



HAL
open science

Caractérisation du comportement non linéaire en dynamique du véhicule

Boualem Badji

► **To cite this version:**

Boualem Badji. Caractérisation du comportement non linéaire en dynamique du véhicule. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 2009. Français. NNT : 2009BELF0127 . tel-00606485

HAL Id: tel-00606485

<https://theses.hal.science/tel-00606485v1>

Submitted on 6 Jul 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES POUR L'INGENIEUR ET MICROTECHNIQUES

Année 2009

N° B.U. :

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE, SYSTEMES ET TRAITEMENT DU SIGNAL

Présentée et soutenue publiquement par :

BOUALEM BADJI

Le mardi 15 décembre 2009
À l'université de technologie de Belfort Montbéliard

CARACTERISATION DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE EN DYNAMIQUE DU VEHICULE

JURY

Rapporteurs :	- Xavier MOREAU.	Professeur à l'Université Bordeaux 1, Bordeaux
	- Ali CHARARA.	Professeur à l'UTC, Compiègne
Examineurs :	- Mohammed EL BAGDOURI.	Professeur à l'UTBM, Belfort
	- Abdellatif MIRAOUI.	Professeur à l'UTBM, Belfort
	- Eric FENAUX.	Expert en sécurité active chez PSA, Sochaux
	- Abdellah EI MOUDNI.	Professeur à l'UTBM, Belfort
	- Houcine CHAFOUK.	Professeur à l'ESIGELEC, Rouen

Directeurs de thèse : Mohammed EL BAGDOURI et Abdellatif MIRAOUI

Laboratoire : SET - Systèmes Et Transports

Co-encadrant : Eric FENAUX

Entreprise : PSA Peugeot – Citroën automobiles

N° ED :

A mes parents Rachid et Ghania
A mes sœurs Imène et Malya et mes frères Sofiane, Lyes et Fahim

Remerciements

La recherche est un travail de longue haleine mené la plupart du temps en solitaire. Sans l'aide et la patience de mes encadrants rien ne pouvait aboutir. Sans la bonne volonté et le désir de transmettre de mon tuteur rien n'aurait été possible. Je tiens donc à remercier du fond du cœur les personnes qui ont permis à ce travail d'exister, Mr. EL Bagdouri, Mr. Miraoui et Mr. Fenaux.

Un grand merci à Amina qui m'a soutenu et aidé à surmonter les moments difficiles que j'ai connus durant mes années de doctorat.

Mes sincères remerciements à Paul, Julien, EL-Mahdi, Renaud et François pour toute l'aide apportée et les conseils avisés.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS.....	5
SOMMAIRE	7
INTRODUCTION GENERALE.....	11
CHAPITRE 1. ELEMENTS DE DYNAMIQUE DU VEHICULE.....	17
1.1. INTRODUCTION.....	19
1.2. CONSTITUTION DE L'AUTOMOBILE ET ORGANES DE LIAISON AU SOL	19
1.2.1. LES PNEUMATIQUES.....	19
1.2.2. ESSIEUX ET TRAINS ROULANT	22
1.2.3. SUSPENSION	23
1.2.4. CHASSIS	24
1.2.5. SYSTEME DE DIRECTION.....	25
1.3. LES DYNAMIQUES MISES EN JEU	26
1.4. CINEMATIQUE DE MISE EN VIRAGE	27
1.4.1. REFERENTIELS	28
1.4.2. VARIABLES D'ETATS	32
1.4.3. MODELE BICYCLETTE ET ANGLE D'ACKERMANN	35
1.4.3.1. <i>Notion d'angle d'Ackermann</i>	37
1.4.3.2. <i>Vitesse d'un point quelconque du véhicule</i>	38
1.4.3.3. <i>Calcul des angles de dérives</i>	40
1.4.3.4. <i>Angle de surbraquage</i>	41
1.4.3.5. <i>Taux de surbraquage</i>	44
1.5. PHENOMENES PHYSIQUES LIES A LA MISE EN VIRAGE	46
1.5.1. EPURE CINEMATIQUE DU TRAIN	47
1.5.2. EPURE ELASTO-CINEMATIQUE DU TRAIN.....	48
1.5.3. ANALYSE DES TRANSFERTS DE CHARGES TRANSVERSALES.....	50
1.5.3.1. <i>Transfert de charges avec une voiture complète en virage stabilisé</i>	52
1.5.3.2. <i>Expression des charges verticales aux quatre roues en virage stabilisé</i>	54
1.5.3.3. <i>Prise en compte de l'amortissement dans les transferts de charges</i>	54
1.6. NON LINEARITE DU FONCTIONNEMENT DES ORGANES	55
1.6.1. DIAGRAMME G-G	55
1.6.2. NON LINEARITE DUE AU SYSTEME DE SUSPENSION.....	58
1.6.3. NON LINEARITE DUE AU PNEUMATIQUE	60
1.6.3.1. <i>Non linéarité liée à l'évolution de l'angle de dérive</i>	61
1.6.3.2. <i>Non linéarité liée à l'influence de la charge verticale</i>	62
1.7. CONCLUSION.....	65
CHAPITRE 2. MODELISATION	67
2.1. INTRODUCTION.....	69
2.2. MODELISATION DU PNEUMATIQUE.....	69
2.2.1. ETAT DE L'ART	70
2.2.1.1. <i>Modèles d'interactions roue-sol</i>	70
2.2.1.2. <i>Modèles du pneumatique</i>	71
2.2.2. MODELE DE PACEJKA « FORMULE MAGIQUE »	71
2.2.2.1. <i>Forme analytique de base du modèle de Pacejka</i>	72

2.2.2.2. <i>Modèle de Pacejka pour l'effort latéral pur en fonction des micro-coefficients</i>	75
2.2.3. APPROXIMATION POLYNOMIALE.....	80
2.2.3.1. <i>Présentation</i>	80
2.2.3.2. <i>Approximation polynomiale à charge constante</i>	80
2.2.3.3. <i>Approximation polynomiale à charge variable</i>	83
2.2.3.4. <i>Conséquences</i>	84
2.3. MODELISATION DE LA DYNAMIQUE LATÉRALE DU VÉHICULE.....	85
2.3.1. CONTEXTE.....	85
2.3.2. ETAT DE L'ART.....	85
2.3.3. REPRESENTATION DES EFFORTS SUR LE VÉHICULE.....	86
2.3.4. ELABORATION D'UN MODELE GENERALE.....	87
2.3.4.1. <i>Principe de la somme dynamique</i>	88
2.3.4.2. <i>Principe du moment dynamique</i>	91
2.3.5. MODELE LACET-DERIVE « LD ».....	96
2.3.6. MODELE LACET-ROULIS-DERIVE ET TRANSFERT DE CHARGE « LRDT ».....	97
2.3.6.1. <i>Complexité du modèle LRDT et les boucles algébriques</i>	99
2.4. ANALYSE DU MODELE BICYCLETTE LINEAIRE LD.....	100
2.4.1. FONCTIONS DE TRANSFERT.....	100
2.4.2. STABILITE DU MODELE BICYCLETTE LINEAIRE.....	104
2.5. CONCLUSION.....	107
CHAPITRE 3. METHODES D'ANALYSE NON LINEAIRE.....	109
3.1. INTRODUCTION.....	111
3.1. INTRODUCTION.....	111
3.2. CONTEXTE DE L'ETUDE ET ETAT DE L'ART.....	111
3.3. NON LINEARITES STRUCTUREES.....	115
3.3.1. IMPACT FREQUENTIEL.....	117
3.3.2. IMPACT TEMPOREL.....	123
3.4. DETECTION DES DYNAMIQUES NON LINEAIRES.....	126
3.4.1. PRESENTATION DE LA FONCTION DE COHERENCE.....	127
3.4.2. APPLICATION DE LA FONCTION DE COHERENCE.....	129
3.5. METHODE D'EQUILIBRAGE HARMONIQUE.....	131
3.5.1. PRESENTATION DE LA METHODE.....	132
3.5.1.1. <i>Système linéarisé équivalent</i>	134
3.5.1.2. <i>Cas d'une fonction non linéaire : Rigidité cubique</i>	136
3.5.1.3. <i>Cas d'une fonction non linéaire : Amortisseur à frottement</i>	138
3.5.2. TECHNIQUE DE RESOLUTION.....	139
3.5.3. CONVERGENCE VERS UNE SOLUTION GLOBALE.....	141
3.5.4. APPLICATION DE LA METHODE D'EQUILIBRAGE HARMONIQUE AU MODELE LD-P3.....	142
3.6. METHODES DE KRYLOV-BOGOLIUBOV POUR LES REGIMES TRANSITOIRES.....	155
3.6.1. PRESENTATION.....	156
3.6.2. MISE EN FORME DES EQUATIONS.....	158
3.6.3. APPLICATION DE LA METHODE KB AU MODELE LD-P3.....	159
3.7. METHODES DES SERIES DE VOLTERRA.....	165
3.7.1. PRESENTATION DE LA BASE THEORIQUE.....	165
3.7.2. REPONSES DES SERIES DE VOLTERRA A DES ENTREES SPECIFIQUES.....	169
3.7.2.1. <i>Excitation Harmonique</i>	169
3.7.2.2. <i>Excitation harmonique multi-fréquentielle</i>	170
3.7.2.3. <i>Excitation Impulsionnelle</i>	171
3.7.3. CALCUL DES NOYAUX DE VOLTERRA.....	172
3.7.3.1. <i>Etat de l'art</i>	172
3.7.3.2. <i>Méthode du sondage harmonique</i>	173
3.7.4. ANALYSE FREQUENTIEL.....	175
3.7.4.1. <i>Extraction de la fonction réponse fréquentielle (FRF) d'ordre 1</i>	175

3.7.4.2. <i>Taux de distorsion harmonique</i>	177
3.7.5. ANALYSE TEMPORELLE	178
3.7.5.1. <i>Etat de l'art</i>	178
3.7.5.2. <i>Analyse en régime permanent</i>	179
3.7.5.3. <i>Calcul des réponses temporelles par la méthode des associations de variables</i>	180
3.7.6. APPLICATION DE LA METHODE DES SERIES DE VOLTERRA AU MODELE LD-P3	182
3.7.6.1. <i>Calcul des noyaux de Volterra</i>	182
3.7.6.2. <i>Courbes des FRF</i>	191
3.7.6.3. <i>Régime permanent</i>	194
3.7.6.4. <i>Réponse temporelles à une entrée arbitraire</i>	196
3.8. CONCLUSION	209

CHAPITRE 4. IDENTIFICATION DES PARAMETRES PHYSIQUE EN REGIME PERMANENT

211

4.1. INTRODUCTION	213
4.2. MODELE DE REFERENCE	214
4.2.1. PRESENTATION DU MODELE DE REFERENCE	215
4.2.2. VALIDATION DU MODELE DE REFERENCE	216
4.2.2.1. <i>Régime permanent – Rayon constant</i>	217
4.2.2.2. <i>Vitesse caractéristique</i>	219
4.2.2.3. <i>Calage (échelon volant)</i>	219
4.3. TECHNIQUE D'OPTIMISATION	221
4.3.1. FORME CANONIQUE DU PROBLEME DES MOINDRES CARRÉS LINEAIRES	222
4.3.2. REDUCTION A UNE EQUATION NORMALE FACTORISEE	222
4.3.2.1. <i>Equation normale</i>	222
4.3.2.2. <i>Equation normale factorisée</i>	223
4.3.2.3. <i>Equation normale factorisée de systèmes pondérés</i>	223
4.3.2.4. <i>Calcul itératif d'une équation normale factorisée de systèmes pondérés</i>	224
4.3.3. CALCUL DES PARAMETRES IDENTIFIABLES	224
4.3.3.1. <i>Définition</i>	224
4.3.3.2. <i>Cas des moindres carrés</i>	225
4.3.4. CALCUL DE LA SOLUTION PARAMETRIQUE	227
4.3.4.1. <i>Solution au sens des moindres carrés</i>	227
4.3.4.2. <i>Solution au sens des moindres carrés totaux</i>	227
4.4. IDENTIFICATION DU MODELE LD-P3 EN REGIME PERMANENT	228
4.4.1. MISE EN FORME DES EQUATIONS	228
4.4.1. APPLICATION A L'IDENTIFICATION DU MODELE LD-P3	229
4.5. IDENTIFICATION DU MODELE LRDT-P3 EN REGIME PERMANENT	231
4.5.1. LIMITATION DES CHARGES PAR PNEU	231
4.5.2. MISE EN FORME DES EQUATIONS	233
4.5.3. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DES RAIDEURS ANTIROULIS	235
4.5.4. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE BRAQUAGES INDUIT PAR LES PRISES DE PINCES	236
4.5.5. APPLICATION A L'IDENTIFICATION DU MODELE LRDT-P3	237
4.5.5.1. <i>Avec prise en compte des élasto-cinématiques dans les données de simulation</i>	237
4.5.5.2. <i>Sans prise en compte des élasto-cinématiques dans les données de simulation</i>	241
4.6. CONCLUSION	244

CONCLUSION GENERALE.....

247

PERSPECTIVE

249

ANNEXE A. METHODES DE QUASI-NEWTON SECANTE.....

250

ANNEXE B. APPLICATION DE LA METHODE KB AU MODELE LD-P3 : DEVELOPPEMENT DES CALCULS.....	254
ANNEXE C. NONLINEAR SINGLE TRACK MODEL ANALYSIS USING VOLTERRA SERIES APPROACH	257
ANNEXE D. ADVANCED THEORETICAL METHODS FOR NON LINEAR SINGLE TRACK MODEL ANALYSIS	276
BIBLIOGRAPHIE	288

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

1. Cadre de travail

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés dans le cadre d'une thèse CIFRE menée à l'université de technologie de Belfort-Montbéliard «UTBM» en collaboration avec la direction de recherche et d'innovation automobiles de PSA Peugeot Citroën automobiles.

2. Contexte et problématique

Les ressources énergétiques mises à part leurs natures constituent l'atout majeur dans le développement des grandes civilisations d'aujourd'hui. Contrôler ces énergies et les transformer au service de l'homme (transport, agriculture, communication,...etc.) représente la première préoccupation industrielle au monde. Dans ce contexte, l'industrie de transformation des énergies fossiles alimente en continu le moyen de locomotion le plus utilisé qui est la voiture.

La voiture joue un rôle prépondérant dans l'amélioration de notre qualité de vie, en rendant accessible un plus grand espace de liberté de mouvement à chacun d'entre nous. Nous pouvons donc facilement imaginer les enjeux économiques et commerciaux qui en découlent. Depuis l'avènement de ce moyen de transport, l'industrie automobile ne cesse d'apporter des améliorations à leurs produits. La créativité et l'innovation technologique sont les principaux atouts de développement et de croissance économique dans l'industrie automobiles. Les capacités d'innovation propres à chaque constructeur engendrent une grande concurrence technique et scientifique. Dans ce sens, un grand nombre de systèmes et de nouveaux dispositifs destinés à améliorer le confort de conduite équipent les nouveaux véhicules.

Parmi les plus importants d'entre eux nous retrouvons les systèmes de sécurité actifs tels que : Les systèmes ABS (Antilock Braking System) qui permet d'éviter le blocage des roues, lors des freinages en situation d'urgence. Il assure donc une directivité permanente du véhicule et une distance d'arrêt optimale. Egalement, nous retrouvons les systèmes ASR (Anti Skid Regulation). C'est la fonction anti-patinage des roues qui régule le couple des roues motrices en intervenant à la fois sur le moteur et les freins, afin d'empêcher le patinage des roues sur les surfaces glissantes ou lors des pertes d'adhérence en accélération. Plus récemment, les constructeurs équipent les véhicules avec un système de contrôle de stabilité qu'on appelle l'ESC (Electronic Stability Control) où l'apport de l'électronique et l'informatique s'avère incontournable.

Concevoir de tels dispositifs requiert une bonne connaissance de la dynamique du véhicule. **Il est donc important de décrire l'ensemble des règles et des principes physiques permettant de faire le lien entre le comportement dynamique d'une voiture (sous sollicitations) et les paramètres physiques des organes le constituant.** Ceci peut être fait par une modélisation rigoureuse de différents composants pour reproduire le comportement exact du véhicule.

A ce niveau, on distingue deux types de modèles, les modèles comportementaux (non paramétriques) et les modèles analytiques (paramétriques).

Les modèles comportementaux sont non paramétriques. Ils servent à reproduire le comportement du véhicule, sans avoir une connaissance du fonctionnement de ses sous systèmes. Ces modèles sont calculés à partir de méthodes d'identification en utilisant des données issues de l'expérimentation.

Les modèles analytiques sont de natures paramétriques. Ils sont obtenus à l'aide des lois de la physique, qui régissent le comportement global du châssis et des liaisons au sol (LAS). La connaissance des modèles de fonctionnement des sous système LAS, permet d'élaborer des modèles de comportement véhicule dont les coefficients dépendent directement des paramètres organiques. On distingue alors, deux types de modèles paramétriques : les modèles linéaires simplifiés et les modèles complets.

Les modèles linéaires simplifiés sont les modèles issus des linéarisations des caractéristiques fonctionnelles des organes autour d'un point de fonctionnement donné. Ceci est le cas du modèle bicyclette. Avec ces modèles, L'avantage est lié à la simplicité et à la linéarité de la structure. Cependant, ces modèles souffrent des limitations de fonctionnement trop restreintes. En effet, lors des fortes sollicitations au niveau des organes LAS (comme dans le cas des pneumatiques), le véhicule est généralement soumis à de fortes accélérations latérales (supérieure à 4ms^{-2}) rendant le comportement des pneumatiques clairement non linéaires. Le modèle linéaire devient donc inadapté pour prédire les sorties du système et pour analyser son comportement.

Pour y remédier, la solution est d'utiliser des modèles complets où le véhicule est représenté dans sa globalité, en modélisant chaque sous-système le constituant. Le modèle de pneumatique est donc celui décrit par la formule de Pacejka. Ces modèles sont très puissants et permettent de prendre en considération toute la plage de fonctionnement, quelque soit la sollicitation. Ils servent à prédire le comportement le plus réaliste d'un véhicule, à travers des formulations analytiques dont la résolution est faite par des algorithmes de résolution numériques et ils sont considérés comme des modèles de références On peut ainsi, citer le modèle AMESim, IPG-CarMaker, CarSim,..., etc. L'inconvénient avec ces modèles est qu'ils s'avèrent très complexes à analyser compte tenu du nombre important de degrés de libertés et des paramètres à traiter.

3. Objectifs

Le présent travail consiste à proposer un modèle **paramétrique** décrivant le comportement du véhicule en **dynamique latérale**. Les caractéristiques dynamiques de la réponse de ce système doivent être liées directement à ses coefficients et par conséquent aux **paramètres organiques du véhicule**. L'étude des caractéristiques dynamiques de la réponse de ce modèle lors des fortes sollicitations, aide à affiner les résultats des prédictions du comportement véhicule et donne une pertinence et une consistance à l'objectivation des tests réels. Ce modèle devrait nous permettre de prendre en considération plus de non linéarité des organes constituant le véhicule. Il devrait également accroître le pouvoir prédictif en fortes sollicitations au volant. En conclusion, on cherche à satisfaire trois conditions :

- Le modèle doit être paramétrique (dépend des paramètres organiques du véhicule) ;
- Une plage de validité plus élargie que le modèle bicyclette linéaire ;
- Un modèle moins complexe à analyser que les modèles complets.

Le modèle recherché s'inscrit comme modèle intermédiaire entre le modèle linéaire et le modèle complet.

4. Présentation du plan de travail

Les travaux développés dans ce mémoire sont structurés en quatre chapitres. Un premier chapitre dédié aux principes généraux de la dynamique de véhicule où l'ensemble des définitions et terminologies seront présentés. Nous présenterons ensuite, les dynamiques auxquelles la voiture est soumise ainsi que le rôle de chaque organe dans ces dynamiques

Egalement abordé dans ce chapitre, les phénomènes les plus importants liés à la mise en virage du véhicule (les épures de trains cinématiques et élasto-cinématiques, les transferts de charges, les dérives et les accélérations). Egalement, il sera présenté les différentes non linéarités de fonctionnement des organes LAS générées lors des fortes sollicitations.

Le second chapitre est entièrement consacré à la modélisation. En première partie et après une présentation de l'état de l'art, nous aborderons la modélisation du comportement du pneumatique. Nous étudierons en détail un modèle semi-empirique quasi-statique qui est l'un des plus représentatifs de la réalité physique du comportement d'un pneu. Ce modèle est appelé « *formule de Pacejka* ». Ensuite, nous présenterons les facteurs motivant le choix d'une approximation polynomiale de la formule de Pacejka. Nous présenterons également les limitations qui peuvent s'engendrer après une telle approximation.

L'ensemble des équations nécessaire pour aboutir à un modèle de dynamique latérale sera présenté. A partir de ces équations nous pouvons obtenir deux variantes de modèle. Un premier modèle non linéaire basé sur le modèle bicyclette qui servira à décrire les mouvements de lacet et de dérive au CdG. Le deuxième modèle non linéaire proposé sera plus complet que le premier, il intégrera en plus les mouvements de roulis, les transferts de charges et les braquages induit par les épures de trains.

Le troisième chapitre constitue l'essentielle de travail en terme d'analyse non linéaire. Une présentation du contexte générale permettra de justifier notre choix sur les méthodes d'analyse non linéaire qui seront utilisées pour l'étude du modèle bicyclette non linéaire polynomial. Trois méthodes seront retenues pour l'analyse non linéaire : « l'équilibrage harmonique », « les séries de Volterra » et « la méthode de Krylov-Bogoliubov ». A la fin de chaque présentation théorique, nous discuterons des résultats obtenus après l'application des ces méthodes. L'ensemble des applications et des résultats qui seront présentés dans ce chapitre constitue une réelle avancé dans le domaine de dynamique de véhicule. Il s'agit d'un développement théorique jamais réalisé auparavant.

Enfin, le quatrième chapitre sera dédié à l'identification des paramètres des modèles de dynamique latérale de véhicule décrits dans le chapitre 2. Ce travail d'identification semble nécessaire et utile pour atteindre un double objectif à savoir, l'obtention d'une approximation des paramètres non mesurables et l'amélioration de la représentativité du modèle lorsqu'on le compare avec des mesures réalisées sur véhicule réel. Dans ce chapitre une procédure d'identification en régime permanent de ces modèles sera présentée. Les résultats seront discuter et analyser afin d'imaginer une généralisation pour des modèles plus complexes.

CHAPITRE 1.

ELEMENTS DE DYNAMIQUE DU VEHICULE

<i>1.1. Introduction</i>	19
<i>1.2. Constitution de l'automobile et organes de liaison au sol</i>	19
1.2.1. Les pneumatiques	19
1.2.2. Essieux et trains roulant	22
1.2.3. Suspension	23
1.2.4. Châssis	24
1.2.5. Système de direction	25
<i>1.3. Les dynamiques mises en jeu</i>	26
<i>1.4. Cinématique de mise en virage</i>	27
1.4.1. Référentiels	28
1.4.2. Variables d'états	32
1.4.3. Modèle bicyclette et angle d'Ackermann	35
<i>1.5. Phénomènes physiques liés à la mise en virage</i>	46
1.5.1. Epure cinématique du train	47
1.5.2. Epure élasto-cinématique du train	48
1.5.3. Analyse des transferts de charges transversales	50
<i>1.6. Non linéarité du fonctionnement des organes</i>	55
1.6.1. Diagramme G-G	55
1.6.2. Non linéarité due au système de suspension	58
1.6.3. Non linéarité due au pneumatique	60
<i>1.7. Conclusion</i>	65

1.1. Introduction

L'étude de dynamique de véhicule requiert une importante compréhension du rôle de chaque organe constituant une voiture et les phénomènes physiques qui se manifestent autour de ces organes. Le présent chapitre peut être considéré comme une introduction à la définition des éléments que nous pouvons retrouver dans le domaine de la dynamique de véhicule.

Dans un premier temps, nous introduisons la terminologie utilisée à travers une présentation des éléments constitutifs de l'automobile et des organes des liaisons au sol (LAS). Nous discutons ensuite des dynamiques auxquelles la voiture est soumise ainsi que le rôle de chaque organe dans ces dynamiques. En se limitant uniquement à l'aspect latéral de la dynamique du véhicule, nous étudions la cinématique de mise en virage qui sera abordée en détail en présentant les repères liés à chaque partie du véhicule et les variables d'état qui servent à représenter l'attitude du véhicule.

Nous étudions également dans ce chapitre, les phénomènes les plus importants causés par la mise en virage du véhicule. Dans ce contexte nous citons les épures de trains cinématiques et élasto-cinématiques ainsi que les transferts de charges. Bien évidemment, nous exposons systématiquement le développement des calculs associés à chaque étape. Finalement, nous présentons les différentes non linéarités de fonctionnement des organes LAS causées lors des fortes sollicitations.

1.2. Constitution de l'automobile et organes de liaison au sol

Parmi l'ensemble des éléments et des organes constituant l'automobile, on ne s'intéresse qu'à ceux qui ont un impact important sur le comportement dynamique du véhicule. Ces éléments sont les organes de liaisons au sol (LAS). Dans le but de normaliser les appellations et d'introduire les termes courants qui seront utilisés dans la suite de la thèse, nous présenterons une définition de ces différents organes LAS.

1.2.1. Les pneumatiques

Le pneumatique est un organe de liaison au sol fixé sur une roue rigide assurant la rotation autour d'un élément porteur (pivot ou bras). Il constitue le seul organe permettant la liaison direct entre le véhicule et le sol, ce qui rend le comportement du véhicule fortement conditionné par les échanges dynamiques des efforts générés à la surface de contact. Sur la figure 1.1, on montre les différentes couches de matériaux entrant dans la fabrication du pneumatique à architecture radiale. En toute évidence le pneumatique est un organe composite issu d'un assemblage solidaire de fibres synthétiques ou métalliques et de caoutchouc. La nature, la disposition et la tension des fibres confèrent au pneu résultant des propriétés d'élasticité et d'adhérence particulières. Les différentes parties constitutives du pneumatique sont :

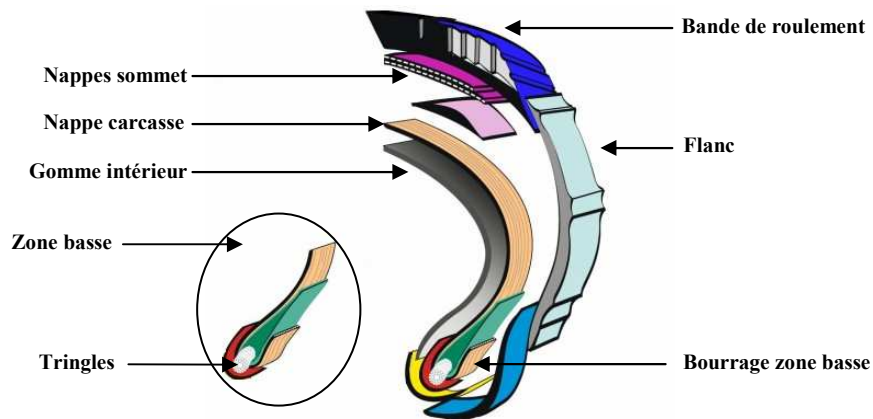


Figure 1.1. Constitution d'un pneumatique à architecture radiale.

- **Zone basse** : ensemble qui permet la fixation de la carcasse sur la jante permettant de transmettre les forces directionnelles aux éléments de ceinture et bande de roulement.
- **Tringles** : permettant la fixation du pneu sur la jante tout en assurant l'étanchéité en plus de la gomme intérieure entre la zone basse et la jante.
- **Les flancs** : en gomme souple pour protéger la carcasse et assurer l'élasticité en compression.
- **Nappe carcasse** : De type radial, c'est la plus utilisée actuellement, composé de minces câbles en fibres textiles disposés en arceaux droits. Elle transmet les efforts entre la jante et la ceinture (traction, freinage, ordre de direction). Elle absorbe les flexions verticales et les poussées latérales.
- **Nappes sommet** : constituée de plusieurs nappes en acier fins et résistants, croisées obliquement et formant une triangulation indéformable. Elles procurent une grande rigidité de torsion à la bande de roulement. L'angle de triangulation des nappes contribue à la raideur en flexion, cisaillement, ..., etc. des nappes.
- **Bande de roulement** : En caoutchouc, elle assure le contact avec le sol. Elle permet de transmettre les efforts, d'obtenir l'adhérence avec un minimum de glissement et d'évacuer l'eau.

Le contact pneumatique-sol se réduit à une petite surface appelé *air de contact*, c'est à ce niveau que se créent tous les efforts permettant au véhicule de se mouvoir, il serait donc judicieux d'analyser et de comprendre les phénomènes physiques apparaissant sur cette surface de contact afin d'obtenir une description complète du comportement du pneumatique. A ce sujet, une étude des régions d'adhérence et de glissement dans l'air de contact est présentée dans [Ste04]. La modélisation du comportement des pneumatiques est basée essentiellement sur l'étude de l'impact des différents facteurs physiques de l'environnement direct du pneumatique : nature de la gomme, pression de gonflage, température, nature du sol, ...etc. sur les efforts générés en base de roue. Le modèle du pneumatique doit prendre également en compte les entrées de sollicitations extérieures ainsi que le positionnement du plan de roue par rapport au sol [Fer02]:

- Charges verticales F_z (normale au sol) ;
- Angle de dérive δ_p qui caractérise le glissement latéral (voir §1.4.2.2) ;

- Angle de carrossage γ par rapport au sol (rotation du plan de roue selon l'axe longitudinal de la roue \vec{x}) ;
- Taux de glissement longitudinal τ , Il est négatif en freinage et positif en roue motrice. Il vaut -100% pour une roue bloquée, mais varie de 0 à -10% pour des freinages nuls à forts sans blocage des roues.

L'effort latéral est principalement dû au glissement latéral que subit le pneumatique. Ce glissement est caractérisé par l'angle de dérive δ_p entre le vecteur de vitesse \vec{V} du centre de roue et l'axe longitudinal du plan de la roue, d'où :

$$\delta_p = \arctan\left(\frac{\vec{V}_y}{\vec{V}_x}\right)$$

A cette dérive, s'ajoute la charge verticale et le carrossage qui jouent un rôle très important dans la génération d'effort latéral et on écrit $F_y(\delta_p, \gamma, F_z)$ (cf. figure 1.2a et 1.2b). L'étude du phénomène de dérive a permis d'établir plusieurs modèles servant à décrire le comportement statique et dynamique du pneumatique. Dans cette optique, on retrouve principalement les travaux de Pacejka [Pck06][Miz98][Pck96].

L'effort longitudinal dépend de la charge verticale F_z et du taux de glissement τ qui est calculé en fonction de la vitesse de rotation de la roue ω et de la vitesse de translation du centre de roue V , tel que :

Dans le cas d'un freinage : $\tau = \frac{R_{eff}\omega - V}{V}$

Dans le cas d'une accélération : $\tau = \frac{R_{eff}\omega - V}{R_{eff}\omega}$

Le paramètre R_{eff} désigne le rayon de roulement effectif calculé en fonction du rayon écrasé R_{ec} et du rayon libre R_l (cf. figure 1.2c), quelques approches d'estimation de ces paramètres sont présentées dans [Kie00] [Gen97].

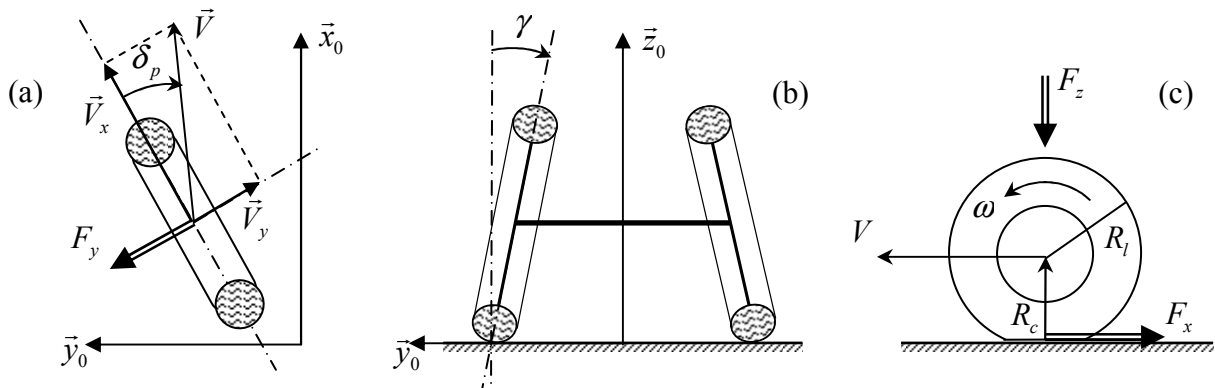


Figure 1.2. (a) dérive et effort latéral (b) carrossage (c) glissement et effort longitudinal.

En combinant les différents paramètres cités ci-dessus, on peut obtenir un modèle décrivant le torseur d'effort généré à l'air de contact [Kie00][Pck06][Bro06][Mil95]. Une

modélisation simple est généralement suffisante pour décrire et étudier la stabilité du véhicule. Par contre, s'il est question d'une analyse pointue de la dynamique véhicule, il serait nécessaire de tenir compte des saturations du pneumatique et des couplages entre le mouvement longitudinal et transversal. Dans le §1.7, on verra plus en détails les différents aspects comportementaux des pneumatiques ainsi que les modèles utilisés dans la suite de cette thèse.

1.2.2. Essieux et trains roulant

Le contact avec le sol est assuré par les pneumatiques montés sur les roues. Ces dernières sont reliés à la caisse par l'intermédiaire d'un système de liaison au sol appelé *essieu*. Les essieux permettent de guider l'orientation du plan de roue selon une géométrie complexe par rapport à la caisse. On distingue d'une part la cinématique rigide décrivant le positionnement de la roue par rapport au châssis en fonction du débattement relatif de la roue (triangles, bras, ...etc.) et d'autres part, on retrouve la cinématique flexible qui décrit la variation du plan de la roue due aux efforts appliquées aux pneumatiques au niveau de l'air de contact transmises aux liaisons élastiques.

On retrouve également les éléments de suspension, les organes de transmission, les organes de freinage et de guidage. L'ensemble de ces organes combinés avec l'essieu constitue ce qu'on appelle les *trains roulants*. On distingue les trains roulants avant et arrière par l'organe de direction (transmission des angles de braquage volant) généralement positionné au train avant en lui donnant un pouvoir directionnel, c'est à dire la possibilité de braquer les roues avant. Sur la figure 1.3 on montre un train avant double triangle à pivot découplé d'une Peugeot 407 utilisé en commun avec la Citroën C6, ainsi que le train arrière multibras.

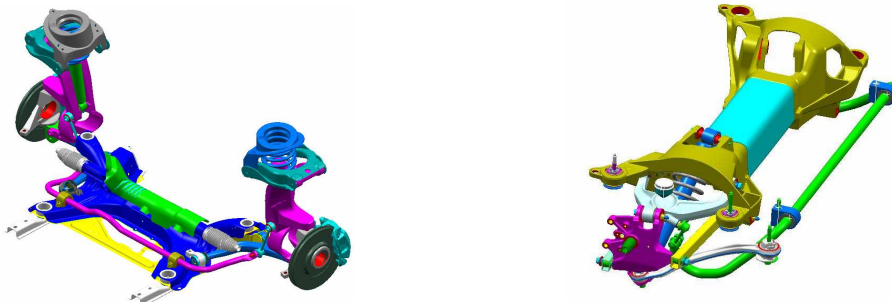


Figure 1.3. Train C6 avant (gauche) et arrière (droite).

Il existe un très grand nombre d'architectures différentes des essieux. Les prestations d'un véhicule sont directement liées aux performances de l'essieu utilisé et à la façon dont ses éléments sont conçus [Mil95][Hal95][Zar02]. Chaque architecture possède un modèle différent et son utilisation varie d'un véhicule à un autre en fonction des spécifications techniques associés. On retrouve à titre d'exemple : les essieux de type pseudo Mac Pherson (PMP) ; les bras superposés ; les multibras ; les essieux à bras tiré ; les essieux rigides...etc.

La modélisation permettant de situer les plans de roues par rapport à la caisse comprend six degrés de liberté à savoir : trois translations (longitudinale 'x', transversal 'y' et vertical 'z') et les trois rotations (la pince ' ε_p ', le carrossage ' γ ' et l'enroulement ' η ') comme montré sur la figure 1.4. On distingue alors deux parties :

- ✓ Le modèle de la cinématique qui devrait décrire ces grandeurs en fonction du débattement de la roue par rapport au châssis ce qui constitue le seul degré de liberté par rapport à la caisse.
- ✓ Le modèle de l'élasto-cinématique qui devrait décrire ces grandeurs en fonction des efforts transmis par les pneumatiques à la flexibilité de l'essieu appelé aussi '*déformés sous efforts*'.

Dans §1.5, on aborde l'aspect cinématique et élasto-cinématique dans l'architecture des trains roulant. Les variations des degrés de liberté donnant l'orientation du plan de la roue y sont représentées.

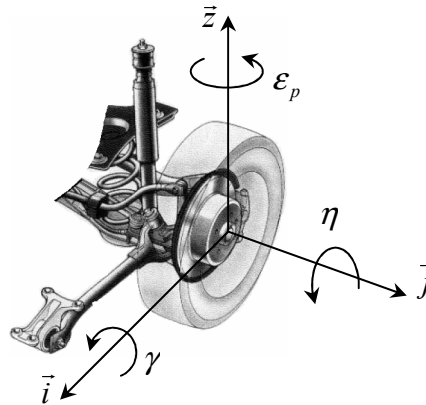


Figure 1.4. Orientation du plan de roue.

L'essieu a plusieurs fonctions principales qui sont les suivantes :

- Piloter le parallélisme et le carrossage : le contrôle du parallélisme et du carrossage permet d'optimiser le fonctionnement du pneumatique qui génère des efforts en fonction de ces deux grandeurs.
- Piloter le braquage des roues avant en transformant le mouvement de translation de la crémaillère en braquage des roues.
- Participer à l'anti-roulis ou l'anti-plongé : en présence d'accélération latérale (respectivement longitudinale) relative aux efforts horizontaux aux points de contact pneus-sol, le châssis a tendance à changer d'attitude sous forme de roulis (respectivement du tangage) que l'on cherche à diminuer pour assurer un confort optimal au passagers. La participation de l'essieu en dynamique du véhicule est principalement la gestion de la trajectoire prise par la roue en débattement vertical. Ce débattement génère un centre de rotation fictifs appelé centre de roulis en dynamique latérale, ou centre de tangage en dynamique longitudinale. Le contrôle de ce point de rotation permet de diminuer considérablement l'amplitude de ces rotations afin de garder un confort de conduite et une sensation de sécurité pour le conducteur. Cette aspect est appelé *Effet Brouilhet* [Fen05].
- Maitriser les variations de demi-voie au sol qui sont directement liées aux effets Brouilhet transversaux, car si cet effet est important, les variations de demi voie le sont également, ce qui perturbe la stabilité du véhicule notamment sur sol bosselé.

1.2.3. Suspension

La suspension permet de suspendre la caisse sur les roues et remplit le rôle d'une liaison dynamique entre les mouvements en dynamique verticale de la roue et les mouvements

de la caisse. La suspension est composée d'un ressort et d'un amortisseur. Le ressort emmagasine l'énergie lorsqu'il est écrasé sous un effort et la restitue si l'effort diminue. Ainsi l'écrasement du ressort dépendra de la charge qu'il supporte et il est caractérisé par sa raideur k_r . L'amortisseur permet d'amortir les sollicitations vibratoires. L'effort généré par l'amortisseur s'oppose au mouvement et il est fonction de sa vitesse de déplacement. Il transforme une énergie cinétique en une énergie calorifique, on dit qu'il est dissipatif. L'amortisseur est caractérisé par son coefficient d'amortissement A_{amo} . Les variations du profil routier et les sollicitations au volant font que les roues débattent verticalement. L'ensemble ressort-amortisseur agit comme un filtre de ces excitations en assurant le contact roues-sol. La suspension remplit aussi le rôle de gestion du débattement pour maîtriser les mouvements de la caisse en participant comme un anti-roulis. Il est à noter que les barres anti-dévers participent également à la tenue de caisse en virage.

Le groupe PSA utilise deux technologies de suspension : la suspension métallique (ressorts hélicoïdaux avec amortisseurs hydrauliques) et la suspension oléopneumatique [Guy00]. En réalité l'ensemble ressorts-amortisseurs possède des caractéristiques dynamiques non linéaires [Zar02][Hal95], en effet, la raideur d'un ressort dépend du niveau d'écrasement ou de détente qu'il subit, ainsi on la note $k_r(\Delta x)$ avec Δx l'écrasement du ressort. Sans oublier les butées qui jouent un rôle important dans la caractéristique des suspensions. Le coefficient d'amortissement quant à lui dépend non linéairement de la vitesse de la tige v_{tige} et de la fréquence de débattement f , comme illustrer dans [Caf97], on le note $A_{amo}(f, v_{tige})$. Une étude détaillée des modèles de suspension a fait l'objet des travaux réalisés dans [Sté04][Nou02]. Dans §1.6 on présente l'aspect non linéaire du fonctionnement des organes de liaisons au sol.

1.2.4. Châssis

Le châssis représente la partie suspendue du véhicule porté par les suspensions et les roues. On retrouve donc : la carrosserie, le groupe motopropulseur, l'habitacle intérieur, ... etc. C'est généralement la partie considérée lors d'une modélisation en dynamique de véhicule, sachant qu'il subit des sollicitations provenant des efforts aux pneumatiques, des efforts de suspension et des efforts inertiels et aérodynamiques. Les mouvements du châssis se décomposent comme pour un corps solide dans l'espace en six degrés de liberté.

Trois translations pour décrire la dynamique longitudinale suivant \bar{x} , la dynamique latérale suivant \bar{y} et la dynamique verticale (pompage) suivant l'axe \bar{z} , et trois rotations pour décrire les mouvements : du lacet ψ suivant \bar{z} , du roulis θ suivant \bar{x} et du tangage φ suivant \bar{y} . Sur la figure 1.5 sont représentés les six degrés de liberté et un repère associé au CdG (Centre de Gravité). Les mouvements en dynamique longitudinale, verticale et du tangage ne seront pas abordés dans cette thèse. Ainsi, le déroulement de la modélisation ne se portera que sur la dynamique latérale. Les équations de mouvement régissant la dynamique du véhicule seront issues des principes fondamentaux de la dynamique, cf. §1.2.

$$M \vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$I \vec{\Omega} = \sum \vec{M}_{dyn}$$

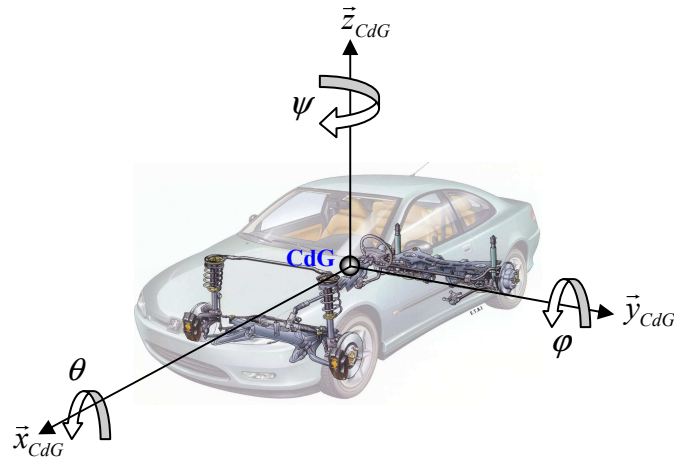


Figure 1.5. Représentation des degrés de liberté au repère CdG.

1.2.5. Système de direction

Le système de direction permet de transmettre les ordres du conducteur d'une rotation en angle volant à un braquage de roue localisé sur certaines roues. Généralement les roues concernées par le braquage se situent à l'essieu avant et sont appelées *roues directrices*. Il existe également des véhicules qui possèdent quatre roues directrices ou des roues directrices situées à l'essieu arrière comme les engins de manutention. Les principales spécifications d'un système de direction concernent la précision, le confort, la sécurité, l'assistance et l'information sur la situation du véhicule.

Actuellement, différents systèmes sont utilisés dans l'industrie automobile et cela en fonction de la technologie employée. On retrouve donc, la direction assistée hydraulique (DAH) où l'effort d'assistance est généré par un circuit hydraulique (pompe, vérins, valve,...), les systèmes à assistance variable (DAV) où l'assistance est adaptée selon la situation de vie ou la vitesse du véhicule [Gay00]. Il existe aussi la direction à assistance électrique (DAE) schématisé sur la figure 1.6 où l'assistance est fournie par un moteur électrique fixé sur la crémaillère, l'avantage de ce système est qu'on peut maîtriser le couple d'assistance en s'adaptant à toutes les situations de vie par des lois de commande performante. La modélisation de la direction ne sera pas abordée dans le cadre de cette thèse, et on se limitera à une loi de démultiplication constante entre l'angle au volant et le braquage des roues directrices.

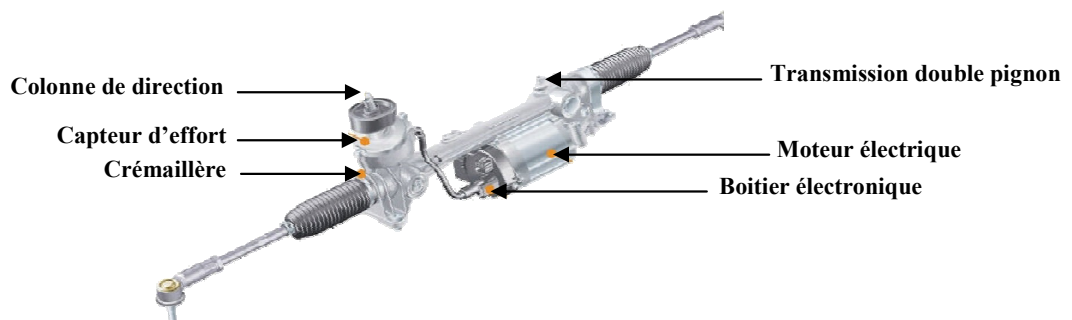


Figure 1.6. Direction assistée électrique.

1.3. Les dynamiques mises en jeu

Lorsqu'on cherche à décrire théoriquement le comportement d'un véhicule, les équations de mouvement doivent être connues et les interactions physiques entre les différents sous systèmes doivent apparaître explicitement sous formes d'équations mathématiques faisant interagir les différentes sollicitations extérieures et les états représentant l'attitude du véhicule. Comme nous l'avons vu ci-dessus, le véhicule automobile est formé d'un certain nombre d'éléments et d'organes ayant chacun une fonction bien précise. Lorsqu'on sollicite un véhicule, soit en appliquant un angle volant de sorte à le diriger selon une trajectoire souhaitée, ou en agissant sur le couple accélérateur ou freineur, il apparaît trois différentes dynamiques du châssis. Ces dynamiques peuvent être décomposées selon les trois axes du repère sol, on retrouve :

- **La dynamique longitudinale**

En se référant à la figure 1.5, la dynamique longitudinale décrit le comportement du véhicule suivant l'axe longitudinal \vec{x} en accélération/décélération ' \vec{a}_x ' et l'axe \vec{y} en rotation du tangage ' φ '. L'accélération longitudinale est due à une application d'un couple accélérateur fourni par le moteur ou d'un couple freineur fourni par les organes de freinage. L'angle du tangage est déterminé par les caractéristiques de la suspension et l'accélération longitudinale que subit le châssis. La modélisation doit prendre en compte les efforts longitudinaux F_{xij} à la base des roues (qui sont générés en fonction du glissement longitudinal τ et de la charge verticale des pneumatiques F_{zij}), les transferts de charges, les efforts de suspension ainsi que l'effort dû au profil aérodynamique de la caisse.

- **La dynamique latérale**

La dynamique latérale du véhicule est décrite par l'accélération latérale \vec{a}_y , la vitesse de lacet ψ , le roulis θ et les efforts latéraux F_{yij} à la base de roues. Lors d'une mise en virage après application d'un angle de braquage aux roues, les pneumatiques génèrent des efforts latéraux relatifs à l'accélération latérale permettant au véhicule de tourner sur une trajectoire décrite par un centre de rotation instantané qu'on peut obtenir en fonction des quatre vitesses de translation des roues. Les efforts latéraux sont calculés à partir de la vitesse de glissement latéral et de la charge verticale sur chaque pneumatique. La modélisation doit prendre en compte le phénomène du transfert de charges en faisant intervenir le mouvement de roulis et les caractéristiques de la suspension. La littérature traitant de la dynamique latérale est assez abondante et les approches utilisées sont différentes [Bro06][Kie00][Fen05][Gen97][Evr03].

Le potentiel d'un pneumatique à générer un effort au niveau de l'air de contact dépend du coefficient d'adhérence (latérale et longitudinal) et de la charge verticale. Dans le cas d'une dynamique mixte, longitudinale-latérale, il apparaît un phénomène de couplage entre les efforts latéraux et longitudinaux tel qu'une demande excessive en effort longitudinal fait chuter l'effort latéral [Gay00][Por03].

• La dynamique verticale

La dynamique verticale décrit le comportement du châssis (masse suspendue) en fonction des efforts de sollicitation des pneumatiques transmis à travers les suspensions et du profil vertical de la route. Cette dynamique implique un transfert de charges vertical sur les pneumatiques et un déplacement vertical du châssis. Globalement, on considère que le châssis se comporte comme un système masse-ressort-amortisseur, ainsi, on peut trouver ‘le modèle quart de véhicule’, ‘modèle de demi-véhicule’ et ‘le modèle de suspension à quatre roues’ [Ste04][Nou02]. L’interaction avec les dynamiques longitudinale et latérale est évidente. D’une part le mouvement de débattement vertical agit sur l’orientation du plan de roue, et d’autre part, il agit sur les charges verticales aux pneus. Généralement pour une modélisation simplifiée, une distinction est faite entre les dynamiques directionnelles et la dynamique verticale.

Même si les interdépendances sont avérées entre toutes ces composantes de la dynamique du véhicule [Evr03], les modèles étudiés dans cette thèse ne concerneront que la dynamique latérale sans prise en compte des couplages au niveau des efforts générés par les pneus. Les couplages entre les efforts latéraux et longitudinaux sont étudiés dans [Pck06].

1.4. Cinématique de mise en virage

Pour suivre une trajectoire, le conducteur exécute une série de commande au volant tel qu’un angle volant nulle correspond à une conduite en ligne droite, alors qu’un angle volant non nulle correspond à une mise en virage du véhicule. L’ensemble de ces commandes qui s’ajoute aux commandes d’accélération ou de freinage désigne l’interface de commandes entre le couple conducteur-véhicule. Une boucle de conduite classique peut être schématisée comme montré sur la figure 1.7 [Kie00][Fen05].

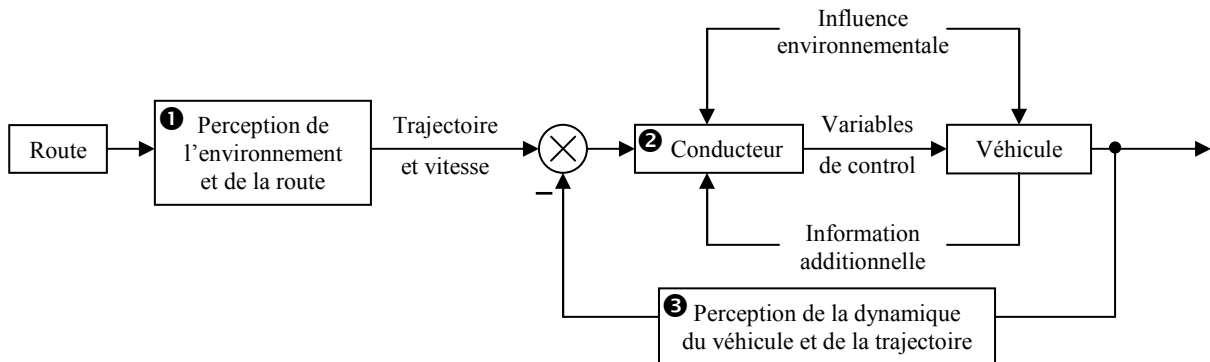


Figure 1.7. *Modèle standard de la boucle de commande du conducteur.*

Les différentes tâches qu’effectue un conducteur sont les suivantes :

1. Analyser la route et calculer la trajectoire et la vitesse (générateur de consignes).
2. Calculer et actionner les ordres en fonction de l’état du véhicule (régulateur).
3. Percevoir l’attitude du véhicule en trajectoire et en vitesse (Capteur).

La deuxième tâche (régulateur) concerne le calcul de l’action à fournir pour accélérer, freiner ou tourner le volant pour s’adapter à la trajectoire et à la vitesse souhaitée. Ces actions permettent de contrôler la dynamique longitudinale et transversale du véhicule. Dans le cadre

de cette thèse l'étude portera uniquement sur l'aspect transversal à vitesse constante, ce qui implique que l'analyse d'une situation de mise en virage est suffisante pour décrire la cinématique et la dynamique latérale du véhicule.

L'étude de la cinématique d'un véhicule, revient à étudier les grandeurs qui définissent les mouvements du véhicule par rapport à un référentiel fixe. Cette étude concerne l'analyse de la trajectoire et des vitesses de chaque point appartenant au véhicule (essieux, roues, CdG, ...etc.) sans prendre en compte les causes générant ces mouvements.

Durant son déplacement, le véhicule est considéré comme un ensemble d'éléments rigides en mouvement. La caisse est suspendue par les éléments de suspension et les essieux. L'ensemble est en contact avec le sol à travers les roues qui permettent le guidage du véhicule. Les liaisons de suspension entre le châssis et les essieux ne sont pas rigides et donc elles permettent au châssis de se mouvoir en rotation lors d'une situation de mise en virage (roulis) ou de freinage (tangage). L'attitude du véhicule peut être caractérisée par un ensemble de variables qui seront appelés « *variables d'états* », celles qui seront utilisé dans la suite concerneront seulement la dynamique latérale, on cite alors : la vitesse de lacet $\dot{\psi}$, la dérive δ au CdG et le roulis θ .

Pour définir les différentes variables d'états du véhicule, on a besoin d'un ensemble de repères. Chaque partie du véhicule sera liée à un repère approprié. Les repères fixés seront utilisés par la suite pour établir une modélisation du comportement du véhicule ce qui implique qu'un mauvais choix de repères peut entraîner une modélisation complexe et fastidieuse. Le choix qui sera présenté ici n'est pas universel, chaque auteur à la liberté de choisir l'ensemble de repère qui semble faciliter le calcul et alléger les équations, comme on peut le constater dans [Bro06][Kie00][Sch99].

1.4.1. Référentiels

Afin d'introduire les éléments nécessaire à l'étude de la cinématique générale d'un véhicule, on adopte le cas d'une situation de mise en virage où le véhicule décrit une trajectoire circulaire de rayon fini.

A. Repère inertiel

La trajectoire du véhicule est repérée sur un référentiel galiléen lié à la route et appelé repère inertiel (figure 1.8). Dans la suite, ce repère sera noté $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, tel que :

- O_0 : point quelconque appartenant au plan de la route.
- \vec{z}_0 : vecteur ascendant normal au plan de la route.
- \vec{x}_0 : vecteur arbitraire horizontal au sol.
- $\vec{y}_0 = \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_0$.

La trajectoire du véhicule est décrite sur le plan de la route définit par $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Dans certains cas où l'étude de la trajectoire n'est pas importante, le point O_0 peut être

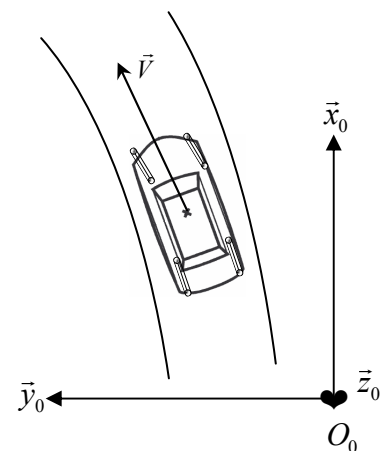


Figure 1.8. Repère inertiel.

confondu avec la projection verticale du CdG sur le plan de la route.

B. Repère caisse

C'est le repère lié à la masse suspendue noté $R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. (figure 1.10 à 1.12). Il est défini par :

- G : l'origine du repère confondu avec le centre de gravité.
- \vec{z}_1 : est colinéaire à \vec{z}_0 au repos
- \vec{x}_1 : est dans le plan de symétrie et dirigé vers l'avant.
- $\vec{y}_1 = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$.

C. Repère intermédiaire (repère masse non suspendue)

Soit B_1 et B_2 les centres des roues à l'essieu avant et B_3 et B_4 les centres des roues à l'essieu arrière. On désigne par M_1 le centre de l'essieu avant et M_2 le centre de l'essieu arrière, tel que $\overrightarrow{M_1B_1} = \overrightarrow{B_2M_1}$ et $\overrightarrow{M_2B_3} = \overrightarrow{B_4M_2}$. Le point M est la projection verticale de G sur M_1M_2 et désigne l'origine du repère intermédiaire $R_{10}(M, \vec{x}_{10}, \vec{y}_{10}, \vec{z}_{10})$, voir figure 1.10 à 1.12. Ce repère est défini par :

- \vec{z}_{10} : est colinéaire à \vec{z}_0 .
- \vec{x}_{10} : est colinéaire à \vec{x}_1 et dirigé positivement vers l'avant.
- $\vec{y}_{10} = \vec{z}_{10} \wedge \vec{x}_{10}$.

On définit dans ce repère les points importants de la géométrie du véhicule qui sont :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM_1} &= L_1 \vec{x}_{10}, & \overrightarrow{MM_2} &= -L_2 \vec{x}_{10}, & \overrightarrow{M_2M_1} &= L \vec{x}_{10} \\ \overrightarrow{M_1B_1} &= \frac{E_1}{2} \vec{y}_{10}, & \overrightarrow{M_2B_3} &= \frac{E_2}{2} \vec{y}_{10} \end{aligned}$$

L_1 , L_2 et L désignent l'empattement avant, arrière et totale, respectivement. Egalement, E_1 et E_2 désignent la voie avant et arrière.

D. Repère intermédiaire de roulis

Soit I_1 et I_2 les centres de roulis à l'essieu avant et arrière, respectivement (figure 1.12). On définit le point O_1 comme étant la projection du point M sur I_1I_2 . Le point O_1 est un point fictif et désigne l'origine du repère intermédiaire de roulis $R_{10}^*(O_1, \vec{x}_{10}^*, \vec{y}_{10}^*, \vec{z}_{10}^*)$ comme montré sur la figure 1.11 et 1.12. On définit alors R_{10}^* par :

- $\vec{z}_{10}^* = \vec{z}_{10}$.
- $\vec{x}_{10}^* = \vec{x}_{10}$.
- $\vec{y}_{10}^* = \vec{z}_{10}^* \wedge \vec{x}_{10}^*$.

On constate que la seule différence avec le repère R_{10} et R_{10}^* est l'origine du repère. Ceci nous permettra de mieux visualiser l'angle de roulis (§1.4.2.3).

E. Repères roues

Chaque roue du véhicule possède un repère fixe. Dans le cas de la roue avant gauche, on associe le repère $R_{AvG}(B_1, \vec{x}_{AvG}, \vec{y}_{AvG}, \vec{z}_{AvG})$ tel que :

- \vec{y}_{AvG} est porté par l'axe de rotation de la roue.
- \vec{x}_{AvG} est horizontal et dirigé vers l'avant de la roue et constitue avec \vec{z}_{AvG} le plan de la roue ($B_1, \vec{x}_{AvG}, \vec{z}_{AvG}$).
- $\vec{z}_{AvG} = \vec{x}_{AvG} \wedge \vec{y}_{AvG}$.

Avec ce repère, on définit l'angle de braquage de la roue avant gauche par $\varepsilon_r = (\vec{x}_{10}, \vec{x}_{AvG})$. De la même manière, le carrossage de la roue avant gauche est $\gamma = (\vec{z}_{10}, \vec{z}_{AvG})$. En utilisant la même définition, on peut facilement retrouver les repères associés aux roues restantes en utilisant les abréviations Av, Ar, G et D pour exprimer Avant, Arrière, Gauche et Droite, respectivement.

F. Repère aire de contact

En utilisant une terminologie similaire au repère roue, le repère associé à chaque aire de contact sera noté $R_{Cij}(A_k, \vec{x}_{Cij}, \vec{y}_{Cij}, \vec{z}_{Cij})$ où i représente l'essieu ($i = Av, Ar$), j représente la roue ($j = G, D$) et k représente l'indice des centres des surfaces de contacts ($k = 1, \dots, 4$). A titre d'exemple, on montre sur la figure 1.9, le repère aire de contact avant gauche $R_{CAvG}(A_1, \vec{x}_{CAvG}, \vec{y}_{CAvG}, \vec{z}_{CAvG})$, tel que :

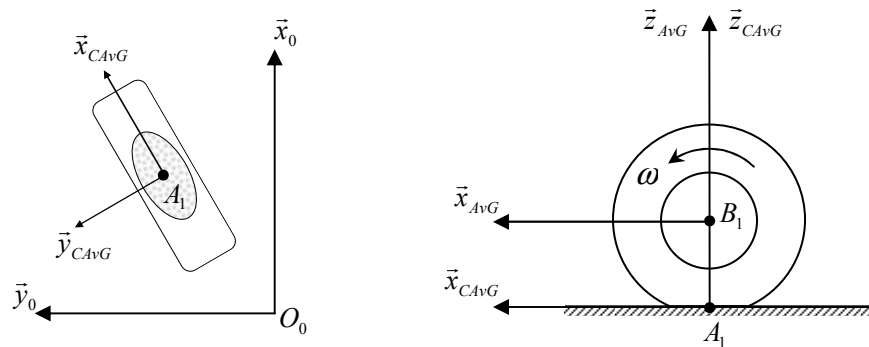


Figure 1.9. Repère air de contact R_{CAvG}

- \vec{z}_{CAvG} est colinéaire à \vec{z}_0 .
- \vec{x}_{CAvG} est colinéaire à \vec{x}_{AvG} et dirigé positivement vers l'avant de la roue.
- $\vec{y}_{10} = \vec{z}_{10} \wedge \vec{x}_{10}$.

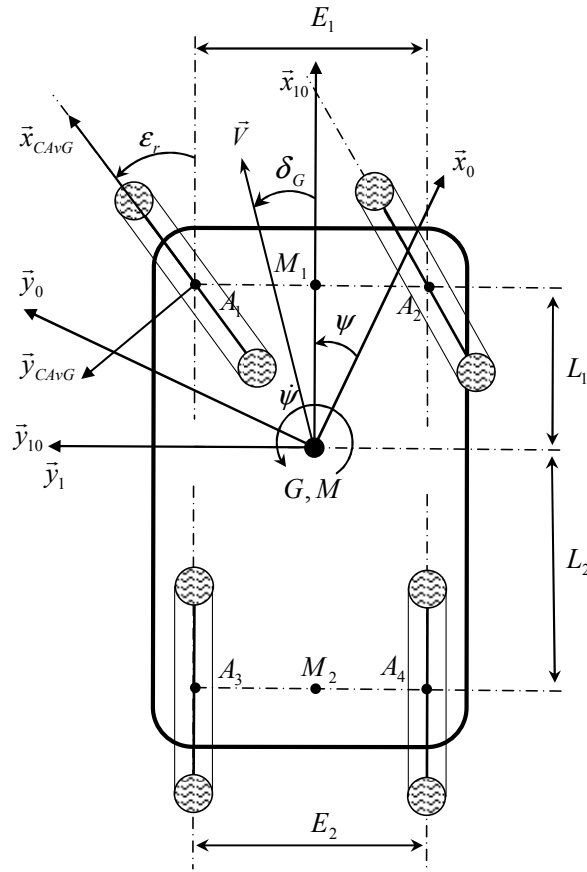


Figure 1.10. Représentation des repères et de l'architecture du véhicule – Vue verticale.

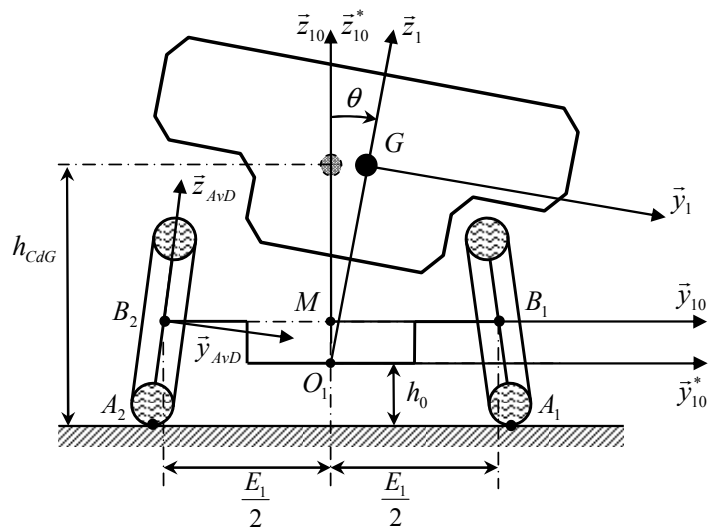


Figure 1.11. Représentation des repères – Vue longitudinale de face (virage à droite).

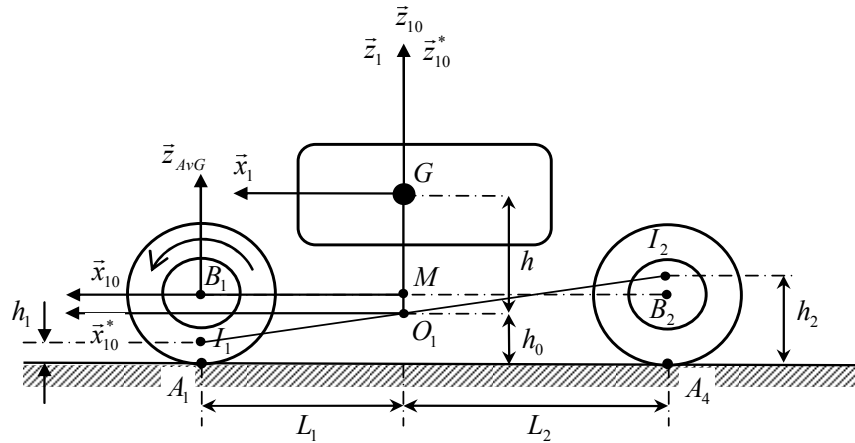


Figure 1.12. Représentation des repères et de l'architecture du véhicule – Vue latérale.

Les repères adoptés serviront à formaliser les équations mathématiques qui décrivent les différents aspects de la cinématique. En plus de la représentation des repères, les figures 1.9 à 1.11 montrent quelques paramètres importants de l'architecture du véhicule qui sont :

- L_1 et L_2 : les empattements avant et arrière ;
- E_1 et E_2 : les voies avant et arrière ;
- h_1, h_2 et h_0 : les Hauteurs des Centres de Roulis (HCR) à l'essieu avant, arrière et au CdG, respectivement.

$$\text{Avec : } h_0 = \frac{L_1 h_2 + L_2 h_1}{L_1 + L_2}$$

- h_{CdG} et h : la hauteur du Centre de Gravité (CdG) au sol et la hauteur du roulis actif, respectivement.

Chaque point appartenant au véhicule décrit un mouvement qui peut être représenté dans n'importe quel repère à condition d'avoir une description préalable des mouvements des repères entre eux. Hormis le repère inertiel R_0 , tous les autres repères sont en mouvement par rapport au sol. D'après les définitions, on constate que les repères R_{10} et R_{10}^* décrivent un mouvement plan sur plan par rapport à R_0 . Ce dernier constat sera utilisé dans la suite pour extraire les vitesses de quelques points stratégiques qui sont : les quatre points de contact pneu/sol et les centres des essieux avant et arrière.

1.4.2. Variables d'états

Pour définir l'attitude du véhicule, on utilise trois paramètres dynamiques : La vitesse de lacet, l'angle de dérive du véhicule au CdG et l'angle de roulis de la caisse. L'ensemble de ces paramètres représentent les variables d'états du véhicule.

1.4.2.1. Vitesse de lacet $\dot{\psi}$

Sur la figure 1.10, l'angle de lacet est l'angle formé entre le repère inertiel et le repère intermédiaire $\psi = (\vec{x}_{10}, \vec{x}_0) = (\vec{y}_{10}, \vec{y}_0)$. Dans la littérature il est également appelé « angle de cap ». La vitesse de lacet est la dérivée temporelle de l'angle de lacet, tel que :

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$$

1.4.2.2. Angle de dérive au CdG δ_G

Comme définit précédemment (figure 1.2 (a)), la dérive pneumatique est l'angle entre l'axe de symétrie longitudinale de la roue (ou plan de roue) et le vecteur vitesse du centre de la roue. De la même manière, on définit l'angle de dérive au CdG δ_G comme étant l'angle entre \vec{x}_1 et le vecteur vitesse au CdG, comme montré sur la figure 1.10. On a donc :

$$\delta_G = \arctan\left(\frac{V_x}{V_y}\right)$$

1.4.2.3. Angle de roulis θ

Le roulis est l'angle de rotation généré par le mouvement de la masse suspendue suivant l'axe \vec{x}_{10}^* . On écrit alors $\theta = (\vec{z}_{10}^*, \vec{z}_1)$, cet angle dépend fortement des ressort et des amortisseurs utilisés pour dimensionner la suspension de la voiture. L'axe de rotation est appelé « axe de roulis ». Il est défini par la droite I_1I_2 . Les points I_1 et I_2 sont des points fictifs définis géométriquement par les épures des trains et désigne les centres de roulis avant et arrière respectivement. Ces points varient d'un véhicule à un autre selon le type de train utilisé. La figure 1.13 montre la détermination géométrique du centre de roulis de l'essieu avant.

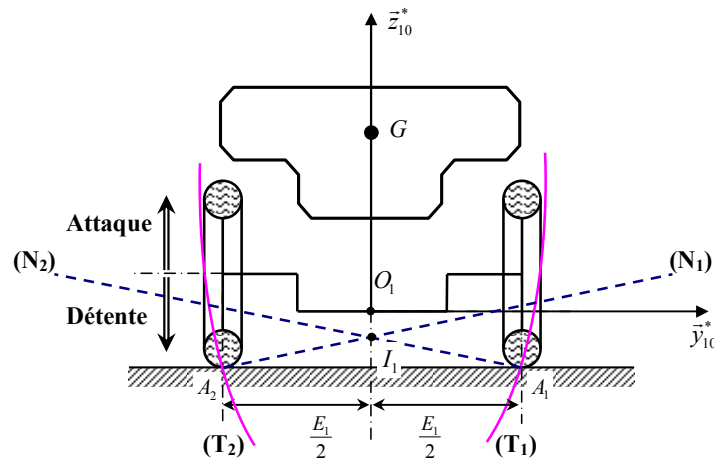


Figure 1.13. Représentation géométrique du centre de roulis à l'essieu avant.

Pour trouver la position du centre de rotation de la caisse I_1 à l'essieu avant, on suppose qu'on connaît la variation de la demi-voie ($E_1/2$) en fonction du débattement vertical des roues d'un même essieu. En partant d'un point quelconque, il est alors possible de tracer la trajectoire (T_1) du point de contact roue-sol noté A_1 , pour un débattement de suspension. La normale à cette trajectoire au point de contact est la droite (N_1) . Symétriquement, la roue opposée décrit une trajectoire (T_2) et une droite (N_2) normale à cette trajectoire au point A_2 . Par définition, le centre de rotation I_1 est situé à l'intersection de (N_1) et de (N_2) et se trouve également sur le plan de symétrie de la caisse.

Il est important de noter qu'ici aucune connaissance de la conception de la suspension n'est utile. Seule compte la variation de demi-voie en débattement. Le centre de roulis est donc défini par la cinématique du train. Le point I_1 n'est pas une donnée du train mais une conséquence de la conception et plus précisément « *la variation de demi-voie* ». De la même manière, on peut situer le centre de roulis arrière I_2 qui forme avec I_1 l'axe de roulis de la caisse I_1I_2 .

1.4.2.3.1. Moment de roulis actif et effet Brouilhet

A partir des figures 1.12 et 1.13, nous constatons que la caisse décrit un mouvement de roulis autour de l'axe I_1I_2 . Alors, le moment de roulis actif peut s'exprimer par :

$$M_x = M_s \gamma_t h$$

où M_s et γ_t sont la masse suspendue et l'accélération latérale, respectivement.

Par rapport à un moment de roulis naturel $M_x^* = h_{cdg} M_s \gamma_t$, qui prend en compte la hauteur du centre de gravité par rapport au sol, la caisse n'est plus soumise qu'à une partie donnée par M_x . Une première constatation est que la cinématique du train qui donne les centres de roulis introduit un anti-roulis cinématique qui a pour valeur $\eta = 1 - \frac{h}{h_{cdg}}$ exprimée en %. Cette anti-roulis cinématique est plus connu sous l'appellation « *Effet Brouilhet* ».

Dans le cas d'une dynamique longitudinale où il est question de mouvement de tangage (angle de plongé), la cinématique des trains entraîne le même effet, appelé également « *effet Brouilhet* ». Cet aspect de la cinématique ne fera pas l'objet d'une étude dans cette thèse. Par contre, une étude synthétique et détaillée concernant l'effet Brouilhet est présentée dans [Hal95].

1.4.2.3.2. Anti roulis de suspension

Comme mentionné plus en amont, le mouvement de roulis est fortement conditionné par le dimensionnement du système de suspension (ressorts, barres anti-dévers et amortisseurs). En effet, le mouvement de roulis est contrôlé par les différents organes constituant la suspension des trains. Comme décrit au §1.2.3, Les ressorts et les amortisseurs génèrent des efforts contraire pour amortir le déplacement de la caisse en roulis. Le moment de ces efforts par rapport au centre de roulis de la caisse est donné par :

$$M_{susp} = A_\theta \dot{\theta} + k_\theta \theta$$

$$\begin{aligned} \text{Où : } \quad A_\theta &= A_{\theta_1} + A_{\theta_2} \\ k_\theta &= k_{\theta_1} + k_{\theta_2} \end{aligned}$$

avec A_{θ_1} et A_{θ_2} : les amortissements respectives aux essieux avant et arrière. k_{θ_1} et k_{θ_2} : les raideurs des ressorts et des barres anti-dévers respectives aux essieux avant et arrière.

En virage stabilisé, on obtient l'égalité entre le moment actif de roulis et le moment anti roulis de suspension, sous la forme :

$$M_{susp} = M_x \quad \Rightarrow \quad hM_s \gamma_t = k_\theta \theta$$

Dans le §1.8, nous verrons comment cet anti roulis intervient dans les équations de mouvements.

1.4.3. Modèle bicyclette et angle d'Ackermann

La trajectoire de G décrit un cercle de rayon fini lors d'un braquage constant. Sur la figure 1.14, on montre le point I_s qui désigne le centre instantané de rotation statique pour un roulement sans glissement des roues. On suppose que les roues se déplacent sans glissement et les vitesses des points de contact sont confondues avec \vec{x}_{Cij} (axes longitudinaux aux points de contact pneus/sol). Le point I_s représente donc un centre de rotation géométrique qui dépend exclusivement de la structure du véhicule.

De la même façon, on indique le point I_D qui désigne le centre instantané de rotation dynamique. Dans ce cas, les roues se déplacent avec des glissements caractérisés par les dérivées aux pneus δ_{ij} . Le point I_D représente le centre de rotation réelle d'un véhicule.

Les coordonnées du point I_s dans R_{10} peuvent être calculées géométriquement. On a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MI_s}(X_{I_s}, Y_{I_s})$:

$$\begin{cases} X_{I_s} = -L_2 \\ Y_{I_s} = \frac{E_1}{2} + (L_1 + L_2) \cotg(\varepsilon_{r1}) = -\frac{E_1}{2} + (L_1 + L_2) \cotg(\varepsilon_{r2}) \end{cases} \quad (1.1)$$

Une condition pour que les roues avant se déplacent sans glissement est que les axes de rotation des roues avant se croisent au même point d'intersection avec l'axe de rotation des roues arrières. Ceci signifie que le braquage de la roue intérieure est supérieur à celui de la roue extérieure. A partir de l'équation (1.1), on peut trouver un lien entre les braquages des roues avant qui est donné par :

$$\cotg(\varepsilon_{r2}) - \cotg(\varepsilon_{r1}) = \frac{E_1}{(L_1 + L_2)} \quad (1.2)$$

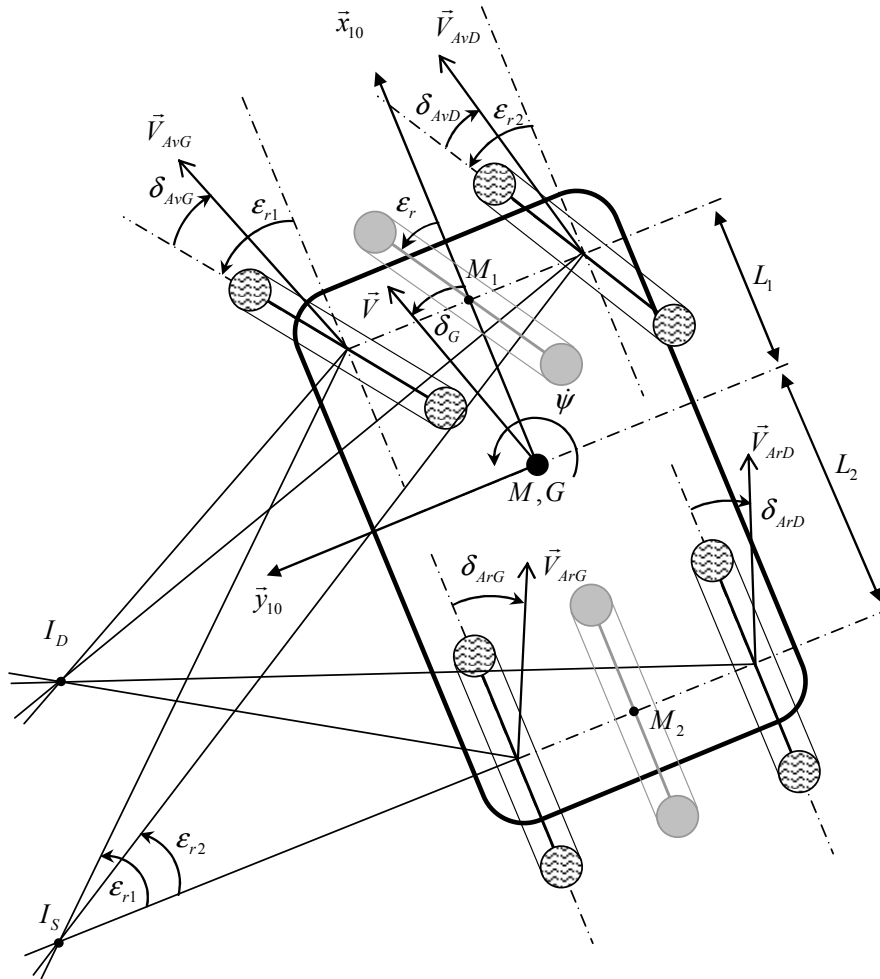


Figure 1.14. Centres instantanés de rotation et rayons de virage.

Cette relation particulière est à l'origine de « *L'épure de Jeantaud* ». Cette caractéristique cinématique ne sera pas traitée dans cette thèse, par contre le lecteur trouvera plus de détails dans [Bro06]. Dans la pratique la différence entre ϵ_{r1} et ϵ_{r2} est très faible pour des braquages usuels de conduite, et devient importante pour les grands angles comme lors des manœuvres de parking. Le rayon de virage statique R_s est donné par l'équation 1.1, tel que :

$$R_s = \|\overrightarrow{MI_s}\| = \left[L_2^2 + \left(\frac{E_1}{2} + (L_1 + L_2) \cotg(\epsilon_{r1}) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.3)$$

Ou en utilisant le braquage de la roue extérieure

$$R_s = \left[L_2^2 + \left(-\frac{E_1}{2} + (L_1 + L_2) \cotg(\epsilon_{r2}) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

Dans la littérature traitant de la dynamique de véhicule [Fen05][Bro06][kie00][Gen97][Pck06], des illustrations simplificatrices ont été apportées afin de réduire la complexité des équations. Cette simplification se résume au « *Modèle bicyclette* » où on

suppose que les deux pneumatiques d'un même train travaillent exactement dans les mêmes conditions, à savoir :

- Ils supportent la moitié de la charge du train au repos.
- Possèdent les mêmes angles de dérives et de carrossage.

Ceci implique que les deux pneumatiques peuvent être confondues au centre de l'essieu pour créer un pneumatique équivalent fictif, comme représenté sur la figure 1.14. Les deux roues du modèle bicyclette sont placées sur l'axe médian du véhicule. Concernant le braquage de la roue équivalente avant, on retrouve deux cas de figure :

- ✓ Dans le cas où les roues ne possèdent pas les mêmes angles de braquage (lorsqu'on considère l'épure de Jeantaud, la cinématique et l'élasto-cinématique des trains), la roue équivalente possède un braquage équivalent à la moyenne des braquages, c à d :

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}$$

- ✓ Dans le cas simple où on considère que les roues possèdent les mêmes angles de braquage, on a : $\varepsilon_r = \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$.

Le modèle bicyclette a fait preuve de son efficacité dans l'étude de la dynamique de véhicule. De nombreux résultats significatifs ont été apportés. Ils ont contribué à améliorer la compréhension du comportement de la voiture [Zar02]. Afin de ne pas rompre avec l'évolution de ce modèle, dans la suite des travaux et pour des commodités de calcul, nous ferons très souvent appel au modèle bicyclette.

1.4.3.1. Notion d'angle d'Ackermann

En imaginant que les pneus ne dérivent pas (figure 1.14), les vecteurs vitesses des deux roues du modèle bicyclette sont portées par les axes longitudinaux des plans de roues. En conséquence, le centre de rotation I_S du véhicule se situe sur l'axe de l'essieu arrière. Le rayon de virage du modèle bicyclette est le même que le rayon statique R_S . Pour des petits angles de braquages, on considère que le rayon de virage est suffisamment grand pour que $R_S = \sqrt{x^2 + y^2} \approx y^2$. A partir de la figure 1.15, on obtient géométriquement :

$$\tan(\varepsilon_r) = \frac{L_1 + L_2}{R_S} = \frac{L}{R_S} \quad (1.5)$$

pour des angles de braquages usuelles on peut faire les approximations $\sin(\varepsilon_r) = \varepsilon_r$ et $\cos(\varepsilon_r) = 1$. On obtient finalement :

$$\varepsilon_r = \frac{L}{R_S} = \varepsilon_a \quad (1.6)$$

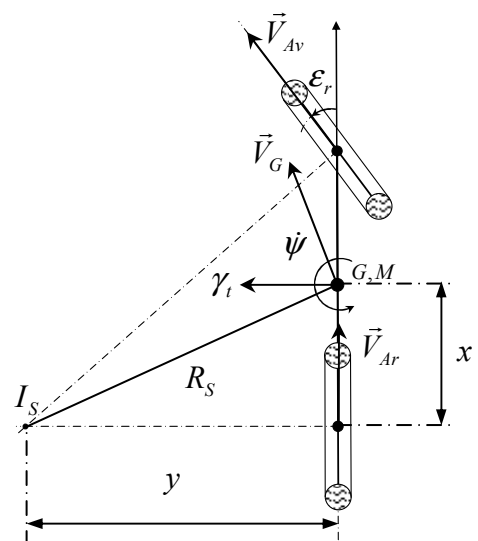


Figure 1.15. Modèle bicyclette.

Cet angle de braquage avec des dérives nulles est par définition « *l'angle d'Ackermann* » qui est un angle purement géométrique. **L'angle d'Ackermann peut être interpréter comme étant l'angle braquage nécessaire pour maintenir une trajectoire de rayon constant R_S pour un véhicule avec des pneumatiques qui ne dérivent pas. Ce véhicule est appelé « véhicule d'Ackermann ».**

Le rayon n'est pas une grandeur facile à mesurer en essais. Les grandeurs mesurées habituellement sont la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ ou l'accélération transversale γ_t . Pour des petits angles, l'accélération transversale γ_t est assimilée à l'accélération normale γ_n , tel que :

$$\gamma_n = \frac{V^2}{R_S} = V\dot{\psi}$$

En remplaçant dans l'équation 1.6, on obtient :

$$\varepsilon_a = \frac{L}{R_S} = \frac{L\gamma_t}{V^2} = \frac{L\dot{\psi}}{V} \quad (1.7)$$

Pour simplifier l'équation 1.7, on considère que pour des angles usuels de dérive au CdG, la vitesse du véhicule V peut être approximée par la vitesse longitudinale, on écrit donc :

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \approx V_x^2$$

Et on obtient :

$$\varepsilon_a = \frac{L}{R_S} = \frac{L\gamma_t}{V_x^2} = \frac{L\dot{\psi}}{V_x} \quad (1.8)$$

L'équation 1.8 montre les différentes expressions de l'angle d'Ackermann qui ne dépend que de l'empattement du véhicule et du rayon de la trajectoire. Il est donc inutile de la conserver pour réaliser des comparaisons entre voitures. Pour faire les comparaisons entre voitures on s'intéressera à la partie de l'angle volant qui correspond uniquement aux propriétés dynamiques de la voiture et qui ne dépend que de l'accélération transversale quelque soit le rayon ou la vitesse avec lesquelles celle-ci est obtenue. Cette angle sera appelé « *angle de surbraquage* ». Cet angle sera introduit dans §1.4.3.4.

1.4.3.2. Vitesse d'un point quelconque du véhicule

Sur la figure 1.13, on montre les différentes vitesses attachées aux points stratégiques qui sont : les quatre points de contact roues-sol, le CdG et le point M . Dans cette schématisation les dérives au CdG et aux pneumatiques sont prises en compte. En utilisant les lois de la cinématique du solide [Bro06], la vitesse d'un point quelconque P du véhicule peut facilement être exprimée en fonction de la vitesse au CdG ou en fonction de la vitesse du point M . La relation générale est donnée par

$$\vec{V}_P(R_0) = \vec{V}_G(R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{GP}$$

Ou en fonction de $\vec{V}_M(R_{10}/R_0)$

$$\vec{V}_P(R_0) = \vec{V}_M(R_0) + \vec{\Omega}(R_{10}/R_0) \wedge \overline{MP} \quad (1.9)$$

En utilisant l'équation (1.9), on peut calculer les vitesses des quatre points de contact roues-sol. Dans le cas du point A_1 , on procède comme suit :

$$\vec{V}_{A_1}(R_0) = \vec{V}_M(R_0) + \vec{\Omega}(R_{10}/R_0) \wedge \overline{MA_1} \quad (1.10)$$

avec

$$\vec{V}_M(R_0) = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Omega}(R_{10}/R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}; \quad \overline{MA_1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \frac{E_1}{2} \\ R_l \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

En injectant 1.11 dans 1.10, on obtient :

$$\vec{V}_{A_1}(R_0) = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} L_1 \\ \frac{E_1}{2} \\ R_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x - \frac{E_1}{2} \dot{\psi} \\ V_y + L_1 \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

En adoptant la même démarche, on obtient les vitesses aux points A_2 , A_3 et A_4 par :

$$\vec{V}_{A_2}(R_0) = \begin{pmatrix} V_x + \frac{E_1}{2} \dot{\psi} \\ V_y + L_1 \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{V}_{A_3}(R_0) = \begin{pmatrix} V_x - \frac{E_2}{2} \dot{\psi} \\ V_y - L_2 \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{V}_{A_4}(R_0) = \begin{pmatrix} V_x + \frac{E_2}{2} \dot{\psi} \\ V_y - L_2 \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Les vitesses des points M_1 et M_2 milieux des essieux avant et arrière sont données par :

$$\vec{V}_{M_1}(R_0) = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y + L_1 \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

$$\vec{V}_{M_2}(R_0) = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y - L_2 \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Les vitesses données par les équations 1.14 et 1.15 correspondent également aux vitesses des roues moyennes qui définissent le modèle bicyclette. Dans notre travail, ces vitesses (\vec{V}_{M_1} et \vec{V}_{M_2}) seront utilisées pour extraire l'expression des dérives aux pneus et aux essieux avant et arrière en fonction de la dérive au CdG et la vitesse de lacet.

1.4.3.3. Calcul des angles de dérives

En se basant sur le modèle bicyclette de la figure 1.15, la vitesse de translation d'un pneumatique forme un angle de dérive δ_i avec le plan de roue. Ces angles de dérive peuvent être calculés en fonction de la dérive au CdG noté δ_G et la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ en utilisant les équations 1.14 et 1.15 qui donne les vitesses de translation à l'axe avant et arrière.

- **Dérive du pneu à l'axe avant**

A partir de la définition de la dérive on a :

$$\tan(\delta_1^*) = \frac{V_{yAv}}{V_{xAv}} \quad (1.16)$$

$$\text{avec } \vec{V}_{Av} = \vec{V}_{M_1} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y + L_1 \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

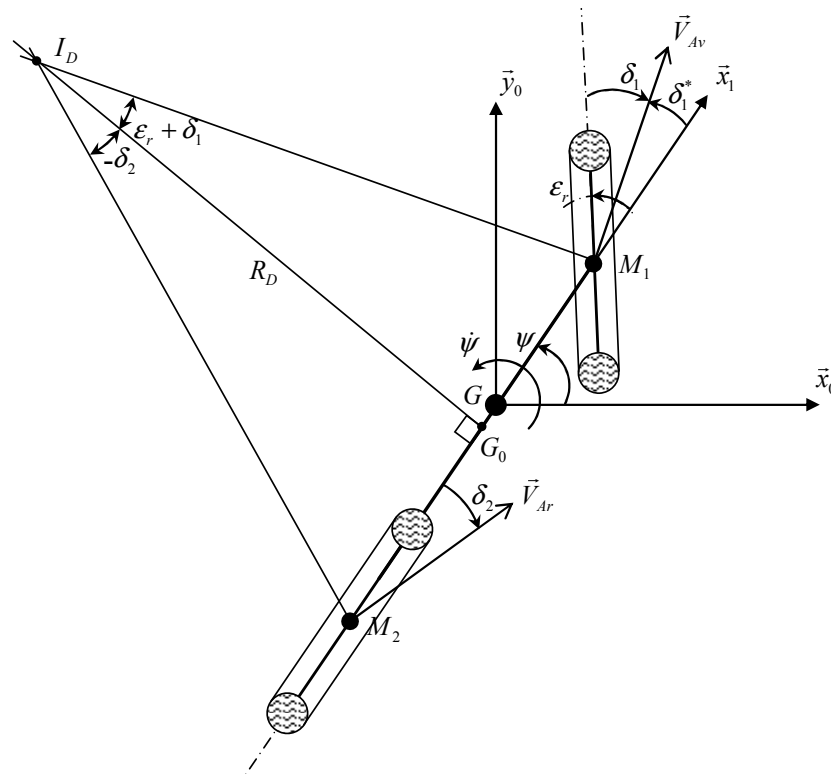


Figure 1.15. Représentation des dérives avant et arrière du modèle bicyclette.

en remplaçant 1.17 dans 1.16, on obtient :

$$\tan(\delta_1^*) = \frac{V_{yAv}}{V_{xAv}} = \frac{V_y}{V_x} + \frac{L_1}{V_x} \dot{\psi} = \tan(\delta_G) + \frac{L_1}{V_x} \dot{\psi} \quad (1.18)$$

Pour les domaines usuels de conduite, les angles de dérive sont petits et il est possible alors de faire l'approximation $\tan(\delta_1^*) \approx \delta_1^*$ et $\tan(\delta_G) \approx \delta_G$ pour des dérives exprimées en radian. On obtient finalement la dérive à l'axe avant :

$$\delta_1^* = \delta_G + \frac{L_1}{V_x} \dot{\psi} \quad (1.19)$$

à partir de la figure 1.15, la dérive au pneu avant est donné géométriquement par :

$$\delta_1 = \delta_1^* - \varepsilon_r = \delta_G + \frac{L_1}{V_x} \dot{\psi} - \varepsilon_r \quad (1.20)$$

- **Dérive du pneu à l'axe arrière**

$$\tan(\delta_2) = \frac{V_{yAr}}{V_{xAr}} \quad (1.21)$$

$$\text{avec } \vec{V}_{Ar} = \vec{V}_{M_2} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y - L_2 \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

en remplaçant 1.21 dans 2.22, on obtient :

$$\tan(\delta_2) = \frac{V_{yAr}}{V_{xAr}} = \frac{V_y}{V_x} - \frac{L_2}{V_x} \dot{\psi} = \tan(\delta_G) - \frac{L_2}{V_x} \dot{\psi} \quad (1.23)$$

en posant $\tan(\delta_2) \approx \delta_2$, on obtient l'expression de la dérive à l'axe arrière:

$$\delta_2 = \delta_G - \frac{L_2}{V_x} \dot{\psi} \quad (1.24)$$

Avec la convention de signe adoptée ici, les dérives aux pneus sont négatives pour un virage à gauche et positives pour un virage à droite.

1.4.3.4. Angle de surbraquage

Dans le domaine de la dynamique véhicule, il existe des indicateurs pour décrire le comportement du véhicule en régime permanent en courbe. Ces indicateurs décrivent l'attitude du véhicule vis-à-vis du virage décrit par sa trajectoire. Pour qualifier cette attitude, on définit trois notions essentielles : le sousvirage, le comportement neutre et le survirage. Ces trois notions vont permettre de comparer la trajectoire réalisée par le véhicule avec celle souhaitée par le conducteur.

Pour juger le comportement du véhicule, on adopte un essai de dynamique angulaire [Por03]. Cet essai consiste à maintenir le véhicule sur une trajectoire circulaire de rayon fixe, à vitesse constante. Pour conserver cette trajectoire, le conducteur doit maintenir un angle de braquage donné qu'on enregistre. Ensuite, on augmente la vitesse du véhicule à petit pas et on enregistre à chaque fois l'angle de braquage qu'il faut pour garder la même trajectoire (rayon de virage constant). Faire varier la vitesse en maintenant un rayon de virage constant revient à

faire varier l'accélération latérale $\gamma_t = \frac{V^2}{R}$, la procédure de dynamique angulaire permet donc d'avoir un angle de braquage pour chaque valeur d'accélération latérale. Trois cas peuvent se présenter :

- L'angle de braquage augmente quand γ_t augmente, le véhicule est dit **sousvireur**.
- L'angle de braquage reste constant quand γ_t augmente, le véhicule est dit **neutre**.
- L'angle de braquage diminue quand γ_t augmente, le véhicule est dit **survireur**.

Il est possible d'avoir une interprétation mathématiquement de ces différentes situations en utilisant le modèle bicyclette de la figure 1.15. La roue avant est braquée d'un angle ε_r qui représente la moyenne entre le braquage à droite (D) et à gauche (G) des roues de l'essieu avant. Cette roue moyenne présente également un angle de dérive du pneumatique δ_1 . La roue arrière n'étant pas une roue directrice, elle présente seulement une dérive de pneumatique δ_2 . Le point I_D est le centre instantané de rotation du véhicule.

En régime permanent en courbe, le centre de gravité de la voiture avec des pneumatiques qui dérivent décrit un cercle qui est complètement caractérisé par son centre I_D et par son rayon dynamique $R_D = \|\overrightarrow{I_D G}\|$. Pour des situations de conduite usuelles ce rayon peut être approximé par $R_D \approx \|\overrightarrow{I_D G_0}\|$.

Dans ces conditions, calculons le rayon R_D du modèle représenté par la figure 1.15. En utilisant les lois de la trigonométrie :

$$\tan(\varepsilon_r + \delta_1) = \frac{M_1 G_0}{R_D} \quad \text{et} \quad \tan(-\delta_2) = \frac{M_2 G_0}{R_D} \quad (1.25)$$

On en déduit :

$$M_1 G_0 = R_D \times \tan(\varepsilon_r + \delta_1) \quad \text{et} \quad M_2 G_0 = R_D \times \tan(-\delta_2) \quad (1.26)$$

Or, on sait que l'empattement L est donné par :

$$M_1 G_0 + M_2 G_0 = L \quad (1.27)$$

En combinant les équations 1.26 et 1.27, on obtient :

$$L = R_D \times \tan(\varepsilon_r + \delta_1) + R_D \times \tan(-\delta_2) \quad (1.28)$$

Finalement :

$$R_D = \frac{L}{\tan(\varepsilon_r + \delta_1) + \tan(-\delta_2)} \quad (1.29)$$

Ou encore, lorsque les angles sont petits on peut confondre les angles avec leurs tangentes, et on obtient en conséquence :

$$R_D = \frac{L}{\varepsilon_r + \delta_1 - \delta_2} \quad (1.30)$$

Le rayon de virage dynamique est complètement caractérisé par l'angle de braquage et les dérives des pneumatiques. **Selon la convention de signe utilisée, les dérives δ_1 et δ_2 ont des valeurs négatives pour un braquage ε_r positif.**

Pour expliquer les phénomènes de survirage et de sousvirage il serait intéressant de comparer le rayon de virage R_D avec celui d'un véhicule d'Ackermann ($\delta_1 = \delta_2 = 0$) dont l'expression du rayon de virage est donné par l'équation 1.6 :

$$R_S = \frac{L}{\varepsilon_r} \quad (1.31)$$

Si on compare les deux rayons de virage, en tenant compte des conventions de signe, trois cas peuvent se présenter :

- $\delta_1 - \delta_2 < 0$, *l'essieu avant dérive plus que l'essieu arrière*
Dans ce cas, pour un angle de braquage ε_r constant, le rayon R_D sera toujours plus grand que R_S . Par conséquent, le véhicule est dit sousvireur. Dans la suite, une situation de sousvirage est considérée comme stable.
- $\delta_1 - \delta_2 > 0$, *l'essieu avant dérive moins que l'essieu arrière*
A l'inverse du premier cas, le rayon R_D sera toujours plus petit que celui du véhicule d'Ackermann (ou véhicule neutre) R_S . Le véhicule est dit survireur. Dans la suite une situation de survirage est considérée comme instable.
- $\delta_1 - \delta_2 = 0$, *les essieux avant et arrière dérivent avec les mêmes angles*
Avec le même angle de braquage ε_r , le rayon R_D va être le même que pour le R_S . Dans ce cas, le véhicule est dit neutre. Même avec des rayons de virage égaux, l'attitude du véhicule dans le virage n'est pas la même sachant que I_D n'est pas situé sur l'axe arrière comme pour le point I_S du véhicule d'Ackermann.

Les trois situations sont schématisées sur la figure 1.16. Les notions de survirage et de sousvirage telles que nous venons de les définir, font appel à la dérive du pneumatique et non à son degré de glissement. Plus précisément, la détection de telles situations se fait par la différence des dérives avant et arrière des pneumatiques. Ces notions sont donc relatives et ne tiennent pas compte du niveau de dérive atteint sur chaque train indépendamment, mais seulement par la quantité $\varepsilon_s = -(\delta_1 - \delta_2)$. L'angle ε_s est appelé **angle de surbraquage**.

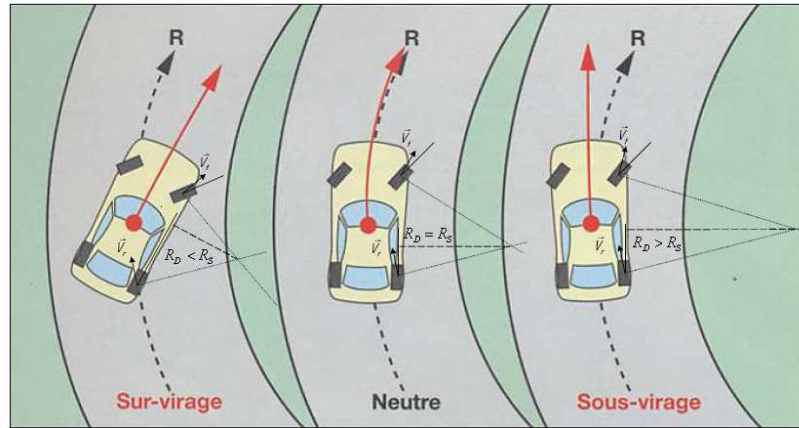


Figure 1.16. Les différents comportements en régime permanent d'un véhicule.

Le nom « surbraquage » vient du fait que l'angle ε_s représente également, l'angle qu'il faut ajouter au braquage ε_r d'un véhicule donné, pour que sa trajectoire décrive le même rayon qu'un véhicule d'Ackermann. C'est-à-dire pour $R_D = R_S$. Ceci est prouvé en utilisant les équations 1.6 et 1.30, on a :

$$\begin{aligned} \text{En posant : } & R_D = R_S \\ \text{On obtient : } & \varepsilon_r = \varepsilon_a - (\delta_1 - \delta_2) = \varepsilon_a + \varepsilon_s \end{aligned} \quad (1.32)$$

la grandeur ε_s représente la valeur typique utilisée pour caractériser la dynamique d'un véhicule. D'une façon générale, l'angle de surbraquage défini par $\varepsilon_s = -(\delta_1 - \delta_2)$ traduit la différence de la dérive du pneumatique avant avec la dérive du pneumatique arrière nécessaire pour maintenir un virage stabilisé de rayon R pour une accélération transversale γ_t donnée.

1.4.3.5. Taux de surbraquage

Le taux de surbraquage est un indicateur de stabilité ou d'instabilité basé sur la courbe qui donne l'évolution de l'angle de surbraquage en fonction de l'accélération transversale en régime stabilisé en courbe. Le taux de surbraquage T_{SB} est défini par la dérivée de l'angle de surbraquage par rapport à l'accélération latérale [Pck06][Lau98]. Il est donné par :

$$T_{SB} = \left(\frac{d\varepsilon_s(\gamma_t)}{d\gamma_t} \right) \quad (1.33)$$

En utilisant le taux de surbraquage, on introduit une nouvelle définition du sousvirage et du survirage et qui est équivalente à celle donnée auparavant.

- Une voiture est dite sousvireuse (**stable**) si et seulement si le taux de surbraquage T_{SB} est toujours positif, pour n'importe quelle valeur d'accélération transversale.
- Une voiture est dite survireuse (**instable**) si et seulement s'il existe une valeur d'accélération latérale pour laquelle le taux de surbraquage T_{SB} est négatif.
- Une voiture est dite neutre si et seulement si T_{SB} est nulle.

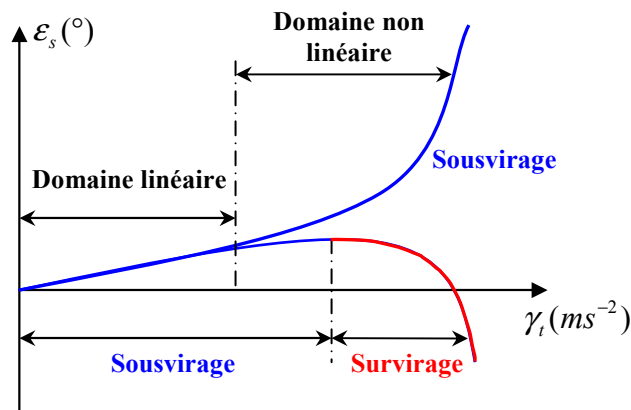


Figure 1.17. Evolution des tendances en fonction de l'accélération transversale.

Sur la figure 1.17, nous avons schématisé les deux types de tendances précitées : sousvirage et survirage. Pour les faibles accélérations, le comportement de la voiture est quasiment linéaire avec un taux de surbraquage constant. Quand l'accélération transversale augmente, les tendances deviennent plus claires. Nous distinguons alors le cas d'un sousvirage par une pente positive qui augmente considérablement. Ceci traduit la saturation des pneumatiques de l'essieu avant. Inversement, si la pente chute, ceci reflète une tendance survireuse et une saturation prématurée des pneumatiques arrière. Généralement, les tendances se dessinent pour des accélérations situées aux alentours $4ms^{-2}$, où l'on quitte le domaine de comportement linéaire.

Hormis la détection des situations de survirage ou de sousvirage, le taux de surbraquage T_{SB} donne une information sur le degré de saturation des pneumatiques d'un train par rapport à l'autre. Effectivement, la génération d'effort au niveau d'un pneu dépend essentiellement de l'angle de dérive que subit ce pneu. Or, la relation entre l'effort et l'angle de dérive n'est pas linéaire. L'effort présente une zone de saturation progressive pour des grands angles de dérives. Une demande excessive en effort latérale au niveau d'un train tend à augmenter l'angle de dérive. Cette situation correspond à la zone non linéaire dans la figure 1.17. Pour une situation de sousvirage c'est les pneus de l'axe avant qui présente une saturation et inversement dans le cas d'un survirage.

Une des valeurs typique utilisée à partir de cette courbe et le taux de surbraquage à l'origine, qu'on note T_{SB0} (la pente de la partie linéaire de la courbe). Dans la suite des travaux réalisés dans cette thèse, nous reviendrons sur cet aspect de la dynamique véhicule pour l'analyse de stabilité.

Sur la figure 1.18, on montre un exemple de mesure sur piste, réalisée dans le cas d'un véhicule Citroën C6. Le nuage de points correspond à la mesure et la courbe continue à l'interpolation polynomiale de ce nuage de points. On constate que la C6 est une voiture sousvireuse ($T_{SB}(\gamma_t) > 0, \forall \gamma_t$) avec une zone linéaire qui s'étend jusqu'à $\gamma_t = 4ms^{-2}$, un taux de surbraquage à l'origine $T_{SB0} = 2.6^\circ/g$ avec $g = 9.81ms^{-2}$ et une asymptote de saturation vers $\gamma_t \approx 8.5ms^{-2}$. Ces différentes valeurs font partie d'un ensemble de spécifications liées aux objectifs du cahier des charges du constructeur.

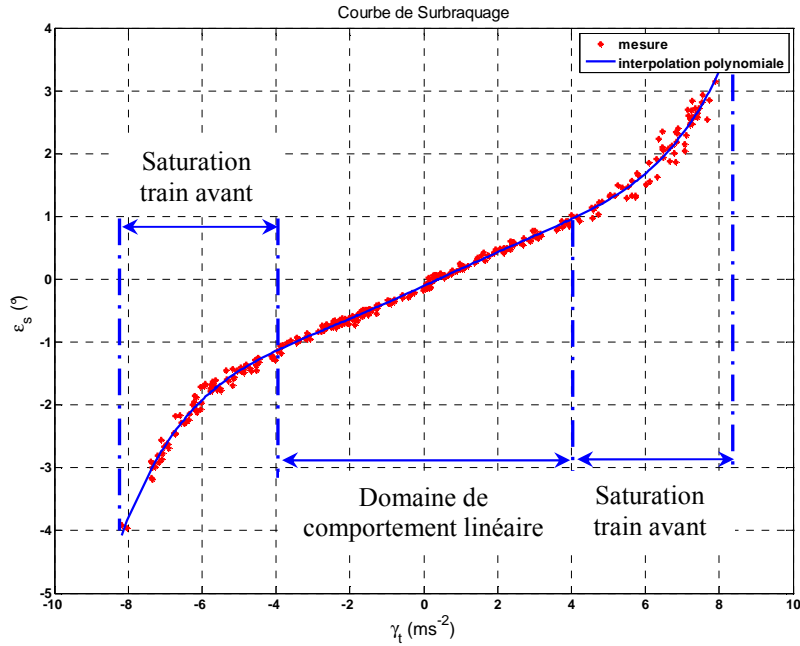


Figure 1.18. Courbe de surbraquage d'une C6 issue de la mesure sur piste.

1.5. Phénomènes physiques liés à la mise en virage

En dynamique transversale, lorsque le véhicule est soumis aux différentes sollicitations provenant du conducteur ou du profil routier, les mouvements de la caisse ainsi que les efforts en base de roue font varier la position et l'orientation du plan de roue. Ces variations du plan de roue relèvent de la conception des trains du véhicule. La conception des trains est un domaine très complexe qui demande une rigueur et une grande précision de calcul qui requiert tout le savoir-faire du constructeur automobile [Hal95].

En effet, les trains ont une influence directe sur la tenue de route par le guidage du plan de roue, et sur le confort par le filtrage des vibrations à l'aide des liaisons élastiques entre les divers éléments métalliques [Bro06]. A ce titre, les prestations en dynamique du véhicule sont largement impactées par le choix du type de trains et son dimensionnement. La maîtrise de ce domaine et l'une des clés de réussite d'un constructeur en ce qui concerne le comportement routier. La variation du plan de roue peut être dissociée en deux classes :

- Epure cinématique : qui décrit la variation de la position et de l'orientation du plan de roue en fonction du débattement vertical dz de la roue par rapport au châssis.
- Epure élasto-cinématique : qui décrit la variation de la position et de l'orientation du plan de roue en fonction des efforts générés en base de roue et soumises aux liaisons et aux cales élastiques.

L'attitude du plan de roue est repérée dans le repère caisse R_1 . Sur la figure 1.19, on prend l'exemple de la roue avant gauche avec le repère $R_{AvG}(\vec{x}_{AvG}, \vec{y}_{AvG}, \vec{z}_{AvG})$. La position du centre de roue est donnée par :

- x : la position selon l'axe \vec{x}_1 qui désigne l'empattement;
- y : la position selon l'axe \vec{y}_1 qui désigne la voie;
- z : la position selon l'axe \vec{z}_1 qui désigne le débattement de la roue.

On quantifie également l'orientation du plan de roue par trois angles :

- la pince ε_p ;
- le carrossage γ ;
- l'enroulement η .

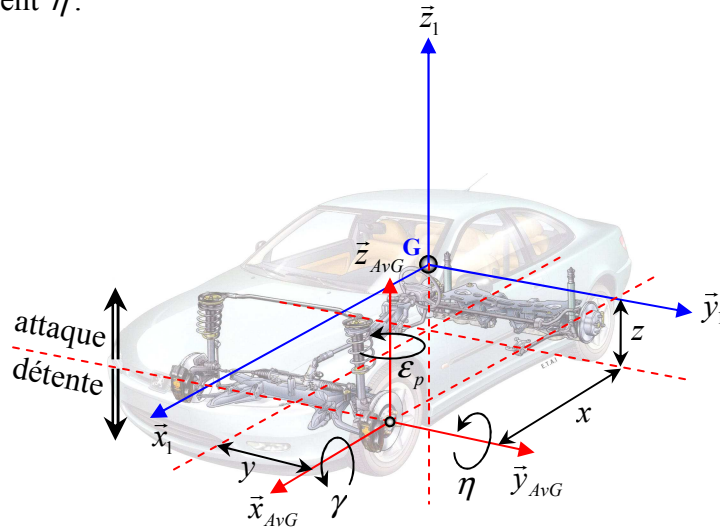


Figure 1.19. Repérage du plan de roue avant gauche par rapport au Cdg.

En régime statique, lorsque le véhicule est à l'arrêt ou en mouvement rectiligne à vitesse constante, les charges verticales F_{zij} sur les pneumatiques sont constantes et dépendent uniquement de la nature constructive du véhicule. Ces charges verticales sont appelées charges statiques et sont distribuées sur chaque train en fonction de la position du centre de gravité. Les différentes sollicitations sur ce véhicule et notamment celles en dynamique transversale n'induisent pas seulement des variations du plan de roue, mais elle entraîne également un phénomène de transfert de charges. En effet, en virage, la force centrifuge qui s'exerce au centre de gravité a tendance à délester les roues intérieures et à recharger les roues extérieures. Nous avons mentionné dans §1.2.1.1 que l'effort généré par un pneumatique est fortement conditionné par sa charge verticale F_z , ce qui justifie l'importance d'analyser ces transferts de charges.

1.5.1. Epure cinématique du train

Pour décrire le mouvement de chacune des roues, six degrés de libertés sont nécessaires. Lorsque la roue est montée et donc solidaire du train, le débattement n'est plus que l'unique degré de liberté si on ne considère pas le braquage pour le train directeur avant. Lorsque la roue débat verticalement d'une quantité dz , la technologie du train et les liaisons mécaniques font que ce débattement engendre une déviation du plan de roue qu'on note $d\mathbf{v} = (dx, dy, d\varepsilon_p, d\gamma, d\eta)$ par rapport à une situation initiale $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0, \varepsilon_{p0}, \gamma_0, \eta_0)$.

La situation initiale \mathbf{v}_0 correspond aux valeurs obtenues au repos pour une charge nominale sur le train et un écrasement de suspension z_0 . Pour les conventions de signe on a :

- $dz > 0$: La roue s'enfonce dans la caisse et les suspensions s'écrasent, on parle alors d'attaque.

- $dz < 0$: Lorsque la roue s'écarte, et les suspensions se détendent, on parle alors de détente.

Sur la figure 1.20, on montre pour un angle volant nulle, les courbes d'épure cinématique en roulis pour le train avant de la Citroën C6. En réalité, l'angle volant introduit un degré de liberté supplémentaire et modifie considérablement les courbes d'épures. Si cet angle est pris en compte, on parle alors de cartographies d'épure cinématique où on a une courbe différente pour chaque angle volant donnée [IPG05].

Il faut noter que l'épure cinématique d'une roue dépend de son propre débattement ainsi que celui de la roue opposée dans le cas d'un train à roues non découplées [Hal95]. Dans ce cas précis, Il existe deux cas de figure :

- Epure due au débattement verticale causé par un mouvement de la caisse en roulis ;
- Epure due au débattement verticale causé par un pompage, qui peut être dû à une situation de freinage ou par une irrégularité du profil routier. (étude qui concerne la dynamique longitudinale).

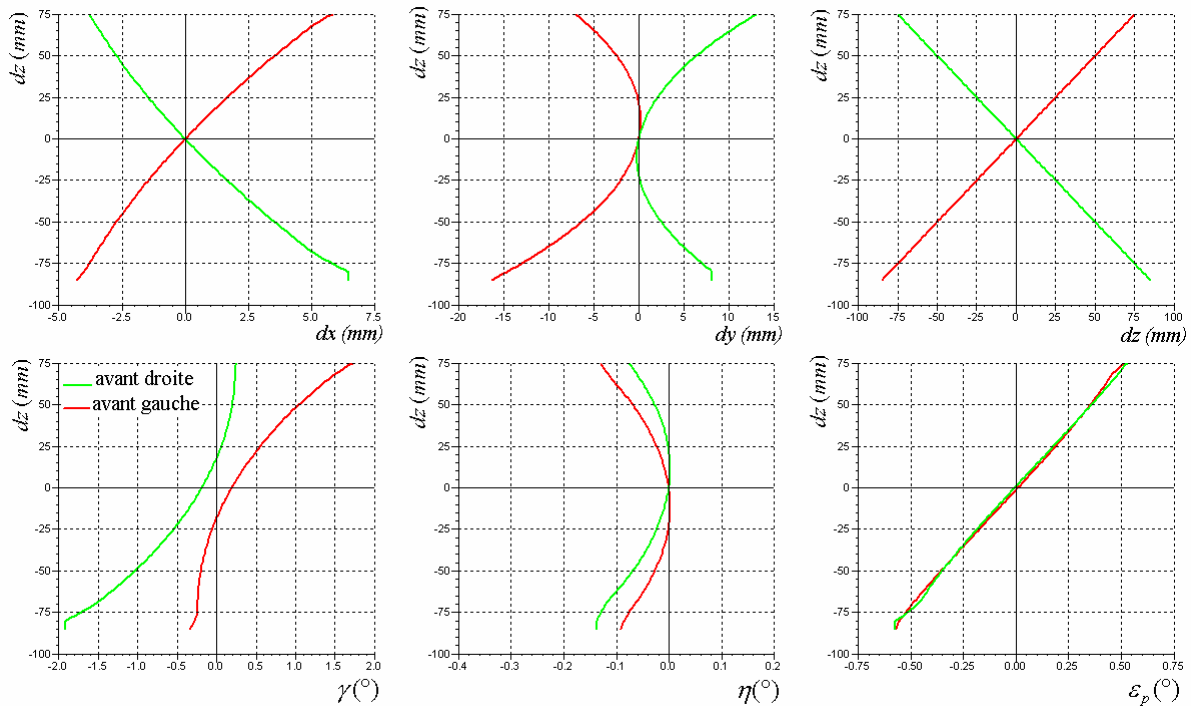


Figure 1.20. Courbe d'épure cinématique du train avant C6 pour $\epsilon_v = \epsilon_r = 0$.

1.5.2. Epure élasto-cinématique du train

Aux épures cinématiques s'ajoutent les déformations des liaisons et des cales élastiques interposés entre les éléments métalliques rigides. Ces liaisons font partie intégrante du train roulant et se déforment sous l'effet des efforts générés en base de roue. Celles-ci sont réalisées par du caoutchouc afin de procurer une isolation suffisante des vibrations provenant de la route et du moteur, pour assurer le meilleur confort vibratoire et acoustique des passagers.

Si les liaisons étaient toutes rigides, les vibrations se transmettraient sans obstacle jusqu'à la caisse, ce qui est un inconvénient majeur dans le confort. Par contre avec un

système de liaisons souple, nous pouvons facilement contrôler ces vibrations ainsi que tous les bruits acoustiques qu'elles provoquent. Bien évidemment, cette souplesse n'est pas sans conséquence. Elle entraîne une fragilisation du maintien du plan de roue. A ce titre, un compromis se dresse quant au dimensionnement des liaisons élastiques afin d'assurer un maximum de confort au passagers tout en gardant le contrôle sur les variations des plans de roue. Désormais, nous savons que la suspension n'est plus le seul organe qui assure le confort vibratoire, mais il s'ajoute également, les trains qui y participent et de façon non négligeable.

La modélisation des épures élasto-cinématiques concerne l'étude des variations de l'attitude du plan de roue causées par les efforts de contacts pneu-sol. Comme dans le cas de l'épure cinématique, les variables d'attitude d'une roue ij ($i = Av, Ar$ et $j = G, D$) sont :

- les coordonnées de la position du centre de roue donné par (x_i, y_i, z_i) ;
- les angles de l'orientation du plan de roue donné par $(\varepsilon_{pi}, \gamma_i, \eta_i)$.

Les efforts qui génèrent les effets d'élasto-cinématiques sont principalement ceux générés aux points de contacts pneu-sol (cf. figure 1.21). Nous retrouvons alors :

- La force de freinage ou d'accélération F_{xij} ;
- L'effort de maintien latéral F_{yij} ;
- Le moment M_{xij} selon \bar{x}_{ij} ;
- Le moment de freinage M_{yij} selon \bar{y}_{ij} ;
- Le moment d'auto-alignement M_{zij} selon \bar{z}_{ij} .

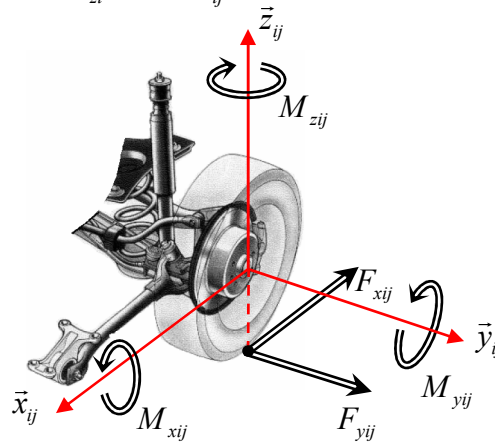


Figure 1.21. Les efforts générant les effets d'élasto-cinématiques.

Pour certain type de trains, les roues ne sont pas indépendantes. Dans ce cas, la variation du plan d'orientation d'une roue génère une variation d'attitude sur la roue opposée, c'est ce qu'on appelle le couplage élasto-cinématique.

Comme précédemment, on adopte la notation $v_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, \varepsilon_{pi}, \gamma_{ij}, \eta_{ij})$ pour désigner l'ensemble de variables d'attitude d'une roue ij . La variation dv_{ij} est considéré linéaire par rapport aux efforts de contacts pneu-sol. Sans prendre en compte le couplage élasto-cinématique, on peut écrire :

$$dv_{ij}(F_{xij}, F_{yij}, M_{zij}) = s_{xij}F_{xij} + s_{yij}F_{yij} + c_{xij}M_{xij} + c_{yij}M_{yij} + c_{zij}M_{zij} \quad (1.34)$$

Les paramètres s_k et c_k sont appelés « flexibilités ». Ils sont l'inverse des raideurs élastiques du train mesurées sur véhicule. Pour certaines variables de v_{ij} , les souplesses correspondantes sont souvent nulles en égard à la technologie et à l'architecture du train employé. Un exemple de valeurs de ces souplesses est donné dans le tableau 1.1a et 1.1b pour les roues avant gauche et arrière gauche respectivement de la Citroën C6.

	$dx_{AvG}(m)$	$dy_{AvG}(m)$	$dz_{AvG}(m)$	$d\gamma_{AvG}(rad)$	$d\eta_{AvG}(rad)$	$d\varepsilon_{pAvG}(rad)$
$F_{xAvG}(N)$	0	0	0	0	0	1.46e-6
$F_{yAvG}(N)$	0	3e-6	0	4.02e-6	0	0
$M_{zAvG}(Nm)$	0	0	0	0	0	3.19e-5

Tableau 1.1a. Tableaux de flexibilité de la roue avant gauche de la C6.

	$dx_{AvG}(m)$	$dy_{AvG}(m)$	$dz_{AvG}(m)$	$d\gamma_{AvG}(rad)$	$d\eta_{AvG}(rad)$	$d\varepsilon_{pAvG}(rad)$
$F_{xAvG}(N)$	0	0	0	0	0	1.25e-6
$F_{yAvG}(N)$	0	3e-6	0	6.11e-6	0	1.25e-6
$M_{zAvG}(Nm)$	0	0	0	0	0	3.25e-5

Tableau 1.1b. Tableaux de flexibilité de la roue arrière gauche de la C6.

Ces valeurs sont les mêmes pour la roue opposée du même essieu. Avec cet exemple de valeurs, nous avons ciblé les principaux paramètres directement influencés par l'élasto-cinématique, à savoir : la demi-voie y_{AvG} , le carrossage γ_{AvG} et le braquage induit (prise de pince) ε_{pAvG} , pour la roue avant gauche d'un train C6. On peut alors écrire :

Essieu avant	Essieu arrière
$dy_{AvG} = F_{yAvG} 3 \times 10^{-6}$;	$dy_{ArG} = F_{yArG} 3 \times 10^{-6}$
$d\gamma_{AvG} = F_{yAvG} 4.02 \times 10^{-6}$;	$d\gamma_{ArG} = F_{yArG} 6.11 \times 10^{-6}$
$d\varepsilon_{pAvG} = F_{xAvG} 1.46 \times 10^{-6} + M_{zAvG} 3.19 \times 10^{-5}$;	$d\varepsilon_{pArG} = (F_{xArG} + F_{yArG}) 1.25 \times 10^{-6} + M_{zArG} 3.19 \times 10^{-5}$

Tableau 1.1c. Élasto-cinématique de la C6.

1.5.3. Analyse des transferts de charges transversales

En absence d'accélération transversale, les charges distribuées par train dépendent de l'architecture et de la masse totale du véhicule. Pour un train isolé, la charge verticale sur chacune des roues est identique. En réalité, en fonction des conditions de chargement de la voiture ou des dissymétries liées à l'architecture (moteur à droite, boîte de vitesse à gauche) celles-ci diffèrent légèrement. En pratique et dans la suite de cette thèse, on considérera que cette différence de charge en ligne droite entre les roues d'un même axe est négligeable.

Les charges verticales calculées en ligne droite à vitesse constante au niveau des deux essieux avant et arrière (cf. figure 1.22), sont données par :

- Essieu avant : $F_{zAv} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} M \times g = M_{Av} \times g$ (1.35)

- Essieu arrière : $F_{zAr} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} M \times g = M_{Ar} \times g$ (1.36)

avec M , M_{Av} et M_{Ar} qui représentent : la masse totale du véhicule, la masse avant et la masse arrière respectivement. Sachant que chaque roue supporte la moitié de la charge d'un train, on retrouve alors facilement l'effort verticale statique F_{zij} pour sur chaque pneumatique :

$$F_{zAvG} = F_{zAvD} = \frac{1}{2} M_{Av} \times g \quad (1.37)$$

$$F_{zArG} = F_{zArD} = \frac{1}{2} M_{Ar} \times g \quad (1.38)$$

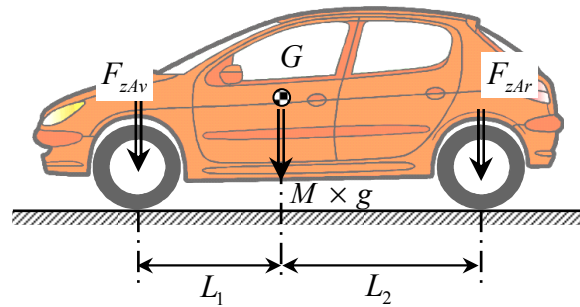


Figure 1.22. Les charges verticales en l'absence de γ_t .

En présence d'accélération transversale (cf. figure 1.23), le moment de l'accélération transversale γ_t génère non seulement une rotation de la caisse en roulis, mais crée également une variation de charges ΔF_{zi} au niveau de chaque essieu. Sur un virage, ce moment d'accélération transversale tend à augmenter la charge verticale sur les roues extérieures au virage et à délester les roues intérieures. Comme nous l'avons cité plus en amont, l'effort généré par un pneumatique est fortement impacté par sa charge verticale. On en déduit alors, que ce transfert de charge conditionne de façon très importante la tenue de route du véhicule. La prise en compte de ce transfert de charge devient alors nécessaire.

Nous pouvons croire que le transfert de charges est directement lié au mouvement de roulis. En réalité, il n'en est rien, car l'existence de ces transferts de charges peut survenir même pour un véhicule sans suspension, comme dans le cas d'un kart ou d'une remorque. Par contre, la suspension permet le déport latéral de la caisse sous forme d'un mouvement de roulis, ainsi, comme nous le verrons dans la suite de ce travail, la répartition des raideurs en roulis (les ressorts et barres anti dévers) va permettre de répartir le transfert de charge entre l'axe avant et l'axe arrière particulièrement en régime permanent.

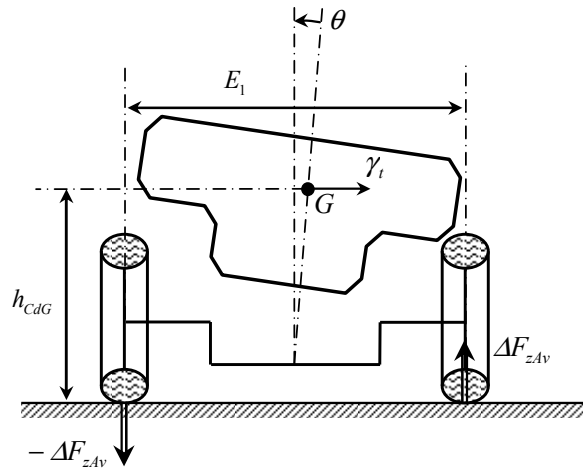


Figure 1.23. Les efforts générant les effets d'élasto-cinématiques.

En considérant un seul essieu en virage stabilisé, on sait d'après les lois de l'équilibre que la somme des moments dynamiques est nulle, on obtient alors :

- à l'essieu avant :

$$\Delta F_{zAv} E_1 = M_{Av} \gamma_t h_{CdG} \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow \Delta F_{zAv} E_1 = M_{Av} \gamma_t (h_{CdG} - h_1) + M_{Av} \gamma_t h_1 \quad (1.40)$$

- à l'essieu arrière :

$$\Delta F_{zAr} E_2 = M_{Ar} \gamma_t h_{CdG} \quad (1.41)$$

$$\Rightarrow \Delta F_{zAr} E_2 = M_{Ar} \gamma_t (h_{CdG} - h_2) + M_{Ar} \gamma_t h_2 \quad (1.42)$$

En ne travaillant que sur l'essieu avant (respectivement, l'essieu arrière), on remarque que la décomposition de l'équation 1.40 (respectivement, l'équation 1.42) fait apparaître deux termes importants à analyser :

- le premier, représente le moment actif de roulis.
- le deuxième, ne provoque pas de roulis, **mais provoque un transfert de charge.**

1.5.3.1. Transfert de charges avec une voiture complète en virage stabilisé

La voiture est constituée de deux essieux non indépendants, sachant qu'ils sont indirectement reliés par la caisse. Ce lien se traduit par l'angle de roulis θ , qui est commun aux deux essieux. D'après [Fen05], sur un axe donné, deux phénomènes sont donc à prendre en compte pour connaître le transfert de charges :

- 1) L'effet Brouilhet qui provoque seulement un transfert de charge (pas de roulis)

pour l'axe avant : $\Delta F_{zbAv} E_1 = M_{Av} \gamma_t h_1$

pour l'axe arrière : $\Delta F_{zAr} E_2 = M_{Ar} \gamma_t h_2$

2) les efforts de réactions dans les suspensions qui accompagnent la prise de roulis. Pour simplifier les calculs, on suppose que les roues ont des masses négligeables. Les transferts de charge correspondants sont :

pour l'axe avant : $\Delta F_{z\theta 1} E_1 = M_{Av} \gamma_t (h_{CdG} - h_1) \approx (k_{\theta 1} - M_{SAv} g (h_{CdG} - h_1)) \theta = C_{\theta 1} \theta$

pour l'axe arrière : $\Delta F_{z\theta 2} E_2 = M_{Ar} \gamma_t (h_{CdG} - h_2) \approx (k_{\theta 2} - M_{SAr} g (h_{CdG} - h_2)) \theta = C_{\theta 2} \theta$

Sur un essieu donné, les transferts de charge s'obtiennent en sommant les deux effets :

$$\text{A l'avant} \quad \Delta F_{zAv} = \frac{M_{Av} \gamma_t h_1 + C_{\theta 1} \theta}{E_1} \quad (1.43)$$

$$\text{A l'arrière} \quad \Delta F_{zAr} = \frac{M_{Ar} \gamma_t h_2 + C_{\theta 2} \theta}{E_2} \quad (1.44)$$

Or, on sait qu'en virage stabilisé, il y a égalité entre le moment total d'anti-roulis de suspension et le moment de roulis actif :

$$C_{\theta} \theta = M \gamma_t h \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M \gamma_t h}{C_{\theta}} \quad (1.45)$$

Où, $C_{\theta} = k_{\theta 1} + k_{\theta 2} - M_S g h_0$

Avec l'équation 1.45, on peut facilement exprimer les transferts de charge exclusivement en fonction de l'accélération transversale. On trouve finalement :

$$\Delta F_{zAv} = \frac{M_{Av} h_1 + M h \frac{C_{\theta 1}}{C_{\theta}}}{E_1} \gamma_t \quad (1.46)$$

$$\Delta F_{zAr} = \frac{M_{Ar} h_2 + M h \frac{C_{\theta 2}}{C_{\theta}}}{E_2} \gamma_t \quad (1.47)$$

D'après ces deux formules de transferts de charges, nous constatons que :

- Le transfert de charges est linéaire par rapport à l'accélération transversale ;
- La répartition des transferts de charges entre l'axe avant et arrière est directement commandée par le rapport entre la raideur en roulis sur un axe par rapport à la raideur en roulis totale ($\frac{C_{\theta 1}}{C_{\theta}}$ et $\frac{C_{\theta 2}}{C_{\theta}}$). Cette caractéristique a été utilisée dans [Por03] pour commander le transfert de charges sur chaque pneumatique en utilisant des antis-divers actifs pour modifier les rapports $\frac{C_{\theta 1}}{C_{\theta}}$ et $\frac{C_{\theta 2}}{C_{\theta}}$.

1.5.3.2. Expression des charges verticales aux quatre roues en virage stabilisé

Les charges verticales sur chaque pneumatique d'un même train sont obtenues en ajoutant les variations de charges $\pm \Delta F_{zi}$ à la charge statique par pneu. Nous retrouvons donc la charge par pneu pour un virage stabilisé à gauche, comme suit :

$$F_{zAvG} = \frac{1}{2} M_{Av} g - M_{Av} \frac{h_1}{E_1} \gamma_t - M \frac{h}{E_1} \frac{C_{\theta 1}}{C_\theta} \gamma_t \quad (1.48)$$

$$F_{zAvD} = \frac{1}{2} M_{Av} g + M_{Av} \frac{h_1}{E_1} \gamma_t + M \frac{h}{E_1} \frac{C_{\theta 1}}{C_\theta} \gamma_t \quad (1.49)$$

$$F_{zArG} = \frac{1}{2} M_{Ar} g - M_{Ar} \frac{h_2}{E_2} \gamma_t - M \frac{h}{E_2} \frac{C_{\theta 2}}{C_\theta} \gamma_t \quad (1.50)$$

$$F_{zArD} = \frac{1}{2} M_{Ar} g + M_{Ar} \frac{h_2}{E_2} \gamma_t + M \frac{h}{E_2} \frac{C_{\theta 2}}{C_\theta} \gamma_t \quad (1.51)$$

1.5.3.3. Prise en compte de l'amortissement dans les transferts de charges

Nous venons de voir que la composante de transfert de charges liée au roulis permet de répartir celui-ci entre les axes avant et arrière. Mais, ces expressions du transfert de charges ne sont obtenues qu'en virage stabilisé. En réalité, ce degré de liberté n'est pas suffisant car il ne permet pas de faire varier la répartition au cours du temps. Nous verrons qu'il peut être souhaitable d'augmenter le transfert de charge sur l'avant au début de la courbe sans l'augmenter en régime permanent. Une fois encore le roulis apporte une part de la solution. Cette fois-ci grâce aux amortisseurs.

En introduisant les efforts d'amortissement, il faut remplacer les efforts de suspension et faire intervenir le $C_{\theta i} \theta + A_{\theta i} \dot{\theta}$ à la place de $C_{\theta i} \theta$ dans les équations 1.43 et 1.44. Ce qui nous donne la nouvelle expression des transferts de charges :

$$\Delta F_{zAv} = \frac{M_{Av} \gamma_t h_1 + C_{\theta 1} \theta + A_{\theta 1} \dot{\theta}}{E_1} \quad (1.52)$$

$$\Delta F_{zAr} = \frac{M_{Ar} \gamma_t h_2 + C_{\theta 2} \theta + A_{\theta 2} \dot{\theta}}{E_2} \quad (1.53)$$

Observation : On peut faire un parallèle avec la rigidité de roulis, celle-ci permet de répartir le transfert de charge entre les axes. L'amortissement de roulis va permettre de choisir le déphasage sur chaque axe.

En réalité, les paramètres de suspension $C_{\theta i}$ et $A_{\theta i}$ sont non linéaires par rapport à l'angle et la vitesse de roulis. Une présentation de la non linéarité des organes de liaison au sol s'avère d'un côté, nécessaire pour délimiter les domaines de linéarisation et d'un autre côté, utile pour comprendre le fonctionnement des organes et leur sensibilité aux différentes sollicitations extérieures.

1.6. Non linéarité du fonctionnement des organes

Au cours de son déplacement, le véhicule est soumis à différentes sollicitations provenant à la fois du conducteur et de l'environnement direct du véhicule (ondulation du profil routier, vent latéral, fluctuation d'adhérence,...etc.). Lorsque ces sollicitations sont modérées, ce qui se traduit par des faibles accélérations (transversales et ou longitudinales), le comportement des organes de liaison au sol est linéaire par rapport aux sollicitations. Inversement, pour de forte accélérations, les efforts générés au niveau des organes LAS ont tendance à se saturer plus rapidement et leur évolution en fonction des sollicitations devient non linéaire. Les principaux organes concernés sont les pneumatiques et les amortisseurs car leur comportement non linéaire est directement perceptible sur la dynamique du véhicule. Dans cette section, on introduit les aspects de non linéarité les plus importants et les plus influents sur le comportement dynamique.

1.6.1. Diagramme G-G

Le diagramme G-G sert à visualiser les zones d'utilisation d'un véhicule en termes d'accélérations transversale et longitudinale. Ce diagramme permet de positionner toutes les situations qu'un véhicule peut subir, ceci peut être exposé de deux différentes manières comme le montre la figure 1.24.

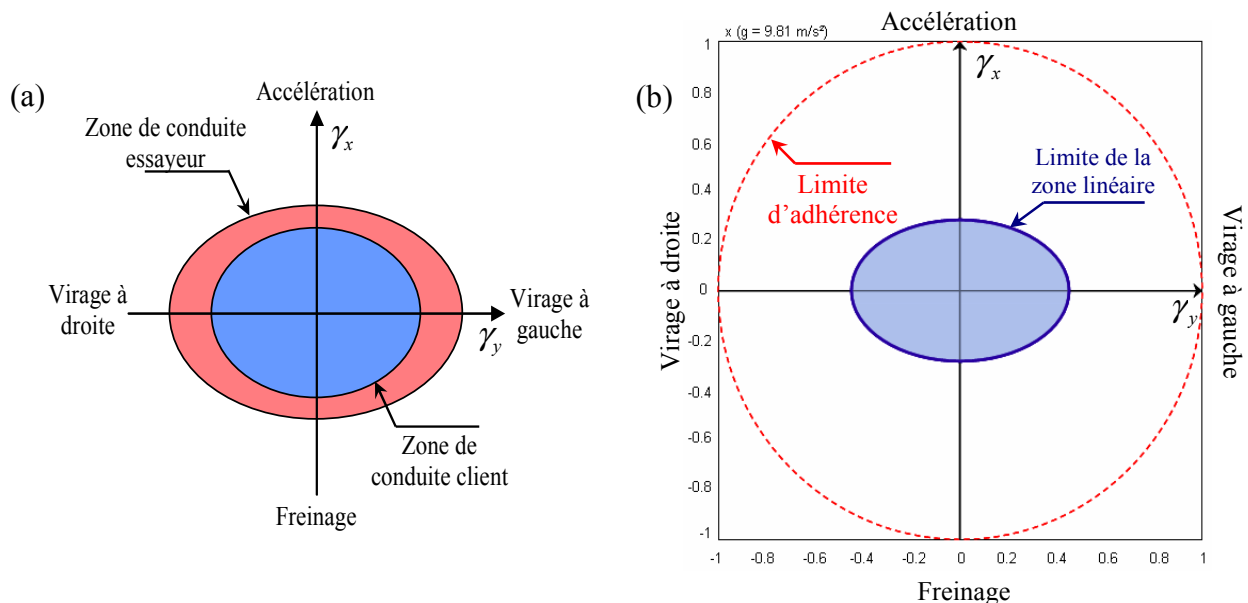


Figure 1.24. Diagramme G-G (a) Zones de conduite (b) limite du comportement linéaire.

Sur la figure 1.24a, on voit que pour une conduite client (conduite normale), la voiture est moins sollicitée en termes d'accélérations comparée à une conduite d'essai (conduite sportive). Dans ce dernier cas, le conducteur cherche à atteindre les limites d'adhérence du véhicule, d'où on retrouve une zone de sollicitation plus large.

Dans la figure 1.24b, on délimite la zone de comportement linéaire qui correspond notamment aux faibles accélérations. L'ellipse est délimitée par des accélérations transversales de l'ordre de $\gamma_y \approx \pm 4g$ et des accélérations longitudinales de l'ordre de

$\gamma_x \approx \pm 3g$. Au delà de cette ellipse, le comportement des organes LAS devient non linéaire [Mil95][Kie00]. Bien sure ces valeurs sont approximatives et sont liées à la généralité des observations et de l'expérience. Elles ne peuvent pas être généralisé pour toutes les voitures. Par contre elles donnent une idée sur la grandeur de la limite de la zone linéaire.

Un exemple de mesure d'accélération transversale et longitudinale est réalisé pour les deux différentes situations : la conduite client normale sur route et la conduite sportive sous les conditions d'essai sur piste. Les mesures ont été faites sur un Citroën Berlingo et sont tracées sur la figure 1.25.

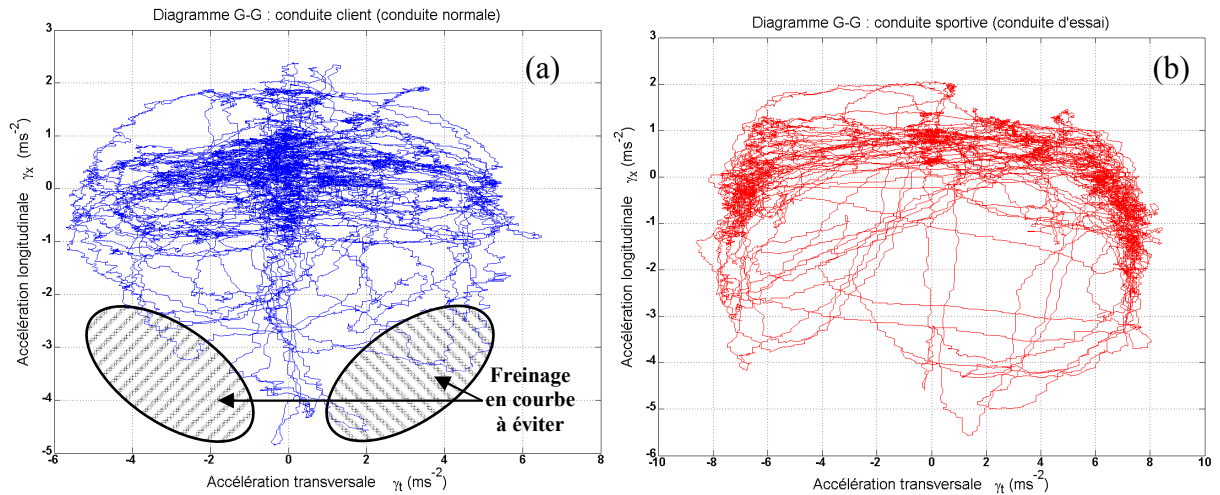


Figure 1.25. Diagramme G-G (a) Conduite normale (b) Conduite sportive.

Dans la conduite d'essai (conduite sportive) le but est d'atteindre les limites d'adhérence du véhicule, nous constatons que la plage d'accélération transversale atteint des limites supérieures à celles de la conduite normale où le véhicule est modérément excité. En s'intéressant uniquement à la dynamique transversale, nous constatons que pour une conduite d'essai, nous atteignons des accélérations transversales de l'ordre de $\pm 9 \text{ ms}^{-2}$. En revanche, avec la conduite normale, on atteint presque $\pm 6 \text{ ms}^{-2}$. Le plus intéressant à analyser serait la densité de points (la distribution) des accélérations transversales (cf. figure 1.26).

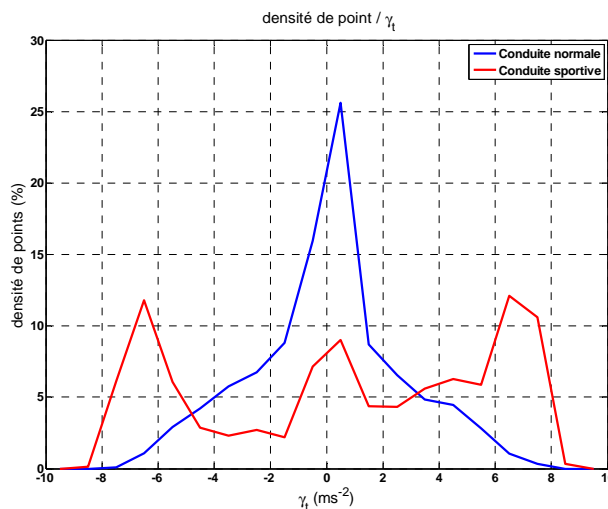


Figure 1.26. Densité d'accélération transversale.

La densité est principalement distribuée autour des fortes accélérations lorsqu'on cherche à saturer les pneumatiques et atteindre les limites d'adhérence. Pour une conduite normale, on constate que les accélérations sont concentrées autour de l'origine et principalement pour $\gamma_t \approx \pm 2 \text{ ms}^{-2}$. Nous remarquons que même si dans une conduite client, des extrêmes sont atteints autour de $\gamma_t \approx \pm 6 \text{ ms}^{-2}$, la densité quant à elle montre que les points de fonctionnement se situent principalement dans un domaine où la voiture est beaucoup moins sollicitée. Il est donc certain qu'une modélisation linéaire permet de caractériser amplement le comportement dynamique de la voiture où elle est le plus fréquemment utilisée. Par contre il faudrait tenir compte des non linéarités de saturation ou de basculement de mode (comme dans le cas d'un amortisseur) pour décrire au mieux la dynamique pour les fortes sollicitations.

Pour saturer un organe LAS, plusieurs manœuvres existent. Dans le cas d'un pneumatique, un test de dynamique angulaire est suffisant. Pour cette manœuvre, deux cas de figure se présentent :

- Le conducteur fait en sorte que la trajectoire de la voiture décrit un cercle de rayon constant et il fait augmenter la vitesse
- Le conducteur garde une vitesse constante et fait augmenter l'angle de braquage pour réduire le rayon de virage.

dans les deux cas, avec la simple expression $\gamma_t = \frac{V^2}{R}$, nous constatons que l'accélération transversale augmente. Le plus important à retenir est que le domaine non linéaire est atteint pour des fortes accélérations transversales indépendamment de la vitesse ou de du rayon de virage. L'étude de la non linéarité du pneumatique sera traitée dans §1.6.3.

Concernant l'amortisseur, nous savons que l'effort de contre réaction, dissipés sous forme de chaleur, est fonction de la vitesse de déplacement de la tige. L'évolution de cet l'effort d'amortissement est non linéaire par rapport à la vitesse de tige ou plus précisément linéaire par morceau. C'est pour cela que nous parlons de changement de mode qui dépend de l'amplitude de la vitesse de tige (voir §1.6.2). Pour saturer un amortisseur monté sur véhicule, nous pouvons à priori considérer la manœuvre précédente, à savoir le test de dynamique angulaire mais seulement dans la partie transitoire où il y a évolution de la vitesse de roulis $\dot{\theta}$. En régime permanent, l'angle de roulis est stabilisé sur une valeur donné et la vitesse de roulis est nulle. Une autre manœuvre consiste à faire évoluer l'angle volant en sinus à vitesse constante. Deux cas se présentent également :

- Le conducteur garde une fréquence ω constante et fait augmenter l'amplitude en angle volant.
- Le conducteur garde le même angle volant et fait augmenter la fréquence du sinus pour avoir une manœuvre en sinus balayé.

Dans les deux cas, le choix de la vitesse du véhicule, d'angle volant et de fréquences, doit être adapté pour faire évoluer la vitesse de tige.

Une autre non linéarité de fonctionnement concerne les butées de suspensions. Ces butées de suspension entre en jeu lorsque le débattement vertical atteint le maximum en

écrasement ou en détente. Lorsque ces butées sont combinées au ressort, il en résulte une raideur de suspension non linéaire (cf. §1.6.2)

1.6.2. Non linéarité due au système de suspension

La représentation fonctionnelle du système de suspension se sépare en plusieurs points :

- La flexibilité verticale (inverse de la raideur), qui lie le débattement vertical des roues en pompage à l'effort dû au ressort et aux butées d'attaque et de détente.
- L'anti-dévers du train, qui lie la différence de débattement des roues droite et gauche par rapport à la caisse au couple anti-roulis. On distingue de plus l'anti-dévers produit par la barre anti-dévers (BAD) et celui produit par les ressorts.
- L'amortissement, qui lie la vitesse de débattement vertical de la roue à l'effort ramené dû à l'amortisseur.

La figure 1.27 montre un exemple de courbe de flexibilité butée-ressort avec les trois différentes phases : ressort + butée d'attaque ; ressort seul ; ressort + butée de détente. Selon le modèle et les spécifications techniques de véhicule considéré, les butées de détente sont rarement atteintes, ce qui n'est pas le cas pour les butées d'attaque. Pour des situations de conduite usuelles, la simple considération du ressort seul suffit à caractériser la flexibilité.

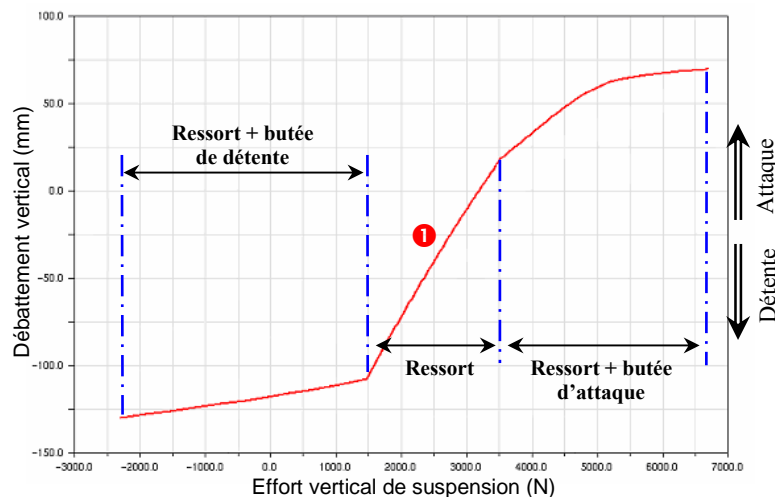


Figure 1.27. Caractéristique non linéaire butée-ressort.

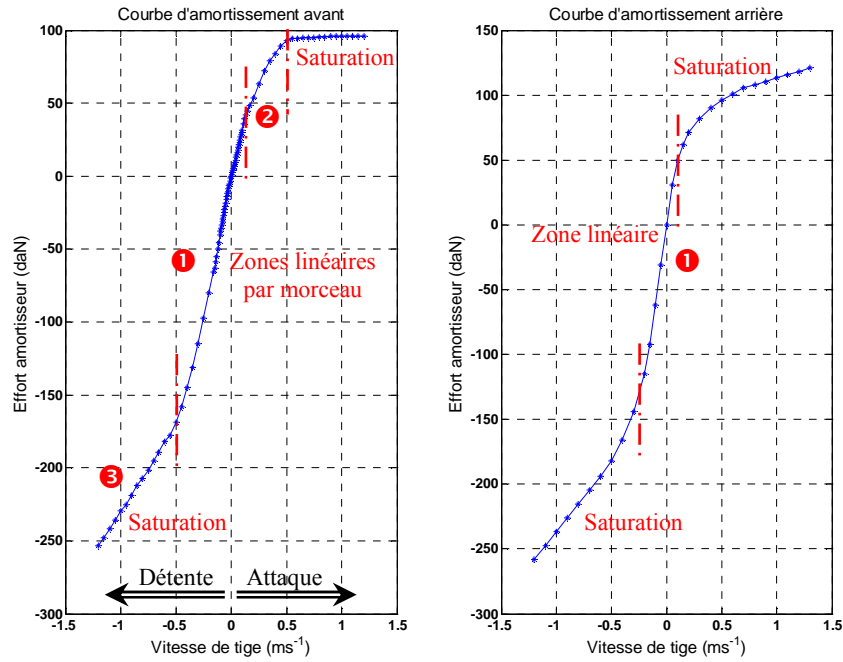


Figure 1.28. Caractéristique non linéaire d'amortissement.

Sur la figure 1.28, les courbes d'amortissements d'un Citroën C6 sont tracées en les assimilant à des simples amortisseurs hydrauliques passives. En réalité la C6 est conçue avec une suspension dont les lois d'amortissement sont pilotées (en devrait retrouver des cartographies d'amortissement). Nous remarquons bien qu'il existe trois zones linéaires avant la saturation complète.

L'effort d'amortissement peut également être exprimé en fonction de la vitesse de roulis $\dot{\theta}$ dans le cas d'une étude de dynamique latérale. Dans ce cas, nous considérons un couple d'amortissement C_{amo} , où la vitesse de tige v_{tige} est transformée en vitesse de débattement des roues $V_{zij}(R_{ij}/R_1)$ et ensuite ramenée à la vitesse de roulis sur le repère R_{10} . Le même raisonnement pour les raideurs de suspension couplées avec les BAD conduit à la caractérisation du couple anti-roulis $C_{aroulis}$. Nous écrivons alors :

$$\text{Le couple d'amortissement } C_{amo} = A_{\theta} \dot{\theta} \quad (1.54)$$

$$\text{Le couple anti roulis } C_{aroulis} = C_{\theta} \dot{\theta} \quad (1.55)$$

Un ordre de grandeur des valeurs de raideurs et d'amortissements pour la zone linéaire 1 est donné à l'avant et à l'arrière dans le tableau 1.2.

	Essieu Avant	Essieu arrière
A_{θ}	6191.94 Nm rad ⁻¹ s ⁻¹	1374.58 Nm rad ⁻¹ s ⁻¹
C_{θ}	63329.18 Nm rad ⁻¹	57531.3 Nm rad ⁻¹

Tableau 1.2. Valeurs des raideurs et des amortissement linéaire C6.

La littérature est assez abondante au sujet de la modélisation du système de suspension et principalement sur les amortisseurs. A ce titre, on retrouve les travaux de Cafferty [Caf97] concernant la modélisation et l'analyse par les séries de Volterra [Vol59] des modes vibratoire d'un amortisseur à modèle non linéaire polynomial. Dans la même optique, Patel [Pat03] a introduit la modélisation non linéaire d'un amortisseur hydraulique passive twin-tube. La modélisation est issue d'une optimisation par réseau de neurones et basée sur une structure NARX (nonlinear ARX). D'autres travaux plus détaillés sont décrits dans [Mil95][Dix96].

1.6.3. Non linéarité due au pneumatique

En prenant en considération un modèle bicyclette simple (cf. figure 1.29), l'équilibre des efforts en dynamique transversale (situation de mise en virage) est donné par l'équation du principe fondamentale de la dynamique. Aux suppositions faites au §1.4.3 pour établir le modèle bicyclette, nous y ajoutons les suppositions suivantes :

- Les deux pneus d'un même essieu possèdent la même dérive.
- L'effort généré sur un pneu i du modèle bicyclette est la somme des efforts des deux pneus d'un même essieu.
- Les efforts des deux pneus d'un même essieu ne sont pas forcément égaux et dépendent de leurs conditions de charges.

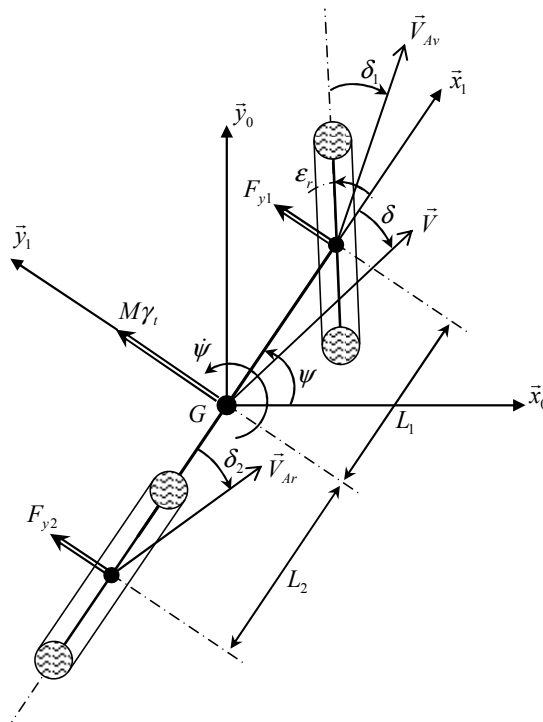


Figure 1.29. Equilibre des efforts sur un modèle bicyclette.

En prenant en compte les suppositions précédentes, et par application du principe fondamentale de la dynamique sur l'axe \bar{y}_1 , on obtient l'équation suivante :

$$M\gamma_t = F_{y1} + F_{y2} = (F_{yAvG} + F_{yAvD}) + (F_{yArG} + F_{yArD}) \quad (1.56)$$

Cette dernière équation peut s'écrire différemment en séparant les efforts générés par train à l'aide des masses M_{Av} et M_{Ar} portées respectivement par le train avant et le train arrière :

$$\begin{aligned}
 M_{Av} &= M \frac{L_2}{L} \\
 M_{Ar} &= M \frac{L_1}{L}
 \end{aligned}
 \tag{1.57}$$

(1.56) et (1.57) permettent alors d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 F_{y1} &= M_{Av} \gamma_t = (F_{yAvG} + F_{yAvD}) \\
 F_{y2} &= M_{Ar} \gamma_t = (F_{yArG} + F_{yArD})
 \end{aligned}
 \tag{1.58}$$

Les efforts de l'équation 1.58 sont les efforts latéraux qui sont imposés pour obtenir une position d'équilibre. On voit bien que la répartition des efforts latéraux entre le train avant et le train arrière n'est pas défini par le comportement de la voiture, mais seulement par la répartition des masses. Le comportement va résulter de la dérive que doivent prendre les pneus sur chaque train pour fournir l'effort transversal désiré.

Les relations de l'équation 1.58 montrent qu'à une accélération latérale donnée, les efforts délivrés par les pneumatiques d'un train ne dépendent ni de la vitesse ni du rayon de courbure, mais seulement de cette accélération latérale. L'effort sera identique s'il est mesuré sur deux cercles de rayons différents avec des vitesses différentes mais avec la même accélération latérale.

Comme nous l'avons annoncé au §1.2.1, l'effort latérale F_y est généré lorsque le pneu dérive d'un angle δ_i . Cet angle de dérive définit le glissement latéral du pneu (cf. figure 1.2a) avec :

$$\delta_i = \arctan\left(\frac{\vec{V}_{xi}}{\vec{V}_{yi}}\right) \quad \text{où : } i = Av, Ar
 \tag{1.59}$$

Par ailleurs, l'effort latérale F_y est fortement conditionné par l'évolution de la charge F_z et l'angle de carrossage γ (cf. figure 1.2b et 1.2c), nous écrivons alors $F_{yi}(\delta_i, \gamma_i, F_{zi})$.

1.6.3.1. Non linéarité liée à l'évolution de l'angle de dérive

D'après l'équation 1.58, lorsque l'accélération latérale augmente, la demande en effort latérale doit augmenter en conséquence pour garder l'équilibre des efforts. Or, le pneumatique génère de l'effort latéral en combinant la dérive, la charge verticale et le carrossage. Pour une condition de charge F_{z0} et un angle de carrossage γ_0 fixes, l'évolution de cet effort $F_y(\delta, \gamma_0, F_{z0})$ en fonction de la dérive décrit une caractéristique non linéaire. Un exemple est présenté sur la figure 1.30. Cette courbe est donnée ici sans évoquer aucun modèle particulier du comportement du pneu. Une étude des modèles existants fera l'objet de la prochaine section (cf. §1.7).

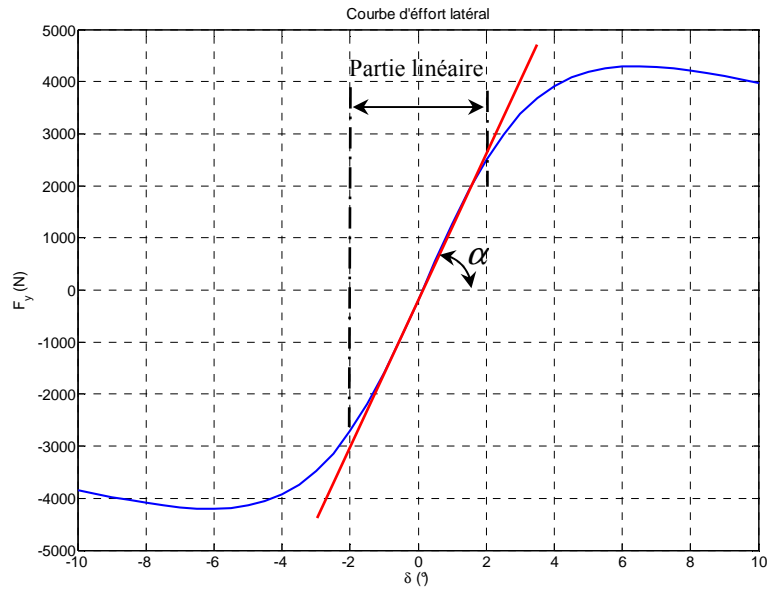


Figure 1.30. Courbe d'effort latéral.

Lorsque l'effort demandé est faible, l'angle de dérive du pneu sera également faible et se situe généralement dans la partie linéaire de la courbe. Cette partie est caractérisée par une droite linéaire de pente $k_\delta = \tan(\alpha)$, et on peut écrire :

$$F_y = -k_\delta \delta \quad (1.60)$$

La quantité k_δ est appelé « rigidité de dérive ». Pour une demande en effort plus importante, l'angle de dérive correspondant augmente non linéairement et tend vers une zone de saturation. Dans notre exemple, on utilise un pneumatique Michelin 245/45 R18, une charge verticale $F_{z_0} = 4 \text{ kN}$ et un angle de carrossage $\gamma = 0$. La plage linéaire s'étend jusqu'à 2° , et le maximum en saturation est atteint à $\sim 6^\circ$

1.6.3.2. Non linéarité liée à l'influence de la charge verticale

Dans le §1.5.3, une analyse de transfert de charge nous a permis de comprendre le mécanisme de l'évolution de la charge verticale sur un pneu. En virage (stabilisé ou non), il existe toujours une variation d'effort verticale qui n'est pas liée à un déplacement de masse proprement dit, mais au couple de l'accélération transversale. Sur la figure 1.31a, on trace l'évolution de la courbe de l'effort en fonction de l'angle de dérive avec une variation de charge verticale F_z de 3 kN à 8 kN .

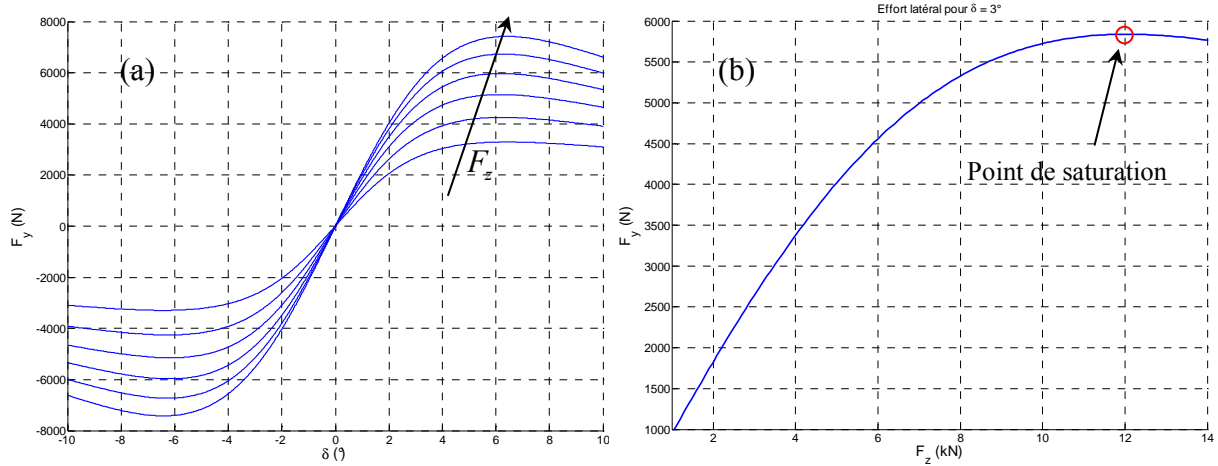


Figure 1.31. Influence de la charge verticale.

D'après la tendance générale, lorsque la charge verticale augmente, le potentiel d'un pneu à générer de l'effort augmente. Ce potentiel augmente jusqu'à une certaine valeur de F_z où il y a saturation. Sur notre exemple (cf. figure 1.31b), pour une dérive de 3° , l'effort latéral est saturé pour une charge verticale d'environ 12 kN. Ceci est également vrai pour la partie linéaire du réseau de courbes, dont la rigidité de dérive évolue non linéairement avec la charge verticale (cf. figure 1.32a). On remarque que même si ces courbes sont obtenues avec le même pneumatique à savoir Michelin 245/45 R18, la saturation de la rigidité de dérive intervient prématurément à environ $F_z = 10.7$ kN. **En générale, plus l'angle de dérive est petit plus la charge verticale de saturation est petite (cf. figure 1.32b).**

Cette figure est obtenue pour une variation de charge de 0 à 15 kN et un angle de dérive sur des paliers de 1° à 6° par pas de 0.5° . Dans le domaine linéaire en dérive δ et en charge verticale F_z , l'effort latéral du pneu peut s'écrire :

$$F_y(\delta, F_z) = -k_\delta(F_z)\delta \quad \text{avec} \quad k_\delta(F_z) = k_0 + k_1\Delta F_z \quad (1.61)$$

d'où l'effort transversal total :

$$F_y = -k_0\delta - k_1\Delta F_z\delta = F_{y0} + F_{y1}\Delta F_z \quad (1.62)$$

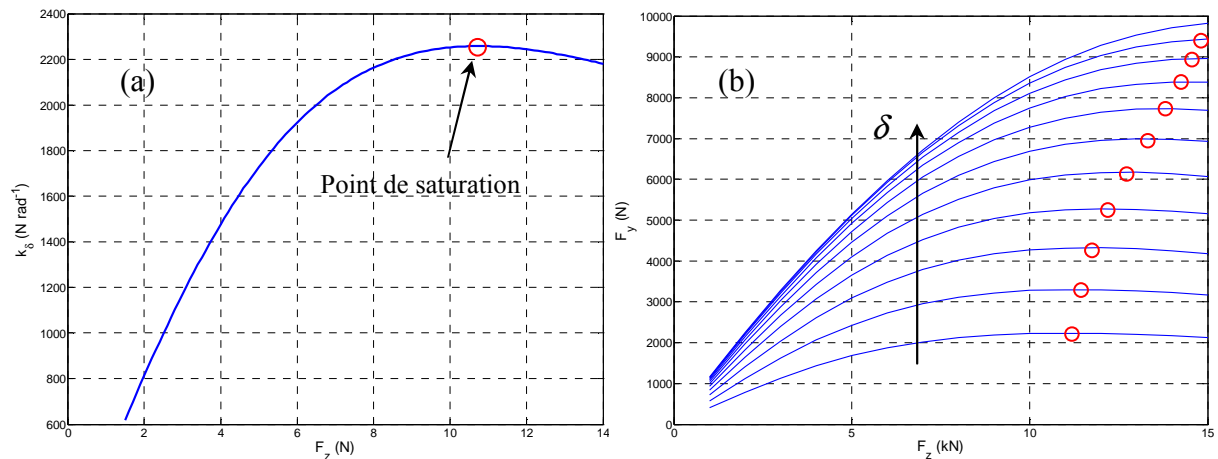


Figure 1.32. Influence de la charge verticale sur la rigidité de dérive.

Où F_{y0} correspond à l'effort sans influence du transfert de charge et F_{y1} correspond à la variation d'effort latéral lié au transfert de charge.

1.6.3.2.1. Impact de la non linéarité de la charge sur un train complet

La figure 1.33 présente l'allure de la courbe d'effort latéral du pneu en fonction de la charge pour une dérive fixée à 3° . Cette courbe est non-linéaire et permet d'expliquer la diminution de l'effort totale (ou moyen) des deux pneumatiques d'un même essieu sous l'effet du report de charge et de la concavité de la courbe.

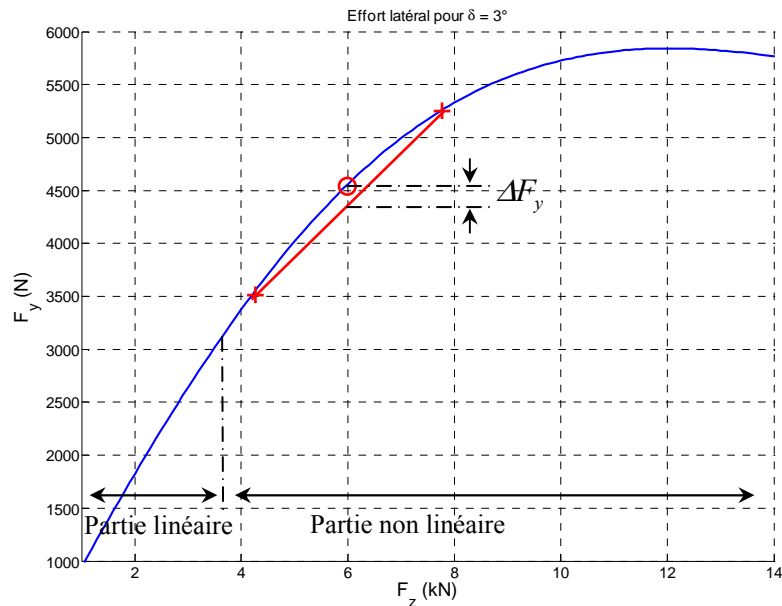


Figure 1.33. Impact du report de charge sur un train.

Si on considère que la dérive est fixée pour les deux pneus et que l'angle de carrossage est nul. Dans ce cas, seule la charge verticale peut varier. Initialement, les deux pneus sont soumis à la même charge verticale de 6 kN , l'effort latéral est alors : $F_{y0} = 2 \times 4.57 = 9.14\text{ kN}$, ce qui correspond au point central « O ».

En supposant également qu'il existe un transfert de charge de 1800 N , les charges évoluent sur chaque pneumatique différemment soit :

A droite $F_z = 6.8\text{ kN}$

A gauche $F_z = 4.2\text{ kN}$

Dans ces conditions l'effort latéral devient : $F_y = 3.5 + 5.25 = 8.75\text{ kN}$, ce qui correspond aux points décalés « + ». Nous constatons alors, que lorsque le transfert de charge survient dans la zone non linéaire, il provoque une perte du potentiel moyen d'un train à généré de l'effort latéral. Dans notre exemple, le transfert de charge provoque une perte d'effort $\Delta F_y = 390\text{ N}$. Plus le transfert de charge augmente, plus la somme des efforts diminue. La roue déchargée perd de l'effort latéral plus que ne gagne la roue chargée.

1.7. Conclusion

L'adoption des définitions et des résultats présents dans ce chapitre est primordiale pour la compréhension générale de la dynamique latérale du véhicule. Plusieurs points cruciaux ont été abordés, les voici en résumé :

- La présentation des différentes parties et organes constituant le véhicule ;
- L'étude du mécanisme de mise en virage ;
- La description des repères liés à chaque partie du véhicule. Ces repères ont permis de définir les différentes variables d'état donnant l'attitude du véhicule en mouvement ;
- L'introduction du modèle bicyclette avec le calcul des vitesses des points stratégiques du véhicule ;
- Le calcul des angles de dérives à l'axe avant et à l'axe arrière en fonction des variables d'état du véhicule ;
- L'étude des épures cinématique et élasto-cinématique des trains ;
- L'analyse et mise en équations des transferts de charge ;
- La présentation du diagramme G-G qui permet de visualiser les domaines d'utilisation du véhicule avec une délimitation des zones de comportement linéaires et non linéaires. Nous avons introduit également, les sources de non linéarités dues au système de suspension et au pneumatique (efforts d'interaction pneumatique-sol).

Dans le chapitre suivant, nous étudierons la modélisation en dynamique de véhicule. Cette modélisation permettra d'obtenir un formalisme mathématique du comportement du véhicule et de relier les facteurs influants dans celui-ci par un ensemble d'équations différentielles.

CHAPITRE 2.

MODELISATION

2.1. Introduction	69
2.2. Modélisation du pneumatique	69
2.2.1. Etat de l'art	70
2.2.2. Modèle de Pacejka « <i>formule magique</i> »	71
2.2.3. Approximation polynomiale	80
2.3. Modélisation de la dynamique latérale du véhicule	85
2.3.1. Contexte	85
2.3.2. Etat de l'art	85
2.3.3. Représentation des efforts sur le véhicule	86
2.3.4. Elaboration d'un modèle générale	87
2.3.5. Modèle Lacet-Dérive « LD »	96
2.3.6. Modèle Lacet-Roulis-Dérive et Transfert de charge « LRDT »	97
2.4. Analyse du modèle bicyclette linéaire LD	100
2.4.1. Fonctions de transfert	100
2.4.2. Stabilité du modèle bicyclette linéaire	104
2.5. Conclusion	107

2.1. Introduction

Le présent chapitre est entièrement consacré à la modélisation. En première partie et après une présentation de l'état de l'art, nous aborderons la modélisation du comportement du pneumatique. Nous étudierons en détail un modèle semi-empirique quasi-statique qui est l'un des plus représentatifs de la réalité physique du comportement d'un pneu. Ce modèle est appelé « *formule de Pacejka* ». Ensuite, nous présenterons les facteurs motivant le choix d'une approximation polynomiale de la formule de Pacejka. Nous présenterons également les limitations qui peuvent s'engendrer après une telle approximation.

Dans une deuxième partie nous présenterons l'ensemble des équations nécessaire pour aboutir à un modèle de dynamique latérale du véhicule. Le formalisme utilisé pour l'obtention du modèle est basé sur les théorèmes fondamentaux de la dynamique. Nous établirons ensuite deux variantes de ce modèle de dynamique latérale. Un premier modèle non linéaire basé sur le modèle bicyclette qui servira à décrire les mouvements de lacet et de dérive au CdG. Le deuxième modèle non linéaire proposé sera plus complet que le premier, il intégrera en plus les mouvements de roulis, les transferts de charges et les braquages induit par les épures de trains.

Finalement, nous avons jugé nécessaire d'introduire l'essentiel des résultats de l'analyse du modèle bicyclette linéaire afin de visualiser ses limitations et de justifier le recours à une modélisation non linéaire plus complète.

2.2. Modélisation du pneumatique

Comme nous l'avons défini au §1.2.1, le pneumatique est un organe de liaison au sol très complexe de part sa constitution physique et son comportement, ce qui rend son analyse théorique et sa modélisation très difficile. Or, on sait que toutes les forces agissant sur le véhicule (sauf les forces aérodynamiques et inertielles) lors de son déplacement sont générées au niveau des pneumatiques. La modélisation mathématique devient alors incontournable dans l'étude de la dynamique véhicule.

La description des efforts qui prennent naissance à l'aire de contact n'est pas facile à mettre en évidence. Plusieurs phénomènes physiques doivent être considérés, comme les déformations élasto-cinématiques du pneu, le glissement, le frottement, la rugosité des surfaces, le phénomène de collage et les cycles d'hystérésis [Por03]. Il s'ajoute à cela, les phénomènes comportementaux du pneu, comme les couplages entre les efforts générés.

La génération du torseur d'effort entre la roue et le sol est conditionnée par les variables d'entrées dynamiques comme la charge verticale F_{zi} , la dérive au pneu δ_i , le glissement τ_i et le carrossage γ_i . La modélisation permet donc de donner une représentation mathématique des efforts fournis par le pneu en interaction avec le sol, en faisant intervenir l'ensemble des variables dynamiques. Dans la littérature, une multitude de références existe dans le domaine de la modélisation du pneumatique. Des modèles qui vont des anciennes roues rigides aux roues élastiques actuelles. Un état de l'art des différents travaux réalisés est présenté dans la section suivante.

2.2.1. Etat de l'art

Dans cette section, nous présenterons les principaux travaux réalisés en termes de modélisation des efforts générés au point de contact. Les approches utilisées pour l'obtention des modèles de comportement sont de natures différentes. Deux type sont à prendre en considération : les modèles d'interactions roue-sol et les modèles proprement dit de pneumatique.

2.2.1.1. Modèles d'interactions roue-sol

Ces modèles permettent d'obtenir les efforts d'interactions à la surface de contact en se basant sur les caractéristiques d'adhérence longitudinal et transversal de la chaussée, ainsi que du sens et la vitesse de déplacement. Ces modèles ne prennent pas nécessairement en compte la constitution du pneumatique mais se basent uniquement sur les lois de la physique de deux corps en frottement. Dans ce contexte, s'inscrit le modèle « *force de frottement* » ou plus communément connu par « *modèle de loi de coulomb* » [Ols98] [Bro06]. Les lois de coulomb sont étroitement associées à la vitesse de glissement du corps en mouvement. Dans notre cas, le corps en question est l'ensemble roue – pneumatique. Ce modèle suppose que l'effort soit créé instantanément entre le pneu et le sol et ne dépend que de la charge verticale et du coefficient de frottement. Le principe générale est que la force de friction s'oppose au mouvement. La nature statique de ce modèle ne permet pas d'expliquer le transitoire d'effort lié à l'élasticité du pneumatique et à sa déformation. Les paramètres de ce modèle ne dépendent pas directement de l'état du véhicule, il est donc très difficile de l'intégrer dans une boucle de calcul dans un modèle de dynamique de véhicule.

Le « *modèle brosse* » [Dih00][Den00][Qu00][Mau99] permet de modéliser les actions élémentaires des points de contact entre deux surfaces. Chaque point de contact est modélisé comme étant un poil de brosse flexible se comportant comme un ressort. La déformation des poils de brosse dépend essentiellement du sens de la vitesse de glissement donné par l'angle de dérive et le coefficient de glissement longitudinal. Ce modèle est le premier qui permet de lier l'effort à ces quantités dynamiques et surtout d'établir des formules mathématiques explicites donnant les expressions des efforts.

Le modèle brosse prend en considération la saturation du pneumatique en définissant un profil de pression à la surface de contact. Ce profil de pression peut être rectangulaire (modèle de Rocard simplifié [Bro06]), parabolique ou parabolique incliné. L'effort total s'obtient en sommant tous les efforts générés à chaque poil de brosse. On peut donc facilement intégrer la nature aléatoire du coefficient de frottement pour chaque poil de brosse [Pck06]. L'inconvénient majeur de ce modèle est le temps de calcul très élevé et la dépendance de la complexité du résultat du nombre de poil de brosse considéré.

Actuellement, le modèle LuGre local [Sté04] est le plus évolué et est basé sur le modèle brosse. Il permet d'obtenir une formulation de la partie transitoire de l'effort en intégrant le phénomène de Stribeck [Bli91] et la vitesse de glissement relatif entre le pneu et le sol, tout en restant proche de la réalité physique. Ce modèle prend également en compte les principaux phénomènes statiques tels que le collage, le frottement cinétique, le frottement visqueux ainsi que certains phénomènes dynamiques tels que le déplacement à glissement nul et le phénomène d'hystérésis [Por03]. Les paramètres de ce modèle ont la particularité d'avoir une signification physique et donc facilement mesurables ce qui rend ce modèle bien adapté pour l'identification des coefficients de frottement pneumatique/sol.

2.2.1.2. Modèles du pneumatique

Les modèles physiques d'interactions roue/sol permettent d'expliquer l'origine des comportements observés. Néanmoins leur construction rationnelle est conditionnée par des hypothèses restrictives. Elargir suffisamment ces hypothèses pour une solution générale conduit à un résultat trop complexe pour être interprétable ou simplement formalisable. La littérature est très riche en ce qui concerne la modélisation des pneumatiques. Allant des modèles de connaissances basées sur l'analyse de surface de contact aux modèles empiriques de type 'formule magique'. Des études comparatives remarquables ont fait l'objet des travaux de synthèse réalisés dans [Por03] et [Sté04]. Durant notre travail de thèse, nous nous sommes limités à l'utilisation de l'un des modèles les plus évolués à l'heure actuelle en termes de représentativité. Il s'agit du modèle de Pacejka appelé également « *formule magique* » [Pck06] [Bak89] [And05] [Mil95]. Ce modèle permet d'extraire les efforts générés en régime établi avec des formules empiriques dont les coefficients ont tout de même une signification physique.

Il existe bien évidemment d'autres modèles plus complets introduisant un caractère de dynamique transitoire. A ce titre, le modèle de Delft [Del96] propose une modélisation plus complète basée sur le modèle de Pacejka initiale en intégrant la notion de longueur de relaxation dans l'expression des forces générées.

Le modèle Swift [Swi00] propose de décomposer le pneumatique, comme une couronne radiale, en éléments finis de type ressort - amortisseur. Ce modèle a cependant le désavantage de demander un temps de calcul non négligeable.

2.2.2. Modèle de Pacejka « *formule magique* »

En collaboration avec le professeur Bakker, Le professeur Pacejka a développé, durant les années 80, une forme générale du modèle du comportement dynamique du pneumatique. Ce modèle obtenu en partenariat entre l'université de Delft et Volvo [Bak89] est incontestablement le plus connu et le plus utilisé par les constructeurs automobiles et manufacturiers. Ce modèle est connu sous le nom de « *formule magique* ».

La forme générale des équations ne provient pas d'une modélisation proprement dite. Elle provient plutôt d'une combinaison empirique de fonctions trigonométriques. Par contre, tous les paramètres du modèle gardent un sens physique et sont issus d'une identification basée sur des résultats expérimentaux. Le modèle possède une structure particulière permettant de reproduire les mesures d'un pneumatique obtenues sur un banc d'essai [Rip06].

Il existe différentes raisons pour lesquelles cette formule est dite magique. Premièrement, elle permet à partir d'une même équation d'obtenir une représentation des efforts horizontaux (longitudinaux et transversaux), ainsi que celle du moment d'auto-alignement par simple calibration de paramètres et choix de variables. Deuxièmement, Les paramètres sont adaptables pour s'ajuster au mieux à la configuration de la roue (dérive, carrossage, effort verticale, couplage transversale/longitudinale). Enfin, la formule ne présente aucune discontinuité. Ce qui permet de caractériser complètement un pneumatique avec un seul jeu de paramètres, facilement identifiable sur des courbes de mesures [Pck06].

La formule de Pacejka de base est quasi statique. Elle permet bien évidemment de reproduire les forces d'interactions pneu/sol mais seulement en régime établi. Aucune

information n'est donc disponible lors du régime transitoire. Comme nous l'avons cité auparavant, le modèle Delft [Delft96], permet de définir ce régime transitoire en introduisant la notion de longueur de relaxation [Fen05]. Cet aspect de la dynamique du pneumatique ne sera pas traité dans cette thèse.

2.2.2.1. Forme analytique de base du modèle de Pacejka

La forme analytique de base du modèle de Pacejka est de nature antisymétrique, complètement défini par un ensemble de six paramètres et permet de reproduire l'effort latéral F_y , l'effort longitudinal F_x et le moment d'auto-alignement M_z . La figure 2.1 montre l'ensemble des entrées/sorties du modèle de Pacejka.

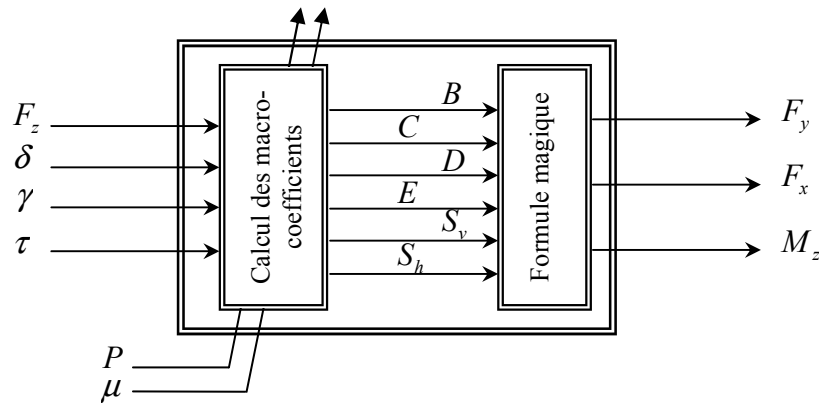


Figure 2.1. Schématisation du modèle de Pacejka.

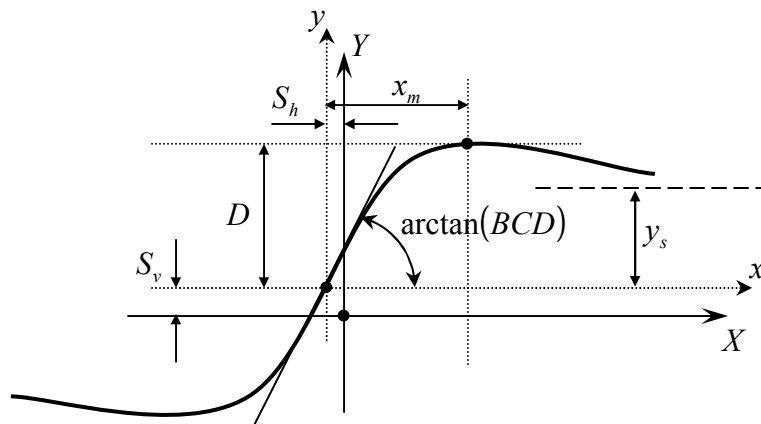


Figure 2.2. Macro coefficients du modèle de Pacejka – Exemple d'effort latéral.

La formule générale pour une charge verticale et un angle de carrossage donné est la suivante :

$$y(x) = D \sin[C \arctan\{Bx - E(Bx - \arctan Bx)\}] \quad (2.1)$$

avec

$$Y(X) = y(x) + S_v \quad (2.2)$$

$$x = X + S_h \quad (2.3)$$

Où :

- Y peut représenter l'effort latéral F_y , l'effort longitudinal F_x ou le moment d'auto-alignement M_z .
- X peut représenter l'angle de dérive du pneu δ lorsqu'on cherche à obtenir l'effort latéral ou le moment d'auto-alignement. Il peut également représenter le glissement longitudinal τ pour caractériser l'effort longitudinal.

L'ensemble des paramètres apparaissant dans la formule est représenté sur la figure 2.2 (exemple d'effort latéral). Ils sont appelés macro-coefficients et voici leurs définitions :

- B : coefficient de rigidité qui entre dans la détermination de la pente à l'origine ;
- C : coefficient de forme qui contrôle la limite du taux d'apparition du sinus dans la courbe et donc, il détermine la forme de la courbe ;
- D : coefficient d'amplitude qui représente la valeur du pic (pour $C \geq 1$). Le produit BCD correspond à la pente de la courbe à l'origine symétrique. Dans le cas de l'effort latérale, elle est appelé rigidité de dérive ;
- E : coefficient de courbure : Ce paramètre est introduit pour contrôler la courbure du pique et en même temps sa position horizontale ;
- S_v, S_h : coefficients d'assymétries verticale et horizontale. La formule de Pacejka telle qu'elle est défini par 2.1 est parfaitement symétrique et passe par l'origine ($x=0, y=0$). En réalité, il n'en est rien, car un vrai pneumatique génère de l'effort, même en ligne droite sans glissement latérale et longitudinal, ce qui justifie l'introduction des coefficients S_v et S_h . Ces efforts sont à l'origine dus aux phénomènes de plysteer et de conicité (voir figure 2.3 extraite de [Pck06]).

2.2.2.1.1. Efforts de plysteer et de conicité

Ces deux différents phénomènes sont étroitement liés à l'assymétrie constructive du pneumatique. En effet, le pneumatique peut avoir une légère conicité géométrique ou structurelle. Cette conicité introduit une projection de l'effort vertical sur l'effort latéral, ce qui produit un effort latéral constant. L'empilement des nappes (plysteer) crée une assymétrie qui provoque également un effort et un couple résiduel lorsque les nappes sont mises sous contrainte pour être mises à plat dans l'aire de contact. Ces deux phénomènes interviennent de manière différente sur le pneu. Le plus important à retenir est :

- Effet du plysteer : lorsque la roue est en rotation dans un sens donné, un plysteer pure génère un effort latéral F_{ply} même avec un angle de dérive géométrique nulle, et lorsque le sens de rotation s'inverse le sens de cet effort s'inverse également. Pour cette raison le plysteer est parfois considéré comme un pseudo angle de dérive interne au pneu.

- Effet de la conicité : à l'inverse du plysteer, la conicité provoque un effort F_{con} qui ne change pas d'orientation lorsque la roue tourne dans un sens ou dans l'autre. Ce phénomène est donc considéré comme un pseudo angle de carrossage interne.

L'effet de combinaison des deux phénomènes sur un pneumatique roulant ressemble à celui provoqué sur un pneu roulant avec un léger angle de dérive et de carrossage respectivement. L'influence sur le moment d'auto-alignement est également comparable à celle de l'effort latéral. Pour des raisons de simplicité, le reste du développement des équations dans ce document de ces deux phénomènes ne sont pas considérés. Dans [Stép04], on retrouve une présentation détaillée de ces phénomènes. Une synthèse expérimentale peut être consultée également dans [Lee00].

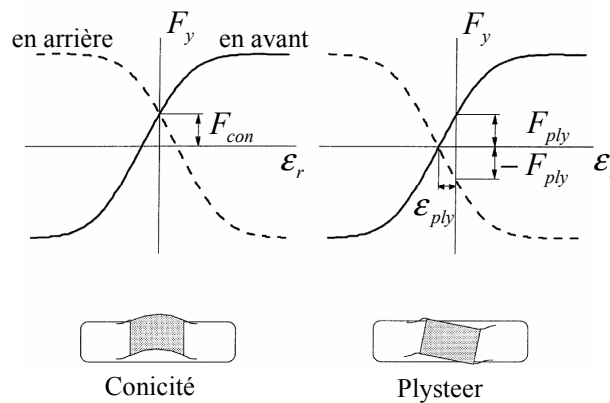


Figure 2.3. Plysteer et conicité.

2.2.2.1.2. Expression des macro-coefficients

Sur une courbe de mesure d'effort pour une charge verticale et un carrossage fixes, les macro-coefficients peuvent être directement obtenus par une lecture simple des caractéristiques de la courbe. Le coefficient d'amplitude D est directement lisible sur la courbe mesurée de la figure 2.2. Les formules donnant les autres paramètres sont données dans le tableau suivant :

Coefficient de forme C		Coefficient de rigidité B	Coefficient de courbure E
Efforts horizontaux	Moment d'auto-alignement		
$C = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{y_s}{D}$	$C = 2 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{y_s}{D}$	$B = \frac{BCD}{CD}$	$E = \frac{Bx_m - \tan(\pi/(2C))}{Bx_m - \arctan(Bx_m)}$

Tableau 2.1. Expressions des macro-coefficients.

L'influence des macro-coefficients sur l'allure de la courbe résultante est présentée sur la figure 2.4. Les courbes tracées sont basées sur l'équation 2.1 et elles ont été normalisées, ce qui permet de conservé que l'influence des paramètres E et C . Une étude complète de l'influence des macro-coefficients suivant leurs valeurs est présentée dans [Sch94].

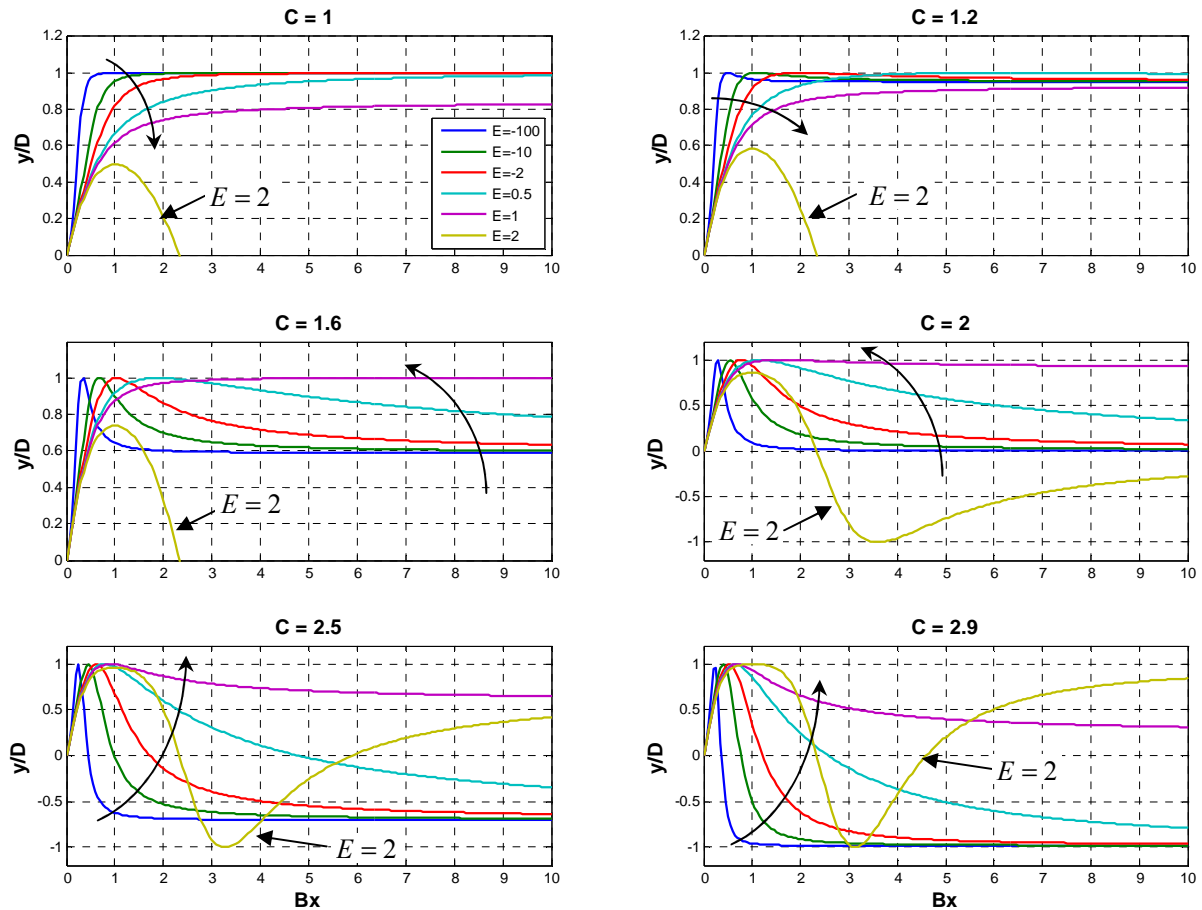


Figure 2.4. Influence des macro-coefficients sur l'allure de la courbe d'effort.

Sur la figure 2.1, les paramètres P et μ désignent respectivement la pression de gonflage du pneumatique et l'adhérence au sol auxquels les macro-coefficients sont très sensibles. Cette sensibilité est également conditionnée par la valeur de la charge verticale et l'angle de carrossage. Le développement analytiques de l'évolution des macro-coefficients en fonction de charges verticale et du carrossage fait intervenir d'autres paramètres appelés micro-coefficients. Sans prendre en compte le couplage entre l'effort latéral et longitudinal, le nombre des micro-coefficients nécessaire à caractériser complètement l'effort latéral, l'effort longitudinal et le moment d'auto-alignement s'élève à 46 paramètres.

Le bon calibrage des micro-coefficients permet finalement de coller au mieux aux courbes et aux résultats mesurés et cela tout en tenant compte de la charge vertical et du carrossage. Pour étudier la dynamique latérale du véhicule dans la suite du travail, la modélisation ne tiendra compte que de l'effort latéral. L'effort longitudinal n'est pas généré car aucune dynamique longitudinale ne sera étudiée (pas de manœuvre de freinage ou d'accélération). Ceci permet de prendre donc en considération que les équations donnant l'effort latéral pur.

2.2.2.2. Modèle de Pacejka pour l'effort latéral pur en fonction des micro-coefficients

A partir de [Pck06] et [Gui02], l'effort latéral pur est donné comme suit :

$$F_y(\delta, F_z, \gamma) = D \sin[C \arctan(B \Phi(\delta, F_z, \gamma))] + S_V \quad (2.4)$$

$$\Phi(\delta, F_z, \gamma) = (1 - E) (\delta + S_h) + \frac{E}{B} \arctan[B (\delta + S_h)] \quad (2.5)$$

avec les macro-coefficients :

- Coefficient d'amplitude : $D(F_z) = (a_1 F_z^2 + a_2 F_z)$ (2.6)

- Coefficient de forme : $C = a_0$ (2.7)

- Rigidité de dérive : $BCD(F_z, \gamma) = \left[a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_z}{a_4} \right) \right) \right] (1 - a_5 |\gamma|)$ (2.8)

- Coefficient de rigidité : $B(F_z, \gamma) = \frac{BCD}{CD}$ (2.9)

- Coefficient de courbure : $E(F_z) = \min((a_6 F_z + a_7) ; 1)$ (2.10)

- Asymétrie horizontale : $S_h(F_z, \gamma) = (a_8 \gamma + a_9 F_z + a_{10})$ (2.11)

- Asymétrie vertical : $S_v(F_z, \gamma) = (a_{12} F_z + a_{13} + (a_{112} F_z^2 + a_{111} F_z) \gamma)$ (2.12)

Les 15 paramètres a_i sont les micro-coefficients qui définissent l'effort latéral pur. Une représentation équivalente est donnée pour l'effort longitudinal (avec 13 micro-coefficients) et le moment d'auto-alignement (avec 18 micro-coefficients) [Bro06] [Gui02]. Les procédures d'identification d'un pneumatique consiste à obtenir ces micro-coefficients en utilisant des procédures d'essais spécifiques, notamment sur le banc de caractérisation du pneumatique appelé « Flat Trac ». Il existe différentes procédures pour extraire les micro-coefficients à partir des courbes de mesures. Une procédure récente d'identification de ces paramètres à été développé au sein du groupe PSA en collaboration avec l'université de Nantes [Rip06]. Cette procédure fait appel au principe de similitude [Mil95] pour normalisé le modèle de Pacejka ainsi qu'à un développement polynomial de la représentation des efforts et du moment d'auto-alignement. Que se soit à partir de cette identification ou directement fournis par les manufacturiers, les résultats sont généralement données sous forme d'un tableau.

Informations sur les mesures			
Manufacturier : Michelin			
Banc de mesure : PSA			
Procédures de caractérisation : PSA			
Dimensions : 245/45R18 – 100W			
Adhérence de caractérisation : 1			
Pression : 2.4			
Coefficient	Valeur	Coefficient	Valeur
a0	1,998	a8	-0,03009
a1	-33,85	a9	-0,009786
a2	1198	a10	-0,1149
a3	2258	a11	-10,85
a4	10,74	a112	-0,1834
a5	0,01399	a12	3,225
a6	-0,1693	a13	34,78
a7	1		

Tableau 2.2. Exemple de valeur des micro-coefficients pour l'effort latéral pur.

L'expression d'effort correspond parfaitement à la schématisation donnée par la figure 2.1 et elle est directement pilotée par la dérive, la charge verticale et le carrossage que subit le pneu. L'étude de l'influence de chaque variable d'entrée sur cet effort latéral fera l'objet de la section suivante.

2.2.2.1. Influence de la charge verticale et du carrossage

A) – Influence sur les macro-coefficients

A partir des équations 2.6 à 2.12 exprimant les macro-coefficients en fonction des micro-coefficients, nous constatons qu'hormis le coefficient de forme C , tous les coefficients sont directement conditionnés soit par la charge verticale, soit par l'angle de carrossage ou les deux en même temps. Les variations des paramètres B , D , E , S_h et S_v sont tracées sur les figures 2.38 et 2.39 en fonction de la charge verticale et du carrossage. La gamme des charges verticales est comprise entre $1kN < F_z < 14kN$, celle des angles de carrossages est comprise entre $-5^\circ < \gamma < +5^\circ$. Les valeurs des micro-coefficients sont données dans le tableau 2.4.

B) – Influence sur la courbe d'effort latéral

En utilisant le modèle décrit par les équations 2.4 à 2.12 et les valeurs du tableau 2.2, on peut facilement étudier l'influence de la charge verticale et l'angle de carrossage sur l'effort latéral pur (sans couplage), voir les figure 2.7 et 2.8. La première constatation concerne l'importance de la charge verticale pour la génération d'effort. En effet, en se basant sur les modèles d'interaction roue/sol et notamment le modèle de loi de coulomb, l'effort généré au point de contact roue sol s'oppose au mouvement. Lorsqu'il y a glissement, la vitesse du point de contact dans le repère R_0 n'est pas nulle. La loi de coulomb s'énonce par :

- La vitesse de glissement du point de contact : $\vec{V}_{Gr}^0 \neq 0$ avec $\vec{V}_{Gr}^0 = [V_{Gxr}^0, V_{Gyr}^0, 0]$
- L'effort horizontal s'oppose au mouvement : $\vec{F}_H = [F_x \quad F_y \quad 0] = -\|\vec{F}_H\| \frac{\vec{V}_{Gr}^0}{\|\vec{V}_{Gr}^0\|}$ (2.13)
- Le module de l'effort horizontal : $\|\vec{F}_H\| = f \times F_z$

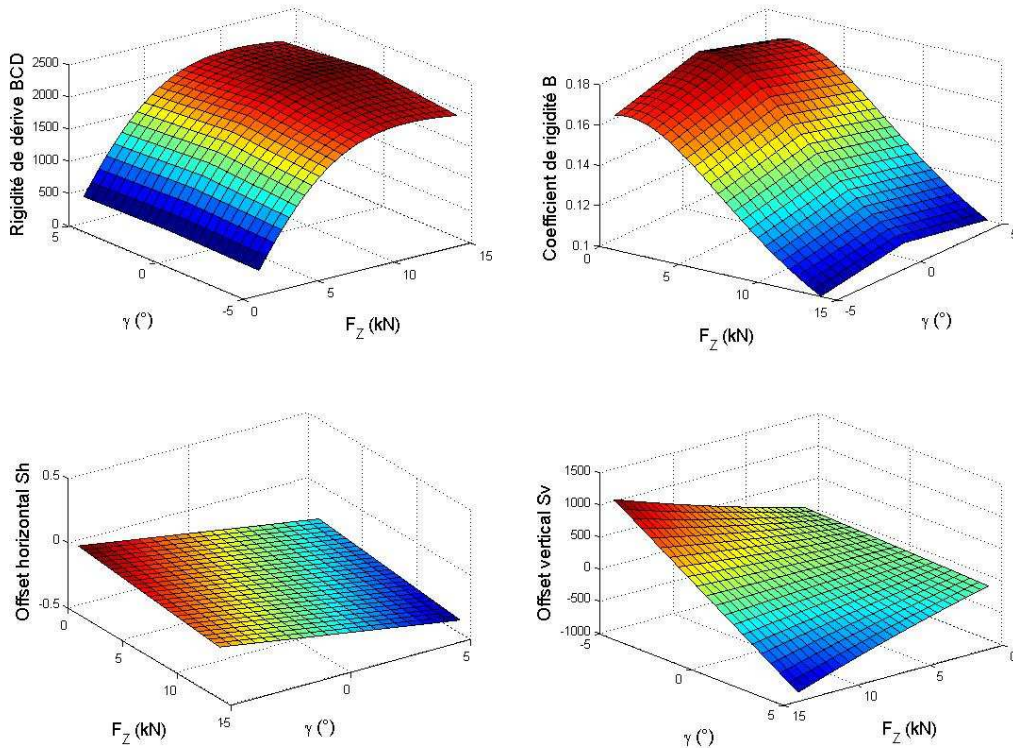


Figure 2.5. Influence de la charge verticale et le carrossage sur BCD, B, S_h et S_v .

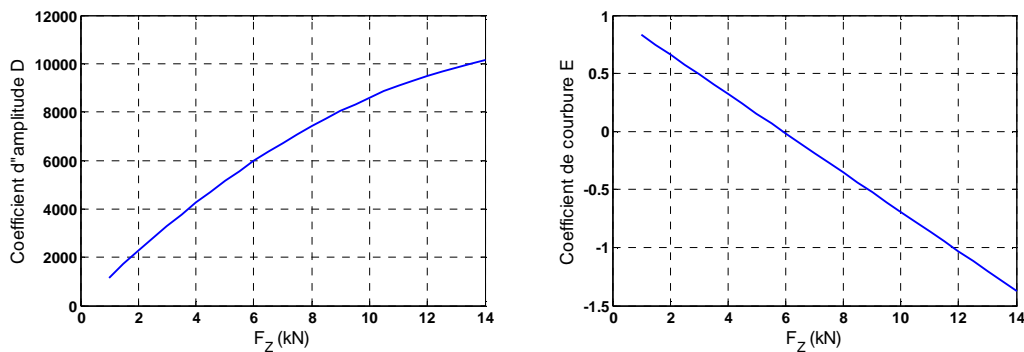


Figure 2.6. Influence de la charge verticale sur D et E.

Si on considère uniquement la dynamique latérale en supposant qu'il n'y a pas de glissement longitudinal ($\tau = 0$, aucune dynamique longitudinale), l'effort latéral sera donné par :

$$F_y = f \times F_z \quad (2.14)$$

La charge normale influence très fortement sur la force latérale. Ceci peut se comprendre si l'on considère qu'à la limite de glissement, l'effort transversal est donné par la loi de coulomb (équation 2.14). La formule de Pacejka n'en est pas loin, car on considère que le coefficient de frottement est une fonction dynamique qui évolue avec l'angle de dérive et la charge verticale. L'effet de la charge sera particulièrement perceptible dans les virages du fait du transfert de charge qui peut prendre des valeurs importantes.

Egalement, la variation de l'angle de carrossage peut entraîner une variation d'effort latéral comme constaté sur la figure 2.8. Cette effet se fera sentir dans les virages à cause de la cinématique des trains comme nous l'avons abordé dans le §1.5.1. En effet, le mouvement en

roulis de la caisse en virage entraîne un débattement verticale des roues ce qui provoque une variation du plan de roue. Le carrossage est l'un des paramètres de l'essieu directement piloté par ce débattement vertical.

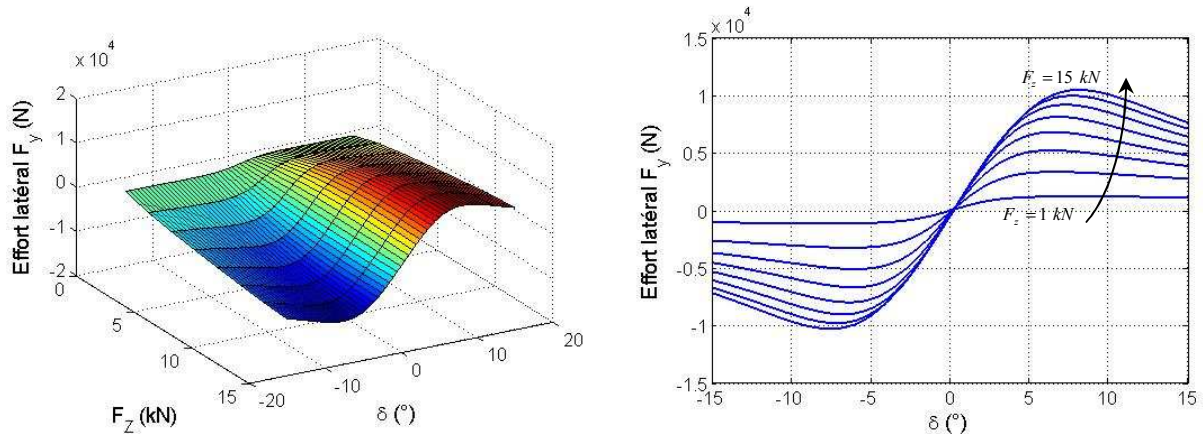


Figure 2.7. Influence de la charge verticale sur l'effort latéral.

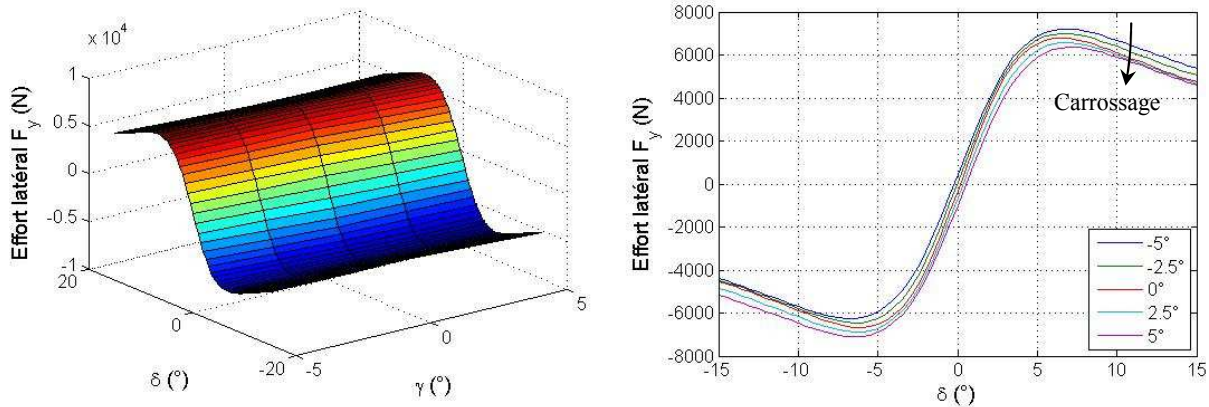


Figure 2.8. Influence du carrossage sur l'effort latéral.

La figure 2.7 et 2.8 sont obtenue avec une dérive : $-15^\circ < \delta < 15^\circ$ par pas de 0.5° , une charge verticale : $1\text{kN} < F_z < 15\text{kN}$ par pas de 2kN et un carrossage : $-5^\circ < \gamma < 5^\circ$ par pas de 2.5° .

Le potentiel d'un pneu à généré de l'effort augmente lorsque la charge verticale augmente, ceci est vrai jusqu'à une certaine charge verticale de saturation. Cette charge de saturation n'est pas fixe et dépend de la dérive à laquelle le pneumatique est soumis, cette caractéristique est présenté sur la figure 2.9.

Remarque :

Le minimum pris en compte en termes de charge verticale lors des simulations n'est jamais inférieur à 1kN . Cette valeur est choisie en fonction des charges usuelles que subit un pneu lors d'un fonctionnement normal. En effet, la charge peut avoir une valeur autour de 0kN , ce qui signifie qu'il y a une situation de levé de roue causé par un transfert de charge excessif dans un virage. Cette situation ne fait pas l'objet de notre étude.

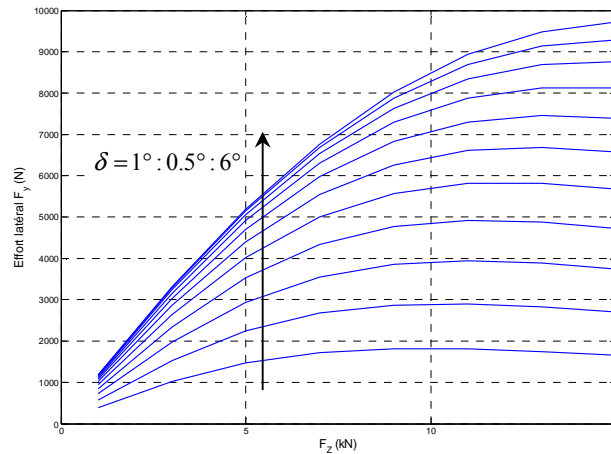


Figure 2.9. Influence du carrossage sur l'effort latéral.

2.2.3. Approximation polynomiale

2.2.3.1. Présentation

L'étude de la dynamique latérale du véhicule revient à l'analyse du modèle associé à cette dynamique. Le pneumatique est incontestablement l'élément le plus important à modéliser pour avoir la meilleure représentation de la dynamique du véhicule. Notre but est d'extraire analytiquement les caractéristiques de la réponse de la voiture en faisant intervenir les paramètres physique des ses organes. L'utilisation du modèle de Pacejka dans un modèle de véhicule rend l'analyse théorique très complexe, et rien ne peut assurer la convergence de l'analyse vers des résultats analytiques pouvant lier la réponse du véhicule à ses paramètres physiques.

L'idée fondamentale dans ce travail est basée sur l'approximation de l'allure des courbes d'effort par des polynômes. On peut facilement constater qu'avec des polynômes d'ordres donnés, on peut reproduire les mêmes courbes d'effort tout en tenant compte des non linéarités vis-à-vis de la dérive, la charge verticale et le carrossage. Plus en aval, la représentation polynomiale de l'effort transversal permettra d'extraire des modèles de dynamique véhicule non linéaire analysable avec des outils mathématiques dédiés aux systèmes non linéaires polynomiaux.

2.2.3.2. Approximation polynomiale à charge constante

Analysons une courbe d'effort donné par la formule de Pacejka (cf. équations 2.4 à 2.12) pour une charge verticale fixe $F_z = 7kN$, un angle de carrossage nulle et sans tenir compte des asymétries S_h et S_v , une telle courbe est représenté sur la figure 2.10. Il apparaît également trois approximations polynomiales d'ordres 1, 3 et 5, respectivement et dont les équations sont les suivantes :

$$F_{y1}(\delta) = -k_\delta \delta \quad (2.15)$$

$$F_{y3}(\delta) = -k_\delta \delta - n_\delta \delta^2 - q_\delta \delta^3 \quad (2.16)$$

$$F_{y5}(\delta) = -k_\delta \delta - n_\delta \delta^2 - q_\delta \delta^3 - p_\delta \delta^4 - r_\delta \delta^5 \quad (2.17)$$

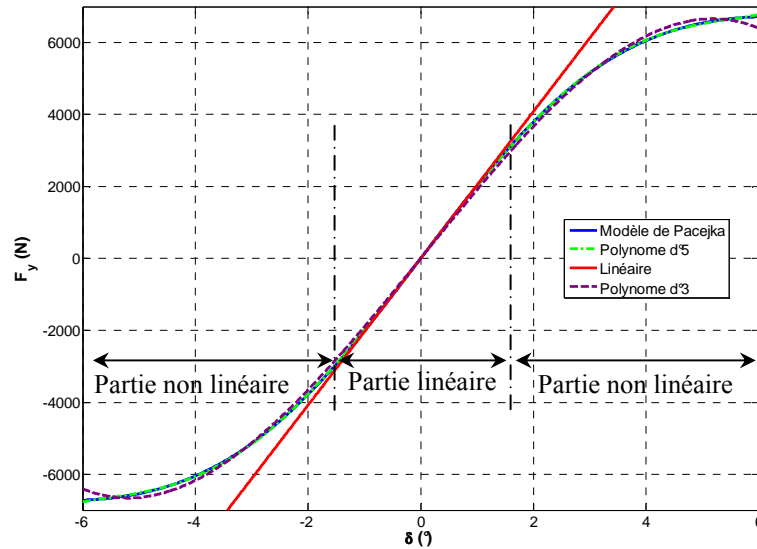


Figure 2.10. Approximations polynomiales de la formule de Pacejka.

2.2.3.2.1. Discussion

Les paramètres des équations 2.15 à 2.17 sont issues d'une optimisation par la méthode des moindres carrés. Une analyse comparative entre les différentes approches nous permettra de choisir l'ordre du polynôme qui sera utilisé par la suite.

A- Approximation polynomiale d'ordre 5

Avec l'exemple de la figure 2.10 pour une charge vertical fixe, il est clair que le polynôme d'ordre 5 donne les meilleurs résultats en termes d'erreur d'approximation. Vu la nature impaire de la courbe d'effort, tous les paramètres d'ordres pairs dans l'équation 2.17 sont nuls. L'effort s'écrit plutôt :

$$F_{y5}(\delta) = -k_{\delta}\delta - q_{\delta}\delta^3 - r_{\delta}\delta^5 \quad (2.18)$$

Afin, d'avoir une mesure objective sur la qualité d'ajustement des paramètres k_{δ} , q_{δ} et r_{δ} , on introduit la moyenne d'erreurs quadratique normalisée (normalized MSE en anglais) [Wor01], dont la définition est la suivante :

$$MSE(F_{y5}) = \frac{100}{N\sigma_{F_y}^2} \sum_{i=1}^N (F_y - F_{y5})^2 \quad (2.19)$$

Où F_y désigne l'effort obtenu par la formule de Pacejka et $\sigma_{F_y}^2$ représente la variance de F_y . L'expérience montre qu'un MSE inférieur à 1 reflète une très bonne optimisation des paramètres. Pour le polynôme d'ordre 5, nous avons : $MSE = 9.14 \times 10^{-4}$. Plus le MSE est petit, plus l'optimisation est meilleure.

En réalité, L'utilisation d'une telle représentation permet d'avoir une très bonne approximation qui dépasse 9° en angle de dérive, avec une erreur inférieure à 5% et un MSE très satisfaisant. Ceci semble être le meilleur choix pour substituer la formule de Pacejka. Ce choix n'est intéressant que lorsqu'on cherche à effectuer une identification où le nombre élevé

de paramètres peut permettre un meilleur ajustement par rapport à des mesures, comme présenté dans [Rip06]. Par contre, lors d'une analyse théorique du modèle résultant, les calculs peuvent vite devenir très complexe et fastidieux. Ceci nous a conduits à choisir un ordre d'approximation moins élevé.

B- Approximation polynômiale d'ordre 3

Comme précédemment, la nature impaire de la courbe d'effort impose que les paramètres d'ordres pairs soit nuls. L'effort s'écrit alors :

$$F_{y3}(\delta) = -k_\delta \delta - q_\delta \delta^3 \quad (2.20)$$

Avec une erreur de 5%, ce polynôme permet d'atteindre environ 6° de dérive, avec un erreur quadratique moyenne : $MSE = 0.0517$. Pour des angles de dérives usuels, cette représentation est largement suffisante.

Les paramètres k_δ et q_δ peuvent être formulé d'une manière intrinsèque en développant la formule de Pacejka en série de Taylor à l'ordre trois (autour $\delta = 0$). Cette description sert à garder un sens physique aux paramètres du polynôme. A partir de l'équation 2.4, la série de Taylor à l'ordre 3 s'écrit :

$$F_y(\delta) = BCD \delta - \frac{1}{6} \left(B^3 CD (2E + 2 + C^2) \right) \delta^3 + O(\delta^5) \quad (2.21)$$

Par identification on obtient :

$$k_\delta = -BCD \quad (2.22)$$

$$q_\delta = \frac{1}{6} \left(B^3 CD (2E + 2 + C^2) \right) \quad (2.23)$$

Les paramètres k_δ et q_δ sont directement liés aux macro-coefficients par les équations 2.22 et 2.23. Par ailleurs, nous savons pertinemment qu'une optimisation au sens des moindres carrés du même ordre donne de meilleurs résultats. En effet, les équations 2.22 et 2.23 permettent d'obtenir une approximation viable jusqu'à $3,5^\circ$ en dérive avec une erreur à 5%. Pour améliorer ce résultat sur une plus large gamme de fonctionnement, nous introduisons un nouveau coefficient τ_δ à optimiser, tel que :

$$q_\delta = \frac{1}{6} \tau_\delta \left(B^3 CD (2E + 2 + C^2) \right) \quad (2.24)$$

τ_δ sera donc le seul coefficient issu d'une optimisation par la méthode des moindres carrés. Pour la suite du travail, nous utiliserons cette représentation pour extraire des modèles de dynamique latérale non linéaire (cf. §2.2).

C- Approximation linéaire

La linéarisation autour d'un point de fonctionnement reste la solution la plus classique et la plus utilisée lorsqu'on est confronté à l'étude d'un système non linéaire. Dans la plupart des cas, le domaine de validité est très restreint et se situe autour de $\pm 1.5^\circ$ en dérive. L'effort s'écrit :

$$F_y(\delta) = -k_\delta \delta \quad (2.25)$$

Le paramètre k_δ représente la pente à l'origine et il n'est autre que la rigidité de dérive. Il est donné par le BCD (cf. équation 2.8)

$$k_\delta = -BCD = \left[a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_z}{a_4} \right) \right) \right] \quad (2.26)$$

L'un des modèle de dynamique véhicule issue de cette représentation est le modèle bicyclette linéaire [Evr03][Kie00][Zar02][Gen97]. Ce modèle est le plus utilisé lors des calculs et des simulations simples qui ne nécessitent pas une grande précision dans la modélisation de la dynamique latérale du véhicule.

2.2.3.3. Approximation polynomiale à charge variable

En se limitant à l'approche polynomiale d'ordre 3, les paramètres k_δ et q_δ dépendent fortement de la charge verticale. Ceci peut directement être vérifié à travers les équations 2.24 et 2.26 car les macro-coefficients dépendent eux aussi de F_z . Concrètement, une variation de charge sur un pneu provient d'un transfert de charge en virage. Sur la figure 2.11, l'allure de l'évolution des paramètres k_δ et q_δ est tracé pour une variation de charge verticale allant de $3kN$ à $10kN$. Une régression polynomiale d'ordre 3 des deux paramètres est également représentée sur cette même figure.

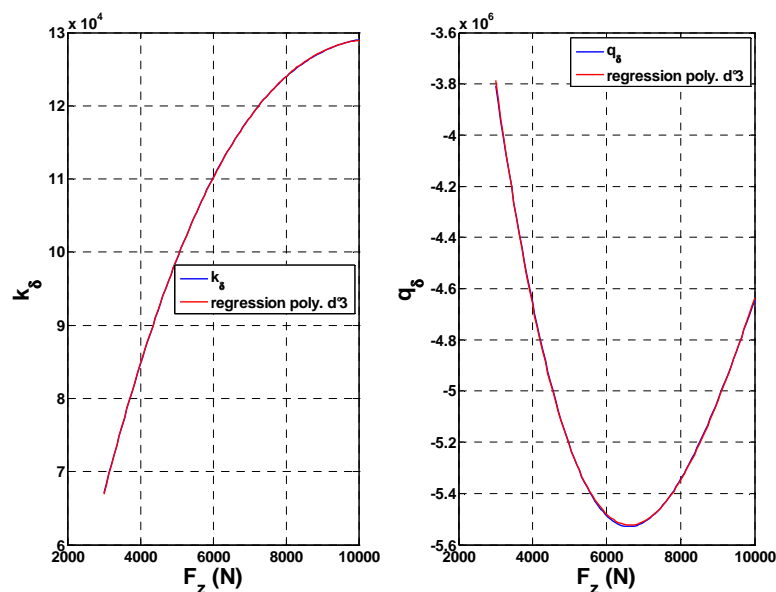


Figure 2.11. Evolution des paramètres k_δ et q_δ en fonction de la charge.

Nous remarquons, que pour une charge variable, k_δ et q_δ peuvent très bien être représentés par des polynômes de degré 3 en fonction de la charge verticale F_Z , d'où l'expression de l'effort latéral donné par :

$$F_{y3}(\delta) = k_\delta(F_Z) \delta + q_\delta(F_Z) \delta^3 \quad (2.27)$$

$$k_\delta(F_Z) = n_0 + n_1 F_Z + n_2 F_Z^2 + n_3 F_Z^3 \quad (2.28)$$

$$q_\delta(F_Z) = n_4 + n_5 F_Z + n_6 F_Z^2 + n_7 F_Z^3 \quad (2.29)$$

Même si l'influence de l'angle de carrossage sur l'effort latéral a été démontré (cf. figure 2.9), celle-ci ne sera pas prise en compte. Dans [Rip06], l'auteur utilise une représentation similaire pour les efforts horizontaux. L'effort latéral est décrit par la somme d'un polynôme de degré 7 en dérive, et d'un polynôme de degré 5 en carrossage. Chaque paramètre des deux polynômes est lui-même un polynôme de degré 3 en la charge verticale. Son but est d'effectuer une modélisation par identification des efforts, aucune analyse théorique n'est issue de cette modélisation.

2.2.3.4. Conséquences

- La précision du polynôme de degré 3 permet de représenter l'effort sur une plage pouvant atteindre $\pm 6^\circ$ d'angle de dérive et cela pour des charges verticales usuelles. En faisant augmenter la charge, on remarque une amélioration notable de la représentativité du polynôme (cf. figure 2.12a). L'erreur quadratique moyenne calculée pour une charge $F_Z = 3\text{kN}$ est $MSE = 0.18$, alors qu'on obtient $MSE = 0.004$ pour une charge $F_Z = 11\text{kN}$. Ceci est dû à la tendance linéaire de la courbe d'effort pour les charges élevées. La courbure est moins importante et le pneumatique gagne du potentiel de génération d'effort lorsqu'il est chargé (il se sature pour des dérives plus grandes).

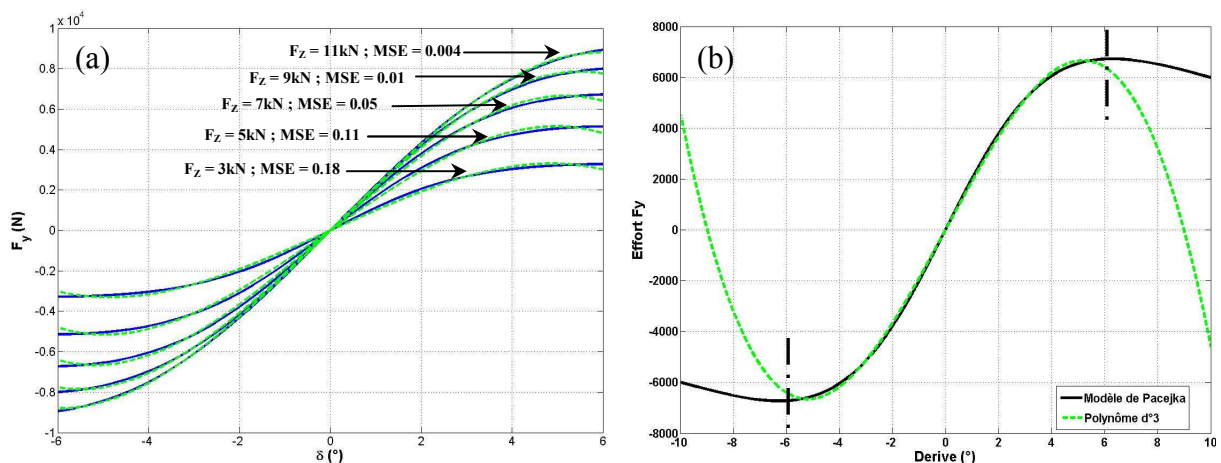


Figure 2.12. (a)-La précision d'approximation en vue de F_Z ; (b)- Domaine de validité du Polynôme d°3.

- L'approximation polynomiale n'est représentative que sur une gamme de dérive située entre -6° et 6° . Au delà de ces valeurs, le polynôme diverge et ne représente plus un modèle fiable pour le pneumatique. Il est donc important de s'assurer que les manœuvres choisis pour la simulation ou l'identification respectent cette condition (cf. figure 2.12b).

2.3. Modélisation de la dynamique latérale du véhicule

2.3.1. Contexte

Le véhicule automobile de part sa constitution, est un système complexe et difficilement modélisable. Lors d'une utilisation ordinaire, le véhicule est sujet à trois différentes dynamiques : longitudinale, latérale et verticale. L'exhaustivité dans la caractérisation des interactions entre les différents organes permet de préciser le rôle de chaque organe dans chacune des dynamiques. L'écriture de ces modèles est la première étape d'une démarche de modélisation visant à décrire le comportement dynamique latéral du véhicule.

Dans un premier temps, les équations permettant de converger vers un modèle générale de dynamique de véhicule seront présentées par étapes. Ensuite, le modèle générale sera particularisé afin de décrire uniquement la dynamique latérale. Deux modèles seront développés dans cette partie. Le premier est un modèle bicyclette non linéaire à complexité réduite dont le modèle de pneumatique et le polynôme de degré 3 à charge verticale constante. Ce modèle permettra de représenter les principales variables d'état qui sont : La vitesse de lacet $\dot{\psi}$, la dérive au CdG δ . L'objectif lié à ce modèle est d'extraire analytiquement les caractéristiques de la réponse du véhicule en fonction de ses paramètres fonctionnelles (cf. chapitre 3).

Le second modèle développé sera d'une complexité plus élevé et il sera destiné uniquement à l'identification des paramètres physique du véhicule (cf. chapitre 4). En plus de la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ et la dérive au CdG δ , ce modèle permettra de décrire le mouvement de roulis θ tout en tenant compte des transfert de charges et des braquages induit par les épures cinématiques. A ce modèle de véhicule, nous associerons le polynôme de degré 3 à charge variable comme modèle de pneumatique.

2.3.2. Etat de l'art

La modélisation en dynamique de véhicule n'est pas une science nouvelle. La littérature à ce sujet est très abondante, allant des modèles analytiques très simplifiés comme le modèle bicyclette [Bro06] aux modèles de simulation extrêmement complexes comme le modèle « CarMaker[®] » [IPG05], « CarSim[®] » [Por03], ou même les modèles de type multi-corps articulé « AMESim[®] ». C'est modèles ont la particularité d'être complet et très représentatives de la réalité. Ils permettent de représenter toute les variables d'états du véhicule avec une grande précision. Certains comme le modèle CarMaker peuvent être couplés avec des systèmes de contrôle ou des organes de sécurité active pour effectuer des simulations de validation, ce qui constitue un gain de temps de coût considérable.

Dans le contexte de cette thèse, nous nous intéressons uniquement aux modèles analytiques caractérisés par des équations de mouvement faisant apparaître l'ensemble des variables d'état. Dans [Evr03], une démarche systématique très détaillée de la modélisation

est présentée. L'auteur fait appel aux principes fondamentaux de la dynamique dans l'établissement d'un modèle général. Les équations sont extraites par étapes en prenant soin de considérer tout les aspects de la cinématique et de la dynamique du véhicule. Dans [Gen97], [kie00] et [Bro06] les mêmes résultats sont proposés mais d'une manière plus simplifiés et surtout moins complexe en utilisant le même formalisme. Dans [Bro06], une analyse de stabilité et une étude temps/fréquence sont présentés pour plusieurs modèles à complexité croissante.

Pacejka [Pck06] propose un modèle de dynamique de véhicule obtenu en utilisant le formalisme de Lagrange. Les équations résultantes sont similaires à celles présentées dans [Bro06] ou [Gen97]. On retrouve également le modèle 8 degré de liberté présenté dans [Ray97]. Un nouveau type de modèles appelés « odométriques » est présenté dans [Ven03]. Ces modèles sont issues de la robotique articulaire et font appel au formalisme de *Dinnavit Hartenberg Modifié* (DHM) [Kha99]. D'autres modèles de référence plus spécialisés dans le contrôle actif (ABS, ESP, CGC...etc.) et les systèmes hybrides (suspension CRONE) sont présentés dans [Nou02] [Gay00].

En générale, toutes les références précitées traitent l'analyse de stabilité en dynamique de véhicule. A cela nous ajoutons [Mil95], [And05] pour une analyse non linéaire de stabilité pour les dynamiques latérale et longitudinale.

2.3.3. Représentation des efforts sur le véhicule

Dans le premier chapitre, nous avons utilisé plusieurs représentations pour définir d'une part les différents degrés de liberté des roues et les variables d'état du véhicule, et d'autre part les référentiels attachés à chaque partie de ce véhicule. Ici, nous reprenons, les mêmes schématisations, mais cette fois-ci pour récapituler les actions mécaniques s'exerçant sur la voiture en mouvement (cf. figure 2.13). Cette figure montre notamment les déformations du plan de roue par les épures de trains.

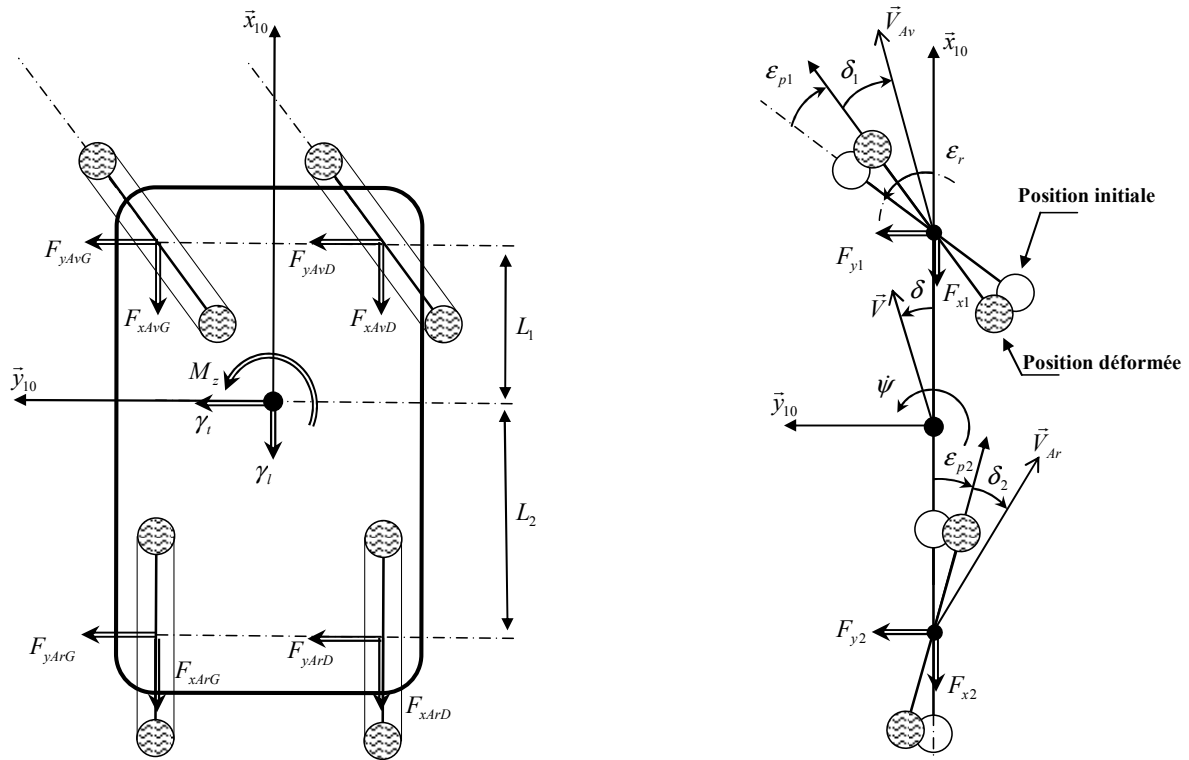


Figure 2.13. (a)-Les efforts agissant sur le véhicule ; (b)-Déformation des plans de roues par les épures de trains (représentation sur le modèle bicyclette).

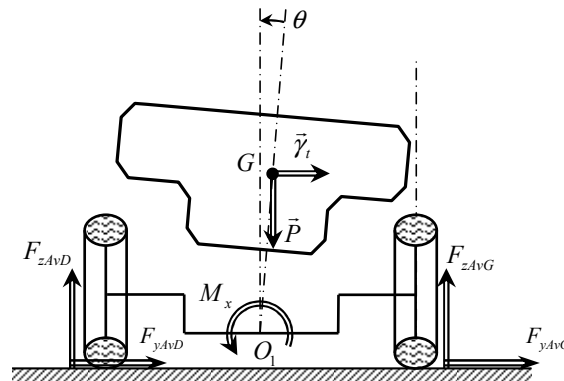


Figure 2.13. (c)-Efforts agissant sur le véhicule.

2.3.4. Elaboration d'un modèle générale

Les équations de la dynamique de véhicule seront issues globalement des principes généraux de la dynamique à savoir, les théorèmes de la somme dynamique des efforts et du moment dynamique. Pour élaborer un modèle générale de la dynamique, aucune particularité de mouvement n'est prise en compte, ce qui signifie que toutes les dynamiques seront considérées. Egalement, aucune restriction n'est donné quant au choix du modèle de comportement des pneumatiques. Celui-ci restant libre, nous pouvons choisir d'utiliser le modèle de coulomb, le modèle brosse ou le modèle de Pacejka. Il faut seulement s'assurer que les états internes du modèle de véhicule sont compatibles avec ceux du modèle de pneu.

Lorsqu'un tel modèle de dynamique de véhicule est élaboré, il reste à l'utilisateur de particulariser les équations pour décrire une dynamique spécifique. Dans notre cas, nous nous

intéresserons qu'aux équations pouvant caractériser la dynamique latérale du véhicule. Pour l'obtention des efforts générés par les pneumatiques, nous ferons appel au modèle de Pacejka ainsi qu'à ses approximations polynomiales. Le développement des calculs présentés ci-après se basera essentiellement sur les repères définis dans §1.4.1.

2.3.4.1. Principe de la somme dynamique

Le théorème de la somme dynamique s'énonce comme suit :

$$\vec{\Sigma}^0 = M \vec{\gamma}_G^0 \quad (2.30)$$

Où : M : est la masse totale du véhicule ;
 $\vec{\Sigma}^0$: la somme de forces extérieures sur le véhicule dans le repère R_0 ;
 $\vec{\gamma}_G^0$: l'accélération du CdG dans le repère R_0 .

A. Expression de $\vec{\gamma}_G^0$

Nous avons, l'accélération au CdG est donnée par rapport à l'accélération au point O_1

$$\vec{\gamma}_G^0 = \vec{\gamma}_{O_1}^0 + \left(\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_1^0 \right) \wedge \overrightarrow{O_1 G} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 G}) \quad (2.31)$$

Dans la suite du calcul, la notation $\vec{\Omega}_1^0$ signifie la rotation du repère R_1 dans R_0 . L'équation 2.30 se décompose en trois termes qui sont les suivants :

- L'accélération $\vec{\gamma}_{O_1}^0$ au point O_1 est donné par :

$$\vec{V}_{O_1}^0 = V \vec{x} \quad (2.32)$$

$$\vec{\gamma}_{O_1}^0 = \frac{d}{dt} \vec{V}_{O_1}^0 = \frac{d^0}{dt} (V \vec{x}) \quad (2.33)$$

$$\vec{\gamma}_{O_1}^0 = \dot{V} \vec{x}_0 + V \frac{d^0 \vec{x}}{dt} \quad (2.34)$$

Avec

$$\frac{d^0 \vec{x}}{dt} = \vec{\Omega}_R^0 \wedge \vec{x} \quad (2.35)$$

$$\vec{\Omega}_R^0 = (\dot{\delta} + \dot{\psi}) \vec{z} \quad (2.36)$$

D'où l'accélération $\vec{\gamma}_{O_1}^0$ au point O_1 exprimé dans le repère R

$$\vec{\gamma}_{O_1}^0 = \left[\frac{dV}{dt} \quad V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) \quad 0 \right]_R^T \quad (2.37)$$

L'expression de cette accélération dans un repère lié au véhicule (R_{10}^* ou R_{10}) est donnée par la transformation à travers la matrice de rotation suivante :

$$\bar{\gamma}_{O_1}^0 = \begin{bmatrix} 1 & -\delta & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} \\ V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Finalement,

$$\bar{\gamma}_{O_1}^0 = \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} - \delta V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) & V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) + \delta \dot{V} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.39)$$

- Le second terme de l'équation 2.31 est donné par :

$$\left(\frac{d}{dt} \bar{\Omega}_1^0 \right) \wedge \overrightarrow{O_1 G} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -h\dot{\theta} \\ h \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} h\dot{\theta}\ddot{\psi} + h\dot{\theta}\dot{\psi} \\ -h\ddot{\theta} \\ -h\theta\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.40)$$

En procédant à une approximation au premier ordre [Evr03], nous obtenons :

$$\left(\frac{d}{dt} \bar{\Omega}_1^0 \right) \wedge \overrightarrow{O_1 G} = \begin{bmatrix} 0 & -h\ddot{\theta} & 0 \end{bmatrix}_{10}^T \quad (2.41)$$

- Le troisième terme de l'équation 2.31 s'écrit :

$$\bar{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \quad (2.42)$$

$$\bar{\Omega}_1^0 \wedge (\bar{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 G}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -h\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} h\dot{\theta}\dot{\psi} \\ 0 \\ -h\dot{\theta}^2 \end{bmatrix}_{10} \quad (2.43)$$

Une approximation au premier ordre donne :

$$\bar{\Omega}_1^0 \wedge (\bar{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{10}^T \quad (2.44)$$

Finalement, l'expression de la somme dynamique est donnée par les équations 2.31, 2.39, 2.41 et 2.44, que nous exprimons comme suit ;

$$\bar{\Sigma}^0 = M \bar{\gamma}_G^0 = M \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} - \delta V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) \\ V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) - h\ddot{\theta} + \delta \frac{dV}{dt} \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \quad (2.45)$$

L'expression 2.45 intègre la masse totale du véhicule et les mouvements de la dérive, du lacet et du roulis qui caractérisent sa dynamique. Cependant, comme nous l'avons vu dans §1.2 et §1.4, le véhicule possède deux parties distinctes qui sont : le châssis qui représente la masse suspendue et l'ensemble des trains roulants qui représente la masse non suspendue. Dans ce cas, il est impératif de différencier les mouvements de chacune des masses, car la masse suspendue est la seule sujette au mouvement de roulis. C'est sur ce point particulier que nous présentons notre désaccord avec la modélisation présentée dans [Bro06] où l'auteur ne différencie pas les dynamiques engendrées sur les deux masses.

En tenant compte des différences entre la masse suspendue et non suspendue, la nouvelle expression de la somme dynamique s'écrit :

$$\bar{\Sigma}^0 = M \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} - \delta V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) \\ V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) + \delta \frac{dV}{dt} \\ 0 \end{bmatrix}_{10} + M_s \begin{bmatrix} 0 \\ -h\ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \quad (2.46)$$

Avec, $M = M_{ns} + M_s$.

M_s et M_{ns} sont les masses suspendue et non suspendues, respectivement. Le résultat de l'équation 2.46 a déjà été présenté et utilisé dans [Sch99].

B. Expression de $\bar{\Sigma}^0$

Les forces externes agissant sur le véhicule sont de natures différentes. Elles proviennent de différentes sources. A ce titre, nous retrouvons :

- les forces de contacts roues-sol sur chaque pneu, il y a : les forces de maintien latéral F_{yij} , les forces de freinage F_{xij} et les forces de contre réaction verticale au sol F_{zij} ;
- les forces de pesanteurs :

$$\vec{P} = [Mg \sin(\alpha_0) \quad 0 \quad Mg \cos(\alpha_0)] \quad (2.47)$$

avec α_0 l'angle d'inclinaison du sol. Dans le cas d'un sol parfaitement horizontal, on obtient :

$$\alpha_0 = 0 \Rightarrow \vec{P} = Mg \vec{z}_0 \quad (2.48)$$

- les actions aérodynamiques de la caisse qui seront négligées dans le cadre de notre étude.

En sommant toutes ces forces, nous obtenons :

$$\vec{\Sigma}^0 = \begin{bmatrix} F_{xAvG} + F_{xAvD} + F_{xArG} + F_{xArD} + Mg \sin(\alpha_0) \\ F_{yAvG} + F_{yAvD} + F_{yArG} + F_{yArD} \\ F_{zAvG} + F_{zAvD} + F_{zArG} + F_{zArD} - Mg \cos(\alpha_0) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Ce qui conduit aux équations de la somme dynamique générale suivantes :

$$\begin{array}{l} M \left[\frac{dV}{dt} - \delta V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) \right] = F_{xAvG} + F_{xAvD} + F_{xArG} + F_{xArD} + Mg \sin(\alpha_0) \\ M \left[V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) + \delta \frac{dV}{dt} \right] - M_s h \ddot{\theta} = F_{yAvG} + F_{yAvD} + F_{yArG} + F_{yArD} \\ Mg \cos(\alpha_0) = F_{zAvG} + F_{zAvD} + F_{zArG} + F_{zArD} \end{array} \quad (2.50)$$

2.3.4.2. Principe du moment dynamique

Le principe du moment dynamique s'énonce comme suit :

$$\sum \vec{M}_{dyn} = \vec{\Gamma}_G^0 \quad (2.51)$$

Avec

$\sum \vec{M}_{dyn}$: La somme des moments externes agissant sur le véhicule;
 $\vec{\Gamma}_G^0$: Le moment dynamique du véhicule s'exerçant au CdG.

A. Expression de $\vec{\Gamma}_G^0$

Le moment dynamique est défini comme étant la dérivée temporelle du moment cinétique :

$$\vec{\Gamma}_G^0 = \frac{d^0}{dt} \vec{\mu}_G^0 \quad (2.52)$$

Le moment dynamique du véhicule est la somme des moments dynamiques des différentes parties. Selon les principes de caractérisation du groupe PSA, on distingue deux corps en mouvement : la masse suspendue comprenant la caisse et le groupe motopropulseur, et la masse non suspendue qui est composé par les roues et les pivots. Dans cette partie, nous cherchons à obtenir le moment dynamique du véhicule complet au point O_1 (cf. figure 1.11).

- **Le moment cinétique de la masse suspendue en G:**

Ici, nous supposons que le centre d'inertie de la masse suspendue est confondu avec le centre d'inertie du véhicule complet. La variation qu'entraînent les roues et les pivots sur la position du CdG est considéré négligeable. Le moment cinétique de la masse suspendue est :

$$\vec{\mu}_G^0 = I_{ms} \vec{\Omega}_1^0 \quad (2.53)$$

Avec I_{ms} la matrice d'inertie de la masse suspendue

$$I_{ms} = \begin{bmatrix} I_{xx}^{ms} & 0 & I_{xz}^{ms} \\ 0 & I_{yy}^{ms} & 0 \\ I_{xz}^{ms} & 0 & I_{zz}^{ms} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.54)$$

Donc,

$$\vec{\mu}_G^0 = \begin{bmatrix} I_{xx}^{ms} \dot{\theta} + I_{xz}^{ms} \dot{\psi} \\ 0 \\ I_{xz}^{ms} \dot{\theta} + I_{zz}^{ms} \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.55)$$

- **Le moment cinétique de la masse non suspendue en G :**

Moment cinétique des roues :

Le moment cinétique des quatre roues s'écrit de la même manière que pour la masse suspendue à savoir :

$$[\vec{\mu}_B^0]_i^{roue} = I_i^{roue} \vec{\Omega}_{R_i}^0 \quad (2.56)$$

Avec I_i^{roue} la matrice d'inertie, identique pour chaque roue.

$$I_i^{roue} = \begin{bmatrix} I_{xx}^{roue} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{roue} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^{roue} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{R_i}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_i \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.57)$$

η_i étant la rotation de la roue « i ».

$$[\vec{\mu}_B^0]_i^{roue} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{yy}^{roue} \eta_i \\ I_{zz}^{roue} \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.58)$$

Puis ramené le total des moments cinétiques des roues en G :

$$\sum_{i=1}^4 [\bar{\mu}_G^0]_i^{roue} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \eta_{ij} \\ \sum_{i=1}^4 (I_{zz}^{roue} + m^{roue} (a_i^2 + b_i^2)) \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.59)$$

avec a_i et b_i représente les coordonnées des centres des roues dans le repère R_1 selon \bar{x}_1 et \bar{y}_1 , respectivement. Leurs valeurs sont données par :

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = L_1 ; \quad b_1 = b_2 = E_1 / 2 \\ a_3 = a_4 = L_2 ; \quad b_3 = b_4 = E_2 / 2 \end{aligned}$$

Moment cinétique des pivots :

En suivant les mêmes étapes que pour les roues, nous parvenons au résultat suivant :

$$\sum_{i=1}^4 [\bar{\mu}_G^0]_i^{pivot} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 (I_{zz}^{pivot} + m^{pivot} (a_i^2 + b_i^2)) \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.60)$$

- **Le moment cinétique du véhicule complet en G :**

Le moment cinétique de l'ensemble en G est donné par la somme des moments cinétiques de chacune des parties du véhicule. Le résultat est le suivant :

$$\bar{\mu}_G^0 = \begin{bmatrix} I_{xx}^{ms} \dot{\theta} + I_{xz}^{ms} \dot{\psi} \\ \sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \eta_{ij} \\ I_{xz}^{ms} \dot{\theta} + I_{zz}^{ms} \dot{\psi} + \sum_{i=1}^4 (I_{zz}^{roue} + m^{roue} (a_i^2 + b_i^2)) \dot{\psi} + \sum_{i=1}^4 (I_{zz}^{pivot} + m^{pivot} (a_i^2 + b_i^2)) \dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.61)$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation 2.61, nous utiliserons dans la suite la notation simplificatrice suivante :

$$I_{xx} = I_{xx}^{ms} \quad (2.62)$$

$$I_{xz} = I_{xz}^{ms} \quad (2.63)$$

$$I_{zz} = I_{zz}^{ms} + \sum_{i=1}^4 (I_{zz}^{roue} + m^{roue} (a_i^2 + b_i^2)) + \sum_{i=1}^4 (I_{zz}^{pivot} + m^{pivot} (a_i^2 + b_i^2)) \quad (2.64)$$

Finalement, nous obtenons l'écriture simplifiée suivante :

$$\bar{\mu}_G^0 = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{\theta} + I_{xz}\dot{\psi} \\ \sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \eta_{ij} \\ I_{xz}\dot{\theta} + I_{zz}\dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.65)$$

- **Le moment dynamique du véhicule complet en G :**

D'après l'équation 2.52, nous avons :

$$\bar{F}_G^0 = \frac{d^0}{dt} \bar{\mu}_G^0 = \frac{d^{10}}{dt} \bar{\mu}_G^0 + \bar{\Omega}_{10}^0 \wedge \bar{\mu}_G^0 \quad (2.66)$$

avec :

$$\bar{\Omega}_{10}^0 \wedge \bar{\mu}_G^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{\theta} + I_{xz}\dot{\psi} \\ \sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \eta_{ij} \\ I_{xz}\dot{\theta} + I_{zz}\dot{\psi} \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} -\sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \eta_{ij} \dot{\psi} \\ I_{xx}\dot{\theta}\dot{\psi} + I_{xz}\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{bmatrix}_{10}$$

$$\frac{d^{10}}{dt} \bar{\mu}_G^0 = \begin{bmatrix} I_{xx}\ddot{\theta} + I_{xz}\ddot{\psi} \\ \sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \dot{\eta}_{ij} \\ I_{xz}\ddot{\theta} + I_{zz}\ddot{\psi} \end{bmatrix}_{10}$$

Ce qui nous donne l'expression du moment dynamique en G :

$$\bar{F}_G^0 = \begin{bmatrix} I_{xx}\ddot{\theta} + I_{xz}\ddot{\psi} - \sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \eta_{ij} \dot{\psi} \\ I_{xx}\dot{\theta}\dot{\psi} + I_{xz}\dot{\psi}^2 + \sum_{ij=1}^4 I_{yy}^{roue} \dot{\eta}_{ij} \\ I_{xz}\ddot{\theta} + I_{zz}\ddot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.67)$$

Pour les exigences courantes de modélisation en dynamique de véhicule, on peut, sans inconvénient, négliger les termes du deuxième ordre $\dot{\psi}^2$ et $\dot{\theta}\dot{\psi}$, ainsi que l'inertie des roues en rotation.

$$\bar{F}_G^0 = \begin{bmatrix} I_{xx}\ddot{\theta} + I_{xz}\ddot{\psi} \\ 0 \\ I_{xz}\ddot{\theta} + I_{zz}\ddot{\psi} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.68)$$

- **Le moment dynamique du véhicule complet en O_1 :**

Il est plus intéressant de modéliser le mouvement de roulis de la caisse D'après la théorie des torseurs [Bro06] et [Evr03], nous avons :

$$\vec{F}_{O_1}^0 = \vec{F}_G^0 + \overrightarrow{O_1G} \wedge \vec{\Sigma}^0 \quad (2.69)$$

avec

$$\overrightarrow{O_1G} \wedge \vec{\Sigma}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -h\theta \\ h \end{bmatrix}_{10} \wedge \begin{bmatrix} M\left(\frac{dV}{dt} - \delta V(\dot{\delta} + \dot{\psi})\right) \\ M\left(V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) + \delta \frac{dV}{dt}\right) - M_s h \ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \quad (2.70)$$

$$\overrightarrow{O_1G} \wedge \vec{\Sigma}^0 \approx \begin{bmatrix} -Mh\left(V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) + \delta \frac{dV}{dt}\right) + M_s h^2 \ddot{\theta} \\ Mh\left(\frac{dV}{dt} - \delta V(\dot{\delta} + \dot{\psi})\right) \\ Mh\theta \frac{dV}{dt} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.71)$$

Au final, nous avons le moment dynamique du véhicule complet exprimé en O_1 par :

$$\vec{F}_{O_1}^0 = \begin{bmatrix} (I_{xx} + M_s h^2) \ddot{\theta} + I_{xz} \ddot{\psi} - Mh\left(V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) + \delta \frac{dV}{dt}\right) \\ Mh\left(\frac{dV}{dt} - \delta V(\dot{\delta} + \dot{\psi})\right) \\ I_{xz} \ddot{\theta} + I_{zz} \ddot{\psi} + Mh\theta \frac{dV}{dt} \end{bmatrix}_{10} \quad (2.72)$$

B. Application du théorème du moment dynamique

Sachant que nous nous n'intéressons qu'à la dynamique latérale du véhicule, le théorème du moment dynamique ne sera appliqué que suivant \vec{x}_{10} et \vec{z}_{10} pour décrire respectivement le mouvement du roulis et du lacet.

- Suivant \vec{x}_{10} :

$$(I_{xx} + M_s h^2) \ddot{\theta} + I_{xz} \ddot{\psi} - Mh\left(V(\dot{\delta} + \dot{\psi}) + \delta \frac{dV}{dt}\right) = M_{\theta_1}(\theta) + M_{\theta_2}(\theta) + M_{\dot{\theta}_1}(\dot{\theta}) + M_{\dot{\theta}_2}(\dot{\theta}) + M_g(\theta) \quad (2.73)$$

Les moments extérieurs agissant sur la caisse en roulis sont :

- Moment antiroulis des ressort est des barres anti-devers à l'axe i : $M_{\theta_i}(\theta) = k_{\theta_i} \theta$;
- Moment d'amortissement à l'axe i : $M_{\dot{\theta}_i}(\dot{\theta}) = A_{\theta_i} \dot{\theta}$;
- Moment dû à l'inclinaison de la masse suspendue en roulis : $M_g(\theta) = M_s g h \sin(\theta) \cos(\alpha_0)$;
avec α_0 l'angle d'inclinaison du sol (nul dans notre cas). Pour des angles de roulis usuels, nous pouvons écrire : $M_g(\theta) = M_s g h \theta$

- Suivant \bar{z}_{10} et en l'absence d'effort longitudinal :

$$I_{xz} \ddot{\theta} + I_{zz} \ddot{\psi} + Mh\theta \frac{dV}{dt} = L_1(F_{yAvG} + F_{yAvD}) - L_2(F_{yArG} + F_{yArD}) \quad (2.74)$$

L'ensemble des équations 2.50, 2.73 et 2.74, constitue la base des modèles de dynamique du véhicule abordés dans cette thèse. Comme nous l'avons énoncé auparavant, la voiture est un système complexe très difficile à modéliser. Au cours du développement des calculs nous avons, à plusieurs fois, fait appel à des hypothèses simplificatrices, ceci peut engendrer une décorrélation par rapport à un vrai véhicule, et cela sans citer les effets non modélisés comme l'aérodynamique et les couplages. Cependant, l'expérience montre que la caractérisation donnée par ces équations est suffisante et très fiables quant à la reconstruction des variables d'états dynamique d'un véhicule. Il est clair, un travail d'identification est nécessaire pour obtenir une corrélation parfaite avec les résultats expérimentaux.

2.3.5. Modèle Lacet-Dérive « LD »

Le modèle Lacet-Dérive est le modèle classique le plus simplifié en dynamique de véhicule destiné à caractériser le comportement dynamique transversale suivant \bar{y}_{10} . Il permet notamment d'étudier l'attitude de véhicule avec seulement deux degrés de liberté qui sont : la dérive au centre de gravité et la vitesse de lacet autour de \bar{z}_{10} . Il est essentiellement basé sur la représentation du modèle bicyclette (cf. §1.4.3, figures 1.14 et 1.15), dont on rappelle les hypothèses simplificatrices ci-dessous.

On suppose que les pneumatiques d'un même essieu :

- supportent la moitié de la charge du train au repos ;
- possèdent les mêmes angles de dérives et de carrossage ;
- génèrent le même effort latéral.

Le modèle Lacet-Dérive que nous utiliserons (il sera noté LD par la suite) possède les caractéristiques suivantes :

- le transfert de charge n'est pas pris en compte ;
- absence du mouvement de roulis. Donc, aucune cinématique des trains ;
- l'élasto-cinématique des trains n'est pas prise en compte ;
- la vitesse de déplacement du véhicule est constante.

Les équations du modèle bicyclette peuvent être extraites directement du modèle générale (cf. équations 2.50, 2.73 et 2.74), et cela en ne tenant compte que de la dérive au CdG et de la

vitesse de Lacet. Sous les conditions précédentes, nous obtenons alors les équations différentielles suivantes :

$$MV(\dot{\delta} + \dot{\psi}) = 2F_{yAv}(\delta_1) + 2F_{yAr}(\delta_2) \quad (2.75)$$

$$I_{zz}\ddot{\psi} = 2L_1F_{yAv}(\delta_1) - 2L_2F_{yAr}(\delta_2) \quad (2.76)$$

Les dérivées à la roue moyenne avant et arrière sont donné par les équations 1.20 et 1.24. pour simplifier la notation, on notera δ au lieu de δ_G .

$$\delta_1 = \delta + \frac{L_1}{V}\dot{\psi} - \varepsilon_r \quad (2.77)$$

$$\delta_2 = \delta - \frac{L_2}{V}\dot{\psi} \quad (2.78)$$

Nous avons utilisé plusieurs variantes de ce modèle dans notre thèse et cela dépend de la formule de l'effort utilisée. Voici les trois différents modèles :

- A. Modèle bicyclette linéaire LD :** dans ce cas l'effort est donné par l'approximation linéaire à charge constante (cf. équation 2.15) ;

$$F_{yi}(\delta_i) = -k_{\delta} \delta_i \quad (2.79)$$

Ce modèle sera utilisé comme une base de comparaison avec le modèle non linéaire polynomial. Il nous permettra de bien visualiser les améliorations apportées lorsqu'on passe vers une description non linéaire plus complète du pneumatique.

- B. Modèle bicyclette non linéaire polynomiale LD-P3 :** dans ce cas l'effort est donné par le polynôme de degré 3 à charge constante (cf. équation 2.76) ;

$$F_{yi}(\delta_i) = -k_{\delta} \delta_i - q_{\delta} \delta_i^3 \quad (2.80)$$

Ce modèle prend en compte plus de non linéarité du pneumatique en comparaison avec le modèle précédent. Il nous permettra par la suite, d'extraire les caractéristiques de la réponse du véhicule. Les méthodes d'analyse non linéaire (cf. chapitre 3) seront appliquées sur ce modèle.

- C. Modèle bicyclette non linéaire LD-PM :** l'effort est exprimé par la formule de Pacejka à charge constante (cf. équation 2.4). Ce modèle prend en compte toute la non linéarité du pneu vis-à-vis de la dérive et sera considéré comme modèle de référence pour la validation des résultats de l'analyse non linéaire du modèle polynomial.

2.3.6. Modèle Lacet-Roulis-Dérive et Transfert de charge « LRDT »

Le modèle Lacet-Roulis-Dérive et Transfert de charge non linéaire utilisé dans notre thèse, qu'on appellera LRDT est un modèle quatre roue qui décrit uniquement la dynamique transversale. Il reprend l'essentiel des phénomènes non modélisés dans le modèle bicyclette LD et permet d'enrichir la représentativité par rapport un véhicule réel. Les caractéristiques du modèle LRDT sont les suivantes :

- Les pneumatiques d'un même train présentent les mêmes dérivées (dans la réalité les dérivées des pneus d'un même essieu sont différentes, d'une part à cause de la pince initiale, et d'autre part à cause des épures élasto-cinématiques lorsqu'elles sont combinées avec le transfert de charge ;
- Il permet de prendre en compte le transfert de charges lors des virages ;
- Il permet de caractériser l'attitude du véhicule en dynamique transversale par la dérive au CdG, la vitesse de Lacet et l'angle de roulis ;
- Il tient compte des braquages induit par la cinématique des trains due au mouvement de roulis (débattement vertical des roues par rapport à la caisse) ;
- La vitesse de déplacement de la voiture est constante ;
- L'angle d'inclinaison du sol est nul sur le modèle générale.

Les équations du modèle LRDT peuvent être extraites directement du modèle générale de la dynamique. Sous les conditions précédentes et à partir des équations 2.50, 2.173 et 2.174, nous obtenons :

Les équations différentielles :

$$MV(\dot{\delta} + \dot{\psi}) - M_s h \ddot{\theta} = F_{yAvG}(\delta_1, F_{zAvG}) + F_{yAvD}(\delta_1, F_{zAvD}) + F_{yArG}(\delta_2, F_{zArG}) + F_{yArD}(\delta_2, F_{zArD}) \quad (2.81)$$

$$(I_{xx} + M_s h^2) \ddot{\theta} + I_{xz} \ddot{\psi} - MhV(\dot{\delta} + \dot{\psi}) = (k_{\theta 1} + k_{\theta 2} + M_s gh)\theta + (A_{\theta 1} + A_{\theta 2})\dot{\theta} \quad (2.82)$$

$$I_{zz} \ddot{\psi} + I_{xz} \ddot{\theta} = L_1(F_{yAvG}(\delta_1, F_{zAvG}) + F_{yAvD}(\delta_1, F_{zAvD})) - L_2(F_{yArG}(\delta_2, F_{zArG}) + F_{yArD}(\delta_2, F_{zArD})) \quad (2.83)$$

Les dérivées :

En tenant compte des braquages induits par la cinématique (cf. §1.5), les dérivées des pneus aux axes avant et arrière sont données par :

$$\delta_1 = \delta + \frac{L_1}{V} \dot{\psi} - (\varepsilon_r + k_{p1} \theta) \quad (2.84)$$

$$\delta_2 = \delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} - (k_{p2} \theta) \quad (2.85)$$

k_{p1} et k_{p2} sont les pentes de prise de pince cinématique $\varepsilon_p(\theta)$ à l'avant et à l'arrière.

Les transferts de charge :

Les transferts de charge ont été calculés dans le chapitre précédent. En combinant les équations 1.52, 1.53 et 1.58, nous obtenons :

$$F_{zAvG} = \frac{1}{2} M_{Av} g - \frac{h_1}{E_1} F_{yAv} - \frac{C_{\theta 1}}{E_1} \theta - \frac{A_{\theta 1}}{E_1} \dot{\theta} \quad (2.86)$$

$$F_{zAvD} = \frac{1}{2} M_{Av} g + \frac{h_1}{E_1} F_{yAv} + \frac{C_{\theta 1}}{E_1} \theta + \frac{A_{\theta 1}}{E_1} \dot{\theta} \quad (2.87)$$

$$F_{zArG} = \frac{1}{2} M_{Ar} g - \frac{h_2}{E_2} F_{yAr} - \frac{C_{\theta 2}}{E_2} \theta - \frac{A_{\theta 2}}{E_2} \dot{\theta} \quad (2.88)$$

$$F_{zArD} = \frac{1}{2} M_{Ar} g + \frac{h_2}{E_2} F_{yAr} + \frac{C_{\theta 2}}{E_2} \theta + \frac{A_{\theta 2}}{E_2} \dot{\theta} \quad (2.89)$$

Arrivé à ce stade, on distingue deux modèles différenciés par la formule de l'effort latéral utilisée :

- A. Modèle non linéaire LRDT-P3 :** dans ce cas l'effort est donné par l'approximation polynomiale à charge variable (cf. équation 2.27 à 2.29).
- B. Modèle non linéaire LRDT-PM :** l'effort latéral est exprimé par la formule de Pacejka à charge variable.

2.3.6.1. Complexité du modèle LRDT et les boucles algébriques

Le modèle LRDT intègre les phénomènes les plus importants observés en dynamique de véhicule. Il permet de caractériser complètement l'attitude du véhicule avec les mouvements de roulis, de lacet et de dérive tout en tenant compte du transfert de charge et de la cinématique des trains. Néanmoins, certains phénomènes n'ont pas été considérés tels que : le carrossage dans l'expression de l'effort latéral, la prise de pince élasto-cinématique et même la pince initiale. Négliger ces aspects ne constitue pas forcément une erreur de modélisation ou un manque de représentativité. En effet, dans [Por03] une étude comparative de 5 modèles avec une complexité croissante a été effectuée. La conclusion est que les modèles les plus élaborés ne donnent pas forcément les meilleurs résultats en termes d'erreur de prédiction. Les modèles plus représentatives sont les moins complexes.

Une des caractéristiques souhaitées pour notre modèle est de garder la même dérive pour les pneumatiques d'un même essieu afin de réduire la complexité. Lorsqu'on injecte le braquage induit par l'élasto-cinématique dans l'expression des dérivées 2.84 et 2.85, on obtient des dérivées différentes sur chaque pneu d'un même essieu. Ceci est vérifié sur l'exemple de la Citroën C6. En se basant sur le tableau 1.1c, l'effort latéral engendre un braquage induit uniquement sur l'essieu arrière. Les dérivées aux pneus arrières s'écrivent alors :

$$\delta_{ArG} = \delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} - k_{p2} \theta - k_{ArG}^{pe} F_{yArG} (\delta_{ArG}, F_{zArG}) \quad (2.90)$$

$$\delta_{ArD} = \delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} - k_{p2} \theta - k_{ArD}^{pe} F_{yArD} (\delta_{ArD}, F_{zArD}) \quad (2.91)$$

Sachant que les efforts F_{yArD} et F_{yArG} ne sont pas égaux à cause du transfert de charge, les dérivées aux pneus arrière seront donc différents. C'est pour cette raison que l'élasto-cinématique est négligé même si dans la pratique, la différence des dérivées peut être assez notable pour certain architecture de train. Une même mécanique peut être observée quant à l'influence de la pince initiale en combinaison avec le transfert de charge.

Concernant l'aspect mathématique du modèle LRDT, on décèle une boucle algébrique qui rend le calcul direct des efforts latéraux trop complexe voir impossible. En effet, l'effort latéral est calculé en fonction de la charge verticale que se soit avec le polynôme de degré 3

ou la formule de Pacejka. Or, d'après les équations précédentes la charge verticale est elle même fonction de l'effort latéral ! Pour résoudre le problème, une boucle itérative convergente reste la meilleure solution. Si l'élasto-cinématique était considéré, une deuxième boucle algébrique serait contenue dans l'expression des dérivées arrières (cf. équation 2.90 et 2.91) car celles-ci sont calculées en fonction des efforts qui sont eux-mêmes fonction des dérivées. La simulation numérique du modèle peut être faite par la méthode de Runge-Kutta 45 qui est facilement implémentable sur Matlab[®].

2.4. Analyse du modèle bicyclette linéaire LD

L'étude de ce modèle est sans doute une étape très importante dans l'analyse de la dynamique de véhicule. D'une part, pour introduire l'analyse classique la plus utilisée dans la littérature [Bro06][Gen97][Kie00][Fen05][Sch99] et d'autre part, pour visualiser l'apport de la prise en compte de la non linéarité du pneumatique lors de l'étude des modèles LD-P3 et LD-PM. Ici, nous présenterons l'essentiel des résultats d'analyse du modèle linéaire.

2.4.1. Fonctions de transfert

Les équations différentielles du modèle LD (cf. 2.75 à 2.76) peuvent être réécrites comme suit :

$$MV(\dot{\delta}(t) + \dot{\psi}(t)) = -2K_{\delta_1} \left(\delta(t) + \frac{L_1}{V} \dot{\psi}(t) - \varepsilon_r(t) \right) - 2K_{\delta_2} \left(\delta(t) - \frac{L_2}{V} \dot{\psi}(t) \right) \quad (2.92)$$

$$I_{zz} \ddot{\psi}(t) = -2L_1 K_{\delta_1} \left(\delta(t) + \frac{L_1}{V} \dot{\psi}(t) - \varepsilon_r(t) \right) + 2L_2 K_{\delta_2} \left(\delta(t) - \frac{L_2}{V} \dot{\psi}(t) \right) \quad (2.93)$$

Pour simplifier l'écriture on pose $k_{\delta} = 2K_{\delta}$. Les équations précédentes peuvent s'écrire également sous une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_{zz} & 0 \\ 0 & MV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi}(t) \\ \dot{\delta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_{\delta_1} L_1^2 + k_{\delta_2} L_2^2}{V} & (k_{\delta_1} L_1 - k_{\delta_2} L_2) \\ \frac{k_{\delta_1} L_1 - k_{\delta_2} L_2}{V} + MV & (k_{\delta_1} + k_{\delta_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\delta_1} L_1 \\ k_{\delta_1} \end{bmatrix} \varepsilon_r(t) \quad (2.94)$$

La linéarité de l'équation 2.94 permet d'utilisation de la transformé de Laplace [Dit79] pour obtenir une fonction de transfert dont le résultat est le suivant :

$$\begin{bmatrix} I_{zz} s + \frac{k_{\delta_1} L_1^2 + k_{\delta_2} L_2^2}{V} & (k_{\delta_1} L_1 - k_{\delta_2} L_2) \\ \frac{k_{\delta_1} L_1 - k_{\delta_2} L_2}{V} + MV & MV s + (k_{\delta_1} + k_{\delta_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\delta_1} L_1 \\ k_{\delta_1} \end{bmatrix} \varepsilon_r(s) \quad (2.95)$$

Cette dernière équation forme un système algébrique linéaire de Kramer. On peut donc facilement calculer les fonctions de transfert pour la vitesse de lacet et la dérive au CdG. Les fonctions de transfert du reste des variables d'état qui sont : l'accélération latérale, la dérive avant et la dérive arrière s'obtiennent comme suit :

$$\gamma_t(t) = V(\dot{\delta}(t) + \dot{\psi}(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_t(s)}{\varepsilon_r(s)} = V \left(\frac{\delta(s)}{\varepsilon_r(s)} s + \frac{\dot{\psi}(s)}{\varepsilon_r(s)} \right) \quad (2.96)$$

$$\delta_1(t) = \delta(t) + \frac{L_1}{V} \dot{\psi}(t) - \varepsilon_r(t) \Rightarrow \frac{\delta_1(s)}{\varepsilon_r(s)} = \frac{\delta(s)}{\varepsilon_r(s)} + \frac{L_1}{V} \frac{\dot{\psi}(s)}{\varepsilon_r(s)} - 1 \quad (2.97)$$

$$\delta_2(t) = \delta(t) - \frac{L_2}{V} \dot{\psi}(t) \Rightarrow \frac{\delta_2(s)}{\varepsilon_r(s)} = \frac{\delta(s)}{\varepsilon_r(s)} - \frac{L_2}{V} \frac{\dot{\psi}(s)}{\varepsilon_r(s)} \quad (2.98)$$

Toutes ces fonctions de transfert peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + n_1 s + n_2 s^2}{1 + \frac{2\eta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (2.99)$$

Les paramètres η et ω_n sont respectivement, l'amortissement et la pulsation naturelle (pulsation propre). Cette écriture de la fonction de transfert facilite l'analyse modale et vibratoire du système du système. Un support théorique et expérimentale complet dans le domaine de l'analyse modale est présenté dans [Mai97] et [Ewi00].

- Le dénominateur est commun à toutes les variables d'état du véhicule, ces coefficients sont exprimés comme suit :

$$2\eta\omega_n = \frac{M(k_{\delta_1}L_1^2 + k_{\delta_2}L_2^2) + I_{zz}(k_{\delta_1} + k_{\delta_2})}{I_{zz}MV} \quad (2.100)$$

$$\omega_n^2 = \frac{MV^2(k_{\delta_2}L_2 - k_{\delta_1}L_1) + L^2k_{\delta_1}k_{\delta_2}}{I_{zz}MV^2} = \frac{k_{\delta_1}k_{\delta_2}L^2}{I_{zz}MV^2} \left(1 + \frac{V^2}{v_c^2}\right) \quad (2.101)$$

$$\text{avec : } v_c^2 = \frac{k_{\delta_1}k_{\delta_2}L^2}{M(k_{\delta_2}L_2 - k_{\delta_1}L_1)} \quad (2.102)$$

- Les coefficients du numérateur de chaque variable d'état sont résumés dans le tableau suivant :

	H_0	n_1	n_2
Vitesse de lacet $\dot{\psi}(t)$	$\frac{1}{L} \frac{V}{1 + \left(\frac{V}{v_c}\right)^2}$	$\frac{MVL_1}{k_{\delta_2}L}$	0
Dérive au CdG $\delta(t)$	$\frac{L_2}{L} \frac{1 - \frac{ML_1}{k_{\delta_2}L_2}V^2}{1 + \left(\frac{V}{v_c}\right)^2}$	$\frac{I_{zz}V}{k_{\delta_2}L_2L - L_1MV^2}$	0
Accél. latérale $\gamma_l(t)$	$\frac{1}{L} \frac{V^2}{1 + \left(\frac{V}{v_c}\right)^2}$	$\frac{L_2}{V}$	$\frac{I_z}{k_{\delta_2}L}$

Dérive avant $\delta_1(t)$	$-\frac{M}{k_{\delta_1}} \frac{L_2}{L^2} \frac{V^2}{1 + \left(\frac{V}{v_c}\right)^2}$	$\frac{ML_2^2 + I_z}{MVL_2}$	$\frac{I_z}{k_{\delta_2} L_2}$
Dérive arrière $\delta_2(t)$	$-\frac{M}{k_{\delta_2}} \frac{L_1}{L^2} \frac{V^2}{1 + \left(\frac{V}{v_c}\right)^2}$	$\frac{ML_1 L_2 - I_z}{MVL_1}$	0

Tableau 2.3. Tableau des paramètres n_1 , n_2 et F_0 du modèle bicyclette.

A. Réponses temporelles

Une fois ces fonctions de transfert établies, l'expression des réponses temporelles devient assez simple à obtenir et cela, en utilisant la transformée de Laplace inverse d'un système de deuxième ordre [Dit79]. La figure 2.14 montre, une simulation de la réponse du véhicule à un échelon volant $\varepsilon_v = 30^\circ$ avec un temps de montée de 0.1s et pour des vitesses $V = 80 \text{ kmh}^{-1}$, 100 kmh^{-1} , 120 kmh^{-1} et 140 kmh^{-1} . Les valeurs des paramètres utilisés fournies par PSA sont données dans le tableau 2.4.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
M	2122.8 kg	L_2	1.7958 m
I_{zz}	3721.3 kg m ²	$k_1 = BCD_1$	$2285.24 \times 10^2 \text{ N rad}^{-1}$
L_1	1.1 m	$k_2 = BCD_2$	$1678.18 \times 10^2 \text{ N rad}^{-1}$

Tableau 2.4. Paramètres utilisés pour la simulation.

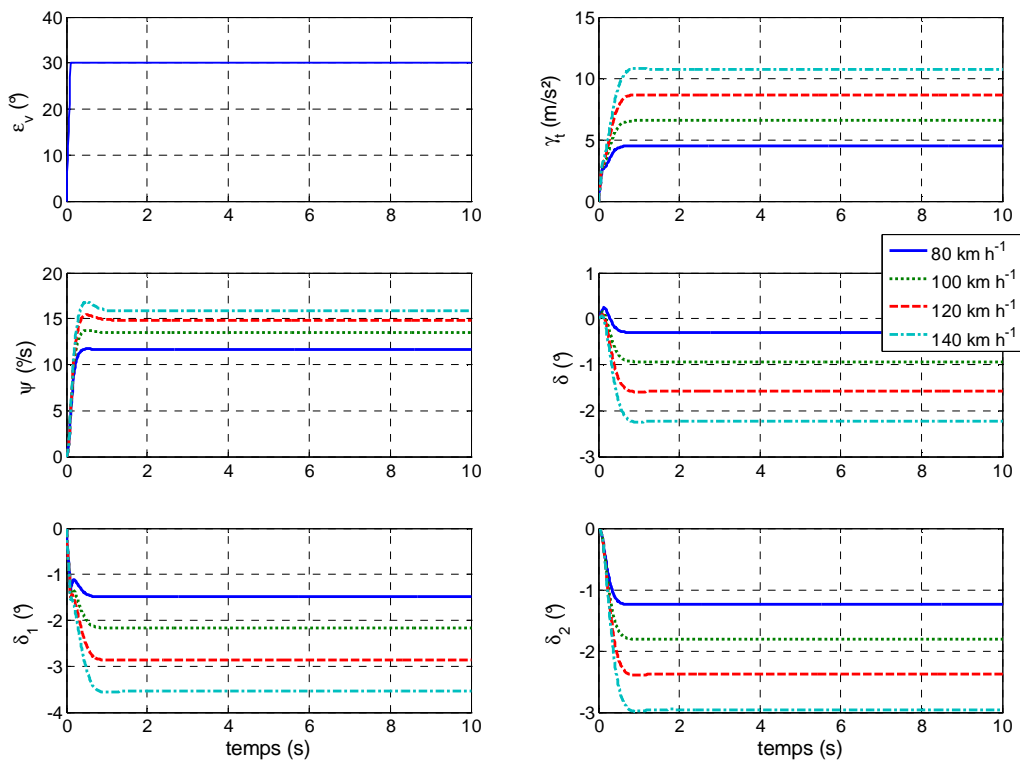


Figure 2.14. Réponses temporelles des différentes variables d'états.

A partir de cette figure, nous pouvons établir les remarques suivantes :

- Il apparaît un pique sur la vitesse de lacet pour les grandes vitesses ce qui reflète une diminution de l'amortissement lorsque la vitesse augmente ;
- Sur les premiers instants, la dérive au CdG change de signe avant de se stabiliser sur une valeur négative ;
- En régime stabilisé, toutes les dérives sont négatives. Dans ce cas, les phases initiales respectives doivent correspondre à π ;
- Comme nous l'avons cité plus en amont, ce modèle ne permet pas de caractériser le comportement du véhicule pour les grandes sollicitations (hautes accélérations latérales). La validité du modèle bicyclette linéaire est limitée à une accélération latérale de 4m/s^2 , ce qui signifie que les réponses données sur la figure 2.14 ne correspondent pas à la réalité physique lorsque l'accélération transversale dépasse $\sim 4\text{m/s}^2$.

B. Réponses fréquentielles

La fonction réponse fréquentielle (FRF) est un moyen efficace d'examiner les fonctions de transfert. Ceci permet de repérer les fréquences de résonances, les atténuations et les déphasages ainsi que leurs dépendances en fonction de la vitesse. Les réponses fréquentielles s'obtiennent directement à partir des fonctions de transfert et cela en mettant :

$$s = j\omega \quad \text{avec : } \omega = 2\pi f$$

L'évolution des FRF en fonction de la vitesse est représentée par un diagramme de Bode sur la figure 2.15.

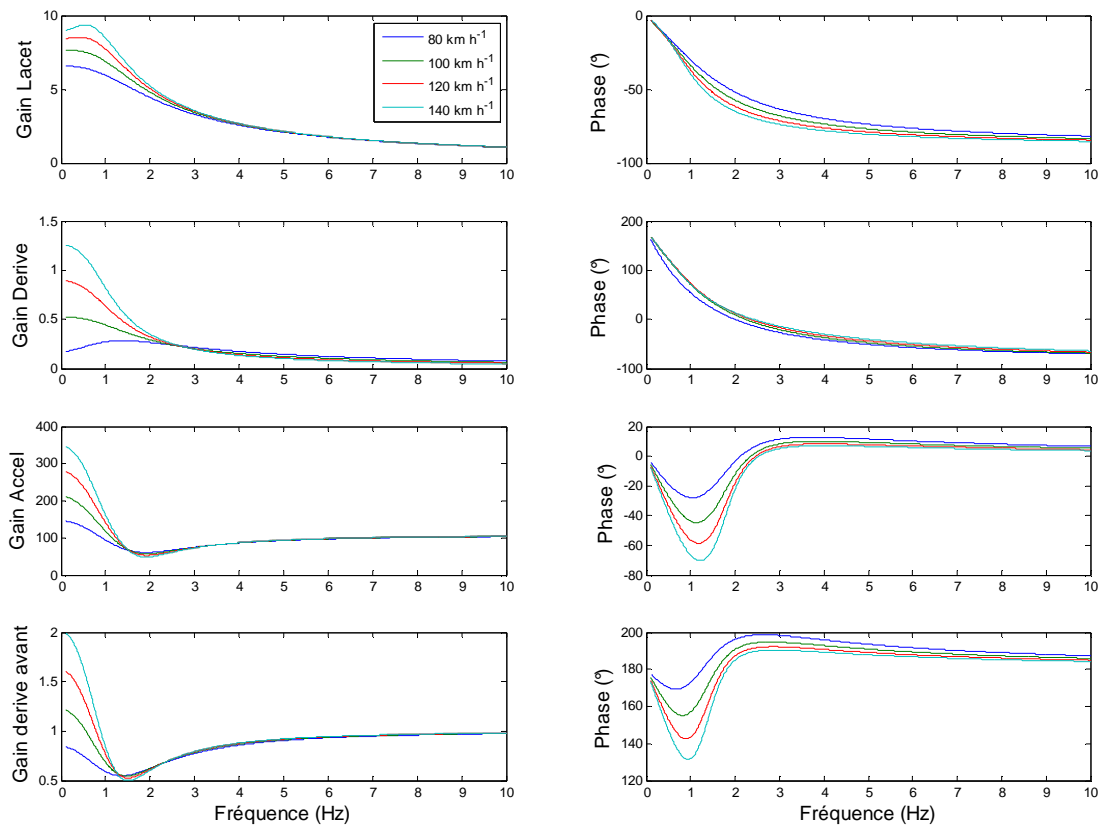


Figure 2.15. Fonctions réponses fréquentielles des différentes variables d'états.

Plusieurs phénomènes peuvent être constatés :

- Il existe une fréquence de résonance pour le lacet et celle-ci est d'autant plus marquée que la vitesse augmente ; on retrouve également la diminution de l'amortissement avec l'augmentation de la vitesse.
- Vers les hautes fréquences le déphasage de la dérive au CdG tend vers $-\frac{\pi}{2}$ et lorsque la fréquence est faible le déphasage tend vers π ce qui explique l'inversion de signe au début du coup de volant (les premiers instants). Pour qu'il n'y ait pas d'inversion de signe il faut que le déphasage reste situé sur l'un des demi cercle trigonométrique contenu entre $\pm \frac{\pi}{2}$, comme dans le cas du reste des variables d'états.
- Il existe une fréquence pour laquelle le gain en lacet est significatif alors que le gain en accélération latérale est très petit. Ceci peut être noté sur véhicule. En réalisant en ligne droite une sinusoïde au volant et en augmentant progressivement la fréquence, on ressent qu'à une certaine fréquence la voiture semble pivoter autour de son axe vertical sans se déplacer latéralement puis en augmentant à nouveau la fréquence, un déplacement latéral apparaît à nouveau [Fen05].

2.4.2. Stabilité du modèle bicyclette linéaire

L'étude de stabilité du véhicule a déjà été introduite dans §1.4.3 en se basant sur le taux de surbraquage comme indicateur de stabilité en régime permanent. Cette étude peut également s'effectuer d'une manière plus classique à partir des fonctions de transferts en analysant les racines du dénominateur et cela en régime dynamique. Dans ce qui suit, nous présenterons les deux méthodes en prenant soin de faire le rapprochement des résultats.

A. Analyse de stabilité en régime permanent par le taux de surbraquage

D'après la définition de l'angle de surbraquage (cf. §1.4.3), nous avons :

$$\varepsilon_s = -(\delta_1 - \delta_2) \quad (2.103)$$

En régime stabilisé en courbe, les variables d'états sont caractérisées par le paramètre H_0 du tableau 2.3. Donc, pour une entrée échelon au volant du type :

$$\varepsilon_r = x_r \Gamma(t) \quad (2.104)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \left(\frac{M}{k_{\delta 1}} \frac{L_2}{L^2} - \frac{M}{k_{\delta 2}} \frac{L_1}{L^2} \right) \frac{V^2}{1 + \left(\frac{V}{v_c} \right)^2} x_r \\ &= \left(\frac{M_{Av}}{k_{\delta 1}} - \frac{M_{Ar}}{k_{\delta 2}} \right) \gamma_t \end{aligned} \quad (2.105)$$

Le taux de surbraquage est donné par :

$$T_{SB} = \left(\frac{d\varepsilon_s(\gamma_t)}{d\gamma_t} \right) = \frac{M_{Av}}{k_{\delta 1}} - \frac{M_{Ar}}{k_{\delta 2}} \quad (2.106)$$

La condition de stabilité basée sur l'indicateur du taux de surbraquage stipule que :

- $T_{SB} > 0$: La voiture est **stable (sousvireuse)** pour n'importe quelle valeur d'accélération transversale ;
- $T_{SB} < 0$: La voiture est **instable (survireuse)** ;
- $T_{SB} = 0$: La voiture est dite neutre et donc **stable**.

Finalement, le véhicule est dit stable uniquement pour :

$$T_{SB} = \frac{M_{Av}}{k_{\delta 1}} - \frac{M_{Ar}}{k_{\delta 2}} \geq 0 \quad (2.107)$$

La figure 2.16 représente l'évolution de l'angle de surbraquage en fonction de l'accélération latérale en régime permanent en courbe. Pour obtenir une telle courbe, on réalise à vitesse constante une succession d'échelon volant à amplitude croissante et on enregistre les variables d'état pour chaque régime établi. Une deuxième solution plus pratique consiste à réaliser, à vitesse constante, une rampe volant lente de manière à atténuer les transitoires. La réponse sera assimilée au régime établi d'une succession d'échelons. Sur cette figure, on voit bien que le modèle linéaire est représentative jusqu'à une valeur d'accélération latérale de 4m/s^2 , ce qui confirme les limitations et les observations apporté dans [kien00].

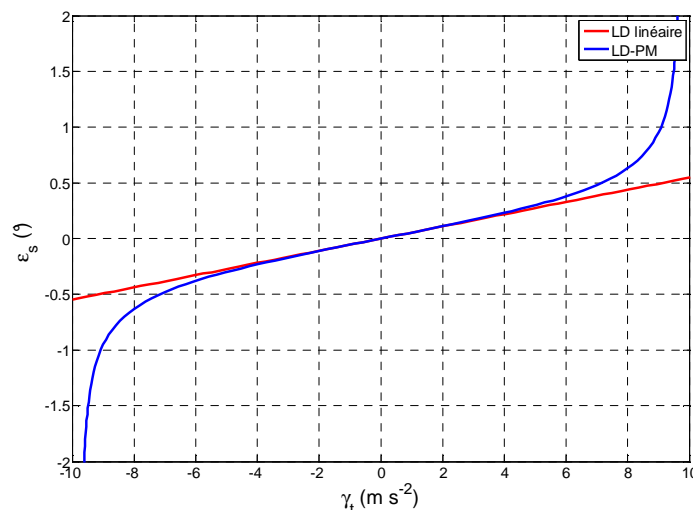


Figure 2.16. Courbe de surbraquage LD et LD-PM.

B. Analyse de stabilité en régime transitoire par les fonctions de transfert

En régime transitoire, la stabilité du modèle bicyclette est pilotée par le signe des racines du dénominateur. Ce dénominateur est commun à toutes les variables d'état et est donné par :

$$\text{den}(s) = 1 + \frac{2\eta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 \quad (2.108)$$

Soit x_1 et x_2 les racines du dénominateur. Pour que le système soit stable, les racines doivent être à partie réelle négative. La stabilité est donc assurée lorsque la somme des racines est négative et le produit des racines est positif. Or on sait que :

$$x_1 + x_2 = -2\eta\omega_n$$

$$x_1 \times x_2 = \omega_n^2$$

L'application analytique donne les résultats suivants :

- **Condition 1 :**

$$x_1 + x_2 = -\frac{M(k_{\delta_1}L_1^2 + k_{\delta_2}L_2^2) + I_z(k_{\delta_1} + k_{\delta_2})}{I_z MV} < 0 \quad (\text{toujours négatif})$$

Si les racines sont complexes, elles seront forcément conjuguées à parties réelles négatives. La première condition est donc suffisante. Si les racines sont réelles, la deuxième condition devient nécessaire pour assurer la stabilité.

- **Condition 2 :**

$$x_1 \times x_2 = \frac{MV^2(k_{\delta_2}L_2 - k_{\delta_1}L_1) + L^2k_{\delta_1}k_{\delta_2}}{I_z MV^2}$$

Deux cas de figure sont à analyser :

1. $k_{\delta_2}L_2 - k_{\delta_1}L_1 \geq 0$: le produit des racines est positif, donc le véhicule est stable. On retrouve le même résultat donné par le taux de surbraquage.
2. $k_{\delta_2}L_2 - k_{\delta_1}L_1 < 0$: le véhicule est survireur mais le produit des racines reste positif uniquement si la vitesse du véhicule ne dépasse pas une **vitesse critique** ($V < v_c$) donné par :

$$v_c = \sqrt{\frac{k_{\delta_1}k_{\delta_2}L^2}{M|k_{\delta_2}L_2 - k_{\delta_1}L_1|}} \quad (2.109)$$

Un véhicule survireur est donc stable jusqu'à sa **vitesse critique** et instable au-delà de cette vitesse. L'expression 2.102 prend alors un vrai sens physique.

Pour une voiture sous-vireuse (stable), la vitesse v_c est appelée **vitesse caractéristique** et prend une signification physique différente de celle de la vitesse critique [Fen05]. En effet,

lorsque la vitesse d'un véhicule sous vireur se situe autour de cette vitesse caractéristique, le gain en vitesse de lacet passe par un maximum. Pour un véhicule réel, les mesures permettent de situer cette vitesse autour de 25 m/s. La vitesse calculée par la formule 2.109 ne donne pas forcément une valeur proche de la réalité. L'écart observé est due aux dynamiques non modélisés dans le modèle LD. La même observation concerne le taux de surbraquage qui ne correspond pas à la réalité lorsqu'il est calculé avec la relation 2.107. Dans [Fer02], on peut retrouver la formule complète donnant le taux de surbraquage avec tous les termes qui y participe (12 termes qui proviennent des caractéristiques des pneus et des trains). Une partie de ces termes est introduite dans le modèle LRDT à travers la cinématique des trains et les transferts de charges.

2.5. Conclusion

Dans ce chapitre consacré à la modélisation, nous avons introduit tous les aspects mathématiques nécessaires pour établir un modèle de dynamique latérale du véhicule. Nous avons abordé trois différentes parties, organisées dans un ordre logique. La première partie concerne la modélisation de comportement du pneumatique où nous avons présenté en détail le modèle de Pacejka quasi-statique. Nous avons étudié l'influence des macro-coefficients sur l'allure de la courbe d'effort et leurs dépendances à la charge verticale et au carrossage.

A l'issue de l'étude du pneumatique, deux approximations polynomiales ont été établies. La première approximation basée sur un polynôme de degré 3 permet d'approximer l'évolution de l'effort latéral pour une gamme de dérive allant jusqu'à 6° à charge statique. Les coefficients de ce polynôme sont constants et sont calculés en fonction de la charge au repos du pneu. La seconde approximation tient compte de la variation de charge sur le pneu causée par le transfert de charge en virage. L'effort est caractérisé par un polynôme de degré 3 en dérive et dont chaque coefficient est également un polynôme de degré 3 en la charge.

Dans la seconde partie, nous avons établi les équations nécessaires à l'étude de la dynamique latérale du véhicule et qui permettent de faire le lien entre les différentes variables d'état. Les équations sont issues des principes fondamentaux de la dynamique mais comme démontré dans [Pck06] les mêmes résultats peuvent être obtenus par le théorème de Lagrange. Plusieurs variantes de modèles de dynamiques latérales ont été présentées. Ils se différencient les uns des autres par le nombre de variables d'état utilisés et le modèle de pneumatique adopté. L'ensemble des modèles résultants sont résumés dans le tableau 2.5.

Avant de clore le chapitre, il était intéressant d'introduire les résultats classiques donnés par le modèle bicyclette linéaire. Une étude des fonctions de transfert a été effectuée, ainsi qu'une analyse de stabilité d'un côté en analysant les pôles des fonctions de transfert et d'un autre côté par le calcul du taux de surbraquage. Cette analyse a permis de faire le rapprochement entre les deux méthodes et d'introduire les notions de vitesse caractéristique et de vitesse critique. L'analyse du modèle bicyclette linéaire a permis de situer les limites de son applicabilité. Par la suite, cette analyse permettra de mettre en contraste les améliorations de représentativité qui seront apportées lorsqu'on considère plus de non linéarité dans le fonctionnement du pneumatique, comme c'est le cas pour les modèle LD-P3 et LRDT-P3.

Il est bien évidemment impossible de représenter le modèle LD-P3 par de simples fonctions de transfert à cause de la non-linéarité de sa structure. Retrouver une solution analytique aux équations différentielles du modèle LD-P3 devient complexe. Sachant qu'une résolution directe n'est pas évidente, il reste toujours possible d'analyser ce modèle par d'autres

méthodes spécialisées dans l'étude des systèmes non linéaires. Les différentes approches abordées seront présentés dans le prochain chapitre.

Désignation	Variables d'état représentés	modèle de pneu	Caractéristiques
LD	$\delta, \delta_1, \delta_2$ et ψ	effort linéaire	<ul style="list-style-type: none"> • Très simple à analyser • Très limité en représentativité
LD-P3		Polynôme d°3 à F_z constant	<ul style="list-style-type: none"> • Modèle non linéaire simple • Représente efficacement les débuts de saturation des pneumatiques
LD-PM		Modèle de Pacejka à F_z constant	<ul style="list-style-type: none"> • Modèle fortement non linéaire • Représente la réalité du fonctionnement des pneumatiques
LRDT-P3	$\delta, \delta_1, \delta_2, \theta, \psi$, transfert de charge et braquage induit par la cinématique.	Polynôme d°3 à F_z variable	<ul style="list-style-type: none"> • Représente l'ensemble des variables d'attitude d'un véhicule • Complexe à analyser
LRDT-PM		Modèle de Pacejka à F_z variable	<ul style="list-style-type: none"> • Représente l'ensemble des variables d'attitude d'un véhicule • Etude analytique quasi-impossible • Idéale pour la résolution numérique

Tableau 2.5. *Résumé des modèles obtenues.*

CHAPITRE 3.

METHODES D'ANALYSE NON LINEAIRE

3.1. Introduction	111
3.2. Contexte de l'étude et état de l'art	111
3.3. Non linéarités structurées	115
3.3.1. Impact fréquentiel	117
3.3.2. Impact temporel	123
3.4. Détection des dynamiques non linéaires	126
3.4.1. Présentation de la fonction de cohérence	127
3.4.2. Application de la fonction de cohérence	129
3.5. Méthode d'équilibrage harmonique	131
3.5.1. Présentation de la méthode	132
3.5.2. Technique de résolution	139
3.5.3. Convergence vers une solution globale	141
3.5.4. Application de la méthode d'équilibrage harmonique au modèle LD-P3	142
3.6. Méthodes de Krylov-Bogoliubov pour les régimes transitoires	155
3.6.1. Présentation	156
3.6.2. Mise en forme des équations	158
3.6.3. Application de la méthode KB au modèle LD-P3	159
3.7. Méthodes des séries de Volterra	165
3.7.1. Présentation de la base théorique	165
3.7.2. Réponses des séries de Volterra à des entrées spécifiques	169
3.7.3. Calcul des noyaux de Volterra	172
3.7.4. Analyse fréquentiel	175
3.7.5. Analyse temporelle	178
3.7.6. Application de la méthode des séries de Volterra au modèle LD-P3	182
3.8. Conclusion	209

3.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établie les équations de différents modèles de dynamique latérale de véhicule qui se différencient entre eux par leurs degrés de complexité et par le type de modélisation de l'effort de pneumatique. Parmi ces représentations, se distingue le modèle LD-P3 car il peut décrire la dynamique latérale du véhicule à travers seulement deux variables d'état représentant la dérive au CdG et la vitesse de lacet en utilisant une forme polynomiale pour l'effort latéral du pneu. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse mathématique des réponses de ce modèle pour des excitations d'entrée au volant arbitraires. A travers cette analyse, nous souhaitons d'une part, quantifier le gain en termes de représentativité qu'on obtient en comparaison au modèle bicyclette linéaire étudié dans §2.4. D'autre part, nous cherchons à **extraire les caractéristiques de la réponse du modèle en fonction des paramètres organiques du véhicule.**

Ce chapitre englobe le principal travail de recherche réalisé dans le cadre de la thèse pour la partie « analyse non linéaire ». Avant d'introduire la partie théorique, il est primordial de situer notre besoin dans le contexte de la problématique qui stipule en résumé la recherche d'expression analytique de la réponse. La présentation du contexte générale va nous permettre de justifier notre choix sur les méthodes d'analyse non linéaire qui seront utilisées pour l'étude du modèle LD-P3. Le reste du chapitre sera constitué de deux parties. Une première partie qui permettra de décrire en général l'effet des non linéarités structurées sur la réponse d'un système. Ensuite, nous présenterons quelques méthodes de détection de processus non linéaire d'un système à travers ces entrées/sorties. Une deuxième partie sera consacrée à la présentation des méthodes retenues pour l'analyse non linéaire du modèle LD-P3. A la fin de chaque présentation théorique, nous discuterons des résultats obtenus après l'application des ces méthodes sur l'analyse du modèle LD-P3.

3.2. Contexte de l'étude et état de l'art

L'étude de la réponse de ce modèle ne constitue pas une difficulté en soit, dès lors qu'une telle réponse est facilement construite en utilisant des méthodes d'analyse et de simulation numérique. La difficulté liée à ce modèle est d'établir une réponse analytique qui fait intervenir l'ensemble des paramètres physiques apparaissant dans les équations du modèle. En effet, l'obtention directe d'une solution analytique à des équations différentielles non linéaires peut s'avérer très complexe et parfois inexistante. Comme nous venons de l'explicitier, l'analyse peut se dérouler suivant deux axes, on retrouve :

- L'étude purement quantitative de la réponse du système induisant l'utilisation de méthodes de résolution numérique [Sha94][Fer98]. Actuellement, il existe un grand nombre de méthodes qui s'adaptent au besoin en termes de précision et à la classe d'équations différentielles manipulées. Parmi les algorithmes les plus utilisés nous retrouvons les méthodes suivantes :
 - Méthode de Dormand-Prince (Runge-Kutta (4,5)) ;
 - Méthode de Bogacki-Shampine(Runge-Kutta(2,3)) ;
 - Méthode d'Adams-Bashforth ;
 - Méthode de différentiation numérique.

La méthode choisie devrait assurer la convergence et permettre à l'utilisateur d'obtenir la réponse aux instants souhaités pour n'importe quelle entrée échantillonnée. Ces

algorithmes sont tous implémentés sur un outil de calcul numérique comme Matlab[®], Scilab[®],... etc. L'approfondissement dans les méthodes d'intégration numérique ne fait pas partie de l'objectif de la thèse, nous nous contenterons d'utiliser ces méthodes et plus précisément Runge-Kutta (4,5) lorsqu'il y a besoin de réaliser des simulations du modèle.

- L'étude analytique ou qualitative qui permet d'obtenir la réponse du modèle à partir des équations de mouvement qui le caractérise (notamment, des équations différentielles). Une telle réponse est souvent donnée par une formule mathématique qui contient explicitement les paramètres présents dans les équations de mouvement. Généralement ce type d'analyse est appelée « paramétrique ».

Pour trouver une solution à notre problématique nous serons tout simplement amenés à réaliser une étude analytique qualitative des équations de mouvement. La première condition stipule donc que la méthode choisie doit être paramétrique (faisant intervenir les paramètres de l'équation différentielle).

Il est bien connu qu'analyser des équations différentielles n'est pas une tâche simple. Il existe dans la littérature une multitude de théorie adaptée aux systèmes non linéaires [Mar04][Wor01][Sas99]. Il y en a celles spécialisées dans l'étude de stabilité (par exemple la théorie de Lyapounov [Vid02]), d'autres pour la modélisation et l'identification ou même tout simplement pour trouver une solution à un système d'équations différentielles non linéaires. Mais la question est : « est ce que nous avons vraiment besoin d'une théorie pour les systèmes non linéaire ? ». Cette question n'est pas naïve et la réponse n'est pas plus évidente. Il faut retenir en premier qu'un système non linéaire est capable de produire des comportements divers et complexes et il diffère d'un système linéaire en deux points :

- Il existe toujours une solution exacte pour un système linéaire dès lors qu'il existe toujours une représentation d'état équivalente (la solution s'obtient sous la forme fréquentielle par la transformé de Laplace ou fonction de transfert et sous la forme temporelle par l'utilisation de la méthode de la matrice exponentielle). Ceci n'est bien sûr pas le cas d'un système non linéaire.
- L'analyse mathématique d'un système non linéaire implique l'utilisation d'outils plus avancés et généralement plus complexes. L'existence de la solution dépend fortement du type d'excitation d'entrée et du type de non linéarité dans le modèle.

Prenons l'équation non linéaire générale suivante :

$$\dot{y} = f(y, x, t) \quad y(0) = y_0 \quad (3.1)$$

Où $y \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $x \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur d'entrées, t est la variable temps, y_0 vecteur d'état initial et $f(\cdot)$ est une fonction non linéaire. Par définition :

- Lorsque $f(\cdot)$ est indépendante de t ($f(y, x, t) = f(y, x)$), le système est appelé invariant.
- Lorsque $f(\cdot)$ est indépendante de x et t on dit que le système est invariant et non forcé.

Si l'équation (3.1) est affine en y et x pour chaque instant t , on souhaite que l'équation 3.1 possède pour chaque entrée x :

1. Au moins une solution formée d'un ensemble de fonctions finies et convergentes (existence de la solution) ;
2. Une solution exacte formée d'un ensemble de fonctions finies et convergentes (solution unique) ;
3. Une solution exacte pour $t \in [0, \infty[$ (extension de la solution jusqu'à $t = \infty$).

Malheureusement, en considérant l'équation (3.1) en toute sa généralité, aucune des trois précédente propositions n'est vrai pour les systèmes non linéaires. Ceci peut se vérifier en considérant les exemples suivants :

Exemple 1 : Non existence de la solution

Soit l'équation

$$\dot{x} = -\text{sign}(x), \quad x(0) = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{Avec } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, Il n'existe aucune fonction continuellement dérivable pouvant être considéré comme solution satisfaisante pour l'équation (3.2).

Exemple 2 : Non unicité de la solution :

Soit l'équation

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0 \quad (3.3)$$

On peu facilement vérifier que la famille des fonctions décrite par :

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= (t - \alpha)^3, & t &\geq \alpha \\ x_\alpha(t) &= 0, & t &< \alpha \end{aligned}$$

On constitue une solution générale de l'équation différentielle et cela pour n'importe quelle valeur de α . Le nombre de solutions est infini.

Exemple 3 : Non pérennité de la solution dans le temps :

Soit l'équation

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0 \quad (3.4)$$

La solution est donné par $x(t) = \tan(t)$, ce qui signifie qu'il n'y a aucune solution en dehors de $[0, \pi/2[$.

Dans la plupart des cas, nous nous contentons de chercher une solution approchée soit parce qu'il est difficile de trouver une solution exacte, soit que cette solution exacte est difficile à

exploiter. La non existence de la solution peut être surmonté en ajoutant des conditions d'existence au problème.

Pendant ce travail de recherche, nous avons constaté qu'il existe très peu de bibliographie traitant de la dynamique non linéaire du véhicule de manière analytique. La plupart des auteurs ont concentré leurs efforts dans la modélisation [Kie00][Bro06][Gen97] ou l'identification [Rip06][Sch99]. L'analyse linéaire reste prédominante dans la littérature car elle est généralement suffisante pour étudier une large plage de fonctionnement en dynamique de véhicule (comme présenté dans §2.4). Cependant, les solutions issues de méthodes d'intégration numérique reste privilégiées pour analyser les effets de saturations et de non linéarité des systèmes LAS et leurs impacts sur la dynamique de véhicule [Pac06][Mil95]. Dans [Pha85], une modélisation du comportement non linéaire en dynamique de véhicule est introduite. L'analyse paramétrique est seulement partielle afin d'expliquer les phénomènes non linéaires mais la recherche de la solution se base essentiellement sur une approximation par les différences finies.

Chez PSA, [Per04] une approche en multi-modèle est proposée dans le but de caractériser le comportement du véhicule dans toute sa plage de fonctionnement (pour toutes les accélérations latérales possibles γ_i). Le multi-modèle proposé est constitué de 3 modèles linéaires. Chaque modèle linéaire est identifié pour une gamme d'excitation spécifique à savoir les gammes d'accélérations transversales $0 m/s^2 < \gamma_i < 5 m/s^2$, $5 m/s^2 < \gamma_i < 8 m/s^2$ et $\gamma_i > 8 m/s^2$. La sortie du multi-modèle est obtenue par une interpolation des réponses des trois modèles linéaires. Cette interpolation est pilotée par des paramètres de pondérations qui sont réinitialisés à travers une estimation instantanée de la valeur d'accélération transversale. Cette méthode a été validée et utilisée avec succès pour prédire les réponses pour différents niveaux d'excitation. Malheureusement, la réponse ne peut être liée aux paramètres du multi-modèle de manière analytique car elle est issue d'une interpolation.

Afin d'aboutir à notre objectif, plusieurs méthodes d'analyse non linéaire ont été examinées. Parmi-elles nous avons retenues trois méthodes qui répondent à nos exigences à savoir :

- ✓ La méthode d'équilibrage harmonique (ou méthode des fonctions descriptives) ;
- ✓ La méthode de Krylov-Bogoliubov ;
- ✓ La méthode des séries de Volterra.

La méthode de l'équilibrage harmonique est une méthode mathématique permettant l'analyse des réponses en régime permanent des systèmes non linéaires sous excitation sinusoïdale. Cette méthode est très utilisée dans les systèmes vibratoires pour étudier la fonction réponse fréquentielle (FRF) [Sil69][Lin90]. Dans la littérature il a été montré que la réponse des systèmes non linéaires à une entrée sinusoïdale provoque deux phénomènes. D'une part, en plus de la fréquence fondamentale (fréquence d'excitation), le spectre fréquentielle de la réponse contient plusieurs harmoniques à des fréquences multiples du fondamentale. D'autre part, la fonction réponse fréquentielle du fondamentale est directement dépendante de l'amplitude d'excitation et tend à générer le phénomène de distorsion harmonique [Fer98][Hre04]. La méthode d'équilibrage harmonique permet de calculer la FRF analytiquement et d'investiguer sa dépendance par rapport aux amplitudes d'excitation et donc l'évolution des paramètres modaux (fréquence propre et amortissement).

La méthode d'équilibrage harmonique est très bien adaptée pour analyser les réponses fréquentielles mais uniquement en régime permanent. Elle ne donne aucune indication sur le régime transitoire lorsqu'une excitation sinusoïdale est utilisée. La méthode d'approximation de Krylov-Bogoliubov (KB) permet d'étudier ces régimes transitoires de manière analytique. Comme nous le verrons dans §3.6, l'amplitude et la phase de la réponse seront calculés en fonction du temps et seront également directement liées au paramètres organiques du modèle. La littérature est assez abondante au sujet de la méthode KB. Pour les bases théoriques on peut se référer à [Lan04][Sil69][Lan00]. On retrouve également des applications récentes dans [Bou04].

Les deux précédentes méthodes servent à décrire la réponse d'un système lorsqu'il y a des oscillations soutenues (autonome ou forcée par une excitation extérieure). Cependant, elles ne sont pas d'une grande utilité lorsque l'entrée $x(t)$ est arbitraire. La solution à ce problème est la représentation en séries de Volterra [Vol59][Boy84]. Les séries de Volterra apportent un moyen direct et un chemin efficace pour analyser une large classe des systèmes non linéaires. Les réponses du système sont décrites par une somme infinie de plusieurs degrés de contribution non linéaire en utilisant une série de fonctions d'ordre élevé. Cette série représente une extension de la fonction de transfert pour les systèmes non linéaire. Voir [She80][Wor01] pour l'ensemble de la théorie des séries de Volterra et [Caf97][Mar01][Kef05] pour des applications récentes..

Bien évidemment, il existe dans la littérature une multitude de techniques d'analyse non linéaire spécifiques pour des systèmes bien spécifiques [Sas99][Mar04][Vid02]. Cependant leur utilité a été jugée insuffisante ou inadéquate dans le cadre de notre travail. Nous pouvons citer par exemple la méthode de la variation lente de l'amplitude et de la phase (Méthode de Van der Pol) [Van27], la méthode des approximations successives [Lan00] ou la méthode de la transformé d'Hilbert [Fel94], qui est très utilisée pour l'analyse modale des systèmes vibratoires non linéaires lorsqu'il est question de manipuler des mesures entrées/sorties.

3.3. Non linéarités structurées

Une non linéarité structurée est une non linéarité dont l'effet sur un système dynamique est complètement caractérisé par une fonction mathématique. Les types de non linéarité les plus rencontrés dans les systèmes dynamiques sont ceux dues aux rigidités et amortissements polynomiaux, frottements et effets de saturation [Fer98][Wor01]. Ces non linéarités ont des impacts sur la réponse du système lorsqu'elles sont suffisamment excitées. Dans ce qui suit, nous allons inspecter ces effets sur la réponse du modèle LD-P3 dont on rappelle les équations de mouvement (issues de §2.3.5) :

$$MV(\dot{\delta} + \dot{\psi}) = 2F_{yAv}(\delta_1) + 2F_{yAr}(\delta_2) \quad (3.5)$$

$$I_{zz}\ddot{\psi} = 2L_1F_{yAv}(\delta_1) - 2L_2F_{yAr}(\delta_2) \quad (3.6)$$

L'expression des dérivées est donnée par :

$$\delta_1 = \delta + \frac{L_1}{V}\dot{\psi} - \varepsilon_r \quad (3.7)$$

$$\delta_2 = \delta - \frac{L_2}{V}\dot{\psi} \quad (3.8)$$

L'effort latéral s'exprime par :

$$F_{yi}(\delta_i) = -k_{\delta} \delta_i - q_{\delta} \delta_i^3 \quad (3.9)$$

En constate bien que la non linéarité provient principalement de l'effort au pneumatique. Cette non linéarité est de type polynomial cubique. Les équations du modèle 3.5 et 3.6 peuvent s'écrire de deux manières différentes selon le choix des variables d'états à utiliser.

- La première forme est celle utilisant la vitesse de lacet $\dot{\psi}(t)$ et la dérive au CdG $\delta(t)$ comme variables d'états. En substituant les équations 3.7 et 3.8 dans l'équation de l'effort 3.9 et en remplaçant les résultats dans les équations de mouvement 3.5 et 3.6 on obtient :

$$\begin{aligned} MV(\dot{\delta} + \dot{\psi}) = & -K_{\delta 1} \left(\delta + \frac{L_1}{V} \dot{\psi} - \varepsilon_r \right) - Q_{\delta 1} \left(\delta + \frac{L_1}{V} \dot{\psi} - \varepsilon_r \right)^3 \\ & - K_{\delta 2} \left(\delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} \right) - Q_{\delta 2} \left(\delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} \right)^3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} I_{zz} \ddot{\psi} = & -L_1 \left[K_{\delta 1} \left(\delta + \frac{L_1}{V} \dot{\psi} - \varepsilon_r \right) + Q_{\delta 1} \left(\delta + \frac{L_1}{V} \dot{\psi} - \varepsilon_r \right)^3 \right] \\ & + L_2 \left[K_{\delta 2} \left(\delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} \right) + Q_{\delta 2} \left(\delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Avec, $K_{\delta} = 2k_{\delta}$ et $Q_{\delta} = 2q_{\delta}$. L'angle de braquage roue $\varepsilon_r = \varepsilon_v/d$

- La deuxième forme des équations de mouvement s'obtient en choisissant l'utilisation des dérivées avant et arrière. A partir 3.7 et 3.8, on obtient l'expression de la vitesse de lacet et de la dérive au CdG en fonction des dérivées avant et arrière ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = (\delta_1 - \delta_2 + \varepsilon_r) \frac{V}{L} \\ \delta = \delta_2 + \frac{L_2}{L} (\delta_1 - \delta_2 + \varepsilon_r) \end{cases} \quad (3.12)$$

En substituant cette dernière expression dans les équations de mouvement 3.5 et 3.6, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} & \frac{MVL_1}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} & -\frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} + K_{\delta 1} & -\frac{MV^2}{L} + K_{\delta 2} \\ L_1 K_{\delta 1} & -L_2 K_{\delta 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{\delta 1} & Q_{\delta 2} \\ L_1 Q_{\delta 1} & -L_2 Q_{\delta 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_2^3 \end{bmatrix} \\
 = - \begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} \\ L \end{bmatrix} \dot{\varepsilon}_r - \begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon_r
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

ou sous une forme plus simplifiée,

$$A \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_2^3 \end{bmatrix} = D \dot{\varepsilon}_r + E \varepsilon_r \tag{3.14}$$

Les deux différents choix des variables d'état forment en réalité le même modèle, mais il est écrit différemment. Cependant, la deuxième forme est nettement plus pratique lorsqu'il s'agit d'effectuer des calculs analytiques car la non linéarité est très localisée dans les équations contrairement à la première forme. Dans ce qui suit nous allons étudier l'impact des ces non linéarités dans le domaine fréquentielles et temporelles.

3.3.1. Impact fréquentiel

L'excitation sinusoïdale constitue l'une des entrées les plus performantes pour rendre un système dynamique vivide. Elle permet notamment d'inspecter l'existence des fréquences de résonance, d'antirésonance ainsi que de possible harmonique multiple de la fréquence fondamental comme il est généralement le cas pour la plupart des systèmes non linéaires [Ewi00]. En plus de l'inspection des harmoniques d'ordres élevés, nous allons investiguer l'apparition des distorsions harmoniques de la fonction réponse fréquentielle.

a- génération des harmoniques

Lorsque le modèle 3.13 est excité par l'entrée sinusoïdale d'amplitude ξ et de fréquence ω qui s'écrit :

$$\varepsilon_r = \xi \sin(\omega t) \tag{3.15}$$

La solution la plus plausible sous cette entrée est à priori une réponse sinusoïdale déphasée ayant la même fréquence d'excitation ω , à savoir :

$$\delta_1(t) = \Delta_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \tag{3.16}$$

$$\delta_2(t) = \Delta_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \tag{3.17}$$

Avant de rapporter 3.16 et 3.17 dans 3.13, nous devons d'abord évaluer l'expression du terme cubique en dérivées. Le développement en utilisant les règles de calcul trigonométrique donne:

$$\delta_i^3(t) = \Delta_i^3 \sin^3(\omega t + \varphi_i) = \Delta_i^3 \left(\frac{3}{4} \sin(\omega t + \varphi_i) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\varphi_i) \right) \tag{3.18}$$

En rapportant 3.16, 3.17 et 3.18 dans 3.13, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & A \begin{bmatrix} \Delta_1 \omega \cos(\omega t + \phi_1) \\ \Delta_2 \omega \cos(\omega t + \phi_2) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \Delta_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ \Delta_2 \sin(\omega t + \phi_2) \end{bmatrix} \\
 & + C \begin{bmatrix} \Delta_1^3 \left(\frac{3}{4} \sin(\omega t + \phi_1) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\phi_1) \right) \\ \Delta_2^3 \left(\frac{3}{4} \sin(\omega t + \phi_2) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\phi_2) \right) \end{bmatrix} = D \xi \omega \cos(\omega t) + E \xi \omega \sin(\omega t)
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

En équilibrant les équations et en regroupant les termes en $\cos(\omega t)$ en $\sin(\omega t)$ on obtient :

$$\begin{cases}
 a_{11} \Delta_1 \omega \cos(\phi_1) + a_{12} \Delta_2 \omega \cos(\phi_2) + \left(b_{11} \Delta_1 + \frac{3}{4} c_1 \Delta_1^3 \right) \sin(\phi_1) + \left(b_{12} \Delta_2 + \frac{3}{4} c_2 \Delta_2^3 \right) \sin(\phi_2) = d_1 \xi \omega \\
 \left(b_{11} \Delta_1 + \frac{3}{4} c_1 \Delta_1^3 \right) \cos(\phi_1) + \left(b_{22} \Delta_2 + \frac{3}{4} c_2 \Delta_2^3 \right) \cos(\phi_2) - a_1 \Delta_1 \omega \sin(\phi_1) - a_2 \Delta_2 \omega \sin(\phi_2) = e_1 \xi \\
 a_3 \Delta_1 \omega \cos(\phi_1) + a_4 \Delta_2 \omega \cos(\phi_2) + \left(b_{21} \Delta_1 + \frac{3}{4} c_3 \Delta_1^3 \right) \sin(\phi_1) + \left(b_{22} \Delta_2 + \frac{3}{4} c_4 \Delta_2^3 \right) \sin(\phi_2) = d_2 \xi \omega \\
 \left(b_{21} \Delta_1 + \frac{3}{4} c_3 \Delta_1^3 \right) \cos(\phi_1) + \left(b_{22} \Delta_2 + \frac{3}{4} c_4 \Delta_2^3 \right) \cos(\phi_2) - a_3 \Delta_1 \omega \sin(\phi_1) - a_4 \Delta_2 \omega \sin(\phi_2) = 0
 \end{cases} \quad (3.20)$$

La première constatation est que la solution proposée ne permet pas d'équilibrer les équations du modèle 3.13 en termes d'harmoniques. Dans 3.20, il n'apparaît aucun terme dont la composante fréquentielle est située à 3ω . Ce qui implique

$$C \begin{bmatrix} \Delta_1^3 \left(\frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\phi_1) \right) \\ \Delta_2^3 \left(\frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\phi_2) \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

Cette incohérence mathématique indique qu'une telle solution n'est vraie que lorsque les coefficients de matrice C sont nulles. Ce qui induit que Q_i sont nulles. Ce résultat pouvait directement se vérifier sans effectuer un calcul très lourd. En effet, avec la solution considérée, la partie linéaire du modèle ne pouvait générer que des termes dont la composante fréquentielle est situé en ω (voir 3.19). Mais le calcul 3.18 indique clairement que la non linéarité génère une harmonique cubique à la fréquence 3ω . On peut donc directement conclure que la solution présumé est incomplète et il lui manque au moins une composante à la fréquence 3ω . Pour équilibrer l'équation 3.14 en fréquences, on suppose maintenant que la solution s'écrit :

$$\delta_i(t) = \Delta_{i1} \sin(\omega t + \phi_{i1}) + \Delta_{i3} \sin(3\omega t + \phi_{i3}) \quad (3.22)$$

Avec la présente solution, la partie linéaire du modèle va générer des termes possédant deux composantes de fréquence en ω et en ω^3 . En évaluant les termes cubiques, on obtient :

$$\delta_i^3(t) = (\Delta_{i1} \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + \Delta_{i3} \sin(3\omega t + \varphi_{i3}))^3 \quad (3.23)$$

Le développement des calculs en utilisant les règles de la trigonométrie donne :

$$\begin{aligned} \delta_i^3(t) = & \left[\frac{3}{4} \Delta_{i1}^3 + \Delta_{i1} \Delta_{i3}^2 \right] \sin(\omega t + \varphi_{i1}) - \frac{\Delta_{i1}^2 \Delta_{i3}}{2} \sin(\omega t + \varphi_{i3} - 2\varphi_{i1}) \\ & + \left[\frac{3}{4} \Delta_{i3}^3 + \Delta_{i3} \Delta_{i1}^2 \right] \sin(3\omega t + \varphi_{i3}) - \frac{\Delta_{i1}^3}{4} \sin(3\omega t + 3\varphi_{i1}) \\ & + \frac{\Delta_{i1} \Delta_{i3}^2}{2} \sin(5\omega t + 2\varphi_{i3} - \varphi_{i1}) - \frac{\Delta_{i3} \Delta_{i1}^2}{2} \sin(5\omega t + 2\varphi_{i1} + \varphi_{i3}) \\ & - \frac{1}{2} \sin(7\omega t + 2\varphi_{i3} + \varphi_{i1}) \\ & - \frac{\Delta_{i3}^3}{4} \sin(9\omega t + 3\varphi_{i3}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Le résultat 3.24 indique clairement que la partie cubique génère des composantes à des fréquences 5ω , 7ω et 9ω . Ceci signifie qu'une fois encore les fréquences dans les équations 3.14 ne peuvent être équilibrées en considérant la forme de la réponse 3.22. Par itération, nous pouvons imaginer que la vraie solution à ces équations s'écrit sous la forme :

$$\delta_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_{i(2j+1)} \sin((2j+1)\omega t + \varphi_{i(2j+1)}) \quad (3.25)$$

Et qui contient toutes les harmoniques d'ordre impaire multiple de ω . Si le modèle de véhicule contenait des non linéarités quadratiques, il apparaîtra certainement des harmoniques d'ordres pairs dans la réponse.

Sur la figure 3.1, nous montrons une simulation du modèle LD-P3 pour une entrée sinusoïdale au volant d'une fréquence 1Hz et d'une amplitude 40° pour une vitesse de 130km/h. les conditions initiales en vitesse de lacet et en dérive au CdG sont nulles. Le paramétrage de véhicule utilisé pour cette simulation est celui d'une Citroën C6 avec un pneu Michelin Pilot Primacy 245/45R18 à 2.4 bar. Ces paramètres sont présentés dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
M	2122.8 kg	K_1	$2285.24 \times 10^2 \text{ N rad}^{-1}$
I_{zz}	3721.3 kg m ²	K_2	$1678.18 \times 10^2 \text{ N rad}^{-1}$
L_1	1.1 m	Q_1	$-1253.68 \times 10^4 \text{ N rad}^{-3}$
L_2	1.7958 m	Q_2	$-1085.90 \times 10^4 \text{ N rad}^{-3}$

Tableau 3.1. Paramètres utilisés pour la simulation.

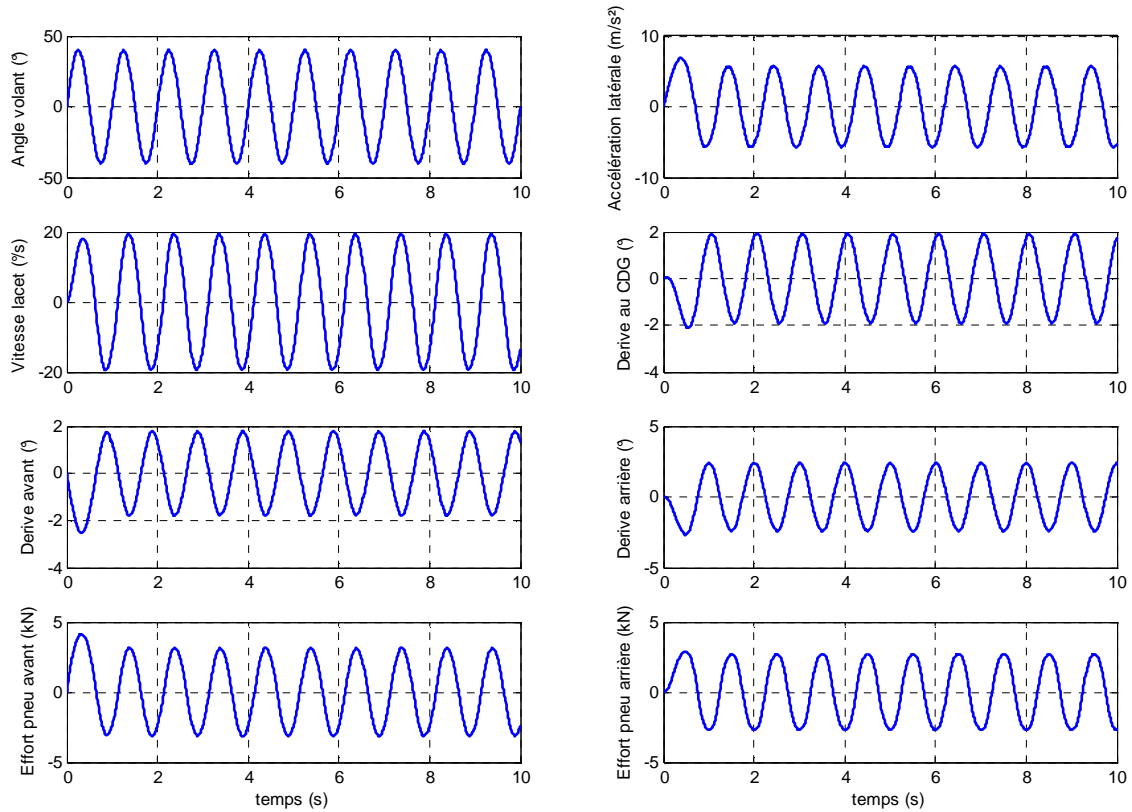


Figure 3.1. Réponse du modèle LD-P3 à une entrée sinusoïdale.

Une analyse du spectre fréquentielle de la vitesse de lacet est montrée sur la figure 3.2. Nous constatons qu'en plus de la composante fondamentale à 1Hz, nous pouvons facilement voir l'existence d'une harmonique de la réponse à 3Hz indiquant l'effet de la non linéarité cubique. Il est vrai que l'amplitude de cette non linéarité est assez petite par rapport au fondamentale ; ceci est généralement le cas de toute les harmoniques supérieures dans un système dynamique.

b- Dépendance de la FRF du fondamentale à l'amplitude d'excitation

Pour un système linéaire la fonction réponse fréquentielle (notée FRF) englobe toute les informations statiques et dynamiques. Cette FRF est unique et ne dépend pas de l'amplitude des excitations. Soit $H(\omega)$ la FRF d'un système linéaire exprimé par le rapport entrée/sortie

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (3.26)$$

La fonction $H(\omega)$ peut être directement déterminée en utilisant la fonction de transfert $H(s)$ (avec s la variable de Laplace) et en substituant s par $i\omega$. Expérimentalement, la fonction réponse fréquentielle $H(\omega)$ peut être calculée en utilisant une excitation sinusoïdale et en faisant varier sa fréquence dans un intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ avec un pas $\Delta\omega$. A chaque fréquence ω , le rapport donné par l'équation 3.26 est déterminé à l'aide d'une FFT.

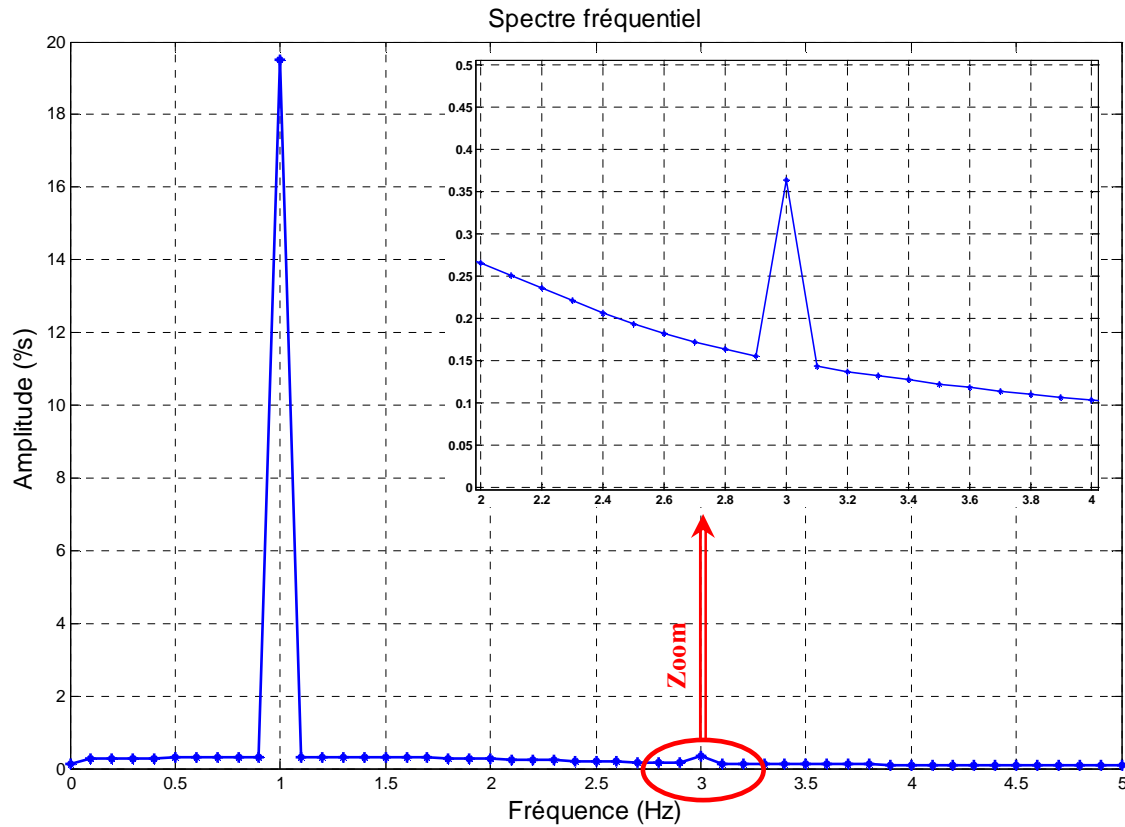


Figure 3.2. Spectre en fréquence de la réponse en vitesse de lacet.

Lorsqu'on est confronté à un système non linéaire, la FRF d'ordre 1 (de la partie fondamentale du signal) englobe également la plupart des informations concernant sa dynamique. On peut donc écrire :

$$H(\omega) = \frac{Y_f(\omega)}{X(\omega)} \quad (3.27)$$

Avec Y_f la composante fondamentale de la réponse. Dans [Wor01][Hre04] il est mentionné que cette fonction dépend de l'amplitude de l'entrée sinusoïdale avec laquelle $H(\omega)$ est calculé. Pour détecter ce phénomène il suffit de calculer la FRF d'ordre 1 en utilisant différentes amplitudes d'excitation. La procédure utilisée est la suivante, le système est excité avec une entrée sinusoïdale de la forme :

$$\varepsilon_r = \xi \sin(\omega t) \quad \text{avec, } \omega = 2\pi f \quad (3.28)$$

Pour chaque amplitude ξ fixée, on fait varier la pulsation dans un intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ avec un pas $\Delta\omega$. Pour chaque fréquence une évaluation du spectre de la sortie du modèle est obtenue à travers une FFT (transformé de fourrier rapide). Ceci nous permet d'extraire le fondamentale des réponses à la fréquence ω . Ensuite, en évaluant l'expression 3.27, on peut facilement obtenir la FRF $H(\omega)$ sur l'intervalle de fréquence prédéfini. En répétant les mêmes étapes en faisant varier ξ dans un intervalle $[\xi_1, \xi_2]$ on obtient plusieurs FRF qui correspondent aux différentes amplitudes utilisées. Un tel résultat est illustré sur les figures 3.3 et 3.4 pour un intervalle de fréquence $[0.1\text{Hz}, 4\text{Hz}]$ et des amplitudes d'angles volant

variant de 10° à 70° avec un pas de 20° . Le calcul a été effectué pour la vitesse de lacet, dérive au CdG et les dérives au pneu avant et arrière à une vitesse de 120km/h.

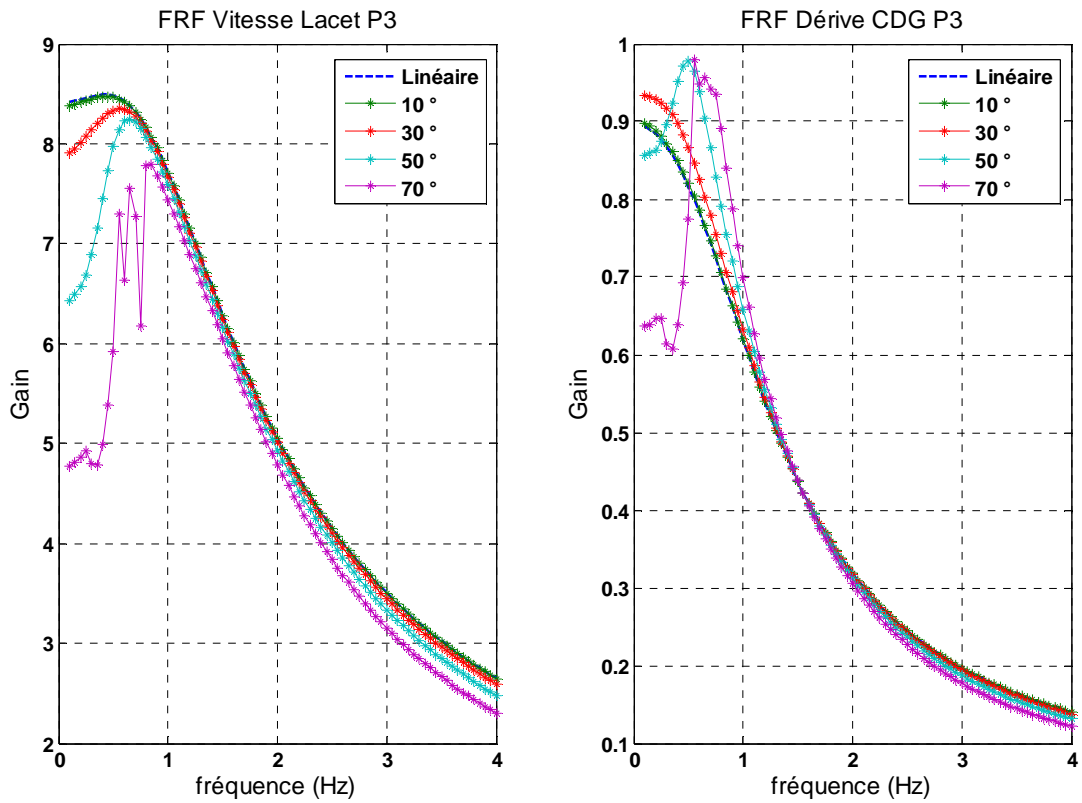


Figure 3.3. Fonction réponse fréquentielle en vitesse de lacet et en dérive au CdG.

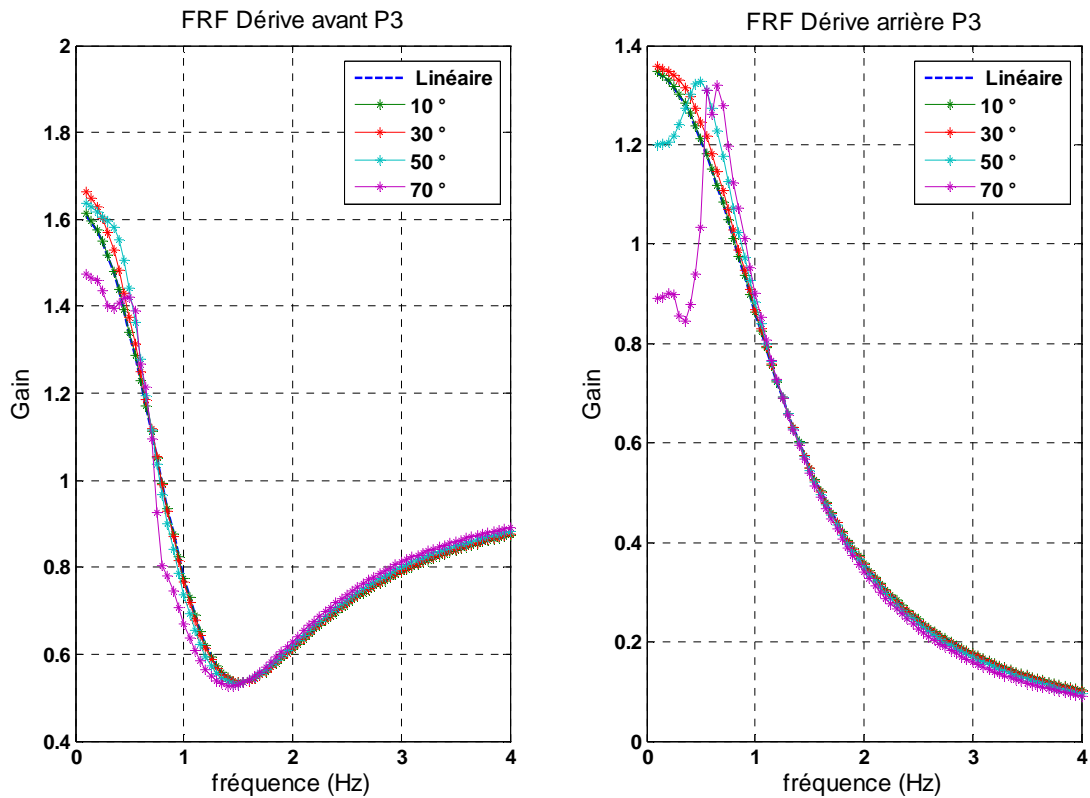


Figure 3.4. Fonction réponse fréquentielle en dérives avant et arrière.

Pour les basses amplitudes, la non linéarité n'est pas suffisamment excitée et par conséquent la fonction réponse fréquentielle du système non linéaire s'approche de celle obtenue par le modèle linéaire LD (voir chapitre 2). On remarque que la courbe pour un angle volant de 10° est complètement confondue avec la courbe linéaire. Lorsque l'amplitude augmente la courbe de la fonction réponse fréquentielle n'est plus confondue avec la courbe linéaire et présente d'importants changements qu'on peut observer au niveau de la fréquence de résonance, du gain à la fréquence de résonance et du gain statique à fréquence nulle. Cette constatation est d'autant plus importante que l'amplitude augmente. Ce phénomène est appelé **distorsion harmonique**. Cette distorsion harmonique se produit généralement autour de la fréquence de résonance. On remarque également, que pour les grandes excitations comme dans le cas de l'amplitude à 70° , il existe des variations abruptes qui génèrent des tangentes verticales comme dans le cas de la FRF de la vitesse de lacet entre 0.5Hz et 1Hz . Ces tangentes verticales sont appelées **bifurcations**.

Les deux phénomènes ainsi présentés peuvent être analytiquement investigués par la méthode de l'équilibrage harmonique comme nous le verrons dans §3.5.

3.3.2. Impact temporel

Comme dans le domaine fréquentielle, la non linéarité a des impacts sur les réponses temporelles du systèmes. Lorsque la non linéarité est suffisamment excitée, des phénomènes de saturation et/ou des variations des caractéristiques modales de la réponse (pulsation propre et facteur d'amortissement) peuvent apparaître. Afin, de visualiser ces effets nous avons réalisé deux simulations, la première pour étudier le phénomène de saturation et la deuxième pour étudier la variation des paramètres modaux.

a- Saturation de la réponse

Généralement, l'effet de la non linéarité augmente lorsque l'excitation d'entrée augmente. En industrie automobile, l'effet de saturation est observée en analysant l'évolution de l'angle de surbraquage en fonction de l'accélération latérale [Pac06] (La notion d'angle de surbraquage a été introduite dans §1.4.3.4). Pour obtenir une telle caractéristique, la solution la plus pratique consiste à réaliser à vitesse constante une rampe volant lente de manière à atténuer les transitoires. La réponse sera assimilée au régime établi d'une succession d'échelons. Cette manœuvre est appelée « manœuvre en spirale » car la trajectoire du véhicule décrit une spirale lorsque l'angle volant décrit une rampe.

La figure 3.5 montre la différence entre le modèle LD linéaire et le modèle LD-P3 lorsque nous faisons évoluer linéairement l'angle volant de 0° à 100° sur une durée de 40s. Cette manœuvre est faite à une vitesse de 90km/h . En comparaison avec le modèle linéaire, lorsque le niveau de dérive au pneu dépasse une certaine limite, la saturation se génère au niveau des efforts aux pneumatiques (la courbe d'effort est montrée sur la figure 2.10). Cette saturation se traduit directement sur la caractéristique de surbraquage. L'évolution de l'angle de surbraquage en fonction de γ_t est tracé sur la figure 3.6. La partie linéaire de la courbe est caractérisée par l'équation 2.105.

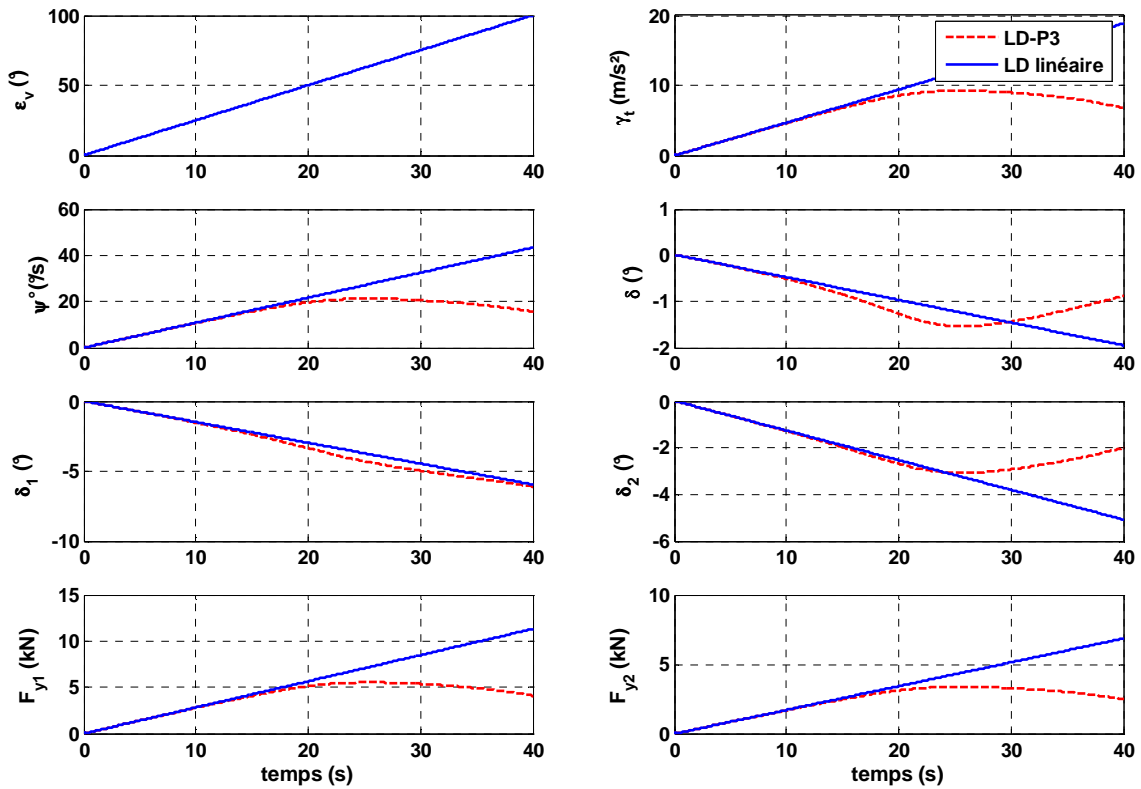


Figure 3.5. Réponse temporelle des modèles LD et LD-P3 à une manœuvre en spirale.

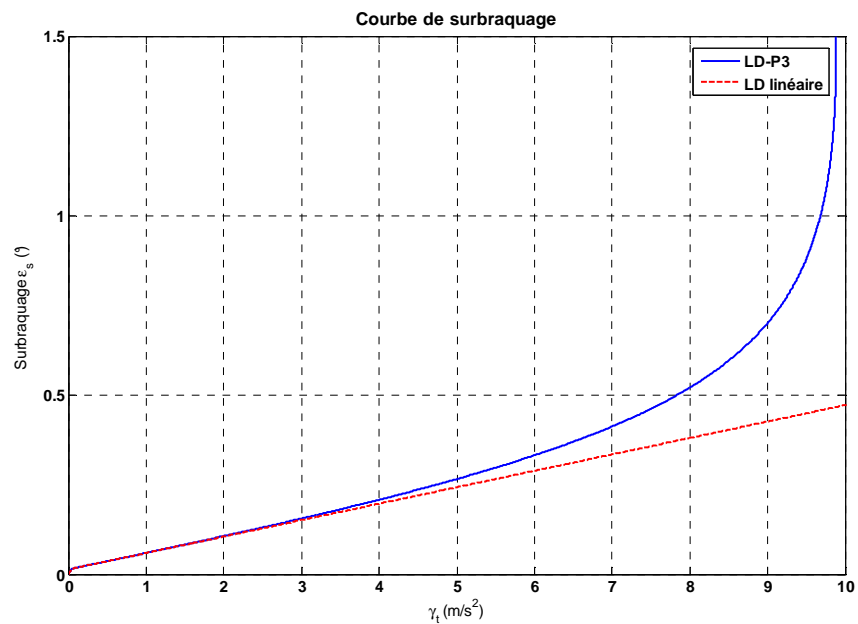


Figure 3.6. L'évolution du surbraquage en fonction de γ_t .

b- Dépendance entre les caractéristiques modales de la réponse et l'amplitude de l'entrée

Dans le domaine fréquentielle, nous avons examiné les distorsions harmoniques causées par la non linéarité cubique sur les FRF. Ces distorsions font varier la fréquence de résonance en fonction de l'amplitude (voir figure 3.3 et 3.4).

Imaginant maintenant, que ces FRF sont assimilés à celles obtenues par un système linéaire du 2^{ème} ordre. Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert d'un tel système s'écrit comme celle du modèle linéaire LD (voir équation 2.99) qu'on rappelle ci-dessous :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_0 \frac{1 + n_1 s + n_2 s^2}{1 + \frac{2\eta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (3.29)$$

Avec H_0 le gain statique, η le coefficient d'amortissement et ω_n la pulsation naturelle.

A partir de [Ewi00], une analyse modale linéaire du système décrit par 3.29 permet d'extraire la fréquence de résonance qui s'écrit sous la forme :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\eta^2} \quad (3.30)$$

En supposant que le système non linéaire soit régi par l'équation 3.29, les coefficients vont obligatoirement dépendre de l'amplitude d'excitation et donc lorsque l'excitation d'entrée est une sinusoïde donnée par :

$$\varepsilon_r = \xi \sin(\omega t) \quad \text{avec, } \omega = 2\pi f \quad (3.31)$$

La pulsation de résonance deviendrait :

$$\omega_r(\xi) = \omega_n(\xi) \sqrt{1 - 2\eta(\xi)^2} \quad (3.32)$$

Dans le domaine temporel cette dépendance à l'amplitude d'entrée est facilement perceptible dans les caractéristiques modales de la réponse. Examinons les réponses du modèle LD-P3 à une entrée échelon à trois différentes amplitudes à savoir 30°, 40° et 50° et pour une vitesse à 130 km/h.

$$\varepsilon_r = a\Gamma(t) \quad \text{avec, } \Gamma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

a étant l'amplitude de l'échelon.

Ces réponses sont présentées sur la figure 3.7. Une inspection visuelle permet de vérifier que lorsque l'amplitude d'excitation augmente, la fréquence d'oscillation augmente et la réponse est moins amortie. La pulsation amortie (également appelée pulsation propre) peut donc s'écrire :

$$\omega_a(a) = \omega_n(a) \sqrt{1 - \eta(a)^2} \quad (3.34)$$

Où $\omega_n(a)$ et $\eta(a)$ sont les paramètres modaux du système non linéaire lorsqu'il est assimilé à un système d'ordre 2 à coefficients variables. Dans cette même optique, il existe dans la littérature d'intéressantes études menées sur l'analyse modale des systèmes non linéaires pour étudier l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude d'excitation. On peut se référer aux travaux présentés dans [Mai97][Hre04][Fer98].

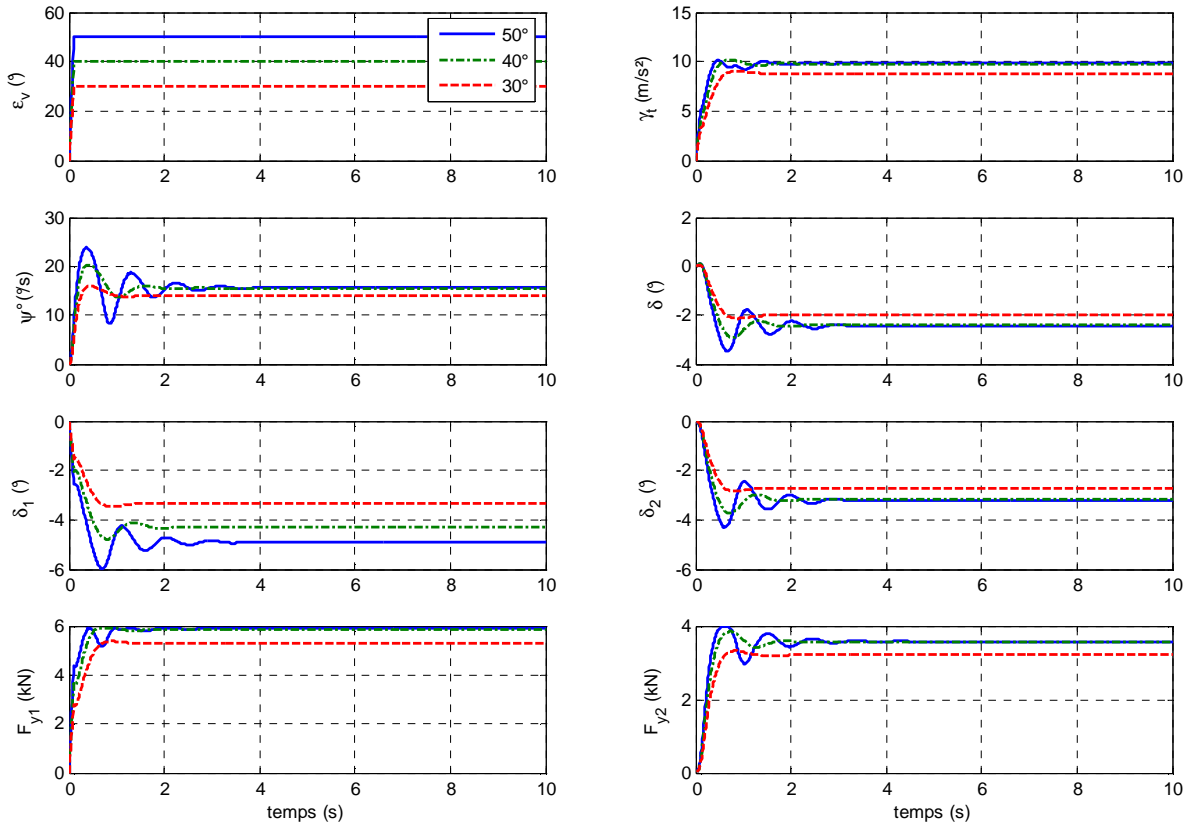


Figure 3.7. Réponse temporelle du modèle LD-P3 pour trois échelons à 30°, 40° et 50°.

3.4. Détection des dynamiques non linéaires

Avant de faire appel à une méthode non linéaire pour étudier un système, il est parfois nécessaire de s'assurer qu'il existe bien des dynamiques non linéaires dans sa réponse. Il faudrait savoir que les méthodes linéaires sont applicables pour de vastes catégories de systèmes dynamiques et restent utilisables pour n'importe quel système non linéaire lorsque sa non linéarité n'est pas très excitée (par exemple le modèle bicyclette linéaire valable que pour des dérive au pneu inférieur à 3°).

L'inspection et la vérification de l'existence de telles dynamiques non linéaires se basent dans la plupart des cas sur l'observation du comportement du système. Nous avons bien vu précédemment que les non linéarités peuvent générer des phénomènes assez importants est facile à détecter. Ceci est le cas des harmoniques multiples qu'on peut observer avec une simple analyse spectrale de la réponse. De manière plus générale, l'observation est expérimentale et elle est surtout menée sur la mesure de la FRF d'ordre 1 pour détecter s'il existe des distorsions (voir §3.3.1, figures 3.3 et 3.4).

Malheureusement, investiguer la présence d'une non linéarité sur un système réel n'est pas une tâche évidente. En effet si on considère le véhicule comme étant le système non linéaire à analyser, on sera très vite confronté à des contraintes de réalisation physique. Les étapes décrites dans §3.3.1 pour le calcul de la FRF ne peuvent pas être réalisées sur piste par un conducteur. En voici les causes :

- Un conducteur ne peut jamais réaliser une entrée au volant sinusoïdale d'amplitude et de fréquence constantes prédéfinies.
- Avec n amplitudes et m échantillons en fréquence à décrire pour former les différentes FRF, on aura besoin de réaliser $n \times m$ mesure sur piste. De telles procédures sont très coûteuses pour l'industrie.

Pour surmonter le problème du nombre d'essais pour tous les échantillons en fréquence, un sinus balayé en fréquence est généralement utilisé par les essayeurs. Cependant la précision pour avoir une amplitude constante sur toutes les fréquences ne peut être garantie à moins d'utiliser un volant robotisé, ce qui ne réduit pas les coûts pour autant. La procédure décrite dans §3.3.1 peut donc être utilisables par le biais de la simulation.

Avec toutes ces contraintes, il est préférable d'utiliser une méthode alternative ne présentant aucun inconvénient et dont un seul essai suffit pour affirmer la présence d'une dynamique non linéaire. Une telle technique est appelée la fonction de cohérence.

3.4.1. Présentation de la fonction de cohérence

La fonction de cohérence est une fonction d'analyse spectrale habituellement utilisée lorsqu'on le système est excité par une entrée aléatoire ou impulsionnelle. Cette fonction apporte une inspection visuelle rapide de la FRF et dans la plupart des cas elle indique la présence d'une dynamique non linéaire dans une gamme de fréquence spécifique ou autour de la fréquence de résonance [Hre04][Wor01][Ben98]. Cette fonction est la plus utilisée pour tester la non linéarité, sachant que la plupart des analyseurs de spectre disponible dans le commerce peuvent calculer une telle fonction.

Avant de discuter de la non linéarité, la fonction de cohérence est calculée pour les systèmes linéaires dont la mesure de la sortie est entachée d'un bruit. Voir figure suivante :

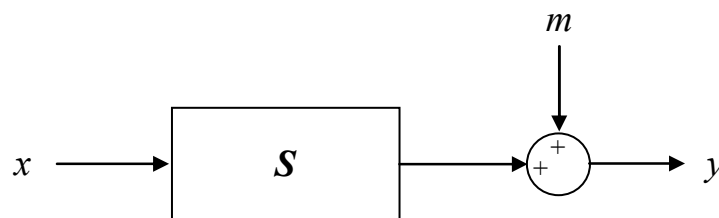


Figure 3.8. Block diagramme d'un système linéaire avec un bruit à la sortie.

Dans le domaine temporel, la réponse du système s'obtient par le produit de convolution

$$y(t) = S(t) * x(t) + m(t) \quad (3.35)$$

Dans le domaine de Laplace, la réponse s'écrit en utilisant la transformé de Laplace comme suit :

$$Y(s) = H(s)X(s) + M(s) \quad (3.36)$$

Avec, $H(s) = L[S(t)]$ étant la transformé de Laplace de la réponse impulsionnelle $S(t)$, appelé également fonction de transfert. La réponse dans le domaine fréquentielle s'obtient en substituant s par $i\omega$. On obtient donc :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) + M(\omega) \quad (3.37)$$

En multipliant cette dernière équation par son complexe conjugué, on obtient :

$$Y\bar{Y} = HX\overline{HX} + HX\overline{M} + \overline{HX}M + M\overline{M} \quad (3.38)$$

En calculant l'espérance des deux cotés de l'équation 3.38

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) + H(\omega)S_{xm}(\omega) + \overline{H}(\omega)S_{mx}(\omega) + S_{mm}(\omega) \quad (3.39)$$

Avec, $S_{xy} = E[Y\bar{X}]$ et désigne la densité inter-spectrale.

Maintenant, si $x(t)$ et $m(t)$ sont deux signaux décorrelés, donc $S_{xm}(\omega) = S_{mx}(\omega) = 0$ [Ben98]. L'équation 3.39 est réduite à :

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) + S_{mm}(\omega) \quad (3.40)$$

Avec un simple arrangement, on obtient :

$$\frac{|H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} = 1 - \frac{S_{mm}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} \quad (3.41)$$

La partie à droite de l'équation 3.41 désigne la fraction de l'énergie de sortie, qui peut être linéairement corrélée à l'entrée. Cette fraction est appelée la **fonction de cohérence** et elle est notée $\gamma^2(\omega)$. Maintenant comme $\gamma^2(\omega)$ et $S_{mm}(\omega)/S_{yy}(\omega)$ sont tout deux positives ce qui signifie que :

$$0 \leq \gamma^2(\omega) \leq 1 \quad (3.42)$$

avec $\gamma^2(\omega) = 1$ lorsque $S_{mm}(\omega) = 0$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de bruit de mesure. Donc, la fonction de cohérence détecte s'il existe du bruit sur le signal de sortie. Si la cohérence est tracée pour tout ω , il est facile de détecter toutes valeurs inférieure à 1. L'expression de la fonction de cohérence est donnée par :

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|S_{yx}(\omega)|^2}{S_{yy}(\omega)S_{xx}(\omega)} \quad (3.43)$$

Il faut noter que cette dernière quantité est facilement calculable par n'importe quel analyseur de spectre industriel dimensionné pour estimer la fonction fréquentielle $H(\omega)$.

La fonction de cohérence détecte également la présence de dynamiques non linéaires. Pour la plupart des systèmes non linéaires il a été montré que la relation spectrale entre l'entrée et la sortie peut s'écrire de la manière suivante :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) + F[X(\omega)] \quad (3.44)$$

Avec F une fonction ayant une forme compliquée dépendante de la non linéarité. En multipliant 3.44 par le complexe conjugué de $Y(\omega)$ et en calculant l'espérance du résultat, on obtient :

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) + H(\omega)S_{xf}(\omega) + \overline{H}(\omega)S_{fx}(\omega) + S_{ff}(\omega) \quad (3.45)$$

La fonction $F(\omega)$ n'est pas forcément décorrélée du signal $X(\omega)$ ce qui signifie que les quantités $S_{fx}(\omega)$ et $S_{xf}(\omega)$ ne sont pas nulle au contraire du cas des perturbations à la sortie. En termes de cohérence, l'équation 3.45 s'écrit :

$$\gamma^2(\omega) = 1 - 2 \operatorname{Re} \left(H(\omega) \frac{S_{xf}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} \right) - \frac{S_{ff}(\omega)}{S_{yy}(\omega)} \quad (3.46)$$

Dans la plupart des cas, la fonction de cohérence comme elle est décrite par l'équation 3.40 est égale à 1 seulement si $F = 0$ (le système est linéaire). Cependant, cet indicateur n'est pas infaillible, car la cohérence peut être égale à 1 lorsque la non linéarité satisfait la condition suivante :

$$2 \operatorname{Re}(H(\omega)S_{xf}(\omega)) = -S_{ff}(\omega) \quad (3.47)$$

Ce dernier cas est très peu probable et la cohérence décrite par l'équation 3.43 reste le meilleur indicateur de non linéarité utilisé dans l'industrie. Il faut savoir que cette fonction est utilisable seulement si elle est calculée en utilisant une moyenne glissante sur l'axe des fréquences [Wor01]. Cette fonction de cohérence a été implémentée dans Matlab[®] en utilisant la méthode de periodogramme modifié de Welch [Wel67].

3.4.2. Application de la fonction de cohérence

Pour mettre en application cette méthode de détection de non linéarité, nous avons comparé deux modèles de dynamique de véhicule précédemment calculés. Ces modèles sont le modèle LD linéaire et le modèle LD-P3 (avec une non linéarité polynomiale cubique). Afin de tracer l'évolution la fonction de cohérence en fonction de la fréquence nous avons le choix entre un bruit blanc gaussien, riche en fréquence, et un sinus balayé en fréquence. Le bruit blanc gaussien est une entrée difficile à réaliser surtout lorsqu'on doit injecter cette entrée comme angle de braquage au volant. Cette entrée est déjà inadmissible comme entrée de commande pour une vraie voiture et surtout irréalisable par un conducteur. La deuxième solution semble préférable est aisément réalisable.

La figure 3.9 montre une simulation des deux modèles précités à une vitesse de 120km/h. L'entrée en sinus balayé possède une amplitude de 70° et une fréquence qui varie de 0Hz à

5Hz. Le paramétrage utilisé pour la simulation est celui d'une Citroën C6 présenté dans le tableau 3.1 avec un pneu Michelin 245/45R18 à 2.4 bar.

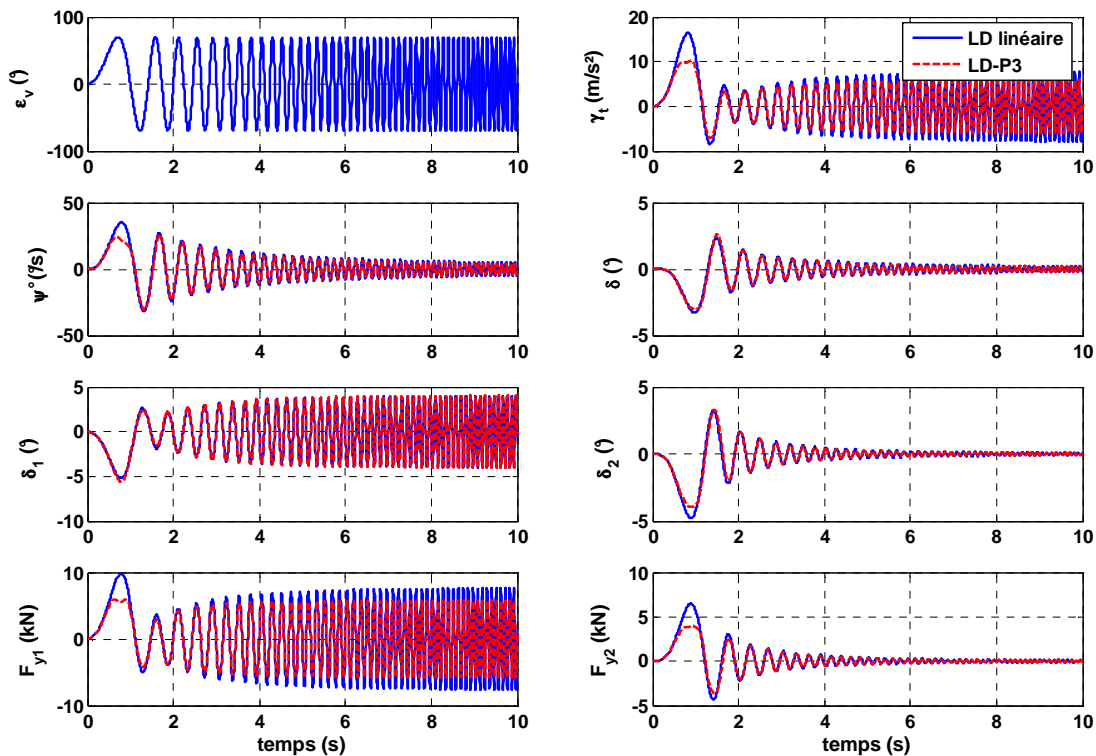


Figure 3.9. Réponse du modèle LD et LD-P3 à une entrée en sinus balayé d'une amplitude de 70° et d'une fréquence allant de 0Hz à 5Hz.

La fonction de cohérence a été calculée entre le signal de l'entrée au volant et la vitesse de lacet pour les deux modèles. Le résultat est présenté sur la figure 3.10. On remarque bien que pour le modèle LD-P3 la fonction de cohérence est inférieure à 1 indiquant l'existence d'une dynamique non linéaire. Cette cohérence n'est pas constante sur l'échelle des fréquences, on remarque qu'elle est plus basse autour de la fréquence de résonance ($\sim 1\text{Hz}$). Ceci a également été observé avec le phénomène de distorsion harmonique qui se génère sur la même gamme de fréquence.

La cohérence est d'autant plus basse que la non linéarité est importante. Elle peut donc atteindre des valeurs nulles ou très inférieure à 1 lorsqu'il n'existe aucune relation entre les signaux entrée/sortie (signaux complètement décorrélés d'où : $S_{xy}(\omega) = 0$) sous l'effet d'une non linéarité importante.

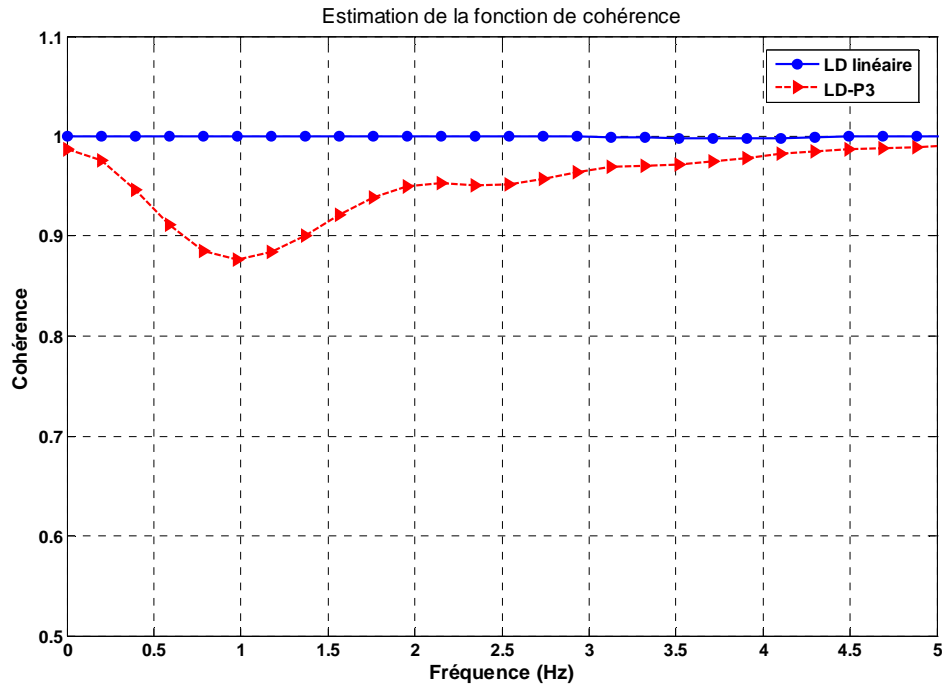


Figure 3.10. *Fonction de cohérence entre la vitesse de lacet et l'angle volant pour la détection des dynamiques non linéaires.*

3.5. Méthode d'équilibrage harmonique

Comme nous l'avons introduit dans l'état de l'art, la méthode d'équilibrage harmonique est une technique permettant d'investiguer en régime permanent les réponses d'un système non linéaire lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale. Cette méthode trouve ses bases théoriques dans la méthode de Van der Pol [Lan00] et celle de Krylov-Bogoliubov [Lan04] qui sont utilisées pour résoudre certains problèmes de mécanismes non linéaires.

L'équilibrage harmonique est une linéarisation harmonique de la fonction non linéaire présente dans les équations du modèle [Set92]. La théorie complète de la méthode peut être consultée dans [Sas99][Sil69][Wor01][Hre04]. Dans [Ren94], une généralisation de cette méthode pour l'analyse des FRF des harmoniques d'ordre n (avec $n \geq 2$) appelée méthode d'équilibrage multi-harmonique est décrite. L'auteur utilise des informations basées sur la réceptance. Ce qui permet de réduire les dimensions du système à résoudre. Egalement, il présente une technique appelée méthode de perturbation pour assurer la convergence des calculs vers une solution globale de la réponse fréquentielle.

Dans la littérature, il existe une multitude d'applications industrielles. Parmi les plus récentes, on trouve dans [Pet03] une analyse des vibrations non linéaires multi-harmoniques d'un système de disques à lamelles où l'auteur utilise la méthode de l'équilibrage harmonique pour investiguer les amplitudes des harmoniques de la réponse. L'application numérique montre une bonne performance vis à vis de la rapidité, la validité et la stabilité des calculs.

Dans [San97], la méthode de l'équilibrage harmonique a été expérimentée pour résoudre le problème des vibrations complexes dans le domaine des turbomachines. L'expérimentation

numérique concernait l'étude dans le domaine fréquentiel et temporelle du comportement vibratoire généré par un amortisseur à frottement dans les ailettes d'une turbine. L'auteur a comparé les résultats de l'équilibrage harmonique et ceux des méthodes temporelles. Il trouve qu'elles sont similaires et très proches par rapport aux données expérimentales.

Un travail similaire a été présenté par Wang & Chen [Wan93]. Dans ce travail, une méthode d'éléments finis simplifiés a été utilisée et des simplifications faites en considérant le comportement d'un seul mode. Les auteurs ont montré qu'indifféremment du nombre d'harmoniques considérées, le problème est réduit à seulement deux équations non linéaires plus un ensemble de $2n$ équations linéaires (avec n le nombre d'harmonique).

D'autres applications intéressantes peuvent être consultées dans [San96] [Tan93] [Hia93].

3.5.1. Présentation de la méthode

Pour introduire le principe général de la méthode, on considère la forme générale d'un système non linéaire monovarié suivante :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + \tilde{F}(\dot{y}, y) = x \quad (3.48)$$

Avec, x l'entrée du système, y la réponse et \tilde{F} une fonction non linéaire structurée.

Maintenant, soit l'excitation d'entrée sinusoïdale qui s'écrit :

$$x(t) = X \sin(\omega t) \quad (3.49)$$

Avec, X et ω des constantes désignant respectivement l'amplitude de l'excitation sinusoïdale et la pulsation ($\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence de la sinusoïde). La méthode de l'équilibrage harmonique suppose que la sortie $y(t)$ du système non linéaire est suffisamment proche d'une sinusoïde déphasée et on peut donc écrire :

$$y(t) \approx Y \sin(\omega t + \phi) \quad (3.50)$$

Avec, Y et ϕ des constantes désignant respectivement l'amplitude de la réponse du système et le déphasage. Si une telle réponse est substituée dans la fonction non linéaire $\tilde{F}(\dot{y}, y)$, alors la variable $z = \tilde{F}(\dot{y}, y)$ est généralement une fonction périodique dans le temps avec une période T . Cette fonction peut donc être développée en séries de Fourier comme suit [Mai97]:

$$\tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\beta) \quad (3.51)$$

Où $\beta = \omega t + \phi$. a_i et b_i sont les coefficients de Fourier et sont données par :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) d\beta \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \cos(n\beta) d\beta \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \sin(n\beta) d\beta
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Le coefficient a_0 est une constante qui représente tout simplement la valeur moyenne de la fonction \tilde{F} sur une période $T = 1/f$.

L'objectif voulu par la méthode d'équilibrage harmonique est de trouver une forme linéarisée de la fonction $\tilde{F}(\dot{y}, y)$ de manière à écrire :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = F_0 + k_{eq} y + c_{eq} \dot{y} \tag{3.53}$$

Cette dernière approximation est appelé « *la fonction descriptive* » [Sil69]. La méthode de l'équilibrage harmonique est souvent appelée méthode de la fonction descriptive

avec k_{eq} et c_{eq} des constantes appelés respectivement, la rigidité et l'amortissement équivalent. En substituant la réponse donnée par 3.50 dans 3.53, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(\dot{y}, y) &= F_0 + k_{eq} Y \sin(\omega t + \phi) + c_{eq} \omega Y \cos(\omega t + \phi) \\
 &= F_0 + k_{eq} Y \sin(\beta) + c_{eq} \omega Y \cos(\beta)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Si maintenant on considère uniquement les trois premiers termes de la série 3.51. Ces trois premiers termes désignent uniquement la partie fondamentale de la fonction $\tilde{F}(\dot{y}, y)$. On peut écrire :

$$\tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \approx a_0 + a_1 \cos(\beta) + b_1 \sin(\beta) \tag{3.55}$$

Par identification entre les équations 3.54 et 3.55, on peut facilement obtenir les coefficients de linéarisation équivalent F_0 , k_{eq} et c_{eq} comme suit :

$$F_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) d\beta \tag{3.56}$$

$$k_{eq} = \frac{b_1}{Y} = \frac{1}{\pi Y} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \sin(\beta) d\beta \tag{3.57}$$

$$c_{eq} = \frac{a_1}{\omega Y} = \frac{1}{\omega Y \pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \cos(\beta) d\beta \tag{3.58}$$

Avec l'approximation linéarisée donnée par l'équation 3.55, les amplitudes des harmoniques sont négligées en comparaison avec la partie fondamentale du signal $z = \tilde{F}(\dot{y}, y)$. Il est vrai que l'égalité 3.55 est mathématiquement erronée, mais l'approximation seulement aux termes fondamentaux de la réponse reste raisonnable pour la plupart des fonctions non linéaires structurées et représente la clé de succès de la méthode d'équilibrage harmonique.

Remarque :

- Les coefficients de linéarisation ainsi exprimés par les formules 3.56 à 3.58 sont des fonctions qui peuvent dépendre explicitement de l'amplitude de la réponse Y . En effet, la variable d'intégration étant l'angle instantané β ce qui fait que selon la forme de la fonction non linéaire, la quantité Y peut apparaître directement dans le résultat de l'intégration. On peut donc noter :

$$F_0 = F_0(Y)$$

$$k_{eq} = k_{eq}(Y)$$

$$c_{eq} = c_{eq}(Y)$$

- A ce stade, il est clair qu'à partir de 3.56, la réponse contiendra toujours un terme constant si la fonction non linéaire est paire. En effet, si la fonction non linéaire est symétrique et impaire alors le coefficient $F_0 = 0$.

3.5.1.1. Système linéarisé équivalent

En réécrivant la fonction non linéaire $\tilde{F}(\dot{y}, y)$ sous la forme 3.53 et en le substituant dans le système donné par l'équation 3.48 on retrouve le système équivalent suivant :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + c_{eq}(Y)\dot{y} + k_{eq}(Y)y = x \quad (3.59)$$

Le coefficient F_0 est nul car on considère le cas général où la fonction non linéaire \tilde{F} est impaire. Pour obtenir une formulation dans le domaine fréquentielle du système 3.48, une première solution consiste à utiliser la transformée de Laplace en considérant k_{eq} et c_{eq} comme des constantes. Le passage au domaine fréquentielle se fait en notant $s = i\omega$. La deuxième solution plus explicite consiste à exciter le système avec une entrée harmonique analytique sous la forme [Hre04] :

$$x = X e^{i\omega t} \quad (3.60)$$

Dans ce cas la réponse est :

$$y = \tilde{Y} e^{i\omega t} \quad \text{avec, } \tilde{Y} = Y e^{i\phi} \quad (3.61)$$

Où $Y = |\tilde{Y}|$ et ϕ représentent respectivement l'amplitude et le déphasage de la réponse (dans certaine référence [Hia93][Sil69][Ren94], \tilde{Y} est appelé module complexe). En substituant 3.60 et 3.61 dans 3.59, on obtient une représentation fréquentielle comme suit :

$$\left[-m\omega^2 + (c + c_{eq}(Y))i\omega + (k + k_{eq}(Y)) \right] \tilde{Y} e^{i\omega t} = X e^{i\omega t} \quad (3.62)$$

La fonction réponse fréquentielle d'ordre 1 noté $H(\omega)$ s'obtient avec le rapport entre la sortie et l'entrée :

$$H(\omega) = \frac{\tilde{Y}}{X} = \frac{1}{-m\omega^2 + (c + c_{eq}(Y))i\omega + (k + k_{eq}(Y))} \quad (3.63)$$

Cette dernière forme fréquentielle ressemble en tout point à celle pouvant être obtenue à partir d'un système linéaire de deuxième ordre. Mais contrairement à un système linéaire, La FRF est explicitement dépendante de l'amplitude de sortie Y à travers les coefficients équivalents de linéarisation (indirectement de l'amplitude de l'entrée). Expérimentalement, ces résultats à été démontrés dans §3.3.1-a.

Calculer analytiquement une telle FRF revient à calculer le rapport \tilde{Y}/X pour chaque pulsation ω ; ce qui n'est pas une tâche évidente. En effet, selon la non linéarité présente dans le système, les coefficients de linéarisation équivalents k_{eq} et c_{eq} peuvent avoir des formes analytiques compliquées qui dépendent de l'amplitude de sortie Y . Donc, avec une amplitude d'excitation X et une pulsation ω fixées, l'équation 3.63 devient une fonction non linéaire en \tilde{Y} . Le calcul de la FRF reviendrait à résoudre l'équation suivante :

$$-m\omega^2 \tilde{Y} + (c + c_{eq}(Y))i\omega \tilde{Y} + (k + k_{eq}(Y)) \tilde{Y} = X \quad (3.64)$$

Parfois, résoudre analytiquement une équation non linéaire pour calculer Y reste possible lorsque cette non linéarité est polynomiale avec un ordre ne dépassant pas 3 (pour assurer l'existence d'une solution). Mais dans la généralité des formes non linéaires existantes ou tout simplement lorsque le système est multivariable couplé, il est pratiquement impossible de trouver une solution. Il serait donc judicieux d'utiliser des méthodes de résolution numérique pour calculer la solution \tilde{Y} et donc la FRF $H(\omega) = \tilde{Y}/X$. Pour décrire complètement la FRF, La procédure doit être exécutée pour chaque pulsation ω dans un intervalle $[\omega_l, \omega_u]$. Une technique de résolution numérique des fonctions non linéaires sera présenté dans §3.5.2.

Dans le même contexte, la distorsion harmonique peut être investigué en faisant varier l'amplitude d'excitation X et en calculant la FRF correspondante. Cette procédure déjà utilisée dans 3.3.1 permet d'inspecter les variations de la FRF lorsque l'amplitude de l'entrée varie.

Comme pour un système linéaire de deuxième ordre, si on réécrit 3.63 sous la forme 3.29, une simple analyse permet d'obtenir les paramètres modaux comme suit :

$$\text{Pulsation naturelle} \quad : \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k + k_{eq}(Y)}{m}} \quad (3.65)$$

$$\text{Amortissement} \quad : \quad \eta = \frac{c + c_{eq}(Y)}{2} \sqrt{\frac{1}{(k + k_{eq}(Y))m}} \quad (3.66)$$

Dans la suite, deux cas de linéarisation seront présentés. Le premier concerne une rigidité cubique et le second est relatif à un système d'amortisseur à frottement. Dans [Lin90], une table non exhaustive de fonctions descriptives est présentée pour plusieurs types de fonctions non linéaires.

3.5.1.2. Cas d'une fonction non linéaire : Rigidité cubique

Soit la fonction non linéaire à rigidité cubique décrite par

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = k_3 y^3 \quad (3.67)$$

Et soit la réponse du système $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$. En appliquant les formules de l'équilibrage harmonique 3.56 à 3.58 on obtient les coefficients équivalents de linéarisation comme suit :

- La fonction $\tilde{F}(\dot{y}, y) = k_3 Y^3 \sin^3(\beta)$ est impaire en β est donc les coefficients $F_0 = c_{eq} = 0$

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_3 Y^3 \sin^3(\beta) d\beta = 0 \quad (3.68)$$

$$c_{eq} = \frac{1}{\omega Y \pi} \int_0^{2\pi} k_3 Y^3 \sin^3(\beta) \cos(\beta) d\beta = 0 \quad (3.69)$$

Avec, $\beta = \omega t + \phi$

- La rigidité équivalente est donnée par :

$$\begin{aligned} k_{eq} &= \frac{1}{Y \pi} \int_0^{2\pi} f(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \sin(\beta) d\beta \\ &= \frac{k_3}{Y \pi} \int_0^{2\pi} Y^3 \sin^4(\beta) d\beta = \frac{k_3 Y^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} [3 - 4\cos(2\beta) + \cos(4\beta)] d\beta \\ &= \frac{3}{4} k_3 Y^2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Avec ces coefficients, on réalise un système équivalent qui ne contient pas de non linéarité explicite. On écrit alors la fonction descriptive comme suit :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = k_3 y^3 \approx \left[\frac{3}{4} k_3 Y^2 \right] y \quad (3.71)$$

Sur la figure 3.11, il est bien illustré à travers un exemple démonstratif que la fonction linéarisée représente le meilleur choix d'approximation pour la fonction non linéaire.

L'équation du système linéarisé équivalent s'obtient en substituant 3.71 dans 3.48, ce qui nous donne :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \left(k + \frac{3}{4} k_3 Y^2 \right) y = x \quad (3.72)$$

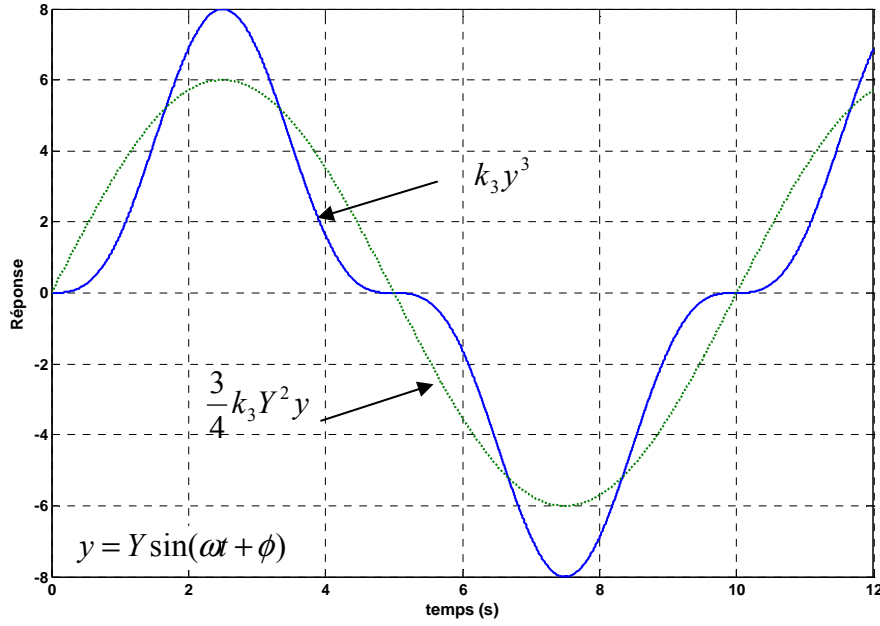


Figure 3.10. Fonction de cohérence entre la vitesse de lacet et l'angle volant pour la

Comme décrit précédemment la FRF est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{\tilde{Y}}{X} = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + \left(k + \frac{3}{4}k_3Y^2\right)} \quad (3.73)$$

Egalement, le calcul de la FRF reviendrait à résoudre pour X et ω fixées l'équation suivante :

$$-m\omega^2\tilde{Y} + c\tilde{Y}i\omega + \left(k + \frac{3}{4}k_3|\tilde{Y}|^2\right)\tilde{Y} = X \quad (3.74)$$

Comme nous le verrons dans §3.5.2, il n'existe pas de méthodes de résolution numériques pouvant calculer des solutions complexes \tilde{Y} pour l'équation 3.74. Comme proposé dans [Ren94], la solution consiste à séparer l'équation 3.74 en deux parties, réelle et imaginaire. La résolution reviendra donc à résoudre un système non linéaire à deux équations qui sont les suivantes :

$$\begin{cases} -m\omega^2 \operatorname{Re}(\tilde{Y}) - c\omega \operatorname{Im}(\tilde{Y}) + \left(k + \frac{3}{4}k_3 \left(\operatorname{Re}(\tilde{Y})^2 + \operatorname{Im}(\tilde{Y})^2\right)\right) \operatorname{Re}(\tilde{Y}) = X \\ -m\omega^2 \operatorname{Im}(\tilde{Y}) + c\omega \operatorname{Re}(\tilde{Y}) + \left(k + \frac{3}{4}k_3 \left(\operatorname{Re}(\tilde{Y})^2 + \operatorname{Im}(\tilde{Y})^2\right)\right) \operatorname{Im}(\tilde{Y}) = 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

La méthode choisie devrait permettre de calculer la partie réelle et imaginaire de la réponse notées respectivement $\operatorname{Re}(\tilde{Y})$ et $\operatorname{Im}(\tilde{Y})$.

3.5.1.3. Cas d'une fonction non linéaire : Amortisseur à frottement

Le deuxième cas de figure concerne un amortissement dont la fonction non linéaire \tilde{F} s'écrit comme suit :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = c_2 \dot{y} |\dot{y}| \quad (3.76)$$

soit la réponse du système $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$. Comme pour la rigidité cubique, les formules de l'équilibrage harmonique permettent d'extraire la fonction descriptive. Les coefficients équivalents de linéarisation s'obtiennent comme suit :

- La fonction $\tilde{F}(\dot{y}, y) = \tilde{F}(\beta) = c_2 \omega Y \cos(\beta) |\omega Y \cos(\beta)|$ est une fonction paire et symétrique (sa moyenne est nulle sur une période T) ce qui implique que :

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2 \omega Y \cos(\beta) |\omega Y \cos(\beta)| d\beta = 0 \quad (3.77)$$

$$k_{eq} = \frac{1}{\pi Y} \int_0^{2\pi} c_2 \omega Y \cos(\beta) |\omega Y \cos(\beta)| \sin(\beta) d\beta = 0 \quad (3.78)$$

Avec, $\beta = \omega t + \phi$

- L'amortissement équivalent est donné par :

$$\begin{aligned} c_{eq} &= \frac{1}{\omega Y \pi} \int_0^{2\pi} c_2 \omega Y \cos^2(\beta) |\omega Y \cos(\beta)| d\beta = \frac{c_2 \omega Y}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\beta) |\cos(\beta)| d\beta \\ &= \frac{2c_2 \omega Y}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\beta) d\beta - \frac{c_2 \omega Y}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3(\beta) d\beta \\ &= \frac{2c_2 \omega Y}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(3\beta) + 3\cos(\beta)) d\beta - \frac{c_2 \omega Y}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos(3\beta) + 3\cos(\beta)) d\beta \\ &= \frac{8c_2 \omega Y}{\pi} \end{aligned} \quad (3.79)$$

- La fonction descriptive est donc :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = \frac{8\omega Y c_2}{\pi} \dot{y} \quad (3.80)$$

En substituant 3.80 dans 3.48 on obtient le système linéarisé équivalent :

$$m\ddot{y} + \left(c + \frac{8\omega Y c_2}{\pi} \right) \dot{y} + ky = x \quad (3.81)$$

Comme définit dans §3.5.1.1, la FRF s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{\tilde{Y}}{X} = \frac{1}{-m\omega^2 + i\left(c + \frac{8\omega Y c_2}{\pi}\right)\omega + k} \quad (3.82)$$

Le calcul de la FRF reviendrait à résoudre, pour X et ω fixées, l'équation suivante :

$$-m\omega^2 \tilde{Y} + \left(c + \frac{8\omega |\tilde{Y}| c_2}{\pi}\right) \tilde{Y} i \omega + k \tilde{Y} = X \quad (3.83)$$

Nous devons bien sûr séparer cette équation en deux parties, réelle et imaginaire, pour obtenir le système d'équation à résoudre comme suit :

$$\begin{cases} -m\omega^2 \operatorname{Re}(\tilde{Y}) - \left(c + \frac{8\omega c_2}{\pi} \sqrt{\operatorname{Re}(\tilde{Y})^2 + \operatorname{Im}(\tilde{Y})^2}\right) \omega \operatorname{Im}(\tilde{Y}) + k \operatorname{Re}(\tilde{Y}) = X \\ -m\omega^2 \operatorname{Im}(\tilde{Y}) + \left(c + \frac{8\omega c_2}{\pi} \sqrt{\operatorname{Re}(\tilde{Y})^2 + \operatorname{Im}(\tilde{Y})^2}\right) \omega \operatorname{Re}(\tilde{Y}) + k \operatorname{Im}(\tilde{Y}) = 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

Dans la prochaine section, nous présenterons une technique de résolution des systèmes d'équations non linéaires à n variables. Dans le cas de l'équation 3.84, nous avons deux variables à estimer à savoir $\operatorname{Re}(\tilde{Y})$ et $\operatorname{Im}(\tilde{Y})$.

3.5.2. Technique de résolution

Le point culminant de la méthode de l'équilibrage harmonique est la résolution d'un ensemble de $2m_x$ équations non linéaires avec m_x étant le nombre de sorties du modèle (par exemple l'équation 3.84 ou 3.75). Parmi les algorithmes les plus utilisés pour atteindre cet objectif, on trouve la méthode de Newton-Raphson [Ren04][Hia93][Hre04], la méthode de la région de confiance [Col96][Pow70] et la méthode de quasi-Newton [Bie06].

Dans le présent travail nous avons opté pour l'utilisation de la méthode de quasi-Newton qui joue un rôle crucial dans le contexte de la résolution d'équations non linéaires et, par extension, dans celui de l'optimisation non linéaire. Plus précisément, nous allons énoncer l'algorithme de la méthode de quasi-Newton sécante dans le cas de la résolution d'un système d'équation à n inconnues (pour la méthode d'équilibrage harmonique nous avons $n = 2m_x$).

La méthode de quasi-Newton sécante est une technique itérative dérivée de la méthode de Newton classique. L'avantage avec cette méthode est qu'elle permet d'obtenir une bonne approximation de la solution d'un système d'équations non linéaire sans avoir besoin de la formule analytique de la matrice Jacobienne. En effet, il existe de nombreux cas où la fonction à résoudre $f(x)$ n'est pas spécifié par des formules mais plutôt par une expérience ou l'exécution d'un logiciel. Dans ce cas l'expression analytique de la dérivée est indisponible. Même si le problème possède une formulation analytique, le calcul des dérivées

peut s'avérer très couteux en temps et en moyens investits. Avec la méthode de quasi-Newton sécante, il est possible d'utiliser les idées de la méthode de Newton, sans utiliser les dérivées.

L'ensemble des détails théorique de la méthode de quasi-Newton sécante est présenté dans l'annexe A. Ici, nous nous contenterons d'énoncé l'algorithmique.

Algorithme 3.1 : Méthode de quasi-Newton sécante : n variables

L'objectif de la méthode est de trouver la solution du système d'équations

$$f(x) = 0 \quad \text{avec, } x \in \mathfrak{R}^n \quad (3.85)$$

Les entrées de l'algorithme

- La fonction $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$.
- Une première approximation de la solution $x_0 \in \mathfrak{R}^n$.
- Une première approximation de la matrice jacobienne A_0 (par défaut $A_0 = I$).
- La précision demandée $\varepsilon \in \mathfrak{R}$, $\varepsilon > 0$

Sortie de l'algorithme

- Une approximation de la solution $x^* \in \mathfrak{R}^n$.

Initialisation

1. $x_1 = x_0 - A_0^{-1} f(x_0)$
2. $d_0 = x_1 - x_0$
3. $y_0 = f(x_1) - f(x_0)$
4. $k = 1$

Itérations

1. Mise à jour de Broyden : $A_k = A_{k-1} + \frac{(y_{k-1} - A_{k-1} d_{k-1}) d_{k-1}^T}{d_{k-1}^T d_{k-1}}$
2. Calculer d_k solution de $A_k d_k = -f(x_k)$
3. Mise à jour de la solution $x_{k+1} = x_k + d_k$
4. Calculer $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$
5. $k = k + 1$

Critère d'arrêt

- Les itérations sont arrêtées lorsqu'on satisfait le critère suivant : $\|f(x_k)\| \leq \varepsilon$. Autrement dit, l'algorithme prend fin lorsque la fonction $f(x_k)$ atteint une valeur très proche de zéro. Ce critère est vérifié à chaque itération. Lorsqu'il est atteint, la solution sera $x^* = x_k$.

Il est clair que cet algorithme permet de calculer uniquement des solutions réelles ($x \in R^n$) au système $f(x)=0$. Donc si on considère l'exemple de la fonction non linéaire à rigidité cubique telle qu'elle est décrite par 3.74, il est impossible de trouver une solution directe par l'algorithme de quasi-Newton. Ceci justifie amplement la séparation en partie réelle et imaginaire afin d'obtenir le nouveau système d'équation $f(x)$ décrit par 3.75, avec $x = \{\text{Re}(\tilde{Y}), \text{Im}(\tilde{Y})\}^T$.

Par ailleurs, la clé de succès de n'importe quelle méthode de résolution itérative repose sur deux conditions importantes. La première condition est la robustesse de l'algorithmique et la seconde est l'initialisation de la solution (x_0). Lorsque l'algorithme diverge dans l'estimation d'une solution, nombreux sont les auteurs qui suggèrent l'utilisation d'un autre algorithme plus robuste [Lin90][Bie06]. Cependant, ceci permet de contourner uniquement une partie du problème car l'algorithme le plus robuste peut diverger si l'on choisit mal l'estimation initiale de la solution. Dans la prochaine section nous présenterons une technique afin de faire converger la méthode de quasi-Newton pour atteindre une estimation global de la solution.

3.5.3. Convergence vers une solution globale

On sait pertinemment qu'il n'existe aucun algorithme itératif pouvant assurer la convergence vers une solution global du système. Le bon choix des conditions d'initialisation de l'algorithme reste le meilleur moyen de converger vers une solution réelle satisfaisante.

Dans un cas pratique, nous avons vu dans §3.5.1.1 que nous désirons avoir la réponse (indirectement la FRF) pour une certaine amplitude d'excitation X constante et pour une gamme de fréquences $\omega \in [\omega_l, \omega_u]$. Egalement, nous cherchons à investiguer les distorsions harmonique en faisant évoluer l'amplitude X dans une gamme $[X_l, X_u]$ et en calculant les FRF correspondantes. La recherche des solutions doit donc se faire pour chaque paire (ω_i, X_i) . En conséquence, le choix de la condition initiale doit également s'adapter à chaque paire (ω_i, X_i) .

a. Evolution selon l'axe des fréquences

Pour une amplitude d'excitation X constante et pour certaine fréquences ω entre ω_l et ω_u , des systèmes avec des non linéarités comme la rigidité cubique (équation 3.74) peuvent avoir plusieurs solutions \tilde{Y} (plusieurs modes). L'amplitude de la solution observée dépend du sens de l'évolution de la fréquence. Un sens croissant, ω croît de ω_l vers ω_u ou un sens décroissant, ω décroît de ω_u vers ω_l . Ceci est appelé phénomène de saut (également appelé phénomène de bifurcation). Ces solutions multiples peuvent être déterminées par une sélection judicieuse de la condition initiale \tilde{Y}_0 à chaque fréquence. Expérimentalement, le phénomène de saut est montré sur les figures 3.3 et 3.4.

1. basse vers haute fréquence : à la fréquence $\omega = \omega_l$ la réponse de la partie linéaire du système est utilisée comme \tilde{Y}_0 . Pour les fréquences $\omega_l < \omega \leq \omega_u$, la réponse non linéaire \tilde{Y} obtenue à ω est utilisé comme \tilde{Y}_0 pour $\omega + \Delta\omega$. La réponse de la partie

linéaire s'obtient facilement en omettant la non linéarité des équations du modèle. Par exemple la modèle LD constitue la partie linéaire du modèle LD-P3.

2. haute vers basse fréquence : à la fréquence $\omega = \omega_u$ la réponse de la partie linéaire du système est utilisé comme \tilde{Y}_0 . Pour les fréquences $\omega_l \leq \omega < \omega_u$, la réponse non linéaire \tilde{Y} obtenue à ω est utilisé comme \tilde{Y}_0 pour $\omega - \Delta\omega$.

b. Evolution selon l'axe des amplitudes

Soit la solution $\tilde{Y}(\omega)$ calculée pour une amplitude constante $X = X_l$ et toutes les fréquences ω , avec un sens d'évolution des fréquences choisies. Pour $X_l < X \leq X_u$, la solution $\tilde{Y}(\omega)$ obtenue pour $X = X_l$ est utilisée comme condition initiale pour $X = X_l + \Delta X$. Cette condition initiale est utilisée uniquement pour $\omega = \omega_l$ (ou $\omega = \omega_u$, selon le sens choisit). Pour les autres fréquences, on applique la même démarche de l'évolution selon l'axe des fréquences.

3.5.4. Application de la méthode d'équilibrage harmonique au modèle LD-P3

Le modèle de dynamique de véhicule LD-P3 a été introduit dans le chapitre 2 et il est décrit par les équations 3.10 et 3.11 lorsqu'on choisit comme variables d'état, la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ et la dérive au CdG δ . Ce modèle est également représenté par l'équation 3.13 lorsqu'on utilise comme variables d'état les dérives aux pneus avant et arrière. Comme nous l'avons expliqué au §3.3, nous utiliserons le modèle décrit par l'équation 3.13 pour des raisons de commodité des calculs, car la non linéarité est localisée sur un seul terme de l'équation. Les équations sont rappelées ci-dessous :

$$A \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_2^3 \end{bmatrix} = D \dot{\varepsilon}_r + E \varepsilon_r \quad (3.86)$$

Avec,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} & \frac{MVL_1}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} & -\frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} + K_{\delta_1} & -\frac{MV^2}{L} + K_{\delta_2} \\ L_1 K_{\delta_1} & -L_2 K_{\delta_2} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} Q_{\delta_1} & Q_{\delta_2} \\ L_1 Q_{\delta_1} & -L_2 Q_{\delta_2} \end{bmatrix}$$

$$D = -\begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix}; \quad E = -\begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans l'équation 3.86, la fonction non linéaire est indiquée par le troisième terme, à savoir :

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = y^3 = \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_2^3 \end{bmatrix} = \tilde{F}(\dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \delta_1, \delta_2) \quad (3.87)$$

Selon le principe de l'équilibrage harmonique, lorsque le braquage roue est une sinusoïde telle que :

$$\varepsilon_r = \xi \sin(\omega t) \quad (3.88)$$

On suppose que les réponses du véhicule à cette entrée sont très proches de sinusoïdes déphasées ayant la même fréquence d'excitation ω . De telles réponses s'écrivent comme suit :

$$\delta_1(t) = \Delta_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \Delta_1 \sin(\beta_1) \quad (3.89)$$

$$\delta_2(t) = \Delta_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \Delta_2 \sin(\beta_2) \quad (3.90)$$

a. Calcul des coefficients équivalents de linéarisation

Le but est donc de trouver une linéarisation harmonique de manière à écrire :

$$\tilde{F}(\dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \delta_1, \delta_2) \approx \begin{bmatrix} F_0^{\delta_1} + c_{eq}^{\delta_1} \dot{\delta}_1 + k_{eq}^{\delta_1} \delta_1 \\ F_0^{\delta_2} + c_{eq}^{\delta_2} \dot{\delta}_2 + k_{eq}^{\delta_2} \delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Comme décrit précédemment, les coefficients équivalents de linéarisation s'obtiennent par les équations 3.56 à 3.58. Par ailleurs, le cas de la non linéarité cubique a déjà été traité dans §3.5.1.2. Nous pouvons donc directement rapporter ces résultats pour le cas du modèle LD-P3 comme suit :

- Le terme constant équivalent est donné par :

$$F_0^{\delta_i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_i^3 \sin^3(\beta_i) d\beta_i = 0 \quad (3.92)$$

- L'amortissement équivalent est donné par :

$$c_{eq}^{\delta_i} = \frac{1}{\omega \Delta_i \pi} \int_0^{2\pi} \Delta_i^3 \sin^3(\beta_i) \cos(\beta_i) d\beta_i = 0 \quad (3.93)$$

- La rigidité équivalente est donnée par :

$$\begin{aligned} k_{eq}^{\delta_i} &= \frac{1}{\Delta_i \pi} \int_0^{2\pi} \Delta_i^3 \sin^4(\beta_i) d\beta_i = \frac{\Delta_i^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} [3 - 4\cos(2\beta_i) + \cos(4\beta_i)] d\beta_i \\ &= \frac{3}{4} \Delta_i^2 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Avec, $\beta_i = \omega t + \phi_i$

b. Ecriture du système linéarisé équivalent

En injectant les résultats 3.92 à 3.94 dans 3.91, on obtient la fonction descriptive comme suit :

$$\tilde{F}(\dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \delta_1, \delta_2) \approx \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \Delta_1^2 \delta_1 \\ \Delta_2^2 \delta_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \Delta_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

En réinjectant la fonction descriptive dans l'équation du modèle 3.86, on obtient le système linéarisé équivalent :

$$A \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + B' \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = D \dot{\varepsilon}_r + E \varepsilon_r \quad (3.96)$$

Avec,

$$B' = B + \frac{3}{4} C \times \begin{bmatrix} \Delta_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

La forme du modèle linéarisé est la même que celle du modèle LD linéaire (modèle bicyclette linéaire) étudié dans le chapitre 2. Le modèle linéaire LD est celui décrit par l'équation 2.94 qui peut facilement être réécrite avec δ_1 et δ_2 comme variables d'état. En considérant la matrice B' comme constante, et à partir des équations 2.100 et 2.101, les paramètres modaux (fréquence naturelle et amortissement) s'écrivent comme suit :

$$\omega_n^2(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{M V^2 (K'_{\delta_2} l_2 - K'_{\delta_1} l_1) + K'_{\delta_1} K'_{\delta_2} l^2}{I_z M V^2} \quad (3.98)$$

$$\eta(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2\omega_n} \frac{M (K'_{\delta_1} l_1^2 + K'_{\delta_2} l_2^2) + I_z (K'_{\delta_1} + K'_{\delta_2})}{I_z M V} \quad (3.99)$$

Avec,

$$K'_{\delta_i} = K_{\delta_i} + \frac{3}{4} \Delta_i^2 Q_{\delta_i} \quad (3.100)$$

Ces paramètres sont clairement dépendants de l'amplitude de réponses en dérives avant et arrière Δ_i .

c. Obtention de la FRF pour la dérive avant et arrière

Pour décrire la FRF, on considère une entrée harmonique analytique sous la forme :

$$\varepsilon_r = \xi e^{i\omega t} \quad (3.101)$$

Dans ce cas les réponses s'écrivent comme suit :

$$\delta_1(t) = \tilde{\Delta}_1 e^{i\omega t} \quad \text{avec, } \tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 e^{i\phi_1} \quad (3.102)$$

$$\delta_2(t) = \tilde{\Delta}_2 e^{i\omega t} \quad \text{avec, } \tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 e^{i\phi_2} \quad (3.103)$$

Où $\Delta_i = |\tilde{\Delta}_i|$ et ϕ_i représentent respectivement l'amplitude et le déphasage de la dérive i . Les fonctions réponses fréquentielles pour les dérives s'écrivent sous la forme :

$$H_{\delta_i}(\omega) = \frac{\tilde{\Delta}_i}{\xi} \quad (3.104)$$

En injectant l'entrée 3.101 et les réponses correspondantes 3.102 et 3.103 dans l'équation du modèle linéarisé équivalent 3.96, on obtient :

$$\left(i\omega A + B + \frac{3}{4} C \times \begin{bmatrix} \Delta_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \end{bmatrix} = (i\omega D + E) \xi \quad (3.105)$$

Ce qui implique,

$$\begin{bmatrix} i\omega \frac{MVL_2}{L} + \frac{MV^2}{L} + K_{\delta_1} + \frac{3}{4} \Delta_1^2 Q_{\delta_1} & i\omega \frac{MVL_1}{L} - \frac{MV^2}{L} + K_{\delta_2} + \frac{3}{4} \Delta_2^2 Q_{\delta_2} \\ i\omega \frac{I_{zz}V}{L} + L_1 K_{\delta_1} + \frac{3}{4} \Delta_1^2 L_1 Q_{\delta_1} & -i\omega \frac{I_{zz}V}{L} - L_2 K_{\delta_2} - \frac{3}{4} \Delta_2^2 L_2 Q_{\delta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} i\omega \frac{MVL_2}{L} + \frac{MV^2}{L} \\ i\omega \frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix} \xi \quad (3.106)$$

Et donc,

$$\begin{bmatrix} i\omega \frac{MVL_2}{L} + \frac{MV^2}{L} + K_{\delta_1} + \frac{3}{4} \Delta_1^2 Q_{\delta_1} & i\omega \frac{MVL_1}{L} - \frac{MV^2}{L} + K_{\delta_2} + \frac{3}{4} \Delta_2^2 Q_{\delta_2} \\ i\omega \frac{I_{zz}V}{L} + L_1 K_{\delta_1} + \frac{3}{4} \Delta_1^2 L_1 Q_{\delta_1} & -i\omega \frac{I_{zz}V}{L} - L_2 K_{\delta_2} - \frac{3}{4} \Delta_2^2 L_2 Q_{\delta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\delta_1} \\ H_{\delta_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} i\omega \frac{MVL_2}{L} + \frac{MV^2}{L} \\ i\omega \frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Ce qui représente un système de Cramer $Ax = B$ dont la résolution pourrait s'obtenir par une simple inversion matricielle. Malheureusement, la matrice A est elle-même dépendante de l'amplitude des dérives Δ_i , ce qui conduit à l'utilisation de la méthode de quasi-Newton sécante pour résoudre ce système d'équations

d. Système d'équations à résoudre pour l'obtention des FRF

Afin d'obtenir les FRF, nous devons résoudre le système d'équations 3.106 à chaque amplitude d'excitation ξ et à chaque fréquence ω . Comme prévu, ce système doit être séparé en deux parties, réelle et imaginaire que nous pouvons écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cc} \frac{MV^2}{L} + K_{\delta_1} + \frac{3}{4}\Delta_1^2 Q_{\delta_1} & -\frac{MV^2}{L} + K_{\delta_2} + \frac{3}{4}\Delta_2^2 Q_{\delta_2} \\ L_1 K_{\delta_1} + \frac{3}{4}\Delta_1^2 L_1 Q_{\delta_1} & -L_2 K_{\delta_2} - \frac{3}{4}\Delta_2^2 L_2 Q_{\delta_2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} & \frac{MVL_1}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} & -\frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Im}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Im}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{MV^2}{L}\xi \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \omega \begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} & \frac{MVL_1}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} & -\frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} + K_{\delta_1} + \frac{3}{4}\Delta_1^2 Q_{\delta_1} & -\frac{MV^2}{L} + K_{\delta_2} + \frac{3}{4}\Delta_2^2 Q_{\delta_2} \\ L_1 K_{\delta_1} + \frac{3}{4}\Delta_1^2 L_1 Q_{\delta_1} & -L_2 K_{\delta_2} - \frac{3}{4}\Delta_2^2 L_2 Q_{\delta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Im}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Im}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \frac{MVL_2}{L}\xi \\ -\omega \frac{I_{zz}V}{L}\xi \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Avec, $\Delta_i^2 = \text{Re}(\Delta_i)^2 + \text{Im}(\Delta_i)^2$

Une application de la méthode de quasi-Newton sécante combinée à la procédure d'initialisation présentée dans §3.5.3, permet de calculer une solution sous la forme :

$$x = \{\text{Re}(\tilde{\Delta}_1), \text{Re}(\tilde{\Delta}_2), \text{Im}(\tilde{\Delta}_1), \text{Im}(\tilde{\Delta}_2)\}^T \tag{3.109}$$

La procédure complète a été implémentée sous Matlab en utilisant le paramétrage du véhicule Citroën C6 avec un pneu Michelin Pilot Primacy 245/45R18 à 2.4 bar et une vitesse $V = 110 \text{ km/h}$. Les paramètres sont présentés sur le tableau 3.1.

Sur la figure 3.11, une comparaison entre les FRF calculées par la méthode de l'équilibrage harmonique et ceux obtenues par simulation est présentée sur un intervalle de fréquence $[0\text{Hz}, 4\text{Hz}]$. Selon la procédure d'initialisation décrite dans §3.5.3, nous choisissons une évolution croissante de la fréquence ω avec un pas de $\Delta\omega = 0.1\text{Hz}$ (c'est-à-dire, $\omega_l = 0.1\text{Hz}$ et $\omega_u = 4\text{Hz}$). Les amplitudes d'angle roue ξ utilisées sont issues des angles au volant ξ_v qui varient de 10° et 70° avec un pas de 20° , avec une démultiplication de 17.

Les FRF simulées sont calculées pour chaque amplitude ξ fixée en faisant varier la pulsation dans l'intervalle $[0\text{Hz}, 4\text{Hz}]$ avec le pas $\Delta\omega$. Pour chaque pulsation une évaluation du spectre de la sortie du modèle est obtenue à travers une FFT. Ceci nous permet d'extraire le fondamental des réponses à la fréquence ω et ensuite obtenir la FRF $H_\delta(\omega)$ en évaluant l'expression 3.104. La procédure est répétée pour toutes les amplitudes ξ .

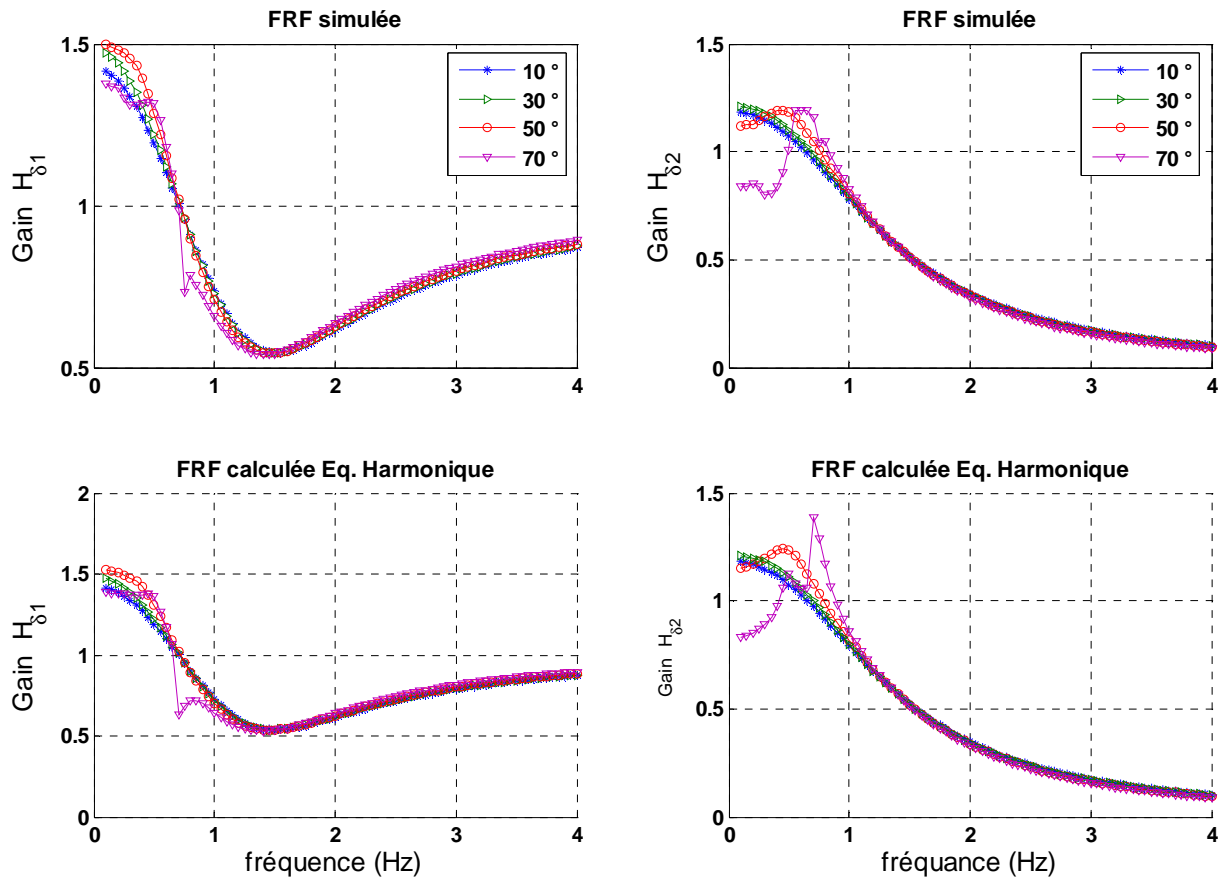


Figure 3.11. FRF calculées par la méthode de l'équilibrage harmonique pour plusieurs angles au volant.

Cette figure indique clairement que la méthode de l'équilibrage harmonique permet de détecter les effets de distorsions sur les FRF. Pour les petites amplitudes, la non linéarité est très peu excitée et la fonction réponse fréquentielle correspondante est presque identique à la FRF du système linéaire. Ceci est notamment le cas pour $\xi_v = 10^\circ$. Egalement, nous pouvons constater qu'autour de ces petites amplitudes, les distorsions harmoniques sont peu présentes comme pour le cas $\xi_v = 30^\circ$. Cependant, à partir d'une certaine amplitude la FRF devient très sensible à l'amplitude d'excitation, d'où l'apparition d'une nette distorsion (voir les courbes correspondantes à $\xi_v = \{50^\circ, 70^\circ\}$).

Pour examiner l'exactitude des résultats, nous avons comparé individuellement les courbes calculées et simulées pour chaque amplitude d'angle volant. Sur les figures 3.12 à 3.16, on compare les résultats des FRF des dérives avant et arrière obtenus pour $\xi_v = \{10^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ\}$.

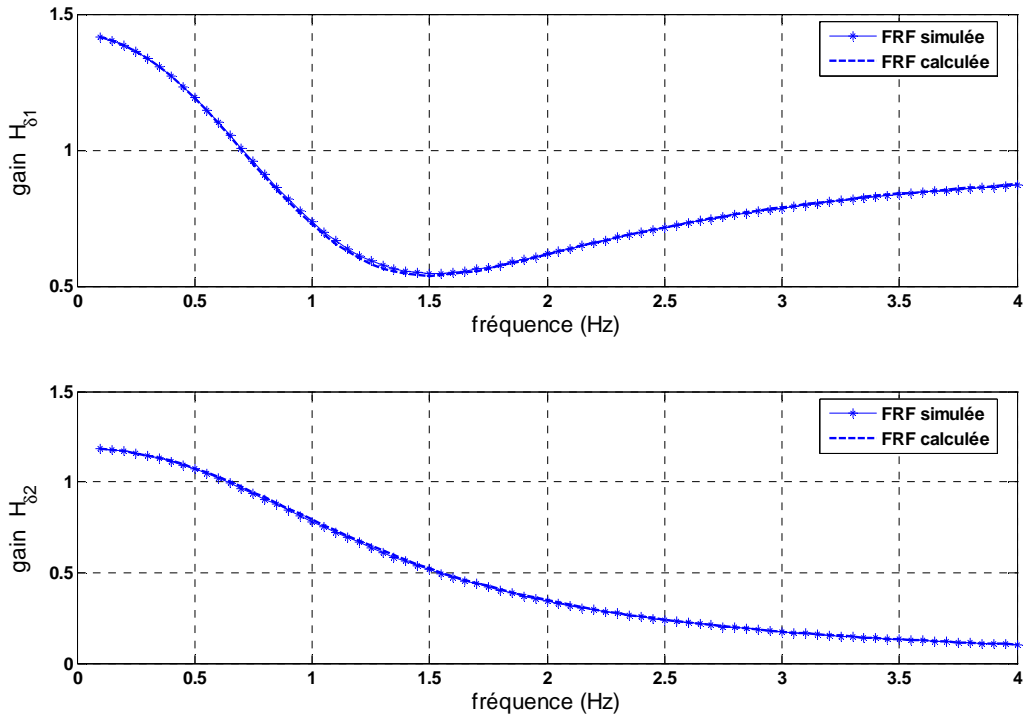


Figure 3.12. Comparaison entre les FRF simulée et les FRF calculées, $\xi_v = 10^\circ$.

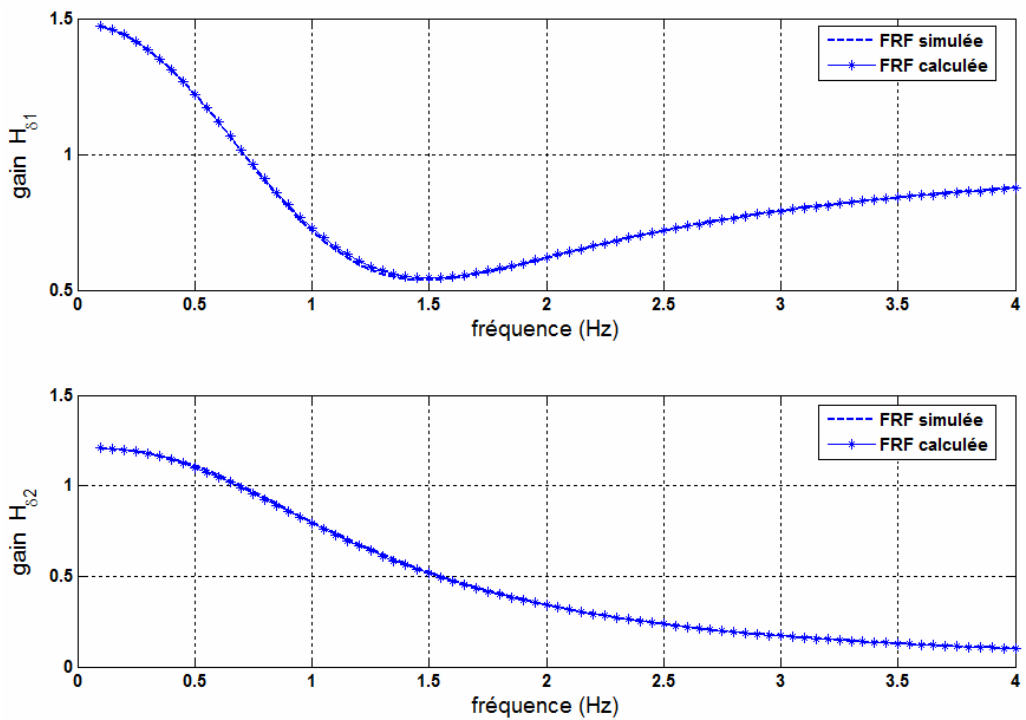


Figure 3.13. Comparaison entre les FRF simulée et les FRF calculées, $\xi_v = 30^\circ$.

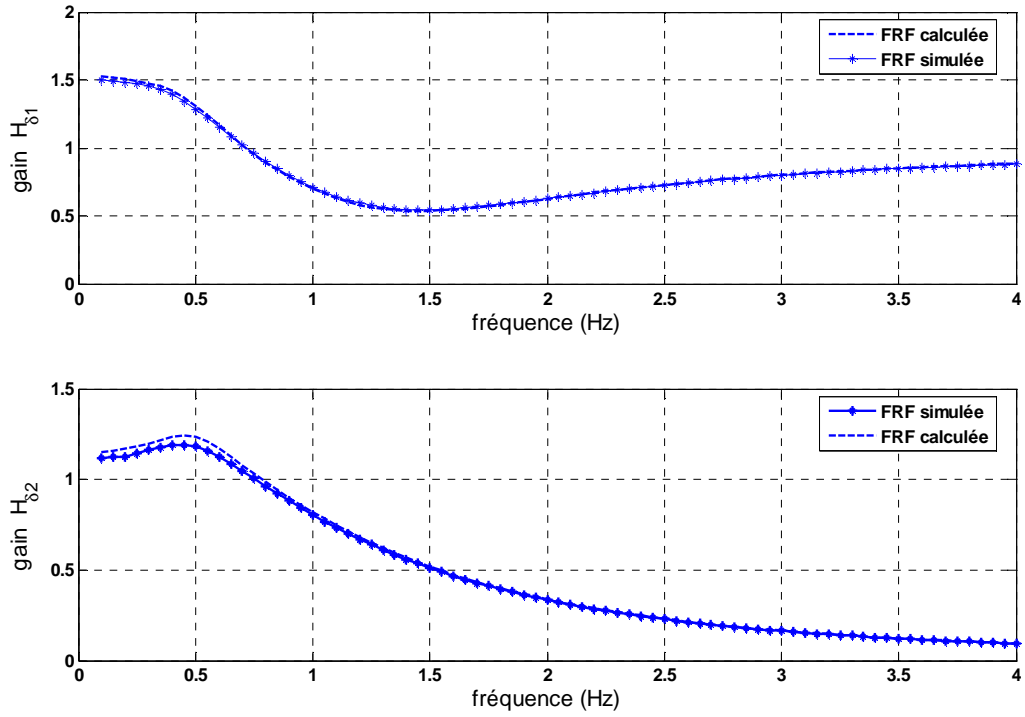


Figure 3.14. Comparaison entre les FRF simulée et les FRF calculées, $\xi_v = 50^\circ$.

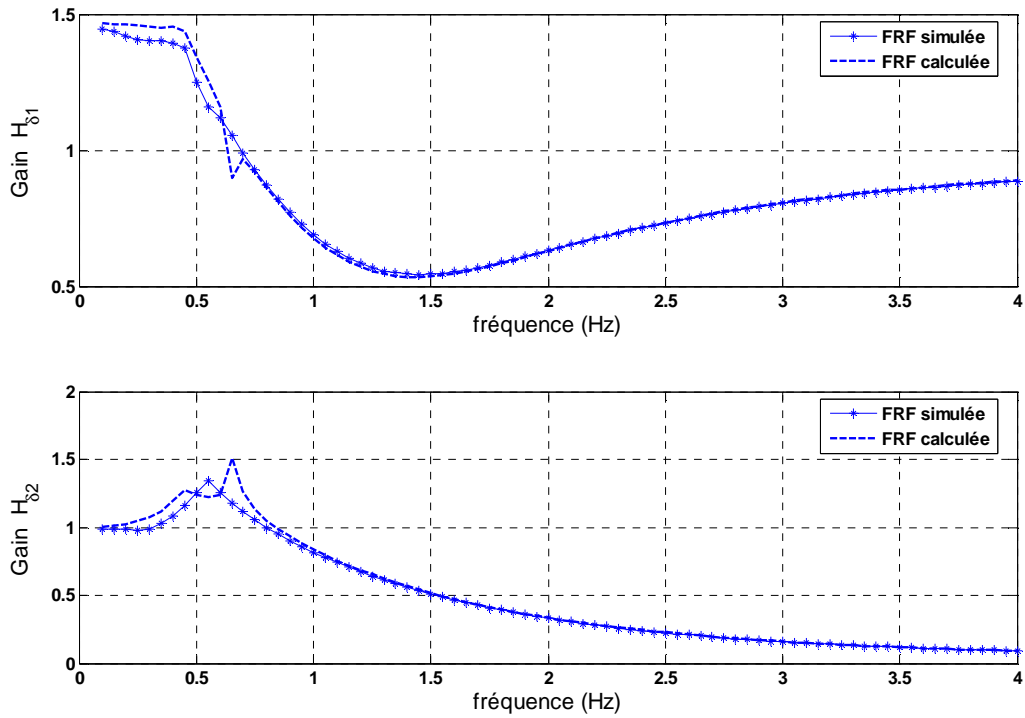


Figure 3.15. Comparaison entre les FRF simulée et les FRF calculées, $\xi_v = 60^\circ$.

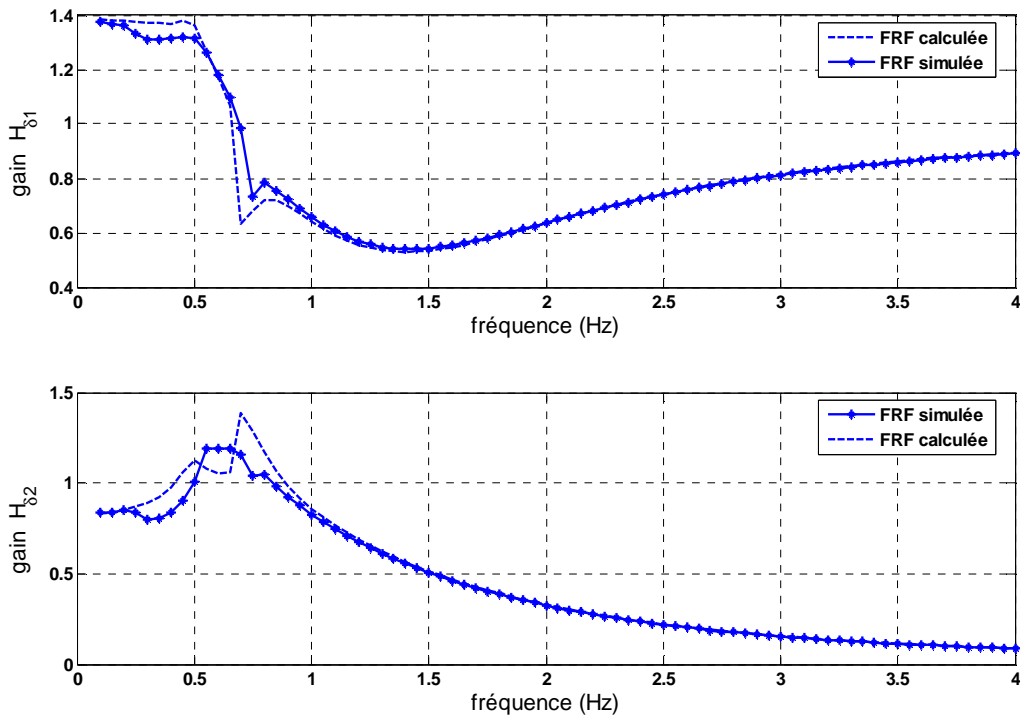


Figure 3.16. Comparaison entre les FRF simulée et les FRF calculées, $\xi_v = 70^\circ$.

La méthode représente un moyen efficace et très peu coûteux en temps de calcul pour extraire les fonctions réponses fréquentielles. Les résultats présentés ci-dessus sont très satisfaisants et représente une première application dans le domaine de la dynamique de véhicule.

Les FRF calculées sont identiques à ceux obtenues par simulation jusqu'à une amplitude d'excitation $\xi_v = 50^\circ$. Pour des amplitudes supérieures, il apparaît un décalage (relativement faible) autour de la fréquence de résonance. Il y a deux raisons différentes à cette erreur d'estimation :

- Lorsque les amplitudes d'excitation sont grandes, les harmoniques d'ordres supérieurs qui composent la réponse du modèle deviennent grandes et souvent non négligeables. Ce qui implique que l'approximation fondatrice 3.55 dans la théorie de la méthode de l'équilibrage harmonique n'est plus valable. Il faudrait donc prendre en compte plus d'harmoniques comme décrit par la méthode d'équilibrage multi-harmonique présentée dans [Fer98][Ren94].
- Pour de grandes amplitudes d'excitation et pour certaines fréquences autour de la fréquence de résonance, la réponse du modèle LD-P3 est instable et divergente. Donc, la réponse du modèle ne peut être approximée par une sinusoïde, comme le montre la figure 3.17. Cette figure représente la réponse du modèle LD-P3 à une entrée sinusoïdale au volant d'amplitude 70° et d'une fréquence 0.7 Hz et une vitesse de 110 km/h . le paramétrage véhicule est donné par le tableau 3.1. L'instabilité est due au dépassement de la limite de validité de l'approximation polynomiale pour le modèle de pneumatique (voir également la figure 2.12). Le modèle de véhicule n'est plus représentatif pour ces cas de figure.

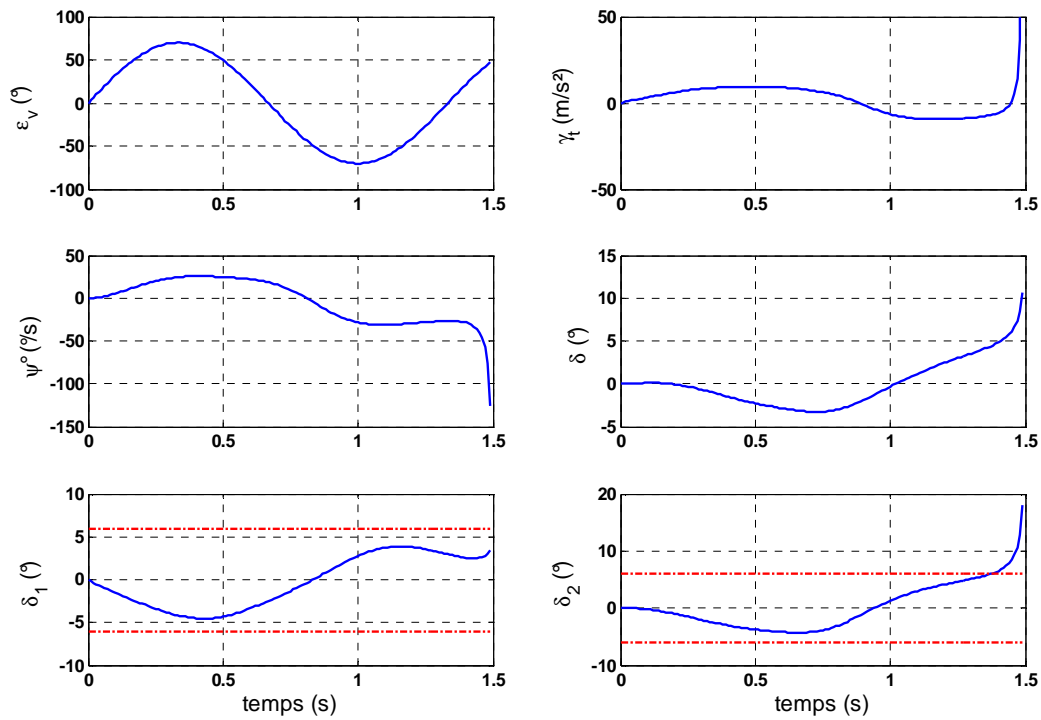


Figure 3.17. Instabilité du modèle LD-P3 lors des grandes excitations. $\xi_v = 70^\circ$, $f = 0.7\text{Hz}$.

Il est également remarqué que pour les grandes amplitudes, il existe des variations brusques dans les FRF. Ceci est appelé phénomène de saut. Ce phénomène est dû à l'existence de plusieurs solutions pour la même fréquence lors de la résolution du système 3.108. Nous savons qu'avec une procédure d'initialisation appropriée, il est facile d'investiguer l'existence de ces solutions. Sur la figure 3.18, la méthode de quasi-Newton sécante a été utilisée avec une initialisation croissante et décroissante en fréquence comme décrite dans §3.5.3-a.

Dans l'intervalle $[0\text{Hz}, 0.65\text{Hz}]$, il existe deux comportements possibles selon le sens d'évolution de la fréquence. Si on imagine que pour une amplitude d'excitation constante, la fréquence évolue continuellement dans un sens ou dans l'autre, on obtient l'une ou l'autre des FRF présentées sur la figure 3.18. Le point « M » à 0.65Hz est appelé point de bifurcation.

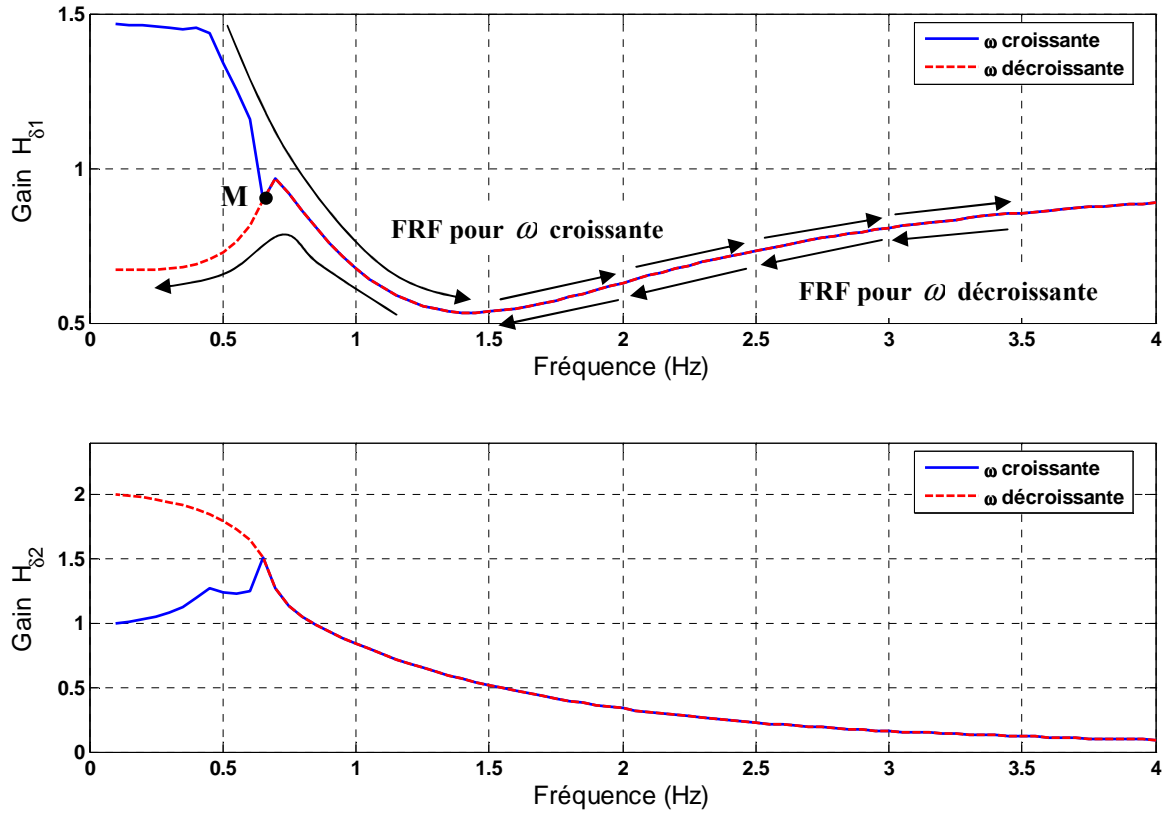


Figure 3.18. Existence de différentes solutions pour les FRF.

e. Evolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude d'excitation

La pulsation naturelle $\omega_n(\Delta_1, \Delta_2)$ et l'amortissement $\eta(\Delta_1, \Delta_2)$ sont régis par les équations 3.98 à 3.100. Une description de l'évolution de ces paramètres est présentée pour différentes vitesses sur les figures 3.19 à 3.21. Les figures sont obtenues avec des amplitudes de dérives Δ_i variant de 0° à 4.5° pour des vitesses $V = \{50, 90, 130\} km/h$. Une représentation tridimensionnelle paraît être la mieux adaptée pour décrire la pulsation propre (respectivement l'amortissement) car elle dépend de deux variables à la fois.

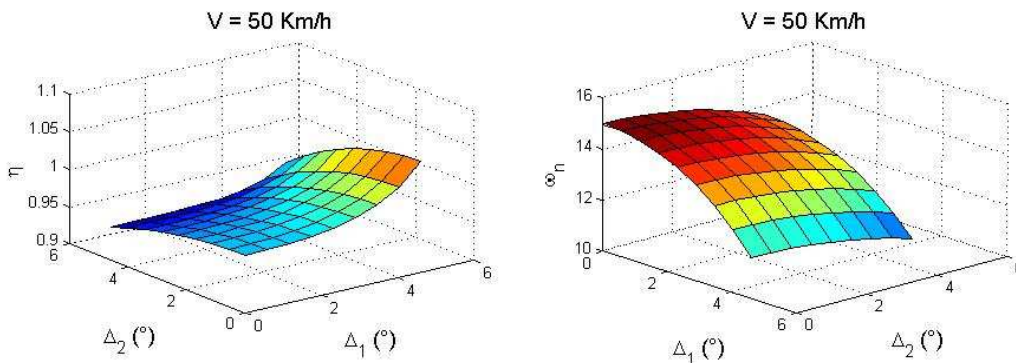


Figure 3.19. Evolution de ω_n et η en fonction des amplitudes des dérives. $V = 50 km/h$

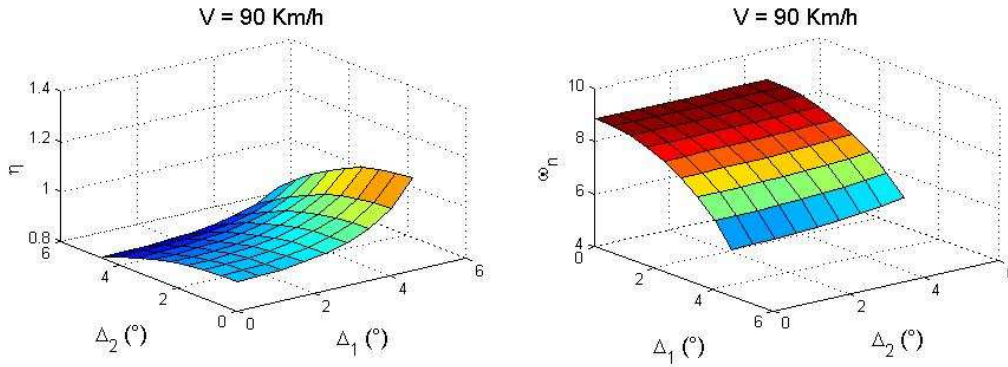


Figure 3.20. Evolution de ω_n et η en fonction des amplitudes des dérives. $V = 90\text{km/h}$

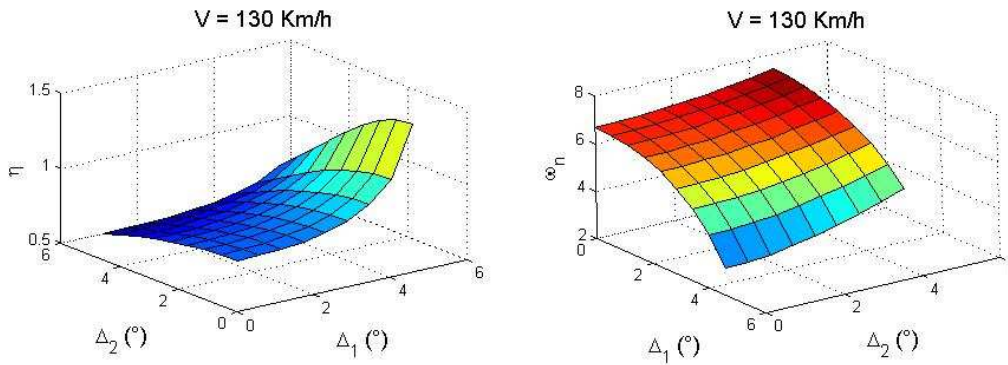


Figure 3.21. Evolution de ω_n et η en fonction des amplitudes des dérives. $V = 130\text{km/h}$

Lors de la présentation des effets de non linéarité sur la réponse d'un système, nous avons vu que les paramètres modaux du système dépendent directement de l'amplitude de l'excitation. Or, ici on voit que ces paramètres dépendent plutôt de l'amplitude des réponses du modèle. Cependant, ces deux aspects sont similaires, car l'amplitude d'excitation et l'amplitude de la réponse sont liées par les fonctions réponses fréquentielles $H_{\delta_1}(\omega)$ et $H_{\delta_2}(\omega)$.

f. Obtention des FRF pour la vitesse de lacet ψ et dérive au CdG δ

Les fonctions de transferts de vitesse de lacet et de dérive au CdG s'obtiennent à l'aide de la transformé de Laplace comme suit :

$$H_{\psi}(s) = \frac{L[\dot{\psi}(t)]}{L[\varepsilon_r(t)]} \quad (3.110)$$

$$H_{\delta}(s) = \frac{L[\delta(t)]}{L[\varepsilon_r(t)]} \quad (3.111)$$

Avec, $L[.]$ étant l'opérateur de Laplace [Dit79].

La FRF est directement déduite de la fonction de transfert en remplaçant s par $i\omega$.

Une fois les FRF des dérivées avant et arrière calculées et à partir de 3.12, les FRF des vitesse de lacet et de dérive au CdG s'obtiennent en fonction de $H_{\delta_1}(\omega)$ et $H_{\delta_2}(\omega)$, comme suit :

$$H_{\dot{\psi}}(\omega) = \frac{V}{L}(H_{\delta_1}(\omega) - H_{\delta_2}(\omega) + 1) \quad (3.112)$$

$$H_{\delta}(\omega) = \frac{L_1}{L}H_{\delta_2}(\omega) + \frac{L_2}{L}(H_{\delta_1}(\omega) + 1) \quad (3.113)$$

Pour vérifier ces deux dernières équations, une comparaison entre les FRF calculées est simulées est réalisée. La figure 3.21a présente les FRF de vitesse de lacet pour des amplitudes d'excitation au volant allant de 10° à 70° par pas de 20° . La figure 3.21b présente les FRF de dérive au CdG pour les mêmes amplitudes au volant.

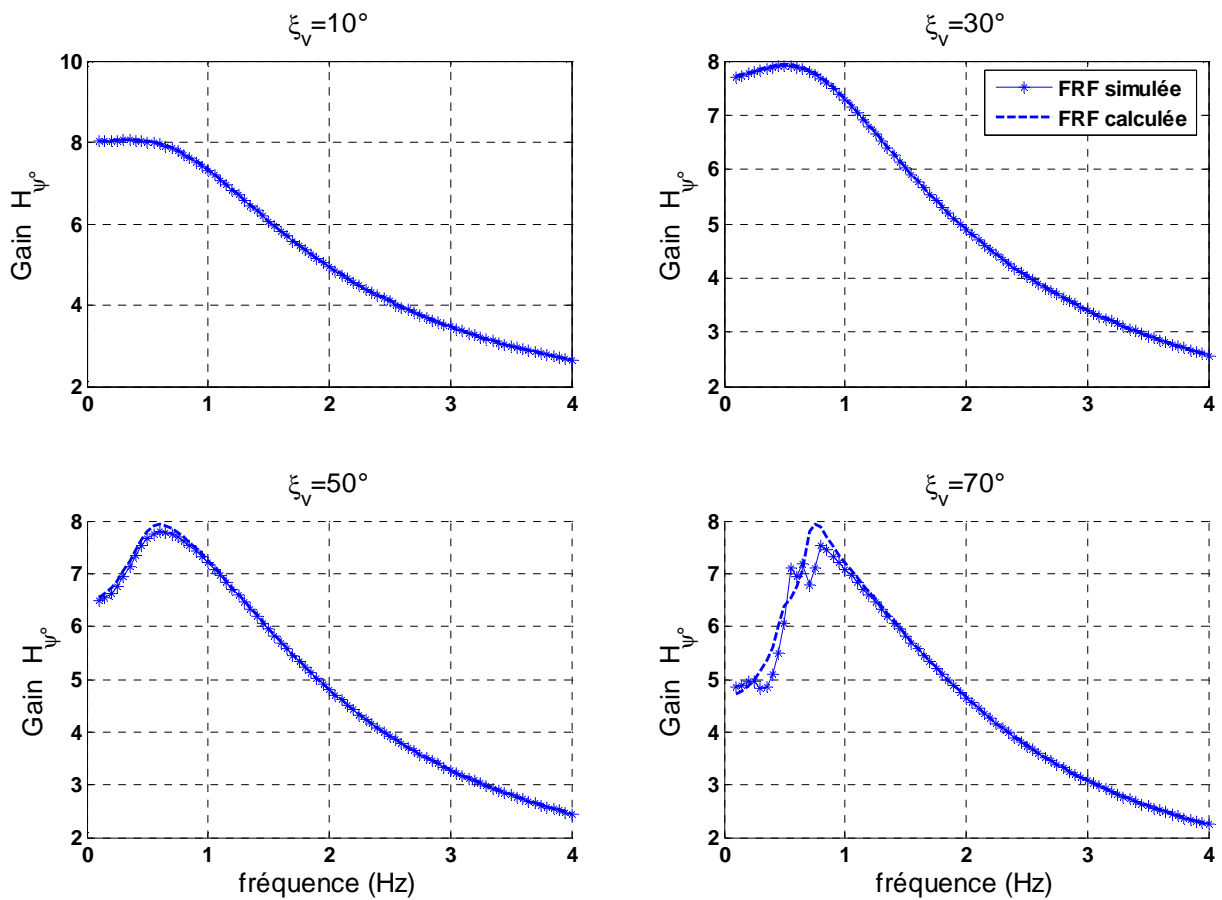


Figure 3.21a. Comparaison entre les FRF simulées et calculées de la vitesse de lacet.

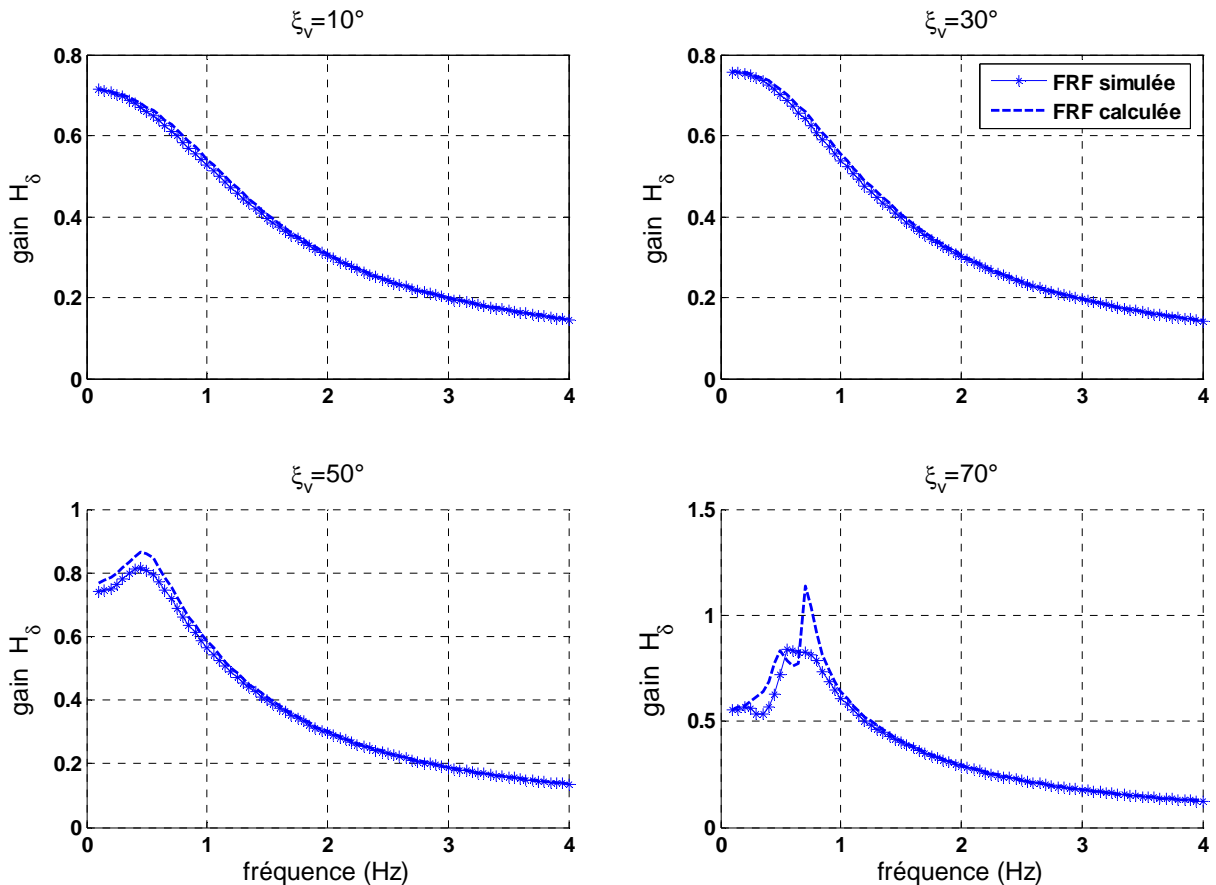


Figure 3.21b. Comparaison entre les FRF simulées et calculées de la dérive au CdG.

Les résultats affichés ci-dessus permettent de confirmer l'efficacité de la méthode de l'équilibrage harmonique pour étudier analytiquement les FRF et les réponses du modèle en régime établi. Malheureusement, cette méthode ne donne aucune information sur les régimes transitoires de la réponse du véhicule lorsque celui-ci est excité par une entrée au volant sinusoïdale.

Dans un cas pratique, supposons que le véhicule est dans une attitude donnée décrite par un état initial (ψ_0, δ_0) . Nous cherchons une méthode qui permet de décrire le comportement du véhicule lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale à partir de cet état initial. La méthode de Krylov-Bogoliubov présentée dans la prochaine section correspond parfaitement à ce type de problématique.

3.6. Méthodes de Krylov-Bogoliubov pour les régimes transitoires

Dans la littérature il existe différentes approches pour traiter les systèmes non linéaires oscillants (auto-oscillants ou forcés) [Vid02] [Yag96]. Parmi les méthodes d'approximation, celles basées sur le calcul de la moyenne sont les plus utilisées. Une telle approximation est présentée dans [Kha92]. Elle consiste à établir une relation entre l'évolution de la phase et de l'amplitude en éliminant l'échelle du temps. Cette procédure est efficace et partage de très près les mêmes idées que la méthode de la transformée d'Hilbert présentée dans [Fel94] [Bra97]. Toutefois, il est préférable d'utiliser des méthodes permettant de décrire l'évolution de l'amplitude et de la phase indépendamment en fonction du temps. La méthode de Krylov-

Bogoliubov (KB) est sans doute l'une des procédures les plus efficaces pour répondre à ce besoin.

La méthode de KB est dérivée de la méthode de la variation lente des coefficients proposée par Van der Pol [Sil69] pour l'évaluation des oscillations périodiques couplées. La méthode de Van der Pol est également à la base de l'analyse par équilibrage harmonique (fonction descriptive). La méthode KB a été améliorée par Popov pour l'analyse des oscillations non linéaires transitoires amorties [Sil69]. Dans [Bou06], une démarche intéressante basée sur l'analyse par la méthode KB est décrite pour la modélisation et le contrôle des instabilités de combustion. L'analyse a montré que le modèle est capable de décrire le phénomène de coexistence, simultanée, de deux modes non harmoniques, et les performances de l'approximation K-B sont largement illustrées par les tests de simulation.

La méthode KB fournit plusieurs ordres de précision, la première approximation décrit les propriétés fondamentales de la solution, et les ordres d'approximation élevés permettent d'avoir plus de précision. En général, la première approximation est suffisante pour une bonne évaluation de l'amplitude et de la phase. L'ensemble de la théorie de la méthode KB peut être consulté dans [Lan00] [Bou06].

A ce stade, il est important de noter qu'il n'existe aucune application de cette méthode dans le domaine de la dynamique de véhicule.

3.6.1. Présentation

Pour introduire l'analyse des systèmes non linéaire par la méthode de KB, il est nécessaire de considérer les équations du système non linéaire multivariable sous la forme

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = F_k(x, \dot{x}) \quad (3.114)$$

Avec $\dot{x}_k = dx_k/dt$, $\ddot{x}_k = d^2x_k/dt^2$. La fonction non linéaire s'écrit

$$F_k(x, \dot{x}) = \varepsilon f_k(x, \dot{x}) \quad (3.115)$$

Où ε est un paramètre très petit ($\varepsilon \ll 1$) indiquant que la contribution de la fonction non linéaire $F_k(x, \dot{x})$ dans la réponse linéaire du système est peu influente mais non négligeable. Soit $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\dot{x} = \{\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n\}$. Pour la $k^{\text{ième}}$ composante du vecteur x , la méthode KB propose la solution suivante :

$$x_k = a_k \cos(\theta_k) + \varepsilon u_{k,1}(a_k, \theta_k) + \varepsilon^2 u_{k,2}(a_k, \theta_k) + \dots + \varepsilon^m u_{k,m}(a_k, \theta_k) + \dots \quad (3.116)$$

Avec, $\theta_k = \omega_k t + \phi_k$

Où $u_{k,i}(a_k, \theta_k)$ sont des fonctions périodiques de l'angle θ_k avec une période 2π . Dans 3.116, a_k et θ_k sont fonctions du temps et s'expriment par

$$\dot{a}_k = \varepsilon P_{k,1}(a_k) + \varepsilon^2 P_{k,2}(a_k) + \dots + \varepsilon^m P_{k,m}(a_k) + \dots \quad (3.117)$$

$$\dot{\theta}_k = \omega_k + \dot{\phi}_k = \omega_k + \varepsilon Q_{k,1}(a_k) + \varepsilon^2 Q_{k,2}(a_k) + \dots + \varepsilon^m Q_{k,m}(a_k) + \dots \quad (3.118)$$

Maintenant, la solution consiste à déterminer les fonctions $u_{k,i} = u_{k,i}(a_k, \theta_k)$, $P_{k,i} = P_{k,i}(a_k)$ et $Q_{k,i} = Q_{k,i}(a_k)$ de manière à ce que 3.116 représente une solution satisfaisante pour l'équation 3.114.

Il est clair que le calcul de tous ces termes peut être très complexe. D'une façon ou d'une autre, on se limite toujours à un degré bien précis dans la série. Ainsi, la précision de la réponse repose sur le nombre de termes choisi dans les séries 3.116 à 3.118. Dans la plupart des systèmes oscillants, le premier terme de l'approximation apporte une bonne précision quant à la description de l'amplitude et la phase [Lan04]. A présent nous pouvons imaginer la solution approximée au premier ordre suivante :

$$x_k = a_k \cos(\omega_k t + \phi_k) = a_k \cos(\theta_k) \quad (3.119)$$

Où a_k et ϕ_k varient lentement dans le temps, ce qui nous permet d'écrire :

$$\dot{x}_k = -a_k \omega_k \sin(\omega_k t + \phi_k) = -a_k \omega_k \sin(\theta_k) \quad (3.120)$$

A partir de 3.117 et 3.118, nous pouvons obtenir a_k et θ_k au premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{a}_k = \varepsilon P_{k,1}(a_k) \\ \dot{\theta}_k = \omega_k + \dot{\phi}_k = \omega_k + \varepsilon Q_{k,1}(a_k) \end{cases} \quad (3.121)$$

L'amplitude a_k et la phase ϕ_k dépendent des conditions initiales. A partir de [Sil69], les fonctions $P_{k,1}(a_k)$ et $Q_{k,1}(a_k)$ sont essentiellement exprimées par les coefficients du premier terme de la série de fourrier de la fonction $f_k(x, \dot{x})$

$$\begin{cases} P_{k,1}(a_k) = \frac{-1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f_k(a_1 \cos(\theta_1), \dots, a_n \cos(\theta_n), -a_1 \omega_1 \sin(\theta_1), \dots, -a_n \omega_n \sin(\theta_n)) \cos(\theta_k) d\theta_k \\ Q_{k,1}(a_k) = \frac{-1}{2\pi\omega_0 a_k} \int_0^{2\pi} f_k(a_1 \cos(\theta_1), \dots, a_n \cos(\theta_n), -a_1 \omega_1 \sin(\theta_1), \dots, -a_n \omega_n \sin(\theta_n)) \sin(\theta_k) d\theta_k \end{cases} \quad (3.122)$$

Dans le but de simplifier le calcul résultant de l'évaluation de l'équation 3.122, il serait préférable d'écrire la fonction $f_k(x, \dot{x})$ sous la forme d'une série de fourrier. Pour la plupart des fonctions non linéaires analytiques existantes, une simple manipulation des règles de transformation trigonométrique permet d'avoir :

$$\begin{aligned} & f_k(a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \dots, a_n \cos(\omega_n t + \phi_n), -a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1), \dots, -a_n \omega_n \sin(\omega_n t + \phi_n)) \\ &= H_{kk} \sin(\omega_k t + \phi_k) + G_{kk} \cos(\omega_k t + \phi_k) + \sum_{\omega_l \neq \omega_k}^r (H_{lk} \sin(\omega_l t + \phi_l) + G_{lk} \cos(\omega_l t + \phi_l)) \end{aligned} \quad (3.123)$$

Où ω_l et ϕ_l sont respectivement des combinaisons linéaires de $\omega_1, \dots, \omega_n$ et de ϕ_1, \dots, ϕ_n , r est le nombre de combinaison linéaires possibles de $\omega_1, \dots, \omega_n$ différentes de ω_k . Une fois la série de fourrier établie, les fonctions 3.122, s'écrivent :

$$\begin{cases} P_{k,1}(a_k) = \frac{-1}{2\omega_0} H_{kk}(a_1, \dots, a_n, \phi_1, \dots, \phi_n) \\ Q_{k,1}(a_k) = \frac{-1}{2\omega_0 a_k} G_{kk}(a_1, \dots, a_n, \phi_1, \dots, \phi_n) \end{cases} \quad (3.124)$$

Finalement, la solution proposée est décrite par les équations 3.120 à 3.124. Ce résultat est très proche de celui proposé par la méthode de Van der Pol et s'inscrit dans le même contexte que la linéarisation harmonique.

Dans la généralité des systèmes non linéaires, l'écriture de la fonction non linéaire sous la forme 3.115 n'est pas toujours évidente car le paramètre ε est souvent inexistant. Pour éviter ce type de limitations nous pouvons poser $\varepsilon = 1$, d'où $f_k(x, \dot{x}) = F_k(x, \dot{x})$ en considérant que la contribution de la fonction $f_k(x, \dot{x})$ n'est pas dominante dans la réponse du système. Avant de présenter l'application de cette méthode au modèle LD-P3, une mise en forme des équations du modèle s'impose pour obtenir la forme 3.114. La procédure de mise en forme sera abordée dans la prochaine section.

3.6.2. Mise en forme des équations

L'objectif de cette section est de montrer la procédure suivie pour réécrire le modèle bicyclette non linéaire polynomiale LD-P3 sous la forme 3.114. La dynamique du modèle LD-P3 est décrite par l'équation 3.13 (également 3.14)

$$A \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_2^3 \end{bmatrix} = D \dot{\varepsilon}_r + E \varepsilon_r \quad (3.125)$$

qui peut être réécrite en multipliant des deux cotés par A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} = A^{-1} D \dot{\varepsilon}_r + A^{-1} E \varepsilon_r - A^{-1} B \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} - A^{-1} C \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_2^3 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

en effectuant une dérivée des deux cotés, l'équation devient :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} = D' \ddot{\varepsilon}_r + E' \dot{\varepsilon}_r - B' \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} - 3C' \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \delta_1^2 \\ \dot{\delta}_2 \delta_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

En ajoutant des deux cotés de l'équation le terme $\omega_0 I [\delta_1 \quad \delta_2]^T$, cette dernière devient

$$\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \omega_0 I \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = D' \ddot{\varepsilon}_r + E' \dot{\varepsilon}_r + \omega_0 I \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} - B' \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} - 3C' \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \delta_1^2 \\ \dot{\delta}_2 \delta_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

Avec, I étant la matrice identité 2×2 , ω_0 une pulsation constante arbitraire à fixer ultérieurement, les équations résultantes mises en forme sont :

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 + \omega_0 \delta_1 = F_1(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\varepsilon}_r, \ddot{\varepsilon}_r) = \mathcal{F}_1(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\varepsilon}_r, \ddot{\varepsilon}_r) \\ \ddot{\delta}_2 + \omega_0 \delta_2 = F_2(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\varepsilon}_r, \ddot{\varepsilon}_r) = \mathcal{F}_2(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\varepsilon}_r, \ddot{\varepsilon}_r) \end{cases} \quad (3.129)$$

Avec $\varepsilon = 1$;

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 + \omega_0 \delta_1 = D'_{11} \ddot{\varepsilon}_r + E'_{11} \dot{\varepsilon}_r + \omega_0 \delta_1 - B'_{11} \dot{\delta}_1 - B'_{12} \dot{\delta}_2 - 3C'_{11} \dot{\delta}_1 \delta_1^2 - 3C'_{12} \dot{\delta}_2 \delta_2^2 \\ \ddot{\delta}_2 + \omega_0 \delta_2 = D'_{21} \ddot{\varepsilon}_r + E'_{21} \dot{\varepsilon}_r + \omega_0 \delta_2 - B'_{21} \dot{\delta}_1 - B'_{22} \dot{\delta}_2 - 3C'_{21} \dot{\delta}_1 \delta_1^2 - 3C'_{22} \dot{\delta}_2 \delta_2^2 \end{cases} \quad (3.130)$$

Avec B'_{ij} (respectivement C'_{ij} , D'_{ij} , E'_{ij}) étant la composante de la matrice B' (respectivement C' , D' , E') à la ligne i et la colonne j . Le calcul des matrices B' , C' , D' et E' donne :

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{L_1^2 K_{\delta 1}}{VI_{zz}} + \frac{V}{L} + \frac{K_{\delta 1}}{MV} & \frac{L_1 L_2 K_{\delta 2}}{VI_{zz}} - \frac{V}{L} + \frac{K_{\delta 2}}{MV} \\ -\frac{L_1 L_2 K_{\delta 1}}{VI_{zz}} + \frac{V}{L} + \frac{K_{\delta 1}}{MV} & \frac{L_2^2 K_{\delta 2}}{VI_{zz}} - \frac{V}{L} + \frac{K_{\delta 2}}{MV} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

$$C' = \frac{1}{MVI_{zz}} \begin{bmatrix} (L_1^2 M + I_{zz}) Q_{\delta 1} & -(L_1 L_2 M - I_{zz}) Q_{\delta 2} \\ (L_1 L_2 M - I_{zz}) Q_{\delta 1} & (L_2^2 M + I_{zz}) Q_{\delta 2} \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

$$D' = -\frac{V}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

$$E' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

3.6.3. Application de la méthode KB au modèle LD-P3

Le modèle LD-P3 étant mis en forme et prêt à être utilisé avec la méthode KB. Cependant il reste un détail à éclaircir concernant le choix du paramètre additionnel ω_0 . En effet, ω_0 ne peut pas prendre une valeur aléatoire. La méthode KB approximée au premier ordre suppose que la solution est donnée par 3.119. Ce qui implique qu'avec le modèle 3.129, la réponse va forcément osciller avec une fréquence ω_0 . Si le modèle LD-P3 est libre ($\varepsilon_r(t) = 0$), il n'existera aucune indication sur la valeur que doit prendre ω_0 . Or, notre objectif étant d'étudier la réponse transitoire lorsque le système est forcé par une entrée au volant sinusoïdale à fréquence constante ω^* . Dans ce cas, la réponse du système va

forcement osciller autour d'une fréquence très proche de ω^* . On en déduit, que ω_0 doit être fixé à la fréquence d'excitation d'entrée, c.-à-d. $\omega_0 = \omega^*$.

Afin d'établir une analyse avec la méthode KB du système forcé, considérant le braquage roue comme une entrée sinusoïdale :

$$\varepsilon_r = \xi \cos(\omega t) \quad (3.135)$$

Les dérivées premières et secondes sont données par :

$$\dot{\varepsilon}_r = -\omega \xi \sin(\omega t) \quad (3.136)$$

$$\ddot{\varepsilon}_r = -\omega^2 \xi \cos(\omega t) \quad (3.137)$$

Selon la méthode KB, les réponses s'écrivent :

$$\delta_1(t) = \Delta_1 \cos(\omega t + \phi_1) = \Delta_1 \cos(\theta_1) \quad (3.138)$$

$$\delta_2(t) = \Delta_2 \cos(\omega t + \phi_2) = \Delta_2 \cos(\theta_2) \quad (3.139)$$

Une application de la méthode KB permet d'avoir les amplitudes Δ_i et les phases ϕ_i par

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_1 = & \frac{-1}{2\omega} (-D'_{11} \omega^2 \xi \sin(\phi_1) - E'_{11} \omega \xi \cos(\phi_1) + B'_{11} \omega \Delta_1 + B'_{12} \omega \Delta_2 \cos(\Delta\phi)) \\ & + \frac{3}{4} C'_{11} \omega \Delta_1^3 + \frac{3}{4} C'_{12} \omega \Delta_2^3 \cos(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_2 = & \frac{-1}{2\omega} (-D'_{21} \omega^2 \xi \sin(\phi_2) - E'_{21} \omega \xi \cos(\phi_2) + B'_{21} \omega \Delta_1 \cos(\Delta\phi) + B'_{22} \omega \Delta_2 \\ & + \frac{3}{4} C'_{21} \omega \Delta_1^3 \cos(\Delta\phi) + \frac{3}{4} C'_{22} \omega \Delta_2^3) \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & \frac{-1}{2\omega \Delta_1} (-D'_{11} \omega^2 \xi \cos(\phi_1) - E'_{11} \omega \xi \sin(\phi_1) + \omega \Delta_1 + B'_{12} \omega \Delta_2 \sin(\Delta\phi)) \\ & + \frac{3}{4} C'_{12} \omega \Delta_2^3 \sin(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 = & \frac{-1}{2\omega \Delta_2} (-D'_{21} \omega^2 \xi \cos(\phi_2) - E'_{21} \omega \xi \sin(\phi_2) + \omega \Delta_2 - B'_{12} \omega \Delta_1 \sin(\Delta\phi)) \\ & - \frac{3}{4} C'_{21} \omega \Delta_1^3 \sin(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (3.143)$$

Avec, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

Les détails du calcul sont présentés dans l'annexe B. Nous remarquons bien que l'évolution de l'amplitude et de la phase sont directement liés aux paramètres organiques du véhicule et dépendent de l'état initial $\Delta_i(0)$ et $\phi_i(0)$. L'inconvénient avec les équations résultantes c'est leurs degrés de complexité et de couplage entre les amplitudes et les phases. Une résolution analytique est certainement préférable mais elle est quasi-impossible. L'intégration numérique de ces équations différentielles couplées reste donc la seule voie envisageable.

Pour illustrer les résultats de la méthode KB, une comparaison a été réalisée avec les résultats obtenus à partir de la simulation. Ces résultats de simulation sont issus d'une résolution numérique du modèle LD-P3 (défini par l'équation 3.13) par la méthode de Runge-Kutta (4,5) avec les mêmes conditions initiales utilisées pour la méthode KB. Les résultats seront présentés pour différentes fréquences d'excitation. Le paramétrage du véhicule est celui d'un Citroën C6 avec un pneu Michelin Pilot Primacy 245/45R18 à 2.4 bar (voir tableau 3.1).

a. Sollicitations à basse fréquence

Soit l'excitation sinusoïdale au volant $\varepsilon_v = \xi_v \cos(2\pi ft)$. Sur les figures 3.22 et 3.23, une comparaison entre les résultats la méthode KB et de la simulation est présentée pour deux vitesses différentes (deux différents niveaux de sollicitation).

1) Premier cas :

- Fréquence : $f = 0.2Hz$;
- Amplitude : $\xi_v = 30^\circ$;
- Vitesse : $V = 90 km/h$;
- Etat initial : $[\Delta_1(0), \phi_1(0), \Delta_2(0), \phi_2(0)] = [-1.9^\circ, 0^\circ, -1.25^\circ, 0^\circ]$.

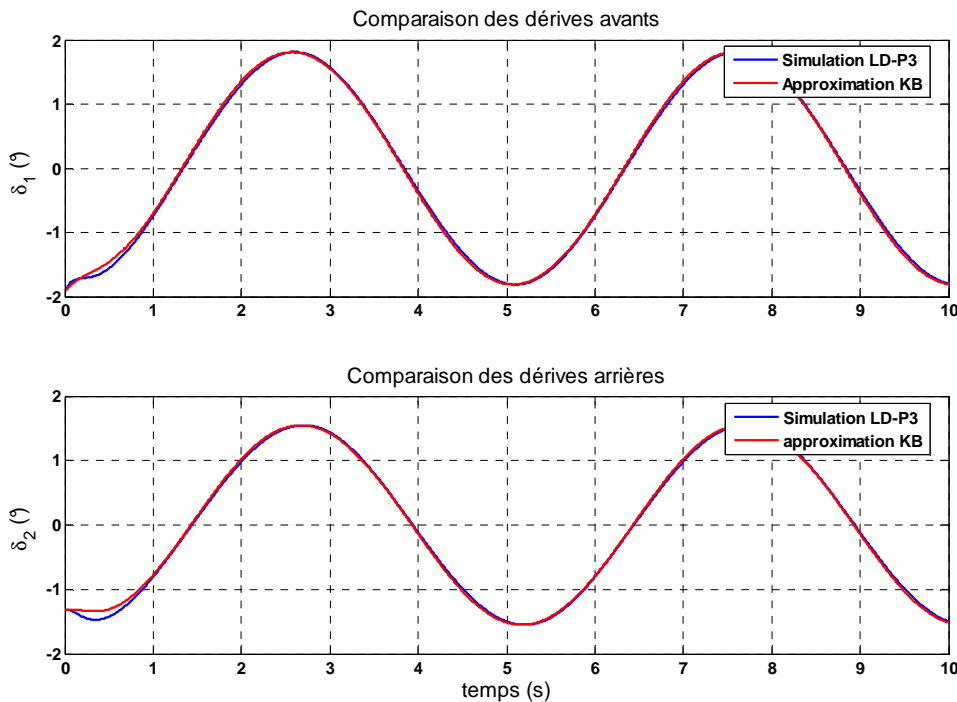


Figure 3.22. Comparaison entre les résultats de la méthode KB et la simulation.

Nous remarquons que la méthode KB permet d'avoir une bonne approximation quant à l'évolution de l'amplitude et de la phase en comparaison avec les résultats de la simulation. Dans ce cas de figure, les régimes transitoires et permanents peuvent être décrits par les équations 3.140 à 3.143

2) Deuxième cas :

- Fréquence : $f = 0.2Hz$;

- Amplitude : $\xi_v = 30^\circ$;
- Vitesse : $V = 120 \text{ km/h}$;
- Etat initial : $[\Delta_1(0), \phi_1(0), \Delta_2(0), \phi_2(0)] = [-1.9^\circ, 0^\circ, -1.25^\circ, 0^\circ]$.

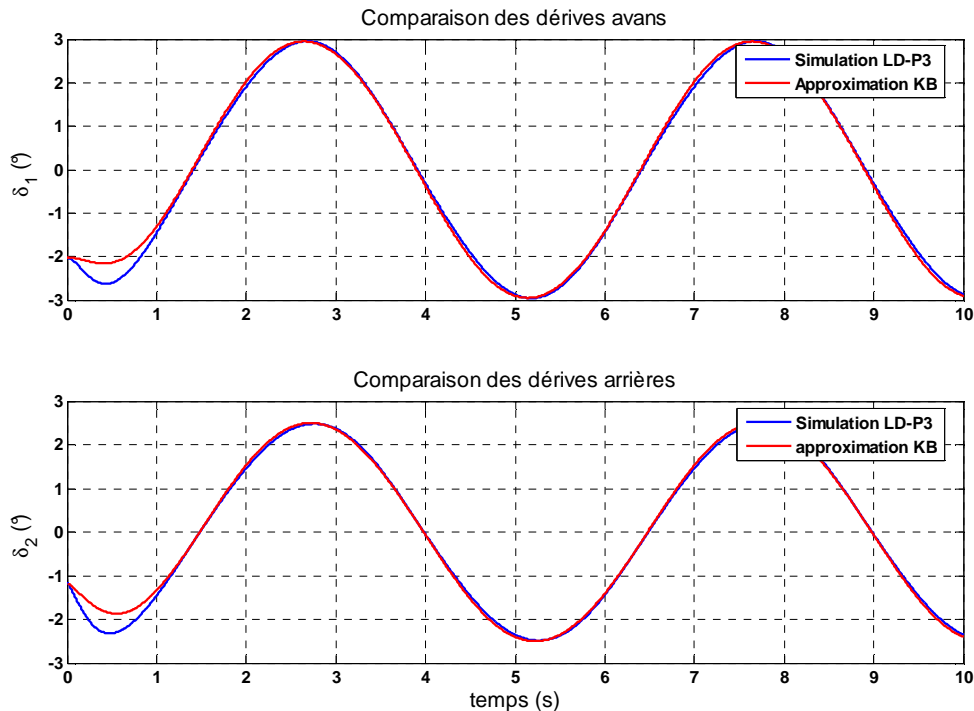


Figure 3.23. Comparaison entre les résultats de la méthode KB et la simulation. $f=0.2\text{Hz}$.

En augmentant la sollicitation (une vitesse de véhicule plus élevée), nous remarquons que la méthode KB permet toujours d'avoir une bonne approximation mais uniquement en régime permanent. En effet, en régime transitoire un écart non négligeable est observé. Cet écart est évalué à plus de 20% du résultat issu de la simulation. Les équations 3.140 à 3.143 ne sont donc pas représentatives alors que les dérives n'ont même pas atteint 3° .

b. Augmentation de la fréquence d'excitation

Pour étudier la solution proposée par la première approximation KB, nous allons analyser les réponses obtenues pour des fréquences plus élevées à savoir $f = 0.5\text{Hz}$ et $f = 1\text{Hz}$ pour une vitesse de 120km/h .

1) Premier cas :

- Fréquence : $f = 0.5\text{Hz}$;
- Amplitude : $\xi_v = 30^\circ$;
- Etat initial : $[\Delta_1(0), \phi_1(0), \Delta_2(0), \phi_2(0)] = [-1.9^\circ, 0^\circ, -1.25^\circ, 0^\circ]$.

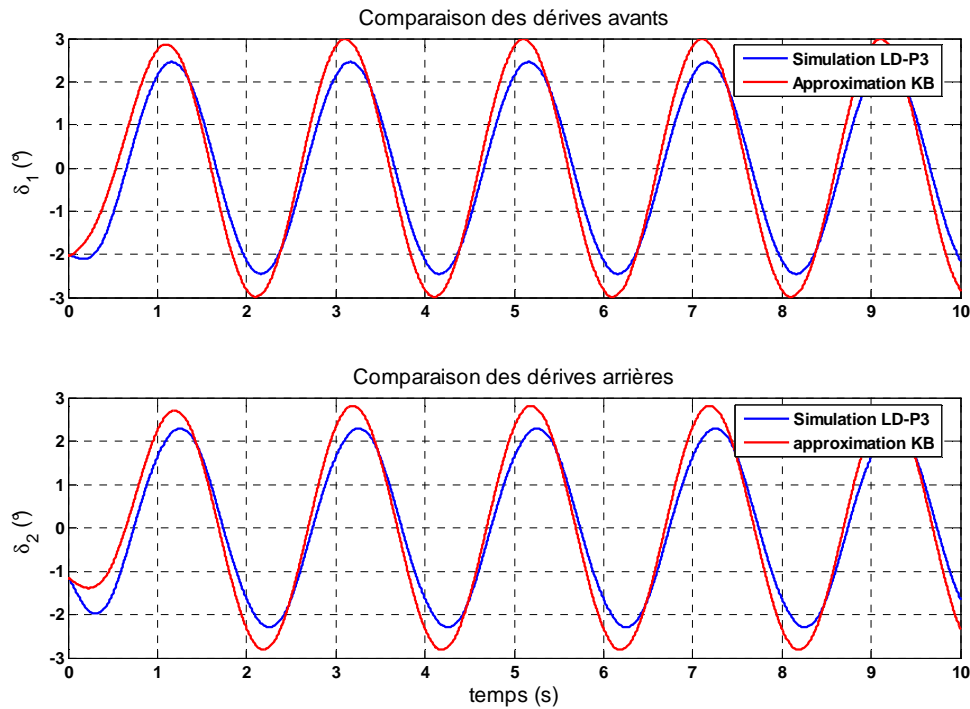


Figure 3.24. Comparaison entre les résultats de la méthode KB et la simulation. $f=0.5\text{Hz}$.

On remarque qu'en augmentant la fréquence d'excitation, l'erreur d'estimation augmente. Egalement, les deux signaux (approximation KB et simulation) sont déphasés. Cette constatation est d'autant plus importante que la fréquence augmente jusqu'à une divergence totale. Ce qui est observé pour une fréquence $f=1\text{Hz}$ avec le cas suivant (voir figure 3.25).

2) Deuxième cas :

- Fréquence : $f = 1\text{Hz}$;
- Amplitude : $\xi_v = 30^\circ$;
- Etat initial : $[\Delta_1(0), \phi_1(0), \Delta_2(0), \phi_2(0)] = [-1.9^\circ, 0^\circ, -1.25^\circ, 0^\circ]$.

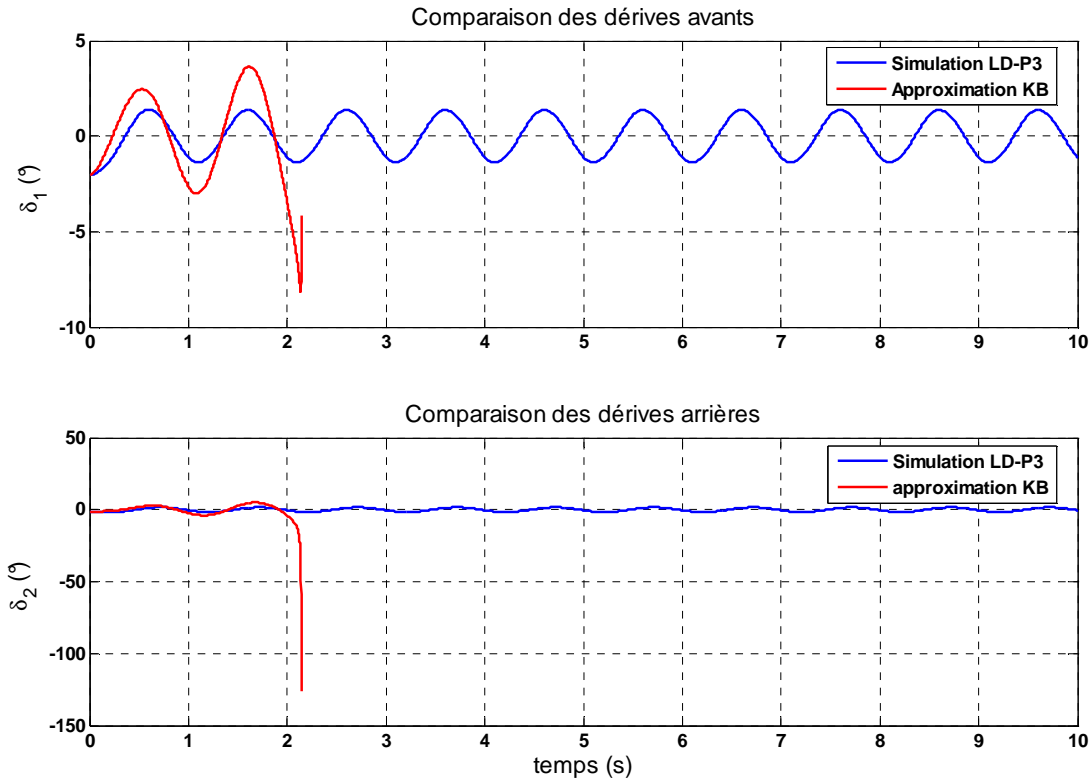


Figure 3.25. Comparaison entre les résultats de la méthode KB et la simulation. $f=1\text{Hz}$.

Ce dernier cas montre clairement l'inadéquation de la première approximation de la méthode KB à décrire l'évolution de l'amplitude et la phase lorsque la fréquence d'excitation est plus élevée. Cette limitation de représentativité aux basses fréquences s'explique par l'approximation au seul premier terme de la méthode KB. En effet, pour la plupart des systèmes **faiblement non linéaires**, l'approximation au premier terme de la solution 3.116 est généralement suffisante pour décrire l'évolution de la réponse dans le temps. Ce qui n'est pas le cas du modèle LD-P3. Si nous observons les fonctions non linéaires $F_i(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\epsilon}_r, \ddot{\epsilon}_r)$ issues de la mise en forme du modèle, nous remarquerons qu'elles contiennent le terme $\omega_0 I[\delta_1 \ \delta_2]^T$ (ajouté au modèle pour l'écrire sous la forme 3.114). Ceci rend les fonctions non linéaires dépendantes de la fréquence d'excitation ω_0 . Lorsque cette fréquence augmente, l'effet des fonctions non linéaire F_i devient plus important. A cela s'ajoute la dérivé (équation 3.127) qui entraîne une perte d'information des variables originelles. Ceci implique que la première approximation KB n'est pas suffisante. La solution doit être complétée par la contribution des termes d'ordres supérieurs de la série 3.116 jusqu'à obtention d'un degré de représentativité suffisamment précis.

En se basant sur les résultats déjà obtenus pour la première approximation KB, nous pouvons imaginer la complexité des équations pouvons être obtenues lorsque nous sommes amenés à considérer plus que le premier terme de la série 3.116. Pour des raisons pratiques et de convenance aux besoins industriels, une telle représentation des réponses du modèle est considérée comme complexe et couteuse en termes temps de calculs. Dans le présent travail nous nous sommes contentés d'analyser les résultats de la première approximation sans faire évoluer les calculs à la deuxième approximation. Cependant, ceci peut être considéré comme une perspective d'un travail future pour améliorer les résultats.

3.7. Méthodes des séries de Volterra

Le concept des séries de Volterra a été introduit par « Vito Volterra » au milieu du 20^{ième} siècle pour analyser les systèmes non linéaires [Vol59]. L'idée des séries de Volterra consiste à définir de manière généralisée une formulation mathématique pour lier les entrées et les sorties de n'importe quel système non linéaire, et cela, sans tenir compte de la nature de la non linéarité présente dans le modèle. La réponse d'un système selon la théorie de Volterra est déclinée en une somme infinie de différents niveaux de contribution de la non linéarité en utilisant une série de fonctions multidimensionnelles.

La littérature est très abondante au sujet des séries de Volterra, en partant de la base théorique jusqu'à des applications industrielles concrètes. Le fondement analytique des séries de Volterra est présenté par Boyd dans [Boy84]. La description complète de la théorie des séries de Volterra dans le domaine fréquentielle et temporelle est introduite dans [Wor01, Sch80, Rug81].

Dans [Bad09] nous retrouvons la première application des séries de Volterra dans le domaine de la dynamique de véhicule. Une analyse du modèle LD-P3 est présentée dans le domaine fréquentiel et temporel. En fréquentiel, la représentation en série de Volterra a permis d'analyser la FRF et la génération d'harmoniques dans la réponse du modèle. Dans le domaine temporel, une analyse de la stabilité basée sur l'extraction de la courbe de surbraquage est déduite à partir des contributions de la non linéarité sur différents niveaux. Cette étude est basée sur une troncation de la série de Volterra aux seuls trois premiers termes qui donnent des résultats très intéressants.

Cafferty et Tomlison [Caf97] illustrent l'utilisation d'une telle représentation pour étudier les modes vibratoires qui caractérisent un amortisseur d'automobile MonroeTM. L'auteur a utilisé une forme fréquentielle de la série de Volterra pour décrire la réponse de l'amortisseur. Seuls les trois premiers termes des séries ont été considérés pour caractériser la réponse lorsque l'amortisseur est excité par une entrée sinusoïdale. Les noyaux de Volterra ont été calculés par la méthode du sondage harmonique initialement introduite dans [Bed71]. Les résultats présentés confirment l'efficacité des séries de Volterra tronquées dans l'analyse des structures non linéaires. Ces travaux représentent l'une des premières applications sur les systèmes de liaison au sol d'un véhicule automobile.

Marzocca et Silva [Mar01] utilisent l'approche des séries de Volterra pour caractériser la réponse aéroélastique non linéaire des surfaces glissantes pour des applications en aéronautique à la NASA. Dans la même optique, Keffe et Reisenhel [Kef05] utilisent la même approche pour caractériser un revêtement acoustique à partir de données expérimentales. D'autres applications récentes peuvent être consultées dans [Sil05][VDW01][Taw01].

3.7.1. Présentation de la base théorique

Afin de décrire et d'analyser le comportement des systèmes dynamiques, une multitude de méthodes ont été développées. En commençant par des données entrées/sorties issues de tests expérimentaux ou en utilisant les équations de mouvement, la réponse du système $y(t)$ peut être complètement décrite pour une entrée $x(t)$. Pour un système linéaire causal et invariant, ceci peut être accompli par une simple convolution dans le domaine

temporelle ou à travers la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel. La réponse est donc donnée par :

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (3.144)$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (3.145)$$

Où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système considéré et $X(\omega)$, $Y(\omega)$ et $H(\omega)$ sont les transformés de Fourier de $x(t)$, $y(t)$ et $h(t)$, respectivement. Toutes les informations concernant un système linéaire sont parfaitement encodées dans la réponse impulsionnelle du système $h(t)$ ou dans sa fonction réponse fréquentielle $H(\omega)$. La forme avec laquelle, un système sera représenté, dépendra surtout de l'objectif à atteindre. Ces deux dernières représentations ne sont manifestement exactes que pour les systèmes linéaires. Elles ne peuvent donc pas être applicables pour un système non linéaire arbitraire. Le concept d'intégrales de convolution a été étendu pour les systèmes non linéaires par Volterra [Vol59], où il propose une technique basée sur une expansion de la réponse en une série infinie qu'on appelle série de Volterra. Cette approche a été développée et intensément utilisée pour une large gamme de structures non linéaires. Pour une entrée arbitraire $x(t)$, la réponse du système $y(t)$ en termes de séries de Volterra prend la forme particulière suivante :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (3.146)$$

Où, $y_n(t)$ est exprimé par des intégrales de convolution multidimensionnelles dont la forme générale est donnée par :

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n) \prod_{i=1}^n x(\tau_i) d\tau_i \quad (3.147)$$

La réponse du système non linéaire est une somme infinie de différentes contributions de la non linéarité. Le premier terme à $n=1$ correspond à la convolution linéaire. Par conséquent, il représente la contribution de la partie linéaire du système. Similairement, le second, le troisième et le $n^{\text{ième}}$ terme représentent respectivement la contribution de la partie bilinéaire, trilineaire, ...etc. [Ben98]. Les fonctions $h_1(t)$, $h_2(t_1, t_2)$, ..., $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sont appelées « noyaux de Volterra ». L'expansion de l'équation 3.146 jusqu'à la troisième approximation donne :

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t-\tau_1, t-\tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \prod_{i=1}^3 x(\tau_i) d\tau_i + \dots \end{aligned} \quad (3.148)$$

Les séries de Volterra sont essentiellement une extension des séries de Taylor aux fonctions de transfert des systèmes invariants [Mar04]. Ici, $h_1(t)$ est la réponse impulsionnelle linéaire et $h_2(t_1, t_2)$, $h_3(t_1, t_2, t_3)$ sont les extensions multidimensionnelles du concept de la

réponse impulsionnelle linéaire. En générale, la définition des séries de Volterra n'impose aucune forme particulière au noyau $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$. En effet, ce noyau admet différentes formes de représentation. Parmi les plus intéressantes, nous pouvons trouver la forme régulière, la forme triangulaire et la forme symétrique comme décrit dans [Rug81].

Les séries de Volterra existent également pour les systèmes multi-entrées dont l'écriture est légèrement plus complexe que les systèmes monovariabiles comme décrit dans [Gif89].

Supposons que le noyau $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ne possède aucune symétrie particulière. Il existe toujours une décomposition canonique de ce noyau en deux parties, symétrique et antisymétrique. Si nous prenons l'exemple de second noyau $h_2(t_1, t_2)$, celui-ci peut s'écrire :

$$h_2(t_1, t_2) = h_2^{sym}(t_1, t_2) + h_2^{asym}(t_1, t_2) \quad (3.149)$$

Où

$$h_2^{sym}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(h_2(t_1, t_2) + h_2(t_2, t_1)) \quad (3.150)$$

$$h_2^{asym}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(h_2(t_1, t_2) - h_2(t_2, t_1)) \quad (3.151)$$

D'après [Wor01], la partie antisymétrique n'a aucune contribution dans la composante $y_2(t)$ de la réponse. Ce qui présume qu'il n'existe aucune contrainte sur le choix de la nature du noyau $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$; il peut donc être choisit comme étant symétrique. Un noyau symétrique est définit invariant pour n'importe quelle permutation de ses arguments (t_1, \dots, t_n) . En considérant le cas du second noyau de Volterra, nous pourrons écrire $h_2(t_1, t_2) = h_2(t_2, t_1)$. Comme nous le verrons par la suite, ce choix est primordial pour simplifier les calculs relatifs à l'extraction des noyaux de Volterra. Si nous avons une série de Volterra dont les noyaux ne sont pas symétriques, une méthode de symétrisation peut être consultée dans [Che94].

Les noyaux de Volterra peuvent également être définit dans le domaine fréquentiel à travers la transformé de Fourier multidimensionnelle comme suit :

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} \cdot d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.152)$$

Où les fonctions H_n sont appelées *fonctions réponse fréquentielle d'ordre supérieur* (ou HFRF). Le chemin inverse mène à la représentation temporelle à travers la transformé de fourrier multidimensionnelle inverse :

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot e^{+j(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} \cdot d\omega_1 \dots d\omega_n \quad (3.153)$$

A partir de 3.152, il est évident que la symétrie des noyaux dans le domaine temporel implique la symétrie de leurs transformés de Fourier. Nous pouvons écrire par exemple $H_2(\omega_1, \omega_2) = H_2(\omega_2, \omega_1)$.

A l'aide d'une transformé de Fourier monodimensionnelle appliquée à l'équation 3.146, la réponse du système non linéaire dans le domaine fréquentielle peut être facilement obtenue comme décrit dans [Caf97]

$$Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + Y_3(\omega) + \dots + Y_n(\omega) \quad (3.154)$$

Avec,

$$Y_1(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) \quad (3.155)$$

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\omega_1, \omega - \omega_1) X(\omega_1) X(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (3.156)$$

$$Y_3(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) X(\omega_1) X(\omega_2) X(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.157)$$

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\omega_1, \dots, \omega - \omega_1 \dots - \omega_{n-1}) X(\omega_1) \dots X(\omega - \omega_1 \dots - \omega_{n-1}) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \quad (3.158)$$

Avec $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ nous pouvant également définir les fonctions de transfert multidimensionnelles d'ordre n notées $H_n(s_1, \dots, s_n)$. Où s_i représentent les variables de Laplace généralisé d'ordre i .

Généralement, lorsque le système est décrit par des équations différentielles, il existe un nombre infini de noyaux de Volterra. Dans la pratique, même si la réponse est composée par une infinité de terme, nous pouvons manipuler uniquement un nombre restreint de termes dans la série. Nous sommes donc confrontés au problème de la représentativité et l'exactitude de la réponse basée sur une série tronquée. Toutefois, si la non linéarité n'est pas trop forte, les premiers termes de la série peuvent être suffisant pour représenter la réponse du système non linéaire.

Différent auteurs [Mar01, Sto91] ont démontré que l'utilisation des quelques premiers termes dans la série donnent une bonne approximation de la réponse lorsqu'elle est comparée à la réponse exact obtenue par une résolution numérique. Il est bien connu que la contribution des noyaux d'ordres supérieurs dans la série est petite par rapport aux premier termes et en général, la $n^{\text{ième}}$ composante de la réponse s'annule lorsque $n \rightarrow \infty$. Toute la puissance et l'élégance des séries de Volterra sont liées à cette propriété. En effet, l'utilisation des séries de Volterra tronquées convient parfaitement à l'analyse des systèmes non linéaires pour une gamme d'excitations d'entrée spécifique. Il est donc primordiale de situer les limites d'excitations à utilisées.

Lorsqu'il s'agit d'utiliser la représentation de la réponse par des séries de Volterra, la question de la validité de cette représentation est souvent ignorée. Non seulement la série doit exister mais elle doit également converger. Ces deux exigences ont fait l'objet d'intenses études dans [Pal77] où l'auteur explicite les différents pièges et contraintes pouvant survenir lors d'une

représentation en séries de Volterra. L'important à retenir de ses travaux est que la classe des systèmes représentable par la série de Volterra dépend à la fois de la nature et du niveau de non linéarité du système. En général, la série de Volterra existe et converge pour les systèmes suffisamment dérivables (au sens de dérivés de Fréchet). Ceci est le cas de tous les systèmes dont la non linéarité est polynomiale (cas du modèle LD-P3 où même le modèle LRDT-P3, voir chapitre 2).

3.7.2. Réponses des séries de Volterra à des entrées spécifiques

Pour pouvoir analyser les systèmes non linéaires sous représentation de Volterra, il est primordial d'étudier les expressions des réponses du système en utilisant les noyaux de Volterra. Dans ce qui suit, les réponses de trois types d'excitations seront illustrées.

3.7.2.1. Excitation Harmonique

L'expression d'une entrée harmonique analytique s'écrit comme suit :

$$x(t) = X e^{j\Omega t} \quad (3.159)$$

La transformé Fourier de cette fonction est donnée par :

$$X(\omega) = 2\pi X \delta(\omega - \Omega) \quad (3.160)$$

Où $\delta(\cdot)$ représente la fonction de Dirac. En injectant l'expression 3.160 dans (3.154), la réponse du système du système non linéaire s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} Y(\omega) = & XH_1(\omega)2\pi\delta(\omega - \Omega) + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 H_2(\omega_1, \omega - \omega_1) \delta(\omega_1 - \Omega) \delta(\omega - \omega_1 - \Omega) d\omega_1 \\ & + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X^3 H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) \delta(\omega_1 - \Omega) \delta(\omega_2 - \Omega) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \Omega) d\omega_1 d\omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.161)$$

En utilisant la propriété du changement d'argument de la fonction Dirac $\delta(\cdot)$ et en calculant les intégrales, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Y(\omega) = & 2\pi X_1 H_1(\Omega) \delta(\omega - \Omega) + 2\pi X^2 H_2(\Omega, \Omega) \delta(\omega - 2\Omega) \\ & + 2\pi X^3 H_3(\Omega, \Omega, \Omega) \delta(\omega - 3\Omega) + \dots \end{aligned} \quad (3.162)$$

En prenant la transformé de Fourier inverse de cette dernière expression

$$y(t) = XH_1(\Omega)e^{j\Omega t} + X^2 H_2(\Omega, \Omega)e^{j2\Omega t} + X^3 H_3(\Omega, \Omega, \Omega)e^{j3\Omega t} + \dots \quad (3.163)$$

Les expressions 3.162 et 3.163 représente respectivement la réponse dans le domaine fréquentielle et temporelle. Ce dernier résultat est très important dans la suite du travail. En effet, le fondement de la méthode du sondage harmonique pour le calcul des noyaux de Volterra est essentiellement basé sur l'analyse de la réponse à ce type d'excitations.

Il est important de noter que cette dernière expression peut être obtenue directement à partir de l'intégrale de convolution temporelle comme suit :

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) X e^{j\Omega(t-\tau_1)} d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) X e^{j\Omega(t-\tau_1)} X e^{j\Omega(t-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) X e^{j\Omega(t-\tau_1)} X e^{j\Omega(t-\tau_2)} X e^{j\Omega(t-\tau_3)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.164}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) = & X e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) e^{-s\tau_1} d\tau_1 + X^2 e^{2st} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s\tau_1} e^{-s\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + X^3 e^{3st} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-s\tau_1} e^{-s\tau_2} e^{-s\tau_3} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.165}$$

$$y(t) = X H_1(s) e^{st} + X^2 H_2(s, s) e^{2st} + X^3 H_3(s, s, s) e^{3st} + \dots \tag{3.166}$$

Avec $s = j\omega$ la variable de Laplace.

3.7.2.2. Excitation harmonique multi-fréquentielle

Lorsque l'excitation harmonique est composée de deux différentes fréquences, la réponse peut également être exprimée à travers les séries de Volterra. Soit l'entrée harmonique bi-fréquentielle suivante :

$$x(t) = X_1 e^{j\Omega_1 t} + X_2 e^{j\Omega_2 t} \tag{3.167}$$

A travers une transformé de Fourier, l'excitation précédente s'écrit dans le domaine fréquentielle comme suit :

$$X(\omega) = TF\{X_1 e^{j\Omega_1 t} + X_2 e^{j\Omega_2 t}\} = 2\pi X_1 \delta(\omega - \Omega_1) + 2\pi X_2 \delta(\omega - \Omega_2) \tag{3.168}$$

En substituant cette dernière expression dans (3.154), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) = & 2\pi X_1 H_1(\omega) \delta(\omega - \Omega_2) + 2\pi X_2 H_1(\omega) \delta(\omega - \Omega_2) \\
 & + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(\omega_1, \omega - \omega_1) \times [X_1 \delta(\omega_1 - \Omega_1) + X_2 \delta(\omega_1 - \Omega_2)] \\
 & \times [X_1 \delta(\omega - \omega_1 - \Omega_1) + X_2 \delta(\omega - \omega_1 - \Omega_2)] d\omega_1 \\
 & + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) \times [X_1 \delta(\omega_1 - \Omega_1) + X_2 \delta(\omega_1 - \Omega_2)] \\
 & \times [X_1 \delta(\omega_2 - \Omega_1) + X_2 \delta(\omega_2 - \Omega_2)] \\
 & \times [X_1 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \Omega_1) + X_2 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \Omega_2)] d\omega_1 d\omega_2 \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{3.169}$$

Après utilisation de la propriété de symétrie des noyaux :

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) = & 2\pi[X_1H_1(\Omega_1)\delta(\omega-\Omega_1) + X_2H_1(\Omega_2)\delta(\omega-\Omega_2) + X_1^2H_2(\Omega_1,\Omega_1)\delta(\omega-2\Omega_1) \\
 & + X_2^2H_2(\Omega_2,\Omega_2)\delta(\omega-2\Omega_2) + 2X_1X_2H_2(\Omega_1,\Omega_2)\delta(\omega-\Omega_1-\Omega_2) \\
 & + X_1^3H_3(\Omega_1,\Omega_1,\Omega_1)\delta(\omega-3\Omega_1) + 3X_1^2X_2H_3(\Omega_1,\Omega_1,\Omega_2)\delta(\omega-2\Omega_1-\Omega_2) \\
 & + 3X_1X_2^2H_3(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_2)\delta(\omega-\Omega_1-2\Omega_2) + X_2^3H_3(\Omega_2,\Omega_2,\Omega_2)\delta(\omega-3\Omega_2) + \dots
 \end{aligned} \quad (3.170)$$

En prenant la transformé de Fourier inverse de cette dernière expression, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 y(t) = & X_1H_1(\Omega_1)e^{j\Omega_1t} + X_2H_1(\Omega_2)e^{j\Omega_2t} + 2X_1X_2H_2(\Omega_1,\Omega_2)e^{j(\Omega_1+\Omega_2)t} \\
 & + X_1^2H_2(\Omega_1,\Omega_1)e^{j2\Omega_1t} + X_2^2H_2(\Omega_2,\Omega_2)e^{j2\Omega_2t} + X_1^3H_3(\Omega_1,\Omega_1,\Omega_1)e^{j3\Omega_1t} \\
 & + 3X_1^2X_2H_3(\Omega_1,\Omega_1,\Omega_2)e^{j(2\Omega_1+\Omega_2)t} + 3X_1X_2^2H_3(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_2)e^{j(\Omega_1+2\Omega_2)t} \\
 & + X_2^3H_3(\Omega_2,\Omega_2,\Omega_2)e^{j3\Omega_2t} + \dots
 \end{aligned} \quad (3.171)$$

3.7.2.3. Excitation Impulsionnelle

Afin de déterminer la réponse impulsionnelle du système sous la représentation de Volterra, nous considérons l'entrée sous la forme suivante :

$$x(t) = a\delta(t) \quad (3.172)$$

En substituant cette entrée dans la réponse 3.146, nous obtenons :

$$y(t) = ah_1(t) + a^2h_2(t,t) + a^3h_3(t,t,t) + \dots \quad (3.173)$$

La réponse est essentiellement composée de la somme des contributions successives des différents noyaux. Cette réponse apporte des informations sur la diagonale temporelle des noyaux. Une deuxième excitation intéressante consiste à utiliser une entrée composée d'une somme de deux impulsions décalées dans le temps

$$x(t) = a\delta(t) + b\delta(t - T_1) \quad (3.174)$$

On trouve alors,

$$\begin{aligned}
 y(t) = & ah_1(t) + bh_1(t - T_1) \\
 & + a^2h_2(t,t) + b^2h_2(t - T_1, t - T_1) + 2abh_2(t, t - T_1) \\
 & + a^3h_3(t,t,t) + b^3h_3(t - T_1, t - T_1, t - T_1) \\
 & + 3a^2bh_3(t,t, t - T_1) + 3ab^2h_3(t, t - T_1, t - T_1) + \dots
 \end{aligned} \quad (3.175)$$

Les séries de Volterra apportent un moyen très efficace et peu complexe pour obtenir une approximation de la sortie lorsque les noyaux sont connus. Inversement, ces réponses peuvent également être utilisées pour effectuer une identification des noyaux. En effet, avec la réponse 3.173 et 3.175 nous pouvons constater que nous obtenons des informations supplémentaires sur les noyaux aux instants $t - T_1$. Si un balayage temporelle est réalisé sur un intervalle

prédéfini, la totalité du premier et du second noyau sera caractérisée dans le domaine temporelle. Dans [Taw95] cette propriété a été exploitée et a permis de créer une procédure expérimentale permettant d'extraire la version temporelle des séries de Volterra pour les systèmes pouvant être excités par des entrées impulsionnelles.

3.7.3. Calcul des noyaux de Volterra

A ce stade, nous réalisons qu'une fois les noyaux de Volterra connus, la réponse du système non linéaire peut être obtenue pour n'importe quelle entrée [Sch80]. Le problème fondamental associé aux séries de Volterra est essentiellement la détermination de leurs noyaux.

3.7.3.1. Etat de l'art

Lors du calcul des noyaux de Volterra, la difficulté réside surtout dans la connaissance préalable du système. En effet, si nous abordons un problème non linéaire en supposant que le système soit régi par un système d'équations différentielles (modèle de connaissance), alors les méthodes de calcul des noyaux sont dites paramétriques. Ainsi, les noyaux de Volterra dépendront directement des paramètres du système. Dans le cas où le système est considéré comme une boîte noire, dont les seules données qu'on peut recueillir sont les entrées/sorties du système, les méthodes de calcul sont dites non paramétriques.

Dans la littérature, il existe une diversité de techniques permettant d'obtenir les noyaux de Volterra. Une schématisation globale des méthodes actuellement utilisées est présentée sur la figure 3.26. Pour la catégorie des processus décrits par un ensemble de données entrées/sorties, Reisel [Rei99] propose une technique basée sur une expansion des noyaux en une somme de fonctions de base. Généralement, ces fonctions de base prennent la forme d'une somme infinie de fonctions exponentielles paramétrées comme décrit dans [Lue01]. Les paramètres des fonctions de bases sont obtenus par une méthode de minimisation linéaire adaptée aux données entrées/sorties du système non linéaire, comme présentée dans [Kef05].

Tawfiq [Taw05] prend un chemin différent et propose d'utiliser la propriété de la réponse impulsionnelle (voir §3.7.2.3) des séries de Volterra temporelles pour extraire les noyaux dans le domaine temporel. Cette technique s'appelle *la méthode des chocs programmés* et permet d'obtenir les noyaux de Volterra sous la forme d'une matrice de données sans aucun lien avec les paramètres physiques du système. Pour obtenir les détails théoriques de cette méthode, le lecteur peut se référer aux travaux présentés dans [Taw01, Sil99].

Dans les travaux de Bendat [Ben98], une méthode d'analyse spectrale est présentée. Elle consiste à extraire les noyaux de Volterra dans le domaine fréquentielle en se basant sur l'analyse des sorties du système en utilisant une excitation en bruit blanc Gaussien. Des applications récentes de cette méthode sont présentées dans [Sil05]. Une technique similaire basée sur l'étude des réponses à une excitation par pseudo-bruit est présentée dans [Boy83] pour mesurer les noyaux de Volterra des systèmes légèrement non linéaires.

Les trois méthodes précédentes sont toutes basées sur l'observation du comportement du système à des excitations spécifiques.

Lorsque les équations de mouvement sont connues, il existe une technique appelée « méthode du sondage harmonique » qui permet d'extraire analytiquement les noyaux de Volterra dans le

domaine fréquentiel. La méthode du sondage harmonique a été introduite dans [Bed71] et spécialement adaptée aux systèmes décrit par des équations différentielles à temps continu. Une extension aux modèles non linéaires à temps discret (NARMAX) est décrite dans [Mar04, Wor01]. La généralisation de cette méthode aux systèmes multi-entrées est présentée dans [Wor97]. Pour répondre aux exigences préalablement posées dans le contexte de notre étude, la méthode d'extraction des noyaux de Volterra doit être analytique afin d'établir un lien direct entre les réponses et les paramètres physiques du système. La méthode du sondage harmonique convient parfaitement à cette contrainte, sachant que le modèle LD-P3 est décrit par des équations différentielles.

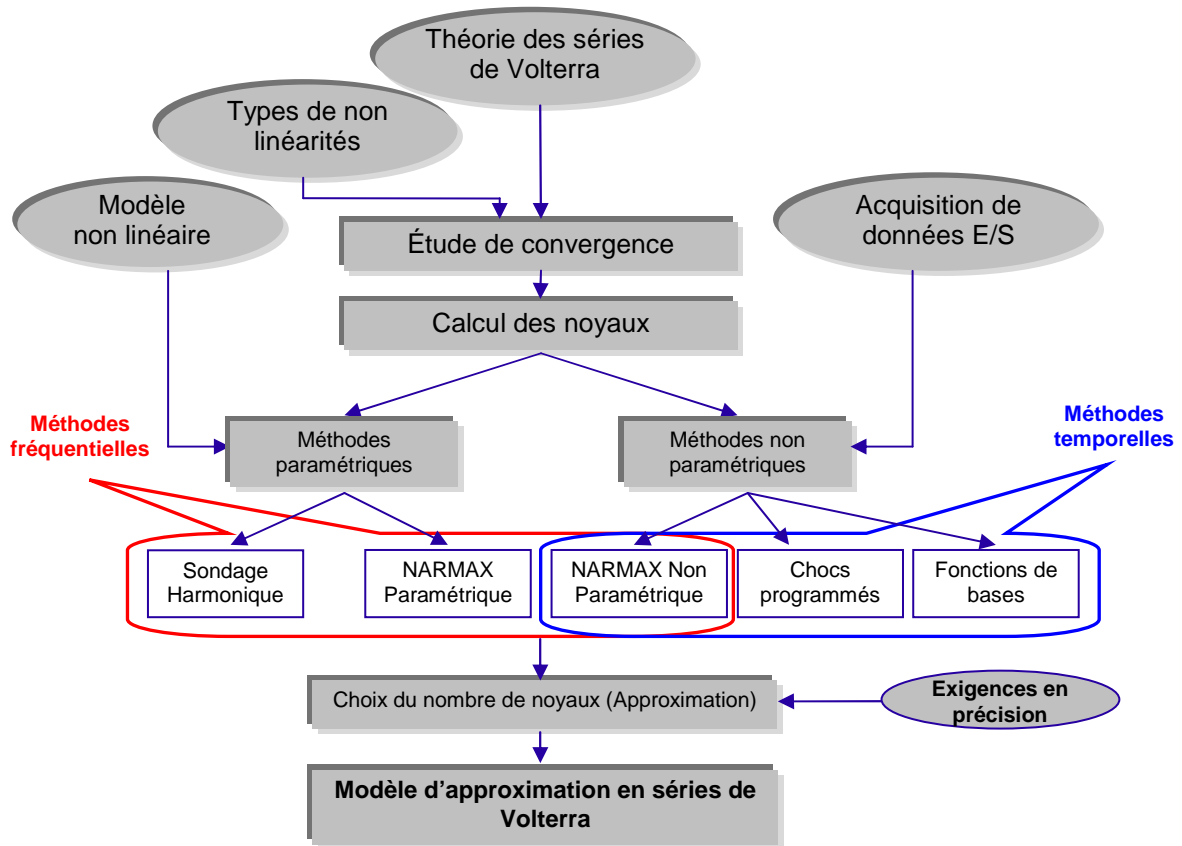


Figure 3.26. Les différentes approches actuellement utilisées pour extraire les noyaux de Volterra.

3.7.3.2. Méthode du sondage harmonique

La méthode du sondage harmonique est essentiellement basée sur la détermination de la réponse du système en termes de série de Volterra, lorsque celui-ci est sujet à une excitation harmonique analytique $x(t) = Xe^{j\Omega t}$. La réponse de la série de Volterra donnée par l'équation 3.163

$$y(t) = XH_1(\Omega)e^{j\Omega t} + X^2 H_2(\Omega, \Omega)e^{j2\Omega t} + X^3 H_3(\Omega, \Omega, \Omega)e^{j3\Omega t} + \dots + X^n H_n(\Omega, \Omega, \Omega)e^{jn\Omega t} + \dots \quad (3.176)$$

Cette série contient un nombre infini de termes. Si chaque terme est examiné individuellement, nous pouvons constater que la réponse est constituée de plusieurs harmoniques, qui sont des multiples de la fréquence fondamentale Ω . Chaque terme représente une composante harmonique du spectre fréquentiel de la réponse si une analyse de fourrier est réalisée.

A ce stade, il est important de remarquer que le coefficient de la composante de la réponse à la fréquence fondamentale correspond à $XH_1(\Omega)$. Pour le composante du second harmonique, le coefficient correspond à $X^2H_2(\Omega, \Omega)$ et ainsi de suite pour les harmonique d'ordres supérieurs. Donc, si un balayage fréquentiel est réalisé sur une gamme de fréquences donnée, et les noyaux calculés à chaque fréquence à travers une analyse spectrale, nous obtenons les noyaux de Volterra mais uniquement sur la ligne diagonale dans l'espace des fréquences. Autrement dit, nous pourrions calculer $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega, \Omega)$, $H_3(\Omega, \Omega, \Omega)$, ... etc.

Dans le but d'avoir plus d'informations sur le reste de l'espace fréquentiel, une excitation multifréquence doit être utilisée. Le nombre de fréquences requit pour caractériser complètement le $n^{ième}$ noyau doit être égale à n . Alors, pour caractériser complètement le second noyau $H_2(\Omega_1, \Omega_2)$, l'entrée doit être composée de deux fréquences différentes. Cette entrée peut s'exprimer comme suit :

$$x(t) = X_1 e^{j\Omega_1 t} + X_2 e^{j\Omega_2 t} \quad (3.177)$$

En reprenant les résultats du § 3.7.2.2, nous avons

$$\begin{aligned} y(t) = & X_1 H_1(\Omega_1) e^{j\Omega_1 t} + X_2 H_1(\Omega_2) e^{j\Omega_2 t} + 2X_1 X_2 H_2(\Omega_1, \Omega_2) e^{j(\Omega_1 + \Omega_2) t} \\ & + X_1^2 H_2(\Omega_1, \Omega_1) e^{j2\Omega_1 t} + X_2^2 H_2(\Omega_2, \Omega_2) e^{j2\Omega_2 t} + X_1^3 H_3(\Omega_1, \Omega_1, \Omega_1) e^{j3\Omega_1 t} \\ & + 3X_1^2 X_2 H_3(\Omega_1, \Omega_1, \Omega_2) e^{j(2\Omega_1 + \Omega_2) t} + 3X_1 X_2^2 H_3(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_2) e^{j(\Omega_1 + 2\Omega_2) t} \\ & + X_2^3 H_3(\Omega_2, \Omega_2, \Omega_2) e^{j3\Omega_2 t} + \dots \end{aligned} \quad (3.178)$$

La composante de sortie à la fréquence $\Omega_1 + \Omega_2$ correspond à $2X_1 X_2 H_2(\Omega_1, \Omega_2)$. Par itération, pour extraire le noyau d'ordre n , il est nécessaire d'utiliser n différentes fréquences dans l'excitation d'entrée, qui s'écrit alors :

$$x(t) = \sum_{k=1}^n X_k e^{j\Omega_k t} \quad (3.179)$$

Il sera facile de montrer que l'amplitude de la composante de sortie à la fréquence $\Omega_1 + \dots + \Omega_n$, est $n!(X_1 \dots X_n) \times H_n(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$. Cette démarche est la base de l'algorithme du sondage harmonique qui s'énonce comme suit :

Algorithme 3.2 : Méthode du sondage harmonique

Pour extraire le noyau d'ordre n à partir des équations non linéaires de mouvement, les étapes suivantes sont à suivre :

- Appliquer une entrée harmonique multifréquence comme suit :

$$x(t) = X_1 e^{s_1 t} + \dots + X_n e^{s_n t} \quad \text{avec, } s = j\omega$$

- Exprimer les réponses du système et leurs dérivés en termes de série de Volterra :

$$\begin{aligned} y(t) &= X_1 H_1(s_1) e^{s_1 t} + \dots + X_n H_1(s_n) e^{s_n t} \\ &+ X_1^2 H_2(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \dots + X_n^2 H_2(s_n, s_n) e^{2s_n t} + \dots \\ &+ 6(X_1 X_2 X_3) H_3(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1 + s_2 + s_3)t} + \dots \\ &+ n!(X_1 \dots X_n) H_n(s_1, \dots, s_n) e^{(s_1 + \dots + s_n)t} + \dots \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t) &= s_1^k X_1 H_1(s_1) e^{s_1 t} + \dots + s_n^k X_n H_1(s_n) e^{s_n t} \\ &+ (2s_1)^k X_1^2 H_2(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \dots + (2s_n)^k X_n^2 H_2(s_n, s_n) e^{2s_n t} + \dots \\ &+ 6(s_1 + s_2 + s_3)^k (X_1 X_2 X_3) H_3(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1 + s_2 + s_3)t} + \dots \\ &+ n!(s_1 + \dots + s_n)^k (X_1 \dots X_n) H_n(s_1, \dots, s_n) e^{(s_1 + \dots + s_n)t} + \dots \end{aligned}$$

- Substituer $y(t)$ et ses dérivés successives $y^{(k)}(t)$ dans les équations différentielles.
- Mettre à égalité des deux cotés des équations les termes contenant :

$$X_1 \dots X_n e^{(s_1 + \dots + s_n)t}$$

- Extraire le noyau de Volterra d'ordre n .

Cet algorithme donne un moyen direct pour extraire les noyaux de Volterra dans le domaine fréquentielle sous leurs formes analytiques exactes.

3.7.4. Analyse fréquentiel

Dans cette section, l'objectif est d'étudier les réponses du système non linéaire dans le domaine fréquentielle. Comme pour la méthode d'équilibrage harmonique, les séries de Volterra permettent d'investiguer certains phénomènes liés à la non linéarité, tels que la génération d'harmoniques et les distorsions des fonctions réponses fréquentielles. L'analyse des réponses sous une excitation sinusoïdale constitue un point de départ de toute analyse fréquentielle. Il est donc nécessaire d'étudier la réponse du système à cette excitation. Dans ce qui suit, nous allons montrer la simplicité procurée par les séries de Volterra à extraire ce type de réponse, à calculer analytiquement la FRF et à investiguer les distorsions harmoniques.

3.7.4.1. Extraction de la fonction réponse fréquentielle (FRF) d'ordre 1

Les séries de Volterra donne un moyen approprié pour le calcul de la réponse non linéaire à une entrée harmonique $x(t) = X e^{j\Omega t}$. La situation n'est pas plus compliquée pour le calcul de la réponse du système pour une double harmonique $x(t) = X_1 e^{j\Omega_1 t} + X_2 e^{j\Omega_2 t}$.

L'avantage avec les séries de Volterra est que la réponse à une excitation sinusoïdale peut directement être extraite à partir de celles obtenues lorsque l'entrée est une excitation harmonique bi-fréquentielle. En effet, si l'entrée est sinusoïdale :

$$x(t) = X \cos(\Omega t) \quad (3.180)$$

Elle peut également s'écrire :

$$x(t) = X \cos(\Omega t) = \frac{1}{2} (X e^{j\Omega t} + X e^{-j\Omega t}) \quad (3.181)$$

Où X et Ω sont des constantes qui représentent respectivement l'amplitude et la fréquence. Cette dernière expression est similaire à l'entrée exprimée par 3.167 et cela en prenant $X_1 = X_2 = X/2$, $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = -\Omega$. Alors, la réponse peut directement s'obtenir en utilisant le résultat de l'équation 3.171 comme suit :

$$\begin{aligned} y(t) = & X |H_1(\Omega)| \cos(\Omega t + \angle H_1(\Omega)) \\ & + \frac{X^2}{2} |H_2(\Omega, \Omega)| \cos(2\Omega t + \angle H_2(\Omega, \Omega)) + \frac{X^2}{2} |H_2(\Omega, -\Omega)| \\ & + \frac{X^3}{4} |H_3(\Omega, \Omega, \Omega)| \cos(3\Omega t + \angle H_3(\Omega, \Omega, \Omega)) \\ & + \frac{3X^3}{4} |H_3(\Omega, \Omega, -\Omega)| \cos(\Omega t + \angle H_3(\Omega, \Omega, -\Omega)) + \dots \end{aligned} \quad (3.182)$$

La réponse du système est une combinaison de plusieurs composantes harmoniques directement dépendantes des noyaux de Volterra. La composante de sortie à la fréquence d'excitation Ω , à 2Ω et à 3Ω s'obtiennent par :

$$\begin{aligned} y_{\Omega}(t) = & X |H_1(\Omega)| \cos(\Omega t + \angle H_1(\Omega)) \\ & + \frac{3X^2}{4} |H_3(\Omega, \Omega, -\Omega)| \cos(\Omega t + \angle H_3(\Omega, \Omega, -\Omega)) + \dots \end{aligned} \quad (3.183)$$

$$\begin{aligned} y_{2\Omega}(t) = & \frac{X^2}{2} |H_2(\Omega, \Omega)| \cos(2\Omega t + \angle H_2(\Omega, \Omega)) \\ & + \frac{X^4}{2} |H_4(\Omega, \Omega, \Omega, -\Omega)| \cos(2\Omega t + \angle H_4(\Omega, \Omega, \Omega, -\Omega)) + \dots \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} y_{3\Omega}(t) = & \frac{X^3}{4} |H_3(\Omega, \Omega, \Omega)| \cos(3\Omega t + \angle H_3(\Omega, \Omega, \Omega)) \\ & + \frac{5X^5}{16} |H_5(\Omega, \Omega, \Omega, \Omega, -\Omega)| \cos(3\Omega t + \angle H_5(\Omega, \Omega, \Omega, \Omega, -\Omega)) + \dots \end{aligned} \quad (3.185)$$

A partir de ces dernières composantes de la réponse, nous pouvons extraire les fonctions réponses fréquentielles respectives au fondamentale de la réponse à Ω et les harmoniques à 2Ω et à 3Ω comme démontrée par [Sto91].

$$\Lambda_s(\Omega) = H_1(\Omega) + \frac{3X^2}{4} H_3(\Omega, \Omega, -\Omega) + O(X^4) \quad (3.186)$$

$$\Lambda_{s2}(\Omega) = \frac{X}{2} H_2(\Omega, \Omega) + \frac{X^3}{2} H_4(\Omega, \Omega, \Omega, -\Omega) + O(X^5) \quad (3.187)$$

$$\Lambda_{s3}(\Omega) = \frac{X^2}{4} H_3(\Omega, \Omega, \Omega) + \frac{5X^4}{16} H_5(\Omega, \Omega, \Omega, \Omega, -\Omega) + O(X^6) \quad (3.188)$$

Ces dernières fonctions sont appelées noyaux composites ou fonctions réponses fréquentielles composites [Wor01]. Ces fonctions sont souvent mises en jeu lors d'un test de sinus, où les relevés expérimentaux donnent des informations sur ces noyaux composites plutôt que sur les noyaux de Volterra. En plus du premier noyau de Volterra, le fondamental de la réponse à Ω contient des termes additionnels dus à $H_3(\Omega, \Omega, -\Omega)$, $H_5(\Omega, \Omega, \Omega, -\Omega, -\Omega)$ et tous les noyaux d'ordres impaires dont la somme des arguments donne Ω . Ceci est également le cas pour le premier harmonique et le deuxième harmonique où nous voyons bien l'intervention des noyaux d'ordres supérieurs dans l'expression des fonctions composites.

Si le spectre fréquentiel est mesuré, il nous serait impossible de séparer les termes qui composent ces harmoniques et donc les vrais noyaux de Volterra ne pourront jamais être isolés.

La fonction réponse fréquentielle du premier ordre est donnée par l'équation 3.186. Nous remarquons que les contributions des noyaux d'ordres supérieurs sont pilotées par l'amplitude de l'entrée X . Ceci est la cause directe des distorsions harmonique dans la réponse fréquentiel. Généralement, ces distorsions tendent à intervenir de façon significative spécialement autour de la fréquence de résonance et elles sont d'autant plus importantes que les amplitudes augmentent. Lorsque les amplitudes sont faibles, la FRF d'ordre 1 s'approche de la réponse fréquentielle linéaire $H_1(\Omega)$.

3.7.4.2. Taux de distorsion harmonique

Nous appelons taux de distorsion harmonique d'ordre n , la quantité $D_n(X, \omega)$ calculée pour une excitation $x(t) = X \cos(\omega t)$ et donnée par la formule suivante [Bar05] :

$$D_n(X, \omega) \cong \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|H_n(j\omega, \dots, j\omega)|^2}{|H_1(j\omega)|^2} \cdot \left(\frac{X}{2}\right)^{2n-2} \quad (3.189)$$

De manière similaire, nous introduisons le rapport d'énergie transmise à la sortie entre les harmoniques et le fondamental à la fréquence ω par la quantité :

$$R_f(X, \omega) \cong \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\Lambda_{s(n)}(j\omega)|^2}{|\Lambda_{s1}(j\omega)|^2} \quad (3.190)$$

Ces deux coefficients sont équivalents et permettent de quantifier, dans le domaine fréquentiel, le taux de distorsion du signal de sortie en fonction l'amplitude d'excitation.

3.7.5. Analyse temporelle

Lorsque la réponse d'un système non linéaire est représentée par une série de Volterra, il n'est pas souvent évident de calculer cette réponse à une entrée arbitraire. Dans cette section, et après la présentation de l'état de l'art, nous aborderons les méthodes existantes qui permettent l'obtention d'une réponse temporelle. Deux types de méthode seront étudiées, celles permettant l'analyse en régime permanent et d'autres pour le calcul des réponses pour n'importe quelle entrée arbitraire.

3.7.5.1. Etat de l'art

Avec la série de Volterra, la réponse temporelle s'exprime par la convolution multidimensionnelle donnée par l'équation 3.146. La $n^{\text{ième}}$ composante de la réponse s'écrit

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n x(\tau_i) d\tau_i \quad (3.191)$$

Pour calculer toutes les composantes de la réponse, il faudrait d'abord obtenir une forme temporelle des noyaux de Volterra $h_n(t_1, \dots, t_n)$, et ensuite évaluer l'intégration multidimensionnelle 3.191 ; ce qui n'est pas une tâche facile en soit. Le premier terme qui correspond à la partie linéaire du système est généralement le plus simple à déterminer. Malheureusement, ceci n'est pas le cas des termes d'ordres plus élevés qui requièrent une attention plus particulière sachant qu'avec la méthode du sondage harmonique les noyaux sont obtenus dans le domaine fréquentiel. Une étape supplémentaire s'impose avant l'évaluation de l'expression 3.191 ; il s'agit de la transformation de Laplace multidimensionnelle inverse pour obtenir le noyau dans le domaine temporel.

Dans [Van02], l'auteur utilise une série Volterra d'ordre fini pour approximer la réponse du système non linéaire. A partir de cette représentation, l'auteur s'est affranchi des transformations multidimensionnelles et il propose une méthode de transformation qui permet de remplacer les équations originales du système par une forme bilinéaire. Les formes bilinéaires sont une généralisation des représentations d'état pour les systèmes non linéaire comme décrit dans [Rug81] et s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t)u(t) + Eu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \geq 0, x(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.192)$$

Avec, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ et $y(t) \in \mathfrak{R}^l$ représentant respectivement, le vecteur d'état, le vecteur des entrées et le vecteur des réponses. La méthode permet donc de déterminer les matrices A, D, E et C . Les origines de la méthode remontent aux travaux présentés par Mitzel dans [Mit77] et [Mit79].

Lorsqu'il est question de caractériser la réponse en régime permanent pour une entrée échelon, nous pouvons nous baser sur les théorèmes Abéliens présentés dans [Bry92] (également appelés théorèmes de la valeur finale). Ces théorèmes permettent en effet de déterminer la valeur du gain statique de chaque noyau directement à partir de sa forme fréquentielle. Une application en dynamique de véhicule est présentée dans [Bad09]. Lorsque

l'entrée est une sinusoïde dont la fréquence et l'amplitude sont constantes, les réponses en régime permanent s'obtiennent à chaque fréquence à travers les fonctions $\Lambda_{si}(\omega)$ (voir équation 3.186 à 3.188) pour chaque harmonique dans la réponse.

Storer [Sto91] suggère d'utiliser les fonctions $\Lambda_{si}(\omega)$ comme des fonctions de transfert uniquement lorsque l'entrée est une pure sinusoïde. Ce résultat a été utilisée dans [Mar01] pour extraire les réponses du systèmes pour n'importe quelle entrée dépendante du temps (périodique ou non) qui peut être décomposée en une somme de sinusoïdes par une série de Fourier. Ainsi pour chaque composante fréquentielle de cette somme, nous pouvons utiliser les fonctions $\Lambda_{si}(\omega)$ comme fonctions de transferts pour calculer la composante de réponse associée.

Lorsque les noyaux de Volterra sont calculés dans le domaine fréquentiel, il est plus recommandé de calculer la réponse dans le domaine fréquentiel. Le passage dans le domaine temporelle peut ensuite s'effectuer en utilisant la transformé de Laplace inverse. Dans ce contexte, il existe deux principales techniques. La première est basée sur le calcul de la transformé de Laplace multidimensionnelle inverse comme présentée dans [Sch80]. La seconde qui est la plus couramment utilisée est la méthode de l'association de variables qui est bien décrite dans [Deb91][Rug81] et [Bry92].

Il faut souligner que les méthodes précitées permettent d'obtenir des réponses analytiques directement liées aux coefficients des équations de mouvement et correspondent parfaitement au contexte de l'étude.

3.7.5.2. Analyse en régime permanent

Dans le but d'extraire la caractéristique de surbraquage d'un véhicule automobile, il est primordiale d'extraire une forme analytique de la réponse en régime permanent lorsque le véhicule est soumis à un échelon au volant. Dans le cas actuel, cette réponse devrait être établie en fonction des noyaux de Volterra.

Soit l'entrée échelon suivante :

$$x(t) = a\Gamma(t) \quad (3.193)$$

où

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

D'après les théorèmes Abéliens [Bry92], pour une entrée échelon, le gain statique observé \tilde{H}_n correspondant au noyau d'ordre n est donné par :

$$\tilde{H}_n = \lim_{\omega_1, \dots, \omega_n \rightarrow 0} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad (3.194)$$

Dans ce cas, la réponse en régime permanent s'obtient pour $t \rightarrow \infty$, comme suit :

$$\tilde{y} = y(t)|_{t \rightarrow \infty} = a\tilde{H}_1 + a^2\tilde{H}_2 + \dots + a^n\tilde{H}_n \quad (3.195)$$

La précision de cette réponse dépend du nombre de noyaux utilisés dans la série. Mais une série tronquée devrait donner des résultats proches de la réponse exacte.

3.7.5.3. Calcul des réponses temporelles par la méthode des associations de variables

Soit la réponse d'un système non linéaire sous la forme de série de Volterra

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t - \tau_1, t - \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \prod_{i=1}^3 x(\tau_i) d\tau_i + \dots \end{aligned} \quad (3.196)$$

Sous une forme indirecte nous pouvons écrire la $n^{\text{ième}}$ composante de la réponse sous une forme multidimensionnelle par

$$y_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (3.197)$$

Où,

$$y_n(t) = y_n(t_1, \dots, t_n)|_{t_1 = \dots = t_n = t} = y_n(t, \dots, t) \quad (3.198)$$

Sachant que les noyaux sont calculés dans le domaine fréquentiel par la méthode du sondage harmonique. Il est préférable que la réponse soit calculée d'abord dans le domaine fréquentiel et ensuite effectuer un passage au domaine temporel. La transformée de Laplace multidimensionnelle de la $n^{\text{ième}}$ composante de la réponse peut s'écrire :

$$Y_n(s_1, \dots, s_n) = H_n(s_1, \dots, s_n) \times X(s_1) \times \dots \times X(s_n) \quad (3.199)$$

Avec,

$$Y_n(s_1, \dots, s_n) = L[y(t_1, \dots, t_n)] = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} y(t_1, \dots, t_n) e^{-s_1 t_1} \dots e^{-s_n t_n} dt_1 \dots dt_n \quad (3.200)$$

En ayant $H_n(s_1, \dots, s_n)$ et pour une entrée donnée, l'expression 3.199 sera facile à évaluer. Pour obtenir la réponse dans le domaine temporel, nous pouvons utiliser la transformée de Laplace multidimensionnelle inverse comme suit

$$y_n(t_1, \dots, t_n) = L^{-1}[Y(s_1, \dots, s_n)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \dots \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s_1, \dots, s_n) e^{s_1 t_1} \dots e^{s_n t_n} ds_1 \dots ds_n \quad (3.201)$$

Finalement, la réponse temporelle de la $n^{\text{ième}}$ composante s'obtient par la formule 3.198. Avec cette méthode, le calcul de la transformée de Laplace multidimensionnelle inverse est souvent très compliquée. La complexité du calcul peut s'accroître selon la forme de l'excitation utilisée. Une deuxième alternative consiste à utiliser la méthode d'association de variable [Sch80]. A la différence de la transformée de Laplace multidimensionnelle inverse, la méthode d'association de variables consiste à établir un passage dans le domaine de Laplace monodimensionnelle. Ainsi, la réponse temporelle s'obtient avec une transformée de Laplace classique. L'association de variable permet de faire le lien entre $Y_n(s_1, \dots, s_n)$ et $Y_n(s)$ avec la transformation suivante :

Pour $n > 1$

$$Y_n(s) = A[Y_n(s_1, \dots, s_n)] = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_n(s - s_1 - s_2 - \dots - s_n, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1} \quad (3.202)$$

Où $A[\cdot]$ désigne l'opérateur de l'association de variables. La réponse temporelle peut être calculée par une transformée de Laplace inverse classique :

$$y_n(t) = L^{-1}[Y_n(s)] \quad (3.203)$$

Finalement, la réponse totale du système non linéaire s'obtient en sommant toutes les composantes de la réponse :

$$y(t) = y_1(t) + \dots + y_n(t) \quad (3.204)$$

Des théorèmes relatifs au calcul des associations de variables peuvent être consultés dans [Deb89] [Deb91] et [Rug81]. Nous trouvons également dans [Bry92] une table de la plupart des associations de variables des fonctions multidimensionnelles usuelles pouvant être rencontrées dans la pratique. Des techniques de calcul opérationnel pour faciliter l'évaluation des associations de variables sont présentées dans [Dit75]. Parmi les propriétés des associations de variables, deux sont importantes à retenir. Nous allons les énoncer sans démonstration.

Propriétés :

1. Soit $F(s_1, \dots, s_n)$ une fonction multidimensionnelle dans le domaine de Laplace. Si cette fonction peut s'écrire sous la forme :

$$F(s_1, \dots, s_n) = H(s_1 + \dots + s_n) G(s_1, \dots, s_n) \quad (3.205)$$

Alors,

$$F(s) = H(s) \cdot A[G(s_1, \dots, s_n)] \quad (3.206)$$

Où $H(s)$ s'obtient tout simplement en substituant la somme $(s_1 + s_2 + s_3)$ par s .

2. Si la fonction G est régulière et s'écrit sous la forme :

$$G(s_1, \dots, s_n) = G_1(s_1)G_2(s_2) \cdots G_n(s_n) \quad (3.207)$$

alors,

$$G(s) = L[g_1(t_1)g_2(t_2) \cdots g_n(t_n)]_{t_1=\dots=t_n=t} \quad (3.208)$$

avec,

$$g_i(t_i) = L^{-1}[G_i(s_i)] \quad (3.209)$$

Ces deux dernières propriétés sont très utiles lorsque le système contient des non linéarités polynomiales. Comme nous le verrons pour le cas du modèle LD-P3, le $n^{\text{ième}}$ noyau de Volterra des systèmes à non linéarité polynomiale s'écrit souvent sous la forme 3.205, et la fonction G est souvent régulière [Taw03].

3.7.6. Application de la méthode des séries de Volterra au modèle LD-P3

Maintenant que nous avons étudié les séries de Volterra, il reste à calculer les noyaux avec la méthode du sondage harmonique. Pour rappel, le système d'équations non linéaires du modèle LD-P3 est donné par les équations 3.10 et 3.11. En écrivant les réponses du véhicule sous la forme d'une série de Volterra, nous obtenons :

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^\delta(t - \tau_1) \varepsilon_r(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n^\delta(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n \varepsilon_r(\tau_i) d\tau_i \quad (3.210)$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^\psi(t - \tau_1) \varepsilon_r(\tau_1) d\tau_1 + \dots + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n^\psi(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n \varepsilon_r(\tau_i) d\tau_i \quad (3.211)$$

Dans la suite, nous nous limiterons uniquement aux trois premiers termes de la série.

3.7.6.1. Calcul des noyaux de Volterra

a. Premier noyau

Pour le calcul du premier noyau de Volterra, on se base sur les procédures décrites par la méthode du sondage harmonique. Pour cela, il suffit d'extraire le signal de sortie fondamentale généré à travers une excitation harmonique $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{j\omega_1 t} = \varepsilon_1 e^{s_1 t}$. En injectant $\varepsilon(t)$ dans l'expression des sorties 3.210 et 3.211, nous obtenons :

$$\delta(t) = \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_1^2 H_2^\delta(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \dots + \varepsilon_1^n H_n^\delta(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} \quad (3.212)$$

$$\psi(t) = \varepsilon_1 H_1^\psi(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_1^2 H_2^\psi(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \dots + \varepsilon_1^n H_n^\psi(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} \quad (3.213)$$

Les premières dérivées s'écrivent :

$$\dot{\delta}(t) = s_1 \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t} + 2 s_1 \varepsilon_1^2 H_2^\delta(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \dots + n s_1 \varepsilon_1^n H_n^\delta(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} \quad (3.214)$$

$$\dot{\psi}(t) = s_1 \varepsilon_1 H_1^\psi(s_1) e^{s_1 t} + 2 s_1 \varepsilon_1^2 H_2^\psi(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \dots + n s_1 \varepsilon_1^n H_n^\psi(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} \quad (3.215)$$

Nous ne garderons des dernières expressions que les termes en $e^{s_1 t}$, car c'est les seules termes qui pourront générer des harmoniques à la fréquence $s_1 = i\omega_1$. Par conséquent, nous aurons :

$$\delta^*(t) = \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t}, \quad \dot{\delta}^*(t) = s_1 \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t} \quad (3.216)$$

$$\psi^*(t) = \varepsilon_1 H_1^\psi(s_1) e^{s_1 t}, \quad \dot{\psi}^*(t) = s_1 \varepsilon_1 H_1^\psi(s_1) e^{s_1 t} \quad (3.217)$$

En injectant 3.216 et 3.217 dans les équations différentielles du modèle, on obtient :

$$MV(s_1 H_1^\delta(s_1) + H_1^\psi(s_1)) = -H_1^\delta(s_1)(k_{\delta 1} + k_{\delta 2}) + H_1^\psi(s_1) \left(\frac{k_{\delta 2} l_2 - k_{\delta 1} l_1}{V} \right) + k_{\delta 1} \quad (3.218)$$

$$I_{zz} s_1 H_1^\psi(s_1) = H_1^\delta(s_1)(l_2 k_{\delta 2} - l_1 k_{\delta 1}) - H_1^\psi(s_1) \left(\frac{l_1^2 k_{\delta 1} + l_2^2 k_{\delta 2}}{V} \right) + l_1 k_{\delta 1} \quad (3.219)$$

Les premiers noyaux s'écrivent sous la forme

$$\begin{bmatrix} H_1^\delta(s_1) \\ H_1^\psi(s_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MV s_1 + (k_{\delta 1} + k_{\delta 2}) & MV - \left(\frac{k_{\delta 2} l_2 - k_{\delta 1} l_1}{V} \right) \\ (l_1 k_{\delta 1} - l_2 k_{\delta 2}) & I_{zz} s_1 + \left(\frac{l_1^2 k_{\delta 1} + l_2^2 k_{\delta 2}}{V} \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{\delta 1} \\ l_1 k_{\delta 1} \end{bmatrix} \quad (3.220)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} H_1^\delta(s_1) \\ H_1^\psi(s_1) \end{bmatrix}} = \phi(s_1) \begin{bmatrix} k_{\delta 1} \\ l_1 k_{\delta 1} \end{bmatrix} \quad (3.221)$$

Les premiers noyaux de Volterra $H_1^\delta(s_1)$ et $H_1^\psi(s_1)$ ne sont pas affectés par les paramètres non linéaires $q_{\delta i}$ et sont simplement déterminés par la partie linéaire du système. Ces noyaux sont identiques aux fonctions réponses fréquentielles du modèle LD linéaire (voir chapitre 2). Les figures 3.27 et 3.28 montrent les FRF du premier ordre $H_1^\delta(\omega_1)$ et $H_1^\psi(\omega_1)$ pour trois différentes vitesses $V = 90 \text{ km h}^{-1}$, $V = 110 \text{ km h}^{-1}$, et $V = 130 \text{ km h}^{-1}$ dans un intervalle de fréquence entre 0Hz et 5Hz. Les asymptotes aux basses fréquences sont donnée par :

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1^\psi \\ \tilde{H}_1^\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} H_1^\psi(\omega_1) \\ \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} H_1^\delta(\omega_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V k_{\delta 1} k_{\delta 2} l}{MV^2(l_2 k_{\delta 2} - l_1 k_{\delta 1}) + k_{\delta 1} k_{\delta 2} l^2} \\ \frac{-MV^2 l_1 k_{\delta 1} + k_{\delta 1} k_{\delta 2} l_1 l}{MV^2(l_2 k_{\delta 2} - l_1 k_{\delta 1}) + k_{\delta 1} k_{\delta 2} l^2} \end{bmatrix} \quad (3.222)$$

Selon le théorème Abélien de la valeur finale [Bry92], ces valeurs correspondent aux réponses, en régime permanent pour un échelon unité, de la partie linéaire du système.

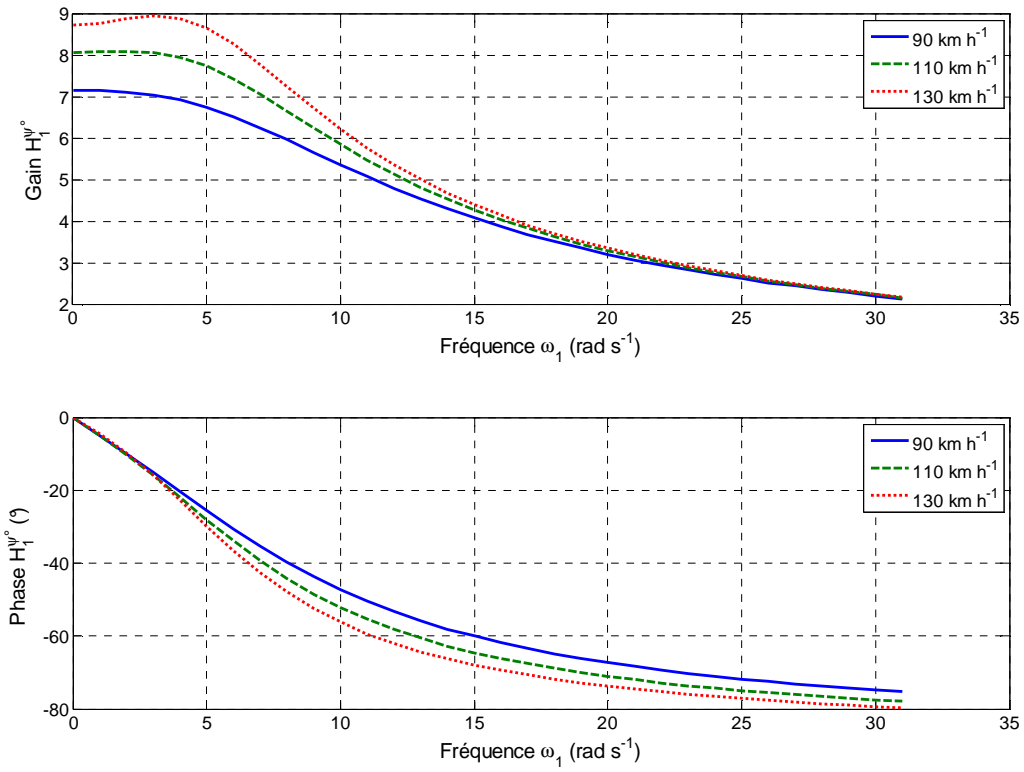


Figure 3.27. Représentation du noyau $H_1^\psi(\omega_1)$ de la vitesse de Lacet pour trois différentes vitesses.

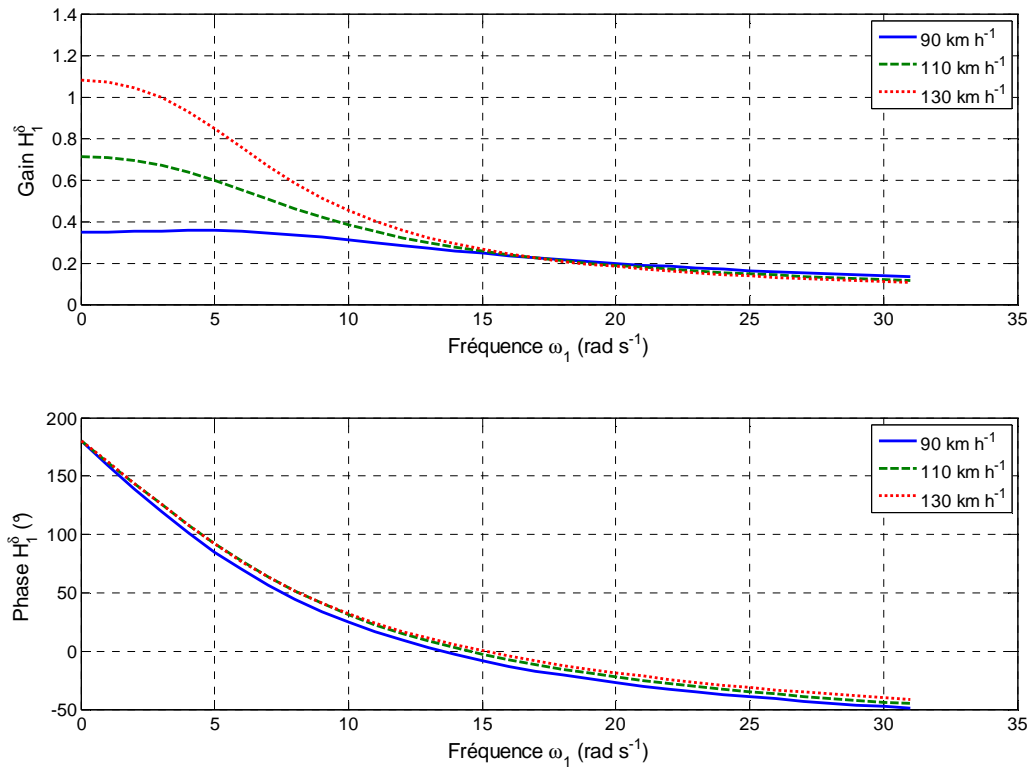


Figure 3.28. Représentation du noyau $H_1^\delta(\omega_1)$ de la dérive au CdG pour trois différentes vitesses.

b. Second noyau

En suivant la même méthode, le second noyau s'obtient en utilisant une entrée à deux fréquences

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{s_1 t} + \varepsilon_2 e^{s_2 t} \quad (3.223)$$

La dérive au CdG et la vitesse de Lacet s'écrivent

$$\begin{aligned} \delta(t) = & \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_2 H_1^\delta(s_2) e^{s_2 t} + \varepsilon_1^2 H_2^\delta(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \varepsilon_2^2 H_2^\delta(s_2, s_2) e^{2s_2 t} \\ & + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\delta(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t} + \dots + \varepsilon_1^n H_n^\delta(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} + \dots \end{aligned} \quad (3.224)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & \varepsilon_1 H_1^\psi(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_2 H_1^\psi(s_2) e^{s_2 t} + \varepsilon_1^2 H_2^\psi(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + \varepsilon_2^2 H_2^\psi(s_2, s_2) e^{2s_2 t} \\ & + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\psi(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t} + \dots + \varepsilon_1^n H_n^\psi(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} + \dots \end{aligned} \quad (3.225)$$

les dérivés de ces fonctions,

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) = & s_1 \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t} + s_2 \varepsilon_2 H_1^\delta(s_2) e^{s_2 t} + 2s_1 \varepsilon_1^2 H_2^\delta(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + 2s_2 \varepsilon_2^2 H_2^\delta(s_2, s_2) e^{2s_2 t} \\ & + 2(s_1 + s_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\delta(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t} + \dots + ns_1 \varepsilon_1^n H_n^\delta(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} + \dots \end{aligned} \quad (3.226)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = & s_1 \varepsilon_1 H_1^\psi(s_1) e^{s_1 t} + s_2 \varepsilon_2 H_1^\psi(s_2) e^{s_2 t} + 2s_1 \varepsilon_1^2 H_2^\psi(s_1, s_1) e^{2s_1 t} + 2s_2 \varepsilon_2^2 H_2^\psi(s_2, s_2) e^{2s_2 t} \\ & + 2(s_1 + s_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\psi(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t} + \dots + ns_1 \varepsilon_1^n H_n^\psi(s_1, s_1, \dots, s_1) e^{ns_1 t} + \dots \end{aligned} \quad (3.227)$$

Nous garderons de ces expressions que les termes pouvant générer le noyau du deuxième ordre, à savoir :

$$\delta^*(t) = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\delta(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t}, \quad \dot{\delta}^*(t) = 2(s_1 + s_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\delta(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t} \quad (3.228)$$

$$\dot{\psi}^*(t) = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\psi(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t}, \quad \ddot{\psi}^*(t) = 2(s_1 + s_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\psi(s_1, s_2) e^{(s_1+s_2)t} \quad (3.229)$$

En implémentant tous cela dans le système d'équations différentielles on obtient :

$$2\varepsilon_1 \varepsilon_2 MV \left((s_1 + s_2) H_2^\delta + H_2^\psi \right) = -2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\delta (k_{\delta_1} + k_{\delta_2}) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\psi \left(\frac{k_{\delta_2} l_2 - k_{\delta_1} l_1}{V} \right) \quad (3.230)$$

$$2\varepsilon_1 \varepsilon_2 I_{zz} (s_1 + s_2) H_2^\psi = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\delta (l_2 k_{\delta_2} - l_1 k_{\delta_1}) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 H_2^\psi \left(\frac{l_1^2 k_{\delta_1} + l_2^2 k_{\delta_2}}{V} \right) \quad (3.231)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} MV(s_1 + s_2) + (k_{\delta_1} + k_{\delta_2}) & MV - \left(\frac{k_{\delta_2} l_2 - k_{\delta_1} l_1}{V} \right) \\ (l_1 k_{\delta_1} - l_2 k_{\delta_2}) & I_{zz}(s_1 + s_2) + \left(\frac{l_1^2 k_{\delta_1} + l_2^2 k_{\delta_2}}{V} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_2^\delta \\ H_2^\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.232)$$

Ce qui implique,

$$\begin{bmatrix} H_2^\delta(s_1, s_2) \\ H_2^\psi(s_1, s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.233)$$

L'existence des HFRF dépend du type de non linéarité dans le système. Le modèle LD-P3 définie par les équations 3.10 et 3.11 contient uniquement un terme cubique. Un tel modèle produira seulement des noyaux d'ordres impairs. Par conséquent, tous les noyaux d'ordre pair sont nuls.

c. Troisième noyau

Pour le troisième noyau, l'entrée d'excitation est :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 e^{s_1 t} + \varepsilon_2 e^{s_2 t} + \varepsilon_3 e^{s_3 t} \quad (3.234)$$

En prenant le deuxième noyau nul, nous obtenons les réponses suivantes comme suit :

$$\begin{aligned} \delta(t) = & \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_2 H_1^\delta(s_2) e^{s_2 t} + \varepsilon_3 H_1^\delta(s_3) e^{s_3 t} + \varepsilon_1^3 H_3^\delta(s_1, s_1, s_1) e^{3s_1 t} \\ & + \varepsilon_2^3 H_3^\delta(s_2, s_2, s_2) e^{3s_2 t} + \varepsilon_3^3 H_3^\delta(s_3, s_3, s_3) e^{3s_3 t} + 3\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 H_3^\delta(s_1, s_1, s_2) e^{(2s_1 + s_2)t} \\ & + 3\varepsilon_2^2 \varepsilon_1 H_3^\delta(s_1, s_2, s_2) e^{(2s_2 + s_1)t} + 3\varepsilon_2^2 \varepsilon_3 H_3^\delta(s_2, s_2, s_3) e^{(2s_2 + s_3)t} \\ & + 3\varepsilon_3^2 \varepsilon_2 H_3^\delta(s_2, s_3, s_3) e^{(2s_3 + s_2)t} + 3\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 H_3^\delta(s_1, s_1, s_3) e^{(2s_1 + s_3)t} \\ & + 3\varepsilon_3^2 \varepsilon_1 H_3^\delta(s_1, s_3, s_3) e^{(2s_3 + s_1)t} + 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 H_3^\delta(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1 + s_2 + s_3)t} + \dots \end{aligned} \quad (3.235)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \varepsilon_1 H_1^\psi(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_2 H_1^\psi(s_2) e^{s_2 t} + \varepsilon_3 H_1^\psi(s_3) e^{s_3 t} + \varepsilon_1^3 H_3^\psi(s_1, s_1, s_1) e^{3s_1 t} \\ & + \varepsilon_2^3 H_3^\psi(s_2, s_2, s_2) e^{3s_2 t} + \varepsilon_3^3 H_3^\psi(s_3, s_3, s_3) e^{3s_3 t} + 3\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 H_3^\psi(s_1, s_1, s_2) e^{(2s_1 + s_2)t} \\ & + 3\varepsilon_2^2 \varepsilon_1 H_3^\psi(s_1, s_2, s_2) e^{(2s_2 + s_1)t} + 3\varepsilon_2^2 \varepsilon_3 H_3^\psi(s_2, s_2, s_3) e^{(2s_2 + s_3)t} \\ & + 3\varepsilon_3^2 \varepsilon_2 H_3^\psi(s_2, s_3, s_3) e^{(2s_3 + s_2)t} + 3\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 H_3^\psi(s_1, s_1, s_3) e^{(2s_1 + s_3)t} \\ & + 3\varepsilon_3^2 \varepsilon_1 H_3^\psi(s_1, s_3, s_3) e^{(2s_3 + s_1)t} + 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 H_3^\psi(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1 + s_2 + s_3)t} + \dots \end{aligned} \quad (3.236)$$

La non linéarité présente dans le système est polynomiale cubique. Par conséquent, ce n'est pas tous les termes présents de l'équation différentielle qui vont générer des harmoniques à la fréquence $(s_1 + s_2 + s_3)$. Nous garderons alors uniquement les termes pouvant générer un noyau de Volterra du troisième ordre, à savoir :

$$\begin{aligned} \delta^*(t) = & \varepsilon_1 H_1^\delta(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_2 H_1^\delta(s_2) e^{s_2 t} + \varepsilon_3 H_1^\delta(s_3) e^{s_3 t} \\ & + 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 H_3^\delta(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1 + s_2 + s_3)t} \end{aligned} \quad (3.237)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^*(t) = & \varepsilon_1 H_1^{\dot{\psi}}(s_1) e^{s_1 t} + \varepsilon_2 H_1^{\dot{\psi}}(s_2) e^{s_2 t} + \varepsilon_3 H_1^{\dot{\psi}}(s_3) e^{s_3 t} \\ & + 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 H_3^{\dot{\psi}}(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \end{aligned} \quad (3.238)$$

Les dérivées sont :

$$\begin{aligned} \dot{\delta}^*(t) = & s_1 \varepsilon_1 H_1^{\delta}(s_1) e^{s_1 t} + s_2 \varepsilon_2 H_1^{\delta}(s_2) e^{s_2 t} + s_3 \varepsilon_3 H_1^{\delta}(s_3) e^{s_3 t} \\ & + 6(s_1 + s_2 + s_3) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 H_3^{\delta}(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \end{aligned} \quad (3.239)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}^*(t) = & s_1 \varepsilon_1 H_1^{\ddot{\psi}}(s_1) e^{s_1 t} + s_2 \varepsilon_2 H_1^{\ddot{\psi}}(s_2) e^{s_2 t} + s_3 \varepsilon_3 H_1^{\ddot{\psi}}(s_3) e^{s_3 t} \\ & + 6(s_1 + s_2 + s_3) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 H_3^{\ddot{\psi}}(s_1, s_2, s_3) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \end{aligned} \quad (3.240)$$

Maintenant, nous allons évaluer individuellement la contribution des différents termes constituant le modèle LD-P3 dans le troisième noyau. Il s'agit des expressions des dérivées avant et arrière. En voici le résultat :

- **Termes issues de la dérive avant**

$$\begin{aligned} \left(\delta^* + \frac{l_1}{V} \dot{\psi}^* - \varepsilon \right) = & \varepsilon_1 \left(H_1^\delta(s_1) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_1) - 1 \right) e^{s_1 t} + \varepsilon_2 \left(H_1^\delta(s_2) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_2) - 1 \right) e^{s_2 t} \\ & + \varepsilon_3 \left(H_1^\delta(s_3) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_3) - 1 \right) e^{s_3 t} + 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(H_3^\delta + \frac{l_1}{V} H_3^\psi - 1 \right) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \end{aligned} \quad (3.241)$$

La contribution de cette dernière expression dans le troisième noyau et celle qui correspond à la troisième harmonique $e^{(s_1+s_2+s_3)t}$, nous écrivons alors chaque contribution comme suit :

$$\left(\delta^* + \frac{l_1}{V} \dot{\psi}^* - \varepsilon \right) \rightarrow 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(H_3^\delta + \frac{l_1}{V} H_3^\psi - 1 \right) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \quad (3.242)$$

Le terme cubique donne

$$\begin{aligned} \left(\delta^* + \frac{l_1}{V} \dot{\psi}^* - \varepsilon \right)^3 \rightarrow & 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(H_1^\delta(s_1) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_1) - 1 \right) \left(H_1^\delta(s_2) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_2) - 1 \right) \\ & \times \left(H_1^\delta(s_3) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_3) - 1 \right) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \end{aligned} \quad (3.243)$$

- **Termes issues de la dérive arrière**

En suivant la même démarche, la contribution de la dérive arrière dans l'équation différentielle est :

$$\left(\delta^* - \frac{l_2}{V} \dot{\psi}^* \right) \rightarrow 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(H_3^\delta - \frac{l_2}{V} H_3^\psi \right) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \quad (3.244)$$

Le terme cubique donne

$$\begin{aligned} \left(\delta^* - \frac{l_2}{V} \dot{\psi}^* \right)^3 \rightarrow & 6\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \left(H_1^\delta(s_1) - \frac{l_2}{V} H_1^\psi(s_1) \right) \left(H_1^\delta(s_2) - \frac{l_2}{V} H_1^\psi(s_2) \right) \\ & \times \left(H_1^\delta(s_3) - \frac{l_2}{V} H_1^\psi(s_3) \right) e^{(s_1+s_2+s_3)t} \end{aligned} \quad (3.245)$$

En injectant ces derniers termes dans les équations du modèle LD-P3 nous obtenons

$$MV \left((s_1 + s_2 + s_3) H_3^\delta + H_3^\psi \right) = -(k_{\delta 1} + k_{\delta 2}) H_3^\delta + \left(\frac{k_{\delta 2} l_2 - k_{\delta 1} l_1}{V} \right) H_3^\psi - \xi_1 - \xi_2 \quad (3.246)$$

$$I_{zz} (s_1 + s_2 + s_3) H_3^\psi = (l_2 k_{\delta 2} - l_1 k_{\delta 1}) H_3^\delta - \left(\frac{k_{\delta 1} l_1^2 + k_{\delta 2} l_2^2}{V} \right) H_3^\psi - l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 \quad (3.247)$$

Où, ξ_1 et ξ_2 sont des fonctions multidimensionnelle donnée par :

$$\begin{aligned}\xi_1(s_1, s_2, s_3) &= q_{\delta 1} \left(H_1^\delta(s_1) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_1) - 1 \right) \left(H_1^\delta(s_2) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_2) - 1 \right) \left(H_1^\delta(s_3) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_3) - 1 \right) \\ \xi_2(s_1, s_2, s_3) &= q_{\delta 2} \left(H_1^\delta(s_1) - \frac{l_2}{V} H_1^\psi(s_1) \right) \left(H_1^\delta(s_2) - \frac{l_2}{V} H_1^\psi(s_2) \right) \left(H_1^\delta(s_3) - \frac{l_2}{V} H_1^\psi(s_3) \right)\end{aligned}\quad (3.248)$$

Les équations du système s'écrivent sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} H_3^\delta \\ H_3^\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MV(s_1 + s_2 + s_3) + (k_{\delta 1} + k_{\delta 2}) & MV - \left(\frac{k_{\delta 2} l_2 - k_{\delta 1} l_1}{V} \right) \\ (l_1 k_{\delta 1} - l_2 k_{\delta 2}) & I_{zz}(s_1 + s_2 + s_3) + \left(\frac{l_1^2 k_{\delta 1} + l_2^2 k_{\delta 2}}{V} \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\xi_1 - \xi_2 \\ -l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 \end{bmatrix}$$

Finalement, le troisième noyau est donné par :

$$\begin{bmatrix} H_3^\delta(s_1, s_2, s_3) \\ H_3^\psi(s_1, s_2, s_3) \end{bmatrix} = \phi(s_1 + s_2 + s_3) \begin{bmatrix} -\xi_1 - \xi_2 \\ -l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 \end{bmatrix}\quad (3.249)$$

Où $\phi(s)$ est la même matrice que celle utilisée dans 3.221, qui est calculée pour la somme des fréquences $(s_1 + s_2 + s_3)$. Le paramètre non linéaire q_{δ} est un facteur de l'ensemble des expressions des noyaux d'ordre 3. Donc, si q_{δ} sont nulles, les troisièmes noyaux seront nuls et le système devient complètement linéaire. Nous remarquons également que les noyaux de Volterra d'ordres élevés s'expriment toujours en fonction des noyaux du premier ordre.

Pour représenter graphiquement les HFRF d'ordre 3, nous avons besoins de trois axes de fréquences indépendants et un quatrième axe pour illustrer le gain ou la phase. Il est clair qu'une telle représentation est difficile à visualiser. Pour surmonter ce problème, les HFRF seront facilement représentés dans un espace tridimensionnelle défini par le plan $(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$, où $\omega_3 = \omega_1$. Les figures 3.29 et 3.30 montre le quadrant principal de $H_3^\delta(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ et $H_3^\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ pour deux vitesses $V = 100 \text{ km h}^{-1}$ et $V = 120 \text{ km h}^{-1}$, dans un intervalle de fréquence entre 0 Hz et 4 Hz . Les paramètres utilisés pour les simulations sont présentées dans le tableau 3.1.

Durant une situation de conduite assez soutenue en virage, les pneumatiques génèrent d'importantes forces latérales aux points de contacts pneus-sol pour maintenir le véhicule sur une trajectoire donnée. La somme de ces forces est proportionnelle à la valeur de l'accélération latérale qui est d'autant plus grande que la vitesse augmente. A partir des figures 3.29 et 3.30, nous constatons que les gains des noyaux augmentent pour les grandes vitesses. Dans ce cas, les non linéarités affectent significativement les réponses du véhicule.

Ceci était prévisible, car pour les grandes sollicitations le comportement des pneumatiques tend vers la saturation, et la non linéarité est plus présente dans la dynamique de la réponse.

Pour les basses fréquences, les asymptotes des gains s'obtiennent par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{H}_3^\psi \\ \tilde{H}_3^\delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lim_{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \rightarrow 0} \tilde{H}_3^\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \lim_{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \rightarrow 0} \tilde{H}_3^\delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{bmatrix} \\ &= \phi(0) \begin{bmatrix} -q_{\delta 1} \left(\tilde{H}_1^\delta + \frac{l_1}{V} \tilde{H}_1^\psi - 1 \right)^3 - q_{\delta 2} \left(\tilde{H}_1^\delta - \frac{l_2}{V} \tilde{H}_1^\psi \right)^3 \\ -l_1 q_{\delta 1} \left(\tilde{H}_1^\delta + \frac{l_1}{V} \tilde{H}_1^\psi - 1 \right)^3 - l_2 q_{\delta 2} \left(\tilde{H}_1^\delta - \frac{l_2}{V} \tilde{H}_1^\psi \right)^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.250)$$

Selon le théorème Abélien de la valeur finale, ces valeurs correspondent aux réponses en régime permanent de la partie trilineaire du système pour un échelon unité (la réponse en régime permanent du troisième noyau). Ces résultats montrent comment identifier les caractéristiques des réponses d'un système non linéaire à partir des HFRF.

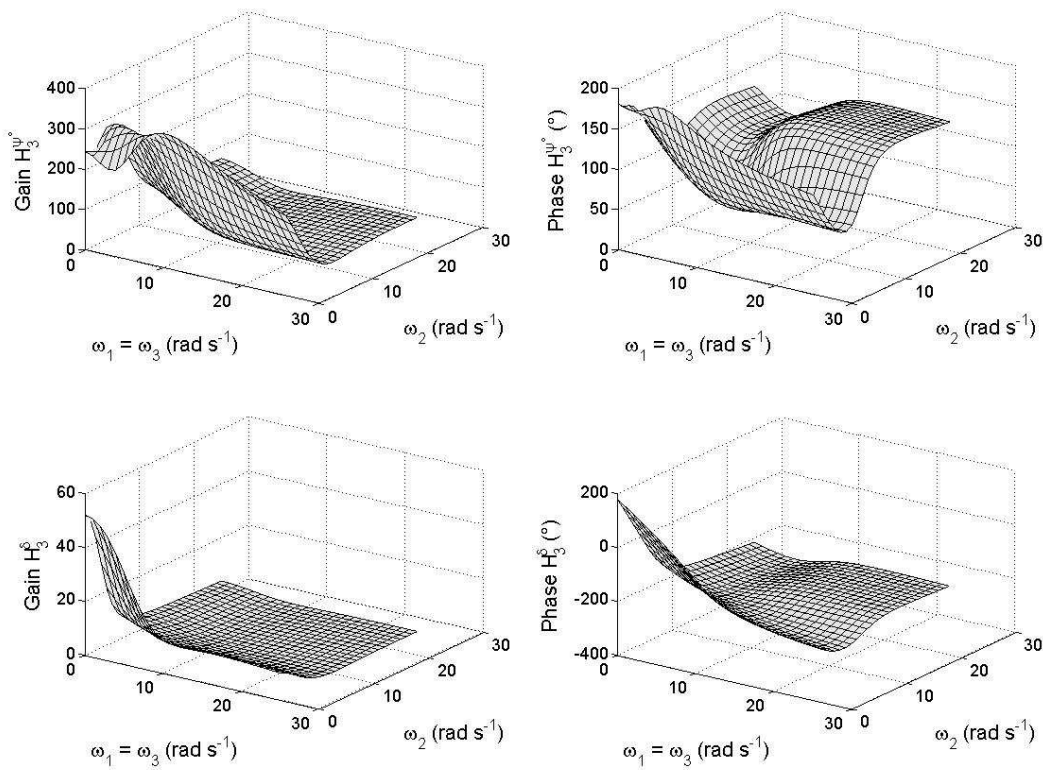


Figure 3.29. Représentation 3D de $H_3^\delta(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ et $H_3^\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$, $V = 100 \text{ km h}^{-1}$.

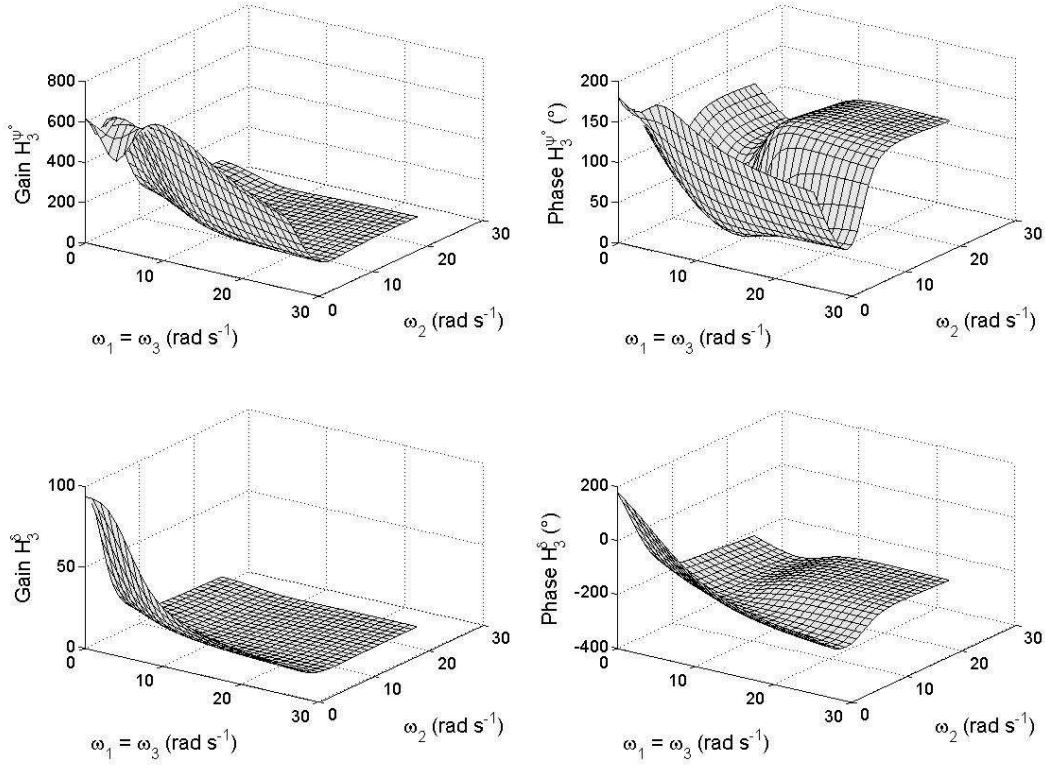


Figure 3.29. Représentation 3D de $H_3^\delta(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ et $H_3^\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$, $V = 120 \text{ km h}^{-1}$.

3.7.6.2. Courbes des FRF

Lorsque le modèle LD-P3 donné par les équations 3.10 et 3.11 est excité par une entrée au volant sinusoïdale, il est évident que les réponses vont contenir des harmoniques multiples de la fréquence d'excitation dont la distribution énergétique dépend de l'amplitude de l'entrée. Ceci peut être investiguer par les séries de Volterra en considérant l'entrée :

$$\varepsilon_r = X_r \cos(\omega_1 t) = \frac{X_r}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) \quad (3.251)$$

En se basant sur les résultats présentés dans §3.7.4.1, nous obtenons les réponses suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(t) = & X_r |H_1^\psi(\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \angle H_1^\psi(\omega_1)) \\ & + \frac{3X_r^3}{4} |H_3^\psi(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \angle H_3^\psi(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)) \\ & + \frac{X_r^3}{4} |H_3^\psi(\omega_1, \omega_1, \omega_1)| \cos(3\omega_1 t + \angle H_3^\psi(\omega_1, \omega_1, \omega_1)) + O(X_r^5) \end{aligned} \quad (3.252)$$

$$\begin{aligned} \delta(t) = & X_r |H_1^\delta(\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \angle H_1^\delta(\omega_1)) \\ & + \frac{3X_r^3}{4} |H_3^\delta(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \angle H_3^\delta(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)) \\ & + \frac{X_r^3}{4} |H_3^\delta(\omega_1, \omega_1, \omega_1)| \cos(3\omega_1 t + \angle H_3^\delta(\omega_1, \omega_1, \omega_1)) + O(X_r^5) \end{aligned} \quad (3.253)$$

Nous pouvons observer que les réponses contiennent des harmoniques à $3\omega_1$ due à la présence du troisième noyau. Si plus de noyaux sont considérés dans les expressions 3.210 et 3.211, les réponses contiendront des harmoniques à $5\omega_1$, $7\omega_1$ et tous les multiples impaires de la fréquences d'excitation.

Cependant, il n'existe aucune composante harmonique à des multiples pairs de la fréquence ω_1 . Ceci est dû à l'absence de non linéarités quadratiques dans le modèle ; ce qui induit des noyaux d'ordres pairs nuls. A l'issue de ces résultats, nous pouvons extraire les FRF composites du premier ordre qui s'écrivent

$$\Lambda_1^\psi(\omega_1) = H_1^\psi(\omega_1) + \frac{3X_r^2}{4} H_3^\psi(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) + O(X_r^4) \quad (3.254)$$

$$\Lambda_1^\delta(\omega_1) = H_1^\delta(\omega_1) + \frac{3X_r^2}{4} H_3^\delta(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) + O(X_r^4) \quad (3.255)$$

La contribution du troisième noyau $H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)$ dans ces FRF est régie par l'amplitude X_r et génère des distorsions harmoniques comme montré sur la figure 3.30. Ces courbes sont obtenues pour trois différentes amplitudes $X_v = 10^\circ$ (proche de la FRF linéaire), $X_v = 30^\circ$ et $X_v = 40^\circ$. Sont valeurs sont données pour des braquages au volant qui sont équivalents à des braquages de roues $X_r = 0.58^\circ$, $X_r = 1.75^\circ$ et $X_r = 2.35^\circ$. Le paramétrage du véhicule utilisé est donné dans le tableau 3.1.

Les termes additionnels tendent à déformer les FRF linéaires décrites par H_1^ψ et H_1^δ . Ces distorsions se produisent à basses fréquences en faisant varier les asymptotes pour $\omega \rightarrow 0$ et en augmentant la fréquence de résonance. La forme des distorsions dépend du type de non linéarité présente dans le système. Le modèle LD-P3 contient uniquement des termes cubiques négatives q_i , dans ce cas, la distorsion tend à augmenter la valeur de la fréquence de résonance. Si les coefficients q_i possédaient des valeurs positives, la distorsion ferait translater la fréquence de résonance vers les basses fréquences.

En augmentant l'amplitude d'excitation, l'effet de la non linéarité devient plus important. Cependant, lorsque les réponses sont représentées par des séries de Volterra limitées aux trois premiers termes, la gamme d'excitations possibles reste assez limitée pour assurer une bonne représentativité. Pour pouvoir étudier les grandes amplitudes nous devons prendre en compte plus de noyaux dans la série.

Egalement, à partir des équations 3.252 et 3.253, nous pouvons extraire analytiquement les fonctions réponses fréquentielles du troisième harmonique

$$\Lambda_3^\psi(3\omega_1) = \frac{X_r^2}{4} H_3^\psi(\omega_1, \omega_1, \omega_1) + O(X_r^4) \quad (3.256)$$

$$\Lambda_3^\delta(3\omega_1) = \frac{X_r^2}{4} H_3^\delta(\omega_1, \omega_1, \omega_1) + O(X_r^4) \quad (3.257)$$

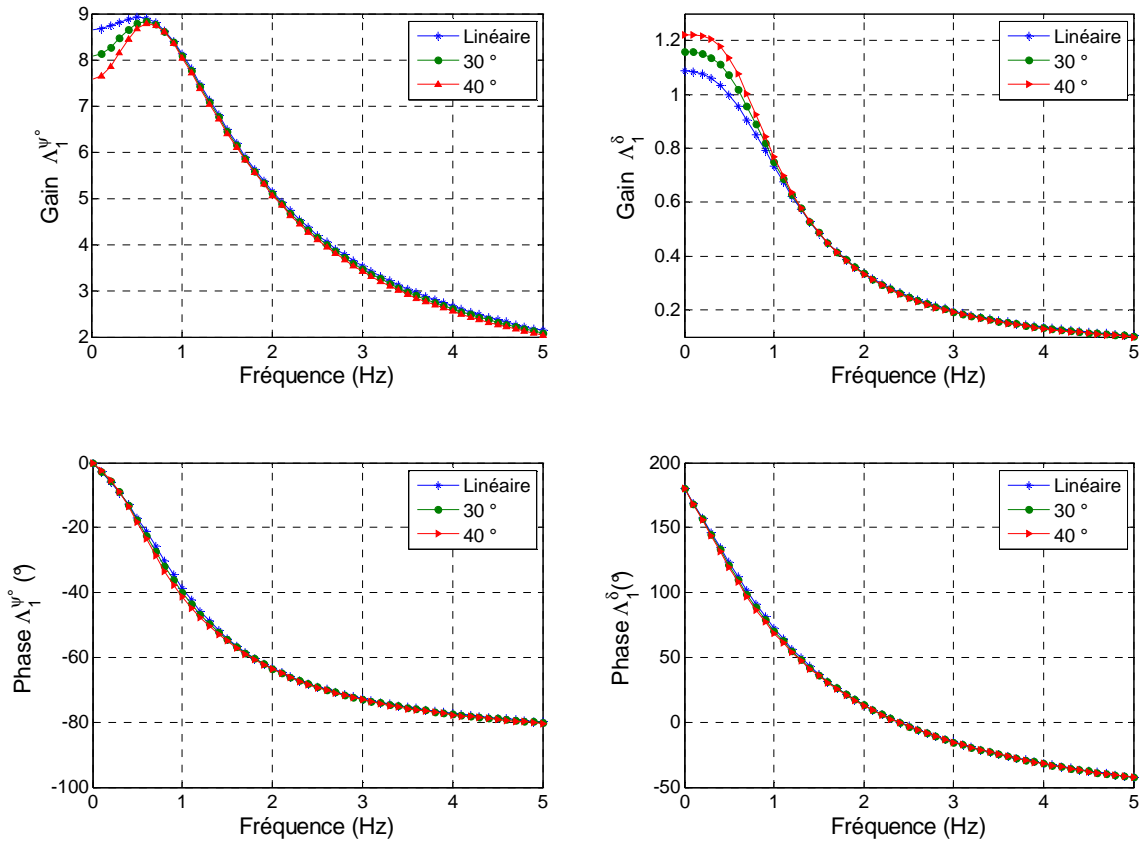


Figure 3.30. Effet des distortions sur les FRF composites Λ_1^ψ et Λ_1^δ .

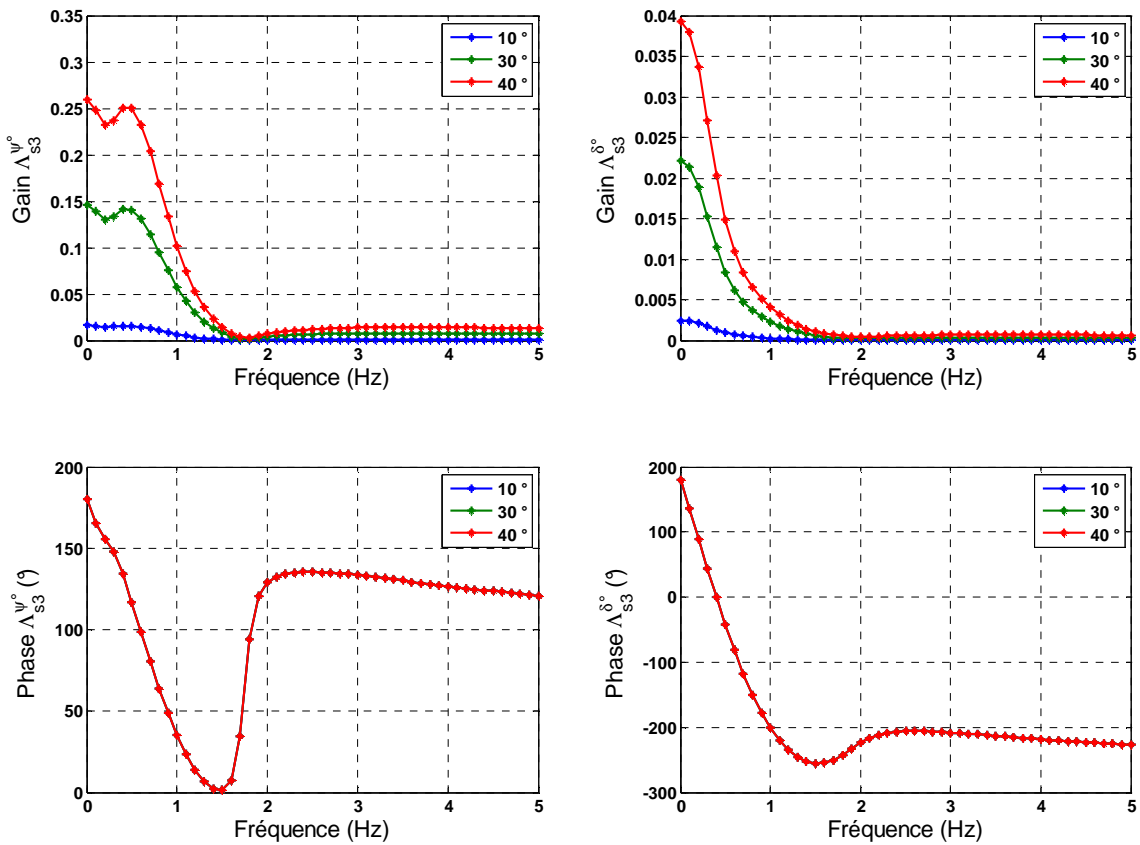


Figure 3.31. FRF composites d'ordre trois $\Lambda_3^\psi(3\omega_1)$ et $\Lambda_3^\delta(3\omega_1)$.

La figure 3.31 montre une représentation de FRF composites d'ordre trois, pour trois amplitudes d'entrée à savoir $X_v = 10^\circ$, $X_v = 30^\circ$ et $X_v = 40^\circ$ sur un intervalle de fréquence $\omega = [0\text{Hz}, 5\text{Hz}]$. Nous constatons que pour la basses amplitude $X_v = 10^\circ$, les fonctions $\Lambda_3^\psi(\omega)$, $\Lambda_3^\delta(\omega)$ sont quasiment nulles. Ce résultat était attendu car pour la même amplitude les fonctions $\Lambda_1^\psi(\omega)$, $\Lambda_1^\delta(\omega)$ sont confondues avec les FRF linéaires et l'effet des non linéarités est très négligeable.

Ce résultat peut également être confirmé en visualisant le taux de distorsion harmonique donné par l'équation 3.190 et représenté sur la figure 3.32. A $X_v = 10^\circ$; le taux de distorsion harmonique est nulle sur toutes les fréquences indiquant l'absence de dynamiques non linéaires. Lorsque l'amplitude augmente, la distorsion apparaît autour de la fréquence de résonance.

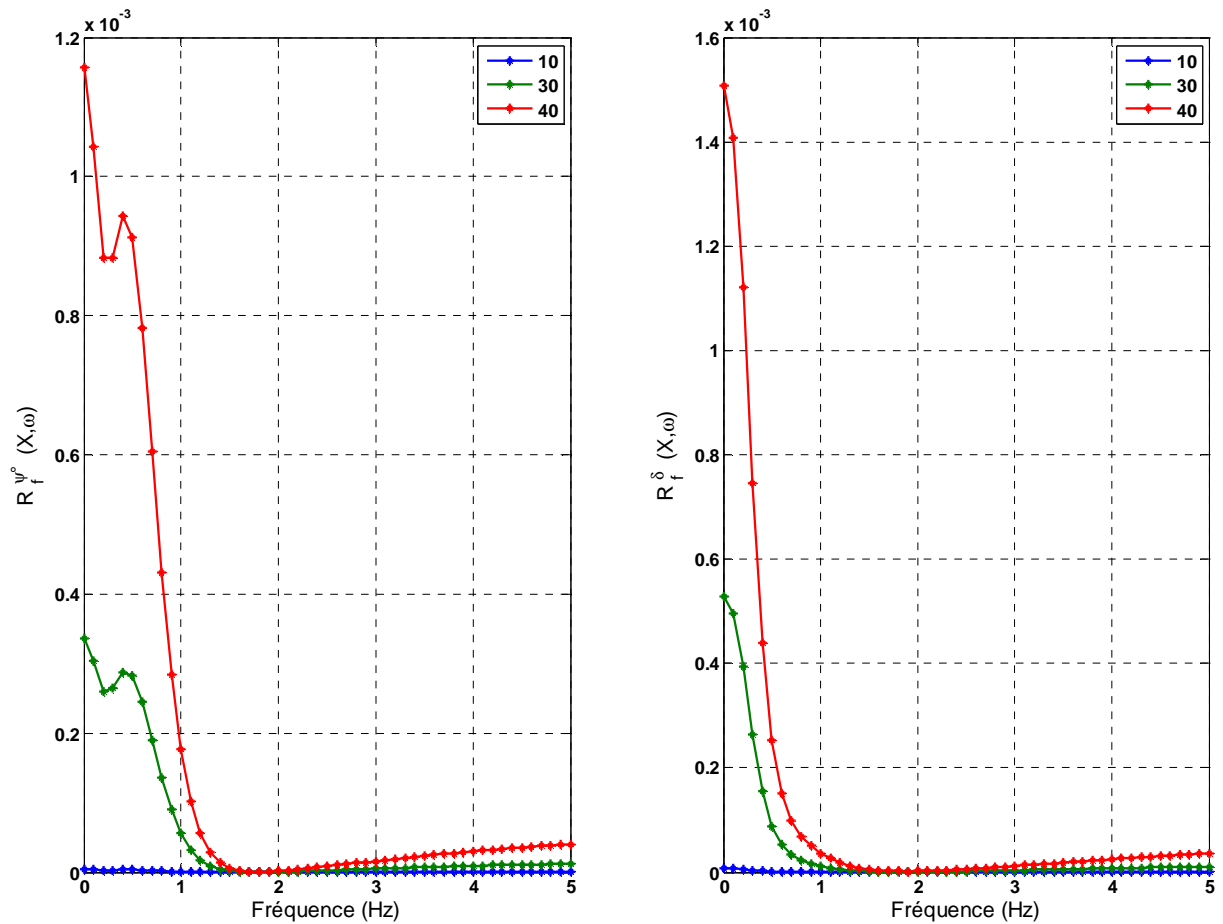


Figure 3.32. Taux de distorsion harmonique.

3.7.6.3. Régime permanent

L'analyse en régime permanent consiste à extraire la caractéristique de surbraquage (évolution de l'angle surbraquage ε_s en fonction de l'accélération latérale γ_t). L'angle de surbraquage introduit dans le chapitre 1 est défini comme étant la différence entre les dérives

aux axes avant et arrière, et il est souvent utilisé pour caractériser la stabilité du véhicule. Dans la suite, $(\tilde{\cdot})$ dénote la réponse en régime permanent à une entrée échelon $\varepsilon_r = X_r \Gamma(t)$. La courbe de surbraquage peut être obtenue à travers les caractéristiques asymptotiques des noyaux de Volterra. En se basant sur les expressions analytiques 3.222 et 3.250, nous pouvons écrire :

$$\text{L'angle de surbraquage : } \quad \tilde{\varepsilon}_s = \tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2 = \frac{L}{V} \tilde{\psi} - X_r \quad (3.258)$$

$$\text{L'accélération latérale : } \quad \tilde{\gamma}_t = V \tilde{\psi} \quad (3.259)$$

Où,

$$\text{Vitesse de Lacet : } \quad \tilde{\psi} = X_r \tilde{H}_1 \tilde{\psi} + X_r^3 \tilde{H}_3 \tilde{\psi} \quad (3.260)$$

Les quantités $\tilde{\varepsilon}_s$ et $\tilde{\gamma}_t$ peuvent être calculé pour chaque amplitude X_r en utilisant les formules 3.258 et 3.259. En faisant varier X_r sur un intervalle d'amplitudes prédéfini, nous pouvons obtenir la caractéristique complète de l'angle de surbraquage en fonction de l'accélération latérale. Le résultat est montré sur la figure 3.33.

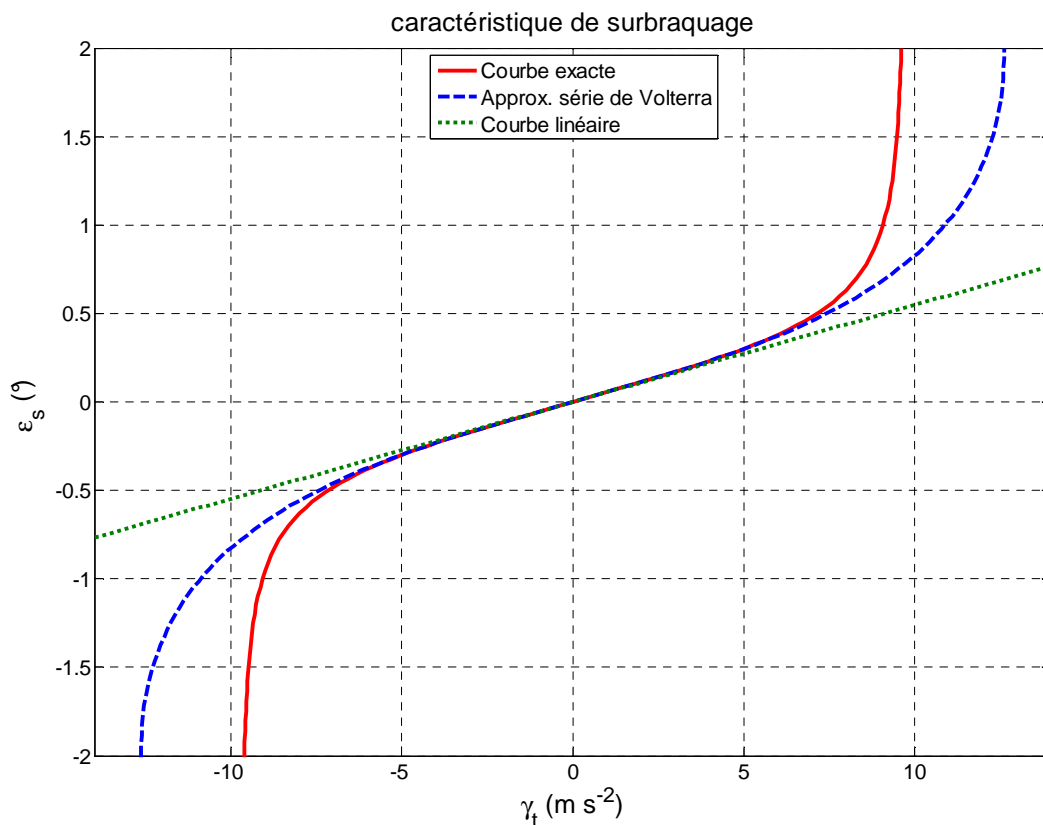


Figure 3.33. Effet des distorsions sur les fonctions réponses fréquentielles.

Sur cette figure, la ligne continue représente la courbe exacte de l'angle de surbraquage obtenue par une résolution numérique du modèle bicyclette non linéaire en

utilisant la formule de Pacejka (LD-PM). La ligne discontinue représente l'approximation analytique obtenue à partir des séries de Volterra et la ligne en pointillée représente la courbe linéaire.

Une comparaison entre la courbe exacte et la courbe linéaire permet d'établir un domaine de validité allant jusqu'à $\gamma_t = 4.6 \text{ m s}^{-2}$ avec une erreur de 5% par rapport à la courbe exacte. En utilisant l'approximation en séries de Volterra, nous remarquons que le domaine de validité est étendue à une accélération de 7.8 m s^{-2} avec une erreur de 5% par rapport à la courbe exacte. Ce résultat très important et représente une amélioration significative en terme de représentativité analytique.

3.7.6.4. Réponse temporelles à une entrée arbitraire

Afin de calculer les réponses temporelles du modèle de dynamique véhicule LD-P3, nous appliquer la méthode des associations de variables précédemment présentée pour une entrée arbitraire au volant $\varepsilon_r(t)$. En se limitant aux trois premier noyaux de Volterra précédemment calculés, les réponses du véhicule à une telle entrée s'expriment par

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^\delta(t-\tau_1)\varepsilon_r(\tau_1)d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3^\delta(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \prod_{i=1}^3 \varepsilon_r(\tau_i) d\tau_i \quad (3.261)$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^\psi(t-\tau_1)\varepsilon_r(\tau_1)d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3^\psi(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \prod_{i=1}^3 \varepsilon_r(\tau_i) d\tau_i \quad (3.262)$$

Dans ces expressions, la réponse au premier noyau qui correspond à la partie linéaire du modèle est facile à évaluer contrairement à celui du troisième noyau. En effet, une simple transformation dans le domaine de Laplace permet de calculer la réponse linéaire à n'importe quelle entrée. Toute la difficulté réside dans le calcul de la seconde partie de la réponse due au troisième noyau. Selon la méthode des associations de variables, les réponses 3.261 et 3.262 s'écrivent dans domaine de Laplace monodimensionnelle en fonction des noyaux de Volterra précédemment calculés comme suit :

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \psi_1(s) + A[\psi_3(s_1, s_2, s_3)] \\ &= H_1^\psi(s)X(s) + A[H_3^\psi(s_1, s_2, s_3)\varepsilon_r(s_1)\varepsilon_r(s_2)\varepsilon_r(s_3)] \end{aligned} \quad (3.263)$$

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \delta_1(s) + A[\delta_3(s_1, s_2, s_3)] \\ &= H_1^\delta(s)X(s) + A[H_3^\delta(s_1, s_2, s_3)\varepsilon_r(s_1)\varepsilon_r(s_2)\varepsilon_r(s_3)] \end{aligned} \quad (3.264)$$

Où $A[\cdot]$ désigne l'opérateur de l'association de variables donné par 3.202. Avant d'évaluer les associations de variables, réécrivant $\psi_3(s_1, s_2, s_3)$ et $\delta_3(s_1, s_2, s_3)$ sous une forme plus facile à exploiter. A partir de l'expression du troisième noyau de Volterra (équation 3.249) nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} \delta_3(s_1, s_2, s_3) \\ \psi_3(s_1, s_2, s_3) \end{bmatrix} = \phi(s_1 + s_2 + s_3) \prod_{i=1}^3 \mathcal{E}_r(s_i) \begin{bmatrix} -\xi_1(s_1, s_2, s_3) - \xi_2(s_1, s_2, s_3) \\ -l_1 \xi_1(s_1, s_2, s_3) + l_2 \xi_2(s_1, s_2, s_3) \end{bmatrix} \quad (3.265)$$

Les fonctions $\xi_1(s_1, s_2, s_3)$ et $\xi_2(s_1, s_2, s_3)$ sont données par 3.248 et que nous pouvons réécrire sous une forme régulière compacte comme suit :

$$\xi_1(s_1, s_2, s_3) = q_{\delta 1} \prod_{i=1}^3 \left(H_1^\delta(s_i) + \frac{l_1}{V} H_1^\psi(s_i) - 1 \right) = q_{\delta 1} \prod_{i=1}^3 F(s_i) \quad (3.266)$$

$$\xi_2(s_1, s_2, s_3) = q_{\delta 2} \prod_{i=1}^3 \left(H_1^\delta(s_i) - \frac{l_2}{V} H_1^\psi(s_i) \right) = q_{\delta 2} \prod_{i=1}^3 G(s_i) \quad (3.267)$$

A partir de 3.7 et 3.8, les fonctions $F(s_i)$ et $G(s_i)$ représentent respectivement les fonctions de transfert linéaire des dérivés avant et arrière. En injectant ces deux dernières expressions dans 3.265, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \delta_3(s_1, s_2, s_3) \\ \psi_3(s_1, s_2, s_3) \end{bmatrix} = \phi(s_1 + s_2 + s_3) \begin{bmatrix} -q_{\delta 1} \prod_{i=1}^3 F(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) - q_{\delta 2} \prod_{i=1}^3 G(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \\ -l_1 q_{\delta 1} \prod_{i=1}^3 F(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) + l_2 q_{\delta 2} \prod_{i=1}^3 G(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \end{bmatrix} \quad (3.268)$$

A partir de ce dernier résultat, nous constatons que les réponses possèdent une forme particulière 3.205. En utilisant la première propriété des associations de variables (voir §3.7.5.3) nous obtenons les réponses dans le domaine de Laplace monodimensionnelle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \delta_3(s) \\ \psi_3(s) \end{bmatrix} = \phi(s) \begin{bmatrix} -q_{\delta 1} A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right] - q_{\delta 2} A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right] \\ -l_1 q_{\delta 1} A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right] + l_2 q_{\delta 2} A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right] \end{bmatrix} \quad (3.269)$$

Avec,

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} MVs + (k_{\delta 1} + k_{\delta 2}) & MV - \left(\frac{k_{\delta 2} l_2 - k_{\delta 1} l_1}{V} \right) \\ (l_1 k_{\delta 1} - l_2 k_{\delta 2}) & I_{zz} s + \left(\frac{l_1^2 k_{\delta 1} + l_2^2 k_{\delta 2}}{V} \right) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.270)$$

Finalement, le calcul des réponses revient aux calculs des deux associations de variables des fonctions régulières

$$A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right] \quad \text{et} \quad A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right]$$

A ce stade l'utilisation de la deuxième propriété des associations de variables peut s'avérer d'une grande utilité (voir §3.7.5.3). Nous pouvons également utiliser les tables des associations de variables présentées dans [Bry92] comme une seconde alternative.

A partir des résultats présentés dans le chapitre 2, les fonctions de transfert $H_1^\psi(s_i)$ et $H_1^\delta(s_i)$ (respectivement $F(s_i)$ et $G(s_i)$) s'écrivent sous la forme de l'équation 2.99 dont les coefficients sont donnés par 2.100 à 2.102 et le tableau 2.3. En voici les équations pour rappel :

$$F(s_i) = H_0^{\delta_1} \frac{1 + n_1^{\delta_1} s_i + n_2^{\delta_1} s_i^2}{1 + 2\eta s_i / \omega_n + s_i^2 / \omega_n^2} \quad (3.271)$$

$$G(s_i) = H_0^{\delta_2} \frac{1 + n_1^{\delta_2} s_i}{1 + 2\eta s_i / \omega_n + s_i^2 / \omega_n^2} \quad (3.272)$$

Par conséquent, les associations de variables deviennent :

$$A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \varepsilon_r(s_i) \right] = A \left[\prod_{i=1}^3 H_0^{\delta_1} \frac{1 + n_1^{\delta_1} s_i + n_2^{\delta_1} s_i^2}{1 + 2\eta s_i / \omega_n + s_i^2 / \omega_n^2} \varepsilon_r(s_i) \right] \quad (3.273)$$

$$A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \varepsilon_r(s_i) \right] = A \left[\prod_{i=1}^3 H_0^{\delta_2} \frac{1 + n_1^{\delta_2} s_i}{1 + 2\eta s_i / \omega_n + s_i^2 / \omega_n^2} \varepsilon_r(s_i) \right] \quad (3.274)$$

a. Cas d'une entrée impulsionnelle

Soit une entrée impulsionnelle à la roue s'écrivant comme suit :

$$\varepsilon_r(t) = a \delta_c(t) \quad (3.275)$$

Avec $\delta_c(t)$ étant l'impulsion de Dirac. Cette entrée ne peut être jamais exécutée sur un vrai véhicule car irréalisable physiquement. Par contre, elle est généralement utile pour étudier les systèmes dynamiques. La transformée de Laplace de cette entrée au volant est

$$\varepsilon_r(s) = a \quad (3.276)$$

En injectant cette entrée dans 3.273 et 3.274 nous obtenons :

$$A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \varepsilon_r(s_i) \right] = a^3 A \left[\prod_{i=1}^3 H_0^{\delta_1} \frac{1 + n_1^{\delta_1} s_i + n_2^{\delta_1} s_i^2}{1 + 2\eta s_i / \omega_n + s_i^2 / \omega_n^2} \right] \quad (3.277)$$

$$A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \varepsilon_r(s_i) \right] = a^3 A \left[\prod_{i=1}^3 H_0^{\delta_2} \frac{1 + n_1^{\delta_2} s_i}{1 + 2\eta s_i / \omega_n + s_i^2 / \omega_n^2} \right] \quad (3.278)$$

En se basant sur la table des associations de variables présentées dans [Bry92], nous pouvons calculer des deux dernières transformations. L'évaluation de ces expressions peut s'avérer très fastidieux et une erreur peut facilement se glisser durant le calcul. Il était donc préférable d'utiliser des logiciels de calcul formel (calcul symbolique) notamment Mathematica[©] et Matlab[©] (base Maple[©]) pour réaliser principalement les calculs de substitution analytique. Un programme a été développé pour réaliser ce type de calcul. En injectant le résultat dans 3.269, nous obtenons les expressions $\dot{\psi}_3(s)$ et $\delta_3(s)$.

Une comparaison graphique entre la réponse temporelle du véhicule avec les séries de Volterra et la réponse simulée est présentée sur les figures ci-dessous. Les paramètres utilisés sont les suivant :

- Véhicule Citroën C6 avec un pneumatique Michelin Pilot Primacy 245/45R18 à 2.4 bar (cf. tableau 3.1)
- $V = 120 \text{ km h}^{-1}$;
- $\varepsilon_r(t) = \frac{90^\circ}{demul} \delta_c(t)$; avec $demul = 17$. L'amplitude de l'impulsion est assez élevée pour exciter suffisamment la non linéarité.

La figure 3.34 représente la contribution du troisième noyau dans la réponse du véhicule et la figure 3.35 représente la comparaison entre la réponse totale du véhicule par les séries de Volterra 3.261 et 3.262 et les réponses obtenues par une résolution numériques du modèle LD-P3. Les résultats montrent clairement l'adéquation des séries de Volterra tronqués à estimer les réponses. A partir de la figure 3.34, nous remarquons qu'il existe une contribution importante des noyaux d'ordre trois dans les réponses surtout celle concernant la réponse en vitesse de Lacet.

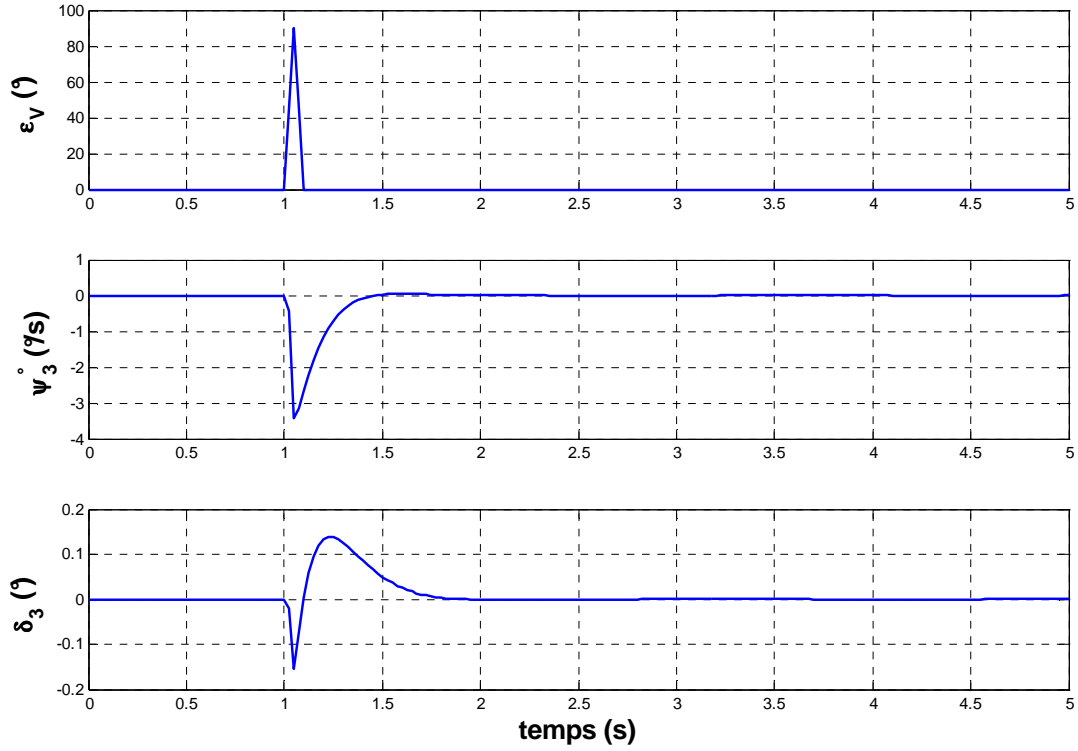


Figure 3.34. Contribution du troisième noyau de Volterra - Réponses $\psi_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

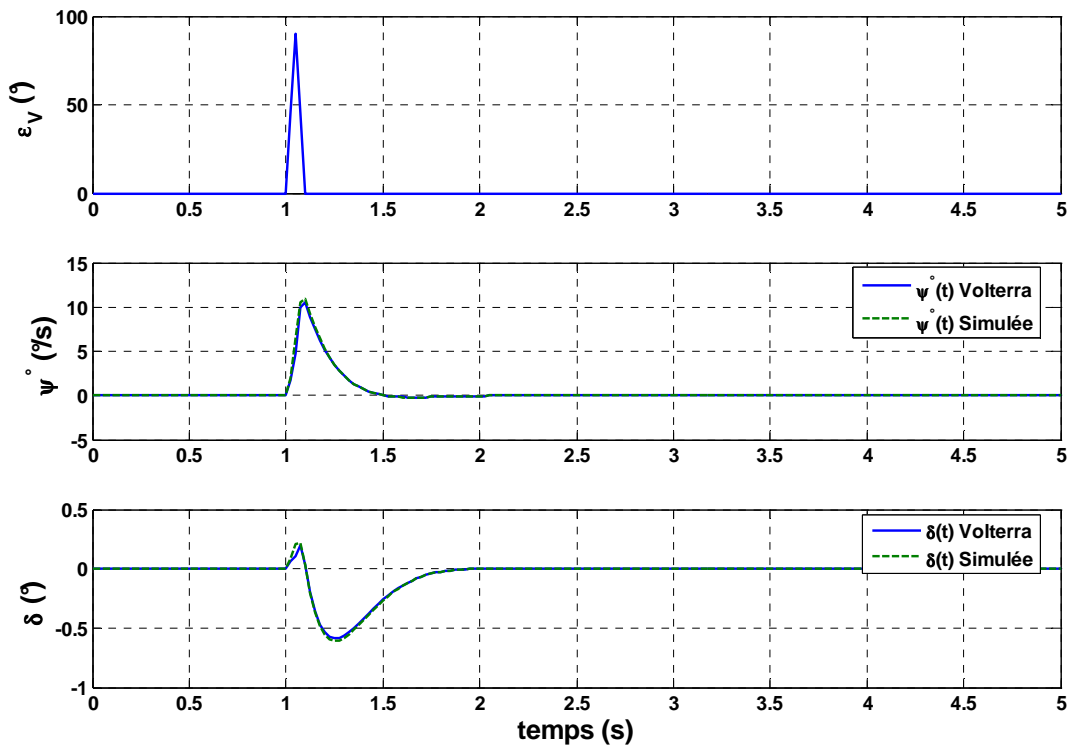


Figure 3.35. Comparaison entre les réponses obtenues par les séries de Volterra et les réponses obtenues par simulations du modèle LD-P3.

b. Cas d'une entrée échelon

Soit l'entrée échelon à la roue s'écrivant comme suit :

$$\varepsilon_r(t) = a\Gamma(t) \quad (3.279)$$

Sa transformé de Laplace est donné par

$$\varepsilon_r(s) = \frac{a}{s} \quad (3.280)$$

En injectant cette entrée dans 3.273 et 3.274 et en suivant les mêmes étapes précédemment décrite, nous pouvons obtenir les réponses du véhicule. Une illustration des résultats est présentée ci-dessous pour un véhicule Citroën C6 avec un pneumatique Michelin Pilot Primacy (voir tableau 3.1). La vitesse est $V = 120 \text{ km h}^{-1}$. Les réponses à deux échelons ont été calculées.

La figure 3.37 montre une comparaison entre les réponses calculées par les séries de Volterra et ceux obtenues par la simulation du modèle LD-P3. Les réponses des séries de Volterra apporte une bonne estimation de la réponse avec un écart observé par rapport à la simulation de 3.7%. En réalité, ce cas de figure représente la limite de validité des séries tronquée à 3 termes. En effet, l'accélération latérale en régime permanent est de 7.7 m s^{-2} , alors que nous avons montrée qu'en régime permanent (cf. §3.7.6.3) que la limite acceptable à une erreur de 5% est de 7.8 m s^{-2} .

Lorsque nous augmentons l'amplitude de l'échelon à 40° au volant (cf. figure 3.39), l'erreur observée devient 7.85%. La valeur de l'accélération latérale en régime permanent pour ce cas de figure est 8.55 m s^{-2} , ce qui dépasse la plage de validité des trois premier termes dans les séries de Volterra. Une issue d'amélioration de ces résultats consiste à utiliser les noyaux de Volterra d'ordre supérieur à 3.

- Premier échelon : $a = 30^\circ/\text{demul}$; avec $\text{demul} = 17$.

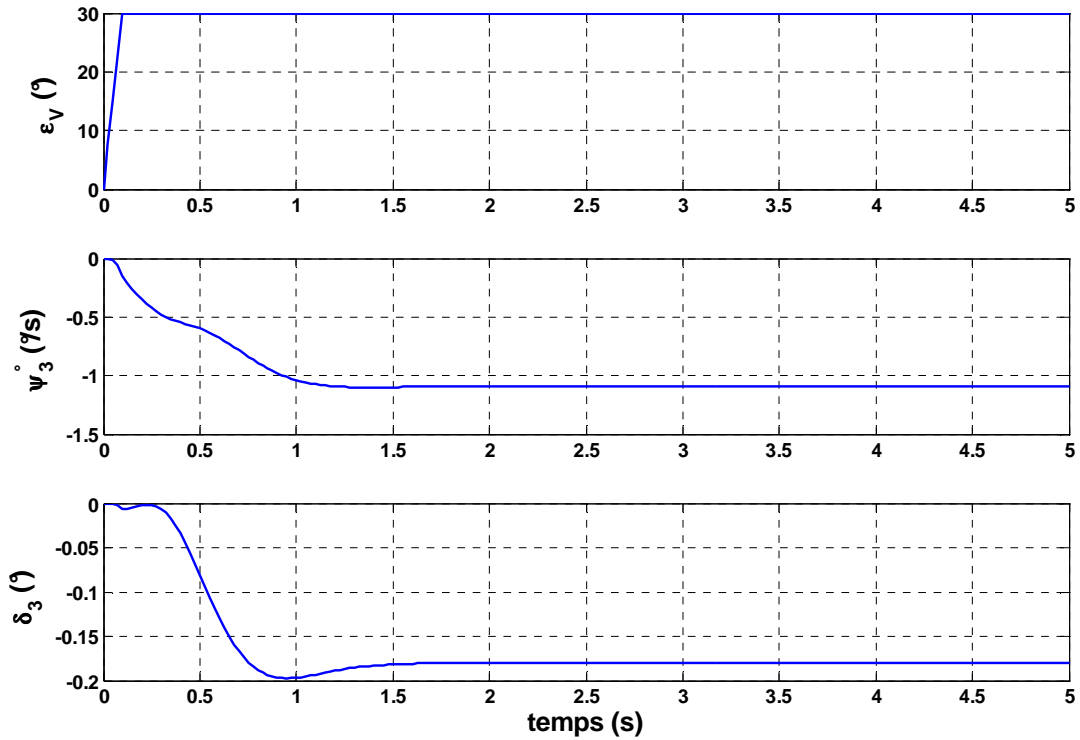


Figure 3.36. Contribution du troisième noyau de Volterra - Réponses $\dot{\psi}_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

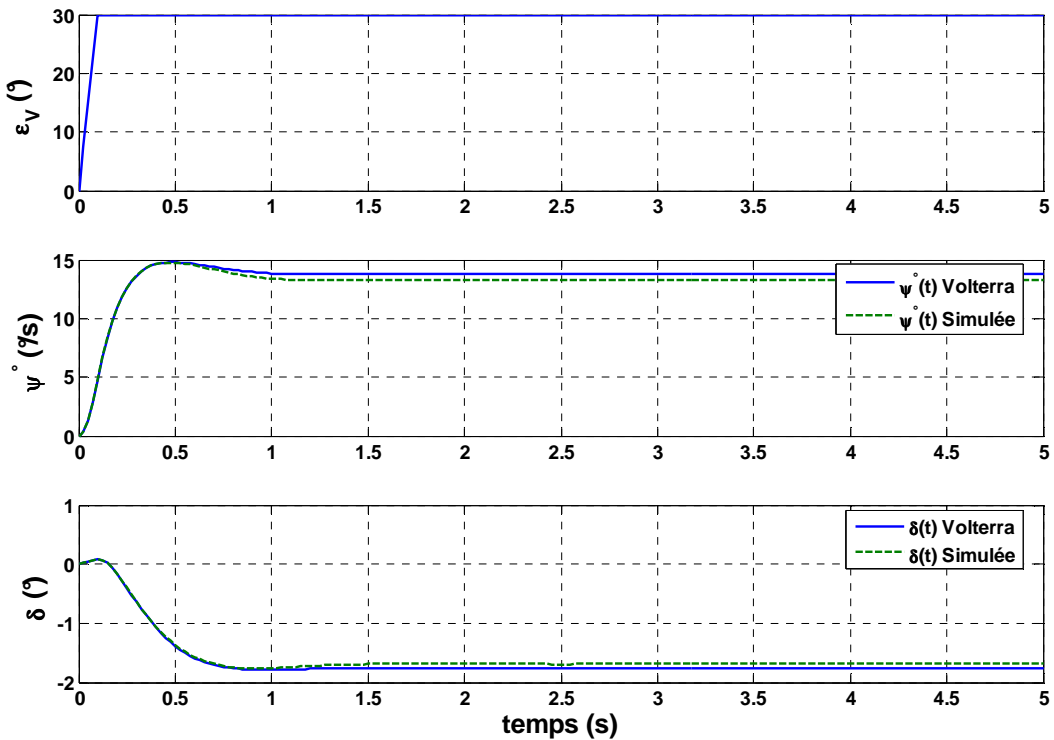


Figure 3.37. Comparaison entre les réponses obtenues par les séries de Volterra et les réponses obtenues par simulations du modèle LD-P3.

- Second échelon : $a = 40^\circ/demul$; avec $demul = 17$.

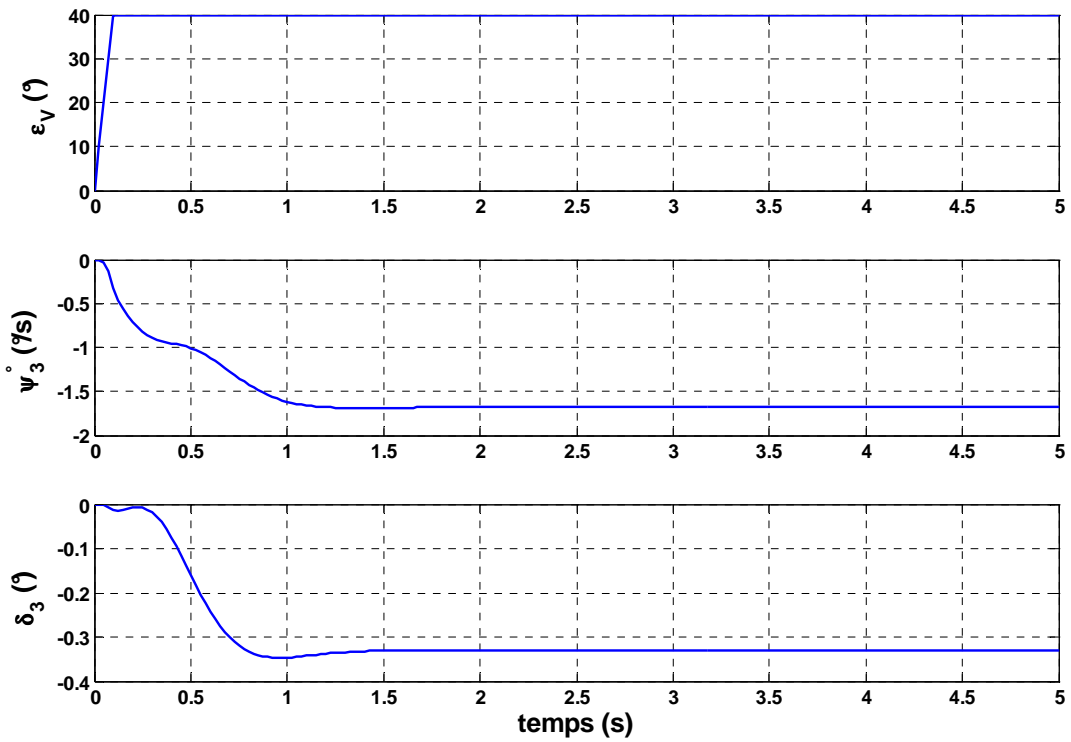


Figure 3.38. Contribution du troisième noyau de Volterra - Réponses $\dot{\psi}_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

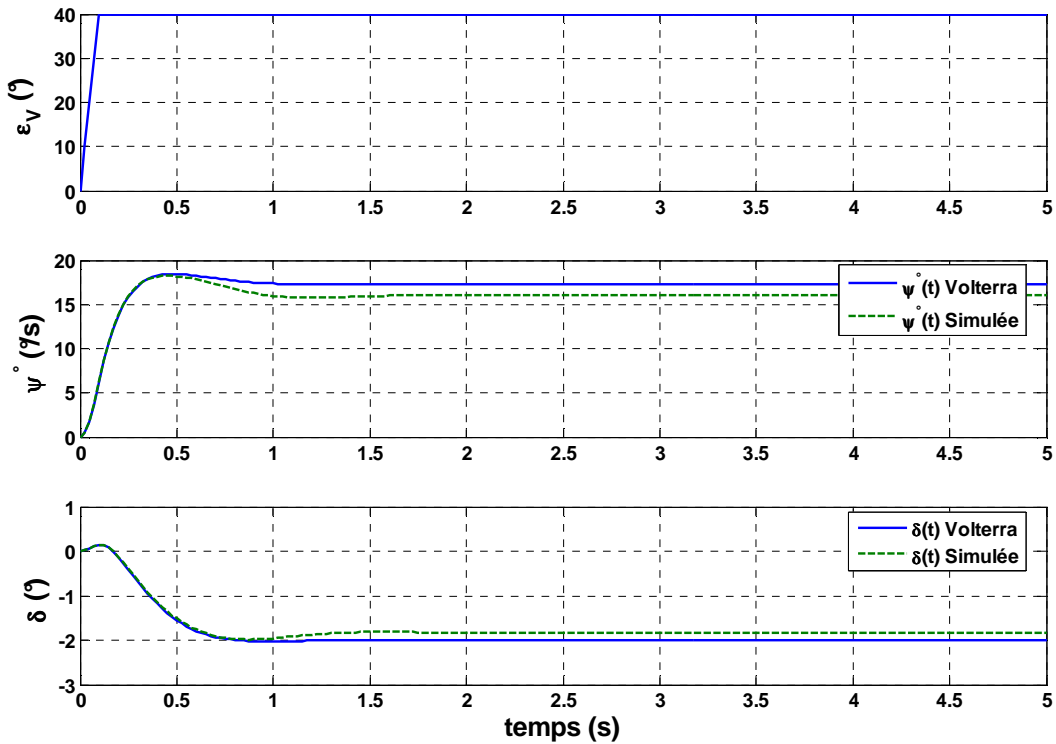


Figure 3.39. Comparaison entre les réponses obtenues par les séries de Volterra et les réponses obtenues par simulations du modèle LD-P3.

c. Cas d'une entrée sinusoïdale

L'entrée sinusoïdale s'écrit :

$$\varepsilon_r(t) = a \sin(\omega t) \quad (3.281)$$

Sa transformé de Laplace est donné par

$$\varepsilon_r(s) = a \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.282)$$

Les résultats de simulations sont présentés sur les figures 3.40 à 3.45 pour un véhicule Citroën C6 avec un pneumatique Michelin Pilot Primacy dont les paramètres figurent dans le tableau 3.1. La vitesse du véhicule est $V = 110 \text{ km h}^{-1}$ et la fréquence d'excitation est $\omega = 1 \text{ Hz}$. Plusieurs amplitudes d'entrée ont été utilisées :

- $a = 30^\circ/\text{demul}$; avec $\text{démul} = 17$.

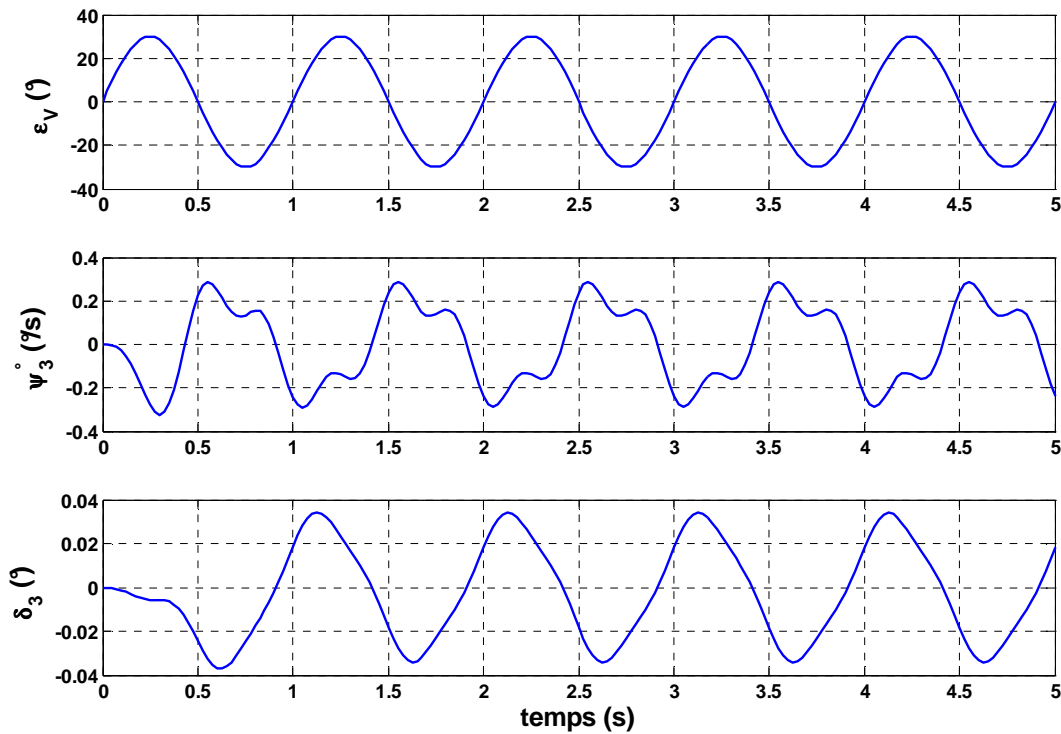


Figure 3.40. Contribution du troisième noyau de Volterra - Réponses $\psi_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

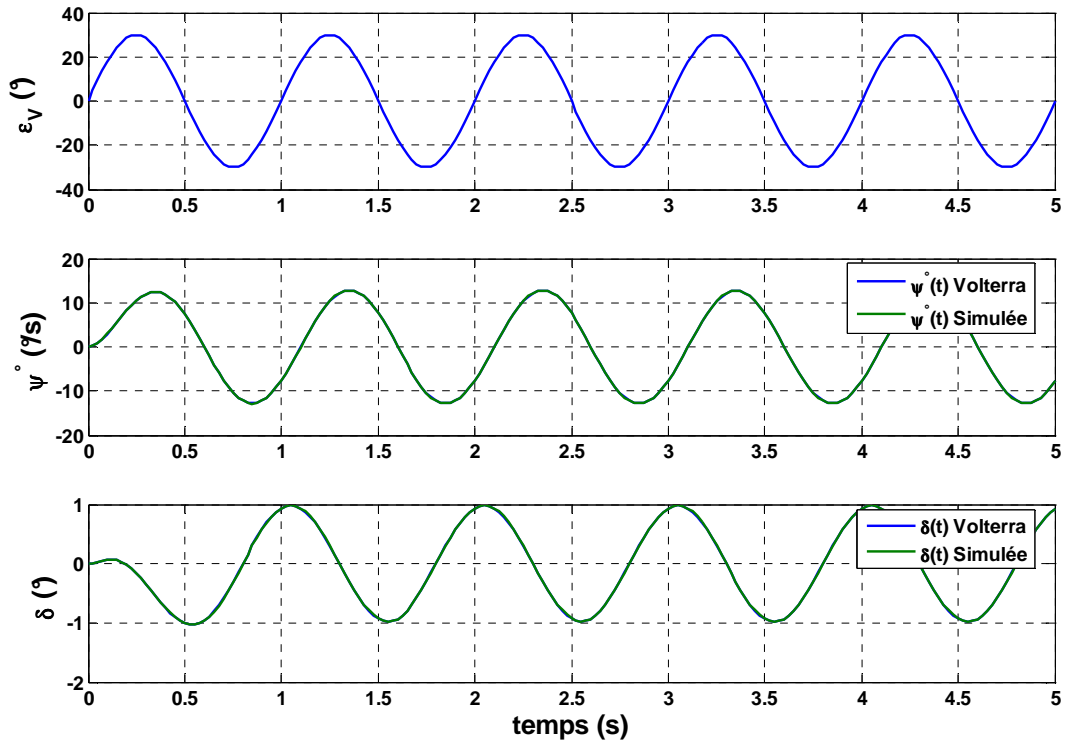


Figure 3.41. Comparaison entre les réponses obtenues par les séries de Volterra et les réponses obtenues par simulations du modèle LD-P3.

- $a = 50^\circ/\text{demul}$; avec $\text{demul} = 17$.

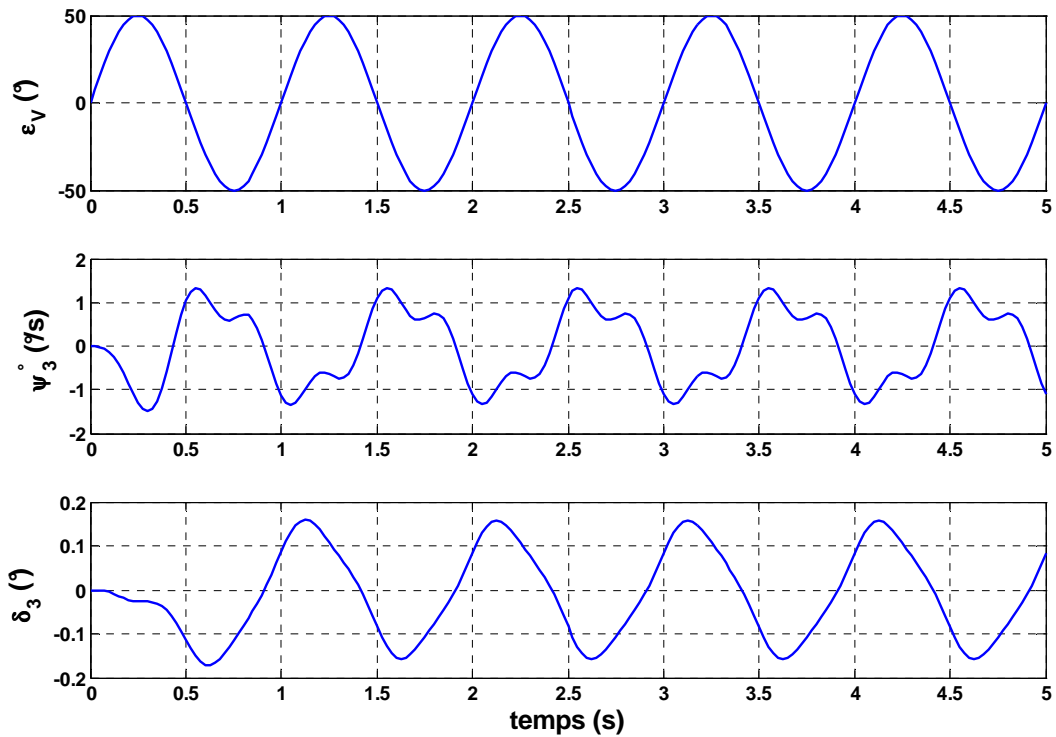


Figure 3.42. Contribution du troisième noyau de Volterra - Réponses $\psi_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

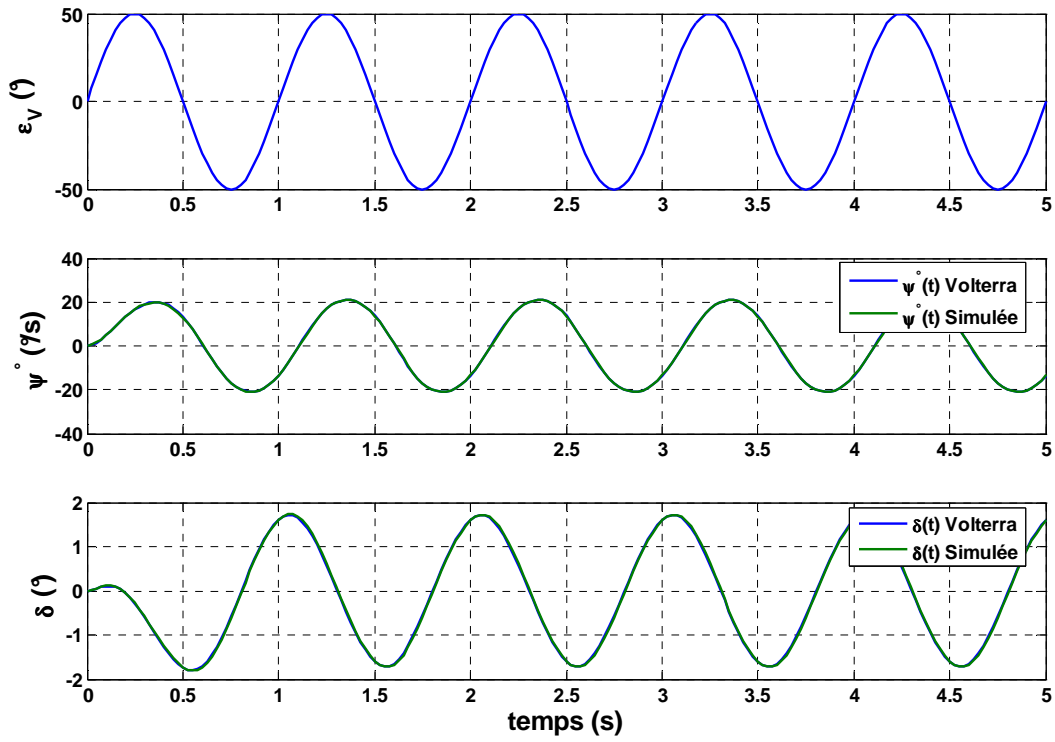


Figure 3.43. Comparaison entre les réponses obtenues par les séries de Volterra et les réponses obtenues par simulations du modèle LD-P3.

- $a = 70^\circ/\text{demul}$; avec $\text{demul} = 17$.

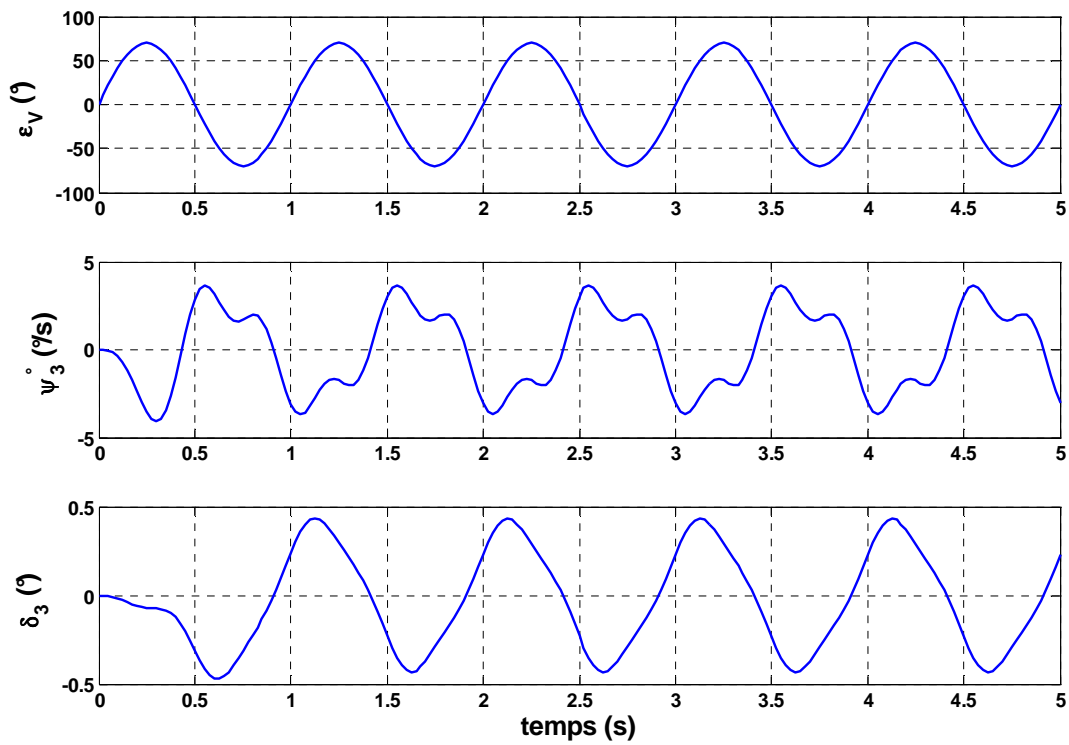


Figure 3.44. Contribution du troisième noyau de Volterra - Réponses $\psi_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

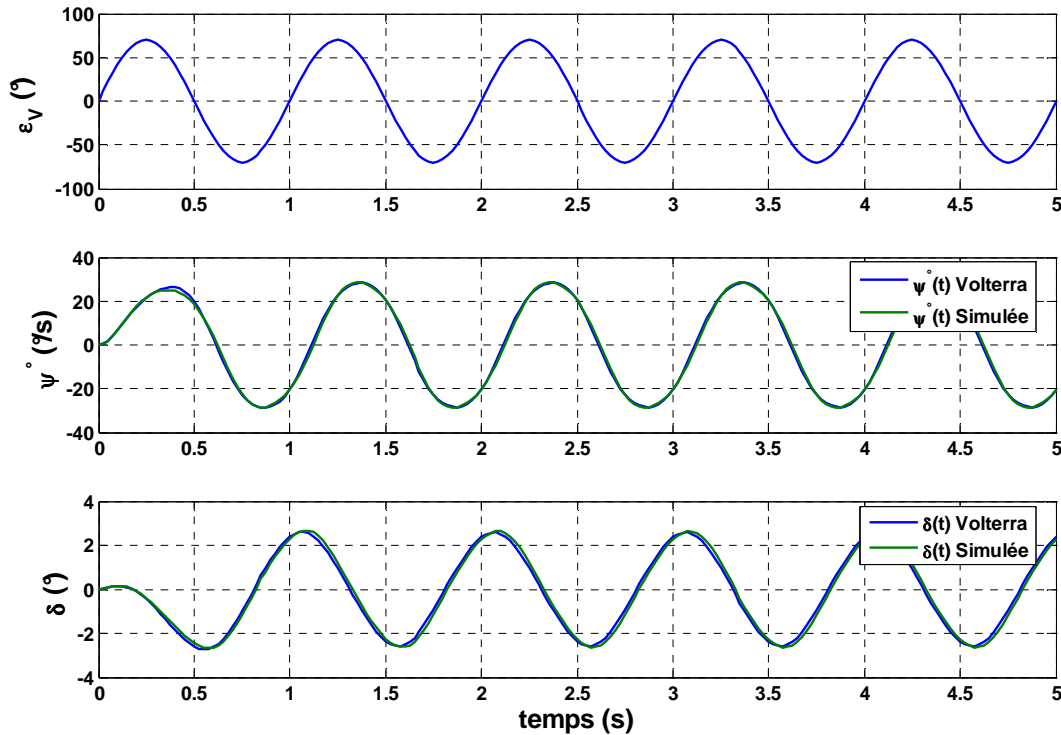


Figure 3.45. Comparaison entre les réponses obtenues par les séries de Volterra et les réponses obtenues par simulations du modèle LD-P3.

Les résultats obtenus pour une entrée sinusoïdale sont très concluants. La méthode des séries de Volterra permet d'obtenir une très bonne approximation des réponses même pour les grandes amplitudes. Nous pouvons constater que la contribution des noyaux d'ordre trois est très importante et décrit parfaitement l'apport des non linéarité aux réponses. Cependant, lorsque les amplitudes au volant augmentent (notamment pour l'amplitude à 70° au volant) nous remarquons une erreur d'estimation due à la troncation de la série au trois premiers termes. Ceci rejoint nos observations faites dans le cas d'une entrée échelon pour les grandes amplitudes.

d. Cas d'une entrée sinusoïdale balayé en fréquence

Soit le braquage à la roue l'entrée sinusoïdale suivante

$$\varepsilon_r(t) = a \sin(\omega t) \quad (3.283)$$

Avec $\omega = \omega(t)$ une fréquence qui varie linéairement dans le temps dans l'intervalle $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. Dans ce cas l'entrée $\varepsilon_r(t)$ est appelé sinus balayé en fréquence. Les résultats sont présentés sur les figures 3.46 et 3.47 en utilisant le paramétrage présenté dans le tableau 3.1 avec une vitesse $V = 110 \text{ km h}^{-1}$. Les paramètres de l'entrée 3.283 sont :

- Amplitude : $a = 50^\circ / \text{demul}$; avec, $\text{demul} = 17$
- La fréquence ω varie linéairement entre 0 Hz et 5 Hz .

Comme pour les précédents types d'entrée, la série tronquée permet d'obtenir une bonne approximation de la réponse du véhicule. L'apport de la non linéarité peut être observé sur la figure 3.46 à travers les composantes de réponse $\dot{\psi}_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

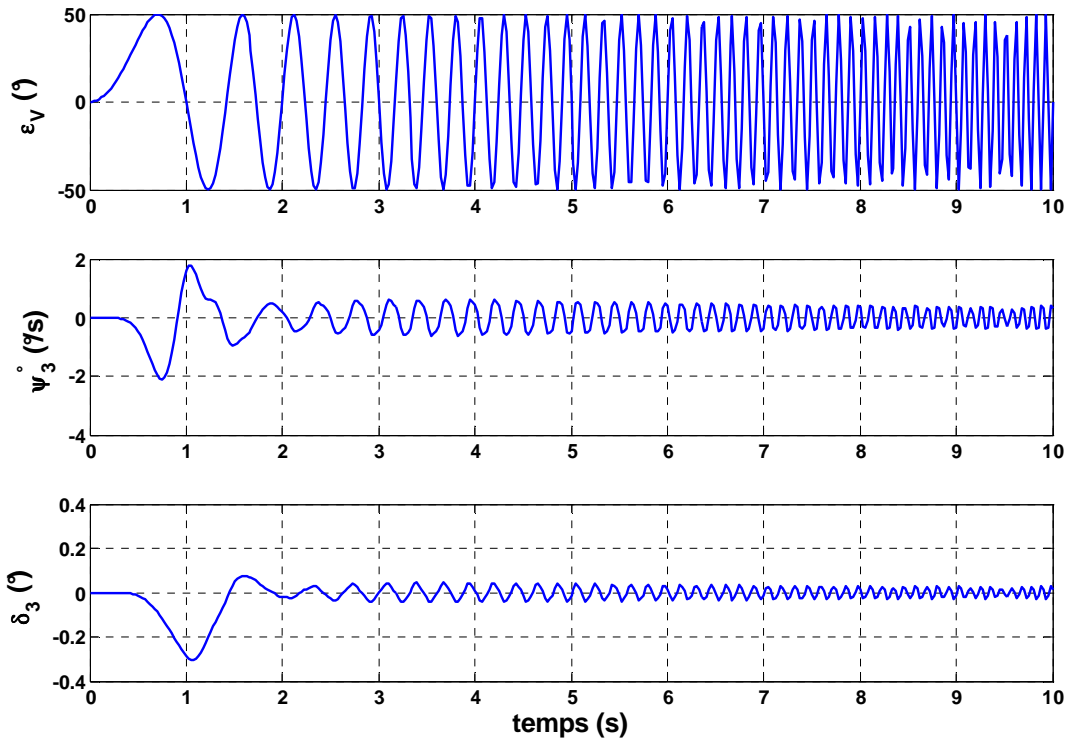


Figure 3.46. Contribution du troisième noyau de Volterra - Réponses $\dot{\psi}_3(t)$ et $\delta_3(t)$.

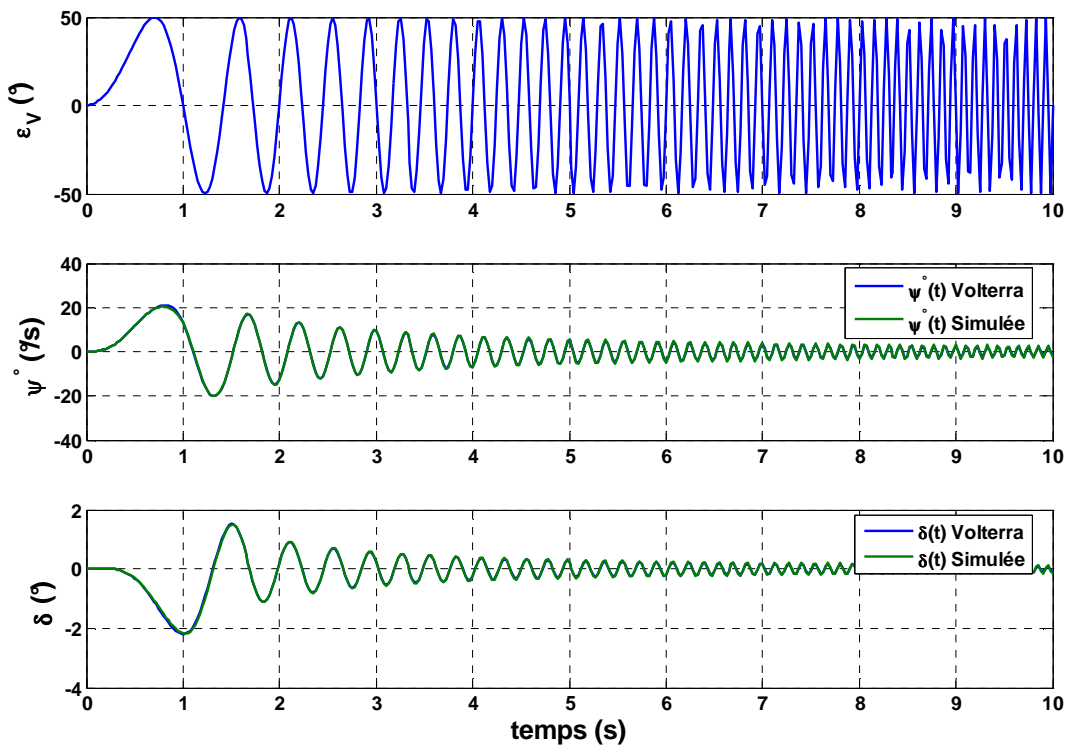


Figure 3.47. Comparaison entre les réponses obtenues par les séries de Volterra et les réponses obtenues par simulations du modèle LD-P3.

3.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'essentiel du travail effectué dans le cadre de l'analyse non linéaire en dynamique de véhicule. Ce chapitre est organisé en deux grandes parties. Une première partie consacrée principalement à l'étude de l'impact des non linéarités dans un système dynamique à la fois dans le domaine fréquentiel et temporel. A l'issue des observations faites de l'impact des non linéarités une méthode de détection de dynamique non linéaire est présentée. Cette méthode permet de détecter à l'aide d'un indice de cohérence la présence éventuelle d'une dynamique non linéaire dans la réponse.

Cette partie est très importante, car elle nous a permis de mettre en claire le contexte de l'étude des phénomènes non linéaire dans le domaine de la dynamique de véhicule ce qui nous a aidé à établir un choix des méthodes à utiliser. Parmi les méthodes existantes, trois ont été retenues à savoir, la méthode d'équilibrage harmonique, la méthode asymptotique de Krylov-Bogoliubov et la méthode des séries de Volterra.

La deuxième partie est dédiée à la présentation des méthodes précitées ainsi que leurs applications dans le cas du modèle LD-P3. Des résultats innovants sont présentés à l'issue de chaque méthode.

La méthode d'équilibrage harmonique appliquée au modèle LD-P3 a permis d'extraire analytiquement les fonctions réponses fréquentielles et d'investiguer les distorsions harmoniques en fonction de l'amplitude de l'entrée. Cette méthode nous a également permis d'étudier l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude d'entrée. En dynamique non linéaire de véhicule, les résultats obtenus par l'équilibrage harmonique constituent une innovation majeure et c'est la première application dans ce domaine. Les résultats présentés peuvent être étendus pour analyser les harmoniques d'ordres supérieurs en utilisant la méthode d'équilibrage multi-harmonique.

Lorsque le véhicule est excité par une entrée sinusoïdale au volant, la méthode d'équilibrage harmonique permet d'obtenir une bonne approximation de la réponse mais uniquement en régime permanent. Pour obtenir plus d'information sur les réponses en régimes transitoire nous avons utilisé la méthode asymptotique de Krylov-Bogoliubov (cf. équation 3.116). Les résultats obtenus sont concluants mais uniquement lorsque la fréquence d'excitation est assez basse. Lorsque la fréquence augmente les réponses divergent. Ceci est due d'une part à la procédure d'adaptation du modèle et d'autre part à la limitation de l'approximation de la réponse au seul premier terme de la série de Krylov-Bogoliubov. Toutefois, Une voie d'amélioration des résultats à des fréquences plus grandes consiste à prendre en compte plus de terme dans la série 3.116.

La théorie des séries de Volterra pour les systèmes non linéaires a été présentée et appliquée afin d'établir une représentation analytique des réponses du véhicule. Cette approche a ouvert un chemin adéquat et efficace pour extraire les caractéristiques analytiques des réponses directement à partir des noyaux de Volterra. La polyvalence de la méthode des séries de Volterra a permis son applicabilité à la fois dans le domaine fréquentiel et temporel. Par conséquent, l'effet des paramètres non linéaire dans le modèle LD-P3 a été étudié dans les deux domaines. En utilisant les noyaux de Volterra, une analyse fréquentielle a été réalisée afin d'investiguer les phénomènes de distorsion (dépendance à l'amplitude d'excitation) au niveau du gain, la phase et la position de la fréquence de résonance.

Dans le même contexte, les noyaux de Volterra ont été utilisés pour extraire la caractéristique de régime permanent (courbe de surbraquage). Un exemple de validation nous a montré qu'avec les séries de Volterra limité au troisième noyau permettent d'étendre la plage de représentativité à une accélération latérale $\gamma_t = 7.8 m s^{-2}$. Pour un modèle LD linéaire, cette représentativité été limité à une accélération latérale de $\gamma_t = 4 m s^{-2}$.

Dans le domaine temporel, nous avons présenté une méthode de calcul analytique des réponses basées sur la transformation des associations de variables. Les résultats ont permit de confirmer l'efficacité des séries de Volterra pour obtenir les réponses d'un système non linéaire jusqu'à une accélération latérale $\gamma_t = 7.8 m s^{-2}$. Cette représentativité peut être étendue à des accélérations plus importantes en considérant plus de noyaux dans les séries 3.210 et 3.211.

Toutes ces caractéristiques des réponses sont complètement décrites par les paramètres physiques du véhicule. Les résultats présentés dans ce chapitre concernant la dynamique non linéaire du véhicule n'ont jamais été obtenus auparavant dans la littérature et ont fait l'objet de deux publications internationales, [Bad09a] dans le journal de la dynamique de véhicule et [Bad09b] au congrès international de la dynamique de véhicule de la SIA (Société des Ingénieurs de l'Automobiles). Ces publications sont présentées en annexe C et D. Ceci est considéré comme un avancement significatif et peut constituer un bon point de départ pour toute analyse non linéaire en dynamique de véhicule.

CHAPITRE 4.

IDENTIFICATION DES PARAMETRES PHYSIQUE EN REGIME PERMANENT

4.1. Introduction	213
4.2. Modèle de référence	214
4.2.1. Présentation du modèle de référence	215
4.2.2. Validation du modèle de référence	216
4.3. Technique d'optimisation	221
4.3.1. Forme canonique du problème des moindres carrés linéaires	222
4.3.2. Réduction à une équation normale factorisée	222
4.3.3. Calcul des paramètres identifiables	224
4.3.4. Calcul de la solution paramétrique	227
4.4. Identification du modèle LD-P3 en régime permanent	228
4.4.1. Mise en forme des équations	228
4.4.1. Application à l'identification du modèle LD-P3	229
4.5. Identification du modèle LRDT-P3 en régime permanent	231
4.5.1. Limitation des charges par pneu	231
4.5.2. Mise en forme des équations	233
4.5.3. Identification des paramètres des raideurs antiroulis	235
4.5.4. Identification des paramètres de braquages induit par les prises de pinces	236
4.5.5. Application à l'identification du modèle LRDT-P3	237
4.6. Conclusion	244

4.1. Introduction

Lorsque nous sommes confrontés à l'étude d'un système non linéaire, l'objectif à atteindre est très souvent déterminant du choix de la méthode à utiliser. Dans le chapitre précédent plusieurs méthodes ont été présentées afin d'obtenir les caractéristiques analytiques des réponses du modèle LD-P3. Les résultats d'application ont été validés par une comparaison relative réalisée entre les réponses obtenues par les méthodes d'analyse et ceux obtenues par une résolution numérique du modèle LD-P3. Cependant, un problème subsiste avec cette procédure. Il s'agit de la corrélation de ces réponses à ceux d'un véhicule réel. En effet, si nous imposons à notre modèle (LD ou LRDT) un angle volant mesuré, les réponses de ce modèle ne seront pas forcément identiques à ceux obtenu sur véhicule instrumenté. Ceci signifie l'intégration d'un paramétrage physique pour chaque élément du modèle véhicule est parfois insuffisant pour obtenir une bonne représentativité vis-à-vis de la mesure. Un exemple de comparaison des régimes permanent des modèles LD-P3 et LRDT-P3 par rapport à la mesure est présenté sur la figure 4.1. Nous remarquons qu'il existe un écart non négligeable entre des trois courbes de sur braquage. Cette décorrélation est en partie due aux paramètres utilisés. Nous évoquons les causes suivantes :

- Les paramètres sont difficilement mesurables (ex. hauteur du centre de gravité, centre de roulis, ...etc.) et donc ils sont substitués par des valeurs théoriques ;
- Les paramètres fournis par les bancs de mesures ne sont pas exacts ou sujets à des incertitudes élevées ;
- Les paramètres ne représentent pas le fonctionnement complet des organes (ex. cartographies de suspension) ;

A cela s'ajoute, les limitations du modèle analytique à représenter les différents phénomènes physiques complexes pouvant survenir lors du fonctionnement réel. Nous pouvons citer les phénomènes suivants :

- Epures cinématiques et élasto-cinématiques des trains ;
- Saturations des suspensions et des pneumatiques ;
- Torsions de caisse et variations de la position du centre de gravité ...etc.

Suite à ces contraintes, le recours à une identification des paramètres du modèle véhicule semble nécessaire et utile pour atteindre un double objectif à savoir :

- l'obtention d'une approximation des paramètres non mesurables ;
- l'amélioration de la représentativité du modèle lorsqu'on le compare avec des mesures réalisées sur véhicule réel.

Nous avons introduit dans le deuxième chapitre plusieurs niveaux de modélisation donné par les modèles LD et LRDT. Dans ce chapitre une procédure d'identification en régime permanent de ces modèles sera présentée. Les résultats seront introduits séparément pour le modèle LD et LRDT. D'une part pour pouvoir étudier la différence de représentativité des deux modèles en régime permanent et d'une autre part pour l'applicabilité de la méthode d'identification et sa généralisation et des modèles plus complexes.

L'obtention d'un paramétrage adéquat pour un modèle de dynamique de véhicule a fait l'objet de certains nombre de travaux qui font référence. Nous citerons brièvement quelques uns comme les travaux de Schmitt [Sch99] sont basés sur l'identification de modèles de connaissance (de différents niveaux de complexité) à partir de la minimisation d'un critère de sortie formulé au sens du maximum de vraisemblance. Ces travaux ont permis de confirmer et

d'améliorer les résultats obtenus avec les modèles de représentation (plus grand nombre de paramètres identifiés à la fois, précision, ...etc.). D'autres auteurs ont tenté d'identifier des modèles de dynamique de véhicule dont la complexité varie selon le besoin. De manière simple nous pouvons facilement constater que les démarches adoptées par d'autres auteurs ne diffèrent pas beaucoup de Schmitt. Des travaux intéressants peuvent être trouvés dans [Hor96] [Hua93] [Let95] [Ger98] [Rip06].

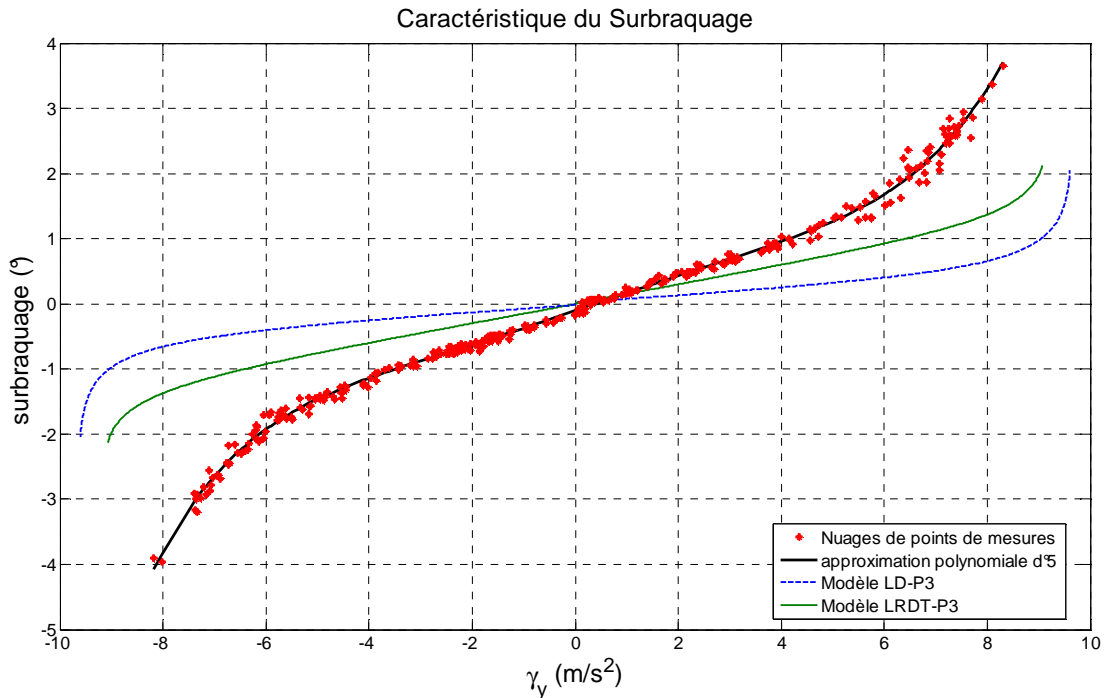


Figure 4.1. Comparaison des courbes des régimes permanents avec un paramétrage sans identification pour le véhicule Citroën C6 des modèles LD-P3 et LRDT-P3.

4.2. Modèle de référence

Une boucle d'identification classique se présente sous la forme de la figure 4.2. Nous remarquons clairement que l'utilisation d'un véhicule réel pour générer les mesures de références fait partie intégrante du processus d'identification.

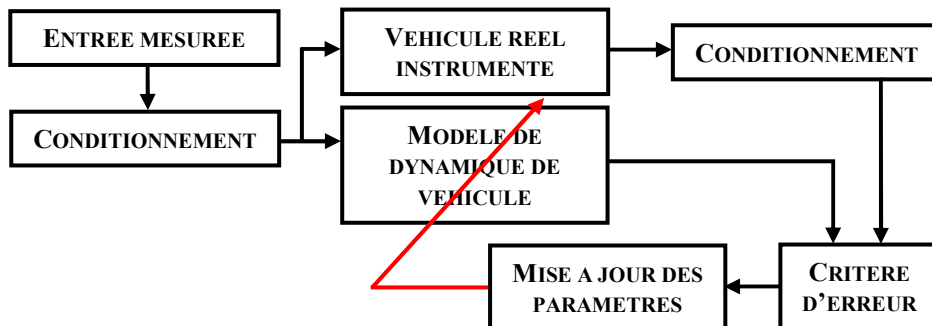


Figure 4.2. Boucle d'identification classique.

En fonction du type de manœuvres à réaliser et des grandeurs physiques à mesurer l'instrumentation d'un véhicule peut s'avérer très coûteuse (en temps et en les moyens investit). De plus, il devient très compliqué de gérer les conditions d'essai lorsque nous cherchons à varier les charges au repos, le type de pneumatiques à utiliser, ...etc. Une solution pour surmonter ces problèmes consiste à utiliser un modèle de référence. Le modèle de référence est un modèle complet de dynamique de véhicule utilisé pour décrire la totalité du comportement du véhicule à n'importe quel entrée d'excitation et pour n'importe quelle situation de vie (par exemple : mise en virage, accélération, sinus, VDA, calage, ...etc.). Le modèle de référence devrait donc reproduire fidèlement le même comportement qu'un véhicule réel lorsque nous comparons ses réponses à des données mesurées.

4.2.1. Présentation du modèle de référence

Dans le présent travail, nous avons choisi d'utiliser le modèle CarMaker[®] de la société IPG. Ce modèle est utilisé par le service HIL (Hardware In the Loop) pour réaliser tous les travaux de simulation et de validation de la dynamique de véhicule et des systèmes de sécurité actives. Le modèle est fourni avec des bancs de simulation HIL (calcul temps réel couplé avec d'éventuels calculateurs ESP). Il est également fourni sous forme d'un modèle Simulink qui fonctionne sous Matlab.

De manière simplifiée le modèle de simulation se présente sous la forme de la figure 4.3. Un ensemble de donnée de paramétrage et de définition de la manœuvre constituent l'environnement du modèle CarMaker. Une interface d'interaction entre l'utilisateur et le modèle est présentée sous la figure 4.4. Le modèle de dynamique de véhicule de CarMaker peut gérer **33** entrées pour représenter **29** sorties (données fournisseur) lorsqu'on le considère comme une boîte noire.

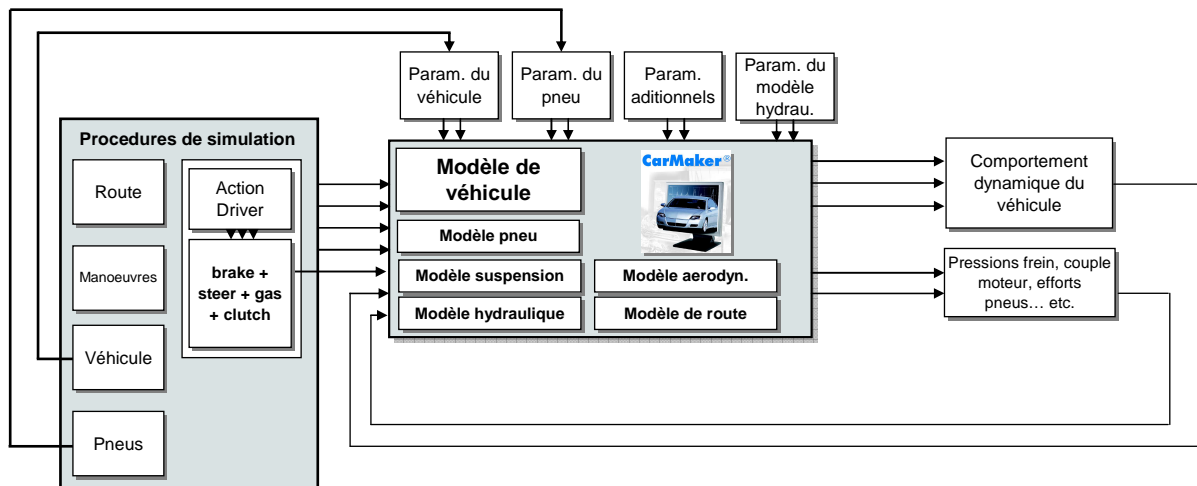


Figure 4.3. Modèle de dynamique de véhicule CarMaker.

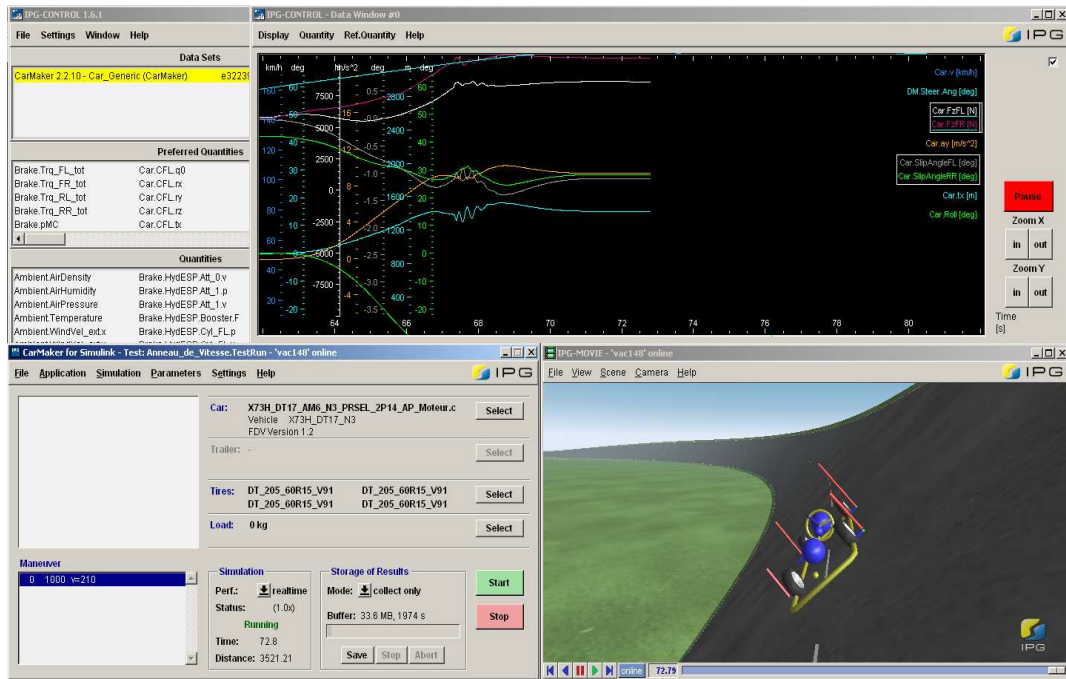


Figure 4.4. IHM du modèle de dynamique de véhicule « CarMaker ».

4.2.2. Validation du modèle de référence

Il faut souligner le fait qu'une utilisation directe d'un paramétrage issu des bancs de caractérisation du véhicule ou d'un paramétrage mesuré peut produire des écarts entre les simulations et les mesures. Une vérification de la validité du paramétrage (pas celle du modèle) est donc nécessaire. Dans la suite une validation d'un paramétrage de véhicule permet de montrer le niveau de corrélation entre le modèle est la mesure réaliser sur véhicule réel pour les prestations suivantes :

- Régime permanent à rayon constant ;
- Calage (échelon au volant) ;
- Vitesse caractéristique.

Le choix de ses prestations n'est pas anodin. En fonctions des objectifs fixés dans ce chapitre nous avons choisi uniquement les prestations liées au régime permanent. Les prestations dynamiques ne seront pas évaluées.

4.2.2.1. Régime permanent – Rayon constant

- Comparaison des courbes temporelles

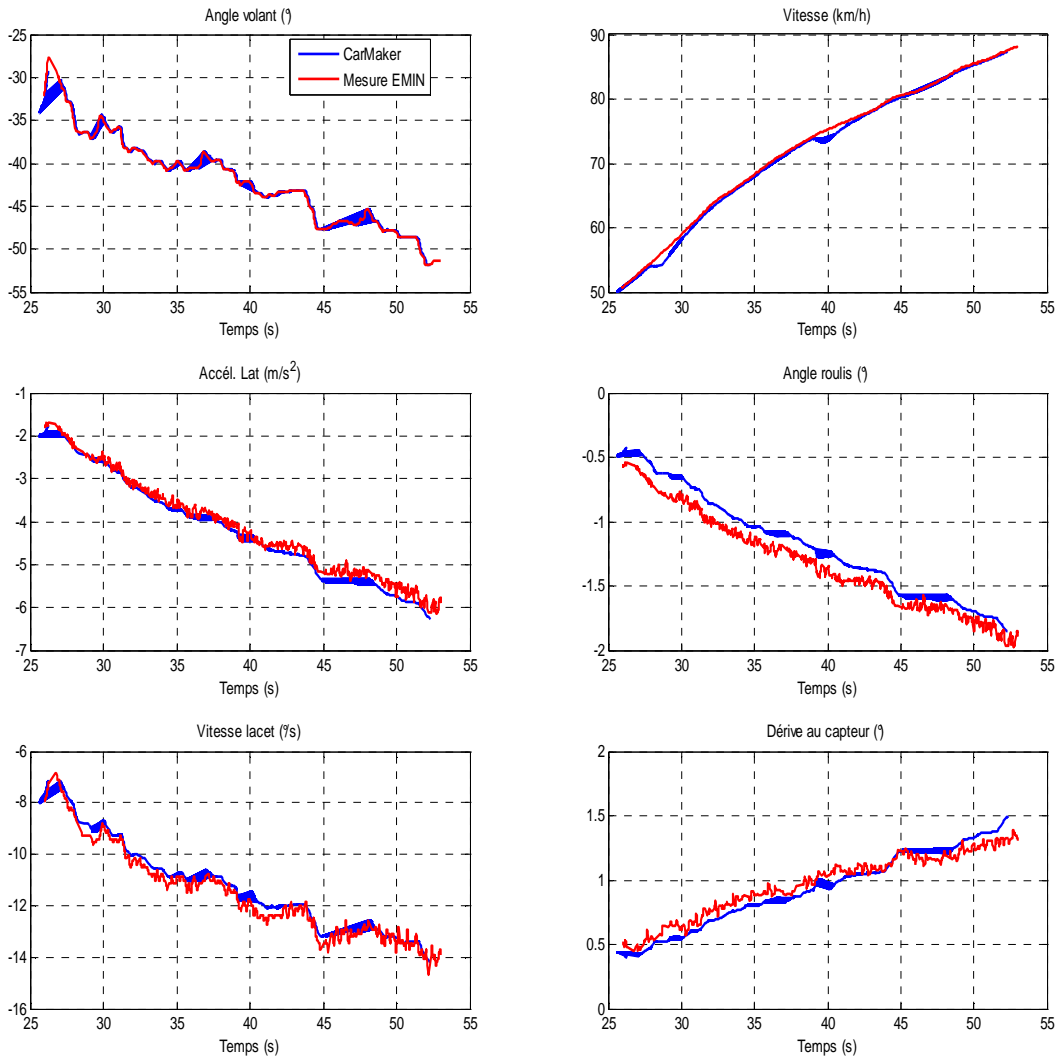


Figure 4.4. Comparaison simulation CarMaker et mesures en régime permanent-rayon constant.

- **Caractéristiques du régime permanent (taux de sur-braquage):**

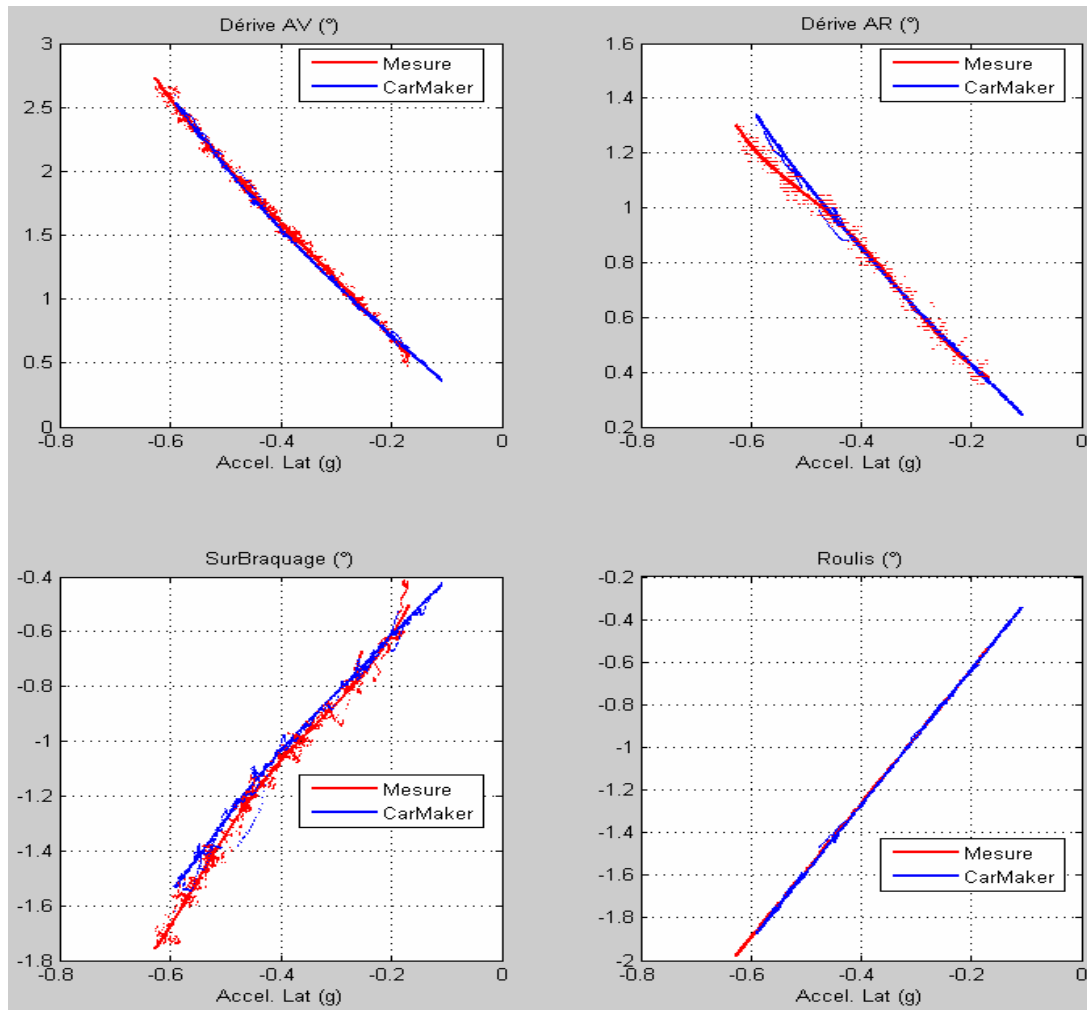


Figure 4.5. Comparaison des caractéristiques du régime permanent.

Nous constatons une très bonne corrélation simulation/mesure du régime permanent, excepté le comportement anormal de la mesure de dérive arrière pour une accélération latérale supérieure à $0.5xg$.

4.2.2.2. Vitesse caractéristique

La méthode utilisée pour le calcul de la vitesse caractéristique est la manœuvre du régime permanent à rayon constant (cf. chapitre2). D'après les résultats présentés sur la figure 4.6 nous observons une très bonne corrélation simulation/mesure de la vitesse caractéristique.

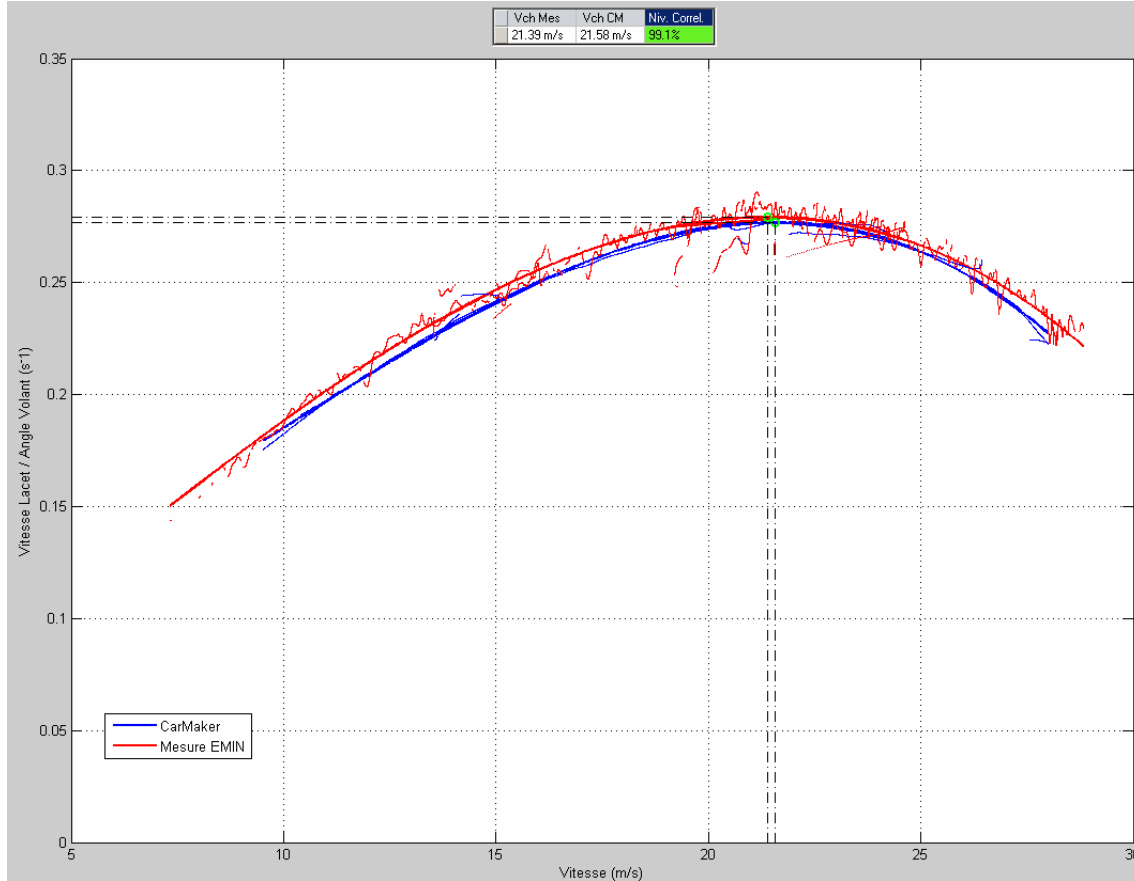


Figure 4.6. Comparaison des vitesses caractéristiques mesurée et simulée.

4.2.2.3. Calage (échelon volant)

Les mesures sont effectuées à une vitesse avoisinant 100 km/h. Un angle de volant est appliqué avec une amplitude qui doit correspondre à une accélération transversale de 0.6g soit 5.9 m/s^2 . L'angle volant doit être appliqué aussi rapidement que possible. Le temps pour aller de 10% à 90% de l'amplitude finale doit être inférieur à 0.15 secondes. Le conducteur doit compenser la décélération du véhicule en accélérant légèrement durant le virage.

- **Calage à gauche**

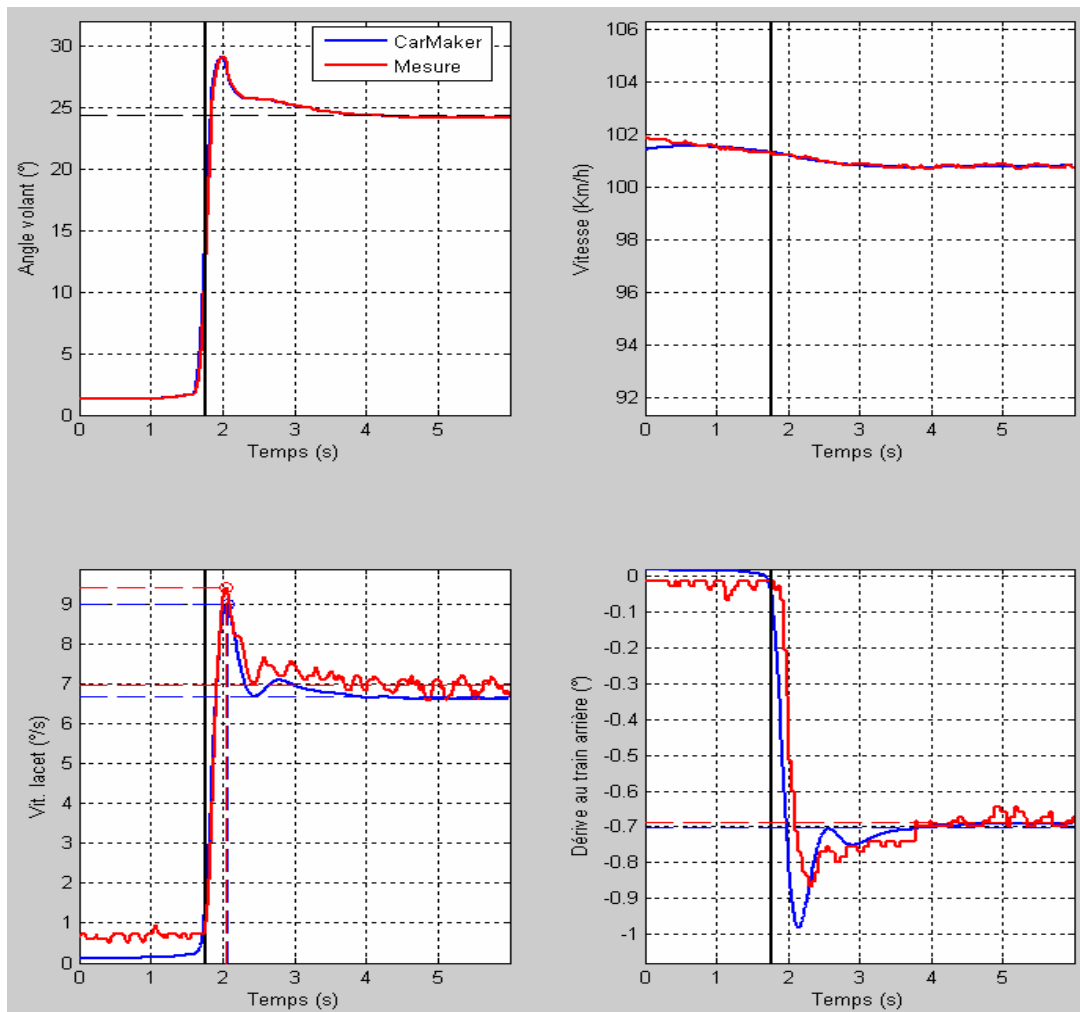


Figure 4.7. Comparaison des réponses temporelles à un échelon volant pour un virage à gauche.

Excellente corrélation simulation/mesure des valeurs stabilisées des variables. Bonne corrélation des temps de montée et de la surtension en vitesse de lacet.

- **Calage à droite**

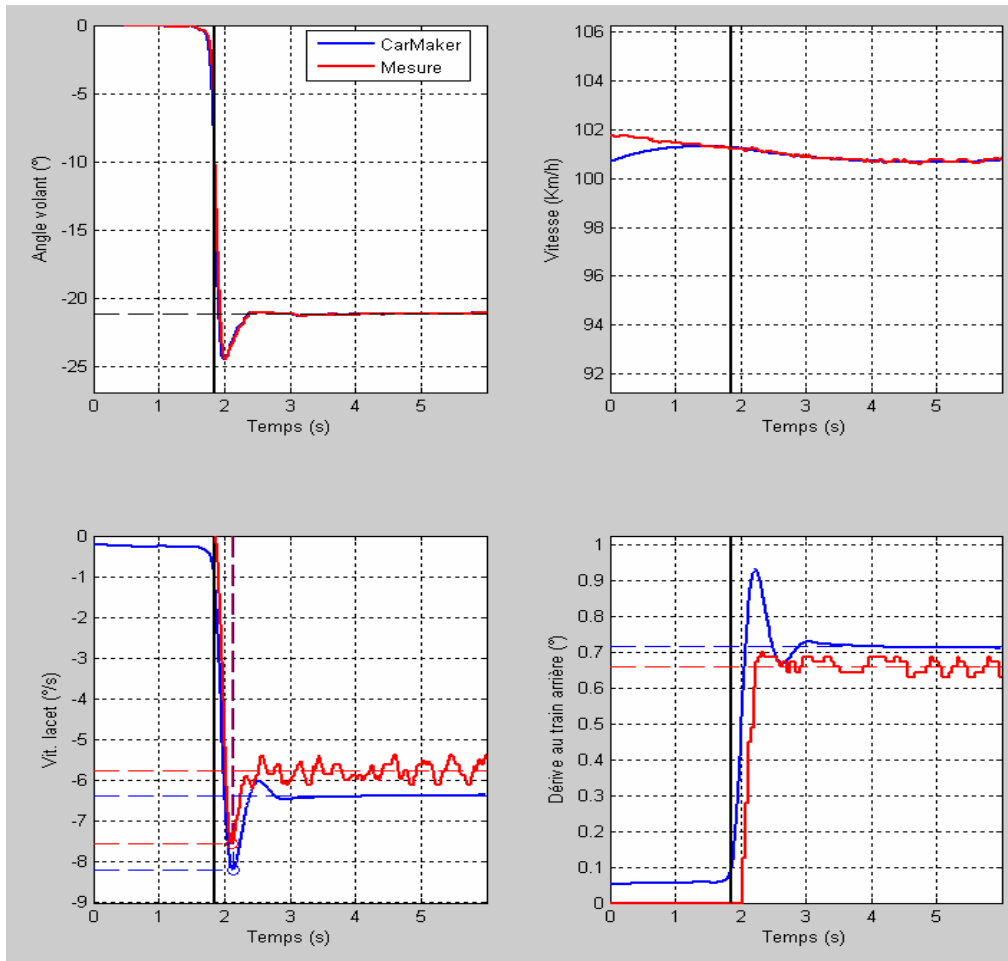


Figure 4.8. Comparaison des réponses temporelles à un échelon volant pour un virage à droite.

Nous observons une corrélation simulation/mesure des variables stabilisées moins bonne que dans le cas d'un calage à gauche et bonne corrélation des temps de montée et de la surtension en vitesse lacet.

De manière générale le modèle CarMaker est représentatif de toutes les situations de vies courantes à condition d'utiliser un paramétrage adéquat. Les paramètres utilisés dans notre travail sont directement récupérés auprès du service HIL dont l'une des tâches principales est de construire un paramétrage véhicule représentative de la réalité.

4.3. Technique d'optimisation

Dans cette partie il sera présenté les techniques de calcul utilisées pour faire de l'identification robuste de modèles linéaires par rapport aux paramètres. Le lecteur trouvera dans la littérature des éclairages complémentaires sur ces techniques : [Ker03], [Gol96], [Law74] pour les moindres carrés basés sur les factorisations QR, SVD et la troncature par filtrage spectral, [Van91], [Bie06] pour les moindres carrés totaux, [Les02], [Gau01] pour les

techniques d'analyse et les techniques itératives, [Gau91] pour la restriction aux paramètres identifiables.

4.3.1. Forme canonique du problème des moindres carrés linéaires

Le problème générique des moindres carrés linéaires est de la forme [Bie06] :

$$Y = W.X + \rho \quad (4.1)$$

Avec, X : vecteur des paramètres ($p \times 1$)
 Y : vecteur de sortie ($n \times 1$)
 W : régresseur ($n \times p$)
 ρ : résidu ($n \times 1$)

La solution au sens des moindres carrés \hat{X} , est celle permettant de minimiser la norme H2 du résidu : $\|\rho\|_2$:

$$\hat{X} = \arg \min_X (\|\rho\|_2) \quad (4.2)$$

On désigne par $\|\rho_{\min}\|_2$ la valeur minimale du résidu atteinte en \hat{X} .

4.3.2. Réduction à une équation normale factorisée

4.3.2.1. Equation normale

Après multiplication à gauche W^T , l'équation 4.1 s'écrit :

$$W^T.Y = (W^T.W).X + W^T.\rho \quad (4.3)$$

Le vecteur du résidu minimum est orthogonal à W :

$$W^T.\rho_{\min} = 0 \quad (4.4)$$

\hat{X} est donc la solution de l'équation suivante dite « équation normale » :

$$(W^T.W).\hat{X} = W^T.Y \quad (4.5)$$

L'équation normale permet ainsi de ramener la recherche de la solution au sens des moindres carrés \hat{X} à la résolution d'un système carré ($p \times p$).

Numériquement, le calcul du produit $W^T.W$ entraîne une perte de précision et doit être évité. On préfère donc utiliser l'équation normale factorisée dont le calcul est numériquement robuste.

4.3.2.2. Equation normale factorisée

L'équation normale factorisée relative à 4.1 s'écrit :

$$B = R_w \cdot X \quad (4.6)$$

Avec, R_w matrice triangulaire ($p \times p$)
 B vecteur ($p \times 1$)

R_w et B sont définis de sorte à ce que la solution en X de 4.6 corresponde à la solution au sens des moindres carrés de 4.1.

Soit M matrice regroupant W et Y :

$$M = [W \quad -Y] \quad (4.7)$$

L'équation normale factorisée relative à 4.1 s'obtient par décomposition QR de M :

$$M = Q_m \cdot R_m \quad (4.8)$$

Avec, Q_m matrice pseudo orthogonale $n \times (p+1)$
 R_m matrice triangulaire $(p+1) \times (p+1)$ aux éléments diagonaux positifs tels que :

$$R_m = \begin{bmatrix} R_w & -B \\ 0 & \|\rho_{\min}\|_2 \end{bmatrix}$$

4.3.2.3. Equation normale factorisée de systèmes pondérés

Soit un ensemble de k paquets de systèmes d'équations :

$$\{Y_i = W_i \cdot X + \rho_i\}_{1 \leq i \leq k} \quad (4.9)$$

Où chaque paquet est associé à un poids P_i .

Avec W_i matrice $n_i \times p$, Y_i vecteur $n_i \times 1$, X vecteur $p \times 1$.

On souhaite ramener 4.9 à une équation normale factorisée de la forme :

$$B_k = R_k \cdot X \quad (4.10)$$

Avec, B_k vecteur $p \times 1$
 R_k matrice triangulaire $p \times p$

Une technique intéressante est de définir les poids P_i comme l'inverse de l'écart type de l'erreur estimée sur chaque paquet. On pénalise de cette manière les paquets de mesures à forte erreur de modèle. Soit P_i un estimateur de l'inverse de l'écart type de sortie du $i^{\text{ième}}$ paquet :

$$P_i = \left(\frac{\|\rho(i)_{\min}\|_2}{\sqrt{n_i - p}} \right)^{-1} \quad (4.11)$$

Où $\|\rho(i)_{\min}\|_2$ est obtenu par la décomposition QR de la matrice : $M_i = [W_i \quad -Y_i]$

Pour obtenir R_k et B_k , il suffit d'appliquer la réduction (4.6) à la matrice M pondérée :

$$M = \begin{bmatrix} P_1 \cdot W_1 & -P_1 \cdot Y_1 \\ P_2 \cdot W_2 & -P_2 \cdot Y_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_k \cdot W_k & -P_k \cdot Y_k \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.3.2.4. Calcul itératif d'une équation normale factorisée de systèmes pondérés

Le processus de réduction peut s'avérer très coûteux en mémoire lorsque la matrice M de l'équation (4.7) atteint de grandes dimensions. On peut alors saturer les capacités machines. Ce problème peut être résolu en appliquant une version itérative de la réduction.

Chaque $i^{\text{ième}}$ paquet de l'équation (4.9) est associé à une pondération P_i (unitaire si la méthode des moindres carrés ordinaires est appliquée, c'est à dire sans pondération) et à une matrice M_i sur laquelle on réalise une factorisation QR :

$$M_i = [W_i \quad -Y_i] \quad (4.13)$$

$$M_i = Q_i \cdot R_i \quad (4.14)$$

La réduction itérative consiste à appliquer la récursion suivante :

$$\begin{cases} R_0 = \emptyset \\ M_j = \begin{bmatrix} R_{j-1} \\ R_j \cdot P_j \end{bmatrix} \\ Q_j \cdot R_j = M_j \end{cases} \quad (4.15)$$

4.3.3. Calcul des paramètres identifiables

4.3.3.1. Définition

Globalement, les paramètres d'un modèle dynamique se divisent en trois catégories : les paramètres globalement identifiables, localement identifiable et non identifiables [Wal97]. La propriété d'identifiabilité assure avant tout que la démarche d'identification soit susceptible d'aboutir. Soit le contexte idéalisé de l'identification donné par la figure 4.9.

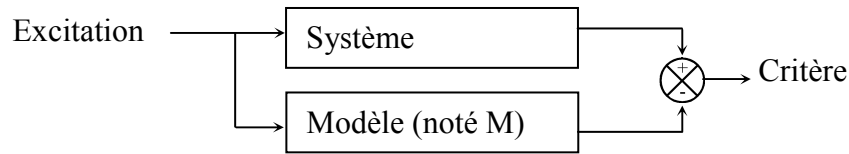


Figure 4.9. Contexte idéalisé de l'identifiabilité.

Le système est remplacé par un modèle $M(X_0)$ avec :

$M(\cdot)$ la structure du modèle du système supposée connue.

X_0 les valeurs des paramètres supposés connus également.

L'excitation est supposée être générée indépendamment de la sortie. La présence d'un bouclage de la sortie sur l'entrée entraîne généralement une perte d'identifiabilité. De plus les variables sont sans bruit. Dans ce contexte, il est toujours possible d'ajuster \hat{X} de manière à obtenir une identité de comportement des deux modèles :

$$M(\hat{X}) = M(X_0) \quad (4.16)$$

Les définitions adoptées sont celles de Walter [WAL97]. Le paramètre X_i est globalement identifiable si pour presque toute valeur de X_0 :

$$M(\hat{X}) = M(X_0) \Rightarrow \hat{X}_i = X_{0i} \quad (4.17)$$

Le paramètre X_i est localement identifiable si pour presque toute valeur de X_0 il existe un voisinage tel que si $\hat{X} \in V_X^{X_0}$ et $M(\hat{X}) = M(X_0) \Rightarrow \hat{X}_i = X_{0i}$. L'identifiabilité structurelle locale est une condition nécessaire à l'identifiabilité structurelle globale. Un paramètre X_i non-sli est non identifiable. Il existe alors une infinité de valeurs de X_i entraînant une identité de comportement de $M(\hat{X})$ et de $M(X_0)$

Un modèle est globalement identifiable si tous ces paramètres le sont. Un modèle est non identifiable si un de ces paramètres l'est. Il peut donc posséder des paramètres localement identifiables et globalement identifiables.

4.3.3.2. Cas des moindres carrées

Différentes méthodes pour tester l'identifiabilité de modèles existent. Dans le cas d'un système dégénéré où la matrice W de (4.1) n'est pas de rang plein, il y a une infinité de solutions au sens des moindres carrés. Ces solutions dépendent de la valeur quelconque de certains paramètres dits non identifiables. Un choix possible consiste à annuler leur valeur de sorte à caractériser la solution au sens des moindres carrés de manière unique sur les paramètres identifiables.

Annuler les paramètres non identifiables revient à simplifier le modèle (4.1) en supprimant les colonnes de la matrice W relatives aux paramètres nuls, non identifiables. Le modèle obtenu

est appelé « modèle minimal » car il dépend d'un nombre minimum de paramètres identifiables appelés aussi « paramètres minimaux ». Dans le cas du modèle minimal structurel, dont l'identifiabilité est uniquement liée aux équations du modèle, les paramètres minimaux sont appelés paramètres de base.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution des moindres carrés soit restreinte aux paramètres identifiables est que la matrice R_w du système normalisé factorisé soit régulière (inversible). R_w étant triangulaire, il suffit qu'il n'y ait pas de coefficient nul sur sa diagonale. Numériquement la valeur nulle est définie à une tolérance près ε . L'index I des paramètres identifiable est défini de la manière suivante :

$$I = \left\{ 1 \leq i \leq p \mid |R_{w\,ii}| > \varepsilon \right\} \quad (4.18)$$

Soit S la matrice de sélection des colonnes de W relatives à des paramètres identifiables. S est définie à partir de matrice identité $p \times p$ dont les colonnes indexées dans I sont supprimées. Le système simplifié relatif à (4.1) s'écrit :

$$Y = W \cdot X + \rho = W' \cdot X' + \rho' \quad (4.19)$$

Avec, X' vecteur des paramètres identifiables $c \times 1$,
 ρ' vecteur résidu du système simplifié $n \times 1$,
 W' matrice du régresseur du modèle simplifié identifiable $n \times c$

$$W' = W \cdot S \quad (4.20)$$

S matrices de sélection $p \times c$

L'équation normale factorisée relative au système simplifié (4.19) s'écrit :

$$B' = R'_w \cdot X' \quad (4.21)$$

Avec, R'_w matrice triangulaire inversible ($c \times c$)
 B' vecteur $c \times 1$,

Soit M'_r la matrice :

$$M'_r = \begin{bmatrix} R'_w \cdot S & -B \\ 0 & \|\rho_{\min}\|_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

L'équation (4.21) s'obtient de l'équation (4.6) par décomposition QR de M'_r :

$$M'_r = Q'_m \cdot R'_m \quad (4.23)$$

Avec, Q'_m matrice orthogonale en colonnes $n \times (c+1)$
 R'_m matrice triangulaire $(c+1) \times (c+1)$ à éléments diagonaux positifs vérifiant le partitionnement :

$$R'_m = \begin{bmatrix} R'_w & -B' \\ 0 & \|\rho'_{\min}\|_2 \end{bmatrix}$$

On a la relation entre les X' , vecteur des paramètres identifiables et X , vecteur des paramètres initiaux :

$$X' = (S^T \cdot R_w \cdot S)^{-1} \cdot S^T \cdot R_w \cdot X \quad (4.24)$$

4.3.4. Calcul de la solution paramétrique

4.3.4.1. Solution au sens des moindres carrés

Il suffit d'inverser le système (4.21) par une méthode de remontée pour obtenir la solution au sens des moindres carrés de (4.19) :

$$\hat{X}' = R_w'^{-1} \cdot B' \quad (4.25)$$

La direction de la projection de l'espace paramétrique W est fixée par le choix du vecteur de sortie Y . Pour que le résultat ne soit pas biaisé, il faut que le vecteur de sortie Y soit indépendant du régresseur W dans l'équation (4.1).

4.3.4.2. Solution au sens des moindres carrés totaux

La solution au sens des moindres carrés totaux [Van91] passe par une décomposition en valeurs singulières de la matrice R'_m calculée en (4.23) :

$$R'_m = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (4.26)$$

Avec, Σ matrice diagonale $(p+1) \times (p+1)$ contenant les valeurs singulières de R , ordonnées de la plus grande à la plus petite.

U matrice de rotation $(p+1) \times (p+1)$

V matrice de rotation $(p+1) \times (p+1)$ partitionnée de la manière suivante :

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } V_{11} : p \times p, V_{12} : p \times 1, V_{21} : 1 \times p, V_{22} : 1 \times 1$$

La solution au sens des moindres carrés totaux vaut :

$$\hat{X}' = \frac{-V_{12}}{V_{22}} \quad (4.27)$$

La direction de la projection de l'espace paramétrique est fixée par la plus petite valeur singulière de R'_m . Cette technique est recommandée dans le cas où le vecteur de sortie Y n'est pas indépendant du régresseur W .

Cette procédure a été implémenté sur Matlab pour créer un outil d'identification permettant d'obtenir une estimation paramétrique \hat{X} avec une étude d'identifiabilité en utilisant uniquement le régresseur W et le vecteur de sortie Y .

4.4. Identification du modèle LD-P3 en régime permanent

L'identification du modèle d'après la méthode présentée précédemment consiste à transformé au préalable le système sous la forme de l'équation 4.1 (équation linéaire par rapport aux paramètres). Les équations du modèle LD-P3 sont données par les équations 2.75 à 2.78 avec un modèle d'effort du pneumatique donnée par l'équation 2.80 (cf. §2.3.5).

4.4.1. Mise en forme des équations

Tout d'abord le modèle choisi est celui qui décrit l'évolution des dérives avant et arrière. Ce modèle est obtenu directement à travers les équations données au §2.3.5. Le résultat est celui donné par l'équation 3.86 que nous rappelons ici :

$$A \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_2^3 \end{bmatrix} = D \dot{\varepsilon}_r + E \varepsilon_r \quad (4.28)$$

Avec,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} & \frac{MVL_1}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} & -\frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} + k_{\delta 1} & -\frac{MV^2}{L} + k_{\delta 2} \\ L_1 k_{\delta 1} & -L_2 k_{\delta 2} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} q_{\delta 1} & q_{\delta 2} \\ L_1 q_{\delta 1} & -L_2 q_{\delta 2} \end{bmatrix}$$

$$D = -\begin{bmatrix} \frac{MVL_2}{L} \\ \frac{I_{zz}V}{L} \end{bmatrix}; \quad E = -\begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La mise en forme des équations consiste à décrire le régime permanent afin d'optimiser les paramètres des expressions d'effort de pneumatiques k_{δ} et q_{δ} en maintenant les paramètres du véhicule fixe. Cette condition nous permet d'une part d'intégrer les effets des cinématiques et des élasto-cinématiques uniquement dans les paramètres des pneumatiques et d'une autre part, de garder un sens physique des paramètres dimensionnel du véhicule.

En supprimant les termes dynamiques (les dérivés) dans les équations de mouvement et nous obtenons la représentation suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_1^3 & \delta_2^3 \\ L_1 \delta_1 & -L_2 \delta_2 & L_1 \delta_1^3 & -L_2 \delta_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{\delta 1} \\ k_{\delta 2} \\ q_{\delta 1} \\ q_{\delta 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} (\delta_2 - \delta_1 - \varepsilon_r) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

En considérant tous les points de mesures en $[\delta_1, \delta_2, \varepsilon_r]$ on construit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_1^3 & \delta_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_1 \delta_1 & -L_2 \delta_2 & L_1 \delta_1^3 & -L_2 \delta_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{\delta_1} \\ k_{\delta_2} \\ q_{\delta_1} \\ q_{\delta_2} \end{bmatrix} + \rho = \begin{bmatrix} \frac{MV^2}{L} (\delta_2 - \delta_1 - \varepsilon_r) \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Avec une écriture simplifiée nous aboutissons à :

$$Y = W \begin{bmatrix} k_{\delta_1} \\ k_{\delta_2} \\ q_{\delta_1} \\ q_{\delta_2} \end{bmatrix} + \rho \quad (4.31)$$

4.4.1. Application à l'identification du modèle LD-P3

Pour calculer les paramètres des pneumatiques deux sources d'acquisition ont été considérées à savoir : la mesure sur piste avec un véhicule réel et une acquisition par simulation en utilisant CarMaker sous Simulink.

La manœuvre utilisé pour l'obtention du régime permanent consiste à réaliser, à vitesse constante, une rampe volant lente de manière à atténuer les transitoires pour que la réponse soit assimilée au régime établi d'une succession d'échelons au volant. Le résultat d'identification obtenu par l'utilisation des données de simulation de CarMaker est présenté sur la figure 4.10.

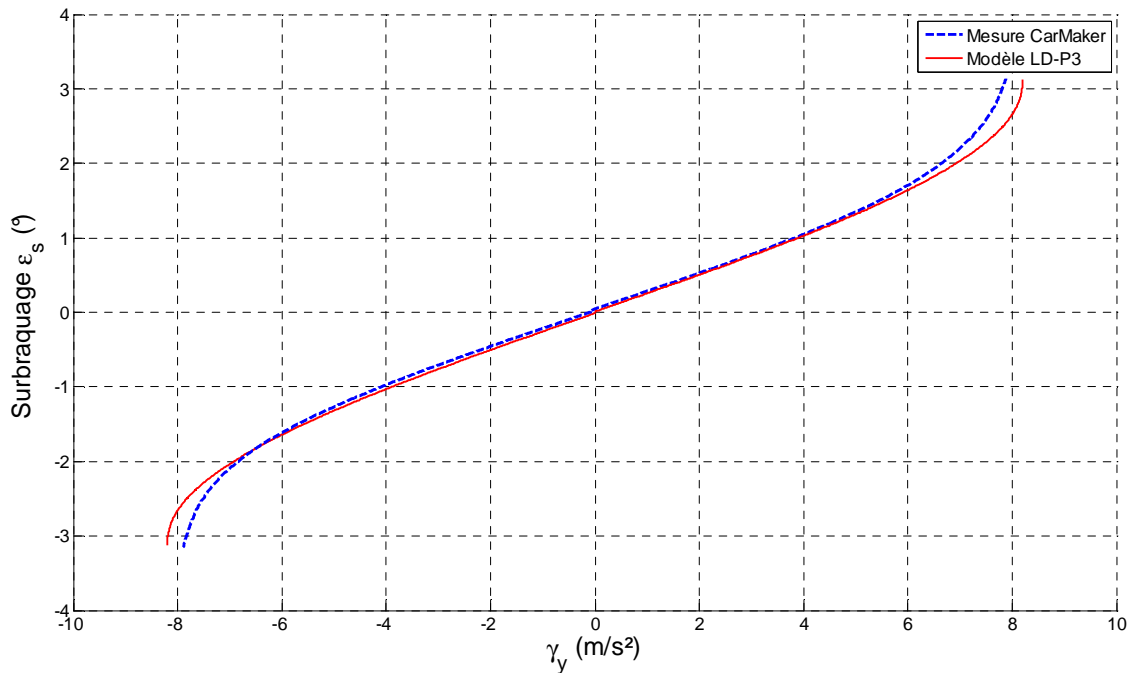


Figure 4.10. Comparaison entre la caractéristique du régime permanent obtenue par simulation sur CarMaker et celle obtenue par le modèle LD-P3 après identification.

Le résultat d'identification en régime permanent en utilisant des données obtenues avec une mesure sur piste d'un véhicule réel est présenté sur la figure 11. La courbe de la mesure sur véhicule réel est une régression polynomiale d'ordre 5 du nuage de points présenté sur la figure 4.1.

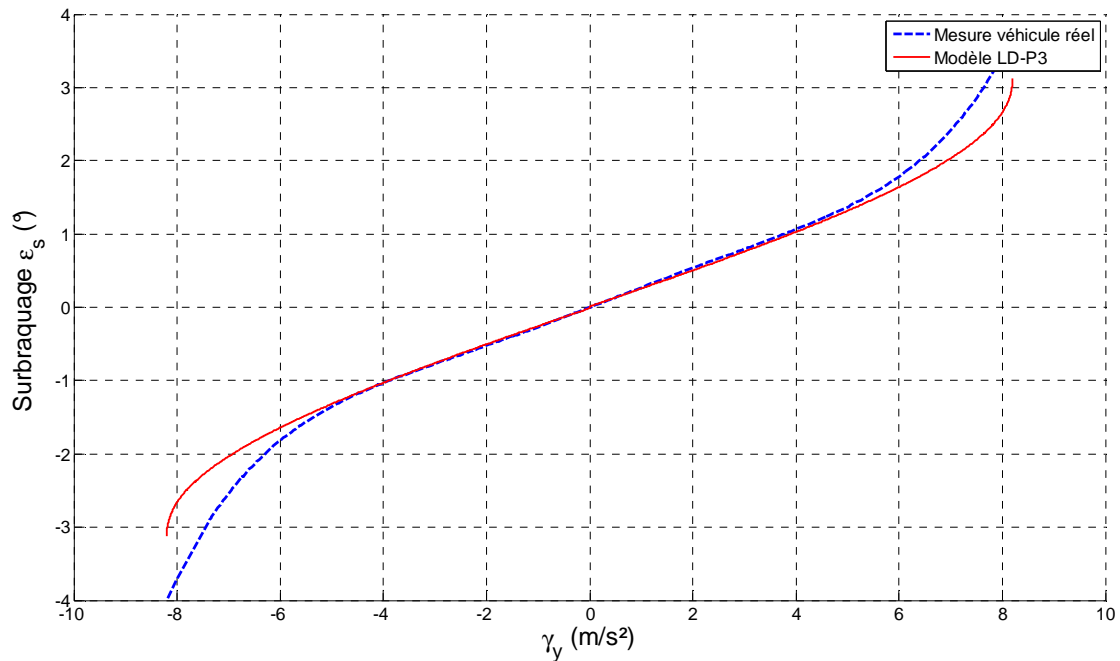


Figure 4.11. Comparaison entre la caractéristique du régime permanent obtenue par une acquisition de mesures sur piste avec un véhicule réel et celle obtenue par le modèle LD-P3 après identification.

Les valeurs des paramètres avant et après identification sont données dans le tableau suivant :

	Nom	Valeurs		
		initiales	Après identification	
			Avec simulations CarMaker	Avec mesures sur véhicule réel
Paramètres fixés	M (kg)		2122.84	
	I_{zz} (kg m ²)		3721.3	
	L_1 (m)		1.1	
	L_2 (m)		1.7958	
Paramètres identifiés	k_{δ_1} (N/rad)	1.1427e+5	1.3964e+5 (+22.20 %)	1.2995e+5 (+13.72 %)
	k_{δ_2} (N/rad)	8.391e+4	1.5522e+5 (+84.98 %)	1.4926e+5 (+77.88 %)
	q_{δ_1} (N/rad ³)	-6.268e+6	-4.0023e+6 (-36.14 %)	-3.2631e+6 (-47.94 %)
	q_{δ_2} (N/rad ³)	-5.430e+6	-1.4891e+7 (-174.23 %)	-1.31554e+7 (-142.27 %)

Tableau 4.1. Valeurs des paramètres initiales et après identification.

Les valeurs présentées en % dans le tableau 4.1 représentent les taux de variation par rapport aux valeurs initiales. D'après les résultats présentés ci-dessus nous pouvons faire les constatations suivantes :

- On obtient une meilleure représentativité avec les simulations du modèle de référence qu'avec les mesures sur véhicule réel. Ceci est dû au post traitement des mesures et à l'approximation polynomiale de la mesure ;
- Les taux de variation entre les valeurs initiales et les valeurs identifiées sont très élevés mais ce résultat été prévisible car nécessaire pour compenser les écarts observés sur la figure 4.1 ;
- Pour les grandes accélérations transversales on observe un écart qui est lié à la limitation du modèle LD-P3 à représenter fidèlement tous les phénomènes physiques (braquages induits par les épures, roulis, transferts de charges, ...etc.) ;
- L'utilisation d'un modèle plus riche du type LRDT-P3 peut donner de meilleurs résultats d'identification.

4.5. Identification du modèle LRDT-P3 en régime permanent

Le modèle LRDT-P3 est donné par les équations 2.81 à 2.89 avec un modèle d'effort de pneumatique donné par les équations 2.27 à 2.29. De manière similaire au modèle précédent, l'identification consiste à transformé le modèle LRDT-P3 en régime permanent sous la forme de l'équation 4.1.

4.5.1. Limitation des charges par pneu

Avant toute identification, nous pouvons remarquer que l'évolution des paramètres d'effort du pneumatique K_{α} et Q_{α} a été approximé par une régression polynomiale d'ordre 3 (cf. équation 2.28 et 2.29). Dans un premier temps, il est plus judicieux de vérifier que l'ordre de la régression polynomiale soit suffisant pour représenter la totalité des variations de charges d'un pneu.

Cette étape nous permet d'avoir une évaluation de l'ordre exacte de la régression polynomiale se fera que sur une plage prédéfini de variation des charges sur chaque pneumatique de chaque train (avant et arrière). La manœuvre choisit pour estimer les extrémums des charges par pneu est la manœuvre VDA. La manœuvre VDA est un test d'évitement utilisé pour analyser le comportement dynamique du véhicule et des systèmes de sécurité active. Une des caractéristiques intéressantes de la VDA est que le véhicule atteint rapidement les limites de stabilité et des transferts de charges.

Sur la figure 4.12 et 4.13 on montre respectivement les résultats de simulation réalisé sur CarMaker (modèle de référence). Les réponses temporelles du véhicule sont obtenues pour un angle volant mesuré d'une manœuvre VDA à 70km/h. le véhicule utilisé est une Citroën C6 avec un pneumatique Michelin 245/45/R18 à 2.4bar. A partir de ces résultats il est assez simple d'estimer les extrémums des charges par pneu.

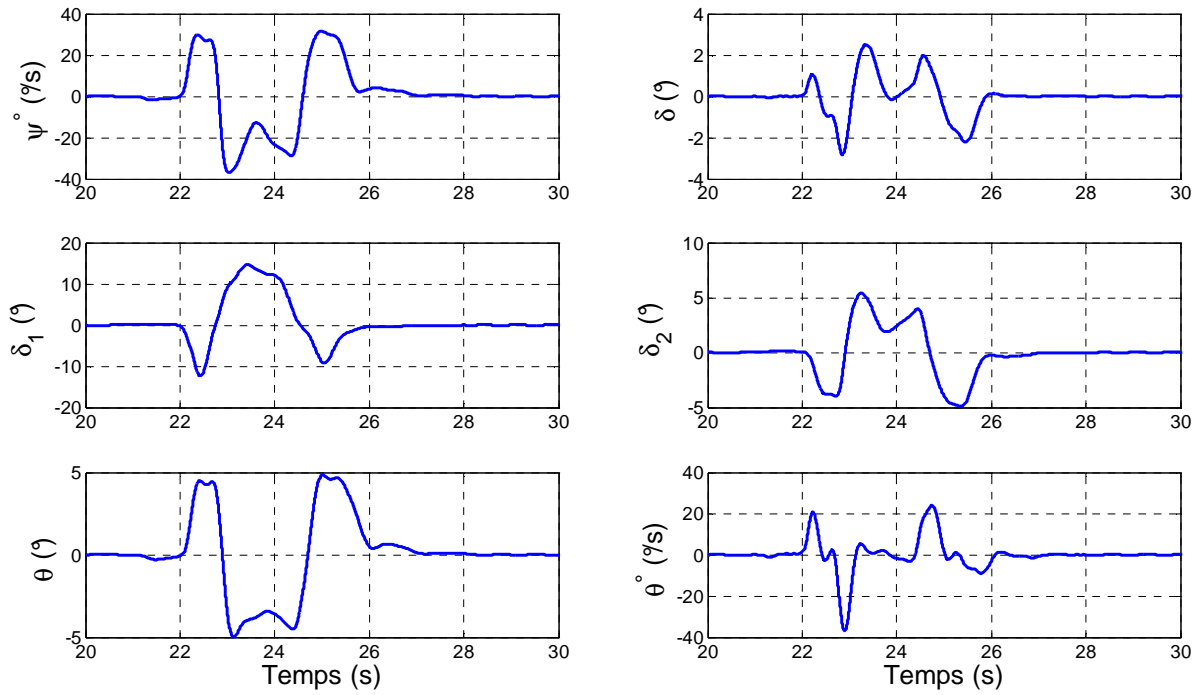


Figure 4.12. Réponse temporelle à un angle volant de volant mesuré d'une manœuvre d'évitement VDA.

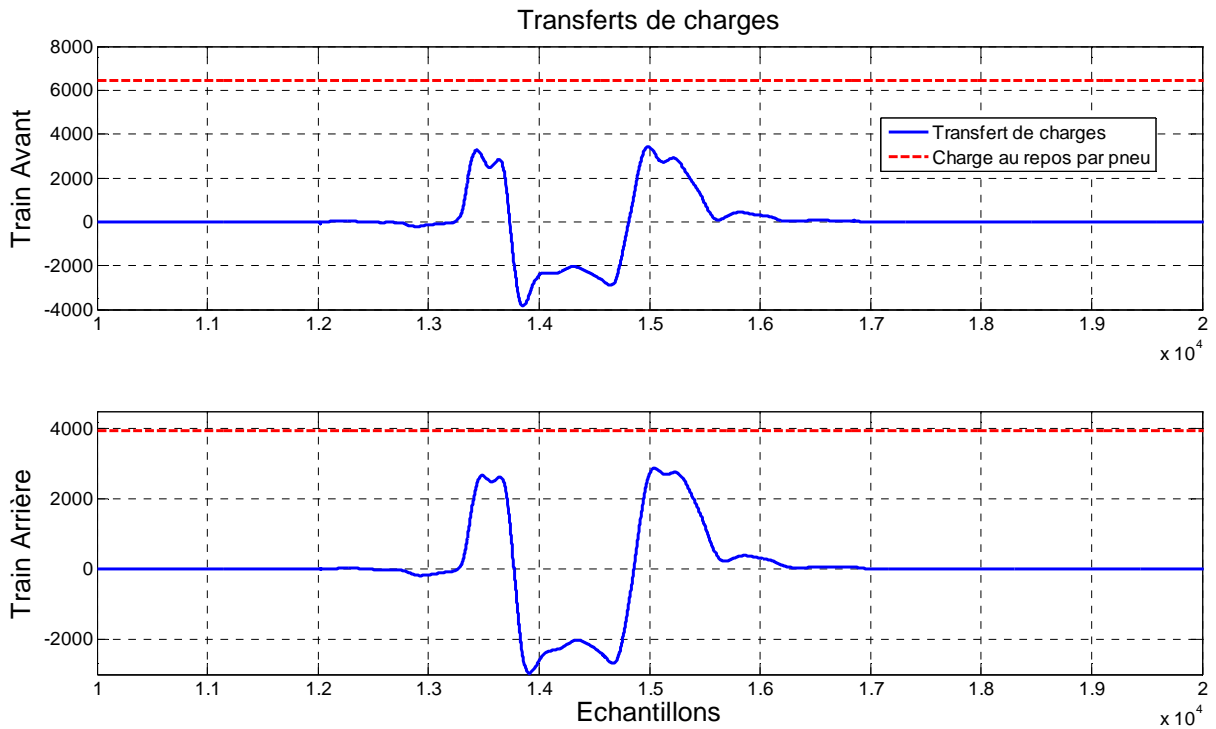


Figure 4.13. Charges au repos par pneu de chaque essieu et les transferts de charges associés.

L'évolution des paramètres d'effort du pneumatique K_{δ} et Q_{δ} peut être obtenu par les équations 2.22 et 2.23 pour les variations de charges obtenu avec le test VDA (cf. figure 4.14).

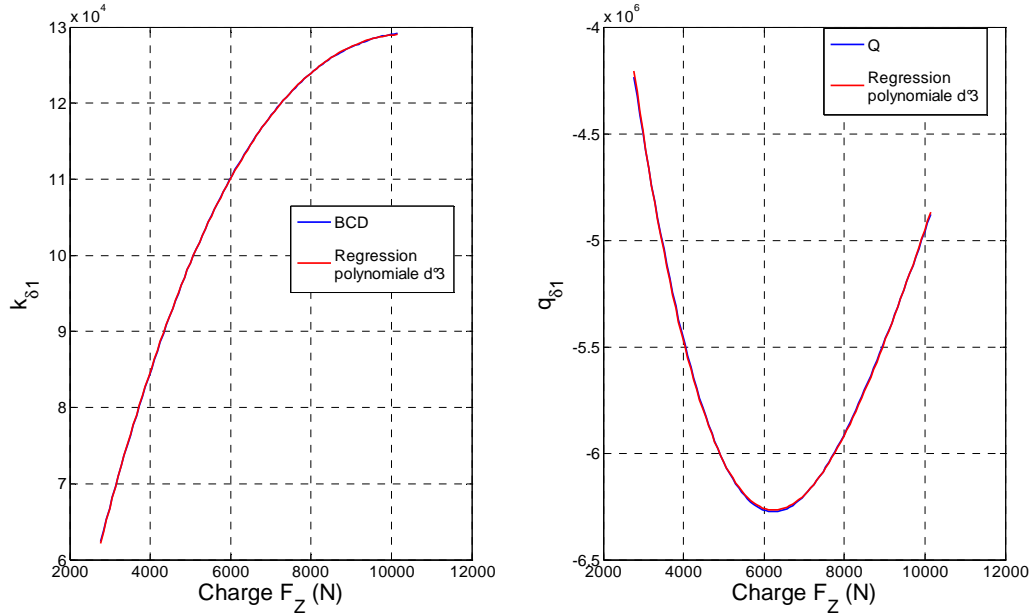


Figure 4.14. Evolution des paramètres d'effort du pneu en fonction de la charge.

Il est clair qu'une régression polynomiale d'ordre 3 est amplement suffisante pour décrire l'évolution des paramètres d'effort du pneu en fonction de la charge. Ceci permet de justifier la forme des équations présentées dans le chapitre 2.

4.5.2. Mise en forme des équations

En régime permanent les équations du modèle deviennent :

$$MV\dot{\psi} = F_{yAvG}(\delta_1, F_{zAvG}) + F_{yAvD}(\delta_1, F_{zAvD}) + F_{yArG}(\delta_2, F_{zArG}) + F_{yArD}(\delta_2, F_{zArD}) \quad (4.32)$$

$$(k_{\theta 1} + k_{\theta 2} + M_s gh)\theta - MhV\dot{\psi} = 0 \quad (4.33)$$

$$L_1(F_{yAvG}(\delta_1, F_{zAvG}) + F_{yAvD}(\delta_1, F_{zAvD})) - L_2(F_{yArG}(\delta_2, F_{zArG}) + F_{yArD}(\delta_2, F_{zArD})) = 0 \quad (4.34)$$

Les expressions des dérivées et des efforts sont donnés par :

$$\delta_1 = \delta + \frac{L_1}{V}\dot{\psi} - (\varepsilon_r + k_{p1}\theta) \quad (4.35)$$

$$\delta_2 = \delta - \frac{L_2}{V}\dot{\psi} - (k_{p2}\theta) \quad (4.36)$$

$$F_{yij}(\delta_i) = k_{\delta}(F_{Zij})\delta + q_{\delta}(F_{Zij})\delta^3 \quad (4.37)$$

Avec,

$$k_\delta(F_Z) = n_0 + n_1 F_Z + n_2 F_Z^2 + n_3 F_Z^3 \quad (4.38)$$

$$q_\delta(F_Z) = n_4 + n_5 F_Z + n_6 F_Z^2 + n_7 F_Z^3 \quad (4.39)$$

Pour garder un sens physique aux paramètres du véhicule (masse, empattements, hauteur CdG), ces derniers seront forcé à leurs valeurs nominales (données constructeur). Uniquement les paramètres suivant seront identifié :

- n_i : en utilisant la méthode des moindres carrées présenté précédemment ;
- k_{p1} et k_{p2} : en utilisant les équations 4.35 et 4.36 ;
- $k_{\theta1}$ et $k_{\theta2}$: en utilisant l'équation 4.33.

La mise en forme des équations pour l'identification des paramètres n_i est donnée comme suit :

$$\begin{bmatrix} MV\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & H_2 \end{bmatrix} [n_0 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4 \quad n_5 \quad n_6 \quad n_7]^T \quad (4.40)$$

Avec,

$$\begin{aligned} A_1 &= 2(\delta_1 + \delta_2) \\ B_1 &= (F_{ZAvG} + F_{ZAvD})\delta_1 + (F_{ZArG} + F_{ZArD})\delta_2 \\ C_1 &= (F_{ZAvG}^2 + F_{ZAvD}^2)\delta_1 + (F_{ZArG}^2 + F_{ZArD}^2)\delta_2 \\ D_1 &= (F_{ZAvG}^3 + F_{ZAvD}^3)\delta_1 + (F_{ZArG}^3 + F_{ZArD}^3)\delta_2 \\ E_1 &= 2(\delta_1^3 + \delta_2^3) \\ F_1 &= (F_{ZAvG} + F_{ZAvD})\delta_1^3 + (F_{ZArG} + F_{ZArD})\delta_2^3 \\ G_1 &= (F_{ZAvG}^2 + F_{ZAvD}^2)\delta_1^3 + (F_{ZArG}^2 + F_{ZArD}^2)\delta_2^3 \\ H_1 &= (F_{ZAvG}^3 + F_{ZAvD}^3)\delta_1^3 + (F_{ZArG}^3 + F_{ZArD}^3)\delta_2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 2L_1\delta_1 - 2L_2\delta_2 \\ B_2 &= L_1(F_{ZAvG} + F_{ZAvD})\delta_1 - L_2(F_{ZArG} + F_{ZArD})\delta_2 \\ C_2 &= L_1(F_{ZAvG}^2 + F_{ZAvD}^2)\delta_1 - L_2(F_{ZArG}^2 + F_{ZArD}^2)\delta_2 \\ D_2 &= L_1(F_{ZAvG}^3 + F_{ZAvD}^3)\delta_1 - L_2(F_{ZArG}^3 + F_{ZArD}^3)\delta_2 \\ E_2 &= 2L_1\delta_1^3 - 2L_2\delta_2^3 \\ F_2 &= L_1(F_{ZAvG} + F_{ZAvD})\delta_1^3 - L_2(F_{ZArG} + F_{ZArD})\delta_2^3 \\ G_2 &= L_1(F_{ZAvG}^2 + F_{ZAvD}^2)\delta_1^3 - L_2(F_{ZArG}^2 + F_{ZArD}^2)\delta_2^3 \\ H_2 &= L_1(F_{ZAvG}^3 + F_{ZAvD}^3)\delta_1^3 - L_2(F_{ZArG}^3 + F_{ZArD}^3)\delta_2^3 \end{aligned}$$

En considérant tous les points de mesures en $[\delta_1, \delta_2, \dot{\psi}]$ on construit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} MV\dot{\psi} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 & H_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \\ n_7 \end{bmatrix} + \rho \quad (4.41)$$

Le modèle LRDT-P3 ne prend pas en compte les phénomènes d'épures élasto-cinématiques des trains. Quand nous utilisons le modèle CarMaker qui rend en compte le modèle complet des suspensions lors d'une identification, l'effet des élasto-cinématiques est noyé dans les paramètres identifiés. Dans la suite du travail, nous allons étudier deux cas de figure à savoir les données issus de CarMaker avec et sans prise en compte des effets d'élasto-cinématiques.

4.5.3. Identification des paramètres des raideurs antiroulis

En utilisant l'équation 4.33, il est possible d'extraire directement le coefficient $k_\theta = k_{\theta 1} + k_{\theta 2}$ à partir de la courbe du taux de roulis à savoir $\theta = f(\gamma_y)$. Sur la figure 4.15, nous montrons deux courbes de l'évolution de l'angle de roulis en fonctions de l'accélération latérale.

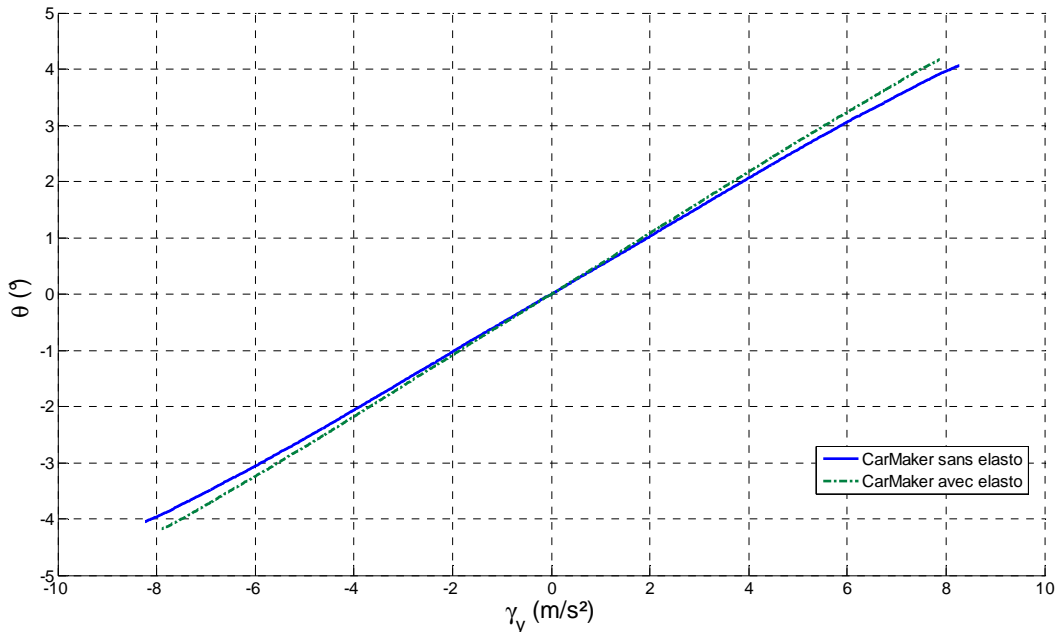


Figure 4.15. Caractéristique du taux de roulis.

Sachant que l'accélération latérale en régime permanent s'écrit :

$$\gamma_y = V\dot{\psi} \quad (4.42)$$

A partir de la figure 4.15 nous pouvons directement extraire la relation suivante :

$$\theta = \tan(\alpha) \times V \dot{\psi} \quad (4.43)$$

Avec $\tan(\alpha)$ la pente de la droite. En substituant ce résultat dans 4.33 nous obtenons :

$$k_{\theta 1} + k_{\theta 2} = \frac{Mh}{\tan(\alpha)} + M_s gh \quad (4.44)$$

Cette méthode permet d'identifier la somme des paramètres de raideurs de roulis. Afin de séparer ces paramètres nous pouvant utiliser le même rapport de raideurs fournis par le constructeur qui permet d'obtenir la même répartition des transferts de charges entre l'avant et l'arrière (cf. §1.5.3).

4.5.4. Identification des paramètres de braquages induit par les prises de pinces

De manière similaire au calcul des raideurs de roulis, les coefficients k_{p1} et k_{p2} seront identifiés à partir des équations 4.35 et 4.36 qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\delta_1 = \delta + \frac{L_1}{V} \dot{\psi} - (\varepsilon_r + k_{p1} \theta) = \delta_{1a} - \varepsilon_r - k_{p1} \theta \quad (4.45)$$

$$\delta_2 = \delta - \frac{L_2}{V} \dot{\psi} - (k_{p2} \theta) = \delta_{2a} - k_{p2} \theta \quad (4.46)$$

L'indice « a » désigne la dérive à niveau l'axe (à l'avant ou à l'arrière). En traçant les courbes $\delta_1 - \delta_{1a} = f(\theta)$ et $\delta_2 - \delta_{2a} = f(\theta)$ (cf. figures 4.16 et 4.17) nous pouvons obtenir les résultats suivant :

$$K_{p1} = -\frac{V(\delta_{1P} - \delta + \varepsilon_r) - L_1 \dot{\psi}}{V\theta} = -\tan(\alpha_1) - \frac{\varepsilon_r}{\theta} \quad (4.47)$$

$$K_{p2} = -\frac{V(\delta_{2P} - \delta) + L_2 \dot{\psi}}{V\theta} = -\tan(\alpha_2) \quad (4.48)$$

Avec $\tan(\alpha_1)$ et $\tan(\alpha_2)$ les pentes respectives de la partie linéaire (pente à l'origine) des courbes $\delta_1 - \delta_{1a} = f(\theta)$ et $\delta_2 - \delta_{2a} = f(\theta)$. Dans l'équation 4.47, à vitesse constante, le terme $\frac{\varepsilon_r}{\theta}$ est constant sur la partie linéaire de la courbe.

Les courbes présentées sur les figures 4.16 et 4.17 sont obtenues par simulation en utilisant CarMaker sous Simulink pour les deux cas : avec prises en comptes des élasto-cinématiques et sans la prise en compte des élasto-cinématiques. La manœuvre utilisée est une rampe volant lente de 0° à 100° sur 40s pour une vitesse de 100km/h. Le véhicule utilisé est une Citroën C6 avec un pneumatique Michelin 245/45R18 à 2.4bar.

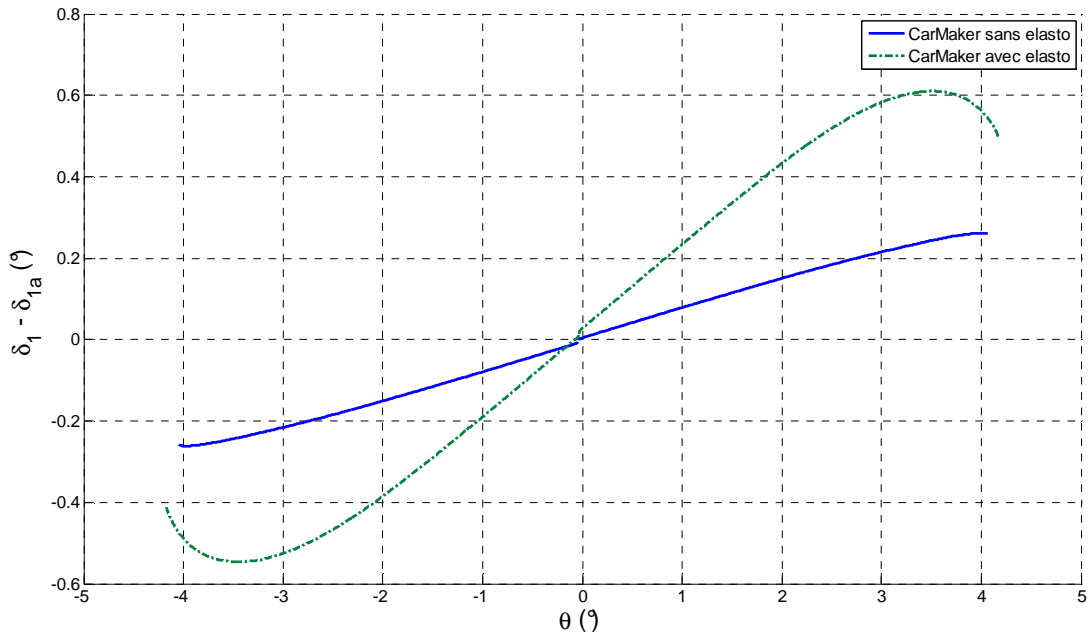


Figure 4.16. Caractéristique du taux de roulis.

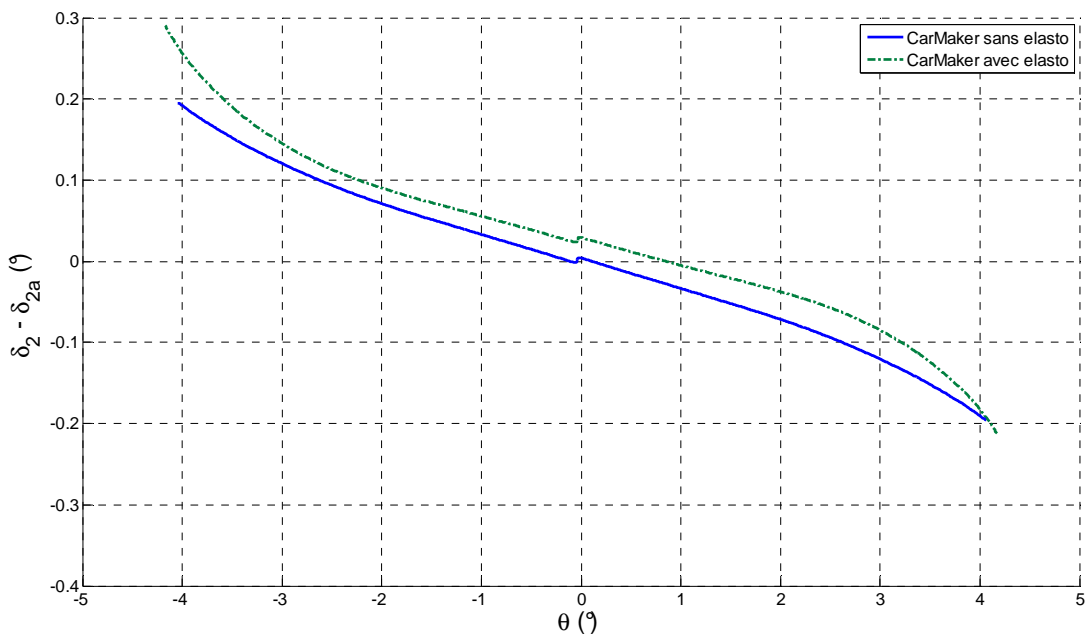


Figure 4.17. Caractéristique du taux de roulis.

4.5.5. Application à l'identification du modèle LRDT-P3

4.5.5.1. Avec prise en compte des élasto-cinématiques dans les données de simulation

En utilisant les données de simulation en régime permanent issues de CarMaker en prenant en compte tous les phénomènes d'élasto-cinématiques, nous obtenons les résultats suivant :

- **Analyse d'identifiabilité :**

L'application de la méthode du calcul des paramètres identifiables sur la matrice W (régresseur) a permis de constater que cette matrice est non pleine (rang de la matrice égal à 5). Les paramètres non identifiables sont : n_0 , n_4 et n_5 . Ceci conduit à la suppression des colonnes A_i , E_i et F_i de la matrice W .

L'expression des paramètres des efforts des pneumatiques devient alors :

$$K_i(F_{Zi}) = n_1 F_{Zi} + n_2 F_{Zi}^2 + n_3 F_{Zi}^3 \quad (4.49)$$

$$Q_i(F_{Zi}) = n_6 F_{Zi}^2 + n_7 F_{Zi}^3 \quad (4.50)$$

- **Résultats d'identification :**

	Nom	Valeurs	
		initiales	Après identification
Paramètres fixés	M (kg)	2122.84	
	M_s (kg)	1925.7	
	h (m)	0.542	
	I_{zz} (kg m ²)	3721.3	
	L_1 (m)	1.1	
	L_2 (m)	1.7958	
Paramètres identifiés	$k_{\theta 1}$ (N/rad)	63329.1808	63329.1808
	$k_{\theta 2}$ (N/rad)	57531.2878	57531.2878
	k_{p1}	-0.0725	-0.195 (-169 %)
	k_{p2}	0.0377	0.033 (-12.46 %)
	n_1	-	-28.2862
	n_2	-	2.109e-3
	n_3	-	-0.0181e-7
	n_6	-	0.28137
	n_7	-	-2.64361e-5

Tableau 4.2. Valeurs des paramètres initiales et après identification.

• Comparaisons des courbes de simulation et des courbes d'identification :

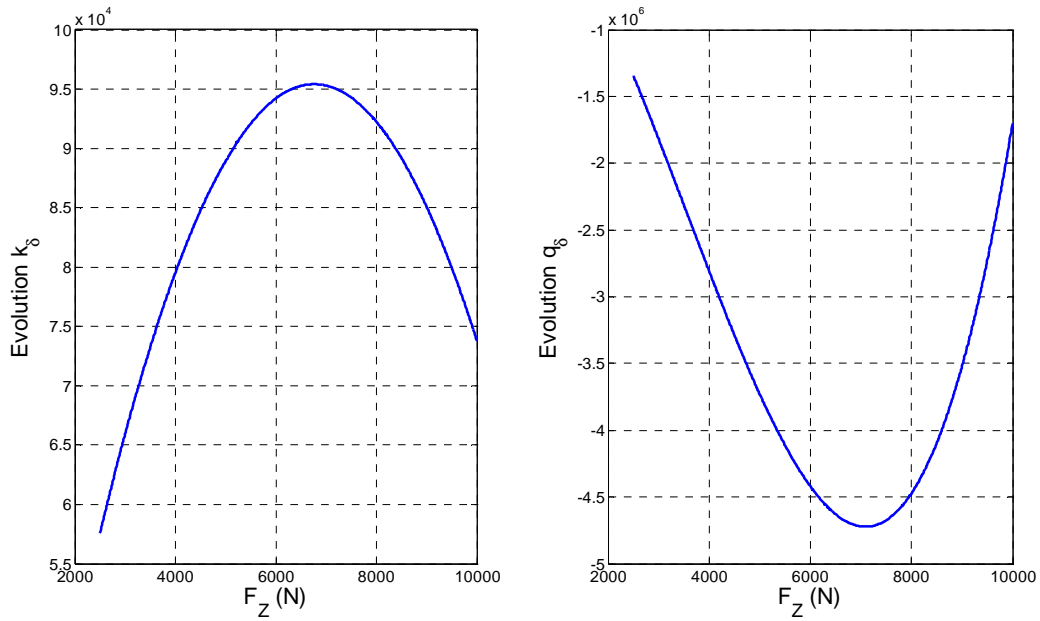


Figure 4.18. Evolution des paramètres d'effort de pneumatique en fonction de la charge.

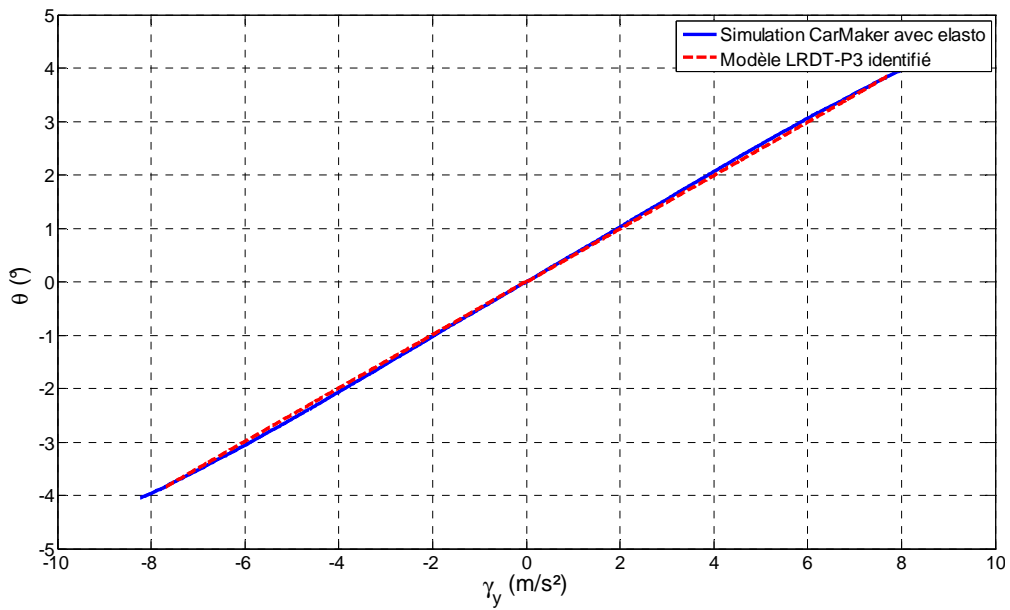


Figure 4.19. Caractéristique du taux de roulis.

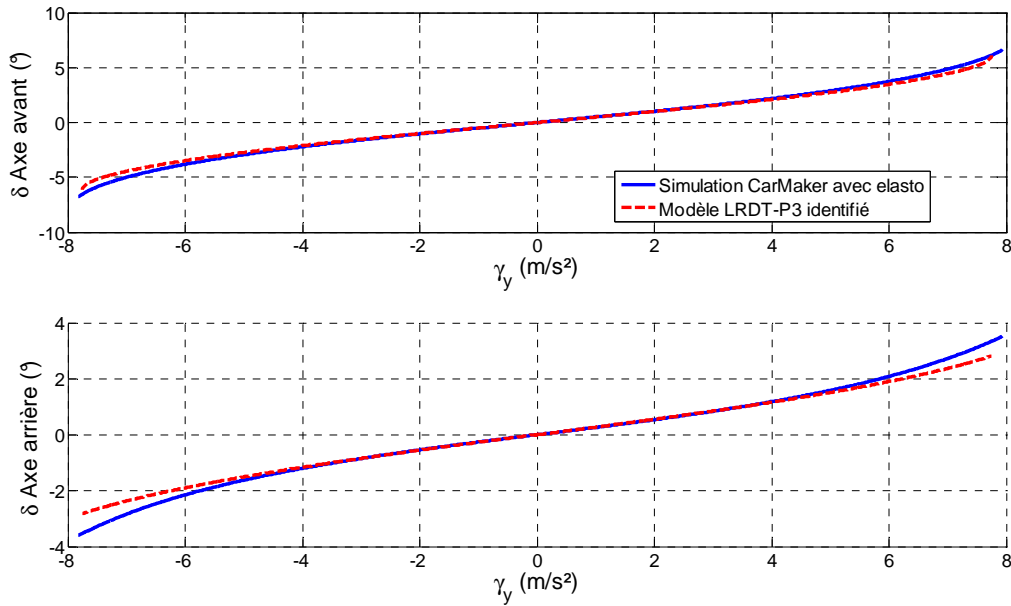


Figure 4.20. Taux de dérive avant et arrière en régime permanent.

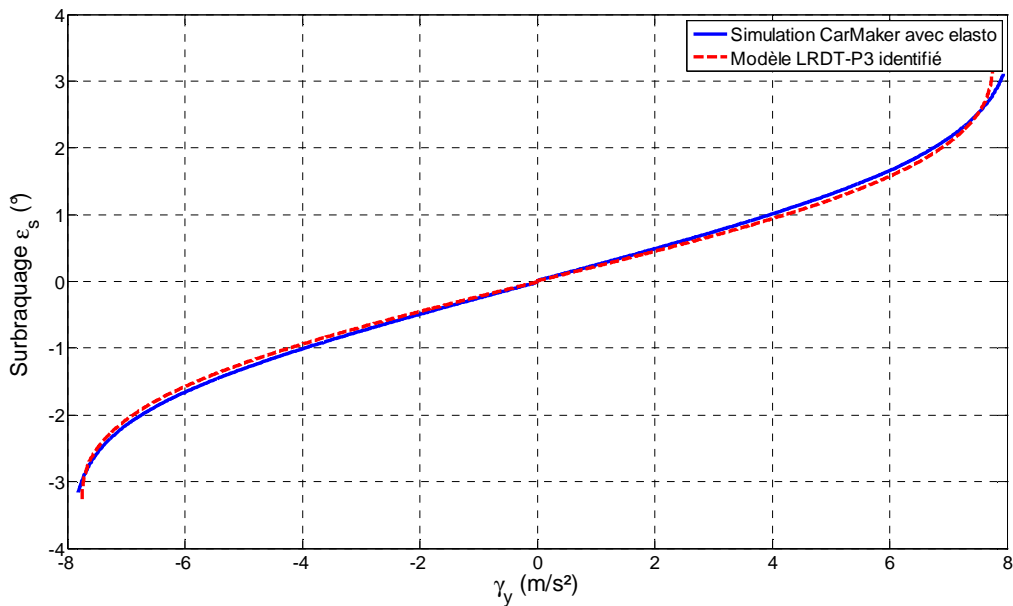


Figure 4.21. Caractéristique du taux de surbraquage en régime permanent.

- **Constatations :**

- La méthode permet d'avoir de très bons résultats d'identification en régime permanent. Les taux de roulis, de dérives avant et arrière et de surbraquage sont identiques à ceux obtenus par CarMaker ;
- L'analyse d'identifiabilité a permis de réduire le nombre de paramètres à identifier ;
- Pour les grandes accélérations transversales on observe un écart au niveau des dérives avant et arrière qui est lié à la limitation du modèle LRDT-P3 à représenter les efforts de pneumatiques à ce niveau d'accélération. Un polynôme d'ordre 5 en dérive devrait réduire cet écart.

4.5.5.2. Sans prise en compte des élasto-cinématiques dans les données de simulation

- **Analyse d'identifiabilité :**

L'analyse d'identifiabilité a permis d'obtenir les mêmes résultats que précédemment. Les paramètres non identifiables sont : n_0 , n_4 et n_5 . Ceci conduit à la suppression des mêmes colonnes A_i , E_i et F_i du régresseur W . Les expressions des paramètres des efforts des pneumatiques sont données par 4.49 et 4.50.

- **Résultats d'identification :**

	Nom	Valeurs	
		initiales	Après identification
Paramètres fixés	M (kg)	2122.84	
	M_s (kg)	1925.7	
	h (m)	0.542	
	I_{zz} (kg m ²)	3721.3	
	L_1 (m)	1.1	
	L_2 (m)	1.7958	
Paramètres identifiés	$k_{\theta 1}$ (N/rad)	63329.1808	53394.89 (-15.68 %)
	$k_{\theta 2}$ (N/rad)	57531.2878	48506.498 (-15.68 %)
	k_{p1}	-0.0725	-0.07895 (-8.89 %)
	k_{p2}	0.0377	0.03927 (+4.16 %)
	n_1	-	-30.0985
	n_2	-	0.00239
	n_3	-	-0.2016e-7
	n_6	-	0.28901
	n_7	-	-2.6652e-5

Tableau 4.3. Valeurs des paramètres initiales et après identification.

• Comparaisons des courbes de simulation et des courbes d'identification :

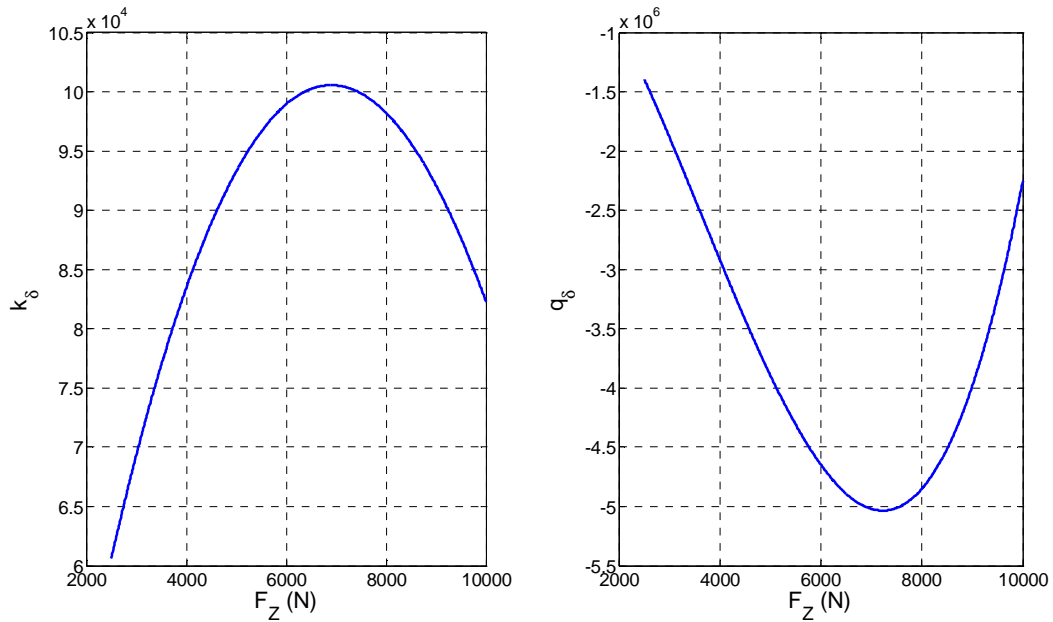


Figure 4.18. Evolution des paramètres d'effort de pneumatique en fonction de la charge.

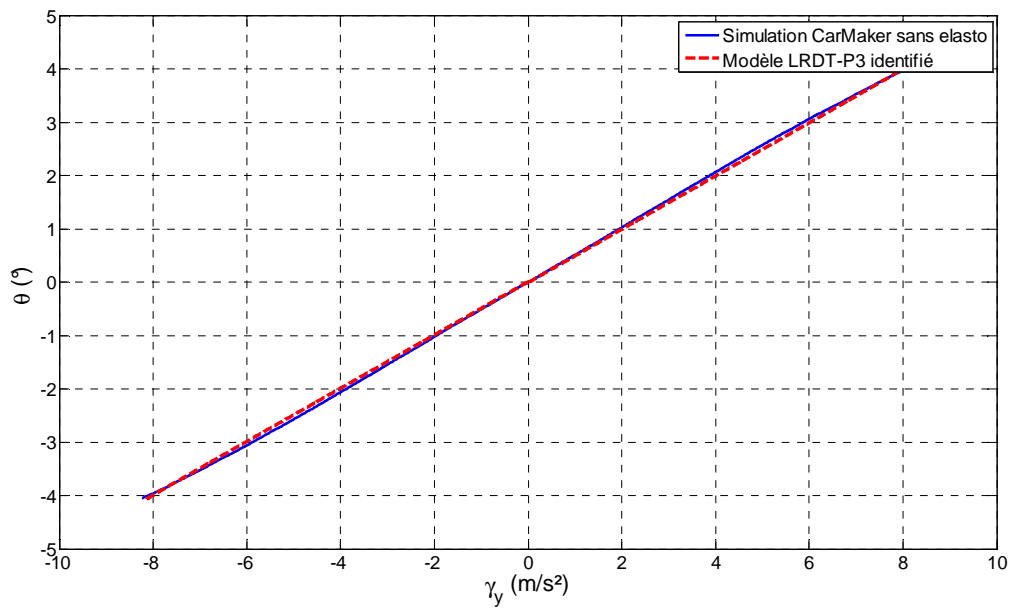


Figure 4.20. Caractéristique du taux de roulis.

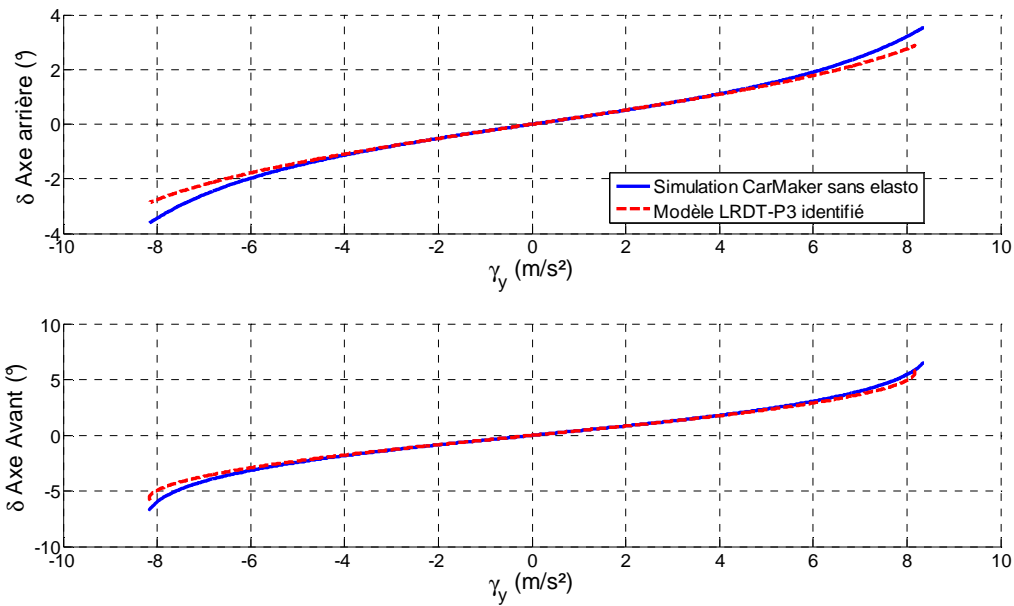


Figure 4.19. Taux de dérive avant et arrière en régime permanent.

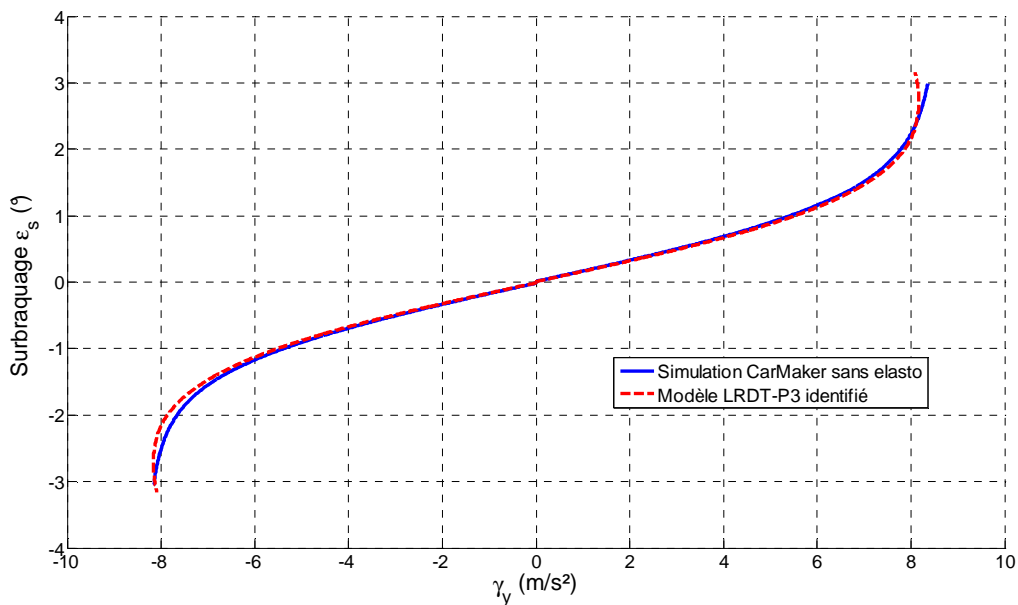


Figure 4.21. Caractéristique du taux de surbraquage en régime permanent.

• **Constatations :**

- Nous obtenons de meilleurs résultats en supprimant les effets d'élasto-cinématiques du modèle de référence (CarMaker). Ceci rend le modèle LRDT-P3 plus proche en termes de limitations de modélisation que le modèle CarMaker et nous évitons par conséquent de noyer les effets d'élasto-cinématiques dans les paramètres de raideurs de roulis de prise de pinces. Les taux de roulis, de dérives avant et arrière et de surbraquage sont identiques à ceux obtenus par CarMaker ;
- L'analyse d'identifiabilité a permis de réduire le nombre de paramètres à identifier ;

4.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons concentré nos efforts à l'identification des paramètres des modèles LD-P3 et LRDT-P3 en régime permanent. Les techniques présentées ont permis d'aboutir à des résultats très satisfaisants en termes de représentativité lorsque nous comparons les caractéristiques du régime permanent identifiées à celles obtenues avec le modèle de référence CarMaker. Nous avons présenté également une validation du modèle de référence pour différentes prestations afin de vérifier sa corrélation par rapport à un véhicule réel.

Après identification des modèles LD-P3 et LRDT-P3, nous avons constaté qu'aux fortes accélérations un écart apparaît au niveau des dérives avant et arrière. Cet écart est dû à la limitation de la formule d'effort du pneumatique à un polynôme d'ordre 3. L'utilisation d'un polynôme d'ordre 5 en dérive dans les expressions des efforts de pneumatiques pourrait améliorer significativement ces résultats.

Il est important de noter que nous ne pouvons pas nous prononcer sur la fiabilité des paramètres obtenus vis-à-vis des prestations dynamiques et des réponses transitoires du véhicule. Il serait donc intéressant de trouver des techniques permettant d'identifier les paramètres de la partie dynamique des équations des modèles LD-P3 et LRDT-P3.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Dans ce mémoire dédié à l'analyse et à l'étude du comportement non linéaire en dynamique du véhicule, un travail et un effort considérable ont été consentis afin d'introduire pédagogiquement la problématique du sujet et d'aboutir par étapes à un ensemble de solutions adaptée. L'analyse de la problématique induit forcément à une recherche approfondie des études similaires existants dans la littérature de sortes à capitaliser l'ensemble des informations aidant à choisir la solution optimale. Durant notre travail nous avons adopté la démarche simplifiée suivante :

- Description de la problématique du sujet et des objectifs associés
- Etude bibliographique
- Proposition de solutions adaptées
- Analyse et étude de faisabilité des solutions proposées
- Application
- Discussion des résultats et critiques
- Conclusion

Après avoir présenté la problématique du sujet et les objectifs associés il était important se familiariser avec le domaine de la dynamique de véhicule et à la terminologie associée. Nous avons donc jugé utile d'adopter l'ensemble des définitions et des concepts présentés dans le chapitre 1. Ce chapitre est dédié à la compréhension générale des sources de non linéarités et leurs effets sur la dynamique transversale du véhicule. En résumé nous y avons abordé les points suivants :

- La présentation des différentes parties et organes constituant le véhicule ;
- L'étude du mécanisme de mise en virage ;
- L'analyse et mise en équations des transferts de charge ;
- La présentation du diagramme G-G qui permet de visualiser les domaines d'utilisation du véhicule avec une délimitation des zones de comportement linéaires et non linéaires ;
- Nous avons introduit également, les sources de non linéarités dues au système de suspension et au pneumatique (efforts d'interaction pneumatique-sol).

Le chapitre 2 a été consacré à la modélisation, nous avons introduit tous les aspects mathématiques nécessaires pour établir un modèle de dynamique latérale du véhicule. Nous avons abordé trois différentes parties. La première partie concerne la modélisation de comportement du pneumatique où nous avons présenté en détail le modèle de Pacejka quasi-statique. A l'issue de cette modélisation, deux approximations polynomiales ont été établies. La première approximation basée sur un polynôme de degré 3 permet d'approximer l'évolution de l'effort latéral pour une gamme de dérive allant jusqu'à 6° à charge statique. Les coefficients de ce polynôme sont constants et sont calculés en fonction de la charge au repos du pneu. La seconde approximation tient compte de la variation de charge sur le pneu causée par le transfert de charge en virage. L'effort est caractérisé par un polynôme de degré 3 en dérive et dont chaque coefficient est également un polynôme de degré 3 en la charge. Dans la seconde partie, nous avons établi deux différents modèles de dynamique latérale du véhicule à savoir : le modèle non linéaire LD (lacet-dérive) et le modèle non linéaire LRDT (lacet-roulis-dérive-transfert de charges). La dernière partie de ce chapitre a été consacré à

l'analyse du modèle LD linéaire (modèle bicyclette). Par la suite, cette analyse permettra de mettre en contraste les améliorations de représentativité qui seront apportées lorsqu'on considère plus de non linéarité dans le fonctionnement du pneumatique, comme c'est le cas pour les modèle LD-P3 et LRDT-P3.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté l'essentiel du travail effectué dans le cadre de l'analyse non linéaire en dynamique de véhicule. Nous y étudié l'impact des non linéarités dans un système dynamique à la fois dans le domaine fréquentiel et temporel ce qui nous a permis de mettre en claire le contexte de l'étude des phénomènes non linéaire dans le domaine de la dynamique de véhicule et établir un choix des méthodes à utiliser. Trois méthodes ont été retenues : la méthode d'équilibrage harmonique, la méthode asymptotique de Krylov-Bogoliubov et la méthode des séries de Volterra.

Des résultats innovants sont présentés à l'issue de l'application des méthodes précitées dans le cas du modèle LD-P3. La méthode d'équilibrage harmonique a permis d'extraire analytiquement les fonctions réponses fréquentielles et d'investiguer les distorsions harmoniques en fonction de l'amplitude de l'entrée. Cette méthode nous a également permis d'étudier l'évolution des paramètres modaux en fonction de l'amplitude d'entrée. En dynamique non linéaire de véhicule, les résultats obtenus par l'équilibrage harmonique constituent une innovation majeure et c'est la première application dans ce domaine.

Pour analyse les réponses du véhicule en régimes transitoire à une excitation sinusoïdale nous avons utilisé la méthode asymptotique de Krylov-Bogoliubov. Les résultats obtenus sont concluant mais uniquement lorsque la fréquence d'excitation est assez basse. Lorsque la fréquence augmente les réponses divergent. Ceci est due d'une part à la procédure d'adaptation du modèle et d'autre part à la limitation de l'approximation de la réponse au seul premier terme de la série de Krylov-Bogoliubov.

La troisième méthode utilisée est la méthode des séries de Volterra. Cette méthode a été présentée et appliquée afin d'établir une représentation analytique des réponses du véhicule. Cette approche a ouvert un chemin efficace et puissant pour extraire les caractéristiques analytiques des réponses directement à partir des noyaux de Volterra. La polyvalence de la méthode des séries de Volterra a permis son applicabilité à la fois dans le domaine fréquentiel et temporel. Cette méthode nous a permis d'extraire toutes les caractéristiques des réponses qui sont complètement décrites par les paramètres physiques du véhicule.

Les résultats présentés dans ce chapitre concernant la dynamique non linéaire du véhicule n'ont jamais été obtenus auparavant et ont donné lieu à deux publications internationales. Une première publication dans le journal de la dynamique de véhicule et une deuxième publication au congrès international de la dynamique de véhicule de la SIA (Société des Ingénieurs de l'Automobiles) à Lyon.

Le quatrième chapitre a été dédié à l'identification des paramètres physiques du véhicule en régime permanent des modèles LD-P3 et LRDT-P3. Les techniques présentées ont permis d'aboutir à des résultats très satisfaisant en termes de représentativité lorsque nous comparons les caractéristiques du régime permanent identifier à ceux obtenues avec le modèle de référence. Aux fortes accélérations transversales un écart apparait au niveau des caractéristiques des taux de dérive avant et arrière. Cet écart est dû à l'incapacité des modèles considérés à représenter la totalité des non linéarité pouvant survenir à ces niveaux d'accélérations. Une des solutions pour améliorer les résultats et réduire cet écart est de

considérer un polynôme d'ordre 5 en dérive dans les expressions des efforts de pneumatiques et introduire les élasto-cinématiques dans le modèle du véhicule. A l'issue de ces résultats il est important de noter qu'aucune indication n'est donnée sur la fiabilité des paramètres obtenues vis-à-vis des prestations dynamiques et des réponses transitoires du véhicule.

Perspective

Le travail réalisé est considéré comme un avancement significatif et peut constituer un bon point de départ pour toute analyse non linéaire en dynamique de véhicule. Cependant il reste beaucoup de chemins à explorer notamment dans l'enrichissement du modèle, l'analyse non linéaire et l'identification en prestations dynamiques. Voici en résumé quelques éléments de perspective qu'il serait intéressant d'approfondir :

- Prendre en compte plus de non linéarité dans le fonctionnement du pneumatique notamment en considérant un polynôme d'ordre 5 en dérive dans l'expression des efforts ;
- Etendre et enrichir le modèle LRDT pour prendre en compte les épures élasto-cinématiques des trains, les non linéarités de suspension, la dynamique transitoire des efforts de pneumatique,...etc. ;
- Analyser les fonctions réponses fréquentielles et les distorsions harmoniques par la méthode d'équilibrage multi-harmoniques ;
- Etendre les séries de Volterra aux noyaux d'ordre supérieur à 3 ;
- Identifier les paramètres de la partie dynamique des équations des modèles LD-P3 et LRDT-P3, ou d'autres modèles plus enrichis.

Annexe A

Méthodes de quasi-Newton sécante.

A.1. Méthode de Newton pour les modèles à une variable

Afin d'introduire le concept général de la méthode de quasi-Newton sécante, il est primordial de commencer par une équation non linéaire à une seule variable et ensuite le généraliser à n variables.

Pour une équation non linéaire à une variable, la résolution consiste à trouver $x \in \mathfrak{R}$ tel que $f(x) = 0$. L'idée principale de la méthode de Newton consiste à simplifier le problème. Sachant qu'un modèle non linéaire est généralement compliqué à résoudre, nous allons le remplacer par un modèle plus simple. Ce modèle simplifié peut être le modèle linéaire.

Définition A.1 : Modèle linéaire d'une fonction à une variable

Soit $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction différentiable. Le modèle linéaire de f en \hat{x} est une fonction $m_{\hat{x}} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par

$$m_{\hat{x}} = f(\hat{x}) + (x - \hat{x})f'(\hat{x}) \quad (\text{A.1})$$

A partir d'une première approximation \hat{x} , l'idée principale de la méthode de Newton pour trouver une racine de la fonction f consiste à :

- 1) calculer le modèle linéaire en \hat{x} ;
- 2) calculer la racine x^+ de ce modèle ;
- 3) si x^+ n'est pas une racine de $f(x)$, considérer x^+ comme nouvelle approximation et recommencer la procédure.

D'après la définition A.1, la racine du modèle linéaire est la solution de

$$f(\hat{x}) + (x - \hat{x})f'(\hat{x}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

C'est-à-dire, si $f'(\hat{x}) \neq 0$,

$$x^+ = \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})} \quad (\text{A.3})$$

Ce qui résume les deux premières étapes énoncées ci-dessus. A la troisième étape, il est très courant que la méthode ne génère jamais un point x^+ tel que $f(\hat{x}) = 0$. Il faut donc se contenter d'une solution x^+ telle que $f(\hat{x})$ soit suffisamment proche de 0 et vérifie

$$|f(x^+)| \leq \varepsilon \quad (\text{B.4})$$

Avec ε une petite valeur qui représente la précision demandée. L'algorithme de la méthode de Newton peut s'énoncer comme suit :

Algorithme A.1 : Méthode de Newton à une variable

Les entrées de l'algorithme :

- La fonction $f(x) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.
- La dérivée $f'(x) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.
- Une première approximation de la solution $x_0 \in \mathfrak{R}^n$.
- La précision demandée $\varepsilon \in \mathfrak{R}$, $\varepsilon > 0$

Sortie de l'algorithme :

- Une approximation de la solution $x^* \in \mathfrak{R}^n$.

Initialisation :

1. $k = 0$

Itérations :

1. Mise à jour de la solution $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
2. $k = k + 1$

Critère d'arrêt :

- Les itérations sont arrêtées lorsqu'on satisfait le critère suivant : $\|f(x_k)\| \leq \varepsilon$.

A.2. Généralisation de la méthode pour les modèles à n variables

Afin de généraliser la méthode de Newton, il est nécessaire de trouver le modèle linéaire de la fonction à n variables.

Définition A.2 : Modèle linéaire d'une fonction multivariable

Soit $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ une fonction continument différentiable. Le modèle linéaire de f en \hat{x} est une fonction $m_{\hat{x}} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ définie par

$$m_{\hat{x}}(x) = f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^T (x - \hat{x}) = f(\hat{x}) + J(\hat{x})(x - \hat{x}) \quad (\text{A.5})$$

Où $\nabla f(\hat{x})$ est la matrice gradient de f en \hat{x} et $J(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x})^T$ la matrice jacobienne.

En appliquant la même démarche que pour le modèle à une seule variable, nous pouvons décrire une procédure de recherche de la solution pour les modèles multivariables. Cependant,

sans écrire l'algorithme, il est clair que la recherche d'une solution passe d'abord par une évaluation de la matrice jacobienne. La matrice jacobienne n'est pas évidente à calculer lorsqu'on est confronté à un système d'équations non linéaires comme expliqué dans §3.5.2. Pour éviter l'évaluation de la matrice jacobienne, nous allons utiliser une méthode d'approximation de $J(\hat{x})$ par différence finie. Le nouveau modèle linéaire équivalent est défini comme suit :

Définition A.3 : Modèle linéaire sécant multivariable

Soit $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ une fonction continue au sens de Lipchitz et $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Le modèle linéaire sécant de f en \hat{x} est une fonction $m_{\hat{x},A} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ définie par

$$m_{\hat{x},A}(x) = f(\hat{x}) + A \times (x - \hat{x}) \quad (\text{A.6})$$

A étant l'approximation itérative par différence finie de la matrice jacobienne.

Définition A.4: Equation sécante

Un modèle linéaire vérifie l'équation sécante en x_k et x_{k-1} si la matrice A le définissant est telle que le modèle linéaire sécant de f en \hat{x} est une fonction $m_{\hat{x},A} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ définie par

$$A \times (x_k - x_{k-1}) = f(x_k) - f(x_{k-1}) \quad (\text{A.7})$$

En posant

$$d_{k-1} = x_k - x_{k-1} \quad (\text{A.8})$$

$$y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) \quad (\text{A.9})$$

Elle s'écrit

$$A \times d_{k-1} = y_{k-1} \quad (\text{A.10})$$

Pour introduire la méthode de résolution de quasi-Newton sécante, il faut d'abord trouver une technique pour calculer la matrice A de manière itérative. Cette procédure s'appelle « *mise à jour de Broyden* » et elle est énoncée comme suit [Bie06] :

Théorème A.1: Mise à jour de Broyden

Soit $m_{\hat{x}_{k-1}, A_{k-1}}$ le modèle linéaire sécant d'une fonction $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ en x_{k-1} et soit $x_k \in \mathfrak{R}$, $x_k \neq x_{k-1}$. Le modèle linéaire sécant de f en x_k qui vérifie l'équation qui vérifie l'équation B.7 et qui est le plus semblable au modèle $m_{\hat{x}_{k-1}, A_{k-1}}$ est

$$m_{x_k, A_k}(x) = f(x_k) + A_k \times (x - x_k) \quad (\text{A.11})$$

Avec

$$A_k = A_{k-1} + \frac{(y_{k-1} - A_{k-1}d_{k-1})d_{k-1}^T}{d_{k-1}^T d_{k-1}} \quad (\text{A.12})$$

Avec le théorème de la mise à jour de Broyden nous sommes en mesure de présenter la méthode de Newton sécante pour les modèles multivariés. La matrice jacobienne étant exprimée par une approximation mise à jour pour chaque itération.

Algorithme A.2 : Méthode de quasi-Newton sécante : n variables

L'objectif de la méthode est de trouver la solution du système d'équations

$$f(x) = 0 \quad \text{avec, } x \in \mathfrak{R}^n$$

Les entrées de l'algorithme :

- La fonction $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$.
- Une première approximation de la solution $x_0 \in \mathfrak{R}^n$.
- Une première approximation de la matrice jacobienne A_0 (par défaut $A_0 = I$).
- La précision demandée $\varepsilon \in \mathfrak{R}$, $\varepsilon > 0$

Sortie de l'algorithme :

- Une approximation de la solution $x^* \in \mathfrak{R}^n$.

Initialisation :

1. $x_1 = x_0 - A_0^{-1} f(x_0)$
2. $d_0 = x_1 - x_0$
3. $y_0 = f(x_1) - f(x_0)$
4. $k = 1$

Itérations :

1. Mise à jour de Broyden : $A_k = A_{k-1} + \frac{(y_{k-1} - A_{k-1}d_{k-1})d_{k-1}^T}{d_{k-1}^T d_{k-1}}$
2. Calculer d_k solution de $A_k d_k = -f(x_k)$
3. Mise à jour de la solution $x_{k+1} = x_k + d_k$
4. Calculer $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$
5. $k = k + 1$

Critère d'arrêt :

- Les itérations sont arrêtées lorsqu'on satisfait : $\|f(x_k)\| \leq \varepsilon$.

Annexe B

Application de la méthode KB au modèle LD-P3 : Développement des calculs

B.1. Expression du modèle non linéaire et les Entrées/Sorties

La première approximation de la solution KB s'obtient en considérant le modèle LD-P3 mis en forme

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 + \omega_0 \delta_1 = \mathcal{E}f_1(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\varepsilon}_r, \ddot{\varepsilon}_r) \\ \ddot{\delta}_2 + \omega_0 \delta_2 = \mathcal{E}f_2(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\varepsilon}_r, \ddot{\varepsilon}_r) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Où $\varepsilon = 1$ et les fonctions non linéaires données par

$$\begin{cases} f_1 = D'_{11} \ddot{\varepsilon}_r + E'_{11} \dot{\varepsilon}_r + \omega_0 \delta_1 - B'_{11} \dot{\delta}_1 - B'_{12} \dot{\delta}_2 - 3C'_{11} \dot{\delta}_1 \delta_1^2 - 3C'_{12} \dot{\delta}_2 \delta_2^2 \\ f_2 = D'_{21} \ddot{\varepsilon}_r + E'_{21} \dot{\varepsilon}_r + \omega_0 \delta_2 - B'_{21} \dot{\delta}_1 - B'_{22} \dot{\delta}_2 - 3C'_{21} \dot{\delta}_1 \delta_1^2 - 3C'_{22} \dot{\delta}_2 \delta_2^2 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Comme décrit au §3.6.3, lorsque le système est soumis à une entrée sinusoïdale forcée à une fréquence ω^* , la pulsation ω_0 dans l'équation B.1 doit être forcée à ω^* . Soit alors le braquage roue suivant :

$$\varepsilon_r = \xi \cos(\omega t) \quad (\text{B.3})$$

Dont les dérivées premières et secondes s'expriment :

$$\dot{\varepsilon}_r = -\omega \xi \sin(\omega t) \quad (\text{B.4})$$

$$\ddot{\varepsilon}_r = -\omega^2 \xi \cos(\omega t) \quad (\text{C.5})$$

Les réponses correspondantes selon la première approximation KB sont donnée par :

$$\delta_i(t) = \Delta_i \cos(\omega t + \phi_i) \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{\delta}_i(t) = -\omega \Delta_i \sin(\omega t + \phi_i) \quad (\text{B.7})$$

L'amplitude est la phase pour les dérivées avant et arrière s'expriment

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_i = \frac{-1}{2\omega} H_{ii}(\Delta_1, \dots, \Delta_n, \phi_1, \dots, \phi_n) \\ \dot{\phi}_i = \frac{-1}{2\omega \Delta_i} G_{ii}(\Delta_1, \dots, \Delta_n, \phi_1, \dots, \phi_n) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

B.2. Calcul des fonctions H_{ii} et G_{ii} à partir des fonctions f_i

En injectant B.4 à B.7 dans B.2, nous pouvons réécrire les fonctions f_k sous la forme 3.123. Ainsi, il est facile d'extraire les fonctions H_{kk} et G_{kk} .

a. Développement de la fonction f_1

$$\begin{aligned} f_1(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\epsilon}_r, \ddot{\epsilon}_r) = & -D'_{11} \xi \omega^2 \cos(\omega t) - \omega E'_{11} \xi \sin(\omega t) + \omega \Delta_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ & + \omega B'_{11} \Delta_1 \sin(\omega t + \phi_1) + \omega B'_{12} \Delta_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ & + 3\omega C'_{11} \Delta_1 \sin(\omega t + \phi_1) \times \Delta_1^2 \cos^2(\omega t + \phi_1) \\ & + 3\omega C'_{12} \Delta_2 \sin(\omega t + \phi_2) \times \Delta_2^2 \cos^2(\omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

En utilisant les règles de transformation trigonométrique

$$\begin{aligned} f_1(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\epsilon}_r, \ddot{\epsilon}_r) = & \sin(\omega t + \phi_1) [-D'_{11} \xi \omega^2 \sin(\phi_1) - \omega E'_{11} \xi \cos(\phi_1) + \omega B'_{11} \Delta_1 \\ & + \omega B'_{12} \Delta_1 \cos(\Delta\phi) + \frac{3}{4} \omega C'_{12} \Delta_1^3 \cos(\Delta\phi) + \frac{3}{4} \omega C'_{11} \Delta_1^3] \\ & + \cos(\omega t + \phi_1) [-D'_{11} \xi \omega^2 \cos(\phi_1) + \omega E'_{11} \xi \sin(\phi_1) \\ & + \omega \Delta_1 - \omega B'_{21} \Delta_2 \sin(\Delta\phi) - \frac{3}{4} \omega C'_{12} \Delta_2^3 \sin(\Delta\phi)] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Avec, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

Nous obtenons directement à partir de l'équation B.10, les fonctions H_{11} et G_{11}

$$\begin{aligned} H_{11} = & -D'_{11} \omega^2 \xi \sin(\phi_1) - E'_{11} \omega \xi \cos(\phi_1) + B'_{11} \omega \Delta_1 + B'_{12} \omega \Delta_2 \cos(\Delta\phi) \\ & + \frac{3}{4} C'_{11} \omega \Delta_1^3 + \frac{3}{4} C'_{12} \omega \Delta_2^3 \cos(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} G_{11} = & -D'_{11} \omega^2 \xi \cos(\phi_1) - E'_{11} \omega \xi \sin(\phi_1) + \omega \Delta_1 + B'_{12} \omega \Delta_2 \sin(\Delta\phi) \\ & + \frac{3}{4} C'_{12} \omega \Delta_2^3 \sin(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

b. Développement de la fonction f_2

$$\begin{aligned} f_2(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\epsilon}_r, \ddot{\epsilon}_r) = & -D'_{21} \xi \omega^2 \cos(\omega t) - \omega E'_{21} \xi \sin(\omega t) + \omega \Delta_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ & + \omega B'_{21} \Delta_1 \sin(\omega t + \phi_1) + \omega B'_{22} \Delta_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ & + 3\omega C'_{21} \Delta_1 \sin(\omega t + \phi_1) \times \Delta_1^2 \cos^2(\omega t + \phi_1) \\ & + 3\omega C'_{22} \Delta_2 \sin(\omega t + \phi_2) \times \Delta_2^2 \cos^2(\omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned}
f_2(\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2, \dot{\epsilon}_r, \ddot{\epsilon}_r) = & \sin(\omega t + \phi_2)[-D'_{21} \xi \omega^2 \sin(\phi_2) - \omega E'_{21} \xi \cos(\phi_2) + \omega B'_{22} \Delta_2 \\
& + \omega B'_{21} \Delta_1 \cos(\Delta\phi) + \frac{3}{4} \omega C'_{21} \Delta_1^3 \cos(\Delta\phi) + \frac{3}{4} \omega C'_{22} \Delta_2^3] \\
& + \cos(\omega t + \phi_2)[-D'_{21} \xi \omega^2 \cos(\phi_2) + \omega E'_{21} \xi \sin(\phi_2) \\
& + \omega \Delta_2 - \omega B'_{21} \Delta_1 \sin(\Delta\phi) - \frac{3}{4} \omega C'_{21} \Delta_1^3 \sin(\Delta\phi)]
\end{aligned} \tag{B.14}$$

De la même manière que pour la fonction f_1 , on obtient les fonctions H_{22} et G_{22}

$$\begin{aligned}
H_{22} = & -D'_{21} \omega^2 \xi \sin(\phi_2) - E'_{21} \omega \xi \cos(\phi_2) + B'_{21} \omega \Delta_1 \cos(\Delta\phi) + B'_{22} \omega \Delta_2 \\
& + \frac{3}{4} C'_{21} \omega \Delta_1^3 \cos(\Delta\phi) + \frac{3}{4} C'_{22} \omega \Delta_2^3
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
G_{22} = & -D'_{21} \omega^2 \xi \cos(\phi_2) - E'_{21} \omega \xi \sin(\phi_2) + \omega \Delta_2 - B'_{21} \omega \Delta_1 \sin(\Delta\phi) \\
& - \frac{3}{4} C'_{21} \omega \Delta_1^3 \sin(\Delta\phi)
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Annexe C

Nonlinear single track model analysis using Volterra series approach

Accepté dans « Journal of vehicle system dynamics ». Première publication en Janvier 2009.

Nonlinear single track model analysis using Volterra series approach

B. Badji^{a*}, E. Fenaux^a, M. El Bagdouri^b and A. Miraoui^b

^a*Road Dynamic Synthesis Department, PSA Peugeot Citroën Automobiles, Belfort, France;*

^b*University of Technology of Belfort-Montbéliard, Belfort, France*

(Received 26 June 2007; final version received 11 January 2008)

In this paper, an original approach based on the Volterra series theory is applied in order to analyse a nonlinear single track model, which is considered to describe the vehicle dynamics behaviour in the nonlinear domain. This model is based on a polynomial approximation up to the third order of the Pacejka formula that describes the full tyre behaviour. The analysis of the model is carried out using a truncated form of the Volterra series; this allows the extraction of an analytical formulation of the nonlinear response characteristics. The analysis is focused on the extraction of the first order frequency response function expression and the understeer angle curve vs lateral acceleration, which characterises the vehicle typology and stability. The resulting equations and illustrations in both the cases are presented.

Keywords: Volterra series; single track model; vehicle dynamics; multi-dimensional Laplace transform; nonlinear systems

1. Introduction

Creativity and technological innovations are the main assets for the development and the economic growth within the automobile industry. The particular innovation capacities of the manufacturers causes scientific and technical competition to become increasingly intense. In this way, a great number of new devices and systems intended to improve driving comfort equip new vehicles. Among the most important are active safety systems, such as antilock brake system and electronic stability control, that contribute to the key issue of road safety.

Designing such systems requires a good knowledge of the vehicle behaviour. This can be done by a rigorous modelling of individual components to reproduce as exactly as possible the real behaviour of the vehicle in order to establish an analytical link between the response characteristics and the physical parameters within the obtained model. To date, several models exist that are obtained using linearisation of each individual vehicle component (especially for the tyre dynamic behaviour) for a defined operating range such as the linear single track model or the two track model; for an overview of the different simplified models, see [1–4].

*Corresponding author. Email: boualem.badji1@ext.mpsa.com

These models are widely used in the analysis of the vehicle responses due to the easy handling of the linear analysis method like transfer functions. However, these linearised models suffer from limitations of their operating range. In fact, for higher input solicitations, the vehicle is generally subjected to a strong side acceleration (higher than 4ms^{-2}) that causes tyre behaviour to become clearly nonlinear. The linearised models are then not valid to predict the system responses and to analyse its behaviour.

To overcome this problem, the main approach is to consider the full nonlinear tyre dynamic into the model, namely the Pacejka formula [1]. This procedure leads to a complex nonlinear model and makes impossible the analytical extraction of the vehicle response and the numerical solution is often preferred. To circumvent the use of the Pacejka formula to extend the validity range of the model, Kiencke and Nielson [3] propose to use an adaptation of the side force constants within the linear two track model. The adaptation routine is based on an instantaneous estimation of the friction value and thus the estimation of the side forces for the front and rear wheels. This method gives an accurate response approximation when compared with the measured data and may be an acceptable compromise between simplicity and efficacy of the derived model. However, the evolution of these side force constants is not analytical and the vehicle response characteristics cannot be obtained from the resulting model.

In [5], a different way is explored where a multi-model representation is proposed in the aim to characterise the vehicle behaviour for all its operating range. The proposed multi-model is constituted of three linear models. Each linear model is identified for specific operating range, namely for the following side acceleration intervals $0\text{ m/s}^2 < a_y < 5\text{ m/s}^2$, $5\text{ m/s}^2 < a_y < 8\text{ m/s}^2$, and $a_y > 8\text{ m/s}^2$. Methods concerning the identification procedure are presented in [6]. The output of the multi-model is obtained from an interpolation of the responses of the three linear models. The interpolation is governed by weightings parameters, which are updated from an instantaneous estimation of the side acceleration value. This method was successfully experimented to predict responses for different excitation levels. Unfortunately, this method shares the same disadvantages as the preceding one.

In this paper, a simple nonlinear single track model based on a polynomial approximation of the Pacejka formula will be used in the aim to extend the validity range for higher side acceleration values. The lateral forces are due only to the tyre side slip. The obtained model will be analysed using the Volterra series theory in order to study the impact of the nonlinearity on the system responses. The Volterra series give a direct mean and an efficient way to analyse a wide class of nonlinear systems, where the system responses are described by an infinite sum of the different nonlinear contribution levels using higher order functional series; see [7–10] for an overview of Volterra series theory and [11–13] for recent applications. The advantage of this technique constitutes the possibility to investigate the contribution of the nonlinearity in the full response for different excitation levels [14].

The following work consists in extracting analytically the nonlinear vehicle response characteristics using the physical parameters of the vehicle. Two parts are to be explored: the first order frequency response function (FRF) extraction and the vehicle stability analysis.

It is well known that any nonlinearity within the dynamical systems may cause higher harmonic components when a harmonic excitation is applied. It is also observed that frequency interactions should occur if a multi-harmonic excitation is used. On the other hand, the nonlinearity causes the FRF to be input-dependent and leads to distort the linear FRF. Such a characteristic is mainly proper to nonlinear dynamics and can be well inspected using Volterra series representation. In the following, a frequency analysis will be made to quantify the distortion within the first order FRF due to the nonlinearity. One of the key issues is to establish analytic expression to describe nonlinearity contribution in frequency domain for a defined input level.

The stability is often studied using the vehicle understeering characteristics, namely with the curve understeer angle *vs* lateral acceleration; see [1] for details. Extraction of such a

characteristic can be done using steady state response of Volterra kernels, as will be shown in this work. Results shown here about the analysis of the nonlinear single track model using Volterra series were not found in literature and constitute a significant improvement of theoretical basis in the field of nonlinear vehicle dynamics.

2. Theoretical basis

Several methods have been developed to analyse and describe the behaviour of dynamic systems. Starting with an input/output data from experimental test or using equations of motion, the response of the system $y(t)$ can be fully described to an external input $x(t)$. For linear time invariant systems, this is well accomplished by handling the convolution integral in time domain or the well-known transfer function in frequency domain. Thus, the system response is given by:

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (2)$$

where $h(t)$ is the impulse response of the considered system and $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $H(\omega)$ are the Fourier transform of $x(t)$, $y(t)$, and $h(t)$, respectively. All information about the linear system is perfectly encoded in the transfer function $H(\omega)$ or the impulse response $h(t)$. However, this is exact only for linear and time invariant systems. The concept of convolution integrals was extended for nonlinear systems by Volterra [9], where he proposes a technique based on the functional power series known as the Volterra series. This approach was further developed and extensively used for the analysis of a wide class of nonlinear structures. For an arbitrary input $x(t)$, the system response $y(t)$ in terms of Volterra series takes the following form:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (3)$$

where, $y_n(t)$ is expressed by multi-dimensional convolution integrals of increasing order of the general form:

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n x(\tau_i) d\tau_i \quad (4)$$

The response of the nonlinear system is an infinite sum of contribution of each individual term in the series. The first term at ($n = 1$) corresponds to the linear convolution. Consequently, it represents the contribution from the linear part of the system. Similarly, the second, third, and n th terms in the series represent the contribution from the bilinear, trilinear, and n th order part of the system, respectively [15]. The functions $h_1(t)$, $h_2(t_1, t_2)$, \dots , $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ are known as 'the Volterra kernels'. The expansion of Equation (3) up to the first three terms yields:

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1)x(t - \tau_1)d\tau_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t - \tau_1, t - \tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \prod_{i=1}^3 x(\tau_i) d\tau_i + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

The Volterra series is essentially a polynomial extension of Taylor series to time invariant systems with memory [16]. Here, $h_1(t)$ is the linear impulse response and $h_2(t_1, t_2)$, $h_3(t_1, t_2, t_3)$ are the extensions of the impulse response concept of linear system theory to multiple dimensions. The Volterra kernels can be also defined in the frequency domain through the multi-dimensional Fourier transform [10], namely:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (6)$$

where the functions H_n are also known as higher order frequency response functions (HFRF). The inverse path leads to the time domain representation through the multi-dimensional inverse Fourier transform,

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\sigma_n - \infty}^{\sigma_n + \infty} \dots \int_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\omega_1 \dots d\omega_n \quad (7)$$

With the aid of these transformations, the response of the nonlinear system in the frequency domain can be computed and the result is presented in [10,14].

For systems described by the nonlinear ordinary differential equations of motion, there are generally an infinite number of Volterra kernels. In practice, one can handle only a finite number of terms in the series that leads to the problem of truncation accuracy. However, the first terms of the series may be sufficient to represent the output of a nonlinear system, if the nonlinearities are not too strong. Different authors [12,14] point out that the first few terms in the series give a good approximation when compared with the exact response obtained by numerical solution. It is well known that the contribution of higher order terms in the series is small compared with the first terms and, in general, the n th response component vanishes when $n \rightarrow \infty$. The powerful aspect of the Volterra series approach lies in this property. Indeed, the analysis of nonlinear systems using a truncated series gives a good approximation for a specific range of input excitation, where the contribution of nonlinearities is not too large.

When dealing with Volterra series representation, the question of validity is often ignored. Not only should the series exist, but it should also converge. Both of these requirements have been intensely studied in [17] where it is demonstrated that the Volterra series will always exist and converge for systems containing polynomial nonlinearities. At this point, once the Volterra kernels are known, the response of the nonlinear system can fully be identified [8]. The fundamental problem associated with the Volterra series is the determination of these kernels. This should be done analytically, if the equations of motion are known or numerically if time series are given for an experimental input/output test. We can briefly quote some of the most used techniques for determining the kernels.

For the category of input/output processes, Reienthel [18] proposes a technique based on the expansion of the kernels into a sum of basis functions, which generally take the form of a finite sum of parameterised exponentials as used in [11]. The parameters of basis functions are obtained with an adapted linear minimisation scheme using input/output data. Tawfiq [13] takes a different way and proposes to use the impulse response property of the time Volterra series to extract kernels in time domain. This technique is called the method of the programmed shocks. In Bendat's works [15], a spectral analysis method is presented, which consists in extracting the kernels in frequency domain using a Gaussian white noise.

When the equations of motion are known, there is a technique called harmonic probing method, which permits the kernels in frequency domain to be extracted. The harmonic probing method was introduced in [19] specifically for systems with continuous-time equations of motion. An extension to discrete-time models is found in [16]. This method was used and well described by Cafferty and Tomlinson [20], in order to characterise the nonlinear frequency

behaviour of automotive dampers. In [12], the technique was employed for extracting the Volterra kernels in order to identify the nonlinear aeroelastic time response of 2-D lifting surfaces.

The Volterra series representation also exists for MIMO systems as published in [21]. In the same way, for the extraction of Volterra kernels, the method discussed above can be extended to systems featuring multi-degrees of freedom as demonstrated in [22]. A more detailed discussion about the Volterra series and the harmonic probing method can be found in [10]. In the present work, the harmonic probing method will be presented and used in the next sections.

3. Harmonic probing method

The harmonic probing method is essentially based on the determination of the system response (in terms of Volterra series), when subjected to a single frequency harmonic excitation $x(t) = X e^{i\omega t}$. Replacing this harmonic excitation into Equations (3) and (4) gives:

$$y(t) = X H_1(\omega) e^{i\omega t} + X^2 H_2(\omega, \omega) e^{i2\omega t} + X^3 H_3(\omega, \omega, \omega) e^{i3\omega t} + \dots + X^n H_n(\omega, \dots, \omega) e^{in\omega t} + \dots \quad (8)$$

The series contains an infinite number of terms. If each term is examined, it can be shown that the response is composed of higher harmonics, which are the multiples of the fundamental frequency ω . Each term represents a harmonic that would be expected in the output spectrum if a Fourier transform were applied to the response data. At this point, it is important to remark that the coefficient of the fundamental frequency component of the response $y(t)$ corresponds to $X H_1(\omega)$. For the second harmonic component, the coefficient must correspond to $X^2 H_2(\omega, \omega)$ and so on for the higher harmonic terms. Thus, if ω was stepped over a range of frequencies and HFRF computed at each frequency through a spectral analysis, information only about the values of the HFRF on the diagonal line in the frequency space can be obtained. The important point here is that the first kernel or FRF $H_1(\omega)$ is completely determined because it contains only one dimension in the frequencies space.

In order to obtain further information about HFRF in the remainder frequency space, a multi-frequency excitation has to be used. The number of frequencies required to characterise completely the n th order HFRF must be equal to n . Then, to fully characterise the second order FRF $H_2(\omega_1, \omega_2)$, the input must be made up of two different frequencies to produce the full multi-dimensional HFRF surface. This input can be expressed as:

$$x(t) = X_1 e^{i\omega_1 t} + X_2 e^{i\omega_2 t}$$

Therefore,

$$y(t) = X_1 H_1(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + X_2 H_1(\omega_2) e^{i\omega_2 t} + X_1^2 H_2(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} + X_2^2 H_2(\omega_2, \omega_2) e^{i2\omega_2 t} + X_1 X_2 H_2(\omega_2, \omega_1) e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} + X_1 X_2 H_2(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_2 + \omega_1)t} + \dots \text{h.o.t} \quad (9)$$

Similarly, to fully express the n th order HFRF, it is necessary to use n different frequencies in the harmonic input, i.e. $x(t) = \sum_{k=1}^n X_k e^{i\omega_k t}$.

To extract the n th kernel from the nonlinear equations of motion, the following steps are to be adopted:

- Apply a multi-frequency harmonic input as follows:

$$x(t) = X_1 e^{i\omega_1 t} + \dots + X_n e^{i\omega_n t} \quad (10)$$

- Express the system response in terms of the Volterra series

$$\begin{aligned}
 y(t) = & X_1 H_1(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + \dots + X_n H_1(\omega_n) e^{i\omega_n t} + X_1^2 H_2(\omega_1, \omega_1) e^{i2\omega_1 t} \\
 & + \dots + X_n^2 H_2(\omega_n, \omega_n) e^{i2\omega_n t} + \dots + X_1 \dots X_n H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{i(\omega_2 + \dots + \omega_n)t} \\
 & + \dots \text{h.o.t}
 \end{aligned} \tag{11}$$

- Substitute $y(t)$ and its derivatives $y^{(k)}(t)$ into equations of motion and, by equating the terms containing $X_1 \dots X_n e^{i(\omega_2 + \dots + \omega_n)t}$, the n th order HFRF can be obtained.

The above algorithm yields a direct way to extract the Volterra kernels in frequency domain in their exact analytical form. As a result, the coefficients of the equations of motion appear directly in the kernel expression. For practical reasons, the multi-dimensional kernels are considered to be symmetrical as recommended in [8].

4. Nonlinear vehicle model

In the literature [2,23], several models exist to describe the global behaviour of vehicles. Here, we are interested in nonlinear models that describe only the lateral behaviour as presented in [3] where a nonlinear two track model is proposed. Figure 1a shows the variables and the vehicle architecture parameters.

In order to simplify the model, one can suppose that each wheel in the same axle supports the same vertical load and presents the same side slip angles. Consequently, no differences are made between the left and right track. With pure lateral dynamics, the repartition of vertical loads between the front and the rear axle remain unchanged. However, load transfer occurs between wheels on the same axle when the vehicle is subjected to a side acceleration. The

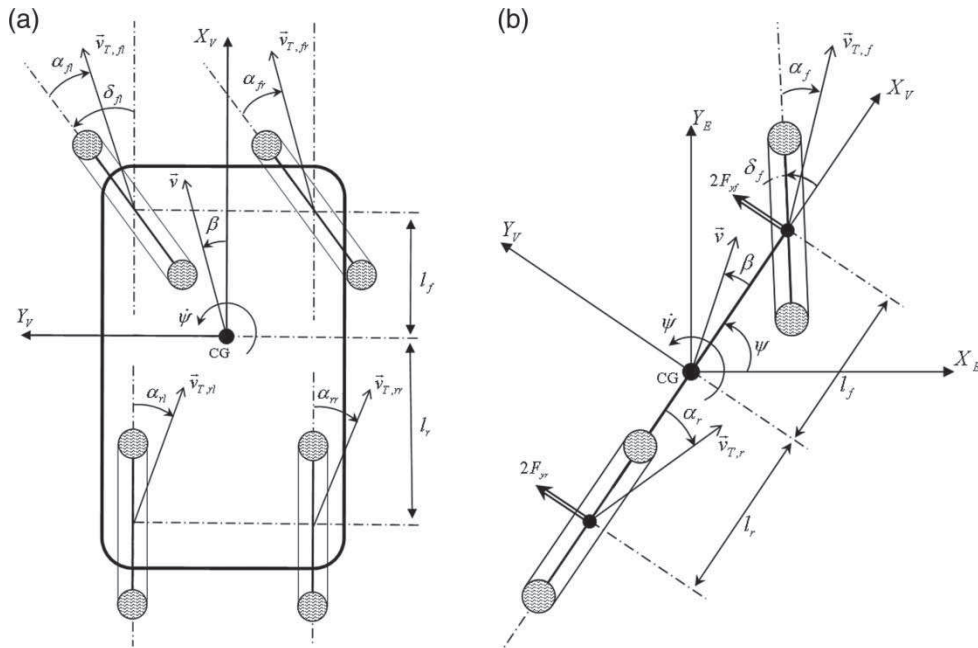


Figure 1. (a) The two track vehicle scheme. (b) The equivalent single track vehicle scheme.

considered single track model is based on the same assumptions as in [1,21] where load transfer is ignored. Of course, this model will not represent the real behaviour of a car in a curve, but the main purpose is here to calculate an analytical answer with a polynomial approximation of tyre force with this simplified model, which considers only the nonlinearity due to the side slip. Then, this analytical answer will be compared with the one obtained with the single track model and the complete Pacejka tyre force expression.

The simplified equivalent scheme is shown in Figure 1b and the corresponding equations of the nonlinear single track model can be expressed as:

$$m a_y = 2 F_{yf}(\alpha_f) + 2 F_{yr}(\alpha_r) \quad (12)$$

$$I_z \ddot{\psi} = 2 l_f F_{yf}(\alpha_f) - 2 l_r F_{yr}(\alpha_r) \quad (13)$$

with

$$a_y = v(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \quad (14)$$

$$\alpha_f = \beta + \frac{l_f}{v} \dot{\psi} - \delta_f \quad (15)$$

$$\alpha_r = \beta - \frac{l_r}{v} \dot{\psi} \quad (16)$$

The lateral forces are due to tyre deformations and they are directly linked to tyre side slip angles through the Pacejka formula [1]. Thus, the lateral forces can be expressed as:

$$F_{yi}(\alpha_i) = -D_i \sin[C_i \arctan(B_i \cdot \varphi_i(\alpha_i))] \quad (17)$$

where

$$\varphi(\alpha_i) = (1 - E_i) \alpha_i - \frac{E_i}{B_i} \arctan(B_i \alpha_i) \quad (18)$$

The coefficients B_i, C_i, D_i, E_i are called the macro-coefficients, which can be related to several physical parameters as the vertical load F_{zi} , friction coefficient, . . . , and so on. The full set of equations and details on the calculation of macro-coefficients can be found in [2,3]. Here, it is clear that the lateral force is a nonlinear function of the tyre side slip angle. The use of the Pacejka formula into equations of motion given by Equations (12)–(16) makes the resulting model very complicated to be analysed. The extraction of an analytical formulation of the vehicle response becomes extremely fastidious and no one can ensure the existence of such a solution. Obtaining a Volterra series representation from this type of model is not obvious and may not converge as shown in [17].

To overcome this problem, we propose to use a polynomial approximation of the Pacejka formula obtained through a Taylor series development up to order three. Thus, one can obtain the following approximation:

$$F_{yi}(\alpha_i) \approx -K_i \alpha_i - Q_i \alpha_i^3 \quad (19)$$

where

$$\begin{cases} K_i = -B_i C_i D_i \\ Q_i = \frac{1}{6} \tau_i (B_i^3 C_i D_i (2E_i + 2 + C_i^2)) \end{cases} \quad (20)$$

The parameter τ_i is introduced and optimised to obtain the minimum mean square error when comparing the polynomial force expression to the full formula for a given side slip angle range. A comparison between the Pacejka formula and the polynomial approximation

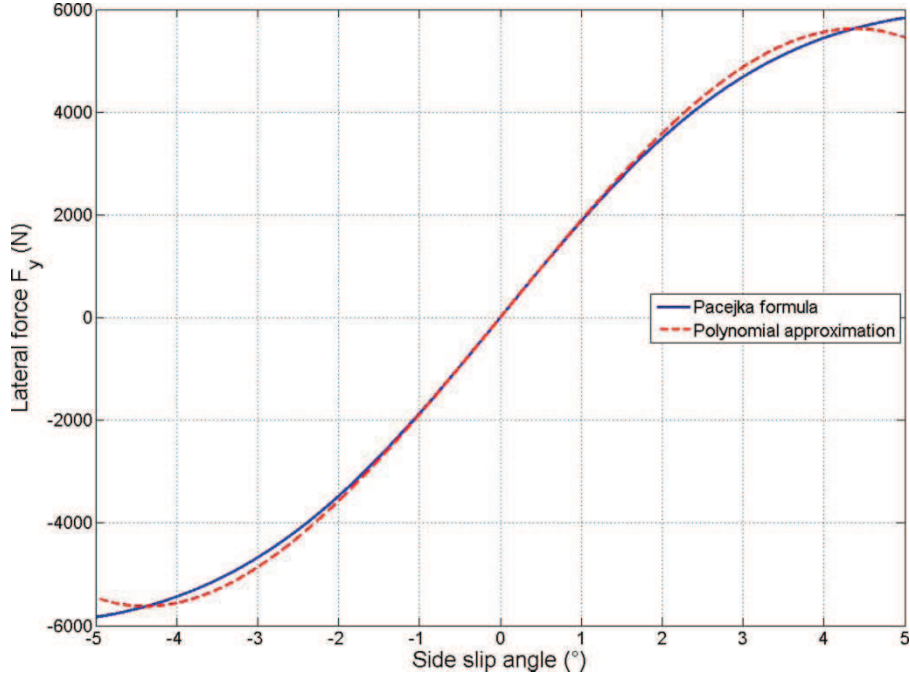


Figure 2. Comparison between the polynomial approximation (---) and the Pacejka formula (—).

is provided in Figure 2 for a vertical load $F_z = 6 \text{ kN}$. One can observe that the polynomial approximation has a good agreement up to a value of $\sim 4^\circ$ of the side slip angle.

Taking $k_i = 2K_i$, $q_i = 2Q_i$ and replacing into Equations (12) and (13), one may finally obtain the polynomial nonlinear single track model:

$$\begin{cases} m v (\dot{\beta} + \dot{\psi}) = -k_f \alpha_f - q_f \alpha_f^3 - k_r \alpha_r - q_r \alpha_r^3 \\ I_z \ddot{\psi} = -l_f k_f \alpha_f - l_f q_f \alpha_f^3 + l_r k_r \alpha_r + l_r q_r \alpha_r^3 \end{cases} \quad (21)$$

where

$$\begin{cases} \alpha_f = \beta + \frac{l_f}{v} \dot{\psi} - \delta_f \\ \alpha_r = \beta - \frac{l_r}{v} \dot{\psi} \end{cases} \quad (22)$$

Here, the outputs of the model are the yaw rate $\dot{\psi}$ and the body side slip angle β . The input is the steering wheel angle δ_h (also called hand wheel angle), which is related to the wheel turn angle by $\delta_h = \delta_f \cdot d_r$, where d_r is a constant reduction ratio (in the following $d_r = 17$).

Generally, the linear single track model (based on the linear approximation of Pacejka formula, i.e. $F_{yi}(\alpha_i) \approx -K_i \alpha_i$) is widely used to study the vehicle behaviour. This is due to the easy handling of the linear methods like the transfer functions, which allow to characterise completely the vehicle responses to any arbitrary input. However, according to [3], this linear model is only valid for lateral accelerations below $0.4 g$ ($g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$).

With the nonlinear model suggested above, the validity range may be extended. This type of nonlinear single track model has already been used in the simulation, but it has not yet been analytically studied. Generally, when dealing with the nonlinear equations of motion, the system cannot be described by a simple transfer function and the numerical resolution is often preferred by the majority of the authors [2,3]. In the present work, we will extend the

principle of transfer functions via the Volterra series method in order to extract an analytical representation of the nonlinear vehicle responses and to study the influence of the nonlinear parameters q_i on the vehicle responses.

5. Application

In order to extract the Volterra kernels in frequency domain from the nonlinear single track model given by Equations (21) and (22), one can apply the harmonic probing method, here we will use a truncated series up to the third order. First, let us consider a single harmonic excitation in the form:

$$\delta_f = X_1 e^{i\omega_1 t} \quad (23)$$

From Equation (8) the vehicle responses can be written as;

$$\dot{\psi}(t) = X_1 H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + \text{h.o.t} \quad (24)$$

$$\beta(t) = X_1 H_1^{\beta}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} + \text{h.o.t} \quad (25)$$

Substituting the expressions for $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, β , and $\dot{\beta}$ into Equation (21) and equating coefficients of $X_1 e^{i\omega_1 t}$ gives

$$\begin{bmatrix} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) \\ H_1^{\beta}(\omega_1) \end{bmatrix} = \phi(\omega_1)^{-1} \begin{bmatrix} k_f \\ l_f k_f \end{bmatrix} \quad (26)$$

where

$$\phi(\omega_1) = \begin{bmatrix} mv - \left(\frac{k_r l_r - k_f l_f}{v} \right) & i\omega_1 mv + (k_f + k_r) \\ i\omega_1 I_z + \left(\frac{l_f^2 k_f + l_r^2 k_r}{v} \right) & (l_f k_f - l_r k_r) \end{bmatrix}$$

The first order FRFs (first kernels) $H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1)$ and $H_1^{\beta}(\omega_1)$ are unaffected by the nonlinear parameters q_i and are simply determined by the linear part of the system. These kernels are identical to the linear FRFs of the linear single track model [2,3]. Figures 3 and 4 show the first order FRFs $H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1)$ and $H_1^{\beta}(\omega_1)$ for three different vehicle speeds $v = 90$, $v = 110$, and $v = 130 \text{ km h}^{-1}$ with a frequency range between 0 and 5 Hz. The asymptotes for low frequencies are given by:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1^{\dot{\psi}} \\ \tilde{H}_1^{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) \\ \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} H_1^{\beta}(\omega_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v k_f k_r l}{m v^2 (l_r k_r - l_f k_f) + k_f k_r l^2} \\ \frac{-m v^2 l_f k_f + k_f k_r l_r l}{m v^2 (l_r k_r - l_f k_f) + k_f k_r l^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

According to Abelian theorems [24], these values correspond to the steady state response for a unit step input of the linear part of the system.

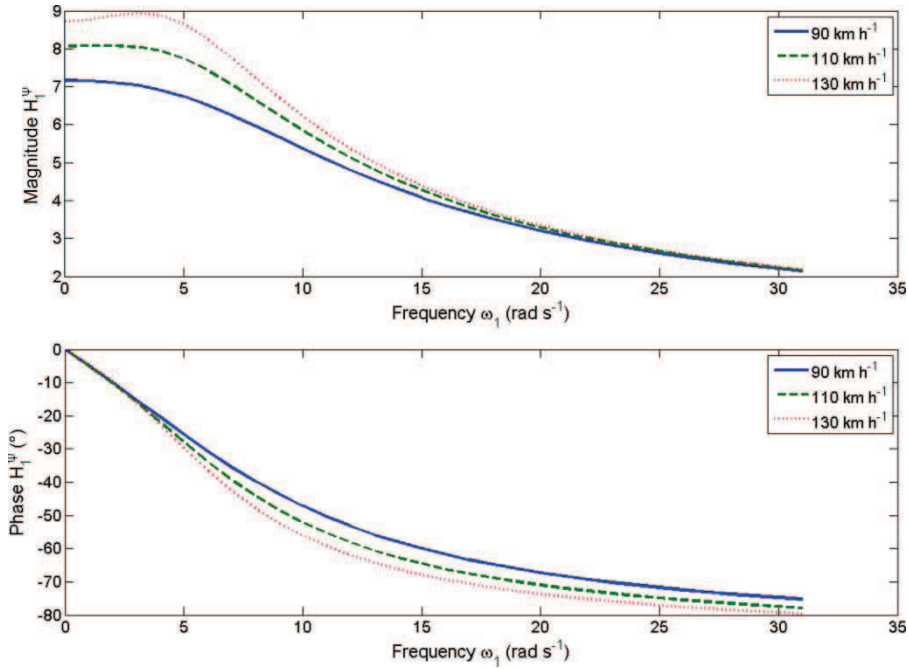


Figure 3. First order kernel $H_1^{\psi}(\omega_1)$ of the yaw rate for three different speeds.

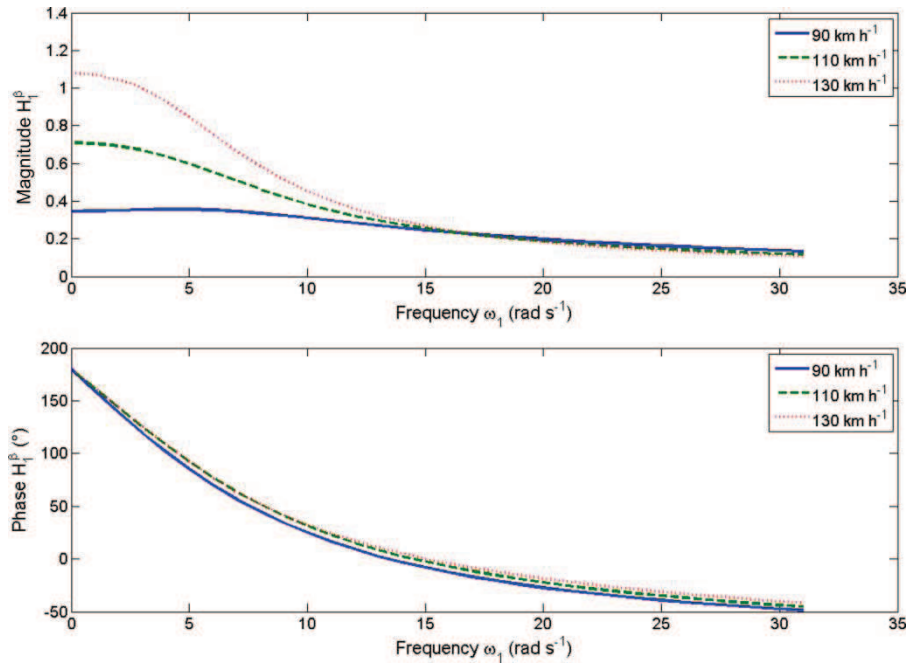


Figure 4. First order kernel $H_1^{\beta}(\omega_1)$ of the side slip angle for three different speeds.

To derive expressions for the second order FRFs (second Volterra kernels) we consider an input with two harmonics:

$$\delta_f(t) = X_1 e^{i\omega_1 t} + X_2 e^{i\omega_2 t} \quad (28)$$

According to the harmonic probing algorithm, one obtains:

$$\begin{bmatrix} H_2^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_2) \\ H_2^{\beta}(\omega_1, \omega_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

The existence of the HFRFs depends on the type of nonlinearity within a system. The nonlinear single track model defined by Equation (21) contains only a cubic term; such a model will produce components only for odd-ordered FRFs. Therefore, all even-ordered FRFs will be null.

Following the same steps, applying the excitation:

$$\delta_f(t) = X_1 e^{i\omega_1 t} + X_2 e^{i\omega_2 t} + X_3 e^{i\omega_3 t} \quad (30)$$

Equating the terms in the form $X_1 X_2 X_3 e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t}$, the expressions for the third order Volterra kernels in the frequency domain are obtained:

$$\begin{bmatrix} H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{bmatrix} = \phi(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^{-1} \begin{bmatrix} -\xi_1 - \xi_2 \\ -l_f \xi_1 + l_r \xi_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

where $\phi(\omega)$ is the same matrix as the one used in (26), which is calculated for the sum of frequencies $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$. ξ_1, ξ_2 are multi-dimensional functions given by:

$$\begin{aligned} \xi_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= q_f \left(H_1^{\beta}(\omega_1) + \frac{l_f}{v} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) - 1 \right) \left(H_1^{\beta}(\omega_2) + \frac{l_f}{v} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_2) - 1 \right) \\ &\quad \times \left(H_1^{\beta}(\omega_3) + \frac{l_f}{v} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_3) - 1 \right) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= q_r \left(H_1^{\beta}(\omega_1) - \frac{l_r}{v} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) \right) \left(H_1^{\beta}(\omega_2) - \frac{l_r}{v} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_2) \right) \\ &\quad \times \left(H_1^{\beta}(\omega_3) - \frac{l_r}{v} H_1^{\dot{\psi}}(\omega_3) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

The nonlinear parameters q_i multiply the whole expressions of the third order Volterra kernels. Thus, if q_i is absent in the nonlinear equations of motion, the third order kernels will vanish and the system become fully linear. Another property of the Volterra series is that all higher order Volterra kernels can be expressed in terms of the first order kernels $H_1(\omega)$.

To represent the third FRF fully requires three independent frequency axes and four dimensions, if the magnitude or phase is to be illustrated. Clearly, such a plot is difficult to visualise. To overcome this, the third FRF is easily represented in three-dimensional space in the plane $(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$, where $\omega_3 = \omega_1$. Figures 5 and 6 shows the principal quadrant of $H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ and $H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ for two different vehicle speeds, $v = 100 \text{ km h}^{-1}$ and $v = 120 \text{ km h}^{-1}$, for the system given by Equations (21)–(22) with a frequency range between 0 and 4 Hz. During sustained driving situation, tyres generate an important side force F_{yi} at wheel ground contact points in order to maintain a given trajectory. The sum of these forces is proportional to the side acceleration value which generally occurs for higher speed values. From Figures 5 and 6, one notices that for higher speeds the gain of the kernels increases, thus the

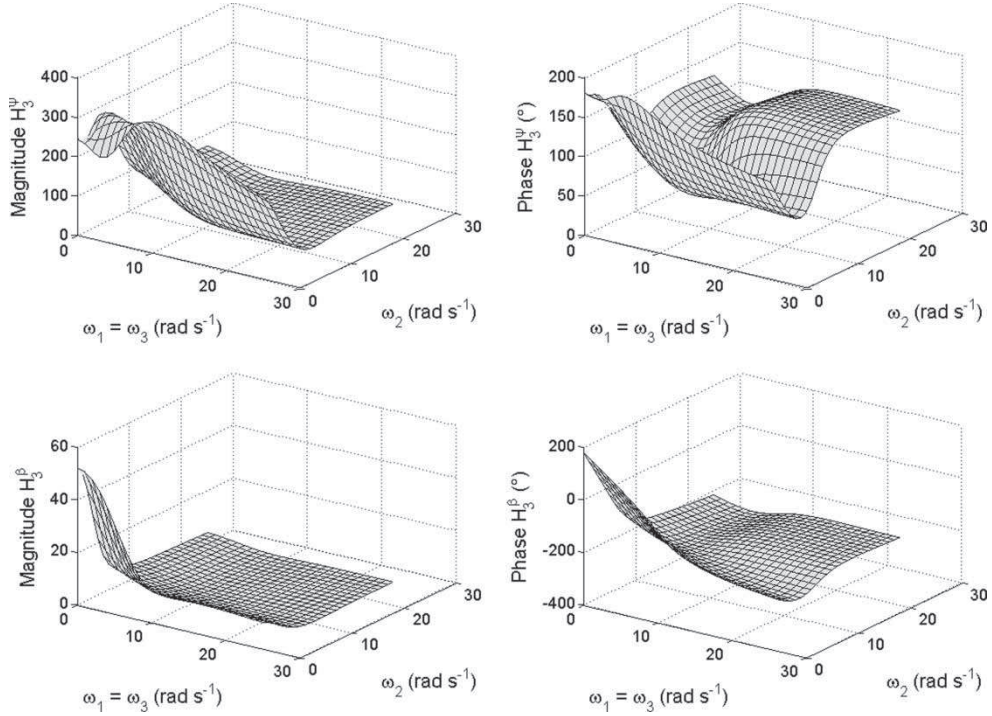


Figure 5. 3-D plots of the third order kernel $H_3^\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ and $H_3^\beta(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ for $v = 100\text{km h}^{-1}$.

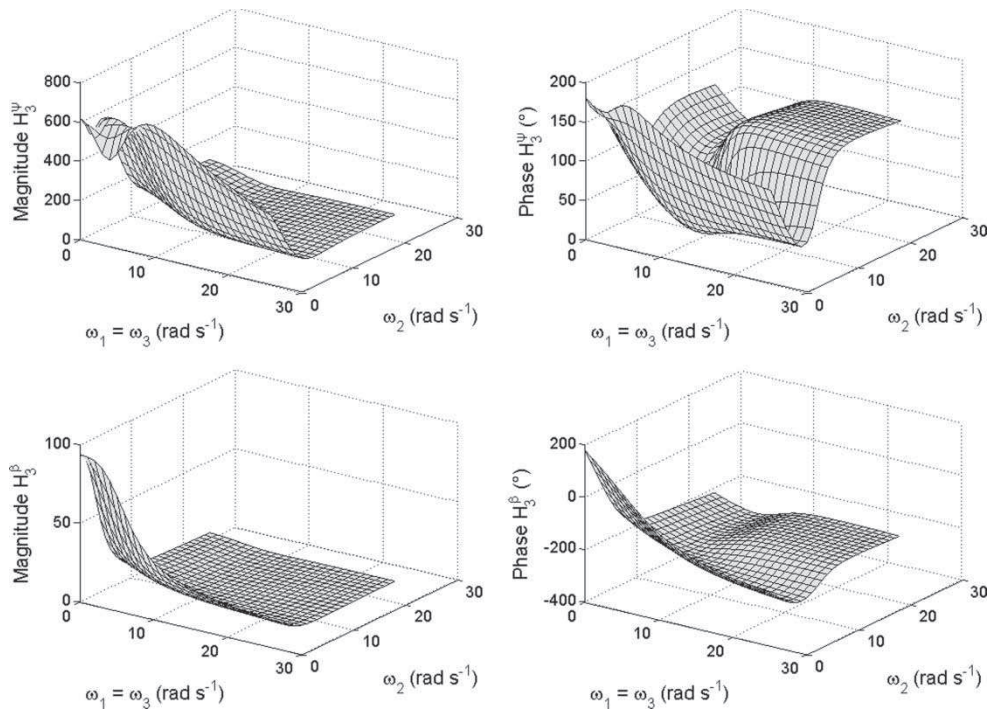


Figure 6. 3-D plots of the third order kernel $H_3^\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ and $H_3^\beta(\omega_1, \omega_2, \omega_1)$ for $v = 120\text{km h}^{-1}$.

nonlinearities affect significantly the responses of the vehicle. This is foreseeable because the tyre behaviour tends towards saturation. At low frequencies, the magnitudes asymptote to:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{H}_3^{\dot{\psi}} \\ \tilde{H}_3^{\beta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lim_{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \rightarrow 0} H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \lim_{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \rightarrow 0} H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{bmatrix} \\ &= \phi(0)^{-1} \begin{bmatrix} -q_f \left(\tilde{H}_1^{\beta} + \frac{l_f}{v} \tilde{H}_1^{\dot{\psi}} - 1 \right)^3 - q_r \left(\tilde{H}_1^{\beta} - \frac{l_r}{v} \tilde{H}_1^{\dot{\psi}} \right)^3 \\ -l_f q_f \left(\tilde{H}_1^{\beta} + \frac{l_f}{v} \tilde{H}_1^{\dot{\psi}} - 1 \right)^3 - l_r q_r \left(\tilde{H}_1^{\beta} - \frac{l_r}{v} \tilde{H}_1^{\dot{\psi}} \right)^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

As previously mentioned, according to Abelian theorems [24] these values correspond to the steady state responses for a unit step input of the trilinear part of the system (the steady state response due to the third order kernels). These results show how the response characteristics of the nonlinear model can be identified from the HFRFs. The parameters used for simulations are given in Table 1.

5.1. Response to a sinusoidal input

When exciting the nonlinear single track model given by Equation (21) with a sinusoidal input, i.e. $\delta_f = X_f \cos(\omega_1 t)$, it is well known that the response will contain components at frequencies other than the forcing frequency. The energy distribution of these frequencies depends on the level of excitation X_f . This can be expected using Volterra series, which provides a direct means of computing the response of any nonlinear system to a sinusoidal excitation. This is done by considering the sinusoidal input in the following form:

$$\delta_f(t) = X_f \cos(\omega_1 t) = \frac{X_f}{2} (e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}) \quad (35)$$

Table 1. Value of the parameters used for simulation.

Parameter	Value
m	2122.8 kg
I_z	3721.3 kg m ²
l_f	1.1 m
l_r	1.7958 m
B_f	0.1578
C_f	1.998
D_f	6324.3
E_f	-0.0932
τ_f	0.6934
B_r	0.1742
C_r	1.998
D_r	4208.8
E_r	0.3304
τ_r	0.5861
k_f	2285.24×10^2 N rad ⁻¹
k_r	1678.18×10^2 N rad ⁻¹
q_f	-1253.68×10^4 N rad ⁻³
q_r	-1085.90×10^4 N rad ⁻³

Substituting Equation (35) into Equations (3) and (4) for the yaw rate and side slip angle and taking into account the kernels previously calculated, one obtains:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= X_f \left| H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) \right| \cos(\omega_1 t + \angle H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1)) \\ &+ \frac{3X_f^3}{4} \left| H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) \right| \cos(\omega_1 t + \angle H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)) \\ &+ \frac{X_f^3}{4} \left| H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_1, \omega_1) \right| \cos(3\omega_1 t + \angle H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_1, \omega_1)) + O(X^5) \quad (36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(t) &= X_f \left| H_1^{\beta}(\omega_1) \right| \cos(\omega_1 t + \angle H_1^{\beta}(\omega_1)) \\ &+ \frac{3X_f^3}{4} \left| H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) \right| \cos(\omega_1 t + \angle H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)) \\ &+ \frac{X_f^3}{4} \left| H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_1, \omega_1) \right| \cos(3\omega_1 t + \angle H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_1, \omega_1)) + O(X^5) \quad (37)\end{aligned}$$

From these last results, one can observe that the response contains a harmonic component at $3\omega_1$ due to the presence of the third kernel. If one takes more than the first three kernels in the series, components at $5\omega_1$, $7\omega_1$ and at all odd multiples of the forcing frequency will be expected in the response. However, there is no component at all even multiples of ω_1 ; this is due to non-existence of quadratic nonlinearities in the model, which leads to the non-existence of all even-ordered kernels. The first harmonic at ω_1 contains an additional component due to the third order kernel $H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)$. If the series was extended to infinity, the first harmonic would also contain terms from HFRFs $H_5(\omega_1, \omega_1, \omega_1, -\omega_1, -\omega_1)$, $H_7(\omega_1, \omega_1, \omega_1, \omega_1, -\omega_1, -\omega_1, -\omega_1)$, and all odd-ordered terms where the sum of arguments equal ω_1 , which are known as degenerated terms. The first order FRFs obtained from Equations (36) and (37) are referred to as composite FRFs and are given by:

$$\Lambda_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) = H_1^{\dot{\psi}}(\omega_1) + \frac{3X_f^2}{4} H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) + O(X_f^4) \quad (38)$$

$$\Lambda_1^{\beta}(\omega_1) = H_1^{\beta}(\omega_1) + \frac{3X_f^2}{4} H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_1, -\omega_1) + O(X_f^4) \quad (39)$$

The contribution of the third kernel $H_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_1)$ in these composite FRFs is governed by the level of excitation X_f , which tends to introduce distortion, especially around the resonance frequency as shown in Figure 7. Here, three different amplitudes are used: $X_{h1} = 10^\circ$ (near linear FRF), $X_{h2} = 30^\circ$, and $X_{h3} = 40^\circ$. These values are given in terms of steering wheel angles and are equivalent to $X_{f1} = 0.58^\circ$, $X_{f2} = 1.75^\circ$, and $X_{f3} = 2.35^\circ$, if expressed in terms of wheel turn angles. The presence of the additional component tends to distort the linear FRFs, which are fully described by $H_1^{\dot{\psi}}$ and H_1^{β} . This distortion occurs at low frequencies by varying the asymptotes when $\omega_1 \rightarrow 0$ and increasing the resonance frequency. The form of distortion of the composite FRFs is also dependent on the type of nonlinearity within the system. If the nonlinear single track model contains only negative cubic terms q_i , then the distortion would skew the fundamental resonance to higher frequency. If q_i were positives, the distortion would skew the fundamental resonance to lower frequency.

The effect of the nonlinearity becomes more significant as the input amplitude is increased. However, the range of excitation amplitudes is limited due to the truncation accuracy of the Volterra series. One should take more than three kernels in the series, if higher excitation levels are to be studied.

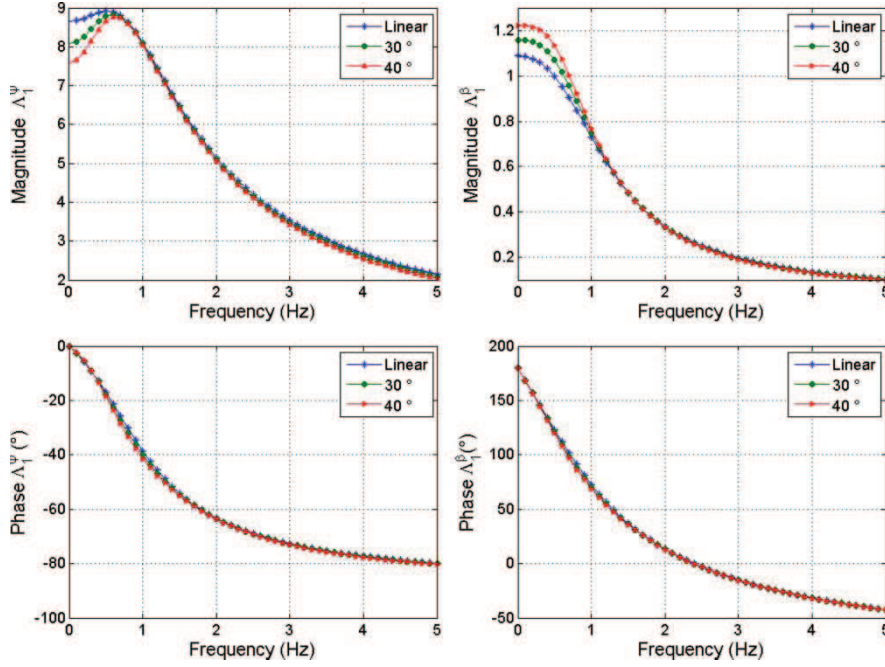


Figure 7. Effect of the distortion on the FRFs.

From Equations (36) and (37) one can also extract the third order composite FRFs, which describe the third harmonic component in the vehicle responses:

$$\Lambda_3^{\dot{\psi}}(3\omega_1) = \frac{X_f^2}{4} H_3^{\dot{\psi}}(\omega_1, \omega_1, \omega_1) + O(X_f^4) \quad (40)$$

$$\Lambda_3^{\beta}(3\omega_1) = \frac{X_f^2}{4} H_3^{\beta}(\omega_1, \omega_1, \omega_1) + O(X_f^4) \quad (41)$$

Storer [14] suggests using the functions Λ_1 and Λ_3 defined by Equations (38)–(41) as transfer functions strictly when the input is a pure sinewave as in Equation (35). This result has been used in [12] to extract the system responses to any time-dependent input (periodic or otherwise), which can be represented, for a defined degree of accuracy, by a sum of sinusoidal waves:

$$\delta_f(t) = \sum_n a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \sum_n \frac{a_n}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) + \frac{b_n}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}) \quad (42)$$

In this context, the composite functions can be applied as transfer functions for each frequency component in the sum.

5.2. Steady state analysis

Steady state analysis extracts the understeer angle curve (understeer angle δ_s , function of lateral acceleration a_y). The understeer angle is defined as the difference between the side slip angles at front and rear axles and is often used to characterise the vehicle stability, as was shown in much more detail in [1]. In the following, (\sim) denotes the steady state response to a step input, namely $\delta_f(t) = X_f$. The understeer angle curve can be obtained via the asymptotic

characteristics of Volterra kernels. This is done using the analytical expressions given by Equations (27) and (34); one can write:

$$\tilde{\delta}_s = \tilde{\alpha}_f - \tilde{\alpha}_r = \frac{l}{v} \tilde{\psi} - X_f \quad (43)$$

$$\tilde{a}_y = v \tilde{\psi} \quad (44)$$

where

$$\tilde{\psi} = X_f \tilde{H}_1^{\dot{\psi}} + X_f^3 \tilde{H}_3^{\dot{\psi}} \quad (45)$$

If X_f is stepped over a range of input levels, for each level step the understeer angle $\tilde{\delta}_s$ and lateral acceleration \tilde{a}_y are calculated using Equations (43)–(45). When the input level is incremented and the procedure repeated, one can obtain a full representation of the understeer angle curve as shown in Figure 8. In this figure, the solid line represents the exact understeer angle curve obtained from the numerical integration of the nonlinear single track model using the full Pacejka formula. The dashed line represents the analytical approximation obtained from Volterra representation and the dotted line represents the linear curve of the linear model.

When comparing the linear curve with the exact curve, one obtains with a precision of 5% a validity range up to 4.6 m s^{-2} (0.47 g). With the Volterra series approximation, the validity domain is extended up to 7.8 m s^{-2} (0.79 g), which represents a significant improvement. With this last application, it is shown how the nonlinear vehicle response characteristics can be extracted by handling analytical expressions. These analytical expressions are obtained from the truncated Volterra series and can also related to physical parameters as shown in the above results.

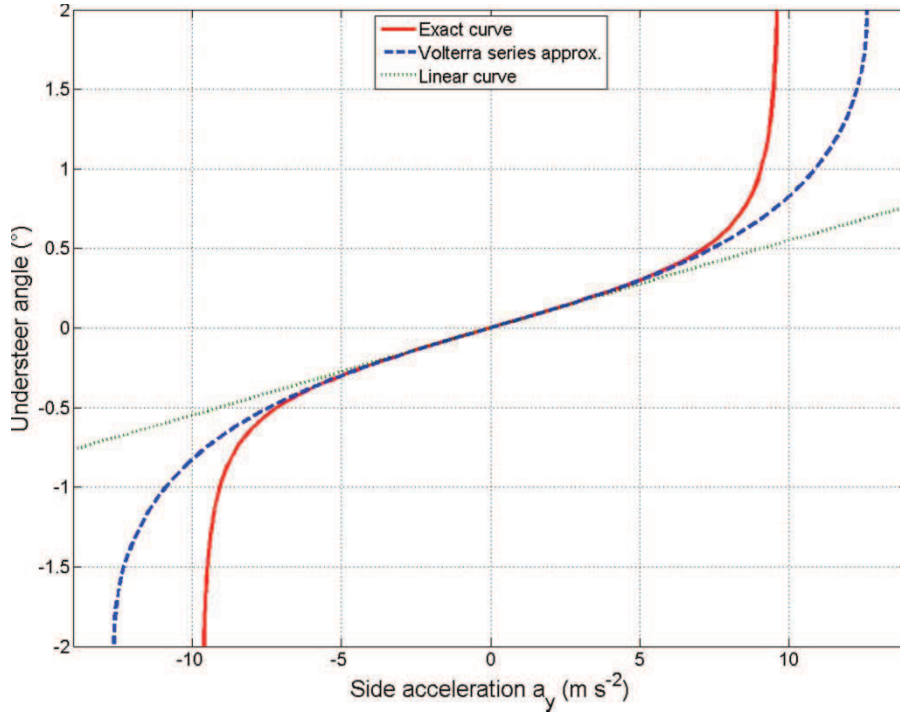


Figure 8. Understeer angle curve.

6. Conclusion

A nonlinear single track model based on the polynomial approximation of the Pacejka formula was used. This model permits the characterisation of the vehicle behaviour in the nonlinear region where tyre saturation occurs. The Volterra series theory of nonlinear systems was presented and applied in order to establish an analytical representation of the vehicle responses. This approach opens an efficient and powerful way to extract the analytical characteristics of the response directly through the Volterra kernels. The versatility of the Volterra series approach allows its applicability in the time and frequency domains. The effect of the nonlinear parameters in the nonlinear single track model was studied both in time and frequency domain. Using the Volterra kernels, a frequency analysis was provided to show how the nonlinearity acts on the FRF distortion and on the location of resonance frequency. The Volterra kernels were also used to extract the steady state characteristic curve (time domain analysis). All these vehicle response characteristics are fully expressed using the physical parameters of the vehicle. The results concerning the nonlinear vehicle behaviour presented in this paper have never been obtained yet in the literature; this can be regarded as a significant improvement and shows how functional series are able to extend the analysis in nonlinear domain. A future work will extract the vehicle responses to any arbitrary input using the kernels obtained in this paper. In the same context, a comparison will be established to study the accuracy of Equation (42), if used to extract an approximate response as demonstrated in [12].

Nomenclature

a_y	lateral acceleration (m s^{-2})
F_{yi}	lateral force at axle i (N)
m	body mass (kg)
I_z	the moment of inertia about vertical axis (kg m^2)
α_{fi}, α_{ri}	front and rear tyre side slip angles (rad)
$\dot{\psi}$	yaw rate (rad s^{-1})
α_f, α_r	front and rear equivalent tyre side slip angles (rad)
β, δ_s	body side slip angle and the understeer angle (rad)
δ_f, δ_h	wheel turn angle and the steering wheel angle (rad)
l_f, l_r, l	front, rear and total wheel base (m)
$v, v_{T,ij}$	vehicle horizontal velocity and tyre contact centre velocity (m s^{-1})
$H_1^\beta, H_1^{\dot{\psi}}$	first order Volterra kernels of the side slip angle and the yaw rate
$H_3^\beta, H_3^{\dot{\psi}}$	third order Volterra kernels of the side slip angle and the yaw rate
$\Lambda_1^\beta, \Lambda_1^{\dot{\psi}}$	first order composite frequency response functions

References

- [1] H.B. Pacejka, *Tyre and Vehicle Dynamics*, 2nd ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2006.
- [2] J.P. Brossard, *Dynamique du véhicule: modélisation des systèmes complexes*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
- [3] U. Kiencke and L. Nielsen, *Automotive Control Systems for Engine, Driveline and Vehicle*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [4] M. Mitschke, *Dynamik Der Kraftfahrzeuge*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [5] S. Perrez, *Modèle cible identifié de véhicule. Internal Report SDR04_0267, PSA-Peugeot Citroën Automobiles*, 2004.
- [6] C. Schmitt, *Contribution à l'identification des paramètres physiques des systèmes complexes*, PhD thesis, University of Haute-Alsace, 1999.

- [7] W.J. Rugh, *Nonlinear System Theory: The Volterra and Wiener Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [8] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*, Wiley-Interscience, New York, 1980.
- [9] V. Volterra, *Theory of Functionals and Integral Equations*, Dover, New York, 1959.
- [10] K. Worden and G.R. Tomlinson, *Nonlinearity in Structural Dynamics: Detection, Identification and Modelling*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2001.
- [11] L.R. Keefe and P.H. Reisenthel, *Time-domain characterization of acoustic liner response from experimental data. Part 1: linear response*, AIAA-2005-3060, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
- [12] P. Marzocca, L. Librescu, and W.A. Silva, *Volterra series approach for nonlinear aeroelastic response of 2-D lifting surfaces*, AIAA-2001-1459, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001.
- [13] I. Tawfiq and T. Vinh, *Nonlinear behaviour of structures using the Volterra series signal processing and testing methods*, *Nonlinear Dyn.* 37 (2004), pp. 129–149.
- [14] D.M. Storer, *Dynamic analysis of nonlinear structures using higher order frequency response functions*. PhD thesis, Department of Engineering, University of Manchester, 1991.
- [15] J.S. Bendat, *Nonlinear Systems Techniques and Applications*, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [16] V.Z. Marmarelis, *Nonlinear Dynamic Modeling of Physiological Systems*, IEEE Press Series in Biomedical Engineering, Wiley-Interscience, New York, 2004.
- [17] G. Palm and T. Poggio, *The Volterra representation and the Wiener expansion: validity and pitfalls*, *SIAM J. Appl. Math.* 33(2) (1977) pp. 195–216.
- [18] P.H. Reisenthel, *A nonlinear Volterra kernel identification system for aeroelastic applications*, NEAR TR 547, Nielsen Engineering & Research, NASA, Langley Research Center, 1999.
- [19] E. Bedrosian and S.O. Rice, *The output properties of Volterra systems driven by harmonic and Gaussian inputs*, *Proc. IEEE* 59 (1971), pp. 1688–1707.
- [20] S. Cafferty and G.R. Tomlinson, *Characterization of automotive dampers using higher order frequency response functions*, *SIAM J. Appl. Math.* 211(3) (1997), pp. 181–203.
- [21] S.J. Gifford and G.R. Tomlinson, *Understanding multi degree of freedom nonlinear system via higher order frequency response functions*, 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, NV, 30 January–2 February, 1989.
- [22] K. Worden, G. Manson, and G.R. Tomlinson, *A harmonic probing algorithm for the multi-input Volterra series*, *J. Sound Vib.* 201 (1), pp. 67–84.
- [23] G. Genta, *Motor Vehicle Dynamics*, World Scientific Publishing, London, 1997.
- [24] Y.A. Brychkov, H.-J. Glaeske, A.P. Prudnikov, and V.K. Tuan, *Multidimensional Integral Transformations*, Gordon & Breach Science Publishers, Amsterdam, 1992.

Annexe D

Advanced theoretical methods for non linear single track model analysis

Accepté dans « Congrès international de la dynamique du véhicule de la SIA ». Première publication en Septembre 2009.

Advanced theoretical methods for non linear single track model analysis

B. Badji¹, E. Fenaux¹, M. EL Bagdouri², A. Miraoui²

1: Road dynamic synthesis department, PSA Peugeot Citroën automobiles
Technical pole of Belchamp, 25420, Voujeaucourt, France.

2: University of technology of Belfort-Montbéliard, 90010 Belfort, France.

Abstract: In this paper, two non linear theoretical methods namely the Volterra series and the harmonic balance method are used in the aim to analytically quantify the impact of tire nonlinearities on vehicle dynamic behaviour. Understanding how non linear phenomena acts on behaviour of a given system can be done through the analysis of the frequency response function (FRF) in frequency domain which encode the most significant information about the system, or through the time decomposition of response to strategic inputs as sinusoidal excitation, step input...etc. Here in, an original application on non linear single track model is shown. The analysis is focused on the extraction of the first order frequency response function expression using harmonic balance method and the extraction of nonlinearity contribution in time response using higher order Volterra kernels. The resulting equations and illustrations in both cases are presented

Keywords: non linear single track model; Volterra series; multidimensional Laplace transform; harmonic balance; describing function.

1. Introduction

Automotive industry invests an important effort to make new devices and to develop systems intended to improve security and driving comfort. Among the main objectives to equip vehicle with such systems is to ensure the passengers safety and to remain competitive.

Conceiving such systems require a good knowledge of the vehicle behaviour especially when submitted to strong excitations. A mathematical model can be obtained with a rigorous modelling of individual components to reproduce as exactly as possible the real behaviour of the vehicle in order to establish an analytic link between the response characteristics and the physical parameters. Among existing models, the most used are the linearized ones which are obtained by using linearization of each individual vehicle component (especially for the tyre dynamic behaviour) such as the linear single -track model or the two-track model for which the response can be fully obtained through a simple transfer function analysis [8, 19, 22]. However, using these linearized

models leads to limitations of the operating range. In fact, for higher input solicitations, the vehicle is generally subjected to a strong lateral acceleration (higher than $4ms^{-2}$) which makes tyres have a clearly nonlinear behaviour [20]. The linearized models are then not valid to predict the system responses and to analyze its behaviour.

To overcome this problem, the main approach is to consider the full nonlinear tyre dynamic behaviour into the model, namely the Pacejka formula. This procedure leads to a complex nonlinear model and makes the analytical extraction of the vehicle response impossible, so the numerical solution is often preferred. Herein, a solution to circumvent the Pacejka formula consists to use a Taylor series approximation of this formula. The resulting model may be able to extend the validity range for higher lateral acceleration values (consequently, for higher tire side slip angles).

The following work is mainly focused on the analysis of non-linearity caused by strong tyre side slip. The main idea is to use advanced non linear methods in order to obtain static and dynamic response characteristics by using the physical parameters of the vehicle. Three parts have to be explored: The first order frequency response function extraction, the vehicle time response decomposition and the modal parameters dependency of the excitation level.

Two methods have to be used. The first one is the Volterra series theory which studies the impact of the nonlinearity on the system responses in time domain [11]. The Volterra series is a generalization of the transfer function in the non linear domain, where the system responses are described by an infinite sum of different nonlinear contribution levels by using higher order functional series. The advantage of this method is to make possible for different excitation levels the analysis of the nonlinearity contribution to the full response. The second method is the harmonic balance which determines the frequency response functions (FRF) and their dependency on the excitation level [23]. Also, this method allows investigating the dependency relation between excitation level and modal parameters.

2. Simplified nonlinear vehicle lateral model

In the literature [19, 21] one can look for a great number of mathematical models which permit to describe the general vehicle behaviour. The most used is the single track model which describes only the lateral behaviour as presented in [20] [23]. Figure 1 shows the variables and the simplified vehicle architecture parameters.

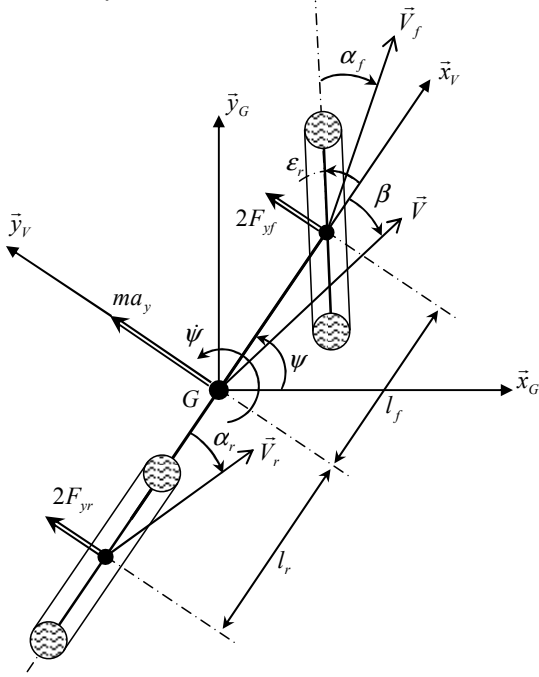


Figure 1: Simplified vehicle scheme in lateral dynamic behaviour

This simplified scheme is derived from the assumption that each wheel in the same axle supports the same vertical load and presents the same side slip angles. Consequently, no differences are made between the left and right track. With pure lateral dynamics, the repartition of vertical loads between the front and the rear axle remain unchanged. However, load transfer occurs between wheels on the same axle when the vehicle is subjected to side acceleration. The considered single track model is based on the same assumptions as in [8, 19] where load transfer is ignored. Of course this model will not represent exactly the real behaviour of a car in a curve. Here, the main purpose is to extract an analytical response with a polynomial approximation of tyre force due to the side slip. Then, this analytical response will be compared to the one obtained when the complete Pacejka tyre force expression are used.

The corresponding equations of the nonlinear single track model can be expressed using the general form of the fundamental dynamic laws as:

$$m a_y = 2 F_{yf}(\alpha_f) + 2 F_{yr}(\alpha_r) \quad [1]$$

$$I_z \ddot{\psi} = 2 l_f F_{yf}(\alpha_f) - 2 l_r F_{yr}(\alpha_r) \quad [2]$$

With,

$$a_y = v(\dot{\beta} + \dot{\psi}) \quad [3]$$

$$\alpha_f = \beta + \frac{l_f}{v} \dot{\psi} - \delta_f \quad [4]$$

$$\alpha_r = \beta - \frac{l_r}{v} \dot{\psi} \quad [5]$$

The lateral forces are due to tires deformations. From the Pacejka formula [8] one can express lateral forces to tire side slip angles as follow:

$$F_{yi}(\alpha_i) = -D_i \sin[C_i \arctan(B_i \cdot \varphi_i(\alpha_i))] \quad [6]$$

Where,

$$\varphi(\alpha_i) = (1 - E_i) \alpha_i - \frac{E_i}{B_i} \arctan(B_i \alpha_i) \quad [7]$$

Coefficients B_i , C_i , D_i , E_i were called the macro-coefficients, which can be related to several physical parameters as the vertical load F_{zi} , friction coefficient, ..., etc. The full set of equations and details on macro-coefficients can be found in [8, 19]. It's clear that the lateral force is a nonlinear function of the tire side slip angle. Using the Pacejka formula into equations of motion 12 to 16 makes extraction of an analytical formulation of the vehicle response extremely fastidious and no one can ensure the existence of such a solution. Applying a non linear analysis method as Volterra series representation for this type of models is not obvious as shown in [9].

To overcome this problem without loss of non linear information, we propose to use a polynomial approximation of the Pacejka formula obtained through a Taylor series development up to order three. Thus, the following approximation is given as follow:

$$F_{yi}(\alpha_i) \approx -K_i \alpha_i - Q_i \alpha_i^3 \quad [8]$$

Where,

$$\begin{cases} K_i = -B_i C_i D_i \\ Q_i = \frac{1}{6} \tau_i (B_i^3 C_i D_i (2E_i + 2 + C_i^2)) \end{cases} \quad [9]$$

The parameter τ_i is introduced and optimized to obtain the minimum mean square error when comparing the polynomial force expression to the full formula for a given range of side slip angles. This method ensures a good agreement up to a value of $\sim 4^\circ$ of the tire side slip angle.

Taking, $k_i = 2K_i$, $q_i = 2Q_i$ and replacing into equations 1 and 2, one may finally obtain the polynomial nonlinear single track model:

$$\begin{cases} m\dot{v}(\dot{\beta} + \dot{\psi}) = -k_f\alpha_f - q_f\alpha_f^3 - k_r\alpha_r - q_r\alpha_r^3 \\ I_z\ddot{\psi} = -l_f k_f \alpha_f - l_f q_f \alpha_f^3 + l_r k_r \alpha_r + l_r q_r \alpha_r^3 \end{cases} \quad [10]$$

Where,

$$\begin{cases} \alpha_f = \beta + \frac{l_f}{v}\dot{\psi} - \delta_f \\ \alpha_r = \beta - \frac{l_r}{v}\dot{\psi} \end{cases} \quad [11]$$

System outputs can be the yaw rate and the body side slip angle ($\dot{\psi}$, β) or the front and rear tire side slip angles (α_f , α_r). The system input is the steering wheel angle δ_h (also called hand wheel angle), which is related to the wheel turn angle by $\delta_h = \delta_f \cdot d_r$, where d_r is the reduction ratio (in the following $d_r = 17$).

This type of nonlinear single track models has already been used in the simulation but it has not yet been analytically studied. Generally, when dealing with nonlinear equations of motion, the system cannot be described by a simple transfer function and the numerical resolution is often preferred [19, 20]. In the following the principle of transfer functions will be extended jointly via Volterra series and the harmonic balance methods in order to study the influence of the nonlinear parameters q_i on the vehicle responses.

3. Theory and application of Volterra series

As previously explained, the first method to be explored is the Volterra series representation. It will be briefly presented in the following.

3.1 Volterra series theory

The response of a system $y(t)$ can be fully described for an external input $x(t)$ through equations of motion. For linear time invariant systems, this is well accomplished by handling the

convolution integral in time domain or the well known transfer function in frequency domain. Thus, the system response is given by:

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad [12]$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad [13]$$

Where $h(t)$ is the impulse response of the considered system and $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $H(\omega)$ are the Fourier transform of $x(t)$, $y(t)$ and $h(t)$, respectively. All information about the linear system is perfectly encoded in the transfer function $H(\omega)$ or the impulse response $h(t)$. For non linear systems the concept of convolution integrals was extended by Volterra [15], where the system response $y(t)$ for an arbitrary input $x(t)$ is a sum of functional power series known as the Volterra series and takes the following form:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad [14]$$

Where, $y_n(t)$ is expressed by multidimensional convolution integrals of increasing order of the general form:

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t-\tau_1, \dots, t-\tau_n) \prod_{i=1}^n x(\tau_i) d\tau_i \quad [15]$$

The Volterra series is essentially a polynomial extension of Taylor series to time-invariant systems. The response of the nonlinear system is an infinite sum of contribution of each individual term in the series. The first term at ($n=1$) corresponds to the linear convolution. Consequently, it represents the contribution from the linear part of the system. Similarly, the second, third and n th terms in the series represent the contribution from the bilinear, trilinear and n th order part of the system, respectively [2]. The functions $h_1(t)$, $h_2(t_1, t_2)$, ..., $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ are known as "the Volterra kernels".

In practice, for systems described by nonlinear ODE, one can handle only a finite number of terms in the series, which leads to the problem of truncation accuracy. Many authors [7, 13] point out that the first few terms in the series give a good approximation when compared with the exact response obtained by numerical solution if the nonlinearities are not too strong. Thus, the first terms of the series may be sufficient to represent the systems outputs. It is well known that the contribution of higher order terms in

the series is small compared to the first terms and in general, the n th response component vanishes when $n \rightarrow \infty$. The powerful aspect of the Volterra series approach lies in this property. In the following only a truncated series at the first 3 terms will be used. The expansion of the equation 14 for our model up to the first three terms yields:

$$\begin{aligned} \delta(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^\delta(t-\tau_1) \varepsilon_r(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2^\delta(t-\tau_1, t-\tau_2) \varepsilon_r(\tau_1) \varepsilon_r(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad [16] \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3^\delta(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \prod_{i=1}^3 \varepsilon_r(\tau_i) d\tau_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^\psi(t-\tau_1) \varepsilon_r(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2^\psi(t-\tau_1, t-\tau_2) \varepsilon_r(\tau_1) \varepsilon_r(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad [17] \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_3^\psi(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \prod_{i=1}^3 \varepsilon_r(\tau_i) d\tau_i \end{aligned}$$

Here, $h_1^i(t)$ is the linear impulse response and $h_2^i(t_1, t_2)$, $h_3^i(t_1, t_2, t_3)$ are extensions of the impulse response concept of linear system to multiple dimensions. The Volterra kernels can be also defined in the frequency domain through the multidimensional Fourier transform, namely:

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad [18]$$

Where the functions H_n are also known as higher order frequency response functions (HFRF). The inverse path leads to the time domain representation through the multidimensional inverse Fourier transform,

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\sigma_n - i\infty}^{\sigma_n + i\infty} \dots \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) e^{i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\omega_1 \dots d\omega_n \quad [19]$$

When dealing with Volterra series representation, the existence validity is often ignored. Not only should the series exist, but it should also converge. Both of these requirements have been intensely studied in [9] where it is demonstrated that the Volterra series will always exist and converge for systems containing polynomial nonlinearities.

Once the Volterra kernels are known the response of the nonlinear system can fully be identified [12].

Now, the fundamental problem associated with the Volterra series is the determination of these kernels. When equations of motion are known, kernels calculation can be made in frequency domain by the Harmonic probing method. This method was introduced in [1] specifically for systems with continuous-time equations of motion. An extension to discrete-time models is found in [6]. MIMO representations of the Volterra series also exists as published in [4]. In the same way, for the extraction of Volterra kernels, the method discussed above can be extended to systems featuring multi degrees of freedom as demonstrated in [17]. A more detailed discussion about the Volterra series and the harmonic probing method can be found in [16].

3.2 Volterra kernels extraction

As an application in vehicle dynamic domain, in [3] a characterization of the nonlinear frequency behaviour of automotive dampers is shown. In [23], the harmonic probing method was presented and the Volterra kernels of our model given by equations 10 and 11 have been already obtained, all calculation steps are clearly shown. In the following the obtained results will be directly used and they are given by:

- First order Volterra kernel

$$\begin{bmatrix} H_1^\psi(\omega_1) \\ H_1^\beta(\omega_1) \end{bmatrix} = \phi(\omega_1)^{-1} \begin{bmatrix} k_f \\ l_f k_f \end{bmatrix} \quad [20]$$

Where,

$$\phi(\omega_1) = \begin{bmatrix} mv - \left(\frac{k_r l_r - k_f l_f}{v} \right) & i\omega_1 mv + (k_f + k_r) \\ i\omega_1 l_z + \left(\frac{l_f^2 k_f + l_r^2 k_r}{v} \right) & (l_f k_f - l_r k_r) \end{bmatrix}$$

- Second order Volterra kernel

$$\begin{bmatrix} H_2^\psi(\omega_1, \omega_2) \\ H_2^\beta(\omega_1, \omega_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [21]$$

- Third order Volterra kernel

$$\begin{bmatrix} H_3^\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ H_3^\beta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{bmatrix} = \phi(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^{-1} \begin{bmatrix} -\xi_1 - \xi_2 \\ -l_f \xi_1 + l_r \xi_2 \end{bmatrix} \quad [22]$$

Where $\phi(\omega)$ is the same matrix as the one used in equation 20 which is calculated for the sum of frequencies $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$. The multidimensional functions ξ_1 , ξ_2 are given by:

$$\xi_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = q_f \prod_{n=1}^3 \left(H_n^\beta(\omega_n) + \frac{l_f}{v} H_n^\psi(\omega_n) - 1 \right) \quad [23]$$

$$\xi_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = q_r \prod_{n=1}^3 \left(H_n^\beta(\omega_n) - \frac{l_r}{v} H_n^\psi(\omega_n) \right) \quad [24]$$

The nonlinear parameters q_i multiply the whole expressions of the third order Volterra kernels. Thus, if q_i is absent in the nonlinear equations of motion, the third order kernels will vanish and the system become fully linear. Another property of the Volterra series is that all higher order Volterra kernels can be expressed in terms of the first order kernels $H_1(\omega)$. Herein, the transition between Laplace domain and the frequency domain is done by the variable change $s_n = i\omega_n$.

3.3 Time response calculation

When system outputs are given by a Volterra series representation in the form 14 and 15, the n^{th} component can be written in the multidimensional form as follow:

$$y_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad [25]$$

Where,

$$y_n(t) = y_n(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_1 = \dots = t_n = t} = y_n(t, \dots, t) \quad [26]$$

Volterra kernels are extracted in the frequency domain, so it is preferable that the response is first calculated in the frequency domain and then make a transition to time-domain. The n^{th} multidimensional Laplace transform of the response is given by:

$$Y_n(s_1, \dots, s_n) = H_n(s_1, \dots, s_n) \times X(s_1) \times \dots \times X(s_n) \quad [27]$$

With,

$$Y_n(s_1, \dots, s_n) = L[y(t_1, \dots, t_n)] \\ = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty y(t_1, \dots, t_n) e^{-s_1 t_1} \dots e^{-s_n t_n} dt_1 \dots dt_n \quad [28]$$

Having $H_n(s_1, \dots, s_n)$ and for any arbitrary input, the n^{th} time response component can be obtained using the association of variables method presented in [12]. The association of variables method (AVM) consists first on establishing a path in one-dimensional Laplace domain. So the AVM permit to make link between $Y_n(s_1, \dots, s_n)$ and $Y_n(s)$ For $n > 1$ as follow:

$$Y_n(s) = A[Y_n(s_1, \dots, s_n)] \quad [29] \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_n(s - s_1 - s_2 - \dots - s_n, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) ds_1 \dots ds_{n-1}$$

Where, $A[\cdot]$ indicates the AVM operator. The n^{th} time response is obtained by a simple inverse Laplace transform and the resulting total response of the non linear system is the sum of all components

$$y(t) = y_1(t) + \dots + y_n(t) \quad [30]$$

Theorems on the calculation of the associations of variables can be found in [10] [14] and [11]. Also, one can found in [5] a table of usual associations of variables of multivariate functions may be encountered in practice. Operational computing techniques are presented in [18]. Among most important properties of AVM we can quote:

- o If the multidimensional function $F(s_1, \dots, s_n)$ is given in the form:

$$F(s_1, \dots, s_n) = H(s_1 + \dots + s_n) G(s_1, \dots, s_n) \quad [31]$$

$$\text{then, } F(s) = H(s) \cdot A[G(s_1, \dots, s_n)] \quad [32]$$

Where, $H(s)$ is easily obtained by substituting the sum $(s_1 + s_2 + s_3)$ by s .

- o If G is a regular function in the form:

$$G(s_1, \dots, s_n) = G_1(s_1) G_2(s_2) \dots G_n(s_n) \quad [33]$$

$$\text{then, } G(s) = L[g_1(t_1) g_2(t_2) \dots g_n(t_n) \Big|_{t_1 = \dots = t_n = t}] \quad [34]$$

$$\text{With, } g_i(t_i) = L^{-1}[G_i(s_i)] \quad [35]$$

These properties are useful when dealing with Volterra kernel of non linear polynomial systems where the n^{th} response component is often in the form 31 and 33 [22].

The vehicle responses in terms of Volterra series are given by expressions 16 and 17. Using AVM yields

$$\psi(s) = \psi_1(s) + A[\psi_3(s_1, s_2, s_3)] \quad [36] \\ = H_1^\psi(s) \delta_f(s) + A[H_3^\psi(s_1, s_2, s_3) \delta_f(s_1) \delta_f(s_2) \delta_f(s_3)]$$

$$\beta(s) = \beta_1(s) + A[\beta_3(s_1, s_2, s_3)] \quad [37] \\ = H_1^\beta(s) \delta_f(s) + A[H_3^\beta(s_1, s_2, s_3) \delta_f(s_1) \delta_f(s_2) \delta_f(s_3)]$$

The first order response is the one corresponding to the linear part of the model which can be directly calculated for any arbitrary input. The second order response is null because of the non existence of the second order kernel. The difficulty lies in calculating the response due to the third kernel.

The third component of the response $\dot{\psi}_3(s_1, s_2, s_3)$ and $\beta_3(s_1, s_2, s_3)$ can be written in the simplified form:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_3(s_1, s_2, s_3) \\ \dot{\psi}_3(s_1, s_2, s_3) \end{bmatrix} &= \phi(s_1 + s_2 + s_3) \\ &\times \prod_{i=1}^3 \mathcal{E}_r(s_i) \begin{bmatrix} -\xi_1(s_1, s_2, s_3) - \xi_2(s_1, s_2, s_3) \\ -l_f \xi_1(s_1, s_2, s_3) + l_r \xi_2(s_1, s_2, s_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [38]$$

Where,

$$\xi_1(s_1, s_2, s_3) = q_f \prod_{i=1}^3 \left(H_1^\beta(s_i) + \frac{l_f}{V} H_1^\psi(s_i) - 1 \right) = q_f \prod_{i=1}^3 F(s_i) \quad [39]$$

$$\xi_2(s_1, s_2, s_3) = q_r \prod_{i=1}^3 \left(H_1^\beta(s_i) - \frac{l_r}{V} H_1^\psi(s_i) \right) = q_r \prod_{i=1}^3 G(s_i) \quad [40]$$

This yield:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_3(s_1, s_2, s_3) \\ \dot{\psi}_3(s_1, s_2, s_3) \end{bmatrix} &= \phi(s_1 + s_2 + s_3) \times \\ &\begin{bmatrix} -q_f \prod_{i=1}^3 F(s_i) \delta_f(s_i) - q_r \prod_{i=1}^3 G(s_i) \delta_f(s_i) \\ -l_f q_f \prod_{i=1}^3 F(s_i) \delta_f(s_i) + l_r q_r \prod_{i=1}^3 G(s_i) \delta_f(s_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [41]$$

Using the particular form 32, one obtains:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_3(s) \\ \dot{\psi}_3(s) \end{bmatrix} &= \phi(s) \times \\ &\begin{bmatrix} -q_f A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \delta_f(s_i) \right] - q_r A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \delta_f(s_i) \right] \\ -l_f q_f A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \delta_f(s_i) \right] + l_r q_r A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \delta_f(s_i) \right] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad [42]$$

Finally, the response calculation is reduced to evaluate individual terms in the matrix:

$$A \left[\prod_{i=1}^3 F(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right] \quad \text{and} \quad A \left[\prod_{i=1}^3 G(s_i) \mathcal{E}_r(s_i) \right]$$

At this point, the second property presented below (cf. equation 33 to 35) appears to be useful when associated to the table given in [5].

The method was exemplified for a sinusoidal input with amplitude $a = 70^\circ$, frequency $f = 1 \text{ Hz}$ and vehicle speed $v = 110 \text{ km/h}$ as shown in the figure 2a and 2b which respectively represent the individual contribution of the third order kernel and the total system response. Simulation parameters are given in the table 1. Figure 3a and 3b show results for a chirp input, with amplitude $a = 50^\circ$, frequency range $f = 1:5 \text{ Hz}$ and vehicle speed $v = 110 \text{ km/h}$. Also, figure 4a and 4b show results to an impulse input $\delta_f = (90^\circ) \times \delta_c(t) / d_r$ at $v = 110 \text{ km/h}$.

All simulations are obtained using Matlab tool which was developed to include all techniques discussed below. The results obtained are very conclusive. The method provides a good response approximation even for large amplitudes. One can see that the third order kernel have a great contribution and describes the non-linearity of the system. However, truncated series accuracy may be limited when using larger excitation amplitude.

Parameter	Value
m	2122.8 kg
I_z	3721.3 kg m ²
l_f	1.1 m
l_r	1.7958 m
τ_f	0.6934
k_f	$2285.24 \times 10^2 \text{ N rad}^{-1}$
q_f	$-1253.68 \times 10^4 \text{ N rad}^{-3}$
τ_r	0.5861
k_r	$1678.18 \times 10^2 \text{ N rad}^{-1}$
q_r	$-1085.90 \times 10^4 \text{ N rad}^{-3}$
d_r	17

Table 1: Value of parameters used for simulation

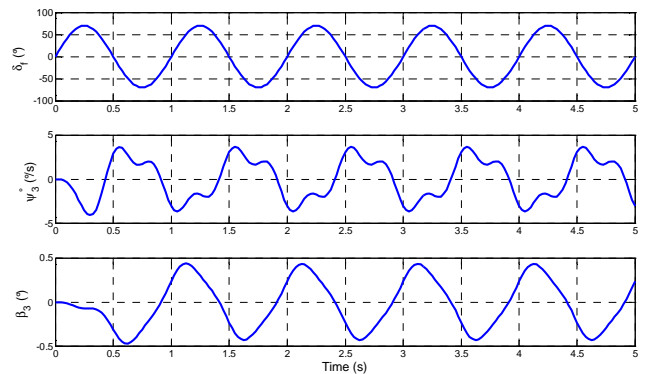


Figure 2a: Third order kernel contribution

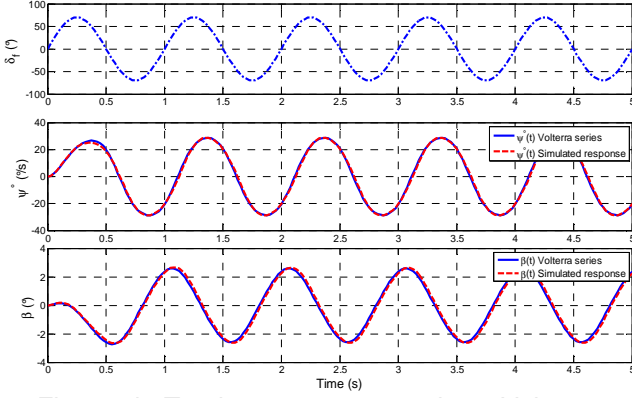


Figure 2b: Total response comparison: Volterra series vs. numerical solving

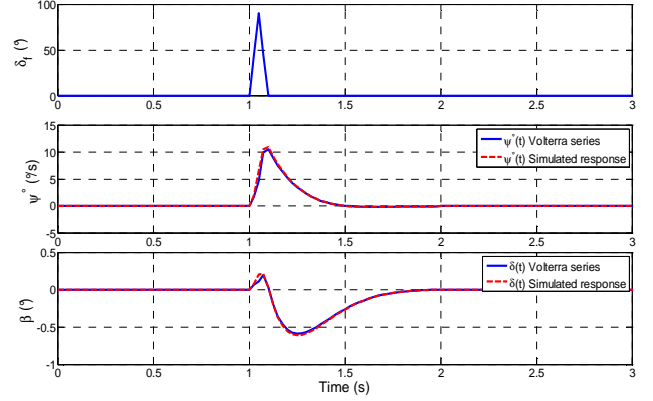


Figure 4b: Total response comparison: Volterra series vs. numerical solving

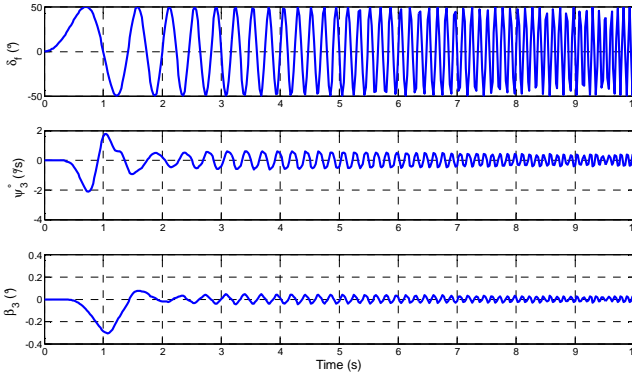


Figure 3a: Third order kernel contribution

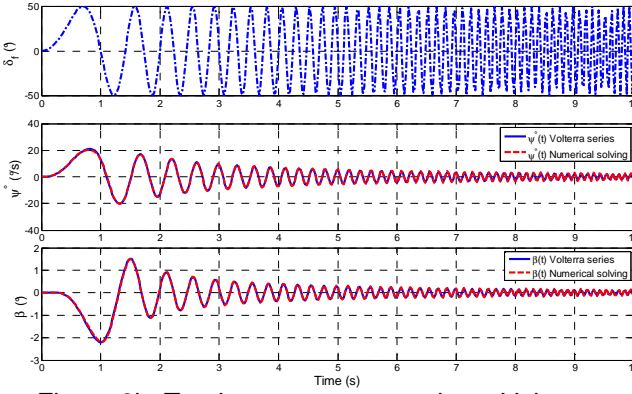


Figure 3b: Total response comparison: Volterra series vs. numerical solving

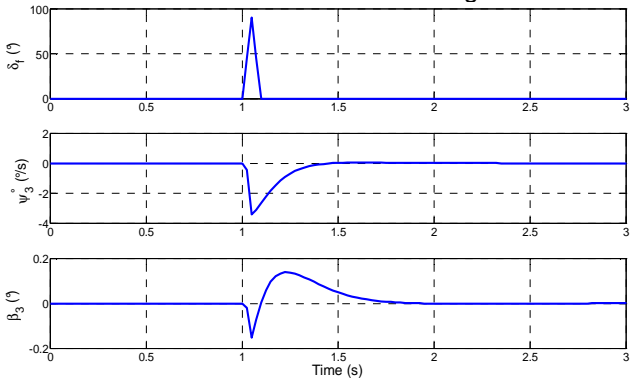


Figure 4a: Third order kernel contribution

4. Theory and application of the harmonic balance method

4.1 Harmonic balance theory

Harmonic balance method (HBM) also called describing function method is based on investigating steady state response (FRF distortion) when harmonic input is used. This method is derived from the Van del Pol theory [26] and the Krylov-Bogoliubov method [27] for solving some nonlinear mechanisms problems.

The HBM is a harmonic linearization of the non linear function within system equations [33]. Complete theory of the method can be found in [24] [25]. A generalisation to the multi-harmonic balance method is presented in [30]. Several industrial application exist, we can quote some of most recent of them in [29] [32] [31]. Herein, method guidelines will be briefly introduced. Let consider now the nonlinear function $\tilde{F}(\dot{y}, y)$ within a nonlinear system (y is the system response). When exciting the system with a sinusoidal input $x(t)$ as:

$$x(t) = X \sin(\omega t) \quad [43]$$

X and ω are respectively the excitation amplitude and pulsation ($\omega = 2\pi f$, f is the excitation frequency), the harmonic balance method assume that $y(t)$ is sufficiently close to a sinusoidal phase shifted signal with the same frequency:

$$y(t) \approx Y \sin(\omega t + \phi) \quad [44]$$

Where, Y and ϕ are respectively the output amplitude and phase.

The purpose of the HBM is to make a harmonic linear approximation which permit to write:

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = F_0 + k_{eq}y + c_{eq}\dot{y} \quad [45]$$

The right hand side of the last equality is called the describing function. k_{eq} and c_{eq} are the equivalent stiffness and damping coefficients. Substituting $y(t)$ in equation 45 yields:

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = F_0 + k_{eq}Y \sin(\beta) + c_{eq}\omega Y \cos(\beta) \quad [46]$$

Using a Fourier series decomposition and taking only the fundamental part, the equivalents coefficients can be obtained as follow [28]:

$$F_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) d\beta \quad [47]$$

$$k_{eq} = \frac{b_1}{Y} = \frac{1}{\pi Y} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \sin(\beta) d\beta \quad [48]$$

$$c_{eq} = \frac{a_1}{\omega Y} = \frac{1}{\omega Y \pi} \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\omega Y \cos(\beta), Y \sin(\beta)) \cos(\beta) d\beta \quad [49]$$

With this last approximation way, the higher order harmonics are neglected but the system output remains relatively accurate. It is important to remark that equivalent coefficients depend explicitly on output amplitude Y . Once equivalent linearization done and the non linear function substituted in the system equations, one can easily extract the FRF using a harmonic analytic input [25] :

$$x = X e^{i\omega t} \quad [50]$$

Thus, the system output is:

$$y = \tilde{Y} e^{i\omega t} \quad \text{with, } \tilde{Y} = Y e^{i\phi} \quad [51]$$

$Y = |\tilde{Y}|$ and ϕ are respectively the amplitude and the phase (\tilde{Y} is called complex gain). Thus, the FRF is given by:

$$H(\omega) = \frac{\tilde{Y}}{X} \quad [52]$$

4.2 First order FRF calculation using HBM

In the aim to apply the HBM on the single track model and for calculation conveniences, one should express the model equations differently using tire side slip angles as model outputs. This gives:

$$A \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_f \\ \dot{\alpha}_r \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \alpha_f^3 \\ \alpha_r^3 \end{bmatrix} = D \dot{\delta}_f + E \delta_f \quad [53]$$

A, B, C and D are matrices dependant on physical parameters within equations 10 and 11. The non linear function can be easily identified by:

$$\tilde{F}(\dot{y}, y) = y^3 = \begin{bmatrix} \alpha_f^3 \\ \alpha_r^3 \end{bmatrix} = \tilde{F}(\dot{\alpha}_f, \dot{\alpha}_r, \alpha_f, \alpha_r) \quad [54]$$

When the steering wheel is a sinusoidal input as:

$$\delta_f = \xi \sin(\omega t) \quad [55]$$

The HBM supposes that the vehicle responses are sufficiently close to sinusoids:

$$\alpha_f(t) = \Delta_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \Delta_1 \sin(\beta_1) \quad [56]$$

$$\alpha_r(t) = \Delta_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \Delta_2 \sin(\beta_2) \quad [57]$$

After evaluating integrals 47 to 49, the equivalent non linear function is obtained as follow:

$$\tilde{F}(\dot{\alpha}_f, \dot{\alpha}_r, \alpha_f, \alpha_r) \approx \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \Delta_1^2 \alpha_f \\ \Delta_2^2 \alpha_r \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} \Delta_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \end{bmatrix} \quad [58]$$

Substituting this last result into equation 53 give the equivalent linearized system:

$$A \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_f \\ \dot{\alpha}_r \end{bmatrix} + B' \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_r \end{bmatrix} = D \dot{\delta}_f + E \delta_f \quad [59]$$

With,

$$B' = B + \frac{3}{4} C \times \begin{bmatrix} \Delta_1^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^2 \end{bmatrix} \quad [60]$$

This lead to a close similarity with the linear single track model [23]. Considering B' as a constant matrix permit to extract the modal parameters (damping coefficient & the natural pulsation):

$$\eta(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{m(k'_f l_f^2 + k'_r l_r^2) + I_z(k'_f + k'_r)}{2I_z m v \omega_n} \quad [61]$$

$$\omega_n^2(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{m v^2(k'_r l_r - k'_f l_f) + k'_r k'_f l^2}{I_z m v^2} \quad [62]$$

Where, $k'_{\alpha_i} = k_{\alpha_i} + \frac{3}{4} \Delta_i^2 q_{\alpha_i}$

The FRF of the equivalent linearized system can be calculated if considering harmonic input as in equation 50. Then:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{mv^2}{l} + k_f + \frac{3}{4}\Delta_1^2 q_f & -\frac{mv^2}{L} + k_r + \frac{3}{4}\Delta_2^2 q_r \\ l_f k_f + \frac{3}{4}\Delta_1^2 l_f q_f & -l_r k_r - \frac{3}{4}\Delta_2^2 l_r q_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} \frac{mvl_f}{l} & \frac{mvl_f}{l} \\ \frac{I_z v}{l} & -\frac{I_z v}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Im}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Im}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{mv^2}{l} \xi \\ 0 \end{bmatrix} \\ \omega \begin{bmatrix} \frac{mvl_r}{l} & \frac{mvl_r}{l} \\ \frac{I_z v}{l} & -\frac{I_z v}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Re}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{mv^2}{l} + k_f + \frac{3}{4}\Delta_1^2 q_f & -\frac{mv^2}{l} + k_r + \frac{3}{4}\Delta_2^2 q_r \\ l_f k_f + \frac{3}{4}\Delta_1^2 l_f q_f & -l_r k_r - \frac{3}{4}\Delta_2^2 l_r q_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Im}(\tilde{\Delta}_1) \\ \text{Im}(\tilde{\Delta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \frac{mvl_r}{l} \xi \\ -\omega \frac{I_z v}{l} \xi \end{bmatrix} \end{cases} \quad [68]$$

$$\delta_f = \xi e^{i\alpha} \quad [63]$$

System outputs are written as follow:

$$\alpha_f(t) = \tilde{\Delta}_1 e^{i\alpha t} \quad \text{avec, } \tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 e^{i\phi_1} \quad [64]$$

$$\alpha_r(t) = \tilde{\Delta}_2 e^{i\alpha t} \quad \text{avec, } \tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 e^{i\phi_2} \quad [65]$$

And the FRF are given into the form:

$$H_{\omega i}(\omega) = \frac{\tilde{\Delta}_i}{\xi} \quad [66]$$

Substituting equations 63 to 65 in 59 yields:

$$[i\omega A + B] \begin{bmatrix} H_{\omega f} \\ H_{\omega r} \end{bmatrix} = i\omega D + E \quad [67]$$

Obtaining FRF requires solving the system of equations 67 for each pair (ξ, ω) . However, there is no solving method able to obtain complex solutions $\tilde{\Delta}_i$ (cf. equation. 66). In [30], a way consists on splitting $\tilde{\Delta}_i$ into real and imaginary parts leading to $2n$ equations to solve (cf. equation 68).

$$\text{Where, } \Delta_i^2 = \text{Re}(\Delta_i)^2 + \text{Im}(\Delta_i)^2$$

To solve equation 68 we opted for the iterative secant quasi-Newton method which permits to obtain solutions in the form

$$x = \{\text{Re}(\tilde{\Delta}_1), \text{Re}(\tilde{\Delta}_2), \text{Im}(\tilde{\Delta}_1), \text{Im}(\tilde{\Delta}_2)\}^T \quad [69]$$

On figures 5 to 9, FRF comparisons are made between those obtained via the HBM and those obtained by numerical solving with a frequency stepped over a range $[0.1\text{Hz}, 4\text{Hz}]$ and for three input amplitudes 10° , 50° and 70° . The vehicle speed $V = 110 \text{ km/h}$. Simulation parameters are given in the table 1.

In addition to the estimation accuracy of frequency response functions the harmonic balance method

shows that the presence of the nonlinear coefficient q_i combined with a strong exciting tends to distort the linear FRF, which are fully described by H_1^i . This distortion occurs at low frequencies by varying the asymptotes when $\omega_1 \rightarrow 0$ and increasing the resonance frequency.

The form of distortion on the FRF is also dependent on the type of nonlinearity within the system. The nonlinear single track model contain only negatives cubic terms q_i , then, the distortion would skew the fundamental resonance to higher frequency. If q_i were positives the distortion would skew the fundamental resonance to lower frequency

The effect of the nonlinearity becomes more significant as the input amplitude is increased. For lower amplitude, the frequency response functions are close to linear ones. For higher amplitude the FRF is distorted and resonance shifted. However, the range of excitation amplitudes is limited due to the HBM accuracy to higher harmonics contribution. One should use multi-harmonic balance if higher excitation levels have to be studied.

Also, modal parameters show a direct dependency to the response amplitude. (Indirectly on the input amplitude through $H_{\omega f}(\omega)$ and $H_{\omega r}(\omega)$).

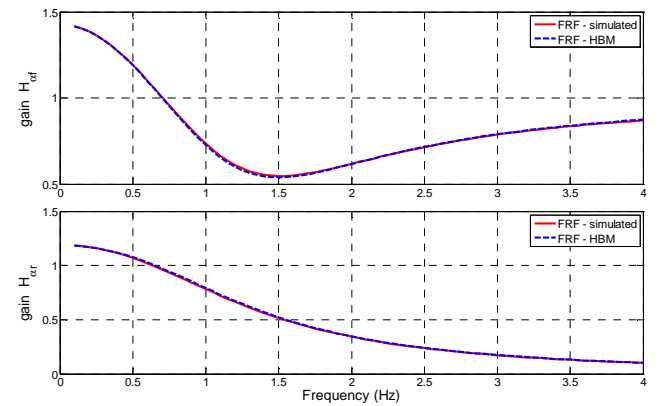


Figure 5: FRF $H_{\omega f}$ and $H_{\omega r}$ for $\xi = 10^\circ / dr$.

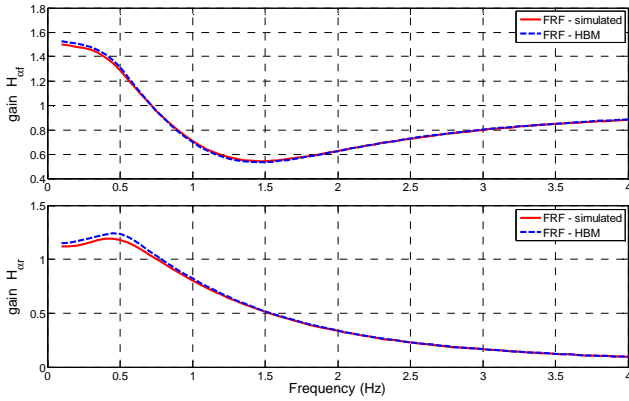


Figure 6: FRF H_{af} and H_{ar} for $\xi = 50^\circ / dr$.

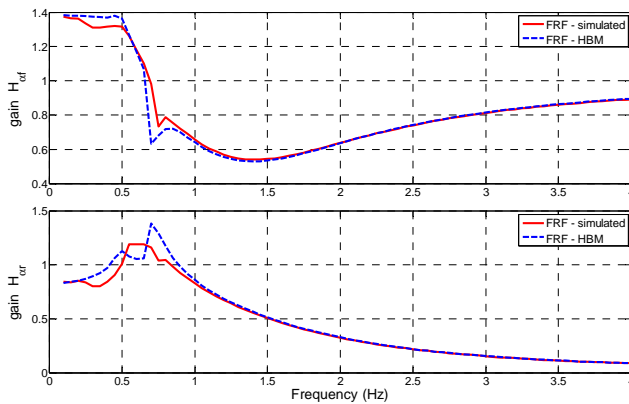


Figure 7: FRF H_{af} and H_{ar} for $\xi = 70^\circ / dr$.

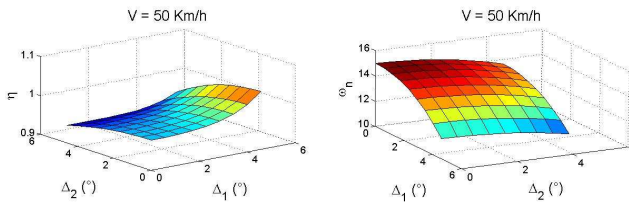


Figure 8: modal parameters for $v = 50 \text{ km} / h$.

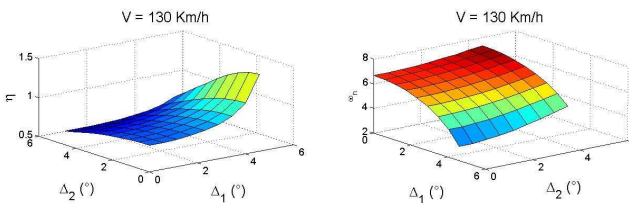


Figure 9: modal parameters for $v = 130 \text{ km} / h$.

4. Conclusion

The objective of this work is to present an analytical description of the nonlinear single track model based on a polynomial approximation of the Pacejka

formula. Two advanced theoretical methods were described. The Volterra series theory of nonlinear systems was presented and applied in order to establish an analytical representation of the vehicle responses. This approach opens an efficient and powerful way to split the response in several nonlinear contributions directly through the Volterra kernels. The commutability of the Volterra series approach allows its applicability in the time and frequency domains. The effects of the nonlinear parameters in the nonlinear single track outputs were studied in time domain for different inputs.

Also, to observe how the nonlinearity acts on the frequency response function (by investigating on the existence of distortions), the harmonic balance method was applied and significant results were obtained. About the nonlinear vehicle behaviour, the present work can be regarded as an introduction to nonlinear analysis in vehicle dynamic domain. However, there's still a lot to do if we consider other forms of nonlinearity within a vehicle. Thereby, the different approaches explored can be extended and improved for more complicated models.

7. References

- [1] Bedrosian, E. and Rice, S.O.: "The output properties of Volterra systems driven by harmonic and Gaussian inputs". Proc. IEEE, 59, 1688–1707. 1971.
- [2] Bendat, J.S.: "Nonlinear systems techniques and applications", Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [3] Cafferty, S. and Tomlinson, G.R.: "Characterization of automotive dampers using higher order frequency response functions". SIAM J. Appl. Math. 1997.
- [4] Gifford, S.J. and Tomlinson, G.R.: "Understanding multi degree of freedom nonlinear system via higher order frequency response functions", 7th inter. modal analysis conference, Las Vegas, NV, January 30–February 2, 1989
- [5] Brychkov, Y.A., Glaeske, H.-J., Prudnikov, A.P. and Tuan, V.K.: "Multidimensional integral transformations", Gordon & Breach science publishers, 1992.
- [6] Marmarelis, V.Z.: "Nonlinear dynamic modeling of physiological systems", IEEE press series in Biomedical Engineering, Wiley-Interscience, 2004.
- [7] Marzocca, P., Librescu, L. and Silva, W.A.: "Volterra series approach for nonlinear aeroelastic response of 2-D lifting surfaces", American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001.
- [8] Pacejka, H.B.: "Tyre and vehicle dynamics", Butterworth-Heinemann (2nd edition), 2006.
- [9] Palm, G. and Poggio, T.: "The Volterra representation and the Wiener expansion: Validity and Pitfalls", SIAM J. Appl. Math, 1977.
- [10] Debnath J., Debnath N.C.: "Theorems on association of variables in multidimensional laplace

transforms", International journal math. & math. Science, Vol. 12, No. 2, pp. 363-376, 1989.

[11] Rugh, W.J.: "Nonlinear system theory: The Volterra and Wiener approach", The Johns Hopkins University press, 1981.

[12] Schetzen, M.: "The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems", N.Y., Wiley-Interscience, 1980.

[13] Storer, D.M.: "Dynamic analysis of nonlinear structures using higher order frequency response functions", PHD thesis, Department of engineering, University of Manchester, 1991.

[14] Debnath J., Debnath N.C.: "Associated transforms for solution of nonlinear equations", International journal math. & math. Science, Vol. 14, No. 1, pp. 177-190, 1991.

[15] Volterra, V.: "Theory of functionals and integral equations", New York, Dover, 1959.

[16] Worden, K., Tomlinson, G.R.: "Nonlinearity in structural dynamics: detection, identification and modelling", Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2001.

[17] Worden, K., Manson, G. and Tomlinson, GR.: "A harmonic probing algorithm for the multi-Input Volterra series", Journal of Sound and Vibration, Vol.201, No. 1, 67-84, 1997.

[18] Ditkine V., Proudnikov A.: "Calcul opérationnel", Edition Mir, Moscou, (Traduction française en 1979), 1975.

[19] Brossard, J.P.: "Dynamique du véhicule: modélisation des systèmes complexes", Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.

[20] Kiencke, U. and Nielsen, L.: "Automotive control systems: for engine, driveline and vehicle", Springer Verlag, 2000.

[21] Genta, G.: "Motor vehicle dynamics", World scientific publishing, 1997.

[22] Tawfiq I., Vinh T.: "Contribution to the extension of modal analysis to nonlinear structure using Volterra functional series", Mechanical systems and signal processing 17, pp. 379-407, 2003.

[23] Badji B., Fenaux F., EL Bagdouri M., Miraoui A.: "Nonlinear single track model analysis using Volterra series approach", Vehicle System Dynamics, Vol. 47, No. 1, pp. 81-98, 2009.

[24] Hiamang S., Mickens R.E.: "Harmonic balance: comparison of equation of motion and energy methods", Journal of sound and vibration, Vol. 164, No. 1, 179-181, 1993.

[25] Hugo Ramon Elizalde Siller: "Nonlinear modal analysis methods for engineering structures", PHD thesis, Department of mechanical engineering, University of London, 2004.

[26] Landa P.S.: "Regular and Chaotic Oscillations", Springer, New York, 2000.

[27] Landau I.D., Bitmead R. R.: "On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations", Technical report, Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, USA, 2004.

[28] Maia N., Silva J.: "Theoretical and experimental modal analysis", Research Studies Press LTD, England, 1997.

[29] Petrov E.P., Ewins D.J.: "Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks", ASME transactions, Vol. 125, pp. 364-371, 2003.

[30] Ren Y., Beards C.F.: "A new receptance-based perturbative multi-harmonic balance method for the calculation of the steady state response of nonlinear systems", Journal of sound and vibration, Vol. 172, N°5, pp. 593-604, 1994.

[31] Sanliturk K.Y., Imergun M., Ewins D.J.: "Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers", ASME transaction, Vol. 119, pp. 90-103, 1997.

[32] Sastry S.: "Nonlinear systems : analysis, stability and control", Springer-Verlag, New York, 1999.

[33] Setio S., Setio H.D., ezequel L.: "Modal Analysis of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Structure", The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 7, No. 2, pp. 75-93, 1992.

8. Glossary

FRF	: Frequency Response Function
ODE	: Ordinary differential equations
AVM	: Association of Variables Method
HBM	: Harmonic Balance Method
a_y	: Lateral acceleration ($m\ s^{-2}$)
F_{yi}	: Lateral force at axle i (N)
m	: Body mass (kg)
I_z	: Moment of inertia about vertical axis ($kg\ m^2$)
$\dot{\psi}$: Yaw rate ($rad\ s^{-1}$)
α_f, α_r	: Front and rear equivalent tire side slip angle (rad)
β	: Body side slip angle (rad)
δ_f, δ_h	: Wheel turn and the steering wheel angle (rad)
l_f, l_r, l	: Front, rear and total wheel base (m)
$v, v_{T,ij}$: Vehicle velocity and tyre contact velocity (ms^{-1})
H_1^β, H_1^ψ	: 1 st order Volterra kernels of side slip angle & yaw rate
H_3^β, H_3^ψ	: 3 rd order Volterra kernels of side slip angle & yaw rate
$H_{\alpha_f}, H_{\alpha_r}$: FRF of front and rear tire side slip angles.

Bibliographie

- [And05] Andrzejewski H.B., Awrejcewicz J., 2005. « *Nonlinear dynamics of a wheeled vehicle* ». Springer Science, USA.
- [Bad09a] Badji B., Fenaux F., EL Bagdouri M., Miraoui A., 2009 « *Nonlinear single track model analysis using Volterra series approach* », *Vehicle System Dynamics*, Vol. 47, No. 1, pp. 81-98.
- [Bad09b] Badji B., Fenaux F., EL Bagdouri M., Miraoui A., 2009 « *Advanced theoretical methods for non linear single track model analysis* », Congrès international de la dynamique de véhicule de la SIA, 24-25 Septembre.
- [Bak89] Bakker E., Pacejka H.B., Lidner L., 1989. « *A new model with an application in vehicle dynamics studies* ». Society of Automotive Engineers Paper 890087.
- [Bar05] Bard D., 2005. « *Compensation des non-linéarités des systèmes haut parleurs à pavillon* ». Thèse de doctorat, Institut de transmissions, ondes et photonique, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.
- [Bed71] Bedrosian E., Rice S.O. 1971. « *The output properties of Volterra systems driven by harmonic and Gaussian inputs* ». *Proc. IEEE* 59., 1688-1707.
- [Ben98] Bendat J.S. 1998. « *Nonlinear systems techniques and applications* ». Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc.
- [Bie06] Bierlaire M., 2006. « *Introduction à l'optimisation différentielle* ». Presses polytechniques et universitaires romandes, Italie.
- [Bli91] Bliman P.A., Sorine M., 1991. « *Friction modelling by hysteresis operators. Application to Dahl, Sticktion and Stribeck effects* ». Proceedings of the conference models of hysteresis, Trento, Italy.
- [Bou04] Bouziani F., 2004. « *First and second-order K-B approximations for the analysis of nonlinear oscillations in autonomous systems* ». ENSIEG-Laboratoire d'automatique de Grenoble.
- [Bou06] Bouziani F., 2006. « *Modélisation et contrôle des instabilités de combustion : Application à l'identification et la modélisation des systèmes non-linéaires continus en boucle fermée* », Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Boy83] Boyd S., Tang Y.S., Chua L.O. 1983. « *Measuring Volterra kernels* ». *IEEE transactions on circuits and systems*, Vol. CAS-30, No. 8, pp. 571-577.
- [Boy84] Boyd S., Chua L.O., Desoer C.A., 1984. « *Analytical foundations of Volterra series* ». *IMA journal of mathematical control & information, IEEE transactions on circuits and systems*, Vol. 1, pp. 243-282.
- [Bra97] Braun S., Feldman M., 1997. « *Time-frequency characteristics of nonlinear systems* ». *Mechanical systems and signal processing*, Vol. 11, No. 4, pp. 611-620.
- [Bro06] Brossard, J.P., 2006, *Dynamique du véhicule: modélisation des systèmes complexes*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [Bry92] Brychkov, Y.A., Glaeske, H.-J., Prudnikov, A.P. and Tuan, V.K., 1992, *Multidimensional integral transformations*. Gordon & Breach science publishers.
- [Caf97] Cafferty S., Tomlison G.R. 1997. « *Characterization of automotive dampers using higher order frequency response functions* ». *SIAM J. Appl. Math.*
- [Che94] Cherry J.A. 1994. « *Distortion Analysis of Weakly Nonlinear Filters Using Volterra Series* ».

- [Col96] Coleman, T.F. and Y.Li “An interior, trust region approach for non linear minimization subject to bounds,” SIAM journal on optimization Vol 6, pp 418-445, 1996.
- [Deb89] Debnath J., Debnath N.C., 1989. « *Theorems on association of variables in multidimensional laplace transforms* ». International journal math. & math. Science, Vol. 12, No. 2. pp. 363-376.
- [Deb91] Debnath J., Debnath N.C., 1991. « *Associated transforms for solution of nonlinear equations* ». International journal math. & math. Science, Vol. 14, No. 1. pp. 177-190.
- [Del96] TNO[©], 1996. « *MF-Tyre User Manual* ». TNO[©] & université de technologie de Delft.
- [Den00] Denti E., Fantera D., 2000. « *Models of Wheel Contact Dynamics : An Analytical Study on the In-Plane Transient Responses of a Brush Model* ». Vehicle System Dynamics, vol. 34, pp. 199-225, 2000.
- [Dih00] Dihua G., Jin S., Yam L.H., 2000. « *Establishment of model tire steady state cornering properties using experimental modal parameters* ». Vehicle system dynamics, Vol. 34, pp. 43-56.
- [Dit75] Ditkine V., Proudnikov A., 1975. « *Calcul opérationnel* ». Edition Mir, Moscou (1975). (Traduction française en 1979).
- [Dix96] Dixon J.C., 1996. « *Tires, suspension and handling* ». p. 79, ISBN 1-56091-831-4.
- [Evr03] Evrot F., Debains O., 2003. « *Equations de la dynamique du véhicule : Travaux de fond pour la compétence dynamique route* ». PSA-Peugeot Citroën automobiles, INSA-Lyon, Villeurbanne.
- [Ewi00] Ewins D.J., 2000. « *Modal Testing: theory, practice and application* ». Research Studies Press LTD, London.
- [Fel94a] Feldman M., 1994. « *Nonlinear system vibration analysis using transform-I. Free vibration analysis method 'FREEVIB'* ». Mechanical systems and signal processing, Vol. 8, No. 2, pp. 119-127.
- [Fel94b] Feldman M., 1994. « *Nonlinear system vibration analysis using transform-II. Forced vibration analysis method 'FORCEVIB'* ». Mechanical systems and signal processing, Vol. 8, No. 3, pp. 119-127.
- [Fen05] Fenaux E., 2005., « *Dynamique du véhicule* ». Cours interne PSA Peugeot-Citroën automobiles.
- [Fer02] Ferbach P., 2002. « *Guide de formation à la liaison au sol fonctionnelle pour les aspects liés à la dynamique route* ». Rapport interne PSA-Peugeot-Citroën automobiles, CLS_CFLS02_0108.
- [Fer98] Ferreira J.V., 1998. « *Dynamic response analysis of structures with nonlinear components* ». PhD thesis, Imperial college of science, technology and medicine.
- [Gau01] Gautier M., Khalil W., 2001, « *Analyse et modélisation des robots manipulateurs, IC2, Identification des paramètres des robots* ». Hermès, chapitre 4, sous la direction de E. Dombre.
- [Gau01a] Gautier M., 2001, « *Elaboration d'un logiciel d'identification des paramètres dynamiques de robot* », DYCARO : DYnamic CALibration of RObots, Contrat ECN-CRITT Productique Pays de la Loire N°98001, rapport final.
- [Gau02] Gautier M., Poignet Ph., 2002, « *Identification en boucle fermée par modèle inverse des paramètres physiques de systèmes mécatroniques* », JESA, Journal Europeen Des Systemes Automatisés.
- [Gau96] Gautier M., 1996, « *A unified approach for dynamic identification of robots* », CESA 96. Nantes.

- [Gay00] Gay F., 2000. « Lois de commande en vue du Contrôle Global de châssis d'un Véhicule : le CGC » ; Thèse de Doctorat, IrCyn Nantes.
- [Gen97] Genta, 1997. « *Motor vehicle dynamics : modelling and simulation* ». Word scientific publishing, Singapore.
- [Ger98] Gerencier B., 1998, « *modèle linéaire de la dynamique transversale du véhicule* », rapport de stage, diplôme de recherche technologique (DRT).
- [Gif89] Gifford S.J., Tomlinson G.R. 1989. « *Understanding multi degree of freedom nonlinear system via higher order frequency response functions* ». 7th international modal analysis conference, Las Vegas, NV, January 30 - February 2.
- [Gol96] Golub G.H., Loan C.F.V., 1996, « *Matrix Computations* », Johns Hopkins University Press, Baltimore, 3ième édition.
- [Gui02] Guilemond A. 2002., « *Le pneumatique, aspect comportement routier* ». Document interne PSA Peugeot-citroën automobiles.
- [Hal95] Halconruy Th., 1995. « Les liaisons au sol » ; Editions ETAI, ISBN : 2-7268-8250-1.
- [Hay64] C. Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill Book Co, New York, 1964. (reprinted by Princeton University Press, 1985).
- [Hia93] Hiamang S., Mickens R.E., 1993. « *Harmonic balance: comparison of equation of motion and energy methods* ». Journal of sound and vibration, Vol. 164, No. 1, 179-181.
- [Hres04] Hugo Ramon Elizalde Siller. 2004. « *Nonlinear modal analysis methods for engineering structures* ». PHD thesis, Department of mechanical engineering, University of London.
- [Hua93] Huang F., 1993, « *The use of random steer test data for vehicle parameter estimation* » SAE paper 930830.
- [IPG05] IPG, 2006. « *Manual reference* ». IPG[©] Automotive GmbH.
- [Kee05] Keefe L.R., Reisenthel P.H. 2005. « *Time-domain characterization of acoustic liner response from experimental data. Part 1 : Linear response* ». AIAA 2005-3060.
- [Ker03] Kern M., 2003, « *Problèmes inverses* », Support de cours 2002-2003, Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci, <http://www-rocq.inria.fr/~kern/Teaching/ESILV/inverse.pdf>.
- [Kha92] Khalil H.K., 1992. « *Nonlinear Systems* ». MacMillan, New York.
- [Kha99] Khalil W., Dombre E., 1999. « *Modélisation, identification et commande de robots* ». 2^{ème} édition, Hermès.
- [Kie00] Kiencke U., Nielsen L., 2000. « *Automotive control systems: for engine, driveline and vehicle* ». Springer Verlag.
- [Lan00] Landa P.S., 2000. « *Regular and Chaotic Oscillations* ». Springer, New York.
- [Lan04] Landau I.D., Bitmead R. R., 2004. « *On the method of Krylov and Bogoliubov for the analysis of nonlinear oscillations* ». Technical report, Mechanical and Aerospace Engineering Department, University of California, San Diego, USA.
- [Lau98] Laurence. P., 1998. « *Modélisation de Systèmes Complexes. Application à l'Etude du Comportement en Régime Etabli des Véhicules Routiers* ». Thèse de l'université de Haute Alsace.
- [Law74] Lawson C.L., Hanson R.J., 1974, « *Solving Least Squares Problems* », SIAM, Philadelphie, 1995. Edition originale par Prentice Hall.
- [Lee00] Lee J.H., 2000. « *Analysis of tire effect on the simulation of vehicule straight line motion* ». Vehicle system dynamics, Vol. 33.

- [Les02] Lesecq S., Barraud A., 2002, « *Des moindres carrés au filtre de Kalman* », IC2, Outils d'analyse pour l'automatique, Chapitre 6, Hermes, sous la direction de A. Barraud.
- [Let95] Letty L., Ngouenet B., 1995, « *Parameter estimation in analytical models in automotive vehicle and fault diagnosis* » 1st IFAC workshop in advances in automotive control, Switzerland.
- [Lin90] Lin R. 1990. « *Identification of the dynamic characteristics of nonlinear structures* ». PHD Thesis, Imperial college of science, technology and medicine, London.
- [Lue01] Luedke J.G. 2001. « *Use of nonlinear Volterra theory in predicting the propagation of non uniform flow trough an axial compressor* ». PHD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Departement of mechanical engineering.
- [Mai97] Maia N., Silva J., 1997. « *Theoretical and experimental modal analysis* ». Research Studies Press LTD, England.
- [Mar01] Marzocca P., Librescu L., Silva W.A. 2001. « *Volterra series approach for nonlinear aeroelastic response of 2-D lifting surfaces* ». American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA-2001-1459.
- [Mar04] Marmarelis V.Z. 2004. « *Nonlinear dynamic modeling of physiological systems* ». IEEE press series in Biomedical Engineering. Wiley-Interscience.
- [Mau99] Maurice J.P, Berzeri M., Pacejka H.B., 1999. « *Pragmatic tyre model for short wavelength side slip variations* ». Vehicle system dynamics, Vol. 31, pp. 65-94.
- [Mil95] Milliken W.F., Milliken D.L., 1995. « *Race car vehicle dynamics* ». SAE international, USA.
- [Mit77] Mitzel G.E., Rugh W.J. 1977. « *On multidimensional S-Transform and the realization problem for homogeneous nonlinear systems* ». IEEE transactions on automatic control, Vol. AC-22, No. 5, pp. 825-830.
- [Mit79] Mitzel G.E., Rugh W.J., Clancy S.J. 1979. « *On transfer function representations for homogeneous nonlinear systems* ». IEEE transactions on automatic control, Vol. AC-24, No. 2, pp. 242-249.
- [Mit95] Mitschke, M., 1995, *Dynamik Der Kraftfahrzeuge*. Berlin, Springer Verlag.
- [Miz98] Mizuno M., Takahashi T., HADA M., 1998. « *Magic formula tire model using the measured data of a vehicle running on actual roads* ». Toyota central R&D Labs.
- [Nou00] Nouillant C., 2002. « *Contribution au pilotage coopératif des systèmes de liaisons au sol d'une automobile par commande hybride hiérarchisée* ». Thèse CIFRE, université de bordeaux, PSA Peugeot Citroën automobiles.
- [Ols98] Olson H., 1998. « *Friction models and friction compensation* ». European journal of control, Vol. 4, pp. 176-195.
- [Pac06] Pacejka H.B., 2006. « *Modeling of the pneumatic tyre and its impact on vehicle dynamic behaviour* ». Butterworth-Heinemann, Oxford. (2nd edition).
- [Pac88] Pacejka H.B. 1988., « *Modeling of the pneumatic tyre and its impact on vehicle dynamic behaviour* ». Technische Universiteit Delft.
- [Pac96] Pacejka H.B., 1996. « *The tyre as a vehicule component* ». Delft university of technology & TNO-Delft. Netherlands.
- [Pal77] Palm G., Poggio, T. 1977. « *The Volterra representation and the Wiener expansion : Validity and Pitfalls* ». SIAM J. Appl. Math.
- [Pat03] Patel R.V., 2003 « *NARX Neural Network Modelling of Hydraulic Suspension Dampers for Steady-state and Variable Temperature Operation* ». Vehicle system dynamics, Vol. 40, pp. 285-328.

- [Per04] Perez, S., 2004, Modèle cible identifié de véhicule. internal report SDR04_0267, PSA-Peugeot Citroën automobiles.
- [Pet03] Petrov E.P., Ewins D.J., 2003. « *Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks* ». ASME transactions, Vol. 125, pp. 364-371.
- [Pha85] Pham A.T., 1985. « *Modélisation mathématique du comportement dynamique d'une automobile dans le domaine non linéaire* ». S.I.A session 1985-1986, C-85-01.
- [Por03] Porcel A., 2003. « *Contribution a la commande multivariable des systèmes complexes rapides, instables ou pseudostables. Application au contrôle de stabilité de véhicules par approche '12 forces'* ». Thèse de doctorat, Université de haute alsace.
- [Pow70] Powell, M. J. D., "A Fortran Subroutine for Solving Systems of Nonlinear Algebraic Equations," Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, P. Rabinowitz, ed., Ch.7, 1970.
- [Qu00] Qu Q., Liu Y., 2000. « *On lateral dynamics of vehicles based on nonlinear characteristics of tires* ». Vehicle system dynamics, Vol. 34, pp. 131-141.
- [Ray97] Ray L.R., 1997. « *Nonlinear tire force estimation and road friction identification : Simulation and experiments* » Automatica, Vol. 33, No. 10, pp. 1819-1833.
- [Rei96] Reienthel P.H. 1996. « *Development of a nonlinear indicial model for manoeuvring fighter aircraft* ». AIAA 96-0896. Nielsen Engineering & Research, Inc.
- [Rei97] Reienthel P.H. 1997. « *Development of a nonlinear indicial model using response functions generated by a neural network* ». AIAA 97-0337. Nielsen Engineering & Research, Inc.
- [Rei99a] Reienthel P.H. 1999. « *A nonlinear Volterra kernel identification system for aeroelastic applications* ». NEAR TR 547, Nielsen Engineering & Research, NASA, Langley Research Center.
- [Rei99b] Reienthel P.H. 1999. « *Prediction of unsteady aerodynamic forces via nonlinear kernel identification* ». Nielsen Engineering & Research, Inc.
- [Rei99c] Reienthel P.H., Bettencourt M.T. 1999. « *Extraction of nonlinear indicial and critical state responses from experimental data* ». AIAA 99-0764. Nielsen Engineering & Research, Inc.
- [Ren94] Ren Y., Beards C.F., 1994. « *A new receptance-based perturbative multi-harmonic balance method for the calculation of the steady state response of nonlinear systems* ». Journal of sound and vibration, Vol. 172, N°5, pp. 593-604.
- [Rip06] Rippert P.J., 2006. « *Modélisation et identification paramétrique de l'effort de contact pneumatique/sol pour la dynamique véhicule* ». Thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes, PSA-Peugeot Citroën automobiles.
- [Rug81] Rugh W.J. 1981. « *Nonlinear system theory: The Volterra and Wiener approach* ». The Johns Hopkins University press.
- [San96] Sanliturk K.Y., Ewins D.J., 1996. « *Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method* ». Journal of sound and vibration, Vol. 193, No. 2, 511-523.
- [San97] Sanliturk K.Y., Imergun M., Ewins D.J., 1997. « *Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers* ». ASME transaction, Vol. 119, pp. 90-103.
- [Sas99] Sastry S., 1999. « *Nonlinear systems : analysis, stability and control* ». Springer-Verlag, New York.

- [Sch80] Schetzen M. 1980. « *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems* ». New York, Wiley-Interscience.
- [Sch94] Schrick D.V., 1994. « *A comparison of IFD schemes* ». Third IEEE conference on control application, Glasgow, Vol. 2, pp. 889-894.
- [Sch99] Schmitt C. 1999. « *Contribution à l'identification des paramètres physiques des systèmes complexes* ». Thèse de doctorat, université de haute Alsace UHA.
- [Set92] Setio S., Setio H.D., ezequel L., 1992. « *Modal Analysis of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Structure* ». The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 7, No. 2, pp. 75-93.
- [Sha94] Shampine, L. F. , Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Chapman & Hall, New York, 1994.
- [Sil01] Silva W.A. 2001. « *Volterra series approach for nonlinear aeroelastic response of 2-D lifting surfaces* ». AIAA 2001-1459, NASA Langley research center, Hampton, VA 23681-2199.
- [Sil05] Silva W.A., Hajj M.R., Prazenica R.J. 2005. « *Recent applications of the Volterra theory to aeroelastic phenomena* ». IMAC 23.
- [Sil69] Siljak D., 1969. « *Nonlinear systems* ». John Wiley & Sons, Inc. New York
- [Sil99] Silva W.A., 1999. « *Reduced order models based on linear and nonlinear aerodynamic impulse responses* ». AIAA journal No. 99-1262.
- [Ste04] Stéphane J. 2004. « *Contribution à l'étude et à la validation expérimentale d'observateurs appliqués à la dynamique de véhicule* ». Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne (UTC).
- [Sto91] Storer D.M. 1991. « *Dynamic analysis of nonlinear structures using higher order frequency response functions* ». PHD thesis, Department of engineering, University of Manchester.
- [Swi00] 2000. « *SWIFT-Tyre User Manual* ». TNO[©].
- [Tan93] Tanrikulu Ö., Imergün M., 1993. « *Forced harmonic response analysis of nonlinear structures using describing functions* ». AIAA journal, Vol. 31, No. 7, pp. 1313-1320.
- [Taw01] Tawfiq I., Vinh T. 2001. « *Etude des structures non linéaires par chocs programmés* ». XV^{ième} Congrès français de mécanique.
- [Taw03] Tawfiq I., Vinh T. 2003. « *Contribution to the extension of modal analysis to nonlinear structure using Volterra functional series* ». Mechanical systems and signal processing 17, pp. 379-407.
- [Taw04] Tawfiq I., Vinh T. 2004. « *Nonlinear behaviour of structures using the Volterra series signal processing and testing methods* ». Nonlinear dynamics, 37, pp. 129-149.
- [Taw05] Tawfiq I., Vinh T., Casimir J.P., 2005. « *Sur l'analyse modale expérimentale des structures non linéaires* ». Mécanique & Industries 6, 3-8.
- [Taw95] Tawfiq I., Vinh T. 1995. « *Sur diverses méthodes de calcul des fonctions de transfert des structures non linéaires (étude critique)* ». Mécanique industrielle et matériaux, Vol 48, N°3.
- [Taw98] Tawfiq I., Vinh T., 1998. « *Etude d'un système oscillant mécanique non linéaire à raideur hystérisique* ». Mécanique industrielle et matériaux. Vol 51.
- [Tob84] Tobak M., Chapman G.T., Schiff L.B. 1984. « *Mathematical modeling of the aerodynamic characteristics in flight dynamics* ». NASA TM 85880.
- [Tob85] Tobak M., Chapman G.T., 1985. « *Nonlinear problems in flight dynamics involving aerodynamic bifurcations* ». NASA TM 86706.
- [Van02] Van de wouw N., 2002. « *A Volterra series approach to the approximation of stochastic nonlinear dynamics* ». Nonlinear dynamics, Vol. 27, pp. 397-409.

- [Van27] Van der Pol, Forced Oscillations in a circuit with Non linear resistance , The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of science, 3 , 65-80 (1927)
- [Van91] Van Huffel S., Vandewalle J., 1991, « *The Total Least Squares Problem : Computational Aspects and Analysis* », SIAM, Frontiers in Applied Mathematics vol. 9.
- [Ven03] Venture G., 2003. « *Identification des paramètres dynamiques d'une voiture* ». Thèse de doctorat, IRCCyN. Nantes.
- [Vid02] Vidyasagar M., 2002. « *Nonlinear systems analysis* ». Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [Vol59] Volterra V. 1959. « *Theory of functionals and integral equations* ». New York, Dover.
- [Wal97] Walter E., Pronzato L., 1997, « *Identification of Parametric Model* », Springer Verlag, ISBN 3-540-76119-5.
- [Wan93] Wang J.H., Chen W.K., 1993. « *Investigation of the vibration of a blade with friction damper by HBM* ». ASME transaction, Vol. 115, pp. 294-299.
- [Wel67] Welch P.D., 1967. « *The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms* ». IEEE Trans. Audio Electroacoust, Vol. AU-15, pp. 70-73.
- [Wor01a] Worden K., Tomlinson G.R. 2001. « *Nonlinearity in experimental modal analysis* ». The Royal Society, Phil. Trans. London. A 359, pp. 113-130.
- [Wor01b] Worden K., Tomlinson G.R. 2001. « *Nonlinearity in structural dynamics : detection, identification and modelling* ». Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.
- [Wor97] Worden K., Manson G. and Tomlinson GR. 1997. « *A harmonic probing algorithm for the multi-Input Volterra series* ». Journal of Sound and Vibration, Vol.201, No. 1, pp. 67-84.
- [Yag96] Yagasaki K., 1996. « *The melnikov theory for subharmonic and their bifurcations in forced oscilation* ». SIAM J Appl. Mathematics, 56, pp. 1720–1765.
- [Zar02] Zarka F., Mahajoub G., Fandard G., 2002. « *Dynamique du véhicule* ». Rapport interne PSA-Peugeot Citroën automobiles, Institut français de mécanique avancée.