



HAL
open science

Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites

François-Xavier Irisarri

► **To cite this version:**

François-Xavier Irisarri. Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2009. Français. NNT : . tel-00514120

HAL Id: tel-00514120

<https://theses.hal.science/tel-00514120>

Submitted on 1 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE TOULOUSE III - PAUL SABATIER

THESE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Paul Sabatier
Spécialité : Génie Mécanique, Mécanique des matériaux

Présentée par

François-Xavier IRISARRI

Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites

Soutenue le 23 janvier 2009 devant le jury composé de :

M. Domingos ALVES-RADE	Université Fédérale d'Uberlândia, Brésil	Président
M. Laurent GUILLAUMAT	ISAT, Nevers	Rapporteur
M. Rodolphe LE RICHE	Ecole des Mines de Saint-Etienne	Rapporteur
M. Jean-Jacques BARRAU	Université Paul Sabatier, Toulouse	Examineur
M. David H. BASSIR	TU Delft, Pays-Bas	Examineur
M. Stéphane GRIHON	Airbus, Toulouse	Examineur
M. Michel SALAUN	ISAE, Toulouse	Directeur de thèse
M. Jean-François MAIRE	ONERA, Châtillon	Invité

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Procédés

Remerciements

Au moment de mettre un point final à ce mémoire, je tiens à remercier toutes celles et ceux qui m'ont accompagné au fil de ces trois années de thèse. L'exercice n'est pas solitaire et ce sont de nombreuses personnes que je me dois de remercier.

J'ai réalisé ma thèse à l'ONERA, initialement au sein de l'unité Loi de Comportement et Mécanique de l'Endommagement (LCME) du Département Mécanique du Solide et de l'Endommagement (DMSE), ensuite au sein de l'unité Modélisation des Structures Composites (MSC) du Département Matériaux et Structures Composites (DMSC). Dans le même ordre, je remercie Messieurs Gallerneau, Geoffroy, Carrère et Abbe de m'avoir accueilli au sein de leurs départements et unités respectifs et, de façon plus générale, toutes les personnes que j'ai pu y côtoyer et qui ont contribué, chacune à leur manière, à ce que je me plaise à l'ONERA.

Cette thèse est aussi le fruit d'une collaboration avec le Département de Mécanique des Matériaux et des Structures (DMSM) de l'ISAE à Toulouse, sous la direction de Monsieur Huet. Je remercie mes anciens professeurs, Messieurs Laurent Michel et Frédéric Lachaud, pour leurs conseils amicaux et les discussions scientifiques enrichissantes que nous avons pu avoir. Je remercie également mon directeur de thèse, Monsieur Michel Salaün, pour sa bienveillante supervision.

Je tiens à remercier Messieurs les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail. Je remercie tout particulièrement Messieurs Le Riche et Guillaumat pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

J'ai une pensée toute particulière pour le président de ce jury, Monsieur Domingos Alves-Rade, et pour son épouse, Raquel, qui m'ont si chaleureusement accueilli dans à l'Université d'Uberlândia et chez eux, au Brésil.

Merci à Monsieur Hicham Bassir pour son débordant enthousiasme et la collaboration fructueuse que nous avons menée jusqu'à présent et qui, je l'espère, se prolongera à l'avenir.

Je ne peux écrire ces remerciements sans évoquer mes encadrants, Messieurs Jean-François Maire et Nicolas Carrère. Leur passion est le moteur d'une équipe dans laquelle il fait bon se former. La complémentarité et l'excellence scientifique de l'encadrement qu'ils m'ont offert participent pour beaucoup à la qualité du travail présenté dans ce mémoire. J'ai énormément appris à leur contact. Je vous remercie pour votre soutien et vous renouvelle mon amitié.

Merci à Frédéric Laurin, François-Henri Leroy, Daniel Louis et Pascal Paulmier pour leur contribution et les bons moments passés ensemble.

Merci aux ex-doctorants et futurs ex-doctorants, Anaïs, Eva, Myriam, Cédric, Jean-Didier, Jean-Michel, Lionel, Norbert, Thomas, Vincent, Yann, Yannis et à ceux que j'oublie.

Merci à Perrine.

Je dédie ce mémoire à mes parents, Odile et Edmundo.

Table des matières

Table des matières	iii
Liste des abréviations	vii
Liste des notations	ix
Propriétés matériaux	xi
Introduction	1
Première partie : Stratégies d'optimisation des empilements	7
I Matériaux composites, Optimisation multiobjectif et Algorithmes évolutionnaires	9
I.1 Des matériaux aux structures composites	10
I.1.1 Constitution et intérêt des Composites à Matrice Organique (CMO) pour la conception des structures aéronautiques.....	10
I.1.2 Des approches multiéchelles pour des comportements complexes	12
I.1.3 Vers le calcul et l'optimisation des structures composites	19
I.2 Les méthodes d'optimisation multiobjectif	21
I.2.1 Cas général : le problème multiobjectif contraint	21
I.2.2 L'optimalité multiobjectif : classer des compromis	22
I.2.3 Les méthodes de recherche	25
I.2.4 Les méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs.....	32
I.2.5 Vers l'optimisation multiobjectif des structures composites	36
I.3 Optimisation des structures composites	37
I.3.1 Trois démarches pour l'optimisation des empilements	37
I.3.2 Synthèse bibliographique	39
I.3.3 Axes de travail	42
I.3.4 Bilan : démarche proposée pour le développement d'une stratégie d'optimisation composite	44
II Développement d'algorithmes pour l'optimisation multiobjectif des structures composites	45
II.1 Préalable : spécificités de l'optimisation des empilements	46
II.1.1 Exploiter les espaces intermédiaires issus de la CLT	46
II.1.2 Les règles usuelles de conception des empilements	55
II.1.3 Discussion	60
II.2 Proposition d'un algorithme évolutionnaire multiobjectif spécialisé pour l'optimisation composite.....	62
II.2.1 Architecture générale de l'algorithme	62
II.2.2 Codage et génération des solutions	64
II.2.3 Gestion des contraintes et sélection des solutions	70
II.2.4 Quelques pistes d'amélioration	71
II.3 Quelques justifications des choix effectués	72
II.3.1 Mesures de performances.....	72

II.3.2	Méthodologie	74
II.3.3	Cas-tests.....	74
II.4	Bilan	83
III	Vers l'optimisation robuste des structures composites	85
III.1	Considérations générales sur la prise en compte des incertitudes pour le dimensionnement et l'optimisation des structures composites.....	86
III.1.1	Dimensionnement robuste des structures composites	87
III.1.2	Optimisation robuste des structures composites et algorithmes évolutionnaires multiobjectifs.....	90
III.1.3	Les difficultés du calcul de robustesse.....	92
III.2	Vers l'optimisation robuste des empilements dans les structures composites.....	94
III.2.1	Classification des sources d'incertitudes.....	94
III.2.2	Quantifier la robustesse des solutions	98
III.2.3	Incertitudes et classement des solutions.....	99
III.2.4	Incertitudes et faisabilité des solutions.....	103
III.3	Bilan.....	105
Deuxième partie : Application à l'optimisation de la tenue au flambement de panneaux composites.....		107
IV	Stratégies de calcul pour la prévision du flambement des structures composites	109
IV.1	Généralités sur le flambement.....	110
IV.1.1	Importance du flambement pour les structures aéronautiques	111
IV.1.2	Spécificité du flambement des structures composites	111
IV.1.3	Revue des principaux paramètres influents	111
IV.1.4	Optimisation et flambement des structures composites dans la littérature	112
IV.2	Présentation des modèles	114
IV.2.1	Les modèles analytiques	114
IV.2.2	Analyse du flambement par la méthode des Eléments Finis	116
IV.2.3	Remarques sur l'approximation de la force critique de flambement	117
IV.3	Comparaisons des modèles	119
IV.3.1	Validation des modèles dans le cas orthotrope.....	119
IV.3.2	Conséquences des hypothèses	119
IV.3.3	Un calcul de validation sur une structure complexe	123
IV.4	Bilan	124
V	Exemples d'applications	125
V.1	Description du problème d'optimisation d'un panneau raidi	126
V.1.1	Configuration nominale.....	126
V.1.2	Stratégie de calcul du flambement et du comportement post-flambé du panneau raidi.....	126
V.1.3	Formulation du problème d'optimisation.....	127
V.2	Optimisation séquentielle.....	128
V.2.1	Optimisation de l'empilement de la peau.....	128
V.2.2	Optimisation de l'empilement du raidisseur.....	132
V.2.3	Approche duale : optimisations successives du raidisseur et de la peau	133
V.3	Optimisation simultanée.....	135

V.3.1	Adaptation de l'algorithme évolutionnaire.....	136
V.3.2	Première optimisation simultanée (discrétisation angulaire de 45°)	136
V.3.3	Seconde optimisation simultanée (discrétisation angulaire de 15°).....	140
V.4	Synthèse et discussion	141
V.4.1	Comparaison des approches séquentielles et simultanées	143
V.4.2	Précautions et recommandation pour l'usage de métamodèles	146
VI	Vers l'application à des problèmes réels.....	149
VI.1	Prise en compte des incertitudes et des méconnaissances dans le problème de conception.....	150
VI.1.1	Les erreurs et méconnaissances de modèles (Type C).....	151
VI.1.2	Les erreurs de simplification liées aux métamodèles (Type C).....	151
VI.1.3	Incertitudes et méconnaissances sur la dispersion matériau (Type B).....	153
VI.1.4	Incertitudes et erreurs sur le positionnement des fibres (Type A).....	157
VI.1.5	Discussion	158
VI.2	Une méthode pour l'identification des cas de charges dimensionnants	160
VI.2.1	Principe général de la méthode.....	160
VI.2.2	Illustration sur un cas d'application simplifié	160
VI.2.3	Perspectives de mise en oeuvre	162
VI.3	Le problème des modes de flambement	165
VI.3.1	Premier cas de figure : des modes évidents	165
VI.3.2	Second cas de figure : distinguer les modes.....	166
VI.4	Bilan	168
Troisième partie : Application au calcul des assemblages boulonnés dans les structures composites		169
VII	Stratégies de calcul des assemblages boulonnés dans les structures composites.....	171
VII.1	Considérations générales sur les assemblages mécaniques dans les structures composites	172
VII.1.1	Les principales configurations de liaison élémentaire.....	172
VII.1.2	Description de la rupture des assemblages	173
VII.1.3	Revue des principaux paramètres influents	174
VII.1.4	Précisions sur la rupture en matage.....	177
VII.2	Les Modélisations statiques avancées	180
VII.2.1	Analyse des distributions de contraintes	180
VII.2.2	Prévision de la rupture.....	181
VII.3	La démarche industrielle	184
VII.3.1	Considérations générales sur la discrétisation de la jonction complexe en assemblages élémentaires.....	184
VII.3.2	L'approche globale / locale.....	185
VII.3.3	Les modèles semi-empiriques pour l'analyse des distributions d'efforts entre fixations.....	186
VII.4	Discussion : insuffisances et incompatibilité des démarches de modélisation.....	191
VIII	Amélioration des modèles pour la prévision de la rupture des assemblages	193
VIII.1	Etude expérimentale de la rupture des assemblages.....	194
VIII.1.1	Configurations expérimentales	194

VIII.1.2	Résultats des essais de matage.....	197
VIII.1.3	Résultats des essais d'assemblages.....	200
VIII.1.4	Résultats des essais de traction trouée et de traction trouée habitée	205
VIII.1.5	Discussion sur les résultats expérimentaux	206
VIII.2	Modélisation fine de la rupture des assemblages.....	208
VIII.2.1	Maillages et stratégie de calcul	208
VIII.2.2	Gestion du contact et conditions aux limites	210
VIII.2.3	Comportements matériaux	211
VIII.2.4	Comparaisons essais/calculs	214
VIII.3	Discussion / validité des modèles	220
IX	Vers l'optimisation des empilements pour les jonctions boulonnées complexes.....	221
IX.1	Application du modèle fin pour la recherche de l'empilement le plus résistant pour l'essai de matage	222
IX.1.1	Essais virtuels sur empilements symétriques équilibrés à huit plis.....	222
IX.1.2	Essais virtuels sur empilements symétriques à seize plis.....	224
IX.1.3	Bilan sur la démarche de "virtual testing"	229
IX.2	Stratégie de calcul multiniveau pour l'optimisation de jonctions complexes	230
IX.2.1	Stratégie de calcul pour la jonction complexe	230
IX.2.2	Comparaisons simulation / expérience pour valider le modèle fin sur le matériau T700/M21	232
IX.2.3	Application à la prévision de la rupture d'une jonction complexe.....	233
IX.3	Discussion.....	237
	Conclusions et perspectives.....	239
	Bibliographie.....	245

Liste des abréviations

Ne sont précisées ici que les abréviations récurrentes de ce mémoire. D'autres sont utilisées ponctuellement, mais elles sont explicitées dans leur contexte.

CMO	Composite à M atrice O rganique
UD	pli U ni D irectionnel
QI	empilement Q uasi- I sotrope
CLT	Théorie Classique des Stratifiés (C lassical L amination T heory)
EF	E léments F inis
AG	A lgorithme G énétique
AE	A lgorithme E volutionnaire
RWS	sélection par roulette biaisée (R oulette W heel S election)
RBFT	bases de fonctions radiales sous tension (R adial B asis F unctions under T ension)

Liste des notations

Liste des principales notations ayant trait à la mécanique des structures composites. Les grandeurs vectorielles sont écrites en gras, par opposition aux grandeurs scalaires.

(x,y,z)	repère global
$(1,2,3)$	repère local
N	nombre de plis du stratifié
θ_i	orientation du pli i dans le plan (x,y)
ABD	la matrice de rigidité du stratifié
A, B, D	chacun des blocs symétriques constitutifs de la matrice ABD
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	les termes de ces blocs (i et j valent 1, 2 ou 6 dans les notations de Voigt)
U_i	paramètres de Tsai et Pagano
ξ_j	paramètres de stratification (en exposant, le bloc correspondant A, B ou D)
p_{dis}	pas de discrétisation angulaire des orientation de plis
a	longueur d'une plaque stratifiée rectangulaire
b	largeur d'une plaque stratifiée rectangulaire
m	nombre de demi-longueurs d'onde dans la direction x
n	nombre de demi-longueurs d'onde dans la direction y
λ_c	facteur critique de flambement
N_x, N_y, N_{xy}	flux d'efforts membranaires
u_0, v_0, w_0	déplacements du feuillet moyen dans le repère global
e	écartement entre deux lignes de fixations
w	pas des fixations d'une même ligne
D	diamètre du trou
t	épaisseur de l'éprouvette
F_m	effort de matage transféré par la fixation
F_p	effort passant
σ_m	contrainte conventionnelle de matage
σ_{Rm}	résistance en matage
σ_∞	contrainte à l'infini pour un essai de traction trouée
σ_r	résistance de la plaque pleine
C_l, C_t, C_n	raideur de l'assemblage dans les directions x, y et z
K_t	coefficient de surcontrainte en bord de trou
K_m	coefficient de matage
μ	coefficient de frottement

Liste des principales notations ayant rapport aux méthodes d'optimisation.

\mathbf{x}	un vecteur de décision
\mathbf{X}	l'espace de décision
\mathbf{X}_f	l'espace des valeurs réalisables
\mathbf{y}	un vecteur objectif
\mathbf{Y}	l'espace des objectifs
\mathbf{Y}_f	l'espace des objectifs réalisables
i	un individu
f	la fonction-objectif
\mathbf{g}	la fonction des contraintes
\mathbf{V}	fonction de voisinage
E	fonction partie entière
$\bar{\mathbf{P}}_t$	archive des meilleures solutions à la génération t
\bar{N}_p	taille de l'archive
\mathbf{P}_t	population courante à la génération t
N_p	taille de la population courante
A_m	paramètre d'amplitude pour l'opérateur de mutation
p_c, p_m, p_p	probabilité d'occurrence des opérateurs de croisement, mutation et permutation
T	nombre maximal de génération
δ	rayon de recherche locale
\mathbf{F}	front de Pareto théorique
\mathbf{F}'	front de Pareto approché
M_1, M_2, M_3, S, C	métriques de performances pour quantifier la qualité des fronts de Pareto
f^v	fonction de vulnérabilité
f^r	fonction de robustesse
σ_f	écart-type de la fonction f sur un voisinage $\mathbf{V}(\mathbf{x})$
μ_f	moyenne de la fonction f sur un voisinage $\mathbf{V}(\mathbf{x})$

Propriétés matériaux

Les propriétés récapitulées ci-dessous concernent les matériaux suivants :

- (1) le carbone / époxy utilisé dans la première partie de ce mémoire,
- (2) le T800/924C utilisé dans la deuxième partie de ce mémoire,
- (3) le T300/914 utilisé dans la troisième partie de ce mémoire,
- (4) le T700/M21 utilisé dans la troisième partie de ce mémoire.

Propriétés	Matériaux			
	carbone / époxy (1)	T800/924C (2)	T300/914 (3)	T700/M21 (4)
Module longitudinal E_{11}	112 GPa	145 GPa	140 GPa	145 GPa
Module transverse E_{22}	8,2 GPa	9,5 GPa	10 GPa	9,5 GPa
Module de cisaillement G_{12}	4,5 GPa	5,0 GPa	8,8 GPa	5,0 GPa
Coefficient de Poisson ν_{12}	0,30	0,30	0,31	0,30
Coefficient de Poisson ν_{23}	0,40	0,40	0,48	0,40
Epaisseur du pli UD	0,26 mm	0,125 mm	0,125 mm	0,26 mm
Résistance en traction longitudinale X_t	1900 MPa	2700 MPa		
Résistance en compression longitudinale X_c	1000 MPa	1650 MPa		
Résistance en traction transverse Y_t	84 MPa	55 MPa		
Résistance en compression transverse Y_c	250 MPa	225 MPa		
Résistance au cisaillement S	75 MPa	100 MPa		
Déformation max. en traction longitudinale			$1,087 \cdot 10^{-2}$	$1,60 \cdot 10^{-2}$
Déformation max. en comp. longitudinale			$0,652 \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^{-2}$
Déformation max. en traction transverse			$0,245 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$
Déformation max. en comp. transverse			$1,818 \cdot 10^{-2}$	$3,04 \cdot 10^{-2}$
Déformation max. en cisaillement S			$4,000 \cdot 10^{-2}$	$8,33 \cdot 10^{-2}$
Taux de restitution d'énergie critique G_I^c			200 J.m ⁻²	843 J.m ⁻²
Taux de restitution d'énergie critique G_{II}^c			200 J.m ⁻²	1686 J.m ⁻²
Contrainte max. en traction σ_{max}			50 MPa	50 MPa
Contrainte max. en cisaillement τ_{max}			55 MPa	100 MPa

Tableau : Propriétés des matériaux employés dans ce mémoire.

Introduction

Qu'il s'agisse des constructions aérospatiales, navales, ferroviaires ou de matériels sportifs, on assiste aujourd'hui à la rapide généralisation de l'emploi des matériaux composites dans de nombreux domaines industriels. Dans l'industrie aéronautique, la course à la maîtrise des solutions composites est engagée à grand renfort d'annonces médiatiques entre les deux principaux avionneurs civils, Airbus et Boeing. C'est ainsi qu'Airbus a clairement mis en avant la réalisation du caisson central composite de l'A380 (Figure 1a), jouant un rôle structural clé en assurant la reprise des efforts de flexion de la voilure et sa liaison au fuselage. De son côté, Boeing annonce le lancement prochain du B787, premier avion de transport de passagers avec voilure et fuselage composites (Figure 1b). En réponse, Airbus a annoncé mi-2006 le programme A350 XWB, essentiellement basé sur l'usage des composites. Les composites hautes performances à fibres de carbone utilisés en aéronautique présentent en effet trois principales caractéristiques susceptibles d'éveiller l'intérêt des concepteurs :

- des propriétés mécaniques spécifiques largement supérieures à celles des matériaux métalliques,
- des propriétés mécaniques "sur mesure" en adaptant la disposition des fibres dans le matériau aux chemins d'efforts attendus,
- une faible sensibilité à la fatigue et à la corrosion permettant de réduire les coûts de maintenance.

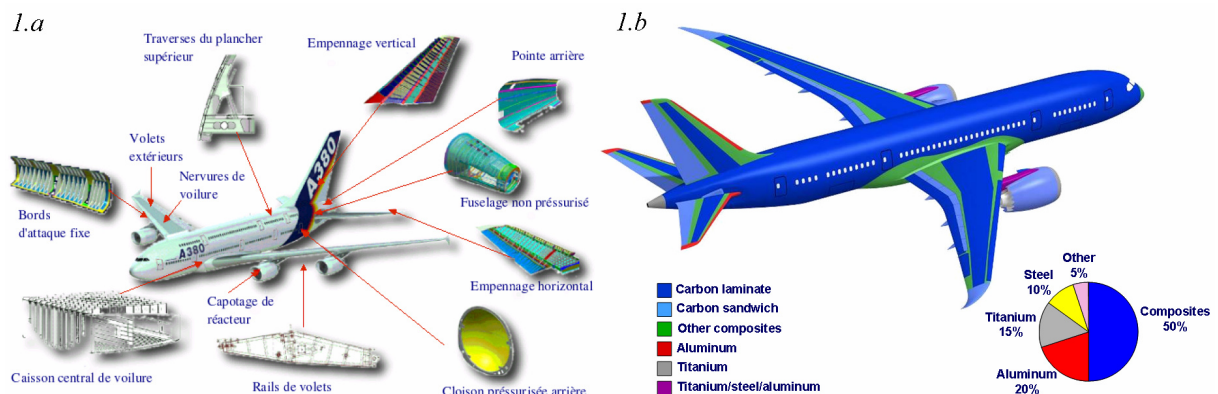


Figure 1 : Répartition des matériaux composites dans l'A380 (à gauche, Figure 1.a, source Airbus) et dans le B787 (à droite, Figure 1.b, source Boeing).

En particulier, confrontés à l'augmentation actuelle du prix du baril de pétrole, les constructeurs aéronautiques travaillent à la minimisation de la consommation en carburant de leurs appareils selon le cycle vertueux : réduction de la masse de l'appareil - réduction de la motorisation - réduction de l'emport de carburant. La minimisation de la masse structurale constitue ainsi un défi technologique d'importance (Figure 2) auquel les constructeurs répondent par une double démarche. D'une part, l'utilisation de matériaux aux propriétés mécaniques spécifiques accrues permet le dimensionnement de structures plus légères mais tout aussi performantes que les structures classiques. Concrètement cela se traduit dans l'industrie aérospatiale par la généralisation de l'emploi des matériaux composites pour les structures secondaires et leur introduction progressive dans les structures primaires reprenant l'ensemble des principales sollicitations sur l'appareil. D'autre part, la recherche du dimensionnement au plus juste, permettant de traquer toute masse superflue, constitue la porte ouverte pour la pratique de l'optimisation structurale.

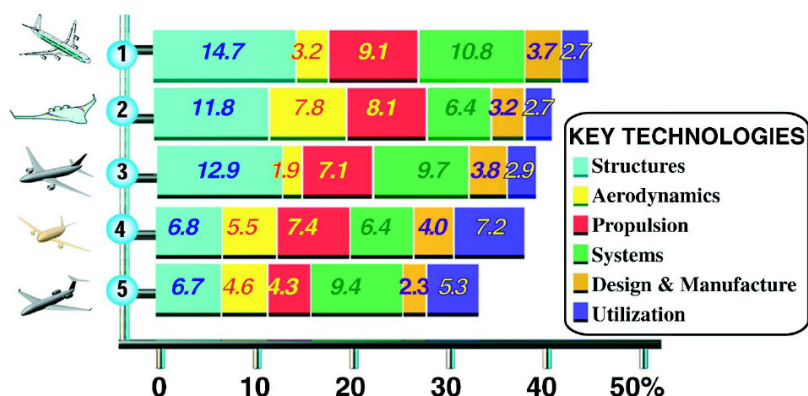


Figure 2 : Projections de la réduction des coûts de fonctionnement en 2020 pour le transport aérien subsonique résultant du déploiement de nouvelles technologies. (1) Long courrier gros porteur conventionnel, (2) "aile volante", (3) long courrier conventionnel, (4) moyen courrier, (5) avion régional, d'après [Noor 00].

Cependant si les structures en alliages légers sont aujourd'hui largement optimisées et exploitées au maximum de leurs possibilités dans le cadre des réglementations actuelles, il n'en va pas de même pour les structures composites dont l'optimisation se heurte à trois freins principaux :

- les méthodes de dimensionnement industrielles, le plus souvent dérivées des méthodes employées pour la conception des structures métalliques, sont généralement inadaptées aux spécificités des matériaux composite et en particulier à la gestion de l'arrangement interne de leurs fibres,
- la complexité des mécanismes régissant le comportement, l'endommagement et la rupture de ces matériaux,
- la forte dispersion expérimentale de leurs caractéristiques mécaniques.

De là découle un manque de confiance certain dans la simulation numérique des structures composites, conduisant les bureaux d'études à restreindre les possibilités offertes par ces matériaux à un ensemble de solutions éprouvées, souvent associées à de forts surdimensionnements et surcoûts expérimentaux de validation. L'aspect sur mesure de la conception composite est ainsi fortement réduit. Si des solutions composites sont aujourd'hui utilisées dans le domaine aéronautique, elles sont le fruit d'un très important "background" expérimental sur un matériau donné. Le coût des validations expérimentales représente ainsi 1,4 milliards d'euros pour l'A380 dont près de 650 millions pour les structures. Dans la pratique, au-delà du choix du système fibre/matrice, l'optimisation du positionnement des renforts au sein du matériau composite, susceptible d'augmenter très significativement les performances de la structure, n'est pas effectuée de façon satisfaisante, faute d'outils adaptés et intégrés aux codes de calculs de structures.

L'optimisation structurale est pourtant une pratique aujourd'hui largement répandue dans l'industrie aéronautique, même si les méthodes employées s'avèrent inadaptées à l'optimisation simultanée de la structure et du matériau composite. L'optimisation s'inscrit dans un processus multiniveau s'étendant de l'optimisation multidisciplinaire globale de l'aéronef (prise en compte simultanée des aspects aérodynamiques, structuraux, systèmes ou propulsion) jusqu'au niveau local et l'optimisation monodisciplinaire de petits sous-ensembles structuraux (Figure 3). Dans ce contexte ce travail vise à développer des stratégies pour l'optimisation locale de petits sous-ensembles composites en phase de conception détaillée.

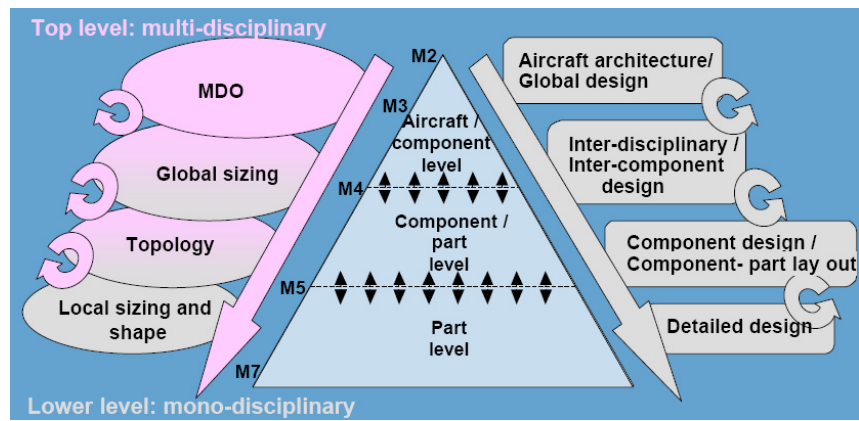


Figure 3 : Pyramide de la conception et de l'optimisation en aéronautique (source Airbus : S. Grihon).

Travailler en phase de conception détaillée constitue un cadre de travail contraignant. Il est évident que la conception de structures composites nécessite tout un savoir-faire industriel que les équipes de recherche ne possèdent pas. Il est ainsi difficile de reproduire à notre niveau l'ensemble des paramètres des problèmes de conception tels qu'ils se posent aux ingénieurs des bureaux d'études. On se place donc dans cette thèse dans le cadre de l'amélioration d'une solution technique préexistante remplissant déjà le cahier des charges. Nous considérons que les dimensions et la forme globale des structures sont fixées à un niveau de conception supérieur. Concrètement, on s'intéresse ici au développement de stratégies portant sur l'amélioration de l'arrangement des fibres dans les matériaux composites stratifiés pour des applications précises et bien définies par ailleurs.

Toutefois, la démarche d'optimisation nous intéresse en elle-même dans la mesure où, si elle peut, dans les cas les plus complexes, fournir des solutions optimales non intuitives et originales, elle permet aussi d'estimer la qualité de la solution retenue (optimale ou proche de l'optimum). Ainsi, dans le cadre d'un problème d'optimisation d'une structure composite soumise à des chargements variés et multiples, le processus d'optimisation conduira probablement à une solution proche de celle retenue par des méthodes de conception classique. L'intérêt de l'outil d'optimisation n'est alors plus de fournir un optimum auquel l'expérience avait déjà permis d'accéder, mais de confirmer que cette solution est la meilleure et d'accroître ainsi la confiance dans le dimensionnement (et ce, d'autant plus que l'on fera intervenir dans le processus des considérations de conception robuste).

La démarche adoptée dans cette thèse consiste à effectuer un passage progressif entre trois démarches de conception, à savoir, par ordre de complexité croissante :

- la conception "nominale", consistant à trouver une solution respectant le cahier des charges,
- la conception "optimisée", consistant à trouver parmi l'ensemble des solutions respectant le cahier des charges celles qui présentent les meilleures performances,
- la conception "robuste", consistant à trouver parmi l'ensemble des solutions respectant le cahier des charges celles qui représentent les meilleurs compromis entre performances et risques.

Tout au long de ce document, nous montrons les difficultés liées à l'optimisation composite robuste, et poursuivons le développement de solutions pour les contourner.

D'une part, il est clair que pour parvenir à nos fins, il nous faut surmonter l'ensemble des freins à l'optimisation des structures composites évoqués plus haut. Une force de ce travail consiste à s'appuyer en la matière sur les développements réalisés dans le cadre du programme Americo

("Analyse MultiEchelle, Recherche Innovante pour les matériaux COmposites", achevé en 2007, financé par la DGA et piloté par l'ONERA). Parmi ceux-ci :

- les approches multiéchelles du comportement des matériaux composites,
- les modèles avancés d'endommagement et de rupture,
- les outils de calculs multiniveaux pour les structures,
- les méthodes de prise en compte des incertitudes et de réduction des modèles.

Un enjeu particulier de cette étude réside donc dans la démonstration de la faisabilité et des apports de stratégies d'optimisation basées sur l'usage d'outils aussi complexes et coûteux en temps de calcul.

Il nous faut pour cela se doter d'outils d'optimisation appropriés. En effet, l'objectif global de réduction de la masse à l'échelle de la structure entière de l'appareil recouvre au niveau de l'optimisation locale une réalité multiple. Il peut ainsi s'agir : soit de minimiser la masse de l'élément composite sous un ensemble de contraintes de performances minimales à atteindre, soit de maximiser les performances de la pièce à masse constante. De fait, de nombreux critères de conception peuvent être intégrés au problème d'optimisation, soit en tant que contraintes, soit en tant qu'objectifs, par exemple des critères de masse, de raideur, de résistance, de tenue à l'endommagement, au délaminage, etc. En pratique la différence entre contraintes et objectifs est souvent floue. Il nous semble cependant évident que le problème de l'optimisation des structures en général est intrinsèquement multiobjectif. Nous nous sommes donc naturellement intéressé aux méthodes d'optimisation multiobjectif permettant de fournir au concepteur un ensemble de solutions correspondant à autant de compromis entre les différents objectifs antagonistes du problème. L'objectif pratique de ce travail de thèse est donc de développer des stratégies d'optimisation multiobjectif de l'arrangement des fibres dans les structures composites stratifiées, à la fois suffisamment générales pour gérer une grande variété de problèmes de conception composite détaillée, mais spécialement adaptées au problème composite.

En particulier les deux applications autour desquelles s'articule ce travail de thèse concernent respectivement l'optimisation des plaques et panneaux raidis composites en flambement et celle des assemblages boulonnés entre éléments composites ou éléments composites et métalliques. Ces deux problématiques sont représentatives des difficultés rencontrées par les ingénieurs des bureaux d'études aéronautiques. Le problème des structures en flambement constitue d'autre part un sujet classique de la littérature traitant d'optimisation composite. En effet, il s'agit d'un problème complexe, pour lequel il existe toutefois souvent des solutions analytiques permettant d'éviter le recours au calcul par Eléments Finis (EF). C'est autour de cet exemple que nous illustrons les développements réalisés dans ce mémoire en matière d'optimisation. L'application aux assemblages boulonnés est plus originale et ambitieuse dans la mesure où il s'agit d'abord de mettre en place les stratégies de calculs nécessaires avant de pouvoir passer à l'optimisation proprement dite.

Ce mémoire est organisé en trois parties distinctes.

La première partie présente les développements réalisés en matière de stratégies d'optimisation des structures composites. Le premier chapitre introduit les notions de mécanique des matériaux composites et d'optimisation nécessaires à la compréhension de ce mémoire et positionne ces travaux par rapport à la littérature. L'algorithme d'optimisation développé est présenté et justifié dans

le chapitre suivant. Le troisième chapitre est consacré à la prise en compte des incertitudes dans l'optimisation. Chacune des deux parties suivantes est consacrée à une application.

La première application porte sur l'optimisation de la tenue au flambement de panneaux raidis. Il s'agit là, en effet, d'une utilisation classique des composites dans le domaine des constructions aéronautiques. Celle-ci nous offre l'occasion de démontrer l'applicabilité de nos développements et de les coupler à une stratégie de calcul élaborée afin de contenir les coûts de calcul.

La seconde application est consacrée au calcul et à l'optimisation de la résistance des assemblages boulonnés dans les structures composites. Cette application est plus ambitieuse, dans la mesure où il n'existe pas, à notre connaissance, de modèles suffisamment fiables pour l'optimisation. Nous présentons des développements importants en la matière, nous permettant de procéder à l'optimisation d'un assemblage à une fixation et ouvrant la porte à l'optimisation de jonctions complexes.

Première partie

Stratégies d'optimisation des empilements

Les propriétés des matériaux utilisés dans cette partie sont détaillées dans la section Propriétés Matériaux, située en début de ce mémoire.

Les sections grisées correspondent à des précisions techniques dont la lecture n'est pas indispensable à la compréhension du document.

Chapitre I **Matériaux composites, Optimisation multiobjectif et Algorithmes évolutionnaires**

Sommaire

I.1	Des matériaux aux structures composites	10
I.1.1	Constitution et intérêt des Composites à Matrice Organique (CMO) pour la conception des structures aéronautiques.....	10
I.1.2	Des approches multiéchelles pour des comportements complexes	12
I.1.3	Vers le calcul et l'optimisation des structures composites.....	19
I.2	Les méthodes d'optimisation multiobjectif	21
I.2.1	Cas général : le problème multiobjectif contraint	21
I.2.2	L'optimalité multiobjectif : classer des compromis	22
I.2.3	Les méthodes de recherche.....	25
I.2.4	Les méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs	32
I.2.5	Vers l'optimisation multiobjectif des structures composites.....	36
I.3	Optimisation des structures composites	37
I.3.1	Trois démarches pour l'optimisation des empilements	37
I.3.2	Synthèse bibliographique	39
I.3.3	Axes de travail.....	42
I.3.4	Bilan : démarche proposée pour le développement d'une stratégie d'optimisation composite.....	44

I.1 DES MATERIAUX AUX STRUCTURES COMPOSITES

L'objectif de cette section est d'introduire le problème de l'optimisation des structures composites. A ce stade, il convient d'identifier les grandeurs physiques appelées par la suite à constituer les variables et les critères du problème d'optimisation, ainsi que de se doter des outils de calcul nécessaires à leur évaluation. On procède pour ce faire en trois étapes successives, permettant d'introduire les principaux ingrédients de la mécanique des structures composites :

- un bref rappel de mécanique "classique" des composites stratifiés, et en particulier des variables permettant de caractériser l'arrangement des fibres dans le matériau,
- les approches multiéchelles du comportement et les modèles avancés d'endommagement et de rupture des matériaux composites stratifiés,
- les stratégies de calcul multiniveau des structures.

I.1.1 CONSTITUTION ET INTERET DES COMPOSITES A MATRICE ORGANIQUE (CMO) POUR LA CONCEPTION DES STRUCTURES AERONAUTIQUES

De façon générale, il existe trois grandes familles de matériaux composites : les *Composites à Matrice Céramique (CMC)*, essentiellement utilisés pour les applications à (très) hautes températures, les *Composites à Matrice Métallique (CMM)* et les *Composites à Matrice Organique (CMO)*, les plus largement employés, qui constituent l'objet d'étude de cette thèse.

I.1.1.a Constitution des matériaux composites

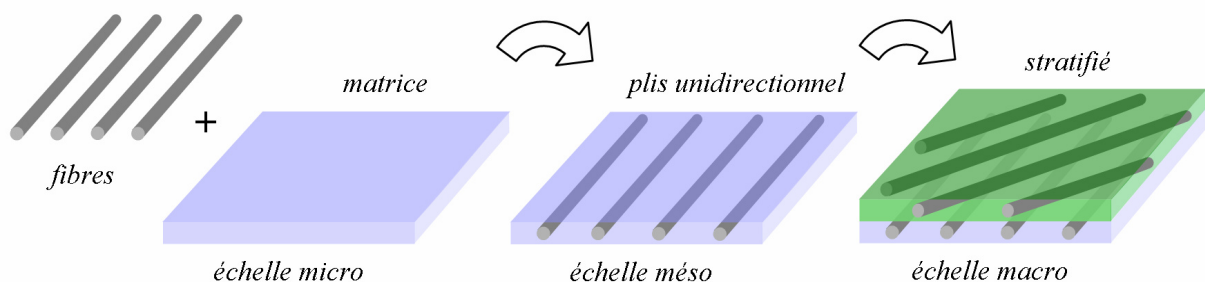


Figure I-1 : Les échelles des constituants d'un composite stratifié.

Un matériau composite résulte de l'assemblage d'au moins deux matériaux de nature différente, non miscibles, se complétant et permettant d'obtenir un matériau dont les performances globales sont améliorées, vis-à-vis d'un besoin spécifique, par rapport à celles de ses constituants élémentaires. Les composites les plus employés pour la conception des structures froides dans le domaine aéronautique sont constitués de résines organiques et de fibres et constituent la classe des CMO. Les fibres (le plus souvent de carbone dans le domaine aéronautique, ou parfois de verre) assurent dans leur direction l'essentiel de la rigidité et de la résistance du matériau final. Elles peuvent être continues, on parle de fibres longues (les plus courantes dans le domaine d'application qui concerne ce travail), ou discontinues : fibres coupées ou fibres courtes. La matrice assure la cohésion du matériau et permet le transfert des efforts entre les fibres. Les procédés de fabrication usuels conduisent généralement à l'élaboration de pièces composites stratifiées constituées d'un empilement de plis unidirectionnels (UD, voir Figure I-1) ou tissés. On se positionne dans la suite de ces travaux dans le cadre de l'étude des stratifiés à base de plis unidirectionnels, réalisés en CMO hautes performances à fibres de carbone continues.

1.1.1.b Performances et particularités des CMO pour la conception des structures aéronautiques

Le succès croissant des CMO est avant tout lié à leurs excellentes caractéristiques mécaniques spécifiques dans le sens des fibres (Figure I-2). Ces matériaux présentent de surcroît une faible sensibilité à la fatigue et à la corrosion leur conférant une longévité accrue.

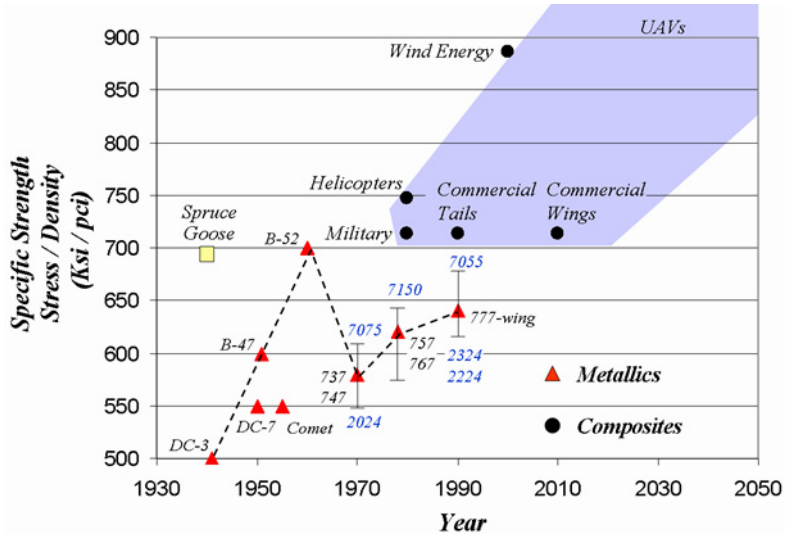


Figure I-2 : Performances spécifiques des CMO [Roeseler 07]. Le Spruce Goose est un hydravion géant, réalisé en épicéa, construit par Howard Hughes.

De façon générale, la conception de structures composites débute par une première optimisation du matériau qui consiste en pratique à choisir le couple fibre/matrice, puis le taux de fibre de l'UD. Il existe une multitude de fibres (Figure I-3) et de matrice envisageables. Le choix de la matrice dépend principalement de la gamme de température de fonctionnement désirée. Les fibres peuvent être à haut module, haute résistance ou intermédiaires en fonction du compromis entre rigidité et résistance recherché. Ces considérations sont toutefois mises en balance avec des considérations de coût et de chaîne d'approvisionnement, mais c'est au final la qualification du matériau vis-à-vis des autorités de certification aéronautique qui s'avère la plus contraignante.

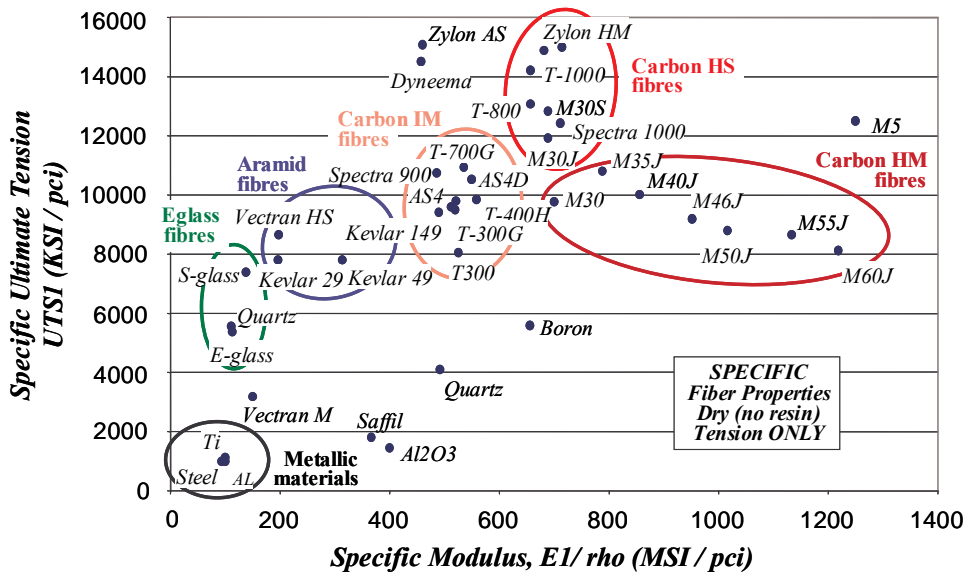


Figure I-3 : Caractéristiques spécifiques de différents types de fibres [Roeseler 07].

La fabrication des stratifiés offre en outre la possibilité d'adapter le comportement du matériau aux conditions de chargement attendues. Le matériau est conçu, optimisé et réalisé simultanément avec la pièce. Il constitue en lui-même une structure à part entière, architecturée par l'arrangement des fibres en couches successives. La gestion de l'empilement constitue ainsi un degré de liberté supplémentaire par rapport à la conception métallique, dans lequel réside la spécificité de l'optimisation composite. Par "empilement", on entend ici le nombre de plis et l'orientation de chacun. Sauf mention contraire, on ne considère dans la suite que des empilements de plis identiques. Dans les configurations les plus simples, une plaque par exemple, la minimisation de la masse est donc directement liée à la minimisation du nombre de plis. Au final, pour toute pièce composite, l'empilement est susceptible d'être optimisé :

- soit pour maximiser les performances mécaniques de la pièce à nombre de plis constant,
- soit pour minimiser le nombre de plis tout en assurant les performances mécaniques spécifiées dans le cahier des charges.

Cet aspect de la conception composite reste toutefois largement sous exploité à l'heure actuelle dans le monde industriel, faute d'outils *ad-hoc*. Les méthodes de dimensionnement actuelles sont en effet largement dérivées des méthodes développées pour les matériaux métalliques, inadaptées à la gestion des empilements et à la complexité des mécanismes régissant le comportement, l'endommagement et la rupture des stratifiés. Pourtant les modèles et outils de calcul nécessaires existent. La section suivante est ainsi consacrée à la présentation des approches multiéchelles dédiées aux matériaux composites stratifiés.

I.1.2 DES APPROCHES MULTIECHELLES POUR DES COMPORTEMENTS COMPLEXES

La description de l'architecture du stratifié permet de mettre en évidence trois échelles pour l'analyse de son comportement (Figure I-1) :

- microscopique : fibre et matrice,
- mésoscopique pour le comportement homogénéisé du pli,
- macroscopique pour le comportement homogénéisé du stratifié.

Dans le cadre d'un problème de conception composite, travailler uniquement à l'échelle macroscopique est sans intérêt puisqu'on ne peut rendre compte de l'influence des modifications d'empilement. Partir de l'échelle microscopique semble *a priori* idéal, puisque, en plus de capturer l'influence de l'empilement, ce type d'approche permet de prendre en compte les modifications de nuance du matériau (changement de matrice, de fibre ou du taux de fibre) . Cette démarche se heurte toutefois à de grandes difficultés d'identification des paramètres matériau des constituants. En conception aéronautique, le matériau est ainsi le plus souvent caractérisé à l'échelle du pli. Dans l'objectif de décrire l'influence de l'empilement sur le comportement de la structure stratifiée, l'échelle mésoscopique constitue donc un niveau de détails au-dessous duquel nous ne descendons pas¹.

¹ Néanmoins, nous verrons par la suite (Chapitre III) que l'échelle microscopique se révèle très utile pour l'estimation et la gestion des incertitudes.

1.1.2.a Capturer l'influence de l'empilement sur le comportement élastique du stratifié

Nomenclature des stratifiés

On désigne les stratifiés par l'orientation des fibres de chaque pli par rapport à un repère global arbitraire (x,y,z) , l'axe x correspondant le plus souvent à la direction du chargement. Un pli orienté à 0° présente des fibres dirigées selon l'axe x et un pli orienté à 90° des fibres selon y . Un stratifié quelconque de N plis est ainsi désigné par le N -uplet des orientations de ses plis dans le sens des z croissants. Pour condenser l'écriture, on note sous forme d'indice le nombre de plis adjacents de même orientation ainsi que le nombre de répétitions d'une même séquence de plis. L'indice "s" correspond à un stratifié symétrique pour lequel on ne renseigne que la moitié de l'empilement, de la surface au plan de symétrie miroir. La Figure I-4 présente l'exemple d'un empilement symétrique $[-45/90/45/0]_s$.

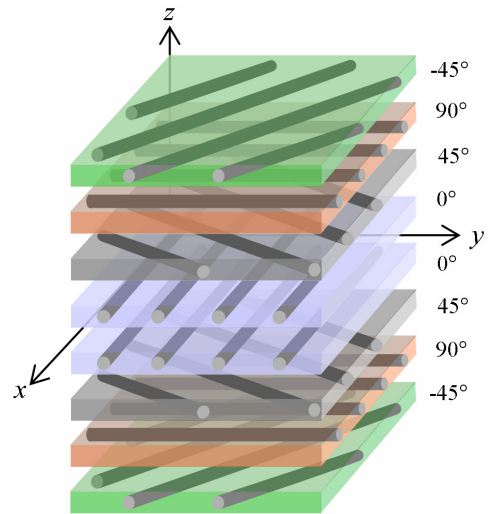


Figure I-4 : Exemple d'empilement symétrique quasi-isotrope $[-45/90/45/0]_s$.

La Théorie Classique des Stratifiés

La *Théorie Classique des Stratifiés* (ou CLT, l'acronyme anglais de *Classical Lamination Theory*) constitue la méthode de changement d'échelle méso-macro la plus largement utilisée dans les approches multiéchelles analytiques publiées. Cette méthode simple permet d'estimer, à partir du chargement macroscopique appliqué (flux d'efforts membranaires et de moments de flexion et de torsion), les champs de contraintes et de déformations à l'échelle du pli. Pour une description complète de la CLT, il est possible de se référer à l'un, quelconque, des ouvrages de référence suivants : en français [Barrau 87, Gay 91, Berthelot 92], ou en anglais [Jones 75; Tsai 80]. On se contente ici d'en rappeler les principales hypothèses et les aspects marquants.

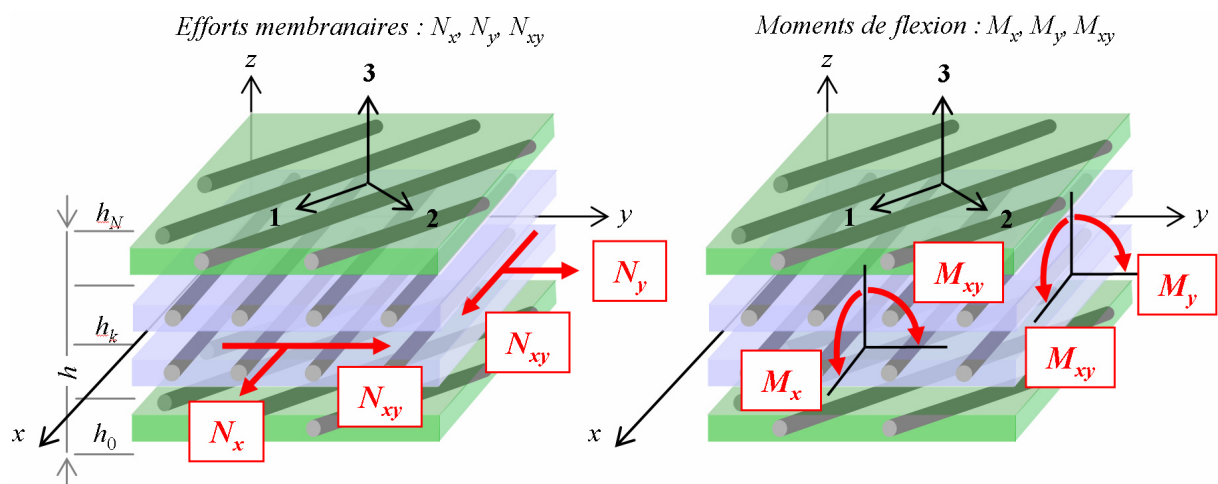


Figure I-5 : Hauteurs de plis, repère global (x,y,z) et repère local $(1,2,3)$ associé au plis supérieur orienté à -45° .

A l'échelle mésoscopique, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, les plis unidirectionnels sont supposés :

- présenter un comportement élastique isotrope transverse,
- travailler en contraintes planes ($\sigma_3 = \sigma_5 (= \tau_{13}) = \sigma_4 (= \tau_{23}) = 0$).

Le matériau est ainsi caractérisé à l'échelle du pli par ses propriétés élastiques E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} . La relation entre contraintes et déformations s'écrit, dans les axes d'orthotropie du pli, notés **(1,2,3)**, (voir Figure I-5) sous la forme (notations de Voigt) :

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{bmatrix} \quad (\text{où } \bar{\sigma}_6 = \bar{\tau}_{12} \text{ et } \bar{\varepsilon}_6 = \bar{\gamma}_{12}) \quad (I-1)$$

où les termes non nuls de la matrice de rigidité réduite du plis dans ses axes matériau s'écrivent :

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{Q}_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad \bar{Q}_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \text{ et } \bar{Q}_{66} = G_{12} \quad (I-2)$$

Pour le passage à l'échelle macroscopique, la CLT est basée sur la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love, qui postule que :

- les déplacements et déformations restent petits (hypothèse de petites perturbations),
- les interfaces entre les plis sont parfaites,
- la section de la plaque reste normale au plan moyen au cours du chargement (Figure I-6), ce qui implique la nullité des déformations transverses de cisaillement ($\bar{\varepsilon}_5 (= \gamma_{13}) = \bar{\varepsilon}_4 (= \gamma_{23}) = 0$).

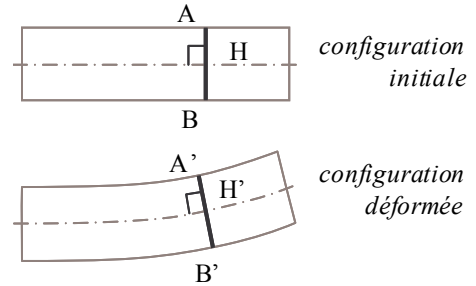


Figure I-6 : Hypothèse de Kirchhoff-Love.

Par conséquent, les déformations totales, exprimées dans le repère global, sont supposées linéaires dans l'épaisseur du stratifié et s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}^0 \quad (I-3)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et $\boldsymbol{\kappa}^0$ correspondent respectivement aux vecteurs des déformations et des courbures du plan moyen. Par définition, les flux d'effort résultants se déduisent des contraintes dans les plis par les relations intégrales suivantes :

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}(z) dz \quad (\text{efforts linéiques}), \quad \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}(z) z dz \quad (\text{moments linéiques}) \quad (I-4)$$

On déduit facilement des équations I-3 et I-4 les relations classiques de la théorie des stratifiés dans le cas de l'élasticité :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_x^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_y^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy}^0 \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \mathbf{Q}^{(k)} \\ \mathbf{B} = \sum_k \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}^{(k)} \\ \mathbf{D} = \sum_k \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}^{(k)} \end{cases} \quad (I-5)$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice ABD) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- le bloc A correspond au comportement de membrane,
- le bloc D correspond au comportement de flexion,
- le bloc B correspond aux termes de couplage entre les phénomènes de membrane et de flexion.

Ainsi, si B n'est pas nul, un effort de traction dans le plan moyen entraîne une flexion du stratifié. Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

- les termes A_{16} et A_{26} correspondent aux couplages plans entre traction et cisaillement,
- les termes D_{16} et D_{26} quantifient les couplages entre flexion et torsion de la plaque stratifiée.

Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception composite. Par exemple, lors du dimensionnement d'une plaque, les termes de couplages peuvent s'avérer pénalisants en engendrant une dépendance au signe du cisaillement. L'attitude classique consiste à annuler ces couplages lorsque cela est possible, les minimiser sinon. Les règles industrielles de conception des séquences d'empilement préconisent ainsi l'usage :

- de stratifiés symétriques par rapport à leur plan moyen afin d'annuler les couplages entre comportements de membrane et de flexion ($B = 0$),
- d'empilements équilibrés, c'est-à-dire présentant autant de plis orientés à $+\theta^\circ$ qu'à $-\theta^\circ$, où $\theta \in]0, 90[$, afin d'annuler les termes de couplage plan ($A_{16} = A_{26} = 0$).

L'équation I-5 permet de mettre en évidence que si le comportement de membrane du stratifié dépend uniquement des propriétés élastiques et de l'épaisseur des plis qui le composent, les blocs B et D dépendent largement de l'ordre d'empilement des plis. Jouer sur les rigidités de flexion et de couplage du composite à rigidité de membrane fixée constitue ainsi un problème combinatoire (de permutation des plis) spécifique de la mécanique des stratifiés.

Signalons que la CLT se généralise facilement aux cas de la thermoélasticité, de la viscoélasticité [Vinet 97], de l'endommagement [Ladevèze 86, Perreux 89, Allix 90, Maire 92], ou encore aux comportements évolutifs tels que la vieillissement [Schieffer 00].

1.1.2.b Capturer l'influence de l'empilement sur l'endommagement et la rupture du stratifié

Si les techniques d'évaluation des propriétés élastiques de membrane et de flexion des stratifiés sont aujourd'hui clairement établies, l'estimation des performances d'un stratifié en matière de sensibilité à l'endommagement ou de propriétés à rupture reste beaucoup moins consensuelle.

Un scénario d'endommagement des stratifiés

Les modes de dégradation des CMO stratifiés ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales et sont aujourd'hui clairement identifiés. On trouvera dans [Parvizi 78, Le Dantec 89, Berthelot 03], ou [Huchette 05] une description précise de ces phénomènes dont on ne donne ici qu'une rapide énumération. De façon générale, on distingue quatre phases dans le scénario d'endommagement d'une éprouvette lisse constituée de l'empilement de plis unidirectionnels (Figure I-7) :

1. la décohésion entre les fibres et la matrice et la microfissuration matricielle,
2. l'apparition de fissures transverses, parallèles aux fibres et traversant le pli, résultant de la coalescence de microdommages,
3. l'apparition et l'évolution de microdélaminages en pointe de fissure transverse au niveau des interfaces entre plis,
4. la ruine finale du stratifié par rupture des fibres, délaminage macroscopique ou rupture matricielle suivant le type de sollicitations et la stratification.

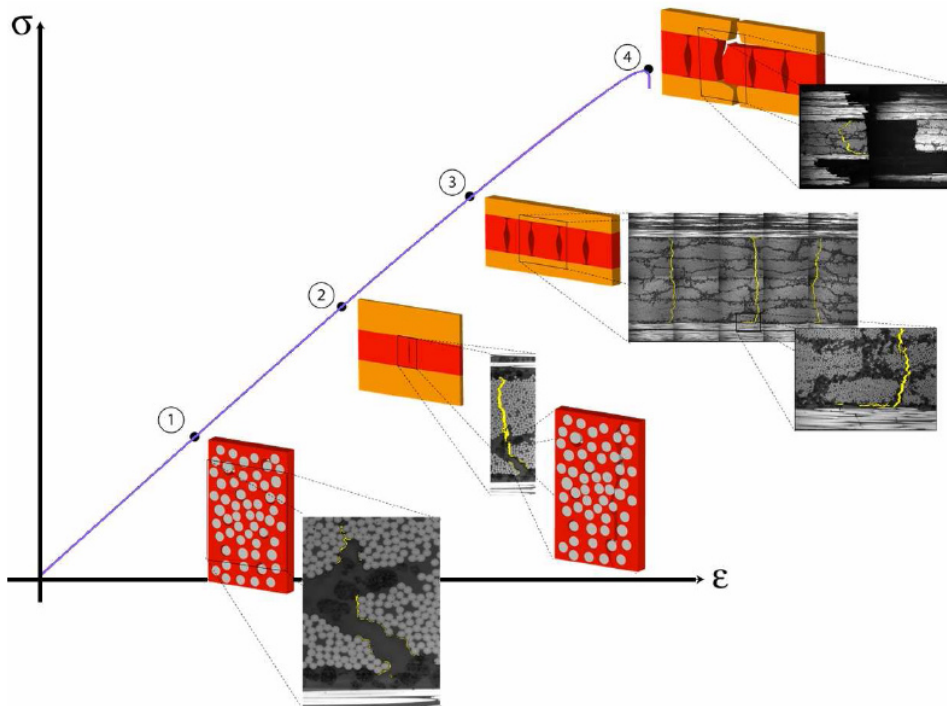


Figure I-7 : Un scénario d'endommagement au cours du chargement d'un composite stratifié [Huchette 05].

La séquence d'empilement, le procédé de fabrication, la nature de la matrice et des interfaces, l'environnement, etc. sont autant de facteurs qui influent sur l'ordre de création et la propagation des défauts et dégradations. De plus, la complexité des interactions entre les différents mécanismes d'endommagement est encore accrue par la complexité du chargement et celle de la géométrie de la structure.

Les démarches d'analyse de la tenue des stratifiés

La variété des démarches existantes reflète la complexité de l'architecture du matériau et le choix de la méthode à employer est fonction des attentes de l'utilisateur (Figure I-8). On cherche ici à définir à quel type d'approche avoir recourt dans la suite pour capturer l'influence de l'empilement sur l'endommagement et la rupture des stratifiés.

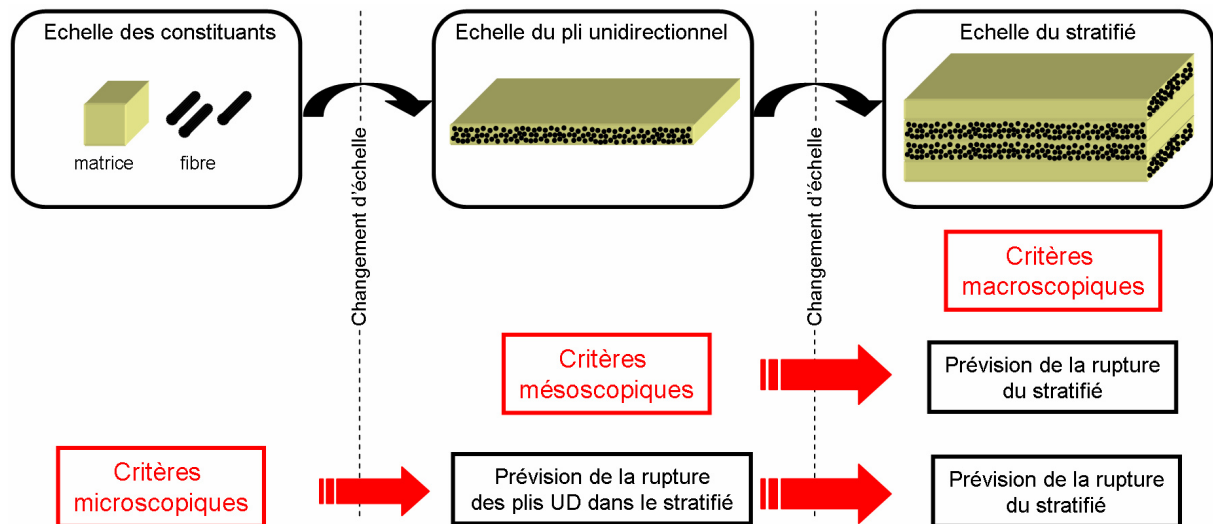


Figure I-8 : Les différentes échelles de la rupture du matériau stratifié (d'après [Laurin 05]).

La démarche classique d'analyse de la tenue structurale repose sur une *approche "fragile" de la rupture* (Figure I-9). L'approche la plus ancienne et la plus utilisée dans les bureaux d'étude, de par sa simplicité, consiste à employer un *critère de rupture macroscopique* (par exemple les critères de contraintes ou de déformations maximales, ou le critère de Tsai-Wu). Ces critères de rupture ont pour objectif de définir le domaine de résistance d'un stratifié donné, pour les chargements complexes, à partir d'essais simples à rupture, le plus souvent uniaxiaux, effectués sur ce stratifié. Ils n'ont donc aucun caractère prédictif en cas de changement d'empilement ou de nuance de matériau. L'identification expérimentale d'un critère s'avère ainsi d'autant plus coûteuse qu'elle doit être répétée pour chaque stratification envisagée. Cette démarche s'avère donc inadaptée pour l'optimisation.

Une évolution de ce type de méthodes consiste à employer un *critère de rupture mésoscopique*, définissant la résistance du pli UD. Les champs de contrainte et de déformation au sein des plis du stratifié sont déterminés par un calcul multiéchelle, soit par la CLT, soit par calcul Eléments Finis (EF). Dans ce second cas, les champs obtenus dépendent du choix de la loi de comportement mésoscopique. Le critère de rupture à l'échelle des plis est appliqué en post-traitement. Pour des nappes unidirectionnelles, il peut s'agir : soit d'un critère unique identifié à partir des propriétés mésoscopiques du pli, soit d'un multicritère, permettant de distinguer les différents mécanismes de ruine (par exemple, les critères de Hashin ou de Puck). Dans ce type d'approche la rupture du stratifié est assimilée à la première rupture de pli ou à la rupture d'un pli considéré comme critique.

Les approches fragiles ne prennent pas en compte le caractère progressif de la rupture du stratifié, c'est-à-dire l'impact du développement des différents mécanismes de rupture locale dans les plis sur le comportement macroscopique du matériau. Le plus souvent, un critère de première rupture de pli s'avère très conservatif alors que le critère de rupture du pli critique conduit à surestimer la résistance du stratifié. De plus, seuls les multicritères mésoscopiques développés spécifiquement pour les composites permettent de différencier les différents mécanismes d'endommagement évoqués plus haut.

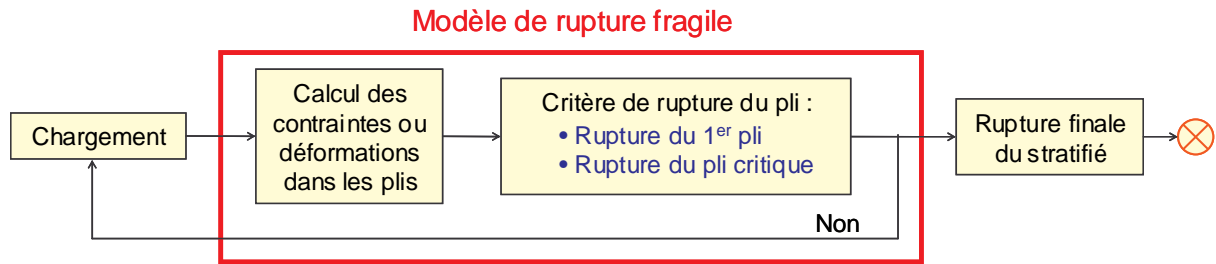


Figure I-9 : Principe de l'approche multiéchelle fragile de la rupture (d'après [Laurin 05]).

Les démarches modernes d'analyse de la tenue des matériaux stratifiés reposent sur une approche multiéchelle progressive de la rupture [Puck 98, Pinho 05, Laurin 05].

On distingue généralement deux familles d'approches progressives de la rupture. Les approches micromécaniques visent à prévoir à partir des propriétés des constituants la rupture des plis, voire du stratifié [Mayes 04]. Ces approches sont prometteuses car prédictives aussi bien en cas de changement d'empilement que de nuance de matériau, mais l'identification des propriétés des constituants reste très délicate, et trop peu fiable, et les modèles trop complexes pour permettre de réaliser de véritables calculs de structure.

Dans le cas des approches mésomécaniques, il s'agit de prévoir la rupture du stratifié à partir des propriétés des plis et d'estimer ainsi l'influence des changements d'empilement. L'approche mésomécanique continue consiste à décrire les scénarios d'endommagement des plis par l'intermédiaire de variables continues traduisant l'abaissement des propriétés matériau sous l'effet des dégradations [Gosse 01]. L'approche discrète se place dans le cadre de la mécanique de la rupture et propose d'étudier l'initiation et la propagation des surfaces de rupture pour les phénomènes d'endommagement discrets à l'échelle du pli.

Une spécificité des approches progressives réside dans la nécessité de définir un critère pertinent d'arrêt du calcul, ou critère de défaillance (perte de fonctionnalité de la structure), lorsque la rupture d'un pli n'est pas équivalente à la rupture finale du matériau (Figure I-10).

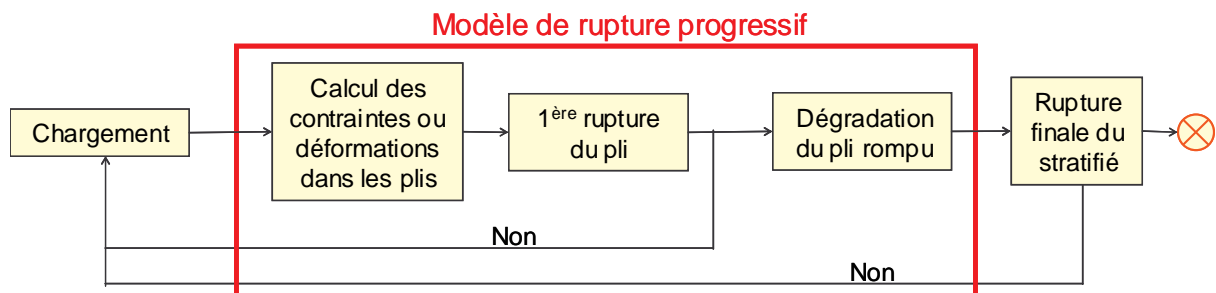


Figure I-10 : Principe de l'approche multiéchelle progressive de la rupture (d'après [Laurin 05]).

Au final, la stratégie de calcul utilisée est nécessairement multiéchelle afin de prendre en compte l'impact du comportement individuel de chacun des plis sur le comportement global du stratifié. Dans la suite de ce mémoire, on utilise l'approche multiéchelle progressive de la rupture développée par [Laurin 05], dont les caractéristiques essentielles sont :

- l'emploi d'un multicritère de rupture spécifiquement développé pour la prévision de la rupture d'un pli au sein du stratifié. Ce critère, qui nécessite l'identification des cinq résistances du pli unidirectionnel, X_t , X_c , Y_t , Y_c et S_c , permet de distinguer les ruptures en mode fibre et en mode

interfibre, et pour chaque mode, les mécanismes de rupture en traction et en compression. Son originalité réside notamment dans l'introduction de couplages entre les modes de ruine

- la prise en compte, pour chaque mécanisme, des ruptures progressives des plis sur le comportement mécanique au moyen d'un modèle d'endommagement continu.

I.1.3 VERS LE CALCUL ET L'OPTIMISATION DES STRUCTURES COMPOSITES

A ce stade, on a identifié les variables permettant de caractériser l'arrangement des fibres dans les stratifiés et on s'est doté des modèles matériaux nécessaires à la prise en compte de l'influence de l'empilement sur le comportement et la ruine des stratifiés. Il convient maintenant de passer aux échelles supérieures et à l'analyse des structures à proprement parler.

I.1.3.a Des stratégies de calcul multiniveau pour des structures complexes

L'objectif de cette thèse consiste à développer des outils spécifiques pour la conception de structures de type industriel en s'appuyant sur des modèles de comportement fins d'un point de vue physique. On s'intéresse donc à des structures de grande taille, par rapport aux éprouvettes de laboratoire usuelles, et de géométrie beaucoup plus complexe. Dans ce contexte, obtenir une description correcte des champs de contraintes et de déformations suppose de réaliser les calculs avec des maillages suffisamment fins. Il s'avère alors nécessaire d'utiliser des stratégies de calcul adaptées afin d'éviter l'explosion des temps de calcul.

En particulier, il est clair que le calcul d'une structure composite complexe (et *a fortiori* son optimisation) nécessite une décomposition en sous-problèmes. La Figure I-11 montre cette décomposition dont le lien est évident avec les approches multiéchelles du comportement du matériau. La procédure comporte généralement deux étapes :

- la réalisation d'un calcul grossier sur l'ensemble de la structure. Le plus souvent, le calcul est réalisé en utilisant un comportement élastique et des modélisations très frustes pour certains détails structuraux (par exemple, utilisation d'éléments ressorts pour représenter les boulons dans les assemblages),
- la réalisation d'un second calcul, plus fin à la fois en matière de maillage et de lois de comportement, ne portant que sur une zone d'intérêt. Les conditions aux limites de ce nouveau calcul sont extraites du calcul précédent.

Il est évident que les clés des stratégies de calcul multiniveau résident, d'une part, dans le dialogue, éventuellement itératif, entre les différents niveaux et, d'autre part, dans la validité du calcul global qui est effectué sous des hypothèses très simplificatrices.

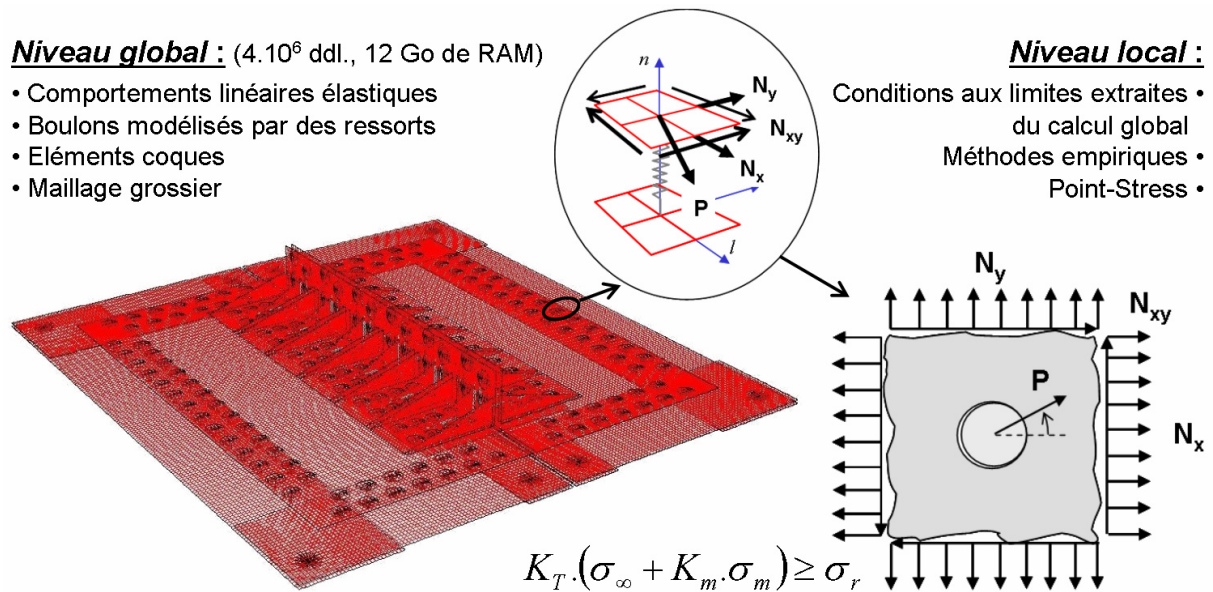


Figure I-11 : Décomposition et calcul multiniveau d'une structure complexe.

I.1.3.b De la conception nominale à l'optimisation multiobjectif des empilements

De façon générale, les critères classiques de dimensionnement et d'optimisation des structures, aussi bien composites que métalliques, sont des critères de masse, de raideur, de résistance et de coût. Dans ce que nous avons appelé, en introduction de ce mémoire, la conception nominale de la structure, le problème de conception est entièrement défini par le cahier des charges comme un ensemble de valeurs minimales à atteindre sur ces différents critères. La conception consiste donc à trouver une solution qui remplisse un ensemble de contraintes données.

Par rapport à la conception nominale, la conception optimale suppose de rajouter au problème de faisabilité un ensemble d'objectifs à améliorer. Il s'agit ainsi souvent de minimiser la masse de la structure. Mais gagner en rigidité, en résistance ou en coûts peut s'avérer tout aussi intéressant. Or ces différents objectifs sont antagonistes. Il faut donc dégager un compromis entre ces différents critères. Par exemple, est-il préférable d'atteindre un gain de masse de 10 % par rapport à la structure nominale tout en assurant au plus juste les autres contraintes du dimensionnement, ou peut-on envisager des gagner simultanément 5 % sur tous les critères? Quels sont les compromis envisageables? Doit-on nécessairement décider du compromis final avant d'entrer dans une démarche d'optimisation, ou existe-t'il des méthodes permettant de trouver tous les compromis intéressants, ou du moins un échantillon représentatif de ces compromis? La partie suivante de ce chapitre est consacrée aux méthodes d'optimisation multiobjectif, naturellement dédiées à ce type de questionnement.

I.2 LES METHODES D'OPTIMISATION MULTIOBJECTIF

Le bref survol des méthodes d'optimisation multiobjectif proposé dans cette section vise, d'une part, à donner un aperçu de l'ampleur et de la diversité des travaux publiés dans le domaine et, d'autre part, à identifier les méthodes susceptibles d'être adaptées à l'optimisation de structures composites, c'est-à-dire capables de gérer un grand nombre de variables, certaines discrètes et d'autres continues, et d'objectifs, le plus souvent non-dérivables. On procède pour cela en quatre points :

- la formulation du problème d'optimisation dans son cadre le plus général ainsi que de la terminologie associée,
- la définition de la notion d'optimalité multiobjectif et la formalisation mathématique de la notion de compromis entre des objectifs antagonistes,
- la présentation des méthodes permettant d'accélérer la recherche de l'optimum par rapport à une recherche aléatoire,
- la présentation des méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs et les différents façon de coupler recherche de l'optimum et prise de décision multiobjectif.

I.2.1 CAS GENERAL : LE PROBLEME MULTIOBJECTIF CONTRAINT

Formuler un problème d'optimisation revient à d'identifier clairement trois ingrédients : les variables d'optimisation, les objectifs du problèmes et les contraintes (Figure I-12)². Sans perte de généralité, on se place dans la suite dans le cadre d'un problème de maximisation. En effet, tout problème de minimisation s'y ramène en constatant que :

$$\max_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} (-f(x)) \quad (I-6)$$

Définition I-1 : Le problème d'optimisation multiobjectif contraint

Considérons un ensemble de n variables (les variables de décision), une ensemble de k fonctions-objectif et un ensemble de m contraintes. Les fonctions-objectif et les contraintes sont des fonctions des variables de décision. Le problème d'optimisation multiobjectif général consiste alors à :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})), \\ \text{sous} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})) \geq \mathbf{0}, \\ \text{où} & \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X}, \text{ avec } \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \\ & \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbf{Y}, \text{ avec } \mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}^k. \end{array}$$

On appelle \mathbf{x} le vecteur de décision, \mathbf{y} le vecteur objectif. \mathbf{X} correspond à l'espace de décision et \mathbf{Y} à l'espace des objectifs.

Définition I-2 : Les espaces réalisables

L'espace des valeurs réalisables \mathbf{X}_f est défini comme l'ensemble des vecteurs de décision \mathbf{x} satisfaisant les contraintes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. On appelle espace des objectifs réalisables \mathbf{Y}_f l'image de \mathbf{X}_f par la fonction-objectif \mathbf{f} .

² Les définitions et la terminologie présentées dans cette section correspondent aux formulations les plus répandues dans la littérature traitant de l'optimisation multiobjectif. Se reporter par exemple à [Colette 02].

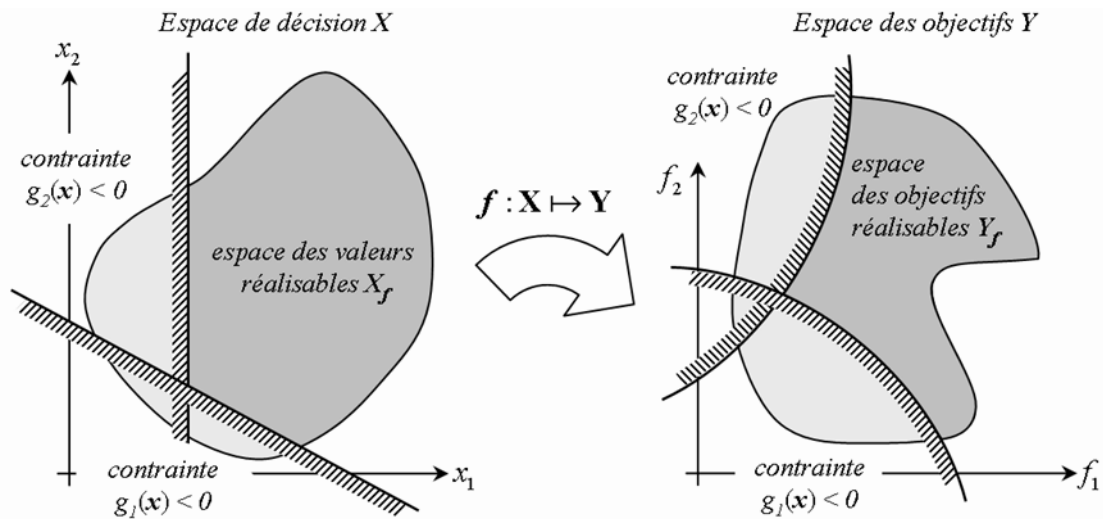


Figure 1-12 : Le problème multiobjectif : variables, objectifs, contraintes et domaines réalisables.

Les trois ingrédients (variables, objectifs et contraintes) ne sont pas nécessaires pour la définition d'un problème d'optimisation. En effet, s'il est indispensable de définir les variables de décision, la donnée de l'un des deux autres ingrédients est suffisante :

- dans le cas où seules sont stipulés des contraintes, on se trouve confronté à un problème de faisabilité dans lequel il ne s'agit pas d'optimiser quelque objectif que ce soit, mais plutôt de trouver au moins une solution réalisable,
- dans le cas où seuls les objectifs sont stipulés on rentre dans le champ de l'optimisation sans contraintes pour lequel de nombreux algorithmes sont disponibles, le plus souvent à la base des méthodes de résolution des problèmes sous contraintes.

Dans le cas général du problème d'optimisation contraint, il est fréquent de retrouver deux phases analogues au cours de la résolution. On observe ainsi souvent une première phase de recherche consistant à explorer l'espace de décision pour trouver des solutions réalisables et une seconde phase consistant à intensifier la recherche autour de ces points.

La reformulation du problème de conception en un problème d'optimisation est fondamentale pour le choix de la méthode de résolution et l'efficacité de celle-ci. Un problème de conception nominal se ramène à un problème de faisabilité. Un problème de conception optimisée correspond à un problème d'optimisation dans la formulation duquel les critères de dimensionnement sont intégrés en tant qu'objectifs ou contraintes.

1.2.2 L'OPTIMALITE MULTI-OBJECTIF : CLASSER DES COMPROMIS

De façon générale, la notion d'optimalité dépend de la façon dont les possibilités sont comparées et ordonnées, c'est-à-dire de la façon dont le concepteur (ou décideur) organise ses préférences. Le plus souvent, ces préférences ne sont pas explicitées car elles sont flagrantes. Ainsi, pour un problème mono-objectif, les différentes solutions peuvent être totalement ordonnées selon la valeur (réelle) de leur (unique) fonction-objectif. Cependant, pour un problème multicritère, du fait de l'antagonisme entre certains objectifs, il n'existe pas de définition aussi évidente de la solution optimale. Travailler à la résolution du problème multiobjectif conduit à l'obtention d'une multitude de solutions qui constituent autant de compromis entre les différents objectifs. Définir une notion d'optimalité multiobjectif revient donc à se doter d'un outil de classement de ces compromis.

Cette problématique rentre dans le champ de la *théorie de la décision*. Dans ce cadre, la notion d'optimalité est définie au moyen d'une structure de préférence³. Au fondement de la théorie de la prise de décision en optimisation multiobjectif on trouve l'hypothèse que, confronté à une alternative quelconque, le décideur :

- préfère strictement une possibilité à l'autre,
- est indifférent,
- considère que les deux possibilités sont incomparables.

Une telle structure de préférence peut être entièrement définie par une relation d'ordre. Optimiser revient donc à chercher les éléments maximaux de l'espace des valeurs réalisables ordonné par la relation de préférence. En optimisation monoobjectif, l'espace des valeurs réalisables \mathbf{X}_f est ordonné d'après la valeur de la fonction-objectif f : quelque soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{X}_f$, soit $f(\mathbf{u}) \geq f(\mathbf{v})$, soit $f(\mathbf{v}) \geq f(\mathbf{u})$. Le but est ici de trouver le vecteur de décision qui donnera la valeur maximale de f . Remarquons que la relation d'ordre \geq sur \mathbb{R} est totale. Il n'y a donc aucun cas d'incomparabilité. Face à une alternative $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{X}_f$ le décideur va : soit préférer \mathbf{u} à \mathbf{v} si $f(\mathbf{u}) > f(\mathbf{v})$ (et inversement), soit se montrer indifférent si $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$.

1.2.2.a La dominance de Pareto

La situation change lorsque plusieurs objectifs sont impliqués. L'extension de la relation \geq sur \mathbb{R}^k ne constitue plus un ordre total mais partiel.

Définition I-3 : Relations sur \mathbb{R}^k

Soit un couple de vecteurs (\mathbf{a}, \mathbf{b}) de \mathbb{R}^k , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathbf{b} & \text{ssi } \forall i \in \{1, \dots, k\}, a_i = b_i \\ \mathbf{a} \geq \mathbf{b} & \text{ssi } \forall i \in \{1, \dots, k\}, a_i \geq b_i \\ \mathbf{a} > \mathbf{b} & \text{ssi } \mathbf{a} \geq \mathbf{b} \text{ et } \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Les relations \leq et $=$ sont définies de manière analogue.

En conséquence, et contrairement au cas monoobjectif qui n'offre que deux possibilités face à une alternative, les problèmes multiobjectifs en offrent trois, l'incomparabilité étant permise : $f(\mathbf{u}) > f(\mathbf{v})$, $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, ou $f(\mathbf{u}) \not\geq f(\mathbf{v})$ et $f(\mathbf{v}) \not\geq f(\mathbf{u})$. Ces trois situations permettent de définir une structure de préférence formalisée par la notion de dominance de Pareto.

Définition I-4 : Dominance de Pareto

Soit un couple de vecteurs de décision $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{X}_f$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \succ \mathbf{v} \text{ (u domine v)} & \text{ssi } f(\mathbf{u}) > f(\mathbf{v}) \\ \mathbf{u} \succeq \mathbf{v} \text{ (u domine faiblement v)} & \text{ssi } f(\mathbf{u}) \geq f(\mathbf{v}) \\ \mathbf{u} \sim \mathbf{v} \text{ (u et v sont incomparables)} & \text{ssi } f(\mathbf{u}) \not\geq f(\mathbf{v}) \text{ et } f(\mathbf{v}) \not\geq f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Les définitions utiles au problème de minimisation (\prec, \preceq, \sim) sont analogues.

³ Le lecteur intéressé par ces aspects théoriques et leur formalisation mathématique dans un contexte d'optimisation multicritère pourra se référer à [Ehrgott 00a].

Sur la Figure I-13 ci-contre, la région de l'espace des objectifs dominée par la solution A est représentée en gris clair. La région contenant les solutions qui dominent A apparaît en gris foncé. Les deux régions blanches contiennent les vecteurs objectifs dont les antécédents par f sont incomparables avec le vecteur de décision associé à A .

Muni de la notion de dominance de Pareto, il devient facile d'introduire un critère d'optimalité. Un vecteur de décision est optimal s'il appartient à l'ensemble des éléments maximaux de l'espace des valeurs réalisables ordonné par la relation de dominance de Pareto. C'est-à-dire qu'un vecteur de décision est optimal s'il n'existe aucun autre vecteur qui le domine au sens de Pareto, ou encore qu'un compromis est optimal s'il est impossible de l'améliorer pour l'un, quelconque, des objectifs sans en dégrader au moins un autre.

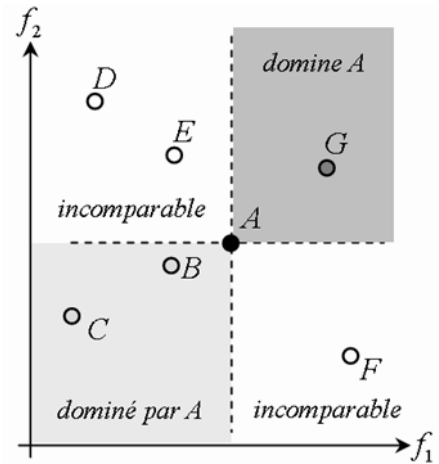


Figure I-13 : Visualisation, dans l'espace des objectifs, des relations possibles par rapport à la solution A .

Définition I-5 : Optimalité au sens de Pareto

Un vecteur de décision $u \in X_f$ est dit non dominé par rapport à l'ensemble $V \subseteq X_f$ ssi :

$$\nexists v \in V / v \succ u$$

Le vecteur u est dit optimal au sens de Pareto s'il est non dominé par rapport à X_f .

Dans la suite, on omettra de préciser l'ensemble V lorsqu'il est évident compte tenu du contexte. Les points $\{D, E, F, G\}$, représentés en blanc sur la Figure I-13, sont optimaux au sens de Pareto. Ces points sont tous incomparables les uns par rapport aux autres. Ceci constitue la principale différence avec l'optimisation mono-objectif : au lieu d'une unique solution optimale, on se trouve confronté à un ensemble de compromis optimaux impossible à classer sans faire intervenir d'information d'ordre supérieur, en hiérarchisant les objectifs par exemple.

Définition I-6 : Ensemble des compromis optimaux et front de Pareto

L'ensemble des compromis optimaux par rapport à X_f est constitué de l'ensemble des vecteurs de décision optimaux au sens de Pareto.

La surface de compromis, ou front de Pareto, est constituée de l'image dans l'espace des objectifs de l'ensemble des compromis optimaux.

L'ensemble des compromis optimaux contient les solutions globalement optimales, c'est-à-dire optimales par rapport à l'ensemble des valeurs réalisables X_f entier. Cependant, comme dans le cas mono-objectif, on peut rencontrer des optima locaux qui constituent un ensemble de solutions non dominées par rapport à un certain voisinage. Cette notion est illustrée sur la Figure I-14. Remarquons au passage que les optima locaux n'appartiennent pas nécessairement au front global. Les problèmes multi-objectifs, à l'image des problèmes mono-objectifs, peuvent ainsi s'avérer multimodaux et présenter de nombreux optima locaux.

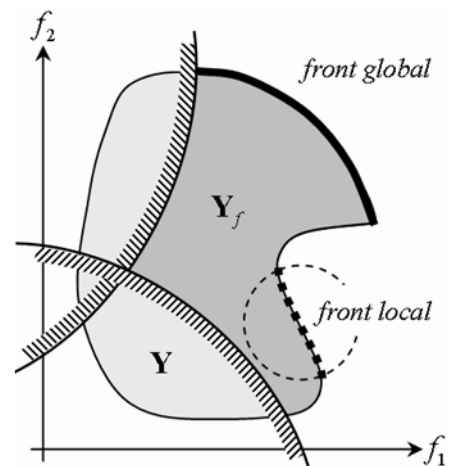


Figure I-14 : Front de Pareto local et front de Pareto global.

1.2.2.b Alternatives à la notion de dominance

La mise en œuvre de la notion de dominance de Pareto soulève en général deux critiques principales dans les travaux traitant d'optimisation multiobjectif. D'une part, la relation de dominance n'offre aucune liberté dans sa définition. Tous les objectifs sont placés sur un pied d'égalité et il n'est pas possible d'exprimer de préférence vis-à-vis d'un objectif par rapport à un autre. D'autre part, l'ensemble des compromis optimaux s'avère souvent de très grande taille, voire infini lorsque les espaces réalisables sont continus. Or, gérer des ensembles de points de grande taille est problématique, aussi bien du point de vue du décideur que d'un point de vue informatique. De nombreuses relations dérivées de la relation de dominance de Pareto ont été proposées dans le but de pallier l'une ou l'autre de ces deux problématiques. A chacune de ces relations est associée une notion d'optimalité définie de façon analogue à l'optimalité au sens de Pareto. Ces relations trouvent principalement leur utilité dans le cadre de la problématique du tri d'un ensemble donné de solutions. Dans ce contexte, toutes conduisent à des sous-ensembles de l'ensemble des compromis optimaux au sens de Pareto⁴.

La *théorie des jeux* constitue une exception notable en offrant une alternative à la notion de compromis : l'équilibre. Là encore, divers types d'équilibres existent. La définition la plus utilisée en optimisation multiobjectif correspond à l'*équilibre de Nash* dans un *jeu non-coopératif*. Pour un problème à k objectifs, la stratégie de Nash consiste à faire intervenir k joueur. A chaque joueur sont attribués un objectif et un groupe de variables de décision. Les joueurs jouent successivement. Chacun des joueurs doit, à son tour, optimiser son objectif en jouant sur les variables qui lui ont été attribuées, toutes les autres variables étant fixées par les autres joueurs. L'équilibre de Nash est atteint lorsqu'il n'y a plus de possibilité d'amélioration. Une façon élégante de rechercher l'équilibre de Nash par un algorithme évolutionnaire (Cf. 1.2.3.c) est décrite dans [Sefrioui 96].

La recherche du front de Pareto semble toutefois plus pertinente pour nos problèmes que celle de l'équilibre de Nash. En effet, la dominance de Pareto permet de déterminer un ensemble de compromis optimaux parmi lesquels il est possible d'effectuer un choix correspondant à des critères non écrits. *A contrario*, dans les travaux de Périaux, une exécution du processus d'optimisation conduit à un seul équilibre. De plus dans l'équilibre de Nash, la notion de compromis se tapit dans le choix de l'attribution des groupes de variables aux joueurs. Dans la suite de ce mémoire on retient donc la notion de dominance de Pareto pour la recherche des compromis optimaux.

1.2.3 LES METHODES DE RECHERCHE

Les méthodes de recherche permettent d'échantillonner l'espace des objectifs réalisables à la recherche de l'optimum exact ou d'une approximation de celui-ci. Dans la mesure où la notion d'optimalité est parfaitement évidente dans le cas d'un objectif unique, ces méthodes correspondent exactement aux méthodes de résolution des problèmes monobjectifs. Afin de converger vers l'optimum, ces méthodes doivent présenter à la fois :

- une *capacité d'exploration* suffisante pour explorer l'ensemble de l'espace de recherche (au mieux l'espace des valeurs réalisables X_f , au pire l'espace de décision X complet). Cette aptitude a tendance à ralentir la convergence, mais est nécessaire pour éviter le piégeage par les optima locaux,

⁴ Citons par exemple la relation de cône-dominance [Ehrgott 00a; Branke 00], la relation d' \mathcal{E} -dominance [Laumanns 03], la relation de dominance partielle et la relation de α -dominance [Othmani 98], la dominance lexicographique et les relations de dominance basées sur la minimisation d'une fonction d'utilité [Colette 02].

- une *capacité d'exploitation* satisfaisante afin d'être à même d'utiliser les résultats déjà obtenus pour faire converger plus rapidement l'algorithme vers l'optimum.

Le compromis entre maintien de la diversité et convergence se traduit en termes d'*efficacité* et d'*efficience*. L'efficacité caractérise la capacité de la méthode à trouver l'optimum avec précision. L'efficience caractérise sa capacité à trouver l'optimum ou un voisinage de l'optimum en un temps de calcul restreint. L'efficience permet ainsi d'assurer la *parcimonie* de la méthode, c'est-à-dire de réduire le nombre d'évaluations nécessaires, où une *évaluation* correspond au calcul des objectifs et des contraintes pour une solution. D'un point de vue pratique, c'est souvent l'efficience qui prime.

On distingue généralement deux principales familles de méthodes de recherche : les *méthodes exactes* et les *méthodes approchées* (certains auteurs parlent de méthodes déterministes et de méthodes stochastiques). Les premières conduisent toujours au même optimum tandis que les secondes, ayant en partie un caractère stochastique, peuvent conduire à des solutions différentes du même problème [Berro 01; Dreo 03] :

- les méthodes exactes se caractérisent par une exploration méthodique de l'espace de recherche selon un processus prédéfini. Citons, par exemple, les méthodes de gradient, la méthode du simplexe (Nelder Mead) ou encore l'algorithme de séparation - évaluation (Branch and Bound). Ces méthodes ont le plus souvent un comportement local, c'est-à-dire qu'elles convergent vers l'optimum le plus proche de la solution initiale. Pour éviter ce phénomène de piégeage par un optimum local, des améliorations ont été apportées, telles les méthodes de "multistart" ou du "tunneling" (Figure I-15), mais celles-ci restent coûteuses, donc peu efficaces. Les méthodes déterministes peuvent être très efficaces, mais pour des problèmes de grande taille, souvent multimodaux; la probabilité de trouver l'optimum global dépend essentiellement d'une bonne connaissance du problème.

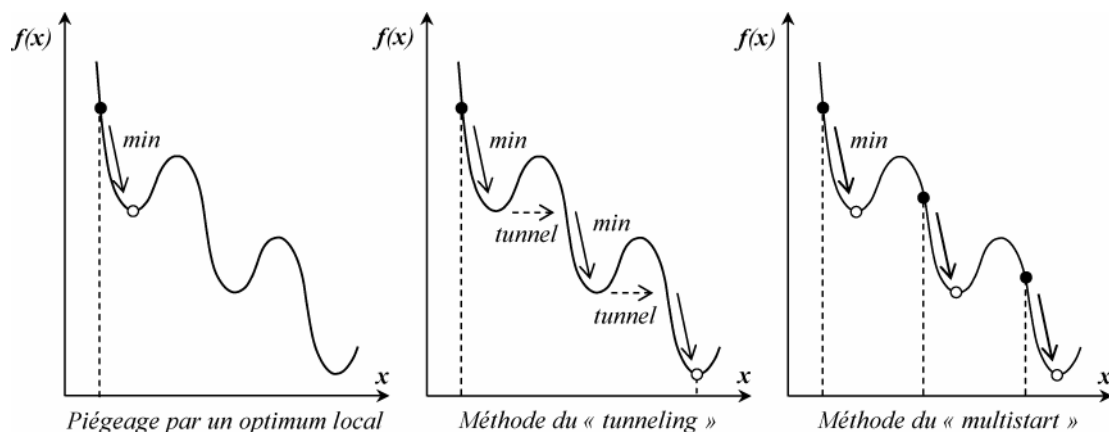


Figure I-15 : A gauche : piégeage par un optimum local pour un problème de minimisation. Au centre : méthode du "tunneling". La principale difficulté réside dans l'élaboration de la fonction de tunneling. A droite : la méthode "multistart". La principale difficulté réside dans le choix du maillage de l'espace de recherche (en noir les solutions initiales, en blanc les optima découverts).

- les méthodes approchées sont caractérisées par un processus (ou générateur) de création aléatoire ou pseudo-aléatoire (c'est-à-dire conditionnée par certaines règles) des points dans l'espace de recherche et une méthode (heuristique ou métaheuristique) assurant la convergence de l'algorithme. Ces méthodes sont utilisées pour trouver une solution approchée de l'optimum global dans le cas de problèmes fortement multimodaux et à grand nombre de variables. La convergence de l'algorithme est assurée soit par une heuristique (méthode de Monte-Carlo) soit par une métaheuristique (algorithmes évolutionnaires, recuit simulé, recherche tabou, colonies de

fourmis, etc.). Il s'agit généralement de méthodes directes permettant de travailler sans dérivation et même sans formulation analytique des fonctions-objectif. Elles sont par conséquent adaptées aux problèmes combinatoires comme aux problèmes non-linéaires, définis sur des espaces aussi bien continus que discrets ou mixtes, avec ou sans contraintes. C'est donc vers ce type de méthodes que l'on choisit de nous orienter pour l'optimisation des structures composites.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la présentation de quelques méthodes approchées parmi les plus classiques. L'exposé vise à mettre en valeur les concepts appliqués au guidage de la recherche aléatoire pour augmenter l'efficacité des algorithmes⁵.

1.2.3.a La méthode de Monte-Carlo

La *méthode de Monte-Carlo* (en fait, tout une gamme de méthodes [Fishman 95] consiste à rechercher l'optimum d'une fonction, par une heuristique d'essais - erreur, en générant une suite aléatoire de solutions suivant une loi statistique (en général uniforme). C'est la technique la plus simple à mettre en œuvre lorsque la taille de l'espace de recherche dépasse les capacités d'énumération disponibles. Cette méthode présente de bonnes capacités d'exploration mais aucune capacité d'exploitation. Elle nécessite un nombre d'évaluations très important.

Pour pallier ce manque d'efficacité on privilégie les métaheuristiques pour guider la recherche et acquérir de réelles capacités d'exploitation. Deux classes de métaheuristiques sont présentées de façon succincte dans la suite : les méthodes de recherche par voisinages et les algorithmes évolutionnaires.

1.2.3.b Les méthodes de recherche par voisinages

Nous présentons ici dans leurs principes quelques métaheuristiques basées sur des concepts de descente et, plus généralement, de voisinage. Ces méthodes font évoluer la configuration courante de manière itérative en la remplaçant par une autre issue de son voisinage : on parle de *mouvement*. Définir un voisinage consiste à en caractériser tous les éléments. Pour ce faire, on utilise le plus souvent une fonction de voisinage V qui à un élément x de l'espace de recherche X_f associe l'ensemble $V(x) \subseteq X_f$ des points "proches" de x . Le réglage de la taille du voisinage conditionne le bon fonctionnement de la méthode. C'est donc dans la définition de la fonction de voisinage que réside toute la difficulté. En effet, plus le voisinage est important et plus il requiert de place mémoire et de temps de calcul pour son évaluation. Certaines méthodes comme le *Recuit Simulé* ne supposent de n'évaluer que quelques points de chaque voisinage mais d'autre, comme la *Recherche Tabou*, préconisent l'examen de tous les voisins pour réaliser un mouvement.

La méthode de descente ou "Hill-Climbing"

Il s'agit d'une méthode simple permettant d'atteindre l'optimum local le plus proche de la solution initiale. Intuitivement, il est facile d'appréhender le principe de fonctionnement de la méthode en constatant que lors d'une promenade en montagne, pour trouver le sommet le plus proche de soi, il suffit de monter tant que cela est possible (pour la version anglaise de l'histoire). L'algorithme consiste ainsi à sélectionner à chaque itération une nouvelle solution, meilleure que la solution courante, dans un voisinage de celle-ci. Ce mouvement est répété jusqu'à aboutir à un voisinage ne présentant aucune possibilité d'amélioration.

⁵ Pour une présentation plus approfondie, le lecteur est invité à consulter les références [Michalewicz 04], pour les méthodes de recherche en générale, et [Dreo 03; Glover 03], pour les métaheuristiques en particulier.

Diverses méthodes existent pour tenter de se rapprocher de l'optimum global. On peut, par exemple, recommencer la recherche à partir d'un nouveau point initial (technique de *relance*) ou autoriser de temps en temps un mouvement aléatoire (technique du *chemin aléatoire*). Les méthodes de *Recherche à Voisinage Variables* [Hansen 03] constituent une évolution de la méthode de descente dont le but est d'échapper au piègeage par un optimum local en travaillant avant chaque mouvement sur un ensemble de voisinages de taille croissante $V_k, k = 1, \dots, k_{\max}$.

La descente est une méthode largement utilisée qui permet avec un temps de développement assez court de bien dégrossir un nouveau problème et de calculer rapidement une première approximation de l'optimum global.

Le recuit simulé

Le *recuit simulé* [Kirkpatrick 83] (ou *SA* pour *Simulated Annealing*) s'inspire de la technique du recuit utilisée par les métallurgistes pour obtenir un état solide "bien ordonné" d'énergie minimale. Il s'agit d'un algorithme itératif qui procède par améliorations successives de la solution courante tout en acceptant de façon contrôlée de dégrader celle-ci. Le processus est piloté par une loi de réduction de la température. A chaque itération une nouvelle solution est sélectionnée dans un voisinage de la solution courante. Si cette solution correspond à une amélioration elle est automatiquement conservée. Dans le cas contraire, sa probabilité d'acceptation est fonction décroissante de la température. La recherche débute ainsi à température élevée par une phase d'exploration permettant potentiellement d'échapper au piègeage par un optimum local. La loi de réduction de la température gouverne ensuite la transition vers plus d'exploitation.

De cette méthode, c'est l'idée de piloter le comportement de l'algorithme en jouant sur son paramétrage qui nous paraît particulièrement intéressante⁶.

La recherche tabou

La méthode de *recherche tabou* (ou *TS* pour *Tabu Search*) a été formalisée par [Glover 86]. Sa principale particularité tient dans la mise en œuvre de mécanismes inspirés de la mémoire humaine. Son fonctionnement est dérivé de celui de la méthode de descente. A chaque itération, la recherche Tabou consiste à retenir le meilleur élément du voisinage considéré même si celui-ci dégrade la solution courante. Ceci permet d'échapper aux optima locaux mais peut être à l'origine de cycles. Afin de remédier à ce problème, les configurations visitées sont mémorisées dans une mémoire à court terme : la *liste Tabou*. Pour des raisons de temps de calcul et de place mémoire, ne sont stockées que certaines caractéristiques des configurations visitées, en conséquence de quoi toutes les configurations possédant ces attributs deviennent taboues, y compris celles qui n'ont jamais été visitées. Pour pallier ce défaut, un mécanisme particulier, l'*aspiration*, est mis en place. Celui-ci permet de révoquer le statut tabou d'une configuration lorsque les circonstances s'y prêtent, par exemple si celle-ci est meilleure que la meilleure configuration rencontrée jusqu'alors.

La méthode tabou constitue une métaheuristique flexible qui permet d'incorporer aisément des connaissances propres au problème traité. De nombreux cas d'application de la recherche tabou sont disponibles dans la littérature (par exemple dans [Gendreau 03]).

⁶ Notons que le recuit simulé offre d'excellents résultats sur des problèmes pratiques de grande taille, notamment en électronique ou en traitement d'image (se reporter à [Dreo 03] pour une liste d'exemples référencés).

I.2.3.c Les Algorithmes Evolutionnaires

La classe des *Algorithmes Evolutionnaires* (AE) regroupe une grande diversité de méthodes dont les plus célèbres sont les *Algorithmes Génétiques* (AG), popularisés par [Goldberg 89]. De façon générale, trois éléments caractérisent un algorithme évolutionnaire :

- le maintien d'un ensemble de solutions candidates,
- le processus de sélection des meilleures solutions en fonction de leur qualité,
- leur manipulation par des opérateurs génétiques, le plus souvent de type croisement et mutation.

Par analogie avec la théorie darwinienne de l'évolution, on appelle *individu* une solution candidate et *population* un ensemble de solutions. Chaque individu représente une solution possible, c'est-à-dire un vecteur de décision du problème considéré, encodée de façon à permettre une manipulation aisée. Les solutions sont généralement encodées sous forme de vecteurs, réels ou binaires, ou d'arbres. Une population constitue alors un ensemble de vecteurs $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$, avec \mathbf{I} l'*espace des individus* constitué de l'ensemble des vecteurs possibles. Les répétitions sont permises au sein d'une même population.

La qualité d'un individu est représentée par une valeur scalaire : la *fonction de qualité*, notée F_i pour l'individu \mathbf{i} . Celle-ci est calculée par rapport aux fonctions-objectif et aux contraintes. Il est donc nécessaire de pouvoir décoder chaque individu $\mathbf{i} \in \mathbf{I}$ et remonter au vecteur de décision $\mathbf{x}_i = \mathbf{m}(\mathbf{i})$ afin de calculer le vecteur objectif $\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ sur lequel appliquer la fonction de qualité (Figure I-16). Dans la terminologie associée à l'analogie darwinienne, le vecteur \mathbf{i} correspond au *génotype* de l'individu, transcrit en un *phénotype* \mathbf{x}_i à partir duquel estimer les *performances* \mathbf{y}_i de la solution.

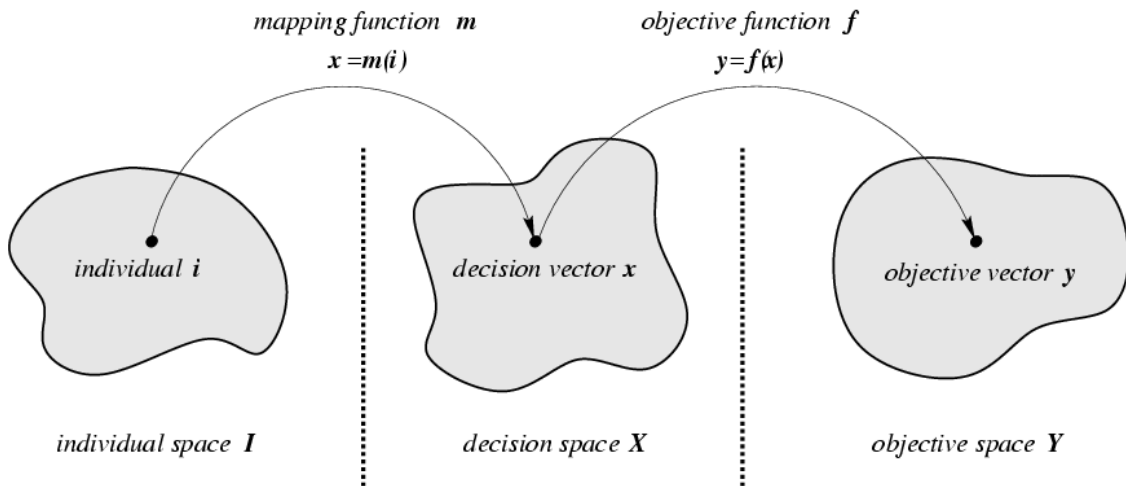
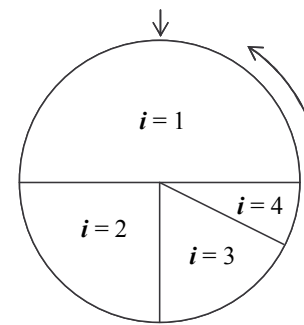


Figure I-16 : Relation entre les espaces des individus, de décision et des objectifs (d'après [Zitzler 99]).

Les opérateurs de sélection

Le processus de sélection peut être aussi bien stochastique que déterministe. Il consiste à supprimer de la population les individus de moindre qualité et à reproduire les meilleurs, dans l'intention de focaliser la recherche sur les zones prometteuses de l'espace de recherche et d'augmenter la qualité moyenne de la population. La *roulette biaisée* (ou *RWS* pour *Roulette Wheel Selection*) et le *tournoi* sont deux opérateurs classiques de sélection. La méthode RWS exploite l'analogie avec une roulette de casino comportant autant de secteurs que d'individus dans la population (Figure I-17). Chaque secteur correspond à un individu et sa taille est proportionnelle à la qualité de l'individu (ici, meilleur est l'individu, plus sa fonction de qualité est grande). Contrairement à la sélection par roulette biaisée, la sélection par tournois ne fait pas appel à la valeur de la fonction de qualité des individus mais se contente de leur classement relatif. Le principe consiste à choisir aléatoirement parmi la population un groupe de q individus et à en conserver le meilleur (lorsque $q = 2$, on parle de tournoi binaire). Les individus participant au tournoi sont ensuite réintégréés à la population.



Individu i	Qualité F_i
1	6
2	3
3	2
4	1

Figure I-17 : Principe de la sélection par roulette biaisée.

Les opérateurs génétiques (ou opérateurs de variation)

Les opérateurs génétiques ont pour but d'obtenir à partir de modifications des individus de la population courante de nouvelles solutions, potentiellement plus performantes. L'*opérateur de croisement* combine plusieurs individus afin d'en obtenir un ou plusieurs autres (on parle de parents et d'enfants). L'*opérateur de mutation* modifie un individu unique. Par analogie avec l'évolution darwinienne une probabilité d'occurrence est associée à chaque opérateur. Croisement et mutation portent sur le génotype des solutions et sont effectués dans l'espace des individus \mathbf{I} (Figure I-18).

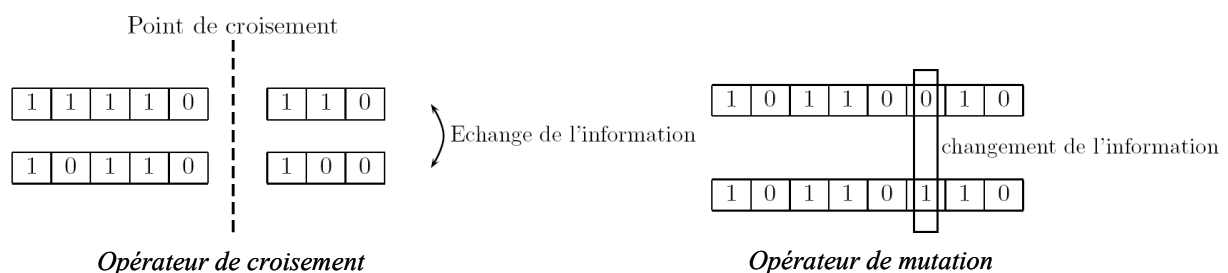


Figure I-18 : A gauche : opérateur de croisement monopoint (avec un unique point aléatoire de croisement) appliqué à deux individus codés sur 8 bits. A droite : opérateur de mutation (d'après [Barichard 03]).

Architecture d'un algorithme évolutionnaire

A partir des éléments précédents, le processus générationnel de l'évolution naturelle est simulée par un processus itératif. Tout d'abord une population initiale est créée de façon aléatoire (ou choisie selon une méthode prédéfinie). Ensuite le cycle évaluation - sélection - renouvellement est répété jusqu'à ce que soit atteint un certain critère d'arrêt. Chaque itération constitue une *génération*. On utilise souvent un nombre maximal de génération comme critère d'arrêt mais d'autres conditions sont parfois utilisées telles que des conditions de stagnation des performances des meilleurs individus. Au final l'algorithme retourne le ou les meilleurs individus de la dernière génération ou de l'ensemble du processus d'évolution. L'Algorithme I-1 détaille l'architecture d'un algorithme évolutionnaire classique.

La population \mathbf{P} à la génération t est notée \mathbf{P}_t . Remarquons que dans le cas le plus général la taille de la population peut varier et qu'il existe une multitude d'opérateurs de sélection et de reproduction adaptés chacun à des problèmes spécifiques.

Algorithme I-1 : Architecture d'un algorithme évolutionnaire générique

Entrées : N_p (taille de la population)
 T (nombre maximum de générations)
 p_c (probabilité croisement)
 p_m (probabilité mutation)
 Sorties : \mathbf{A} (un ensemble des meilleures solutions)

Etape 1 : **Initialisation** : ($t = 0$) générer une population initiale \mathbf{P}_0 de taille N_p .
 Etape 2 : **Evaluation** : calcul des fonctions-objectif pour chaque individu contenu dans \mathbf{P}_t .
 Etape 3 : **Calcul de la fonction de qualité**, pour chaque individu contenu dans \mathbf{P}_t .
 Etape 4 : **Terminaison** : si $t \geq T$ ou qu'un autre critère d'arrêt est satisfait alors retourner \mathbf{A} , l'ensemble des meilleures solutions contenues dans \mathbf{P}_t .
 Etape 5 : **Sélection** : tirage avec remise de N_p solutions de \mathbf{P}_t par une méthode donnée basée sur la valeur de la fonction de qualité. Soit \mathbf{P}' la population temporaire obtenue.
 Etape 6 : **Reproduction** : appliquer les opérateurs de croisement et de mutation à la population \mathbf{P}' avec les probabilités respectives p_c et p_m . Soit \mathbf{P}_{t+1} la population résultante. Incrémenter le compteur de générations ($t = t + 1$) et retour à l'Etape 2.

Discussion

Les algorithmes évolutionnaires présentent l'avantage de travailler avec les seules valeurs des fonctions à optimiser, sans aucune hypothèse de dérivabilité ou même de continuité, ce qui les rend particulièrement adaptés pour la résolution de problèmes aux formulations mathématiques complexes et tout indiqués pour l'optimisation combinatoire. De plus, ces algorithmes sont très flexibles et permettent d'incorporer aisément toute l'expertise disponible sur le problème traité, par exemple dans la définition des différents opérateurs. Toutefois, le recuit simulé et la méthode tabou partagent ces mêmes qualités. Par rapport à ces métaheuristiques, l'originalité et l'intérêt principal des AE réside dans leur capacité à manipuler une population et exploiter les échanges d'informations entre solutions.

Le réglage de l'algorithme constitue la difficulté majeure pour la mise en œuvre des approches évolutionnaires. En effet, la compréhension des interactions entre les différents éléments de l'algorithme (codage, sélection, critère d'arrêt, etc.) demande une certaine expertise. Le réglage des paramètres correspondants (taille de la population, probabilités de croisement, etc.) est un exercice délicat, susceptible de conditionner l'efficacité de l'algorithme, et pour lequel on ne dispose le plus souvent que d'une approche empirique. Pourtant, on souhaiterait parvenir, dans l'idéal, à des réglages dynamiques, ou adaptatifs, modifiant automatiquement le comportement de l'algorithme en fonction des résultats déjà obtenus.

Pour améliorer les performances des AE et accroître leur précision dans la recherche de l'optimum, la tendance actuelle est à l'*hybridation* [Talbi 02]. Celle-ci consiste à combiner plusieurs méthodes de recherche. Ce principe, très général, consiste à coupler un algorithme performant en matière d'exploration de l'espace de recherche à un autre, performant pour l'exploitation et l'intensification de la recherche à proximité d'un optimum. Les AE se prêtent ainsi particulièrement bien à l'hybridation avec une méthode de recherche par voisinage.

I.2.4 LES METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES MULTIOBJECTIFS

Résoudre un problème d'optimisation multiobjectif revient à rechercher tout ou partie de l'ensemble des compromis optimaux du problème. D'un point de vue conceptuel, deux processus distincts sont imbriqués au sein de la méthode de résolution : les processus de recherche (Cf. I.2.3) et de prise de décision (Cf. I.2.2). On distingue classiquement trois grandes familles de méthodes selon la manière dont sont combinés ces processus⁷ :

- les méthodes *a priori*, pour lesquelles le compromis entre les différents objectifs est établi avant l'exécution du processus d'optimisation,
- les méthodes *a posteriori*, pour lesquelles l'optimisation est effectuée sans qu'aucun classement des objectifs ne soit initialement spécifié de la part du décideur,
- les méthodes progressives, pour lesquelles processus de décision et d'optimisation sont alternés, permettant au décideur d'orienter la recherche de façon interactive en fonction de ses préférences et des solutions déjà obtenues. Ce type de démarche nécessite une expertise approfondie du problème considéré ainsi que des outils employés et requiert une adaptation particulière pour chaque problème traité. Dans la mesure où la mise en œuvre d'une telle démarche dépasse largement le cadre de cette thèse, on écarte ce type de méthodes.

I.2.4.a Les méthodes a priori

En pratique, les méthodes *a priori* visent à transformer le problème multiobjectif en un problème monoobjectif afin de pouvoir utiliser directement les méthodes de recherche.

Les techniques d'agrégation des objectifs

A la base de ce type d'approches on retrouve l'axiome fondamental que tout décideur essaie inconsciemment de maximiser une fonction d'utilité $U = U(f_1, f_2, \dots, f_k)$. Les solutions sont comparées selon la valeur scalaire de la fonction d'utilité. Les techniques d'agrégation ont en commun de supposer que les objectifs soient commensurables, ce qui constitue une difficulté majeure. On peut pour cela utiliser des transformations (par exemple, adimensionner puis normer les fonctions). Toutefois celles-ci sont souvent délicates à définir et peuvent conditionner le résultat. De plus, elles sont difficiles à utiliser lorsque lorsqu'on travaille simultanément avec des objectifs qualitatifs et quantitatifs.

La technique la plus courante est la *somme pondérée* qui permet de formaliser sous forme de poids les préférences du décideur entre les différents objectifs du problème :

$$U = \sum_{i=1}^k \omega_i \cdot f_i \text{ avec } \forall i, \omega_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \omega_i = 1 \quad (I-7)$$

Cette méthode présente deux inconvénients majeurs. D'une part, la détermination des poids attribués aux critères constitue un exercice délicat. Cette question peut être résolue en faisant varier les poids de façon à constater leur influence sur le résultat. Ceci revient toutefois à résoudre plusieurs fois le problème d'optimisation ce qui peut vite devenir coûteux en temps de calcul. D'autre part, les solutions obtenues appartiennent nécessairement à des zones convexes du front de Pareto (Figure I-19).

⁷ L'exposé suivant n'est pas exhaustif. Des inventaires plus complets des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif sont disponibles dans les références [Berro 01, Van Veldhuizen 99, Ehrgott 00b, Colette 02].

Une alternative à la pondération consiste à définir une cible à atteindre $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_k)$ dans l'espace des objectifs. Diverses techniques sont alors disponibles, qui consistent en général à minimiser la distance à la cible selon une norme choisie, par exemple :

- pour la méthode *Target Vector Optimization*, la norme 1 : $L_1 = \sum_{i=1}^k |f_i - T_i|$,
- pour la méthode *MinMax*, la norme infinie (Figure I-19) : $L_\infty = \max_i (|f_i - T_i|)$

Ces techniques présentent l'avantage de ne pas être trompées par les problèmes non convexes. Reste néanmoins le problème du choix de la pondération, transféré dans celui du choix de la cible.

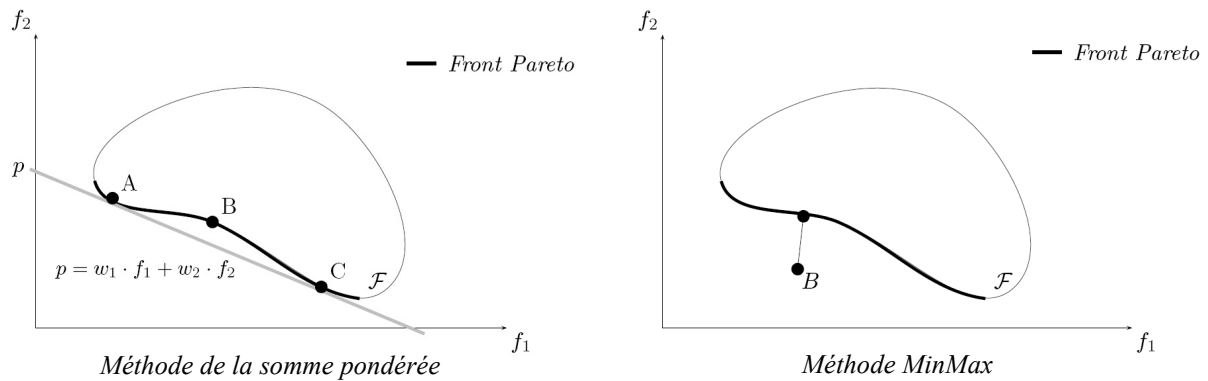


Figure I-19 : A gauche : interprétation graphique de la méthode de somme pondérée. Ici, les points A et B sont de même qualité p . A droite : interprétation graphique de la méthode MinMax avec une cible B fixée (d'après [Barichard 03]). On se place ici dans le cadre d'un problème de minimisation.

Les méthodes de transformation des objectifs en contraintes

Une autre façon de ramener la résolution du problème multiobjectif à celle d'un problème monoobjectif consiste à convertir les objectifs en contraintes. Par exemple, la *méthode ε -contrainte* (Figure I-20) consiste à isoler un objectif prioritaire f_j et à considérer les autres objectifs comme des contraintes d'inégalités (souvent non linéaires) par rapport à un vecteur de valeurs seuils ε_i , $i \neq j$. Le problème reformulé s'écrit alors de la façon suivante :

$$\text{minimiser } f_j(\mathbf{x}) \text{ tel que } \forall i \neq j, f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i \quad (I-8)$$

La technique du *but à atteindre* (*goal attainment*) (Figure I-20), combine quant à elle les concepts de cible à atteindre et de pondération. Une fois spécifiés le but T_i et le poids ω_i associés à chaque objectif f_i , le problème reformulé s'écrit

$$\text{minimiser } \alpha \text{ tel que } \forall i, f_i(\mathbf{x}) - \alpha \omega_i \leq T_i \quad (I-9)$$

Ces deux techniques présentent l'avantage de ne pas être trompées par les problèmes non convexes. Reste une fois encore le problème posé par le choix de leurs différents paramètres, qui dépend essentiellement d'une bonne connaissance du problème traité. De plus, la gestion des contraintes peut s'avérer extrêmement délicate et très gourmande en temps de calcul.

La méthode lexicographique

Cette méthode simple et intuitive permet d'exprimer les préférences du décideur en classant par ordre d'importance les différents objectifs. On commence par résoudre le problème en ne considérant que la première fonction-objectif. Celle-ci est alors intégrée au problème sous forme de contrainte d'égalité (fixée à sa valeur optimale). On réitère ensuite le processus selon l'ordre de classement des objectifs. La méthode lexicographique consiste ainsi à transformer la résolution du problème multiobjectif en

celle d'une série de problèmes mono-objectifs. La difficulté réside ici dans le classement des objectifs. En effet, deux ordonnancements différents n'aboutissent généralement pas à la même solution. De plus, si toutes les variables de décision participent au calcul du premier objectif, elles sont fixées et les objectifs suivants ne peuvent être optimisés.

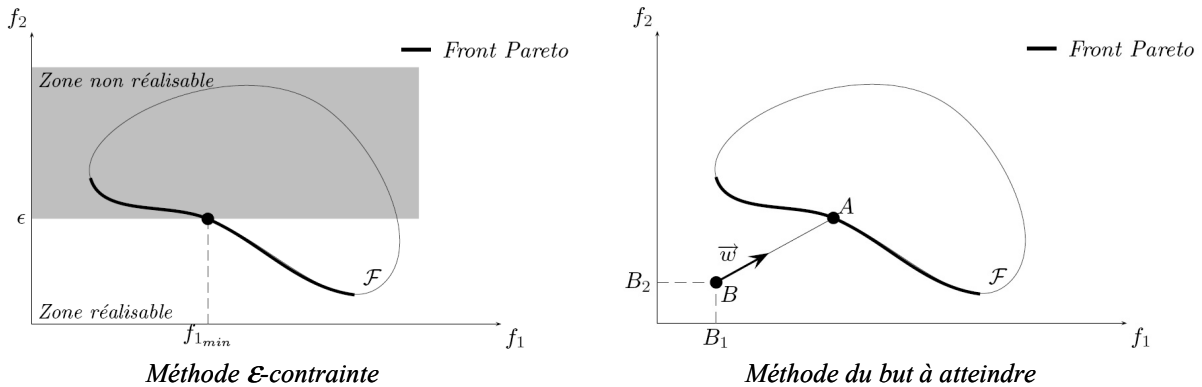


Figure 1-20 : A gauche : interprétation graphique de la méthode ϵ -contrainte. A droite : interprétation graphique de la méthode du but à atteindre avec une cible B fixée. La méthode retourne le point A (d'après [Barichard 03]).

1.2.4.b Les méthodes a posteriori

Les méthodes *a posteriori* permettent au décideur d'exprimer ses préférences à l'issue du processus d'optimisation, parmi l'ensemble des solutions retenues (idéalement un ensemble de compromis optimaux au sens de Pareto), ce qui lui permet de tirer un profit maximum de l'étape d'optimisation. En effet, il est souvent préférable de prendre la décision finale à partir des informations les plus complètes possibles. Ceci suppose que la méthode de résolution employée retourne plusieurs solutions. Pour ce faire, deux démarches sont envisageables. La première, relativement inefficace, consiste à employer une méthode *a priori* et à réitérer la recherche autant de fois que nécessaire, en variant les pondérations (méthodes agrégées) ou l'ordonnancement des objectifs (méthode lexicographique), pour obtenir une approximation du front de Pareto. Ces exécutions multiples sont nécessairement indépendantes, ce qui rend impossible l'exploitation des synergies éventuelles. De plus, pour la plupart des problèmes non-linéaires, l'usage successif de valeurs de poids uniformément distribuées ne garantit pas que les solutions obtenues seront à leur tour uniformément distribuées sur la surface de compromis. La seconde démarche, ici privilégiée, consiste à employer une méthode de recherche à base de population, capable de générer en une seule exécution une approximation du front de Pareto. Les AE semblent ainsi tout indiqués et c'est ce choix, largement majoritaire dans la littérature traitant des méthodes d'optimisation multiobjectif⁸, que nous retenons ici.

Dans les AE, l'aspect multiobjectif est entièrement contenu dans le calcul de la fonction de qualité des individus à partir de leurs performances (Algorithme 1-1, étape 3). Les possibilités pour transformer le vecteur objectif associé à un individu en une qualité scalaire sont multiples. On distingue ici deux classes de méthodes, en fonction que le calcul de la fonction de qualité fasse explicitement appel à la notion de dominance de Pareto ou pas.

⁸ On renvoie à l'adresse suivante pour une compilation de plus de 3300 travaux traitant d'optimisation multiobjectifs par AE : <http://www.lania.mx/~ccoello/EMOO/>.

Des approches non Pareto

Une première technique, proposée dans l'algorithme *VEGA* (*Vector Evaluated Genetic Algorithm*), utilise une population de taille N avec N multiple du nombre d'objectif k [Schaffer 85]. Les individus sont répartis en k groupes de N/k individus. A chaque groupe est associée une fonction-objectif qui détermine la qualité des individus au sein du groupe. Les individus des différents groupes sont ensuite mélangés pour participer à la sélection (Algorithme I-1, étape 5). Il s'agit d'une méthode simple qui a longtemps fait référence. Elle est surtout adaptée aux problèmes où l'on souhaite obtenir des solutions performantes pour chaque objectif considéré indépendamment.

Une autre méthode, proposée dans l'algorithme *HLGA* (*Hajela and Lin's Genetic Algorithm*), consiste à attribuer aux solutions une fonction de qualité égale à la somme pondérée des objectifs [Hajela 92]. Cependant, au lieu d'un vecteur de poids commun à toutes les solutions, à chaque individu correspond un vecteur de poids qui lui est propre (Figure I-21). L'algorithme fait ensuite évoluer simultanément les individus et les vecteurs de poids qui leur sont associés. Cette technique présente des problèmes de stabilité si on laisse évoluer les poids trop librement.

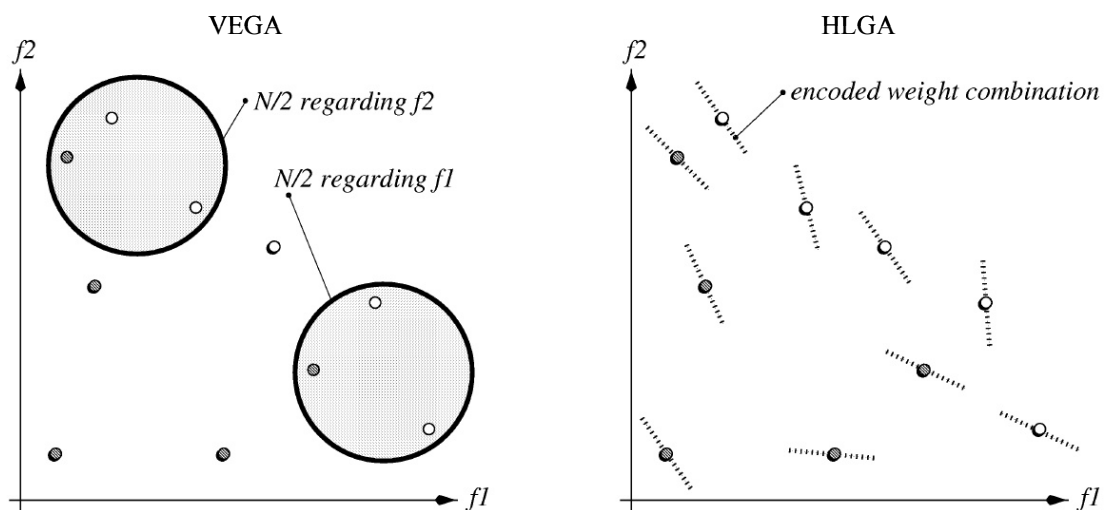


Figure I-21 : Illustration du fonctionnement des techniques de calcul de la fonction de qualité dans les algorithmes VEGA (à gauche) et HLGA (à droite) [Zitzler 99].

Les algorithmes HLGA et VEGA sont cités dans [Zitzler 99] comme base de comparaison pour d'autres AE multiobjectifs. Comparés aux approches basées sur la dominance de Pareto, ces deux algorithmes offrent des performances très honorables sur les problèmes convexes. Toutefois, HLGA et VEGA sont toutes deux équivalentes à une méthode de pondération. Elles en partagent donc les inconvénients et ne permettent pas de trouver de solutions appartenant à une concavité. Se pose de plus la question de la commensurabilité des objectifs. *A contrario*, utiliser la notion de dominance de Pareto permet d'éviter les problèmes de convexité et de commensurabilité propres aux techniques de pondération. C'est donc vers ce type de méthodes que l'on s'oriente. Parmi elles, deux techniques semblent aujourd'hui considérées comme les plus performantes : le "ranking" et la force ("strength").

Des approches Pareto

La technique de "ranking" est exploitée dans les algorithmes *NSGA* (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*) [Srinivas 94] et son évolution, *NSGA-II* [Deb 00]. Cette méthode permet d'affecter un rang aux individus d'une population donnée en se basant sur la notion de front de Pareto. Elle consiste en une procédure itérative élémentaire. Initialement, tous les individus non dominés reçoivent le rang 1 et

sont temporairement retirés de la population. Les individus non dominés de la population résultante se voient alors attribués le rang 2 et retirés à leur tour. La procédure est ainsi répétée jusqu'à ce qu'un rang ait été affecté à tous les individus. La qualité (une valeur à minimiser) d'un individu correspond alors à son rang (Figure I-22). Dans NSGA-II, une mesure de densité des solutions dans l'espace des objectifs est ensuite employée afin de classer les individus de même rang et de favoriser les individus isolés pour une meilleure distribution des solutions sur la surface de compromis.

La notion de force est proposée et exploitée dans l'algorithme SPEA (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*) [Zitzler 99] et son évolution, SPEA2 [Zitzler 01]. Elle est présentée comme une méthode permettant de privilégier à la fois la proximité au front de Pareto et la distribution des solutions sur ce front, tout en ne faisant appel qu'à la seule notion de dominance de Pareto. La force d'une solution correspond au nombre de solutions qu'elle domine. Dans SPEA2, la qualité d'un individu (plus la valeur de la fonction de qualité est faible, meilleure est la solution) correspond alors à la somme des forces des individus qui le dominent (Figure I-22). Toutefois, l'introduction d'une mesure de densité s'avère nécessaire pour différencier les individus lorsque la majorité de la population est constituée d'individus incomparables au sens de Pareto (c'est-à-dire de même rang). Au final, quitte à devoir combiner la dominance de Pareto et une mesure de densité pour assurer la convergence de l'algorithme vers un ensemble de solutions proches de la surface de compromis du problème et bien distribuées, on retient pour la suite la technique de "ranking", plus intuitive que la notion de force.

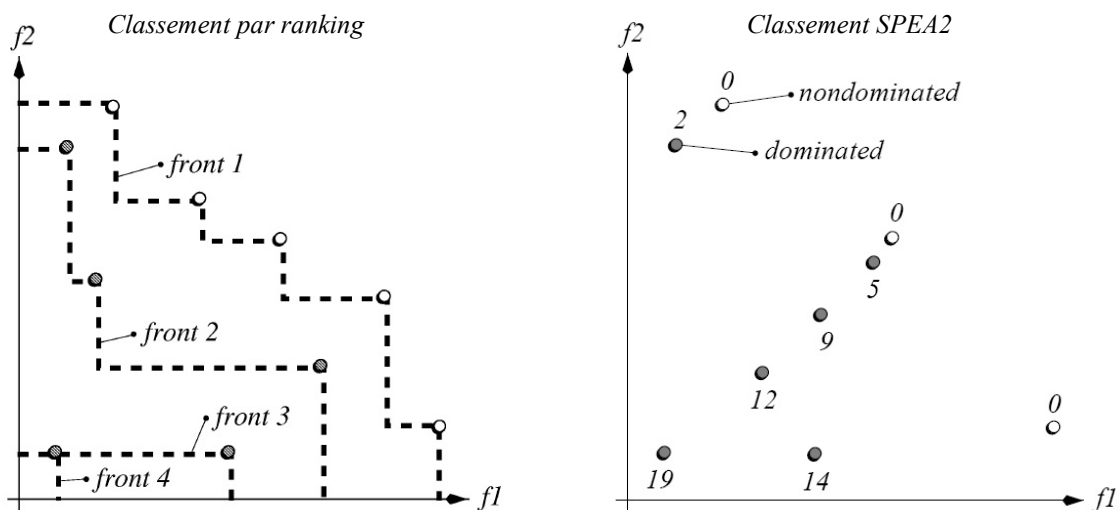


Figure I-22 : A gauche : illustration de la méthode de ranking [Zitzler 99]. A droite : illustration du calcul de la fonction de qualité dans SPEA2 [Zitzler 01].

I.2.5 VERS L'OPTIMISATION MULTIOBJECTIF DES STRUCTURES COMPOSITES

En matière d'optimisation il n'existe pas de méthode absolue. Pour obtenir un algorithme efficace sur un problème donné, la meilleure approche semble être de déterminer les principales caractéristiques de ce problème (convexité, existence d'optima locaux, variables continues, discrètes ou combinatoires, dérivabilité des fonctions-objectif, etc.) et d'identifier dans la littérature la gamme des méthodes adaptées. L'étape suivante consiste à intégrer dans l'algorithme d'optimisation toute l'expertise disponible sur le problème traité. Toute la difficulté réside dans le compromis entre l'usage d'outils évolués, très généraux mais difficiles à régler, maîtriser et adapter au problème considéré, et l'emploi d'outils plus simples, mais spécialisés. A ce jeu, les algorithmes évolutionnaires multiobjectifs basés sur les notions de dominance et de rang de Pareto semblent tout indiqués, de par leurs performances et leur modularité, pour aborder efficacement le problème de l'optimisation des empilements dans les structures composites.

I.3 OPTIMISATION DES STRUCTURES COMPOSITES

Le principal intérêt de l'optimisation des structures composites, comparée à l'optimisation de structures métalliques, consiste à intégrer la structure interne du matériau (l'empilement) dans les variables du problème d'optimisation. L'optimisation des empilements constitue un problème original et complexe qui met en défaut la plupart des méthodes classiques d'optimisation structurale en raison de deux spécificités majeures.

D'une part, l'optimisation des empilements constitue un problème combinatoire inédit. Comparons-le par exemple au problème combinatoire classique du voyageur de commerce (ou TSP, pour Travelling Salesman Problem) qui consiste, étant donné un ensemble de villes séparées par des distances données, à trouver le plus court chemin qui relie toutes les villes. Dans le TSP, la solution est cyclique, c'est-à-dire que seul l'ordre de parcours des villes compte, et pas le point de départ. A *contrario*, dans le cas de l'optimisation d'empilements, la position absolue des plis importe, puisque c'est d'elle dont dépendent les propriétés hors plan des stratifiés, ainsi que leur raideur en flexion ou leur résistance au flambement.

D'autre part, la conception des empilements est soumise dans l'industrie à un ensemble de règles et de recommandations usuelles (la symétrie miroir et l'équilibre, par exemple), issues de l'expérience et des exigences de certification. Ces règles constituent autant de contraintes du problème d'optimisation qu'il convient de respecter dans le cas général. Leur utilisation systématique s'avère toutefois souvent abusive, ce qu'il faut alors justifier pour pouvoir relâcher la contrainte. Ce sujet est abordé plus avant au Chapitre suivant.

I.3.1 TROIS DEMARCHES POUR L'OPTIMISATION DES EMPILEMENTS

La quasi-totalité des méthodes d'optimisation des empilements proposées dans la littérature relève de l'une ou l'autre des démarches de résolution suivantes.

I.3.1.a La démarche industrielle

La démarche industrielle pour la conception et l'optimisation des empilements est dérivée des méthodes de conception métallique. Elle est adaptée aux empilements constitués de plis orientés à 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° et comporte trois étapes. La première étape consiste à optimiser un matériau homogénéisé. L'empilement est supposé symétrique et équilibré. Les variables d'optimisation sont réduites aux épaisseurs totales de plis orientés à 0° , 45° (même épaisseurs à -45° et $+45^\circ$) et 90° . Ces trois variables, combinées aux propriétés mécaniques de l'UD, suffisent à déterminer complètement la matrice ABD du matériau homogénéisé selon les formules suivantes :

$$A = h_0 \mathbf{Q}_0 + h_{90} \mathbf{Q}_{90} + 2h_{45} (\mathbf{Q}_{-45} + \mathbf{Q}_{45}) = h \mathbf{Q}_{homo}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \frac{h^3}{12} \mathbf{Q}_{homo} \quad (I-10)$$

L'optimisation des épaisseurs h_0 , h_{90} et h_{45} est réalisée par une méthode de descente. A cette étape, il s'agit de minimiser la masse de la structure, ce qui revient à minimiser l'épaisseur totale du stratifié, tout autre critère étant intégré au problème sous forme de contrainte. Lors de la deuxième étape, les épaisseurs obtenues sont arrondies en nombre de plis, à épaisseur du pli UD fixée. La troisième étape consiste à définir la séquence d'empilement des plis avec des proportions fixées pour chaque orientation 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° . Il s'agit alors de respecter l'ensemble des règles de conception des empilements ainsi que toute autres contrainte de dimensionnement éventuelle. A cette étape, une optimisation par algorithme évolutionnaire est envisageable.

1.3.1.b La démarche directe

La démarche directe constitue la méthode la plus naturelle et la plus largement employée dans la littérature. Les variables d'optimisation correspondent au nombre total de plis et aux orientations de chacun. Les règles de conception des empilements sont intégrées en tant que contraintes ou objectifs du problème. Contraintes et objectifs sont directement estimés à partir des empilements. Beaucoup de travaux qui relèvent de cette démarche consistent en l'application directe au problème composite d'algorithmes issus du domaine de l'optimisation.

1.3.1.c La démarche à deux niveaux

La démarche à deux niveaux (Figure I-23) consiste à passer par un espace intermédiaire, permettant à la fois de réduire considérablement le nombre de variables d'optimisation et de travailler dans un espace de recherche continu. La CLT offre en effet de tels espaces, associés aux rigidités du stratifié (voir Chapitre II). Le premier niveau de l'optimisation consiste à déterminer un optimum dans l'espace intermédiaire par une méthode de descente. Le problème inverse de trouver l'empilement correspondant à cet optimum est traité dans un second temps, par un algorithme évolutionnaire, et constitue le second niveau de la démarche. C'est à ce niveau que sont imposées les règles de conception des empilements.

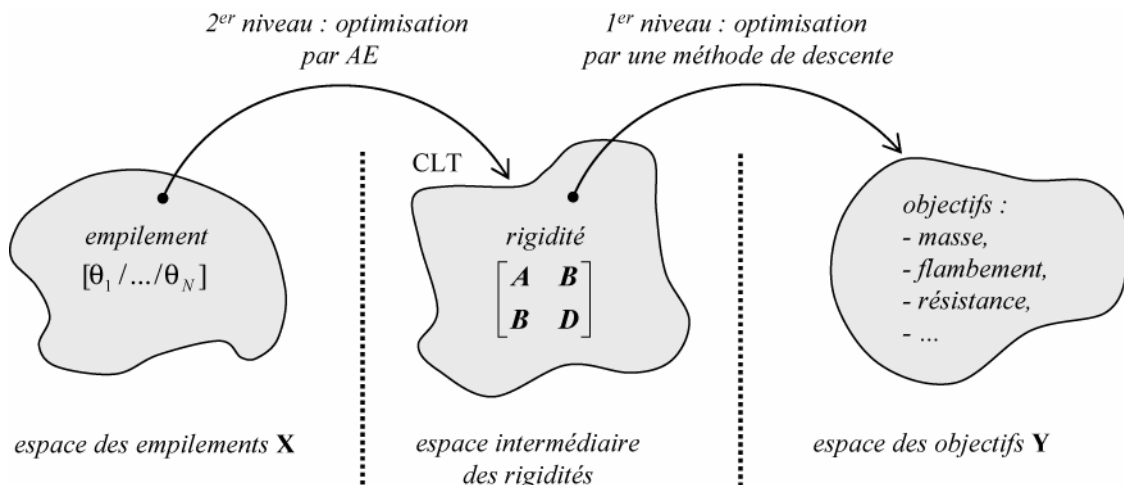


Figure I-23 : Schéma de principe de la démarche à deux niveaux. L'optimum issu du premier niveau d'optimisation constitue la cible du second niveau.

1.3.1.d Discussion

Des trois démarches présentées, la démarche industrielle nous paraît la moins adaptée à la mécanique des matériaux composites stratifiés. En effet, travailler avec des propriétés matériau homogénéisées en flexion engendre des erreurs potentiellement très importantes (parfois largement supérieures à 100 % sur les forces critiques de flambement de plaques rectangulaires allongées [Venkataraman 01]), ce qui est susceptible de fausser le processus d'optimisation. De plus, l'étape d'arrondi des épaisseurs en nombre de plis est en elle-même problématique. En pratique, cette démarche permet davantage de répondre à un problème de faisabilité qu'à un réel problème d'optimisation. Enfin, cette démarche s'avère difficilement généralisable aux empilements quelconques, et se limite principalement aux empilements contenant de plis à 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° .

La démarche directe et la démarche à deux niveaux s'avèrent beaucoup plus adaptées à la mécanique des composites, la première de par sa simplicité et la seconde parce qu'elle exploite des espaces intermédiaires issus de la CLT. La force de la méthode directe réside dans sa simplicité, qui

permet d'appliquer de nombreuses métaheuristiques et de bénéficier des développements effectués en la matière. Néanmoins, son principal désavantage réside dans le nombre important des variables d'optimisation considérées (à N plis correspondent N variables et leurs permutations). A l'inverse, le principal intérêt de la méthode à deux niveaux consiste à exploiter la CLT pour en extraire un espace intermédiaire continu et de dimension réduite. Toutefois, la détermination du domaine réalisable dans cet espace intermédiaire s'avère problématique, certaines règles de conception des empilements difficiles à imposer, et l'optimum du premier niveau souvent irréalisable au second.

Au final on choisit de se positionner dans la suite de ces travaux de thèse dans le cadre d'une approche directe. Celle-ci est enrichie au Chapitre II, pour exploiter au maximum les sous-espaces issus de la CLT tout en s'épargnant la résolution approchée du problème inverse. Ce faisant, on escompte bénéficier à la fois des avantages de la démarche directe et de la démarche à deux niveaux, tout en intégrant un maximum de considérations liées à la mécanique des composites dans l'algorithme d'optimisation.

I.3.2 SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

I.3.2.a Aperçu depuis 1994

La Figure I-24 fournit une indication de l'évolution chronologique, depuis 1994, du nombre de publications ayant trait aux principaux thèmes abordés dans ce mémoire. De façon générale, le nombre de publications consacrées aux matériaux composites connaît une hausse significative depuis le début des années 2000, il a doublé entre 2002 et 2007, et le mouvement semble aller en s'accéléralant. L'optimisation des structures composites suit une évolution similaire, ces deux phénomènes étant probablement liées à l'intérêt croissant dont témoigne les industriels de l'aéronautique pour ce type de structures.

Parallèlement, on assiste, ces dernières années, à la rapide augmentation du nombre de travaux consacrés aux méthodes d'optimisation multiobjectif. Là encore, le nombre de publications annuelles a doublé entre 2002 et 2007. Ce phénomène est probablement à mettre au crédit de l'augmentation des capacités de calcul qui rendent ce type de méthodes de plus en plus accessibles, mais il témoigne aussi de l'évolution des philosophies de conception dans lesquelles un nombre croissant de critères sont simultanément pris en compte. L'émergence des techniques d'optimisation robuste (prise en compte des incertitudes) s'inscrit dans une logique similaire. Toutefois, ces méthodes ne sont que très marginalement appliquées aux structures composites. De plus, on ne perçoit aucune tendance à la hausse. Même si l'analyse d'une unique base de données n'est pas suffisante pour juger de la production scientifique globale, il semble qu'en matière d'optimisation multiobjectif et d'optimisation robuste des structures composites, on en reste aujourd'hui aux balbutiements.

De façon générale, les critères classiques d'optimisation structurale sont des critères de masse, de coût, de raideur, de résistance, de flambement ou encore d'amortissement des modes vibratoires. La majorité des travaux présentés traitent de l'un, ou d'une combinaison quelconque, de ces critères. Quelques travaux originaux traitent de la résistance aux impacts basse vitesse [Rahul 06], ou des problèmes de dilatation thermique et de reprise hydrique [Vannucci 07].

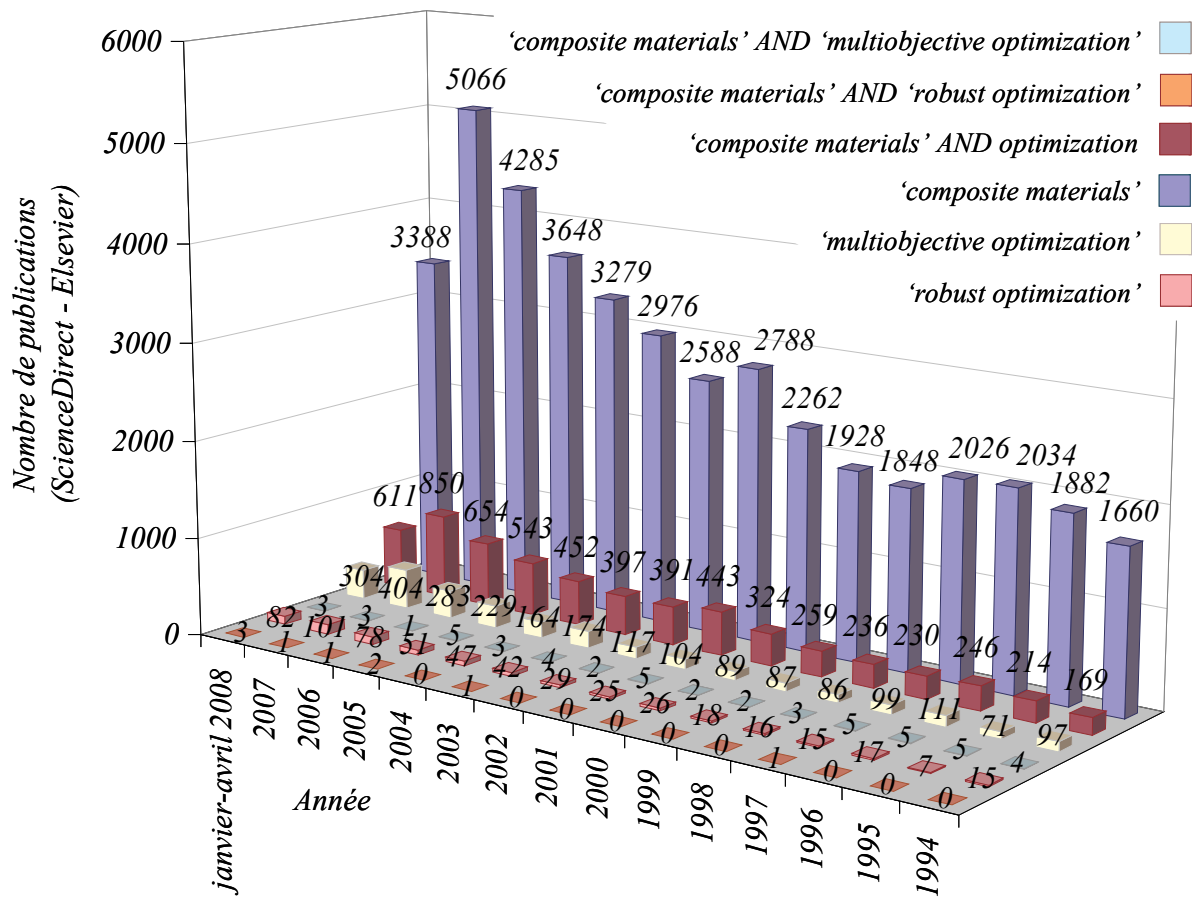


Figure I-24 : Evolutions comparées, depuis 1994, du nombre de publications consacrées aux matériaux composites et à leur optimisation. L'accent est mis spécifiquement sur le manque de travaux d'application des méthodes d'optimisation multiobjectifs ou d'optimisation robustes aux structures composites (Base ScienceDirect d'Elsevier).

I.3.2.b Tableaux de synthèse sur l'optimisation des structures composites

Le bilan proposé ici n'est pas exhaustif et ne donne qu'une vision partielle des travaux cités. Dans cette section, il est uniquement question d'optimisation des structures composites dans un contexte idéalisé parfaitement déterministe. Les références relevant des démarches d'optimisation directe et à deux niveaux sont regroupée dans le Tableau I-1. Bien que pratiquée par certains constructeurs, la démarche industrielle a donné lieu à peu de publications. Citons néanmoins les références [Liu 01, Carpentier 05] et plus récemment, la thèse d'Alban Carpentier [Carpentier 08].

Les articles référencés dans le Tableau I-1 sont classés selon quatre critères. Le premier correspond aux méthodes de prise de décision employées. Le deuxième correspond aux variables d'optimisation considérées, et le troisième à la démarche d'optimisation mise en oeuvre. On distingue les démarches directes et à deux niveaux, mais aussi le type de modèles employés pour le calcul des objectifs : analytique, EF ou pseudo-analytique. Dans ce dernier cas, l'optimisation est réalisée à partir d'un métamodèle (surface de réponse, réseau de neurone, etc.) identifiées à partir du calcul EF afin de réduire le coût d'évaluation des solutions. Enfin, le dernier critère de classement correspond au type de méthode de recherche employée, selon le code de couleur suivant : sur fond jaune, les travaux exploitant un AE, sur fond bleu, les autres métaheuristiques, et sur fond rouge, les méthodes de descente.

Références	Décision	Variables	Application	
[Le Riche 95]	monobjectif	empilement	directe - analytique	
[Michalewicz 96]		empilement	directe - analytique	
[Nagendra 96]		empilement	directe - analytique	
[Todoroki 98]		empilement	espace intermédiaire - analytique	
[Todoroki 99]		empilement	directe - analytique	
[Soremekun 01]		empilement	directe - analytique	
[Park 01a]		empilement	directe - EF	
[Adams 04]		empilement	directe - EF	
[Grosset 04]		empilement	directe - analytique	
[Todoroki 04]		empilement	directe - pseudo-analytique	
[Rao 05]		empilement	directe - analytique	
[Adams 05]		empilement	directe - EF	
[Diaconu 05]		rigidités macroscopiques	espace intermédiaire - analytique	
[Rahul 06]		empilement	directe - EF	
[Vannucci 07]		empilement, épaisseurs, matériaux	directe - analytique	
[Todoroki 07]		empilement	directe - pseudo-analytique	
[Kathivarian 07]		empilement	directe - analytique	
[Herencia 07]		rigidités macroscopiques	espace intermédiaire-analytique - EF	
			empilement	
[Adali 96]		multiobjectif <i>a priori</i>	empilement	directe - analytique
[Spallino 02]	empilement		directe - EF	
[Walker 03]	empilement, épaisseurs		directe - EF	
[Rao 05]	empilement		directe - analytique	
[Rahul 06]	empilement, épaisseur, matériau		directe - EF	
[Suresh 07]	empilement, géométrie		directe - analytique	
[Abouhamze 07]	empilement		directe - pseudo-analytique	
[Spallino 02]	multiobjectif <i>a posteriori</i>	empilement	directe - EF	
[Kere 03]		empilement	directe - EF	
[Lanzi 06]		empilement, variables géométriques	directe - pseudo-analytique	
[Pelletier 06]		empilement, épaisseurs, taux de fibre	directe - analytique	

Tableau I-1 : Synthèse de références traitant d'optimisation des structures composites. Le code de couleur correspond aux types d'algorithmes de recherche employés. En jaune, les AE, en bleu, les autres métaheuristiques, en gris les méthodes de descente.

Les travaux d'optimisation inventoriés ici traitent dans leur majorité de structures élémentaires comme des plaques, des poutres ou des tubes sollicités par chargement unique. Certaines études abordent néanmoins l'optimisation de structures plus complexes pour lesquelles plusieurs stratifiés

sont optimisés simultanément, comme des panneaux raidis [Nagendra 96, Lanzi 06, Todoroki 07, Herencia 07] ou des caissons [Kathivarian 07, Suresh 07]. Enfin, certains travaux traitent de l'optimisation de panneaux présentant des variations d'épaisseurs, pour lesquels il convient de gérer les pertes et les reprises de plis [Liu 01; Carpentier 05, Adams 04, Adams 05].

En ce qui concerne le choix de l'algorithme d'optimisation, on rencontre trois principales attitudes en parcourant la bibliographie. La première consiste à adapter le problème combinatoire de l'optimisation des empilements à des algorithmes continus. La seconde consiste à rechercher l'algorithme général le plus performant pour une application directe à l'optimisation composite. La dernière, souhaitable (voir [Le Riche 07] dans le cas des AE), consiste à adapter un algorithme général aux spécificités du problème. Les AE constituent la méthode la plus prisée, mais d'autres métaheuristiques peuvent se révéler tout aussi efficaces. C'est la pertinence des considérations mécaniques exploitées pour guider la recherche qui fait la différence, plus que l'algorithme lui-même, sous réserve que celui-ci soit adapté à l'optimisation combinatoire. D'autre part, par une trop grande simplification du problème, on obtient souvent, des solutions qui n'ont aucun intérêt pratique (par exemple, en négligeant les contraintes imposées par les procédés de fabrication des stratifiés).

Précisons enfin que de nombreux auteurs travaillent avec des choix très restreints d'empilements possibles. Il y a pour cela deux raisons majeures. La première consiste à réduire l'espace de recherche. Le choix de travailler dans une classe particulière de solutions est ainsi souvent le seul moyen d'appliquer des méthodes de recherche à base de gradient [Kere 03] (en éliminant les aspects combinatoires du problème) ou de techniques d'énumération [Adali 96] (en réduisant le nombre de solutions envisageables). La seconde raison consiste à s'assurer *a priori* de l'obtention d'un certain nombre de propriétés, ou de l'obtention de stratifiés directement acceptables pour un industriel [Lanzi 06]. Toutefois, avec ce type de méthodes, on s'éloigne de la formulation d'un réel problème d'optimisation dans lequel ces considérations doivent être, au contraire, intégrées en tant que contraintes ou objectifs du problèmes. Choisir *a priori* une classe de stratifié ou une librairie de solutions possibles suppose d'écarter de nombreuses solutions réalisables, et, compte tenu des dimensions et de la complexité du problème, d'écarter presque à coup sûr des solutions optimales.

1.3.3 AXES DE TRAVAIL

L'optimisation structurale en général, et l'optimisation des structures composites en particulier, sont limitées par les problèmes de maîtrise des coûts de calcul et de gestion de l'effet des incertitudes.

1.3.3.a Le problème des temps de calcul

On trouve dans [Venkataraman 02] une synthèse bibliographique des plus complètes sur le thème de l'optimisation des séquences d'empilements dans les structures composites, permettant d'illustrer la grande diversité des travaux réalisés en la matière. Dans cet article, qui reprend et étoffe une première communication de 1999 [Venkataraman 99], les auteurs présentent l'évolution des travaux publiés depuis les années 1970. Ils proposent un système de classification basé sur trois axes de complexité (Figure I-25), celle-ci étant évaluée par le biais des coûts de calcul nécessaires :

- la *complexité des structures étudiées* et de leur représentation (de la plaque au fuselage complet, du maillage 2D à quelques degrés de liberté aux représentations 3D à plusieurs millions de ddl.),
- la *complexité des méthodes d'analyse* employées (de l'analyse linéaire statique à la dynamique rapide non linéaire),
- la *complexité des méthodes d'optimisation* (de l'optimisation déterministe par des méthodes graphiques à l'optimisation robuste).

Dans la mesure où les méthodes les plus poussées selon chacun de ces trois axes exploitent au maximum les moyens de calculs existants, les auteurs constatent logiquement que toutes les études publiées correspondent à des compromis selon ces trois aspects, afin de rester dans des coûts de calcul raisonnables. Par exemple, les stratégies d'optimisation basées sur l'emploi d'une métaheuristique nécessitent un grand nombre d'évaluations des fonctions-objectif, au bas mot plusieurs centaines. Si chaque évaluation correspond à un calcul EF complexe de plusieurs heures, le temps de calcul total devient prohibitif. Pour surmonter cet obstacle, trois voies de recherche semblent aujourd'hui prometteuses, à savoir : l'amélioration des algorithmes d'optimisation, la parallélisation des méthodes de recherche et les techniques d'approximation globale des modèles (surfaces de réponse, réseaux de neurone, etc.). Depuis cette synthèse de 2002, de nombreux travaux ont été publiés dans le domaine, en témoigne la synthèses proposée dans le Tableau I-1, avec un nombre croissant d'études consacrées à l'optimisation multiobjectif des composites.

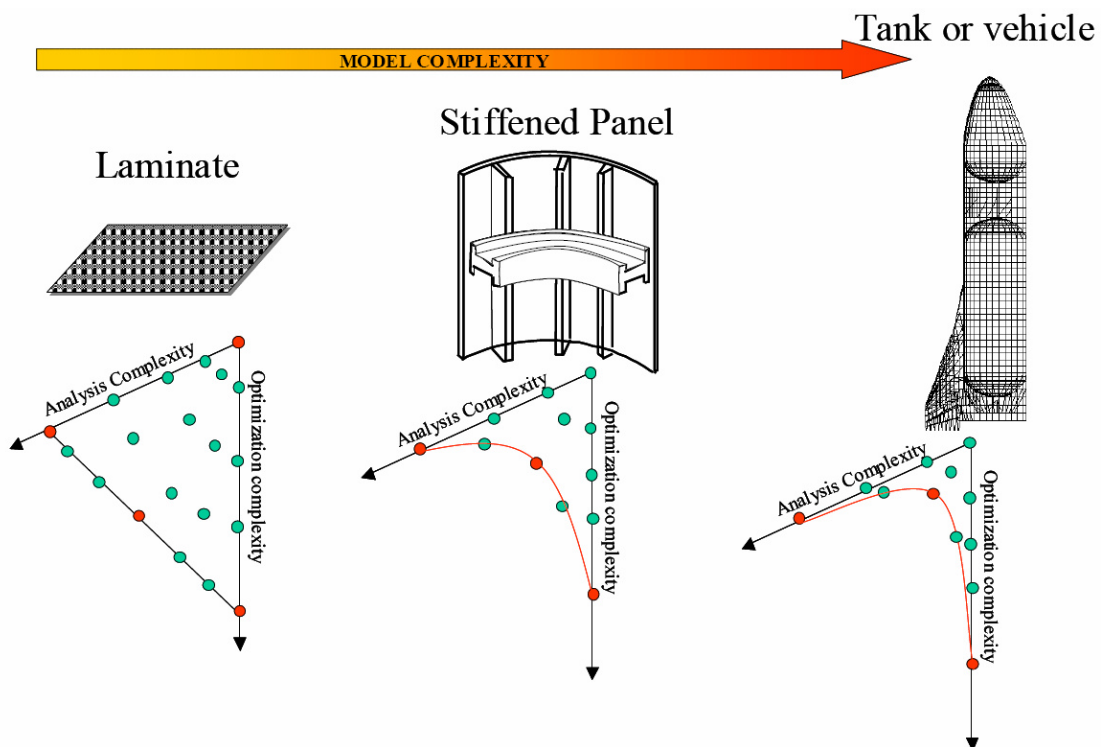


Figure I-25 : Le problème des coûts de calcul selon les trois axes de complexité proposés par Venkataraman et Haftka pour établir une classification des méthodes d'optimisation structurale (d'après [Venkataraman 02]). Les graphiques présentés sous chaque modèle donnent un aperçu qualitatif des compromis entre complexité des méthodes d'analyse et d'optimisation. Les points correspondent à des études publiées avant 2002.

1.3.3.b Le problème des incertitudes

La majorité des auteurs se placent dans un cadre d'optimisation idéalisé en se ramenant à une formulation mathématique déterministe du problème, ce faisant ils évacuent toutes les difficultés liées au contexte incertain des problèmes réels. Les sources d'incertitudes sont pourtant multiples. On retrouve dans le calcul des structures composites essentiellement les mêmes sources d'incertitudes que dans tout problème de calcul de structure (Figure I-26) : dispersion des propriétés matériaux, tolérances de fabrication, méconnaissance des conditions aux limites et des chargements, erreurs numériques et imperfections des modèles. Néanmoins l'aspect hétérogène, anisotrope et multiéchelle des matériaux composites contribue à accentuer les incertitudes sur les propriétés matériaux. Celles-ci s'avèrent de surcroît fortement dépendantes de la qualité des interfaces (entre fibres et matrice et entre plis) et par conséquent très sensibles aux conditions d'élaboration.

La variabilité des propriétés matériaux et, dans une moindre mesure, des paramètres géométriques, peut être abordée de trois façons. Les problèmes d'*incertitudes uniformes* consistent, pour une structure fabriquée en série, à ne considérer que les variations globales d'une pièce à l'autre. Les *incertitudes localisées* correspondent à de fortes variations des propriétés d'une même pièce, et d'une pièce à l'autre, dans une zone localisée et connue de la structure, par exemple au niveau d'un perçage. Ce type de problème se prolonge en considérant des *incertitudes spatialement aléatoires*, dans le cas où il existe une variabilité spatiale des propriétés au sein de la pièce (par exemple en présence de porosités). Néanmoins, cette notion de variabilité spatiale nous semble davantage relever de l'analyse de la nocivité de défauts au moyen de critère d'admissibilité. Par conséquent, dans l'optique de l'optimisation des structures composites, on choisit de traiter uniquement des incertitudes uniformes, ce qui correspond à l'attitude la plus répandue dans la littérature. Il s'agit ainsi de déterminer dans quelle mesure les différentes sources de variabilités, introduites aux différentes échelles de calcul, influent sur les performances des solutions et leur classement. On entre là dans le domaine de l'optimisation robuste, dans lequel on ne trouve, à notre connaissance, que peu d'applications aux structures composites. Ces notions sont abordées plus avant au Chapitre III de ce mémoire.

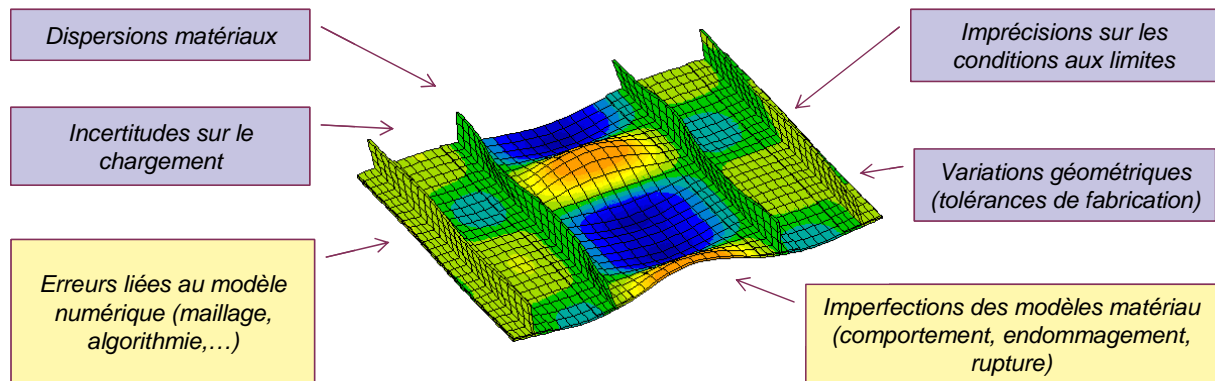


Figure I-26 : Les sources d'incertitudes dans le calcul des structures composites (d'après [Rollet 07]).

I.3.4 BILAN : DEMARCHE PROPOSEE POUR LE DEVELOPPEMENT D'UNE STRATEGIE D'OPTIMISATION COMPOSITE

Au final, dans la suite de ce mémoire, la maîtrise des coûts de calcul conditionne les méthodes développées et les stratégies mises en œuvre. Dans la première partie, ceci se traduit, d'une part, par la recherche de la méthode d'optimisation la plus parcimonieuse et, d'autre part, par la recherche des méthodes permettant de combiner optimisation et estimation de l'impact des incertitudes au moindre coût. Toutefois, pour les applications complexes abordées dans la deuxième et la troisième partie du mémoire (respectivement, panneaux raidis et assemblages), ces seuls aspects s'avèrent insuffisants pour contenir les coûts de calcul. Il faut alors mettre en œuvre de véritables stratégies de calcul pour l'évaluation des solutions, avec approximation des modèles.

Dans toute la suite, on procède en deux temps. Dans un premier temps, tous les développements réalisés en matière d'optimisation des empilements sont illustrés et appliqués dans un contexte physique idéalisé. Les modèles sont supposés parfaits, et aucune dispersion autour de valeurs de calcul n'est prise en compte. La remise en cause des résultats ainsi obtenus intervient dans un second temps, avec l'introduction de considérations de robustesse dans l'optimisation.

Chapitre II Développement d'algorithmes pour l'optimisation multiobjectif des structures composites

Sommaire

II.1	Préalable : spécificités de l'optimisation des empilements	46
II.1.1	Exploiter les espaces intermédiaires issus de la CLT	46
II.1.2	Les règles usuelles de conception des empilements	55
II.1.3	Discussion	60
II.2	Proposition d'un algorithme évolutionnaire multiobjectif spécialisé pour l'optimisation composite	62
II.2.1	Architecture générale de l'algorithme	62
II.2.2	Codage et génération des solutions	64
II.2.3	Gestion des contraintes et sélection des solutions	70
II.2.4	Quelques pistes d'amélioration	71
II.3	Quelques justifications des choix effectués	72
II.3.1	Mesures de performances	72
II.3.2	Méthodologie	74
II.3.3	Cas-tests	74
II.4	Bilan	83

On se positionne dans ce chapitre dans le cadre d'une physique idéalisée, sans incertitudes sur les variables ou les paramètres du problème, et sans remise en cause des modèles employés. Il s'agit ici de présenter l'algorithme proposé pour l'optimisation des empilements dans les structures composites. Cet algorithme est l'élément central des stratégies d'optimisation dont l'étude et le développement constituent l'objet de cette thèse. Ce propos est illustré Figure II-1. L'algorithme d'optimisation correspond au couplage d'une méthode de recherche et d'une méthode de classement des solutions en fonction de leurs performances, dans le but de déterminer les meilleurs compromis entre les objectifs du problème. L'évaluation de ces objectifs s'inscrit dans le cadre d'une stratégie de calcul, propre au problème considéré. La stratégie d'optimisation correspond à l'architecture des communications entre ces éléments. Ce chapitre est structuré en trois points :

- une analyse originale du problème de l'optimisation des empilements et de ses spécificités,
- la présentation de l'algorithme évolutionnaire multiobjectif développé et des adaptations faites pour l'optimisation des séquences d'empilement,
- la justification des choix effectués.

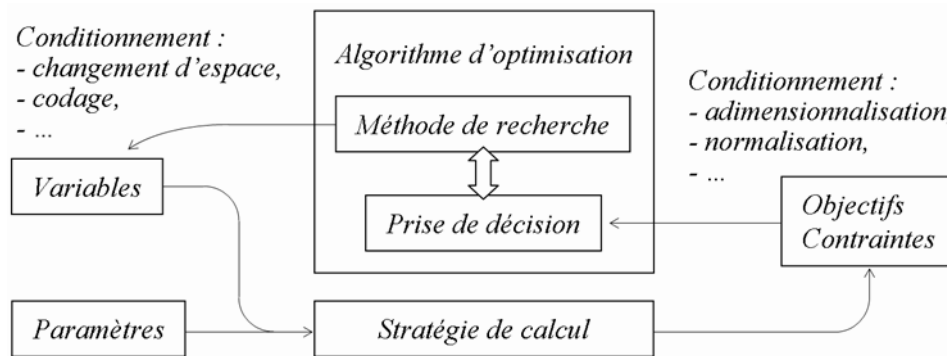


Figure II-1: Les éléments constitutifs d'une stratégie d'optimisation.

II.1 PREALABLE : SPECIFICITES DE L'OPTIMISATION DES EMPILEMENTS

L'optimisation des empilements dans les structures composites constitue un problème combinatoire original et soumis à des contraintes très spécifiques (Cf. I.3). Ces deux aspects sont autant d'obstacles à l'application directe d'algorithmes généraux issus de la bibliographie traitant des méthodes d'optimisation en elles-mêmes. En effet, ces méthodes sont inadaptées à ces spécificités. Etant incapables de les exploiter, leur efficacité s'en trouve considérablement amoindrie. *A contrario*, cette première section vise à montrer en quoi l'analyse mécanique et l'exploitation de ces spécificités permettent d'extraire de riches informations pour améliorer les performances du processus d'optimisation. Pour ce faire, on procède dans un premier temps à l'analyse des différents espaces de travail offerts par la mécanique des stratifiés. On s'applique dans un second temps à inventorier les règles de conception usuelles des empilements, à dégager leur justifications mécaniques et leurs conséquences sur le problème d'optimisation.

II.1.1 EXPLOITER LES ESPACES INTERMEDIAIRES ISSUS DE LA CLT

La formulation générale du problème d'optimisation met en évidence deux espaces de travail distincts et les régions faisables dans chacun d'eux (Cf. I.2.1) : l'espace de décision \mathbf{X} et le domaine des valeurs réalisables \mathbf{X}_f , l'espace des objectifs \mathbf{Y} et le domaine des objectifs réalisables \mathbf{Y}_f , image de \mathbf{X}_f par le vecteur de fonctions-objectif f . La notion d'espaces intermédiaires propres à l'optimisation composite est introduite dans la section I.3.1.c de ce mémoire, avec la démarche à deux niveaux.

L'idée sous-jacent consiste à réduire le nombre de variables et à reformuler le problème avec des variables de décision continues. Ces variables sont liées aux rigidités des stratifiés.

Afin d'appréhender leur intérêt pour l'optimisation, intéressons-nous à un cas simple à deux variables et deux objectifs, pour lequel il est possible d'énumérer toutes les solutions et de proposer une visualisation bidimensionnelle des espaces \mathbf{X}_f et \mathbf{Y}_f . Pour cela on restreint l'espace des valeurs réalisables à la famille des stratifiés symétriques équilibrés à huit plis, s'écrivant sous la forme $[\pm\theta_1/\pm\theta_2]_s$ avec les orientations θ_1 et θ_2 variant de $2,5^\circ$ en $2,5^\circ$. On dénombre alors 5 184 possibilités d'empilements. On cherche ici à maximiser la résistance du stratifié pour le chargement $N_{xy} = 300$ N. Ceci revient à minimiser la valeur du critère de Hashin-Rotem [Hashin 73]. Ce critère distingue les ruptures en mode fibre et en mode interfibre :

$$f_1 = \left(\frac{\sigma_{11}^+}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{11}^-}{X_c} \right)^2 \leq 1 \quad \text{pour la rupture des fibres} \quad (II-1)$$

$$f_2 = \left(\frac{\sigma_{22}^+}{Y_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}^-}{Y_c} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_c} \right)^2 \leq 1 \quad \text{pour la rupture matricielle} \quad (II-2)$$

La rupture intervient dès que l'une ou l'autre des inégalités précédentes n'est plus remplie. Les résultats de l'énumération sont présentés en Figure II-2 pour des stratifiés carbone / époxy. A l'évidence, l'espace intermédiaire des rigidités permet de régulariser le problème. Ici, la fonction-objectif est multimodale dans le plan (θ_1, θ_2) et monotone dans le plan (A_{11}, A_{22}) . Par contre, la forme du domaine réalisable dans ce plan est complexe et non convexe.

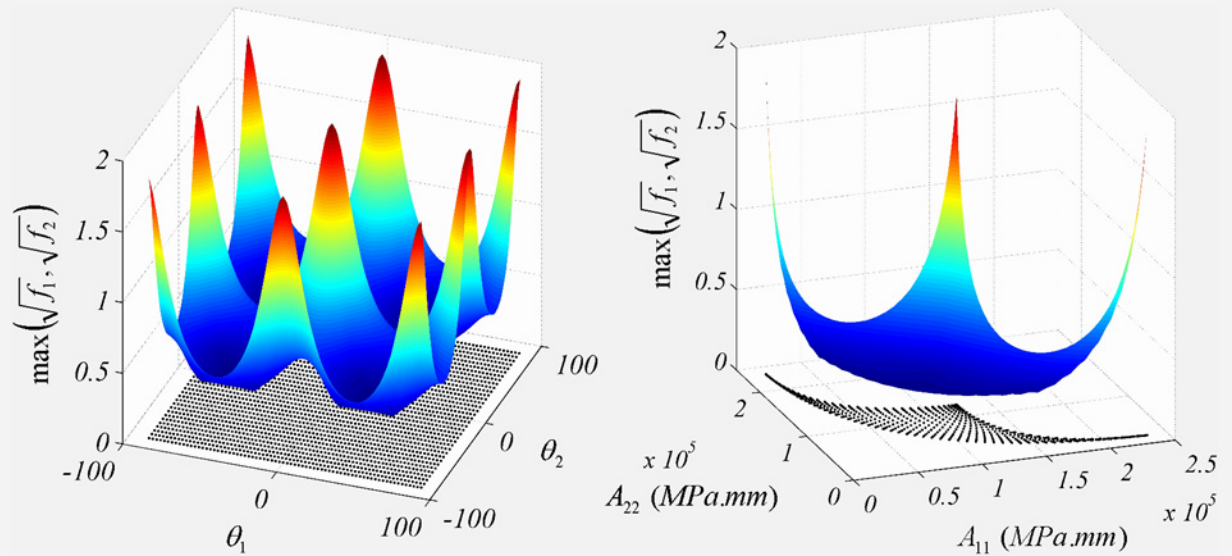


Figure II-2: visualisation du critère de rupture dans le plan des orientations de plis (à gauche) et dans celui des rigidités longitudinales et transverses (à droite).

II.1.1.a Description des espaces intermédiaires issus de la CLT

En pratique, la CLT offre trois écritures différentes du même espace intermédiaire associé aux rigidités du stratifié, à savoir : la matrice de rigidité \mathbf{ABD} , les paramètres de stratification et les invariants polaires. Seules les deux premières écritures sont détaillées et exploitées dans la suite. On renvoie aux travaux de Verchery et de ses collaborateurs [Verchery 79; Vannucci 07] pour plus d'informations sur la représentation polaire et ses applications. La méthode est intéressante, mais peu employée et plus complexe à présenter.

La matrice de rigidité ABD

De par sa construction (Cf. I.1.2.a), la matrice ABD est entièrement déterminée dans le cas général par la donnée de dix-huit termes (six pour chacun des blocs A , B et D). Cependant, il est aisé d'établir, pour un stratifié quelconque, les six relations suivantes :

$$A_{66} = -\frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) + (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} + 2\bar{Q}_{66})\frac{h}{2} \text{ et } A_{12} = A_{66} + (\bar{Q}_{12} - \bar{Q}_{66})h$$

$$B_{66} = -\frac{1}{2}(B_{11} + B_{22}) \text{ et } B_{12} = B_{66} \quad (II-3)$$

$$D_{66} = -\frac{1}{2}(D_{11} + D_{22}) + (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} + 2\bar{Q}_{66})\frac{h^3}{24} \text{ et } D_{12} = D_{66} + (\bar{Q}_{12} - \bar{Q}_{66})\frac{h^3}{12}$$

Le nombre de termes nécessaires est donc ramené à douze (quatre par bloc). Le comportement élastique d'un stratifié symétrique ($B = 0$) est ainsi entièrement caractérisé par la donnée de huit modules de rigidité, et six termes non nuls suffisent dans le cas d'un stratifié symétrique équilibré : deux pour le comportement de membrane, A_{11} et A_{22} , et quatre pour celui de flexion, D_{11} , D_{22} , D_{16} et D_{26} . Afin de visualiser la forme du domaine réalisable dans cet espace à six dimensions, on évalue les matrices de rigidités ABD de l'ensemble des empilements symétriques équilibrés à huit plis, avec un pas de discrétisation angulaire de $2,5^\circ$. On dénombre 16 606 configurations possibles. Celles-ci sont représentées sur la Figure II-3, en projection sur trois plan significatifs d'un point de vue mécanique :

- le plan (A_{11}, A_{22}) pour caractériser le comportement élastique de membrane,
- le plan (D_{11}, D_{22}) pour caractériser le comportement de flexion longitudinale et transverse
- le plan (D_{16}, D_{26}) afin de transcrire la réalité des couplages flexion / torsion dans les stratifié.

Ainsi, chaque point de la Figure II-3 représente un ou plusieurs stratifiés. Par exemple, la représentation dans le plan des rigidités de membrane ne capture pas l'influence des permutations d'empilements.

Les paramètres de stratification (lamination parameters)

Bien que les modules de rigidités soient des grandeurs physiques significatives pour l'ingénieur, il n'existe à notre connaissance que très peu de travaux portant sur leur analyse directe dans la littérature traitant d'optimisation composite [Conti 96]. La majorité des auteurs a préféré s'intéresser à la question à partir d'une réécriture du problème proposée par Miki [Miki 82]. Il s'agit en fait d'une technique de décomposition des modules de rigidité du stratifié permettant de séparer l'influence des propriétés matériau du pli de l'influence de l'empilement (orientations des plis) et de l'épaisseur. Dans cette décomposition, les *paramètres de Tsai et Pagano* [Tsai 68], notés U_i , au nombre de cinq, traduisent l'influence du matériau. Les *paramètres de stratification*, notés ξ_j au nombre de quatre pour chaque bloc (indiqué en exposant), traduisent l'influence de l'empilement. Les résultats présentés sur la Figure II-3 sont repris en Figure II-4 et représentés dans les plans des paramètres de stratifiés correspondants.

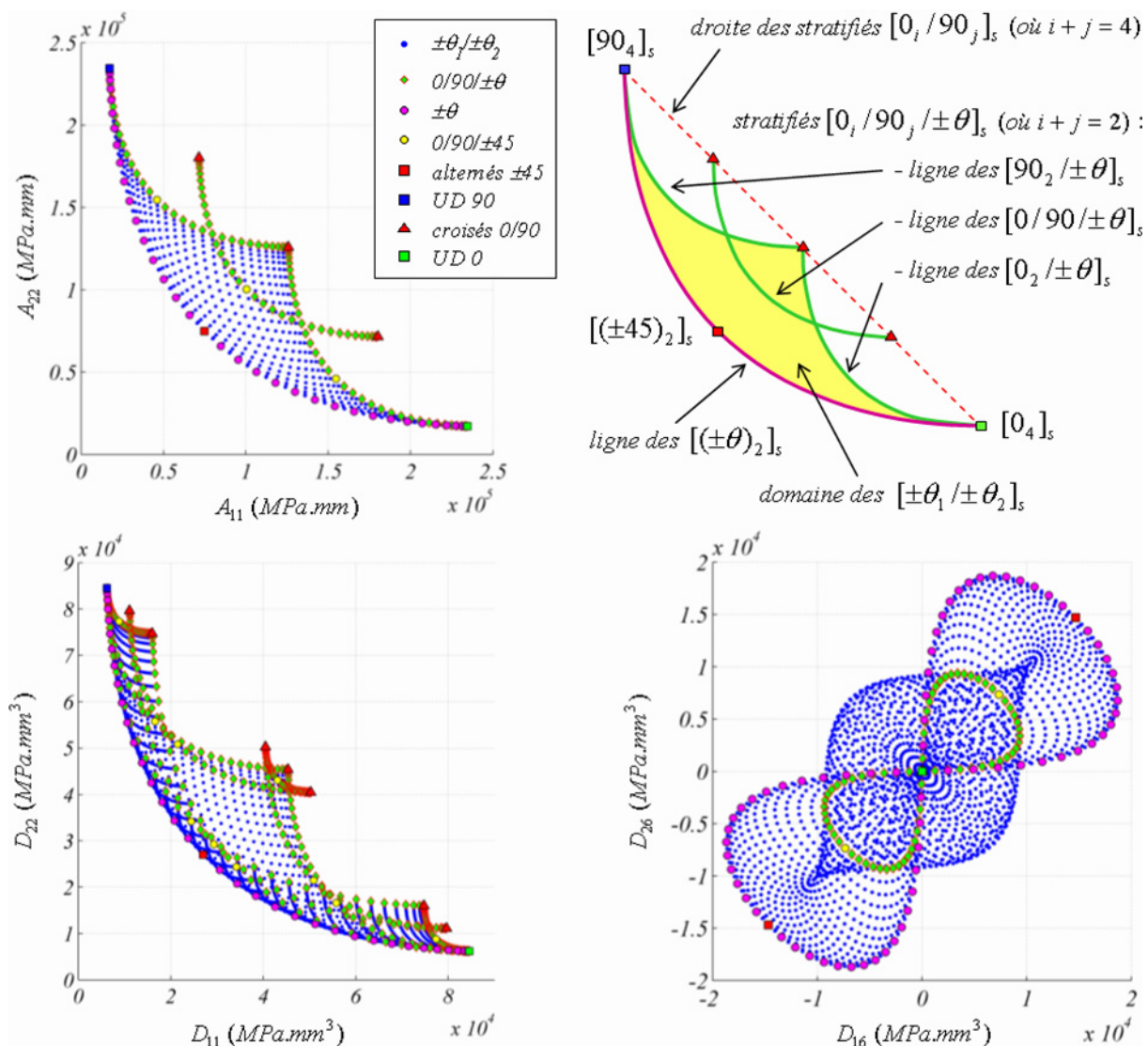


Figure II-3 : Visualisation des 6 modules de rigidité nécessaires à la caractérisation complète du comportement élastique des stratifiés symétriques équilibrés. Tous les empilements possibles, symétriques équilibrés à 8 plis, avec un pas de discrétisation angulaire de $2,5^\circ$ sont représentés ici, soit 16606 solutions. Les empilements sont différenciés par type.

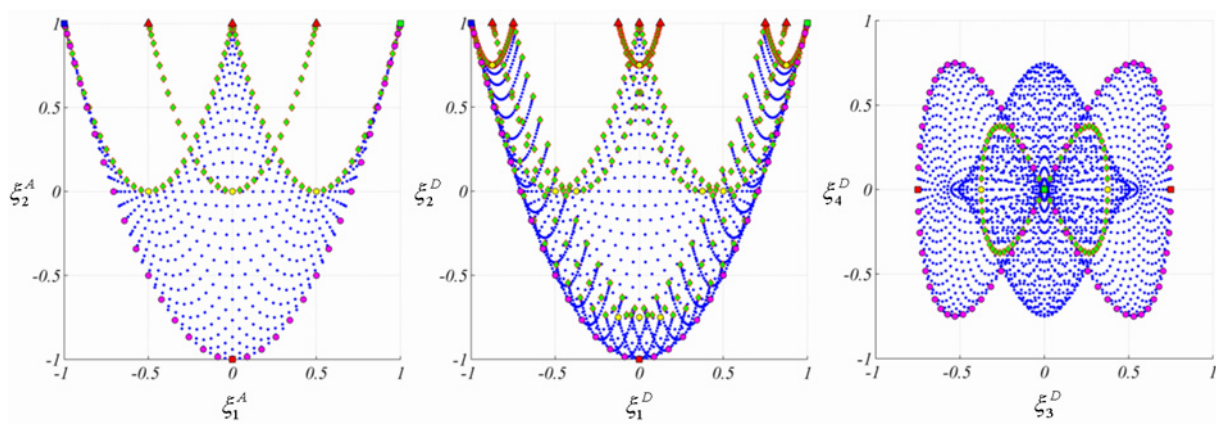


Figure II-4 : Visualisation des résultats présentés en Figure II-3 dans les plans de projection des paramètres de stratification correspondant, à gauche, aux propriétés de membrane, au centre, aux propriétés de flexion longitudinale et transverse et à droite, aux couplages flexion / torsion.

Les paramètres de Tsai et Pagano s'écrivent, en fonction des termes non nuls de la matrice de rigidité réduite du pli dans ses axes d'orthotropie, de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 3/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{Q}_{11} \\ \overline{Q}_{22} \\ \overline{Q}_{12} \\ \overline{Q}_{66} \end{Bmatrix} \quad (II-4)$$

Les paramètres de stratification et leurs relations avec les modules de rigidités sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{12} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^A & \xi_2^A & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1^A & \xi_2^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^A & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^A & 0 & 1 \\ 0 & \xi_3^A/2 & \xi_4^A & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3^A/2 & -\xi_4^A & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \xi_1^A = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta(z) dz \\ \xi_2^A = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta(z) dz \\ \xi_3^A = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta(z) dz \\ \xi_4^A = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta(z) dz \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{12} \\ B_{66} \\ B_{16} \\ B_{26} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^B & \xi_2^B & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1^B & \xi_2^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^B & 0 & 1 \\ 0 & \xi_3^B/2 & \xi_4^B & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3^B/2 & -\xi_4^B & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \xi_1^B = \frac{4}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta(z) z dz \\ \xi_2^B = \frac{4}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta(z) z dz \\ \xi_3^B = \frac{4}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta(z) z dz \\ \xi_4^B = \frac{4}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta(z) z dz \end{cases} \quad (II-5)$$

$$\begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{12} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^D & \xi_2^D & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1^D & \xi_2^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^D & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^D & 0 & 1 \\ 0 & \xi_3^D/2 & \xi_4^D & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3^D/2 & -\xi_4^D & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \xi_1^D = \frac{12}{h^4} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta(z) z^2 dz \\ \xi_2^D = \frac{12}{h^4} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\theta(z) z^2 dz \\ \xi_3^D = \frac{12}{h^4} \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\theta(z) z^2 dz \\ \xi_4^D = \frac{12}{h^4} \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\theta(z) z^2 dz \end{cases}$$

Sur les Figures II-3 et II-4, les empilements sont repérés par types afin de déterminer leurs positions respectives par rapport aux frontières du domaine réalisable. On constate ainsi que les frontières dans le plan des propriétés de membrane sont entièrement décrites par les stratifiés de type $[0_i/90_j/\pm\theta_k]_s$, où $i+j+2k=4$. Dans le plan (D_{11}, D_{22}) , c'est l'enveloppe convexe du domaine réalisable qui est décrite par les empilements $[0_i/90_j]_s$ et les $[(\pm\theta)_2]_s$. Toutefois, en raison de l'influence des permutations, cette information s'avère plus difficile à exploiter pour les propriétés de flexion, bien qu'une certaine régularité semble se dégager des visualisations dans les plans (D_{11}, D_{22}) et (D_{16}, D_{26}) .

II.1.1.b Exploiter les espaces intermédiaires pour la résolution de problèmes simples

A ce stade, on dispose d'espaces intermédiaires intéressants (dimension réduite, régularisation de certaines fonctions-objectif). Ces espaces peuvent être utilisés pour résoudre de façon graphique des problèmes d'optimisation simples. Au préalable, il est nécessaire de déterminer dans ces espaces les domaines réalisables, ce qui constitue la principale difficulté de la méthode.

Détermination des domaines réalisables

De nombreux auteurs se sont penchés sur le problème de la détermination des frontières du domaine réalisable pour les paramètres de stratification, dans le but de les utiliser comme variables pour l'optimisation des empilements. Les paramètres étant normalisés, on a :

$$-1 \leq \xi_{[1,2,3,4]}^{A,B,D} \leq 1 \quad (\text{II-6})$$

Dans le cas, particulier mais souvent recherché par le concepteur, des stratifiés aux comportements de membrane et de flexion découplés ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$), Miki [Miki 82] décrit le domaine faisable des paramètres ξ_1^A et ξ_2^A , pour les membranes orthotropes (A_{16} et A_{26} nuls), par l'inégalité suivante :

$$\xi_2^A \geq 2(\xi_1^A)^2 - 1 \quad (\text{II-7})$$

Précisons que les mêmes relations exprimées en fonction des paramètres de flexion ξ_i^D permettent de déterminer les domaines faisables pour les stratifiés aux comportements de membrane et de flexion découplés, orthotropes ou quelconques en flexion. Grenestedt [Grenestedt 93] montre que le domaine faisable des douze paramètres de stratifié constitue un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^{12} dans le cas général où les orientations et les épaisseurs de plis varient sans contrainte. Il adopte d'autre part une approche variationnelle pour établir l'expression analytique du domaine faisable des paramètres ξ_1^A , ξ_2^A , ξ_1^D et ξ_2^D , pour des stratifiés découplés à la fois orthotropes en membrane et en flexion. Il faut attendre les travaux de [Diaconu 02] pour la résolution numérique dans le cas général de la formulation variationnelle proposée par Grenestedt. Les expressions explicites de l'ensemble des frontières restent toutefois inconnues à ce jour.

Cependant, supposer qu'un pli puisse prendre n'importe quelle épaisseur réelle positive et n'importe quelle orientation angulaire n'est pas réaliste dans un problème de conception de composites stratifiés. L'épaisseur ne constitue pas une variable d'optimisation mais un paramètre fixé du problème. De plus le choix des orientations possibles est le plus souvent restreint, par des considérations liées aux processus de fabrication, à un ensemble de valeurs prédéfinies. Par conséquent, le domaine faisable déterminé dans les études citées précédemment n'est que partiellement décrit. D'une part, il est discrétisé. D'autre part, au-delà de la discrétisation, des régions entières de ce domaine s'avèrent irréalisables (voir, par exemple Figure II-4).

De fait, dans le cas des empilements de plis identiques, le domaine faisable n'est pas convexe. On montre aisément, dans le plan (A_{11} , A_{22}), que les frontières sont décrites par les empilements de type $[0_i/90_j/\theta_k]$ où $i + j + k = N$ avec N le nombre total de plis, i et j variant de 0 à N et k de 1 à N . Les équations correspondantes découlent simplement du développement des relations de définition des paramètres de stratifications (équation II-8) :

$$\xi_2^A = \left(\frac{2N}{k}\right)(\xi_1^A)^2 + \left(\frac{4(j-i)}{k}\right)\xi_1^A + \left(\frac{k(i+j-k)+2(j-i)^2}{Nk}\right), \text{ pour } k > 0 \quad (\text{II-8})$$

L'ensemble de ces courbes est tracé sur la Figure II-5 dans le cas des stratifiés à 8 plis. Des considérations de parité sur i , j , k et N permettent de déterminer, parmi ces courbes, les frontières du domaine faisable en fonction du type d'empilement étudié : quelconque, symétrique et/ou équilibré

(voir II.1.2.c). Par exemple, dans le cas des empilements quelconques à N plis, le domaine faisable (en jaune sur la Figure II-5) est délimité par les courbes $k = 1$ et $k = N$.

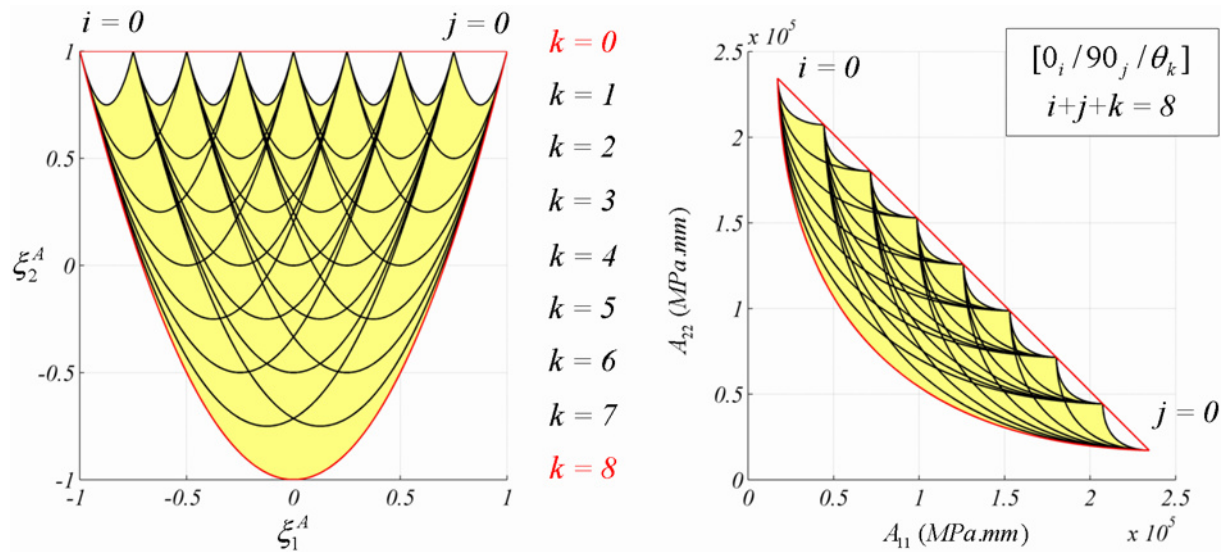


Figure II-5 : Visualisation dans le plan des paramètres de stratification (à gauche) et des modules de rigidités (à droite) du domaine réalisable pour des empilements quelconques carbone / époxy à 8 plis. En rouge les frontières convexes déterminées par Miki [Miki 82]. En noir les courbes décrites par l'équation II-8.

Résolution graphique de problèmes simples

De nombreux objectifs simples peuvent être directement exprimés à partir des paramètres de stratification (ou des modules rigidités). Pour les stratifiés symétriques équilibrés, Miki [Miki 82] montre que les constantes de l'ingénieur E_1 , E_2 , ν_{12} et G_{12} du stratifié s'expriment comme des fonctions monotones des paramètres ξ_1^A et ξ_2^A . Il est alors aisé de déterminer une zone d'intérêt dans le plan (ξ_1^A, ξ_2^A) vis-à-vis d'une combinaison de ces modules (Figure II-6). De même, Grenestedt [Grenestedt 93] démontre que les fréquences propres de vibrations, la force critique de flambement (avec hypothèse d'orthotropie en flexion, voir Figure II-7), ou certains critères macroscopiques de rupture sont autant de fonctions concaves des paramètres de stratifiés. Utiliser les paramètres de stratification comme variables d'optimisation des empilements, plutôt que les orientations et les épaisseurs de plis (ici supposées varier sans restriction), permet donc, d'une part, de réduire considérablement le nombre des variables et, d'autre part, de se ramener à un problème convexe avec un unique optimum. Le problème d'optimisation est ainsi considérablement simplifié.

Ce constat est à la base de la démarche à deux niveaux pour l'optimisation composite (Cf. I.3.1.c). Caractériser le stratifié par ses modules de rigidité constitue un moyen commode de dissocier les échelles de la structure et du matériau dans le problème d'optimisation. Au premier niveau la structure est optimisée avec une vision macroscopique et continue du matériau. Au second niveau c'est l'empilement qui est optimisé avec une vision discrète de la transition entre l'échelle mésoscopique (celle du pli) et l'échelle macroscopique (celle du stratifié). Néanmoins ce type de méthodes trouve rapidement ses limites. D'une part, il est difficile de s'assurer que les valeurs optimales des paramètres de stratification obtenues au premier niveau de l'optimisation sont réalisables au second. En effet, le domaine des rigidités réalisable est discret et non convexe, et l'impact des contraintes du problème sur ce domaine est difficile à estimer *a priori*. D'autre part, s'il est possible, par la CLT, de caractériser le comportement élastique du composite à l'échelle du stratifié, l'échelle pertinente pour caractériser le comportement à rupture reste celle du pli, à laquelle il convient de différencier plusieurs modes de dégradation locale (Cf. I.1.2.b). Ainsi, si la démarche à deux

niveaux semble toute indiquée pour la résolution de problèmes dépendant principalement des rigidités macroscopiques, elle s'avère inadaptée lorsque des considérations avancées de rupture entrent en jeu. De fait, il est impossible d'appliquer dans une démarche d'optimisation à deux niveaux une approche multiéchelle de la rupture.

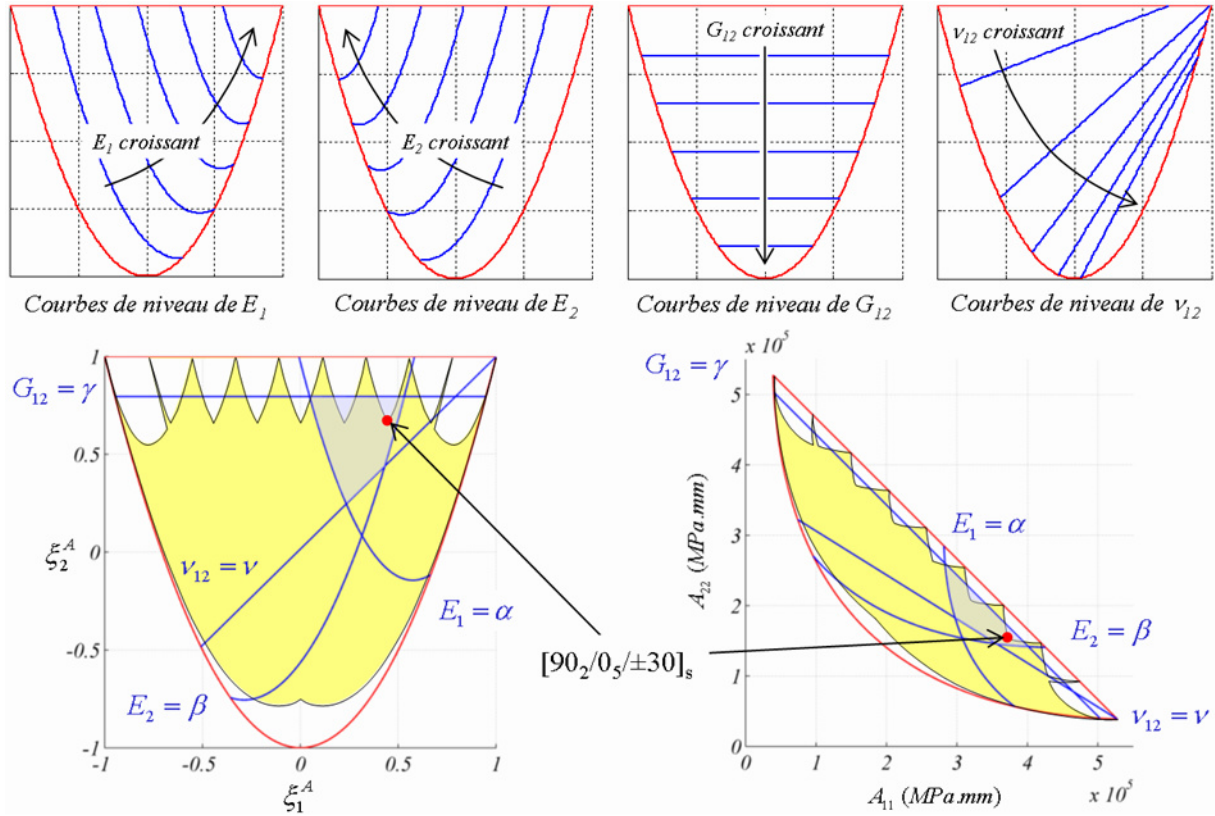


Figure II-6 : En haut : courbes de niveau des constantes de l'ingénieur. En bas : zone d'intérêt correspondant aux empilements tels que $E_1 > \alpha$, $E_2 > \beta$, $G_{12} > \gamma$ et $\nu_{12} < \nu$ (en bleu). En jaune le domaine réalisable pour les stratifiés symétriques équilibrés à 18 plis en carbone / époxy. Ici, $\alpha = 60$ GPa, $\beta = 30$ GPa, $\gamma = 7,3$ GPa et $\nu = 0,3$. Les caractéristiques de la solution en rouge sont : $E_1 = 78,3$ GPa, $E_2 = 32,6$ GPa, $G_{12} = 8,5$ GPa et $\nu_{12} = 0,2$.

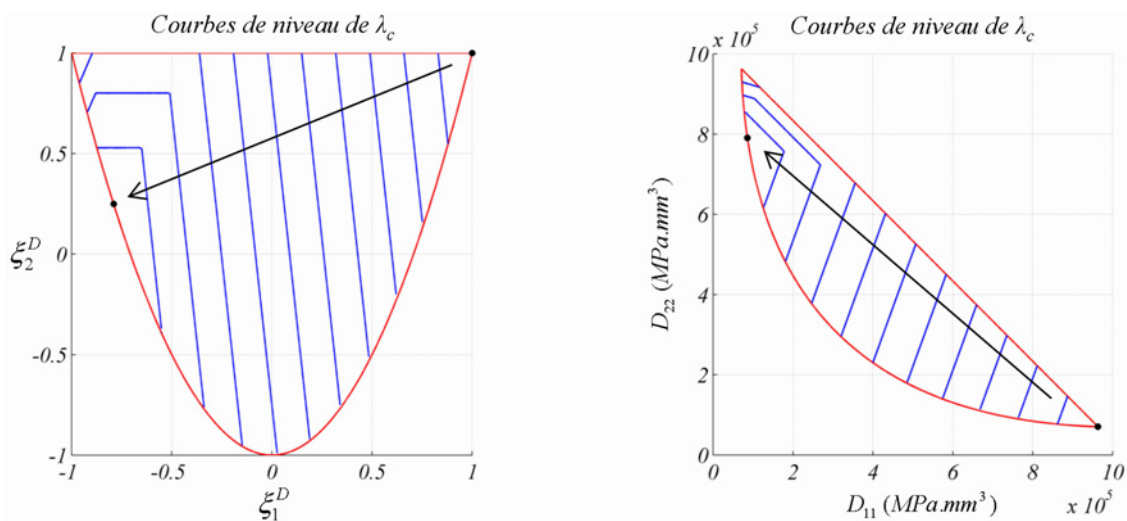


Figure II-7 : Courbes de niveaux du facteur de flambement critique pour une plaque rectangulaire, de longueur 500 mm et de largeur 250 mm, sollicitée en bicompression ($N_x = N_y$). La plaque est supposée orthotrope en flexion [Berthelot 92]. En rouge, l'enveloppe convexe du domaine des rigidités réalisables pour des stratifiés carbone / époxy à 18 plis. Pour un chargement unique, l'optimum appartient toujours à la frontière du domaine réalisable. Il s'agit donc d'un empilement de type $[(\pm\theta)_3]$. Ici, $\theta \approx 71,2^\circ$.

II.1.1.c Caractériser la proximité¹ des empilements

La caractérisation des similitudes entre deux stratifiés est une question souvent éludée dans les publications traitant d'optimisation composite. Il s'agit toutefois d'un problème intéressant, notamment pour l'optimisation multiobjectif *a posteriori*. En effet, si, de façon classique, on cherche à obtenir une bonne distribution des solutions le long du front de Pareto, dans l'espace des objectifs du problème, il est tout aussi intéressant d'assurer la diversité des empilements optimaux.

Caractériser la proximité de deux stratifiés dans l'espace des objectifs

Pour quantifier l'éloignement de deux stratifiés dans l'espace des objectifs, on peut utiliser une distance euclidienne. Pour cela il convient d'adimensionner les objectifs lorsque ceux-ci sont de natures différentes et de les normer lorsque les ordres de grandeur diffèrent. Ce faisant, on caractérise une solution uniquement par ses performances, ce qui permet de guider la recherche vers une meilleure distribution des solutions sur le front de Pareto, mais pas dans l'espace de recherche.

La difficulté de la définition d'une distance dans l'espace des empilements

Quantifier l'éloignement de deux stratifiés dans l'espace de recherche est un exercice délicat. La première approche pourrait consister à utiliser une distance euclidienne dans l'espace des empilements, sur le cosinus des orientations de plis. Toutefois, outre le fait qu'une distance en dimension N peut s'avérer difficile à interpréter lorsque N est grand, celle-ci n'a que peu de sens physique. En effet, elle ne peut rendre compte des permutations de la séquence d'empilement. De plus, elle accorde la même importance à une différence au cœur du stratifié qu'à l'extérieur. Enfin, il est impossible de comparer deux stratifiés qui n'ont pas le même nombre de plis.

Dans la littérature, ce problème a principalement été abordé dans le cadre de l'optimisation de panneaux comportant des variations d'épaisseurs, pour lesquels le problème global est subdivisé en sous-problèmes, par zones d'épaisseur constante, traités indépendamment. Il convient alors d'assurer la compatibilité des empilements au niveau des reprises de plis pour éviter des discontinuités trop importantes. Dans ce contexte, la méthode la plus élaborée pour quantifier ces discontinuités est, à notre connaissance, la notion d'*edit distance* [Adams 05]. Cette technique, issue de l'informatique, permet de comparer deux chaînes de caractères en comptabilisant le nombre d'opérations de type insertion, délétion et substitution nécessaires pour passer d'une chaîne à l'autre. Appliquée à la comparaison d'empilements, cette méthode s'avère toutefois limitée. Tout d'abord, trouver la suite minimale d'opérations pour passer d'une chaîne à l'autre constitue un problème d'optimisation en soi. D'autre part, cette technique ne tient pas compte de l'amplitude des substitutions, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de différence entre remplacer un pli orienté à 0° par un pli orienté à 1° ou 90° , alors que mécaniquement, le comportement du stratifié n'est pas affecté de la même manière. Enfin, cette méthode accorde une même importance aux différences au cœur du stratifié et en surface.

Caractériser la proximité de deux stratifiés dans l'espace des rigidités

Les meilleurs indicateurs dont on dispose pour quantifier les différences entre empilements correspondent naturellement aux modules de rigidité ABD . Leur obtention par la CLT est quasi immédiate. L'information offerte est très riche : épaisseur, orientations des plis, ordre d'empilement et propriétés élastiques du matériau. Deux stratifiés proches dans le plan (A_{11}, A_{22}) présentent des orientations similaires dans des proportions comparables. Si, de plus, ces stratifiés sont proches dans le plan (D_{11}, D_{22}) , alors l'ordre d'empilement de leurs plis est très similaire, et probablement identique pour les plis extérieurs (voir Figure II-8).

¹ Le problème n'est pas trivial : comment estimer si deux empilements sont proches, voisins, comparable ou pas?

Pour caractériser les similitudes entre stratifiés, on emploie la distance euclidienne dans l'espace des rigidités. Toutefois, il n'est pas nécessaire d'exploiter simultanément les douze modules nécessaires à la caractérisation complète de la matrice ABD . D'une part, on sait *a priori* qu'en fonction du type d'empilements étudiés, certains modules sont toujours nuls. D'autre part, les ordres de grandeurs des termes des blocs A , B et D sont différents. En pratique, dans le cas d'un problème de membrane, travailler sur le bloc A suffit. Si des considérations liées aux propriétés de flexion interviennent, c'est principalement le bloc D qui compte. Dans le cas où l'on souhaite tenir compte de modules d'ordres de grandeur différents, il faut se ramener aux paramètres de stratification correspondants. Toutefois, on perd l'information, sur l'épaisseur des empilements comparés.

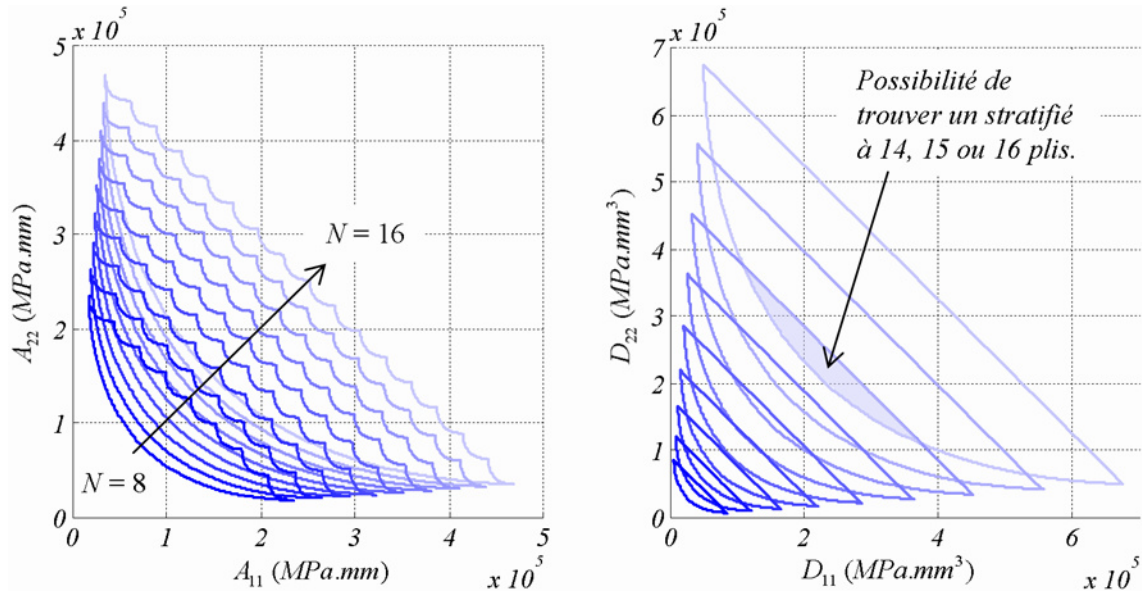


Figure II-8 : Enveloppe des domaines réalisables dans les plans (A_{11}, A_{22}) et (D_{11}, D_{22}) , pour des empilements quelconques, réalisés en carbone / époxy, dont le nombre de plis varie de 8 à 16.

II.1.2 LES REGLES USUELLES DE CONCEPTION DES EMPILEMENTS

De façon générale, la pratique industrielle de conception des empilements comporte trois étapes :

- la détermination du nombre total de plis et des proportions pour chaque orientation possible,
- le choix de l'ordre de séquençement des plis,
- la définition des reprises de plis pour des panneaux d'épaisseur variable.

Diverses règles de conception s'appliquent à chacune de ces étapes. Ces règles proviennent de l'expérience industrielle en matière de conception et de fabrication composite et sont aujourd'hui inscrites dans des documents très largement diffusés, comme par exemple le MIL-HDBK-17-3F ou [Niu 92]. Ces règles pouvant parfois s'avérer contradictoires, il convient d'accorder la priorité aux plus pertinentes d'entre elles pour l'application visée. Par conséquent, l'empilement final résulte d'un compromis entre diverses priorités, formalisées par des règles qu'il n'est pas toujours possible de toutes respecter (par exemple dans le cas de stratifiés de très faible épaisseur).

II.1.2.a Description et justification mécanique

Toutes les règles décrites dans cette section sont adaptées au cas usuel des empilements constitués de plis orientés selon les quatre directions $0^\circ, \pm\theta$ et 90° , où θ est le plus souvent égal à 45° (plus rarement 30°). Trois règles s'appliquent généralement au niveau de la définition du nombre de plis pour chaque orientation possible :

- **la règle de symétrie miroir** consiste à définir des empilements symétriques par rapport au plan moyen du stratifié. Cette règle permet d'éviter les couplages entre flexion et traction du stratifié. Du point de vue de la fabrication, annuler ces couplages permet d'éviter la flexion des panneaux lors de leur élaboration²,
- **la règle d'équilibrage** consiste à imposer un même nombre de plis orientés à $+\theta$ qu'à $-\theta$, avec $\theta \in]0^\circ, 90^\circ [$. L'équilibrage permet d'annuler les couplages plans et d'éviter les déformations correspondantes lors de la fabrication³,
- **la règle des 10 %** impose un minimum de 10 % plis dans chacune des directions $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ ($0^\circ, \pm\theta^\circ$ et 90° pour le MIL-HDBK-17-3F). Cette règle de conception vise à éviter d'obtenir un stratifié dont le comportement est régi par celui de la matrice dans certaines directions. Elle est principalement justifiée par la méconnaissance des chargements et la nécessité qui en découle d'assurer une tenue et une rigidité minimale quelque soit la direction considérée. Cette règle permet de surcroît de minimiser le coefficient de Poisson macroscopique de la plaque.

Notons que ces contraintes sont libérables dans différents cas. Certains couplages peuvent en effet être requis pour certains types d'applications, comme par exemple les couplages plans en aéroélasticité afin de contrôler l'évolution de l'angle d'incidence du profil le long de l'aile fonction de sa flèche. D'autre part la symétrie miroir n'est pas utile pour les structures axisymétriques. Il s'avère enfin souvent impossible de respecter ces contraintes au niveau des pertes de plis. Dans ce cas, asymétries et déséquilibres doivent être repoussés au plus près possible du plan moyen du stratifié afin d'en minimiser l'impact.

Les quatre règles suivantes s'exercent au niveau de la définition de l'ordre de séquençement des plis :

- **la règle de groupage** consiste à limiter le nombre de plis contigus de même orientation. Bien que cette règle soit formulée par commodité en nombre de plis, il s'agit en fait d'une limite en épaisseur. Le nombre maximum de plis contigus de même orientation dépend ainsi de l'épaisseur de la nappe unidirectionnelle. Elle est, par exemple, de quatre plis pour un empilement réalisé en T300/914 (avec une épaisseur de pli moyenne de 0,14 mm) et de deux plis pour un empilement en T700/M21 (avec une épaisseur de pli moyenne de 0,26 mm). Le MIL-HDBK-17-3F propose une version plus élaborée de cette règle en précisant deux limites différentes pour l'épaisseur totale de couche, que les fibres soient orientées perpendiculairement à un bord libre ou non. De fait, cette règle vise à réduire les phénomènes d'endommagement sensibles à l'épaisseur des groupages de plis de même orientation, comme par exemple, les effets de bords libres ou la microfissuration matricielle. Selon le MIL-HDBK-17-3F cette règle permet par exemple de réduire les risques de rupture des assemblages boulonnés par cisaillement de la plaque composite,
- **la règle de désorientation** impose une désorientation maximale de 45° entre deux plis adjacents. Cette règle de conception vise à minimiser les effets des cisaillements interlaminaires afin de limiter les problèmes de délaminage en bords libres ou au niveau des perforations,

² Un empilement symétrique peut comporter un nombre impair de plis. Il est alors symétrique de part et d'autre du pli moyen.

³ De même, le nombre de plis d'un empilement symétrique équilibré n'est pas nécessairement un multiple de quatre. Par contre, pour respecter la règle d'équilibrage, le pli moyen doit être orienté à 0° ou 90° .

- **la règle de battage** consiste à imposer une répartition homogène des différentes orientations de pli dans l'épaisseur du stratifié pour les applications critiques du point de vue de la rupture. Cette recommandation vise à réduire la sensibilité du stratifié aux délaminages et se justifie par une certaine méconnaissance de ce type de phénomènes,
- la dernière règle concerne **la tolérance aux dommages** et consiste à imposer la présence à la surface du stratifié d'un ou de deux plis, désorientés de $\pm 45^\circ$ par rapport à la direction de la sollicitation principale (le plus souvent l'axe x), afin de minimiser les conséquences d'impacts ou de rayures éventuels. De façon générale, il est recommandé de repousser les plis les plus chargés au cœur du stratifié (ce qui est contradictoire avec l'obtention d'une grande rigidité de flexion dans cette direction).

Une fois encore il convient de souligner que l'empilement final résulte d'un compromis entre différentes priorités, ce qui peut conduire à s'écarter des règles précédentes. Il peut ainsi s'avérer nécessaire de violer la règle de battage pour optimiser le comportement en flambement. En effet la force critique de flambement augmente lorsque les plis orientés selon la direction principale de compression sont repoussés vers les surfaces extérieures du stratifié. D'autre part, dans le cas du flambage de panneaux sollicités en cisaillement, le concepteur peut être amené à violer la règle de désorientation afin de minimiser les couplages entre flexion et torsion du stratifié en accolant par paires les plis orientés à $+45^\circ$ et -45° . En effet, ces couplages dissymétrisent le comportement en flambement quand le cisaillement changent de signe. Or, le concepteur ne maîtrise pas toujours le signe des cisaillements dimensionnants auquel cas il convient d'assurer une résistance équivalente au flambement quel que soit le signe du cisaillement.

II.1.2.b Reformulation des règles de conception sous forme de critères quantifiables

Les règles de conception sont autant de contraintes pour l'optimisation des empilements. Ces contraintes peuvent être directement évaluées dans l'espace des empilements dans le cas des règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et de tolérance aux dommages. Par contre, la règle des 10 % doit être reformulée sous une forme adaptée à de nouvelles orientations de plis (par exemple tous les 15°). La règle de battage doit quant à elle être reformulée sous forme d'un critère quantitatif permettant sa prise en charge dans l'algorithme d'optimisation. Pour ce faire, ces deux règles sont évaluées dans l'espace des rigidités. De ce point de vue, la règle des 10 % et la règle de battage correspondent essentiellement à des critères de rigidité minimale, respectivement de membrane et de flexion.

Ainsi, on considère qu'un stratifié respecte la règle des 10 % si ses modules de rigidités A_{11} , A_{22} et A_{66} sont supérieurs ou égaux aux modules correspondants pour le stratifié quasi-isotrope virtuel $[45/0/-45/90]_s$ dont l'épaisseur totale est égale à 40 % de celle du stratifié considéré (Figure II-9). Sous cette forme, la règle des 10 % devient applicable à des orientations de plis quelconques. De plus, sans en trahir l'esprit, le critère proposé s'avère légèrement moins restrictif que la formulation initiale pour les faibles nombres de plis (par exemple, l'empilement $[0_2/\pm 45]_s$ satisfait au critère).

Dans le cas de la règle de battage, on utilise, comme mesure de l'homogénéité de la répartition des plis dans l'épaisseur du stratifié, la distance euclidienne entre la matrice de rigidité de flexion D , obtenue par la CLT, et sa valeur homogénéisée (voir équation I-10). Toutefois, sous cette forme, il est difficile de déterminer un seuil à atteindre pour reformuler la règle de battage sous forme d'une contrainte d'inégalité. Dans la suite, la règle de battage est donc intégrée en tant qu'objectif supplémentaire du problème d'optimisation. Pour obtenir un stratifié homogène, on cherche à minimiser l'écart entre les modules de flexion réels et les modules homogénéisés. Afin d'alléger les calculs de distance, on ne considère que les trois termes suivants : D_{11} , D_{22} et $\max(|D_{16}|, |D_{26}|)$. La

matrice D homogénéisée est toujours supposée orthotrope, de telle sorte que les termes de couplages $|D_{16}|$ et $|D_{26}|$ sont minimisés.

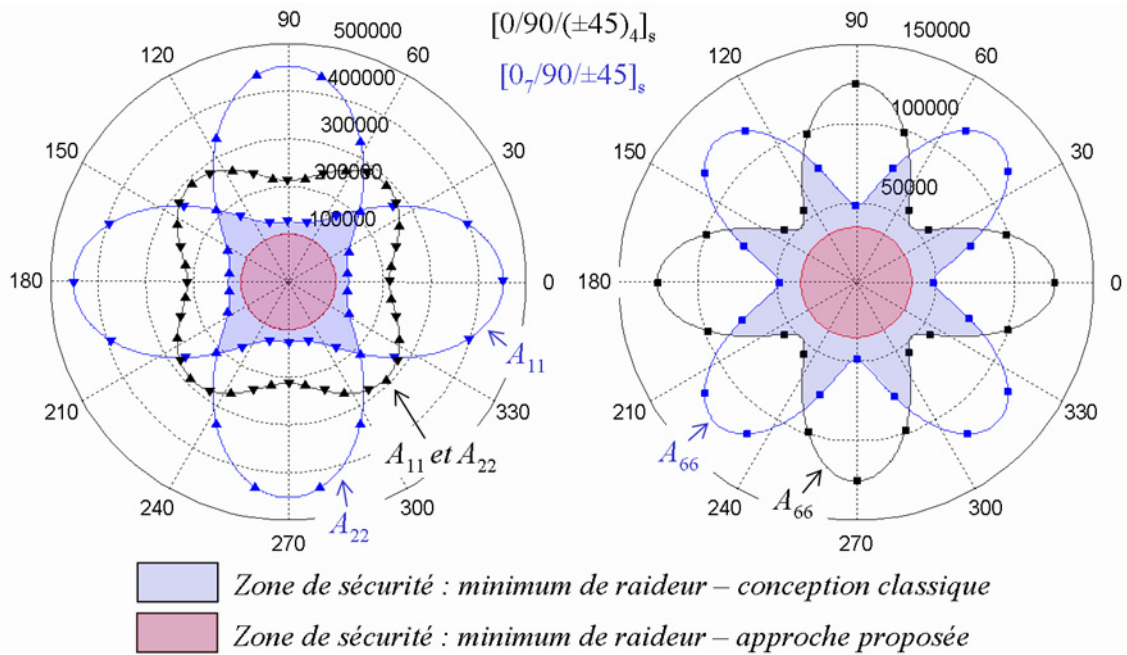


Figure II-9 : Représentation polaire des modules de rigidité A_{11} , A_{22} (à gauche) et A_{66} (à droite) pour des stratifiés carbone / époxy. On propose de définir une zone de sécurité circulaire dans le cas général (en mauve).

II.1.2.c Impact des règles de conception pour l'optimisation des empilements

Chaque contrainte restreint d'avantage le domaine des empilements réalisables. Qualitativement, on peut estimer l'impact des règles de symétrie et d'équilibre sur le domaine des rigidités réalisables selon la méthode décrite en II.1.1.b (voir Figure II-10). Ce phénomène est quantifié par énumération dans le Tableau II-1, dans le cas des empilements constitués de huit plis orientés à 0° , $\pm 45^\circ$ ou 90° (limite de groupage fixée à deux plis). Il est intéressant de constater que la règle de symétrie permet de déduire du cas à huit plis des informations pour d'autres nombres de plis, en fonction des combinaisons de règles considérées. Attention toutefois à la règle de groupage de part et d'autre du plan de symétrie miroir.

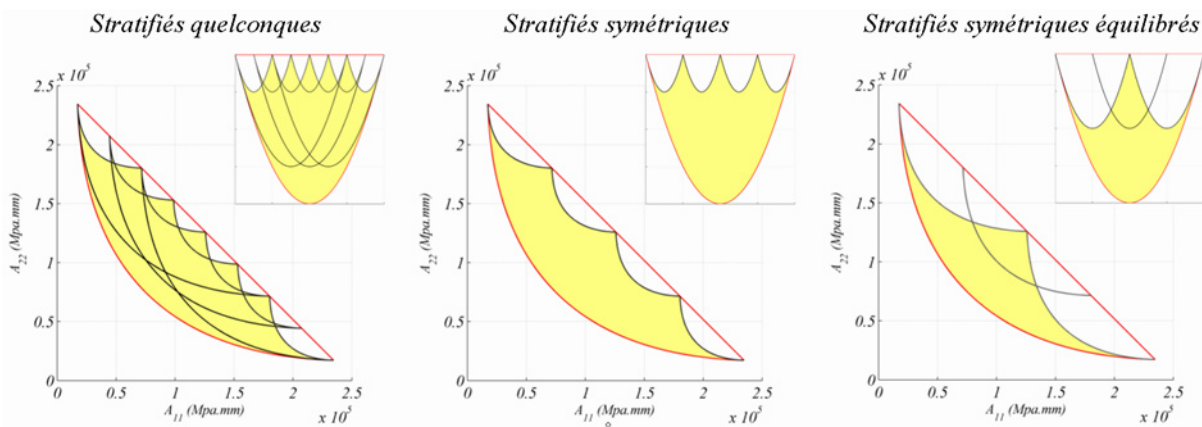


Figure II-10 : A gauche : domaine réalisable pour les empilements équilibrés à 8 plis dans le plan (A_{11} , A_{22}). En encart, visualisation dans le plan des paramètres de stratification correspondants. Au centre : cas des empilements symétriques. A droite : cas des empilements symétriques équilibrés. Le cas général des empilements quelconques est présenté en Figure II-5

Sym.	Eq.	Règles				Nombre d'empilements réalisables		
		10 %	Group.	Des.	TolDom.	4 plis	8 plis	16 plis
X						256	65 536	4 294 967 296
		X				16	256	65 536
			X			70	12 870	Non Calculé
				X		192	62 720	NC
					X	228	47 088	NC
					X	108	8 748	NC
						X	144	36 864
	X	X				48	12 432	NC
	X	X	X			48	10 044	NC
	X	X	X	X		20	820	NC
	X	X	X	X	X	12	454	NC
X	X					6	70	12 870
X	X	X				0	48	12 432
X	X	X	X			0	44	8 246
X	X	X	X	X		0	20	672
X	X	X	X	X	X	0	16	512

Tableau II-1 : Influence des règles de conception sur le nombre d'empilement réalisables constitués de 8 plis orientés à 0°, ±45° ou 90°. En jouant sur la règle de symétrie miroir, le cas à 8 plis permet de déduire le nombre d'empilement réalisables dissymétriques à 4 plis et symétriques à 16 plis.

La contrainte la plus restrictive reste de n'utiliser que des plis orientés à 0°, ±45° ou 90°. Ce propos est illustré sur les Figures II-11 et II-12. La Figure II-11 présente la différence de recouvrement du domaine réalisable dans le plan (A_{11} , A_{22}) pour des empilements à huit plis avec, à gauche, un pas de discrétisation angulaire de 45° et, à droite, un pas de 15°.

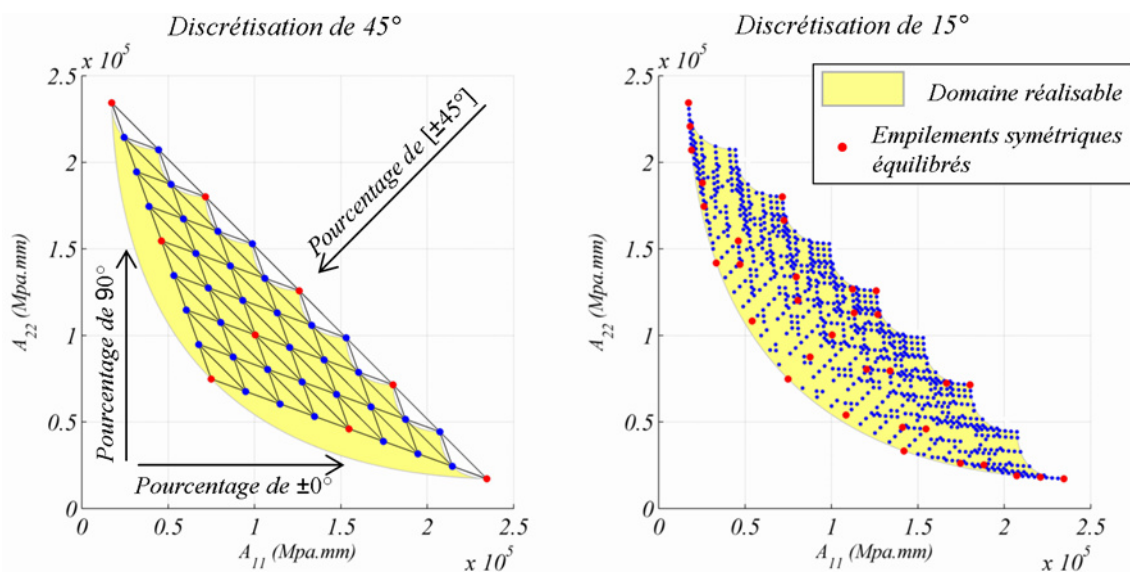


Figure II-11 : A gauche : recouvrement du domaine réalisable pour des empilements à 8 plis avec un pas de discrétisation angulaire de 45°. A droite : 2.500 empilements à 8 plis avec un pas de 15°. Les empilements symétriques équilibrés sont représentés en rouge.

La Figure II-12 présente l'impact de la discrétisation angulaire de 45° et des règles de symétrie, d'équilibre, des 10 %, de groupage et de désorientation sur des problèmes de flambement simples. A gauche, on reprend le problème de compression biaxiale présenté en Figure II-7, cette fois-ci pour des empilements à huit plis. Dans ce cas, c'est la discrétisation qui est contraignante : le meilleur empilement, le $[90/-45/90/45]_s$, est inférieur de 5 % à la solution idéale $[(\pm 71,2)_2]_s$. A droite, le même problème est repris dans un cas de compression simple selon l'axe x . Ici, c'est la conjonction des règles de conception et de la discrétisation qui est contraignante, puisque les performances des meilleurs empilements, le $[-45/90/45/0]_s$ ou le $[-45/0/45/90]_s$, sont inférieures de 12 % à la solution idéale $[(\pm 45^\circ)_2]_s$.

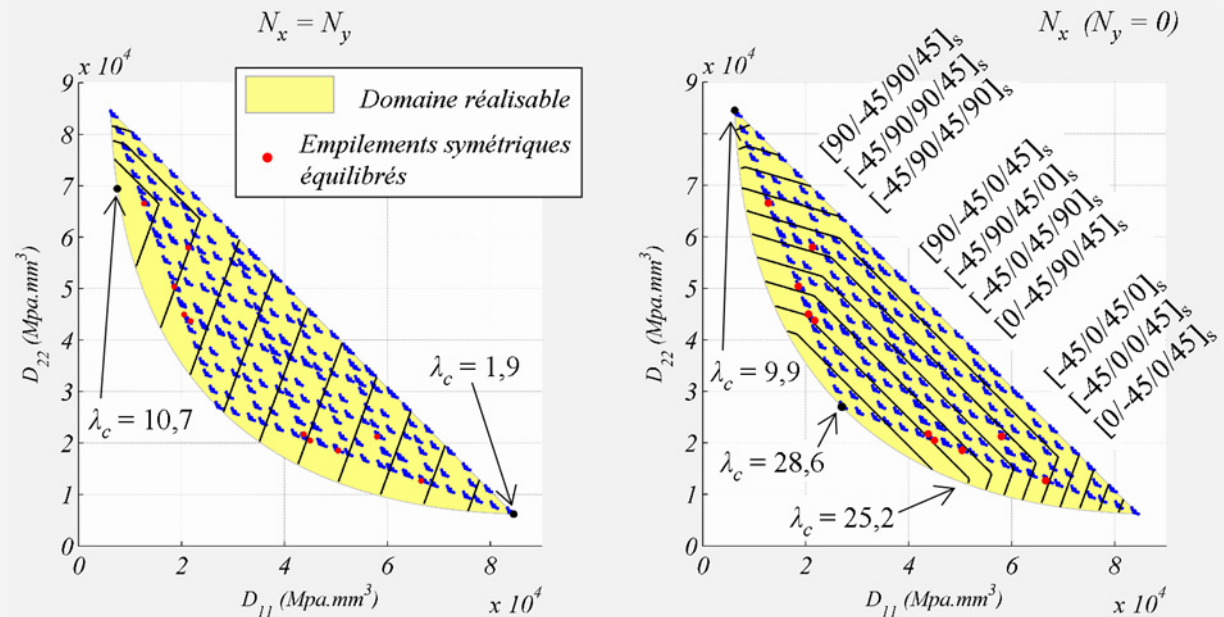


Figure II-12 : A gauche : en jaune, le domaine réalisable pour des empilements à 8 plis. En bleu les empilements possibles à 8 plis avec un pas de discrétisation angulaire de 45° . Les empilements satisfaisants aux règles de symétrie, d'équilibre, des 10 %, de groupage et de désorientation sont représentés en rouge. Les courbes de niveaux du facteur de flambement critique pour une plaque rectangulaire, de longueur 500 mm et de largeur 250 mm, sollicitée en compression biaxiale ($N_x = N_y$) sont représentées en noir. La plaque est supposée orthotrope en flexion [Berthelot 92]. A droite : la plaque est sollicitée en compression simple selon x .

II.1.3 DISCUSSION

On a montré dans cette section que l'exploitation des espaces intermédiaires des rigidités permet de résoudre de nombreux problèmes analytiques d'optimisation des empilements (maximisation d'une force critique de flambement, minimisation d'un critère de rupture), sans pour cela avoir nécessairement recours à des méthodes d'optimisation sophistiquées. La CLT permet de régulariser ces problèmes en exprimant les objectifs à partir de la matrice des rigidités des stratifiés plutôt que des orientations de leurs plis. Ce point est exploité dans la section suivante pour le développement d'un algorithme dédié à l'optimisation des empilements.

En ce qui concerne les règles de conception, on remarque qu'elles sont le plus souvent en étroite relation avec les domaines de validité des modèles employés, les hypothèses sous-jacentes et le recalage expérimental de ces modèles. Les bases de données disponibles sont établies pour des orientations de plis réduites aux classiques 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° , dans des proportions données. Sortir de ce domaine n'est donc pas sans conséquences, puisqu'en dehors des points d'identification expérimentaux les incertitudes sur les modèles augmentent considérablement. Or, l'usage classique et quasi-exclusif de plis orientés à 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° ne se justifie plus aujourd'hui du point de vue de la

fabrication. Cet usage provient probablement de la décomposition en efforts élémentaires de traction compression longitudinale et transverse et de cisaillement. Cependant dans le cas de chargements multiaxiaux les axes principaux changent. On peut donc espérer des gains de masse significatifs en autorisant de nouvelles orientations de plis pour optimiser les panneaux stratifiés. Enfin, concernant la philosophie de conception sous-jacente, il semble absurde de limiter les possibilités offertes par les matériaux composites stratifiés pour rester dans le domaine de validité d'outils de conception inadaptés (modèles empiriques ou dérivés des modèles métalliques et inadaptés à la conception composite)

En matière d'optimisation des séquences d'empilement, la quasi-totalité des études publiées sont menées en tenant compte de la règle de symétrie. Celle-ci permet en effet de réduire considérablement le nombre de variables du problème d'optimisation (il suffit alors de ne considérer que le demi empilement), même dans le cadre d'une démarche à deux niveaux (les couplages entre le comportement de membrane et celui de flexion sont annulés). La symétrie est même parfois imposée dans des configurations où elle ne se justifie plus d'un point de vue mécanique (par exemple pour l'optimisation de tubes cylindriques). De même, la règle d'équilibre est très souvent prise en considération. La règle de groupage est assez, fréquemment imposée [Nagendra 96; Todoroki 98; 99; 04; 07; Soremekun 01; Rao 05; Herencia 07]. Par contre, les règles de désorientation [Todoroki 99] et de tolérance au dommage [Liu 06] ne sont que très rarement évoquées. Enfin, il n'existe, à notre connaissance, aucune étude publiée dans laquelle toutes les règles sont simultanément prises en compte. Pourtant, même si ces règles constituent le plus souvent des conditions suffisantes sans être nécessaires⁴, on ne peut s'en affranchir sans justification.

D'autre part, les règles de groupage, de désorientation, des 10 % et de tolérance aux dommages, lorsqu'elles sont prises en considération, sont imposées par réparation [Todoroki 98] ou pénalisation des solutions [Liu 01]. Or, compte tenu de leur impact sur le cardinal du domaine réalisable (voir Tableau II-1), ce type d'approche est problématique. En effet, la majorité des solutions générées risque de s'avérer infaisable vis-à-vis de l'une, au moins, de ces règles. Par conséquent, rechercher des solutions faisables par une technique de pénalisation de la fonction de qualité s'avère très coûteux et ce, surtout vis-à-vis des règles régissant l'ordre de séquençement des plis. D'un autre côté, réparer les solutions infaisables est délicat, le risque étant d'introduire un biais dans la recherche et d'interdire *a priori* certaines configurations. On a donc tout intérêt à intégrer la prise en compte des règles de conception dès la génération des empilements.

⁴ On renvoie à [Valot 05] pour la construction d'empilements dissymétriques découplés entre membrane et flexion.

II.2 PROPOSITION D'UN ALGORITHME EVOLUTIONNAIRE MULTIOBJECTIF SPECIALISE POUR L'OPTIMISATION COMPOSITE

On présente dans cette section l'algorithme proposé. Cette description est organisée en trois points :

- la description de l'architecture générale de l'algorithme,
- le codage des solutions et la génération d'empilements respectant les règles usuelles de conception des stratifiés, en se basant sur l'analyse réalisée au paragraphe II.1.2,
- le classement des solutions selon des objectifs multiples au moyen de la notion de rang de Pareto (Cf. I.2.4.b), ainsi que la gestion des contraintes de dimensionnement.

II.2.1 ARCHITECTURE GENERALE DE L'ALGORITHME

Dans cette thèse, les développements réalisés en matière d'algorithme d'optimisation sont fondés sur les conclusions issues de l'étude bibliographique présentée au Chapitre I et sur l'analyse des spécificités du problème proposée dans la section précédente. D'une part, il s'agit donc de développer un algorithme évolutionnaire performant, multiobjectif *a posteriori*, dans le cadre d'une démarche directe pour l'optimisation des empilements (Cf. I.3.1.b). D'autre part, on cherche à adapter cet algorithme pour une gestion efficace des règles de conception et exploiter au maximum l'espace intermédiaire des rigidités (en s'inspirant de la démarche à deux niveaux).

Dans le but de pouvoir modifier le code à volonté, nous avons choisi de développer nos propres algorithmes sous Matlab plutôt que d'utiliser directement des algorithmes ou des logiciels existants. Ce faisant, ces travaux de développement nous ont permis de gagner une plus grande compréhension du fonctionnement des algorithmes évolutionnaires, très profitable pour faire face au délicat problème du réglage de leurs paramètres.

II.2.1.a Quelques notions avancées sur l'optimisation multiobjectif

De façon générale, l'approximation du front de Pareto est en elle-même une tâche à deux objectifs :

- minimiser la distance au front de Pareto réel,
- maximiser la diversité des compromis optimaux retenus.

Dans la plupart des algorithmes évolutionnaires multiobjectifs récents, ces deux aspects fondamentaux sont gérés par un double processus de sélection : la *sélection pour la reproduction* et la *sélection environnementale*. La *sélection pour la reproduction* permet d'assurer le guidage de l'algorithme vers l'ensemble des compromis optimaux. Elle consiste à sélectionner dans une population les individus les plus aptes à engendrer une nouvelle génération aux performances accrues. L'opérateur employé est généralement stochastique. La *sélection environnementale* représente un élément nouveau par rapport à la structure classique de ce type d'algorithme. Au lieu d'un remplacement générationnel total, elle permet de décider des individus à conserver au fil des générations. Pour des raisons de place mémoire disponible et de temps de calcul nécessaire pour la comparaison des solutions, on ne peut conserver qu'une fraction de la population d'une génération à l'autre. Ce choix est le plus souvent réalisé de façon déterministe afin de privilégier la diversité des solutions. Ainsi, ce type d'approche permet d'assurer qu'à chaque génération les meilleurs individus sont conservés et transférés à la génération suivante. On parle d'*élitisme*. Il est aujourd'hui généralement admis que les algorithmes élitistes s'avèrent très efficaces sur un grand nombre de problèmes, bien que le risque soit d'obtenir une convergence prématurée vers un optimum local.

II.2.1.b Un algorithme élitiste

L'architecture générale de l'algorithme proposé est détaillée dans l'Algorithme II-1. On reprend le mode de gestion de l'élitisme proposé dans l'algorithme SPEA2, dont les bonnes performances en comparaison d'autres approches évolutionnaires élitistes sont démontrées dans [Zitzler 01], sur des problèmes mathématiques tests. L'élitisme est assuré au moyen d'une archive, c'est-à-dire d'une population externe, constituée des meilleurs individus rencontrés jusqu'alors et réactualisée à chaque génération. La taille de l'archive est contrôlée au moyen d'un opérateur de troncature. Celui-ci permet de sélectionner dans un ensemble de points non dominés les N_p individus les mieux distribués (au sens de la distance euclidienne dans l'espace des objectifs) tout en s'assurant que les points situés aux extrémités du front sont conservés. Concrètement, il s'agit d'un algorithme permettant d'éliminer à chaque itération l'individu le plus proche de son premier voisin. En cas d'*ex aequo* la décision est prise en cherchant la distance minimale au second voisin et ainsi de suite.

Algorithme II-1 : Architecture générale de l'algorithme proposé

- Entrées : N_p (taille de la population)
 \bar{N}_p (taille de l'archive)
 T (nombre maximum de générations)
 ... (paramétrage des opérateurs et des règles de conception)
- Sorties : \mathbf{A} (un ensemble de solutions non dominées)
- Etape 1 : **Initialisation** : ($t = 0$) génération d'une population initiale \mathbf{P}_0 de taille N_p et création de l'archive $\bar{\mathbf{P}}_0 = \{\}$.
- Etape 2 : **Evaluation** : calcul des fonctions-objectif pour chaque individu de \mathbf{P}_t .
- Etape 3 : **Calcul de la fonction de qualité**, pour chaque individu de $\mathbf{P}_t \cup \bar{\mathbf{P}}_t$.
- Etape 4 : **Sélection environnementale** : copie des individus non dominés de $\mathbf{P}_t \cup \bar{\mathbf{P}}_t$ dans $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$. Si le cardinal de $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$ est supérieur à \bar{N}_p , alors réduire $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$ au moyen de l'opérateur de troncature. Si le cardinal de $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$ est inférieur à \bar{N}_p , alors compléter l'archive $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$ avec les meilleurs individus dominés de $\mathbf{P}_t \cup \bar{\mathbf{P}}_t$ (au sens de la fonction de qualité).
- Etape 5 : **Terminaison** : si $t \geq T$ ou qu'un autre critère d'arrêt est satisfait alors retourner \mathbf{A} , l'ensemble des solutions non dominées contenues dans $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$.
- Etape 6 : **Sélection pour la reproduction** : tirage de N_p solutions de $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$ par tournoi binaire avec remise. Soit \mathbf{P}' la population temporaire obtenue.
- Etape 7 : **Reproduction** : application des opérateurs de variation à la population \mathbf{P}' . Soit \mathbf{P}_{t+1} la population résultante. Incrémenter le compteur de générations ($t = t + 1$) et retour à l'Etape 2.

La spécialisation de l'algorithme à l'optimisation des empilements⁵ se joue essentiellement au niveau des phases d'initialisation de la recherche (Etape 1) et de reproduction (Etape 7). Les modifications apportées sont détaillées respectivement en II.2.2.b et II.2.2.c. Le paramétrage des règles de conception correspond à un vecteur de 7 coordonnées booléennes correspondant chacune à l'activation (1) ou la désactivation (0) d'une règle de conception. On peut ainsi imposer n'importe quelle combinaison voulue de ces règles. Le calcul de la fonction de qualité est précisé en II.2.1.c. On renvoie au paragraphe II.1.1.c pour le calcul des distances entre empilements.

⁵ L'algorithme développé est dédié à l'optimisation des empilements. Cependant, l'architecture évolutionnaire est suffisamment souple pour prendre en compte des variables de nature différente, par exemple géométrique.

II.2.1.c Calcul de la fonction de qualité

La valeur de la fonction de qualité F_i d'un individu i correspond à la somme de son rang $R(i) \in \mathbb{N}$, calculé à partir de ses performances $y_i = f(x_i)$, et d'une mesure de densité de la distribution des solutions dans l'espace intermédiaire des rigidités $D(i) \in]0,1[$. Un individu est d'autant meilleur que la valeur de sa fonction de qualité est faible. Ainsi, les individus non dominés sont de rang 0. La mesure de densité permet de différencier les individus de même rang en privilégiant les plus isolés. Un individu dont le rang est inférieur à un autre reste toujours le meilleur. Pour ce faire, la densité des solutions autour de chaque point i est estimée dans l'espace des objectifs par la méthode du k^e plus proche voisin :

$$F_i = R(i) + D(i), \text{ avec } D(i) = \frac{1}{d_i^k + 2} \quad (\text{II-9})$$

où d_i^k correspond à la distance du point i à son k^e plus proche voisin. Conformément à [Zitzler 01], la valeur du paramètre k est fixée égale à la partie entière de la racine carrée de la taille de la population considérée, ainsi $k = E(\sqrt{N_p + \overline{N}_p})$.

Construite de la sorte, la valeur de la fonction de qualité est relative à la population considérée. Il ne s'agit pas d'un indicateur de qualité absolu, mais d'une mesure relative. De plus, comme la sélection pour la reproduction est effectuée par tournoi binaire, la valeur de la fonction de qualité n'a pas d'importance. Au final, seul le classement des solutions compte. Ce classement repose sur la notion de dominance de Pareto pour guider la recherche vers les compromis optimaux. Parmi les solutions rang 0, la méthode du k^e plus proche voisin vise à assurer une répartition régulière des solutions non dominées.

II.2.2 CODAGE ET GENERATION DES SOLUTIONS

Dans un algorithme évolutionnaire, deux étapes mettent en jeu la génération de solutions nouvelles :

- la création d'une population initiale, qui consiste classiquement à générer *ex nihilo* un ensemble de solutions aléatoires,
- la phase de reproduction, qui consiste à construire de nouvelles solutions par modification de solutions préexistantes.

Chaque solution, ou individu, correspond à un design. Toutefois, si les performances sont directement évaluées à partir du vecteur de décision correspondant, les opérateurs de variation travaillent sur une forme encodée de la solution.

II.2.2.a Codage des solutions

On trouve dans les publications traitant d'optimisation composite de nombreux codages différents. Ceux-ci ne sont pas équivalents. Le codage des solutions conditionne partiellement le fonctionnement de l'algorithme. De façon générale, une solution peut être encodée sous forme d'un vecteur binaire ou d'un vecteur réel. Dans ces travaux, un empilement est directement encodé sous la forme du N -uplet des orientations de ses plis. Ainsi, un empilement est codé sous forme du vecteur réel dont la i^e coordonnée correspond à l'orientation du i^e pli. Par exemple, l'empilement $[45/0/-45/90]$ est représenté par le vecteur $[45 \ 0 \ -45 \ 90]$. Dans la terminologie propre aux AE, un vecteur correspond à un chromosome et une coordonnée à un gène. Le nombre de plis de l'empilement correspond au nombre de gènes du chromosome correspondant.

La représentation des solutions sous forme de vecteurs réels permet d'intégrer de nombreuses informations supplémentaires dans le codage. Une solution peut être représentée par plusieurs

chromosomes. Par exemple, pour un panneau raidi : un chromosome pour l'empilement de la peau, un autre pour l'empilement des raidisseurs et un chromosome pour les dimensions géométriques et l'espacement des raidisseurs.

Dans les publication traitant d'optimisation composite, les règles de symétrie et d'équilibre sont le plus souvent imposées par le biais du codage. Toutefois, dans le cas de l'équilibre, les techniques de codage employées présupposent de l'ordre de séquençement des plis en imposant des paires de types ($\pm\theta^\circ$) [Michalewicz 96] ou une alternance régulière des plis orientés à $+\theta^\circ$ et $-\theta^\circ$ [Adams 05]. Pour gérer la symétrie, la plupart des auteurs proposent de ne coder que le demi-empilement, ce qui suppose de conserver par ailleurs l'information sur le nombre de plis pour être à même de différencier les empilements à N et à $N+1$ plis au moment du décodage.

II.2.2.b Construction d'une population initiale

Une originalité de ce travail consiste à imposer les règles d'équilibre, de groupage, de désorientation et de tolérance aux dommages (c'est-à-dire les règles directement formulées sur l'empilement, Cf. II.1.2.b) dès la génération des solutions. Ainsi, on évite les travers des méthodes de pénalisation ou de réparation et on s'assure de ne travailler qu'avec des empilements satisfaisant à ces règles.

Un générateur aléatoire d'empilements, respectueux des règles de conception

Le principe de fonctionnement d'un générateur aléatoire d'empilements pour la création d'une population initiale est simple. Pour imposer la combinaison voulue des cinq règles prises en charge, il suffit de générer successivement les orientations de chacun des plis constituant le stratifié, à partir de sa face inférieure et suivant l'ordre des z croissants, par tirage aléatoire parmi l'ensemble des orientations possibles imposé par les règles de conception et les orientations des plis précédents. L'équilibre du stratifié constitue la règle la plus délicate à imposer et suppose de tenir compte du nombre de plis restant à traiter pour ne pas aboutir à une impossibilité.

Ce principe de fonctionnement est illustré en Figure II-13 dans le cas de la génération d'un empilement à huit plis, avec une discrétisation angulaire de 45° , respectant les cinq règles de conception. Dans le cas d'un pas de discrétisation inférieur à 45° , la règle d'équilibre conduit, dans ce schéma, à de fréquentes impossibilités. La solution consiste à générer le demi empilement, ou le quart, si la règle de symétrie est activée, selon le schéma précédent. L'empilement est ensuite complété par symétrie miroir. Cette approche présente le désavantage de présupposer de l'ordre de séquençement des plis. Pour pallier cet inconvénient, on peut éventuellement rechercher une permutation de l'empilement satisfaisant aux autres règles de conception.

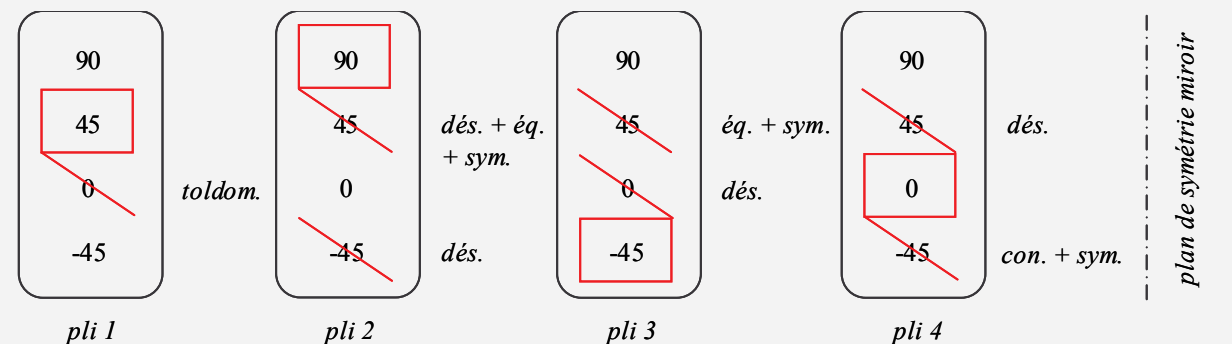


Figure II-13 : Génération d'un empilement à 8 plis, avec une discrétisation angulaire de 45° , satisfaisant aux règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et de tolérance aux dommages. Les orientations de plis sont successivement imposées par tirage aléatoire parmi l'ensemble des orientations acceptables comme tenu des règles de conception. Les orientations retenues sont encadrées. Les orientations interdites sont barrées.

Une méthode pour la constitution d'une population initiale d'empilements bien distribués

De façon générale, lors de l'exécution d'un AE, les premières générations servent avant tout à explorer au mieux l'espace de décision pour en isoler le domaine réalisable et éviter le piégeage par un éventuel optimum local. La population initiale joue un rôle important. De ce point de vue, une population initiale choisie aléatoirement n'est pas optimale. Nous proposons donc une méthode spécifique pour bâtir une population initiale régulièrement distribuée dans l'espace des rigidités et sans répétitions. Cette méthode, inédite, améliore grandement les performances de l'algorithme. Son principe consiste à bâtir une population régulièrement répartie par une approche *Maximin* [Huslage 06]. Pour ce faire, on s'appuie sur une population candidate, représentative du domaine des empilements réalisables (vis-à-vis des règles de conception) pour le nombre de plis considéré. Partant d'une solution extrême, on choisit la solution la plus éloignée, puis la solution la plus éloignée des deux précédentes et ainsi de suite, jusqu'à obtention de la population de taille voulue.

Par exemple, dans le cas de la Figure II-14, on part de la solution de module A_{11} maximal, puis on travaille au sens de la distance euclidienne dans le plan (A_{11}, A_{22}) . On trouve dans [Todoroki 04] une technique similaire appliquée au choix des points d'identification d'une surface de réponse dans l'espace $(\xi_1^A, \xi_2^A, \xi_1^D, \xi_2^D)$, à partir de l'énumération complète des solutions symétriques équilibrées.

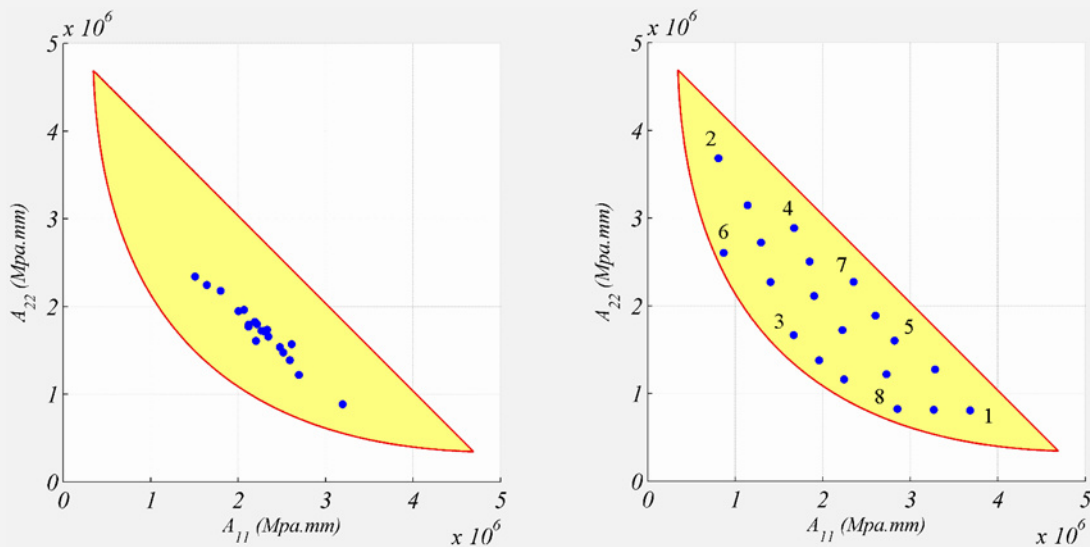


Figure II-14 : A gauche : une population initiale aléatoire de 20 individus de 160 plis, avec un pas de discrétisation angulaire de 15°. Les empilements satisfont aux règles de symétrie, d'équilibre, des 10 %, de groupage et de désorientation. A droite : une population initiale construite par l'approche proposée. Les chiffres correspondent à l'ordre de construction des 8 premières solutions.

La difficulté de la méthode est donc reportée au niveau de la construction de la population candidate. Pour de faibles nombres de plis et une discrétisation grossière, on est capable de générer l'ensemble des empilements possibles et d'identifier les solutions satisfaisant aux règles de conception (voir Tableau II-1). La construction de la population candidate ne constitue donc pas, dans ce cas, une difficulté. Toutefois, dès que la finesse de discrétisation augmente, on doit faire face à l'explosion combinatoire des possibilités⁶. Lorsque l'énumération est trop coûteuse, l'idée consiste à s'appuyer sur la population candidate obtenue dans un cas énumérable pour bâtir une nouvelle population du nombre de plis désiré. Par exemple, l'ensemble des empilements quelconques à huit

⁶ Par exemple, il n'existe que $4^8 = 65.536$ empilements de huit plis pour une discrétisation de 45°, mais $12^8 = 429.981.696$ empilements pour un pas de 15°.

plis avec un pas de 45° permet, en complétant les empilements par symétrie miroir, de construire les populations candidates pour n'importe quel cas dont le pas de discrétisation angulaire est un diviseur de 45 et le nombre de plis un multiple de huit. Une seconde possibilité consiste, dans un premier temps, à multiplier l'épaisseur des plis pour obtenir des empilements d'épaisseur voulu puis, dans un second temps, à arrondir les épaisseur des couches en nombre de plis. On peut enfin compléter la population candidate par quelques empilements générés aléatoirement afin d'introduire, si nécessaire, des orientations autres que 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° . Au final, que l'on choisisse l'une ou l'autre démarche, les empilements continuent à satisfaire aux règles de symétrie, d'équilibre, de désorientation et de tolérance aux dommages s'il y a lieu. De même, le critère des 10 % est peu sensible à cette transformation⁷. Remarquons enfin que, s'il peut s'avérer fastidieux, le travail de la constitution d'une population candidate est fait une fois pour toute. Il est ainsi possible de se constituer une librairie de populations candidates au fur et mesure des problèmes rencontrés. Ce travail est alors transparent pour l'utilisateur.

Déroulement de la phase d'initialisation

La phase d'initialisation se déroule en trois temps (Etape 1 de l'Algorithme II-1) : (i) constitution de la population candidate, dans laquelle ne sont retenues que les empilements respectant la combinaison souhaitée des règles d'équilibre, de groupage, de désorientation et de tolérance aux dommages, (ii) calcul des matrices de rigidité et suppression des solutions ne satisfaisant pas à la règle des 10 %, (iii) choix de la population initiale selon la méthode précédente. En suivant cette procédure, il est possible de mélanger des populations d'empilements de différents nombres de plis. Dans le cas où l'on doit considérer simultanément plusieurs empilements, ou des variables d'optimisation d'une autre nature, cette procédure reste utilisable pour l'initialisation de chaque chromosome d'empilement.

II.2.2.c Adaptation de la phase de reproduction

On trouve, dans les publications traitant d'optimisation des empilements par AE, principalement trois types d'opérateurs de variation :

- l'*opérateur de croisement*, qui consiste à intervertir des séquences de gènes appartenant à deux solutions pour en engendrer deux nouvelles,
- l'*opérateur de mutation*, qui consiste à créer une nouvelle solution en modifiant un ou plusieurs gènes d'une solution donnée,
- l'*opérateur de permutation*, consistant à générer un nouvel individu en permutant les plis dans un empilement⁸.

Les opérateurs de croisement et de mutation sont susceptibles d'être appliqués à n'importe quel type de variable (empilement, géométrie), sous des formes différentes. L'opérateur de permutation est spécifique aux chromosomes d'empilement. Dans cette thèse, on a développé un opérateur de chaque type pour nos besoins. Appliqués à des chromosomes d'empilement, ces trois opérateurs permettent de respecter les règles de symétrie et d'équilibres lorsqu'on le souhaite. Dans le cas où la règle de symétrie est active, on travaille simplement sur le demi empilement et les modifications sont répliquées par symétrie miroir. La méthode de gestion de l'équilibre dépend de l'opérateur.

⁷ En fait, seule la règle de groupage peut poser problème. Le cas échéant, on peut procéder au choix de la population initiale et réparer a posteriori les empilements retenus.

⁸ On peut considérer l'opérateur de permutation comme un opérateur de mutation particulier, adapté aux problèmes combinatoires.

L'opérateur de croisement

Nous choisissons un opérateur de croisement bipoint. Celui-ci consiste à sélectionner aléatoirement sur un chromosome, deux points de coupe, valables pour les deux parents, puis à échanger entre les parents les séquences centrales définies par ces points pour obtenir deux nouveaux empilements. Appliqué à un chromosome d'empilement, cet opérateur, simple et efficace présente l'avantage d'isoler une séquence d'orientations de plis. C'est cette caractéristique que l'on exploite afin d'imposer la règle d'équilibre lorsqu'on le souhaite (voir Figure II-15). Dans ce cas, l'opération s'effectue en deux temps. La première étape consiste à rechercher les séquences équilibrées de chaque parent. L'échange de séquences de même longueur s'effectue dans un second temps, indifféremment de leurs positions respectives dans l'empilement. Cet opérateur permet de croiser des empilements de nombres de plis différents.

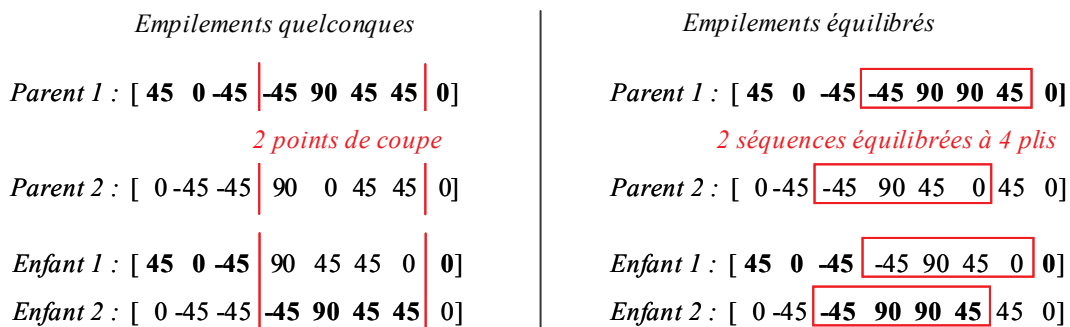


Figure II-15 : Principe de fonctionnement de l'opérateur de croisement appliqué à un chromosome d'empilement. A gauche, le croisement bipoint classique, dans le cas général. A droite, le croisement par séquences dans le cas des empilements équilibrés.

L'opérateur de mutation

L'opérateur de mutation consiste à modifier aléatoirement la valeur d'un gène dans sa plage de variation. Appliqué à un chromosome d'empilement, l'importance de la mutation est contrôlée par un paramètre d'amplitude entier, A_m . Compte tenu du pas de discrétisation angulaire, p_{dis} , l'orientation du pli muté est aléatoirement incrémentée ou décrétementée d'une valeur comprise entre 1 et A_m fois p_{dis} . Dans le cas d'empilements équilibrés, chaque modification d'un pli orienté à $+\theta$ est reproduite à l'inverse sur un pli orienté à $-\theta$ (voir Figure II-16).

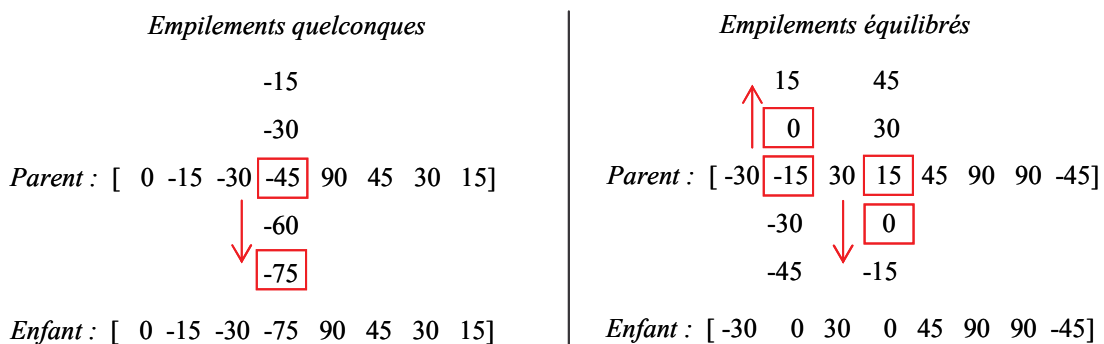


Figure II-16 : Fonctionnement de l'opérateur de mutation appliqué à un chromosome d'empilement.. Ici, $p_{dis} = 15$ et $A_m = 2$. A gauche, mutation d'un empilement quelconque. A droite, mutation d'un empilement équilibré.

L'opérateur de permutation

L'opérateur de mutation proposé consiste à imposer une permutation circulaire aléatoire sur une séquence de l'empilement choisie aléatoirement (voir Figure II-17). Ce type de permutations est, à

notre avis, plus efficace (pour l'optimisation d'empilements) que les permutations deux à deux. Les permutations ne jouent pas sur la règle d'équilibre.

$$\begin{array}{l} \text{Parent : [0 -15 -30 -45 90 45 30 15]} \\ \text{Enfant : [-30 0 -15 -45 90 45 30 15]} \end{array}$$

Figure II-17 : Principe de fonctionnement de l'opérateur de permutation.

Considérations générales sur le rôle des opérateurs dans la recherche de l'optimum

Les opérateurs n'ont pas des rôles équivalents pour la recherche de nouvelles solutions. Dans un AE classique, l'opérateur de croisement permet d'assurer l'intensification de la recherche, alors que l'opérateur de mutation vise à l'exploration. En optimisation des empilements, la tendance est inversée. L'opérateur de croisement présenté précédemment constitue un opérateur d'exploration. En effet, échanger des séquences dissemblables de plusieurs plis entre deux empilements influence considérablement leur comportement. La mutation, qui ne concerne qu'un seul pli, se comporte comme un opérateur d'intensification. C'est le seul opérateur de variation qui permette, le cas échéant, de faire apparaître une orientation de pli qui ne serait pas présente dans la population initiale. Les opérateurs de croisement et de mutation impactent aussi bien les propriétés de membrane que les propriétés de flexion du stratifié. Par contre, l'opérateur de permutation modifie le comportement de flexion du stratifié sans impacter son comportement de membrane. Son effet sur les modules de flexion dépend fortement de la position des plis permutés dans l'empilement. Plus les plis sont proches de la surface du stratifié, plus l'impact est important. On considère donc qu'il s'agit d'un opérateur d'exploration du point de vue des propriétés de flexion.

Déroulement standard de la phase de reproduction

Lors de la phase de reproduction (Etape 7 de l'Algorithme II-1), les opérateurs de croisement, mutation et permutation sont successivement appliqués, dans cet ordre, à chaque solution de la population \mathbf{P}' , avec les probabilités respectives p_c , p_m et p_p . L'application d'un opérateur de variation à un chromosome d'empilement se déroule en trois temps, selon le processus itératif de génération d'une nouvelle solution, calcul de sa matrice de rigidité, acceptation ou rejet vis-à-vis des règles de groupage, désorientation, tolérance aux dommages et des 10 %. Afin d'éviter les boucles infinies, le processus est limité à cent itérations. En effet, la probabilité qu'un opérateur soit inopérant, c'est-à-dire incapable d'engendrer une solution différente des parents et satisfaisant aux règles de conception, n'est pas nulle⁹. Dans ce cas, la solution parent est retournée inchangée.

Une nouveau schéma de fonctionnement : guidage de la reproduction par l'archive

Dans le schéma de fonctionnement précédent, l'information contenue dans la matrice de rigidité n'est exploitée que de façon superficielle pour la seule évaluation du respect de la règle des 10 %. Or cette information est bien plus riche. En effet, on a montré dans la première partie de ce chapitre que le problème d'optimisation des empilements formulé à partir des modules de rigidités est bien plus régulier que dans le cas d'une formulation directe à partir des orientations de plis. Ce constat nous amène à proposer un nouveau schéma de fonctionnement pour la phase de reproduction, spécifique à l'optimisation des empilements. Il s'agit d'une part d'exploiter la régularisation offerte par la CLT et de privilégier la diversité des solutions dans l'espace des rigidités.

⁹ En fonction des règles de conceptions considérées, du nombre de plis et de la discrétisation angulaire, les opérateurs peuvent s'avérer inopérants pour certains empilements. Ce problème est surtout sensible pour l'opérateur de croisement.

L'idée consiste à guider la recherche vers les zones les plus prometteuses du domaine des rigidités réalisables. Pour ce faire, on s'inspire des méthodes de recherche par voisinage (Cf. I.2.3.b). Pour chaque solution non dominée contenue dans l'archive $\bar{\mathbf{P}}_t$, on définit un voisinage dans l'espace des rigidités, sous la forme d'une boule topologique $B_\delta(\mathbf{x})$, centrée sur la solution \mathbf{x} considérée et caractérisée par un rayon δ . Lors de la phase de reproduction, seules sont retenues pour la génération suivante \mathbf{P}_{t+1} les solutions : (i) contenues dans la zone d'intérêt constituée de l'union des voisinages des solutions non dominées de l'archive et (ii) inédites par rapport à la population $\mathbf{P}_t \cup \bar{\mathbf{P}}_t$. Pour accroître l'efficacité de ce schéma, à chaque occurrence d'un opérateur de variation, au lieu de n'engendrer aléatoirement qu'une unique solution comme dans le schéma standard, on considère le maximum de possibilités de nouveaux empilements (dans la limite de mille solutions). Lorsque plusieurs solutions conviennent, on privilégie la proximité aux solutions non dominées de l'archive les plus isolées dans l'espace des rigidités.

La difficulté réside dans le choix du rayon δ . S'il est grand, la méthode ne modifie pas le comportement de l'algorithme. Si le rayon est faible, on privilégie fortement l'intensification de la recherche autour des solutions de rang 0, dans l'espace des rigidités. L'idée consiste à définir une loi d'évolution du rayon fonction de l'avancement de la recherche (l'indice t de la génération courante). Initialement grand afin de ne pas perturber l'exploration de l'espace des objectifs, le rayon est ensuite réduit pour intensifier la recherche autour des meilleures solutions rencontrées jusqu'alors.

II.2.3 GESTION DES CONTRAINTES ET SELECTION DES SOLUTIONS

Dans un AE, la gestion des contraintes est potentiellement en lien avec le codage et la génération des solutions, la construction de la fonction de qualité et l'opérateur de sélection¹⁰. On distingue ici deux types de contraintes, les règles de conception des empilements et les autres contraintes de dimensionnement, que l'on traite de façon différente.

II.2.3.a Les règles usuelles de conception des empilements

Les règles de conception sont détaillées dans la section II.1.2. La règle de battage est intégrée au problème d'optimisation sous forme d'un objectif supplémentaire. Les autres règles sont intégrées sous forme de contraintes. L'activation ou la désactivation de ces contraintes est intégrée au paramétrage de l'algorithme sous forme de paramètres booléens. Le comportement des outils de génération (Cf. II.2.2.a) et de variation (Cf. II.2.2.b) des empilements dépend de la combinaison de règles activées. De façon générale, les opérateurs de variations sont "fermés" vis-à-vis des règles de symétrie et d'équilibre. Les empilements ne satisfaisant pas aux règles de groupage, de désorientation, de tolérance aux dommages et des 10 % sont simplement rejetés au moment de la génération.

II.2.3.b Les autres contraintes de dimensionnement

Dans une démarche de conception nominale, le cahier des charges est interprété comme un ensemble de contraintes. Il s'agit donc de résoudre un problème de faisabilité. Lors du passage d'un problème de conception nominale à un problème de conception optimisée, certaines grandeurs physiques (rigidités, forces critiques de flambement, etc.), sont choisies comme objectifs de l'optimisation. Néanmoins, les contraintes issues du cahier des charges restent. En matière d'optimisation, l'objectif est de guider le plus rapidement possible la recherche vers le domaine des solutions réalisables. Pour ce faire, il s'agit non seulement de déprécier les solutions infaisables par rapport aux solutions réalisables, mais aussi de le faire de façon d'autant plus importantes qu'elles sont loin d'être

¹⁰ Pour un inventaire des multiples techniques existantes, on renvoie à [Michalewicz 95; Coello 02; Lemonge 04].

réalisables. Encore une fois, on se retrouve confronté à un problème de prise de décision face à des critères multiples. Ainsi, une solution qui viole une contrainte de 10 % est-elle préférable à une solution qui en viole dix de 1 % ? Une approche classique dans la littérature consiste à déprécier les solutions infaisables en fonction de la somme des violations des contraintes, auquel cas la réponse à la question précédente est que les deux solutions sont équivalentes et également dépréciées. Cependant, en matière d'optimisation des empilements, on considère que la solution qui viole dix contraintes de 1 % nécessite probablement moins de modifications que l'autre pour devenir réalisable, par exemple le simple ajout d'un pli. Dans la suite, les solutions infaisables sont donc dépréciées en fonction de l'amplitude de la violation maximale des contraintes. On privilégie ainsi la proximité au domaine réalisable, sans tenir compte du nombre de contraintes violées.

On retient pour l'optimisation déterministe la technique proposée par [Deb 00]. Celle-ci présente l'avantage de n'introduire aucun paramètre de réglage supplémentaire. Les contraintes sont gérées sans pénalisation des solutions, par l'intermédiaire d'un opérateur de sélection modifié. Dans l'Algorithme II-1, la sélection est effectuée par tournoi binaire (Cf. I.2.3.c). Le principe de fonctionnement est conservé dans l'opérateur modifié, mais trois cas sont distingués en fonction de la faisabilité des solutions en compétition :

- 1. les deux solutions satisfont aux contraintes. La solution dont la valeur de la fonction de qualité est la plus faible est sélectionnée,*
- 2. les deux solutions sont infaisables. La solution la plus proche de satisfaire aux contraintes (au sens de la violation maximale) est sélectionnée,*
- 3. une solution est faisable et l'autre non. La solution faisable est sélectionnée.*

De cette façon, sont toujours privilégiées au niveau de la sélection : les solutions faisables par rapport aux solutions infaisables et, parmi ces dernières, les solutions qui violent le moins les contraintes. De même, l'archive est d'abord construite à partir des solutions faisables, puis, le cas échéant, complétée par les solutions infaisables par ordre croissant de violation des contraintes.

II.2.4 QUELQUES PISTES D'AMELIORATION

Même s'il est susceptible de gérer des variables de natures différentes, l'algorithme évolutionnaire proposé dans ce chapitre est spécialement adapté pour l'optimisation des empilements. Les développements réalisés consistent principalement en l'intégration de connaissances expertes dans une structure algorithmique évolutionnaire modulaire. Ceci nous permet de proposer un algorithme adapté à la gestion de règles de conception complexes pour les empilements, sans coûts de calcul supplémentaires significatifs.

De façon générale, le coût de calcul pour un algorithme évolutionnaire réside principalement dans l'étape d'évaluation des fonctions-objectif. Le critère d'arrêt employé vise à contenir ce coût de calcul dans des limites imparties au préalable. Dans ce chapitre, en l'absence de stratégie de calcul évoluée, il existe une relation directe entre le nombre de générations et le nombre d'évaluations. Le critère d'arrêt retenu correspond donc à un nombre maximal de générations T .

Afin de tirer un profit maximum de l'étape d'optimisation dans les limites imparties, il faut un algorithme parcimonieux. Pour ce faire, on propose une technique d'initialisation et une méthode de guidage de la recherche basées sur l'analyse mécanique du problème. D'autres améliorations ont été envisagées, mais compte tenu de la complexité supplémentaire engendrée elles n'ont pas été mises en œuvre : (i) la sélection pour le croisement, ou "Parent Matching", [Hinterding 98], (ii) la gestion d'une direction de recherche privilégiée dans l'espace des rigidités pour guider la recherche. Enfin, on n'a pas accordé dans ce travail d'attention spécifique à l'optimisation des réglages des paramètres de l'algorithme. Le paramétrage dynamique constitue pourtant une piste de recherche intéressante.

II.3 QUELQUES JUSTIFICATIONS DES CHOIX EFFECTUES

Comparer les performances d'AE différents est un problème délicat. D'une part, un AE, ou, de façon plus générale, une métaheuristique, est une méthode de recherche approchée, basée sur un processus de génération aléatoire des solutions. Il est donc fort peu probable que deux exécutions du même algorithme aboutissent aux mêmes solutions. D'autre part, les performances de ces algorithmes dépendent dans une large mesure du bon réglage de leurs paramètres. Or, on peut craindre que le même soin n'ait pas nécessairement été apporté au réglage de tous les algorithmes comparés. Enfin, le choix du problème de comparaison est fondamental. En effet, certains algorithmes sont plus à leur avantage sur certains types de problèmes que d'autres. Au final, l'évaluation compétitive des performances des algorithmes, comme elle est souvent pratiquée dans la littérature, s'avère le plus souvent biaisée [Hooker 95]. De plus, si elle permet éventuellement d'affirmer qu'un algorithme est meilleur qu'un autre (sur un problème donné), on ne sait pourquoi. Pourtant, de nombreux auteurs omettent d'évoquer ces difficultés au moment de "démontrer" que leur approche se comporte mieux que d'autres.

Compte tenu de ces difficultés, et plutôt que de comparer les performances de l'algorithme développé à des travaux extraits de la littérature, on se propose, dans cette section, d'en illustrer le fonctionnement et de mettre en évidence les apports des développements effectués. Pour ce faire, on procède par comparaisons ciblées sur des cas-tests simples et pédagogiques. Les comparaisons sont effectuées sur la base de l'AE générique (Algorithme I-1) au sein duquel sont progressivement intégrés nos développements. Ainsi, ce sont différentes versions du même algorithme qui sont comparées, programmées dans Matlab à partir de la même architecture de base, avec, le cas échéant, les mêmes réglages.

II.3.1 MESURES DE PERFORMANCES

Comme évoqué précédemment, l'optimisation multiobjectif est en elle-même un problème à deux objectifs, à savoir, minimiser la distance du front approché au front réel et maximiser la diversité des solutions trouvées. On trouve dans [Van Veldhuizen 99] et [Colette 02] deux inventaires des estimateurs, ou métriques, de performance destinées à quantifier l'un ou l'autre de ces critères. De façon générale, les métriques de performances sont soit basées sur une notion de dominance, soit sur une distance. D'autre part, elles sont soit absolues, c'est-à-dire utilisées pour mesurer la qualité d'un front donné, soit relatives, c'est-à-dire utilisées pour comparer deux fronts entre eux. Parmi celles-ci, on retient quatre mesures absolues et une mesure relative.

La première métrique, notée M_1 , mesure la distance moyenne entre le front approché (c'est-à-dire, le front retourné par l'AE) et le front réel, ou théorique, du problème considéré. Par définition :

$$M_1(\mathbf{F}') = \frac{1}{\text{card}(\mathbf{F}')} \sum_{\mathbf{y}' \in \mathbf{F}'} \min(\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|; \mathbf{y} \in \mathbf{F}) \quad (\text{II-10})$$

où \mathbf{F}' correspond au front approché et \mathbf{F} au front théorique ; $\text{card}(\mathbf{F}')$ représente le cardinal de \mathbf{F}' et $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|$ la distance euclidienne entre les vecteurs \mathbf{y} et \mathbf{y}' . Plus $M_1(\mathbf{F}')$ est petit, plus les points qui composent le front approché sont proches, en moyenne, du front théorique.

Maximiser la diversité des solutions qui composent le front approché revient, d'une part, à assurer leur distribution régulière le long du front et, d'autre part, à maximiser l'étendue du front approché. La métrique M_2 permet de quantifier l'espacement des solutions :

$$M_2(\mathbf{F}') = \frac{1}{\text{card}(\mathbf{F}') - 1} \sum_{x \in \mathbf{F}'} \text{card}(\{y \in \mathbf{F}' / \|x - y\| > d\}) \quad (\text{II-11})$$

Cette métrique a une valeur comprise entre 0 et $\text{card}(\mathbf{F}')$. Lorsque $M_2(\mathbf{F}') = \text{card}(\mathbf{F}')$, aucun vecteur de \mathbf{F}' n'a de voisin situé à une distance inférieure à d . Ainsi, plus la valeur de $M_2(\mathbf{F}')$ est proche de son maximum, plus régulière est la distribution des solutions le long du front. Dans la suite, on donne une valeur de $M_2(\mathbf{F}')$ normalisée par $\text{card}(\mathbf{F}')$.

La métrique M_3 quantifie l'étendue du front sous la forme de la somme des plus grandes distances sur chaque composante i .

$$M_3(\mathbf{F}') = \sqrt{\sum_{i=1}^k \max(\|x_i - y_i\|, x, y \in \mathbf{F}')} \quad (\text{II-12})$$

Les métriques M_1 , M_2 et M_3 précédentes sont ici formulées dans l'espace des objectifs. Des définitions analogues existent dans l'espace de décision.

La métrique S consiste à mesurer, dans l'espace des objectifs, l'hypervolume dominé (au sens large) par l'ensemble des solutions qui composent le front approché \mathbf{F}' . Cette notion est illustrée sur la Figure II-18. D'un calcul très intuitif en deux dimensions, cette métrique est plus complexe à évaluer en dimension supérieure. Pour ce faire, on utilise l'algorithme HSO¹¹ (Hypervolume by Slicing Objectives). Dans le cas où l'on connaît le front théorique du problème, on utilise directement le rapport d'hypervolumes $S(\mathbf{F}')/S(\mathbf{F})$.

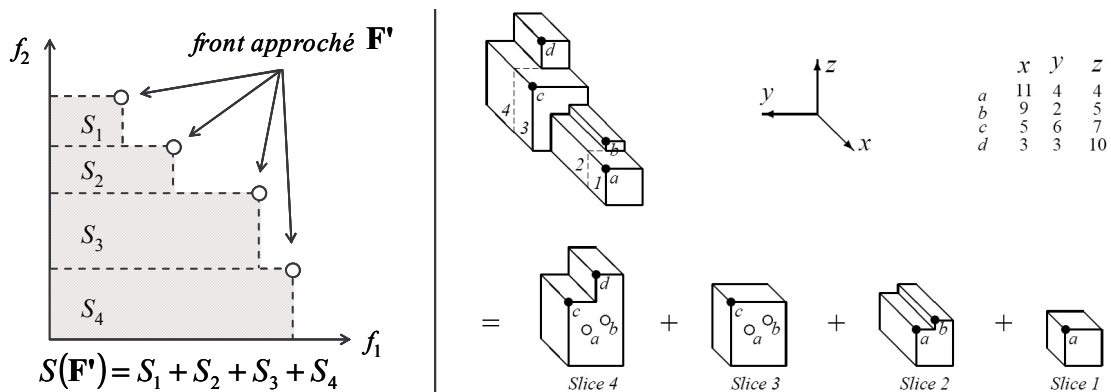


Figure II-18 : Principe du calcul de la métrique S . À gauche : en deux dimensions. À droite : en trois dimensions, d'après [While 05].

La métrique C est une métrique relative. Elle permet de comparer deux fronts approchés \mathbf{F}' et \mathbf{F}'' sous forme d'un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$:

$$C(\mathbf{F}', \mathbf{F}'') = \frac{\text{card}(\{y'' \in \mathbf{F}'' ; \exists y' \in \mathbf{F}' / y' \geq y''\})}{\text{card}(\mathbf{F}'')} \quad (\text{II-13})$$

Lorsque $C(\mathbf{F}', \mathbf{F}'') = 1$, le front \mathbf{F}' est entièrement dominé par le front \mathbf{F}'' . Lorsque $C(\mathbf{F}', \mathbf{F}'') = 0$, c'est l'inverse. Il faut toujours calculer $C(\mathbf{F}', \mathbf{F}'')$ et $C(\mathbf{F}'', \mathbf{F}')$. En effet les deux valeurs ne sont pas nécessairement complémentaires à 1.

¹¹ Zitzler E., "Hypervolume metric calculation," 2001, [ftp://ftp.tik.ee.ethz.ch/pub/people/zitzler/hypervol.c](http://ftp.tik.ee.ethz.ch/pub/people/zitzler/hypervol.c)

Bien que de formulation simple, ces estimateurs sont délicats à interpréter. Par exemple, l'estimateur M_1 donne une information de distance moyenne et donc, ne tient pas compte du cardinal du front approché. A elle seule, cette métrique est insuffisante, mais couplées à l'information sur le cardinal et l'étendue du front approché, elle constitue un bon critère d'évaluation de la qualité du front. Dans le cas de l'estimateur M_2 , le choix de la distance d est problématique. On choisit ici la moyenne des distances de chaque solution à son plus proche voisin. L'estimateur d'étendue M_3 ne constitue un critère de comparaison pertinent entre deux fronts approchés que dans le cas où ces fronts sont suffisamment proches du front théorique. Enfin, la valeur de la métrique S , augmente (dans le cas d'un problème de maximisation) avec la cardinal du front approché, son étendue et sa proximité au front théorique. Par contre cette métrique ne permet pas de déterminer entre deux front si l'un domine l'autre. Au final, c'est le recoupement d'informations qui permet d'extraire les informations les plus intéressantes, d'où la variété des opérateurs retenus.

II.3.2 METHODOLOGIE

Pour tenir compte de l'aspect stochastique des AE dans l'estimation de leurs performances, il est nécessaire d'avoir recours à une approche statistique. Ainsi, tous les algorithmes comparés sont exécutés indépendamment cent fois à chaque problème test. A chaque exécution, on suit l'évolution du front de Pareto résultant, sur l'historique de toutes les solutions évaluées jusque là, en fonction du nombre d'évaluations. En fonction du problème considéré, soit le front théorique \mathbf{F} est connu, soit il est inaccessible et la métrique M_1 est alors inapplicable.

Dans le premier cas, chaque front approché \mathbf{F}' est caractérisé par le quadruplet de valeurs $(M_1(\mathbf{F}'), M_2(\mathbf{F}'), M_3(\mathbf{F}'), S(\mathbf{F}'))$. Ainsi, pour chaque algorithme, pour chaque nombre d'évaluations considéré, on dispose de cent triplets de valeurs pour estimer les performances. Dans la suite, ces données sont synthétisées sous forme de moyennes, d'écart-types et d'intervalles de variation. De façon générale, on attend du meilleur algorithme qu'il permette de minimiser la valeur moyenne de M_1 , image de la distance du front approché au front réel, de maximiser M_2 , image de la régularité de la distribution des solutions sur le front approché, et de maximiser la mesure d'étendue M_3 . Idéalement, si les résultats sont suffisamment proches du front théorique \mathbf{F} , on espère tendre $M_3(\mathbf{F})$. De même, on espère maximiser le rapport d'hypervolume $S(\mathbf{F}')/S(\mathbf{F})$. Enfin, dans le souci de s'assurer de la robustesse des méthodes d'optimisation employées, on souhaite minimiser l'amplitude des variations autour des valeurs moyennes.

Dans le cas où le front théorique est inconnu, les comparaisons ne peuvent être que relatives. On emploie la métrique C pour comparer deux à deux les fronts obtenus à chaque exécution des méthodes comparées. On a donc cent valeurs de C pour chaque comparaison d'une paire ordonnée d'algorithmes. De plus, on dispose toujours des cent valeurs S pour chaque front considéré. Les valeurs de M_2 et M_3 sont toujours disponibles, mais difficiles à interpréter sans M_1 . Elles ne sont donc pas prises en compte dans ce cas.

II.3.3 CAS-TESTS

Les trois cas-tests proposés correspondent à trois déclinaisons du même problème d'optimisation. Le problème mécanique est en lui-même simple et peu coûteux en temps de calcul, de façon à permettre de très nombreuses évaluations des fonctions-objectif. Dans le souci de pouvoir visualiser simplement les résultats, on se restreint à deux fonctions-objectif dans le premier cas-test et trois dans les suivants. Le premier cas-test est consacré au fonctionnement de l'algorithme d'optimisation. Le second traite de la gestion des règles de conception et le troisième est dédié à la gestion des autres contraintes de dimensionnement.

II.3.3.a Premier cas-test : illustration des apports algorithmiques

Ce cas-test illustre l'efficacité de l'approche évolutionnaire multiobjectif, de l'élitisme et des techniques proposées d'initialisation et de guidage de la recherche.

Description du problème

Le problème traité consiste à maximiser simultanément les facteurs critiques de flambement d'une plaque rectangulaire à trente deux plis, en carbone / époxy, pour les deux cas de charge : $N_x = -1500$ N/mm (cas n°1) et $N_x = N_y = -500$ N/mm (cas n°2).

Les facteurs de flambement sont calculés selon l'expression II-14, issue de [Berthelot 92]. La plaque est supposée orthotrope en flexion :

$$\lambda_c = \frac{\pi^2 [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4]}{a^2(N_x m^2 + N_y n^2R^2)} \quad (\text{II-14})$$

où $R = a/b$ correspond au ratio de la longueur a et de la largeur b de la plaque. Ici, $R = 2$ pour une longueur a de 500 mm. Le facteur critique de flambement correspond au minimum de λ_c par rapport aux nombres de demi-longueurs d'onde m et n . On note respectivement λ_1 et λ_2 les facteurs critiques pour les cas de charge n°1 et 2.

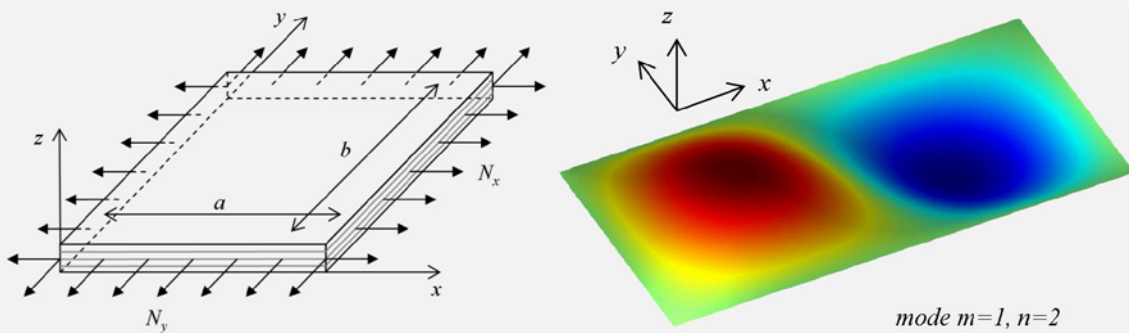


Figure II-19 : Schémas de la plaque stratifiée et déformée correspondant au deuxième mode de flambement.

En procédant comme en II.1.1.b, il est possible de déterminer *a priori* la surface de compromis théorique (dans l'espace de décision) et le front de Pareto associé (dans l'espace des objectifs). La surface de compromis est constituée de l'ensemble des empilements $[(\pm\theta)_8]_s$ avec θ variant continûment dans l'intervalle $[45; 71,2]$ (voir Figure II-20). En pratique, le pas de discrétisation angulaire pour l'optimisation est de 5° . Afin de pouvoir s'approcher au plus près du front théorique sans être contraint par les règles de conception, seules sont imposées la symétrie et l'équilibre.

Comparaisons effectuées

La méthode aléatoire, notée **ALEA**, vise à servir de référence pour illustrer les performances des méthodes évolutionnaires. Elle consiste à tirer aléatoirement un certain nombre de solutions, puis à effectuer leur classement selon la valeur de leur fonction de qualité (Cf. II.2.1.c). Pour ce faire, on utilise le générateur aléatoire d'empilements développé (Cf. II.2.2.b), de telle sorte que les solutions évaluées respectent les règles de conception voulues. Par rapport aux autres méthodes employées, on évalue par la méthode aléatoire le même nombre total de solutions, mais sans tirer parti des informations glanées au cours de la recherche pour guider le tirage de quelque façon que ce soit.

L'AE monobjectif, noté **MONO**, sert de référence pour illustrer les avantages de l'approche multiobjectif de Pareto. La méthode est basée sur l'AE générique (voir Algorithme I-1) combiné à une technique d'agrégation des objectifs sous la forme de somme pondérée. Afin d'imposer les règles de

conception, on utilise le générateur de population aléatoire et les opérateurs de variations dans un schéma de reproduction standard (Cf. II.2.2.c). La recherche est exécutée cent fois avec, à chaque exécution, une nouvelle combinaison aléatoire de poids. Les solutions optimales obtenues (une par exécution) sont fusionnées en un unique front de référence.

L'AE multiobjectif, noté **MULTI** n'est pas élitiste. Il sert de référence pour illustrer l'apport de l'élitisme. La méthode de recherche est identique à celle de l'algorithme MONO, combinée à la fonction de qualité multiobjectif décrite en II.2.1.c.

Afin d'évaluer l'influence de l'élitisme, l'Algorithme II-1 est proposé en version standard, avec un déroulement classique des phases d'initialisation et de reproduction (**AE.v1**). La démarche d'initialisation est mise en œuvre dans la deuxième version (**AE.v2**) et la méthode de guidage dans la troisième (**AE.v3**). L'algorithme complet correspond à la dernière version (**AE.v4**).

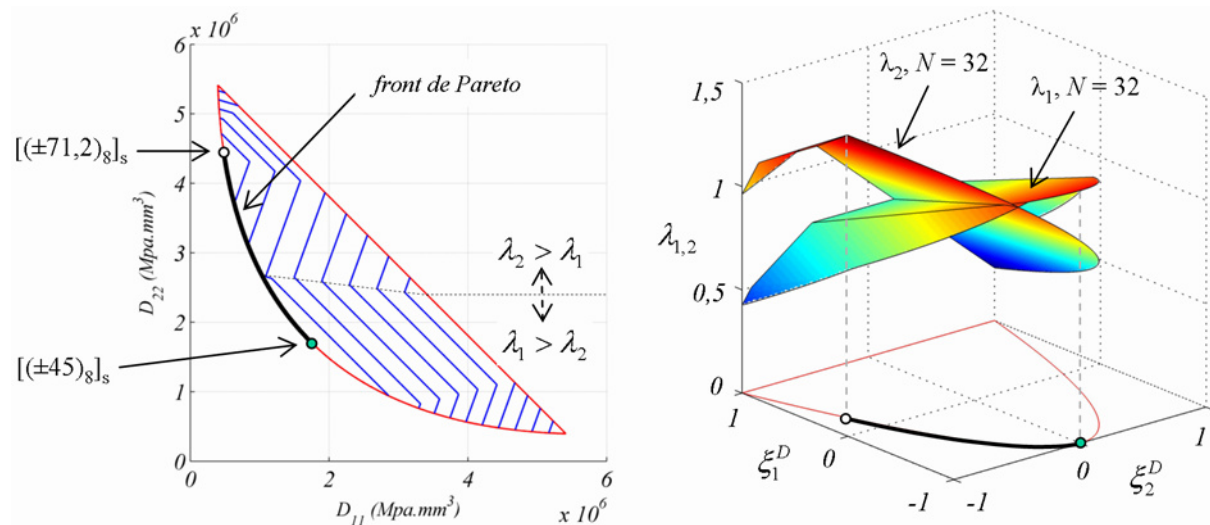


Figure II-20 : A gauche : visualisation du front de Pareto théorique dans le plan des modules de flexion (D_{11}, D_{22}) pour des empilements à 32 plis. L'enveloppe convexe du domaine des solutions réalisables est représentée en rouge. Les lignes de niveau en rouge correspondent à la valeur $\max(\lambda_1, \lambda_2)$ où λ_1 et λ_2 représentent respectivement les facteurs critiques de flambement pour les chargements n°1 et 2. A droite : visualisation des surfaces λ_1 et λ_2 dans le plan des paramètres de stratification.

Réglages des paramètres

Indépendamment de l'algorithme considéré, les valeurs des paramètres N_p , T , p_c , p_m , A_m et p_p sont les suivantes.

Taille de la population N_p :	30
Nombre maximum de générations T :	100
Probabilité de croisement p_c :	0,2
Probabilité de mutation p_m :	0,8
Amplitude de mutation A_m :	4
Probabilité de permutation p_p :	0,5

La taille d'archive \bar{N}_p est fixée à 30 pour les algorithmes élitistes testés. Pour le guidage de la recherche dans le domaine des rigidités réalisables, on considère des voisinages définis dans le plan (D_{11}, D_{22}) uniquement. Le rayon δ varie en $1/t$ (où t correspond à l'indice de la génération courante), entre la borne supérieure correspondant à la distance entre l'UD à 0° et l'UD à 90° et la borne inférieure correspondant à l'impact de la mutation du pli extérieur sur le stratifié $[(45/0/-45/90)_4]_s$.

Résultats des expériences numériques et conclusions

Dans ce premier cas-test, on dispose du front théorique. On utilise donc les métriques M_1 , M_2 , M_3 , et S pour évaluer, par le biais de la qualité des fronts obtenus, les différences de comportement des algorithmes comparés. Puisque le nombre de solutions évaluées reste suffisamment faible pour en permettre le stockage, on considère le front sur l'historique complet de la recherche plutôt que sur la seule archive. Le cardinal du front à la génération t constitue un indicateur supplémentaire.

En plus d'être compliquées à réaliser, ces comparaisons aboutissent à une masse d'information difficile à présenter et à mettre en valeur de façon concise. Nous choisissons donc de ne présenter ici que quelques exemples de résultats pour, forts du travail réalisé, aller droit aux conclusions obtenues.

De façon générale, on vérifie bien que toutes les méthodes mises en œuvre donnent de meilleurs résultats que la méthode ALEA : sur les cent exécutions réalisées, les fronts obtenus sont toujours plus proches du front théorique, plus étendus et constitués de plus de solutions, plus régulièrement distribuées le long des fronts. Ce constat reste valable lorsque l'on compare les résultats des différents AE multiobjectifs *a posteriori* au front obtenu par la fusion des cent exécutions de la méthode ALEA (soit un tirage aléatoire de 300 000 solutions). Par contre, l'approche *a priori* (la méthode MONO) s'avère peu efficace par rapport aux approches *a posteriori*, alors que l'on ne considère que deux objectifs seulement. Ce point est illustré par la Figure II-21, qui présente les résultats obtenus en matière de proximité au front théorique (métrique M_1) et de cardinal des fronts.

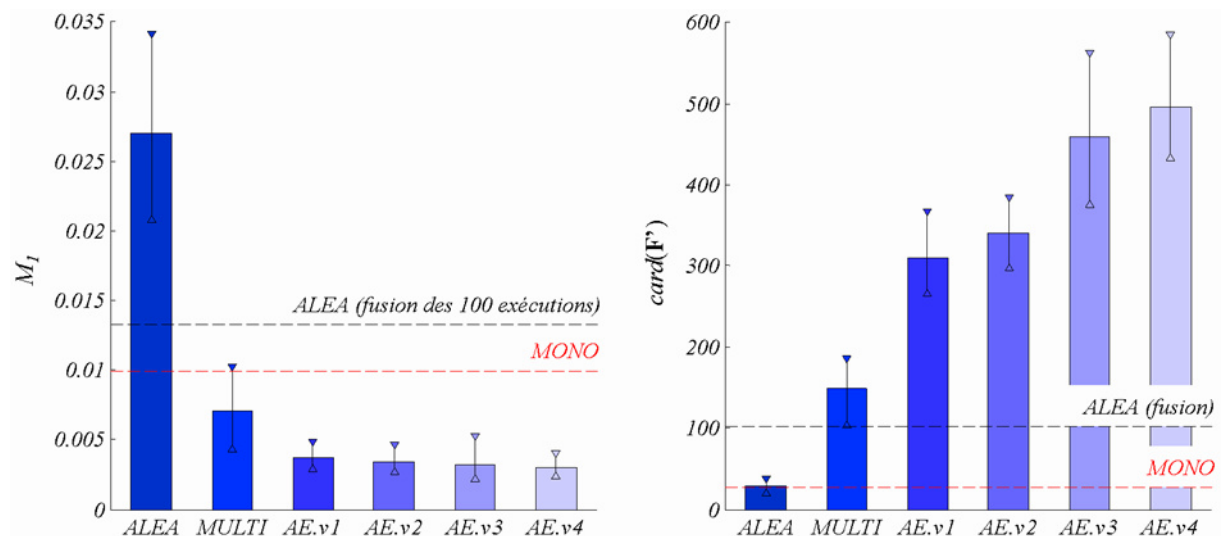


Figure II-21 : Résultat à l'issue des cent générations (3000 évaluations). Pour chaque algorithme on présente la valeur moyenne et l'intervalle de variation des indicateurs sur les 100 exécutions. La méthode MONO retourne un unique front correspondant à l'évaluation de 300 000 évaluations. Celui-ci est comparé au front obtenu par la fusion des cent exécutions de la méthode ALEA.

La Figure II-22 présente l'évolution, en valeurs moyennes, de la métrique M_1 et du nombre de solutions non dominées obtenues, en fonction du nombre de solutions évaluées. Ce sont ces courbes d'évolutions qui illustrent le mieux l'effet des apports algorithmiques. L'élitisme se traduit par une nette accélération de la convergence vers le front théorique, ainsi que par l'obtention d'un plus grand nombre de solutions non dominées très tôt dans la recherche (comparer MULTI et AE.v1). Signalons que d'autres tests ont montré que l'usage d'une archive de taille \bar{N}_p trop importante entraîne une certaine inertie en début de recherche. Plus \bar{N}_p est important, plus d'évaluations sont nécessaires

pour que les performances de l'algorithme AE.v1 se démarquent de celles de l'algorithme MULTI. Le guidage de la recherche dans l'espace intermédiaire des rigidités permet d'accroître la diversité des solutions optimales générées, ce qui se traduit par une nette augmentation du cardinal moyen des fronts approchés (comparer AE.v1 et AE.v3). Enfin, la Figure II-22 met tout particulièrement en valeur l'intérêt d'une population initiale bien choisie. L'accélération qui en résulte est considérable, aussi bien en matière de proximité au front théorique qu'au niveau du nombre de compromis optimaux trouvés. La phase d'exploration est alors très réduite. Les algorithmes AE.v2 et AE.v4 convergent très rapidement selon la métrique M_1 . L'intensification de la recherche se traduit ensuite par l'augmentation régulière du cardinal des fronts approchés. La Figure II-23 présente un exemple des fronts obtenus dans l'espace des objectifs.

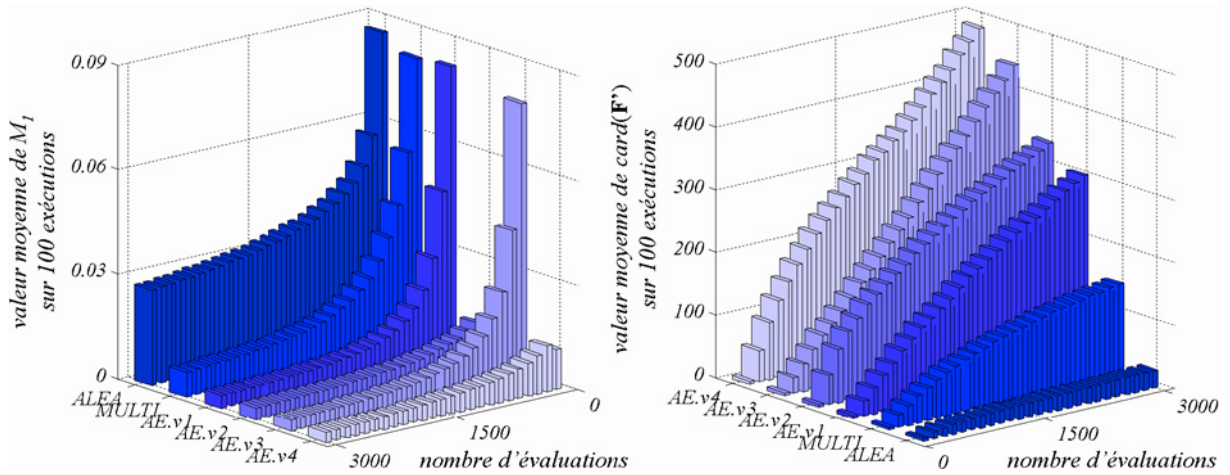


Figure II-22 : Evolution des résultats, en valeurs moyennes, au cours de la recherche.

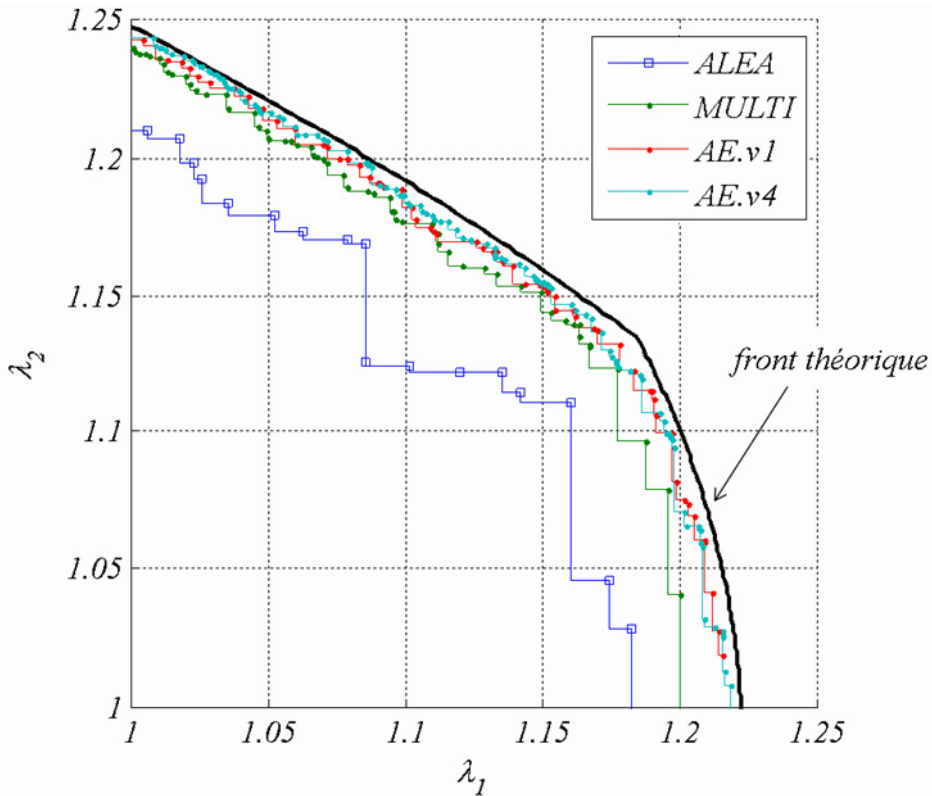


Figure II-23 : Exemple des fronts obtenus pour une exécution quelconque des algorithmes signalés. Par soucis de lisibilité, on ne présente pas les fronts complets mais uniquement un zoom sur la portion du plan $\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$.

II.3.3.b Deuxième cas-test : les règles de conception

Il s'agit ici d'illustrer le fonctionnement de l'algorithme lorsque l'ensemble des règles de conception des empilements est pris en compte.

Description du cas-test

Le problème mécanique considéré est inchangé. Cette fois-ci, cependant, on cherche à satisfaire l'ensemble des règles de conception des empilements. Les règles de désorientation et des 10 % interdisent les empilements théoriques optimaux employés comme référence dans le cas-test précédent. En outre, la règle de battage constitue maintenant un objectif supplémentaire dont on sait qu'il est antagoniste avec la maximisation des facteurs critiques de flambement. On ne dispose plus ici d'un front théorique auquel se référer. On utilise donc les métriques C et S , associées à la mesure du cardinal des fronts. Dans la mesure où l'emploi de la métrique C suppose d'établir une matrice de comparaison complète, on se restreint à la comparaison des algorithmes ALEA, AE.v1 et AE.v4. Les réglages sont identiques par rapport au cas-test précédent.

Résultat des expériences numériques

On retrouve la hiérarchie de performances décrite au cas-test précédent entre les méthodes ALEA, AE.v1 et AE.v4. La matrice de comparaison associée à la métrique C permet d'établir, avec une bonne reproductibilité, que les fronts obtenus par tirage aléatoire sont largement dominés par ceux obtenus par l'algorithme AE.v1, eux-mêmes dominés par AE.v4 (voir Tableau II-2).

Métrique C		
ALEA	0,6973	0,9154
0,0174	AE.v1	0,5842
0,0007	0,0838	AE.v4

Tableau II-2 : Matrice de comparaison associée à la métrique C . Valeurs moyennes sur les comparaisons réalisées.

Toutefois, par rapport à un tirage aléatoire de 300 000 solutions (correspondant à la fusion des cent exécutions de la méthode ALEA), les écarts se resserrent. En effet, le simple fait d'être à même de ne générer que des solutions satisfaisant aux règles de conception permet de réduire considérablement l'espace de recherche. Dès lors, quel que soit l'algorithme employé, les performances s'en trouvent accrues.

La Figure II-24 présente les valeurs de la métrique S et de cardinal des fronts. Les fronts considérés dans ce cas-test sont convexes, dans un espace à trois dimensions (les deux facteurs critiques de flambement et le critère d'homogénéité de l'empilement). Dans ce cas, un front F' est d'autant meilleur (c'est-à-dire d'autant plus étendue et composé de plus de solutions) que l'hypervolume dominé $S(F')$ est grand. Sur cette figure, on vérifie que même dans le cas le pire, l'algorithme AE.v4 affiche des résultats supérieurs au tirage ALEA à l'issue des 3000 évaluations imparties.

La Figure II-25 présente un exemple des résultats obtenus par l'algorithme AE.v4. Dans la mesure où il est difficile de visualiser de façon lisible un front tridimensionnel, on donne ici une représentation plane des résultats. Les solutions non dominées sont classées selon la valeur du critère de battage qui leur est associée. Ces solutions sont ensuite post-traitées selon les valeurs de λ_1 et λ_2 , de façon à représenter les fronts des solutions optimales selon ses deux critères, parmi les 100, 300 et 700 solutions les mieux battues respectivement. Ceci permet de mettre en évidence que la règle de battage, en imposant une distribution homogène des orientations de plis dans l'épaisseur, est contraire à l'optimisation en flambement. Le front théorique représenté correspond à celui du cas-test précédent. Donnée à titre indicatif, il permet de comparer la Figure II-25 à la Figure II-23 pour estimer l'impact des règles de conception des empilements sur le domaine réalisable.

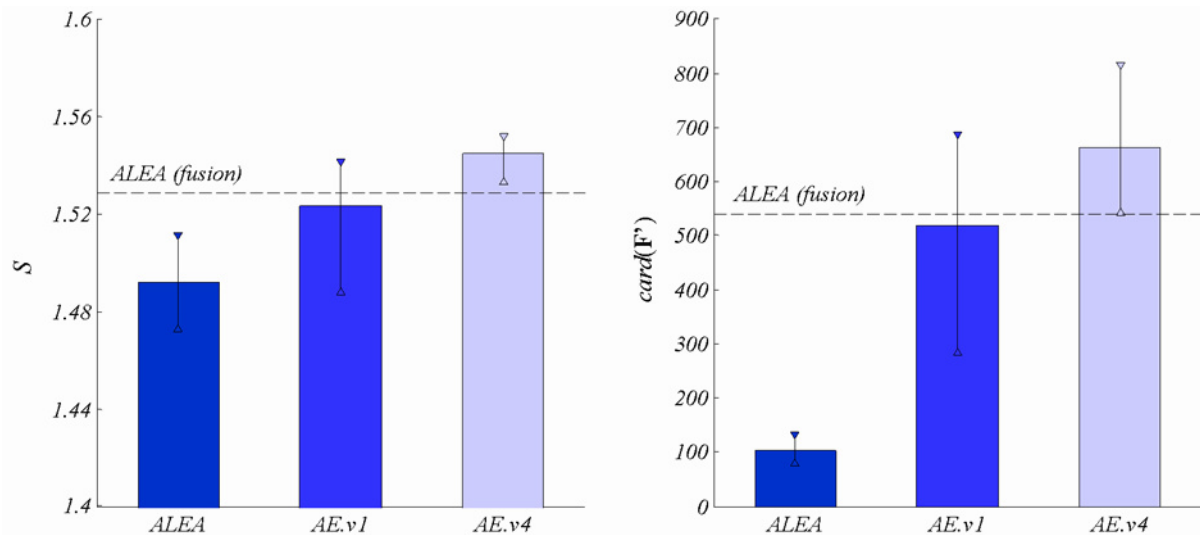


Figure II-24 : Résultat à l'issue des cent générations (3000 évaluations). Pour chaque algorithme on présente la valeur moyenne et l'intervalle de variation des indicateurs sur les 100 exécutions. La fusion des cent exécutions de la méthode ALEA permet de se référer au front correspondant à un tirage aléatoire de 300 000 solutions.

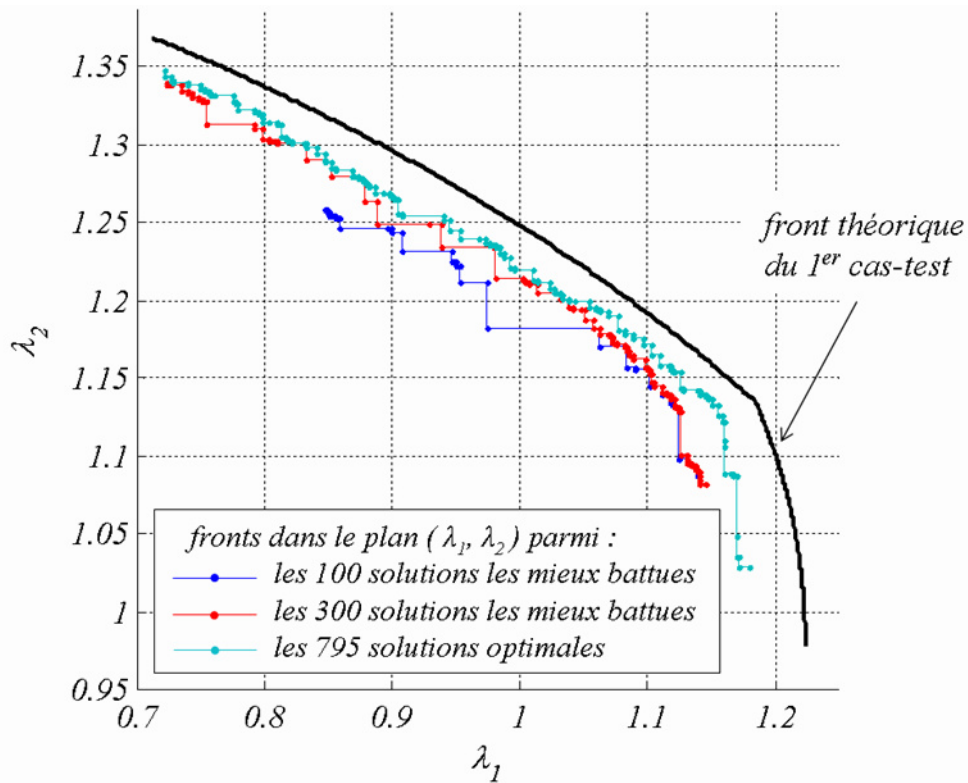


Figure II-25 : Résultats obtenus à l'issue d'une exécution quelconque de l'algorithme AE.v4. Les solutions de rang 0 sont post-traitées dans le plan (λ_1, λ_2) . On trace trois fronts avec une exigence décroissante sur l'homogénéité des empilements. Le front théorique correspond à celui de la Figure II-23. Les règles de conception supplémentaires considérées dans le deuxième cas-test empêchent de l'atteindre.

II.3.3.c Troisième cas-test : la minimisation du nombre de plis

Ce dernier cas-test illustre l'efficacité de l'approche développée pour la minimisation du nombre de plis des empilements.

Description du cas-test

Le problème mécanique est inchangé. Par souci de simplicité, seules sont imposées les règles de symétrie et d'équilibre. Cette fois, on souhaite que la plaque ne flambe pas. On impose donc que les facteurs critiques de flambement λ_1 et λ_2 soient supérieurs à 1. Ces deux contraintes conduisent à ne s'intéresser qu'à une partie réduite du front de Pareto du problème non contraint. Cette portion dépend du nombre total de pli N et il existe un nombre de pli minimal en deçà duquel les contraintes sont impossibles à satisfaire. Il s'agit maintenant de maximiser les facteurs λ_1 et λ_2 et de minimiser simultanément le nombre de plis N , tout en satisfaisant aux contraintes.

Il est facile d'établir les fronts théoriques des problèmes non contraints de maximisation des facteurs λ_1 et λ_2 en fonction de N . A nombre de plis fixé, on peut donc aisément déterminer le front théorique du problème contraint.

$N = 30$: il n'existe aucune solution satisfaisante

$N = 31$: le front théorique est constitué des empilements $[(\pm\theta)_{7/90_{3/2}}]_s$ avec $\theta \in [51,2;56,4]$

$N = 32$: le front théorique est constitué des empilements $[(\pm\theta)_8]_s$ avec $\theta \in [46,1;60,3]$

$N = 33$: le front théorique est constitué des empilements $[(\pm\theta)_{8/90_{1/2}}]_s$ avec $\theta \in [45;63,5]$

Dans ce cas-test, on compare deux approches basées sur l'algorithme AE.v4. La première approche consiste à intégrer le nombre de pli N aux variables de décision du problème. La seconde consiste à fusionner les résultats de plusieurs recherches à nombre de plis fixé. Les réglages sont identiques aux cas-tests précédents. Le nombre total imparti d'évaluations est de 3000 pour les deux approches, soit 3×1000 évaluations dans le cas de la seconde approche. Lorsque N constitue une variable d'optimisation, la recherche est initialisée avec une population de trente empilements dont dix à 31 plis, dix à 32 plis et dix à 33 plis. On ne manipule pas de solution de plus de 33 plis.

Les comparaisons sont effectuées pour chaque valeur de N , sur la base des métriques M_1 , M_2 , M_3 , S et du cardinal des fronts. Pour chaque valeur de N , on compare les résultats obtenus par la recherche à nombre de plis fixé avec ceux obtenus en jouant sur le nombre de plis.

Résultats des expériences numériques

La Figure II-26 présente un comparatif de la qualité des fronts obtenus par les deux approches, en fonction du nombre de plis, en matière de proximité au front théorique (métrique M_1) et de cardinal. De façon général, les fronts obtenus en considérant le nombre de plis N comme une variable de décision sont meilleurs, en valeurs moyennes, sur tous les critères, mais plus dispersés. La Figure II-27 présente un exemple des résultats obtenus lors d'une exécution quelconque de la première approche. Ces résultats sont comparés au front théoriques.

On explique l'avantage de la première approche par deux raisons. D'une part, la capacité de l'algorithme évolutionnaire à exploiter les synergies entre solutions de nombres de plis différents par le biais des opérateurs de croisement. En effet, les empilements optimaux sont très fortement similaires quelque soit leur nombre de plis. D'autre part, il s'effectue un ajustement automatique de la proportion de la population consacrée à chaque nombre de plis.

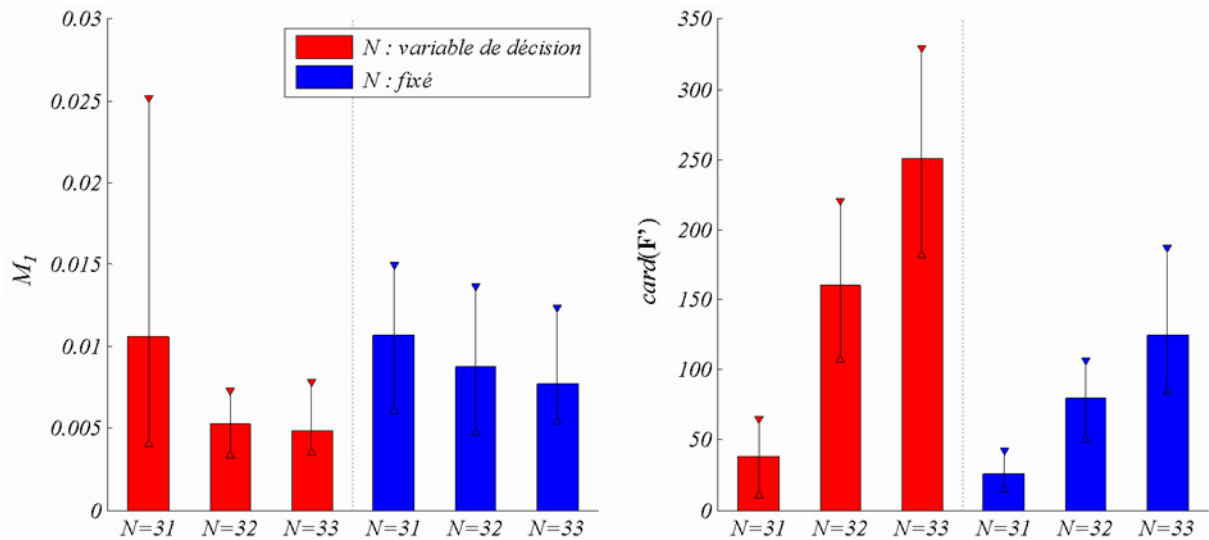


Figure II-26 : Comparatif de la qualité des fronts obtenus par les deux approches à l'issue des 3000 évaluations imparties. Valeurs moyennes et intervalles de variation sur les 100 exécutions.

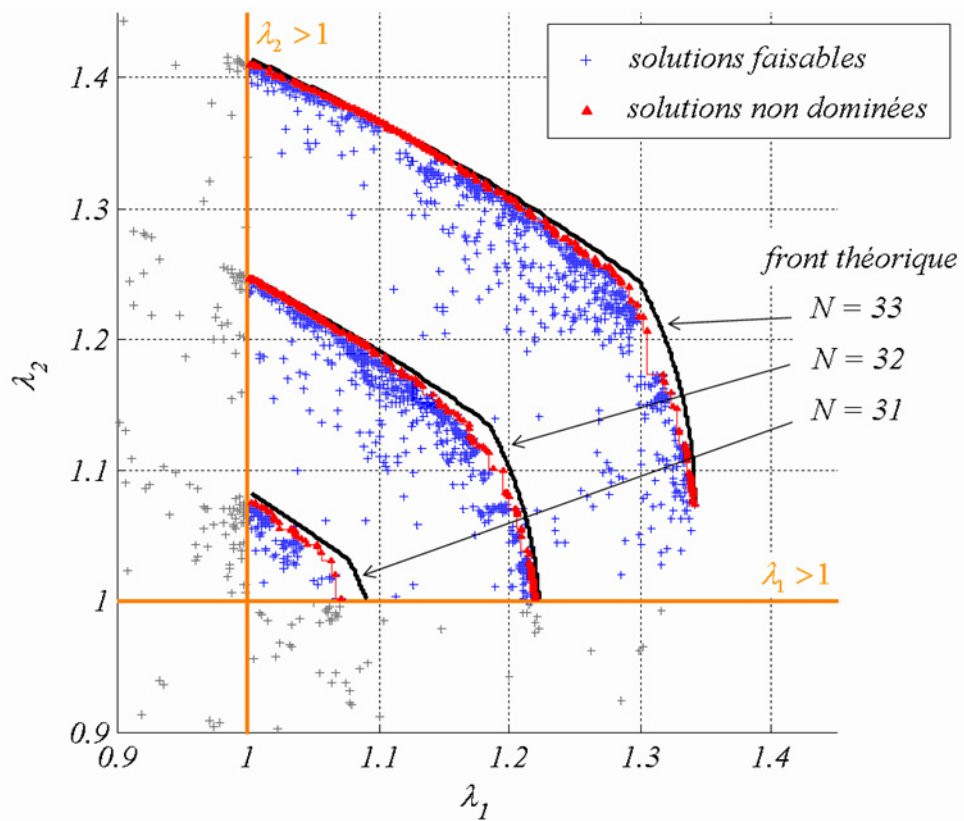


Figure II-27 : Résultats obtenus à l'issue d'une exécution quelconque du processus d'optimisation, en considérant N comme une variable de décision. Les frontières d'activation des contraintes sont tracées en orange. En gris, les solutions infaisables.

II.4 BILAN

On dispose maintenant d'un AE dédié à l'optimisation des empilements et validé sur des cas d'applications simples. Nos développements aboutissent à un algorithme présentant une architecture proche de celle de certains des AE considérés comme les plus performants dans le domaine de l'optimisation multiobjectif. La spécialisation de l'algorithme aux problèmes composites est effectuée par le biais d'un générateur de solution et d'opérateurs de variation spécifiques, respectueux des règles de conception usuelles, ce qui constitue un apport majeur par rapport à la littérature. De plus, nous proposons deux éléments algorithmiques originaux : l'un pour la constitution d'une population initiale optimale, et l'autre pour l'intensification de la recherche autour des solutions optimales. Un important travail de comparaison et d'application sur des cas-tests analytiques justifie de l'intérêt de ces apports, et tout particulièrement de l'efficacité de la technique d'initialisation.

Ce travail de test et de comparaison est délicat et suppose un investissement personnel important, qu'il est difficile de faire transparaître dans ce mémoire, aussi bien pour sa réalisation que pour l'exploitation et la mise en valeur des résultats obtenus. Au final, toutes les précautions ont été prises pour que nos algorithmes d'optimisation fonctionnent au mieux. Cependant, il est important de conserver à l'esprit que l'algorithme occupe un rôle central mais limité dans la stratégie de résolution. Le plus souvent, la recherche sera interrompue prématurément en raison des coûts de calcul. Dans ces conditions, on ne peut prétendre réussir systématiquement à améliorer la solution nominale. L'objectif est d'y parvenir le plus souvent possible. De ce point de vue, c'est dans l'usage que l'on fait des moyens de calculs impartis que se situe la clé du problème. Améliorer l'efficacité de l'algorithme d'optimisation ne constitue qu'une réponse partielle : la stratégie de calcul en est une autre.

Jusqu'ici, nous avons traité des cas d'applications analytiques dont les coûts de calcul sont négligeables. Les parties suivantes de ce mémoire sont consacrées à des applications plus significatives. La deuxième partie traite de l'optimisation de panneaux raidis en flambement. La troisième partie de l'optimisation des empilements au niveau des jonctions boulonnées. Toutefois, le Chapitre suivant aborde au préalable les problèmes de stratégie de calcul sous un angle différent, lié non pas à la complexité des structures à l'étude, mais aux problèmes de robustesse.

Chapitre III **Vers l'optimisation robuste des structures composites**

Sommaire

III.1	Considérations générales sur la prise en compte des incertitudes pour le dimensionnement et l'optimisation des structures composites.....	86
III.1.1	Dimensionnement robuste des structures composites	87
III.1.2	Optimisation robuste des structures composites et algorithmes évolutionnaires multiobjectifs.....	90
III.1.3	Les difficultés du calcul de robustesse	92
III.2	Vers l'optimisation robuste des empilements dans les structures composites	94
III.2.1	Classification des sources d'incertitudes.....	94
III.2.2	Quantifier la robustesse des solutions	98
III.2.3	Incertaines et classement des solutions.....	99
III.2.4	Incertaines et faisabilité des solutions	103
III.3	Bilan	105

La problématique de l'optimisation structurale consiste à obtenir les meilleures solutions possibles dans un temps de calcul le plus réduit possible. De ce point de vue, le rôle de la stratégie de calcul est prépondérant. En effet, celle-ci vise à obtenir les résultats les plus précis tout en conservant un temps de calcul raisonnable. Il y a là un compromis délicat à trouver. Le plus souvent, les coûts de calculs sont tels que l'on est contraint d'employer des modèles dégradés correspondant à une vision simplifiée, voire simpliste, de la réalité des phénomènes étudiés. Par conséquent, il est légitime de s'interroger sur l'intérêt de trouver l'optimum du modèle avec la plus grande précision, en écartant les solutions avoisinantes. La précision des comparaisons effectuées sur les contraintes et les objectifs du problème d'optimisation est donc nécessairement limitée par l'erreur associée au modèle. De plus, le biais entre le modèle et la réalité est susceptible de guider l'algorithme d'optimisation vers des solutions très éloignées de l'optimum réel. D'autre part, même en supposant que le modèle est en parfaite adéquation avec la réalité, il faut tenir compte du fait que la pièce fabriquée ne correspond qu'approximativement à ses spécifications. Il convient donc de s'assurer de la stabilité du design retenu vis-à-vis des tolérances de fabrication, de la dispersion des propriétés matériaux, voire de l'évolution de l'ensemble de ses caractéristiques dans son environnement tout au long de son cycle de vie. En fait, on appréhende aisément l'écart qui existe entre l'optimisation "théorique", basée sur des considérations idéalisées, et la réalité à laquelle est confronté le concepteur de structures composites. Dans l'industrie aéronautique, méconnaissances et incertitudes sont respectivement prises en compte sous la forme de marges de sécurité et d'abattement sur les valeurs de calcul. La question est de savoir si cette méthodologie est compatible avec une démarche d'optimisation classique ou s'il est nécessaire de la repenser, ainsi que la démarche d'optimisation.

Le but de ce chapitre est d'examiner les moyens de combler ce fossé entre "théorie et "réalité", condition *sine qua non* à l'utilisation, à terme, des méthodes d'optimisation dans un contexte industriel. Dans un premier temps, sont analysées les différentes attitudes relevées dans la bibliographie pour la gestion des incertitudes dans le processus d'optimisation. Dans un second temps, les approches retenues pour la suite de ce travail sont présentées. Les cas-tests de justification exploités au Chapitre II sont repris pour illustrer notre propos et le fonctionnement des outils proposés.

III.1 CONSIDERATIONS GENERALES SUR LA PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES POUR LE DIMENSIONNEMENT ET L'OPTIMISATION DES STRUCTURES COMPOSITES

L'analyse bibliographique proposée dans cette section est focalisée sur le thème du dimensionnement et de l'optimisation robuste des structures composites, ainsi que sur les techniques d'optimisation robuste spécifiques aux algorithmes évolutionnaires multiobjectifs. On renvoie à [Beyer 07] pour un article de synthèse complet sur le vaste domaine de l'optimisation robuste, et à [Jin 05] pour une synthèse dédiée à l'optimisation évolutionnaire dans un contexte incertain.

Précisons en préambule le vocabulaire employé dans la suite. Il est généralement admis que l'*optimisation robuste* correspond à la recherche de *solutions robustes*, c'est-à-dire de solutions peu sensibles à de petits écarts par rapport aux hypothèses qui ont présidées à leur détermination. La *robustesse* d'une solution correspond à une mesure de cette sensibilité. La *fiabilité* d'un dimensionnement recoupe cette notion de robustesse mais son estimation réfère généralement aux méthodes *fiabilistes*. Ce type de démarche probabiliste vise à estimer la probabilité de défaillance de la structure à partir de la connaissance des distributions de probabilité sur les paramètres d'entrée. L'optimisation fiabiliste (*RBDO* pour *Reliability-Based Design Optimization*) est donc le plus souvent considérée comme un sous-ensemble des méthodes d'optimisation robuste.

III.1.1 DIMENSIONNEMENT ROBUSTE DES STRUCTURES COMPOSITES

III.1.1.a Qualification des matériaux et valeurs de calcul

La démarche industrielle de dimensionnement des structures composites est régie par une réglementation internationale précise et évolutive : la *FAR (Federal Aviation Regulations)* aux Etats-Unis et la *JAR (Joint Aviation Requirements)* européenne. En Europe, c'est la JAR 25 qui s'applique au dimensionnement des avions de lignes, dont la partie C traite en particulier du dimensionnement des structures.

La prise en compte des incertitudes dans le dimensionnement statique des structures composites repose principalement sur la définition de niveaux de charges et de valeurs de calcul probabilistes pour la rupture des matériaux¹. Ainsi, la JAR 25.301 définit, d'une part, les *charges limites*, forfaitaires ou probabilistes (correspondant à une probabilité d'occurrence de $2 \cdot 10^{-5}$ par heure de vol), supposées ne se produire qu'une fois dans la vie de l'avion et, d'autre part, les *charges extrêmes*, correspondant aux charges limites multipliées par un coefficient de sécurité. La JAR 25.305 précise que la structure doit être capable de supporter les charges limites sans subir de dégradation préjudiciable (déformations permanentes, etc.). Le dimensionnement est généralement effectué à charges extrêmes, avec un coefficient de sécurité généralement fixé à 1,5.

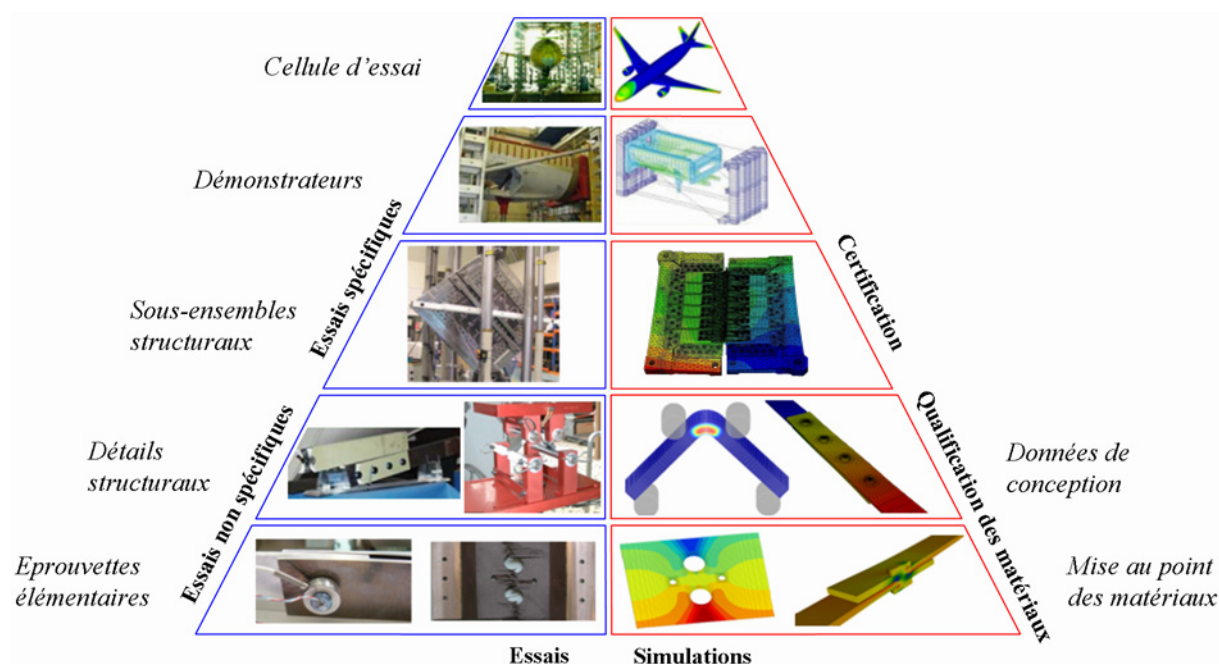
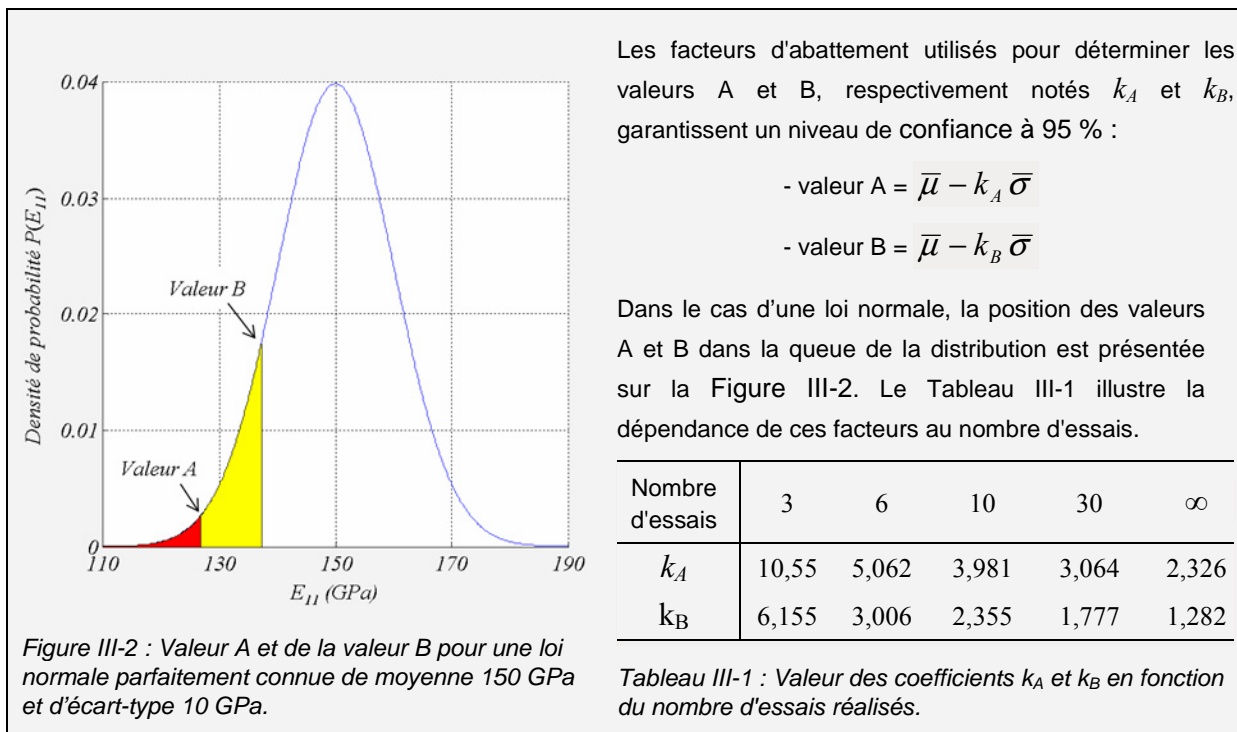


Figure III-1 : Pyramide des essais et de la simulation, dans l'industrie aéronautique. La largeur des tronçon est proportionnelle à la quantité d'essais et de calculs réalisés. La tendance actuelle consiste à accroître l'effort de simulation afin de réduire le nombre d'essais, en particulier dans les échelons supérieurs de la pyramide.

Pour faire face à la dispersion expérimentale des propriétés matériaux, la JAR 25.613, impose l'usage de valeurs de calcul (ou *design allowable properties*, les valeurs admissibles de dimensionnement), issues de l'analyse statistique de campagnes expérimentales, choisies de telle sorte que la probabilité d'un sous-dimensionnement dû à des variations de ces propriétés soit extrêmement faible. La JAR 25.615 définit ainsi les *valeurs A* et les *valeurs B*. La valeur A correspond

¹ Signalons toutefois que d'autres exigences de conformité viennent s'ajouter, comme, par exemple, des considérations de durabilité liées aux conditions environnementales, de tolérance aux dommages ou de fatigue (JAR 25.603), mais aussi de conductivité électrique et de dilatation thermique.

à la limite inférieure telle que 99 % de la population soit supérieure à cette valeur avec une confiance de 95 %. La valeur B correspond à la limite inférieure à 90 % avec le même niveau de confiance. De façon générale, les valeurs A sont utilisées pour les structures à chemin d'effort unique et les valeurs B pour les structure à chemin d'efforts multiples. Les structures composites sont considérées comme intrinsèquement multi chemin d'effort. Ce sont donc le plus souvent les valeurs B qui s'appliquent.



En pratique, la détermination des valeurs de calculs dépend fortement du nombre d'essais réalisés. Plus ce nombre est réduit, plus les coefficients d'abattement employés sont importants et plus l'approche est conservatrice. Or, si les sous-dimensionnement sont inacceptables, il est aussi de plus en plus difficile d'accepter des surdimensionnements excessifs qui entraînent une perte de compétitivité. Les industriels sont donc contraints à des campagnes d'essais importantes et coûteuses. Ces essais sont généralement représentés par une pyramide (Figure III-1) dont chaque tronçon correspond à un niveau de complexité structurale. La largeur des tronçons est représentative de la quantité d'essais réalisés. Celle-ci diminue lorsque l'on remonte les échelons de la pyramide, avec l'accroissement de la complexité et du coût des essais. Les échelons inférieurs sont consacrés à la qualification des matériaux. Les essais sur éprouvettes élémentaires permettent de caractériser les propriétés matériaux, et leur dispersion, à l'échelle du stratifié. A l'échelon supérieur, les essais sur des détails structuraux permettent de mettre en évidence des comportements plus complexes. La confrontation des mesures expérimentales et des résultats des simulations permet le recalage des valeurs de calcul afin d'assurer leur adéquation. Cette utilisation du recalage constitue une manière détournée de tenir compte des insuffisances de la modélisation.

Les données de conception obtenues lors de la qualification des matériaux sont employées pour la réalisation des calculs nécessaires à la certification de l'appareil. L'objectif actuel des industriels consiste à réduire le nombre d'essais spécifiques au moyen d'un effort de simulation accru, dans l'optique de réduire les coûts et les délais. Néanmoins, un tel objectif nécessite d'améliorer la confiance dans la simulation numérique, ce qui passe, d'une part, par l'emploi de modèles adaptés aux spécificités des matériaux composites et, d'autre part, par une meilleure maîtrise des incertitudes.

Dans cette optique, signalons les travaux de [Leroy 07] qui démontrent l'apport du *virtual testing* et de techniques statistiques avancées pour limiter au plus juste le conservatisme des valeurs A et B.

III.1.1.b Vers le transport des incertitudes

Les industriels s'accordent pour considérer que la démarche utilisée est souvent très, parfois trop, conservative. Une démarche plus rigoureuse consiste à identifier et modéliser l'ensemble des sources d'incertitudes (ou tout au moins les plus significatives) puis d'effectuer le transport de ces incertitudes afin de déterminer leur effet sur la réponse attendue (par exemple, la tenue de la structure). De très nombreux travaux, pour beaucoup récents, sont publiés en matière de méthodes de transport des incertitudes des paramètres d'entrée des modèles vers leurs sorties. On renvoie à [Rollet 07] pour un inventaire exhaustif et la description des méthodes existantes. Celles-ci trouvent des applications dans des domaines variés, mais restent très peu exploitées pour le dimensionnement des structures composites. L'inventaire suivant constitue un rapide survol des applications composites publiées.

Les méthodes probabilistes

De nombreux auteurs s'appuient sur la méthode de Monte-Carlo. La liste suivante n'est pas exhaustive, mais reflète les orientations majeures. [Van Vinckenroy 95] étudie l'impact de la dispersion des propriétés élastiques du plis et des tolérances géométriques, considérées indépendamment, sur le champ de contrainte dans une plaque trouée $[0_2/90_2]_s$. L'influence du choix des distributions de probabilités des paramètres incertains est mise en évidence. [Jeong 00] effectue l'analyse probabiliste de la rupture d'une plaque simplement supportée sollicitée en flexion pour différents critères de rupture à partir de la dispersion des propriétés élastiques et à rupture du pli ainsi que des méconnaissances sur le chargement. [Frangopol 03b] évalue la probabilité de rupture d'une plaque sous un chargement aléatoire. [Vincenti 03] étudie l'influence des erreurs d'orientations de plis sur le comportement d'une plaque stratifiée par le biais de la méthode polaire.

[Antonio 08] effectue l'analyse des influences respectives des propriétés élastiques et à rupture, de l'épaisseur, des orientations de plis et du point d'application des efforts sur la déplacement maximal et la rupture d'un panneau courbé $[+\theta_2/-\theta_2]_s$ sollicité en flexion. Trois techniques d'analyse de variance sont comparées, globales ou locales.

[Singh 01] évalue l'impact de la dispersion des propriétés élastiques sur le flambement de panneaux courbés pour différents jeux de conditions aux limites par le biais d'éléments finis stochastiques et d'une technique de perturbation au premier ordre.

[Chen 07] propose l'analyse fiabiliste de la résistance longitudinale d'un coque de bateau réalisée en matériaux composites, par la méthode *FORM (First-Order Reliability Method)*, compte tenu de trois scénarios de rupture et des incertitudes sur les propriétés matériaux, les épaisseurs et orientations des plis et des chargements statistiques.

Le transport d'incertitudes par surfaces de réponse

[Rollet 07] propose une stratégie de transport des incertitudes, spécialement dédiée au calcul de structures composites, et basée sur l'usage de *métamodèles* de complexité croissante (surfaces de réponse polynomiales, kriging, réseaux de neurones, etc.) pour alléger les coûts de calcul. La principale originalité de cette stratégie réside dans l'introduction d'estimateurs d'erreur et de confiance sur la qualité du métamodèle, permettant d'en affiner le choix de manière progressive. Ce faisant, il est possible de minimiser le nombre de points d'identification requis pour les métamodèles. Il n'est en outre pas nécessaire de préjuger de la distribution des paramètres incertains. L'estimation des bornes de variation suffit à déterminer et identifier les métamodèles.

La logique floue

D'autres auteurs basent leurs travaux sur des théories qui s'écartent de l'approche probabiliste. [Noor 01] exploite des notions de *logique floue* pour le calcul du flambement de différentes configurations de panneaux raidis composites galbés (perçages, nombre de raidisseurs), compte tenu de considérations multiéchelles et multiniveaux avancées et de l'introduction de paramètres incertains à chacune de ces échelles. [Bae 04] s'appuie sur la *théorie des preuves* pour quantifier l'impact de la variabilité des propriétés élastiques du matériau et des chargements sur la flèche maximale en bout d'une aile composite en aéroélasticité.

Un pas vers l'optimisation

Finalement, certains auteurs formulent le problème de recherche de la plus grande robustesse comme un problème d'optimisation. [Adali 01] optimise l'empilement d'un tube composite sollicité en pression externe et en compression longitudinale avec pour objectif la minimisation de la sensibilité aux variations d'orientations de plis et une contrainte de résistance au flambement. [Wang 08] évalue l'impact des incertitudes géométriques et matériaux sur la résistance au flambement de structures minces et recherche l'empilement permettant de minimiser cette sensibilité pour des tubes sollicités en compression axiale. Cette étude s'appuie sur la méthode *RSM (Reduced Stiffness Method)*, spécifique au problème.

III.1.2 OPTIMISATION ROBUSTE DES STRUCTURES COMPOSITES ET ALGORITHMES EVOLUTIONNAIRES MULTIOBJECTIFS

III.1.2.a Généralité sur l'optimisation robuste des structures composites

La littérature traitant d'optimisation robuste des structures composites est relativement pauvre. [Frangopol 03a] propose un article de synthèse sur l'optimisation fiabiliste des structures dans les domaines du génie civil et de l'aérospatiale, dans lequel sont référencés neuf articles consacrés aux structures composites. Par exemple, [Miki 97] recherche l'empilement optimal pour maximiser la résistance d'un stratifié compte tenu des incertitudes sur le chargement et la résistance des plis. [Antonio 01] propose un exemple supplémentaire d'optimisation fiabiliste, consacré à la minimisation de la masse d'une poutre composite de section complexe (un raidisseur), sous une contrainte de fiabilité minimale. La fiabilité est évaluée par la méthode *SORM (Second-Order Reliability Method)* pour un scénario de première rupture de plis et de flambage, en tenant compte des incertitudes sur les propriétés élastiques des plis. Empilement et géométrie sont optimisés au moyen d'un algorithme évolutionnaire. [Qu 00 ; 03 ; 04] traitent de l'usage de surfaces de réponses pour alléger les coûts de calcul pour l'estimation de probabilités de rupture par la méthode de Monte-Carlo.

D'autres auteurs cherchent à minimiser la sensibilité des solutions à de petites variations de leurs caractéristiques, plutôt que d'imposer une probabilité de défaillance maximale. [Le Riche 98] propose une approche à trois niveaux imbriqués pour l'optimisation de plaques composites de type $[(\pm\theta_1)_p/(\pm\theta_2)_q]_s$ de masse minimale et de stabilité thermique et hydrique maximale. Au premier niveau, un algorithme énumératif permet de minimiser la masse du stratifié. Au second niveau, un algorithme génétique permet d'optimiser les orientations de plis pour minimiser les coefficients de dilatation tandis qu'au troisième niveau, l'ordre d'empilement est optimisé pour minimiser la sensibilité des coefficients de dilatation aux incertitudes sur les orientations de plis. La sensibilité est estimée par un tirage de Monte-Carlo.

Une autre approche consiste à mener l'optimisation dans le cas le pire, compte tenu des intervalles de variations des grandeurs incertaines. [Kim 01] et [Cho 04] exploitent les modèles convexes d'incertitudes pour la prise en compte des incertitudes sur les propriétés élastiques des plis. L'algorithme d'optimisation et détermination du cas le pire sont imbriqués pour la résolution de problème d'optimisation des empilements pour des plaques. [Lombardi 98] et [Adali 03] imbriquent leurs méthodes d'optimisation des empilements avec une méthode d'anti-optimisation des solutions dans l'intervalle de méconnaissance des chargements. Dans le même esprit, [de Faria 01 ; 03] propose une formulation de type MinMax pour l'optimisation dans le cas de chargement le pire. Enfin, [Walker 05] recherche l'empilement de type $[(\pm\theta)_k]_s$ qui maximise le facteur critique de flambement d'une plaque stratifiée sollicitée en compression biaxiale, dans le cas le pire, compte tenu d'un intervalle d'incertitude sur θ .

III.1.2.b L'optimisation robuste par algorithmes évolutionnaires multiobjectifs

L'optimum robuste correspond à un compromis entre performances et robustesse. L'optimisation multiobjectif s'accommode naturellement de cette notion de compromis. Ainsi, l'idée d'associer à chaque objectif déterministe un objectif de robustesse semble naturelle. Par exemple, [Lee 07] propose un exemple d'optimisation évolutionnaire multiobjectif en aérodynamique, dans lequel sont simultanément minimisées la moyenne des objectifs et leur variance. Signalons au passage que dans les travaux de Périaux, [Périaux 96 ; Lee 07] les équilibres de Nash (jeu non-coopératif) sont considérés comme mieux adaptés aux problèmes de robustesse que les solutions de Pareto.

Dans un esprit assez proche, on trouve dans [Ait Brik 05 et de Lima 07] une méthode d'optimisation robuste basée sur l'adjonction d'une fonction de robustesse à maximiser pour chaque fonction-objectif du problème déterministe. A la fonction-objectif f , les auteurs associent la *fonction de vulnérabilité* f^v et son inverse, la *fonction de robustesse* f^r , définies de la façon suivante :

$$f^v = \sigma_f / \mu_f \text{ et } f^r = (\sigma_f / \mu_f)^{-1} \quad (\text{III-1})$$

où μ_f représente la moyenne et σ_f l'écart-type de la fonction f sur la plage d'incertitude des variables de décision. σ_f et μ_f sont déterminés par une méthode de Monte-Carlo (tirage par Hypercube Latin). L'optimum robuste est directement défini comme un compromis entre performance et robustesse. Ce faisant, on transforme le problème d'optimisation initial à k objectifs :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})), \\ \text{où} & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \end{array}$$

en un problème d'optimisation robuste à $2k$ objectifs de la forme :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \mathbf{y} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_1^r(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}), f_k^r(\mathbf{x})), \\ \text{où} & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \end{array}$$

Cette méthode est intéressante car elle permet en une seule recherche de déterminer à la fois les compromis optimaux du problème déterministe, et de quantifier leur robustesse, et les solutions robustes. Toutefois, doubler le nombre d'objectifs peut s'avérer très pénalisant. D'autre part, la définition de la fonction de vulnérabilité est problématique dans le cas de processus à moyenne nulle. Enfin, le problème de la gestion des incertitudes sur les contraintes n'est pas abordé.

Dans [Deb 05], les auteurs proposent deux techniques pour l'optimisation robuste sous contraintes. Celles-ci sont basées sur la formulation de contreparties robustes aux objectifs déterministes. Pour ce faire, ces deux techniques font appel à la notion de *fonction-objectif efficace*, notée f^{eff} , correspondant en pratique à la moyenne μ_f de la fonction f sur la plage d'incertitude

considérée, définie par le voisinage $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, un hyper-rectangle centré sur \mathbf{x} dans \mathbb{R}^n . Les solutions optimales robustes de Type 1 correspondent aux solutions non dominées du problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \mathbf{y} = \mathbf{f}^{\text{eff}}(\mathbf{x}) = (f_1^{\text{eff}}(\mathbf{x}), \dots, f_k^{\text{eff}}(\mathbf{x})), \\ \text{sous} & \mathbf{g}(\mathbf{x}') = (g_1(\mathbf{x}'), \dots, g_m(\mathbf{x}')) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}' \in \mathbf{V}(\mathbf{x}) \\ \text{où} & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \end{array}$$

Les solutions optimales robustes de Type 2 correspondent quant à elles au problème :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})), \\ \text{sous} & \|\mathbf{f}^{\text{eff}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| / \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \eta, \\ \text{et} & \mathbf{g}(\mathbf{x}') = (g_1(\mathbf{x}'), \dots, g_m(\mathbf{x}')) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}' \in \mathbf{V}(\mathbf{x}) \\ \text{où} & \mathbf{x} \in \mathbf{X} \end{array}$$

où η est un paramètre permettant de quantifier l'amplitude de variation maximale autorisée pour les objectifs sur la plage d'incertitude considérée. Que ce soit dans le cas de problèmes non contraints [Deb 04] ou contraints [Deb 05], les auteurs concluent à la supériorité de la seconde approche sur la première. Celle-ci diffère principalement de la méthode proposée dans [Ait Brik 05] par l'introduction de la robustesse au niveau des contraintes, plutôt que des objectifs du problème. Ce faisant, on évite de doubler le nombre d'objectifs. Toutefois, le choix de la valeur de η est délicat et suppose à la fois de ramener les objectifs à la même échelle et de disposer d'une connaissance approfondie du problème. Les contraintes sont vérifiées en un certain nombre de points de calcul choisis une méthode de Monte-Carlo basée sur une grille régulière subdivisant le domaine d'incertitudes $\mathbf{V}(\mathbf{x})$.

III.1.3 LES DIFFICULTES DU CALCUL DE ROBUSTESSE

L'optimisation robuste, tout comme le dimensionnement robuste, soulève deux difficultés majeures. La première réside dans la description des incertitudes. La seconde est liée à l'augmentation coûts de calcul.

III.1.3.a La représentation des incertitudes

Le problème de la représentation des incertitudes revêt une importance fondamentale car il se situe à la base de l'édifice mathématique pour le transport des incertitudes. Il nous faut donc évoquer ce problème, bien qu'il soit extrêmement complexe et dépasse largement le champ d'investigation de cette thèse. Représenter les incertitudes revient à en identifier les sources les plus significatives et à proposer une description mathématique adaptée à chacune (variables aléatoires, ensembles flous). Ceci suppose d'estimer les intervalles de variations des grandeurs incertaines et leurs distributions sur ces intervalles, ainsi que les corrélations potentielles. A l'heure actuelle, de nombreux chercheurs travaillent sur ces sujets, et ces thématiques commencent à se propager à l'industrie. Néanmoins, force est de constater que, dans la plupart des travaux publiés sur les approches fiabilistes, la prise en compte de la variabilité ou l'optimisation robuste, il est postulé que les variables incertaines sont décorréelées et leurs distributions statistiques connues (souvent normale). La réalité est toutefois plus complexe et il est souvent difficile, voire impossible, de déterminer distributions et corrélations à partir de bases de données expérimentales établies sur un nombre réduit d'essais.

Logiquement, l'optimisation des empilements est limitée par les incertitudes sur le positionnement angulaire des plis. Les techniques de fabrication, qui conditionnent le choix des orientations employées (par exemple tous les 45°) conditionnent de même les erreurs d'orientations potentielles, selon que les formes drapées soient développables ou pas, que l'on fasse appel à des opérateurs humains ou à des machines pour le positionnement des plis. Une simple imprécision aléatoire ou une désorientation globale de l'empilement auront des conséquences très différentes.

La dispersion des propriétés matériaux constitue un autre exemple. A l'échelle mésoscopique, d'importantes variations des propriétés E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} et de l'épaisseur du pli sont observées expérimentalement. Celles-ci sont fortement corrélées. En effet, dans un composite stratifié, la quantité de fibres constitue un paramètre bien maîtrisé avec une faible dispersion. A une variation d'épaisseur correspond donc une variation du taux de fibres. Variations d'épaisseurs et de rigidités sont ainsi fortement corrélées. D'autre part, les paramètres E_2 et G_{12} sont eux-mêmes corrélés car dépendant tout deux essentiellement des propriétés de la matrice. Tenir compte des corrélations entre propriétés mésoscopiques, suppose de représenter les incertitudes à l'échelle des constituants et d'effectuer le passage micro-méso par un modèle d'homogénéisation. Toutefois, l'identification des propriétés mécaniques est d'autant plus complexe et entachée de méconnaissances que l'on descend dans les échelles. Des techniques de consolidation multiéchelle, telles que celles développées dans le cadre du programme Americo, s'avèrent nécessaires pour une meilleure exploitation des bases de données existantes [Leroy 06 ; Rollet 07].

III.1.3.b Les coûts de calcul

Partant de distributions *a priori* connue, on dispose de divers outils mathématiques pour transporter les incertitudes et bien tenir compte de leur influence sur les performances des structures (Monte-Carlo, surfaces de réponses, etc.). Néanmoins, les coûts de calcul deviennent rapidement prohibitifs. On est donc contraint à employer des astuces de calcul et des indicateurs plus grossiers pour obtenir les meilleurs résultats possibles avec les moyens et le temps de calcul impartis. Les approximations réalisées sont d'autant plus grossières que les modèles employés sont complexes. D'ailleurs, la plupart des travaux d'optimisation robuste des structures composites relevés dans la bibliographie traite de problèmes extrêmement simplifiés au niveau des modèles et du nombre de paramètres incertains. Pour surmonter cette difficulté, il n'existe pas de méthode absolue, c'est-à-dire systématiquement applicable. La réduction des coûts de calcul passe par une étape d'approximation des modèles qu'il convient de mener au cas par cas, le plus souvent de façon itérative afin d'estimer et de maîtriser l'erreur introduite par les modèles de substitution (ou métamodèles, dans la suite). En la matière, on s'appuie largement dans la suite sur les travaux de thèse de Y. Rollet [Rollet 07].

III.2 VERS L'OPTIMISATION ROBUSTE DES EMPILEMENTS DANS LES STRUCTURES COMPOSITES

De façon générale, les structures composites stratifiées présentent des propriétés beaucoup plus dispersées que leurs équivalents métalliques. En matière d'optimisation des empilements, on ne peut ignorer l'impact des multiples sources d'incertitudes dont est affecté le calcul des performances des solutions. D'une part, on court le risque qu'une solution réalisable sorte du domaine admissible suite à de petite variations par rapport à ses spécifications. D'autre part, on court le risque de dimensionner une structure peu robuste, dont les performances varient grandement d'un exemplaire à l'autre.

Dans cette section, on propose une ébauche de méthodologie pour l'optimisation robuste des empilements. Celle-ci doit permettre de répondre aux questions suivantes. Existe-t'il une (ou une famille de) solution(s) clairement meilleure(s) malgré le niveau d'incertitude et la qualité toute relative des modèles utilisés? Si elles existent, comment trouver ces solutions? Comment vérifier leur pertinence? La méthodologie proposée repose sur une classification personnelle des incertitudes selon leur nature. Par la suite, ces différentes catégories d'incertitudes sont traitées indépendamment.

III.2.1 CLASSIFICATION DES SOURCES D'INCERTITUDES

Dans son acception générale, la notion de robustesse renvoie aussi bien à la stabilité des solutions face à un écart par rapport à leurs spécifications, qu'aux problèmes d'erreurs de modèle. Toutes les sources de variabilité sont englobées dans ce terme. Or, il convient de distinguer les différents types d'incertitudes dans leur traitement, ce qui est le plus souvent fait dans la bibliographie, dans la mesure où la plupart des articles est focalisée sur la gestion d'un seul type d'incertitudes. [Oberkampf 02] propose un classement des incertitudes pour le dimensionnement en fonction de leur nature fondamentale. Il formalise ainsi la distinction entre incertitudes, méconnaissances et erreurs. Les incertitudes correspondent à la dispersion inhérente à certaines grandeurs physiques et sont susceptibles d'être décrites par une probabilité de distribution ou de fréquence. Les méconnaissances correspondent à un manque d'information, c'est-à-dire que bien qu'il ne soit pas possible de statuer sur la question, il est tout à fait envisageable qu'il n'y ait pas de variabilité. Leur description relève par exemple du domaine de la logique floue. Les erreurs correspondent à des imprécisions de modélisation qui ne sont pas dues à un manque de connaissances. Ces erreurs sont soit conscientes, auquel cas les auteurs considèrent qu'il est possible d'en obtenir une estimation, même grossière, soit inconscientes, auquel cas on peut espérer qu'un processus de vérification permette de les identifier.

On préfère ici une classification personnelle, plus adaptée à l'optimisation robuste, dans laquelle on distingue trois familles d'incertitudes². La première famille, celle des incertitudes de *Type A*, correspond aux incertitudes sur les variables de décision \mathbf{x} . La deuxième famille, celle des incertitudes de *Type B*, regroupe les incertitudes sur les paramètres $\boldsymbol{\alpha}$ de l'optimisation. Ces paramètres correspondent à l'ensemble des grandeurs physiques intervenant dans le calcul des fonctions-objectif, hors variables de décision. Enfin, les incertitudes de *Type C* sont liées aux incertitudes sur les modèles. On représente l'influence sur les fonctions-objectif de chacun de ces trois types d'incertitudes de la façon suivante :

$$\textit{Type A} : \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{III-2})$$

² Au sens générique, pas au sens proposé par [Oberkampf 02].

$$\text{Type B : } \tilde{f} = f(x, \alpha + \delta\alpha) \quad (\text{III-3})$$

$$\text{Type C : } \tilde{f} = f(x, \alpha) + \delta f \quad (\text{III-4})$$

où δx , $\delta\alpha$ et δf correspondent respectivement à de petites perturbation des variables de décision, des paramètres et des modèles dans leurs plages d'incertitudes. De façon analogue, on étend cette définition aux incertitudes sur les contraintes g . Signalons que l'on retrouve dans [Beyer 07] une classification assez proche.

III.2.1.a Les incertitudes de Type A et B

De façon générale, il existe une forte similitude entre les problèmes d'incertitudes et les problèmes d'optimisation, dans le sens où, dans les deux cas, il s'agit d'explorer un domaine de variation pour un ensemble de paramètres. Dans les deux cas, le coût de calcul croît rapidement avec la répétition des évaluations de solutions, de telle sorte qu'il est nécessaire de recourir à des techniques d'approximation des modèles pour minimiser le coût de calcul unitaire et contenir le coût total. Néanmoins, une différence majeure réside dans la taille des domaines à explorer, réduite dans le cas des problèmes d'incertitudes et bien plus vaste pour les problèmes d'optimisation. De surcroît, les variables incertaines sont souvent bien plus nombreuses que les variables d'optimisation. Par conséquent, là où des métamodèles linéaires suffisent le plus souvent pour le transport d'incertitudes [Rollet 07], des techniques d'approximation globales plus complexes sont requises pour l'optimisation.

Dans le cas de l'optimisation robuste, les problèmes d'optimisation et d'évaluation de l'effet des incertitudes de type A sont imbriqués. En effet, dans ce cas où les seules variables incertaines considérées correspondent à tout ou partie de l'ensemble des variables de décision, il est possible de directement exploiter les métamodèles employés pour l'optimisation pour estimer la robustesse des solutions. C'est par exemple le cas des applications proposées dans [Ait Brik 05 ou de Lima 07]. Pour un problème d'optimisation robuste des empilements, les incertitudes de Type A correspondent aux orientations de plis continûment autour de leurs valeurs déterministes. Par contre le nombre de plis reste une variable discrète et déterministe.

Lorsque des incertitudes de type B viennent se greffer au problème, on est contraint à un important travail supplémentaire d'approximation des modèles. La distinction entre incertitudes de type A et incertitudes de type B est illustrée par la Figure III-3. La création et l'identification d'un métamodèle global, correspondant à la fois aux variables de décision et aux autres paramètres aléatoires est alors un problème coûteux et délicat. A ce propos, [Beyer 07] relève l'absence de travaux combinant optimisation évolutionnaire et gestion des incertitudes liées aux paramètres de l'optimisation (type B), ainsi d'ailleurs qu'aux erreurs liées aux modèles (type C). Dans le cas de l'optimisation robuste des empilements, les incertitudes de type B correspondent par exemple à la dispersion expérimentale des propriétés matériaux, aux tolérances de fabrication sur les dimensions géométriques des pièces, ou encore aux méconnaissances sur les conditions aux limites et les chargements.

Il est important de remarquer que les variables de décisions et les autres paramètres du problème d'optimisation ne sont pas nécessairement tous incertains. Une variable comme le nombre de plis est, par exemple, strictement déterministe. De plus, parmi les paramètres incertains, certains n'ont qu'une influence de second ordre dont il n'est pas nécessaire de tenir compte. Au final, il est souvent pertinent de condenser les incertitudes sur un nombre réduits de grandeurs.

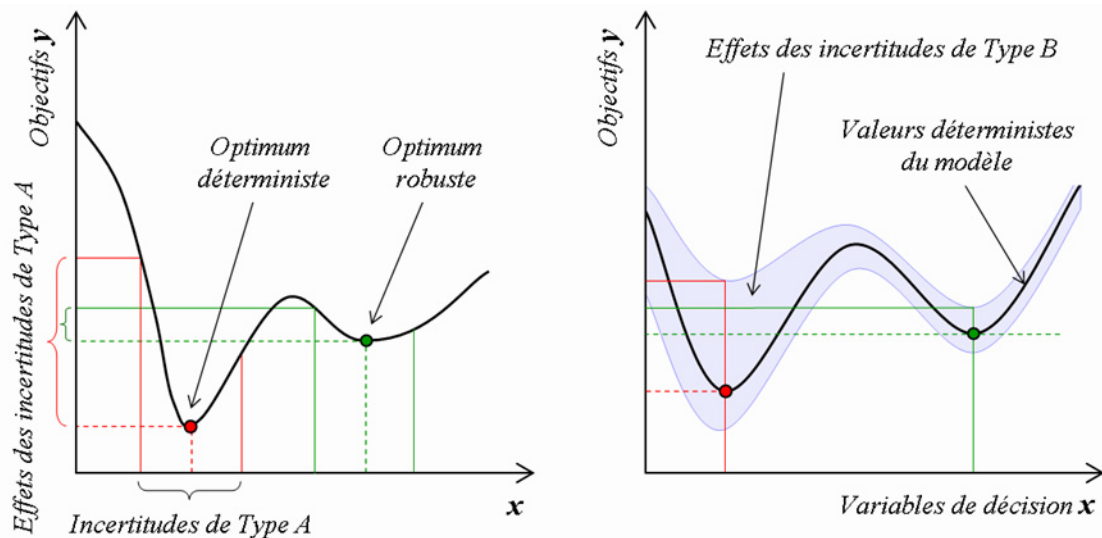


Figure III-3 : Représentation schématique des incertitudes de Type A (à gauche) et de Type B (à droite) sur un problème de minimisation.

III.2.1.b Le problème des erreurs liées aux modèles (Type C)

Les erreurs liées aux modèles constituent une source supplémentaire d'incertitudes dont il convient de tenir compte lors de la comparaison des solutions et de la vérification de leur faisabilité. Ces erreurs sont principalement de deux natures. D'une part, *les erreurs de simplification*, liées à la réduction, la simplification ou l'approximation d'un modèle fin pour contenir les temps de calcul. Diverses techniques existent pour quantifier ces erreurs (par exemple des techniques de rééchantillonnage pour estimer la qualité de surfaces de réponse [Rollet 07]), dont la principale limitation réside, une fois encore, dans les coûts de calcul. D'autre part, *les erreurs de modèle*, c'est-à-dire les écarts entre les modèles (fins) et réalité. C'est là le problème le plus épineux. En la matière, il faut s'en remettre à la comparaison des résultats de simulation avec les bases de données existantes (faisant aussi intervenir les autres types d'incertitudes) et surtout à l'expertise de l'utilisateur. Signalons aussi l'existence d'estimateurs d'erreur pour la simulation EF [Ladevèze 00]. Dans tous les cas, il reste la possibilité de la vérification *a posteriori*, numérique ou expérimentale, pour statuer sur la validité des résultats obtenus. Néanmoins, l'optimisation numérique requiert une grande confiance dans les modèles.

Le problème des erreurs liées aux modèles est rarement soulevé dans la littérature consacrée à l'optimisation robuste. Les erreurs de simplification sont considérées dans [Oberkampf 02] dans le cadre d'un problème de dimensionnement. Les auteurs comparent les résultats obtenus pour deux modèles différents et jouent sur l'erreur d'arrondi numérique pour en évaluer l'impact lors de la résolution d'un système d'équations différentielles. [Acar 07] traite du problème de la minimisation de la masse d'une plaque composite stratifiée de type $[(\pm\theta_1)_p/(\pm\theta_2)_q]_s$ dans un environnement cryogénique. Dans cet article, les erreurs de modèle sont représentées par une distribution uniforme de probabilité sur les grandeurs de sorties.

La gestion des erreurs de type C soulève cependant une difficulté fondamentale qui, à notre connaissance, n'est évoquée que dans [Beyer 07] en introduction : un modèle erroné est susceptible de guider la recherche vers une zone de l'espace de décision éloignée de l'optimum réel (Figure III-4). C'est pourtant typiquement le genre d'erreur pouvant être introduite par un métamodèle mal identifié ou mal choisi. Plus spécifiquement, le cas le plus fréquent en optimisation des empilements est celui des modèles qui rendent efficacement compte de l'influence des propriétés de membrane, c'est-à-dire des orientations de plis et de leurs proportions, mais pas, ou très mal, de l'ordre d'empilement.

Au final, l'optimisation robuste requiert l'emploi de modèles validés, fournissant des tendances précises en fonction des variables de décision (et des valeurs précises pour les contraintes dimensionnantes, ce point est développé au paragraphe suivant). C'est une conviction personnelle que plus les modèles intègrent de considérations physiques, meilleures sont les tendances et plus grande la confiance que l'on peut accorder à leur prévisions (sous réserve que les modèles aient été correctement identifiés).

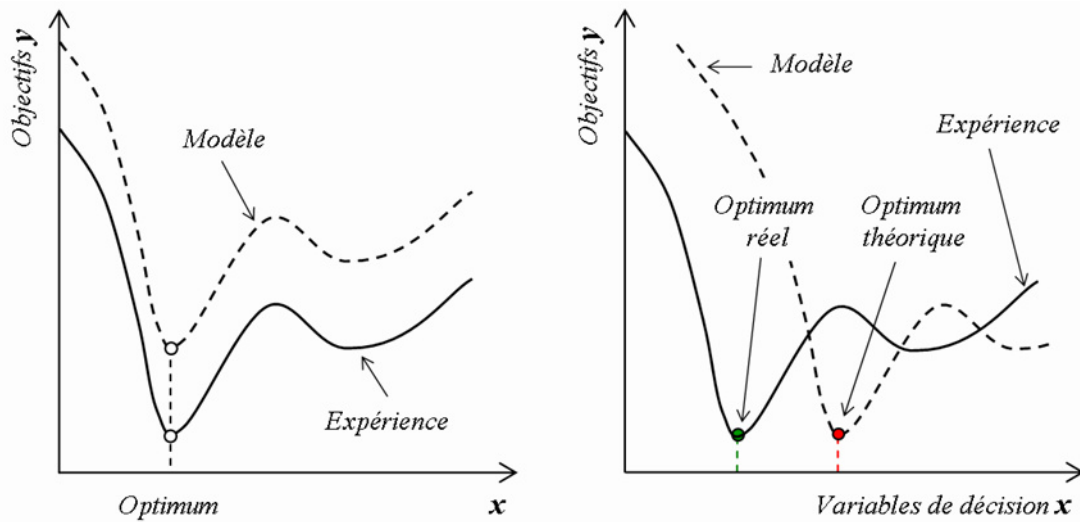


Figure III-4 : A gauche : une erreur d'offset sans conséquence sur le classement relatif des solutions. A droite : une autre erreur d'offset conduit l'optimisation vers une solution éloignée de l'optimum réel.

III.2.1.c Incertitudes sur les contraintes

Avant même de rechercher un optimum, c'est la recherche de solutions faisables qui est au fondement de l'optimisation sous contraintes. Il faut considérer l'effet des incertitudes sur la faisabilité des solutions (voir Figures III-5 et III-6). Pour ce faire, on rencontre principalement deux attitudes dans la littérature. La première consiste à vérifier que les solutions satisfont aux contraintes dans le cas le pire, la seconde que la probabilité de violation de la contrainte est inférieure à un seuil donné.

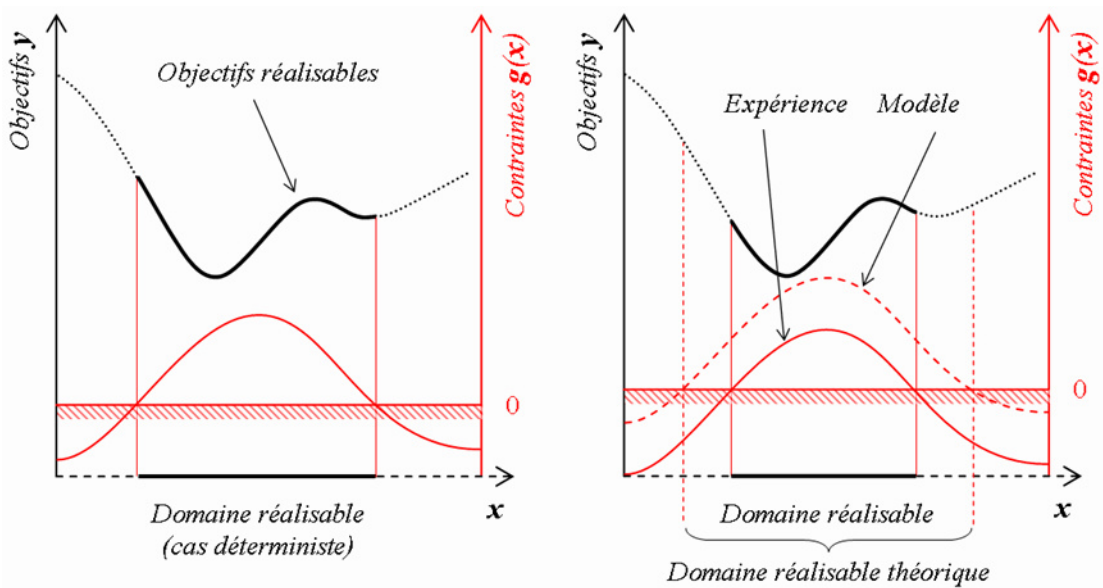


Figure III-5 : A gauche : le cas déterministe. A droite : influence d'une erreur de modèle (offset) sur le domaine réalisable.

Du point de vue de la vérification de la faisabilité des solutions, les incertitudes de type C sont, une fois encore, problématiques (voir Figure III-5). Là où, pour l'optimisation sans contrainte, il est suffisant d'employer un modèle donnant les bonnes tendances en fonctions des variables de décision, l'optimisation sous contraintes requiert l'emploi de modèles précis pour les contraintes dimensionnantes. Dans le cas où ces modèles sont insuffisants, l'attitude la plus courante consiste à gonfler l'effet des autres types d'incertitudes pour obtenir un encadrement acceptable des résultats de référence, expérimentaux ou de simulation (voir, par exemple, [Acar 07]). En pratique, ceci revient à définir un coefficient d'abattement des résultats du modèle, potentiellement fonction des variables de décision x et des paramètres α .

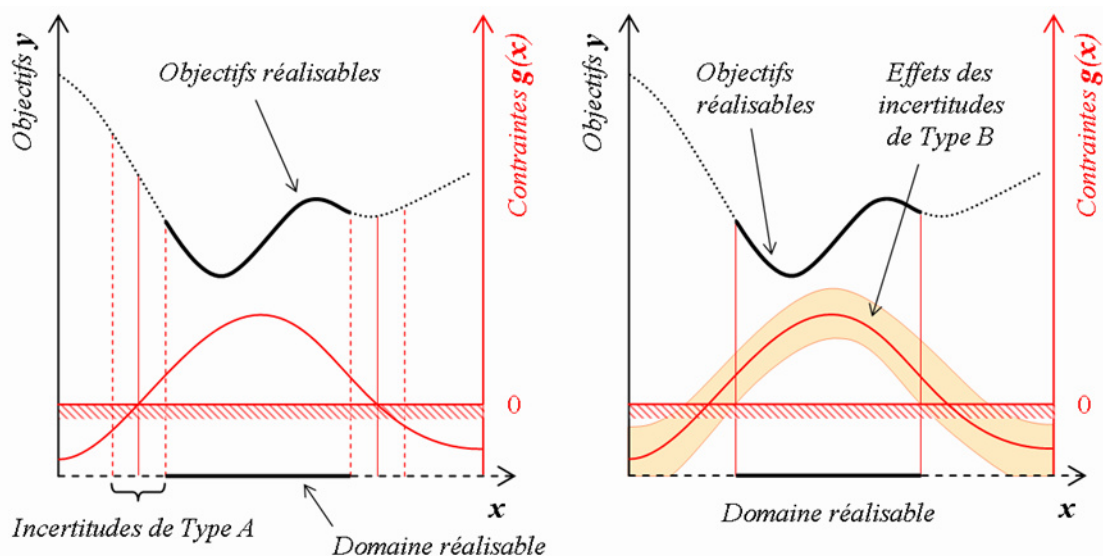


Figure III-6 : A gauche : influence des incertitudes de Types A sur le domaine des solutions réalisables. La contrainte représentée est satisfaite pour $g(x) > 0$ (en dimension 1). A droite : influence des incertitudes de type B sur la contrainte.

III.2.2 QUANTIFIER LA ROBUSTESSE DES SOLUTIONS

Gérer les incertitudes dans l'optimisation suppose de quantifier la robustesse des solutions. Le paragraphe III.1.2.b présente quelques méthodes adaptées aux AE. Celles-ci sont principalement conçues pour gérer des incertitudes de type A. Elles sont essentiellement basées sur l'usage de la moyenne et/ou de l'écart-type des fonctions-objectif sur la plage d'incertitude considérée. En s'inspirant de ces méthodes, nous avons recherché une définition de la robustesse plus générale, la plus simple possible et la mieux adaptée à nos problèmes.

La comparaison de la moyenne et de la valeur déterministe des fonctions-objectif constitue une information insuffisante pour quantifier la robustesse d'une solution (voir Figure III-7). Un raisonnement basé sur l'analyse de l'écart-type nous semble plus pertinent. Selon nous, la robustesse d'une solution vis-à-vis de l'objectif f est davantage lié à l'écart-type σ_f (ou l'amplitude de variation de f) sur la plage d'incertitude considérée qu'à sa performance moyenne μ_f . La solution la plus robuste est celle de moindre écart-type (la solution la plus vulnérable étant celle

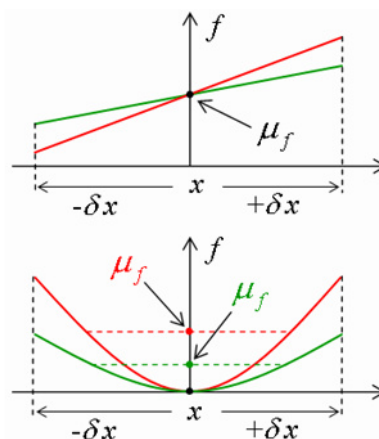


Figure III-7 : En haut, la moyenne n'apporte aucune information sur la robustesse des solutions. En bas, la différence entre μ_f et la valeur déterministe est plus faible pour la solution la plus stable (en vert).

d'écart-type maximal, respectivement). De ce point de vue, il paraît trompeur de travailler sur un rapport entre écart-type et moyenne. En effet, ce faisant, des solutions présentant des écarts-type proches se voient accordées des valeurs de vulnérabilité très différentes en fonction de la moyenne de la fonction-objectif (*a fortiori* si celle-ci est nulle en l'un des points). Ce point est illustré par la Figure III-8, sur le problème de la détermination, par la CLT, du module de flexion longitudinale pour des empilements symétriques équilibrés à trente plis avec une discrétisation angulaire de 15° . Les incertitudes dont il est tenu compte sont de type A : chaque orientation de pli varie continûment dans une plage de $\pm 2^\circ$ autour de sa valeur de dimensionnement. Ecart-type et moyennes sont estimés par le tirage de mille solutions par Hypercube Latin afin de s'assurer d'une bonne convergence.

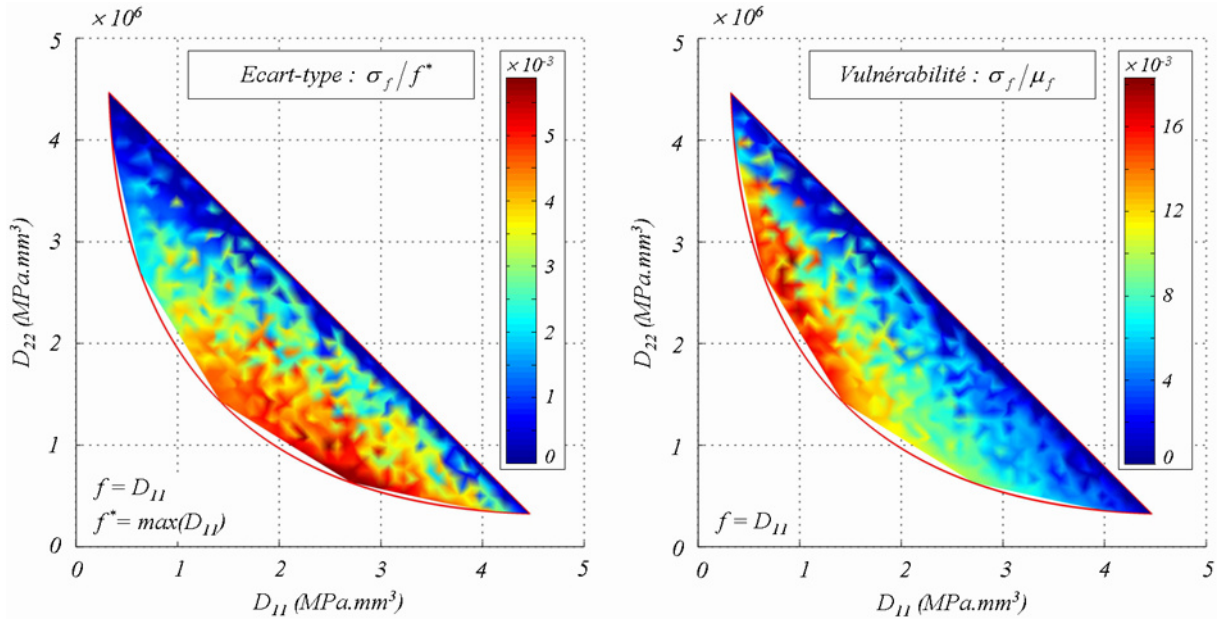


Figure III-8 : L'écart-type (à gauche) et le rapport entre écart-type et moyenne (à droite) conduisent à des cartographies très différentes de la robustesse des solutions sur la domaine réalisable. Module de flexion longitudinale pour des stratifiés symétriques équilibrés à 30 plis, en carbone / époxy. Influence d'une incertitude de $\pm 2^\circ$ sur l'orientation de chaque pli.

Afin d'adimensionnaliser l'écart-type σ_f , on peut le diviser par la valeur maximale réalisable de f , si elle est connue, ou n'importe quelle valeur de référence f^* , pourvu qu'elle soit la même pour toutes les solutions comparées. Partant des travaux d'Ait Brik, nous modifions donc les définitions des fonctions de vulnérabilité f^v et de robustesse f^r de la façon suivante :

$$f^v = \sigma_f / f^* \text{ et } f^r = (\sigma_f / f^*)^{-1} \quad (\text{III-5})$$

par rapport à une plage d'incertitude donnée. Celle-ci correspond à un hypercube $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, centré sur \mathbf{x} dans le cas des incertitudes de type A. Il est facile de généraliser cette définition aux incertitudes de type B ou à la gestion simultanée des incertitudes de types A et B. Dans la stratégie proposée, l'écart-type σ_f est estimé par la méthode de l'Hypercube Latin.

III.2.3 INCERTITUDES ET CLASSEMENT DES SOLUTIONS

De façon générale, les incertitudes de type C correspondent soit à des erreurs de simplification des modèles, auquel cas il est possible de les estimer et de les prendre en compte, soit à des écarts entre modèles et réalité, auquel cas c'est le plus souvent l'expertise de l'utilisateur qui fait la différence. Les incertitudes de types A et B sont mieux connues et constituent des données d'entrée du problème de

conception. Le concepteur a la possibilité de chercher dans l'espace de décision les points permettant de minimiser l'impact de ces incertitudes sur les performances de la structures. Idéalement, il faudrait évaluer en chaque solution les performances et la fonction de robustesse associée, face au cumul des différents types d'incertitudes, pour rechercher les meilleurs compromis entre risques et performances. Ceci revient, par exemple, à résoudre le problème multiobjectif proposé par Ait Brik compte tenu de toutes les sources d'incertitudes. On conçoit aisément que ce type d'approche n'est envisageable que dans les cas les plus simples, pour lesquels on est capable d'effectuer des millions d'évaluations.

Les problèmes composites sont suffisamment réguliers pour pouvoir raisonnablement supposer qu'à de petites variations dans l'espace des rigidités *ABD* (équivalentes à de petites variations d'empilements, mais c'est l'espace des rigidités qui est, selon nous, pertinent) correspondent de petites variations en matière de robustesse des solutions vis-à-vis des incertitudes de type A aussi bien que de type B. Dans la suite, afin de réduire les coûts de calcul, on distingue les différents types d'incertitudes dans leur traitement.

III.2.3.a Les incertitudes de type A

En ce qui concerne les incertitudes sur les variables de décision (type A), on s'intéresse principalement à la vérification *a posteriori* de la robustesse des compromis optimaux³. Il s'agit d'exploiter les synergies entre recherche de l'optimum et évaluation de la robustesse. L'idée consiste à exploiter les solutions déjà calculées au cours de la recherche pour identifier des métamodèles⁴ permettant d'évaluer la robustesse des solutions. Dans nos problèmes, en effet, nous considérons que le coût de l'évaluation des objectifs et des contraintes par un métamodèle est négligeable devant celui des modèles. Dès lors, les méthodes de Monte-Carlo deviennent accessibles. De nombreux métamodèles permettent aussi un transfert formel instantané.

Au lieu d'un échantillonnage spécifique pour l'identification des métamodèles, les solutions évaluées en cours de processus d'optimisation sont directement exploitées, sans coût de calcul supplémentaire. Celles-ci présentent de surcroît l'avantage d'être concentrées dans les zones d'intérêt.

Comme la recherche s'effectue dans l'espace de décision, les métamodèles identifiées ne rendent compte que des variations des variables de décision et ne permettent donc de quantifier que les incertitudes de type A. Néanmoins, une astuce permet de surmonter partiellement le problème. En effet, en identifiant les métamodèles à partir de l'espace des rigidités plutôt qu'à partir des variables de décision on exploite des variables qui transcrivent en elles-mêmes l'influence des paramètres matériaux, ce qui permet éventuellement de tenir compte de l'influence de leur dispersion dans le calcul de robustesse. De plus, on réduit considérablement le nombre de variables, ce qui permet d'exploiter le kriging pour approximer les fonctions objectifs, qui présente l'intérêt de fournir un estimateur intégré de l'erreur d'approximation.

Si intégrer des objectifs de robustesse supplémentaires par rapport au problème idéalisé peut s'avérer coûteux en ce qui concerne l'effort d'optimisation, il est possible de simplifier encore la

³ Toutefois, pour un coût de calcul supérieur, il est également envisageable d'intégrer le calcul des fonctions de robustesse associées aux incertitudes de type A en cours de recherche (de façon systématique ou à des instants choisis).

⁴ En fait, un métamodèle de dimension de sortie correspondant au nombre de fonctions-objectif et, éventuellement, de contraintes, ou, alternativement, un ensemble de métamodèles scalaires.

démarche en optant plutôt pour la définition de pendants robustes aux objectifs déterministes. Cette démarche se justifie dans la mesure où, dans une optique de certification, les industriels sont avant tout concernés par les performances minimales des structures à l'étude. Pour ce faire, on propose de reformuler le problème d'optimisation à partir d'objectifs robustes exprimés de la façon suivante :

$$f_i^A = \mu_i^A - q\sigma_i^A \quad (\text{III-6})$$

où f_i^A représente l'équivalent robuste à la fonction-objectif f_i , et μ_i^A et σ_i^A représentent respectivement une estimation de la moyenne et l'écart-type de f_i compte tenu des incertitudes de type A (indiqué en exposant). q est un réel strictement positif choisi par l'utilisateur.

De façon générale, on considère que les fonctions-objectif suivent approximativement une loi normale. Compte tenu de la multiplicité des sources d'incertitudes dont leur calcul est affecté, cette hypothèse semble légitime. En effet, le théorème de la limite central indique que la somme de n variables aléatoires indépendantes de lois de probabilités quelconques tend vers la loi normale quand n tend vers l'infini. Par conséquent, imposer $q = 2$ revient très grossièrement à travailler en valeurs B et $q = 3$ en valeurs A.

III.2.3.b Les autres sources d'incertitudes

On s'intéresse essentiellement à l'influence des autres sources d'incertitudes (de type B et, éventuellement, de type C) sur le classement des solutions selon le rang de Pareto. Il s'agit de dégager une relation de dominance claire malgré l'influence des incertitudes sur les performances des solutions. C'est-à-dire que pour le classement de deux solutions, on cherche à déterminer s'il existe une probabilité de dominance nettement favorable à l'une d'entre elles, compte tenu de performances incertaines.

Dégager une notion de dominance claire dans un contexte incertain suppose de modifier la relation de dominance de Pareto. Il n'est possible de préférer une solution à une autre que si celles-ci affichent des performances suffisamment différentes compte tenu des incertitudes de type B. Transposé à la relation de dominance, ceci revient à élargir le cas d'incomparabilité par adjonction d'une condition de dominance supplémentaire.

Définition III-1 : Relation de dominance modifiée

Soit un couple de vecteurs de décision $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{X}_f$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ un vecteur de réels strictement positifs alors, $\mathbf{u} \succ \mathbf{v}$ (\mathbf{u} domine \mathbf{v} au sens de la relation de dominance modifiée), ssi :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, f_i(\mathbf{u}) \geq f_i(\mathbf{v}) \text{ et } \exists i / f_i(\mathbf{u}) > f_i(\mathbf{v}) + \varepsilon_i$$

Cette notion est illustrée sur la Figure III-9. La solution B , dominée par la solution A au sens de Pareto, ne l'est plus au sens de la relation modifiée. Dans ce cas, en effet, on estime que ces solutions affichent des performances trop proches pour préférer l'une à l'autre compte tenu des incertitudes dont sont entachés les calculs des fonctions-objectif. Ces incertitudes sont représentées par le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$.

A titre d'exemple, on reprend en Figure III-10 les résultats obtenus dans le cas du premier cas-test du chapitre précédent (voir Figure II-23). Ces résultats sont post-traités pour visualiser, d'une part, les rangs de Pareto et, d'autre part, les rangs associés à la notion de dominance modifiée. Là où la dominance de Pareto permet de dégager des fronts successifs correspondants à des portions d'hyperplan dans l'espace des objectifs, la dominance modifiée conduit à l'obtention de "bandes d'incertitude" dans lesquelles on considère qu'il n'est pas raisonnable de discriminer les solutions compte tenu de la variabilité observée sur les valeurs de leurs performances.

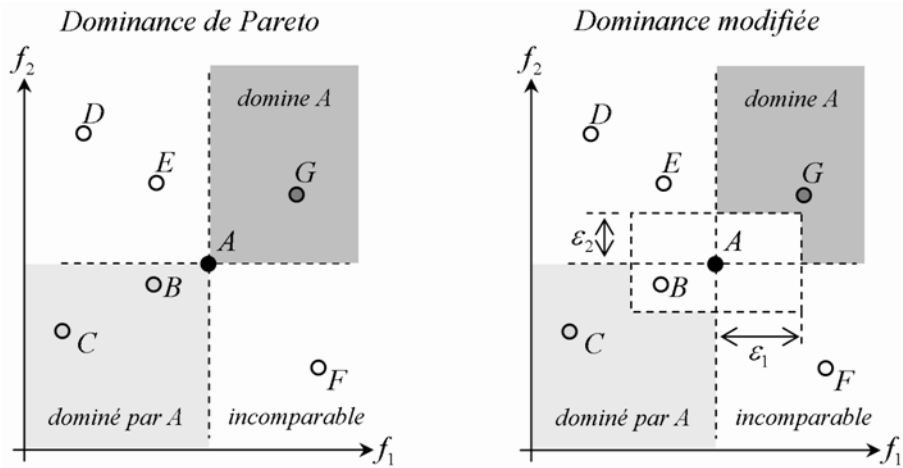


Figure III-9 : Visualisation, dans l'espace des objectifs, des relations de dominance de Pareto et de dominance modifiée. Les solutions A et B sont incomparables au sens de la dominance modifiée.

Détermination du vecteur ε

On propose d'imposer une relation directe entre le vecteur ε et les écart-types mesurés de la forme :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \varepsilon_i = q \times \max(\sigma_i^B(\mathbf{u}), \sigma_i^B(\mathbf{v})) \quad (\text{III-7})$$

où q est un réel strictement positif et σ_i^B correspond à l'écart-type observé sur l'objectif f_i , lié aux incertitudes de type B. Le choix de la valeur de q est lié à celui d'une probabilité de dominance minimale, au sens de Pareto, pour différencier deux solutions. Plus q est faible, moins on est exigeant, c'est-à-dire qu'une très faible différence entre les probabilités $P(\mathbf{u} \succ \mathbf{v})$ et $P(\mathbf{u} \prec \mathbf{v})$ suffit à remporter la décision.

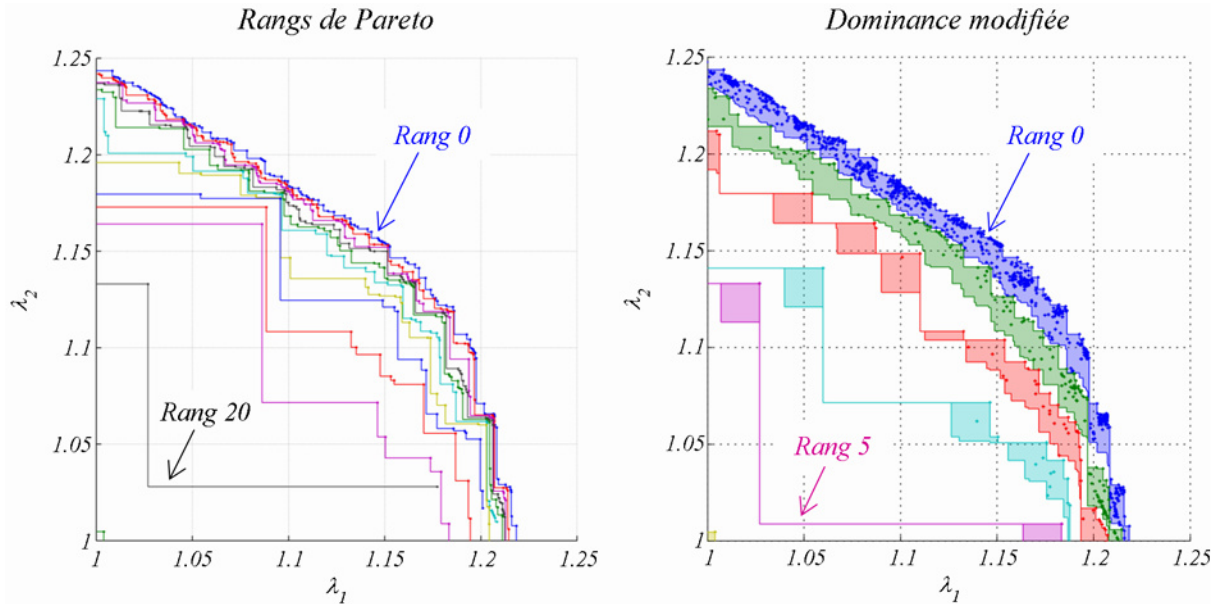


Figure III-10 : Visualisation comparée des rangs de Pareto et des bandes d'incertitudes associées à la notion de dominance modifiée. Reprise du premier cas-test du Chapitre II. Par soucis de lisibilité, n'est représenté qu'un rang sur deux dans le cas de la dominance de Pareto. Le vecteur ε est arbitraire, de coordonnées (0,02 ; 0,02).

La difficulté majeure pour l'estimation de l'influence des incertitudes de type B (et C) provient du fait qu'il n'existe aucune synergie avec l'optimisation. Son estimation constitue intégralement un coût

de calcul supplémentaire par rapport à la résolution du problème idéalisé. Il faut donc se montrer parcimonieux dans l'estimation de l'influence des incertitudes de ce type.

A titre indicatif, le Tableau III-2 illustre l'évolution des probabilités des relations de dominance au sens strict $P(\mathbf{u} > \mathbf{v})$ et d'incomparabilité $P(\mathbf{u} \sim \mathbf{v})$ en fonction de q et de la dimension k du problème, pour deux variables \mathbf{u} et \mathbf{v} gaussiennes, de mêmes écart-types σ , telles que $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \mu_i(\mathbf{v}) = \mu_i(\mathbf{u}) - q\sigma_i$. Plus la dimension du problème augmente, plus les cas d'incomparabilité $P(\mathbf{u} \sim \mathbf{v})$ augmentent ($P(\mathbf{u} > \mathbf{v}) + P(\mathbf{u} < \mathbf{v}) + P(\mathbf{u} \sim \mathbf{v}) = 1$) et plus il est évident qu'il est difficile de discriminer des solutions trop proches en valeurs moyennes.

Dimension	$k = 1$	$k = 2$		$k = 3$		$k = 10$	
q	$P(\mathbf{u} > \mathbf{v})$	$P(\mathbf{u} > \mathbf{v})$	$P(\mathbf{u} \sim \mathbf{v})$	$P(\mathbf{u} > \mathbf{v})$	$P(\mathbf{u} \sim \mathbf{v})$	$P(\mathbf{u} > \mathbf{v})$	$P(\mathbf{u} \sim \mathbf{v})$
0,1	53 %	28 %	50 %	15 %	75 %	<1 %	>99 %
1	76 %	58 %	36 %	44 %	55 %	6 %	94 %
2	92 %	85 %	14 %	78 %	22 %	44 %	56 %
3	98 %	97 %	3 %	95 %	5 %	84 %	16 %

Tableau III-2 : Probabilités des relations de dominance et d'incomparabilité, au sens de Pareto, entre les variables gaussiennes \mathbf{u} et \mathbf{v} , en fonction de q et de la dimension k du problème. Probabilités estimées par tirages de Monte-Carlo de 10^6 points.

De l'importance de maîtriser les incertitudes de type B et C

La relation de dominance modifiée proposée traduit simplement l'impossibilité de discriminer deux solutions dont la différence des performances est inférieure à la précision des modèles employés, compte tenu de toutes les sources d'incertitudes extérieures aux variables de décision. La conséquence en est que, plus les incertitudes sont importantes, plus le guidage de l'AE est imprécis. De par la construction même de la fonction de qualité, dans une même bande d'incertitude, la recherche est uniquement guidée par des considérations de densification des solutions autour des individus les plus isolés, en valeurs moyennes, dans l'espace des objectifs. La convergence vers l'optimum est donc d'autant plus lente que les incertitudes sont importantes. D'où la nécessité d'une description aussi précise que possible des incertitudes de type B et de l'usage de modèles décrivant au moins les bonnes tendances dans l'évolution des objectifs en fonction des variables de décision.

III.2.4 INCERTITUDES ET FAISABILITE DES SOLUTIONS

Quel que soit leur type, les incertitudes affectent aussi bien le calcul des performances des solutions que celui des contraintes qu'elles doivent satisfaire. Le problème de la satisfaction des contraintes, et tout particulièrement des contraintes dimensionnantes (les autres contraintes étant d'importance secondaire), requiert une bien plus grande exigence que celui du classement des solutions d'après des performances incertaines. En effet, inverser le classement relatif de deux solutions de performances similaires est sans réelles conséquences, alors qu'accepter une solution irréalisable peut se révéler dramatique.

On considère ici qu'une solution est faisable lorsque satisfait aux contraintes sur l'ensemble de son domaine d'incertitude. Si l'on maintient la distinction entre les différents types d'incertitudes (principalement les types A et B) dans la façon de réaliser l'échantillonnage des domaines d'incertitudes pour l'identification des métamodèles nécessaires, il faut maintenant considérer leurs effets cumulés sur la réalisation des contraintes. Eventuellement, les incertitudes sur les modèles peuvent être prises en compte en gonflant les incertitudes des autres types.

La première méthode qui vient à l'esprit pour s'assurer de la faisabilité des solutions dans un contexte incertain consiste à "augmenter" les contraintes d'un coefficient de pénalisation forfaitaire. Cette méthode, largement répandue, présente l'avantage de n'engendrer aucun coût de calcul supplémentaire. Toutefois, pour se garantir des incertitudes sans analyse précise de leurs effets, les coefficients de pénalisation employés sont nécessairement très élevés et conduisent fréquemment à de forts surdimensionnements.

Afin d'éviter de trop pénaliser la structure finale, il faut évaluer l'impact des incertitudes sur les contraintes. Dans ces travaux, le domaine d'incertitude autour d'une solution déterministe \mathbf{x}_0 est représenté sous la forme d'un hyper-rectangle, noté $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$, où $\boldsymbol{\alpha}_0$ correspond au vecteur nominal des paramètres du modèle (toutes les variables de décision et tous les paramètres varient dans un intervalle donné autour de leurs valeurs nominales). Vérifier que la solution \mathbf{x}_0 satisfait aux contraintes revient à s'assurer que l'image par \mathbf{g} de $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ appartient entièrement au domaine réalisable, c'est-à-dire que le système d'inégalités suivant est vérifié :

$$\forall (\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{V}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0), \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \geq \boldsymbol{\theta} \quad (\text{III-8})$$

Formulé de la sorte, il s'agit d'un problème complexe dans le cas général, d'autant plus que l'image par \mathbf{g} du polytope $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ peut être difficile à calculer. En pratique, il est plus aisé de vérifier que le domaine d'incertitude $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$ est entièrement inclus dans l'image inverse par \mathbf{g} du domaine faisable, ici \mathbb{R}_+^m . Par souci de simplicité, on exploite une approximation localement linéarisée de \mathbf{g} sur $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$. Ceci nous permet d'utiliser une approche géométrique de la résolution du problème, basée sur le calcul d'intersections de polyèdres à l'aide de la Toolbox Matlab MPT (Multi-Parametric Toolbox)^{5,6}.

Une seconde possibilité, plus simple, pour résoudre le système III-8 consiste à procéder de façon numérique [Deb 05], en vérifiant la faisabilité d'un échantillon de solutions choisies dans le domaine d'incertitudes $\mathbf{V}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$. Cependant, dans ce cas, la confiance que l'on peut accorder au résultat dépend de la qualité de l'échantillonnage (et éventuellement, des métamodèles employés).

Néanmoins, que l'on retienne l'une ou l'autre méthode, les coûts de calcul restent élevés. Une façon simple de limiter ces coûts consiste à estimer l'effet des incertitudes pour les seules solutions faisables du problème déterministe. Cette vérification doit être faite au cours du processus d'optimisation, et non pas seulement en post-traitement, sans quoi on court le risque de dilapider un important effort de calcul pour intensifier la recherche autour de solutions infaisables compte tenu des incertitudes. Par exemple, en reprenant le troisième cas-test proposé au Chapitre II, on constate en post-traitement que la vérification robuste des contraintes écarte toutes les solutions de moins de trente-trois plis, soit deux plis supplémentaires par rapport au cas déterministe (voir Figure III-11).

⁵ M. Kvasnica, P. Grieder, M. Baotic, "MPT Multi-Parametric Toolbox, Version 2.6.2", 05-Dec-2006, <http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>

⁶ La méthode employée est davantage détaillée au Chapitre VI.

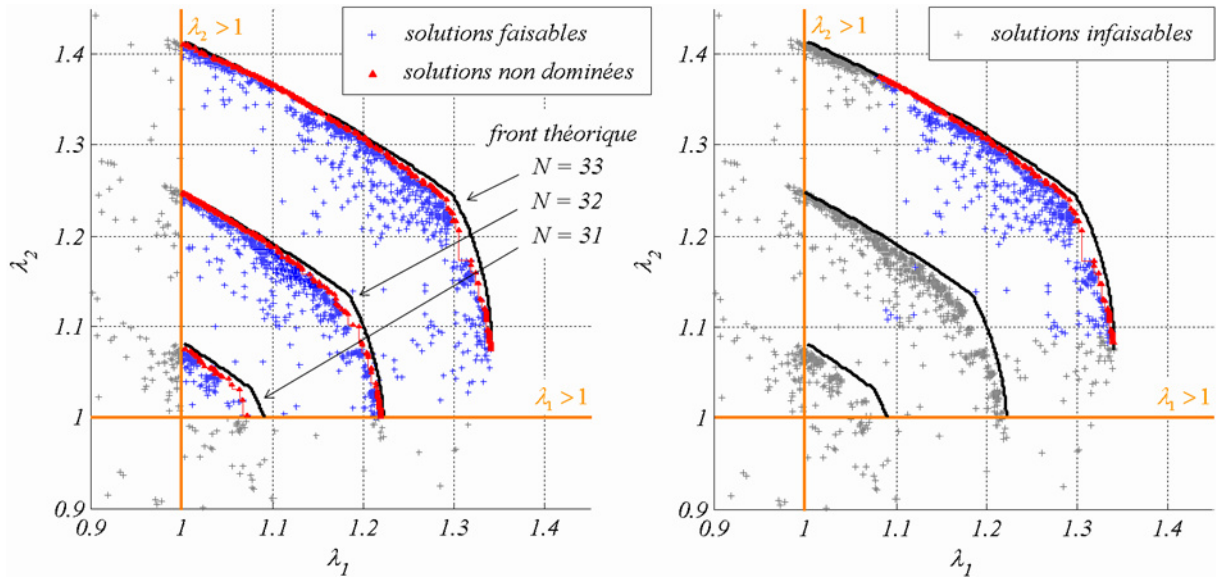


Figure III-11 : A gauche, reprise de la Figure II-27. A droite, résultats de l'estimation en post-traitement des conséquences des incertitudes de type A et B sur la faisabilité des solutions. Toutes les solutions de moins de 33 plis sont écartées.

III.3 BILAN

Au final, on dispose de toute une panoplie de méthodes pour la prise en compte des incertitudes dans l'optimisation. Certaines méthodes ne supposent aucun effort de calcul supplémentaire mais sont susceptibles de conduire à des structures largement surdimensionnées. D'autres sont plus coûteuses mais permettent de limiter ces surdimensionnements. La pratique industrielle, consistant à pénaliser arbitrairement les marges et les valeurs de calcul, est compatible avec une démarche d'optimisation, mais si elle est efficace en temps, elle s'avère bien trop conservatrice. Le cumul mal maîtrisé des abattements conduit à lourdement pénaliser les structures composites. La simulation de Monte-Carlo permet, quant à elle, un transport d'incertitudes précis, mais pour un coût de calcul prohibitif. Entre ces solutions extrêmes, il existe toute une gamme de démarches intermédiaires correspondant à autant de compromis entre précision de l'estimation des incertitudes et coûts de calcul. Le choix relève du cas par cas.

Ignorer le problème des incertitudes constitue une erreur, car sous une forme ou une autre elles sont inévitables dans les problèmes réels. La question pertinente n'est pas de savoir s'il y a lieu de les prendre en compte, car il le faut, mais plutôt de statuer sur la manière et les coûts acceptables pour leur prise en compte. Le Tableau III-3 et le Tableau III-4 présentent le panel des méthodes proposées. Parmi celles-ci, la méthode M1, consistant à ignorer les incertitudes, est à proscrire, car elle entraîne une inacceptable prise de risques. La méthode M3 est elle aussi écartée, car elle ne présente qu'un faible apport par rapport à la méthode industrielle (M2) au prix d'une perte d'efficacité certaine de l'algorithme d'optimisation. Sont donc conservées la méthode M2, qui présente un coût de calcul minimal, et les méthodes M4 et M5, ainsi que toutes les solutions intermédiaires entre celles-ci, comme autant de compromis entre précision de l'estimation de l'influence des incertitudes et coûts de calcul.

Principes généraux des méthodes proposées pour l'optimisation déterministe :

- classement des solutions basé sur la relation de dominance de Pareto,
- vérification déterministe des contraintes.

Méthode	Détail	Critique
M1	Pas de prise en compte des incertitudes.	Forts risques de sous-dimensionnements.
M2	Prise en compte des incertitudes par pénalisation des valeurs de calcul et des contraintes.	Surdimensionnements fréquents.

Tableau III-3 : Synthèses des méthodes d'optimisation déterministe.

Principes généraux des méthodes proposées pour l'optimisation robuste :

- classement des solutions basé sur la relation de dominance modifiée (incertitudes de types B et C),
- estimation de l'influence des incertitudes sur les contraintes,
- vérification a posteriori de la robustesse des solutions non-dominées face aux incertitudes de type A.

Méthode	Détail	Critique
M3	Choix d'un vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ forfaitaire.	Surdimensionnements fréquents. Convergence de l'algorithme ralentie.
M4	Estimation des incertitudes en un unique point \boldsymbol{x}_0 . Calcul du vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}_0)$	Moins pénalisant, mais risques de sous-dimensionnements liés au choix de \boldsymbol{x}_0 .
M5	Estimation des incertitudes en tout point \boldsymbol{x} . Calcul du vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$	Dimensionnement au plus juste, mais coût de calcul important.

Tableau III-4 : Synthèse des méthodes d'optimisation robuste.

L'optimisation numérique en général, et *a fortiori* l'optimisation robuste, questionne sur les modèles et la qualité de leurs prévisions. A la base de tout problème de conception, il y a un problème de faisabilité qui s'accompagne d'une grande exigence sur la précision du calcul des contraintes. Il est impératif d'identifier les contraintes dimensionnantes (il n'y a même pas lieu de calculer les autres) et d'estimer la confiance sur leurs prévisions. S'attarder sur le calcul de contraintes qui ne sont pas dimensionnantes constitue une perte de temps et de moyens. Mais omettre une contrainte dimensionnante ou manquer de précision sur son évaluation peu avoir des conséquences dramatiques. En pratique, c'est la connaissance des frontières du domaine réalisable qui est fondamentale. Il faut donc des modèles précis, mais aussi conservatifs, pour le calcul des contraintes, ainsi que des modèles prévoyant les bonnes tendances sur les objectifs, en fonction des variables de décision. Si trop d'incertitudes subsistent sur les prévisions des modèles, il est difficile de discriminer les solutions et l'optimisation devient inefficace, voire dangereuse. La confiance dans les modèles constitue ainsi un prérequis fondamental. La bonne démarche nous semble être d'intégrer un maximum de physique dans les modèles, mais ce faisant, les coûts de calcul augmentent rapidement.

Deuxième partie :

**Application à l'optimisation de la tenue au
flambement de panneaux composites**

Les propriétés des matériaux utilisés dans cette partie sont détaillées dans la section Propriétés Matériaux, située en début de ce mémoire.

Chapitre IV **Stratégies de calcul pour la prévision du flambement des structures composites**

Sommaire

IV.1	Généralités sur le flambement.....	110
IV.1.1	Importance du flambement pour les structures aéronautiques	111
IV.1.2	Spécificité du flambement des structures composites	111
IV.1.3	Revue des principaux paramètres influents	111
IV.1.4	Optimisation et flambement des structures composites dans la littérature	112
IV.2	Présentation des modèles	114
IV.2.1	Les modèles analytiques	114
IV.2.2	Analyse du flambement par la méthode des Eléments Finis	116
IV.2.3	Remarques sur l'approximation de la force critique de flambement	117
IV.3	Comparaisons des modèles	119
IV.3.1	Validation des modèles dans le cas orthotrope.....	119
IV.3.2	Conséquences des hypothèses	119
IV.3.3	Un calcul de validation sur une structure complexe	123
IV.4	Bilan	124

Les matériaux composites sont le plus souvent utilisés pour des structures minces et élancées, particulièrement susceptibles de flamber. Pour ce type de structures, l'optimisation de la zone courante est souvent effectuée en tenant compte de considérations liées au flambement (il s'agit, par exemple, de maximiser la force de flambement). Avant de traiter un cas complexe d'optimisation, ce chapitre préliminaire vise, après quelques généralités issues de la littérature sur le flambement et l'optimisation du flambement des structures composites, à présenter et justifier succinctement les modèles employés par la suite.

IV.1 GENERALITES SUR LE FLAMBEMENT

De façon générale, le flambement d'une structure correspond à une instabilité de comportement. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élancement important, les plaques minces ou encore les coques minces cylindriques. Généralement, le flambement intervient pour des contraintes dans le matériau bien inférieures aux limites à rupture. Analyser le flambement d'une structure revient à déterminer les conditions pour lesquelles l'équilibre de la structure cesse d'être stable. Le plus souvent, il s'agit de déterminer la valeur de chargement, on parle de *chargement critique*, au-delà de laquelle l'équilibre initial devient instable et la moindre perturbation entraîne le basculement vers un nouvel équilibre stable, correspondant à de grands déplacements dans la structure. On associe usuellement le flambement à des chargements de compression, mais le cisaillement ou la torsion peuvent aboutir à ce même type d'instabilité. D'autres paramètres peuvent également déclencher le flambement, comme la température dans le cas du flambement thermique lié à des phénomènes de dilatation contrariée. En pratique, il existe une grande diversité de configurations susceptibles de flamber, dont la Figure IV-1 fournit un bref aperçu.

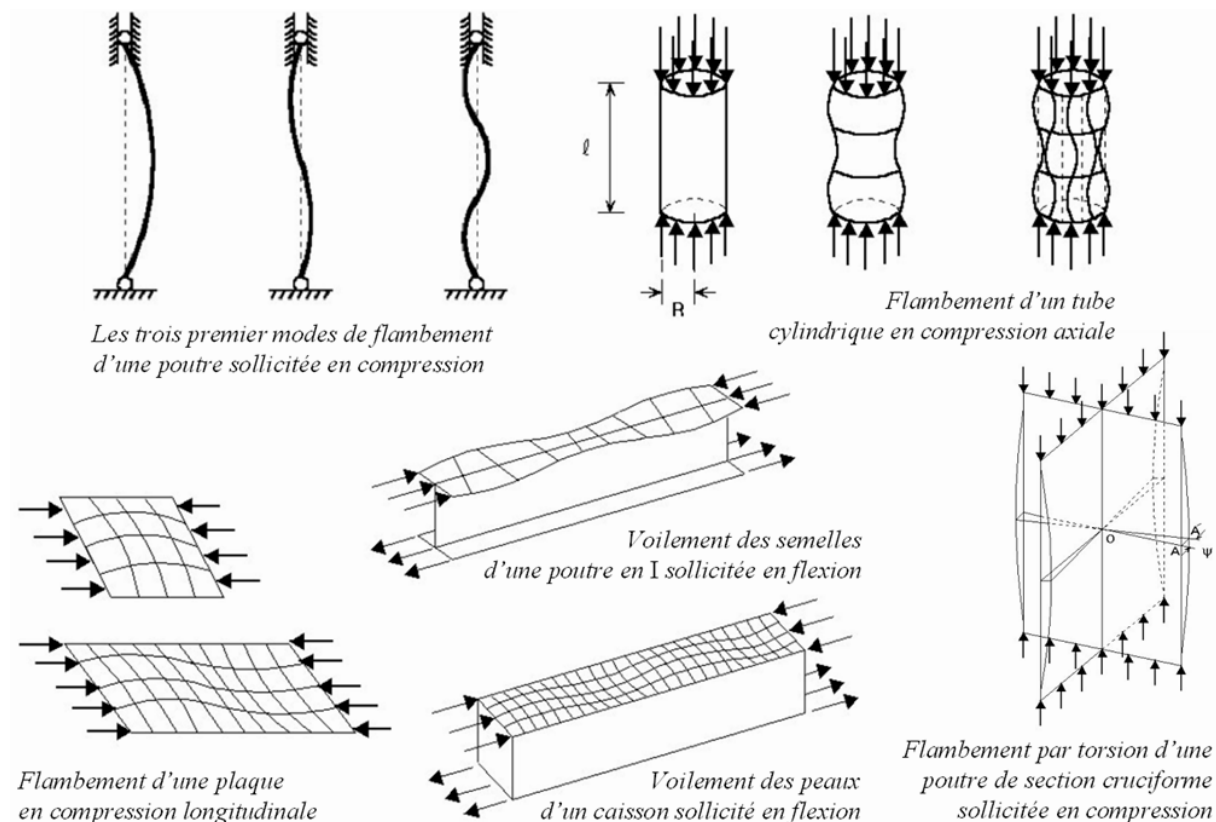


Figure IV-1 : Aperçu de la diversité des phénomènes de flambement (source Internet).

IV.1.1 IMPORTANCE DU FLAMBEMENT POUR LES STRUCTURES AERONAUTIQUES

Les structures aéronautiques sont le plus souvent soumises à des efforts de flexion ou de torsion. Ces sollicitations sont reprises par des caissons dont les parois sont principalement sollicitées en traction / compression et / ou en cisaillement. Ces parois sont constituées de panneaux raidis, plats ou galbés, généralement très élancés, dimensionnés selon des considérations de raideur, de rupture et de flambement (pour des sollicitations combinées de compression et de cisaillement). Par exemple, sur un avion commercial au sol, c'est principalement le revêtement d'intrados qui est sollicité en compression sous l'effet de la flexion des ailes sous leur propre poids, tandis qu'en vol, ce sont les panneaux ventraux du fuselage et les panneaux d'extrados qui sont susceptibles de flamber en raison des déformations de l'appareil sous l'effet des efforts aérodynamiques.

Dans certains cas, les panneaux raidis aéronautiques ne sont pas dimensionnés au seul flambement, mais sont conçus pour travailler en post-flambement. Le flambement des peaux est souvent autorisé entre les raidisseurs, tant que le matériau reste dans son domaine de comportement élastique.

De très nombreuses structures dimensionnées au flambement peuvent être considérées comme un assemblage de plaques minces rectangulaires, plus ou moins élancées. C'est donc d'abord à cet élément structural, le plus simple géométriquement, que l'on s'intéresse dans ce chapitre, dans la mesure où il offre un bon aperçu du comportement de structures plus complexes.

IV.1.2 SPECIFICITE DU FLAMBEMENT DES STRUCTURES COMPOSITES

De façon générale, le flambement est fortement dépendant des propriétés de flexion du matériau de la structure considérée. Par exemple, dans le cas d'une plaque chargée en membrane, le flambement correspond au basculement de la configuration initiale plane, à une déformée présentant une flèche importante. Pour décrire ces phénomènes, il est nécessaire de développer des équations tenant compte du déplacement latéral des plaques dans le cas d'un chargement de membrane. Les propriétés macroscopiques de flexion des matériaux employés jouent un rôle important dans ces équations. Or c'est précisément dans la constitution de leur matrice de rigidité macroscopique que réside la principale spécificité des composites (voir Chapitre 1.1.2.a). D'une part, les stratifiés présentent divers couplages entre les comportements de membrane et de flexion et ceux de flexion et de torsion. D'autre part, arrêter le choix des orientations de plis et de leurs proportions ne suffit pas pour caractériser le comportement de flexion des stratifiés : l'ordre d'empilement est essentiel. On renvoie à l'exemple de la Figure IV-4 pour s'en convaincre.

IV.1.3 REVUE DES PRINCIPAUX PARAMETRES INFLUENTS

Le plus souvent, les empilements utilisés sont symétriques, afin de s'affranchir des couplages entre les comportements de membrane et de flexion ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$). Le Tableau IV-1 récapitule les principaux paramètres influents sur la force critique de flambement des plaques planes rectangulaires pour des empilements symétriques. On se place ici dans le cadre des hypothèses générales des plaques et des coques. L'épaisseur est donc considérée comme très faible devant les autres dimensions de la structure. Elle n'en reste pas moins un paramètre dont l'influence est de premier ordre sur le comportement de flexion des stratifiés et, par conséquent, leur flambement. En effet, l'influence du choix des orientations de plis et de leur ordre d'empilement est ici entièrement retranscrite par l'intermédiaire des modules de rigidité de flexion D_{ij} . Parmi ceux-ci, les termes de couplage D_{16} et D_{26} ont une influence très spécifique dont on discute plus en détail dans la suite.

Dans certains cas, par exemple dans le cas de structures dissymétriques par rapport à leur plan de chargement, la déflexion commence dès la mise en charge. Dans ce cas, il n'y a pas de

flambement soudain par bifurcation, mais une augmentation continue des déplacements. On parle de *divergence d'équilibre*, pour laquelle il n'y a pas de limite de stabilité stricte. Néanmoins, plus le chargement augmente et plus les conséquence d'une petite perturbation s'amplifient, jusqu'à provoquer de grands déplacements. La géométrie conditionne le mode de flambement.

Paramètres	Type de chargement	
	N_x, N_y avec N_{xy} nul	N_x, N_y avec N_{xy} non nul
Paramètres du matériau		
Modules axiaux de flexion D_{11} et D_{22}	++	++
Couplages flexion / torsion D_{16} et D_{26}	+ (pénalisation, voir IV.2.1.a)	+ (dissymétrie, voir IV.2.1.a)
Autres paramètres		
Conditions aux limites $R = a/b$	++	++
Epaisseur du stratifié	++	++

Tableau IV-1 : Revue des paramètres influant sur le flambement de plaques minces rectangulaires, constituées de stratifiées symétriques, et synthèse de leurs impacts respectifs (0 : influence faible ou nulle, + : influence sensible, ++ : influence déterminante).

Dans une structure réelle, la variabilité spatiale au sein de la pièce (dispersion des propriétés des matériaux et défauts géométriques) suffit le plus souvent à créer une dissymétrie qui conditionne le flambement. Des défauts importants se traduisent par un flambement prématuré par rapport à la structure idéale. Le Tableau IV-1 montre que le flambement est très sensible à de nombreux paramètres. Ce constat suggère que le phénomène est donc aussi très sensible aux incertitudes. On revient sur cette importante remarque au Chapitre VI.

IV.1.4 OPTIMISATION ET FLAMBEMENT DES STRUCTURES COMPOSITES DANS LA LITTERATURE

L'optimisation au flambement de poutres, tubes, plaques et de panneaux raidis composites donne matière à de nombreuses études, et ce, depuis le début des années 1970. En 2002, [Venkataraman 02] recense ainsi quelques quatre-vingt-dix publications sur le sujet. En septembre 2008, une simple recherche par mots clés dans la base ScienceDirect d'Elsevier permet d'identifier une trentaine d'articles de journaux supplémentaires, depuis 2002, correspondant aux mots clés "composite materials" et "buckling optimization". On peut supposer qu'en étendant cette recherche à d'autres bases de données, on trouvera encore plusieurs dizaines de travaux originaux. Ces travaux relèvent pour la plupart du domaine aéronautique et spatial, mais certains traitent aussi de problématiques du domaine maritime ou de génie civil. Dans leur quasi-totalité, ils exploitent, pour l'optimisation, des métaheuristiques afin de gérer le problème combinatoire du choix des ordres d'empilement, les algorithmes les plus populaires étant, de loin, les AE. Par contre, les approches multiobjectifs, et encore plus les approches multiobjectifs *a posteriori*, restent rares.

La maximisation de la charge critique de flambement, seule ou associée à des considérations de rigidité et de rupture, pour une plaque stratifiée rectangulaire, basée sur des solutions analytiques simplifiées (typiquement, le modèle décrit au paragraphe suivant), constitue un cas classique pour la mise au point et la démonstration des apports de nouveaux algorithmes pour l'optimisation des

composites. Par exemple, [Erdal 05] exploite ce type d'exemple avec un algorithme de recuit simulé, [Rama 05] avec un algorithme de recherche dispersée (scatter search). Les applications des modèles analytiques vont toutefois bien au-delà. Leur grande diversité permet des applications très diverses, sur des tubes ou des panneaux raidis par exemple. [Lamberti 03] insiste ainsi sur l'utilité de ces modèles pour les phases d'avant-projet, qui permettent d'explorer de très vastes gammes de solutions pour de faibles coûts de calculs, là où les simulations EF sont inabordables. [Liang 03a] s'intéresse à l'optimisation au flambement de la jupe d'un propulseur solide sous les effets combinés de la poussée de la tuyère et des efforts aérodynamiques. [Liang 03b] propose un exemple d'optimisation au flambement sous pression hydrostatique pour la coque d'un sous-marin. [Kassapoglou 08] utilise une approche énergétique (du type de celle décrite en IV.2.1.b) pour l'optimisation de plaques renforcées par une surépaisseur en leur centre.

Certains auteurs exploitent une démarche d'optimisation à deux niveaux (Cf I.3.1.c). [Todoroki 04] identifie ainsi une surface de réponse fonction des paramètres de stratification ξ_1^D et ξ_2^D pour l'optimisation d'un tube en compression axiale. [Diaconu 02 ; 04] traite de l'optimisation de tubes soumis à des sollicitations de compression axiale, torsion et de pression externe en exploitant ces mêmes paramètres. [Matsuzaki 07] utilise un algorithme de séparation - évaluation (branch and bound) pour le même type d'application mais sans imposer la symétrie des empilements. [Diaconu 05] traite de l'optimisation du comportement post-flambé de plaques infiniment longues en compression axiale. [Liu 06] propose une démarche à deux niveaux, proche de la démarche industrielle (Cf I.3.1.a), et l'applique à la minimisation de la masse d'un panneau raidi sous une contrainte de flambement.

Les validations des approches analytiques proposées par rapport au calcul EF sont le plus souvent très partielles, car limitées à quelques empilements, le plus souvent UD, QI, ou alternés à $\pm 45^\circ$ (pourtant un empilement dont le comportement en compression est très non-linéaire, alors que les modèles, eux, sont linéaires). Il semble plus simple de souligner les défauts des modèles par des contre-exemples que de les valider par l'exemple. En ce sens, comparer les résultats obtenus par deux modèles différents pour le même problème d'optimisation paraît plus pertinent. [Herencia 07] relève ainsi des différences significatives entre les solutions optimales obtenues par une approche analytique et la simulation EF pour l'optimisation de la charge de flambement d'un panneau raidi, soumis dans son plan à une combinaison de chargements de compression biaxiale et de cisaillement.

D'autres études font directement appel aux modèles EF dont le principal intérêt consiste à autoriser l'analyse non-linéaire de structures de géométrie complexe. [Kang 05] exploite ainsi un modèle non-linéaire pour l'optimisation d'un panneau raidi sollicité en compression longitudinale, en flambement et en post-flambement, jusqu'à la première rupture de pli. Les coûts de calcul sont toutefois très importants. Afin de les réduire, de nombreux auteurs ont recours à des métamodèles. [Lanzi 06] procède de la sorte à l'optimisation multiobjectif d'un panneau raidi galbé jusqu'à son effondrement par flambement global¹. [Todoroki 07] utilise un algorithme de séparation -évaluation pour l'optimisation d'un super raidisseur en Ω composé de deux empilements. Enfin, certaines études traitent d'approches multiniveaux pour l'optimisation de structures complexes, constituées de patches d'épaisseurs différentes entre lesquels il est nécessaire d'assurer la continuité des orientations de plis. A l'échelle globale, les modèles EF sont nécessaires afin de capturer efficacement l'influence des variations d'épaisseurs [Adams 04 ; Carpentier 05 ; Seresta 07].

¹ Ces travaux s'inscrivent dans le cadre du programme européen POSICOSS (Improved POstbuckling Simulation for Design of Fibre COmposite Stiffened Fuselage Structures), prolongé jusqu'en 2008 par le programme COCOMAT (Improved MATerial Exploitation at Safe Design of COmposite Airframe Structures by Accurate Simulation of COllapse), visant à l'amélioration des techniques de simulation de l'effondrement des panneaux raidis composites en flambement, afin d'optimiser l'usage de ces matériaux pour les structures aéronautiques.

IV.2 PRESENTATION DES MODELES

Dans la suite, on parle de "modèles analytiques" par opposition aux modèles EF. Dans ce mémoire, en fonction de la complexité des applications considérées pour l'optimisation, nous utilisons l'un ou l'autre type de modèles. Ceux-ci sont présentés dans cette partie puis comparés afin d'en déterminer les domaines de validité.

IV.2.1 LES MODELES ANALYTIQUES

Les solutions suivantes du problème du flambement d'une plaque plane rectangulaire sont établies dans le cadre des hypothèses de la CLT. En particulier, on fait l'hypothèse que le comportement matériau est linéaire élastique.

IV.2.1.a Résolution sous l'hypothèse d'orthotropie de flexion

L'établissement de l'équation régissant le flambement d'une plaque plane rectangulaire stratifiée est détaillé dans [Berthelot 92]. Dans le cas d'un stratifié symétrique ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$), orthotrope en flexion (les termes de couplage D_{16} et D_{26} entre flexion et torsion sont nuls) et sous une hypothèse de flexion pure (à l'instant du flambement, les déplacements u_0 et v_0 dans le plan de la plaque sont supposés négligeables), cette équation se simplifie de la façon suivante :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} = \lambda \left(N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (\text{IV-1})$$

où $\lambda \times (N_x, N_y, N_{xy})$ correspond au chargement de la plaque dans son plan (x, y) , avec λ un facteur d'amplitude scalaire, et w_0 représente la flèche de la plaque en son plan moyen.

Pour une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords, les conditions aux limites sont satisfaites pour une flèche $w_0(x, y)$ de la forme :

$$w_0(x, y) = a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{IV-2})$$

où a et b représentent respectivement la longueur et la largeur de la plaque et m et n les nombres de demi-ondes de flambement dans les directions x et y respectivement.

Il suffit de reporter le déplacement IV-2 dans l'équation IV-1 pour obtenir l'expression de λ dans le cas d'un cisaillement nul ($N_{xy} = 0$) et d'un chargement de compression biaxiale uniforme sur chacun des côtés de la plaque² :

$$\lambda = \frac{\pi^2 [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4]}{a^2 (N_x m^2 + N_y n^2 R^2)}, \text{ où } R = \frac{a}{b}. \quad (\text{IV-3})$$

On trouve dans [Vinson 87], une extension de cette expression au cas des chargements comprenant une composante de cisaillement non nulle :

$$\lambda = \frac{\pi^2 [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4]}{a^2 (N_x m^2 + N_y n^2 R^2 + N_{xy} mnR)} \quad (\text{IV-4})$$

² C'est ce modèle qui est exploité dans la première partie de ce mémoire (Cf. II.3.3.a).

Quelle que soit l'option retenue, la charge critique de flambement correspond à la valeur minimale du facteur de flambement λ en fonction de m et n . On définit ainsi le *facteur critique de flambement*, qui présente l'avantage de directement correspondre à un Reserve Factor³ (RF), tel qu'utilisé par les industriels :

$$\lambda_{cr} = \min_{m,n}(\lambda) \quad (IV-5)$$

Dans la suite, lorsque c'est nécessaire pour la compréhension du texte, on note λ_{ortho} le facteur de flambement critique obtenu par l'une ou l'autre des expressions IV-3 et IV-4.

Remarque sur l'hypothèse d'orthotropie de flexion

De façon générale, il existe peu de stratifiés symétriques et orthotropes en flexion. Pourtant, cette hypothèse est largement employée et rarement vérifiée. On trouve dans [Nemeth 95] une condition de validité de l'hypothèse d'orthotropie selon laquelle l'influence des termes de couplages D_{16} et D_{26} sur le facteur critique de flambement est négligeable si $|\gamma| < 0,2$ et $|\delta| < 0,2$ (voire 0,1 pour des plaques très allongées), avec :

$$\gamma = \frac{D_{16}}{(D_{11}^3 D_{22})^{1/4}} \text{ et } \delta = \frac{D_{26}}{(D_{11} D_{22}^3)^{1/4}} \quad (IV-6)$$

L'auteur précise que ces couplages sont toujours préjudiciables à la résistance des stratifiés au flambement, sauf dans le cas de chargements comprenant une composante de cisaillement. Dans ce cas les couplages dissymétrisent le comportement du stratifié selon le signe du cisaillement, en augmentant le facteur critique de flambement dans un cas et en le diminuant dans l'autre. Nous revenons sur ce point par la suite et l'illustrons par nos calculs sur la Figure IV-7.

IV.2.1.b Résolution du cas général par la méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz (RR) est une méthode variationnelle efficace pour l'obtention de solutions approchées du problème de flambement sous sa formulation énergétique. Celle-ci est basée sur le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire, selon lequel le système est à l'équilibre lorsque son énergie potentielle totale est extrémale (en statique).

De façon générale, pour une plaque plane rectangulaire constituée d'un stratifié symétrique, soumise dans son plan à un chargement uniforme (N_x, N_y, N_{xy}) et à des conditions aux limites quelconques, l'énergie potentielle totale s'écrit, sous une hypothèse de flexion pure :

$$U = U_d - W_m \quad (IV-7)$$

où l'énergie de déformation U_d a pour expression :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (IV-8)$$

et le travail W_m des actions de membrane :

³ Quel que soit le critère considéré : $RF = (\text{valeur admissible})/(\text{valeur à charge extrême})$, d'où l'expression de la marge : $Marge = RF-1$, en %.

$$W_m = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left(N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (IV-9)$$

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à rechercher une solution approchée au problème variationnel :

$$\delta U = 0 \quad (IV-10)$$

sous la forme d'une combinaison linéaire de *fonctions de coordonnées* choisies de manière à constituer une base fonctionnelle et vérifier les conditions aux limites. Le plus souvent, on utilise une série double à variables séparées :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (IV-11)$$

où les coefficients a_{mn} , à déterminer, sont les *coordonnées généralisées* (les degrés de libertés) du système. Par exemple, pour une plaque simplement appuyée sur ses quatre bords, les fonctions de coordonnées suivantes conviennent :

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{ et } Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (IV-12)$$

L'association des expressions IV-7 à IV-10, dans laquelle on remplace l'équation IV-11, aboutit à un système linéaire de $M \times N$ équations en a_{mn} , dont les solutions non nulles sont obtenues en annulant le déterminant de la matrice des coefficients des a_{mn} . Cette condition fournit une équation aux valeurs propres λ dont la plus petite valeur positive correspond au facteur critique λ_{cr} (noté λ_{RR} dans la suite).

IV.2.2 ANALYSE DU FLAMBEMENT PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Par rapport aux méthodes analytiques, le calcul EF présente l'avantage d'autoriser n'importe quelle géométrie, sans restriction sur les conditions aux limites ou les empilements. Néanmoins, les coûts de calcul restreignent rapidement ces libertés. D'autre part, les codes de calcul offrent de nombreuses façons de réaliser les simulations pour prévoir les charges de flambement (calculs linéaires ou non, type d'éléments, etc.). Cependant, à notre connaissance, on ne trouve que peu d'informations sur la comparaison des résultats obtenus par ces différentes méthodes ou sur les précautions nécessaires.

Une première approche, très similaire à la méthode de Ritz, consiste à calculer les valeurs propres de la matrice de rigidité assemblée du problème linéaire. C'est cette méthode que l'on retient ici, car elle présente l'avantage d'être rapide, puisque basée sur un calcul linéaire. Les valeurs propres renseignent sur les forces critiques correspondant aux modes de flambement possibles. Les vecteurs propres associés déterminent les modes de flambement (déformées post-flambées). Il est ainsi possible de déterminer simultanément plusieurs modes de flambement, et pas uniquement le mode critique. Une deuxième approche consiste à déterminer, par un calcul non-linéaire, l'instant où la matrice tangente de rigidité devient singulière (bifurcation possible) pour estimer la force critique de flambement. Dans le cas des structures symétriques, il faut alors introduire une petite perturbation dans le calcul pour déclencher le flambement et identifier le mode correspondant (chemin post-flambé). La méthode la plus simple consiste à introduire une petite force ponctuelle dans le calcul. Cette méthode suppose de présupposer du mode de flambement, ce qui requiert une certaine expertise. Alternativement, il est envisageable de dissymétriser le calcul dès l'instant initial en introduisant une légère variabilité des propriétés matériau ou de la géométrie (*approche stochastique*

du flambement [Laurin 0]). Il est enfin possible de déterminer le mode critique de flambement par une analyse aux valeurs propres et d'utiliser la déformée correspondante afin de passer sur le chemin post-flambé.

On utilise ici le code de calcul EF Samcef (modules Asef et Stabi) pour les calculs de flambement. Le modèle est constitué de coques Mindlin multicouches (lorsque nécessaire, on note dans la suite λ_{MD} les facteurs de flambement obtenus par ce modèle). Les conditions aux limites employées sont illustrées sur la Figure IV-3 dans le cas du maillage coque. Les conditions d'appuis simples sont introduites en bloquant les déplacements hors plan w_0 sur les quatre bords de la plaque. Les déplacements plans (u_0 et v_0) du nœud central sont bloqués afin d'interdire les translations d'ensemble. Le dernier déplacement de corps rigide, la rotation autour de l'axe normal, est imposé en bloquant les déplacements transverses v_0 et la rotation r_z autour de z pour les nœuds de l'axe longitudinal passant par le nœud central.

IV.2.3 REMARQUES SUR L'APPROXIMATION DE LA FORCE CRITIQUE DE FLAMBEMENT

Afin de réduire les coûts de calcul, il est courant d'avoir recours à des techniques d'approximation des modèles, basées sur l'usage de métamodèles (surfaces de réponse polynomiales, kriging, réseaux de neurones, etc.). Quelle que soit la technique retenue, la construction du métamodèle est d'autant plus complexe que le nombre de variables est grand et que les relations entre ces variables et les sorties attendues sont non-linéaires. De ce point de vue, approximer un facteur de flambement critique pour des stratifiés de plusieurs dizaines de plis constitue un exercice très délicat.

Il est pourtant possible de simplifier considérablement l'exercice en raisonnant à partir des modules de rigidités. Dans le cas d'une plaque stratifiée symétrique, le Tableau IV-1 montre que le nombre de plis N (directement proportionnel à l'épaisseur du stratifié), l'orientations des plis et leur ordre d'empilement influent sur le facteur critique de flambement uniquement par l'intermédiaire des quatre modules de rigidité de flexion D_{ij} . Ce premier constat permet d'alléger singulièrement le coût de l'identification d'un métamodèle.

Le second constat tient à la nature du facteur critique de flambement. L'essentiel de sa non-linéarité réside dans l'expression IV-5 où le facteur critique est défini comme le minimum des valeurs des facteurs associés aux différents modes de flambement. Au lieu de chercher à directement identifier une approximation du facteur critique λ_{cr} , il est possible, et souvent préférable, de construire un métamodèle scalaire pour chacun des modes de flambement potentiellement critiques dont on retient le minimum dans un second temps. Par exemple, dans le cas simplifié du flambement d'une plaque orthotrope, en injectant l'équation II-3 dans l'expression IV-4, on montre que le facteur de flambement λ est une simple fonction affine des modules D_{11} et D_{22} (voir Figure IV-2).

Au final, dans le cas du flambement d'une plaque orthotrope, le raisonnement mécanique permet de ramener le problème de l'identification d'un métamodèle à N variables pour une grandeur non-linéaire, à celui de l'identification de plusieurs métamodèles à deux variables pour des grandeurs linéaires. Pour ce faire, le calcul de trois stratifiés suffit. En pratique, on étend cette méthodologie avec succès aux autres modèles de flambement. Les problèmes de rupture basés sur l'usage de multicritères peuvent aussi être traités de la sorte, pli par pli, mode par mode, voire même directement à partir des champs de contraintes mésoscopiques. Dans la plupart des cas, les modes pris séparément constituent des fonctions linéaires ou quadratiques des modules de rigidité.

Certes, ce qui paraît simple dans le cas des solutions IV-3 et IV-4 peut devenir très délicat avec des modèles plus détaillées ou des structures complexes pour lesquelles identifier les modes s'avère problématique. Néanmoins, savoir que dans les cas complexes, la réponse est susceptible d'être décomposée par morceau en surfaces plus régulières, constitue une information précieuse. Si

l'analyse mécanique ne suffit pas à différencier efficacement les modes, il est envisageable d'utiliser des outils mathématiques de classification pour ce faire (ce point est repris au Chapitre VI).

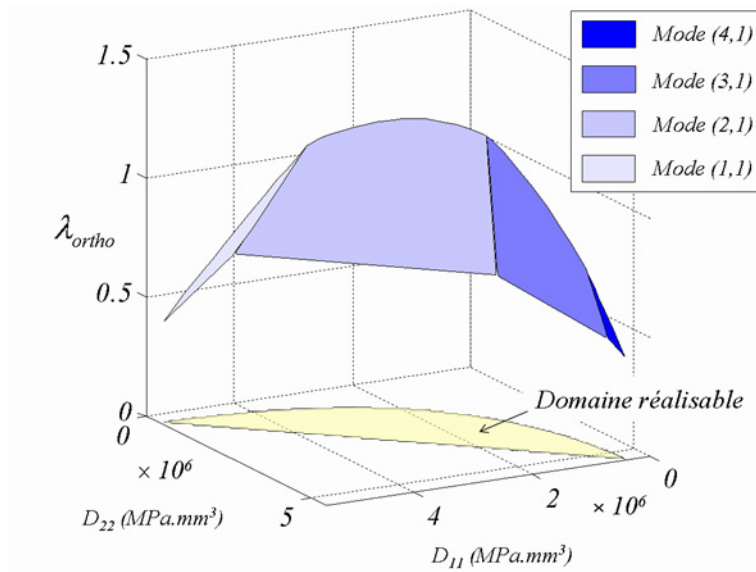


Figure IV-2 : Reprise du premier cas-test du Chapitre II dans le cas du chargement $N_x = -1500 \text{ N/mm}$. Le mode critique correspond au mode dont le facteur de flambement est minimal en chaque point du domaine réalisable du plan (D_{11} , D_{22}). Chaque mode correspond à un plan dans la visualisation de droite.

IV.3 COMPARAISONS DES MODELES

IV.3.1 VALIDATION DES MODELES DANS LE CAS ORTHOTROPE

Dans les hypothèses de la CLT, l'expression IV-3 constitue une solution exacte du problème du flambement en compression biaxiale d'une plaque plane rectangulaire symétrique orthotrope, parfaitement équivalente à la solution Rayleigh-Ritz. On utilise donc cette solution comme référence pour s'assurer de la convergence au maillage des calculs EF.

Pour ce faire, on base notre étude sur le cas d'une plaque carrée de 500 mm de côté, simplement appuyée sur ses quatre bords, avec un empilement symétrique $[0/90]_s$ orthotrope en flexion, carbone / époxy, et soumise à un effort de compression longitudinale $N_x = -1$ N/mm. Le modèle de référence retourne les facteurs de flambement suivants pour les cinq premiers modes :

$$\text{mode } (1,1) : \lambda = 0,53$$

$$\text{mode } (2,1) : \lambda = 1,58$$

$$\text{mode } (1,2) : \lambda = 1,97$$

$$\text{mode } (2,2) : \lambda = 2,13$$

$$\text{mode } (3,1) : \lambda = 3,41$$

La Figure IV-3 présente un exemple des résultats de convergence obtenus dans le cas du modèle de coques de Mindlin. Les dimensions de la plaque sont volontairement très grandes afin de gommer les éventuels effets de bords susceptibles de fausser la comparaison avec les résultats analytiques de référence. Dans la mesure où la convergence sur le mode critique est très rapidement atteinte, on pousse l'étude jusqu'au cinquième mode afin de se garantir éventuellement de cas plus défavorables. Au final, le maillage retenu comporte quarante éléments par côté et résulte d'un compromis entre précision des résultats et coûts de calcul. De façon générale, dans toute la suite, une attention particulière est accordée à la bonne convergence des résultats présentés.

On propose en Figure IV-4 un exemple de vérification de la correspondance des modes critiques entre les différents modèles. La figure présente quatre déformées de flambement. En haut, les déformées obtenues dans les conditions de la Figure IV-3, par le modèle coque, à gauche, et la méthode de Rayleigh-Ritz, à droite. En bas, les déformées obtenues par les mêmes modèles dans le cas de l'empilement $[90/0]_s$. Dans les deux cas, les modèles sont en parfait accord. Cet exemple illustre en outre l'influence majeure de l'ordre d'empilement des plis sur le flambement de la plaque stratifiée. Dans ce cas, pourtant élémentaire, une simple inversion de pli entraîne un changement de mode et un fort abattement du facteur critique associé.

IV.3.2 CONSEQUENCES DES HYPOTHESES

Dans ce paragraphe, on cherche à mettre en évidence sur quelques exemples choisis les différences dans les prévisions des différents modèles, en relation avec leurs hypothèses respectives. D'ores et déjà, on sait que l'expression analytique IV-4 est approximative dans le cas de stratifiés ne vérifiant pas l'hypothèse d'orthotropie de flexion, ainsi que dans le cas de chargement comprenant une composante de cisaillement non nulle. Il faut donc changer de solution de référence. Dans la suite, on utilise les résultats obtenus par la méthode de Rayleigh-Ritz comme référence de comparaison.

La Figure IV-5 illustre les comparaisons effectuées dans le cas d'un chargement de compression longitudinale. Les résultats obtenus par les différents modèles se correspondent exactement pour le stratifié orthotrope $[0/90]_s$. Pour le stratifié quasi-isotrope $[0/45/90/-45]_s$, le modèle Mindlin et la solution de Rayleigh-Ritz restent en très bon accord. Toutefois ce stratifié ne

vérifie plus l'hypothèse d'orthotropie de flexion. Bien que les termes de couplage restent relativement faibles ($\gamma=0,12$ et $\delta=0,2$), la solution λ_{ortho} s'écarte sensiblement de la référence (environ + 5 %).

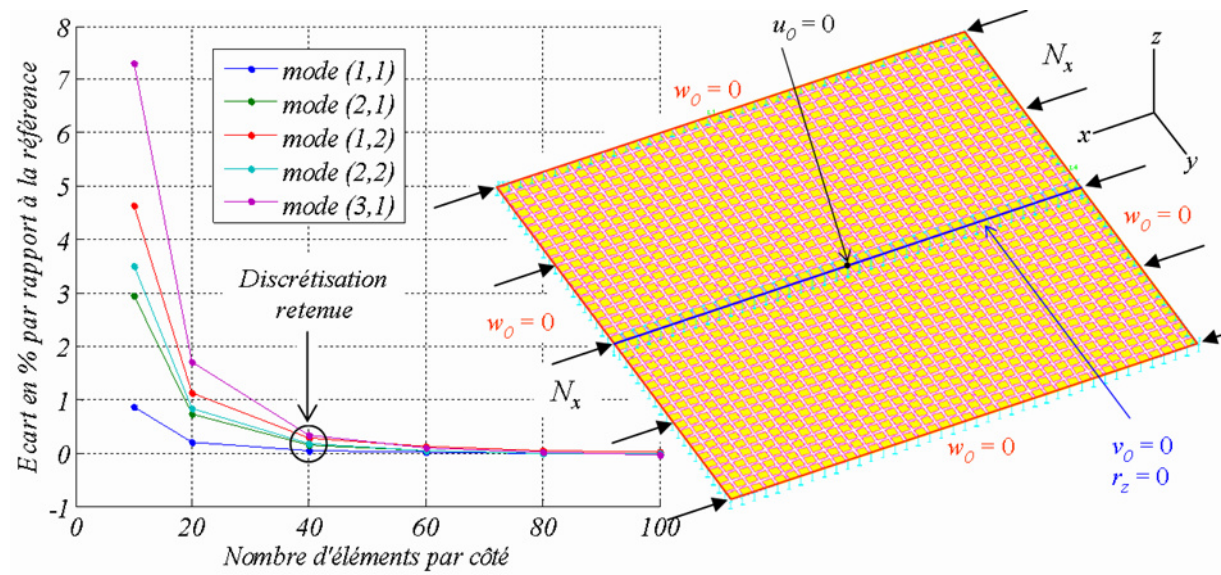


Figure IV-3 : A gauche : résultats de l'étude de convergence au maillage pour le modèle coque Mindlin. La convergence est évaluée sur les cinq premiers modes de flambement. A droite : les conditions aux limites employées. La plaque est appuyée sur ses quatre bords et sollicitée en compression selon l'axe x. Sur la figure, u_0 , v_0 et w_0 correspondent respectivement aux déplacements du feuillet moyen selon les axes x, y et z. La rotation autour de l'axe z est notée r_z .

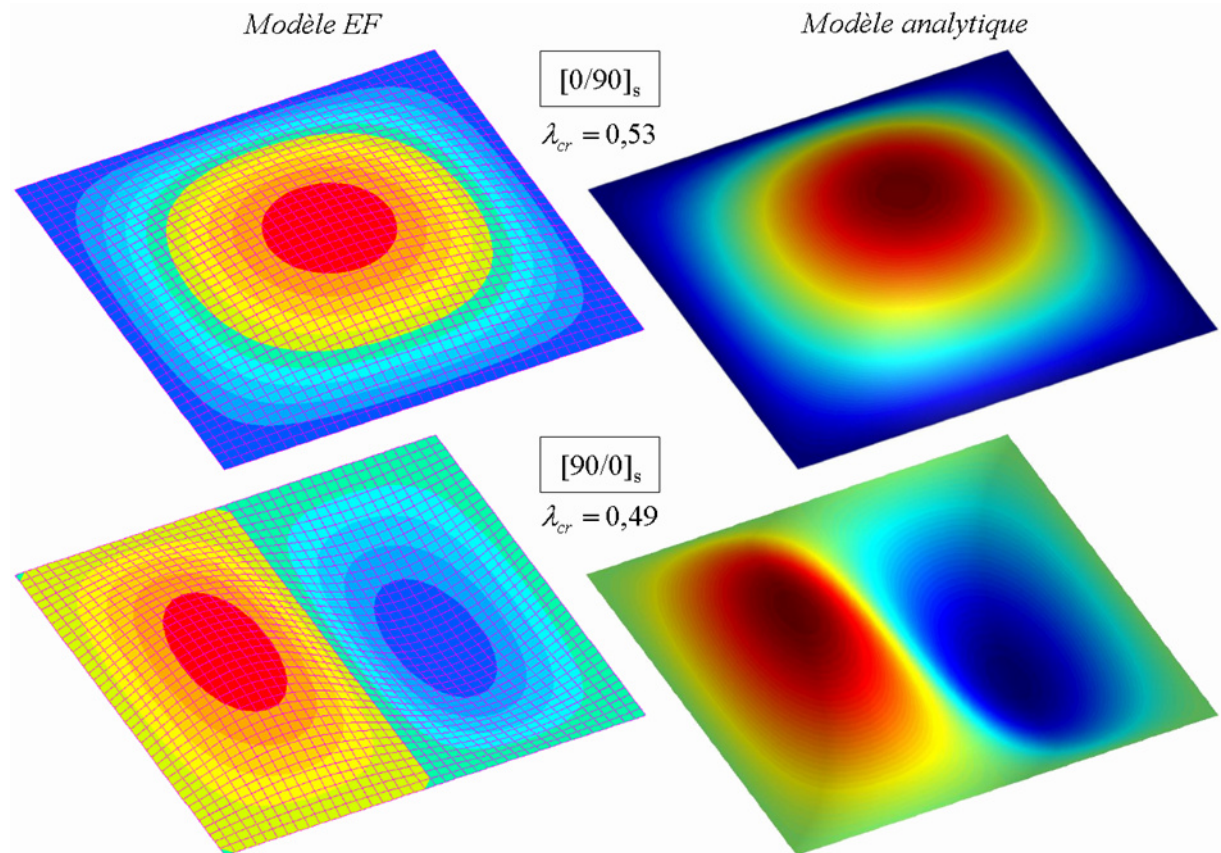


Figure IV-4 : Visualisation des déformées associées aux modes de flambement critiques. A gauche, les déformées obtenues dans Samcef. A droite, les déformées obtenues analytiquement.

On vérifie que quel que soit le modèle employé, les résultats obtenus pour la compression biaxiale se déduisent, avec une bonne précision, du cas de compression uniaxiale par un facteur de proportionnalité. Par exemple pour une plaque carrée, le facteur critique de flambement associé au chargement $N_x = N_y = -1 \text{ N/mm}$ est égal à la moitié du facteur critique de flambement associé au chargement $N_x = -1 \text{ N/mm}$. On ne s'attarde donc pas ici sur ce cas.

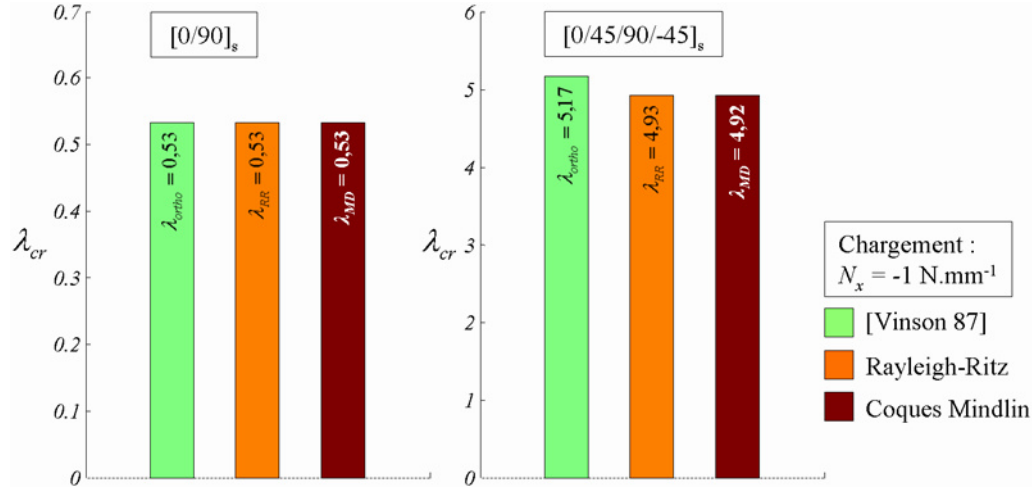


Figure IV-5 : Comparaison des facteurs critiques obtenus par les différents modèles dans le cas d'une plaque stratifiée carrée de 500 mm de côté, simplement appuyée sur ses quatre bords, en compression uniaxiale.

Dans le cas d'un chargement de cisaillement pur, on continue à s'intéresser à l'empilement quasi-isotrope, très couramment employé. Par contre, le stratifié croisé $[0/90]_s$ ne permet plus de comparaison pertinente. En effet, dans le cas de panneaux sollicités en cisaillement, l'usage consiste plutôt à augmenter la proportion de plis orientés à $\pm 45^\circ$ à partir d'une base quasi-isotrope. On préfère donc, pour les besoins de nos comparaisons, un empilement $[45/-45]_s$ afin d'exacerber les phénomènes, et un empilement $[45_2/90/(-45)_2/0]_s$ plus proche d'une configuration réaliste.

Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure IV-6. Ici encore, le modèle EF Mindlin et la solution de Rayleigh-Ritz sont en très bon accord. Les prévisions du modèle analytique orthotrope s'avèrent logiquement très approximatives. Au final, la méthode de Rayleigh-Ritz et les modèles de coques Mindlin sont en très bon accord, ce qui semble valider l'usage de ce type d'éléments.

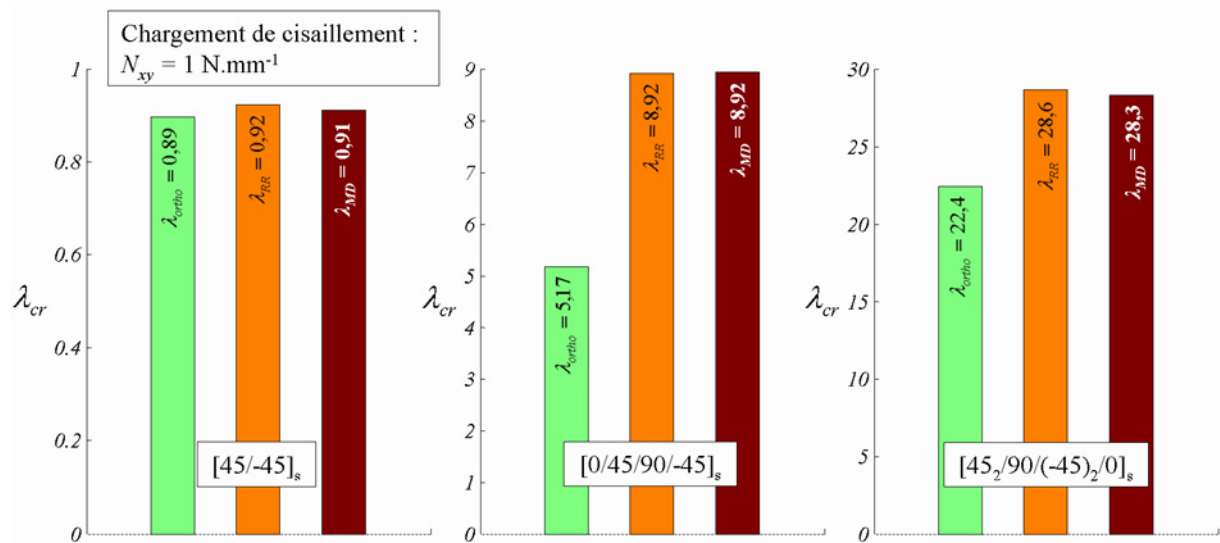


Figure IV-6 : Comparaison des facteurs critiques obtenus par les différents modèles dans le cas d'une plaque stratifiée carrée de 500 mm de côté, simplement appuyée sur ses quatre bords, en cisaillement.

Même si ce n'est pas le cas pour les exemples précédents, il peut arriver que les modèles prévoient des modes critiques différents. Ces inversions sont fréquentes à proximité d'une zone de transition de mode (voir Figure IV-2 pour la représentation de ces transitions à partir du modèle orthotrope). Par exemple, pour une plaque rectangulaire $[(90_2/-45)_2/0/-45/(0_2/45)_2/45/90]_s$, de rapport $R = a/b = 2$, et sollicitée en compression N_x , l'hypothèse d'orthotropie induit une inversion des deux premiers modes (Tableau IV-2) :

Solution analytique orthotrope		Solution de Rayleigh-Ritz	
mode (2,1)	$N_{cr} = 1311 \text{ N/mm}$	mode (3,1)	$N_{cr} = 1267 \text{ N/mm}$
mode (3,1)	$N_{cr} = 1320 \text{ N/mm}$	mode (2,1)	$N_{cr} = 1270 \text{ N/mm}$

Tableau IV-2 : Un exemple d'inversion de modes liée aux hypothèses des modèles.

Des comparaisons plus exhaustives entre la solution de Rayleigh-Ritz et le modèle orthotrope mettent en évidence que l'hypothèse d'orthotropie des stratifiés en flexion est une hypothèse forte, ce qui peut être vu comme une critique de certaines publications d'optimisation composite. La Figure IV-7 présente les résultats obtenus pour une plaque de 30 plis, simplement appuyée sur ses quatre bords, de dimensions 1000×500 mm. Dans le cas d'une sollicitation de compression selon l'axe x , on vérifie bien que la solution orthotrope est toujours supérieure à la solution de Rayleigh-Ritz, avec un écart maximal de l'ordre de 20 %. L'écart est fonction des termes de couplage flexion / torsion qui contribuent ainsi à réduire la tenue au flambement. L'écart reste inférieur à 5 % dans les limites proposées par Nemeth ($|\gamma| < 0,2$ et $|\delta| < 0,2$). Dans le cas d'une sollicitation de cisaillement, on vérifie que les termes de couplage induisent une dissymétrie de comportement en fonction du signe du cisaillement. Les écarts sont ici particulièrement importants mais on sait que l'expression IV-4 est approximative pour les chargements présentant une composante de cisaillement non nulle.

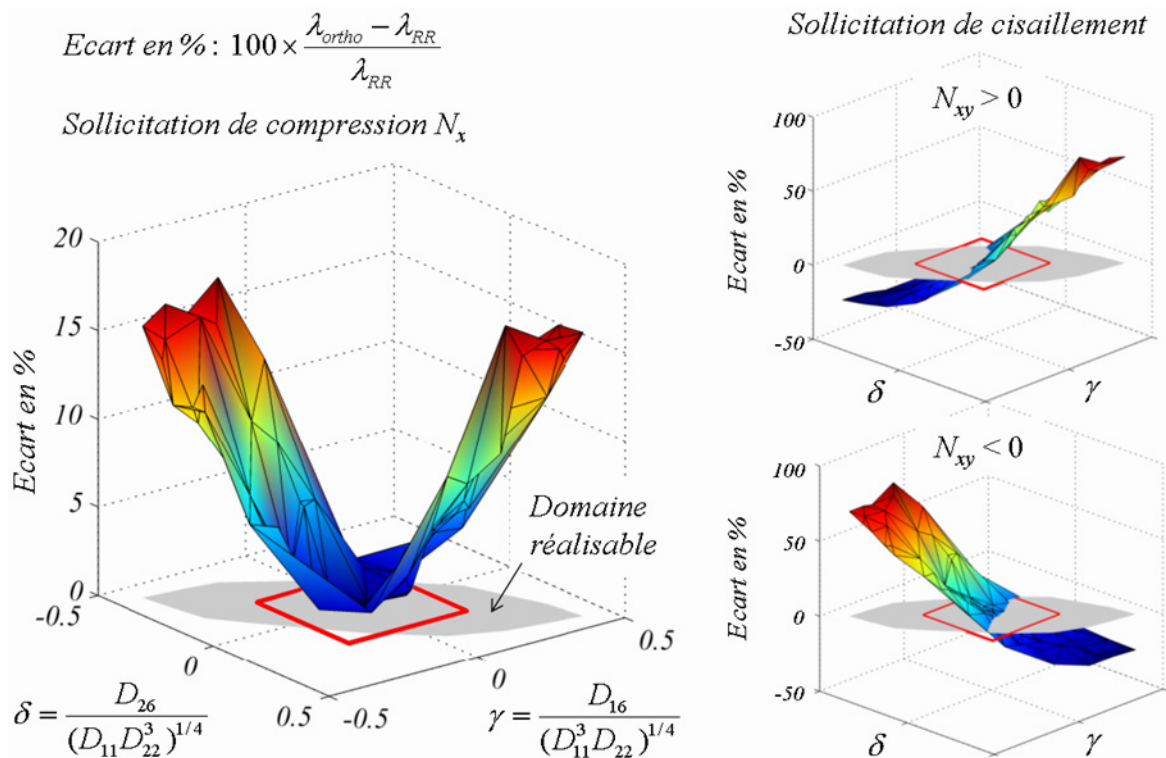


Figure IV-7 : représentation des écarts entre la solution orthotrope et la solution de Ritz dans le plan des paramètres γ et δ . Les points de calcul correspondent aux sommets de la triangulation.

IV.3.3 UN CALCUL DE VALIDATION SUR UNE STRUCTURE COMPLEXE

On s'applique ici à la prévision du flambement et de l'effondrement en régime post-flambé d'un panneau raidi. Afin de vérifier les capacités de prévision du modèle EF, on travaille sur un panneau pour lequel des résultats expérimentaux sont disponibles. Il s'agit d'un panneau renforcé par quatre raidisseurs en T, réalisé en T800/924C, décrit dans [Falzon 00]. Dans cet article, deux exemplaires de ce panneau sont testés en compression longitudinale jusqu'à rupture. Les forces de flambement mesurées sont de 110 kN et 105 kN et les forces d'effondrement de 573 kN et 601 kN respectivement.

Nous modélisons le panneau dans Samcef avec des éléments coques Mindlin multicouches. Le modèle de comportement matériau employé est élastique linéaire. La force critique de flambement est calculée à l'aide des modules Asef et Stabi. Le module Mecano est nécessaire pour le calcul non-linéaire du comportement post-flambé. On utilise le chaînage des trois modules Asef (pour l'assemblage de la matrice de rigidité), Stabi (pour la résolution du problème aux valeurs propres) et Mecano (pour le calcul non-linéaire). La déformée associée au mode de flambement critique retourné par Stabi est injectée en tant que petite perturbation initiale dans Mecano afin de provoquer le flambement de la structure. En pratique, le flambement du panneau considéré est déclenché par sa géométrie, de telle sorte que le chaînage n'est pas indispensable (contrairement au cas d'une structure parfaitement symétrique). Il contribue toutefois à réduire les problèmes de convergence au moment de l'apparition des premiers pivots nuls dans le calcul non-linéaire.

Le calcul Asef est piloté en force et le calcul Mecano en déplacement afin de simuler l'effondrement du panneau. Expérimentalement, les deux extrémités du panneau sont prises dans des rails (voir Figure IV-9). Ce montage permet d'appliquer un déplacement uniforme (à la peau et aux raidisseurs) dans l'axe longitudinal et de bloquer les rotations sans pour autant contrarier les déplacements transverses liés aux effets de Poisson. Les autres bords du panneau sont libres. Afin de reproduire numériquement ces conditions, les déplacements normaux et les rotations autour des axes y et z sont bloquées aux deux extrémités du panneau, ainsi que les déplacements longitudinaux de l'extrémité inférieure ($x = 0$). Au niveau de l'extrémité supérieure ($x = 728 \text{ mm}$), on impose que tous les nœuds aient le même déplacement longitudinal qu'un nœud maître (commande .LIA de Samcef) auquel on impose, soit un déplacement en x (Mecano), soit la résultante des efforts longitudinaux (Asef).

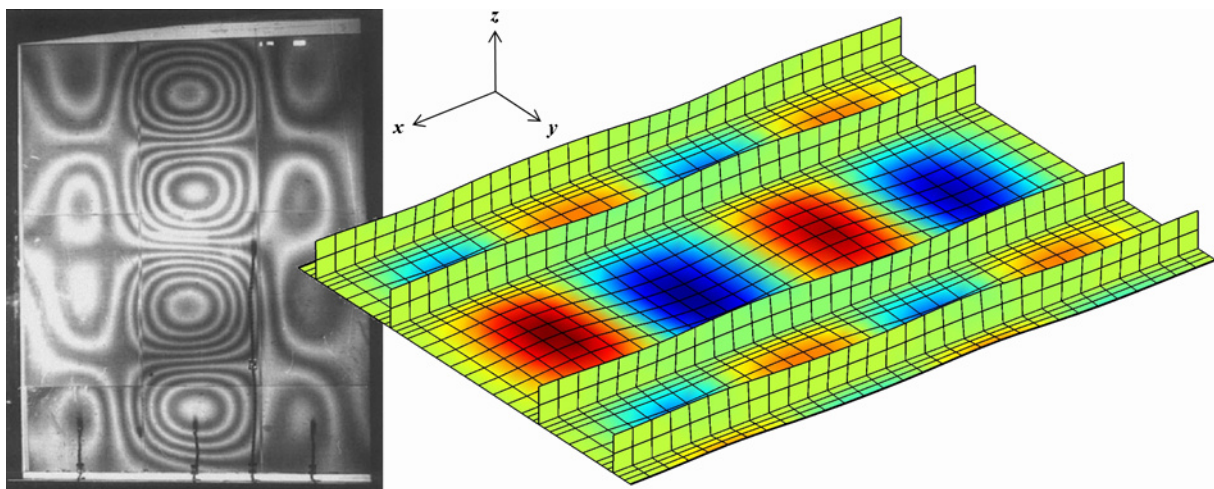


Figure IV-8 : A gauche : visualisation expérimentale, par franges de Moiré, de la déformée de flambement du panneau pour une charge de 300 kN (d'après [Falzon 00]). A droite : déformée obtenue par le calcul EF.

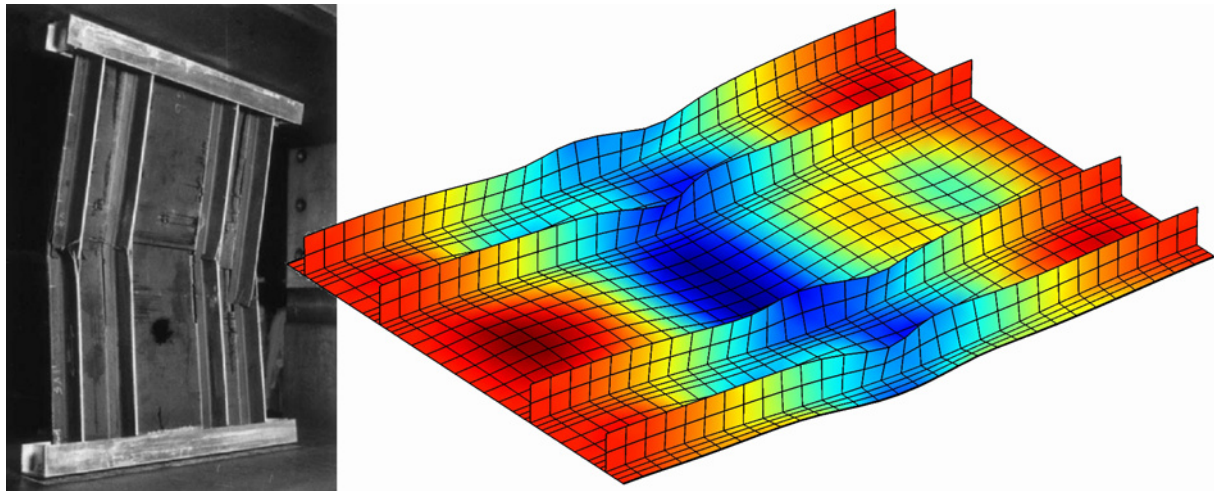


Figure IV-9 : A gauche : photographie du panneau rompu (d'après [Falzon 00]). A droite : déformée obtenue par le calcul EF à l'instant de l'effondrement du panneau.

Les résultats numériques obtenus, consignés dans le Tableau IV-3, sont en bon accord avec l'expérience. La force de flambement prévue est de 123 kN. Le mode de flambement correspond au mode expérimental (voir Figure IV-8). La force d'effondrement prévue est de 595 kN. L'effondrement du panneau est illustré sur la Figure IV-9. D'après le critère de Hashin en mode fibre (valeur au pli critique retournée par Samcef), la première rupture de fibre n'intervient qu'après l'effondrement du panneau.

Force critique	Résultats expérimentaux		Résultats de calcul
	Panneau 1	Panneau 2	
Flambement	110 kN	105 kN	123 kN
Effondrement	573 kN	601 kN	595 kN

Tableau IV-3 : Comparaison des résultats expérimentaux [Falzon 00] et des résultats de calcul.

IV.4 BILAN

Au final, on retient pour la suite le modèle EF avec des éléments de coque Mindlin. Ce type de modèle permet en effet à la fois de retrouver avec précision les solutions analytiques exactes pour le flambement d'une plaque rectangulaire, lorsqu'elles sont connues, et de résoudre des problèmes plus complexes, en flambement et post-flambement, comme dans le cas du panneau [Falzon 00].

L'hypothèse d'orthotropie des stratifiés, utilisée dans certains modèles analytiques, s'avère une hypothèse forte qu'il convient de vérifier. Dans le cas de stratifiés présentant de forts couplages, l'erreur sur le facteur critique de flambement peut ainsi atteindre les 20 %. La solution orthotrope n'est toutefois pas sans intérêt pour l'optimisation puisqu'elle capture l'influence des modules de flexion longitudinale et transverse, prépondérante par rapport à l'influence des modules de couplage.

Des comparaisons plus exhaustives avec d'autres modèles EF, basés sur des éléments multicouches volumiques, ont été entreprises, dont les résultats nous ont semblés sujets à caution et ne sont pas présentés ici. Le flambage est très sensible aux conditions aux limites et il s'avère difficile de reproduire des conditions strictement équivalentes entre le calcul de coque et calcul volumique. De façon générale, les éléments de coque nous semblent tout de même constituer le meilleur compromis entre précision des résultats et coûts de calculs. Dans l'industrie aéronautique, qui dispose d'un solide savoir-faire pour les calculs de flambement de panneaux, c'est ce type d'éléments qui est employé.

Chapitre V Exemples d'applications

Sommaire

V.1	Description du problème d'optimisation d'un panneau raidi	126
V.1.1	Configuration nominale.....	126
V.1.2	Stratégie de calcul du flambement et du comportement post-flambé du panneau raidi	126
V.1.3	Formulation du problème d'optimisation.....	127
V.2	Optimisation séquentielle	128
V.2.1	Optimisation de l'empilement de la peau.....	128
V.2.2	Optimisation de l'empilement du raidisseur	132
V.2.3	Approche duale : optimisations successives du raidisseur et de la peau	133
V.3	Optimisation simultanée	135
V.3.1	Adaptation de l'algorithme évolutionnaire.....	136
V.3.2	Première optimisation simultanée (discrétisation angulaire de 45°)	136
V.3.3	Seconde optimisation simultanée (discrétisation angulaire de 15°).....	140
V.4	Synthèse et discussion	141
V.4.1	Comparaison des approches séquentielles et simultanées	143
V.4.2	Précautions et recommandation pour l'usage de métamodèles	146

Ce chapitre a pour objectif de montrer la faisabilité et l'efficacité de la méthode proposée en première partie de ce mémoire pour l'optimisation des empilements d'une structure complexe. Deux stratégies d'application sont mises en œuvre. On se place dans un contexte d'optimisation idéalisé, sans remise en cause des modèles employés et sans prise en compte des incertitudes. L'usage de métamodèles, dans le souci de réduire les temps de calcul, rend toutefois nécessaire l'estimation des erreurs d'approximation, entre le modèle EF, supposé parfait, et son approximation.

Forts des résultats obtenus au chapitre précédent, nous reprenons l'exemple du panneau raidi, pour lequel la simulation donne des résultats satisfaisants par rapport à l'expérience. Nous nous proposons ici de jouer sur les empilements de la peau et des raidisseurs afin d'améliorer les performances globales de la structure par rapport à la configuration proposée par [Falzon 00], qui fait appel à des empilements standards. Cet exemple d'application permet donc, en outre, de montrer les gains potentiels offerts par l'optimisation des empilements.

V.1 DESCRIPTION DU PROBLEME D'OPTIMISATION D'UN PANNEAU RAIDI

V.1.1 CONFIGURATION NOMINALE

La configuration nominale retenue correspond au panneau décrit dans [Falzon 00]. Les conditions aux limites sont inchangées. Dans cette configuration, les empilements de la peau et de l'âme des raidisseurs (l'empilement des semelles correspond simplement à la moitié de celui de l'âme) sont récapitulés sur la Figure V-1. L'empilement de la peau (*skin*) est symétrique et équilibré à vingt-deux plis, celui de l'âme du raidisseur (*web*), symétrique et équilibré à trente plis :

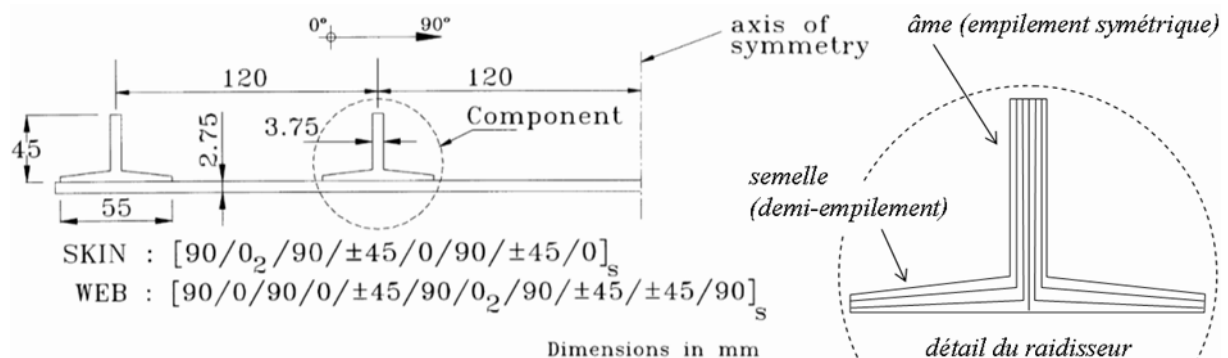


Figure V-1 : Dimensions du demi-panneau et empilements de la peau et des raidisseurs. La longueur totale est de 728 mm. D'après [Falzon 00].

V.1.2 STRATEGIE DE CALCUL DU FLAMBEMENT ET DU COMPORTEMENT POST-FLAMBE DU PANNEAU RAIDI

Le modèle Samcef utilisé pour l'évaluation des solutions est globalement identique à celui employé pour le calcul du panneau nominal dans le chapitre précédent (Cf. IV.3.3). Toutefois, jouer de façon systématique sur les empilements exacerbe les difficultés de convergence pour le calcul non-linéaire. Afin d'obtenir des résultats exploitables pour toutes les configurations, sans ajustement au cas par cas des paramètres de calcul, il s'avère nécessaire de raffiner à la fois le maillage (voir Figure V-2) et l'incrémentation par rapport au calcul nominal (certaines configurations présentent des comportements post-flambés très différents de la configuration nominale).

La force critique de flambement est directement récupérée dans le fichier résultat créé par Stabi (en pratique, le facteur critique de flambement pour une sollicitation unitaire de compression longitudinale). Les calculs Mecano sont post-traités carte par carte afin de générer des fichiers ASCII contenant effort de réaction globale du panneau et valeur maximale du critère de rupture de Hashin

en mode fibre, dans chaque élément. Dans un deuxième temps, ces fichiers sont chargés dans Matlab pour suivre l'évolution des grandeurs concernées et en extraire les valeurs des contraintes et objectifs de l'optimisation. Avec cette stratégie de calcul, le temps nécessaire à l'évaluation d'un panneau (calcul Samcef et post-traitements Samcef et Matlab) est de l'ordre de l'heure (ce temps de calcul pourrait être réduit si le post-traitement était entièrement réalisé dans Samcef). Les performances de la configuration nominale, calculées de la sorte sont les suivantes¹ :

$$\text{charge de flambement} : F_{flamb}^0 = 123 \text{ kN}$$

$$\text{charge d'effondrement} : F_{eff}^0 = 595 \text{ kN}$$

$$\text{marge à rupture à } F_{eff}^0 : M_r^0 = 4,3 \%$$

Le panneau nominal est dimensionné de telle sorte que son effondrement intervienne avant la rupture matériau. Néanmoins, la marge est faible et, en modifiant les empilements du panneau, il est probable de rencontrer des configurations pour lesquelles c'est la rupture du matériau (dans des modes catastrophiques, ici, c'est la rupture en mode fibre que l'on considère) qui entraîne la ruine du panneau. En pratique, on s'intéresse à la force de ruine du panneau, définie comme le minimum des forces d'effondrement et de rupture matériau :

$$F_r = \min(F_{eff}, F_{rupt}) \tag{V-1}$$

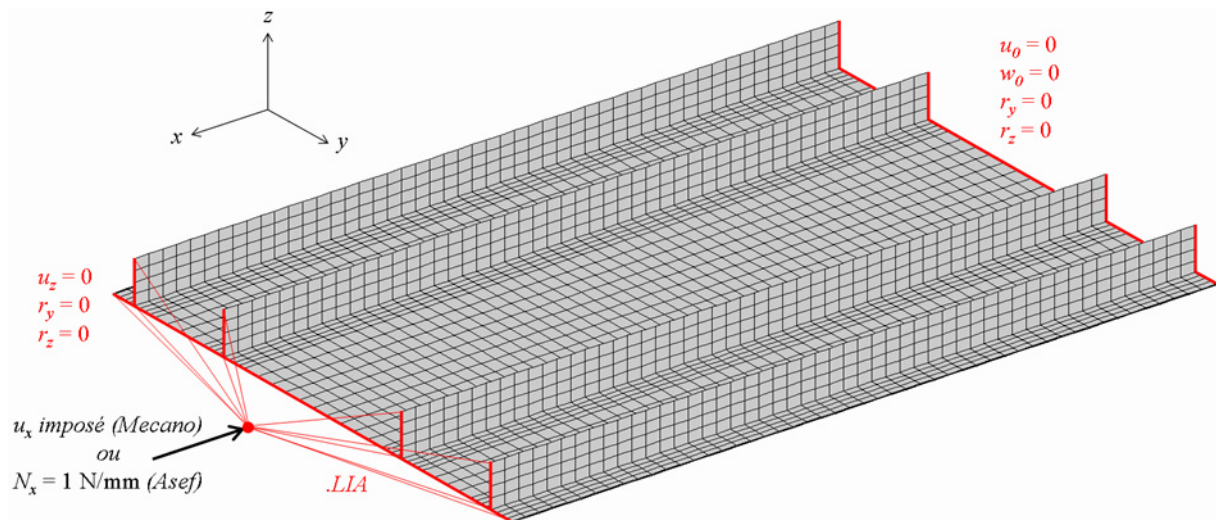


Figure V-2 : Maillage et conditions aux limites pour le modèle Samcef du panneau raidi.

V.1.3 FORMULATION DU PROBLEME D'OPTIMISATION

Dans l'optique d'améliorer les performances du panneau nominal, nous définissons le problème d'optimisation multiobjectif suivant :

- **variables** : les orientations de plis dans les empilements de la peau et du raidisseur,
- **objectifs** : maximiser $f_1 = F_{flamb} / F_{flamb}^0$ et $f_2 = F_r / F_r^0$,
- **contraintes de dimensionnement** : $f_1 > 1$ et $f_2 > 1$,
- **règles de conception des empilements** : symétrie, équilibre, groupage, désorientation, 10 % et tolérance aux dommages.

¹ La marge à rupture à l'instant de l'effondrement, exprimée en %, est définie, par rapport au critère de rupture, de la façon suivante : $100 \times (\text{valeur admissible du critère} / \text{valeur à l'instant de l'effondrement} - 1)$

L'épaisseur du pli étant de 0,125 mm, la limite de groupage est fixée à quatre plis contigus de même orientation. La règle de battage étant contraire à l'optimisation en flambement, elle n'est pas prise en compte à ce stade (elle est reprise par la suite, dans une version affaiblie, pour le post-traitement des résultats de l'optimisation multiobjectif). Dans un premier temps, le pas de discrétisation des orientations de plis est fixé à 45°, en conformité avec l'usage courant. La géométrie du panneau et le nombre de plis sont fixés.

V.2 OPTIMISATION SEQUENTIELLE

Une spécificité du problème consiste à optimiser deux empilements différents, un pour la peau et un pour le raidisseur. Ces deux jeux de variables sont indépendants, mais influent conjointement sur les objectifs du problème. L'approche séquentielle (voir Figure V-3) consiste à décomposer le problème pour travailler successivement sur l'un de ces jeux (ici, l'empilement de la peau), puis sur l'autre (l'empilement du raidisseur). Dans la première étape, l'empilement du raidisseur est fixé à sa configuration nominale. Dans la seconde étape, l'empilement de la peau est choisi parmi les solutions optimales issues de la première étape. Ce choix nécessite l'intervention du décideur : il s'agit là d'une stratégie d'optimisation interactive. Ici, le choix est effectué selon un critère de post traitement, correspondant à une version affaiblie et adaptée à l'optimisation en flambement de la règle de battage, consistant à minimiser les termes de couplage entre flexion et torsion de la peau. Remarquons que ce processus d'optimisation aboutit au final à un empilement \mathbf{x}_p pour la peau et une famille de solutions \mathbf{X}_r pour le raidisseur.

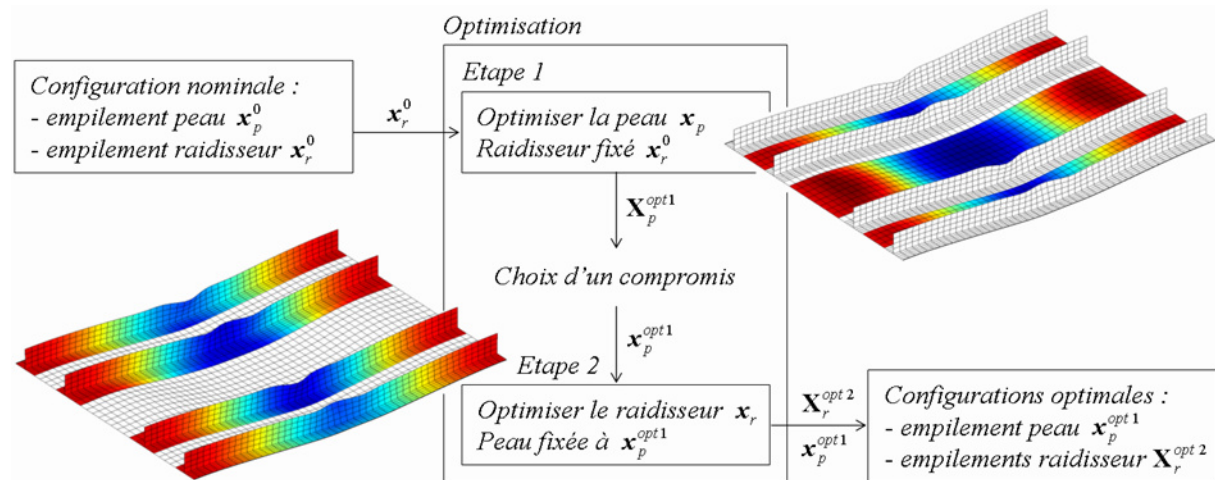


Figure V-3 : Schéma de principe de l'approche séquentielle.

V.2.1 OPTIMISATION DE L'EMPILEMENT DE LA PEAU

Par rapport aux cas-tests analytiques étudiés dans la première partie de ce mémoire, la principale difficulté provient des coûts de calcul. Dans les cas-tests analytiques, le temps de calcul total pour un processus d'optimisation comprenant 3000 évaluations des fonctions objectifs est d'environ cinq minutes sur un ordinateur portable. Ici, le temps de calcul total avoisinerait les 125 jours, quasi-exclusivement consacrés à l'évaluation des solutions, sur un PC dédié au calcul. Tabler sur l'efficacité de l'algorithme d'optimisation pour réduire le nombre d'évaluations nécessaires est insuffisant pour revenir à des temps de calcul raisonnables. La clé du problème réside dans l'usage de métamodèles.

V.2.1.a Identification des métamodèles

Un métamodèle scalaire est identifié pour chaque objectif. La peau étant constituée d'un empilement symétrique de 22 plis $[\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_{11}]_s$, ce sont *a priori* 11 variables d'empilements dont il faut tenir compte pour le métamodèle. En pratique, leur influence sur le comportement global du panneau se condense au travers de cinq modules de rigidité faiblement corrélés : les modules A_{11} et A_{22} , pour le comportement de membrane, et les modules D_{11} , D_{22} et D_{16} , pour le comportement de flexion. En effet, dans le cas de stratifiés symétriques équilibrés avec un pas de discrétisation angulaire de 45° , les modules de couplage D_{16} et D_{26} sont égaux.

Remarquons que seule une faible portion de cet espace à cinq dimensions est réalisable. Les points extrêmes en sont connus, correspondant aux UD à 0° et 90° et au stratifié alterné $[(\pm 45)_5/0]_s$. Même si ces empilements présentent peu d'intérêt d'un point de vue de dimensionnement, car ils ne respectent pas les règles de conception, ils s'avèrent particulièrement intéressants pour identifier un métamodèle, ou en estimer la qualité, car ils permettent de contrôler l'approximation aux bornes du domaine réalisable. Outre ces trois points et la configuration nominale, qui respectent les seules règles d'équilibre et de symétrie, trente points de calcul supplémentaires sont utilisés pour l'identification des métamodèles, respectant l'ensemble voulu de règles de conception. Ceux-ci correspondant à la population initiale de l'AE, choisie selon l'approche Maximin proposée en II.2.2.b. Ce sont donc au total $N = 34$ points d'identification (calculs EF) dans un espace à cinq dimensions dont on dispose.

Approximation de la charge critique de flambement

En première approximation, un métamodèle est identifié directement sur la charge critique de flambement, sans distinction de modes (on revient sur ce point au Chapitre VI). On retient ici un kriging interpolant. La qualité du métamodèle est systématiquement vérifiée à l'aide de trois indicateurs différents.

Afin d'estimer l'erreur de généralisation du métamodèle, c'est-à-dire l'erreur commise hors des points d'identification, et ce, sans en rajouter de nouveaux, une méthode de validation croisée est employée. Ici, on procède par *leave-K-out*, avec $K = 3$ (soit environ 10 % des points d'identification). Cette méthode consiste à répéter l'identification du métamodèle sur des échantillons de $N-K$ points d'identification, obtenus par tirage sans remise, pour estimer ensuite l'erreur commise sur les points écartés de l'échantillon. Cette procédure est répétée M fois (ici $M = 30$) sur autant d'échantillons de $N-K$ points, choisis aléatoirement parmi les C_N^K échantillons possibles. Les résultats de la validation croisée sont présentés sur la Figure V-4. Dans ce cas, le métamodèle s'avère précis, sauf pour les points extrêmes. On a déjà souligné l'importance de ces points pour une bonne identification. Ils sont nécessaires et ne doivent pas être retirés de l'ensemble d'identification.

L'optimisation requière l'approximation globale des modèles. Une deuxième validation consiste à s'assurer que le métamodèle ne retourne de résultat absurde en aucun point réalisable de l'espace de décision. Pour ce faire, on s'appuie sur un ensemble de points choisis par l'approche Maximin, respectant les règles de symétrie, d'équilibre et pas de discrétisation de 45° . En pratique, cent points suffisent. L'ensemble obtenu est imbriqué avec celui des points d'identification et recouvre au mieux le domaine réalisable (et même un domaine plus large compte tenu des autres règles de conception imposées en V.1.3). Le métamodèle est évalué en chaque point et l'on vérifie qu'il ne retourne aucune valeur négative ou absurde élevée. Dans le cas précis traité ici, cette vérification de bon sens nous a conduit à écarter des métamodèles polynomiaux, pourtant stables au vu des résultats de la

validation croisée. Sur les cent points de vérification, la force critique de flambement varie entre 57 kN et 232 kN.

Enfin, la dernière vérification consiste, à l'issue du processus d'optimisation, à évaluer par le modèle EF un ou plusieurs compromis optimaux, pour s'assurer de la qualité des prédictions du métamodèle dans la zone d'intérêt (voir Figure V-6).

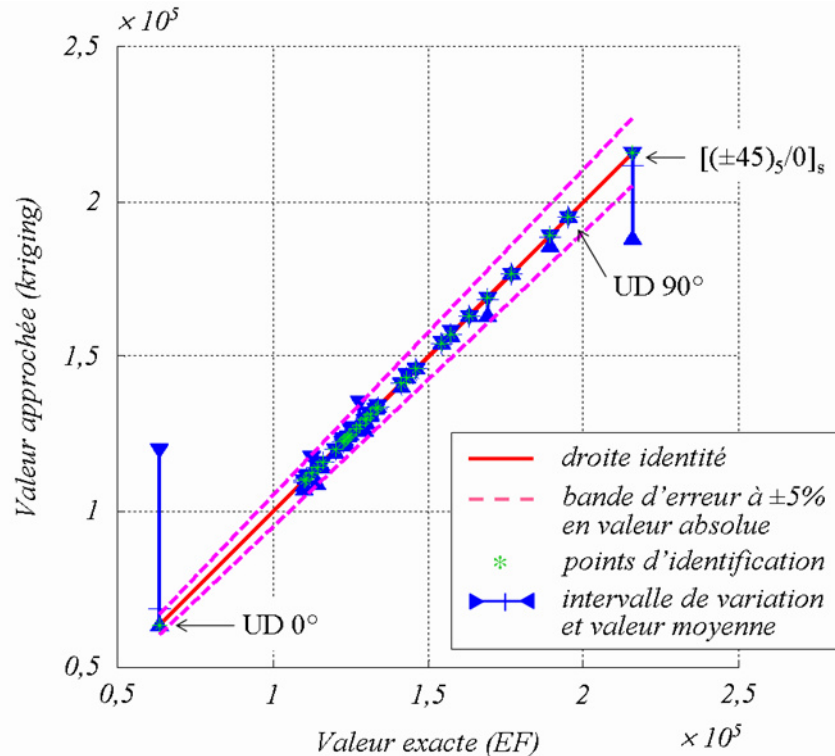


Figure V-4 : Résultat de la validation croisée (leave-3-out) pour le kriging.

Approximation de la force de ruine du panneau

La force F_r de ruine du panneau cache trop de phénomènes complexes pour pouvoir être approximée directement par un métamodèle simple. Il faut revenir à sa définition et séparer les différents phénomènes en compétition, en particulier l'effondrement global du panneau et la rupture matériau.

Dans le cas où la rupture intervient avant l'effondrement, le calcul non-linéaire retourne des valeurs directement exploitables des efforts correspondants. En effet, le comportement matériau est linéaire élastique et les effets des dommages ne sont pas pris en compte. La rupture préalable du matériau n'a donc aucune influence sur l'effondrement final du panneau.

Par contre, dans le cas inverse où l'effondrement intervient avant la rupture matériau, la valeur de l'effort à rupture n'est pas directement exploitable. En effet, la rupture est alors une conséquence de l'effondrement et des grands déplacements associés (voir Figure V-5). Après effondrement, la force de réaction globale diminue et, alors que c'est l'effondrement qui intervient en premier, la force de rupture est inférieure. Non seulement les phénomènes d'effondrement et de rupture restent imbriqués dans ce cas, ce qui nous ramène à la difficulté initiale, mais en plus il y a là une incohérence avec la définition de la force de ruine (expression V-1). Afin de remédier à ce problème, nous proposons d'extrapoler une valeur de rupture matériau à partir du dernier mode de flambement établi précédant l'effondrement. Cette valeur n'a pas de réel sens physique. Elle correspond à la valeur de la force à rupture, pour une rupture due au matériau, s'il n'y avait pas effondrement. Toutefois, elle permet d'identifier plus aisément le métamodèle et reste compatible avec la définition de la force de ruine, de telle sorte que cette dernière reste significative.

Le kriging donne de bons résultats à la fois pour la prévision de la force de rupture et celle de la force d'effondrement. Au final, sur les cent points de vérification, la force de ruine varie entre 471 kN et 622 kN avec une régularité très différente de celle de l'effort critique de flambement.

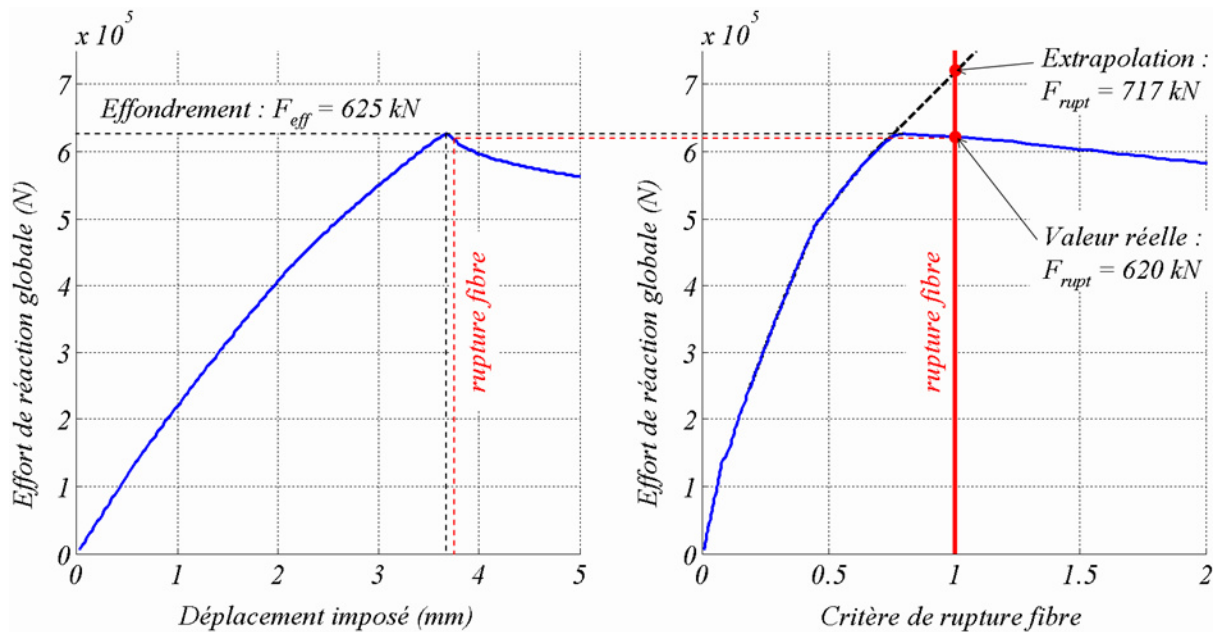


Figure V-5 : L'effondrement du panneau précède la rupture. Exemple de correction de la force de rupture.

V.2.1.b Compromis optimaux à l'issue de la première étape

L'optimisation est réalisée par l'AE évolutionnaire développé dans la première partie de ce mémoire. Le paramétrage de l'algorithme correspond à celui employé pour les cas-tests du Chapitre II :

Taille de la population N_p :	30
Taille de l'archive \bar{N}_p :	30
Nombre maximum de générations T :	100
Probabilité de croisement p_c :	0,2
Probabilité de mutation p_m :	0,8
Amplitude de mutation A_m :	4
Probabilité de permutation p_p :	0,5

La population initiale correspond aux trente solutions réalisables (du point de vue des règles de conception) de l'ensemble employé pour l'identification des métamodèles (c'est-à-dire l'ensemble d'identification privé des trois points extrêmes et de la configuration nominale).

Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure V-6². Le front de Pareto est matérialisé par une ligne rouge, les solutions non-dominées sont représentées par des triangles rouges et les solutions réalisables par des croix bleues. Les frontières d'activation des contraintes sont représentées en orange. Les trois solutions dont les performances sont détaillées correspondent aux solutions optimales selon chacun des objectifs considérés séparément, et à la solution de module $|D_{16}|$ minimal (dans une version affaiblie de la règle de battage). C'est cette dernière qui est retenue pour l'étape suivante.

² Dans cette section, sur les Figures V-6, V-7, V-8 et V-9, compte tenu de la définition des fonctions-objectif, le point de coordonnées (1,1) correspond à la configuration nominale.

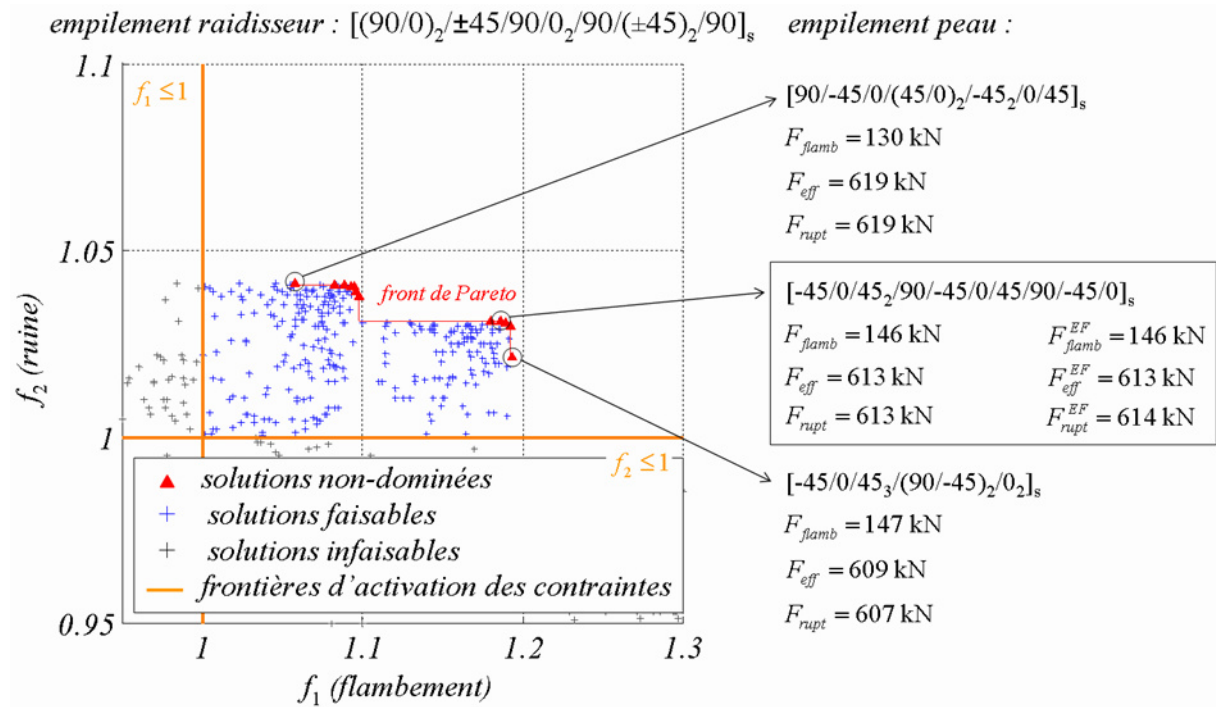


Figure V-6 : Résultats obtenus à l'issue de l'optimisation de la peau, l'empilement du raidisseur étant figé à sa valeur nominale. La solution retenue est encadrée. Ses performances estimées par les métamodèles sont vérifiées par calcul EF.

V.2.2 OPTIMISATION DE L'EMPILEMENT DU RAIDISSEUR

L'empilement de la peau étant figé à l'issue de la première étape, il s'agit maintenant d'identifier les métamodèles nécessaires à l'optimisation de l'empilement des raidisseurs. La démarche employée est identique à celle développée au paragraphe précédent. Ici, les cinq variables d'optimisation correspondent aux modules de rigidité du raidisseur. Le kriging donne une approximation satisfaisante des fonctions-objectif et des contraintes. Les intervalles de variation obtenus, sur les cent points de vérification, par les métamodèles, sont de 73 kN à 164 kN pour l'effort critique de flambement et de 191 kN à 677 kN pour l'effort de ruine du panneau.

Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure V-7, dont la lecture est identique à celle de la Figure V-6. Le front de Pareto obtenu à l'issue de la première étape est reporté sur la figure. Les trois points dont les performances sont détaillées sont choisis selon les mêmes critères que précédemment. Cette fois-ci, on vérifie la qualité des estimations des métamodèles au niveau de ces trois solutions optimales. La correspondance est globalement de très bonne qualité.

Par rapport à la configuration nominale, l'optimisation successive de la peau et du raidisseur permet jusqu'à 12 % de gain sur la force de ruine du panneau et plus de 57 % sur la force critique de flambement. L'algorithme d'optimisation retourne quinze solutions non-dominées qui représentent autant de compromis intermédiaires entre ces gains extrêmes. Pour ce faire, soixante-six calculs EF ont été réalisés, en plus du calcul de la configuration nominale.

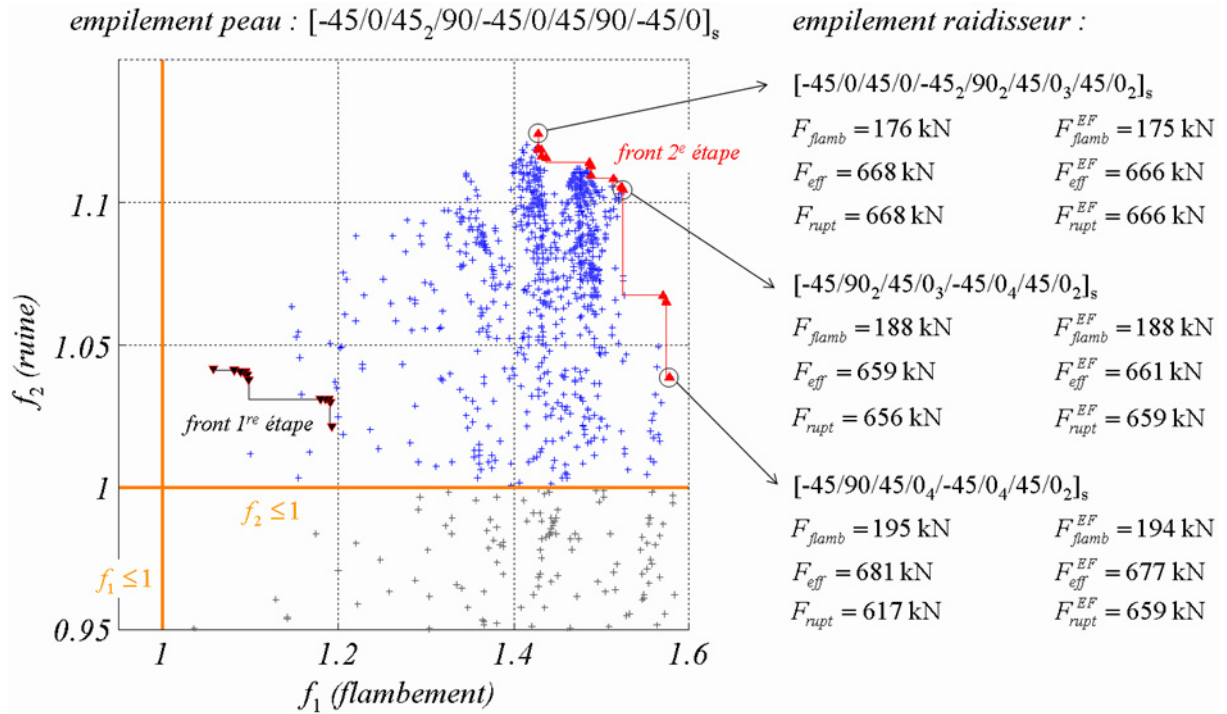


Figure V-7 : Résultats obtenus après optimisation de l'empilement du raidisseur. L'empilement de la peau est figé à la valeur choisie en post-traitement de la première étape (voir Figure V-7). Les estimations des métamodèles sont vérifiées par calcul EF en trois points.

V.2.3 APPROCHE DUALE : OPTIMISATIONS SUCCESSIVES DU RAIDISSEUR ET DE LA PEAU

Il est intéressant de vérifier si l'approche duale, qui consiste à inverser l'ordre des sous-problèmes issus de la décomposition du problème initial, retourne des résultats équivalents. Ces deux approches, directe et duale, sont schématisée Figure V-8 suivante :

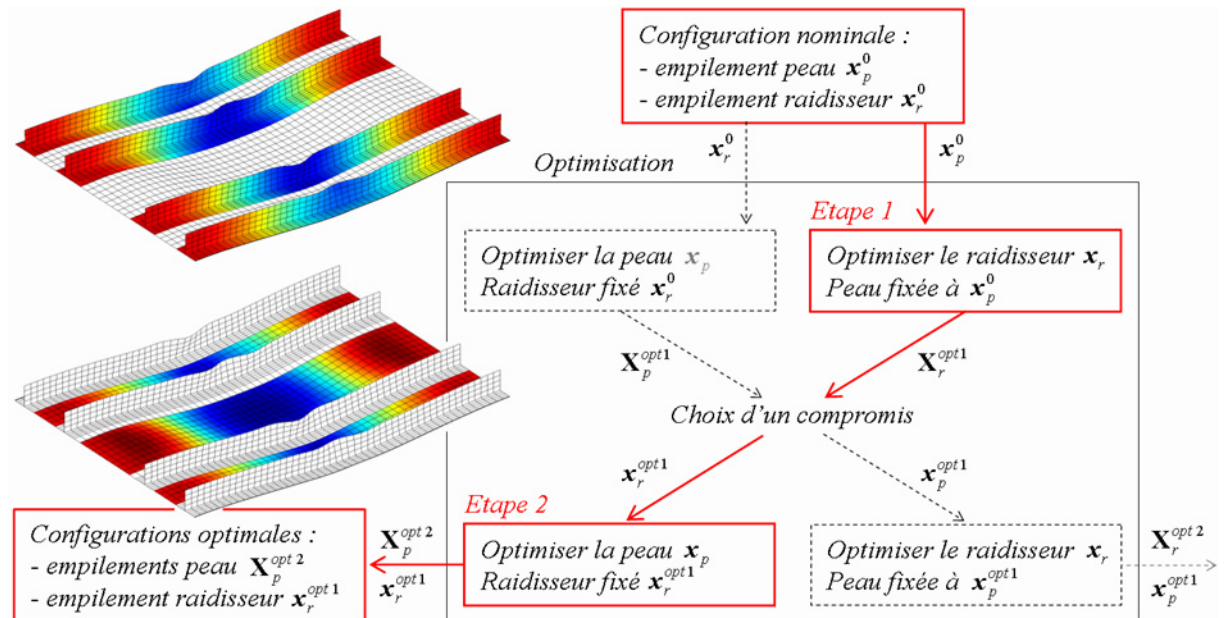


Figure V-8 : Schéma de principe de l'approche séquentielle et de son approche duale.

La démarche de résolution du problème est identique à la démarche employée pour l'approche séquentielle directe (par opposition à duale). Les résultats obtenus à la première et à la seconde étape sont respectivement synthésisés sur la Figure V-9 et la Figure V-10.

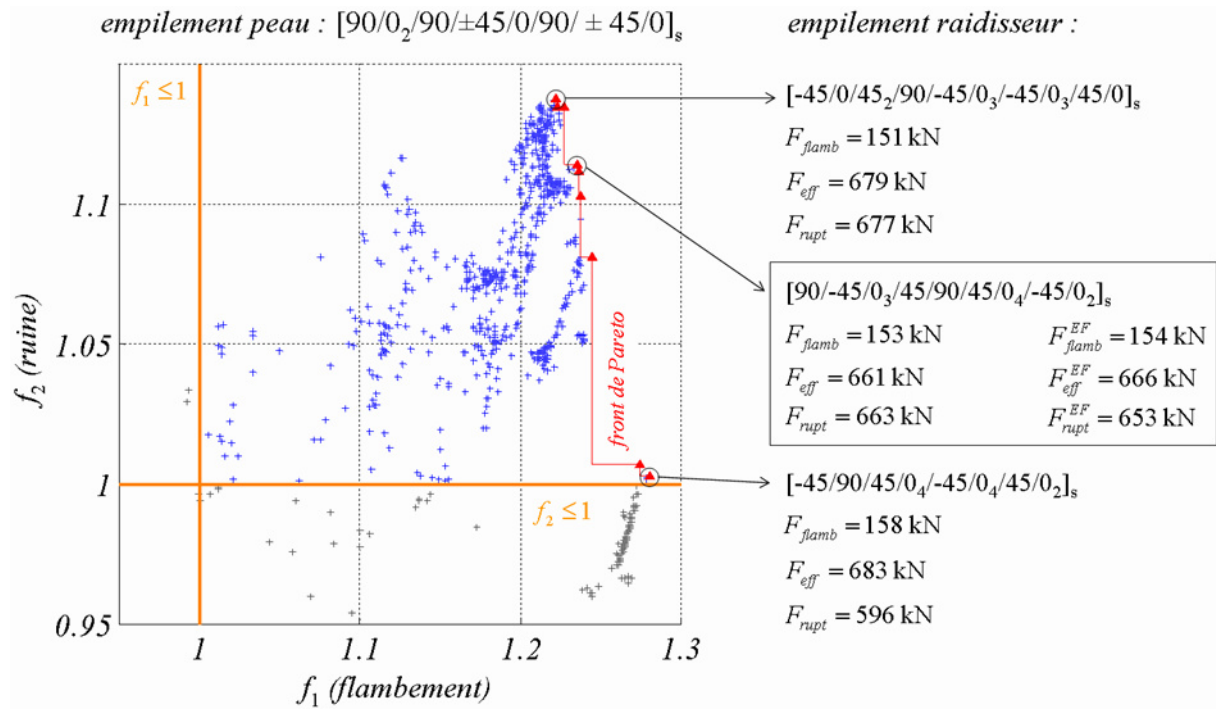


Figure V-9 : Résultats de l'optimisation de l'empilement du raidisseur, l'empilement de la peau étant figé à sa valeur nominale. La solution retenue est encadrée et ses performances sont vérifiées par le calcul EF.

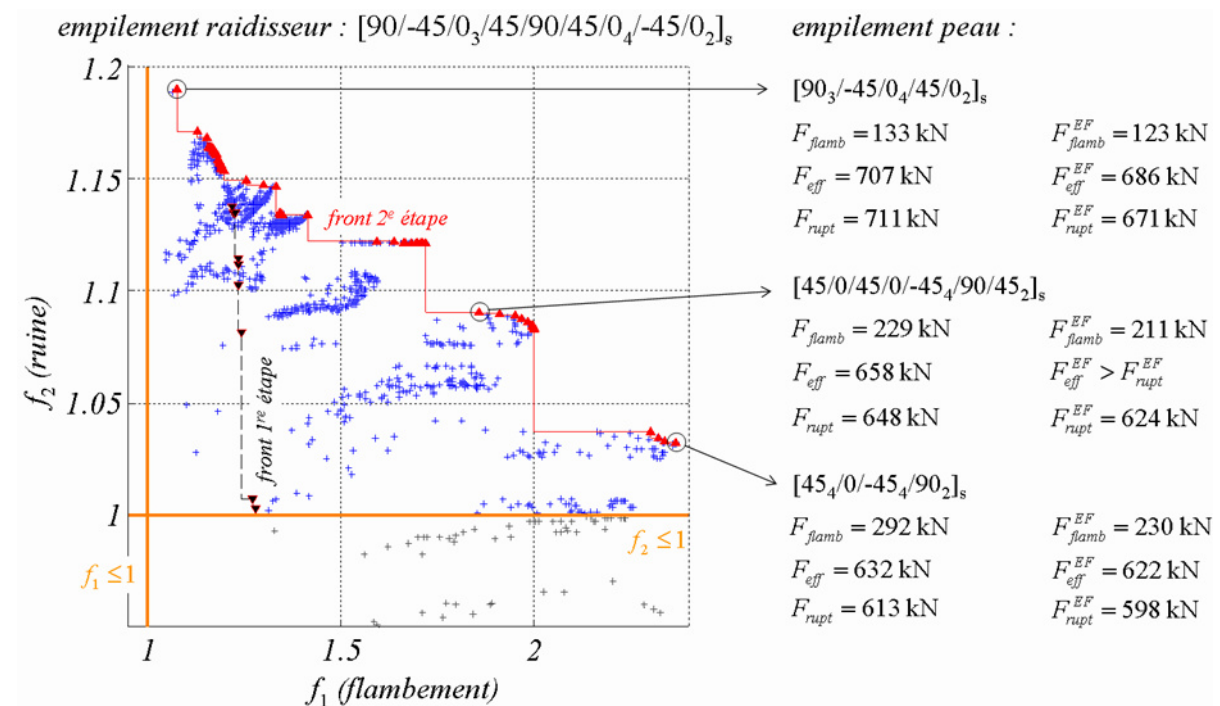


Figure V-10 : Résultats de la seconde étape d'optimisation. L'empilement du raidisseur correspond à la solution retenue à l'issue de l'étape précédent (voir Figure V-9).

Les métamodèles employés pour l'optimisation de l'empilement de la peau sont vérifiés en trois points du front (voir Figure V-10). L'approximation de la force de ruine du panneau se révèle satisfaisante, avec une erreur inférieure à 5 % par rapport au calcul EF. Toutefois, les erreurs sur la force critique de flambement atteignent les 30 %. Celles-ci semblent diminuer avec la valeur de la force critique, de telle sorte que pour les faibles valeurs de force de flambement, l'erreur reste inférieure à 10 %. Ceci s'explique aisément à partir du constat qu'aucun des points d'identification

réalisables ($f_1 > 1$ et $f_2 > 1$) ne présente de force critique de flambement excédant les 168 kN. On est donc en extrapolation pure sur la majeure partie du front de Pareto, d'où l'importance des erreurs. Néanmoins, les tendances restent vérifiées, ce qui permet à l'algorithme d'optimisation de localiser les compromis optimaux dans le paysage de performance, même si le relief en est exagéré.

La satisfaction des contraintes constitue une autre difficulté. Avec des erreurs de l'ordre de 5 à 10 % sur les valeurs des contraintes, il faut s'assurer par le calcul EF que les performances des solutions proches des frontières d'activation des contraintes n'ont pas été trop surestimées. Ici, parmi les résultats de l'optimisation de l'empilement de la peau (seconde étape), le calcul EF révèle que la solution $[90_3/-45/0_4/45/0_2]_s$ viole la contrainte exprimée sur la force de flambement.

L'ensemble des compromis optimaux obtenu par l'approche duale compte quarante et une solutions et couvre une large gamme de performances, bien plus large que le front obtenu par l'approche directe. Les performances calculées sont de surcroît supérieures : jusqu'à 13 % de gain sur la force de ruine du panneau et 87 % de gain sur la force critique de flambement, comparativement à la configuration nominale (résultats de Calculs EF). Ces résultats sont discutés plus en détails dans la synthèse proposée en fin de chapitre (Cf. V.4.1).

V.3 OPTIMISATION SIMULTANEE

L'alternative à l'approche séquentielle consiste à s'attaquer au problème complet sans décomposition préalable. Il s'agit ici de mettre en œuvre cette approche pour en évaluer la difficulté, le coût de calcul et la qualité des résultats, comparativement à l'approche séquentielle. Dans cette section, on réalise deux optimisations du panneau. La première optimisation est conduite pour un pas de discrétisation angulaire p_{dis} de 45° , elle est basée sur les calculs EF réalisés dans la partie précédente pour l'optimisation séquentielle du panneau. Cet ensemble de points de calcul pâtit néanmoins d'une répartition très particulière dans l'espace de recherche complet (peau et raidisseur). Une seconde optimisation est donc proposée, à partir d'un nouvel ensemble de points d'identification (des calculs EF), mieux distribués (voir Figure V-11). Pour cette seconde optimisation, le pas p_{dis} est fixé à 15° , afin de montrer les difficultés et d'estimer les gains potentiels de performances associés au choix d'une discrétisation angulaire plus fine.

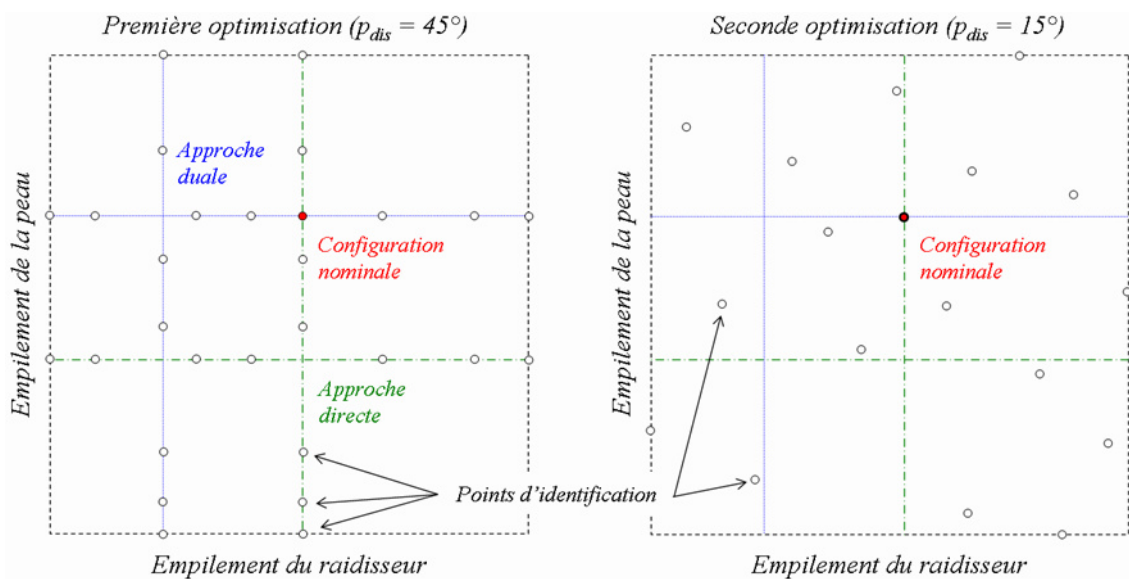


Figure V-11 : Répartition des points d'identification (calculs EF) pour les deux optimisations simultanées réalisées.

V.3.1 ADAPTATION DE L'ALGORITHME EVOLUTIONNAIRE

Dans la suite, les empilements de la peau et du raidisseur sont manipulés simultanément. L'empilement de la peau correspond à un jeu de onze orientations de plis, auquel il convient d'ajouter les quinze orientations définissant l'empilement du raidisseur, soit un total de vingt-six variables de décision. L'algorithme évolutionnaire développé dans la première partie de ce document est directement mis en œuvre pour la résolution de ce problème. Travailler simultanément sur deux empilements suppose toutefois deux adaptations mineures.

La première concerne le codage des solutions. Celles-ci sont représentées par deux chromosomes d'empilement, un pour la peau, l'autre pour le raidisseur. Lors de la phase de reproduction, les opérateurs génétiques sont appliqués soit à l'un ou l'autre chromosome, soit successivement aux deux, avec des probabilités égales.

La seconde concerne l'initialisation de l'algorithme. Pour la première optimisation simultanée, la population initiale correspond à la réunion des populations initiales employées pour les quatre sous-problèmes d'optimisation traités dans l'approche séquentielle. Pour la seconde optimisation simultanée, l'initialisation est menée en trois étapes : constitution, par l'approche Maximin, d'un ensemble d'empilements pour la peau, puis d'une population de même taille pour le raidisseur, enfin, association par tirage aléatoire d'un empilement de peau avec un empilement de raidisseur pour l'obtention des couples constitutifs de la population initiale.

Compte tenu de la complexité du problème, nous choisissons ici une taille d'archive double par rapport à celle de la génération courante. La taille N_0 de la population initiale dépend du cas d'optimisation considéré. Pour la première optimisation, elle est de 120 solutions. Pour la seconde, de 60 solutions. Le reste du paramétrage de l'algorithme est inchangé :

Taille de la population initiale N_0 :	≥ 60
Taille de la population N_p :	30
Taille de l'archive \bar{N}_p :	60
Nombre maximum de générations T :	100
Probabilité de croisement p_c :	0,2
Probabilité de mutation p_m :	0,8
Amplitude de mutation A_m :	4
Probabilité de permutation p_p :	0,5

V.3.2 PREMIERE OPTIMISATION SIMULTANEE (DISCRETISATION ANGULAIRE DE 45°)

Par rapport à l'approche séquentielle, la difficulté de l'approche simultanée consiste à identifier des métamodèles aptes à retranscrire des modifications simultanées de l'empilement de la peau et du raidisseur. Pour ce faire, l'identification est réalisée directement à partir des modules de rigidités de la peau et des raidisseurs, soit deux fois cinq variables (au lieu de vingt-six orientations de plis) : A_{11} , A_{22} , et D_{11} , D_{22} et D_{16} , pour l'empilement de la peau et celui du raidisseur (les modules D_{16} et D_{26} étant égaux pour les empilements de type 0° , $\pm 45^\circ$, 90°).

V.3.2.a Identification des métamodèles

L'ensemble d'identification considéré ici correspond à la réunion des quatre ensembles d'identification (évalués par EF) exploités lors des deux étapes de l'approche séquentielle et de son approche duale. C'est l'ensemble dont on dispose, après un effort de calcul conséquent, à l'issue du processus d'optimisation séquentielle, pour une discrétisation angulaire de 45° . Outre la configuration nominale, celui-ci est constituée de trente-trois points par étape d'optimisation, auxquels il convient de rajouter huit calculs de vérification, soit un total de $N = 141$ points de calcul. Il s'agit ici de vérifier dans quelle

mesure cet effort de calcul permet de s'engager avec succès dans une démarche d'optimisation simultanée.

Les difficultés de l'identification de métamodèles en grande dimension et avec un grand nombre de points d'identification

Dans une première approche du problème, comme dans le cadre de l'optimisation séquentielle, nous procédons selon la méthodologie proposée dans [Rollet 07], en évaluant successivement des modèles polynomiaux d'ordre croissant, saturés ou insaturés, puis un kriging interpolant.

Comme en V.2.1.a, une deuxième vérification consiste à s'assurer que les métamodèles ne retournent de prévisions absurdes en aucun point réalisable de l'espace de décision. Pour ce faire, ils sont évalués sur une grille de 100 empilements de la peau par 100 empilements du raidisseurs. Ces empilements sont choisis pour recouvrir au mieux le domaine des rigidités réalisables : ils respectent les règles de symétrie et d'équilibre et un pas de discrétisation angulaire de 15° ou 45° en fonction des besoins. La "grille de vérification" correspond à l'ensemble des combinaisons possibles peau / raidisseur (voir Figure V-12).

Les métamodèles obtenus s'avèrent systématiquement de piètre qualité. De façon générale, les métamodèles polynomiaux conduisent à des résultats absurdes, négatifs ou démesurés, loin des points d'identification (voir Figure V-12). Ces métamodèles sont donc écartés. Dans le cas du kriging, c'est la multiplication des points d'identification qui pose problème. Il s'agit en effet d'une méthode performante, mais dont l'identification, complexe et coûteuse, s'accommode mal d'un échantillonnage trop large. Ici, sur les trois ensembles d'identification proposés, la méthode s'avère uniquement applicable sur les deux premiers alors que l'identification (une optimisation interne) échoue systématiquement sur le troisième. Toutefois, même lorsque la méthode est applicable, la qualité du métamodèle s'avère insuffisante pour l'optimisation, avec des écarts parfois supérieurs à 100 % en validation croisée. Au final, aucune des méthodes d'approximation utilisées jusqu'ici ne suffit pour aborder l'optimisation simultanée du panneau.

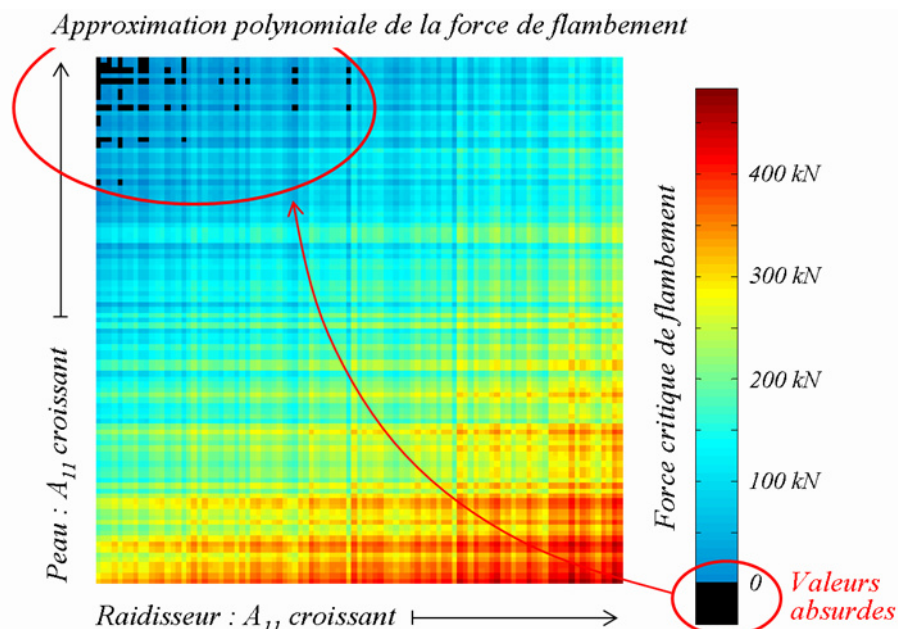


Figure V-12 : Image de la grille de vérification pour une surface de réponse polynomiale d'ordre 2, sans termes croisés, identifiée sur l'ensemble des 141 résultats de calcul EF réalisés dans la première section du chapitre. Clairement, le métamodèle retourne des valeurs absurdes, négatives en certains points (en noir). De même, l'intervalle de variation de la force critique de flambement semble exagéré (de 0 à 480 kN environ) par rapport aux variations relevées au niveau des points d'identification.

Les Bases de Fonctions Radiales sous Tension (RBFT)

Afin de résoudre cette difficulté, on s'oriente vers un nouveau type de métamodèles. Les Bases de Fonctions Radiales sous Tension (RBFT)³ sont présentées dans [Bouhamidi 04]. Le principe de fonctionnement général en est illustré sur la Figure V-13. Il s'agit d'un métamodèle interpolant dont le comportement est piloté par un paramètre de tension imposé par l'utilisateur. Identifier ce métamodèle suppose donc d'optimiser la valeur de tension pour trouver la régularité de l'approximation la plus adaptée au problème. En pratique, l'influence de la tension étant stable et progressive, il nous suffit de procéder de façon empirique pour identifier la valeur de tension la plus appropriée. Ceci suppose d'estimer l'erreur d'approximation pour chaque valeur de tension, afin de déterminer la régularité la plus adaptée.

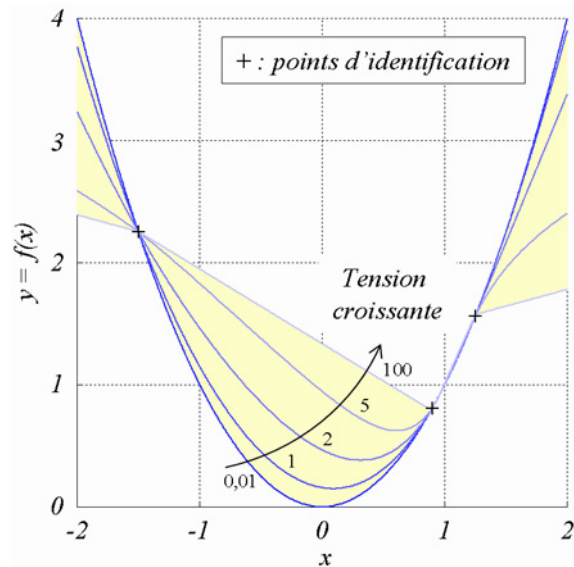


Figure V-13 : Illustration de l'influence du paramètre de tension.

Pour ce faire, plutôt que de procéder par *leave-K-out* qui requiert un grand nombre d'identification des métamodèles, nous utilisons une autre technique de validation croisée, adaptée aux ensembles d'identification de grande taille. Le fonctionnement en est le suivant. L'ensemble d'identification est scindé en deux ensembles imbriqués⁴, dits "d'apprentissage" et "de validation". Le métamodèle est ensuite identifié sur l'ensemble d'apprentissage et ses prévisions sont comparées aux valeurs réelles sur l'ensemble de validation, puis inversement (exemple en Figure V-14). On recherche de cette façon la régularité la plus adaptée au problème. Celle-ci déterminée, la dernière étape consiste à identifier l'approximation de même régularité (même valeur de tension) sur l'ensemble d'identification complet. La Figure V-15 présente les résultats de l'approximation des forces critiques de flambement et de ruine (définie comme le minimum des forces d'effondrement et de rupture matériau). Cette représentation permet de dégager une certaine régularité dans le problème et met en évidence l'influence prépondérante des modules de rigidité longitudinale des empilements de la peau et du raidisseur sur le flambement et, dans une moindre mesure, sur la ruine du panneau⁵.

V.3.2.b Résultats de la première optimisation simultanée

Les résultats sont présentés sur la Figure V-16. L'approximation des fonctions-objectif est vérifiée en cinq solutions optimales, régulièrement distribuées le long du front de Pareto. Celui-ci compte cent six solutions. De façon générale, les métamodèles employés paraissent de qualité suffisante pour approcher le front de Pareto "réel" du problème (au sens du calcul EF, par opposition aux valeurs approchées par les métamodèles). Par contre la faisabilité des solutions proches des frontières

³ On utilise ici une version programmée dans Matlab par F-H. Leroy autour de la Toolbox NetLab.

⁴ A l'aide d'un algorithme basé sur la théorie des graphes (problèmes de coloriage de graphes) et développé par F-H. Leroy.

⁵ Pour s'en convaincre, il nous a fallu construire cinq versions de la figure en classant successivement les abscisses et les ordonnées selon les cinq modules de rigidité pris en compte pour la peau et pour le raidisseur. La seule figure permettant de dégager une certaine régularité est celle présentée en Figure V-15.

d'activation des contraintes n'est pas garantie. Sur la Figure V-16, la solution qui maximise la force de flambement s'avère infaisable après calcul EF.

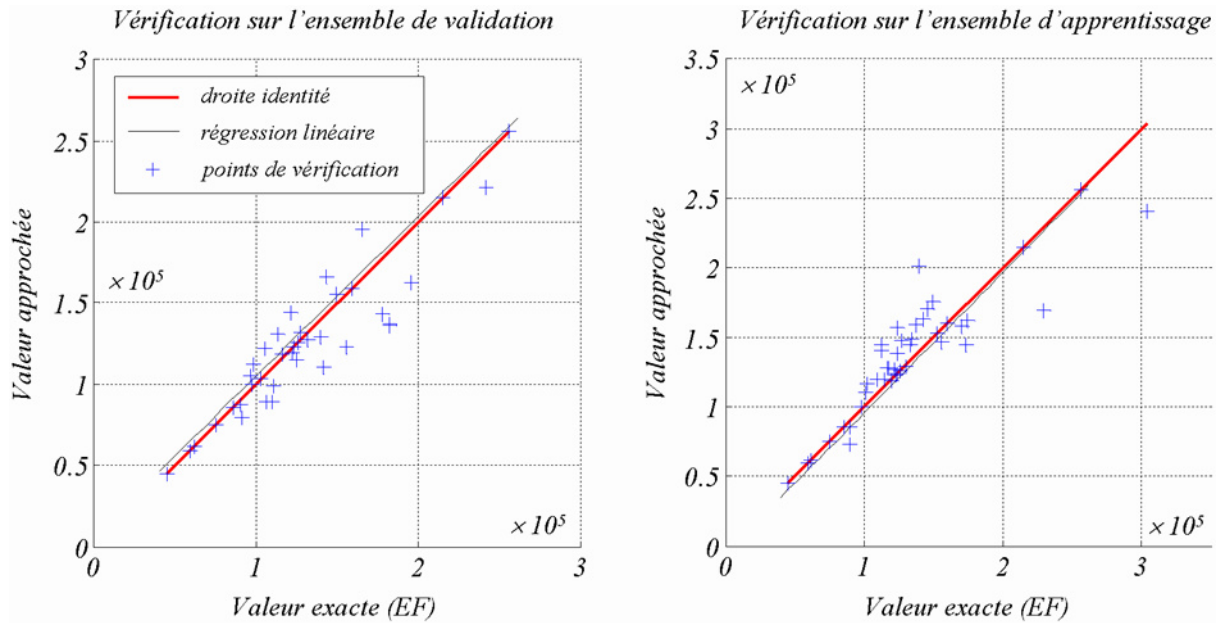


Figure V-14 : Exemple de validation croisée sur le premier ensemble d'identification (70 points). Approximation de la force critique de flambement par RBFT. La tension la plus appropriée est ici de 1,5. les résultats de validation croisée restent néanmoins médiocres.

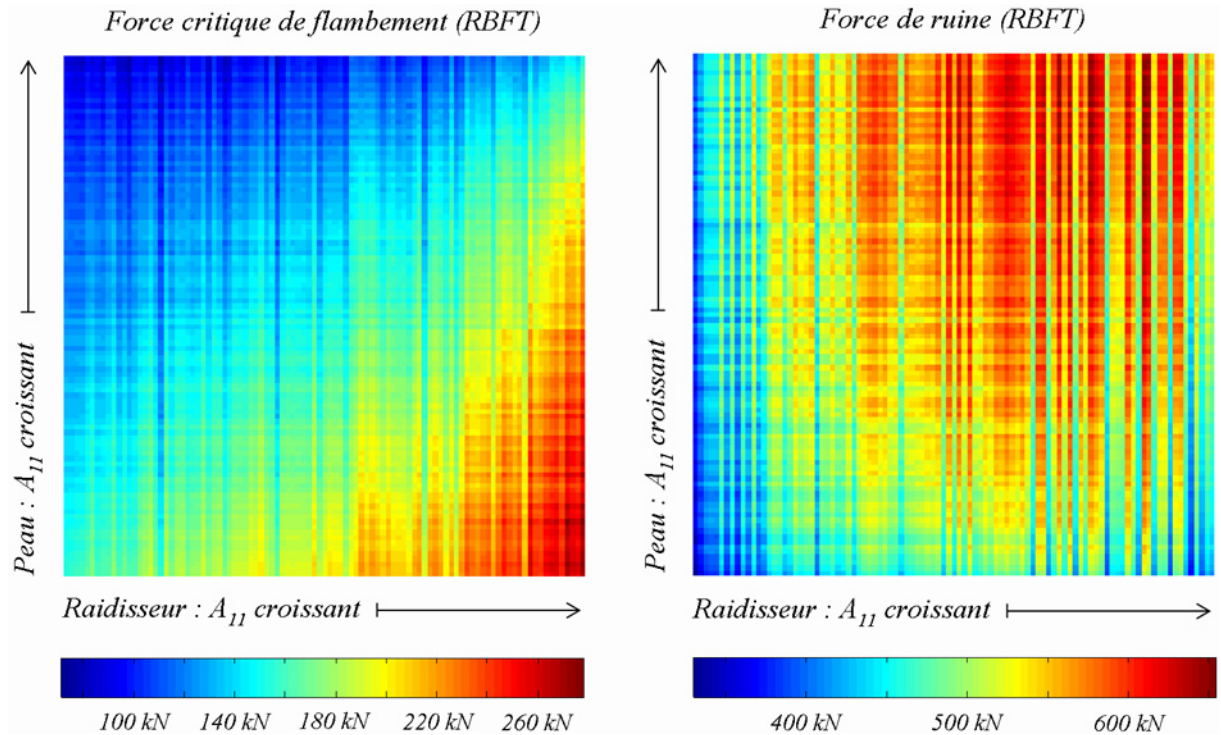


Figure V-15 : A gauche : résultats obtenus sur la grille de vérification pour l'approximation de la force critique de flambement. A droite, représentation de la force de ruine. Par rapport aux résultats reportés sur la Figure V-12, les résultats consignés ici semblent a priori bien plus acceptables. En effet, on ne relève pas de valeurs absurdes et les intervalles de variations sont cohérents par rapport aux variations relevées au niveau des points d'identification.

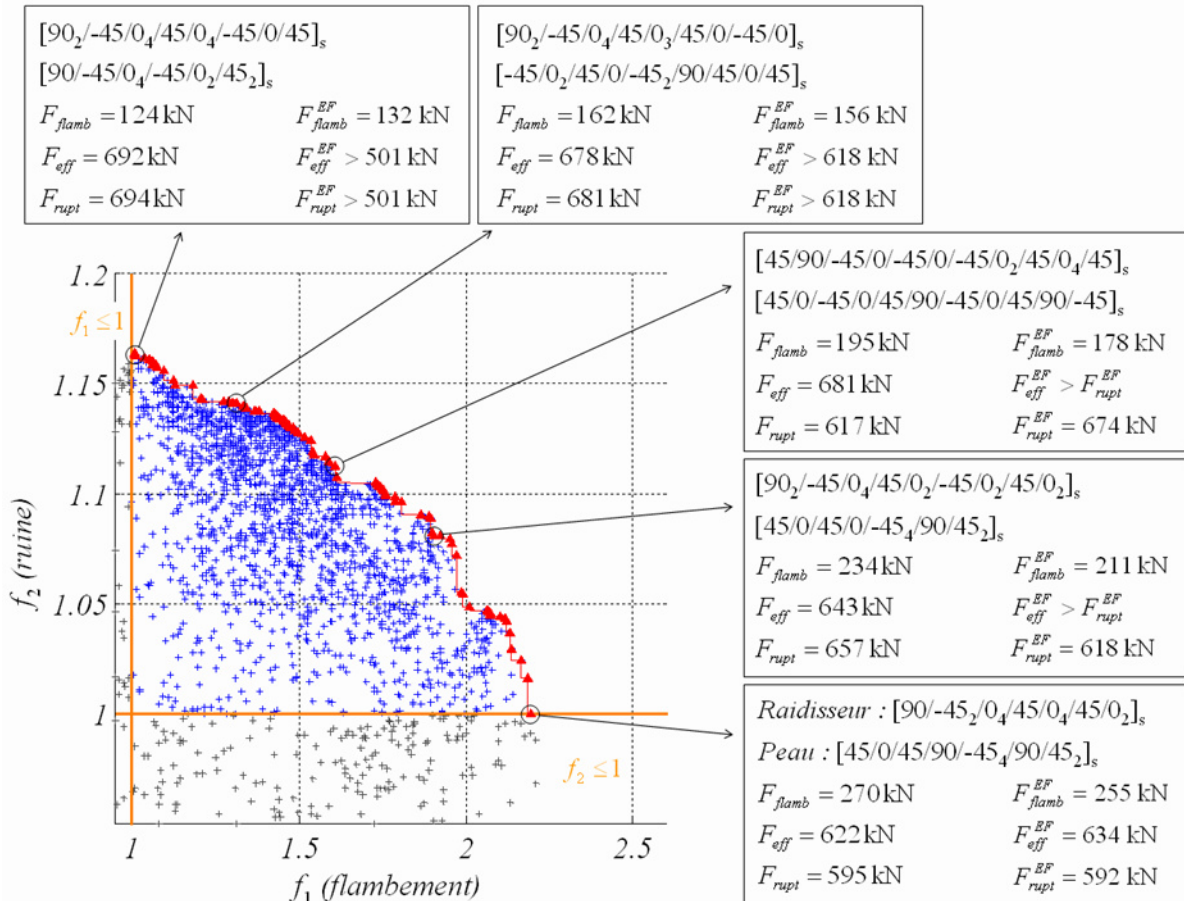


Figure V-16 : Synthèse des résultats de l'optimisation simultanée pour un pas de discrétisation angulaire de 45°.

V.3.3 SECONDE OPTIMISATION SIMULTANEE (DISCRETISATION ANGULAIRE DE 15°)

Le processus d'optimisation complet est répété avec un pas de discrétisation angulaire p_{dis} de 15°. En choisissant un pas de discrétisation autre que 90° ou 45°, nous quittons les cas particuliers pour nous placer dans le cas général où l'égalité entre les termes de couplage D_{16} et D_{26} n'est plus systématiquement vérifiée. Les variables d'identification des métamodèles sont maintenant au nombre de douze (A_{11} , A_{22} , et D_{11} , D_{22} , D_{16} et D_{26} pour l'empilement de la peau et celui du raidisseur).

L'ensemble de points de calcul utilisé pour l'identification des métamodèles est bâti à partir de la population initiale de l'algorithme d'optimisation, dont la construction est décrite au paragraphe V.3.1. A cette population de soixante points, sont ajoutées la configuration nominale et les neuf appariements possibles entre les trois solutions extrêmes⁶ (UD à 0°, à 90° et stratifié croisé $\pm 45^\circ$) pour la peau et le raidisseur, soit un total de $N = 70$ calculs EF pour l'identification des métamodèles. On procède pour celle-ci de la même manière que précédemment. Une fois encore, les meilleurs résultats sont obtenus avec des Bases de Fonctions Radiales sous Tension.

Les résultats obtenus sont synthétisés sur la Figure V-17. L'approximation des fonctions-objectif est vérifiée en cinq solutions optimales, régulièrement distribuées le long de la frontière de Pareto. Celle-ci compte cent trente sept solutions. Calculs EF et modèles approchés semblent en bon accord sur les tendances, malgré des écarts parfois importants, de l'ordre de 10 %. Les gains extrêmes (estimés par EF), considérés indépendamment, sont de quelques 14 % pour la ruine du panneau, ici par rupture du matériau, et d'environ 135 % pour la force critique de flambement.

⁶ Ce point est brièvement discuté au paragraphe V.2.1.a.

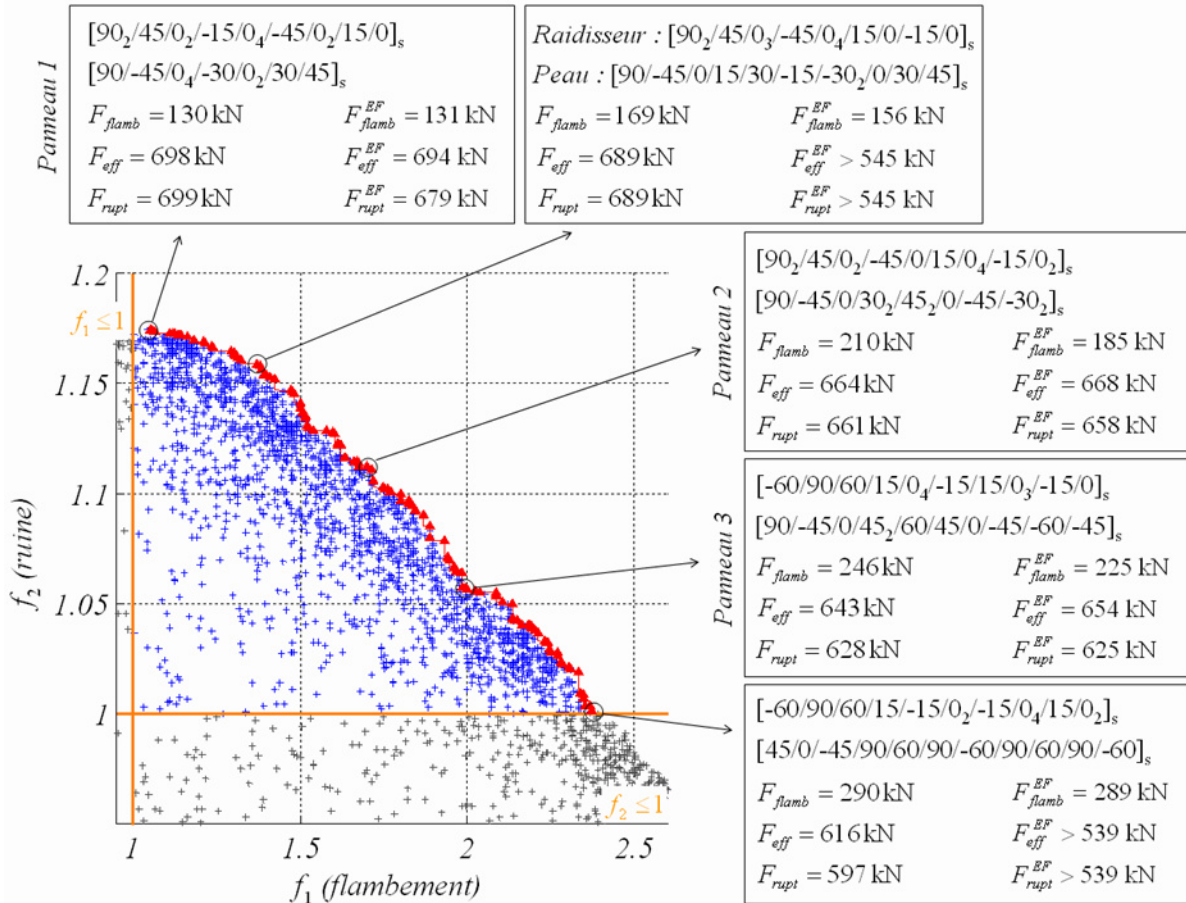


Figure V-17 : Synthèse des résultats de l'optimisation simultanée pour un pas de discrétisation angulaire de 15°. Le front de Pareto est représenté en rouge, les solutions réalisables, en bleu. Les frontières d'activation des contraintes sont représentées en orange. La solution nominale correspond au ponts de coordonnées (1,1). Les solutions identifiées sous le nom Panneau 1, 2 et 3 sont reprise dans la Figure V-18.

La Figure V-18 illustre le flambement et le comportement en post-flambement des trois compromis optimaux que constituent les Panneaux 1, 2 et 3 de la Figure V-17. La Figure V-19 illustre quant à elle le flambement et le comportement en post-flambement de la configuration nominale et offre un comparatif des courbes de comportement global de ces quatre panneaux.

V.4 SYNTHÈSE ET DISCUSSION

De façon générale, pour un problème d'optimisation d'un tel niveau de complexité, il ne suffit pas (bien que ce soit déjà difficile), de mener à bien les différents processus d'optimisation. Encore faut-il être en mesure de les analyser afin de comparer les solutions obtenues pour identifier la meilleure démarche. Parce qu'elles sont basées sur un outil d'optimisation efficient et adapté (l'AE développé en première partie de ce mémoire) couplé à des outils sophistiqués d'approximation globale⁷ toutes les démarches d'optimisation proposées ici aboutissent à de substantiels gains de performances par rapport à la solution nominale. Nous développons dans la suite les deux points suivants :

- la comparaison des démarches séquentielles et simultanées,
- quelques considérations plus techniques sur le bon usage des méthodes d'approximation.

⁷ Pour la plupart de ces outils, l'adaptation à nos problèmes n'a représenté qu'un travail mineur et nous nous sommes essentiellement positionnés comme utilisateurs.

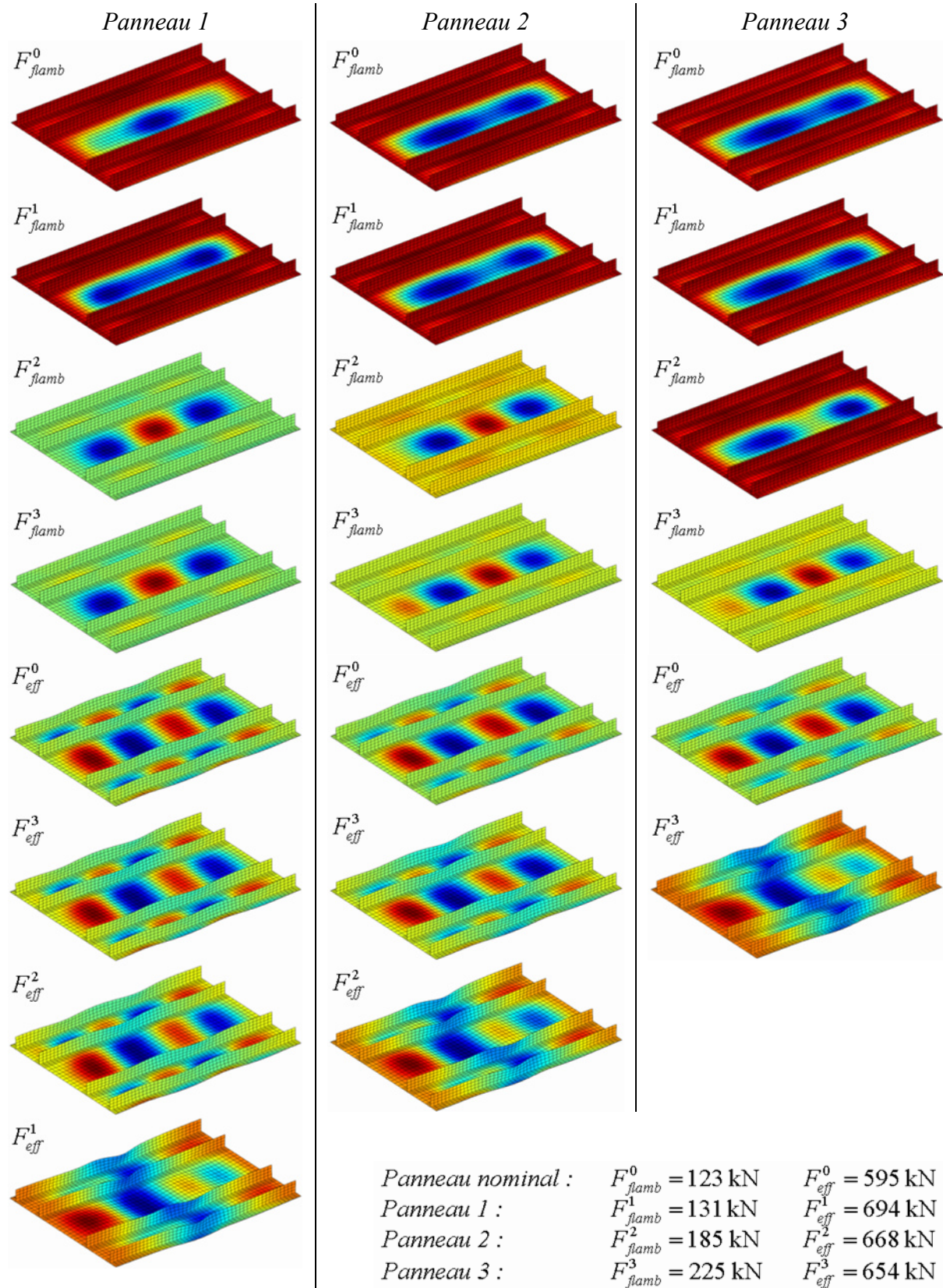


Figure V-18 : Comparaison des déformées des Panneaux 1,2 et 3 pour huit niveaux d'efforts. Les niveaux de couleur correspondent à la flèche w_0 .

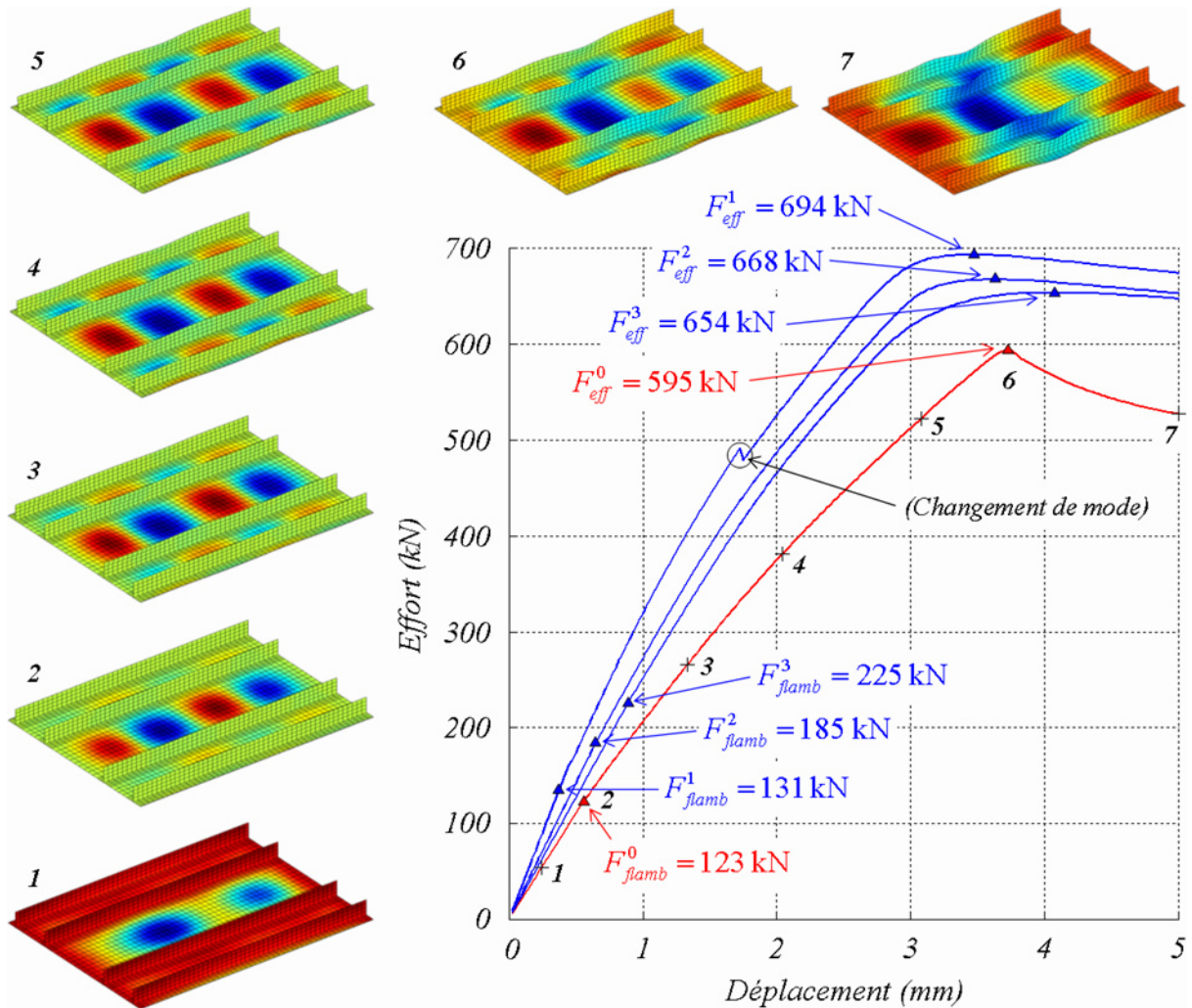


Figure V-19 : Comparaison des courbes de comportement global du Panneau nominal et des Panneaux 1,2 et 3. Les instants de flambement et d'effondrement des panneaux sont reportés sur les courbes. Suivi de la déformation du panneau nominal au cours du chargement.

V.4.1 COMPARAISON DES APPROCHES SEQUENTIELLES ET SIMULTANÉES

Les comparaisons directes des différents résultats d'optimisation à partir des valeurs approchées sont rendues difficiles, voire impossibles, en raison de l'imprécision des métamodèles employés (dont on discute plus loin, Cf. V.4.2). Les seules comparaisons pertinentes possibles sont donc réalisées sur les résultats des calculs EF d'identification et de vérification. Les résultats en sont présentés sur la Figure V-20 pour l'optimisation séquentielle et la Figure V-21 pour l'optimisation simultanée.

Dans le cas de l'optimisation séquentielle, l'approche directe (optimisation de la peau, puis du raidisseur) et son dual (raidisseur puis peau) aboutissent à des ensembles de compromis optimaux très différents, principalement en matière de diversité des solutions (en matière des performances). Le déroulement de l'optimisation s'avère lui aussi très différent. L'optimisation du raidisseur permet de maximiser simultanément les forces critiques de flambement et de ruine du panneau, tandis que l'optimisation de la peau joue sur l'une au détriment de l'autre, offrant ainsi une plus grande diversité de compromis. Dans la mesure où les raidisseurs sont ajoutés pour augmenter les performances de la plaque constituée de la peau seule, cette analyse revêt *a posteriori* une certaine logique. Elle justifie de surcroît une nette préférence pour l'approche duale. Il n'y a en effet pas lieu, comme dans l'approche directe, de rechercher la diversité lors de la première étape, pour en extraire une unique

solution avant de passer à la seconde. Il faut au contraire commencer par la maximisation simultanée des fonctions-objectif en jouant sur le raidisseur, puis rechercher la diversité en jouant sur la peau.

Cependant, on peut s'interroger sur l'influence du point de départ (la configuration nominale) sur la qualité du résultat final (un ensemble de compromis). Le choix d'une unique solution entre les deux étapes de l'optimisation séquentielle soulève la même question, à laquelle il semble difficile de répondre sans disposer d'une estimation de l'influence combinée des empilements de la peau et des raidisseurs, ce qui nous renvoie à l'optimisation simultanée. Pour surmonter cette difficulté sans passer à l'optimisation simultanée, on peut imaginer itérer sur le processus d'optimisation séquentiel de différentes manières. Par exemple en optimisant la peau, puis le raidisseur, puis à nouveau la peau, en repartant à chaque fois d'une solution optimale issue de l'étape précédente. De la sorte, on peut probablement gommer l'influence du point de départ, mais le problème du choix d'une configuration unique entre chaque étape demeure, et les coûts de calcul augmentent rapidement. De plus, avec ce type de démarches, il semble difficile d'écarter tout risque de piégeage par un optimum local.

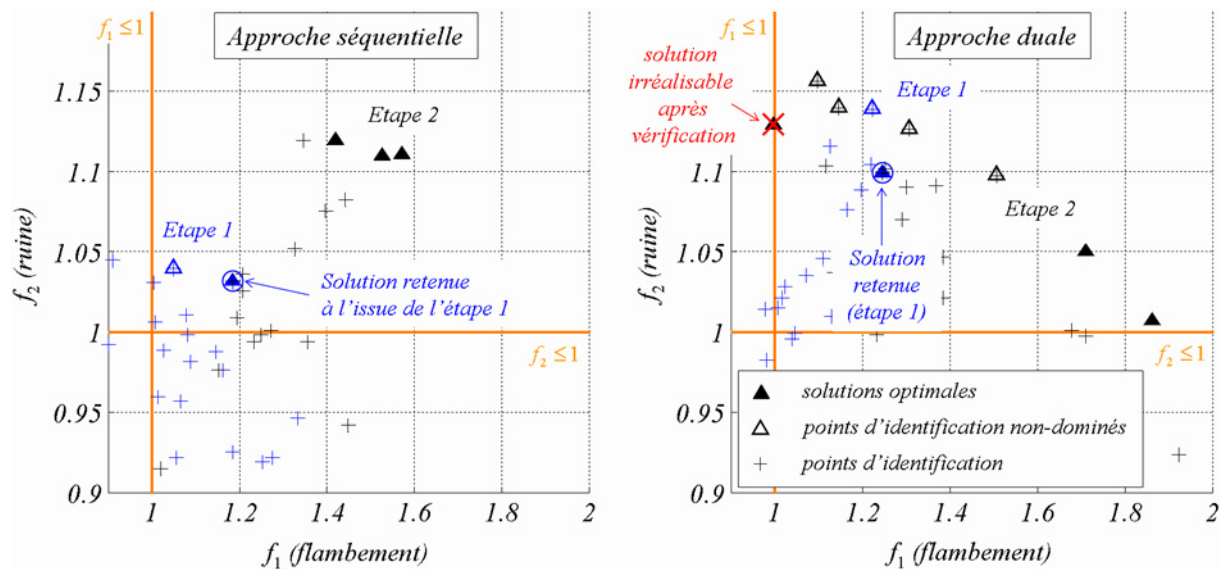


Figure V-20 : Résultats des calculs EF réalisés dans le cadre de l'optimisation séquentielle. Les calculs effectués en vérification de l'optimisation sont identifiés par des triangles pleins. Les croix correspondent à des points d'identification, éventuellement entourés d'un triangle vide lorsque ces solutions s'avèrent non-dominées à l'issue de l'optimisation.

Dans le cas de l'optimisation simultanée, malgré le manque de résultats complets (quatre des dix calculs de vérification réalisés ont divergé avant la ruine du panneau) les points reportés sur la Figure V-21 pour un pas p_{dis} égal à 45° montrent que les résultats obtenus sont de qualité au moins équivalente en matière de performances à ceux obtenus par l'approche séquentielle. En effet, l'ensemble d'identification utilisé regroupe la totalité des points calculés par EF pour l'approche séquentielle. Tous les points de la Figure V-20 sont donc reportés sur la Figure V-21 ($p_{dis} = 45^\circ$).

Autoriser un pas de discrétisation angulaire inférieur à 45° ouvre la possibilité d'une optimisation plus fine. Malheureusement les gains restent difficile à quantifier, étant du même ordre de grandeur que les incertitudes sur les métamodèles. Néanmoins, même dans ces conditions, la Figure V-21 montre que le Panneau 3, identifié par un cercle rouge sur les deux volets de la figure, domine largement certaines solutions classiques de type $0^\circ/45^\circ/90^\circ$.

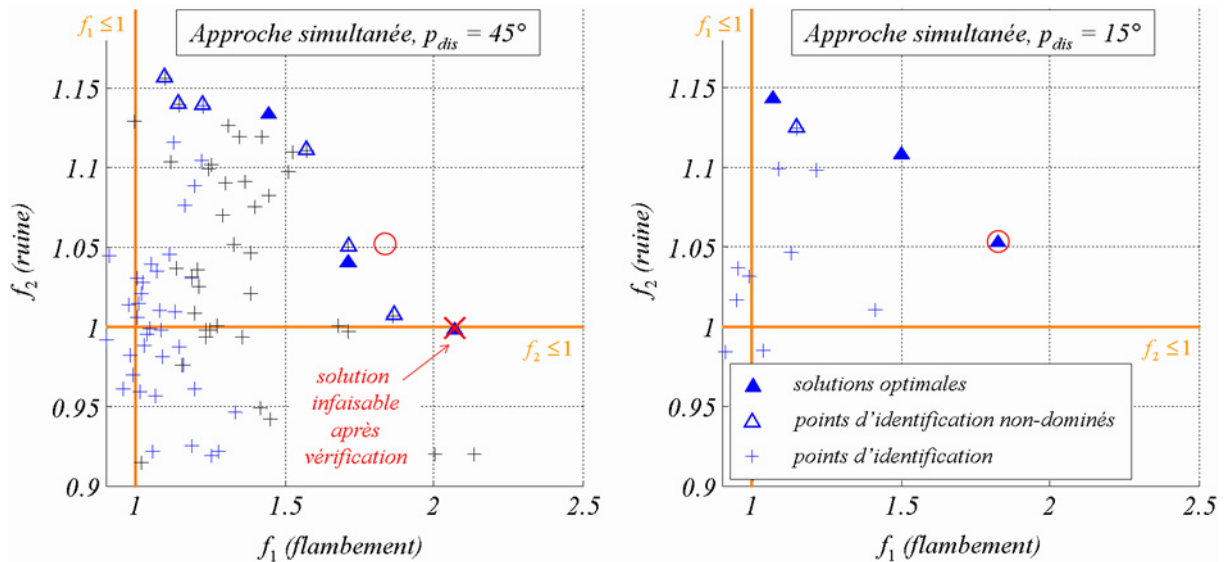


Figure V-21 : Résultats des calculs EF exploités pour l'optimisation simultanée. La figure de gauche reprend l'ensemble des points de la Figure V-20, utilisés pour l'identification des métamodèles. Le cercle rouge reporté sur les deux éléments de la figure correspond au Panneau 3 (Figure V-17).

En matière de diversité des compromis optimaux, la supériorité de l'optimisation simultanée sur l'optimisation séquentielle est très nette. Pour s'en convaincre, le Tableau V-1 récapitule les cardinaux des fronts obtenus par les différentes démarches d'optimisation.

Démarche d'optimisation	Séquentielle		Simultanée	
	Directe	Duale	$p_{dis} = 45^\circ$	$p_{dis} = 15^\circ$
Nombre de compromis optimaux	15	41	106	137

Tableau V-1 : Cardinaux des fronts obtenus par les quatre démarches d'optimisation.

Enfin, les coûts de calcul associés à chacune des démarches envisagées sont proches, comme en témoigne le Tableau V-2 ci-dessous. Ce constat constitue un argument supplémentaire en faveur de l'approche simultanée, puisque pour un même effort de calcul, le problème est traité de façon beaucoup plus complète.

Approche séquentielle	2 × 33 calculs EF d'identification (1 heure chacun), + 2 exécutions du processus d'optimisation comprenant chacune 3000 évaluations des fonctions-objectif par les métamodèles (5 minutes chacune), + 4 calculs EF de vérification, TOTAL : 70 heures de calcul et 10 minutes d'optimisation. (1)
Optimisation simultanée :	
- $p_{dis} = 45^\circ$	TOTAL : 64 heures de calcul et 5 minutes d'optimisation. (2)
- $p_{dis} = 15^\circ$	TOTAL : 74 heures de calcul et 5 minutes d'optimisation.

(1) Il faut multiplier ce coût de calcul autant de fois que l'on compte répéter le processus séquentiel (par exemple ×2 pour le processus direct et son dual).

(2) On a utilisé plus de points d'identification, mais en procédant comme pour l'optimisation simultanée avec un pas de 15° , on aurait pu se contenter de 64 calculs, car il y a deux variables de moins.

Tableau V-2 : Synthèse des temps de calcul pour les différentes démarches d'optimisation.

Les Figures V-20 et V-21 appellent enfin deux remarques. La première concerne la fréquence avec laquelle des points d'identification se révèlent optimaux ou proches des compromis optimaux. Ce constat nous permet de souligner une nouvelle fois l'efficacité de l'outil d'initialisation. D'une part, l'exploration raisonnée de l'espace de recherche dès la constitution de la population initiale permet d'accroître considérablement l'efficacité de l'AE, par rapport à une initialisation aléatoire. D'autre part, la population obtenue constitue un plan d'expérience efficace pour l'approximation des fonctions-objectif. Soulignons que le lien entre la population initiale et l'ensemble d'identification des métamodèle est très fort, puisque la population initiale est ici assimilée aux solutions réalisables (du point de vue des règles de conception) de l'ensemble d'identification. La seconde remarque renvoie à la capacité des méthodes employées à travailler en extrapolation, alors même que l'approximation des fonctions-objectif est de qualité moyenne. Ce constat est particulièrement flagrant dans le cas de l'approximation globale avec un pas de 15° .

V.4.2 PRECAUTIONS ET RECOMMANDATION POUR L'USAGE DE METAMODELES

De façon générale, l'optimisation requiert des métamodèles précis pour l'approximation globale des fonctions-objectif. Ceci suppose à la fois de maîtriser l'erreur maximale, afin de cerner les zones où la présence d'un optimum est la plus probable, et de préciser le métamodèle dans ces zones, pour un résultat précis. De ce point de vue, l'optimisation multiobjectif s'avère particulièrement exigeante. Le front de Pareto est susceptible de s'étendre sur une très vaste portion de l'espace de recherche. De surcroît, la relation de dominance est simultanément évaluée sur toutes les fonctions-objectif, de telle sorte qu'une trop forte incertitude sur un seul objectif suffit à fausser l'optimisation.

Les erreurs d'extrapolation associées aux métamodèles utilisés pour l'optimisation simultanée sont récapitulés dans le Tableau V-3. Ces erreurs sont quantifiées par le biais des écarts entre valeurs approchées et résultats des calculs EF au niveau des points n'ayant pas servi à l'identification du métamodèle considéré. Deux constats s'imposent.

Erreur d'extrapolation	Approximation globale $p_{dis} = 15^\circ$			Approximation globale $p_{dis} = 45^\circ$		
	F_{flamb}	F_{eff}	F_{rupt}	F_{flamb}	F_{eff}	F_{rupt}
Erreur moyenne	11 %	4 %	4 %	37 %	24 %	27 %
Erreur maximale	55 %	17 %	35 %	390 %	187 %	212 %
Points d'identification mal répartis						

Tableau V-3 : Erreurs d'extrapolation associées aux métamodèles employés pour l'optimisation simultanée. Ces erreurs sont évaluées au niveau des points de calculs EF ignorés lors de l'identification des métamodèles.

Premièrement, bien que le nombre de points d'identification soit deux fois inférieur, les approximations réalisées pour un pas de 15° sont de qualité largement supérieure à celles réalisées pour un pas de 45° . Il y a deux raisons principales à cela. La première réside dans la distribution des points d'identification dans l'espace de recherche (voir Figure V-11), bien meilleure dans le cas de l'ensemble d'identification employé pour un pas de 15° . La seconde raison est liée aux types d'empilements considérés (voir Tableau V-4). Pour les empilements symétriques équilibrés, lorsque le pas de discrétisation est de 45° , la matrice de rigidité ABD est entièrement décrite par la donnée de cinq modules de rigidité uniquement, contre six pour une discrétisation plus fine. Les métamodèles identifiés sur des empilements de type $0^\circ/45^\circ/90^\circ$ ne décrivent ainsi correctement qu'une gamme très particulière de configurations.

Le deuxième constat est lié aux difficultés d'approximation de la force critique de flambement. En effet, le Tableau V-3 souligne clairement que les erreurs d'approximation les plus importantes lui sont associées. Ces difficultés sont liées aux changements de mode de flambement. Chaque changement de mode correspond à un changement de régularité de la force de flambement et à une discontinuité de dérivée qui échappent aux techniques classiques d'approximation. Ce point est discuté plus avant au chapitre suivant. Le fait que l'approximation de la force d'effondrement ne pose pas de telles difficultés suggère que les deux phénomènes sont moins corrélés qu'on ne pourrait le penser au premier abord. L'effondrement intervient toujours de façon similaire; conditionnée par la géométrie.

Type d'empilement	Nombre de degrés de liberté	Variables d'identification	Nombre minimal de calculs pour l'identification d'un métamodèle
$p_{dis} = 90^\circ$ Symétrique	4	A_{11}, A_{22} D_{11}, D_{22}	15
$p_{dis} = 45^\circ$ Symétrique, équilibré	5	A_{11}, A_{22} D_{11}, D_{22}, D_{16}	18
$p_{dis} < 45^\circ$ Symétrique, équilibré	6	A_{11}, A_{22} $D_{11}, D_{22}, D_{16}, D_{26}$	21
p_{dis} quelconque Symétrique	8	$A_{11}, A_{22}, A_{16}, A_{26}$ $D_{11}, D_{22}, D_{16}, D_{26}$	27
Cas général	12	$A_{11}, A_{22}, A_{16}, A_{26}$ $B_{11}, B_{22}, B_{16}, B_{26}$ $D_{11}, D_{22}, D_{16}, D_{26}$	39

Tableau V-4 : Correspondance entre le type d'empilement, les degrés de liberté correspondants et le nombre minimal de calculs nécessaires à l'identification d'un métamodèle en retranscrivant influence. On s'appuie ici sur la règle des $3(n+1)$ proposée dans [Rollet 07], où n correspond au nombre de degrés de liberté..

Le Tableau V-4 appelle enfin une dernière remarque. Le nombre minimal de calculs d'identification indiqué dans la colonne de droite n'a, en effet, qu'une valeur indicative. Si la régularité des fonctions à approximer est connue *a priori*, il faut adapter le plan d'expériences virtuelles à celle-ci. Dans le cas contraire, on ne peut donner un nombre exact de calculs d'identification. La démarche la plus appropriée, nous semble t'il, consiste à procéder à l'identification des métamodèles au mieux, compte tenu d'un nombre de calculs impartis et des méthodes de validation croisées employées, puis à dérouler l'ensemble de la chaîne d'optimisation sans remise en cause de la qualité des métamodèles. Celle-ci doit être réalisée en bout de chaîne, en évaluant les incertitudes ou les erreurs commises au niveau des solutions optimales, pour reboucler et, éventuellement, itérer sur le processus complet en rajoutant des points d'identification là où ils sont le plus utiles pour l'optimisation. Les gains obtenus doivent toujours être évalués par le modèle complet et non par son approximation. Dans un tel processus rien ne garantit d'avoir rencontré l'optimum théorique du problème. Les méthodes que nous proposons visent à obtenir la plus grande probabilité de s'en rapprocher et ce, le plus précisément possible. Par contre, l'amélioration réalisée doit être validée par le calcul.

Chapitre VI Vers l'application à des problèmes réels

Sommaire

VI.1	Prise en compte des incertitudes et des méconnaissances dans le problème de conception	150
VI.1.1	Les erreurs et méconnaissances de modèles (Type C).....	151
VI.1.2	Les erreurs de simplification liées aux métamodèles (Type C).....	151
VI.1.3	Incertitudes et méconnaissances sur la dispersion matériau (Type B).....	153
VI.1.4	Incertitudes et erreurs sur le positionnement des fibres (Type A).....	157
VI.1.5	Discussion	158
VI.2	Une méthode pour l'identification des cas de charges dimensionnants.....	160
VI.2.1	Principe général de la méthode.....	160
VI.2.2	Illustration sur un cas d'application simplifié	160
VI.2.3	Perspectives de mise en oeuvre	162
VI.3	Le problème des modes de flambement	165
VI.3.1	Premier cas de figure : des modes évidents	165
VI.3.2	Second cas de figure : distinguer les modes.....	166
VI.4	Bilan	168

Les Chapitres IV et V montrent que l'on peut traiter des problèmes d'optimisation conséquents avec les outils développés dans la première partie de ce mémoire. Néanmoins, de nombreux aspects de ces problèmes ont jusqu'ici été idéalisés. Dans ce dernier chapitre consacré à l'optimisation de la tenue au flambement de panneaux composites, il s'agit de positionner notre travail dans un contexte plus réaliste. L'objectif est ici d'identifier les verrous pour passer des applications théoriques aux problèmes pratiques traités dans un bureau d'études et de proposer des pistes pour lever ces verrous.

Incertitudes et méconnaissance, multiplication des cas de charge, dans quelle mesure les méthodes proposées jusqu'ici seront-elles un jour opérationnelles? Nous disposons aujourd'hui des outils nécessaires pour traiter de façon fiable les problèmes d'optimisation et de robustesse, mais les coûts en sont prohibitifs. En effet, l'usage de modèles précis, l'introduction de considérations de robustesse et la multiplication des fonctions-objectif et des contraintes d'optimisation avec le nombre de cas de charge se rejoignent pour augmenter les coûts de calcul. L'applicabilité de ces méthodes se trouve ainsi conditionnée par la maîtrise des coûts de calcul. Comment réduire ceux-ci tout en conservant la confiance nécessaire dans les résultats obtenus?

Un premier élément de réponse réside dans la nature intrinsèquement parallèle de ces méthodes qui les rend aisées à distribuer sur une grappe de PC, mais celui-ci est à lui seul insuffisant. En effet, les algorithmes d'optimisation comme les modèles les plus évolués ont la fâcheuse tendance de toujours exploiter au maximum les ressources disponibles et de se complexifier au même rythme que ces ressources augmentent. Les autres réponses à mettre en œuvre passent par l'usage de métamodèles et la réduction du nombre de cas de charge à prendre en compte dans l'optimisation.

Dans ce chapitre, on aborde successivement le problème de la prise en compte des incertitudes dans l'optimisation, en illustrant nos propos sur le cas d'optimisation du chapitre précédent, et le problème de l'identification des cas de charge dimensionnants. La maîtrise des temps de calcul constitue un aspect fondamental de ces deux problèmes. De ce point de vue, l'approximation ou la réduction des modèles s'avère le plus souvent indispensable. Ces deux premières sections appellent donc une troisième, consacrée à l'identification des métamodèles dans les cas difficiles, pour des fonctions masquant plusieurs mécanismes élémentaires, de natures et de régularités différentes (typiquement le cas de la force critique de flambement, pour laquelle plusieurs modes peuvent être activés, ou des critères de rupture mésoscopiques, décrivant différents mécanismes de rupture locale).

VI.1 PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES ET DES MECONNAISSANCES DANS LE PROBLEME DE CONCEPTION

Dans cette section, nous passons brièvement en revue les différentes sources d'incertitudes évoquées au Chapitre III pour statuer, dans la mesure du possible, sur leurs conséquences pour l'optimisation du panneau raidi et évaluer le coût de leur prise en compte. Pour chaque type d'incertitudes, ne sont considérées que quelques grandeurs incertaines. Il s'agit avant tout de donner un aperçu de ce qu'il est possible de faire, sachant que de nombreuses méthodes sont à chaque fois envisageables.

Dans la suite, nous parlons d'erreur, de dispersion et de méconnaissance. On a déjà discuté de la signification respective de ces termes au Chapitre III. Soulignons simplement ici que le problème des méconnaissances est particulièrement aigu lors de l'introduction d'un nouveau matériau. En effet, les données expérimentales disponibles sont incomplètes (la dispersion expérimentale en est d'autant plus méconnue) et l'on ne dispose d'aucun retour d'expérience. De plus, les modèles matériaux souffrent eux-mêmes de fortes méconnaissances, liées au manque de recul sur le matériau nouveau.

VI.1.1 LES ERREURS ET MECONNAISSANCES DE MODELES (TYPE C)

On discute ici des erreurs de modèle, c'est-à-dire, de l'écart entre les prévisions du meilleur modèle disponible et la réalité, et des erreurs de simplification liées à l'usage de versions simplifiées de ce modèle. Les erreurs de simplification liées à l'usage de métamodèles (dans la suite, on parle d'erreurs d'approximation) sont abordées par la suite (Cf. VI.1.2).

Dans le cas de l'exemple d'optimisation proposé au Chapitre V, on dispose de résultats expérimentaux pour la configuration nominale, de telle sorte que la confrontation des résultats de simulation et des valeurs expérimentales permet de placer une certaine confiance dans le modèle utilisé. Cependant, le plus souvent, on ne dispose d'aucune donnée expérimentale à partir de laquelle valider (ou éventuellement recalculer) les modèles. Il s'agit là d'une difficulté fondamentale. Il faut alors s'en remettre essentiellement au savoir-faire et à l'expertise des ingénieurs de bureaux d'études. Dans le cas des problèmes de flambement, par exemple, on dispose aujourd'hui d'un savoir-faire certain et d'une bonne confiance dans les modèles. C'est par exemple loin d'être le cas pour les problèmes d'assemblages abordés dans la troisième partie de ce mémoire.

Lorsque aucune donnée expérimentale n'est disponible, on voudrait utiliser les modèles les plus aboutis possibles pour espérer obtenir les prévisions les plus fiables. Malheureusement, le coût de calcul de ces modèles est le plus souvent très excessif. Afin de réduire les temps de calcul, il faut utiliser des modèles simplifiés, en faisant les bons choix de simplification, tant du point de vue numérique (finesse de maillage, type d'éléments, etc.) que du point de vue mécanique (conditions aux limites, modèles matériau, choix des mécanismes pris en compte aux échelles du matériau et de la structure). Là encore l'expertise et le savoir-faire des bureaux d'études entrent en jeu. Cependant, on peut espérer quantifier les erreurs de simplification, par exemple en étudiant la convergence au maillage des modèles ou en comparant modèles simplifiés et modèles plus détaillés. En pratique, l'estimation des erreurs de simplification est coûteuse, complexe et rarement réalisée, mais elle est envisageable.

Idéalement, pour le panneau raidi traité au Chapitre V, il faudrait employer un modèle EF tridimensionnel, avec un maillage pli à pli, des lois de comportement matériau non-linéaires, et des éléments de zone cohésive pour simuler le décollement des raidisseurs. En pratique, néanmoins, un modèle coques multicouches avec des matériaux élastiques linéaires s'avère suffisant pour capturer le flambement et l'effondrement du panneau. Notons que les règles de conception des empilements permettent d'étayer ces choix : par exemple, on minimise les risques de délaminage avec la règle de désorientation et, par la règle des 10 %, on s'assure d'un comportement global quasi-linéaire pour le stratifié (contrairement à l'empilement constitué de plis orientés à $\pm 45^\circ$, par exemple). La description de la rupture du panneau est elle, par contre, très grossière et l'on a délibérément choisi d'ignorer les éventuels décollements de raidisseurs¹.

VI.1.2 LES ERREURS DE SIMPLIFICATION LIEES AUX METAMODELES (TYPE C)

Lorsque l'on a recours à des métamodèles, une bonne part de la difficulté de l'optimisation, et l'essentiel des coûts de calculs, sont reportés sur l'identification de ces métamodèles. Tout le problème réside dans l'estimation de leur qualité (précision, stabilité, etc.) et, par là, dans la confiance que l'on peut accorder à leurs prévisions. De très nombreuses techniques et indicateurs sont disponibles pour cela. Puisque le coût de l'évaluation des métamodèles est insignifiant (par rapport au coût des modèles d'origine), nous préconisons de tester de manière systématique le plus grand

¹ En effet, les travaux expérimentaux présentés dans [Falzon 00] démontrent qu'il n'y a pas de décollement de raidisseurs pour la configuration nominale du panneau. Cependant, rien ne garantit que cela ne se produise pour d'autres empilements de la peau ou du raidisseur.

nombre de ces techniques, en associant à chacune le maximum d'indicateurs, afin d'acquérir la confiance nécessaire.

Une première gamme d'indicateurs sert au choix de la meilleure technique d'approximation, parmi les multiples métamodèles envisageables : surfaces de réponses polynomiales, kriging, RBFT, réseaux de neurones, etc. Les techniques de validation croisée permettent ainsi d'estimer la précision d'un métamodèle pour un coût de calcul très faible. Citons par exemple les techniques de *bootstrap*, de *leave-K-out* ou la validation croisée à partir d'un ensemble d'apprentissage et d'un ensemble de validation. Ces indicateurs ne fournissent pas de mesure absolue de l'erreur commise par le métamodèle, mais il a été démontré [Rollet 07] que lorsqu'ils sont "au vert", ils permettent une réelle confiance dans celui-ci. Il est ainsi possible de choisir la technique d'approximation la plus adaptée au problème considéré. Dans le cas où les résultats de validation croisée s'avèrent systématiquement insuffisants, on a le choix, soit de rajouter des points d'identification (dans l'espoir d'améliorer la qualité de l'approximation), soit de poursuivre l'optimisation avec ce métamodèle, auquel cas des vérifications *a posteriori* sont nécessaires. C'est de cette façon que l'on a procédé pour l'optimisation simultanée proposée au Chapitre V, avec des métamodèles assez imprécis, mais suffisants pour capturer les tendances globales des fonctions-objectif, ce que l'on a ensuite vérifié par calcul EF sur les quelques solutions retenues.

D'autres indicateurs permettent d'estimer les incertitudes associées aux prévisions d'un métamodèle. Le kriging, par exemple, dans sa version interpolante, dispose d'un indicateur intégré pour estimer les incertitudes d'extrapolation entre les points d'identification. Ces indicateurs doivent être manipulés avec précaution, dans la mesure où ils sont conditionnés par le choix du métamodèle. Il faut donc au préalable s'être assuré de la précision de la technique d'approximation retenue. Si la régularité du métamodèle ne correspond pas à celle du problème, les résultats du modèle complet ont toutes les chances de se trouver en dehors des zones d'incertitudes estimées par les indicateurs.

Dans le cas de l'optimisation simultanée proposée au Chapitre V pour un pas de 15° , on est dans un cas limite, pour lequel les résultats de validation croisée sont médiocres, sans être inadmissibles. Afin d'estimer les incertitudes sur l'approximation de la façon la plus conservatrice possible compte tenu du type de métamodèle retenu, on propose un indicateur simple consistant à identifier une série de RBFT pour une large gamme de tension et à évaluer, en chaque solution, l'intervalle de variation des prévisions. On balaie ainsi une gamme d'approximations, compatibles avec les points d'identification, variant de l'interpolation linéaire à une approximation plus proche de l'interpolation quadratique. La Figure VI-1 ci-contre présente le schéma de principe de la méthode. Les résultats obtenus sont récapitulés sur la Figure VI-2, pour l'ensemble du front de Pareto.

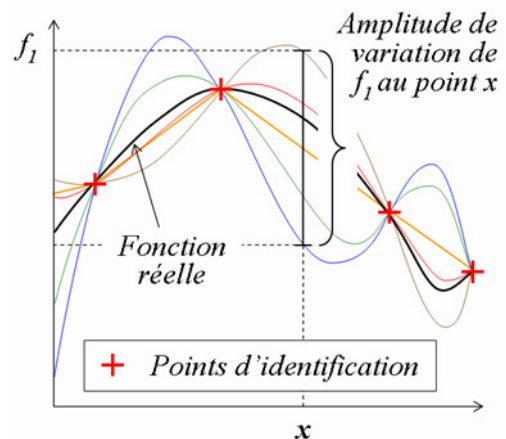


Figure VI-1 : Estimation de l'amplitude de variation des prévisions pour un ensemble d'approximations compatibles avec l'échantillonnage d'identification.

Cette figure montre des incertitudes importantes, tout particulièrement sur la ruine du panneau. Il existe même des incertitudes sur la faisabilité de certaines solutions. Pourtant, malgré ces incertitudes, de nombreuses solutions restent intéressantes, même dans le cas le pire, car elles conservent une marge d'amélioration importante par rapport à la configuration nominale (le point de

coordonnées (1,1)). Sur la Figure VI-3, les résultats de vérification par EF sont reportés par rapport à la zone d'incertitude prévue pour les cinq solutions retenues au Chapitre V. Compte tenu de l'imprécision des métamodèles, les résultats EF sortent des zones d'incertitudes en deux points. C'est principalement pour la force critique de flambement que l'indicateur d'incertitudes s'avère insuffisant. Ce constat s'explique aisément puisque, comme on l'a souligné précédemment (voir Tableau V-3), c'est le métamodèle associé à cette grandeur qui est le plus imprécis, en raison des changements de modes de flambement (ce problème est repris plus loin, Cf. VI.3).

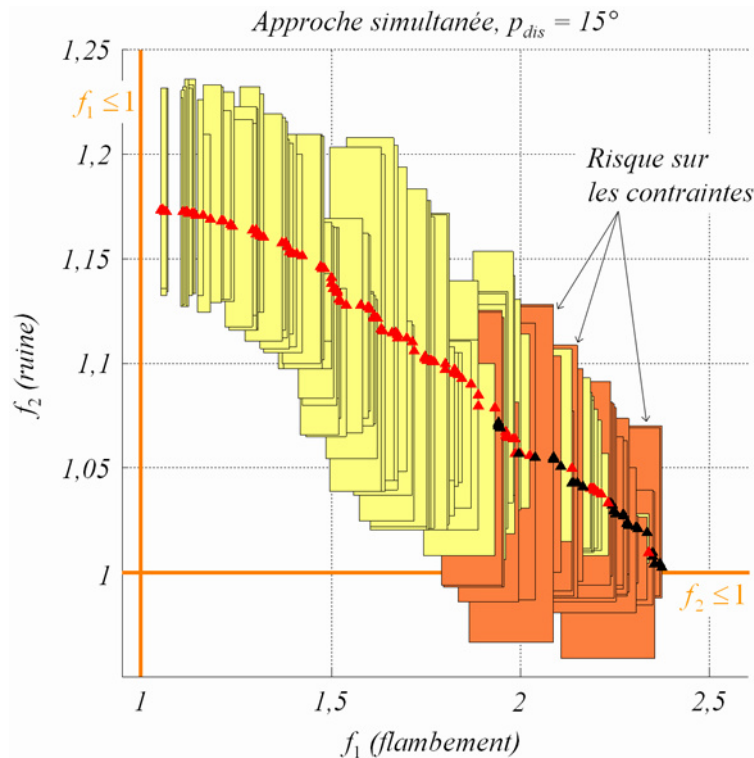


Figure VI-2 : Estimation de l'effet des incertitudes sur l'identification des RBFT pour les solutions optimales du problème d'optimisation simultanée du panneau raidi (Chapitre V).

VI.1.3 INCERTITUDES ET MECONNAISSANCES SUR LA DISPERSION MATERIAU (TYPE B)

De façon générale, les incertitudes de type B, telles que définies au Chapitre III, proviennent de sources variées : dispersion matériau, mais aussi incertitudes sur les conditions aux limites, tolérances géométriques, etc. Nous étudions ici un exemple partiel, en ne tenant compte que de la dispersion matériau. Au vu des simplifications réalisées pour le modèle (comportements linéaires élastiques, modélisation grossière de la rupture), nous considérons que cette dispersion est globalement décrite par les variations des propriétés élastiques du pli unidirectionnel.

Afin d'estimer l'influence de ces variations sur l'optimisation du panneau raidi, on réalise une analyse de variabilité, selon la méthode proposée par [Rollet 07], pour trois configurations² : le panneau nominal, une configuration optimale obtenue par l'approche simultanée, avec un pas de 15° (le Panneau 3 de la Figure V-17), et une configuration optimale obtenue à l'issue de l'optimisation séquentielle directe, avec un pas de 45° (que l'on désigne dans la suite comme le Panneau 4). Les propriétés élastiques nominales du pli unidirectionnel (T800/924C) et les variations considérées sont récapitulées dans le Tableau VI-1.

² Les empilements sont détaillés plus loin, sur la Figure VI-6.

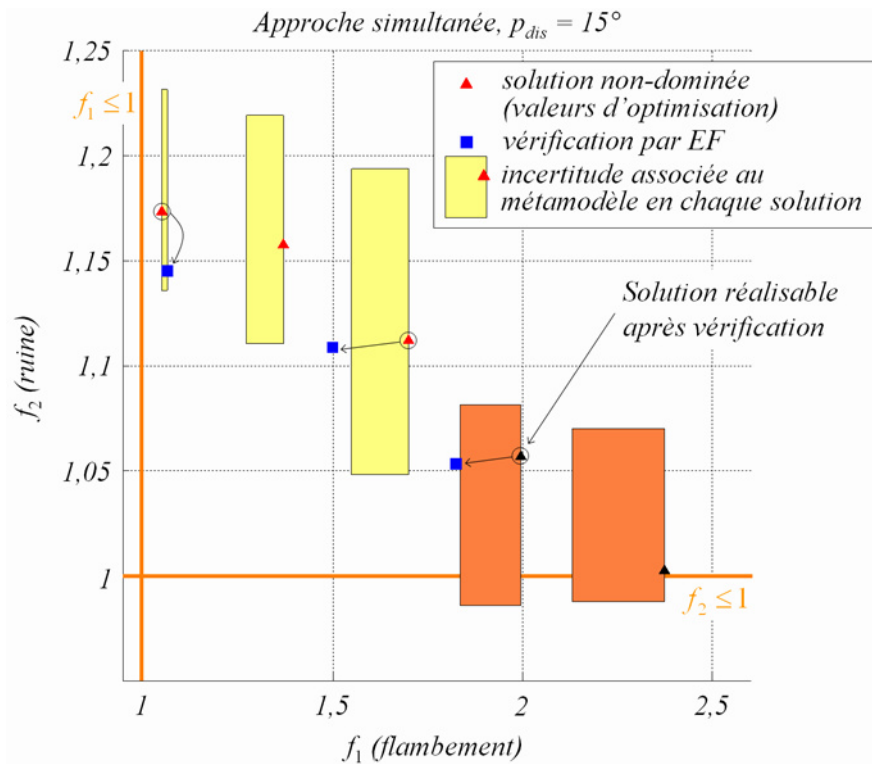


Figure VI-3 : Estimation de l'effet des incertitudes sur l'identification des RBFT pour cinq solutions optimales du problème d'optimisation simultanée. Comparaison avec les résultats des calculs EF (Chapitre V).

En plus du calcul EF correspondant aux valeurs nominales des paramètres matériau, quinze calculs EF sont réalisés pour chaque configuration d'empilement, afin d'identifier les métamodèles locaux nécessaires à l'estimation de l'influence de la dispersion matériau sur les fonctions objectifs. Les résultats obtenus s'avèrent correspondre de façon quasi-parfaite à une approximation linéaire³. Les résultats de validation croisée sont présentés sur la Figure VI-4 dans le cas de l'approximation de la force critique de flambement pour le panneau nominal. Sur cette même figure, on montre l'influence respective des coefficients du métamodèle associés à chaque paramètre incertain. Il s'agit d'une mesure d'importance relative, de la sorte que la somme des influences est de 100 %. C'est clairement le module d'Young longitudinal qui s'avère prépondérant. Les métamodèles linéaires donnent des résultats de même qualité pour l'estimation de l'influence des variations des propriétés élastiques sur la force de rupture matériau et la force d'effondrement et ce, pour les trois panneaux considérés.

Paramètre incertain	Valeur moyenne	Fluctuation	Amplitude d'incertitude
E_{11}	145000 MPa	± 7250 MPa	± 5 %
E_{22}	9500 MPa	± 665 MPa	± 7 %
G_{12}	5000 MPa	± 500 MPa	± 10 %
ν_{12}	0,3	$\pm 0,021$	± 7 %
ν_{23}	0,4	$\pm 0,08$	± 20 %

Tableau VI-1 : Paramètres incertains et incertitudes associées pour l'étude de l'influence de la dispersion matériau sur l'optimisation du panneau raidi.

³ Ce résultat n'a rien de surprenant. Contrairement aux problèmes d'optimisation, les intervalles de variation des variables considérées (ici, les propriétés élastiques) sont très limités, de telle sorte qu'un métamodèle local simple (ici, linéaire) est suffisant pour traiter ce problème [Rollet 07].

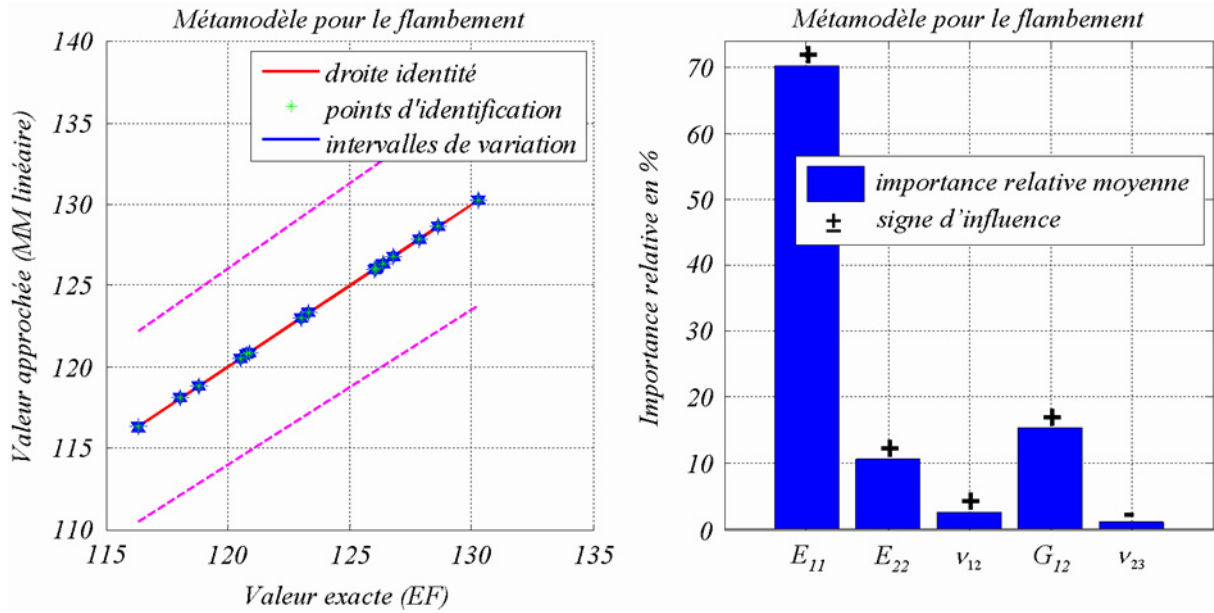


Figure VI-4 : Approximation linéaire de la force critique de flambement pour le panneau nominal. A gauche : graphe de dispersion obtenu par leave-2-out. A droite : importance relative (moyenne) des coefficients associés aux cinq paramètres incertains estimée à l'issue de 30 réidentifications par leave-2-out.

A partir des métamodèles locaux obtenus, les amplitudes de variation des forces de flambement, d'effondrement et de rupture matériau, sont estimées. On procède à un tirage de Monte-Carlo de 10^6 points pour estimer la distribution de probabilités dans le domaine d'incertitude associé à chaque panneau⁴, selon la démarche proposée sur le schéma de principe de la Figure VI-5. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau VI-2 et reportés graphiquement, pour les fonctions-objectif f_1 et f_2 , sur la Figure VI-6. Le tirage aléatoire montre que seule une petite partie du domaine d'incertitude associé à chaque panneau est possible.

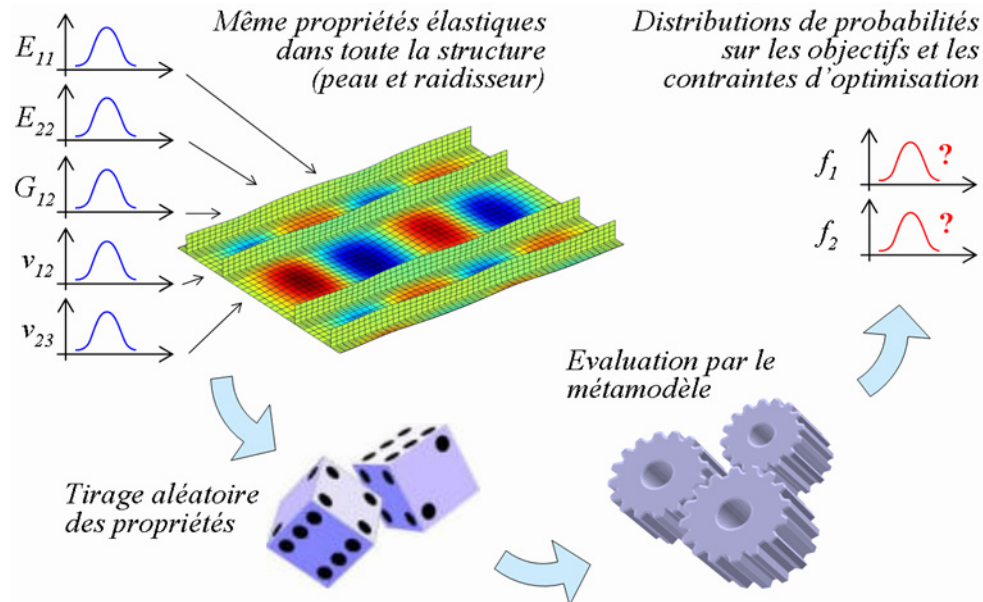


Figure VI-5 : Schémas de principe du transport d'incertitudes, des propriétés élastiques du pli élémentaire aux fonctions-objectif et contraintes du problème d'optimisation.

⁴ Remarquons que dans un cas aussi simple que celui-ci, on peut également effectuer un transport formel pour obtenir la distribution de sortie [Rollet 07].

Fonction-objectif	Panneau nominal			Panneau 3 ($p_{dis} = 15^\circ$)			Panneau 4 ($p_{dis} = 45^\circ$)		
	Moy. (kN)	Fluc. (kN)	Ampli.	Moy. (kN)	Fluc. (kN)	Ampli.	Moy. (kN)	Fluc. (kN)	Ampli.
F_{flamb}	123	± 7	$\pm 5,7 \%$	225	± 13	$\pm 5,8 \%$	194	± 11	$\pm 5,7 \%$
F_{eff}	595	± 36	$\pm 6,0 \%$	654	± 39	$\pm 6,0 \%$	677	± 40	$\pm 5,9 \%$
F_{rupt}	595	± 36	$\pm 6,0 \%$	625	± 33	$\pm 5,3 \%$	659	± 36	$\pm 5,1 \%$

Tableau VI-2 : Valeurs moyennes (nominales) des fonctions-objectif, fluctuation et amplitude de variation compte tenu de la dispersion des paramètres élastiques du matériau.

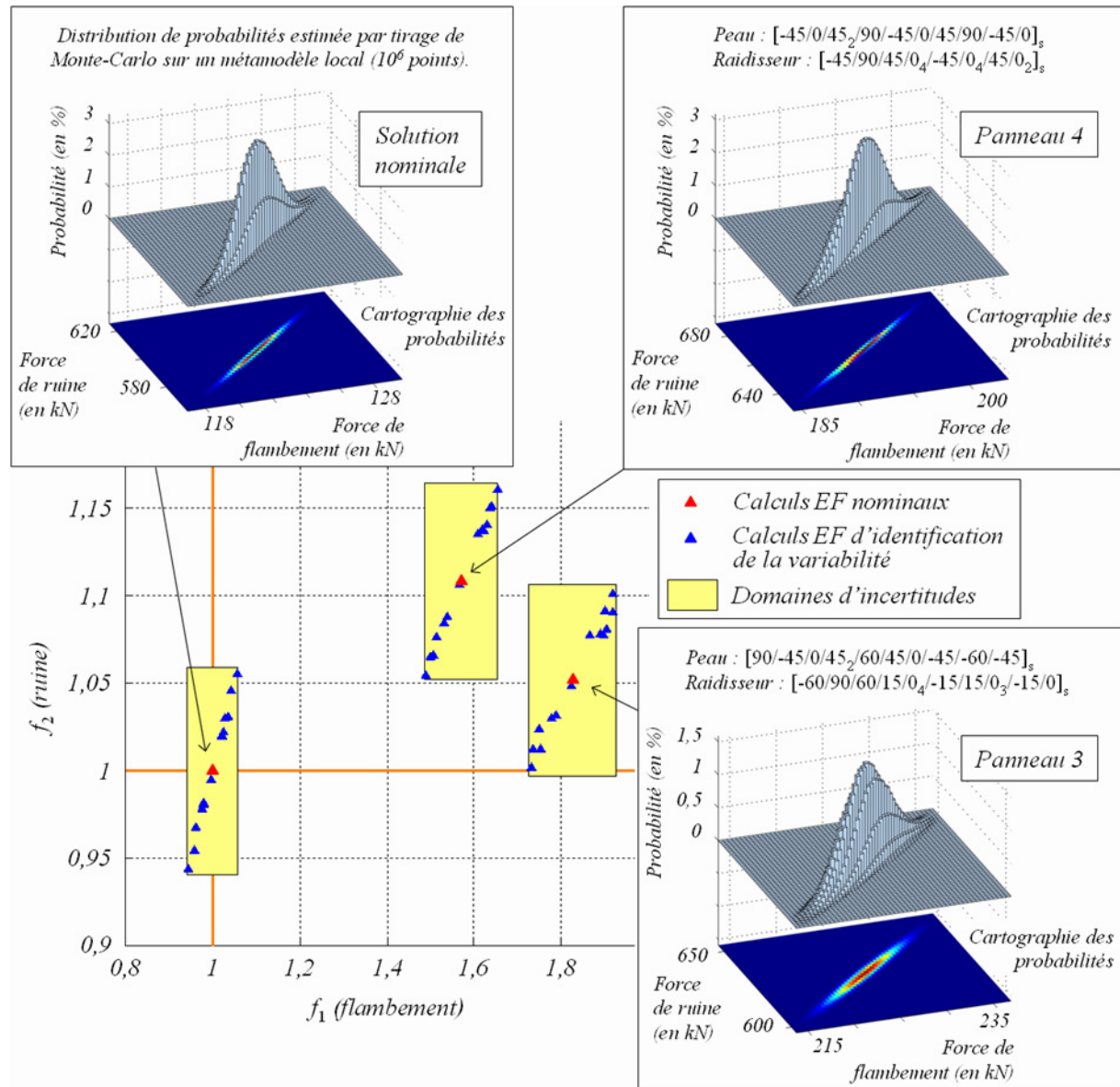


Figure VI-6 : Influence des incertitudes sur les propriétés élastiques. Distributions de probabilités estimées par tirage de Monte-Carlo sur les métamodèles autour de chacun des trois panneaux considérés.

La Figure VI-7 illustre l'influence du choix de la distribution décrivant les variations des paramètres élastiques incertains E_{11} , E_{22} , G_{12} , ν_{12} et ν_{23} pour le Panneau 4. Avec une distribution uniforme, la probabilité des cas les plus pénalisants est largement accrue par rapport au cas d'une distribution normale. Si l'on cherche à s'assurer de la satisfaction des contraintes, on constate que le

domaine d'incertitudes associé au Panneau 3 sort légèrement du domaine réalisable, matérialisé par les droites oranges sur la Figure VI-6. Néanmoins, en considérant une distribution de probabilité normale sur les paramètres élastiques incertains, la probabilité de violer la contrainte $f_2 > 1$ s'avère inférieure à 10^{-6} . Pour une distribution uniforme, elle est de l'ordre de 8×10^{-5} . On a déjà évoqué le problème de la description des incertitudes au Chapitre III. Ce problème est fondamental, puisque le choix des paramètres incertains, des distributions de probabilités et des corrélations entre paramètres incertains conditionne les résultats de l'analyse de variabilité. Malheureusement, ces différents éléments sont rarement connus avec précision et très difficiles à déterminer expérimentalement.

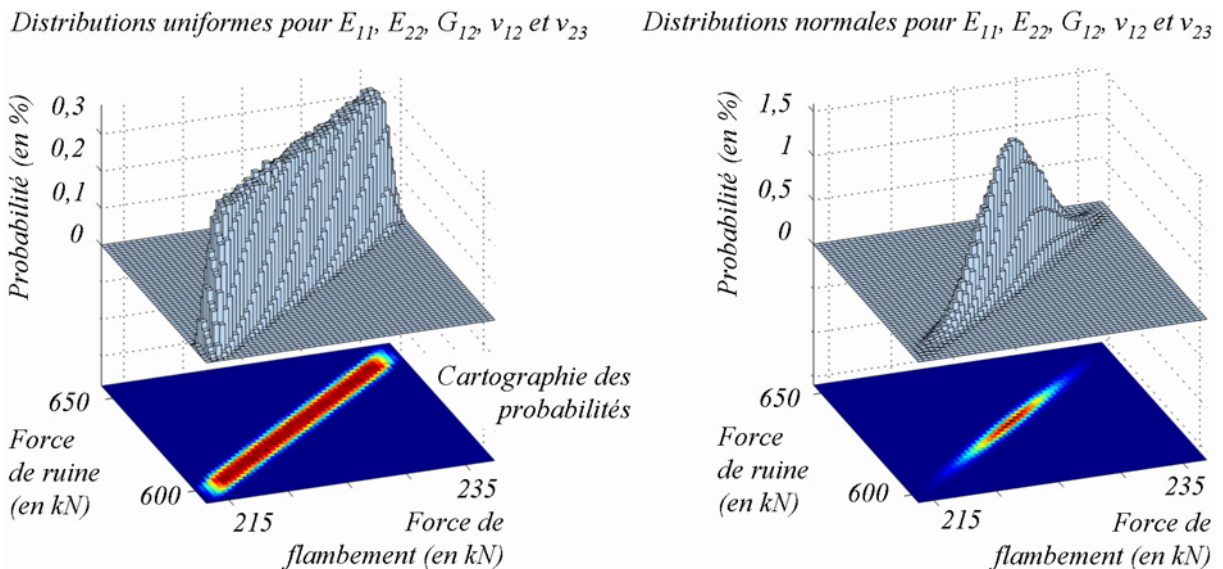


Figure VI-7 : Influence du choix de la distribution sur les paramètres élastiques incertains pour le Panneau 4. A gauche : distribution uniforme, à droite, distribution normale.

VI.1.4 INCERTITUDES ET ERREURS SUR LE POSITIONNEMENT DES FIBRES (TYPE A)

Comme on l'a expliqué au Chapitre III, le problème de la robustesse dans un processus d'optimisation suppose de tenir compte aussi bien des incertitudes sur les variables de l'optimisation (type A) que des incertitudes de type B, sur les autres grandeurs influentes. Nous illustrons ici ce propos sur le cas des erreurs de drapage.

Le problème de la description des paramètres incertains se pose de la même manière pour les incertitudes sur le positionnement des fibres que pour les incertitudes ou la méconnaissance des propriétés matériau. Ici, trois calculs EF sont réalisés pour estimer très grossièrement l'influence de certaines erreurs de positionnement des plis sur le comportement du Panneau 4.

1. Dans le premier calcul, la peau subit une désorientation globale de 2° (associée, par exemple à une imprécision d'alignement au drapage ou une erreur de découpe dans une plaque plus grande). Avec ce type d'erreur, l'empilement de la peau n'est plus équilibré et des termes de couplages plans A_{16} et A_{26} non nuls apparaissent dans la matrice de rigidité de la peau :

$$\text{Peau} : [-43/2/47_2/-88/-43/2/47/-88/-43/2]_s$$

$$\text{Raidisseur} : [-45/90/45/0_4/-45/0_4/45/0_2]_s$$

2. Dans le deuxième calcul, on tient compte d'une erreur de drapage liée à un opérateur humain, avec un pli orienté à 90° au lieu de 0° . Ce faisant, l'empilement du raidisseur devient

dissymétrique et des couplages B_{ij} , faibles mais non nuls, apparaissent entre le comportement de membrane et le comportement de flexion :

$$Peau : [-45/0/45_2/90/-45/0/45/90/-45/0]_s$$

$$Raidisseur : [-45/90/45/90/0_3/-45/0_4/45/0_4/45/0_4/-45/0_4/45/90/-45]$$

3. Les deux erreurs précédentes sont cumulées dans le troisième calcul, afin d'estimer un cas *a priori* fortement défavorable :

$$Peau : [-43/2/47_2/-88/-43/2/47/-88/-43/2]_s$$

$$Raidisseur : [-45/90/45/90/0_3/-45/0_4/45/0_4/45/0_4/-45/0_4/45/90/-45].$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau VI-3. De façon générale, la variabilité due aux incertitudes sur le positionnement des plis est faible. L'ordre de grandeur des variations observées est largement inférieur à la variabilité estimée au paragraphe précédent pour la dispersion matériau. Toutefois, les conséquences de l'erreur d'empilement sur le raidisseur sont sensibles et doivent être évaluées et prises en compte. Il semble légitime de supposer que la variabilité liée aux propriétés élastiques du matériau et aux erreurs et imprécision de positionnement des fibres se cumulent de façon additive.

Fonction-objectif	Panneau 4 nominal	Calcul 1		Calcul 2		Calcul 3	
		Fluc. (kN)	Ampli.	Fluc. (kN)	Ampli.	Fluc. (kN)	Ampli.
F_{flamb}	194 kN	< -0,1	< -0,1 %	-2,6	-1,3 %	-2,7	-1,4 %
F_{eff}	677 kN	< -0,1	< -0,1 %	-4,9	-0,7 %	-4,9	-0,7 %
F_{rupt}	659 kN	< -0,1	< -0,1 %	-5,4	-0,8 %	-5,5	-0,8 %

Tableau VI-3 : Fluctuation et amplitude de variation par rapport aux valeurs nominales des fonctions-objectif pour les trois calculs réalisés afin d'estimer l'influence des incertitudes et des erreurs d'empilement.

A l'évidence, de (très) nombreuses erreurs d'empilement sont envisageables : erreur sur un seul pli, erreurs ou imprécisions indépendantes pour le positionnement de tous les plis, etc. Nous cherchons simplement à montrer ici qu'il est possible de traiter très partiellement le problème de variabilité en examinant directement les configurations les plus défavorables, ou supposées telles, pour estimer grossièrement l'influence des erreurs et incertitudes.

VI.1.5 DISCUSSION

Au final, de nombreuses possibilités sont offertes pour la prise en compte des incertitudes dans le processus de conception et d'optimisation. Toutes les méthodes ou techniques envisageables renvoient aux trois problèmes fondamentaux suivants, pour lesquels il n'existe pas de solution universelle, mais de nombreuses réponses partielles et au cas par cas :

- la description des incertitudes,
- l'estimation des écarts entre les modèles et la réalité,
- la nécessité de contenir les coûts de calcul.

La question est de savoir si l'on peut espérer, malgré ces difficultés, parvenir à des méthodes fiables pour la conception robuste et l'optimisation, ou plutôt l'amélioration, des structures composites.

On a montré dans le Chapitre V, sur le cas du panneau raidi, qu'il est possible d'améliorer considérablement la solution nominale, même en tenant compte des incertitudes. On a certes pas la garantie qu'il s'agisse de l'optimum réel du problème, mais l'amélioration est garantie, et elle est considérable. Toutefois, dans un souci de simplicité et pour une visualisation plus aisée des résultats, l'optimisation est menée en ne considérant que deux objectifs et deux contraintes, associés à un unique cas de charge. Or, le plus souvent, les problèmes réels des bureaux d'études sont bien plus complexes et nécessitent l'examen de très nombreux chargements. C'est de cette difficulté supplémentaire dont il est question dans la partie suivante.

Notons que nous n'avons pas envisagé ici de prendre en compte des défauts éventuels tels que le décollement partiel d'un raidisseur, d'un délaminage localisé ou des conséquences d'un impact lors de la manutention des pièces [Guillaumat 05] (on parle de variabilité spatiale, au sein d'une même pièce, par opposition aux incertitudes globales considérées jusqu'ici, s'exerçant d'une structure à l'autre mais uniforme sur une même pièce). Il serait intéressant d'intégrer aux objectifs du problème d'optimisation robuste la maximisation de la tolérance (ou la minimisation de la sensibilité) de la structure aux défauts, même si ce problème laisse augurer de grandes difficultés supplémentaires. Ceci constitue certainement un des challenges des années à venir.

VI.2 UNE METHODE POUR L'IDENTIFICATION DES CAS DE CHARGES DIMENSIONNANTS

Le plus souvent, les structures réelles sont soumises, en fonctionnement, à des sollicitations diverses et variées. De ce fait, les problèmes de dimensionnement traités en bureaux d'étude comprennent de très nombreux cas de charge. En aéronautique, ce sont quelques dizaines à quelques centaines de cas de charge dont il faut tenir compte pour le dimensionnement et l'optimisation structurale. Par rapport au cas d'optimisation traité au Chapitre V, avec un unique chargement, les coûts de calcul sont multipliés d'autant. A chaque cas de charge correspond une contrainte de tenue au flambement et une contrainte de rupture qu'il convient de vérifier pour s'assurer de la faisabilité de la solution. Les coûts de calcul deviennent ainsi rapidement exorbitants. Que faire pour y remédier? On a déjà évoqué la possibilité de jouer sur la puissance, et surtout sur le nombre, des moyens de calcul. Une autre piste consiste à travailler sur la formulation du problème. Parmi tous les cas de charge considérés, on sait que seul un petit nombre sont dimensionnants, c'est-à-dire susceptibles d'activer les contraintes d'optimisation lorsque l'on balaie tous les empilements possibles. En effet, certains cas de charge en "couvrent" d'autres, au sens que la satisfaction des contraintes pour les uns entraînent nécessairement la satisfaction des contraintes pour les autres. Dans cette situation, le calcul des cas de charge "couverts" est inutile et redondant. Afin de s'en dispenser, il faut identifier les cas de charge dimensionnants le plus tôt possible au cours de l'optimisation.

Nous avons recherché des outils pour atteindre ce but. Ceux-ci ont été apportés par F-H. Leroy, qui nous a largement aidé pour l'application de ces outils à l'identification des cas de charge dimensionnants. De même, les travaux présentés dans la troisième section de ce chapitre résultent de cette collaboration.

VI.2.1 PRINCIPE GENERAL DE LA METHODE

Nous présentons ici le principe général de la méthode dans un cas simple. L'objectif est d'identifier le (ou les) cas de charge dimensionnement(s), parmi un ensemble donné de k cas de charge. Considérons une contrainte de dimensionnement de type $y_i \geq 0$ pour chaque chargement $i \in \{1, \dots, k\}$. Un cas de charge i est dimensionnant, s'il existe au moins un stratifié \mathbf{x} appartenant au domaine de recherche considéré \mathbf{X} , tel que la valeur de la contrainte de dimensionnement associée y_i est inférieure à toutes les autres :

$$\begin{aligned} & \text{le chargement } i \text{ est dimensionnant} \\ & \text{ssi } \exists \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ tel que } y_i < y_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i \end{aligned} \quad (\text{VI-1})$$

Nous supposons de plus que le vecteur des sorties $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ est lié aux variables d'entrée $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ par la relation linéaire :

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{M} \mathbf{x}^T + \mathbf{B} \quad (\text{VI-2})$$

L'idée consiste à transporter le système d'inégalités VI-1 des sorties \mathbf{y} vers les entrées \mathbf{x} du problème. Il s'agit d'un problème d'extraction de règles. De cette manière, statuer sur la criticité d'un cas de charge i revient à statuer sur la faisabilité du système correspondant de $k-1$ inégalités exprimées sur les n variables d'entrée du problème.

VI.2.2 ILLUSTRATION SUR UN CAS D'APPLICATION SIMPLIFIE

Illustrons le fonctionnement de la méthode sur un cas simplifié d'optimisation de la tenue d'une plaque stratifiée au flambement. Les contraintes de dimensionnement considérées consistent à vérifier que la

plaque ne flambe pour aucun des k cas de charge considérés. Plutôt que de vérifier systématiquement les contraintes pour tous les cas de charge en chaque solution évaluée pour l'optimisation, on veut identifier les chargements dimensionnants, pour ne vérifier que ceux-ci, et limiter d'autant les temps de calcul.

Les facteurs de flambement λ_i sont estimés ici par le modèle orthotrope défini par l'expression IV-4. Seul est considéré le mode de flambement (1, 1). Le nombre de plis est fixé. Il s'agit d'identifier les cas de charge dimensionnants, c'est-à-dire les chargements i tels qu'il existe au moins un empilement \mathbf{x} pour lequel le facteur de flambement λ_i est inférieur à tous les autres :

$$\begin{aligned} & \text{le chargement } i \text{ est dimensionnant} \\ & \text{ssi } \exists \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ tel que } \lambda_i < \lambda_j, \forall j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i \end{aligned} \quad (\text{VI-3})$$

Dans le modèle de flambement orthotrope, l'influence de l'empilement sur le facteur de le facteur de flambement s'exerce par l'intermédiaire des modules D_{11} et D_{22} et d'une constante dépendant du nombre de plis N , ici fixé (Cf. IV.2.3). On peut donc réécrire la relation entre les facteurs de flambement $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ et les variables intermédiaires D_{11} et D_{22} sous la forme linéaire :

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{M} \mathbf{x}^T + \mathbf{B} \quad \text{où } \mathbf{x} = (D_{11}, D_{22}) \quad (\text{VI-4})$$

où la matrice \mathbf{M} , de dimensions $(k \times 2)$, et le vecteur \mathbf{B} , de dimensions $(k \times 1)$, sont connus.

Sous ce formalisme, statuer sur le fait qu'un chargement i est dimensionnant ou non revient à transporter dans le plan (D_{11}, D_{22}) , par l'expression VI-4, le système d'inégalités VI-3 et à statuer sur sa faisabilité. L'expression VI-4 étant linéaire, le transport est immédiat. Toutefois, statuer sur la faisabilité du système d'inégalités est délicat. Nous proposons ici une résolution géométrique de ce problème, en utilisant la Toolbox Matlab MPT (Multi-Parametric Toolbox)⁵. Pour chaque chargement i , le système d'inéquation associé définit un domaine de criticité délimité par des hyperplans (un hyperplan par inégalité) dans le plan (D_{11}, D_{22}) . Soit ce domaine de criticité est vide, et le cas de charge n'est pas dimensionnant, soit il n'est pas vide, auquel cas il l'est potentiellement. Le chargement i n'est véritablement dimensionnant qu'à la condition que le domaine de criticité qui lui est associé dans le plan (D_{11}, D_{22}) corresponde à des stratifiés réalisables (Cf. II.1.1.b ou [Diaconu 02] pour la détermination des rigidités réalisables dans le cas général de la matrice \mathbf{ABD} complète). Au final, un chargement est donc dimensionnant si l'intersection du domaine des rigidités réalisables et de son domaine de criticité n'est pas vide.

Dans l'exemple proposé ici, on vérifie la tenue au flambement d'une plaque carrée à 30 plis réalisée en carbone / époxy pour $k = 200$ chargements. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure VI-8. Pour chaque cas de charge, le domaine de criticité associé est défini par un système de $k-1 = 199$ inégalités. Deux chargements seulement présentent un domaine de criticité non vide. Sur ces deux cas de charge, un seul s'avère réellement dimensionnants.

Une fois cette analyse réalisée, caractériser un nouveau stratifié dans l'espace des modules de rigidité pertinents (ici D_{11} et D_{22}) suffit à connaître le cas de charge dimensionnant. Un unique calcul au lieu de k (ici 200) permet alors de vérifier la faisabilité de la solution (c'est-à-dire, ici, qu'elle ne flambe pour aucun des 200 cas de charge considérés). La réduction correspondante des coûts de calculs est spectaculaire, avec un facteur de réduction égal à $1/k$ (ici 0,005).

⁵ M. Kvasnica, P. Grieder, M. Baotic, "MPT Multi-Parametric Toolbox, Version 2.6.2", 05-Dec-2006, <http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>. On renvoie aux références [Ziegler 94] et [Fukuda 00] pour les notions correspondantes d'arithmétique des polyèdres convexes.

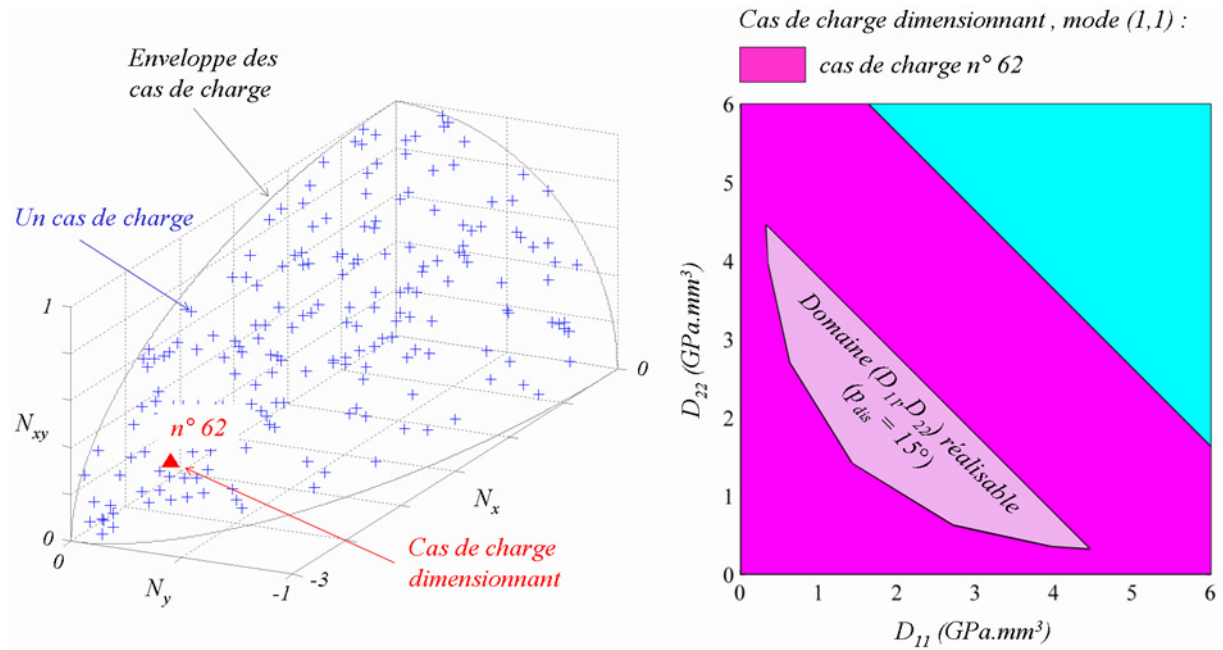


Figure VI-8 : A gauche : visualisation des 200 cas de charge considérés, dans l'espace (N_x, N_y, N_{xy}) normalisé, défini par les rapports entre les sollicitations longitudinales, transverses et de cisaillement. A droite : visualisation dans le plan (D_{11}, D_{22}) des domaines de criticité associés des chargements potentiellement dimensionnants (repérés chacun par une couleur). Parmi ceux-ci un seul est susceptible d'être activé par un empilement réalisable (domaine grisé). On ne considère ici que le premier mode de flambement.

VI.2.3 PERSPECTIVES DE MISE EN ŒUVRE

Deux cas de figure sont possibles pour l'application de la méthode proposée pour l'identification des cas de charge dimensionnants. Soit on sait que le modèle considéré est linéaire (ou linéaire par morceaux) et la méthode est directement applicable. Soit on ne sait pas si la relation entre les modules de rigidité et les contraintes de dimensionnement est linéaire, ou elle ne l'est pas. Dans ce cas, il est souvent possible de se ramener aux conditions précédentes, dans lesquelles la méthode est applicable. Pour ce faire, deux approches sont envisageables.

VI.2.3.a Première approche : les métamodèles

La première approche repose sur la construction de métamodèles. Il est ainsi possible de tenter de construire une approximation linéaire ou linéaire par morceaux du modèle. Si cette tentative échoue, on peut envisager d'apprendre un métamodèle plus complexe pour le linéariser par morceaux dans un second temps. Il existe en effet des techniques d'extraction de règles, basées sur la linéarisation par morceaux des métamodèles, utilisés en boîte noire [Andrews 95] ou directement construits par une approche de décomposition [Maire 99].

Remarquons que si l'on parvient à identifier une approximation précise des contraintes de dimensionnement, il est alors possible de toutes les évaluer au prix d'un faible effort de calcul. Dans ce cas, l'apport de la méthode proposée pour l'identification des chargements dimensionnants consiste principalement en une meilleure connaissance du problème. Les coûts de calcul sont entièrement concentrés dans l'identification de l'approximation. Néanmoins celle-ci peut se révéler très difficile.

VI.2.3.b Approche alternative : la réduction dimensionnelle

Une approche alternative, qui présente, entre autre, l'avantage d'être toujours linéaire dans sa forme, consiste à modéliser directement les dépendances entre les sorties. En effet, la dimension réelle de

l'espace dans lequel évoluent les sorties est le plus souvent inférieure (pour les problèmes auxquels on s'intéresse) à sa dimension apparente. Pour les problèmes linéaires, elle est même forcément inférieure ou égale au nombre de degrés de liberté du problème, c'est-à-dire, ici, au nombre de modules de rigidité influents. Dans l'exemple d'illustration traité précédemment, il n'y a que deux degrés de libertés. La dimension intrinsèque du problème est ainsi largement inférieure à sa dimension apparente k . Cette remarque implique de fortes dépendances entre les sorties du problème. Ces dépendances s'avèrent souvent plus régulières que la relation directe entre les entrées et les sorties du problème. Elles peuvent aussi interdire à certains cas de charges d'être dimensionnants. Elles permettent enfin de reconstruire les résultats pour l'ensemble des cas de charge à partir du calcul de certains d'entre eux seulement.

L'approche proposée repose sur une méthode de réduction dimensionnelle appelée *Analyse en Composantes Principales* [Jolliffe 86] (ACP, ou transformation de Karhunen-Love en mécanique). Cette méthode vise à expliciter les relations entre les sorties. Elle se présente comme une combinaison linéaire de termes z non-linéaires par rapport aux entrées du problème :

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{W} \mathbf{z}^T + \mathbf{C} \quad (\text{VI-5})$$

Soulignons que les variables latentes z sont différentes des propriétés d'entrée x (les modules de rigidité). Lorsque la relation entre les entrées et les sorties est linéaire, elles sont de même dimension que les entrées. Lorsque cette relation est non-linéaire, le nombre de variables latentes est supérieur, avec une relation non-linéaire entre z et les entrées x . Les variables latentes correspondent aux coordonnées de l'empilement considérées dans la base des vecteurs principaux. Le nombre p de vecteurs principaux est inférieur à la dimension apparente k et choisi par l'utilisateur pour approximer au mieux les sorties y . La relation entre les variables latentes z et les entrées x du problème est *a priori* inconnue. Une fois la réduction réalisée, il faut donc, pour tout nouveau stratifié x , évaluer p cas de charge pour calculer ses coordonnées z et reconstruire les sorties pour tous les autres chargements à partir de l'expression VI-5.

L'expression VI-5 permet d'appliquer la méthode proposée pour l'identification des chargements dimensionnants, même lorsque les modèles sont non-linéaires. La seule différence, mais elle est importante, provient du fait que les domaines de criticité sont exprimés dans l'espace des variables latentes z au lieu de l'être dans l'espace des propriétés mécaniques influentes. On ne peut, dans ce cas, réduire l'espace latent à sa partie "réalisable" comme on réduit l'espace des rigidités à sa partie physiquement admissible. Il en résulte que certains cas de charge peuvent être considérés comme dimensionnant alors qu'il n'existe pas de stratifié susceptible de les activer. La réduction peut donc être sous-optimale, mais elle reste conservative car tous les chargements réellement dimensionnants sont conservés. Dans le cas d'illustration, ceci revient à conserver six cas de charges au lieu de deux, sur un total de $k = 200$.

Du point de vue de la réduction des coûts de calcul, cette approche est moins ambitieuse que l'approche basée sur l'usage de métamodèle. Elle permet néanmoins d'envisager une démarche très robuste et particulièrement bien adaptée à l'optimisation dans le cas d'un grand nombre de cas de charge. On a déjà souligné que la relation entre sorties est souvent moins complexe que la relation entrées / sorties, ce qui simplifie l'apprentissage. Le nombre de calculs requis pour l'apprentissage des composantes principales est donc potentiellement moindre que pour les métamodèles. De plus, l'apprentissage peut-être réalisé en données manquantes, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer tous les cas de charge en chaque point d'identification, mais juste un certain nombre d'entre

eux, de telle sorte que tous soient représentés un nombre minimal de fois en différents points d'identification. Il est possible de cette façon d'évaluer, au moins partiellement un plus grand nombre de stratifiés pour un coût de calcul donné. Une fois l'apprentissage réalisé, il est aisé de compléter ces points par le modèle réduit, et ce avec une confiance accrue dans l'approximation. A ce stade, la méthode proposée en VI.2.1 permet l'identification des cas de charge potentiellement dimensionnants. Ce sont ces chargements, éventuellement complétés d'autres cas choisis aléatoirement (il faut calculer p chargements), qu'il convient ensuite d'utiliser pour évaluer de nouveaux stratifiés par le modèle réduit. De la sorte, les chargements critiques sont évalués par le modèle d'origine, et les cas de moindre importance simplement approximatés par le modèle réduit. L'effort de calcul est ainsi utilisé à bon escient, sans vérification nécessaire *a posteriori*.

VI.3 LE PROBLEME DES MODES DE FLAMBEMENT

Nous avons vu précédemment que lorsque les problèmes d'optimisation se complexifient, avec des modèles coûteux à évaluer, et / ou lorsque sont introduites des considérations de robustesse, la maîtrise des temps de calcul passe par l'usage de métamodèles ou de modèles réduits. Les méthodes décrites précédemment sont *a priori* applicables dans tous les cas où la relation entre les entrées et les sorties des modèles est continue et régulière. Identifier un métamodèle ou apprendre les composantes principales revient à chercher la bonne régularité. Cependant, dans de nombreux problèmes de mécanique des structures, les objectifs ou contraintes de dimensionnement considérés sont définis par modes (typiquement, les grandeurs définies comme le minimum d'un ensemble de mécanismes élémentaires, voir Figure VI-9). A chaque mode correspond une régularité et chaque changement de mode s'accompagne d'un brusque changement de régularité, avec une discontinuité en valeur ou en dérivée. Or, un même métamodèle (ou un même jeu de composantes principales) ne rend efficacement compte que d'une seule régularité.

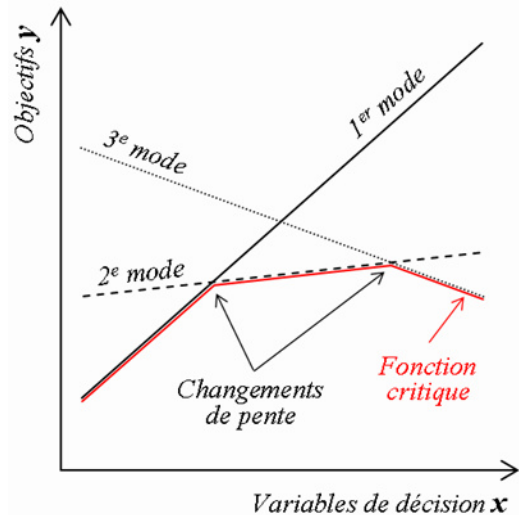


Figure VI-9 : Les trois modes représentés sont linéaires. Pourtant, la fonction critique correspondant à leur minimum est non-linéaire.

De façon générale, il nous semble toujours préférable de décomposer les phénomènes en mécanismes élémentaires, dans la mesure du possible, pour bâtir un modèle approché de chacun, plutôt que de travailler directement sur la fonction décrivant directement le phénomène. Les mécanismes élémentaires présentent en effet une plus grande régularité, ce qui les rend plus simples et moins coûteux à approcher précisément. Néanmoins, distinguer les différents mécanismes, ou modes, peut s'avérer délicat.

VI.3.1 PREMIER CAS DE FIGURE : DES MODES EVIDENTS

Dans le cas où l'on sait distinguer les différents modes (par exemple, pour un multicritère mésoscopique de rupture de type Hashin), il est facile d'identifier le pli critique pour lequel le critère de rupture est rempli en premier, ainsi que le mode de rupture locale : mode fibre ou matrice en traction ou compression. On dispose même de la valeur de chaque mode (y compris ceux qui ne sont pas critiques) en tous points de la structure pour chaque configuration évaluée, de telle sorte qu'il est possible d'approximer indépendamment chaque mode en tous points. Pour ce type de problèmes, il est même envisageable, voire souhaitable, de directement identifier une approximation des champs de contraintes dans les plis pour évaluer le critère de rupture sur les valeurs approchées des contraintes [Rollet 07].

Le modèle de flambement orthotrope pour une plaque stratifiée (expression IV-4) constitue un autre exemple. En effet, dans ce cas, chaque mode est linéaire par rapport aux modules D_{11} et D_{22} , de telle sorte que l'on peut bâtir une approximation quasi-exacte des facteurs de flambement associés à partir de la donnée de trois points d'identification seulement. L'approximation directe du facteur de flambement critique requiert quant à elle des métamodèles beaucoup plus complexes et beaucoup

plus de points d'identification, pour des résultats bien moins précis, tout particulièrement dans les zones de changement de mode.

Si l'on se replace dans le cadre du problème d'identification des cas de charges dimensionnants, considérer plusieurs modes revient à considérer plusieurs fonctions par chargement (une par mode). La méthode proposée reste applicable et permet de statuer sur la criticité de tous les couples chargement / mode de flambement. La Figure VI-10 reprend l'exemple d'illustration proposée précédemment au paragraphe VI.2.2 et sur la Figure VI-8. Cette fois-ci, on ne considère plus le seul mode de flambement (1,1), mais tous les modes (m,n) (en pratique, m et n varient chacun de 1 à 10). Sur la Figure VI-10, chaque couleur correspond à un cas de charge, et chaque polyèdre à un mode de flambement. Sur six chargements potentiellement critiques, seuls deux sont réellement dimensionnants (pour des modes de flambement différents).

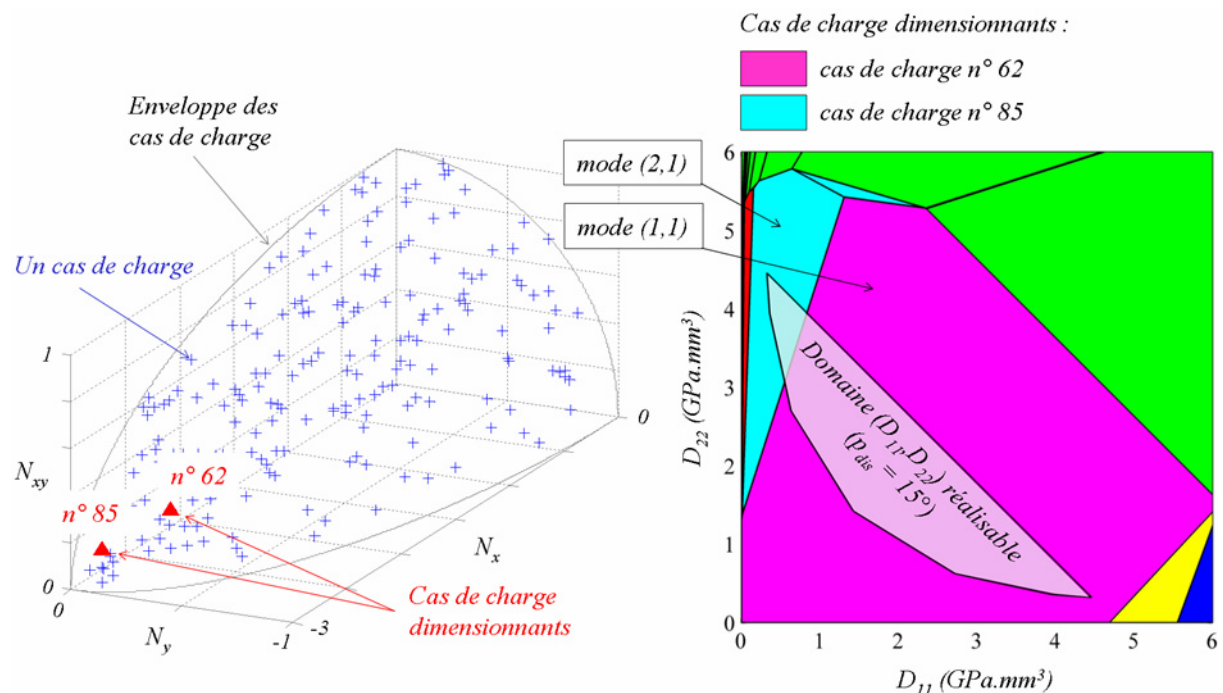


Figure VI-10 : Reprise du cas d'illustration de la Figure VI-8, pour tous les modes de flambement. La méthode proposée permet dans ce cas d'identifier simultanément les chargements critiques et les modes de flambement associés, pour tout matériau réalisable.

VI.3.2 SECOND CAS DE FIGURE : DISTINGUER LES MODES

Dans le second cas, on ne sait pas identifier les modes. C'est ce cas de figure qui est problématique. C'est typiquement le problème que l'on rencontre avec la plupart des modèles de flambement, mis à part certains modèles analytiques simplifiés pour lesquels les modes de flambement sont postulés *a priori* (comme le modèle orthotrope, par exemple). Ce problème n'est d'ailleurs pas propre aux structures composites, mais plutôt typique du flambement des structures complexes.

Dans [Merval 06], les auteurs travaillent successivement à la construction d'une approximation de la force critique de flambement pour deux panneaux raidis, l'un composite, l'autre métallique, sur une certaine plage de variation des chargements et de la géométrie des panneaux. Pour ce faire, à partir de leur expertise du problème, ils partitionnent cette plage en sous-domaines pour identifier des métamodèles par morceaux. Les auteurs concluent à l'efficacité de cette démarche, par rapport à l'identification directe d'un métamodèle global, mais soulignent que des progrès restent à accomplir pour un partitionnement efficace.

Dans le cas d'une résolution du problème de flambement par la méthode de Rayleigh-Ritz, ou d'une méthode EF similaire, nous proposons une approche alternative, basée sur l'exploitation simultanée de tous les facteurs de flambement retournés par le calcul, et non du seul facteur critique. En effet, en chaque point d'apprentissage, le calcul retourne les facteurs correspondants à plusieurs modes de flambement, par ordre croissant de facteur de charge. Tout l'enjeu du travail en cours de réalisation avec F-H. Leroy consiste à trier ces modes pour bâtir une approximation de chacun. En théorie, la méthode proposée présente l'avantage d'être capable de prévoir des modes critiques jamais observés au niveau des points d'identification. *A contrario*, l'approche consistant à identifier une approximation par morceaux, ne peut prévoir un mode jamais rencontré lors de l'apprentissage. Ce point est illustré sur la Figure VI-11 et la Figure VI-12, qui reprennent l'exemple de la Figure VI-9. Sur la Figure VI-11, l'interpolation linéaire de la fonction critique est réalisée de façon classique à partir de la seule donnée de la valeur associée au mode critique en chacun des points d'identification. Cette méthode échoue à prévoir un changement de régularité de la fonction critique, associé à un mode qui n'est jamais critique au niveau des points d'apprentissage. Pourtant, en utilisant l'information disponible sur les trois modes, comme sur la Figure VI-12, il est possible d'apprendre indépendamment chaque mode et de reconstruire la fonction critique à partir de ces approximations.

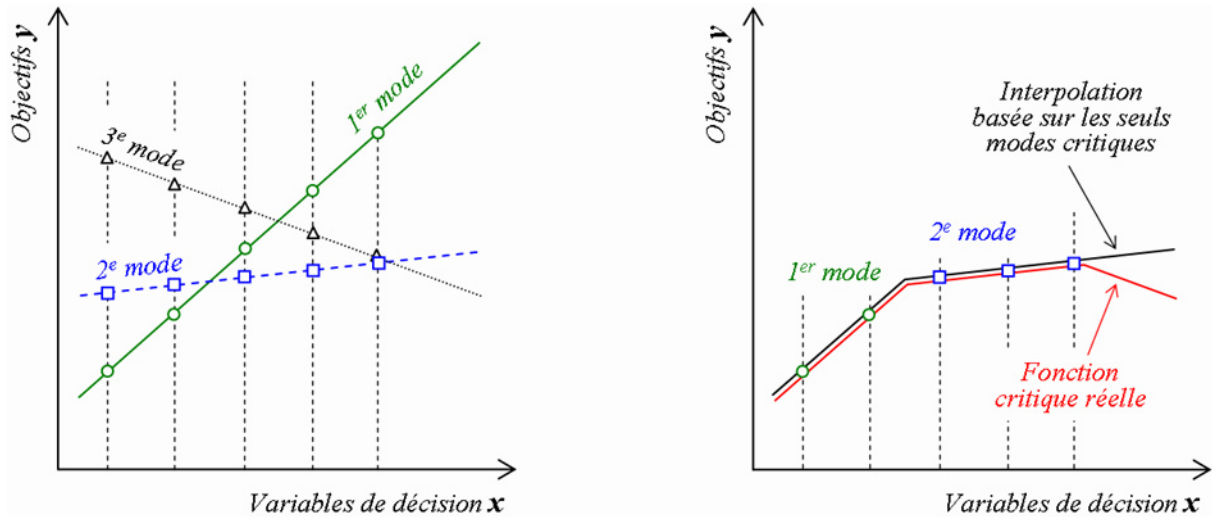


Figure VI-11 : Illustration de la démarche d'identification classique à partir de la seule fonction critique.

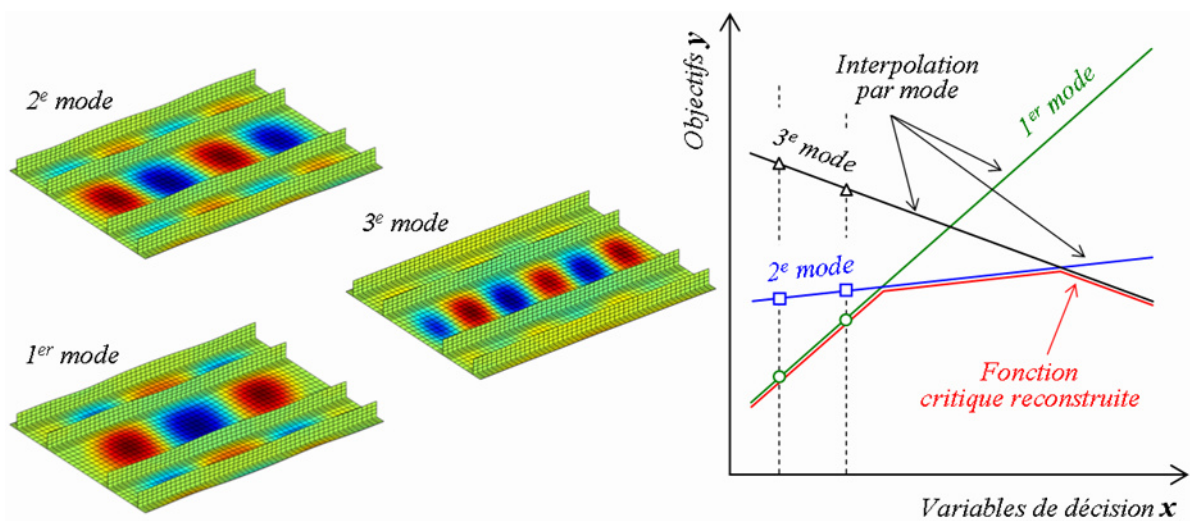


Figure VI-12 : Illustration de la démarche d'identification proposée, mode par mode.

Les travaux présentés dans les sections VI.2 et VI.3 de ce chapitre ne sont pas complètement aboutis et constituent une ouverture de cette thèse. Deux applications plus évoluées sont en cours d'étude avec F-H. Leroy.

VI.4 BILAN

Dans le Chapitre IV, nous avons présenté et partiellement validé les modèles employés dans la suite de la deuxième partie de ce mémoire. Le Chapitre V est consacré à l'optimisation des empilements d'un panneau raidi afin d'en maximiser la tenue au flambement et la force de ruine. Ce travail d'optimisation est mené dans un contexte idéalisé. Nous traitons dans le Chapitre VI du passage à des problèmes plus réalistes. Deux aspects nous paraissent essentiels : la prise en compte des incertitudes et l'identification des cas de charge dimensionnants.

En matière de prise en compte des incertitudes, l'idéal serait de parvenir à établir un listing complet des variables et des paramètres incertains, à décrire au mieux les incertitudes correspondantes (intervalles de variation, distribution, etc.), effectuer une étude de sensibilité rapide pour déterminer les sources les plus influentes et, enfin, ne plus considérer que ces dernières pour une analyse de variabilité complète. Dans ce chapitre, plusieurs exemples partiels sont développés, basés sur la classification des sources d'incertitudes proposée au Chapitre III. Ces exemples soulèvent des interrogations qui dépassent largement le cadre de cette thèse, comme la question de la description des incertitudes. Le chemin pour parvenir à des méthodes fiables et systématiques pour la conception et l'optimisation robuste des structures composites paraît donc encore long. Néanmoins, l'éventail des possibilités est déjà très large pour contrôler de façon plus ou moins précise, en fonction des temps de calcul impartis, l'influence de certaines sources d'incertitudes.

Optimisation de structures complexes, robustesse, multiplicité des chargements : pour chacun de ces ingrédients, et plus encore pour leur combinaison, le principal frein réside dans les coûts de calcul. Les solutions que nous mettons en place afin de réduire ces coûts sont, pour l'essentiel, basées sur l'approximation des modèles (métamodèles) ou, éventuellement, leur réduction (analyse en composantes principales). Or, l'approximation, comme la réduction, des modèles décrivant le basculement entre plusieurs modes, ou mécanismes élémentaires, est délicate, en raison des changements de régularité associés aux changements de modes. Il faut alors travailler par morceaux, mais les transitions entre modes sont difficiles et coûteuses à cerner avec précision. Afin de contourner cette difficulté, nous proposons une méthode alternative, dont le principe consiste, au lieu de travailler directement sur le modèle, à le décomposer pour approcher chaque mode indépendamment sur l'ensemble de l'espace de recherche.

Troisième partie :

**Application au calcul des assemblages
boulonnés dans les structures composites**

Les propriétés des matériaux utilisés dans cette partie sont détaillées dans la section Propriétés Matériaux, située en début de ce mémoire.

Chapitre VII **Stratégies de calcul des assemblages boulonnés dans les structures composites**

Sommaire

VII.1	Considérations générales sur les assemblages mécaniques dans les structures composites	172
VII.1.1	Les principales configurations de liaison élémentaire.....	172
VII.1.2	Description de la rupture des assemblages	173
VII.1.3	Revue des principaux paramètres influents	174
VII.1.4	Précisions sur la rupture en matage.....	177
VII.2	Les Modélisations statiques avancées.....	180
VII.2.1	Analyse des distributions de contraintes	180
VII.2.2	Prévision de la rupture.....	181
VII.3	La démarche industrielle.....	184
VII.3.1	Considérations générales sur la discrétisation de la jonction complexe en assemblages élémentaires.....	184
VII.3.2	L'approche globale / locale.....	185
VII.3.3	Les modèles semi-empiriques pour l'analyse des distributions d'efforts entre fixations.....	186
VII.4	Discussion : insuffisances et incompatibilité des démarches de modélisation....	191

De la généralisation des matériaux composites dans les structures industrielles découle naturellement la nécessité d'assurer les transferts d'efforts entre éléments structuraux composites et métalliques, et éléments composites entre eux. A l'heure actuelle, les méthodes d'assemblage les plus employées sont directement issues des méthodes classiques utilisées en ingénierie pour les assemblages de pièces métalliques ou en bois : collages et assemblages mécaniques¹. De façon générale, le collage constitue une méthode d'assemblage efficace, surfacique plutôt que ponctuelle, permettant de tirer pleinement avantage des caractéristiques mécaniques spécifiques des CMO (rigidité, résistance à rupture). Cependant, les impératifs industriels de reproductibilité, contrôlabilité et maintenance interdisent souvent leur emploi, tout comme celui des solutions hybrides boulonnées/collées. Les techniques d'assemblages mécaniques, telles que boulonnage ou rivetage, principalement, sont donc préférentiellement utilisées en tant que méthodes fiables et commodes pour assembler les pièces composites des structures primaires. Cependant, et contrairement aux assemblages collés, les assemblages liés mécaniquement sont considérablement affaiblis par les concentrations de contraintes engendrées par les perçages, à tel point que le lien mécanique constitue le plus souvent la partie la plus fragile de la structure, avec une résistance mécanique abattue dans le meilleur des cas de près de 50 % par rapport aux caractéristiques de plaque pleine. L'étude des distributions de contraintes, des mécanismes d'endommagements et de rupture et des multiples paramètres influents associés revêt donc une importance capitale.

VII.1 CONSIDERATIONS GENERALES SUR LES ASSEMBLAGES MECANIQUES DANS LES STRUCTURES COMPOSITES

De façon générale, le dimensionnement des zones de liaison est bien plus complexe que celui de la zone courante. Les liaisons permettent de connecter des structures dont les rôles et les matériaux peuvent différer. Alors que leur rôle premier est structural, elles peuvent aussi remplir d'autres fonctions telles qu'assurer la conductivité ou, au contraire, l'isolation électrique, l'étanchéité, ou encore l'amortissement des vibrations. Dans une structure complexe, on trouve donc nécessairement différents types d'assemblages. Néanmoins, même les structures les plus complexes peuvent être décomposées en une série de jonctions élémentaires supposées indépendantes. Dans la suite de cette section, on aborde donc spécifiquement le problème de la tenue mécanique de l'assemblage élémentaire à une fixation. Voir [Camanho 97] pour un article de synthèse très complet sur le sujet.

VII.1.1 LES PRINCIPALES CONFIGURATIONS DE LIAISON ELEMENTAIRE

La majorité des études publiées sur la tenue des assemblages mécaniques dans les structures composites porte sur l'une des deux configurations élémentaires présentées sur la Figure VII-1. La configuration *simple recouvrement*, simple fixation est une configuration standard employée pour l'étude des assemblages mécaniques dans les normes ASTM D 5931 / D 5961M-962 et le [MIL-HDBK-17-3F]. Le [MIL-HDBK-17-3F] souligne à son sujet qu'elle est plus représentative que le *double recouvrement* de la plupart des applications aéronautiques critiques des liaisons boulonnées. La dissymétrie de l'assemblage en simple cisaillement engendre des concentrations de contraintes importantes dans l'épaisseur (effets de flexion) et une résistance en matage amoindrie.

¹ les avantages et désavantages comparés des assemblages mécaniques et collés sont analysés de façon plus exhaustive dans les documents suivants : www.et.byu.edu/groups/strong/pages/articles/articles/joining2.pdf et http://www.ifb.uni-stuttgart.de/studenten/vorlesungsunterlagen/Kindervater/10-joints_2000.pdf

² ASTM standard D 5961/D 5961M- 96, "Standard test method for bearing response of polymer matrix composite laminates", 1996.

Les fixations les plus répandues dans l'industrie aéronautique sont les boulons, les rivets et les pions. Les vis ont une faible capacité de support de charge et sont donc peu employées dans les structures primaires composites en raison des problèmes d'endommagement liés au taraudage des trous. Les assemblages rivetés permettent d'obtenir une résistance satisfaisante pour les CMO de faible épaisseur (inférieure à 3 mm). Les pions sont très résistants en cisaillement et permettent d'assembler des éléments d'épaisseur importante dans le cadre de liaisons composite/métal tout en garantissant la plus grande facilité de montage et de démontage. Néanmoins, ils ne permettent pas de mettre en place un système de serrage du stratifié. Les boulons permettent d'obtenir les assemblages composites les plus résistants en autorisant le serrage dans épaisseur.

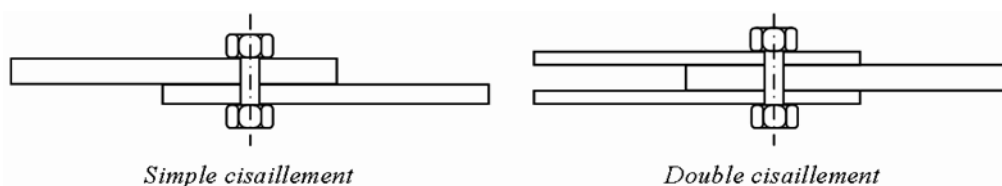


Figure VII-1 : A gauche, assemblage en simple cisaillement. A droite, en double cisaillement.

VII.1.2 DESCRIPTION DE LA RUPTURE DES ASSEMBLAGES

De façon générale, on identifie trois modes principaux de rupture pour l'élément composite de l'assemblage, schématisés sur la Figure VII-2 :

- en élancement (*tension failure*), ou traction nette, par rupture du ligament au droit du trou,
- en cisaillement (*shearout failure*), par arrachement du matériau face à la fixation, suivant deux plan de coupe parallèles partant du bord chargé du trou,
- en matage (*bearing failure*), par écrasement du matériau sur le bord chargé du trou.

Elongation et cisaillement sont des modes catastrophiques, fragiles, tandis que la rupture en matage est progressive, apparemment ductile à l'échelle macroscopique. A ces trois modes de rupture, il convient de rajouter le mode de clivage (ou fendage), par scission brutale de l'éprouvette face au pion pour les stratifiés fortement orientés dans la direction longitudinale.

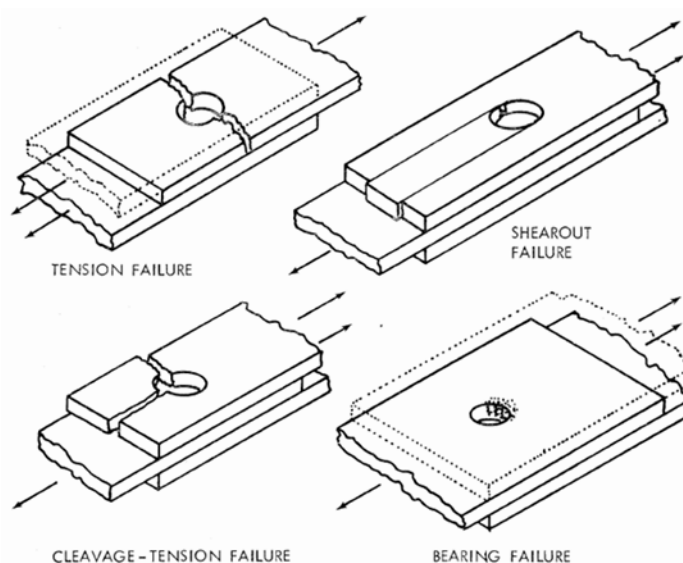


Figure VII-2 : Les mode de rupture des assemblages mécaniques dans les structures composites, d'après [Hart-Smith 76]. En haut, à gauche, rupture en traction, à droite, rupture en cisaillement. En bas à gauche, combinaison de traction et de clivage, à droite, rupture en matage.

VII.1.3 REVUE DES PRINCIPAUX PARAMETRES INFLUENTS

Les modes de rupture énumérés précédemment sont en compétition. En ce sens, n'importe quelle combinaison de modes est possible, en fonction de leur criticité respective. Le Tableau VII-1 propose un récapitulatif des principaux paramètres influant sur le basculement d'un mode à l'autre, ainsi qu'une synthèse de leurs impacts respectifs relevés dans la bibliographie. Dans ce tableau, on distingue les paramètres liés au matériau, ceux du lien mécanique et les paramètres géométriques de la liaison. Les paramètres énumérés ne jouent pas de façon indépendante sur la tenue de l'assemblage, mais interagissent de façon complexe. La criticité de chaque mode dépend à la fois de la géométrie de l'assemblage et de l'empilement. En outre, le choix du type de fixation conditionne la tenue de l'assemblage en imposant la forme du trou et la forme et l'étendue des surfaces de contact et de serrage. Les dimensions caractéristiques de la plaque (récapitulées Figure VII-3) sont : la distance e à l'extrémité de la plaque, la largeur w , le diamètre du trou D et l'épaisseur t .

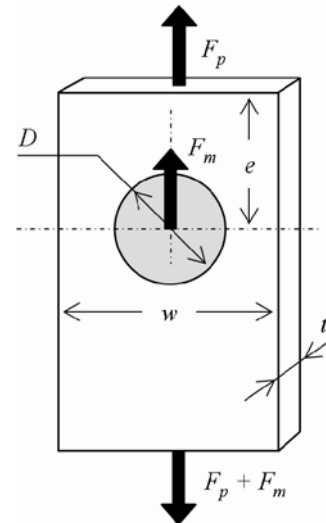


Figure VII-3 : Dimensions et chargement de l'assemblage élémentaire.

On ne s'attarde que sur les paramètres présentant une influence spécifique sur les modes de rupture de la liaison. En effet, il est évident que les caractéristiques mécaniques du pli UD, comme les conditions d'élaboration du stratifié, conditionnent aussi bien le comportement de la liaison que de la zone courante. De même, le type et la direction des chargements ainsi que les conditions d'utilisation attendues conditionnent les choix de conception au niveau global.

Paramètres	Mode de rupture de la liaison élémentaire		
	Elongation	Cisaillement	Matage
Paramètres du matériau			
Orientation des plis	++	++	++
Homogénéité* de l'empilement	0	0	++
Frottements	0	0	+
Défauts initiaux de perçage	0	0	+
Paramètres du lien mécanique			
Serrage	0	0	++
Jeu fixation/trou	0	0	+
Paramètres géométriques de la liaison			
w/D	++	0	0
e/D	0	++	0
D/t	0	0	+
t	Pas d'effet d'échelle sensible, d'après [Munjal 84].		

* Un empilement est homogène si les orientations de ses plis sont régulièrement alternées dans l'épaisseur.

Tableau VII-1 : Revue des paramètres influant sur la tenue de l'assemblage mécanique élémentaire, et synthèse de leurs effets respectifs (0 : influence faible ou nulle, + : influence sensible, ++ : influence déterminante).

VII.1.3.a Influence des paramètres géométriques

Pour un empilement donné sollicité en matage pur, la transition entre les modes de cisaillement et de matage dépend essentiellement du rapport e/D . La transition entre les modes de traction et de matage dépend du rapport w/D (voir Figure VII-4). La contrainte représentée correspond à la contrainte moyenne de matage σ_m , définie par le rapport entre l'effort de matage F_m et la section de matage théorique : $\sigma_m = F_m / (D \times t)$. La saturation observée correspond à la rupture en matage, pour laquelle la contrainte moyenne de matage atteint sa valeur maximale σ_{Rm} , définie comme la résistance du stratifié au matage. La Figure VII-5 met en évidence l'impact des changements d'empilements sur le plateau de matage : σ_{Rm} dépend grandement de l'empilement, mais les dimensions géométriques minimales permettant d'atteindre la rupture en matage varient elles aussi.

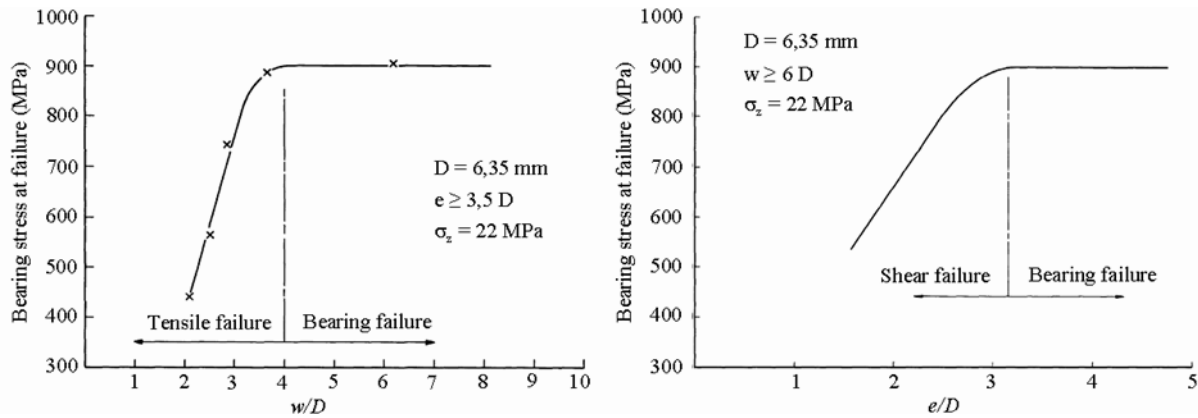


Figure VII-4 : A gauche : évolution de la contrainte de matage à rupture et basculement entre les modes de traction et de matage en fonction du rapport w/D . A droite : évolution de la contrainte de matage à rupture et basculement entre les modes de cisaillement et de matage en fonction du rapport e/D . D'après [Collings 75], pour un empilement comportant 1/3 de plis orientés à 0° et 2/3 de $\pm 45^\circ$.

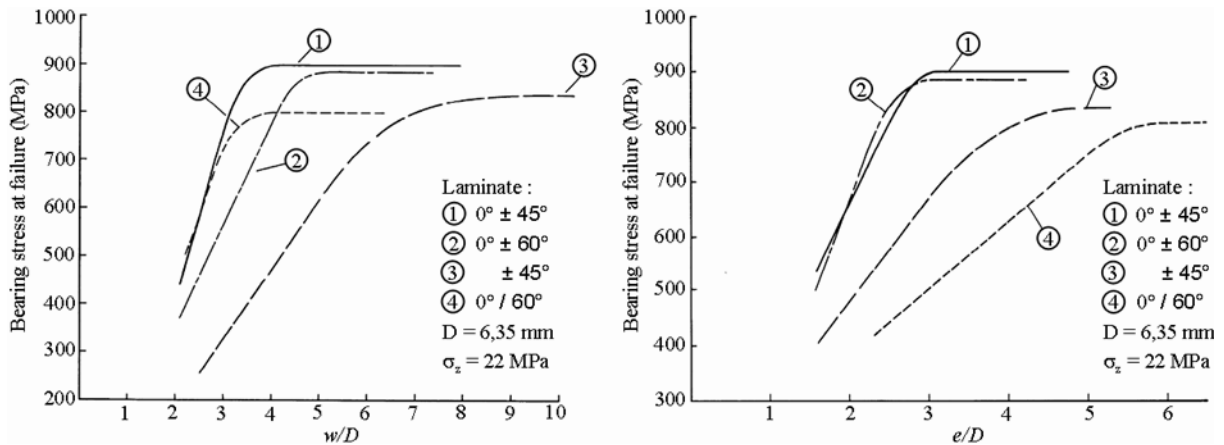


Figure VII-5 : Influences combinées de l'empilement et des proportions géométriques, sur la contrainte de matage à rupture et le mode de rupture. A gauche, en fonction de w/D . A droite, en fonction de e/D . D'après [Collings 75].

Le rapport D/t joue principalement sur la tenue de la fixation en cisaillement et en flexion. Son influence est importante sur la résistance en matage des liaisons assurées par un pion. Néanmoins, dans le cas des liaisons boulonnées, cette influence devient négligeable avec le serrage de l'assemblage dans l'épaisseur des stratifiés (voir Figure VII-6).

Remarquons que toutes les considérations précédentes sont valables pour des montages ajustés. Lorsque le jeu entre la fixation et le trou augmente, la surface de contact diminue, augmentant ainsi la contrainte de matage réelle vue par le matériau sur le bord chargé du trou.

L'augmentation du jeu peut donc conduire à un basculement vers la rupture en matage, ce qui a été observé expérimentalement par [Chang 84 ; Lawlor 02] ou numériquement par [Kim 98].

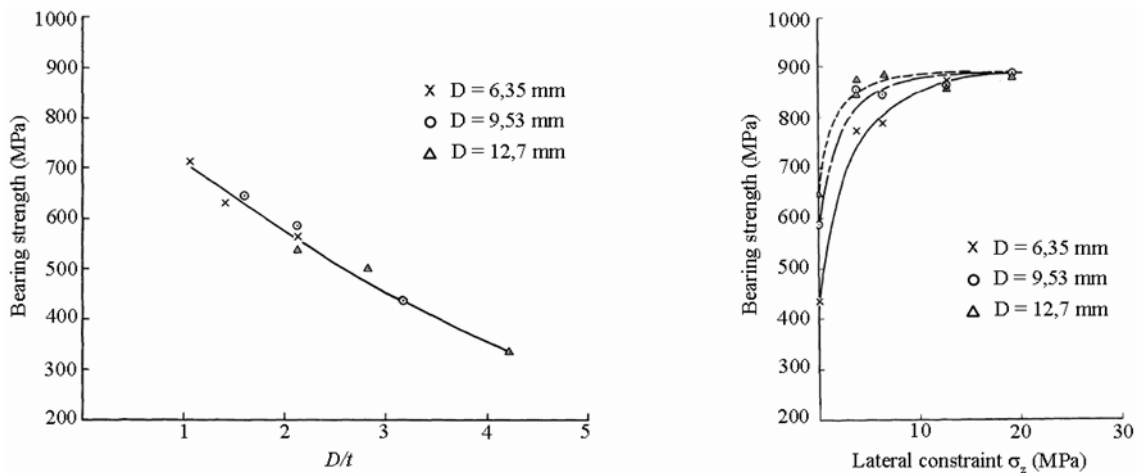


Figure VII-6 : A gauche : influence du rapport D/t sur la résistance ultime à la rupture en matage d'une liaison pionnée pour un empilement comportant 1/3 de plis orientés à 0° et 2/3 de $\pm 45^\circ$. A droite : influence du serrage sur la résistance en matage d'une liaison boulonnée, pour le même type d'empilement, pour trois rapports D/t différents (ici, $D = 9,35$ mm). D'après [Collings 75].

VII.1.3.b Influence du serrage et des frottements sur la résistance au matage

Comme le montre la Figure VII-7, accroître le couple de serrage du boulon permet d'augmenter de façon considérable la résistance en matage du stratifié. Il existe un niveau de saturation au delà duquel le serrage perd de son efficacité, et un niveau de serrage maximum avant endommagement du composite par écrasement. Il est à noter que la force de serrage croît avec l'expansion transverse du composite sur le bord du trou chargé en compression. Un simple confinement latéral permet ainsi d'observer une augmentation de résistance en matage significative par rapport à une liaison assurée par un pion. La résistance en matage augmente aussi avec la surface de serrage. Le serrage augmente les transferts d'effort par frottement, même si ceux-ci restent secondaires (la contrainte maximale de serrage restant relativement faible). En effet, contrairement aux assemblages métalliques, les efforts de liaison sont transférés par cisaillement de la fixation et matage de la surface de contact entre la fixation et le composite.

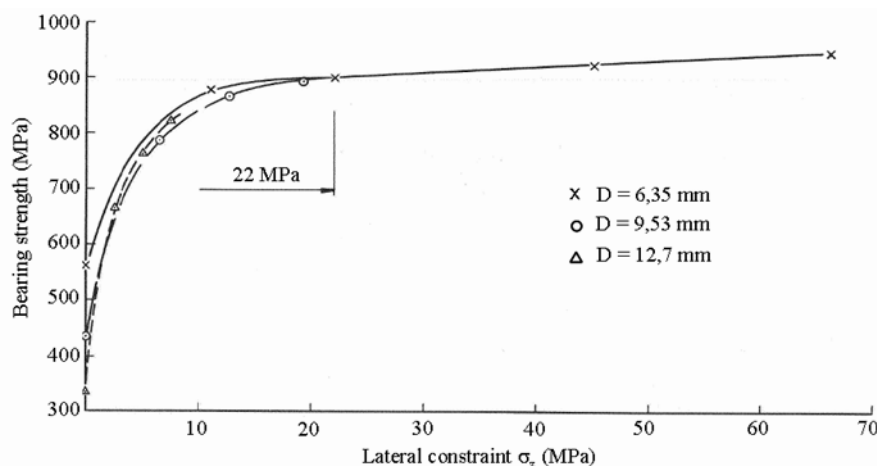


Figure VII-7 : Influence du serrage sur la résistance en matage d'une liaison boulonnée, un empilement comportant 1/3 de plis orientés à 0° et 2/3 de $\pm 45^\circ$, pour trois diamètres de trou. Le diamètre de la rondelle de serrage est égal à 2,2 fois celui du boulon. D'après [Collings 75].

Toutefois, la résistance en endommagement de compression est directement liée aux forces de frottement entre le composite et l'insert, qui modifient la répartition des efforts de contact sur le bord chargé du trou. D'après [Schön 04a ; Schön 04b], le coefficient de frottement augmente au cours du chargement.

VII.1.3.c Effets combinés de l'effort de matage et de l'effort passant

La rupture de l'assemblage élémentaire dépend dans une large mesure du rapport entre l'effort de matage F_m (*bearing load*) et l'effort passant F_p (*bypass load*). La Figure VII-8 illustre cette dépendance. La résistance au matage est peu sensible aux efforts passants de traction. Une transition entre les modes de matage et d'élongation s'opère pour un certain ratio F_m/F_p au-delà duquel la résistance en traction de l'assemblage croît linéairement lorsque l'effort de matage décroît. Les interactions sont plus complexes pour un effort passant de compression. Néanmoins, on observe toujours une transition entre rupture en matage et rupture dans la section nette.

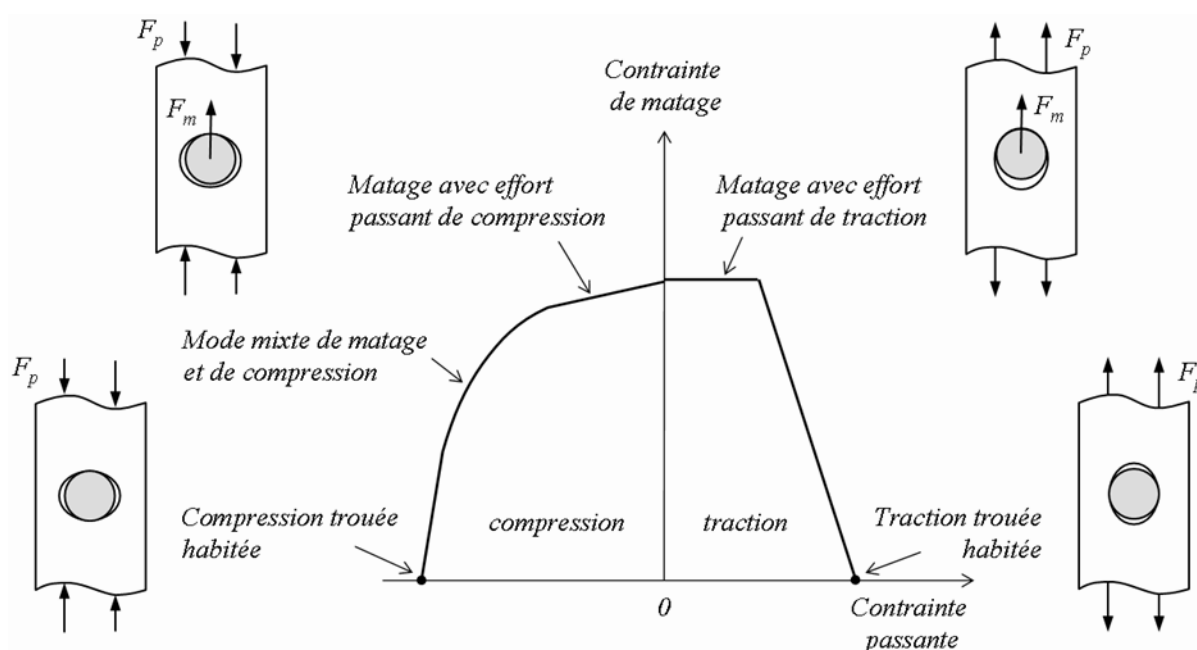


Figure VII-8 : Diagramme effort de matage / effort passant pour la rupture finale de l'éprouvette. Tracé d'après les résultats expérimentaux publiés dans [Crews 87].

VII.1.4 PRECISIONS SUR LA RUPTURE EN MATAGE

Le mode de matage est un mode de défaillance de l'assemblage plutôt qu'un mode de rupture à proprement parler. L'assemblage perd sa fonctionnalité mais continue à transférer des efforts. En raison de la ductilité macroscopique apparente de ce mode de rupture, on emploie le terme matage par analogie avec le phénomène de plastification du bord chargé du trou observé sur les assemblages métalliques. La rupture en matage des composites est pourtant régie par un phénomène d'accumulation d'endommagements locaux. [Wu 98 ; Kelly 04 et Xiao 05a] proposent par exemple des études du développement de la rupture en matage au cours du chargement avec d'intéressantes micrographies. Trois phases successives, illustrées en Figure VII-9, sont distinguées dans ces études :

- une première phase d'endommagement par écrasement du matériau sur la surface de contact,
- une deuxième phase caractérisée par l'accumulation d'endommagements matriciels et de décohésions fibres/matrice et l'apparition de bande de micro-flambement des fibres à 0° . Des

fissures de cisaillement traversant plusieurs plis convergent deux à deux ou vers une surface libre pour initier des délaminages,

- (c) enfin, la propagation instable des délaminages jusqu'à l'effondrement de l'éprouvette par perte d'intégrité du stratifié et basculement vers un mode de rupture brutal, en cisaillement le plus souvent. Selon la géométrie de l'éprouvette et la capacité du stratifié à tolérer l'endommagement de compression en bord chargé de trou, ce basculement peut intervenir de façon plus ou moins tardive. De ce point de vue, on peut d'ailleurs considérer la rupture en cisaillement comme une rupture en matage entrée prématurément en phase de propagation des fissures de cisaillement pour une configuration de géométrie et de drapage faiblement tolérante envers l'endommagement de compression sur le bord chargé du trou.

D'après [Xiao 05a ; Park 01c], c'est la deuxième phase qui est affectée par le serrage. Les déformations hors plan sont contenues par les rondelles et l'endommagement est contraint de se développer dans le plan, pas par pas, jusqu'à saturation de l'endommagement sous les rondelles et propagation des fissures hors de la zone serrée. En s'opposant à l'amorçage et à la propagation des délaminages, le serrage permet ainsi d'élever la résistance au matage apparente du matériau.

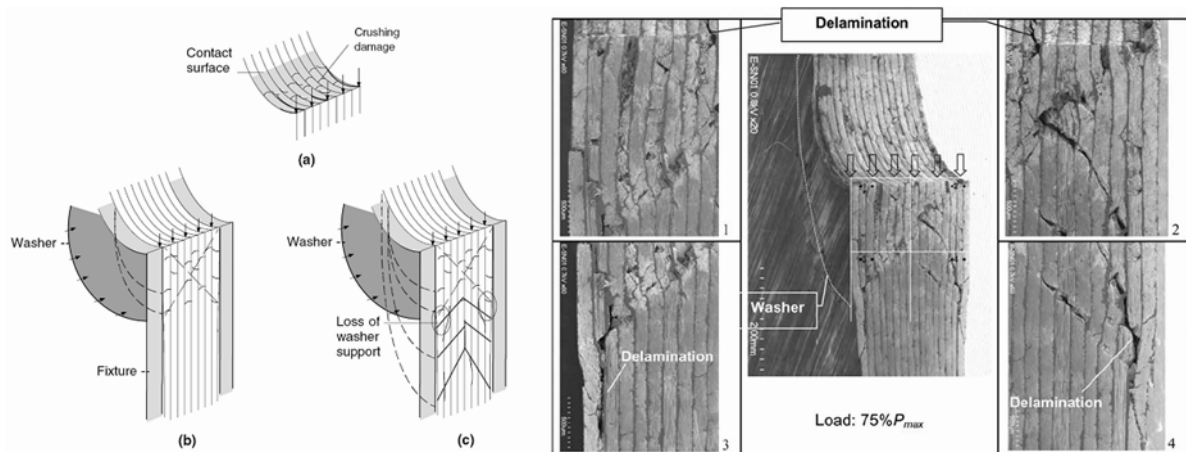


Figure VII-9 : A gauche : les trois phases de la rupture en matage : (a) écrasement de contact, (b) endommagement confiné sous les rondelles de serrage, (c) propagation de l'endommagement hors de la zone de serrage. A droite : micrographie des dommages à 75 % de la charge maximale. D'après [Xiao 05a].

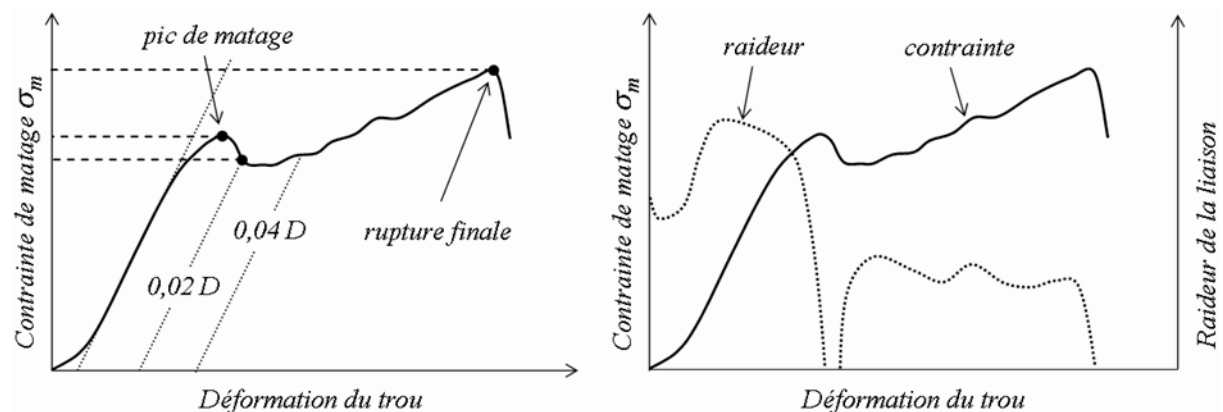


Figure VII-10 : Courbe de matage typique d'un assemblage boulonné en CMO. Les contraintes correspondant aux critères usuels de rupture en matage sont identifiées par des points sur la courbe. Le matage s'accompagne d'une déformation permanente du trou. La non-linéarité initiale correspond à une phase de reprise des jeux et de stabilisation de la surface de contact entre la fixation et le trou.

Ces considérations posent le problème de la définition de la rupture en matage à des fins de dimensionnement (voir Figure VII-10). En effet, l'approche consistant à définir la rupture en matage à partir de la contrainte de résistance ultime (dite, aussi, de rupture finale) du stratifié chargé en matage n'est pas pertinente, car elle masque des déformations et des endommagements potentiels très importants. On trouve dans la bibliographie trois principaux types de critères de substitution, respectivement liés à la déformation permanente du trou, à la perte de raideur de l'assemblage ou au premier pic de contrainte sur la courbe de matage. La première classe de critères, issue des normes ASTM D 5961/D 5961M-96 et du MIL-HDBK-17-3F, manque de bases physiques et masque des états d'endommagement très différents en fonction des paramètres des assemblages considérés. Ces insuffisances sont amplement discutées dans [McCarthy 02], qui suggère pour y remédier le critère exprimé en fonction de la perte de raideur de l'assemblage. Celui-ci rejoint le critère du premier pic de contrainte, qui correspond de ce point de vue à une perte de raideur de 100 % par rapport à la raideur maximale. Reste néanmoins que ces deux derniers critères ne correspondent pas à des caractéristiques intrinsèques du matériau mais à des caractéristiques mécaniques de l'assemblage, dépendant des paramètres influents énumérés en VII.1.3.

VII.2 LES MODELISATIONS STATIQUES AVANCEES

De façon générale, la liaison pionnée est le plus souvent considérée comme représentative de la liaison boulonnée, hors effet de serrage. Le montage en double cisaillement permet d'employer une condition de symétrie par rapport au feuillet moyen de la plaque centrale. Ces deux approximations sont largement employées dans les études numériques publiées, à l'exception de celles portant explicitement sur l'analyse des effets du serrage ou sur les assemblages en simple cisaillement.

VII.2.1 ANALYSE DES DISTRIBUTIONS DE CONTRAINTES

On trouve dans la littérature de nombreuses méthodes analytiques, bidimensionnelles, pour l'analyse des distributions de contraintes dans les assemblages. Ces méthodes sont le plus souvent dérivées des méthodes existantes pour l'analyse des plaques trouées et des plaques trouées habitées. Elles sont basées sur la CLT pour la description des caractéristiques homogénéisées de la membrane. De tels modèles ne permettent pas de rendre compte des effets tridimensionnels liés à la flexion de la fixation au serrage et à l'ordre d'empilements des plis. Afin d'y remédier, [Kradinov 01 ; Kradinov 05] propose de coupler l'analyse bidimensionnelle du comportement de chaque pli à l'analyse unidirectionnelle, dans l'épaisseur, de la flexion du boulon, représenté comme une poutre reposant sur des fondations élastiques.

La gestion du contact entre la fixation et le trou constitue une difficulté majeure de la modélisation. De façon générale, la plupart des auteurs considèrent que les déformations de la fixation dans le plan des plis n'ont qu'une influence secondaire sur la distribution des contraintes dans le composite en bord de trou [Hyer 85]. La fixation est donc souvent réduite à un corps rigide, voire à une surface géométrique indéformable. Dans certaines approches simplifiées, la fixation est remplacées par un ensemble de conditions aux limites exprimées en termes de pressions de contact. L'approche la plus courante consiste à remplacer le pion par une distribution de pression de contact sinusoïdale sur le bord chargé du trou. Des formulations analytiques plus évoluées existent, basées sur l'usage de variables complexes [de Jong 77 ; Whitworth 07 ; Aluko 08] ou de méthodes asymptotiques [larve 97]. Cependant elles restent limitées pour la capture des influences combinées du jeu sur l'évolution de la surface de contact et du frottement, ainsi que des interactions entre fixations proches. De ce point de vue, les méthodes numériques, éléments de frontière ou EF, sont unanimement reconnues comme mieux adaptées pour suivre l'évolution non-linéaire du contact au cours du chargement (voir, par exemple, la bibliographie proposée dans [Mackerle 03] sur le calcul de jonctions par EF, bien que celle-ci ne soit pas exclusivement consacré aux assemblages mécaniques dans les structures composites). Par contre, ces méthodes sont itératives et donc bien plus coûteuses en temps de calcul. [Lin 00] propose d'établir une base de distributions de pression de contact, établie à partir de simulations avec des éléments de frontière, pour l'usage de l'ingénieur.

Le modèle de frottement le plus employé est celui de Coulomb avec un coefficient de frottement qui varie typiquement entre 0 et 0,5. Alors que de nombreuses études soulignent que les frottements ont une importance majeure dans la distribution des contraintes en bord de trou, Camanho fait état en 1997 de l'insuffisance des études menées sur le sujet [Camanho 97]. Depuis lors, certains travaux ont été publiés [McCarthy 05a], mais les coefficients de frottement employés s'apparentent aujourd'hui encore davantage à un coefficient de recalage du calcul qu'à un paramètre physique (Cf. VII.1.3.b).

L'analyse précise des effets liés à la présence de la fixation et à l'ordre d'empilement des plis requiert l'emploi de modèles EF tridimensionnels. Les modèles tridimensionnels avec pion rigide, jeu nul, contact sans frottement et loi de comportement matériau élastique linéaire permettent de capturer

de façon grossière l'influence de la géométrie, de l'orientation des fibres et du serrage sur la distribution de contraintes en bord de trou. Modéliser chaque pli par une ou plusieurs couches d'éléments volumiques permet de rendre compte de l'influence de la séquence d'empilement. Dans le cas des assemblages en simple recouvrement, l'analyse tridimensionnelle est indispensable et les premiers travaux sur le sujet sont récents [McCarthy 05b ; McCarthy 05c].

[Hassani 02] et [Okutan 03] soulignent la nécessité de prendre en compte le comportement non linéaire du composite en cisaillement pour obtenir des résultats cohérents avec l'expérience. Hassani propose une étude complète de l'influence, sur la distribution des contraintes en bord de trou, des termes de non linéarité en cisaillement, en contrainte normale et des termes de couplage entre ces deux grandeurs.

Bien que l'impact des déformations de la fixation métallique reste marginal en cas de double recouvrement, l'emploi d'un modèle matériau élastique [McCarthy 05c], voire élasto-plastique [Wu 98], est recommandé pour la modélisation des assemblage en simple recouvrement. En effet, ces modèles permettent de retranscrire l'influence de la flexion de l'insert sur la distribution des contraintes dans le composite.

La majorité des auteurs travaillent en petits déplacements et petites déformations. [Dano 00] formule le problème en grandes déformations, [Perugini 01 et Riccio 02] en grandes transformations, sans toutefois en préciser les apports.

VII.2.2 PREVISION DE LA RUPTURE

De façon générale, on distingue deux tendances majeures pour la prévision de la rupture des assemblages : les approches fragiles de la rupture et les approches progressives. C'est la prévision de la rupture en matage qui reste la plus problématique.

VII.2.2.a Les approches fragiles

Il est bien connu que l'approche consistant à appliquer directement un critère de rupture aux échelles macroscopiques ou mésoscopiques sur les champs de contraintes conduit à des résultats très conservatifs. En effet, l'endommagement local en bord de trou atténue les gradients de contraintes et la contrainte de premier endommagement est généralement bien inférieure à la contrainte à rupture ultime (voir Figure VII-8). Pour tenir compte de ce phénomène, l'approche classique consiste à appliquer le critère de rupture en certains points stratégiques (méthode du Point-Stress), sur une certaine surface (méthode de l'Average-Stress) de la structure [Whitney 74], ou encore sur un certain volume [Park 01b ; Wu 98]. [Chang 82] propose une adaptation de la méthode de Point-Stress, largement reprise par la suite (voir par exemple [Aktas 04 ; Aluko 08 ; Camanho 06 ; Whitworth 07]), consistant à appliquer le critère de rupture non en un point, mais tout au long d'une courbe critique autour du trou, pour chaque pli (Figure VII-11). La position angulaire sur la courbe du point de première rupture fournit le mode de rupture de l'assemblage parmi les modes d'élongation de cisaillement et de matage. La courbe critique a pour équation :

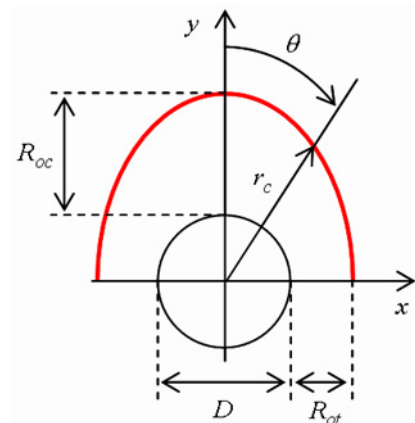


Figure VII-11 : Courbe critique de [Chang 82].

$$r_c(\theta) = D/2 + R_{ot} + (R_{oc} - R_{ot}) \cos(\theta) \quad (VII-1)$$

Elle est caractérisée par la donnée des longueurs caractéristiques de traction R_{ot} et de matage R_{oc} , identifiées expérimentalement et considérées comme des propriétés matériau du pli UD. Cette dernière hypothèse a toutefois été mise en défaut depuis lors. Les distances critiques dépendent largement de la géométrie de la liaison et de l'orientation des fibres [Whitworth 03]. Afin de réduire le volume des campagnes d'essais nécessaires pour calibrer ces méthodes, [Kweon 04] propose une méthode numérique de détermination des distances critiques à empilement fixé.

[McCarthy 05b] recherche une correspondance entre la première rupture de fibre en compression, évaluée par un critère de Hashin, et son critère expérimental de première perte importante de rigidité de l'assemblage pour la rupture en matage. Afin de tenir compte de la singularité des contraintes élastiques en bord de trou, le critère est appliqué à une distance arbitraire de 0,5 mm du bord. A ce niveau d'effort, l'endommagement matriciel observé est très important sur le bord chargé du trou. Les auteurs relèvent une assez bonne corrélation entre les deux critères pour trois configurations différentes d'empilements et de jeu. Par contre, pour une quatrième configuration plus délaminante, les auteurs observent une nette perte de rigidité qu'ils attribuent aux délaminages bien avant que le critère de rupture de fibre ne soit atteint.

Certains auteurs insistent sur la nécessité de considérer des mécanismes et des critères tridimensionnels d'endommagement local pour la prévision du matage. [Wu 98] introduit le critère tridimensionnel de Sun et Jun pour la prévision du micro-flambement des fibres. [Persson 98] souligne le rôle de l'amorçage et de la propagation de délaminages dans le développement de la rupture en matage et propose un critère formulé en terme de densité d'énergie de déformation. [Park 01b] applique le critère tridimensionnel de Yé pour la prise en compte des délaminages. A l'aide du même critère, [Camanho 99a] conclue, d'une part, que les regroupement de plis de même orientation réduisent la contrainte d'amorçage des délaminages et, d'autre part, que le serrage (un simple confinement dans l'épaisseur suffit) augmente cette contrainte d'amorçage.

VII.2.2.b Les approches progressives

De façon générale, les approches progressives permettent de prendre en compte de façon plus pertinente les phénomènes d'endommagement locaux qui précèdent la rupture finale de l'éprouvette. Comparées aux approches fragiles, ces méthodes nécessitent moins de recalage par rapport aux données expérimentales et présentent l'avantage d'être applicables à tous les types d'empilements et de géométrie une fois les caractéristiques du plis déterminées. D'autre part, elles ne sont accessibles qu'au seul calcul EF. Dans la majorité des travaux publiés, il s'agit de simuler l'amorçage et la propagation des défauts en utilisant des lois de dégradation des propriétés élastiques du matériau, fonctions du type d'endommagement local. A notre connaissance, seule la méthode EFM (Element-Failure Method) s'écarte de ce schéma [Tay 05]. Celle-ci consiste essentiellement à manipuler les forces nodales pour simuler les effets de l'endommagement, plutôt que les rigidités.

Les critères de rupture locale les plus employés sont bidimensionnels, et permettent d'identifier indépendamment les ruptures matricielles et de fibres en traction et compression, et les décohésions entre fibres et matrice engendrées par les cisaillements. Par exemple, [Kim 98] présente une approche progressive de la rupture basée sur le critère de Hashin et exploite un modèle EF bidimensionnel pour étudier l'influence des paramètres géométriques et du jeu sur l'endommagement et la rupture d'une liaison pointée élémentaire.

[Xiao 05b] propose et identifie un modèle EF bidimensionnel de prévision de la rupture en matage, basé, d'une part, sur la CLT modifiée pour capturer le comportement non-linéaire du matériau

en cisaillement et, d'autre part, sur la prise en compte de la rupture locale des fibres et de la matrice en compression. Le modèle traduit efficacement la progressivité de la rupture en matage et capture l'influence de la stratification, mais ses capacités de prévision ne sont pas confrontées à l'expérience.

En considérant uniquement les modes de ruptures matricielle et de fibres en traction et compression, [McCarthy 05d] obtient des prévisions numériques satisfaisantes, quoique légèrement conservatives, du comportement et de la rupture d'un assemblage en double recouvrement comportant une rangée de trois boulons dans la direction de l'effort. Le modèle EF tridimensionnel capture correctement les redistributions d'efforts entre fixations et l'influence des jeux. La prévision du matage est trop conservatrice et celle de la rupture finale de l'assemblage en traction nette reste problématique pour des problèmes numériques de convergence.

[Camanho 99b ; Perugini 01 et Riccio 02] emploient une version tridimensionnelle du critère de Hashin permettant de distinguer la rupture des fibres en compression de leur micro-flambement.

Un problème majeur et rarement évoqué dans la bibliographie réside dans les problèmes de localisation numérique de l'endommagement. [Dano 00] évoque en introduction les problèmes numériques de convergence des calculs quand les éléments perdent leur rigidité sur le bord chargé du trou, mais ne propose pas de solution. [Lessard 95] utilise un artifice numérique pour la propagation de la rupture en matage en rigidifiant les éléments rompus face au trou.

Les approches progressives de la rupture posent enfin la question de la définition d'un critère de rupture finale de l'assemblage en fonction du mode de rupture. Dans de nombreux cas, la divergence finale du calcul semble constituer le critère de rupture finale, et c'est la forme de la zone endommagée, et le type de dommages, qui permettent d'identifier le mode de rupture [Kim 98]. Néanmoins, pour la rupture en matage, on trouve d'autres critères, comme par exemple : l'effort pour lequel la moitié des plis sont rompus en bord de trou [Kradinov 07a], l'effort pour lequel l'endommagement atteint sort de la zone de serrage comprise sous les rondelles, ou l'accumulation d'endommagement sur une aire critique en bord de trou [Camanho 99b]. Il n'y a pas de consensus en la matière.

VII.3 LA DEMARCHE INDUSTRIELLE

A des fins de dimensionnement industriel, les ingénieurs sont souvent confrontés au calcul de jonctions de grandes dimensions, impliquant plusieurs centaines de fixations. La complexité géométrique des pièces calculées impose une stratégie de calcul multiniveau permettant d'appréhender, d'une part, le comportement global de la jonction afin de l'intégrer dans son environnement et, d'autre part, les comportements locaux au niveau des fixations afin d'isoler les zones critiques et d'en prévoir la rupture. Cette démarche de calcul repose sur la discrétisation de la jonction en assemblages élémentaires.

VII.3.1 CONSIDERATIONS GENERALES SUR LA DISCRETISATION DE LA JONCTION COMPLEXE EN ASSEMBLAGES ELEMENTAIRES

De façon générale, discrétiser une jonction complexe en assemblages élémentaires suppose que les interactions entre fixation sont négligeables. Diverses études expérimentales [Collings 75 ; Crews 87 ; Hart-Smith 76] montrent que cette hypothèse est justifiée pour les empilements et les écartements usuels ($w/D \geq 5$, $e/D \geq 3$). Dans ce cas, il est possible de prédire la charge totale supportée par l'assemblage en utilisant les résultats du modèle élémentaire. Pour des configurations plus complexes, il est impératif d'utiliser la discrétisation en liaisons élémentaires avec plus de précautions.

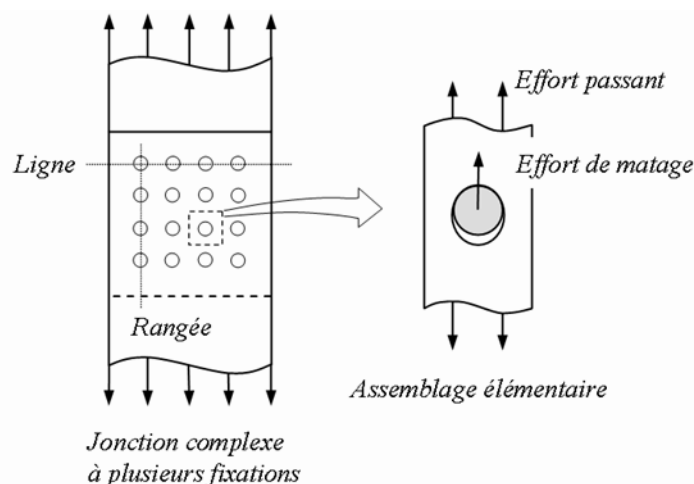


Figure VII-12 : Discrétisation d'une jonction complexe en assemblages élémentaires. Effort passant et effort de matage. Les lignes de fixations sont orthogonales à la direction de l'effort, tandis que les rangées de fixations lui sont colinéaires.

Pour s'affranchir du risque de rupture de l'assemblage en cisaillement, il suffit d'augmenter le rapport e/D . Cette étape du dimensionnement résulte d'un simple compromis entre résistance et encombrement de la liaison. Toute la difficulté du dimensionnement résulte de la compétition entre modes de rupture en elongation et en matage. Pour optimiser l'assemblage, il convient de permettre au composite de développer sa pleine résistance en matage. Pour ce faire, il s'agit de réduire la contrainte de compression en bord de trou et porter la résistance en elongation de l'élément composite au delà de sa capacité de matage. Ce qui est relativement simple pour une ligne unique de fixations devient délicat pour une liaison présentant plusieurs lignes de fixations. En effet :

- la répartition du chargement entre lignes d'inserts n'est pas équilibrée (elle dépend des différentes raideurs des éléments assemblés) et la ligne extérieure reprend la majeure partie de l'effort (dans un assemblage en simple recouvrement, Cf. VII.3.3.b),

- la ligne extérieure est soumise à un chargement de matage pur,
- les autres lignes subissent une combinaison d'effort de matage et d'effort passant (Figure VII-12).

Ainsi, des lignes multiples de liens peuvent diminuer la contrainte de compression sur les trous de la ligne extérieure, la plus chargée en matage, mais aussi conduire à une rupture en élongation sur la ligne intérieure, la plus critique du point de vue de la traction trouée habitée.

VII.3.2 L'APPROCHE GLOBALE / LOCALE

Tout l'enjeu de l'approche multiniveau consiste à évaluer la répartition des efforts entre les fixations afin de prévoir la résistance de la jonction complexe à partir de la tenue de sa fixation la plus chargée.

VII.3.2.a Le modèle global

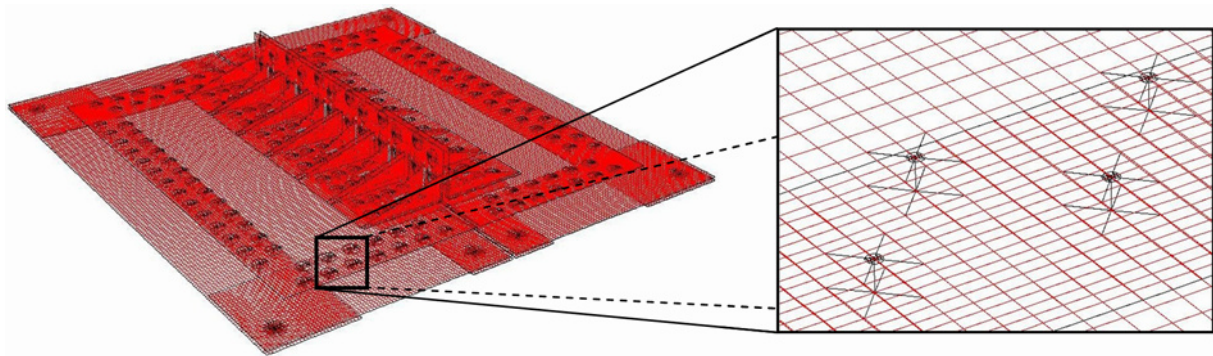


Figure VII-13 : Modèle global d'une jonction boulonnée aéronautique générique [Irisarri 07]. 4 millions de degrés de liberté, éléments coques stratifiées, les fixations sont représentées par des ressorts anisotropes.

La géométrie considérée dans le modèle Eléments Finis de la jonction complète provient le plus souvent de la CAO de l'assemblage et intègre un grand nombre de détails géométriques. Le maillage correspondant, qui comprend souvent plusieurs millions de degrés de liberté, est donc extrêmement coûteux en puissance de calcul. A ce niveau de modélisation, le maillage est le plus souvent réalisé à l'aide d'éléments coque. Les comportements matériaux sont linéaires élastiques. Le calcul fait appel à des algorithmes de résolutions complexes, permettant la parallélisation du calcul et la capture de phénomènes structuraux tels que le flambage, le cas échéant.

Compte tenu de la complexité géométrique du problème, il est évidemment invisable d'introduire dans le modèle global la gestion locale des contacts au niveau de chacune des fixations. Celles-ci sont donc individuellement modélisées par des ressorts anisotropes (Figure VII-13) dont le calcul des raideurs est discuté en VII.3.3.a.

VII.3.2.b La réanalyse locale des fixations critiques

Les flux d'efforts passants (N_x , N_y et N_{xy}) et l'effort F transféré par la fixation sont extraits du calcul global pour chaque boulon. L'analyse de ces chargements permet d'isoler une fixation ou un ensemble de fixations critiques. Flux passants et effort de matage sont ensuite réinjectés en tant que conditions aux limites dans un modèle d'assemblage élémentaire pour la réanalyse locale de chaque fixation critique (Figure VII-14). Les méthodes employées au niveau local sont essentiellement semi-empiriques. Les fixations sont supposées rigides et ajustées aux trous. Le respect des pratiques de conception en termes d'espacement des fixations et de conception des empilements permet de s'affranchir des modes de rupture de cisaillement ou de clivage du stratifié. Le mode de rupture critique considéré est une combinaison de matage et de rupture du ligament en traction nette.

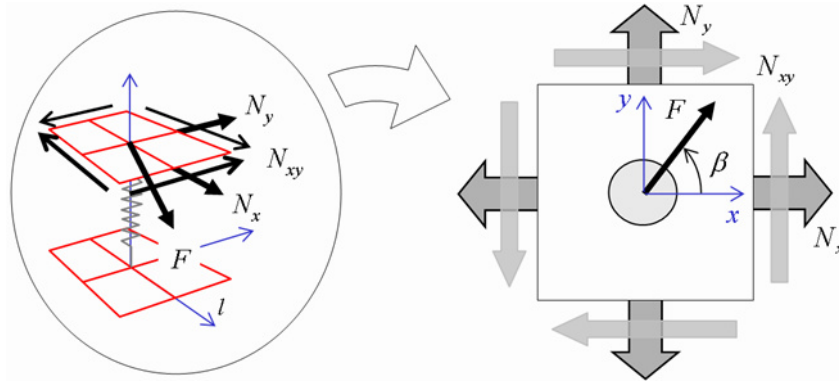


Figure VII-14 : Extraction à partir du calcul global des conditions aux limites pour la réanalyse locale.

L'analyse locale des champs de contrainte est effectuée par superposition d'une solution de plaque trouée infinie soumise aux efforts passant et d'une solution de plaque trouée sollicitée en matage par une distribution sinusoïdale en bord du trou (Figure VII-15). De façon générale, on considère que la rupture intervient lorsque le critère suivant est atteint :

$$K_t \cdot (\sigma_\infty + K_m \cdot \sigma_m) \geq \sigma_r \quad (\text{VII-2})$$

où : σ_∞ correspond à la contrainte à l'infini,

σ_m correspond à la contrainte moyenne de matage,

σ_r correspond de façon générale à la contrainte admissible du stratifié,

K_t et K_m sont respectivement les coefficients de surcontrainte de trou et de matage.

Les coefficients K_t et K_m sont déterminés de façon semi-empirique par une approche de type Point-Stress. Ces coefficients dépendent du matériau considéré, de l'empilement, du type d'effort passant (traction ou compression) et du diamètre des fixations.

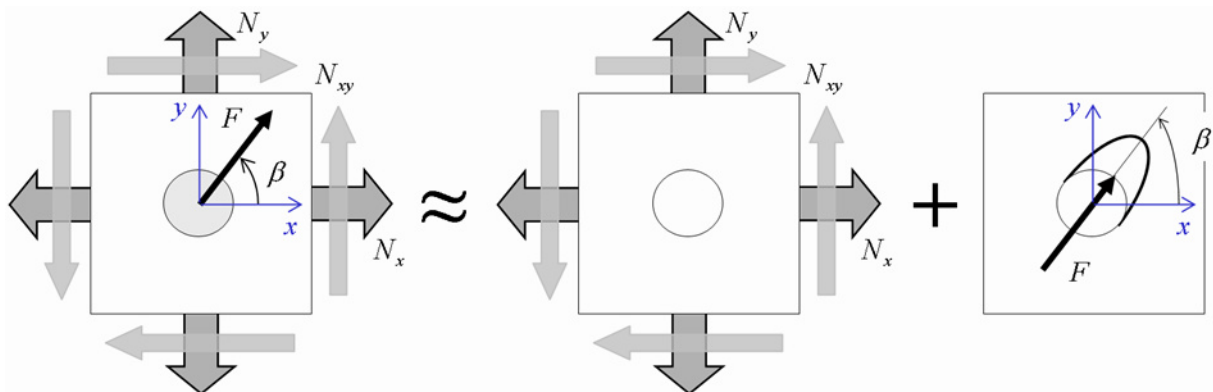


Figure VII-15 : Superposition de cas de charge.

Il existe de nombreux logiciels commerciaux pour l'analyse locale des distributions de contraintes et de la tenue des assemblages. [Broughton 02] en propose un inventaire succinct.

VII.3.3 LES MODELES SEMI-EMPIRIQUES POUR L'ANALYSE DES DISTRIBUTIONS D'EFFORTS ENTRE FIXATIONS

VII.3.3.a Raideur de l'assemblage

Au niveau global du calcul de jonction, les boulons sont modélisés par des ressorts anisotropes. La raideur normale C_n du ressort correspond à la raideur du fût de la fixation :

$$C_n = \pi R^2 E_3 / (t_1 + nt_2) \quad (\text{VII-3})$$

Les raideurs de cisaillement longitudinale C_l et transverse C_t sont obtenues à l'aide de modèles empiriques. La formule la plus employées est probablement celle proposée par [Huth 84] :

$$\frac{1}{C_{t,l}} = \frac{\xi}{n} \left(\frac{t_1 + t_2}{2D} \right)^{2/3} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{n E_2 t_2} + \frac{1}{2 E_3 t_1} + \frac{1}{2 n E_3 t_2} \right) \quad (\text{VII-4})$$

où : $\xi = 4,2$ pour les assemblages composites,
 $n = 1$ pour un assemblage simple recouvrement et $n = 2$ en cas de double recouvrement,
 $D (= 2R)$ correspond au diamètre de la fixation (ajustée au trou),
 E et t correspondent respectivement aux rigidités et aux épaisseurs des plaques. L'indice 3 se rapporte à la fixation. En cas de double recouvrement l'indice 1 correspond à la plaque centrale et l'indice 2 aux plaques externes (voir Figure VII-16).

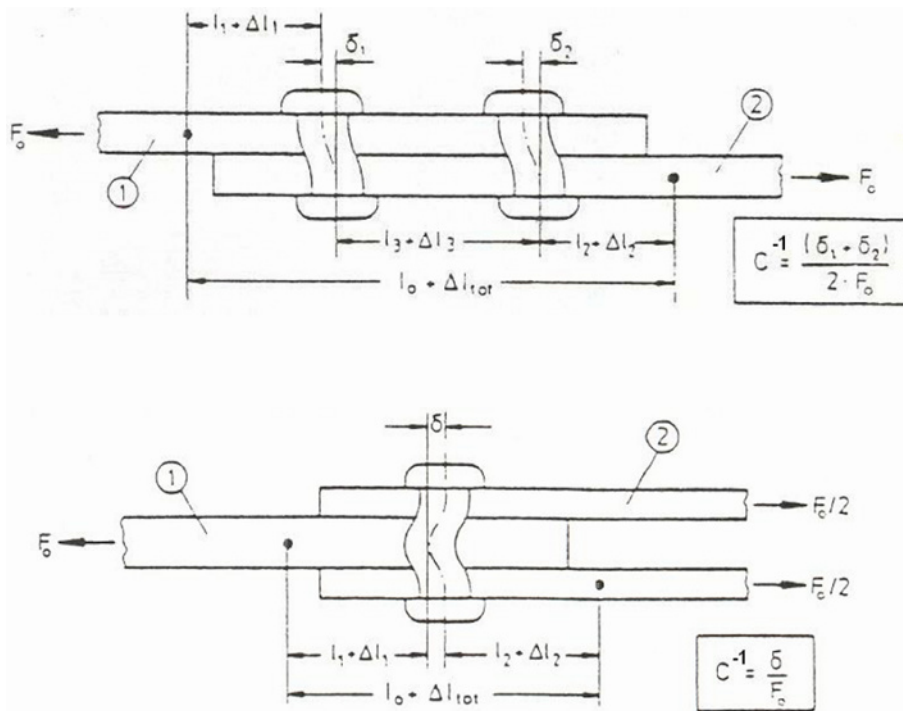


Figure VII-16 : Définition de la raideur d'une fixation, d'après [Huth 84]. Dans le cas de la configuration en simple recouvrement, l'usage de deux lignes de fixation permet d'éviter une flexion secondaire trop importante.

Il existe de nombreux autres modèles de raideur des assemblages en simple ou double recouvrement. On renvoie à [Paroissien 06] pour une description plus complète de ces modèles³. Dans le cadre de ce travail, nous avons comparé les résultats obtenus par ces différentes méthodes au calcul EF, pour des plaques en aluminium et des fixations en titane. Les calculs EF sont réalisés sans serrage, avec un simple confinement dans l'épaisseur entre des rondelles de diamètre $2D$. Rondelles et boulons sont solidaires. Les maillages sont tridimensionnels, à base d'éléments briques linéaires. Les comportements matériaux sont supposés élastiques linéaires. La gestion des contacts entre plaques et boulons et plaques et rondelles est assurée par un algorithme de pénalisation. Le modèle de contact employé est de type Coulomb. Ici, le coefficient de frottement est nul ($\mu = 0$). Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure VII-18 dans le cas des assemblages en simple

³ Les références Grumman et Boeing proviennent de [de Rijck 05].

recouvrement et sur la Figure VII-17 pour les assemblages en double recouvrement. A l'évidence, c'est la formule de Huth qui fournit les meilleurs tendances, mais ces résultats sont améliorables. Notons enfin que les formules empiriques ne capturent l'influence que d'un nombre réduit de paramètres.

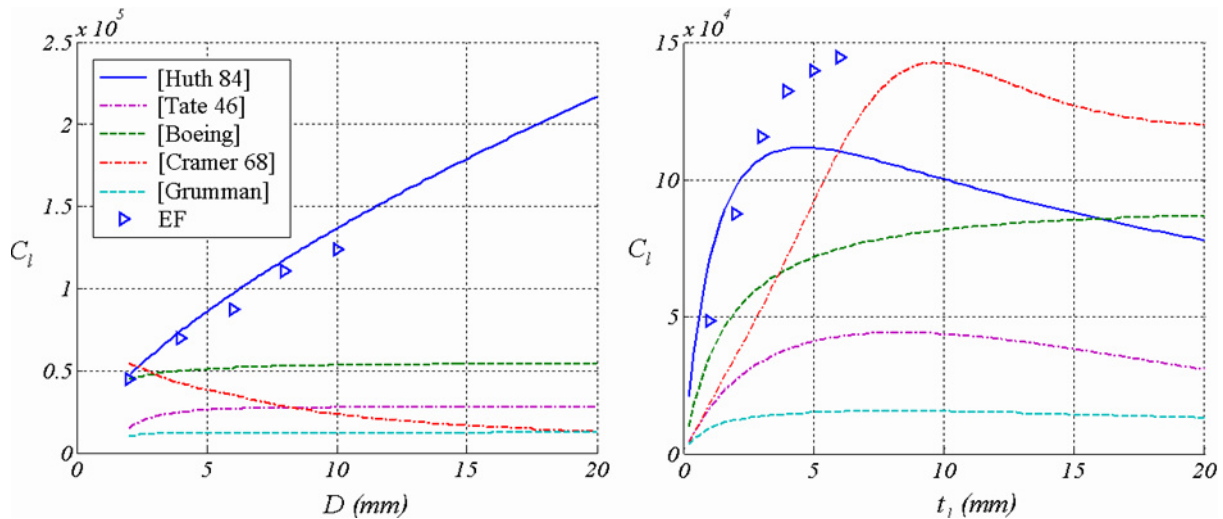


Figure VII-17 : Assemblage en simple recouvrement. Comparaison des raideurs évaluées par les formules empiriques et un modèle EF tridimensionnel, non-linéaire de contact. Par défaut, $D = 6$ mm, $t_1 = t_2 = 2$ mm. Les plaques sont en aluminium ($E = 69$ GPa, $\nu = 0,33$) et les fixations en titane ($E = 110$ GPa, $\nu = 0,31$).

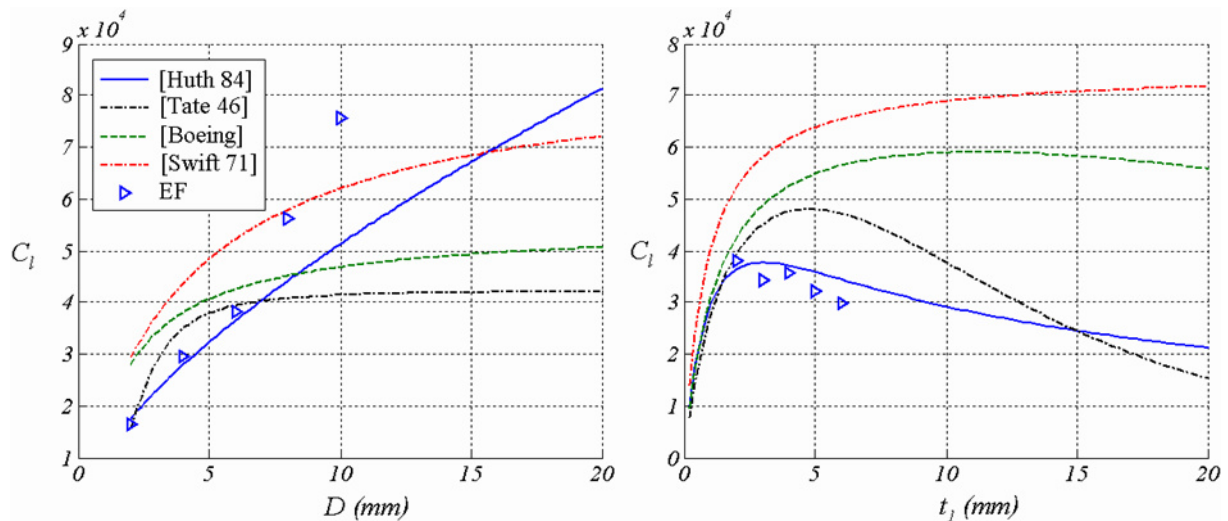


Figure VII-18 : Assemblage en double recouvrement. Comparaison des raideurs évaluées par les formules empiriques et un modèle EF tridimensionnel, non-linéaire de contact. Par défaut, $D = 6$ mm, $t_1 = t_2 = 2$ mm.

VII.3.3.b Transfert des efforts entre les fixations

Les raideurs des assemblages élémentaires sont requises pour alimenter les modèles simplifiés utilisés pour le calcul de la répartition des transferts d'efforts entre les fixations. On considère généralement que, pour une ligne de fixations avec des tolérances faibles sur l'alignement et le diamètre des perçages, le chargement est également réparti sur toutes les fixations. Par contre, la répartition des efforts entre différentes lignes de fixation n'est pas uniforme et dépend de la configuration de l'assemblage. L'étude des transferts d'effort dans une jonction à plusieurs lignes de fixation se ramène donc le plus souvent à celle des transferts entre fixations d'une même rangée. De nombreuses méthodes existent pour ce faire. Le calcul EF détaillé de la liaison permet évidemment

d'obtenir des résultats de qualité [Ekh 06 ; McCarthy 06], mais cette méthode reste trop coûteuse en temps de calcul pour le dimensionnement industriel. Des méthodes plus rapides existent, basées sur une analogie électrique [Ross 47] et le modèle empirique de raideur de [Tate 46]. On propose dans les Tableaux VII-2 et VII-3 une synthèse des comparaisons réalisées dans ce mémoire entre l'approche de Ross et les calculs EF réalisés dans le cadre de ce travail (mêmes hypothèses de calculs qu'en VII.3.3.a) pour les configurations présentées sur les Figures VII-19 et VII-20. La corrélation entre les résultats analytiques et les résultats EF est excellente. Partant de ce constat, certaines études récentes [Ekh 08 ; McCarthy 06] reprennent et étoffent cette analogie dans un cadre EF pour intégrer la prise en compte de nouveaux paramètres, tels que les jeux.

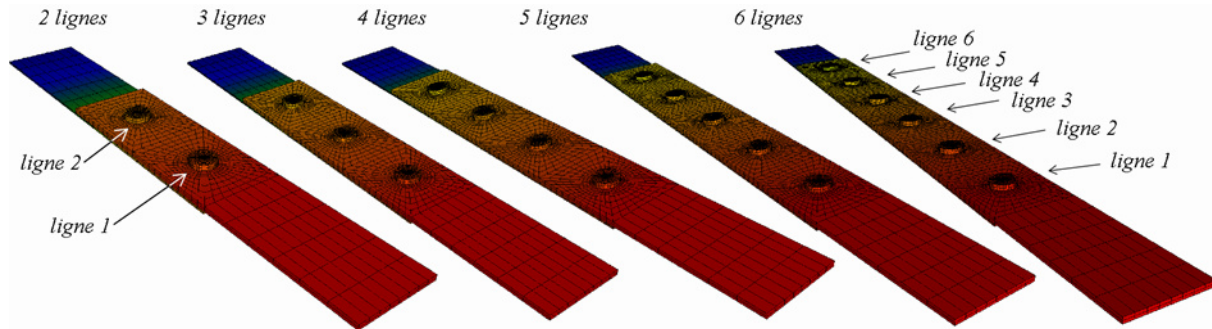


Figure VII-19 : Déplacements longitudinaux et déformées pour 5 configurations d'assemblages en double recouvrement, de 2 à 6 fixations par rangées. Modèles EF tridimensionnels, non-linéaires de contact. Condition de symétrie dans l'épaisseur au niveau du feuillet moyen de la plaque centrale. $D = 6 \text{ mm}$, $t_1 = t_2 = 2 \text{ mm}$. Les plaques sont en aluminium ($E = 69 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$) et les fixations en titane ($E = 110 \text{ GPa}$, $\nu = 0,31$).

Configuration	2 lignes		3 lignes		4 lignes		5 lignes		6 lignes	
	EF	[Ross 47]								
Ligne 1	57,5	57,2	49,2	48,9	46,8	46,7	46,0	46,1	45,0	45,9
Ligne 2	42,5	42,8	22,2	22,2	16,4	16,7	14,7	15,1	13,9	14,5
Ligne 3			28,6	28,9	12,0	11,8	6,9	6,8	5,5	5,2
Ligne 4					24,8	24,8	9,0	8,6	4,4	3,7
Ligne 5							23,4	23,4	8,2	7,6
Ligne 6									23,0	23,1

Tableau VII-2 : Taux de transfert d'effort entre fixations, en %, pour la plaque centrale dans les configurations de la Figure VII-19 Comparaison des résultats EF et du modèle de [Ross 47] (en italique).

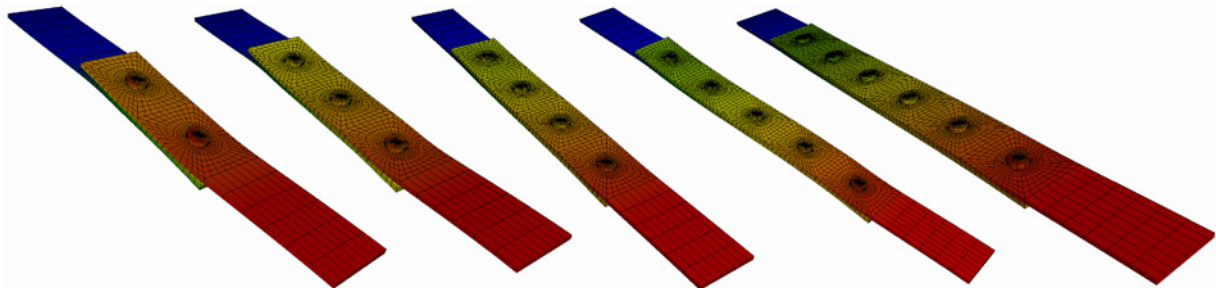


Figure VII-20 : Déplacements longitudinaux et déformées pour 5 configurations d'assemblages en simple recouvrement.

Configuration	2 lignes		3 lignes		4 lignes		5 lignes		6 lignes	
	EF	[Ross 47]								
Ligne 1	50,1	50,0	33,0	36,5	30,5	31,5	28,7	46,1	27,3	28,6
Ligne 2	49,9	40,0	33,5	27,0	19,0	18,5	14,8	15,0	13,5	13,5
Ligne 3			33,5	36,5	19,1	18,5	12,2	11,1	9,2	7,9
Ligne 4					31,4	31,5	15,1	15,0	9,2	7,9
Ligne 5							29,2	29,5	13,5	13,5
Ligne 6									27,3	28,6

Tableau VII-3 : Taux de transfert d'effort entre fixations, en %, pour les configurations de la Figure VII-20.

VII.4 DISCUSSION : INSUFFISANCES ET INCOMPATIBILITE DES DEMARCHES DE MODELISATION

L'approche multiniveau industrielle est justifiée par la complexité géométrique des structures étudiées. Elle souffre néanmoins de certaines limitations et insuffisances. En effet, elle ne permet pas de prendre en compte l'influence des jeux sur la distribution des efforts entre fixations au niveau global. De même, la redistribution des efforts entre les fixations avec l'endommagement de matage des fixations critiques reste inaccessible. Cette approche est donc uniquement valide jusqu'au moment de la première perte de rigidité significative au niveau de la fixation critique. L'origine de ces limitations réside dans le manque de bouclages entre modèle local et modèle global. [Volgers 02] a proposé dans le cadre du programme BOJCAS⁴ un modèle combinant analyse globale avec des éléments coques en zone courante et analyse locale tridimensionnelle au niveau des assemblages, mais ces travaux restent limités à quelques fixations et aux non linéarités de contact. Enfin, les méthodes de réanalyse locale des fixations critiques sont essentiellement basées sur des données empiriques (C_n , C_l , C_t , K_t et K_m). La précision des résultats obtenus n'est donc garantie qu'au niveau des points d'essais, ce qui limite singulièrement les possibilités d'optimisation numérique des empilements.

Pour pallier aux insuffisances de l'approche industrielle en matière de réanalyse locale, on se tourne naturellement vers les techniques de modélisation avancée des assemblages élémentaires. Les modèles EF tridimensionnels avec approche progressive de la rupture sont considérés comme les mieux adaptés. Toutefois, malgré l'importante quantité de publications traitant du sujet, la modélisation du matage reste un problème d'actualité et le manque de modèles réellement prédictifs est flagrant. Alors que l'importance des phénomènes d'endommagement hors plan est clairement établie, on compte peu d'études exploitant des critères de rupture tridimensionnels et, à notre connaissance, aucune sur la modélisation progressive des délaminages. D'autre part, la modélisation des frottements reste approximative et le coefficient de frottement de Coulomb constitue en pratique un coefficient de recalage. Enfin, ces modèles présentent des coûts de calcul élevés, renforcés par d'importants problèmes de convergence au maillage en bord de trou, rarement évoqués dans la littérature.

Au final, l'augmentation des puissances de calcul disponibles permet, d'une part, le calcul global de jonction de plus en plus complexes et, d'autre part, l'emploi de modèles locaux de plus en plus détaillés. Dans la mesure où ces deux niveaux de modélisation exploitent pleinement les moyens de calcul disponibles, il n'est pas envisageable de les coupler directement. En fait, la complexité et le coût des modélisations locales avancées fait douter de leur application industrielle immédiate à des fins de dimensionnement. Dans le chapitre suivant, on propose de se baser sur la démarche multiniveau industrielle et d'exploiter les modèles détaillés à des fins de "virtual testing", ou *essais virtuels*, pour alimenter les modèles semi-empiriques de réanalyse locale des fixations les plus sollicitées.

⁴ BOJCAS (*Bolted Joints in Composite Aircraft Structures*). Programme de recherche européen de 2000 à 2003. <http://www.smr.ch/bojcas/>

Chapitre VIII Amélioration des modèles pour la prévision de la rupture des assemblages

Sommaire

VIII.1 Etude expérimentale de la rupture des assemblages	194
VIII.1.1 Configurations expérimentales	194
VIII.1.2 Résultats des essais de matage.....	197
VIII.1.3 Résultats des essais d'assemblages.....	200
VIII.1.4 Résultats des essais de traction trouée et de traction trouée habitée	205
VIII.1.5 Discussion sur les résultats expérimentaux	206
VIII.2 Modélisation fine de la rupture des assemblages.....	208
VIII.2.1 Maillages et stratégie de calcul	208
VIII.2.2 Gestion du contact et conditions aux limites	210
VIII.2.3 Comportements matériaux	211
VIII.2.4 Comparaisons essais/calculs	214
VIII.3 Discussion / validité des modèles.....	220

Après avoir mis en avant les insuffisances des modélisations actuelles pour la prévision de la résistance des assemblages boulonnés dans les structures composites, on propose dans ce chapitre quelques pistes d'améliorations. Les travaux présentés portent essentiellement sur l'amélioration des modèles fins pour la liaison élémentaire dans une optique de "virtual testing". Il s'agit de proposer à ce niveau de détail structural des modèles permettant d'enrichir les bases de données expérimentales, en utilisant la simulation pour l'extrapolation vers de nouvelles configurations. Ces données enrichies sont réinjectées dans la démarche de calcul multiniveau industrielle afin d'en améliorer les capacités de prévision et autoriser l'exploration d'une plus large gamme d'empilements au niveau global de la structure. Enfin, on s'applique à réduire et simplifier les modèles fins développés dans l'optique de parvenir à l'optimisation robuste de l'assemblage, thème abordé au chapitre suivant de ce mémoire. Mais tout d'abord, la première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de quelques travaux expérimentaux préliminaires réalisés dans le cadre de cette thèse.

VIII.1 ETUDE EXPERIMENTALE DE LA RUPTURE DES ASSEMBLAGES

Notre objectif consiste essentiellement à améliorer la prévision du matage, jusqu'au premier pic de contrainte. Pour ce faire, afin de valider les modélisations proposées, des données expérimentales s'avèrent nécessaire en vue d'une comparaison exhaustive. Toutefois, les comptes-rendus d'essais publiés sont rarement suffisamment complets pour une comparaison essais/calculs précise. En effet, ceux-ci se limitent trop souvent à une simple valeur à rupture et à la description du mode correspondant. Or, en ce qui concerne le matage, les définitions de la rupture diffèrent (Cf. VII.1.4). De surcroît, les matériaux varient d'une étude à l'autre ce qui rend difficile de croiser les sources pour obtenir des bases de données plus complètes sur la rupture des assemblages. Enfin, il est nécessaire de disposer des données matériaux utiles à l'identification complète des modèles matériaux employés dans les modélisations. Dans le cadre de ces travaux de thèse, des bases de données assez larges sont disponibles sur les matériaux carbone/époxy T300/914 et T700/M21. On ne dispose toutefois pas des données complètes : courbes de comportement, suivi de la déformation des trous, etc. Une brève campagne expérimentale a donc été décidée, centrée sur l'observation du matage, à partir de plaques disponibles en T300/914.

VIII.1.1 CONFIGURATIONS EXPERIMENTALES

Six configurations expérimentales ont été testées¹, schématisées sur la Figure VIII-1. Parmi elles :

- une configuration de matage pur, afin de suivre le développement du matage sans que d'autres modes de rupture ne viennent interférer,
- trois configurations de liaisons pionnées en double recouvrement, afin d'étudier le matage sur des configurations plus complexes,
- une configuration de traction trouée et une configuration de traction trouée habitée, afin d'évaluer l'impact de la présence du pion sur la rupture de la plaque en élongation.

Les essais sont réalisés dans les conditions ambiantes. Ils sont pilotés en déplacement. On utilise une machine de traction/compression Schenck de ± 4000 daN, électro-hydraulique asservie. Celle-ci fournit les mesures du déplacement du piston et de l'effort résultant. En outre, on dispose d'un capteur de déplacement pour une mesure plus précise des déplacements vus par l'éprouvette. Un dispositif

¹ Nous avons définis ces essais, qui ont ensuite été réalisés à l'Onera, dans le cadre du projet Americo, en étroite collaboration avec P. Paulmier, responsable des essais composites de l'ex département DMSE.

d'acquisition d'images (appareil photo numérique, objectifs, trépied et éclairage), combiné à un logiciel de corrélation d'images, permet d'obtenir une mesure de déplacement sur la face de l'éprouvette afin d'estimer les champs de déformation autour d'un trou. Enfin, le suivi de l'évolution de l'endommagement au cours du chargement est assuré par un dispositif d'émission acoustique. Les dispositifs expérimentaux sont présentés sur la Figure VIII-2.

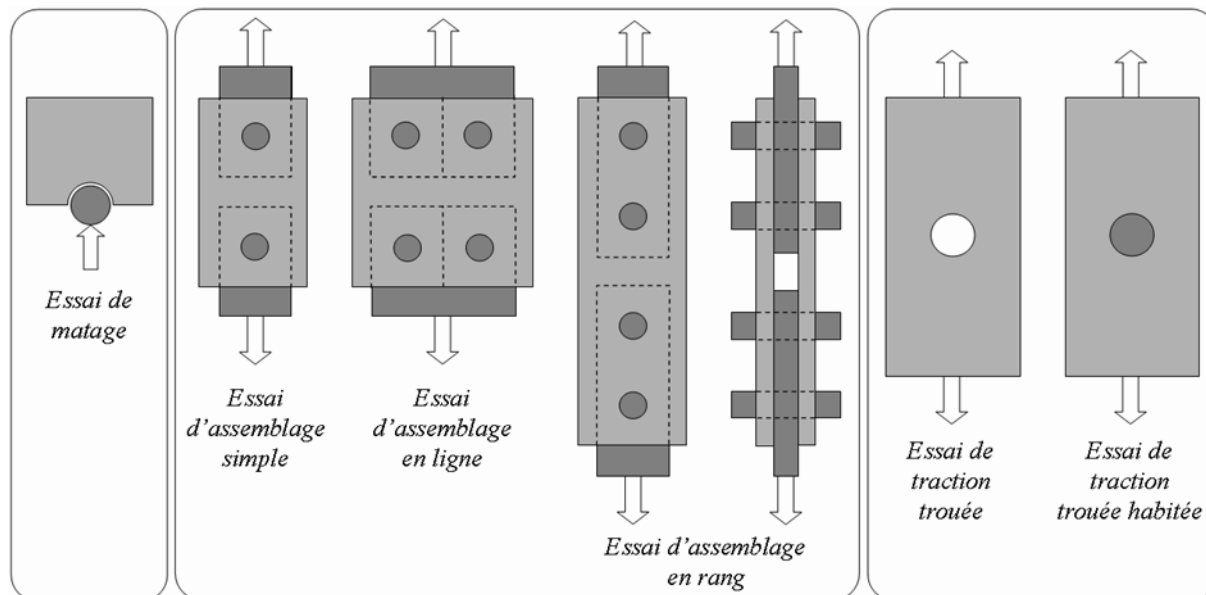


Figure VIII-1 : Schémas de principe des configurations expérimentales.

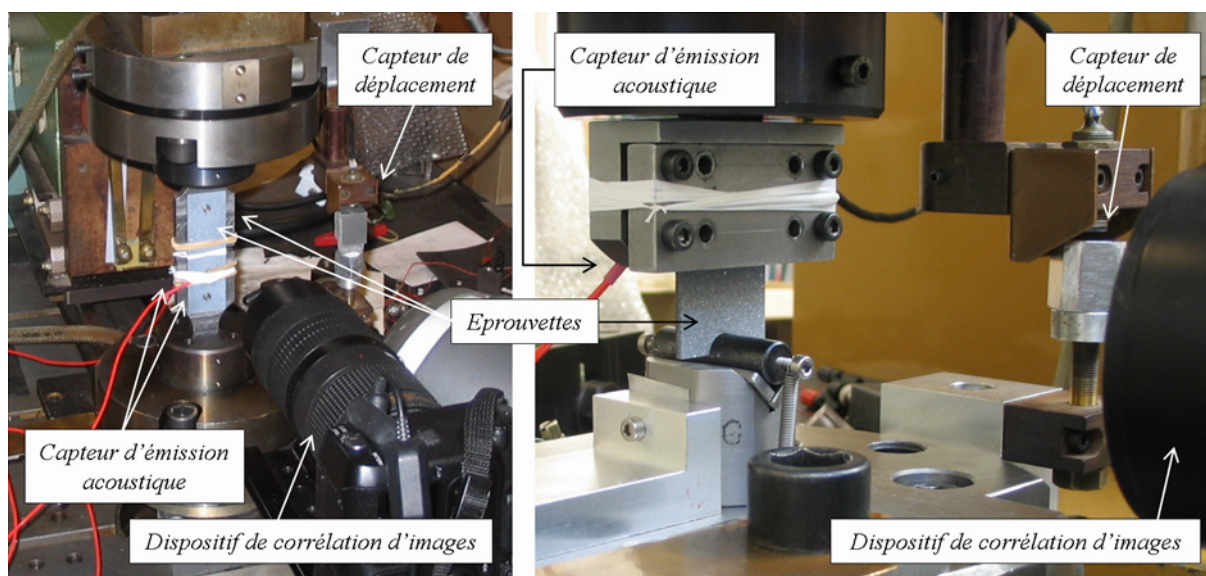


Figure VIII-2 : Dispositifs expérimentaux pour l'essai d'assemblage simple (à gauche) et l'essai de matage (à droite).

L'essai de matage pur

La configuration de matage pur est inspirée de l'essai de contact par un pion proposé par [Wu 98]. Il s'agit d'un essai relativement simple, dont l'observation est plus aisée que le montage conventionnel en double recouvrement, et qui permet d'employer des éprouvettes de dimensions beaucoup plus réduites. L'essai consiste à venir écraser (indenter) la tranche de l'éprouvette par un pion, l'extrémité opposée de l'éprouvette étant bloquée dans un mors (voir Figure VIII-3). Cependant, à la différence de

l'essai de contact par un pion, le pion ne vient pas solliciter une surface plane, mais un demi-trou découpé dans la tranche de l'éprouvette. Ceci dans le but d'être plus représentatif de la réalité d'un assemblage et de capturer l'influence du diamètre du trou. Une précaution pour ce type de montage consiste à limiter la longueur utile de l'éprouvette pour éviter le flambement. Dans ces travaux, cette longueur est fixée à approximativement 30 mm. A cette distance, on considère que les contraintes locales en bord de trou et l'endommagement de matage qui en découle ne sont pas perturbés par la présence des mors, au moins jusqu'au pic de matage.

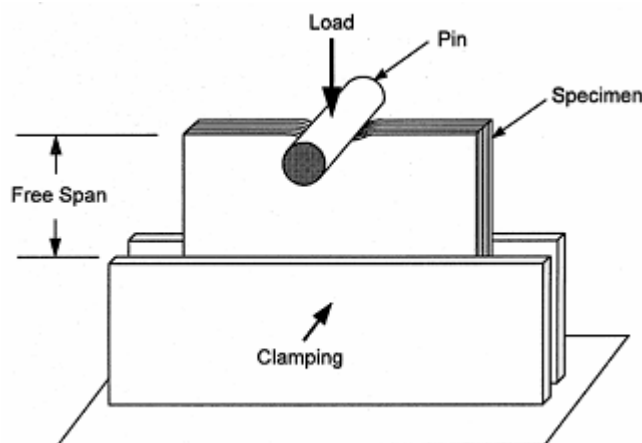


Figure VIII-3 : Schéma de principe de l'essai de contact par un pion. D'après [Wu 98].

Les essais d'assemblages

Les trois configurations de liaisons pionnées en double recouvrement diffèrent les unes des autres par le nombre et la disposition des trous. Ces configurations sont sensiblement différentes des essais conventionnels en double recouvrement [Xiao 05a]. D'une part, afin de faciliter l'observation de la face des éprouvettes au cours du chargement, les éprouvettes sont montées à la place des plaques extérieures, plutôt que de la plaque intérieure de l'assemblage. D'autre part, les éprouvettes sont pionnées en leurs deux extrémités (plutôt qu'en une seule et prises dans un mors à l'autre). Ces configurations sont présentées sur la Figure VIII-1. Toutes les éprouvettes testées proviennent de la découpe de cinq plaques stratifiées identiques en T300/914, de dimensions 100x150 mm dans le plan et d'une épaisseur théorique de 2 mm. On travaille donc sur le seul empilement : $[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$. Les plaques centrales pour les montages en double recouvrement sont réalisées en acier. Les pions sont en acier STUB.

Remarque sur le pilotage des essais

Les essais sont pilotés en déplacement, par paliers. Chaque palier correspond à la prise d'un cliché pour la corrélation d'image. Ces paliers, d'une durée moyenne de l'ordre de trente seconde, donnent lieu à une certaine relaxation du matériau, plus ou moins marquée selon les essais. Ces phases de relaxation sont, par exemple, évidentes sur les courbes de traction trouée (Figure VIII-11).

VIII.1.2 RESULTATS DES ESSAIS DE MATAGE

La Figure VIII-4 présente une courbe contrainte de matage / déformation du trou, caractéristique des essais de matage réalisés. La contrainte de matage correspond à la contrainte moyenne $\sigma_m = F/(D \times t)$ (Cf. VII.1.3.a) et la déformation du trou est obtenue en divisant directement le déplacement imposé (mesuré par le capteur de déplacement) par le diamètre D du trou. On définit ici la résistance au matage par la contrainte au premier pic de matage. La courbe de raideur² permet de visualiser le critère de perte de raideur proposé par [McCarthy 02].

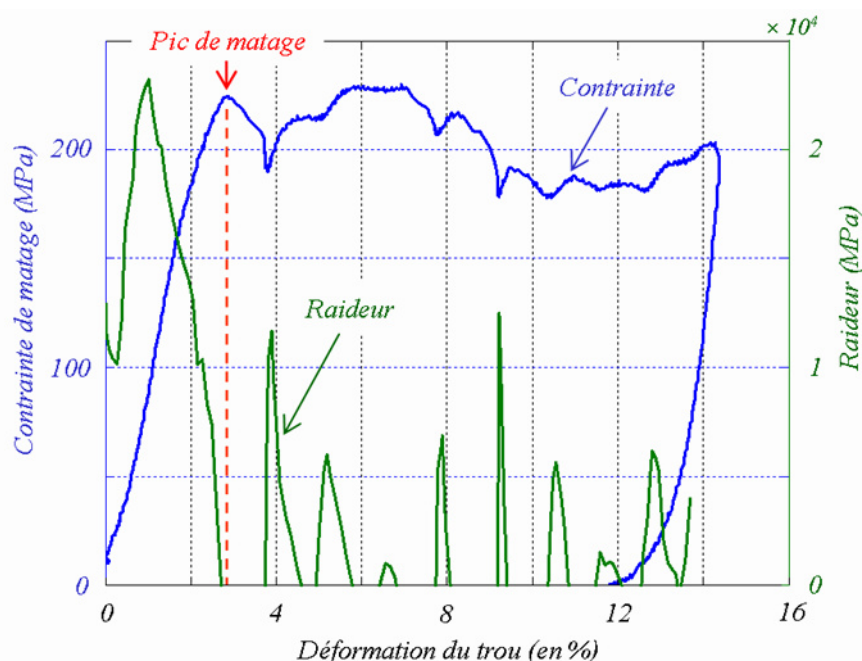


Figure VIII-4 : Courbe de matage caractéristique pour les essais de matage pur. Essai n°19.

La Figure VIII-5 met en parallèle la courbe de matage et les événements acoustiques enregistrés (avec filtrage des énergies inférieures à 10 eu^3). On reprend ici les critères d'interprétation des résultats de l'émission acoustique proposés par [Meraghni 02]. On constate que le premier pic de matage correspond à la fois aux premières ruptures de fibres⁴ et au début de propagation des délaminages. Cependant, des phénomènes d'endommagement moins énergétiques, associés à la fissuration matricielle et à l'amorce de délaminages se produisent très tôt au cours de l'essai, pour une contrainte de matage de l'ordre de 40 % de la résistance mesurée. D'après ces observations, il semble que le pic de matage corresponde à la transition entre une phase d'accumulation d'endommagements matriciels et de décohésion et la phase de propagation de ces dommages (Cf. VII.1.4). Cette interprétation est encore plus évidente à partir de l'observation de la courbe d'énergie acoustique cumulée. Sur la Figure VIII-6, le pic de matage correspond clairement au premier événement acoustique significatif.

² La raideur correspond à la pente de la tangente à la courbe de matage. En pratique, afin de lisser la courbe, on calcule la pente de la corde sur une petite fenêtre d'abscisse.

³ eu : energy unit, soit 10^{-18} J . En pratique, ce filtrage permet d'éliminer le fond sonore du local d'essai. En pratique, le résultat est proche de celui d'un filtrage avec un seuil à 45 dB.

⁴ Remarquons que pour certaines éprouvettes, des ruptures de fibres sporadiques sont observées bien avant le pic de matage. Néanmoins, on estime que celles-ci ne sont pas significatives dans la mesure où elles n'ont aucune conséquence apparente sur le comportement global de l'éprouvette.

Dix éprouvettes et quatre diamètres de trous différents ont été testés. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le Tableau VIII-1. On estime que sur ce type d'essais, les principaux paramètres géométriques influents sont le rapport D/t (rapport entre le diamètre du trou et l'épaisseur du stratifié) et les jeux. La longueur utile de l'éprouvette est approximativement de 30 mm. La valeur du ratio w/D est fixée approximativement à 3 pour toutes les éprouvettes. Les résultats sont présentés sous la forme de la contrainte moyenne de matage aux instants de première rupture de fibre et du premier pic de matage. Les dispersions sur ces résultats sont importantes, notamment pour les plus grands diamètres de trous. Afin d'essayer de dégager des tendances, les résultats sont également présentés en valeurs moyennes pour chaque diamètre de trou.

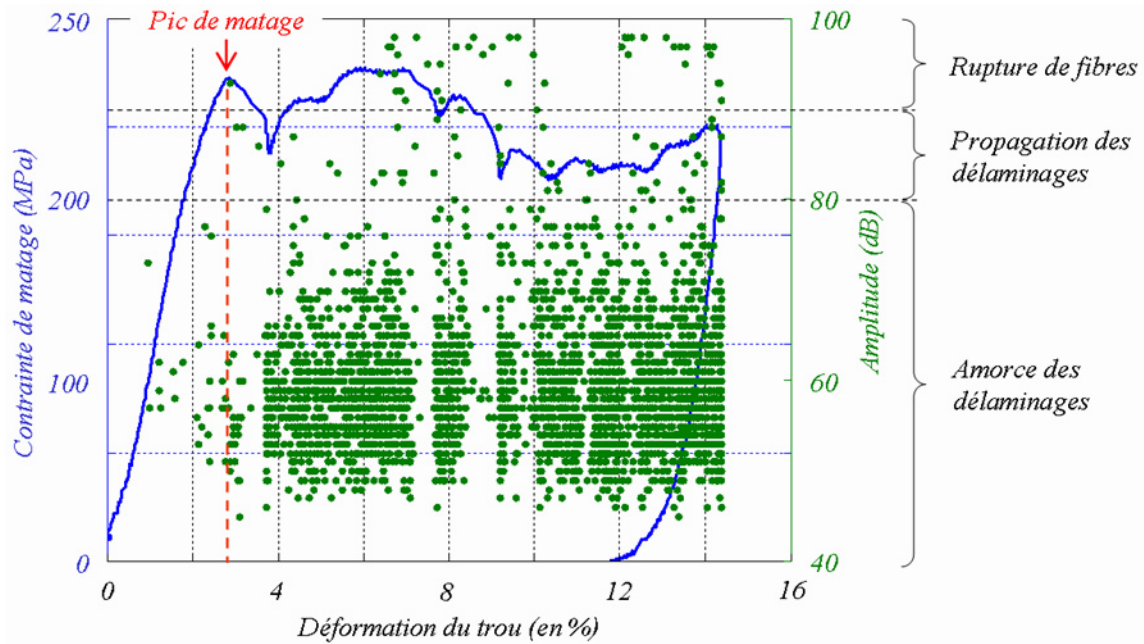


Figure VIII-5 : Courbe de matage (en bleu) et amplitude des événements acoustiques (en vert). Essai n°19.

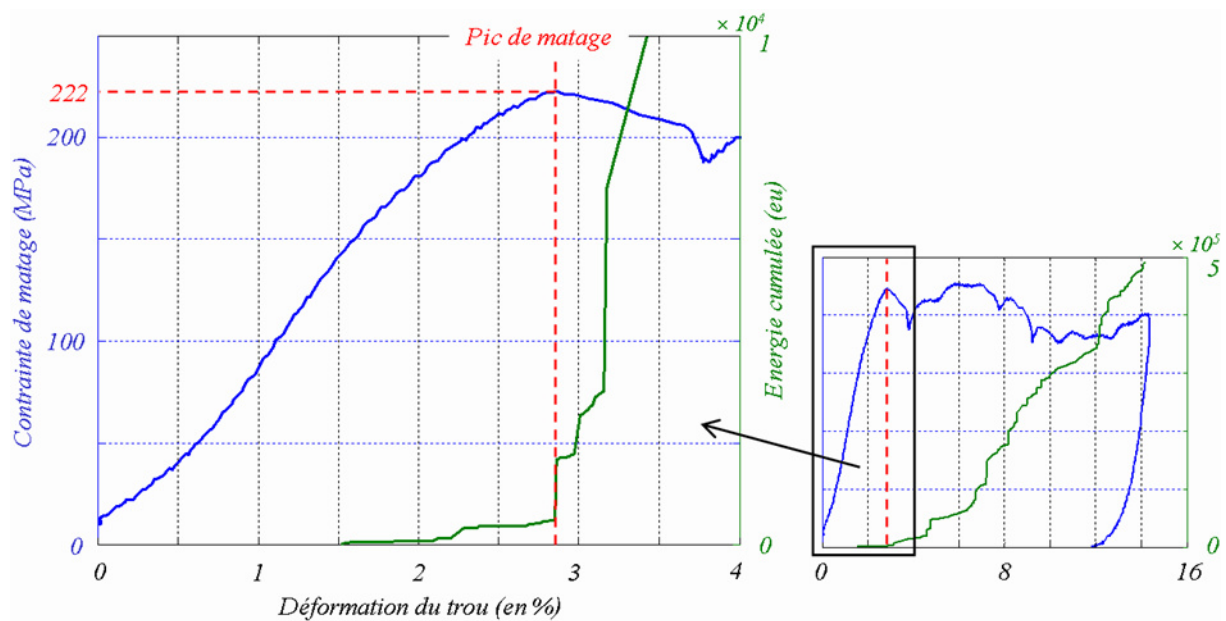


Figure VIII-6 : Courbe de matage (en bleu) et énergie acoustique cumulée (en vert). Le premier pic de matage correspond au premier événement significatif sur la courbe d'énergie. Essai n°19.

On peut extraire deux remarques de ces résultats. D'une part, la correspondance entre le pic de matage et la première rupture (à 0°) de fibres semble clairement établie. D'autre part, les dispersions rendent difficile l'interprétation, avec aussi peu d'éprouvettes, de l'influence du rapport D/t sur le matage. Les résultats moyens obtenus pour des diamètres supérieurs ou égaux à 8 mm suggèrent que cette influence reste faible. Néanmoins, les essais réalisés avec un pion de 6 mm sont problématiques à cet égard. En effet, la résistance au matage observée est environ 30 % inférieure à celle obtenue pour les autres diamètres.

Les jeux et l'endommagement liés au perçage des trous sont, dans ces essais, des paramètres mal maîtrisés. On estime que le jeu⁵ varie entre $1/10^e$ et $2/10^{es}$ de mm en fonction des éprouvettes. L'évolution de la surface de contact entre le pion et le trou ainsi que l'évolution des distributions des pressions de contact sur le bord chargé du trou s'en trouvent notablement altérées. A jeu constant, cet effet est probablement d'autant plus sensible que le diamètre des trous est faible, ce qui pourrait expliquer les résultats obtenus avec un pion de 6 mm. Les diamètres de trous reportés dans le Tableau VIII-1 sont déterminés à partir de clichés réalisés en début d'essai sur la face de l'éprouvette.

D'autre part, l'endommagement lié aux perçages des éprouvettes peut expliquer la forte dispersion sur les résultats obtenus pour les diamètres de 10 et 12 mm. En effet, dans ces deux cas, les éprouvettes de matage correspondent aux deux moitiés d'une même éprouvette trouée en son centre et coupée en deux. Il n'y a donc *a priori* aucune raison expliquant une telle disparité sur la résistance en matage, si ce n'est des défauts dissymétriques induits par l'usinage des éprouvettes. Les valeurs basses de résistance correspondent à des éprouvettes pour lesquelles la rupture est liée à la propagation instable, et prématurée, d'un délaminage. De ce point de vue, les valeurs hautes sont les plus significatives, et l'augmentation du rapport D/t semble s'accompagner d'une légère hausse de la résistance en matage, insuffisante toutefois à expliquer les résultats obtenus pour $D = 6$ mm.

Numéro d'essai	D (mm)	D trou (mm)	t (mm)	1 ^{re} rupture de fibres		Rupture en matage	
				σ_m^{**}	moyenne	σ_m	moyenne
11	6 ($D/t \approx 3$)	6,35	1,84	176*	203 MPa	206	212 MPa
03		6,35	1,93	213		213	
19		6,40	1,98	223		222	
20		6,40	1,96	200		207	
02	8 ($D/t \approx 4$)	8,15	2,11	307	278 MPa	315	315 MPa
10		8,15	1,88	250*		315	
12	10 ($D/t \approx 5$)	10,20	2,08	228*	280 MPa	293	324 MPa
13		10,20	2,08	332		355	
04	12 ($D/t \approx 6$)	12,15	1,80	263	312 MPa	265	314 MPa
09		12,15	1,90	361		363	

* Ruptures de fibres intervenant immédiatement après le pic de matage, au moment d'une importante chute de contrainte

** Les contraintes indiquées sont calculées par rapport aux diamètres et épaisseurs théoriques.

Tableau VIII-1 : Synthèse des résultats des essais de matage pur. Les dimensions sont exprimées en mm et les contraintes en MPa.

⁵ Ici, le jeu est défini comme la différence entre le rayon du trou et celui du pion.

La Figure VIII-7 présente un exemple des résultats obtenus par corrélation d'image. Ces résultats montrent une légère dissymétrie du champ de déplacement en début de chargement (voir Photo 1), rattrapée par la suite. On interprète celle-ci comme un mouvement de réalignement de l'assemblage dans l'axe de l'effort, accompagné d'un léger glissement de l'éprouvette dans les mors. La corrélation réalisée à partir de la Photo 3 permet révéler un début de fissuration du pli extérieur, orienté à 90°, face au pion. Celle-ci est pourtant imperceptible sur la photographie. On dispose malheureusement de trop peu de clichés avant le pic de matage pour suivre l'évolution des champs de déplacement. De plus, la corrélation réalisée ici est plane, de telle sorte que le gonflement du matériau face au pion échappe au dispositif et rend la mesure très incertaine, au moins à proximité du trou.

VIII.1.3 RESULTATS DES ESSAIS D'ASSEMBLAGES

On présente successivement les résultats obtenus pour les assemblages à une fixation, deux fixations en rang et deux fixations en ligne. Tous les essais d'assemblages sont réalisés pour un diamètre de pion de 6 mm. Ces essais sont plus délicats à interpréter que les essais de matage pur. En effet, en raison des jeux, les deux plaques et les fixations d'un même motif, ne sont pas sollicitées simultanément et de façon équilibrée.

VIII.1.3.a Assemblages à une fixation

La Figure VIII-8 présente la courbe effort/déplacement globale de l'essai ainsi que la courbe d'énergie cumulée des événements acoustiques. Ces courbes permettent de distinguer cinq phases dans l'essai. La phase initiale correspond au rattrapage des jeux du montage expérimental. La mise en charge d'une première plaque débute avec la deuxième phase. La déformation élastique de la première plaque autorise progressivement la mise en charge de la seconde plaque, ce qui se traduit par une rupture de pente sur la courbe de comportement global de l'assemblage. Jusqu'ici aucun événement acoustique significatif n'est à signaler. Les premiers événements significatifs sont à mettre en relation avec la rupture en matage de la plaque la plus sollicitée. Cet événement marque le début de la quatrième phase. Durant celle-ci, le trou rompu continue à transférer un effort significatif avec le développement du matage. Les efforts supplémentaires sont transférés à la seconde plaque. Malgré les instabilités liées au matage de la première plaque, on peut dégager, sur la courbe de comportement globale, la même pente moyenne pour la deuxième et la quatrième phase. En effet, dans ces deux phases, la raideur de l'assemblage est principalement gouvernée par une seule des plaques. Enfin, la dernière phase débute avec le matage de la seconde plaque et le développement de la rupture en matage jusqu'au basculement vers un mode de rupture finale en cisaillement. Dans chaque plaque, un seul trou est endommagé au moment de la rupture finale.

Trois essais d'assemblages avec un motif à fixation unique ont été réalisés. Les résultats correspondants sont regroupés dans le Tableau VII-2. Les contraintes de matage moyennes en bord des trous à l'instant de leur rupture sont calculées en supposant que les efforts sont également répartis entre les deux trous d'une même plaque. C'est le trou le moins résistant qui cède, compte tenu des jeux et de la dispersion spatiale des propriétés matériaux au sein de l'éprouvette. Toutefois, à l'instant de la rupture de la première éprouvette (la première à rompre), la répartition des efforts entre les deux plaques est très incertaine (en raison des jeux et des défauts d'alignement des trous entre les deux plaques). Dans le Tableau VII-2, la valeur de résistance au matage indiquée correspond à l'instant de la rupture de la seconde éprouvette, en supposant qu'à cet instant, la première éprouvette continue à développer sa pleine résistance au matage. Il est à noter que les résultats de ces essais sont beaucoup moins dispersés que ceux obtenus lors des essais de matage.

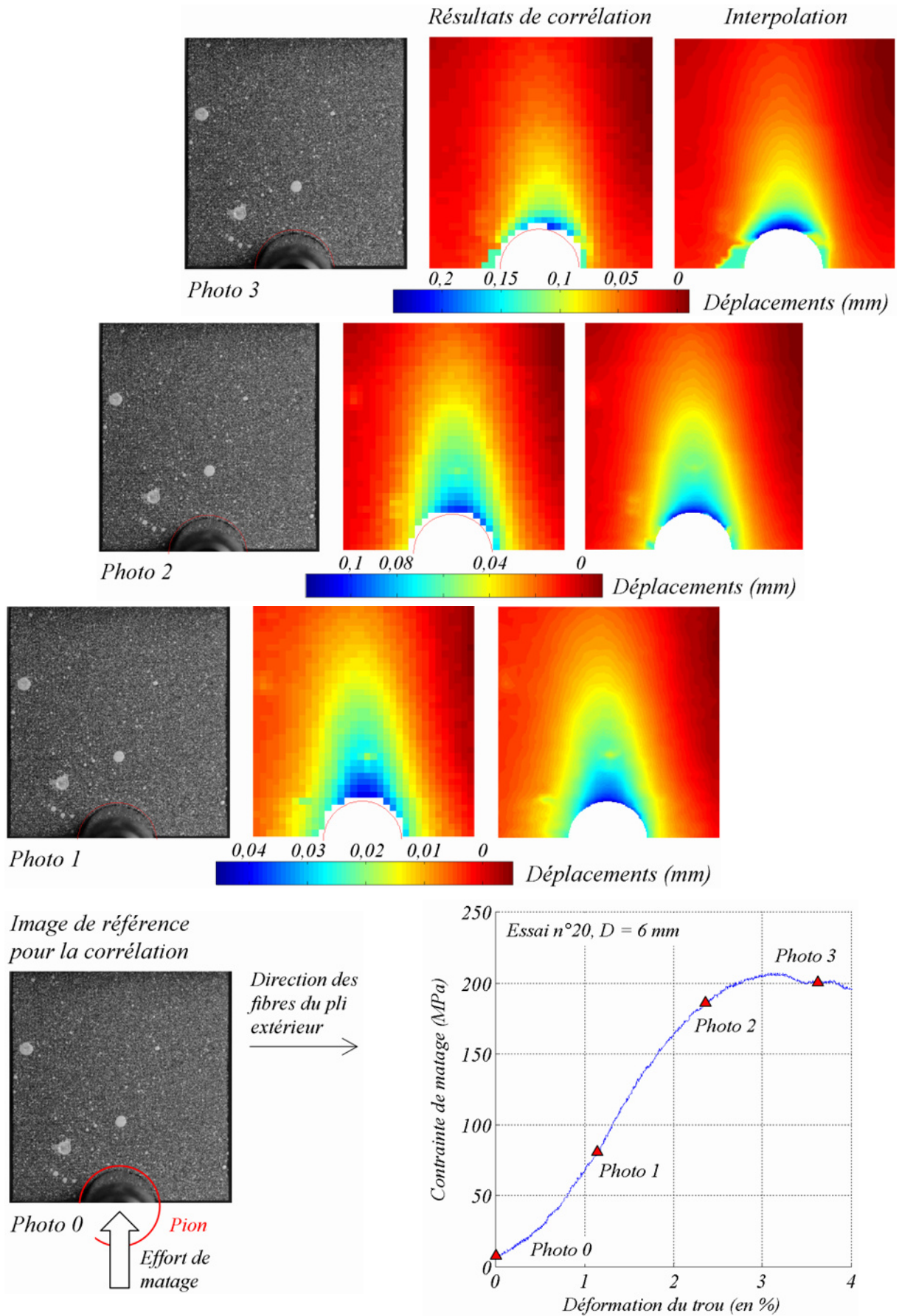


Figure VIII-7 : Exemple de résultats de corrélation d'image pour l'essai n°20. La corrélation permet de distinguer clairement l'ouverture d'une fissure, face au pion, dans le pli extérieur orienté à 90°.

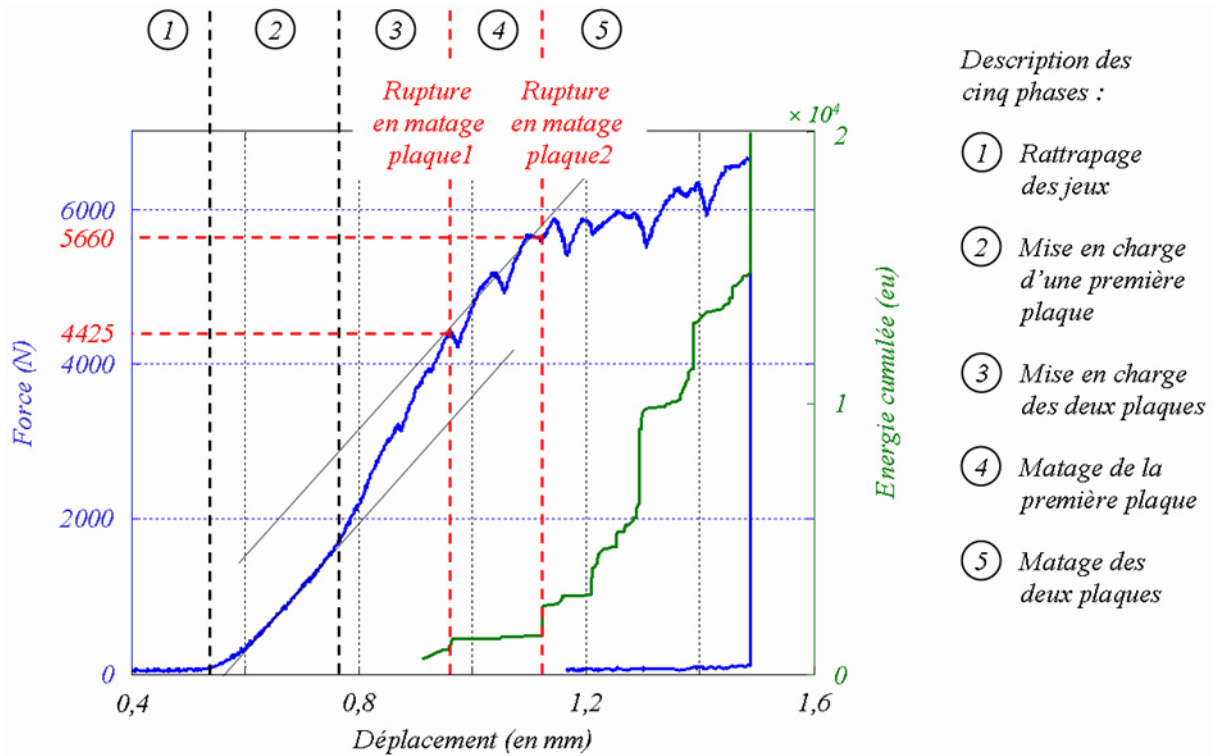


Figure VIII-8 : Courbe de matage (en bleu) et énergie acoustique cumulée (en vert). Les premiers événements acoustiques significatifs permettent d'identifier deux pics de matage (rupture en matage). Les deux plaques ne sont pas sollicitées simultanément, ce qui se traduit par des ruptures de pente sur la courbe de comportement. Essai n°14.

Numéro d'essai	w (mm)	e (mm)	Mise en charge de la 1 ^{re} plaque (N)	Rupture de la 1 ^{re} plaque (N)	Rupture de la 2 ^{ème} plaque F (N)	σ_m (MPa)
14	30	12*	1560	4425	5660	235
15	36	18	1570	4936	5480	228
16	32	12*	750	4470	5720	238

*Après une première phase d'endommagement en matage, basculement vers un mode de rupture finale de cisaillement

Tableau VII-2 : Synthèse des résultats des essais d'assemblages avec un motif à fixation unique. Les jeux varient entre $1/10^e$ et $2/10^e$ de mm. La longueur totale des éprouvettes est d'environ 100 mm. Les dimensions indiquées correspondent aux valeurs théoriques.

VIII.1.3.b Assemblages à deux fixations, en rang ou en ligne

Un essai d'assemblage avec un motif de deux fixations en rang et un essai avec un motif de deux fixations en ligne ont été réalisés. Les résultats correspondants, sont respectivement présentés sur les Figures VIII-9 et VIII-10. Ces essais sont difficiles à interpréter, comme il est difficile de remonter aux contraintes de matage moyennes en bord des trous. En effet, au problème de la répartition des efforts entre les plaques, s'ajoute le problème de la répartition des efforts entre les trous d'une même ligne ou d'une même rangée de pions.

Sur les courbes de comportement des Figures VIII-9 et VIII-10, aucune nette rupture de pente n'est observée avant les premiers événements acoustiques significatifs, ce qui laisse supposer que les deux plaques externes sont sollicitées simultanément et de façon équilibrée dès la mise en charge. Par contre, la répartition des efforts entre les fixations d'un même motif est inconnue.

Dans le cas de l'essai d'assemblage avec une rangée de deux pions, la répartition des efforts entre les deux trous d'une même rangée dépend à la fois des jeux et des raideurs respectives des éléments qui composent l'assemblage. En supposant que le montage est ajusté, le modèle analytique proposé par [Ross 47] (Cf. VII.3.3.b) prévoit que la fixation extrême reprend environ 44 % de l'effort total supporté par la plaque externe.

Il est difficile d'établir un scénario clair de la rupture de l'assemblage à partir des courbes de la Figure VIII-9. On distingue nettement une série d'événements très énergétiques pour des déplacements de l'ordre de 0,6 à 0,8 mm, au-delà desquels on peut considérer que la défaillance de l'assemblage en matage a eu lieu. Il est difficile de relier directement ces événements à la rupture de tel ou tel trou, dans la mesure où les huit trous que comprend l'assemblage comportent, à l'issue de l'essai, des traces de matage évidentes (déformation permanente et délaminages). Néanmoins, pour chaque plaque, les trous situés à une extrémité sont nettement plus endommagés que ceux situés à l'autre. Au delà du point de défaillance de l'assemblage, la rupture en matage s'est développée du côté le plus endommagé des éprouvettes. Au final, pour cet essai, il paraît raisonnable de considérer que les sollicitations se sont approximativement équilibrées entre les deux plaques. Ce sont donc quatre trous qui ont cédé à peu d'intervalle par le biais des reports de charges successifs entre plaques et entre trous d'un même motif.

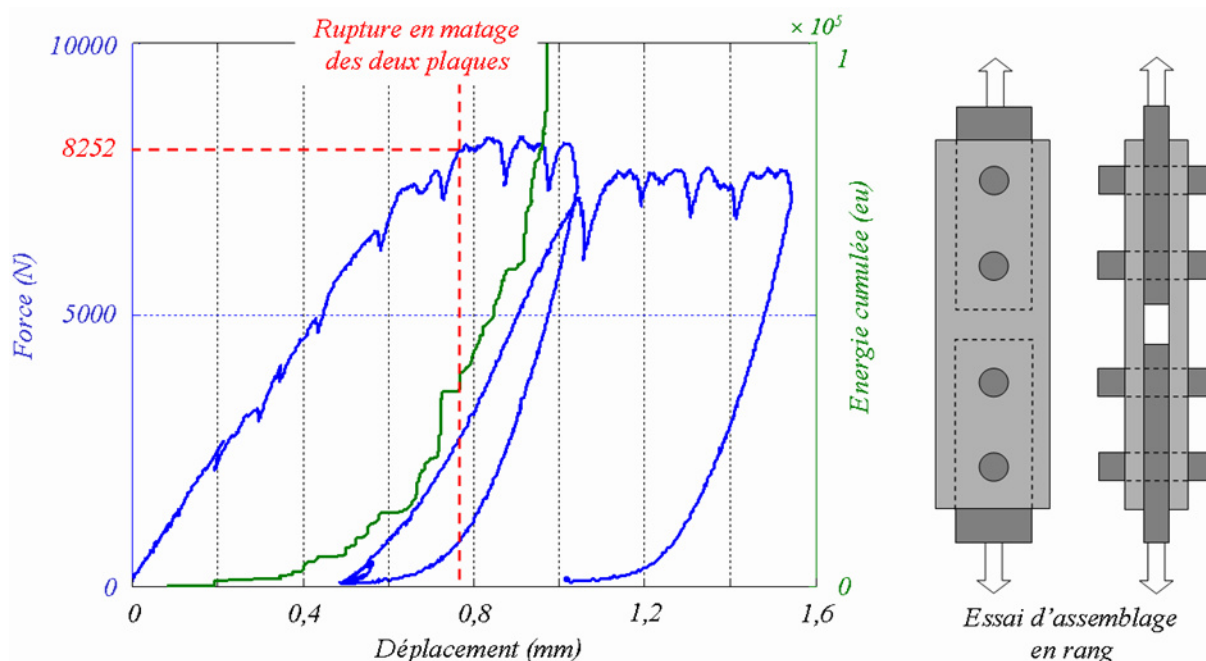


Figure VIII-9 : Courbe de matage (en bleu) et énergie acoustique cumulée (en vert). Essais d'assemblage avec une rangée de deux pions (alignés dans la direction de sollicitation). Essai n°17.

Dans le cas de l'essai d'assemblage avec un motif de deux fixations en ligne, la distribution des efforts entre les deux trous d'un même motif dépend exclusivement des jeux. On distingue nettement sur la Figure VIII-10 plusieurs événements acoustiques très énergétiques. La rupture de pente observée pour environ 0,4 mm de déplacement imposé est probablement une conséquence de l'endommagement associé au premier événement acoustique, dont l'effet sur le comportement global de l'éprouvette est curieusement retardé. En fait, compte tenu des jeux, les pions sont chargés de façon déséquilibrée. La corrélation d'image révèle que sur la ligne de pions observée (la première à céder sur l'éprouvette observée), la rupture a d'abord lieu sur un pion. L'éprouvette s'est ensuite progressivement réalignée dans la direction de sollicitation et les charges se sont progressivement

reportées sur le second pion jusqu'à rupture. On interprète donc le premier événement acoustique significatif de la Figure VIII-10 comme la rupture simultanée du pion le plus chargé sur chaque plaque. La rupture finale a lieu entre 0,6 et 0,7 mm de déplacement imposé avec la rupture du deuxième pion de la ligne, pour chaque plaque. Encore une fois, pour chaque éprouvette, les trous situés à une extrémité sont faiblement endommagés alors qu'à l'extrémité opposée l'endommagement de matage s'est considérablement développé.

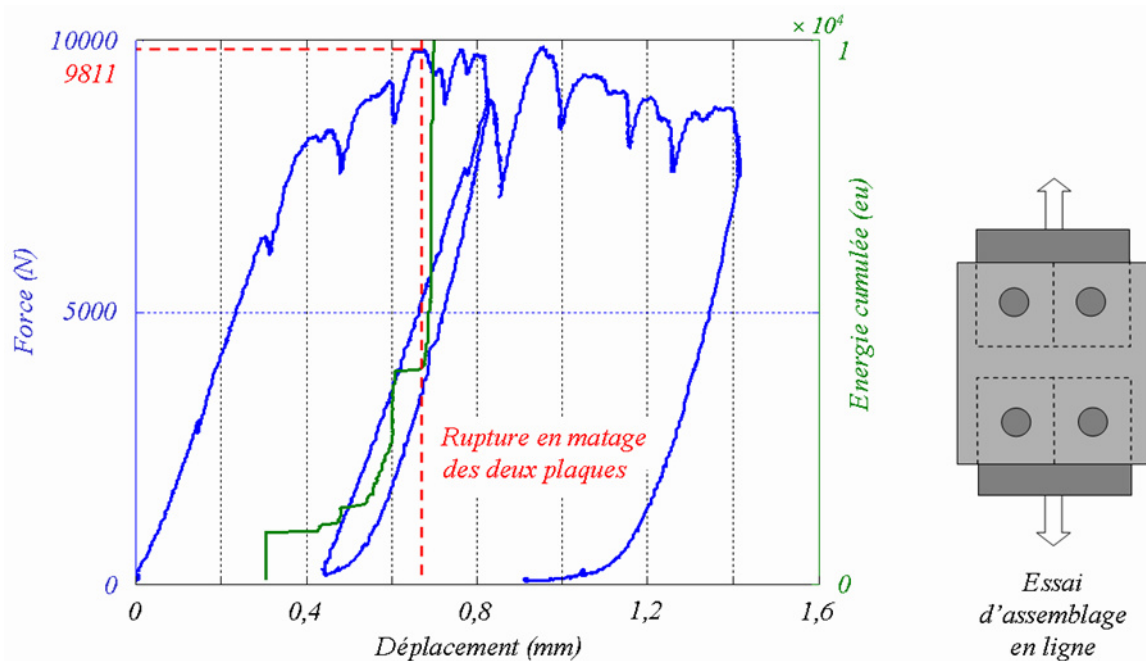


Figure VIII-10 : Courbe de matage (en bleu) et énergie acoustique cumulée (en vert). Essais d'assemblage avec une ligne de deux pions (alignés perpendiculairement à la direction de sollicitation). Essai n°18.

Les contraintes de matage moyennes estimées aux instants de rupture selon les interprétations précédentes sont reportées dans les Tableaux VIII-3 et VIII-4 suivants.

Numéro d'essai	D (mm)	w (mm)	e (mm)	t (mm)	Rupture finale	
					F (N)	σ_m (MPa)
17	6	20	20	2	8252	197*

* En considérant que la fixation critique reprend 56 % de la charge transférée par la plaque.

Tableau VIII-3 : Résultats pour l'essai d'assemblage avec deux pions en rang.

Numéro d'essai	w (mm)	e (mm)	Première rupture		Rupture finale	
			F (N)	σ_m (MPa)	F (N)	σ_m (MPa)
18	20	15	6280	261*	9811	204**

* En considérant que la fixation critique reprend seule l'effort total exercé sur la plaque.

** En considérant que les efforts sont également répartis entre les deux pions de la ligne critique.

Tableau VIII-4 : Résultats pour l'essai d'assemblage avec deux pions en ligne. Les dimensions indiquées correspondent aux valeurs théoriques.

Dans ces deux essais, la phase de décharge de l'éprouvette met en évidence d'importantes déformations résiduelles dues au matage. Les éprouvettes ont ensuite été rechargées et maintenue une heure à déplacement imposé constant. Ce temps de maintien se traduit sur les courbes de comportement global par une importante relaxation (voir Figures VIII-9 et VIII-10).

VIII.1.4 RESULTATS DES ESSAIS DE TRACTION TROUEE ET DE TRACTION TROUEE HABITEE

Les courbes de comportement global et les courbes d'énergie acoustique cumulée sont présentées sur la Figure VIII-11 pour un essai de traction trouée et un essai de traction trouée habitée. Le Tableau VIII-5 synthétise les résultats obtenus pour chacune des deux répétitions réalisées par essai.

Les courbes mettent en évidence la progressivité de la rupture en traction, en présence du trou. En effet, les premières ruptures de fibres ont lieu pour un niveau d'effort de l'ordre de 40 à 50 % de la résistance ultime de la plaque stratifiée.

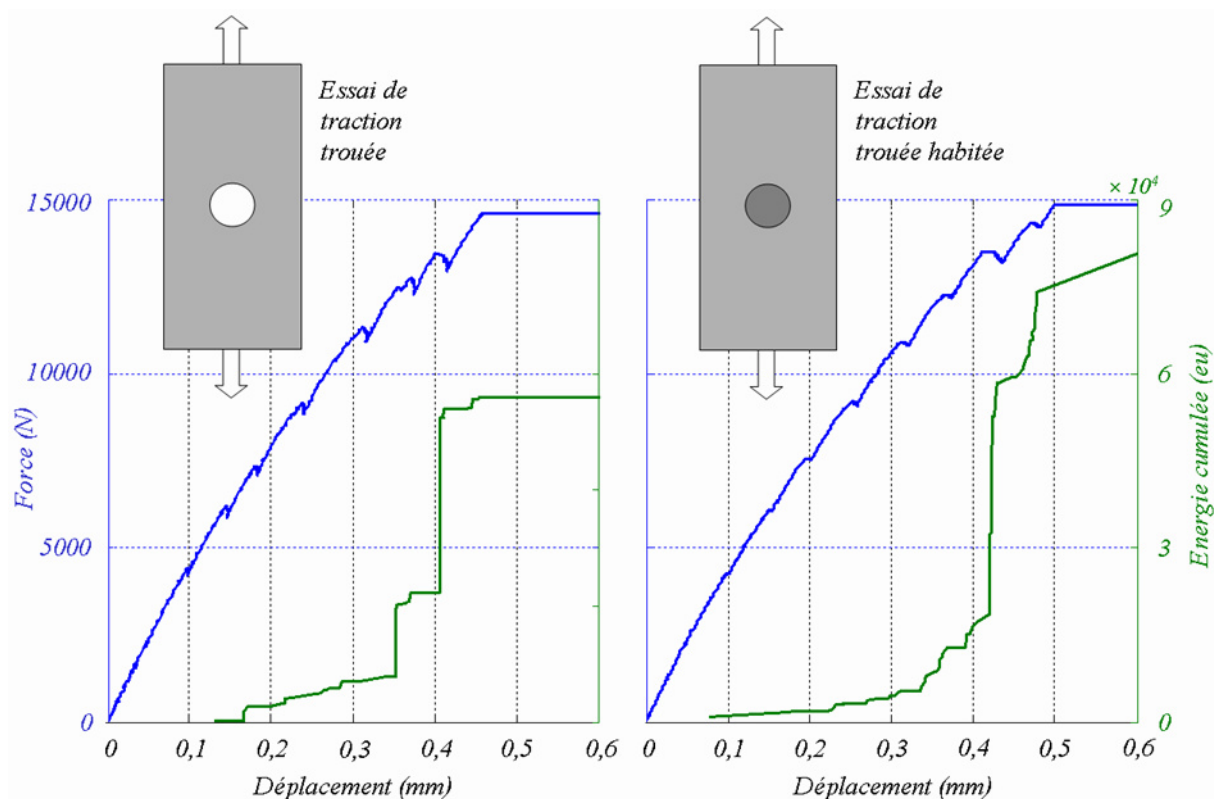


Figure VIII-11 : Courbes de matage (en bleu) et énergie acoustique cumulée (en vert). A gauche : essais de traction trouée (essai n°05). A droite : essai de traction trouée habitée (essai n°06).

Le Tableau VIII-5 met en évidence deux points importants. D'une part, il ne semble pas y avoir de différence significative entre la résistance à la traction de la plaque trouée qu'elle soit habitée ou non. D'autre part, ces plaques semblent faiblement sensibles à l'effet de trou. En effet, la résistance théorique de la section nette, hors effet de surcontrainte en bord de trou, est ici approximativement de 18000 N (avec X_T , la résistance du pli UD en traction, égale à 1500 MPa), soit de l'ordre de 20 % de plus que la résistance mesurée expérimentalement.

Traction trouée habitée	Numéro d'essai	w (mm)	1 ^{re} rupture de fibre		Rupture en traction	
			F (N)	moyenne	F (N)	moyenne
Traction trouée habitée	06	18,07	6840	7200 N	14830	14960 N
	07	18,01	7560		15090*	
Traction trouée	05	18,00	5970	5860 N	14590	14360 N
	08	18,00	5760		14130	

* L'éprouvette a rechargé après une première rupture jusqu'à 15720 N. Les fibres se sont rompues au niveau des mors et se sont déchaussées.

Tableau VIII-5 : Synthèse des résultats des essais de traction trouée et de traction trouée habitée. La longueur totale des éprouvettes est d'environ 100 mm, dont 30 mm sont pris dans les mors à chaque extrémité. Le diamètre théorique du trou est de 6 mm.

VIII.1.5 DISCUSSION SUR LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Au final, on cherche à vérifier la cohérence des essais d'assemblages et des essais de matage, dans le cas des pions de 6 mm de diamètre. Pour ces derniers, la résistance moyenne de matage observée est de 212 MPa, contre 234 MPa pour les essais d'assemblages simples et, très approximativement, 200 MPa pour les essais d'assemblages à deux fixations. Compte tenu de la dispersion observée et des hypothèses retenue pour l'interprétation des essais d'assemblages, ces résultats paraissent cohérents.

Afin de comparer les résistances de plaques pleines, de plaques trouées (habitées ou non) et de matage, on compare directement les efforts moyens à rupture, pour le même empilement $[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$, et des géométries équivalentes ($w = 18$ mm, $D = 6$ mm). Ainsi, en considérant que seuls les plis longitudinaux travaillent, la force théorique de rupture en traction de la plaque pleine est de 27 kN. La résistance théorique de la section nette, hors effet de surcontrainte en bord de trou, est de 18 kN. Expérimentalement, la valeur mesurée est d'environ 14,6 kN. L'effort au pic de matage est quant à lui de 2,5 kN environ. De façon évidente, la configuration testés ne présente pas de bonnes caractéristiques de matage. Elle a plutôt été choisi pour exacerber le phénomène et n'est pas représentative des empilements industriels.

Au niveau de la fixation, il est impossible de solliciter le matériau au-delà de sa résistance en matage. Sur un assemblage à une fixation, c'est la résistance maximale que l'on puisse obtenir. Si l'on souhaite concevoir la liaison la plus résistante pour un empilement et les paramètres w et D fixés, il faut constituer une rangée de pion, en veillant à ce que ceux-ci restent suffisamment espacés pour ne pas provoquer une rupture prématurée en cisaillement. De la sorte, il est théoriquement possible de porter la résistance de la liaison jusqu'à la résistance de traction trouée habitée. En effet, dans la rangée de pions, il y a compétition entre la rupture en matage de la fixation la plus proche de l'extrémité de la plaque, sollicitée en matage pur, et la rupture en traction nette au niveau de la fixation située à l'autre bout de la rangée, sollicitée par une combinaison de matage et d'effort passant. Néanmoins, dans une même rangée, l'effort transféré n'est pas réparti de façon équilibré entre les pions et plus le nombre de fixation est grand, plus les déséquilibres s'accroissent, de telle sorte que, au-delà de cinq ou six fixations, les fixations supplémentaires (au milieu de la rangée) ne transfèrent qu'un effort marginal, pour une masse et un encombrement supplémentaires importants. En pratique, il est souvent avancé que la résistance des jonctions boulonnées excède rarement 50 % de la résistance de la zone courante. D'où l'intérêt de maîtriser au mieux le calcul et le dimensionnement des liaisons.

Les résultats expérimentaux obtenus appellent une dernière remarque sur le frottement entre les plaques et la fixation. A l'issue des essais de matage, les pions portent très nettement l'emprunte des plis à 0° , comme le montre la photo d'un pion de 6 mm de diamètre, présentée sur la Figure VIII-12. Ceci suggère à la fois que le frottement évolue au cours du chargement et qu'il dépend de l'angle d'attaque des fibres sur la surface du pion. En anticipant quelque peu sur la partie modélisation, on conçoit aisément qu'un modèle de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement constant ne permet qu'une description très grossière du contact.

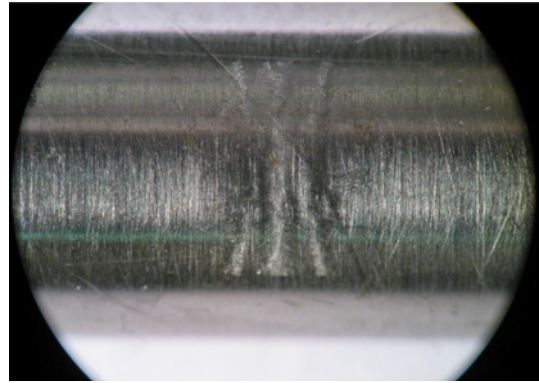


Figure VIII-12 : Photographie de l'état de surface d'un pion de 6 mm après un essai de matage. Les empreintes des plis à 0° sont clairement visibles.

Soulignons enfin que les travaux expérimentaux présentés dans cette section ne constituent pas l'essentiel de la thèse, mais plutôt un travail d'appoint effectué en soutien des travaux numériques qui suivent. On renvoie par exemple à [Gohorianu 08] pour des travaux expérimentaux beaucoup plus détaillés sur les assemblages boulonnés dans des plaques en carbone / époxy.

VIII.2 MODELISATION FINE DE LA RUPTURE DES ASSEMBLAGES

L'objectif des modèles développés est de prévoir le comportement, l'endommagement et la rupture du stratifié dans un assemblage élémentaire. Les développements réalisés portent donc essentiellement sur la modélisation de la plaque stratifié et du contact avec la fixation. Dans la mesure où, à ce stade, on ne s'intéresse pas aux effets de serrage, la fixation est représentée par un pion. A partir de la bibliographie proposée en VII.2, on se propose de développer un modèle EF : tridimensionnel, avec prise en compte du contact, et des lois de comportement du matériau d'une grande richesse (comportements non-linéaires et approche progressive de la rupture). Le principal apport de ces travaux consiste à intégrer au modèle des éléments de zones cohésives pour capturer le comportement des interfaces et le début de la propagation des délaminages. A notre connaissance, au moment où nous écrivons cette thèse, aucun travaux publié ne prend en compte les effets des délaminage pour la prévision du matage. Ce modèle est développé dans le code de calcul ZéBuLoN.

VIII.2.1 MAILLAGES ET STRATEGIE DE CALCUL

L'étude de la convergence au maillage sur les contraintes radiales et tangentielles en bord de trou [Irisarri 05] montre qu'une finesse de maillage de un élément tous les trois degrés de circonférence, avec déraffinage rapide et régulier en s'éloignant du trou, constitue un compromis acceptable entre précision des résultats et nombre de degrés de liberté, pour un modèle comportant un seul élément multicouche dans l'épaisseur. Cependant, modéliser l'assemblage de façon détaillé suppose de mailler toutes les couches (c'est-à-dire tous les plis ou groupes de plis de même orientation) avec au minimum une couche d'éléments volumiques dans l'épaisseur. Pour ce faire, on utilise des éléments prismatiques obtenus par extrusion d'un maillage plan à base d'éléments triangulaires. Pour une meilleure gestion du contact, ces éléments sont linéaires. Les éléments de zones cohésives sont insérés entre chaque couche afin de modéliser le délaminage. Au final, le nombre de degrés de liberté des maillages s'accroît déraisonnablement lorsque le nombre de couches augmente. De plus, des problèmes de divergence de calcul, liés à des effets de bord indésirables, peuvent apparaître.

Afin de surmonter ces difficultés, on propose une stratégie de calcul simple et des plus efficaces (voir les Figures VIII-13 et VIII-14). L'idée consiste à changer de niveau de détail de modélisation en s'éloignant du trou. Les parties les plus éloignées de la zone d'intérêt, sont modélisées par des éléments volumiques avec une loi de comportement orthotrope élastique homogénéisée. La transition vers la zone d'intérêt est effectuée par le biais d'éléments volumiques stratifiés permettant une meilleure prise en compte de la stratification (Figure VIII-13). Les jonctions sont effectuées par le biais de conditions de déplacements (conditions dites MPC : Multiple Point Constraints).

Au niveau de la zone d'intérêt, chaque couche est modélisée par une ou plusieurs couches d'éléments volumiques orthotropes. Toutefois, afin de réduire encore davantage les coûts de calculs et d'éviter les problèmes de bord libre, les éléments de zones cohésives ne sont pas insérés sur toute la surface des plis. Pour capturer l'amorçage et le début de la propagation des délaminages, il suffit de ne modéliser les interfaces que jusqu'à une certaine distance du bord du trou. Les éléments de zones cohésives sont donc disposés en couronne autour du trou au niveau des interfaces souhaitées (voir Figure VIII-14). Toutefois, il convient d'assurer la transition entre les zones avec et sans modélisation des interfaces. Pour ce faire, on exploite une astuce consistant à disposer des éléments d'interface beaucoup plus résistants en périphérie de la zone de prise en compte des interfaces. On parle d'*interfaces nominales*, pour les éléments de zones cohésives dont le rôle est de capturer les délaminages, et d'*interfaces de liaison*, pour les éléments ayant un rôle de transition. De la même

manière, on n'utilise de modèles matériaux complexes pour les plis qu'au niveau de la zone des interfaces nominales. Hors de cette zone, les comportements restent élastiques.

Avec une telle stratégie, le calcul perd tout sens physique lorsque (i) les délaminages atteignent les interfaces fortes, ou (ii) l'endommagement atteint la zone de comportement élastique. La difficulté consiste donc à bien choisir la zone sur laquelle disposer les interfaces faibles afin de capturer la rupture de l'assemblage. Cette précaution prise en compte, non seulement la réduction du nombre de ddl. est spectaculaire, mais en plus les calculs convergent bien plus rapidement. Notons qu'une méthode de remaillage automatique devrait permettre de remédier à ce problème.

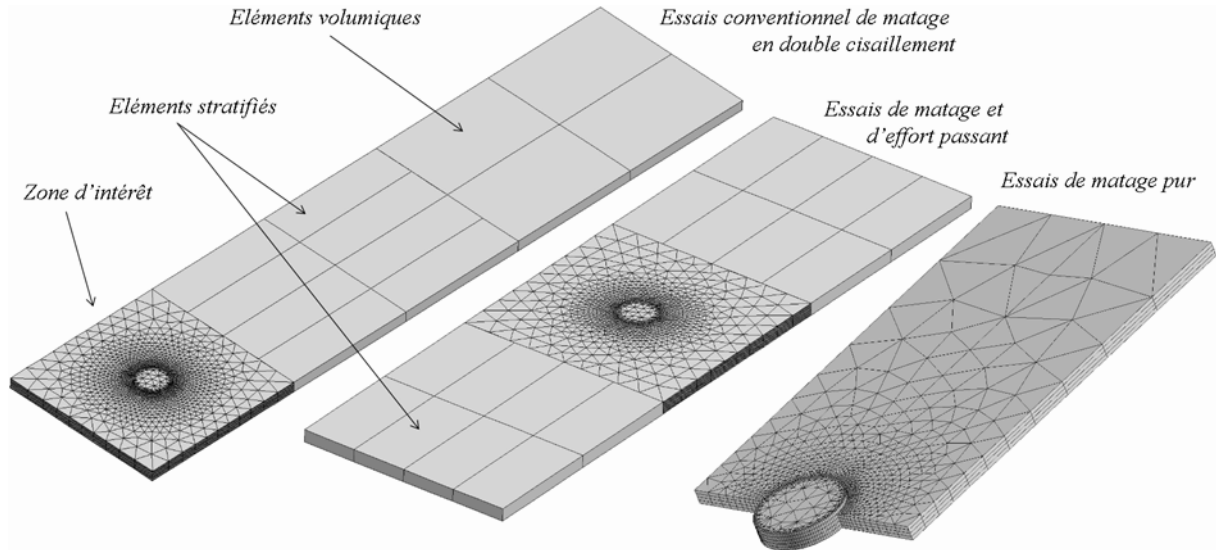


Figure VIII-13 : Maillages types utilisés dans la partie VIII.1.3, pour la comparaison des résultats d'essais et de calculs. A gauche, l'éprouvette pour un essai de matage conventionnel. Au centre, l'éprouvette pour un essai combiné de matage et d'effort passant. Au droite, l'éprouvette de matage pur.

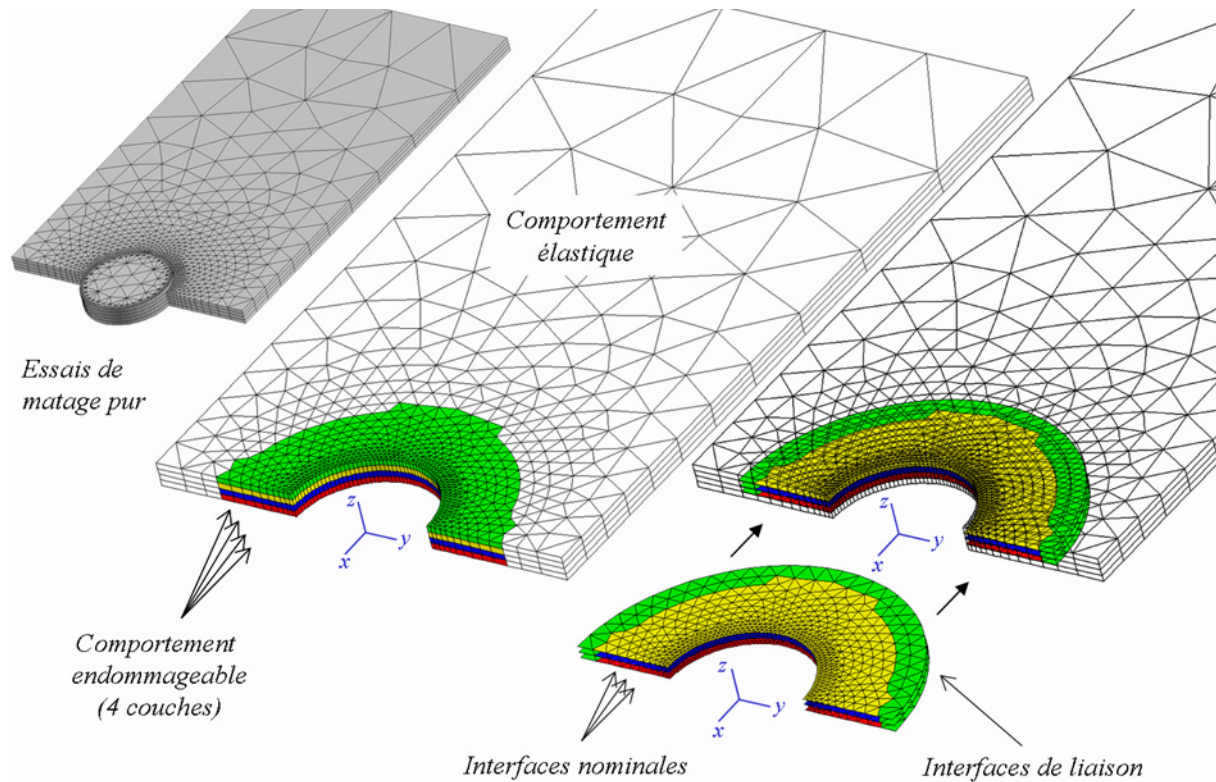


Figure VIII-14 : Illustration des différents éléments constitutifs de la stratégie de calcul.

VIII.2.2 GESTION DU CONTACT ET CONDITIONS AUX LIMITES

Pour de meilleurs résultats sur le bord chargé du trou, le maillage de la surface du pion doit être aussi fin que celui du trou, et coïncider si le montage est ajusté. Ceci accroît d'autant plus le nombre de degrés de liberté du maillage. Cependant, sans cette précaution, les pressions de contact sont mal réparties sur le bord du trou, et certains nœuds entrent tardivement en contact.

Le contact est géré par un algorithme de pénalisation. On utilise un modèle de contact de type Coulomb. Le coefficient de frottement μ est supposé constant, au cours du temps aussi bien que sur la surface de contact. Il s'agit là d'une hypothèse forte (Cf. VII.2.1) En pratique, le coefficient de frottement peut être considéré comme un coefficient de recalage des calculs.

Les conditions aux limites employées sont idéalisées, du type de celles employées pour des calculs de dimensionnement. Afin d'alléger les calculs, on utilise, lorsque cela est possible, une condition de symétrie dans l'épaisseur, permettant de ne représenter que la moitié de l'empilement. La prise dans les mors est représentée par l'encastrement des nœuds de l'extrémité correspondante de la plaque. Dans le cas des essais conventionnels de matage ou d'effort passant (Figure VIII-13), le pion est bloqué en encastrant les nœuds de son axe central. Dans le cas des essais de matage, pour être plus représentatif des conditions expérimentales, c'est l'arrière du pion qui est encastré.

Les sollicitations sont représentées, soit par une condition de déplacement imposée au niveau des nœuds de l'extrémité de la plaque, soit par des conditions d'effort imposées au niveau de l'extrémité de la plaque et/ou de l'axe central du pion. Ces différentes conditions aux limites sont détaillées sur la Figure VIII-15.

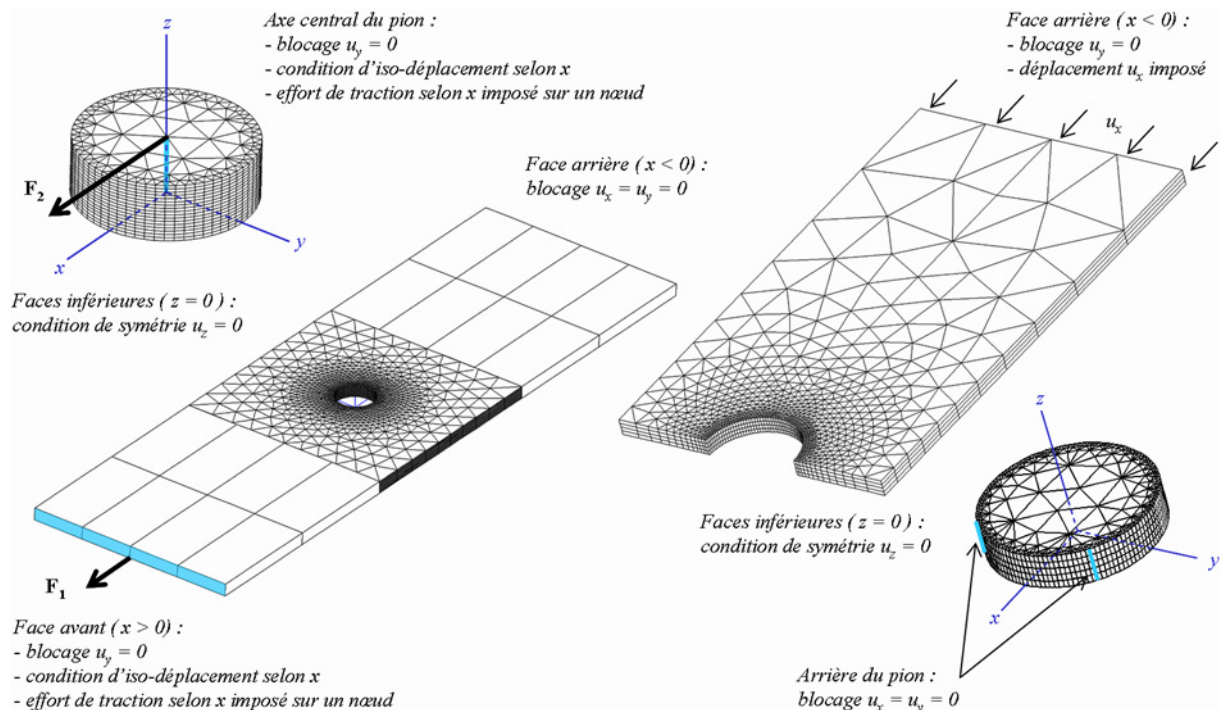


Figure VIII-15 : Conditions aux limites pour les essais de matage et d'effort passant combinés (à gauche) et de matage pur (à droite).

VIII.2.3 COMPOTEMENTS MATERIAUX

Tous les calculs sont réalisés en petites transformations. Hors de la zone d'interfaces nominales, le comportement des matériaux (plaque composite et pion métallique) est linéaire élastique. Les interfaces nominales suivent une loi de comportement élastique endommageable selon le modèle de [Tvergaard 90]. Les interfaces de liaison suivent le même modèle, mais leur résistance est arbitrairement décuplée.

Au niveau de la zone d'interfaces nominales, la démarche adoptée consiste à complexifier progressivement le modèle de comportement des plis dans le but de capturer le pic de matage. L'idée sous-jacente est d'introduire un maximum de phénomènes physiques dans le modèle, pour identifier ceux dont l'influence est de premier ordre. On s'appuie dans nos travaux sur le modèle développé par F. Laurin dans sa thèse [Laurin 05 et 07]. Ce modèle présente l'avantage de permettre d'activer ou de débrayer à volonté les différents mécanismes pris en compte. De la sorte, on peut successivement comparer les résultats et les apports des éléments suivants :

- un modèle élastique linéaire,
- un modèle viscoélastique non-linéaire,
- un modèle viscoélastique couplé à l'endommagement matriciel,
- un modèle viscoélastique couplé à l'endommagement non-adoucissant des fibres et de la matrice,
- le modèle précédent avec l'introduction de lois d'endommagement adoucissantes.

Le modèle proposé par Laurin s'inscrit dans le cadre d'une approche multiéchelle de la ruine progressive du stratifié. Le critère de rupture locale, écrit à l'échelle du pli est dérivé du multicritère de Hashin et distingue les ruptures de fibres et de matrice en traction ou compression. Une fois la rupture atteinte dans un pli (valeur du critère supérieure ou égale à 1), la souplesse effective du matériau est augmentée selon une loi d'endommagement dépendant du mode de rupture locale. Critères de rupture et lois d'endommagement associées sont formulés en deux dimensions. Il est tenu compte du caractère unilatéral des dommages. Dans sa version d'origine, les lois d'endommagement employées ne sont pas adoucissantes : une fois le pli rompu, la contrainte dans la direction correspondante atteint une valeur de saturation mais ne chute pas.

L'approche non-adoucissante a démontré son efficacité pour la prévision du comportement et de la rupture des structures à gradients de contraintes modérés, pour lesquelles la rupture finale correspond le plus souvent à la première rupture de pli en mode fibre. Il est évident qu'il n'en va pas de même dans le cas de structures à fort gradients comme, par exemple, les plaques trouées sollicitées en traction, pour lesquelles la première rupture de fibre a lieu bien avant la rupture finale. Dans ce cas le modèle s'avère inefficace pour prévoir la charge ultime, car incapable de prévoir la redistribution des contraintes au sein du stratifié et la progression de l'endommagement au-delà de l'instant de la première rupture de fibre. Le même problème se pose pour la prévision de la rupture en élongation ou en cisaillement des assemblages. Néanmoins, dans le cas de la rupture en matage, le matériau écrasé en bord de trou continue à transférer les efforts à la matière intacte adjacente. Par conséquent, on a considéré l'approche non-adoucissante comme une intéressante piste de recherche pour simuler ce phénomène, bien qu'elle se soit révélée insuffisante par la suite.

Afin de surmonter cette limitation, le modèle adoucissant mis en oeuvre, permet d'abattre localement la contrainte dans les plis rompus. Dans ce modèle, la souplesse effective du pli rompu est progressivement augmentée jusqu'à saturation, fixée arbitrairement à cent fois la souplesse du matériau intact. Toutefois, l'emploi de lois d'endommagement adoucissantes soulève de nouveaux

problèmes, liés au confinement numérique de l'endommagement au niveau du premier élément rompu. On parle de *localisation des dommages*. Afin de surmonter cette difficulté, on utilise la technique de l'effet retard [Allix 01 ; Suffis 03]. Néanmoins, en introduisant dans le calcul statique un temps de retard virtuel pour pallier des défauts numériques, cette méthode est difficile à coupler avec les modèles de comportement visqueux. Dans la suite le modèle d'endommagement adoucissant est donc associé à un modèle de comportement élastique.

Les comparaisons sont réalisées dans le cas de l'essai de matage avec un pion de 6 mm de diamètre. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure VIII-16. Dans ces calculs, le jeu est de $5/100^{\text{es}}$ de mm entre le pion et le trou. Le pion est en acier ($E = 210 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,31$). Conformément à [Ekh 06], la valeur du coefficient de frottement est fixé à $\mu = 0,05$. En pratique, la stratégie de calcul (Cf. VIII.2.1) a été tardivement mise en place au cours de ces travaux de thèse. Les premières comparaisons présentées correspondent donc à des modèles dans lesquels la zone d'interface faible s'étend sur la totalité de l'éprouvette composite. Ces calculs ont par la suite été répétés en appliquant la stratégie de calcul complète, afin d'apprécier la cohérence des résultats obtenus, avec ou sans stratégie de calcul, et les gains en temps de calcul.

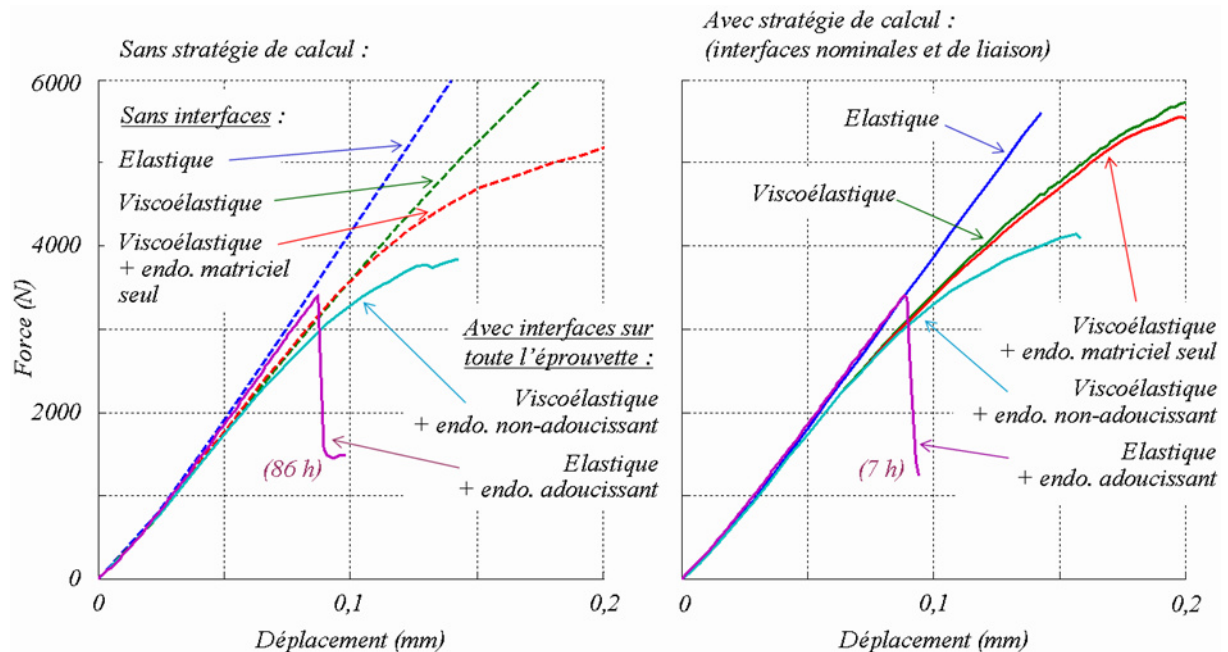


Figure VIII-16 : Visualisation sur la courbe effort/déplacement globale des apports successifs des mécanismes non-linéaires intégrés au modèle. A gauche : calculs menés sans interfaces ou avec interfaces sur toute la surface de l'éprouvette. A droite : résultats obtenus par la stratégie de calcul.

La Figure VIII-16 appelle différents commentaires. Premièrement, la viscosité a une influence importante sur le comportement de l'éprouvette. Ce résultat, surprenant pour un empilement croisé 0/90, s'explique par la configuration spécifique de l'essai de matage, dans lequel on vient pousser les fibres longitudinales disposées face au pion, ce qui exacerbe les non-linéarités du comportement matriciel. De même, les interfaces ont une influence sensible sur le comportement élastique de l'éprouvette. Deuxièmement, pour la prévision de la rupture en matage, on constate que l'endommagement matriciel seul est insuffisant. L'approche non-adoucissante permet de distinguer un pic d'effort, mais celui-ci intervient tardivement dans le calcul et n'a pas de valeur prédictive. Au final, c'est le cumul de l'endommagement adoucissant du pli et des interfaces qui capture le plus efficacement le pic de matage. Troisièmement, les résultats obtenus avec et sans stratégie de calcul

montrent une excellente correspondance. La stratégie mise en place ne perturbe donc pas les résultats, dès lors que la zone d'interfaces nominales est suffisante. Ici, pour un perçage de 6 mm, celle-ci s'étend radialement sur 4 mm à partir du bord du trou. Par contre, la réduction des temps de calcul est très importante. Elle est, par exemple, de l'ordre de 92 % dans le cas de l'approche adoucissante (de 310 541 s, soit 86 h, de temps CPU sans stratégie de calcul, à 25 874 s, soit 7 h, avec).

L'endommagement des interfaces débute relativement tôt dans le calcul, pour environ 75 % de l'effort au pic, et des délaminages s'amorcent à $\pm 15^\circ$ de la direction de sollicitation, sur le bord chargé du trou, aux interfaces entre les plis à 0° et à 90° . Ceux-ci se propagent ensuite de façon stable, radialement et, de façon plus marquée, sur la circonférence. Le pic de matage intervient lorsque les délaminages fusionnent face au pion, rapidement après les premières ruptures de plis à 0° , en mode fibre, sur le bord chargé du trou. Ce scénario est récapitulé en Figure VIII-17. A l'instant du pic de matage, les déformations maximales, situées aux niveaux des éléments rompus en bord de trou, sont de l'ordre de 10 %.

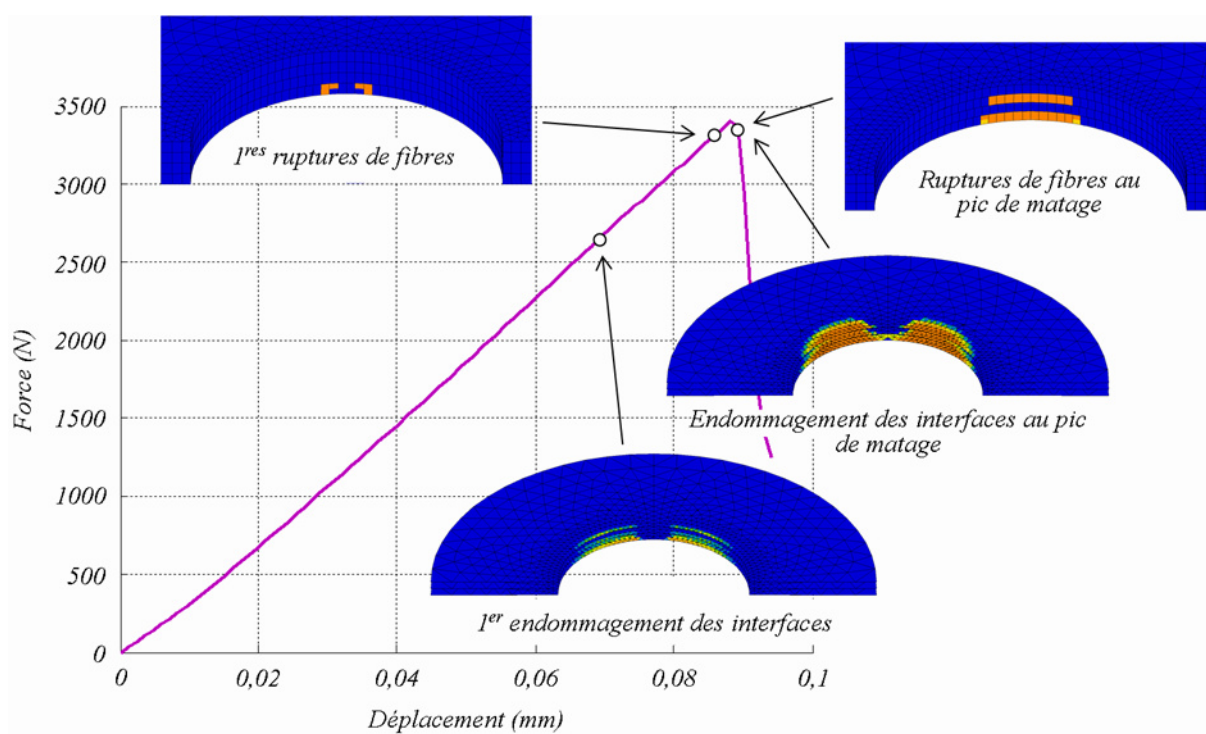


Figure VIII-17 : Scénario de rupture en matage (définie par le premier pic d'effort) obtenu par le modèle adoucissant, avec stratégie de calcul, dans le cas de l'essai de matage avec un pion de 6 mm de diamètre. ici le jeu est de $1/100^{\text{e}}$ de mm et le coefficient de frottement $\mu = 0,05$.

VIII.2.4 COMPARAISONS ESSAIS/CALCULS

Les comparaisons suivantes visent essentiellement à vérifier la qualité de la prévision de la rupture en matage de l'assemblage par le modèle fin. Nous avons également cherché à estimer l'influence du jeu entre la fixation et le trou, ainsi que celle du coefficient de frottement.

L'identification du modèle de comportement matériau sur essais élémentaires est effectuée dans la thèse de F. Laurin [Laurin 05]. L'identification du comportement des interfaces provient de travaux antérieurs réalisés à l'ONERA [Louis 01].

VIII.2.4.a Essais de matage

Les simulations sont menées à partir des dimensions géométriques théoriques des éprouvettes, ainsi $w/D = 3$, $e = 30$ mm et $t = 2$ mm. Toutefois, comme les jeux expérimentaux sont importants, ce sont les valeurs réelles de jeux dont il est tenu compte. Les courbes de comportement globales sont présentées en Figure VIII-18, pour chaque diamètre de pion. Par rapport à la mesure expérimentale, il est nécessaire de recalculer les abscisses⁶. Les résultats sont récapitulés et comparés aux données expérimentales dans le Tableau VIII-6. Compte tenu de l'importante dispersion expérimentale observée, les résultats de simulation sont en excellent accord avec l'expérience.

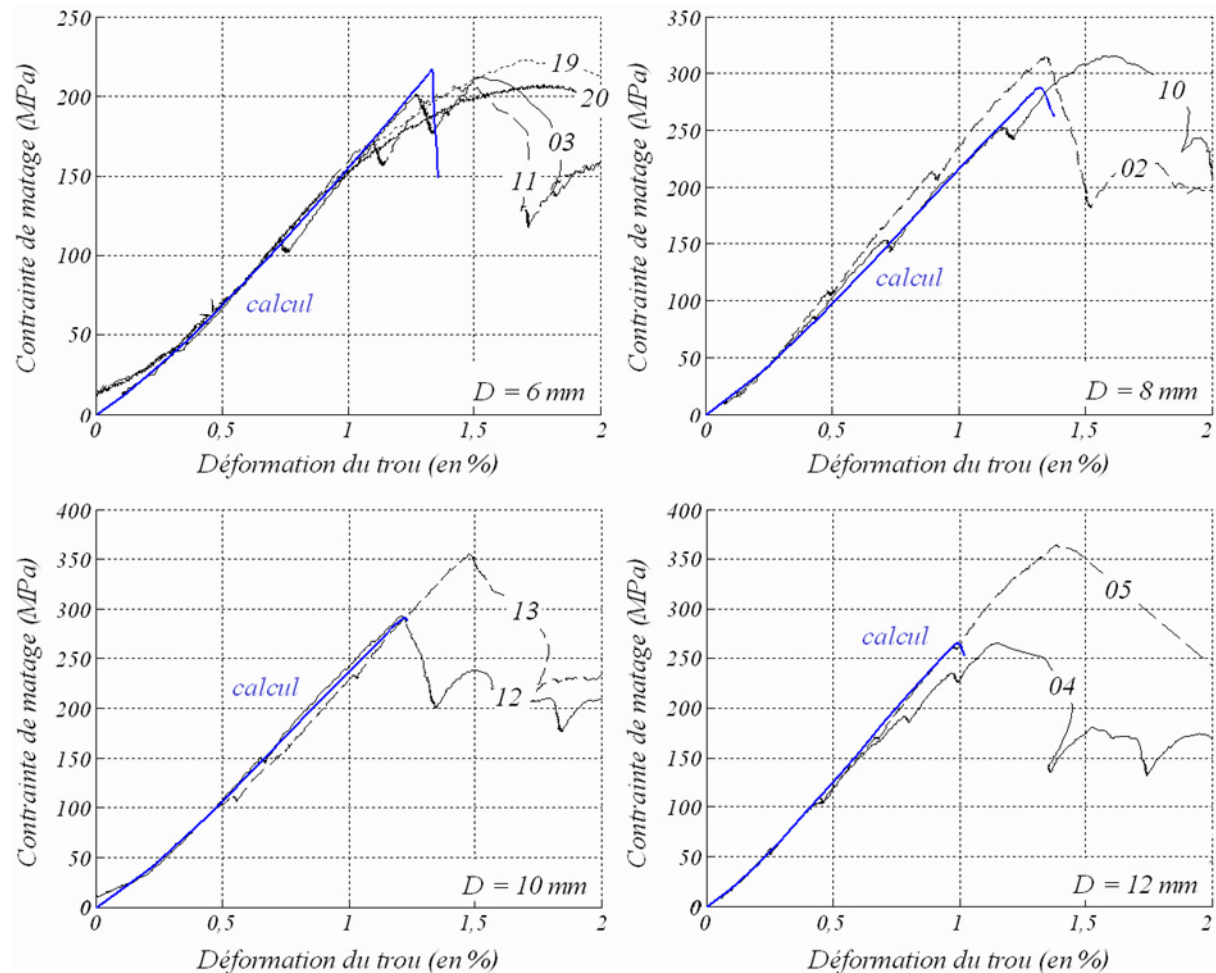


Figure VIII-18 : Comparaison des résultats expérimentaux et de simulations dans le cas des essais de matage. Courbes de comportement global. Les numéros d'essais sont reportés sur les courbes expérimentales.

⁶ Ce recalage est légitime : les déplacements mesurés intègrent des phénomènes qui ne sont pas retranscrits par le calcul, comme la souplesse machine. Le facteur de recalage est de 0,6 pour tous les essais de matage.

Dans les calculs présentés dans le Tableau VIII-6 et sur la Figure VIII-18, le coefficient de frottement est fixé à $\mu = 0,05$, conformément à [Ekh 06]. En pratique, la valeur réelle du frottement est méconnue et il est fort probable qu'elle évolue au cours du chargement et avec l'écrasement du matériau sur la surface de contact. On peut donc considérer le coefficient employé comme un coefficient de recalage.

D (mm)	D trou (mm)	μ	1 ^{re} rupture de fibres		Rupture en matage	
			calcul	essai	calcul	essai
6	6,40	0,05	200	176 à 223	216	206 à 222
8	8,15		277	250 à 307	288	315
10	10,20		285	228 à 332	291	293 à 355
12	12,15		262	263 à 361	265	265 à 361

Tableau VIII-6 : Comparaison des résultats expérimentaux et de simulations dans le cas des essais de matage (dimensions en mm, contraintes en MPa).

Remarques sur l'influence du coefficient de frottement et du jeu

La Figure VIII-19 illustre à la fois l'influence du jeu, entre le pion et le trou, et du coefficient de frottement en fonction du diamètre du pion. Seuls sont présentés les résultats obtenus pour des pions de 6 mm et 12 mm de diamètre, mais des calculs similaires ont été réalisés pour les autres diamètres de pion. Ces résultats permettent les constats suivants.

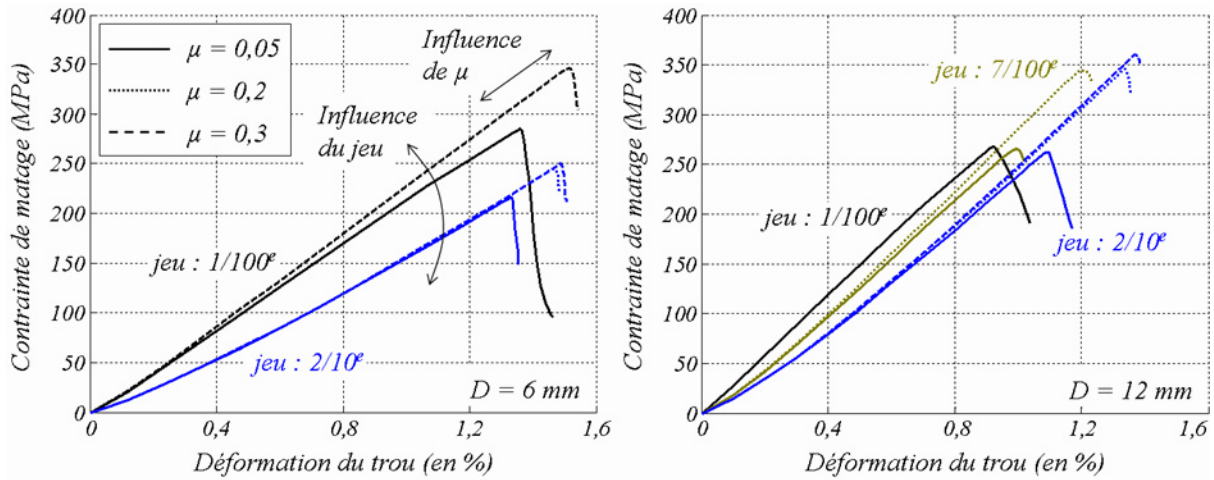


Figure VIII-19 : Influences combinées du jeu et du coefficient de frottement en fonction du diamètre du trou.

L'influence du jeu s'exerce principalement sur la non-linéarité initiale de la courbe de matage, correspondant à la mise en contact du pion et de la plaque, jusqu'à stabilisation de la surface de contact. En quelque sorte, le pion marque son empreinte sur le bord chargé du trou. Cette influence décroît avec le rapport du jeu et du diamètre du pion. De façon plus surprenante, la contrainte au pic de matage, semble elle aussi être fonction décroissante du rapport du jeu et au diamètre du pion. Ce second effet nous semble toutefois artificiel. La résistance réelle du composite au matage n'est pas liée au jeu. Par contre, l'estimation de la contrainte moyenne y est sensible. En effet, l'effort de matage est divisé par une section de contact théorique largement supérieure à la section réelle en cas de jeu important ($\sigma_m = F_m / (D \times t)$).

Contrairement à celle du jeu, l'influence du coefficient de frottement s'affirme avec l'augmentation du diamètre du pion. Plus la surface de contact est importante, plus l'effet du frottement est sensible. L'influence du coefficient μ est très marquée sur la valeur de la contrainte au pic de matage. Plus le coefficient est important, plus la résistance au matage est élevée : passer d'un coefficient de 0,05 à 0,3 entraîne ainsi une augmentation de la contrainte au pic de près de 30 %. Par contre, l'influence sur la raideur de l'assemblage est négligeable (dans les assemblages composites boulonnés, l'effort est transmis par cisaillement de la fixation plutôt que par frottement).

Vérification de la cohérence des essais de matage pur et d'assemblage

On a tenu à vérifier brièvement la cohérence des résultats entre la simulation d'un essai de matage pur et le calcul de la plaque complète, sollicitée en matage. Le diamètre du pion est de 6 mm, le jeu de $1/100^e$ et le coefficient de frottement $\mu = 0,05$. Les résultats obtenus sont présentés en Figure VIII-20. Ceux-ci sont globalement en bon accord. Néanmoins, la comparaison est délicate. En effet, la correspondance des déformations représentées en abscisse est imparfaite. Dans le cas de la configuration de matage pur, cette déformation correspond au rapport du déplacement imposé au pion et du diamètre de celui-ci, tandis que pour la plaque complète, il s'agit de la différence du déplacement du nœud situé face au pion et du nœud diamétralement opposé, ramenée au diamètre du pion. La contrainte de matage à rupture estimée par le calcul de la plaque complète est 10 % supérieure, environ, à la résistance en matage calculée pour la configuration de matage pur.

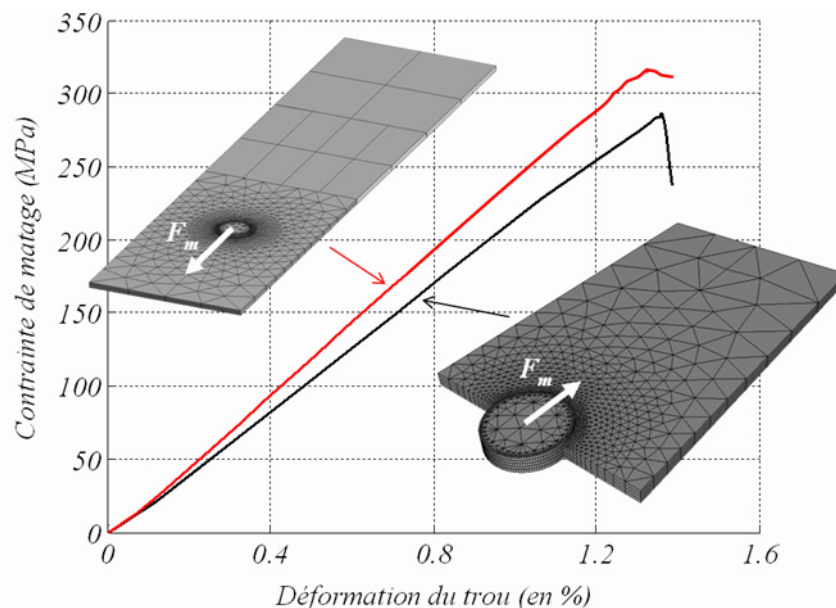


Figure VIII-20 : Comparaison des courbes de comportement global obtenues par la simulation de la plaque complète sollicitée en matage et par la simulation de l'essai de matage pur.

VIII.2.4.b Essais de traction trouée et de traction trouée habitée

La stratégie de calcul est légèrement modifiée pour la simulation des essais de traction et de traction trouée, en ce sens que le modèle de comportement endommageable est appliquée à la totalité de la zone maillée pli à pli. De la sorte, l'endommagement peu se propager sur toute la largeur de l'éprouvette, ce qui permet de prévoir la rupture finale en traction, lorsque les plis à 0° sont rompus en mode fibre sur tout le ligament. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure VIII-21. Ici, les déplacements mesurés correspondent aux déplacements imposés dans le calcul sans qu'aucun recalage ne soit nécessaire. Les paliers réalisés en cours de mise en charge dans les essais exacerbent des phénomènes de relaxation (viscosité) qui ne sont pas pris en compte dans le modèle.

La Figure VIII-22 présente les déplacements longitudinaux obtenus par calcul à l'instant de la rupture finale.

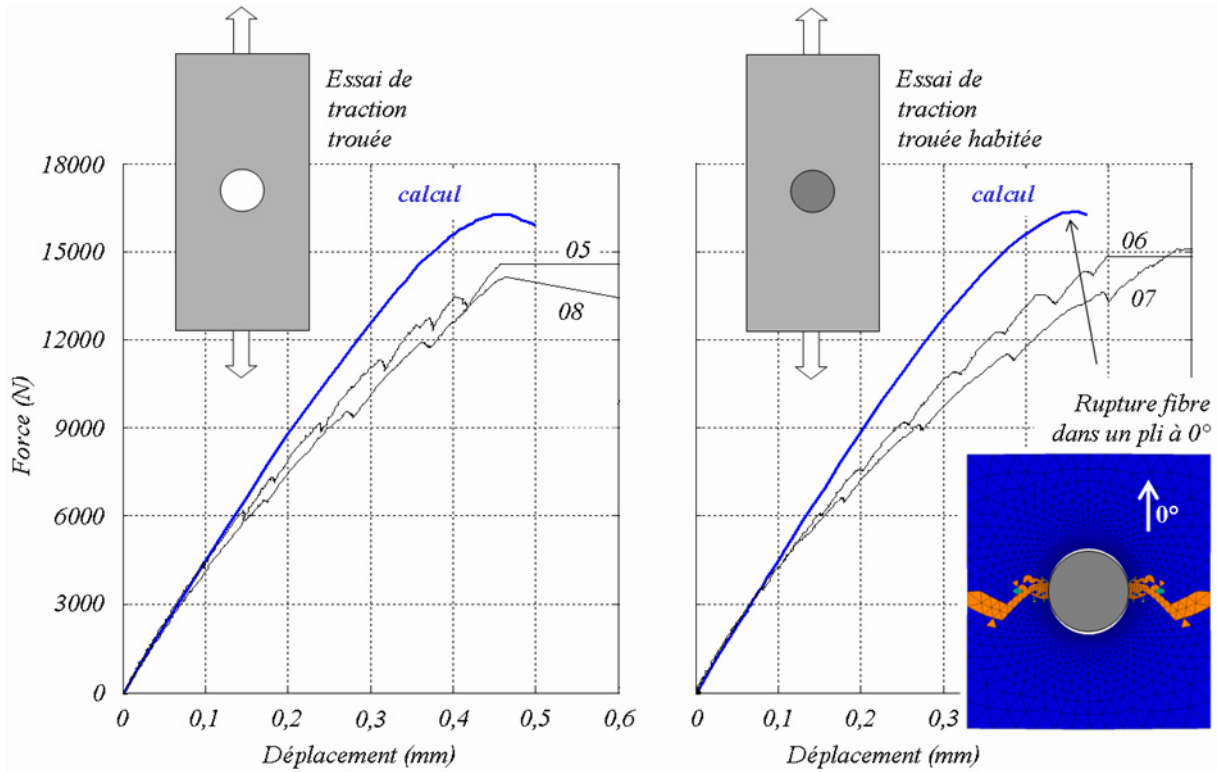


Figure VIII-21 : Comparaison des résultats expérimentaux et de simulations dans le cas des essais de traction trouée, habitée ou non. Les numéros d'essais sont reportés sur les courbes expérimentales.

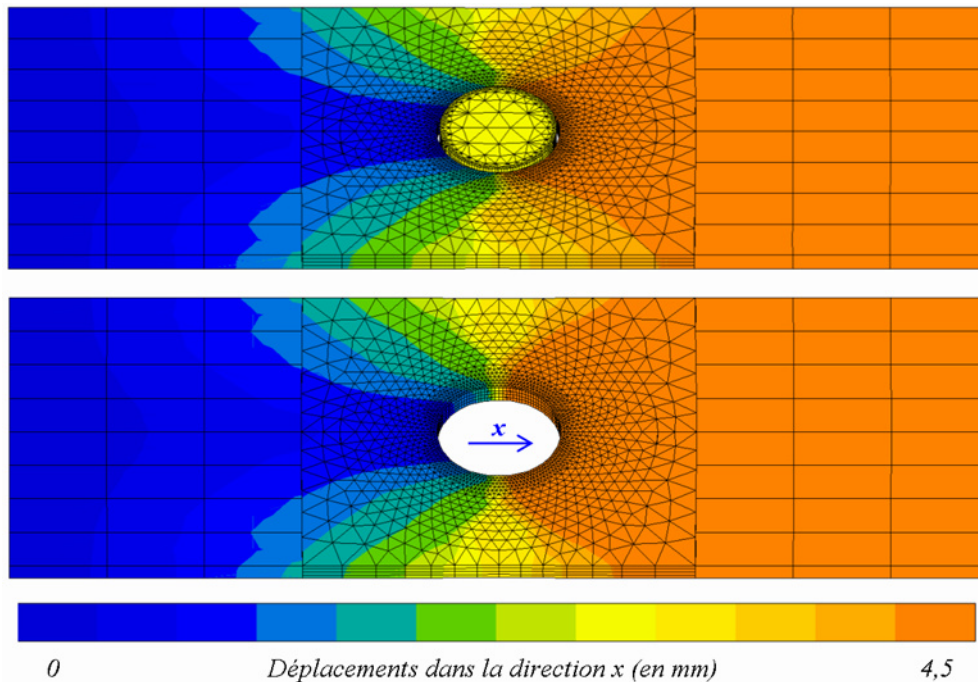


Figure VIII-22 : Déplacements longitudinaux calculés à l'instant de la rupture finale.

Les efforts de première rupture de fibres et de rupture finale en traction sont récapitulés dans le Tableau VIII-7. Les résultats obtenus par le calcul sont en bon accord avec les observations

expérimentales, aussi bien d'un point de vue global (courbes force / déplacement, forces à rupture) que d'un point de vue local (premières ruptures de fibres).

Type d'essai	1 ^{re} rupture de fibres (N)		Rupture en traction (N)	
	calcul	essai	calcul	essai
Traction trouée habitée	6339	6840 et 7560	16361	14380 et 15090
Traction trouée	5590	5970 et 5760	16272	14590 et 14130

Tableau VIII-7 : Comparaison des résultats expérimentaux et de simulations dans le cas des essais de traction trouée et de traction trouée habitée (efforts en N).

VIII.2.4.c Autres comparaisons

Afin d'explorer les capacités de prévision de notre modèle sur des configurations d'empilement et de chargement plus proches de la réalité industrielle, nous avons utilisé d'autres données expérimentales disponibles à l'ONERA. Une seconde série d'essais est simulée⁷, dont trois sont réalisés sur des éprouvette en T300/914. Ce sont ces trois essais que nous simulons.

Une première éprouvette est sollicitée en matage, par l'intermédiaire d'un pion, jusqu'à rupture, dans une configuration d'essai conventionnel de matage en double recouvrement. Il s'agit d'une éprouvette de vingt-quatre plis, d'empilement $[(45/0/-45/90)_3]_s$. La deuxième éprouvette subit un chargement de matage constant de 5200 N, combiné à un chargement d'effort passant de traction piloté jusqu'à rupture. Ses deux extrémités sont donc prises dans des mors et un effort est appliqué via le pion. L'éprouvette est faite de trente-deux plis, selon la séquence $[(45/0/-45/90)_4]_s$. La troisième éprouvette est sollicitée de la même manière que la deuxième, dont elle diffère uniquement en ce que sa stratification est désorientée de $22,5^\circ$.

Les calculs réalisés sont pilotés en force. La symétrie miroir permet de ne représenter que le demi-empilement. Le jeu est de $1/100^\circ$ de mm. Les dimensions géométriques des éprouvettes et les résultats de calcul sont présentés dans le Tableau VIII-8, ainsi que les résultats expérimentaux. Les modes de rupture sont indiqués par des lettres entre parenthèses (M pour matage et T pour traction.) Cependant, la confrontation des résultats d'essais et de calculs est difficile. En effet, la rupture en matage n'est pas clairement définie dans le compte-rendu d'essais (lot 1). L'essai a probablement été prolongé bien au-delà du pic de matage, mais la courbe de comportement globale n'est pas disponible. On dispose de mesures de déformations par des jauges, mais celles-ci ne permettent pas d'identifier un quelconque pic de rupture. Tout au plus distingue-t-on une première irrégularité aux environs de 5300 N. Pour les essais des lots 2 et 3, la rupture finale de l'éprouvette intervient en traction, sans signe évident d'endommagement de matage. Les calculs confirment ce scénario avec, au droit du trou, la propagation de ruptures de fibres dans les plis à 0° et l'apparition de délaminages, alors que le bord chargé du trou reste intact (voir Figure VIII-23). Toutefois le comportement adoucissant associé aux ruptures fibres dans notre modèle n'a pas été identifié, la vitesse de propagation de la rupture des fibres n'est donc pas réaliste. Les valeurs d'efforts à rupture reportées dans le Tableau VIII-8 correspondent à l'instant où l'endommagement atteint la limite des interfaces nominale. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un critère de rupture, car le diamètre de la zone d'interfaces nominales n'a de lien avec une distance critique de rupture, mais la méthode évoque la possibilité d'une technique inspirée du Point-Stress, consistant à identifier une distance critique de propagation de la rupture fibre au droit du trou.

⁷ Vinet A., "Endommagement sur éprouvette trouée. Essais pour travaux Onera", Rapport Aérospatiale Matra CCR n°1999-65032/1-DCR/M, 1999

Eprouvette	D (mm)	w (mm)	e (mm)	L (mm)	Efforts à rupture (N)	
					calcul ($\mu = 0,05$)	essai
1	4,8	24	12	88	5402 (M)	7300 (M)
2*	6,35	35	50	100	30463 (T)	39113 (T)
3*	6,35	35	50	100	27922 (T)	30887 (T)

* Effort passant de traction combiné à un effort de matage constant de 5200 N.

Tableau VIII-8 : Dimensions géométriques, efforts à rupture expérimentaux et issus du calcul pour les éprouvettes en T300/914 des lots 1, 2 et 3.

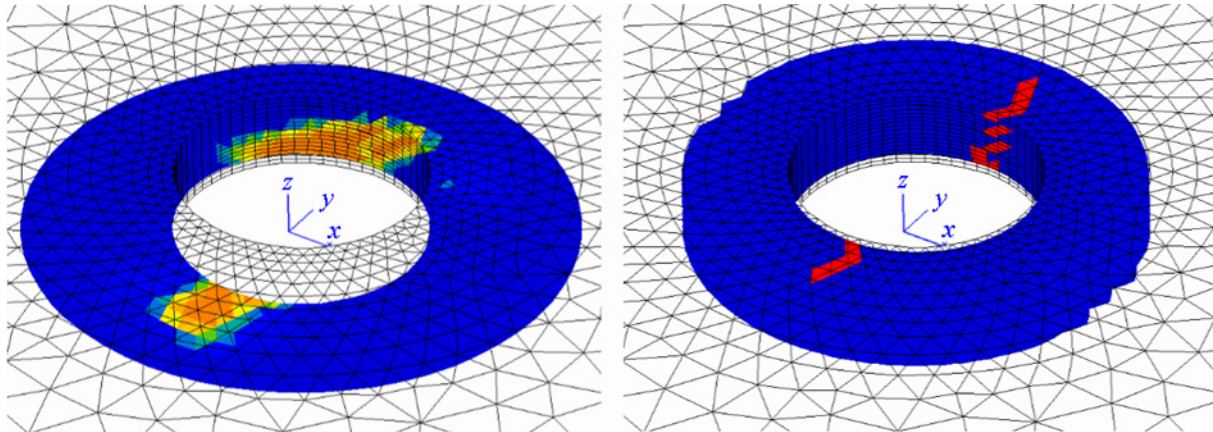


Figure VIII-23 : Rupture en traction de l'éprouvette du lot 2. Celle-ci est sollicitée en matage selon l'axe x par l'intermédiaire d'un pion qui n'est pas représenté sur la figure. A gauche, la rupture de l'interface nominale entre le pli orienté à -45° et le pli orienté à 0° au cœur du stratifié. A droite, rupture en mode fibre dans les plis à 0° .

VIII.3 DISCUSSION / VALIDITE DES MODELES

La complexité de la rupture en matage, et les difficultés de simulation qui lui sont associées, proviennent essentiellement du mode de sollicitation du matériau. Outre les difficultés associées à la gestion du contact, le transfert d'effort par un pion (un boulon ou un rivet) exacerbe des couplages rarement pris en compte entre des modes d'endommagement locaux complexes. Après une phase de rattrapage du jeu entre le trou et la fixation, s'établit une phase de comportement quasi-linéaire au niveau de la courbe de comportement global. Le pic de matage marque la rupture du matériau et la transition vers une phase de développement progressif de la rupture en matage associée à la propagation instable de délaminages importants. Sous réserve que le matériau soit suffisamment rigide pour éviter l'ouverture prématurée d'un jeu trop important, le pic de matage marque la rupture en matage de la liaison et la perte de fonctionnalité définitive de celle-ci.

Néanmoins, les événements qui conduisent au pic s'amorcent bien avant celui-ci sans conséquence globale flagrante. Expérimentalement, c'est l'émission acoustique qui en permet l'observation. Ces événements sont associés à l'amorçage des délaminages. Si ce sont essentiellement les fibres orientées à 0° qui assurent la reprise de l'effort de compression, le rôle de la matrice est fondamental en ce qu'elle soutient les fibres et les empêche de fléchir. C'est l'accumulation locale d'endommagement matriciel sur le bord chargé du trou, fissuration et décohésion de l'interface fibre / matrice, qui permet le microflambement des fibres et entraîne l'ouverture des premiers délaminages. Confiner ou comprimer le matériau dans l'épaisseur, sous la tête d'un boulon, par exemple, permet de contenir efficacement ces délaminages en retardant leur expression sur le comportement global de l'assemblage, jusqu'à ce qu'ils se propagent au-delà de la zone de serrage. Vis-à-vis de la rupture en matage, tout se passe comme si le diamètre effectif du boulon correspondait à celui de la zone de serrage (c'est-à-dire le diamètre de la rondelle).

Au final, la clé de la prévision du matage réside dans la compréhension et la simulation de l'interdépendance entre l'endommagement matriciel à l'intérieur du pli, le microflambement des fibres et l'amorçage des délaminages entre plis. Comparativement aux travaux numériques publiés les plus avancés sur la simulation de la rupture en matage, intégrer des éléments de zone cohésive pour simuler l'amorçage des délaminages constitue un apport important et justifié, dont l'impact sur la capacité de prévision des modèles est remarquable. Le modèle résultant est très riche. L'approche multiéchelle progressive de la rupture permet de discriminer les modes de rupture locale. A chacun est associée une loi d'endommagement adoucissant afin d'en traduire l'effet de façon efficace. Une technique d'effet retard permet d'éviter les problèmes associés de localisation numérique de l'endommagement. C'est un second apport important et original de ce travail qui permet de contenir les coûts de calcul et d'articuler élégamment ces différents éléments. La stratégie de calcul proposée s'avère ainsi particulièrement efficace et robuste.

En l'état actuel, le modèle proposé est valide jusqu'au pic de matage. Au-delà, on entre dans le domaine des grandes déformations. Le modèle adoucissant d'endommagement des fibres reste à identifier précisément par rapport à l'expérience. La cinétique de l'endommagement des fibres, liée à un effet structural, joue un rôle majeur dans la prévision de la rupture du ligament en traction. En compression, c'est la prise en compte du microflambement qui est problématique. Les développements à venir devront principalement permettre la passage du cumul de l'endommagement local dans les plis et de l'endommagement des interfaces entre les plis, à la modélisation de leur interdépendance.

Chapitre IX **Vers l'optimisation des empilements pour les jonctions boulonnées complexes**

Sommaire

IX.1	Application du modèle fin pour la recherche de l'empilement le plus résistant au matage.....	222
IX.1.1	Essais virtuels sur empilements symétriques équilibrés à huit plis.....	222
IX.1.2	Essais virtuels sur empilements symétriques à seize plis.....	224
IX.1.3	Bilan sur la démarche de "virtual testing"	229
IX.2	Stratégie de calcul multiniveau pour l'optimisation de jonctions complexes.....	230
IX.2.1	Stratégie de calcul pour la jonction complexe	230
IX.2.2	Comparaisons simulation / expérience pour valider le modèle fin sur le matériau T700/M21	232
IX.2.3	Application à la prévision de la rupture d'une jonction complexe.....	233
IX.3	Discussion	237

L'optimisation des empilements ne concerne pas uniquement la zone courante des structures composites, mais aussi les zones singulières. En effet, celles-ci constituent le plus souvent le point faible de la structure. Or, c'est typiquement la modélisation des zones singulières qui s'avère la plus complexe, la plus coûteuse en temps de calcul et la plus sujette à caution. Dans le cas des assemblages mécaniques dans les structures composites, les chapitres précédents soulignent la complexité des phénomènes mis en jeu et les difficultés de modélisation associées. Le modèle fin que nous proposons au Chapitre VIII constitue un pas en avant significatif pour la simulation de la rupture de l'assemblage élémentaire. Différentes pistes de recherche sont évoquées au Chapitre VIII pour aller plus loin et accroître encore les capacités de prévision du modèle. Néanmoins, les coûts de calcul sont très importants et les améliorations envisagées, dirigées vers une plus grande précision des résultats, alourdiront encore les calculs. Il ne s'agit donc pas d'un modèle destiné à la conception ou à l'optimisation des jonctions boulonnées, mais à la réalisation d'essais *virtuels*. Ceux-ci sont destinés à compléter les résultats expérimentaux, disponibles sur un nombre très limité d'empilements, afin de rendre possible l'estimation du comportement et de la rupture de n'importe quel stratifié.

Dans la première partie de ce chapitre, nous montrons de quelle façon il est possible d'utiliser le modèle fin pour construire, par essais virtuels, des abaques de résistance en matage en fonction de l'orientation et du séquençement des plis. A partir de ce type d'abaque, nous recherchons les empilements permettant de maximiser la résistance au matage d'un assemblage élémentaire, dans la configuration de l'essai de matage pur proposée au Chapitre VIII. Dans la seconde partie du chapitre, nous montrons l'apport des essais virtuels pour le calcul d'une jonction générique industrielle complexe, dans le cadre d'une démarche classique de calcul multiniveau.

IX.1 APPLICATION DU MODELE FIN POUR LA RECHERCHE DE L'EMPILEMENT LE PLUS RESISTANT AU MATAGE

La configuration d'essai de matage pur proposée précédemment (Cf. VIII.1.1) présente, par rapport aux essais conventionnels de matage, l'avantage de s'affranchir des risques de rupture en élongation ou en cisaillement (Cf. VII.1.2 pour la définition des modes de rupture de l'assemblage élémentaire). Dans cette section, seules sont considérées la défaillance en matage et la rupture par clivage (ou fendage) de l'éprouvette face au pion pour les empilements trop fortement orientés. Nous recherchons l'empilement le plus résistant dans la configuration de l'essai de matage pur. Les calculs dont les résultats sont présentés dans la suite sont réalisés pour un diamètre de pion de 6 mm, un jeu entre le pion et le trou de 1/100e et des stratifiés en T300/914. Le coefficient de frottement μ est fixé à 0,05. Le pion est élastique, comme précédemment (Cf. VIII.1.1). Seul l'empilement varie d'un calcul à l'autre.

IX.1.1 ESSAIS VIRTUELS SUR EMPILEMENTS SYMETRIQUES EQUILIBRES A HUIT PLIS

Le Tableau IX-1 présente une synthèse des résultats obtenus par simulation pour vingt-huit empilements à huit plis. La colonne de gauche du tableau regroupe les résultats obtenus pour tous les empilements possibles (vingt), à huit plis, avec un pas de discrétisation angulaire de 45°, respectant les règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et des 10 % (telles qu'elles sont formulées au Chapitre II). La colonne de droite regroupe les résultats correspondant aux huit empilements supplémentaires, respectant les règles de conception précédentes, offerts par une discrétisation, plus fine, de 15°.

Dans le tableau, les empilements sont ordonnés par groupes de mêmes rigidités de membrane (le bloc A de la matrice rigidité). Les résultats présentés montrent clairement que la résistance du stratifié au matage (correspondant à la contrainte σ_m au premier pic sur la courbe de matage) est fortement liée aux propriétés de membrane, c'est-à-dire à l'orientation des fibres et à la proportion de chaque orientation dans le stratifié. La Figure IX-1, qui présente les courbes de matage obtenues, met en évidence l'influence prépondérante du module A_{11} sur la raideur de l'assemblage dans la direction longitudinale.

Ici, en jouant sur la membrane (orientations des plis et proportions de ces orientations), la résistance en matage varie approximativement de 70 MPa, soit 33 % (par rapport à la valeur minimale). Une fois le choix des orientations et des proportions arrêté, l'ordre d'empilement semble compter au maximum pour quelques 22 MPa, soit 10 % de la résistance du stratifié au matage.

Certains calculs dont les résultats sont présentés dans le Tableau IX-1 ont divergé avant le premier pic de contrainte sur la courbe de matage (auquel cas on indique une borne basse pour la résistance au matage). Ces divergences prématurées semblent le plus souvent liées à l'apparition de fissures de splitting dans les plis orientés à 0° ou 45° . Il s'agit là d'un phénomène qui mériterait une étude plus approfondie, en lien avec l'étude du comportement adoucissant de la matrice.

N°	Empilements ($p_{dis} = 45^\circ$)	Résistance en matage σ_{Rm}	N°	Empilements ($p_{dis} = 15^\circ$)	Résistance en matage σ_{Rm}
1	[-45/0/0/45] _s	>266 MPa*	4	[-45/-15/15/45] _s	>202 MPa*
	[45/0/0/-45] _s			[45/15/-15/-45] _s	
	[-45/0/45/0] _s	>278 MPa*	5	[-60/-15/15/60] _s	278 MPa
	[45/0/-45/0] _s			[60/15/-15/-60] _s	
	[0/-45/0/45] _s	>278 MPa*	6	[-30/-75/75/30] _s	251 MPa
[0/45/0/-45] _s		[30/75/-75/-30] _s			
2	[0/-45/90/45] _s	220 MPa	7	[-45/-75/75/45] _s	219 MPa
	[0/45/90/-45] _s			[45/75/-75/-45] _s	
	[-45/90/45/0] _s	228 MPa			
	[45/90/-45/0] _s				
	[-45/0/45/90] _s	236 MPa			
	[45/0/-45/90] _s				
	[90/-45/0/45] _s	242 MPa			
[90/45/0/-45] _s					
3	[-45/90/90/45] _s	216 MPa			
	[45/90/90/-45] _s				
	[-45/90/45/90] _s	219 MPa			
	[45/90/-45/90] _s				
	[90/-45/90/45] _s	219 MPa			
[90/45/90/-45] _s					

* Fissures de splitting dans les plis à 0° et 45° .

Tableau IX-1 : Synthèse des résultats des essais virtuels, dans la configuration de l'essai de matage pur, pour un pion de 6 mm de diamètre. Le tableau regroupe l'ensemble des empilements à huit plis, avec une discrétisation de 15° , respectant les règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et des 10 %.

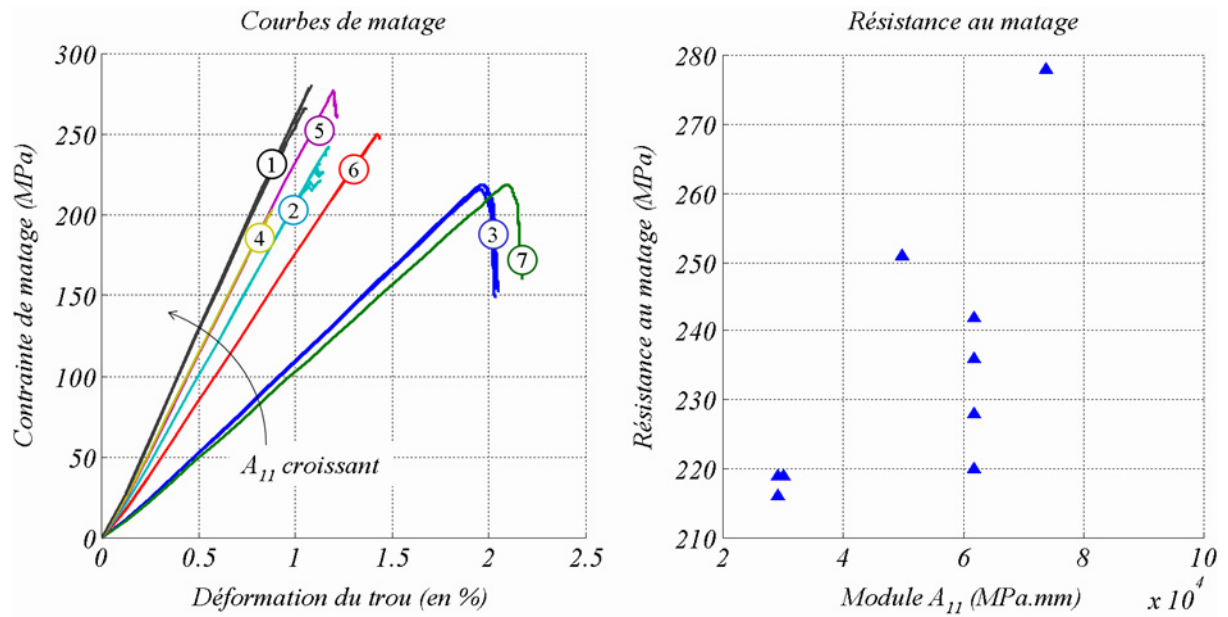


Figure IX-1 : Courbes de matage obtenues par le calcul des empilements à 8 plis du Tableau IX-1.

IX.1.2 ESSAIS VIRTUELS SUR EMPILEMENTS SYMETRIQUES A SEIZE PLIS

Le Tableau IX-2 regroupe les résultats obtenus pour cinquante empilements à seize plis, avec un pas de discrétisation angulaire de 45° , respectant les règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et des 10 %, telles qu'elles sont formulées au Chapitre II. Les courbes de matage correspondantes sont présentées sur la Figure IX-2.

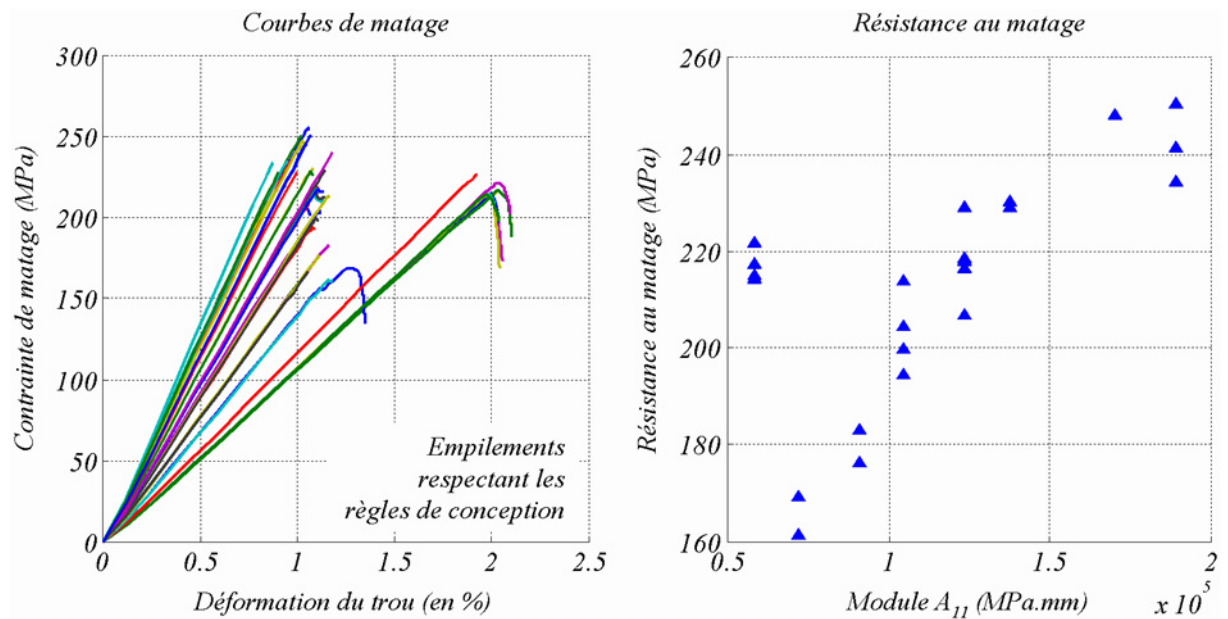


Figure IX-2 : Courbes de matage obtenues par le calcul des empilements à 16 plis du Tableau IX-2.

On retrouve sur la Figure IX-2 l'influence prépondérante du module A_{11} sur la raideur longitudinale de l'assemblage. L'évolution de la résistance au matage σ_{Rm} semble elle aussi fortement liée aux propriétés de membrane (A_{11} et A_{22}). Dans le Tableau IX-2, en jouant sur la membrane, la résistance au matage varie approximativement de 90 MPa, soit presque 60% de la valeur minimale. Néanmoins, l'influence de l'ordre d'empilement sur σ_{Rm} n'est pas négligeable. Dans le cas des empilements quasi-isotropes à huit plis, le Tableau IX-1 montre une variation de résistance de 22

MPa (soit environ 10 % de variation par rapport à la valeur minimale). Dans le cas des empilements quasi-isotropes à seize plis, le Tableau IX-2 montre une variation de résistance de 33 MPa (soit environ 15 % de variation).

Empilements	Résistance en matage σ_{Rm}	Empilements	Résistance en matage σ_{Rm}
$[-45_2/0_2/0_2/45_2]_s$	>250 MPa*	$[90_4/-45/90/45/0]_s$	169 MPa
$[45_2/0_2/0_2/-45_2]_s$		$[0/-45/90_3/45/90_2]_s$	161 MPa
$[0_2/-45_2/0_2/45_2]_s$	>241 MPa*	$[-45/90/45_3/90/-45_2]_s$	>227 MPa
$[0_2/45_2/0_2/-45_2]_s$		$[-45_2/0/45/90/45/90_2]_s$	183 MPa
$[45_2/0_2/-45_2/0_2]_s$	>234 MPa*	$[90/-45/90/-45/90/45_2/0]_s$	176 MPa
$[-45_2/0_2/45_2/0_2]_s$		$[0_2/-45/90_2/45/90_2]_s$	194 MPa
$[-45_2/0/45/0/45/0_2]_s$	>193 MPa*	$[0/-45/90_4/45/0]_s$	204 MPa
$[-45/0_2/-45/0/45/0/45]_s$	>229 MPa*	$[90_2/-45/0_2/45/90_2]_s$	214 MPa
$[-45_2/0_2/45_2/90_2]_s$	220 MPa	$[90_2/-45/90_2/45/0_2]_s$	200 MPa
$[45_2/0_2/-45_2/90_2]_s$		$[-45_3/90/45_2/0/45]_s$	>167 MPa
$[-45_2/90_2/45_2/0_2]_s$	217 MPa	$[-45_3/0/45_3/90]_s$	>167 MPa
$[45_2/90_2/-45_2/0_2]_s$		$[90_3/-45/0_3/45]_s$	230 MPa
$[0_2/-45_2/90_2/45_2]_s$	207 MPa	$[0_3/-45/90/45/90_2]_s$	229 MPa
$[0_2/45_2/90_2/-45_2]_s$		$[-45_3/0/45_3/0]_s$	>190 MPa*
$[90_2/-45_2/0_2/45_2]_s$	217 MPa	$[-45/0/-45/0/45/0/45/90]_s$	>241 MPa
$[90_2/45_2/0_2/-45_2]_s$		$[90/-45/0/-45/0/45/0/45]_s$	>247 MPa
$[0/-45_2/90_2/45/0/45]_s$	218 MPa	$[0/0/-45_2/0/45/90/45]_s$	>231 MPa
$[-45/90_2/45_2/0/-45/0]_s$	229 MPa	$[0/-45/90/45_2/0/-45/0]_s$	>251 MPa
$[0_2/-45/90/-45/90/45_2]_s$	218 MPa	$[90_2/-45/0_4/45]_s$	>247 MPa
$[90/-45/0/-45/0/45/90/45]_s$	240 MPa	$[0_4/-45/90/45/90]_s$	248 MPa
$[-45_2/90_2/45_2/90_2]_s$	215 MPa	$[0/-45/0_4/45/90]_s$	>234 MPa
$[45_2/90_2/-45_2/90_2]_s$		$[90/-45/0_4/45/0]_s$	>234 MPa
$[-45_2/90_2/90_2/45_2]_s$	217 MPa		
$[45_2/90_2/90_2/-45_2]_s$			
$[90_2/-45_2/90_2/45_2]_s$	214 MPa		
$[90_2/45_2/90_2/-45_2]_s$			
$[-45/90/-45/90/45_2/90_2]_s$	222 MPa		
$[90_2/-45_2/90/45_2/90]_s$	214 MPa		

* Fissures de splitting dans les plis à 0° et 45°

Tableau IX-2 : Synthèse des résultats des essais virtuels, dans la configuration de l'essai de matage pur, pour un pion de 6 mm de diamètre. Le tableau regroupe cinquante empilements à seize plis, avec une discrétisation de 45°, respectant les règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et des 10 %.

Une fois le choix de la membrane arrêté (orientations des plis et proportions de plis selon chaque orientation), le calcul montre qu'il est préférable d'éviter de positionner des plis à 0° en

surface. Il semble de plus que la résistance en matage augmente avec le nombre d'interfaces entre plis d'orientations différentes. Ce dernier constat s'avère cohérent avec certaines recommandations usuelles de conception des empilements, telles que la règle de battage ou celle de groupage.

IX.1.2.a Construction d'un abaque de résistance au matage

Afin de bâtir un abaque de la résistance au matage en fonction de l'empilement, nous construisons un métamodèle à partir des résultats de calcul présentés au Tableau IX-2. Ce métamodèle vise à approcher la résistance en matage des stratifiés à seize plis en T300/914, respectant les règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et des 10 %, ainsi qu'un pas de discrétisation angulaire p_{dis} de 45° . On procède de la même manière qu'au Chapitre V (Cf. V.2.1.a)

La première étape consiste à rajouter aux points d'identification quelques configurations extrêmes décrivant les frontières du domaine des rigidités réalisables. Ces configurations sont récapitulées dans le Tableau IX-3, avec les valeurs de résistance au matage correspondantes, évaluées par le calcul. De façon prévisible, ces configurations extrêmes montrent des comportements particuliers, principalement régis par la matrice et les interfaces. Le stratifié UD à 90° et le stratifié alterné à $\pm 45^\circ$ ne présentent ainsi aucune rupture de fibres au pic de matage, ce qui constitue un scénario de matage inédit par rapport à celui observé au Chapitre VIII (voir Figure VIII-17), sur un empilement fortement renforcé dans la direction longitudinale. *A contrario*, le stratifié UD à 0° se fend en deux face au pion (fissure de splitting traversante) bien avant de mater. La Figure IX-3 montre l'évolution de l'endommagement matriciel dans l'éprouvette au cours du chargement. Le motif d'endommagement est caractéristique. Cependant, son effet sur la courbe globale est moins net et probablement sous-estimé. On est aux limites du domaine de validité du modèle. Tout ce dont on peut être sûr, c'est du mode de rupture. L'instant t_1 repéré sur la courbe de matage, correspond à l'instant du premier endommagement matriciel et à une première non-linéarité de comportement global.

Nous rajoutons, de surcroît, l'empilement testé au Chapitre VIII (stratifié croisé $0^\circ/90^\circ$) et le même empilement tourné de 90° . On remarque ainsi que l'empilement avec deux plis à 90° en surface est nettement plus résistant en matage que l'empilement avec deux plis à 0° en surface.

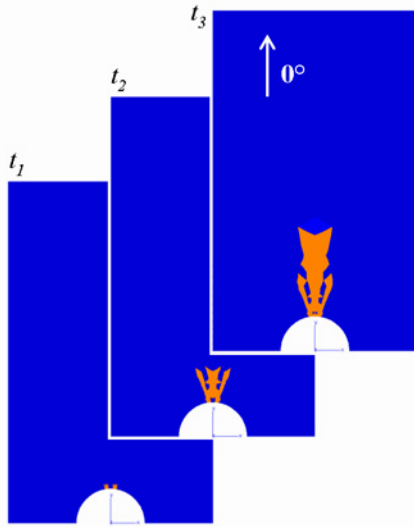
Empilements	Résistance en matage σ_{Rm}	Remarques
$[0_8]_s$	>256 MPa	Fissure de splitting traversante (fendage).
$[45_2/-45_2/45_2/-45_2]_s$	271 MPa	Aucune rupture de fibre au pic de matage.
$[90_8]_s$	181 MPa	
$[0_2/90_2/0_2/90_2]_s$	255 MPa	Empilement testé au Chapitre VIII.
$[90_2/0_2/90_2/0_2]_s$	285 MPa	

Tableau IX-3 : Synthèse des résultats des essais virtuels, dans la configuration de l'essai de matage pur, pour un pion de 6 mm de diamètre. Le tableau regroupe les résultats obtenus pour cinq configurations extrêmes.

A partir de ces points d'identification, des métamodèles de complexité croissante sont identifiés, dont la qualité est estimée par validation croisée. Les variables d'entrée en sont les modules A_{11} , A_{22} pour la membrane et D_{11} , D_{22} et D_{16} pour le comportement de flexion (à partir desquels il est possible de reconstruire exactement la matrice de rigidité globale des stratifiés symétriques équilibrés avec un pas de discrétisation de 45°). Les meilleurs résultats ont été obtenus par un kriging interpolant.

Toutefois, l'identification reste difficile et les résultats de validation croisée sont médiocres (voir Figure IX-4). Cet aspect mériterait d'être approfondi en y consacrant davantage de temps.

Endommagement matriciel dans l'UD 0°



Configurations extrêmes

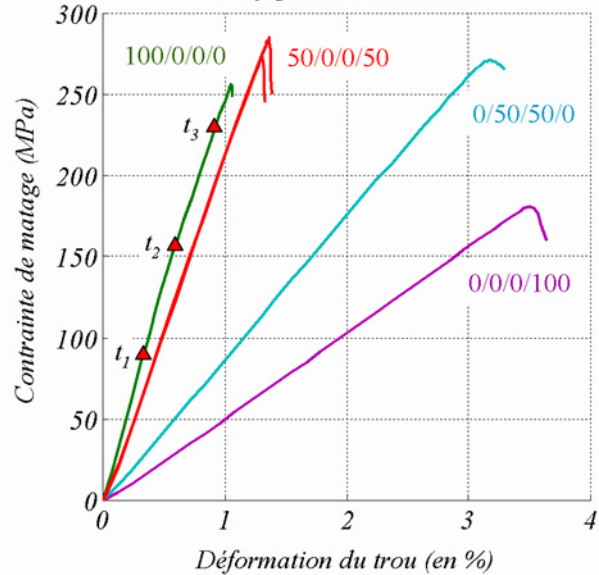


Figure IX-3 : Courbes de matage obtenues par pour les empilements du Tableau IX-3. Suivi de l'endommagement matriciel dans l'éprouvette unidirectionnelle à 0° (fissure de splitting). Les empilements sont désignés par leurs proportions de plis à 0°+45°-45°90° (en %).

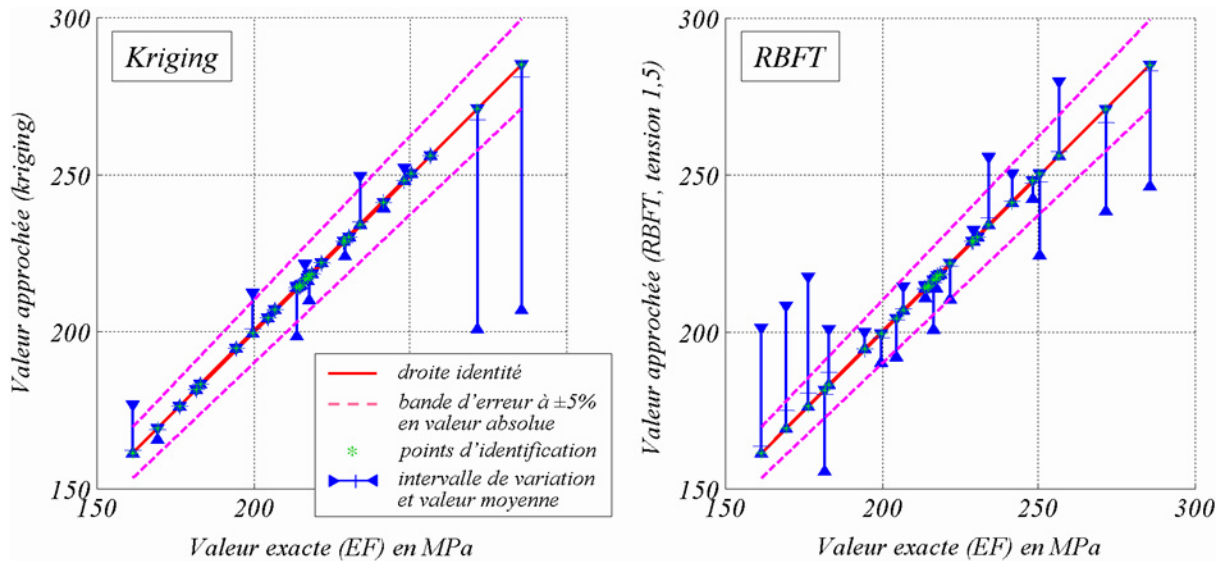


Figure IX-4 : Résultats de validation croisée par leave-1-out pour deux métamodèles interpolants. On retient le kriging, à gauche, mais ces approximations sont perfectibles.

Puisqu'il n'existe que mille vingt quatre empilements possibles à seize plis satisfaisant aux règles de conception (symétrie, équilibre, groupage à quatre plis, désorientation, règle des 10 % et $p_{dis} = 45^\circ$), nous procédons par énumération pour trouver la meilleure configuration (le temps de calcul total est de l'ordre de la seconde). Au final, les meilleures proportions sont les suivantes : six plis à 0°, quatre plis à 45°, quatre plis à -45° et deux plis à 90°, soit, en % : 37,5/25/25/12,5. Les séquences d'empilements qui maximisent la résistance sont les suivantes (aux inversions de signes près, pour les plis orientés à 45°) :

$$[90/-45/0/45/0/45/0/-45]_s \text{ avec } \sigma_{Rm} = 261 \text{ MPa,}$$

$$[-45/90/45/0/45/0/-45/0]_s \text{ avec } \sigma_{Rm} = 261 \text{ MPa,}$$

$$[-45/90/45_2/0_3/-45]_s \text{ avec } \sigma_{Rm} = 262 \text{ MPa.}$$

Un calcul EF est réalisé afin de vérifier les performances du premier de ces empilements. Les résultats en sont les suivants :

$$[90/-45/0/45/0/45/0/-45]_s \text{ avec } \sigma_{Rm}^{EF} = 295 \text{ MPa.}$$

La valeur de résistance au matage approchée par le métamodèle est environ 12 % inférieure à la valeur prévue par le modèle fin. Néanmoins les tendances sont vérifiées. L'empilement optimal obtenu s'avère largement plus résistant au matage que n'importe lequel des stratifiés ayant servi à l'identification du métamodèle (voir Tableau IX-2).

IX.1.2.b Comparaison des résultats obtenus pour les empilements à huit et seize plis

Afin d'estimer l'influence sur la résistance au matage σ_{Rm} du ratio D/t entre le diamètre du trou et l'épaisseur du stratifié, nous comparons, dans le Tableau IX-4, les résultats obtenus pour les empilements à huit plis avec ceux des empilements à seize plis (les plis sont doublés). Les résultats varient en fonction de l'empilement. La rupture des stratifiés 0/25/25/50 semble très peu sensible au changement d'épaisseur. Par contre, la résistance des stratifiés quasi-isotropes 25/25/25/25 diminue sensiblement lorsque l'épaisseur augmente. Dans le cas des empilements 50/25/25/0 les calculs ont divergé prématurément. Il est donc difficile de conclure. Faire une étude complète sur les effets d'échelle (en fonction du ratio D/t) nécessite un travail plus conséquent. Par contre l'intérêt des essais virtuels pour ce type d'étude est flagrant. De même, il est envisageable d'étudier en détail l'influence des rapports géométriques w/d ou e/d sur le basculement entre défaillance en matage et modes de rupture catastrophiques.

Empilements ($p_{dis} = 45^\circ$)		Résistance en matage σ_{Rm}	
8 plis ($D/t = 6$)	16 plis ($D/t = 3$)	8 plis	16 plis
$[45/0/0/-45]_s$	$[45_2/0_2/0_2/-45_2]_s$	>266 MPa	>250 MPa
$[45/0/-45/0]_s$	$[45_2/0_2/-45_2/0_2]_s$	>278 MPa	>234 MPa
$[0/45/0/-45]_s$	$[0_2/45_2/0_2/-45_2]_s$	>278 MPa	>241 MPa
$[0/45/90/-45]_s$	$[0_2/45_2/90_2/-45_2]_s$	220 MPa	207 MPa
$[45/90/-45/0]_s$	$[45_2/90_2/-45_2/0_2]_s$	228 MPa	217 MPa
$[45/0/-45/90]_s$	$[45_2/0_2/-45_2/90_2]_s$	236 MPa	220 MPa
$[90/45/0/-45]_s$	$[90_2/45_2/0_2/-45_2]_s$	242 MPa	217 MPa
$[45/90/90/-45]_s$	$[45_2/90_2/90_2/-45_2]_s$	216 MPa	217 MPa
$[45/90/-45/90]_s$	$[45_2/90_2/-45_2/90_2]_s$	219 MPa	215 MPa
$[90/45/90/-45]_s$	$[90_2/45_2/90_2/-45_2]_s$	219 MPa	214 MPa

Tableau IX-4 : Comparaison des résultats obtenus pour des empilements à huit plis et seize plis.

IX.1.3 BILAN SUR LA DEMARCHE DE "VIRTUAL TESTING"

Au final, les essais virtuels réalisés dans cette section et leur généralisation par un métamodèle qui en est faite permettent d'aboutir aux deux constatations suivantes. Dans le cas des empilements symétriques équilibrés à base de plis UD carbone / époxy :

- la raideur de l'assemblage dépend essentiellement des rigidités de membrane. Ici, pour un effort de matage dans la direction longitudinale, c'est l'influence du module A_{11} qui est prépondérante,
- la résistance du stratifié au matage dépend elle aussi principalement de la membrane (A_{11} et A_{22}). Pour les empilements à seize plis, par exemple, la résistance du stratifié au matage varie de quelques 135 MPa, soit environ 84 % par rapport à l'empilement le plus faible du Tableau IX-2. Néanmoins, l'ordre d'empilement des plis joue un rôle significatif. Ici, l'amplitude de variation maximale observée pour σ_{Rm} est de l'ordre de 15 % en fonction de la séquence d'empilement.

Il est difficile de statuer sur l'influence du ratio D/t avec les résultats dont nous disposons. Tout au plus semble-t'il que cette influence s'exprime différemment en fonction de l'empilement considéré. Il pourrait être intéressant de rechercher le diamètre de trou pour lequel le stratifié présente la meilleure résistance au matage, s'il existe.

Les résultats obtenus permettent de mettre en avant trois recommandations pour la conception des empilements à base de plis UD carbone / époxy, respectant les règles de symétrie, d'équilibre, de groupage, de désorientation et des 10 %, avec un pas p_{dis} de 45° :

- les empilements à seize plis résistant le mieux au matage sont de type 37,5/25/25/12,5,
- il est préférable d'éviter de positionner des plis à 0° en surface, ou trop proches de la surface du stratifié,
- il est préférable d'alterner au maximum les différentes orientations de plis dans l'épaisseur du stratifié.

En matière d'optimisation des assemblages, l'usage, dérivé de nombreux travaux expérimentaux, impose des proportions de plis de type 40/20/20/20, ce qui semble confirmer nos résultats. Le fait d'éviter de positionner des plis à 0° en surface du stratifié n'a ici rien à voir avec des considérations de tolérance aux dommages, même si ces recommandations se rejoignent dans la forme. Il semble plutôt que repousser les plis longitudinaux au cœur du stratifié permet de bénéficier d'un certain effet de serrage, ou, du moins, d'un meilleur maintien des fibres à 0° qui reprennent l'essentiel des efforts transférés. Enfin, la dernière recommandation rejoint les règles de groupage et de battage, dont on a déjà discuté au Chapitre II.

Les coûts de calculs de ces essais virtuels dépendent principalement du nombre de plis représentés dans les modèles. Ici, la règle de symétrie miroir pour les empilements permet de ne modéliser que les demi-empilements. Remarquons au passage que l'interface sur le plan de symétrie n'est pas modélisée ici. Il s'agit là d'une question ouverte : est-il nécessaire de modéliser cette interface et, le cas échéant, de quelle manière? Toujours est-il que, dans le cas des modèles comprenant quatre plis, le temps de calcul moyen est de l'ordre de 5 h et la RAM nécessaire d'environ 150 Mo. Pour les modèles à huit plis, le temps de calcul moyen avoisine les 24 h et la RAM nécessaire est de quelques 500 Mo.

IX.2 STRATEGIE DE CALCUL MULTINIVEAU POUR L'OPTIMISATION DE JONCTIONS COMPLEXES

La deuxième partie de ce mémoire démontre l'applicabilité des outils et de la stratégie d'optimisation, développés dans la première partie, à un problème complexe impliquant des coûts de calcul importants (flambement et post-flambement d'un panneau raidi). La troisième partie a jusqu'ici principalement consisté à développer et valider, au moins partiellement, un modèle fin de l'assemblage élémentaire dans le but de réaliser des essais virtuels. Le dernier pas à accomplir pour procéder à l'optimisation d'une jonction complexe consiste à exploiter les essais virtuels. En effet, comme on l'a souligné dans la discussion finale du Chapitre VII, la principale limitation de la stratégie de calcul multiniveau industrielle, pour son application à l'optimisation, provient de l'usage de modèles semi-empiriques pour la réanalyse locale de la tenue des fixations. Dans cette section, nous montrons comment les essais virtuels peuvent être utilisés pour compléter les bases de données expérimentales et alimenter les modèles simplifiés nécessaires au calcul rapide de la tenue des assemblages élémentaires. L'application dont il est question ici est un démonstrateur du programme Americo, proposé par EADS/IW. Il s'agit d'une jonction générique entre un panneau composite en T700/M21 et deux autres panneaux et des cornières métalliques. La jonction comprend deux cent deux fixations, modélisées au niveau global par des ressorts.

Ce travail étant effectué en temps limité, les résultats présentés ne sont pas aboutis. Il serait maintenant possible de faire beaucoup plus assez facilement. Avec la réalisation d'essais virtuels, un pas est franchi, qui ouvre un large champ d'investigation pour le calcul de jonctions complexes.

IX.2.1 STRATEGIE DE CALCUL POUR LA JONCTION COMPLEXE

La démarche globale / locale pour le calcul de jonctions complexes est présentée de façon générale au Chapitre VII (Cf. VII.3.2). Nous nous attardons ici davantage sur la méthode de réanalyse locale de la tenue des fixations à partir des efforts extraits du calcul global.

IX.2.1.a *Des essais virtuels pour alimenter le modèle global*

Rappelons qu'au niveau global, les boulons sont représentés par des ressorts. De façon classique, leur raideur est estimée à partir de la formule de Huth (Cf. VII.3.3.a). Afin de décrire plus précisément l'influence de l'empilement sur la rigidité de l'assemblage élémentaire, il est possible d'extraire la raideur de l'assemblage élémentaire de modèles fins. En effet, cette approche permet de remplacer le modèle empirique par une surface de réponse, directement identifiée à partir des résultats d'essais disponibles, enrichis des résultats d'essais virtuels. Ce faisant, il est possible de tenir compte de l'influence de paramètres échappant au modèle de Huth et pourtant très influents, tels que les jeux, le serrage éventuel au niveau des fixations, ou encore le type de fixations (boulons, rivets, forme de la tête des fixations, etc.). Au demeurant, l'estimation de la raideur de l'assemblage élémentaire est bien moins exigeante que la prévision de sa rupture. Le modèle EF nécessaire doit principalement rendre compte de la géométrie de l'assemblage, du contact, de l'élasticité de la fixation et des propriétés élastiques macroscopiques des plaques. Néanmoins, par manque de temps et afin de se rapprocher de la pratique industrielle, nous nous contentons dans la suite à la formule de Huth.

IX.2.1.b *Réanalyse locale et essais virtuels*

Les efforts extraits du calcul global pour la réanalyse locale de la tenue des fixations correspondent aux flux passants moyens N_x , N_y et N_{xy} autour de la fixation considérée et à l'effort de matage F_m , transféré par la fixation elle-même (représentée par un ressort).

Le principe de la réanalyse locale est résumé, sous une forme unidirectionnelle, par l'équation VII-2 que nous rappelons ci-dessous, pour un mode de rupture combiné de traction et de matage :

$$K_t (\sigma_\infty + K_m \cdot \sigma_m) \geq \sigma_r \quad (IX-1)$$

où σ_∞ , σ_m et σ_r correspondent respectivement à la contrainte à l'infini, la contrainte moyenne de matage et la contrainte admissible du stratifié. K_t et K_m sont respectivement les coefficients de surcontrainte de trou et de matage. La rupture en matage pur est estimée par le critère empirique suivant :

$$\sigma_m \geq \sigma_{Rm} \quad (IX-2)$$

où σ_{Rm} correspond à la résistance au matage de l'assemblage. Cette approche est empirique, les coefficients K_t , K_m et les résistances σ_r et σ_{Rm} sont identifiés expérimentalement. Le domaine de validité de la démarche est donc très restreint, avec de faibles capacités d'extrapolation hors des points d'essais. Or, l'optimisation des empilements suppose de balayer une très large gamme de configurations. Le coût du tout empirique devient rapidement exorbitant.

Pour remédier à cette difficulté, il est nécessaire de bâtir une solution de compromis raisonné entre l'approche empirique et l'approche numérique. Deux solutions sont envisageables pour ouvrir la voie à une réelle optimisation numérique des zones d'assemblages. La première solution est d'effectuer la réanalyse locale des fixations potentiellement critiques directement à partir du modèle fin. Dans ce cas, les points expérimentaux servent à identifier et valider le modèle fin. L'optimisation est ensuite entièrement numérique. Toutefois, les coûts de calcul associés à cette méthode sont très élevés. De plus, il s'agit d'une modification importante de la démarche industrielle. Nous préférons donc promouvoir ici une seconde méthode, moins intrusive, basée sur la réalisation d'essais virtuels. Dans ce cas, le modèle fin est employé pour extrapoler hors des points expérimentaux et enrichir les abaques existantes pour les coefficients empiriques nécessaires aux modèles simplifiés de réanalyse locale. Ces coefficients sont récapitulés dans le Tableau IX-5, ainsi que les paramètres influant sur ces grandeurs.

Grandeurs empiriques	Paramètres influents
Résistance de plaque pleine σ_r (obtenue par un essai de traction)	Empilement, chargement
Résistance en matage σ_{Rm} (obtenue par un essai de matage)	Empilement, diamètre D de la fixation*, direction de l'effort de matage par rapport à l'empilement
Coefficient de trou K_t (obtenu par un essai de traction trouée)	Empilement, w/D , type d'effort passant (traction ou compression), direction de l'effort passant par rapport à l'empilement
Coefficient de matage K_m (obtenu par un essai de matage)	Empilement, D^* , direction de l'effort de matage par rapport à l'empilement

* Le montage est supposé ajusté.

Tableau IX-5 : Revue des grandeurs empiriques nécessaires à la réanalyse locale de la tenue des fixations. Synthèse de paramètres influant sur chacune de ces grandeurs.

Dans le cas d'un chargement multiaxial, la réanalyse locale s'effectue en trois étapes, illustrées par la Figure IX-5, pour le mode de rupture combiné de traction et de matage. La première étape (i) consiste à exprimer les flux passants N_x , N_y et N_{xy} dans le repère de l'effort de matage (les grandeurs dans ce repère sont repérées par un exposant m) pour ajouter au flux passant N_x^m le flux de matage pénalisé du coefficient K_m . De la sorte, on passe d'une configuration d'assemblage à une

configuration de plaque trouée. La deuxième étape (ii) consiste à passer du calcul de la tenue d'une plaque trouée à celui d'une plaque pleine. Pour ce faire, il s'agit d'exprimer les flux N_x^m , N_y^m , et N_{xy}^m dans les directions principales de sollicitations (repérées par un exposant p), puis de pénaliser les flux N_x^p , N_y^p (par définition $N_{xy}^p = 0$) par le coefficient de trou K_t (la valeur de K_t dépend de la direction considérée). Enfin (iii), un calcul de tenue de plaque pleine est réalisé, à partir des flux majorés issus de la deuxième étape.

Le critère de rupture en matage pur est, lui, directement évalué dans le repère de matage.

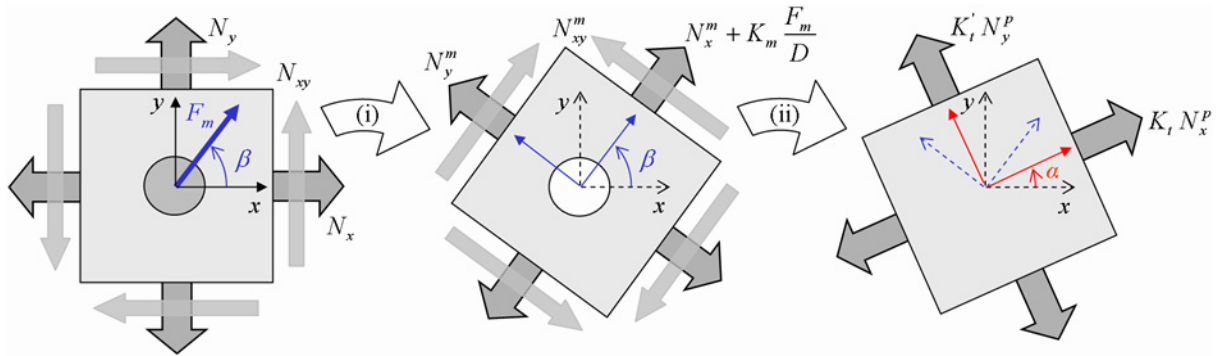


Figure IX-5 : principe de la réanalyse locale de la tenue des fixations.

IX.2.2 COMPARAISONS SIMULATION / EXPERIENCE POUR VALIDER LE MODELE FIN SUR LE MATERIAU T700/M21

Avant de réaliser les essais virtuels nécessaires pour alimenter les modèles simplifiés pour la réanalyse des fixations, il nous faut valider le modèle fin sur le matériau T700/M21. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les résultats d'essais réalisés au CEAT dans le cadre du programme Americo¹. Ces résultats portent sur trois essais de traction trouée, correspondant à trois diamètres de trou, et un essai de matage, dans une configuration conventionnelle d'assemblage en double recouvrement sollicité en traction. Les configurations géométriques des éprouvettes testées sont schématisées sur la Figure IX-6.

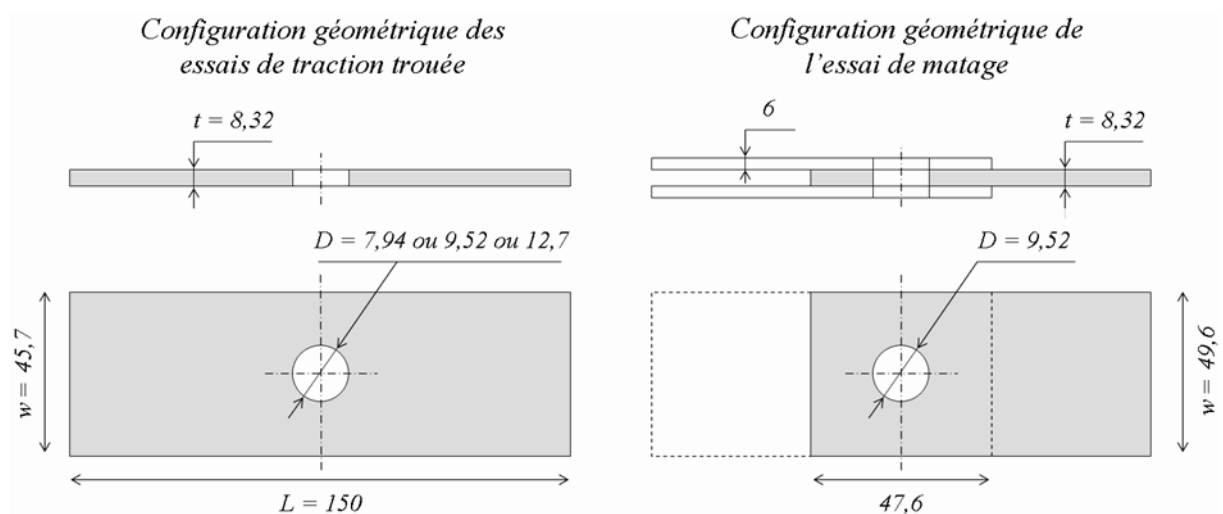


Figure IX-6 : Configurations géométriques des essais de traction trouée et de matage.

¹ Sardin J., Rapport d'essai n°M-06/6298000/P1/A, PEA Americo Tranche 4, Centre d'Essais Aéronautique de Toulouse, 2007

Ces essais ont été réalisés sur des éprouvettes en T700/M21, comportant chacune trente-deux plis. Dans le cas des essais de traction trouée, l'empilement utilisé est fortement orienté dans la direction longitudinale :

$$[0/-45/90_2/45/90_2/-45/90/45/90_2/-45/0/45/90]_s$$

L'éprouvette de matage a été découpée perpendiculairement dans la même plaque. L'empilement est donc tourné de 90° par rapport à celui des éprouvettes de traction trouée :

$$[90/45/0_2/-45/0_2/45/0/-45/0_2/45/90/-45/0]_s$$

Ces empilements respectent les règles de conception.

La stratégie de calcul développée au Chapitre VIII est appliquée dans le but de valider le modèle fin à partir de la comparaison entre les efforts à rupture prévus par la simulation et mesurés expérimentalement. Les propriétés matériaux employées proviennent de [Huchette 05]. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau IX-6. Simulation et expérience s'avèrent en bon accord, avec un écart maximal des prévisions EF par rapport aux essais de l'ordre de 15 % pour la traction trouée et 17 % en matage. Soulignons que les calculs n'ont fait l'objet d'aucun recalage.

Diamètre du trou D (mm)	Configuration de traction trouée, force à rupture		Configuration de matage, effort au pic de matage	
	Essai (kN)	EF (kN)	Essai (kN)	EF (kN)
7,94	97	112	65*	54
9,52	89	98		
12,70	80	90		

* Rupture finale en clivage : 76,4 kN

Tableau IX-6 : Comparaison des forces à ruptures expérimentales et des résultats de simulation.

IX.2.3 APPLICATION A LA PREVISION DE LA RUPTURE D'UNE JONCTION COMPLEXE

La jonction considérée a été fournie par EADS/IW dans le cadre du programme Americo. Il s'agit d'une jonction générique impliquant trois panneaux composites et des ferrures en alliage léger. La liaison est schématisée sur la Figure IX-7. On s'intéresse à la tenue du Panneau 1, réalisé en T700/M21, dont l'empilement comporte quarante-six plis :

$$[0/-45/0/45_2/0/-45_2/0/45/0_3/45/90/-45/0_2/45/0_2/-45/90]_s$$

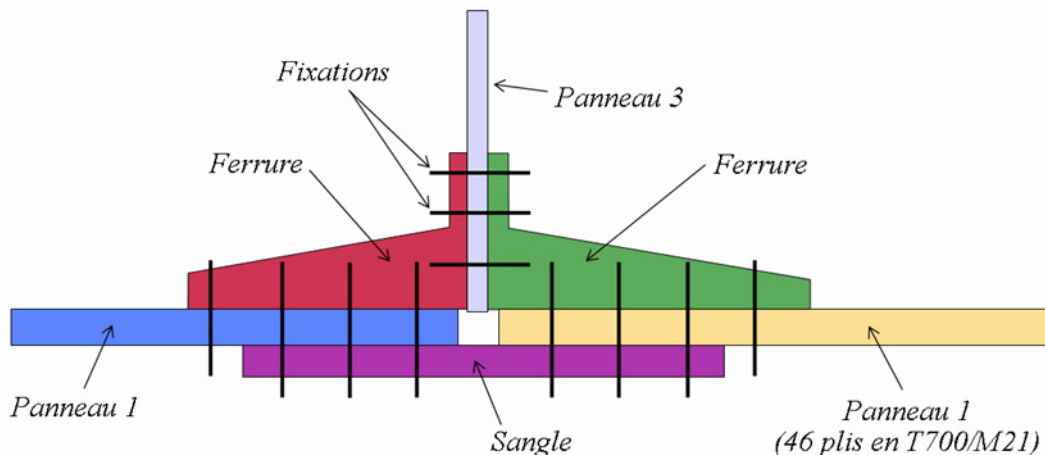


Figure IX-7 : Description de la jonction considérée - source Americo.

La jonction est sollicitée en cisaillement dans un double cadre métallique. Le maillage EF Samcef et les efforts imposés sont représentés en Figure IX-8.

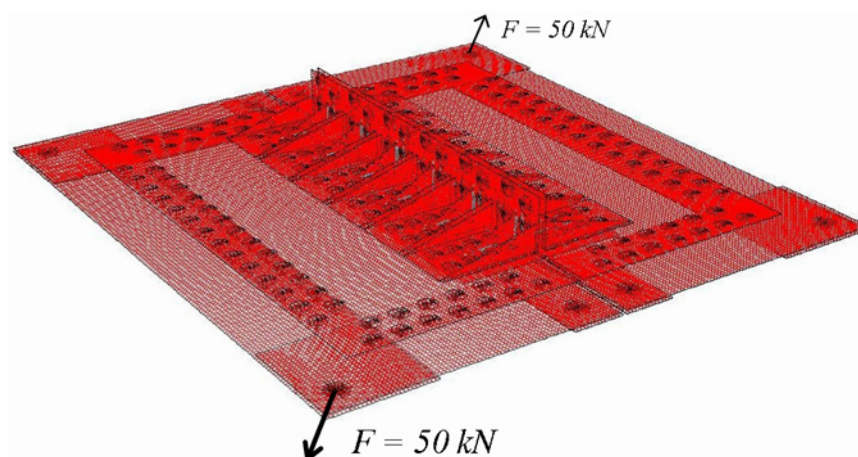


Figure IX-8 : Maillage de la jonction et de l'outillage d'essai. Visualisation des efforts imposés.

IX.2.3.a Résultats du calcul global

Le calcul global, linéaire, est réalisé dans Samcef. Le temps de calcul total est d'environ 2 h. Les flux d'efforts dans les éléments et les réactions au niveau des ressorts représentant les fixations sont post-traités dans Matlab. On s'intéresse ici à la tenue des fixations constitutives de la jonction entre le Panneau 1 et les ferrures (les fixations liant le Panneau 1 à l'outillage ne sont pas post-traitées). La Figure IX-9 présente la déformée obtenue pour la jonction complète. On remarque une légère flexion des panneaux. Ici, la flexion est suffisamment faible pour être négligée. Néanmoins, de façon générale, la prise en compte des moments dans les calculs d'assemblage constitue aujourd'hui un problème ouvert.

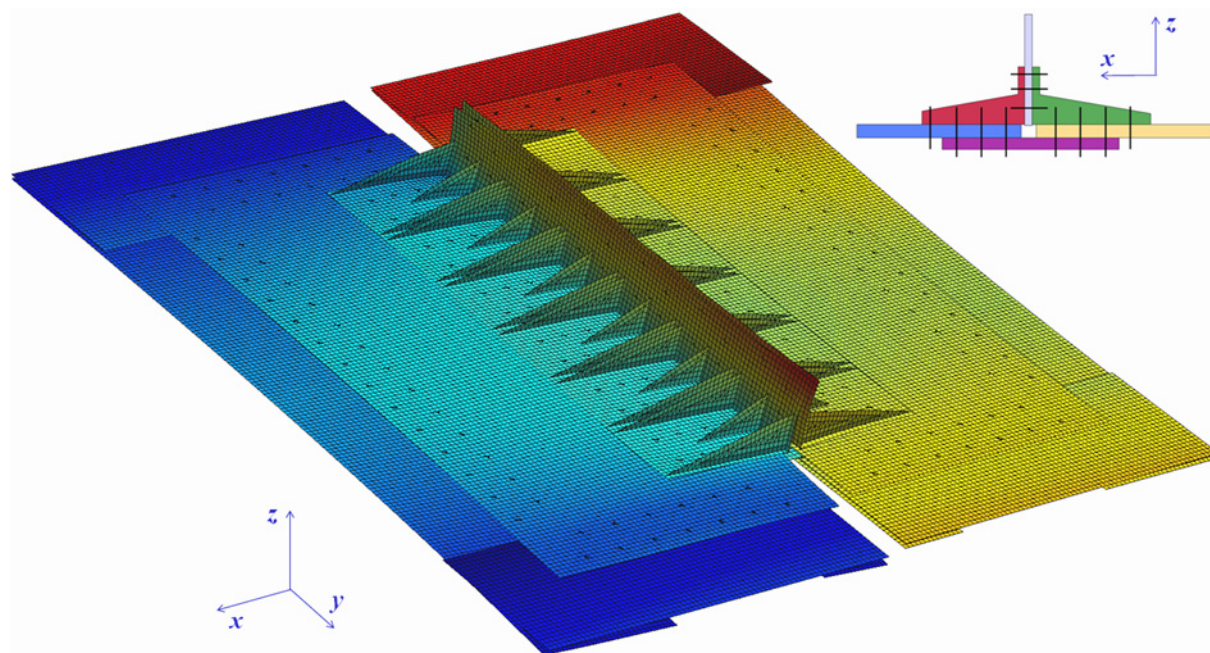


Figure IX-9 : Visualisation de la déformée du panneau (facteur de magnification : 200). Les couleurs correspondent aux déplacements selon la direction y .

Les flux passants dans le Panneau 1 et les efforts transférés par les fixations sont extraits du calcul global. La Figure IX-10 illustre la distribution des flux de cisaillement (cartographie en couleur) dans le Panneau 1 et des efforts de matage entre les fixations (vecteurs). La fixation la plus sollicitée de la jonction entre le Panneau 1 et les ferrures est repérée en rouge sur la figure.

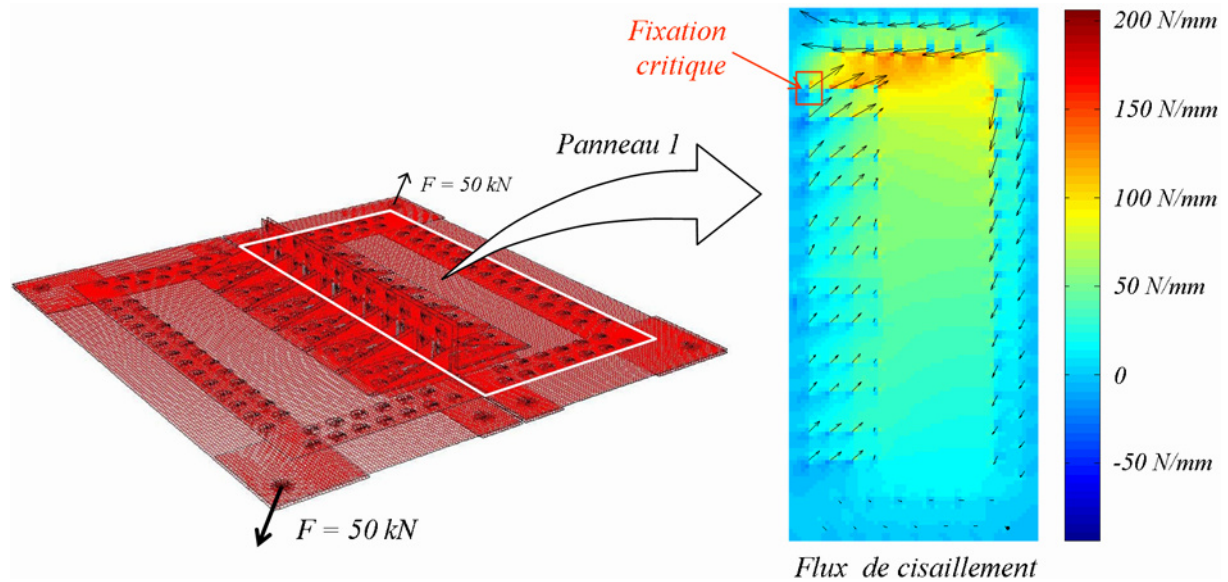


Figure IX-10 : Distribution des efforts dans le Panneau 1, extraite du calcul global.

IX.2.3.b Essais virtuels pour l'empilement du Panneau 1

Les distributions d'effort dans la jonction sont fournies par le calcul global. Il s'agit maintenant de réaliser les essais virtuels permettant d'identifier les coefficients K_t , K_m et les résistances σ_r et σ_{Rm} . Les coefficients K_t et K_m sont définis par l'expression IX-1. Dans le cas d'un effort passant de traction, le coefficient K_t s'écrit, à rupture :

$$K_t = \sigma_r / \sigma_\infty \quad (\text{IX-3})$$

Dans le cas d'un effort de matage pur, le coefficient K_m est obtenu par l'expression :

$$K_t \times K_m = \sigma_r / \sigma_{Rm} \quad (\text{IX-4})$$

L'empilement et les paramètres géométriques étant fixés ($w = 71,5$ mm, $D = 14,3$ mm), il reste à tenir compte de l'orientation des efforts par rapport à l'empilement. Les configurations des essais virtuels réalisés sont présentées sur la Figure IX-11. Pour chacune de ces configurations, la simulation est répétée cinq fois, pour cinq valeurs de l'angle β caractérisant la rotation de l'empilement par rapport au repère global. Les résultats obtenus sont récapitulés dans le Tableau IX-7.

Les essais virtuels sont réalisés en valeurs moyennes pour les propriétés matériaux. Pour tout autre valeur de l'angle β , les coefficients K_t , K_m et les résistances σ_r et σ_{Rm} sont extrapolés à partir des résultats du Tableau IX-7. Le temps de calcul moyen est d'environ 24 h pour les simulations de matage, 10 h en traction trouée, et 1 min en plaque pleine. Par souci de cohérence, tous les calculs sont effectués avec la même loi de comportement.

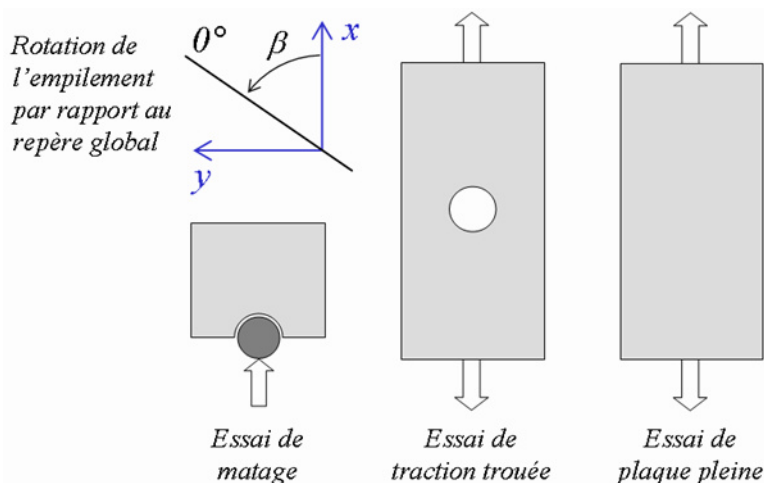


Figure IX-11 : Configuration des essais virtuels nécessaires pour alimenter les modèles simplifiés de réanalyse locale. Définition de l'angle β caractérisant la rotation de l'empilement par rapport au repère global.

β	σ_{Rm} (MPa)	σ_{∞} (MPa)	σ_r (MPa)	K_t^*	$K_t \times K_m$
0°	657	490	1200	2,45	1,83
22,5°	570	419	1044	2,49	1,83
45°	530	294	679	2,31	1,28
75,5°	479	284	565	1,99	1,18
90°	433	274	471	1,72	1,09

* Ici, le coefficient de trou est uniquement identifié en traction.

Tableau IX-7 : Résultats des essais virtuels. Contraintes à rupture pour les configurations d'essais virtuels en fonction de la rotation de l'empilement par rapport au repère global. Coefficients de trou et de matage obtenus.

IX.2.3.c Estimation de la tenue de la jonction

Les flux d'efforts passants moyens N_x , N_y et N_{xy} au niveau de la fixation critique, et l'effort de matage transféré F_m , sont les suivants :

$$N_x = 10,8 \text{ N/mm}, N_y = 51,0 \text{ N/mm} \text{ et } N_{xy} = 32,1 \text{ N/mm},$$

$$F_m = 7.24 \text{ kN avec } \beta = 38,8^\circ.$$

Au final, après réanalyse locale, on obtient un effort à rupture prévu de 1390 kN. En pratique, la charge à rupture expérimentale, communiquée par EADS/IW est de 1260 kN. Le calcul retourne donc le bon ordre de grandeur.

Il s'agit malheureusement du seul résultat expérimental fourni dans le cadre du projet Americo. Pourtant, on aimerait vérifier, par exemple, que l'on a bien isolé par le calcul la bonne fixation critique, malgré un modèle global de la liaison très approximatif. En pratique, dans Americo, les différentes équipes n'étaient pas allés très loin dans l'analyse de ce démonstrateur, en raison de sa trop grande complexité. Maintenant que l'on dispose d'une stratégie adéquate et des modèles nécessaires, nous aimerions aller plus loin. Il faudrait pour cela rassembler l'ensemble des données expérimentales disponibles.

IX.3 DISCUSSION

Avant même de parler d'optimisation, la difficulté majeure pour la conception des assemblages dans les structures composites provient de la simulation du comportement et de la rupture des stratifiés sous une sollicitation combinée d'effort passant et de matage. Afin de contourner cette difficulté, la stratégie de calcul industrielle, consiste à estimer la répartition des efforts dans la jonction à partir d'un calcul global peu détaillé. Les efforts passant et transférés au niveau des fixations potentiellement critiques sont réinjectés dans un second temps pour la réanalyse locale de leur tenue. Les modèles employés à ce niveau sont essentiellement empiriques, interdisant ainsi toute tentative d'optimisation des empilements.

Pour remédier à cette limitation, nous proposons d'enrichir les bases de données expérimentales des résultats obtenus par essais virtuels. Le modèle fin mis au point dans le chapitre précédent remplit cet office de façon satisfaisante et ouvre des perspectives prometteuses, alors que nous ne disposions d'aucun modèle adapté au début de ces travaux de thèse. L'exemple de la jonction générique EADS traité dans ce chapitre démontre l'applicabilité de cette stratégie sur un élément de structure industriel de grande complexité géométrique.

Nous pouvons donc affirmer que nous avons accompli un pas significatif vers l'optimisation des zones d'assemblages dans les structures composites, par rapport au peu de travaux publiés en la matière². L'optimisation des empilements pour les assemblages semble maintenant accessible à court terme. Les résultats obtenus dans la section précédente sont très encourageants. Il nous semble qu'avec un peu de temps supplémentaire, il est possible d'obtenir des résultats remarquables.

Par exemple, l'optimisation de la jonction EADS est maintenant à portée de main. Estimons les coûts de calcul associés. Supposons que l'on souhaite maximiser la tenue de l'assemblage en jouant sur l'empilement du Panneau 1, à nombre de plis et matériau fixé, pour des empilements respectant les règles de conception et pas de discrétisation de 45°. Au niveau global, il faut identifier des métamodèles pour les champs N_x , N_y et N_{xy} dans le panneau et les efforts transférés au niveau de chaque fixation. Ces métamodèles doivent transcrire l'influence des cinq modules de rigidité A_{11} , A_{22} , D_{11} , D_{22} et D_{16} . Au niveau local, il faut construire les abaques des coefficients K_t , K_m et des résistances σ_r et σ_{Rm} en fonction de l'empilement et de son orientation par rapport au repère global. Dans ce cas, les métamodèles doivent transcrire l'influence des cinq modules précédents et de l'angle β . Sur la base d'un nombre de points d'apprentissage égal à six fois le nombre de variables, plus trois configurations extrêmes, ce sont trente-trois calculs EF qui sont nécessaires au niveau global, et trente-neuf au niveau local, pour chacune des trois configurations d'essais virtuels (Figure IX-11). Le temps de calcul total est donc de l'ordre de 1392 h, soit 58 jours. Il s'agit là d'un temps de calcul important pour un seul ordinateur, mais facile à réduire à une seule journée (le temps unitaire maximal) en répartissant les calculs sur un cluster.

² A notre connaissance et au moment où nous écrivons ces lignes, il existe une seule étude publiée sur l'optimisation numérique des empilements. Dans [Kradinov 07b], les auteurs utilisent un AG pour maximiser la résistance d'une jonction en simple recouvrement et à huit fixations, en jouant simultanément sur l'empilement la rigidité, le diamètre et la disposition des boulons. La tenue de l'assemblage est calculée par une méthode analytique complexe [Kradinov 07a].

Les autres travaux relevés dans la bibliographie concernent plus souvent des améliorations technologiques que l'optimisation d'empilement de plis UD. Par exemple [Crosky 06] examine l'apport du placement de fibre selon les principaux chemins d'effort pour maximiser la tenue au matage d'une plaque composite. Ces travaux sont à la fois numériques et expérimentaux.

D'autres auteurs, enfin, cherchent à optimiser le positionnement des fibres afin de minimiser les surcontraintes en bord de trou dans des plaques perforées [Venkataraman 03 ; Huang 03 ; Cho 07].

Conclusions et perspectives

Ma thèse constitue pour l'unité de Modélisation des Structures Composites (MSC) de l'ONERA un premier pas vers l'optimisation des structures composites. L'objectif initial était de mettre en place une première démarche d'optimisation, puis de progresser vers des applications de plus en plus complexes et proches des préoccupations des bureaux d'études, en s'appuyant le plus largement possible sur les développements réalisés dans le cadre du programme Americo pour la modélisation des structures composites. Cet objectif est aujourd'hui largement atteint, ce que nous montrons par l'exemple dans ce mémoire, pour l'optimisation de structures composites en zone courante (tenue au flambement et ruine de panneaux raidis) et zones singulières (assemblages boulonnés).

Pour y parvenir, nous avons réalisé un très large travail de synthèse, afin d'explorer chaque facette du sujet, d'inventorier (sans pour autant prétendre être exhaustif) les méthodes et outils les plus prometteurs et, éventuellement, d'en identifier les insuffisances. Sur cette base, régulièrement réactualisée, nous avons agencé les différents éléments en une stratégie globale cohérente, combinant un algorithme d'optimisation et des démarches élaborées, pour le calcul de structures complexes. L'algorithme d'optimisation est générique à tous les problèmes considérés, mais les démarches de calcul sont particulières, en ce sens nous parlons de stratégies d'optimisation au pluriel, car la stratégie globale de résolution est intimement liée au problème considéré. Ces stratégies intègrent des développements personnels, réalisés dans le but de remédier aux principales insuffisances des méthodes inventoriées, autour desquels s'articulent des outils dont nous sommes utilisateurs.

Les principales insuffisances inventoriées en début de thèse portaient sur la démarche d'optimisation des empilements et les méthodes de calcul des assemblages boulonnés dans les structures composites. Nous avons été amenés par la suite, à une réflexion sur le bon usage des méthodes d'approximation globale pour la réduction des temps de calcul. Enfin, notre dernier axe de recherche a porté sur la transition de problèmes idéalisés aux problèmes pratiques rencontrés par les bureaux d'études.

Par rapport aux méthodes d'optimisation des empilements publiées, nous formulons deux principales critiques. La première porte sur l'insuffisance des efforts réalisés pour adapter les algorithmes et démarches d'optimisation aux spécificités des structures composites. En effet, trop souvent, les méthodes proposées consistent en l'application directe d'algorithmes généraux à l'optimisation des empilements. Pourtant, de nombreux travaux de recherche du domaine de l'optimisation soulignent que la spécialisation des algorithmes permet d'accroître considérablement leur efficacité pour la gamme de problèmes considérés.

Par rapport aux structures métalliques usuelles, la spécificité des structures composites stratifiées qui font l'objet de cette étude provient de la difficulté à dissocier les échelles du matériau et de la structure. À des fins de dimensionnement, les composites sont caractérisés à l'échelle du pli unidirectionnel (échelle mésoscopique). Or, le matériau final correspond à la superposition de plusieurs plis. Le nombre de plis N , leurs orientations respectives θ_i et l'ordre d'empilement sont autant de variables de définition du matériau dont il faut explicitement tenir compte pour la conception de la structure. Ces variables sont nombreuses, discrètes et il est difficile de dégager la régularité des

relations entre ces entrées et des fonctions-objectif définies au niveau de la structure (rigidité, flambement, rupture, etc.). Le problème d'optimisation résultant est un problème complexe, combinatoire et de dimension importante. Cependant, la mécanique offre des variables intermédiaires permettant de mettre en évidence la régularité du problème. Celles-ci correspondent aux rigidités du stratifié (échelle macroscopique), qui décrivent précisément, et avec un nombre très réduit de paramètres, le comportement élastique du matériau et la distribution des contraintes entre les plis. De surcroît, le calcul, par la Théorie Classique des Stratifiés (CLT), de la matrice de rigidité macroscopique du stratifié à partir des propriétés du pli unidirectionnel et de l'empilement est quasi-instantané (alors que le cheminement inverse constitue déjà un problème d'optimisation délicat). Afin d'exploiter au mieux les possibilités offertes par ces variables intermédiaires, nous avons développé un Algorithme Evolutionnaire (AE), pour l'optimisation des empilements, dont la première originalité réside dans la présélection systématique des solutions sur la base de leurs rigidités. Nous proposons ainsi une méthode efficace pour la constitution de la population initiale, basée sur la constitution d'un plan d'expérience (de type Maximin) dans l'espace des rigidités. En cours de recherche, la présélection permet de contrôler efficacement la transition entre exploration de l'espace de décision et intensification de la recherche autour des meilleures solutions rencontrées. De plus, l'algorithme offre la possibilité d'imposer n'importe quelle règle de conception des empilements, soit directement au niveau des opérateurs génétiques, lorsque la règle est formulée sur l'empilement, soit par la biais de la présélection, lorsqu'elle est formulée sur la matrice de rigidité du stratifié.

La seconde critique que nous formulons sur la bibliographie est relative au manque d'études faisant intervenir explicitement la notion de compromis entre des objectifs multiples et potentiellement antagonistes. L'optimisation structurale est pourtant intrinsèquement multiobjectif. Chaque solution correspond à un compromis entre les objectifs. Ce sont donc des compromis qu'il faut classer. Or, en optimisation composite, ce point est trop souvent éludé, soit en se focalisant sur un objectif unique, soit en présupposant du compromis final (par exemple par la pondération des fonctions-objectif) sans pour autant évaluer les conséquences de ce choix. Pourtant, le domaine de l'optimisation multiobjectif est aujourd'hui riche de méthodes variées et performantes. En s'appuyant sur deux algorithmes de référence dans ce domaine (NSGA-II et SPEA2), nous avons choisi pour nos développements de réaliser un AE multiobjectif, basé sur la notion d'optimalité de Pareto. Le principal intérêt de ce type d'algorithme est de converger vers un ensemble de solutions, représentatif de la palette réelle des meilleurs compromis entre les objectifs du problème, parmi lesquels le concepteur se voit offert la décision finale.

L'efficacité de l'algorithme final et les apports des différents éléments qui le constituent sont quantifiés et démontrés, par rapport à un algorithme génétique classique, sur un problème de maximisation de la tenue au flambement d'une plaque stratifiée pour deux cas de charge. En matière d'algorithmes pour l'optimisation d'empilements, nous estimons à ce stade que le sujet est suffisamment maîtrisé. L'algorithme que nous avons développé est performant, aisément modulable et bien plus adapté à l'optimisation des empilements que la plupart des algorithmes d'optimisation publiés. Certes, de multiples possibilités d'améliorations sont encore envisageables, mais s'il reste des verrous à lever pour l'optimisation de structures composites industrielles, ils ne relèvent plus des seuls algorithmes d'optimisation.

En matière de calcul des jonctions boulonnées, la principale carence extraite de la bibliographie portait sur la prévision de la rupture des plaques composites. En effet, la démarche industrielle pour l'analyse de la tenue des assemblages est essentiellement basée sur des données empiriques, restreintes aux stratifications usuelles, donc insuffisantes pour l'optimisation des empilements. Les

modèles fins proposés dans la littérature sont, quant à eux, trop coûteux et insuffisamment fiables et précis pour l'optimisation numérique des assemblages. Pourtant, la comparaison des travaux numériques et expérimentaux publiés souffre selon nous d'une incohérence majeure. Là où les travaux expérimentaux sont unanimes pour souligner l'importance des délaminages dans le matage du stratifié, aucune étude numérique, à notre connaissance et au moment d'écrire ces lignes, ne rend compte de l'influence des délaminages sur le comportement de l'assemblage. Afin de remédier à cette lacune, nous avons développé un modèle fin, conciliant une approche progressive multiéchelle de la rupture du stratifié et des éléments de zone cohésive pour capturer l'amorce des délaminages. Les simulations réalisées sont coûteuses, mais la comparaison avec des résultats expérimentaux est probante, pour des éprouvettes en T300/914 ou en T700/M21, aussi bien pour la rupture en matage que pour la rupture en traction nette et ce, pour diverses configurations d'essais (matage, combinaison de matage et d'effort passant, traction trouée et traction trouée habitée). Ce modèle est utilisé pour rechercher l'empilement qui maximise la tenue au matage d'un assemblage à une fixation. En parallèle, afin d'exploiter l'apport de ces simulations pour l'optimisation d'une jonction complexe, nous proposons de réaliser des essais virtuels afin de compléter les bases de données expérimentales et d'alimenter les modèles semi-empiriques nécessaires pour l'analyse rapide de la tenue de chaque fixations. Nous illustrons cette approche par la prévision de la rupture d'une jonction générique comportant une centaine de fixations, fournie par EADS/IW dans le cadre du programme Americo.

A ce stade, l'optimisation d'une jonction complexe est à portée de main. Algorithme d'optimisation et démarche de calcul multiniveau sont en place, ce qu'il manque, c'est la confiance nécessaire dans la simulation. Pour accroître cette confiance, c'est toujours plus de physique qu'il faut intégrer dans les modèles. Le modèle fin que nous proposons constitue en la matière une avancée très significative qui mérite d'être davantage mûrie et validée plus avant. De surcroît, nous avons montré l'intérêt d'une démarche de "virtual testing" pour la conception de structures composites. En effet, l'analyse des zones singulières (assemblages, mais aussi perforations, reprises de plis, etc.) est souvent réalisée à l'aide de modèles semi-empiriques largement recalés sur les quelques empilements testés expérimentalement. La généralisation de ces modèles à des empilements quelconque, condition *sine qua non* pour une conception optimisée, est réalisable par des essais numériques, comme nous l'avons montré pour les assemblages.

Appliquer un algorithme évolutionnaire à la résolution d'un problème d'optimisation structurale soulève inévitablement le problème des coûts de calcul lorsque le coût unitaire d'évaluation des fonctions-objectif est un tant soit peu important (le Tableau 1 illustre ce propos dans le cas du flambement). Afin de contenir ces coûts de calcul dans un temps total acceptable, nous avons repris la démarche progressive d'approximation locale mise en place dans la thèse de Y. Rollet [Rollet 07] pour l'analyse de variabilité et l'appliquons à l'approximation globale des fonctions-objectif et des contraintes d'optimisation. Cette démarche efficace est basée sur un processus itératif d'identification, validation ou rejet, et éventuellement complexification des métamodèles, et enrichissement de l'ensemble d'identification. Néanmoins, l'approximation globale des objectifs s'avère plus exigeante que l'estimation de leur variations locales autour d'une solution nominale, car le domaine de variation des variables est de bien plus grande taille. Afin de surmonter cette difficulté, nous identifions les métamodèles directement à partir des modules de rigidité des stratifiés. Le nombre de variables et, par conséquent, le nombre de points nécessaire à l'apprentissage du métamodèle, s'en trouvent considérablement réduits. En outre, la relation entre les modules de rigidité du stratifié et les fonctions-objectif est bien plus régulière que la relation directe entre les orientations de plis et les

objectifs. Le plan d'expérience est défini dans l'espace des rigidités. Dans cet espace, les bornes du domaine réalisable sont connues. Ajouter ces bornes à l'ensemble d'identification permet de contrôler l'approximation aux frontières du domaine réalisable. Ce travail effectué, "tendre" une interpolation linéaire sur les points d'identification devient une manière simple et efficace de dégrossir le problème, avant d'envisager la mise en œuvre de techniques d'approximation plus complexes.

En la matière, nous avons démontré l'applicabilité de la méthode sur l'exemple de l'optimisation du panneau raidi et quantifié les gains en temps de calcul. L'usage de métamodèles induit un transfert des difficultés. Les problématiques de la précision et de la parcimonie de l'algorithme d'optimisation se voient ainsi reportées sur l'identification des métamodèles, qui concentre l'essentiel des coûts de calcul, et de leur précision. De façon générale, la mécanique suppose une certaine régularité des fonctions-objectif, ce qui simplifie le travail d'approximation. Néanmoins, certaines fonctions-objectif regroupent plusieurs modes ou mécanismes élémentaires. Ces fonctions sont le plus souvent non-dérivables et éventuellement discontinues, ce qui les rend difficiles à approcher. Dans ce cas, il faut, dans la mesure du possible, distinguer ces modes et les approximer séparément pour de meilleurs résultats. Il s'agit là d'un problème très technique, mais qui constitue un verrou important pour l'optimisation de structures complexes dans la mesure où l'approximation des modèles est un élément fondamental de la stratégie mise en place. Les travaux entrepris avec F-H Leroy sur la distinction des modes de flambement vont ainsi se prolonger au-delà de cette thèse.

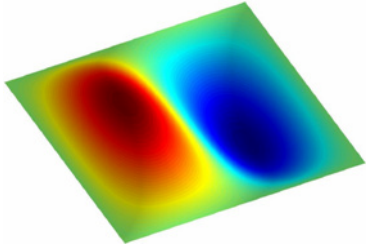
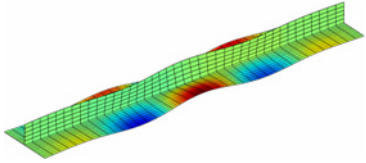
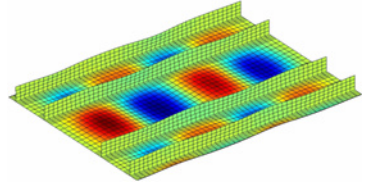
Type de structure	Temps de calcul unitaire (un cas de charge)	Temps de calcul pour l'optimisation directe (1)	Temps de calcul pour l'optimisation à partir de métamodèles
Plaque rectangulaire 	Modèle orthotrope : $\ll 1$ s	~ 5 min	~ 5 min
	Modèle EF, analyse linéaire du flambement : ~ 5 s	4 h 10 min	Identification des métamodèles : ~ 6 min Optimisation : ~ 5 min
Super-raideur 	Modèle EF, analyse linéaire du flambement : ~ 30 s	~ 25 h	Identification des métamodèles (2) : < 30 min Optimisation : ~ 5 min
Panneau raidi 	Modèle EF, analyse linéaire du flambement : ~ 5 min	~ 250 h	Identification des métamodèles (2) : < 6 h Optimisation : ~ 5 min
(1) sur la base de 3000 évaluations des fonctions-objectif. (2) sur la base de 70 calculs d'identification.		L'usage de métamodèles devient intéressant pour les temps de calcul unitaires importants	

Tableau 1 : Différentes complexités de structures pour le problème de maximisation de la force critique de flambement. Les temps de calcul indiqués correspondent à des ordres de grandeur évalués dans des conditions précises, mais ils mettent clairement en évidence l'intérêt d'utiliser des métamodèles pour la réduction des temps de calcul. Néanmoins, dans tous ces problèmes, il faut traiter le problème des changements de mode pour l'apprentissage de l'approximation de la force critique.

La transition des problèmes théoriques idéalisés aux problèmes pratiques de bureaux d'études suppose de tenir compte, d'une part, de la multiplicité des cas de charges et, d'autre part, de l'influence des incertitudes sur l'optimisation. Ces deux aspects contribuent à accroître les temps de calcul. Lorsque les cas de charges sont multiples, tout l'enjeu consiste à identifier le plus rapidement possible et avec une confiance maximale les chargements dimensionnants pour concentrer l'effort de calcul sur ceux-ci. Le problème des incertitudes est bien plus vaste et dépasse largement le cadre de cette thèse. De façon générale, les incertitudes questionnent sur l'adéquation des structures réelles à leurs spécification et sur l'adéquation des modèles à la réalité (ce qui est le cas pour le calcul d'assemblages). Assurer la satisfaction des contraintes, compte tenu des incertitudes, est primordial. En ce qui concerne le classement des solutions, prendre en compte les incertitudes revient à diminuer la "résolution" du classement pour ne plus discriminer des solutions trop proches compte tenu de la variabilité de leurs performances.

Introduire des considérations de robustesse dans l'optimisation suppose un coût de calcul supplémentaire. Cependant, nous montrons par nos travaux qu'il est possible de minimiser ces coûts en fonction du degré de précision désiré dans la description des effets des incertitudes. Dans ce mémoire, seules sont considérées des incertitudes globales, observées d'une pièce à l'autre (mais uniformes sur une même pièce), dont nous estimons que l'influence est de premier ordre. Il serait néanmoins intéressant, à terme, de tenir compte de l'influence de la variabilité spatiale s'exerçant au sein d'une même pièce. Il pourrait, par exemple, être envisageable d'intégrer aux objectifs du problème d'optimisation robuste la maximisation de la tolérance de la structure aux défauts. En effet, la tolérance aux défauts constitue un vrai problème pour la conception des structures composites, souvent dimensionnant. Il s'agit là d'un thème de recherche considéré comme majeur dans l'unité MSC, pour lequel, encore plus que pour les assemblages, il manque les méthodes de calcul.

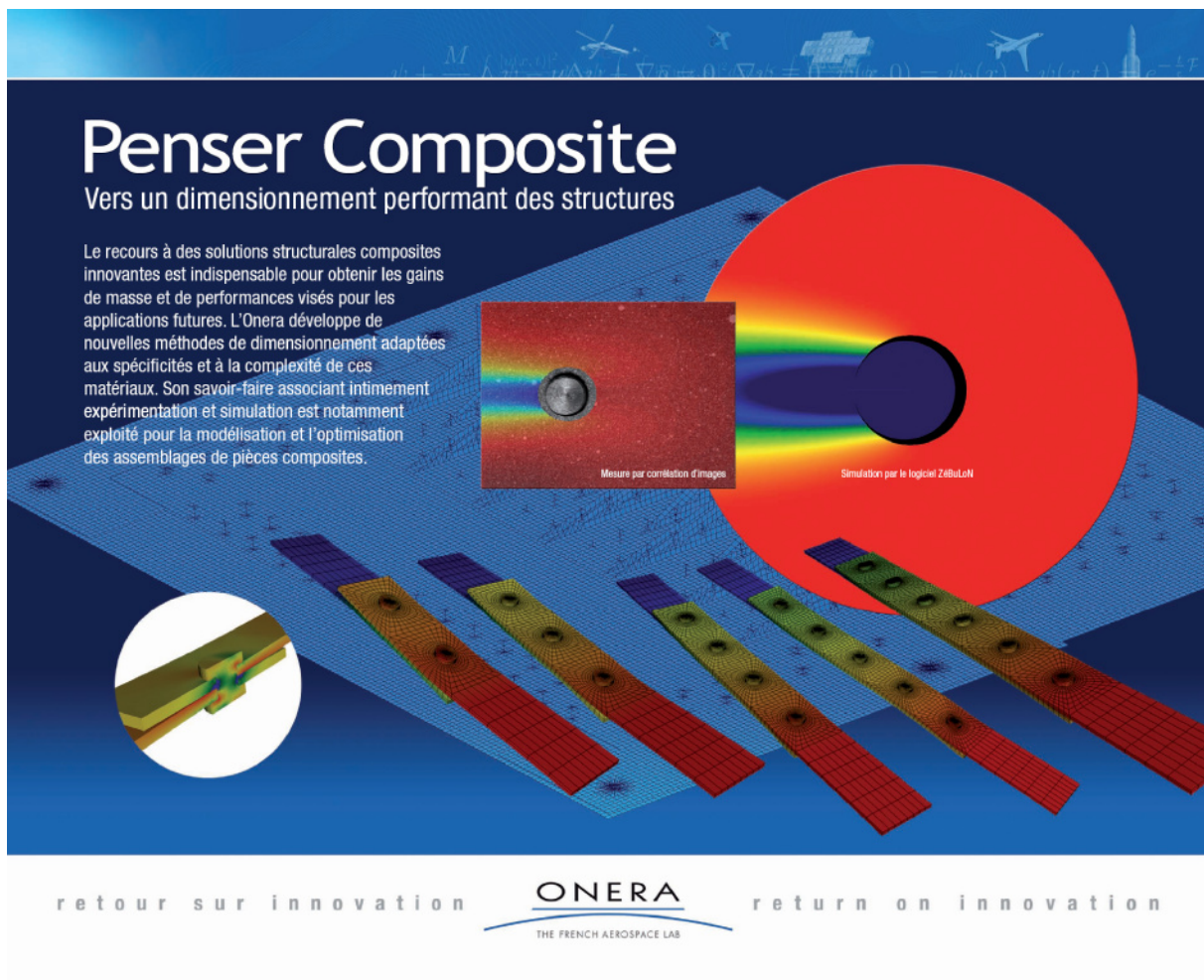
Au final, l'optimisation telle que nous la pratiquons dans cette thèse correspond à une démarche d'amélioration. Il s'agit, pour un coût de calcul impart, d'améliorer significativement une solution nominale issue d'un processus de dimensionnement classique. Il n'y a aucune garantie d'avoir atteint l'optimum théorique du problème. Les méthodes que nous développons visent à s'en rapprocher au mieux dans la plupart des cas. Pour ce faire, nous avons cherché à multiplier les indicateurs afin de détecter de façon interactive l'échec d'un maillon du processus global, le plus souvent lié à de trop grandes incertitudes ou imprécisions au niveau des modèles ou de leur approximation.

La conception des structures composites repose aujourd'hui essentiellement sur le savoir-faire des bureaux d'étude. Les outils et méthodes que nous développons dans ce mémoire visent à poser les bases de futurs outils d'aide à la conception des structures composites. Si ces outils sont d'ores et déjà utilisables, on est bien loin de pouvoir les utiliser en boîte noire, sans une compréhension et une pratique minimale des outils d'optimisation et d'approximation des modèles sous-jacents. En effet, dans la pratique, chaque gamme de problèmes requiert une stratégie de résolution spécialement adaptée. C'est par contre un but vers lequel il faut tendre. Ceci suppose d'impliquer à la fois l'industriel, pour la formulation de ses problèmes et son savoir-faire, les experts en optimisation des structures composites et, enfin, les développeurs de codes afin d'obtenir des outils performants intégrés aux codes de calcul. En outre, ces outils supposent d'être englobés dans une couche supérieure d'aide à la décision, afin de guider l'utilisateur dans les phases de définition du problème et de post-traitement des résultats. Là encore, c'est la définition des besoins de l'utilisateur, qui est primordiale. A mon sens, l'essentiel du chemin qui reste à faire pour la conception de structures

composites stratifiées aux empilements optimisés réside là, dans la combinaison des méthodes de recherche et du savoir-faire industriel, pour le développement d'outils fiables et adaptés.

La démarche d'optimisation doit aussi être enrichie et adaptée pour suivre les évolutions technologiques en matière de matériaux composites : matériaux tissés dans le plan, stratifiés cousus dans l'épaisseur, renforts 3D, placement de fibres, etc. A terme, il faudra aussi prendre en compte les procédés d'élaboration et l'usinage.

Il reste encore un long chemin à parcourir pour la conception de structures réellement "pensées composites" et optimisées sur le plan des coûts, des performances et de la sécurité. La recherche des meilleurs compromis prend là tout son sens.



Poster réalisé pour la direction de la communication de l'ONERA à partir de ces travaux.

Bibliographie

- [Abouhamze 07] Abouhamze M., Shakeri M., "Multi-objective stacking sequence optimization of laminated cylindrical panels using a genetic algorithm and neural networks", *Composite Structures* 81, pp. 253-263, 2007
- [Acar 07] Acar E., Haftka R.T., Johnson T.F., "Tradeoff of uncertainty reduction mechanisms for reducing weight of composite laminates", *Journal of Mechanical Design* 129, 3, pp. 266-274, 2007
- [Adali 96] Adali S., Walker M., Verijenko V.E., "Multiobjective optimization of laminated plates for maximum prebuckling, buckling and postbuckling strength using continuous and discrete ply angles", *Composite Structures* 35, pp. 117-130, 1996
- [Adali 01] Adali S., Verijenko V.E., Richter A., "Minimum sensitivity design of laminated shells under axial load and external pressure", *Composite Structures* 54, pp. 139-142, 2001
- [Adali 03] Adali S., Lene F., Duvaut G., Chiaruttini V., "Optimization of laminated composites subject to uncertain buckling loads", *Composite Structures* 62, pp. 261-269, 2003
- [Adams 04] Adams D.B., Watson L.T., Gürdal Z., Anderson-Cook C.M., "Genetic algorithm optimization and blending of composite laminates by locally reducing laminate thickness", *Advances in Engineering Software* 35, pp. 35-43, 2004
- [Adams 05] Adams D.B., "Optimization Frameworks for Discrete Composite Laminates Stacking Sequences", PhD. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Computer Science and Applications, 2005
- [Ait Brik 05] Ait Brik B., "Méthodologies de conception robuste et d'optimisation dans un contexte de conception d'architectures mécaniques nouvelles en avant projet", Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, 2005
- [Aktas 04] Aktas A., Dirikolu M.H., "An experimental and numerical investigation of strength characteristics of carbon-epoxy pinned-joint plates", *Composites Science and Technology* 64, pp. 1605-1611, 2004
- [Allix 90] Allix O., Ladevèze P., Ledantec E., "Modélisation de l'endommagement du pli élémentaire des composites stratifiés", *JNC7, AMAC*, pp. 443-453, 1990
- [Allix 01] Allix O., "A composite damage meso-model for impact problems", *Composites Science and Technology* 61, pp. 2193-2205, 2001
- [Aluko 08] Aluko, O., Whitworth, H.A., "Analysis of Stress Distribution around Pin Loaded Holes in Orthotropic Plates, *Composite Structures*", 2008, doi: 10.1016/j.compstruct.2008.06.001
- [Andrews 95] Andrews R., Diederich J., Tickle A.B., "Survey and critique of techniques for extracting rules from trained artificial neural networks", *Knowledge-Based Systems* 8, 6, pp. 373-389, 1995
- [Antonio 01] Conceição Antonio C.A., "A hierarchical genetic algorithm for reliability based design of geometrically non-linear composite structures", *Composite Structure* 54, pp. 37-47, 2001
- [Antonio 08] Conceição Antonio C., Hoffbauer L.N., "From local to global importance measures of uncertainty propagation in composite structures", *Composite Structures* 85, pp. 213-255, 2008
- [Bae 04] Bae H-R., Grandhi R.V., Canfield R.A., "An approximation approach for uncertainty quantification using evidence theory", *Reliability Engineering and System Safety* 86, pp. 215-225, 2004

- [Barichard 03] Barichard V., "Approches hybrides pour les problèmes multiobjectifs", Thèse de Doctorat de l'Université d'Angers, 2003
- [Barrau 87] Barrau J.-J., Laroze S., "Calcul des structures en matériaux composites", Masson, Paris, 1987
- [Berro 01] Berro A., "Optimisation multiobjectif et stratégies d'évolution en environnement dynamique", thèse de Doctorat de l'Université des Sciences Sociales de Toulouse, 2001
- [Berthelot 92] Berthelot J.-M., Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures, Masson, Paris, 1992
- [Berthelot 03] J.M. Berthelot, "Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates: Static and fatigue loading", Applied Mechanics Reviews 56, pp. 111-147, 2003
- [Beyer 07] Beyer H.S., Sendhoff B., "Robust optimization - A comprehensive survey", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 196, pp. 3190-3218, 2007
- [Bouhamidi 04] Bouhamidi A., Le Méhauté A., "Radial basis functions under tension", Journal of Approximation Theory 127, 2, pp. 135-154, 2004
- [Branke 00] Branke J., Kaußler T., Schmeck H., "Guidance in Evolutionary Multi-Objective Optimization", Advances in Engineering Software 32, pp. 499-507, 2001
- [Broughton 02] Broughton W.R., Crocker L.E., Gower M.R.L., "Design requirements for Bonded and Bolted Composite Structures", NPL Report MATC(A)65, 2002
- [Camanho 97] Camanho P.P., Matthews F.L., "Stress analysis and strength prediction of mechanically fastened joints in FRP : a review", Composites: Part A, 28A, pp. 529-547, 1997
- [Camanho 99a] Camanho PP, Matthews FL. Delamination onset prediction in mechanically fastened joints in composite laminates. Journal of Composite Materials 33, 10, pp. 906-927, 1999
- [Camanho 99b] Camanho PP, Matthews FL. A progressive damage model for mechanically fastened joints in composite laminates. Journal of Composite Materials 33, 10, pp. 2248-2280, 1999
- [Camanho 06] Camanho P.P., Lambert M., "A design methodology for mechanically fastened joints in laminated composite materials", Composites Science and Technology 66, pp. 3004-3020, 2006
- [Carpentier 05] Carpentier A., Barrau J.-J., Michel L., Grihon S., "Thickness optimisation of composite panels", 9th SAMTECH Users Conference 2005
- [Carpentier 08] Carpentier A., "Optimisation multi-niveaux de panneaux composites", Thèse de Doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 2008
- [Chang 82] Chang FK, Scott RA, Springer GS., "Strength of mechanically fastened composite joints", Journal of Composite Materials 16, pp. 470-94, 1982
- [Chang 84] Chang F.-K, Scott R.A, Springer G.S., "Failure of Composite Laminates Containing Pin Loaded Holes, Method of Solution", Journal of Composite Materials 18, 1984
- [Chen 07] Chen N-Z., Soares C.G., "Reliability assessment for ultimate longitudinal strength of ship hulls composite materials", Probabilistic Engineering Mechanics 22, pp. 330-342, 2007
- [Cho 04] Cho M., Rhee S.Y., "Optimization of laminates with free edges under bounded uncertainty subject to extension, bending and twisting", International Journal of Solids and Structures 41, pp. 227-245, 2004
- [Cho 07] Cho H.K., Rowlands R.E., "Reducing tensile stress concentration in perforated hybrid laminate by genetic algorithm", Composites Science and Technology 67, pp. 2877-2883, 2007
- [Coello 02] Coello C.A.C., "Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art", Computational Methods in Applied. Mechanics and Engineering, 191, pp. 1245-1287, 2002

- [Colette 02] Colette Y., Siarry P., "Optimisation Multiobjectif", Edition Eyrolles, 2002
- [Collings 75] Collings T. A., "The Strength of Bolted Joints in Multi-Directional CFRP Laminates", ARC/CP-1380, 1975. <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/arc/cp/1380.pdf>
- [Conti 96] Conti P., Luparello S., Pasta A., "Layer thickness optimisation in a laminated composite", Composites: Part B, 28B, pp. 309-317, 1997
- [Cramer 68] Cramer C.O., "Load distribution in multiple bolt tension joints", Journal of the Structural Division 94, 5, pp. 1101-1117, 1968
- [Crews 87] Crews J.H., Naik R.A., "Bearing-bypass loading on bolted composite joints", NASA Technical Memorandum 89153, 1987
- [Crosky 06] Crosky A., Kelly D., Li R., Legrand X., Huong N., Ujjin R., "Improvement of bearing strength of laminated composites", Composite Structures 76, pp. 260-271, 2006
- [Dano 00] Dano M.-L., Gendron G, Picard A., "Stress and failure analysis of mechanically fastened joints in composite laminates", Composite Structures 50, pp. 287-296, 2000
- [de Faria 01] de Faria A.R., "Buckling optimization and antioptimization of composite plates: uncertain loading combinations", Int. J. Numer. Meth. Engng, 53, pp. 719-732, 2001
- [de Faria 03] de Faria A.R., De Almeida S.F.M., "Buckling optimization of plates with variable thickness subjected to nonuniform uncertain loads", International Journal of Solids and Structures 40, pp. 3955-3966, 2003
- [de Jong 77] de Jong T., "Stresses around pin-loaded holes in elastically orthotropic or isotropic plates", Journal of Composite Materials 11, pp. 313-331, 1977
- [de Lima 07] Gonçalves de Lima A.M., "Modélisation et optimisation robuste de l'amortissement viscoélastique de systèmes mécaniques", Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté et de l'Université Fédérale d'Uberlândia, Brésil, 2007
- [de Rijck 05] de Rijck J.J.M., "Stress Analysis of Fatigue Cracks in Mechanically Fastened Joints", Thèse de Doctorat de l'université de Delft, Hollande, 2005
- [Deb 00] Deb, K., Pratap, A., Agrawal, S. and Meyarivan, T., "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II", Technical Report No. 2000001. Kanpur: Indian Institute of Technology Kanpur, India, 2000. <http://citeseer.ist.psu.edu/article/deb00fast.html>
- [Deb 00] Deb, K., Pratap, A., Agrawal, S. and Meyarivan, T., "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II", Technical Report No. 2000001. Kanpur: Indian Institute of Technology Kanpur, India, 2000. <http://citeseer.ist.psu.edu/article/deb00fast.html>
- [Deb 04] Deb K., Gupta, H., "Introducing robustness in multiobjective optimization", KanGAL Report No. 20040416, 2004. <http://www.iitk.ac.in/kangal/reports.shtml>
- [Deb 05] Deb K., Gupta, H., "A constraint handling strategy for robust multi-criterion optimization", KanGAL Report No. 2005001, 2005. <http://www.iitk.ac.in/kangal/reports.shtml>
- [Diaconu 02] Diaconu C.G., Sato M., Sekin H., "Feasible Region in General Design Space of Lamination Parameters for Laminated Composites", AIAA Journal 40, 3, March 2002
- [Diaconu 02] Diaconu C.G., Sato M., Sekine H., "Buckling characteristics and layup optimization of long laminated composite cylindrical shells subjected to combined loads using lamination parameters", Composite Structures 58, pp. 423-433, 2002
- [Diaconu 02] Diaconu C.G., Sato M., Sekin H., "Feasible Region in General Design Space of Lamination Parameters for Laminated Composites", AIAA Journal 40, 3, 2002
- [Diaconu 04] Diaconu C.G., Sekine H., " Layup optimization for buckling of laminated composite shells with restricted layer angles", AIAA Journal 42, 10, pp. 2153-2163, 2004
- [Diaconu 05] Diaconu C.G., Weaver P.M., "Approximate Solution and Optimum Design of Compression-Loaded, Postbuckled Laminated Composite Plates", AIAA Journal 43, 4, 2005

- [Diaconu 05] Diaconu C.G., Weaver P.M., "Approximate Solution and Optimum Design of Compression-Loaded, Postbuckled Laminated Composite Plates", *AIAA Journal*, 43, 4, pp. 906-914, 2005
- [Dreo 03] Dréo, J., Pétrowski A., Siarry P., Taillard E., "Métaheuristiques pour l'optimisation difficile", Edition Eyrolles, 2003
- [Ehrgott 00a] Ehrgott M. "Multicriteria Optimization", Springer, 2000
- [Ehrgott 00b] Ehrgott M., Gandibleux X., "A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization", *OR Spektrum* 22, pp. 425-460, 2000
- [Ekh 06] Ekh J., Schön J., "Load transfer in multirow, single shear, composite-to-aluminum lap joints", *Composites Science and Technology* 66, pp. 875-885, 2006
- [Ekh 08] Ekh J., Schön J., "Finite element modeling and optimization of load transfer in multi-fastener joints using structural elements", *Composite Structures* 82, pp. 245-256, 2008
- [Erdal 05] Erdal O., Sonmez F.O., "Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing", *Composite Structures* 71, pp. 45-52, 2005
- [Falzon 00] Falzon B.G., Stevens K.A., Davies G.O., "Postbuckling behaviour of a blade-stiffened composite panel loaded in uniaxial compression", *Composites: Part A*, 31, pp. 459-468, 2000
- [Fishman 95] Fishman G.S., "Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications", Springer-Verlag, 1995
- [Frangopol 03a] Frangopol D.M., Maute K., "Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures", *Composite and Structures* 81, pp. 397-410, 2003
- [Frangopol 03b] Frangopol D.M., Recek S., "Reliability of fiber-reinforced composite laminate plates", *Probabilistic Engineering Mechanics* 18, pp. 119-137, 2003
- [Fukuda 00] Fukuda, K.: Polyhedral computation FAQ, 2000
<http://www.ifor.math.ethz.ch/staff/fukuda>
- [Gay 91] Gay D., Matériaux composites, Hermès, Paris 1991
- [Gendreau 03] Gendreau M., "An introduction to Tabu Search", dans [Glover 03], pp. 37-54
- [Glover 86] Glover F., "Future paths for integer programming and links to artificial intelligence", *Computers and Operations Research* 13, pp. 533-549, 1986
- [Glover 03] Glover F., Kochenberger G.A., "Handbook of Metaheuristics", Kluwer Academic Publishers, 2003
- [Gohorianu 08] Gohorianu G., "Interaction entre les défauts d'usinage et la tenue en matage d'assemblages boulonnés en carbone / époxy", Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse, 2008
- [Goldberg 89] Goldberg D.E., "Genetic algorithms for search, optimization, and machine learning", Addison Wesley, 1989
- [Gosse 01] Gosse J.H., Christensen S., "Strain invariant failure criteria for polymers in composite materials", *AIAA A01-25005*, 2001
- [Grenestedt 93] Grenestedt J.L., Gudmundson P., "Layup Optimization of Composite Material Structures", *Optimal Design with Advanced Materials*, pp. 311-336, 1993
- [Grosset 04] Grosset L., Le Riche R., Haftka R.T., "A Two-Tier Estimation of Distribution Algorithm for Composite Laminate Optimization", *Proceedings of the 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Albany, NY, 2004
- [Guillaumat 05] Guillaumat L., Baudou F., Gomes de Azevedo A-M., Lataillade J-L., "Contribution of the experimental designs for a probabilistic dimensioning of impacted composites", *International Journal of Impact Engineering* 31, pp. 629-641, 2005

-
- [Hajela 92] Hajela P., Lin C-Y., "Genetic search strategies in multicriterion optimal design", *Structural Optimization* 4, pp. 99-107, 1992
- [Hansen 03] Hansen P., Mladenovic N., "Variable Neighborhood Search", dans [Glover 03], pp. 145-184
- [Hart-Smith 76] Hart-Smith L.J., "Bolted Joints in Graphite Epoxy Composites", NASA CR-144899, 1976
- [Hashin 73] Hashin Z., Rotem A., "A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials", *Journal of Composite Materials* 7, pp. 448-464, 1973
- [Hassani 02] Hassani F, Shokrieh M, Lessard L., "A fully non-linear 3-D constitutive relationship for the stress analysis of a pin-loaded composite laminate", *Composites Science and Technology* 62, pp. 429-439, 2002
- [Herencia 07] Herencia J.E., Weaver P.M., Friswell M.I., "Optimisation of Long Anisotropic Laminated Fiber Composite Panels with T-Shaped Stiffeners", *AIAA Journal* 45, 10, 2007
- [Hinterding 98] Hinterding R., Michalewicz Z., "Your brain and my Beauty: Parent matching for constrained optimization", *Proceeding of IEEE International Conference on Computational Intelligence*, pp. 810-815, 1998
- [Hooker 95] Hooker J.N., "Testing Heuristics: We Have It All Wrong", *Journal of Heuristics* 1, pp. 33-42, 1995
- [Huang 03] Huang J., Venkataraman S., Rapoff A. J., Haftka R. T., "Optimization of axisymmetric elastic modulus distributions around a hole for increased strength", *Structural and Multidisciplinary Optimization* 25, pp. 225-236, 2003
- [Huchette 05] Huchette C., "Sur la complémentarité des approches expérimentales et numériques pour la modélisation des mécanismes d'endommagement des composites stratifiés", Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, 2005
- [Husslage 06] Husslage B., "Maximin Designs for Computer Experiments", PhD. Thesis, Tilburg University, ISBN 90 5668 173 7, 2006
- [Huth 84] Huth H., "The influence of fastener flexibility on load transfer and fatigue life predictions for multi-row bolted and riveted joints", Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit, Report No. FB-172, 1984
- [Hyer 85] Hyer MW, Klang EC., "Contact stresses in pin-loaded orthotropic plates", *International Journal of solid Structures* 21, 9, pp. 957-975, 1985
- [larve 97] larve E., "Three-dimensional stress analysis in laminated composites with fasteners based on the B-spline approximation", *Composites: Part A*, 28A, pp. 559-571, 1997
- [Irisarri 05] Irisarri F-X., "Simulation du comportement et des dégradations des assemblages boulonnés dans les structures composites", Rapport de stage de Master Recherche, ENSICA, 2005
- [Irisarri 07] Irisarri F-X., Carrère N., "Cas-test EADS/CCR : étude d'une jonction boulonnée complexe", Rapport Américo C4e, 2007
- [Jeong 00] Jeong H.K., Shenoi R.A., "Probabilistic strength analysis of rectangular FRP plates using Monte Carlo simulation", *Computers and Structures* 76, pp. 219-235, 2000
- [Jin 05] Jin Y., Branke J., "Evolutionary Optimization in Uncertain Environments - A Survey", *IEEE Transactions on evolutionary computation* 9, 3, 2005
- [Jolliffe 86] Jolliffe I., "Principal Component Analysis", Springer, New York, 1986
- [Jones 75] Jones R.M., *Mechanics of composite materials*, McGraw-Hill, 1975
- [Kang 05] Kang J-H., Kim C-G., "Minimum-weight design of compressively loaded composite plates and stiffened panels for postbuckling strength by Genetic Algorithm", *Composite Structures* 69, pp. 239-246, 2005
-

- [Kassapoglou 08] Kassapoglou C., "Composite plates with two concentric layups under compression", *Composites: Part A* 39, pp. 104-112, 2008
- [Kathivarian 07] Kathivarian R., Ganguli R., "Strength design of composite beam using gradient and particle swarm optimization", *Composite Structures* 81, pp. 471-479, 2007
- [Kelly 04] Kelly G, Hallström S., "Bearing strength of carbon fibre/epoxy laminates: effects of bolt-hole clearance", *Composites: Part B*, 35, pp. 331-343, 2004
- [Kere 03] Kere P., Lyly M., Koski J., "Using multicriterion optimization for strength design of composite laminates", *Composite Structures* 62, pp. 329-333, 2003
- [Kim 98] Kim S.J, Hwang J.S, Kim J.H., "Progressive Failure Analysis of Pin-Loaded Laminated Composites Using Penalty Finite Element Method", *AIAA Journal* 36, 1, pp. 75-80, 1998
- [Kim 01] Kim T-U., Sin H-C., "Optimal design of composite laminated plates with the discreteness in ply angles and uncertainty in material properties considered", *Computers and Structures* 79, pp. 2501-2509, 2001
- [Kirkpatrick 83] Kirkpatrick S., Gelatt C., Vecchi M., " Optimization by simulated annealing", *Science*, tome 220, n°4598, pp. 671-680, 1983
- [Kradinov 01] Kradinov V., Barut A., Madenci E., Ambur D.R., "Bolted double-lap composite joints under mechanical and thermal loading", *International Journal of Solids and Structures* 38, pp. 57-75, 2001
- [Kradinov 05] Kradinov V., Madenci E., Ambur D.R., "Bolted lap joints of laminates with varying thickness and metallic inserts", *Composite Structures* 68, pp. 75-85, 2005
- [Kradinov 07a] Kradinov V., Madenci E., Ambur D.R., "Combined in-plane and through-the-thickness analysis for failure prediction of bolted composite joints", *Composite Structures* 77, pp. 127-147, 2007
- [Kradinov 07b] Kradinov V., Madenci E., Ambur D.R., "Application of genetic algorithm for optimum design of bolted composite lap joints", *Composite Structures* 77, pp. 148-159, 2007
- [Kweon 04] Kweon J-H., Ahn H-S, Choi J-H., "A new method to determine the characteristics lengths of composite joints without testing", *Composite Structures* 66, pp. 305-315, 2004
- [Ladevèze 86] Ladevèze P., "Sur la mécanique de l'endommagement des composites", *Comptes rendus des JNC5, Plurals*, pp. 667-683, 1986
- [Ladevèze 00] Ladevèze P., "Constitutive relation error estimators for time-dependent non-linear FE analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188, 4, pp. 775-788, 2000
- [Lamberti 03] Lamberti L., Venkataraman S., Haftka R.T., Johnson T.F., "Preliminary design optimization of stiffened panels using approximate analysis models", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57, 10, pp. 1351-1380, 2003
- [Lanzi 06] Lanzi L., Giavotto V., "Post-buckling optimization of composite stiffened panels: Computations and experiments", *Composite Structures* 73, pp. 208-220, 2006
- [Laumanns 03] Laumanns M., "Analysis and Applications of Evolutionary Multiobjective Optimization Algorithms", PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 2003
- [Laurin 05] Laurin F., "Approche multiéchelle des mécanismes de ruine progressive des matériaux stratifiés et analyse de la tenue de structures composites", Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, 2005
- [Laurin 07] Laurin F., Carrere N., Maire J-F., "A multi-scale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models", *Composites: Part A*, 38, pp. 198-209, 2007
- [Lawlor 02] Lawlor V.P, Stanley W.F, McCarthy M.A., "Characterisation of damage development in bolted composite joints", *Journal of Plastics, Rubber and Composites* 31, 3, pp. 126-133, 2002

-
- [Le Dantec 89] E. Le Dantec, "Contribution à la modélisation du comportement mécanique des composites stratifiés", Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, 1989
- [Le Riche 95] Le Riche R., Knopf-Lenoir C., Haftka R.T., " A Segregated Genetic Algorithm for Constrained Structural Optimization", Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms, San Francisco, CA, pp. 558-565, 1995
- [Le Riche 98] Le Riche R., Gaudin J., "Design of Dimensionally Stable Composites by Evolutionary Optimization", Composite Structures 41, pp. 97-111, 1998
- [Le Riche 07] Le Riche R., Schoenauer M., Sebag M., "Un état des lieux de l'optimisation évolutionnaire et de ses implications en sciences pour l'ingénieur", dans "Modélisation numérique : défis et perspectives, 2nd volume, Traité de Mécanique et Ingénierie des Matériaux", Hermès, pp. 187-259, 2007
- [Lee 07] Lee D.S., Gonzalez L.F., Periaux J., Srinivas K., "Robust design optimisation using multi-objective evolutionary algorithms", Computers and Fluids, 2007, doi:10.1016/j.compfluid.2007.07.011
- [Lemonge 04] Lemonge, A.C.C., Barbosa H.J.C., "An adaptative penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization", International Journal for Numerical Methods in Engineering 59, pp. 703-736, 2004
- [Leroy 06] Leroy F.H., Gueit N., Rollet Y., "Qualification et expérimentations virtuelles : Consolidation des bases de données", Rapport Americo T3.2.4.C5.d, ONERA, 2006
- [Leroy 07] Leroy F.H., Gueit N., Rollet Y., "Apports du virtual testing et des outils statistiques avancés dans l'estimation des valeurs admissibles de dimensionnement", JNC15, Marseille, 2007
- [Lessard 95] Lessard L.B., Shokrieh M.M., "Two-dimensional modeling of composite pinned-joint failure", Journal of Composite Materials 29, pp. 671-697, 1995
- [Liang 03a] Liang C-C., Chen H-W., " Optimum design of fiber-reinforced composite cylindrical skirts for solid rocket cases subjected to buckling and overstressing ", Composites: Part B, 34, pp. 273-284, 2003
- [Liang 03b] Liang C-C., Chen H-W., Jen C-Y., " Optimum design of filament-wound multilayer-sandwich submersible pressure hulls", Ocean Engineering 30, pp. 1941-1967, 2003
- [Lin 00] Lin C-C., Lin C-C., Wang J.T.S., "On some aspects of pin-loaded laminates", International Journal of Solids and Structures 37, pp. 599-65, 2000
- [Liu 01] Liu B., "Two-level optimization of composite wing structures based on panel genetic optimization", PhD Thesis, University of Florida, 2001
- [Liu 06] Liu W., Butler R., Mileham A.R., Green A.J., "Bilevel optimization and postbuckling of highly strained composite stiffened panels", AIAA Journal 44, 11, pp. 2562-2570, 2006
- [Lombardi 98] Lombardi M., Haftka R.T., "Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties", Computational Methods in Applied Mechanics and engineering 157, pp. 19-31, 1998
- [Louis 01] Louis D., "Simulation des endommagements dans les plaques composites trouées", Rapport Technique ONERA, RT 1/00292 DMSE, 2001
- [Mackerle 03] Mackerle J., "Finite element analysis of fastening and joining: a bibliography (1990-2002)", International Journal of Pressure Vessels and Piping 80, pp. 253-271, 2003
- [Maire 92] Maire J-F., "Etudes théoriques et expérimentales du comportement des matériaux composites en contraintes planes", Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, 1992
- [Maire 99] Maire F., "Rule-extraction by backpropagation of polyhedra", Neural Networks 12, 4-5, pp. 717-725, 1999
-

- [Matsuzaki 07] Matsuzaki R., Todoroki A., "Stacking-sequence optimization using fractal branch-and-bound method for unsymmetrical laminates", *Composite Structures* 78, 4, pp. 537-550, 2007
- [Mayes 04] Mayes J.S., Hansen A.C., "A comparison of multicontinuum theory based failure simulation with experimental results", *Composites Science and Technology* 64, pp. 379-394, 2004
- [McCarthy 02] McCarthy M.A., Lawlor V.P., Stanley W.F., McCarthy C.T., "Bolt-hole clearance effects and strength criteria in single-bolt, single-lap, composite bolted joints", *Composites Science and Technology* 62, pp. 1415-1431, 2002
- [McCarthy 02] McCarthy M.A., Lawlor V.P., Stanley W.F., McCarthy C.T., "Bolt-hole clearance effects and strength criteria in single-bolt, single-lap, composite bolted joints", *Composites Science and Technology* 62, pp. 1415-1431, 2002
- [McCarthy 05a] McCarthy C.T., McCarthy M.A., Stanley W.F., Lawlor V.P., "Experiences with modeling friction in composite bolted joints", *Journal of Composite Materials* 39, 21, pp. 1881-1908, 2005
- [McCarthy 05b] McCarthy M.A., McCarthy C.T., Lawlor V.P., Stanley W.F., "Three-dimensional finite element analysis of single-bolt, single-lap composite bolted joints: Part I - model development and validation", *Composite Structures* 71, pp. 140-158, 2005
- [McCarthy 05c] McCarthy C.T., McCarthy M.A., "Three-dimensional finite element analysis of single-bolt, single-lap composite bolted joints: Part II - effects of bolt-hole clearance", *Composite Structures* 71, pp. 159-175, 2005
- [McCarthy 05d] McCarthy C.T., McCarthy M.A., Lawlor V.P., "Progressive damage analysis of multi-bolt composite joints with variable bolt-hole clearances", *Composites: Part B*, 36, pp. 290-305, 2005
- [McCarthy 06] McCarthy M.A., McCarthy C.T., Padhi G.S., "A simple method for determining the effects of bolt-hole clearance on load distribution in single-column multi-bolt composite joints", *Composite Structures* 73, pp. 78-87, 2006
- [Meraghni 02] Meraghni F., Desrumaux F., Benzeggagh M.L., "Implementation of a constitutive micromechanical model for damage analysis in glass mat reinforced composite structures", *Composites Science and Technology* 62, pp. 2087-2097, 2002
- [Merval 06] Merval A., Samuelides M., Grihon S., "Application of response surface methodology to stiffened panel optimization", in 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, Newport, Rhode Island, 2006
- [Michalewicz 95] Michalewicz Z., "A survey of constraint handling techniques in evolutionary computation methods", In: McDonnell J. R., Reynolds R. G. and Fogel D. B. (eds.), *Proceedings of the 4th Annual Conference on Evolutionary Programming*, MIT Press, pp. 135-155, 1995
- [Michalewicz 96] Michalewicz Z., Dasgupta D., Le Riche R.G., Schoenauer M., "Evolutionary Algorithms for Constrained Engineering Problems", *Computers ind. Engng* 30, 4, pp. 851-870, 1996
- [Michalewicz 04] Michalewicz Z., Fogel D.B., "How to solve it: Modern Heuristics", 2nd edition, Springer, 2004
- [Miki 82] Miki M., "Material design of composite laminates with required in-plane elastic properties", In *Progress in Science and Engineering of Composites, ICCM-IV*, Tokyo, pp. 1725-1731, 1982
- [Miki 97] Miki M., Murotsu Y., Tanaka T., Shao S., "Reliability-based optimization of fibrous laminated composites", *Reliability Engineering and System Safety* 56, pp. 285-290, 1997
- [MIL-HDBK-17-3F] Military handbook MIL-HDBK-17-3F Volume 3, "Polymer matrix composites, materials usage, design and analysis", U.S. Department of Defence, 2002

- [Munjal 84] Munjal A.K., Wilks R.K., "Optimization of pin bearing joint strength for segmented graphite/epoxy filament wound case in space shuttle", 16, National SAMPE Technical conference, 1984
- [Nagendra 96] Nagendra S., Jestin D., Gürdal Z., Haftka R.T., Watson L.T., "Improved genetic algorithm for the design of stiffened composite panels", *Computers and Structures* 58, 3, pp. 543-555, 1996
- [Nemeth 95] Nemeth M.P., "Buckling Behavior of Long Anisotropic Plates Subjected to Combined Loads", NASA TP-3568, 1995
- [Niu 92] Niu M. C. Y., "Composite Airframe Structures: Practical Design Information and Data", Conmilit Press, Ltd., Hong Kong, pp. 440, 1992
- [Noor 00] Noor A.K., Veneri L.V., Paul D.B., Hopkins M.A., "Structures technology for future aerospace systems", *Computers and structures* 74, pp. 507-519, 2000
- [Noor 01] Noor A.K., Starnes Jr. J.H., Peters J.M., "Uncertainty analysis of stiffened composite panels", *Composite Structures* 51, pp. 139-158, 2001
- [Oberkampf 02] Oberkampf W.L., DeLand S.M., Rutherford B.M., Diegert K.V., Alvin K.F., "Error and uncertainty in modeling and simulation", *Reliability Engineering and System Safety* 75, pp. 333-357, 2002
- [Okutan 03] Okutan B, Karakuzu R., "The strength of pinned joints in laminated composites", *Composites Science and Technology* 63, pp. 893-905, 2003
- [Othmani 98] Othmani I., "Optimisation multicritère : fondements et concepts", Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier de Grenoble, 1998
- [Park 01a] Park J.H., Hwang J.H., Lee C.S., Hwang W., "Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms", *Composite Structures* 52, pp. 217-231, 2001
- [Park 01b] Park H-J., "Bearing failure analysis of mechanically fastened joints in composite laminates", *Composite Structures* 53, pp. 199-211, 2001
- [Park 01c] Park H-J., "Effects of stacking sequence and clamping force on the bearing strengths of mechanically fastened joints in composite laminates", *Composite Structures* 53, pp. 213-221, 2001
- [Paroissien 06] Paroissien E., "Contribution aux assemblages hybrides (boulonnés/collés) - Application aux jonctions aéronautiques", Thèse de Doctorat de l'Université de Toulouse, 2006
- [Parvizi 78] A. Parvizi, K.W. Garrett, J.E. Bailey, "Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates", *Journal of Material Science* 13, pp. 195-201, 1978
- [Pelletier 06] Pelletier J.L., Vel S.V., "Multi-objective optimization of fiber reinforced composite laminates for strength, stiffness and minimal mass", *Computers and Structures* 84, pp. 2065-2080, 2006
- [Perreux 89] Perreux D., "Prévisions de la durée de vie de matériaux composites verre-époxy unidirectionnels stratifiés et tissés en contraintes complexes", Thèse de Doctorat, de l'Université Franche Comté, Besançon, 1989
- [Sefrioui 96] Sefrioui M., Periaux J., Mantel B., "RCS multi-objective optimization of scattered waves by active control elements using GA", Fourth International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, 1996.
<http://citeseer.ist.psu.edu/236141.html>
- [Persson 98] Persson E., Madenci E., Eriksson I., "Delamination initiation of laminates with pin-loaded holes", *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 30, pp. 87-101, 1998
- [Perugini 01] Perugini P., Riccio A., Scaramuzzino F., "Three-dimensional progressive damage analysis of composite joints", *Proceedings of the Eighth International Conference on Civil and Structural Engineering Computing*, Civil-Comp Press, Stirling, Scotland, 2001

- [Petipas 00] Petipas C., "Analyse et prévision du comportement à long terme des composites fibres de carbone / matrice organique", Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, 2000
- [Pinho 05] Pinho S.T., Davila C.G., Camanho P.P., Iannucci L., Robinson P., "Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity", NASA/TM-2005-213530, 2005
- [Puck 98] Puck A., Schürmann H., "Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models", Composites Science and Technology, 58, pp. 1045-1067, 1998
- [Qu 00] Qu X., Venkataraman S., Haftka R.T., Johnson T.F., "Response surface options for reliability-based optimization of composite laminates", PMC Paper 2000-131, 2000
- [Qu 03] Qu X., Venkataraman S., Haftka R.T., Johnson T.F., "Deterministic and Reliability-Based Optimization of Composite Laminates for Cryogenic Environments", AIAA Journal 41, pp. 2029-2036, 2003
- [Qu 04] Qu X., Haftka R.T., "Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor", Structural Multidisciplinary Optimization 27, pp. 314-325, 2004
- [Rahul 06] Rahul, Sandeep G., Chakraborty D., Dutta A., "Multi-objective optimization of hybrid laminates subjected to transverse impact", Composite Structures 73, pp. 360-369, 2006
- [Rama 05] Rama Mohan Rao A., Arvind N., "A scatter search algorithm for stacking sequence optimisation of laminate composites", Composite Structures 70, pp. 383-402, 2005
- [Rao 05] Rama Mohan Rao A., Arvind N., "A scatter search algorithm for stacking sequence optimisation of laminates composites", Composite Structures 70, pp. 383-402, 2005
- [Riccio 02] Riccio A., Scaramuzzino F., "Influence of damage onset and propagation on the tensile structural behaviour of protruding composite joints", 4th GRACM Congress on Computational Mechanics, 2002
- [Roeseler 07] Roeseler B., Sarh B., Kismarton M., "Composite Structures: The First 100 Years", ICCM-16 Kyoto, Japan, 9 July 2007
- [Rollet 07] Rollet Y., "Vers une maîtrise des incertitudes en calculs des structures composites", Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, 2007
- [Ross 47] Ross R.D., "An electrical computer for the solution of shear-lag bolted joint problems", NACA, TN N°128, 1947
- [Schaffer 85] Schaffer J.D., "Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms", Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms, pp. 93-100, 1985
- [Schieffer 00] Schieffer A., Maire J-F., Lévêque D., "Analyse couplée du comportement mécanique et du vieillissement de composites à matrice organique", JNC12, Cachan, 2000
- [Schön 04a] Schön J., "Coefficient of friction for aluminium in contact with a carbon fiber epoxy composite", Tribology International 37, pp. 395-404, 2004
- [Schön 04b] Schön J., "Coefficient of friction and wear of a carbon fiber epoxy matrix composite", Wear, 257, pp. 395-407, 2004
- [Seresta 07] Seresta O., Gürdal Z., Adams D.B., Watson L.T., "Optimal design of composite wing structures with blended laminates", Composites Part B: Engineering 38, 4, pp. 469-480, 2007
- [Singh 01] Singh B.N., Yadav D., Iyengar N.G.R., "Stability analysis of laminated cylindrical panels with uncertain material properties", Composite Structures 54, pp. 17-26, 2001
- [Soremekun 01] Soremekun G., Gürdal Z., Haftka R.T., Watson L.T., "Composite laminate design optimization by genetic algorithm with generalized elitist selection", Computers and Structures 79, pp. 131-143, 2001

- [Spallino 02] Spallino R., Rizzo S., "Multi-objective discrete optimization of laminated structures", *Mechanics Research Communications* 29, pp. 17-25, 2005
- [Srinivas 94] Srinivas N., Deb K., "Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms", *Evolutionary Computation* 2, 3, pp. 221-248, 1994.
- [Suffis 03] Suffis A., Lubrecht T.A.A., Combescure A., "Damage model with delay effect: analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length", *International Journal of Solids and Structures* 40, pp. 3463-3476, 2003.
- [Suresh 07] Suresh S., Sujit P.B., Rao A.K., "Particle swarm optimization approach for multi-objective composite box-beam design", *Composite Structures* 81, pp. 598-605, 2005
- [Swift 71] Swift T., "Development of the fail-safe design features of the DC-10, Damage Tolerance in Aircraft", *Structures, ASTM STP 486*, American Society for Testing and Materials, pp. 164-214, 1971
- [Talbi 02] Talbi E-G., "A Taxonomy of Hybrid Metaheuristics", *Journal of Heuristics* 8, 5, pp. 541-564, 2002
- [Tate 46] Tate M.B., Rosenfeld S.J., "Preliminary Investigation of the loads carried by individual bolts in Bolted", *Joints, NACA, TN N°1051*, Washington, DC, 1946
- [Tay 05] Tay T.E., Tan V.B.C., Tan S.H.N., "Element-Failure: An Alternative to Material Property Degradation Method for Progressive Damage in Composite Structures", *Journal of Composite Materials*. 39, 18, pp. 1659-1675, 2005
- [Todoroki 98] Todoroki A., Haftka R.T., "Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene-like repair strategy", *Composites: Part B*, 29B, pp. 277-285, 1998
- [Todoroki 99] Todoroki A., SASAI M., "Improvement of Design Reliability for Buckling Load Maximization of Composite Cylinder Using Genetic Algorithm with Recessive-Gene-Like Repair", *JSME International Journal, Series A* 42, 4, pp. 530-536, 1999
- [Todoroki 04] Todoroki A., Ishikawa T., "Design of experiments for stacking sequence optimizations with genetic algorithm using response surface approximation", *Composite Structures* 64, pp. 349-357, 2004
- [Todoroki 07] Todoroki A., Sekishiro M., "New iteration fractal branch and bound method for stacking sequence optimizations of multiple laminates", *Composite Structures* 81, pp. 419-426, 2007
- [Tsai 68] Tsai S. W., Pagano N. J., "Invariant properties of composite materials", In *Composite Materials Workshop*, Technomic, Westport, pp. 233-253, 1968
- [Tsai 80] Tsai S.W. et Hahn T., "Introduction of composite materials", Technomic Publ. Co. USA, Lancaster, 1980
- [Tvergaard 90] Tvergaard V., "Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal", *Materials Science and Engineering*, pp. 203-213, 1990
- [Valot 05] Valot E., Vannucci P., "Some exact solutions for fully orthotropic laminates", *Composite Structures* 69, pp. 1557-1666, 2005
- [Van Veldhuizen 99] Van Veldhuizen D. A., "Multiobjective Evolutionary Algorithms: Classifications, Analyses, and New Innovations", Ph.D. thesis, AFIT/DS/ENG/99-01, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1999
- [Van Vinckenroy 95] Van Vinckenroy G., de Wilde W.P., "The use of Monte Carlo techniques in statistical finite element methods for the determination of the structural behaviour of composite materials structural components", *Composite Structures* 32, pp. 247-253, 1995
- [Vannucci 07] Vannucci P., Vincenti A., "The design of laminates with given thermal/hygral expansion coefficients: A general approach based upon the polar-genetic method", *Composite Structures* 79, pp. 454-466, 2007

- [Venkataraman 99] Venkataraman S., Haftka R.T., "Optimization of Composite Panels - a review", Proceedings of the American Society of Composites- 14th Annual Technical Conference, Fairborn, OH, pp. 479-488, 1999
- [Venkataraman 01] Venkataraman S., Haftka R.T., Johnson T.F., "Maximal Errors due to Use of Equivalent Properties for Sublaminates", AIAA Journal 39, 2, 2001
- [Venkataraman 02] Venkataraman S., Haftka R.T., "Structural Optimization: What Has Moore's Law Done For Us?", 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, Colorado, USA, 22-25 April, 2002
- [Venkataraman 03] Venkataraman S., Haftka R. T., Rapoff A. J., "Structural optimization using biological variables to help understand how bones design holes", Structural and multidisciplinary optimization 25, pp. 19-34, 2003
- [Verchery 79] Verchery, G., "Les invariants des tenseurs d'ordre quatre du type de l'élasticité", Proceedings of the Euromech Colloquium 115, Villard-de-Lans, 1979. Publié par les Editions du CNRS, pp. 93-104, 1982
- [Vincenti 03] Vincenti A., Vannucci P., Verchery G., "Influence of orientation errors on quasi-homogeneity of composite laminates", Composites Science and Technology 63, pp. 739-749, 2003
- [Vinet 97] Vinet A., "Identification d'une loi de comportement viscoélastique-viscoplastique pour des stratifiés aéronautiques. Prédiction du comportement à long terme à l'aide d'essais accélérés", Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, 1997
- [Vinson 87] Vinson J.R., Sierakowski R.L., "The behaviour of structures composed of composite materials", Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1987
- [Volgers 02] Volgers P., "Detailed 3D analysis of bolted joints in global shell structures", Proceedings of the 4th B2000 workshop, Ligerz, 2002
- [Walker 03] Walker M., Smith R.E., "A technique for the Multiobjective optimisation of laminated composite structures using genetic algorithms and finite element analysis", Composite Structures 62, pp 123-128, 2003
- [Walker 05] Walker M., Hamilton R., " A methodology for optimally designing fibre-reinforced laminated structures with design variable tolerances for maximum buckling strength", Thin-Walled Structures 43, pp. 161-174, 2005
- [Wang 08] Wang H., Croll J.G.A., "Optimisation of shell buckling using lower bound capacities", Thin-Walled Structures, 2008, doi:10.1016/j.tws.2008.01.035
- [While 05] While L., Bradstreet L., Barone L., Hingstone P., "Heuristics for optimizing the calculation of hypervolume for multi-objective optimisation problems", IEEE congress on Evolutionary Computation (CEC'05), Edinburgh, Scotland, 2005
- [Whitney 74] Whitney J.M., Nuismer R.J., "Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations", J Compos Mater 8, pp. 253-265, 1974
- [Whitworth 03] Whitworth H.A, Othieno M., Barton O. Failure analysis of composite pin loaded joints. Composite Structures 59, pp. 261-266, 2003
- [Whitworth 07] Whitworth H.A., Aluko O., Tomlinson N.A., "Application of the point stress criterion to the failure of composite pinned joints", Engineering Fracture Mechanics, 2007 doi: 10.1016/ /j.engfracmech.2006.12.003
- [Wu 98] Wu P.S, Sun C.T., "Modeling bearing failure initiation in pin-contact of composite laminates", Mechanics of Materials 29, pp. 325-335, 1998
- [Xiao 05a] Xiao Y., Ishikawa T., "Bearing strength and failure behavior of bolted composite joints (Part I: experimental investigation)", Composites Science and Technology 65, pp. 1022-1031, 2005

- [Xiao 05b] Xiao Y., Ishikawa T., "Bearing strength and failure behavior of bolted composite joints (Part II: modeling and simulation)", Composites Science and Technology 65, pp. 1032-1043, 2005
- [Ziegler 94] Ziegler G. M., "Lectures on Polytopes", Springer, 1994
- [Zitzler 99] Zitzler E., "Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications", PhD. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1999
- [Zitzler 01] Zitzler E., Laumanns M., Thiele L., "SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm", Technical Report 103, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001
<http://citeseer.ist.psu.edu/zitzler02spea.html>

Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de la recherche de solutions composites innovantes pour l'allègement des structures aéronautiques. Les matériaux composites stratifiés offrent, de par leur architecture interne, de nouveaux degrés de liberté pour la conception et l'optimisation des structures. L'objectif est ici de proposer une méthodologie pour l'optimisation robuste des empilements, à l'échelle de petits sous-ensembles structuraux composites. La démarche est décomposée en trois éléments imbriqués : algorithme d'optimisation, stratégie de calcul et prise en compte des incertitudes.

L'algorithme multiobjectif développé retourne au concepteur un ensemble de compromis optimaux. Il s'agit d'un algorithme évolutionnaire, dont l'efficacité est considérablement accrue, par rapport aux outils génériques, par l'introduction de considérations mécaniques multiéchelles spécifiques aux composites stratifiés. Il est en particulier adapté à la prise en compte des recommandations industrielles pour le choix des séquences d'empilements. Afin de réduire les coûts de calcul, des stratégies de calcul sont mises en oeuvre, articulant modélisations fines et approximation des modèles. Une méthode d'optimisation robuste est proposée, pour la prise en compte des incertitudes, méconnaissances ou erreurs potentielles.

La première application proposée traite du flambement et post-flambement de panneaux raidis. La seconde application traite de l'optimisation des assemblages boulonnés composites, dont le calcul reste aujourd'hui problématique. Un modèle de la rupture en matage est développé, basé sur une approche progressive de la rupture du stratifié et de l'amorce des délaminages, avec d'excellents résultats par rapport à l'expérience. Ce modèle est appliqué pour l'optimisation d'un assemblage élémentaire à une fixation, et intégré dans une approche multiniveau pour le calcul d'une jonction complexe à plusieurs centaines de fixations.

Mot-clés : MATERIAUX COMPOSITES ; OPTIMISATION MULTIOBJECTIF ; CONCEPTION ROBUSTE ; ALGORITHME EVOLUTIONNAIRE ; FLAMBEMENT ; ASSEMBLAGE BOULONNE ; MATAGE

Calculation strategies for multiobjective optimisation of composite structures

This thesis deals with the search for innovative composite solutions for mass reduction of aeronautical structures. Composite materials offer new degrees of freedom for structural design and optimisation. The aim of this study is to propose a methodology for robust optimisation of the stacking sequence of composite sub-components. The proposed strategy consists of three interlinked elements : the optimisation algorithm, the calculation strategy and the method to account for design uncertainties.

A multiobjective optimisation algorithm is developed, that yields a set of optimal trade-offs between conflicting objectives. It is an evolutionary algorithm, whose efficiency is greatly increased compared to generic algorithms, through the introduction of multiscale mechanical models specific to layered composite materials. The algorithm is particularly suited to take into account the industrial guidelines for stacking-sequence design. To reduce calculation costs, different strategies are implemented, that imply detailed simulations and model approximation. A robust optimisation method is proposed, to account for uncertainties, lack of knowledge or potential errors.

The first application deals with the buckling and post-buckling behaviour of stiffened panels. The second application deals with strength optimisation of bolted joints in composite structures, whose calculation is still problematic. A model is developed for the prediction of bearing failure, based on a progressive approach of the laminate failure and the onset of delamination, with excellent results compared to experimental data. This model is applied to the maximisation of the strength of an elementary joint with one fastener. It is also integrated in a multilevel approach for the calculation of complex junctions involving hundreds of fasteners.

Keywords: COMPOSITE MATERIALS; MULTIOBJECTIVE OPTIMISATION ; ROBUST DESIGN ; EVOLUTIONARY ALGORITHM ; BUCKLING ; BOLTED JOINT ; BEARING FAILURE