



HAL
open science

Vers un dimensionnement optimal structure-commande de système multi-convertisseurs. Application aux réseaux de tramways

Rémi Vial

► **To cite this version:**

Rémi Vial. Vers un dimensionnement optimal structure-commande de système multi-convertisseurs. Application aux réseaux de tramways. Energie électrique. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT: . tel-00734684v1

HAL Id: tel-00734684

<https://theses.hal.science/tel-00734684v1>

Submitted on 24 Sep 2012 (v1), last revised 10 Apr 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : Génie électrique

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Rémi VIAL

Thèse dirigée par **Nicolas RETIÈRE** et par **Delphine RIU**

préparée au sein du

Laboratoire de Génie Électrique de Grenoble (G2Elab)

dans l'École Doctorale : **Électronique, Électrotechnique,**

Automatique et Traitement du Signal (EEATS)

Vers un dimensionnement optimal structure-commande de système multi-convertisseurs. Application aux réseaux de tramways

THÈSE SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE **26 janvier 2012**,
DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

M. Mazen ALAMIR

Professeur, Grenoble-INP

Président

M. Alain BOUSCAYROL

Professeur, USTL Lille

Rapporteur

M. Philippe LADOUX

Professeur, INP Toulouse

Rapporteur

M. Serge PIERFEDERICI

Professeur, INP Nancy

Examineur

M. Nicolas RETIÈRE

Professeur, UJF Grenoble

Directeur de thèse

Mme. Delphine RIU

Maître de conférence, Grenoble-INP

Directrice de thèse





REMERCIEMENTS

Remerciements

Cher lecteur, le manuscrit que tu as entre les mains (ou sur ton écran) vient mettre un terme à trois années de travail qui ont été plus ou moins dures, mais toujours intéressantes et voir même passionnantes. C'est avec cette même passion que j'ai rédigé ce volumineux (doux euphémisme) manuscrit, dans lequel j'ai voulu être le plus exhaustif possible. Ce document se veut pédagogique et il reprend des concepts de base, qui sont détaillés, avant d'introduire de nouvelles idées. De ce fait, ce manuscrit a été écrit pour se suffire à lui même.

Cette thèse est théorique, mais j'ai essayé d'être le plus proche possible des réalités industrielles. Les idées énoncées dans cette thèse sont appliquées (du moins en théorie) à un réseau de tramways avec un constant souci de faisabilité. Je tiens donc à remercier chaleureusement la société Alstom Transport et en particulier Monsieur Daniel Cornic, pour les données transmises, qui m'ont permis d'avoir ce sujet d'étude.

En plus de ce cadre applicatif, cette thèse est pluridisciplinaire. Elle aborde tout aussi des aspects assez poussés d'électronique de puissance, que d'outils complexes d'automatisme, tout en utilisant des méthodes numériques, le tout avec une vision système. Il apparaissait donc tout aussi naturel d'avoir un jury d'horizons divers pour juger ces travaux.

Je tiens donc à remercier mon jury de thèse en commençant par le président, Monsieur *Mazen Alamir*, professeur à l'Institut Polytechnique de Grenoble, Directeur de recherche CNRS au GIPSA-Lab, pour son regard éclairé sur les commandes farfelues proposées.

Merci également à mes deux rapporteurs, Monsieur *Alain Bouscayrol*, professeur à l'université de Lille 1 et rattaché au L2EP et Monsieur *Philippe Ladoux*, professeur à l'Institut Polytechnique de Toulouse, du laboratoire LAPLACE. Ce fut un plaisir d'échanger avec vous, et je m'excuse pour la longueur du manuscrit que vous avez pris la peine de lire.

Enfin j'exprime ma gratitude à Monsieur *Serge Pierfederici*, professeur à l'Institut Polytechnique de Lorraine qui travaille sur la commande de convertisseurs au laboratoire GREEN.

La thèse est une expérience, mais aussi une formation. On y apprend autant en trois mois qu'en trois années d'école. Cela est rendu possible car on dispose de temps pour explorer de nouvelles solutions et les mettre en œuvre, sans avoir constamment de compte à rendre.

Un grand merci à mes directeurs de thèse pour la confiance qu'ils m'ont accordé, et l'autonomie qu'il m'ont laissé pour approfondir les voies qui me semblaient les

plus intéressantes. Merci à Nicolas pour sa rigueur scientifique. C'est toi qui m'a donné envie de croire aux bénéfices de la "vision système" et de développer les outils pour en valider l'intérêt.

Merci Delphine, tu as toujours été là malgré mon caractère difficile. J'ai eu tout autant plaisir à travailler qu'à enseigner avec toi. C'est grâce à toi que j'ai eu envie d'aller au delà du PI pour intégrer des commandes exotiques (mais pas autant que les ordres non-entiers).

Pour faire une bonne thèse, il faut de bons directeurs de thèse, un bon jury, mais aussi un bon laboratoire¹. Merci au G2Elab qui m'a fait confiance dès mon stage de fin d'étude et à son directeur James Roudet. Merci également aux équipes techniques et administratives, qui le font fonctionner en étant toujours à l'écoute des doctorants.

J'ai également une pensée émue pour Grenoble, terre de mes ancêtres, qui m'a permis de concilier mon appétit scientifique, et ma passion pour la montagne. Quelle chance de pouvoir faire du ski de rando avant d'aller travailler et du vtt en rentrant du Labo.

Pour faire de la montagne, il faut des gens (enfin parfois). Des gens on en trouve un peu partout, même au labo. Quand on passe du temps avec ces gens, et qu'on commence à les apprécier, ils deviennent même des amis. A ce titre, je souhaiterais à présent adresser mes remerciements à ces amis du laboratoire, avec qui j'ai passé de si bons moments, que se soit sur le canapé du bureau, à la machine à café ou encore sur un télésiège.

Établir un hiérarchie étant impossible, je procéderai donc par chronologie en commençant par Coco, rencontré dès mon premier jour d'école, fidèle compagnon de cordée et grand électronicien de puissance. Je te souhaite bonne chance dans ce beau projet dans lequel tu te lances.

Merci également à Steph, docteur-ingénieur-moniteur de ski et grand voyageur, et Eric professeur-docteur-saxophoniste pour prouver que la thèse ouvre toutes les portes. En parlant de patriarche, j'adresse mes remerciements à Benjamin, syndicaliste écolo, gâcheur de repas et Antoine musicien, électronicien et humaniste.

Un merci à Ti-Ben babacool rastakouer avec qui j'ai partagé le Bureau D055, pour les nocturnes en ski de rando et l'enduro toujours chez moi, bon courage à Paris ... Merci à JLM, pour ces échanges scientifiques (ou pas ...), cette traversée du Vercors et ces bons moments passés ensemble, à Titouan, livré avec le canapé pour les after-works dans l'Infernet ou en falaise, et les bivouaks sous la pluie dans le Taillefer. Bonne chance à Archie et Raph, qui auraient dû finir leur thèse en même temps que moi, mais qui subissent à la place les lenteurs administratives.

Merci aussi à Geneviève pour ces explorations dans la dent de Crolles et à Teu, pour ces explorations au Hasard. Enfin, un immense merci à Juju, sauteuse involontaire de barres rocheuses pour le travail de relecture considérable et les corrections que tu as apportées à ce manuscrit. Je te dois encore un bon nombre de sorties en montagne pour éponger cette dette ...

La vie ne se cantonne cependant pas au labo et à la montagne. Il y a aussi tous

1. à prononcer avec l'accent savoyard

ces instants passés à côté avec mes amis "historiques" qui ont toujours été autour de moi pour me soutenir.

Merci donc à mes 200 kilos de copains rugbyman, Boubou et Yann pour toutes les aventures que nous avons vécues ensemble.

Merci également à Maude et Chloé et Charlotte. Vos caractères bien trempés vous permettent de nous supporter. Je remercie aussi Dellile le plus américain des chinois français pour être mon opposé et Roger le plus chinois des Lyonnais Niçois, bête devenu belle.

Merci enfin à mes amis repartis dans toute la France : Benjamin, Zabou, Fouf, Claire-Liz, Cazin, Nico et tous ceux que j'oublie.

Je finirai par le plus important en remerciant du fond du cœur mes parents qui ont toujours été là pour moi ; Cette thèse est pour vous. Merci enfin à ma petite sœur, qui malgré son caractère pire que le mien (c'est dire), est la personne qui compte le plus pour moi.

La longueur de ces remerciements est à l'image de ce mémoire, mais comment faire concis, quand on a des choses importantes à dire ? Même si beaucoup s'arrêteront ici, je souhaite bonne lecture aux courageux qui se lanceront dans une étude plus approfondie de ce manuscrit.

TABLES

Table des matières

Remerciments	v
Table des matières	xi
Table des figures	xix
Liste des tableaux	xxiii
Acronymes	xxv
Introduction Générale	3
1 Présentation de la structure	7
1 Généralités sur le transport ferroviaire et les tramways	8
1.1 Historique du transport ferroviaire	8
1.1.1 Les trains	8
1.1.2 Les tramways	8
1.2 Avantages et inconvénients du transport par voie ferrée	8
1.2.1 Rapide comparaison du rail et de la route	8
1.2.2 Pourquoi tant d’engouement pour le tramway?	9
1.3 Le matériel roulant	10
1.3.1 La vitesse variable en ferroviaire	10
1.3.2 La motorisation des tramways	12
1.3.3 Alimentation électrique à bord des véhicules	12
1.4 Les infrastructures fixes	13
1.4.1 Les rails	13
1.4.2 Les caténaires, les lignes aériennes de contact, et les autres moyens d’alimentation	14
1.4.3 Les sous-stations d’alimentation	15
1.5 Les architectures électriques des réseaux	15
1.5.1 Les différentes solutions pour alimenter un train	16
1.5.2 Comparaison entre les distributions en alternatif et en continu	16
1.5.3 Architecture électrique classique d’un réseau de tram- ways	17
2 Limitations et améliorations possibles d’un réseau classique de tramways	18
2.1 Les pertes en ligne	18
2.2 Le maintien du plan de tension	18
2.2.1 Durant les phases de traction	19
2.2.2 Durant les phases de freinage	19
2.3 Échanges entre les tramways	19
2.4 La réversibilité des sous-stations	19

	2.4.1	Le blocage des sous-stations	19
	2.4.2	La récupération énergétique	20
	2.4.3	Résumé des limitations actuelles	21
3		Nouvelles architectures d'alimentation	21
	3.1	Réseau haute tension alternatif propriétaire	21
	3.2	Transformateur centralisé	22
	3.3	Autotransformateur à courant continu	22
	3.3.1	Architecture à feeder négatif	22
	3.3.2	Architecture à feeder positif	24
	3.3.3	Architecture à LAC flottante	25
	3.4	Présentation de la structure étudiée	25
4		Les réseaux multi-convertisseurs	26
	4.1	Les réseaux HVDC	26
	4.2	En informatique	27
	4.3	Dans les transports	27
	4.4	La généralisation du bus d'alimentation continu	27
5		Présentation des travaux de thèse	27
	5.1	Objectifs des travaux de thèse	27
	5.2	La distribution électrique d'un réseau de tramways : un système complexe	28
	5.3	Problématiques scientifiques	28
	5.3.1	Approche classique d'étude	29
	5.3.2	Premier verrou : Quel(s) modèle(s) pour la simulation ?	29
	5.3.3	Deuxième verrou : Quel(s) modèle(s) pour le dimensionnement global ?	31
6		Conclusion	32
2		Répartition optimale des flux énergétiques	35
1		Objectif du chapitre	35
2		Modélisation de la chaîne cinématique d'un tramway	36
	2.1	Les organes mécaniques du tramway	36
	2.1.1	Présentation générale	36
	2.1.2	Le contact roue-rail	36
	2.1.3	Le moteur et la transmission	39
	2.2	Effort de résistance à l'avancement	43
	2.2.1	Les frottements dus au mouvement du tramway	43
	2.2.2	Les frottements dus à la ligne	44
	2.3	Équation dynamique du mouvement	44
	2.4	Conclusion sur la modélisation de la partie mécanique	45
3		Modélisation du conducteur de rame	46
	3.1	Gestion de la trajectoire de vitesse	46
	3.2	Un modèle du pilote	48
	3.2.1	Les phases d'accélération	48
	3.2.2	Les phases de freinage	49
	3.2.3	La marche sur l'erre	50
4		Illustration et validation sur la ligne d'essai de la Rochelle	50
5		Pistes d'optimisation énergétique au niveau du véhicule	52
	5.1	Optimisation mécanique de la consommation énergétique	52

	5.1.1	Influence du temps entre les tramways	53
	5.1.2	La conduite écologique : un problème d'optimisation dynamique	54
	5.2	Les moyens de stockage embarqué	56
	5.2.1	Les différents rôles du stockage	57
	5.2.2	Les différents moyens de stockage	57
	5.2.3	Lois de commande des moyens de stockage	59
	5.2.4	Emplacement des moyens de stockage	60
	5.2.5	Note sur le pré-dimensionnement	60
6		La modélisation statique du réseau électrique	61
	6.1	Objectifs	61
	6.2	Modélisation statique des convertisseurs	62
	6.2.1	Généralités sur les convertisseurs de puissance	62
	6.2.2	La cellule de commutation	63
	6.2.3	Les interrupteurs de puissance et leur modélisation	64
	6.2.4	Les hacheurs	69
	6.2.5	Les onduleurs	69
	6.2.6	Les redresseurs	70
	6.3	Modélisation du matériel roulant	74
	6.4	La ligne aérienne de contact	74
	6.5	Les rails	75
	6.6	L'inversion de la causalité lors des transitions traction-freinage	75
7		Mise en équations d'un réseau continu en régime permanent	76
	7.1	La méthode nodale	76
	7.2	La méthode nodale modifiée (MNA)	81
	7.3	Prise en compte des hacheurs dans la modélisation	84
	7.4	Modélisation par maillage	85
8		Prise en compte du réseau alternatif	86
	8.1	Calcul de Load Flow	86
	8.2	Mixed Load-Flow	88
9		Etude et comparaison des différentes architectures	89
	9.1	Etude de l'architecture classique	89
	9.1.1	Alimentation par un réseau équilibré	89
	9.1.2	Cas où les tensions d'alimentation ne sont plus no- minales	90
	9.1.3	Blocage des sous-stations	91
	9.1.4	Influence des tensions d'alimentation sur le rendement	93
	9.2	Comparaison entre l'architecture classique et l'architecture proposée	94
	9.2.1	Simulation de la nouvelle architecture d'alimentation	94
	9.2.2	Comparaison entre les structures dans le cas de ha- cheurs idéaux	94
	9.2.3	Prise en compte des pertes dans les hacheurs	95
	9.3	Conclusion sur les avantages de la nouvelle architecture	98
10		Couplage électromécanique	98
11		Optimisation et gestion des flux	99
	11.1	Généralités sur les problèmes d'optimisation	100

11.1.1	Problème non contraint	100
11.1.2	Problème d'optimisation sous contraintes d'égalités .	101
11.1.3	Problème d'optimisation sous contraintes d'égalités et d'inégalités	103
11.1.4	Analyse de sensibilité	104
11.2	Optimisation statique par les lois de commande	104
11.2.1	Formulation du problème d'optimisation	105
11.2.2	Choix de la tension HVDC	107
11.2.3	Commande optimale des hacheurs	114
11.2.4	Commande optimale des sous-stations et des hacheurs	119
11.3	Emplacement optimal des hacheurs	122
11.3.1	Approche classique avec moyennisation de la posi- tion sur un cycle	123
11.3.2	Etude du problème intégral	125
11.4	Les hacheurs, un problème de dimensionnement structure/commande	127
11.5	Limitation de l'approche statique	128
11.6	De l'optimisation hors ligne au temps réel	128
11.7	Autres voies possibles d'optimisation	129
11.7.1	Distance maximale de récupération	129
11.7.2	Échanges entre véhicules	130
12	Conclusion sur l'analyse statique	133
3	Étude dynamique du réseau	137
1	Objectif du chapitre	137
2	La modélisation dynamique des systèmes	137
2.1	Systèmes et formalisme de représentation des modèles	138
2.1.1	Les équations différentielles	138
2.1.2	Le modèle d'état	139
2.1.3	Les systèmes linéaires à paramètres constants	140
2.2	Les méthodes d'obtention des équations différentielles	140
2.2.1	La méthode classique : Méthode Nodale	140
2.2.2	Les simulateurs de type schémas blocs	142
2.2.3	Les graphes de liens	144
2.3	Les bond graphs	145
2.3.1	Présentation et intérêt de l'approche	145
2.3.2	Description des éléments	146
2.3.3	La causalité dans le bond graph	147
2.3.4	L'affection de la causalité	147
2.3.5	Obtention des équations à partir du bond graph	148
2.3.6	Conclusion sur l'approche bond graph	151
2.3.7	Calcul des pertes	151
2.3.8	Calcul des sensibilités paramétriques	152
2.3.9	Exemple d'application de la méthode bond graph	153
3	Interconnexion des systèmes d'état	154
4	Modélisation dynamique des convertisseurs de puissance	156
4.1	Modèle topologique sous forme LFT des convertisseurs de puissance	157
4.1.1	Exemple du hacheur série	157

	4.1.2	Cas général	163
	4.1.3	Application sur le réseau de tramways	164
4.2		Le modèle échantillonné	166
	4.2.1	Principe	167
	4.2.2	Application au hacheur série	168
4.3		Introduction à la modélisation moyenne	169
	4.3.1	Rappels sur les modèles déjà obtenus	169
	4.3.2	Présentation du modèle moyen	169
	4.3.3	Illustration et problématique autour de l'obtention du modèle moyen d'ordre 0	170
	4.3.4	Rappels mathématiques	172
5		Le modèle moyen d'ordre 0	175
	5.1	Modélisation moyenne d'un réseau de convertisseurs d'électro- nique de puissance	175
	5.2	Validation sur le hacheur série de la figure 3.8	175
	5.3	Limitation du modèle moyen d'ordre 0	176
	5.4	Le modèle moyen d'ordre 0 linéarisé	177
	5.4.1	Linéarisation d'un système bilinéaire	177
	5.4.2	Sensibilité des valeurs à l'équilibre par rapport aux paramètres	178
	5.4.3	Application dans le cas du hacheur série	178
	5.4.4	Illustration sur le réseau	179
6		Un modèle grand signal à paramètres variants ou incertains	180
	6.1	Un modèle grand signal du réseau nominal	180
	6.2	Intégration des incertitudes et des paramètres variants	181
	6.2.1	Objectif	181
	6.2.2	Ecriture des paramètres variants sous forme LFT	182
	6.2.3	Expression des matrices d'état incertaines sous forme LFT	184
	6.2.4	Application au cas du hacheur série	185
7		La LFT, un outil de simulation	188
	7.1	La LFT permet de réduire les temps de calcul	188
	7.2	Application sur le réseau de tramways	189
	7.2.1	En régime permanent	189
	7.2.2	En régime transitoire	190
8		Analyse d'un réseau multi-convertisseurs	191
	8.1	Rappel d'analyse fréquentielle des systèmes LTI	191
	8.2	Le gain d'un système	192
	8.2.1	Définition du gain	192
	8.2.2	Gain d'un système MIMO	192
	8.2.3	Application au réseau de tramways	193
	8.2.4	La notion de pire cas	195
	8.3	Analyse de stabilité	195
	8.3.1	Définition de la stabilité	195
	8.3.2	Stabilité d'un système LTI	196
	8.3.3	Stabilité nominale d'un système MIMO en boucle fermée	196

8.3.4	Stabilité robuste d'un système MIMO en boucle fermée	197
8.3.5	La mu-analyse	198
8.3.6	Méthode de Lyapunov	198
8.3.7	Application au hacheur série	199
8.4	Analyse des performances dynamiques en boucle ouverte . . .	199
8.4.1	Les pertes du réseau de tramways	200
8.4.2	Les contraintes en tension du réseau de tramways . .	201
8.5	Vers un outil de dimensionnement complet structure/commande	203
9	Optimisation dynamique sur cycle de fonctionnement	205
9.1	Exemple d'illustration	206
9.2	Définition du problème de commande optimale	207
9.3	Résolution du problème de commande	210
9.3.1	La programmation dynamique	210
9.3.2	Le calcul de variations	211
9.3.3	Prise en compte des contraintes sur l'état	212
9.3.4	Contraintes sur la commande	212
9.3.5	Méthode de résolution	213
9.4	Commande optimale du réseau de tramways	214
9.4.1	Répartition des puissances	214
9.4.2	Gestion du stockage	215
9.4.3	Gain énergétique offert par la commande optimale .	216
9.4.4	Réduction d'ordre	216
9.5	Techniques linéaires de commande optimale	217
9.5.1	La commande LQ	217
9.5.2	La commande LQ à temps discret	218
9.5.3	La commande prédictive	219
9.5.4	Les commandes LQG et H_2	220
9.6	Les autres possibilités offertes par la commande optimale . . .	223
9.6.1	Optimisation paramétrique sur cycle de fonctionne- ment	223
9.6.2	Autres critères d'optimisation	224
10	Conclusion sur l'analyse dynamique	224
4	Analyse harmonique et dimensionnement des filtres	229
1	Objectifs	229
2	Méthode temporelle et méthode fréquentielle	230
3	Le modèle moyen généralisé	230
3.1	La transformée de Fourier vectorielle	231
3.1.1	Le produit de Kronecker	231
3.1.2	Ecriture vectorielle de la transformée de Fourier . . .	231
3.1.3	Transformée de Fourier de la dérivée	232
3.1.4	Représentation matricielle du produit de convolution	232
3.2	Série de Fourier d'une fonction vectorielle multi-variables . . .	234
3.2.1	Série de Fourier d'un produit	234
3.2.2	Application à une équation différentielle linéaire . . .	235
3.2.3	Cas où la matrice A n'est pas constante	235
3.3	Modèle moyen généralisé d'un système bilinéaire	236
3.4	Limitations du modèle	239

3.5	Écriture sous forme LFT	240
4	Analyse fréquentielle d'un système LTP	240
4.1	Présentation des systèmes LTP	240
4.2	Transfert des systèmes LTP	240
4.3	Fonction de transfert harmonique du réseau de convertisseurs	242
4.4	Valeur efficace et ondulation d'un signal harmonique	242
4.4.1	Valeur efficace	242
4.4.2	Amplitude des harmoniques	243
4.4.3	Calcul de l'ondulation à partir des coefficients de Fourier	244
5	Analyse harmonique en régime permanent	245
5.1	Gain statique harmonique	245
5.1.1	Calcul des harmoniques en régime permanent	245
5.1.2	Influence des filtres sur les harmoniques	246
5.2	Influence des harmoniques	247
5.2.1	Augmentation du courant efficace	247
5.2.2	Couplage entre les harmoniques et la valeur moyenne	248
5.3	Transfert harmonique	249
5.3.1	Illustration sur le hacheur série	250
5.3.2	Application sur le réseau de tramways	254
5.4	Influence de l'ordre du modèle	254
5.4.1	Modification de la valeur moyenne	254
5.4.2	Influence sur les pertes	254
5.4.3	Conclusion	255
5.5	Modification de la répartition de puissance	255
5.6	Comment réduire la pollution harmonique ?	256
6	Procédure de dimensionnement des filtres	257
6.1	Dimensionnement classique des filtres d'un hacheurs série	258
6.2	Approximation du taux d'ondulation	259
6.3	Dimensionnement des filtres par la méthode du premier har- monique	261
6.4	Dimensionnement optimal des filtres	263
6.4.1	Mise en équations	263
6.4.2	Application sur le hacheur série	264
6.4.3	Conclusion sur la méthode	265
7	Synthèse du dimensionnement multi-critères	265
8	Conclusion sur l'analyse harmonique	267
Conclusion Générale		271
A Modèle dynamique des éléments du réseau		277
1	Paramètres des sous-stations	277
2	Paramètres des hacheurs	278
3	Paramètres des tramways	278
4	Paramètres de la LAC, des feeders et des rails	279
B Modèle moyen généralisé à l'ordre 1 du hacheur série		281

Bibliographie

287

Table des figures

1.1	Alimentation sous 2×25 kV	16
1.2	Alimentation classique d'un réseau de tramways	17
1.3	Projet HESOP de récupération d'énergie sur la ligne d'essai de La Rochelle [Via08]	20
1.4	Alimentation d'un réseau de tramways par transformateur centralisé .	22
1.5	Alimentation sous 2×750 Vdc à feeder négatif [ACL10]	23
1.6	Sous-station dodécaphasée	23
1.7	Alimentation sous 2×750 Vdc à feeder positif	24
1.8	Alimentation sous 2×750 Vdc à feeder positif avec LAC flottante . .	25
2.1	Contact roue-rail	37
2.2	Adhérence en fonction du glissement relatif	38
2.3	Essieu moteur d'un tramway Citadis [Mul07a]	40
2.4	Caractéristiques du moteur de traction en fonction de la vitesse du tramway et de la tension du bus continu	41
2.5	Cartographie du rendement en fonction du point de fonctionnement . .	42
2.6	Schéma simplifié d'un réducteur de vitesse	44
2.7	Vitesse du tramway (bleu) et limitation de vitesse (rouge) en fonction de la position	51
2.8	Accélération du tramway en fonction du temps	51
2.9	Puissance électrique captée sur le bus continu	52
2.10	Profil de puissance simplifié	53
2.11	Influence du retard et du nombre de tramways sur l'énergie consommée	54
2.12	Frontière de Pareto entre le temps de parcours et la consommation énergétique	55
2.13	Exemple de plan de phase vitesse/position : comparaison entre une conduite à temps minimal et une conduite écologique	56
2.14	Grandeurs électriques dimensionnantes pour le stockage (La Rochelle)	61
2.15	Détail de cellules de commutation IGBT-Diode	64
2.16	Forme d'onde idéalisée	66
2.17	Rendement du convertisseur en fonction du courant	70
2.18	Redresseur triphasé double alternance	71
2.19	Grandeurs caractéristiques d'un redresseur à diodes idéales	72
2.20	Exemple d'application de la méthode nodale	77
2.21	Schéma de la ligne aérienne de contact (exemple pour $x_1 < x < x_2$) .	78
2.22	Méthode nodale avec prise en compte des sources de tension	81
2.23	Réseau de tramways complet, pour $x < x_1$	82
2.24	Modèle moyen équivalent des hacheurs	84

2.25	Réseau de tramways avec ses cinq hacheurs	85
2.26	Réseau de tramways de la Rochelle alimenté par deux sous-stations	89
2.27	Tension et courant sur le réseau en fonction de la position du tramway	90
2.28	Evolution du rendement en fonction de la position	90
2.29	Tension et courant sur le réseau en fonction de la position du tramway pour un réseau déséquilibré	91
2.30	Tension réseau quand la sous-station SS_2 est bloquée	92
2.31	Tension et courant lors du blocage et du déblocage de la sous-station 2	92
2.32	Evolution du rendement énergétique η_e en fonction des tensions d'alimentation	93
2.33	Tensions et courants dans la partie basse tension des hacheurs (V_{hi} , I_{hi} : Tension et courant de la sous-station SS_i , V_l : tension de la LAC à hauteur du tramway).	95
2.34	Comparaison des performances avec et sans hacheurs	95
2.35	Rendement sur cycle avec prise en compte des pertes	96
2.36	Evolution du rendement énergétique	97
2.37	Pertes dans le réseau	97
2.38	Couplage électro-mécanique	99
2.39	Rendement énergétique en fonction de la tension E_1 , pour $E_2 = 1500V$	109
2.40	Comparaison du rendement énergétique entre sous-station réversible et sous-station non-réversible en fonction de la tension E_1	110
2.41	Tension optimale des redresseurs	110
2.42	Comparaison des grandeurs électriques avec la sous-station SS_2 non-réversible (trait plein) ou réversible (trait-pointillé)	111
2.43	Commande optimale des sous-stations sans contrainte sur E_2	112
2.44	Coefficients de Lagrange de la contrainte en tension HVDC des hacheurs	112
2.45	Evolution des coefficients de Lagrange, en fonction des contraintes	113
2.46	Variation du rendement η_e en fonction de la tension V_{max} autorisée sur le réseau	114
2.47	Variation du rendement η_e en fonction de la loi de commande	115
2.48	Grandeurs électriques caractéristiques en selon la loi de commande, pour une tension de référence de 790 V	116
2.49	Evolution des pertes et du rapport cyclique selon les lois de commande	116
2.50	Tension hacheur pour une régulation en courant	118
2.51	Front de Pareto entre le rendement et la répartition du courant	119
2.52	Commande optimale des sous-stations et des hacheurs	120
2.53	Pertes dans les convertisseurs	120
2.54	Exemple d'analyse de sensibilité	122
2.55	Influence de la position des hacheurs H_1 et H_2 sur le rendement énergétique	123
2.56	Recherche de l'emplacement optimal des hacheurs	124
2.57	Profil de courant tramway	126
2.58	Influence du pas de discrétisation (Δ_x) sur la recherche du maximum du rendement énergétique	127

2.59	Loi de commande optimale en fonction de la position du tramway pour deux positions de hacheurs différentes	127
2.60	Potentiel de récupération (COP) en fonction de la tension sous-station	130
2.61	Répartition des courants en régime permanent	131
2.62	Répartition optimale des courants en régime permanent	132
3.1	Transfert de puissance de A vers B	146
3.2	Représentation équivalente sous forme de bond graph et de schéma bloc d'un transfert de puissance de A vers B	147
3.3	Interconnexion des blocs du bond graph	148
3.4	Exemple d'application de la méthodologie bond graph sur un nœud inductif	153
3.5	Bond graph causal du schéma figure 3.4	153
3.6	Problème standard général	155
3.7	Produit étoilé de Redheffer	155
3.8	Hacheur série avec ses filtres	157
3.9	Bond graph du hacheur série avec ses filtres	158
3.10	Interconnexion entre les sous-systèmes du hacheur	159
3.11	Interconnexion détaillée entre les sous-systèmes du hacheur	161
3.12	Système concaténé	161
3.13	Réponse transitoire de la tension de sortie et du courant d'entrée	163
3.14	Bond graph simplifié du réseau de tramways	165
3.15	Modèle topologique du réseau de tramways sous forme LFT	166
3.16	Comparaison du modèle topologique et du modèle échantillonné	169
3.17	Exemple d'illustration du calcul du modèle moyen	170
3.18	Obtention du modèle moyen en moyennant la cellule de commutation.	171
3.19	Exemple de calcul des coefficients de Fourier pour un créneau	174
3.20	Comparaison entre le modèle moyen (noir) et le modèle topologique suite à un échelon de 100A sur I_{out}	176
3.21	Simulation dynamique du réseau de tramways	179
3.22	Réponse à un échelon $\Delta\alpha_3 = 0.001$ sur la commande de H_3	180
3.23	Représentation d'un réseau multi-convertisseurs sous la forme LFT	181
3.24	Représentation d'un réseau multi-convertisseurs sous la forme LFT, en intégrant les paramètres variants	182
3.25	Ecriture LFT d'un système. M est constant et Δ variable.	183
3.26	Ecriture LFT du hacheur, en considérant des incertitudes sur les filtres	186
3.27	Réponse de la tension v_{out} à un échelon de 1 A sur I_{out} en présence d'incertitudes	187
3.28	Ecriture LFT du hacheur, en considérant les filtres et la commande variable	188
3.29	Calcul des courants hacheurs à l'équilibre lorsque la position de T_2 est inconnue	189
3.30	Réponse du courant des hacheurs à un échelon de courant du tramway T_2 , avec une incertitude de 50% sur l'inductance du filtre de sortie du hacheur H_2	190
3.31	Valeur singulière du transfert vers la tension de sortie du hacheur	193
3.32	Diagramme de bode et valeur singulière maximale entre les courants tramway et le courant I_{h2} en basse fréquence	193

3.33	Variation du courant I_{H2} en fonction des courants I_{T1} et I_{T2}	194
3.34	Forme générale d'un système en boucle fermée	196
3.35	LFT d'un système, avec son correcteur, en présence d'incertitude	197
3.36	Gabarit de performance $1/W_P$	200
3.37	Calcul des pertes	201
3.38	Gabarit de performance temporelle de la tension LAC [Cen]	202
3.39	Surtension sur la LAC	202
3.40	Robustesse en performance avec incertitude sur la position du tramway	203
3.41	Modèle de dimensionnement	204
3.42	Modèle de dimensionnement sous forme standard compact	205
3.43	Tramway avec stockage embarqué	206
3.44	Répartition des courants entre la LAC et le stockage	214
3.45	Gestion du stockage sur un cycle	215
3.46	LFT en boucle fermée du système (3.190)	222
3.47	Pertes dans le réseau suite à une impulsion unitaire du courant tramway	223
3.48	Couplage structure commande	224
4.1	Réponse du coefficient de Fourier $\langle v_{C2} \rangle_1$ à un échelon de courant	238
4.2	Comparaison entre le modèle exact, le modèle moyen généralisé à l'ordre 1 et le modèle moyen à l'ordre 0 en régime permanent	238
4.3	Comparaison des modèles lors d'un échelon de courant de 100A sur I_{out}	239
4.4	LFT pour le calcul des harmoniques	246
4.5	Influence du filtre d'entrée sur les harmoniques	247
4.6	Evolution des pertes en fonction de la capacité du filtre d'entrée	248
4.7	Variation de la valeur moyenne en fonction de l'inductance d'entrée	249
4.8	Hacheur série simplifié débitant sur charge RLC	250
4.9	Diagramme de Bode du hacheur avec filtre LC	251
4.10	Transfert harmonique d'ordre 1 du hacheur série	251
4.11	Diagramme de Bode du hacheur avec ses harmoniques (Zoom)	252
4.12	Battement de la tension de sortie	253
4.13	Influence de l'ordre du modèle sur les pertes	255
4.14	Répartition de la puissance entre les hacheurs en fonction de l'inductance du filtre de sortie du hacheur H_2	256
4.15	Comparaison du modèle classique et du MMG ₁ et du MMG ₁ simplifié pour le calcul du taux d'ondulation	260
4.16	Taux d'ondulation normalisé ΔI_{L2} en fonction de l'ordre du modèle	261
4.17	Dimensionnement optimal des filtres du hacheur série	264
4.18	Modèle de dimensionnement multi-critères	266
4.19	Couplages pris en compte dans le dimensionnement d'un système multi-convertisseurs	272
A.1	Modèle d'une sous-station	277
A.2	Modèle d'un hacheur	278
A.3	Modèle du tramway	279

Liste des tableaux

1.1	Rejet en g.eqCO ₂ /km par voyageur pour les différents moyens de transport terrestres [Wik]	9
2.1	Constante de la loi couple vitesse pour un moteur Arpege MC 4HGA1433, avec le couple en N.m et la vitesse en tr/min [Als]	41
2.2	Coefficients de résistance à l'avancement pour une vitesse en m/s [Als]	44
2.3	Limites des accélérations et du jerk en mode traction et freinage	46
2.4	Arrêts sur la ligne d'essai de la Rochelle	51
2.5	Paramètres du réseau en fonction de la position du tramway	79
2.6	Grandeurs de base pour le passage en p.u.	88
2.7	Comparaison des lois de commande	115
2.8	Répartition moyenne des courants entre les hacheurs (en % du courant nominal)	117
2.9	Sensibilité du rendement énergétique par rapport aux paramètres de contrôle	122
2.10	Sensibilité du rendement énergétique par rapport à la position des hacheurs	125
2.11	Position optimale des hacheurs	125
2.12	Position optimale des hacheurs avec la nouvelle répartition de courant	126
3.1	Expression des différentes variables en causalité intégrale	150
3.2	Variables d'entrée et de sortie des filtres	159
3.3	Position et courant consommé par les tramways	165
3.4	Hacheur série selon ses deux configurations possibles	171
3.5	Tension et courant de sortie à l'équilibre pour les hacheurs	179
3.6	Influence de la fonction objectif sur le bilan énergétique en kWh et rendement	216
4.1	Grandeur caractéristique du hacheur série en régime permanent	245
4.2	Comparaison des méthodes de dimensionnement	263
A.1	Paramètres des sous-stations	278
A.2	Paramètres des hacheurs	278
A.3	Paramètres du filtre d'entrée	279
A.4	Paramètres de la supercapacité et de son hacheur	279
A.5	Paramètres de la LAC et des feeders	279

Acronymes

AC Alternative Current

CEM Compatibilité Electro-Magnetique

DC Direct Current

EDA Equation Différentielle Algébrique

EDO Equation Différentielle Ordinaire

ESR Equivalent Series Resistor

HVDC High Voltage Direct Current

IGBT Insulated Gate Bipolar Transistor

LAC Ligne Aérienne de Contact

LFT Linear Fractional Transformation

LPV Linear Parameter Variant

LQ Linéaire Quadratique

LQG Linéaire Quadratique Gaussienne

LTI Linear Time Invariant

LTP Linear Time Periodic

LVDC Low Voltage Direct Current

MIMO Multi Input Multi Output

MLI Modulation de Largeur d'Impulsion

MM₀ Modèle Moyen à l'ordre 0

MMG₁ Modèle Moyen à l'ordre 1

MNA Methode Nodale Modifiée

MOSFET Metal Oxyde Semiconductor Field Effect Transistor

SISO Single Input Single Output

SS Sous Station

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction Générale

La sobriété énergétique est un des grands enjeux de ce siècle. Elle s'applique tout particulièrement au domaine des transports où le vecteur électrique a un rôle important à jouer. Le chemin de fer et ses déclinaisons urbaines font ainsi leur grand retour dans le paysage. Le nombre de nouvelles lignes de tramways construites ces dernières années montre l'intérêt que les municipalités portent au développement des transports en commun pour réduire les rejets de gaz à effet de serre.

Pour se mouvoir, un tramway va capter de l'énergie au travers d'une ligne électrique aérienne. Cette énergie provient du réseau de distribution, et est convertie pour s'adapter aux spécificités du réseau de tramways. La distribution s'effectue alors en courant continu sous 750 V. Ce mode d'alimentation induit des contraintes qui impacteront le rendement énergétique du réseau de tramways.

Afin d'améliorer l'efficacité du réseau d'alimentation, une nouvelle architecture de puissance est ainsi proposée pour pallier aux limitations des réseaux actuels. Cette structure s'articule autour de l'introduction de convertisseurs d'électronique de puissance DC/DC créant un réseau intermédiaire à courant continu. L'intégration de ces convertisseurs offre de nouvelles perspectives, en permettant le contrôle des flux énergétiques et la tension d'alimentation. Cependant, de nouvelles problématiques apparaissent concernant leur commande et leur dimensionnement.

La première étape pour la validation de la structure passe par sa simulation qui permet d'évaluer les gains énergétiques envisageables, et de justifier l'intérêt de la nouvelle architecture de puissance. La simulation est aussi utilisée pour le dimensionnement des filtres et la synthèse des lois de commande.

Un réseau de tramways est un système complexe, associant des charges mobiles dans le temps et dans l'espace (les tramways) à des convertisseurs d'électronique de puissance ayant un comportement fondamentalement non linéaire. Les nombreux couplages apparaissant aussi bien entre les parties électrique et mécanique, qu'entre la structure du réseau, ses performances énergétiques, sa commande ou encore la qualité de sa tension, rendant nécessaire l'étude du réseau dans son intégralité. La simulation d'un tel système par des méthodes classiques n'est pas envisageable, et de nouveaux outils doivent être proposés pour l'étude du réseau. Le choix du modèle sera alors déterminant pour intégrer ces phénomènes aux caractéristiques temporelles si distinctes.

Ces problématiques s'appliquent à n'importe quel réseau multi-convertisseurs. Elles seront analysées au travers de la nouvelle structure d'alimentation d'un réseau de tramways. L'objectif est de proposer un modèle et un outil permettant d'appréhender ces réseaux complexes en ayant une vision système.

Le chapitre 1 présentera un état de l'art sur les réseaux de tramways et leur évolution à travers leurs architectures d'alimentation. Après avoir introduit notre ar-

chitecture, et l'avoir comparée qualitativement, nous détaillerons les problématiques et verrons scientifiques auxquels nous serons confrontés avec ces réseaux complexes.

Le chapitre 2 sera principalement consacré à l'étude énergétique du réseau. Un modèle simplifié permettra ainsi d'évaluer le rendement sur cycle de fonctionnement en étudiant l'influence de la commande et de l'emplacement des convertisseurs sur l'optimum énergétique.

Dans le chapitre 3, nous introduirons une méthodologie pour construire automatiquement le modèle d'état d'un réseau multi-convertisseurs. L'influence des commutations sera négligée permettant d'obtenir un modèle bilinéaire qui pourra s'exprimer sous la forme d'une transformée linéaire fractionnaire. Nous montrerons que ce formalisme permettra en outre d'intégrer les paramètres incertains et les paramètres de dimensionnement dans l'étude des performances du réseau. Une loi de commande des moyens de stockage sera proposée en fin de chapitre pour améliorer l'efficacité du système.

Au chapitre 4, la qualité de tension sera abordée en utilisant le même formalisme de modélisation qu'au chapitre précédent. Les couplages entre les harmoniques et les performances énergétiques seront dans un premier temps mis en avant. Une méthode originale sera ensuite proposée afin d'établir un lien entre la structure (les filtres) et les harmoniques. Enfin, un dimensionnement optimal permettant de respecter les contraintes harmoniques tout en minimisant les pertes sera proposé.

Une dernière partie plus prospective viendra en conclusion de cette méthodologie de conception, pour tenir compte des différentes interactions au sein d'un réseau multi-convertisseurs afin de proposer une structure et une commande optimales en intégrant l'ensemble des couplages.

Ce travail a conduit à la publication et à la présentation orale de deux communications dans des conférences internationales :

R. VIAL, D. RIU, N. RETIÈRE : Simulating calculations and optimization design of a new HVDC supply power for light rail system, *IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, p.2364-2369, Nov. 2010

R. VIAL, D. RIU, N. RETIÈRE : A new methodology to optimize the efficiency of a multi-sources and multi-converters system under harmonic constraints. Application to light rail system, *Power Electronics and Applications (EPE 2011), Proceedings of the 2011-14th European Conference on*, p.1-10, Sept. 2011

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DE LA STRUCTURE ET DE LA PROBLÉMATIQUE

Chapitre 1

Présentation de la structure et de la problématique

Les transports ont permis aux sociétés modernes de se développer. Ils sont une source d'échange et de liberté et sont devenus indispensables.

Ils ont toutefois l'inconvénient de représenter une part importante de la consommation énergétique et des rejets de CO_2 . Avec plus de 50 Mtep d'énergie finale consommée en 2010, les transports représentent à eux seuls environ 32% des dépenses énergétiques de la France [Com10], avec un rejet CO_2 de plus de 141 millions de tonnes en France en 2005 [Age]. En ajoutant les craintes liées à l'épuisement des ressources fossiles, les enjeux liés aux transports sont fondamentaux [Ins].

Les transports en commun sont ainsi une solution pour limiter la consommation énergétique et les dépenses liées au transport. C'est tout particulièrement le cas en ville, notamment avec les métros ou les tramways, qui font leur grand retour depuis 20 ans.

Ainsi, les réseaux de tramways offrent une alternative intéressante pour désengorger les centres villes.

Après une présentation des infrastructures ferroviaires et du matériel roulant, l'architecture de puissance actuelle est développée. Cette architecture présente certaines caractéristiques qui limitent son efficacité et de nouvelles structures de puissance sont proposées pour améliorer le rendement d'un réseau de tramways.

L'architecture retenue repose sur l'utilisation de convertisseurs d'électronique de puissance DC/DC, qui permettent de gérer les flux de puissance, et offrent des degrés de liberté supplémentaires. L'étude et le dimensionnement de cette architecture vont permettre de formaliser la problématique de ces travaux, qui se veulent bien plus larges en proposant des outils et des méthodes universels pour l'étude de systèmes complexes multi-convertisseurs et/ou évolutif dans le temps. Indépendamment du cadre applicatif, les verrous scientifiques associés à ces structures sont présentés en fin de chapitre.

1 Généralités sur le transport ferroviaire et les tramways

1.1 Historique du transport ferroviaire

1.1.1 Les trains

L'aventure du rail a commencé le 21 février 1804 au pays de Galles, où Richard Trevithick testa pour la première fois sa locomotive à vapeur atteignant la vitesse de 8 km/h. Durant près d'un siècle, la vapeur est restée le seul moyen de propulsion capable de concurrencer la traction animale. La première locomotive électrique développée par Siemens date de 1879. Dès lors, la traction électrique s'impose, les lignes étant peu à peu électrifiées et le réseau s'étendant progressivement.

Les années 1950 ont vu apparaître les premiers véhicules diesels électriques, largement utilisés pour bénéficier des capacités de la motorisation électrique (couple au démarrage, régulation de vitesse, ...). Associée à une source autonome d'énergie (groupe diesel), cette solution évite le recours systématique à l'électrification des lignes. Parallèlement, et durant la même période, l'électrification des lignes se fait majoritairement sous courant alternatif. S'en suit la première exploitation commerciale du TGV conçu par Alstom en 1981, qui a atteint depuis la vitesse fulgurante de 575 km/h [LP07].

1.1.2 Les tramways

Né au États-Unis dans les années 1830, le tramway fut à son origine une hippomobile sur rails. Le premier tramway électrique date lui de 1881, conçu par W. Siemens. Le tramway électrique s'est répandu et en 1913, on comptait 114 réseaux urbains en France. La distance couverte par les réseaux de tramways atteignait 510 km en 1933, puis commença son long déclin avec l'arrivée massive des véhicules automobiles dans les années 30. Les centres villes sont repensés pour favoriser l'insertion des voitures, et les rails sont arrachés. Le tramway désuet est peu à peu abandonné.

Il a fallu attendre les années 1970 avec le choc pétrolier et la saturation des centres villes, pour voir émerger des politiques de transports en commun. En février 75, Marcel Cavallé, secrétaire d'état aux transports, propose à huit villes de réintroduire le tramway. Nantes en 1985 sera la première ville à se doter d'un tramway moderne, suivie de Grenoble en 1987.

Le tramway a aujourd'hui retrouvé ses lettres de noblesse. De nombreux projets, partout dans le monde, sont en cours pour l'insertion massive de ce mode de transport.

1.2 Avantages et inconvénients du transport par voie ferrée

1.2.1 Rapide comparaison du rail et de la route

La mise en place d'une ligne de chemin de fer représente un investissement important. Le coût moyen du kilomètre est évalué entre 8 M€/km et 66 M€/km, en fonction des ouvrages d'art nécessaire. Ce coût est bien plus élevé qu'une autoroute

par exemple. De plus, le prix d'une rame de TGV est de l'ordre de 30 M€¹. Le développement du train est donc handicapé par les investissements initiaux très importants.

Par contre, le transport par voies ferrées s'avère plus rapide, grâce à ses sites dédiés exempts de tout obstacle. C'est surtout sa sobriété énergétique qui constitue un atout majeur. En présentant des frottements faibles, en plus du guidage, le rail permet de minimiser la consommation énergétique des véhicules.

Un autre avantage majeur est la possibilité d'utiliser l'électricité d'origine nucléaire pour alimenter les rames. Le train est en effet, à l'heure actuelle, le seul moyen de transport pouvant utiliser l'électricité directement, et en grande quantité (de l'ordre de 6MW par rame). L'énergie nécessaire pour faire avancer un train est évaluée à 10 Wh/t.km pour un train de fret à faible vitesse et monte jusqu'à 50 Wh/t.km pour un TGV [Bau01]. Le prix de l'énergie ne représente alors que 5% du prix du billet sur un TGV.

Sont associés également les classiques d'indépendance énergétique et de réduction de la pollution. Le tableau 1.1 récapitule la contribution en g.eqCO₂/km par voyageur pour les différents moyens de transport terrestres en France.

	Consommation énergétique	Amortissement construction	Usure de l'infrastructure	Total
Autorail X 73 500	172,3	12,9	7,2	192,4
Autorail XGC tri caisse	102,1	8,7	4,8	115,6
Automotrice tri caisse	11,4	8,1	4,5	23,9
TGV Réseau	5,6	1,7	2,6	9,9
TGV Duplex	3,7	1,1	1,8	6,6
Véhicule particulier périurbain	166,7	33,3	16,7	216,7
Véhicule particulier longue distance	72,7	18,2	9,1	100,0
Autocar	31,2	1,5	5,5	38,2

TABLE 1.1 – Rejet en g.eqCO₂/km par voyageur pour les différents moyens de transport terrestres [Wik]

Ce bilan est cependant à nuancer en fonction des pays, car il dépend du panel de fourniture électrique. La France, grâce à son électricité nucléaire, possède en effet une électricité rejetant peu de CO₂.

1.2.2 Pourquoi tant d'engouement pour le tramway ?

Comme véhicule de transport en commun, le tramway concurrence actuellement le métro et les bus. Le métro est ainsi un moyen de transport très efficace pour parcourir de grandes distances. Sa vitesse de circulation est élevée, tout comme son

1. Contrat de 400 M€ pour 14 TGV au Maroc en 2010

débit. Pour les villes de faible superficie, le recours à un réseau de métro ne se justifie donc pas.

Le tramway, cinq fois moins cher [Mul07b], compense sa vitesse commerciale plus faible par un accès direct ne nécessitant pas de descendre sous terre. Il permet également de rapprocher les arrêts et s'adapte tout particulièrement aux villes moyennes. Un tramway permet de transporter plus de personnes qu'un bus. Il dispose d'un site dédié lui permettant d'avoir des vitesses plus élevées, tout en consommant moins d'énergie.

Le tramway est aussi réputé pour être un véhicule silencieux, fonctionnant quelles que soient les conditions climatiques, mais l'argument majeur en faveur du tramway reste sûrement l'image positive qu'il véhicule. Les municipalités apprécient ce mode de déplacement synonyme de développement durable, permettant de refaçonner les centres villes et de regagner du terrain sur l'automobile.

Le tramway a néanmoins certains désavantages, comme les travaux longs et coûteux nécessaires à son implantation, sa vitesse de déplacement que ses détracteurs trouvent trop faible ou les lignes aériennes de contact qui peuvent défigurer les centres villes.

1.3 Le matériel roulant

Quel que soit le type de véhicule, la traction est toujours réalisée via des moteurs électriques. Du métro au train de fret, ce sont toujours eux qui, via un réducteur, vont entraîner les essieux moteurs. L'alimentation de ces moteurs s'effectue soit à partir d'une ligne d'alimentation, soit à partir de stockage embarqué, soit à partir d'un alternateur accouplé à un groupe diesel.

Pourquoi avoir recours systématiquement à la traction électrique ? La raison provient essentiellement de la capacité du moteur électrique à produire du couple, même aux faibles vitesses. De plus, il fonctionne sans boîte de vitesses, pièce mécanique complexe et coûteuse, en autorisant une connexion via un simple réducteur. Pour que la traction électrique soit possible, il faut cependant être capable de faire de la vitesse variable.

1.3.1 La vitesse variable en ferroviaire

La possibilité de faire avancer un train repose sur la capacité à faire varier la vitesse de rotation des moteurs de traction. L'évolution des motorisations est donc étroitement liée à l'évolution des convertisseurs d'alimentation. Nous n'évoquerons ici que les alimentations des moteurs alternatifs désormais unique mode de traction envisagé dans les projets ferroviaires.

a) Évolution de l'électronique de puissance

Tout cela a été possible grâce aux progrès réalisés dans les interrupteurs d'électronique de puissance. Le thyristor est le composant qui accompagna cette révolution. D'un fonctionnement semblable à la diode, un thyristor possède en plus une gâchette lui permettant un amorçage commandé. Le blocage, lui, reste spontané et est déclenché dès que le courant passe en dessous du courant de maintien du thyristor.

Le thyristor était déjà utilisé pour réaliser des redresseurs commandables, profitant de la tension alternative pour assurer le blocage du composant. En courant continu, une difficulté supplémentaire apparaît. Un fois amorcé, il est impossible de bloquer l'interrupteur car le courant reste positif. La solution a été trouvée, en ajoutant un circuit d'extinction assurant, grâce à des composants auxiliaires, une inversion du courant et donc le blocage de l'interrupteur principal.

La mise au point de nouveaux composants a permis de réaliser des convertisseurs plus simples, plus compacts et moins chers. Le GTO (*Gate-Turn-Off Thyristor*) est le premier composant commandable à l'ouverture et à la fermeture, le tout avec des calibres en courant s'élevant à 6kA et des calibres en tension tout aussi importants. Cette montée en fréquence a permis une réduction drastique des besoins de filtrage.

b) Utilisation des machines alternatives

Bien que facile à commander, le moteur à courant continu a un talon d'Achille : son collecteur. Cette pièce en mouvement composée de balais en graphite frottant sur des barreaux en cuivre permet d'alimenter l'induit situé au rotor, tout en assurant l'orthogonalité du champ inducteur avec les enroulements d'induit. Le collecteur voit ainsi passer le courant d'induit qui peut être très élevé. De plus, il assure les commutations sur un circuit très inductif entraînant au passage des arcs électriques. Le collecteur est donc une pièce cruciale, sujette à des contraintes importantes. Les balais doivent être changés régulièrement et le collecteur rectifié, ce qui demande une maintenance et un temps d'immobilisation conséquent.

Il a donc disparu aux bénéfices de machines alternatives : la machine asynchrone et la machine synchrone. Dans une machine alternative, la puissance transite principalement par le stator qui est fixe. Il n'y a plus besoin de collecteur mécanique, mais une commande adaptée est cette fois obligatoire pour recréer l'orthogonalité du flux et du courant.

La machine synchrone possède un fort couple au démarrage et une excellente densité de puissance. Sa commande est facile si l'on dispose d'un système de tension pilotable, mais son coût à l'achat et à l'entretien reste plus élevé que sa concurrente, la machine asynchrone. Cette dernière est réputée pour sa fiabilité et sa robustesse, nécessitant très peu de maintenance. Son prix est plus faible, ainsi que sa densité de puissance, mais l'inconvénient majeur provient de la difficulté liée à la commande. La machine à courant continu et la machine synchrone possèdent en effet toutes deux, un circuit inducteur et un circuit induit, alors que la machine asynchrone ne possède qu'une seule entrée pilotable au stator.

Une machine asynchrone peut, si elle est connectée directement à une caténaire triphasée, être pilotée en vitesse uniquement en insérant un rhéostat au niveau du rotor, impliquant l'usage de machine à rotor bobiné. D'un autre côté, la machine synchrone développe un couple nul à vitesse différente de sa vitesse de synchronisme, et ne peut pas être utilisée sur un réseau à fréquence fixe.

Il apparaît donc indispensable, si on veut faire de la vitesse variable avec des machines alternatives, d'être capable de générer un système de tensions triphasés équilibrés dont on peut modifier l'amplitude et la fréquence pour alimenter le stator. La première tentative a eu lieu sur les CC 14000 en 1957. Un convertisseur tournant composé d'une machine à courant continu entraînant un alternateur était utilisé pour générer les tensions qui alimentaient à leur tour une machine asynchrone. Trente ans

plus tard, les progrès de l'électronique de puissance ont rendu possible la réalisation d'onduleurs, capables de générer un système de tensions alternatives, à partir d'une tension continue.

Le moteur synchrone s'est tout d'abord imposé car sa commande est plus simple. L'onduleur est utilisé comme un collecteur électronique et il permet de générer un courant en quadrature avec la position de l'arbre de manière à assurer l'orthogonalité du flux et du courant. Il suffit alors de régler l'amplitude du courant pour contrôler le couple de la machine synchrone, comme s'il s'agissait d'une machine à courant continu. La simplicité de la commande a justifié l'utilisation de la machine synchrone au début des années 1980.

Cependant, depuis le milieu des années 90, le moteur asynchrone est devenu le plus utilisé en traction, sa commande étant enfin possible en vitesse variable de manière efficace. Une multitude de lois de commande différentes peuvent être mises en œuvre grâce aux onduleurs. Les commandes de type scalaire en U/f ne sont pas appropriées pour les chaînes de traction car le couple n'est contrôlé qu'en régime permanent. De plus, ces commandes ne contrôlent absolument pas les courants absorbés lors des phases de démarrage. Il est alors impératif de se tourner vers les techniques de commande dites vectorielles. On retrouve dans cette catégorie les commandes DTC (*Direct Torque Control*), ou les commandes à flux rotorique orienté. Ces dernières sont les plus utilisées et permettent un découplage mathématique du flux et du courant nécessaire à la création du couple. La machine asynchrone se commande alors comme une machine à courant continu.

Le moteur synchrone est redevenu à la mode depuis peu. C'est en effet lui qui a été choisi pour la motorisation du tout récent AGV (Automotrice à Grande Vitesse) d'Alstom, permettant d'obtenir un rapport poids/puissance très élevé [Deb09]. Les moteurs de 800 kW atteignent une puissance massique supérieure à 1 kW/kg.

1.3.2 La motorisation des tramways

Comme son grand frère le train, le tramway a connu une évolution semblable de la motorisation. Jusqu'au début des années 1990, le moteur de traction a été la machine à courant continu tétrapolaire avec excitation série. Encore une fois, la machine à courant continu souffrait de son collecteur fragile et de sa densité de puissance faible. C'est ce moteur qui équipa les premiers tramways dits TSF (Tramway Français Standard).

Depuis l'avènement de l'onduleur à IGBT, la motorisation à machine asynchrone s'est massivement imposée sur le tramway.

1.3.3 Alimentation électrique à bord des véhicules

L'énergie utilisée pour alimenter le groupe de traction peut provenir d'une source autonome ou peut être distribuée le long de la ligne.

Dans le cas d'un groupe diesel, ce dernier entraîne un alternateur le plus souvent synchrone, générant un système de tensions polyphasés. Ces tensions sont ensuite redressées et filtrées. Cette solution est la moins coûteuse en terme d'investissement et est massivement utilisée dans le monde.

L'alimentation peut se faire directement sous forme électrique. Un système de frotteur ou de pantographe permet de capter le courant d'une ligne électrique. Le

courant passe un disjoncteur et est ensuite filtré. Avant d'alimenter le bus continu qui alimente les onduleurs de traction et les auxiliaires, les trains fonctionnant en alternatif doivent redresser puis filtrer le courant (et éventuellement abaisser la tension en utilisant un transformateur²). Cette solution est classiquement utilisée pour les réseaux urbains ou les réseaux chargés, permettant de rentabiliser l'investissement.

1.4 Les infrastructures fixes

Quel que soit le type de motorisation ou d'alimentation électrique choisi, certains éléments sont nécessaires pour assurer le roulement, le guidage ou encore l'amenée du courant jusqu'au véhicule. Les architectures électriques seront abordées dans la section suivante.

1.4.1 Les rails

En plus d'assurer la fonction de guidage et de supporter le poids de la rame, les rails sont couramment utilisés pour transmettre les signaux de communication et assurent également la fonction de retour du courant. Dans la majorité des cas, le courant revient à la sous-station par les rails de guidage, mais il peut arriver qu'un troisième, voire un quatrième rail, soit utilisé. Les rails reposent sur une plate forme dédiée, recouverte de ballast pour les trains, ou pavée et engazonnée pour les véhicules urbains.

Particularité des tramways

Les rails doivent être parfaitement isolés pour éviter les phénomènes de courant vagabond, qui peuvent être particulièrement destructeurs avec les alimentations en courant continu. En effet, si les rails ne sont pas isolés, un courant va être dévié dans la terre, et aura tendance à circuler dans les pièces métalliques enterrées comme les canalisations, entraînant d'importants problèmes de corrosion par réaction d'oxydo-réduction.

Différentes solutions peuvent être envisagées pour le couplage des rails à la terre [Yu98], mais la plus courante consiste à isoler les rails du sol. Les rails reposent donc sur une semelle isolante, et sont noyés dans une mousse qui permet d'obtenir une résistance de fuite de l'ordre de 0.01 S/km [CCAE05], [SAK06]. La résistance longitudinale d'un rail de roulement Cogifer, de type 35 GP, est de 0.015 mΩ/m [Mor05]. Les rails sont eux régulièrement reliés entre eux pour diminuer leur résistance apparente.

L'utilisation d'un rail flottant va avoir comme conséquence une élévation de la tension du rail lors des phases de traction. Il en résulte un danger réel de risque électrique de par la facilité d'accès des rails. Pour lutter contre cette élévation de tension, on trouve des dispositifs aux endroits critiques qui raccordent le rail à la terre, si sa tension dépasse les 120V.

2. Travaillant sous fréquence industrielle, et dépassant classiquement les MVA, son volume et son poids sont de problème de taille

1.4.2 Les caténaires, les lignes aériennes de contact, et les autres moyens d'alimentation

Dans le cas des lignes électrifiées, l'amenée de courant jusqu'au pantographe se fait principalement par des conducteurs électriques situés au dessus de la ligne. On distingue la Ligne Aérienne de Contact (LAC), composée simplement d'un ou deux fils de contact, de la caténaire, plus complexe. Ce type de suspension est composé d'un fil de contact suspendu à un autre câble porteur par des pendules, permettant d'assurer une meilleure planéité et une vitesse de déplacement autorisée plus élevée.

Il est par ailleurs courant pour les métros d'avoir une alimentation par un troisième rail. Ce dernier possède une résistance plus faible qu'un câble, ce qui diminue les pertes en ligne. Il est également plus approprié au gabarit réduit des tunnels et moins coûteux à installer qu'un système de caténaire.

Particularité des tramways

L'alimentation d'un tramway s'effectue avec une LAC, les vitesses de déplacement restant relativement faibles (< 60 km/h). Elle est généralement constituée d'un câble de cuivre de section égale à 150 mm^2 , présentant une résistivité de $0.119 \text{ m}\Omega/\text{m}$. La LAC peut être doublée sur certaines sections éloignées des sous-stations, pour réduire sa résistance. De plus, des connexions électriques ont lieu régulièrement entre les LAC de deux voies, dans le même objectif. Il est intéressant de noter que cette résistance linéique varie avec la fréquence [Mor05].

La LAC, malgré sa relative simplicité, est souvent jugée inesthétique. D'autres solutions peuvent alors être imaginées pour alimenter les véhicules. Le troisième rail ne peut être envisagé pour des raisons évidentes de sécurité, mais d'autres solutions permettent de se passer de LAC.

Il existe ainsi l'alimentation par caniveau, qui consiste à enterrer un rail d'alimentation. Une fente dans le sol, permet à un frotteur d'accéder à ce rail, tout en empêchant les passants de l'approcher. Ce système reste cependant très complexe et dangereux, et il fût progressivement abandonné.

L'alimentation par le sol (APS) est un système développé par Innorail, filiale d'Alstom [Mor05]. Elle consiste cette fois à disposer un rail d'alimentation en surface, séparé en plusieurs cantons plus courts qu'un tramway, isolés les uns des autres. Un système de détection permet d'alimenter uniquement le tronçon sur lequel le tramway se situe, permettant de l'alimenter tout en évitant de laisser des pièces nues sous tension à portée de main (de pied!). Ce système a été expérimenté à Bordeaux en 1999, mais n'a pu être exploité normalement qu'en 2004.

Quelle que soit la méthode d'alimentation, les critères de sécurité et de fiabilité sont omniprésents. Cependant cette alimentation doit se faire avec le moins de pertes possible tout en garantissant un respect du plan de tension imposé par les normes ferroviaires.

Des travaux actuels portent également sur l'alimentation par le sol grâce à un coupleur électromagnétique, permettant une recharge en station, ou une alimentation le long des voies [SFM⁺09].

1.4.3 Les sous-stations d'alimentation

Nous avons vu comment l'énergie était captée par les véhicules, et comment elle était acheminée jusqu'aux moteurs. Nous allons dès maintenant présenter les éléments amenant cette énergie électrique depuis le réseau de distribution, voire le réseau de transport. La structure des sous-stations assurant cette distribution va être intimement liée au type de réseau alimenté.

Les sous-stations sont le point d'entrée de l'énergie sur le réseau. Elles incluent les dispositifs de protection, de conversion, de comptage, etc.

Les sous-stations des grandes lignes sont raccordées au réseau de transport (90kV ou plus), alors que les sous-stations utilisées pour alimenter un réseau urbain seront essentiellement raccordées au 20kV. Après un étage de raccordement au réseau, composé de sectionneurs et disjoncteurs, la tension est abaissée par des transformateurs.

Dans le cas d'une distribution alternative, le passage d'un réseau triphasé à un réseau monophasé doit être exécuté en limitant les déséquilibres (transformateur en V, montage Scott, ...). Les réseaux continus, eux, utilisent des convertisseurs statiques pour assurer le passage de l'alternatif au continu.

A noter que les disjoncteurs continus sont de type ultra-rapide. Ils représentent une pièce particulièrement fragile et coûteuse.

Particularité des tramways

Les sous-stations d'un réseau de tramways sont construites sur le même principe que celles d'un réseau de trains traditionnel. La puissance d'une sous-station classique est comprise entre 1 MW et 5 MW. Elle est connectée sur le réseau 20 kV avec un transformateur permettant de baisser la tension à 585 V.

La majorité des sous-stations utilisent à l'heure actuelle un simple redresseur à diodes pour assurer la conversion en courant continu. La tension à vide d'une sous-station est de 790 V et son taux d'ondulation résiduelle est inférieur à 4%.

Ces redresseurs sont source d'une pollution harmonique assez élevée et basse fréquence. Une solution pour réduire cette pollution, et l'ondulation résiduelle sur le réseau DC, est d'utiliser un redresseur dodécaphasé. Un transformateur à deux enroulements de sortie étoile/triangle va ainsi créer deux systèmes de tensions triphasés décalés de $\pi/3$. Un redresseur est alors placé à la sortie de chaque enroulement, et les deux redresseurs sont connectés en série.

Ces sous-stations génèrent une pollution harmonique importante, d'autant plus difficile à maîtriser puisqu'elle est basse fréquence. Les normes imposent la mise en place de filtres afin de maintenir cette pollution sous un certain seuil. Des éléments passifs volumineux sont alors utilisés pour former des filtres passe bas, tout en assurant la compensation du réactif consommé par la sous-station.

1.5 Les architectures électriques des réseaux

Quel que soit le véhicule, le courant est redressé pour alimenter le bus continu où sont connectés les onduleurs de traction et autres auxiliaires. Par contre, peu de contraintes existent pour transporter l'énergie entre les sous-stations et les véhicules. Une multitude de distributions différentes, avec des niveaux de tension différents ont ainsi vu le jour dans le monde.

1.5.1 Les différentes solutions pour alimenter un train

Pour des raisons historiques, les premiers réseaux de distribution ont été réalisés sous courant continu. La conversion de l'alternatif en continu été réalisée par des convertisseurs rotatifs (moteur synchrone couplé mécaniquement à une génératrice à courant continu). Ces groupes sont aujourd'hui remplacés par des convertisseurs d'électronique de puissance. Les tensions utilisées sont classiquement le 600 V et 750 V pour les véhicules légers, et 1500 V à 3000 V pour les grandes lignes.

Les moteurs à courant continu pouvant aussi fonctionner en alternatif, la distribution a également été possible en 15 kV, mais à une fréquence de 16,2/3 Hz pour des problèmes de commutation déjà expliqués. Aujourd'hui, le courant alternatif est de plus en plus utilisé, mais à fréquence industrielle et la distribution sous 25kV s'est progressivement imposée sur les grandes lignes. Le courant est alors transformé et redressé à bord des véhicules.

Une variante, dite 2×25 kV, est couramment employée, en particulier sur le réseau à grande vitesse en France. L'alimentation se fait toujours sous 25 kV, mais le transport se fait lui sur 50 kV grâce à un feeder qui suit la ligne. Des autotransformateurs relient alors la caténaire et le feeder à intervalles réguliers toutes les dizaines de kilomètres. Le retour de courant se fait par le rail entre deux autotransformateurs, puis il s'opère par le feeder en dehors.

La figure 1.1 représente ce type de réseau ainsi que les échanges de courant dans le cas où le train, représenté par une source de courant, se situe à mi-chemin entre deux autotransformateurs.

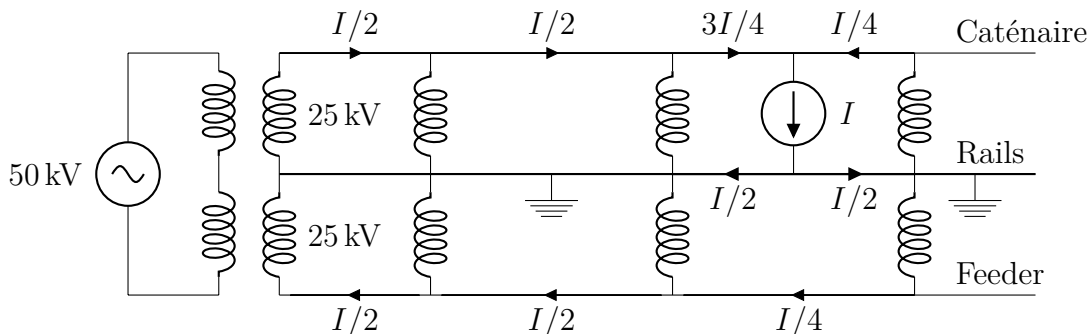


FIGURE 1.1 – Alimentation sous 2×25 kV

Grâce aux autotransformateurs, le transport de puissance se fait sous 50 kV; le courant circulant dans la caténaire et dans le feeder est alors deux fois plus faible, diminuant ainsi considérablement les pertes et permettant d'espacer les sous-stations.

1.5.2 Comparaison entre les distributions en alternatif et en continu

Le débat entre distribution en alternatif ou en continu reste posé sans se cantonner au domaine du ferroviaire. La comparaison est réalisée sur l'exemple des grandes lignes.

a) Réseaux alternatifs

En faveur du courant alternatif, on notera la possibilité de transporter l'énergie sous haute tension (25kV), ce qui permet de diminuer les pertes. Ce type de réseau est moins coûteux et de plus en plus utilisé. On notera cependant qu'un réseau alternatif ne transporte pas uniquement de la puissance active. La puissance réactive doit aussi être contrôlée pour limiter les fluctuations de tension.

De plus, dans ce type de réseau, les locomotives doivent intégrer un transformateur de forte puissance basse fréquence, donc volumineux et lourd. Les contraintes spatiales font que ce transformateur présente un rendement d'à peine 94%. Des travaux sont en cours pour se débarrasser de ce transformateur.

Enfin les sous stations des réseaux alternatifs, avec la conversion triphasé/monophasé, créent des déséquilibres importants sur le réseau. Certains réseaux de transport sont spécifiquement conçus comme en Suède par exemple [Abr08].

b) Réseaux continus

Les réseaux à courant continu commencent à être abandonnés sur les grandes lignes. Ce type de réseau subsiste encore car leur remplacement serait trop coûteux, mais très peu de réseaux continus sont encore construits.

En effet, les sous-stations des réseaux continus sont plus chères car elles intègrent des convertisseurs statiques et des disjoncteurs à courant continu. Le transport de puissance se fait sous basse tension car l'utilisation d'autotransformateur est impossible. Cela implique l'utilisation de câbles de forte section, plus de pertes et surtout la nécessité de réduire l'espacement entre les sous-stations. Alors qu'en alternatif les sous-stations sont situées tous les 50 km, cette distance se réduit à une dizaine de kilomètres en continu.

La distribution en continu présente cependant l'avantage d'utiliser des locomotives plus simples, n'incluant pas une double conversion. De plus, elle trouve encore sa place sur les réseaux de faible ampleur, comme les réseaux urbains. Enfin le réactif n'a aucune influence sur ces réseaux.

1.5.3 Architecture électrique classique d'un réseau de tramways

Le schéma simplifié d'une architecture de tramways est tracé sur figure 1.2.

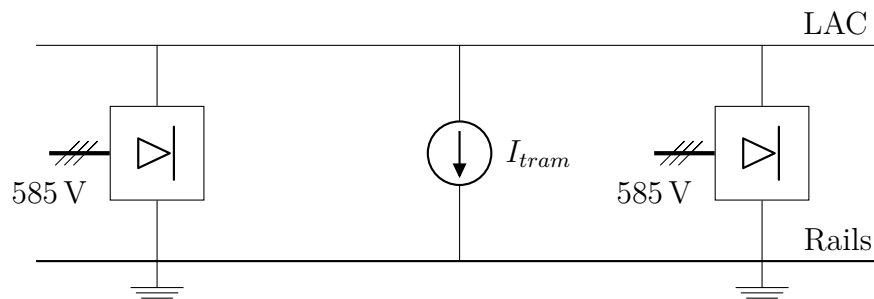


FIGURE 1.2 – Alimentation classique d'un réseau de tramways

Sur ce schéma sont représentées deux sous-stations à diodes alimentées par le réseau alternatif. Ces sous-stations vont alimenter la LAC sous 750V. Le tramway est représenté par une source de courant (I_{tram}).

Un réseau complet comprend évidemment plus de sous-stations. La LAC est découpée en tronçons isolés les uns des autres. Des sectionneurs permettent de relier ces différentes parties lorsque le réseau est sain, et autorisent une marche dégradée lors de l'apparition d'un défaut.

Ce schéma unifilaire ne fait apparaître les filtres et autres dispositifs de protection.

2 Limitations et améliorations possibles d'un réseau classique de tramways

2.1 Les pertes en ligne

Nous avons vu qu'un réseau à courant continu présente des pertes en ligne plus importantes. La cause principale provient du transport en basse tension. Ce problème existe sur les grandes lignes, mais il est encore plus marqué sur les réseaux de tramways où la tension nominale est de 750V. Fort heureusement, les réseaux de tramways sont moins étendus, ce qui limite les pertes.

Pour réduire ces pertes, plusieurs solutions peuvent être envisagées en gardant la structure de la figure 1.2. Augmenter la tension d'alimentation permet ainsi de réduire efficacement les pertes. Cependant cette tension doit rester dans une plage de tension bien définie et normalisée pour des raisons de sécurité [Cen]. De plus cette solution n'est efficace que durant les phases de traction.

Une deuxième piste d'amélioration consiste à diminuer la résistance de la LAC. Deux solutions sont possibles pour y parvenir : diminuer la résistance linéique de la LAC ou réduire l'espacement entre les sous-stations.

Pour diminuer la résistance linéique, il suffit d'augmenter la section de la LAC. Cela peut se faire directement en ajoutant une deuxième ligne en parallèle. Une autre solution consiste à connecter à intervalles réguliers les LAC des deux voies d'une ligne de tramway.

Reduire l'espacement entre les sous-stations, est une autre solution. Cela implique néanmoins d'augmenter leur nombre. Le coût d'une sous-station peut se révéler très important, en particulier à cause de son transformateur. Par ailleurs, cela multiplie les points de livraison EDRF. Le prix de l'installation va donc être revu à la hausse.

Le positionnement des sous-stations n'est cependant pas libre. En effet, ces dernières peuvent être volumineuses et mal s'intégrer dans les centres villes. La puissance connectée est importante et le GRD peut exiger un départ dédié. Il en résulte que les sous-stations sont souvent situées à l'extérieur des agglomérations. Cette voie d'amélioration n'est donc pas envisageable.

En résumé, seule la réduction de la résistance de la LAC est possible sur les réseaux actuels, pour réduire les pertes.

2.2 Le maintien du plan de tension

Le maintien du plan de tension est le critère de dimensionnement le plus important. Cette tension de LAC doit ainsi être comprise entre 500 V et 900 V.

2.2.1 Durant les phases de traction

Lors des phases de traction, le tramway consomme du courant. Ce courant est fourni par les sous-stations ou d'autres tramways en phase de freinage. Il arrive au tramway via la LAC. Cette circulation de courant va entraîner une chute de tension et les sous-stations doivent être disposées de manière à garantir le respect de la tension minimale dans le pire cas. En cas d'impossibilité, il faudra doubler la LAC.

2.2.2 Durant les phases de freinage

Lorsqu'un tramway freine, il utilise majoritairement le freinage par récupération. Les moteurs vont alors fonctionner en alternateur et renvoyer de l'énergie sur le réseau. La résistance de la LAC va alors entraîner une élévation de sa tension ;

La tension maximale en régime permanent est fixée à 900 V. Pour ne pas dépasser cette tension, les tramways sont équipés en toiture d'un rhéostat de freinage. Ce rhéostat est connecté au bus continu par l'intermédiaire d'un hacheur. Si la tension du bus dépasse 900 V, le rhéostat de freinage se déclenche et dévie une partie du courant de freinage. La tension du bus se régule alors autour de 900 V. Lors du déclenchement du rhéostat de freinage, l'énergie est perdue.

2.3 Échanges entre les tramways

Lorsqu'un tramway freine, l'énergie est renvoyée sur le réseau. Cette énergie peut alors être consommée par d'autres véhicules situés à proximité et en phase de traction.

Grâce à cet échange, l'efficacité du réseau de tramways augmente significativement. Il faut cependant que les tramways soient suffisamment proches. En effet, dans le cas contraire, la tension du bus du tramway en phase de freinage peut dépasser la tension de déclenchement du rhéostat de freinage et l'énergie est dissipée par effet Joule.

Pour favoriser les échanges entre véhicules sans dépendre du carrousel de véhicules, il faut donc diminuer la résistance et la tension de la LAC. Une diminution de la tension est favorable durant le freinage, mais se révèle préjudiciable lors des phases d'accélération.

2.4 La réversibilité des sous-stations

2.4.1 Le blocage des sous-stations

L'échange énergétique entre véhicules permet des gains énergétiques importants. Cependant, lorsqu'il y a plus de puissance produite que de puissance consommée, on peut alors s'interroger sur la possibilité de réinjecter la puissance sur le réseau de distribution.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue que les sous-stations classiques sont construites sur la base d'un pont de diodes non réversible. Le courant ne peut donc pas être renvoyé sur le réseau entraînant un déclenchement des rhéostats. Lorsque la puissance fournie diminue, les sous-stations se débloquent, et reprennent leur rôle normal.

2.4.2 La récupération énergétique

Rendre les sous-stations réversibles en courant permet donc de récupérer l'excédant des échanges entre les véhicules et de le réinjecter sur le réseau de distribution. Ceci augmente évidemment le rendement du réseau. Plusieurs structures peuvent être examinées.

a) Convertisseurs bi-directionnels

La première solution pour rendre une sous-station réversible est d'utiliser un convertisseur réversible. Le pont à thyristors peut fonctionner en redresseur, mais aussi en onduleur. Ce type de convertisseur peut donc être utilisé, mais c'est une conversion pleine onde générant un fort contenu harmonique.

Il est également possible d'utiliser directement un onduleur à IGBT. Ce type de convertisseur fonctionne avec une MLI. Les harmoniques générés sont à hautes fréquences, et donc plus faciles à filtrer. Les IGBT ont cependant l'inconvénient d'être moins robustes que les diodes ou les thyristors, qui peuvent tenir trois fois leur courant nominal durant une minute.

b) Onduleur en anti-parallèle

Pour palier aux insuffisances des convertisseurs bi-directionnels, Alstom a développé le projet HESOP (*Harmonic and Energy Saving Optimizer*). Construit sur la base d'une sous-station classique, une sous-station HESOP comprend en plus un onduleur à IGBT en anti-parallèle du redresseur.

La figure 1.3 est un schéma de principe des sous-stations HESOP utilisées sur le réseau d'essai de La Rochelle.

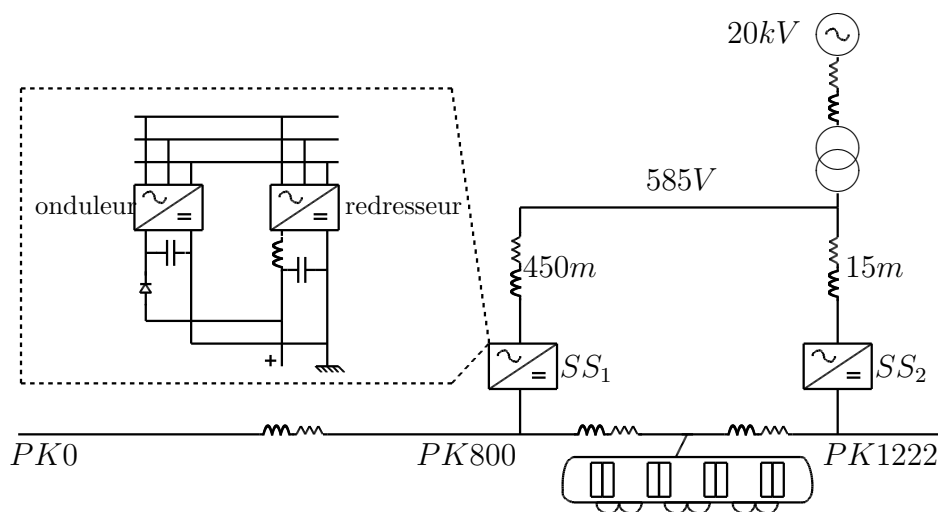


FIGURE 1.3 – Projet HESOP de récupération d'énergie sur la ligne d'essai de La Rochelle [Via08]

L'onduleur va alors avoir deux rôles à jouer. Lors des phases de freinage, si l'énergie sur le réseau continu est excédentaire, le redresseur va se bloquer, et l'onduleur va réinjecter la puissance excédentaire sur le réseau.

Durant les phases de traction, le redresseur alimente le réseau et on profite de sa robustesse. L'onduleur lui, est utilisé en tant que filtre actif. Il va générer le même contenu harmonique que le pont de diodes, mais en opposition de phase de manière à compenser les harmoniques.

La puissance de l'onduleur est d'environ 30% de la puissance du redresseur. La solution HESOP permet selon le constructeur, un gain énergétique de 15% sur cycle de fonctionnement avec un taux de récupération de l'énergie de freinage avoisinant les 99%.

En utilisant un redresseur à thyristor, HESOP permet en plus de favoriser les échanges énergétiques entre véhicules en contrôlant la tension de la LAC. Durant les phases de traction, la tension est élevée pour minimiser les pertes, puis elle est baissée lors des phases de freinage pour favoriser les échanges.

Cependant, les sous-stations HESOP ne sont efficaces que si elles sont situées assez près des tramways en phase de freinage. Dans le cas contraire, le rhéostat de freinage peut encore se déclencher (même si en diminuant la tension de la sous-station, on diminue ce risque).

L'intégration des sous-stations HESOP peut également poser problème. En injectant de la puissance sur un réseau de distribution, elles agissent comme des GED (*Générateurs d'Énergie Dispersée*), ce qui peut poser problème, et nécessiter l'accord du GRD. La puissance réinjectée étant "intermittente", cet agrément peut être difficile à obtenir.

2.4.3 Résumé des limitations actuelles

Plusieurs limitations sont à noter sur les réseaux actuels :

1. Limitation du choix pour l'implantation des sous-stations, les repoussant loin des lieux de consommation.
2. Impédance de la LAC qui va créer des pertes, des chutes de tension mais aussi limiter les échanges entre véhicules.
3. Irréversibilité en puissance des sous-stations ne permettant pas de récupérer les excédents de puissance d'échange entre les tramways.
4. Non contrôlabilité de la tension de sortie des sous-stations, limitant les échanges, et n'optimisant pas les transferts énergétiques.

La solution HESOP d'Alstom permet de résoudre en partie les points 3 et 4 mais n'est d'aucune utilité sur les deux premiers points.

3 Nouvelles architectures d'alimentation

3.1 Réseau haute tension alternatif propriétaire

La structure d'alimentation est la même que celle de la figure 1.2. Néanmoins, au lieu de connecter chaque sous-station à un point de livraison ERDF, une ligne haute tension court le long de la voie. Les sous-stations se connectent alors directement sur cette ligne.

La ligne haute tension est alimentée en plusieurs points par le réseau de distribution. Le nombre de points de livraison peut être réduit par rapport à une architecture classique.

Les sous-stations restent cependant toutes aussi volumineuses, et difficiles à implanter. La gestion de ce réseau haute tension imposera des contraintes spécifiques supplémentaires.

3.2 Transformateur centralisé

Cette solution propose, comme la précédente, de limiter le nombre de points de raccordement. Encore une fois, un feeder court le long de la ligne, mais cette fois, la distribution se fait en basse tension alternatif. La figure 1.4 illustre cette stratégie.

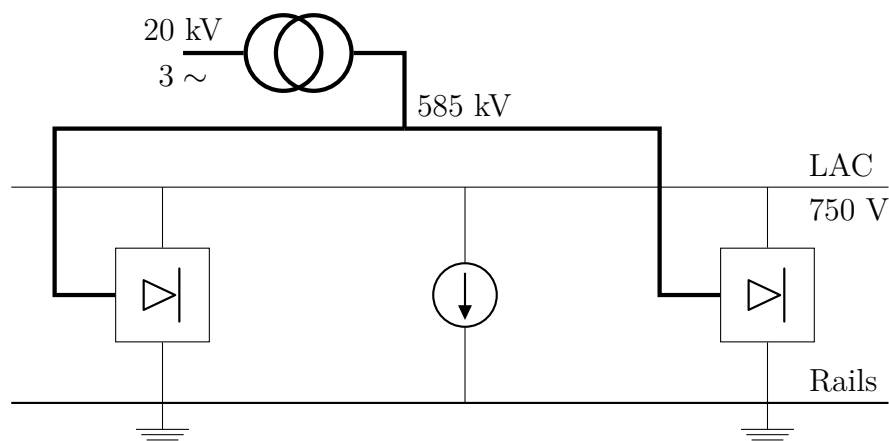


FIGURE 1.4 – Alimentation d'un réseau de tramways par transformateur centralisé

Ce feeder sous 585 Vac permet de supprimer le volumineux transformateur des sous-stations. En plus de limiter le nombre de points de raccordement, ces nouvelles sous-stations allégées peuvent trouver plus facilement leur place en centre ville.

Cette solution possède plusieurs inconvénients. Tout d'abord, la distribution se faisant en basse tension, les pertes dans le réseau alternatif seront plus élevées que dans le cas précédent.

De plus un pont de diodes génère des harmoniques basses fréquences qui sont habituellement réduits par le transformateur des sous-stations classiques. Même sur un réseau privé, un fort taux d'ondulation est à éviter. Des filtres plus volumineux que dans un réseau classique sont donc à prévoir.

La gestion du réactif va aussi poser problème. Le transport d'énergie réactive va entraîner des pertes et des chutes de tension. Les sous-stations doivent être compensées, ce qui n'est pas sans poser de problèmes.

Enfin, les transformateurs d'une sous-station classique assurent une isolation galvanique. Dans le cas du réseau de la figure 1.4, on voit apparaître une composante continue sur le feeder alternatif [Sau06]. Ce courant de circulation provient du déséquilibre qui peut affecter les sous-stations et il entraîne des pertes supplémentaires et des problèmes de protections.

3.3 Autotransformateur à courant continu

3.3.1 Architecture à feeder négatif

Cette solution est basée sur l'architecture 2×25 kV de la figure 1.1, mais adaptée au cas des réseaux continus. Les autotransformateurs sont alors remplacés par des

hacheurs séries réversibles en courant comme l'illustre la figure 1.5. Sur cette figure les hacheurs sont uniquement représentés par leur cellule de commutation. Les filtres ne sont pas dessinés pour améliorer la lisibilité.

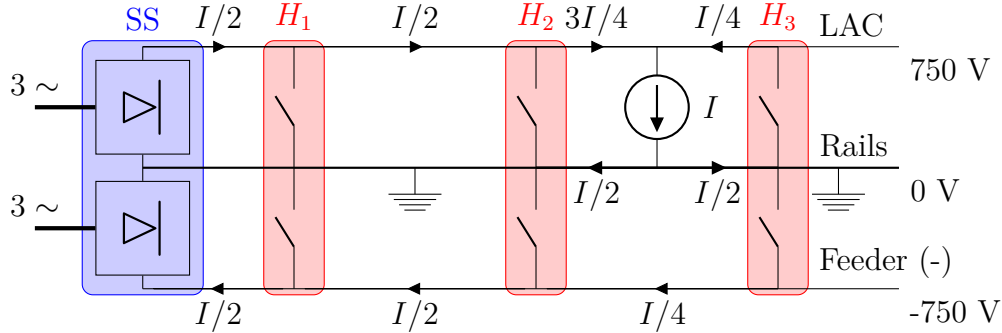


FIGURE 1.5 – Alimentation sous 2×750 Vdc à feeder négatif [ACL10]

La sous-station alternative composée d'un transformateur à point milieu, est cette fois remplacée par deux redresseurs mis en série. Ces redresseurs sont alimentés par un transformateur à double enroulement étoile/triangle de manière à limiter la pollution harmonique comme le montre la figure 1.6.

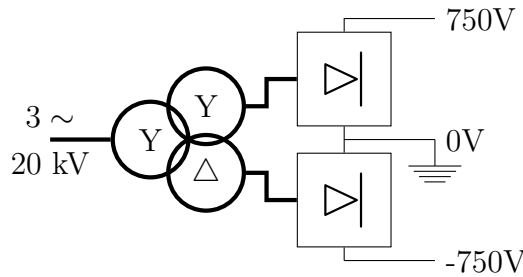


FIGURE 1.6 – Sous-station dodécaphasée

A l'instar des deux architectures précédentes, cette architecture permet de limiter le nombre de points de raccordement au réseau HTA. Cette fois-ci, c'est un feeder sous une tension continue de -750 Vdc qui est ajouté le long de la voie.

Cette solution se libère des contraintes imposées par la distribution en alternatif. Les hacheurs peuvent travailler à haute fréquence ce qui diminue la pollution harmonique et les besoins de filtrage. Ces hacheurs sont compacts et moins coûteux qu'une sous-station complète de par leur simplicité. Ils peuvent alors être intégrés plus facilement et en nombre plus élevé dans les centres villes, près des lieux de consommation.

Deuxièmement, cette solution permet de réduire les courants circulant dans la LAC. En supposant que les rapports cycliques des hacheurs soient égaux à $1/2$, le courant circulant entre la sous-station et le premier hacheur sera diminué de moitié. Les chutes de tension seront donc plus faibles, tout comme les pertes.

A la manière d'un transformateur sur un réseau alternatif, un hacheur va permettre de diminuer la résistance apparente du réseau. Les résistances en amont du hacheur apparaîtront plus faible d'un rapport α^2 , où α est le rapport cyclique³.

3. Nous reviendrons sur ces calculs plus explicitement au chapitre suivant

Cette solution va alors permettre de favoriser les échanges énergétiques entre véhicules même très éloignés. Les excédants d'échange énergétique entre tramways seront alors réduits, limitant le recours aux sous-stations réversibles.

Les hacheurs peuvent être utilisés en boucle ouverte comme des autotransformateurs, mais il est aussi possible de les commander. Cela offre la possibilité de contrôler les transferts de puissance et de gérer les flux.

Cette solution permet donc d'améliorer tout les points énumérés dans la section 2.4.3.

3.3.2 Architecture à feeder positif

Il est encore possible d'améliorer le rendement de la structure 1.5 en modifiant simplement les connexions des sous-stations. L'architecture de la figure 1.7, propose d'utiliser un feeder positif sous 1500 V plutôt qu'un feeder négatif sous -750 V.

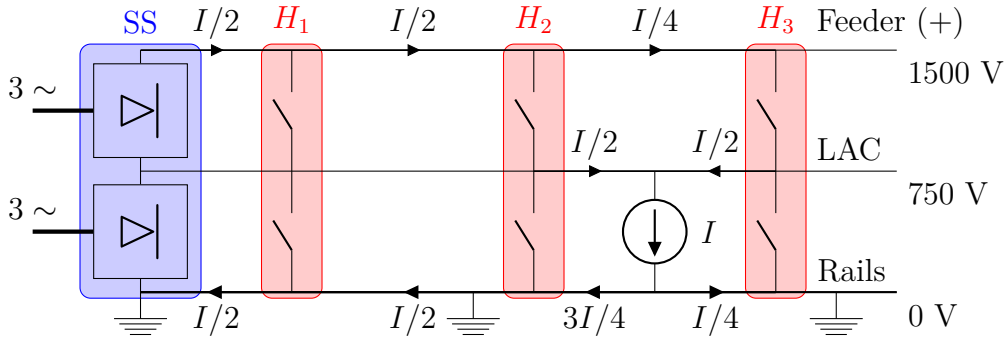


FIGURE 1.7 – Alimentation sous 2×750 Vdc à feeder positif

Dans les deux cas, l'énergie est transportée sous 1500 V entre les hacheurs et la sous-station, et la LAC est sous 750 V. Toutefois, l'architecture à feeder positif permet d'atteindre des rendements plus intéressants [ACL10].

Le retour de courant se fait par les rails dans l'architecture à feeder positif alors qu'il s'opère par le feeder négatif dans la structure à feeder négatif. Les pertes dans les feeders seront les mêmes dans les deux cas.

Regardons à présent les pertes dans les autres éléments du réseau. À titre d'illustration, on suppose que le hacheur H_2 est situé à une distance L_1 de la sous-station et que le hacheur H_3 est lui située à L_2 du hacheur H_2 . Le tramway, lui, est situé à équidistance des deux hacheurs. On appelle ρ_L la résistivité linéique de la LAC et ρ_R celle des rails. Les pertes (en dehors des pertes dans le feeder) dans la structure à feeder négatif peuvent être approchées par :

$$\begin{aligned} P_{F(-)} &= \rho_L \left(L_1 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{L_2}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \frac{L_2}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right) I^2 + \rho_R \left(\frac{L_2}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{L_2}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) I^2 \\ &= \left(\rho_L \frac{L_1}{4} + \frac{L_2}{16} (5\rho_L + 4\rho_R) \right) I^2 \end{aligned}$$

Les pertes dans la structure à feeder positif sont elles données par :

$$P_{F(+)} = \left(\rho_R \frac{L_1}{4} + \frac{L_2}{16} (5\rho_R + 4\rho_L) \right) I^2$$

La différence entre les pertes des deux architectures s'écrit alors :

$$P_{F(-)} - P_{F(+)} = (\rho_L - \rho_R) \left(\frac{L_1}{4} + \frac{L_2}{16} \right) I^2$$

La résistance linéique des rails étant bien plus faible que celle de la LAC, la structure à feeder positif présentera un meilleur rendement et sera donc à privilégier. L'inconvénient de cette solution est lié au fait de travailler avec de la HTA, dont la limite est justement située à 1500 V en continu.

3.3.3 Architecture à LAC flottante

Cette structure est basée sur celle de la figure 1.7, mais cette fois la LAC est flottante et n'est pas raccordée au point milieu du pont redresseur comme l'indique la figure 1.8.

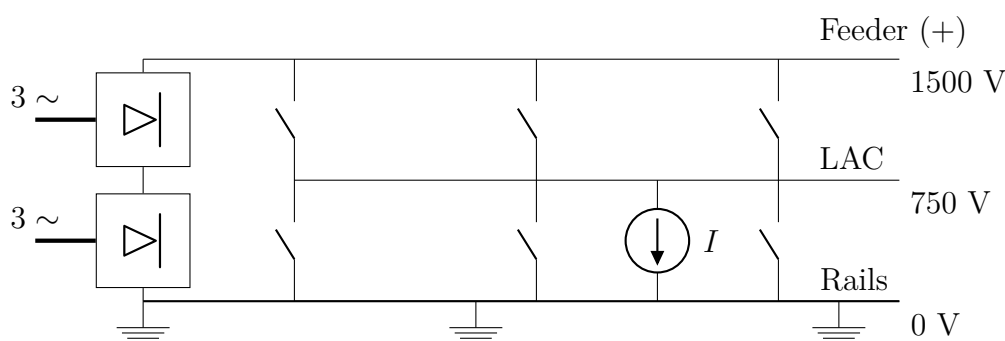


FIGURE 1.8 – Alimentation sous 2×750 Vdc à feeder positif avec LAC flottante

L'avantage de cette solution est de laisser la tension de la LAC entièrement contrôlable par les hacheurs. Sur l'architecture de la figure 1.7, la jonction avec le point milieu impose, en un point du réseau, une tension fixe si les redresseurs sont à diodes. On peut outrepasser ces limitations en utilisant un redresseur à thyristors, mais la tension du feeder sera modifiée en conséquence, à moins d'utiliser deux redresseurs à thyristors commandés de manière complémentaire. La plage d'excursion en tension sera toutefois plus faible.

La structure à LAC flottante est aussi compatible avec une sous-station hexaphasée classique, car elle ne requiert pas un point milieu.

L'inconvénient de cette architecture est que l'énergie subit obligatoirement une double conversion pour arriver jusqu'au tramway. Effectivement, l'intégralité de puissance doit passer à travers les redresseurs et les hacheurs, alors qu'avec une structure à feeder positif, si le tramway est proche, l'énergie provient directement de la sous-station et ne doit pas traverser un hacheur. Le rendement s'en trouve donc amélioré sur certaines portions de la ligne.

3.4 Présentation de la structure étudiée

Après avoir passé en revue les différentes architectures, les solutions à autotransformateurs continus semblent les plus facilement implantables sur un réseau et les plus novatrices. Analogues aux solutions existantes sur les grandes lignes en courant

alternatif, elles permettent de limiter le nombre de points de livraison. De plus, les hacheurs sont moins coûteux et peuvent être installés en plus grand nombre, permettant un meilleur maintien du plan de tension, mais aussi une diminution des pertes.

Ces hacheurs peuvent être implantés aux endroits les plus judicieux, dimensionnés sur des contraintes techniques uniquement, décorrélées des limitations sur les sous-stations classiques.

En diminuant la résistance apparente et en contrôlant la tension de la LAC, ces solutions permettent également de faciliter les échanges entre véhicules, réduisant la puissance à réinjecter sur le réseau de distribution. Ces architectures sont compatibles avec les sous-station HESOP, et permettent de combler ses limitations.

L'architecture à LAC flottante sera retenue et étudiée en détail par la suite, en espérant que les pertes dues à la double conversion soient compensées par l'exemption de contrainte en tension sur la LAC.

La principale limitation des architectures à distribution continue reste la gestion des défauts. La coupure des courants de court-circuit en courant continu et bien plus délicate qu'en courant alternatif, obligeant l'utilisation de disjoncteur ultra-rapides.

Par la suite, on distinguera les deux parties amont et aval des hacheurs par les acronymes HVDC (*High Voltage Direct Current*) et LVDC (*Low Voltage Direct Current*)

4 Les réseaux multi-convertisseurs

Bien que le cadre applicatif de ces travaux porte sur les réseaux de tramways, la méthodologie et les outils développés par la suite seront adaptés à n'importe quels réseaux multi-convertisseurs, multi-sources et multi-charges.

Les réseaux multi-convertisseurs sont de plus en plus présents, du transport HVDC aux réseaux embarqués en passant bien évidemment par les applications ferroviaires.

4.1 Les réseaux HVDC

Ces réseaux de forte puissance permettent le transport par câble souterrain d'énergie sur de grandes distances (5 GW sur 1400 km pour la liaison partant du barrage des Trois-Gorges en Chine). Ils peuvent aussi être utilisés pour connecter des régions qui ne sont pas synchrones (liaison IFA 2000 entre la France et l'Angleterre), ou qui travaillent à des fréquences différentes (Japon, Chine, etc). Ces liaisons pourraient se développer pour sécuriser le réseau de transport européen.

L'intégralité des réseaux construits sont des réseaux point-à-point n'interconnectant que deux sous-stations. La libéralisation des marchés et l'intégration massive d'énergie renouvelable impliqueront cependant de recourir à des réseaux multi-terminaux. Des projets comme *Twenties* sont en cours dans la mer du nord pour récupérer l'énergie d'éoliennes offshore, celle générée par les barrages scandinaves, tout en interconnectant les pays environnants [LJGB⁺11]. On peut noter également le projet *DESERTEC* ayant pour objectif de mailler le bassin méditerranéen, tout en intégrant une production massive d'origine solaire.

4.2 En informatique

Les réseaux DC multi-convertisseurs sont omniprésents dans les applications informatiques. L'alimentation du processeur est ainsi effectuée par la mise en parallèle de plusieurs hacheurs afin de faire transiter de forts courant, sous faible tension [Sun07].

Afin de limiter le nombre de conversions, la distribution électrique des data-centers peut se faire à l'aide d'un canal de puissance continue sous 380 Vdc où viennent se connecter les serveurs et les ASI⁴ formant ainsi un formidable réseau multi-convertisseurs [TFT07].

4.3 Dans les transports

Les réseaux des moyens de transports ne sont pas en reste, et représentent sûrement la part la plus importante des applications de systèmes multi-convertisseurs. Que ce soit en ferroviaire comme [Mor05], [Abr08] et [MB00], dans les avions [Lan06], [BRS07] et [Sau09], les voitures, les bateaux, ou même la station spatiale internationale, les réseaux multi-convertisseurs sont omniprésents.

4.4 La généralisation du bus d'alimentation continu

Quelles que soient les applications, les réseaux multi-convertisseurs sont la plupart du temps articulés autour d'un canal de puissance continue. La raison principale est liée à l'énergie.

Un variateur de vitesse ou une alimentation sans interruption sont des structures d'électronique de puissance massivement utilisées. Elles ont comme point commun de réaliser une double conversion : la tension du réseau est redressée puis ondulée. La distribution en continu permet de supprimer l'étage de conversion en entrée, et les problèmes harmoniques qui y sont liés.

Des études portent sur la distribution électrique en continu dans les réseaux urbains, mais les contraintes sont encore trop nombreuses. Par contre, dans les réseaux privés ou les réseaux embarqués, la distribution continue est devenue classique [Sau09].

5 Présentation des travaux de thèse

5.1 Objectifs des travaux de thèse

Le premier objectif de ces travaux est de démontrer l'intérêt de la nouvelle structure, tant du point de vue des économies d'énergie, que la gestion du plan de tension, afin de confirmer les attentes que nous a laissé entrevoir ce premier chapitre. Cela implique de disposer d'un simulateur pouvant comparer les différentes structures, sur une ligne de tramway caractéristique.

Un second objectif est l'étude des caractéristiques dynamiques du réseau afin de prévoir son comportement lors des perturbations et d'étudier sa stabilité.

4. Alimentation Sans Interruptions

Enfin, le dernier objectif est de proposer un outil, permettant d'optimiser le dimensionnement et le temps de conception de la nouvelle structure⁵. Cela implique tout aussi bien le dimensionnement des filtres, que la synthèse des correcteurs, ou encore la détermination de l'emplacement des hacheurs. Le dimensionnement devra ainsi permettre de respecter les contraintes harmoniques et dynamiques, tout en minimisant les pertes dans le réseau.

5.2 La distribution électrique d'un réseau de tramways : un système complexe

Le cadre applicatif de ces travaux est un exemple de systèmes complexe, difficile à appréhender avec une méthodologie classique.

Un réseau de tramways est ainsi un système multi-physique, avec un fort couplage entre la partie mécanique et la partie électrique.

C'est aussi un système non linéaire, tant au niveau du véhicule, que du réseau électrique lui-même. Le couple moteur et la vitesse du tramway dépendent de nombreux paramètres, tout comme la position des tramways. Cette position, variable dans le temps, modifie ainsi constamment la topologie du réseau électrique.

Les convertisseurs d'électronique de puissance ajoutent une difficulté supplémentaire. Fonctionnant sur le principe du découpage, ce sont des systèmes fortement non linéaires générant des harmoniques.

Enfin, ces réseaux sont étendus et possèdent de nombreux éléments qui sont couplés entre eux. Il est donc difficile d'étudier un élément isolé et la vision du système dans sa globalité est indispensable.

5.3 Problématiques scientifiques

La problématique scientifique sous-jacente à l'étude de la nouvelle architecture proposée est bien plus large. Les outils et méthodes devront être génériques pour être adaptées aux réseaux multi-convertisseurs quels qu'ils soient.

La principale difficulté provient des couplages existants. Les convertisseurs interagissent entre eux aussi bien au niveau dynamique, qu'harmonique. Les harmoniques vont eux aussi influencer la répartition des puissances, tout comme les lois de commande, commande qui dépend des filtres, filtres dimensionnés pour limiter les harmoniques. Ces couplages rendent donc très difficile le dimensionnement.

Sur un réseau classique, les filtres sont surdimensionnés de manière à découpler les dynamiques de chaque élément du réseau. Notre approche se veut différente et cherche à proposer une structure optimisée, tant au niveau du volume des filtres, que des performances énergétiques et dynamiques du réseau.

Dans ce cas, l'approche système est indispensable afin de tenir compte des différents couplages exposés, qui peuvent introduire des difficultés inattendues, mais peuvent aussi être sources de gains comme nous le montrerons dans ce mémoire.

5. L'étude ne traitera pas de la réalisation pratique d'un hacheur de forte puissance pouvant faire transiter des centaines d'ampères sur un bus continu de 1500 V, qui mériterait une thèse à elle seule. Un hacheur supportant une tension double et basé sur une structure à trois niveaux de type "flying capacitor", a été testé par la SNCF en 2008 prouvant la faisabilité de l'architecture [ACL10].

De part la complexité du réseau, il n'existe à notre connaissance aucun outil capable d'accomplir les différents objectifs exposés dans la section 5.1. L'approche classique ne sera pas appropriée comme nous allons le voir, et des outils spécifiques, tout en étant universels, devront être proposés.

5.3.1 Approche classique d'étude

Dans la majorité des cas, l'étude d'un réseau électrique passe par l'analyse temporelle de celui-ci. Le réseau est décrit sous la forme d'un schéma électrique avec l'intégralité des éléments et une simulation est lancée.

La simulation de réseaux intégrant des convertisseurs d'électronique de puissance par cette méthode est possible. Toutefois, la fréquence de découpage étant élevée, le respect du critère de Shannon impose le choix d'un pas de temps très faible.

Cette approche est intéressante mais se révèle vite inappropriée. Pour des systèmes de grande taille, le temps passé à saisir le schéma peut être conséquent et source d'erreurs. De plus l'étude d'un système à topologie et à paramètres variables impose la modification du schéma pour chaque configuration.

Lors de l'étude énergétique sur cycle de fonctionnement d'un réseau de tramways, les temps mis en jeu s'expriment en heures. Simuler un réseau de grande taille, avec un pas de temps très faible, sur d'aussi longues périodes, génère une quantité faramineuse de données et prend un temps très conséquent au concepteur.

Enfin, ce type de simulateur ne permet de faire que de l'analyse. Pour un réseau donné, il est possible de vérifier les caractéristiques et le respect des contraintes, mais il est totalement impossible de faire de la synthèse ou du dimensionnement, à part pour les systèmes de très petites tailles.

Des logiciels spécifiques aux applications ferroviaires existent. Chaque constructeur propose le sien, de *ELBAS* pour Alstom, à *Sidytrac* pour Siemens en passant par *ECOtranz* pour Bombardier et *Esmeralda* pour la SNCF. Ces logiciels propriétaires permettent de simuler le déplacement des rames et la répartition des courants. Dans certains d'entre eux, des modules additionnels existent pour permettre le dimensionnement.

Hélas nous n'avons pas pu avoir accès à ces logiciels. Il y a cependant fort à parier que ces logiciels sont avant tout axés sur les dynamiques mécaniques, et que le réseau électrique n'est pas l'objet de toutes les attentions.

5.3.2 Premier verrou : Quel(s) modèle(s) pour la simulation ?

Différents outils doivent être créés pour résoudre les problématiques que nous avons énoncées. Certains modèles doivent être rapides à simuler, alors que d'autres doivent offrir une précision supérieure. Ces modèles devront cependant être générés automatiquement pour pouvoir comparer rapidement les différentes structures, quel que soit le nombre de tramways et leur position. Ces modèles devront aussi être adaptés à la simulation de n'importe quel réseau.

Nous décrivons ci-dessous les éléments clés du réseau et le cahier des charges associé pour leur modélisation.

a) Modélisation mécanique du tramway

A partir de la description de la ligne et des caractéristiques du tramway, un modèle doit être construit pour connaître la position du tramway et le courant qu'il consomme, en fonction de la tension du réseau d'alimentation. Cette partie implique la modélisation de la chaîne cinématique du moteur, à la roue, mais aussi un modèle de comportement du conducteur.

b) Calcul des pertes et de la tension de la LAC

Afin de comparer les différentes structures, un modèle de la partie électrique du réseau de tramways doit être établi. Il doit retourner la valeur de la tension en tout point du réseau, ainsi que les puissances échangées et les pertes, en fonction de la position des tramways et du courant qu'ils consomment.

Afin de comparer les architectures sur un cycle de fonctionnement complet avec un carrousel de tramways, ce modèle doit être rapide à simuler. Un modèle statique sera alors utilisé. Les composantes dynamiques seront donc négligées et les convertisseurs seront moyennés. La Méthode Nodale Modifiée sera employée à cet usage, afin de construire un simulateur de réseau de tramways.

c) Etude des transitoires

Un modèle statique n'est pas suffisant pour étudier les transitoires dans un réseau. Il est nécessaire de prendre en compte les capacités et les inductances.

La représentation d'état est un formalisme universel, permettant aussi bien la simulation que l'étude de stabilité ou la synthèse de correcteur. La méthodologie bond graph sera utilisée pour construire cette représentation d'état automatiquement.

Les convertisseurs de puissance permettent de connecter entre eux différents sous-systèmes. Grâce à la transformé linéaire fractionnaire (LFT), un formalisme universel sera développé permettant de modéliser n'importe quel réseau multi-convertisseurs. Ces modèles restent toutefois non linéaires.

Le modèle moyen d'ordre 0 sera alors utilisé pour simplifier la LFT en moyennant les commutations. Le formalisme LFT permet aussi de prendre en compte les incertitudes sur la position des tramways, en la traitant comme un paramètre variant dans le temps. La LFT permettra aussi de réduire les temps de calcul.

d) Prise en compte des harmoniques

Les deux modèles précédents négligent les commutations. Néanmoins, l'étude harmonique est indispensable pour valider le dimensionnement, mais aussi pour étudier les interactions harmoniques entre les convertisseurs.

Une simulation temporelle encore une fois n'est pas appropriée, et le modèle moyen généralisé sera utilisé afin de générer de modèles utilisable pour l'étude des harmoniques.

5.3.3 Deuxième verrou : Quel(s) modèle(s) pour le dimensionnement global ?

Les modèles développés pour l'analyse doivent pouvoir aussi être utilisés pour la synthèse et le dimensionnement du réseau. A cet effet, des outils seront mis en œuvre pour répondre à la problématique exposée plus haut.

a) Commande et emplacement optimal des hacheurs

A l'inverse des sous-stations à diodes, les hacheurs sont commandables, et d'un volume suffisamment faible pour que leur implantation ne pose pas de problème. Il reste cependant à optimiser leur emplacement et leurs caractéristiques (tension) pour maximiser le rendement énergétique sur cycle de fonctionnement.

Le modèle statique sera ainsi utilisé pour alimenter un algorithme d'optimisation, permettant de connaître l'emplacement et les rapports cycliques maximisant le rendement énergétique, tout en respectant les contraintes de tension définies par la norme Cenelec 50163 [Cen].

b) Performances dynamiques et gestion énergétique

Une fois le réseau dimensionné pour assurer un bon rendement, il faut dimensionner l'architecture de contrôle/commande en conservant autant que possible un lien fort avec les paramètres de dimensionnement.

La formulation du problème sous forme LFT comme nous le montrerons permet d'utiliser les outils multi-variables de commande robuste. Dans un premier temps nous déterminerons le pire cas qui servira à la synthèse. En traitant la position des véhicules en tant qu'incertitude, il sera possible de synthétiser un correcteur permettant de respecter des contraintes dynamiques.

Par ailleurs, le réseau de tramways est un système variable dans le temps. La minimisation des pertes peut se faire en chaque point du réseau, mais n'est pas forcément synonyme d'optimum sur tout un cycle de fonctionnement. Le dimensionnement et la synthèse des lois de commande impliquent donc l'étude de critères de nature intégrale. La théorie de la commande optimale sera utilisée pour y parvenir.

c) Qualité de la tension du réseau complet et dimensionnement des filtres

A partir du modèle harmonique développé pour l'analyse de réseau et de l'intégration des paramètres sous la forme LFT, nous proposerons un modèle de dimensionnement multi-critères. Les paramètres considérés comme incertains peuvent ainsi devenir des variables de dimensionnement. Le problème de synthèse des correcteurs, et celui du dimensionnement des filtres s'écrivent alors avec le même formalisme, ce qui facilitera considérablement leur dimensionnement.

Encore une fois, l'écriture de ce modèle sera automatique à partir d'une description du réseau. Il permettra alors de calculer les pertes, garantir les performances dynamiques et enfin minimiser l'influence des harmoniques, en fonction des paramètres des filtres et en prenant en compte les incertitudes (position du tramway

par exemple). La synthèse du correcteur peut être effectuée en même temps avec un même formalisme.

Ce dimensionnement multi-critères de la structures (filtres) et de la commande (correcteur) du système complet, permettra ainsi un dimensionnement optimal en évitant d'intégrer les capacités de découpage surdimensionnées à l'exemple de situation actuelle.

6 Conclusion

Ce chapitre a présenté une nouvelle architecture d'alimentation qui permet d'augmenter l'efficacité énergétique d'un réseau de tramways. Cette structure est basée sur un canal de puissance sous 1500 Vdc alimenté par des sous-stations classiques, sur lequel viennent se connecter des hacheurs alimentant la LAC.

Ce type de réseau multi-convertisseurs possède des couplages importants (dynamiques et harmoniques) et demande des outils spécifiques qui seront développés aux chapitres suivants.

Une analyse statique sera menée pour étudier les flux de puissance et valider l'intérêt de la nouvelle structure. Cette structure sera ensuite optimisée sur des critères énergétiques.

L'asservissement des hacheurs va imposer la synthèse de leur correcteurs et nécessiter l'utilisation de modèles dynamiques. Les nombreux couplages impliquent une modélisation du réseau entier et l'utilisation de correcteurs multi-variables. La position des tramways étant variable, le modèle doit tenir compte de cette incertitude et le correcteur doit être robuste pour garantir la stabilité et les performances en tout temps. Un modèle dynamique permet aussi de synthétiser des lois de commande tenant compte de l'évolution des variables d'état. Cela permet de piloter un moyen de stockage de manière à diminuer encore plus les pertes.

Enfin l'utilisation de convertisseurs implique l'emploi de filtres. Encore une fois, les couplages imposent une vision système, et une méthode de dimensionnement spécifique doit être utilisée.

Ces trois aspect du dimensionnement (structure, performance, qualité) forment l'ossature de la thèse. Ils sont imbriqués les uns dans les autres, mais conduisent grâce à un même formalisme de modélisation à une même démarche de dimensionnement d'un réseau multi-convertisseurs.

CHAPITRE 2

RÉPARTITION OPTIMALE DES FLUX ÉNERGÉTIQUES

Chapitre 2

Répartition optimale des flux énergétiques

1 Objectif du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de proposer des solutions en vue d'augmenter le rendement énergétique d'une installation ferroviaire de type tramway.

Afin de répondre à cette problématique, il faut avant tout être en mesure de définir ce fameux rendement. Classiquement, c'est le rapport instantané de la puissance utile sur la puissance fournie. Cette puissance est ici la puissance électrique mesurée sur le réseau alternatif en amont des redresseurs. Elle représente l'énergie qui sera facturée à la fin du mois. La puissance utile est celle qui permet au tramway de se mouvoir à la vitesse désirée. L'écart entre les deux correspond aux pertes électriques dans les convertisseurs, dans les réseaux électriques AC et DC, au niveau du groupe onduleur-moteur et enfin aux pertes mécaniques.

Ce rendement n'est pas constant et dépend de nombreux paramètres, dont le temps en premier lieu. Le rendement énergétique (basé sur les énergies, au lieu des puissances), est donc particulièrement approprié à l'étude d'un cycle de fonctionnement. Ce rendement sera impacté par des paramètres que l'on peut regrouper en deux catégories. D'un côté, on retrouve les paramètres électriques comme la section de la LAC, la position des sous-stations ou encore leur tension à vide ; de l'autre côté, on retrouve les paramètres cinématiques liés aux tramways, comme leur position, par exemple. Ces deux catégories ne sont cependant pas distinctes, et il existe même un fort couplage entre les deux. La vitesse de déplacement du tramway sera ainsi reliée directement à la puissance mécanique, et donc à la puissance électrique appelée par le tramway, alors que la tension du bus continu limitera la puissance disponible au niveau du groupe de traction.

Avant d'envisager des comparaisons de structures et une quelconque optimisation, il apparaît nécessaire d'être capable de calculer le rendement non pas seulement pour un état particulier, mais sur un cycle de fonctionnement complet.

En première approximation, l'étude énergétique peut se faire en se basant sur un modèle statique du réseaux de tramways. Il sera donc obligatoire d'effectuer une analyse de la répartition de charge dans le réseau électrique, mais aussi un calcul cinématique pour connaître l'évolution des grandeurs propres au tramway.

La construction d'un outil de calcul prenant en compte les spécificités du système

considéré est alors indispensable. Il devra tenir compte de la partie mécanique fortement non-linéaire, mais aussi du réseau électrique, comportant des charges variables et des convertisseurs d'électronique de puissance.

Comme nous le verrons plus loin, ce simulateur permettra de comparer les architectures proposées au chapitre 1, mais aussi d'optimiser le rendement global de l'installation grâce aux nouveaux degrés de liberté introduits par l'utilisation des hacheurs.

2 Modélisation de la chaîne cinématique d'un tramway

Afin de connaître le rendement énergétique, il est impératif de calculer la puissance captée par un tramway via son pantographe. Cette puissance sera une fonction des caractéristiques techniques du véhicule, de la ligne, du pilote ou encore de l'état électrique de la LAC. Une mise en équation de ces différents systèmes est alors nécessaire pour aller plus loin, afin d'avoir une estimation de l'évolution de la puissance dans le temps, mais aussi de la position du véhicule.

2.1 Les organes mécaniques du tramway

2.1.1 Présentation générale

Comme la majorité des véhicules terrestres, un tramway se déplace grâce à des roues. Ces dernières, en acier, sont d'un diamètre $D = 56\text{cm}$ sur les rames Citadis d'Alstom. Les roues roulent sur des rails à gorge en acier assurant le guidage tout en limitant les frottements.

Un tramway Citadis, dans sa version standard, possède quatre bogies articulés, composés chacun de deux essieux. Sur ces quatre bogies, seuls trois sont moteurs, le dernier étant simplement porteur. Un bogie moteur sera constitué de deux moteurs asynchrones d'une puissance nominale de 180 kW, et de leur réducteur associé permettant d'adapter la vitesse de rotation tout en augmentant le couple. Le réducteur a un rendement $\eta_g = 96\%$ et un rapport de réduction $k_g = 0,1453$.

La vitesse variable est assurée grâce à l'utilisation d'un convertisseur statique d'électronique de puissance. Dans le cas d'un moteur à courant alternatif, c'est un onduleur qui sera utilisé, permettant la conversion d'une tension continue d'un bus DC en des grandeurs alternatives d'amplitude et de fréquence variables.

Cet onduleur est raccordé au bus continu, composé d'un banc capacitif. Sur ce bus seront également raccordés : les convertisseurs auxiliaires pour le réseau de bord, la climatisation, l'éclairage, la sonorisation... On retrouvera aussi le rhéostat de freinage relié au bus via un hacheur qui se déclenchera en cas de surtension.

Enfin, le bus continu est raccordé à la ligne aérienne de contact par l'intermédiaire d'une inductance de filtrage, et d'un pantographe avec son archet.

2.1.2 Le contact roue-rail

Pour se mouvoir, le tramway va appliquer un couple sur ses roues motrices grâce au moteur de traction couplé à une transmission. L'action du couple moteur sur

la roue produit un effort \vec{F}_r à la jante, ce qui va permettre de faire avancer le tramway. Cependant, la totalité de cet effort ne peut être transmis au rail. L'effort réellement transmis de la roue à la voie va dépendre d'un paramètre fondamental dans le domaine du ferroviaire : l'adhérence [CA05],[CC09] et [All08].

Par définition, l'adhérence μ d'une roue par rapport au rail est le rapport entre le module de l'effort de traction ou de freinage réellement transmis au rail \vec{F} , et le module de la force normale au plan de pose du rail \vec{Q} , tel que :

$$|\vec{F}| = \mu |\vec{Q}| \quad (2.1)$$

Ces forces sont représentées sur la figure 2.1.

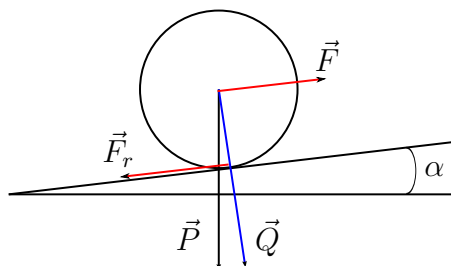


FIGURE 2.1 – Contact roue-rail

Le module de la force \vec{Q} est principalement le module de la force verticale liée à la pesanteur \vec{P} projetée sur le plan du rail, auquel il faut rajouter l'effort de cabrage lors des variations de l'effort transmis.

Une autre caractéristique du contact roue-rail est le glissement de la roue par rapport au rail [SCM02]. Le glissement est défini par :

$$\nu = \begin{cases} \frac{V_r - V_t}{V_r} & \text{accélération} \\ \frac{V_r - V_t}{V_t} & \text{freinage} \end{cases} \quad (2.2)$$

où ν représente le glissement relatif, V_r la vitesse réelle de la roue au niveau du rail, et V_t la vitesse de l'essieu supposée identique à celle du tramway.

L'étude du contact roue-rail, source de nombreux travaux de recherche, a montré que l'adhérence, et donc l'effort transmissible, dépendent directement du glissement mais aussi de nombreux autres paramètres comme l'état des rails, les conditions atmosphériques, la présence de feuilles mortes ou encore la vitesse du tramway qui peut réduire dramatiquement l'adhérence. La caractéristique typique simplifiée de la relation glissement / adhérence est donnée figure 2.2.

Dès qu'on applique un effort sur la roue, un glissement va apparaître (il ne peut en effet pas avoir transmission d'effort s'il n'y a pas de glissement)¹. Ce glissement initial n'est pas à proprement parler un glissement, il est juste dû à l'élasticité des matériaux; on parle alors de pseudo glissement. Si la force de traction est trop grande lors des phases d'accélération, le glissement va augmenter et s'il dépasse la valeur limite ν_0 , l'adhérence va diminuer et le glissement va alors augmenter plus rapidement. La roue va tourner plus vite que la vitesse du véhicule (patinage), et durant les phases de freinage, elle tournera moins vite (enrayage), jusqu'à se bloquer dans des situations extrêmes. Le fonctionnement devient alors instable et

1. On peut noter l'analogie entre le contact roue-rail et la machine asynchrone

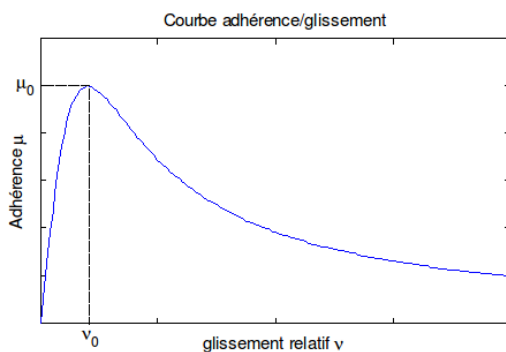


FIGURE 2.2 – Adhérence en fonction du glissement relatif

peut être destructeur. Il est alors nécessaire de régler l'effort transmis pour retrouver de l'adhérence (rôle de l'antienrayage). Pour le contact roue-rail, la valeur typique de ν_0 est de l'ordre de 1% à 2%.

La valeur maximale μ_0 de l'adhérence est mesurée par des campagnes d'essais. Pour un tramway sur rail sec et propre, on peut utiliser la relation (2.3) par exemple, où V_t est la vitesse du tramway en m/s :

$$\mu_0 = 0.25 \frac{1 + 0.0135V_t}{1 + 0.0635V_t} \quad (2.3)$$

Si le glissement est inférieur à ν_0 , on est sur la zone stable de fonctionnement. D'après la théorie simplifiée de Kalker [All08] la relation liant l'adhérence et le glissement est linéaire :

$$\mu(\nu) = kQ^{\frac{1}{3}}\nu \quad (2.4)$$

L'effort maximal que pourra développer un moteur de traction avant patinage est donné à partir de (2.1) par :

$$F_{adh}^{max} = \mu_0(V_t)M_a g \cos(\alpha) \quad (2.5)$$

M_a est appelée masse adhérente, il s'agit de la masse reposant effectivement sur l'essieu moteur. (Le $\cos(\alpha)$ permet de garder uniquement la composante verticale du poids. De plus, α est généralement faible, d'où $\cos(\alpha) = 1$).

a) Exemple du Citadis 402

Un tramway Citadis a une masse à vide $M_v = 54$ t, il peut embarquer $M_p = 26$ t de passagers. Avec ses $n_e = 8$ essieux, dont seulement $n_m = 6$ sont moteurs, la masse adhérente se répartie sur les essieux moteur au prorata du nombre total d'essieux :

$$M_a = \frac{n_m}{n_e}(M_v + M_p) = 60 \text{ t} \quad (2.6)$$

On peut artificiellement augmenter cet effort en augmentant l'adhérence. C'est pour cette raison que les véhicules ferroviaires disposent de sablières qui sont utilisées en cas de neige, de pluie ou pour un freinage d'urgence.

La commande des moteurs de traction doit donc être réalisée de manière à ne pas dépasser cette limite d'adhérence, ni celles de puissance et d'échauffement thermique. Il faut aussi limiter les accélérations et les décélérations ainsi que leurs dérivées (connues sous le terme "jerk") pour assurer le confort des passagers.

b) Note sur le freinage

Le rail permet d'avoir des rendements très élevés, grâce à un frottement faible entre la roue et le rail. Cela se traduit inmanquablement par un très faible coefficient d'adhérence comme nous l'avons vu. Bien que problématique lors des accélérations, le patinage peut être limité en diminuant le couple pour reprendre de l'adhérence. Qu'en-est-il lors des phases de freinage ?

Bien qu'équipé de freins à disque, le tramway freine majoritairement en récupération grâce à ses moteurs de traction. Contrairement aux grandes lignes, les arrêts et les phases de freinages fréquents rendent tout simplement le freinage par friction inopérant, et ce dernier est utilisé uniquement aux faibles vitesses ou comme frein de parking. C'est donc aux moteurs de traction que revient le rôle de ralentir le tramway. En se comportant comme des générateurs, ils peuvent renvoyer l'énergie cinétique accumulée par le véhicule sur le réseau où cette énergie sera éventuellement réutilisée par d'autres véhicules en traction.

Ces deux modes de freinage vont tous les deux créer un couple sur les roues. En cas de perte d'adhérence, il va alors falloir réduire l'effort de freinage (rôle de l'anti-enrayage) pour reprendre le contrôle, mais cela se traduira par une augmentation de la distance d'arrêt qui peut avoir des conséquences fâcheuses dans un environnement urbain.

Des patins électromagnétiques sont donc logés sous les tramways pour assurer le freinage d'urgence, avec une décélération pouvant atteindre 3 m/s^2 . Ces patins fonctionnent grâce aux courants de Foucault qu'ils génèrent dans les rails et ne sont pas contraints par des problématiques d'adhérence.

2.1.3 Le moteur et la transmission

Le moteur, ou plutôt les moteurs, sont les éléments clés du tramway. (De nombreuses technologies se sont affrontées et les machines à courant continu ont laissé place aux machines asynchrones, elles mêmes en passe de céder leur suprématie à la machine synchrone à aimant permanent). L'arbre moteur, trop rapide, est associé à un réducteur dont l'arbre lent est accouplé à l'essieu. Il n'y a pas de boîte de vitesse dans la transmission, la vitesse variable s'opérant uniquement grâce au contrôle du moteur. La roue se chargera enfin de transformer ce couple en un effort pour faire avancer le tramway. Cette chaîne de conversion est illustrée par la figure 2.3.

En bleu clair, sont dessinés les deux moteurs d'un bogie, associé chacun à leur essieu respectif, reliant les roues entre elles.

a) Les limitations du moteurs

Le moteur de traction possède une puissance nominale, mais cette puissance ne peut cependant pas être utilisée sur toute la plage de fonctionnement. En particulier lors des faibles vitesses, il est impératif de ne pas dépasser le couple nominal pour

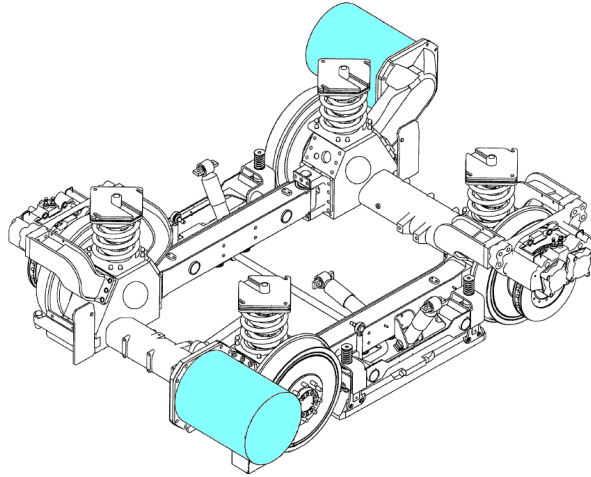


FIGURE 2.3 – Essieu moteur d’un tramway Citadis [Mul07a]

des raisons mécaniques, thermiques et enfin liées à l’adhérence. Il peut également exister, dans la zone des hautes vitesses, une limitation en $1/V^2$, correspondant à une marche à glissement constant [YI03]. Ces limitations décrivent une enveloppe représentée figure 2.4 qui limitera l’effort applicable aussi bien durant la traction que durant le freinage.

Cette enveloppe dépendra également de la tension du bus continu et on définit la tension réduite u par :

$$u = \min \left(\frac{U_{bus}}{U_{bus}^{nom}}, 1 \right) \quad (2.7)$$

où $U_{bus}^{nom} = 735 \text{ V}$ est la tension minimale en-dessous de laquelle les performances nominales du moteur sont garanties. Le couple moteur s’exprime alors en fonction de la vitesse de rotation Ω_m et de la tension U_{bus} par [Hil94] :

$$\Gamma_m^{max} = \begin{cases} \Gamma_{max} & \text{si } 0 \leq \Omega_m < u\Omega_{C_{max}} & \text{(Démarrage)} \\ u\Gamma_{max}\Omega_{C_{max}}/\Omega_m & \text{si } u\Omega_{C_{max}} \leq \Omega_m < u^{\frac{1}{2}}\Omega_{P_{max}} & \text{(P}_{cte}\text{)} \\ u^{\frac{3}{2}}\Gamma_{max}\Omega_{C_{max}}\Omega_{P_{max}}/\Omega_m^2 & \text{si } u^{\frac{1}{2}}\Omega_{P_{max}} \leq \Omega_m < \Omega_{\Omega_{max}} & \text{(défluxage)} \\ 0 & \text{si } \Omega_{\Omega_{max}} < \Omega_m & \text{(Survitesse)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ces équations sont vraies aussi bien en traction qu’en freinage, mais les différentes constantes associées changent en fonction du mode selon le tableau 2.1.

Le freinage par récupération ne peut avoir lieu que si la vitesse de rotation est supérieure à 400 tr/min.

A titre d’illustration, les courbes du couple maximal disponible en fonction de la vitesse sont tracées sur la figure 2.4a. La figure 2.4b, quant à elle, représente la puissance motrice de l’ensemble du tramway (avec les six moteurs).

Symbole	Désignation	Traction	Freinage
Γ_{max}	Couple maximum	799	-799
$\Omega_{C_{max}}$	Vitesse max avec le couple max	2145	3760
$\Omega_{P_{max}}$	Vitesse max avec la puissance max	2607	3760
$\Omega_{\Omega_{max}}$	Vitesse de rotation max	4563	4563

TABLE 2.1 – Constante de la loi couple vitesse pour un moteur Arpege MC 4HGA1433, avec le couple en N.m et la vitesse en tr/min [Als]

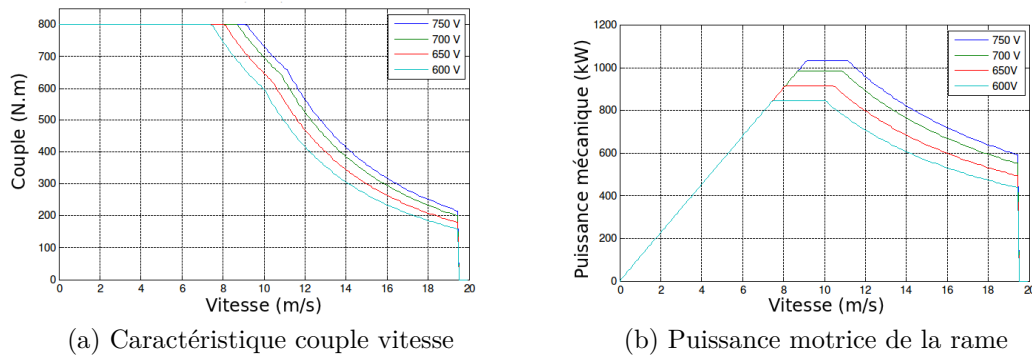


FIGURE 2.4 – Caractéristiques du moteur de traction en fonction de la vitesse du tramway et de la tension du bus continu

b) Commande du moteur

Il est relativement facile d'obtenir de la vitesse variable avec une machine à courant continu. En effet, une fois la machine fluxée grâce au circuit inducteur, la vitesse de rotation est directement reliée à la tension d'induit. Le courant d'induit proportionnel au couple influe sur cette loi en créant une chute de tension dans les enroulements statoriques rendant la loi de vitesse affine. Le coefficient de proportionnalité entre la vitesse et la f.e.m dépend uniquement du courant inducteur, si on néglige la réaction magnétique d'induit.

Dans une machine asynchrone, la commande est beaucoup plus complexe, et piloter le moteur en vitesse variable requiert de contrôler la tension et la fréquence d'alimentation.

De nombreuses technologies d'onduleur peuvent être utilisées en fonction des niveaux de tension, du besoin de filtrage, des problématiques CEM, etc. Afin de maîtriser le couple, lors des phases transitoires notamment, et aux faibles vitesses, il est classique d'utiliser des techniques de commande dites vectorielles, qui reposent sur une modélisation dynamique de la machine, par opposition aux techniques scalaires, qui se basent sur les équations en régime permanent. La plus connue et la plus utilisée reste la méthode de contrôle à flux orienté qui permet un découplage du flux et du courant créant le couple. Cette méthode permet alors de commander la machine asynchrone comme une machine à courant continu.

Dans cette thèse, l'étude de la commande des moteurs n'a pas été réalisée et seul le rendement de l'ensemble onduleur-moteur sera développé par la suite.

c) Le rendement du groupe moteur

Pour le calcul de ce rendement, nous ne discernons pas le moteur de l'onduleur. La cartographie du rendement sera obtenue par une campagne de mesures. Le rendement de l'ensemble onduleur-moteur peut atteindre 94%, mais il dépend directement du point de fonctionnement. La cartographie du rendement en fonction de la vitesse de rotation et du couple est tracée figure 2.5.

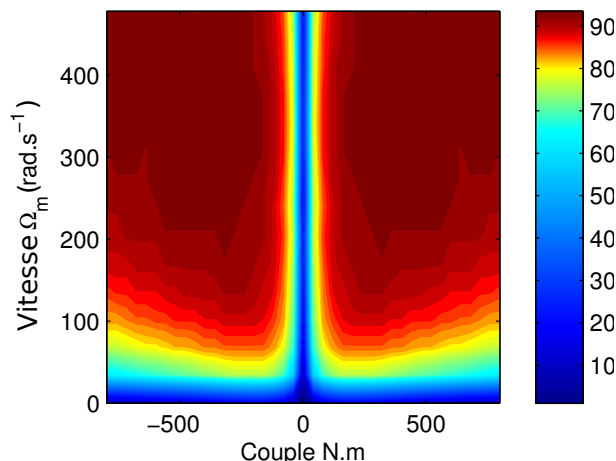


FIGURE 2.5 – Cartographie du rendement en fonction du point de fonctionnement

Ce rendement reste supérieur à 90% sur une large plage de fonctionnement.

d) Passage des grandeurs moteurs aux grandeurs tramway

Bien que le moteur soit au cœur du système, il est plus commode d'utiliser les grandeurs propres au véhicule lui-même. Nous allons exprimer les équations qui permettent de passer de la vitesse de rotation et du couple moteur à la vitesse linéaire du tramway et à l'effort à la jante.

La vitesse de déplacement en périphérie de la roue est liée à la vitesse de rotation de l'essieu par $V_r = r\Omega_e$, où r représente le rayon de la roue. De même, le moment sur l'essieu est lié à la force sur la roue F_r par $\Gamma_e = rF_r$. La force de traction totale F_t est obtenue en supposant que chaque moteur développe le même couple et s'exprime par $F_t = n_m F_r$, avec n_m le nombre de moteurs.

Le réducteur permet une adaptation des vitesses de rotation entre le moteur et l'arbre lent, ici l'essieu. L'équation caractéristique est $\Omega_e = k_g \Omega_m$, avec k_g rapport de réduction. Le couple suit une loi identique au rendement η_g près : $\Gamma_e = \eta_g \Gamma_m / k_g$.

On retiendra donc les deux relations de passage suivantes :

$$\Omega_m = \frac{V_r}{r k_g} \quad (2.9)$$

$$F_r = \frac{n_m \eta_g}{r k_g} \Gamma_m \quad (2.10)$$

Dans le cas du Citadis 402, $r = 0.28$ m, $k_g = 0.1453$ et $\eta_g = 96\%$.

e) Effort réellement appliqué

Grâce aux relations (2.10) et (2.8), nous sommes en mesure de calculer l'effort maximal que peut exercer un tramway. Notons tout de même que si cet effort est supérieur à F_{adh}^{max} calculé par (2.5), le tramway commencera à patiner. En pratique, pour détecter un début de glissement trop important, la vitesse de rotation des roues motrices sera comparée avec celle des roues porteuses, et un algorithme de contrôle permettra de réduire le couple et d'augmenter l'adhérence grâce aux sablières.

Ce couple maximal qui, rappelons-le, dépend de la tension, de la vitesse et de la phase de fonctionnement (traction ou freinage), ne sera pas toujours appliqué. En effet, le conducteur de tramway dispose à bord de son engin d'un manipulateur de traction-freinage qui lui permet de moduler cet effort. En position neutre, l'effort est nul et le tramway marche sur l'erre, c'est-à-dire qu'il profite de l'énergie cinétique qu'il a accumulé pour continuer à avancer. En poussant le manipulateur, le tramway accélérera alors qu'en le tirant vers lui, le tramway freinera. On notera $\gamma \in [-1, 1]$ l'image de la position du manipulateur.

A partir de ce coefficient γ , un algorithme est utilisé pour mettre en forme la consigne. En effet, des normes imposent des contraintes sur les accélérations maximales et leurs dérivées (jerk) autorisées dans un véhicule. Cette mise en forme est nécessaire pour éviter une conduite trop brusque. Cette consigne de couple passera ensuite dans l'anti-enrayage pour le limiter le cas échéant. Enfin, les boucles de régulation du moteur vont agir et piloter ce dernier pour que la valeur de consigne soit atteinte.

Ces boucles sont complexes et ne nous intéressent pas pour le moment. On supposera donc que l'effort est directement proportionnel à γ et il sera exprimé par :

$$F = \gamma \frac{n_m \eta_g}{r k_g} \Gamma_m^{max} \quad (2.11)$$

2.2 Effort de résistance à l'avancement

Nous avons calculé l'effort que peut appliquer un tramway en fonction de la volonté de son conducteur. Intéressons-nous maintenant aux forces qui s'opposent au mouvement du tramway, appelées résistances à l'avancement. Ces forces peuvent se regrouper en deux types distincts, à savoir les frottements dus au mouvement du tramway et ceux dus à la ligne.

2.2.1 Les frottements dus au mouvement du tramway

Cette force de frottement est calculée grâce à la formule empirique suivante :

$$F_f = A + BV_t + CV_t^2 \quad (2.12)$$

Le terme A représente les frottements secs (loi de Coulomb), c'est à dire le roulement des roues sur les rails et les paliers ; B ne prend en compte que la qualité de la voie et correspond un terme de frottements visqueux ; C , enfin, représente les frottements aérodynamiques. Ces coefficients dépendent de la masse de tramway, de son nombre d'essieux et de son aérodynamisme. On supposera par la suite ces termes constants, et pour un Citadis 402, ils sont donnés par le tableau 2.2.

A	B	C
1552	40.32	8.0248

TABLE 2.2 – Coefficients de résistance à l’avancement pour une vitesse en m/s [Als]

2.2.2 Les frottements dus à la ligne

Les forces résistantes dues à la ligne sont séparées en deux parties : celles dues à la déclivité (F_d) et celles dues au rayon de courbure (F_c) :

$$F_d = mg \sin(\alpha) \quad (2.13)$$

$$F_c = mg \frac{k_e}{r_v} \quad (2.14)$$

avec, m la masse de la rame, α la pente de la ligne, $k_e = 80$, coefficient d’écartement dépendant de la largeur de la voie et r_v le rayon de courbure de la ligne en m.

2.3 Équation dynamique du mouvement

Si le tramway était uniquement un objet en translation le long des rails, il suffirait d’appliquer le second principe de la dynamique pour trouver l’équation du mouvement. Cependant, la force de propulsion du tramway provient de la rotation de nombreuses masses tournantes : moteurs, essieux, roues et réducteurs. Il faut donc prendre en compte toutes ces inerties et les ramener à la roue.

a) Inertie équivalent d’un réducteur

On considère le réducteur de la figure 2.6.

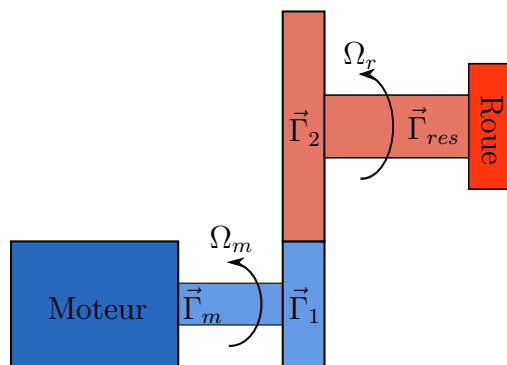


FIGURE 2.6 – Schéma simplifié d’un réducteur de vitesse

Sur l’arbre rapide (en bleu) est accouplé un moteur appliquant un couple Γ_m . Cet arbre a une inertie équivalente J_m et tourne à la vitesse Ω_m . L’arbre lent (en rouge) d’inertie J_r , comprend l’essieu et la roue qui applique un couple résistant $\Gamma_{res} = rF_{res}$.

Le principe de Newton appliqué sur ces arbres conduit aux équations suivantes :

$$J_r \frac{d\Omega_r}{dt} = \Gamma_2 - \Gamma_{res} \quad (2.15)$$

$$J_m \frac{d\Omega_m}{dt} = \Gamma_m - \Gamma_1 \quad (2.16)$$

A partir des définitions du paragraphe d), on peut ramener toutes ces équations à la roue avec V_r la vitesse linéaire de la roue :

$$\frac{1}{r^2} \left(J_r + \frac{\eta_g J_m}{k_g^2} \right) \frac{dV_r}{dt} = \frac{\eta_g}{r k_g} \Gamma_m - F_{res} \quad (2.17)$$

Le terme devant la dérivée est homogène à une masse. On parlera alors de masse tournante. L'inertie de l'arbre rapide est considérablement augmentée une fois ramenée sur l'arbre lent, comme on pouvait le présager en faisant un bilan d'énergie cinétique.

b) Application au tramway

Le tramway est composé de masses en rotation et de masses en translation. En utilisant l'équation (2.17), on obtient l'équation dynamique suivante :

$$\left(m + \frac{1}{(1-\nu)r^2} \left(n_e J_r + n_m \frac{\eta_g J_m}{k_g^2} \right) \right) \frac{dV_t}{dt} = F - (F_f + F_d + F_c) \quad (2.18)$$

On voit apparaître le glissement car cette fois, on travaille avec la vitesse du véhicule au lieu de la vitesse de la roue (à noter que le coefficient $1/(1-\nu)$ devient $(1+\nu)$ en mode freinage). Le glissement dépend de la vitesse mais il peut être négligé. Le nombre d'essieux n_e et de moteurs n_m rentrent en jeu. F est telle que définie par (2.11) et correspond à l'effort fourni par les moteurs, alors que le dernier terme $(F_f + F_d + F_c)$ correspond aux frottements définis par : (2.12), (2.13) et (2.14).

L'équation (2.18) peut être réécrite sous une forme plus compacte :

$$m\zeta \frac{dV_t}{dt} = F(V_t, U_{bus}, \gamma) - F_{rav}(V_t) \quad (2.19)$$

avec :

$$F_{rav} = (F_f + F_d + F_c) \quad (2.20)$$

ζ représente le coefficient de masse tournante et permet de tenir compte de l'ensemble des inerties. Pour le Citadis, la masse est estimée à $m = 80t$ et $\zeta = 1.05$. En d'autres termes, les masses tournantes apportent une inertie supplémentaire de 5% en plus de celle du véhicule seul.

L'équation (2.19) est une équation non-linéaire du premier degré. Elle ne possède pas de solution analytique, mais des méthodes numériques permettent de la résoudre. En l'intégrant, il est possible de déterminer la position du tramway qui interviendra par ailleurs dans le calcul des résistances à l'avancement.

2.4 Conclusion sur la modélisation de la partie mécanique

Les équations cinématiques du tramway ont été établies dans ce paragraphe. Les dynamiques rapides ont été négligées (pour un modèle d'ordre plus élevé voir [Gan03] pour une locomotive BB36000, ou [Ver07] pour le VAL de Lille). La vitesse

est alors la solution d'une équation non-linéaire du premier degré, qui fait intervenir la tension du bus continu, la position du manipulateur de traction/freinage et les données de la voie (pente et rayon de courbure). On supposera de plus que la masse reste constante (sans tenir compte de la variation du nombre de passagers) et que les boucles de commandes sont parfaites (contrôles instantanés du couple et de la vitesse).

A partir des équations (2.9), (2.10) et (2.19), et en tenant compte du rendement η_m du couple (moteur/onduleur) dont la cartographie est donnée figure 2.5, il est alors possible d'exprimer la puissance électrique consommée par les moteurs sur le bus continu :

$$P_{elec} = \frac{V_t}{\eta_g \eta_m} \left(m \zeta \frac{dV_t}{dt} + F_{rav} \right) \quad (2.21)$$

3 Modélisation du conducteur de rame

Revenons dans cette section sur le paramètre γ de l'équation (2.19). U_{bus} est la tension du bus continu. La méthode permettant son calcul sera développée par la suite. La déclivité de la ligne est une constante, tout comme son rayon de courbure. Pour connaître l'évolution de la position du tramway, il ne reste qu'un élément à déterminer, qui aura une importance majeure : la position du manipulateur de traction/freinage γ .

Ce terme représente l'action humaine de la conduite sur la rame, fixant les phases d'accélération et les phases de freinage. Le choix de γ n'est pas anodin ; en effet, le conducteur doit respecter les limitations de vitesse sur les différentes sections de la ligne, s'arrêter aux stations passagers, respecter les feux de signalisation, tout en respectant l'horaire qui lui est assigné et les limites de confort.

Pour l'aider dans sa tâche, un algorithme de commande va adapter la consigne du pilote pour s'assurer que les contraintes sont bien respectées.

3.1 Gestion de la trajectoire de vitesse

Durant les phases d'accélération, le conducteur va chercher à prendre de la vitesse, mais plusieurs paramètres vont limiter cette accélération :

- Le couple maximal de traction du moteur, lui même lié à la vitesse et à la tension,
- La résistance à l'avancement,
- La vitesse maximale autorisée sur le canton V_{max} ,
- La vitesse de rotation maximale du moteur Ω_{max} ,
- Les limites d'adhérence F_{adh}^{max} ,
- Les paramètres limites de confort donnés dans le tableau 2.3

	Accélération	Jerk
Traction	1 m/s ²	1.5 m/s ³
Freinage	-0.9 m/s ²	-1.5 m/s ³

TABLE 2.3 – Limites des accélérations et du jerk en mode traction et freinage

Afin de respecter toutes ces contraintes, l'algorithme 1 est appliqué à chaque pas de calcul. Que ce soit en freinage ou en traction, l'algorithme reste le même, en adaptant toutefois les constantes des différentes équations utilisées.

```

Entrées :  $\gamma_{in} \in [-1, 1]$ , la consigne de couple
Sorties :  $\gamma_{out}$  la consigne modifiée
            $a$  l'accélération du tramway
            $F_{out}$  l'effort à la jante appliqué

/* Force développée par les moteurs : équation (2.11) */
 $F_{out} \leftarrow F(\gamma_{in})$ 
si  $F_{out} > F_{adh}$  alors Présence de patinage : limitation de l'effort disponible
  |  $F_{out} \leftarrow F_{adh}$ 
fin

/* Calcul de l'accélération : équation (2.19) */
 $a \leftarrow (F_{out} - F_{rav}) / (m\zeta)$ 
si  $a > a_{max}$  alors Dépassement de l'accélération autorisée
  |  $a \leftarrow a_{max}$ 
fin

/* Calcul du Jerk */
 $j \leftarrow (a - a_{k-1}) / dt$ 
si  $j > j_{max}$  alors Dépassement du jerk autorisé
  |  $a \leftarrow a_{k-1} + j_{max}dt$ 
fin

/* Calcul de la vitesse */
 $v \leftarrow v_{k-1} + a dt$ 
si  $v > V_{max}$  alors Dépassement de la vitesse autorisée
  |  $a \leftarrow (V_{max} - v_{k-1}) / dt$ 
fin

/* Re-vérification de l'accélération */
si  $a > a_{max}$  alors
  |  $a \leftarrow a_{max}$ 
  | Le respect de la limitation de vitesse ne peut être garanti
fin

/* Mise à jour de l'effort et de la variable de contrôle */
 $F_{out} = (m\zeta a + F_{rav})$ 
 $\gamma_{out} = F_{out} / F^{max}$ 
/* Re-vérification de la force et de la consigne */
Algorithme 1: Algorithme de mise en forme de la consigne de couple

```

Ce type d'algorithme se retrouve embarqué dans les véhicules automatiques comme le VAL [Ver07], mais aussi sur les grandes lignes. Le système de signalisation ERTMS (European Rail Traffic Management System) [PT07] est un système de sécurité que l'on retrouve sur les grandes lignes. Il permet de garantir que le train respecte les vitesses maximales autorisées sur un tronçon. Des balises au sol émettent un signal capté par le train. A partir des caractéristiques du train, un algorithme va calculer les distances de freinage, et informer le conducteur. Si le conducteur ne ralentit pas et que la distance de freinage devient insuffisante pour garantir l'arrêt

en toute sécurité, l'ERTMS déclenche lui même le frein.

Si le conducteur veut encore accélérer alors qu'il atteint la limitation de vitesse, l'algorithme stoppe l'accélération pour ne pas dépasser la vitesse limite. Si par contre le tramway atteint sa vitesse de croisière, et qu'il passe sur un canton dont la limitation de vitesse est plus faible, la situation devient problématique. En effet, pour ne pas dépasser cette limitation, le conducteur doit freiner, et au vu de l'inertie du tramway, la décélération peut être considérable. Cela est d'autant plus important dans le cas d'un arrêt où la vitesse de consigne est nulle. Si le tramway ne commence à freiner qu'une fois qu'il a atteint l'arrêt, il ne peut évidemment pas réussir à s'arrêter dans de bonnes conditions.

Afin de respecter les arrêts et les limitations de vitesse, il est ainsi impératif d'anticiper le parcours, tout comme un automobiliste qui conduit sa voiture. L'algorithme 1 présenté ci-dessus ne fait ainsi que du post-traitement pour vérifier que les limites ne sont pas atteintes. Les décisions doivent être prises en amont sur la variable γ_{in} .

3.2 Un modèle du pilote

L'objectif de cette partie est de planifier la trajectoire de vitesse que doit suivre le tramway. On cherche à fournir la consigne de couple γ_{in} , proche de celle intuitée par un humain. Modéliser le comportement humain est cependant loin d'être une tâche aisée. La capacité d'anticipation est en effet une capacité fondamentale, mais très dure à reproduire d'un point de vue algorithmique. L'anticipation permet ainsi au conducteur de respecter les limitations de vitesse, les arrêts aux stations et d'éviter les collisions.

Deux approches peuvent être utilisées pour modéliser le pilote. Tout d'abord, on peut considérer que le problème de conduite est un problème d'optimisation. A partir des équations caractéristiques des véhicules, on peut chercher les paramètres de commande qui permettent de garantir le respect des contraintes de vitesse ou d'arrêt [Abr08]. Cette méthode est illustrée dans la partie 5.1.2. Une autre approche, plus algorithmique, peut être trouvée dans [Luk01]. Cette approche sera retenue et décrite par la suite. Bien que moins précise, elle reste bien plus rapide que la résolution d'un problème d'optimisation dynamique sous contraintes à chaque pas de temps, et est suffisante pour l'analyse.

La conduite normale d'un tramway peut se décomposer en trois phases : l'accélération, la marche sur l'erre et le freinage.

3.2.1 Les phases d'accélération

Un conducteur peut accélérer si et seulement si tous les critères suivants sont réunis :

- Il ne va pas dépasser les limitations de vitesse,
- Il aura le temps de freiner pour la prochaine limitation de vitesse,
- Il aura le temps de freiner pour s'arrêter à la prochaine station,
- Il n'y a pas de risque de collision avec le tramway le précédant.

Les feux de circulation ne sont pas pris en compte car on fait l'hypothèse que le tramway se déplace sur une plate-forme dédiée, tout en ayant la priorité aux croisements.

L'accélération peut se faire de différentes manières. On peut avoir un chauffeur très agressif qui accélère autant que le tramway le peut ($\gamma_{in} = 1$), ou un conducteur plus tranquille qui effectue une accélération progressive en faisant varier γ_{in} .

Le premier garanti une conduite en un temps minimal, mais la consommation énergétique en pâtira tout comme le confort des passagers. Son comportement pourra être modélisé par un hystérésis. Un conducteur avec une conduite moins sportive serait cependant préférable et il pourrait être approché par un PID.

Pour avoir l'autorisation d'accélérer, le conducteur doit être sûr d'avoir le temps de ralentir ou de s'arrêter dans de bonnes conditions comme nous l'avons vu. C'est pour cette raison que la modélisation du conducteur par un PID n'est pas suffisante. L'influence du type de conducteur sera développée dans la section 5.1.2.

L'étude des phases d'accélération est ainsi conditionnée par celle des phases de freinage.

3.2.2 Les phases de freinage

Comme pour accélérer, plusieurs comportements peuvent être mis à jour pour le freinage. Le problème est plus complexe à résoudre, car la condition finale est fixée. C'est un problème dit aux deux bouts.

Du point de vue du conducteur, le problème peut être résumé comme suit : étant à une position x_1 et à une vitesse V_1 , aurais-je le temps de freiner dans des conditions satisfaisantes pour atteindre la vitesse V_f au point x_f , ou plutôt, quelle est la dernière position x_m me permettant de freiner en toute sécurité ?

La recherche de la distance minimale de freinage impose donc d'anticiper la trajectoire du tramway.

La vitesse du tramway est régie par une équation différentielle non-linéaire du premier ordre (2.19). La résolution analytique de cette équation étant impossible, x_m ne peut être obtenu en inversant le problème. D'autres formulations sont cependant possibles. Elles sont détaillées ci-après.

a) Approximation de la solution

Sous l'hypothèse d'une décélération constante a_f et en négligeant les forces de frottement, la durée nécessaire pour passer de la vitesse V_1 à la vitesse V_f peut être approximée par :

$$t_f = \frac{V_f - V_1}{a_f} \quad (2.22)$$

Après intégration des équations cinématiques, la distance parcourue durant un temps t s'exprime alors par :

$$x = V_1 t + \frac{1}{2} a_f t^2 \quad (2.23)$$

En remplaçant dans (2.23) t par t_f obtenu par l'équation (2.22), on peut exprimer la distance de freinage d par :

$$d = \frac{V_f^2 - V_1^2}{2a_f} \quad (2.24)$$

Cette approche ne tient pas compte des limitations physiques du tramway. De plus, la résistance à l'avancement n'est pas prise en compte. Cette dernière peut

cependant être motrice et augmenter significativement les distances de freinage dans les descentes.

b) Modèle plus complexe

La première étape consiste à calculer à l'instant k la décélération maximale que peut produire le tramway $a_f \leftarrow (F^{max} - F_{rav})/(m\zeta)$, avec F^{max} l'effort de freinage maximal que peut fournir le tramway (compté négativement). Cette décélération ne doit pas dépasser a_{max} , la limite de confort. Le temps pour atteindre cette décélération à partir de l'accélération actuelle avec un jerk max est donnée par : $t_1 = (a_f - a_k)/j_{max}$. Durant cette période, le tramway aura parcouru une distance $x_1 = v_k t_1 + 1/2 a_k t_1^2 + 1/6 j_{max} t_1^3$.

À partir de là, le tramway a atteint sa décélération maximale. Cependant, cette décélération dépend de l'effort maximum et donc de la vitesse du tramway. De plus, il existe différentes plages de fonctionnement du moteur (couple constant, puissance constante, ...). Pour chaque zone de fonctionnement, il faut donc appliquer (2.24), avec la force F^{max} que peut produire le moteur sur la plage considérée.

Ainsi, le calcul de la distance de freinage doit être actualisé à chaque pas de temps.

c) Conclusion

La distance de freinage est calculée pour une décélération maximale, correspondant à un effort de freinage maximal. Passé cette distance, le tramway ne pourra physiquement plus ralentir dans de bonnes conditions. Notre conducteur devra donc anticiper et commencer à freiner plus tôt pour garder une marge de sécurité et prévenir les descentes par exemple.

Il faudra également choisir avec soin la cible. S'agit-il de la prochaine limitation de vitesse ou du prochain arrêt ?

3.2.3 La marche sur l'erre

Comment se comporte un tramway lorsqu'il a atteint sa vitesse cible et qu'il n'a pas d'impératif de freinage ? Là encore, plusieurs solutions peuvent être envisagées.

Le conducteur peut essayer de maintenir une vitesse constante. Dans ce cas, le tramway devra fournir une puissance pour vaincre les forces de frottement.

Une autre approche, plus proche de la réalité, consiste à prendre en compte la marche sur l'erre [Luk01]. Une fois la vitesse maximale atteinte, le conducteur va couper les moteurs pour profiter de l'inertie du tramway et économiser de l'énergie. Il réaccélérera si la vitesse passe en-dessous d'un seuil, et se comportera comme un correcteur à hystérésis.

4 Illustration et validation sur la ligne d'essai de la Rochelle

Les algorithmes développés ci-dessus sont illustrés sur la ligne d'essai expérimentale d'Alstom, située à la Rochelle. Cette ligne, de 1453 m de long, comporte les 6 arrêts dont le point kilométrique (PK) est donné par le tableau 2.4.

4. ILLUSTRATION ET VALIDATION SUR LA LIGNE D'ESSAI DE LA ROCHELLE

Nom	Début	Europe	Sup de Co	Conseil Général	Bellevue	Fin
PK	0	35	346	671	1360	1453

TABLE 2.4 – Arrêts sur la ligne d'essai de la Rochelle

Cette ligne est décomposée en plusieurs cantons, dont les limitations de vitesse sont données par la courbe rouge de la figure 2.7.

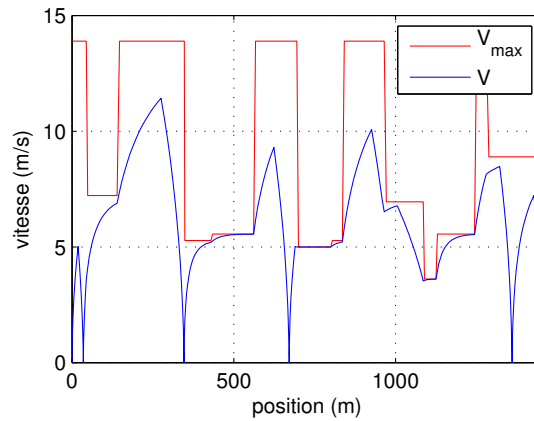


FIGURE 2.7 – Vitesse du tramway (bleu) et limitation de vitesse (rouge) en fonction de la position

La courbe bleu de la figure 2.7 est la vitesse du tramway, résultat des calculs décrits précédemment. On constate que les limitations de vitesse sont toujours respectées, et que le tramway s'arrête à toutes les stations passagers. La ligne étant courte, le tramway n'aborde quasiment jamais de phases de marche sur l'erre.

La figure 2.8 représente l'accélération du tramway en fonction du temps. Cette accélération respecte bien les limites maximales autorisées données par le tableau 2.3. Elle est de plus l'image du couple moteur (à la résistance à l'avancement près).

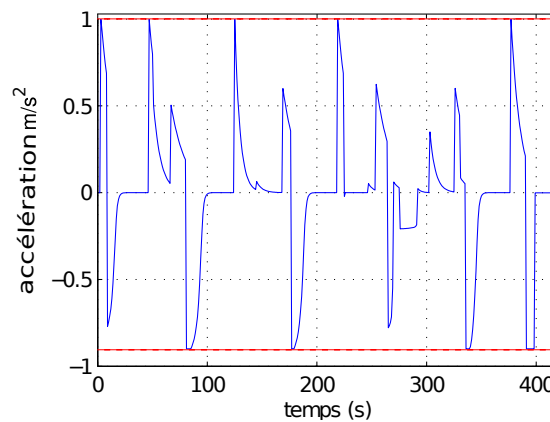


FIGURE 2.8 – Accélération du tramway en fonction du temps

La puissance électrique totale consommée par le tramway est enfin tracée sur la figure 2.9.

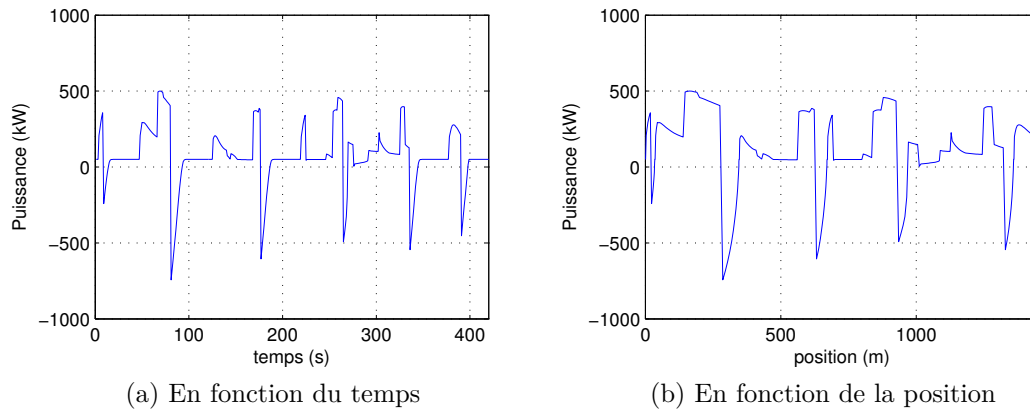


FIGURE 2.9 – Puissance électrique captée sur le bus continu

Sur ce parcours, la distance entre les stations étant faible, le tramway n’a pas le temps d’atteindre sa vitesse maximale ; il en résulte que la puissance consommée est faible (500 kW) comparée à la puissance embarquée à bord du tramway (1 MW). La puissance tracée ici est la puissance électrique. Elle intègre donc la puissance mécanique utile, les pertes dans le moteur, le réducteur et l’onduleur et enfin la puissance consommée par les auxiliaires. Cette puissance est supposée constante et égale à 50 kW.

Enfin, cette puissance est obtenue *en supposant que la tension de la LAC est constante*. Or, nous avons vu que la tension influence les performances du moteur. Pour obtenir une simulation plus proche de la réalité, nous devons être en mesure de tenir compte de cette tension, ce qui implique de la calculer et de reboucler par la suite avec les calculs cinématiques.²

5 Pistes d’optimisation énergétique au niveau du véhicule

Les différentes pistes permettant de minimiser la consommation énergétique d’un réseau de tramways sont exposées ici. Le réseau d’alimentation n’est pas étudié et l’étude porte sur l’utilisation judicieuse des moyens de stockage, la conduite écologique ou encore de la répartition des tramways sur le réseau.

5.1 Optimisation mécanique de la consommation énergétique

Cette thèse est avant tout une thèse de génie électrique. C’est donc sur l’optimisation des grandeurs électriques que va porter la majorité des travaux. Il existe cependant des méthodes simples, basées sur la cinématique des tramways qui permettent de réduire efficacement la consommation énergétique. Si un tramway consomme moins, le réseau aura moins de puissance à lui fournir et les pertes seront plus faibles. Nous allons donc présenter rapidement des astuces pour diminuer la consommation.

2. Des mesures sur site auraient été un plus pour valider nos calculs

Le réseau électrique sera simplement ignoré et le modèle dynamique du tramway, tout comme la ligne d'essai, seront simplifiés à l'extrême. Pour cela, nous allons faire de nombreuses hypothèses pour présenter qualitativement cette approche.

5.1.1 Influence du temps entre les tramways

En choisissant habilement le temps qui sépare le départ de deux tramways, on montre que l'on peut diminuer la consommation énergétique globale de l'ensemble. Pour illustrer nos propos, considérons une ligne de tramways simplifiée circulaire. Cette ligne possède un seul et unique arrêt. Nous négligeons la longueur du tramway et supposons que le profil de puissance en fonction du temps est donné par la figure 2.10. Les valeurs sont normalisées et le temps est purement indicatif.

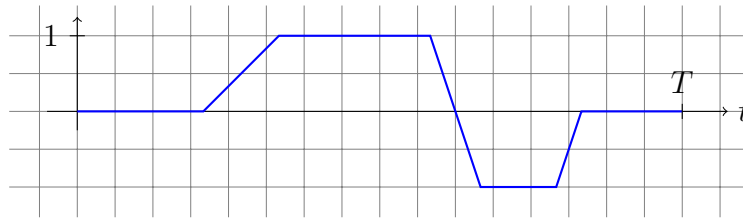


FIGURE 2.10 – Profil de puissance simplifié

Enfin, on suppose que le transport d'énergie se fait sans pertes sur le réseau, et que la sous-station n'est pas réversible en puissance.

L'objectif sera donc de visualiser l'énergie que doit fournir le réseau, en fonction du temps séparant les tramways. Le nombre de tramways jouera aussi un rôle important, et sera un paramètre de l'étude. On supposera que chaque tramway aura le même profil de puissance, et que l'espace entre chaque tramway sera le même, noté t_d .

La variable à minimiser est l'énergie que le réseau extérieur doit fournir. La sous-station n'étant pas réversible, seuls les termes positifs sont considérés. Cette énergie est normalisée par le nombre de tramways et s'exprime par l'équation (2.25)

$$E(t_d) = \frac{1}{2n} \int_0^T \sum_{i=1}^n P(\tau) + \left| \sum_{i=1}^n P(\tau) \right| dt \quad (2.25)$$

$P(t)$ représente ici le profil de puissance en fonction du temps, t_d est le temps séparant deux véhicules, T le temps de parcours et $\tau \equiv (t - (i - 1)t_d) \pmod{T}$

Le résultat de cette équation pour le profil de la figure 2.10 est tracé sur la figure 2.11.

La figure montre la quantité d'énergie par tramway nécessaire, en fonction de l'écart entre les tramways, exprimé en % du temps de parcours. Ces courbes sont donc logiquement symétrique par rapport à $t_d = 50\%$.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul tramway, ce dernier consomme 8 unités d'énergie. Si on fait partir tous les tramways les uns à la suite des autres sans écart, alors ils ne peuvent profiter des interactions possibles, et tractionnent tous en même temps. La consommation par tramway est alors la même que dans le cas du tramway voyageant seul sur la ligne.

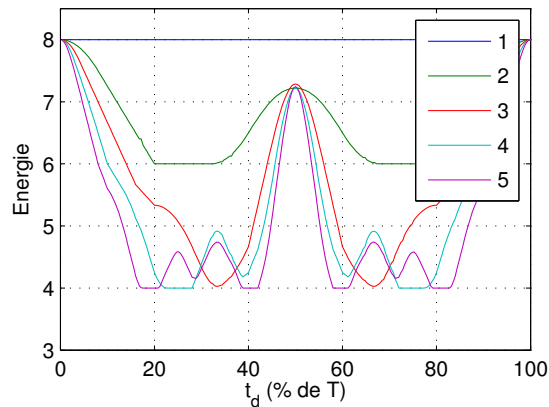


FIGURE 2.11 – Influence du retard et du nombre de tramways sur l'énergie consommée

On observe ensuite une décroissance de l'énergie consommée, car si l'écart est suffisant, lorsqu'un tramway freine, l'énergie peut être récupérée par un autre en phase de traction.

Ce phénomène est d'autant plus marqué que le nombre de tramways est élevé. On arrive alors rapidement à diviser la consommation énergétique par deux.

Cette rapide étude montre les mécanismes présents sur le réseau, qui permettent de lisser la puissance appelée. Notre réseau est idéal et l'échange entre les tramways se fait sans perte et sans problème. Il s'avère cependant qu'en réalité, l'impédance de la ligne crée des pertes qui affectent le rendement. De plus, cette impédance crée une augmentation de la tension du bus continu lors des phases de freinage qui peut entraîner un déclenchement du rhéostat de freinage, si le tramway tractionnant est localisé trop loin du freinant.

Il est important de noter que l'augmentation du nombre de tramways entraînera toujours de meilleurs résultats énergétiques que le tramway seul³. Cette approche peut être utilisée sans grandes difficultés sur les grandes lignes, mais qu'elle ne s'applique pas aussi bien sur une ligne de tramway. Il est en effet impossible de garantir un écart constant au fil du temps, notamment à cause de l'environnement du tramway (feux rouges, stations passagers, etc). Il arrive également qu'un minimum soit séparé d'un maximum local de consommation de quelques secondes seulement. On ne peut donc pas espérer réduire la consommation de manière fiable avec cette approche.

5.1.2 La conduite écologique : un problème d'optimisation dynamique

L'optimisation dynamique est une méthode qui permet d'optimiser des processus régis par des équations différentielles. Elle est utilisée pour minimiser une fonction objectif tout en respectant des contraintes. Elle sera plus largement présentée et utilisée dans la section 9.4.

Le problème de conduite du tramway peut très bien être vu comme un problème d'optimisation dynamique qui consiste à déplacer un mobile, régi par une équation

3. Cela devient faux dès que les pertes en ligne sont prises en compte

différentielle, d'un point A à un point B en respectant des contraintes sur le parcours, comme la vitesse maximale, la commande, le couple maximal et des conditions initiales et finales ($x_A = 0$, $x_B = L$, $V_A = 0$ et $V_B = 0$).

La fonction objectif de ce problème d'optimisation consiste à chercher un compromis entre une minimisation de la consommation énergétique et un parcours en temps minimal.

Le problème peut être formulé de la manière suivante :

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (2.26)$$

$$\frac{dv}{dt} = f(u) \quad (2.27)$$

u représente ici la variable de contrôle, par exemple couple moteur. La puissance développée sera exprimée par $\rho_1 v u$, où ρ_1 est un coefficient de proportionnalité.

Amener le tramway d'un point A à un point B durant un temps t_f coûtera l'énergie suivante, en gardant uniquement les valeurs positives de la puissance :

$$J_1 = \int_0^{t_f} \rho_1 v \frac{u + \text{abs}(u)}{2} dt \quad (2.28)$$

Le temps de parcours, t_f s'exprime par :

$$J_2 = t_f = \int_0^{t_f} 1 dt \quad (2.29)$$

L'objectif de notre conducteur étant de minimiser le temps de parcours tout en limitant sa consommation énergétique, la fonction objectif peut s'exprimer par :

$$J(\rho) = \rho J_1 + (1 - \rho) J_2 \quad (2.30)$$

ρ est un paramètre permettant de choisir entre une conduite à temps minimal ($\rho = 0$) et une conduite écologique ($\rho = 1$). En faisant varier ρ , on obtient une frontière de Pareto comme l'illustre la courbe 2.12.

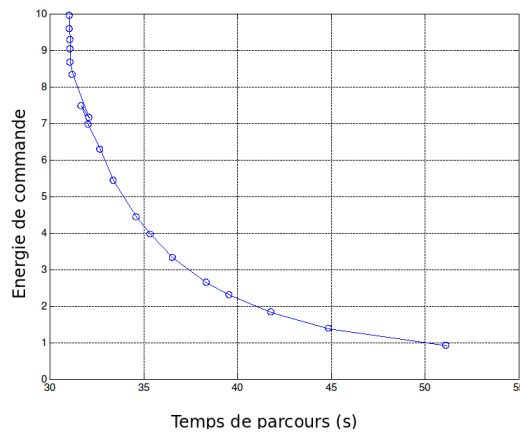


FIGURE 2.12 – Frontière de Pareto entre le temps de parcours et la consommation énergétique

Le plan de phase de cet exemple est tracé figure 2.13, avec la limitation de vitesse à respecter pour plusieurs valeurs de ρ traduisant en quelque sorte l'agressivité du conducteur. La fonction coût ici est en u^2 , elle prend donc en compte aussi bien les accélérations que le freinage, ce qui explique la symétrie observée.

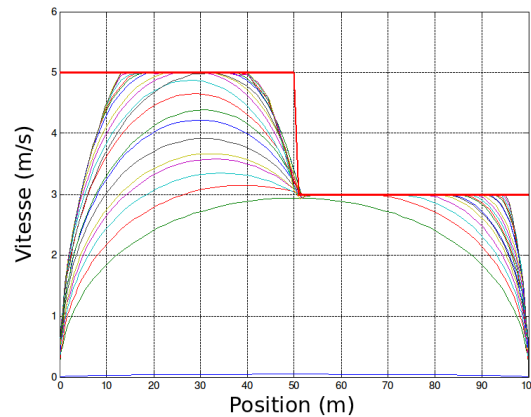


FIGURE 2.13 – Exemple de plan de phase vitesse/position : comparaison entre une conduite à temps minimal et une conduite écologique

Cet exemple a été réalisé grâce à la toolbox Matlab GPOPS développée par [RBD⁺10] et basée sur le solveur SNOPT. Il s'agit juste d'une démonstration de faisabilité des méthodes de commande optimale pour la modélisation d'un conducteur avec un modèle simplifié.

Ces méthodes sont très puissantes et permettent de tenir compte d'une conduite écologique. De plus, elles peuvent anticiper les variations de reliefs pour minimiser la consommation.

Cette méthode requiert cependant un temps de calcul important, et sa faisabilité sur une ligne plus longue, avec plusieurs tramways, et un modèle non-linéaire doit être discutée. Il s'agit de plus d'une méthode hors ligne qui, comme dans le cas de la gestion du temps de départ, peut être appliquée avec succès sur les grandes lignes via des grilles horaires faciles à respecter, mais qui deviennent impossibles à mettre en œuvre sur des lignes de tramway.

5.2 Les moyens de stockage embarqué

D'autres solutions très prometteuses pour la gestion énergétique commencent à être testées et installées massivement sur les véhicules terrestres à traction électrique. Il s'agit des moyens de stockage, qui peuvent être embarqués ou non, et qui proposent de diminuer la consommation énergétique de manière drastique.

Plusieurs technologies peuvent être utilisées, selon différentes stratégies. A titre d'exemple, des batteries NiMH sont embarquées sur le toit du tramway de Nice pour traverser sans LAC deux des places principales, alors qu'un volant d'inertie est installé en station du métro de Rennes.

5.2.1 Les différents rôles du stockage

Le stockage embarqué peut avoir différents apports pour la traction électrique, que l'on peut directement relier à l'autonomie désirée. L'usage et le coût influenceront directement le choix technologique.

a) Le stockage tampon

Il s'agit d'un stockage capable d'effectuer des échanges énergétiques sur une période de l'ordre de la dizaine de secondes. L'objectif est de lisser le cycle d'accélération/freinage en faisant apparaître le tramway comme une charge à puissance constante. Effectivement, un tramway est une charge variable consommant une puissance pouvant atteindre 1 MW, alors que sa puissance moyenne est de seulement 70 kW, correspondant aux frottements et pertes irréversibles.

L'utilisation du stockage tampon est d'autant plus profitable que les sous-stations ne sont pas réversibles, ou éloignées, et que la ligne est peu fréquentée, limitant les échanges entre véhicules.

b) L'autonomie locale

Dans ce cas, le tramway doit être capable de parcourir, sur ses propres réserves, de courtes distances. Cette solution vise à se passer des lignes aériennes peu esthétiques dans les centres villes historiques. Elle peut aussi être utilisée pour limiter les travaux de BTP, pour le franchissement d'un carrefour ou d'un tunnel.

c) L'autonomie inter-station

Ici, l'objectif est de se passer de caténaire sur tout le parcours, avec une autonomie qui doit permettre de rejoindre chaque sous-station. Une fois en station, la recharge doit s'effectuer en un temps très court. C'est le concept du biberonnage.

5.2.2 Les différents moyens de stockage

L'objectif n'est pas de rentrer dans les détails de chaque technologie, mais de les présenter et d'expliquer les méthodes qui permettent de choisir le moyen de stockage correspondant le mieux à l'usage ciblé. Au vu des puissances et des énergies mises en jeu, les sources généralement retenues sont : les batteries, les volants d'inertie et enfin les superacacités.

a) Les batteries

Les batteries sont sans conteste les éléments de stockage les plus matures et les plus utilisés dans les applications quotidiennes. Depuis peu elles sont embarquées sur certaines lignes de tramway comme par exemple, le tramway de Nice construit par Alstom. Grâce à ses 68 batteries embarquées de type nickel-métal-hydrure NiMH représentant 1,5 tonnes, il peut traverser les places Masséna et Garibaldi, longues d'un demi kilomètre chacune [Deb09].

Différentes technologies de batteries existent avec des coûts et des énergies massiques différentes. Elles sont caractérisées par une densité d'énergie élevée avec une puissance suffisante, ce qui permet d'assurer une autonomie locale.

Le courant doit cependant être contrôlé pour ne pas endommager irréversiblement les batteries. Cependant, les cycles de charge/décharge peuvent difficilement être contrôlés, ce qui réduit la durée de vie des batteries à environ cinq ans.

b) Les volants d'inertie

Un volant d'inertie est une masse en métal qui, en tournant, emmagasine de l'énergie cinétique. Cette énergie est convertie en énergie électrique grâce à un moteur couplé avec un onduleur. Alstom a encore une fois été pionnier avec le tramway de Rotterdam [Lac05]. Les volants d'inertie construits par la société CCM ont été pour la première fois embarqués à bord des véhicules.

En tournant à 22000 rpm, un volant d'inertie va stocker une énergie utile de 4kWh. Sa puissance maximale pourra atteindre 325 kW, le tout pour une masse totale de 1200 kg. On se retrouve avec un dispositif qui dispose alors d'une densité de puissance d'énergie de 3.33 Wh/kg et d'une densité de puissance de l'ordre de la centaine de W/kg. Il arrive également que le volant d'inertie ne soit pas embarqué et qu'il reste en station (Rennes par exemple). Cette technologie est plus ancienne et utilise des volants tournant moins vite, tout en étant plus volumineux.

Le volant d'inertie offre donc un bon compromis énergie/puissance pour l'application tramway. Sa réversibilité et son temps de réponse lui permettent d'agir comme une source tampon, et assurent en même temps l'autonomie locale.

c) Les supercondensateurs

Alors qu'un condensateur atteint difficilement des capacités de l'ordre du mF, les supercondensateurs peuvent atteindre 5000 F grâce à leur double couche électrolytique. Leur tension d'utilisation reste cependant faible (2,7 V), mais la densité d'énergie est plus élevée qu'avec des capacités classiques (environ 5 Wh/kg). Le supercondensateur est donc un intermédiaire entre la batterie et la capacité. Sa densité de puissance étant élevée, les temps de réponse sont de l'ordre de la seconde et des courants disponibles de l'ordre du kA. Une telle solution a été testée par la RATP en partenariat avec Alstom (projet STEEM [MC10]), et est commercialisée par Bombardier sous le nom de MITRAC Energy Saver qui annonce des économies d'énergie de 30% [Bom].

d) Conclusion sur les moyens de stockage

Les différents moyens de stockage qui peuvent être envisagés pour une application tramway ont été listés. Certains sont des sources d'énergie (batteries) utilisées pour assurer une certaine autonomie, et d'autres des sources de puissance (volants d'inertie, supercapacités) utilisées quant à elles, pour lisser le profil de courant appelé par le tramway. Leur choix et leur dimensionnement sont classiquement réalisés à partir des plans de Ragone [CC00].

Enfin, un moyen de stockage ne peut pas exister seul et doit impérativement être interfacé par un convertisseur d'électronique de puissance. Ce convertisseur assure un respect des courants de charge pour augmenter la durée de vie du matériel, et permet la gestion du stockage en évitant par exemple les décharges profondes toujours préjudiciables. Du point de vue énergétique, le convertisseur a un certain

rendement en charge et en décharge, qu'il faudra prendre en compte, au même titre que les auto-décharges des capacités et les frottements des volants d'inertie, avant de conclure sur le rendement global de l'installation.

5.2.3 Lois de commande des moyens de stockage

Le stockage fonctionne en parallèle avec la puissance provenant de la ligne aérienne de contact, et la commande du convertisseur associé au stockage va assurer la gestion entre les deux sources.

a) Hybridation des sources

On parle d'hybridation lorsque deux sources de natures différentes sont mises en jeu pour alimenter un système. Le moyen de stockage est, comme nous avons vu, une source de puissance qui peut délivrer cette puissance en un temps très court, mais dont l'énergie est limitée (sauf dans le cas des batteries). Par opposition, la LAC est une source de puissance et d'énergie infinies mais c'est surtout la deuxième caractéristique que nous retiendrons.

Deux visions duales peuvent être considérées lorsque l'on étudie un système hybride.

On peut considérer, dans le cas standard, que la source d'énergie (la LAC) fixe la tension du bus continu, alors que le courant est contrôlé par le moyen de stockage. Dans ce cas de figure, la LAC fournira la puissance moyenne, alors que la puissance fluctuante sera fournie par le stockage. La vision duale consiste à inverser la causalité des sources et supposer que le stockage est utilisé pour réguler la tension du bus continu alors que le courant proviendra de la LAC [Lan06].

b) Commande fréquentielle

La gestion standard du problème de commande passe par une vision fréquentielle des sources, qui traduit l'information donnée par le plan de Ragone. A partir de la densité de puissance ρ_p et de la densité d'énergie ρ_e , il est envisageable de définir la fréquence d'un élément de stockage $f_p = \rho_p / \rho_e$ [Akl08]. Le volant d'inertie a ainsi une plage de fréquence $f_p \in [4, 70]$ mHz, alors que la supercapacité couvre la plage $f_p \in [0.03, 2]$ Hz. Cela signifie qu'une supercapacité est en mesure de travailler à une fréquence plus élevée qu'un volant d'inertie.

Le principe de base de la gestion fréquentielle de sources hybridées repose sur la capacité de chaque élément à travailler dans une certaine bande fréquentielle. On utilise alors le moyen de stockage pour couvrir les besoins hautes fréquences, alors que les besoins basses fréquences seront fournis par la LAC. En d'autres termes, le réseau fournit la puissance moyenne alors que le stockage gère les puissances transitoires.

Cela engendre un gain énergétique important, en réduisant les transits de puissance sur le réseau qui ne véhicule plus que la valeur moyenne nécessaire. De plus, cela permet de protéger les éventuelles batteries d'un cyclage trop rapide.

Cette méthode ne prend pas en compte la dimension finie du stockage, ce qui est sa principale limitation. Ainsi, dans certains cas, il peut être avantageux de garder de l'énergie dans le stockage pour faire face à un événement ultérieur.

c) Autres lois de commande

Bien d'autres méthodes sont envisageables pour la gestion des systèmes multi-sources, et la littérature est abondante pour illustrer ces problématiques dans les transports, qu'ils soient terrestres [Del02], [Rou08], aériens [Lan06] et bien sûr ferroviaires [Akl08], [Abd09].

On peut ainsi retrouver les techniques dites MPPT (Maximum Power Point Tracking) largement utilisées par les convertisseurs solaires qui, comme leur nom l'indique, ont pour but la recherche du point de fonctionnement maximisant le rendement.

Il existe également des techniques issues de la commande optimale permettant une optimisation globale sur toute la mission, mais qui restent difficiles à mettre en œuvre. Ces méthodes seront étudiées en détail dans la section 9.4.

5.2.4 Emplacement des moyens de stockage

Deux approches sont possibles pour intégrer du stockage sur un réseau ferroviaire. On peut ainsi, soit l'embarquer sur le véhicule roulant, soit le laisser au sol.

Dans le premier cas, le stockage est au plus proche du lieu de consommation. Cela permet de réduire le courant transitant sur la LAC et de limiter les variations de tension, ce qui se traduit par de meilleures performances en traction, tout en limitant le déclenchement du rhéostat de freinage. Embarquer le stockage impliquera cependant un surcoût, aussi bien à l'installation que pour le poids transporté constamment. En effet, un volant d'inertie de 4kWh a une masse totale d'environ 1200 kg, et la masse avoisinera les 800 kg pour les supercapacités. De plus, bien que les technologies soient de plus en plus matures et longuement validées avant commercialisation, des problèmes de sûreté peuvent toujours se poser.

L'installation fixe, quant à elle, ne consomme pas une énergie supplémentaire pour le transport du dispositif, mais reste moins efficace car éloignée du lieu de consommation. Au lieu de lisser la consommation d'un véhicule, elle absorbe les variations de l'ensemble une fois que l'échange naturel entre véhicules a eu lieu. Favoriser les échanges entre véhicules est alors plus intéressant, car cela évite une double conversion dans le moyen de stockage, mais cela ne peut avoir lieu que si les impédances entre les véhicules sont faibles. Cela est donc particulièrement intéressant sur les réseaux de métro alimentés par un troisième rail, de résistance largement inférieure à une LAC. C'est d'ailleurs cette technologie qui est en place dans les métros à Rennes et Paris. Une installation fixe a dès lors un fonctionnement semblable à une station réversible et permet d'absorber le trop plein d'énergie qui serait dissipé via les rhéostats de freinage. Notons que grâce au stockage, l'usage des rhéostats est grandement réduit, ce qui se traduit par une limitation des pertes, mais aussi un dimensionnement plus léger et une réduction du poids. Les normes imposent toutefois de garder le rhéostat pour assurer le freinage en cas de défaillance du réseau.

5.2.5 Note sur le pré-dimensionnement

Afin de dimensionner un moyen de stockage, il est nécessaire de connaître la mission qu'il aura à effectuer. À partir du profil de puissance mesuré sur site ou simulé, il est possible d'extraire la puissance moyenne qui sera fournie par le réseau et la puissance fluctuante fournie par le stockage. Les valeurs extrêmes de cette

puissance seront des valeurs à prendre en compte dans le choix du moyen de stockage. La deuxième valeur de dimensionnement sera l'énergie qui devra être stockée, qui s'obtient simplement par intégration de la puissance fluctuante [Akl08].

La figure 2.14 nous montre cette puissance et cette énergie fluctuante dans le cas de la ligne d'essai de la Rochelle.

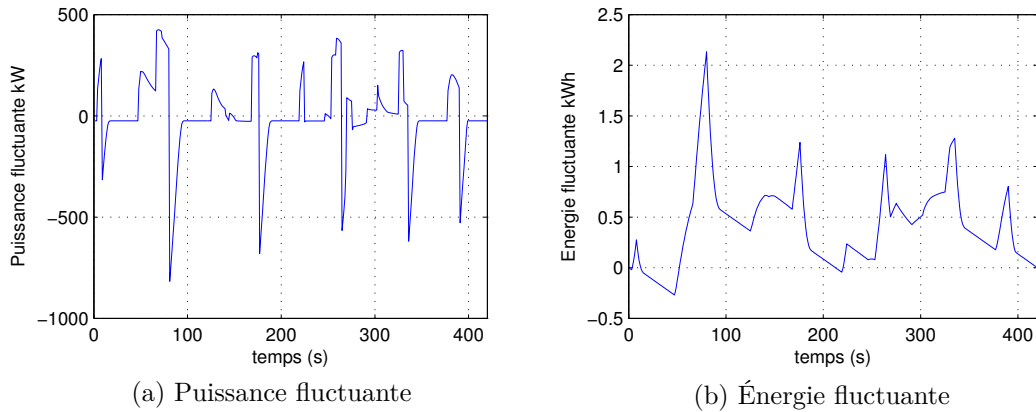


FIGURE 2.14 – Grandeurs électriques dimensionnantes pour le stockage (La Rochelle)

A partir de ces grandeurs, il est possible d'obtenir un pré-dimensionnement pour cette mission. On trouve ainsi que l'énergie stockée doit être de 2.4 kWh, avec une puissance de décharge de 420kW, et une puissance de recharge de 800kW. La puissance est importante, surtout durant les périodes de freinage, car le modèle du conducteur établi est particulièrement agressif, entraînant des accélérations brutales. Des données réelles entraîneraient sans doute des puissances plus faibles. Le surplus de puissance peut très bien être fourni par le réseau entraînant un dimensionnement plus léger du stockage, ce qui n'est plus le cas si la source d'énergie est limitée en puissance.

6 La modélisation statique du réseau électrique

6.1 Objectifs

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la tension d'alimentation du bus continu était constante, et nous n'avons pas pris en compte les pertes entre le point de livraison EDF et le bus continu du tramway. Partant de ces hypothèses, nous avons développé un modèle de la mécanique du tramway et de son conducteur, capable de renvoyer la puissance du tramway et sa position en fonction du temps. Nous avons ensuite présenté les méthodes permettant de minimiser cette puissance appelée, basées sur la conduite ou l'utilisation d'un stockage embarqué.

A présent, nous allons étudier la partie électrique du réseau pour analyser les pertes, valider les nouvelles architectures et proposer une optimisation de la partie électrique du réseau. Il est alors nécessaire d'établir des modèles permettant *une analyse statique* des organes électriques, que ce soient les lignes électriques, les rails, les sous-stations à redresseur, ou encore les hacheurs. Une fois chaque organe modélisé,

des méthodes d'agrégation seront présentées pour permettre le calcul sur un réseau complet. On terminera alors par une optimisation statique permettant d'établir les lois de commande optimales ou encore le positionnement optimal des sous-stations.

6.2 Modélisation statique des convertisseurs

Les convertisseurs d'électronique de puissance sont de plus en plus utilisés dans les réseaux modernes, et, comme nous l'avons vu, les réseaux ferroviaires n'échappent pas à la règle. On retrouvera ainsi les redresseurs de sous-station permettant l'alimentation du réseau, les onduleurs de traction ou encore les hacheurs, utilisés tout aussi bien pour le rhéostat de freinage, le stockage embarqué, et la fonction d'auto-transformateur DC, dans le cas de la nouvelle architecture proposée.

Un convertisseur, quel qu'il soit, est toujours composé d'interrupteurs d'électronique de puissance assurant le découpage au sein d'une cellule de commutation, et d'éléments passifs assurant la fonction de filtrage. Il possède donc un comportement fortement non-linéaire, et, en plus, une dynamique propre.

L'étude menée est énergétique, les considérations harmoniques et dynamiques sont pour l'instant ignorées. Il est donc nécessaire de disposer de modèles compatibles avec cet objectif. L'approche la plus classique pour modéliser un convertisseur est l'utilisation du simulateur temporel. Pour que la simulation soit réaliste, il est nécessaire d'avoir un pas de temps suffisamment faible pour prendre en compte les commutations, car un convertisseur travaille le plus souvent à une fréquence élevée. Cela est incompatible avec les phénomènes lents qui sont intéressants pour une approche énergétique.

Il est donc essentiel de développer un modèle simplifié des convertisseurs de puissance valable en régime statique. Ce modèle devra moyenniser les comportements non linéaires introduits par les cellules de commutation, en se concentrant uniquement sur le premier harmonique en AC ou la valeur moyenne en DC qui transportent la puissance. Les considérations dynamiques et harmoniques seront intégrées au chapitre suivant.

Après avoir présenté quelques généralités sur les convertisseurs de puissance et sur le concept de cellule de commutation, un modèle des différents convertisseurs que l'on retrouve sur le réseau est proposé.

6.2.1 Généralités sur les convertisseurs de puissance

Les convertisseurs d'électronique de puissance sont des systèmes hybrides dans le sens où ils allient des dynamiques continues avec des événements discrets. Les interrupteurs de puissance sont pilotés et peuvent aiguiller le flux de puissance entre les différentes parties du système à volonté. Avant d'aller plus loin dans la description, présentons tout d'abord les différents types de convertisseurs que l'on peut rencontrer.

Avant tout, on distingue deux grandes familles de convertisseurs : ceux à commutation forcée et ceux à commutation naturelle. La première famille est de loin la plus courante (si on ne prend pas en compte le pont de diodes). Les interrupteurs sont commandables à l'amorçage et au blocage. On peut donc les connecter et les déconnecter à volonté, et ce, quel que soit l'état électrique du système. La fonction de commutation ne dépendra pas directement des variables d'état du système.

La deuxième famille regroupe les convertisseurs possédant des interrupteurs non commandables (diodes) ou partiellement commandables (thyristors et thyristors-duaux). Cette famille intègre aussi les convertisseurs à résonance ou à commutation douce, mais également dans le cas de la conduction discontinue. Dans ce cas, la fonction de commutation dépendra explicitement des variables d'état. La diode par exemple, sera passante si la tension à ses bornes devient positive, et elle bloquera le courant la traversant dès que celui-ci s'inversera.

Quelque soit le convertisseur, le fonctionnement est toujours basé sur le même principe : le découpage. C'est grâce à ce principe qu'il est possible d'atteindre des rendements aussi élevés. Le découpage va être opéré par des interrupteurs d'électronique de puissance fonctionnant en quinconce et regroupés au sein d'une cellule de commutation.

6.2.2 La cellule de commutation

La cellule de commutation est le cœur même du convertisseur. Elle est nécessairement composée d'au moins deux interrupteurs de puissance. Ces interrupteurs doivent être choisis selon la réversibilité du convertisseur et le mode de commutation désiré. Des éléments passifs sont couramment pris en compte dans la cellule de commutation. Ils peuvent être indésirables, comme l'inductance de maille [Sch00], ou bien volontaires comme les snubbers et autres circuits d'aide à la commutation.

Bien définir la cellule de commutation, surtout en présence d'éléments passifs, n'est pas une chose aisée. Heureusement, la méthodologie bond graph (qui sera présentée au chapitre suivant) peut être utilisée pour nous aider dans cette tâche[AM05]. La cellule de commutation peut être formellement définie par :

- les éléments qui changent de causalité pendant les phases de fonctionnement du convertisseur,
- les éléments R liés à une jonction interne au bloc de commutation.

La figure 2.15 montre une cellule de commutation dure, réversible en courant, utilisant des interrupteurs de type IGBT, commandables aussi bien à l'ouverture qu'à la fermeture. Il s'agit typiquement ici d'un bras d'onduleur.

Pour être exact, il s'agit en fait de deux cellules de commutation montées tête-bêches. L'association d'une diode en antiparallèle protège l'IGBT des tensions inverses qui lui seraient fatales, et permet la réversibilité en courant du montage. Par la suite, nous nous concentrerons uniquement sur cette cellule de commutation. Nous ne rentrons pas dans le détail du riche domaine de la commutation douce, et nous n'étudierons pas les dynamique à l'échelle de temps de la commutation nécessitant la prise en compte d'éléments parasites.

Une cellule de commutation relie entre eux deux circuits avec une causalité bien affectée. Alors que la causalité de la cellule change en fonction de l'état des interrupteurs, celle des éléments adjacents est fixe, et doit être compatible. Cela se traduit par les règles fondamentales de l'électronique de puissance, à savoir de ne jamais relier en série deux sources de tension, ce qui se traduirait par un court circuit, et de ne jamais ouvrir une source de courant ou un circuit inductif. Ces règles se traduisent naturellement lorsqu'on parle en langage bond graph, par le respect des règles de causalité. Ainsi, on retrouve un des grands avantages du bond graph, qui est de prévenir l'utilisateur d'une impossibilité physique.

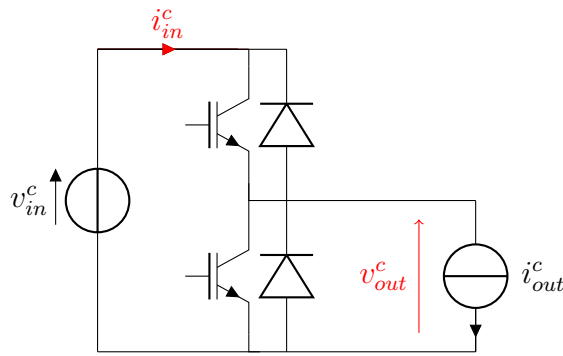


FIGURE 2.15 – Détail de cellules de commutation IGBT-Diode

Il faut retenir de tout cela qu'une cellule de commutation *doit interconnecter une source de flux et une source d'effort entre elles*.

Pour respecter cela, les interrupteurs de la figure 2.15 doivent être pilotés de manières complémentaires. Cela sera réalisé par une commande appropriée, qui intégrera des temps morts pour éviter à tous prix un court-circuit de bras qui serait destructeur. On parlera alors de la fonction de commutation h , qui sera un booléen exprimant l'état du bras. Si l'interrupteur du haut est passant, celui du bas sera bloqué et $h = 1$. Dans le cas contraire, pour $h = 0$, c'est l'interrupteur du bas qui sera passant.

6.2.3 Les interrupteurs de puissance et leur modélisation

a) Les interrupteurs idéaux

Une approche classique de modélisation des systèmes hybrides est de considérer les interrupteurs comme idéaux. L'interrupteur idéal est une source de tension nulle lorsqu'il est passant et une source de courant nulle lorsqu'il est bloqué. On voit apparaître ici le changement de causalité des dispositifs à base d'électronique de puissance. Les interrupteurs peuvent être représentés par des résistances variables, de valeur très faible lorsqu'ils sont passant et très élevée lorsqu'ils sont bloqués. Cette méthode n'est cependant pas très satisfaisante car, du point de vue numérique, elle conduit à des matrices mal conditionnées, avec des valeurs très élevées et d'autres très faibles, conduisant à des imprécisions, voire même à des problèmes de convergence.

Si on considère l'interrupteur idéal, les grandeurs de la figure 2.15 sont reliées par l'équation (2.31).

$$\begin{cases} v_{out}^c &= h \times v_{in}^c \\ i_{in}^c &= h \times i_{out}^c \end{cases} \quad (2.31)$$

Il est important de noter que cette relation est orientée, orientation découlant directement de l'affectation de causalité. Cette équation est semblable à celle que l'on retrouve pour un transformateur dont le rapport de transformation sera un nombre discret pris dans l'ensemble $\{0, 1\}$. Cette approche simplifiée, couplée avec les équations dynamiques, permet de décrire le fonctionnement d'un convertisseur. Cependant, ce modèle ne permet absolument pas de prendre en compte les pertes.

b) Les interrupteurs réels, sources de pertes

Hélas, les interrupteurs utilisés en électronique de puissance ne se rapprochent pas forcément de l'interrupteur idéal. Quel que soit la technologie employée, un interrupteur possèdera toujours une chute de tension à l'état passant, un courant de fuite à l'état bloqué, et consommera de l'énergie pour passer d'un état à l'autre. La technologie employée modifiera cependant ces caractéristiques⁴.

Les interrupteurs se divisent en deux catégories : les bipolaires et les unipolaires. Les bipolaires, tels que les transistors, diodes et IGBT, reposent sur l'utilisation de jonction PN. Leur tenue en tension sera généralement élevée, et leurs caractéristiques à l'état passant seront définies par une tension de seuil assortie à un comportement purement résistif. Ils restent cependant des composants plutôt lents, du fait de la recombinaison des porteurs de charges, entraînant un courant de queue ou un recouvrement inverse.

A l'opposé, les unipolaires ne possèdent qu'un seul type de porteurs de charges et sont composés d'une jonction métallique, avec un semi-conducteur dopé (en général de type N). Cette famille englobe les composants à effet de champ JFET et MOSFET, ainsi que les diodes Schottky. On ne retrouvera pas ici de tension de seuil et le comportement à l'état passant sera purement résistif. Ce sont également des composants pouvant monter très haut en fréquence car, possédant un seul type de porteurs de charges, ils ne sont pas handicapés par les problèmes de recombinaison. Leur principal inconvénient réside dans leur faible capacité à tenir une tension importante, tout en gardant un comportement convenable à l'état passant.

Cette courte présentation a le mérite d'énumérer certaines des limitations inhérentes aux dispositifs réels. La difficulté est maintenant de quantifier leur participation aux pertes. Le courant de fuite dans le silicium est ridiculement bas et est dû principalement à l'agitation thermique (ce qui, soit dit en passant, justifie le faible rendement des installations photovoltaïques) et sera par la suite négligé. Les pertes au sein du convertisseur vont donc se répartir en trois catégories. Les pertes en conduction, en commutation, et les pertes constantes.

Les pertes par conduction

Ce sont les pertes que l'on retrouve à l'état passant, dues à l'existence simultanée d'un courant et d'une tension non nuls. Elles s'expriment par l'équation (2.32).

$$P_{cond} = \Delta V \times i \quad (2.32)$$

La chute de tension ΔV est classiquement approximée par l'équation (2.33).

$$\Delta V = V_{F_0} + Ri \quad (2.33)$$

Avec des composants unipolaires, la tension de seuil V_{F_0} sera nulle, et la chute de tension purement résistive. Dans le cas d'un composant bipolaire, la chute de tension dépendra principalement de cette tension de seuil, la résistance dynamique étant plus faible grâce à la présence de deux types de porteurs de charge.

4. A l'heure actuelle, le principal matériau utilisé pour la fabrication des interrupteurs est le silicium. On voit cependant apparaître de nouveaux matériaux aux propriétés intéressantes tels que le carbure de silicium, le diamant, ou le GaN.

Les pertes par commutation

Elles ont lieu uniquement lors du changement d'état des interrupteurs. Elles sont donc directement proportionnelles à la fréquence de commutation et sont actuellement un frein important à la montée en fréquence des convertisseurs. Ces pertes sont la conséquence des temps de transitions non-nuls des interrupteurs et des phénomènes de recombinaison dans les bipolaires.

En commutation dure, un interrupteur ne peut pas réaliser une commutation infiniment rapide (ce qui de toutes façons provoquerait des difficultés du point de vue CEM). Il apparaît donc un moment où l'interrupteur traversé par un courant voit une tension à ses bornes. Ces pertes seront donc intimement liées aux temps de montée et de descente. Lors des commutations spontanées ZCS⁵ ou ZVS⁶, ces pertes sont évidemment nulles.

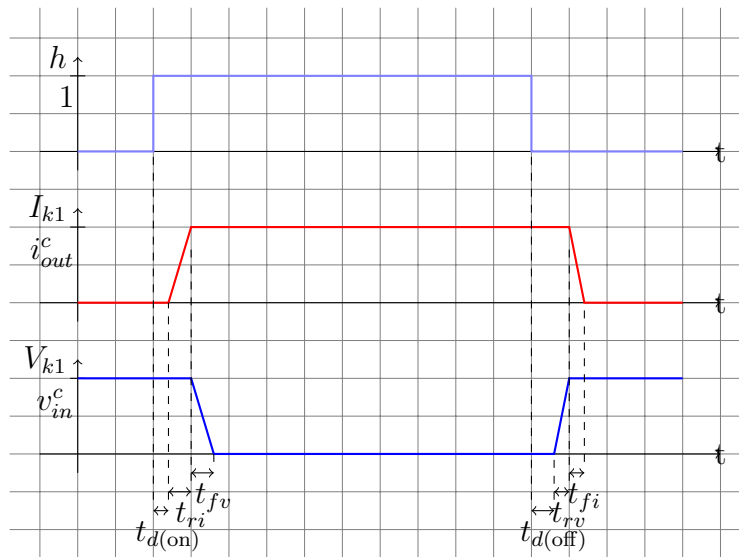


FIGURE 2.16 – Forme d'onde idéalisée

La figure 2.16 décrit les formes d'onde idéalisées de l'interrupteur haut d'une cellule de commutation IGBT/diode. Les surtensions et surintensités, qui sont négligées, ne sont pas représentées, et les temps de commutation volontairement exagérés. On note un retard entre l'application de la commande et la réaction de l'interrupteur à l'ouverture et à la fermeture. Les temps de montée de la tension et du courant seront respectivement notés t_{rv} et t_{ri} , alors que les temps de descente seront notés t_{fv} et t_{fi} . Enfin, on notera α le rapport cyclique, à savoir le pourcentage du temps où la commande prend la valeur logique 1. L'interrupteur du bas étant une diode, ses pertes par commutation sont uniquement celles dues au recouvrement négligé sur cette figure.

Si on considère que les interrupteurs ne possèdent pas de résistance à l'état passant, les pertes moyennes par commutation peuvent être calculées à l'échelle de la fréquence de découpage par la formule (2.34) :

5. Zero Current Switching
6. Zero Voltage Switching

$$P_{sw} = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{in}^c i_{in}^c - v_{out}^c i_{out}^c) dt \quad (2.34)$$

On peut considérer que la tension v_{in}^c et le courant i_{out}^c sont constants durant la commutation. La tension de sortie moyenne et le courant d'entrée moyen idéalisés de la figure 2.16 sont donnés respectivement par les équations (2.35) et (2.36).

$$\langle v_{out}^c \rangle = v_{in}^c \left(\alpha + \frac{t_{d(off)} - t_{d(on)} - t_{ri} + (t_{rv} - t_{fv})/2}{T} \right) \quad (2.35)$$

$$\langle i_{in}^c \rangle = i_{out}^c \left(\alpha + \frac{t_{d(off)} - t_{d(on)} + t_{rv} + (t_{fi} - t_{ri})/2}{T} \right) \quad (2.36)$$

Au final, les pertes par commutation moyenne (mais sans prendre en compte le recouvrement inverse) sont données par l'équation (2.37) :

$$P_{sw} = \frac{v_{in}^c i_{out}^c (t_{rv} + t_{fv} + t_{ri} + t_{fi})}{2T} \quad (2.37)$$

On voit d'une part que les pertes ne dépendent pas des retards purs t_d mais seulement des temps de montée et de descente. On retrouve ici la forme classique pour exprimer les pertes par commutation, qui varient en fonction du courant, de la tension, de la fréquence $f = 1/T$, et enfin d'un terme dépendant de la dynamique des interrupteurs. Cette formule peut être complétée pour prendre en compte le courant de queue dans les IGBT, et le courant de recouvrement.

Grâce aux équations (2.35) et (2.36), on est de plus capable de savoir si ces pertes se traduisent par une diminution de la tension disponible en sortie de la cellule de commutation ou par une augmentation du courant en entrée.

Les autres sources de pertes

Elles peuvent généralement être considérées comme constantes ou peu dépendantes de l'état de charge. On retrouvera ici les pertes dans les drivers, le refroidissement (ventilateur, pompe, ...), ou encore la commande éloignée. Ce sont ces pertes qui vont avoir une influence sur le rendement lorsque le taux de charge du convertisseur est faible.

c) Un modèle moyen de pertes

Le paragraphe précédent a présenté rapidement les différentes pertes que nous pouvons retrouver dans un convertisseur. Ces pertes se regroupent en trois catégories :

- Les pertes constantes dans les auxiliaires
- Les pertes variant proportionnellement avec le courant de charge, pour les pertes par commutation (majoritairement)
- Les pertes dépendant du carré du courant de sortie pour les pertes par conduction résistives.

Les pertes quadratiques peuvent être modélisées par une résistance en série R_s (2.33) avec le courant de sortie. En désignant par R_{on} la résistance de l'interrupteur supérieur, et par R_{off} celle l'inférieur, on obtient une résistance moyenne :

$$R_s = \alpha R_{on} + (1 - \alpha) R_{off} \quad (2.38)$$

Si les deux interrupteurs ont des résistances identiques, alors les pertes par conduction sont indépendantes du rapport cyclique.

Les pertes constantes sont modélisées par une résistance en parallèle de la cellule de commutation, sous l'hypothèse que la tension d'entrée varie peu et qu'elles ne dépendent pas du rapport cyclique.

Enfin, les pertes par commutation seront calculées en considérant un rapport cyclique différent sur l'équation des tensions (2.35) et sur l'équation des courants (2.36). Cela entraîne une hausse du courant d'entrée tout en diminuant la tension de sortie.

Toutes ces équations peuvent être combinées sous une forme matricielle, pour calculer les grandeurs moyennes en sortie de la cellule de commutation :

$$\begin{bmatrix} \langle i_{in}^c \rangle \\ \langle v_{out}^c \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_p & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -R_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{in}^c \\ i_{out}^c \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Dans le cas (exagéré) où le temps de montée et le temps de descente sont supposés identiques, tout comme les retards, les valeurs de α_1 et α_2 se simplifient et sont données par $\alpha_1 = \alpha + t_r/T$ et $\alpha_2 = \alpha - t_r/T$. Si, de plus, on suppose que les résistances dynamiques à l'état passant sont identiques, alors cette matrice peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \langle i_{in}^c \rangle \\ \langle v_{out}^c \rangle \end{bmatrix} = (M_0 + M_1\alpha) \cdot \begin{bmatrix} v_{in}^c \\ i_{out}^c \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1/R_p & t_r/T \\ -t_r/T & -R_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha \right) \cdot \begin{bmatrix} v_{in}^c \\ i_{out}^c \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

La partie M_0 représente les pertes et la partie M_1 représente les interconnexions. On remarque qu'avec ces hypothèses, les pertes ne dépendent pas explicitement du rapport cyclique (elles dépendent cependant directement de l'état de charge, qui lui varie avec le rapport cyclique).

$$P_{conv} = \begin{bmatrix} v_{in}^c & i_{out}^c \end{bmatrix} M_0 \cdot \begin{bmatrix} v_{in}^c \\ -i_{out}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{in}^c & i_{out}^c \end{bmatrix} M'_0 \cdot \begin{bmatrix} v_{in}^c \\ i_{out}^c \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La matrice M'_0 est définie comme la matrice M_0 en prenant l'opposé de la dernière ligne. Cette matrice M'_0 est symétrique et définie positive.

Un tel modèle de pertes conduit, pour le rendement moyen de la cellule de commutation, à l'équation (2.42).

$$\eta = \frac{\alpha_2 v_{in}^c i_{out}^c - R_s (i_{out}^c)^2}{\alpha_1 v_{in}^c i_{out}^c + (v_{in}^c)^2 / R_p} \quad (2.42)$$

Ce rendement est maximal pour un courant I^* donné par :

$$I^* = \frac{v_{in}^c}{\alpha_1 R_p} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 R_p}{R_s}} - 1 \right) \quad (2.43)$$

Les valeurs des différents paramètres peuvent être déduits des datasheets des composants. Il est également possible de procéder par identification. Par exemple, pour connaître R_p , on peut décider de faire passer la courbe de rendement par une valeur donnée η^* pour un courant donné I^* .

$$R_p = \frac{(v_{in}^c)^2 \eta^*}{(\alpha_2 - \eta^* \alpha_1) v_{in}^c I^* - R_s I^{*2}} \quad (2.44)$$

6.2.4 Les hacheurs

Les hacheurs sont présents sur les rhéostats de freinage, le stockage embarqué et sur la nouvelle structure, pour interfacer l'étage HVDC et la ligne aérienne de contact. La modélisation d'une cellule de commutation vient d'être exposée. Cette cellule de commutation, associée à des filtres en entrée et en sortie, forme un hacheur réversible à deux niveaux. Le modèle de la cellule de commutation (2.39) devient :

$$\begin{bmatrix} i_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R'_p & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -R'_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

L'exposant ^c a disparu pour rappeler que les grandeurs ne sont plus les grandeurs de la cellule de commutation, mais bien celles filtrées, aux bornes du hacheur. De plus, les résistances R'_s et R'_p intègrent les paramètres des filtres comme l'ESR⁷ des inductances.

L'identification des paramètres n'est cependant pas chose aisée car ils dépendent de la topologie du convertisseur et des composants utilisés. Bien qu'il existe actuellement des composants capables de supporter 1.5 kA sous 3.3 kV dans un seul module, il y a fort à parier que le convertisseur effectivement utilisé ne soit pas une simple cellule de commutation.

En effet, il est classique de combiner les composants en série et en parallèle pour obtenir le comportement désiré. De plus, l'usage de convertisseurs multi-niveaux s'est répandu, permettant de diminuer les besoins de filtrage tout en répartissant la tension du bus sur plusieurs composants.

N'ayant pas de prototype à disposition, l'étude sera basée sur des paramètres approximatifs mais tout de même cohérents avec le dimensionnement fin des convertisseurs. La résistance série équivalente sera $R'_s = 4.8 \text{ m}\Omega$, correspondant à la résistance dynamique des semi-conducteurs et à l'ESR de l'inductance de filtrage. Les temps de transition sont de $t_r = 100 \text{ ns}$, pour une fréquence de découpage de 20 kHz, et la résistance parallèle en entrée $R'_p = 1.53 \text{ k}\Omega$. Le rendement maximum du convertisseur sera alors de $\eta^* = 0.985$, pour un courant $I^* = 500 \text{ A}$. Ce rendement est relativement élevé, et traduit de bonnes performances pour le convertisseur. De plus, ce rendement est dépendant du courant traversant le convertisseur comme le montre la figure 2.17.

Plusieurs jeux de paramètres peuvent conduire à l'obtention d'un même rendement à un point donné. Le rendement énergétique sera cependant sensiblement différent.

6.2.5 Les onduleurs

Nous appelons ici onduleur un convertisseur à IGBT commandés par MLI. L'utilisation d'IGBT autorise la réversibilité du convertisseur qui, de ce fait, peut être utilisé aussi bien comme onduleur que comme redresseur. La MLI s'oppose ici à la

7. Equivalent Serie Resistor

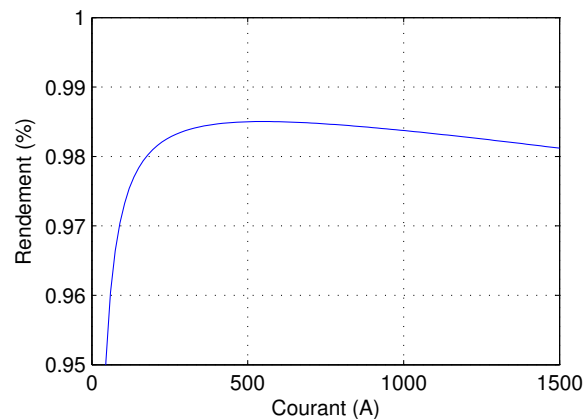


FIGURE 2.17 – Rendement du convertisseur en fonction du courant

commande pleine onde utilisée sur un redresseur à thyristors. Ce type de convertisseurs est présent sur le matériel roulant pour assurer le contrôle de la traction [Ior02], mais on le retrouve également en anti-parallèle de certaines sous-stations, pour assurer la fonction de filtre actif et le renvoi de l'énergie résiduelle sur le réseau ERDF [Via08]. La prochaine étape sera sûrement l'utilisation de sous-stations à IGBT et de structures multi-niveaux permettant de supprimer le transformateur et le classique pont de diodes.

La modélisation de ce type de convertisseurs est basée sur l'utilisation du modèle de la cellule de commutation (2.39) comme dans le cas du hacheur. Au lieu d'utiliser un rapport cyclique constant, les rapports cycliques sont cette fois sinusoïdaux. Il est courant d'utiliser la transformée de Park pour passer d'un système de grandeurs triphasées sinusoïdales à un système biphasé, utilisant des grandeurs constantes (dans le cas du régime permanent). De nombreux exemples existent dans la littérature [PF97], [GB00], [Gom07].

Il est alors possible de calculer les grandeurs continues et alternatives, en régime permanent ou dynamique. Cependant, on rappelle que la partie traitant des onduleurs de traction n'a pas été prise en compte dans ces travaux. L'association moteur/onduleur intervient seulement dans l'équation (2.21), via le rendement η_m tracé figure 2.5.

6.2.6 Les redresseurs

Pièce essentielle du réseau, le redresseur est utilisé pour convertir une tension alternative en une tension continue. Au vu des puissances considérées, le réseau d'alimentation sera triphasé, et le redresseur composé de trois bras. Il existe également des redresseurs dodécaphasés utilisant un transformateur à double enroulements pour réduire la pollution harmonique en amont, mais nous ne les étudierons pas ici. Plusieurs types d'interrupteurs statiques peuvent être utilisés pour assurer la conversion. Les diodes sont de loin les plus couramment utilisées. Robustes et ne nécessitant pas de commande, elles opèrent naturellement la conversion mais avec l'inconvénient de n'être pas réversible en courant. Les thyristors sont proches des diodes en ayant une commutation naturelle au passage par zéro du courant, mais

ils possèdent en plus la possibilité de retarder l'ouverture par rapport au zéro de tension ce qui permet, d'une part, de régler la tension de sortie, mais aussi de rendre réversible l'ensemble. Ces deux convertisseurs assurent une conversion dite pleine onde, ce qui permet de travailler avec des puissances très importantes, en ayant des pertes par commutation très faibles. Un troisième type de convertisseur, utilisant le principe de la MLI et des interrupteur entièrement commandés peut également être utilisé, ce qui permet à la fois un réglage de la tension, la réversibilité, et une réduction de la pollution harmonique et des besoins de filtrage.

Contrairement aux hacheurs et aux onduleurs, les commutations des redresseurs se font de manière spontanée. Cela signifie que la fonction de commutation ne dépend plus du temps, mais de l'état électrique des interrupteurs. Une modélisation basée sur l'utilisation des cellules de commutation impose de connaître précisément les instants de commutation. Dans le cas de commutations naturelles, cela ne peut se faire qu'en résolvant une équation non-linéaire [Maz01], ce qui implique un temps de calcul considérable.

Cela peut se justifier pour une étude harmonique [Mor05], mais ne se justifie pas pour une étude énergétique. Pour cette raison, le modèle développé pour le redresseur se base sur une autre approche qui, bien que moins rigoureuse, est largement utilisée [SRD89].

a) Redresseur à diodes idéales sans impédance de commutation

Les diodes sont supposées idéales, avec une tension de seuil et une résistance dynamique négligeable. Nous étudions ici le redresseur triphasé à double alternance de la figure 2.18, dans le cas d'un réseau triphasé équilibré débitant sur une source de courant idéale.

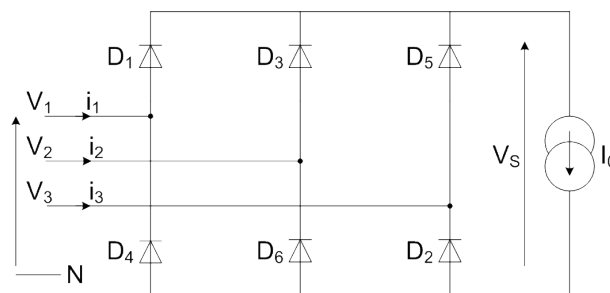


FIGURE 2.18 – Redresseur triphasé double alternance

Les tensions composées du réseau et la tension de sortie sont illustrées sur la figure 2.19a alors que la figure 2.19b représente les courants et tensions du réseau.

La valeur moyenne de la tension de sortie V_s se calcule de manière classique par l'intégrale (2.46) :

$$V_s = \frac{3}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}U \sin(\omega t) \, d\omega t = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} U \quad (2.46)$$

Le courant alternatif est très riche en harmoniques. Le courant est cependant en phase avec la tension, avec une valeur efficace donnée par (2.47) :

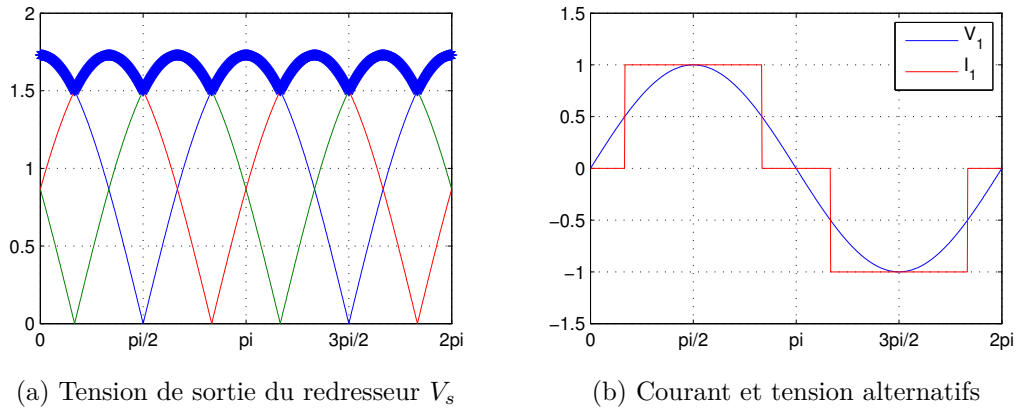


FIGURE 2.19 – Grandeurs caractéristiques d'un redresseur à diodes idéales

$$I_{\text{eff0}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_0 \quad (2.47)$$

b) Redresseur à thyristor idéal

En utilisant sa capacité de retard à l'ouverture, le thyristor peut avantageusement remplacer les diodes. On appelle α l'angle de commande du redresseur. Cette valeur correspond au temps de retard d'amorçage par rapport au passage à zéro de la tension. La tension moyenne de sortie est cette fois donnée par (2.48) en appliquant (2.46).

$$V_s = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} U \cos \alpha \quad (2.48)$$

La puissance mise en jeu est, toujours en négligeant les pertes et en utilisant (2.48) et (2.47), donnée par :

$$P = V_s I_0 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\pi} U \cos \alpha \right) \times \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}} I_{\text{eff0}} \right) = \sqrt{3} U I_{\text{eff0}} \cos \alpha \quad (2.49)$$

c) Prise en compte de l'inductance de commutation

En réalité, une source de tension idéale n'existe pas. Il existe toujours une impédance parasite provenant des câbles, transformateurs ou enroulements statoriques, qui sont de nature inductive. Cette impédance va avoir tendance à s'opposer aux variations de courant, ce qui va altérer les formes d'ondes des tensions. Lors d'une commutation idéale, il n'y a jamais plus de deux diodes qui sont passantes en même temps. Avec l'inductance, le courant ne peut passer instantanément de I_0 à 0 et inversement. Il existe donc un moment où trois diodes sont passantes en même temps, c'est ce que l'on appelle l'empiètement [SRD89]. Cette altération des tensions a un effet sur une largeur angulaire μ , qui augmente avec I_0 et l'inductance de commutation L_c . De plus, l'empiètement crée un déphasage des courants alternatifs vers l'arrière.

On montre, que cet empiètement crée une chute de la tension moyenne ΔV [KBL94], de sorte que la tension de sortie soit cette fois égale à :

$$V_s = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} U \frac{\cos \alpha + \cos(\alpha + \mu)}{2} \quad (2.50)$$

En raisonnant sur la commutation du courant durant l'empiètement, on trouve l'équation (2.51).

$$I_0 = \frac{U}{\sqrt{2}\omega L_c} (\cos \alpha - \cos(\alpha + \mu)) \quad (2.51)$$

Cette équation permet d'exprimer l'angle d'empiètement μ en fonction du courant et de l'inductance de commutation. On voit bien que ces deux grandeurs auront tendance à augmenter cet angle, et donc à augmenter la chute de tension. Si on combine (2.50) et (2.51), il est possible de supprimer μ dans l'expression de la tension de sortie :

$$V_s = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} U \cos \alpha - \frac{3\omega L_c}{\pi} I_0 \quad (2.52)$$

L'angle d'empiètement est alors donné par :

$$\mu = \cos^{-1} \left(\frac{2\pi V_s}{3\sqrt{2}U} - \cos \alpha \right) - \alpha \quad (2.53)$$

L'équation (2.52) est fondamentale. Elle traduit le fait qu'un redresseur à thyristors peut être vu du côté continu comme une source de tension, variable, en série avec une résistance $3\omega L_c/\pi$. Ce phénomène n'est pas dissipatif, et crée une chute de tension sans pertes Joules.

Puissance alternative

Un bilan de puissance semblable à celui effectué en (2.49) nous montre que :

$$I_{\text{eff}} \cos \phi = I_{\text{eff}0} \frac{\cos \alpha + \cos(\alpha + \mu)}{2} \quad (2.54)$$

I_{eff} correspond au courant de ligne efficace, alors que $I_{\text{eff}0}$ est le courant de ligne efficace quand $\mu = 0$ (calculé à l'équation (2.47)).

Tant que $\mu < \pi/6$, la différence entre I_{eff} et $I_{\text{eff}0}$ est inférieure à 1.1%⁸. Cette hypothèse simplifie énormément le calcul et donne le facteur de puissance suivant :

$$\cos \phi = \frac{\cos \alpha + \cos(\alpha + \mu)}{2} \quad (2.55)$$

Nous sommes alors en mesure de calculer les puissances actives et réactives consommées par le pont de diodes, en supposant le redresseur sans pertes. A partir de la tension de sortie calculée grâce à (2.52) et du $\tan \phi$ qui s'obtient à partir de l'expression approchée (2.55) ou de l'expression exacte (2.57), on peut écrire :

$$\begin{aligned} P &= V_s I_0 \\ Q &= P \tan \phi \end{aligned} \quad (2.56)$$

8. $\frac{I_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}0}} = \frac{\sqrt{[\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha + \mu)]^2 + [2\mu + \sin 2\alpha - \sin 2(\alpha + \mu)]^2}}{4(\cos \alpha - \cos(\alpha + \mu))}$

$$\tan \phi = \frac{2\mu + \sin 2\alpha - \sin 2(\alpha + \mu)}{\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha + \mu)} \quad (2.57)$$

Pour aller plus loin, il est également possible d'utiliser un modèle comme celui proposé par [TCW95], qui, en plus de tenir compte de l'inductance de commutation, intègre également la résistance.

Pour tenir compte des pertes en conduction dans la diode, il est possible de considérer un modèle simple intégrant la tension de seuil et la résistance dynamique, placé en série avec la source de tension équivalente modélisant le redresseur.

d) Note sur l'inductance de commutation

Le redresseur est généralement raccordé au réseau de distribution par l'intermédiaire d'un transformateur. Pour caractériser le point de livraison, il est courant de parler de sa puissance de court-circuit, et de son ratio X/R . Cela permet de calculer l'impédance du réseau amont qui, ajoutée à l'inductance de fuite du transformateur et ramenée au secondaire, permet d'estimer l'inductance de commutation [Mor05].

Cette approche ne tient cependant pas compte des filtres placés en amont des redresseurs. Il est en effet classique d'associer au redresseur des capacités pour relever le facteur de puissance et des filtres passifs, pour piéger les harmoniques générées par le pont sur le réseau alternatif. La présence de ces filtres modifie de manière importante la valeur de l'inductance de commutation et donc le calcul de l'empiètement.

Un autre problème se pose lorsque le réseau alternatif ne peut être réduit à une source alimentant un redresseur. C'est le cas d'un point de livraison alimentant plusieurs redresseurs, ou inversement de plusieurs points de livraison alimentant un redresseur. Dans ce cas, il est nécessaire d'avoir des redresseurs découplés entre eux par des capacités pour calculer les inductances de commutation, ou d'avoir recours à des abaques [Sau06].

6.3 Modélisation du matériel roulant

Le tramway capte son énergie sur la LAC à l'aide d'un pantographe. Un ressort va alors plaquer l'archet (pièce assurant le contact réalisée en carbone) contre la LAC pour assurer la prise de courant. Après filtrage, on arrive sur le bus continu sur lequel se connectent les onduleurs de traction, les auxiliaires et le rhéostat de freinage, et un éventuel stockage.

Une chute de tension de 5V a lieu lors de la prise de contact, et la résistance du pantographe et du filtre d'entrée est évaluée à 39.2 mΩ [Als]. On suppose que les auxiliaires (climatisation, éclairage, ...) consomment une puissance constante de 50kW. La puissance des onduleurs de traction est celle calculée dans la partie cinématique par (2.21). Le bus continu va alors consommer ou fournir une puissance variable dans le temps, qui peut être calculée à partir de la position du tramway.

6.4 La ligne aérienne de contact

La ligne aérienne de contact est généralement constituée d'un câble de cuivre d'une section de 150 mm² présentant une résistivité de 0.119mΩ/m. La caténaire,

plus complexe, est composée d'un fil de contact suspendu à un autre câble porteur par des pendules, alors que la LAC n'est composée que d'un simple câble.

La LAC peut être doublée sur certaines sections, éloignée des sous-stations pour réduire sa résistance. De plus, des connexions électriques ont lieu régulièrement entre les LAC des deux voies, dans le même objectif. La résistance linéique va varier en fonction de la fréquence [Mor05].

6.5 Les rails

Nous avons décrit les rails dans la partie 1.4.1. Les rails sont donc des systèmes à constantes réparties, que l'on peut modéliser par un système à constantes localisés en T. On peut également utiliser un réseau en échelle pour obtenir une meilleure approximation. La résistance linéique est de $0.015 \text{ m}\Omega/\text{m}$.

6.6 L'inversion de la causalité lors des transitions traction-freinage

La notion de causalité sera largement débattue par la suite, mais il semble important de la présenter rapidement ici. Cette notion repose sur l'analyse des causes et conséquences, et permet de savoir quels sont les éléments qui imposent les phénomènes étudiés. En électricité par exemple, une source de tension imposera une différence de potentiel, et répondra par un courant absorbé, alors qu'une source de courant aura le comportement dual.

Prenons l'exemple d'un réseau de tramways, composé d'un redresseur et d'un seul tramway. Le redresseur peut être vu comme une source de tension. A l'inverse, le tramway aura un comportement de type source de courant. Ces deux sources sont compatibles entre elles, l'une imposant un courant et subissant la tension, l'autre faisant l'inverse.

Lorsque le tramway freine, il va renvoyer du courant sur le réseau. Si la sous-station n'est pas réversible, cette dernière se bloquera dès que le courant la traversant deviendra négatif. En imposant donc un courant nul, elle va rentrer en conflit avec le tramway qui avait un comportement de source de courant. La tension du bus continu va s'élever par la charge de la capacité de filtrage à des valeurs dangereuses. Le tramway doit donc changer de causalité, et c'est ce qu'il fait en déclenchant le rhéostat de freinage.

En effet, dès que la tension de 900V est dépassée, le hacheur du rhéostat entre en fonctionnement et régule la tension du bus à 900V , en envoyant le trop plein d'énergie dans des résistances. Il en résulte que vu du réseau, le tramway se comporte maintenant comme une source de tension. Dès que le tramway recommence à accélérer, la sous-station étant encore bloquée, la tension du bus va diminuer par décharge de la capacité. Le hacheur va alors s'arrêter, et, dès que la tension sera inférieure à la tension du redresseur moins la tension seuil de ses diodes, le redresseur sera passant. Le tramway est redevenu une source de courant, et la sous-station une source de tension.

Cet exemple montre comment la causalité du réseau tout entier peut s'inverser au cours du temps. Il est impératif d'en tenir compte pour la compréhension des phénomènes physiques, mais aussi pour la résolution du problème. Un changement

de causalité se traduira en effet par un changement des sources et des inconnues du problème, nécessitant une réécriture.

7 Mise en équations d'un réseau continu en régime permanent

Maintenant que nous avons une description de chaque élément constitutif du réseau, nous allons voir les méthodes permettant d'agrèger ces différents modèles pour obtenir une mise en équations du réseau complet.

7.1 La méthode nodale

La méthode la plus classique pour mettre en équations un circuit électrique est la méthode nodale, reposant sur les lois de Kirchhoff. C'est cet algorithme que le simulateur de circuits SPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*) utilise pour la formulation des équations électriques. La méthode nodale est simplement un outil permettant, à partir d'une netlist (c'est à dire d'un circuit physique) d'obtenir un système d'équations. Selon les composants rencontrés, ce système peut être linéaire ou non, et la méthode de résolution plus ou moins simple. Il est possible de calculer la répartition de courant en régime permanent mais aussi de réaliser des analyses dynamiques grâce à ce formalisme.

Lors de l'analyse nodale, les inconnues sont les tensions des nœuds du réseau, qui doivent être exprimées en fonction des courants injectés en chaque nœud et des éléments constitutifs. On utilisera par la suite les définitions suivantes :

- Tension nodale (V_j) : Potentiel d'un nœud du réseau par rapport à un nœud de référence choisi arbitrairement. Le potentiel du nœud de référence est égal à 0 V.
- Courant nodal (J_j) : Courant fourni par une source de courant, compté négativement s'il est injecté au niveau d'un nœud et positivement si il sort du nœud. Si aucune source de courant n'est connectée, le courant nodal est nul.

La loi des nœuds de Kirchhoff stipule que la charge en un nœud du réseau est identiquement nulle en tout temps. Il en résulte donc que la somme algébrique des courants qui entrent en un nœud est nulle, soit :

$$\sum_j I_{Aj} = 0 \quad (2.58)$$

Le courant traversant une impédance Z_{AB} est donné par :

$$I_{AB} = \frac{V_A - V_B}{Z_{AB}} = Y_{AB} (V_A - V_B) \quad (2.59)$$

avec Y_{AB} l'admittance, inverse de l'impédance. Le courant I_{AB} est le courant sortant du nœud A vers le nœud B . Par la suite nous travaillerons uniquement avec des éléments résistifs. Au lieu d'employer le terme d'admittance, nous utiliserons celui de conductance noté G , partie réel de l'admittance.

Nous allons à présent présenter la méthodologie en se basant sur l'exemple de la figure 2.20.

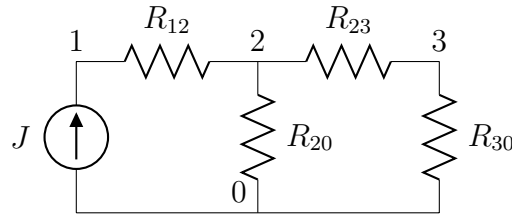


FIGURE 2.20 – Exemple d'application de la méthode nodale

A partir de (2.58) et (2.59), nous pouvons écrire pour chaque nœud, les équations suivantes, traduisant la loi des nœuds en fonction des potentiels et des sources de courants :

$$\begin{aligned}
 G_{12}(V_1 - V_2) - J &= 0 \\
 G_{12}(V_2 - V_1) + G_{23}(V_2 - V_3) + G_{20}(V_2 - V_0) &= 0 \\
 G_{23}(V_3 - V_2) + G_{30}(V_3 - V_0) &= 0 \\
 G_{20}(V_0 - V_2) + G_{30}(V_0 - V_3) + J &= 0
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Avec $G_{12} = 1/R_{12}$, $G_{20} = 1/R_{20}$, ...

Nous obtenons alors un système de quatre équations et à quatre inconnues. Ce système est cependant singulier, car chaque équation est une combinaison linéaire des trois autres. Il faut donc fixer l'une des inconnues et supprimer une équation. On choisira comme nœud de référence le nœud 0, que l'on dotera du potentiel nul. Les potentiels des autres nœuds sont alors décrits par rapport à ce nœud. Le système (2.60) se réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} G_{12} & -G_{12} & 0 \\ -G_{12} & G_{12} + G_{23} + G_{20} & -G_{23} \\ 0 & -G_{23} & G_{23} + G_{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Pour déterminer les tensions, il ne reste plus qu'à inverser la matrice carrée, appelée matrice de conductance. Il est possible de généraliser les règles de conception de cette matrice de conductance en suivant les règles suivantes :

- La matrice de conductance est de dimension $(n \times n)$, où n représente le nombre de nœuds (sans tenir compte du nœud de référence).
- Elle contient uniquement des éléments passifs.
- Chaque élément de la diagonale est égal à la somme des conductances de chacun des éléments connectés au nœud correspondant.
- Chaque élément n'apparaissant pas sur la diagonale est l'opposé de la conductance de l'élément connecté au nœud correspondant.
- Les éléments connectés au nœud de référence n'apparaissent que dans la diagonale.

e) Technique de réduction

La méthode nodale va permettre d'obtenir une mise en équations systématique d'un réseau. Cependant les matrices mises en jeu sont vite de taille importante, car directement liées au nombre de nœuds. Certains sont importants pour l'étude (sous-station, tramway, ...), mais d'autres sont d'une information plus limitée, comme la

mise en parallèle de deux LAC ou la résistance de fuite à la terre d'un rail. Ces nœuds doivent être pris en compte dans la modélisation, mais nous sommes peu soucieux de connaître l'évolution de leur tension. Ils augmentent donc la taille des matrices et rendent plus difficile leur inversion.

Heureusement, la taille du réseau peut être réduite en éliminant ces nœuds passifs (on entend par nœud passif un nœud dont le courant nodal est nul). On peut alors supprimer la tension de ce nœud de la liste des inconnues et ainsi diminuer la taille de la matrice de conductance. Soit k le nœud que l'on souhaite supprimer. La matrice G de taille $n \times n$ deviendra G' de taille $(n - 1) \times (n - 1)$ en appliquant la formule de réduction de Kron donnée par l'équation (2.62)

$$g'_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{ik}g_{kj}}{g_{kk}} \quad \text{pour } \{i, j\} = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\} \quad (2.62)$$

Cette méthode aura pour conséquence de densifier la matrice. En effet, les matrices issues de l'analyse nodale sont généralement des matrices creuses possédant beaucoup de zéros résultant du faible couplage entre les nœuds. Il est donc possible d'utiliser des algorithmes très efficaces mettant à profit ces zéros. Néanmoins, en condensant la matrice, son inversion deviendra généralement plus délicate.

f) Matrice de conductance de la LAC

Ce paragraphe a pour but d'illustrer l'écriture de la matrice de conductance dans le cas d'un réseau de tramways. Ce réseau possède la particularité d'avoir des résistances variables, du fait du déplacement de la rame, mais aussi une structure variable, dépendant de la position du tramway par rapport aux sous-stations. Nous allons illustrer la méthode d'écriture de la matrice de conductance pour la ligne aérienne de contact, dans le cas d'une ligne possédant deux sous-stations situées aux points kilométriques (PK) x_1 et x_2 . Les tensions des sous-stations sont notées V_{ss1} et V_{ss2} , et on suppose que $x_1 < x_2$. On considère un seul tramway situé au PK x , dont la tension est notée V_t .

Un tel réseau possède donc trois nœuds et peut être représenté par la figure 2.21.

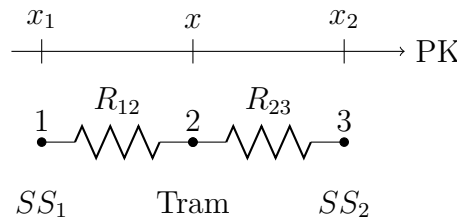


FIGURE 2.21 – Schéma de la ligne aérienne de contact (exemple pour $x_1 < x < x_2$)

En appliquant l'algorithme du paragraphe précédent, on trouve la matrice de conductance G explicitée en (2.63) :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1/R_{12} & -1/R_{12} & 0 \\ -1/R_{12} & 1/R_{12} + 1/R_{23} & -1/R_{23} \\ 0 & -1/R_{23} & 1/R_{23} \end{bmatrix}}^G \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Dans cette matrice, la valeur des résistances et la tension des nœuds vont dépendre de la position x du tramway, qui est variable dans le temps. Le tableau 2.5 résume cela, où ρ représente la résistance linéique de la LAC. :

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x$
V_1	V_t	V_{ss1}	V_{ss1}
V_2	V_{ss1}	V_t	V_{ss2}
V_3	V_{ss2}	V_{ss2}	V_t
R_{12}	$\rho(x_1 - x)$	$\rho(x - x_1)$	$\rho(x_2 - x_1)$
R_{23}	$\rho(x_2 - x_1)$	$\rho(x_2 - x)$	$\rho(x - x_2)$

TABLE 2.5 – Paramètres du réseau en fonction de la position du tramway

Le système tramway peut ainsi être considéré comme un système à commutation. On introduit les fonctions de commutation σ_1, σ_2 et σ_3 , fonctions à valeurs discrètes dans l'ensemble $\{0, 1\}$ telles que :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \text{ si } x < x_1 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ \sigma_2 = 1, \text{ si } x_1 < x < x_2 \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ \sigma_3 = 1, \text{ si } x_2 < x \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (2.64)$$

Les tensions des nœuds V_1, V_2 et V_3 , peuvent s'exprimer en fonction de ces fonctions de commutation, d'après le tableau 2.5. Ainsi, le potentiel du nœud 1 s'écrit :

$$V_1 = \sigma_1 V_t + (\sigma_2 + \sigma_3) V_{ss1} \quad (2.65)$$

En procédant de même pour les autres potentiels, on obtient l'écriture matricielle (2.66).

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_2 + \sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_3 & \sigma_2 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}}^{\Sigma} \begin{bmatrix} V_{ss1} \\ V_{ss2} \\ V_t \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Cette équation permet de passer d'un réseau à topologie variable (nœuds V_t, V_{ss1}, V_{ss2}) à un réseau à topologie fixe (nœuds V_1, V_2, V_3), en intégrant les fonctions de commutations.

On appellera Σ cette matrice de passage qui est une matrice unitaire. Il faut noter aussi que ce changement de base concerne aussi les courants tels que :

$$\begin{bmatrix} I_{ss1} \\ I_{ss2} \\ I_t \end{bmatrix} = \Sigma^T \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

On combinant les équations (2.63), (2.66) et (2.67), on obtient dans la nouvelle base fixe :

$$\begin{bmatrix} I_{ss1} \\ I_{ss2} \\ I_t \end{bmatrix} = \Sigma^T G \Sigma \begin{bmatrix} V_{ss1} \\ V_{ss2} \\ V_t \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Nous avons vu que les résistances s'expriment en fonction de la position selon le tableau 2.5. La matrice de conductance (2.63) peut alors se réécrire :

$$G = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{x_1 - x} + \frac{\sigma_3}{x_2 - x_1} \right) + \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{x_2 - x} + \frac{\sigma_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (2.69)$$

soit

$$G = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_2 & -\sigma_1 + \sigma_2 & 0 \\ -\sigma_1 + \sigma_2 & \sigma_1 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{x_1 - x} + \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_3 & -\sigma_2 + \sigma_3 \\ 0 & -\sigma_2 + \sigma_3 & \sigma_2 - \sigma_3 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x} + \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \sigma_3 & -\sigma_3 & 0 \\ -\sigma_3 & \sigma_1 + \sigma_3 & -\sigma_1 \\ 0 & -\sigma_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (2.70)$$

A partir de (2.68) et (2.70), il est possible d'obtenir une matrice de conductance de la forme :

$$\begin{bmatrix} I_{ss1} \\ I_{ss2} \\ I_t \end{bmatrix} = \left(\frac{M_{[x_1-x]}(\sigma)}{x_1 - x} + \frac{M_{[x_2-x]}(\sigma)}{x_2 - x} + \frac{M_{[x_1-x_2]}(\sigma)}{x_2 - x_1} \right) \begin{bmatrix} V_{ss1} \\ V_{ss2} \\ V_t \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Cette écriture permet de garder une structure constante quelle que soit la position du tramway. De plus, elle fait directement apparaître les positions qui sont des éléments variables, mais aussi des variables servant au dimensionnement optimal. Le calcul des matrices $M_{[x_1-x]}(\sigma)$, $M_{[x_2-x]}(\sigma)$ et $M_{[x_1-x_2]}(\sigma)$ n'a lieu qu'une seule fois par phase de fonctionnement et ne doit être effectué que lors d'un changement de topologie (passage d'une sous-station par exemple).

g) Conclusion sur l'analyse nodale

Bien que simple à mettre en œuvre, la méthode nodale possède certaines limites dont la plus importante est l'incapacité de prendre en compte les sources de tension idéales. Bien qu'une source de tension puisse être représentée par une source de courant d'après l'équivalence Norton/Thevenin, cette méthode ne suffit pas. Les impédances du réseau de tramways sont faibles, tout comme celles des redresseurs. Le passage du redresseur en source de courant équivalente fait alors apparaître une résistance relativement élevée. Cette grande disparité de valeurs risque d'entraîner des problèmes de conditionnement et des difficultés de résolution numériques entachées d'erreurs importantes. Le même problème apparaît dans la modélisation des inductances, des diodes ou des interrupteurs. Ces limitations imposent alors l'usage d'une version améliorée de l'analyse nodale.

7.2 La méthode nodale modifiée (MNA)

La Méthode Nodale Modifiée ou MNA (Modified Nodal Analysis), est une extension permettant de traiter des sources de tensions. Elle repose sur l'introduction d'inconnues supplémentaires dans le système. On ajoute alors les courants des sources de tension en plus des tensions des nœuds [JMHI03]. On aboutit à une représentation du type :

$$\begin{bmatrix} G & -B \\ B^t & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

La matrice G est la matrice de conductance telle que décrite dans la section précédente. La matrice B est la matrice d'incidence des sources de tension de dimension $(n \times m)$, avec m le nombre de sources de tension. Elle est composée de 0, 1 et -1 selon la règle suivante : Si la borne positive d'une source de tension i est connectée au nœud k , alors l'élément $B_{k,i} = 1$. S'il s'agit de la borne négative, alors $B_{k,i} = -1$. Dans tous les autres cas, y compris celui où une borne est reliée au nœud de référence, $B_{k,i} = 0$.

La présence du signe moins permet de placer les sources de tension en convention générateur.

La matrice R , de dimension $(m \times m)$, permet de faire apparaître les résistances internes des sources de tension sur la diagonale. Le vecteur V correspond aux tensions nodales, et le vecteur I aux courants traversant les sources de tension. A eux deux, ils forment le vecteur des inconnues, alors que J est le vecteur des sources de courants, et E regroupe les tensions connues.

A titre d'illustration, appliquons cette méthodologie au schéma de la figure 2.22.

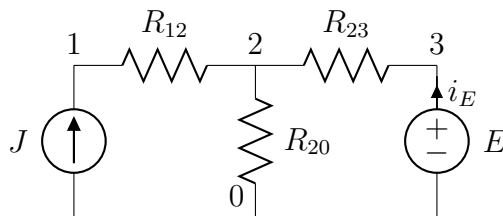


FIGURE 2.22 – Méthode nodale avec prise en compte des sources de tension

La résistance R_{23} peut être considérée comme une résistance classique ou comme la résistance interne de la source de tension E . Dans le premier cas le système s'écrira selon l'équation (2.73).

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1/R_{12} & -1/R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_{12} & 1/R_{12} + 1/R_{23} + 1/R_{20} & -1/R_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_{23} & 1/R_{23} & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Dans le second cas, le nœud 3 est absorbé pour former une source de tension non idéale composée de la source E et de la résistance R_{23} en série.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1/R_{12} & -1/R_{12} & 0 \\ -1/R_{12} & 1/R_{12} + 1/R_{20} & -1 \\ \hline 0 & 1 & R_{23} \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ E \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Application au réseau de tramways

Reprenons notre réseau de tramways simplifié de la figure 2.21. On adjoint cette fois un modèle des sous-stations qui peuvent, comme nous l'avons vu, être modélisées par une source de tension en série avec une résistance qui permet de tenir compte des pertes dans les diodes et de l'empiètement. Le tramway sera, lui, modélisé par une source de courant et l'ensemble pantographe/filtre par une résistance. Le schéma du réseau ainsi complété est représenté figure 2.23, lorsque le tramway se situe en début de ligne.

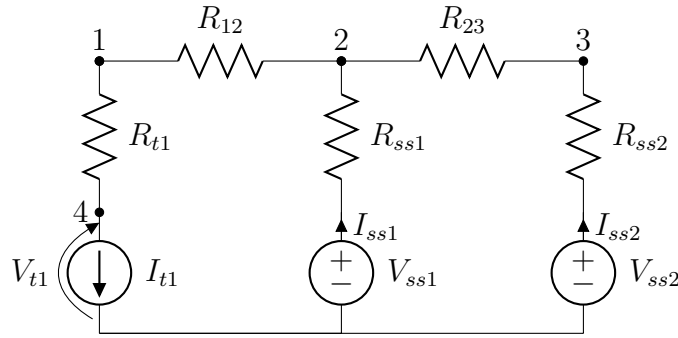


FIGURE 2.23 – Réseau de tramways complet, pour $x < x_1$

Les tensions $V_2 = V_{ss1}$ et $V_3 = V_{ss2}$ sont les tensions en sortie de la sous-station, alors que la tension $V_4 = V_{t1}$ est la tension du bus continu du tramway et la tension $V_1 = V_{l1}$ la tension de la LAC à la verticale du tramway.

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} G_{12} + G_{t1} & -G_{12} & 0 & -G_{t1} & 0 & 0 \\ -G_{12} & G_{12} + G_{23} & -G_{23} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -G_{23} & G_{23} & 0 & 0 & -1 \\ -G_{t1} & 0 & 0 & G_{t1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & R_{ss1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & R_{ss2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_{ss1} \\ I_{ss2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{t1} \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Avec le déplacement de la rame, le réseau est encore à structure variable, et la matrice doit être calculée pour chaque position. De plus, la topologie change et on doit réutiliser l'équation (2.71) pour établir le modèle.

En procédant comme au paragraphe précédent, on peut ainsi former des matrices dont les inconnues restent à la même place quelle que soit la position du tramway. Le vecteur des inconnues est alors :

$$X = [V_{ss1} \quad V_{ss2} \quad V_{l1} \quad V_{t1} \quad I_{ss1} \quad I_{ss2}]^T \quad (2.76)$$

Nous pouvons alors écrire, en utilisant la définition de σ donnée par l'équation (2.66) :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_{ss1} \\ I_{ss2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & I_3 \end{array} \right] X = \Sigma_1 X \quad (2.77)$$

La matrice Σ_1 permet de procéder au changement de base. Elle est formée de la matrice Σ pour les nœuds changeant en fonction de la position du tramway et de la matrice identité pour les nœuds invariants (tension du bus continu), et les courants des sous-stations. Le vecteur des grandeurs connues reste constant et est égal à :

$$Z = [0 \ 0 \ 0 \ -I_{t1} \ E_1 \ E_2]^T \quad (2.78)$$

La matrice (2.75) s'écrit sous la forme (2.72) avec les paramètres suivants :

$$G = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_3 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 & 1 \end{bmatrix} g_{t1} + G_x(x_1, x_2, x, \sigma) \quad (2.79)$$

La matrice $G_x(x_1, x_2, x, \sigma)$ est calculée grâce à la formule (2.71), que l'on borde de zéros afin d'avoir une taille compatible avec le premier terme de l'équation (2.79), qui possède plus de nœuds (bus continu). La matrice B s'écrit sous la forme :

$$B = \begin{bmatrix} \sigma_2 + \sigma_3 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_3 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

La matrice R reste constante car elle ne dépend pas de la position du tramway. En combinant et projetant les matrices (2.79) et (2.80) dans la base fixe grâce à la relation de passage (2.77), on obtient le système (2.81) permettant de trouver les inconnues.

$$X = \Sigma_1^T A^{-1} \Sigma_1 Z \quad (2.81)$$

Avec A définie par

$$A = \begin{bmatrix} G & -B \\ B^T & R \end{bmatrix} = A_0 + \begin{bmatrix} M_{[x_1-x]} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{x_1 - x} + \begin{bmatrix} M_{[x_2-x]} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x} + \begin{bmatrix} M_{[x_1-x_2]} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (2.82)$$

où A_0 est constante ne dépendant pas de la position du tramway :

$$A_0 = \left[\begin{array}{cccc|cc} \sigma_1 g_{t1} & 0 & 0 & -\sigma_1 g_{t1} & -\sigma_2 - \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_2 g_{t1} & 0 & -\sigma_2 g_{t1} & -\sigma_1 & -\sigma_3 \\ 0 & 0 & \sigma_3 g_{t1} & -\sigma_3 g_{t1} & 0 & -\sigma_1 - \sigma_2 \\ -\sigma_1 g_{t1} & -\sigma_2 g_{t1} & -\sigma_3 g_{t1} & g_{t1} & 0 & 0 \\ \hline \sigma_2 + \sigma_3 & \sigma_1 & 0 & 0 & R_{ss1} & 0 \\ 0 & \sigma_3 & \sigma_1 + \sigma_2 & 0 & 0 & R_{ss2} \end{array} \right] \quad (2.83)$$

7.3 Prise en compte des hacheurs dans la modélisation

Jusqu'à présent, le modèle développé ne permet d'étudier que des réseaux conventionnels. L'intégration de hacheurs dans la structure proposée nécessite de les prendre en compte dans l'élaboration du modèle. Un modèle de hacheur a été développé au chapitre 6.2.4, et nous avons vu que sous certaines hypothèses, un hacheur pouvait être considéré comme un transformateur DC équivalent, avec une résistance en parallèle en entrée (R_p) et une en série (R_s) en sortie (2.45). Le circuit équivalent est représenté figure 2.24.

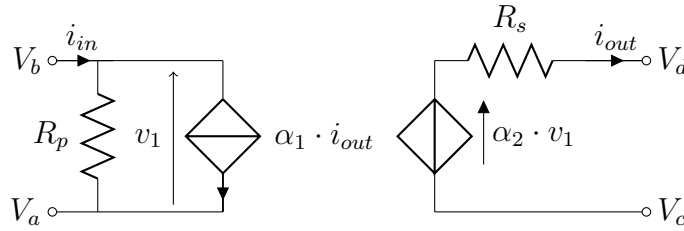


FIGURE 2.24 – Modèle moyen équivalent des hacheurs

Ce circuit équivalent fait apparaître le transformateur comme des sources de tension et de courant commandées. A partir de ce schéma équivalent, on déduit les équations caractéristiques du hacheur que l'on peut exprimer sous forme d'un *stamp* [JMHJ03] donné par l'équation matricielle (2.84).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1/R_p & -1/R_p & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ -1/R_p & 1/R_p & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -\alpha_2 & \alpha_2 & 1 & -1 & -R_s \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ I_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Chaque élément d'un circuit possède un stamp. Pour intégrer un élément, il suffit de coller le stamp sur la matrice A déjà définie pour le reste du circuit (en additionnant les éléments des matrices pour une résistance, ou en insérant des lignes et colonnes manquantes dans le cas d'une source de tension par exemple).

L'expression (2.84) est compatible avec la formulation MNA (à l'inverse de l'expression (2.45)) et peut être directement intégrée dans le modèle. On considère par la suite qu'il n'y a pas d'isolation galvanique et que les nœuds A et C sont reliés au nœud de référence de sorte que $V_a = V_c = 0$. On renomme hv le port d'entrée côté haute tension, lv , le port de sortie côté basse tension et le courant de sortie est appelé I_h . L'équation (2.84) s'écrit alors :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1/R_p & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \alpha_2 & -1 & -R_s \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} V_{hv} \\ V_{lv} \\ I_h \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.85)$$

Illustration sur le réseau de tramways

Afin d'illustrer le modèle précédent, on étudie le réseau de la figure 2.25. Ce réseau est composé de 5 hacheurs (H_i), et d'une partie HVDC sous $1.5kV$, qui est fixe, alors que la partie LVDC sous $750V$ est, elle, variable en fonction de la position du tramway.

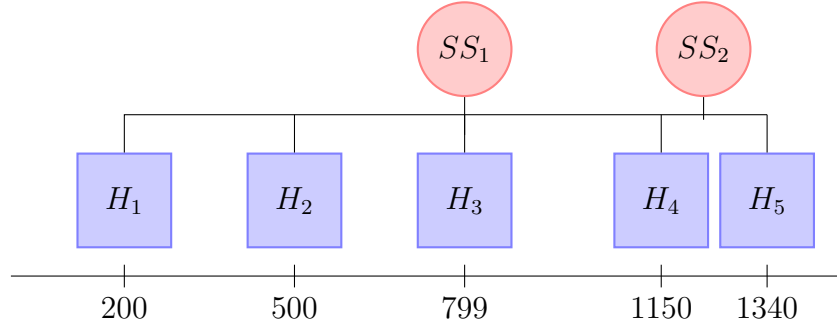


FIGURE 2.25 – Réseau de tramways avec ses cinq hacheurs

Le réseau se modélise alors sous la forme générale suivante :

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} G_{11}^{hv} & G_{12}^{hv} & 0 & 0 & 0 & -B_1 & 0 \\ G_{21}^{hv} & G_{22}^{hv} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & G_{11}^{lv} & G_{12}^{lv} & 0 & 0 & B_h \\ 0 & 0 & G_{21}^{lv} & G_{22}^{lv} + G_{11}^t & G_{12}^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{21}^t & G_{22}^t & 0 & 0 \\ \hline B_1^t & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{ss} & 0 \\ 0 & \alpha_2 & B_h^t & 0 & 0 & 0 & -R_s \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} V_{ss} \\ V_{hv} \\ V_{lv} \\ V_l \\ V_t \\ I_{ss} \\ I_h \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_t \\ E_{ss} \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.86)$$

G^{hv} est la matrice de conductance de la partie haute tension. Elle est constante et intègre les résistances entre les sous-stations et les hacheurs pour la partie HVDC ainsi que la résistance R_p du modèle du hacheur. G^{lv} représente la partie variable de LAC liant les hacheurs au tramway, alors que G^t modélise la partie provenant de la résistance du filtre du tramway. Ces matrices se calculent grâce à (2.79). Les matrices B_1 et B_h sont les matrices d'incidences des sous-stations et des hacheurs, calculées par (2.80). La matrice B_1 est constante tandis que la matrice B_h est variable. Les matrices α_1 et α_2 sont des matrices diagonales comportant les rapports cycliques des hacheurs. On rappelle que $\alpha_1 = \alpha + d\alpha_1$ et $\alpha_2 = \alpha - d\alpha_2$. La différence entre ces deux valeurs permet de prendre en compte les pertes par commutation.

7.4 Modélisation par maillage

Une autre approche peut être utilisée pour la modélisation de la partie électrique [Fay08]. Elle repose sur le maillage de la ligne, et le calcul des courants et des tensions

en chaque nœuds du maillage. Une portion de ligne est constituée de l'ensemble des conducteurs LAC, rails, ainsi que leurs éventuelles connexions. Chaque portion de ligne est décrite par sa matrice de conductance grâce à la méthode nodale.

L'ensemble des ses sous-matrices de conductance est alors agrégé, pour former une matrice bloc tridiagonale, matrice de conductance du réseau entier. Il suffit alors d'inverser cette matrice pour calculer le potentiel de chaque conducteur, à chaque pas du maillage.

Cette méthode permet une description générique d'une portion de ligne, qu'il suffit ensuite d'assembler de manière automatique. Par contre, elle ne peut pas prendre en compte les sources de tension, et génère surtout un grand nombre d'inconnues. Le calcul des tensions en chaque point du réseau va demander de plus grandes ressources, sans pour autant apporter des informations supplémentaires intéressantes.

8 Prise en compte du réseau alternatif

L'étude développée jusqu'à présent s'intéresse uniquement au réseau continu. Cela se justifie pour la plupart des réseaux de tramways, car les redresseurs sont situés à hauteur des points de livraison ERDF. Il peut arriver cependant dans certains cas que le réseau possède une partie alternative propriétaire qu'il faut pouvoir modéliser afin de la dimensionner. De plus, la prise en compte de la partie alternative permet d'élargir les capacités du simulateur pour prendre en compte les réseaux AC plus courants, comme ceux rencontrés dans le ferroviaire classique.

8.1 Calcul de Load Flow

L'analyse des réseaux alternatifs repose sur le même principe que celle des réseaux continus. Les courants nodaux sont encore reliés aux tensions nodales par une matrice d'admittance notée Y . Ces grandeurs sont cette fois complexes, ce qui implique pour chaque nœud de calculer un module et une phase. Ainsi, contrairement au réseau continu, les équations qui relient la tension et le courant ne sont plus linéaires, et il est obligatoire de faire appel à des algorithmes de résolution numérique de type Newton-Raphson. Le calcul des tensions nodales se fait classiquement à partir des puissances actives et réactives consommées en chaque nœud du réseau. Ce calcul est appelé Load Flow ou Power Flow et est un grand classique largement étudié et développé, dont on rappelle ici simplement les grandes lignes.

La tension complexe \bar{U}_k du nœud k s'écrit :

$$\bar{U}_k = U_k e^{j\theta_k} \quad (2.87)$$

U_k est un nombre réel correspondant à la tension efficace. θ_k est le déphasage de la tension par rapport à un nœud de référence. Le courant nodal au nœud i se calcule à partir des admittances et des tensions par l'équation (2.88) :

$$\bar{I}_i = \sum_k \bar{Y}_{ik} \bar{U}_k \quad (2.88)$$

La puissance complexe d'une grandeur alternative se calcule classiquement par (2.89)

$$\bar{S}_i = \bar{U}_i \bar{I}_i^* \quad (2.89)$$

En combinant (2.87), (2.88) et (2.89), et en appelant respectivement G et B les parties réelles et imaginaires de Y , on peut écrire :

$$\bar{S}_i = U_i \sum_k (G_{ik} - jB_{ik}) U_k e^{j\theta_i - \theta_k} \quad (2.90)$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient alors :

$$\begin{aligned} P_i &= U_i \sum_k [G_{ik} U_k \cos(\theta_i - \theta_k) + B_{ik} U_k \sin(\theta_i - \theta_k)] \\ Q_i &= U_i \sum_k [G_{ik} U_k \sin(\theta_i - \theta_k) - B_{ik} U_k \cos(\theta_i - \theta_k)] \end{aligned} \quad (2.91)$$

L'objectif du calcul de Load Flow va être de résoudre les équations non-linéaires (2.91), où P_i et Q_i sont des données, et U_k et θ_k des inconnues. Une fois ces grandeurs trouvées, il est possible de calculer les pertes et les courants transitant dans les lignes. Pour résoudre cette équation, nous utiliserons la méthode de Newton-Raphson. Une fois linéarisées, les équations (2.91) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} & \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta U \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Les vecteurs ΔP et ΔQ se calculent en faisant la différence entre la puissance donnée du nœud et la puissance calculée par (2.91). La matrice jacobienne regroupe les dérivées partielles par rapport aux inconnues, qui est inversible. L'objectif étant d'annuler les vecteurs ΔP et ΔQ , l'inversion du système (2.92) permet de trouver les termes $\Delta \theta$ et ΔV à retrancher à la solution. Par itération, il est alors possible de résoudre le système (2.91).

Le calcul de cette matrice jacobienne et son inversion est une étape délicate dans le calcul du Load Flow. Ce travail peut être simplifié en utilisant les techniques de Fast Decoupled Load Flow (FDLF) [KBL94], basées sur le fait qu'il existe un couplage fort entre le module de la tension et les puissances réactives, tout comme les puissances actives sont fortement couplées aux déphasages. On peut alors supprimer les termes diagonaux de la jacobienne (2.92), ce qui simplifie les calculs.

On peut aller encore plus loin dans la simplification du jacobien. En effet, le calcul de ses termes passe par le calcul de fonctions trigonométriques gourmandes en temps de calcul. En supposant que les angles sont faibles et que la partie résistive du réseau est négligeable par rapport à son caractère inductif, les équations (2.92) deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta P/U &= B \Delta \theta \\ \Delta Q/U &= B \Delta U \end{aligned} \quad (2.93)$$

Pour simplifier la lecture, mais aussi pour ne pas se soucier des changements de tension dans un réseau possédant des transformateurs, et enfin pour augmenter la stabilité numérique du Load Flow, il est classique de travailler en unité réduite (per unit (ou p.u.)). Cela revient à normaliser les grandeurs de travail par des grandeurs de base décrites dans le tableau 2.6. Les transformateurs apparaîtront alors comme de simples impédances permettant de prendre en compte leurs pertes en charge et leurs inductances de fuite.

8.2 Mixed Load-Flow

Le Load Flow ainsi développé ne permet que de calculer les tensions dans un réseau purement alternatif. Il n'autorise pas la prise en compte d'un étage DC ni d'un étage de conversion.

Nous avons cependant vu précédemment qu'il existait une relation permettant de relier les grandeurs alternatives aux grandeurs continues. La tension de sortie d'un redresseur est directement liée au module de sa tension d'alimentation côté alternatif (2.52). Les grandeurs alternatives P et Q , utiles pour le calcul de Load Flow, sont obtenues par (2.56) et dépendent des tensions et courants du réseau continu.

Ces trois équations suffisent à relier les deux sous-réseaux que sont la partie AC et la partie DC. La partie AC est régie par les équations (2.91), et la partie DC par les équations (2.86). Comme dans le cas d'un réseau purement alternatif, mais possédant des niveaux de tension différents, il est classique de passer en *p.u.* pour simplifier l'étude et rendre le redresseur transparent. On utilisera alors les grandeurs de base suivantes données dans le tableau 2.6.

	S_{base}	U_{base}	I_{base}	Z_{base}
AC	S	U	$\frac{S_{base}}{\sqrt{3}U_{base}}$	$\frac{U_{base}^2}{S_{base}}$
DC	S_{base}^{ac}	$\frac{3\sqrt{2}}{\pi}U_{base}^{ac}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}}I_{base}^{ac}$	$\frac{18}{\pi^2}Z_{base}^{ac}$

TABLE 2.6 – Grandeurs de base pour le passage en p.u.

A partir de là, deux possibilités s'offrent à nous pour calculer les grandeurs dans le réseau.

La première technique, dite *séquentielle*, repose sur le calcul séparé des sous-systèmes. On commence par un Load Flow AC, qui permet de connaître les tensions AC du redresseur. On procède ensuite au calcul de la tension DC du redresseur, puis à l'analyse nodale du réseau DC, qui renvoie le courant dans le redresseur. On peut alors calculer les puissances active et réactive que consomme le redresseur sur le réseau AC et procéder de nouveau à un Load Flow AC. On itère alors jusqu'à ce qu'une condition d'arrêt, basée sur la variation de tension par exemple, mette fin à l'algorithme. Cette méthode permet d'utiliser des outils génériques mais impose un certain nombre d'itérations (en plus de celles nécessaires pour le calcul du Load Flow).

La deuxième approche consiste à résoudre le système en une seule fois grâce à la méthode de Newton-Raphson. Le système est obtenu en compilant dans la même matrice la partie AC (2.93), la partie DC (2.86), et les équations linéarisées des convertisseurs. Cette méthode plus directe renvoie directement le résultat et fait appel à moins de calculs. Par contre, les calculs sont plus complexes car ils demandent l'inversion d'une jacobienne augmentée. On perd de plus l'intérêt d'avoir un système linéaire facile à résoudre pour la partie DC, car il est obligatoire de recalculer et d'inverser la jacobienne augmentée.

L'approche séquentielle semble plus appropriée pour l'étude des réseaux de tramways. En effet, c'est surtout la partie continue qui est volumineuse, et il est intéressant de garder le caractère linéaire pour éviter d'avoir à utiliser des techniques

de type Newton-Raphson. De plus, la partie AC étant généralement sous $20kV$, les pertes et chutes de tensions sont faibles, ne nécessitant ainsi que peu d'itérations entre les parties AC et DC.

9 Etude et comparaison des différentes architectures

Nous avons vu dans la section 7 comment il était possible d'obtenir les équations permettant d'étudier un réseau de tramways. Les différentes structures d'alimentation peuvent à présent être comparées.

Nous commencerons par étudier un réseau classique constitué de deux sous-stations, puis nous verrons les gains qu'apporte l'architecture HVDC représentée figure 2.25.

9.1 Etude de l'architecture classique

Le réseau classique est le réseau d'essai de La Rochelle. Il possède deux sous-stations classiques situées en $x_1 = 800$ m et $x_2 = 1222$ m, pour une ligne de 1453 m. Le courant du tramway sera supposé constant pour l'instant, $I_t = 1000$ A. On choisit comme paramètres $\rho = 1,19 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{m}^{-1}$, $R_{ss} = 0,0243 \Omega$ et $R_t = 0,0392 \Omega$. Ce réseau est représenté sur la figure 2.26 et décrit par l'équation (2.81).

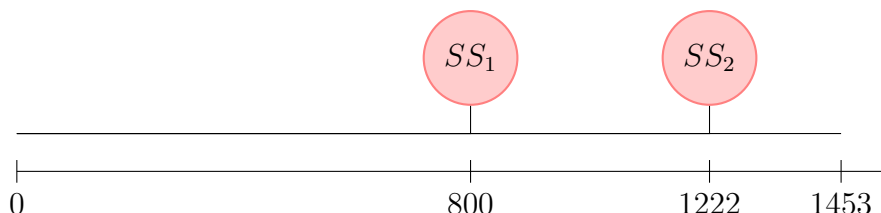


FIGURE 2.26 – Réseau de tramways de la Rochelle alimenté par deux sous-stations

9.1.1 Alimentation par un réseau équilibré

Dans ce cas, on considère que les tensions à vide des sous-stations E_1 et E_2 sont constantes et égales, soit $E = 790V$.

Les figures 2.27a et 2.27b, illustrent l'application de la formule 2.81, lorsque le tramway se déplace le long de la ligne.

Si on regarde les courants, on observe que la répartition est dépendante de la position du tramway. Lorsque $(x < x_1)$ ou $(x > x_2)$, cette répartition est constante, puis elle redevient variable lorsque le tramway se situe entre les deux sous-stations. La sous-station la plus proche fournit la plus grande partie du courant, mais la seconde participe aussi dans une moindre mesure. Si les résistances R_{ss} étaient nulles, l'intégralité du courant serait fournie par la sous-station 1 lorsque $(x < x_1)$. Cette répartition du courant se traduit directement sur les tensions en sortie des sous-stations, qui varient proportionnellement avec le courant. La tension du tramway

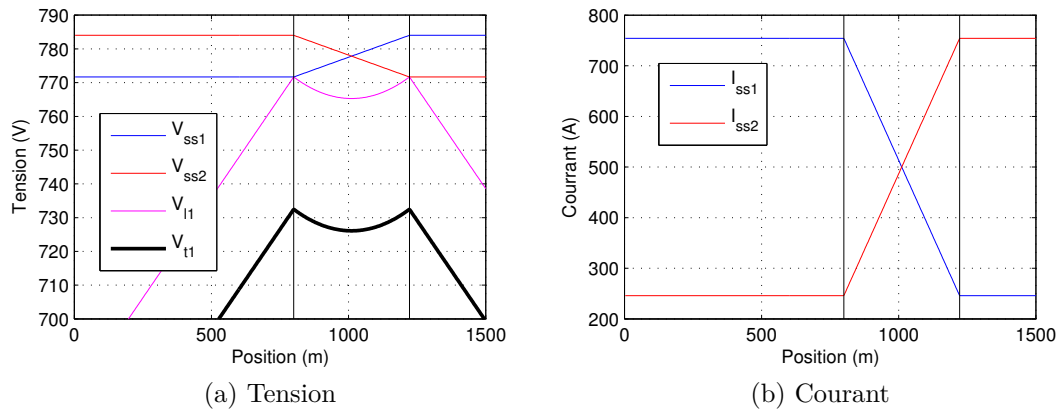


FIGURE 2.27 – Tension et courant sur le réseau en fonction de la position du tramway

au niveau de la LAC suit une variation linéaire, puis quadratique lorsqu'il repasse entre les sous-stations.

La figure 2.28 montre cette fois l'évolution du rendement.

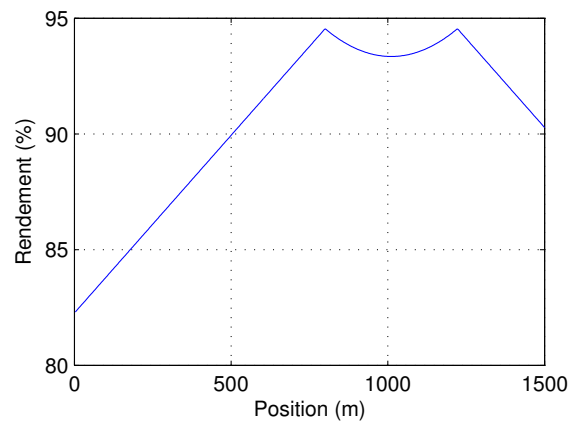


FIGURE 2.28 – Evolution du rendement en fonction de la position

Ce rendement est évidemment maximum lorsque le tramway est situé à proximité des sous-stations, puis il décroît lorsque la distance l'en séparant augmente. Il est important de noter que la résistance R_{ss} modélise l'empiètement du redresseur *qui n'est pas un phénomène dissipatif*. Elle ne doit pas être prise en compte dans le calcul du rendement qui s'exprime alors :

$$\eta = \frac{V_t I_t}{\sum_i V_{ssi} I_{ssi}} \quad (2.94)$$

9.1.2 Cas où les tensions d'alimentation ne sont plus nominales

ERDF garantit pour un utilisateur HTA que la plage de variation de la tension doit rester inférieure à $\pm 5\%$ de la tension contractuelle, elle même comprise dans un plage de $\pm 5\%$ de la tension nominale HTA fixée à 20kV [ERD11]. Il en résulte un déséquilibre potentiel entre les tensions HTA des sous-stations se retrouvant

naturellement sur la partie DC. Reprenons l'étude précédente, mais avec cette fois $E_1 = 790 \text{ V}$ et $E_2 = 770 \text{ V}$. A titre comparatif, les variables dans le cas 9.1.1 sont également tracées.

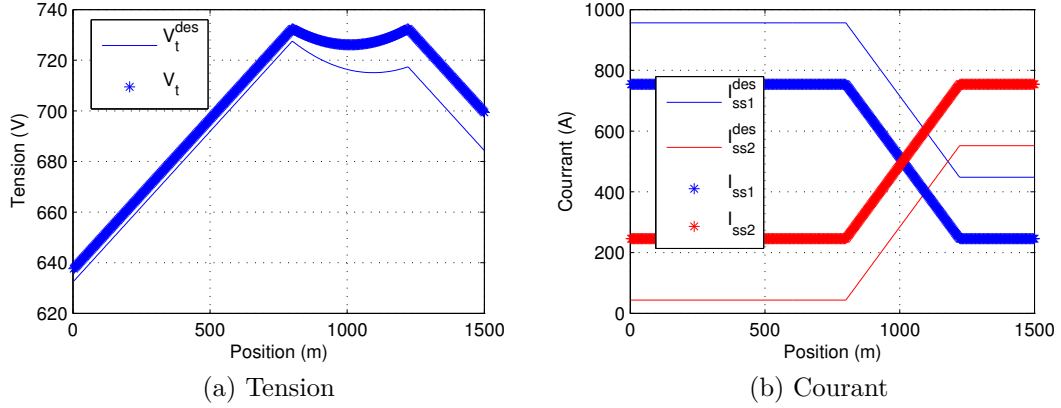


FIGURE 2.29 – Tension et courant sur le réseau en fonction de la position du tramway pour un réseau déséquilibré

On observe que la sous-station avec la tension la plus élevée prend une part encore plus importante du courant. Le déséquilibre s'accroît, pouvant entraîner un blocage de la sous-station SS_2 . En effet, si la différence de tension est trop élevée, le courant dans la sous-station SS_2 peut devenir négatif. Une circulation de courant apparaît, entraînant des pertes supplémentaires sauf si la sous-station n'est pas réversible.

9.1.3 Blocage des sous-stations

Comme nous l'avons explicité au chapitre 6.6, lorsqu'une sous-station se bloque, sa causalité change. Elle passe de source de tension à source de courant nul. Cela se traduit par une modification du modèle établi (2.81). Si la variable I_{ss_i} devient négative, elle n'est plus une inconnue et devient un paramètre fixe $I_{ss_i} = 0$. Cela se traduit par la suppression de la ligne et de la colonne correspondant à I_{ss_i} dans les matrices A et Z .

La figure 2.30 illustre ce cas lorsque la sous-station 2 est bloquée. On suppose ici que la tension $E_2 < E_1 - (R_{ss1} + \rho(x_2 - x_1)) = 715,5 \text{ V}$, ce qui implique que la sous-station reste bloquée durant tout le déplacement du tramway.

Le courant étant entièrement fourni par la sous-station SS_1 , la tension de cette sous-station reste constante. La tension du tramway va varier de manière linéaire par rapport à la tension de la sous-station SS_1 , car la sous-station SS_2 est bloquée. Lorsque le tramway est situé en aval de la SS_1 , $V_{ss2} = V_{ss1}$, puis la tension de la SS_2 suit la variation de la tension tramway, jusqu'à ce que le tramway dépasse la position de la SS_2 . La tension V_{ss2} sera alors uniquement conditionnée par la résistance entre les sous-stations, V_{ss1} et le courant du tramway.

La figure 2.31 illustre un autre cas de blocage de sous-station. Les tensions des sous-stations sont $E_1 = 790 \text{ V}$ et $E_2 = 750 \text{ V}$.

Les résultats de simulation montrent que la SS_2 se bloque car la SS_1 est à une tension bien supérieure et cherche à imposer un courant négatif dans la SS_2 . Le courant reste donc nul, et la tension V_{ss2} suit l'évolution de V_{ss1} puis de V_{l1} , comme

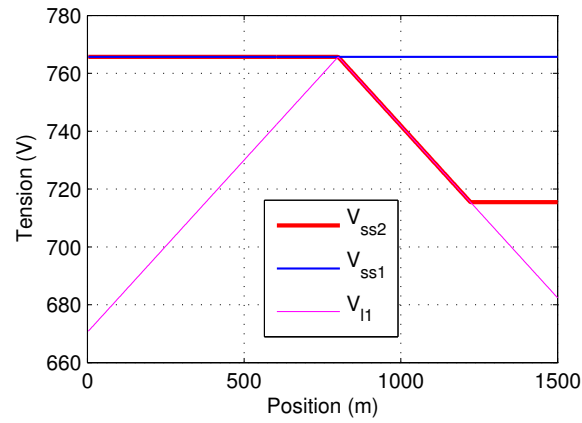


FIGURE 2.30 – Tension réseau quand la sous-station SS_2 est bloquée

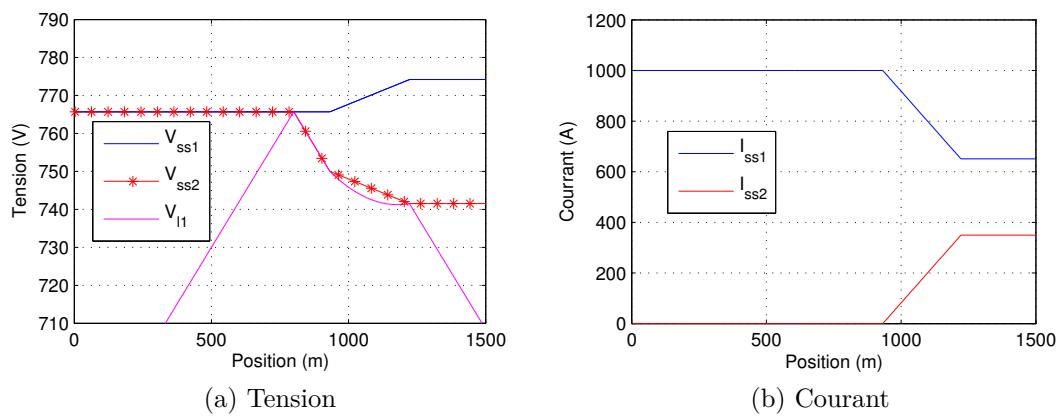


FIGURE 2.31 – Tension et courant lors du blocage et du déblocage de la sous-station 2

dans l'exemple précédant, jusqu'à ce que $V_{ss2} < E_2$. A partir de 930m, SS_2 se débloque enfin et participe à l'alimentation du tramway.

9.1.4 Influence des tensions d'alimentation sur le rendement

La variation des tensions d'alimentation entraîne une modification dans la répartition du courant et une variation du rendement. Le rendement étant dépendant de la position, nous préférons utiliser une mesure prenant en compte l'ensemble du cycle de fonctionnement. Le rendement énergétique (2.95) permet ainsi par intégration d'avoir une vision du cycle complet d'une durée T .

$$\eta_e = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \quad (2.95)$$

Dans notre cas, on considère que le tramway capte un courant constant et qu'il se déplace à vitesse constante. Ce rendement énergétique correspond alors simplement à la moyenne des rendements sur la longueur de la voie.

L'évolution de ce rendement moyen est un bon indice de performance pour comparer les différents cas de figure. On suppose que la tension E peut varier de $\pm 5\%$ autour de sa valeur nominale $E_0 = 790$ V.

Tout d'abord, il faut noter que le rendement énergétique est toujours meilleur avec des sous-stations non réversibles qu'avec des sous-stations réversibles à tensions identiques (pendant les phases de traction). En effet, dans le cas de sous-stations réversibles, si la différence de tension $\Delta_E = |E_1 - E_2|$ est trop élevée, le courant peut devenir négatif dans l'une des sous-stations. Cela signifie qu'un courant non nécessaire à la traction circule dans les résistances du réseau, entraînant des pertes supplémentaires. En bloquant ces courants, la sous-station non réversible limite donc les pertes.

La figure 2.32 illustre l'évolution du rendement énergétique en fonction des tensions d'alimentation des deux sous-stations non réversibles.

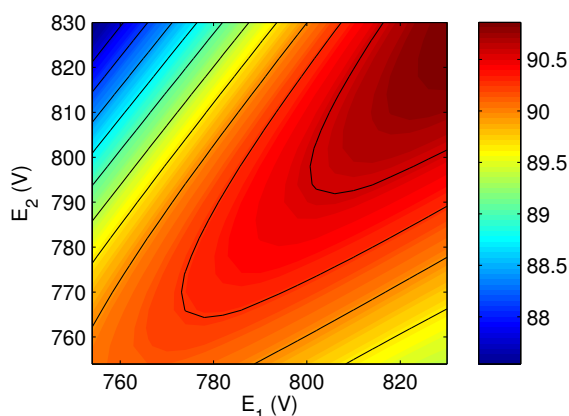


FIGURE 2.32 – Evolution du rendement énergétique η_e en fonction des tensions d'alimentation

Plusieurs remarques peuvent être faites. Tout d'abord, on observe que plus les tensions d'alimentation sont élevées, plus le rendement l'est aussi, ce qui s'explique

assez logiquement par une meilleure efficacité du transport sous haute tension, les pertes ne dépendant que du courant.

Mais attention, il est faux de penser que les tensions des deux sous-stations doivent varier de manière identique. En effet, si ΔE est élevé, le rendement chutera, car la sous-station la plus proche ne pourra pas contribuer à la fourniture de puissance qui viendra alors de la sous-station plus éloignée, avec donc plus de pertes.

Une autre remarque intéressante est la relation entre E_1 et E_2 pour obtenir un rendement maximum. La figure 2.32 montre qu'il existe une relation affine liant ces deux valeurs qui n'est pas proportionnelle, ce qui explique la non symétrie de la figure. On observe que la tension E_1 doit être supérieure à la tension E_2 pour obtenir les meilleurs rendements. Cela est dû à la position géographique des sous-stations et au courant consommé par le tramway. Ce courant étant constant, la tension E_1 doit être plus élevée car la sous-station 1 alimente le tramway plus longtemps, car le réseau n'est pas symétrique. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Nous concluons ici la partie sur l'étude d'un réseau classique. En effet cette étude ne présente pas un grand intérêt scientifique et il semble plus intéressant d'étudier la nouvelle architecture.

9.2 Comparaison entre l'architecture classique et l'architecture proposée

Cette section propose de comparer les deux architectures de puissance, afin d'observer les gains potentiels que peut offrir la structure HVDC. Le réseau étudié est toujours celui de la Rochelle, mais doté de cinq hacheurs comme représenté à la figure 2.25. Le modèle est cette fois obtenu grâce à l'équation (2.86).

9.2.1 Simulation de la nouvelle architecture d'alimentation

On considère que les feeders sont en cuivre, d'une section de 300 mm^2 , et que leur résistivité linéique est de $9.10^{-5} \Omega \cdot \text{m}^{-1}$. On suppose dans un premier temps que les hacheurs sont idéaux, et qu'ils ne génèrent pas de pertes. Leur rapport cyclique est fixé à 0.5, et on suppose toujours que le tramway se déplace à vitesse constante, avec un courant constant. Les résultats de simulation sont alors donnés figure 2.33.

Tout d'abord, l'observation de la tension sur la figure 2.33a montre que la tension de la LAC du tramway possède des maximums locaux à l'emplacement des hacheurs. Ces maximums sont d'autant plus élevés que le hacheur est proche d'une sous-station (cas du hacheur H_3). La répartition des courants figure 2.33b montre que c'est le hacheur le plus près du tramway qui fournit la majorité du courant. Cela signifie que le courant passera plus facilement par la partie haute tension. Le hacheur H_3 positionné juste sous une sous-station aura une tension plus élevée que tous les autres. Il participera donc plus activement à l'alimentation de la charge.

9.2.2 Comparaison entre les structures dans le cas de hacheurs idéaux

Dans le but de valider l'intérêt de la structure, nous allons procéder à une comparaison avec la structure classique. On suppose que les paramètres sont identiques. La résistance R_{ss} est la même que la tension de sortie, soit de 790 V ou de 1500 V. De plus, afin de pouvoir comparer les deux structures, on choisit un rapport cyclique

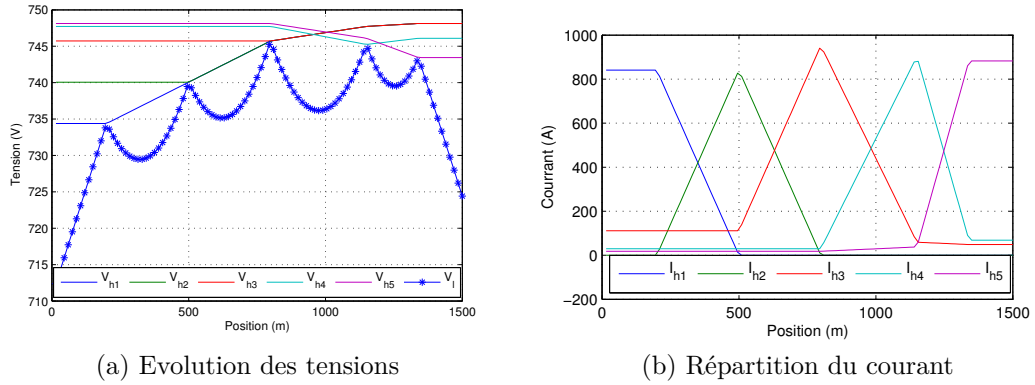


FIGURE 2.33 – Tensions et courants dans la partie basse tension des hacheurs (V_{hi} , I_{hi} : Tension et courant de la sous-station SS_i , V_l : tension de la LAC à hauteur du tramway).

$\alpha = 0.5267$, afin d'avoir la même tension à vide de 790 V dans les deux réseaux. Les tensions et rendements sont tracés figure 2.34, toujours sous l'hypothèse d'un convertisseur idéal. V_{ss} correspond à l'alimentation classique alors que $V_{hacheur}$ correspond à la nouvelle architecture.

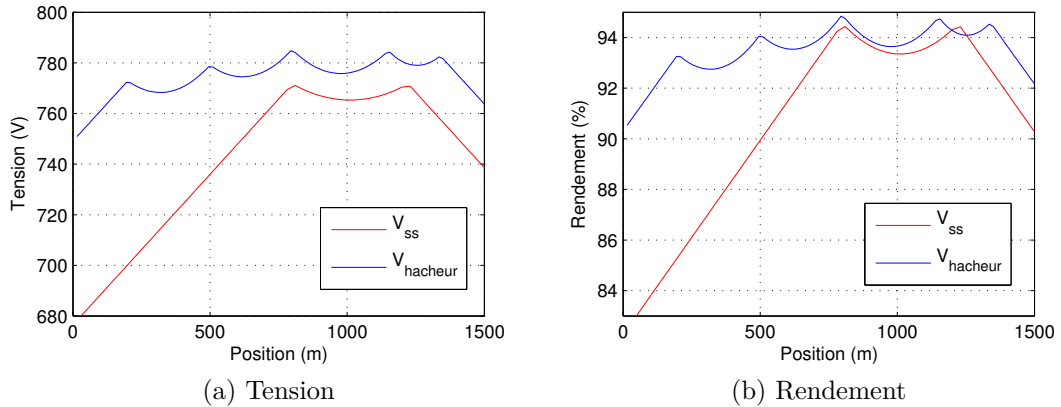


FIGURE 2.34 – Comparaison des performances avec et sans hacheurs

La figure 2.34a révèle que le plan de tension est bien meilleur avec l'architecture proposée. En diminuant l'impédance apparente, la pente de la chute de tension est bien plus faible. Le courant circulant dans les redresseurs est diminué de moitié grâce au hacheur, ce qui diminue les chutes de tension. Le rendement est aussi nettement meilleur, conséquence d'une amélioration du plan de tension et du plus faible courant circulant dans des portions de LAC plus courtes et des chutes de tension plus faibles aux bornes du redresseur. Le rendement énergétique passe ainsi de $\eta_e = 90.728\%$ à $\eta_e = 93.498\%$.

9.2.3 Prise en compte des pertes dans les hacheurs

Les avantages de la nouvelle architecture sont indéniables et ce, même en laissant les hacheurs en boucle ouverte. Cependant le modèle ne tient pas compte des pertes

dans les convertisseurs. Le modèle développé (2.86) permet, lui, d'évaluer l'impact de ces pertes.

La figure 2.33b met en exergue que, la plupart du temps, pour un réseau peu chargé comme dans notre cas d'étude, les hacheurs ne fournissent pas de courant. Cela signifie que le choix du paramètre R_p , qui représente les pertes à vide du convertisseur, aura une grande influence sur l'évaluation du rendement sur le cycle de fonctionnement. Ces pertes à vide sont justement les plus compliquées à estimer, et le manque de mesures physiques est le principal frein à cette méthode. La figure 2.35 illustre la prise en compte du rendement des convertisseurs sur le calcul du rendement global.

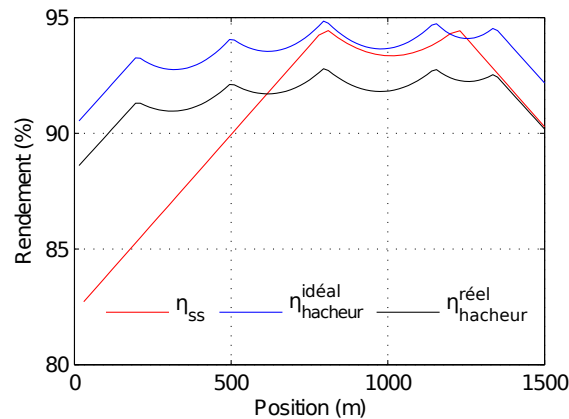


FIGURE 2.35 – Rendement sur cycle avec prise en compte des pertes

Cette fois ci, le rendement énergétique chute à $\eta_e = 91.5915\%$, ce qui est évidemment moins que dans le cas idéal où les pertes étaient négligées, mais ce qui est meilleur que l'architecture classique basée uniquement sur les redresseurs. Cette diminution du rendement s'explique d'une part par la diminution de la tension de sortie due à da_2 et R_s (qui est d'environ 5 V et qui peut être contrée en jouant sur le rapport cyclique), mais aussi, et surtout, aux pertes dans le convertisseur.

On observe sur la figure 2.35 que l'utilisation de la nouvelle architecture permet des gains élevés, surtout dans les zones les plus éloignées des points de livraison (le rendement est en effet plus faible avec une double conversion (redresseur + hacheur), qu'avec une simple). La zone à proximité des redresseurs possède donc un rendement moins bon, mais qui est compensé dès que l'on s'éloigne, ce qui est d'ailleurs l'un des objectifs premiers.

Ce phénomène peut être encore accentué ; ainsi, plus les pertes dans la LAC sont élevées, plus elles concurrencent les pertes dans le convertisseur, et plus la structure est intéressante. Les figures (2.36a) et (2.36b) traduisent cela en traçant la variation du rendement énergétique en fonction du courant tramway et des résistances linéiques de la LAC et des feeders.

Sur la figure (2.36a), lorsque l'on augmente les résistances linéiques de la LAC et des feeders, on accroît artificiellement la taille du réseau qui paraît alors plus grand. Ainsi, plus un réseau est étendu, et plus la nouvelle architecture est avantageuse. De même, la figure (2.36b) nous révèle que plus le réseau est chargé, plus la structure est avantageuse. Par contre, elle montre aussi que si le réseau est peu chargé, les

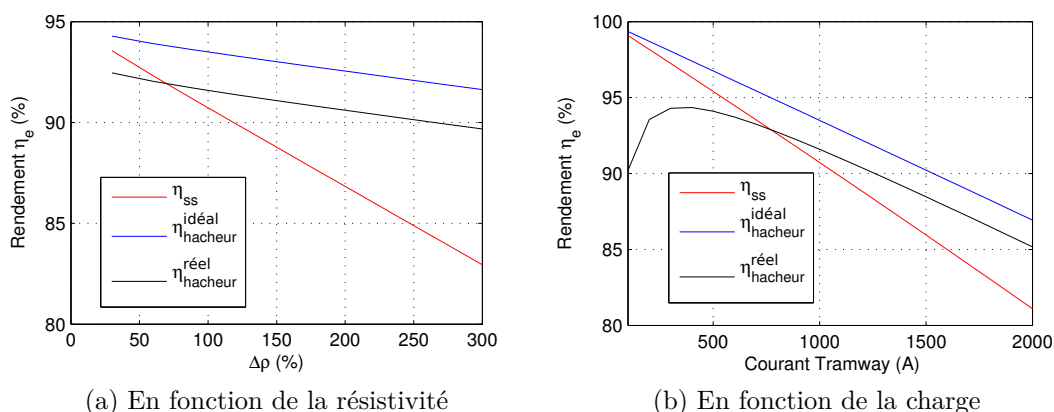


FIGURE 2.36 – Evolution du rendement énergétique

perdes à vide dans les hacheurs ne sont plus négligeables devant les autres pertes, et le rendement s'écroule.

Ce résultat est l'inconvénient majeur de la structure car, hélas, un tramway passe beaucoup de temps à l'arrêt. On peut espérer que le courant consommé par les auxiliaires (climatisation, éclairage, ...) et le nombre de tramways sur la ligne limitent ce désagrément. Cette étude est également à moduler car *le modèle du redresseur n'intègre pas les pertes*. En effet, seule la chute de tension due à l'empiètement est prise en compte. Les pertes par conduction sont négligées, tout comme les pertes à vide qui existent aussi sur un redresseur.

Les différentes pertes et leur répartition sont détaillées figure 2.37. Sont tracées en fonction de la position, toujours pour un tramway consommant un courant constant de 1000 A : les pertes dans l'ensemble (filtre, pantographe) (P_{rt}), celles dans la LAC (P_{lac}), les pertes par conduction (P_{cond}), commutation (P_{com}) et celles constantes (P_{const}) dans les hacheurs, puis les pertes dans le feeder haute tension (P_{feed}). La figure 2.37a représentant le réseau classique, seules les pertes dans le tramway et dans la LAC sont représentées.

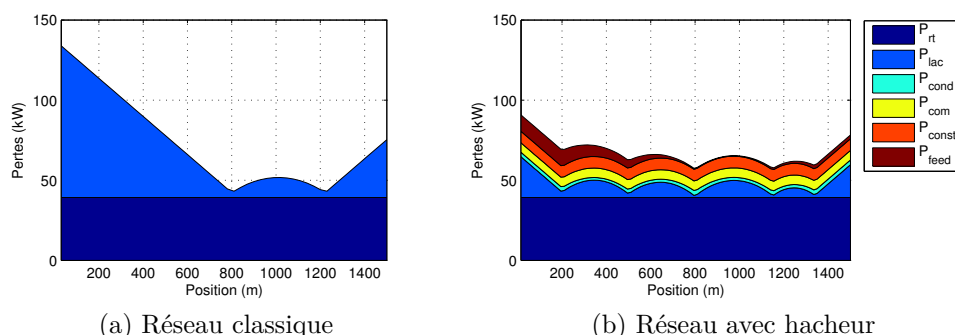


FIGURE 2.37 – Pertes dans le réseau

Ces figures nous montrent la part importante des pertes pour le captage du courant. Ces pertes ne dépendent que du courant tramway et sont donc constantes dans ce cas. De plus, elles sont minimisées par rapport au cas réel car les 5 V de chute de tension dans le pantographe ne sont pas prise en compte, ce qui augmente

de 5 kW ces pertes. Les pertes dans la LAC sont ensuite tracées. Elles deviennent majoritaires dans le cas d'un réseau classique alors qu'elles restent à un niveau plus faible dans l'architecture proposée. Les pertes dans le hacheur représentent une part importante des pertes, spécialement la partie constante. Les pertes par conduction (qui englobent les pertes dans le filtre) sont relativement faibles, car le courant se répartit entre les hacheurs. Ces pertes varient avec le carré du courant, elles sont donc moindres que dans le cas d'un seul hacheur fournissant toute la puissance. De plus, le modèle des pertes en conduction est purement résistif, ce qui est une approximation valable pour les interrupteurs MOSFET, mais est bien plus contestable pour les composants bipolaires. En ne prenant pas en compte la tension de seuil, on minimise les pertes lorsque le taux de charge est faible. Il est possible d'intégrer cette tension de seuil dans $d\alpha_2$, en supposant que la tension d'entrée V_{hv} varie peu. Les pertes dans le feeder, quant à elles, suivent le même type d'évolution que celle dans la LAC tout en étant plus faibles, de par la réduction du courant opérée par les hacheurs.

9.3 Conclusion sur les avantages de la nouvelle architecture

Cette rapide étude a montré les avantages de la solution HVDC pour l'alimentation d'un réseau ferroviaire de type tramway. Cette étude a été menée pour un seul tramway, consommant un courant constant en traction. Les résultats intermédiaires présentés ici n'évaluent pas la possibilité d'effectuer des échanges entre véhicules, ou pendant les phases de freinage. De plus, l'étude a été menée en considérant un placement aléatoire des hacheurs, qui sont en boucle ouverte, et agissent simplement comme un auto-transformateur DC.

Les principaux résultats de simulation confirment les attentes et il s'avère que la structure proposée permet de maintenir un bien meilleur plan de tension, en diminuant l'impédance apparente entre les véhicules et les sous-stations. Le rendement s'en trouve amélioré, tout comme la puissance disponible aux bornes du moteur (figure 2.4).

Les hacheurs alimentés par les sous-stations sont sièges de pertes. Ils induisent une surconsommation même lorsqu'ils ne sont pas utilisés. Il en résulte que la nouvelle architecture est particulièrement bien adaptée aux réseaux étendus et chargés.

Il est important de préciser que les modèles utilisés ont aussi été simulés via une simulation temporelle sur le logiciel PSIM, qui a permis de les valider.

10 Couplage électromécanique

Lors de la partie mécanique de la section 2, nous avons établi un modèle permettant de calculer la puissance électrique consommée par les moteurs de traction sur le bus continu du tramway. Cette puissance dépend des paramètres de la ligne, du conducteur, et enfin de la tension du bus continu via l'équation (2.8). La section 4 illustre les résultats de simulation en supposant que la tension du bus est constante.

D'un autre côté, dans les parties 7 et 8, un modèle complet du réseau électrique a été développé. Ce modèle permet de calculer la tension du bus continu. Il prend en entrée les tensions et les positions des sous-stations, le rapport cyclique et la position des hacheurs, et enfin la position et le courant des tramways. La section 9

a permis d'étudier le réseau électrique en supposant que le tramway se déplaçait à vitesse constante en consommant un courant constant.

Ces deux systèmes interagissent l'un avec l'autre par l'intermédiaire de trois variables qui sont : le courant du tramway i_t , sa position x_t et enfin la tension du bus u_{bus} . L'ensemble de ces couplages est représenté sur la figure 2.38.

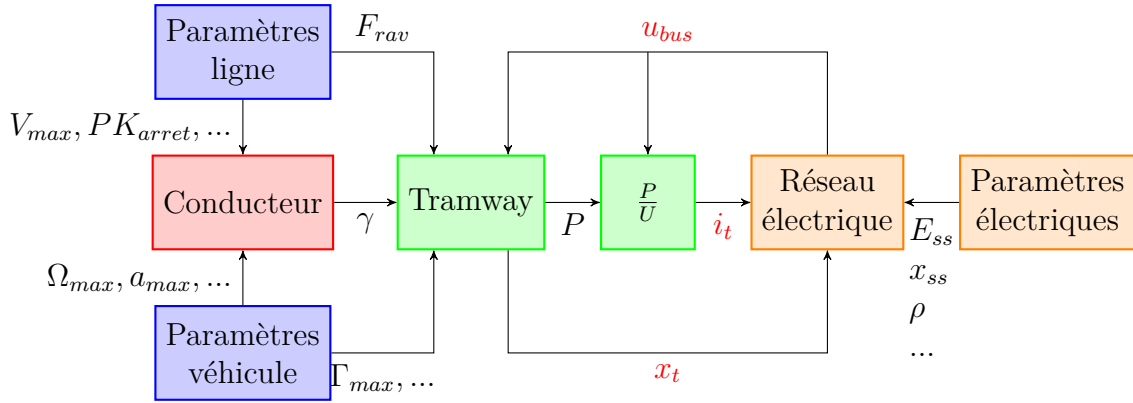


FIGURE 2.38 – Couplage électro-mécanique

De manière identique au réseau alternatif de la partie 8, la prise en compte du couplage va se faire de manière séquentielle. Dans un premier temps, on calcule le courant du tramway et sa position le long de la ligne en supposant sa tension constante. A partir de ces valeurs, il est possible de calculer la tension du bus grâce au chapitre 7. On itère alors en calculant de nouveau la position et le courant avec cette tension bus.

De cette manière, il est possible de calculer le rendement énergétique du réseau, en prenant en compte la véritable consommation du tramway.

11 Optimisation et gestion des flux

Jusqu'à présent, nous avons présenté la nouvelle structure, nous l'avons modélisé et observé son comportement en boucle ouverte. Nous n'avons cependant pas utilisé toute la potentialité des hacheurs pour essayer de maximiser le rendement de l'installation.

En effet, les hacheurs ont plus à offrir. Tout d'abord, ils sont contrôlables, en opposition aux transformateurs utilisés dans les grandes lignes. Nous avons supposé jusqu'à présent que le rapport cyclique était fixe et réglé pour obtenir 790 V à vide. Nous allons dorénavant étudier les gains possibles en utilisant la facilité du réglage de tension offerte par les hacheurs.

Une autre caractéristique des hacheurs est leur faible encombrement. Les sous-stations classiques sont quant à elles volumineuses, et leur emplacement est généralement imposé par des contraintes géographiques vis-à-vis des points de livraison, avec un emplacement suffisant pour les accueillir. On peut envisager objectivement que les hacheurs s'intègrent plus facilement et que leur emplacement sur le réseau ne soit dicté que par des contraintes techniques.

L'objectif final de ce paragraphe est une maximisation du rendement, ce qui impose la mise en œuvre d'outils d'optimisation qui seront tout d'abord présentés. Ils seront ensuite appliqués à la problématique du tramway via les deux degrés de liberté offerts par les hacheurs.

11.1 Généralités sur les problèmes d'optimisation

L'optimisation est au cœur des processus de décision actuels, qui cherchent à maximiser la production tout en diminuant les coûts. L'optimisation est donc synonyme de recherche d'extremum. On cherche plus particulièrement un jeu de paramètres appartenant à un ensemble de définitions permettant de maximiser une fonction objectif, qui traduit les performances recherchées. Cette optimisation peut également se faire en prenant en compte des contraintes d'égalités ou d'inégalités pour restreindre le domaine des solutions optimales. Selon le type de fonctions objectif et de contraintes, les méthodes d'optimisation à mettre en œuvre sont différentes. Ces fonctions peuvent être linéaires, quadratiques, ou bien non linéaires, ce qui conditionne l'existence d'optimum et les techniques de résolution. Nous allons rentrer un peu plus en détails, en présentant le type de problème que nous cherchons à résoudre, puis nous présenterons rapidement les méthodes classiques de résolution.

11.1.1 Problème non contraint

Le premier type de problème que l'on rencontre est le problème d'optimisation non contraint. On considère une fonction objectif $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Cette fonction dépend des variables réelles x_i et renvoie une grandeur qui traduit les objectifs du problème d'optimisation. Il peut s'agir d'un volume ou d'un rendement que l'on peut chercher à minimiser ou à maximiser.

La résolution du problème de minimisation est la même que celle du problème de maximisation. Il suffit en effet de prendre l'opposé de la fonction objectif pour passer de l'un à l'autre. On traitera donc du cas général :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) \tag{2.96}$$

Sans aucune hypothèse supplémentaire, la recherche d'une solution au problème (2.96) est généralement difficile. On fait par la suite l'hypothèse que la fonction objectif f est continue. Si cette fonction est non linéaire, elle peut posséder plusieurs optimum locaux tout en ayant un seul optimum global. Ce problème est dur à résoudre et fait généralement appel à des algorithmes heuristiques.

Si la fonction f est convexe, alors on montre que le problème (2.96) admet *au plus* une solution. Cette propriété est très importante, car elle simplifie considérablement le problème. En effet, alors que la recherche d'optimum global est difficile, il est relativement simple de trouver un optimum local.

Si x^* est un minimum local de f sur un voisinage $V \subset \mathbb{R}^n$, et si f est dérivable, alors,

$$f(x^* + dx) > f(x^*) \quad \forall x^* + dx \in V \Rightarrow \nabla_x f(x^*) = 0 \tag{2.97}$$

Cette condition nécessaire est appelée condition du premier ordre et provient du développement en série de Taylor de la fonction f au voisinage V de x^* :

$$f(x^* + dx) = f(x^*) + \nabla_x f(x^*) dx + dx^T \nabla_x^2 f(x^*) dx + o(dx) \quad (2.98)$$

L'équation (2.98) justifie (2.97), mais permet aussi d'écrire la condition d'optimalité du deuxième ordre (2.99)

$$f(x^* + dx) > f(x^*) \quad \forall x^* + dx \in V \Rightarrow \nabla_x^2 f(x^*) < 0 \quad (2.99)$$

Ces deux conditions (2.97) et (2.99) (la Hessienne est définie positive), sont donc les conditions nécessaires pour que la fonction f possède un minimum local en $x^* \in \mathbb{R}^n$. Dans le cas d'un problème sans contrainte, avec une fonction objectif convexe, cette condition devient nécessaire et suffisante.

La résolution du problème (2.96) dans le cas d'une fonction objectif convexe consiste simplement à annuler son gradient $\nabla_x f$, et à vérifier le caractère défini positif (ou négatif pour un problème de maximisation) de la Hessienne $\nabla_x^2 f$. Cela se fait simplement grâce à un algorithme de type descente du gradient (basé sur la méthode de Newton).

Un exemple classique de fonctions convexes sont les fonctions quadratiques définies positives. Des algorithmes spécifiques et puissants (SQP) sont d'ailleurs développés lorsque la fonction objectif est une fonction quadratique.

11.1.2 Problème d'optimisation sous contraintes d'égalités

Ce type de problème est une extension du problème précédent qui, en plus de chercher une solution dans un ensemble minimisant une fonction objectif, s'assure en plus que des contraintes soient respectées, ce qui se traduit par :

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{minimiser}} & f(x) \\ \text{sous contraintes} & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \end{array} \quad (2.100)$$

Le problème (2.100) est dit convexe si la fonction objectif f est convexe et si les contraintes h_j sont affines.

Pour résoudre ce type de problème, plusieurs méthodes sont possibles. La première qui vient à l'esprit est l'utilisation de la méthode de substitution, qui fonctionne bien pour des contraintes affines mais qui devient vite inextricable, si on considère des cas plus généraux. La méthode de Lagrange est elle universelle et largement utilisée pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes [Fle81].

a) Méthode de substitution

On suppose un problème d'optimisation de type (2.100), avec $x \in \mathbb{R}^n$. Les contraintes sont supposées affines et linéairement indépendantes de type :

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i - b_j \quad (2.101)$$

En séparant les variables x_i en deux ensembles $y \in \mathbb{R}^l$ et $u \in \mathbb{R}^{n-l}$, on peut réécrire les équations (2.101), sous forme matricielle :

$$A_y y + A_u u = B \quad (2.102)$$

Si $n = l$, le système (2.102) étant linéairement indépendant, les contraintes définissent à elles seules la solution. Si $l > n$, le système est hyper-contraint et soit les équations (2.101) ne sont pas linéairement indépendantes, soit elles sont incompatibles. On s'intéresse donc uniquement au cas où $l < n$. L'équation (2.102), permet alors d'exprimer les variables y en fonction de u , par $y = A_y^{-1}(B - A_u u)$. À partir de cette équation, il est possible d'exprimer la fonction objectif f uniquement en fonction de u .

Le problème d'optimisation (2.96), avec les contraintes (2.102), revient donc à résoudre le problème (2.103), qui est un problème sans contrainte contrairement à (2.100).

$$\underset{u \in \mathbb{R}^{n-l}}{\text{minimiser}} \quad f(A_y^{-1}(B - A_u u)) \quad (2.103)$$

La méthode de substitution utilise donc l'information contenue dans les contraintes pour l'injecter dans la fonction objectif, afin de diminuer le nombre de variables à rechercher, et permet d'obtenir un problème d'optimisation sans contrainte globalement plus facile à résoudre.

Le gradient, utilisé pour la résolution, se calcule grâce au théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{du} \quad (2.104)$$

avec :

$$\frac{dx}{du} = -A_y^{-1} A_u \quad (2.105)$$

Cette méthode possède tout de même une limitation et non des moindres. Il est en effet obligatoire d'exprimer les contraintes d'égalités sous la forme explicite. Cela est facile dans le cas de contraintes linéaires, mais devient vite impossible si les contraintes sont non linéaires.

b) Méthode de Lagrange

Afin de résoudre une classe plus large de problèmes d'optimisation impliquant des contraintes d'égalités, il est d'usage d'utiliser la techniques des multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode permet, par l'adjonction de variables supplémentaires appelées multiplicateurs de Lagrange, de transformer un problème d'optimisation sous contraintes en problème sans contraintes, en travaillant sur le lagrangien au lieu de la fonction objectif seule. Le lagrangien est une fonction à valeur dans \mathbb{R} exprimée par l'équation(2.106).

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T h(x) \quad (2.106)$$

Les λ_j définis dans le vecteur λ^T , sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte $h_j(x)$. Les multiplicateurs de Lagrange représentent l'effet sur la valeur optimale qu'a le respect de la contrainte. Plus la contrainte est importante pour le problème, plus le λ_j associé sera grand. Si on relâche la contrainte $h_j(x)$ d'une unité, alors la fonction objectif variera d'un λ_j .

La condition d'optimalité pour un problème non contraint (2.97) se transcrit alors pour un problème sous contrainte par $\nabla L(x^*, \lambda) = 0$:

$$\nabla_x L = \nabla_x f(x) - \lambda^T \nabla_x h(x) = 0 \quad (2.107a)$$

$$\nabla_\lambda L = h(x) = 0 \quad (2.107b)$$

Encore une fois, si le problème (2.100) est convexe, cette condition nécessaire devient une condition nécessaire et suffisante.

11.1.3 Problème d'optimisation sous contraintes d'égalités et d'inégalités

En plus des contraintes d'égalités h_j , un problème d'optimisation peut contenir des contraintes d'inégalités g_i . Il s'écrira classiquement sous la forme (2.108) :

$$\begin{aligned} & \underset{x \in A}{\text{minimiser}} && f(x) \\ & \text{sous contraintes :} && g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \\ & && h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (2.108)$$

La solution de ce problème doit vérifier les conditions nécessaires de *Karush-Kuhn-Tucker (KKT)*, qui sont proches de celles développées pour un problème comportant seulement des contraintes d'égalités. Si x^* est un optimum local, alors les conditions de KKT imposent qu'il existe des constantes μ_i ($i = 1, \dots, m$) et λ_j ($j = 1, \dots, l$) nommées multiplicateurs de KKT, telles que :

$$\nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla_x g_i(x^*) + \sum_{j=1}^l \lambda_j \nabla_x h_j(x^*) = 0 \quad (2.109a)$$

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m \quad (2.109b)$$

$$h_j(x^*) = 0, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, l \quad (2.109c)$$

$$\mu_i \geq 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m \quad (2.109d)$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m \quad (2.109e)$$

La condition (2.109a) correspond à la recherche d'un point singulier et est semblable à la condition (2.107a), en prenant en compte dans le lagrangien les contraintes d'égalités et d'inégalités.

Les équations (2.109b) et (2.109c) sont, elles, identiques à (2.107b), et assurent l'admissibilité de la solution.

La condition (2.109d) assure la positivité des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'inégalités.

Enfin, la condition (2.109e), appelée condition de complémentarité, implique que si une contrainte d'inégalité est inactive, les multiplicateurs de Lagrange qui lui sont associés sont nuls. Si par contre la contrainte est active, elle se comporte comme une contrainte d'égalité, et les multiplicateurs de Lagrange, sont strictement positifs.

Le problème (2.108), est cette fois convexe si la fonction objectif et les contraintes d'inégalités sont convexes et si les contraintes d'égalités sont affines.

Plusieurs méthodes sont possibles pour résoudre ce type de problème, mais encore une fois, ne sont pas l'objet de ce manuscrit. On peut citer par exemple l'utilisation des fonctions de pénalité. Le lecteur intéressé pourra se référer à [BV04].

11.1.4 Analyse de sensibilité

L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange permet de connaître la variation de la fonction objectif par rapport au relâchement d'une contrainte. L'analyse de sensibilité se propose, elle, de calculer la sensibilité de la fonction objectif par rapport à une variable.

On distingue deux types de variables. Premièrement, les variables de décision notées u , correspondent aux variables de contrôle. Il peut s'agir d'un rapport cyclique ou d'une tension en cas de régulation de tension par exemple. En plus de ces variables, il existe des variables liées x , qui sont dépendantes des variables de contrôle par des contraintes égalitaires de type :

$$h_j(x_1, \dots, x_l, u_1, \dots, u_m) = 0, \text{ pour tout } j = 1, \dots, l \quad (2.110)$$

On notera que le nombre de variables liées doit être le même que celui des équations, qui doivent de plus être indépendantes. Sans perte de généralité, la fonction objectif s'écrit :

$$f(x, u) \quad (2.111)$$

Afin de connaître la sensibilité de la fonction objectif par rapport à ces variables, il est classique de différencier l'équation (2.111) :

$$df(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial u} du \quad (2.112)$$

Cette différentielle totale dépend aussi bien de dx que de du . L'objectif va être de réussir à exprimer (2.112), uniquement à partir de du . On utilise pour cela l'information de (2.110), qui est aussi valable pour les accroissements infinitésimaux. On a donc :

$$dx = - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial u} du \quad (2.113)$$

A partir de (2.112) et (2.113), on peut donc exprimer la sensibilité de la fonction objectif par rapport aux variables de contrôle :

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial u} = S_u \quad (2.114)$$

11.2 Optimisation statique par les lois de commande

La partie précédente présente dans les grandes lignes les principaux types de problèmes d'optimisation rencontrés. Nous allons à présent l'appliquer au problème du tramway, en cherchant la manière optimale de commander les convertisseurs alimentant le réseau.

Le scénario correspondra à un déplacement aller d'un véhicule sur la ligne de la figure 2.26.

11.2.1 Formulation du problème d'optimisation

Pour résoudre le problème d'optimisation, il faut en premier lieu être capable de le formuler. Nous allons donc détailler la fonction objectif, les variables d'optimisation, et les contraintes inhérentes au cas du tramway en déplacement.

a) Ecriture de la fonction objectif

L'objectif que nous suivons depuis le début est la recherche d'une solution permettant de maximiser le rendement. Il apparaît donc logique de choisir comme fonction objectif f le rendement défini par (2.94). Maximiser le rendement revient aussi à minimiser les pertes.

Le rendement ou les pertes ?

L'avantage d'utiliser les pertes comme fonction objectif est de garantir l'utilisation d'une fonction convexe et même quadratique, assurant l'existence et l'unicité de la solution optimale. L'utilisation des pertes impose cependant de modéliser le tramway comme une source de puissance constante, au lieu d'une source de courant. En effet, si on utilise une source de courant, les algorithmes d'optimisation vont chercher à annuler la tension aux bornes du tramway pour minimiser les pertes, ce qui est sans grande utilité physique. La modélisation du tramway en tant que source de puissance est possible, mais impose l'écriture d'un système non linéaire à la place de l'équation (2.86), système plus dur à résoudre.

Nous utiliserons donc comme fonction objectif le rendement, calculé en chaque point du réseau. Les considérations physiques (qui imposent des contraintes de non-négativité des tensions par exemple) permettent en plus de garantir le caractère convexe de cette fonction objectif, et donc l'utilisation de conditions de type (2.97) pour la recherche d'un optimum global.

En utilisant des algorithmes bien connus comme *fmincon* de l'*Optimization Toolbox* disponible sur MATLAB® [GW90], il est envisageable de résoudre le problème d'optimisation du rendement pour une position donnée. En effet, la valeur optimale dépend de la position.

Utilisation du rendement énergétique

Cependant, ce qui est intéressant n'est pas le rendement instantané mais plutôt le rendement énergétique sur un cycle de fonctionnement défini (2.95). Ce rendement correspond donc à l'intégrale du rendement sur le cycle de fonctionnement du tramway. Il peut se calculer en discrétisant le déplacement du tramway et en moyennant le rendement. Par contre dans le cas de l'optimisation, on ne peut pas directement affirmer que le rendement énergétique optimal est l'intégrale des rendements optimaux en chaque point.

Ce point est fondamental. En effet, ce n'est pas parce qu'une loi de commande est optimale en chaque point, qu'elle l'est sur un cycle complet. Prenons l'exemple de la gestion optimale d'un moyen de stockage d'énergie finie. Une commande optimale instantanée imposera de diminuer autant que possible le courant échangé sur la LAC pour optimiser le rendement. Vu que le moyen de stockage possède une énergie finie,

si le réservoir est plein, l'énergie excédente doit être échangée via le réseau. Or, les pertes dans l'acheminement de cette énergie dépendront de la position du tramway.

Lorsque celui-ci est proche d'une sous-station, la fourniture d'énergie par le réseau sera peu coûteuse en pertes. S'il accélère et qu'il utilise cette énergie plutôt que celle disponible dans le stockage, le rendement en ce point ne sera pas maximal. Par contre il aura gardé en réserve plus d'énergie qu'il pourra réutiliser, dans une phase d'accélération plus éloignée des sous-stations. Ce qui lui permettra donc de maximiser le rendement moyen, en générant moins de pertes sur cette phase fonctionnement.

Dans le cas général, on a donc le rendement énergétique optimal η_e^* , qui est différent de la valeur moyenne des rendements optimaux η^* , calculés à chaque pas de temps.

$$\eta_e^* \neq \frac{1}{T} \int_0^T \eta^* dt \quad (2.115)$$

Un autre exemple de processus physique posant problème est celui possédant une dynamique. L'utilisation d'un stockage embarqué implique par exemple le respect des régimes de charge et de recharge. Ces dynamiques impliquent des retards, entraînant des différences entre les rendements locaux et énergétique.

Il existe cependant certains cas où la relation (2.115) devient une égalité. *Ainsi, si on néglige toutes les dynamiques, et qu'on ne prend pas en compte de stockage, on peut supposer que l'optimisation du rendement sur un cycle de fonctionnement passe par l'optimisation du rendement en chacun de ses points.*

Dans le cas contraire, il est nécessaire d'utiliser des algorithmes de commande optimale. Ils seront exposés au chapitre suivant, qui traite de la modélisation dynamique du réseau de tramways.

b) Les variables d'optimisation

Pour parvenir à optimiser notre fonction objectif, nous disposons de plusieurs variables de contrôle. Nous étudierons successivement l'influence des tensions redresseurs, des rapports cycliques des hacheurs et enfin de la position des hacheurs.

c) Les contraintes physiques

Pour formuler notre problème d'optimisation, il faut également prendre en compte les contraintes électriques exprimées par l'équation (2.86). Ces contraintes peuvent être intégrées soit en utilisant la méthode de substitution, soit la méthode de Lagrange, plus générale. On retrouvera alors les contraintes suivantes :

- Dans le cas d'un redresseur à thyristors, la tension de sortie à vide peut être réglée entre 0 et E donnée par (2.116) ;
- Le courant dans un redresseur à diodes est positif ;
- Le rapport cyclique d'un hacheur α est compris en 0 et 1 ;
- La tension en tout point du réseau basse tension doit être inférieure à 900V en régime permanent ;
- Le courant maximal admissible dans les hacheurs et les sous-stations est limité. Par exemple, d'après la norme CEI 146-1, une sous-station de classe VI dont le courant nominal est I_{dn} , peut supporter $3 I_{dn}$ pendant 1 min et $1.5 I_{dn}$ pendant 2 h.

Il est enfin possible d'ajouter des contraintes supplémentaires pour étudier d'éventuelles lois de commande. On peut par exemple ajouter une contrainte d'égalité sur la tension de sortie des hacheurs pour étudier une commande en régulation de tension par exemple.

A noter que tous les résultats présentés ici sont liés à notre cadre applicatif et ne doivent pas être généralisés.

11.2.2 Choix de la tension HVDC

Cette section se propose de résoudre la problématique de la gestion du niveau de tension de la partie HVDC. Le choix de ce niveau de tension dépend de considérations énergétiques qui seront étudiées ici. Ce choix dépend aussi de données technico-économiques, comme le calibre en tension des interrupteurs de puissance, ou encore les besoins de filtrage dépendant directement du rapport cyclique, que nous ne pouvons pas encore étudier avec les modèles mis en œuvre.

Les paramètres de réglage du bus HVDC sont ceux des sous-stations redresseurs. On considère d'une part l'angle de commande pour les redresseurs à thyristors $\cos \alpha_r$, et la prise de tension du transformateur a . Cette prise permet de faire varier la tension de sortie de $\pm 5\%$, afin de compenser une différence de tension du réseau alternatif. Nous supposons que la variation du niveau de tension est continue, et non discrete.

La tension à vide E_i du redresseur i s'exprime à partir de (2.48) sous la forme (2.116).

$$E_i = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_i U_i \cos \alpha_{ri} \quad (2.116)$$

U_i est la tension alternative en aval du transformateur i à vide. Cette tension est proportionnelle à la tension en amont du transformateur pouvant varier, nous l'avons vu, dans la gamme de [18.05 kV, 22.05 kV]. En réalité, cette tension est variable dans le temps. Elle dépend entre autres de la consommation des usagers raccordés à proximité du point de livraison, de la tension du poste source, et de la topologie du réseau de distribution. On s'intéresse à la valeur moyenne que prendra cette tension, valeur que l'on peut pondérer, en considérant la distribution temporelle des tramways au cours de la journée. En effet, il y a plus de tramways le matin et en début de soirée qu'au cœur de la nuit.

Si on considère que la tension DC nominale à vide est de 1.5 kV, on obtient une plage de variation de [1.3538 kV, 1.638 kV] pour la tension à vide en sortie de la sous-station.

Il est cependant possible de modifier la valeur de cette tension de deux manières distinctes, et complémentaires. On peut décider de modifier le rapport de transformation, en jouant sur les prises variables, ou sur l'angle de commande.

La variable de décision a_i représente une image continue de la position de la prise variable. Cette valeur est bornée par $a_i \in [0.95, 1.05]$. La tension de sortie dépend aussi de l'angle de retard à l'amorçage. Au lieu des α_r , on travaille directement avec les $\cos \alpha_r \in [0, 1]$, ce qui permet de garder des relations linéaires.

Ces deux grandeurs permettent de modifier la tension à vide des redresseurs,

mais une différence fondamentale existe. En effet, les a_i sont fixes dans le temps⁹, alors que les α_{ri} sont libres d'évoluer comme bon leur semble.

a) Paramètres de l'optimisation

Le but de l'optimisation va être de maximiser le rendement en tout point du réseau. On rappelle qu'avec une charge constante, se déplaçant à vitesse constante, l'architecture avec hacheur non-idéal permet d'obtenir un rendement¹⁰ de $\eta_e = 91.5915\%$. On suppose que les hacheurs sont commandés en boucle ouverte avec un rapport cyclique constant permettant d'avoir une tension à vide de 790 V.

La fonction objectif est donnée par (2.94) avec les contraintes d'égalité (2.86). Les variables de contrôle sont les E_i , que l'on sépara à posteriori en une part fixe a_i et une part variable dans le temps $\cos \alpha_{ri}$.

Les E_i apparaissent directement dans le membre de droite de l'équation (2.86), il est possible de procéder par substitution dans cet exemple. Le rendement sera donc de la forme $\eta(x, E)$.

b) Scénarios d'optimisation

Afin de mettre en avant les avantages issus de la commande, nous allons comparer différents cas de figure. Nous prendrons en cas de référence des sous-stations à pont de diodes, dont la tension à vide est fixe. On supposera un réseau équilibré puis un réseau avec un déséquilibre en tension. Nous introduirons une puis deux sous-stations commandables pour voir les gains que peuvent produire la commande. Enfin, il sera envisagé un scénario où les sous-stations se partagent équitablement le courant. Bien qu'allant à l'encontre d'une démarche optimisant le rendement, cette loi de commande possède l'avantage d'une meilleure standardisation de la production.

c) Comportement moyen des sous-stations

Nous reprenons ici l'étude qui avait été menée lors de la section 9.1, concernant l'évolution du rendement en fonction des tensions des sous-stations. Cette fois-ci, nous considérons le réseau avec hacheurs. Les conditions sont les mêmes que celles exposées précédemment. La tension à vide de la sous-station SS_2 est fixe et égale à $E_2 = 1500V$, et seule la tension E_1 est supposée variable.

La figure 2.39 nous permet alors d'estimer le rendement énergétique de l'installation. La figure de gauche trace les zones de fonctionnement des sous-stations, en fonction de la position du tramway, et de la tension de la sous-station SS_1 . La zone verte correspond au blocage de SS_1 , la zone rouge au blocage de SS_2 , alors que la zone bleu implique que les deux sous-stations ne sont pas bloquées. La figure de droite trace le rendement énergétique, en fonction de la tension E_1 (avec les axes inversés).

Sur la figure de gauche, la surface de la zone bleu (représentant la zone où les deux sous-stations participent à l'alimentation du tramway) dépend du courant tramway, de la résistance du feeder et de la distance entre les sous-stations. Lorsque la tension

9. Il n'y a pas de régleur en charge

10. Les rendements sont donnés avec six chiffres significatifs afin de pouvoir comparer les performances des différentes stratégies de commandes.

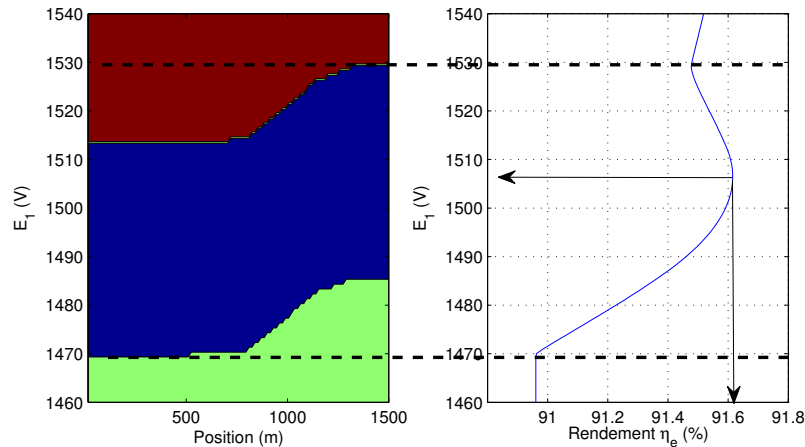


FIGURE 2.39 – Rendement énergétique en fonction de la tension E_1 , pour $E_2 = 1500V$

$E_1 < 1470 V$, la sous-station SS_1 est toujours bloquée. Le rendement énergétique dépend alors uniquement de la tension E_2 qui est constante. Le rendement η_e est donc constant dans cette zone comme le montre la figure de droite. Si la tension $E_1 > 1530 V$, alors, c'est la SS_2 qui devient bloquée. Le rendement η_e varie donc linéairement avec E_1 . Entre ces deux zones de fonctionnement, la courbe de rendement varie en cloche. Elle possède un maximum $\eta_e^* = 91.6152\%$, pour une tension optimale $E_1 = 1506.5 V$.

Dans ce cas de figure, il peut être intéressant d'utiliser la prise variable a_1 pour augmenter la valeur de la tension à vide de la SS_1 , pour gagner quelques points de rendement.

d) Sous-station réversible ou unidirectionnelle

Selon la technologie, les sous-stations peuvent être réversibles en courant, ou bien non réversibles (pont de diodes). La figure 2.40 illustre l'évolution du rendement énergétique en fonction de la tension E_1 pour les deux types de sous-stations.

Dans notre cas, le rendement optimal se situe dans la zone où les deux sous-stations conduisent. Ce rendement est donc le même dans les deux cas, puis des différences commencent à apparaître dès lors que la différence des tensions devient importante. Cette différence est alors fonction du temps où les sous-stations restent bloquées. Dans le cas réversible, la courbe est parabolique. La forme de la courbe du pont de diodes a déjà été expliquée au chapitre précédent.

e) Commande optimale des sous-stations

Le paragraphe précédent nous a démontré qu'il existe une valeur moyenne de la tension E_1 permettant de maximiser le rendement moyen. On peut remarquer cependant que la manière d'obtenir ces résultats passe par la simulation de tous les cas possibles, puis par la recherche "manuelle" du meilleur cas possible. La tension E_2 étant fixée, il ne reste plus qu'une variable de décision, rendant cette approche possible. Par contre, le nombre de cas augmente avec le nombre de variables mises

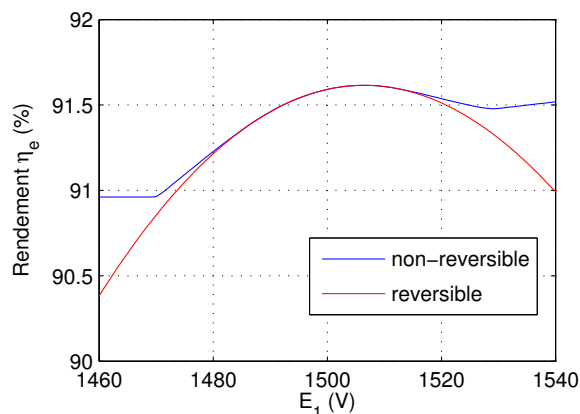


FIGURE 2.40 – Comparaison du rendement énergétique entre sous-station réversible et sous-station non-réversible en fonction de la tension E_1

en jeu, et d'autres méthodes de calcul doivent être utilisées. De plus cette approche se base sur un comportement moyen, or il apparaît que la valeur optimale dépend du point de fonctionnement. En utilisant l'angle de commande des sous-stations, il est alors possible de faire varier en temps réel la tension.

La figure 2.41 nous montre le résultat obtenu en utilisant les algorithmes d'optimisation. On suppose encore une fois que la tension E_2 est fixée à 1500 V, et que les sous-stations sont réversibles.

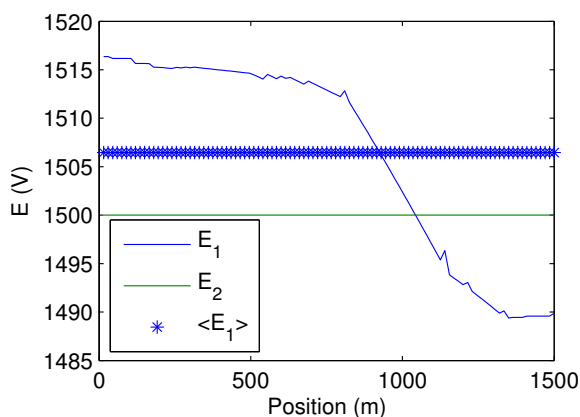


FIGURE 2.41 – Tension optimale des redresseurs

En bleu, on retrouve la tension E_1^* permettant de maximiser le rendement η en chaque point de fonctionnement. En gras, on retrouve la valeur moyenne, $\bar{E}_1 = 1506.5$ V, qui correspond à la même que celle trouvée sur la figure 2.39, qui optimise le rendement moyen.

En faisant varier la tension autour de cette valeur moyenne, il est possible d'augmenter le rendement, qui atteint $\eta_e^* = 91.6754\%$. Ainsi, en utilisant une tension variable, on obtient un rendement énergétique supérieur à celui calculé avec la tension moyenne optimale. Le rapport de la prise variable sera pris de manière à avoir 1516.4 V.

Avec ce jeu de paramètres, aucune contrainte d'inégalité n'est violée. La valeur optimale n'est donc pas contrainte par une limite physique. En regardant les courants des sous-stations figure 2.42b, on remarque que le courant dans la SS_2 devient négatif lorsque le tramway est situé en début de ligne. La SS_1 va en effet essayer d'augmenter autant que possible la tension pour minimiser les pertes, en alimentant les hacheurs en début de ligne. Il s'avère dans cet exemple qu'il est plus avantageux d'avoir un courant de circulation entre SS_1 et SS_2 .

Cette configuration est possible dans le cas d'une sous-station réversible. Dans le cas contraire, le courant ne peut être négatif dans la sous-station. Il suffit de rajouter une contrainte supplémentaire de non négativité du courant I_{ss} dans la définition du problème d'optimisation. Les résultats de cette nouvelle optimisation sont rapportés figure 2.42.

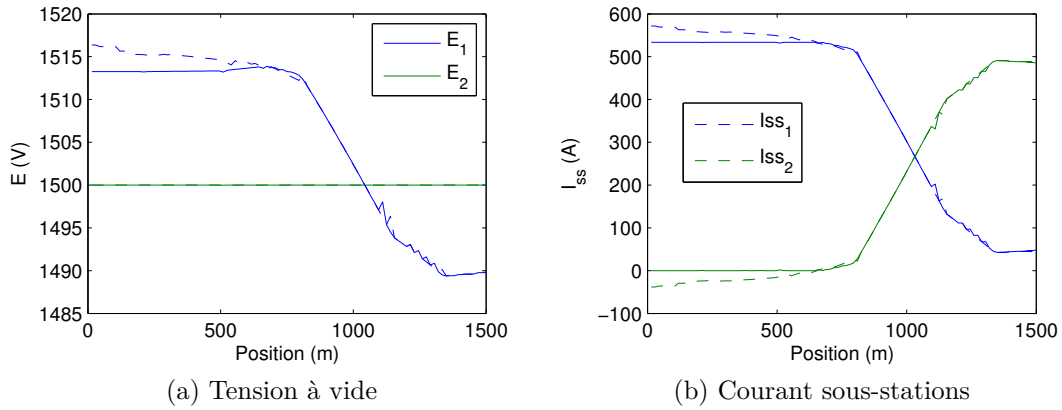


FIGURE 2.42 – Comparaison des grandeurs électriques avec la sous-station SS_2 non-réversible (trait plein) ou réversible (trait-pointillé)

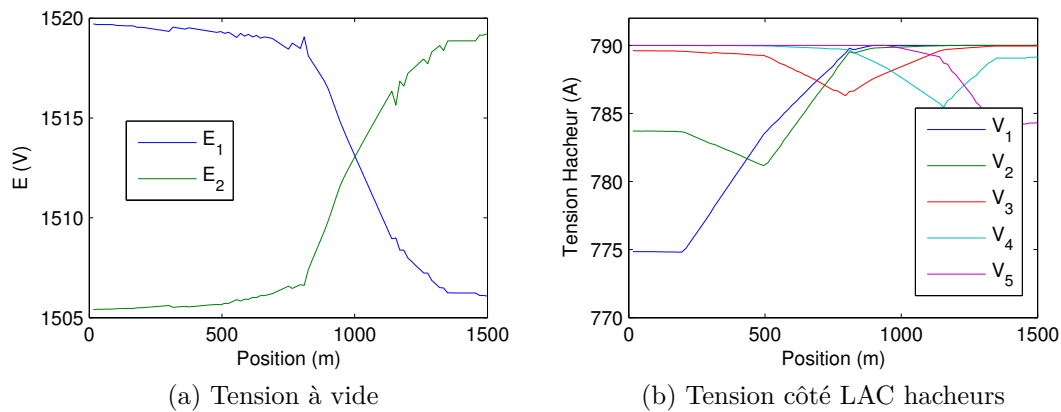
On observe bien que le courant dans le cas de la sous-station non réversible est cette fois strictement positif. La contrainte d'inégalité devient alors une contrainte d'égalité, qui va modifier la solution optimale figure 2.42a.

Dans le cas des sous-stations non réversibles, la tension moyenne passe à $\bar{E}_1 = 1505.7V$, ce qui conduit à un rendement $\eta_e^* = 91.6745\%$. Ce rendement est moins bon que celui atteint précédemment, car la prise en compte de la contrainte va entâcher les performances.

f) Commande optimale des deux sous-stations

Jusqu'à présent, nous avons fixé la tension E_2 de la sous-station SS_2 , en cherchant la tension E_1 permettant d'optimiser le rendement. Le choix de E_2 est aléatoire, et il est intéressant de rechercher le couple de tension E^* optimal. Cela revient donc à relâcher la contrainte d'égalité sur E_2 .

Plus la tension moyenne du réseau HVDC est élevée et plus le rendement le sera aussi (sous réserve de bien gérer la différence de tension entre SS_1 et SS_2). Sans contraintes, l'algorithme d'optimisation va avoir tendance à imposer des tensions très élevées. Si on prend en compte les contraintes physiques, les résultats de la commande sont présentés figure 2.43a.


 FIGURE 2.43 – Commande optimale des sous-stations sans contrainte sur E_2

Le profil de tension est différent de celui présenté figure 2.42a, car cette fois, la tension E_2 évolue librement. La tension reste cependant bornée. Cela s'explique en regardant la figure 2.43b, qui nous montre la tension côté LAC des hacheurs. On observe, que cette tension ne dépasse jamais 790 V. En effet, en tenant compte de la contrainte sur la tension de la LAC, on contraint la tension des sous-stations (on rappelle que les hacheurs travaillent à rapport cyclique constant). Cette fois ci, le rendement atteint $\eta_e^* = 91.7122\%$.

g) Influence de la contrainte en tension sur le rendement

Les contraintes en tension de la LAC sont donc des contraintes actives qui limitent directement le rendement. Il peut être intéressant de savoir dans quelle mesure le relâchement de ces contraintes permet d'augmenter le rendement. C'est précisément le rôle rendu par les multiplicateurs de Lagrange.

La figure 2.44 représente les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes en tension des hacheurs.

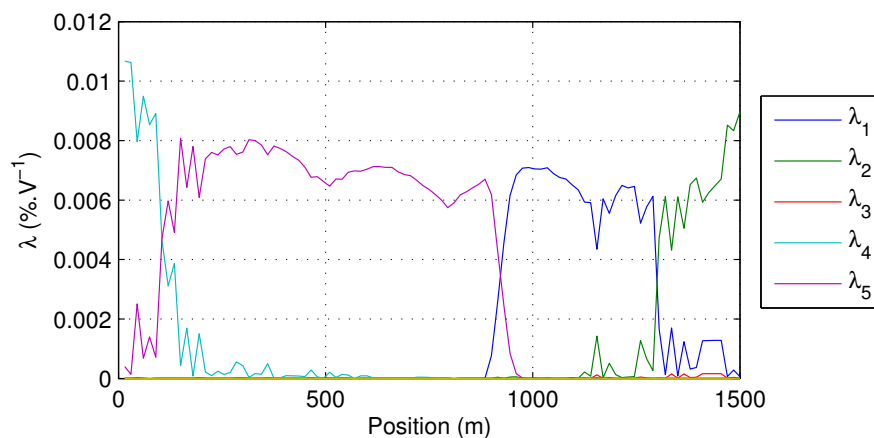


FIGURE 2.44 – Coefficients de Lagrange de la contrainte en tension HVDC des hacheurs

On rappelle avant toute chose la condition de complémentarité sur les multiplicateurs de Lagrange (2.109e), qui impose que si une contrainte d'inégalité n'est pas active, alors le multiplicateur de Lagrange qui lui est associé est nul. A partir de la figure 2.44, on peut donc conclure que la tension V_{h3} n'atteint jamais la limite en tension, ce qui est confirmé sur la figure 2.43b.

Lorsque le tramway est situé en début de ligne, la sous-station SS_1 va chercher à augmenter au maximum sa tension. Le hacheur H_4 qui est situé à proximité et qui ne bénéficie pas de la chute de tension créé par le courant de traction sera celui qui aura la tension la plus élevée. Il sera donc l'élément limitant, comme le montre la figure 2.44 pour $x \in [0, 100]$ où il n'y a que λ_4 qui ne soit pas nul. On peut également remarquer que si on augmente la tension limite de $1V$, en la faisant passer à $791 V$, le rendement augmentera de 0.009% en moyenne sur cette zone.

Globalement, ce graphique montre quelles sont les sous-stations qui contraignent la solution optimale et quel gain peut être obtenu en relâchant les contraintes. Les coefficients étant tous positifs, on peut affirmer que remonter la tension de la LAC ne peut qu'augmenter le rendement. Par contre, ces coefficients sont calculés en un point de fonctionnement donné. Si on rehausse la contrainte d'une sous-station, cette contrainte va se reporter sur une autre sous-station, et les multiplicateurs seront différents comme l'illustre la figure 2.45.

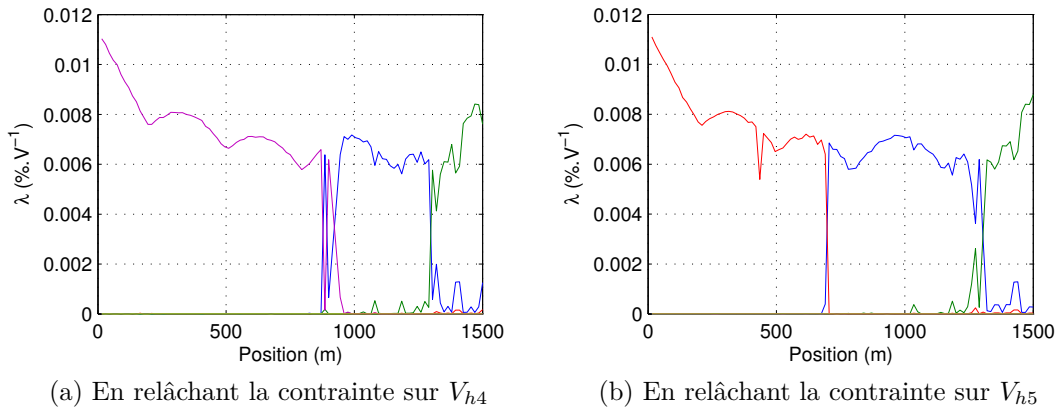


FIGURE 2.45 – Evolution des coefficients de Lagrange, en fonction des contraintes

La figure 2.45a nous montre les coefficients de Lagrange lorsque l'on passe la contrainte de tension sur V_{h4} de $790 V$ à $800 V$. Dans ce cas, c'est le hacheur H_5 qui deviendra limitante, jusqu'à ce que le tramway dépasse H_3 . Si on réhausse cette fois, en plus de la tension V_{h4} , la tension V_{h5} , alors H_3 devient la sous-station limitant comme le montre la figure 2.45b.

La figure 2.46 nous montre la variation du rendement énergétique en fonction de la tension maximale admissible sur le réseau.

Encore une fois, plus la tension est élevée et plus le rendement est bon.

h) Conclusion sur les perspectives offertes par la commande des sous-stations

Cette première partie sur l'optimisation par la commande nous a montré le gain offert par une gestion des sous-stations. Ces gains seront d'autant plus marqués que

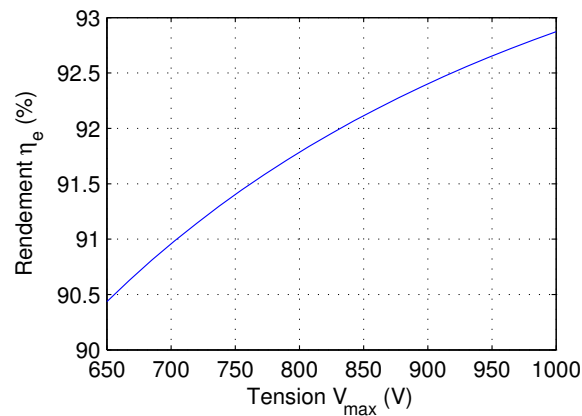


FIGURE 2.46 – Variation du rendement η_e en fonction de la tension V_{max} autorisée sur le réseau

les déséquilibres en tension seront forts. Nous avons vu que la contrainte en tension sur la LAC était l'élément limitant sur le rendement, et que durant les phases de traction, il était intéressant de travailler avec la tension la plus élevée possible.

11.2.3 Commande optimale des hacheurs

Au chapitre précédent, nous avons étudié le bénéfice que l'on pouvait tirer en utilisant des sous-stations commandables. Nous allons à présent appliquer cette méthodologie aux hacheurs, qui sont eux aussi commandables. On suppose que les sous-stations, cette fois, sont en boucle ouverte, avec une tension à vide de 1500V.

a) Écriture du problème d'optimisation

Encore une fois, nous allons chercher à maximiser le rendement (2.94), avec les contraintes d'égalités (2.86). Le vecteur des inconnues sera toujours composé des courants et tensions comme dans (2.86), en intégrant également des rapports cycliques α des hacheurs. Cependant, contrairement au chapitre précédent, les contraintes d'égalités ne sont plus affines. La question de l'unicité du minimum doit alors se poser.

Dans le problème précédent, les inconnues supplémentaires étaient les tensions des sous-stations, qui faisaient partie du membre de droite de l'équation (2.86). Cette fois-ci, les inconnues sont dans le membre de gauche. Le calcul de la jacobienne nécessaire pour la résolution reste cependant immédiat.

b) Du problème de commande au problème d'optimisation

L'avantage de la formulation via un problème d'optimisation est qu'en modifiant les contraintes, on peut modifier les lois de commande. Si par exemple, on souhaite étudier le rendement de l'installation, en supposant que les hacheurs sont régulés en tension, il suffit de rajouter une contrainte d'égalité sur ces tensions.

c) Lois de commande des hacheurs

En ce qui concerne les hacheurs, on peut envisager différentes lois de commande. La première est la commande en boucle ouverte, qui consiste à fixer le rapport cyclique des hacheurs. Le rapport cyclique s'exprime sous la forme de la tension à vide V_0 . La deuxième stratégie consiste à réguler la tension de sortie des hacheurs. La troisième loi, appelée commande optimale, consiste à maximiser le rendement, tout en respectant les contraintes de tension sur le réseau. Cette dernière approche utilise une commande en courant afin de répartir équitablement les flux entre hacheurs.

Dans la suite, on suppose que la consigne est la même pour chaque hacheur, pour les commandes en boucle ouverte et en régulation de tension. La figure 2.47 nous montre les résultats de simulation en fonction du type de commande utilisé : boucle ouverte (V_0), en régulation ($= V_{max}$, ou avec la commande optimale ($< V_{max}$).

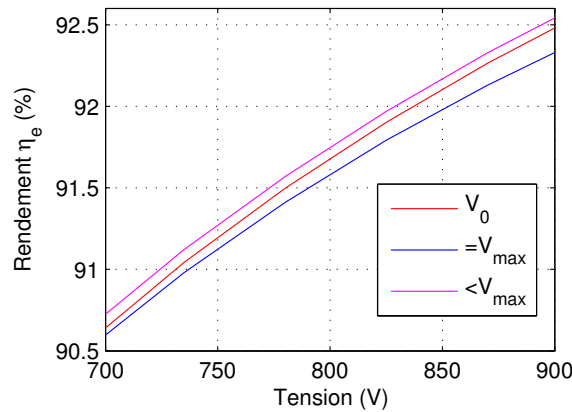


FIGURE 2.47 – Variation du rendement η_e en fonction de la loi de commande

En abscisse, on retrouve la consigne en tension des hacheurs. Il s'agit de la tension à vide pour la commande en boucle ouverte (rouge), de la tension à réguler pour chaque hacheur (bleu), et de la tension à ne pas dépasser (magenta). Globalement, on retrouve que plus cette tension est élevée, plus le rendement est bon, ce qui s'explique naturellement par une meilleure tension sur le bus du tramway.

La deuxième remarque intéressante au vu de ces courbes est que quelle que soit la tension de référence, la commande optimale à maximum de tension est toujours la meilleure, suivie de celle en boucle ouverte pour finir par celle à tension constante.

Pour une tension de 790 V, on obtient ainsi les rendements énergétiques suivants :

Boucle ouverte	Régulation de tension	Maximum de tension
91,5915%	91,5002%	91.663%

TABLE 2.7 – Comparaison des lois de commande

Afin de comprendre pourquoi la régulation de tension donne de piètres performances intéressons-nous aux grandeurs électriques liées aux hacheurs (figures 2.48). En trait plein, on retrouve la commande optimale, en pointillé celle en boucle ouverte, alors que les étoiles correspondent à la régulation de tension. Ces courbes

sont tracées pour une tension de référence de 790 V. Les couleurs représentent les différents hacheurs et sont les mêmes que précédemment.

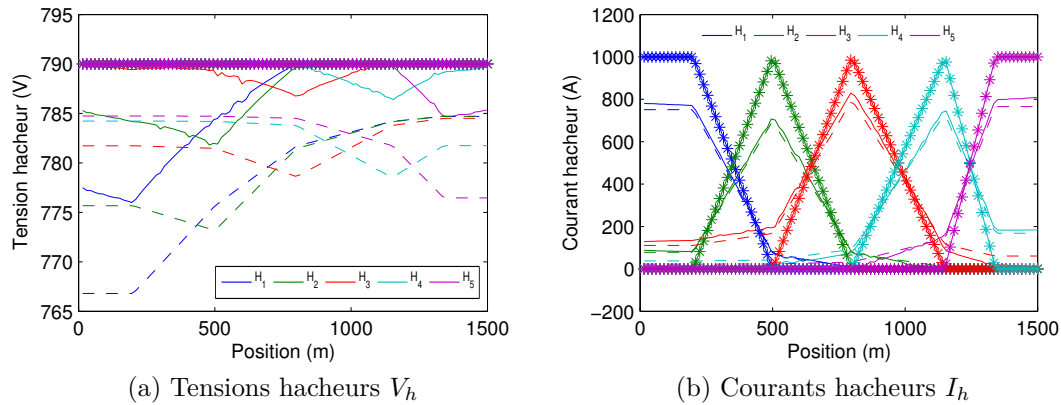


FIGURE 2.48 – Grandeurs électriques caractéristiques en selon la loi de commande, pour une tension de référence de 790 V

La régulation en tension (étoiles) est efficace et on constate sur la figure 2.48a que toutes les sous-stations sont régulées à 790 V. Il en résulte que le courant tracé figure 2.48b se répartit uniquement entre les hacheurs les plus proches du tramway. Il y a toujours au plus deux hacheurs qui fournissent la puissance. La commande optimale, elle, agit d'une manière assez proche de la commande en boucle ouverte. En effet, les répartitions de courant sont équivalentes, et les tensions suivent une évolution proche. La commande optimale permet ainsi de gagner un peu de rendement, en élevant la tension au maximum autorisé.

Afin d'expliquer l'évolution du rendement de la figure 2.47, il faut s'intéresser à la répartition des pertes représentée figure 2.49a. Sont tracées les pertes dans la LAC (bleu), dans les feeders (rouge) et dans les hacheurs (vert) pour les différentes commandes en fonction de la position du tramway. Les pertes dans le filtre du tramway ne sont pas représentées.

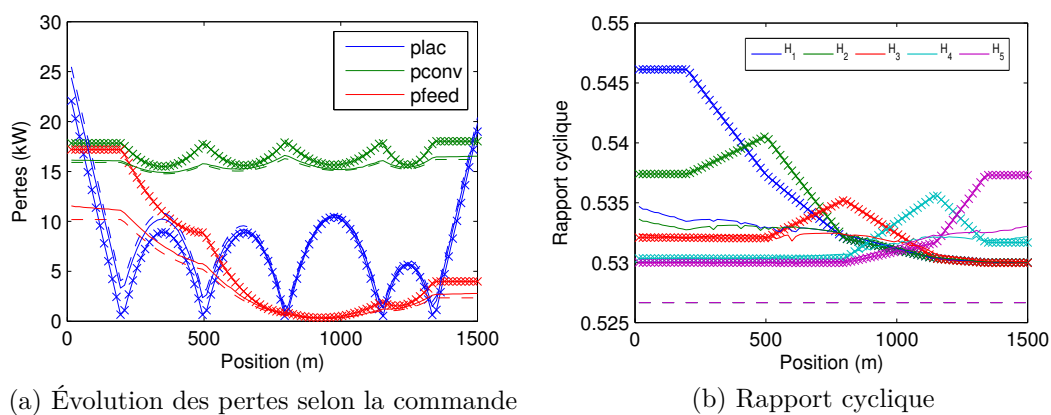


FIGURE 2.49 – Evolution des pertes et du rapport cyclique selon les lois de commande

Les pertes dans les hacheurs varient (en partie) avec le carré du courant. La commande en régulation de tension, répartissant le courant à travers seulement

deux hacheurs (figure 2.48b), aura donc tendance à entraîner plus de pertes dans les convertisseurs. Ces pertes varient cependant peu avec la position du tramway. La régulation de tension permet par contre de réduire les pertes dans la LAC en travaillant avec une tension plus élevée, mais la différence de tension n'est pas suffisante (figure 2.48a) pour que la différence sur le rendement soit flagrante. Ces pertes sont par ailleurs limitées grâce aux hacheurs qui sont proches du tramway.

Pour finir, les pertes dans les feeders mettent en avant les défauts de la commande à tension constante. Non seulement le courant capté sur la LAC est plus grand, mais le rapport cyclique aussi (figure 2.49b) ce qui implique des courants bien plus élevés sur les feeders. Les portions de feeders étant relativement plus longues que les portions de LAC, les pertes dans les feeders deviendront conséquentes.

d) Définition de références différentes pour chaque hacheur ?

Les références de tension peuvent aussi être choisies constantes, mais différentes suivant le hacheur considéré. Dans ce cas, il est impossible avec la méthode proposée de choisir les bonnes références. Les contraintes vont en effet poser problème. Si on effectue une optimisation en choisissant de respecter les contraintes en tension, on obtient un rapport cyclique variant dans le temps (2.49b). Si on décide de prendre la valeur moyenne de ce rapport cyclique, on ne peut plus assurer le respect de ces contraintes. En réalité, pour choisir le rapport cyclique optimal, il faut intégrer dans le problème d'optimisation des contraintes supplémentaires pour spécifier que le rapport cyclique ou la tension de référence doivent être constants. Cela n'est pas possible avec les méthodes d'optimisation statique, mais il est envisageable de l'intégrer en formulant un problème d'optimisation dynamique comme nous le verrons prochainement.

e) Commande en courant des hacheurs

Une solution qui peut également être envisagée pour la gestion de hacheurs est la commande en courant. En effet, si on regarde la répartition moyenne des courants dans les hacheurs, on observe que certains sont plus chargés que d'autres (table 2.8).

	I_{h1}	I_{h2}	I_{h3}	I_{h4}	I_{h5}
Boucle ouverte	18.74%	17.57%	26.25%	19.81%	17.62%
Régulation tension	22.86%	19.96%	21.67%	18.03%	14.47%
Commande optimale	19.20%	17.94%	27.13%	19.03%	16.70%

TABLE 2.8 – Répartition moyenne des courants entre les hacheurs (en % du courant nominal)

Le hacheur H_3 par exemple est le plus chargé en boucle ouverte et on observe que la commande optimale tend à le charger encore plus car il est le plus proche d'une sous-station, ce qui minimise les pertes dans les feeders.

On peut décider d'aller à l'encontre de cette logique, et répartir équitablement la charge entre les différents hacheurs afin de standardiser leur dimensionnement. Ce mode de commande impose de fait l'obligation d'une communication entre les sous-stations pour répartir le courant de traction à chaque pas de temps. Les tensions de sortie des hacheurs sont tracées sur la figure 2.50.

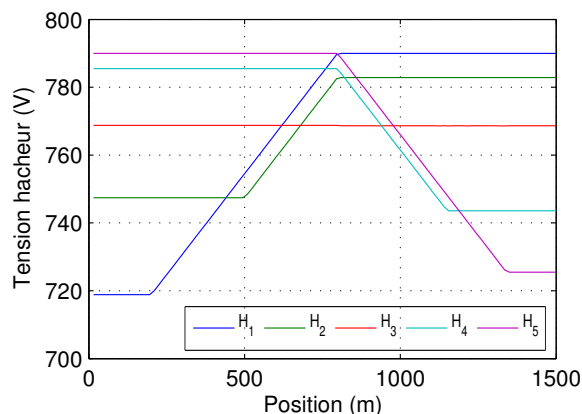


FIGURE 2.50 – Tension hacheur pour une régulation en courant

Encore une fois, on s'assure que la tension du réseau LAC ne dépasse pas 790 V. On observe que pour garantir le partage équitable du courant, les hacheurs les plus proches de la charge sont obligés de baisser leur potentiel pendant que les plus éloignés sont en butée haute de tension. Il en résulte que le rendement sera forcément plus faible que dans le cas précédent. On trouve ainsi $\eta_e = 89.0704\%$.

f) Optimisation multicritères pour la commande en courant

Minimiser les pertes ne semble pas être compatible avec une répartition équitable du courant. L'objectif d'une optimisation multicritères est d'essayer de concilier ces deux objectifs à priori incompatibles. Pour quantifier la dispersion du courant dans les hacheurs, on utilise l'écart-type σ calculé par l'équation (2.117) que l'on normalise par le courant tramway I_t .

$$\sigma = \frac{1}{I_t} \sqrt{\frac{1}{N_h} \sum_{k=1}^{N_h} \left(I_{hk} - \frac{\sum_{j=1}^{N_h} I_{hj}}{N_h} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N_h} \sum_{k=1}^{N_h} \left(\frac{I_{hk}}{I_t} - \frac{1}{N_h} \right)^2} \quad (2.117)$$

où N_h représente le nombre de hacheurs et I_{hk} le courant moyen du k -ième hacheur. Le nouvel objectif de l'optimisation multicritères sera donné par l'équation (2.118) :

$$f_{obj} = \kappa\eta + (1 - \kappa)\sigma \quad (2.118)$$

où $\kappa \in [0, 1]$ est un poids, qui permet d'affecter plus ou moins d'importance à un des critères. En faisant varier κ , on obtient une courbe paramétrée (figure 2.51) appelée front de Pareto, permettant de choisir un compromis entre les objectifs.

On retrouve bien qu'assurer une répartition équivalente du courant dans les sous-stations va à l'encontre du rendement. On peut cependant décider de faire un compromis, en sacrifiant un peu de rendement, pour diminuer les différences de répartition.

Ce critère d'optimisation est cependant peu réaliste et sert surtout d'illustration.

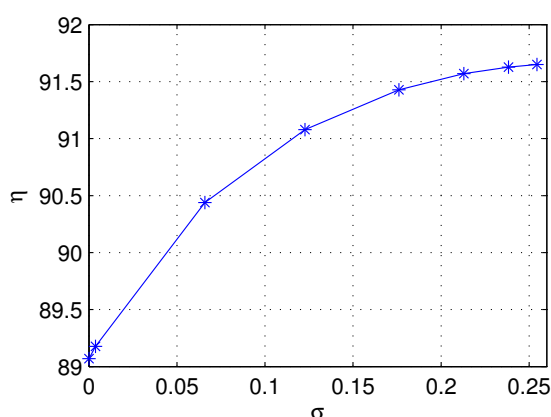


FIGURE 2.51 – Front de Pareto entre le rendement et la répartition du courant

g) Intérêt de la commande des hacheurs ?

Alors que l'utilisation de la nouvelle structure permet un gain réel sur le rendement, il faut bien avouer que la commande des hacheurs semble bien peu pertinente. La complexité des algorithmes de commande à mettre en œuvre ne sont pas à la hauteur des gains énergétiques. La seule variation sensible du rendement a lieu lorsque l'on partage la puissance entre les hacheurs, mais hélas cette variation se fait vers le bas.

Il y a cependant un détail qui permet de nuancer cette conclusion bien décevante. Les calculs ont été effectués en supposant que le courant du tramway était constant. Non seulement, il varie en fonction du temps et de la position du tramway, mais il dépend aussi de la tension du bus comme le résume la figure 2.38.

La commande des hacheurs permet un meilleur maintien du plan de tension. Il en résulte que le courant consommé par les tramways sera plus faible, ce qui a vraiment une influence sur le rendement. Cette étude reste une perspective, mais laisse espérer que l'intérêt de la commande ne se résume pas à gagner un demi point sur le troisième chiffre significatif.

11.2.4 Commande optimale des sous-stations et des hacheurs

a) Résultats de l'optimisation

La contrainte en tension sur la LAC s'avère être décisive dans la résolution du problème d'optimisation. Or il existe deux moyens de réglage qui sont les tensions des redresseurs et les rapports cycliques des hacheurs. Nous allons à présent chercher quelle est la solution optimale permettant d'optimiser le rendement de l'installation en utilisant tous les contrôles disponibles.

La figure 2.52a représente la tension des sous-stations à vide et la figure 2.52b représente la valeur des rapports cycliques qui, combinés ensemble, permettent d'obtenir un rendement énergétique optimal.

Cette répartition est particulière et difficile à expliquer aux premiers abords. Les tensions à vide varient de sorte que la tension en charge soit la même dans les deux sous-stations, ce qui évite l'apparition d'un courant de circulation, et garantit que

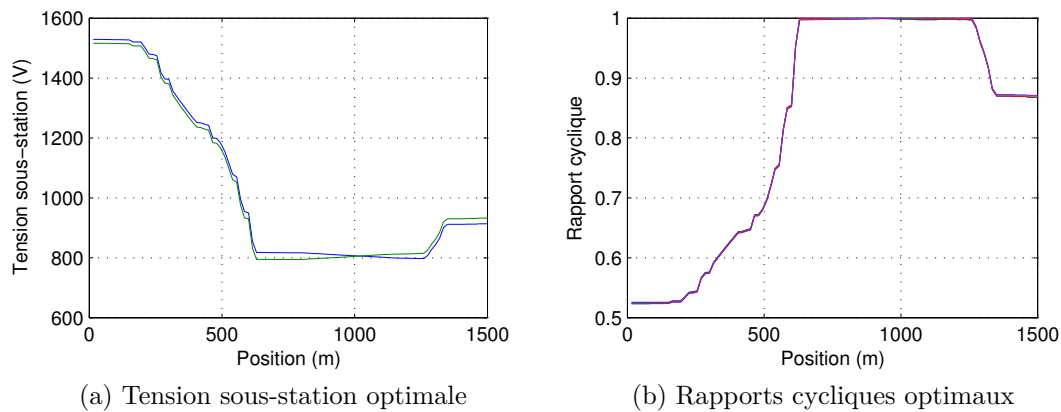


FIGURE 2.52 – Commande optimale des sous-stations et des hacheurs

la sous-station la plus proche capte le maximum de courant. Les rapports cycliques sont eux aussi très proches et varient de manière microscopiques comme sur la figure 2.49b, afin d’assurer qu’en chaque instant, au moins un point de la LAC atteigne la tension maximale autorisée.

Cependant, on observe avant tout, qu’il existe une zone où la tension sous-station optimale baisse fortement, impliquant une montée du rapport cyclique jusqu’à sa valeur de butée haute. Cette loi de commande se vérifie quelle que soit la valeur initiale (en effet, les algorithmes d’optimisation peuvent être sensibles à la valeur de départ) et conduit à un rendement énergétique $\eta_e = 92.1784\%$.

Comment expliquer cette variation étonnante? La réponse passe par l’étude des pertes, qui sont représentées figure 2.53. Sont tracées ici uniquement les pertes dans le convertisseur. On retrouve les pertes par conduction (bleu), par commutation (vert) et les pertes constantes (rouge). En pointillés est tracé le cas de référence correspondant à la boucle ouverte, dont la somme a déjà été tracée figure 2.49a, alors qu’en trait plein, on retrouve les pertes correspondant à la gestion optimale.

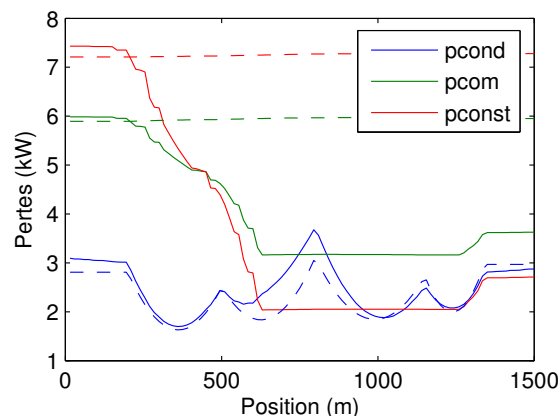


FIGURE 2.53 – Pertes dans les convertisseurs

Les pertes dans les feeders et dans la LAC ne sont pas représentées par souci de clarté, elle suivent des formes sensiblement identiques à celle tracées à la figure

2.49a. On trouve encore une fois des pertes plus faibles dans la LAC, mais plus élevées dans les feeders pour la commande optimale. Par contre, l'étude des pertes figure 2.53 nous permet de comprendre pourquoi l'optimisation tend à faire baisser la tension du réseau HVDC.

En effet, en baissant la tension, les pertes par commutation vont diminuer car elles sont proportionnelles à la tension d'entrée. De plus, le courant étant plus important, les pertes par conduction vont augmenter dans une moindre mesure. Par contre, les pertes sensées être constantes vont, elles, s'écrouler. En effet, elles sont modélisées par une résistance en parallèle du bus haute tension. Ce dernier, étant normalement peu variable en fonctionnement normal, voit ici de grandes variations. Les pertes constantes étant proportionnelles au carré de la tension du bus, l'algorithme va utiliser cette caractéristique pour faire chuter la tension. Cela ne révèle hélas pas un fonctionnement normal, et une telle solution ne doit donc pas être envisagée.

En supprimant ces pertes constantes, la commande va en effet imposer une tension bien plus élevée (presque 2500 V en début de ligne). Mais encore une fois, le rapport cyclique va se mettre en butée haute pour $x \in [705 \text{ m}, 1050 \text{ m}]$. Cette zone est plus restreinte que dans le cas 2.52b, car cette fois, seules les pertes par commutation diminuent, lorsque la tension du bus diminue. Cette zone correspond à la zone proche du hacheur H_3 . La sous-station SS_1 étant à proximité immédiate de H_3 , les pertes dans les feeders (qui augmentent lorsque la tension du bus diminue), sont presque nulles. Elles ne vont donc pas contrebalancer les pertes par commutation.

b) Analyse de la sensibilité du rendement par rapport aux lois de contrôle

La sensibilité d'une fonction associée à des contraintes d'égalités peut être calculée grâce à l'équation (2.114). Cette expression peut donc s'appliquer au rendement calculé en chaque point. Or, il est plus intéressant de travailler sur le rendement énergétique, défini par (2.95) comme l'intégration du rendement en chaque point. D'après la règle de Leibniz de dérivation sous le signe d'intégration appliquée au cas de l'intégrale paramétrique (2.95), on en déduit :

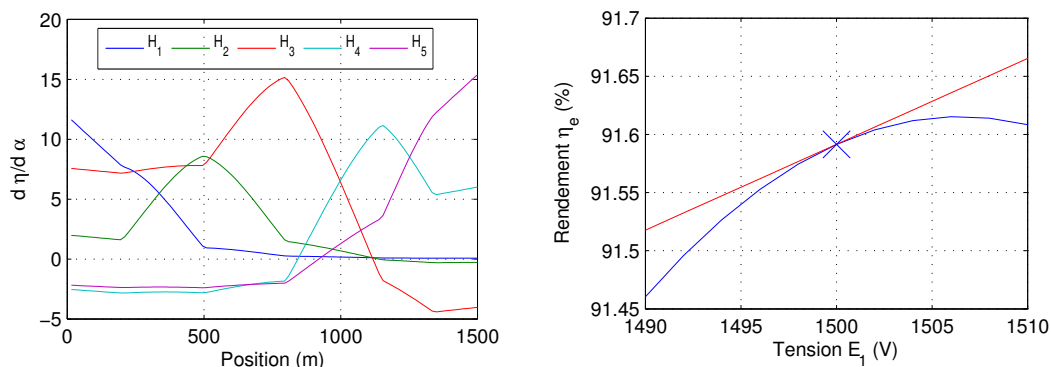
$$\frac{d\eta_e}{du} = \frac{d}{du} \int_0^T \eta dt = \int_0^T \frac{d\eta}{du} dt \quad (2.119)$$

En d'autres termes, la sensibilité du rendement énergétique n'est rien d'autre que la valeur moyenne de la sensibilité du rendement.

La figure 2.54a illustre le calcul de la sensibilité du rendement par rapport au rapport cyclique de chaque sous-station. La figure 2.54b nous montre l'évolution du rendement énergétique en fonction de la tension E_1 (en bleu). La courbe en rouge illustre le calcul de la sensibilité, qui correspond à la tangente calculée en $E_1 = 1500V$.

Le signe et l'amplitude de cette valeur permettent de connaître le sens de variation, et les grandeurs les plus influentes pour maximiser le rendement. Lorsque cette valeur est négative, cela signifie qu'en diminuant le rapport cyclique, on augmente le rendement.

Comme nous l'avons déjà souligné, on remarque qu'il est plus intéressant de travailler avec de grands α_1 , α_2 et α_3 en début de ligne par exemple.



(a) Sensibilité du rendement par rapport au rapport cyclique en fonction de la position (b) Sensibilité du rendement énergétique par rapport à la tension de la sous-station SS_1

FIGURE 2.54 – Exemple d'analyse de sensibilité

Cette sensibilité a été calculée pour le jeu de valeurs initiales ($E = 1500V$ et $\alpha = 0.5267$).

	E_1	E_2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
$d\eta_e/du$	0.0063	-0.0023	2.437	2.565	5.333	1.9137	1.7988

TABLE 2.9 – Sensibilité du rendement énergétique par rapport aux paramètres de contrôle

Cela confirme les résultats précédents, qui montrent qu'il faut augmenter E_1 et diminuer E_2 , tout en augmentant les rapports cycliques. Ces valeurs ne sont valables que pour $E = 1500V$ et $\alpha = 0.5267$.

11.3 Emplacement optimal des hacheurs

Nous avons exploité les possibilités qu'offrait la commande dans la maximisation du rendement énergétique. Nous allons maintenant étudier l'influence de la position des hacheurs sur le rendement.

De manière intuitive, il paraît assez clair que le positionnement des hacheurs est directement lié à la consommation du tramway. En effet, il semble que les hacheurs doivent être implantés près des lieux de forte consommation (sous-station voyageur, montée, sortie de virage, ...). Si le réseau HVDC est idéal et la consommation du tramway constante, le rendement énergétique optimal est obtenu lorsque les hacheurs sont équidistants. On peut également pondérer cette moyenne dans le cas d'une répartition plus réaliste du courant.

La résolution de ce problème du point de vue optimisation est cependant plus complexe. En effet, la position des sous-stations apparaît dans les contraintes via (2.86). Les matrices de conductances s'expriment en fonction des positions grâce à (2.70). Elles apparaissent sous une forme *non-linéaire*. Il en résulte que le problème d'optimisation n'est plus convexe. On ne peut donc pas exclure la présence de maximum locaux sur la fonction objectif.

La figure 2.55 nous montre le potentiel d'augmentation du rendement en jouant sur la position du hacheur. En partant de la configuration initiale, ces courbes tracent

l'évolution du rendement énergétique en fonction de la position du hacheur H_2 , pour différentes positions du hacheur H_1 . Les positions des hacheurs H_3 , H_4 et H_5 sont invariantes.

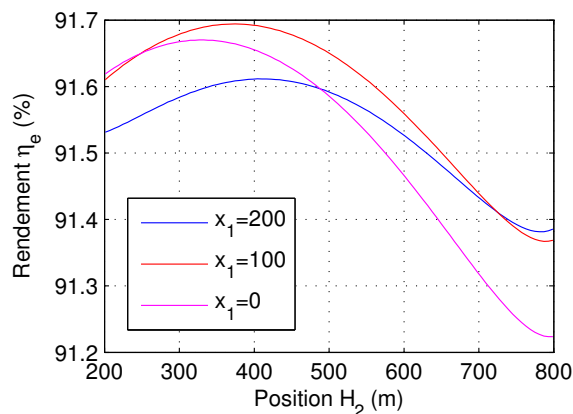


FIGURE 2.55 – Influence de la position des hacheurs H_1 et H_2 sur le rendement énergétique

Ces courbes sont relativement lisses et laissent présager que la présence d'optimum locaux ne sera pas problématique. La position optimale d'un hacheur est ainsi fortement dépendante de l'emplacement des autres (surtout si on suppose le courant du tramway constant).

Les hacheurs ayant une position fixe (n'évoluant pas dans le temps), deux approches de résolution sont possibles. On peut chercher la position optimale des hacheurs pour chaque position du tramway puis moyenner après, ou directement étudier le problème complet en considérant la position fixe dès le début de l'optimisation.

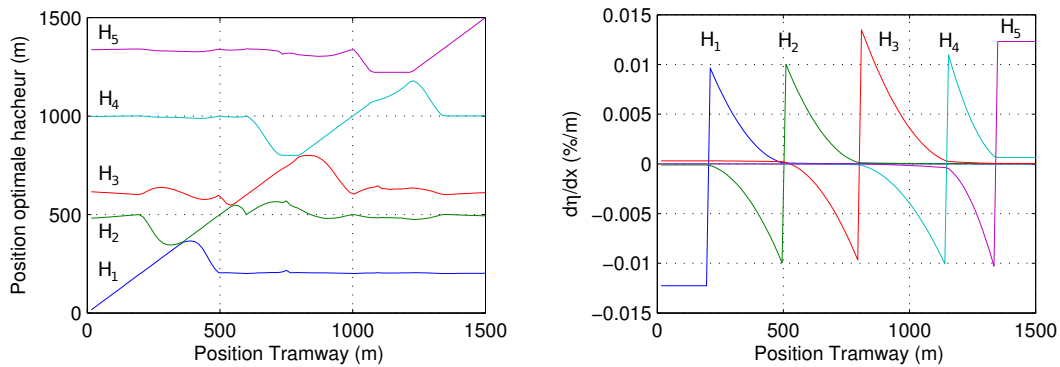
11.3.1 Approche classique avec moyennisation de la position sur un cycle

Comme dans le cas précédent où l'optimisation se fait par la commande, la recherche du rendement maximum sur un cycle de fonctionnement, consistera à optimiser le rendement en chaque position du tramway, puis de procéder à la moyenne pour trouver l'emplacement idéal.

Dans le cas de l'optimisation par le placement des hacheurs, la fonction objectif reste la même, à savoir le rendement. Les hacheurs sont laissés en boucle ouverte, et les contraintes de tension ne sont pas prises en compte. Cela permet de calculer les variables électriques directement en effectuant uniquement une inversion de matrice, sans avoir à utiliser une routine d'optimisation. Les variables d'optimisation sont uniquement les positions des hacheurs notées x_i . Les contraintes d'inégalités (2.120) sur la position sont à prendre en compte :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{fin} \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

x_{fin} représente la longueur de la ligne, égale à 1453 m. La solution du problème est tracée figure 2.56a. On y retrouve la position optimale d'un hacheur pour une position du tramway donnée. Le code couleur est encore une fois le même (attention, pour cette simulation, la position initiale de H_3 est $x_3 = 600$ m).



(a) Position optimale des hacheur en fonction de la position du tramway (b) Sensibilité du rendement par rapport à la position des hacheurs

FIGURE 2.56 – Recherche de l'emplacement optimal des hacheurs

La première chose qui apparaît lorsque l'on regarde les résultats est que l'algorithme tend toujours à superposer un hacheur "au dessus" du tramway pour maximiser le rendement, puis à partir d'un certain point, un nouveau hacheur prend la relève. Ces positions, et la longueur de la ligne où chaque hacheur joue un rôle clé, sont liées aux caractéristiques de la ligne. On remarque que, en-dehors de ces intervalles, la position optimale évolue vers des valeurs constantes qui ne sont rien d'autre que les valeurs initiales. Cela s'explique en regardant les courbes voisines.

La figure 2.56b représente la sensibilité du rendement pour chaque hacheur en fonction de la position du tramway. Pour expliquer ces courbes, prenons l'exemple de la courbe bleu qui représente la sensibilité du rendement par rapport au hacheur H_1 . La figure 2.48b nous montre que, lorsque le tramway est situé à gauche de H_1 , 80% du courant est fourni par H_1 et que cette quantité ne dépend pas de la position du tramway. Les pertes sont donc directement proportionnelles à la distance entre le tramway et le hacheur. On retrouve bien cela sur la figure 2.56b. En effet, tant que ($x < x_1$), la sensibilité est constante et négative. Dans toute cette zone, on peut lire qu'augmenter la position x_1 de 1m diminuera le rendement de 0.012%. On subit ensuite une discontinuité lorsque le tramway "dépasse" le hacheur, puis, dès qu'il est à droite du hacheur, le facteur de sensibilité étant positif, on en déduit qu'augmenter la position de H_1 permet d'augmenter le rendement (on diminue en effet la distance entre le tramway et le hacheur). La sensibilité n'est cette fois plus constante, car le courant se répartit entre H_1 et H_2 .

En calculant l'intégrale de ces fonctions de sensibilité, on peut alors savoir dans quelle direction il est le plus intéressant de déplacer les hacheurs par rapport à leur emplacement initial. Ces valeurs sont résumées dans le tableau 2.10.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$d\eta_e/dx$	$-0,849 \cdot 10^{-3}$	$-0,004 \cdot 10^{-3}$	$0,650 \cdot 10^{-3}$	$-0,179 \cdot 10^{-3}$	$0,741 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.10 – Sensibilité du rendement énergétique par rapport à la position des hacheurs

Ces résultats justifient la difficulté que rencontre *fmincon* dans la recherche de la solution optimale. En effet, la solution est optimale si son gradient est nul. Les courbes 2.56b nous montrent que ce gradient est naturellement nul, ou du moins très faible dès lors que l'on sort de la zone d'action du hacheur. En boucle ouverte, le courant se répartit principalement entre les hacheurs les plus proches (figure 2.33b).

Cela justifie l'incohérence des résultats présentés figure 2.56a. En effet, dès que l'on sort de la zone d'action des hacheurs, l'algorithme ne va pas trouver la solution optimale et va alors proposer la valeur initiale. Il en résulte qu'en moyennant la position pour trouver la position optimale, on prend surtout en compte la valeur initiale.

On peut alors décider de ne moyennner la position des hacheurs que sur la partie où ils sont "superposés" avec le tramway, mais au vu de ce qui a été dit précédemment, il est légitime d'avoir des doutes sur la validité de l'évaluation de cet intervalle.

11.3.2 Etude du problème intégral

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que le calcul de la position optimale des hacheurs ne pouvait pas être efficace. Il est alors obligatoire d'avoir recours à une autre méthode de résolution. Pour éviter le problème précédent, nous allons résoudre directement le problème intégral et travailler avec les grandeurs moyennes des gradients.

Encore une fois, le problème est discrétisé pour calculer l'intégrale du rendement numériquement. La fonction objectif est donc directement le rendement énergétique. Le nombre de calculs à chaque itération est donc plus important, mais cela permet de spécifier naturellement que les variables d'optimisation sont des constantes (par rapport au déplacement du tramway).

Bien que plus longue, l'approche intégrale permet d'obtenir un résultat plus fiable que dans l'approche classique. En effet les gradients ne sont cette fois nuls que quand la solution optimale a été trouvée.

Avec cette approche intégrale, on obtient alors la solution suivante :

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*
126m	467m	800m	1125m	1409m

TABLE 2.11 – Position optimale des hacheurs

Avec cette solution, le rendement énergétique passe à $\eta_e = 91,6497\%$. Le gain sur le rendement serait encore plus important sur un réseau plus long.

On remarque que le hacheur H_3 se place au plus près de la sous-station SS_1 (ce que la figure 2.56a ne permettait pas de conclure). On rappelle que cette répartition des sous-stations a été déterminée dans le cas d'une répartition uniforme du courant tramway.

Si on regarde le placement optimal dans le cas de la répartition en courant décrite sur la figure 2.57, on trouve cette fois une répartition des hacheurs donnée tableau 2.12; le rendement passe alors de 91.9189% à 92.0263%.

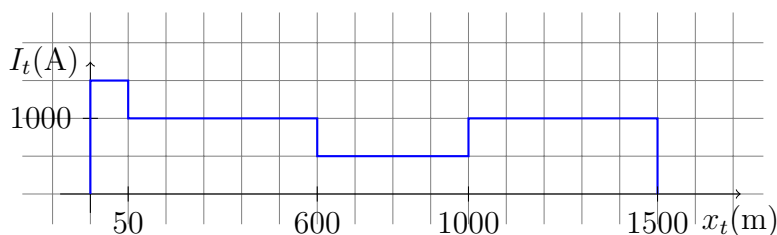


FIGURE 2.57 – Profil de courant tramway

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*
82m	460m	800m	1174m	1424m

TABLE 2.12 – Position optimale des hacheurs avec la nouvelle répartition de courant

En comparant les tableaux 2.11 et 2.12, on observe bien que les hacheurs cherchent à "se déplacer" vers les zones où la consommation de courant est la plus importante.

La méthode présentée ici permet donc de trouver l'emplacement optimal des hacheurs afin de minimiser les pertes. On observe hélas qu'encore une fois, la solution est sensible aux valeurs initiales mais ceci dans une moindre mesure. Les figures 2.58 permettent de comprendre pourquoi.

Ces figures représentent les iso-valeurs du rendement énergétique en fonction de la position des hacheurs H_1 et H_2 pour une position donnée de H_3 , H_4 et H_5 . La différence entre ces deux courbes est liée uniquement à la valeur du pas de discrétisation Δ_x utilisé pour le calcul des intégrales.

Dans les deux cas, on voit apparaître une zone où le rendement est maximal. Mais le pas de discrétisation va jouer aussi bien sur la valeur du maximum que sur sa position. En réalité, la surface est sensée être lisse, mais le calcul numérique de l'intégrale la rend dentelée. On voit apparaître en arrière-plan de ces courbes un quadrillage dont le pas dépend justement de Δ_x .

Le calcul numérique de l'intégrale va donc faire apparaître des optimums locaux, et les méthodes déterministes utilisées dans les algorithmes d'optimisation vont rester piégées dessus. En fonction des conditions initiales, on trouvera donc un emplacement optimal différent. Cependant, les résultats restent proches, d'autant plus que le maillage est fin.

On peut aussi mettre en doute, au vu de ces résultats, la valeur de l'optimum qui semble devoir être aligné sur le quadrillage créé par le pas de discrétisation.

Le résultat final donné est donc à manipuler avec précaution. Pour en augmenter la fiabilité, il est alors nécessaire de diminuer le pas de discrétisation. Le positionnement optimal est en fait une zone et non un point, mais le gain en rendement est réel.

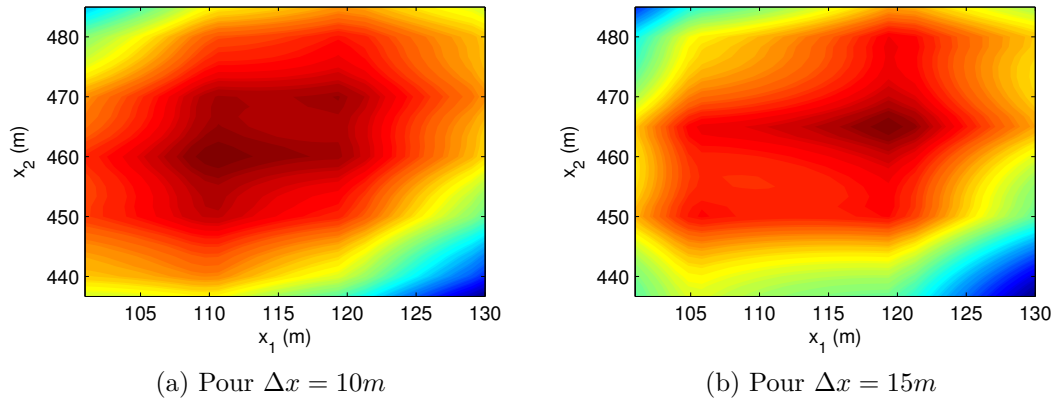


FIGURE 2.58 – Influence du pas de discrétisation (Δ_x) sur la recherche du maximum du rendement énergétique

11.4 Les hacheurs, un problème de dimensionnement structure/commande

On rappelle que dans la configuration initiale et en boucle ouverte, le rendement énergétique est de $\eta_e = 91,5915\%$. Dans le but d'augmenter ce rendement, nous avons trouvé dans un premier temps une loi de commande optimale pour une topologie donnée, qui a permis d'obtenir un rendement de $\eta_e = 91,6631\%$. Dans un deuxième temps, nous avons cherché l'emplacement optimal des hacheurs, pour une commande en boucle ouverte, et nous avons réussi à augmenter le rendement jusqu'à $\eta_e = 91,6523\%$.

Cependant il est assez clair que les lois de commande dépendent de l'emplacement des hacheurs comme le montre la figure 2.59. Sur cette figure, est tracé le rapport cyclique des différents hacheurs permettant d'obtenir une commande optimale, assurant une tension maximale sur la LAC de 790 V. Les étoiles correspondent au positionnement initial et les traits pleins au positionnement optimal.

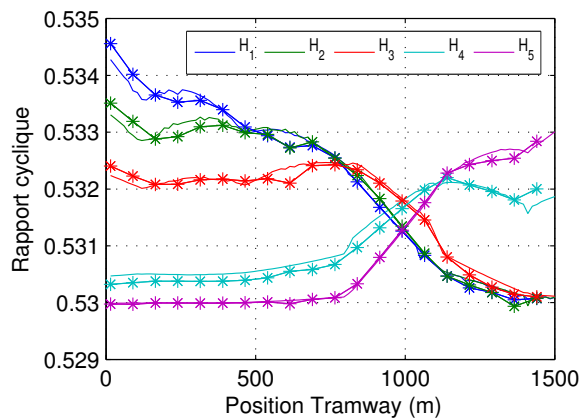


FIGURE 2.59 – Loi de commande optimale en fonction de la position du tramway pour deux positions de hacheurs différentes

En appliquant la commande optimale à l'emplacement optimal pour la boucle

ouverte, on trouve un rendement $\eta_e = 91,7219\%$. Cependant cet emplacement est optimal pour une commande en boucle ouverte, il est donc légitime de procéder au raisonnement réciproque, afin de savoir si l'emplacement optimal pour une loi de commande optimale est le même.

La fonction objectif devient donc un problème d'optimisation sur cycle de fonctionnement. Pour une position donnée, elle renvoie le rendement énergétique avec une commande optimale. Une deuxième boucle d'optimisation extérieure cherche alors l'emplacement optimal.

Cette procédure est coûteuse en temps de calcul et on retrouve les mêmes problèmes qu'au chapitre précédent. Bien qu'intéressante, cette voie n'a pas été creusée plus en détails.

11.5 Limitation de l'approche statique

La classe de problèmes traités jusqu'ici s'intègre dans une sphère bien plus large, appelée problème d'optimisation dynamique.

Grâce à certaines hypothèses, nous avons pu transformer un problème d'optimisation sur un cycle de fonctionnement en une suite de problèmes d'optimisation n'ayant aucun lien entre eux. Dans le cas de la recherche d'un emplacement optimal, la position devant être constante, le problème devrait être résolu dans sa globalité, mais encore une fois, l'état à un temps $t + \Delta t$ est supposé indépendant de l'état à l'instant t .

Une telle stratégie possède cependant des limitations comme l'incapacité d'obtenir un résultat optimal en présence d'éléments de stockage. Une autre stratégie doit alors être mise en œuvre pour la résolution. Il s'agira de l'optimisation dynamique présentée en détail au chapitre suivant, qui permet de traiter le problème, non plus comme un ensemble de problèmes indépendants, mais comme un unique problème dynamique.

11.6 De l'optimisation hors ligne au temps réel

Dans ce chapitre, nous avons montré les premières possibilités qu'offraient les méthodes modernes d'optimisation dans la recherche d'une architecture offrant les meilleures performances possibles. Les procédures d'optimisation ont permis de positionner les hacheurs pour minimiser les pertes et d'obtenir une loi de commande associée.

Nous avons développé des méthodes et des modèles qui, à partir d'une topologie de réseau et d'une distribution de tramways, permettent un pré-dimensionnement. Cependant, ces méthodes sont hors ligne, ce qui ne pose pas particulièrement de problème pour l'emplacement optimal, mais est totalement inapproprié dans l'application des lois de commandes.

Les lois de commande proposées sont celles qui, pour une position et un courant connus, permettent de minimiser les pertes. Il s'agit donc d'une commande en boucle ouverte qui, de plus, est supposée idéale. La loi de commande est calculée par un outil de supervision, qui envoie alors des consignes à chaque hacheur. Une régulation est ensuite nécessaire sur chaque hacheur afin d'assurer le suivi de la dite consigne.

Cette commande en boucle ouverte n'est pas sans poser de problème. En effet, la position et le courant du tramway dépendent énormément de la manière dont le

conducteur agit, et un simulateur hors ligne ne peut donner qu'une piètre estimation de ces valeurs. Il est donc nécessaire de trouver un moyen d'obtenir un système bouclé pour prendre en compte la variation de ces paramètres.

Aucune étude n'a été menée concernant la sensibilité du rendement par rapport à une incertitude sur ces paramètres, mais tout laisse à penser qu'elle pourrait être "catastrophique". L'instrumentation de chaque tramway semble alors nécessaire, ou du moins un recalage régulier pour obtenir la position. Une étude doit ainsi être menée, pour savoir si une mesure en continu est nécessaire, ou si elle peut être échantillonnée tout au long de la ligne. A partir de cette mesure, l'algorithme d'optimisation est appliqué pour calculer la consigne sur le prochain pas de temps.

Cette approche est semblable à celle utilisée par les algorithmes de commande prédictive, mais pour un problème où les dynamiques ne sont pas prises en compte. L'horizon de prédiction peut alors être seulement d'un pas de temps. Cette méthode semble être la plus simple pour implémenter la loi de commande optimale en temps réel, mais des études complémentaires, qui sont présentées en partie au chapitre suivant, doivent être menées.

11.7 Autres voies possibles d'optimisation

Toutes les études menées se sont concentrées sur un seul tramway présent sur la ligne, en phase de traction. D'autres avantages peuvent être trouvés grâce à une conduite judicieuse du réseau, permettant une gestion du carrousel de tramways.

11.7.1 Distance maximale de récupération

Lors des phases de freinage, le tramway va renvoyer de l'énergie vers le réseau. La tension du bus continu va alors progressivement s'élever jusqu'à atteindre la tension seuil de $V_{max} = 900V$ à partir de laquelle le rhéostat de freinage se déclenche, entraînant des pertes considérables. Les hacheurs étant réversibles, si une sous-station au-moins est réversible (pour assurer le renvoi d'énergie sur le réseau ERDF), ou si un tramway est en phase de traction sur la ligne, des échanges énergétiques peuvent avoir lieu au sein du réseau.

On appelle distance maximale de récupération (x_{max}) la distance à partir de laquelle un tramway est trop éloigné d'un hacheur, pour pouvoir renvoyer la puissance sans déclencher le rhéostat de freinage. Dans le cas d'une ligne avec un seul hacheur, elle se calcule simplement grâce à (2.121).

$$x_{max} = \frac{V_{max} - V_h}{\rho I_t} - \frac{r_t}{\rho} \quad (2.121)$$

Pour augmenter cette distance de récupération, plusieurs voies sont ainsi possibles. On peut diminuer le courant tramway I_t renvoyé sur la LAC en utilisant un moyen de stockage que l'on recharge, réduire la résistivité de la LAC, ou rabaisser la tension hacheur V_h . Pour un tramway réinjectant un courant $I_t = 1000$ A, un hacheur réglé à $V_h = 790$ V permet d'avoir une distance de récupération $x_{max} = 595$ m, qui passe à 931 m pour une tension $V_h = 750$ V.

L'utilisation des hacheurs permet donc de favoriser la récupération énergétique en limitant le déclenchement du rhéostat de freinage.

11.7.2 Échanges entre véhicules

Alimenter un tramway durant sa phase de traction peut se faire soit via un dispositif de stockage embarqué, soit par les sous-stations, soit en utilisant le courant généré par un tramway freinant à proximité. Le contrôle des hacheurs permet encore une fois de favoriser les échanges énergétiques.

Nous allons illustrer ces capacités sur un exemple simple. Soient deux tramways T_1 et T_2 situés respectivement en $x_1 = 0$ m et $x_2 = 1200$ m. Le premier tramway est en phase de freinage et réinjecte $I_{t1} = 700$ A, alors que le deuxième est en phase d'accélération, et consomme $I_{t2} = 1000$ A. Ce réseau est alimenté par une sous-station situé entre T_1 et T_2 se comportant comme une source de tension E positionnée en $x = 100$ m.

Seule l'énergie produite par les sous-stations a un coût, et on utilisera comme critère de performance le rendement défini pour un tramway en traction seule : $COP = P_{t2}/P_{ss}$ qui, calculé dans ce cas précis, donne :

$$COP = \frac{EI_{t2} + (r_t + \rho(x_{t2} - x)) I_{t2}^2}{EI_{t2} + E \left((1 - \kappa) I_{t1} + \kappa \frac{V_{max} - E}{r_t + \rho(x - x_{t1})} \right)} \quad (2.122)$$

Dans l'équation (2.122), κ est un coefficient permettant de savoir si le rhéostat de freinage du tramway T_1 est déclenché. Il est calculé par :

$$\kappa = \begin{cases} 0, & \text{si } V_{t1} = (E + (r_t + \rho(x - x_{t1})) I_{t1}) < V_{max} \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.123)$$

Une partie de la puissance alimentant T_2 provenant de T_1 , ce coefficient de performance peut prendre des valeurs supérieures à un et permet de mesurer la capacité d'échanges entre les véhicules.

La figure 2.60 trace l'évolution de ce critère en fonction de la tension de la sous-station pour les conditions énoncées ci-dessus.

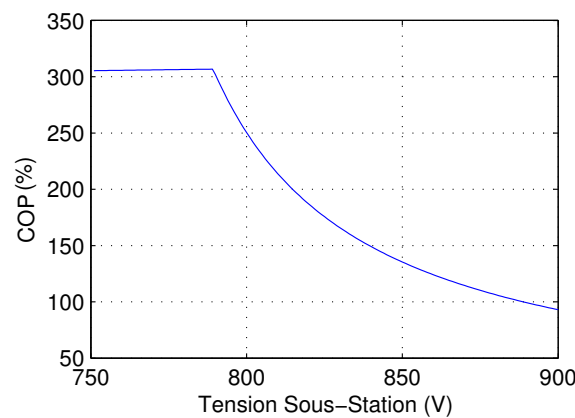


FIGURE 2.60 – Potentiel de récupération (COP) en fonction de la tension sous-station

Tant que la tension est inférieure à 790 V environ, l'intégralité du courant T_1 est renvoyée sur le réseau et la sous-station ne doit fournir que la différence de courant entre I_{t1} et I_{t2} , soit 300 A. Le rendement est alors à peu près constant dans

cette zone, avec une légère augmentation lorsque la tension augmente. Passée cette tension de seuil, le rhéostat de freinage se déclenche, et seule une portion du courant peut être renvoyée. La sous-station doit alors compenser en injectant une part plus importante du courant, et le rendement chute. Une fois les 900V atteints, l'échange de courant se fait uniquement entre la sous-station et T_2 puis, si la tension continue d'augmenter, la sous-station commence même à alimenter le rhéostat.

Cet exemple montre bien le gain qui est offert par le contrôle des sous-stations, ou des hacheurs. En abaissant la tension, on arrive à favoriser les échanges énergétiques entre véhicules, ce qui permet d'augmenter le rendement. Il existe alors une valeur seuil de tension permettant de maximiser ce coefficient de performance.

a) Répartition des courants en présence de plusieurs tramways en boucle ouverte

Cette section a pour but d'illustrer la répartition des flux de puissance dans le cas d'un réseau comportant plusieurs tramways. Pour illustrer cela, on considère le réseau HVDC de la figure 2.61, sur lequel circulent deux tramways T_1 en $x_{t1} = 100$ m et T_2 en $x_{t2} = 600$ m. Le tramway T_1 est en pleine traction et consomme un courant $I_{t1} = 1000$ A, alors que le tramway T_2 , lui, est en phase de freinage et renvoie sur le réseau un courant $I_{t2} = 500$ A. Les hacheurs sont contrôlés en boucle ouverte.

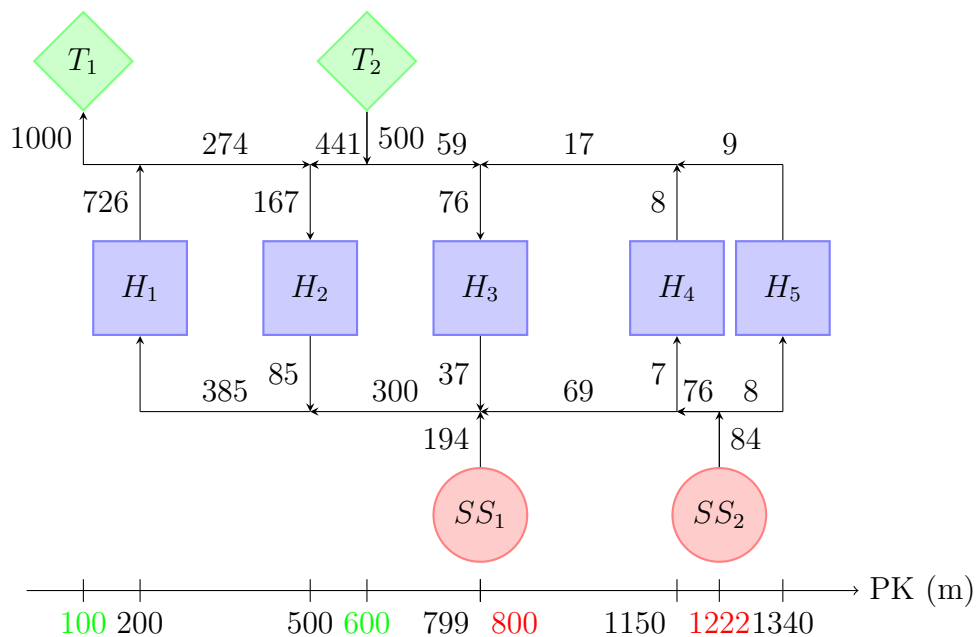


FIGURE 2.61 – Répartition des courants en régime permanent

Cette figure permet de visualiser le sens et l'amplitude des échanges de courant. Les hacheurs H_4 et H_5 sont trop éloignés pour jouer un rôle significatif. On observe surtout qu'un échange énergétique a lieu entre les deux tramways. Plus intéressant encore, près de la moitié de cet échange a lieu dans la partie haute tension. Bien évidemment, ces échanges peuvent être finement contrôlés par les hacheurs.

b) Répartition de courant en présence de plusieurs tramways avec une commande optimale

Dans le cas précédent, les échanges de puissance se produisaient en boucle ouverte. La répartition de courant était donc faite de manière naturelle, sans tirer partie de la contrôlabilité des hacheurs. Or, nous avons vu qu'il pouvait être intéressant de favoriser l'échange direct entre les véhicules. Cela est d'autant plus vrai qu'en passant par la partie HVDC, le courant subit une double conversion, ce qui augmente les pertes. La résistivité des feeders et de la LAC étant proches, il est intéressant de passer par la partie HVDC uniquement si les véhicules sont éloignés. Les pertes de la double conversion sont alors compensées par les gains obtenus en faisant transiter un courant plus faible dans les feeders au lieu de la LAC (pour une même puissance transportée).

Dans le cas où le réseau est à petite échelle comme celui de la figure 2.61, il devient plus intéressant de faire transiter un maximum de courant par la LAC comme le montre la figure 2.62. Cette figure reprend le même réseau, avec la même charge, mais commandé de manière à maximiser le *COP* défini par (2.122). Le réseau est de plus contrôlé pour que la tension LAC ne dépasse pas 790 V.

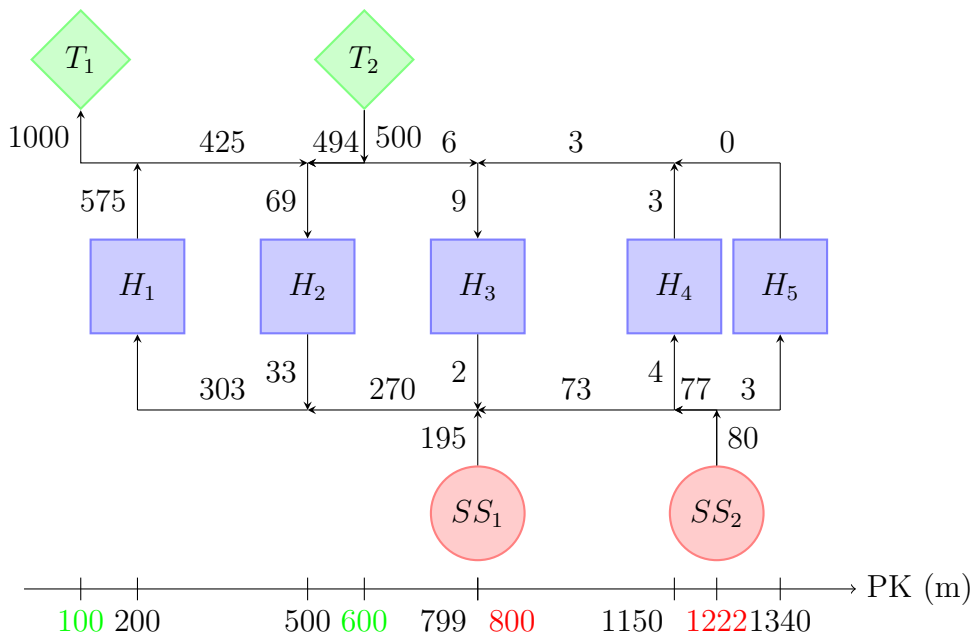


FIGURE 2.62 – Répartition optimale des courants en régime permanent

Le *COP* dans le cas de la boucle ouverte était de 173, 73%. Grâce à la commande optimale, il passe à 174, 32%. La principale différence entre les deux cas est que le courant circulant dans la LAC entre les hacheurs H_1 est H_2 augmente de 55%, ce qui permet de diminuer le courant qui était capté par H_2 et H_3 , transité dans les feeders, avant d'être réinjecté au tramway T_1 , via H_1 .

Pour parvenir à cela, la commande a augmenté la tension de H_2 et H_3 pour diminuer les courants qui étaient réinjectés vers le réseau HVDC, mais elle a surtout diminué la tension de sortie de H_1 , favorisant le transit direct via la LAC. Il apparaît bien, dans ce cas de figure, qu'il peut être intéressant de diminuer la tension des

hacheurs dans certains cas, pour favoriser les échanges directs d'énergie.

Le choix d'une tension maximale sur le réseau n'est pas forcément appropriée. Elle permet juste de comparer avec les cas utilisés jusqu'à présent. Si on choisit comme contrainte une tension bus maximale de 900V, alors les phénomènes rencontrés sont encore amplifiés, et presque la totalité du courant injecté par T_2 circule par la LAC. Le COP passe lui à 176,46%.

12 Conclusion sur l'analyse statique

Ce chapitre vient conclure cette première partie de l'étude basée sur l'analyse en régime statique d'un réseau de tramways. Elle a permis de modéliser le tramway et son conducteur, qui forme une charge variable dans le temps et dans l'espace. Dans un deuxième temps, une étude approfondie du réseau d'alimentation électrique a été menée, grâce à une modélisation en régime permanent, permettant d'étudier l'architecture de puissance basée sur l'utilisation d'un bus HVDC. Cette nouvelle manière d'alimenter les tramways repose essentiellement sur les capacités des convertisseurs d'électronique de puissance, commandables et peu volumineux, pouvant être implantés tout le long de la voie. A partir de là, une loi de commande optimale a été développée permettant de maximiser le rendement sur un cycle complet de fonctionnement. Dans un deuxième temps, une étude a permis de déterminer l'emplacement optimal des convertisseurs pour un profil de puissance donné. Cette étude a enfin été menée dans le cas d'un réseau comportant plusieurs tramways et a démontré que l'approche présentée permettait encore une fois d'augmenter les performances, notamment en favorisant les échanges entre véhicules.

Un gain réel a été apporté par l'utilisation de cette architecture, associée à une loi de commande adaptée. L'évolution du rendement reste par contre bien souvent assez faible, pouvant mettre en doute l'avantage de la solution proposée. Il est important de noter que ces résultats mitigés sont dus essentiellement au réseau choisi pour l'illustration. Ce réseau est de dimension excessivement réduite par rapport à un réseau urbain classique. La ligne fait moins de 1.5 km et est dotée de deux sous-stations. Généralement, une ligne fait plutôt une quinzaine de kilomètres pour une dizaine de sous-stations au plus. Or, nous avons vu que notre architecture devenait efficace surtout sur les réseaux longs et chargés. Sur notre exemple, les pertes constantes sont tellement importantes qu'il est difficile de mettre en avant les gains qu'apportent les lois de commande. L'application avec plusieurs tramways est cependant un point fort de l'architecture HVDC, car elle facilite les échanges entre véhicules.

Certaines limitations sont tout de même apparues. La première est sans doute la difficulté d'implémentation d'une telle loi de commande sur un réseau réel. En effet, cette loi est le résultat d'une simulation hors ligne qu'il faut réussir à réactualiser constamment pour la faire correspondre au réseau réel. Cela sous-entend l'utilisation massive de capteurs avec la mise en place d'un SCADA pouvant être lourde. Une approche basée sur des algorithmes de type MPPT peut alors être une alternative séduisante ne nécessitant pas autant d'instrumentation.

Il apparaît également que l'algorithme ne renvoie en réalité qu'une consigne aux hacheurs. Il s'agit d'une supervision globale, qui nécessite en plus une régulation locale au niveau de chaque hacheur. L'étude de ces boucles de régulation nécessite

un modèle bien plus complexe pour être étudié. Ce modèle se doit d'être dynamique et donc prendre en compte les éléments de filtrage des convertisseurs. Ces filtres n'ont pas été modélisés, ni dimensionnés pour l'instant. Ils ont pour rôle de diminuer les harmoniques générés par l'électronique de puissance, pollution qui n'a pu être étudiée car les modèles moyens utilisés pour modéliser les convertisseurs n'autorisent pas un tel degré de finesse. Ces harmoniques engendrent des pertes et peuvent modifier les flux de puissance. Ils doivent en toute rigueur être pris en compte, même pour mener une étude énergétique. Notons enfin que le modèle étant statique, il a été impossible d'étudier l'impact d'un stockage embarqué, qui est un moyen efficace de maximiser le rendement.

Cet ensemble de limites justifie pleinement l'utilisation de modèles dynamiques pour l'étude des boucles de régulation, mais aussi des transitoires. Un modèle tenant compte des harmoniques doit également être développé pour observer leur influence sur la répartition des flux énergétiques. Un tel modèle peut être en outre utilisable pour procéder au dimensionnement des filtres, étape nécessaire avant toute étude. Cela fera l'objectif du chapitre suivant, où une nouvelle approche de modélisation sera développée, avec des outils de dimensionnement appropriés.

CHAPITRE 3

ÉTUDE DYNAMIQUE DE RÉSEAUX MULTI-SOURCES, MULTI-CONVERTISSEURS

Chapitre 3

Étude dynamique de réseaux multi-sources, multi-convertisseurs

1 Objectif du chapitre

La mise en équations effectuée au cours du chapitre précédent est basée sur l'utilisation de modèles statiques. Les éléments réactifs ont été remplacés par leur équivalent en basse fréquence (un court-circuit pour une inductance, et un circuit ouvert pour une capacité). Il en résulte un modèle simple permettant de calculer en premier lieu les échanges énergétiques et les pertes au sein du réseau.

Ce modèle est toutefois assez limité. Il est en effet impossible d'analyser les phénomènes dynamiques qui ont lieu sur le réseau, comme un court-circuit, par exemple. De plus, la synthèse des correcteurs, ou l'étude de la stabilité du réseau, impose l'utilisation d'un modèle plus complet intégrant les éléments dynamiques.

Plusieurs formalismes peuvent être utilisés pour décrire un système physique afin d'obtenir une équation différentielle ordinaire permettant de l'étudier. C'est la méthodologie des bond graphs qui sera retenue pour obtenir la représentation d'état du réseau électrique complexe d'alimentation d'un tramway. Une difficulté supplémentaire est l'utilisation massive de convertisseurs. Une méthode permettant de les intégrer dans la modélisation dynamique sera présentée.

L'approche développée permet d'obtenir un modèle sous la forme d'une représentation d'état, écrite via la transformée linéaire fractionnaire (LFT). Grâce à ce formalisme, il sera possible d'intégrer des incertitudes sur les paramètres, mais aussi d'utiliser les outils de l'automatique moderne. La synthèse des correcteurs via la méthode H_∞ deviendra alors directement possible.

Grâce à ce modèle dynamique, il est aussi possible d'utiliser les techniques de commande optimale, qui permettent de synthétiser un correcteur minimisant une fonction objectif comme les pertes par exemple, mais aussi de piloter un moyen de stockage.

2 La modélisation dynamique des systèmes

Que la tâche est ardue, lorsqu'on se retrouve devant un vaste système à modéliser et à étudier. Cette tâche est grandement simplifiée et peut même être en partie

automatisée grâce à la puissance des outils de calcul dont nous disposons aujourd'hui. Cependant, une automatisation de cette procédure signifie plusieurs choses. L'algorithme doit être capable de prendre en compte tous les cas de figure possibles et imaginables, et il doit prévenir l'utilisateur en cas de violation des lois physiques, synonyme d'un schéma erroné, ou trop simplifié. Mais il doit également être capable de s'agréger avec d'autres modèles et de les intégrer.

Pour modéliser de larges systèmes, l'option utilisée va être la même que celle du sénat romain : diviser pour régner. En effet, un grand système n'est que l'agglutinement de systèmes plus petits. La difficulté repose dans la segmentation physique de ces sous-systèmes, et la description des couplages existants entre eux. La méthode choisie pour la représentation du système est fondamentale, car elle conditionnera également sa mise en équations et sa résolution [Lau98].

L'objectif va, être d'obtenir une équation différentielle ordinaire facilement utilisable, à partir d'une liste d'éléments raccordés entre eux,

2.1 Systèmes et formalisme de représentation des modèles

2.1.1 Les équations différentielles

Avant d'aller plus loin dans la modélisation, nous allons reparler de systèmes et du formalisme utilisé pour les décrire. Un système peut être vu comme un ensemble acceptant des entrées et délivrant des sorties. Dans notre cas, nous nous limiterons aux systèmes déterministes qui reposent sur le principe de causalité. Ainsi, la sortie du système peut être entièrement prédite à partir de la connaissance des entrées, mais aussi du passé du système. Ce passé est, à chaque instant, entièrement résumé par l'état du système, décrit par les variables d'état.

Quel que soit le système étudié, il peut être mis en équations sous la forme d'une équation différentielle. Cependant, selon le formalisme utilisé, les équations obtenues peuvent être plus ou moins faciles à résoudre et plus ou moins stables vis-à-vis de l'intégration numérique.

La première classe d'équation différentielle que l'on rencontre est constituée des équations différentielles algébriques (EDA) qui ont la forme donnée par (3.1).

$$F\left(\frac{dx}{dt}, x, t\right) = 0 \quad (3.1)$$

avec x , l'état du système et t le temps.

Si nous nous plaçons dans le cas simple, mais courant, de l'équation différentielle algébrique à coefficients constants, l'équation (3.1) prend alors la forme décrite par (3.2).

$$E \frac{dx}{dt} = Ax + g(t) \quad (3.2)$$

où E et A sont des matrices carrées et $g(t)$ un vecteur.

Notons que toute équation différentielle peut se mettre sous la forme du système d'EDA du premier ordre. Une équation d'ordre n peut aussi se ramener à un système de n équations à n variables.

Une autre classe particulière d'équations différentielles est celle constituée des équations différentielles ordinaires (EDO), qui se mettent sous la forme (3.3).

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (3.3)$$

Dans le cas linéaire à coefficients constants, on retrouve des équations matricielles du type de celle donnée en (3.4).

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(t) \quad (3.4)$$

Dans le cas particulier où la matrice E est inversible, l'EDA peut facilement s'écrire sous la forme d'une EDO, ce qui n'est plus vrai si cette matrice est singulière. Mais pourquoi vouloir à tous prix tendre vers ces EDO ?

Tout d'abord, la résolution d'une EDA passe par celle d'une EDO. Mais le grand avantage de l'EDO est de pouvoir garantir l'existence et l'unicité de la solution, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, un problème de Cauchy est une EDO, à laquelle on adjoint des conditions initiales. Ainsi, la solution au problème de Cauchy sera entièrement conditionnée par les valeurs initiales.

Une méthode classique pour résoudre une EDA [BCCP96] repose sur un partitionnement entre une EDO, qui ne posera pas de problème, et une seconde partie où seront concentrées toutes les difficultés. Ce second membre sera généralement résolu par différentiations successives, jusqu'à l'apparition explicite des variables d'états, ce qui est difficile à automatiser.

De plus, il est intéressant de noter dans le cadre d'une résolution assistée par ordinateur qu'une EDO peut être résolue par un schéma explicite, ce qui simplifie le calcul. En effet, les algorithmes d'intégration disponibles sont tous basés sur la méthode des différences finies, qui consiste à réécrire l'opérateur de différentiation sous la forme d'une différence finie. Les méthodes les plus utilisées sont sans doute les méthodes de Runge-Kutta explicites et leurs dérivées comme la méthode d'Euler. Ces méthodes d'intégrations explicites ont l'avantage d'être bien plus rapides à calculer, même si la stabilité n'est pas toujours garantie. La résolution d'une EDA nécessite, elle, l'utilisation d'un schéma implicite, qui impose la résolution d'un système d'équations à chaque pas de temps. Alors qu'un schéma implicite assure une stabilité inconditionnelle dans le cas d'une EDO, il peut devenir instable dans le cas d'une EDA.

En conclusion, on notera qu'une EDO ne pose pas de problème de simulation, même si elle nécessite des méthodes d'intégration très stables. Par contre, une EDA ne correspond pas forcément à un système déterministe, et son traitement numérique peut s'avérer très complexe. Fort heureusement tous les systèmes physiques sont par nature déterministes (sauf bien évidemment les problèmes de mécanique quantique). Ils seront donc tous représentables par une EDO, la difficulté va être de choisir un formalisme permettant d'obtenir cette EDO.

2.1.2 Le modèle d'état

Un système dynamique quel qu'il soit peut être décrit à partir d'un nombre minimale de variables indépendantes, dites variables d'état. Ces variables d'état sont des grandeurs continues et dérivables liées généralement à l'énergie stockée dans le système. La représentation d'état n'est pas unique et dépend du modèle

utilisé. Cependant, le nombre de variables d'état est constant et représente l'ordre du système.

Les variables d'état représentant l'énergie d'un système, elles ne peuvent subir de discontinuités. En électrotechnique, on choisira classiquement le courant dans les inductances, lié à leur flux, et la tension aux bornes des condensateurs découlant de la charge emmagasinée sur leurs armatures.

Un système dynamique, quel qu'il soit, peut alors s'écrire sous la forme d'une représentation d'état donnée par l'équation (3.5) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(t, x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où x représente le vecteur d'état de dimension n égal à l'ordre du système. y sera appelé vecteur de sortie et u vecteur d'entrée. La première équation est appelée équation d'état et la seconde, équation d'observation ou de sortie. Dans le cas particulier où les fonctions vectorielles f et h sont linéaires, le système d'état peut s'écrire sous la forme matricielle (3.6).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

A est nommée matrice de dynamique ou matrice d'état, B matrice de commande, C matrice d'observation, D matrice d'action directe.

2.1.3 Les systèmes linéaires à paramètres constants

Dans le cas où les matrices des équations (3.6) sont constantes, le système sera de type LTI, acronyme anglo-saxon signifiant *Linear Time Invariant*. Dans ce cas particulier, le système possédera des propriétés particulièrement intéressantes. Tout d'abord, les systèmes LTI vérifient le principe de superposition s'exprimant comme il suit.

Théorème 1 (Principe de superposition). *La réponse d'un système linéaire à une entrée composée de la combinaison linéaire de plusieurs entrées est la somme des réponses élémentaires à chacune de ces entrées individuelles.*

De plus, il existe un nombre important d'outils permettant leur analyse. On pourra citer par exemple les fonctions de transfert, ou les diagrammes de Bode. Dans certains cas, les outils classiques peuvent être appliqués à des systèmes pas forcément LTI, pour certaines classes de systèmes. Les systèmes LTI restent cependant, et de loin, les plus étudiés.

2.2 Les méthodes d'obtention des équations différentielles

2.2.1 La méthode classique : Méthode Nodale

Les simulateurs de type SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis), comme Pspice ou Saber, utilisent comme méthode d'assemblage la méthode nodale modifiée, transcription des équations de Kirchhoff, telle que nous l'avons

fait au chapitre précédent. La méthode nodale modifiée permet, en plus, de la méthode nodale classique, de modéliser les sources de tension et les inductances, en augmentant la taille du système.

Cette méthode est éprouvée et fiable pour l'obtention des équations dans un circuit ne comportant pas d'élément dynamique, tel que ceux rencontrés jusqu'à présent. Cependant, cette formulation possède plusieurs inconvénients dès qu'il s'agit de traiter un système dynamique.

a) Assemblage des équations

On a montré dans le chapitre de modélisation statique, que la MNA permet de d'obtenir un système d'équations sous la forme (3.7), à partir des lois de Kirchoff.

$$\begin{pmatrix} G & -B \\ B^t & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ E \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La version dynamique est basée sur le même formalisme. On remplace simplement la matrice de conductance G , par une matrice d'admittance Y intégrant une partie réelle G , mais également une partie purement imaginaire appelée matrice de susceptance.

Dans le cas d'une analyse en régime permanent sinusoïdal, la matrice de susceptance est composée de l'inverse des valeurs des réactances calculées pour une fréquence considérée.

On note X les inconnues du système (tensions nodales et courants dans les sources de tension et les inductances). Le système (3.7) est réécrit sous la forme (3.8) de manière à faire apparaître la matrice de susceptance.

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \frac{dX}{dt} + \begin{pmatrix} G & -B \\ B^t & R \end{pmatrix} X = Z \quad (3.8)$$

La matrice de susceptance est extraite de la matrice d'admittance et apparaît devant le terme dérivé du vecteur d'état. Elle est décomposée en deux matrices : C et L .

La matrice C est une matrice carrée, avec au plus deux éléments par ligne, qui contiendra la valeur des capacités connectées aux nœuds correspondant du circuit. La matrice L est diagonale (sans étudier les inductances mutuelles), avec un élément par ligne si une inductance est présente, et aucun si il s'agit d'une source de tension. Cette matrice est donc singulière si il y a une source de tension, ou si il n'y a pas une capacité à chaque nœud ce qui est fortement probable. Dans la majorité des cas, on ne peut donc pas directement écrire une EDO à partir de la MNA.

b) Obtention des équations différentielles ordinaires

Pour limiter le nombre de variables, mais surtout pour pouvoir écrire un système d'EDO à partir de la formulation (3.8), nous allons utiliser la RMNA [LP85] (Reduced Modified Nodal Analysis).

Cette méthode peut également permettre d'obtenir directement le système d'état. Pour ce faire, le vecteur des inconnues va être segmenté en deux : d'un côté les variables d'état X_e et de l'autre, les variables intermédiaires X_i (tensions nodales). Avec cette séparation, l'équation (3.8) devient (3.9).

$$\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_e \\ X_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_e \\ X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_e \\ Z_i \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Cette fois ci, M_{11} est forcément inversible, car directement rattachée aux variables d'état. En supprimant les variables intermédiaires, l'équation (3.9) s'écrit directement sous la forme d'une représentation d'état (3.10).

$$\frac{dX_e}{dt} = M_{11}^{-1} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) X_e + M_{11}^{-1} (Z_e - A_{12}A_{22}^{-1}Z_i) \quad (3.10)$$

c) Limitation de la méthode

Cette méthode permet, comme on l'a montré, d'obtenir les équations d'état d'un circuit à partir de sa netlist. Elle fonctionne bien, mais il y a cependant une ombre au tableau. En effet, dans la formulation (3.10), on voit apparaître les inverses des matrices M_{11} et A_{22} . Par construction, la première est forcément inversible, car il s'agit de la matrice dynamique des variables d'états. Par contre la seconde ne l'est pas toujours! Cela peut conduire les simulateurs à des messages tels que *Error : Jacobian is singular*; message plutôt difficile à lever, vous en conviendrez.

Quels éléments peuvent rendre cette matrice singulière? On peut noter des raisons valables et d'autres qui le sont moins. Dans les raisons valables, on retrouve par exemple le court-circuit d'une source de tension, ou deux sources de courant en série. Il est normal que le calcul soit impossible puisque les règles physiques de base sont violées. Par contre, des raisons plus insidieuses peuvent être responsables d'erreurs. C'est le cas de deux inductances en série ou de deux capacités en parallèle qui, bien que physiquement possibles, renverront une erreur lors des simulations.

Avec un peu de recul, un utilisateur averti sait que deux inductances en série parcourues par un même courant, s'échangent contre une seule dont la valeur est la somme de ces inductances. Malheureusement, un ordinateur aura le plus grand mal à faire de même. De plus, le calcul de l'inductance équivalente n'est pas toujours aussi simple comme le montre l'exemple de la figure 3.4 à la page 153.

Écrire les EDO est donc possible, mais si les variables d'état ne sont pas indépendantes, la méthode proposée n'est plus valable. Le simulateur doit donc être capable de faire la différence entre les erreurs physiques provenant d'une faute dans la saisie du schéma par l'utilisateur, et le cas des variables d'état liées.

2.2.2 Les simulateurs de type schémas blocs

Le schéma bloc est une méthode de description graphique des systèmes couramment utilisée en automatique ou en chimie par exemple. Il consiste à hiérarchiser et ordonner un système en le décomposant en sous-systèmes, et en interconnectant ses entrées et sorties. Ainsi, chaque sous-système décrira une partie du processus sous la forme d'une équation différentielle, mais surtout, un schéma bloc est orienté, ce qui est un concept fondamental comme nous allons le voir.

a) La causalité

La causalité est peut être la notion la plus importante, mais la plus sous estimée en physique. La causalité permet d'orienter un système en partant du postulat que

si un phénomène entraîne un effet, alors cet effet ne peut précéder la cause.

D'un point de vue systémique, cela va se traduire par le fait qu'un système doit être orienté. L'entrée et la sortie du système ne sont pas inversibles.

Prenons l'exemple du condensateur. Si on applique une source de courant constante à ses bornes, sa tension va augmenter linéairement. Si par contre, on lui applique une source de tension constante, alors là, le courant va devenir infini en théorie, ou tout du moins limité par les impédances de la source de tension et l'ESR de la capacité.

C'est de cette notion de causalité que découle les règles de base de l'électronique de puissance, à savoir, ne jamais mettre en série deux sources de courant, ou en parallèle deux sources de tension, qui peuvent, dans le cas extrême, se traduire par, ne jamais court-circuiter une source de tension ou ouvrir une source de courant.

b) Couplage entre les sous-systèmes

Un bloc est donc une représentation sous forme d'équations différentielles d'une partie d'un système physique. Ce bloc possède des entrées et des sorties, qui ne peuvent être inter-changées. Cependant un bloc n'apporte pas beaucoup d'information. Il doit être connecté à des sources, des capteurs et éventuellement d'autres blocs pour former des systèmes plus complets.

Le principe de causalité peut être vu comme un principe d'action/réaction. Si, par exemple, un système A impose une *tension* à un système B , ce dernier répondra à la sollicitation en imposant à son tour un *courant* au système A . Les blocs doivent donc respecter certaines règles pour être couplés entre eux.

Hélas, sur un simulateur de type schéma bloc comme Simulink, rien n'empêche l'utilisateur de commettre de pareilles aberrations, en reliant des blocs incompatibles entre eux.

c) L'inversion de causalité

Nous avons déjà étudié ce cas de figure dans la section 6.6. Lors du blocage des sous-stations, la causalité entre les tramways et les sous-stations est inversée. Il est alors nécessaire de réécrire tout le schéma bloc pour prendre en compte cette inversion de causalité ce qui peut être fastidieux.

d) Conclusion sur les schémas blocs

Les schémas blocs sont une méthode efficace de modélisation qui consiste à représenter chaque élément indépendamment, puis à les coupler entre eux. Il fait directement apparaître la notion de causalité, car il est orienté. Cependant, rien ne renseigne l'utilisateur en cas de couplage de systèmes incompatibles entre eux. Cette notion de compatibilité n'est pas toujours très claire, surtout lorsqu'on aborde les systèmes multiphysiques. De plus, l'inversion de causalité, nécessite une réécriture des matrices de couplage, qui n'est pas toujours évidente.

2.2.3 Les graphes de liens

a) Pourquoi une nouvelle méthode d'obtention des équations ?

Les deux méthodes proposées précédemment sont les plus utilisées dans les logiciels commerciaux. Nous avons cependant montré les principaux problèmes inhérents à ces méthodes de modélisation, à savoir :

- l'obtention d'une équation différentielle ordinaire n'est pas garantie,
- la causalité est difficilement gérable.

En cas de difficulté, en particulier dans les mailles capacitatives et les nœuds inductifs, ces simulateurs classiques pourront connaître quelques dysfonctionnements. Dans certains cas, ils enverront un message d'erreur d'aucune utilité, dans d'autres, ils simuleront, et donneront des résultats complètement aberrants.

Dans le cas de l'application tramway, les inductances des lignes aériennes de contact ne pourront pas être négligées lors des études dynamiques ou harmoniques, de part la taille du réseau. Ces inductances, et celles des filtres d'entrée des tramways, conduisent nécessairement à des nœuds inductifs. Ce problème pourrait être contourné en considérant un modèle en Γ pour les portions de LAC (un modèle en Π conduisant cette fois à une maille capacitive), mais cela rajouterait des variables d'état et des dynamiques rapides peu intéressantes dans la gamme de fréquences de notre étude, du fait des faibles valeurs des capacités linéiques. De plus, le cas de l'inversion de causalité n'est pas pris en compte.

Tout cela impose donc de trouver une méthode de modélisation plus adaptée. La théorie des graphes propose alors une alternative intéressante pour résoudre ce problème.

b) Les graphes orientés

Cette approche est sans doute la plus ancienne. Il s'agit d'un formalisme mathématique développé par Euler, qui est utilisé dans de nombreux domaines [Deo04].

Un graphe est un ensemble de points reliés par des liens. Si ces liens sont orientés, alors on parle de graphe orienté. Les points sont appelés sommets ou nœuds et les liens arcs. Ainsi, ce type de représentation se prête particulièrement bien à la modélisation d'un circuit électrique.

Cette approche est basée sur la description individuelle de chaque élément du réseau et sur leurs interconnexions. Les graphes permettent d'effectuer l'analyse topologique du circuit et d'obtenir les matrices d'incidence qui permettent de connaître quelles branches et quels nœuds sont reliés entre eux.

On peut par la suite calculer les matrices d'admittance reliant les tensions des nœuds aux courants des branches comme dans le cas de la méthode nodale. Mais on peut aussi aller plus loin. En appliquant l'algorithme de Welsh [Mer09], on peut colorer le graphe et ainsi extraire les relations entre les courants et les tensions du circuit dans les différents maillons et branches du graphe. Il est alors possible, moyennant des manipulations matricielles, de retrouver les équations d'état, sans avoir de problèmes avec des matrices singulières.

On dispose enfin d'une méthode permettant d'obtenir un modèle de qualité, quel que soit le réseau. Cependant, cette méthode présente quelques inconvénients. Tout d'abord, c'est une approche purement mathématique et dénuée de sens physique. Elle est donc abstraite et peut induire des pertes de sens. De plus, elle est très

calculatoire. Il suffit de lire l'annexe de la thèse [Mer09] pour voir les dizaines de pages d'équations permettant d'obtenir le modèle d'état.

c) Graphe Informationnel Causal

Le Graphe Informationnel de Causalité, abrégé GIC, est une représentation graphique de l'information énergétique transitant au sein d'un système, mise au point par J.P. Hautier et J. Faucher [HC99]. Il est le premier formalisme graphique reposant clairement sur les principes de causalité. Il ne traite que de la causalité intégrale ou naturelle, ce qui permet d'obtenir les lois de commande par inversion de modèle. On retrouve deux éléments de base, appelés processeurs. Les processeurs rigides lient entre elles deux grandeurs sans imposer de causalité (de sens) dans la relation, comme les résistances par exemple. La sortie est alors une fonction instantanée de l'entrée. On trouve aussi les processeurs causaux qui eux, sont orientés, et mettent en avant les facultés de stockage d'un élément. Il sont donc une fonction de l'état énergétique.

Le GIC possède quelques limitations. Il repose sur une approche causale, mais bien qu'il représente une information énergétique, il n'est pas basé sur une approche énergétique. Il peut se révéler très volumineux et ne permet pas de prendre en compte les éléments en causalité dérivée. En effet, les processeurs causaux sont exclusivement des processeur intégraux.

d) La Représentation Énergétique Macroscopique

La REM (Représentation Énergétique Macroscopique) a été développée au L2EP de Lille dans les années 2000 [Bou03]. Elle a été utilisée pour décrire des systèmes multi-machines multi-convertisseurs tels que le métro VAL [Ver07]. Elle repose sur une approche causale et énergétique qui met en avant les interactions entre les systèmes. Tout comme le GIC, elle ne traite que la causalité intégrale, et permet par des mécanismes d'inversion d'obtenir la structure de commande.

e) Les bond graphs

La méthode que nous avons retenue repose sur les bond graphs. Nous lui consacrerons donc le chapitre suivant.

2.3 Les bond graphs

2.3.1 Présentation et intérêt de l'approche

a) Historique

Le formalisme bond graph [BC98], [DT99] a été proposé par H. Paynter du MIT de Boston en 1961, puis formalisé par Karnopp et Rosenberg [KMR06] en 1975. Il a été depuis appliqué avec succès dans de nombreux domaines tels que la modélisation d'une chaîne de traction ferroviaire [Gan03], ou d'une pile à combustible [Sai04] ou encore du réseau de secours d'un avion [Lan06].

Cette approche est un niveau intermédiaire entre le système physique et sa description mathématique. De par sa rigueur et son universalité, le bond graph facilite grandement la mise en équations de n'importe quel système physique. Il repose sur

l'illustration des échanges énergétiques en utilisant des liens de puissance (ou bonds) entre sous-systèmes. La puissance étant une grandeur universelle, cette approche permet l'utilisation d'un même formalisme pour l'étude de problèmes multi-physiques. Cet échange énergétique est alors représenté de manière graphique.

b) Principe

En plus d'être unificatrice, la puissance, et ce, quel que soit le domaine d'étude, est toujours le produit de deux variables. Que ce soient les couples courant/tension, force/vitesse ou pression/débit, on retrouve toujours une variable dite généralisée d'*effort* et une variable généralisée de *flux* notées respectivement e et f . Un bond graph représente cet échange de puissance entre les éléments comme le montre la figure 3.1. La demi-flèche orientée permet de connaître le sens d'écoulement de la puissance qui va ici de A vers B .

$$A \begin{array}{c} \text{effort} \\ \longleftarrow \\ \text{flux} \end{array} B$$

FIGURE 3.1 – Transfert de puissance de A vers B

On peut également définir les variables généralisées d'énergie, en notant que l'énergie n'est rien d'autre que l'intégrale de la puissance. Ainsi, on définira le *moment généralisé* comme l'intégrale de l'effort généralisé (noté p) et le *déplacement généralisé*, l'intégrale du flux (noté q). On retrouvera dans ces variables les couples flux magnétique/charge électrostatique, impulsion/déplacement, ...

2.3.2 Description des éléments

Pour aller plus loin dans la description des bond graphs, nous allons à présent discuter leurs éléments constitutifs. Ces éléments peuvent être regroupés en quatre catégories. Ainsi, on distingue les sources de puissance, les éléments de stockage, ceux qui dissipent de la puissance, et enfin ceux qui transfèrent instantanément la puissance.

Les sources de puissance peuvent à leur tour, être classées en deux catégories. Ces éléments actifs qui fournissent de la puissance, peuvent être soit des sources de flux Sf , soit des sources d'effort Se .

Les éléments de stockage sont de deux types :

- Les éléments capacitifs C liant la variable d'effort e à la variable de déplacement q par une relation $\Phi_C(e, q) = 0$
- Les éléments inertiels I liant la variable de flux f à la variable de moment p par une relation $\Phi_I(f, p) = 0$

Ces éléments stockent sous forme d'énergie la puissance qu'ils reçoivent.

Les éléments dissipant de l'énergie sont notés R , et lient le flux et l'effort par une relation de la forme $\Phi_R(e, f) = 0$

Enfin, la dernière catégorie d'éléments permettant de décrire n'importe quel système physique sont les éléments de transfert de puissance :

- Les *jonctions* 0 imposent un effort identique dans chaque bond. Elles s'apparentent à la mise en parallèle dans un circuit électrique,

- Les *jonctions 1* imposent un flux identique dans chaque bond. Elles s'apparentent à la mise en série dans un circuit électrique,
- Les *transformateurs*, équivalents des transformateurs électriques. Il s'agit d'un composant à deux ports caractérisé par la double relation suivante : $f_2 = n \cdot f_1$ et $e_1 = n \cdot e_2$,
- Les *girateurs* sont proches des transformateurs mais leurs relations caractéristiques sont $e_2 = r \cdot f_1$ et $e_1 = r \cdot f_2$.

On peut également rajouter, les détecteurs D_f et D_e , qui agissent comme des capteurs et permettent de connaître la valeur du flux et de l'effort dans un bond.

2.3.3 La causalité dans le bond graph

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires pour construire un bond graph décrivant n'importe quel processus physique. Il manque cependant un point fondamental qui distingue le bond graph des autres outils de description : l'affectation de causalité. Jusqu'à présent, nous n'avons fait que décrire les échanges énergétiques entre les systèmes sans se soucier de qui impose quoi à qui. Le bond graph permet de faire apparaître explicitement les relations de cause à effet. Dans le cas d'un échange énergétique entre deux sous-systèmes A et B , deux cas sont possibles :

- A applique un flux sur B qui réagit par un effort sur A (représenté sur la figure 3.2)
- A impose un effort à B qui répond par un flux

Ces deux cas sont différenciés par un trait causal placé perpendiculairement sur le bond graph du côté de l'élément qui impose le flux.



FIGURE 3.2 – Représentation équivalente sous forme de bond graph et de schéma bloc d'un transfert de puissance de A vers B

2.3.4 L'affectation de la causalité

Pour obtenir notre bond graph causal, il ne restera plus alors qu'à affecter la causalité à chaque bond graph. Quelques règles de base sont là pour nous aider. Les sources de flux et d'effort ont une causalité qui doit obligatoirement être respectée. Pour les éléments de stockage, on distingue deux types de causalités. La causalité intégrale et la causalité dérivée. La causalité intégrale est celle qui a un sens physique, et qui conduit à une variable d'état. La causalité dérivée sera le moins employée possible. Elle correspond par exemple à la mise en série d'inductances qui partagent alors le même courant. Un élément C en causalité intégrale impose un effort. Le trait causal sera donc éloigné, alors que dans le cas d'un élément qui impose un flux, il sera proche de l'élément. Pour le cas des éléments R , la causalité est arbitraire et sera imposée par le reste du bond graph.

Enfin, les jonctions, elles, imposent des restrictions de causalité qui ne peuvent être violées. Une jonction de type 0, en garantissant par nature l'équité des efforts,

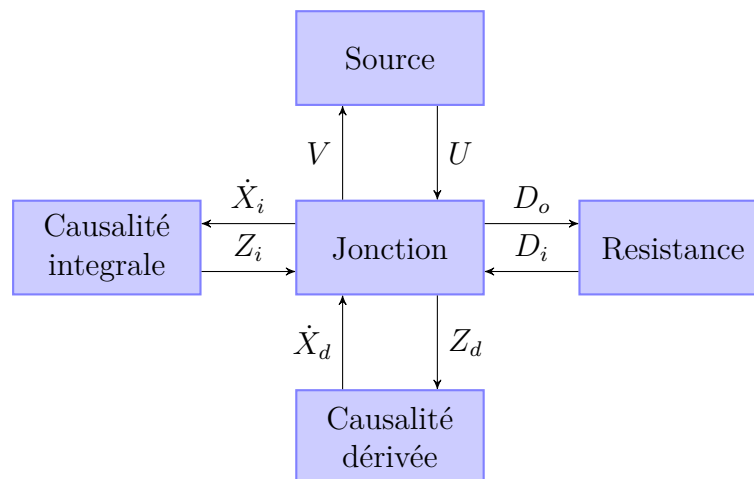


FIGURE 3.3 – Interconnexion des blocs du bond graph

impose l'existence d'un seul et unique trait causal à proximité, alors que pour une jonction 1, tous les traits causaux sauf un doivent être à proximité.

a) Procédure SCAP

Il existe un algorithme nommé SCAP [Bor92] permettant d'affecter la causalité à un graphe. Les séquences sont résumées ci-dessous :

1. Affecter la causalité obligatoire aux sources
2. Appliquer la causalité intégrale aux éléments de stockage C et I
3. Propager la causalité à travers les jonctions, transformateurs et éléments R
4. Itérer le point 3. En cas de conflit de causalité, rechercher l'élément I ou C coupable et le passer en causalité dérivée.

Si aucun élément n'est en causalité dérivée, alors le bond graph est causal et on peut obtenir une EDO rapidement. Par contre, si des éléments apparaissent en causalité dérivée, la procédure pour obtenir les équations sera plus longue.

Il se peut que des fautes de causalité apparaissent. Cela se traduit de deux manières : soit un élément de stockage doit passer en causalité dérivée, et aucune variable d'état ne doit lui être affectée, car elle est une combinaison linéaire des autres variables d'état du système, soit il existe une incompatibilité physique. Cette incompatibilité peut provenir soit d'une erreur de modélisation, soit d'un manque de connaissances dans le système à simuler.

2.3.5 Obtention des équations à partir du bond graph

Une fois la causalité affectée au sein du bond graph, nous pouvons obtenir une formulation implicite des équations. L'interconnexion des différentes variables mises en jeu est représentée sur la figure 3.3.

Les variables utilisées sont résumées ici :

- Le vecteur d'état X_i , composé des variables en causalité intégrale (p pour les éléments I et q pour les éléments C)
- Le vecteur d'état complémentaire Z_i composé des variables e pour les éléments C et f pour les éléments I

- Le vecteur de semi-état X_d , composé des variables en causalité dérivée (p pour les éléments I et q pour les éléments C)
- Le vecteur de semi-état complémentaire Z_d composé des variables e pour les éléments C et f pour les éléments I
- Les vecteurs D_i et D_o qui correspondent aux entrées et sorties du bloc des éléments résistifs
- Les vecteurs U et V , vecteurs des variables imposées par les sources et leur valeurs complémentaires.

À chaque lien est associé une variable de flux et une variable d'effort. On forme alors le vecteur $X = [E, F]^T$, regroupant les variables d'effort et de flux de tout le bond graph. Pour un graphe composé de n liens, le vecteur X sera de dimension $(2n \times 1)$.

Les jonctions imposent des contraintes sur les efforts et les flux. On peut exprimer ces contraintes de manière matricielle en faisant apparaître les matrices $S1_e$, $S0_e$, $S1_f$, $S0_f$, qui sont construites à partir du sens de transfert de puissance et de la causalité. Ce sont des matrices creuses, composées de 0 et de 1 qui assurent que chaque flux des bonds reliés à une jonction de type 1 avec le trait causal près de la jonction soit égal au flux du seul bond avec le trait causal éloigné. De plus, l'effort de ce bond sera égal à la somme des efforts des autres bonds, comptés négativement si la puissance sort de la jonction. Ces contraintes s'écrivent alors sous la forme (3.11).

$$X = \begin{bmatrix} S1_e + S0_e & 0 \\ 0 & S1_f + S0_f \end{bmatrix} X \quad (3.11)$$

Il en va de même pour exprimer les relations au niveau des éléments dissipatifs, qui sont eux séparés en une matrice de conductance et une de résistance selon la causalité de l'élément. On obtient une expression de la forme (3.12).

$$X = \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix} X \quad (3.12)$$

Ces matrices mettent en relation les vecteurs D_i et D_o . Selon la causalité de l'élément, l'entrée peut être un flux ou un effort.

A partir de la figure 3.3, et en intégrant les contraintes imposées par les jonctions (3.11) et sur les vecteurs D_i et D_o via (3.12), on peut exprimer une relation permettant de connaître tous les flux et tous les efforts dans les liens.

$$X = H (S_{Z_i} Z_i + S_{\dot{X}_d} \dot{X}_d + S_U U) \quad (3.13)$$

H permet de tenir compte des contraintes, et est donné par l'équation (3.14).

$$H = \left(I - \begin{bmatrix} S1_e + S0_e & R \\ G & S1_f + S0_f \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (3.14)$$

Cette matrice H existera tant qu'il n'y a pas de boucle causale de gain unitaire. Les vecteurs d'état et les vecteurs d'état complémentaire sont liés entre eux par la relation (3.15)

$$\begin{bmatrix} Z_i \\ Z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^{-1} & f \\ f^T & F_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_d \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Dans le cas où l'on néglige les inductances et capacités mutuelles, les sous-matrices f sont nulles, et les matrices F_i et F_d sont diagonales. Pour fixer les esprits et illustrer les valeurs des variables dans le cas du domaine électrotechnique, les variables d'état X seront les flux dans les inductances et les charges dans les capacités. Les variables d'état complémentaire seront alors respectivement les courants et les tensions. Les matrices F seront alors composées des inverses des valeurs des inductances et des capacités.

élément	X	Z	\dot{X}
I	Φ	f	e
C	q	e	f

TABLE 3.1 – Expression des différentes variables en causalité intégrale

A partir du vecteur X , on peut extraire, les sous-vecteurs $\dot{X}_i = S_{\dot{X}_i} X$ et $Z_d = S_{Z_d} X$. On aura de plus, $Z_i = S_{Z_i} X$ et $\dot{X}_d = S_{\dot{X}_d} X$

L'équation (3.13) se réécrit et fait apparaître une équation implicite (3.16).

$$\begin{bmatrix} I & -S_{\dot{X}_i} H S_{\dot{X}_d} \\ 0 & S_{Z_d} H S_{\dot{X}_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{X}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\dot{X}_i} H S_{Z_i} & 0 \\ S_{Z_d} H S_{Z_i} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ Z_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{\dot{X}_i} H S_U \\ S_{Z_d} H S_U \end{bmatrix} U \quad (3.16)$$

Dans le cas où il n'y a pas de variable en causalité dérivée, on obtient directement une EDO. Dans le cas contraire, nous sommes en présence d'une EDA car le terme $S_{Z_d} H S_{\dot{X}_d}$ est nul. La deuxième ligne de l'équation (3.16) conduit à l'équation algébrique (3.17).

$$Z_d = S_{Z_d} H (S_{Z_i} Z_i + S_U U) \quad (3.17)$$

En supposant que la variable d'entrée est constante ($\dot{U} = 0$) et en dérivant l'équation (3.17) on peut écrire l'équation (3.18) liant les variables d'état et les pseudo-variables d'état en utilisant la relation (3.15).

$$\dot{X}_d = F_d S_{Z_d} H S_{Z_i} F_i^{-1} \dot{X}_i \quad (3.18)$$

En réinjectant l'équation (3.18) dans le système (3.16), on peut au final écrire :

$$\left(I - S_{\dot{X}_i} H S_{\dot{X}_d} F_d S_{Z_d} H S_{Z_i} F_i \right) \dot{X}_i = S_{\dot{X}_i} H (S_{Z_i} Z_i + S_U U) \quad (3.19)$$

Enfin, si on utilise les variables d'état complémentaire, le système d'état (3.19) se réécrit :

$$\dot{Z}_i = K^{-1} S_{\dot{X}_i} H (S_{Z_i} Z_i + S_U U) \quad (3.20)$$

où K sera donné par l'équation (3.21).

$$K = \left(F_i - S_{\dot{X}_i} H S_{\dot{X}_d} F_d S_{Z_d} H S_{Z_i} \right) \quad (3.21)$$

Le système d'état s'écrira sous forme compacte :

$$\dot{Z}_i = A Z_i + B U \quad (3.22)$$

Les matrices d'état de l'équation (3.22) sont données de manière immédiate par (3.23).

$$\begin{aligned} A &= K^{-1}S_{\dot{X}_i}HS_{Z_i} \\ B &= K^{-1}S_{\dot{X}_i}HS_U \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cette représentation d'état ne garde que les termes en causalité intégrale qui sont les seuls états du système. Si on souhaite connaître la valeur des flux et des efforts dans chaque lien, il suffit d'utiliser l'équation (3.13), qui, couplée avec l'équation (3.18) et l'équation (3.22), permet d'obtenir :

$$X = CZ_i + DU \quad (3.24)$$

avec

$$\begin{aligned} C &= H \left(S_{Z_i} + S_{\dot{X}_d}F_dS_{Z_d}HS_{Z_i}A \right) \\ D &= H \left(S_U + S_{\dot{X}_d}F_dS_{Z_d}HS_{Z_i}B \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

En connaissant la valeur de toutes les variables des liens, il est facile d'avoir accès aux variables intéressantes en plaçant des détecteurs sur les liens appropriés. En notant Y le vecteur de sortie, on obtient (3.26).

$$Y = \begin{bmatrix} S_{D_e} & 0 \\ 0 & S_{D_f} \end{bmatrix} X \quad (3.26)$$

Les matrices S_{D_e} et S_{D_f} sont des matrices de dimension (nb de bonds \times nb de sorties), composées de 0, avec un 1 sur la ligne du lien dont on veut connaître l'effort ou le flux.

2.3.6 Conclusion sur l'approche bond graph

Nous clôturons ici la méthode qui sera utilisée par la suite pour décrire un système physique. Grâce au formalisme bond graph, nous avons vu qu'il était possible d'établir le modèle dynamique sous la forme d'une représentation d'état, et cela même dans le cas de systèmes physiques possédant des composants en causalité dérivée, comme un réseau de tramways.

Il est également possible de calculer la valeur à l'équilibre directement à partir de la représentation d'état en résolvant $\dot{x} = 0$. On obtient alors $\hat{x} = -A^{-1}BU = G_{dc}U$. La matrice de gain statique G_{dc} peut se calculer directement à partir de (3.27) et on obtient :

$$G_{dc} = [S_{\dot{X}_i}HS_{Z_i}]^{-1}S_{\dot{X}_i}HS_U \quad (3.27)$$

On observe que cette matrice de gain ne dépend que des jonctions et des résistances du circuit. On retrouve ainsi que les éléments réactifs n'interviennent à aucun moment dans les valeurs à l'équilibre.

2.3.7 Calcul des pertes

La connaissance des flux et des efforts dans chaque lien autorise le calcul des pertes dans le système. Ces pertes ont lieu au sein des éléments résistifs et ils sont donnés par la forme quadratique suivante :

$$P = X^T \mathcal{R} X \quad (3.28)$$

où

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Les matrices R et G sont les mêmes que celles utilisées dans l'équation (3.12) et X est donné par (3.24).

Les matrices G et R étant des matrices diagonales contenant des éléments positifs ou nuls, la forme quadratique (3.28) est définie positive. On peut de plus effectuer un changement de variable pour utiliser les variables d'état en utilisant les équations (3.25) et (3.28).

On obtient alors une forme quadratique en fonction des variables d'état et des vecteurs d'entrée du système permettant d'exprimer les pertes :

$$P = Z_i^T Q Z_i + 2U^T N Z_i + U^T R U \quad (3.30)$$

avec $Q = C^T \mathcal{R} C$, $R = D^T \mathcal{R} D$ et $N = C^T \mathcal{R} D$. Chacune de ces matrices est symétrique et définie positive.

2.3.8 Calcul des sensibilités paramétriques

Le modèle d'état est un allié puissant qui permet de déterminer la stabilité d'un système et peut servir à dimensionner. Il est souvent utile de connaître la sensibilité des matrices d'état par rapport à un paramètre du système. Cela permet par la suite de calculer des gradients nécessaires aux algorithmes d'optimisation, ou de connaître le déplacement des valeurs propres dans le plan complexe en fonction de la variation d'un paramètre.

A partir de la proposition 1, il est possible de calculer la sensibilité des matrices d'état par rapport à un paramètre a .

Proposition 1. *La dérivée de l'inverse d'une matrice carrée A inversible est donnée par :*

$$\frac{dA^{-1}}{da} = -A^{-1} \frac{dA}{da} A^{-1}$$

Prenons par exemple la matrice dynamique A , bien que le calcul décrit ici puisse s'appliquer pour toute matrice. On considère comme paramètres variables, les éléments réactifs en causalité intégrale z_i ou dérivée z_d , et les éléments résistifs r .

$$\frac{\partial A}{\partial a} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial a} K^{-1} S_{\dot{X}_i} H S_{Z_i} + K^{-1} S_{\dot{X}_i} \frac{\partial H}{\partial a} S_{Z_i} \quad (3.31)$$

La valeur de ces dérivées partielles dépend des éléments supposés variables. Si il s'agit d'un élément réactif, alors $\frac{\partial H}{\partial a}$ sera nul, et la dérivée de K est donnée par :

$$\frac{\partial K}{\partial z_i} = \frac{\partial F_i}{\partial z_i} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial K}{\partial z_d} = -S_{\dot{x}_i} H S_{\dot{x}_d} \frac{\partial F_d}{\partial z_d} S_{z_d} H S_{z_i} \quad (3.33)$$

Les matrices F_i et F_d étant diagonales avec l'élément i à la i -ème position, le calcul de ces dérivées est immédiat. Dans le cas des éléments résistifs, le calcul est semblable, mais plus compliqué.

Nous pouvons ainsi avoir accès à l'influence d'un paramètre sur l'état du système.

2.3.9 Exemple d'application de la méthode bond graph

Nous allons à présent illustrer la méthode d'obtention des équations d'état sur le circuit simple de la figure 3.4. Ce circuit possède seulement trois inductances. Cependant, on voit que les courants parcourant ces inductances sont reliés rigidement entre eux par le nœud d'interconnexion. Les trois courants peuvent alors s'exprimer à partir de deux seulement. Il y a donc deux et non pas trois variables d'état comme on pourrait imaginer.

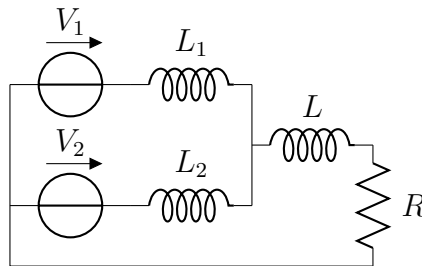


FIGURE 3.4 – Exemple d'application de la méthodologie bond graph sur un nœud inductif

La traduction du circuit électrique sous forme de bond graph est donnée figure 3.5.

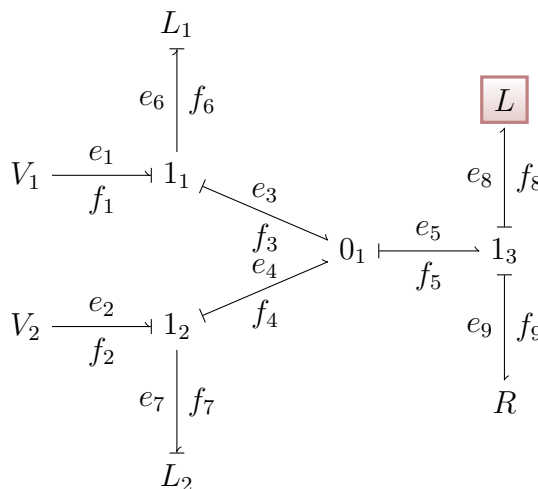


FIGURE 3.5 – Bond graph causal du schéma figure 3.4

Le bond graph traduit cet état de fait. Après analyse de causalité, on voit en effet apparaître une inductance en causalité dérivée. Si nous procédons à la mise

en équations, en suivant la méthode décrite dans cette section, nous obtenons les résultats suivants :

$$A = \begin{bmatrix} -R/l_2 & -R/l_2 \\ -R/l_1 & -R/l_1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

et

$$B = \begin{bmatrix} 1/l + 1/l_2 & -1/l \\ -1/l & 1/l + 1/l_1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Où le vecteur d'état est composé des courants des deux inductances L_1 et L_2 , et où le vecteur d'entrée est celui des tensions V_1 et V_2 . Les inductances sont calculées par (3.36).

$$l_i = \frac{L_1 L_2 + L L_1 + L L_2}{L_i} \quad (3.36)$$

Le calcul de ces matrices d'état n'est pas trivial, et même un cas simple comme celui-ci peut être source d'erreur, si il est effectué à la main. On voit de plus apparaître les termes de couplage très important entre les dynamiques.

3 Interconnexion des systèmes d'état

Grâce au bond graph, nous sommes capables d'obtenir la représentation d'état d'un système. Nous allons à présent détailler comment nous pouvons interconnecter ces différents sous-systèmes pour en former un plus grand. La méthodologie reposera sur l'utilisation des transformées linéaires fractionnaires.

La notion de système d'état peut être étendue. Les entrées et sorties peuvent être partitionnées en deux classes, et par la suite nous emploierons les notations suivantes.

w : Entrées exogènes

u : Entrées endogènes

z : Sorties exogènes

y : Sorties endogènes

Un système d'état augmenté sera décrit par l'équation (3.37). Le vecteur des entrées exogènes représentera, en règle générale, la consigne et les perturbations, alors que le vecteur d'entrées endogènes correspondra à l'action du correcteur. De même, les sorties endogènes seront les sorties mesurées par le correcteur pour établir la commande.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (3.37)$$

La Transformation Linéaire Fractionnaire [SP05] (LFT : Linéaire Fractional Transformation) est une méthode de représentation des systèmes dynamiques. Soit P une matrice de dimension $(n_1 + n_2) \times (m_1 + m_2)$ et K et Δ deux matrices de dimension compatible $(m_2 \times n_2)$ et $(m_1 \times n_1)$

Le système d'équation (3.38) peut alors être mis sous une forme LFT représentée par la figure 3.6.

$$\begin{cases} z = P_{11}w + P_{12}u \\ y = P_{21}w + P_{22}u \\ u = Ky \end{cases} \quad (3.38)$$

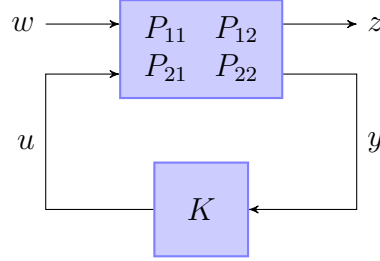


FIGURE 3.6 – Problème standard général

On appelle \mathcal{F}_l la transformée linéaire fractionnaire inférieure, qui associe aux systèmes P et K celui défini par l'équation (3.39).

$$\mathcal{F}_l(P, K) = P_{11} + P_{12}(I - KP_{22})^{-1}KP_{21} \quad (3.39)$$

De même, on définit la LFT supérieure de deux systèmes :

$$\mathcal{F}_u(P, \Delta) = P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} + P_{22} \quad (3.40)$$

Cette notion de transformée fractionnaire peut être étendue, on parlera alors du produit étoilé de Redheffer, décrit figure 3.7.

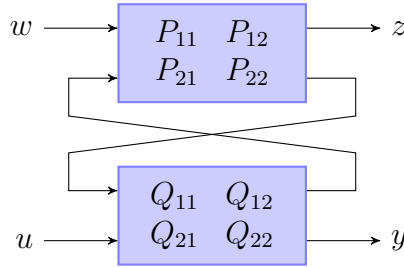


FIGURE 3.7 – Produit étoilé de Redheffer

Le produit en étoile $R = P \star Q$ renvoie une matrice partitionnée dont les termes sont donnés en (3.41) :

$$\begin{cases} R_{11} = P_{11} + P_{12}Q_{11}(I - P_{22}Q_{11})^{-1}P_{21} \\ R_{12} = P_{12}(I - Q_{11}P_{22})^{-1}Q_{12} \\ R_{21} = Q_{21}(I - P_{22}Q_{11})^{-1}P_{21} \\ R_{22} = Q_{22} + Q_{21}P_{22}(I - Q_{11}P_{22})^{-1}Q_{12} \end{cases} \quad (3.41)$$

On peut également définir les opérations de base en terme de LFT, comme l'addition, la multiplication, la concaténation, la juxtaposition ou encore l'inversion [Zin05]. Les opérations utilisées par la suite sont décrites ci-dessous.

Proposition 2 (Inverse d'une LFT). *Considérons la LFT supérieure $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$. Si M_{22} est inversible alors :*

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta)^{-1} = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21} & M_{12}M_{22}^{-1} & \\ -M_{22}^{-1}M_{21} & M_{22}^{-1} & \\ \hline & & \Delta \end{array} \right], \Delta \right) \quad (3.42)$$

Proposition 3 (Multiplication d'une LFT par des matrices). *Considérons la LFT supérieure $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$. Soit W_1 et W_2 deux matrices de tailles appropriées.*

$$W_1 \mathcal{F}_u(M, \Delta) W_2 = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & M_{12}W_2 & \\ W_1M_{21} & W_1M_{22}W_2 & \\ \hline & & \Delta \end{array} \right], \Delta \right) \quad (3.43)$$

Proposition 4 (Multiplication de deux LFT). *Considérons les LFT supérieures $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$ et $\mathcal{F}_u(M', \Delta')$. Leur produit est alors donné par*

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta) \times \mathcal{F}_u(M', \Delta') = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & M_{12}M'_{21} & M_{12}M'_{22} \\ 0 & M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22}M'_{21} & M_{22}M'_{22} \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta' \end{array} \right] \right) \quad (3.44)$$

Proposition 5 (Somme de deux LFT). *Considérons les LFT supérieures $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$ et $\mathcal{F}_u(M', \Delta')$. Leur somme est alors donnée par*

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta) + \mathcal{F}_u(M', \Delta') = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & M'_{11} & M'_{12} \\ \hline M_{21} & M'_{21} & M_{22} + M'_{22} \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta' \end{array} \right] \right) \quad (3.45)$$

Enfin, on notera que la dérivé d'une LFT par rapport à un élément δ_i , contenu uniquement dans Δ s'exprime :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_u(M, \Delta)}{\partial \delta_i} = M_{21} \left(I + \Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{11} \right) \frac{\partial \Delta}{\partial \delta_i} (I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} \quad (3.46)$$

4 Modélisation dynamique des convertisseurs de puissance

Dans la section 6.2, nous avons déjà présenté une approche permettant d'obtenir un modèle statique d'un convertisseur de puissance. L'approche était basée, on le rappelle, sur un modèle simplifié de la cellule de commutation. Cette dernière a été remplacée par un transformateur DC équivalent, ce qui permet d'éviter l'étude des commutations.

Afin de définir le bloc de commutation, chaque interrupteur est modélisé par un interrupteur idéal. Dans le bond graph cela se traduit par une source de courant nul pour un interrupteur ouvert, et par une source de tension nulle pour un interrupteur fermé.

En effectuant la procédure SCAP pour chaque configuration possible des interrupteurs, on peut définir la cellule de commutation comme l'ensemble des éléments qui changent de causalité durant les phases de fonctionnement du convertisseur.

Une fois la cellule de commutation décrite, (qui est généralement composée des interrupteurs, mais aussi des inductances parasites présentes dans la maille de commutation), il est nécessaire d'intégrer à la cellule de commutation, les éléments R liés à une jonction interne au bloc de commutation [AM05]

De part et d'autre de la cellule de commutation, on peut définir deux sous-systèmes dynamiques. La cellule de commutation va alors assurer l'interconnexion entre ces sous-systèmes, interconnexion qui sera variable dans le temps. Les parties dynamiques sont des systèmes LTI, il est possible d'en obtenir une représentation d'état à partir de la section 2.2. Les interconnexions entre sous-systèmes peuvent, elles, être modélisées grâce aux LFT de la section 3.

La difficulté restante va être de tenir compte du caractère variant de la cellule de commutation. Plusieurs techniques seront alors détaillées, permettant d'obtenir des modèles plus ou moins complexes d'un convertisseur de puissance.

A titre d'illustration, nous détaillerons les différents modèles sur l'exemple du hacheur série.

4.1 Modèle topologique sous forme LFT des convertisseurs de puissance

Un modèle topologique est un modèle grand signal, non linéaire, qui permet de tirer le plus d'informations d'un convertisseur. La fonction de commutation prend des valeurs discrètes, variant dans le temps, ce qui permet d'étudier la dynamique et les harmoniques. Les commutations se déroulant à haute fréquence, ce modèle reste long à simuler et ne permet pas une analyse de stabilité, ou un dimensionnement. Il reste cependant un modèle utile pour la pré-validation toujours plus rapide qu'un modèle circuit détaillé et est surtout l'étape obligatoire permettant de construire d'autres modèles dédiés à la commande.

Avant de décrire le cas général, la méthodologie permettant d'obtenir le modèle topologique d'un convertisseur de puissance est appliquée au hacheur série.

4.1.1 Exemple du hacheur série

Au travers de cet exemple, nous allons détailler les différentes étapes permettant de construire le système d'état généralisé et d'en vérifier la causalité, afin de trouver le modèle LFT du système étudié.

a) Isolation de la cellule de commutation

La première étape consiste à isoler la cellule de commutation, et à repérer les sous-systèmes interconnectés par cette cellule de commutation. La figure 3.8 illustre cette séparation sur l'exemple d'un hacheur série avec ses filtres d'entrée et de sortie.

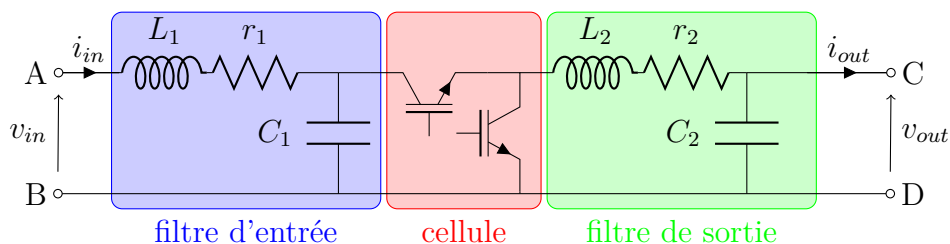


FIGURE 3.8 – Hacheur série avec ses filtres

Ce hacheur peut être décomposé en trois sous-systèmes. Le filtre d'entrée en bleu, le filtre de sortie en vert, et enfin la cellule de commutation en rouge. On a donc deux sous-systèmes continus, qui sont interconnectés entre eux par un système discontinu. Les notations propres à la cellule de commutation sont les mêmes que celles employées sur la figure 2.15.

La figure 3.9, illustre ces différents sous-systèmes avec la méthodologie bond graph. Les figures 3.8 et 3.9 sont identiques.

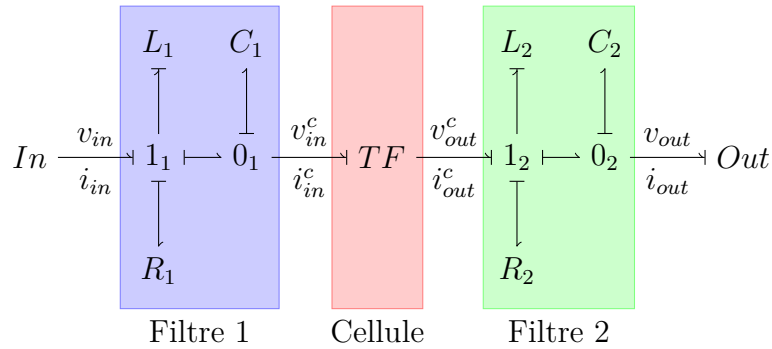


FIGURE 3.9 – Bond graph du hacheur série avec ses filtres

La cellule de commutation est ici représentée par un transformateur TF . Bien que la cellule de commutation soit non linéaire, le modèle du transformateur stipule que la causalité en entrée du bloc de commutation est la même que celle en sortie. Ce modèle peut aussi intégrer les pertes, et les inductances de maille.

b) Modélisation des sous-systèmes linéaires

A partir du bond graph de chaque sous-système de la figure 3.9, il est possible d'obtenir les équations d'état.

La représentation d'état d'un filtre LC est donnée par l'équation (3.47).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_l \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_l \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

c) Définition des variables d'interconnexion

L'étape suivante consiste donc à identifier clairement les variables d'entrée de chaque système, celles de sortie et celles qui sont interconnectées entre elles. La figure 3.9 permet d'identifier clairement ces variables.

En utilisant les notations du paragraphe 3, on obtient le tableau 3.2

Ces deux systèmes vont alors interagir entre eux via les variables endogènes u et y . Sous forme LFT, ces interconnexions peuvent se représenter par la figure 3.10.

Sous-système	w	u	z	y
Filtre entrée	v_{in}	i_{in}^c	i_{in}	v_{in}^c
Filtre sortie	i_{out}	v_{out}^c	v_{out}	i_{out}^c

TABLE 3.2 – Variables d'entrée et de sortie des filtres

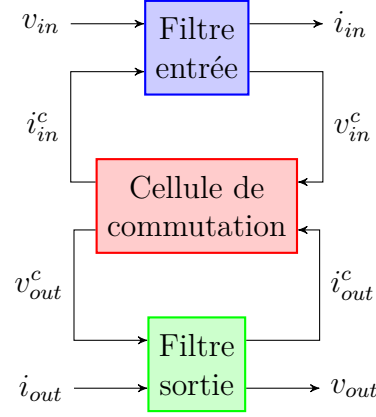


FIGURE 3.10 – Interconnexion entre les sous-systèmes du hacheur

d) Ecriture du système d'état généralisé

A partir du système d'état d'un filtre LC donné par l'équation (3.47), et de la définition des variables du tableau 3.2, il est possible d'obtenir un système d'état généralisé du même type que celui donné par l'équation (3.37).

On obtient alors pour le filtre d'entrée le système (3.48) :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{i}_{l1} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/C_1 \\ -1/L_1 & -r_1/L_1 \end{bmatrix}}_{A^{in}} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_1 \end{bmatrix}}_{B_1^{in}} v_{in} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1/C_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2^{in}} i_{in}^c \\
 i_{in} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_1^{in}} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{11}^{in}} v_{in} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{12}^{in}} i_{in}^c \\
 v_{in}^c &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_2^{in}} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{21}^{in}} v_{in} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{22}^{in}} i_{in}^c
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

En procédant de manière semblable, on trouve pour le filtre de sortie l'équation (3.49) :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{v}_{c2} \\ \dot{i}_{l2} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/C_2 \\ -1/L_2 & -r_2/L_2 \end{bmatrix}}_{A^{out}} \begin{bmatrix} v_{c2} \\ i_{l2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1/C_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1^{out}} i_{out} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_2 \end{bmatrix}}_{B_2^{out}} v_{out}^c \\
 v_{out} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1^{out}} \begin{bmatrix} v_{c2} \\ i_{l2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{11}^{out}} i_{out} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{12}^{out}} v_{out}^c \\
 i_{out}^c &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_2^{out}} \begin{bmatrix} v_{c2} \\ i_{l2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{21}^{out}} i_{out} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D_{22}^{out}} v_{out}^c
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

e) Modélisation de la cellule de commutation

Dans le cas d'interrupteurs idéaux, la cellule de commutation est modélisée grâce à sa fonction de commutation h par l'équation (2.31), liant les variables endogènes du tableau 3.2. La fonction de commutation h est, on le rappelle, une fonction discrète, et le transformateur TF devient un transformateur modulé par h .

Le cas des interrupteurs réels a également été traité dans la section 6.2.3 du chapitre 2, et un modèle moyen a été développé pour prendre en compte les pertes moyennes dans la cellule.

f) Vérification la causalité de l'ensemble

Avant de procéder à l'assemblage de l'ensemble, il est nécessaire de vérifier la compatibilité des sous-systèmes. Par compatibilité, on entend le respect de la causalité. Le bond graph de la figure 3.9 nous rappelle que pour garder une causalité intégrale, la source connectée au lien 1 doit imposer un effort, et celle reliée au bond 6 doit imposer un flux.

La causalité ne change pas à travers la cellule de commutation. La capacité C_1 va donc imposer sa tension, même après la cellule de commutation. Le filtre de sortie doit donc supporter une source de tension en entrée, ce qui est bien le cas (le lien 1 attend une source d'effort). De même, l'inductance du filtre de sortie va imposer un courant, que la capacité du filtre d'entrée acceptera grâce à la causalité du lien 6.

g) Ecriture le modèle LFT du hacheur

En reprenant la figure 3.12 dans le cas de notre hacheur, dans laquelle on intégrera les modèles du filtre d'entrée (équations (3.48)), du filtre de sortie (équations (3.49)) et de la cellule de commutation (équation (2.31)), on obtient la forme définie par la figure 3.11. Dans le cas du hacheur réel, le modèle de la cellule est décrit par (2.45).

Ce système peut être concaténé pour ne former plus que deux blocs. Le premier contiendra toutes les parties continues, le second, les parties discontinues comme le montre la figure 3.12.

Afin d'obtenir un modèle sous forme de représentation d'état, il suffit à présent de calculer la LFT. Mais avant d'aller plus loin, remarquons que la matrice D_{22} est toujours nulle, ce qui permet de simplifier grandement les calculs.

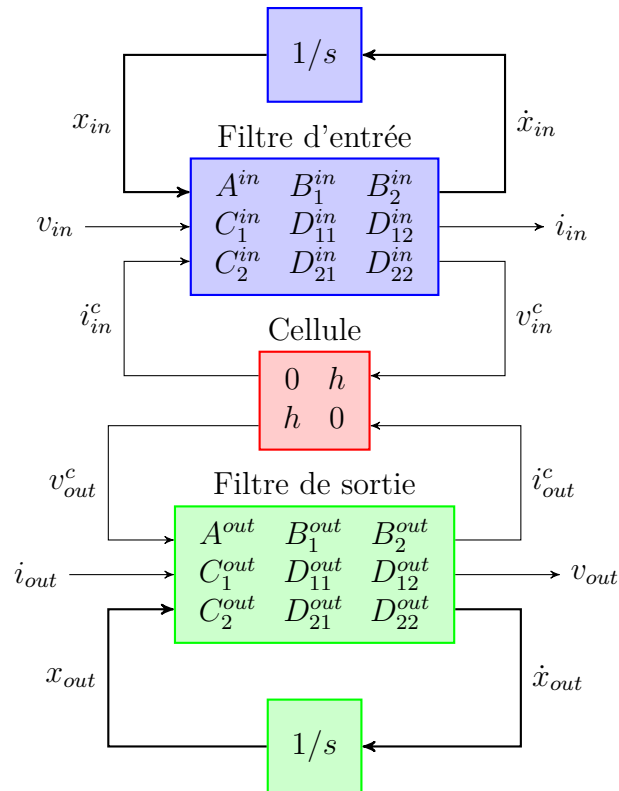


FIGURE 3.11 – Interconnexion détaillée entre les sous-systèmes du hacheur

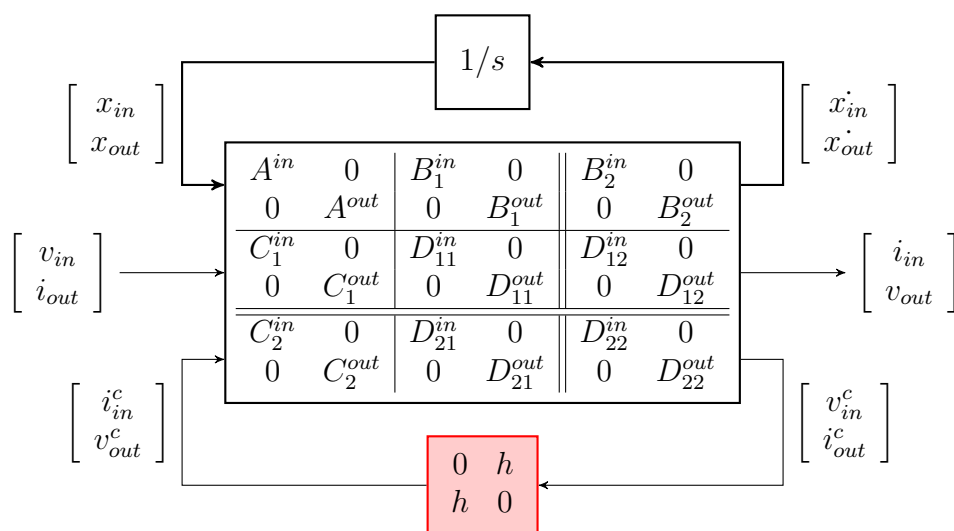


FIGURE 3.12 – Système concaténé

Si D_{22} n'est pas nulle, cela implique que la tension en entrée du bloc de commutation dépend *directement* du courant consommé par la cellule de commutation, ou que le courant de sortie est impacté par la tension de sortie.

Cela ne se produit que dans le cas où une résistance est placée en série ou en parallèle avec les interrupteurs, ou si l'ESR de la capacité C_1 n'est pas négligeable. Or, la condition nécessaire permettant d'isoler la cellule de commutation stipule que la cellule de commutation doit englober les résistances liées à une jonction interne au bloc de commutation.

Il en résulte que les ESR, ou les résistances séries modélisant les pertes, sont directement intégrées dans la matrice modélisant la cellule de commutation, et ne peuvent pas par conséquent être présentes dans D_{22} .

Le calcul de la transformée linéaire fractionnaire inférieure (3.39) permet alors d'obtenir la représentation d'état (3.50) pour le hacheur.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{i}_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A^{in} & B_2^{in} h C_2^{out} & B_1^{in} & B_2^{in} h D_{21}^{out} \\ B_2^{out} h C_2^{in} & A^{out} & B_2^{out} h D_{21}^{in} & B_1^{out} \\ \hline C_1^{in} & D_{12}^{in} h C_2^{out} & D_{11}^{in} & D_{12}^{in} h D_{21}^{out} \\ D_{12}^{out} h C_2^{in} & C_1^{out} & D_{12}^{out} h D_{21}^{in} & D_{11}^{out} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

x_1 et x_2 , chacun de dimension (2×1) représentent les variables d'état des deux sous-systèmes. Des termes non-diagonaux apparaissent. Ils correspondent aux interactions entre les deux filtres. En tenant compte des valeurs de ces matrices, la matrice d'état définie par l'équation (3.50) peut être écrite :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{i}_{l1} \\ \dot{v}_{c2} \\ \dot{i}_{l2} \\ \dot{i}_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{r_2}{L_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \\ v_{c2} \\ i_{l2} \\ v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} + h \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \\ v_{c2} \\ i_{l2} \\ v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

On retrouve sur la première ligne une partie purement linéaire alors que la deuxième ligne reprend les termes de couplage entre les filtres, termes qui sont non linéaires. On note que lorsque la fonction de commutation est nulle, il n'y a plus de couplage entre les filtres, ces derniers évoluent indépendamment l'un de l'autre, alors que dans le cas contraire, il y a bien un couplage.

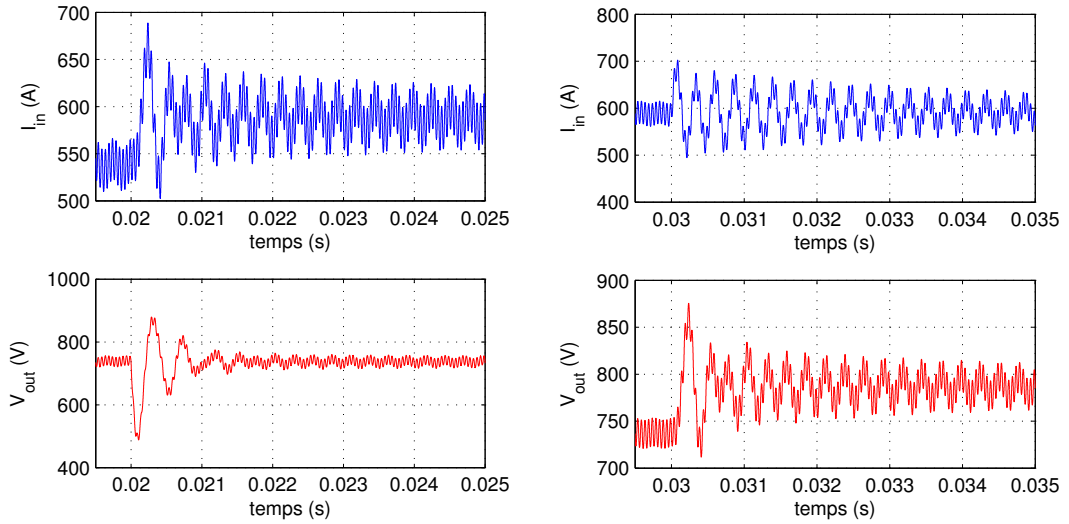
h) Validation du modèle topologique

Afin de valider notre approche, une simulation temporelle est effectuée. Elle permet de comparer les résultats entre le modèle topologique calculé par la formule

(3.51), et une simulation classique temporelle effectuée ici sur Simulink de Matlab[®], grâce à la Toolbox SimPowerSystems. Le hacheur simulé sera celui de la figure 3.8. Les paramètres des filtres sont ceux données par le tableau A.2 et le rapport cyclique est $\alpha = 0.5$.

La charge de notre hacheur est une source de courant I_{out} en parallèle avec une résistance de 10Ω . Cette résistance a été rajoutée dans le modèle de la charge pour créer de l'amortissement lors des transitoires, le but étant de valider le modèle et non de le commander.

Les figures 3.13a et 3.13b sont respectivement la réponse à un échelon sur le courant de sortie à $t = 0.02s$ et sur la tension d'entrée à $t = 0.03s$. En bleu, on retrouve le courant en entrée, alors qu'en rouge est tracée la tension en sortie du hacheur.



(a) Réponse à un échelon de 100A sur I_{out} (b) Réponse à un échelon de 100V sur V_{in}

FIGURE 3.13 – Réponse transitoire de la tension de sortie et du courant d'entrée

Sur ces courbes, sont superposés les résultats du modèle topologique et du modèle LFT. On observe tout simplement une superposition parfaite, qui valide notre démarche. Le modèle permet bien de représenter les harmoniques générés par la cellule de commutation.

4.1.2 Cas général

Dans le cas général, la procédure permettant d'obtenir le modèle topologique est semblable. Une fois la cellule de commutation convenablement décrite et les différents sous-systèmes isolés, il est possible d'obtenir le modèle topologique en suivant les mêmes étapes que pour le hacheur série. L'équation (3.50) obtenue dans ce cas peut être étendue à tout système multi-convertisseurs ou système à topologie variable par l'équation (3.52) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} [M(\mathbf{h})] \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Dans l'équation (3.52), chaque matrice est une matrice diagonale par bloc, où chaque bloc représente un sous-système. On aura par exemple, dans le cas d'un système composé de n sous-systèmes interconnectés :

$$A = \text{diag}(A^1, A^2, \dots, A^n) = \begin{bmatrix} A^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A^n \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

De même, les vecteurs d'état et de sortie x et y seront formés par la juxtaposition des vecteurs de chaque sous-système.

La matrice $M(\mathbf{h})$ correspond à la matrice d'interconnexion. On voit qu'il s'agit d'une matrice paramétrée par le vecteur \mathbf{h} , qui correspond au vecteur de commutation qui traduit l'état de chaque cellule de commutation. Dans le cas d'un convertisseur, cette matrice d'interconnexion s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire donnée par (3.54) tout comme celle donnée en (2.40).

$$M(\mathbf{h}) = M_0 + \sum_{i=1}^p h_i M_i \quad (3.54)$$

La matrice M_0 est une matrice constante. Elle correspond aux interconnexions permanentes, comme la mise en série de sous-systèmes, et englobe les pertes. Les matrices M_i correspondent à l'état des interconnexions quand l'ordre de commande de la cellule de commutation i est à l'état haut. Dans certains cas, la fonction à valeurs discrètes h peut prendre des valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ au lieu de $\{0, 1\}$.

Une matrice $M(\mathbf{h})$ peut donc être calculée pour chaque combinaison envisageable du vecteur de commutation. Il est possible de calculer la représentation d'état du système global pour une topologie donnée.

On remarquera que le système d'équations d'état ainsi obtenu est un système bilinéaire du type :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^p h_i \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} [M_i] \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

avec, par exemple $\mathcal{A} = A + B_2 M_0 C_2$.

Le modèle obtenu est cependant un modèle hybride comportant une partie continue et une partie discrète. Un tel modèle n'est directement utilisable que pour faire des simulations temporelles. Il est alors impossible de connaître le régime permanent, ou d'étudier la stabilité par une approche directe.

4.1.3 Application sur le réseau de tramways

a) Présentation du réseau

Le réseau de la figure 2.25 a déjà été étudié de manière statique. On se propose de construire son modèle dynamique. Les modèles dynamiques de chaque élément du réseau ainsi constitué sont donnés en annexe A. On suppose que trois tramways sont présents sur le réseau et qu'ils ne possèdent pas de moyen de stockage. Le tableau 3.3 résume la position et le courant consommé par les tramways.

	T_1	T_2	T_3
PK (m)	100	600	1200
I_t (A)	1000	500	-700

TABLE 3.3 – Position et courant consommé par les tramways

Pour chaque élément du réseau décrit par son circuit dans l'annexe A, on peut écrire un bond graph le représentant. Les variables d'entrée du système seront le courant du tramway I_t et la tension à vide des sous-stations E représentées respectivement par une source de flux et une source d'effort.

Conformément à la méthodologie développée sur le hacheur série, la première étape consiste à isoler les cellules de commutation, et à séparer les sous-systèmes qu'elles interconnectent.

Le réseau est composé de 5 hacheurs, il y a donc 5 cellules de commutation. Cependant, ces hacheurs sont en parallèle, ils n'interconnectent entre eux que deux sous-systèmes : le réseau HVDC et le système LVDC.

La figure 3.14 est le parallèle de la figure 3.9 qui traitait le cas du hacheur série. Les bond graphs des sous-systèmes ne sont pas détaillés et seules les interconnexions affectées de leur causalité sont mises en avant.

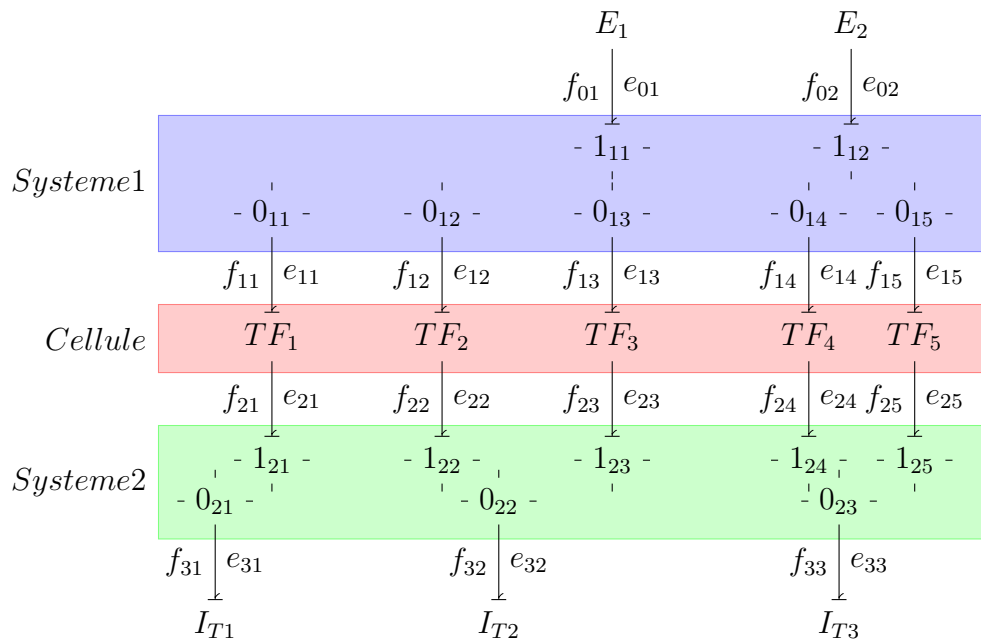


FIGURE 3.14 – Bond graph simplifié du réseau de tramways

Les cellules de commutation sont notées TF_i . Elles relient entre eux les deux sous-systèmes en bleu et en vert.

Le premier sous-système en bleu représente le réseau HVDC. Il intègre les filtres des sous-stations, les feeders et les filtres d'entrée des hacheurs. Ses variables d'entrée exogènes w sont les tensions à vide des sous-stations (e_{0i}), alors que ses variables d'entrées endogènes u sont les courants commutés par les hacheurs f_{1i} . Ce sous-réseau est entièrement décrit par un bond graph, qui est généré automatiquement

en fonction du nombre de sous-stations et de hacheurs, ainsi qu'à partir de leur position respective. On peut donc écrire la représentation d'état de ce sous-système en faisant apparaître les différentes variables d'interconnexion.

Le second sous-système en vert correspond à la partie LVDC. Il est composé des filtres de sortie des hacheurs, de la LAC et des filtres du tramway. Ce sous-système interconnecte les courants des tramways, et les tensions des hacheurs. Ses variables d'entrée exogènes w sont les courants consommés par les tramways (f_{3i}) et ses variables d'entrées endogènes u sont les tensions des hacheurs e_{2i} .

Les inductances de la LAC et des feeders ne sont pas négligeables de par la longueur du réseau. Avec les inductances des filtres des tramways, et celles lissant le courant des redresseurs, elles formeront des nœuds inductifs. Il en résulte que comme dans l'exemple de la figure 3.4, certaines variables d'état seront en causalité dérivée.

On notera que la causalité a été affectée sur ce bond graph, permettant de vérifier que le réseau est physiquement réaliste et que la cellule de commutation est bien définie.

A partir de la description de chaque sous-système et des interconnexions qu'il a avec ses voisins, le modèle topologique du réseau peut être automatiquement représenté sous la forme LFT de la figure 3.15.

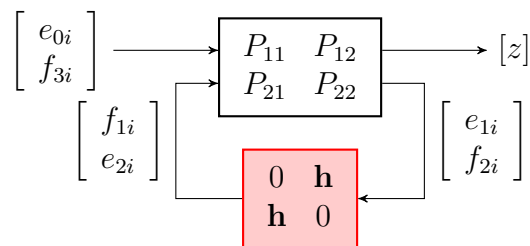


FIGURE 3.15 – Modèle topologique du réseau de tramways sous forme LFT

Le vecteur \mathbf{h} est de dimension (5×1) , chaque h_i le composant correspond à l'état de la fonction de commutation de i -ième hacheur.

Si le stockage avait été étudié, il n'y aurait non pas deux, mais trois sous-systèmes, et \mathbf{h} aurait été de dimension (8×1) .

4.2 Le modèle échantillonné

Les convertisseurs d'électronique de puissance sont des systèmes dynamiques hybrides [Que07]. Ils associent d'une part des dynamiques continues, et des événements discrets. Le modèle échantillonné est un modèle discret, échantillonné à la fréquence de commutation du convertisseur. Il permet de connaître avec une grande précision l'évolution des variables du système, aux instants de commutation. Il est possible de calculer la solution en régime permanent et d'étudier la stabilité ou le comportement chaotique [Maz01] dans lequel peut se retrouver le système du fait des nombreuses non-linéarités. Il est cependant difficile à mettre en œuvre pour des systèmes complexes et fait appel à des calculs d'exponentielles de matrices, ce qui est très coûteux en temps de calcul. Rappelons cependant ici le principe de construction.

4.2.1 Principe

On considère un convertisseur d'électronique de puissance possédant N topologies décrites par le vecteur de commutation \mathbf{h} . Il va passer d'une configuration à l'autre au cours du fonctionnement de manière cyclique. On suppose que la configuration du circuit est la j^{e} topologie durant un temps t_j représentant une fraction α_j de la période T de commutation. Le vecteur \mathbf{h} décrivant l'état des interrupteurs prendra la valeur \mathbf{h}^j . On a donc la relation (3.56) entre les rapports cycliques. De plus, le vecteur d'entrée sera supposé constant durant un cycle de fonctionnement.

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.56)$$

Grâce à l'équation (3.55), on peut calculer les matrices d'état (3.57) pour une topologie j décrite par \mathbf{h}^j .

$$\begin{aligned} A_j &= A + B_2 M_0 C_2 + \sum_{i=1}^p h_i^j B_2 M_i C_2 \\ B_j &= B_2 + B_2 M_0 D_{21} + \sum_{i=1}^p h_i^j B_2 M_i D_{21} \end{aligned} \quad (3.57)$$

On peut alors écrire les équations d'état (3.58) pour chaque topologie décrite par \mathbf{h}^j , durant la première période de commutation.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} A_1 x + B_1 w & \text{si } 0 \leq t < \alpha_1 T \\ A_2 x + B_2 w & \text{si } \alpha_1 T \leq t < (\alpha_1 + \alpha_2) T \\ \dots & \dots \\ A_N x + B_N w & \text{si } (1 - \alpha_N) T \leq t < T \end{cases} \quad (3.58)$$

On est alors en mesure d'exprimer la valeur des variables d'état à la fin du sous-intervalle correspondant à la j^{e} topologie en fonction des matrices d'état et de la valeur initiale au début de l'intervalle d'après l'équation (3.59) :

$$x(t_{j+1}) = \Phi_j(\alpha_j T) x(t_j) + \int_0^{\alpha_j T} \Phi_j(\xi) B_j w d\xi \quad (3.59)$$

où Φ_j représente la matrice de transition correspondant à A_j qui est calculée grâce à (3.60).

$$\Phi_j(t) = e^{A_j t} \quad (3.60)$$

En raisonnant de manière semblable sur chaque période de commutation, et en appelant X_n le vecteur d'état à la fin de la n^{e} période, on peut alors calculer la valeur des variables d'état à la fin de chaque période de commutation, en fonction de leur valeur au début de la période grâce à (3.61).

$$X_{N+1} = \Phi_T(d_1, d_2, \dots) X_N + \Psi_T(d_1, d_2, \dots) w \quad (3.61)$$

Le calcul de la matrice de transition sur une période entière s'obtient par récurrence à partir de (3.59), où Φ_T et Ψ_T sont respectivement données par (3.62) et (3.63).

$$\Phi_T(d_1, d_2, \dots) = \prod_{j=1}^N \Phi_j(\alpha_j T) \quad (3.62)$$

$$\Psi_T(d_1, d_2, \dots) = \sum_{j=1}^{N-1} \left[\prod_{k=j+1}^N \Phi_k(d_k T) \int_0^{\alpha_j T} \Phi_j(\xi) B_j w d\xi \right] + \int_0^{d_N T} \Phi_N(\xi) B_N w d\xi \quad (3.63)$$

De plus, on peut simplifier l'expression (3.63) en utilisant l'égalité (3.64) :

$$\int_0^{\alpha_j T} \Phi_j(\xi) B_j w d\xi = [\Phi_j(\alpha_j T) - I] A_j^{-1} B_j w \quad (3.64)$$

Pour calculer la valeur à l'équilibre, il suffit de considérer que dans ce cas, $X_{k+1} = X_k$. A partir de (3.62), on en déduit donc que la valeur à l'équilibre X_e est donnée par (3.65).

$$X_e = (I - \Phi_T)^{-1} \Psi_T w \quad (3.65)$$

Attention, cette valeur n'est pas la valeur moyenne en régime permanent. X_e regroupe les valeurs que prennent les variables d'état aux instant précis des commutations.

4.2.2 Application au hacheur série

Le hacheur série possède une cellule de commutation ($p = 1$). En prenant le cas simple d'un hacheur série en conduction continue, deux configurations sont possibles. Le vecteur de commutation correspondant aux deux topologies prendra les valeurs $\mathbf{h}^1 = [0]$ et $\mathbf{h}^2 = [1]$. On peut écrire les équations d'état (3.66) en considérant que α représente ici le rapport cyclique.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} A_1 x + B_1 w & \text{si } 0 \leq t < \alpha T \\ A_2 x + B_2 w & \text{si } (1 - \alpha) T \leq t < T \end{cases} \quad (3.66)$$

Dans ce cas, les matrices sont directement données par (3.51). Les matrices de transition (3.62) et (3.63) s'expriment alors en utilisant (3.60) et (3.64) :

$$\Phi_T(d) = e^{A_2(1-d)T} e^{A_1 d T} \quad (3.67)$$

$$\Psi_T(d) = e^{A_2(1-d)T} [e^{A_1 d T} - I] A_1^{-1} B_1 + [e^{A_2(1-d)T} - I] A_2^{-1} B_2 \quad (3.68)$$

La figure 3.16 vient illustrer les résultats du modèle échantillonné. Les paramètres sont les mêmes que dans la partie 4.1.1. On s'intéresse ici au transitoire sur la tension de sortie, lors d'un échelon de courant. En rouge, on retrouve le modèle topologique, et en bleu, le modèle échantillonné.

Le modèle échantillonné suit parfaitement les variations de la tension lors du transitoire. Dans cet exemple, les valeurs sont calculées à chaque commutation, le modèle étant discret, on ne possède aucun moyen de connaître l'évolution de la tension en dehors des points où elle est calculée.

Le modèle échantillonné ne peut pas directement être utilisé pour connaître la valeur moyenne de la tension de sortie, ni même les harmoniques.

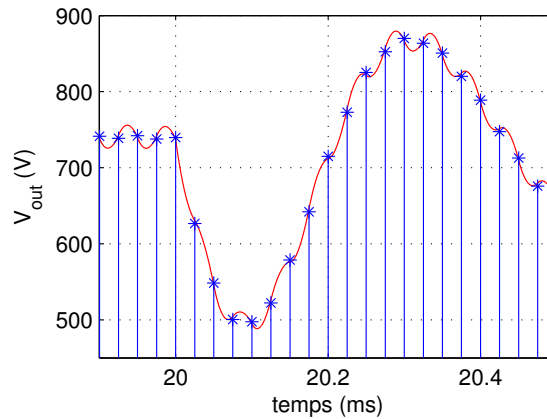


FIGURE 3.16 – Comparaison du modèle topologique et du modèle échantillonné

4.3 Introduction à la modélisation moyenne

4.3.1 Rappels sur les modèles déjà obtenus

La prise en compte du caractère séquentiel du fonctionnement d'un convertisseur pose de nombreux problèmes. D'un côté, nous avons un système avec des dynamiques continues, et de l'autre, des événements discrets, les deux interagissant fortement entre eux. Le modèle topologique couple les deux, et permet une simulation temporelle. La partie continue est intégrée de manière classique, et la partie discrète gérée par des machines à état fini ou des réseaux de Pétri.

Ce modèle n'est cependant d'aucune aide pour le dimensionnement et permet juste une validation. Une autre approche, dite de modèle échantillonné, est très puissante, et permet de calculer pour chaque instant de commutation la valeur des grandeurs d'état. Elle est surtout employée pour l'analyse de stabilité, mais utilise des modèles lourds à calculer. Dans le cas de commutations autonomes liées aux variables d'état, l'évaluation devient encore plus complexe. De plus, ce modèle ne permet pas de connaître les valeurs en régime permanent, ou les taux d'ondulations. Il est donc inutilisable en tant qu'outil de pré-dimensionnement.

Il est alors nécessaire de développer un outil permettant d'une part de simplifier l'analyse, mais surtout de permettre un dimensionnement. La complexité venant de l'interaction discret/continu, soit on discrétise (comme le modèle échantillonné), soit au contraire, il suffit de travailler uniquement en continu. C'est l'objectif de la modélisation moyenne.

4.3.2 Présentation du modèle moyen

L'objectif de ces méthodes (car comme nous le verrons, il existe différents modèles moyens) est d'approximer les fonctions de commutation à l'échelle d'une période de commutation. Une fois le régime permanent atteint, un convertisseur possède une propriété fondamentale qui permet son étude : son fonctionnement est *périodique*. En appartenant ainsi à la classe des systèmes LTP (Linear Time Periodic), de nombreux outils spécifiques au traitement du signal peuvent alors être employés, et en particulier le développement en série de Fourier. L'idée fondamentale sous-jacente

est d'approximer les fonctions de commutation par leur série de Fourier d'ordre plus ou moins élevé pour obtenir un système continu. Certaines difficultés sont cependant à prévoir. Les signaux n'étant pas périodiques durant les transitoires, les coefficients de Fourier devront être variables dans le temps. De plus, l'ordre du système augmentera rapidement, avec la prise en compte des harmoniques. L'enjeu en vaut cependant largement la chandelle, avec l'obtention d'un modèle LTI rapide à simuler, donnant des informations énergétiques et harmoniques ouvrant les portes du dimensionnement.

Le modèle moyen a été introduit pour la première fois par Middlebrook et Cuk en 1976 [MC76]. Comme nous allons le voir dans la section suivante, deux approches peuvent être considérées. La première repose sur les travaux de Middlebrook [MC76]. Elle consiste à écrire la représentation d'état pour chaque topologie, puis à moyenner ces représentations d'état. La seconde approche a été proposée par [TVLB89], et consiste à moyenner la cellule de commutation, puis à écrire la représentation d'état du système ainsi simplifié.

4.3.3 Illustration et problématique autour de l'obtention du modèle moyen d'ordre 0

Avant d'établir le modèle de manière formelle et rigoureuse, étudions dans un premier temps l'exemple très simple du hacheur série en conduction continue débitant sur une charge résistive, donné figure 3.17.

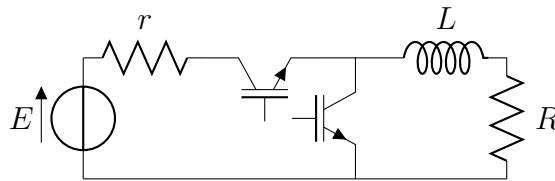


FIGURE 3.17 – Exemple d'illustration du calcul du modèle moyen

Ce hacheur possède un seul élément réactif : son inductance. Son modèle sera donc d'ordre un, et la seule variable d'état sera le courant dans cette inductance i_L .

Nous avons vu que deux approches étaient possibles pour obtenir le modèle moyen. Nous allons à présent les comparer sur l'exemple du hacheur.

a) Moyenne des représentations d'état (Middlebrook)

Pour appliquer cette méthode, la première étape est de lister toutes les topologies possibles que peut prendre le convertisseur. Puis, il faut calculer la représentation d'état associée à chacune de ces configurations comme l'illustre le tableau 3.4, dans le cas du hacheur de la figure 3.17.

Un fois cette étape terminée, le modèle moyen est calculé. En supposant que le hacheur est selon la configuration $h = 1$ durant un temps αT et qu'il est selon la configuration $h = 0$ pendant les $(1 - \alpha)T$ secondes restantes, on peut approcher son comportement moyen sur la période T via une simple moyenne. L'équation d'état moyenne est donc $\alpha(3.69) + (1 - \alpha)(3.70)$ soit :

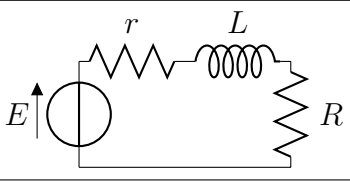
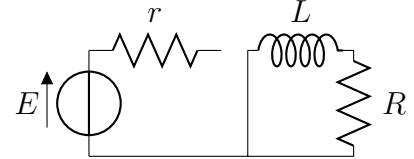
$h = 1$	$h = 0$
	
$L \frac{di_L}{dt} = E - (r + R)i_L \quad (3.69)$	$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L \quad (3.70)$

TABLE 3.4 – Hacheur série selon ses deux configurations possibles

$$L \frac{di_L}{dt} = \alpha E - (\alpha r + R)i_L \quad (3.71)$$

L'équation (3.71) permet donc d'étudier le comportement moyen du convertisseur comme nous le verrons par la suite. Il s'agit encore une fois d'une équation bilinéaire. Cette méthode fonctionne à chaque fois, mais nécessite le calcul d'autant de matrices d'état qu'il y a de topologies admissibles, soit, sans compter les configurations physiquement impossibles (court-circuit de bras), 2^n calculs, où n correspond au nombre de cellules de commutation. Cette explosion combinatoire est problématique sur des réseaux de grande taille.

b) Moyenne de la cellule de commutation (Vorperian)

La seconde approche possible consiste cette fois à moyennner uniquement la partie variable, à savoir la cellule de commutation. La cellule est entièrement décrite par la fonction de commutation h par l'équation (2.31). En supposant comme dans le paragraphe précédent que $h = 1$ durant $\alpha\%$ du temps, le modèle moyen de la cellule de commutation correspond alors à un transformateur, dont le rapport de transformation est α . Le modèle moyen du circuit est dans ce cas donné par la figure 3.18.

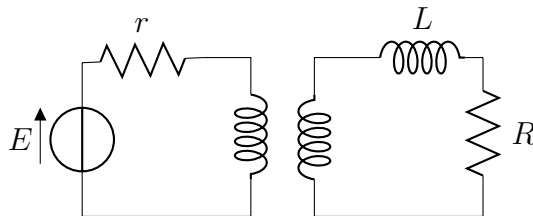


FIGURE 3.18 – Obtention du modèle moyen en moyennnant la cellule de commutation.

On trouve cette fois que le courant moyen dans l'inductance est régi par :

$$L \frac{di_L}{dt} = \alpha E - (\alpha^2 r + R)i_L \quad (3.72)$$

L'équation (3.72) ne renvoie hélas pas le même résultat que (3.71), alors que les méthodes sont sensées être équivalentes. De plus l'équation (3.72) n'est plus bilinéaire.

Le problème provient uniquement de la résistance r , qui est mal prise en compte dans la seconde méthode. Fort heureusement, ce cas de figure est l'un des rares où les deux méthodes ne donnent pas les mêmes résultats.

Cette différence entre les deux modèles provient en fait d'une erreur de modélisation dans le second cas. La cellule de commutation a été mal définie. En effet, il est nécessaire d'intégrer dans la cellule de commutation les éléments résistifs liés à une jonction interne au bloc de commutation, comme nous l'avons vu à la section 4. En écrivant le bond graph du circuit 3.17, on se rend compte que c'est le cas de la résistance r . Celle-ci ne doit donc pas apparaître sur le circuit 3.72, mais doit être intégrée dans le modèle moyen de la cellule.

Cette résistance peut être vue comme la résistance à l'état passant de l'interrupteur du haut de la cellule. Un modèle moyen de la cellule de commutation dans le cas d'interrupteurs réels a été développé dans la section 6.2.3. Le transformateur idéal devient un transformateur réel dont le modèle est décrit par l'équation (2.40). La résistance R_s équivalente est calculée grâce à (2.38). En utilisant la bonne définition de la cellule de commutation, on retrouve bien le même modèle que dans l'équation (3.71).

Bien utilisée (l'outil bond graph est bien adapté), cette méthode est très intéressante car il suffit juste de moyenner les cellules de commutation, puis de calculer la représentation d'état. En revanche, avec la première méthode, il faut calculer la représentation d'état pour chaque configuration possible du réseau. Il n'y a donc plus qu'un seul calcul à faire, autorisant un gain de temps important. Cela est vrai surtout dans le cas de réseaux multi-convertisseurs.

4.3.4 Rappels mathématiques

Le modèle moyen repose sur l'utilisation de la transformée de Fourier. Il est donc nécessaire d'introduire quelques définitions et propriétés sur les séries de Fourier.

a) Quelques notations et définitions

Notation. On note ici \mathcal{CM}_T l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} T -périodique et continues par morceaux

Proposition 6. Soit $f \in \mathcal{CM}_T$. Pour $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{a+T} f(t) dt$ ne dépend pas de a et sera noté $\int_{[T]} f(t) dt$

Définition 1. On appelle produit scalaire de deux fonctions T -périodiques continues par morceaux f et g , le nombre complexe :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{[T]} f \bar{g}$$

Définition 2. On appelle coefficients de Fourier exponentiels d'une fonction T -périodique continue par morceaux f , les produits scalaires définis $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (3.73)$$

Si $f \in \mathcal{CM}_T$, les coefficients de Fourier sont constants. Par la suite, on omettra l'argument f , et on écrira c_n directement.

Définition 3. Soit $f \in \mathcal{CM}_T$.

On appelle série de Fourier de f la série définie par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (3.74)$$

Dans ces définitions, les coefficients c_n sont des nombres complexes, mais on peut aussi décider de travailler avec des nombres réels et exprimer la série de Fourier (3.74) sous la forme suivante :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (3.75)$$

avec les relations de passage suivantes :

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} & , \text{ et } a_0 = c_0 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) & , \text{ et } b_0 = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

ou encore :

$$f(t) = \rho_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \cos[n\omega t - \varphi_n] \quad (3.77)$$

avec

$$\begin{cases} \rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \cos(\Phi_n) = a_n / \rho_n \\ \sin(\Phi_n) = -b_n / \rho_n. \end{cases} \quad (3.78)$$

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{CM}_T$.

On appelle somme partielle de la série de Fourier de f l'application définie par :

$$S_p(f) = \sum_{n=-p}^p c_n e^{in\omega t} \quad (3.79)$$

Application à un créneau

On cherche à calculer la transformée de Fourier complexe de la fonction créneau T -périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} E_m & \text{si } 0 \leq x < \alpha T \\ E_M & \text{si } \alpha T \leq x < (\alpha + d) T \\ E_m & \text{si } (\alpha + d) T \leq x < T \end{cases} \quad (3.80)$$

On peut maintenant calculer les coefficients de Fourier de cette fonction en utilisant (3.73). On trouve alors :

$$\begin{cases} c_n = \frac{E_M - E_m}{2i\pi n} (1 - e^{-2i\pi n d}) e^{-2i\pi n \alpha} & \forall n \in \mathbb{Z}^* \\ c_0 = dE_M + (1 - d) E_m & \text{pour } n = 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

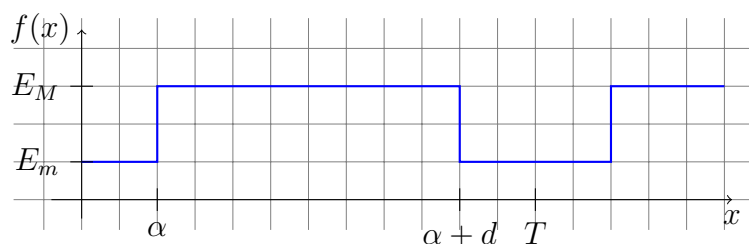


FIGURE 3.19 – Exemple de calcul des coefficients de Fourier pour un créneau

b) Série de Fourier d'une fonction non périodique

Si une fonction est continue par morceaux, alors on peut l'approximer sur l'intervalle $[t - T, t]$ en la considérant comme T -périodique durant cet intervalle à partir de la définition 3 et de l'équation (3.82).

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f \rangle_n(t) e^{in\omega t} \quad (3.82)$$

Les coefficients $\langle f \rangle_n(t)$ représentent l'équivalent des coefficients de Fourier définis par (3.73) sur l'intervalle $[t - T, t]$. En effet, comme la fonction n'est pas périodique, la proposition 6 n'est pas vérifiée, et il faut redéfinir les coefficients de Fourier par l'équation (3.83).

$$\langle f \rangle_n(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t f(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau \quad (3.83)$$

On notera que cette fois *les coefficients dépendent du temps*.

c) Propriétés de la série de Fourier

Nous allons énoncer les propriétés qui seront utiles par la suite pour établir le modèle moyen. Soit $f : [t - T, t] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [t - T, t] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Dérivation des coefficients de Fourier

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{d}{dt} \langle f \rangle_n(t) = -in\omega \langle f \rangle_n(t) + \left\langle \frac{d}{dt} f \right\rangle_n(t) \quad (3.84)$$

2. Produit de convolution

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \langle fg \rangle_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f \rangle_{n-k}(t) \langle g \rangle_k(t) \quad (3.85)$$

3. Si la fonction f est à valeurs réelles, alors, en notant \bar{z} le conjugué de z , on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \langle f \rangle_k(t) = \overline{\langle f \rangle_{-k}(t)} \quad (3.86)$$

4. Si la fonction x est à valeurs constantes sur $[t - T, t]$ i.e, $x(t) = c$ alors :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \langle x \rangle_h(t) = c\delta_0^h \quad (3.87)$$

où δ_0^h représente le symbole de Kronecker, défini tel que $\forall h \neq k, \delta_k^h = 0$ et $\delta_k^k = 1$

5 Le modèle moyen d'ordre 0

Les résultats présentés jusqu'à présent sont très généraux et permettent de construire un modèle très puissant, permettant de calculer les harmoniques quel que soit le convertisseur. Cependant, dans certains cas, une telle puissance n'est pas nécessaire, et on peut se contenter d'un modèle approché. Ce modèle consiste à tronquer la série de Fourier utilisée pour approcher les signaux, en ne gardant que son premier terme. On parle alors de modèle moyen à l'ordre 0. Dans ce cas particulier, les propriétés du paragraphe c) de la section 4.3.4 peuvent se réécrire (sans faire apparaître explicitement le temps) comme il suit :

1. Dérivation des coefficients de Fourier

$$\frac{d}{dt} \langle f \rangle_0 = \left\langle \frac{d}{dt} f \right\rangle_0 \quad (3.88)$$

2. Produit de convolution

$$\langle fg \rangle_0 \approx \langle f \rangle_0 \langle g \rangle_0 \quad (3.89)$$

Dans l'équation (3.89), il est ainsi habituel de négliger les harmoniques, à savoir les termes d'ordre supérieur à 0. L'harmonique 0 calculé par (3.83) correspond à la valeur moyenne sur la période T , cette valeur dépendant du temps.

5.1 Modélisation moyenne d'un réseau de convertisseurs d'électronique de puissance

Nous avons vu que tout réseau de convertisseur pouvait être décrit par l'équation bilinéaire (3.55). En appliquant les propriétés du modèle moyen, on obtient directement le modèle à l'ordre 0 suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \langle x \rangle_0 \\ \langle z \rangle_0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^p \langle h_i \rangle_0 \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} [M_i] [C_2 \quad D_{21}] \right) \begin{bmatrix} \langle x \rangle_0 \\ \langle w \rangle_0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Dans le cas d'un convertisseur DC/DC fonctionnant en Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI), $\langle h_i \rangle_0$ peut s'exprimer à partir de l'équation (3.81).

Par la suite, afin d'alléger les notations, le signe $\langle \cdot \rangle_0$ ne sera plus systématiquement écrit. Il sera seulement précisé quand une confusion est possible.

Le modèle (3.90) a été construit en supposant que la matrice D_{22} est nulle, ce qui est légitime et provient de la définition de la cellule de commutation. Il en résulte que le modèle (3.90) est bilinéaire. Les méthodes d'obtention du modèle moyen de la section 4.3.3 sont dans ce cas équivalentes. Si D_{22} n'avait pas été nulle, les deux approches auraient donné des résultats différents.

5.2 Validation sur le hacheur série de la figure 3.8

En appliquant l'équation (3.90) sur le hacheur série qui nous sert d'exemple depuis le début, il suffit de remplacer h par sa valeur moyenne α dans (3.51). Le modèle moyen d'ordre 0 s'écrit alors, en omettant les $\langle \cdot \rangle_0$:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{i}_{l1} \\ \dot{v}_{c2} \\ \dot{i}_{l2} \\ \dot{i}_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{\alpha}{C_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{\alpha}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{r_2}{L_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \\ v_{c2} \\ i_{l2} \\ v_{in} \\ i_{out} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

La figure 3.20 vient illustrer ce résultat en comparant le modèle moyen et le modèle topologique.

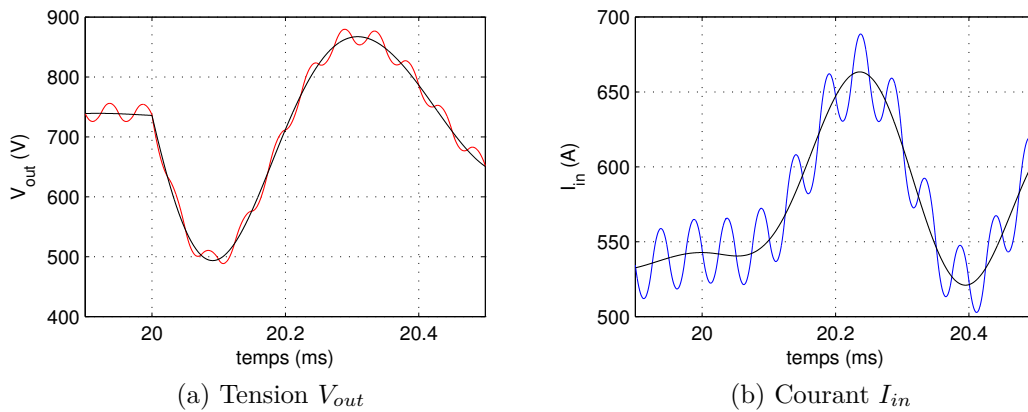


FIGURE 3.20 – Comparaison entre le modèle moyen (noir) et le modèle topologique suite à un échelon de 100A sur I_{out}

Le modèle moyen suit de manière très correcte l'évolution dynamique des différentes grandeurs, et ce, même sur les transitoires. On observe bien que le modèle moyen ici tracé en noir ne permet pas d'étudier les harmoniques. Par contre, il renvoie la valeur moyenne des grandeurs de sortie, ce qui est d'une aide précieuse pour l'étude énergétique ou l'analyse de la stabilité.

5.3 Limitation du modèle moyen d'ordre 0

L'approche du modèle moyen d'ordre 0 est très séduisante, mais il existe quelques limitations inhérentes à son utilisation. Tout d'abord, si on travaille avec des grandeurs alternatives, comme dans le cas d'un onduleur ou d'un redresseur, la valeur moyenne sera nulle et le modèle inutile. Les harmoniques ne peuvent de ce fait être étudiées.

Une autre restriction importante est la limitation fréquentielle du modèle moyen. En reprenant l'exemple du hacheur série, le modèle échantillonné permet de calculer la matrice transition (3.67).

Si les matrices A_1 et A_2 sont commutatives, alors $e^{A_2(1-d)T} e^{A_1 dT} = e^{[dA_1 + (1-d)A_2]T}$. Dans le cas contraire l'expression se complique. En faisant appel à la formule de *Baker-Campbell-Hausdorff*, l'expression devient :

$$e^{A_2(1-d)T} e^{A_1 dT} = e^{[dA_1 + (1-d)A_2]T + [A_2 A_1 - A_1 A_2]d(1-d)\frac{T^2}{2} + \dots} \quad (3.92)$$

Ce résultat important justifie le domaine de validité du modèle moyen. Ainsi, plus la fréquence de commutation sera grande, plus les termes d'ordre supérieur seront négligeables, et on pourra se contenter de l'approximation du premier ordre. En pratique, on considère que la fréquence de découpage doit être 10 fois supérieure à la plus petite fréquence propre du système.

Enfin, l'approximation (3.89) impose que les taux d'ondulation soient faibles car elle tronque les termes supérieurs de la série. Si ces ondulations ne sont pas prises en compte dans le modèle, les pertes qu'elles engendrent ne peuvent être considérées, impactant de ce fait le modèle statique. De plus, elles sont source de chutes de tension dans les éléments résistifs, qui se répercutent sur la valeur moyenne.

Enfin, la prise en compte des harmoniques n'est pas possible avec un modèle d'ordre 0. Cependant elle permet d'une part d'étudier les problèmes qui leur sont propres, de dimensionner convenablement les filtres mais aussi de corriger le modèle à l'ordre 0 qui peut être parfois insuffisant. Cela sera l'objectif du chapitre suivant.

5.4 Le modèle moyen d'ordre 0 linéarisé

5.4.1 Linéarisation d'un système bilinéaire

Le modèle moyen d'ordre 0 obtenu (3.90) est un modèle grands signaux, non linéaire. Il traduira le comportement moyen du convertisseur pour de grandes plages de variation des états d'équilibre, mais ne permettra pas l'utilisation des outils linéaires classiques de l'automatique moderne établis dans la plupart des cas pour des systèmes LTI. Une pratique classique consiste à linéariser ce système d'état autour d'un point de fonctionnement, nommé point d'équilibre. Les matrices d'état sont alors évaluées en calculant le jacobien de l'application bilinéaire.

Considérons une application vectorielle f de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n dérivable. On appelle jacobien la matrice J de dimension $(n \times p)$ définie par (3.93)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Le développement de Taylor d'une telle application autour d'un point d'équilibre $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ permet d'écrire l'équation (3.94) :

$$f(x) = f(\hat{x}) + J(x - \hat{x}) \quad (3.94)$$

La première équation d'état (3.90) est réécrite en (3.95) en allégant les notations. Le vecteur α défini par $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_p]^T$ regroupe l'ensemble des rapports cycliques de chaque cellule.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, w, \alpha) = \mathcal{A}x + \mathcal{B}_1 w + \sum_{i=1}^p B_2 M_i (C_2 x + D_{21} w) \alpha_i \quad (3.95)$$

On applique alors les résultats de (3.94) autour du point d'équilibre $(\hat{x}, \hat{w}, \hat{d})$. Ce point étant un point d'équilibre, on a $f(\hat{x}, \hat{w}, \hat{d}) = 0$, et on peut alors écrire l'équation linéarisée (3.96) en posant $\delta x = x - \hat{x}$:

$$\frac{d\delta x}{dt} = \mathbb{A}\delta x + \mathbb{B}_1\delta w + \mathbb{B}_2\delta\alpha \quad (3.96)$$

Les matrices d'état linéarisées sont calculées par (3.97) :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathcal{A} + \sum_{i=1}^p B_2 M_i C_2 \hat{\alpha}_i \\ \mathbb{B}_1 &= \mathcal{B}_1 + \sum_{i=1}^p B_2 M_i D_{21} \hat{\alpha}_i \\ \mathbb{B}_2 &= \left[B_2 M_1 (C_2 \hat{x} + D_{21} \hat{w}) \quad \cdots \quad B_2 M_p (C_2 \hat{x} + D_{21} \hat{w}) \right] \end{aligned} \quad (3.97)$$

En procédant de manière identique sur la seconde équation (3.90), on obtiendra :

$$\delta z = \mathbb{C}_1 \delta x + \mathbb{D}_1 \delta w + \mathbb{D}_2 \delta\alpha \quad (3.98)$$

Les valeurs à l'équilibre sont calculées, pour le jeu de rapports cycliques α donné, en résolvant $\dot{x} = 0$, où \dot{x} est donné par (3.95). Il en résulte :

$$\hat{x} = -\mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}_1 \hat{w} \quad (3.99)$$

On notera que, dans le cas d'un système linéaire, ce point d'équilibre existe et est unique.

5.4.2 Sensibilité des valeurs à l'équilibre par rapport aux paramètres

Nous avons vu qu'il était possible de connaître la sensibilité des matrices d'état de chaque sous-système grâce à l'équation (3.31). On peut alors facilement déterminer celle des matrices \mathbb{A} et \mathbb{B}_1 définie en (3.97), pour enfin connaître la sensibilité des valeurs finales :

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial a} = \mathbb{A} \left(\frac{\partial \mathbb{B}_1}{\partial a} - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial a} \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}_1 \right) \hat{w} \quad (3.100)$$

Le calcul de ce gradient sera utile par la suite pour les routines d'optimisation et pour le dimensionnement.

5.4.3 Application dans le cas du hacheur série

L'obtention du modèle moyen linéarisé du hacheur série s'opère en appliquant les équations (3.97) au système d'état moyen décrit par (3.91). On obtient alors le modèle d'état linéarisé (3.101).

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta v}_{c1} \\ \dot{\delta i}_{l1} \\ \dot{\delta v}_{c2} \\ \dot{\delta i}_{l2} \\ \delta i_{in} \\ \delta v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{\hat{\alpha}}{C_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{\hat{\alpha}}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{r_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{c1} \\ \delta i_{l1} \\ \delta v_{c2} \\ \delta i_{l2} \\ \delta v_{in} \\ \delta i_{out} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\hat{i}_{l2}}{C_1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\hat{v}_{c1}}{L_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta\alpha \quad (3.101)$$

Les valeurs de l'état à l'équilibre sont simplement calculées en appliquant l'équation (3.99). Il en résulte pour un rapport cyclique $\hat{\alpha}$ donné les valeurs à l'équilibre

suivantes :

$$\begin{cases} \hat{v}_{c1} = \hat{v}_{in} - \hat{\alpha} r_1 \hat{i}_{out} \\ \hat{i}_{l1} = \hat{\alpha} \hat{i}_{out} \\ \hat{v}_{c2} = \hat{\alpha} \hat{v}_{in} - (r_1 \hat{\alpha}^2 + r_2) \hat{i}_{out} \\ \hat{i}_{l2} = \hat{i}_{out} \end{cases} \quad (3.102)$$

5.4.4 Illustration sur le réseau

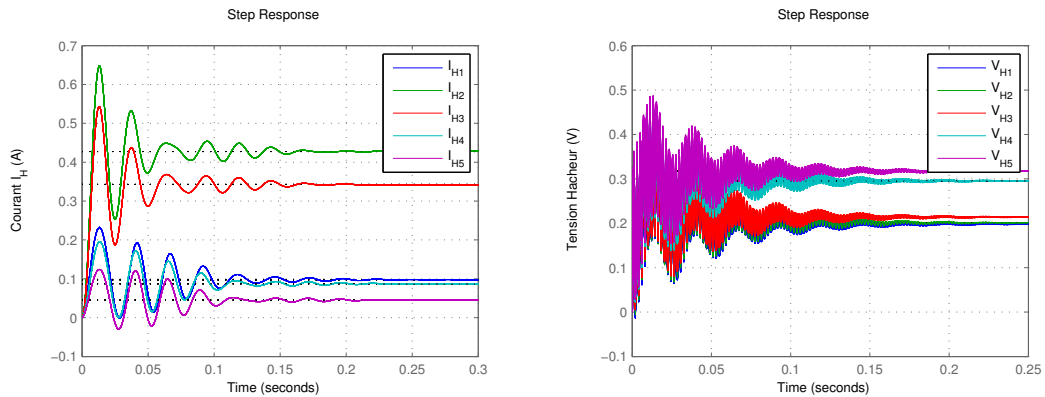
Nous allons présenter quelques résultats de simulation dynamique du réseau de tramways avec la nouvelle architecture présentée à la figure 2.25. Le modèle topologique a déjà été établi au chapitre 4.1.3. Il suffit de remplacer le vecteur \mathbf{h} de la figure 3.15 par α comprenant le rapport cyclique de chaque hacheur pour obtenir le modèle moyen.

On obtient alors un système bilinéaire d'ordre 31, possédant 5 entrées. Les grandeurs à l'équilibre peuvent être facilement calculées à partir du modèle dynamique. Les grandeurs propres au hacheur côté LAC sont données par le tableau 3.5 pour illustration.

	Hacheur 1	Hacheur 2	Hacheur 3	Hacheur 4	Hacheur 5
Tension (V)	759.45	769.61	779.49	790.47	790.60
Courant (A)	715.43	339.56	182.26	-258.73	-178.52

TABLE 3.5 – Tension et courant de sortie à l'équilibre pour les hacheurs

Les figures 3.21 correspondent à la réponse du système face à des perturbations sur les courants des tramway et les tensions des redresseurs en boucle ouverte. Ces grandeurs sont tracées par rapport aux valeurs à l'équilibre du tableau 3.5



(a) Courant dans les hacheurs pour un échelon $I_{T2} = 1$ A (b) Tension des hacheurs pour un échelon $E_2 = 1$ V

FIGURE 3.21 – Simulation dynamique du réseau de tramways

La figure 3.21a illustre la répartition du courant entre les hacheurs suite à un échelon de courant sur le tramway T_2 . Le tramway T_2 étant situé entre H_2 et H_3 , il est normal que ce soient eux qui captent le plus de courant. On remarque également

le fort couplage entre tous les hacheurs. La somme des courants est naturellement égale à 1 A.

De même, la figure 3.21b correspond à la réponse des tensions hacheurs suite à un échelon sur la tension E_2 . Les hacheurs les plus proches H_4 et H_5 seront les plus influencés.

Les figures 3.22 sont les réponses du système linéarisé (3.96) et (3.98) autour du point d'équilibre du tableau 3.5 pour un échelon $\Delta\alpha_3 = 0.001$ sur la commande de H_3 .

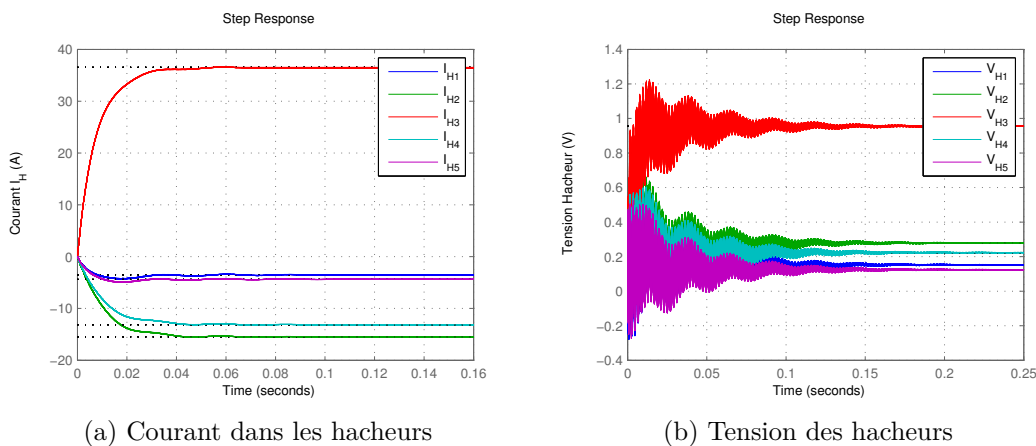


FIGURE 3.22 – Réponse à un échelon $\Delta\alpha_3 = 0.001$ sur la commande de H_3

En augmentant α_3 , la tension V_{h3} augmente comme le montre la figure 3.22b. En réponse, le courant I_{h3} commence à augmenter d'après la figure 3.22a. La répartition du courant entre les hacheurs va alors changer, et les hacheurs H_2 et H_4 situés au voisinage de H_3 vont céder du courant de sorte qu'en régime permanent, la somme des ΔI_h soit nulle. Cette réduction de courant entraînera alors une hausse de la tension V_h qui sera moins chargée.

Encore une fois, on voit le fort couplage entre les hacheurs, la commande de l'un faisant varier les performances de ses voisins, justifiant une approche multi-variables.

6 Un modèle grand signal à paramètres variants ou incertains

Jusqu'à présent, nous avons supposé que tous les paramètres du réseau étaient fixes. Or, certains paramètres varient dans le temps, comme la position du tramway, et d'autres sont incertains, comme les valeurs relatives aux filtres qui peuvent être sujettes à des variations par rapport à leur valeur nominale. Cette classe de système est appelée système LPV (Linear Parameter Variant), par opposition au système LTI.

6.1 Un modèle grand signal du réseau nominal

Par nominal, on entend un réseau dont tous les paramètres de conception sont connus. Aucune incertitude n'est prise en considération.

Nous avons réussi à décrire un réseau de convertisseurs quel qu'il soit, sous la forme d'une LFT résumée par l'équation (3.52). Conformément à cette équation, le réseau peut être représenté sous la forme de la figure 3.23, correspondant au problème standard de la figure 3.6.

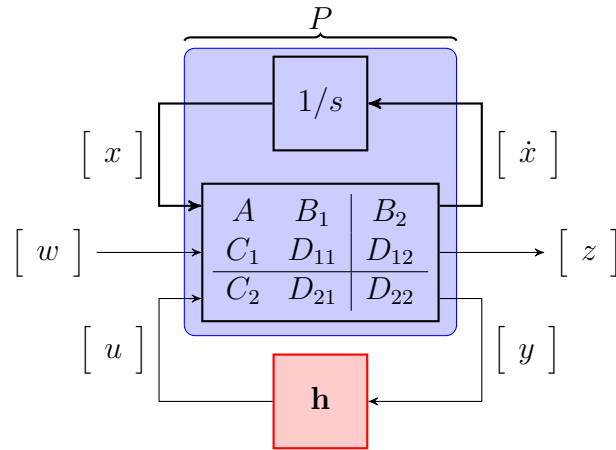


FIGURE 3.23 – Représentation d'un réseau multi-convertisseurs sous la forme LFT

On rappelle que dans ce type de représentation, l'ensemble des non-linéarités est regroupé dans la matrice \mathbf{h} , qui représente la matrice de commutation. Ce modèle reste valable dans le cas de la modélisation moyenne. Il suffit de remplacer uniquement la matrice \mathbf{h} en intégrant les rapports cycliques.

Contrairement au modèle standard de la figure 3.6, celui de la figure 3.23 fait apparaître un intégrateur sous forme d'un LFT_u . Cela est uniquement dû au fait que classiquement, le problème standard utilise les fonctions de transfert au lieu de la représentation d'état. Le modèle de la figure (3.23) est simplement la transcription directe du système (3.37). Les deux modèles restent bien évidemment équivalents.

Ce modèle est un modèle non linéaire qui permet d'étudier de grandes variations de α par opposition à celui de l'équation 3.96.

6.2 Intégration des incertitudes et des paramètres variants

6.2.1 Objectif

Le modèle d'un réseau de convertisseurs a été entièrement modélisé sous la forme LFT de la figure 3.23. La partie non linéaire a été extraite pour permettre de générer automatique un modèle moyen. Ce modèle peut être linéarisé et permet d'obtenir rapidement les formes d'onde approchées, mais aussi les valeurs à l'équilibre. Dans le modèle, la valeur du rapport cyclique apparaît directement dans une matrice séparée du reste du système. De cette manière, le calcul des caractéristiques du système est très rapide et ne nécessite pas de recalculer la matrice P via l'utilisation des bond graphs.

A contrario, la valeur des paramètres du réseau, comme la valeur des inductances de lissage ou la position des sous-stations est intégrée au cœur même de la matrice P . Si ces paramètres varient au cours du temps, il est obligatoire de recalculer P . Il est donc intéressant d'écrire le système, en essayant d'extraire les paramètres variant,

ou les paramètres de dimensionnement (que l'on fait varier lors des simulations) de la matrice P comme nous l'avons fait pour les fonctions de commutation.

On cherche donc à réécrire la LFT de la figure 3.23 sous la forme de celle présentée à la figure 3.24 de sorte que $P = \mathcal{F}_u(Q, \Delta)$. La matrice Δ contient les paramètres variants, alors que la matrice Q reste constante.

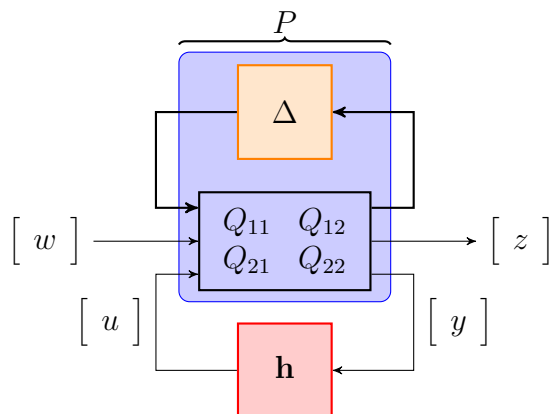


FIGURE 3.24 – Représentation d'un réseau multi-convertisseurs sous la forme LFT, en intégrant les paramètres variants

Les principaux avantages du traitement des paramètres sous forme LFT sont entre autres [SP05], [Zin05] :

1. Une réduction du temps de calcul en simulation,
2. une possible étude du pire cas,
3. l'analyse de stabilité en présence d'incertitudes,
4. la synthèse de correcteurs robustes en utilisant les outils de commande H_∞ ,
5. des outils d'analyse, associés à commande H_∞ .

L'écriture sous forme LFT permet d'utiliser les outils développés pour les problèmes standards incertains, comme la μ -analyse par exemple. Il sera possible d'intégrer l'incertitude sur la position du tramway et d'en observer les conséquences sur la stabilité, tout comme l'influence de la valeur des filtres [Sau09].

Une autre possibilité offerte par cette écriture est de considérer les filtres comme des paramètres incertains. Les outils de synthèse peuvent alors nous aider à trouver, pour un ensemble de perturbations borné, la valeur des filtres permettant d'obtenir des performances dynamiques définies. Cela fera l'objet du chapitre suivant.

Enfin, grâce à cette approche automatique, il sera possible de calculer rapidement les sensibilités ou les valeurs finales en fonction des paramètres, sans avoir à tout recalculer.

Nous reviendrons sur ces différents points à la section 8.

6.2.2 Écriture des paramètres variants sous forme LFT

Ces paramètres incertains peuvent être représentés sous différentes formes [SP05]. Les plus courantes seront les formes additives et multiplicatives. Dans notre cas, nous

nous intéresserons uniquement à la forme multiplicative exprimée sur un paramètre a par l'équation (3.103)

$$a = a_0(1 + p_a \delta_a) \quad (3.103)$$

Dans cette expression, a est le paramètre incertain, a_0 sa valeur nominale, p_a un coefficient de pondération exprimant en pourcentage l'incertitude sur le paramètre, et $\delta_a \in [-1, 1]$ représente l'incertitude. Il est possible de réécrire l'expression (3.103), sous la forme d'une LFT (3.104).

$$y = au \Leftrightarrow y = \mathcal{F}_u(M, \delta_a) u \quad (3.104)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_a a_0 & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Extension au cas de plusieurs paramètres

L'expression (3.105) est une expression scalaire, valable pour un paramètre variable. On peut l'étendre immédiatement au cas où plusieurs paramètres incertains sont considérés en même temps. Les incertitudes seront alors regroupées dans une matrice Δ appartenant à la boule unité, et l'équation (3.105) est réécrite :

$$Y = \mathcal{F}_u(M, \Delta) U \quad (3.106)$$

Soit

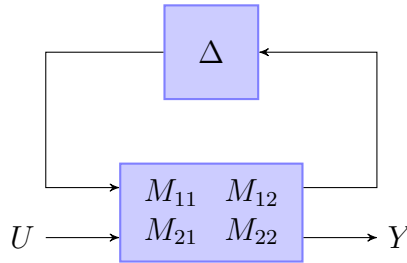


FIGURE 3.25 – Écriture LFT d'un système. M est constant et Δ variable.

Appliquons ce cas à l'équation (3.15) reliant les variables d'état X , aux variables d'état complémentaire Z . Dans le cas où il n'y a pas de mutuelle (termes non diagonaux), cette équation vectorielle s'écrit :

$$X = FZ \quad (3.107)$$

On suppose à présent qu'il y a n éléments de stockage (inductance ou capacité). La valeur nominale de l'élément i est f_{0i} . Parmi ces éléments, seuls p sont incertains (ou à dimensionner), et sont affectés d'un coefficient de pondération p_{fi} .

En écrivant l'équation (3.107) sous la forme (3.106) afin de faire ressortir les paramètres incertains, on obtient une matrice M de dimension $(n + p) \times (n + p)$ définie par (3.108)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & J \\ L & F_0 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

J est de dimension $(p \times n)$. Elle est construite à partir de la matrice F de l'équation (3.107). On forme une matrice de même taille remplie de zéros. Les éléments incertains de F sont remplacés par des 1 dans cette matrice et on supprime les lignes des éléments certains pour obtenir J .

L est formée sur le même principe, mais au lieu de placer des 1, les zéros sont remplacés par $p_{fi}f_{0i}$ et on supprime les colonnes cette fois.

Exemple sur le hacheur série

Reprenons le cas de notre hacheur série. Dans ce cas, ce dernier possède quatre éléments de stockage. On supposera une incertitude de 20% sur la capacité C_1 , 10% sur l'inductance L_2 et enfin 30% sur C_2 . On raisonnera de la même manière si on cherche à dimensionner le hacheur. Ce coefficient de pondération sur les incertitudes permettra cette fois de définir les bornes autour de la valeur initiale.

En écrivant l'équation (3.107) sous la forme (3.106), on obtient pour le filtre d'entrée :

$$\begin{bmatrix} q_{c1} \\ \phi_{l1} \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2C_1 & C_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & L_1 \end{array} \right], [\delta C_1] \right) \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

et pour le filtre de sortie :

$$\begin{bmatrix} q_{c2} \\ \phi_{l2} \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.3C_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0.1L_2 & 0 & L_2 \end{array} \right], \begin{bmatrix} \delta C_2 & 0 \\ 0 & \delta L_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{c2} \\ i_{l2} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

q_{ci} et Φ_{li} représentent respectivement la charge d'un condensateur et le flux d'une inductance.

6.2.3 Expression des matrices d'état incertaines sous forme LFT

Nous sommes en mesure de faire apparaître les variables de dimensionnement (ou, encore une fois les variables incertaines) sous la forme d'une LFT (3.106). Cependant, on ne peut pas encore connaître l'influence d'un paramètre sur les matrices d'état calculées par (3.23) et (3.25). Pour y parvenir, il faut être capable de manipuler les LFT, et nous avons vu les principales opérations dans la section 3.

Par exemple, l'inverse de l'équation (3.107) est donné par :

$$Z = F^{-1}X \Leftrightarrow Z = \mathcal{F}_u(N, \Delta)X \quad (3.111)$$

N se calcule en utilisant l'équation 3.42 décrite dans la section 3, et on trouve la matrice (3.112) :

$$N = \begin{bmatrix} -JF_0^{-1}L & JF_0^{-1} \\ -F_0^{-1}L & F_0^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Si F est une matrice diagonale, alors les calculs se simplifient et N est donnée par l'équation (3.113).

$$N = \begin{bmatrix} -JP_F J^T & JF_0^{-1} \\ -P_F J^T & F_0^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

P_F est une matrice carré ($p \times p$) regroupant les coefficients sur sa diagonale. En combinant les équations (3.21) et (3.23), on trouve que la matrice d'état A est définie par :

$$A = \underbrace{\left(F_i - S_{\dot{X}_i} H S_{\dot{X}_d} F_d S_{Z_d} H S_{Z_i} \right)}_K^{-1} S_{\dot{X}_i} H S_{Z_i} \quad (3.114)$$

Cette équation est réécrite en (3.115) sous forme plus compacte :

$$A = \underbrace{\left(F_i - W_1 F_d W_2 \right)}_K^{-1} W_3 \quad (3.115)$$

en posant $W_1 = S_{\dot{X}_i} H S_{\dot{X}_d}$, $W_2 = S_{Z_d} H S_{Z_i}$ et $W_3 = S_{\dot{X}_i} H S_{Z_i}$.

Le calcul de B est identique, mais cette fois on remplace W_3 par $W_4 = S_{\dot{X}_i} H S_U$.

On considère une incertitude sur les moyens de stockage. Via la méthodologie bond graph, ces valeurs apparaissent uniquement dans la matrice F_i pour les éléments en causalité intégrale, et dans la matrice F_d , pour ceux en causalité dérivée.

Écrite sous la forme (3.106), l'équation (3.115) devient :

$$A = \underbrace{\left(\mathcal{F}_u(F_i, \Delta_i) - W_1 \mathcal{F}_u(F_d, \Delta_d) W_2 \right)}_K^{-1} W_3 \quad (3.116)$$

En utilisant les équations (3.43) et (3.45) de la section 3, la matrice K s'exprime par :

$$K = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & J_i \\ 0 & 0 & J_d W_2 \\ \hline L_i & W_1 L_d & K_0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \Delta_i & 0 \\ 0 & \Delta_d \end{array} \right] \right) \quad (3.117)$$

avec $K_0 = F_{i0} - W_1 F_{d0} W_2$. La matrice K_0 étant inversible, on peut alors calculer la matrice d'état (3.116), en utilisant les équations (3.43) et (3.42). Afin de gagner en compacité, on pose $L_i = P_{F_i} F_{i0} J_i^T$ et $L_d = P_{F_d} F_{d0} J_d^T$.

$$A = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{cc|c} -J_i K_0^{-1} L_i & J_i K_0^{-1} W_1 L_d & J_i K_0^{-1} W_3 \\ -J_d W_2 K_0^{-1} L_i & J_d W_2 K_0^{-1} W_1 L_d & J_d W_2 K_0^{-1} W_3 \\ \hline -K_0^{-1} L_i & -K_0^{-1} W_1 L_d & K_0^{-1} W_3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \Delta_i & 0 \\ 0 & \Delta_d \end{array} \right] \right) \quad (3.118)$$

Ce résultat est valable pour un système sans couplage, il peut être aisément transposé à un système avec couplage interne comme dans le cas d'un hacheur. La matrice d'état moyenne dans le cas de n sous-systèmes couplés est donnée par l'équation (3.90). En utilisant les équations pour le produit (3.44) et la somme (3.45) de LFT, on peut exprimer les matrices d'état sous forme LFT.

6.2.4 Application au cas du hacheur série

Le hacheur série ne possède que des éléments en causalité intégrale. W_1 et W_2 sont donc nulles. Pour chaque sous-système, on peut calculer les matrices d'état grâce à (3.115).

Dans le cas du hacheur série, les matrices (3.90) du système complet s'écrivent sous la forme (3.50). La matrice A du modèle moyen peut s'écrire sous la forme de l'équation (3.119).

$$A = \begin{bmatrix} K^{in} & 0 \\ 0 & K^{out} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_3^{in} & \alpha W_4^{in} C_2^{out} \\ \alpha W_4^{out} C_2^{in} & W_3^{out} \end{bmatrix} = K^{-1}W \quad (3.119)$$

a) **Si le rapport cyclique est constant**

Dans ce cas là, le vecteur W et constant est donné par :

$$W = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & -\alpha \\ -1 & -R_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1/R & 1 \\ \alpha & 0 & -1 & -R_2 \end{array} \right] \quad (3.120)$$

Les éléments incertains ne sont contenus que dans K , qui s'exprime sous la forme LFT à partir de (3.109) et (3.110) par :

$$K = \mathcal{F}_u \left(\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.2C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3C_2 & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1L_2 & 0 & 0 & 0 & L_2 \end{array} \right], \begin{bmatrix} \delta C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta C_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta L_2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.121)$$

En appliquant la formule d'inversion (3.112) et la multiplication par un vecteur (3.44), A peut s'écrire sous la forme LFT de la figure 3.26 :

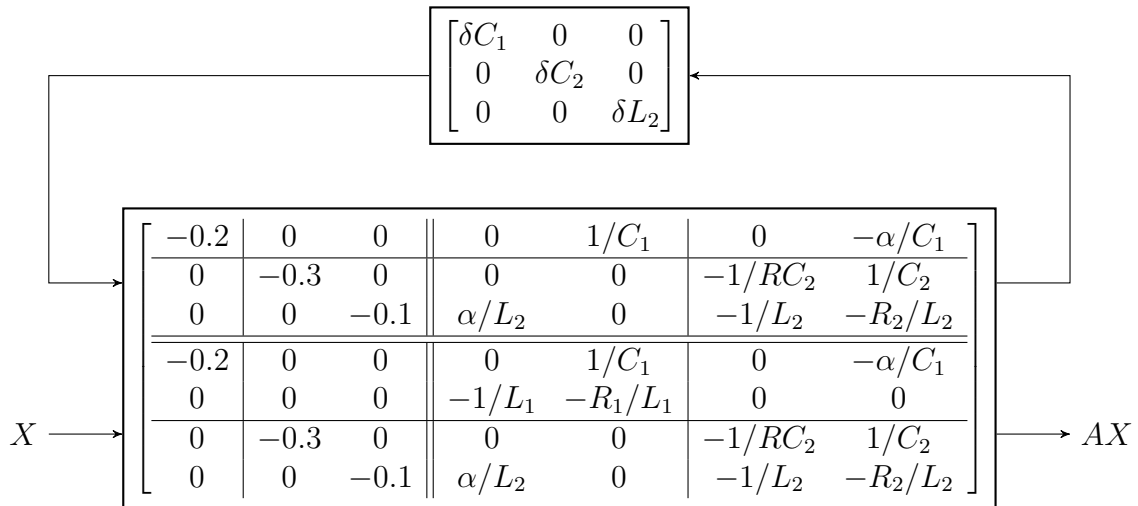


FIGURE 3.26 – Ecriture LFT du hacheur, en considérant des incertitudes sur les filtres

A partir de cette représentation, il est possible de calculer les valeurs singulières, ou la réponse à un échelon pour un système incertain. On rappelle que la matrice Δ appartient à la boule unité. Dans ces conditions, la réponse de la tension de sortie

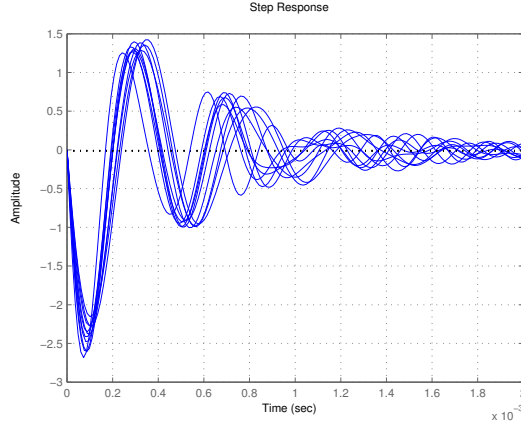


FIGURE 3.27 – Réponse de la tension v_{out} à un échelon de 1 A sur I_{out} en présence d'incertitudes

v_{out} à un échelon de courant i_{out} de 1 A, en boucle ouverte, est tracée sur la figure 3.27 pour différentes incertitudes prises au hasard dans la boule unité.

Cette figure nous montrent comment la variation des paramètres des filtres joue sur l'amortissement et sur la fréquence des oscillations lors de la réponse à une perturbation.

Les calculs ont été effectués en considérant uniquement des variations sur les paramètres de stockage, mais il est aussi possible de procéder de la même façon sur les paramètres résistifs.

b) Si le rapport cyclique est variable

On peut étudier la variation du rapport cyclique $\delta\alpha$ autour de α_0 et des paramètres conformément à la figure 3.24. Dans ce cas le vecteur W donné par (3.120) n'est plus constant et il doit s'exprimer sous la forme de la LFT de l'équation $W = \mathcal{F}_u(W_0, \delta\alpha \times I_2)$ où W_0 est donnée par l'équation (3.122).

$$W_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -\alpha_0 \\ 0 & 0 & -1 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/R & 1 \\ 1 & 0 & \alpha_0 & 0 & -1 & -R_2 \end{array} \right] \quad (3.122)$$

En calculant le produit de deux LFT à l'équation (3.119), on trouve que A s'exprime cette fois sous la forme de la LFT de la figure 3.28.

Contrairement à la figure 3.24, la commande α et les paramètres de la structure apparaissent tous les deux sous la forme d'une LFT supérieure. De simples opérations algébrique permettent de passer de la LFT supérieure à la LFT inférieure.

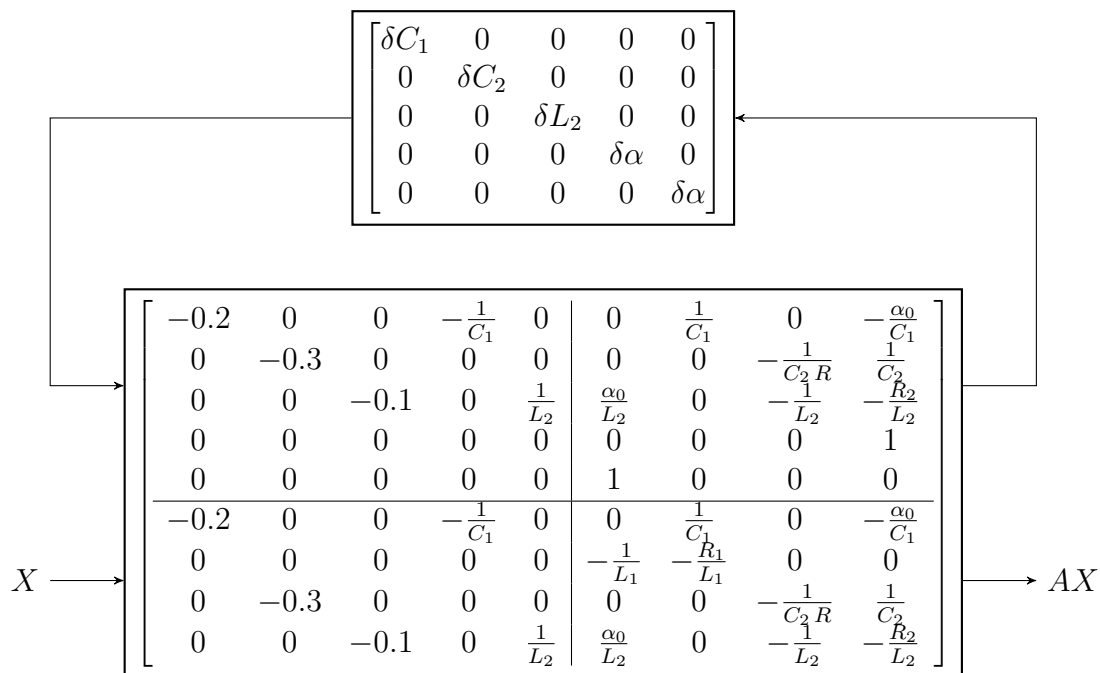


FIGURE 3.28 – Ecriture LFT du hacheur, en considérant les filtres et la commande variable

7 La LFT, un outil de simulation

7.1 La LFT permet de réduire les temps de calcul

Imaginons que l'on veuille calculer la tension aux bornes d'un tramway se déplaçant au cours du temps. La grandeur qui nous intéresse est seulement la valeur à l'équilibre.

L'approche classique consiste à écrire le réseau entier dans un simulateur de type circuit, en intégrant tous les éléments. Il faut ensuite lancer une simulation temporelle, avec un pas de temps fixe et très faible car nous sommes en présence d'électronique de puissance, puis attendre le régime permanent (qui peut mettre un certain temps à s'établir, étant donnée la valeur élevée des éléments de stockage). Il est ensuite nécessaire de faire avancer le tramway. Au vu des constantes de temps du tramway, une simulation en continu au cours du déplacement semble peu réaliste. Il faut donc modifier le circuit et relancer une simulation. Cette approche devient totalement irréaliste appliquée sur un réseau conséquent.

La deuxième approche que nous avons appliquée au chapitre précédent consiste à utiliser un modèle statique. Il n'est alors plus obligatoire d'attendre que le régime permanent soit atteint. Par contre, à chaque fois que la tramway s'est déplacé, il est obligatoire de recalculer l'ensemble des matrices de conductances, puis de calculer l'inverse d'une matrice dont la taille est assez importante. Si le régime dynamique est étudié, il faut encore une fois recalculer un bon nombre de matrices avant d'obtenir les informations pertinentes. Observer l'influence d'un paramètre peut vite devenir problématique, et il est difficile d'utiliser un tel modèle dans une boucle d'optimisation.

L'approche que nous proposons est différente. Les paramètres intéressants ap-

paraissent comme des incertitudes écrites sous la forme (3.106). A partir de là, il est possible d'exprimer les matrices d'état sous une forme LFT comme nous l'avons fait pour le hacheur série. Grâce aux règles d'algèbre propres aux LFT, les valeurs à l'équilibre peuvent être mises sous forme LFT.

Une fois ce travail effectué, *une seule fois* et automatiquement (c.f la section précédente)¹, le calcul des valeurs à l'équilibre pour un jeu de paramètres ne requiert plus qu'*une seule opération* : le calcul de cette LFT qui n'est qu'un produit matriciel.

Dans l'exemple du tramway, en faisant apparaître la position du tramway comme un paramètre incertain variant entre la position des deux sous-stations adjacentes, le calcul de la tension ne nécessite encore une fois qu'une opération. L'ensemble du script permettant le calcul des matrices ne sera effectué que quand le réseau change de topologie.

Notons enfin que *le modèle LFT est un modèle grand signal non-linéaire* valable sur toute la plage de variation du paramètre par opposition à un modèle linéarisé.

7.2 Application sur le réseau de tramways

Afin d'illustrer ce principe, reprenons l'exemple du réseau de tramways dont les positions et les courants sont donnés par le tableau 3.3. On s'intéresse à la variation de la position des tramways. Tant que la topologie du réseau est fixe, la matrice M de la figure 3.25 n'est calculée qu'une seule fois.

Si on suppose que seule la position du tramway T_2 est incertaine, la topologie reste inchangée tant que le tramway reste entre les hacheurs H_2 et H_3 soit, $x_{T_2} \in [500 \text{ m}, 800 \text{ m}]$.

7.2.1 En régime permanent

Les courants dans les hacheurs en régime permanent peuvent se calculer simplement à partir de la LFT de la figure 3.29.

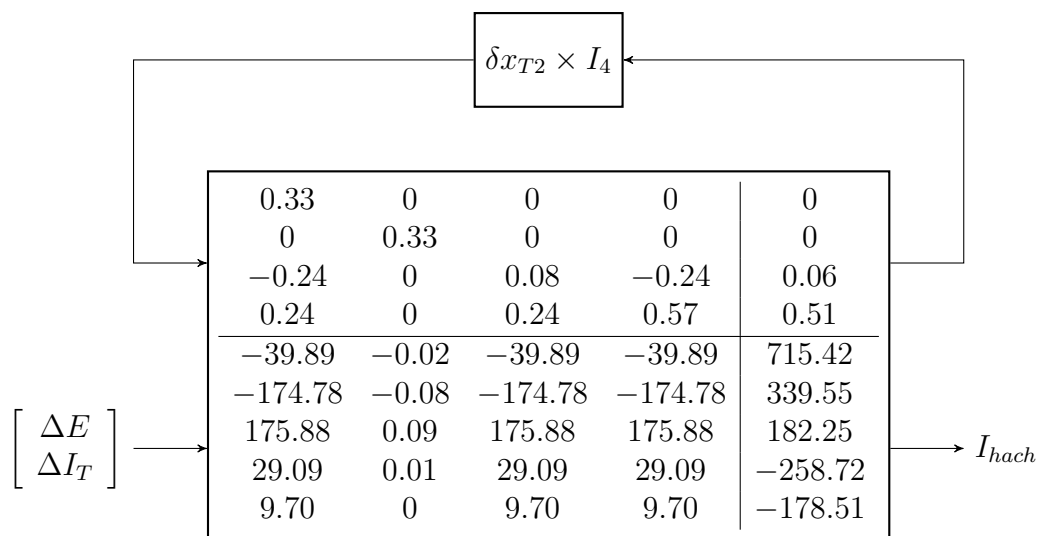


FIGURE 3.29 – Calcul des courants hacheurs à l'équilibre lorsque la position de T_2 est inconnue

1. La Robust Toolbox de Matlab propose également des outils performants

ΔE et ΔI_T représente des variations éventuelles par rapport aux valeurs initiales ($E = 1500$ V et I_T est donné par le tableau 3.3). δx_{T2} représente l'image normalisée de x_{T2} tel que :

$$\begin{cases} \delta x_{T2} = -1 & \text{si } x_{T2} = 500m \\ \delta x_{T2} = 0 & \text{si } x_{T2} = 600m \\ \delta x_{T2} = 1 & \text{si } x_{T2} = 800m \end{cases} \quad (3.123)$$

On retrouve alors dans la matrice M_{22} les mêmes valeurs que dans le tableau 3.5, car ces valeurs correspondaient à $x_{T2} = 600$, pour les perturbations nominales.

7.2.2 En régime transitoire

En régime transitoire, la modélisation par LFT est encore valable. Chaque matrice d'état a une représentation LFT, et on peut facilement calculer la réponse temporelle ou fréquentielle. Reprenons le cas du transfert entre le courant I_{T2} et les courants hacheurs. Dans le cas nominal, la réponse temporelle est donnée par la figure 3.21a. Cette fois, on considère que l'inductance du filtre de sortie du hacheur H_2 est une variable de dimensionnement, ou une variable incertaine pouvant varier de 50%.

Dans ces conditions, la réponse à un échelon de courant est tracée sur la figure 3.30.

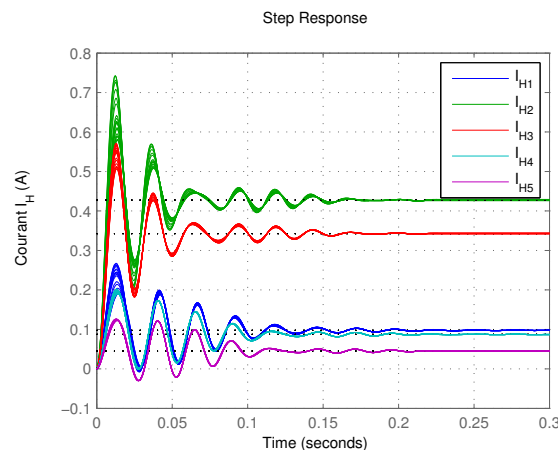


FIGURE 3.30 – Réponse du courant des hacheurs à un échelon de courant du tramway T_2 , avec une incertitude de 50% sur l'inductance du filtre de sortie du hacheur H_2

Sur cette figure, on retrouve bien qu'une variation de l'inductance du filtre de sortie du hacheur H_2 va impacter la réponse en courant de ce hacheur ici en vert. Cependant, les autres hacheurs vont aussi voir leur réponse changer du fait du fort couplage existant. Le modèle ne prend pas en compte les harmoniques. De ce fait, les grandeurs en régime permanent ne sont pas impactées par la valeur des éléments dynamiques. On remarque cependant un changement dans les temps de montée du courant.

8 Analyse d'un réseau multi-convertisseurs

Nous avons construit dans la partie précédente, un modèle qui est généré automatiquement à partir de la description du réseau. Ce modèle est un modèle grand signal, non linéaire, multi-entrées et multi-sorties (MIMO). Les commutations dues au découpage ont de plus été négligées.

Ce modèle a été décrit sous la forme LFT, permettant d'extraire la commande et les incertitudes paramétriques. Cela est utile pour la simulation, mais aussi pour l'analyse et la synthèse. En effet, de nombreuses techniques d'automatique moderne utilisent une formulation sous forme LFT pour étudier la stabilité et les performances d'un système incertain [Sau09].

Cette section présente les différents outils qui peuvent être associés au modèle moyen d'ordre 0 afin d'étudier les réseaux. De manière classique, le modèle est linéarisé afin de pouvoir employer les nombreux outils propres aux systèmes LTI. La formulation sous forme LFT est aussi explorée. Elle permet de garder un système non linéaire grands signaux, et possède de nombreux avantages.

8.1 Rappel d'analyse fréquentielle des systèmes LTI

En temporel, la relation entre l'entrée u_i et la sortie y_j d'un système est donnée par :

$$y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{ij}(t - \tau) u_i(\tau) d\tau \quad (3.124)$$

Afin d'éviter le calcul de ce produit de convolution, il est classique d'utiliser la transformée de Laplace, et de définir la fonction de transfert G_{ij} par :

$$G_{ij}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} g_{ij}(t) dt \quad (3.125)$$

Cette fonction de transfert permet de calculer la réponse du système par un simple produit entre transformées de Laplace.

$$Y_j(\omega) e^{j\omega t} = G_{ij}(j\omega) U_i(\omega) e^{j\omega t} \quad (3.126)$$

$G_{ij}(j\omega)$ est une fonction de transfert et sera définie comme le rapport de la transformée de Fourier du signal de sortie sur celle du signal d'entrée. Cette fonction de transfert sera caractérisée par son gain et son argument.

$$G_{ij}(j\omega) = |G_{ij}(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (3.127)$$

La réponse fréquentielle est constituée de l'ensemble des fonctions de transfert sinusoïdales quand la pulsation varie de 0 à ∞ . Le lieu de Bode est une représentation graphique du module en décibels et de la phase en degrés des réponses temporelles en fonction de la pulsation ω . La remarque suivante est alors fondamentale :

Théorème 2. *La réponse fréquentielle d'un système LTI stable à une entrée sinusoïdale $u(t) = U \sin(\omega t)$ d'amplitude U et de pulsation ω , est une sinusoïde $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$ de même pulsation et dont l'amplitude Y et le déphasage ϕ dépendent de la pulsation ω .*

8.2 Le gain d'un système

8.2.1 Définition du gain

Pour un système SISO, le gain correspond au rapport du signal de sortie sur le signal d'entrée. Le gain dépend de la fréquence, et on appelle gain statique, le gain pour une fréquence nulle.

Le gain d'un système est souvent représenté par un diagramme bode, qui trace la variation du logarithme du gain en fonction de la fréquence, permettant d'étudier la stabilité d'un système en boucle fermée par exemple.

Pour un système MIMO, on peut encore définir le gain d'une sortie par rapport à une entrée. On obtient alors une matrice de gains, comme celle calculée dans le cas statique par l'équation (3.99) permettant de connaître l'influence d'une perturbation sur la valeur finale des variables d'état.

Cette notion de gain n'est en fait qu'une extension de la notion de gain d'un système SISO et se retrouve inadéquate pour étudier la stabilité d'un système MIMO.

8.2.2 Gain d'un système MIMO

Que se passe-t-il si plusieurs perturbations affectent le système en même temps ? Les couplages au sein d'un système MIMO sont plus complexes que dans le cas d'un système SISO. La direction des perturbations doit être prise en compte en plus de son amplitude. Afin de traiter ce problème, il est courant [SP05] d'étudier les valeurs singulières.

Les valeurs singulières sont une extension de la notion de gain dans le cas de systèmes MIMO. On définit la norme euclidienne H_2 par :

$$\|w\|_2 = \sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \dots + |w_n|^2} = \sqrt{\bar{w}^T w} \quad (3.128)$$

Si le vecteur d'entrée est borné, alors les valeurs singulières maximales $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ bornent le gain du système G tel que :

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gw\|_2}{\|w\|_2} \leq \bar{\sigma}(G) \quad (3.129)$$

Le gain d'un système MIMO sera donné par l'équation (3.129).

$$\bar{\sigma} = \max_{\|w\|_2=1} \|G(j\omega)w\|_2 \quad (3.130)$$

Il ne dépend pas de l'amplitude du vecteur d'entrée $\|u\|_2$, par contre il est dépendant de la direction de ce vecteur en plus de dépendre de la pulsation. La valeur maximale du gain pour une pulsation donnée sera donnée par sa valeur singulière maximale :

Sur la figure 3.31 sont représentées les valeurs singulières maximales $\bar{\sigma}$ du transfert vers la tension v_{out} du hacheur série, en présence d'incertitudes.

Ces valeurs singulières se calculent simplement à partir de la LFT du hacheur données à la figure 3.26. Elles sont à mettre en parallèle de la figure 3.27, qui correspond à la représentation temporelle.

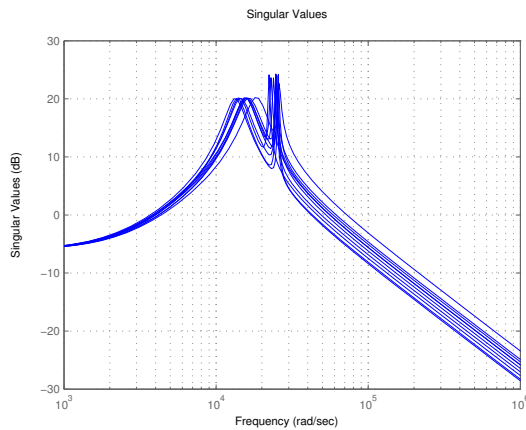


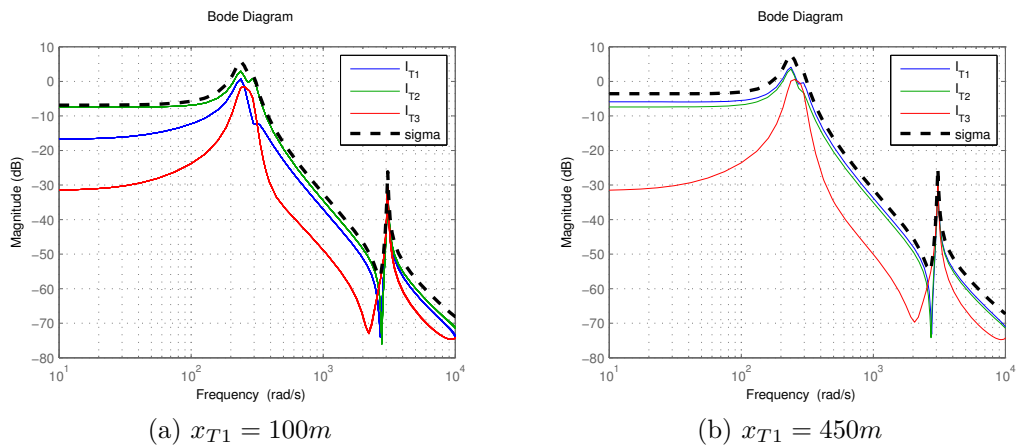
FIGURE 3.31 – Valeur singulière du transfert vers la tension de sortie du hacheur

8.2.3 Application au réseau de tramways

Afin d'illustrer cette notion de gain pour les systèmes MIMO, on reprend l'exemple du réseau de tramways. On considère comme perturbation le courant consommé par les trois tramways, et on cherche à connaître le transfert entre le courant des tramways et le courant fourni par les hacheurs.

A titre d'exemple, regardons le transfert entre le courant consommé par les tramways et le courant fourni par le hacheur H_2 . Les figures 3.32 illustrent ce transfert en représentant le diagramme de bode pour deux positions du tramway T_1 . Ces diagrammes de bode sont le transfert d'un courant tramway sur le courant du hacheur, en supposant les autres nuls. On écrira $T_{I_{H_j}I_{T_i}}$ pour spécifier le transfert entre le courant du tramway i et le courant de sortie du hacheur j .

Sur ces figures est aussi tracée la valeur singulière maximale $\bar{\sigma}$, qui correspond à la plus grande variation du courant $|I_{H2}|$ tant que $\sqrt{I_{T1}^2 + I_{T2}^2 + I_{T3}^2} \leq 1$. Elle permet de prendre en compte plusieurs perturbations en même temps.


 FIGURE 3.32 – Diagramme de bode et valeur singulière maximale entre les courants tramway et le courant I_{h2} en basse fréquence

Sur la figure 3.32a, le tramway T_1 est situé en $x_{T_1} = 100m$. On observe donc que c'est le tramway T_2 qui est le plus influent sur le courant I_{H_2} . En effet, il est le seul en contact direct avec le hacheur H_2 . Il en résulte que $\bar{\sigma} \approx T_{I_{H_2}I_{T_2}}$. Cela est moins vrai en haute fréquence.

Dans le deuxième cas, illustré par la figure 3.32b, le tramway se situe en $x_{T_1} = 450m$. Le hacheur H_2 étant situé en $x_{H_2} = 500m$, il est cette fois en connexion directe avec T_1 et T_2 . Les transferts $T_{I_{H_2}I_{T_2}}$ et $T_{I_{H_2}I_{T_3}}$ sont inchangés. Le gain de $T_{I_{H_2}I_{T_1}}$ a, lui, fortement augmenté, et dépasse maintenant $T_{I_{H_2}I_{T_2}}$. Cela signifie que le hacheur H_2 alimente principalement le tramway le plus proche de lui.

Plus important encore, la valeur singulière $\bar{\sigma}$ est bien au-dessus des autres fonctions de transfert. Le transfert $T_{I_{H_2}I_{T_3}}$ étant négligeable à basse fréquence, cela signifie que, à courant tramway consommé équivalent, le hacheur H_2 fournit plus si le courant se répartit entre les deux tramways.

La figure 3.33a vient illustrer cela. Elle représente la norme du courant fourni par le hacheur H_2 lorsque les deux tramways T_1 et T_2 consomment du courant en même temps en régime permanent. On fait alors varier le rapport entre les courants I_{T_1} et I_{T_2} tout en maintenant la norme $\|I_T\|_2 = \sqrt{I_{T_1}^2 + I_{T_2}^2} = 1$.

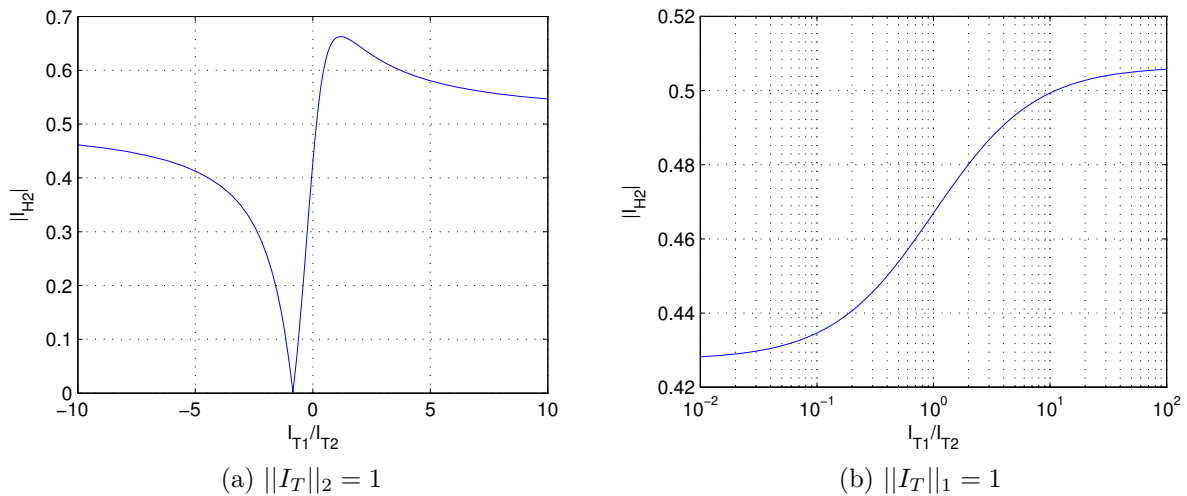


FIGURE 3.33 – Variation du courant I_{H_2} en fonction des courants I_{T_1} et I_{T_2}

Pour $I_{T_1}/I_{T_2} = 0$, on retrouve le gain statique $T_{I_{H_2}I_{T_2}}(0) = 0.43$ et pour $I_{T_1}/I_{T_2} = \infty$, on a $T_{I_{H_2}I_{T_1}}(0) = 0.51$. Ce sont les mêmes gains que ceux relevés sur le diagramme de bode de la figure 3.32b. On remarque que le gain MIMO du système passe par un maximum $\bar{\sigma}$ par $I_{T_1}/I_{T_2} = 0.66$, compris entre les deux cas extrêmes. Enfin, le courant fourni par le hacheur s'annule lorsque $I_{T_1} = -0.84I_{T_2}$. En dessous il est négatif et au dessus il est positif.

La figure 3.33b, quant à elle, représente aussi le courant fourni par le hacheur, mais en considérant cette fois que $\|I_T\|_1 = |I_{T_1}| + |I_{T_2}| = 1$, c'est à dire que le courant consommé par l'ensemble des tramways est constant. La répartition est cette fois bien différente, et seul le cas où $I_{T_1} > 0$ et $I_{T_2} > 0$ est représenté. On retrouve une nouvelle fois les gains statiques, mais cette fois, le courant du hacheur est maximal quand le tramway T_1 le plus proche consomme l'intégralité du courant.

8.2.4 La notion de pire cas

Pour procéder au dimensionnement d'un système dynamique, on peut effectuer une démarche sur cycle de fonctionnement, comme nous le verrons dans la section suivante, ou bien se placer dans le pire cas, du point de vue du dimensionnement.

Dans une approche classique, trouver ce pire cas est une tâche difficile. Il est souvent obligatoire d'effectuer un grand nombre de simulations pour trouver le cas dimensionnant, et aucune garantie n'est disponible pour prouver que ce cas est bien le bon.

En régime permanent, le pire cas peut facilement être calculé, si on connaît les perturbations. Il est alors possible, en résolvant un problème d'optimisation classique, de trouver les paramètres permettant de minimiser le gain statique du système exprimé sous forme LFT.

Si les perturbations sont inconnues, le problème se complique. La notion de gain donnée par l'équation (3.129) doit être utilisée. On peut seulement garantir que si l'entrée du système est bornée, au sens de la norme $\|\cdot\|_2$, alors la norme de la sortie sera inférieur à $\bar{\sigma}$. On rappelle que $\bar{\sigma}$ dépend de la fréquence, et on appelle norme H_∞ d'un système G la plus grande valeur prise par la plus grande valeur singulière $\bar{\sigma}$, sur l'ensemble de la plage de fréquence, soit :

$$\|G(s)\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (3.131)$$

Contraindre cette norme revient à maîtriser le pire cas. C'est précisément l'objectif de la commande H_∞ qui se propose de trouver un correcteur minimisant cette norme. Les algorithmes utilisés se basent alors sur une écriture LFT du système et de son correcteur [SP05].

8.3 Analyse de stabilité

8.3.1 Définition de la stabilité

Les techniques d'analyse de stabilité d'un système sont nombreuses. On distingue celles qui garantissent une stabilité locale basée sur des modèles linéaires et celles qui assurent une stabilité grand signal sur une plage de variation plus grande, basées sur des méthodes non linéaires. Plusieurs notions de stabilité peuvent être proposées. La plus classique est la stabilité BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) qui stipule qu'un système est stable si et seulement si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

La stabilité interne est basée sur l'analyse des variables d'état du système. On parlera aussi de stabilité au sens de Lyapunov. Un point d'équilibre x_e est stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a > 0 \text{ tel que si } \|x(0) - x_e\| < a, \text{ alors } \|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (3.132)$$

Cette stabilité est une stabilité grand signal, qui garantit que si l'état initial est suffisamment proche d'un point d'équilibre, alors le système sera stable. On définit également la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre x_e par :

$$\exists a > 0, \text{ tel que si } \|x(0) - x_e\| < a, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e \quad (3.133)$$

8.3.2 Stabilité d'un système LTI

Dans le cas d'un système LTI, plusieurs méthodes permettent de conclure sur la stabilité [Sau09]. Un système LTI mono-variable est BIBO stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative. On retrouve aussi le critère de stabilité de Routh-Hurwitz qui permet d'éviter le calcul de ces pôles.

L'analyse de stabilité interne se fait en étudiant la matrice dynamique A et ses valeurs propres. Un point d'équilibre sera stable si et seulement si toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative. Si les parties réelles sont strictement négatives, alors le système est asymptotiquement stable.

Valeurs propres et leurs sensibilités

Dans le cas d'un système linéarisé, ce résultat n'est vrai que localement, pour de faibles variations.

Il peut être intéressant de savoir quels éléments déterminent la stabilité d'un système. On peut par exemple calculer la sensibilité d'une valeur propre λ_i vis-à-vis d'un paramètre a qui, d'après [KBL94], s'exprime par :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a} = \Psi_i \frac{\partial A}{\partial a} \Phi_i \quad (3.134)$$

où Ψ_i est le i ème vecteur propre à gauche et Φ_i , le i ème vecteur propre à droite.

8.3.3 Stabilité nominale d'un système MIMO en boucle fermée

Peu de systèmes sont utilisés en boucle ouverte. En effet, un système en boucle ouverte peut rarement assurer les objectifs de performance assignés, et même pire, il peut être instable. L'analyse de stabilité nominale est donc la première chose à vérifier lorsqu'on cherche à étudier les performances d'un asservissement.

Soit G un système en boucle ouverte, et K le correcteur qui lui est associé tel que :

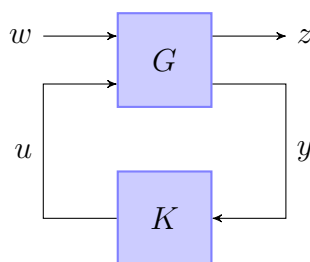


FIGURE 3.34 – Forme générale d'un système en boucle fermée

Il est possible de conclure sur la stabilité, en calculant la matrice d'état en boucle fermée et en regardant la partie réelle des valeurs propres. Ce calcul peut devenir problématique si le système atteint une taille considérable.

Pour étudier la stabilité d'un système en boucle fermée, il est suffisant d'étudier la boucle ouverte, formée par le correcteur et le système. Dans le cas d'un système

MIMO, le théorème des petits gains [SP05] permet de conclure sur la stabilité (de manière très conservatrice).

Théorème 3 (Petits gains). *On considère le système G stable de la figure 3.34, dont la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par $L(s) = GK$. Le système en boucle fermée est stable si :*

$$\|L(j\omega)\| < 1 \quad \forall \omega \quad (3.135)$$

Ce théorème est vrai pour toute norme $\|\cdot\|$. On peut alors conclure sur la stabilité du système en boucle fermée en utilisant la norme H_2 . Le théorème des petits gains s'écrit alors :

$$\|L(j\omega)\|_\infty < 1 \quad (3.136)$$

où $\|L(j\omega)\|_\infty$ est donné par (3.131).

8.3.4 Stabilité robuste d'un système MIMO en boucle fermée

Comment conclure sur la stabilité d'un système lorsque ses paramètres varient ?

On rappelle qu'un système en présence d'incertitude s'écrit dans le cas général sous la forme LFT de la figure 3.35a. En intégrant le correcteur, on obtient le système en boucle fermée de la figure 3.35b, avec $N = \mathcal{F}_l(P, K)$.

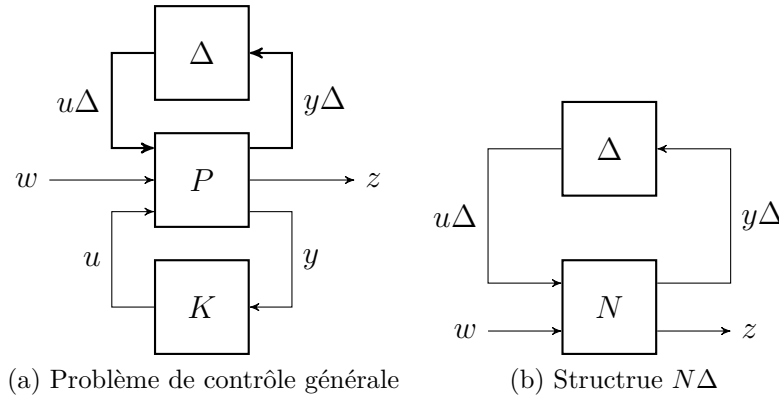


FIGURE 3.35 – LFT d'un système, avec son correcteur, en présence d'incertitude

On suppose que le système est stable en boucle fermée sans incertitude (Δ_0). Si on s'intéresse à la stabilité robuste, il suffit d'appliquer le théorème du petit gain au transfert de $u\Delta$ vers $y\Delta$. Il en résulte que le système est stable de manière robuste s'il est stable au point nominal et si :

$$\|M(j\omega)\Delta\|_\infty < 1 \text{ avec } M = N_{11} \quad (3.137)$$

Si $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, alors le système est robuste en stabilité si $\|M(j\omega)\|_\infty < 1$. Encore une fois, ce résultat est très conservatif. Δ permet de modéliser les incertitudes paramétriques. Cette matrice peut cependant être utilisée pour prendre en compte des dynamiques non modélisées. Cependant, en considérant seulement les incertitudes paramétriques, la matrice Δ est diagonale.

8.3.5 La mu-analyse

Afin d'obtenir un résultat moins conservatif, il est intéressant de préciser que la matrice Δ possède une structure. C'est l'objectif des valeurs singulières structurées, μ .

La LFT de la figure 3.35b peut s'écrire :

$$\mathcal{F}_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} \quad (3.138)$$

$\mu(M)$ est alors définie comme la plus petite incertitude Δ , possédant une structure donnée, qui rend la matrice $(I - N_{11}\Delta)$ singulière, c'est-à-dire le système instable. On a alors $\mu(M) = 1/\bar{\sigma}(\Delta)$

Théorème 4 (Stabilité robuste pour matrice d'incertitude diagonale). *Si le système nominal $M = N_{11}$ est stable, alors le système $M\Delta$ de la figure 3.35b est stable si et seulement si :*

$$\mu(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta) < 1, \text{ avec } \forall\omega \quad (3.139)$$

Cette version améliorée du théorème des petits gains est moins conservative, car elle tient compte de la structure. Elle permet de conclure sur les paramètres rendant le système instable.

Attention, ces méthodes sont valables pour des paramètres incertains, ou de dimensionnement. Ces méthodes ne peuvent pas être utilisées sur des systèmes LPV, où les paramètres varient dans le temps.

8.3.6 Méthode de Lyapunov

La méthode de Lyapunov est basée sur une approche énergétique qui s'applique aussi bien à des systèmes linéaires que non linéaires. S'il existe une fonction scalaire de l'état, V , telle que :

$$\begin{cases} V(x) \geq 0, \forall x \neq x_e \text{ et } V(x_e) = 0 \\ \dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x) \leq 0, \forall x \neq x_e \text{ et } \dot{V}(x_e) = 0 \end{cases} \quad (3.140)$$

alors x_e est un point d'équilibre stable.

Cette méthode est valable pour tout type de système, qu'il soit LTI, LPV ou non linéaire.

Dans le cas des système LTI, il est courant d'utiliser une fonction quadratique telle que $V(x) = x^T Q x$ où Q est symétrique et définie positive. La condition (3.140) devient alors :

$$A^T Q + Q A < 0 \quad (3.141)$$

Il s'agit d'une LMI² permettant de conclure sur la stabilité d'un système[BEGFB94].

2. Linear Matrix Inequalities

8.3.7 Application au hacheur série

Afin d'illustrer l'analyse de stabilité, on reprend le cas du hacheur série. On étudie l'asservissement de la tension de sortie. En utilisant une méthode classique de Ziegler-Nichols, on trouve un correcteur PI ($K_p = 1.27 \cdot 10^{-4}$ et $K_i = 0.45$) permettant de garantir une erreur statique nulle, un temps de réponse $t_r = 0.0065$ s avec une marge de gain de 6.67 dB.

En boucle fermée, la matrice d'état dynamique A_{cl} se calcule en utilisant les propriétés d'interconnexion des sous-systèmes entre eux exposées à la section 3. L'équation du correcteur est donnée par :

$$\dot{\alpha} = -K_p \dot{v}_{c2} + K_i (V_{ref} - v_{c2}) \quad (3.142)$$

On étudiera le système linéarisé obtenu à l'équation (3.101). Couplé avec l'équation du correcteur (3.142), le système linéarisé en asservissement de tension s'exprime par l'équation (3.143).

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{i}_{l1} \\ \dot{v}_{c2} \\ \dot{i}_{l2} \\ \dot{\alpha} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{\hat{\alpha}}{C_1} & -\frac{\hat{i}_{l2}}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{r_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \frac{\hat{\alpha}}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{r_2}{L_2} & \frac{\hat{v}_{c1}}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & -K_i & -\frac{K_p}{C_2} & 0 & K_i \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \\ v_{c2} \\ i_{l2} \\ \alpha \\ V_{ref} \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

Cet asservissement est stable, et la plus grande partie réelle des valeurs propres en boucle fermée est de -573.37 , garantissant la stabilité nominale.

On cherche maintenant à savoir si notre systèmes est toujours stable lorsque les paramètres le constituant ne sont pas connus avec précision. En tenant compte des incertitudes, la matrice dynamique du système en boucle ouverte se met sous la forme (3.26).

En considérant les incertitudes déjà vues sur le hacheur, la Robust Control Toolbox de Matlab permet de conclure que cet asservissement sera stable. En effet, $\mu = 0.89$. Il en résulte donc qu'il faut une combinaison d'incertitudes telle que $\|\Delta\|_\infty > 1.12$ pour rendre le système instable.

Si par contre on tolère jusqu'à 40% d'incertitude sur L_2 , la valeur de μ passe à $\mu = 1.35$. Etant supérieure à 1, cette valeur de μ implique que le système n'est stable que si $\|\Delta\|_\infty < 0.74$.

Par exemple, le jeu de données $C_1 = 47.5 \mu\text{F}$, $C_2 = 15.6 \mu\text{F}$ et $L_2 = 123.6 \mu\text{H}$, est bien compris dans la plage variation avec $\|\Delta\|_\infty = 0.85 < 1$. Ces valeur font pourtant apparaître une valeur propre dont la partie réelle est nulle, entraînant l'instabilité.

8.4 Analyse des performances dynamiques en boucle ouverte

L'analyse de performance consiste à étudier comment les sorties du système se comportent lors des variations des signaux d'entrées. Encore une fois, on séparera la performance nominale et la performance robuste.

Ces performances peuvent être un temps de montée ou une valeur en régime permanent. Ce sont la plupart du temps des critères temporels qui trouvent une

certaine équivalence dans le domaine fréquentiel. Ainsi, des contraintes temporelles peuvent se traduire par un gabarit fréquentiel noté $1/W_P$ représenté par exemple à la figure 3.36.

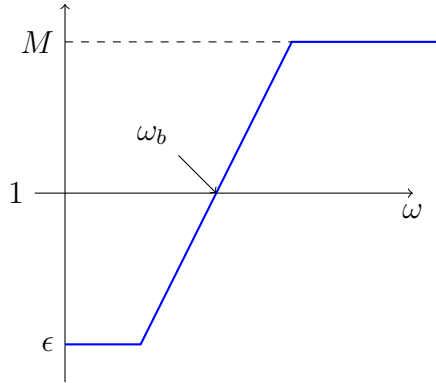


FIGURE 3.36 – Gabarit de performance $1/W_P$

ϵ correspond à la borne supérieure tolérée en régime permanent. ω_b correspond à la bande passante, c'est-à-dire au temps de réponse, et M est le gain haute fréquence, une image de la robustesse, qui correspond aussi au dépassement maximum autorisé. Ce gabarit est classiquement approché par une fonction de transfert du premier ordre [SP05] :

$$1/W_P = \frac{s + \omega_b \epsilon}{s/M + \omega_b} \quad (3.144)$$

Garantir que la réponse temporelle d'une sortie face à une perturbation respecte ces contraintes revient à assurer que la fonction de transfert T_{zw} reste sous le gabarit, soit :

$$|T_{zw}(j\omega)| < 1/W_z(\omega), \quad \forall \omega \quad (3.145)$$

Ce qui se traduit simplement par :

$$\|W_P T_{zw}\|_\infty < 1 \quad (3.146)$$

Ainsi, la performance s'exprime par un critère semblable à la stabilité. Concernant la robustesse de performance, l'approche est semblable à celle utilisée pour la stabilité. Elle consiste à former le système incertain sous la forme de la figure 3.35b, et à étudier l'équation (3.146), où $T_{zw} = \mathcal{F}_u(N, \Delta)$, en supposant que $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

8.4.1 Les pertes du réseau de tramways

Que ce soit pour le dimensionnement ou pour la conduite du réseau, les pertes sont au cœur du processus de décision. Nous avons déjà réussi à exprimer les pertes sous une forme quadratique donnée par l'équation (3.30). On définit z tel que :

$$z = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

z ne peut exister que si Q et R sont définies non-négatives afin de pouvoir calculer leur racine carrée³. La norme de ce vecteur est donnée par :

$$\|z\|_2 = x^T Q x + w^T R w \quad (3.148)$$

3. une matrice N est une racine carrée d'une matrice M si $N^2 = M$

On retrouve une forme identique à celle donnée par l'équation (3.30). On rappelle que $Q = C_1^T \mathcal{R} C_1$, où la matrice \mathcal{R} est formée par la concaténation des matrices de chaque sous-système obtenues par l'équation (3.29), et où C_1 correspond aux courants dans les éléments en causalité résistive et aux tensions des éléments en causalité conductance.

Le réseau ne possède pas de résistance en parallèle des sources de tension modélisant les ponts de diodes, ni en série des sources de courant représentant le courant moteur. Il en résulte que R et N sont nulles.

Il est possible de prendre en compte les pertes dans les convertisseurs. L'équation (2.41) exprime ces pertes à partir des grandeurs commutées. Ces grandeurs commutées s'expriment à partir du modèle moyen donné par (3.90). Les cellules de commutation n'étant pas directement reliées aux sources de perturbation, D_{21} est nulle.

L'équation (2.41) nous permet de calculer les pertes dans le convertisseur $P_{con} = x^T C_2^T M_0' C_2 x$. Les pertes totales dans le réseau s'expriment donc par :

$$\|z\|_2 = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} C_1^T \mathcal{R} C_1 & 0 \\ 0 & C_2^T M_0' C_2 \end{bmatrix}}_Q x \quad (3.149)$$

A partir du modèle moyen de l'équation (3.90) exprimé sous forme d'une LFT, comme sur la figure 3.37a, il est possible d'écrire le modèle moyen grand signal en boucle ouverte, permettant de calculer les pertes en calculant $\|z\|_2$ à partir de la LFT de la figure 3.15.

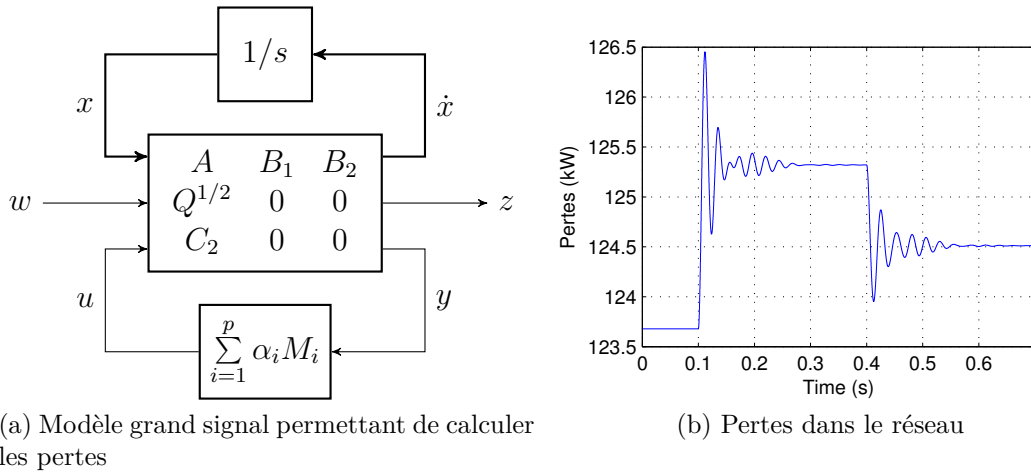


FIGURE 3.37 – Calcul des pertes

La figure 3.37b nous montre l'évolution dynamique des pertes obtenues à partir du modèle 3.15. La perturbation consiste ici en un échelon de 10 A sur le tramway T_1 à $t = 0.1$ s, suivi d'un second de -10 A sur le tramway T_2 à $t = 0.4$ s.

8.4.2 Les contraintes en tension du réseau de tramways

La tension en tout point de la LAC doit respecter des normes. Nous avons déjà vu que la tension ne devait pas dépasser 900 V. Cependant, il s'agit d'une contrainte

sur le régime permanent. La tension peut en effet dépasser ces 900 V, mais seulement pendant un certain temps.

Le gabarit de tension autorisé sur un réseau ferroviaire sous 750 V est donné par la norme EN-50163 [Cen] et est représenté sur la figure 3.38.

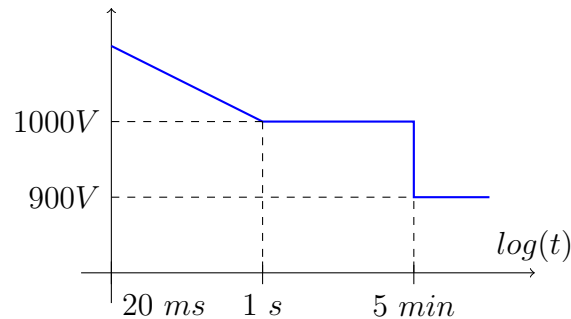


FIGURE 3.38 – Gabarit de performance temporelle de la tension LAC [Cen]

Pour $0.02 \leq t \leq 1$ s, la tension doit être inférieure à $1000 \times t^{-0.0611}$. Dans le cas des transitoires rapides ($t < 20$ ms), la surtension autorisée est régie par la norme EN 50124-2.

A partir du gabarit de la figure 3.38, on peut construire un gabarit fréquentiel conformément à la figure 3.36. On s'intéresse uniquement à la partie $0.02 \leq t \leq 1$ s. On suppose (grande approximation!), que pour ($t < 20$ ms), $U < 1270 = 1000 \times 0.02^{-0.0611}$.

Le gabarit de performance de la figure 3.38 est approximé par un premier ordre selon l'équation (3.144) avec $M = 1270$, $\epsilon = 1000$ et $\omega_b = 0.003$, permettant d'obtenir un temps de réponse de 1 s. Ce gabarit est tracé sur la figure 3.39a, et sa réponse temporelle est donnée figure 3.39b, ainsi que la norme de la figure 3.38 en rouge.

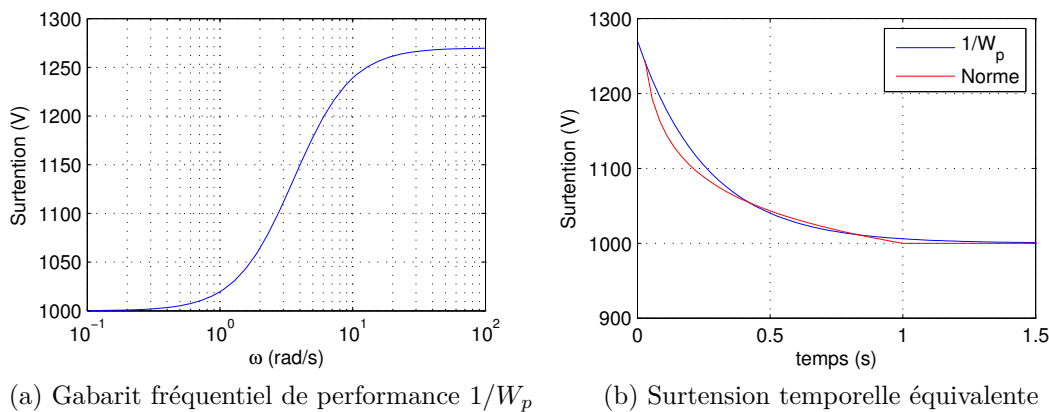


FIGURE 3.39 – Surtension sur la LAC

Il est encore une fois possible de considérer les incertitudes. On cherche par exemple à connaître l'influence d'un échelon de courant du tramway T_1 sur la tension de son bus continu, et sur la tension du hacheur H_1 , sans connaître la position exacte du tramway, mais seulement le secteur où il se situe.

Le gabarit de performance est redéfini pour travailler autour du point de fonctionnement linéaire. De plus, on suppose que la variation maximale du courant tramway

est de 1000 A. Le gabarit de performance doit alors être corrigé.

La figure 3.40 représente le transfert entre le courant du tramway et la tension de son bus continu en bleu. En rouge, est tracé le transfert entre le même courant et la tension du hacheur alors qu'en vert, on retrouve le gabarit de performance.

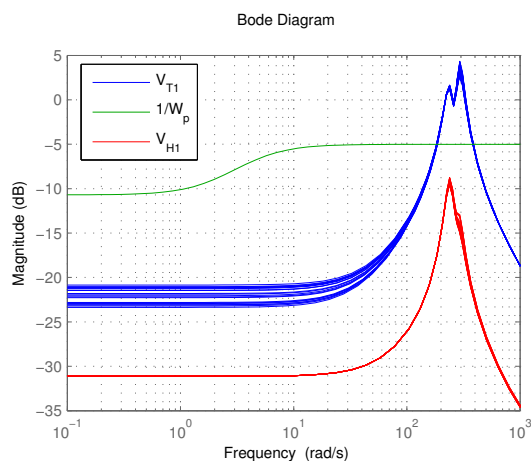


FIGURE 3.40 – Robustesse en performance avec incertitude sur la position du tramway

La position du tramway T_1 varie entre 0 et 200 m. On retrouve bien que le gain statique de la tension du bus continu est très sensible à cette valeur. La tension de sortie du hacheur à basse fréquence est invariable, car ce hacheur est le seul à alimenter directement le tramway⁴. En haute fréquence, on voit apparaître une faible différence due à la variation de l'inductance de la LAC.

La courbe en rouge est toujours sous la courbe verte. Il en résulte, d'après l'équation (3.145), que la tension du hacheur respecte toujours les normes de tension. Par contre la tension du bus continu du tramway dépasse le gabarit sur la plage de fréquences $\omega \in [170 \ 370] \text{ rad/s}$, ce qui implique qu'elle dépasse 1270V.⁵

Un courant moteur de 1000 A dans ces fréquences (en plus des 1000 A déjà consommés au point d'équilibre), induira un non respect des normes de tension, sur un réseau en boucle ouverte.

8.5 Vers un outil de dimensionnement complet structure/commande

Nous avons vu comment faire apparaître les paramètres du réseau sous la forme LFT. Ces paramètres peuvent être des paramètres incertains Δ_i , ou des paramètres de dimensionnement Δ_d .

Dans un second temps, nous avons présenté une méthode permettant de conclure sur la stabilité du système nominal, et sur sa stabilité, en tenant compte des incertitudes. Puis nous avons introduit la notion de performance à travers le gain des

4. Si on avait étudié le tramway T_2 et le hacheur H_2 cela aurait été différent, car si T_2 est proche de H_3 , H_2 fournit moins de courant, et sa tension augmente

5. La tension nominale du bus étant de 759.5V, il peut aussi s'agir d'une tension inférieure à 249 V

fonctions de transfert pondérées par des gabarits de performance, et nous avons fait apparaître explicitement le calcul des pertes grâce à la norme $\|\cdot\|_2$.

La figure 3.41 est la LFT utilisée pour le dimensionnement. C'est un modèle grand signal en boucle ouverte, permettant d'étudier l'influence des rapports cycliques α_i et des paramètres de dimensionnement Δ_d ici en rouge sur les performances du système, en présence d'incertitudes.

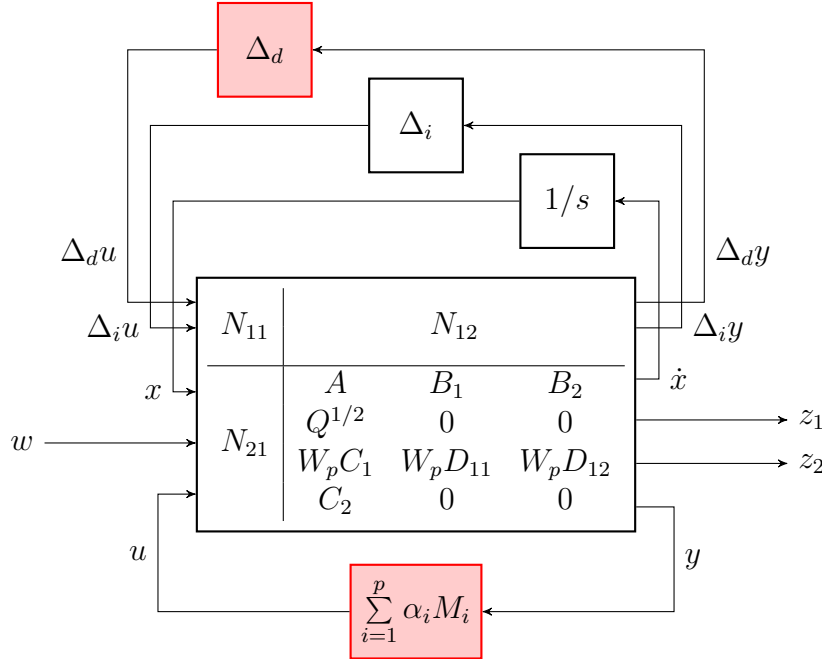


FIGURE 3.41 – Modèle de dimensionnement

On retrouve deux types de performances. z_1 permet de calculer les pertes de sorte que $P = \|z_1\|_2$ de manière semblable à la partie 8.4.1. z_2 correspond aux performances temporelles telles que définies dans la section 8.4.2. Les matrices C_1 , D_{11} et D_{12} permettent de choisir les sorties sur lesquelles des contraintes existent. Les contraintes ou performances sont respectées si $\|z_2\|_\infty < 1$.

Les matrices N_{11} , N_{12} et N_{21} sont définies conformément à la section 6.2.3, et permettent d'intégrer les incertitudes, alors que N_{22} représente le modèle nominal.

Les matrices Δ_d , Δ_i et $1/s$ sont toutes diagonales et réelles. La matrice $\sum_{i=1}^p \alpha_i M_i$ peut être diagonalisée en procédant à un changement de variable sur C_2 et B_2 .

La LFT de la figure 3.41 peut être décrite sous forme plus compacte par la LFT de la figure 3.42.

Les paramètres de dimensionnement sont regroupés dans la matrice réelle diagonale rouge notée K . L'objectif du problème est donc de trouver les coefficients de cette matrice permettant d'assurer la stabilité (peu de problèmes, nous sommes en boucle ouverte). La matrice K doit aussi permettre d'avoir $\|z_2\|_\infty < 1$ tout en minimisant $\|z_1\|_2$ au point nominal ($\Delta_i = 0$) pour une perturbation donnée, mais aussi en tenant compte des incertitudes $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$.

Une structure de commande semblable à celle de la figure 3.42 peut être construite pour permettre la synthèse de correcteurs. De ce fait, les mêmes algorithmes que ceux développés pour la commande H_∞ doivent pouvoir être utilisés pour le dimensionnement de la structure et de la commande.

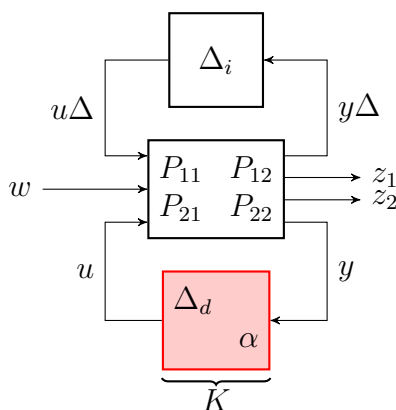


FIGURE 3.42 – Modèle de dimensionnement sous forme standard compact

Ces algorithmes permettent de trouver une matrice K de sorte que les contraintes soient respectées. La résolution du problème de commande passe généralement par l'utilisation des Inégalités Linéaires Matricielles. Les matrices obtenues sont des matrices pleines. Il est néanmoins possible d'imposer une structure à ces matrices de sorte qu'elles soient diagonales [Her11], permettant ainsi de résoudre le problème de dimensionnement.

La prise en compte du déplacement du tramway au travers des incertitudes permet ainsi de synthétiser une commande et une structure pour le pire cas. On ne tient pas compte de la variabilité de α , en résolvant le problème de la figure 3.42.

La recherche d'une loi de commande optimale sur un cycle de fonctionnement ne peut donc pas être résolue de cette manière. Les paramètres de dimensionnement tels que la valeur des éléments constitutifs des filtres peuvent être évalués grâce à cette méthode. En diminuant la valeur des filtres, on repousse les résonances vers les hautes fréquences, tout en gagnant en robustesse. Un système sans élément réactif (étude en régime permanent) relâche ainsi toutes les contraintes sur les dynamiques.

Cependant, ces filtres sont là pour réduire les harmoniques générés par les convertisseurs qui n'ont pas été modélisés. Le modèle moyen, en lissant les commutations, ne permet pas d'étudier les harmoniques, il n'est donc pas suffisant pour dimensionner les filtres.

9 Optimisation dynamique sur cycle de fonctionnement

Nous avons déjà parlé d'optimisation sur cycle de fonctionnement au chapitre 2. En introduisant le rendement énergétique, nous avons vu comment il était possible de déterminer les consignes permettant de minimiser les pertes sous contraintes.

Nous avons cependant précisé que cette approche souffrait de quelques limitations. La notion de cycle de fonctionnement a été approchée par l'enchaînement de régimes permanents de systèmes quasi-statiques. Il en résulte que les éléments de stockage et la dynamique du système n'ont pu être pris en compte.

L'objectif de cette section va être de proposer une loi de commande, qui tiendra compte des dynamiques. Les méthodes utilisées seront basées sur les méthodes de commande optimale. La commande optimale est issue des techniques de program-

mation dynamique, ainsi que du calcul de variations établi entre autres par Euler au XVIII^e siècle. Elle a été développée principalement par Pontryagin [PG86], Hull, Bryson, Ho [BH79] et Kirk [Kir04].

Ces techniques de commande optimale ont pour objectif de fournir une loi de commande qui minimise un certain critère. Elles peuvent prendre en compte des contraintes de fonctionnement comme la limitation des actionneurs. Il est également possible de traiter des paramètres constants, ce qui permet de faire du dimensionnement.

Elles se regroupent en deux grandes catégories. Les lois de commande hors-ligne, qui sont des lois de commande en boucle ouverte, et celles en boucle fermée. La commande hors ligne sera surtout utilisée pour l'étude et l'analyse de systèmes. Son utilisation sur le terrain se fait essentiellement grâce aux techniques de commande prédictive qui, à partir d'un modèle interne, essaient de prévoir l'évolution du système pour déterminer la loi de commande optimale sur un horizon donné.

Parmi les lois de commande en boucle fermée, la plus connue est sûrement la commande LQ (Linéaire Quadratique), qui permet de commander les systèmes linéaires tout en minimisant un coût quadratique, qui peut être une consommation énergétique ou une erreur vis-à-vis des consignes. Des techniques basées sur la méthodologie de la commande robuste permettent enfin de calculer un correcteur qui satisfait les exigences, tout en minimisant les pertes.

9.1 Exemple d'illustration

Afin d'illustrer les possibilités qu'offre la commande optimale, nous allons étudier le cas d'un tramway intégrant du stockage embarqué se déplaçant le long de la ligne d'essai de la Rochelle dont l'alimentation électrique a été simplifiée. Le schéma électrique de ce réseau est présenté figure 3.43.

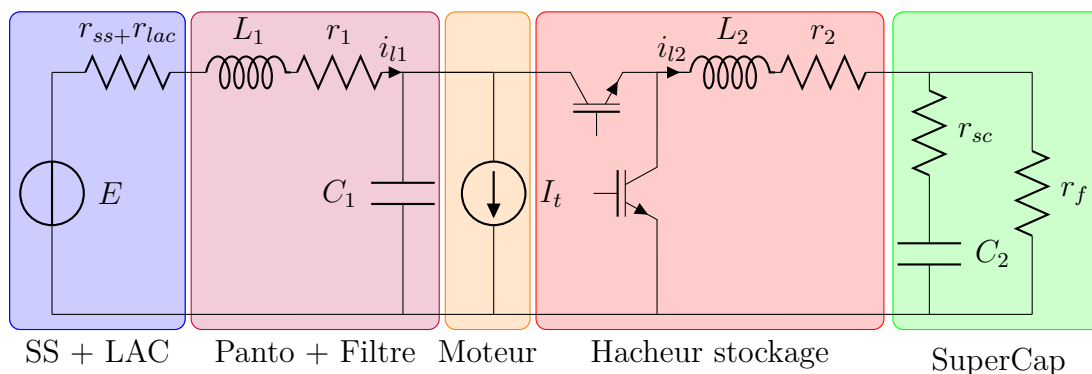


FIGURE 3.43 – Tramway avec stockage embarqué

Le tramway se déplace le long de cette ligne, et ses caractéristiques mécaniques ont été calculées à la section 4. Il est alimenté par une seule sous-station réversible située en $x_{ss} = 1000$ m dont la tension à vide est $E = 790$ V. L'empiètement est pris en compte par une résistance $r_{ss} = 33$ m Ω . La résistance linéique de la LAC est $\rho = 0.127$ m Ω /m et $r_{lac} = \rho|x - x_{ss}|$.

Le filtre d'entrée en violet est un filtre LC, avec $L_1 = 1.2$ mH et $C_1 = 9.3$ mF.

La résistance $r_1 = 39.2 \text{ m}\Omega$ représente la résistance du pantographe et celle de l'inductance du filtre.

En orange, on retrouve une source de courant placée sur le bus continu modélisant le courant consommé par l'onduleur de traction et les auxiliaires. Ce courant dépend de la position du tramway et est représenté sur la figure 3.43. On néglige l'influence de la tension du bus sur le courant tramway.

Sur ce bus continu, on retrouve également un hacheur en rouge, permettant d'interfacer un moyen de stockage (ici une supercapacité) en vert. Ce hacheur est supposé idéal. L'inductance du filtre de sortie est de $L_2 = 1 \text{ mH}$ et la résistance $r_2 = 20 \text{ m}\Omega$.

Ce pack de supercondensateurs représente un stockage de 3kWh. Il est constitué de 222 éléments en série regroupés en 6 branches parallèles [Abd09]. Chaque élément BCAP0010 de Maxwell [BCA] a une capacité de 2600F et une ESR de $0.7 \text{ m}\Omega$. Sa tension doit être maintenue entre 1.15 V et 2.3 V et son courant de recharge ne doit pas dépasser 6000 A. On en déduit que $r_{sc} = 26 \text{ m}\Omega$, $C_2 = 70 \text{ F}$ et $r_f = 1.68 \text{ k}\Omega$. La tension du pack devra être comprise entre 255 V et 510 V. Le courant maximal sera limité cette fois par le hacheur à 1000 A.

9.2 Définition du problème de commande optimale

a) Définition du système physique

La première étape du problème de commande va être la mise en équations du système que l'on souhaite contrôler. Ce système possédera n_x variables d'état regroupées dans un vecteur d'état $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n_x}]^T$ et n_u variables de contrôle regroupées dans le vecteur $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{n_u}]^T$.

Le modèle retenu ici est un modèle sous forme d'une EDO telle que celle donnée par (3.150)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.150)$$

associée aux conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.151)$$

Lors de l'étude d'un réseau multi-convertisseurs, on utilisera comme système d'état le modèle établi en (3.55) généré automatiquement.

Application

Sur le système de la figure 3.43, l'équation d'état (3.150) devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{i}_{l1} \\ \dot{v}_{c2} \\ \dot{i}_{l2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{\alpha}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{r_1+r_{ss}+r_{lac}}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(r_f+r_{sc})C_2} & \frac{r_f}{(r_f+r_{sc})C_2} \\ \frac{\alpha}{L_2} & 0 & -\frac{r_f}{(r_f+r_{sc})L_2} & -\frac{r_2r_{sc}+r_2r_f+r_{sc}r_f}{(r_f+r_{sc})L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ i_{l1} \\ v_{c2} \\ i_{l2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I_t \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

La seule variable de contrôle que l'on considère est le rapport cyclique α .

b) Un critère de performance

La seconde étape d'un problème de commande optimale est de définir une fonction coût ou fonction objectif. Sous sa forme la plus générale, la fonction coût d'un problème d'optimisation dynamique sur un cycle de fonctionnement aura la forme donnée par (3.153) appelée problème de Bolza.

$$J = \theta(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.153)$$

J est une fonctionnelle, c'est à dire une fonction prenant d'autres fonctions en argument. La première partie de cette fonctionnelle θ est appelée coût de Mayer. Elle permet de résoudre des problèmes de temps minimum ou d'assurer que les variables d'état atteignent une certaine valeur à un horizon donné. On utilise ce type de coût pour s'assurer qu'une batterie n'est pas entièrement déchargée à la fin du cycle de fonctionnement par exemple.

Le deuxième terme ϕ sous l'intégrale est appelé coût de Lagrange. Il permet de prendre en compte les problèmes de consommation énergétique minimale, d'asservissement et de régulation. Cette fonction ϕ est souvent une fonction quadratique. L'avantage d'avoir un critère quadratique où les matrices sont symétriques et définies positives est d'assurer l'existence et l'unicité de la solution.

L'objectif de la commande optimale sera de trouver une loi de commande u^* qui permet de minimiser cette fonctionnelle.

Contrairement au cas quasi-statique, on travaille maintenant avec un critère intégral au lieu d'une somme.

Application

Dans notre application, le temps final n'est pas contraint (on peut par contre le prendre en compte si on souhaite proposer des grilles horaires optimisées en temps et en carburant). Le coût de Mayer est donc nul car les contraintes sur l'état peuvent être prises en compte de manières différentes.

Le problème que l'on cherche à résoudre est un problème de consommation énergétique minimale. Afin de minimiser les pertes, plusieurs stratégies de commande peuvent alors être utilisées :

1. limiter le courant i_{l1} capté par le pantographe, ce qui favorisera les échanges avec le stockage,
2. maintenir la tension v_{c1} du bus continu constante, qui aura sensiblement les mêmes effets,
3. minimiser les pertes, qui sera la solution vraiment optimale.

Les deux premières stratégies sont sous-optimales mais peuvent être implémentées facilement sur le système réel. La dernière stratégie vraiment optimale permet de montrer les gains possibles.

Le coût retenu pour la limitation en courant peut s'écrire :

$$J_1 = \int_0^{t_f} i_{l1}^2 dt \quad (3.154)$$

La régulation de la tension renvoie la fonction coût (3.155)

$$J_2 = \int_0^{t_f} (v_{c1} - V_{ref})^2 dt \quad (3.155)$$

Le calcul des pertes est un peu plus complexe. Pour un système isolé, nous avons pu les calculer de manière automatique grâce à l'équation (3.30). Pour un système interconnecté, on procède de la même manière, mais en utilisant l'équation plus générale (3.97), en tenant compte du fait qu'il n'y a pas de transmission directe entre la perturbation et la sortie.

Les pertes s'expriment donc par la forme quadratique donnée par l'équation (3.149). Ces fonctions intègrent les pertes dans les impédances du réseau données par (3.30) et les pertes dans les convertisseurs obtenues grâce à (2.41).

La résistance à l'état passant des interrupteurs du haut et des interrupteurs du bas implique que les pertes dans le convertisseur ne dépendent pas explicitement du rapport cyclique. Les pertes de l'équation (3.149) peuvent donc se réduire sous la forme :

$$J_3 = \int_0^{t_f} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} dt \quad (3.156)$$

Dans notre exemple applicatif, on trouve, en négligeant les pertes dans le hacheur ⁶ :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{ss} + r_{rlac} + r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_{sc} + r_f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_2 r_{sc} + r_2 r_f + r_{sc} r_f}{r_f + r_{sc}} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

c) Des limitations physiques

Comme dans le cas statique, notre problème peut être sujet à des contraintes de différents types. On retrouve d'une part les contraintes sur la commande, comme l'ouverture d'une vanne ou le rapport cyclique d'un convertisseur qui sont physiquement limitées.

On peut également rencontrer des contraintes sur les variables d'état en un point (l'état final par exemple), isopérimétriques (intégrale dans le cas de la limitation d'une ressource par exemple), ou encore sur l'ensemble du parcours. Ces contraintes peuvent être des contraintes d'égalité ou d'inégalité. On s'intéressera plus particulièrement aux contraintes affines de type :

$$\mathbf{F}_e \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_e \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_i \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \leq \mathbf{E}_i \quad (3.158)$$

Application

Les contraintes dans notre cas d'étude ont déjà été partiellement évoquées.

On aura dans un premier temps les contraintes valables en tout point :

- le rapport cyclique : $\alpha \in [0, 1]$,
- la tension du pack : $v_{pk} \in [255 \text{ V}, 510 \text{ V}]$,
- le courant du pack : $i_{l2} \in [-1000 \text{ A}, 1000 \text{ A}]$,
- la tension du bus : $v_{c1} \in [650 \text{ V}, 900 \text{ V}]$.

6. Une partie de ces pertes sont prises en compte par le biais de la résistance r_2

A cela il faut rajouter les contraintes en un point, comme au temps initial ou final. C'est le cas de l'état de charge de la supercapacité défini par l'équation (3.159) :

$$SOC = 1 - \frac{v_{max}^2 - v_{pk}^2}{v_{max}^2 - v_{min}^2} \quad (3.159)$$

Cet état de charge est directement lié à la tension du pack v_{pk} . On suppose que le pack est initialement chargé, et *on impose qu'il soit entièrement chargé à la fin du cycle*. On a donc $v_{pk}(t_0) = 510 \text{ V}$ et $v_{pk}(t_f) = 510 \text{ V}$.

Cette contrainte sur l'état final ne peut être gérée que par la commande optimale. En optimisant point par point, il est en effet impossible de spécifier que l'on souhaite garder de l'énergie pour maintenir la capacité chargée pour les moments les plus importants. Dans ce cas, l'énergie du stockage est utilisée pour minimiser les pertes en un point sans se soucier de l'avenir.

Pour un état initial donné, et pour une loi de commande connue, l'équation (3.150) définit une unique trajectoire pour les variables d'état et la valeur de J ne dépend que du temps final et de la loi de commande. En résumé, le problème de commande optimale consiste à trouver la commande u^* dans l'espace de commande admissible U minimisant J .

On notera alors :

$$u^* = \min_{u \in U} J \quad (3.160)$$

Le problème défini jusqu'ici suppose d'une part que les paramètres sont invariants, et d'autre part que les perturbations sont nulles. Nous verrons par la suite comment intégrer ces éléments dans la résolution du problème.

9.3 Résolution du problème de commande

Globalement, deux approches de résolutions différentes sont possibles pour résoudre ce type de problème : la programmation dynamique et le calcul de variations.

9.3.1 La programmation dynamique

La programmation dynamique repose sur le principe d'optimalité de Bellman [Bel56] qui énonce que :

Proposition 7. *Soit $t_1 \in [t_0, t_f]$, alors la trajectoire optimale sur $[t_0, t_f]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t_f]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$.*

Autrement dit, cette méthode repose sur une segmentation du problème en sous-problèmes qui, mis sous forme réursive, permettent de trouver par induction arrière (backward induction) une loi de commande optimale.

Cette méthode nécessite la plupart du temps une discrétisation pour pouvoir être appliquée et est couramment utilisée pour résoudre des problèmes de graphe comme la recherche du plus court chemin. Bien que plus efficace que l'énumération directe, cette méthode est vite sujette à des problèmes d'explosion combinatoire dès que le pas de discrétisation et le nombre d'états augmentent.

9.3.2 Le calcul de variations

Le calcul de variations [Kir04] a été massivement utilisé depuis longtemps pour l'optimisation, en particulier en mécanique. Grâce au calcul variationnel, Newton a pu calculer la forme permettant de minimiser les frottements d'un corps, et Bernoulli démontrer que la courbe permettant à un corps en chute sur un toboggan de relier deux points entre eux le plus rapidement était la courbe en brachistochrone.

Le théorème fondamental du calcul variationnel est énoncé ci-dessous.

Théorème 5. *Soit J une fonctionnelle, et x et $x + \delta x$ des fonctions pour lesquelles J est définie. On note par définition :*

$$\Delta J(x, \delta x) = J(x + \delta x) - J(x)$$

Cet incrément peut être mis sous la forme :

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \|\delta x\|$$

où δJ est linéaire en δx .

Si x^ est un extremum, alors pour tout δx , la variation de la fonctionnelle J doit être nulle soit :*

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0, \forall \delta x$$

Ce résultat est l'équivalent de la première condition de KKT vu en optimisation statique au chapitre 2, appliquée au cas des fonctionnelles. Il permet entre autres de retrouver la classique équation d'Euler en mécanique.

En considérant la fonction coût (3.153) et en l'augmentant par l'ajout de la contrainte (3.150) grâce à la technique des multiplicateurs de Lagrange p comme dans le cas statique, le théorème 5 permet d'obtenir le résultat fondamental de la commande optimale.

On définit l'hamiltonien du système par (3.161), de manière semblable au lagrangien (2.106) dans le cas statique.

$$\mathcal{H} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p}(t)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.161)$$

Si l'état n'est pas contraint, on obtient les deux équations canoniques d'Hamilton régissant les dynamiques de l'état et de l'état adjoint :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.162)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.163)$$

A cela, il est encore nécessaire de rajouter les conditions de transversalité au début (t_0, x_0) et à la fin (t_f, x_f) du cycle étudié :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t_0} - \mathcal{H}(t_0) \right) \delta t_0 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}_0} + \mathbf{p}(t_0) \right)^T \delta \mathbf{x}_0 = 0 \quad (3.164)$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t_f} + \mathcal{H}(t_f)\right)\delta t_f + \left(\frac{\partial\theta}{\partial \mathbf{x}_f} - \mathbf{p}(t_f)\right)^T \delta \mathbf{x}_f = 0 \quad (3.165)$$

Dans le cas le plus général, la loi de commande s'obtient en appliquant le *principe du maximum de Pontryagin* :

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{u} \in U}{\operatorname{argmin}} \mathcal{H} \quad (3.166)$$

La commande u doit être celle appartenant à l'espace de commande admissible qui minimise l'hamiltonien à tout instant, tout en respectant les contraintes sur l'espace d'état. Si la commande n'est pas contrainte, cette condition se simplifie et on obtient l'équation :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (3.167)$$

et si l'hamiltonien n'est pas une fonction explicite du temps, nous avons :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad (3.168)$$

L'ensemble des équations (3.162), (3.163) et (3.167) associé aux contraintes de transversalité (3.164) et (3.165) forme un ensemble d'équations algébriques différentielles appelé problème aux deux bouts (BVP : *Boundary Value Problem*). Il est nécessaire d'être en mesure de résoudre un tel problème avant d'envisager la prise en compte de contraintes égalitaires et inégalitaires.

Les lois de commande issues des techniques de calcul de variation permettent de fournir une solution optimale paramétrée en fonction du temps. Il s'agit d'un calcul hors ligne, qui fournit une loi de commande en boucle ouverte. Telle quelle, cette loi n'est pas robuste et il est nécessaire de synthétiser un correcteur permettant de travailler en boucle fermée.

9.3.3 Prise en compte des contraintes sur l'état

Dans le cas de contraintes sur l'état, la théorie est la même que dans les problèmes d'optimisation statique. Il suffit de faire apparaître ces contraintes dans l'hamiltonien en les multipliant par un multiplicateur de Lagrange [Kir04].

$$\mathcal{H} = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{p}(t)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda(t)^T \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.169)$$

Il est également possible de prendre en compte des contraintes d'inégalités en procédant de la même manière, ou en utilisant les fonctions de pénalité. Cependant une méthode classique consiste à transformer une contrainte d'inégalité $c(x, u) \leq 0$ en une contrainte d'égalité $c(x, u) + \alpha^2 = 0$, où α est traité comme une variable de contrôle. Dans le cas où la contrainte est atteinte, alors $\alpha = 0$.

9.3.4 Contraintes sur la commande

Les variables de commande peuvent elles aussi être contraintes pour prendre en compte les limitations des actionneurs. Dans ce cas, l'équation (3.167) ne s'applique plus et il est nécessaire d'utiliser l'équation (3.166).

Par exemple, si la commande $|\mathbf{u}| < 1$, et dans le cas d'un problème linéaire à temps minimum où l'hamiltonien est donné par $H = 1 + \mathbf{p}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})$, on obtient la loi de commande suivante en appliquant le principe du minimum :

$$u_i^* = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{p}^T \mathbf{B}_i < 0 \\ -1 & \text{si } \mathbf{p}^T \mathbf{B}_i > 0 \\ \text{indéterminée} & \text{si } \mathbf{p}^T \mathbf{B}_i = 0 \end{cases} \quad (3.170)$$

Le cas où la commande est indéterminée est appelé arc singulier. Il se produit généralement dans le cas où un système n'est pas totalement contrôlable. Dans ce cas de figure, la loi de commande peut être exprimée en dérivant successivement cette expression jusqu'à faire apparaître explicitement la commande. On voit alors apparaître le lien avec les matrices de commandabilité.

La résolution à la main d'un tel problème devient vite inextricable, et il s'avère nécessaire de faire appel à des algorithmes numériques capables de résoudre ces problèmes.

9.3.5 Méthode de résolution

Pour résoudre un problème de commande optimale, on fait généralement appel aux techniques suivantes [Mor09].

Les méthodes de résolution les plus employées sont les méthodes de tirs qui, à partir d'un état initial, propagent la dynamique pour obtenir un état final. Elles recalent cet état initial jusqu'à ce que l'état final atteigne la valeur initiale. Ces méthodes sont très sensibles à la valeur initiale et sont sujettes aux erreurs numériques. C'est pour cela que les méthodes de tirs multiples sont préférées.

Une autre approche classique consiste à discrétiser le problème, pour obtenir plusieurs problèmes non linéaires statiques dont une illustration est donnée au chapitre 9.5.3. On rajoute des contraintes pour relier entre eux ces différents problèmes, et ne former plus qu'un seul problème d'optimisation statique équivalent au problème dynamique initial comme nous le verrons au chapitre 9.5.2. On parle alors de technique de transcription.

Viennent ensuite les techniques directes, dans lesquelles l'état et la commande sont décrits par des courbes paramétrées, et enfin les techniques indirectes, ici des équations d'Hamilton passant alors par la résolution d'un système d'équations différentielles avec contraintes sur l'état final et l'état initial. Classiquement, on dispose d'une contrainte initiale sur l'état dynamique du système et d'une contrainte finale sur l'état adjoint dans le cas où les variables d'état ne sont pas contraintes au temps final. Ce type de problème aux deux bouts est particulièrement difficile à résoudre.

Le seul cas simple de résolution est le cas de la commande LQ que nous aborderons dans la section 9.5.1, où la résolution se fait en passant par l'équation de Ricatti.

Quoi qu'il en soit, ces méthodes ne peuvent se passer de l'utilisation d'outils informatiques, et de nombreux algorithmes sont disponibles pour résoudre ces problèmes. Généralement, les logiciels disponibles sont hors de prix et principalement utilisés dans l'aérospatial et l'aéronautique pour le calcul de trajectoire [Mor09]. Il existe heureusement des logiciels libres, qui permettent le calcul des lois de commande.

Généralement, ces logiciels reposent sur l'utilisation d'un solveur capable de résoudre un problème de programmation non linéaire, généralement SNOPT [GMS02]

ou IPOPT [WLMK09]. À cela s'ajoute un module qui va transformer le problème continu en un problème discret. Les algorithmes les plus performants semblent être ceux implémentant la méthode pseudo-spectrale de Gauss-Legendre. Il existe une version pour Matlab GPOPS [RBD⁺10] et une en C++ PSOPT [Bec10]. Cependant, au vu de la charge de calcul à réaliser sur un système de taille réelle, l'utilisation d'un langage interprété semble rédhibitoire et la version en C++ sera préférée.

9.4 Commande optimale du réseau de tramways

Selon la fonction objectif choisie, les résultats seront différents. On étudiera les trois commandes définies dans la section précédente. Pour rappel, la commande J_1 minimise le courant échangé sur la LAC, la commande J_2 cherche à maintenir la tension du bus constante, et la commande J_3 minimise les pertes dans le système.

9.4.1 Répartition des puissances

Regardons dans un premier temps comment se répartit le flux de puissance entre la LAC et le moyen de stockage. Les courants permettent d'avoir une bonne idée de la solution proposée par la commande optimale. La figure 3.44a représente les courants sur l'ensemble du parcours de la Rochelle, alors que la figure 3.44b en est un zoom. La commande utilisée est la commande J_1 . Le courant du tramway a été calculé à la section 4.

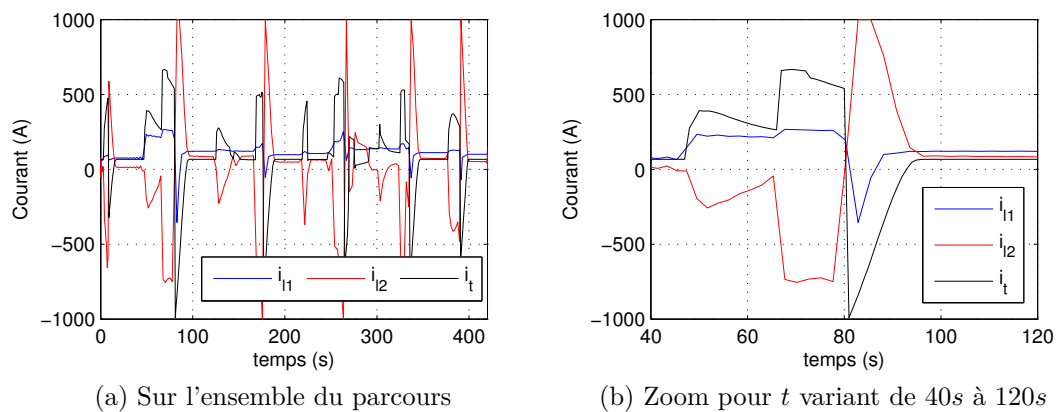


FIGURE 3.44 – Répartition des courants entre la LAC et le stockage

La commande utilisée n'a pas d'importance pour l'instant. La figure 3.44b permet d'étudier en détails la stratégie retenue par la commande optimale. Le tramway démarre à $t = 47$ s. Il accélère une première puis une seconde fois avant de freiner à $t = 80$ s, puis s'arrête à $t = 95$ s. En noir, on retrouve le courant consommé ($i > 0$) par les moteurs et les auxiliaires du tramway. En bleu est tracé le courant capté dans la LAC. Ce courant suit globalement les mêmes variations que le courant moteur, mais avec une amplitude réduite, surtout lors des pointes. Le courant restant (différence entre noir et bleu) est fourni par la supercapacité.

Le courant dans la supercapacité est tracé en rouge sur ces figures. On retrouve bien une décharge de la supercapacité durant la traction du tramway, et une recharge durant le freinage. L'amplitude des courants est bien plus grande et la supercapacité

joue bien son rôle de source de puissance. Il est intéressant de noter que la commande optimale permet de limiter la recharge de la supercapacité à 1000 A. Le freinage n'ayant pas suffi à recharger la supercapacité, cette dernière continue à se recharger à l'arrêt.

9.4.2 Gestion du stockage

La gestion du moyen de stockage est l'élément critique qui conditionne les échanges énergétiques [MHS09]. Il faut de plus veiller à ne pas dépasser les limites de tension du stockage.

L'état de charge ou *SOC* défini par l'équation (3.159) est une mesure utile pour étudier le stockage. La supercapacité doit être chargée au début et à la fin du parcours ce qui se traduit par un $SOC = 1$. De plus, le *SOC* doit toujours être positif afin d'éviter une décharge profonde. Attention, si $SOC = 0$, la tension aux bornes de la supercapacité est encore de 255 V, représentant une énergie résiduelle de 0.63 kWh

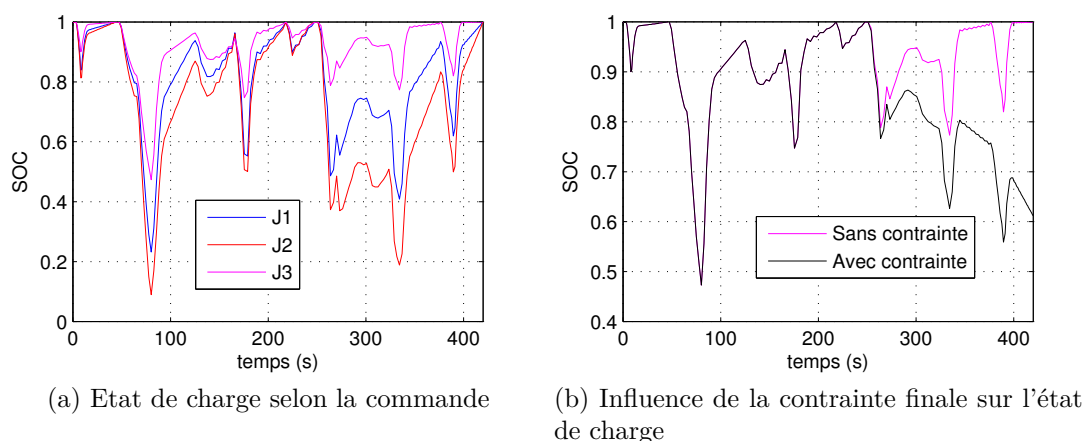


FIGURE 3.45 – Gestion du stockage sur un cycle

La figure 3.45a illustre la gestion de l'état de charge selon la loi de commande retenue. La supercapacité n'est jamais totalement déchargée, ce qui prouve que son dimensionnement est correct. Les trois commandes sollicitent le stockage d'une manière assez semblable. La commande cherchant à minimiser les pertes utilise moins le stockage, car la résistance r_2 est relativement élevée. Si les pertes dans le réseau sont plus grandes (ρ supérieur), alors le stockage sera d'avantage utilisé.

De plus, les commandes permettent d'assurer la recharge du stockage à la fin du parcours, ce que ne peut en aucun cas assurer une commande classique. La figure 3.45b illustre justement l'influence de cette contrainte sur l'état final dans le cas de la commande J_3 . En magenta, on retrouve la commande prenant en compte la contrainte sur l'état final, alors qu'en noir l'état final est libre. En laissant cet état libre, l'algorithme de commande va utiliser au maximum le stockage pour minimiser les pertes. Il le videra donc totalement.

La prise en compte de cette contrainte sur l'état apparaît de manière anticipée sur la gestion du stockage. Les *SOC* avec et sans prise en compte de la contrainte

de recharge sont identiques jusqu'à $t = 270s$, puis ils commencent à changer. Si le parcours est suffisamment long, la contrainte sur l'état final peut être occultée.

9.4.3 Gain énergétique offert par la commande optimale

Pour comparer les différentes stratégies, nous allons effectuer un bilan énergétique. W_{ss} est l'énergie fournie par la sous-station au réseau, W_{tram} l'énergie consommée par le tramway, W_{pertes} l'ensemble des pertes et $\Delta W_{sc} = W_{sc}(t_f) - W_{sc}(t_0)$ la différence d'énergie stockée dans la supercapacité entre le début et la fin du cycle.

$$W_{ss} = W_{tram} + W_{pertes} + \Delta W_{sc} \quad (3.171)$$

Le rendement énergétique est lui défini par :

$$\eta_e = \frac{W_{tram}}{W_{ss} - \Delta W_{sc}} \quad (3.172)$$

Le tableau 3.6 récapitule le bilan énergétique pour les différentes lois de commande.

Commande	W_{ss}	W_{tram}	W_{pertes}	ΔW_{sc}	η_e %
Sans stockage	10.32	9.19	1.13		89.09
J_1 (Courant)	10.88	9.90	0.98	0	91.03
J_2 (Tension)	10.97	9.91	1.06	0	90.35
J_3 (Pertes)	10.31	9.65	0.66	0	93.56
J_3 sans contrainte	9.57	9.65	0.66	-0.73	93.61

TABLE 3.6 – Influence de la fonction objectif sur le bilan énergétique en kWh et rendement

Quelle que soit la loi de commande utilisée, l'adjonction d'un moyen de stockage permet toujours de réduire les pertes. On observe que la commande minimisant les pertes est effectivement la plus efficace. En relâchant la contrainte sur le *SOC*, on arrive encore à augmenter le rendement, ce qui est vrai quelle que soit la loi de commande. Cependant, la seule loi qui soit implantable facilement (en utilisant un PI) est la régulation de tension J_2 . C'est hélas celle qui donne les plus mauvais résultats, mais cela est à modérer. En effet, le résultat dépend de la tension de référence, choisie ici à 780 V, et une étude plus approfondie doit être menée pour étudier l'influence de cette tension de référence sur η_e .

9.4.4 Réduction d'ordre

Le modèle que nous utilisons jusqu'à présent modélise toutes les dynamiques. Il a été utilisé sur une échelle de temps longue, mais permet également de trouver une loi de commande respectant les contraintes lors de transitoires très rapides.

Si la commande optimale est utilisée pour minimiser les pertes sur le réseau, il peut être intéressant, voire nécessaire, d'effectuer une réduction d'ordre afin de simplifier le problème. Chaque équation apparaît comme une contrainte, et en utiliser le moins possible permet de réduire les temps de calcul. Les techniques de réduction

sont généralement basées sur l'analyse des valeurs singulières, mais la physique nous aide.

La supercapacité possède une capacité nettement supérieure aux autres éléments réactifs. Les dynamiques des autres variables sont en comparaison plus rapides, et on peut considérer qu'elles atteignent directement leur régime permanent. Plusieurs approches sont possibles pour la réduction d'ordre.

Le modèle peut être écrit sous la forme de l'équation (3.9) où X_e représente les variables d'état que l'on souhaite garder (ici v_{c2}) et X_i les autres. La matrice M_{11} sera la matrice identité et le modèle d'ordre réduit sera donné par l'équation (3.10).

Application

En appliquant ce simple algorithme de réduction d'ordre, le système d'état (3.152) devient :

$$\dot{v}_{c2} = -\frac{1}{R_{eq}C_2}v_{c2} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{eq1}C_2} & -\frac{r_1+r_{lac}+r_{ss}}{R_{eq1}C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I_t \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

Avec les résistances équivalentes suivantes :

$$R_{eq} = \frac{(\alpha^2(r_1 + r_{lac} + r_{ss}) + r_{sc})(r_2 + r_f) + r_2r_f}{\alpha^2(r_1 + r_{lac} + r_{ss}) + r_2 + r_f} \quad (3.174)$$

$$R_{eq1} = \frac{(\alpha^2(r_1 + r_{lac} + r_{ss}) + r_{sc})(r_2 + r_f) + r_2r_f}{\alpha r_f} \quad (3.175)$$

Il est ensuite possible de recalculer la matrice (3.157) pour exprimer les pertes en fonction de cette seule variable d'état.

9.5 Techniques linéaires de commande optimale

Les techniques développées sont, on le rappelle, des techniques non linéaires hors ligne. Elles ne permettent pas de trouver un correcteur utilisable directement.

Il existe cependant des méthodes permettant d'utiliser ces techniques de commande en temps réel, pour les systèmes linéaires. L'explication de ces commandes aide à appréhender la commande H_2 , qui utilise le même formalisme que la commande H_∞ et permet d'intégrer des critères énergétiques dans les objectifs de commande.

9.5.1 La commande LQ

Dans le cas où la fonction d'état du système (3.150) est linéaire et la fonction coût (3.153) quadratique, il peut être intéressant d'utiliser la commande LQ (Linéaire Quadratique) [BDTR⁺90]. Cette commande peut s'appliquer aussi bien sur un horizon fini qu'infini, et permet l'obtention d'une commande optimale par retour d'état. On ne peut pas prendre en compte des contraintes sur l'état et sur la commande.

On considère donc ici un système linéaire :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.176)$$

Le critère retenu pour une commande LQ à horizon infini et sans prise en compte de l'état de charge final doit être de la forme :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (3.177)$$

Avec les matrices Q et R symétriques, Q non négative et R définie positive. Ce critère est fini si le système est stabilisable.

Le choix des pondérations joue un rôle essentiel dans le calcul des correcteurs. La matrice \mathbf{Q} permet ici de prendre en compte les pertes. Il est possible de la modifier, en affectant de forts coefficients devant les variables d'état que l'on souhaite voir accélérer.

Dans notre cas, la matrice \mathbf{R} est nulle car la commande n'apparaît pas explicitement dans l'expression des pertes. Or, il est nécessaire que cette matrice soit symétrique définie positive et non nulle. On peut donc choisir la matrice identité que l'on multipliera par un scalaire, et tracer un front de Pareto pour différentes valeurs. Plus cette variable est grande et plus le système sera lent.

Dans ce cas, la condition de transversalité (3.165) implique que $\mathbf{p}^*(+\infty) = 0$. Si, par contre, l'horizon de commande est infini, on peut supposer que \mathbf{p} reste constant. De plus, pour un problème LTI, $\mathcal{H}^* = 0$.

A partir de l'équation (3.167), et en supposant que l'état adjoint est proportionnel à l'état, la commande optimale s'écrit sous la forme d'un retour d'état $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ avec :

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3.178)$$

où P vérifie l'équation algébrique de Riccati.

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.179)$$

Dans ce cas, la matrice P et donc le correcteur K sont constants (ce qui n'est plus le cas dans un problème à horizon fini).

La commande LQ permet de calculer un retour d'état proportionnel minimisant un critère quadratique. Par contre, elle ne gère pas vraiment les contraintes sur l'état et la commande, qui peuvent être en partie intégrés grâce aux matrices de pondération. Elle ne se soucie pas non plus des perturbations, mais fait généralement preuve de bonne marge de robustesse.

9.5.2 La commande LQ à temps discret

L'utilisation d'un correcteur se fait dans la majorité du temps de manière numérique. En passant dans le domaine discret, l'équation dynamique (3.176) devient :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (3.180)$$

La fonction objectif (3.177) devient quand à elle :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \quad (3.181)$$

Le problème à résoudre n'est plus un problème en temps continu. Si on étudie le problème à horizon fini, il suffit de trouver les $N + 1$ valeurs de la commande

pour chaque pas de temps. On doit alors résoudre un problème de minimisation sous contraintes classique et on utilisera la formulation conventionnelle basée sur l'écriture du Lagrangien.

$$L = \sum_{k=0}^N \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) + \mathbf{p}^T(k+1) (-\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k)) \quad (3.182)$$

Les conditions de KKT appliquées à ce système renvoient les équations suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}(k)} = \mathbf{R} \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}^T \mathbf{p}(k+1) = 0 \quad (3.183)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}(k)} = \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) - \mathbf{p}(k) + \mathbf{A}^T \mathbf{p}(k+1) = 0 \quad (3.184)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}(k+1)} = -\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) = 0 \quad (3.185)$$

À ces équations, il faut rajouter la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ et les conditions finales $\mathbf{u}(N) = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}(N+1) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N) \mathbf{x}(N)$.

On obtient ainsi un problème aux deux bouts qui peut être résolu directement, ou grâce aux équations de Riccati. Dans le cas d'une résolution directe, on est confronté à un problème aux deux bouts de $(2N \times n)$ équations (3.186), obtenues en injectant (3.183) dans (3.184) et (3.185).

$$\begin{cases} \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) - \mathbf{p}(k) + \mathbf{A}^T \mathbf{p}(k+1) = 0 \\ -\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{A} \mathbf{x}(k) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}(k+1) = 0 \end{cases} \quad (3.186)$$

9.5.3 La commande prédictive

Dans le cas où la perturbation est connue, il est possible de la prendre en compte pour augmenter les capacités de rejet. La commande prédictive est une commande basée sur un modèle interne. L'objectif est, en utilisant ce modèle, de calculer une loi de commande optimale respectant les critères désirés, et de l'appliquer au système réel. Cette étape est effectuée à chaque fois, en recalant le modèle.

La prédiction est effectuée jusqu'à un horizon de prédiction N_p dont dépendra le temps de calcul et les performances de la commande. Il est alors nécessaire de résoudre le problème aux deux bouts donné par les équations (3.186) en rajoutant la perturbation \mathbf{w} ;

L'équation (3.186) peut être réécrite sous forme matricielle en posant $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1) \cdots \mathbf{x}(N_p)]^T$, $\mathbf{P} = [\mathbf{p}(1) \cdots \mathbf{p}(N_p)]^T$ et $\mathbf{W} = [\mathbf{w}(0) \cdots \mathbf{w}(N_p - 1)]^T$

$$M_{11} \mathbf{P} + M_{12} \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.187)$$

$$M_{21} \mathbf{P} + M_{22} \mathbf{X} = \mathbf{W} + [\mathbf{A}, 0 \cdots 0] \mathbf{x}(0) \quad (3.188)$$

Les matrices M_{11} et M_{22} sont inversibles par construction. On peut éliminer \mathbf{X} de (3.187) et exprimer la commande \mathbf{u} grâce à l'équation (3.183). La commande dépend uniquement de l'état initial et du vecteur de perturbation \mathbf{w} . On peut écrire la commande sous la forme :

$$\mathbf{u}(0) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(0) + \mathbf{L}\mathbf{W} \quad (3.189)$$

Par similitude, il est alors possible de calculer la commande pour tout pas de temps, en posant $\mathbf{W}(k) = [\mathbf{w}(k) \cdots \mathbf{w}(k + N_p - 1)]^T$.

Avec une commande prédictive de ce type, nous pouvons facilement prendre en compte les perturbations qui sont connues à l'avance. Un tel type de commande ne demande pas un grand effort en temps de calcul, les matrices \mathbf{K} et \mathbf{L} pouvant être calculées hors ligne dans le cas d'un système LTI. Dans le cas d'un système LTV, ce type de commande peut devenir très gourmand et difficile à appliquer en temps réel. De plus, il ne prend en pas en compte les contraintes sur variables de commande et sur les variables d'état.

D'autres types de commande prédictive existent cependant pour palier à ce problème.

9.5.4 Les commandes LQG et H_2

a) La commande LQG

La commande LQG est aujourd'hui reconnue comme un standard industriel. Contrairement à la commande LQ, la commande LQG, ou commande Linéaire Quadratique Gaussienne, embarque un observateur de Kalman capable d'estimer l'état du système. Il s'agit alors d'un retour qui ne se fait que sur un nombre fini de sorties, et qui de plus permet de prendre en compte des perturbations aléatoires sous la forme de bruit blanc. Ces perturbations w et v agissent sur le système d'état de l'équation 3.190

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Mw_d \\ y = Cx + Du + w_n \end{cases} \quad (3.190)$$

y est la sortie mesurée par le correcteur. On appelle respectivement W et V les matrices de covariance associées aux bruits w_d et v_n , telles que :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_d(t) \\ w_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d(\tau)^T & w_n(\tau)^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \quad (3.191)$$

On montre alors que le contrôleur LQG permet de minimiser l'espérance du critère de performance (3.177) en présence de ce bruit. Un filtre de Kalman permet d'estimer l'état grâce à l'équation (3.192) :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du) \quad (3.192)$$

Le gain de Kalman est donné par $K_f = P_f C^T V^{-1}$ où $P_f > 0$ est la solution de l'équation de Riccati (3.193)

$$AP_f + PA^T - P_f CV^{-1} CP_f + MWM^T = 0 \quad (3.193)$$

La commande minimisant (3.177) est alors calculée de manière semblable au cas LQ par (3.178) et (3.179), mais le retour d'état se fait avec l'état estimé par (3.192).

Cette approche semble être intéressante dans l'application tramway. En effet, la commande prédictive nécessite de connaître la perturbation à l'avance. Cela peut se

faire grâce aux réseaux de neurones, grâce à un simulateur comme celui développé au chapitre 2 ou bien en lisant des tables calculées à l'avance. Cependant, la conduite de tramway semble bien plus aléatoire que celle de train, et il n'est pas rare de voir des véhicules accuser plusieurs minutes de retard sur l'horaire théorique. Il est donc nécessaire de recalibrer la simulation régulièrement pour avoir une estimation fiable, ce qui est coûteux en instrumentation et en informatique industrielle. La commande LQG semble s'affranchir de ces limitations et permet de traiter directement les perturbations incertaines.

b) Lien entre le critère de performances temporelles et fréquentielles

Le théorème de Parseval exprime la conservation de l'énergie d'un ensemble de signaux $z(t)$ exprimés par leur transformée de Laplace $Z(s)$ et s'écrit :

$$\|z\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^* z(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Z(j\omega)^* Z(j\omega) d\omega \quad (3.194)$$

L'énergie du signal z est définie par sa norme \mathcal{L}_2 notée $\|\cdot\|_2$ et peut se réécrire :

$$\|z\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \sum_i |z_i(t)|^2 dt \quad (3.195)$$

Attention, cette norme traite de signaux temporels de dimension infini. La norme définie par l'équation (3.128) est seulement une norme vectorielle, pour des signaux de dimension finie. Avec z défini par l'équation (3.147), on trouve :

$$\|z\|_2^2 = \int_0^{+\infty} x^T Q x + u^T R u dt \quad (3.196)$$

La norme \mathcal{L}_2 de z est donc équivalente au coût quadratique défini par (3.177).

On considère le système d'état défini par (3.190). On définit w_d et w_n à partir du bruit blanc unitaire w par :

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & V^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} w \quad (3.197)$$

Le système (3.190) en boucle fermée peut, conformément à la figure 3.37a, s'écrire sous la forme LFT de la figure 3.46.

Le transfert entre w et z , noté T_{wz} , s'obtient alors immédiatement à partir de la figure 3.46 par $z(s) = T_{wz} w(s) = \mathcal{F}_l(P, K)w(s)$.

A partir du théorème de Parseval, l'énergie $\|z\|_2$ peut s'exprimer à partir de la fonction de transfert, et :

$$\|z\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty w(j\omega)^* T_{wz}(j\omega)^* T_{wz}(j\omega) w(j\omega) d\omega \quad (3.198)$$

On définit la norme H_2 d'un système par :

$$\|T_{wz}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{trace}(T_{wz}(j\omega)^* T_{wz}(j\omega)) d\omega \quad (3.199)$$

w est un bruit blanc unitaire, il en résulte que chaque composant est indépendant. Si de plus $w = \delta(t)$, alors $\|z\|_2^2 = \|T_{wz}\|_2^2$. Le système de la figure 3.46, intègre les pondérations W , V , Q et R . donc $E\{J\} = \|z\|_2^2 = \|T_{wz}\|_2^2$.

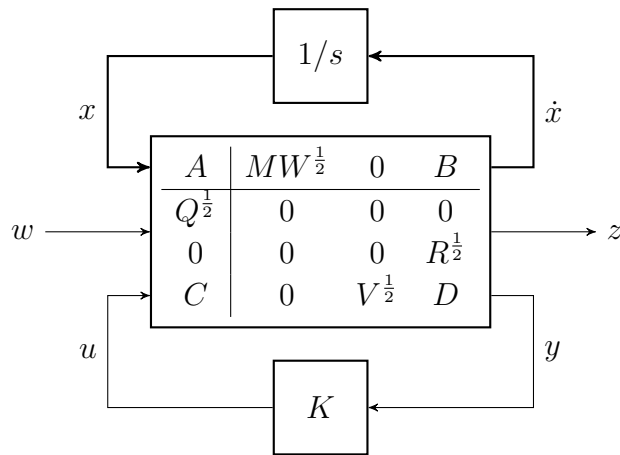


FIGURE 3.46 – LFT en boucle fermée du système (3.190)

Minimiser l'espérance de J revient donc à minimiser la norme $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_2^2$. Le problème de synthèse du contrôleur LQG est donc équivalent au problème de commande H_2 .

Si le transfert est stable, alors cette norme est bornée. Cette norme peut être calculée facilement à partir du Grammien d'observabilité. Ce dernier se calcule en résolvant une équation de Lyapunov grâce aux LMI par exemple.

Soit un système SISO, soumis à une impulsion unitaire telle que $w(s) = 1$. Dans ce cas, les équations (3.198) et (3.199) sont identiques. On a donc $\|z\|_2^2 = \|T_{wz}\|_2^2$. La norme H_2 correspond donc à l'énergie du système suite à une impulsion. La norme H_2 peut également être généralisée au cas MIMO.

Application

Reprenons le cas du tramway et de son stockage. Pour raccourcir la constante de temps, on choisit $C_2 = 10$ mF. Le circuit est en boucle ouverte et le signal de sortie z est construit via l'équation (3.199). La matrice Q est donnée par (3.157). De cette manière $|z|^2$ représente les pertes dans le système.

La fonction de transfert sera écrite dans ce cas :

$$T_{wz} = Q^{\frac{1}{2}}(sI - A)^{-1}B_1 \quad (3.200)$$

La figure 3.47a correspond à la réponse impulsionnelle du courant tramway sur les pertes. La figure 3.47b représente, elle, le module au carré de la fonction de transfert.

Conformément au théorème de Parseval, l'aire sous les deux courbes est identique et a pour valeur $\|T_{wx}\|_2^2 = 53.76J$. En boucle ouverte, une impulsion de 1A sur le courant moteur créera donc des pertes énergétiques de 53.76J.

c) La commande H_2

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu comment un critère énergétique temporel pouvait être étudié grâce aux méthodes fréquentielles. Grâce à l'équivalence entre les critères temporels et les critères fréquentiels, la méthode de synthèse H_2 permet de synthétiser un correcteur LQG.

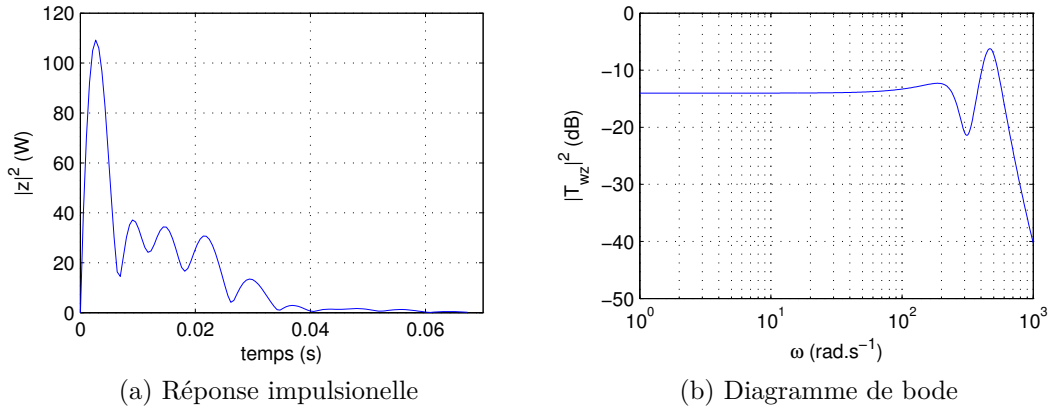


FIGURE 3.47 – Pertes dans le réseau suite à une impulsion unitaire du courant tramway

La commande H_2 va même encore plus loin, proposant une méthode permettant de synthétiser un correcteur K tel que le transfert en boucle fermée $\|T_{wx}\|_2^2$ soit inférieure à μ . Le correcteur sera optimal lorsque μ sera minimal de manière à réduire l'impact des perturbations sur les pertes.

Cette loi de commande utilise alors les mêmes outils que la commande H_∞ plus connue, mais travaillant sur la norme $\|\cdot\|_2$. Il est également possible de faire apparaître la position du tramway comme une variable incertaine sous la forme d'une LFT supérieure.

Cette approche est intéressante, car les outils qu'elle utilise sont les mêmes que ceux de la commande H_∞ . Il est donc possible de faire une synthèse mixte H_2/H_∞ .

La norme H_2 permet d'étudier l'énergie en sortie d'un signal en réponse à un dirac ou un signal aléatoire. La norme H_∞ définie par (3.131) permet de connaître le gain maximum d'un système.

L'implantation de cette synthèse mixte ne pose aucun souci avec les modèles élaborés, mais cela constituera une des perspectives des ces travaux.

9.6 Les autres possibilités offertes par la commande optimale

Nous nous sommes servis de la commande optimale pour proposer une loi de commande permettant de piloter un moyen de stockage afin de minimiser les pertes dans un réseau de tramways. Cependant, les algorithmes de commande optimale sont des algorithmes d'optimisation dynamique qui peuvent proposer d'autres services.

9.6.1 Optimisation paramétrique sur cycle de fonctionnement

Une application intéressante qui découle du calcul variationnel peut être l'optimisation d'un critère intégral en fonction d'un paramètre [VL83]. La commande optimale permet d'optimiser un critère intégral en proposant une loi de commande variant dans le temps. Or, si on souhaite connaître le positionnement optimal d'une sous-station, cette dernière doit être fixe. Qu'à cela ne tienne, il suffit simplement

de rajouter aux équations dynamiques (3.150) une contrainte du type $f \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = 0$ où a représente un paramètre statique.

La commande optimale peut alors être utilisée pour faire un dimensionnement sur cycle de fonctionnement. Cela permet une grande avancée par rapport aux méthodes standards qui se basent sur un point de fonctionnement, en espérant qu'il s'agisse du pire cas (cf Chapitre 2).

Une application peut être de déterminer la position des sous-stations afin de minimiser les pertes lors du déplacement de la rame.

Les algorithmes permettent aussi de déterminer la valeur de l'élément de stockage qui, associé à une loi de commande, minimise les pertes. Il est important de noter que la loi de commande dépend de la valeur de la supercapacité. La commande doit s'assurer de minimiser les pertes tout en respectant les contraintes sur le SOC. D'un autre côté, la valeur de la supercapacité dépend aussi des lois de commande.

La figure 3.48a illustre les valeurs de l'état de charge en fonction de la valeur des lois de commandes, traduisant bien que la commande dépend de la valeur de la capacité. La figure 3.48b représente, elle, le front de Pareto entre la valeur de la supercapacité et les pertes dans le réseau, pour une commande J_3 avec contrainte sur l'état final.

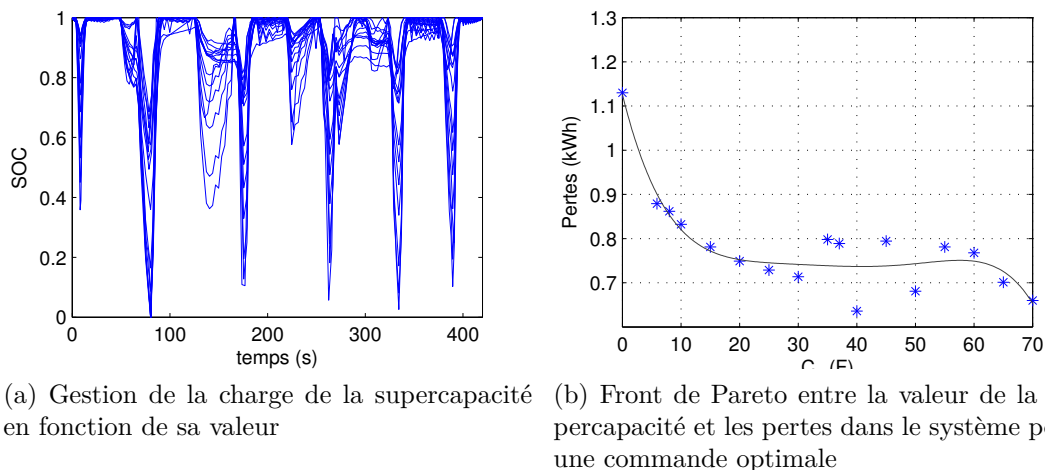


FIGURE 3.48 – Couplage structure commande

9.6.2 Autres critères d'optimisation

Le réseau d'alimentation est resté simple, mais les lois de commande optimale peuvent aussi s'appliquer à la commande des hacheurs de la nouvelle structure.

La commande optimale peut aussi être utilisée pour modéliser le conducteur, en utilisant un critère énergétique, des contraintes de vitesse et un trajet à temps minimum.

10 Conclusion sur l'analyse dynamique

Le modèle LFT qui a été établi dans ce chapitre est un modèle dynamique pouvant être utilisé pour mener à bien une étude de stabilité, une synthèse de correcteur

ou encore une optimisation dynamique.

Un modèle non linéaire est généré automatiquement quel que soit le circuit de départ. Il permet d'obtenir le modèle topologique d'état d'un système multi-sources, multi-charges et surtout multi-convertisseurs. La méthodologie est basée sur l'utilisation des bond graphs qui permettent de gérer les éléments en causalité dérivée.

Une fois ce modèle établi, il est moyenné, ce qui permet de le rendre bilinéaire. Ce modèle néglige les phénomènes de commutation et a une plage de validité s'étendant jusqu'à un dixième de la fréquence de découpage des convertisseurs. Il peut être linéarisé, pour utiliser les outils des systèmes LTI, mais les paramètres dépendant du temps, incertains, ou de dimensionnement, peuvent être sortis du modèle pour obtenir une expression sous forme de LFT. Ce modèle se prête alors particulièrement bien au problème de commande et de dimensionnement. Le courant consommé par le tramway et la tension de la sous-station apparaissent alors comme des perturbations.

Les notions de stabilité et de performance ont été présentées permettant de fournir des aperçus utiles pour le dimensionnement du réseau. Ce problème est équivalent au problème de commande H_∞ , et consiste à trouver un correcteur diagonal d'ordre 0. Il est alors possible de proposer un dimensionnement pour le pire cas, en tenant compte des incertitudes.

Pour tenir compte du déplacement des rames, la théorie de la commande optimale a été employée pour contrôler le stockage embarqué. La méthode hors ligne est la plus puissante, et permet de renvoyer un vecteur de commande en fonction du temps. Elle permet ainsi de justifier la pertinence de la solution proposée et les possibilités d'optimisation. Sur site, l'application d'une telle loi de commande nécessite l'emploi de commande de type prédictive ou commande LQ, qui permet d'effectuer un retour d'état.

Cette théorie de la commande optimale peut être utilisée pour dimensionner le réseau. Il est possible de déterminer un paramètre statique qui minimisera un critère intégral comme la position des sous-stations. De plus, un parallèle existe entre la commande LQG qui permet de minimiser une énergie et la commande H_2 .

L'utilisation des normes H_∞ et H_2 permet d'avoir une idée des performances énergétiques, tout en assurant le respect des contraintes. Les outils de synthèse mixte doivent alors permettre de procéder à un dimensionnement de la commande et de la structure optimale.

Cependant, le dimensionnement ne s'arrête pas là. Alors que la partie énergétique est représentée, le modèle utilisé ne prend absolument pas en compte la partie harmonique. En effet, on a choisi de tronquer la série de Fourier à son premier terme. Or, nous sommes en présence de convertisseurs d'électronique de puissance générant une grande pollution harmonique. Ces harmoniques vont influencer les pertes et la répartition de puissance. De plus, des normes existent sur le contenu harmonique que peuvent renvoyer les convertisseurs, normes qui n'ont pas encore été prises en compte et pourraient impacter ce premier dimensionnement.

Il apparaît donc impératif de tenir compte des aspects harmoniques dans la suite de l'étude.

CHAPITRE 4

ANALYSE HARMONIQUE ET DIMENSIONNEMENT DES FILTRES

Chapitre 4

Analyse harmonique et dimensionnement des filtres

1 Objectifs

Le chapitre 2 nous a permis d'établir un premier modèle statique du réseau de tramways. Ce modèle a permis de valider l'intérêt de l'architecture proposée en étudiant les pertes dans le réseau et le maintien du plan de tension. Une optimisation a été menée afin de connaître les rapports cycliques permettant d'améliorer le rendement.

Dans un deuxième temps, une étude dynamique a été menée au chapitre 3. Grâce au modèle moyen, le réseau a pu être décrit sous la forme d'un système LFT, et ce de manière automatique. Cette étape est nécessaire pour synthétiser les correcteurs permettant de réguler les hacheurs. De plus, une méthodologie d'aide au dimensionnement a été proposée, basée sur les techniques de commande robuste.

Les deux approches précédentes ont cependant négligé les harmoniques générés par les convertisseurs. L'étude des harmoniques est impérative pour le dimensionnement. Il ne faut pas perdre de vue que les filtres sont avant tout présents pour réduire la pollution générée par les convertisseurs. Les contraintes sur les harmoniques vont donc impacter le dimensionnement des éléments réactifs, ce qui aura une influence sur la synthèse des correcteurs, la stabilité du réseau et ses performances.

L'analyse harmonique est également fondamentale car en régime permanent, les harmoniques transportent de la puissance et créent des pertes dans le réseau. Les filtres vont avoir une influence sur le rendement mais aussi sur la répartition de la puissance entre les convertisseurs. Cette étude vient donc en complément de celle menée au chapitre 2 basée uniquement sur un modèle statique moyen.

Le réseau étant multi-convertisseurs, si tous les convertisseurs ne travaillent pas à la même fréquence, des phénomènes inter-harmoniques pourraient apparaître, entraînant des perturbations basses fréquences difficiles à gérer [MB00]. Une démarche classique imposera un sur-dimensionnement des filtres de manière à se prévaloir de tout couplage. Si on cherche à réduire le volume des filtres, ces interactions doivent être étudiés.

Enfin, ces harmoniques vont aussi avoir une dynamique. Ils peuvent donc entraîner une instabilité des boucles de régulation ou des surtensions transitoires.

Ce paragraphe établira les interactions qui existent entre les analyse statique,

dynamique et harmonique. L'étude harmonique devrait permettre de dimensionner les filtres de manière à minimiser leur volume, tout en respectant des contraintes sur les taux d'ondulation, mais aussi des contraintes de robustesse.

Cependant, l'obtention d'un modèle harmonique est une tâche ardue, et la simulation temporelle est souvent la seule solution. Une telle approche ne permet de faire que de l'analyse. Le dimensionnement requiert donc un modèle plus efficace qu'il va falloir construire.

2 Méthode temporelle et méthode fréquentielle

La première méthode qui vient à l'esprit quand on cherche à connaître le contenu harmonique d'un signal est d'effectuer une simulation temporelle du modèle topologique avec simulateur de type circuit. Après avoir attendu suffisamment longtemps pour obtenir le régime permanent, il suffit, en post-traitement, de calculer le spectre du signal.

Cette approche pourtant classique est loin d'être optimale en temps de calcul pour les mêmes raisons que celles justifiant l'intérêt du modèle moyen. Il serait intéressant de disposer d'un modèle de même nature, mais capable de tenir compte des harmoniques. C'est justement l'objectif des méthodes de calcul direct, qui raisonnent avec les grandeurs fréquentielles.

Les approches fréquentielles directes peuvent être décomposées en deux familles de méthodes. La première repose sur l'utilisation du modèle échantillonné vu à la section 4.2. Elle consiste à résoudre l'équation (3.59) non pas dans le domaine temporel, mais dans le domaine fréquentiel [PR99]. Cette approche ne peut que difficilement permettre d'étudier les dynamiques, mais elle donne de bons résultats pour le calcul des harmoniques en régime permanent.

Dans la deuxième approche utilisée par [AWW03] ou [Mor05], on remplace les vecteurs d'état par leur représentation de Fourier. La fonction de commutation est aussi décrite par sa transformée de Fourier. Le produit temporel entre la fonction de commutation et les variables d'état se traduit ainsi par un produit de convolution fréquentiel, qui est calculé par un produit de matrices en limitant le nombre de termes. Cette méthode ne s'applique que dans l'étude en régime permanent. Pour les systèmes à commutation naturelle, la méthode de Newton est utilisée pour résoudre un système non linéaire, et connaître la fonction de commutation.

Ces méthodes sont efficaces mais occultent la dynamique des harmoniques. En effet aucune information n'est disponible pour qualifier leur évolution durant les transitoires. De plus, la prévision des interactions harmoniques est difficile à réaliser.

Il est alors indispensable de développer un modèle associant calcul de la dynamique et des harmoniques. Les paramètres doivent également être facilement accessibles pour pouvoir quantifier leur importance et permettre le dimensionnement.

3 Le modèle moyen généralisé

Afin de répondre à notre problématique, la méthode de résolution utilisée sera basée sur la technique du modèle moyen généralisé [SNLV91] (GSSA : Generalized State Space Averaging). Le modèle moyen généralisé est basé sur la même approche

que le modèle à l'ordre 0 développé à la section 5 du chapitre précédent, mais la série n'est plus tronquée à son premier harmonique [MEBE97].

Dans le cas d'un système d'ordre n , si on veut tenir compte des N premiers harmoniques, le nombre de variables d'état passe alors de n à $n \times (2N + 1)$.

Les propriétés de la série de Fourier ont déjà été énoncées à la section c) de la section 4.3.4 du chapitre 3. Le produit en temporel correspond dans le domaine de Fourier à un produit de convolution. Nous allons dans un premier temps réécrire ces propriétés sous forme matricielle, pour transformer ce produit de convolution en un produit matriciel.

3.1 La transformée de Fourier vectorielle

L'objectif de cette section est de présenter le formalisme utilisé pour décrire la transformée de Fourier, sous forme vectorielle.

3.1.1 Le produit de Kronecker

Le produit de Kronecker est une opération décrite ci-dessous qui permet d'alléger considérablement les notations.

Définition 5. Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$. Leur produit de Kronecker est la matrice $A \otimes B$ de taille $mp \times nq$, valant :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Notons un résultat important pour la suite :

$$I_n \otimes A = \begin{pmatrix} A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Le produit de Kronecker entre une matrice et l'identité permet d'obtenir une matrice diagonale par bloc, où la matrice A se répète n fois. De plus, dans le cas des matrices carrées A d'ordre m et B d'ordre n , on appelle *Somme de Kronecker* l'opérateur suivant :

$$A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B \quad (4.3)$$

3.1.2 Ecriture vectorielle de la transformée de Fourier

Soit $x(t)$ une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} T -périodique. La décomposition en série de Fourier de $x(t)$ est donnée par (4.4). La pulsation ω est donnée par : $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \langle x \rangle_h(t) e^{jh\omega t} \quad (4.4)$$

Par la suite, on ne spécifiera plus que les fonctions dépendant du temps et on omettra la variable t . On s'intéresse à présent à la série partielle de x , série de Fourier

dont on garde les N premiers harmoniques. $\langle \mathbf{x} \rangle$ est défini par (4.5). C'est un vecteur colonne de dimension $2N + 1$ qui contient les coefficients de Fourier de x .

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \left[\langle x \rangle_{-N} \quad \cdots \quad \langle x \rangle_{-1} \quad \langle x \rangle_0 \quad \langle x \rangle_1 \quad \cdots \quad \langle x \rangle_N \right]^T \quad (4.5)$$

On notera $e_n : t \mapsto e^{jn\omega t}$ la fonction exponentielle complexe d'indice n . La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée et forme une base dans l'espace \mathcal{CM}_T que l'on notera :

$$\mathcal{E} = \left[e_{-N} \quad \cdots \quad e_{-1} \quad e_0 \quad e_1 \quad \cdots \quad e_N \right] \quad (4.6)$$

x défini par (4.4) peut alors être approximé par sa série de Fourier tronquée à l'ordre n par l'équation¹ (4.7)

$$x \approx \mathcal{E} \langle \mathbf{x} \rangle \quad (4.7)$$

3.1.3 Transformée de Fourier de la dérivée

La dérivée de $x(t)$ dans le cas où les coefficients de Fourier ne sont pas constants est donnée par (4.8)

$$\frac{\partial x}{\partial t} \approx \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \langle \mathbf{x} \rangle + \mathcal{E} \frac{\partial \langle \mathbf{x} \rangle}{\partial t} \quad (4.8)$$

Soit $\mathcal{N}_N \in \mathbb{C}^{2N+1}$, un vecteur colonne défini par $n_i = (i - N - 1)$. \mathcal{N}_N peut donc s'écrire :

$$\mathcal{N} = \left[-N \quad \cdots \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad \cdots \quad N \right] \quad (4.9)$$

Notation. On note $\text{diag}()$ l'application de \mathbb{C}^n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui, pour tout vecteur \mathbf{v} de dimension n renvoie une matrice carrée \mathbf{M} de dimension $n \times n$ telle que $\forall i \neq j, \mathbf{M}_{ij} = 0$ et $\mathbf{M}_{ii} = \mathbf{v}_i$

Avec ces notations, il apparaît alors que l'équation (4.8) peut s'écrire :

$$\frac{\partial x}{\partial t} \approx \mathcal{E} \text{diag}(j\omega \mathcal{N}_N) \langle \mathbf{x} \rangle + \mathcal{E} \frac{\partial \langle \mathbf{x} \rangle}{\partial t} \quad (4.10)$$

et donc après projection dans la base \mathcal{E} , on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle \approx \text{diag}(j\omega \mathcal{N}_N) \langle \mathbf{x} \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{x} \rangle}{\partial t} \quad (4.11)$$

3.1.4 Représentation matricielle du produit de convolution

On considère ici l'expression matricielle du produit temporel de deux fonctions $x(t)$ et $u(t)$ toutes deux T -périodiques, telles que $y(t) = x(t)u(t)$. On considère seulement les N premiers harmoniques. Soit $\langle \mathbf{x} \rangle$, le vecteur des composantes harmoniques de x , et $\langle \mathbf{u} \rangle$ celui de u dans la base \mathcal{E} .

Du fait des propriétés de la base \mathcal{E} , le produit temporel défini par $y = xu$ se traduit par un produit de convolution fréquentiel entre $\langle x \rangle$ et $\langle u \rangle$ défini par (3.85). Écrit sous forme matricielle, il devient :

1. On considère ici le produit matriciel et non le produit scalaire dans un espace préhilbertien \mathbb{C}^n

$$\langle \mathbf{y} \rangle = \mathbf{T}_N(u) \langle \mathbf{x} \rangle \quad (4.12)$$

Avec $\langle \mathbf{y} \rangle$ qui représente les composantes de y dans la base \mathcal{E} . L'application $\mathbf{T}_N(u)$ est définie de \mathbb{C}^{2N+1} dans $\mathcal{M}_{2N+1}(\mathbb{C})$ par :

$$\mathbf{T}_N(u) = \begin{bmatrix} \langle u \rangle_0 & \langle u \rangle_{-1} & \cdots & \langle u \rangle_{-2N} \\ \langle u \rangle_1 & \langle u \rangle_0 & \cdots & \langle u \rangle_{1-2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u \rangle_{2N} & \langle u \rangle_{2N-1} & \cdots & \langle u \rangle_0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Les composantes de la matrice $\mathbf{T}_N(u)$, sont définies par $tu_{ij} = \langle u \rangle_{i-j}$ et $tu_{ij} = 0$ si $|i - j| > N$. En effet on supprime les composantes de degré supérieur à N qui n'ont pas de sens physique. On notera de plus que $\mathbf{T}_N(u)$ est une matrice de Toeplitz² hermitienne³. Par exemple, si $N = 1$, on obtient une matrice de dimension 3 :

$$\mathbf{T}_1(u) = \begin{bmatrix} \langle u \rangle_0 & \langle u \rangle_{-1} & 0 \\ \langle u \rangle_1 & \langle u \rangle_0 & \langle u \rangle_{-1} \\ 0 & \langle u \rangle_1 & \langle u \rangle_0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Dans le cas où les deux fonctions n'ont pas la même période, le calcul se complique grandement.

Exemple 1 : Produit d'une fonction T_1 -périodique f par une fonction T_2 -périodique g

La transformée de Fourier de f est donnée par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_1 t} \quad (4.15)$$

et celle de g par :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{in\omega_2 t} \quad (4.16)$$

Ainsi, le produit $fg(t)$ peut être calculé :

$$fg(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_p d_k e^{i(p\omega_1 + k\omega_2)t} \quad (4.17)$$

On voit donc clairement apparaître la création d'un signal n'ayant pas des harmoniques multiples du fondamental de l'un ou de l'autre des signaux, on parle alors d'inter-harmoniques. Dans le cas particulier où $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, on peut écrire :

$$fg(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_p d_k e^{i(p+k)\omega t} \quad (4.18)$$

en posant $n = p + k$ on obtient :

$$fg(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k} d_k e^{in\omega t} \quad (4.19)$$

2. Matrice à diagonale constante

3. $A = A^*$, où A^* représente la transconjugée de A (transposée de la matrice conjuguée)

Exemple 2 : Produit d'une fonction T_1 -périodique f par une fonction cosinus de période T_2

La transformée de Fourier de f est donnée par :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_1 t} \quad (4.20)$$

Celle de g est donnée par :

$$\cos(\omega_2 t) = \frac{e^{-i\omega_2 t} + e^{i\omega_2 t}}{2} \quad (4.21)$$

Ainsi, le produit $fg(t)$ peut être calculée :

$$f(t) \cos(\omega_2 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2} [e^{i(n\omega_1 - \omega_2)t} + e^{i(n\omega_1 + \omega_2)t}] \quad (4.22)$$

3.2 Série de Fourier d'une fonction vectorielle multi-variables

3.2.1 Série de Fourier d'un produit

Dans ce chapitre, on considère à présent une fonction vectorielle F de la variable vectorielle X , de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le cas où la fonction est linéaire, on peut écrire :

$$F = AX \quad (4.23)$$

où A est une matrice carrée de taille n^2 . On suppose ici, que la fonction vectorielle X dépend uniquement du temps et que chaque composante de X est T -périodique. On peut donc écrire en utilisant la notation vectorielle (4.7) pour chaque composante i :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x_i = \mathcal{E} \langle \mathbf{x}_i \rangle \quad (4.24)$$

On forme alors le vecteur $\langle \mathbf{X} \rangle$ tel que :

$$\langle \mathbf{X} \rangle = [\langle \mathbf{x}_1 \rangle \quad \langle \mathbf{x}_2 \rangle \quad \cdots \quad \langle \mathbf{x}_n \rangle]^T \quad (4.25)$$

Le vecteur $\langle \mathbf{X} \rangle$ ainsi défini sera alors un vecteur colonne de dimension $n \times (2N + 1)$, où rappelons le, n est le nombre de composantes et N le nombre d'harmoniques considérés. Il en va de même pour la définition du vecteur $\langle \mathbf{F} \rangle$. Pour repasser dans le domaine temporel, on applique alors la relation :

$$X = (I_n \otimes \mathcal{E}) \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.26)$$

La relation (4.23) en temporel, peut donc être réécrite dans le domaine fréquentiel en utilisant cette fois les vecteurs $\langle \mathbf{F} \rangle$ et $\langle \mathbf{X} \rangle$ et on obtient alors la relation (4.27).

$$\langle \mathbf{F} \rangle = A \otimes I_{2N+1} \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.27)$$

3.2.2 Application à une équation différentielle linéaire

Nous allons appliquer les résultats précédents à une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (4.28)$$

Dans le cas d'une fonction vectorielle, l'équation (4.11) s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial t} \right\rangle \approx I_n \otimes \text{diag}(j\omega \mathcal{N}_N) \langle \mathbf{X} \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{X} \rangle}{\partial t} \quad (4.29)$$

En utilisant (4.29) et (4.27), on montre alors que :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{X} \rangle}{\partial t} = [A \otimes I_{2N+1} - I_n \otimes \text{diag}(j\omega \mathcal{N}_N)] \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.30)$$

Soit en utilisant la définition de la somme de Kroneker :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{X} \rangle}{\partial t} = A \oplus \text{diag}(-j\omega \mathcal{N}_N) \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.31)$$

3.2.3 Cas où la matrice A n'est pas constante

On reprend l'équation (4.23), dans le cas où la matrice A n'est plus constante mais varie en fonction du temps. On suppose que cette variation est T -périodique. On peut donc écrire pour chacun des coefficients de la matrice une transformée de Fourier. En utilisant la propriété du produit de convolution donnée par (4.12), on peut écrire :

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \mathbf{T}(A) \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.32)$$

Où $\mathbf{T}(A)$ est une matrice de dimension $n \times (2N + 1)$ donnée par :

$$\mathbf{T}(A) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_N(a_{1,1}) & \mathbf{T}_N(a_{1,2}) & \cdots & \mathbf{T}_N(a_{1,n}) \\ \mathbf{T}_N(a_{2,1}) & \mathbf{T}_N(a_{2,2}) & \cdots & \mathbf{T}_N(a_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{T}_N(a_{n,1}) & \mathbf{T}_N(a_{n,2}) & \cdots & \mathbf{T}_N(a_{n,n}) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Exemple

Soit A telle que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Si on s'intéresse uniquement aux premiers harmoniques, alors :

$$\mathbf{T}(A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \langle a \rangle_0 & \langle a \rangle_{-1} & 0 & \langle b \rangle_0 & \langle b \rangle_{-1} & 0 \\ \langle a \rangle_1 & \langle a \rangle_0 & \langle a \rangle_{-1} & \langle b \rangle_1 & \langle b \rangle_0 & \langle b \rangle_{-1} \\ 0 & \langle a \rangle_1 & \langle a \rangle_0 & 0 & \langle b \rangle_1 & \langle b \rangle_0 \\ \hline \langle c \rangle_0 & \langle c \rangle_{-1} & 0 & \langle d \rangle_0 & \langle d \rangle_{-1} & 0 \\ \langle c \rangle_1 & \langle c \rangle_0 & \langle c \rangle_{-1} & \langle d \rangle_1 & \langle d \rangle_0 & \langle d \rangle_{-1} \\ 0 & \langle c \rangle_1 & \langle c \rangle_0 & 0 & \langle d \rangle_1 & \langle d \rangle_0 \end{array} \right) \quad (4.35)$$

On voit alors apparaître des termes de couplage entre les différents harmoniques.

A noter que si la matrice \mathbf{A} est constante, elle ne contient que les termes à l'ordre 0, et la définition (4.32) est équivalente à la définition (4.27)

3.3 Modèle moyen généralisé d'un système bilinéaire

a) Modèle moyen à l'ordre N d'un réseau de convertisseurs

Le modèle topologique d'un réseau de convertisseurs est donné par l'équation (3.55). La première équation est réécrite ci-dessous pour rappel, en modifiant quelque peu les notations :

$$\dot{x} = \left(\mathcal{A} + \sum_{i=1}^p h_i A_i \right) x + \left(\mathcal{B} + \sum_{i=1}^p h_i B_i \right) w \quad (4.36)$$

$\langle \mathbf{x} \rangle$ est défini par ses composantes selon l'équation (4.25). La fonction de commutation est une fonction variable dans le temps. On suppose que tous les h_i ont la même fréquence de commutation. En utilisant les équations (4.31) et (4.32), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \mathbf{x} \rangle}{dt} = & \left(\mathcal{A} \oplus \text{diag}(-j\omega \mathcal{N}_N) + \sum_{i=1}^p \mathbf{T}(h_i A_i) \right) \langle \mathbf{x} \rangle \\ & + \left(\mathcal{B} \otimes I_{2N+1} + \sum_{i=1}^p \mathbf{T}(h_i B_i) \right) \langle \mathbf{w} \rangle \end{aligned} \quad (4.37)$$

De manière identique, on peut écrire l'équation de sortie du système (3.55) dans le cas harmonique. Le système d'état peut être réécrit en faisant apparaître les nouvelles notations :

$$\begin{cases} \langle \dot{\mathbf{x}} \rangle = \mathbf{A} \langle \mathbf{x} \rangle + \mathbf{B} \langle \mathbf{w} \rangle \\ \langle \mathbf{z} \rangle = \mathbf{C} \langle \mathbf{x} \rangle + \mathbf{D} \langle \mathbf{w} \rangle \end{cases} \quad (4.38)$$

La matrice \mathbf{A} est une matrice carrée de taille $(n(2N+1))^2$. Cette matrice est complexe. Si le vecteur d'entrée est de dimension p , alors la matrice \mathbf{B} est de dimension $(n(2N+1) \times p(2N+1))$. La prise en considération des harmoniques augmente donc considérablement la taille du système.

Cas particulier du vecteur d'entrée

En écrivant $\langle \mathbf{w} \rangle$, on considère que le vecteur d'entrée possède des harmoniques aux mêmes fréquences que le vecteur d'état. L'analyse fréquentielle consiste à exciter le système à *une* fréquence donnée. Le transfert des harmoniques de $\langle \mathbf{w} \rangle$ vers la sortie n'est pas intéressant et revient à étudier le transfert du fondamental $\langle \mathbf{w} \rangle_0$ vers les sorties en faisant varier la fréquence du fondamental.

Nous reviendrons plus en détails sur ce point par la suite. Il en résulte que la matrice \mathbf{B} va être de taille $(n(2N+1) \times p)$. Les colonnes autres que celle correspondant au fondamental de $\langle \mathbf{w} \rangle$ doivent être supprimées. Le système d'état devient

alors :

$$\begin{cases} \langle \dot{\mathbf{x}} \rangle = \mathbf{A} \langle \mathbf{x} \rangle + \mathbf{B}_0 \langle \mathbf{w} \rangle_0 \\ \langle \dot{\mathbf{z}} \rangle = \mathbf{C} \langle \mathbf{x} \rangle + \mathbf{D}_0 \langle \mathbf{w} \rangle_0 \end{cases} \quad (4.39)$$

b) Application au hacheur filtré

Le modèle topologique du hacheur a déjà été calculé au chapitre précédent. La matrice d'état écrite sous la forme (4.36) est donnée par l'équation (3.51). Appliquons les résultats du modèle moyen généralisé d'ordre 1 à la première ligne de ce système (3.51), réécrite en (4.40).

$$\dot{v}_{c1} = \frac{1}{C_1} i_{l1} - \frac{1}{C_1} h i_{l2} \quad (4.40)$$

On obtient alors, en considérant une fréquence de découpage ω_s et un rapport cyclique α , le modèle moyen généralisé à l'ordre 1 suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\langle v_{c1} \rangle_{-1}}{dt} \\ \frac{d\langle v_{c1} \rangle_0}{dt} \\ \frac{d\langle v_{c1} \rangle_1}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} j\omega_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_{c1} \rangle_{-1} \\ \langle v_{c1} \rangle_0 \\ \langle v_{c1} \rangle_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_{l1} \rangle_{-1} \\ \langle i_{l1} \rangle_0 \\ \langle i_{l1} \rangle_1 \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{C_1} \begin{bmatrix} \langle h \rangle_0 & \langle h \rangle_{-1} & 0 \\ \langle h \rangle_1 & \langle h \rangle_0 & \langle h \rangle_{-1} \\ 0 & \langle h \rangle_1 & \langle h \rangle_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_{l2} \rangle_{-1} \\ \langle i_{l2} \rangle_0 \\ \langle i_{l2} \rangle_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

avec les valeurs des coefficients de Fourier défini par (3.81), qui dans sont données par :

$$\begin{cases} \langle h \rangle_{-1} = \frac{(e^{2i\pi\alpha} - 1)}{2i\pi} \\ \langle h \rangle_0 = \alpha \\ \langle h \rangle_1 = \frac{(1 - e^{-2i\pi\alpha})}{2i\pi} \end{cases} \quad (4.42)$$

Le modèle complet du hacheur est donné en annexe B.

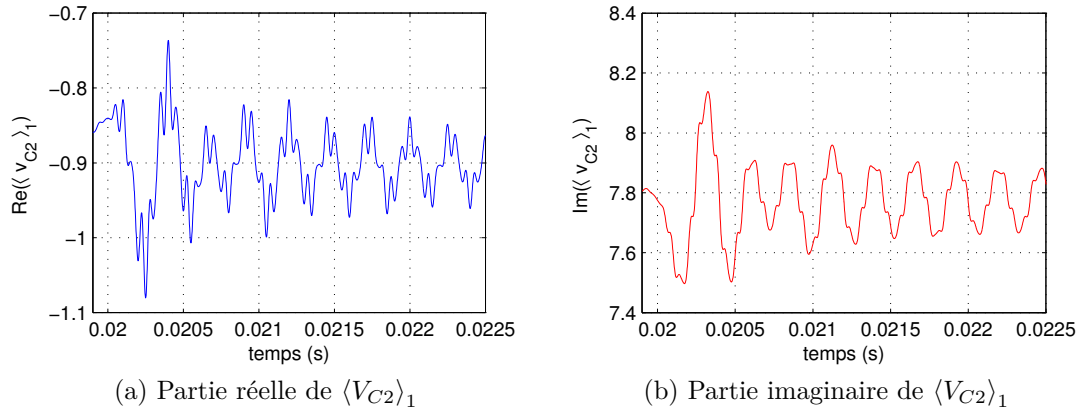
c) Validation du modèle moyen généralisé

Afin de valider la pertinence du modèle, on compare le modèle topologique issu de l'équation (3.51) avec le modèle moyen à l'ordre 0 de l'équation (3.91) ainsi qu'avec le modèle moyen généralisé à l'ordre 1 obtenu par l'équation (4.39), grâce aux matrices d'état données en annexe B.

Les figures 4.1a et 4.1b représentent la réponse de l'harmonique de rang 1 de la tension de sortie v_{C2} à un échelon de courant de 100 A sur le courant de sortie.

$\langle V_{C2} \rangle_1$ correspond au coefficient de Fourier de l'harmonique de rang 1 généré par la cellule de commutation à 20 kHz. La matrice d'état de l'équation (4.39) étant complexe, $\langle V_{C2} \rangle_1$ l'est aussi. $\langle V_{C2} \rangle_{-1}$ correspond au coefficient de Fourier de l'harmonique tournant en sens opposé et est égal au conjugué de $\langle V_{C2} \rangle_1$.

Tout comme $\langle V_{C2} \rangle_0$ du modèle moyen à l'ordre 0, les coefficients de Fourier possèdent une dynamique qui leur est propre.


 FIGURE 4.1 – Réponse du coefficient de Fourier $\langle v_{C2} \rangle_1$ à un échelon de courant

Les figures 4.2a et 4.2b représentent les tensions aux bornes des deux condensateurs C_1 et C_2 en régime (presque) permanent. Ces tensions sont obtenues en projetant le vecteur des harmoniques dans la base tournante \mathcal{E} définie en (4.6) grâce à l'équation (4.26).

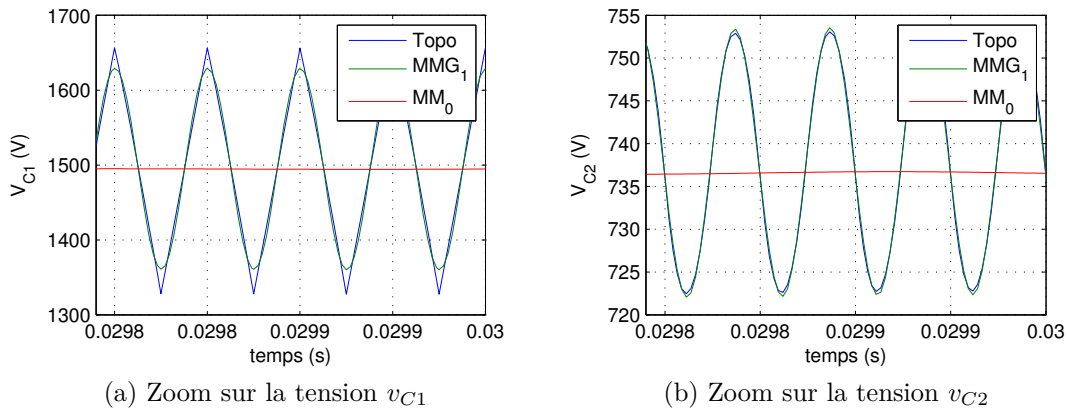


FIGURE 4.2 – Comparaison entre le modèle exact, le modèle moyen généralisé à l'ordre 1 et le modèle moyen à l'ordre 0 en régime permanent

En supposant que le courant dans l'inductance L_1 est parfaitement lissé, la cellule de commutation consomme un courant en créneau de fréquence f_s sur la capacité C_1 . La tension V_{C1} aux bornes de cette capacité va donc varier en dent de scie (intégrale du créneau), ce qui est représenté en bleu.

En rouge, on retrouve le modèle moyen d'ordre 0, noté MM_0 , qui comme nous l'avons vu néglige les harmoniques. D'après ce modèle, la tension aux bornes de la capacité C_1 est constante alors qu'elle varie en réalité de 330 V.

Le modèle moyen généralisé à l'ordre 1 noté MMG_1 est tracé en vert. Ce modèle permet une bien meilleure approximation en approchant le modèle topologique en dent de scie par son premier harmonique, une fonction sinus. On retrouve alors une grandeur variant bien à 20 kHz et approchant de très près le modèle exact.

La figure 4.2b représente, elle, la tension de la capacité de sortie. En négligeant l'ondulation de V_{C1} , la cellule de commutation applique un créneau de tension à

l'inductance L_2 qui s'oppose à cette variation de tension en générant un courant en dent de scie. La capacité C_2 va réagir à ce courant par une tension presque sinusoïdale (double intégration du créneau).

La tension V_{C1} étant presque sinusoïdale, le MMG_1 sera particulièrement fidèle, alors qu'encore une fois, le MM_0 est trop approximatif. On remarque de plus que le MM_0 sous-estime la valeur moyenne.

Enfin, la figure 4.3 représente la tension de sortie du hacheur lors d'un transitoire. Encore une fois, le MMG_1 s'accorde parfaitement avec le modèle exacte et permet de prendre en compte les harmoniques, ce que le MM_0 ne permet pas de faire.

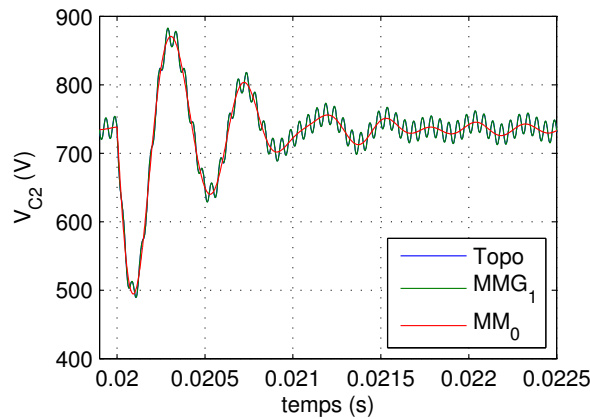


FIGURE 4.3 – Comparaison des modèles lors d'un échelon de courant de 100A sur I_{out}

Cet exemple illustre bien les possibilités qu'offre le modèle moyen même avec un ordre faible.

3.4 Limitations du modèle

Cette méthode fonctionne aussi dans le cas de convertisseurs AC-DC ou DC-AC. Il suffit de modifier les fonctions de commutation pour en tenir compte et obtenir les matrices de transfert harmoniques [Ign06].

La seule limitation de cette méthode est la taille du système qui augmente avec le nombre d'harmoniques, mais aussi d'inter-harmoniques. Jusqu'à présent, nous avons supposé que tous les convertisseurs commutaient à la même fréquence. Cela permet de réduire grandement la complexité et la taille du système à résoudre.

Cela n'est cependant pas une fatalité, et il est possible d'intégrer des convertisseurs travaillant à des fréquences de découpage différentes [AWW03]. Il est alors obligatoire d'augmenter encore l'ordre du système, pour intégrer comme variables d'état tous les inter-harmoniques, et de modifier en conséquence le vecteur $diag(-j\omega\mathcal{N}_N)$ utilisé dans le calcul de dérivée.

Les grandeurs proches de la cellule de commutation ne sont intégrées qu'une seule fois et présentent des fronts plus raides que les variables plus éloignées. Le MMG_1 peu ainsi s'avérer insuffisant pour approcher ces signaux, obligeant le concepteur à augmenter l'ordre du modèle.

3.5 Écriture sous forme LFT

Encore une fois, il est possible d'extraire du modèle les paramètres pour obtenir une écriture sous forme LFT. On rappelle que l'avantage d'une telle écriture est de faciliter le calcul des matrices, sans avoir à procéder au calcul du bond graph à chaque fois. Cela facilite grandement l'implémentation dans des algorithmes d'optimisation utilisés pour la commande ou le dimensionnement. De plus, il est possible de faire apparaître la position des tramways comme des paramètres. Le système est alors un système LPV et les positions sont traitées en tant qu'incertitudes.

Cette forme est la même que celle utilisée dans les méthodes de commande robuste H_∞ , qui sont capables de considérer une incertitude paramétrique. Une telle écriture autorise donc l'utilisation de ces outils comme la μ -analyse par exemple.

4 Analyse fréquentielle d'un système LTP

4.1 Présentation des systèmes LTP

Le système d'état (4.36) forme une classe particulière de système dit LTP (*Linear Time Periodic*). Dans le cas où on construit le modèle moyen d'ordre 0, le système en boucle ouverte est un système LTI. La fonction de commutation est remplacée par une constante et les matrices sont constantes et invariantes dans le temps.

La construction d'un modèle d'ordre supérieur consiste à approximer la fonction de commutation par sa série de Fourier. De ce fait, la fonction de commutation h n'est plus constante et si la fonction de commutation ne dépend pas de l'état (commutation forcée), les matrices d'état sont variantes dans le temps et même périodiques. Le système étant linéaire, on parle alors de système LTP.

Un modèle d'état (4.39) peut être construit en travaillant avec les coefficients de Fourier au lieu des grandeurs correspondant aux signaux réels. Cette projection permet de travailler avec un système LTI complexe, mais il ne faut pas perdre de vue que pour repasser en temporel, il faut utiliser la relation de passage (4.7) avec \mathcal{E} , une base de projection variant dans le temps.

4.2 Transfert des systèmes LTP

La notion de transfert pour un système LTI a été développée dans la section 8.1 du chapitre 3. Nous allons maintenant l'établir pour un système LTP.

Si on calcule la réponse fréquentielle du système décrit par (4.39), la propriété 2 ne s'applique plus. L'équation (4.17) nous a montré que lorsqu'un signal était multiplié par un cosinus, des termes croisés apparaissaient. Ces termes dont la fréquence n'est pas multiple du fondamental sont appelés inter-harmoniques.

L'équation (4.26) nous montre comment sont liés le domaine fréquentiel et le domaine temporel. Si par contre le signal d'entrée n'est pas un sinus de fréquence ω alors que les convertisseurs ont une fréquence de découpage ω_s , la base de projection (4.6) est modifiée pour devenir :

$$\mathcal{E}e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} e^{j(\omega - N\omega_s)t} & \dots & e^{j\omega t} & \dots & e^{j(\omega + N\omega_s)t} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Dans le cas d'un système LTP [VGS02], l'équation (3.124) se réécrit (en omettant les indice i et j) :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t - \tau)u(t - \tau) d\tau \quad (4.44)$$

Les matrice d'état étant T-périodique (avec $T = 2\pi/\omega_s$), les fonctions de transfert sont aussi T-périodiques et on peut écrire leur série de Fourier selon l'équation (3.74) :

$$g(t, t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\tau)e^{jn\omega_s t} \quad (4.45)$$

où $g_n(\tau)$ correspond aux coefficients de Fourier définit par (3.73) :

$$g_n(\tau) = \frac{1}{T} \int_{[T]} g(t, t - \tau)e^{-jn\omega_s t} dt \quad (4.46)$$

On a donc, à partir de (4.44) et (4.45) :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\tau)u(t - \tau) d\tau \quad (4.47)$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (4.47), on obtient enfin :

$$Y(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(s - jn\omega_s)U(s - jn\omega_s) \quad (4.48)$$

Ce système d'état peut alors être réorganisé pour former ce que l'on appelle une matrice de transfert harmonique [MB00]. En posant :

$$\mathcal{U}(s) = [\cdots U(s - j\omega_s) \quad U(s) \quad U(s + j\omega_s) \quad \cdots]^T \quad (4.49)$$

$$= [\cdots U_{-1}(s) \quad U_0(s) \quad U_1(s) \quad \cdots]^T \quad (4.50)$$

et

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & G_{-1,-1}(s) & G_{-1,0}(s) & G_{-1,1}(s) & \cdots \\ \vdots & G_{0,-1}(s) & G_{0,0}(s) & G_{0,1}(s) & \cdots \\ \vdots & G_{1,-1}(s) & G_{1,0}(s) & G_{1,1}(s) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

avec $G_{p,q}(s) = G_{p-q}(s + jq\omega_s)$. L'équation (4.48) peut être écrite sous la forme du système LTI :

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{G}(s)\mathcal{U}(s) \quad (4.52)$$

Cette matrice $\mathcal{G}(s)$ permet d'étudier un système LTP à partir de l'étude d'une série de système LTI. La sortie s'obtient alors simplement en appliquant le principe de superposition.

L'analyse harmonique d'un système se fait en appliquant en entrée un signal sinusoïdal. La réponse temporelle d'un système LTI s'obtient grâce à l'équation

(3.126). On applique en entrée du système un signal $w(t) = W \sin(\omega t) = \text{Im}(W e^{j\omega t})$. Le vecteur \mathcal{U} s'écrit :

$$\mathcal{U}(s) = [\cdots 0 \quad W \quad 0 \quad \cdots]^T \quad (4.53)$$

A partir de (4.52), on en déduit le signal de sortie :

$$\mathcal{Y}(s) = [\cdots G_{-1,0}(s)W \quad G_{0,0}(s)W \quad G_{1,0}(s)W \quad \cdots]^T \quad (4.54)$$

Le système (3.126) s'écrit pour chaque composant de \mathcal{Y}

$$Y_n(\omega) e^{j(\omega+n\omega_s)t} = G_n(j\omega) W e^{j\omega t} \quad (4.55)$$

A la différence d'un système LTI, un signal de pulsation ω , va générer en sortie un signal comportant plusieurs composantes de pulsation $(\omega \pm q\omega_s)$.

L'étude du transfert harmonique de u vers y_n se réduit donc simplement à l'étude de $G_n(j\omega)$, avec la particularité que la sortie n'est pas à la même fréquence que l'entrée.

4.3 Fonction de transfert harmonique du réseau de convertisseurs

L'équation d'état du réseau de convertisseurs est donnée par l'équation (4.39). Les vecteurs d'entrée et de sortie sont définis par les équations (4.25) et (4.5). Il est donc nécessaire de les réordonner pour les mettre sous la forme (4.50).

Le vecteur d'entrée $\langle \mathbf{w} \rangle_0$ ne contient que les termes d'ordre 0, il est donc identique à \mathcal{U} . On passe de $\langle \mathbf{z} \rangle$ à \mathcal{Y} par $\mathcal{Y} = P\mathbf{z}$ où P est une matrice de passage carrée de dimension $((2N + 1) \times m)$ et où m est le nombre de sorties, telle que :

$$P([m(i - 1) + j], [(2N + 1)(j - 1) + 1]) = 1, \text{ pour } 1 \leq i \leq (2N + 1) \text{ et } 1 \leq j \leq m \quad (4.56)$$

La fonction de transfert harmonique $G_n(j\omega)$ est donc donnée par :

$$G_n(j\omega) = P_n \mathbf{C}(j\omega I - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_0 + P_n \mathbf{D}_0 \quad (4.57)$$

où P_n est une sous-matrice de P formée en gardant seulement les lignes de $1+m(N+n)$ à $m(N+n+1)$.

4.4 Valeur efficace et ondulation d'un signal harmonique

4.4.1 Valeur efficace

Soit $z(t)$ un signal réel T-périodique. La valeur efficace de $z(t)$ est définie par l'équation (4.58) :

$$z_{\text{eff}}(t) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} z(\tau)^2 d\tau} \quad (4.58)$$

Dans le cas de grandeurs continues, la valeur efficace est égale à la valeur moyenne. Si nous travaillons avec des grandeurs alternatives sinusoïdales, nous retrouvons l'équation (4.59).

$$z_{\text{eff}} = \frac{z_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad (4.59)$$

Les harmoniques d'un signal participent au même titre que le fondamental au transport de la puissance. Elles vont donc augmenter la valeur efficace du signal.

Le théorème de Parseval est un théorème basé sur la conservation de l'énergie d'un signal périodique entre sa représentation temporelle et celle fréquentielle. Il a déjà été décrit par l'équation (3.194) sur l'intégralité du spectre. Pour un signal périodique, $\|z\|_2^2$ défini par (3.194) serait infini. Cette norme est alors remplacée par celle de l'équation (4.58) et le théorème de Parseval se réécrit :

$$\|z\|_2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |z(\tau)|^2 d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.60)$$

où c_n est le coefficient de Fourier complexe défini par (3.73), et a_n , b_n sont les coefficients réels obtenues par l'équation de passage (3.76).

Dans le cas d'un signal non périodique, cette définition est encore valable en utilisant les coefficients de Fourier donnés par (3.83) et dépendants du temps.

$$z_{\text{eff}}(t) = \|z\|_2(t) = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle z \rangle_n \langle z \rangle_{-n}} \quad (4.61)$$

En tronquant cette série de Fourier et en utilisant la définition du vecteur harmonique donnée par (4.5), la valeur efficace peut s'approximer par (en omettant le temps) :

$$\|z\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{z} \rangle^* \langle \mathbf{z} \rangle} \quad (4.62)$$

4.4.2 Amplitude des harmoniques

Un signal présentant des harmoniques est représenté [CLS99] par sa série de Fourier sous la forme (3.77), soit pour le signal z :

$$z(t) = Z_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \sqrt{2} \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (4.63)$$

Z_0 est l'amplitude de la composante continue, Z_n est la valeur efficace de l'harmonique de rang n et φ_n son déphasage au temps initial. Pour un signal z réel, et à partir de la définition des coefficients donnée par les équations (3.76) et (3.78), on a :

$$\begin{cases} Z_0 = |\langle z \rangle_0| \\ Z_n = \sqrt{2} |\langle z \rangle_n| \end{cases} \quad (4.64)$$

La valeur efficace $\|z\|_2$ peut s'exprimer à partir des coefficients (4.64) suivant :

$$\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} Z_n^2} \quad (4.65)$$

Le taux de distorsion harmonique, ou thd_i , est défini comme le rapport d'un harmonique par rapport à son fondamental. Dans le cas d'un réseau continue, on choisit la valeur moyenne Z_0 comme référence.

$$thd_i = \frac{Z_n}{Z_0} \quad (4.66)$$

Le taux de distorsion global ou thd est lui défini comme la valeur efficace des harmoniques ramenée au fondamentale soit :

$$thd = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} Z_n^2}}{Z_0} \quad (4.67)$$

4.4.3 Calcul de l'ondulation à partir des coefficients de Fourier

Les harmoniques sont toujours décroissants d'après le théorème de *Riemann-Lebesgue*. De plus, si une fonction est de classe C^k , alors ses coefficients de Fourier sont négligeables devant $\frac{1}{n^k}$. Les variables d'état étant régulières de part l'intégration naturelle des filtres, on peut donc supposer que le maximum du signal a lieu pour le maximum de son premier harmonique. Cependant sa valeur pourra être différente si la variable est peu filtrée. L'objectif est ici d'exprimer l'ondulation uniquement à partir des coefficients complexes du signal que nous avons à notre disposition.

La fonction $z(t)$ peut être approchée par son développement en série de Fourier donné par l'équation (4.63). En supposant que le maximum de $z(t)$ a lieu en même temps que son premier harmonique, on a $\omega t_M = \varphi_1$. Le minimum aura lieu en $\omega t_m = \pi + \varphi_1$ et l'ondulation sera donnée par $\Delta z = z(t_M) - z(t_m)$ soit :

$$\Delta z = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle z \rangle_{1+2n}| \cos(\varphi_{1+2n} - (1+2n)\varphi_1) \quad (4.68)$$

En utilisant la formule d'Euler, l'équation (4.68) se réécrit :

$$\Delta z = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \langle z \rangle_{1+2n} e^{-(1+2n)\varphi_1} + \langle z \rangle_{-(1+2n)} e^{(1+2n)\varphi_1} \quad (4.69)$$

$e^{-\varphi_1}$ peut être calculé à partir de $\langle z \rangle_1$ et $\langle z \rangle_{-1}$ et se simplifie si z est réel pour donner :

$$e^{-\varphi_1} = \frac{\langle z \rangle_{-1}}{|\langle z \rangle_{-1}|} = \sqrt{\frac{\langle z \rangle_{-1}}{\langle z \rangle_1}} \quad (4.70)$$

Le taux d'ondulation peut donc être approché par :

$$\Delta z = \Delta z_0 + 2 \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \langle z \rangle_{1+2n} \left(\frac{\langle z \rangle_{-1}}{\langle z \rangle_1} \right)^{\frac{1+2n}{2}} \quad (4.71)$$

Δz_0 correspond alors à l'approximation du premier harmonique ($n = 0$) et est donnée à partir de (4.69) par :

$$\Delta z_0 = 4 \sqrt{\langle z \rangle_1 \langle z \rangle_{-1}} = 2\sqrt{2}Z_1 \quad (4.72)$$

Dans le cas du MMG₁, le taux d'ondulation est directement proportionnel à la valeur efficace du premier harmonique. Le dimensionnement est souvent basé sur la contrainte du taux d'ondulation [Ber02] exprimé en pourcentage de la valeur moyenne. Dimensionner un filtre par la technique du premier harmonique revient donc à contraindre le thd_1 défini par l'équation (4.66).

5 Analyse harmonique en régime permanent

Un modèle dynamique d'un système LTP a été développé à l'équation (4.55). La fonction de transfert harmonique donnée par l'équation (4.57) permet de connaître le transfert entre une entrée et les harmoniques des signaux de sortie.

5.1 Gain statique harmonique

Le gain statique harmonique correspond au gain de la matrice de transfert (4.57) pour $\omega = 0$. Elle permet de calculer les harmoniques générés par le réseau de convertisseurs en régime permanent.

On rappelle que l'approche la plus classique consiste à effectuer une simulation temporelle avec un pas de temps très fin jusqu'à atteindre le régime permanent. Une transformée de Fourier est alors effectuée à posteriori pour évaluer les harmoniques.

L'approche proposée ici est fondamentalement différente et consiste simplement à effectuer un produit matriciel pour connaître les harmoniques. Cette rapidité d'exécution va alors permettre d'étudier l'influence de la commande et de la structure sur les harmoniques.

5.1.1 Calcul des harmoniques en régime permanent

La matrice de transfert (4.57) est construite pour renvoyer les vecteurs harmonique de toutes les grandeurs d'état. En régime permanent, on peut alors écrire à partir de (4.55) et (4.57) :

$$X_n e^{(jn\omega_s)t} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_0 W \quad (4.73)$$

Les matrices du hacheur série sont décrites dans l'annexe B. Le terme $e^{(jn\omega_s)t}$ est là pour nous rappeler que même si W est constant, les X_n varient dans le temps en régime permanent. Les valeurs en régime permanent du hacheur sans charge résistive sont regroupées dans le tableau 4.1. Les formes d'ondes correspondantes ont été tracées sur les figure 4.2.

	MM ₀	MMG ₁			
	X_0	X_0	X_1	$\ z\ _2$	thd
V_{C1}	1495.00	1494.99	88.29	1497.59	5.91
I_{L1}	500.00	500.86	14.64	501.079	2.92
V_{C2}	737.50	738.78	11.08	738.86	1.50
I_{L2}	1000.00	1000.00	29.23	1000.43	2.92

TABLE 4.1 – Grandeur caractéristique du hacheur série en régime permanent

On observe que le modèle moyen généralisé permet de calculer efficacement les harmoniques.

Plus intéressant, on observe que les valeurs moyennes des variables d'état obtenues par le MM_0 et par le MMG_1 sont très proches mais que le MM_0 a tendance à sous estimer la tension de sortie.

5.1.2 Influence des filtres sur les harmoniques

La présence des éléments réactifs a pour but de réduire la pollution harmonique générée par le convertisseur. Pour connaître l'influence des filtres sur les harmoniques en régime permanent, on forme la LFT de la figure (4.4).

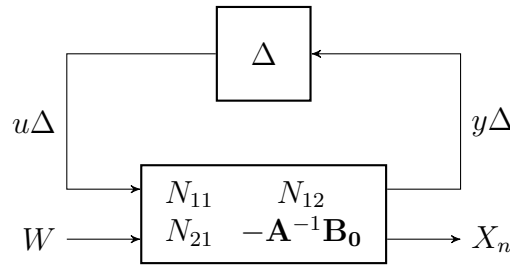


FIGURE 4.4 – LFT pour le calcul des harmoniques

Grâce à cette formulation, on peut calculer l'influence des éléments réactifs groupés dans la matrice Δ sur le vecteur de sortie représentant les harmoniques en régime permanent.

Soit Δ_0 la valeur initiale des filtres. Les harmoniques pour cette valeur de Δ sont alors calculés par $X_n^0 = \mathcal{F}_u(N, \Delta_0)$ où N est le système augmenté de la figure 4.4. Pour un nouveau jeu de paramètres Δ_i , X_n^i peut être calculé. On définit alors $\delta X_n^i = X_n^i / X_n^0$ la variation des harmoniques de rang n par rapport aux paramètres de dimensionnement initiaux.

Les figures 4.5a et 4.5b viennent illustrer dans le cas du hacheur série l'influence du filtre d'entrée sur l'harmonique X_1 des variables d'état. La variation δX_1 de l'harmonique de rang 1 est alors représentée pour chacune des variables d'état en faisant varier un paramètre entre 30% et 300% de sa valeur initiale, les autres étant supposés constants.

La figure 4.5a représente l'évolution de l'harmonique de rang 1 en fonction de l'inductance du filtre d'entrée L_1 . Cette variation est représentée en valeur relative par rapport à l'harmonique de rang 1 présent pour l'inductance nominale. Seul le courant dans l'inductance L_1 est ainsi impacté par l'évolution de L_1 . Le graphique étant semi-logarithmique, on peut noter que l'ondulation varie comme l'inverse de l'inductance.

La figure 4.5b est identique à la précédente, mais en faisant varier la capacité C_1 . Les résultats sont très proches de ceux de la figure 4.5a, sauf que cette fois, c'est le courant I_{L_1} et la tension V_{C_1} qui varient de manière inversement proportionnelle à la capacité C_1 .

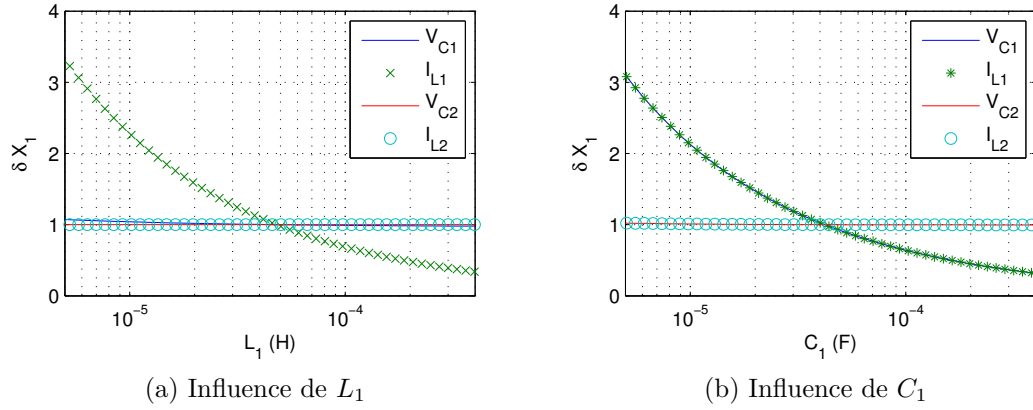


FIGURE 4.5 – Influence du filtre d'entrée sur les harmoniques

5.2 Influence des harmoniques

Nous avons développé une méthode efficace pour calculer les harmoniques en régime permanent d'un réseau multi-convertisseurs. Le couplage entre les éléments réactifs et les harmoniques a ensuite été illustré. Mais pourquoi vouloir limiter ces harmoniques ?

Plusieurs raisons peuvent être invoquées. On retrouve en particulier la qualité de la tension produite, qui assure la compatibilité des équipements connectés entre eux. Des normes existent pour limiter la pollution harmonique sur les réseaux. De plus, les harmoniques vont générer des pertes, diminuer la durée de vie des équipements et créer des résonances pouvant se révéler catastrophiques [MB00].

5.2.1 Augmentation du courant efficace

Les équations (4.62) et (4.65) montrent bien que le courant efficace augmente avec les harmoniques. Les conséquences sont alors exposées dans les paragraphes suivants.

a) Augmentation des pertes

Dans un réseau à courant continu, les pertes s'expriment à partir de l'équation (3.149) sous une forme quadratique. Dans le cas d'un réseau pollué, le vecteur d'état devient (4.25). Les pertes s'expriment cette fois par :

$$\text{Pertes} = \langle \mathbf{X} \rangle^* \mathbf{Q} \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.74)$$

où $\mathbf{Q} = Q \otimes I_{2N+1}$ d'après (4.27). S'il n'y a pas d'élément en causalité dérivée, Q est une matrice diagonale. Les pertes peuvent se réécrire alors :

$$\text{Pertes} = \sum_i \langle \mathbf{x}_i \rangle^T q_{ii} \otimes I_{2N+1} \langle \mathbf{x}_i \rangle = \sum_i q_{ii} \|x_i\|_2^2 \quad (4.75)$$

Les pertes sont donc directement dépendantes des grandeurs efficaces, qui, nous l'avons vu, augmentent avec les harmoniques.

Dans le cas du hacheur série, nous avons vu sur la figure (4.5b) qu'une diminution de la capacité du filtre d'entrée C_1 impliquait une augmentation de l'ondulation de

V_{C1} et I_{L1} . L'augmentation de ces harmoniques va alors créer une augmentation des pertes, en particulier dans l'ESR de l'inductance L_1 , comme l'illustre la figure 4.6.

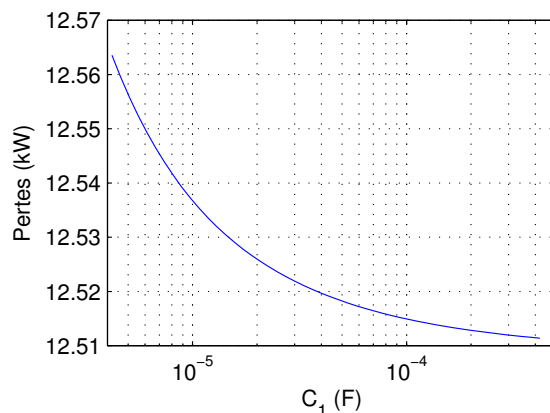


FIGURE 4.6 – Evolution des pertes en fonction de la capacité du filtre d'entrée

b) Conséquence sur le dimensionnement et le vieillissement des composants

Cette augmentation du courant efficace va se traduire comme nous l'avons vu par une augmentation des pertes. Cela est vrai en particulier pour les pertes dans les ESR des condensateurs.

L'objectif d'un condensateur est de filtrer les courants pollués. Plus le courant sera pollué, plus le courant efficace qui traversera le condensateur sera grand, ce qui augmentera les pertes et entraînera une élévation de la température. La durée de vie du condensateur diminuera donc.

c) Effet sur le transport de la puissance

Les harmoniques augmentent les grandeurs efficaces des signaux. La puissance apparente ou puissance de dimensionnement s'exprime par :

$$S = \|v\|_2 \|i\|_2 \quad (4.76)$$

les harmoniques vont donc impliquer un sur-dimensionnement de l'alimentation. La puissance active est elle donnée par :

$$P = \langle v \rangle^* \langle i \rangle \quad (4.77)$$

En présence d'harmoniques, la puissance n'est plus entièrement transportée par le fondamental ou la valeur moyenne. Les harmoniques vont transporter une partie de cette puissance.

5.2.2 Couplage entre les harmoniques et la valeur moyenne

En construisant le MM_0 , nous avons établi que la valeur à l'état d'équilibre ne dépend pas des éléments réactifs. Ces éléments réactifs vont cependant présenter une

impédance pour les harmoniques et jouer sur leur répartition comme nous l'avons constaté sur les figures 4.5a et 4.5b.

Cependant, en augmentant l'ordre du modèle, on voit apparaître un couplage entre les harmoniques et les valeurs moyennes. Les matrices d'états \mathbf{A} et \mathbf{B} sont construites à partir de l'équation (4.37). Le n -ième coefficient de la i -ième variable d'état sera notée $\langle \mathbf{x}_i \rangle_n$.

La matrices $\mathcal{A} \oplus \text{diag}(-j\omega\mathcal{N}_N)$ et $\mathcal{B} \otimes I_{2N+1}$ sont des matrices donc les blocs sont diagonaux. Il en résulte que $\langle \dot{\mathbf{x}}_i \rangle_n$ ne dépend que des variables d'états de même ordre $\langle \mathbf{x} \rangle_n$.

Les matrices $\mathbf{T}(h_i A_i)$ et $\mathbf{T}(h_i B_i)$ calculées par (4.33) sont pleines. $\langle \dot{\mathbf{x}}_i \rangle_n$ dépendra alors de tous les termes $\langle \mathbf{x} \rangle$. Les commutations du hacheurs vont donc créer un couplage fort entre les harmoniques et la valeur moyenne.

Cette influence explique la différence entre les colonnes X_0 du tableau 4.1. La figure 4.7 permet de visualiser ce couplage. Elle représente l'évolution de la valeur moyenne des variables d'état du hacheur en fonction de l'inductance L_1 du filtre d'entrée. Le MM₀ ne permet de distinguer aucune différence.

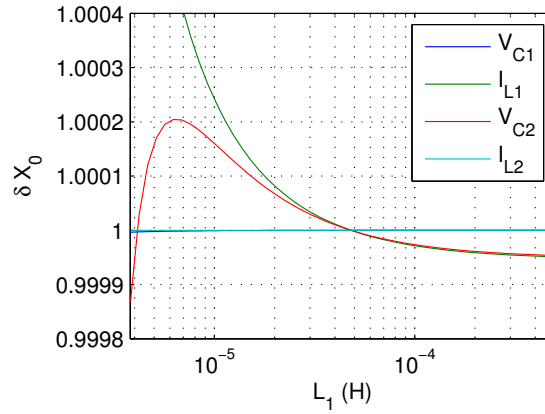


FIGURE 4.7 – Variation de la valeur moyenne en fonction de l'inductance d'entrée

Avec le MMG₁, on peut observer que V_{C1} et I_{L2} ne sont absolument pas influencés par l'inductance du filtre, ce qui n'est pas le cas de I_{L1} et V_{C2} . En diminuant, L_1 entraîne ainsi un début de résonance sur I_{L1} et V_{C2} .

5.3 Transfert harmonique

Dans la section précédente, nous avons étudié le transfert harmonique dans le cas où l'entrée est continue. Cependant, les matrices de transfert harmonique ne se limitent pas au cas où la pulsation est nulle.

Le transfert entre une entrée à la pulsation ω et les variables d'état se calcule à partir de (4.55) et (4.57) :

$$X_n(\omega)e^{(\omega+jn\omega_s)t} = (j\omega I - \mathbf{A}^{-1})\mathbf{B}_0 W e^{j\omega t} \quad (4.78)$$

Cette fonction de transfert est identique à celle d'un système LTI. Une entrée à la pulsation ω va générer une série d'harmoniques en passant à travers le convertisseur. Ces harmoniques auront une pulsation égale à $\omega + n\omega_s$.

5.3.1 Illustration sur le hacheur série

Pour illustrer cette notion de transfert harmonique, nous allons étudier le hacheur série. Afin de ne pas surcharger les courbes, on simplifiera le modèle en n'étudiant que le filtre de sortie. Ce hacheur débite sur une charge purement résistive. Il est représenté à la figure 4.8.

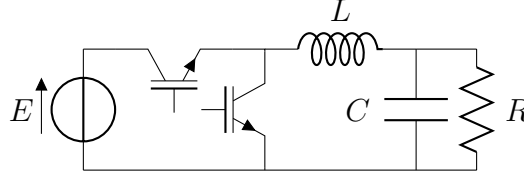


FIGURE 4.8 – Hacheur série simplifié débitant sur charge RLC

Le modèle topologique de ce hacheur est donné par l'équation d'état (4.79).

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_l \end{bmatrix} + \frac{hE}{L} \quad (4.79)$$

a) Résonance du filtre de sortie

Si on étudie la matrice dynamique, les valeurs propres nous renseignent sur d'éventuelles résonances. Ces valeurs propres sont données par (4.80) :

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} - 1}{2RC} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{1 - \frac{4R^2C}{L}} + 1}{2RC} \quad (4.80)$$

Tant que la résistance $R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$, le régime est apériodique. Dans le cas contraire, des oscillations apparaissent, dues à un pôle résonant. La pulsation de ce pôle résonant est donnée par la partie imaginaire des valeurs propres qui sont complexes conjuguées. On obtient la pseudo-période suivante :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2}} \quad (4.81)$$

Selon la théorie classique, un tel montage se comportera comme un filtre passe bas du deuxième ordre. Tous les signaux se présentant en amont de ce filtre avec une fréquence supérieure à cette fréquence de coupure seront donc atténués avec une pente de -40 dB/dec.

On considère, pour illustrer, un filtre LC avec les valeurs numériques suivantes : $L = 1$ mH et $C = 1$ mF. Un tel filtre aura une pulsation de coupure de 994.99 rad/s, s'il est chargé avec une résistance $R = 5 \Omega$. Le diagramme de bode du transfert entre la tension d'entrée et la tension aux bornes de la résistance est tracé figure 4.9. Ce tracé est effectué en prenant un rapport cyclique de 0.5 , et en utilisant le modèle à l'ordre 0 , ce qui est valable en considérant un hacheur dont la fréquence de commutation est de 20 kHz.

Sur cette figure, nous voyons bien le pic de résonance, qui peut entraîner une tension de sortie supérieure à la tension d'entrée. Basée sur cette étude, nous pouvons garantir que si la tension d'entrée présente une composante harmonique dont la

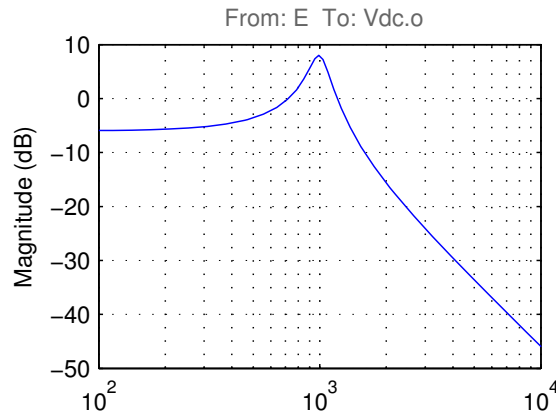


FIGURE 4.9 – Diagramme de Bode du hacheur avec filtre LC

fréquence n'est pas comprise dans la bande $[722 \text{ rad/s}, 1200 \text{ rad/s}]$, alors la tension en sortie sera forcément inférieure à la tension d'entrée. De plus, la forte pente du filtre laisse présager que si la fréquence de la perturbation est élevée, elle sera d'autant mieux rejetée.

b) Résonance des harmoniques

L'approche ci-dessus est juste, mais ne tient absolument pas compte du découpage opéré par le hacheur. Si la source de tension comporte un contenu harmonique, ce dernier va entrer en interaction avec celui créé par le hacheur, et les interharmoniques ainsi générés peuvent doivent être pris en compte.

Afin de prévoir une telle déconvenue, l'étude du diagramme de Bode des fonctions de transfert harmonique peut être un précieux allié.

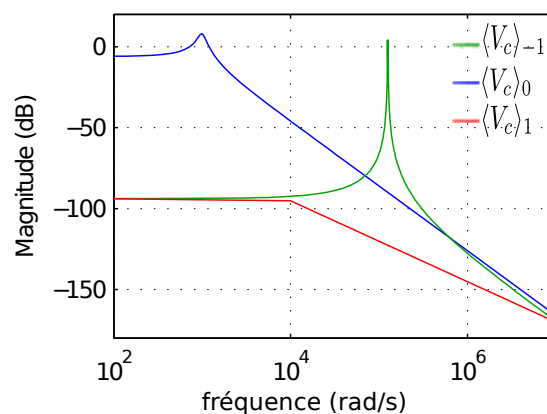


FIGURE 4.10 – Transfert harmonique d'ordre 1 du hacheur série

En bleu, nous retrouvons le transfert de l'entrée vers le fondamental, alors que en rouge, nous avons celui vers le coefficient de Fourier complexe $\langle V_c \rangle_1$ et en vert

celui vers $\langle V_c \rangle_{-1}$.

Le transfert vers le fondamental possède une allure semblable à celui de la figure 4.9. Aux basses fréquences, on retrouve le gain statique qui permet de calculer les harmoniques, pour une entrée continue. Les coefficients de Fourier ont le même module car ils sont complexes conjugués.

En augmentant la fréquence, on peut connaître le gain entre l'entrée, la sortie, et ses harmoniques. On observe alors que le transfert vers le coefficient négatif est sujet à une résonance, aussi importante que celle du fondamental, mais à une fréquence beaucoup plus élevée. Le coefficient positif reste lui très faible, prouvant bien la réjection des hautes fréquences.

En zoomant sur cette zone (figure 4.11), on aperçoit non pas un, mais deux pics de résonance. Ces pics sont par ailleurs centrés autour de la fréquence de découpage du hacheur.

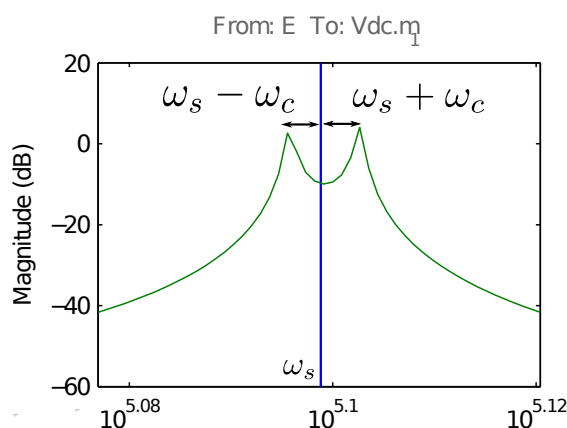


FIGURE 4.11 – Diagramme de Bode du hacheur avec ses harmoniques (Zoom)

Si on regarde la fréquence de ces pics, on les retrouve à $[\omega_s - \omega_c]$ et $[\omega_s + \omega_c]$, mais ils ne sont pas exactement symétriques. Le nombre de valeurs propres du MMG₁ passe aussi de deux à six, et nous voyons apparaître ces fréquences et leur opposé.

Si un signal sinusoïdal, de fréquence $\omega_1 = [\omega_s + \omega_c]$, est appliqué sur la tension d'entrée E , il sera ainsi amplifié de 4 dB, et se retrouvera en sortie à la fréquence $\omega_1 - \omega_s$, car la résonance a lieu sur $\langle V_c \rangle_1$. En sortie, on observera donc un phénomène de battement basse fréquence qui sera superposé au harmoniques de découpage.

La conclusion est importante. Si un réseau comporte plusieurs convertisseurs, les interactions entre les harmoniques générés peuvent entraîner des phénomènes basses fréquences impossibles à prévoir via des modèles classiques d'ordre 0 trop simples. En élevant l'ordre du modèle, il est alors possible d'étudier les phénomènes d'interactions harmoniques.

c) Le battement

Nous avons vu qu'un filtre, même bien dimensionné, peut introduire des résonances à basse fréquence. De faibles harmoniques peuvent alors déclencher les protections [MB00].

C'est d'ailleurs ce phénomène qui explique la variation des grandeurs moyennes du hacheur série sur la figure 4.7

Supposons par exemple que le hacheur de la figure 4.8 est alimenté par une source de tension présentant une pollution harmonique haute fréquence telle que $E(t) = E_0 + e \cos(\omega_1 t)$. On étudiera le cas où la fréquence (ω_1) de cette perturbation est de 19.84 kHz.

Le transfert harmonique permet de connaître la tension de sortie. En regardant le gain statique (fréquence nulle), on observe que le gain sur la valeur moyenne est de $\alpha = 0.5$. L'affaiblissement sur les harmoniques est de -100 dB. Si $E = E_0$, la tension de sortie est continue. Les harmoniques sont négligeables, ce qui est normal car le filtre a une fréquence de coupure très basse par rapport à la fréquence de découpage.

Dans le cas où la perturbation est à une fréquence ω_1 , on procède de la même manière. La figure 4.12a nous montre que pour une perturbation de 19.84 kHz, la composante de fréquence nulle en bleu est très faible. La perturbation ne va donc pas affecter la valeur moyenne de la tension de sortie.

De même, l'harmonique de rang 1 en rouge tournant à $\omega_s + \omega_1$ sera encore plus atténué. Par contre l'harmonique de rang -1 en vert de pulsation $\omega_s - \omega_1$ sera amplifié. On va alors observer un battement basse fréquence.

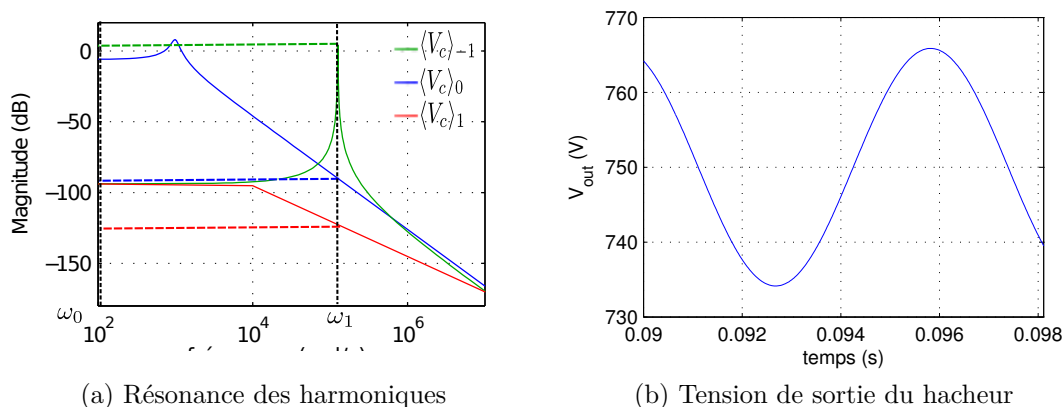


FIGURE 4.12 – Battement de la tension de sortie

La figure 4.12b représente la tension de sortie du hacheur pour $E_0 = 1500$ V et $e = 10$ V. La tension moyenne est bien de 750 V et les harmoniques à 20 kHz négligeables. Superposé à la tension moyenne, on observe également une ondulation basse fréquence (159 Hz) provenant de l'interaction harmonique. Son amplitude a par ailleurs été amplifiée par rapport au signal d'entrée e l'ayant créé.

Il faut donc faire excessivement attention à la qualité de tension sur un réseau multi-convertisseurs. Même si chaque filtre est bien dimensionné pour chaque convertisseur pris individuellement, des interactions peuvent apparaître. Deux convertisseurs ayant des fréquences de découpage légèrement différentes peuvent alors créer une perturbation basse fréquence affectant les variables électriques.

5.3.2 Application sur le réseau de tramways

Nous allons à présent appliquer la théorie du transfert harmonique sur le réseau de tramways complet avec ses hacheurs présenté sur la figure 2.25, avec la charge du tableau 3.3.

Les modèles dynamiques utilisés ont été décrits en annexe A. Les convertisseurs d'électronique de puissance autres que le hacheur n'ont pas été modélisés.

Les matrices de transfert harmonique permettent alors de savoir si les harmoniques générés par le redresseur à diodes, ou par l'onduleur de traction, ne vont pas rentrer en résonance.

En plus d'une tension moyenne, un redresseur pleine onde va générer une ondulation de tension que nous pouvons observer sur la figure 2.19a. Cette ondulation à 300 Hz peut être décrite par sa série de Fourier [SRD89], dont seuls les termes multiples de 300 Hz sont non nuls.

De même, l'onduleur de traction va générer des harmoniques dont on connaît la fréquence. Les hacheurs employés sur les TFS travaillent eux à fréquence variable. Les matrices de transfert permettent alors de s'assurer qu'il n'y a pas de risque de résonance sur la plage de variation de la fréquence.

Grâce au modèle harmonique, on peut étudier les performances du réseau sans avoir à modéliser les convertisseurs des tramways et des sous-stations.

5.4 Influence de l'ordre du modèle

Nous avons utilisé jusqu'à présent le modèle moyen généralisé à l'ordre 1. Ce modèle permet de prendre en compte seulement la valeur moyenne et le premier harmonique. Quel que soit le signal, les harmoniques seront toujours décroissants quand leur rang augmente. Mais la prise en compte des harmoniques de rang supérieur va augmenter l'ordre du modèle, mais aussi permettre une meilleure description.

5.4.1 Modification de la valeur moyenne

En rencontrant des résistances, les harmoniques du courant vont créer une ondulation sur la tension. En passant à travers la cellule de commutation, cette tension harmonique va se répercuter sur la tension moyenne en sortie.

Augmenter l'ordre du modèle est une solution permettant de mieux tenir compte de ces chutes de tension, et donner une précision supérieure sur les valeurs moyennes.

5.4.2 Influence sur les pertes

Les harmoniques sont utilisés pour calculer le courant efficace et les pertes. En augmentant l'ordre, il est possible donc d'évaluer finement la contribution des harmoniques sur les pertes du réseau.

La figure 4.13a représente les pertes dans le réseau de tramways en fonction de l'ordre du modèle. On ne prend pas en considération les harmoniques des redresseurs et des onduleurs. On remarque qu'augmenter l'ordre du modèle de manière excessive n'apporte pas d'information supplémentaire. Le MMG₁ suffit à déduire que les pertes dues aux harmoniques sont de 120 W, ce qui est négligeable.

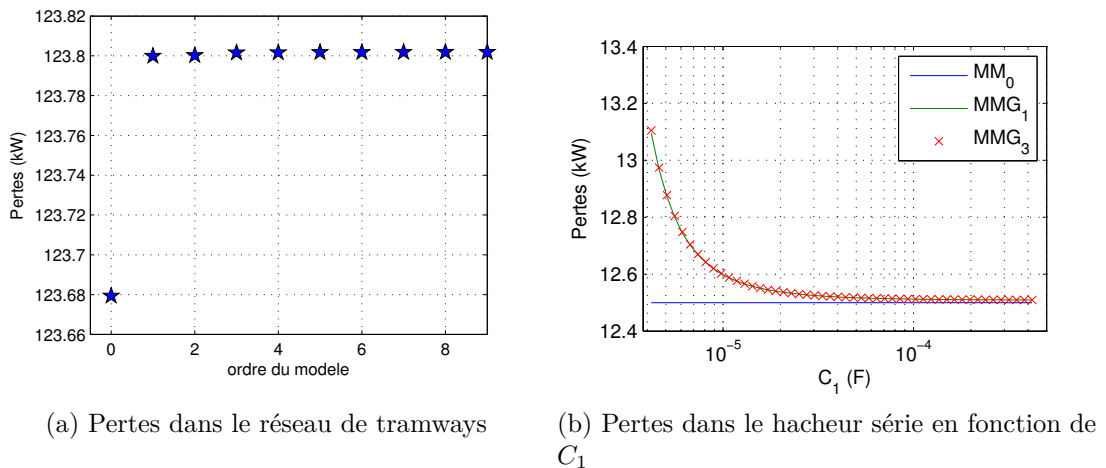


FIGURE 4.13 – Influence de l'ordre du modèle sur les pertes

La figure 4.13b représente les pertes en fonction de l'ordre et de la capacité du filtre d'entrée. Encore une fois, les modèles harmoniques donnent les mêmes évolutions quel que soit leur ordre.

Si les grandeurs sont bien filtrées, le modèle moyen à l'ordre 0 peut donc s'avérer suffisant. Par contre, pour de faibles valeurs de C_1 , le pourcentage de pertes dues aux harmoniques n'est plus négligeable et l'utilisation du MMG₁ est indispensable.

5.4.3 Conclusion

Prendre en compte les harmoniques implique une augmentation de la taille du modèle. Cela permet une plus grande précision, mais cela ne se justifie pas forcément dans le cas d'un réseau complet bien filtré.

De plus, les filtres utilisés sont des filtres du deuxième ordre de sorte que les variables éloignées de la cellule de commutation subissent une double intégration. Les formes d'ondes sont alors quasi-sinusoidales comme le montrent les figures 4.2. Le modèle d'ordre 1 sera donc suffisant pour étudier les grandeurs de sortie d'un hacheur.

5.5 Modification de la répartition de puissance

Un autre phénomène intéressant qu'il est possible d'étudier est la modification de la répartition de puissance entre les hacheurs en fonction des éléments réactifs. Si on ne prend pas en considération les harmoniques, la répartition de puissance ne dépend que des éléments résistifs et des rapports cycliques. Or, nous avons vu que les filtres jouent sur les harmoniques mais aussi sur les valeurs moyennes.

En modifiant la valeur de l'inductance du filtre de sortie du hacheur H_2 , sa tension de sortie va changer et la répartition de courant entre les hacheurs va donc être modifiée. La figure 4.14 illustre la répartition de puissance active calculée grâce à la formule (4.77). La part de puissance transportée par les harmonique est très faible.

Les étoiles correspondent à la répartition nominale de la puissance, telle qu'elle peut être calculée à l'aide du MM₀ (en négligeant la contribution des harmoniques).

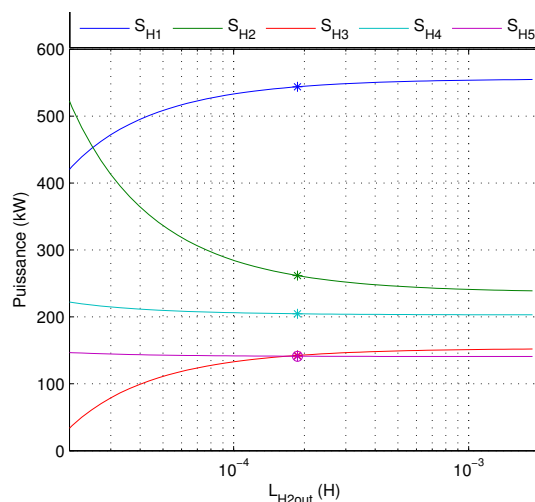


FIGURE 4.14 – Répartition de la puissance entre les hacheurs en fonction de l'inductance du filtre de sortie du hacheur H_2

On observe que la variation des paramètres des filtres va avoir une influence importante sur la répartition de la puissance.

Plus l'inductance du filtre du hacheur H_2 sera faible, plus la puissance qu'il captera sera élevée au détriment des autres hacheurs. En diminuant cette inductance, on se rapproche de la fréquence de résonance, et la tension de la sous-station augmente.

5.6 Comment réduire la pollution harmonique ?

Nous l'avons bien vu, la pollution harmonique pose de sérieux problèmes et il est nécessaire de maintenir cette pollution à un taux faible. Pour y arriver, nous nous sommes focalisé sur l'utilisation de filtres passe bas, mais d'autres approches sont possibles. Il est par exemple possible d'utiliser des filtres résonants en parallèle accordés sur la fréquence des harmoniques à éliminer. Cette méthode est principalement utilisée sur les redresseurs où la fréquence de commutation est faible et où le besoin de filtrage est grand.

La meilleure façon de filtrer les harmoniques est de ne pas en produire. La manière la plus simple est alors d'augmenter la fréquence de découpage. La montée en fréquence permet de réduire de manière significative le besoin de filtrage, mais se heurte à d'autres types de limitation.

Tout d'abord, une augmentation de la fréquence va augmenter les problèmes de compatibilité électromagnétique, en augmentant les couplages. Le second problème de la montée en fréquence est un accroissement proportionnelle des pertes par commutation. Afin de respecter la densité de puissance des composants, il va être indispensable de se tourner vers des méthodes de commutation douce ou vers l'utilisation de snubbers, pour limiter ces pertes.

Il est aussi possible d'augmenter artificiellement la fréquence grâce aux techniques d'entrelacement. En utilisant plusieurs convertisseurs, mais en décalant les instants de commutation, le filtre de sortie verra un courant, somme des courants de chaque convertisseur dont la fréquence semblera plus élevée, alors que chaque convertisseur, voit sa fréquence inchangée. Le phénomène sera encore plus marqué

si on utilise des inductances couplées.

L'entrelacement peut être mis à profit pour chaque hacheur du réseau de tramways, mais aussi à l'échelle du réseau entier bien que le couplage et donc le gain soit plus faible. Cette méthode est également couramment utilisée avec les redresseurs à diodes. Un transformateur avec deux enroulements de sortie étoile/triangle va créer deux systèmes de tension triphasé décalés de $\pi/3$. Avec un redresseur à la sortie de chaque enroulement, la somme des courants permet d'élever le rang des harmoniques et de faciliter le filtrage.

Les techniques multi-niveaux constituent une autre solution pour limiter la pollution harmonique. En augmentant le nombre de niveaux, on réduit d'autant l'ondulation dans les filtres. En plus de pouvoir travailler sous des tensions plus importantes, un convertisseur multi-niveaux est un moyen efficace de diminuer la pollution harmonique. C'est d'ailleurs cette approche qui a été retenue par la SNCF [ACL10].

6 Procédure de dimensionnement des filtres

Le dimensionnement des filtres est un enjeu majeur, et une des difficultés principales dans la conception de dispositifs d'électronique de puissance. Être capable de dimensionner les éléments réactifs pour des systèmes complexes est délicate, et nécessite habituellement de fortes hypothèses simplificatrices.

Ainsi, il est d'usage, lors de l'étude d'un réseau comportant plusieurs convertisseurs, de négliger leurs interactions respectives. L'étude du dimensionnement se fait alors en isolant le convertisseur de son milieu et en supposant que les grandeurs à ses ports sont constantes. Cette hypothèse peut être justifiée si le filtrage est très important, ou si les convertisseurs sont éloignés. Ce n'est plus le cas lorsque les harmoniques commencent à ne plus être négligeables.

Le même type d'hypothèses est courant au sein du convertisseur lui-même. Le dimensionnement des éléments d'un filtre se fera en supposant nulles les ondulations parasites aux bornes des filtres. Il est alors classique de considérer la tension de sortie d'un hacheur série constante, pour dimensionner son inductance de lissage. Bien que cette hypothèse soit couramment admise, nous avons vu aux chapitres précédents ses limites.

Usuellement, le dimensionnement s'effectue en imposant un taux d'ondulation maximal pour les grandeurs filtrées. Il est alors possible avec les approximations précédentes, et dans les cas simples, de relier les taux d'ondulation avec les valeurs des éléments réactifs de manière analytique. Cela permet de calculer les filtres, qui sont ensuite validés par une simulation. Ce dimensionnement sera effectué pour un point de fonctionnement, qui sera, on l'espère, le pire cas.

L'objectif de cette section consiste alors à proposer une alternative à cette méthode simplifiée. La fonction de transfert harmonique sera utilisée, couplée avec la formulation LFT, pour exprimer et calculer les harmoniques afin de procéder à un dimensionnement multicritères optimal des filtres.

6.1 Dimensionnement classique des filtres d'un hacheurs série

Le hacheur série avec filtre LC en entrée et en sortie de la figure 3.8 est un cas bien connu de procédure de dimensionnement [Ber02]. Il sera étudié uniquement en conduction continue.

En supposant la tension d'entrée et le courant de sortie constants, et en négligeant l'ondulation des variables d'état et les ESR, il est possible d'exprimer les ondulations suivantes :

$$\Delta I_{L1} = \frac{\pi^2(1-\alpha)}{2L_1C_1\omega_s^2} \quad (4.82a)$$

$$\Delta V_{C1} = \frac{2\pi\alpha(1-\alpha)I_{out}}{C_1\omega_s V_{in}} \quad (4.82b)$$

$$\Delta I_{L2} = \frac{2\pi\alpha(1-\alpha)V_{in}}{L_2\omega_s I_{out}} \quad (4.82c)$$

$$\Delta V_{C2} = \frac{\pi^2(1-\alpha)}{2L_2C_2\omega_s^2} \quad (4.82d)$$

Il est intéressant de noter la dualité au sein de ces équations. Avec ces hypothèses, les grandeurs proches de la cellule de commutation V_{Cin} et I_{Lout} qui ne sont filtrées qu'une fois, ne dépendent que d'un seul paramètre, ce qui facilite le dimensionnement. A noter que le besoin de filtrage est maximal pour un rapport cyclique $\alpha = 0.5$.

A partir des équations (4.82), on peut dimensionner les éléments réactifs en fonction d'un taux d'ondulation admissible :

$$L_1 = \frac{\pi V_{in} \Delta V_{C1}}{4\omega_s \alpha I_{out} \Delta I_{L1}} \quad (4.83a)$$

$$C_1 = \frac{2\pi\alpha(1-\alpha)I_{out}}{\omega_s V_{in} \Delta V_{C1}} \quad (4.83b)$$

$$L_2 = \frac{2\pi d(1-\alpha)V_{in}}{\omega_s I_{out} \Delta I_{L2}} \quad (4.83c)$$

$$C_2 = \frac{\pi I_{out} \Delta I_{L2}}{4\omega_s \alpha V_{in} \Delta V_{C2}} \quad (4.83d)$$

En choisissant par exemple $\Delta V_{C1} = 20\%$, $\Delta I_{L1} = 7.8\%$, $\Delta V_{C2} = 3.9\%$ et $\Delta I_{L2} = 10\%$ pour une tension nominale $V_{in} = 1500$ V, un courant de sortie $I_{out} = 1000$ A et un rapport cyclique $\alpha = 0.5$, on trouve comme paramètres de dimensionnement ceux du tableau A.2.

Cette approche est efficace et simple. Elle nécessite cependant le calcul du taux d'ondulation en fonction des filtres, ce qui devient vite une tâche périlleuse. Par ailleurs, le calcul du taux d'ondulation d'une variable se fait en négligeant l'ondulation des autres. Les résistances ne sont pas prises en compte, et de plus cette approche néglige toutes les interactions avec l'extérieur.

Ce dimensionnement doit souvent être réajusté par un simulation numérique avant validation.

6.2 Approximation du taux d'ondulation

Nous avons vu qu'il était possible d'approximer l'ondulation d'une grandeur grâce à ses coefficients de Fourier par l'équation (4.71), qui se simplifie si on ne considère que le premier harmonique par l'équation (4.72). Cette approximation est valable pour les grandeurs bien filtrées. Dans le cas des éléments placés directement à proximité de la cellule de commutation, une erreur plus importante est induite.

Le taux d'ondulation de la variable z peut approximativement être calculé grâce à ses coefficients de Fourier par :

$$\Delta z = 4 \frac{\sqrt{\langle z \rangle_1 \langle z \rangle_{-1}}}{|\langle z \rangle_0|} \quad (4.84)$$

Nous avons également développé une méthode permettant de calculer simplement ces coefficients de Fourier, en fonction des paramètres des filtres par la LFT de la figure 4.4. On rappelle que l'obtention de cette LFT se fait automatiquement à partir d'une description du réseau sous la forme d'un bond graph⁴.

Ce taux d'ondulation peut encore être calculé analytiquement dans le cas du hacheur série. Pour le courant de sortie, on trouve par exemple, en négligeant les ESR :

$$\Delta I_{L_2} = \frac{4 \sin(\pi\alpha) V_{in} \omega_s}{\pi I_{out}} \frac{\sqrt{C_2^2 \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha I_{out}}{V_{in}} \frac{\omega_s}{\omega_{12}^2}\right)^2}}{\left| \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_2^2}\right) - \alpha^2 \frac{\omega_s^2}{\omega_{12}^2} \right|} \quad (4.85)$$

avec

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad \omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (4.86)$$

L'expression (4.85), montre les différents couplages qui existent entre les filtres. Elle fait apparaître les fréquences de résonance des filtres de sortie ω_2 , d'entrée ω_1 et même du couplage des deux ω_{12} alors que la théorie classique stipule que seul le filtre de sortie a de l'influence. La simplification est encore plus importante car dans l'expression (4.82c), il n'y a que l'inductance L_2 qui est utilisée pour calculer l'ondulation du courant I_{L_2} .

L'équation (4.85) permet au final de prendre en compte l'ondulation des autres variables d'état, ce que la théorie classique ne permet pas. (La méthode du premier harmonique peut être utilisée pour les convertisseurs à résonance).

Si la fréquence de découpage ω_s est largement supérieure aux fréquences de résonance, on se retrouve dans un cas où l'ondulation est faible. L'équation (4.85) peut alors se simplifier pour donner l'expression (4.87).

$$\Delta I_{L_{out}} = \frac{4 \sin(\pi\alpha) V_{in}}{\pi \omega_s L_2 I_{out}} \quad (4.87)$$

La structure de cette équation (4.87) est la même que celle de (4.82c). La théorie classique approxime le courant dans l'inductance par une dent de scie. Notre approche ne prend en compte que le premier harmonique et considère que le courant dans l'inductance ne comporte, en plus de sa composante continue, qu'une composante sinusoïdale.

4. lui aussi construit automatiquement dans le cas du réseau de tramways en fonction de la positions des tramways

Le terme $2\pi\alpha(1-\alpha)$ présent dans l'équation (4.82c) se voit remplacé par $4 \sin(\pi\alpha)/\pi$ dans (4.87).

De manière semblable, on peut calculer le taux d'ondulation de la tension de sortie. On obtient alors :

$$\Delta V_{C2} = 4\text{sinc}(\pi\alpha) \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha I_{out}}{V_{in} C_2} \frac{\omega_s}{\omega_{12}^2}\right)^2}}{\left| \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_2^2}\right) + \left(\frac{1 - \cos(2\pi\alpha)}{\pi^2} - \alpha^2\right) \frac{\omega_s^2}{\omega_{12}^2} \right|} \quad (4.88)$$

qui, avec les mêmes hypothèses que précédemment, se réduit à :

$$\Delta V_{C2} = \frac{4\text{sinc}(\pi\alpha)}{L_2 C_2 \omega_s^2} \quad (4.89)$$

Les taux d'ondulation du courant I_{L2} calculés par les équations (4.82c), (4.85) et (4.87) sont tracés sur la figure 4.15a. La figure 4.15b quant à elle permet de comparer les modèles du taux d'ondulation de la tension V_{C2} .

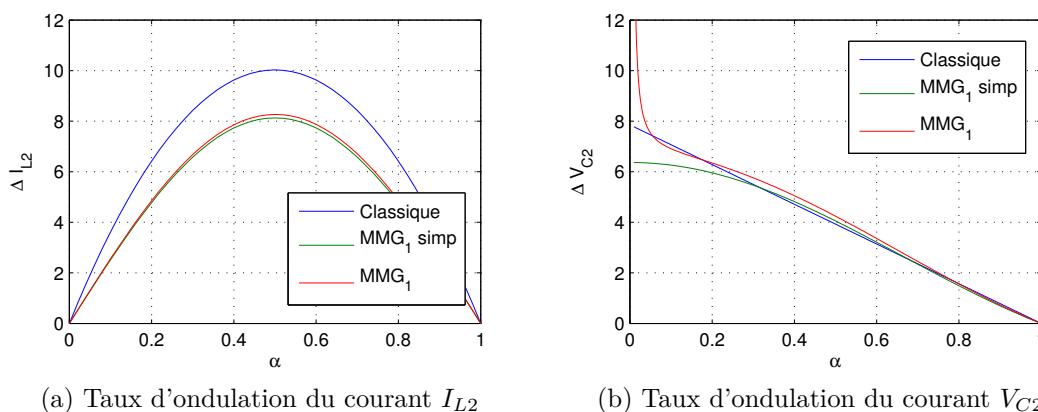


FIGURE 4.15 – Comparaison du modèle classique et du MMG_1 et du MMG_1 simplifié pour le calcul du taux d'ondulation

Il ressort de ces figures que les tendances d'évolution sont respectées. La pollution harmonique de la tension de sortie se limite presque uniquement à une sinusoïde. Le MMG_1 est alors particulièrement adapté et les courbes se superposent. Lorsque α devient faible, la tension moyenne tend vers 0, créant une asymptote sur le taux d'ondulation.

Le courant dans l'inductance plus proche de la cellule de commutation est proche de la dent de scie. L'approximation sinusoïdale devient moins justifiée et un écart important apparaît. Toutefois, le MMG_1 donne une tendance exacte, mais il sous-estime le taux d'ondulation.

Des résultats identiques peuvent être déduits pour le filtre d'entrée, grâce à la dualité existante. Les rôles des capacité et inductance auront juste à être inversées, de même que courant et tension.

Pour palier aux limitations du modèle d'ordre 1 lors de l'estimation du taux d'ondulation des variables proches de la cellule de commutation (et donc intégrées seulement une fois), il peut être utile d'augmenter l'ordre du modèle. La figure 4.16 illustre l'influence de l'ordre du modèle sur le taux d'ondulation calculé grâce à la

formule (4.71). Le taux d'ondulation est cette fois tracé après avoir été normalisé par $L_2\omega_s I_{out}/V_{in}$.

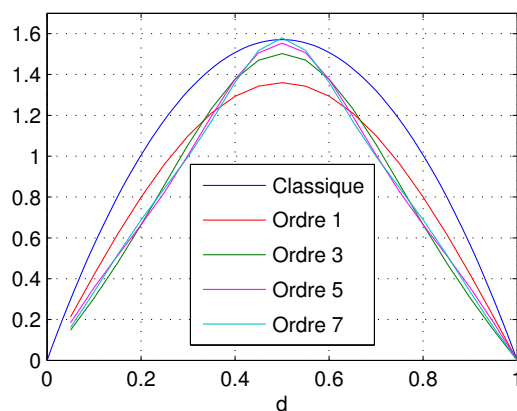


FIGURE 4.16 – Taux d'ondulation normalisé ΔI_{L2} en fonction de l'ordre du modèle

Ainsi, plus l'ordre du modèle est élevé, et plus le résultat pour $\alpha = 0.5$ est proche de celui évalué de manière classique. La prise en compte des harmoniques de rangs supérieurs permet de mieux approximer le courant en dent de scie. Le résultat se dégrade par contre sur les bords. Cela est principalement dû à la forte hypothèse effectuée pour calculer le taux d'ondulation (4.71). Nous supposons alors que le courant atteignait son maximum en même temps que son premier harmonique. Cela est vérifié si le signal est pair, mais beaucoup moins dans le cas où il n'est pas symétrique. Plus le rapport cyclique s'éloigne de $\alpha = 0.5$, et plus le courant en dent de scie présente des temps de montée et des temps de descente différents, ce qui justifie l'écart observé.

Concernant les variables intégrées deux fois, l'hypothèse est vérifiée. Le modèle d'ordre 1 est suffisant, et augmenter l'ordre permet seulement de mieux modéliser l'ondulation lorsque le rapport cyclique est faible.

6.3 Dimensionnement des filtres par la méthode du premier harmonique

Les coefficients harmoniques peuvent être calculés à partir de la LFT de la figure 4.4. Grâce à la LFT, les paramètres de dimensionnement peuvent ainsi être extraits pour apparaître uniquement dans une matrice Δ diagonale. L'objectif du dimensionnement va être de trouver des filtres permettant de respecter un taux d'ondulation à présent noté τ pour éviter les confusions. Ce taux d'ondulation peut être approché de manière satisfaisante par l'équation (4.84).

A partir des équations (3.42) et (3.44), le carré du taux d'ondulation peut s'exprimer directement sous la forme d'une LFT. Le problème de dimensionnement consistera alors à trouver Δ diagonale telle que :

$$\mathcal{F}_u(N, \Delta) < \tau \quad (4.90)$$

Ces opérations sur les LFT vont avoir pour conséquence d'augmenter la taille de Δ . Soit m le nombre d'élément à dimensionner. Dans le cas où Δ utilisé pour

calculer $\langle z \rangle_1$ et $\langle z \rangle_{-1}$ est de dimension m , le produit $\langle z \rangle_1 \langle z \rangle_{-1}$ utilisé pour évaluer le taux d'ondulation, s'exprime sous forme LFT en faisant apparaître une matrice diagonale de dimension $2m$.

Malheureusement, la résolution de l'équation (4.90) ne peut se faire par inversion directe de l'équation (3.40) pour trouver Δ car les matrices N_{12} et N_{21} ne sont pas carrées.

La résolution du problème de dimensionnement passera alors par la résolution d'un système d'équations non linéaires.

Imposer une contrainte sur le taux d'ondulation τ_i de la variable x_i va se traduire en utilisant le carré de l'équation (4.84) par :

$$16 \langle x_i \rangle_1 \langle x_i \rangle_{-1} - \tau_i^2 \langle x_i \rangle_0^2 \leq 0 \quad (4.91)$$

L'équation (4.91) peut se mettre sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \langle x_i \rangle_1 & \langle x_i \rangle_0 & \langle x_i \rangle_{-1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{R_i} \begin{bmatrix} \langle x_i \rangle_{-1} \\ \langle x_i \rangle_0 \\ \langle x_i \rangle_1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.92)$$

Le calcul des harmoniques $\langle x_i \rangle_n$ de la variable s'obtient à partir du vecteur $\langle \mathbf{X} \rangle$ par la projection $\langle x_i \rangle_n = P_n^i \langle \mathbf{X} \rangle$ avec P_n^i un vecteur de dimension $(1 \times (2N + 1)m)$ nul sauf à l'indice $((2N + 1)i + (n - N))$. On a alors :

$$\begin{bmatrix} \langle x_i \rangle_{-1} \\ \langle x_i \rangle_0 \\ \langle x_i \rangle_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{-1}^i \\ P_0^i \\ P_1^i \end{bmatrix}}_{P_i} \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.93)$$

A partir de (4.92) et (4.93) la contrainte sur l'ondulation s'écrit :

$$\langle \mathbf{X} \rangle^* \underbrace{P_i^* R_i P_i}_{\mathbf{R}_i} \langle \mathbf{X} \rangle \leq 0 \quad (4.94)$$

Le calcul des harmoniques à l'état d'équilibre s'effectue à partir de l'équation (4.73) sous la forme de la LFT de la figure 4.4 afin de faire apparaître les paramètres de dimensionnement.

Le problème de dimensionnement revient alors à trouver Δ telle que :

$$W^* \mathcal{F}_u(N, \Delta)^* \mathbf{R}_i \mathcal{F}_u(N, \Delta) W \leq 0 \quad (4.95)$$

On se placera dans le cas limite en cherchant les zéros de l'équation (4.95). Un problème apparaît alors. Nous avons vu qu'une forme quadratique ne possède qu'un seul et unique zéro que si elle est formée autour d'une matrice définie positive. D'après la définition de R_i à l'équation (4.92), on voit que R_i n'est pas définie positive. On ne peut donc pas conclure quant à l'existence et l'unicité des solutions de (4.95).

La section 5.2.2 mettrait en avant l'existence d'un couplage fort entre les harmoniques et les valeurs moyennes. Si le filtre est correctement dimensionné, ce couplage est faible, et il dépend assez peu de la valeur des filtres comme le montre la figure

4.7. Cela n'est vrai que dans le cas d'un convertisseur DC/DC. Pour un convertisseur AC/DC ou DC/AC, les filtres jouent tout aussi bien sur les harmoniques que sur le fondamental.

On peut alors approximer l'équation (4.91) par :

$$16 \langle x_i \rangle_1 \langle x_i \rangle_{-1} - \tau_i^2 \langle \hat{x}_i \rangle_0^2 \leq 0 \quad (4.96)$$

où \hat{x}_i correspond à la variable d'état calculée grâce au modèle moyen d'ordre 0.

L'équation à résoudre s'écrit alors :

$$W^* \mathcal{F}_u(N, \Delta)^* \hat{\mathbf{R}}_i \mathcal{F}_u(N, \Delta) W - \tau_i^2 \langle \hat{x}_i \rangle_0^2 \leq 0 \quad (4.97)$$

Cette fois $\hat{\mathbf{R}}_i$ est une matrice symétrique semi-définie positive assurant au plus une solution.

Le dimensionnement final d'un système entier consiste donc à résoudre le système composé de m équations (4.97). Le calcul du gradient utilisé pour la résolution se fait en utilisant l'équation (3.46).

Appliquées dans le cas du hacheur série, les différentes méthodes de dimensionnement permettent d'obtenir les résultats résumés dans le tableau 4.2.

Méthode	$C_1(\mu F)$	$L_1(\mu H)$	$C_2(\mu F)$	$L_2(\mu H)$
Équation (4.83)	41.66	47.75	21.22	187.50
Équation (4.95)	35.35	47.47	21.53	155.33
Équation (4.97)	35.35	47.50	21.54	155.34

TABLE 4.2 – Comparaison des méthodes de dimensionnement

On retrouve alors des résultats très proches, sauf dans le cas des éléments proches de la cellule de commutation comme nous l'avons vu sur les graphiques 4.15. Pour les grandeurs riches en harmoniques, la méthode de premier harmonique peut se révéler insuffisante. Elle présente cependant l'avantage d'être entièrement automatisée.

6.4 Dimensionnement optimal des filtres

6.4.1 Mise en équations

Le problème de dimensionnement peut aussi être vu comme un problème d'optimisation sous contraintes qui peut s'écrire sous la forme standard du problème (2.108). La fonction objectif peut par exemple être les pertes calculées par la formule (4.74), ou le volume des filtres. On peut supposer que le coût des filtres dépend proportionnellement de leur volume, qui variera avec leur inductance et leur capacité. Le choix entre les deux objectifs se fera grâce une variable poids $\rho \in [0, 1]$

On peut étudier le problème en ne faisant apparaître que les paramètres de dimensionnement comme variables. Le problème d'optimisation se résume en un problème sous contrainte d'inégalité seulement formulé par l'équation (4.97)

On peut aussi opter pour un problème augmenté, faisant appel à des variables supplémentaires : les harmoniques dans ce cas de figure. L'écriture de la matrice \mathbf{A} sous forme LFT en faisant apparaître les paramètres de dimensionnement sera notée par abus de langage $\mathcal{F}_u(\mathbf{A}, \Delta)$

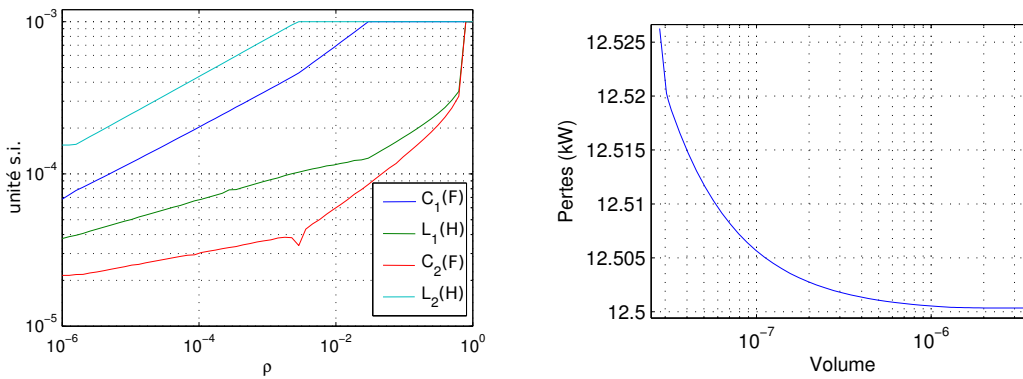
Le problème de dimensionnement peut alors s'écrire sous la forme du problème (4.98).

$$\begin{aligned}
 & \underset{\Delta \in \mathbb{R}_m^*+}{\text{minimiser}} && \rho \langle \mathbf{X} \rangle^* \mathbf{Q} \langle \mathbf{X} \rangle + (1 - \rho) \sum_{i=1}^m (\beta_i \Delta_i) \\
 & \text{sous contraintes :} && \langle \mathbf{X} \rangle^* \hat{\mathbf{R}}_i \langle \mathbf{X} \rangle - \tau_i^2 \langle \hat{x}_i \rangle_0^2 \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \\
 & && \mathcal{F}_u(\mathbf{A}, \Delta) \langle \mathbf{X} \rangle + \mathcal{F}_u(\mathbf{B}_0, \Delta) \langle \mathbf{W} \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Le problème d'optimisation est formulé automatiquement. Il s'agit d'un problème quadratique convexe car \mathbf{Q} et \mathbf{R} sont définies positives. Sa résolution passe par le respect des conditions de *KKT* établies par les équations (2.109) qui imposent le calcul du gradient.

6.4.2 Application sur le hacheur série

La figure 4.17a illustre l'importance de la fonction objectif dans le dimensionnement du filtre, alors que la figure 4.17b représente le front de Pareto entre les pertes et le volume des filtres. Le volume tracé ici n'est qu'indicatif et $\beta_i = 1$.



(a) Dimensionnement du filtre en fonction de l'objectif (b) Frontière de Pareto entre le volume et les pertes

FIGURE 4.17 – Dimensionnement optimal des filtres du hacheur série

Un ρ faible indique que l'objectif est de minimiser le volume du filtre. Cela revient à travailler avec les taux d'ondulation admissibles les plus élevés. Les contraintes d'inégalités deviennent des contraintes d'égalités et les résultats sont identiques au cas précédent du tableau 4.2. Dans ce cas, les pertes sont maximales.

Au contraire, minimiser les pertes ($\rho = 1$) impose des grandeurs efficaces et des harmoniques faibles. Les filtres doivent être de grande taille, et la figure 4.17a indique que les paramètres atteignent leur butée haute fixée ici à 1 mF pour les capacités et 1 mH pour les inductances. Ce cas correspond à la deuxième asymptote de la frontière de Pareto.

La transition entre le dimensionnement à volume/prix minimum et le dimensionnement à pertes minimum est intéressant. Seul les ESR des inductances créent des pertes dans cet exemple. Les éléments les plus influents dans la réduction des pertes sont éléments les plus proches de la cellule de commutation C_1 et L_2 . L'inductance L_2 est la valeur la plus vite contrainte et, une fois qu'elle a atteint sa limite haute, on observe une rupture de pente indiquant qu'il devient intéressant d'augmenter C_2 .

6.4.3 Conclusion sur la méthode

La méthode proposée ici permet de dimensionner les filtres d'un réseau multi-convertisseurs. Elle approche le taux d'ondulation par l'harmonique de rang 1 et a tendance à sous-estimer le besoin de filtrage.

Par contre, la formulation du problème est automatique, et elle intègre le couplage entre les différents systèmes. La formulation analytique n'est plus nécessaire et le dimensionnement est vu comme un problème d'optimisation.

La prise en compte des couplages pour le dimensionnement est une plus-value intéressante, voire nécessaire pour les systèmes fortement couplés. C'est de plus en plus le cas des systèmes actuels où les contraintes d'intégration et de coût tendent à diminuer le filtrage employé, augmentant ici les interactions entre sous-systèmes.

Le dimensionnement du système dans son intégralité peut aussi être une source de gain. En étudiant les interactions dès la phase de conception, on évite le recours systématique aux capacités de découplage sur-dimensionnées permettant d'isoler un sous-système des perturbations non modélisées.

Enfin, le problème de dimensionnement peut intégrer des critères énergétiques en plus des classiques critères harmoniques.

7 Synthèse du dimensionnement multi-critères

La méthodologie de dimensionnement proposée ici impose que le réseau soit relativement connu. Dans le cas d'un système LPV, comme le réseau de tramways, nous avons vu dans la section 8.5 du chapitre 3 comment le problème pouvait être formulé pour tenir compte des incertitudes sur la position des tramways.

Le schéma de synthèse est alors de la forme de la LFT de la figure 3.41. Sur ce schéma, z_1 représente le respect des performances dynamiques. La sortie z_2 correspond aux pertes dans le réseau.

En choisissant de travailler sur le MMG_1 plutôt que sur le MM_0 , les pertes s'expriment cette fois grâce à l'équation (4.74) qui stipule, rappelons le :

$$\text{Pertes} = \langle \mathbf{X} \rangle^* \mathbf{Q} \langle \mathbf{X} \rangle \quad (4.99)$$

Ce schéma peut être étendu pour tenir compte des contraintes sur les harmoniques du réseau en régime permanent. L'équation (4.97) peut être réécrite pour chaque variable d'état x_i :

$$\langle \mathbf{X} \rangle^* \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}_i}{\tau_i^2 \langle \hat{x}_i \rangle_0^2} \right) \langle \mathbf{X} \rangle \leq 1 \quad (4.100)$$

Cette forme quadratique est définie positive. On peut donc construire les sorties $zh_i = R_i \mathbf{X}$ où :

$$R_i = \frac{\hat{\mathbf{R}}_i^{1/2}}{\tau_i |\langle \hat{x}_i \rangle_0|} \quad (4.101)$$

Dans ce cas, les conditions (4.97) qui assurent le respect des contraintes harmoniques se résument par :

$$\|zh_i\|_2 \leq 1 \quad (4.102)$$

On peut également imposer des contraintes sur les inter-harmoniques comme nous l'avons fait sur les valeurs moyennes au travers des gabarits de performance. En spécifiant un gabarit fréquentiel $1/Wh_n^i$ non plus sur les valeurs moyennes, mais sur les harmoniques, on peut maintenant maîtriser le gain sur le transfert harmonique. On note $T_{w_j x_i}^n(j\omega)$ le transfert entre l'entrée w_j et l'harmonique à l'ordre n de la sortie x_i . Cette fonction de transfert harmonique se calcule à l'aide de l'équation (4.57). La condition

$$\|Wh_n^i(j\omega)T_{w_j x_i}^n(j\omega)\|_\infty \leq 1 \quad (4.103)$$

signifie d'après la définition (3.131) que le module du coefficient harmonique $\langle x_i \rangle_n$ sera inférieur au module du gabarit fréquentiel quelle que soit la fréquence de la perturbation w_j , tel que $\|w_j\|_2 \leq 1$

En restant dans le cadre du MMG_1 , nous avons vu que le taux d'ondulation et les coefficients harmoniques peuvent être reliés par l'équation (4.84). Si la pulsation du signal d'entrée est nulle, alors $|\langle x_i \rangle_1| = \langle x_i \rangle_{-1}$. Ainsi, le taux d'ondulation dans ces conditions peut être contraint indifféremment en contrôlant $|T_{wx_i}^1(0)|$ ou $|T_{wx_i}^{-1}(0)|$. Ces relations ne sont plus vraies lorsque la fréquence augmente comme la figure 4.10 par exemple.

La contrainte sur le taux d'ondulation en régime statique et les contraintes sur le module des coefficients harmoniques sont donc équivalentes. L'étude des coefficients harmoniques permet cependant de contraindre plus facilement les inter-harmoniques via les gabarits fréquentiels.

Le problème de dimensionnement multi-critères peut ainsi être résumé sur la figure 4.18.

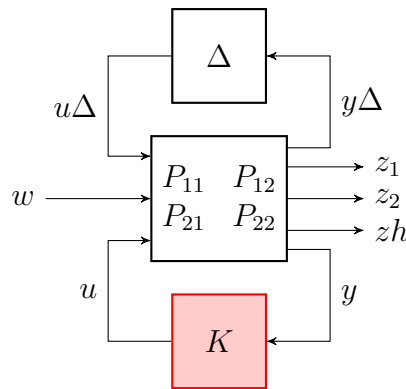


FIGURE 4.18 – Modèle de dimensionnement multi-critères

L'objectif est de trouver un bloc K qui permet de minimiser $\|z_2\|_2$ tout en garantissant le respect des contraintes harmoniques $\|zh\|_\infty \leq 1$ et le respect des contraintes dynamiques $\|z_1\|_\infty \leq 1$.

Il est de plus possible d'intégrer les incertitudes sous la forme de la matrice Δ , ce qui permet de travailler sur le pire cas pour le dimensionnement. Les incertitudes paramétriques, comme la position des tramways, apparaissent sur la diagonale sous la forme d'un coefficient réel. Il est aussi possible d'intégrer dans la matrice Δ les dynamiques non modélisées et incertaines [SP05].

Si le système est en boucle ouverte, la matrice K est une matrice diagonale réelle comprenant les paramètres des filtres et les angles de commande en boucle ouverte. Si le système est en boucle fermée alors, en plus des paramètres des filtres, K contient

les paramètres des correcteurs. On peut imposer la structure des correcteurs et chercher les coefficients en le faisant apparaître sous la forme d'un réel le long de la diagonale principale, ou laisser la structure libre et recourir aux méthodes de commande H_∞ .

Cependant, avec cette méthode, il est seulement possible de résoudre un problème paramétré. On suppose que la structure des filtres est donnée et on cherche les paramètres pour satisfaire les exigences. Il peut être intéressant d'utiliser les algorithmes de synthèse H_∞ , sans spécifier la structure des filtres comme il est d'usage sur la synthèse du correcteur. On identifiera alors la structure la plus appropriée pour correspondre à la réponse fréquentielle trouvée.

8 Conclusion sur l'analyse harmonique

De par son principe de fonctionnement même, un convertisseur génère une pollution harmonique. Ces harmoniques sont, nous l'avons vu, sources de pertes et peuvent posséder des problèmes de CEM une fois le convertisseur inséré dans son environnement.

Pour limiter les perturbations harmoniques, il est d'usage d'utiliser des filtres qui atténuent les hautes fréquences et limitent la pollution harmonique. Dans le cas d'un seul convertisseur, il est possible de dimensionner les filtres de manière analytique, ou grâce à une simulation temporelle. L'approche classique consiste donc à procéder au dimensionnement en négligeant l'influence de l'environnement. Les filtres sont alors sur-dimensionnés pour tenir compte des éléments non modélisés.

Dans un réseau multi-convertisseurs, les harmoniques vont avoir une influence importante. Les couplages existent et ne peuvent pas être ignorés. Nous avons vu que l'étude du système complet peut être la source de gain sur le dimensionnement, et permet aussi d'éviter les mauvaises surprises dues aux interactions harmoniques.

Cependant, l'étude d'un système complet est complexe. L'analyse temporelle devient difficile, surtout en présence d'électronique de puissance. Il est également compliqué de faire le lien entre les performances et les paramètres de dimensionnement. La synthèse des filtres devient donc délicate et toute routine d'optimisation impossible.

Un modèle plus efficace a donc été développé. Ce modèle, appelé modèle moyen généralisé, permet d'évaluer les perturbations harmoniques de manière simple et rapide. Il est généré automatiquement à partir de la description du réseau.

Ce modèle possède une plage de validité fréquentielle bien plus élevée que le modèle moyen. Il permet ainsi de calculer les harmoniques en régime permanent, leur dynamique mais aussi les inter-harmoniques, par simple calcul matriciel. Cela en fait un outil d'analyse efficace, mais le modèle moyen généralisé peut aussi être utilisé pour la synthèse optimale des filtres.

En faisant apparaître les paramètres des filtres sous une forme LFT, il est possible de bénéficier de la puissance de ce formalisme. On peut donc étudier la relation entre les filtres et les harmoniques du réseau. Cela rend possible la mise en œuvre d'outils pour dimensionner les filtres afin de limiter la pollution harmonique.

Les harmoniques ont un effet sur les pertes, et sur la valeur moyenne des signaux. On peut donc envisager pour le dimensionnement de considérer en plus des contraintes harmoniques, des contraintes dynamiques et énergétiques.

Nous avons donc répondu à notre premier objectif pour optimiser la structure et la commande de système multi-convertisseurs : le modèle moyen généralisé permet de renvoyer toutes les grandeurs utiles pour un dimensionnement multi-critères. Le problème est formulé sous la forme d'un problème standard, qui peut intégrer des incertitudes. En utilisant les outils de la commande robuste, il est alors possible de dimensionner les filtres, permettant un respect des contraintes de dimensionnement dans le pire cas.

Même si nous n'avons pu le mettre en œuvre sur le réseau complet, l'objectif de trouver un outil permettant ce dimensionnement complet est abouti. Cette méthodologie entièrement automatique peut être étendue pour étudier les correcteurs et les lois de commande optimale à n'importe quel système multi-convertisseurs.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion Générale

Conclusion

L'étude de la nouvelle architecture d'alimentation d'un réseau de tramways menée tout au long de cette thèse nous a permis de mettre en avant les différentes problématiques rencontrées lors de la conception d'un réseau complexe multi-convertisseurs. Cette application illustre ainsi la méthodologie mise en place durant ces travaux pour analyser les performances et dimensionner un réseau multi-convertisseurs. Une approche systémique a dès lors été mise en place pour tenir compte des interactions entre les sous-systèmes dès la phase de conception.

L'approche utilisée pour dimensionner ce réseau complexe représente à nos yeux la plus-value de cette thèse. Cette vision systémique s'oppose ainsi à l'approche classique qui consiste à dimensionner chaque sous-système individuellement, imposant de fait un processus itératif lors de la conception pour converger vers une solution satisfaisant le cahier des charges.

L'utilisation de convertisseurs DC/DC a permis d'augmenter le rendement énergétique du réseau de tramways, tout en assurant un bien meilleur maintien du plan de tension pour l'alimentation du véhicule. Afin d'améliorer ce rendement, une loi de commande optimale a été établie mais les résultats escomptés n'ont pas été à hauteur de nos attentes, compte tenu des difficultés liées à l'implantation pratique des lois de commande. L'utilisation des hacheurs en boucle ouverte semble cependant suffisante dans cette approche. En parallèle, la commande des moyens de stockage embarqués dans les véhicules a été effectuée et a engendré un gain significatif sur le rendement énergétique.

La première difficulté à laquelle nous avons été confrontés a été d'établir un modèle efficace pour modéliser un réseau multi-convertisseurs. Une méthodologie originale a été proposée pour obtenir automatiquement ce modèle via sa représentation d'état. L'utilisation des bond graphs nous a ainsi permis d'écrire cette représentation d'état sous la forme d'une transformée linéaire fractionnaire (LFT).

Avec ce formalisme de modélisation, le réseau peut être représenté en deux parties. La première partie sera constante correspondant aux paramètres invariants et linéaires du réseau. La seconde partie regroupera les éléments variables du réseau : les fonctions de commutation, les paramètres de dimensionnement et les paramètres incertains du réseau (position, incertitudes de modélisation et paramétriques).

Une multitude d'informations peuvent alors se déduire de ce modèle standard et universel selon la manière dont est traité ce second bloc. Il sera alors possible d'obtenir des modèles de simulation ou de dimensionnement, pouvant être statiques, dynamiques ou harmoniques, linéaires ou non linéaires.

L'utilisation du modèle harmonique dynamique a permis de mettre en avant

les couplages entre les différents systèmes. Ces couplages existent aussi bien entre la qualité de tension et le rendement énergétique, qu'entre la commande et le dimensionnement des filtres. La figure 4.19 illustre ces couplages. En trait plein, sont représentés les couplages qui ont été abordés et illustrés sur notre réseau d'étude, alors que les traits pointillés représentent les couplages nécessitant d'être évalués.

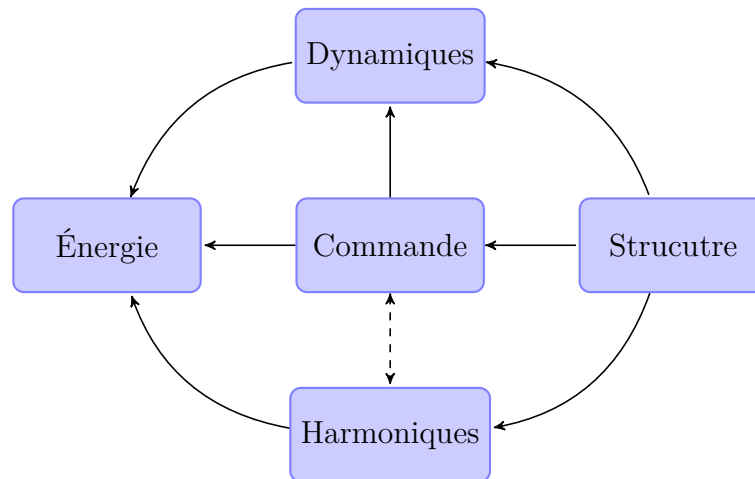


FIGURE 4.19 – Couplages pris en compte dans le dimensionnement d'un système multi-convertisseurs

Une difficulté supplémentaire de modélisation du réseau de tramways est liée au déplacement des rames de tramway. En faisant apparaître la position du tramway en tant qu'incertitude, la forme LFT permet d'obtenir un modèle de simulation performant. Elle autorise également l'utilisation des algorithmes de commande optimale adaptés aux études sur cycle de fonctionnement. Enfin, il est possible d'obtenir le pire cas à partir de cette modélisation conduisant par exemple au dimensionnement des filtres.

Ce dimensionnement a été amélioré grâce à une nouvelle approche d'étude. Les paramètres des filtres sont traités comme des incertitudes, ce qui permet de formuler une LFT. Le modèle harmonique est alors adéquat pour évaluer les taux d'ondulation en fonction des paramètres de conception. Le formalisme LFT est le même que celui couramment utilisé pour faire de la synthèse de correcteurs grâce aux techniques de commande robuste. Il en résulte que ces outils développés pour la synthèse de correcteurs peuvent être utilisés pour le dimensionnement des filtres. Il est alors possible de calculer la valeur des filtres de manière à maintenir les taux d'ondulation à une valeur acceptable tout en minimisant les pertes. Grâce à la prise en compte des interactions, on obtient ainsi un dimensionnement optimal permettant de diminuer la taille des filtres et de minimiser les pertes.

En résumé, une nouvelle approche de modélisation entièrement automatisée a été proposée, permettant de calculer les pertes, les interactions harmoniques et les dynamiques d'un réseau de tramways. Ce modèle universel permet en plus d'étudier le réseau sur un cycle de fonctionnement complet et de procéder à son dimensionnement multi-critères. Enfin, ce modèle est compatible avec la synthèse de lois de commande robuste permettant, via le même formalisme, de prendre en compte les couplages structure/commande. La conception d'un réseau aussi complexe se résume

à la résolution d'un seul problème, tenant compte de tous les aspects usuellement rencontrés.

Perspectives

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses du point de vue applicatif, où la problématique reste vaste.

Perspectives de modélisation

Concernant la partie mécanique, un modèle plus élaboré de la chaîne de traction peut être établi, permettant d'étudier les interactions entre la partie mécanique et la partie électrique de manière dynamique et non quasi-statique comme c'est le cas ici. La méthodologie bond graph reposant sur les échanges énergétiques se prête bien à la modélisation des systèmes mécaniques. Grâce à la méthode développée, les dynamiques mécaniques pourraient ainsi facilement apparaître dans le modèle d'état.

Un autre point à développer concerne la modélisation de convertisseurs plus complexes, que ce soient des convertisseurs AC/DC ou des convertisseurs multi-niveaux. Il est alors intéressant d'étudier l'influence de la topologie des convertisseurs sur les besoins de filtrage, les performances dynamiques et énergétiques. En développant le modèle harmonique des onduleurs de traction et des redresseurs qui ont été traités comme des perturbations, il serait ainsi possible de prévoir des interactions entre tous les convertisseurs du réseau.

A plus long terme, la modélisation des convertisseurs à commutation naturelle est à envisager. Il suffit d'intégrer une équation non linéaire liant les variables d'état et les fonctions de commutation. L'analyse de ces convertisseurs ne devrait pas poser de problèmes, mais leur dimensionnement devient nettement plus compliqué.

Durant ces travaux, l'introduction de la position des véhicules sous la forme LFT a permis de réduire considérablement les temps de calcul. Cependant un nouveau modèle LFT doit être établi lorsque la topologie du réseau change (dépassement d'une sous-station par exemple). Ce changement de topologie est identique à celui opéré par les cellules de commutation. Il en résulte que le réseau entier pourrait être écrit sous une forme LFT unique, quelle que soit la position des tramways.

D'autres critères de dimensionnement peuvent être ajoutés, de manière rapide comme la thermique ou les coûts (investissement + exploitation), dépendant des pertes et du volume des filtres. L'intégration de critères CEM impose l'utilisation d'un modèle trop détaillé pour qu'il soit envisageable sur le réseau entier.

Perspectives sur les outils de dimensionnement

Enfin, bien que le modèle le permette, et que rien ne semble empêcher sa faisabilité, les algorithmes de commande robuste n'ont pas été utilisés pour synthétiser la commande et les filtres. A la place, le dimensionnement a été effectué sur des critères statiques et harmoniques. Une prise en compte plus complète des interactions structure commande, passant par l'introduction de gabarits de performance sur les

transferts harmoniques serait donc une suite logique de ces travaux.

La synthèse mixte H_2/H_∞ semble aussi très prometteuse pour l'étude et le dimensionnement sur cycle de fonctionnement. Alors que le critère H_∞ est utilisé pour garantir la stabilité et le respect des performances (surtensions et taux harmonique) quelle que soit la position des véhicules, le critère H_2 permettrait de prendre en compte les performances énergétiques sur un cycle de fonctionnement complet. A titre d'exemple, on pourrait ainsi dimensionner un dispositif de stockage toutes ses phases de fonctionnement, sans risque de surdimensionnement.

Ce modèle et ces outils pourraient par ailleurs intégrer les critères de filtrage permettant un dimensionnement même en présence d'incertitudes, tout en minimisant les pertes, et ce de manière entièrement automatisée.

Ces travaux pourraient ainsi s'appliquer aisément à des systèmes multi-convertisseurs variés : serveurs informatiques, réseaux de bâtiment, etc.

ANNEXES

Annexe A

Modèle dynamique des éléments du réseau

Les modèles présentés par la suite sont des modèles basse fréquence qui n'intègrent pas les filtres CEM. Ils représentent tout de fois les dynamiques électriques et les harmoniques basse fréquence.

1 Paramètres des sous-stations

Les sous-stations sont alimentées sous 20kV. La puissance de court-circuit du réseau est de 142 MVA. On considère un ratio $X/R = 5$. La tension est abaissée à 11107V par un transformateur de 1 MVA dont la tension de court-circuit réduite est $u_{cc} = 7\%$. Les paramètres de la source sont donc $r_{cc} = 1.7 \text{ m}\Omega$ et $l_{cc} = 27 \mu\text{H}$. L'inductance de fuite du transformateur est de $l_t = 73.21 \mu\text{H}$ et la résistance des enroulements sera $r_t = 3.3 \text{ m}\Omega$ [Mor05].

On suppose que le pont de diodes est filtré uniquement par une inductance de lissage de $L_{filtre} = 1 \text{ mH}$ possédant une ESR $r_{filtre} = 10 \text{ m}\Omega$.

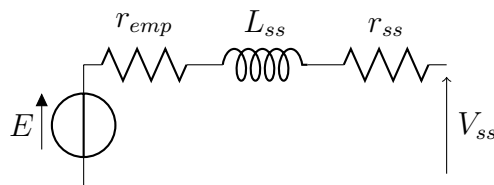


FIGURE A.1 – Modèle d'une sous-station

La résistance r_{emp} représente la chute de tension due à l'empiètement. Elle est calculée grâce à (2.52). Comme elle ne crée pas de pertes, on lui associe aussi la résistance r_{cc} du réseau (ramenée côté DC) qui ne nous intéresse pas pour les études énergétiques. La résistance r_{ss} modélise l'ESR du filtre et la résistance du transformateur.

Les valeurs des différents paramètres sont données dans le tableau A.1.

E	r_{emp}	L_{ss}	r_{ss}
1500V	31.8 mΩ	1.2 mH	16.6 mΩ

TABLE A.1 – Paramètres des sous-stations

2 Paramètres des hacheurs

Les hacheurs utilisés sont les hacheurs de la figure A.2 :

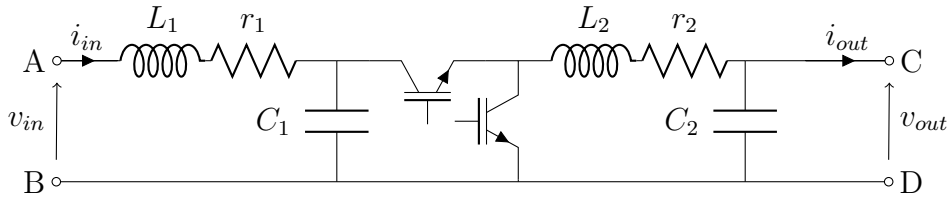


FIGURE A.2 – Modèle d'un hacheur

Par souci de simplification, il s'agit d'un hacheur série réversible à un seul niveau de tension.

Les paramètres des filtres (choisis ici pour illustrer) sont calculés grâce aux formules (4.83). En choisissant les taux d'ondulation suivants : $\Delta V_{c1} = 20\%$, $\Delta I_{L2} = 10\%$, $\Delta I_{in} = 10\%$ et $\Delta V_{out} = 5\%$, pour une fréquence de découpage de $f_s = 20\text{kHz}$, une tension d'entrée nominale $V_{in} = 1500\text{V}$ et un courant de sortie nominal $I_{out} = 1000\text{A}$, on obtient le dimensionnement du filtre suivant :

L_1	C_1	L_2	C_2
48 μH	42 μF	187 μH	21 μF

TABLE A.2 – Paramètres des hacheurs

Les ESR des inductances sont de 10 mΩ. Ces valeurs sont purement illustratives. Dans le cas d'un réseau réel, les marges de sécurité et la nécessité de découplage imposeraient des taux d'ondulation bien plus faibles.

3 Paramètres des tramways

Les moteurs de traction sont raccordés sur le bus continu formé par une capacité. Ce bus est alimenté par le pantographe par l'intermédiaire d'une inductance de lissage et peut intégrer un éventuel rhéostat de freinage, ou un stockage embarqué.

Le schéma équivalent en basse fréquence du tramway avec son filtre d'entrée et son stockage embarqué est représenté figure A.3.

Les paramètres du filtre d'entrée sont donnés par le tableau A.3.

La résistance r_t inclue la résistance du pantographe et l'ESR de l'inductance. Les paramètres de la supercapacité sont les mêmes que ceux calculés au chapitre 9.1 à la page 206 et sont rappelés ici, dans le tableau A.4.

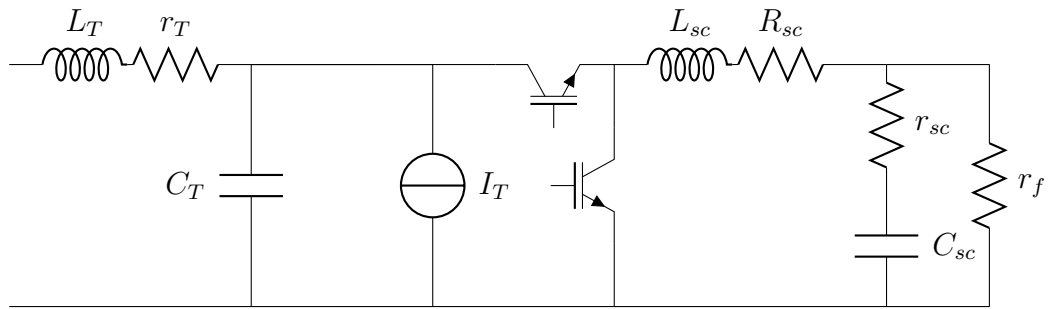


FIGURE A.3 – Modèle du tramway

L_T	C_T	r_t
1.2 mH	9.3 mF	39.2 m Ω

TABLE A.3 – Paramètres du filtre d'entrée

L_{sc}	R_{sc}	r_{sc}	C_{sc}	r_f
1 mH	20 m Ω	26 m Ω	70 F	1.68 k Ω

TABLE A.4 – Paramètres de la supercapacité et de son hacheur

4 Paramètres de la LAC, des feeders et des rails

Les câbles sont représentés par un modèle à constantes localisées. Les capacités linéiques sont négligées de par la taille du réseau. Les paramètres linéiques retenus sont donnée par le tableau A.5.

	ρ (m Ω /m)	λ (μ H/m)
LAC	0.119	0.215
Feeders	0.090	0.225
Rail	0.015	0.360

TABLE A.5 – Paramètres de la LAC et des feeders

Annexe B

Modèle moyen généralisé à l'ordre 1 du hacheur série

Le modèle moyen du hacheur série avec ses filtres est obtenu en appliquant l'équation (4.37) au modèle topologique du hacheur décrit par l'équation (3.51).

Le vecteur d'état augmenté est donné par (B.3). Le vecteur d'entrée reste $W = [v_{in}, i_{out}]^T$. Le vecteur de sortie est lui donné par les coefficients de Fourier à l'ordre 1 du courant d'entrée et de la tension de sortie :

$$\langle \mathbf{y} \rangle = \left[\langle i_{in} \rangle_{-1} \quad \langle i_{in} \rangle_0 \quad \langle i_{in} \rangle_1 \mid \langle v_{out} \rangle_{-1} \quad \langle v_{out} \rangle_0 \quad \langle v_{out} \rangle_1 \right]^T \quad (\text{B.1})$$

Les matrices d'état sont calculées (et mises en page) automatiquement quelque soit l'ordre. Dans le cas du hacheur, la fonction de commutation h est un créneau dont la série de Fourier est donnée par :

$$\begin{cases} \langle h \rangle_{-1} = \frac{(e^{2i\pi\alpha} - 1)}{2i\pi} \\ \langle h \rangle_0 = \alpha \\ \langle h \rangle_1 = \frac{(1 - e^{-2i\pi\alpha})}{2i\pi} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \left[\langle v_{c1} \rangle_{-1} \quad \langle v_{c1} \rangle_0 \quad \langle v_{c1} \rangle_1 \quad \langle i_{11} \rangle_{-1} \quad \langle i_{11} \rangle_0 \quad \langle i_{11} \rangle_1 \quad \langle v_{e2} \rangle_{-1} \quad \langle v_{e2} \rangle_0 \quad \langle v_{e2} \rangle_1 \quad \langle i_{12} \rangle_{-1} \quad \langle i_{12} \rangle_0 \quad \langle i_{12} \rangle_1 \right]^T \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} j\omega_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\langle h \rangle_{-1}}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\langle h \rangle_0}{C_1} & -\frac{\langle h \rangle_{-1}}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & -j\omega_s & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\langle h \rangle_1}{C_1} & -\frac{\langle h \rangle_0}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & j\omega_s - \frac{r_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{r_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega_s - \frac{r_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega_s & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega_s & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{\langle h \rangle_0}{L_2} & \frac{\langle h \rangle_{-1}}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & j\omega_s - \frac{r_2}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{\langle h \rangle_1}{L_2} & \frac{\langle h \rangle_0}{L_2} & \frac{\langle h \rangle_{-1}}{L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_2}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{\langle h \rangle_1}{L_2} & \frac{\langle h \rangle_0}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j\omega_s - \frac{r_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{B}_0 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & & & & & & \\ \frac{1}{L_1} & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \end{array} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{D}_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right] \quad (\text{B.7})$$

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [Abd09] N. ABDALLAH : *Etude de développement d'un concept de locomotive hybride à chaîne de traction électrique autonome propre et durable*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 2009.
- [Abr08] L. ABRAHAMSSON : *Railway Power Supply Models and Methods for Long-term Investment Analysis*. Thèse de doctorat, Kungliga Tekniska Högskolan, 2008.
- [ACL10] M. AEBERHARD, C. COURTOIS et P. LADOUX : Railway traction power supply from the state of the art to future trends. In *Power Electronics Electrical Drives Automation and Motion (SPEEDAM), 2010 International Symposium on*, pages 1350 –1355, june 2010.
- [Age] AGENCE DE L'ENVIRONNEMENT ET DE LA MAÎTRISE DE L'ENERGIE : <http://www.ademe.fr/>.
- [Akl08] C.R. AKLI : *Conception systémique d'une locomotive hybride autonome : application à la locomotive hybride de démonstration et d'investigations en énergétique LhyDIE développée par la SNCF*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2008.
- [All08] J.M. ALLENBACH : *Traction électrique*, volume 1. PPUR presses polytechniques, 2008.
- [Als] ALSTOM : Logiciel simuligne.
- [AM05] B. ALLARD et H. MOREL : *Utilisation des graphes de liens en électronique de puissance= Use of bond graphs in power electronics*, volume 4. Techniques de l'ingénieur, 2005.
- [AWW03] J. ARRILLAGA, N.R. WATSON et J. WILEY : *Power system harmonics*. Wiley Online Library, 2003.
- [Bau01] J.P. BAUMGARTNER : Prices and costs in the railway sector, 2001.
- [BC98] J. BUISSON et H. CORMERAIS : Descriptor systems for the knowledge modelling and simulation of hybrid physical systems. *Journal Européen des systèmes automatisés*, 32(9-10):1047–1072, 1998.
- [BCA] BCAP0010 : Ultracapacitors datasheet. <http://editors.maxwell.com/>.
- [BCCP96] K.E. BRENNAN, S.L. CAMPBELL, S.L.V. CAMPBELL et L.R. PETZOLD : *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, volume 14. Society for Industrial Mathematics, 1996.
- [BDTR⁺90] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J.P. RICHARD, F. ROTELLA et I. ZAMBETTAKIS : *Commande et optimisation des processus*. Editions Technip, 1990.

- [Bec10] V. BECERRA : Psopt optimal control solver user manual. release 2, 2010.
- [BEGFB94] S. BOYD, L. EL GHAOU, E. FERON et V. BALAKRISHNAN : *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Society for Industrial Mathematics, 1994.
- [Bel56] R. BELLMAN : Dynamic programming and lagrange multipliers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 42(10):767, 1956.
- [Ber02] F. BERNOT : Hacheurs : filtres, commutations et commande. *Techniques de l'ingénieur. Electronique*, 3(E3965):1–13, 2002.
- [BH79] A.E. BRYSON et Y.C. HO : *Applied optimal control*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1979.
- [Bom] BOMBARDIER : <http://www.bombardier.com/>.
- [Bor92] P. BORNE : *Modélisation et identification des processus*, volume 1. Editions Technip, 1992.
- [Bou03] A. BOUSCAYROL : *Formalismes de représentation et de commande appliqués aus systèmes électromécaniques multimachines multiconvertisseurs*. Thèse de doctorat, Université Des Sciences Et Technologies De Lille, 2003.
- [BRS07] F. BARRUEL, N. RETIÈRE et J.L. SCHANEN : *Méthodologie de conception des réseaux embarqués : Vers une minimisation des éléments passifs*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2007.
- [BV04] S.P. BOYD et L. VANDENBERGHE : *Convex optimization*. Cambridge Univ Pr, 2004.
- [CA05] P CHAPAS et J-C. ALACOQUE : *Traction ferroviaire - Adhérence par commande d'effort*. Techniques de l'ingénieur, 2005.
- [CC00] T. CHRISTEN et M.W. CARLEN : Theory of ragone plots. *Journal of power sources*, 91(2):210–216, 2000.
- [CC09] J. COUMEL et C. COURTOIS : *Traction électrique ferroviaire - Dynamique ferroviaire et sous-stations*. Techniques de l'ingénieur, 2009.
- [CCA05] I. COTTON, C. CHARALAMBOUS, P. AYLOTT et P. ERNST : Stray current control in dc mass transit systems. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 54(2):722–730, 2005.
- [Cen] CENELEC : 50163 std, railway applications–supply voltages of traction systems.
- [CLS99] C. COLLOMBET, JM LUPIN et J. SCHONEK : Perturbations harmoniques dans les réseaux pollués, et leur traitement, 1999.
- [Com10] COMMISSARIAT GÉNÉRAL AU DÉVELOPPEMENT DURABLE : Bilan énergétique de la france pour 2010. Rapport technique, Ministère de l'Écologie, du Développement durable, des Transports et du Logement, 2010.
- [Deb09] Marc DEBRUYNE : L'agv et les trains du futur. Club EEA Lille, Mars 2009.

- [Del02] S. DELPRAT : *Evaluation de stratégies de commande pour véhicules hybride parallèles*. Thèse de doctorat, L'Université De Valenciennes, 2002.
- [Deo04] N. DEO : *Graph theory with applications to engineering and computer science*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2004.
- [DT99] G. DAUPHIN-TANGUY : Les bond graphs et leur application en mécatronique. *Techniques de l'ingénieur. Informatique industrielle*, 9(S7222):1–24, 1999.
- [ERD11] ERDF : Principes d'étude et de développement du réseau pour le raccordement des clients consommateurs et producteurs bt. Rapport technique, ERDF, 2011.
- [Fay08] P. FAYET : *Modélisation des réseaux électriques ferroviaires alimentés en courant alternatif*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2008.
- [Fle81] R. FLETCHER : *Practical Methods of Optimization : Vol. 2 : Constrained Optimization*. John Wiley & Sons, Inc., One Wiley Dr., Somerset, N. J. 08873, 1981, 224, 1981.
- [Gan03] G. GANDANEGARA : *Méthodologie de conception systémique en génie électrique à l'aide de l'outil bond graph : application à une chaîne de traction ferroviaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- [GB00] S. GUFFON et S. BACHA : *Modélisation et Commandes à Structure Variable de Filtres Actifs de Puissance*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [GMS02] P.E. GILL, W. MURRAY et M.A. SAUNDERS : Snopt : An sqp algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM journal on optimization*, 12(4):979–1006, 2002.
- [Gom07] C. GOMBERT : *Simulation temps-réel des dispositifs d'Electronique de Puissance dédiés aux réseaux d'énergie électrique*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [GW90] A. GRACE et M. WORKS : *Optimization Toolbox : For Use with MATLAB : User's Guide*. The Math Works, 1990.
- [HC99] J.P. HAUTIER et J.P. CARON : *Convertisseurs statiques : méthodologie causale de modélisation et de commande*. Editions Technip, 1999.
- [Her11] David HERNANDEZ : *Commande optimale robuste de générateurs électrochimiques hybrides*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2011.
- [Hil94] R.J. HILL : Electric railway traction. part 1 : Electric traction and dc traction motor drives. *Power Engineering Journal*, 8(1):47–56, 1994.
- [Ign06] V. IGNATOVA : *Méthodes d'analyse de la qualité de l'énergie électrique. Application aux creux de tension et à la pollution harmonique*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2006.
- [Ins] INSTITUT FRANÇAIS DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DES TRANSPORTS, DE L'AMÉNAGEMENT ET DES RÉSEAUX : <http://www.ifsttar.fr/>.

- [Ior02] Marius. IORDACHE : *Contribution à l'étude des perturbations conduites dans les chaînes de traction ferroviaire. Développement d'une méthode d'analyse harmonique pour l'étude des compatibilités avec les circuits de voie.* Thèse de doctorat, LGEP, Gif-sur-Yvette, Octobre 2002.
- [JMHJ03] S. JAHN, M. MARGRAF, V. HABCHI et R. JACOB : Qucs technical papers, 2003.
- [KBL94] P. KUNDUR, N.J. BALU et M.G. LAUBY : *Power system stability and control.* McGraw-Hill New York, 1994.
- [Kir04] D.E. KIRK : *Optimal control theory : an introduction.* Dover Pubns, 2004.
- [KMR06] D.C. KARNOPP, D.L. MARGOLIS et R.C. ROSENBERG : *System dynamics : modeling and simulation of mechatronic systems.* John Wiley & Sons, 2006.
- [Lac05] F. LACÔTE : Alstom-future trends in railway transportation. *Japan Railway and Transport Review*, 42:4–9, 2005.
- [Lan06] O. LANGLOIS : *Conception d'un réseau de secours électrique pour l'aéronautique.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.
- [Lau98] P. LAUTIER : *Modélisation des convertisseurs à découpage pour la conception et la commande - Application à l'onduleur.* Thèse de doctorat, L'Institut National Des Sciences Appliquées De Lyon, Janvier 1998.
- [LJGB⁺11] Jun LIANG, Tianjun JING, O. GOMIS-BELLMUNT, J. EKANAYAKE et N. JENKINS : Operation and control of multiterminal hvdc transmission for offshore wind farms. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 26(4): 2596–2604, oct. 2011.
- [LP85] K. LEE et S.B. PARK : Reduced modified nodal approach to circuit analysis. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 32(10):1056–1060, 1985.
- [LP07] F. LACOTE et G. PALAIS : Le record du monde de vitesse ferroviaire de 574, 8 km/h le 3 avril 2007. *TEC*, 196:46–49, 2007.
- [Luk01] P. LUKASZEWICZ : *Energy consumption and running time for trains.* Thèse de doctorat, Kungliga Tekniska Högskolan, 2001.
- [Maz01] S.K. MAZUMDER : *Nonlinear analysis and control of standalone, parallel dc-dc, and parallel multi-phase PWM converters.* Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute, 2001.
- [MB00] E. MOLLERSTEDT et B. BERNHARDSSON : Out of control because of harmonics-an analysis of the harmonic response of an inverter locomotive. *Control Systems, IEEE*, 20(4):70–81, aug. 2000.
- [MC76] RD MIDDLEBROOK et S. CUK : A general unified approach to modelling switching-converter power stages. *In Power Electronics Specialists Conference*, volume 1, pages 18–34, 1976.
- [MC10] J.-P. MOSKOWITZ et J.-L. COHUAU : Steem : Alstom and ratp experience of supercapacitors in tramway operation. *In Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2010 IEEE*, pages 1–5, sept. 2010.

- [MEBE97] J. MAHDAVI, A. EMAADI, M.D. BELLAR et M. EHSANI : Analysis of power electronic converters using the generalized state-space averaging approach. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44(8):767 –770, aug 1997.
- [Mer09] A. MERDASSI : *Outil d'aide à la modélisation moyenne de convertisseurs statiques pour la simulation de systèmes mécatroniques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2009.
- [MHS09] M. MIYATAKE, H. HAGA et S. SUZUKI : Optimal speed control of a train with on-board energy storage for minimum energy consumption in catenary free operation. *In Proc. 13th European Conf. Power Electronics and Applications EPE '09*, pages 1–9, 2009.
- [Mor05] E. MORIN : *Modélisation d'un réseau électrique de tramway : du composant au système*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005.
- [Mor09] V. MORIO : *Contribution au développement d'une loi de guidage autonome par platitude. Application à une mission de rentrée atmosphérique*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2009.
- [Mul07a] G MULLER : *Traction ferroviaire : les tramways - Caractéristiques des matériels roulants*. Techniques de l'ingénieur, 2007.
- [Mul07b] G MULLER : *Traction ferroviaire : les tramways - Systèmes, exploitation et conception*. Techniques de l'ingénieur, 2007.
- [PF97] P. PETITCLAIR et J.P. FERRIEUX : *Modélisation et Commande de structures FACTS :(Flexible Alternative Current Transmission System) Application au STATCOM (STATIC COMPensator)*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [PG86] L.S. PONTRIAGIN et RV GAMKRELIDZE : *The mathematical theory of optimal processes*, volume 4. CRC, 1986.
- [PR99] R.M. POPESCU et J. ROUDET : *Vers de nouvelles méthodes de prédiction des performances CEM dans les convertisseurs d'électronique de puissance*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 1999.
- [PT07] O. PIGNAL et H. THOUVENOT : Traction ferroviaire : Système de signalisation ertms. *Techniques de l'ingénieur. Génie électrique*, 12(D5545), 2007.
- [Que07] C. QUEMARD : *Analyse et optimisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides à commutations autonomes*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorales d'Angers, 2007.
- [RBD+10] A.V. RAO, D.A. BENSON, C. DARBY, M.A. PATTERSON, C. FRANCOLIN, I. SANDERS et G.T. HUNTINGTON : Algorithm 902 : Gpops, a matlab software for solving multiple-phase optimal control problems using the gauss pseudospectral method. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 37(2):22, 2010.
- [Rou08] G. ROUSSEAU : *Véhicule hybride et commande optimale*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure des mines de Paris, 2008.

- [Sai04] R. SAISSET : *Contribution à l'étude systémique de dispositifs énergétiques à composants électrochimiques. Formalisme Bond Graph appliqué aux piles à combustible, accumulateurs Lithium-Ion, Véhicule Solaire.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [SAK06] M.T. SOYLEMEZ, S. AÇIKBAŞ et A. KAYPMAS : Controlling rail potential of dc supplied rail traction systems. *Turk J Elec Engin*, 14(3), 2006.
- [Sau06] M SAUTREUIL : Etudes statique et dynamique d'un réseau de tramway. Mémoire de D.E.A., Institut National Polytechnique de Grenoble, 2006.
- [Sau09] M. SAUTREUIL : *La Robustesse : Une nouvelle approche pour l'intégration des systèmes de génération aéronautique.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2009.
- [Sch00] Jean-Luc SCHANEN : *Electronique de puissance : au coeur de la commutation.* Thèse de doctorat, Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble, novembre 2000.
- [SCM02] J. STEPHANT, A. CHARARA et D. MEIZEL : Force model comparison on the wheel-ground contact for vehicle dynamics. *In Proc. IEEE Intelligent Vehicle Symp*, volume 2, pages 589–593, 2002.
- [SFM⁺09] J.R. SIBUE, J.P. FERRIEUX, G. MEUNIER, R. PÉRIOT *et al.* : Transfert d'énergie sans contact : Pré dimensionnement d'un coupleur de forte puissance. *EF2009, Compiègne*, 2009.
- [SNLV91] S.R. SANDERS, J.M. NOWOROLSKI, X.Z. LIU et G.C. VERGHESE : Generalized averaging method for power conversion circuits. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 6(2):251–259, apr 1991.
- [SP05] S. SKOGESTAD et I. POSTLETHWAITE : *Multivariable feedback control : analysis and design*, volume 2. Wiley, 2005.
- [SRD89] G. SÉGUIER, C. ROMBAUT et P. DELARUE : *Les convertisseurs de l'électronique de puissance.* Technique et Documentation Lavoisier, 1989.
- [Sun07] J. SUN : *Dynamic performance analyses of current sharing control for DC/DC converters.* Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2007.
- [TCW95] Yii-Shen TZENG, Nanming CHEN et Ruay-Nan WU : A detailed r-l fed bridge converter model for power flow studies in industrial ac/dc power systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 42(5):531–538, 1995.
- [TFT07] M. TON, B. FORTENBERY et W. TSCHUDI : Dc power for improved data center efficiency. *Lawrence Berkeley National Laboratory Report*, 2007.
- [TVLB89] R. TYMERSKI, V. VORPERIAN, F.C.Y. LEE et W.T. BAUMANN : Non-linear modeling of the pwm switch. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 4(2):225–233, apr 1989.
- [Ver07] J.N. VERHILLE : *Représentation énergétique macroscopique du métro VAL 206 et structures de commande déduites par inversion.* Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2007.

-
- [VGS02] P. VANASSCHE, G. GIELEN et W. SANSEN : Symbolic modeling of periodically time-varying systems using harmonic transfer matrices. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 21(9):1011 – 1024, sep 2002.
- [Via08] R. VIAL : Nouvelles structures de conversion pour une meilleure récupération énergétique. application aux réseaux de tramway. Mémoire de D.E.A., Institut National Polytechnique de Grenoble, 2008.
- [VL83] TL VINCENT et CS LEE : Parametric optimization with dynamic systems. *Applied Mathematics and Computation*, 12(2-3):169–185, 1983.
- [Wik] WIKIPEDIA : Émissions de CO₂ des transports ferroviaires. http://fr.wikipedia.org/wiki/Emissions_de_CO2_des_transports_ferroviaires.
- [WLMK09] A. WÄCHTER, C. LAIRD, F. MARGOT et Y. KAWAJIR : Introduction to ipopt : A tutorial for downloading, installing, and using ipopt, 2009.
- [YI03] M. YANO et M. IWAHORI : Transition from slip-frequency control to vector control for induction motor drives of traction applications in japan. *In Proc. Fifth Int. Conf. Power Electronics and Drive Systems PEDS 2003*, volume 2, pages 1246–1251, 2003.
- [Yu98] JG YU : The effects of earthing strategies on rail potential and stray currents in dc transit railways. *In Developments in Mass Transit Systems, 1998. International Conference on (Conf. Publ. No. 453)*, pages 303–309. IET, 1998.
- [Zin05] A. ZIN : *Sur la commande robuste de suspensions automobiles en vue du contrôle global de châssis*. Thèse de doctorat, Thèse de Doctorat, LAG-INPG, 2005.

Vers un dimensionnement optimal structure-commande de système multi-convertisseurs. Application aux réseaux de tramways

Résumé

La réduction de la facture énergétique et la réalisation des services systèmes au réseau électrique passent par l'intégration massive de convertisseurs d'électronique de puissance. On parle alors de systèmes multi-convertisseurs, de structures relativement complexes.

Leur dimensionnement tant énergétique que dynamique peut ainsi s'avérer délicat et impose actuellement au concepteur d'étudier chaque convertisseur indépendamment de son environnement. En négligeant ces interactions, cette méthode conduit souvent à un surdimensionnement, notamment des filtres d'entrée des convertisseurs, et ne prémunit pas le réseau d'éventuelles instabilités dynamiques.

Les travaux de cette thèse proposent donc une méthode systémique pour le dimensionnement du réseau dans son ensemble. A partir d'un modèle construit automatiquement et intégrant l'ensemble des contraintes intervenant dans le dimensionnement énergétique, dynamique ou harmonique d'un système multi-convertisseurs, des outils de commande avancés permettent d'optimiser ce dimensionnement.

Cette méthodologie de conception est alors appliquée à une nouvelle structure d'alimentation d'un réseau de tramways permettant un meilleur rendement sur cycle de fonctionnement complet.

Mot-clefs

Tramway, Approche système, Modélisation, Optimisation sur cycle de fonctionnement, Commande optimale et robuste, Dimensionnement

Optimal design structure-control of multi-converter systems. Application to tramways network

Abstract

Optimal design structure-control of multi-converter systems. Application to a tramway network

Power electronic is now widely used and allows better efficiency and performances. We talk about multi-converter to describe this complex system.

Usually, to design this kind of system, engineers study each different part regardless of possible interactions. To avoid potential instability caused by this approximation, designers have to oversize input filter which lead to bulk solution.

This thesis deals with system view use for design wide grid. A model is built automatically, and constraints are added, to take into account energy, dynamic and harmonic requirements. Optimal and robust control are used to obtain the best design.

This approach is used on a new power architecture for tramways, and allows a better efficiency over operating cycle.

Keywords

Tramway, System View, Modeling, Optimization over cycle, Optimal and robust control, design