes distances alors que les ondes propagatives (incidente et réfléchies) associées à ce problème sont, elles, rapidement atténuées, [112]. C'est pour cette raison que cette onde est souvent repérée pour la caractérisation d'un séisme. Un phéno-

mène intéressant est qu'elle semble pouvoir être excitée par des irrégularités de surface, y compris lorsqu'elle se propage dans une couche [122], ou par des irrégularités d'interface [115]. Ainsi, la présence de bâtiments pourrait induire localement l'excitation d'une onde de Rayleigh. Pour autant, ces ondes sont rarement observées dans les bassins sédimentaires, [94, 67]. Il faut donc nous intéresser à une configuration incluant en plus une couche.

Nous considérons donc une **couche horizontale**, en dessous de la surface, ayant une interface horizontale et plate avec le demi-espace homogène. Les modes correspondants à cette configuration sont alors appelés **modes de Rayleigh généralisés**, ou simplement modes de Rayleigh [51]. Nous n'emploierons pas cette seconde terminologie par souci de clarté. Effectivement, l'onde de Rayleigh est associée à une onde de surface dans une configuration comportant un demi-espace, mais elle peut également être excitée sur le sol, dans une configuration comportant une couche lorsque l'épaisseur de cette dernière est grande par rapport à la longueur d'onde dans celle-ci (p165-177, [118]). Dans ce second cas, un autre type de mode peut-être excité, le **mode de Stoneley** [165], sous les conditions énoncées dans [153], au niveau de l'interface entre le substratum et la couche. Une autre différence fondamentale est que plusieurs modes de Rayleigh généralisés existent, associés à plusieurs ondes, alors qu'il n'existe qu'un seul et unique mode de Rayleigh, associé à une seule et unique onde. Il est donc important, surtout dans ce cas, de nommer les modes associés à la configuration avec couche de façon différente.

Cette précision énoncée, revenons à notre problème. Selon [51, 46, 40], les ondes arrivant dans le bassin de Mexico prennent la forme, en tout cas sur une certaine plage de fréquences, d'ondes de Rayleigh généralisées et pas celle d'ondes de Love. En particulier, selon [51], les ondes de Love après leur propagation sur près de $270km$ entre la zone de subduction et la ceinture volcanique transmexicaine seraient atténuées avant leur arrivée dans le bassin de Mexico, contrairement aux ondes de Rayleigh généralisées. Cette étude numérique P-SV montre en effet qu'une onde de Rayleigh généralisée incidente donne lieu, à l'intérieur du bassin de Mexico, à une réponse d'amplitude et de durée importantes et comportant des battements. Ils exhibent un bon accord avec les enregistrements in situ réalisés lors du séisme du 25 Avril 1989. De façon analogue, [67] montre que les résonances associées aux mouvements dans le plan à l'intérieur du bassin de Mexico sont plus prononcées que celles associées aux mouvements anti-plans. Dans [68], les auteurs montrent que pour une onde plane en incidence oblique à des angles importants sur un bassin, les mouvements du sol dans ce dernier sont plus importants lorsque l'onde incidente est polarisée en onde SV, qu'ils ne le seraient lorsque l'onde incidente est polarisée en onde SH, corroborant [133]. À l'opposé, ils montrent que lorsque l'onde incidente est verticale, les mouvements du sol dans le même bassin sont plus importants lorsque l'onde incidente est polarisée en onde SH, qu'ils ne le seraient lorsque l'onde incidente est polarisée en onde SV. Dans [133], les auteurs énoncent, eux, qu'il y a peu de différence. Ce fait, montre encore la grande variabilité des résultats pour des formes et des compositions de bassin différentes. Or, nous le rappelons, la majorité des études menées jusqu'alors dans le cas de bassin, a été réalisée avec une excitation de la configuration par une onde incidente verticale [21, 19, 18, 108, 156], ce qui a donc pour effet de mettre en avant la polarisation SH de l'onde. De plus, l'importance de la source, est soulignée dans [67].

Glossaire

Dans ce chapitre, nous emploierons les notations principales suivantes :

h l'épaisseur de la couche
$\mathbf{x}$ la position d'un point générique dans le plan sagittal $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$
$\mathbf{x^s}$ la localisation de la source dans le plan sagittal $\mathbf{x^s} = (x_1^s, x_2^s)$
$\mathbf{x}$ la position d'un point générique à la surface du sol $\mathbf{x_g} = (x_g, 0)$
$\phi^j(\mathbf{x}, \omega)$ le potentiel scalaire dans le domaine Ω_j, $j = 0, 1$ et dans le domaine fréquentiel
$\psi^j(\mathbf{x}, \omega)$ la composante suivant l'axe x_3 (seule composante non nulle) du potentiel vecteur $\boldsymbol{\psi}^j(\mathbf{x}, \omega) = \psi_3^j(\mathbf{x}, \omega)\mathbf{i}_3$ dans le domaine Ω_j, $j = 0, 1$ et dans le domaine fréquentiel
$\phi^i(\mathbf{x}, \omega)$ le potentiel scalaire associé à l'onde incidente dans le domaine fréquentiel
$\phi^i(\omega)$ le spectre du potentiel scalaire associé à l'onde incidente dans le domaine fréquentiel
$\psi^i(, \omega)$ le spectre de la composante suivant l'axe x_3 du potentiel vecteur associé à l'onde incidente
$u_j^m(\mathbf{x}, \omega)$ la composante suivant l'axe x_j, $j = 1, 2$, du champ de déplacement dans le milieu Ω_m, $m = 0, 1$, et dans le domaine fréquentiel
$u_j^m(\mathbf{x}, t)$ la composante suivant l'axe x_j, $j = 1, 2$, du champ de déplacement dans le milieu Ω_m, $m = 0, 1$, et dans le domaine temporel
$v_j^m(\mathbf{x}, \omega)$ la composante suivant l'axe x_j, $j = 1, 2$, du champ de vitesse dans le milieu Ω_m ,$m = 0, 1$, et dans le domaine fréquentiel
$v_j^m(\mathbf{x}, t)$ la composante suivant l'axe x_j, $j = 1, 2$, du champ de vitesse dans le milieu Ω_m ,$m = 0, 1$, et dans le domaine temporel
$\boldsymbol{\sigma}^j(\mathbf{x}, \omega)$ le tenseur des contraintes de composante $\sigma_{11}^j(\mathbf{x}, \omega)$, $\sigma_{12}^j(\mathbf{x}, \omega)$, $\sigma_{22}^j(\mathbf{x}, \omega)$ dans le domaine Ω_j, $j = 0, 1$ et dans le domaine fréquentiel
k_ϕ^j (respectivement k_ψ^j) le nombre d'onde associé aux ondes de compression (respectivement aux ondes de cisaillement) dans le domaine Ω_j, $j = 0, 1$
k_1 la composante horizontale du nombre d'onde
$k_{2,\phi}^j$ (respectivement $k_{2,\psi}^j$) la composante verticale du nombre d'onde associé aux ondes de compression (respectivement aux ondes de cisaillement), tel que $k_{2,\phi}^j = \sqrt{(k_\phi^j)^2 - k_1^2}$, avec $\Re(k_{2,\phi}^j) \geqq 0$ et $\Im(k_{2,\phi}^j) \geqq 0$ (respectivement $k_{2,\psi}^j = \sqrt{(k_\psi^j)^2 - k_1^2}$, avec $\Re(k_{2,\psi}^j) \geqq 0$ et $\Im(k_{2,\psi}^j) \geqq 0$)
$TF_1^1(x, \omega)$ la fonction de transfert associée à $u_1^1(\mathbf{x}, \omega)$
$TF_2^1(x, \omega)$ la fonction de transfert associée à $u_2^1(\mathbf{x}, \omega)$

1.1 Les ondes de Rayleigh

L'une des particularités des mouvements élastiques dans le plan est qu'un mode peut être excité dans la configuration simple d'un demi-espace homogène, limité par une condition de surface libre. Ces modes correspondent aux ondes de Rayleigh. Ainsi, la configuration la plus simple pour valider l'application de la méthode des Domaines Fictifs consiste à considérer le problème représenté figure III.1.1.

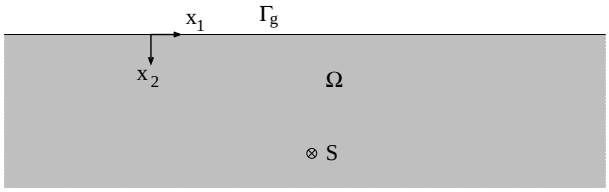


FIG. 1.1 – *Excitation des ondes de Rayleigh*

La surface libre Γ_g est horizontale. En dessous est situé un domaine semi-infini Ω, occupé par un matériau homogène M, de caractéristiques $\rho = 2670kg.m^{-2}$, $(c_P)_R = 4300m.s^{-1}$, $Q_P = 100$ et $(c_S)_R = 2530m.s^{-1}$, $Q_S = 50$. La sollicitation est délivrée au site sous la forme d'une onde cylindrique, suivant l'axe x_3, polarisée respectivement en onde P, SV, ou P-SV. La géométrie de la configuration ainsi que la polarisation de la source nous permettent de traiter un problème 2D.

1.1.1 Formulation du problème

Le problème est de déterminer le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ total (incident + diffracté) dans le demi-espace homogène Ω, où $\mathbf{x}$ est un vecteur pointant un point générique dans la plan x_1x_2 et où t est la variable de temps. Plutôt que de résoudre directement $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ nous préférons $\phi(\mathbf{x},\omega)$ et $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},\omega) = \psi(\mathbf{x},\omega)\mathbf{i}_3$, respectivement la transformée de Fourier des potentiels scalaire et vecteur.

Remarque : Il est en général déconseillé de traiter ce problème dans le domaine fréquentiel car les intégrales à résoudre sont très oscillantes, [6]. **La méthode de Cagniard-de Hoop lui est d'ailleurs souvent préférée.** Pour autant, l'ensemble des calculs analytiques présentés dans ce manuscrit a été réalisé dans le domaine fréquentiel et nous avons développé des algorithmes d'intégration "fiables". Nous traiterons donc ce problème dans le domaine fréquentiel, comme il le fut dans [112, 64]. Nous renvoyons à la discussion, [64], pour l'application du théorème des résidus à ce problème et pour l'obtention d'une formule asymptotique, en utilisant la méthode du col.

Ces potentiels vérifient

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2} + (k_\phi)^2\right)\phi(\mathbf{x},\omega) = -\phi^i(\omega)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x^s}) & ;\ \mathbf{x}\in\Omega \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2} + (k_\psi)^2\right)\psi(\mathbf{x},\omega) = -\psi^i(\omega)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x^s} & ;\ \mathbf{x}\in\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{cases} k_\phi = \dfrac{\omega}{c_P(\omega)};\ c_P(\omega) = (c_P)_R\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_P}\right)} & ;\ \mathbf{x}\in\Omega \\ k_\psi = \dfrac{\omega}{c_S(\omega)};\ c_S(\omega) = (c_S)_R\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S}\right)} & ;\ \mathbf{x}\in\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

Les conditions de surface libre s'écrivent

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \begin{cases} \sigma_{22} = \Pi \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \phi - 2\mu \left(\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 & (i) \\ \sigma_{21} = \mu \left[2 \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right] = 0 & (ii) \end{cases} \tag{1.3}$$

+Condition de rayonnement à l'infini

1.1.2 Représentation des potentiels

En séparant les variables en coordonnées cartésiennes et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, nous obtenons les représentations des potentiels suivantes :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, \omega) &= \phi^i(\mathbf{x}, \omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_1) \exp\left(\mathrm{i} k_1 x_1 + \mathrm{i} k_2^\phi x_2 \right) dk_1 \\ \psi(\mathbf{x}, \omega) &= \psi^i(\mathbf{x}, \omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} B(k_1) \exp\left(\mathrm{i} k_1 x_1 + \mathrm{i} k_2^\psi x_2 \right) dk_1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

avec $k_2^\phi = \sqrt{(k^\phi)^2 - k_1^2}$, et $k_2^\psi = \sqrt{(k^\psi)^2 - k_1^2}$ tels que $\Re(k_2^\phi) \geq 0, \Im(k_2^\phi) \geq 0, \Re(k_2^\psi) \geq 0, \Im(k_2^\psi) \geq 0$. La source est une source cylindrique invariante suivant l'axe x_3, localisée dans le plan sagittal au point $\mathbf{x^s} = (x_1^s, x_2^s)$, si bien que les potentiels incidents s'écrivent:

$$\begin{aligned} \phi^i(\mathbf{x}, \omega) &= \phi^i(\omega) \frac{\mathrm{i}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i} k_1 (x_1 - x_1^s) + \mathrm{i} k_2^\phi |x_2 - x_2^s| \right) \frac{dk_1}{k_2^\phi} \\ \psi^i(\mathbf{x}, \omega) &= \psi^i(\omega) \frac{\mathrm{i}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i} k_1 (x_1 - x_1^s) + \mathrm{i} k_2^\psi |x_2 - x_2^s| \right) \frac{dk_1}{k_2^\psi} \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.1.3 Application des conditions aux limites et obtention du champ de vitesse

L'insertion des représentations des champs, équations (III.1.4) et (III.1.5) dans les conditions aux limites, équation du système (III.1.3) et la projection de ces conditions telle que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (III.1.3) (i) ou (ii) $\exp\left(-\mathrm{i} k_1' x_1\right) dx_1$, conduit à la résolution du système

$$\begin{pmatrix} \left(2k_1^2 - (k^\psi)^2\right) & 2k_1 k_2^\psi \\ -2k_1 k_2^\phi & \left(2k_1^2 - (k^\psi)^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(k_1) \\ B(k_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S^\phi \left(2k_1^2 - (k^\psi)^2\right) + 2k_1 k_2^\psi S^\psi \\ -S^\psi \left(2k_1^2 - (k^\psi)^2\right) - 2k_1 k_2^\phi S^\phi \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

où $S^\phi = \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^i(\mathbf{x}, \omega) \exp\left(-\mathrm{i} k_1 x\right) dx \right|_{x_2=0}$ et $S^\psi = \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^i(\mathbf{x}, \omega) \exp\left(-\mathrm{i} k_1 x\right) dx \right|_{x_2=0}$.
La façon d'obtenir les modes du système est d'annuler le déterminant de la matrice de propagation. La relation de dispersion des modes du système est donc :

$$\left(k_1^2 - (k_2^\psi)^2\right)^2 + 4k_1^2 k_2^\psi k_2^\phi = 0 \tag{1.7}$$

qui est la relation de dispersion des ondes de Rayleigh, [6]. La résolution de cette équation sera discutée dans la section suivante.

La résolution du système fournit

$$\begin{aligned} A(k_1) &= \frac{S^\phi\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right) + S^\psi\left(4k_1k_2^\psi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)\right)}{4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi + \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2} \\ B(k_1) &= \frac{-S^\phi\left(4k_1k_2^\phi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right) + S^\psi\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)\right)}{4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi + \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

si bien qu'en introduisant les expressions des coefficients $A(k_1)$ et $B(k_1)$ dans les expressions des potentiels scalaire et vecteur, équation (III.1.4), il vient

$$\begin{aligned} \phi = \phi^i(\mathbf{x},\omega) + \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} & \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1(x_1-x_1^s)+\mathrm{i}k_2^\phi y\right)}{\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi + \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)k_2^\psi k_2^\phi} \\ & \left(\phi^i(\omega)k_2^\psi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2^s\right)\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)\right. \\ & \left.+\psi^i(\omega)k_2^\phi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)\left(4k_1k_2^\psi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)\right)\right)dk_1 \\ \psi = \psi^i(\mathbf{x},\omega) + \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} & \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1(x_1-x_1^s)+\mathrm{i}k_2^\psi y\right)}{\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi + \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)k_2^\psi k_2^\phi} \\ & \left(-\phi^i(\omega)k_2^\psi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2^s\right)\left(4k_1k_2^\phi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)\right)\right. \\ & \left.+\psi^i(\omega)k_2^\phi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)\right)dk_1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Alors en se ramenant aux expressions de la vitesse,

$$\begin{aligned} v_1 = \mathrm{i}u_1 &= \mathrm{i}\omega\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) \\ v_2 = \mathrm{i}u_2 &= \mathrm{i}\omega\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) \end{aligned} \tag{1.10}$$

il vient

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{x},\omega) = v_1^i(\mathbf{x},\omega) + & \\ \frac{-\mathrm{i}\omega}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} & \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1(x_1-x_1^s)\right)}{\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi + \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)k_2^\psi k_2^\phi} \\ & \left[k_1\exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2\right)\left(\phi^i(\omega)k_2^\psi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2^s\right)\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)\right.\right. \\ & \left.+\psi^i(\omega)k_2^\phi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)\left(4k_1k_2^\psi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)\right)\right) + \\ & k_2^\psi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2\right)\left(-\phi^i(\omega)k_2^\psi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2^s\right)\left(4k_1k_2^\phi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)\right)\right. \\ & \left.\left.+\psi^i(\omega)k_2^\phi\exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)\right)\right]dk_1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$
\begin{aligned}
v_2(\mathbf{x},\omega) &= v_2^i(\mathbf{x},\omega) + \\
&\frac{-\mathrm{i}\omega}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1(x_1-x_1^s)\right)}{\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi + \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)k_2^\psi k_2^\phi} \\
&\left[k_2^\phi \exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2\right)\left(\phi^i(\omega)k_2^\psi \exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2^s\right)\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)\right.\right. \\
&\left.+\psi^i(\omega)k_2^\phi \exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)\left(4k_1k_2^\psi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)\right)\right) - \\
&k_1\exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2\right)\left(-\phi^i(\omega)k_2^\psi \exp\left(\mathrm{i}k_2^\phi x_2^s\right)\left(4k_1k_2^\phi\left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)\right)\right. \\
&\left.\left.+\psi^i(\omega)k_2^\phi \exp\left(\mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)\left(4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi - \left(2k_1^2-(k^\psi)^2\right)^2\right)\right)\right] dk_1
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

où

$$
\begin{aligned}
v_1^i(\mathbf{x},\omega) &= \mathrm{i}u_1^i(\mathbf{x},\omega) = \mathrm{i}\omega\left(\frac{\partial\phi^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2}\right) \\
v_2^i(\mathbf{x},\omega) &= \mathrm{i}u_2^i(\mathbf{x},\omega) = \mathrm{i}\omega\left(\frac{\partial\phi^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi^i(\mathbf{x},\omega)}{\partial x_1}\right)
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

1.1.4 Relation de dispersion des modes de Rayleigh

La formulation de départ est

$$\left(k_1^2-(k_2^\psi)^2\right)^2 + 4k_1^2k_2^\psi k_2^\phi = 0$$

Divisons cette équation par k_1^2 et posons $\zeta = \dfrac{(k^\psi)^2}{k_1^2}$. En remarquant que $\left(\dfrac{k^\phi}{k^\psi}\right)^2 = \left(\dfrac{c_S}{c_P}\right)^2$ et en posant, $r = 1-\left(\dfrac{c_S}{c_P}\right)^2$, cette équation s'écrit :

$$(1-\zeta)^2 + 4\sqrt{\zeta-1}\sqrt{(1-r)\,\zeta-1} = 0 \tag{1.14}$$

En multipliant cette équation par son complément, nous obtenons

$$\zeta\left(\zeta^3 - 8\zeta^2 + 8\,(1+2r)\,\zeta - 16r\right) = \zeta\,(f(\zeta)) = 0 \tag{1.15}$$

dont les solutions non-triviales sont les racines telles que $f(\zeta) = 0$. Cette équation admet trois racines et un point de retournement pour

$$\zeta = \frac{4}{3}\left(2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}-3r}\right) \tag{1.16}$$

Il est alors possible pour un milieu non-dissipatif, de déterminer les racines réelles de cette équation, [98]. Introduisons la quantité

$$g(r) = f\left(\frac{4}{3}\left(2+\sqrt{\frac{5}{2}-3r}\right)\right) \tag{1.17}$$

Si $g(r) \leqq 0$ cette équation admet trois racines positives ; si $g(r) = 0$ les trois racines sont en coalescence ; si $g(r) \geq 0$ une seule de ces racines est réelle positive, les deux autres racines étant complexes conjuguées.

Appelons X la quantité $28 - 45r + 3\sqrt{-24 + 120r - 255r^2 + 192r^3}$. Les racines non-triviales de l'équation (III.1.15) ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{2}{3}\frac{X^{\frac{2}{3}} + 10 - 12r + 4X^{\frac{1}{3}}}{X^{\frac{1}{3}}} \\
\zeta_2 &= \frac{-1}{3}\frac{X^{\frac{2}{3}} + 10 - 12r - 8X^{\frac{1}{3}} - \mathrm{i}\sqrt{3}\left(X^{\frac{2}{3}} - 10 + 12r\right)}{X^{\frac{1}{3}}} \\
\zeta_3 &= \frac{-1}{3}\frac{X^{\frac{2}{3}} + 10 - 12r - 8X^{\frac{1}{3}} + \mathrm{i}\sqrt{3}\left(X^{\frac{2}{3}} - 10 + 12r\right)}{X^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Par exemple, avec les paramètres suivants utilisés pour modéliser la roche entourant le bassin de Mexico [67] que nous avons considérés plus dissipatifs qu'ils ne le sont en réalité de façon à tester notre code section I.2.2

- $\rho = 2670 kg.m^{-3}$
- P-wave: $(c_P)_R = 4300 m.s^{-1}$, $Q_P = 100$
- SV-wave: $(c_S)_R = 2530 m.s^{-1}$, $Q_S = 50$

nous obtenons dans le cas non-dissipatif correspondant, $g(r) < 0$, ce qui signifie que cette équation admet trois racines réelles. Les racines, dans ce cas, sont représentées figure III.1.2

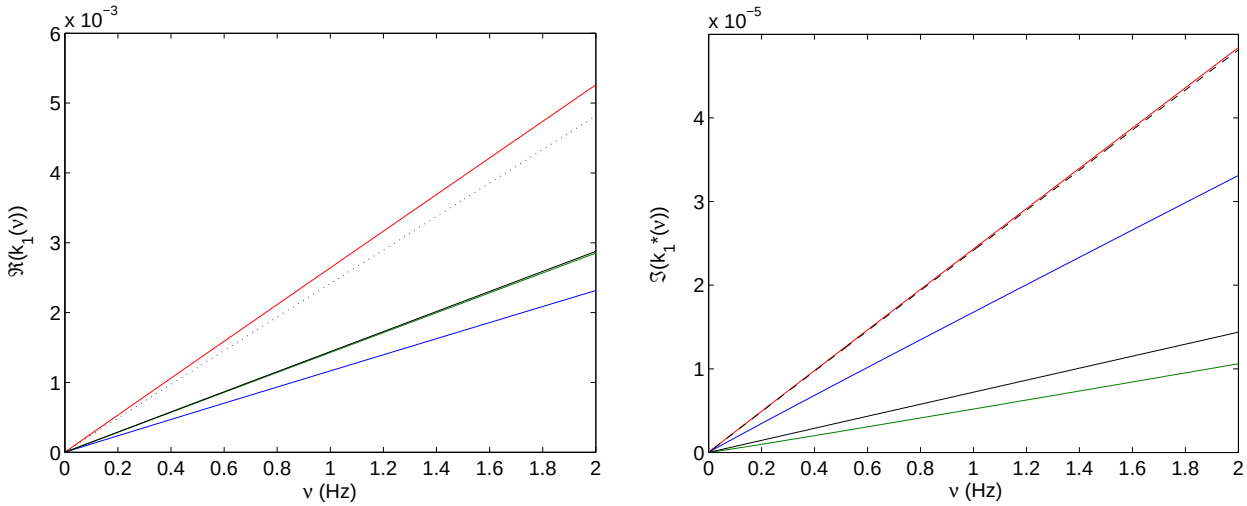


FIG. 1.2 – *Les courbes colorées représentent les trois racines de la relation de dispersion des ondes de Rayleigh, la courbe en trait continu noir représente k^ϕ, et la courbe en tirets noirs représente k^ψ : à gauche partie réelle, à droite partie imaginaire de ces quantités.*

En nous référant aux discussions [98, 77], ces trois ondes correspondent à deux ondes propagatives et à une **onde de surface qui est l'unique onde de Rayleigh**. Puisque cette onde correspond à $k_1^\star \geq k^\phi$ et $k_1^\star \geq k^\psi$, elle ne peut être excitée par une onde plane propagative incidente, les nombres d'onde verticaux associés étant tous deux, dans le cas non-dissipatif, imaginaires purs $\left(k_2^\psi\right)^\star = \mathrm{i}\left(\kappa_2^\psi\right)^\star$, $\left(k_2^\phi\right)^\star = \mathrm{i}\left(\kappa_2^\phi\right)^\star$, $\left(\left(\kappa_2^\psi\right)^\star, \left(\kappa_2^\phi\right)^\star\right) \in \mathbb{R}^+$. Un moyen d'exciter cette onde, dans cette configuration, est que la sollicitation soit délivrée au site par une **source cylindrique**.

De plus, l'ordonnancement des vitesses dans un milieu solide, $(c_P)_R > (c_S)_R$, nous permet d'annoncer que l'onde de Rayleigh sera mieux excitée par une onde en polarisation SV que par une onde en polarisation P.

Pour simplifier, considérons une sollicitation purement polarisée en onde de cisaillement vertical (la source linéique étant localisée au point $\mathbf{x^s} = (x_1^s, x_2^s)$), c'est-à-dire $\phi^i(\omega) = 0$, $\forall\omega$ dans le cas non-dissipatif. L'expression du champ de vitesse sur le sol ($\mathbf{x_g} = (x_g, 0)$) prend la forme la forme :

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{x_g},\omega) = \; & v_1^i(\mathbf{x_g},\omega) + \frac{-\mathrm{i}\omega\psi^i(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv_1(\mathbf{x_g},k_1,\omega)dk_1 \\ & = v_1^i(\mathbf{x_g},\omega) + \frac{-\mathrm{i}\omega\psi^i(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_g - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)}{\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi + \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)k_2^\psi}\times \\ & \left[k_1\left(4k_1k_2^\psi\left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)\right) + k_2^\psi\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi - \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)\right]dk_1 \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} v_2(\mathbf{x_g},\omega) = \; & v_2^i(\mathbf{x_g},\omega) + \frac{-\mathrm{i}\omega\psi^i(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dv_2(\mathbf{x_g},k_1,\omega)dk_1 \\ & = v_2^i(\mathbf{x_g},\omega) + \frac{-\mathrm{i}\omega\psi^i(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_g - x_1^s\right) + \mathrm{i}k_2^\psi x_2^s\right)}{\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi + \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)k_2^\psi}\times \\ & \left[k_2^\phi\left(4k_1k_2^\psi\left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)\right) + k_1\left(4k_1^2k_2^\phi k_2^\psi - \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)\right]dk_1 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Nous pouvons alors séparer cette intégrale sur plusieurs intervalles, à la manière de ce que nous avons réalisé dans la partie II. En particulier, sur l'intervalle $]-\infty, -k^\psi[\cup]k^\psi, \infty[$, dans lequel est incluse la racine de la relation de dispersion du mode de Rayleigh (dans le cas non-dissipatif), les intégrandes $dv_1(\mathbf{x_g},k_1,\omega)$ et $dv_2(\mathbf{x_g},k_1,\omega)$ prennent la forme, en posant $k_2^\phi = \mathrm{i}\kappa_2^\phi$, et $k_2^\psi = \mathrm{i}\kappa_2^\psi$, $\left(\kappa_2^\phi, \mathrm{i}\kappa_2^\psi\right) \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} dv_1(\mathbf{x_g},k_1,\omega) = & \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_g - x_1^s\right)\right)\exp\left(-\kappa_2^\psi x_2^s\right)}{\left(-4k_1^2\kappa_2^\phi\kappa_2^\psi + \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)\mathrm{i}\kappa_2^\psi}\times \\ & \left[k_1\left(\mathrm{i}4k_1\kappa_2^\psi\left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)\right) + \mathrm{i}\kappa_2^\psi\left(-4k_1^2\kappa_2^\phi\kappa_2^\psi - \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)\right] \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} dv_2(\mathbf{x_g},k_1,\omega) = & \frac{\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_g - x_1^s\right)\right)\exp\left(-\kappa_2^\psi x_2^s\right)}{\left(-4k_1^2\kappa_2^\phi\kappa_2^\psi + \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)\mathrm{i}\kappa_2^\psi}\times \\ & \left[\mathrm{i}\kappa_2^\phi\left(\mathrm{i}4k_1\kappa_2^\psi\left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)\right) + k_1\left(-4k_1^2\kappa_2^\phi\kappa_2^\psi - \left(2k_1^2 - \left(k^\psi\right)^2\right)^2\right)\right] \end{aligned} \tag{1.22}$$

qui expriment le fait que sur cet intervalle le champ de vitesse est composé d'ondes de surface. Chacune de ces ondes de surface est une onde inhomogène dont l'amplitude décroît exponentiellement lorsque la profondeur focale augmente.

Ainsi, l'amplitude des champs diffractés donnant lieu à l'excitation de l'onde de Rayleigh décroît exponentiellement $\exp\left(-\kappa_2^{\psi} x_2^s\right)$ en fonction de la profondeur de la source. Cela veut dire que si nous souhaitons que l'onde de Rayleigh soit excitée efficacement, la source doit être proche de la surface Γ_g.

1.1.5 Résultats et comparaison numérique/semi-analytique

La source délivre au site des ondes polarisées en cisaillement vertical sous la forme d'un pseudo-Ricker ($\nu_0 = 0.5Hz$) et est localisée proche (relativement à la longueur d'onde de l'onde SV incidente) de l'interface à $\mathbf{x^s} = (0, 6000m)$. Nous enregistrons le champ de vitesse au point $\mathbf{x}_g = (70000m, 0)$, c'est-à-dire relativement loin de la source, de façon à pouvoir séparer l'onde de Rayleigh des ondes P et SV réfléchies et incidente. La figure III.1.3 représente la comparaison des résultats numériques, courbe magenta et semi-analytiques, courbe bleue.

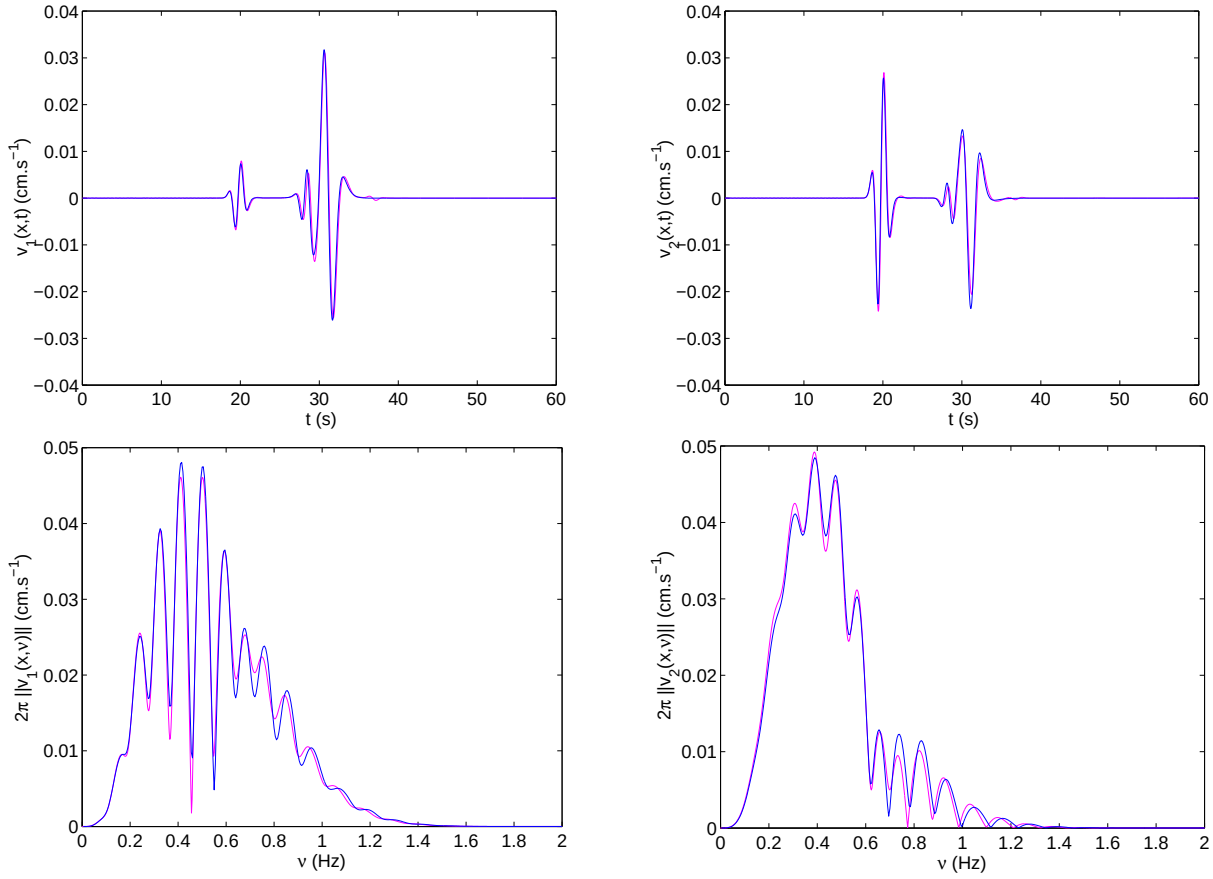


FIG. 1.3 – *Les courbes magenta représentent les résultats numériques et les courbes bleues représentent les résultats semi-analytiques. En haut, les sismogrammes (vitesse) et en bas 2π fois le module des spectres correspondants. À gauche la composante v_1 et à droite la composante v_2*

La comparaison est relativement bonne. Les différences proviennent du fait que l'onde incidente, dans la formulation Éléments-Finis, n'est pas purement une onde de cisaillement mais comporte une faible composante de compression.

1.2 Les modes de Rayleigh généralisés

La figure III.1.4 représente une coupe dans le plan sagittal de la configuration. Γ_g est la surface du sol, supposée plate et horizontale, au-dessus de laquelle se trouve l'air, supposé être le vide. Ω_1 est un domaine d'étendue latérale infinie, d'épaisseur h et occupé par un matériau M^1. Ω_0 est un domaine semi-infini, supposé modéliser le substratum, occupé par un matériau M^0 plus rigide que M^1. L'interface Γ_h entre Ω_1 et Ω_0 est plate et horizontale, au niveau de laquelle les matériaux M^1 et M^0 sont en contact parfait. Un repère cartésien $Ox_1x_2x_3$ est attaché à la configuration tel que son origine O est située sur la surface, x_2 croît avec la profondeur et x_3 est perpendiculaire au plan de la coupe. En appelant $\mathbf{i}_j$ le vecteur unitaire associé à l'axe positif x_j, $j = 1, 2, 3$, le vecteur normal aux interfaces Γ_g et Γ_h est $\mathbf{i}_2$. Les matériaux M^0 et M^1 sont supposés être linéaires, isotropes, homogènes, et initialement au repos. Nous supposons que ces deux matériaux sont dissipatifs, tel que M^0 soit beaucoup moins dissipatifs que M^1.

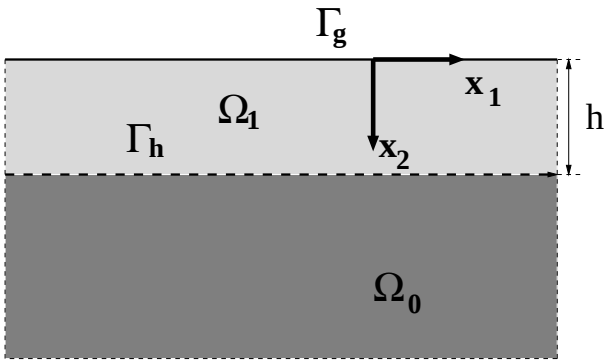


FIG. 1.4 – *Vue en coupe de la configuration*

La sollicitation est délivrée au site par une source cylindrique le long de l'axe x_3, localisée au point $\mathbf{x}^s = (x_1^s, x_2^s)$ et génère des ondes polarisées en onde P, SV ou P-SV. La polarisation de la source ainsi que l'invariance de la géométrie, nous permettent de traiter un problème 2D. Dès lors $\mathbf{x}$, le vecteur partant de l'origine et pointant un point générique du plan sagittal, a pour coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

1.2.1 Formulation du problème

Nous recherchons le champ de déplacement total (incident+diffracté) $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$, l'autre composante étant nulle. Plutôt que de rechercher directement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, nous lui préférons les tranformées de Fourier des potentiels scalaire et vecteur $\phi(\mathbf{x}, \omega)$, et $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \omega) = \psi(\mathbf{x}, \omega)\mathbf{i}_3$, vérifiant le système (nous appliquons la décomposition de domaine et projetons les équations relatives à $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \omega)$ sur $\mathbf{i}_3$) :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(k_\phi^j\right)^2\right) \phi^j(\mathbf{x}, \omega) = -f^\phi(\mathbf{x}, \omega)\delta_{j0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0, 1 \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(k_\psi^j\right)^2\right) \psi^j(\mathbf{x}, \omega) = -f^\psi(\mathbf{x}, \omega)\delta_{j0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0, 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

avec

$$\begin{cases} k_\phi^j = \dfrac{\omega}{\left(c_P^j\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_P^j}\right)} & \forall \mathbf{x}\in\Omega_j,\ j=0,1 \\ k_\psi^j = \dfrac{\omega}{\left(c_S^j\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{Q_S^j}\right)} & \forall \mathbf{x}\in\Omega_j,\ j=0,1 \end{cases} \tag{1.24}$$

Les champs de déplacement $\mathbf{u}^j(\mathbf{x},\omega)$, $j=0,1$, vérifient les conditions aux limites :

$$\forall \mathbf{x}\in\Gamma_g \begin{cases} \sigma_{12}^1(\mathbf{x}) = \mu^1\left[2\frac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\psi^1}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1^2}\right]=0 & (i) \\ \sigma_{22}^1(\mathbf{x}) = \Pi^1\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^1 - 2\mu^1\left(\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1\partial x_2}\right)=0 & (ii) \end{cases}$$

$$\forall \mathbf{x}\in\Gamma_h \begin{cases} [\sigma_{12}(\mathbf{x})]_{01} = \mu^1\left[2\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1^2}\right]- \\ \quad \mu^0\left[2\dfrac{\partial^2\phi^0}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial^2\psi^0}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial^2\psi^0}{\partial x_1^2}\right]=0 & (iii) \\ [\sigma_{22}(\mathbf{x})]_{01} = \pi^1\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^1 - 2\mu^1\left(\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1\partial x_2}\right)- \\ \quad \left(\Pi^0\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^0 + 2\mu^0\left(\dfrac{\partial^2\phi^0}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\psi^0}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right)=0 & (iv) \\ [u_1(\mathbf{x})]_{01} = \dfrac{\partial\phi^1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\psi^1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\phi^0}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\psi^0}{\partial x_2} & (v) \\ [u_2(\mathbf{x})]_{01} = \dfrac{\partial\phi^1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\psi^1}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\phi^0}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\psi^0}{\partial x_1} & (vi) \end{cases} \tag{1.25}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

1.2.2 Représentation des champs

En séparant les variables en coordonnées cartésiennes et en utilisant la condition de rayonnement à l'infini, nous obtenons les représentations des potentiels suivantes :

$$\begin{aligned} \phi^0(\mathbf{x},\omega) &= \phi^i(\mathbf{x},\omega)+\int_{-\infty}^{+\infty} B_\phi^0 \exp\left(\mathrm{i}k_1x_1+\mathrm{i}k_{2,\phi}^0(x_2-h)\right)\frac{dk_1}{k_{2,\phi}^0}; && \forall\mathbf{x}\in\Omega^0 \\ \psi^0(\mathbf{x},\omega) &= \psi^i(\mathbf{x},\omega)+\int_{-\infty}^{+\infty} B_\psi^0 \exp\left(\mathrm{i}k_1x_1+\mathrm{i}k_{2,\psi}^0(x_2-h)\right)\frac{dk_1}{k_{2,\phi}^0} && \forall\mathbf{x}\in\Omega^0 \\ \phi^1(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\left(A_\phi^1\exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\phi}^1x_2\right)+B_\phi^1\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^1x_2\right)\right)\frac{dk_1}{k_{2,\phi}^1}; && \forall\mathbf{x}\in\Omega^1 \\ \psi^1(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\left(A_\psi^1\exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\psi}^1x_2\right)+B_\psi^1\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^1x_2\right)\right)\frac{dk_1}{k_{2,\psi}^1}; && \forall\mathbf{x}\in\Omega^1 \end{aligned} \tag{1.26}$$

avec $k_{2,\phi}^j=\sqrt{(k_\phi^j)^2-k_1^2}$, et $k_{2,\psi}^j=\sqrt{(k_\psi^j)^2-k_1^2}$ tels que $\Re(k_{2,\phi}^j)\geq 0$, $\Im(k_{2,\phi}^j)\geq 0$, $\Re(k_{2,\psi}^j)\geq 0$, $\Im(k_{2,\psi}^j)\geq 0$, $j=0,1$, conséquence de la condition de rayonnement à l'infini.

La source est une source cylindrique le long de l'axe x_3, localisée dans le plan sagittal au point $\mathbf{x^s} = (x_1^s, x_2^s)$, $\mathbf{x^s} \in \Omega^0$, si bien que les potentiels incidents prennent la forme:

$$\begin{aligned}\phi^i(\mathbf{x},\omega) &= \phi^i(\omega)\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)+k_{2,\phi}^0|x_2-x_2^s|\right)\frac{dk_1}{k_{2,\phi}^0}\\ \psi^i(\mathbf{x},\omega) &= \psi^i(\omega)\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\mathrm{i}k_1\left(x_1-x_1^s\right)+k_{2,\psi}^0|x_2-x_2^s|\right)\frac{dk_1}{k_{2,\psi}^0}\end{aligned} \tag{1.27}$$

1.2.3 Application des conditions aux limites et obtention du champ de déplacement

L'insertion des expressions des champs, équation (III.1.26), dans les conditions aux limites, ainsi que leurs projections telles que $\int_{-\infty}^{\infty}$ (III.1.25) (i), (ii)...(vi) $\exp\left(-\mathrm{i}k_1' x_1\right) dx_1$, conduit à la résolution d'un système matriciel, permettant d'obtenir les coefficients B_ϕ^0, B_ψ^0, B_ϕ^1, A_ϕ^1, B_ψ^1, A_ψ^1, qui prend la forme

$$\mathcal{D}\mathbf{p} = \mathbf{S} \tag{1.28}$$

avec

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \dfrac{B_\phi^1}{k_{2,\phi}^1}\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 h\right)\\ \dfrac{B_\psi^1}{k_{2,\psi}^1}\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 h\right)\\ \dfrac{A_\phi^1}{k_{2,\phi}^1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 h\right)\\ \dfrac{A_\psi^1}{k_{2,\psi}^1}\exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 h\right)\\ \dfrac{B_\phi^0}{k_{2,\phi}^0}\\ \dfrac{B_\psi^0}{k_{2,\psi}^0} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \dfrac{-\exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1^s\right)}{4\pi k_{2,\phi}^0}\left[k_1\phi^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^0(x_2^s-h)\right)-\psi^i(\omega)k_{2,\phi}^0\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^0(x_2^s-h)\right)\right]\\ \dfrac{\exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1^s\right)}{4\pi k_{2,\psi}^0}\left[k_{2,\psi}^0\phi^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^0(x_2^s-h)\right)+\psi^i(\omega)k_1\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^0(x_2^s-h)\right)\right]\\ \dfrac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1^s\right)}{4\pi k_{2,\psi}^0}\left[2k_1k_{2,\psi}^0\phi^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^0(x_2^s-h)\right)+\right.\\ \qquad\left.\left(2k_1^2-(k_\psi^0)^2\right)\psi^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^0(x_2^s-h)\right)\right]\\ \dfrac{\mathrm{i}\exp\left(-\mathrm{i}k_1 x_1^s\right)}{4\pi k_{2,\phi}^0}\left[\left(2k_1^2-(k_\psi^0)^2\right)\phi^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^0(x_2^s-h)\right)-\right.\\ \qquad\left.2k_1k_{2,\phi}^0\psi^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^0(x_2^s-h)\right)\right] \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

et la matrice $\mathcal{D}$

$$
\begin{pmatrix}
\left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right)\mathrm{e}^{\left(-\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 h\right)} & 2k_1k_{2,\psi}^1\mathrm{e}^{\left(-\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 h\right)} & \left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right)\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 h\right)} & -2k_1k_{2,\psi}^1\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 h\right)} & 0 & 0 \\
-2k_1k_{2,\phi}^1\mathrm{e}^{\left(-\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 h\right)} & \left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right)\mathrm{e}^{\left(-\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 h\right)} & 2k_1k_{2,\phi}^1\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 h\right)} & \left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right)\mathrm{e}^{\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 h\right)} & 0 & 0 \\
\mathrm{i}k_1 & \mathrm{i}k_{2,\psi}^1 & \mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 & -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_{2,\psi}^0 \\
\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 & -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 & -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_{2,\phi}^0 & \mathrm{i}k_1 \\
-2k_1k_{2,\phi}^1 & \left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right) & 2k_1k_{2,\phi}^1 & \left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right) & \mu^{01}2k_1k_{2,\phi}^0 & -\mu^{01}\left(2k_1^2-(k_\psi^0)^2\right) \\
\left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right) & 2k_1k_{2,\psi}^1 & \left(2k_1^2-(k_\psi^1)^2\right) & -2k_1k_{2,\psi}^1 & -\mu^{01}\left(2k_1^2-(k_\psi^0)^2\right) & -\mu^{01}2k_1k_{2,\psi}^0
\end{pmatrix}
\tag{1.31}
$$

L'expression de la matrice $\mathcal{D}$ est identique à celle que nous pouvons trouver dans [174].

La résolution analytique de ce système est réalisable, mais compliquée. Nous préférerons donc inverser ce système numériquement et intégrer selon le schéma d'intégration décrit dans l'annexe B. Une fois résolu, le champ de déplacement dans la couche prend la forme

$$\begin{aligned} u_1 = \; & \mathrm{i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1 \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right)}{k_{2,\phi}^1}\left[A_\phi^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 x_2\right) + B_\phi^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 x_2\right)\right] dk_1 + \right. \\ & \left. \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right)\left[-A_\psi^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 x_2\right) + B_\psi^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 x_2\right)\right]\right) \\ u_2 = \; & \mathrm{i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right)\left[-A_\phi^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 x_2\right) + B_\phi^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 x_2\right)\right] dk_1 + \right. \\ & \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_1 \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right)}{k_{2,\psi}^1}\left[A_\psi^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 x_2\right) + B_\psi^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 x_2\right)\right] dk_1\right) \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.2.4 Relation de Dispersion des modes de Rayleigh généralisés

La façon de déterminer la relation de dispersion des modes de Rayleigh généralisés est de calculer le déterminant $\det(\mathcal{D})$ de la matrice $\mathcal{D}$. Cette opération est réalisée selon la méthode décrite dans [64].

Remarque : la matrice composée des deux premières colonnes et des deux premières lignes correspond à la matrice de propagation obtenue dans le cas des modes de Rayleigh, c.à.d. lorsque le milieu Ω_1 est un domaine semi-infini. La matrice formée par les quatre dernières lignes et les quatre dernières colonnes correspond à la matrice de propagation que nous obtiendrions dans le cas de l'étude des modes de Stoneley.

Introduisons les quantités $F(k_1)$ et $f(k_1)$

$$\begin{aligned} F(k_1) &= \left(2k_1^2 - (k_\psi^1)^2\right) + 4k_1^1 k_{2,\phi}^1 k_{2,\psi}^1 \\ f(k_1) &= \left(2k_1^2 - (k_\psi^1)^2\right) - 4k_1^1 k_{2,\phi}^1 k_{2,\psi}^1 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Alors

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{D}) = \; & \Delta_{12} F(k_1) \exp\left(\mathrm{i}(k_{2,\phi}^1 + k_{2,\psi}^1)h\right) - \Delta_{14} f(k_1) \exp\left(\mathrm{i}(k_{2,\phi}^1 - k_{2,\psi}^1)h\right) + \\ & \Delta_{23} f(k_1) \exp\left(\mathrm{i}(-k_{2,\phi}^1 + k_{2,\psi}^1)h\right) + \Delta_{34} F(k_1) \exp\left(-\mathrm{i}(k_{2,\phi}^1 + k_{2,\psi}^1)h\right) - \\ & 4k_1 k_{2,\psi}^1 \left(2k_1^2 - (k_\psi^1)^2\right) \Delta_{13} - 4k_1 k_{2,\phi}^1 \left(2k_1^2 - (k_\psi^1)^2\right) \Delta_{24} \end{aligned} \tag{1.34}$$

où les quantités Δ_{ij} sont les mineurs de la matrice $\mathcal{D}$ dont les deux dernières colonnes sont identiques, composées des deux dernières colonnes et des quatre dernières lignes de la matrice $\mathcal{D}$ tels que :

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \mathrm{i}k_1 & \mathrm{i}k^1_{2,\psi} & \cdots \\ \mathrm{i}k^1_{2,\phi} & -\mathrm{i}k_1 & \cdots \\ -2k_1k^1_{2,\phi} & 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & \cdots \\ 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & 2k_1k^1_{2,\psi} & \cdots \end{vmatrix}; \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} \mathrm{i}k_1 & \mathrm{i}k_1 & \cdots \\ \mathrm{i}k^1_{2,\phi} & -\mathrm{i}k^1_{2,\phi} & \cdots \\ -2k_1k^1_{2,\phi} & 2k_1k^1_{2,\phi} & \cdots \\ 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{14} = \begin{vmatrix} \mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k^1_{2,\psi} & \cdots \\ \mathrm{i}k^1_{2,\phi} & -\mathrm{i}k_1 & \cdots \\ -2k_1k^1_{2,\phi} & 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & \cdots \\ 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & -2k_1k^1_{2,\psi} & \cdots \end{vmatrix}; \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} \mathrm{i}k^1_{2,\phi} & \mathrm{i}k_1 & \cdots \\ -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k^1_{2,\phi} & \cdots \\ 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & 2k_1k^1_{2,\phi} & \cdots \\ 2k_1k^1_{2,\psi} & 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & \cdots \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

$$\Delta_{24} = \begin{vmatrix} \mathrm{i}k^1_{2,\psi} & -\mathrm{i}k^1_{2,\psi} & \cdots \\ -\mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k_1 & \cdots \\ 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & \cdots \\ 2k_1k^1_{2,\psi} & -2k_1k^1_{2,\psi} & \cdots \end{vmatrix}; \quad \Delta_{34} = \begin{vmatrix} \mathrm{i}k_1 & -\mathrm{i}k^1_{2,\psi} & \cdots \\ -\mathrm{i}k^1_{2,\phi} & -\mathrm{i}k_1 & \cdots \\ 2k_1k^1_{2,\phi} & 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & \cdots \\ 2k_1^2-(k^1_\psi)^2 & -2k_1k^1_{2,\psi} & \cdots \end{vmatrix}$$

Une fois le calcul réalisé, à l'aide du logiciel Mathématica, nous pouvons écrire l'équation, sous la forme introduite dans [118] et dans [114]. En introduisant

$$\begin{aligned} X &= \mu^{01}\left(\frac{k^0_\psi}{k_x}\right)^2 - 2\left(\mu^{01}-1\right); & Y &= \left(\frac{k^1_\psi}{k_x}\right)^2 + 2\left(\mu^{01}-1\right) \\ Z &= \mu^{01}\left(\frac{k^0_\psi}{k_x}\right)^2 - \left(\frac{k^1_\psi}{k_x}\right)^2 - 2\left(\mu^{01}-1\right); & W &= 2\left(\mu^{01}-1\right) \end{aligned} \tag{1.36}$$

la relation de dispersion des modes de Rayleigh généralisés prend la forme

$$\zeta_1\eta_2 - \zeta_2\eta_1 = 0 \tag{1.37}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 = & \left(2-\left(\frac{k_\psi^1}{k_x}\right)^2\right)\left(X\cos\left(k_{y,\phi}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_{y,\phi}^0}{k_{y,\phi}^1}Y\sin\left(k_{y,\phi}^1 h\right)\right)\\
& +2\frac{k_{y,\psi}^1}{k_x}\left(-\mathrm{i}\frac{k_{y,\phi}^0}{k_x}W\sin\left(k_{y,\psi}^1 h\right)-\frac{k_x}{k_{y,\psi}^1}Z\cos\left(k_{y,\psi}^1 h\right)\right)\\
\zeta_2 = & \left(2-\left(\frac{k_\psi^1}{k_x}\right)^2\right)\left(-\mathrm{i}\frac{k_{y,\psi}^0}{k_x}W\cos\left(k_{y,\phi}^1 h\right)+\frac{k_x}{k_{y,\phi}^1}Z\sin\left(k_{y,\phi}^1 h\right)\right)\\
& +2\frac{k_{y,\psi}^1}{k_x}\left(X\sin\left(k_{y,\psi}^1 h\right)+\mathrm{i}\frac{k_{y,\psi}^0}{k_{y,\psi}^1}Y\cos\left(k_{y,\psi}^1 h\right)\right)\\
\eta_1 = & \left(2-\left(\frac{k_\psi^1}{k_x}\right)^2\right)\left(-\mathrm{i}\frac{k_{y,\phi}^0}{k_x}W\cos\left(k_{y,\psi}^1 h\right)+\frac{k_x}{k_{y,\psi}^1}Z\sin\left(k_{y,\psi}^1 h\right)\right)\\
& +2\frac{k_{y,\phi}^1}{k_x}\left(X\sin\left(k_{y,\phi}^1 h\right)+\mathrm{i}\frac{k_{y,\phi}^0}{k_{y,\phi}^1}Y\cos\left(k_{y,\phi}^1 h\right)\right)\\
\eta_2 = & \left(2-\left(\frac{k_\psi^1}{k_x}\right)^2\right)\left(X\cos\left(k_{y,\psi}^1 h\right)-\mathrm{i}\frac{k_{y,\psi}^0}{k_{y,\psi}^1}Y\sin\left(k_{y,\psi}^1 h\right)\right)\\
& +2\frac{k_{y,\phi}^1}{k_x}\left(-\mathrm{i}\frac{k_{y,\psi}^0}{k_x}W\sin\left(k_{y,\phi}^1 h\right)-\frac{k_x}{k_{y,\phi}^1}Z\cos\left(k_{y,\phi}^1 h\right)\right)
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

relation qui, vu sa complexité, ne peut-être résolue que numériquement ou avec des hypothèses simplificatrices portant sur la profondeur de la couche et les rapports des caractéristiques de milieu, tels que dans [172], figure III.1.5. Cette relation admet deux types de solutions donnant lieu aux deux types de "propagation" M_1 et M_2, [157], qui peuvent être interprétées comme la correspondance avec les modes symétriques et antisymétriques d'une plaque, [172]. Il faut souligner ici que le même phénomène intervient pour les modes de Love, section II.1.1.

Ces modes correspondent, pour nos valeurs, à des **ondes de cisaillement de surface dans le substratum, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent être excités qu'à l'aide d'une onde cylindrique et en aucun cas par une onde plane**, tout comme les modes de Love. Pour autant, ces modes peuvent donner lieu à de réelles ondes de surface qui sont excitées très faiblement, dans le cas d'une couche mince. Puisque les valeurs des vitesses des ondes de compression et de cisaillement sont en général supérieures dans le substratum à celles qu'elles ont dans la couche, les deux nombres d'ondes verticaux $k_{2,\phi}^0$ et $k_{2,\psi}^0$ sont imaginaires purs, dans le cas non dissipatif. Les exponentielles des composantes du terme source, $\mathbf{S}$, équation (III.1.30) permettant la résolution des coefficients B_ϕ^j, B_ψ^j, $j=0,1$ et A_ϕ^1, A_ψ^1, deviennent alors des exponentielles décroissantes : $\exp\left(-|k_{2,\phi}^0|\left(x_2-h\right)\right)$ et $\exp\left(-|k_{2,\psi}^0|\left(x_2-h\right)\right)$. Puisque le système $\mathcal{D}\mathbf{p}=\mathbf{S}$ est un système linéaire , si les composantes du terme source $\mathbf{S}$ décroissent, alors les termes de la matrice $\mathbf{p}$ décroissent également. Ainsi, **les modes de Rayleigh généralisés, au même titre que les modes de Love, seront d'autant mieux excités que la quantité x_2-h sera plus faible**, c'est-à-dire que la source sera localisée plus proche de l'interface Γ_h.

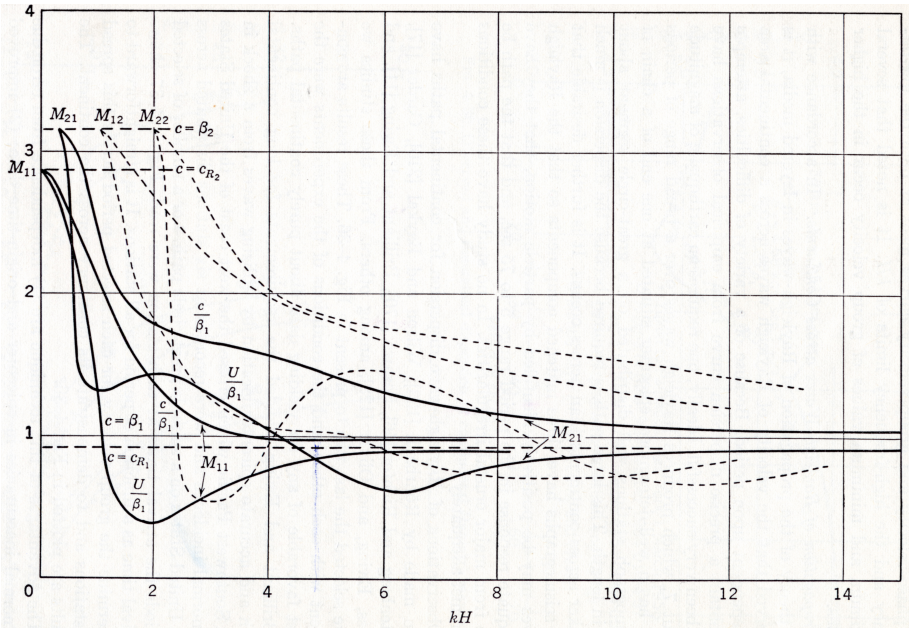


FIG. 1.5 – *Relation de dispersion des modes de Rayleigh généralisés, pour le cas* $\frac{c_P^0}{c_S^0} = \frac{c_P^1}{c_S^1} = \sqrt{3}$, $\frac{c_S^0}{c_S^1} = 3.147$, *et* $\frac{\rho^0}{\rho^1} = 1.39$, *d'après Tolskoy et Usdin, [172]*

1.2.5 Résultats semi-analytiques

Nous considérons le cas de la ville de Nice et celui de la ville de Mexico. Pour ces deux exemples, les vitesses de compression et de cisaillement des milieux Ω_0 et Ω_1 sont ordonnées telles que :

$$\left(c_P^0\right)_R > \left(c_P^1\right)_R > \left(c_S^0\right)_R > \left(c_S^1\right)_R \tag{1.39}$$

si bien que les parties réelles des nombres d'onde associés aux ondes de compression et de cisaillement sont ordonnées telles que

$$\Re(k_\phi^0) < \Re(k_\phi^1) < \Re(k_\psi^0) < \Re(k_\psi^0) \tag{1.40}$$

La méthodologie est similaire à celle déjà utilisée pour l'étude des modes de Love, c'est-à-dire que nous séparons l'intervalle d'intégration sur 5 sous-intervalles $\mathcal{I}_j$, $j = 1, ..., 5$, tels que (pour des milieux non-dissipatifs) :

- $\mathcal{I}_1 =]-\Re(k_\phi^0), \Re(k_\phi^0)[$: pour lequel la totalité des ondes sont des ondes propagatives $\left(k_{2,\phi}^0, k_{2,\psi}^0, k_{2,\phi}^1, k_{2,\psi}^1\right) \in \mathbb{R}^5$, courbes en pointillés noirs

- $\mathcal{I}_2 =]-\Re(k_\phi^1), -\Re(k_\phi^0)] \cup [\Re(k_\phi^0), \Re(k_\phi^1)[$: pour lequel la totalité des ondes sont des ondes propagatives, excepté l'onde de compression dans la substratum, $k_{2,\phi}^0 = \mathrm{i}\kappa_{2,\phi}^0$, $\left(\kappa_{2,\phi}^0, k_{2,\psi}^0, k_{2,\phi}^1, k_{2,\psi}^1\right) \in \mathbb{R}^5$, courbes en tirets et pointillés noirs

- $\mathcal{I}_3 =]-\Re(k_\psi^0), -\Re(k_\phi^1)] \cup [\Re(k_\phi^1), \Re(k_\psi^0)[$: pour lequel la totalité des ondes de cisaillement sont des ondes propagatives alors que les ondes de compression sont des ondes évanescentes,

$k^0_{2,\phi} = \mathrm{i}\kappa^0_{2,\phi}$ et $k^1_{2,\phi} = \mathrm{i}\kappa^1_{2,\phi}$ tel que $\left(\kappa^0_{2,\phi}, k^0_{2,\psi}, \kappa^1_{2,\phi}, k^1_{2,\psi}\right) \in \mathbb{R}^5$, courbes en tirets noirs

- $\mathcal{I}_4 =]-\Re(k^1_\psi), -\Re(k^0_\psi)] \cup [\Re(k^0_\psi), \Re(k^1_\psi)[$: pour lequel les seules ondes propagatives sont les ondes de cisaillement dans le milieu Ω_1 alors que les autres sont évanescentes $k^0_{2,\phi} = \mathrm{i}\kappa^0_{2,\phi}$, $k^0_{2,\psi} = \mathrm{i}\kappa^0_{2,\phi}$ et $k^1_{2,\phi} = \mathrm{i}\kappa^1_{2,\phi}$ tel que $\left(\kappa^0_{2,\phi}, \kappa^0_{2,\psi}, \kappa^1_{2,\phi}, k^1_{2,\psi}\right) \in \mathbb{R}^5$, courbes en trait continu noir

- $\mathcal{I}_5 =]-\infty, -\Re(k^1_\psi)] \cup [\Re(k^1_\psi), \infty[$: pour lequel la totalité des ondes sont évanescentes $k^0_{2,\phi} = \mathrm{i}\kappa^0_{2,\phi}$, $k^0_{2,\psi} = \mathrm{i}\kappa^0_{2,\phi}$, $k^1_{2,\phi} = \mathrm{i}\kappa^1_{2,\phi}$ et $k^1_{2,\psi} = \mathrm{i}\kappa^1_{2,\psi}$ tel que $\left(\kappa^0_{2,\phi}, \kappa^0_{2,\psi}, \kappa^1_{2,\phi}, \kappa^1_{2,\psi}\right) \in \mathbb{R}^5$, courbes en trait continu vert

Les courbes en traits continus rouge représentent les intégrales totales. Ainsi nous noterons

- $OP0_\phi$ les ondes de compression propagatives dans le milieu Ω_0
- $OS0_\phi$ les ondes de compression évanescentes dans le milieu Ω_0
- $OP0_\psi$ les ondes de cisaillement propagatives dans le milieu Ω_0
- $OS0_\psi$ les ondes de cisaillement évanescentes dans le milieu Ω_0
- $SOP1_\phi$ les ondes de compression propagatives dans le milieu Ω_1
- $SOS1_\phi$ les ondes de compression évanescentes dans le milieu Ω_1
- $SOP1_\psi$ les ondes de cisaillement propagatives dans le milieu Ω_1
- $SOS1_\psi$ les ondes de cisaillement évanescentes dans le milieu Ω_1

Remarque : Cette décomposition n'est pas forcément celle qui renseigne le plus sur le type d'ondes réellement présent, en particulier en ce qui concerne les ondes P. Dans cette optique, il aurait été plus opportun de réaliser les décompositions sur les intervalles $[-\Re(k^0_\phi), \Re(k^0_\phi)]$, $[-\Re(k^1_\phi), -\Re(k^0_\phi)[\cup]\Re(k^0_\phi), \Re(k^1_\phi)]$, et $]-\infty, -\Re(k^1_\phi)[\cup]\Re(k^1_\phi), \infty[$ des composantes suivant les axes $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ correspondant aux ondes P, c'est-à-dire au terme $\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}^1(\mathbf{x}, \omega)$, et sur les intervalles $[-\Re(k^0_\psi), \Re(k^0_\psi)]$, $[-\Re(k^1_\psi), -\Re(k^0_\psi)[\cup]\Re(k^0_\psi), \Re(k^1_\psi)]$, et $]-\infty, -\Re(k^1_\psi)[\cup]\Re(k^1_\psi), \infty[$ des composantes suivant les axes $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ correspondant aux ondes SV, c'est-à-dire au terme $\nabla \wedge \boldsymbol{\psi}^1(\mathbf{x}, \omega)$. Effectivement, dans la décomposition que nous avons adoptée, les trois premiers intervalles recouvrent une partie des ondes propagatives SV dans le domaine Ω_0. Pour autant, elle trouve son intérêt dans les projections suivant les axes $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ à la manière des enregistrements in-situ. Même si elle ne permet pas de réelle conclusion sur le type d'ondes de compression mis en jeu, elle fournit une information réelle en ce qui concerne le type d'ondes SV, les composantes P étant très atténuées lorsque les changements de type d'ondes SV se réalisent aux bornes k^0_ψ et k^1_ψ.

Les caractéristiques des simulations réalisées sont résumées dans le tableau suivant

Paramètre/Site	Nice (N)	Mexico (MC)
ρ^0	$2000kg.m^{-3}$	$2000kg.m^{-3}$
α^0	$2000m.s^1$	$1600m.s^{-1}$
$(Q^\alpha)^0$	300	300
β^0	$1000m.s^{-1}$	$600m.s^{-1}$
$(Q^\beta)^0$	150	150
ρ^1	$1800kg.m^{-3}$	$1300kg.m^{-3}$
α^1	$1500m.s^{-1}$	$1500m.s^{-1}$
$(Q^\alpha)^1$	50	50
β^1	$60m.s^{-1}$	$60m.s^{-1}$
$(Q^\beta)^1$	30	30
$h(m)$	$50m$	$50m$
Profondeur focale (m)	100,3000	100, 3000
Distance épicentrale (m)	0-3000	0-3000
$\nu_0(Hz)$	2	0.5
Onde incidente	SV	P ou SV

Nous pouvons nous interroger sur l'excitation possible de l'onde de Rayleigh. Selon, [118], elle peut être excitée si l'épaisseur $h = 50m$ est supérieure à la longueur d'onde dans la couche. Un calcul rapide de le longueur d'onde la plus petite dans la couche, associée aux ondes SV $\lambda^1_\psi \approx \frac{\left(c^1_S\right)_R}{\nu_0}$ donne dans le cas de Mexico $\lambda^1_\psi \approx 120m > h$, et dans le cas de Nice $\lambda^1_\psi \approx 100m > h$. **Seuls les modes de Rayleigh généralisés peuvent donc être excités dans cette configuration, et en aucun cas une onde de Rayleigh éventuellement couplée à une onde de Stoneley ne peut l'être.**

Nous adoptons la même définition de la fonction de transfert, cette fois associée aux déplacements dans les deux directions $\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_2$ $TF^1_1(\omega) = \frac{u^1_1(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)}$, $TF^1_2(\omega) = \frac{u^1_2(\mathbf{x_g},\omega)}{A^i(\omega)}$, où $A^i(\omega) = \psi^i(\omega)$, si l'onde incidente est une onde polarisée en cisaillement vertical, et $A^i(\omega) = \phi^i(\omega)$, si l'onde incidente est polarisée en onde de compression. Les mêmes remarques que dans la section II.1.1.6 peuvent alors être formulées en ce qui concerne ces définitions.

Remarque : pour les résultats suivants, l'amplitude des fonctions de transfert semble augmenter avec la fréquence. Ce phénomène est dû au fait que nous utilisons une formulation en potentiel qui implique une dérivation spatiale, c'est-à-dire une multiplication par une quantité proche de ω. Plus exactement, nous divisons un déplacement par un spectre relatif à un potentiel. Dans ce cas, la division par le champ de déplacement incident aurait été plus appropriée.

1.2.5.1 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g},\omega)$ dans le cas de la ville de Nice

Les résultats présentés ici sont relatifs à une configuration supposée représentative du sous-sol de la ville de Nice (N). L'onde incidente est une onde polarisée en cisaillement vertical.

Intéressons-nous, tout d'abord, aux fonctions de transfert. Les figures III.1.6 et III.1.7 représentent respectivement les fonctions de transfert associées aux déplacements suivant l'axe x_1 et suivant l'axe

x_2, pour différentes localisations de la source et différents points d'observation.

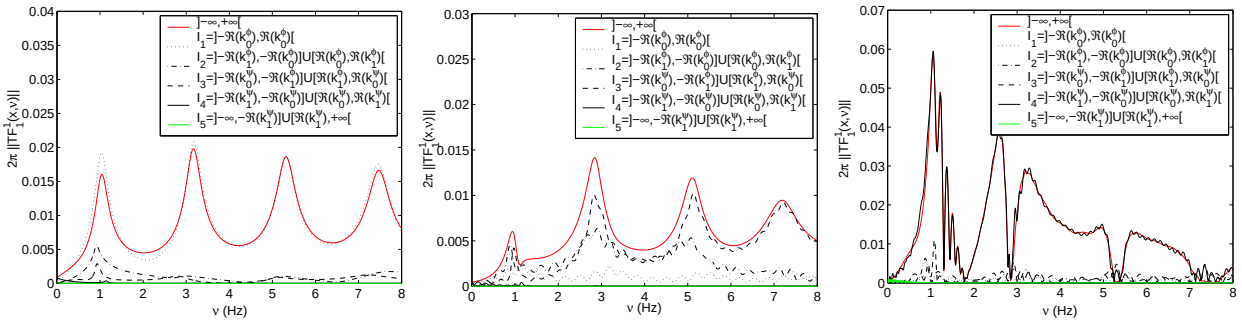


FIG. 1.6 – *Nice (N) : Onde SV incidente - 2π fois le module des fonctions de transfert associées aux déplacements $u_1(\mathbf{x_g}, \omega)$ pour différentes localisations de la source $\mathbf{x^s}$ et différents points d'observation $\mathbf{x_g}$: sur la gauche profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et faible distance épicentrale $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$, au milieu profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$, et sur la droite profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$.*

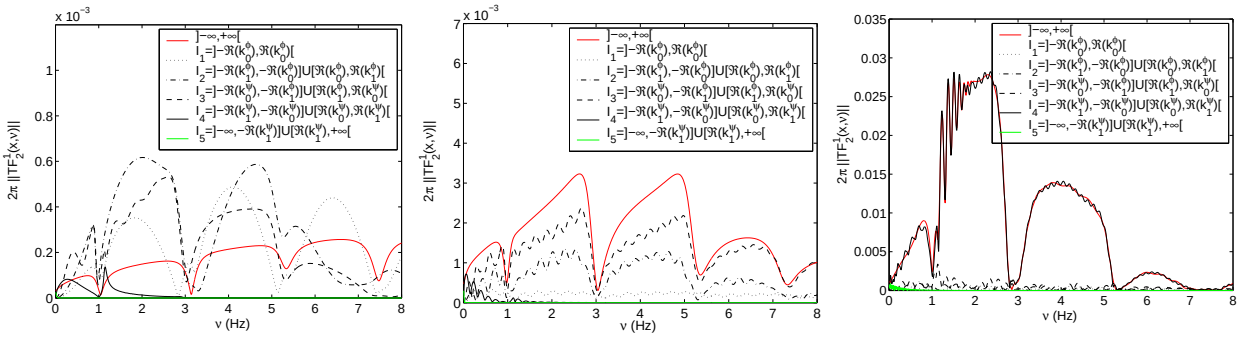


FIG. 1.7 – *Nice (N) : Onde SV incidente - 2π fois le module des fonctions de transfert associées aux déplacements $u_2(\mathbf{x_g}, \omega)$ pour différentes localisations de la source $\mathbf{x^s}$ et différents points d'observation $\mathbf{x_g}$: sur la gauche profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et faible distance épicentrale $\mathbf{x_g} = (100, 0)$, au milieu profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$, et sur la droite profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$.*

Aucune onde évanescente de cisaillement dans la couche ne semble être excitée. Par conséquent, **les ondes de Rayleigh généralisées ne sont pas, pour notre cas, des ondes de surface en cisaillement**. Lorsque la source est localisée à une profondeur focale importante et que le point d'observation est situé à une distance épicentrale faible, la fonction de transfert présente des pics caractéristiques de phénomènes d'interférence très similaires à ceux rencontrés dans le cas des modes de Love. Seule la composante $u_1(\mathbf{x}, \omega)$ est non négligeable puisque dans ce cas, la conversion de modes est très faible, ou nulle (en incidence normale). Les ondes dominantes sont les ondes propagatives dans tous les milieux. Ce cas est celui d'une excitation par onde plane en incidence normale (ou presque), considéré dans [108]. Les modes de la couche ne sont pas excités. Si maintenant nous considérons un point d'observation plus éloigné, toujours avec une distance focale importante, le premier pic se trouve légèrement décalé vers les basses fréquences et présente une forme plus comparable à celle observée lors de l'excitation d'un mode. Les pics d'ordre supérieur

ne semblent pas subir de modification. Pour autant, les ondes dominantes ne sont plus des ondes propagatives dans tous les milieux et pour toutes les phases, mais des ondes de compression évanescentes dans les deux milieux. La composante $u_2(\mathbf{x}, \omega)$ n'est plus quasiment nulle. Même si les phénomènes sont modifiés, nous ne pouvons pas qualifier ces phénomènes d'excitation de mode. Il est fortement possible qu'ils soient associés lorsque la source est localisée à une profondeur focale importante, à des "leaky modes", comme dans le cas des "modes" d'Haskell.

Lorsque la source est localisée proche de l'interface Γ_h, et que le point d'observation est loin, la totalité des pics est décalée vers les basses fréquences, comparativement aux cas où la source est localisée en profondeur et le point d'observation est situé à une distance épicentrale faible. C'est particulièrement vrai pour le premier pic. Certaines fréquences sont coupées et correspondent aux pics de maximum d'interférence autre que fondamental, précédemment observés et légèrement décalés. Des pics satellites apparaisent sur la composante suivant x_1. Ces phénomènes sont comparables à ceux observés pour l'excitation des modes de Love. Les ondes dominantes sont des ondes évanescentes de compression dans tous les milieux et des ondes $OS0_\psi$ et $SOP1_\psi$. Ce sont des ondes de Rayleigh généralisées qui correspondent dans notre cas, du point de vue des ondes de cisaillement, à des ondes de surface dans le substratum et à des ondes propagatives dans la couche, de façon similaire aux ondes de Love.

Ce premier résultat confirme que le modèle, communément appelé modèle 1D, qui correspond à une profondeur focale importante et à une distance épicentrale très faible, voire nulle, **ne rend pas compte de la totalité des phénomènes qui peuvent être mis en jeu** lors de l'excitation de cette configuration "simple" par une onde, dans le cas P-SV. Les figures III.1.8 représentent les déplacements $u_1(\mathbf{x}, t)$ et $u_2(\mathbf{x}, t)$ pour une excitation par un pseudo Ricker à $\nu = 2Hz$, pour les différentes configurations précédentes.

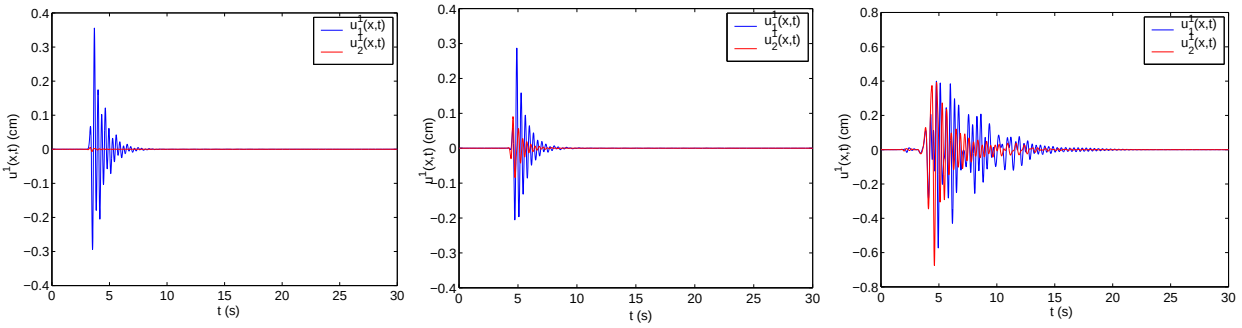


FIG. 1.8 – *Nice (N) : Onde SV incidente - Déplacements* $u_1(\mathbf{x_g}, t)$, *courbes bleues et* $u_2(\mathbf{x_g}, t)$, *courbes rouges pour différentes localisations de la source* $\mathbf{x}^s$ *et différents points d'observation* $\mathbf{x_g}$ *: sur la gauche profondeur focale importante* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ *et faible distance épicentrale* $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$, *au milieu profondeur focale importante* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ *et distance épicentrale importante* $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$, *et sur la droite profondeur focale faible* $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ *et distance épicentrale importante* $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$.

Les sismogrammes, portant sur $u_1(\mathbf{x}, t)$ sont similaires, pour une source localisée en profondeur, même si les ondes dominantes sont différentes dans le cas où la distance épicentrale est importante ou faible. Par contre, **lorsque la source est proche de** Γ_h et lorsque le point d'observation est situé à une **distance épicentrale importante**, le sismogramme est d'**amplitude plus importante**, de **durée également plus importante**, et présente des **battements**. L'onde arrive plus

vite que l'onde incidente dans ce cas car il y a conversion de modes. Les sismogrammes portant sur $u_2(\mathbf{x}, t)$ sont : i)similaires à ceux enregistrés suivant l'axe x_1 dans le cas où la source est proche de Γ_h pour une distance épicentrale importante, ii) quasi-nuls pour une incidence quasi-normale et une source profonde, iii) d'amplitude légèrement moindre lorsque la source est profonde et le point d'observation éloigné. Ainsi, autant du point de vue spectral que du point de vue temporel, les phénomènes sont radicalement différents selon que la source est localisée en profondeur ou proche de Γ_g.

Dans le cas où la source est proche, nous excitons les modes de Rayleigh généralisés qui correspondent, dans notre cas à des ondes de compression évanescentes dans les deux milieux $OS0_\phi$ et $SOS1_\phi$, à des ondes de cisaillement évanescentes dans le subtratum $OS0_\psi$ et à des ondes propagatives dans la couche $SOP1_\psi$. Cela se traduit dans le domaine temporel par une durée relativement importante, des battements, une amplitude importante, mais aussi par une composante suivant x_2 quasiment de même amplitude que celle suivant x_1 (due également à l'aspect géométrique de la configuration), figure III.1.9. Pour cette figure les distances focales sont identiques.

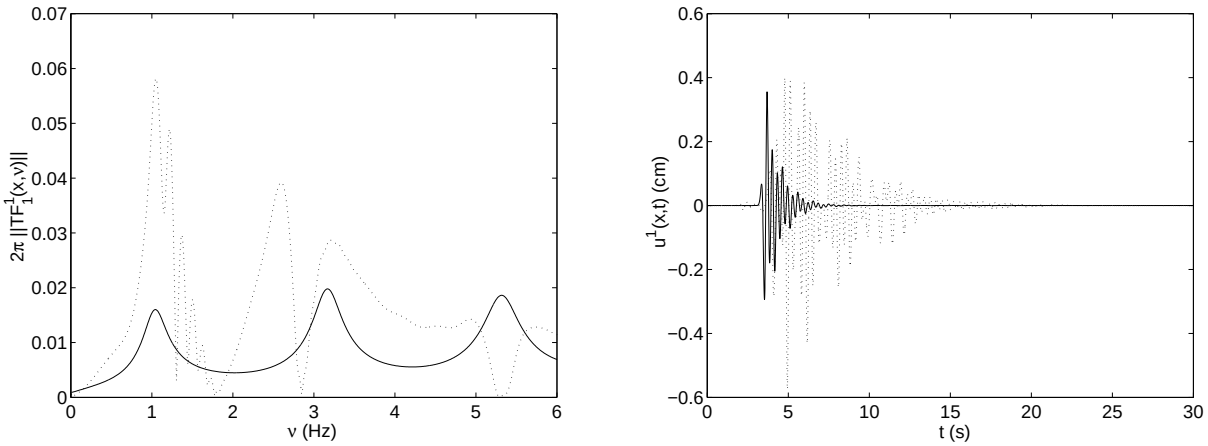


FIG. 1.9 – *Nice (N) : Onde SV incidente - Comparaison des composantes suivant x_1 (la comparaison étant immédiate sur les composantes x_2, le déplacement étant quasiment nul lorsque la profondeur de la source est grande à sa quasi verticale) entre les deux configurations $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et $\mathbf{x_g} = (100, 0m)$ courbes en trait continu, et $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0m)$ courbes en pointillés. À gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert, à droite le déplacement $u_1(\mathbf{x}, t)$.*

1.2.6 Champ de déplacement sur le sol $u^1(\mathbf{x_g}, \omega)$ dans le cas de la ville de Mexico

Les résultats présentés ici sont relatifs à une configuration supposée représentative du sous-sol de la ville de Mexico (MC).

Intéressons-nous tout d'abord, aux fonctions de transfert et au cas où la source est polarisée en ondes de cisaillement vertical.

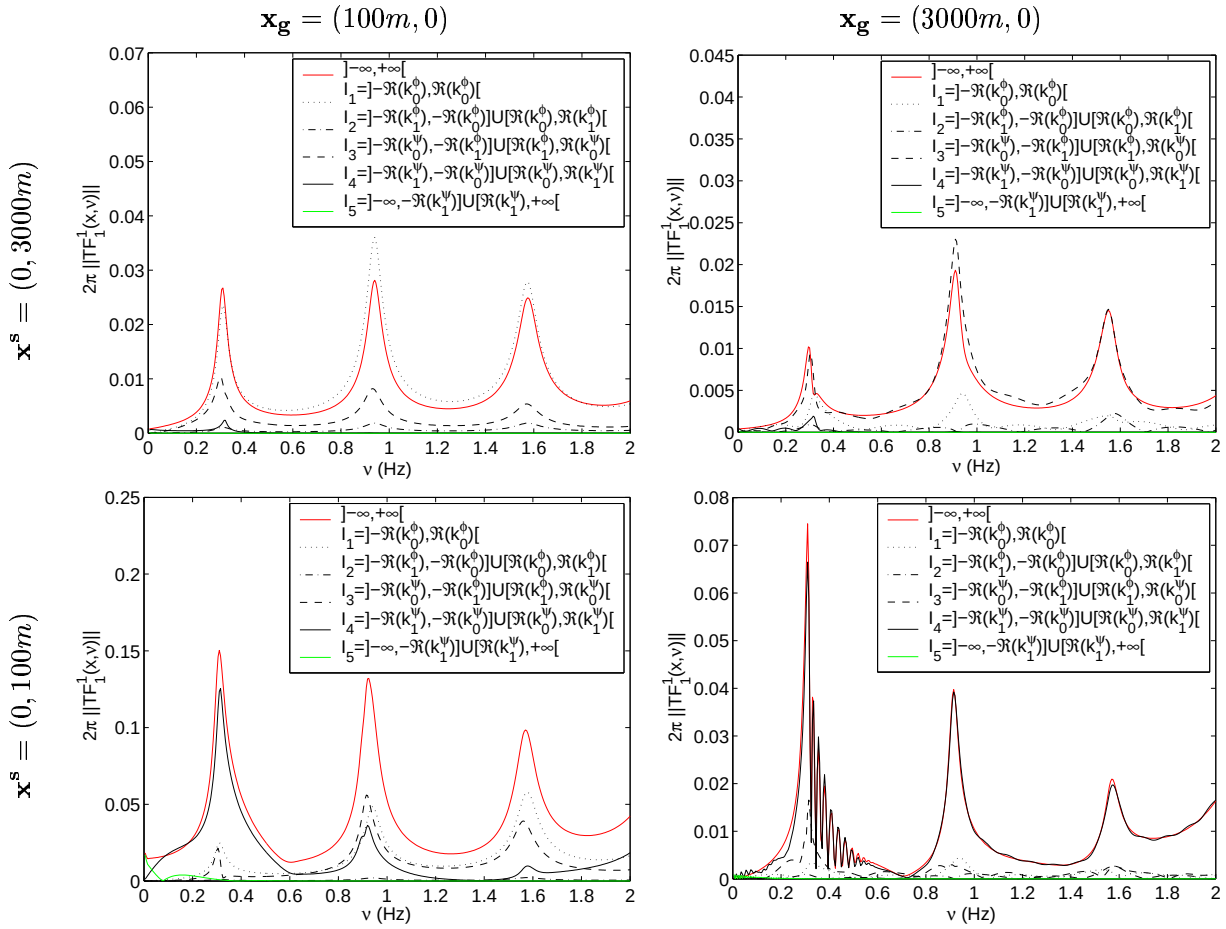


FIG. 1.10 – *Mexico (MC) : Onde SV incidente* - 2π *fois le module des fonctions de transfert associées aux déplacements* $u_1(\mathbf{x_g}, \omega)$ *pour différentes localisations de la source* $\mathbf{x^s}$ *et différents points d'observation* $\mathbf{x_g}$ *: en haut profondeur focale importante* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ *et en bas profondeur focale faible* $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ *; à gauche faible distance épicentrale* $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$ *et à droite distance épicentrale importante* $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$.

L'analyse est identique à celle exposée dans le cas de la ville de Nice. Pour une profondeur focale importante et pour une distance épicentrale faible, les ondes sont propagatives quelles que soient leurs phases et le milieu dans lequel elles se propagent. Lorsque la distance épicentrale augmente, les ondes dominantes deviennent des ondes de compression évanescentes dans les deux milieux. La position des pics, en particulier pour un cas en incidence quasi-normale, est pratiquement identique à celle rencontrée pour le cas des phénomènes d'interférence, section II.1.1. Lorsque la profondeur focale est moindre et lorsque la distance focale est faible, la forme de la fonction de transfert est relativement identique à celle obtenue dans le cas où la profondeur focale est importante. Cependant les ondes dominantes dans cette fonction de transfert sont de trois types selon le pic considéré : propagatives pour toutes les phases et pour tous les milieux, de compression évanescentes et de cisaillement propagatives dans les deux milieux, et de compression évanescentes ainsi que de cisaillement évanescentes dans le substratum et propagatives dans la couche. Quelques ondes de cisaillement évanescentes dans la couche sont générées en basses fréquences, qui sont négligeables en pratique. Ainsi, ces pics sont en fait composés de plusieurs pics qui peuvent donner lieu dans certains cas, à des "scindages". Lorsque la **distance épicentrale est importante, les modes**

de Rayleigh généralisés sont excités et les ondes dominantes sont des ondes évanescentes de compression dans tous les milieux et des **ondes $OS0_\psi$ et $SOP1_\psi$**. Les **fréquences des pics sont quasiment identiques à celles des modes de Love**. Ceci est certainement dû au fait que les vitesses des ondes de compression sont quasiment identiques dans les deux milieux, mais aussi au fait que les modes de Rayleigh généralisés semblent être largement déterminés par les vitesses de cisaillement, figure III.1.5, en particulier liés à leur contraste.

En ce qui concerne les fonctions de transfert associées aux déplacements suivant x_2, elles sont quasi-nulles, en incidence quasi-normale, pour une source profonde et augmentent avec la distance épicentrale. Dans le cas où la source est proche, elles décroissent avec la distance épicentrale, et présentent des pics oscillants lorsque le point d'observation est éloigné. Ces pics correspondent aux pics satellites repérés sur la fonction de transfert associée aux déplacements suivant x_1 après la limite hautes fréquences du premier pic de résonance de Rayleigh généralisé. Le type d'ondes dominantes dans chaque configuration est le même que suivant la composante suivant x_1.

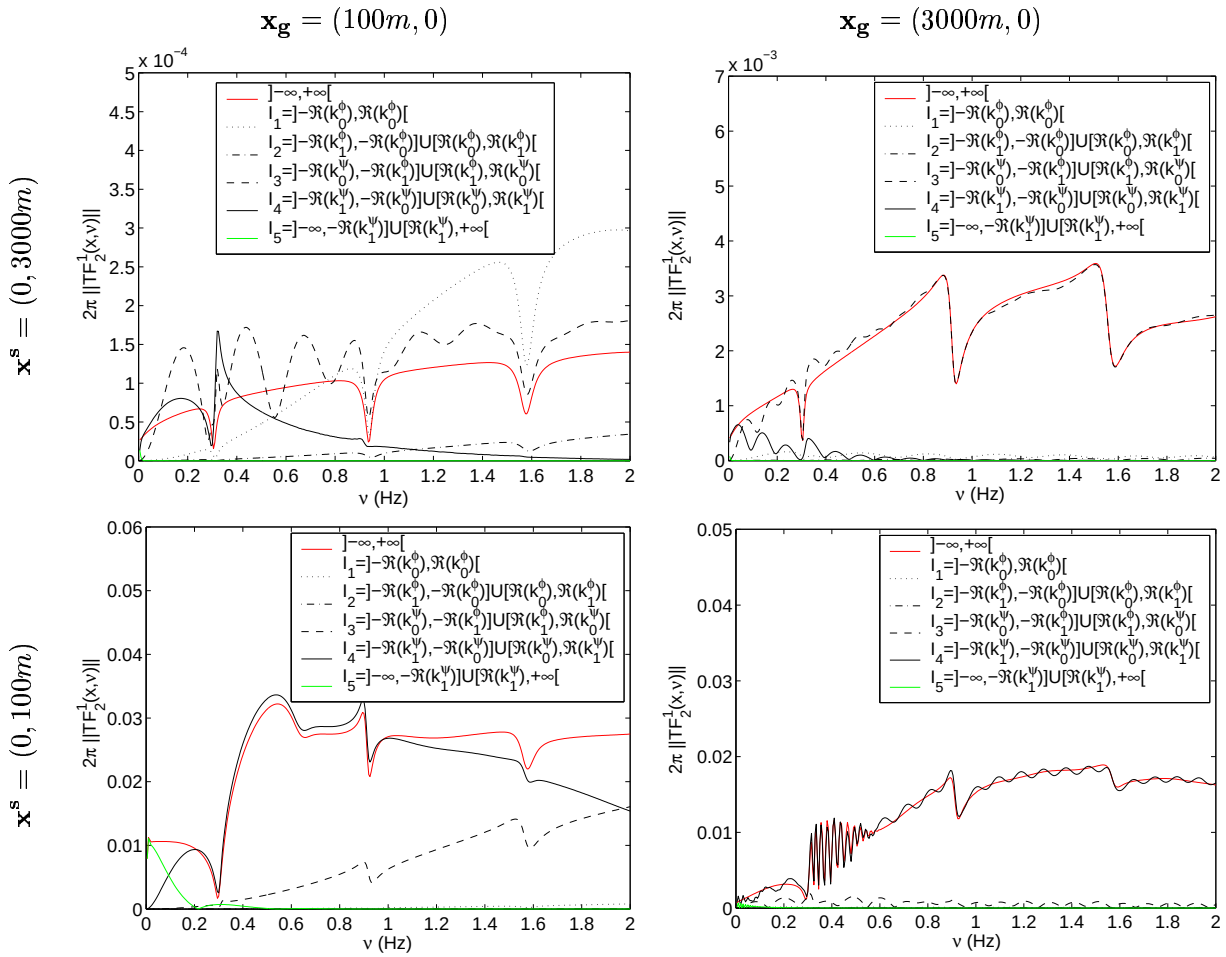


FIG. 1.11 – *Mexico (MC) : Onde SV incidente - 2π fois le module des fonctions de transfert associées aux déplacements $u_2(\mathbf{x_g}, \omega)$ pour différentes localisations de la source $\mathbf{x^s}$ et différents points d'observation $\mathbf{x_g}$: en haut profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et en bas profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$; à gauche faible distance épicentrale $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$ et à droite distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$.*

Dans le domaine temporel, les déplacements correspondants, pour une source de type pseudo-Ricker centrée à $\nu_0 = 0.5Hz$ et polarisée en ondes de cisaillement vertical, sont présentés figure III.1.12.

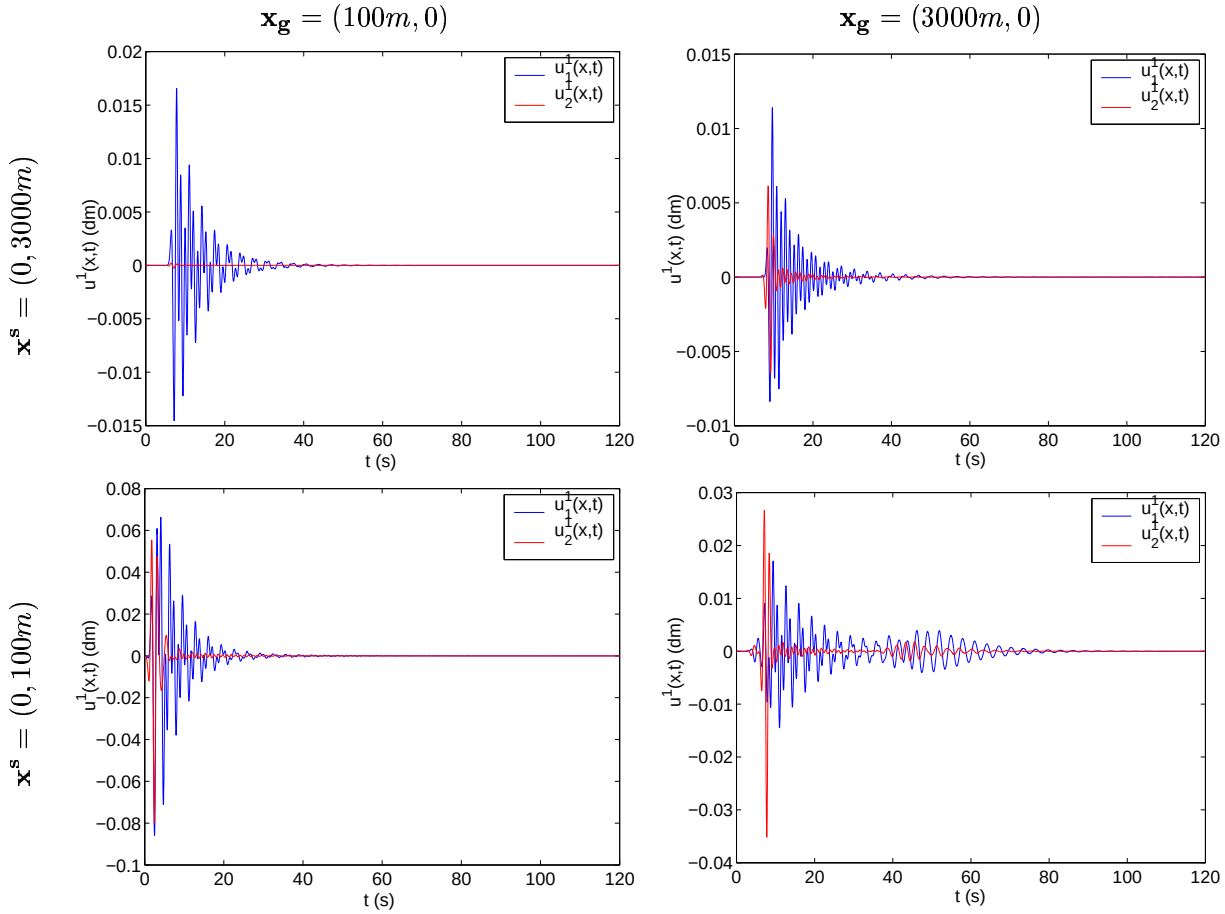


FIG. 1.12 – *Mexico (MC) : Onde SV incidente - Déplacements* $u_1(\mathbf{x_g}, t)$*, courbes bleues, et* $u_2(\mathbf{x_g}, t)$*, courbes rouges, pour différentes localisations de la source* $\mathbf{x^s}$ *et différents points d'observation* $\mathbf{x_g}$ *: en haut, profondeur focale importante* $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ *et en bas profondeur focale faible* $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ *; à gauche faible distance épicentrale* $\mathbf{x_g} = (100m, 0)$*, et à droite distance épicentrale importante* $\mathbf{x_g} = (3000m, 0)$*.*

Les formes des sismogrammes pour une source profonde, et un point d'observation éloigné ou proche, ainsi que pour une source peu profonde et un point d'observation proche sont relativement comparables, bien qu'ils ne correspondent pas aux mêmes phénomènes, ni aux mêmes types d'ondes. Seule l'amplitude des composantes suivant l'axe x_2 sont différentes. Par contre, lorsque la source est peu profonde et le point d'observation éloigné, les sismogrammes, sur les deux axes, présentent des battements et sont de durée beaucoup plus importante que dans les autres cas. Une comparaison de ces composantes est représentée figure, III.1.13, pour une distance focale constante, mais pour des profondeurs de source différentes. **Le premier pic est d'amplitude et de finesse plus importantes lorsque les modes de Rayleigh généralisés sont excités.** Il est **décalé vers les basses fréquences** et la fonction de transfert présente des **pics satellites**. Dans le domaine temporel, cela se traduit par des **battements** et une **durée plus importante**. Les **amplitudes** sont **comparables**.

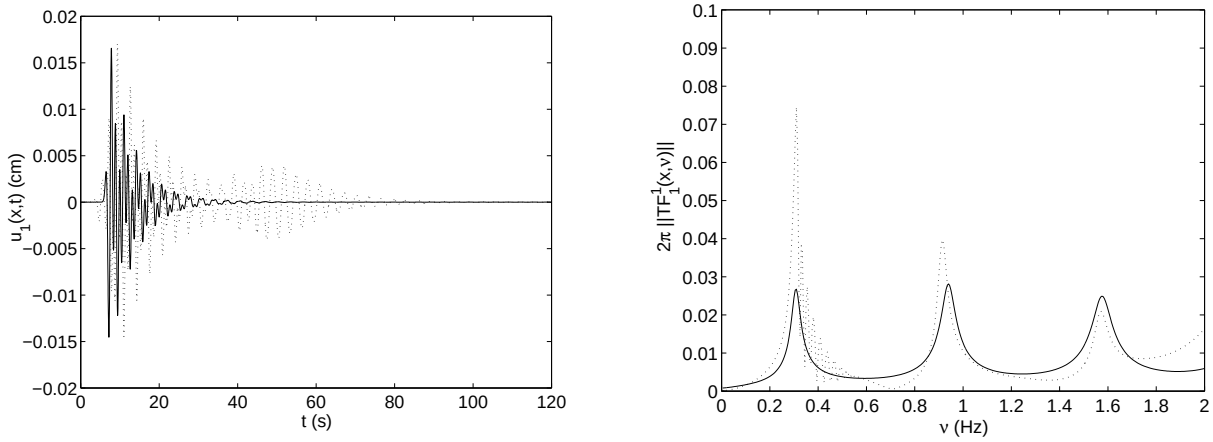


FIG. 1.13 – *Mexico (MC) : Onde SV incidente - Comparaison des composantes suivant x_1 (la comparaison étant immédiate sur les composantes x_2) entre les deux configurations $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et $\mathbf{x_g} = (100, 0m)$ courbes en trait continu, et $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0m)$ courbes en pointillés. À gauche, 2π fois le module de la fonction de transfert, à droite le déplacement $u_1(\mathbf{x_g}, t)$.*

Ainsi, mis à part l'aspect vectoriel bidimensionnel des déplacements, les modes de Rayleigh généralisés semblent avoir une structure, dans les cas que nous avons traités, relativement proche de celle des modes de Love. Ils présentent des pics satellites suivant la composante suivant x_1 relativement similaires à ceux rencontrés dans le cas SH, section II.1.1. Les durées sont, par contre, plus faibles dans le cas présent.

Il est à noter que les composantes suivant x_2 ne sont pas négligeables dans les cas où la distance épicentrale est grande. Ainsi, l'excitation d'une configuration 2D à l'aide d'une onde plane en incidence normale polarisée en onde SV, comme il l'est souvent fait [108] : 1) ne permet pas l'excitation des modes de Rayleigh généralisés, 2) ne rend pas compte de la relative importance de l'amplitude des déplacements associés à la composante $u_2(\mathbf{x_g}, t)$.

Pour des positions de source et de point d'observation $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et $\mathbf{x_g} = (100, 0m)$, et $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et $\mathbf{x_g} = (3000, 0m)$, comparons les fonctions de transfert, avec cette fois-ci, la source polarisée en ondes de compression.

Lorsque la profondeur focale est importante et la distance épicentrale faible, le champ se limite quasiment à l'onde incidente. Les composantes dominantes sont des ondes de compression propagatives. Ceci est dû au fait que le contraste des vitesses des ondes P dans cette configuration est quasiment nul. Par contre, lorsque la source est proche et le point d'observation éloigné, les fonctions de transfert sont extrêmement ressemblantes à celles rencontrées dans la même configuration mais avec une source polarisée en ondes SV, et la composante dominante correspond à des ondes de cisaillement de surface dans le substratum. Cela signifie que dans le cas où les modes des Rayleigh généralisés sont excités, la polarisation de la source n'a pas une grande influence sur les phénomènes mis en jeu. Cela semble également prouver que **l'excitation des modes de Rayleigh généralisés est fortement liée au contraste des vitesses des ondes de cisaillement entre Ω_0 et Ω_1 et l'est peu au contraste des vitesses des ondes de compression**, comme le suggère la figure III.1.5. Les déplacements $u_1(\mathbf{x}, t)$ et $u_2(\mathbf{x}, t)$ en réponse au même pseudo Ricker que précédemment tendent à confirmer cette conclusion, figureII.1.15.

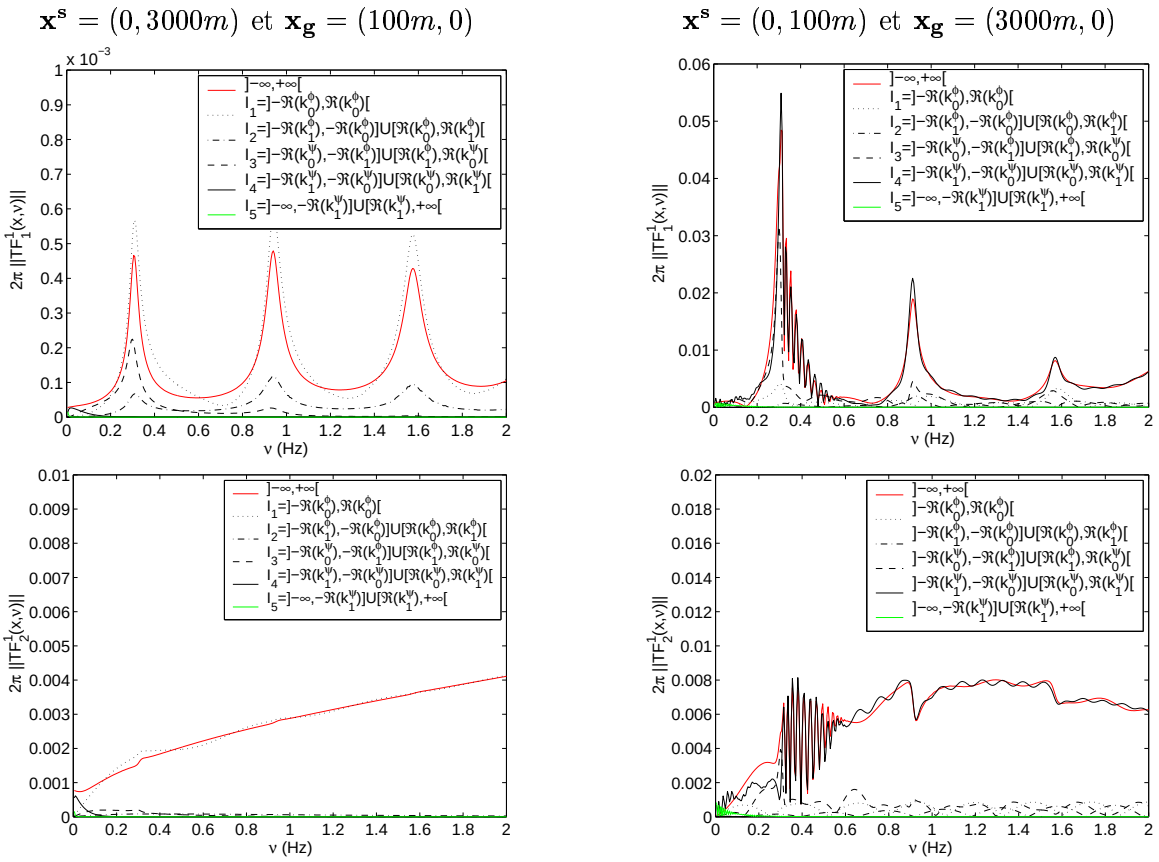


FIG. 1.14 – *Mexico (MC) : Onde P incidente - 2π fois le module des fonctions de transfert associées en haut aux déplacements $u_1(\mathbf{x_g}, \omega)$ et en bas aux déplacements $u_2(\mathbf{x_g}, \omega)$, pour différentes localisations de la source $\mathbf{x^s}$ et différents points d'observation $\mathbf{x_g}$: à gauche, profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et distance épicentrale faible $\mathbf{x_g} = (100, 0)$, à droite, profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$*

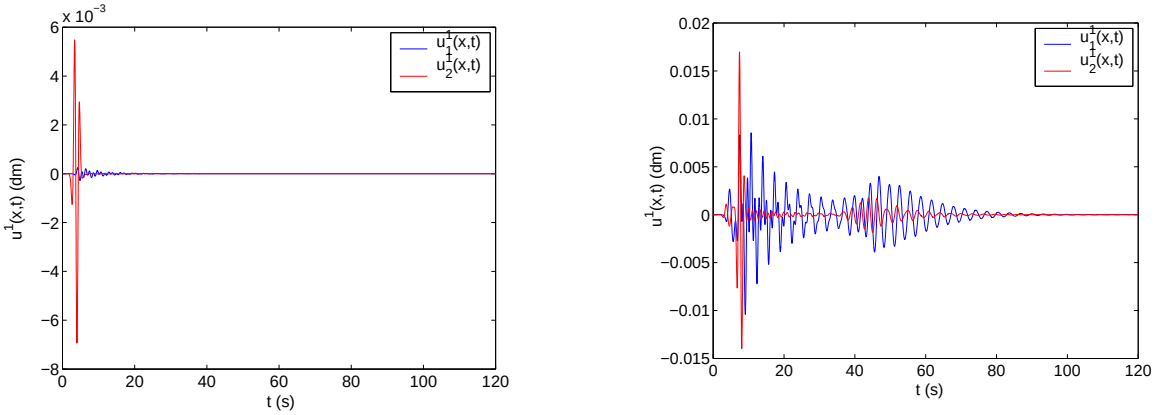


FIG. 1.15 – *Mexico (MC) : Onde P incidente - Déplacements $u_1(\mathbf{x_g}, t)$, courbes bleues et $u_2(\mathbf{x_g}, t)$, courbes rouges pour différentes localisations de la source $\mathbf{x^s}$ et différents points d'observation $\mathbf{x_g}$: sur la gauche profondeur focale importante $\mathbf{x^s} = (0, 3000m)$ et faible distance épicentrale $\mathbf{x_g} = (100, 0)$, et sur la droite profondeur focale faible $\mathbf{x^s} = (0, 100m)$ et distance épicentrale importante $\mathbf{x_g} = (3000, 0)$.*

Il reste à comprendre les pics satellites situés après les pics hautes fréquences dans le cas de l'excitation des modes de Rayleigh généralisés, comme nous l'avons fait dans le cas de l'excitation des modes de Love. Pour ceci, nous plaçons la source polarisée en ondes SV, à $\mathbf{x^s} = (100m, 0m)$ et nous enregistrons les déplacements sur le sol, entre les abscisses 0 et $3000m$. **Plus la distance épicentrale est importante, plus les modes de Rayleigh généralisés sont excités.** Comparativement aux ondes de Love, nous pouvons distinguer dans ce cas, une onde se propageant transversalement, et donnant lieu à des battements. C'est-à-dire que dans ce cas, les ondes de Rayleigh généralisées peuvent être isolées. Elles se propagent à une vitesse d'environ $70m.s^{-1}$, c'est-à-dire qu'elles ont effectivement les caractéristiques d'une onde de Rayleigh généralisée et correspondent à une onde de cisaillement de surface dans le substratum. **Les pics satellites sont de plus en plus oscillants au fur et à mesure que la distance $x_1^s - x_1$ augmente.** Nous pouvons alors faire le rapprochement avec ce que nous avons énoncé dans la section II.1.1, c'est-à-dire que ces oscillations doivent-être dues à un terme $\exp\left(\mathrm{i}k_1^\star\left(x_1^s - x_1\right)\right)$ dans l'expression des champs $u_1(\mathbf{x}, \omega)$ et $u_2(\mathbf{x}, \omega)$ où $k_1^\star$ correspond à un mode de Rayleigh généralisé.

Ainsi, nous avons montré que

- dans le cas où la **profondeur focale de la source est faible** et la **distance épicentrale est grande**, les **modes de Rayleigh généralisés sont excités** et correspondent à des ondes de compression évanescentes dans les milieux Ω_0 et Ω_1 et à des **ondes de cisaillement évanescentes dans le milieu Ω_0 et propagatives dans le milieu Ω_1**. Ils ne correspondent pas à des ondes de cisaillement de surface dans la couche et ont une structure proche de celle des modes de Love.

- ces modes **ne peuvent être excités que par une source cylindrique** et par conséquent un **modèle 1D ne fournit une représentation correcte des champs que lorsque la source sismique est profonde et le point d'observation quasiment à sa verticale**.

- y compris pour une source sismique localisée en profondeur, si le point d'observation est situé à une distance épicentrale relativement importante, les phénomènes ne peuvent être correctement représentés par le modèle 1D

- l'**excitation des modes de Rayleigh généralisés** donnent lieu à des **battements**, à un **allongement de la durée** (cependant moins important que dans le cas des ondes de Love) et à une **amplification du champ**.

- dans le cas de l'excitation de ces modes, la composante suivant x_2 est non négligeable. Ceci est dû, non seulement à l'excitation des modes de Rayleigh généralisés, mais aussi à des phénomènes de conversion d'ondes et à un effet purement géométrique. Effectivement, pour une polarisation SV, la composante à la quasi-horizontale de la source est surtout verticale.

- lorsque la configuration permet l'excitation des modes de Rayleigh généralisés, la polarisation de la source n'a que peu d'importance sur la forme globale du sismogramme, sauf sur son amplitude, [133]

Ainsi, une propagation régionale ne peut s'envisager que dans le cas où les modes sont excités, ce qui permet une propagation peu atténuée sur une grande distance.

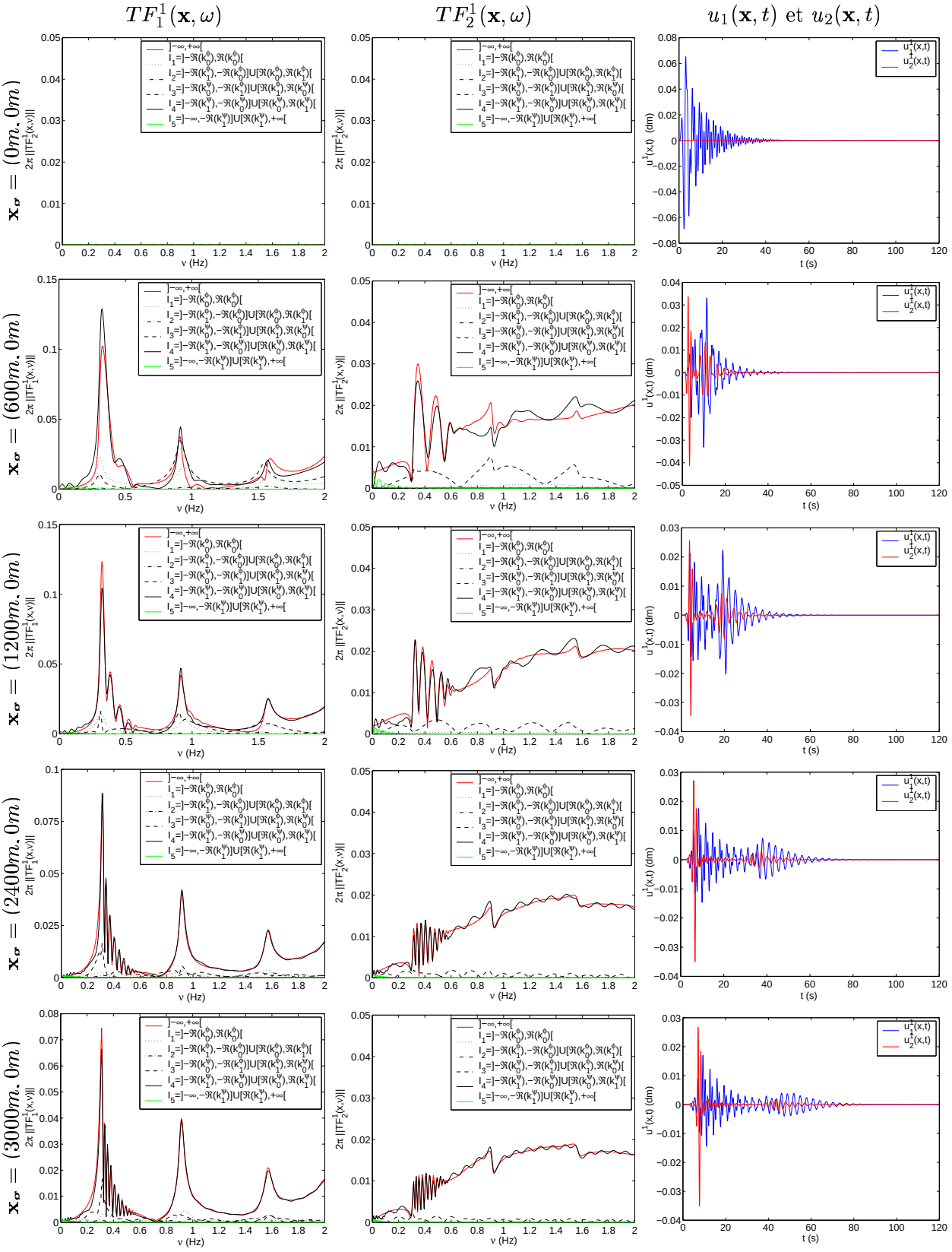


FIG. 1.16 – *Mexico (MC) : Onde SV incidente - À gauche 2π fois le module des fonctions de transfert associées aux déplacements $u_1(\mathbf{x_g},\omega)$, au milieu 2π fois les fonctions de transfert associées aux déplacements $u_2(\mathbf{x_g},\omega)$, et à droite les déplacements $u_1(\mathbf{x_g},\omega)$ et $u_2(\mathbf{x_g},\omega)$. La source est localisée à $\mathbf{x^s} = (0m, 100m)$, et le point d'observation $\mathbf{x_g} = (x_g, 0m)$, varie tel que $0m \geqq x_g \geqq 3000m$*

1.3 Utilisation de la théorie des modes de Rayleigh généralisés pour l'étude des effets régionaux

Nous examinons maintenant la façon dont une onde générée par une source située en dessous de la croûte, mais proche de celle-ci, se propage sur de grandes distances.

Il est apparu, sections III.1.2 et III.1.2.5, que l'excitation des modes de Rayleigh généralisés est surtout conditionnée par le rapport des vitesses de cisaillement. Partant de ce constat, nous examinons à nouveau le cas traité dans le section II.1.1.14, en adjoignant des valeurs réalistes de vitesses de compression aux vitesses de cisaillement précédemment considérées. Le domaine Ω_0 est cette fois occupé par un matériau dissipatif. Nous considérerons donc les valeurs suivantes : pour le matériau M^0, $\rho^0 = 2600 kg.m^{-3}$, $\left(c_P^0\right)_R = 6000 m.s^{-1}$, $Q_P^0 = 1000$, $\left(c_S^0\right)_R = 3000 m.s^{-1}$, $Q_S^0 = 800$ et pour le matériau M^1, ρ^1, $\left(c_P^1\right)_R = 4000 m.s^{-1}$, $Q_S^1 = 600$, $\left(c_S^0\right)_R = 2000 m.s^{-1}$, $Q_S^1 = 500$. La couche est d'épaisseur $h = 12 \times 10^3 m$ et la source est localisée à $\mathbf{x^s} = (0, 12 \times 10^3 m)$.

Remarque : La plus petite longueur d'onde dans la couche est $\lambda_\psi^1 \approx \dfrac{\left(c_S^1\right)_R}{\nu_0} \approx 10 \times 10^3 m$, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche. Il ne peut donc pas y avoir d'onde de Rayleigh qui soit excitée sur la surface, et seules les ondes de Rayleigh généralisées peuvent l'être.

Intéressons-nous, dans un premier temps, aux fonctions de transfert (déplacement) figures III.1.17 et III.1.18.

La première remarque concerne la forme générale de la projection de la fonction de transfert sur l'axe x_1 qui est comparable à celle rencontrée à la section II.1.1.14, dans le cas des modes de Love, excepté à la verticale de la source. En particulier, le premier pic se situe aux environs de $0.08 Hz$.

Les ondes de surface dans la couche, en cisaillement, associées au premier mode de Rayleigh généralisé sont cette fois excitées. Ainsi, il semble que celles-ci soient excitées à de larges distances et/ou pour un contraste important de vitesses de compression entre le substratum et la couche. À la verticale, les ondes dominantes dans la couche sont les ondes $SOP1_\phi$, et $SOS1_\phi$, toujours avec $SOP1_\psi$. Les ondes $SOP1_\phi$, correspondant à des phénomènes d'interférence s'estompent rapidement alors que les ondes $SOS1_\phi$ s'estompent beaucoup moins rapidement puisqu'elles sont associées à l'excitation des modes du système (tout comme les ondes $SOS1_\psi$). Ainsi, rapidement, les fonctions de transfert montrent une très nette excitation des modes du système, ce qui permet la propagation sur de longues distances. Au fur et à mesure que la distance épicentrale augmente, l'amplitude de la projection des ondes sur x_1 s'estompe au profit de la projection sur x_2. Ceci est dû au fait que l'angle entre la source et le point d'observation par rapport à x_2 est de plus en plus proche de $\frac{\pi}{2}$, mais aussi à l'excitation des modes de Rayleigh généralisés.

Dans le domaine temporel cela donne lieu aux accélérogrammes, figure III.1.19. La sollicitation est délivrée au site sous la forme d'un pseudo-Ricker (pour le déplacement) centré à $\nu_0 = 0.2 Hz$. Les accélérations sont d'amplitudes beaucoup plus importantes en projection sur l'axe x_2 au fur et à mesure que la distance épicentrale augmente. Les accélérogrammes comportent des **battements et leur durée augmente avec la distance épicentrale**. Cela est caractéristique de l'excitation d'un mode.

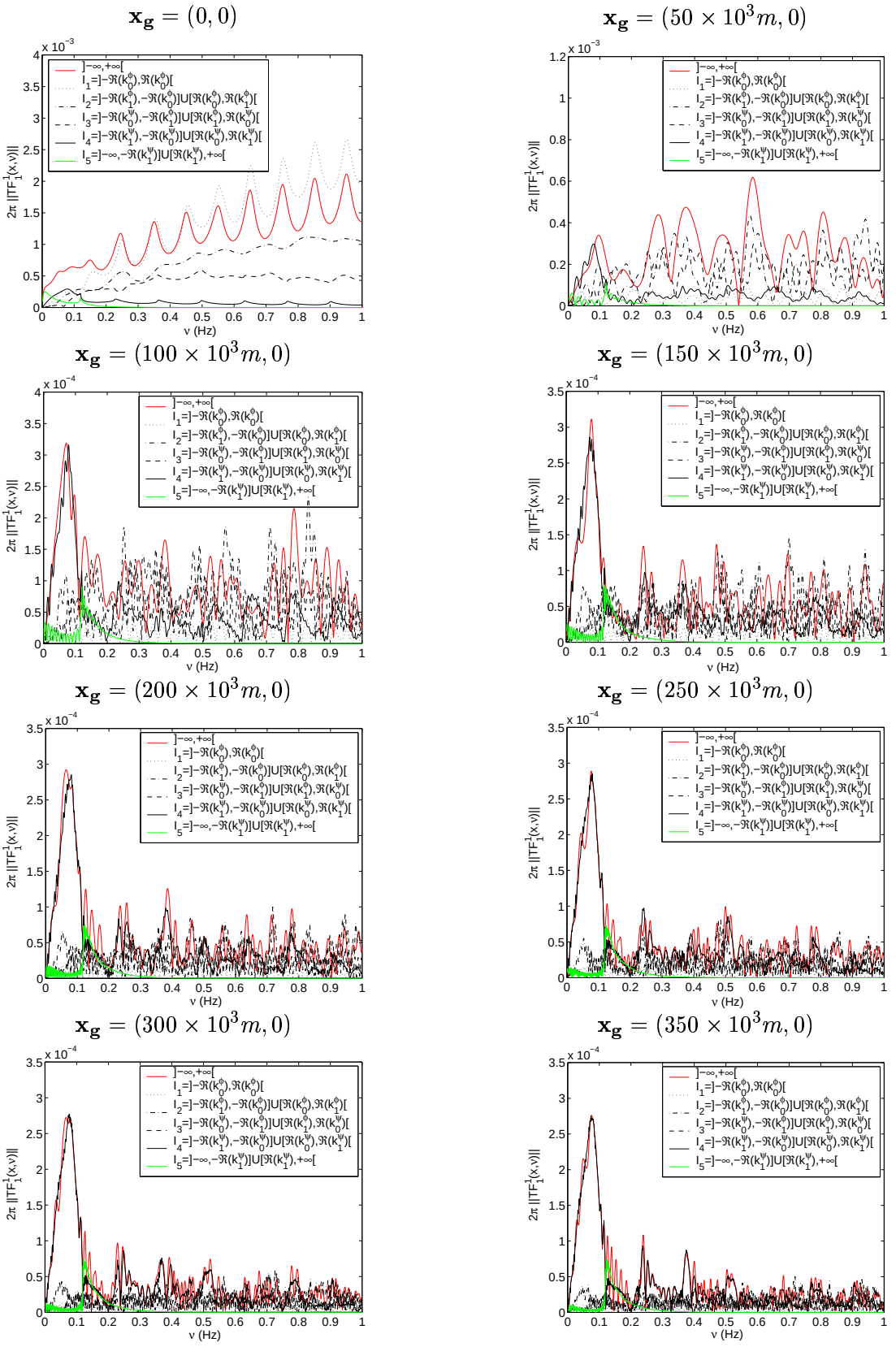


FIG. 1.17 – 2π *fois le module des fonctions de transfert de la projection suivant* x_1 *(déplacement) entre les abscisses* $\mathbf{x_g} = (0, 0)$ *et* $\mathbf{x_g} = (350.10^3 m, 0)$

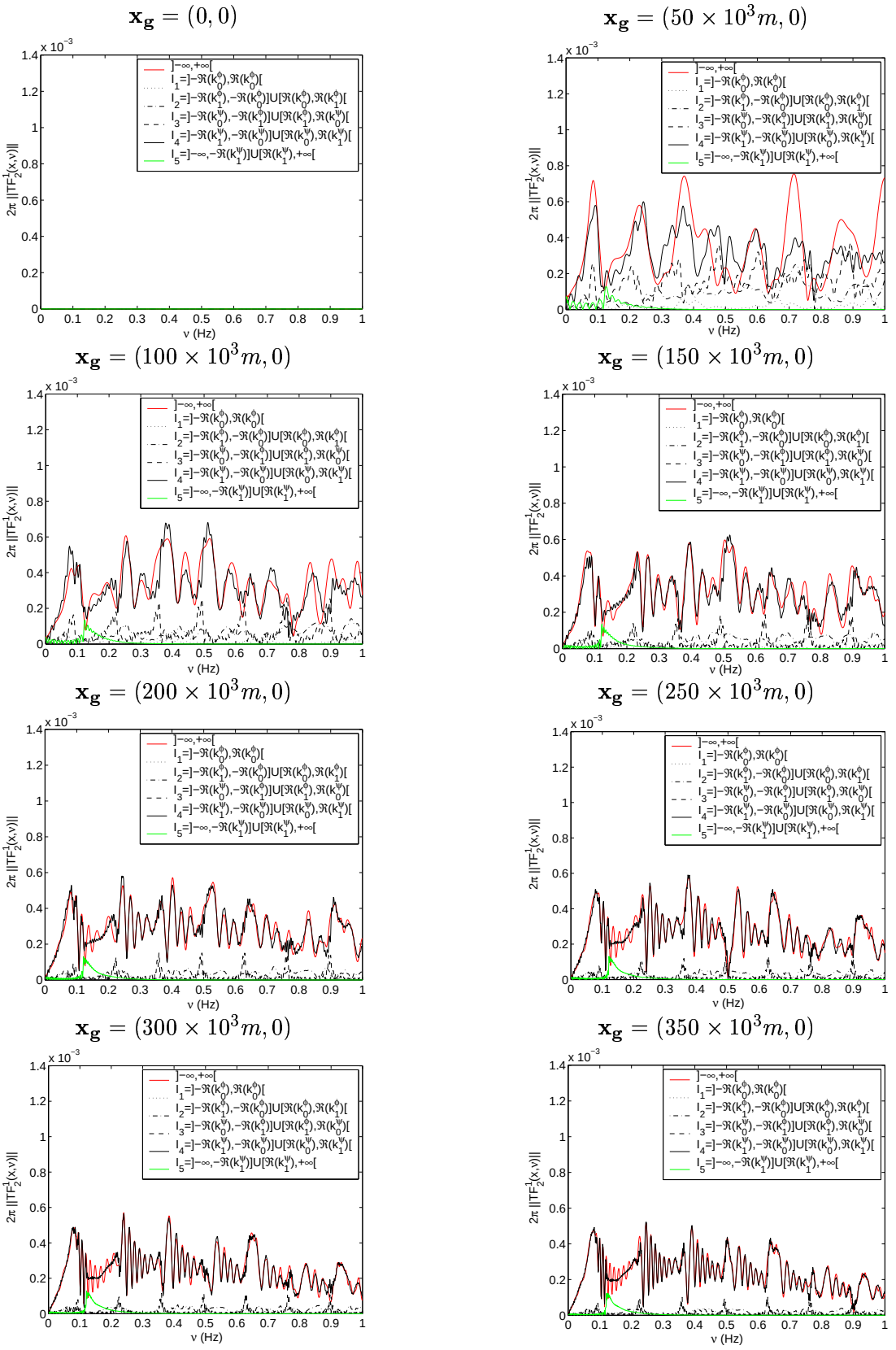


FIG. 1.18 – 2π *fois le module des fonctions de transfert de la projection suivant* x_2 *(déplacement) entre les abscisses* $\mathbf{x_g} = (0, 0)$ *et* $\mathbf{x_g} = (350 \times 10^3 m, 0)$

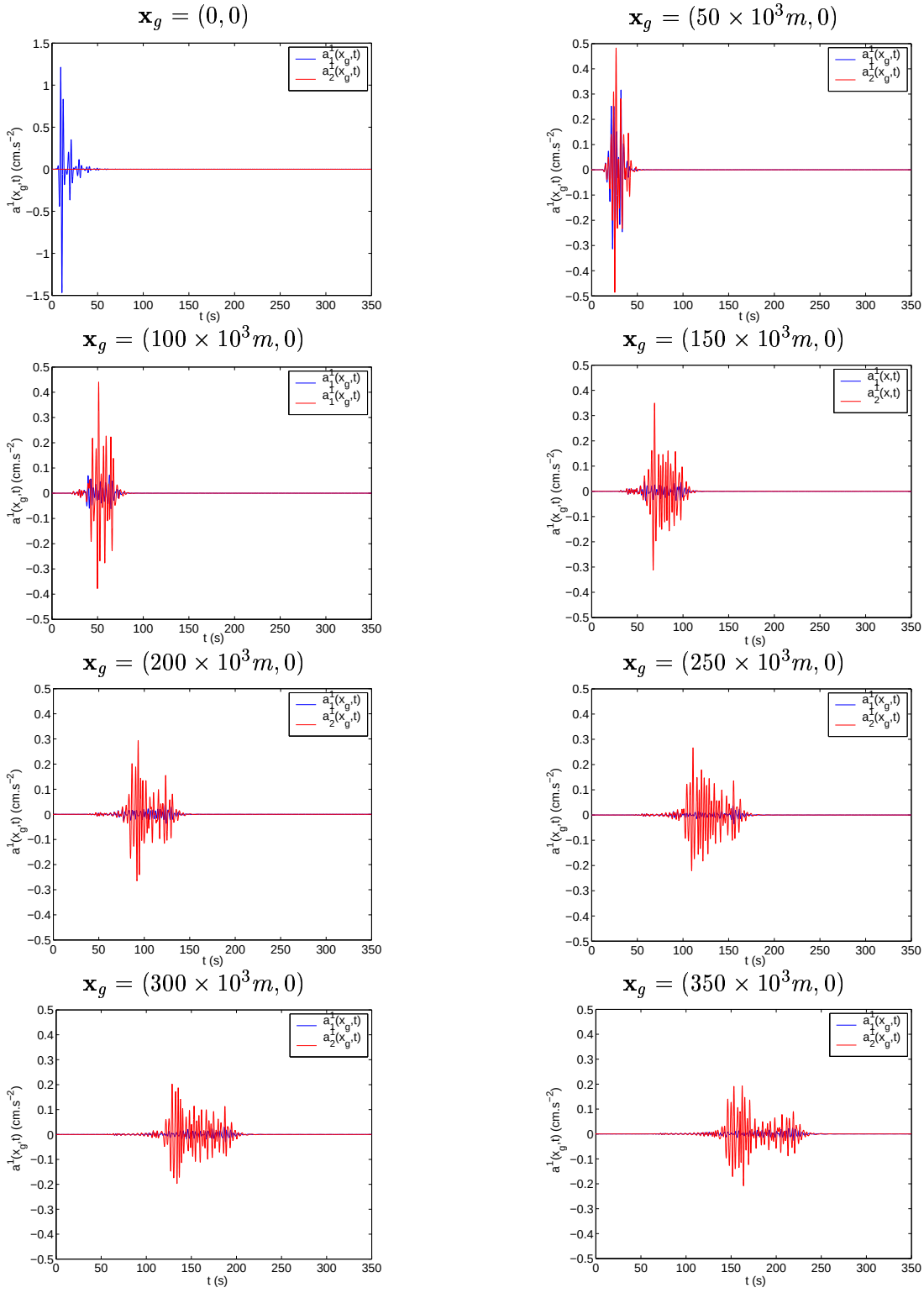


FIG. 1.19 – *Accélérations en différents points du sol entre les abscisses* $\mathbf{x}_g = (0, 0)$ *et* $\mathbf{x}_g = (350 \times 10^3 m, 0)$

Nous avons tracé figure III.1.20, l'évolution de la durée du déplacement et l'évolution de l'amplitude maximale de la vitesse en fonction de la distance épicentrale. Nous avons représenté l'évolution de ces paramètres pour les trois quantités : projection sur x_1, projection sur x_2 et le module. La durée est systématiquement plus importante sur la projection suivant x_1, alors que l'amplitude est quasi systématiquement plus importante sur la projection suivant x_2. En particulier, le module de la vitesse est quasi concomitant avec l'amplitude suivant la projection x_2, [46]. La **durée augmente linéairement**, dès que le phénomène dominant est l'excitation des modes de Rayleigh généralisés. Par contre **l'amplitude maximale de la vitesse décroît**. Ainsi, nous observons les mêmes phénomènes que dans le cas SH. Ces sismogrammes sont d'aspect et de durée similaires à ceux représentés en des points dits "en champ libre" dans [48] et ces résultats semblent confirmer que l'**augmentation du maximum de la vitesse** observée dans [70] **n'est pas seulement due à un phénomène d'excitation de mode, mais aussi à une hétérogénéité du milieu** et/ou à une variabilité de l'épaisseur de la couche.

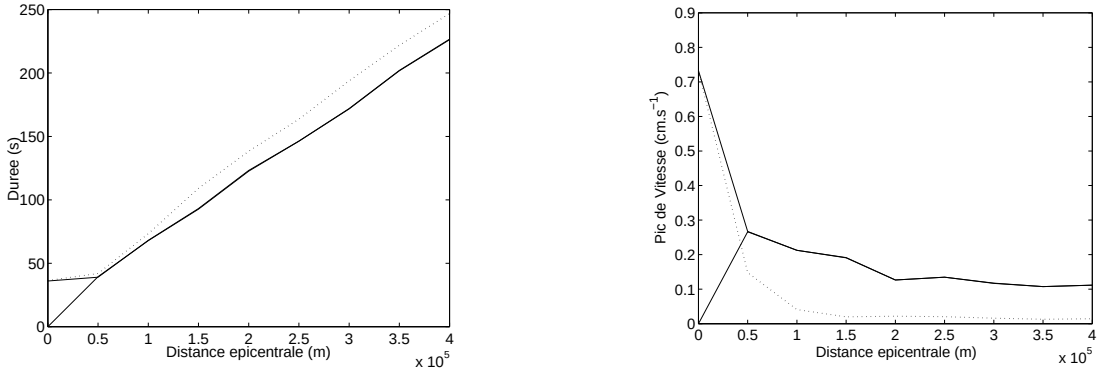


FIG. 1.20 – *À gauche évolution de la durée et à droite évolution de l'amplitude maximale de la vitesse en fonction de la distance épicentrale : courbe en traits continus* $\|\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\|$*, courbes en pointillés* $v_1(\mathbf{x},t)$*, et courbes en tirets* $v_2(\mathbf{x},t)$

Conclusion

L'onde de Rayleigh est une réelle onde de surface. Elle ne peut donc être excitée que par une source linéique, en particulier de polarisation SV, ce qui permet un meilleur couplage entre les ondes évanescentes générées par la source et la configuration. De façon similaire aux ondes de Love, cette onde est d'autant mieux excitée que la source est plus proche de la surface. Elle se propage sur une grande distance en étant moins atténuée que les ondes propagatives, incidente et réfléchies. Il serait intéressant de calculer la réponse induite dans un bassin excité par une telle onde, de façon à déterminer si elle peut, au même titre qu'une onde de Rayleigh généralisée [51], donner lieu à une réponse anormale (amplitude, battement et durée) dans ce bassin. D'autre part, nous pencher sur la réponse d'un ou plusieurs blocs, en contact parfait avec un demi-espace homogène, soumis à une excitation par une onde de Rayleigh, de façon similaire à ce qui été fait dans le cas des mouvements anti-plans dans [176, 119], nous semble de première importance. Nous verrons malheureusement, dans le chapitre suivant, qu'une telle étude ne peut être envisagée que numériquement. Elle n'est effectivement pas réalisable théoriquement, dans l'état actuel de nos connaissances.

Nous nous intéressons ensuite aux modes de Rayleigh généralisés, qui peuvent être excités pour une configuration comportant une couche. Pour les épaisseurs et les caractéristiques mécaniques du sous sol (représentatif de celui des villes de Mexico et de Nice [108, 90, 37, 21]) de nos configurations, l'onde de Rayleigh ne peut être excitée, en tout cas en l'absence d'irrégularité de surface et dans la plage de fréquences considérée. Nous montrons que **pour ces paramètres, les ondes de Rayleigh généralisées prennent une forme comparable à celles des ondes de Love**, c'est-à-dire qu'elles correspondent à des ondes de cisaillement de surface dans le substratum et à des ondes de cisaillement propagatives dans la couche. En l'absence d'irrégularité de surface, aucune onde de surface n'est associée, toujours pour nos paramètres, et pour la plage de fréquences considérée, à l'excitation des modes de la configuration (elle est théoriquement possible pour d'autres jeux de paramètres -mécaniques et géométriques- et pour d'autres plages de fréquences).

Les phénomènes dominants lorsque la source (en polarisation SV) est profonde et que le point d'observation est quasiment à sa verticale (configuration proche d'une configuration 1D), sont des interactions d'ondes propagatives SV. Aucune excitation de mode n'est associée à une telle configuration. Les maxima d'interférence apparaissent à des fréquences identiques (ou quasiment) à celles où apparaissent les maxima d'interférence dans le cas d'une sollicitation anti-plane. Toujours **pour une source localisée en profondeur, lorsque la distance épicentrale augmente, les phénomènes sont modifiés, ce qui est une différence importante par rapport au cas SH**. Plus exactement, nous observons un décalage des ondes propagatives SV vers les ondes évanescentes SV, et les ondes suivant la direction $\mathbf{i}_2$ ne sont plus nulles. Ceci consitue une première interrogation, quant à l'excitation de configurations, en particulier celles utilisées pour l'étude de l'effet site-ville, par une onde plane en incidence normale. Une telle excitation tend à priviligier les phénomènes liés aux déplacements horizontaux, les déplacements verticaux étant nuls (en l'absence d'irrégularité de surface). La réponse temporelle sur le sol, lorsque la source est profonde, est d'une durée d'environ 30s suivant la direction x_1, et est relativement atténuée. Suivant la direction x_2, le déplacement n'est pas négligeable lorsque le point d'observation n'est pas à la verticale de la source et est de caractéristique relativement comparable à la composante suivant x_1.

Lorsque la source est proche de l'interface couche-substratum et la distance épicentrale est importante, les phénomènes dominants correspondent à l'**excitation des modes de**

Rayleigh généralisés. Les fréquences de résonance sont identiques (ou quasiment) aux fréquences des modes de Love, c'est-à-dire qu'elles sont légèrement décalées vers les basses fréquences par rapport aux fréquences des maxima d'interférence. La finesse des pics de résonance est plus importante que celle des pics associés aux phénomènes d'interférence. Des **pics satellites** apparaissent, en particulier après la borne haute fréquence du premier pic de résonance. La composante suivant l'axe x_2 est d'amplitude et de durée comparables à la celles de la composante x_1, avec pour autant une forme différente. Dans le domaine temporel, l'excitation de ces phénomènes résonnants se traduit par un **allongement de la durée de la coda** (environ 100s contre environ 30s lorsque les phénomènes interférents sont dominants dans le cas de Mexico), et des **battements**. Ces battements peuvent être identifiés comme des ondes de Rayleigh généralisées. Les modes, lorsqu'ils sont excités, ne semblent pas dépendre de la polarisation de la source (P ou SV), mis à part en ce qui concerne l'amplitude du champ qui est plus faible pour une polarisation de l'onde incidente en compresssion. Lorsque la distance épicentrale est faible, les deux phénomènes d'interaction d'ondes propagatives et d'excitation de modes cohabitent. Les formes de la fonction de transfert et du sismogramme sont similaires à celles obtenues dans le cas où la source est profonde, toujours pour une distance épicentrale faible.

Nous montrons donc qu'il est possible d'obtenir une réponse anormale, au sens de celle observée dans les milieux urbains, en considérant uniquement une configuration comportant une couche en contact parfait avec un substratum plus rigide, et que cette réponse anormale est liée à l'excitation des modes de Rayleigh généralisés.

La traduction de ces phénomènes au **cas des trajectoires régionales suggère que les caractéristiques de la réponse anormale enregistrée dans la ville de Mexico étaient déjà, en partie, présentes à l'entrée des ondes dans le bassin.** La durée augmente régulièrement le long de la trajectoire, alors que l'amplitude décroît. L'augmentation d'amplitude au niveau de la TMVB, relevée dans [51, 46] ne s'explique, similairement au cas des mouvements anti-plans, que par la présence d'une hétérogénéité matérielle ou géométrique de la croûte. Les durées sont sensiblement identiques pour les trajectoires régionales dans le cas des ondes de Rayleigh généralisées et dans celui des ondes de Love. Or, il semble que ces dernières aient été très atténuées, entre la TMVB et le bassin de Mexico [51, 46]. Une étude analytique de la transmission des modes de Rayleigh généralisés, et des modes de Love au niveau d'une **hétérogénéité** semble donc opportune. Peut-être y a-t-il une interaction forte entre les deux types d'ondes précédemment citées, ce qui nécessiterait une étude 3D.

Chapitre 2

L'effet site-ville

Des blocs, modélisant la présence de bâtiments, sont placés ici, sur une couche molle et sur un bassin. **Les différentes études de l'effet site-ville, menées en onde P-SV, [108, 70, 67], sont des études numériques ou empiriques.** Elles tendent à montrer que la présence de bâtiments, sous excitation en onde SV (souvent en onde plane en incidence normale [108]), induit, certes, des effets semblables à ceux rencontrés en ondes SH (c.à.d. augmentation de la durée, amplification du champ de déplacement, battements dans la coda), mais de moindre importance. Ceci est dû, à notre avis, au fait que d'un point de vue génie-civil, ce sont les ondes de cisaillement qui induisent le plus de dégâts. Dans un premier temps, nous allons montrer que **l'analyse purement analytique du problème en onde P-SV est, dans l'état de nos connaissances, impossible**. Dans un second temps, nous verrons comment, à l'aide de notre code Éléments-Finis annexe 2.2, la présence d'un bloc, sur un bassin, modifie les sismogrammes.

Introduction

Il existe, à notre connaissance, peu d'études de l'effet site-ville dans le cas des mouvements dans le plans. En particulier, il n'existe que des études numériques. Dans [108], il est précisé que la durée des vibrations sur le sol est identique à celle rencontrée quand il n'y a pas de bloc mais que l'amplitude et la durée des vibrations sont plus importantes dans les blocs que sur le sol. Dans l'étude numérique 3D, [53], la réponse d'une ville dont les immeubles, relativement élancés, sont répartis aléatoirement, ne montre pas de différence fondamentale avec celle d'une configuration sans immeuble. **Il semble aussi que l'effet site-ville en onde P-SV soit moindre qu'en onde SH.**

Nous nous concentrons ici, sur une portion de ville moderne et tentons de réaliser le pendant P-SV de l'étude SH réalisée au chapitre II.2. Nous montrons, dans un premier temps, et compte tenu des connaissances actuelles à propos des modes de Lamb, qu'il est impossible de réaliser complètement cette étude de façon analytique. Nous la réaliserons donc exclusivement numériquement.

Dans ces conditions, nous considèrerons directement le cas d'une ville construite sur un bassin relativement large. Cette ville a une géométrie 2D telle que la coordonnée x_3 est ignorée dans le repère cartésien attaché à la configuration. Les blocs sont en contact parfait avec le sol, au-dessous duquel est localisée une couche molle d'étendue latérale finie (bassin), incluse dans une demi-espace plus dur. Un bloc, occupant le domaine Ω_j est constitué d'un ou plusieurs immeubles. Il est caractérisé par une largeur w_j, une hauteur b_j, une profondeur de fondation f_j et est localisé à $x_1 = d_j$,

de sorte qu'il est séparé du bloc occupant le domaine $\Omega_{j,j+1}$ par une distance $d_{jj+1} = d_{j+1} - d_j$. Il est occupé par un matériau M^j. $\mathbb{B} \in \mathbb{Z}$ est l'indice par lequel les blocs sont repérés. Le cardinal N de $\mathbb{B}$ désigne donc le nombre de blocs de la configuration. Γ_f est la surface libre composée d'une portion Γ_g, horizontale, et d'une portion $\Gamma_{ag} = \bigcup \Gamma_{ag}^j$, $j \in \mathbb{B}$. Le sol Γ_G est l'union de Γ_g et de la base des blocs Γ_{bs}^j; $j \in \mathbb{B}$ (cette portion pouvant ne pas être horizontale si nous considérons une fondation). Le matériau en contact avec Γ_f est l'air, supposé être le vide. La matériau en contact avec et en dessous de Γ_G est un solide mou, occupant le domaine Ω_1. Celui-ci est d'étendue latérale finie et d'épaisseur maximale h et dont la limite inférieure est Γ_h. Le matériau mou, dans la couche est en contact parfait, au niveau de Γ_h, avec un matériau mécaniquement dur occupant le domaine semi-infini (substratum) Ω_0. Le matériau M^{2j} occupant chaque bloc (domaine Ω_2^j, $j \in \mathbb{B}$) est en contact parfait avec la couche molle au niveau d'une interface Γ_{bs}^j, $j \in \mathbb{B}$).

L'origine O du repère cartésien attaché à la configuration est situé sur le sol, x_2 croît avec la profondeur et x_3 est perpendiculaire au plan (sagittal) de la figure. En notant $\mathbf{i}_j$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe x_j, le vecteur normal à Γ_g (Γ_G s'il n'y a pas de fondation) est $\mathbf{i}_2$. Les matériaux occupant les domaines Ω_2^j, $j \in \mathbb{B}$, Ω_1 et Ω_0 sont M^{2j}, M^1 et M^0 respectivement et sont supposés être linéaires, isotropes, homogènes (chacun étant homogénéisé) et initialement au repos. Nous supposons que M^0, M^1 et M^2 sont dissipatifs.

La sollicitation sismique est délivrée au site sous la forme d'une onde cylindrique (générée par une source linéique le long de l'axe x_3) de polarisation SV, se propageant à l'instant initial dans le domaine Ω_0. La nature P-SV de l'onde incidente, repérée par l'exposant i, signifie que le mouvement induit est strictement dans la plan sagittal. La géométrie de la configuration et de l'excitation, ainsi que la polarisation de cette dernière, nous permettent de réaliser une analyse 2D, en ondes P-SV dépendant uniquement des coordonnées cartésiennes x_1, et x_2, le mouvement s'effectuant dans le plan sagittal x_1x_2.

2.1 Pourquoi n'est-il pas possible de traiter le problème de façon analytique?

Dans cette section, nous considérons que le domaine Ω_1 est d'étendue latérale infinie si bien que l'interface Γ_h est plate et horizontale. Les blocs ne disposent pas de fondation, si bien que Γ_{ag} est également horizontale.

2.1.1 Formulation du problème

Le problème est de déterminer le champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$ (où $\mathbf{x}$ est un vecteur partant de l'origine O du repère et pointant un point générique $\mathbf{x}$ du plan sagittal x_1x_2, et t la variable de temps), solution de l'excitation de la configuration décrite dans l'introduction par une source cylindrique le long de x_3 et localisée dans le domaine Ω_0.

Plutôt que de trouver directement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, nous lui préférerons les transformées de Fourier $\phi(\mathbf{x}, \omega)$,

et $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},\omega) = \psi(\mathbf{x},\omega)\mathbf{i}_3$ respectivement des potentiels scalaire et vecteur, tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(k_\phi^j\right)^2\right)\phi^j(\mathbf{x},\omega) = -f^\phi(\mathbf{x},\omega)\delta_{j0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0,1,2 \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(k_\psi^j\right)^2\right)\psi^j(\mathbf{x},\omega) = -f^\psi(\mathbf{x},\omega)\delta_{j0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0,1,2 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_\phi^{ji} = \dfrac{\omega}{\left(C_P^{ji}\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{(Q_P^\alpha)^j}\right)} & ,\ j = 0,1,2,\ i \in \mathbb{B} \\ k_\psi^{ji} = \dfrac{\omega}{\left(C_S^{ji}\right)_R}\left(\dfrac{-\mathrm{i}\omega}{\omega_{ref}}\right)^{-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{(Q_S^\beta)^j}\right)} & ,\ j = 0,1,2,\ i \in \mathbb{B} \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Les champs de déplacement $\mathbf{u}^{ji}(\mathbf{x},\omega)$, $j = 0,1,2$, $i \in \mathbb{B}$, vérifient les conditions aux limites :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{12}^1(\mathbf{x}) = \mu^1\left[2\frac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\psi^1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1^2}\right] = 0 & (i) \\ \sigma_{22}^1(\mathbf{x}) = \Pi^1\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^1 - 2\mu^1\left(\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1\partial x_2}\right) = 0 & (ii) \end{array} \right.$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{ag}\ \{\sigma(\mathbf{x},\omega).\vec{n} = 0,\ \vec{n} \text{ vecteur normal à } \Gamma_{ag} \qquad (iii)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{bs} \left\{ \begin{array}{ll} [\sigma_{12}(\mathbf{x})]_{\Gamma_{bs}} = \mu^1\left[2\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1\partial x_2} + \dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1^2}\right] - & (iv) \\ \quad \mu^{2i}\left[2\dfrac{\partial^2\phi^{2i}}{\partial x_1\partial x_2} + \dfrac{\partial^2\psi^{2i}}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\psi^{2i}}{\partial x_1^2}\right] = 0,\ i \in \mathbb{B} & \\ [\sigma_{22}(\mathbf{x})]_{\Gamma_{bs}} = \Pi^1\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^1 - 2\mu^1\left(\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1\partial x_2}\right) - & (v) \\ \quad \left(\Pi^{2i}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^{2i} + 2\mu^0\left(\dfrac{\partial^2\phi^{2i}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\psi^{2i}}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right) = 0,\ i \in \mathbb{B} & \\ [u_1(\mathbf{x})]_{\Gamma_{bs}} = \dfrac{\partial\phi^1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\psi^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\phi^{2i}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\psi^{2i}}{\partial x_2},\ i \in \mathbb{B} & (vi) \\ [u_2(\mathbf{x})]_{\Gamma_{bs}} = \dfrac{\partial\phi^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\psi^1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\phi^{2i}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\psi^{2i}}{\partial x_1},\ i \in \mathbb{B} & (vii) \end{array} \right. \tag{2.3}$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_h \left\{ \begin{array}{ll} [\sigma_{12}(\mathbf{x})]_{\Gamma_h} = \mu^1\left[2\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1\partial x_2} + \dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1^2}\right] - & (viii) \\ \quad \mu^0\left[2\dfrac{\partial^2\phi^0}{\partial x_1\partial x_2} + \dfrac{\partial^2\psi^0}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\psi^0}{\partial x_1^2}\right] = 0 & \\ [\sigma_{22}(\mathbf{x})]_{\Gamma_h} = \Pi^1\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^1 - 2\mu^1\left(\dfrac{\partial^2\phi^1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\psi^1}{\partial x_1\partial x_2}\right) - & (ix) \\ \quad \left(\Pi^0\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\phi^0 + 2\mu^0\left(\dfrac{\partial^2\phi^0}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\psi^0}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right) = 0 & \\ [u_1(\mathbf{x})]_{\Gamma_h} = \dfrac{\partial\phi^1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\psi^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\phi^0}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\psi^0}{\partial x_2} & (x) \\ [u_2(\mathbf{x})]_{\Gamma_h} = \dfrac{\partial\phi^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\psi^1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\phi^0}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\psi^0}{\partial x_1} & (xi) \end{array} \right.$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

2.1.2 Représentation des potentiels

Le résultat de la séparation des variables et de l'application de la condition de rayonnement à l'infini fournit, dans les domaines Ω_0 et Ω_1

$$\begin{aligned}
\phi^0(\mathbf{x},\omega) &= \phi^i(\mathbf{x},\omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} B_\phi^0 \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1 + \mathrm{i}k_{2,\phi}^0 (x_2 - h)\right) \frac{dk_1}{k_{2,\phi}^0}; && \forall \mathbf{x} \in \Omega^0 \\
\psi^0(\mathbf{x},\omega) &= \psi^i(\mathbf{x},\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} B_\psi^0 \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1 + \mathrm{i}k_{2,\psi}^0 (x_2 - h)\right) \frac{dk_1}{k_{2,\phi}^0} && \forall \mathbf{x} \in \Omega^0 \\
\phi^1(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \left(A_\phi^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 x_2\right) + B_\phi^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{2,\phi}^1 x_2\right)\right) \frac{dk_1}{k_{2,\phi}^1}; && \forall \mathbf{x} \in \Omega^1 \\
\psi^1(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \left(A_\psi^1 \exp\left(-\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 x_2\right) + {}_\psi^1 \exp\left(\mathrm{i}k_{2,\psi}^1 x_2\right)\right) \frac{dk_1}{k_{2,\psi}^1}; && \forall \mathbf{x} \in \Omega^1
\end{aligned} \tag{2.4}$$

avec $k_{2,\phi}^j = \sqrt{(k_\phi^j)^2 - k_1^2}$, et $k_{2,\psi}^j = \sqrt{(k_\psi^j)^2 - k_1^2}$ tels que $\Re(k_{2,phi}^j) \geq 0$, $\Im(k_{2,\phi}^j) \geq 0$, $\Re(k_{2,\psi}^j) \geq 0$, $\Im(k_{2,\psi}^j) \geq 0$, $j = 0, 1$, conséquence de la condition de rayonnement à l'infini. La source est une source cylindrique le long l'axe x_3, localisée dans le plan sagittal au point $\mathbf{x^s} = (x_1^s, x_2^s)$, $\mathbf{x^s} \in \Omega^0$, si bien que les potentiels incidents prennent la forme:

$$\begin{aligned}
\phi^i(\mathbf{x},\omega) &= \phi^i(\omega) \frac{\mathrm{i}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1 (x_1 - x_1^s) + k_{2,\phi}^0 |x_2 - x_2^s|\right) \frac{dk_1}{k_{2,\phi}^0} \\
\psi^i(\mathbf{x},\omega) &= \psi^i(\omega) \frac{\mathrm{i}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1 (x_1 - x_1^s) + k_{2,\psi}^0 |x_2 - x_2^s|\right) \frac{dk_1}{k_{2,\psi}^0}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Le vrai problème se pose pour la représentation des potentiels dans les domaines Ω_2^j, $j \in \mathbb{B}$. Une façon de voir les choses est de considérer les modes d'une plaque, (modes de Lamb) de largeur w_j. L'application des conditions de continuité, équations (iii), (iv), (v) et (vi) (2.3), au niveau de Γ_{bs} n'est pas triviale, puisque l'intégrale porte sur les nombres d'onde horizontaux dans la couche, alors que la somme porte sur une propagation verticale dans la plaque. Laissons ce problème pour l'instant et essayons d'obtenir une représentation des champs, dans les blocs, à l'aide des modes de Lamb.

2.1.3 Mode de Lamb

Le problème est, dans un premier temps, de déterminer la représentation modale d'une plaque infinie de largeur w, communément appelé Problème de Rayleigh-Lamb. Dans un second temps, nous essayerons de déterminer la représentation modale d'une plaque semi-infinie, c'est-à-dire d'étudier la réflexion des ondes de Lamb sur un bord de plaque.

2.1.3.1 Formulation du problème de Rayleigh-Lamb

Le problème est de déterminer la représentation modale du champ dans une plaque infinie (figure III.2.1).

Dans le domaine fréquentiel, les potentiels doivent vérifier :

$$\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(k_\phi^j\right)^2\right) \phi^j(\mathbf{x},\omega) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0,1,2 \\
\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(k_\psi^j\right)^2\right) \psi^j(\mathbf{x},\omega) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_j,\ j = 0,1,2
\end{cases} \tag{2.6}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=\pm\frac{w}{2}} = \mu\left(2\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial x_2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial^2 x_2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial^2 x_1}\right)\Big|_{x_2=\pm\frac{w}{2}} = 0 \\ \sigma_{22}|_{x_2=\pm\frac{w}{2}} = \pi\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial^2 x_1} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial^2 x_2}\right) + 2\mu\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial^2 x_1} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Big|_{x_2=\pm\frac{w}{2}} = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini.

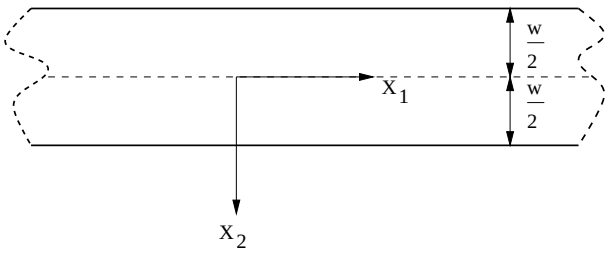


FIG. 2.1 – *Le problème de Rayleigh-Lamb*

Nous recherchons les potentiels scalaire et vecteur, $\phi(\mathbf{x},\omega)$, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},\omega) = \psi(\mathbf{x},\omega)\mathbf{i}_3$, sous leur forme la plus générale, conséquence de la séparation de variables :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\left(A^\phi(k_1)\cos\left(k_2^\phi x_2\right) + B^\phi(k_1)\sin\left(k_2^\phi x_2\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^\phi} \\ \psi(\mathbf{x},\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}k_1x_1\right)\left(A^\psi(k_1)\cos\left(k_2^\psi x_2\right) + B^\psi(k_1)\sin\left(k_2^\psi x_2\right)\right)\frac{dk_1}{k_2^\psi} \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1.3.2 Application des conditions aux limites et obtention des modes symétriques et anti-symétriques

Introduisons les représentations des potentiels, équation (2.8), dans les conditions (2.7), pour obtenir:

$$\begin{cases} 2\mathrm{i}k_1k_2^\psi\left(-A^\phi\sin\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right) + B^\phi\cos\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right)\right) + \\ \left(2k_1^2 - k_\psi^2\right)\left(A^\psi\cos\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right) + B^\psi\sin\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right)\right) = 0 \quad (i) \\ 2\mathrm{i}k_1k_2^\psi\left(A^\phi\sin\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right) + B^\phi\cos\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right)\right) + \\ \left(2k_1^2 - k_\psi^2\right)\left(A^\psi\cos\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right) - B^\psi\sin\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right)\right) = 0 \quad (ii) \\ \left(2k_1^2 - k_\psi^2\right)\left(A^\phi\cos\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right) + B^\phi\sin\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right)\right) - \\ 2\mathrm{i}k_1k_2^\phi\left(-A^\psi\sin\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right) + B^\psi\cos\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right)\right) = 0 \quad (iii) \\ \left(2k_1^2 - k_\psi^2\right)\left(A^\phi\cos\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right) - B^\phi\sin\left(k_2^\phi\frac{w}{2}\right)\right) - \\ 2\mathrm{i}k_1k_2^\phi\left(A^\psi\sin\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right) + B^\psi\cos\left(k_2^\psi\frac{w}{2}\right)\right) = 0 \quad (iv) \end{cases} \tag{2.9}$$

En additionnant alors les équations (i) et (ii) ainsi que les équations (iii) et (iv) et après réarrangement, nous pouvons réécrire ces équations sous la forme du système matriciel

$$\mathcal{D}\mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{2.10}$$

avec

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}^a \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^s &= \begin{bmatrix} 2\mathrm{i}k_1k_2^{\psi}\sin\left(k_2^{\phi}\frac{w}{2}\right) & -\left(2k_1^2-k_{\psi}^2\right)\sin\left(k_2^{\psi}\frac{w}{2}\right) \\ \left(2k_1^2-k_{\psi}^2\right)\cos\left(k_2^{\phi}\frac{w}{2}\right) & -2\mathrm{i}k_1k_2^{\phi}\cos\left(k_2^{\psi}\frac{w}{2}\right) \end{bmatrix} \\ \mathcal{D}^a &= \begin{bmatrix} \left(2k_1^2-k_{\psi}^2\right)\cos\left(k_2^{\psi}\frac{w}{2}\right) & 2\mathrm{i}k_1k_2^{\psi}\cos\left(k_2^{\phi}\frac{w}{2}\right) \\ 2\mathrm{i}k_1k_2^{\phi}\sin\left(k_2^{\psi}\frac{w}{2}\right) & \left(2k_1^2-k_{\psi}^2\right)\sin\left(k_2^{\phi}\frac{w}{2}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

et

$$\mathbf{A} = < A^{\phi}, B^{\psi}, A^{\psi}, B^{\phi} > \tag{2.13}$$

Ce système admet des solutions non-triviales si et seulement si:

- $\det(\mathcal{D}^s) = 0$, $A^{\psi} = 0$, et $B^{\phi} = 0$

ou

- $\det(\mathcal{D}^a) = 0$, $A^{\phi} = 0$, et $B^{\psi} = 0$

conditions qui conduisent aux relations de dispersion des modes de Rayleigh-Lamb

- les modes symétriques vérifient :

$$\frac{\tan\left(k_2^{\psi}\frac{w}{2}\right)}{\tan\left(k_2^{\phi}\frac{w}{2}\right)} = \frac{-4k_1^2k_2^{\phi}k_2^{\psi}}{\left(2k_1^2-k_{\psi}^2\right)} \tag{2.14}$$

- les modes anti-symétriques vérifient :

$$\frac{\tan\left(k_2^{\phi}\frac{w}{2}\right)}{\tan\left(k_2^{\psi}\frac{w}{2}\right)} = \frac{-4k_1^2k_2^{\phi}k_2^{\psi}}{\left(2k_1^2-k_{\psi}^2\right)^2} \tag{2.15}$$

Ces relations sont identiques pour k_1 et $-k_1$ ce qui signifie que les modes (symétriques et anti-symétriques) se propageant suivant les directions x_1 et $-x_1$, sont identiques.

2.1.3.3 Obtention de la représentation modale des champs de déplacement et des contraintes

Distinguons par les exposants ^{s} et ^{a}, les quantités relatives aux modes respectivement symétriques et anti-symétriques, c'est-à-dire les quantités vérifiant les conditions respectivement (2.14) et (2.15). Les champs de déplacement $u_1(\mathbf{x},\omega)$ et $u_2(\mathbf{x},\omega)$ admettent donc les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x},\omega) &= u_1^s(\mathbf{x},\omega) + u_1^a(\mathbf{x},\omega) \\ u_2(\mathbf{x},\omega) &= u_2^s(\mathbf{x},\omega) + u_2^a(\mathbf{x},\omega) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour les termes relatifs aux **modes symétriques** nous avons :

$$\begin{aligned} u_1^s(\mathbf{x},\omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{i}\frac{k_1}{k_2^\phi} A^\phi(k_1) \cos\left(k_2^\phi x_2\right) + B^\psi(k_1) \cos\left(k_2^\psi x_2\right) \right] \times \\ &\qquad \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \left[\delta(k_1 - (k_1^s)_n) + \delta(k_1 + (k_1^s)_n)\right] dk_1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\mathrm{i}\frac{(k_1^s)_n}{(k_2^\phi)_n^s} A^\phi((k_1^s)_n) \cos\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) + B^\psi((k_1^s)_n) \cos\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right) \right] \exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) + \\ &\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\mathrm{i}\frac{-(k_1^s)_n}{(k_2^\phi)_n^s} A^\phi(-(k_1^s)_n) \cos\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) + B^\psi(-(k_1^s)_n) \cos\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right) \right] \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Or, les coefficients $A^\phi((k_1^s)_n)$ et $B^\psi((k_1^s)_n)$ satisfont, dans ce cas, la relation :

$$\left(2((k_1^s)_n)^2 - k_\psi^2\right) \cos\left((k_2^\phi)_n^s \frac{w}{2}\right) A^\phi((k_1^s)_n)) = 2\mathrm{i}(k_1^s)_n (k_2^\phi)_n^s \cos\left((k_2^\psi)_n^s \frac{w}{2}\right) B^\phi((k_1^s)_n)) \tag{2.18}$$

si bien que l'équation (2.17) s'écrit :

$$u_1^s(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n((k_1^s)_n) F_{n1}^s(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-(k_1^s)_n) F_{n1}^s(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) \tag{2.19}$$

avec

$$F_{n1}^s(x_2) = (k_1^s)_n \cos\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) - \frac{\left(2((k_1^s)_n)^2 - k_\psi^2\right) \cos\left((k_2^\phi)_n^s \frac{w}{2}\right)}{2(k_1^s)_n \cos\left((k_2^\psi)_n^s \frac{w}{2}\right)} \cos\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right) \tag{2.20}$$

et

$$S_n(\pm(k_1^s)_n) = \frac{\mathrm{i}A^\phi(\pm(k_1^s)_n))}{(k_2^\phi)_n^s} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} u_2^s(\mathbf{x},\omega) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A^\phi(k_1) \sin\left(k_2^\phi x_2\right) + \frac{\mathrm{i}k_1}{k_2^\psi} B^\psi(k_1) \sin\left(k_1^\psi x_2\right) \right] \times \\ &\qquad \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \left[\delta(k_1 - (k_1^s)_n) + \delta(k_1 + (k_1^s)_n)\right] dk_1 \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \left[A^\phi((k_1^s)_n) \sin\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) + \frac{\mathrm{i}(k_1^s)_n}{(k_2^\psi)_n^s} B^\psi((k_1^s)_n) \sin\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right) \right] \exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) - \\ &\sum_{n=0}^{+\infty} \left[A^\phi((k_1^s)_n) \sin\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) - \frac{\mathrm{i}(k_1^s)_n}{(k_2^\psi)_n^s} B^\psi((k_1^s)_n) \sin\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right) \right] \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

En considérant la relation (2.18), celle-ci s'écrit

$$u_2^s(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^s)_n) F_{n2}^s(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^s)_n) F_{n2}^s(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) \quad (2.23)$$

avec

$$F_{n2}^s(x_2) = \mathrm{i}(k_2^\phi)_n^s \sin\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) - \frac{\left(2((k_1^s)_n)^2 - k_\psi^2\right)\cos\left((k_2^\phi)_n^s \frac{w}{2}\right)}{2\mathrm{i}(k_2^\psi)_n^s \cos\left((k_2^\psi)_n^s \frac{w}{2}\right)} \sin\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right) \quad (2.24)$$

Pour les termes relatifs aux **modes anti-symétriques**, nous avons :

$$\begin{aligned} u_1^a(\mathbf{x},\omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{i}\frac{k_1}{k_2^\phi} B^\phi(k_1) \sin\left(k_2^\phi x_2\right) - A^\psi(k_1) \sin\left(k_2^\psi x_2\right)\right] \times \\ &\quad \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \left[\delta(k_1 - (k_1^a)_n) + \delta(k_1 + (k_1^a)_n)\right] dk_1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\mathrm{i}\frac{(k_1^a)_n}{(k_2^\phi)_n^a} B^\phi((k_1^a)_n) \sin\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) - A^\psi((k_1^a)_n) \sin\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right)\right] \exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) + \\ &\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\mathrm{i}\frac{-(k_1^a)_n}{(k_2^\phi)_n^a} B^\phi(-(k_1^a)_n)) \sin\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) - A^\psi(-(k_1^a)_n) \sin\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right)\right] \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Or, les coefficients $B^\phi((k_1^a)_n)$ et $A^\psi((k_1^a)_n)$ satisfont, cette fois, la relation :

$$\left(2((k_1^a)_n)^2 - k_\psi^2\right) \sin\left((k_2^\phi)_n^a \frac{w}{2}\right) B^\phi((k_1^a)_n)) = -2\mathrm{i}(k_1^a)_n (k_2^\phi)_n^a \sin\left((k_2^\psi)_n^a \frac{w}{2}\right) A^\psi((k_1^a)_n)) \quad (2.26)$$

si bien que l'équation (2.25) s'écrit

$$u_1^a(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^a)_n) F_{n2}^a(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^a)_n) F_{n2}^a(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) \quad (2.27)$$

avec

$$F_{n1}^a(x_2) = (k_1^a)_n \sin\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) - \frac{\left(2((k_1^a)_n)^2 - k_\psi^2\right)\sin\left((k_2^\phi)_n^a \frac{w}{2}\right)}{2(k_1^a)_n \sin\left((k_2^\psi)_n^a \frac{w}{2}\right)} \sin\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right) \quad (2.28)$$

et

$$A_n(\pm(k_1^a)_n) = \frac{\mathrm{i}B^\phi(\pm(k_1^a)_n))}{(k_2^\phi)_n^a} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} u_2^a(\mathbf{x},\omega) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[B^\phi(k_1) \cos\left(k_2^\phi x_2\right) - \frac{\mathrm{i}k_1}{k_2^\psi} A^\psi(k_1) \cos\left(k_2^\psi x_2\right)\right] \times \\ &\quad \exp\left(\mathrm{i}k_1 x_1\right) \left[\delta(k_1 - (k_1^a)_n) + \delta(k_1 + (k_1^a)_n)\right] dk_1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[B^\phi((k_1^a)_n) \cos\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) - \frac{\mathrm{i}(k_1^a)_n}{(k_2^\psi)_n^a} A^\psi((k_1^a)_n) \cos\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right)\right] \exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) + \\ &\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[B^\phi(-(k_1^a)_n) \cos\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) + \frac{\mathrm{i}(k_1^a)_n}{(k_2^\psi)_n^a} A^\psi(-(k_1^a)_n) \sin\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right)\right] \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

En considérant la relation (2.26), il vient

$$u_2^a(\mathbf{x},\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^a)_n) F_{n2}^a(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^a)_n) F_{n2}^a(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) \quad (2.31)$$

avec

$$F_{n2}^a(x_2) = -\mathrm{i}(k_2^\phi)_n^a \cos\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) + \frac{\left(2((k_1^a)_n)^2 - k_\psi^2\right) \sin\left((k_2^\phi)_n^a \frac{w}{2}\right)}{2\mathrm{i}(k_2^\psi)_n^a \sin\left((k_2^\psi)_n^a \frac{w}{2}\right)} \cos\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right) \quad (2.32)$$

En résumé la représentation modale du champ de déplacement, dans le problème de Rayleigh-Lamb s'écrit

$$\begin{aligned}
&u_1(\mathbf{x},\omega) = \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} S_n((k_1^s)_n) F_{n1}^s(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-(k_1^s)_n) F_{n1}^s(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) + \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^a)_n) F_{n1}^a(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^a)_n) F_{n1}^a(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) \\
&u_2(\mathbf{x},\omega) = \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} S_n((k_1^s)_n) F_{n2}^s(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-(k_1^s)_n) F_{n2}^s(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right) + \\
&\sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^a)_n) F_{n2}^a(x_2) \exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^a)_n) F_{n2}^a(x_2) \exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right)
\end{aligned} \quad (2.33)$$

avec

$$\begin{aligned}
F_{n1}^s(x_2) &= (k_1^s)_n \cos\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) - \frac{\left(2((k_1^s)_n)^2 - k_\psi^2\right) \cos\left((k_2^\phi)_n^s \frac{w}{2}\right)}{2(k_1^s)_n \cos\left((k_2^\psi)_n^s \frac{w}{2}\right)} \cos\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right) \\
F_{n2}^s(x_2) &= \mathrm{i}(k_2^\phi)_n^s \sin\left((k_2^\phi)_n^s x_2\right) - \frac{\left(2((k_1^s)_n)^2 - k_\psi^2\right) \cos\left((k_2^\phi)_n^s \frac{w}{2}\right)}{2\mathrm{i}(k_2^\psi)_n^s \cos\left((k_2^\psi)_n^s \frac{w}{2}\right)} \sin\left((k_2^\psi)_n^s x_2\right)
\end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
F_{n1}^a(x_2) &= (k_1^a)_n \sin\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) - \frac{\left(2((k_1^a)_n)^2 - k_\psi^2\right) \sin\left((k_2^\phi)_n^a \frac{w}{2}\right)}{2(k_1^a)_n \sin\left((k_2^\psi)_n^a \frac{w}{2}\right)} \sin\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right) \\
F_{n2}^a(x_2) &= -\mathrm{i}(k_2^\phi)_n^a \cos\left((k_2^\phi)_n^a x_2\right) + \frac{\left(2((k_1^a)_n)^2 - k_\psi^2\right) \sin\left((k_2^\phi)_n^a \frac{w}{2}\right)}{2\mathrm{i}(k_2^\psi)_n^a \sin\left((k_2^\psi)_n^a \frac{w}{2}\right)} \cos\left((k_2^\psi)_n^a x_2\right)
\end{aligned} \quad (2.35)$$

Les nombres d'onde $(k_1^s)_n$ et $(k_1^a)_n$ vérifient respectivement les relations :

$$\begin{aligned}
\frac{\tan\left((k_2^\psi)_n^s \frac{w}{2}\right)}{\tan\left((k_2^\phi)_n^s \frac{w}{2}\right)} &= \frac{-4((k_1^s)_n)^2 (k_2^\phi)_n^s (k_2^\psi)_n^s}{\left(2((k_1^a)_n)^2 - k_\psi^2\right)^2} \\
\frac{\tan\left((k_2^\phi)_n^a \frac{w}{2}\right)}{\tan\left((k_2^\psi)_n^a \frac{w}{2}\right)} &= \frac{-4((k_1^a)_n)^2 (k_2^\phi)_n^a (k_2^\psi)_n^a}{\left(2((k_1^a)_n)^2 - k_\psi^2\right)^2}
\end{aligned} \quad (2.36)$$

Ces expressions conduisent aux expressions des contraintes, composantes du tenseur $\sigma(\mathbf{x},\omega)$, suivantes :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}(\mathbf{x},\omega) &= \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+2\frac{\mu\partial u_1}{\partial x_1}\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n((k_1^s)_n)\mathcal{F}^s_{n11}(x_2)\exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right)+\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-(k_1^s)_n)\mathcal{F}^s_{n11}(x_2)\exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right)+\\
&\quad\sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^a)_n)\mathcal{F}^a_{n11}(x_2)\exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right)+\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^a)_n)\mathcal{F}^a_{n11}(x_2)\exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right)\\
\sigma_{12}(\mathbf{x},\omega) &= \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n((k_1^s)_n)\mathcal{F}^s_{n12}(x_2)\exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right)-\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-(k_1^s)_n)\mathcal{F}^s_{n12}(x_2)\exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right)+\\
&\quad\sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^a)_n)\mathcal{F}^a_{n12}(x_2)\exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right)-\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^a)_n)\mathcal{F}^a_{n12}(x_2)\exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right)\\
\sigma_{22}(\mathbf{x},\omega) &= \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n((k_1^s)_n)\mathcal{F}^s_{n22}(x_2)\exp\left(\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right)+\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-(k_1^s)_n)\mathcal{F}^s_{n22}(x_2)\exp\left(-\mathrm{i}(k_1^s)_n x_1\right)+\\
&\quad\sum_{n=0}^{+\infty} A_n((k_1^a)_n)\mathcal{F}^a_{n22}(x_2)\exp\left(\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right)+\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(-(k_1^a)_n)\mathcal{F}^a_{n22}(x_2)\exp\left(-\mathrm{i}(k_1^a)_n x_1\right)
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^s_{n11}(x_2) &= \mathrm{i}\left(2\mu((k_1^s)_n)^2+\lambda(k_\phi)^2\right)\cos\left((k_2^\phi)^s_n x_2\right)+\\
&\qquad 2\mu\frac{\left(2((k_1^s)_n)^2-k_\psi^2\right)\cos\left((k_2^\phi)^s_n\frac{w}{2}\right)}{2\mathrm{i}\cos\left((k_2^\psi)^s_n\frac{w}{2}\right)}\cos\left((k_2^\psi)^s_n x_2\right)\\
\mathcal{F}^s_{n12}(x_2) &= -2\mu(k_1^s)_n(k_2^\phi)^s_n\sin\left((k_2^\phi)^s_n x_2\right)-\\
&\qquad \mu\frac{\left(2((k_1^s)_n)^2-k_\psi^2\right)^2\cos\left((k_2^\phi)^s_n\frac{w}{2}\right)}{2(k_1^s)_n(k_2^\psi)^s_n\cos\left((k_2^\psi)^s_n\frac{w}{2}\right)}\sin\left((k_2^\psi)^s_n x_2\right)\\
\mathcal{F}^s_{n22}(x_2) &= \mathrm{i}\left(-2\mu((k_1^s)_n)^2+(\lambda+2\mu)(k_\phi)^2\right)\cos\left((k_2^\phi)^s_n x_2\right)-\\
&\qquad \frac{\left(2((k_1^s)_n)^2-k_\psi^2\right)\cos\left((k_2^\phi)^s_n\frac{w}{2}\right)}{2\mathrm{i}(k_2^\psi)^s_n\cos\left((k_2^\psi)^s_n\frac{w}{2}\right)}\cos\left((k_2^\psi)^s_n x_2\right)
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^a_{n11}(x_2) &= \mathrm{i}\left(2\mu((k^a_1)_n)^2 + \lambda(k_\phi)^2\right)\sin\left((k^\phi_2)^a_n x_2\right) + \\
&\qquad 2\mu\frac{\left(2((k^a_1)_n)^2 - k^2_\psi\right)\sin\left((k^\phi_2)^a_n\frac{w}{2}\right)}{2\sin\left((k^\psi_2)^a_n\frac{w}{2}\right)}\sin\left((k^\psi_2)^a_n x_2\right) \\
\mathcal{F}^a_{n12}(x_2) &= 2\mu(k^a_1)_n(k^\phi_2)^a_n\cos\left((k^\phi_2)^a_n x_2\right) + \\
&\qquad \mu\frac{\left(2((k^a_1)_n)^2 - k^2_\psi\right)^2\sin\left((k^\phi_2)^a_n\frac{w}{2}\right)}{2(k^a_1)_n(k^\psi_2)^a_n\cos\left((k^\psi_2)^a_n\frac{w}{2}\right)}\cos\left((k^\psi_2)^a_n x_2\right) \\
\mathcal{F}^a_{n22}(x_2) &= \mathrm{i}\left(-2\mu((k^a_1)_n)^2 + (\lambda+2\mu)\right)\sin\left((k^\phi_2)^a_n x_2\right) - \\
&\qquad 2\mu\frac{\left(2((k^a_1)_n)^2 - k^2_\psi\right)\sin\left((k^\phi_2)^a_n\frac{w}{2}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left((k^\psi_2)^a_n\frac{w}{2}\right)}\sin\left((k^\psi_2)^a_n x_2\right)
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

La suite concerne la résolution du problème d'une plaque semi-inifinie, autrement dit, la réflexion des modes de Lamb sur un bord orthogonal.

2.1.3.4 Réflexion des modes de Lamb sur le bord d'une plaque : plaque semi-infinie

La représentation du champ dans le bloc impose, dans son analogie avec la plaque, que celle-ci soit semi-infinie. Pour ce faire, nous devons déterminer une relation d'orthogonalité pour les modes de Rayleigh-Lamb. Par construction des modes symétriques et anti-symétriques, il ne peut y avoir de conversion d'un mode symétrique en un mode anti-symétrique et inversement, c'est-à-dire qu'il y a orthogonalité entre les modes symétriques et anti-symétriques. Par souci de clarté, nous nous restreindrons ici à l'étude du cas des modes symétriques. Effectivement, nous souhaitons trouver deux relations reliant les coefficients modaux $A_n((k^s_1)_n)$, $A_n(-(k^s_1)_n)$, $S_n((k^s_1)_n)$ et $S_n(-(k^s_1)_n)$ à travers la condition de surface libre sur le bord horizontal de la demi-plaque :

$$
\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{i_1}|_{x_2=-b} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.40}
$$

Il existe une **littérature assez considérable pour traiter numériquement le cas de la réflexion d'un mode symétrique incident sur le bord d'une plaque**, en particulier [113, 173, 110, 11, 14], **mais rien n'existe à notre connaissance concernant un traitement analytique**. La raison pourrait se trouver dans [12].

Considérons la relation de réciprocité complexe. Soient deux solutions possibles $(\boldsymbol{\sigma}^1, \mathbf{v}^1)$ et $(\boldsymbol{\sigma}^2, \mathbf{v}^2)$ du même problème. Dans le domaine fréquentiel nous avons :

$$
\begin{cases} -\mathrm{i}\omega\mathbf{v}^1 - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^1 = 0 \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{i}\omega(\mathbf{v}^2)^\star - \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}^2)^\star = 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{\sigma}^2)^\star - (\boldsymbol{\epsilon}^2)^\star = 0 \end{cases} \tag{2.41}
$$

où l'exposant * désigne le complexe conjugué de la quantité à laquelle il se réfère. Multiplions alors comme suit:

$$
\begin{cases} \left(-\mathrm{i}\omega\mathbf{v}^1 - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^1 = 0\right)\cdot(\mathbf{v}^2)^\star \\ \left(-\mathbf{C}^{-1}\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\epsilon}^1 = 0\right) : (\sigma^2)^\star \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\mathrm{i}\omega(\mathbf{v}^2)^\star - \nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}^2)^\star = 0\right)\cdot(\mathbf{v}^1) \\ \left(\mathbf{C}^{-1}\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{\sigma}^2)^\star - (\boldsymbol{\epsilon}^2)^\star = 0\right) : (\sigma^1) \end{cases} \tag{2.42}
$$

Or $\nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{w}$, et le produit d'un tenseur symétrique et d'un tenseur anti-symétrique étant nul, il vient

$$\begin{cases} -\mathrm{i}\omega \mathbf{v}^1 \cdot (\mathbf{v}^2)^\star - \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^1\right) \cdot (\mathbf{v}^2)^\star = 0 \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathrm{i}\omega \boldsymbol{\sigma}^1 : (\boldsymbol{\sigma}^2)^\star - \left(\nabla \mathbf{v}^1\right) : (\boldsymbol{\sigma}^2)^\star = 0 \\ \mathrm{i}\omega (\mathbf{v}^2)^\star \cdot (\mathbf{v}^1) - \left(\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^2)^\star\right) \cdot (\mathbf{v}^1) = 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathrm{i}\omega (\boldsymbol{\sigma}^2)^\star : (\boldsymbol{\sigma}^1) - \left(\nabla (\mathbf{v}^2)^\star\right) : (\boldsymbol{\sigma}^1) = 0 \end{cases} \tag{2.43}$$

En additionnant ensuite ces quatre équations et en considérant que $\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}$, il vient :

$$\begin{aligned} &\left(\left(\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^2)^\star\right).(\mathbf{v}^1) + \left(\nabla (\mathbf{v}^2)^\star\right) : (\sigma^1)\right) + \left(\left(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^1\right) \cdot (\mathbf{v}^2)^\star + \left(\nabla \mathbf{v}^1\right) : (\boldsymbol{\sigma}^2)^\star\right) = 0 \\ &\nabla \cdot \left((\boldsymbol{\sigma}^2)^\star \cdot (\mathbf{v}^1)\right) + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot (\mathbf{v}^2)^\star\right) = 0 \\ &\nabla \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot (\mathbf{v}^2)^\star + (\boldsymbol{\sigma}^2)^\star \cdot \mathbf{v}^1\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Considérons maintenant que la solution notée 1 correspond à un mode n (symétrique ou anti-symétrique), et que la solution notée 2 correspond à un mode m (symétrique ou anti-symétrique) et intégrons l'équation (2.43) sur x_2 de $-\dfrac{w}{2}$ à $\dfrac{w}{2}$, de façon à obtenir :

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot (\mathbf{v}_m)^\star + (\boldsymbol{\sigma}_m)^\star \cdot \mathbf{v}_n\right) \cdot \mathbf{i}_1 dx_2 + \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\boldsymbol{\sigma}_n \cdot (\mathbf{v}_m)^\star + (\boldsymbol{\sigma}_m)^\star \cdot \mathbf{v}_n\right) \cdot \mathbf{i}_2 dx_2 = 0 \\ &\Rightarrow \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left((\sigma_{11})_n ((v_1)_m)^\star + ((\sigma_{12})_m)^\star (v_2)_n\right) dx_2 + \\ &((\sigma_{12})_n ((v_1)_m)^\star + ((\sigma_{22})_m)^\star (v_2)_n)|_{x_2 = \pm \frac{w}{2}} = 0 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Or, $(\sigma_{12})_n$, et $(\sigma_{22})_n$ sont nuls pour les ordonnées $x_2 = \pm \frac{w}{2}$, si bien que la relation d'orthogonalité des modes de Lamb prend la forme :

$$\mathrm{i}\left((k_1)_n - ((k_1)_m)^\star\right) \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \left((\sigma_{11})_n ((v_1)_m)^\star + ((\sigma_{12})_m)^\star (v_2)_n\right) dx_2 = 0 \tag{2.46}$$

Or, la réflexion sur le bord de la plaque impose qu'à l'abscisse $x_1 = -b$, les quantités $(\sigma_{11})_n$, et $(\sigma_{12})_n$ soient nuls. Par conséquent, aucune conclusion ne peut être tirée de cette relation.

Ainsi, devant notre incapacité à trouver une représentation analytique du champ de déplacement dans un (les) bloc(s), nous avons considéré que tant qu'à traiter le problème numériquement, autant le traiter complètement de cette façon. Nous avons donc réalisé cette étude à l'aide de notre code Éléments-Finis, section I.2.2.

Le problème reste pourtant que nous n'avons **aucune formulation analytique des modes des blocs**. Or, les caractéristiques des bâtiments, en terme de génie civil, se résument souvent en terme de densité et de modes fondamentaux. Par conséquent, nous sommes dans l'**incapacité de choisir une valeur réaliste des vitesses des ondes de compression dans les blocs** (sauf tests numériques préalables sur un demi-espace). La vitesse de propagation d'une onde dans l'air est environ $360 m.s^{-1}$. Nous avons donc opéré une homogénéisation d'un immeuble ou d'un groupe d'immeubles, en considérant un bloc empli d'un matériau dans lequel les ondes de compression se propagent à une vitesse de $c_P \approx 500 m.s^{-1}$.

2.2 Étude numérique

Nous pouvons nous affranchir de traiter le problème pour une couche infinie, puisqu'il présentait l'avantage d'avoir une formulation analytique dans le cas SH et dans le cas P-SV sans bloc, mais cet avantage n'existe pas dans le cas avec blocs. Nous considérons donc un bassin, de largeur $w_b = 3000m$, et d'épaisseur maximale $h = 50m$ domaine Ω_1, occupé par un milieu M^1, au-dessus d'un demi-espace Ω_0, occupé par un milieu M^0. L'interface entre ces deux domaines est notée Γ_{10} au niveau de laquelle nous supposons un contact parfait entre M^0 et M^1. Les blocs sont en contact parfait avec le bassin, au niveau des interfaces Γ_{bs}^j, $j \in \mathbb{B}$. La configuration est représentée figure 2.2.

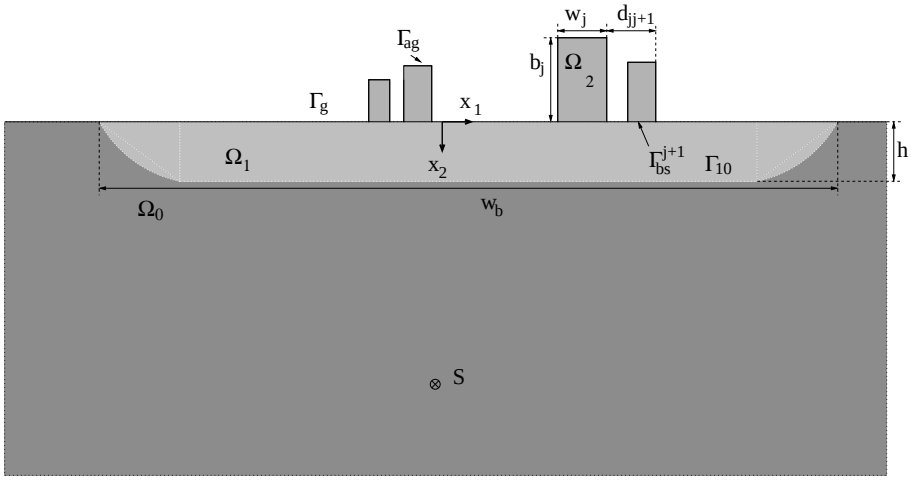


FIG. 2.2 – *Coupe d'une ville 2D construite sur un bassin*

Dans cette section, les paramètres de la ville de Mexico sont adoptés, c'est-à-dire $\rho^0 = 2000kg.m^3$, $\left(c_P^0\right)_R = 1600m.s^1$, $Q_P^0 = 300$, $\left(c_S^0\right)_R = 600m.s^1$, $Q_S^0 = 150$ pour M^0, $\rho^1 = 1300kg.m^{-3}$, $\left(c_P^1\right)_R = 1500m.s^{-1}$, $Q_P^1 = 50$, $\left(c_S^1\right)_R = 60m.s^{-1}$, $Q_S^1 = 30$, pour M^1 et $\rho^2 = 325kg.m^{-3}$, $\left(c_P^2\right)_R = 500m.s^{-1}$, $Q_P^2 = 200$, $\left(c_S^2\right)_R = 100m.s^{-1}$ et $Q_S^2 = 100$, pour le matériau M^2.

2.2.1 Réponse du bassin sans bloc à une onde cylindrique polarisée en onde SV

Nous commençons par nous intéresser à la configuration sans bloc. Dans la section II.3.1, nous avons montré qu'il n'était pas réaliste de comparer la réponse à une onde plane d'un bassin de largeur raisonnable, avec la réponse d'une couche infinie dans le cas SH et que le caractère fini du bassin se manifestait par des ondes se propageant transversalement, correspondant à des ondes pseudo-Love, générées par des sources induites aux extrémités du bassin. Nous réalisons ici une étude identique mais dans le cas P-SV, et avec une source localisée en $\mathbf{x^s} = (1750m, 3000m)$. Le bassin est de largeur $w_b = 3000m$, et centré sur la source c'est-à-dire qu'il s'étend des abscisses $x = 250m$ à $x = 3250m$. La source est une source de type pseudo-Ricker polarisée en onde SV telle que $\nu_0 = 0.5Hz$.

Intéressons-nous aux composantes de la vitesse $v_1(\mathbf{x_g}, t)$ et $v_2(\mathbf{x_g}, t)$ en différents points de la surface du sol au niveau du bassin, figure 2.3.

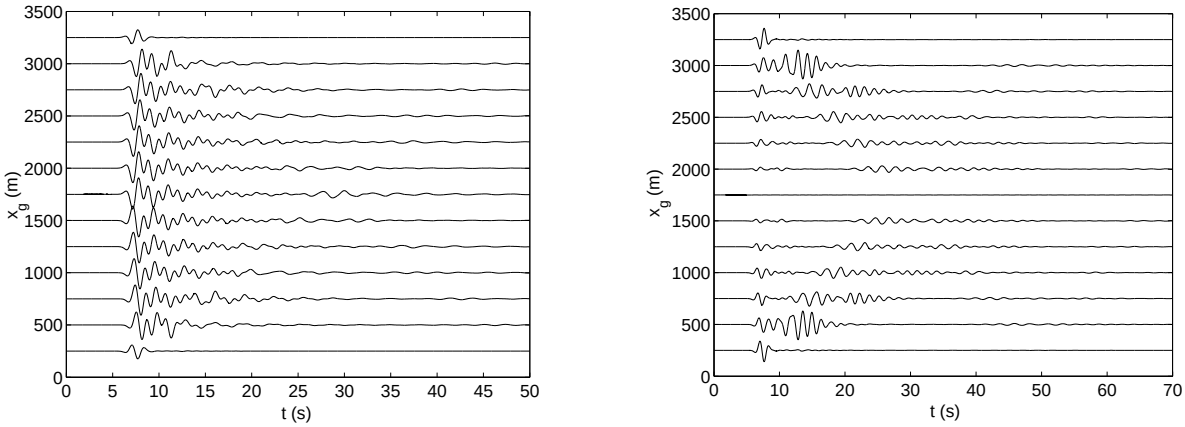


FIG. 2.3 – *Sismogrammes synthétiques (vitesse) à l'intérieur du bassin ; à gauche la composante* $v_1(\mathbf{x_g}, t)$ *et à droite la composante* $v_2(\mathbf{x_g}, t)$

Sur ces sismogrammes, nous pouvons remarquer que les vitesses sont opposées de part et d'autre de l'abscisse de la source. Cela est dû aux projections sur les axes x_1 et x_2. La composante de la vitesse $v_2(\mathbf{x}_g, \omega)$ est quasiment nulle au centre du bassin, puisque située à la verticale de la source.

Nous pouvons remarquer des ondes se propageant transversalement sur les deux composantes de la vitesse. Ces ondes se propagent à une vitesse d'environ $70m.s^{-1}$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à des ondes de compression évanescentes dans les deux milieux et à des ondes de cisaillement évanescentes dans le substratum et propagatives dans le bassin. Elles ont donc les **mêmes caractéristiques que les ondes de Rayleigh généralisées**, section III.1, mais ne peuvent être qualifiées comme telles puisqu'elles sont rencontrées dans le cas d'un bassin et non dans le cas d'une couche. Nous les nommerons donc **ondes pseudo-Rayleigh généralisées**, et les modes qui leurs correspondent, modes pseudo-Rayleigh généralisés. Une comparaison de la composante $v_1(\mathbf{x_g}, t)$ et de son spectre $v_1(\mathbf{x_g}, \omega)$ au centre du bassin avec les mêmes quantités que celles calculées pour une couche, confirme l'existence d'ondes transversales qui s'additionnent à la réponse d'une couche, figure 2.4.

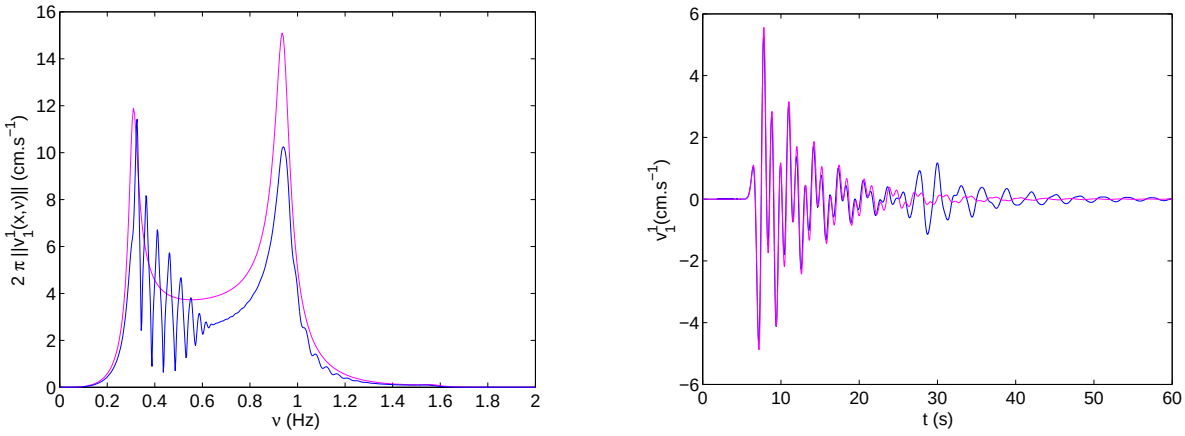


FIG. 2.4 – *À gauche* 2π *fois le module du spectre de la composante* $v_1(\mathbf{x_g}, t)$ *et à droite* $v_1(\mathbf{x_g}, t)$*, au point* $\mathbf{x} = (1750m, 0)$*. Les courbes magenta correspondent à la vitesse dans le cas d'une couche (calcul semi-analytique), et les courbes blues correspondent à la vitesse dans le cas du bassin*

De façon similaire à ce que nous avons rencontré dans le cas SH, l'excitation des modes pseudo-Rayleigh généralisés se traduit, dans le domaine spectral, par des pics satellites.

Aux bords du bassin, la réponse est quasiment l'onde incidente alors que les ondes pseudo-Rayleigh généralisées sont surtout perceptibles au centre du bassin. Nous représentons, figure 2.5, les vitesses et les spectres correspondants, pour différents points d'observation $\mathbf{x_g}$ sur le sol. Puisque la configuration est symétrique, nous ne représentons que les points compris entre $\mathbf{x_g} = (250m, 0)$ et $\mathbf{x_g} = (1750m, 0)$.

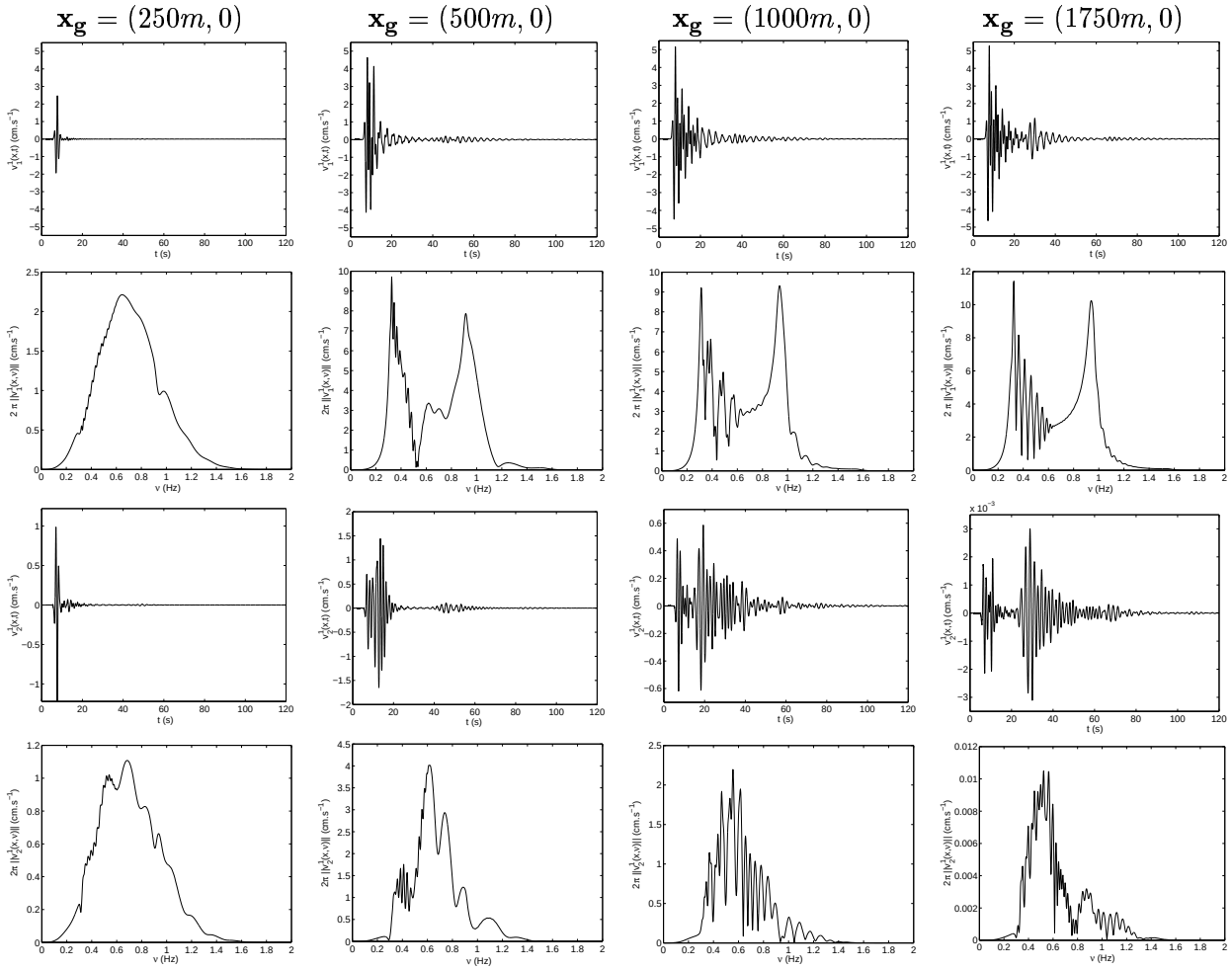


FIG. 2.5 – *Sismogrammes (vitesse) et 2π fois le module des spectres correspondants ; les deux premières lignes représentent la composante suivant x_1 et les deux suivantes la composante suivant x_2. La première colonne correspond à l'abscisse $\mathbf{x_g} = (250m, 0)$, la seconde à $\mathbf{x_g} = (500m, 0)$, la troisième à $\mathbf{x_g} = (1000m, 0)$ et la dernière à $\mathbf{x_g} = (1750m, 0)$*

2.2.2 Un bâtiment sur sous-sol de type bassin

Nous considérons ici le cas d'un seul bloc, $b \times w = 50m \times 30m$, centré à l'abscisse $\mathbf{x}_b = (1750m, 0)$, c'est-à-dire qu'il se trouve directement à la verticale de la localisation de la source.

Intéressons-nous, tout d'abord, au champ à l'intérieur du bloc.

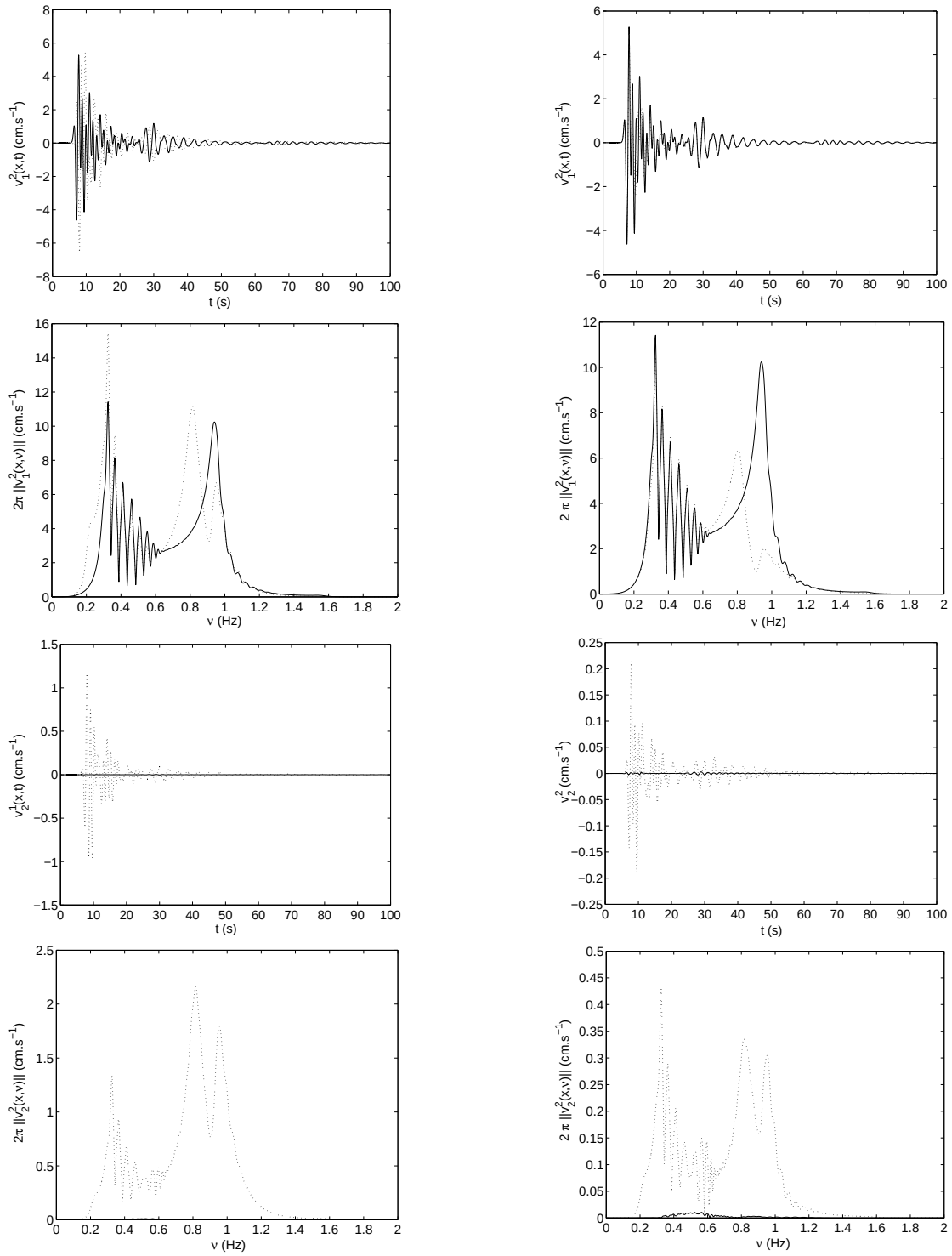


FIG. 2.6 – *Sismogrammes (vitesse) et 2π fois le module du spectre correspondant. Les deux premières lignes représentent la composante suivant x_1 et les deux suivantes la composante suivant x_2. À gauche la vitesse au sommet du bloc et à droite la vitesse à la base du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en pointillés correspondent à la configuration avec bloc.*

Le champ des vitesses présente une **légère amplification au sommet du bloc**. Le premier pic, relatif à l'excitation du mode fondamental du mode de Rayleigh généralisé est d'amplitude plus élevée et semble légèrement décalé vers les basses fréquences. Cela signifie que localement, des **modes de Rayleigh généralisés semblent être excités par la présence du bloc**. Nous ne retrouvons pas la fréquence quasi-base rigide du cas SH, ce qui signifie que les modes de la superstructure sont radicalement différents dans le cas P-SV. La durée est sensiblement identique avec et sans bloc. Comme dans le cas SH, les modifications de la composition du champ ne s'expriment pas de façon très claire pour un seul bloc.

Pour autant, le champ est modifié, avec une amplification au sommet du bloc et une fréquence semble être coupée aux alentours de $\nu = 0.9Hz$, à la base du bloc. Il apparaît un pic supplémentaire aux alentours de $0.8Hz$, qui semble être maximal au sommet du bloc. Cette fréquence doit être une fréquence ou quasi-fréquence de résonance du système global, correspondant à une fréquence de résonance de la superstructure. Par contre, il apparaît que le champ suivant x_2 n'est pas négligeable. En particulier, le champ des vitesses suivant cette composante est d'amplitude relativement importante par rapport au champ au même point, suivant l'axe x_1, au sommet du bloc.

Si nous comparons maintenant les résultats, sur le sol, à une distance proche et à une distance éloignée du bloc, nous remarquons, figure III.2.7, que le champ de vitesse est moindre en présence du bloc proche de celui-ci, et est très rapidement équivalent à ce qu'il est en absence de bloc. Cela indique que **la modification induite par la présence d'un seul bloc est faible** et que l'effet site-ville doit probablement s'exprimer de manière importante uniquement lorsque plusieurs blocs sont présents. Nous avions déjà rencontré ce phénomène dans le cas SH.

À $20m$ du centre du bloc, le champ des vitesses présente une désamplification par rapport au cas sans bloc sur la composante suivant x_1 et une forte amplication sur la composante suivant x_2, due à une conversion de mode à l'intérieur du bloc. La composante suivant x_1 devient rapidement équivalente à celle sans bloc (témoin le résultats à $250m$ du bloc), alors que la composante suivant x_2 est toujours modifiée avec une amplification et des battements supplémentaires.

Les modifications locales touchent principalement le premier train d'ondes que l'on peut attribuer à la réponse d'une couche, section III.2.1, en particulier sur le sol. Pour nous en convaincre, nous ne représentons figure III.2.8 que les 30 premières secondes du signal suivant la direction x_1.

Nous voyons clairement, une amplification au sommet du bloc, avec une durée du premier train légèrement plus longue que sans le bloc, et une désamplification avec une durée sensiblement identique sur le sol.

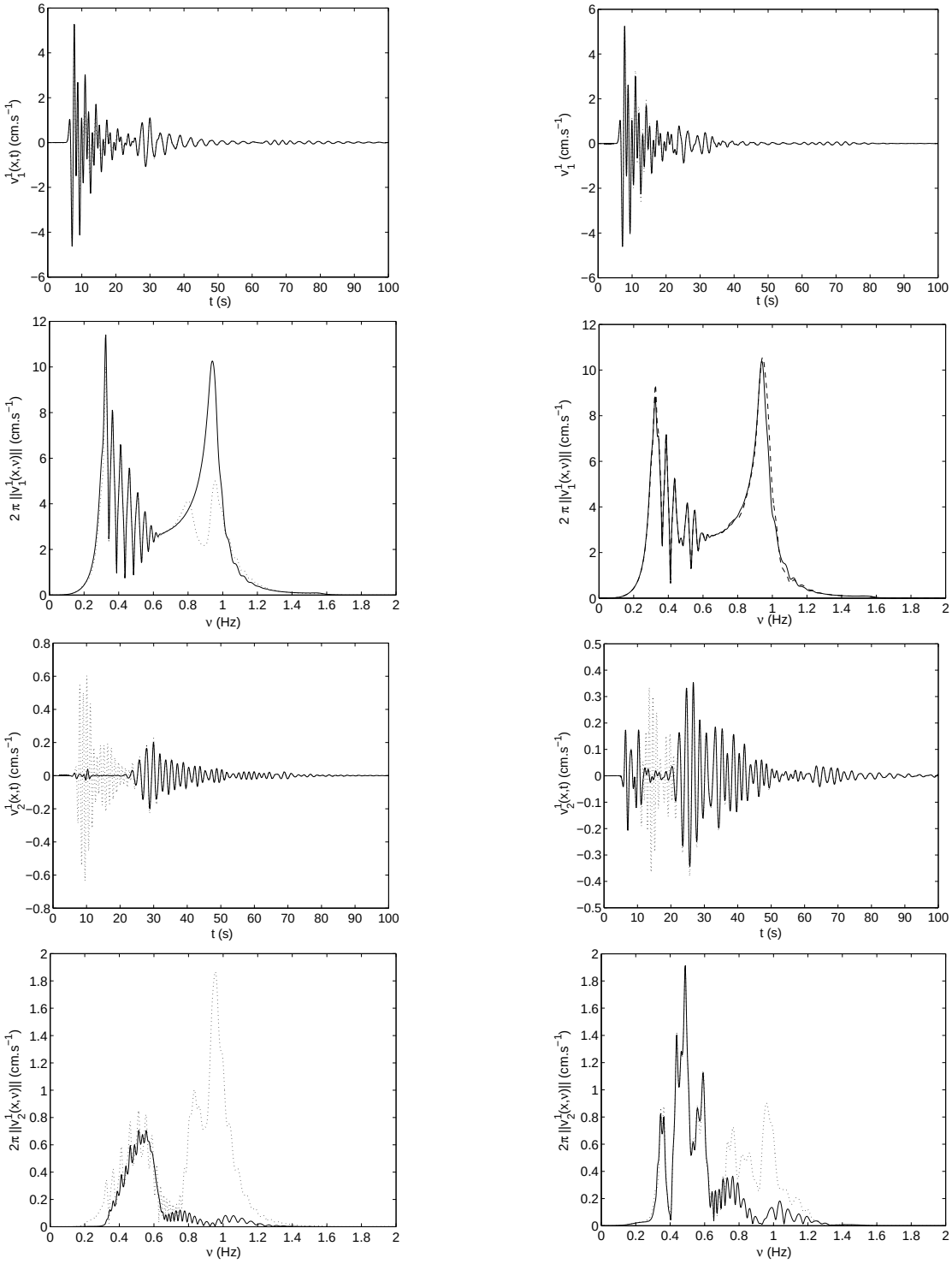


FIG. 2.7 – *Sismogrammes (vitesse) et 2π fois le module du spectre correspondant. Les deux premières lignes représentent la composante suivant x_1 et les deux suivantes la composante suivant x_2. À gauche sur le sol à $20m$ du centre du bloc, c'est-à-dire à l'abscisse $\mathbf{x}_g) = (1730m, 0)$, et à droite sur le sol à $250m$ du centre du bloc, c'est-à-dire à l'abscisse $\mathbf{x}_g) = (1500m, 0)$. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en pointillés correspondent à la configuration avec bloc.*

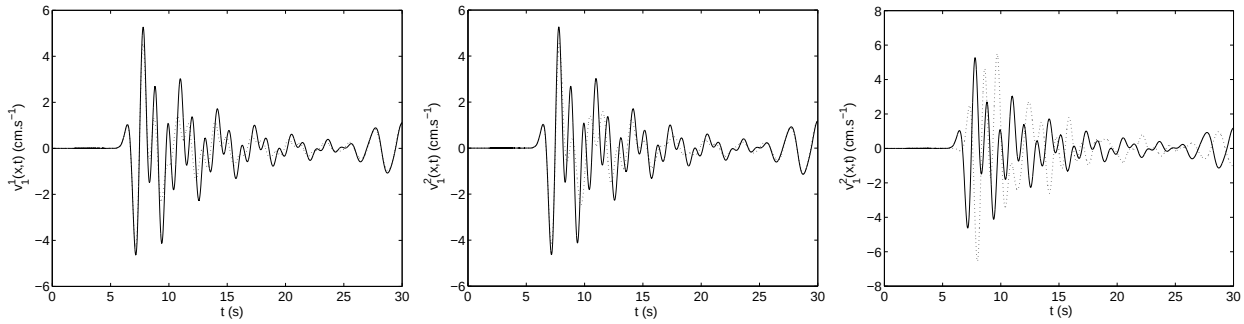


FIG. 2.8 – *Comparaison de la composante $v_1(x,t)$ sur les 30 premières secondes du signal. À gauche sur le sol, l'abscisse $1730m$, au milieu, à la base du bloc, et à droite au sommet du bloc. Les courbes en trait continu correspondent à la configuration sans bloc, et les courbes en traits pointillés à la configuration avec un bloc.*

Ainsi les **résultats** semblent être relativement **comparables** à ceux rencontrés dans le cas SH, mais **la modification du champ induite par la présence du bloc semble moindre**. Nous avons une amplification du champ au sommet du bloc et une désamplication sur le sol, proche de celui-ci. Par contre, la composante suivant x_2 présente à la fois une amplication et des battements supplémentaires, y compris sur le sol, y compris relativement loin du bloc. Cela signifie que **l'effet "site-ville" n'a de chance de se manifester de manière conséquente, dans le cas P-SV, que si plusieurs blocs sont présents**.

Conclusion

Il ressort que l'étude de l'effet site-ville dans le cas des mouvements dans le plan ne peut s'envisager que d'un point de vue numérique. Ce fait met en evidence les **limites de l'analyse théorique**. Celle-ci n'est pas possible, compte tenu des connaissances actuelles, car nous sommes dans l'incapacité de dégager une représentation analytique du champ de déplacements dans un bloc. Ainsi, il nous est impossible de déterminer la vitesse des ondes de compression dans le bloc homogénéisé. Nous avons mené un étude numérique d'une configuration comportant un seul et unique bloc, en contact parfait avec un bassin. La vitesse des ondes de compression dans ce bloc, la vitesse des ondes dans l'air étant d'environ $360m.s^{-1}$, est considérée égale à $\left(c_P^2\right)_R = 500m.s^{-1}$. Cette valeur peut paraître réaliste, mais nous avons fait ce choix sans conviction.

Dans le cas sans bloc, des ondes quasi-Rayleigh généralisées sont excitées et se propagent transversalement dans le bassin. Si nous considérons le bloc, seul le premier train d'ondes, correspondant plus ou moins à la réponse d'une couche d'épaisseur égale à l'épaisseur maximale du bassin, semble être modifiée. Nous relevons une légère amplification à l'intérieur du bloc, avec une légère augmentation de la durée de ce train d'ondes, une désamplification extrèmement locale de celui-ci à la base et sur le sol à côté du bloc et sans augmentation de durée. Les modifications sont quasiment nulles à quelques dizaines de mètres de l'édifice. Ainsi, l'effet site-ville semble moindre dans le cas P-SV, et ne peut réellement se manisfester de manière conséquente que lorsque plusieurs blocs sont présents, corroborant par là-même, les résultats [108, 53].

Par contre, il apparaît que **la composante verticale subit une modification**. En particulier, elle n'est pas négligeable au sommet du bloc, par rapport à la composante horizontale.

Conclusion

À l'origine de cette thèse se trouve le fait qu'aucune réponse satisfaisante n'a été fournie, jusqu'à présent, pour expliquer les réponses anormales, longue durée [135], battements dans la coda [120] et amplitude importante, enregistrées dans certains milieux urbains. En particulier, le séisme de Michoacan qui toucha la ville de Mexico le 19 septembre 1985, présente non seulement un cantonnement des destructions dans le bassin de Mexico, mais également une grande variablité de ces destructions à l'intérieur de ce bassin.

Les premières tentatives d'explications, [163, 144], se concentraient sur la partie centrale du bassin, par des **modèles 1-D** du sous-sol (une **onde plane en incidence verticale**, sur une couche de largeur infinie, limitée par une surface libre et une interface avec un demi-espace plus dur). Ces tentatives furent infructueuses. En particulier, les durées des signaux étaient très faibles par rapport à celles enregistrées in-situ. Les études se sont alors tournées vers des effets liés à la géométrie de cette couche. Dans un premier temps des couches d'épaisseurs variables furent considérées, [40], de manière à expliquer la variabilité des destructions. Mais encore une fois, les durées étaient trop faibles. Dans un second temps [18, 19, 139, 7], les explications se tournèrent vers les configurations de type bassin, toujours excitées par des ondes planes en incidence normale. Ces études montrèrent que des ondes de "surface" étaient générées aux extrémités des bassins. Comme elles sont très rapidement atténuées, les durées n'atteignaient toujours pas celles escomptées. L'idée de plusieurs trains d'ondes germa alors, pour palier ce défaut de durée, [20]. Elle constitue le début des analyses "tout" numériques qui ont été réalisées depuis. Un défaut majeur de ces études réside dans l'excitation. Nous avons montré analytiquement que ce type d'excitation fournit une **bonne représentation des phénomènes uniquement lorsque la source sismique est localisée en profondeur, et à une distance épicentrale proche**. À la limite, elle peut être employée dans le cas de l'étude de séismes touchant des villes comme **Nice**, [155, 154, 108], **pour lesquelles les sources sont proches** (encore que la source du séisme du 25 février 2001 ait été localisée à 29 km au large de la ville, et à une profondeur de 7km), mais **en aucun cas pour les études des séismes touchant des villes comme Mexico** [21, 18, 19, 117, 90] pour lesquelles les sources sont localisées très loin de la ville (au niveau de la zone de subduction sur la côte pacifique, à environ 400km de la ville de Mexico, et à une profondeur d'environ 15km). **L'excitation d'une configuration par une onde plane conduit à privilégier les phénomènes d'interférence d'ondes propagatives, nommés improprement "résonance" d'Haskell, [19, 18], et à négliger l'excitation des modes réels de la configuration.** Ces modes ne peuvent être excités, dans le cas d'une couche, que si la sollicitation prend la forme d'**une onde cylindrique délivrée par une source linéique** (ou de type plus complexe) **localisée proche de l'interface couche-substratum**. L'excitation de ces modes conduit à une **durée importante de la coda** qui augmente avec la distance épicentrale, et à des **battements** dans cette dernière, fait observé empiriquement par Furumura et Kennett [70] et Savage [152]. Cet élément tend à prouver que **les caractéristiques principales de ces réponses**

anormales étaient déjà présentes à l'entrée du bassin de Mexico [51, 70, 46]. Cela aide à comprendre l'origine des battements, de l'amplitude et de la durée importantes, mais n'explique pas la variablité des résultats. Une autre façon d'exciter des modes dont la structure est proche de ceux d'une couche, est de considérer des hétérogénéités géométriques, qu'elles soient d'interface ou de surface. En particulier, nous avons montré que dans le cas d'un bassin, les ondes générées par les extrémités et qui se propagent sur de grandes distances, ne sont pas des ondes de surface "générées localement" , [19, 18], dans le milieu mou constitutif du bassin, mais des modes prenant la forme d'ondes stationnaires propagatives dans le bassin ayant la même vitesse de phase que les ondes de surface qui coexistent dans le substratum. Dans ce cas, nous observons une variabilité du champ de déplacement à l'intérieur du bassin. Les études numériques que nous avons menées se concentraient sur des bassins "peu" larges et excités par une source profonde. Il faudrait poursuivre ce travail en excitant ce bassin avec des ondes correspondant à des modes de la couche sous-jacente au bassin.

Une autre classe d'idées qui pourrait expliquer la variablité des destructions dans la ville, est liée à la présence des bâtiments de la ville qui constituent des irrégularités de surface libre [180, 90, 21, 117, 154, 155, 108, 53]. Le problème de l'interaction entre les bâtiments et une excitation sismique a surtout été traité, par le passé, pour deux applications majeures : la première est la résistance aux séismes des centrales nucléaires, surtout celle de la chambre de confinement. Il est évident qu'une fuite (dans le meilleur des cas) ou l'explosion d'un réacteur nucléaire provoquerait dégâts et contaminations persistantes dans une zone bien plus large que celle touchée directement par le séisme (le "nuage de Tchernobyl" n'a-t-il pas touché la France en 1986?). La seconde, d'une importance "majeure" pendant la guerre froide et la course à l'armement nucléaire entre l'URSS et les USA, était la détection et la quantification de la puissance de la bombe lors des essais nucléaires souterrains de l'adversaire. Il était "vital" de pouvoir obtenir une information précise (les époux Rosenberg et consorts n'avaient pas terminé leur travail d'espionnage) sur les activités nucléaires à l'autre bout de la terre et pour ce faire, il fallait comprendre précisément les modifications des ondes induites par les irrégularités de surface au cours de leur propagation. À l'heure actuelle, ce genre d'idée est à la marge, sauf peut-être, dans la construction parasismique et encore les études sont souvent numériques [154, 155, 108, 53]. **Nous sommes, à notre connaissance, les seuls à avoir réalisé une étude analytique complète du comportement de bâtiments, modélisés par des blocs homogénéisés, sur sous-sol avec couche.** En tout cas, nous avons une adéquation réelle, et sur toute la plage de fréquences, entre les résultats analytiques et numériques. D'autres ont considéré des modèles de blocs à un seul degré de liberté et exhibent des résultats qui vont dans le même sens que nous [90], mais souvent ils ne les ont pas comparés [37] avec ceux obtenus par d'autres méthodes. Ou bien alors, les résultats ne correspondent pas, pour toutes les fréquences, à leurs analyses numériques [117]. L'avantage majeur de notre analyse réside dans l'**explication** et l'**identification des phénomènes et des mécanismes** qui ne sont guère possibles autrement ou parfois pourraient être des interprétations tendancieuses. Par exemple, le décalage fréquentiel et l'augmentation de l'amplitude du pic fondamental de "résonance" de la couche en présence d'un bâtiment lorsque la configuration est sollicitée par une onde plane polarisée en onde SH, phénomène appelé interaction "sol-structure" [117, 108] s'explique simplement dans le cadre d'une étude analytique, et à la lumière de notre travail sur les modes de la configuration sans bloc. Il est dû à une modification des phénomènes dans la couche : en l'absence du bloc et pour une onde plane incidente, ceux-ci sont simplement des phénomènes, non résonnants, d'intéraction d'ondes propagatives, alors qu'en présence du bloc, ceux-ci sont des phénomènes résonnants, les ondes associées à ces modes étant de structures proches de celles des ondes de Love. Nous avons montré que **la présence de blocs induit une modification notable de l'amplitude du champ de déplacement dans les**

blocs et sur le sol, une augmentation de la durée et des battements dans la coda (dans certains cas). **Mais les phénomènes rencontrés à l'échelle intermédiaire ne pouvaient se déduire de ceux rencontrés à l'échelle locale (même s'ils sont éclairés par ceux-ci) et les phénomènes rencontrés à l'échelle globale ne pouvaient se déduire de ceux rencontrés à l'échelle intermédiaire.** Nous montrons en particulier, que la proximité du mode fondamental d'un bloc à quasi-base fixe, du mode fondamental de la couche, n'induit pas obligatoirement une réponse plus importante dans ce bloc [37], et que la distance séparant les blocs n'a que peu d'influence lorsque ceux-ci sont proches [37, 90]. Nous exhibons des modes liés à l'organisation des blocs qui semblent avoir un lien avec les phénomènes de cohérence énoncés dans [108]. L'analyse analytique montre ses limites dans le cas de plusieurs bâtiments distincts, et surtout dans l'étude de la réponse d'un ou plusieurs blocs dans le cadre des mouvements dans le plan. L'analyse numérique prend alors tout son intérêt. Elle comporte certaines difficultés, en particulier la prise en compte de la dissipation dans les codes numériques Éléments-Finis dont nous disposons. Effectivement, si elle n'est pas prise en compte, les durées relevées dans le cas de l'effet site-ville sont très importantes [180], alors qu'elles sont réduites drastiquement lorsque la dissipation est considérée. L'analyse numérique, une fois ces phénomènes pris en compte, nous permet de considérer des cas plus compliqués en SH, qui sont expliqués grâce à nos analyses analytiques précédentes. Pour des mouvements dans le plan, nous n'avons considéré qu'un seul cas, celui de la réponse d'un bloc sur un bassin. Il faut donc être prudent quant à nos conclusions, d'autant plus que ce cas souffre de l'impossibilité d'être traité analytiquement. Il semble que dans ce cas, les effets ne soient importants que lorsque plusieurs blocs sont considérés et sont moindres que dans le cadre des mouvements anti-plans [53, 108].

Il reste donc beaucoup de travail à réaliser pour comprendre les mécanismes et phénomènes mis en jeu, à la fois dans la propagation régionale et dans l'effet site-ville. Le rôle de la ceinture volcanique transmexicaine est peu claire. Selon [46, 51], les ondes de Love seraient atténuées ce qui mettrait en avant les ondes de Rayleigh généralisées comme ondes incidentes dans le bassin de Mexico. Il faudrait s'atteler à l'analyse analytique (complétée par l'analyse numérique) de la réflexion et de la transmission des ondes de Love et de Rayleigh au niveau d'hétérogénéités latérales matérielles ou géométriques, en se basant, par exemple, sur les travaux [78, 107, 122, 127]. Les effets 3D, ne sont certainement pas négligeables non plus. L'excitation du bassin de Mexico et des constructions par les ondes ayant effectué la trajectoire régionale reste à réaliser. Dans [67], les auteurs tentent une étude par une méthode hybride, de ce phénomène, mais les ondes de surface incidentes dans le bassin sont introduites dans un code numérique sous la forme d'une onde plane, ce qui nous paraît inadéquat. Une approche purement numérique utilisant une technique de raffinement de maillage, telle que celle exposée dans [142], nous semble préférable. En ce qui concerne l'effet site-ville, les mécanismes fins, dans le cadre des mouvements anti-plans (les mécanismes généraux ayant été "déblayés" dans cette thèse), de l'interaction entre plusieurs blocs, sont encore à creuser. Dans le cadre des mouvements dans le plan, l'analyse reste à mener. Nous pouvons penser à utiliser une méthode hybride, analytique-numérique, telle que celle présentée dans [113], pour avoir une représentation du champ dans les blocs. Cela nous permettrait d'avoir une conception "analytique" de ce problème. Bien sûr, la confrontation avec des expériences "grandeur réelle", en tout cas aux échelles locale et intermédiaire, étayerait nos résultats analytiques et numériques. Enfin, l'analyse 3D mettra certainement en évidence de nouveaux phénomènes. De façon pratique, une question nous interpelle quant aux techniques de construction. Lorsqu'un bloc est sollicité par des ondes correspondant à des modes (Love ou Rayleigh généralisés), lors d'un séisme ayant un épicentre lointain ou lorsqu'une source est localisée dans le bassin (métro, ou aéroport par exemple), il apparaît que la sollicitation est de durée importante. Ainsi, les bâtiments vont "travailler" en fatigue. Non seulement ces bâti-

ments doivent résister à un choc, mais également résister aux sollicitations répétées. Il semble que cet aspect (fatigue) ne soit pas pris en compte en tant que tel lors de la conception d'un édifice. Effectivement, l'essentiel de la prévention relative à l'excitation porte sur l'abaissement de la fréquence fondamentale du bloc afin qu'elle soit inférieure à la fréquence fondamentale de la couche (calculée à partir de la formule d'Haskell, qui ne correspond pas, rappelons-le, à un mode réel de la structure géophysique). C'est sans compter avec les modes d'ordre supérieur. Il est, dans ces conditions, possible qu'un mode du bâtiment d'ordre supérieur soit proche de la fréquence du mode de Love. Ce défaut tient au modèle par un système masse-ressort du bâtiment mettant en avant le seul mode fondamental.

À terme et une fois acquises les connaissances nécessaires, les décideurs devraient agir conjointement sur les bâtiments (constructions parasismiques) et sur l'organisation de ceux-ci en se basant sur les conclusions de l'étude de l'effet site-ville) pour tenter de limiter les dégâts lors d'un séisme. L'exemple du tremblement de terre qui toucha la ville de Kobé est l'exemple-type. La quasi-totalité des bâtiments était construite selon des normes anti-sismiques sévères et pourtant les dégats ont été très importants. Cela souligne l'importance de l'organisation de la ville.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Un problème canonique : description du champ transmis et du champ refléchi par une interface plane excitée par une onde plane incidente

A.1 Description et formulation du problème

La figure A.1 représente une coupe de la configuration selon le plan sagittal. Ω_1 et Ω_2 resprésentent la coupe de deux demi-espaces occupés par des matériaux M^1 et M^2 linéaires, homogènes, isotropes, et initialement au repos. Nous considérons ici des milieux non-dissipatifs par simplicité. La surface de séparation entre les deux demi-espaces est plane et sa représentation dans le plan sagittal est Γ. La géométrie est invariante suivante l'axe x_3. La solliciation, désignée par $u^i(\mathbf{x}, \omega)$ dans le domaine fréquentiel, est supposée être associée à une onde plane homogène, se propageant initialement dans le domaine Ω_1 en direction de Γ, et formant un angle θ^i avec l'axe x_2. L'invariance de l'onde incidente ainsi que celle de la géométrie du problème, nous permettent de résoudre un problème 2D dont chaque point $\mathbf{x}$ est repéré par une coordonnée dans le repère associé à la configuration x_1x_2 et dont l'origine O se trouve sur l'interface Γ. En notant $\mathbf{i}_2$ le vecteur unitaire associé à l'axe x_2 positif, ce vecteur est normal à l'interface Γ.

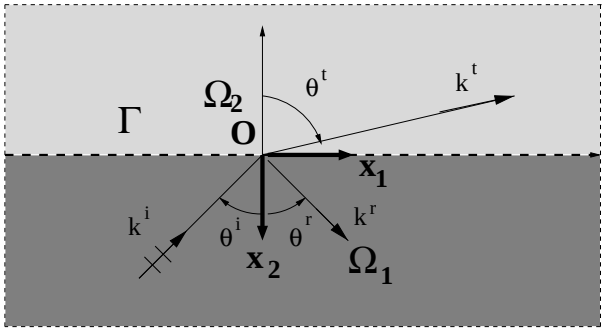


FIG. A.1 – *Coupe dans la plan sagittal de la configuration pour le problème d'une onde plane rencontrant une interface plane entre deux demi-espaces occupés par des matériaux linéaires, homogènes et isotropes*

La forme mathématique de la sollicitation est

$$u^1(\mathbf{x},\omega) = A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1^{1i}x_1 - k_2^{1i}x_2\right)\right) \tag{A.1}$$

où $A^i(\omega)$ est le spectre de la sollicitation et

$$k_1^{1i} = k^1\sin\left(\theta^i\right) \quad , k_2^{1i} = k^1\cos\left(\theta^i\right) \tag{A.2}$$

Le problème est donc de trouver les champs de déplacement $u^1(\mathbf{x})$ et $u^2(\mathbf{x})$ solutions du problème dans les domaines Ω_1 et Ω_2 vérifiant :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(k^j\right)^2\right)u^j = -f(\omega)\delta_{j1},\ j = 1,2 \tag{A.3}$$

tels que

$$\forall \mathbf{x}\in\Gamma\begin{cases} u^1(\mathbf{x},\omega) - u^2(\mathbf{x},\omega) = 0 & (i)\\ \mu^1\partial_n u^1(\mathbf{x},\omega) - \mu^2\partial_n u^2(\mathbf{x},\omega) = 0 & (ii)\end{cases} \tag{A.4}$$

ainsi que la condition de rayonnement à l'infini

A.2 Représentation des champs

La conséquence de la séparation des variables ainsi que l'application de la condition de rayonnement à l'infini conduisent aux représentations suivantes

$$\begin{aligned} u^1(\mathbf{x},\omega) &= u^1(\mathbf{x},\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} B^1(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 + k_2^1x_2\right)\right)dk_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A^i(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 - k_2^1x_2\right)\right)dk_1 + \int_{-\infty}^{\infty} B^1(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 + k_2^1x_2\right)\right)dk_1 \end{aligned} \tag{A.5}$$

où $A^i(k_1,\omega) = A^i(\omega)\delta\left(k_1 - k_1^{1i}\right)$, et pour $x_2 \geq 0$.

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(k_1,\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1x_1 - k_2^2x_2\right)\right)dk_1 \tag{A.6}$$

pour $x_2 \leq 0$.

Dans ces deux expressions, les nombres verticaux k_2^j, $j = 1,2$ sont tels que

$$k_2^j = \sqrt{(k^j)^2 - (k_1^j)^2} \quad , \Re\left(k_2^j\right) \geq 0 \quad , \text{et } \Im\left(k_2^j\right) \geq 0 \quad , j = 1,2 \tag{A.7}$$

A.3 Application des conditions aux limites et obtention des champs

L'introduction des représentations des champs, équation (A.5) et (A.6) dans les conditions aux limites équation (A.4), en projection tel que $\int_{\infty}^{\infty}$ (A.4) (i) ou (ii) $\exp\left(-\mathrm{i}k_1'x_1\right)dk_1$ fournit

$$\begin{aligned} &A^i(k_1,\omega) + B^1(k_1,\omega) - A^2(k_2,\omega) = 0 \\ &-\mathrm{i}k_2^1\mu^1A^i(k_1,\omega) + \mathrm{i}k_2^1\mu^1B^1(k_1,\omega) + \mathrm{i}k_2^2\mu^2A^2(k_1,\omega) = 0 \end{aligned} \tag{A.8}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} B^1(k_1,\omega) &= A^i(\omega)R(k_1,\omega)\delta\left(k_1-k_1^{1i}\right) \\ &= A^i(\omega)\frac{\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k^1}\right)^2}-\gamma\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k^2}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k^1}\right)^2}+\gamma\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k^2}\right)^2}}\delta_{k_1^{1i}} \end{aligned} \tag{A.9}$$

et

$$\begin{aligned} A^2(k_1,\omega) &= A^i(\omega)T(k_1,\omega)\delta_{k_1^{1i}} \\ &= A^i(\omega)\frac{2\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k^1}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k^1}\right)^2}+\gamma\sqrt{1-\left(\frac{k_1}{k^2}\right)^2}}\delta\left(k_1-k_1^{1i}\right) \end{aligned} \tag{A.10}$$

où $\gamma=\dfrac{\mu^2k^2}{\mu^1k^1}=\dfrac{\mu^2c_S^1}{\mu^1c_S^2}$. L'introduction des coefficients, $A^2(k_1,\omega)$ et $B^1(k_1,\omega)$ dans les expressions des champs donne

$$u^1(\mathbf{x},\omega)=A^i(\omega)\left(\exp\left(-\mathrm{i}k_2^{1i}x_2\right)+R(k_1^{1i},\omega)\exp\left(\mathrm{i}k_2^{1i}x_2\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}k_1^{1i}x_1\right) \tag{A.11}$$

et

$$u^2(\mathbf{x},\omega)=A^i(\omega)T(k_1^{1i},\omega)\exp\left(\mathrm{i}\left(k_1^{1i}x_1-k_2^{1i}x_2\right)\right) \tag{A.12}$$

où

$$R(k_1^{1i},\omega)=\frac{\cos\left(\theta^i\right)-\gamma\sqrt{1-\left(\frac{c_S^2}{c_S^1}\sin\left(\theta^i\right)\right)^2}}{\cos\left(\theta^i\right)+\gamma\sqrt{1-\left(\frac{c_S^2}{c_S^1}\sin\left(\theta^i\right)\right)^2}} \tag{A.13}$$

et

$$T(k_1^{1i},\omega)=\frac{2\cos\left(\theta^i\right)}{\cos\left(\theta^i\right)+\gamma\sqrt{1-\left(\frac{c_S^2}{c_S^1}\sin\left(\theta^i\right)\right)^2}} \tag{A.14}$$

Remarque : Nous pouvons écrire l'onde incidente comme

$$u^i(\mathbf{x},\omega)=A^i(\omega)\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}^i.\mathbf{x}\right) \tag{A.15}$$

avec $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ et $\mathbf{k}^i=\left(k^1\sin\left(\theta^i\right),-k^1\cos\left(\theta^i\right)\right)$. De la même façon, le champ réfléchi dans Ω_1 peut s'écrire sous la forme

$$u^r(\mathbf{x},\omega)=A^i(\omega)R(k^1\sin\left(\theta^i\right),\omega)\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}^r.\mathbf{x}\right) \tag{A.16}$$

où cette fois $\mathbf{k}^r=\left(k^1\sin\left(\theta^i\right),k^1\cos\left(\theta^i\right)\right)$. Cela signifie que $\mathbf{k}^i$ est le vecteur d'onde d'une onde incidente désigné par la flèche ascendante figure A.1, alors que $\mathbf{k}^r$ est le vecteur d'onde de l'onde plane spéculairement réfléchie, désigné par la flèche descendante sur cette même figure. La loi de Snell nous indique que l'angle de réflexion θ^r est égal à l'angle d'incidence θ^i. De plus, nous avons $|\mathbf{k}^i|=|\mathbf{k}^r|=|\mathbf{k}^1|$.

A.3.1 Champ transmis et champ réfléchi dans le cas de faibles angles d'incidences

Considérons que l'angle d'incidence θ^i est tel que

$$\left| \frac{c_S^2}{c_S^1} \sin\left(\theta^i\right) \right| \leq 1 \tag{A.17}$$

Nous rappelons que l'angle d'incidence de Brewster est l'angle d'incidence pour lequel

$$\left| \frac{c_S^2}{c_S^1} \sin\left(\theta^{i_B}\right) \right| = 1 \tag{A.18}$$

C'est-à-dire que l'équation (A.17) est équivalente à la condition $|\theta^i| \leq \theta^{i_B}$. Dans ce cas, il est légitime d'écrire la loi de Fresnel sous la forme

$$\frac{c_S^2}{c_S^1} \sin\left(\theta^i\right) = \sin\left(\theta^t\right) \tag{A.19}$$

si bien que

$$\sqrt{1 - \left(\frac{c_S^2}{c_S^1} \sin\left(\theta^i\right) \right)^2} = \cos\left(\theta^t\right) \tag{A.20}$$

Dans ces conditions, le champ transmis $u^2(\mathbf{x}, \omega)$ s'écrit

$$\begin{aligned} u^2(\mathbf{x}, \omega) &= A^i(\omega) T(k_1 \sin\left(\theta^i\right), \omega) \exp\left(\mathrm{i}k^2 \left(x_1 \sin\left(\theta^t\right) - x_2 \cos\left(\theta^t\right)\right)\right) \\ &= A^i(\omega) T(k_1 \sin\left(\theta^i\right), \omega) \exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}^t.\mathbf{x}\right) \end{aligned} \tag{A.21}$$

où $\mathbf{k}^t = \left(k^2 \sin\left(\theta^t\right), -k^2 \cos\left(\theta^t\right)\right.$ est le vecteur d'onde désigné figure A.1 par la flèche ascendante, tel que $\|\mathbf{k}^t\| = \|k^2\|$. En d'autres termes, le champ transmis est une onde plane. De plus, la loi de Fresnel indique que

$$\begin{aligned} |\theta^t| < |\theta^i| \quad &\text{lorsque } c_S^1 > c_S^2 \\ |\theta^t| > |\theta^i| \quad &\text{lorsque } c_S^1 < c_S^2 \end{aligned} \tag{A.22}$$

Dans ces conditions, les opérateurs de transmission et de réflexion prennent la forme

$$\begin{aligned} T(k_1^{1i}, \omega) &= \frac{2\cos\left(\theta^i\right)}{\cos\left(\theta^i\right) + \gamma \cos\left(\theta^t\right)} \\ R(k_1^{1i}, \omega) &= \frac{\cos\left(\theta^i\right) - \gamma \cos\left(\theta^t\right)}{\cos\left(\theta^i\right) + \gamma \cos\left(\theta^t\right)} \end{aligned} \tag{A.23}$$

Puisque $|\theta^i| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\theta^t| \leq \frac{\pi}{2}$ et $\gamma > 0$, cela implique que $R(k_1^{1i}, \omega) \in \mathbb{R}$ et que $R(k_1^{1i}, \omega) \in \mathbb{R} \leq 1$. Ce qui signifie que l'amplitude du champ réfléchi est en général moindre que celle du champ incident, en dessous de l'angle d'incidence de Brewster.

A.3.2 Champ transmis et champ réfléchi dans le cas de grands angles d'incidence

Nous supposons ici, par convenance, que l'angle θ^i est positif. Nous nous plaçons ici dans le cas où $\theta^i > \theta^{i_B}$, si bien que

$$\left| \frac{c_S^2}{c_S^1} \sin\left(\theta^i\right) \right| > 1 \tag{A.24}$$

Nous posons donc

$$\sqrt{1-\left(\frac{c_S^2}{c_S^1}\sin\left(\theta^i\right)\right)^2} = \mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{c_S^2}{c_S^1}\sin\left(\theta^i\right)\right)^2 - 1} = \mathrm{i}\sinh\left(\theta^t\right) \tag{A.25}$$

Le champ transmis a donc pour formulation

$$u^2(\mathbf{x},\omega) = A^i(\omega)T(k_1\sin\left(\theta^i\right),\omega)\exp\left(\mathrm{i}k^2\cosh\left(\theta^t\right)x_1 + x_2\sinh\left(\theta^t\right)\right) \tag{A.26}$$

Or, $x_2\sinh\left(\theta^t\right) < 0$, puisque $x_2 < 0$, c'est-à-dire que le champ dans le milieu Ω_2 prend la forme d'une onde évanescente dont l'amplitude décroît avec la distance séparant un point de l'interface Γ, alors que le champ réfléchi a toujours la consistance d'une onde plane propagative. Les coefficients de transmission et de réflexion sont dans ce cas :

$$\begin{aligned} T(k_1^{1i},\omega) &= \frac{2\cos\left(\theta^i\right)}{\cos\left(\theta^i\right) + \mathrm{i}\gamma\sinh\left(\theta^t\right)} \\ R(k_1^{1i},\omega) &= \frac{\cos\left(\theta^i\right) - \mathrm{i}\gamma\sinh\left(\theta^t\right)}{\cos\left(\theta^i\right) + \mathrm{i}\gamma\sinh\left(\theta^t\right)} \end{aligned} \tag{A.27}$$

Nous pouvons en particulier remarquer que dans ce cas $\|R(k_1^{1i},\omega)\| = 1$, c'est-à-dire que le module de l'amplitude du champ réfléchi est égal au module de l'amplitude du champ incident.

Annexe B

Méthode adoptée pour l'intégration sur la variable k_1

Nous avons rencontré deux familles d'intégrandes, pour lesquelles nous avons utilisé des algorithmes légèrement différents.

B.1 Intégrale de type $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(k_1)}{D(k_1)} \frac{dk_1}{k_2}$

Considérons le cas d'une intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(k_1)}{D(k_1)} \frac{dk_1}{k_2}$, où $k_2 = \sqrt{k^2 - k_1^2} \in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$, et $\Re\left(D(k_1)\right) = 0$, pour certaines valeurs de la variable réelle d'intégration k_1.

Remarque : pour un milieu dissipatif $k_2 \in \mathbb{C}$, pour $k_1 < \Re(k)$ puisque $k \in \mathbb{C}$, alors que pour un milieu non-dissipatif $k_2 \in \mathbb{R}$, pour $k_1 < k$ puisque $k \in \mathbb{R}$.

La première étape consiste à réduire l'intervalle d'intégration de $]-\infty, \infty[$ à $[0, \infty[$ tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(k_1)}{D(k_1)} \frac{dk_1}{k_2} = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{N(k_1)}{D(k_1)} + \frac{N(-k_1)}{D(-k_1)} \right) \frac{dk_1}{k_2} \tag{B.1}$$

- Si $k \in \mathbb{R}$, nous réalisons les changements de variables
  - sur l'intervalle $[0, k[$, nous posons $k_1 = k \sin(\phi)$ si bien que l'intégrale prend la forme

$$\int_{0}^{k} \left(\frac{N(k_1)}{D(k_1)} + \frac{N(-k_1)}{D(-k_1)} \right) \frac{dk_1}{k_2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{N(k\sin(\phi))}{D(k\sin(\phi))} + \frac{N(-k\sin(\phi))}{D(-k\sin(\phi))} \right) d\phi \tag{B.2}$$

  - sur l'intervalle $[k, \infty[$, nous posons $k_1 = k \cosh(\phi)$ si bien que l'intégrale prend la forme

$$\int_{k}^{\infty} \left(\frac{N(k_1)}{D(k_1)} + \frac{N(-k_1)}{D(-k_1)} \right) \frac{dk_1}{k_2} = \int_{0}^{\infty} -\mathrm{i} \left(\frac{N(k\cosh(\phi))}{D(k\cosh(\phi))} + \frac{N(-k\cosh(\phi))}{D(-k\cosh(\phi))} \right) d\phi \tag{B.3}$$

- Si $k \in \mathbb{C}$, nous réalisons les changements de variables (ils n'ont pas d'intérêt mathématique, mais un intérêt pratique au sens où ils permettent de dilater les intervalles, en particulier

l'intervalle $[0, \Re(k)[$)

- sur l'intervalle $[0, \Re(k)[$, nous posons $k_1 = \Re(k)\sin(\phi)$ si bien que l'intégrale prend la forme ($k_2 = \sqrt{k^2 - \Re(k)^2\sin^2(\phi)}$)

$$\begin{array}{l}\int_0^k \left(\frac{N(k_1)}{D(k_1)} + \frac{N(-k_1)}{D(-k_1)}\right)\frac{dk_1}{k_2} = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{N(k\sin(\phi))}{D(k\sin(\phi))} + \frac{N(-k\sin(\phi))}{D(-k\sin(\phi))}\right)\frac{\Re(k)\sin(\phi)\,d\phi}{k_2}\end{array} \tag{B.4}$$

- sur l'intervalle $[k, \infty[$, nous posons $k_1 = \Re(k)\cosh(\phi)$ si bien que l'intégrale prend la forme ($k_2 = \sqrt{k^2 - \Re(k)^2\cosh^2(\phi)}$)

$$\begin{array}{l}\int_k^\infty \left(\frac{N(k_1)}{D(k_1)} + \frac{N(-k_1)}{D(-k_1)}\right)\frac{dk_1}{k_2} = \\ \int_0^\infty -\mathrm{i}\left(\frac{N(k\cosh(\phi))}{D(k\cosh(\phi))} + \frac{N(-k\cosh(\phi))}{D(-k\cosh(\phi))}\right)\frac{\Re(k)\sinh(\phi)\,d\phi}{k_2}\end{array} \tag{B.5}$$

Le problème est ensuite la borne supérieure d'intégration de $\int_0^\infty$. Les intégrandes considérées sont toutes telles que $\lim_{k_1\to\pm\infty}\frac{N(k_1)}{D(k_1)k_2} = 0$. Nous tronquons donc l'intégrale $\int_0^\infty \approx \int_0^K$, où K est en général considéré tel que $k_1 = \Re(k)\cosh(9)$. Reste le problème des zéros complexes de $D(k_1)$. Sur l'intervalle $[0, k[$, les racines $k_1^\star$ de $D(k_1) = 0$ sont complexes (Leaky-modes), telles que leur partie imaginaire soit importante. Cela implique que $D(\Re(k_1^\star)) \neq 0$. Alors le calcul de l'intégrale sur cet intervalle est en général assez bien réalisé avec une discrétisation de l'intégrande avec 3000 points et une intégration par la méthode des trapèzes. Par contre, sur l'intervalle $[k, \infty[$, les racines admettent une partie imaginaire très faible, si bien que $D(\Re(k_1^\star)) \approx 0$. La réalisation correcte de l'intégration requiert donc un raffinement de la discrétisation de l'intégrande aux alentours de $\Re(k_1^\star)$. Nous discrétisons dans un premier temps l'intervalle d'intégration $[0, K]$ avec 10000 points, $[0, K[= \bigcup[\phi_j, \phi_{j+1}[$, $j = 1, 2, ..., 9999$. Nous recherchons ensuite $\phi_i^\star$ tels que $\Re(N(k_1(\phi_i^\star))) = 0$, ou $\Im(N(k_1(\phi^{i\star}))) = 0$, en repérant les changements de signe de ces deux fonctions sur les intervalles $[0, N[= \bigcup[\phi_j, \phi_{j+1}[$, $j = 1, 2, 9999$. Notons $[\phi_j^{i\star}, \phi_{j+1}^{i\star}[$ l'intervalle incluant la $i^{\text{ième}}$ racine des parties réelle ou imaginaire du dénominateur et Nb le nombre total de zéros rencontrés. Nous séparons alors l'intervalle $[0, N]$ sur ces zéros tel que $[0, K] = [0, \phi_j^{1\star}] \bigcup_{i=1,Nb,\ j}[\phi_j^{i\star}, \phi_{j+1}^{i\star}[\bigcup_{i=1,Nb,\ j}[\phi_{j+1}^{i\star}, \phi_j^{i+1\star}[\bigcup[\phi_j^{Nb\star}, N[$. L'intégrale sur l'intervalle $[0, K]$ est alors correctement réalisée avec la méthode des trapèzes en considérant une discrétisation de l'intégrande sur les intervalles $[0, \phi_j^{1\star}]$, $[\phi_{j+1}^{i\star}, \phi_j^{i+1\star}[$, et $[\phi_j^{Nb\star}, N[$ avec 5000 points, et sur les intervalles $[\phi_j^{i\star}, \phi_{j+1}^{i\star}[$, avec 1000 points. Si aucun zéro n'est rencontré, l'intégration est réalisée sur les 10000 points considérés initialement.

B.2 Intégrale de type $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(k_1)\text{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)}{D(k_1)}\frac{dk_1}{k_2}$

Cette intégrale comporte de grandes similitudes avec la précédente. La seule différence réside dans le terme $\text{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)$. Nous réalisons les mêmes opérations que précédemment à la différence près que nous séparons cette fois l'intervalle d'intégration [0,K[, à la fois sur les zéros des fonctions $\Re(N(k_1))$ et $\Im(N(k_1))$, et sur les 70 premiers zéros de la fonction $\text{sinc}\left(k_1\frac{w}{2}\right)$.

Remarque : De façon générale, les intégrales dans le cas P-SV ont été réalisées de $]-\infty,\infty[$, de sorte que les changements de variable restent identiques, mais sont effectués sur les trois intervalles $[-\infty,-\Re(k)[\bigcup[-\Re(k),\Re(k)]\bigcup]\Re(k),\infty]$.

Annexe C

Modes de Love et modes de fuite ("Leaky modes") dans le cas non-dissipatif et purement atténuant, $\eta(\zeta)$

Selon les valeurs de la variable $\zeta \in \mathbb{R}$, nous nous proposons de trouver les racines dans le plan complexe $\eta = \eta' + \mathrm{i}\eta''$ des équations :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_1(\zeta,\eta) = \mathrm{i}\psi(\zeta)\cos(\eta\phi(\zeta)h) + v\phi(\zeta)\sin(\eta\phi(\zeta)h)\,,\ \zeta \in [-1,1] && (i)\\
&\mathcal{D}_2(\zeta,\eta) = -\theta(\zeta)\cos(\eta\phi(\zeta)h) + v\phi(\zeta)\sin(\eta\phi(\zeta)h)\,,\ \zeta \in [-\gamma,-1[\cup]1,\gamma] && (ii)\\
&\mathcal{D}_3(\zeta,\eta) = -\theta(\zeta)\cosh(\eta\chi(\zeta)h) - v\chi(\zeta)\sinh(\eta\chi(\zeta)h)\,,\ \zeta \in [-\infty,-\gamma[\cup]\gamma,\infty] && (iii)
\end{aligned} \tag{C.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\psi(\zeta) = |\sqrt{1-\zeta^2}| \text{ pour } \zeta \in [-1,1]\\
&\psi(\zeta) = \mathrm{i}\theta(\zeta) = \mathrm{i}|\sqrt{\zeta^2-1}| \text{ pour } \zeta \in [-\infty,-1[\cup]1,\infty]\\
&\phi(\zeta) = |\sqrt{\gamma^2-\zeta^2}| \text{ pour } \zeta \in [-\Re(\gamma),\Re(\gamma)]\\
&\psi(\zeta) = \mathrm{i}\chi(\zeta) = \mathrm{i}|\sqrt{\zeta^2-\gamma^2}| \text{ pour } \zeta \in [-\infty,-\Re(\gamma)[\cup]\Re(\gamma),\infty]
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Nous rappelons que dans le cas purement atténuant, $(\gamma, v) \in \mathbb{C}^2$ alors que dans la cas non-dissipatif $(\gamma, v) \in \mathbb{R}^2$, quantités toutes deux indépendantes de la fréquence.

C.1 Racines complexes de $\mathcal{D}_1$

Nous allons montrer que ces racines correspondent à des "Leaky modes", c'est-à-dire à des phénomènes d'interférence. Ce sont les fréquences d'Haskell.
Introduisons $\eta = \eta^{\mathrm{B}'} + \mathrm{i}\eta^{\mathrm{B}''}$ et les quantités

$$a^{\mathrm{B}} = \Re(\eta^{\mathrm{B}}\phi(\zeta)) \quad b^{\mathrm{B}} = \Im(\eta^{\mathrm{B}}\phi(\zeta)) \quad c = \Im(v\phi(\zeta)) \quad d = \Im(v\phi(\zeta)) \tag{C.3}$$

Alors l'annulation de la partie imaginaire et de la partie réelle de l'équation (i), (C.1) fournit le système :

$$\begin{cases} \sin\left(a^{\mathrm{B}}\right)\left(\psi(\zeta)\sinh\left(b^{\mathrm{B}}\right)+c\cosh\left(b^{\mathrm{B}}\right)\right)-d\cos\left(a^{\mathrm{B}}\right)\sinh\left(b^{\mathrm{B}}\right)=0 & (i) \\ \cos\left(a^{\mathrm{B}}\right)\left(\psi(\zeta)\cosh\left(b^{\mathrm{B}}\right)+c\sinh\left(b^{\mathrm{B}}\right)\right)+d\sin\left(a^{\mathrm{B}}\right)\cosh\left(b^{\mathrm{B}}\right)=0 & (ii) \end{cases} \tag{C.4}$$

Si $\cos\left(a^{\mathrm{B}}\right)=0$, équation (ii) alors $\sin\left(a^{\mathrm{B}}\right)=0$, puisque $\cosh\left(b^{\mathrm{B}}\right)\neq 0$, ce qui est impossible. De cette même équation, nous pouvons tirer

$$\sin\left(a^{\mathrm{B}}\right)=\frac{-\cos\left(a^{\mathrm{B}}\right)\left(\psi(\zeta)\cosh\left(b^{\mathrm{B}}\right)+c\sinh\left(b^{\mathrm{B}}\right)\right)}{d\cosh\left(b^{\mathrm{B}}\right)} \tag{C.5}$$

En introduisant cette expression dans (i) il vient :

$$\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)=\frac{-2c\psi(\zeta)}{\psi(\zeta)^2+c^2+d^2} \tag{C.6}$$

Alors de l'équation (C.5) et de la relation entre $\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)$ et $\tanh\left(b^{\mathrm{B}}\right)$ il vient :

$$\tan\left(a^{\mathrm{B}}\right)=\frac{-\psi(\zeta)\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)-c\left(1\pm\sqrt{1-\tanh^2\left(2b^{\mathrm{B}}\right)}\right)}{d\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)} \tag{C.7}$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} b^{\mathrm{B}} &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(\psi(\zeta)-c)^2+d^2}{(\psi(\zeta)+c)^2+d^2}\right),\ \text{si}\ -1<\frac{-2\psi(\zeta)c}{\psi(\zeta)^2+c^2+d^2}<1 \\ a_m^{\mathrm{B}} &= \arctan\left(\frac{-\psi(\zeta)\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)-c\left(1\pm\sqrt{1-\tanh^2\left(2b^{\mathrm{B}}\right)}\right)}{d\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)}\right)+m\pi, \end{aligned} \tag{C.8}$$

équations à partir desquelles nous déduisons, $b^{\mathrm{B}}\leqq 0$ et posant $\phi(\zeta)=\phi'(\zeta)+\mathrm{i}\phi''(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{a_m^{\mathrm{B}}\phi'(\zeta)+b^{\mathrm{B}}\phi''(\zeta)}{\phi'(\zeta)^2+\phi''(\zeta)^2} \\ \eta'' &= \frac{-a_m^{\mathrm{B}}\phi''(\zeta)+b^{\mathrm{B}}\phi'(\zeta)}{\phi'(\zeta)^2+\phi''(\zeta)^2} \end{aligned} \tag{C.9}$$

Si le milieu est non dissipatif, alors $d=0$, $c=v\phi(\zeta)$, $a^{\mathrm{B}}=\eta'\phi(\zeta)$ et $b^{\mathrm{B}}=\eta''\phi(\zeta)$. Le système (C.4) se réduit à :

$$\begin{cases} \sin\left(\eta'\phi(\zeta)\right)\left(\psi(\zeta)\sinh\left(\eta''\phi(\zeta)\right)+v\phi(\zeta)\cosh\left(\eta''\phi(\zeta)\right)\right)=0 & (i) \\ \cos\left(\eta'\phi(\zeta)\right)\left(\psi(\zeta)\cosh\left(\eta''\phi(\zeta)\right)+v\phi(\zeta)\sinh\left(\eta''\phi(\zeta)\right)\right)=0 & (ii) \end{cases} \tag{C.10}$$

Deux cas sont alors possibles selon que $\left|\frac{v\phi(\zeta)}{\psi(\zeta)}\right| > 1$ ou $\left|\frac{v\phi(\zeta)}{\psi(\zeta)}\right| < 1$:

– si $\psi(\zeta) > v\phi(\zeta)$ alors nous avons des modes impairs :

$$\eta_m^{mboxBo'} = \frac{(2m+1)\pi}{2\phi(\zeta)} \quad \eta_m^{\mathrm{Bo}''} = \frac{1}{2(\zeta)} \ln\left(\frac{\psi(\zeta) - v\phi(\zeta)}{\psi(\zeta) + v\phi(\zeta)}\right) \tag{C.11}$$

– si $\psi(\zeta) < v\phi(\zeta)$ alors nous avons des modes pairs:

$$\eta_m^{\mathrm{Be}'} = \frac{m\pi}{\phi(\zeta)} \quad \eta_m^{\mathrm{Be}''} = \frac{1}{2(\zeta)} \ln\left(\frac{v\phi(\zeta) - \psi(\zeta)}{\psi(\zeta) + v\phi(\zeta)}\right) \tag{C.12}$$

Ces résultats sont à mettre en rapport avec les résultats de la section 1.1.5.1. La partie imaginaire $\eta_m^{B''}$ est indépendante de l'ordre du mode considéré.

C.2 Racines complexes de $\mathcal{D}_2$

Nous allons montrer que ces racines correspondent à des modes, contrairement aux "Leaky modes". Ce sont les modes de Love.
Introduisons $\eta = \eta^{L'} + \mathrm{i}\eta^{L''}$ et les quantités

$$a^{\mathrm{L}} = \Re(\eta^{\mathrm{L}}\phi(\zeta)) \quad b^{\mathrm{L}} = \Im(\eta^{\mathrm{L}}\phi(\zeta)) \quad c = \Im(v\phi(\zeta)) \quad d = \Im(v\phi(\zeta)) \tag{C.13}$$

Alors l'annulation de la partie imaginaire et de la partie réelle de l'équation (ii), (C.1) fournit le système :

$$\begin{cases} \sin\left(a^{\mathrm{L}}\right)\left(\theta(\zeta)\sinh\left(b^{\mathrm{L}}\right) + d\cosh\left(b^{\mathrm{L}}\right)\right) + c\cos\left(a^{\mathrm{L}}\right)\sinh\left(b^{\mathrm{L}}\right) = 0 & (i) \\ \cos\left(a^{\mathrm{L}}\right)\left(-\theta(\zeta)\cosh\left(b^{\mathrm{L}}\right) - d\sinh\left(b^{\mathrm{L}}\right)\right) + c\sin\left(a^{\mathrm{L}}\right)\cosh\left(b^{\mathrm{L}}\right) = 0 & (ii) \end{cases} \tag{C.14}$$

Si $\cos\left(a^{\mathrm{L}}\right) = 0$, équation (ii) alors $\sin\left(a^{\mathrm{L}}\right) = 0$, puisque $\cosh\left(b^{\mathrm{L}}\right) \neq 0$, ce qui est impossible. De cette même équation nous pouvons tirer

$$\sin\left(a^{\mathrm{L}}\right) = \frac{\cos\left(a^{\mathrm{L}}\right)\left(\theta(\zeta)\cosh\left(b^{\mathrm{L}}\right) + d\sinh\left(b^{\mathrm{L}}\right)\right)}{c\cosh\left(b^{\mathrm{L}}\right)} \tag{C.15}$$

En introduisant cette expression dans (i) il vient :

$$\tanh\left(2b^{\mathrm{L}}\right) = \frac{-2d\theta(\zeta)}{\theta(\zeta)^2 + c^2 + d^2} \tag{C.16}$$

Alors de l'équation (C.5) et de la relation entre $\tanh\left(2b^{\mathrm{L}}\right)$ et $\tanh\left(b^{\mathrm{L}}\right)$ il vient :

$$\tan\left(a^{\mathrm{L}}\right) = \frac{\theta(\zeta)\tanh\left(2b^{\mathrm{L}}\right) + d\left(1 \pm \sqrt{1 - \tanh^2\left(2b^{\mathrm{L}}\right)}\right)}{c\tanh\left(2b^{\mathrm{L}}\right)} \tag{C.17}$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} b^{\mathrm{L}} &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(\theta(\zeta)-d)^2+c^2}{(\theta(\zeta)+d)^2+c^2}\right) ; \text{ si } -1 < \frac{-2\theta(\zeta)d}{\psi(\zeta)^2+c^2+d^2} < 1 \\ a_m^{\mathrm{L}} &= \arctan\left(\frac{\theta(\zeta)\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)+d\left(1\pm\sqrt{1-\tanh^2\left(2b^{\mathrm{B}}\right)}\right)}{c\tanh\left(2b^{\mathrm{B}}\right)}\right)+m\pi, \end{aligned} \tag{C.18}$$

équations à partir desquelles nous pouvons déduire η'_m et η''_m par les relations (C.9).
Si maintenant nous considérons le cas non-dissipatif, le système (C.14) se réduit à

$$\begin{cases} \cosh\left(\phi(\zeta)\eta''\right)\left(-\theta(\zeta)\cos\left(\phi(\zeta)\eta'\right)+v\phi(\zeta)\sin\left(\phi(\zeta)\eta'\right)\right)=0 & (i) \\ \sinh\left(\phi(\zeta)\eta''\right)\left(\theta(\zeta)\sin\left(\phi(\zeta)\eta'\right)+v\phi(\zeta)\cos\left(\phi(\zeta)\eta'\right)\right)=0 & (ii) \end{cases} \tag{C.19}$$

qui admet pour solution :

$$\eta''=0 \quad \eta'_m=\arctan\left(\frac{v\phi(\zeta)}{\theta(\zeta)}\right)+m\pi \tag{C.20}$$

Ce qui nous ramène à la discussion sur les modes pairs et impairs de Love, section, 1.1.5.2.

C.3 Racines complexes de $\mathcal{D}_3$

$$a=\Re(\eta\chi(\zeta)) \quad b=\Im(\eta\chi(\zeta)) \quad c=\Im(v\chi(\zeta)) \quad d=\Im(v\chi(\zeta)) \tag{C.21}$$

Alors l'annulation de la partie imaginaire et de la partie réelle de l'équation (iii), (C.1) fournit le système :

$$\begin{cases} \sin(b)\left(-\theta(\zeta)\sinh(a)-c\cosh(a)\right)+d\cos(b)\sinh(a)=0 & (i) \\ \cos(b)\left(-\theta(\zeta)\cosh(a)-c\sinh(a)\right)+d\sin(b)\cosh(a)=0 & (ii) \end{cases} \tag{C.22}$$

Si $\cos(b)=0$, équation (ii) alors $\sin(b)=0$, puisque $\cosh(a)\neq 0$, ce qui est impossible. De cette même équation nous pouvons tirer

$$\sin(b)=\frac{\cos(b)\left(\theta(\zeta)\cosh(a)+c\sinh(a)\right)}{d\cosh(a)} \tag{C.23}$$

En introduisant cette expression dans (i) il vient :

$$\tanh(2a)=\frac{-2c\theta(\zeta)}{\theta(\zeta)^2+c^2+d^2} \tag{C.24}$$

Ceci implique $a \leqq 0$, ce qui semble incompatible avec la condition $\eta' \geqq 0$. Dans le cas non-dissipatif, cela implique en particulier :

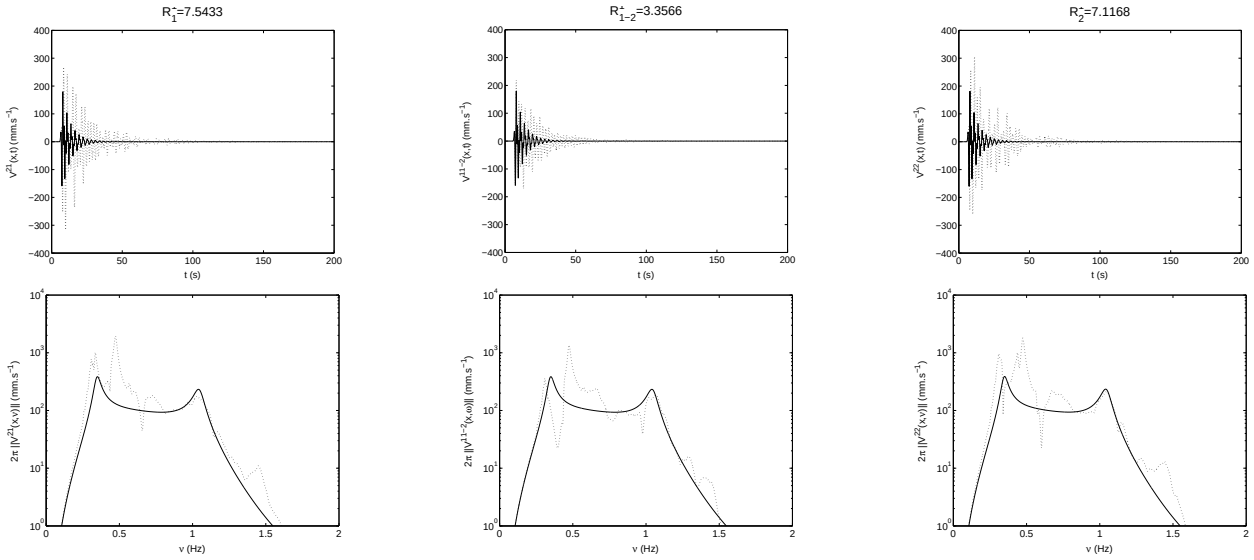
$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{\phi(\zeta)}\operatorname{arctanh}\left(\frac{-\theta(\zeta)}{v\chi(\zeta)}\right) \qquad \text{si } v\chi(\zeta)>\theta(\zeta) \\ \eta' &= \frac{1}{\phi(\zeta)}\operatorname{arctanh}\left(\frac{-v\chi(\zeta)}{\theta(\zeta)}\right) \qquad \text{si } \theta(\zeta)>v\chi(\zeta) \end{aligned} \tag{C.25}$$

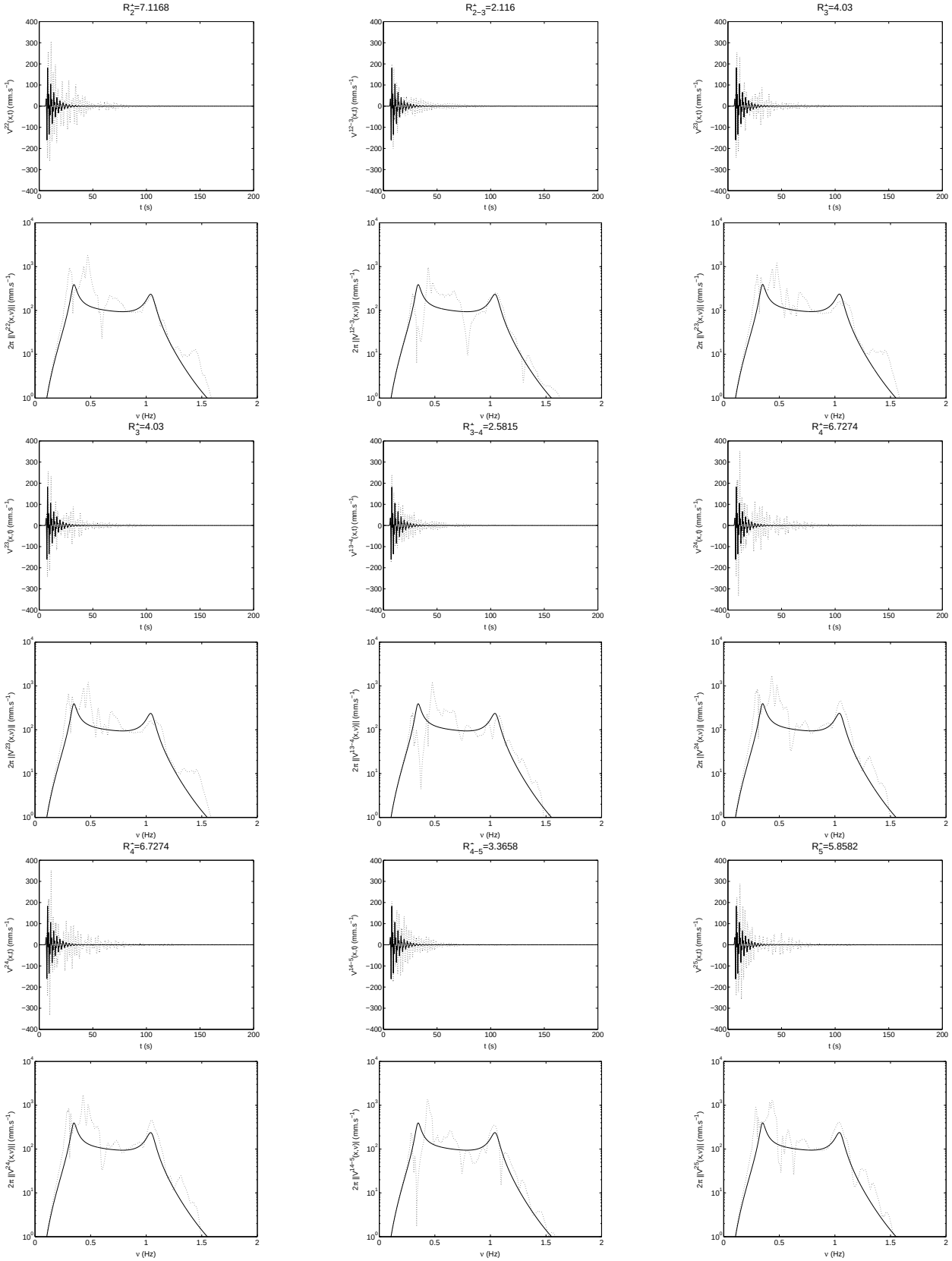
Ce qui signifie que $\eta' < 0$. Ainsi, l'équation $\mathcal{D}_3$ n'admet pas de racines satisfaisant la condition $\eta' > 0$.

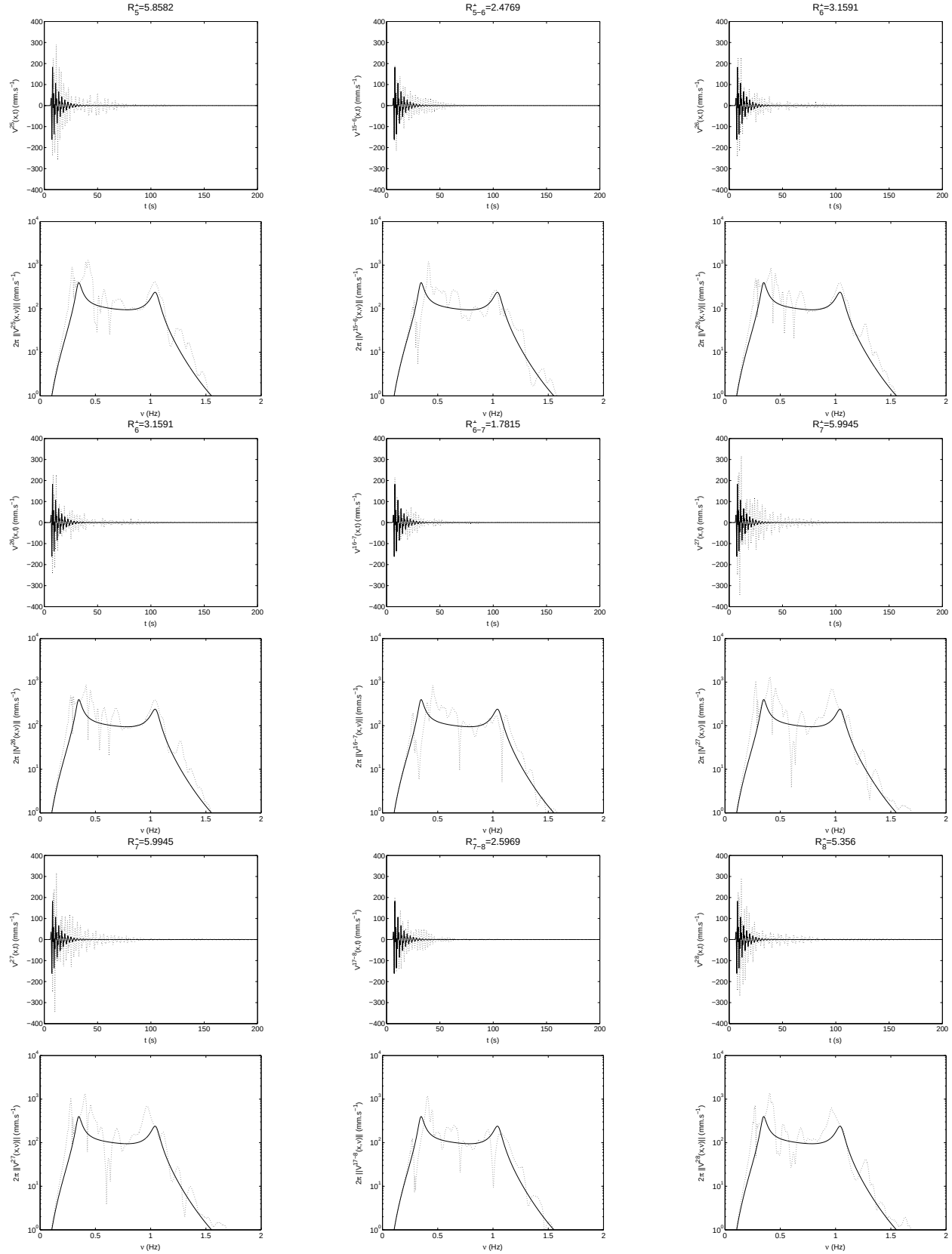
Annexe D

Résultats pour une ville idéalisée composée de 10 blocs non identiques et non-équidistants

D.1 Cas $\mathcal{C}^1$




R+2=7.1168
R+2−3=2.116
R+3=4.03
R+3=4.03
R+3−4=2.5815
R+4=6.7274
R+4=6.7274
R+4−5=3.3658
R+5=5.8582
t (s)
ν (Hz)


R_5^+=5.8582
R_{5-6}^+=2.4769
R_6^+=3.1591
R_6^+=3.1591
R_{6-7}^+=1.7815
R_7^+=5.9945
R_7^-=5.9945
R_{7-8}^-=2.5969
R_8^-=5.356
t (s)
ν (Hz)

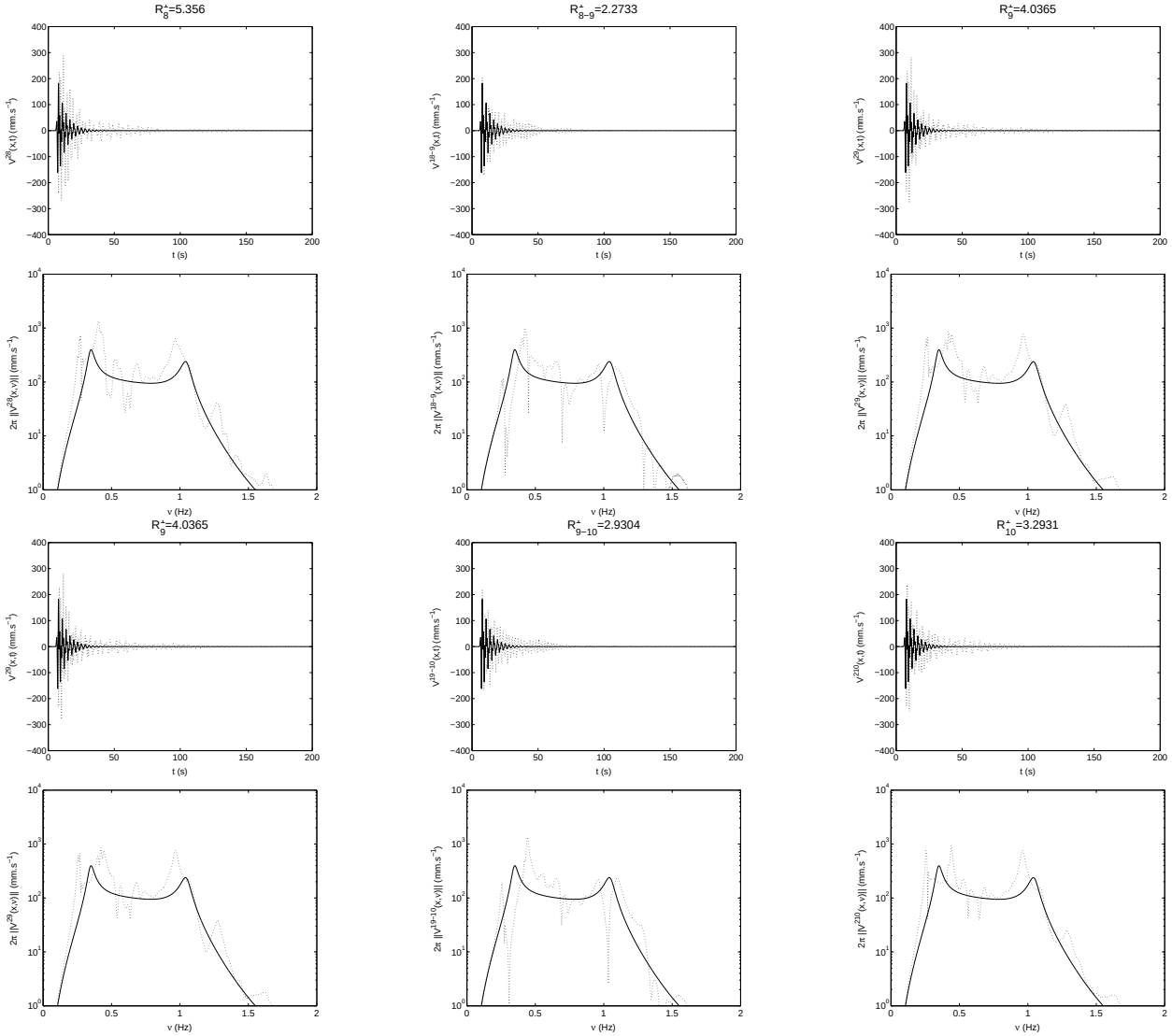
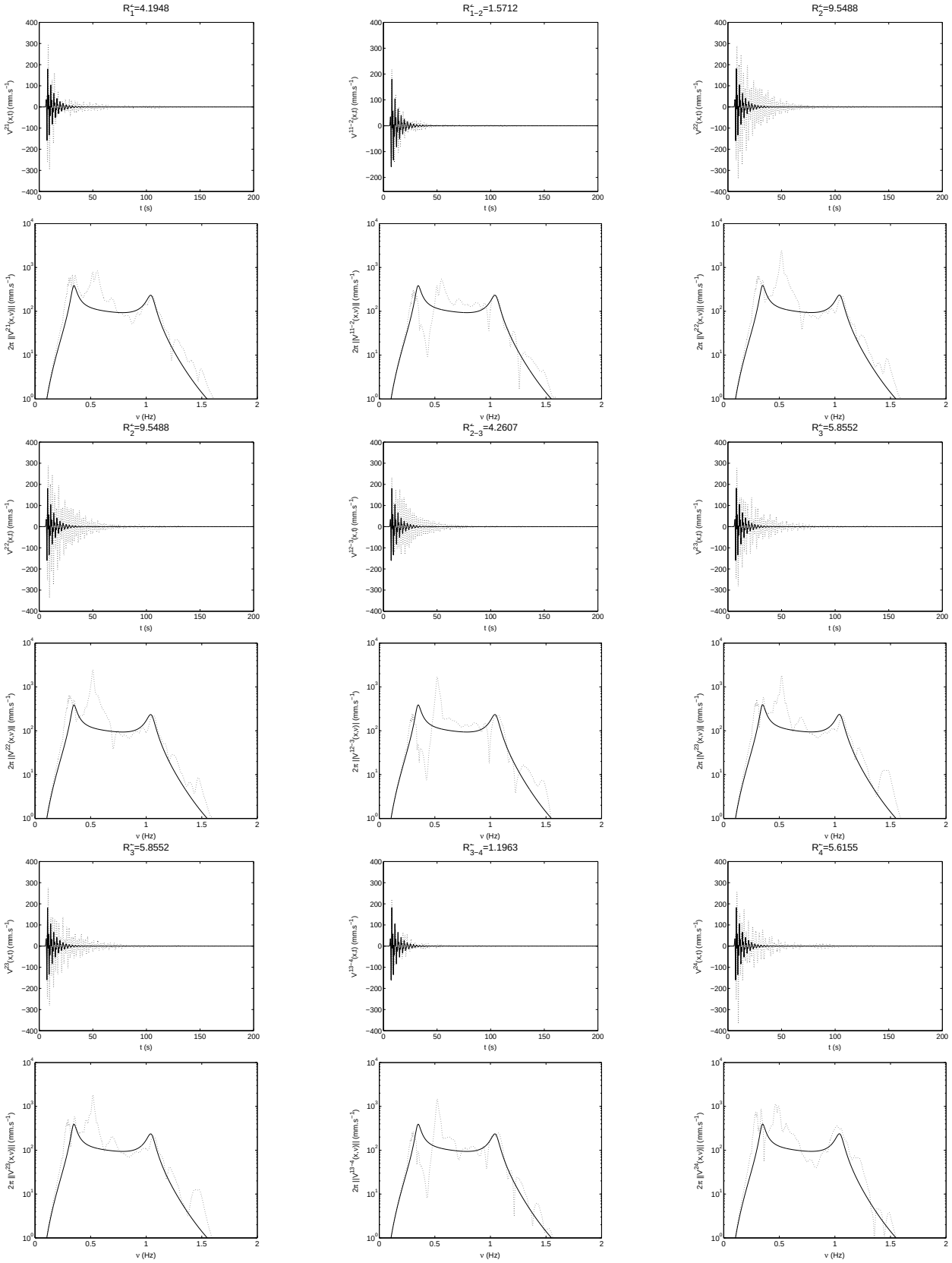
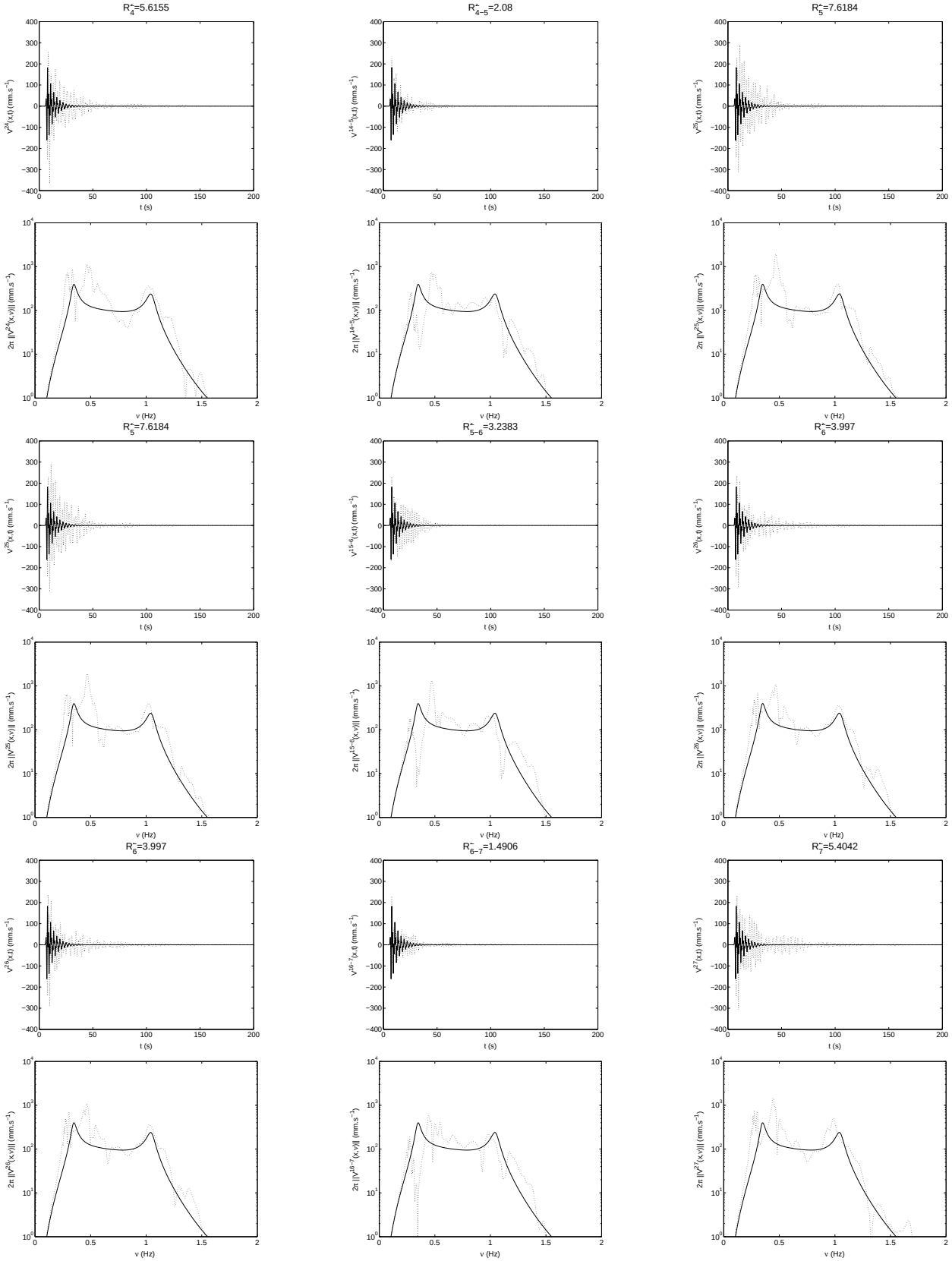
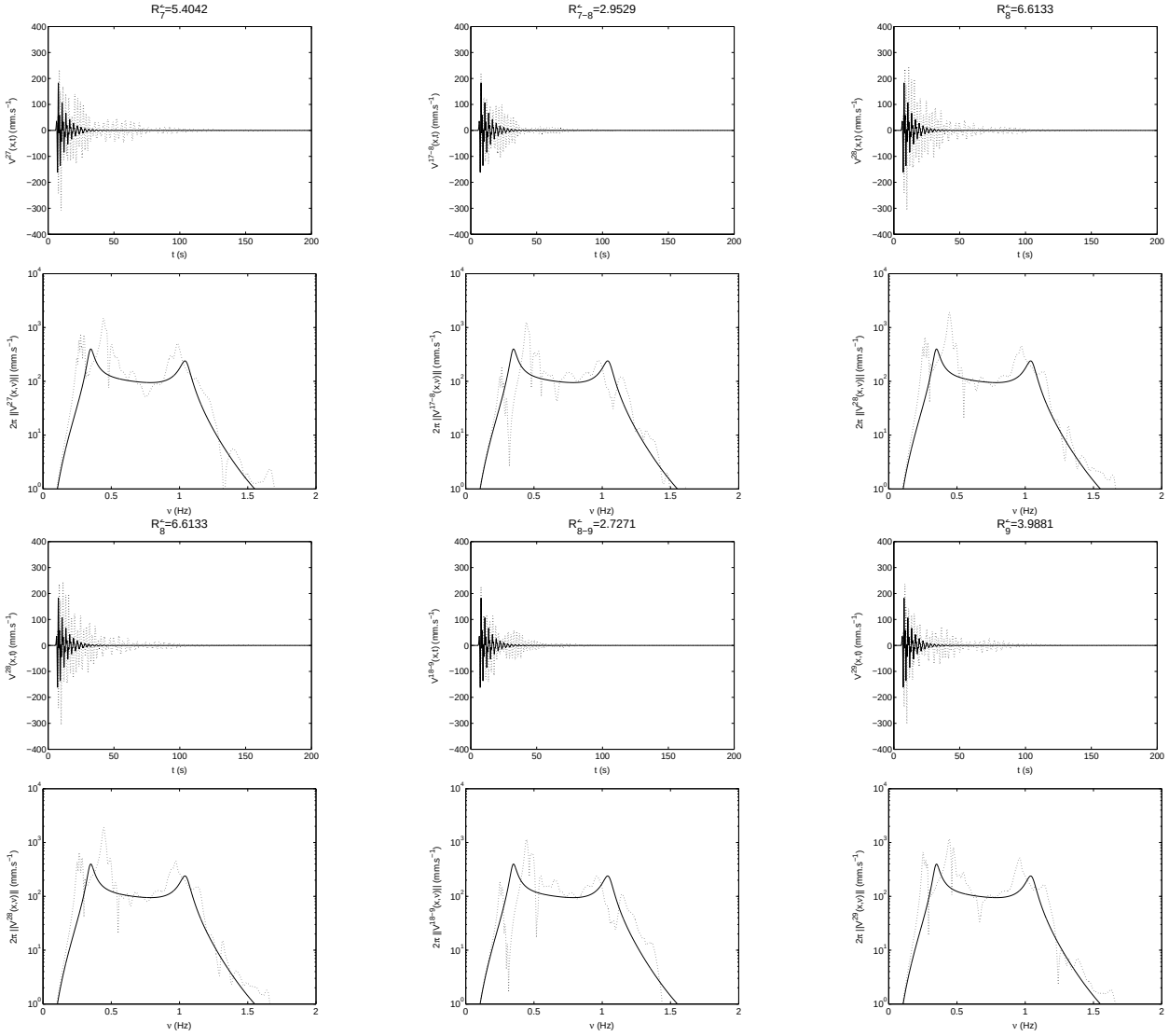


FIG. D.1 – *Sismogramme (vitesse) pour la ville $\mathcal{C}^1$ avec 10 blocs, séparés d'une distance $d^1_{j,j+1}$ ($j = 1, 2, ..., 9$). Chaque colonne représente la vitesse particulaire (en $mm.s^{-1}$) : au sommet du bloc $j^{ème}$ bloc (gauche), entre le $j^{ème}$ et le $j+1^{ème}$ bloc (centre) et au sommet du $j+1^{ème}$ bloc (droite). Les courbes en trait continu représentent la vitesse particulaire sur le sol en l'absence de bloc. Les indices de vulnérabilité R^1_j au sommet du $j^{ème}$ bloc et $R^1_{j,j+1}$, sur le sol entre le $j^{ème}$ et le $j+1^{ème}$ bloc, sont indiqués en haut de chaque figure. Les abscisses désignent le temps, de 0 à $200s$. Les échelles en ordonnées ne varient pas d'une figure à l'autre. En dessous de chaque sismogramme, nous avons représenté le module du spectre de la vitesse correspondant. Les abscisses désignent la fréquence, de 0 à $2Hz$.*

D.2 Cas $\mathcal{C}^2$




R$^c_4$=5.6155
R$^c_{4-5}$=2.08
R$^c_5$=7.6184
R$^c_5$=7.6184
R$^c_{5-6}$=3.2383
R$^c_6$=3.997
R$^c_6$=3.997
R$^c_{6-7}$=1.4906
R$^c_7$=5.4042
t (s)
ν (Hz)


R$^{<}_{7}$=5.4042
R$^{<}_{7-8}$=2.9529
R$^{<}_{8}$=6.6133
R$^{<}_{8}$=6.6133
R$^{<}_{8-9}$=2.7271
R$^{<}_{9}$=3.9881
t (s)
ν (Hz)

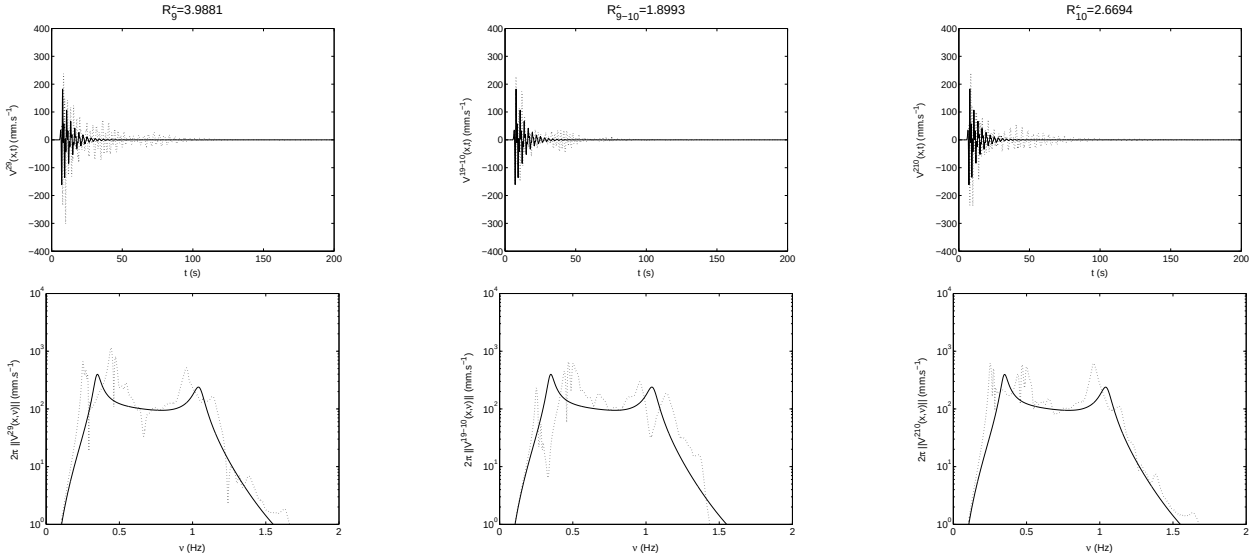
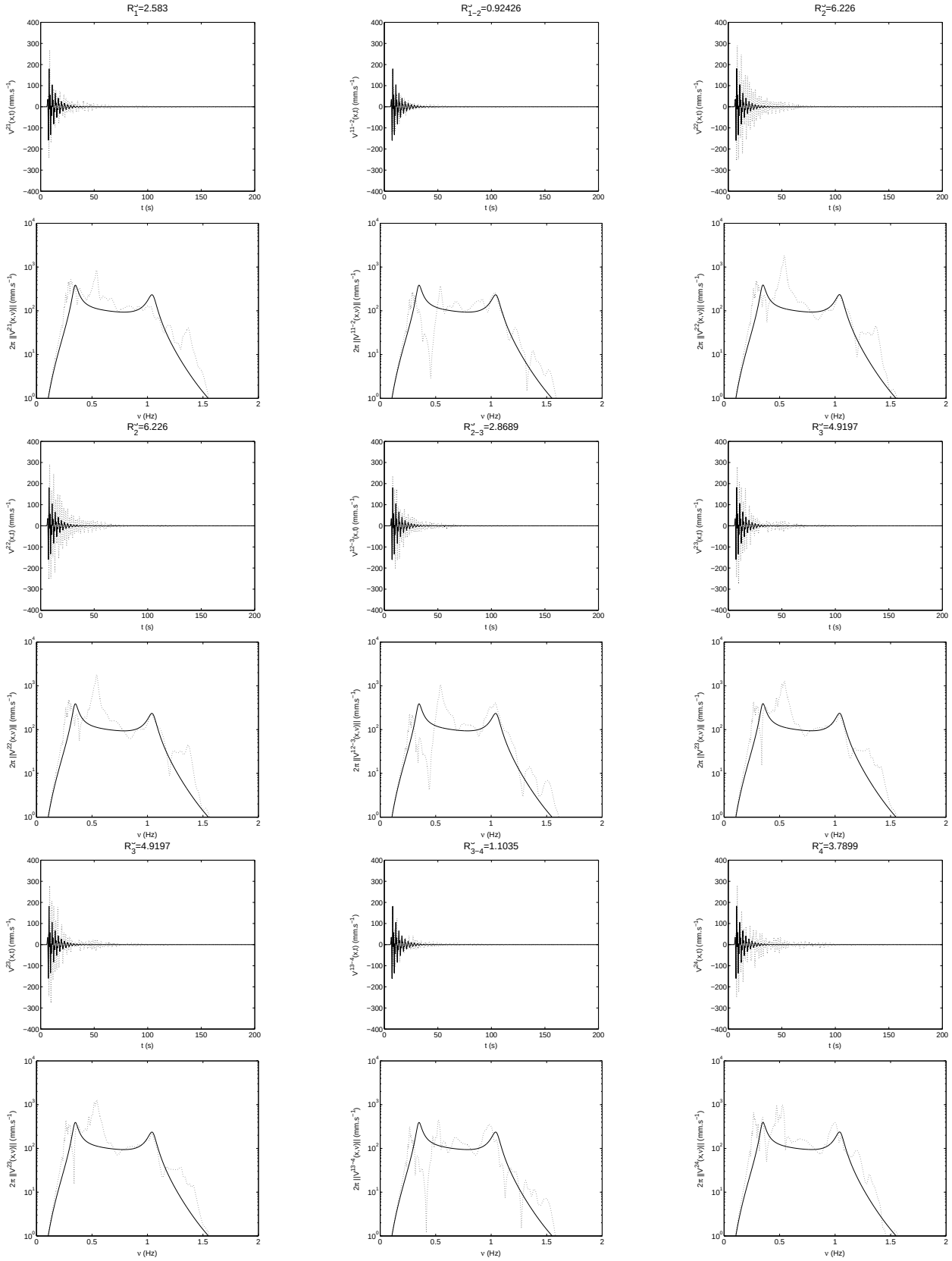
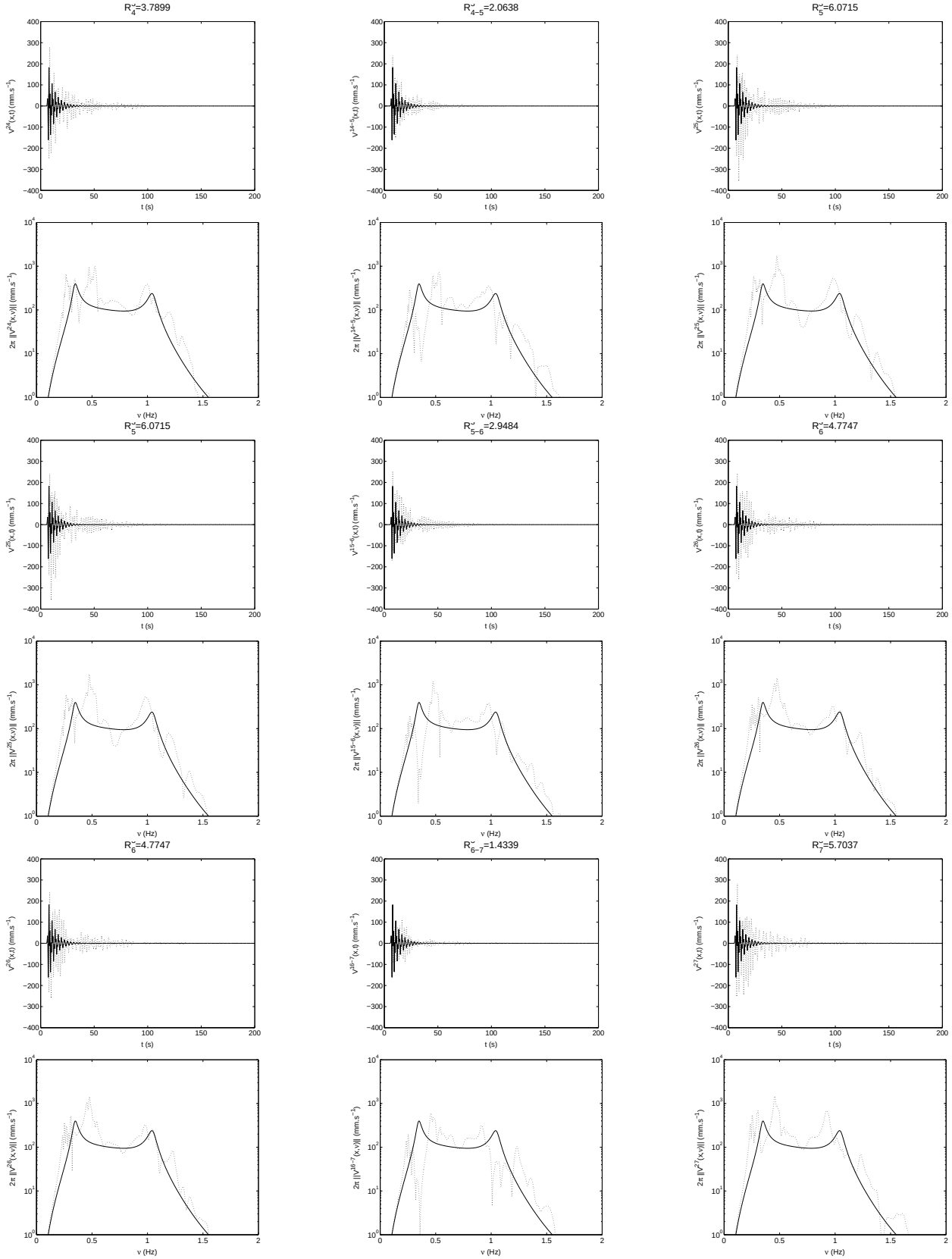
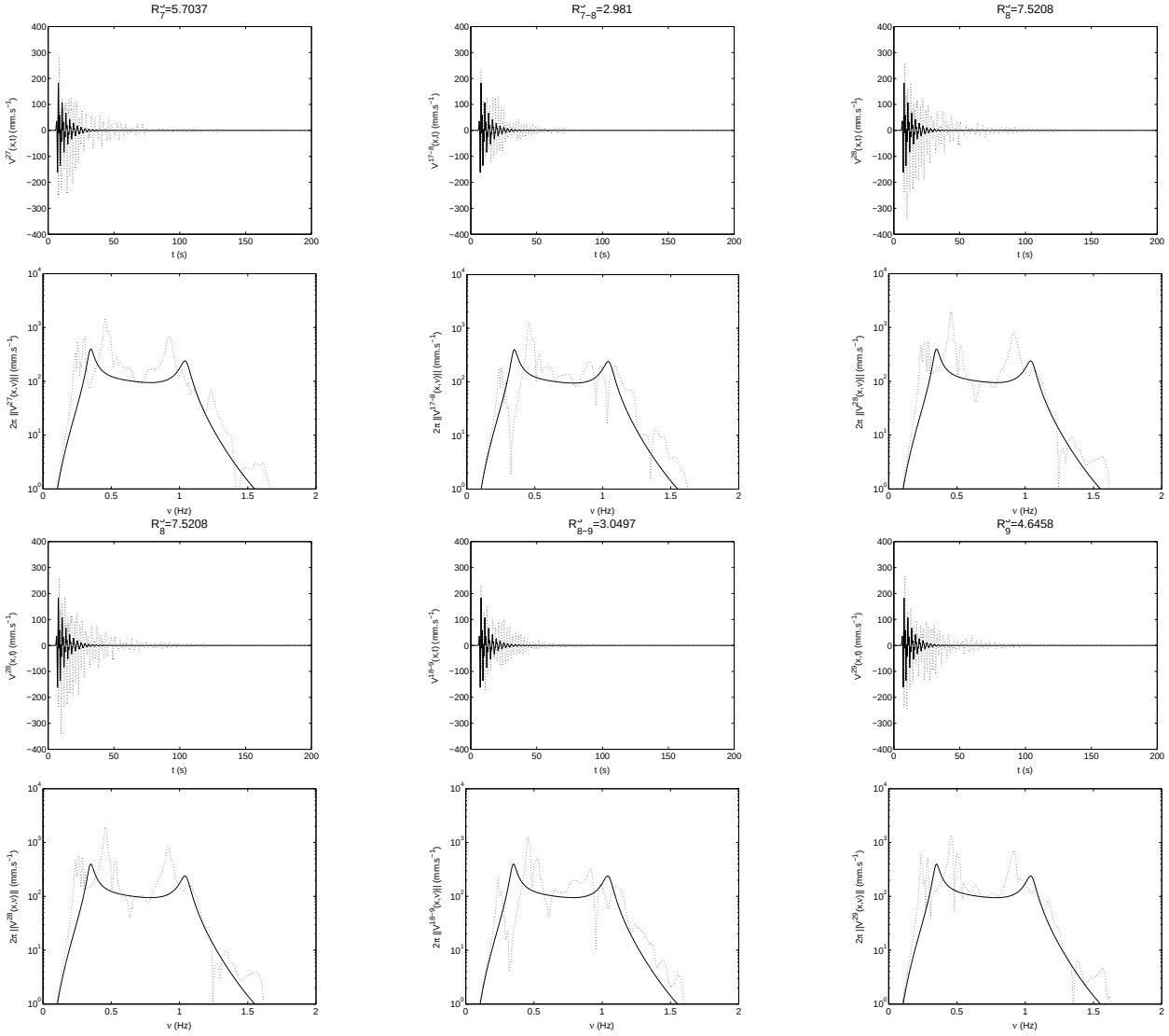


FIG. D.2 – *Sismogramme (vitesse) pour la ville $\mathcal{C}^2$ avec 10 blocs, séparés d'une distance $d^2_{j,j+1}$ ($j = 1, 2, ..., 9$). Chaque colonne représente la vitesse particulaire (en $mm.s^{-1}$) : au sommet du bloc $j^{ème}$ bloc (gauche), entre le $j^{ème}$ et le $j+1^{ème}$ bloc (centre) et au sommet du $j+1^{ème}$ bloc (droite). Les courbes en trait continu représentent la vitesse particulaire sur le sol en l'absence de bloc. Les indices de vulnérabilité R^2_j au sommet du $j^{ème}$ bloc et $R^2_{j,j+1}$, sur le sol entre le $j^{ème}$ et le $j+1^{ème}$ bloc, sont indiqués en haut de chaque figure. Les abscisses désignent le temps, de 0 à 200s. Les échelles en ordonnées ne varient pas d'une figure à l'autre. En dessous de chaque sismogramme, nous avons représenté le module du spectre de la vitesse correspondant. Les abscisses désignent la fréquence, de 0 à $2Hz$.*

D.3 Cas $\mathcal{C}^3$




R⌣4=3.7899
R⌣4−5=2.0638
R⌣5=6.0715
R⌣5=6.0715
R⌣5−6=2.9484
R⌣6=4.7747
R⌣6=4.7747
R⌣6−7=1.4339
R⌣7=5.7037
t (s)
ν (Hz)


R⁻₇=5.7037
R⁻₇₋₈=2.981
R⁻₈=7.5208
R⁻₈=7.5208
R⁻₈₋₉=3.0497
R⁻₉=4.6458
t (s)
ν (Hz)

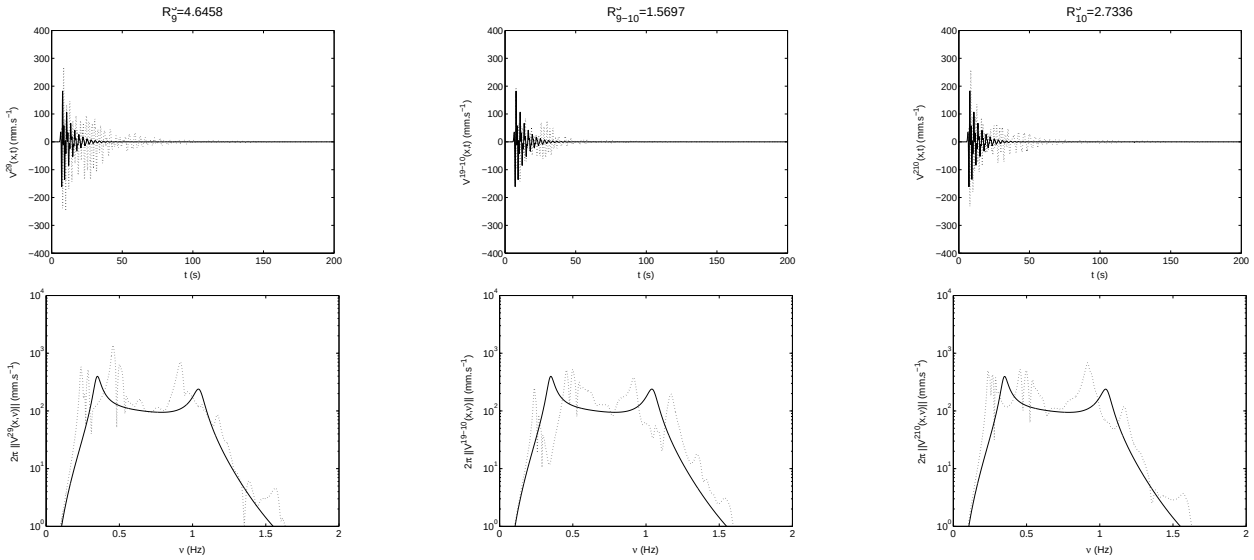


FIG. D.3 – *Sismogramme (vitesse) pour la ville $\mathcal{C}^3$ avec 10 blocs, séparés d'une distance $d^3_{j,j+1}$ ($j = 1, 2, ..., 9$). Chaque colonne représente la vitesse particulaire (en $mm.s^{-1}$) : au sommet du bloc $j^{ème}$ bloc (gauche), entre le $j^{ème}$ et le $j+1^{ème}$ bloc (centre) et au sommet du $j+1^{ème}$ bloc (droite). Les courbes en trait continu représentent la vitesse particulaire sur le sol en l'absence de bloc. Les indices de vulnérabilité R^3_j au sommet du $j^{ème}$ bloc et $R^3_{j,j+1}$, sur le sol entre le $j^{ème}$ et le $j+1^{ème}$ bloc, sont indiqués en haut de chaque figure. Les abscisses désignent le temps, de 0 à 200s. Les échelles en ordonnées ne varient pas d'une figure à l'autre. En dessous de chaque sismogramme, nous avons représenté le module du spectre de la vitesse correspondant. Les abscisses désignent la fréquence, de 0 à 2Hz.*

Bibliographie

[1] History & Culture. *http://www.mexican-embassy.dk/history.html.*

[2] Le concile de Nicée condamne l'arianisme. *http://www.herodote.net/nahhistoire05200.php.*

[3] Mexico City History. *http://www.lonelyplanet.com/destinations/north_ america/mexico_ city/history.htm.*

[4] *Encyclopedia Universalis.* Encyclopedia Universalis S.A., 1995.

[5] M. Abramowitz et I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical functions.* National Bureau of Standard, 1964.

[6] J.D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids.* North-Holland Publishing Compagny, Amsterdam, 1973.

[7] K. Aki et K.L. Larner. Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane SH waves. *J.Geophys.Res.*, 75:933–954, 1970.

[8] K. Aki et P.G. Richards. *QUANTITATIVE SEISMOLOGY.* Freeman and Co., New-York, 1980.

[9] L.E. Alsop. The leaky-mode period equation-a plane wave approach. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 60:1989–1998, 1970.

[10] S. Asvadurov, L. Knizhnerman et J. Pabon. Finite-difference modeling of viscoelastic materials with quality factors Q of arbitrary magnitude. *preprint*, 2003.

[11] B.A. Auld. General electromechanical reciprocity relation applied to the calculation of elastic wave scattering coefficients. *Wave Motion*, 1:3–10, 1979.

[12] B.A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, volume II. Krieger Publishing Compagny, Malabar, Florida, 1989.

[13] B.A. Auld, J.J. Gagnepain et M. Tan. Horizontal shear surface waves on corrugated surfaces. *Electon.Lett.*, 12:650–651, 1976.

[14] B.A. Auld et E. Tsao. A variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate. *I.E.E.E.Trans.Son.&Ultras.*, SU-24:317–326, 1977.

[15] I. Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer.Math.*, 20:179–192, 1973.

[16] T. Balendra et K.H. Kong. Effects of ground motions in Singapore due to far-field earthquakes. Dans D. Doolin, A. Krammere, T. Nogami, R.B. Seed et I. Towhata, éditeurs, *Proc. 11th International Conference on Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, pages 255–259, University of California, Berkeley, 2004.

[17] P.-Y. Bard. *Les effets de site d'origine structurale : principaux résultats expréimentaux et théoriques.* Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1985.

[18] P.-Y. Bard et M. Bouchon. The seismic respones of sediment-filled valleys. part1. The case of incident SH waves. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 70:1263–1286, 1980.

[19] P.-Y. Bard et M. Bouchon. The two-dimensional resonnance of sediment-filled valleys. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 75:519–541, 1985.

[20] P.-Y. Bard, M. Campillo, F.J. Chávez-Garcia et F.J. Sanchez-Sesma. The Mexico earthquake of September 19, 1985-a theoretical investigation of large-and small-scale amplification effects in the Mexico City valley. *Earth.Spectra*, 4:609–633, 1988.

[21] P.-Y. Bard et A. Wirgin. Effects of buildings on the duration and amplitude of ground motion in mexico city. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 86:914–920, 1996.

[22] E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. Mathematical and numerical modeling of wave propagation in linear viscoelastic media. Dans G.C. Cohen, E. Heikkola, P. Joly et P. Neittaanmaki, éditeurs, *6th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 916–921, Jyvaskyla, Findland, 2003. Springer.

[23] E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires II. Analyse numérique. Rapport de recherche 5159, INRIA, 2004.

[24] E. Bécache, S. Fauqueux et P. Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *J.Comput.Phys.*, 188:399–433, 2003.

[25] E. Bécache, J. Joly et C. Tsogka. An analysis of new mixed finite elements for the approximation of wave propagation problems. *SIAM J.Numer.Anal.*, 37:1053–1084, 2000.

[26] E. Bécache, P. Joly et C. Tsogka. Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2D elastic wave propagation. *J.Comput.Acoust.*, 9(3):1175–1203, 2001.

[27] E. Bécache, J. Rodriguez et C. Tsogka. On the convergence of the fictitious domain method for the anisotropic wave equation. *preprint*, 2004.

[28] Y. Ben-Zion et K. Aki. Seismic radiation from a SH line source in a laterally heterogeneous planar fault zone. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 90:971–994, 1990.

[29] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J.Comput.Phys.*, 114:185–200, 1994.

[30] J.P. Bérenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J.Comput.Phys.*, 127:363–379, 1996.

[31] J. Bielak, Y. Hisada, H. Bao, J. XU et O. Ghattas. One- vs two-or three dimensional effects in sedimentary valleys. Dans *12th World COnference in Eerthquake Engineering*, page Paper n°1689, Oakland, New-Zealand, 2000.

[32] J.O. Blanch, J.A.O. Robertson et W.W. Symes. Modeling of a constant Q : Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique. *Geophysics*, 60:176–184, 1995.

[33] J.O. Blanch, J.A.O. Robertsson et W.W. Symes. Viscoelastic finite-difference modeling. Rapport Technique 93-04, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, 1993.

[34] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. Wiley Ltd, Chichester, 1995.

[35] D.M. Boore. Can site response be predicted? *J.Earth.Engrg.*, 2003. submitted.

[36] T. Bourbié, O. Coussy et B. Zinszner. *Acoustics of Porous Media*. Gulf Pub. Co., editions technip édition, 1987.

[37] C. Boutin et P. Roussillon. Assessment of the urbanization effect on seismic response. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 94(1):252–268, 2004.

[38] M.A. Bravo, F.J. Sanchez-Sesma et F.J. Chávez-Garcia. Ground motion on stratified alluvial deposits for incident SH waves. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 80:23–42, 1988.

[39] C. Brezinski. *Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials*. Birkhauser, 1980.

[40] M. Campillo, J.-C. Gariel, K. Aki et F.J. Sanchez-Sesma. Destructive strong ground motion in Mexico City: Source,path, and site effects during great 1985 Michoacan erthquake. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 79:1718–1735, 1989.

[41] M. Campillo, F.J. Sanchez-Sesma et K. Aki. Influence of small lateral variations of a soft surficial layer on seismic ground motion. *Soil Dyn.&Earth.Engrg.*, 9:284–287, 1990.

[42] J. Carcione, D. Kosloff et R. Kosloff. Viscoacoustic wave propagation simulation in the earth. *Geophysics*, 53:769–777, 1988.

[43] J. Carcione, D. Kosloff et R. Kosloff. Wave propagation in linear viscoacoustic medium. *Geophys.J.R.Astr.Soc.*, 93:393–407, 1988.

[44] J. D. Carcione, D. Kosloff et R. Kosloff. Wave propagation in linear viscoacoustic medium. *Geophys.J.R.Astr.Soc.*, 95:597–611, 1988.

[45] J.M. Carcione. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic and Poroous Media.* Pergamon Pr, New-York, 2001.

[46] M. Cárdenas-Soto et F.J. Chávez-Garcia. Regional path effet on seismic wave propagation in central Mexico. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 93:973–985, 2003.

[47] G.F. Carrier, M. Krook et C.E. Pearson. *Functions of a Complex Variable.* Hod Books, New-York, 1983.

[48] M. Celebi. Response of a 14-Story (Anchorage, AK) Building to Far-Distance (Ms=7.9) Denali (2002) and Near Distance Earthqueakes in 2002. Dans D. Doolin, A. Kammerer, T. Nogami, R.B. Seed et I. Towhata, éditeurs, *11th International Conference on Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, volume 1, pages 895–900, 2004.

[49] F.-J. Chávez-Garcia et P.-Y. Bard. Site effects in Mexico-city eight years after the september 1985 Michoacan earthquakes. *Soil Dyn.&Earth.Engrg.*, 13:229–247, 1994.

[50] F.J. Chávez-Garcia, J. Ramos-Martinez et E. Romero-Jiménez. Surface-wave dispersion analysis in Mexico City. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 85:116–1126, 1995.

[51] F.J. Chávez-Garcia et L. Salazar. Strong motion in central Mexico: a model on data analysis and simpler modeling. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 92(8):3087–3101, 2002.

[52] C.-H. Chen, T.-L. Teng et Y.-C. Gung. Ten-second Love-wave propagation and strong ground motion in Taiwan. *J.Geophys.Res.*, 103 B9:21253–21273, 1998.

[53] D. Clouteau et D. Aubry. Modification of the ground motion in dense urban areas. *J.Comput.Acoust.*, 9(4):1–17, 2001.

[54] R. E. Collin. *Field Theory of Guided Waves.* IEEE Press, New-York, 1991.

[55] F. Collino, P. Joly et F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems: Application to Electromagnetic scattering. *J.Comp.Phys.*, 138(2):907–938, 1997.

[56] F. Collino et C. Tsogka. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heteregeneous media. *Geophys.*, 66:294–305, 2001.

[57] C.C. Cutler. Rapport Technique MM 44-160-218, Bell Telephone Lab., 1944.

[58] S.M. Day et J.B. Minster. Numerical simulation of attenuated wavefields using a Padé approximant method. *Geophys.J.Roy.Astr.Soc.*, 78:105–118, 1984.

[59] Évaluations de l'ICOMOS : ADDENDUM. Citadelle de Bam (Iran). Rapport Technique 1208, World Heritage Committee - UNESCO, 2004. http://whc.unesco.org/archive/advisory_body_evaluation/1208.pdf.

[60] J.E. Dennis et R.B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstraint Optimization and Nonlinear Equations.* Prentice-Hall, 1983.

[61] Q.V. Dihn, R. Glowinski, J. He, V. Kwock, T.W. Pan et J. Périaux. Lagrange multiplier approach to fictitious domain methods: application to fluid dynamics and electromagnetics. Dans D.E. Keys, T.F. Chan, G.A. Meurant, J.S. Scroggs et R.G. Voigt, éditeurs, *5th International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differntial Equations*, pages 151–154, Philadelphia, PA, 1992. SIAM.

[62] R. Doby, I.M. Idriss et E. Ng. A reply. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 69:2127–2128, 1979.

[63] H. Emmerich et M. Korn. Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields. *Geophysics*, 52:1252–1264, 1987.

[64] W.M. Ewing, W.S. Jardetzky et F. Press, éditeurs. *Elastic Waves in Layered Media.* McGraw-Hill Book Compagny, New-York, 1957.

[65] A. Ezziani. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastique et poroélastique.* Thèse de Doctorat, Université Paris Dauphine, 2005.

[66] D. Fah et G.F. Panza. Realistic modelling of observed seismic motion in complex sedimentary basins. *Annali di Geofisica*, 37:1771–1797, 1994.

[67] D. Fah, P. Suhadolc, St. Mueller et G.F. Panza. A Hybrid method for the estimation fo ground motion in sedimentary basins: quantitative modeling for Mexico City. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 84:383–399, 1994.

[68] K.L. Fishman et S. Ahmad. Seismic response for alluvial valleys subjected to SH, P and Sv waves. *Soil Dyn.&Earth.Engrg.*, 14:249–258, 1995.

[69] J. Flores, O. Novaro et T.H. Seligman. Possible resonance effect in the distribution of earthquake damage in Mexico City. *Nature*, 326, 1987.

[70] T. Furumura et B.L.N. Kennett. On the nature of regional seismic phase-III. The influence of crustal heterogeneity on the wavefield for subduction eartqukes: the 1985 Michoacan and 1995 Copala, Guerrero, Mexico earthquake. *Geophys.J.Int.*, 135:1060–1085, 1998.

[71] W.I. Futterman. Dispersive body waves. *J.Geophys.Res.*, 67:5279–5291, 1962.

[72] S. Garcès. *Application des méthodes de domaines fictifs à la modélisation des structures rayonnantes tridimensionnelles.* Thèse de Doctorat, ENSAE, 1998.

[73] V. Girault et R. Glowinski. Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem. *Japan J.Indust.Appl.Math.*, 12(3):487–514, 1995.

[74] R. Glowinski et Y. Kuznetsov. On the solution of the Dirichlet problem for linear elliptic operators by a distributed Lagrange multiplier method. *C.R.Acad.Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(7):693–698, 1998.

[75] R. Glowinski, T.W. Pan et J. Periaux. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg.*, pages 283–303, 1994.

[76] R. Glowinski, T.W. Pan et J. Periaux. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by Navier-Stokes equations. *Comp.Meth.Appl.Mech.Engrg.*, pages 283–303, 1994.

[77] K.F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids.* Ohio university Press, 1975.

[78] S. Gregersen et L.E. Alsop. Mode conversion of Love waves at a continental margin. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 66:1855–1872, 1976.

[79] J.-P. Groby et C. Tsogka. A time domain Method for modeling wave propagation phenomena in viscoacoustique media. Dans G.C. Cohen, E. Heikkola, P. Joly et P. Neittaanmaki, éditeurs, *6th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 911–915, Jyvaskyla, Findland, 2003. Springer.

[80] J.-P. Groby et C. Tsogka. A time domain method for modeling viscoacoustic wave propagation. *J.Comput.Acoust.*, 14:201–236, 2006.

[81] J.-P. GROBY, C. TSOGKA et A. WIRGIN. 2D ground motion in a city modeled as an assembly of blocks anchored in an inhomogeneous half space: the influence of the geometry of the half space. Dans *1st General Assembly of the European Geosciences Union*, 2004.

[82] J.-P. GROBY, C. TSOGKA et A. WIRGIN. A time domain method for modeling viscoelastic SH wave propagation in a city-like environment. Dans D. DOOLIN, A. KAMMERER, T. NOGAMI, R.B. SEED et I. TOWHATA, éditeurs, *11th International Conference on Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, pages 887–894, Berkeley, 2004.

[83] J.-P. GROBY, C. TSOGKA et A. WIRGIN. Simulation of seismic response in a city-like environment. *Soil Dyn.&Earthq.Engrg.*, 25:487–504, 2005.

[84] J.-P. GROBY, C. TSOGKA et A. WIRGIN. Earthquakes in big cities. *Katholiek Universiteit Leuven*, 21 Décembre2004.

[85] J.-P. GROBY, C. TSOGKA et A. WIRGIN. Ville sous séisme : réponse semi-analytique. *Réunion Pléniaire de GDR*, 8-9 Décembre 2003.

[86] J.-P. GROBY, C. TSOGKA, A. WIRGIN, E. OGAM et Z.E.A. FELLAH. A time domain method to model ultrasound wave propagation in cortical bones. Dans *5th ISAAC Congress*, 2005.

[87] J.-P. GROBY et A. WIRGIN. On the causes of anomalous seismic response in an urban site with a two-component soft layer overlying a hard substratum. Dans *1st General Assembly of the European Geosciences Union*, 2004.

[88] J.-P. GROBY et A. WIRGIN. 2D ground motion at a soft viscoelastic layer/hard substratum site in response to SH cylindrical seismic waves radiated by deep and shallow line sources: Numerical results. *Geophys.J.Int.*, 163:192–224, 2005.

[89] J.-P. GROBY et A. WIRGIN. 2D ground motion at a soft viscoelastic layer/hard substratum site in response to SH cylindrical seismic waves radiated by deep and shallow line sources: Theory. *Geophys.J.Int.*, 163:165–191, 2005.

[90] P. GUÉGEN, P.-Y. BARD et F.J. CHÁVEZ-GARCIA. Site-city seismic interaction in Mexico city-like environments: an analytical study. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 92:794–811, 2002.

[91] P. GUÉGUEN. *Interaction sismique entre le sol et le bâti : de l'interaction sol-structure à l'intéraction site-ville.* Thèse de Doctorat, Université Joseph Fouier, Grenoble, 2000.

[92] N.A. HASKELL. The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 43:17–34, 1953.

[93] F. HASTINGS, J.B. SCHNEIDER et S.L. BROSCHAT. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *J.Acoust.Soc.Am.*, 100(5):3061–3069, November 1996.

[94] K. HATAYAMA et H. FUJIWARA. Excitation of secondary Love and Rayleigh waves in a three-dimensional sedimentary basin evaluated by the direct boundary element method with normal modes. *Geophys.J.Int.*, 133:260–278, 1998.

[95] J. HILL, H. BENZ, M. SCHUSTER et G. SCHUSTER. Propagation and resonance of SH waves in the Salt Lake Valley, Utah. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 80:23–42, 1990.

[96] N.R. HILL et A.R. LEVANDER. Resonances of low-velocity layers with lateral variations. *Bull. Seism.Soc.Am.*, 74:521–537, 1984.

[97] Y. HISADA, S. YAMAMOTO et S. TANI. Analysis of strong ground motion of plain and basin being composed of soft soil by fault model and boundary element method. Dans *9th World Conference on Earthquake Engineering*, numéro Paper 88, 1988.

[98] J.A. HUDSON. *The Excitation and Propagation of Elastic Waves.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[99] H. IGEL, G. JANHKE et Y. BEN-ZION. Numerical simulation of fault zone guided waves: accuracy and 3-D effects. *Pure Appl.Geophys.*, 159:2067–2083, 2002.

[100] M. IKEYA. *Earthquakes and Animals.* World Scientific, 2004.

[101] G. JANHKE, H. IGEL et Y. BEN-ZION. Three dimensional calculations of fault-zone-guided waves in various irregular structures. *Geophys.J.Int.*, 151:416–426, 2002.

[102] P.C. JENNINGS. Velocity spectra of mexican earthquakes of 11 May and 19 May 1962. Rapport Technique EERL.1962.002, California Institute of Technology, 1962.

[103] P.C. JENNINGS. Distant motions from a building vibration test. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 60:2037–2043, 1970.

[104] P.C. JENSEN, W.A. KUPERMAN, M.B. PORTER et H. SCHMIDT. *Computational ocean acoustics.* American Institute of Physics Press, New-York, 1994.

[105] H. KANAMORI et J.W. GIVEN. Use of long-period surface waves for rapid determination of earthquake-source parameters. *Phys.Earth.Plan.Int.*, 27:8–31, 1981.

[106] E. KAUSEL et D. ASSIMAKI. Seismic simulation inelastic soils via frequency-dependent moduli and damping. Journal of Engineering Mechanics. *ASCE*, 128(1), 2002.

[107] M.H. KAZI. The Love wave scattering for a continetal margin (theoretical). *Geophys.J.R.Astr.Soc.*, 52:25–44, 1978.

[108] M. KHAM. *Propagation d'ondes sismiques dans les bassins sédimentaire : des effets de sites à l'interaction site-ville.* Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.

[109] E. KJARTANSSON. Constant Q wave propgation and attenuation. *J.Geophys.Res.*, 84:4737–4748, 1979.

[110] M. KOSHIBA, S. KARAKIDA et M. SUZUKI. Finite-element analysis of lamb scattering in an elastic plate waveguide. *I.E.E.E. Trans.Son.&Ultras.*, SU-31:18–25, 1984.

[111] L. KOUOH-BILLE et A. WIRGIN. Réponse sismique en surface d'une montagne triangulaire soumise à une onde SH. *C.R.Acad.Sci.*, 315:1187–1192, 1992.

[112] H. LAMB. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil.Trans.Roy.Soc.*, 203:1–42, 1-42.

[113] E. LE CLÉZIO. *Diffraction des ondes de Lamb par des fissures verticales.* Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 2001.

[114] A.W. LEE. Further investigations of the effect of geological structure upon microseismic disturbance. *Monthly Notices Roy.Astron.Soc.: Geophys.Suppl.*, 3:238–252, 1934.

[115] A.R. LEVANDER et N.R. HILL. P-SV resonances in irregular low-velocity surface layers. *Bull. Seism.Soc.Am.*, 75:847–864, 1984.

[116] Y.-B. LIU et R.-S. WU. Scattering and attenuation of elastic waves by a viscoelastic cylinder. *J.Acoust.Soc.Am.*, 95:2803, 1994.

[117] G. LOMBAERT, D. CLOUTEAU, O. ISHIZAWA et N. MEZHER. The city-site effect : a fuzzy substructure approach and numerical simulations. Dans D. DOOLIN, A. KAMMERER, T. NOGAMI, R.B. SEED et I. TOWHATA, éditeurs, *11th Int. Conf. on Soil Dyn.&Earth.Engrg.*, volume 2, pages 68–74. Stallion Press, 2004.

[118] A.E.H. LOVE. *Some Problems of Geodynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1926.

[119] J.E. LUCO et L. CONTESSE. Dynamic structure-soil-structure interaction. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 63:1289–1303, 1973.

[120] J.L. MATEOS, J. FLORES, O. NOVARO, T.H. SELIGMAN et J.M. ALVAREZ-COSTADO. Resonant repsonse models for teh valleys pf Mexico- II The trapping of horizontal P waves. *Geophys.J.Intl.*, 113:449–462, 1993.

[121] J.A. MENDIGUREN. Inversion of surface wave data in source mechanism. *J.Geophys.Res.*, 82:889–894, 1977.

[122] T. MOMOI. Scattering of Rayleigh waves by a semi-circular rough surface on layered Media. *Bull.Earthq.Res.Int.*, 62:163–200, 1987.

[123] P.M. MORSE et H. FESHBACH. *Methods of Theoretical Physics*. Mc graw-hill book co, New-York, 1953.

[124] J.C. NÉDÉLEC. A New Family of Mixed Finite Elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer.Math.*, 37:1053–1084, 1986.

[125] E.I. NOVIKOVA et M.D. TRIFUNAC. Duration of Strong Earthquake Ground Motion: Phsysical Basis and Empirical Equations. Rapport Technique CE 93-02, University of Southern California, Dept. Civil Engineering, 1993.

[126] E.I. NOVIKOVA et M.D. TRIFUNAC. Frequency dependant duration of strong earthquake ground motion : updated empirical equations. Rapport Technique CE 95-01, University of Southern California, Dept. Civil Engineering, 1995.

[127] R. ODOM. A coupled mode examination of irregular waveguides including the continuum spectrum. *Geophys.J.R.astr.Soc.*, 86:425–453, 1986.

[128] K.B. OLSEN. Site amplification in the Los Angeles basin from three- dimensional modeling of ground motion. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 90:77–94, 2000.

[129] G.F. PANZA. The resolving power of seismic surface wave with respct to crust and upper mantle structural models. Dans R. CASSINIS, éditeur, *The solution of the Onverse Problem in Geophysiucal Interpretation*, pages 39–77. Plenum, 1981.

[130] G.F. PANZA, F. ROMANELLI et F. VACCARI. Realistic modeling of waveforms in laterally heterogeneous anelastic media by modal summation. *Geophys.J.Int.*, 143, 2000.

[131] G.F. PANZA, F. ROMANELLI et F. VACCARI. *Seismic wave propagation in laterally heterogeneous anelastic media: theory and applications to the seismic zonation*, pages 1–95. Academic Press, New-York, 2000.

[132] G.F. PANZA, F. VACCARI et F. ROMANELLI. Realistic modelling of seismic input in urban areas. Rapport Technique 158, UNESCO-IUGS-IGCP, 2001. PAGEOPH.

[133] A.S. PAPAGEORGIOU et J. KIM. Propagation and amplification of seismic waves in 2D valleys excited by obliquely incident P and SV waves. *Earth.Engrg. & Struct.Dyn.*, 22:167–182, 1993.

[134] C.L. PEKERIS. The seismic surface pulse. *Proc.Natl.Acad.Sci.*, 41:469–475, 1955.

[135] L.E. PEREZ-ROCHA, F.J. SANCHEZ-SESMA et E. REINOSO. Three-dimensional site effects in mexico city: evidence from accelerometric network obsrevations and theoretical results. Dans *4th Intl. Conf. on Seismic Zonation*, volume II, pages 327–334, 1991.

[136] P. G. PETROPOULOS. Reflectionless sponge layers as absorbing boundary condition for the numerical solution of Maxwell's equation in rectangular, cylindrical, and spherical coordinates. *SIAM J.Appl.Math.*, 60(3):1037–1058, 2000.

[137] F. POLLITZ. Regional velocity structure in northern California from inversion of scattered seismic surface waves. *J.Geophys.Res.*, 104:15043–15072, 1999.

[138] L. RHAOUTI. *Domaines fictifs pour la modélisation d'un probème d' interaction fluide-structure: simulation de la timbale*. Thèse de Doctorat, Paris IX, 1999.

[139] J.A. RIAL et H. LING. Theoretical estimation of the eigenfrequencies of 2-D resonant sedimentary basins : numerical computations and analytic approximations to the elastic problem. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 82:2350–2367, 1992.

[140] J.A.O. ROBERTSSON. A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite difference modeling in the presence of topography. *Geophys.*, 61:1921–1934, 1996.

[141] J.O.A. Robertsson, J.O. Blanch et W.W. Symes. Viscoelastic finite-difference modeling. *Geophys.*, 9:1444–1456, 1994.

[142] J. Rodriguez. *Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de l'élastodynamique*. Thèse de Doctorat, Université Paris Dauphine, 2004.

[143] F. Romanelli, Z. Bing, F. Vaccari et G.F. Panza. Analytical computation of reflection and transmission coupling coefficients for Love waves. *Geophys.J.Int.*, 125:132–138, 1996.

[144] F.J. Sanchez-Sesma, F.J. Chávez-Garcia et M.A. Bravo. Seismic response of a class of alluvial valleys for incident SH waves. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 78:83–95, 1988.

[145] F.J. Sanchez-Sesma et J.A. Esquivel. Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 69:1107–1120, 1979.

[146] F.J. Sanchez-Sesma, J.F. Heitz et M.A. Bravo. Ground motion on stratified alluvial basins. Dans A.S. Cakmak et I. Herrera, éditeur, *Engineering Seismology and site response.* 4th Intl.Conf.Soil Dyn.Earthq.Engrg, 1989.

[147] F.J. Sanchez-Sesma, L.E. Perez-Rocha, M.A. Bravo et S. Chávez-Perez. Synthetic modeling of strong ground motion on a class of alluvial valleys. Dans *9th World Conf.Earth.Engrg.*, volume 8, 1988.

[148] F.J. Sanchez-sesma et S.A. Velazquez. On the seismic response of a dipping layer. *Wave Motion*, 9:387–391, 1987.

[149] H. Sandi, I.S. Borcia, O. Stancu et M. Stancu. Features of sequences of response spectra under successive intermediate depth Vrancea earthquake. Dans D. Doolin, A. Krammere, T. Nogami, R.B. Seed et I. Towhata, éditeurs, *Proc. 11th International Conference on Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, pages 214–221, University of California, Berkeley, 2004.

[150] Y. Sato. Study on surface waves. III: Love waves with double superficial layer. *Bull.Earth.Res.Inst.*, 29:435–444, 1951.

[151] V.K. Saul'ev. On the Solution of some Boundary Value Problems on high Performance Computers by Fictitious Domain Method. *Siberian Math.J.*, 4:912–925, 1963.

[152] B.K. Savage. *Regional Seismic wavefield propagation.* Thèse de Doctorat, California Institute of Technology, 2004.

[153] J.G. Scholte. The range of existence of Rayleigh and Stoneley Waves. *Monthly Notices Roy.Astrn.Soc.: Geophys.Suppl.*, 5:120–126, 1947.

[154] J.-F. Semblat, A.-M. Duval et P. Dangla. Numerical analysis of seismic wave amplification in Nice (France) comparison with expériments. *Soil Dynam.&Earth.Engrg.*, 19:347–362, 2000.

[155] J.-F. Semblat, P. Guéguen, M. Kham, P.-Y. Bard et A.-M. Duval. Site-city interaction at local and global scales. Dans *12th European Conference on Earthquake Engineering*, numéro paper no. 807. Elsevier, 2003.

[156] J.F Semblat, E. Parara, M. Kham, P.-Y. Bard, K. Pitilakis, K. Makra et D. Raptakis. Site effects : basin geométry vs soil layering. Dans D. Doolin, A. Kammerer, T. Nogami, R.B. Seed et I. Towhata, éditeurs, *11th International Conference on Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, pages 222–229, University of California, Berkeley, 2004. Stallion Press.

[157] K. Sezawa et K. Kanai. The M_2 seismic waves. *Bull.Earth.Res.Inst.*, 13:471–475, 1935.

[158] N.M. Shapiro, K.B. Olsen et S.K. Singh. Wave-guide effects in subduction zones: evidence from three-dimensional modeling. *Geophys.Res.Lett.*, 27:433–436, 2000.

[159] N.M. Shapiro, K.B. Olsen et S.K. Singh. On the duration of seismic motion incident onto the valley of mexico for subduction zone earthquakes. *Geophys.J.Int.*, 151:501–510, 2002.

[160] N.M. SHAPIRO, S.K. SINGH, D. ALMORA et M. AYALA. Evidence of the dominance of high-mode surface waves in the lake-bed zone of the Valley of Mexico. *Geophys.J.Int.*, 147:517–527, 2001.

[161] D.E. SHAW. Comment on "Duration characteristics of horizontal components of strang-motion earthquake records". *Bull.Seism.Soc.Am.*, 69:2125–2126, 1979.

[162] Y. SHOJI, K. TANII et M. KANMIYAMA. A study on the duration and amplitude characteristics of earthquake ground motions. Dans D. DOOLIN, A. KRAMMERE, T. NOGAMI, R.B. SEED et I. TOWHATA, éditeurs, *Proc. 11th International Conference on Soil Dynamics & Earthquake Engineering*, pages 157–164, University of California, Berkeley, 2004.

[163] S.K. SINGH, A. MORI, E. KRUGER et R. KIND. Evidence for anomalous body-wave radiation between 0.3 and 0.7 Hz from the 1985 September 19 Michoacan , Mexico earthquake. *Geophys.J.Int.*, 101:37–48, 1990.

[164] S.K. SINGH et M. ORDAZ. On the origin of long coda observed in the lake-bed strong-motion records of Mexico City. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 83:1298–1306, 1993.

[165] R. STONELEY. Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Monthly Notices Roy.Astron.Soc. : Geophys.Suppl.*, 106:416–428, 1924.

[166] R. STONELEY. Dispersion of waves in a double superficial layer. *Monthly Notices Roy.Astron.Soc. : Geophys.Suppl.*, 1:527–531, 1928.

[167] R. STONELEY. The effect of a Low-velocity internal stratum on surface elastic waves. *Monthly Notices Roy.Astron.Soc. : Geophys.Suppl.*, 6:28–35, 1950.

[168] G. SZEGO. Orthogonal polynomials. *Am.Math.Soc.*, 1939.

[169] F. L. TEIXEIRA et W. C. CHEW. Analytical derivation of a conformal perfectly matched absorber for electromagnetic waves. *Micro.Opt.Tech.Lett.*, 17:231–236, 1998.

[170] M.I. TODOROVSKA, A. HAYIR et M.D. TRIFUNAC. Antiplane response of a dike on flexible embedded foundation to incident SH-waves. *Soil Dyn.& Earth.Engrg.*, 21:593–601, 2001.

[171] M.I. TODOROVSKA, S.S. IVANOVIČ et M.D. TRIFUNAC. Wave propagation in a seven-story reinforced concrete building I. Theoretical models. *Soil Dyn.& Earthq.Engrg*, 21:2116223, 2001.

[172] I. TOLSTOY et E. USDIN. Dispersive properties of stratified elastic and liquid media: a Ray Theory. *Geophys.*, 18:844–870, 1953.

[173] P.J. TORVIK. Reflection of wave trains in semi-infinite plates. *J.Acoust.Soc.Am.*, 41:346–353, 1967.

[174] K. TRIBIKRAM. *Ultrasonic Nondestructive Evaluation.* CRC Press, 2004.

[175] M.D. TRIFUNAC. Investifation of strong earthquake ground motion. Rapport Technique EERL.1969.003, California Institute of Technology, 1969.

[176] M.D. TRIFUNAC. Interaction of a shear wall with the soil for incident plane SH wave. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 62:63–83, 1972.

[177] M.D. TRIFUNAC et A.G. BRADY. A study on the duration of strong earthquake ground motion. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 65:581–626, 1975.

[178] M.D. TRIFUNAC et B.D. WESTERMO. Dependance of the duration of strong eartquake motion on magnitude, epicentral distance, geologic conditions at the recording station and frequency of motion. Rapport Technique CE 95-01, Univeristy of Southern California, Dept. Civil Engineering, 1995.

[179] C. TSOGKA. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés.* Thèse de Doctorat, Paris IX Dauphine, 1999.

[180] C. Tsogka et A. Wirgin. Simulation of seismic response in an idealized city. *Soil Dyn.&Earth.Engrg.*, 23:391–402, 2003.

[181] E. Turkel et A. Yefet. Absorbing PML boundary layers for wave-like equations. Absorbing boundary conditions. *Appl.Numer.Math.*, 27(4):553–557, 1998.

[182] J. Van Bladel. *Singular Electromagnetic Fields and Sources*. IEEE Press, New-York, 1991.

[183] E.T. Whittaker et G.N. Watson. *Modern analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

[184] A. Wirgin. Nouveaux effets de blaze produits par des réseaux lamellaires. *Nouvelle Revue d'Optique Appliquée*, 1:165–166, 1970.

[185] A. Wirgin. Love waves in a slab with rough boundaries. Dans G.A. Parker, D.F. et Maugin, éditeur, *Recent developments in surface acoustic waves*, pages 145–155. Springer, Wien, parker, d.f. et maugin, g.a. édition, 1988.

[186] A. Wirgin. Amplification résonnante du mouvement du sol sur une montagne cylindrique isolée soumise à une onde sismique SH. *C.R.Acad.Sci.*, 311:651–655, 1990.

[187] A. Wirgin. Resonant response of a soft semi-circular cylindrical basin to a SH seismic wave. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 85:285–299, 1995.

[188] A. Wirgin. Étude des interactions sol-structures. Rapport Technique, Laboratoire de Modélisation en Mécanique, 1996.

[189] A. Wirgin. *Wavefield Inversion*, Chapitre Some quasi-analytic and numerical methods for acoustical imaging of complex media. Springer, Wien, 1999.

[190] A. Wirgin et L. Kouoh-Bille. Amplification du mouvement du sol au voisinage d'une groupe de montagnes de profil rectangulaire ou triangulaire soumis à une onde sismique SH. Dans *Génie Parasismique et Aspects Vibratoire dans le Génie Civil*, pages ES28–ES37, Saint-Rémy-les-Chevreuses, 1993. AFPS.

[191] A. Wirgin et A.A. Maradudin. *Resonant Response of a Bare Metallic Grating to S-Polarized Light*, volume 22 de *Progress in Surface Science*. Pergamon Press, New-York, 1986.

[192] H.L. Wong et M.D. Trifunac. Surface motion of a sediment-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bull.Seism.Soc.Am.*, 64:1389–1408, 1974.

[193] R.W. Wood. A suspected case of the electrical resonance of minute metal particles for light-waves. A new type of absorption. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4:369, 1902.

[194] L. Zhao et A.C. Cangellaris. A general approach for developping unsplit-field time-domain implementations of perfectly matched layers for FDTD grid truncation. *IEEE Trans.Micro.Theory Tech.*, 44:2555–2563, 1996.

Résumé : Nous ne pouvons ni prévoir, ni lutter contre un séisme. Nous ne pouvons que tenter de limiter les dégâts et désastres humains qu'ils occasionnent au sein des zones urbaines. Celles-ci, pour des raisons purement pratiques (culture et eau) sont souvent construites sur des bassins sédimentaires ou lacustres. Or, ces sites, de part les caractéristiques physiques de leur sous-sol, sont parmi les plus dangereux lorsqu'un séisme les touche (Mexico en 1985, Izmit en 1999...). La compréhension des mécanismes et phénomènes mis en jeu constitue la première étape pour l'élaboration de moyens d'action visant à limiter les effets des séismes en zone urbaine. Ceux-ci peuvent être classés en deux catégories principales qui vont interagir fortement entre elles. D'une part, les mécanismes et phénomènes liés à "l'histoire" de l'onde touchant le milieu urbain, et d'autre part ceux de l'interaction, au sein de ce milieu urbain, de l'onde incidente et des bâtiments. Nous montrons, analytiquement et numériquement, que l'excitation d'une configuration par une onde plane en incidence verticale ne fournit pas une représentation correcte ni de la réponse, ni des phénomènes lorsque l'épicentre est localisé loin de la ville. À la limite, une telle excitation peut être employée pour l'étude de séismes touchant des villes telle que Nice, mais en aucun cas pour celle de séismes touchant des villes comme Mexico. Dans ce second cas, nous montrons que certaines des caractéristiques de la coda étaient présentes avant l'entrée dans la ville et que ces caractéristiques sont dues à l'excitation des modes réels de la configuration sur un parcours régional. Nous dégageons ensuite, toujours analytiquement et numériquement, les mécanismes majeurs de l'interaction de cette onde avec les bâtiments qui induisent une modification notable du champ de déplacement dans la ville, conduisant à un effet encore plus dévastateur (surtout dans le cas des mouvements anti-plans).
Cette étude constitue une preuve analytique de l'importance et de la complémentarité de ces deux classes de mécanismes dans la compréhension des phénomènes qui, nous l'espérons, un jour se traduira par des actions concrètes sur l'urbanisme, de façon à compléter les mesures déjà mises en oeuvre pour limiter les dégâts et désastres humains lors d'un séisme.

Mots clés: effets régionaux, effets sites-villes, amplification, durée, viscoélasticité, réponse sismique.

Abstract: We can neither predict, nor fight against an earthquake. At the most, we can try to limit the damage and human losses provoked by an earthquake in a urban site. These sites, for practical reasons, are often built on sedimentary or lake basins. Nevertheless, the latter are the most dangerous sites in the event of an earthquake, because of the mechanical properties of the soil (Mexico-City in 1985, Izmit in 1999...). A first step in attempting to limit the effects of earthquake in urban zones is to understand the mechanisms and phenomena involved in such an event. These are mainly of two strongly-coupled types: on the one hand, the mechanisms and phenomena related to the history of the incoming wave, and on the other hand, those related to the interaction of the incoming wave with the buildings. We first show, numerically and theorically, that the solicitation of a configuration by a normally-incident plane wave does not correctly account for either the cause or the effects (response) when the source is relatively distant form the city, in a lateral sense. In this case, we show that the characteristics of the coda, noticed inside the city, are partially included in the incoming wave this being due to mode excitation of the configuration in the basence of the buildings. We then exhibits the principal mechanism of the interaction of this wave with the buildings. The presence of the latter induces a strong modification of the displacement field inside the city leading to an effect that is more devastating (mainly in the shear-horizonatl case) than in the absence of buildings. This enhancement is essentially due to a modification of the mode of the total (i.e. building + soil) configuration.
This study constitutes an analytical proof of the importance and the complementarity of these two mechanism classes for understanding the phenomena involved in earthquakes at urban sites.

Keywords: regional effects, city-site effects, amplification, duration, viscoelasticity, seismic response.