HAL
open science

Modèles de précaution en économie: introduction aux probabilités imprécises

Minh Ha-Duong

To cite this version:

Minh Ha-Duong. Modèles de précaution en économie: introduction aux probabilités imprécises. Economies et finances. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2005. halshs-00007520

HAL Id: halshs-00007520

https://theses.hal.science/halshs-00007520

Submitted on 23 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Université de Paris I - Panthéon Sorbonne
Habilitation à diriger les recherches

Modèles de précaution en économie: introduction aux probabilités imprécises

Minh Ha Duong
Chargé de Recherche au CIRED, CNRS

Soutenue le 7 décembre 2005, devant un jury constitué de Messieurs

- Mohammed Abdellaoui, Directeur de Recherche au CNRS
- Nicolas Bouleau, Directeur de recherche
- Alain Chateauneuf, Professeur à l'Université Paris 1
- Jean-Charles Hourcade, Directeur de Recherche au CNRS, directeur d'études à l'EHESS
- Jean-Marc Tallon, Directeur de Recherche au CNRS

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Modèles de précaution en économie: introduction aux probabilités imprécises

Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches
Université de Paris I - Panthéon Sorbonne, Paris.

Minh HA-DUONG

23 décembre 2005

Résumé : Ce mémoire présente une recherche pour mieux traiter les problèmes d'environnement globaux en améliorant la prise en compte du risque et de l'incertitude dans les modèles numériques interdisciplinaires. La revue des approches de la décision —utilisant ou non les probabilités subjectives— montre que la première représentation de la précaution est le modèle de décision séquentielle. Dans ce cadre, ce texte présente les résultats du modèle intégré DIAM résolu en programmation dynamique stochastique concernant la question du tempo de l'action contre le changement climatique. La seconde partie de l'ouvrage propose une vision alternative de la précaution, basée sur le rejet de l'axiome de complétude des préférences de Savage. Cela conduit à définir un critère de décision rationnel en situation d'information imprécise. Ce critère est discuté avec la théorie des probabilités imprécises, en visant à unifier les différentes approches proposées dans la littérature (Shackle et Zadeh, Dempster et Shafer, Smets, Gilboa et Schmeidler, Walley). Les applications présentées en troisième partie concernent la causalité en épidémiologie, l'élicitation et la fusion des opinions d'experts ainsi que les règles de la prospective.

Abstract : This thesis' ultimate goal is to improve the risk and uncertainty analysis of global environmental issues. It starts with a review of the various uncertainty analysis techniques used in integrated assessment models. Then it presents results of the Dynamics of Inertia and Adaptability Model (DIAM) about the optimal timing of global change policy. That model follows the classical approach of precaution as sequential decision-making, mathematically formalized using stochastic dynamic programming. But that classical approach requires precise subjective probabilities. The central claim of this thesis is that uncertainty about long-run issues such as climate change are better represented using (objective or subjective) imprecise probabilities. This claim is supported both theoretically and with applications. Chapters 5 to 7 are an introduction to the mathematical theory of imprecise probabilities. Applications form the last section of this work. Applications in chapters 8 to 10 deal with expert elicitation, information fusion and scenario-making. They use special kinds of imprecise probabilities, namely those of the transferable belief model for chapter 8 and 9, along with distributions of possibility in chapters 9 and 10.

Mots-clés : Risque, Incertitude, Probabilités imprécises, Modèles intégrés, Changement climatique, Théorie des Possibilités, Prospective.

Keywords : Risk, Uncertainty, Imprecise probabilities, Integrated Assessment Models, Climate Change, Possibility Theory, Futures Studies.

JEL : B40, C63, D80, Q25

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Table des matières

Introduction **xi**

1 Prologue : modéliser la précaution ? **1**
1.1 La protection de la couche d'ozone : précaution ? 2
1.2 Analyse avec le modèle intégré IECCC 4
1.3 Qualité et scientificité des modèles 8

2 Décision rationnelle dans le risque **13**
2.1 Risque, incertitude, ignorance et temps 13
2.2 Maximiser l'espérance de gain/utilité 15
2.3 Risque dynamique 17

3 Incertitude et modélisation intégrée **21**
3.1 Méthodes de base : futurs disjoints 22
3.2 Viabilité : l'incertitude non-spécifique pure 25
3.3 Optimisation dynamique stochastique 27

4 Politiques optimales, risque climatique **31**
4.1 Politique climatique, incertitude et rationalité 31
4.2 DIAM 34
4.3 Une gestion industrielle du CO_2 39

5 Incertitude, décision et ordre partiel **49**
5.1 Une taxonomie des formes d'ignorance 49
5.2 Le frère du marchand de glace 54
5.3 Probabilités imprécises et décision 57

6 Modèles de probabilités imprécises **63**
6.1 Probabilité et possibilité 63
6.2 Evidence (Dempster-Shafer) 67
6.3 Probabilités imprécises 69

7 Combinaison des croyances **81**
7.1 Opérateurs unaires du Modèle de Croyances Transférables 82
7.2 Opérateurs binaires : conjonction et disjonction 85
7.3 Conditionnement et bijections probabilités/possibilités 89

8 Croyances, cohérence et masse du vide **95**
8.1 Statistique et causalité multiple 96
8.2 Modèle et mise en cohérence des bornes 100
8.3 Application : causes du cancer du poumon 105

9 Fusion d'opinion des experts *es* climat **111**
9.1 Opinions d'experts sur la sensibilité climatique 111
9.2 Fusion dans le modèle de croyances transférable 115
9.3 Conclusions 121

10 Règles de la prospective **125**
10.1 La Prospective des futurs possibles : futuribles 126
10.2 Trois règles pour la prospective 132
10.3 Prospective du réchauffement climatique 136

Conclusion **145**

Bibliographie **153**

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Table des figures

1.1 Trajectoires de protection de la couche d'ozone 3

3.1 Un couloir de viabilité. 26

4.1 Trajectoires d'émissions CO_2 optimales, DIAM 36
4.2 Fonction de dommage non linéaire 38
4.3 Trajectoires de CO_2 optimales, DIAM 2.4 43

5.1 Une taxonomie de l'ignorance 50
5.2 Interprétation géométrique des probabilités imprécises 58

6.1 Probabilités, possibilités, évidence et probabilités imprécises 64
6.2 Prévisions non contradictoires, cohérentes et ensemble crédal 71
6.3 Forme des multiples priors pour diverses théories 74

7.1 Correspondance probabilité-croyances consonnantes 92

8.1 Statistique multicausale des cancers du poumon 98
8.2 Bornes sup. et inf. du nombre de décès attribuables à C et X 100
8.3 Attributions catégorielles compatibles avec les bornes 102
8.4 Contradiction et incohérence. 104
8.5 Tapis de Boule 108

9.1 Distributions de croyances élicitées des experts sur $\Delta T_{2\times CO_2}$ 114
9.2 Partition de l'intervalle de réchauffement en 2100 115
9.3 Sensibilité à l'opérateur de conjonction 118
9.4 Analyse de sensibilité à l'opérateur de fusion disjonctif 120
9.5 Distribution de possibilité du paramètre la sensibilité climatique . . . 123

10.1 Choix des scénarios 135
10.2 CO_2(2100) d'après simulations SRES 137
10.3 Courbes de niveau de la distribution de possibilité jointe. 139
10.4 Possibilité d'un réchauffement égal à 2.4 degrés 140
10.5 Trois futurs possibles de réchauffement climatique 141
10.6 Position des scenarios SRES du GIEC 142

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Liste des tableaux

1 Notations mathématiques xiv

1.1 Coût de réduction des CFCs et autres SACO 7

2.1 Profit du marchand de glace $\Pi(a, s)$ en keuros. 15

4.1 Résultats de DIAM 2.3 39
4.2 Résultats et analyse de sensibilité, DIAM 2.4 44

5.1 Bornes du gain espéré du marchand de fanions 59

6.1 Correspondance des représentations des probabilités imprécises . . . 79

7.1 Correspondance des fonctions du modèle de croyance transférable. . . 83

8.1 Exemples de facteurs de risque du cancer du poumons 96
8.2 Bornes sur les fractions attribuables et le risque relatif 106
8.3 Analyse de la sensibilité du risque relatif 107

10.1 Détail de trois futurs climatiques possibles 144

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Fiches descriptives des produits logiciels

1.1 IECCC : Integrated Emissions Concentration Chemistry Cost 6
1.2 Patdeph : un langage de modélisation intégrée 10
2.1 ULTRAL : Utilité Récursive 19
4.1 DIAM : Dynamics of Inertia and Adaptability Model 35
8.1 BeliefMatrices.nb : le modèle de croyances transferables 106

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Introduction

Le problème : précaution et environnement global

Ce mémoire présente un programme de recherches qui veut contribuer à mieux traiter les problèmes d'environnement globaux en améliorant la prise en compte de l'incertitude dans les modèles intégrés.

L'argument essentiel est que l'ignorance n'est pas une variable unidimensionnelle, mais comporte au moins trois aspects : le risque probabilisable, l'incertitude non spécifique et l'incomplétude provenant des autres sources (surprises possibles, controverses, tabous...). Pour traiter de la précaution, il faut donc tenir compte de toutes ces différentes faces de l'ignorance.

D'autre part, pour traiter de la précaution, il faut aussi tenir compte de l'aspect séquentiel des décisions. C'est particulièrement important pour les problèmes d'environnement globaux qui relèvent de politiques à très long terme susceptibles d'être révisées à la lumière des progrès de la connaissance scientifique et technique.

L'organisation de ce mémoire en trois parties reflète l'aspect multidimensionel de l'ignorance. Dans la première partie l'accent est mis sur le risque probabilisable et l'aspect temporel des problèmes de précaution. Cette première partie se caractérise par l'emploi des méthodes classiques d'analyse de risque fondées sur les probabilités, la décision séquentielle étant modélisée par la programmation dynamique stochastique. La seconde partie constitue une introduction aux méthodes nouvelles d'analyse de l'incertitude fondées sur les probabilités imprécises [Walley, 1991]. Ces éléments de théorie mathématique sont exposés dans le cas où l'ensemble des futurs décrits Ω est fini et exhaustif. La troisième partie propose des applications originales concernant la révélation des opinions d'expert et la prospective sur des problèmes d'environnement. Pour cela on dépasse les théories de l'incertitude en faisant appel au modèle des croyances transférables pour aborder la modélisation de l'incomplétude.

Le paradigme des probabilités imprécises

La distinction risque/incertitude/incomplétude est relativement classique et ancienne, mais l'émergence d'une théorie mathématique correspondante est relativement nouvelle et son emploi dans les modèles numériques appliqués interdisciplinaires encore plus. C'est cette application numérique à des problèmes observables qui constitue l'apport essentiel de mes travaux. La valeur épistémologique des probabilités imprécises sera discutée sommairement au dernier chapitre.

Le but principal est d'améliorer la modélisation intégrée des problèmes de précaution. C'est à dire que la théorie est appliquée à des problèmes concrets mal résolus autrement, non pas pour prouver son intérêt méthodologique mais pour contribuer au

débat social. Le but secondaire du programme de recherches présenté est le développement de la théorie en elle même. Il s'agit de mieux définir la position philosophique de cette approche —qu'on a pu appeler quasi-bayésienne— parmi d'autres théories de la décision sous incertitude, et de modéliser ensemble l'aspect imprécis de l'information avec l'aspect séquentiel des décisions.

Les probabilités imprécises n'imposent pas que chaque état du monde futur reçoive une probabilité unique, mais admettent que l'information peut être décrite par tout un ensemble de lois de probabilités, sans spécifier laquelle est la bonne. Dans le modèle de croyances transférables, on admet en plus que la description des états du monde futurs Ω peut être incomplète en autorisant une probabilité non-nulle au sous-ensemble vide.

Ces théories reviennent à abandonner l'axiome P1 de Savage [1954] sur la complétude des préférences. Cela permet de représenter une configuration fréquente des problèmes d'environnement, dans laquelle un planificateur bienveillant est confronté à la controverse entre différents groupes d'intérêts proposant des visions différentes du monde sans pondération scientifique a priori.

Il convient de souligner immédiatement que dans ces conditions, le concept d'optimalité ne peut plus être utilisé. Si l'information disponible est très imprécise, alors le résultat sera aussi très imprécis. A l'extrême, si l'on ne sait rien alors on ne déduit rien. On ne pourra en général pas classer les politiques et choisir la meilleure, mais on pourra toujours délimiter un ensemble de politiques acceptables, et parmi celui-ci un sous-ensemble de politiques encore plus désirables que les autres, mais pas comparables entre elles.

Organisation de l'ouvrage

Ce texte vise un public scientifique interdisciplinaire. Concernant le niveau de mathématiques, la lecture des symboles Σ et $\max$ est supposée acquise, ainsi que les bases des probabilités classiques (sur un ensemble fini).

Dans le plan qui suit, les chapitres 2, 3, 5, 6 et 7 exposent davantage l'état du domaine de recherche théorique. Ils pourraient constituer un support de cours sur la modélisation de l'incertitude. Les chapitres 1, 4, 8 et 9 et 10 exposent davantage des résultats originaux, publiés ou proposés à publication. Sauf pour les spécialistes, les chapitres formels 6 et 7 devraient être lus après

Le chapitre 1 est un prologue qui cadre le type de problème et la méthode. Le problème est celui de la précaution dans les risques d'environnement globaux. Le chapitre s'intéresse à la protection de la couche d'ozone, et part de la remarque que le protocole de Montréal a été signé plus de dix ans après la révélation scientifique du risque. On se demande alors si il aurait été intéressant d'agir plus tôt ? Un modèle intégré y répond par des calculs portant à la fois sur la chimie atmosphérique et sur les coûts techniques de substitution. Ceux-ci montrent qu'en effet, une action plus précoce aurait été efficace pour un surcoût modéré. On peut donc bien s'interroger sur la rationalité des choix effectués avec l'information incomplète disponible à l'époque.

Le chapitre 2 discute avec plus de détails la théorie du risque et expose intuitivement, sur un exemple économique stylisé informel (marchand de glaces), le cadre standard de la maximisation de l'espérance de l'utilité. Mais le chapitre 3 montre que ce paradigme —si classique en microéconomie— est très rapidement dépassé dans l'étude interdisciplinaire des problèmes d'environnement global. A part la programmation dynamique stochastique, beaucoup de méthodes pratiques très utilisées n'y ont pas recours : analyse de sensibilité, simulations d'ensembles, scénarios, contraintes

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

d'acceptabilité. Le problème de fond est qu'à l'horizon de 50 ans et au delà, il est difficile de justifier l'existence d'une distribution de probabilité bien précise.

Le chapitre 4 présente quelques résultats du modèle DIAM obtenus lorsqu'on admet pour un instant cette hypothèse héroïque. Ce modèle a été utilisé pour évaluer les politiques de prévention du changement climatique, étudier la question du tempo de l'action, et étudier le problème de la permanence dans la séquestration géologique du CO_2.

La suite reprend le problème de la précaution dans un cadre d'ignorance multidimensionnelle. Le chapitre 5 introduit informellement les probabilités imprécises, en variant sur l'exemple du marchand de glace utilisé plus haut. Les aspects mathématiques formels sont abordés aux chapitres 6 et 7 qui le suivent. Cette partie ne contient pas de théorèmes nouveaux ni d'applications inédites, ni les démonstrations [Walley, 1991, voir]. Ces éléments théoriques sont exposés dans le cas simplifié où l'ensemble des futurs décrits Ω est fini et exhaustif.

Sans prétendre réécrire rigoureusement la théorie des probabilités imprécises — toute tentative de synthèse aujourd'hui serait rapidement dépassée— cet exposé est écrit comme un manuel pratique de référence. À ma connaissance il n'existe pas d'exposé équivalent de ces outils en français. On pourra avoir intérêt à faire des allers-retours entre les définitions formelles de cette partie et les applications illustratives de la troisième partie.

Les derniers chapitres exposent trois applications. Le chapitre 8 propose une méthode originale pour révéler les opinions des experts de façon cohérente, en tenant compte des trois niveaux d'ignorance. Le modèle des croyances transférables est utilisé pour formaliser l'analyse des bornes d'incertitude concernant les causes du cancer du poumon. Les interviews sont en cours.

Le chapitre 9 explore le problème de l'aggrégation des opinions d'experts. Différents opérateurs de fusion de l'information sont mis en oeuvre sur données d'experts réelles pour obtenir une distribution de possibilité concernant la sensibilité climatique. Cette distribution est immédiatement utilisée au chapitre 10. En effet celui-ci propose des règles de la prospective, une méthode pour calculer un jeu de futurs possibles en quantifiant le niveau de possibilité des scénarios décrits. Cet outil est appliqué au problème du réchauffement climatique en 2100.

La conclusion discute quelques perspectives intellectuelles à moyen et long terme des probabilités imprécises en économie.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

$\mathbf{1}_s$	Fonction indicatrice du sous-ensemble s
$\mathcal{A}$	Ensemble des paris jugés (partie de $\mathcal{L}(\Omega)$)
$b()$	Mesure d'implicabilité
$bel()$	Mesure de croyance
$\mathcal{B}(p)$	Ensemble des distributions de croyance isopignistique (partie de $\mathcal{M}$)
$\mathcal{C}$	Ensemble des probabilités admissibles
$\mathcal{D}$	Ensemble des paris presque désirables (partie de $\mathcal{L}(\Omega)$)
$\mathcal{D}^+$	Ensemble des paris strictement désirables (partie de $\mathcal{L}(\Omega)$)
$\mathsf{E}_p()$	Mesure de probabilité (espérance de la distribution p)
$\mathcal{G}(m)$	Ensemble des généralisations de m(partie de $\mathcal{M}$)
$\mathcal{K}$	Sous ensemble de paris (partie de $\mathcal{L}(\Omega)$)
$\mathcal{L}(\Omega)$	Tous les paris descriptibles
$m()$	Distribution de croyance
$m_\Omega()$	Distribution de croyance non informative
$m_\emptyset()$	Distribution de croyance contradictoire
$\mathcal{M}$	Ensemble des distributions de croyance
$n()$	Statistique de base
$\hat{n}()$ et $\underset{\wedge}{n}()$	Bornes des effets attribuables, causes jointes
$\overset{\vee}{n}()$ et $\underset{\vee}{n}()$	Bornes des effets attribuables, causes disjointes
N	Nombre d'observations
$\nu()$	Mesure de nécessité
$p()$	Mesure de probabilité
$p^*_m()$	Mesure de probabilité pignistique de m
$\underline{P}()$ et $\overline{P}()$	Consentement à payer et à recevoir
$\underline{P}'()$	Extension naturelle de $\underline{P}()$
$pl()$	Mesure de plausibilité
$\pi()$	Mesure de possibilité
$q()$	Mesure de commonalité
$\mathcal{R}$	Ensemble des paris jugés désirables (partie de $\mathcal{L}(\Omega)$)
S	Ensemble des scénarios (partie de Ω)
$\mathcal{S}(m)$	Ensemble des spécialisations de m(partie de $\mathcal{M}$)
X et Y	Paris (une fonction numérique de Ω)
Ω	Ensemble des futurs descriptibles
$\succ$	Préférence stricte des paris
$\succeq$	Presque préférence des paris
$\geqslant$	Comparaison point à point, fonctions de gain
$\gneqslant$	Comparaison point à point, fonctions de gain distinctes
$\sqsubseteq_q$	Comparaison point à point, mesures de commonalité A VERIFIER
$\sqsubseteq_b$	Comparaison point à point, mesures de plausibilité A VERIFIER
$\cap$	Conjonction non interactive
$\oplus$	Conjonction de Dempster-Shafer
$\Cap$	Conjonction hyper-prudente
$\cup$	Disjonction non interactive

TAB. 1 – Notations mathématiques. Les symboles suivis de () sont des fonctions définies sur les parties de Ω.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 1

Prologue : modéliser la précaution ?

Ce prologue met en scène la modélisation de la précaution. Il s'appuie sur un cas historique : la protection de la couche d'ozone. Ce cas est remarquable car il permet d'illustrer les controverses sur les coûts et les avantages des politiques de réduction d'émission ainsi que les conséquences environnementales d'un manque d'action en dépit d'une alerte scientifique précoce.

La couche d'ozone stratosphérique joue un rôle vital en filtrant les rayons solaires ultra violets nocifs. Sa préservation est souvent considérée comme un succès exemplaire de la politique d'environnement global. On peut toutefois qualifier ce point de vue en observant que même si les premiers avertissements scientifiques sont arrivés au milieu des années 70 [Molina and Rowland, 1974], l'action corrective (protocole de Montréal) s'est produite postérieurement à l'apparition du fameux trou d'ozone au dessus de l'Antarctique. Tous ne seront pas réconfortés en pensant que ce succès exemplaire a été mis en oeuvre sur un mode réactif, après l'observation d'une non-linéarité majeure dans le système atmosphérique global. Aurait-il été raisonnable d'agir plus tôt, dès les premiers avertissements scientifiques ?

La première partie de ce chapitre illustre cette question de la précaution en décrivant de façon narrative ce qu'aurait put être une politique d'élimination plus précoce des substances appauvrissant la couche d'ozone. La cohérence interne d'un tel scénario contrefactuel pro-actif est examinée en se basant sur un article écrit en collaboration avec Gérard Mégie et Didier Hauglustaine au CNRS [Ha-Duong et al., 2003].

La seconde partie du chapitre ajoute la dimension quantitative. Elle montre que la politique de précaution définie précédement aurait été efficace pour un surcoût modéré. Cette vérification a été menée a l'aide d'un modèle intégré, qui couple numériquement un modèle de simulation de chimie atmosphérique avec un modèle technico-économique de coût de réduction. Cet exercice illustre l'articulation nécessaire entre les sciences positives et les sciences morales.

La troisième partie aborde la question de la légitimité scientifique des expériences virtuelles de modélisation intégrée [Ha-Duong, 1998b]. Pour légitimer scientifiquement cette pratique interdisciplinaire, il faut résoudre à la fois un problème de reproductibilité et un problème de cohérence interne. Pour assurer la reproductibilité des résultats, il importe que la modélisation intégrée utilise une méthodologie transparente et contrôlée, dont quelques éléments sont rappelés dans ce chapitre.

Pour assurer la cohérence interne, il importe de bien maitriser la différence de signification des modèles entre les sciences naturelles et les sciences morales. Les divergences fondamentales en ce qui concerne la prédiction et la précision sont évoquées en conclusion du chapitre, pour introduire le thème central de ce mémoire : la modélisation de l'incertitude.

1.1 La protection de la couche d'ozone : précaution ?

L'histoire de la consommation mondiale de substances appauvrissant la couche d'ozone peut se résumer en quatre temps, visibles sur la courbe en tireté appelée « Montréal » sur le graphique (a) en haut de la figure 1.1.

1. Entre 1950 et le milieu des années 70, une croissance exponentielle à un taux de 6 à 10 % par an.
2. Puis, suite aux premières alertes [Molina and Rowland, 1974] et jusque vers 1982, la consommation a marqué une pause autour de 1 M tonnes de Chlore-équivalent par an.
3. Mais en l'absence de règlementation internationale, la consommation recommence à augmenter en 1982 jusqu'à un maximum vers 1988, un an après la signature du traité de Montréal.
4. Depuis nous en sommes à l'élimination totale progressive de toutes les substances appauvrissant la couche d'ozone.

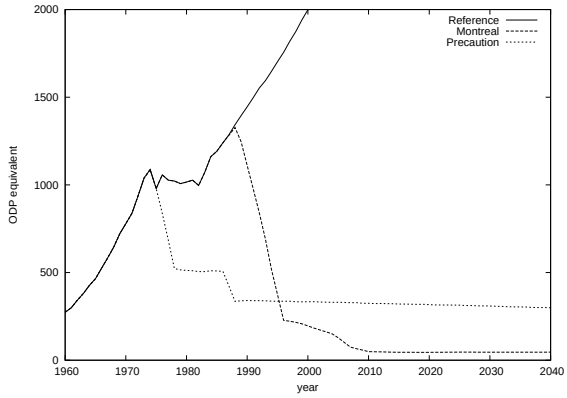
Par rapport à ce déroulement factuel, nous avons défini deux autres scenarios appelés « Référence » et « Précaution » sur la figure. Le scénario « Référence » correspond à ce qui aurait pu se passer si le Protocole de Montréal n'avait pas eu lieu. Il prolonge la tendance observée à partir de 1982, avec des taux de croissance exponentiels de l'ordre de 2 à 3 pourcent par an selon le secteur, la région et la période. Ce scénario a été défini par Smith et al. [1997] pour servir de référence dans une étude technico-économique des coûts du Protocole de Montréal.

D'un autre côté, nous avons défini un scénario « Précaution ». Il correspond initialement à un échéancier de réduction équivalent à celui de Montréal, mais imposé dix ans plus tôt : à partir de 1978 pour les pays industrialisés. Les contraintes sont, de plus, supposées appliquées à la production, et non à la consommation de CFCs. Dans ce scénario, on suppose qu'une réduction supplémentaire est effectuée dans les pays industrialisés à partir de 1988. Concernant les autres pays, on suppose qu'ils gèlent leur niveau de consommation en 1988. Toutefois, en contrepartie de cette action précoce, le scénario permet un usage durable de ces composés organochlorés et fluorés.

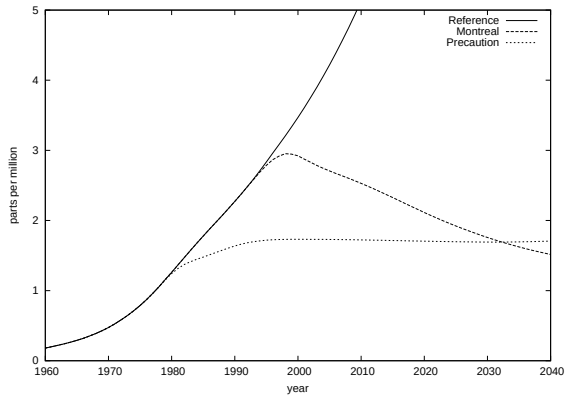
Comme le scénario « Référence », celui de « Précaution » est contrefactuel (c'est à dire imaginaire), mais demande davantage de justification puisqu'il ne consiste pas à prolonger la tendance. Dans un premier temps, il s'agit d'exagérer la rupture précoce effectivement réalisée au milieu des années 70 suite aux premières alertes scientifiques. On peut parler de précaution puisqu'à cette date, les réactions de chimie hétérogène gouvernant l'évolution du chlore stratosphérique n'étaient pas connues. Cette action précoce est-elle compatible avec un renforcement de la protection vers 1988 dans un second temps ? On peut en effet se demander si la précaution n'aurait pas affaibli l'émergence du signal de danger.

Rappelons que le protocole de Montréal a été adopté suite à l'observation par satellite de la destruction de l'ozone à grande échelle dans les régions polaires (le trou

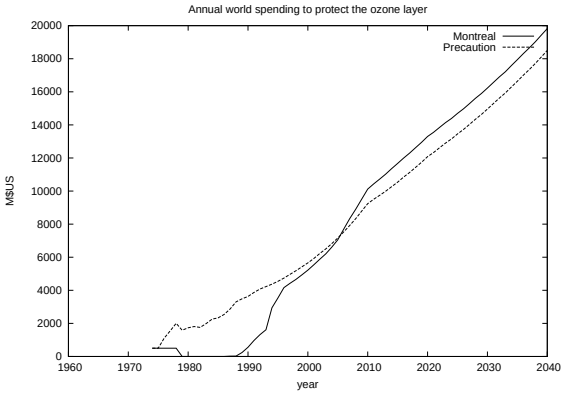
halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005



(a) Consommation mondiale de substances appauvrissant la couche d'ozone



(b) Abondance d'équivalent-chlore dans la stratosphère



(c) Dépense mondiale pour réduire les émissions

FIG. 1.1 – Panel (a) en haut, consommation mondiale de substances appauvrissant la couche d'ozone, en 10^6 kg de chlore-équivalent. Au milieu (b), concentration de chlore dans la stratosphère (environ 25km d'altitude). En bas (c), dépense mondiale pour réduire les émissions sous le scénario de référence.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

d'ozone) vers 1980. Or ces observations correspondent principalement aux effets des organochlorés produits avant le milieu des années 1970. En effet, les CFCs employés dans les réfrigérateurs et les mousses fermées, de même que les HCFCs employés dans les systèmes d'extinction d'incendies, ne sont relachés dans l'atmosphère qu'au bout de plusieurs années. Une seconde période de latence de 5-7 ans (en moyenne) est nécessaire pour que les molécules atteignent la stratosphère et soient photo-dissociées par le rayonnement solaire. On peut donc conclure qu'une action précoce n'aurait pas empêché l'arrivée d'information scientifiques concluantes décisives.

Le troisième temps du scénario correspond à une stabilisation plutôt qu'à une élimination totale des émissions. Cet aspect se justifie simplement par la logique économique, puisqu'il existe des usages essentiels des CFCs, dans les inhalateurs par exemple, dont les coût marginaux de réduction sont relativement plus élevés que les bénéfices attendus.

Par rapport à la référence, le protocole de Montréal réalise bien une action de protection de l'environnement global remarquable qui a certainement évité une catastrophe écologique sans précédent. Mais puisque dès 1975 on pouvait comprendre qu'il fallait résoudre le problème des CFCs à long terme, n'aurait-il pas été préférable d'agir tout de suite ? Peut-on parler de succès d'une politique de précaution qui agit après l'observation d'une non-linéarité majeure dans le système à préserver ?

Les termes de l'arbitrage sont typiques des problèmes de politiques de précaution étudiés dans ce mémoire : une action précoce aurait dégagé une marge de manoeuvre, mais aurait entraîné des coûts plus élevés pour un bénéfice incertain. Il ne nous est pas donné ici de revenir sur les informations disponibles à l'époque pour justifier ou non la politique adoptée. Les outils pour le faire, à savoir la programmation dynamique stochastique, ne seront introduits qu'au chapitre 3.

La section suivante introduit un outil qui permet de poser simplement avec plus de force la question de la précaution, en renforçant l'idée que le scénario pro-actif aurait été efficace écologiquement et pas trop cher. Pour cela, il est bien nécessaire de faire tenir ensemble deux champs disciplinaires, l'aéronomie et l'économie.

1.2 Analyse avec le modèle intégré IECCC

Cette section présente le modèle intégré, en examinant les objectifs généraux, l'organisation générale du flot des calculs et les résultats. L'objectif du modèle est de vérifier et qualifier numériquement le scénario pro-actif, qui joue sur un démarrage plus précoce de 10 ans pour éviter d'avoir ensuite à éliminer totalement l'usage des CFC. Il fallait :

Étudier rétrospectivement le taux de destruction de l'ozone stratosphérique qui aurait résulté du scénario d'action précoce, et déterminer le niveau d'émission durable qui permettrait dans ce cas d'atteindre des performances aussi bonnes ou meilleures en terme de préservation de l'ozone stratosphérique, et

Estimer un ordre de grandeur des coûts induits par cette action, en considérant en particulier l'existence et la disponibilité des substituts, le coût d'une obsolescence accélérée du capital existant et l'avantage économique d'une période d'utilisation des CFC étendue, en particulier pour les pays en développement.

Pour cela, nous avons couplé la partie 'chimie atmosphérique' du modèle Integrated Emissions Composition Concentration (IECC) décrit par Hauglustaine and Gérard [1991] avec le modèle économique de coût de substitution décrit par Smith et al.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

[1997]. La fiche du Programme 1.1 synthétise le modèle résultant, baptisé IECCC (ICCC avec Coûts).

Le flot des calculs est organisé en Y, avec un début commun qui se divise en deux branches, aéronomique et économique.

– La branche commune du Y se déroule en trois étapes. D'abord les trois scénarios sont décrits en mots. Puis ils sont traduits sous la forme de fichiers de paramètres numériques, en terme de taux et de périodes. Puis on calcule, pour chacun des 14 secteurs socio-économiques et des 2 régions du monde, les émissions annuelles de CFCs et autres substances appauvrissant la couche d'ozone entre 1975 et 2075. Ces séries temporelles sont stockées dans les fichiers 'emisXXXX.dat'.
– Pour le calcul des coûts (première branche du Y), on procède aussi en trois étapes. D'abord, on transforme les séries d'émissions en séries de dépenses annuelles que l'on range dans les fichiers 'costxxxx.dat'. Pour celà on utilise la notion de coût de substitution, que l'on peut aborder comme étant la différence de prix au kilo entre un produit chimique nocif pour la couche d'ozone (comme un CFC par exemple) et son substitut qui la respecte. Les coûts marginaux de substitutions sont des fonctions en escalier croissantes, à trois marches maximum, et on a aussi la possibilité d'avoir un coût fixe.
  Dans un second temps la dépense de réduction est aggrégé sur les 14 secteurs technico-économiques et sur les 2 régions du monde, afin de tracer le profil temporel en bas sur la figure 1.1. Troisièmement on actualise tous les coûts à l'année 1997 pour examiner comment l'effort se répartit par secteur et par région, voir la table 1.1.
– L'autre branche du Y concerne le calcul des concentrations, ou techniquement le mixing ratio en parties par millions évalué à l'altitude de 25km environ. Pour cela dans un premier temps les profils d'émissions par substances entre 1750 et 2100 sont déduits des profils d'émission par secteur de la première étape. On utilise les données historiques ainsi que des matrices de bilan gaz x secteur pour les années 1974 et 1986, en tentant de minimiser la part d'arbitraire dans l'ajustement des différentes données entre elles. Ces profils d'émissions sont aggrégés en utilisant les ODP (Ozone Depletion Potentials) spécifiés aux annexes A, B et C du Protocole de Montreal [UNEP, 1999] pour obtenir le graphe en haut sur la figure 1.1 (page 3).
  Puis le modèle atmosphérique est utilisé pour calculer l'historique des concentrations de chlore. C'est essentiellement un modèle de cinétique chimique du premier ordre, avec un transfert entre deux compartiments. On obtient le graphe du milieu sur la figure 1.1.

Le scénario « Montréal » permet de valider ma réimplémentation du modèle de Smith et al. [1997] puisqu'elle conduit aux mêmes résultats à 5 pour cent près. Le scénario « Précaution » montre bien qu'il a été possible de calibrer un scénario pro-actif dans lequel la concentration de chlore reste en dessous de 2 parties par millions, seuil critique pour la destruction à grande échelle de l'ozone dans les zones polaires. Cet exercice confirme la cohérence interne de l'aspect aéronomique.

Concernant l'aspect économique, le surcoût de l'action précoce dépend beaucoup du taux d'actualisation choisi et, si celui-ci est faible, des hypothèses sur le scénario de référence et sur le long terme. Comme la figure 1.1 le montre, suivre le scénario pro-actif c'est échanger un effort plus important pendant deux décennies contre des économies réccurentes durant les décennies ultérieures, par une utilisation durable des CFCs.

On retrouve ici un aspect important du problème de la précaution, à savoir la ré-

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Programme 1.1 Organisation du modèle IECCC (Integrated Emissions Concentration Chemistry Cost). L'exécution est automatisée depuis la compilation des sources jusqu'à la génération du manuscrit en pdf, en passant donc par toutes les figures et les tables. Données de AFEAS [1997], Smith et al. [1997], UNEP [1999]

```
Nom:  IECCC
      Integrated Emission-Composition-Climate-Cost model

Type: Simulation récursive

Taille:
 La partie "chimie de l'atmosphère" est une fraction du modèle I E C C
 ( Integrated Emission-Composition-Climate model ) qui compte environ
 5000 lignes de code source en Fortran.
 La partie économique comprend 925 lignes de code source en C++.

Intégration:
 Couplage faible, les deux sous-modèles sont résolus séparément.
 Communication par des fichiers texte et gestion des dépendances avec make

Résolution:
temporelle:  Pas de un an à partir de 1750 pour la chimie,
             à partir de 1974 pour l'économie
sectorielle: 14 secteurs technico-économiques
             correspondant à 27 espèces chimiques
spatiale:    Le monde est divisé en deux zones économiques:
               Industriel/Développement (selon le Protocole de Montréal).
             Atmosphère divisée en 2 réservoirs: troposphérique et stratosphérique
               la distribution en latitude et longitude n'est pas représentée

Inputs:
 Scenarios d'émissions de substances appauvrissant la couche d'ozone
 Scenarios d'émissions des autres gaz
 Paramétrage des fonctions de cout de réduction
 Paramétrage des fonctions d'agrégation intertemporelle, entre secteurs et régions

Outputs:
 Concentration en chlore dans l'atmosphere, par an
 Cout de réduction, par an, par région, par secteur
 Cout de réduction, agrégé par an
 Cout de réduction, valeur présente
```

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Technico-economic sector	Incremental Substitution Cost (USD kg^{-1})		To tal substitution cost (10^9 USD, 5% discount rate)					
			Montreal			Precaution		
	Ind	Dev	Ind	Dev	World	Ind	Dev	World
CFC-Aerosols	-0.9[a]	-0.9[b]	0	2	2	-2	2	-0
CFC-Foams	1.5	1.5[c]	15	3	19	19	1	20
CFC-Refrigeration	4.6	4.6[d]	43	22	66	54	19	72
CFC-Solvents	1.1	1.1[e]	18	2	20	21	1	22
CFC-Sterilization	1.4	1.4	1	0	1	2	0	2
Halon-1211	-10.0[f]	-1.5[g]	-0	-0	-1	-1	-0	-1
Halon-1301	0.0[h]	3.7	12	0	12	14	0	14
Halon-2401	-1.5[i]	0.0	8	0	8	14	0	14
HCFC-22	3.0	3.0	18	1	19	34	2	36
HCFC-141b	2.5	2.5	1	0	1	1	0	1
HCFC-142b	2.5	2.5	0	0	0	1	0	1
Methyl-Chloroform	1.5	1.5[j]	82	8	90	101	9	110
Carbon-Tetrachloride	0.9	1.8	9	3	11	11	3	14
Methyl-Bromide	4.4	2.2	6	1	7	12	1	14
Total			213	43	256	282	37	319

Notes to the table : [a]Plus a fixed development cost of 2.5 billion USD. [b]For the first 35%, then 0$/kg for the next 35%, then 2.7 $/kg. [c]First 50% then 8.3 $/kg. [d]First 60% then 6.9 $/kg for 10% then 15.6 $/kg. [e]First 50% then 1.7 $/kg for 40% then 15.8 $/kg. [f]First 90% then 75 $/kg. [g]First 90% then 3.7 $/kg. [h]First 75% then 120 $/kg. [i]First 60% then 30 $/kg. [j]First 75% then 3.9 $/kg.

TAB. 1.1 – Coût de réduction des CFCs et autres SACO

Coûts totaux actualisés de réduction des CFCs et autres substances appauvrissant la couche d'ozone (milliards de dollars), ventilés par secteurs technico-économiques et par zone. Actualisation de dépenses sur 1974–2074 à l'année 1997. Méthode et coûts incrémentaux selon Smith et al. [1997], scénarios et code du modèle auteur.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

partition intertemporelle et internationale des efforts, dont la discussion dépasserait largement le cadre de ce chapitre introductif. Cette utilisation d'IECCC illustre l'apport de la modélisation intégrée pour apporter une cohérence nécessaire à l'analyse des problèmes d'environnement global ayant à la fois des implications économiques et écologiques.

1.3 Qualité et scientificité des modèles

Intégrer des modèles de disciplines différentes permet de mieux analyser le problème de la précaution dans les risques d'environnement globaux. On a ainsi assisté, avec l'explosion de l'informatique, à l'émergence d'outils composites qui rassemblent des connaissances tirées des sciences expérimentales naturelles et des sciences humaines.

Or cette pratique souffre d'un problème de légitimité scientifique.

Elle pose des problèmes particuliers de méthode. Chaque discipline a ses propres traditions sur ce qui fait la qualité d'un modèle et sur les limites du modélisable. Mais même si chacune des parties est solidement fondée, l'ensemble peut être mis en question. La légitimité de la modélisation intégrée n'est pas celle des sciences expérimentales car les 'simulations' numériques sur plusieurs siècles ne peuvent être vérifiées. Elle n'est pas non plus celle des mathématiques puisque le modèle se réfère explicitement à la réalité (les variables et paramètres sont mesurables). Et au contraire de beaucoup de sciences sociales il s'agit de modèles quantitatifs et non narratifs.

Ce manque de légitimité est amplifié par le fait que les modèles sont souvent l'objet de commandes publiques à des entreprises privées, comme l'étude de Smith et al. [1997] réutilisée pour ce chapitre. Ils encourrent alors le risque d'apparaître comme des boîtes noires au service d'intérêts particuliers, d'autant plus qu'ils sont appliqués à des problèmes controversés dans lesquels l'incertitude scientifique n'est pas encore résolue.

Deux niveaux de réponse sont nécessaires pour la question de la légitimité. En premier lieu, il faut assurer une base technique saine concernant la qualité des modèles qui garantisse la reproductibilité des résultats. En second lieu, il faut gérer de façon cohérente les différences de fond concernant la représentation de l'incertitude entre les sciences positives et les sciences morales. Ce second point sera discuté en conclusion du chapitre.

Définir des critères de qualité d'un modèle intégré permet de légitimer les modèles en traçant la frontière entre la mission de conseil–expertise et la recherche scientifique. Pour cela j'ai proposé dans [Ha-Duong, 2001] une rigueur pratique formelle basée sur l'automatisation et l'accès libre pour répondre au problème de la transparence et du contrôle des modèles en tant qu'outils numériques.

Les critères de qualités commencent par l'affichage d'une volonté d'objectivité et de neutralité politique. Ils incluent la participation aux pratiques formelles d'une communauté d'intérêt (séminaires, revues, associations savantes, enseignement). Toutefois ces rites sont des prérequis nécessaires mais non suffisants pour distinguer une activité de modélisation interdisciplinaire pleinement *scientifique*.

Il faut aussi prendre en compte la spécificité des outils en question : il s'agit de constructions logicielles. S'il s'agit d'outils de recherche, cela doit se reflèter dans la manière dont ils sont conçus et réalisés. Or on peut penser qu'en l'état actuel, ces instruments scientifiques sont souvent réalisés avec moins de précision que les pratiques industrielles courantes.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Par exemple, concernant l'implémentation, le modèle IECC a été récupéré sous forme de code source Fortran. Ce code résulte lui même du travail successif de plusieurs groupes de recherche : d'autres pourraient certainement remettre en question les choix fonctionnels ou discuter les paramétrisations. Du côté économique il a été nécessaire de recoder la partie Coûts car mes demandes auprès de Smith et al. [1997] sont restées sans réponse. Cette partie a été codée en C++ avec l'idée qu'il serait plus facile de trouver un programmeur compétent dans ce langage généraliste. Avec du recul, il aurait probablement été plus productif de partir sur un langage plus spécifique, proche de la programmation linéaire comme Fortran, GAMS ou même SciLab. Par contre utiliser des fichiers textes simples pour communiquer les données entre les parties du modèles s'est avéré une solution efficace, de même que l'utilisation du logiciel de gestion de projet `make` pour assurer la cohérence des calculs.

Dans Ha-Duong [2001], j'examine quelques modèles historiques : DICE, MERGE, IMAGE, MARKAL sous l'angle de l'ingénierie logicielle, la transparence et le contrôle des modèles. Partant du constat que la légitimité scientifique dépend de façon décisive de la reproductibilité des résultats indépendament de l'auteur, il s'agit de définir une rigueur formelle dont le but est d'assurer la reproductibilité des résultats publiés. Pour cela, il est utile de diffuser les concepts d'automatisation, de portabilité, de contrôle des changements, d'accès libre, de test et de programmation littéraire :

- L'automatisation permet d'assurer la cohérence entre données, modèle, résultats, figures et tables, et le texte du manuscrit. Pour cela les dépendances sont écrites explicitement dans un fichier de gestion de projet. Cela permet au système, par exemple, de refaire tourner le modèle et retracer les figures si les données ont changé et que l'on lui demande de régénérer la version courante de l'article. Le logiciel `GNU make` est souvent utilisé ici. Toutefois notre parti-pris de rigueur conduit Patrice Dumas à développer avec mes conseils un outil spécifique appelé `Patdeph`. Ce système décrit sur la fiche 1.2 permet d'automatiser la gestion des modèles GAMS.
- La portabilité consiste à développer un programme pouvant s'exécuter sur diverses plate-formes. Elle est souvent réalisée avec les modèles en GAMS, en *Mathematica*, en Fortran ou dans d'autres langages de haut niveau.
- Le contrôle des changements consiste à garder trace des modifications du code, pour pouvoir revenir aux versions antérieures et annoter les corrections apportés. Cela peut s'effectuer à l'aide du logiciel `RCS` pour un développeur isolé, ou avec `SVN` pour une équipe. La soumission d'un article à une revue devrait toujours s'accompagner de la création d'une branche du code, et aboutir à une distribution publique (release) nommée avec incrémentation du numéro de version mineur du modèle.
- L'accès libre consiste à prendre les mesures pour que toute collègue intéressée puisse accéder au code source du modèle et aux données utilisées.
- De nombreuses méthodes existent pour le test des logiciels, la première étant la relecture du code par un pair. La notion de test de régression est importante, cela consiste à s'assurer que les 'améliorations' du code qui sont censées ne pas provoquer de changement dans les résultats laissent bien ceux-ci invariants. On est souvent amené à écrire un ensemble de scripts de test comparable à l'échaffaudage d'une maison en construction : il est indispensable même s'il ne fait pas partie du produit fini.
- La documentation d'un modèle est constituée de manuscrits scientifiques (articles et/ou rapport techniques), des petits fichiers accompagnant la distribution (README, INSTALL, Makefile, . . .) et du texte incorporé dans le code source.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Programme 1.2 Patdeph : un langage de modélisation intégrée

```
Nom:  Patdeph

Type: Langage de script, système de gestion de projet

Taille:   3500 lignes de Perl

Auteur:    Patrice Dumas (et Minh Ha-Duong pour la version 1)

Description:
  Patdeph is a scripting language for performing sensitivity analysis on
  models. It allows to recompute all results, tables (TODO) and plots in a
  scientific paper with one command. The goal is to be more straightforward and
  more portable than the operating-system scripting languages.

Prerequisites:
  Perl with the modules Parse::RecDescent and Digest::MD5
  gnuplot (optional but recommended)
  currently the only known modeling language is GAMS
  Developed using Bash and Make on GNU/Linux
  Speed almost acceptable on Pentium 120, 48Meg
  Should work but untested on other OSes

Usage:
  The patdeph executable is an interpreter for the Patdeph language. Assuming
  that file.pat contains the description of a sensitivity analysis on a
  model, to perform the computations and re-draw the plots you type the command

   patdeph file.pat

For more documentation, type 'man patdeph' and browse the examples in the test dire
```

Les langages modernes comme Perl, *Mathematica* ou dans une moindre mesure GAMS offrent en effet des facilités de 'programmation littéraire' qui permettent d'incorporer dans les fichiers de code source les explications destinées à être extraites, formatées à part et lues par les humains.

Ces pratiques sont évidentes car, en plus de favoriser la reproductibilité et donc de contribuer à légitimer scientifiquement les modèles, elles sont très utiles pour le développement ordonné de tout logiciel significatif. Il est très souhaitable que les revues de modélisation intégrée incluent systématiquement une archive électronique (plus ou moins ouverte) dans laquelle les auteurs déposent les codes servant à justifier leurs résultats.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre introduit les trois thèmes-clés de ce mémoire : modélisation, précaution, environnement. Pour cela le modèle intégré (IECCC) a été utilisé pour examiner la question de la précaution à propos d'un problème d'environnement global (la préservation de la couche d'ozone). Concernant la méthodologie, quelques bonnes pratiques de qualité des modèles ont été proposées, préalable nécessaire avant de passer à l'autre

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

problème de légitimité scientifique : la représentation de l'incertitude.

Ce problème se pose car pour des sujets comme l'ozone ou l'effet de serre, les controverses sont multiples. La compréhension scientifique de base n'est pas encore stabilisée. Les coûts techniques des mesures de prévention sont mal connus par les industries concernées. Les effets macroéconomiques des politiques restent incertains.

Or pour avoir un modèle intégré qui fait du sens dans un univers incertain, il faut surmonter un obstacle fondamental : la nature de l'information et de l'ignorance représentée dans les modèles diffère profondément selon les disciplines. Comment modéliser les problèmes de précaution en mettant ensemble des disciplines qui ont des approches essentiellement différentes de l'incertitude ? Ce mémoire articule deux approches.

Les sciences positives, la physique par exemple, sont caractérisées par l'ambition de la rationalité la plus complète. Les théories physiques sont fondées sur des variables précisément définies et mesurées numériquement. La réalisation d'expériences répétables fonde une vision probabiliste précise du futur. On adoptera ainsi, dans la première partie du mémoire, une vision positive de l'économie, avec l'hypothèse d'un planificateur bienveillant et bien informé qui dispose de probabilités sur les états du monde futur. Cela conduira à la recherche de stratégies de précaution optimales à l'aide de la programmation dynamique stochastique.

Mais la vision positive des sciences économique fait pas illusion dans la discipline. Elle heurte les méthodes utilisés en sciences humaines, centrée sur le libre-arbitre individuel, le jeu des acteurs et la psychologie. Les sciences morales, la philosophie par exemple, reconnaissent la réalité d'un univers imprécis et controversé. L'imprécision des connaissances ne permet pas de viser la prévision. Le pari de ce mémoire est que des instruments mathématiques nouveaux sont possibles pour formaliser néanmoins ce type de connaissances. La seconde partie de ce mémoire propose d'utiliser les probabilités imprécises. Puis trois applications seront présentées, pour modéliser des questions de controverse entre experts et de prospective.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 2

Décision rationnelle dans le risque

Ce chapitre[1] constitue une présentation interdisciplinaire des concepts de la décision sous incertitude et de rationalité. Après avoir introduit la terminologie du risque et de l'incertitude, il expose les bases de la théorie de la décision, puis examine ses aspects dynamiques.

2.1 Risque, incertitude, ignorance et temps

Le droit au développement durable est souvent défini comme la nécessité de *répondre aux besoins des générations présentes sans empêcher les générations futures de répondre aux leurs*. Cette définition illustre l'interdépendance entre quatre dimensions de la théorie de la décision. Le développement durable met en jeu des besoins multiples ; non spécifiables à ce jour ; sur le long terme (dégradation de l'environnement et épuisement des ressources naturelles) ; ainsi que les relations entre pays en développement et pays développés.

L'exemple du problème du changement climatique permet de repréciser ces quatre dimensions. C'est une situation *multi-acteurs*, les parties prenantes aux négociations sont nombreuses puisqu'il s'agit tant des états que des organisations non gouvernementales d'intérêt économique ou citoyennes. C'est une situation de décision *multi-critères*, car on peut difficilement mesurer sur une même échelle des effets comme l'augmentation possible de la mortalité et la migration des écosystèmes. Enfin, c'est aussi une situation de décision inter-temporelle, et même *inter-générationelle*.

Le cadre classique exposé dans chapitre laisse de côté les aspects multi-critères et multi-acteurs. Dans la suite de ce mémoire, on se conforme pour l'essentiel à cette simplification usuelle, même si en pratique ces aspects peuvent être tout aussi importants que l'incertitude.

La limite la plus difficile à tracer est celle entre l'aspect non déterministe et l'aspect inter-temporel. *A priori* on pourrait penser que tout ce qui est de long terme est

[1] Ce texte est parti d'une conférence prononcée à l'école des Houches « Incertitude et décision : le cas du changement climatique » en octobre 1999, organisé par Richard Topol et Daniel Vidal-Madjar du CNRS. Qu'ils en soient ici remerciés, ainsi que mon directeur Jean-Charles Hourcade, ainsi que mon collègue et ami Nicolas Treich.

incertain. Mais qelques exemples peuvent montrer que les deux aspects sont fondamentalement distincts. Le choix d'une route vers la Lune est un problème déterministe pour lequel le temps joue un rôle important. A l'opposé, la stratégie à adopter en salle de ventes aux enchères est un problème non déterministe pour lequel on peut négliger la date à laquelle ont lieu les évènements, seul leur ordre compte.

Cependant pour l'étude des problèmes d'environnement, il s'avère nécessaire de conserver la liaison entre temps et incertitude. Par exemple, le principe de précaution stipule que *en cas de dommages potentiels graves ou irréversibles, il ne faut pas attendre la certitude pour agir*. Souvent les effets de la pollution ne sont pas immédiatement observables, et le risque est communiqué par un processus de médiatisation mettant en jeu des experts et des porte-parole des divers groupes d'intérêt. Les conséquences sont aussi souvent reportées dans le temps par suite des processus d'accumulation.

Traditionnellement, la Statistique et les Probabilités formalisent les situations de risque. Dans une discipline comme la Physique, par exemple, différentes interprétations des probabilités sont possibles :

Fréquentielles On peut disposer en principe de séries d'observations dont on peut dériver des fréquences empiriques. L'interprétation des probabilités dans ce contexte ne pose pas de problèmes.

Logiques Il est parfois fait appel à des modèles idéaux, comme le jeté de dé parfait dont les six faces sont équiprobables par symétrie. Là encore, il n'y a pas de difficultés conceptuelles majeures.

Chaos Le chaos permet aussi de justifier le recours aux modèles stochastiques pour décrire des systèmes déterministes inobservés pendant un temps assez long.

Le traitement de l'incertitude en économie repose sur des bases plus sophistiquées, liées à la question de la rationalité [Knight, 1921, Keynes, 1921]. Nous allons les aborder à travers l'exemple classique de l'urne contenant 90 billes colorées [Machina and Schmeidler, 1992]. Il s'agit d'un tirage unique, et la question est bien entendu de deviner quelle sera la couleur de la bille tirée. On peut par exemple imaginer un jeu gratuit dans lequel le parieur recevra 100 euros s'il devine juste, rien sinon. Ce jeu permet de distinguer trois niveaux d'ignorance :

Incomplétude Le paragraphe précédent ne donne pas la liste des tirages possibles. Ce cas illustre les situations dans lesquelles on ne connaît pas limitativement les issues possibles. Des surprises sont possibles, comme des billes vertes, multicolores ou transparentes.

Incertitude Supposons maintenant connu le fait qu'exactement 30 des billes sont rouges, les autres pouvant êtres noires ou blanches. Ce cas illustre les situations dans lesquelles les conséquences possibles sont connues mais on ne dispose pas de probabilités comme en physique.

Risque On ajoute l'information selon laquelle les 60 billes non-rouges se répartissent en 30 billes noires et et 30 blanches. Dans ce cas, non seulement les différentes conséquences possibles sont connues, mais en plus on dispose de probabilités bien fondées.

Afin de mieux faire comprendre la différence entre risque et incertitude, un sondage à main levée parmi l'audience de l'école des Houches « Incertitude et décision : le cas du changement climatique » en octobre 1999 a été réalisé sur l'exemple de l'urne décrit plus haut. Il est apparu que dans le cas d'incertitude, le public est davantage attiré par

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

le pari « Tirer une bille rouge » alors que dans le cas de risque, il est indifférent entre les trois couleurs.

J'adopte dans ce mémoire une articulation hiérarchique des trois concepts. Certains auteurs désignent également les situations d'information incomplète par incertitude, mais nous suivrons la majorité en les gardant hors du champ sémantique de ce mot dans la suite.

La terminologie ayant évolué depuis la position historique de Knight [1921, I.I.26], l'incertitude désignera dans ce mémoire un niveau d'ignorance supérieur dans un sens inclusif : les situations de risque sont vues comme une classe particulière de situations d'incertitude.

Un autre mot est alors nécessaire pour désigner l'incertitude pure et dure qui n'est pas du risque. Nous l'appelerons incertitude non-spécifique. Le terme ambiguité est aussi courant dans la littérature économique contemporaine sur le sujet malgré son ambiguité.

Les situations d'incertitude sont plus générales que les situations de risque, mais dans l'économie mathématique classique c'est l'inverse. Pour des raisons historiques et techniques, certainement liées aux succès pratiques de la théorie probabilités, les résultats passés ont surtout porté sur le risque. Ce n'est que durant ces dernières décennies que des formalisations ont été développées pour les situations d'incertitude non-spécifique.

En ce qui concerne le niveau d'ignorance le plus élevé des trois, les situations d'information incomplète sont aussi les moins pratiques à représenter. Il existe certes un corps important de techniques pour modéliser le raisonnement et les choix qui se font sur la base de prémices limitées. Elles relèvent essentiellement de la logique : « si A alors B », et les recherches dans le domaine de la logique formelle ou de la simulation qualitative proposent de nombreuses extensions au calcul des propositions classique. Mais elles sont actuellement peu utilisées en économie.

Exposer les bases de la théorie de la décision se limite donc à exposer la modélisation des décisions rationelles dans les situations de risque. Pour cela, nous allons convoquer un personnage bien connu des leçons d'économie : le Marchand de Glaces.

2.2 Maximiser l'espérance de gain/utilité

Le Marchand de Glaces souhaite retenir un emplacement pour vendre ses Glaces à l'occasion d'un événement futur. Quatre emplacements $a \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ sont possibles a priori. Les ventes dépendront également de la météo $s \in \{C, F\}$. Le profit prévisionnel $\Pi(a, s)$ est représenté Table 2.1 en unités monétaires.

	$a = \alpha$	$a = \beta$	$a = \gamma$	$a = \delta$
$s = C$	10	6	11	8
$s = F$	2	4	0	3
Espérance	6	5	5.5	5.5

TAB. 2.1 – Profit du marchand de glace $\Pi(a, s)$ en keuros.

Ce problème de décision stylisé permet d'abord d'introduire la question de la rationalité. En économie, celle-ci n'est pas toujours vue comme une vertu normative : il n'existe pas une seule meilleure rationalité. Au contraire, l'hétérogénéité des préférences et des goûts est un élément très important pour expliquer les échanges entre

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

individus. Il peut être fait appel à plusieurs définitions de la rationalité, chacune pouvant servir à décrire les choix d'un agent économique particulier.

On peut ainsi imaginer un marchand de glace de comportement optimiste, qui ne regarde que la ligne favorable du tableau (la première) et choisit donc $a = \gamma$. On peut l'imaginer au contraire pessimiste, il choisirait $a = \beta$ pour s'assurer un gain de 4 dans le pire des cas. Ces cas sont parfois appelés les règles du *maximax* et du *maximin*. Elles sont applicables en situation de risque mais aussi d'incertitude non probabilisée.

Pour décrire un comportement ni optimiste ni pessimiste,, mais dit neutre par rapport au risque, supposons maintenant que le marchand dispose de probabilités bien fondées, c'est à dire de statistiques météorologiques. A la date et au lieu de l'évènement, le temps est chaud ($s = C$) une fois sur deux. Il est alors immédiat de calculer que le meilleur profit espéré est 6 et l'emplacement associé $a = \alpha$. La règle de décision est la maximisation de l'espérance de gain.

Ce qui précède montre que plusieurs règles de décision rationelle dans l'incertitudes sont possibles : maximax, maximin, meilleure espérance de gain. Les économistes utilisent généralement un cadre unificateur de ces règles, la théorie de l'utilité.

Pour illustrer la différence importante entre gain monétaire et utilité, on pourrait par exemple imaginer que le marchand a une dette de 4 à rembourser impérativement à court terme, et que de surcroît tous ses gains au delà de 5 seront imposés à un taux confiscatoire. Dans ce cas par exemple, on comprendrait que l'utilité —au sens usuel de ce mot— des 4 premières unités de gain est nettement supérieure à l'utilité d'un passage de 4 à 8. Cela pourrait le conduire à un comportement pessimiste, $a = \beta$.

Pour styliser ce type de comportement, dans lequel le gain procure de moins en moins d'utilité, les économistes sont conduits à utiliser des fonctions concaves du gain Π, dans le cas des firmes, ou de la consommation dans le cas des individus. Dans ce cadre formel, des choix rationnels différents peuvent être expliqués par des fonctions d'utilités différentes. Par exemple, on représente ainsi le fait que certains investisseurs préfèrent un portefeuille boursier peu risqué, alors que d'autres privilégient la perspective de performance.

On utilise souvent l'une des trois fonctions suivantes $u(\Pi) = \ln(\Pi)$, $u(\Pi) = \Pi$, $u(\Pi) = -\frac{1}{\Pi}$. Les deux premières ont l'avantage d'être agréables à dériver. La troisième se rapproche davantage des estimations économétriques basées sur les comportements observés. Cependant on ne peut pas dire que les observations des comportements d'épargne, d'assurance et d'investissement convergent pour donner une estimation précise de la fonction d'utilité réelle des agents.

Réécrire la Table 2.1 avec cette fonction pour calculer l'espérance de l'utilité à la place de l'espérance de gain montre dans ce cas que le choix optimal est $a = \beta$, comme dans une vision pessimiste du futur. A l'inverse, avec une fonction comme $u(\Pi) = \Pi^2$ qui sur-pondère les gains élevés (autre exercice, même si l'hypothèse est moins réaliste), le choix optimal est $a = \gamma$ comme dans une vision optimiste du monde.

Cet exemple montre qu'il est possible, dans le même cadre de la maximisation de l'espérance de l'utilité, de retrouver les résultats des trois règles de décision rationelle discutées précédement : maximax, maximin et espérance de gain. Tout dépend de la fonction choisie, qui traduit les préférences du décideur.

On peut alors se poser la question de la généralité de cet exemple. Etant donné un décideur, peut-on toujours représenter ses préférences dans ce cadre ? La puissance de la théorie provient du fait que la réponse est affirmative, sous réserve que ses préférences soient raisonnables.

Considérons par exemple une quatrième règle de décision rationelle : l'efficacité moyenne-variance. La règle dit qu'entre deux portefeuilles boursiers de même espé-

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

rance de gain, celui qui a la plus faible variance est préférée. Réciproquement, pour un même niveau de risque, le portefeuille le plus rentable en espérance est préféré. Notons que cette règle ne définit pas un optimum unique, mais une famille de portefeuilles efficaces. Dans cette famille, les portefeuilles plus performants (grande espérance de gain) sont aussi plus risqués (grande variance).

La famille des portefeuilles efficaces peut être obtenue en maximisant l'espérance de l'utilité quand les fonctions utilisés sont quadratiques. Il est immédiat en effet que leur espérance s'exprime exactement à l'aide des deux premiers moments : le gain espéré et sa variance. Il existe d'autres justifications pour la règle d'efficacité moyenne-variance : on peut aussi considérer le développement limité d'une utilité dérivable, pour de petits risques, ou alors le cas où la loi de probabilité est normale.

Cependant les professionnels de la gestion du risque n'utilisent pas toujours l'espérance de l'utilité. La famille de critères dits *safety-first* formalise aussi la précaution par rapport aux évènements de faible probabilité mais de grande conséquence. En effet, dans la tradition de « l'analyse du risque », un risque est défini par deux paramètres, la probabilité d'occurence et l'ampleur de la perte. Il peut alors être contrôlé selon chacune de ces deux directions.

La première direction consiste à minimiser la probabilité d'une catastrophe inacceptable, c'est à dire supérieure à un seuil donné. Réciproquement, on peut chercher à minimiser l'ampleur de la catastrophe définie comme étant le cas défavorable se produisant avec 5 pour-cent de probabilité (5-percentile inférieur), par exemple. Il est aussi possible de contrôler le risque dans les deux directions à la fois : maximiser le gain sous contrainte que la probabilité d'une catastrophe d'ampleur donnée ne dépasse pas un seuil donné.

Ces critères sont utilisés en particulier dans la régulation des institutions financières, à l'aide de la notion de *valeur exposée au risque*. La valeur exposée au risque VaR se définit à une échéance (3 mois par exemple) et à un niveau de risque donné (5% par exemple) comme suit : dans la distribution de probabilité des revenus à trois mois, c'est le 5-percentile du côté des pertes. La valeur au risque est une notion plus intuitive que la variance ou l'écart type : il y a 5 pourcent de chances de perdre plus que VaR durant les trois prochains mois.

Mais même si ce n'est pas toujours l'outil retenu en pratique pour la gestion du risque, la maximisation de l'espérance de l'utilité est le formalisme le plus souvent retenu lorsqu'il s'agit de définir théoriquement une norme de rationalité dans le risque.

2.3 Risque dynamique

A cause du caractère inter-temporel de l'incertitude, il faut maintenant compliquer le modèle de décision. Supposons donc que le marchand puisse choisir son emplacement au dernier moment, et que dans ce cas il accèdera à des prévisions météo fiables, c'est à dire certaines. La meilleure stratégie à adopter serait alors d'attendre le dernier moment pour choisir entre $a = \gamma$ et $a = \beta$ en fonction de l'information.

Cela permet de faire apparaître la notion de stratégie contingente, au coeur de la gestion dynamique du risque en économie. Le mot contingent est utilisé pour souligner que les actions dépendront des état du monde futur. C'est le sens de la remarque du Groupe Intergouvernemental pour l'étude du Climat « Le problème n'est pas de définir aujourd'hui la meilleure politique pour les 100 ans à venir, mais de choisir une stratégie avisée et de l'adapter ultérieurement à la lumière des progrès des connaissances », [IPCC, 1996].

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

La stratégie contingente optimale est de choisir γ si $s = C$, sinon choisir β. Le gain espéré du marchand est alors $\frac{(11+4)}{2} = 7.5$. Cela représente une amélioration de 1.5 par rapport à son évaluation précédente du gain espéré. On peut interpréter ce supplément de deux manières.

D'une part, il s'agit de la valeur de l'information météo pour le marchand. C'est la somme strictement maximale qu'il est disposé à payer pour obtenir la prévision. Ce concept de valeur espérée de l'information future est, d'un point de vue économique, généralisable à de nombreuses situations. Il permet par exemple de nommer les bénéfices sociaux de la recherche.

D'autre part, c'est la valeur de la flexibilité. En effet le supplément de 1.5 ne se réalise que si l'option de choisir l'emplacement est maintenu ouverte jusqu'à ce que l'information arrive. Dans un contexte où l'information est gratuite, le marchand de glace est prêt à payer jusqu'à 1.5 pour se réserver la flexibilité de choisir au dernier moment. La notion économique sous jacente est ici celle de valeur d'option.

Dans un contexte d'information croissante, il apparait donc utile de préserver la flexibilité des choix. Cet effet d'irréversibilité s'applique en particulier à la protection des ressources naturelles irremplaçables, comme l'ont montré Henry [1974] et Arrow and Fisher [1974].

La maximisation de l'espérance de l'utilité apparaît donc comme le cadre standard satisfaisant pour modéliser les situations de risque statique. Dans un cadre dynamique, il est encore possible de calculer les valeurs de l'information et d'option. Mais il est alors nécessaire de prévenir une confusion possible dans l'emploi du mot utilité en ce qui concerne ces aspects inter-temporels.

Lorsqu'un agent économique vit 2 périodes, son critère de décision est souvent formalisé comme $J(c_1, c_2) = f(c_1) + \beta f(c_2)$, où c_t représente sa consommation à la période t et où β , appelé facteur d'actualisation, peut représenter une préférence pure pour le présent. La concavité de la fonction f représente encore le fait que l'accroissement du gain monétaire procure de moins en moins d'utilité. Pour cette raison, elle est parfois appelé *utilité intertemporelle de la consommation*.

Cependant la fonction f représente des préférences par rapport à la répartition de la consommation dans le temps, alors que la fonction u représente des préférences vis à vis du risque. Pour marquer la différence, f est aussi appellée la fonction de *félicité intertemporelle* lorsque le contexte l'exige. C'est le cas par exemple lorsque $\tilde{c}_2$ est aléatoire, et qu'on écrit $J(c_1, \tilde{c}_2) = f(c_1) + \beta f(u(\tilde{c}_2))$.

Dans Ha-Duong and Treich [2004], nous avons exploré les conséquences théoriques et numériques de cette distinction entre utilité et félicité pour la gestion optimale d'une externalité de stock, en utilisant des préférences récursives du type ci-dessus. Nous avons considéré en particulier la famille de fonctions de bien-être iso-élastique dans lequel un paramètre γ exprime l'aversion relative au risque (courbure de u), et un paramètre distinct ρ commande la résistance à la substitution intertemporelle (qui dépend de la courbure de f et de l'hypothèse de croissance de la consommation).

Nous avons alors montré, d'abord avec un modèle analytique à trois périodes, que la politique climatique optimale répond différemment aux variations de ces deux paramètres. Plus précisément, c'est une augmentation de γ mais une diminution de ρ qui conduit à réduire davantage les émissions de CO_2. Nous avons ensuite confirmé que ces effets sont numériquement significatifs à l'aide d'un modèle intégré climat-économie qui calcule le niveau optimal de taxe sur l'énergie (voir fiche 2.1). Il s'agit d'un modèle intégré numérique calibré sur les scénarios à long terme du GIEC.

Cela met en lumière un problème avec les modèles dans lesquels les fonctions

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Programme 2.1 ULTRAL : Utilité Récursive

```
Nom:  ULTRAL
   branche dérivée en 1999 de DIAM 2.2 avec utilité récursive

Taille:
   4 périodes de 30 ans, risque binaire
   Économie mondiale, cycle du carbone à zéro dimension

Type:
   Optimisation intertemporelle
   Anticipation parfaite avec arrivée d'information
   Modèle de croissance AKE à taux d'épargne fixé
   Analyse coût-bénéfice de la protection du climat
   Utilité récursive

Prérequis:
   Pour faire tourner le modèle de base: GAMS et solver NLP
   Pour reproduire les résultats du papier: make, awk, gnuplot, perl

Intégration:
   Le modèle économique contient une approximation linéaire
   des modèles du cycle du carbone

Inputs:
   Paramètres des fonctions d'utilité, de félicité, d'actualisation
   Paramètres de la fonction de dommage climatique stochastique
   Scénario de base population + coût relatif de l'énergie
     + progrès technique + taux d'épargne

Outputs:
   Niveau de taxation optimal de l'énergie
   Emissions de C, concentration de CO2, dommages
   Capital, énergie, production, consommation par tête
   Utilité de chaque génération
   Équivalent certain de l'utilité de la génération suivante
```

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

d'utilité et de félicité intertemporelle sont paramétrées par un seul et même nombre, l'élasticité de la fonction d'utilité. Cela empêche de considérer les préférences d'un décideur qui serait par exemple très averse au risque et en même temps très solidaire des générations futures. Nous en concluons que les modèles usuels, basés sur la maximisation de la somme intertemporelle de l'utilité espérée, c'est à dire dans lesquels $\gamma = \rho$, ne peuvent pas interpréter correctement la sensibilité des politiques climatiques optimales à l'élasticité de la fonction d'utilité (appelée en général paramètre d'aversion au risque).

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a exposé la différence entre risque et incertitude, puis exposé la théorie standard de la décision rationnelle dans le risque. En résumé, la maximisation de l'espérance de l'utilité est le formalisme le plus souvent retenu lorsqu'il s'agit de définir théoriquement une norme de rationalité dans le risque.

Cette théorie est aussi applicable pour des situations dynamiques, surtout si on fait l'hypothèse de neutralité au risque qui élimine le problème du choix d'une fonction d'utilité et de félicité. La suite de ce mémoire traite de la prise en compte du risque dans la modélisation intégrée du changement climatique.

Mais ce modèle standard n'est pas toujours l'outil retenu en pratique pour la gestion du risque. Il est aussi régulièrement falsifié par des expériences sur les choix des agents en situation d'incertitude. Il faudra donc étendre la discussion sur la rationalité en situation d'incertitude.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 3

Incertitude et modélisation intégrée

Ce chapitre présente une revue des méthodes utilisées en modélisation intégrée du changement climatique, en s'intéressant plus particulièrement à l'analyse de l'incertitude. Il construit sur les deux thèmes exposés aux chapitres précédents, à savoir la modélisation intégrée d'un problème d'environnement global et la théorie du risque.

Analyser l'incertitude, c'est essentiellement évoquer plusieurs futurs. Il s'agit toujours d'exécuter le modèle le long de multiples chemins d'exécution, pour aboutir à une famille de résultats. Trois genres d'approches sont utilisées :

- L'analyse de sensibilité et la construction de scénarios constitue un premier genre d'approche. Il se caractérise par l'indépendance logique entre chaque futur évoqué. Le calcul de 3 scénarios, par exemple, peut s'effectuer en parallèle sur 3 machines déconnectées entre elles. Lorsqu'on fait des statistiques sur un grand nombre de simulations, plus de 100, on parle de méthodes d'ensembles. Lorsque les paramètres de l'ensemble sont tirés au hasard en fonction d'une distribution de probabilité (et non systématiquement en suivant un plan d'expérience), on parle de méthode de Monte Carlo.
- Les méthodes basées sur les contraintes prennent en compte de l'incertitude non spécifique pure. En particulier la théorie de la viabilité vise explicitement à modéliser des problèmes pour lesquels les probabilités précises ne sont pas disponibles. Une caractéristique de ces méthodes est que le résultat n'est pas une famille finie de n futurs. C'est un continuum caractérisé dans son ensemble, calculé en une seule fois et sans privilégier aucune trajectoire particulière à l'intérieur.
- Le troisième genre d'approche utilise la programmation dynamique stochastique exposée au chapitre précédent. L'incertitude y est à nouveau réduite au risque, c'est à dire que l'on suppose donnée une loi de probabilité. Le flot des calculs diffère encore des deux approches précédentes. Contrairement à la viabilité le modèle explicite un petit nombre de chemins futurs, et contrairement à l'analyse de sensibilité ces chemins sont calculés tous ensemble et non de façon indépendante. Le résultat vise une interprétation prescriptive, puisque les calculs aboutissent à un plan d'action optimal, déterminant de façon univoque ce qu'il faut faire à court terme mais aussi comment adapter l'action en fonction sur l'arrivée d'information sur s.

Les trois sections de ce chapitre discutent successivement ces trois genre d'ap-

proches.

3.1 Méthodes de base : futurs disjoints

3.1.1 Catégories de modèles intégrés

Comme l'analyse de l'incertitude nécessite d'évaluer plusieurs ou un grand nombre de futurs, le temps d'exécution du modèle devient un critère essentiel du choix des méthodes utilisées. Les méthodes d'ensembles, par exemple, ne sont pratiquables que si l'exécution d'une simulation est rapide devant la durée de la recherche. Or certains types de modèles intégrés sont par nature numériquement plus difficiles à résoudre. Par exemple, un modèle déterminé uniquement par les conditions initiales est plus commode qu'un modèle déterminé par les conditions initiales et finales.

Un modèle intégré peut être vu comme une fonction $f(a, s)$ de deux arguments. Le premier argument est une variable représentant la commande du système, autrement dit l'acte a qu'il s'agit de discuter. Le second argument est un jeu de paramètres s représentant l'état du monde incertain.

L'acte a est la variable de commande. A ce niveau d'abstraction, l'acte a peut représenter un simple niveau de consommation moyen par individu, mais c'est plus souvent une trajectoire inter-temporelle dans un espace à plusieurs dimensions : par exemple les quotas d'émissions de CO_2 par secteur d'activité et par région du monde. Ainsi la notation a ne représente pas nécessairement un nombre réel, mais une fonction vectorielle qui dépend du temps qu'il aurait été trop lourd de noter $\mathbf{a}(t)$. La contrainte $a \in A$ représente la décision à prendre parmi l'ensemble des décisions possibles *a priori*.

Le paramètre s est incertain. Pour le changement climatique comme pour beaucoup de problèmes d'environnement controversés, l'incertitude porte sur deux termes appelés en général le risque direct et le risque inversé. Le risque direct est ici que l'augmentation des émissions de gaz à effet de serre dans l'atmosphère conduit à des perturbations potentiellement dangereuses du climat. Le risque inversé est celui de mal diriger l'économie par des politiques de réduction d'émissions inappropriées qui peuvent perturber le fonctionnement du secteur énergétique.

Concernant la dimension du temps, il faut distinguer deux classes : d'une part les modèles déterminés par des conditions initiales seulement, de l'autre ceux déterminés par les conditions initiales et finales.

Un modèle déterminé par les conditions initiales peut être résolu de façon récursive, en déduisant successivement l'état du monde à la date t à partir de l'état du monde à la date $t - 1$. La modélisation des systèmes naturels, dans lesquels les causes produisent des effets ultérieurs, conduit naturellement à ce type de modèle. Cela conduit à une classe de modèles dits de *simulation*, dans lequel l'acte a et les paramètres s sont distingués au niveau de l'interprétation mais pas dans l'implémentation du modèle. La fonction f est multidimensionnelle, elle peut décrire les conséquences des actes dans un grand détail. Typiquement ce genre de modèle est à même de simuler l'évolution de plusieurs variables, sur plusieurs régions du monde, pendant plusieurs décennies avec un pas de temps annuel ou plus fin.

Les modèles dits d'*équilibre général* sont aussi déterminés par les conditions initiales. Mais leur résolution est plus lourde que la simulation pure, car le modèle optimise l'allocation des biens à chaque période. Cette optimisation intra-période simule un état des marchés, puisque sous les hypothèses d'efficacité, de complétude, d'anticipation parfaites et de rationalité des agents, l'optimum coïncide avec l'équilibre. Même

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

si le truchement est un peu gros, cet artifice de modélisation représente des forces économiques bien réelles qui font qu'à service rendu égal, les agents se tournent d'abord vers la technologie la moins coûteuse.

Les modèles déterminés par les conditions initiales et finales peuvent servir à représenter les comportements d'anticipation des agents, comme vouloir respecter une contrainte environnementale à long terme. Mais cela implique de prendre comme variable d'état la trajectoire $a(t)$ dans sa globalité, et multiplie donc la taille du problème par le nombre de pas de temps. Cela conduit à une classe de modèles dits d'*optimisation intertemporelle*, dans lesquels la justification de l'optimisation est normative : le modèle calcule la meilleure décision pour un planificateur bienveillant rationnel.

Dans ce type de modèles f est aggrégée en un seul nombre interprété comme une mesure de bien-être de l'Humanité. C'est par exemple la somme actualisée du logarithme de la consommation. Le modèle calcule alors l'acte a^* qui maximise cet objectif global. On notera alors $U(a, s)$ plutôt que $f(a, s)$ le modèle. Par rapport au chapitre précédent sur la décision, la fonction-objectif aggrège aussi les aspects multi-acteurs et multi-critères. Même si l'échelle de bien-être est graduée en unités monétaires, U prend théoriquement en compte les aspects non-marchands. On vise par exemple une préférence intrinsèque pour un climat traditionnel comme élément de culture locale.

Théoriquement, ces trois types de modèle se prêtent aux mêmes méthodes d'analyse de l'incertitude. Mais il faudra plus de ressources pour un modèle résolu par optimisation intertemporelle que pour un modèle de simulation.

3.1.2 Analyse de sensibilité et Monte Carlo

Dans tous les cas le premier temps, même si on dispose d'une distribution de probabilité sur les paramètres s, est d'examiner d'abord comme cas central le problème certain dérivé. En première approximation, on remplace donc les paramètres aléatoires par leur espérance. Pour le modèle d'optimisation intertemporel, cela s'écrit :

$$J^* = \max_{a \in A} U(a, \sum_s p_s s) \tag{3.1}$$

Les variables duales permettent de connaître, au voisinage de l'optimum, la variation du résultat par rapport à de petites variations des paramètres.

Dans un deuxième temps on s'intéresse aux grandes variations des paramètres. Pour cela on réalise une *analyse de sensibilité* qui vise à tester la robustesse du modèle vis à vis du calibrage, c'est à dire au choix de s. On parle d'incertitude paramétrique. Ayant calculé l'acte optimal a^*, on examine ses variations par rapport aux changements dans les paramètres s, en étudiant chaque paramètre s_k l'un après l'autre. Classiquement, il s'agit de recalculer les résultats du modèle en ayant doublé ou divisé par deux la valeur de l'un des paramètres s_k. Cela informe sur la robustesse numérique du modèle, et sur l'importance relative des paramètres.

Par exemple, dans le modèle de politique climatique DICE de Nordhaus [1994], les paramètres les plus importants se rapportent à 1/ la décélération de la croissance de la population, 2/ la décélération de la croissance de la productivité, 3/ le taux de préférence sociale pure pour le présent, 4/ la vitesse de décroissance de l'intensité en GES de la production, 5/ l'intercept de la fonction de dommage.

Mais si l'analyse de sensibilité permet de mettre en évidence quels sont les paramètres critiques du modèle, elle présente deux limites fondamentales. D'une part, elle n'informe que sur le modèle et non la réalité. En effet doubler la valeur numérique de tel ou tel paramètre n'a pas la même pertinence en fonction de la largeur de la plage

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

d'incertitude associée. D'autre part, elle ne permet pas d'explorer les variations jointes des paramètres.

C'est pourquoi dans un troisième temps, les méthodes dites d'ensemble sont utilisées lorsque les ressources en calcul le permettent. Elles consistent à calculer le modèle un grand nombre de fois, en changeant à chaque fois les paramètres s. On est ainsi ammené déterminer un ensemble de résultats du modèle intégré, correspondant à un ensemble de paramètres. Différentes techniques existent pour choisir les points sur lesquels évaluer le modèle. Dans les techniques dites de Monte Carlo, le choix des paramètres s est tiré au hasard en fonction d'une distribution de probabilité sur s.

Pour un modèle d'optimisation, cela revient à examiner à chaque fois la meilleure politique climatique en faisant comme si s était connu, ce qui se note de la façon suivante :

$$J_s^* = \max_{a \in A} U(a, s) \tag{3.2}$$

L'aboutissement de ce genre d'analyse peut conduire à évaluer une distribution de probabilité sur le résultat, en fonction des probabilités *ex ante* sur s. Ce type de résultat devrait être traité avec la plus grande prudence. En effet, son interprétation demande une bonne compréhension de la nature de la distribution de probabilité initiale, qui n'est pas nécessairement dérivée de fréquences empiriques bien observées.

Si ces méthodes sont intensive en calcul, à cause de l'explosion combinatoire avec le nombre des paramètres, elles sont facilitées par l'existence de progiciels prêt à l'emploi. Elles ont aussi l'avantage de pouvoir être utilisées aussi bien avec un modèle de simulation récursive qu'avec un modèle d'optimisation intertemporelle ou d'équilibre général. Et elles ne nécessitent pas de modifier le code du modèle lui-même, celui-ci peut rester une boîte noire tant qu'il est possible de modifier les paramètres d'entrée et récupérer les résultats. Enfin la parallélisation des calculs est relativement aisée, puisque chaque fil d'exécution est indépendant.

3.1.3 Scénarios

Les scénarios peuvent être abordés comme une suite logique des étapes précédentes. Dans cette séquence, l'analyse de sensibilité est d'abord utilisée pour déterminer les paramètres critiques. Puis on leur attribue des distributions de probabilité, explorées par les méthodes de Monte-Carlo. Enfin la sélection d'un nombre réduit de scénarios contrastés et informatifs peut s'opérer, par exemple en considérant les quantiles de la distribution empirique des résultats.

Mais l'analyse de sensibilité d'un modèle ne permet jamais de capturer l'ensemble des savoirs relatifs à un problème donné. Par définition, un modèle même intégré présente des limites, et l'exercice conduit ainsi à privilégier la réflexion sur ce qu'il a été possible de modéliser au détriment du reste. Ce type d'analyse nécessite souvent des hypothèses fortes sur l'indépendance des paramètres externes du modèle, comme par exemple les taux de croissance démographique et économique.

L'approche historique de la construction des scénarios est totalement différente de l'analyse de sensibilité. Il s'agit de partir d'abord d'un ensemble de visions du monde décrites narrativement, et d'en déduire accessoirement des paramétrisations numériques. Cette méthode met l'accent sur le rôle non-prédictif des modèles, qui sont surtout utilisés comme instruments de communication pour projeter des images plus parlantes du futur.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Au risque de heurter la logique déductive, cette approche de la scénarisation n'exclut pas les aller-retours pour redéfinir les paramètres en fonction des résultats. En effet, elle ne vise pas à prédire le futur, mais à entretenir une conversation stratégique à l'intérieur de l'organisation qui construit les scénarios, afin d'attirer l'attention des cadres sur les opportunités et les besoins d'adaptation de cette organisation.

C'est ainsi par exemple que concernant le changement climatique, deux scénarios sont souvent opposés pour focaliser la discussion sur l'importance du court-terme dans l'évaluation des trajectoires de réduction. Ils reposent sur la construction de deux profils d'émissions de gaz à effet de serre compatibles avec la stabilisation de la concentration de CO_2 à 550 ppmv à long terme mais contrastés dans leurs implications politiques à court terme. Le scénario construit à partir de la proposition « suivre la trajectoire de référence pendant deux décennies » est appelé `W550`, alors que le scénario « agir tôt en réduisant les émissions » est `S550`. Ils sont représentés sur la Figure 4.1 page 36.

Les deux approches s'opposent quand à l'usage des probabilités, puisque si elles guident fondamentalement l'analyse utilisant un modèle, elles sont au contraire rejetées d'emblée par l'approche narrative. En tentant une synthèse de cette opposition avec les probabilités imprécises, le chapitre 10 proposera une approche formelle des règles de la prospective.

3.2 Viabilité : l'incertitude non-spécifique pure

3.2.1 Acceptabilité, bornes et contraintes inter-temporelles

Morgan and Henrion [1990] rappellent que les méthodes sophistiquées exposées ci dessus doivent aussi êtres complétées par des analyses simples. Le modélisation numérique ne doit pas faire oublier que les lois fondamentales de conservation, les équilibres, l'analyse dimensionnelle et le bon sens permettent souvent de dire beaucoup. L'approche qui vise à déterminer des ordres de grandeur pour borner le problème est appelée Bounding Analysis.

L'analyse des bornes est également inévitable pour des raisons pratiques. Pour construire un modèle numérique, il est nécessaire de choisir des unités de mesure, ce qui conduit à des plages de valeurs intuitivement raisonnables pour les variables utilisées. Il est également souhaitable d'inclure ces bornes pour une bonne exécution du code. Par exemple, sauf à accorder une confiance aveugle dans les capacités de l'ordinateur et des logiciels, il faut mettre les variables à l'échelle entre 0.01 et 100 dans un problème d'optimisation numérique. C'est pourquoi langages de modélisation comme GAMS permettent d'associer des bornes supérieure et inférieure à chaque variable, même les langages de programmation généralistes n'offrent pas cette capacité nativement.

Or, du point de vue de l'analyse de l'incertitude, l'analyse des bornes peut être vue comme la formalisation de l'incertitude non-spécifique pure. La théorie de la viabilité étend l'analyse des bornes dans un cadre inter-temporel.

L'approche en viabilité vise à caractériser l'ensemble des trajectoires satisfaisant un jeu de contraintes $f(a, s) \in K$ donné à toutes les périodes, en respectant les contraintes sur le contrôle admissible $\{a \in A\}$. L'incertitude sur les paramètres s n'est pas représentée par une distribution de probabilité, mais par une contrainte non spécifique $s \in S$.

Une différence essentielle avec l'analyse de sensibilité est que toutes les trajectoires possibles sont déterminées par un seul calcul, et non par des variantes autour d'un scénario principal. Les techniques de viabilité se rapprochent des méthodes d'ensemble,

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

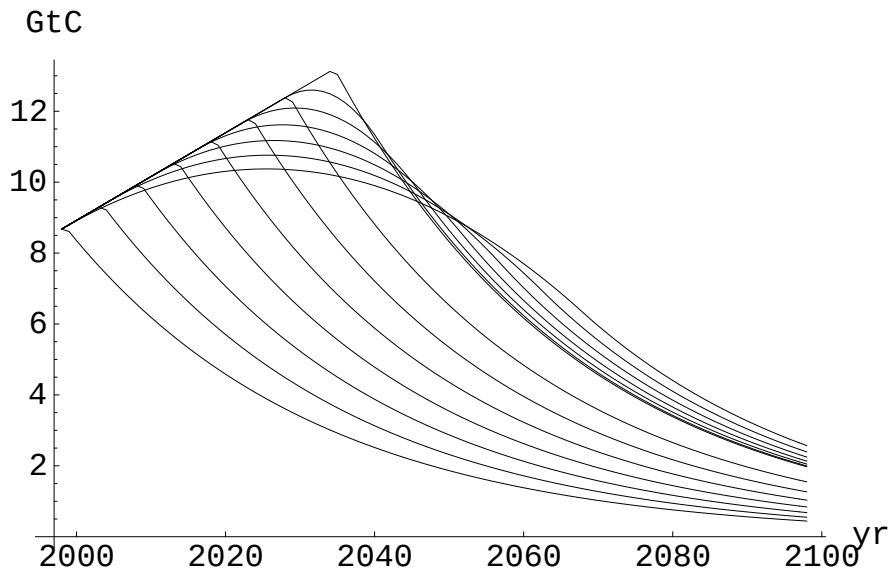


FIG. 3.1 – Un couloir de viabilité.

mais en remplaçant l'idée d'échantillonnage par l'idée d'une exploration exhaustive des contraintes.

3.2.2 Illustration d'un couloir de viabilité

Dans ce cadre le groupe de modélisation intégrée de Potsdam, au PIK, développe la « Tolerable Windows Approach » . Le projet ICLIPS (Integrated Assessment of Climate Protection Strategies, Toth et al. [1997]) utilise un modèle climat-océan-atmosphère représentant une dizaine d'espèces et les impacts régionalisés du réchauffement global pour calculer l'ensemble des profils d'émission compatibles avec un jeu de contraintes écologiques et socio-économiques données.

De façon comparable l'équipe d'IMAGE au RIVM a procédé à une analyse selon le concept de Safe Landing Corridor, décrite par Leemans and Kreilman [1999]. L'approche consista à : 1/ Tirer un large échantillon de scénarios d'émission, calculer les impacts associés. 2/ Filtrer l'échantillon précédent par des contraintes de faisabilité technico-économiques. 3/ Filtrer à nouveau en fonction d'objectif d'environnement. Pour la dernière étape, les chercheurs ont utilisé une maquette statistique de la relation impact-émissions déterminée sur l'échantillon de départ, maquette qui tourne en quelques secondes au lieu de plusieurs heures.

Afin de mieux faire comprendre le type de résultats obtenus par cette approche, un petit modèle en *Mathematica* a été développé pour illustrer le concept de couloir de viabilité. Dans cette maquette, $a = (t_1, t_2)$, les trajectoires d'émissions globales de CO_2 sont définies par deux dates-clés t_1 et t_2. Ces dates délimitent trois périodes. Pendant la première période, de t_0 à t_1, les émissions mondiales augmentent linéairement en suivant la tendance de référence. La seconde période est caractérisée par une trajectoire parabolique entre t_1 et t_2, c'est un temps de transition[1]. La troisième période, au

[1]Les raccords en t_1 et t_2 sont tels que la trajectoire d'émissions en fonction du temps reste continue et dérivable.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

delà de t_2 présente une décroissance exponentielle des émissions au taux constant de 3% par an.

Parmi cet ensemble de trajectoires, la Figure 3.1 illustre celles qui sont compatibles avec un plafond de concentration fixé à 500 ppmv. Ce plafond de concentration constitue ici la contrainte de viabilité. La zone entre les enveloppes supérieure et inférieure de cette famille de courbes constitue le couloir de viabilité. Par tout point du couloir il passe au moins une courbe viable, même si par souci de clarté toutes ne sont pas représentées sur la figure.

Représenter toutes les trajectoires viables aurait obscurci la remarque fondamentales propre à cette technique : toute courbe arbitraire tracée à l'intérieur du couloir n'est pas nécessairement viable. En particulier, la frontière supérieure n'est pas une trajectoire viable. Plus le décrochage par rapport à la tendance intervient tard, plus la période de transition doit être brève, et plus le passage sur un mode de décroissance exponentielle doit intervenir tôt.

3.2.3 Discussion critique

L'inconvénient le plus important de l'approche en viabilité est qu'il est difficile de trouver des progiciels prêt à l'emploi pour ce genre d'analyse. En effet la théorie est plus moderne par rapport à l'analyse des systèmes classique. C'est un inconvénient car ce type d'approche est comparativement intensif en calcul par rapport à l'optimisation intertemporelle. Mathématiquement, la viabilité peut être vue comme une théorie plus générale dont l'optimisation dynamique est un cas particulier. Aubin [1999, ch. 2] montre comment les théorèmes de la viabilité permettent d'éclairer les problèmes classique de la théorie du contrôle optimal. Par exemple, toute trajectoire optimale sous contraintes est viable par rapport à ces mêmes contraintes.

Sur le plan numérique, les calculs en viabilité sont plus lourds car ils visent à caractériser d'un seul coup l'ensemble de toutes les trajectoires viables, et non à calculer un optimum unique. Pour cela elles représentent la dynamique du système avec une inclusion différentielle et non une simple équation différentielle. L'analyse est ainsi multi-valuée, et la notion de fonction dérivée (un scalaire) est remplacée par celle de cône tangent (dans un espace multi dimensionnel).

L'avantage le plus important est qu'elle se dispense de probabilités. En effet, beaucoup de problèmes d'économie et d'écologie sont peut-être mieux analysés en formalisant l'incertitude non spécifique pure dans un cadre inter-temporel. Le tunnel de viabilité permet ainsi de donner une image visuelle intuitive de la plage de décisions qui préservent la stabilité d'un système environnemental, même non linéaire.

Pour répondre à un problème social, il est nécessaire de passer par plusieurs étapes : remarquer l'existence d'un problème, reconnaître que c'est une urgence, décider de faire quelque chose, et enfin déterminer qui et comment agir. L'analyse de viabilité des systèmes est un outil particulièrement approprié pour la deuxième étape du processus. Il permet de donner une alerte de façon claire et sans s'encombrer des problèmes philosophiques des probabilités subjectives : la figure 3.1 suffit à montrer la nécessité de réduire drastiquement les émissions de CO_2 à moyen terme.

3.3 Optimisation dynamique stochastique

Cette section examine une méthode qui s'intéresse non plus à une famille d'actions et de trajectoires mais à ce qu'il faudrait faire à court terme, compte tenu des

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

incertitudes.

L'approche la plus directe et répandue utilise les probabilités subjectives. Dans ce contexte, il est alors possible de sophistiquer l'analyse de risque, pour prendre en compte le caractère inter-temporel de la décision. Cette dernière section met en oeuvre le concept de stratégie contingente introduit précédement avec le Marchand de Glaces. En particulier, elle offre une perspective plus détaillée sur Ha-Duong [1998c] et les questions soulevées récement par Treich [2000, note 12].

3.3.1 Modéliser l'arrivée d'information

Dans l'analyse de risque classique, le modèle décrit une situation dans laquelle on choisit d'abord un acte, le risque étant résolu ensuite. C'est la situation du Marchand de Glaces au début de la section 2.2. Dans le cadre des modèles du changement climatique, Manne and Richels [1992] qualifie de situation « Act Then Learn » (ATL) ce type de raisonnement où la maximisation de l'utilité espérée s'écrit :

$$J^*_{ATL} = \max_{a \in A} \sum_{s \in S} p_s \, U(a, s) \tag{3.3}$$

Dans le modèle d'analyse du changement climatique utilisé en coût-efficacité, une telle formalisation induit un comportement pessimiste. En effet, la contrainte de plafonner à 450 ppmv dans le cas défavorable dicte le résultat, même si sa probabilité subjective n'est qu'un tiers. Sur la figure 4.1, ce cas conduit donc à une trajectoire basse, proche des courbes `Kyoto` et `U550`. Ce résultat pourrait être considéré comme un défaut méthodologique du fait que s représente une contrainte stricte sur les concentrations de CO_2.

En effet, il ne s'agit pas de choisir aujourd'hui pour le siècle prochain en considérant seulement le pire des cas. L'enjeu est d'adopter une stratégie de précaution susceptible de s'adapter, car le problème du changement climatique est intergénérationel. Prendre en compte le caractère séquentiel de la décision nécessite donc bien d'utiliser la notion de stratégie contingente introduite section 2.2.

Supposons que l'état du monde s se révèle en 2020. La politique climatique $a = (a_1, a_2^s)$ se décompose en deux programmes, l'avant et l'après 2020. La première partie, a_1, représente la stratégie avant l'observation de l'état du monde s. La seconde partie, a_2^s, représente les différentes actions adaptées en fonction de la valeur de s observée. L'intuition essentielle de la programmation dynamique est que la maximisation de l'espérance de l'utilité s'opère en deux étapes en commençant par la fin :

En 2020, le choix optimal a_2^s maximisera $U(a_1, a_2^s, s)$, étant entendu que dans cette expression s et a_1 seront constants, puisque l'état du monde sera observé et l'action en première période sera terminée. Posons $V(a_1, s) = \max_{a_2^s} U(a_1, a_2^s, s)$.

En première période, le programe de décision est la maximisation de l'espérance de l'utilité soit $\sum_{s \in S} p_s V(a_1, s)$. La maximisation est écrite en sachant que le second choix sera optimal.

Le mode de résolution qui en suit est appelé « Learn Then Act » (LTA) pour les modèles intégrés du changement climatique. Les deux étapes peuvent s'écrire en une seul formule :

$$J^*_{LTA} = \max_{a_1} \sum_{s \in S} p_s \max_{a_2^s} U(a_1, a_2^s, s) \tag{3.4}$$

sous la contrainte $\forall s, \ (a_1, a_2^s) \in A$. Une stratégie contingente optimale de ce type est illustrée figure 4.1 par les courbes `U550`. Dans cet exercice, nous avons supposé

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

que le choix d'un objectif de long terme (450, 550 ou 650 ppmv) était pris en 2020 avec équiprobabilité.

3.3.2 Technique du programme certain équivalent

Pour résoudre numériquement, il est utile de ramener le programme précédent à un programe comportant un seul opérateur de maximisation. Supposons que s puisse prendre N valeurs distinctes. En considérant les a_2^s comme N variables indépendantes, on peut écrire :

$$J^*_{LTA} = \max_{a_1, a_2^s} \sum_{s \in S} p_s U(a_1, a_2^s, s) \tag{3.5}$$

Une seconde astuce technique facilite l'implémentation de la formule (3.4) dans les modèles. Sur la figure 4.1, il s'agit de considérer que la courbe `U550` dans sa partie avant 2020 résulte en fait de la superposition des trois branches confondues. En terme de programmation, on considère que l'ensemble des actions $a = (a_1, a_2^s)$ n'est autre que comme l'ensemble des actions $a(s) = (a_1^s, a_2^s)$ sous la contrainte que a_1^s est indépendant de s.

Il est alors possible de ramener la formule (3.4) à la la résolution d'un programme décrit par la formule (3.3) dans lequel la dimension du problème a été multiplié par N.

$$J^*_{LTA} = \max_{a(s)} \sum_{s \in S} p_s U(a(s), s) \tag{3.6}$$

Sous la double contrainte $\forall s,\ a(s) \in A$ et $\forall\, s, s' \in S,\ a_1^s = a_1^{s'}$.

La 'recette' pour obtenir (3.6) à partir de (3.3), c'est à dire résoudre en stratégie contingente un problème de décision exprimé comme la maximisation de l'espérance de l'utilité est donc : faire dépendre les actions de l'état du monde, et lier les actions avant l'arrivée de l'information. Dans des langages spécifiquement conçus pour formuler des problèmes d'optimisation comme GAMS, la mise en oeuvre est assez simple.

On peut alors accéder à la valeur espérée de l'information future $EVFI^*$, qui se définit comme la différence entre J^*_{ATL} et J^*_{LTA}. Dans le cas du changement du climat, cette valeur correspond au bénéfice social attendu des recherches sur la géophysique et sur les impacts permettant de définir un plafond acceptable.

L'importance de préserver la flexibilité des choix, avec la notion de valeur d'option, peut ains être quantifiée. Un acte a_1 sous-optimal en première période dégrade la valeur de l'information future : si les émissions de CO_2 continuent à croître exponentiellement, une alerte à propos de bifurcations climatiques autour de 450ppmv sera inutile.

Conclusion du chapitre

Gérer l'incertitude dans un modèle, c'est ne pas se restreindre à une seule image du futur. Pour cela le modèle standard de l'espérance de l'utilité n'est finalement qu'une approche parmi d'autres. Même si ce paradigme domine les travaux théoriques stylisés, en pratique comme on ne dispose pas de probabilités objectives sur le long terme plusieurs façons de rendre multivoque l'analyse sont justifiées : l'optimisation stochastique, mais aussi les simulations ou les approches basées sur les contraintes.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 4

Politiques optimales, risque climatique

Ce chapitre discute de la précaution dans les politiques climatiques à l'aide du modèle intégré DIAM, un Modèle sur la Dynamique de l'Inertie et de l'Adaptabilité.

La première section offre un cadrage général du problème du changement climatique basé sur Ha-Duong [1998a, 2000a,b], Ha-Duong and Hourcade [2002]. La seconde section de ce chapitre, basée sur [Ha-Duong et al., 1997, 1998, Ha-Duong and Dumas, 2001], analyse la question du tempo optimal de l'action : compte tenu des incertitudes et des coûts, vaut-il mieux agir dès maintenant pour limiter la croissance des émissions de gaz à effet de serre ? La troisième section analyse quelques aspects de la séquestration géologique du carbone qui apparaît comme une technologie prometteuse dans l'optique d'une réponse affirmative à cette question de la précaution.

4.1 Politique climatique, incertitude et rationalité

4.1.1 Un problème sous controverse

Des progrès importants ont été réalisés cette dernière décennie dans la compréhension du problème du changement climatique et de ses remèdes. On est raisonnablement sûr que pour éviter un changement du climat dangereux, à long terme (200 ans) il est nécessaire de diviser d'un facteur quatre au moins les émissions mondiales de gaz à effet de serre par rapport à leur niveau actuel. On s'attend aussi à ce que la concentration de dioxyde de carbone dans l'atmosphere dépasse 550 ppmv avant la fin du siècle si rien n'est fait pour réduire les émissions.

Mais il reste de grandes incertitudes. Selon IPCC [1996, 2001], le réchauffement global moyen pour 2100 pourrait être compris dans une plage de +2 à +5,5 degrés en 2100. C'est très imprécis. A fortiori il reste extrêmement difficile de donner une représentation plus détaillée des conséquences climatique et humaines du réchauffement global, surtout dans l'hypothèse la plus préoccupante de changement abrupts dans la dynamique du climat [NAS, 2002, Alley et al., 2003, Schwartz and Randall, 2003].

Afin de prévenir une évolution trop dangereuse, les négociations internationales sont menées dans le cadre de la Convention Climat. Celles-ci ont débuté sur le modèle des traités protégeant la couche d'ozone évoquées au chapitre 1. Mais il s'agit d'un problème bien plus vaste. C'est une question de précaution intergénérationnelle, car la

durée de vie du CO_2 dans l'atmosphère est largement supérieure à celle des CFC. Et concernant l'effet de serre l'incertitude concerne tout autant les coûts des politiques de lutte que les risques environnementaux, car il n'existe pas de substitut industriel aux énergies fossiles qui serait assez largement disponible pour répondre aux besoins.

La différence entre le cas de l'ozone et celui du changement climatique transparaît notament dans la différence entre le Groupe Intergouvernemental d'Experts sur le Climat (IPCC) et le Technology and Economic Assessment Panel (TEAP) du Protocole de Montreal sur les substances appauvrissant la couche d'ozone. L'IPCC a pour mission première de rapporter l'état des connaissances scientifiques, c'est une communauté scientifique tournée vers l'académique. Le TEAP a pour mission première de disséminer des solutions techniques, c'est un réseau d'experts tournés vers l'industrie.

Dans Ha-Duong and Hourcade [2002], nous avons exploré en quoi le changement climatique est représentatif d'une classe de problèmes d'environnement dans lesquels les décisions doivent êtres prises sous controverses. Nous arguons que ce genre de situations se distingue par trois traits caractéristiques : ignorance scientifique, médiatisation et besoin d'innovation technique.

- L'ignorance scientifique est un problème parce que les décisions doivent être prises avant la résolution des incertitudes concernant l'évolution du climat.
- La médiatisation est un élément clé parce que les agents ne peuvent pas véritablement sentir une expérience directe du changement climatique global, et certains partis intéressés (comme les générations futures) ne peuvent pas participer aux décisions.
- Troisièmement, le besoin d'innovation est crucial car la technologie d'aujourd'hui offre seulement une alternative entre les combustibles fossiles et le nucléaire comme source principale d'énergie primaire.

La médiatisation et l'ignorance scientifique conduisent, plus que dans d'autres types de problèmes de décision, à une utilisation stratégique de l'information.

4.1.2 L'incertitude au risque de la manipulation

C'est bien le cas pour les négociations sur le climat. En effet, à Kyoto en 1997 les pays industrialisés se sont accordés collectivement sur un objectif quantitatif pour réduire leurs émissions de gaz à effet de serre. Selon ce protocole, à l'horizon 2008–2012 les émissions devraient retomber à environ 5% sous le niveau de 1990. Mais durant la période 2000-2004, le gouvernement des États-Unis d'Amérique a mis en avant l'incertitude, le besoin d'une connaissance scientifique solide, pour ne pas ratifier le protocole. La viabilité politique du Protocole apparaît ainsi aléatoire. Le temps pris pour réunir les ratifications nécessaires fait que l'entrée en vigueur légale du protocole (pas avant 2004) est plus proche de la fin de la période en couverte (2012) que du début supposé des actions (1992).

L'incertitude sur les coûts de réduction nourrit aussi les négociations sur le type de réponse à apporter au problème du changement climatique. Sur le long terme on peut analyser l'historique des négociations comme une oscillation entre deux modes de régulation. D'un coté, l'adoption par tous les pays du monde d'une taxe sur le carbone. De l'autre, le marché des permis d'émissions, qui exige que chaque pays reçoive un quota sous la forme d'une cible de réduction.

Malgré l'organisation d'un marché pour les réductions d'émission de CO_2 en Europe, on peut penser que les objectifs quantitatifs du protocole de Kyoto ne seront pas tenus. Un retour des négociations vers plus de politiques et mesures coordonnées pourrait donc se produire.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Face à la manipulation stratégique de l'incertitude et au rapport de force géopolitique dans la construction de la réponse intergouvernementale au changement climatique, il apparaît ainsi utile de proposer des modèles analytiques de rationalité collective et de l'intérêt commun. Les recherches proposées dans la suite ne nient pas l'importance de modéliser les aspects multi-acteurs de la controverse. Mais pour y arriver, il a paru nécessaire d'examiner d'abord les notions d'information et de rationalité en situation d'incertitude.

4.1.3 Les buts du planificateur bienveillant

Dans ce chapitre, on en restera donc au paradigme classique du planificateur bienveillant. En faisant abstraction des conflits d'intérêt internationaux, en quels termes analyser la rationalité de l'objectif de Kyoto en tenant compte des connaissances que l'on peut néanmoins avoir sur la dynamique du système et les objectifs de long terme ?

D'après les termes même de la Convention Climat, la rationalité de Kyoto devrait être jaugée par rapport aux idéaux suivants : le droit au développement durable, le principe de précaution, la responsabilité commune mais différenciée et l'efficacité économique.

Ces principes pourraient sembler usés à force d'être répétés dans la littérature sur le sujet. C'est en fait cette répétition qui fait leur valeur. En effet, comme en droit international il n'existe pas d'autorité supérieure susceptible de faire valoir une Constitution préalablement établie, ni de jurisprudence abondante, dans ce domaine c'est la réaffirmation constante des principes clé qui aide à constituer la doctrine.

Quantifier précisément les progrès vers ces idéaux est une entreprise bien au delà de l'état de l'art actuel. En effet, leur définition est vague et l'observation des grandeurs physiques et humaines associées difficile. De plus ils peuvent entrer en conflit les uns avec les autres. Mais ces difficultés tant théoriques que pratiques ne discréditent pas toute tentative de modélisation. Au contraire, c'est un champ de recherche pluridisciplinaire contemporain actif. Dans quelle mesure la programmation dynamique stochastique sous contraintes présentée au chapitre 3 précédent représente-t-elle ces principes idéaux ?

- Les résultats vérifient pleinement en théorie le critère d'efficacité économique puisqu'ils résultent d'une optimisation intertemporelle de l'utilité.
- Les résultats résultent d'une forme de principe de précaution. En effet il ne s'agit pas d'une politique climatique optimale décidée dès le départ, mais bien d'une stratégie adaptative qui prend en compte l'arrivée future d'information.
- Les modèles intégrés du changement climatique visent explicitement à déterminer des trajectoires durables en imposant des contraintes à long terme sur le réchauffement global. Ils peuvent représenter les mécanismes de la croissance économique pour aider à comprendre les problèmes de développement.
- Le principe de responsabilité commune mais différenciée peut se traduire dans les modèles régionalement désagrégés par des hypothèses ou des contraintes sur le partage des coûts de réduction des émissions.

L'existence d'énormes incertitudes a un effet déterminant sur le sens et la portée d'un modèle d'optimisation même stochastique. En l'absence de système d'observation planétaire et de mesures globales directes concernant les aspects sociaux et économique, un tel modèle ne peut pas prétendre synthétiser vraiment l'état de la société globale. C'est ainsi que le modèle utilisé dans ce chapitre, DIAM, ne prétend pas représenter les mécanismes de la croissance, ni les responsabilités régionalement désagrégées. En ayant moins de détails, le modèle a toutefois plus de lisibilité.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Le but d'un tel modèle est d'abord de confirmer de façon cohérente des ordres de grandeur et de donner des représentations graphiques non-arbitraires. Les résultats doivent être vus comme l'illustration d'arguments construits par ailleurs, qui tiennent en eux-même. En particulier l'expression *trajectoire optimale* est utilisée au sens mathématique du terme : c'est l'optimum du programme, mais les résultats ne prétendent pas constituer des prescriptions sociales normatives.

Ayant ainsi posé les limites de l'exercice, injecter des ordres de grandeur réalistes dans un modèle d'optimisation stochastique va permettre de cadrer certains débats sur la base de principes consensuels de rationalité collective plutôt que sur la manipulation stratégique de l'incertitude.

4.2 DIAM : Dynamics of Inertia and Adaptability Model

Le problème étudié dans la suite est celui du tempo de l'action de réduction des émissions. Wigley et al. [1996] ont remarqué que pour un même objectif à long terme de limitation du réchauffement global, différentes trajectoires sont possibles. Certaines trajectoires font porter un effort important sur la génération actuelle, d'autres reportent l'essentiel de la charge dans 20 ans ou plus. Les résultats des modèles attirent l'attention sur une différence de coût en faveur d'une action tardive, compte tenu de l'actualisation intertemporelle, du progrès technique et de l'inertie du système énergétique mondial.

En réponse le modèle intégré DIAM a été utilisé pour reprendre cette analyse et fixer quelques idées sur le lien entre actions à court terme et objectifs à long terme. Les résultats montrent que dans un contexte d'incertitude dynamique, un certain niveau de précaution est préférable.

4.2.1 Le modèle

La fiche-programme 4.1 décrit les principales caractéristiques de DIAM. Le listing de la version 2.5 de ce modèle est inclus à partir de la page 46, discuté en détail dans Ha-Duong [1998a]. Il s'agit d'un modèle dynamique stochastique qui calcule une stratégie optimale de réduction des émissions mondiales de CO_2 compte tenu des coûts de réduction et de l'inertie dans le secteur énergétique. Le modèle intègre un cycle du carbone linéaire qui permet d'imposer des contraintes sur la concentration atmosphérique en CO_2 (version coût-efficacité) ou alors d'intégrer un effet négatif de l'augmentation du CO_2 sur le bien-être.

Dans les versions initiales de ce modèle, l'incertitude concerne le plafond ultime acceptable pour la concentration de CO_2 dans l'atmosphère. La variable aléatoire s est le plafond ultime exprimé en parties par million de volume, ppmv. Elle est équidistribuée entre 450 ppmv, 550 ppmv et 650 ppmv (la concentration était autour de 275 ppmv avant l'ère industrielle). La variable de contrôle $a(t)$ représente la trajectoire de réduction des émissions mondiales de dioxyde de carbone en fonction du temps. L'objectif U est une fonction quadratique décroissante de a, représentant le coût économique et social des politiques de contrôle des émissions polluantes.

La Figure 4.1 montre des futurs possibles pour les émissions mondiales de CO_2 (axe vertical gradué en Gigatonnes de carbone) au cours du temps (axe horizontal gradué de l'année 2000 à 2025). La trajectoire supérieure `IS92a reference` représente ce qui pourrait se passer en l'absence de politique spécifique : les émissions mondiales de CO_2 croissent de 8 à 12 gigatonnes de carbone par an en trois décennies.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Programme 4.1 DIAM : Dynamics of Inertia and Adaptability Model

```
Nom:  DIAM
      Dynamics of Inertia and Adaptability Model

Taille: 30 périodes de 10 ans, risque ternaire
        Économie mondiale, cycle du carbone à zéro dimension
        Seulement 3 équations d'évolution

Type: Optimisation intertemporelle de l'utilité/félicité
      Anticipation parfaite avec arrivée d'information
      Analyse coût-bénéfice de la protection du climat (v. 2.3)

Prérequis:
      Pour faire tourner le modèle de base: GAMS et solver NLP
      Pour reproduire les résultats du papier: patdeph, make, awk, gnuplot, perl

Intégration:
      Le modèle économique contient une approximation linéaire
      des modèles du cycle du carbone par convolution

Inputs/Paramètres:
   Coût de réduction initial et taux de progrès technique exogène
   Consommation mondiale initiale et taux de croissance
   Temps caractéristique des systèmes énergétiques
   Taux d'actualisation et taux de déclin des dommages
   Forme et magnitude de la fonction de dommage (stochastique)
   Date et plafonds de stabilisation de la concentration
   Probabilités subjectives et dates de résolution

Outputs/Variables d'état:
  Concentration of CO2 (parties par million)
  Niveau de réduction (fraction des émissions fossiles de reference)
  Couts totaux, abatement plus climate change
```

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

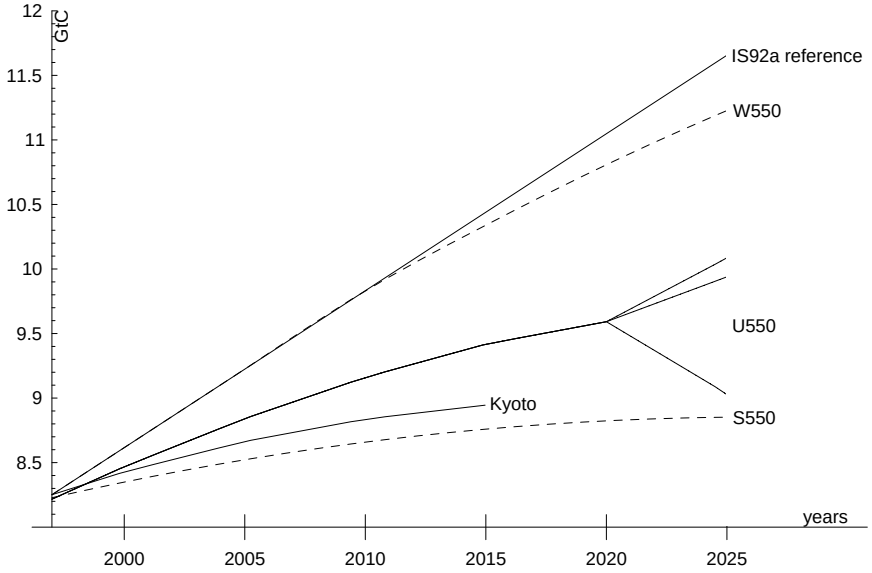


FIG. 4.1 – Différentes trajectoires d'émissions de CO_2 pour le prochain quart de siècle. Source Ha-Duong [1998a].

L'analyse de sensibilité (méthode présentée au 3.1.2 page 23) suggère de s'intéresser d'abord à ce qui se passe lorsque le plafond ultime est fixé dès le départ, avant de discuter les résultats de la version stochastique du modèle. Cela permet de mettre en évidence, sur la Figure 4.1, les courbes en tireté qui correspondent à deux scénarios bornant les options réalistes à court terme.

Il s'agit de deux trajectoires compatibles avec un plafond ultime de concentration fixé arbitrairement dès le départ à 550 ppmv, soit environ le double de la concentration avant l'ère industrielle. La courbe `S550` correspond à une trajectoire de précaution dans laquelle on vise ce plafond en imposant des réductions d'émissions fortes dès le début. La courbe `W550` est calculée sous la contrainte de suivre la trajectoire de référence jusque 2010, avant de viser une stabilisation vers 550 ppmv.

La trajectoire `Kyoto` représente ce qui pourrait se passer si les limitations quantitatives du Protocole de Kyoto étaient respectées. Cette courbe ne se prolonge pas jusqu'en 2025 puisque le Protocole ne spécifie rien au delà de la première période d'engagement. Comment qualifier cet objectif ?

4.2.2 Résultat en coût-efficacité

L'étude de `W550` par la modélisation intégrée permet de montrer que ne rien faire maintenant est physiquement compatible avec un plafond de long terme à 550 ppmv. De plus on peut montrer que, en utilisant les hypothèses communes de progrès technique et de taux d'actualisation, le coût total de la trajectoire haute est inférieur au coût total de la trajectoire basse[1] : c'est plus cher d'agir tôt. Et lorsque le modèle calcule une trajectoire d'émissions optimale qui vise 550 ppmv dès le début, le résultat reste bien plus proche de `W550` que de `S550`. Tout ceci suggère effectivement que pour aller vers cet objectif de long terme, il serait économiquement plus efficace de suivre la

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

trajectoire de référence pendant une ou deux décennies.

En complément certains analystes ont argumenté que 450 ppmv est une cible ultime irréaliste car trop coûteuse, nécessitant des mesures destabilisant le système énergétique mondial établi. Si on rejette la cible 450 ppm pour se concentrer seulement sur 550 ppm, il est alors possible de conclure que Kyoto est trop ambitieux, puisqu'il se détache de la trajectoire de référence.

Une critique essentielle du raisonnement précédent est que l'on ne peut pas être certain que 550 représente une plafond sans danger. Le ressort caché du raisonnement est qu'on écarte d'entrée l'hypothèse qu'on veuille jamais atteindre un objectif ambitieux, pour conclure qu'il n'est pas urgent d'agir. C'est évidement un sophisme. La rationnalité consiste plutôt à rechercher une stratégie de précaution optimale en optimisant la trajectoire d'émissions compte tenu de l'incertitude.

Pour cela DIAM a été résolu en supposant que le plafond ultime de concentration, décidé en 2020, pouvait être 450, 550 ou 650 ppmv avec équiprobabilité. Cette hypothèse permet de définir une stratégie optimale en coût-efficacité. En utilisant la programmation dynamique sous contrainte stochastique, le modèle calcule comment atteindre au moindre coût cette contrainte environnementale (aléatoire) fixée extérieurement au modèle.

Cette stratégie contingente est illustrée par la courbe `U550` de la Figure 4.1, qui bifurque en trois branches après 2020. Une seule des trois branches sera suivie, en fonction du plafond ultime choisi. Deux résultats principaux sont visibles.

Premièrement, la stratégie optimale est entre les deux courbes en tireté. Même si les réductions ne sont pas aussi fortes que selon `S550`, la stratégie optimale dévie significativement de la trajectoire de référence à court terme. La nécessité de pouvoir bifurquer vers une trajectoire de réduction ambitieuse (vers 450 ppm) implique une réduction des émissions à court terme significative. Ce résultat permet donc de rappeler que le principe d'efficacité économique n'est pas aussi contradictoire avec le principe de précaution, sauf à ne pas tenir compte de l'incertitude dans les modèles [Ha-Duong et al., 1997, Ambrosi et al., 2003].

Deuxièmement, le modèle a été ensuite utilisé dans Ha-Duong et al. [1998] pour analyser les problèmes de cohérence dynamique du Protocole de Kyoto. Il apparaît que le Protocole exige encore plus de réductions que $U550$. Il semble ainsi en ligne avec une vision dans laquelle le plafond de 450 ppmv est très sérieusement considéré, avec une probabilité supérieure à un tiers.

La critique précédente de `W550` peut-être à son tour attaquée en disant que le modèle impose une contrainte environnementale trop stricte à cause de sa logique coût-efficacité. Le choix d'un plafond ultime de concentration peut être interprété comme résultant d'une confrontation entre trois groupes d'opinion, défendant respectivement 450, 550 et 650 ppmv. Dans ce cadre, la stratégie optimale peut être vue comme une 'dictature de la minorité'. En effet elle garde ouverte l'option d'atteindre un plafond de 450 ppm quel qu'en soit le coût, ce qui est irréaliste.

4.2.3 Résultat en coût-bénéfice

En réponse, afin de tendre vers une meilleure représentation probabiliste des risques climatiques globaux, j'ai réalisé avec Patrice Dumas l'extension du modèle de politique climatique optimale DIAM au cadre coût-bénéfice. La version 2.3 de DIAM n'impose

[1] Il a été moins dit que les résultats montrent une différence de coût entre les deux trajectoires est faible en valeur relative.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

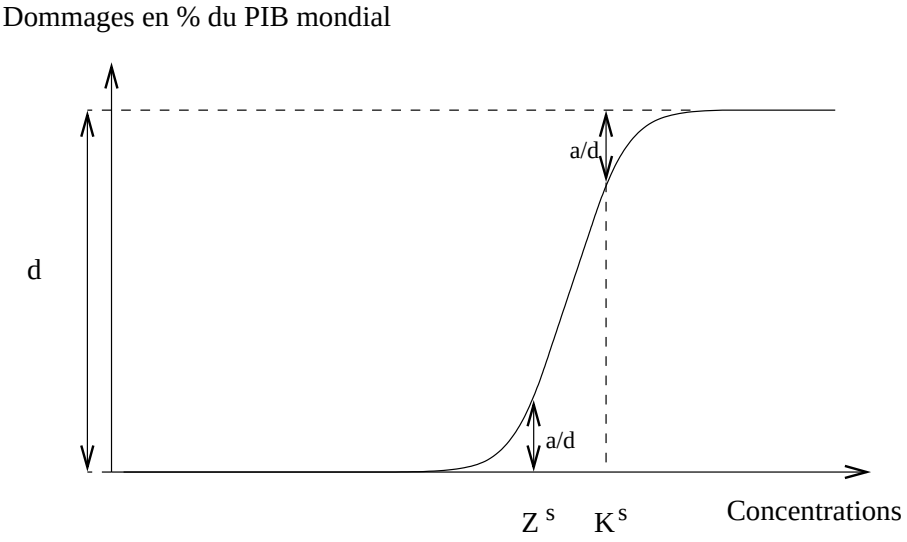


FIG. 4.2 – Fonction de dommage non linéaire.

pas une contrainte sur la concentration de CO_2, mais trouve un équilibre entre les coûts de réduction et les impacts produits par le changement climatique.

Les impacts sont représentés par une fonction de dommage (voir 4.2), qui relie l'augmentation de concentration à une perte de production (et donc d'utilité) mondiale. Le modèle est toujours résolu en programmation dynamique. L'incertitude porte sur la fonction de dommage, on suppose que ses paramètres ne seront connus qu'à partir de 2020.

Le modèle ainsi porté dans le cadre coût-bénéfice est directement comparable à certains travaux [IPCC, 2001, p. 350, figure TS-10b] qui tendaient à montrer que le niveau de couverture optimale face à un risque de catastrophe climatique était remarquablement proche de l'absence de couverture. En d'autres termes, ces travaux suggéraient bien que l'effet de précaution sur les réductions optimales à court terme serait beaucoup moins sensible en coût-bénéfice.

Nous avons montré que ces résultats disparaissent lorsqu'on adopte une forme plus réaliste pour la fonction de dommage. Dans les modèles précédents l'incertitude était sur les paramètre d'une fonction de dommage $D = \theta_1(\Delta T)^{\theta_2}$, une fonction linéaire ou puissance. Nous avons comparé ces cas avec la fonction à seuil représentée figure 4.2, dans laquelle l'incertitude porte sur le niveau Z^s à partir duquel les dommages marginaux croissent vite.

Les résultats de DIAM 2.3 en 2020 (pourcentage de réduction optimale des émissions de CO_2, niveau d'émissions et coût de réduction) pour différentes fonctions de dommage stochastiques sont représentées Table4.1.

Dans le scénario de référence, les émissions mondiales de CO_2 atteignent 10.9 GtC en 2020. La seconde et la troisième ligne correspondent aux stratégies optimales lorsque l'incertitude porte respectivement sur θ_1 et θ_2 d'une fonction de dommage à croissance régulière. La dernière ligne correspond à la fonction de dommage à seuil de la figure 4.2. Il apparaît que la dépense optimale affectée à la réduction des émissions est augmentée de moitié dans ce cas (elle passe de 0.04 pourcent à 0.06 pourcent du Produit Mondial Brut).

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

	Réduction (%)	Émission (Gt C)	Coût de réduction (%)
Référence	0	10.91	0
Échelle	7.2	10.21	0.04
Exposant	6.8	10.24	0.04
Seuil	8.4	10.09	0.06

TAB. 4.1 – Résultats de DIAM 2.3

L'existence d'un seuil dans la fonction de dommage climatique permet de retrouver l'effet de précaution sur les trajectoire d'émission optimales, compte tenu de l'inertie importante dans les systèmes énergétiques et économiques. Or la possibilité de bifurcation abrupte dans la dynamique océan-atmosphère en moins d'une cinquantaine d'années, est bien au centre des préoccupations actuelles des recherches sur le climat.

Ces simulations montrent donc qu'il est possible de retrouver les résultats comparables à `U550` en coût-bénéfice. Le seuil de la fonction de dommage constitue un plafond mou dont l'effet sur la trajectoire optimale n'est guère différent d'une contrainte stricte de stabilisation.

4.3 Une gestion industrielle du CO_2

Jusqu'à ce point ces travaux sur le tempo optimal de l'action supposent l'irréversibilité à long terme des émissions de CO_2. Cette hypothèse pourrait être remise en question par l'émergence d'une filière technologique qui prend de plus en plus d'importance : le stockage géologique du CO_2, qui ouvre la voie à une option plus radicale encore : la capture à partir de l'air. Quelles seraient les implications sur les trajectoires d'émissions optimales ? Le modèle DIAM a été étendu pour prendre en compte ces options et examiner les conséquences sur les politiques climatiques optimales.

4.3.1 La faisabilité du stockage géologique

Dans Ha-Duong and Keith [2003], nous expliquons que les combustibles fossiles peuvent être utilisés avec peu d'émissions en capturant le dioxyde de carbone et en le stockant dans des structures géologiques. Nous calculons par exemple qu'une grande quantité de CO_2, nettement supérieure aux émissions totales prévisibles pour ce siècle, pourrait être dissoute dans les nappes phréatiques souterraines profondes.

Un autre type de réservoir souterrain stable à l'échelle de temps géologiques correspond aux gisements d'hydrocarbures. Il existe en effet des réservoirs de CO_2 quasi-pur. Plusieurs sont exploités commercialement, comme les dômes McElmo, Bravo et Mountain Sheep dans le bassin Permien (Texas). Le premier contient de l'ordre de 2 Gt de CO_2. Le gaz extrait, de l'ordre de 20 Mt par an, est transporté par pipelines sur plusieurs centaines de miles, puis est utilisé pour améliorer la performance des puits de pétrole. L'expérience de séquestration de Statoil montre que la technologie est disponible : une incitation économique forte aboutit au stockage d'environ 1 Mt de CO_2 qui autrement aurait été libéré dans l'atmosphère lors de la purification du gaz naturel extrait du champ de Sleipner ouest, en mer du Nord.

Plusieurs problèmes restent à résoudre avant que cette technologie ne puisse contribuer significativement à la prévention du changement climatique. Le premier est celui de la capture, car les sources industrielles de gaz riches en CO_2 ne représentent qu'une

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

faible fraction des émissions totales. Par exemple, la quantité de CO_2 capturée dans une grosse unité de l'industrie des hydrocarbures, comme la centrale de gazification du charbon de Weyburn, Canada, est de l'ordre du million de tonnes alors que les émissions de ce pays sont de l'ordre de 725 millions de tonnes de CO_2 équivalent (source : inventaire national canadien 2000).

Pour capturer une fraction plus importante, il est nécessaire de récupérer le gaz à partir des produits de combustion dans les centrales électriques. Cela entraînera une baisse de rendement des centrales et une augmentation du coût de l'électricité. Cependant les études technico-économiques actuelles [IPCC, 2005, IPC, 2002] admettent que ce surcoût pourrait être mis dans en rapport raisonnable avec la valeur des permis d'émission du CO_2, comme la suite le montre.

4.3.2 Permanence et intérêt économique

Au delà de la faisabilité technique, la faisabilité économique de la séquestration est soumise à deux problèmes principaux, la permanence et la pénalité énergétique. La question de la permanence est un synonyme pour parler du problème des fuites. Une fraction du carbone stocké pourrait fuir vers l'atmosphère, ce qui limiterait l'utilité de cette technologie. La pénalité énergétique est la baisse des rendements des centrales, cela entraîne une utilisation de combustibles fossiles plus importante, en contradiction potentielle avec l'objectif de réduction des émissions.

L'évaluation économique de cette technologie doit donc prendre en compte, en plus du coût marginal c pour capturer et stocker une tonne de carbone, la pénalité énergétique et la somme intertemporelle actualisée des coûts futurs pour compenser les fuites. Notons μ la quantité de carbone émis pour capturer et stocker une unité de carbone. Si l'on suppose que la fuite est à taux annuel constant λ, avec un taux d'actualisation δ, on peut comparer directement de la valeur d'un stockage imparfait comparativement à stockage sans fuite ni pénalité énergétique [Ha-Duong and Keith, 2003]. Le ratio d'équivalence entre ces deux modes de réduction d'émission est :

$$r = \frac{\delta}{\lambda + \delta} - \mu \tag{4.1}$$

La formule montre par exemple que si le taux de fuite annuel est de 1 pour cent et le taux d'actualisation de 4 pour cent, par exemple, alors le stockage (temporaire) de la tonne de CO_2 se compare à l'élimination (permanente) de 0.8 tonnes de ce même gaz. Il faut également déduire de ce ratio la pénalité énergétique, peut-être de l'ordre de 30 pourcent. Un taux d'actualisation plus bas diminue l'intérêt du stockage géologique, puisque l'effet des fuites devient plus important.

Ce calcul montre que même avec ces ordres de grandeur relativement pessimistes, les projets de séquestration à coût marginal faible ne sont pas à exclure a priori. Avec un prix du carbone de 40 dollars par tonne, le modèle microéconomique prescrirait d'effectuer tous les projets de séquestration revenant à moins de 20 dollars par tonne.

Ce calcul simple de faisabilité économique ne lève pas à lui seul les barrières technologiques et socio-économiques. Mais il suggère néanmoins de faire quelques expériences numériques à propos de ce qu'il se passerait si la séquestration était adoptée comme une composante importante de la lutte contre l'augmentation atmosphérique du CO_2. Pour cela la version 2.5 de DIAM[2] inclut la possibilité de stocker le carbone dans

[2] Ici l'ordre de présentation des résultats de DIAM 2.4 et 2.5 inverse l'ordre historique de développement du modèle.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

un réservoir imparfait, pour un coût de 150 dollars par tonne de carbone en incluant les coûts récurents et les coûts d'adaptation transitoires.

Les résultats numériques présentés Table 4.2 sont cohérents avec les résultats analytiques. On s'intéressera d'abord à la moitié du haut de cette table. Les lignes correspondent à différentes hypothèses sur le taux de fuite annuel. Les colonnes montrent, en 2050 et 2150, trois variables : le pourcentage de réduction obtenu par les technologies conventionnelles X ; le pourcentage obtenu avec la backstop Z et la concentration atmospherique de CO_2. Les résultats ont été obtenus en résolvant DIAM avec la contrainte que $X + Z$ ne dépasse pas 100% des émissions de reference.

La colonne correspondant à Z pour 2050 ne figure pas car la technologie backstop Z n'est utilisée dans aucun scénario à cette date. Avec les paramètres centraux, le modèle représente l'idée que le coût marginal de cette backstop sera encore supérieur au coût marginal des technologies conventionnelles X en 2050. On rappelle que le modèle trouve un optimum global, avec anticipations parfaites (principe d'efficacité économique), et donc comme il s'agit d'un calcul intertemporel et non récursif, $Z = 0$ jusqu'en 2050 n'implique pas que X soit aussi identique.

Trois résultats qualitatifs émergent. À l'optimum, l'activité de stockage Z est d'autant moins utilisée que le taux de fuite est grand. Les technologies de réduction conventionnelle X se substituent au stockage lorsque le taux de fuite augmente. Avec un stockage parfait, la quantité de carbone capturé et stockée est inférieure mais du même ordre de grandeur que les réductions d'émissions conventionnelles. Quantitativement, ce résultat reste visible jusqu'à 1 pour mille de fuites par an, mais à 0.5 pourcent la capture joue un rôle négligeable, et à 1 pourcent elle n'est pas du tout utilisée.

Si on considère maintenant la concentration atmosphérique de CO_2, les résultats suggèrent que les niveaux optimaux en 2050 et en 2150 varient dans des sens opposés lorsque le taux de fuite augmente. L'intuition derrière ce résultat est la suivante. Un taux de fuite de nul, c'est disposer d'un puit à long terme parfait, ce qui abaisse le coût de contrôler les émissions de gaz à effet de serre. Cela implique deux effets sur les trajectoires optimales. À long terme, l'équilibre des coûts et des bénéfices est déplacé dans le sens d'un environnement plus propre. Mais à court terme, la répartition des efforts est déplacée vers les générations futures, et l'effort de réduction dans les périodes initiales est plus faible.

En résumé, les résultats numériques sont cohérents avec les résultats analytiques. Ils montrent qu'avec un taux de fuite de un pour mille par an, cette technologie est utilisée dans la stratégie optimale, mais que 0.5% de fuite par an rend la technologie peu attrayante. L'explication intuitive de ce résultat est que le stockage industriel d'une quantité significative de carbone conduit à envisager de l'ordre de 100 GtC sur le siècle. Un taux de 0.5% correspond à une fuite en CO_2 de 0.5 GtC par an, difficilement compatible avec l'objectif environnemental de stabiliser la concentration de ce gaz à effet de serre.

Au fond le problème de la permanence est une question de distribution inter-générationelle des coûts et des bénéfices. L'interprétation simple de ces travaux est qu'un taux de fuite petit devant le taux d'actualisation, donc de l'ordre de un millième par an est économiquement négligeable. En ce qui concerne les recommandations politiques, il pourraît être judicieux d'intégrer à ce chiffre un facteur technique de sécurité élevé. Exiger un temps de résidence moyen de l'ordre de dix mille ans pourrait donc être une base de discussion technique sérieuse.

Le stockage géologique du carbone apparaît comme une option intéressante dès à présent. Elle pourraît être étendue et généralisée à moyen terme, en fonction des régulations dans le secteur de la production centralisée d'énergie. Le développement d'un

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

réseau d'infrastructures de transport et d'injection du CO_2 pourrait ouvrir la voie à une génération suivante de technologies visant à une gestion active du CO_2 atmosphérique.

4.3.3 La capture directe à partir de l'air

La capture à partir de l'air diffère des techniques de mitigation conventionnelles par trois aspects clés :

1. Cela revient à diminuer les émissions dans tous les secteurs de l'économie de façon identique. Son coût représente donc une borne supérieure du coût de réduction.
2. La capture à partir de l'air permet une baisse de la concentration atmosphérique en CO_2 plus rapide que le cycle naturel du carbone. Les effets d'irréversibilité sont ainsi en partie effacés.
3. Étant moins couplée à l'infrastructure énergétique existante, la capture à partir de l'air pourrait offrir des économies d'échelle plus importantes et des coûts d'installation plus faibles que certaines technologies de mitigation conventionnelles.

Nous avons étudié les limites thermodynamiques sur la quantité d'énergie et la surface nécesssaire pour la capture à partir de l'air dans Ha-Duong and Keith [2002], Keith et al. [2005]. D'après nos calculs, ces limites thermodynamiques ne constituent pas d'obstacles insurmontables *a priori*, car elles se comparent favorablement aux limites sur les énergies renouvelables. Nous décrivons également deux systèmes qui pourraient permettre la capture atmosphérique à des coûts de l'ordre de 200 dollars la tonne de carbone, en utilisant des technologies existantes. Le premier système est basé sur la capture chimique avec du carbonate de calcium. L'autre est basé sur la production d'énergie par la biomasse avec récupération du CO_2.

Des simulations ont été réalisées avec DIAM 2.4 pour explorer l'effet de la capture à partir de l'air sur les stratégies climatiques optimales. Techniquement, il s'agit simplement de retirer une contrainte sur la pénétration d'une technologie de réduction à coût marginal constant (appelée 'backstop'). Lorsqu'on suppose que la capture à partir de l'air est disponible la réduction totale peut dépasser 100% des émissions de référence.

Comme le geoengineering, la capture atmosphérique limite l'ampleur du scénario climatique le plus défavorable. Dans un schéma de décision séquentielle sous incertitude, l'existence de la capture atmosphérique diminuerait le besoin de réductions par précaution à court terme. Mais l'effet à long terme est opposé, si l'on suppose que le coût marginal de mitigation diminue avec le temps alors que le dommage climatique marginal augmente. On peut dans ces conditions envisager que cela pourrait impliquer une courbe de Kuznets environnementale, dans laquelle la concentration de gaz à effet de serre retourne vers les niveaux préindustriels. Cet effet est visible même en résolvant le modèle de façon déterministe.

Les résultats sont apparents sur la Table 4.2 et Figure 4.3. Les trajectoires optimales montrées sur la Figure 4.3 concernent deux variables, les émissions (en haut) et les concentrations (en bas) mondiales de CO_2. Outre les trajectoires de référence (courbes en tirets longs), ces figures permettent de comparer deux scénarios. La courbe en traits continus correspond à la première ligne sur la Table 4.2, c'est à dire l'hypothèse de séquestration sans fuite et d'absence de capture directe à partir de l'air. La courbe voisine, en pointillés, correspond à l'avant dernière ligne sur la Table (0.5 pourcent de fuite annuelle, capture possible à partir de l'air).

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

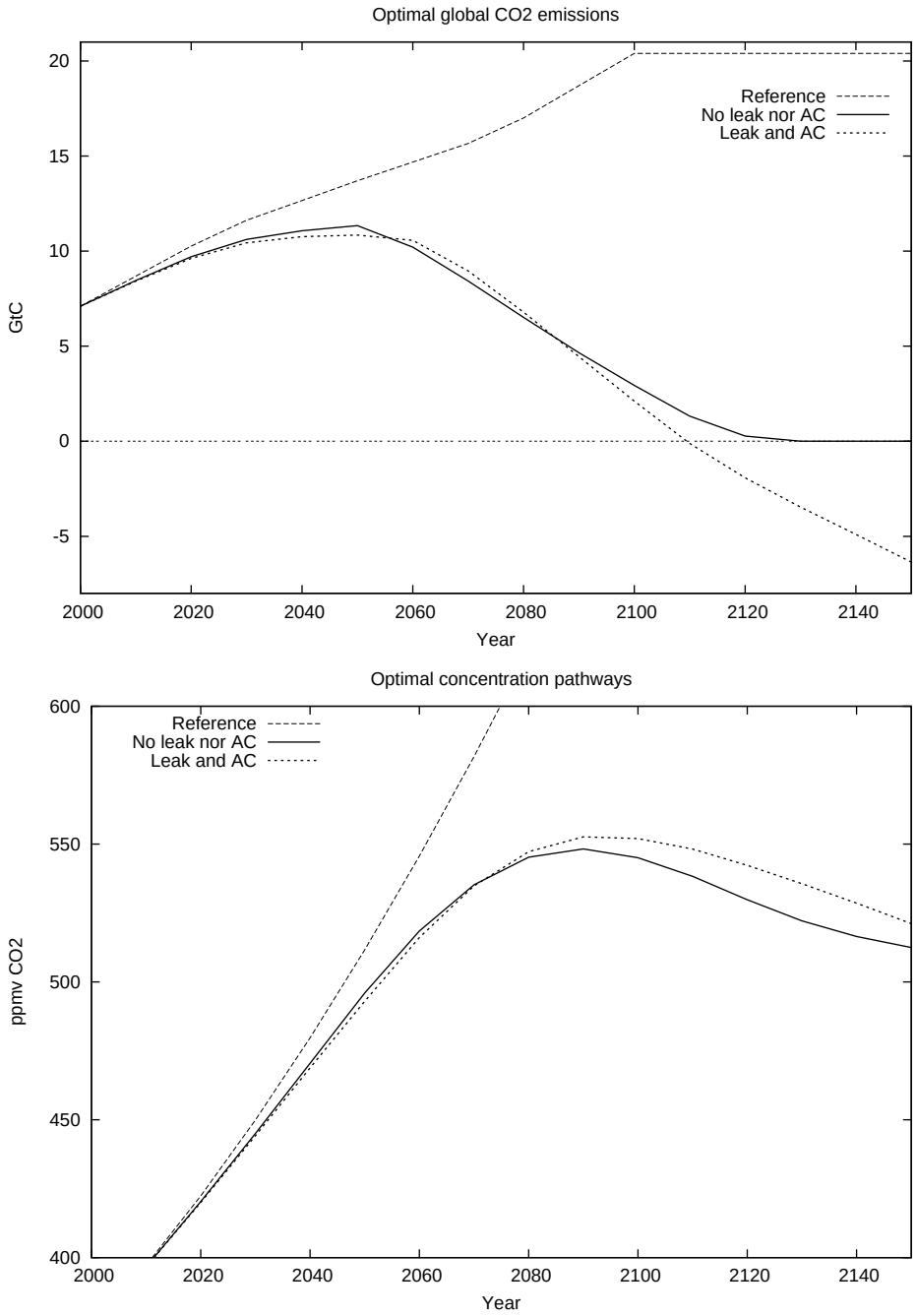


FIG. 4.3 – Trajectoires de CO_2 optimales, DIAM 2.4. En haut, émissions mondiales de carbone, sans inclure les fuites dues au stockage géologique. En bas, concentration atmosphérique de CO_2, en parties par million.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

		Optimum in 2050		Optimum in 2150		
Air capture ?	Leak rate (%/yr)	Abatement X %	[CO_2] ppmv	Abatement X %	Storage + Z %	[CO_2] ppmv
No	0	17	496	52	47	512
No	0.1	18	494	61	38	525
No	0.5	23	491	93	6	533
No	1	23	490	100	0	529
Yes	0	17	496	58	57	494
Yes	0.1	17	495	61	54	507
Yes	0.5	20	492	86	57	521
Yes	1	23	490	100	0	529

TAB. 4.2 – Résultats et analyse de sensibilité, DIAM 2.4. Les réductions d'émissions optimales X sont en pourcentage des émissions de référence. La concentration atmosphérique de CO_2 est en partie par millions. La quantité de carbon capturé et stockée Z est donné comme un pourcentage des émissions de référence, et est zéro en 2050 pour tous les scénarios. Dans la partie inférieure de la table, la possibilité de capture à partir de l'air est modélisée en relachant la contrainte $X + Z < 100\%$ dans le programme d'optimisation.

La figure illustre avant tout le calibrage du modèle. La forme générale des trajectoires optimales narre le scénario plausible suivant. Durant les prochaines décennies, il y aura une lente déviation des tendances actuelles, à cause de l'inertie considérable du système énergétique mondial. Tard dans le siècle, la concentration atmosphérique de dioxyde de carbone se stabilisera aux alentours de ce qui constitue, dans ce modèle, le plafond mou fixé à 550 parties par million. Au siècle suivant, cette concentration diminuera.

Il n'est pas question de discuter ici de la désirabilité de ce scénario, et encore moins de sa probabilité. Le modèle est utilisé pour examiner la sensibilité des trajectoires optimales à deux paramètres. Le premier paramètre est le taux de fuite du carbone séquestré, entre 0 et 1 pourcent par an. Le second paramètre est la possibilité ou non de capturer le carbone directement à partir de l'atmosphère. Les résultats présentés Table 4.2 étant remarquablement insensibles au paramètre de pénalité énergétique μ, il est gardé constant dans les simulations.

Les résultats présentés dans la moitié supérieure de la table ont été discutés plus haut. La moitié inférieure de la Table 4.2 présente les résultats obtenus en relaxant la contrainte $X + Z < 100\%$. Comment changent les trajectoires optimales lorsqu'on introduit la possibilité de capture à partir de l'air ? Dans l'ensemble, le résultat 'plus de fuites, moins de stockage à l'optimum' reste vérifié.

Le résultat nouveau est que comme on peut le voir sur la figure, les émissions nettes de CO_2 deviennent négatives vers 2110 le long du sentier optimal. La table montre qu'en 2150, des émissions nettes négatives ($X + Z$ plus grand que 100%) sont optimales pour les trois taux de fuite faibles.

Comparé aux scénarios sans capture atmosphérique directe, l'activité de séquestration est plus intense à toutes les périodes, et en 2150 la concentration atmosphérique est inférieure. La possibilité de capturer à partir de l'air remonte le taux de fuite acceptable à 0.5 pourcent par an. Ce cas limite correspondant à l'avant dernière ligne de la table mérite une attention particulière.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Dans ce scénario, le CO_2 stocké sous terre contribue significativement aux émissions, environ 10GtC par an (davantage que les émissions mondiales actuelles). Mais cette source est activement compensée par la capture directe à partir de l'air, pendant que la vaste majorité ($X = 86\%$) du système énergétique est déjà décarbonisé.

Conclusion du chapitre

Les versions successives du modèle intégré DIAM ont été utilisées pour analyser le problème du changement climatique du point de vue du planificateur bienveillant. Les premiers travaux, dans la lignée de ma thèse, concernaient le tempo optimal des réductions d'émission, d'abord sous contrainte environnementale dure (version 2.2) puis en coût-bénéfice (v. 2.3). Les résultats tendent à soutenir une certain forme de précaution, les stratégies optimales calculées en tenant compte de l'incertitude et de l'inertie suggèrent de ne pas attendre une décennie pour agir.

Les travaux plus récents, réalisés à l'occasion d'un séjour de recherche à Carnegie Mellon University, sont plus portés sur l'analyse d'une filière pouvant contribuer à résoudre le problème : la séquestration géologique du carbone. La capture à partir de l'air est une backstop technologique qui borne supérieurement le prix du carbone à quelques centaines de dollars par tonne, avec pour conséquence une courbe de Kuznets environnementale (DIAM 2.4). L'étude de la permanence dans la séquestration géologique montre qu'un taux de fuite petit devant le taux d'actualisation est économiquement négligeable, ce que confirment les simulations numériques (DIAM 2.5).

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Listing 4.1 : diam.gms

```
*DIAM 2.5
*(C) Minh Ha-Duong, CIRED, 1997-2004,           minh@haduong.net
*Copyleft according to the GNU GPL v. 2 or later
*Thanks to: T. Chapuis M. Grubb A. Manne J. Singer P. Dumas D. Keith
$TITLE $Id: diam.gms,v 1.42 2003/03/30 15:39:11 haduong Exp haduong $

SETS
T             Time periods             /1*30/; ALIAS (T, U)

VARIABLE
J           Minimisation objective
I(T)        Climate change impact (tera USD)
E(T)        Net emissions (GtC);

POSITIVE VARIABLES
M(T)        CO2 concentration (parts per million)
R(T)        CO2 stored  (GtC)
X(T)        Abatement level (fraction of reference fossil emissions)
CX(T)       Abatement costs (tera USD)
DX(T)       First time difference of abatement level for X
Z(T)        Abatement by backstop tech (fraction of reference fossil emissi
CZ(T)       Backstop costs (tera USD)
DZ(T)       First time difference of Z;

SCALARS
CZI           Initial carbon sequestration cost (USD by tC) /75/
TauZ          Rate of exogenous decline in above cost       /0.01/
CXI           Initial reduction costs factor                /0.0245/
TauX          Rate of exogenous decline in reduction costs  /0.01/
AdapRate      Rate of exogenous decline in damages          /0.01/
WealthI       Global initial consumption (tera USD)         /18/
D             Characteristic time of energy systems         /50/
DLag          Damage lag                                    /2/
DiscRate      Utility discount rate                         /0.01/
NonLinDa      Non-Linear climate change                     /0.04/
epsilon       Sharpness of the damage curve                 /0.1/
C2x           Damage at 2xC02 (% global cons.)              /2.0/
Tresh         Damages nonlinearity treshold (ppmv)          /550/
Ceiling       Damages nonlinearity ceiling (ppmv)           /650/
Growth        Global growth (annual % rate)                 /1.5/
NetAbatM      Maximum relative net abatement                /3/
leakrate      CO2 reservoir leak rate                       /0.005/
Epenalty      Energy penalty of carbon capture              /0.15/ ;

PARAMETERS
Wealth(T)     Global consumption (tera US$ 1990)
Date(T)       Year corresponding to period T
```

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

```
EmisRef(T)    Reference emissions (fossil)
EmisLand(T)   Reference emissions (land use)
ConcRef(T)    Reference concentrations
AtmPRep(T,U)  Atmospheric perturbation CO2 response function  ;

Wealth(T) = WealthI * power(1+Growth/100, 10*(ORD(T)-4) )  ;

*Tables defining Date, EmisRef, EmisLand, ConcRef and AtmPRep
$include ccycle.gms

EQUATIONS
eqJ          Objective function : Expected total discounted felicity
eqCX(T)      Cost of abatement (quadratic part)
eqCZ(T)      Cost of backstop
eqDX(T)
eqDZ(T)
eqI(T)       Impact function with threshold
eqM(T)       Linear impulse response perturbation carbon cycle
eqR(T)       Storage in leaky reservoir
eqE(T)       Emissions (net of air capture)
eqZ(T)       Bound on total abatement    ;

eqJ.. J =E=  SUM( (T)$(ORD(T) GE 5),
    - 2 * power(1 - DiscRate, 10*ORD(T)) /
    sqrt( Wealth(T) - I(T) - CX(T) - CZ(T) ) )  ;

eqDX( T)$(ORD(T) GE 5)..   10 * DX(T) =E= X(T) - X(T-1);

eqDZ(T)$(ORD(T) GE 5)..    10 * DZ(T) =E= Z(T) - Z(T-1);

eqCX( T)$(ORD(T) GE 5)..
 CX( T) =E=
  CXI * WealthI * EmisRef(T)/EmisRef("4") / power(1+TauX, 10*(ORD(T)-4)) *
  ( X(T)*X(T) + D*D*DX(T)*DX(T) )  ;

eqCZ( T)$(ORD(T) GE 5)..
 CZ( T) =E= CZI / 1000 / power(1+TauZ, 10*(ORD(T)-4) ) *
            Z(T) * EmisRef(T) * ( 1 + power(D * DZ(T), 2) )  ;

eqI( T)$(ORD(T) GE 5)..
 I( T) =E=
  (C2x/100) * ( Wealth(T) / power(1 + AdapRate, 10*(ORD(T)-4) ) ) *
  (M( T-DLag) - 335) / (550-335)
  +
  NonLinDa * Wealth(T) / (1 +
   exp(log ((2-epsilon)/epsilon) *
       ( (Tresh+Ceiling - 2*M(T-DLag)) / (Ceiling - Tresh) ) ) );

eqM( T)$(ORD(T) GE 5)..
 M( T) =E= ConcRef(T) -
```

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

```
 10 / 2.123 * SUM(U$(ORD(U) LT ORD(T)+1), AtmPRep(T, U) *
                   (EmisRef(U)*(X( U) + Z(U)) - R(T)*leakrate ));

eqR(T)$(ORD(T) GE 5)..
  R(T) =E= R(T-1) * (1 - 10*leakrate) + 10 * Z(T-1) * EmisRef(T-1) /(1-Eper

eqE(T)$(ORD(T) GE 3)..
   E(T) =E= EmisRef(T) * (1 - X(T) - Z(T) ) + R(T)*leakrate ;

eqZ(T)$(ORD(T) GE 5)..
   X(T) + Z(T) =L= NetAbatM ;

*SENSIBLE BOUND STARTING POINT and CONSTRAINTS

M.UP(T)  = 750; M.L(T) = ConcRef(T);     M.LO(T) = 275;
I.UP(T)  =   5; I.LO(T) = 0;
X.UP(T)  = 1.0; X.L(T) = (ORD(T)-5)/30;
Z.UP(T)  = 2.0; Z.L(T) = (ORD(T)-5)/90;
E.UP(T)  =  30; E.LO(T)= -20;
R.UP(T)  = 5000;
CX.UP(T) =  10;
CZ.UP(T) =  10;
DX.UP(T) = 0.02;
DZ.UP(T) =  1;

M.FX("1") = 317; X.FX( "1") = 0.0; Z.FX("1") = 0.0; R.FX("1") = 0.0;
M.FX("2") = 335; X.FX( "2") = 0.0; Z.FX("2") = 0.0; R.FX("2") = 0.0;
M.FX("3") = 354; X.FX( "3") = 0.0; Z.FX("3") = 0.0; R.FX("3") = 0.0;
M.FX("4") = 374; X.FX( "4") = 0.0; Z.FX("4") = 0.0; R.FX("4") = 0.0;


MODEL DIAM  /ALL/;
diam.optfile=1;
*option nlp=kestrel;
*option nlp=minos;
option nlp=conopt
SOLVE DIAM MAXIMIZING J USING NLP;
```

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 5

Incertitude, décision et ordre partiel

Le problème de la précaution est souvent formulé comme une situation de décision séquentielle : par exemple le problème du changement climatique n'est pas de choisir maintenant une trajectoire optimale pour les 100 ans à venir, mais d'adopter une stratégie prudente et adaptable avec l'arrivée future d'informations. Cela conduit à des modèles résolus en programmation dynamique stochastique. Mais cette méthode n'est qu'une option parmi d'autres approches possibles de l'incertitude, notament les méthodes basées sur les contraintes pures (viabilité) et celles basées sur les scénarios (moins numériques) qui soulignent les limites de toute tentative de probabiliser les risques à long terme.

Jusqu'à présent, ces trois types d'approche sont restées largement disjointes et incompatibles. Ce chapitre jette les bases d'une synthèse basée sur une théorie mathématique nouvelle, les probabilités imprécises.

La première partie de ce chapitre discute les *formes d'ignorance* réelles, sans se borner à priori par le filtre d'une formalisation particulière, et présente une taxonomie plus détailée que la distinction en trois niveaux risque / incertitude / incomplétude classique du 2.1 (page 13). Cela pose ainsi les limites de la théorie de la décision avec les probabilités imprécises, introduite dans la seconde partie du chapitre en reprenant l'exemple du marchand de glaces. La troisième section discute la place de la théorie proposée par rapport à d'autres modèles d'utilité non espérée dans la littérature.

5.1 Une taxonomie des formes d'ignorance

5.1.1 Définir l'ignorance

L'étude de la rareté de l'information et du partage des savoirs ne concerne évidement pas seulement les mathématiques et l'informatique. On ne saurait négliger les apports des sciences de l'homme et de la société, comme la psychologie ou de la philosophie, pour ne citer qu'elles. C'est pourquoi Smithson [1988] propose de définir l'ignorance comme un phénomène social : « *A* est *ignorant* du point de vue de *B* si *A* est en désaccord avec ou ne montre pas connaissance d'idées que *B* définit comme potentiellement ou réellement valides ».

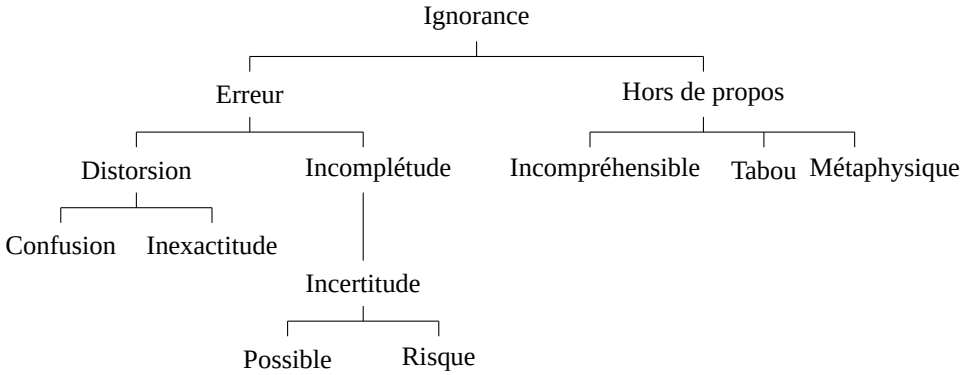


FIG. 5.1 – Une taxonomie de l'ignorance. Inspiré de Smithson [1988, figure 1.1 page 9], modifié par l'auteur.

Cette définition n'affirme en aucun cas une position relativiste de principe, car elle inclut le cas où *A* et *B* sont le même individu, qui se reconnaît comme ignorant de l'état réel du monde pour des raisons objectives. D'un autre côté, la définition n'affirme pas non plus une position absolutiste, car elle laisse à un individu *B* la charge de définir ce qu'il ou elle entend par ignorance. Enfin la définition ne concerne pas seulement ce que *B* pense que *A* devrait ou pourrait savoir (mais l'ignore), mais aussi ce que *B* pense que *A* ne doit pas savoir (et qu'il est juste qu'il ignore).

La définition large implique que les situations d'ignorance vont bien au delà de la distinction risque/incertitude/incomplétude introduite précédement. Il est alors naturel de chercher à décrire, nommer et classer les raisons pour lesquelles il y a ignorance. La suite de ce texte présente une taxonomie des situations d'ignorance, voir Figure 5.1, inspirée pour l'essentiel de Smithson [1988]. Trois avertissements sont nécessaires au préalable.

Premièrement, c'est une proposition qui décrit des classes idéales de situation d'ignorance, étant entendu que chaque instance est unique. En particulier, les situations réelles peuvent mettre en jeu plusieurs niveaux d'ignorance à la fois.

Deuxièmement, le choix des mots pour désigner les idées scientifiques comporte nécessairement une part d'arbitraire. En matière terminologique, la compréhension est déterminée par l'usage, qui ne peut se diffuser qu'avec le temps. Les termes proposés dans ce chapitre sont donc à prendre comme une proposition de vocabulaire technique spécialisé. Ils ne peuvent pas coïncider à la fois avec leur sens commun, celui de leur traduction littérale en anglais et avec leur sens dans telle ou telle discipline spécifique.

Troisièmement, l'approche se compare à l'approche descriptive de la classification naturaliste des espèces animales et non à l'approche moderne basée sur la génétique et l'évolution. En effet les situations d'ignorance sont classées ci dessous en fonction de traits définis a priori (ignorance active ou passive, en quantité ou en qualité...), et non en analysant l'histoire des idées ou une quelconque distance mémétique[1]. Le classement qui en résulte est discutable, car différents auteurs peuvent accorder une priorité variable aux critères de discrimination des situations d'ignorance, il peut tout

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

à fait exister plusieurs classements cohérents.

En résumé, on ne prétend pas qu'il existe vraiment une relation de hiérarchie entre les formes idéales d'ignorance. Mais la Figure 5.1 classe quand même les formes d'ignorance dans une arborescence car c'est plus pédagogique, et le but est de développer une terminologie distinctive.

5.1.2 Hors de propos et erreur

À la racine, la distinction la plus importante est celle entre l'ignorance active et passive. La première forme est une déclaration de *Hors propos* (traduction approximative d'Irrelevance), c'est une stratégie cognitive pour exclure activement des anomalies de la réalité. La seconde forme d'ignorance, passive, appelée *Erreur*, sera discutée ensuite.

Une proposition hors de propos n'est pas nécessairement une information fausse, incomplète ou manquante. Elle est activement ignorée parce que le destinataire a en place des filtres mentaux qui rejettent des catégories entières de messages a priori. Smithson [1988] distingue trois sous catégories :

- Le *Tabou* est une forme d'ignorance globale imposée socialement. Il couvre ce que les membres d'un groupe social ne doivent pas savoir, ni même demander comme certaines informations privatives ou secrets d'État, ou même ne pas toucher s'il savent. Dans l'analyse des scénarios de changement climatique, l'expérience de l'IPCC montre à quel point il est difficile de publier des estimations basses du taux de croissance pour le continent africain. Plus généralement dans le domaine de la prospective énergétique, Hourcade [1984] a montré que le tabou cause un glissement entre la dénégation scientifique et la dénégation morale, c'est à dire qu'il mène à conclure : « Cela ne *peut* pas arriver car cela ne *doit* pas arriver. »
- L'ignorance active que Smithson appelle Untopicality peut être traduite par *Incompréhensible*. C'est l'ignorance de la surprise. L'individu A ignore des idées parce qu'elles ne s'inscrivent pas dans ses schémas mentaux à un instant donné, et les réseaux neuronaux ne peuvent pas reconnaître des schémas trop différents de ceux par lesquels ils ont été entraînés. Le 7 décembre 1941 par exemple, les opérateurs de la station radar de l'île d'Oahu n'ont pas donné l'alerte car ils n'ont pas compris la masse d'avions en route vers Pearl Harbor à 200 km de là. Une rupture dans le fil de la conversation (solution de continuité) peut aussi conduire à ce type d'ignorance. D'un autre côté, découvrir des rapports inconnus auparavant, comme par exemple le lien entre la théorie des groupes et les équations algébriques établit par Évariste Galois, est une source d'invention créative extraordinaire.
  La prospective et les scénarios présentent ici une utilité importante pour atténuer cette forme d'ignorance, puisqu'avoir préalablement imaginé une situation est nécessaire pour pouvoir la reconnaitre lorsqu'elle se produit. En particulier la non-observabilité de la causalité entre émissions de gaz à effet de serre et changement climatique engendre un effet d'incompréhension du problème : on ne peut pas voir *a priori* pourquoi prendre l'avion augmente le niveau de la mer. Cela implique la médiatisation du risque par les experts pour alerter les citoyens.

[1] D'après `wikipedia.org`, la mémétique est l'étude des mèmes, autrement dit d'entités réplicatives d'information. Le terme de mémétique a été proposé pour la première fois par Richard Dawkins dans son œuvre Le gène égoïste (1976), et provient d'une association entre gène et mimesis (du grec « imitation »). La mémétique applique les concepts pris de la théorie de l'évolution (spécialement les populations génétiques) à la culture humaine.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

– Smithson nomme indécidabilité une troisième sorte de *hors de propos*. Afin d'éviter la confusion avec l'indécidabilité formelle au sens du théorème de Gödel, nous préférons le terme *Métaphysique*. Cette catégorie désigne des propositions que les gens ne souhaitent pas désigner comme vraies ou fausses parce que la réponse est considérée comme non vérifiable, on n'arrivera pas à trancher. Il peut s'agir de questions subjectives comme les goûts et les couleurs (les paramètres de la fonction d'utilité) ; de questions sans effet sur la réalité objective, comme le sexe des anges ; ou bien de questions métaphysiques comme la foi religieuse et la vérité révélée[2].

L'autre grande forme d'ignorance est appelée *Erreur*. C'est une ignorance passive susceptible d'être corrigée. Au lieu d'être le fruit d'un processus d'exclusion, l'erreur suppose une volonté de connaître, de recoller la proposition anormale avec les autres morceaux du modèle mental du réel.

Smithson divise l'erreur en deux catégories polaires : *Incomplétude* et *Distorsion*. L'incomplétude est une forme d'ignorance qui provient d'un manque d'expériences ou d'observations. La distorsion provient d'un défaut dans le traitement ou la transmission de l'information à propos d'une situation correctement observée.

La distorsion de l'information peut résulter d'une manipulation stratégique de la part d'une tierce partie. elle peut aussi résulter de filtres cognitifs élaborés historiquement qui conduisent à interpréter les renseignements de façon inexacte.

On peut distinguer deux sortes de distorsion de l'information, sur la base de la différence entre 'ne pas distinguer la vérité' et 'croire une contre-vérité'. Dans le premier cas on peut parler de *Confusion*, fruit du mensonge par omission, de la propagande et la désinformation. Dans le second cas, on peut appeler *Inexactitude* l'ignorance créée par la détention d'informations fausses, fruit par exemple du mensonge direct et de l'intoxication.

La confusion se corrige par la clarification, mais n'exige pas de revenir sur les connaissances acquises contrairement à l'inexactitude. Dans le cas des politiques internationales, on peut illustrer la confusion par la différence entre la signature et la ratification d'un traité. En général la signature d'un traité n'engage que la délégation d'un gouvernement à la négociation, c'est seulement la ratification ultérieure par le parlement qui va engager un État. Il est ainsi courant de dire qu'un traité est valable parce qu'il est signé, alors qu'en droit il n'est pas entré en vigeur car il n'a pas été ratifié. Ce genre de confusion aide à synchroniser les anticipations collectives et ainsi à faire effectivement ratifier le traité.

5.1.3 Incomplétude

Le terme *Incomplétude* désigne la forme d'erreur passive et objective réductible par les sciences de la Nature. On arrive aux distinctions déjà évoquées à la section 2.1. L'incomplétude ; c'est lorsque tous les états du monde futur ne sont pas décrits. Elle se caractérise par l'*Absence*. La dynamique des sytèmes complexes conduit à ce type de situation dans lequel des surprises sont attendues. L'existence de processus de catalyse hétérogène responsables de la destruction printanière de l'ozone stratosphérique au dessus du pôle sud est un exemple de surprise scientifique.

Comme nous l'avons défini précédement, l'*Incertitude* décrit une situation de connaissance correcte en nature, c'est à dire que toutes les alternatives possibles sont bien défi-

[2] Feuilletant la Mécanique céleste, Napoléon fit remarquer à Laplace qu'il n'y était nulle part fait mention de Dieu. "Je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse", rétorqua le savant.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

nies. On accepte l'hypothèse du modèle exhaustif, c'est à dire qu'on ne s'intéresse pas aux pièces qui tombent sur la tranche. Mais le poids de chacune des issues du modèle est inconnu.

Pour Smithson les trois sortes d'incertitude sont le *Vague*, l'*Ambiguité*, et la *Probabilité*, qu'il distingue ainsi :

- Les probabilités sont nées du besoin de quantifier les paris pour les jeux de hasard (dés, cartes) et les questions d'assurances. L'ensemble des possibles est partitionné en alternatives mutuellement exclusives.
- Le vague décrit les choses mal définies. Il s'applique lorsque les catégories ne sont pas absolument claires, comme par exemple l'imprécision linguistique du langage naturel. Smithson subdivise le vague en *Flou* et *Nonspécificité*. Le flou est un vague quantifiable en degré avec des nombres, sur une échelle d'appartenance. Il caractérise des éléments qui sont à la frontière d'un ensemble, à la fois dedans et dehors. La non spécificité se rapporte à la notion de classe, qui permet de désigner un ensemble d'objects (ou d'individus) sans en cibler aucun en particulier.
- Le mot Ambiguité pose problème. Usuellement, l'ambiguité désigne une situation lexicale dans laquelle le contexte ne suffit pas à résoudre un problème de polysémie. La polysémie est une cause importante d'ambiguité. La tradition de Knight [1921], Keynes [1921] et Ellsberg [1961] en économie suggère d'utiliser ce mot pour ce que la classification ci dessus appelle le vague ou la non-spécificité. Dans ce texte, le terme d'ambiguité sera évité : il y a un fossé trop large entre son sens courant et le sens dans lequel l'entendent les économistes spécialistes de l'incertitude. De plus, il ne semble pas y avoir d'agrément sur le sens précis du terme parmi ces spécialistes eux-même.

La vision de l'incertitude proposée dans ce mémoire diffère ici de la taxonomie de Smithson. En effet, nous souhaitons harmoniser la typologie de l'incertitude avec les théories mathématiques développées par la suite. Comme il existe un parallèle algébrique évident entre la théorie des probabilités et la théorie des possibilités, on distinguera deux formes d'incertitude : le *Possible* et le *Risque*.

Les recherches récentes ont mis en lumière la différence entre théorie des possibilités et théorie floue. La théorie floue se distingue au plan formel par l'absence de l'axiome de normalisation à 1. Sur le plan de l'intuition, par exemple, 'Grand' est un adjectif apportant une information vague, modélisable par un nombre flou, tandis que 'plus que 1m80' apporte une information générique, modélisable par une distribution de possibilité. C'est pourquoi sur la figure 5.1 le vague n'apparaît plus comme une sous-catégorie d'incertitude.

Dans la taxonomie, nous avons privilégié les mots désignant un concept épistémique par rapport aux mots désignant la théorie mathématique utilisée pour le modéliser. Nous préférerons le mot *Risque* plutôt que Probable, en voyant la probabilité comme un concept mathématique de la théorie de la mesure. De même, le flou n'apparaît pas nécessairement comme une sous-catégorie du vague, mais plutôt comme le nom de la théorie mathématique associée. Le flou est au vague ce que le probable est au risque. Cette séparation n'a pas pu être faite concernant le mot *Possible*, qui renvoit directement à la théorie des possibilités et à la nécessité.

Finalement, de même que l'absence caractérise l'incomplétude par rapport à l'incertitude, on peut se demander quels sont les concepts philosophiques fondamentaux qui caractérisent le risque et le possible. Sur ce plan, on pourrait relier la théorie des possibilités à la notion d'information générique, c'est à dire qui porte sur des catégories. Par exemple 'droitier' est non spécifique, ce terme désigne une classe générique

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

d'individu. On pourrait aussir relier les probabilités à la symétrie, qui justifie la notion d'équiprobabilité. Cela correspond aux fondations historiques par les jeux de hasard.

Dans les situations réelles, les situations d'ignorance réelles mettent en jeu simultanément plusieurs branches de cet arbre taxonomique idéalisé. Par exemple, l'existence d'une incertitude objective facilite la manipulation stratégique de l'information et les autres jeux cognitifs. Néanmoins le classement proposé permet de clarifier deux questions sur la place des probabilités dans l'analyse d'un problème tel que le changement climatique.

Premièrement, est-ce que la théorie du risque suffit à représenter les inconnues objectives réductibles par les sciences naturelles ? La réponse est évidement non, mettre une distribution de probabilité sur tout et n'importe quoi ne fait pas de sens. On doit prendre en compte les autres formes d'incomplétude de l'information, et en particulier l'incertitude et le vague. Pour cela, la suite propose d'utiliser des probabilités imprécises.

Deuxièmement, les probabilités imprécises vont-elle suffire ? La réponse est encore non. Dans leur forme standard, elles ne modélisent que l'incertitude. Cela conduira dans la suite à examiner quelques extensions visant à aborder la prise en compte de l'absence d'information et la multiplicité des sources d'information, sans aller jusqu'à revisiter en profondeur la théorie des jeux.

5.2 Le frère du marchand de glace

Le terme de probabilités imprécises désigne une classe de théories formalisant les situations d'incertitude. En première approche, elle consiste à modéliser l'information des agents non pas par une loi de probabilité unique, mais par une famille convexe $\mathcal{C}$ de lois de probabilité. On dit que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des probabilités admissibles[3].

Une remarque importante est que les probabilités de $\mathcal{C}$ sont toutes également admissibles aussi bien les unes que les autres. Celles du milieu ne sont en aucun cas plus prégnantes que les autres. Il n'y a pas de probabilités du second ordre, c'est à dire les probabilités de probabilités, et ainsi de suite.

Revenons au marchand qui doit choisir un emplacement a parmi quatre options { α, β, γ, δ }. Considérons le frère du marchand de glaces : il vend des fanions et des souvenirs autour d'un stade. Ses profits ne dépendent pas de la nébulosité mais du résultat de la rencontre sportive. Cet exemple est ainsi modifié car les pronostics de rencontres sportives (avec les courses hippiques) représentent mieux l'incertitude qui n'est pas du risque que les prévisions météorologiques.

On suppose que deux résultats sont possibles : soit l'équipe à domicile gagne, $s = H$, soit les visiteurs gagnent, $s = V$. Détail simplificateur important : c'est une rencontre sans match nuls, comme lors d'une finale. La matrice du profit espéré reste identique à la table 2.1 rappelée ci dessous :

		Emplacement a			
Équipe gagnante s		α	β	γ	δ
Domicile	H	10	6	11	8
Visiteurs	V	2	4	0	3

[3]Cet ensemble qui représente les croyances est parfois appellé l'ensemble credal, du latin *credo* 'je crois'.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Supposons que le marchand dispose de l'information suivante : sur les 9 dernières rencontres, l'équipe à domicile a gagné 5 fois et a perdu 2 fois. Il manque deux observations. Il ne s'agit pas de match nuls, mais bien d'évènements dont le marchand ne se souvient pas (au moment où il doit choisir son emplacement).

5.2.1 L'inférence statistique

Plusieurs méthodes statistiques sont possibles pour inférer formellement des croyances (subjectives) à partir de ces informations (objectives). Par exemple, on pourrait dire que la probabilité de H est 5/7 en ignorant les informations manquantes. Alternativement, on pourrait répartir l'information manquante également et dire $p(H) = 6/9$. Ces deux résultats sont différents, ce qui pose la question du choix de la méthode en probabilités précises.

Le Modèle de Dirichlet Imprécis propose une approche de l'inférence à mon avis plus convaincante. L'information disponible est décrite par l'intervalle $\mathcal{C}$ = [5/10, 1 - 2/10] = [.5, .8]. En terme de multiple priors, cela revient à envisager que la probabilité de $(s = H)$ puisse être comprise n'importe où dans l'intervalle [0.5, 0.8]. La justification intuitive est qu'à l'issue de la rencontre, l'équipe à domicile aura gagné au moins 5 matchs, et perdu au moins 2.

$$\frac{5}{10} \leq p(\mathbf{H}) \leq 1 - \frac{2}{10} \tag{5.1}$$

Cette imprécision provient de deux sources : le manque d'information à propos des deux rencontres passées, et le caractère incertain de la rencontre à venir. A cause de cette seconde source même si on savait que l'équipe à domicile avait gagné n=7 fois et perdu 2, l'information serait décrite par l'intervalle [.7, .8] et non par la fraction 7/9.

On peut se convaincre de l'intérêt de cette approche en examinant le cas d'une première rencontre entre deux équipes : lorsque les compteurs sont à zéro, le principe de Dirichlet imprécis modélise l'information nulle par l'intervalle [0,1].

Si le marchand devait décider d'un emplacement pour les s prochaines rencontres, et non une seule, alors il serait intuitivement justifié d'incrémenter le dénominateur de s et non plus de 1 unité. L'intervalle serait alors :

$$[\frac{5}{9+s}, 1 - \frac{2}{9+s}]$$

Cette paramétrisation par s, le nombre d'expériences cachées que l'on ajoute aux observations, est discutée dans Walley [1996, article et commentaires].

5.2.2 Préférences et choix

Après la question de l'inférence, l'interprétation des probabilités imprécises en terme de décision rationnelle est l'autre grande question sur laquelle se divisent les philosophes. Cette section présente d'abord l'interprétation de Walley, les autres seront discutées ensuite.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Dans l'exemple, on voit bien que l'équipe à domicile est plus forte, on sait qu'elle a gagné au moins 5 fois sur 9 et perdu au moins 2 fois (et au plus 4). Donc intuitivement l'emplacement α est meilleur que l'emplacement β car il offre un meilleur gain dans le cas H de victoire de cette équipe.

L'intuition peut être formalisée en faisant intervenir une forme de précaution par rapport à l'imprécision sur la probabilité. L'emplacement α est préféré à β car le gain espéré en α est supérieur à celui en β, quel que soit p dans l'intervalle $\mathcal{C}$=[.5, .8].

Formellement, on notera $\mathsf{E}_p X$ l'espérance de gain à l'emplacement X calculé avec la probabilité p en indice. Par exemple $\mathsf{E}_{0.6}\alpha = 0.6 \times 10 + 0.4 \times 2 = 6.8$. On peut alors définir une relation de préférence notée $\succ$ par le critère transitif et asymétrique suivant :

$$X \succ Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall p \in \mathcal{C},\ \mathsf{E}_p X > \mathsf{E}_p Y \tag{5.2}$$

Le glyphe $\succ$ se distingue du glyphe $>$ pour bien marquer que le premier dénote une relation de préférence dans un ensemble de paris, alors que $>$ dénote la relation d'ordre des nombres réels. La rationalité selon le critère de Walley est alors le comportement suivant :

Règle de Walley : Le décideur possédant la perspective de gain Y accepte de l'échanger pour recevoir X si et seulement si $X \succ Y$.

En d'autre termes, pour accepter un échange il faut et il suffit de vérifier que l'espérance de gain est meilleure pour toutes les probabilités admissibles. On calcule ainsi les relations suivantes dans le cas du marchand de fanions :

$$\alpha \succ \beta, \gamma \succ \beta, \delta \succ \beta, \alpha \succ \delta$$

5.2.3 Interprétation géométrique : cône des paris désirables

L'équation 5.2 définit la préférence stricte à l'aide d'une comparaison entre les espérances. Comme l'espérance est un opérateur linéaire, on peut donner une définition équivalente en comparant avec zéro :

$$X \succ Y \Leftrightarrow X - Y \in \mathcal{D}^+ \tag{5.3}$$

avec

$$\mathcal{D}^+ \overset{def}{=} \{\Pi | \text{for all}\, p \in \mathcal{C},\ \mathsf{E}_p(\Pi) > 0\} \tag{5.4}$$

L'ensemble $\mathcal{D}^+$ est appelé le cône des paris désirables. Au sens de la règle de Walley, un pari est dit désirable quand son espérance de gain est positive pour toute loi de probabilité admissible. C'est un cône positif, puisque si un pari X est désirable, tout multiple λX, avec $\lambda > 0$ est désirable. C'est même un cône pointé car si X est désirable, alors $-X$ ne l'est pas.

Afin de représenter graphiquement ce cône, considérons le plan des gains. Dans ce plan, un point M de coordonnées M_H et M_V représente un pari qui rapporte M_H si l'équipe à domicile gagne, et M_V si ce sont les visiteurs. Les points dans le premier quadrant sont évidement désirables, puisqu'ils correspondent à des paris qui gagnent toujours quelque chose. Les points dans le cadrant opposé ne sont évidement jamais désirables.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Ce plan est représenté trois fois sur la figure 5.2. Le panel du haut (a) met en valeur un point P dont la somme des coordonnées vaut 1. Un tel point correspond naturellement à une distribution de probabilité, qui attribue P_H à l'état du monde H et de même pour V. L'espérance du pari correspondant à M par rapport à la probabilité correspondant à P est alors le produit scalaire :

$$\mathsf{E}_p(M) \;=\; P_x \times M_x + P_y \times M_y \;= \vec{OP} \,.\, \vec{OM}$$

Le panel du milieu (b) de la figure 5.2 montre tout d'abord l'ensemble $\mathcal{C}$ qui correspond au segment reliant les points de coordonnées (.5, .5) et (.8,.2). Un point M correspond à un pari désirable si et seulement si $\vec{OM} \,.\, \vec{OP} > 0$ pour tout P dans $\mathcal{C}$. Le cône des paris désirables $\mathcal{D}^+$ est l'ensemble dual de $\mathcal{C}$, délimité par les angles droits par rapport aux extrémités du segment représentant $\mathcal{C}$.

Le panel du bas (c) de la figure 5.2 montre l'interprétation géométrique de la relation $\alpha \succ \beta$. On vérifie que le vecteur $a - b$ correspondant à $\alpha - \beta$ tombe dans l'ensemble des paris désirables.

5.3 Probabilités imprécises et décision

5.3.1 Critères de décision dans l'incertain

La règle de Walley [1998] exposée ci dessus permet toujours de donner une réponse oui ou non à une proposition de transaction économique. Cependant $\succ$ ne définit pas un relation d'ordre total mais seulement un ordre partiel. Par exemple, aucune préférence n'est définie entre γ et δ, ni entre α et γ. Est-il possible de prescrire un choix rationnel parmi les diverses alternatives lorsque les probabilités sont imprécises ?

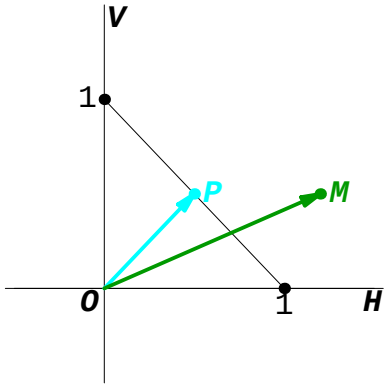
Rappelons le contexte mathématique. La probabilité imprécise est décrite par un ensemble de probabilités admissibles $\mathcal{C}$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des choix considérés comme $\{\alpha, \beta, \ldots\}$. Un choix $X \in \mathcal{A}$ est assimilé à un pari, c'est à dire une fonction de gain qui rapporte $X(\omega)$ dans l'état du monde ω.

L'ensemble de tous les paris mathématiquements possibles est noté $\mathcal{L}(\Omega)$. Le glyphe $\mathcal{L}$ désigne la lettre L majuscule cursive, afin de rappeler que l'ensemble des paris est muni d'une structure linéaire (en français dans le texte, c'est un espace vectoriel) : on peut ajouter deux paris, et multiplier un pari par un nombre.

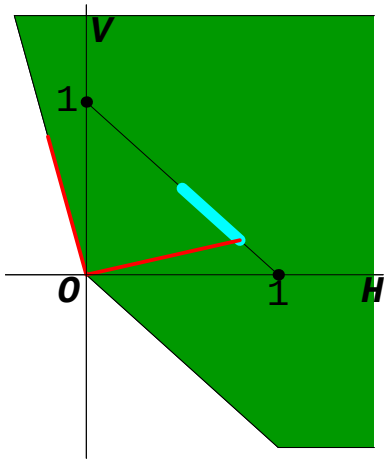
La condition de rationalité la plus évidente est d'éliminer les options dominées. On dit qu'un pari Y domine un pari X lorsqu'il paye certainement plus, c'est à dire $Y \neq X$ et $Y(\omega) \geq X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Un pari X est dit *admissible* si il n'est dominé par aucun autre. Cette condition n'est pas très puissante. Par exemple tous les choix sont admissibles pour le marchand de glace / fanions. La littérature propose un grand nombre d'approches de la prise de décision pour aller au delà. Nous en distinguerons trois.

Premièrement, l'approche de la maximalité au sens de Walley [1991, p. 161]. Elle est basée sur la relation de préférence partielle $\succ$ définie équation 5.2. Dans l'exemple du marchand, on peut dire que le choix α est maximal puisqu'aucune autre alternative ne lui est préférée. Le choix γ est aussi maximal, mais les deux autres ne le sont pas. La rationalité au sens de Walley prescrit de choisir parmi l'ensemble des choix maximaux $\{\alpha\,,\gamma\}$, sans que l'information disponible permette d'aller plus loin.

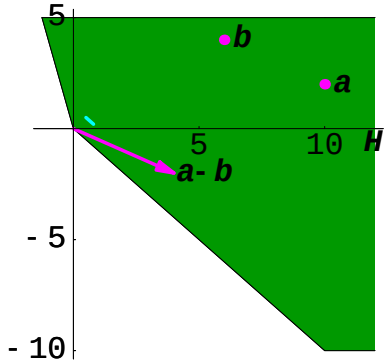
halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005



(a) Le plan des gains



(b) Le cône des paris désirables



(c) Représentation des préférences

FIG. 5.2 – Interprétation géométrique des probabilités imprécises

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Dans ce sens les éléments maximaux sont les éléments admissibles extrémaux pour la relation de préférence partielle $\succ$. Formellement l'ensemble des choix maximaux A^*_W est :

$$A^*_W = \{X \in \mathcal{A}, X \text{ admissible }, \ \forall Y \in \mathcal{A}, \ \exists p \in \mathcal{C}, \ \mathsf{E}_p(X) \geq \mathsf{E}_p(Y)\} \tag{5.5}$$

La deuxième approche se base sur la notion de pari de Bayes, appelé E-admissible par Schervish et al. [2003]. Elle est basée sur la maximisation de l'espérance de gain : un pari X est dit de Bayes lorsqu'il existe une probabilité $p \in \mathcal{C}$ pour laquelle X est le choix qui maximise l'espérance de gain, c'est à dire :

$$A^*_E = \{X \in \mathcal{A}, \ X \text{ admissible }, \ \exists p \in \mathcal{C}, \ \forall Y \in \mathcal{A}, \ \mathsf{E}_p(X) \geq \mathsf{E}_p(Y)\} \tag{5.6}$$

Il est immédiat que tout pari E-admissible est maximal. Walley [1991, th. 3.9.5 p. 162] montre que la réciproque est vraie lorsque $\mathcal{A}$ est convexe et $\mathcal{C}$ est fermé (condition discutée plus loin). Schervish et al. [2003] montre que c'est aussi le cas lorsque $\mathcal{C}$ est ouvert et $\mathcal{A}$ est fini. Ils donnent un contre exemple avec $\mathcal{A}$ infini, $\mathcal{C}$ non ouvert, et $|\Omega| = 2$.

Troisièmement, le critère proposé par Ellsberg [2001] qui pondère trois approches :

1/ Choisir une probabilité admissible particulière dans $\mathcal{C}$. Cela permet de se ramener à la maximisation de l'espérance de l'utilité avec des probabilités précises, le critère dit (aussi) de Bayes. L'opération qui fait passer des croyances aux probabilités en prenant le milieu de $\mathcal{C}$ au sens de Smets [1995, 2002] est appelée transformation pignistique, du latin *pignus*, 'le pari'. Dans l'exemple, le marchand de souvenirs prendrait $p(H) = 0.6$, et le choix de l'emplacement α maximise le profit espéré. Mais on pourrait prendre un autre élément de $\mathcal{C}$, par exemple en maximisant l'entropie.

2/ et 3/ L'approche non-additive [Cohen and Tallon, 2000, Starmer, 2000] fait appel à une forme de précaution, comme l'ont remarqué Henry and Henry [2002]. Comme toutes les probabilités dans $\mathcal{C}$ ont la même force, la décision se fonde sur le meilleur et/ou le pire des cas. Dans l'exemple, pour $p \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow \ 0.5 \leq p(H) \leq 0.7$ les bornes inférieures et supérieures du profit espéré sont représentées Table 5.1.

	α	β	γ	δ
Espérance inférieure	6.0	5.0	5.5	5.5
Espérance supérieure	7.6	5.4	7.7	6.5

TAB. 5.1 – Bornes du gain espéré du marchand de fanions

Sélectionner l'acte γ qui maximise l'espérance supérieure revient à adopter un point de vue optimiste sur les probabilités. Utiliser l'espérance inférieure implique de sélectionner l'acte α. Ce critère maximin conduit également à des choix maximaux au sens de $\succ$ mais pas nécessairement à des choix de Bayes.

Hurwitz a proposé de pondérer les espérances inférieures et supérieures. Ellsberg propose de pondérer le critère de Bayes et celui de Hurwitz, c'est à dire de choisir un élément $p_0 \in \mathcal{C}$, deux coefficients ρ et α dans [0,1] et de maximiser l'index :

$$U_{\text{Ellsberg}}(X) = \rho\, \mathsf{E}_{p_0} X \ + \ (1-\rho)\big(\alpha \inf_{p \in \mathcal{C}} \mathsf{E}_p X + (1-\alpha) \sup_{p \in \mathcal{C}} \mathsf{E}_p X\big) \tag{5.7}$$

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

5.3.2 Discussion

Ces trois approches : Walley, Bayes, Ellsberg sont des généralisations du critère de décision classique au sens où l'on retrouve l'espérance de l'utilité lorsque $\mathcal{C}$ ne contient qu'une probabilité unique. Lorsque l'incertitude est totale, c'est à dire que $\mathcal{C}$ contient toutes les lois de probabilités définies sur Ω, la maximalité se réduit à l'admissibilité. Lorsque l'incertitude est totale et $\mathcal{A}$ est convexe, alors la E-admissibilité se confond avec l'admissibilité et la maximalité.

Comme Treich [2000], on peut trouver que la théorie de la décision dans l'incertitude est insatisfaisante et présente des limites opérationnelles. Le dilemne est en effet le suivant. L'approche d'Ellsberg détermine bien un choix optimal unique, mais présente des problèmes de justification mathématique et de choix des paramètres. Celà m'a conduit dans la suite à privilégier les approches en préférences incomplètes. Le prix à payer est alors que plus les probabilités sont imprécises moins on peut discriminer entre les alternatives. Par exemple si l'intervalle est [0.3,0.7], alors les quatre choix sont maximaux : on ne peux rien dire du tout.

En réponse au dilemne on est conduit à considérer que cette limitation opérationelle est normale et même souhaitable. Lorsque l'information est rare et que les probabilités sont imprécises, plusieurs choix sont raisonnables.

Reste alors la controverse entre maximalité et E-admissibilité. Les deux notions coïncident dans le cas de la convexité de $\mathcal{A}$, qui est facile à poser en théorie seulement. En théorie l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ peut s'interpréter à l'aide des paris randomisés : c'est l'ensemble des loteries dont les lots sont les paris de $\mathcal{A}$. En pratique il semble difficile de considérer la randomisation comme une option réaliste : par exemple on voit mal les décideurs publics annoncer que l'avenir du programme nucléaire français se jouera à pile ou face.

Dans l'attente des développements théoriques ou empiriques ultérieurs, je ne connais pas d'argument convaincant pour la E-admissibilité. Je ne vois pas en quoi on peut critiquer la rationalité d'un décideur qui retiendrait un choix maximal qui n'est pas un pari de Bayes, en dépit du fait qu'il existerait par ailleurs un choix maximal qui l'est.

Au surplus, la E-admissibilité suppose de considérer une probabilité particulière dans $\mathcal{C}$ ce qui peut conduire à des problèmes d'interprétation. Par exemple pour le marchand de souvenir, seules les probabilités $n/10$, avec n entier entre 5 et 8 sont explicables en terme de compte de victoires.

De plus l'existence de pari de Bayes n'est pas assurée en général, alors que dès que $\mathcal{A}$ est fini ou compact on sait qu'il existe un ou des choix maximaux.

C'est pourquoi la suite de mes travaux utilisera l'approche de Walley.

5.3.3 Précaution et consentement à payer

Au crédit de cette approche, elle formalise de façon particulièrement intéressante une expérience critique fondamentale de la prise de décision : la différence entre consentement à payer et disponibilité à recevoir.

Comparons dans la formule 5.2 le choix X incertain avec un choix hypothétique μ sans risque. Le pari X est préféré à μ si et seulement si $\mu < \inf_{p\in\mathcal{C}} \mathsf{E}_p X$. Dans l'interprétation de Walley, le minimum de l'espérance de gain est la disponibilité maximale à payer pour acheter le pari X.

Réciproquement, un gain certain ν est préféré à X si et seulement si $\nu > \max_{p\in\mathcal{C}} \mathsf{E}_p X$. L'espérance supérieure représente donc la disponibilité minimale à recevoir pour abandonner le profit incertain. Comme dans la table 5.1, pour tout pari X on peut intro-

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

duire deux fonctions qui sont l'espérance de gain inférieure et supérieure [Gilboa and Schmeidler, 1989] :

$$\underline{P}(X) = \inf_{p \in \mathcal{C}} \mathsf{E}_p X \tag{5.8}$$

$$\overline{P}(X) = \sup_{p \in \mathcal{C}} \mathsf{E}_p X \tag{5.9}$$

La différence entre consentement à payer et à recevoir est un fait établi en psychologie expérimentale. Son importance pour l'économie de l'environnement ne cesse d'être répétée, voir Mansfield [1999] par exemple. De plus la synthèse de Horowitz and McConnel [2002] donne à penser que plus les biens évalués sont imprécis, plus la différence $\overline{P} - \underline{P}$ observée est élevée, ce qui correspond bien à l'interprétation théorique des probabilités imprécises.

Conclusions sur l'incomplétude et la possibilité

Dans ce chapitre nous avons vu les nombreuses formes d'ignorance, et en particulier rappelé la différence entre incertitude et risque. L'incertitude peut provenir d'informations incomplètes, ou alors du principe de Dirichlet imprécis qui suggère d'incorporer systématiquement une part de non-spécificité dans le processus d'inférence, lorsqu'on construit des croyances sur le futur à partir d'observations sur le passé (le paramètre s).

L'interprétation subjective —en termes de paris— des probabilités imprécises résoud des problèmes de décision qui conduisent à des difficultés mathématiques avec les probabilités précises, comme par exemple la probabilité uniforme sur l'ensemble des entiers naturels. Ce point peut être illustré avec l'exercice de pensée suivant :

> Supposons un analyste perdu dans une ville totalement nouvelle. On sait néanmoins que la ville est dotée d'un système de transports en commun par autobus, et que chaque bus porte un numéro sur la face avant. D'une position fixe, un banc public, il ou elle commence à observer le traffic et se pose les questions suivantes :
>
> 1. Comment représenter mon état de manque d'information à propos du prochain numéro de bus n ?
> 2. Comment mes croyances changent après avoir observé un bus 63 qui passe ?
> 3. Quelles sont les implications comportementales de ces croyances ?
>
> Les méthodes exposées dans ce chapitre proposent les réponses suivantes. Premièrement, l'absence d'information est représentée par un ensemble $\mathcal{C}$ constitué de toutes les distributions de probabilité possibles sur les nombres entiers. Deuxièmement, ex post l'observateur qui fait l'inférence par le principe de Dirichlet imprécis garde dans $\mathcal{C}$ seulement les probabilités telles que $p(63) \geq 0.5$. Troisièmement, selon la règle de Walley un pari qui rapporte 1 pour 1 (ou mieux) que le prochain numéro de bus sera 63 est acceptable.

Comme le critère de Walley reconnait l'asymétrie entre acheter et vendre, l'inégalité $\underline{P} < \overline{P}$ n'est pas une anomalie dans cette approche de la précaution. Ce critère

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

de décision ne donne pas une valeur numérique à chaque pari. Il conduit à des préférences incomplètes : le postulat P1 de Savage [1954] est rejeté, on ne peut pas classer l'ensemble des actes.

Toutefois cette incomplétude ne vide pas le critère de sa valeur pratique. En effet il permet quand même de répondre à n'importe quelle proposition fermée d'effectuer ou non un échange économique en suivant la règle : Abandonner la perspective de gain X pour recevoir Y est acceptable si et seulement si l'espérance de la différence de gain $Y - X$ est positive pour toutes les probabilités admissibles.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 6

Modèles de probabilités imprécises

Ce chapitre veut montrer l'unité mathématique de la théorie des probabilités imprécises en précisant les relations entre diverses représentations de l'incertitude : probabilités, possibilités, théorie de l'évidence, multiple priors, paris désirables et d'autres. Sans rien perdre au niveau de l'interprétation, on restera dans le cas d'un ensemble Ω des futurs possibles fini à n éléments. Cela simplifie beaucoup les mathématiques, par exemple :

Définition 1 *Une mesure de probabilité est une application p qui, à tout sous-ensemble A de Ω, associe un nombre dans [0,1] telle que $p(\emptyset) = 0$, $p(\Omega) = 1$, et $p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\})$.*

On s'intéresse ici uniquement aux structures de données utilisées pour représenter l'information. Par exemple pour définir une mesure de probabilité, il suffit de définir ses n valeurs $p(\{\omega\})$ sur les singletons. On peut ainsi dire que la *mesure* (définie sur les 2^n sous-ensembles de Ω) est complètement définie par une *distribution* de (seulement) n nombres non-négatifs dont la somme est 1.

Ce chapitre définit formellement différentes structures de données utilisées en probabilités imprécises. Il explicite les injections canoniques qui permettent de considérer les formalismes moins généraux comme un cas particulier d'un formalisme plus général. On ne reviendra pas sur les critères de décision et ni sur les règles d'inférence statistique évoquées au chapitre précédent. Les aspects dynamiques des théories seront évoqués au chapitre suivant.

6.1 Probabilité et possibilité

La figure 6.1 représente quatre points de vue méthodologiques sur l'incertitude. Les *probabilités subjectives* consistent à ramener l'incertitude au risque. La théorie des *possibilités* se pose comme une alternative, elle modèlise le vague comme un aspect de l'incertitude totalement distinct du risque. La théorie de Dempster-Shafer propose une unification des probabilités et des possibilités, que les probabilités imprécises généralisent.

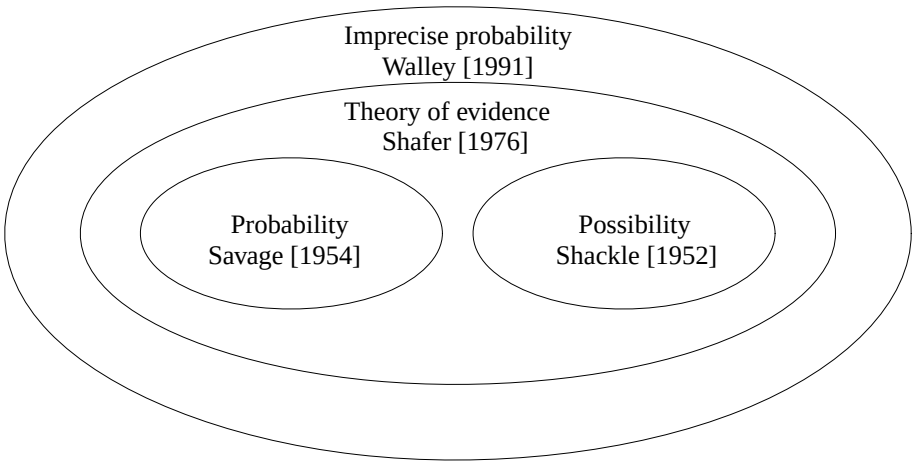


FIG. 6.1 – Relation entre les modèles de l'incertitude. Les probabilités modélisent le risque, le hasard. Les possibilités modélisent l'imprécis, le flou (Zadeh) ou le degré de surprise potentiel (Shackle). La théorie de Dempster-Shafer (evidence theory) modélise la croyance et la plausibilité. Toutes ces modèles peuvent être vus comme des cas particulier de probabilités imprécises.

6.1.1 Probabilités subjectives (Savage-Anscombe-Auman)

Une première approche consiste à ramener formellement l'incertitude au risque en considérant les probabilités $p(\{\omega\})$ comme subjectives. Les trois interprétations des probabilités décrites au début de ce texte : fréquentielle, logique, chaos peuvent être qualifiées d'objectives au sens où elles dérivent des caractéristiques intrinsèques du système étudié. Au contraire les *probabilités subjectives* sont un reflet des préférences personnelles du décideur.

Les fondations de Savage [1954], Machina and Schmeidler [1992] montrent que toute relation de préférence $\succ$ complète et rationnelle (dans un sens axiomatique précis et difficilement contestable) peut être représentée par un couple (probabilité p, utilité u) de telle sorte que $a \succ b$ si et seulement si l'espérance de l'utilité de a est plus grande que l'espérance de l'utilité de b.

Les probabilités subjectives sont très opérationnelles, puisque tout le formalisme de l'espérance de l'utilité développé précédemment pour le risque reste utilisable. C'est une approche pratique pour modéliser les problèmes de décision sous incertitude, mais elle n'est pas sans controverse.

Les probabilités subjectives se rangent parmi les probabilités épistémiques ou bayésiennes. L'adjectif *Bayésiennes* désigne plus généralement une distribution de probabilité qui mesure des degrés de croyance. C'est une catégorie générale qui s'oppose à celle de probabilité déterminée par des fréquences relatives [Good, 1959]. Historiquement l'expression 'probabilités subjectives' se réfère à la théorie des probabilités dérivées des préférences complètes et rationnelles. Mais dans un cadre plus général 'bayésien' est bien synonyme de 'subjectif'.

Les disputes sur l'acceptabilité de cette sorte de probabilités ne sont pas rares. Dans un sens, il est usuel d'admettre que les probabilités bayésiennes doivent être fondées sur les fréquences lorsqu'on peut les observer. Mais dans l'autre, on peut se demander si les probabilités bayésiennes ont leur place dans une communication scientifique. En

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

climatologie, par exemple, on pourrait s'interroger sur le sens des résultats donnant une loi de probabilité du réchauffement global en 2100.

Même si on laisse de côté le problème de la mesure scientifique des 'degrés de croyance' (discuté page 76), il reste que les probabilités objectives fréquentielles sont bien plus convaincantes car elles proviennent d'un grand nombre d'expériences. Cela s'oppose aux probabilités bayésiennes qui ne proviennent au mieux que d'une seule source d'information.

En réponse, il est possible de remarquer que les expériences scientifiques sont ne reproductibles à l'infini de façon indépendante qu'en idéal. En pratique les lois fréquentielles sont toujours basées sur des observations finies, et donc le problème de l'induction se pose inévitablement. C'est pourquoi l'information serait fondamentalement une caractéristique propre à un agent particulier. Cette idée peut se rapprocher du principe de relativité selon lequelle les grandeurs physiques dépendent de l'observateur.

Le problème sous-jacent est que la normalisation à l'unité des distributions de probabilité oblitère des caractéristiques essentielles de l'information : le nombre de sources indépendantes qui soutiennent les estimations et la fiabilité de ces sources.

6.1.2 Possibilités (Shackle-Zadeh)

Il n'est ni possible ni utile de s'étendre davantage et rendre compte ici des controverses historiques qui ont traversé le siècle dernier. Déjà Knight [1921], Keynes [1921] débattaient avec Ramsey [1926] sur l'impertinence de probabiliser le futur des systèmes socio-économiques, position reprise notament par Allais [1953] et Simon [1982] après la guerre pour ne citer que quelques grands noms.

Au delà des débats dogmatiques, on doit bien constater l'émergence au dernier quart du siècle d'une communauté épistémique autour d'une catégorie d'incertitude totalement distincte du risque : les choses floues, imprécises, vagues ou encore mal définies. C'est la théorie floue qui modélise l'incertitude attachée aux sens des mots en langage naturel, comme « grand » ou « jeune ». On ne peut ignorer le nombre d'applications pratiques de la théorie floue, ni sa vigueur théorique.

Originellement les fonctions que nous allons définir ci dessous ont été introduites pour mesurer le degré d'appartenance d'un élément ω à un sous-ensemble flou de Ω défini par π. Mais l'applicabilité de la théorie floue comme théorie des possibilités est rapidement apparue, notament dans Zadeh [1978] et Dubois and Prade [1988, eq. 1.9 p. 15].

Cette approche de l'incertitude n'est pas si nouvelle puisque ses axiomes en font une version moderne du calcul sur les degrés de surprise précédemment introduit en économie par Shackle [1952]. La portée du concept d'imprécision en économie ne saurait être sous-estimée. L'utilité floue rend certainement mieux compte de la nature d'un objectif comme le bien-être social. La théorie est utilisée par les systèmes d'aide à la décision en matière de gestion des ressources naturelles, ainsi que dans certaines méthodes de décision multi-critères ou multi-acteurs.

Young [2001] a démontré récemment l'applicabilité des idées de Shackle pour les modèles intégrés en économie de l'environnement. Ce sera aussi le sens de ma proposition sur la prospective au chapitre 10, avec une différence importante : c'est le critère de Walley qui guide de la prise de décision car je considère les possibilités comme une classe particulière de probabilités imprécises. Cette approche se distingue de celle de la communauté de recherche en théorie floue, dont les critères de décision semblent moins reliés aux fondamentaux de la précaution.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Examinons maintenant quelques aspects formels des possibilités. La théorie des possibilités peut être développée parallèlement à la théorie des probabilités [de Cooman, 1995]. C'est pourquoi l'usage réutilise son vocabulaire comme 'mesure' et 'distribution'. La définition d'une mesure de possibilité ressemble beaucoup à une mesure de probabilité en utilisant le maximum au lieu de la sommme :

Définition 2 *Une mesure de possibilité est une application π qui, à tout sous-ensemble A de Ω, associe un nombre dans [0,1] tel que $\pi(\emptyset) = 0$, $\pi(\Omega) = 1$, et $\pi(A) = \max_{\omega \in A} \pi(\{\omega\})$.*

Comme pour les probabilités, il suffit de connaître la distribution de π sur les singletons pour pouvoir reconstruire la mesure de n'importe quel-sous-ensemble. Mais il s'agit d'une théorie non-additive au sens où la possibilité d'un tirage 'Blanc ou Blanc' se calcule comme le maximum (et non la somme) entre la possibilité d'un tirage 'Blanc' d'une part, et la possibilité d'un tirage 'Blanc' d'autre part.

Une propriété intuitivement intéressante est que la possibilité de A OU B est le maximum des possibilités des deux termes. Par contre, la possibilité de la conjonction A ET B n'est pas le minimum, par exemple deux évènements peuvent être possibles mais exclusifs l'un de l'autre. Formellement, pour tout couple d'évènements A et B, on a :

$$\begin{array}{rcl} \pi(A \cap B) & = & \max(\pi(A)\,,\,\pi(B)) \\ \pi(A \cup B) & leq & \min(\pi(A)\,,\,\pi(B)) \end{array}$$

La non-additivité implique une différence importante avec les probabilités que l'on retrouvera dans toutes les théories ultérieures : connaître la possibilité d'un évènement ne suffit pas à déterminer celle de son contraire. En notant $\overline{A}$ le complémentaire du sous-ensemble A dans Ω, on a seulement $\pi(A) + \pi(\overline{A}) \geq 1$. En notant $\nu(A) = 1 - \pi(\overline{A})$, cela se traduit par $\pi(A) \geq \nu(A)$. La fonction ν est interprétée comme une mesure de nécessité.

Toutefois, à défaut d'auto-dualité on a une propriété similaire : pour tout évènement A, $\pi(A) = 1$ ou $\nu(A) = 0$. En conséquence, cinq cas sont possibles, le dernier étant l'intersection des deux précédents :

- $\pi(A) = \nu(A) = 1$. L'évènement est certain.
- $\pi(A) = \nu(A) = 0$. L'évènement est impossible.
- $\pi(A) = 1$ et $\nu(A) < 1$. L'évènement est possible, plus ou moins nécessaire.
- $\pi(A) < 1$ et $\nu(A) = 0$. L'évènement n'est pas nécessaire, mais plus ou moins possible.
- $\pi(A) = 1$ et $\nu(A) = 0$. On ne sait rien sur l'évènement.

Mais si Shackle et les possibilités répondent aux probabilités subjectives, elles ne résolvent pas la controverse puisqu'elles se posent en stricte alternative. Cette nouvelle dimension du débat demande alors à être synthétisée dans une théorie plus générale. Examinons pour cela la théorie de Dempster-Shafer, qui sera développé davantage au chapitre 8.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

6.2 Evidence (Dempster-Shafer)

6.2.1 Distribution de masse

Reconsidérons l'exemple classique de l'urne introduite en section 2.1, contenant 90 billes colorées dont 30 sont rouges, les autres pouvant être noires ou jaunes. La description est volontairement vague et non-spécifique concernant la distribution des billes noires et jaunes.

Il est aisé de confirmer expérimentalement qu'une majorité d'agents préfère un risque (parier sur un tirage Rouge) plutôt qu'une situation d'incertitude non-spécifique (parier sur un tirage Jaune). Cette situation est appelée aversion à l'ambiguïté en théorie microéconomique. Pour analyser ce genre de comportement face à l'incertitude, il est plus pratique de se placer hors du cadre des probabilités subjectives, et représenter explicitement le caractère non-spécifique de l'information disponible.

Pour modéliser l'expérience on peut utiliser la théorie de Dempster-Shafer, ainsi nommée d'après la règle introduite par Dempster [1967] et appliquée à la révision des croyances par Shafer [1976]. Elle permet d'exposer simplement trois notions essentielles : la non-additivité, la différence entre preuve pour et absence de preuve contre, et les croyances *a priori* non-informatives.

Rappelons qu'on se place dans le cas fini, on suppose que les n futurs alternatifs possibles ω sont décrits par un ensemble Ω. Il s'agit de modéliser des situations d'information non spécifique, c'est à dire des jugements portés à propos de classes d'éléments de Ω qu'il n'est pas possible de préciser davantage. On note A une telle classe, c'est à dire un sous-ensemble de (ou encore une partie de) Ω. On considère alors une distribution de probabilité m sur l'ensemble des parties de Ω, interprétée en disant que la masse $m(A)$ correspond à la quantité de croyance qui porte exactement et non spécifiquement sur la classe des éléments de A.

L'exemple de l'urne se formalise alors directement en posant que la croyance en {Rouge} est 30/90, la croyance en {Jaune, Noir} est 60/90, mais la croyance spécifique en {Jaune}, comme la croyance spécifique en {Noir}, est égale à zéro. En résumé, $m(\{R\}) = 1/3$, $m(\{J, N\}) = 2/3$ et pour tous les autres sous-ensembles $m(A) = 0$. Il ne s'agit pas d'une distribution de probabilité sur $\Omega = \{R, N, J\}$ puisque le poids de $\{N, J\}$ soit 2/3 n'est pas la somme des poids de Jaune et de Noir qui sont nuls.

Dans l'autre exemple du marchand de souvenirs, on aurait $m(\{H\}) = 0.5, m\{V\}) = 0.3$ et $m(\{H, V\}) = 0.2$. On voit encore qu'à ce stade on a abandonné l'avantage important des théories des probabilités et des possibilités : l'existence d'une notion de distribution (définie sur Ω) suffisante pour connaître la mesure sur tout sous-ensemble de Ω. Il ne suffit donc plus de n nombres[1], mais il faut $2^n - 2$ nombres[2] pour représenter les croyances.

6.2.2 Mesure de croyance

La masse m de croyance non spécifique allouée à exactement A doit être distinguée de la croyance totale en A, notée $bel(A)$. Pour calculer le poids de l'opinion selon laquelle l'état du monde sera un des élément de A, on fait la somme de la croyance

[1] Ou même $n - 1$ pour les probabilités

[2] Il y a 2^n sous-ensembles mais dans ce chapitre on suppose que $m(\emptyset) = 0$, et la somme est 1.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

dans tous les classes qui impliquent A, c'est à dire tous les sous-ensembles de A.

$$bel(A) = \sum_{E \subseteq A} m(E) \tag{6.1}$$

Le vocabulaire suivant sera utilisé dans la suite de ce mémoire. La fonction bel est appelée *belief function* en anglais. Nous traduirons ce terme par *mesure de croyance* afin de faire le parallèle avec les deux autres mesures définies précédemment. La masse m est appelée *basic belief assignment* en anglais, elle pourra être nommée ci-après la *distribution* de croyance. Les deux notions sont en correspondance biunivoque, c'est à dire que l'on peut inverser l'équation précédente pour recalculer m à partir de bel ainsi :

$$m(A) = \sum_{E \subseteq A} (-1)^{|A-E|} bel(E) \tag{6.2}$$

Dans l'équation précédente, $|A - E|$ désigne le cardinal du complémentaire de E dans A, c'est à dire le nombre d'éléments de A qui ne sont pas dans E. On peut alors définir une mesure de croyance par :

Définition 3 *Une mesure de croyance est une application bel qui, à tout sous-ensemble A de Ω, fait correspondre un nombre dans [0,1] telle que la fonction m définie par 6.2 soit une distribution de probabilité sur l'ensemble des parties de Ω.*

6.2.3 La dualité croyance-plausibilité

Plus généralement, Shafer [1976, th. 2.1 p.39] montre qu'une mesure de croyance est caractérisée comme une capacité de Choquet d'ordre infini. Il s'agit d'inégalités qui correspondent à la propriété de linéarité des probabilités, qu'il n'est pas nécessaire de reproduire ici. On retrouve alors l'idée selon laquelle la croyance en un évènement ne suffit pas à déterminer la croyance en son complémentaire. On définit la plausibilité d'un évènement A comme un moins la croyance en son complémentaire, c'est à dire :

$$pl(A) = 1 - bel(\overline{A}) = \sum_{E \cap A \neq \emptyset} m(E) \tag{6.3}$$

Troisième exemple, le manque total d'information spécifique se traduit par la fonction de croyance vide, qui donne le poids unitaire à Ω et zéro à tout sous-ensemble propre de Ω, c'est à dire $bel(\Omega) = 1$ et $bel(E) = 0$ pour tout $E \neq S$. Dans ces conditions, la plausibilité de n'importe quel sous-ensemble est un, mais sa croyance zéro. On évite ainsi le choix arbitraire de probabilités *a priori*.

Cette distinction entre croyance pour A et absence de croyance contre A est cruciale dans toutes les théories de l'incertitude non-probabiliste. Cette distinction est importante en sciences juridiques, puisque l'absence d'alibi ne vaut pas preuve de culpabilité. Dans le cas probabiliste ces deux notions sont confondues, on a :

Injection canonique 1 *Toute mesure de probabilité p sur Ω est à la fois une mesure de croyance et une mesure de plausibilité. La distribution m scorrespondante associe une masse $m(\{\omega\}) = p(\{\omega\})$ à tout singleton et une masse nulle $m(E) = 0$ à tout sous-ensemble de Ω comprenant 2 ou plus éléments.*

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

On peut aussi montrer une réciproque : lorsque les deux fonctions pl et bel sont égales alors il s'agit d'une mesure de probabilité. Par définition, quand $m(A) \neq 0$ on dit que A est un ensemble focal. Le fait que les ensembles focaux soient tous des singletons est caractéristique du cas où bel est une mesure de probabilité.

Les mesures de possibilité peuvent aussi être injectées dans les mesures de plausibilité, comme la figure 6.1 l'illustre. En effet Shafer [1976, chap. 10] et Dubois and Prade [1988] montrent que :

Injection canonique 2 *Toute mesure de possibilité π est une mesure de plausibilité pl. Toute mesure de nécessité ν est une mesure de croyance bel.*

On dit qu'une famille d'ensembles est emboitée lorsque ces ensembles peuvent être ordonnés de telle sorte que chacun soit contenu dans le suivant. On peut montrer que cette propriété est caractéristique : une mesure de plausibilité dont les ensembles focaux sont emboités est une mesure de possibilité.

Probabilités et possibilités apparaissent comme des cas particuliers de la théorie de Dempster-Shafer. On ne prétend pas que les interprétations sémantiques ni les opérateurs de combinaison des mesures se retrouvent parfaitement d'une théorie à l'autre, au contraire. Mais il apparaît que dès que l'on passe aux théories non additives, il est possible de modéliser la distinction entre preuve pour et absence de preuve contre, ainsi que l'information *a priori* vide. Ajoutons maintenant un étage à l'édifice, en injectant les mesures de croyance dans une classe d'objets mathématiques plus généraux.

6.3 Probabilités imprécises

6.3.1 Multiple priors (Gilboa-Schmeidler)

Toute fonction de croyance définit une famille $\mathcal{C}$ de lois de probabilité par :

Injection canonique 3

$$p \in \mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \forall E,\; bel(E) \leq p(E) \leq pl(E)$$

Cette injection canonique se retrouve formellement dans d'autres branches de la théorie de la décision dans lesquelles $\mathcal{C}$ est appelé un noyau. Ici il est appelé l'ensemble des probabilités admissibles, il représente les croyances.

Notons que cette injection canonique conduit à un ensemble convexe et fermé (la frontière fait partie de l'ensemble). Pour simplifier, la présentation se limitera à cette configuration, tout en remarquant que l'on pourrait restreindre $\mathcal{C}$ à ses points extrêmaux, cela ne changerait rien à la relation de préférence associée (définie équation 5.2) ni au cône des paris désirables.

Définition 4 *On appelle ensemble de probabilités admissibles une famille $\mathcal{C}$ de lois de probabilités convexe et fermée.*

Cette représentation, davantage que la fonction de croyance de Dempster-Shafer, est sans doute ce qu' Ellsberg [1961] décrit dans ce passage à propos d'un tirage simple dans sa fameuse urne (toujours la même) :

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

> Each subject does know enough about the problem to *rule out* a number of possible distributions. [. . .] He *knows* (by the terms of the experiment) that there are red balls in the urn ; in fact, he knows that exactly 1/3 of the balls are red. Thus, in his « choice » of a subjective probability distribution over red, yellow, black — if he wanted such an estimate as a basis for decision — he is limited to the set of potential distributions between (1/3, 2/3, 0) and (1/3, 0, 2/3) : i.e. to the infinite set $(1/3, \lambda, 2/3 - \lambda),\ 0 \leq \lambda \leq 2/3$. Lacking any observations on the number of yellow or black balls, he may have little or no information indicating that one of the remaining, infinite set of distributions is more « likely », more worthy of attention than any other.

Soulignons une différence d'interprétation qui peut créer des controverses. La théorie de Dempster-Shafer ne fait pas l'hypothèse de l'existence d'une mesure de probabilité inconnue mais des croyances subjectives basées sur des informations non spécifiques. Au contraire l'exemple de l'urne comme celui du marchand de souvenirs peuvent faire penser qu'il existe une mesure de probabilité objective réelle cachée dans l'ensemble crédal. En fait l'interprétation fondamentale est que toutes les probabilités sont également possibles dans l'ensemble crédal, et la question de l'existence d'une probabilité réelle est peut-être indécidable au sens de Smithson (voir 5.1.2).

De plus les deux théories peuvent avoir des interprétations subjectives ou objectives. Même si Shafer offre un point de vue subjectif, le chapitre suivant offrira une construction purement objective des fonctions de croyance, sur la base de statistiques avec les données complètes mais non spécifiques (chaque individu pouvant appartenir à plusieurs classes à la fois). Même si l'exemple de l'urne suggère une objectivité, un ensemble crédal peut servir à modéliser des opinions personnelles comme l'approche de Gilboa and Schmeidler [1989].

Cette opposition superficielle d'interprétation semble due pour une bonne part aux trajectoires historiques de développement de ces théories. Elle risque de d'occulter une unité mathématique certaine et de vrais débats portant sur les opérateurs de fusion de l'information et les critères de décision abordés ailleurs dans ce texte.

6.3.2 Prévisions cohérentes, wtp, wta (Walley)

Les figures 6.2 et 8.4 page 104 illustrent les idées expliquées dans cette section. Le texte commence par montrer que l'ensemble des probabilités admissibles $\mathcal{C}$ permet de définir mathématiquement une fonction de disponibilité à payer $\underline{P}$ qui vérifie non seulement l'absence d'opportunité d'arbitrage, mais encore une propriété plus forte appelée cohérence. Puis le texte examine le problème inverse et montre que connaissant $\underline{P}$, on peut remonter à un $\mathcal{C}$ non vide dès que la fonction $\underline{P}$ n'offre pas d'opportunité d'arbitrage.

Rappellons qu'un pari X est une fonction de gain de Ω dans $\mathbb{R}$. La notation $\mathcal{L}(\Omega)$ désigne l'ensemble de ces fonctions $X : \ \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Afin de simplifier l'exposé, on s'intéresse au cas à l'ensemble des paris est un espace vectoriel, c'est à dire qu'on considère bien définie l'addition des paris et la multiplication par un réel. L'addition correspond à prendre deux paris simultanément. La multiplication par un entier positif correspond à prendre plusieurs fois le même pari. Dans l'espace des paris, la comparaison des fonctions est définie point à point, et en particulier $X < 0$ si et seulement si pour tous les états du monde ω, on a $X(\omega) < 0$.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

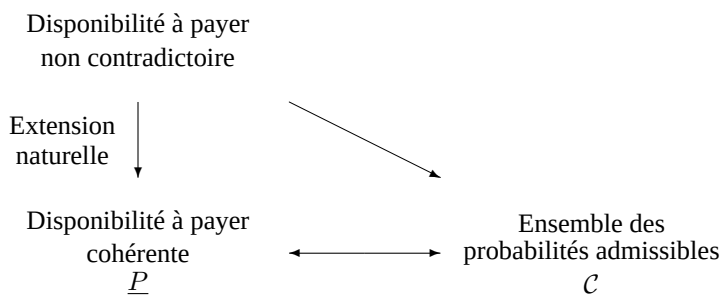


FIG. 6.2 – Donner l'ensemble des probabilités admissibles $\mathcal{C}$ est mathématiquement équivalent à donner une fonction de disponibilité à payer $\underline{P}$ cohérente. L'extension naturelle rend cohérente une fonction de disponibilité non contradictoire, en passant par $\mathcal{C}$.

Supposons connu $\mathcal{C}$, et notons $\underline{P}$ et $\overline{P}$ les enveloppes inférieures et supérieures de l'espérance de gain, deux fonctions sont définies par les équations 5.8-5.9 rappelées ci dessous :

$$\underline{P}(X) = \inf_{p \in \mathcal{C}} \mathsf{E}_p X \tag{6.4}$$

$$\overline{P}(X) = \sup_{p \in \mathcal{C}} \mathsf{E}_p X \tag{6.5}$$

Le chapitre précédent a défini la règle de décision suivante [Walley, 1991] : le décideur accepte d'échanger un pari X contre un pari Y si et seulement si la différence d'espérance de gain est positive pour toutes les probabilités de $\mathcal{C}$. De façon équivalente, il rejette tout pari dont l'espérance de gain peut s'avérer négative pour au moins une probabilité admissible, alors qu'il est prêt à accepter tout pari dont le minimum (par rapport à toutes les probabilités admissibles) de l'espérance de gain est positif.

Il est immédiat que si μ est un nombre réel supérieur à $\overline{P}(X)$, alors cette règle suggère d'accepter l'échange de X contre un pari constant qui rapporte μ dans tous les états du monde. On peut ainsi dire que le décideur est prêt à vendre la perspective de gain X pour n'importe quel prix supérieur à $\overline{P}(X)$. Autrement dit, comme on l'a vu au 5.3.3 page 60 $\overline{P}$ s'interprète comme la disponibilité à recevoir $\overline{P}$ pour vendre le pari X. De même, $\underline{P}$ s'interprète comme la disponibilité à payer pour le pari X d'un décideur qui croit $\mathcal{C}$ et qui suit la règle de décision de Walley.

Pour commenter sur la rationalité de la règle de décision, on doit définir deux propriétés, l'absence d'opportunité d'arbitrage et la cohérence.

Définition 5 *[Walley, 1991, 2.4.1 p. 68] Une fonction $\underline{P}$ n'offre pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement si elle vérifie la propriété suivante il n'existe aucune de famille de paris $X_1, \ldots, X_k$ telle que*

$$\sum_i X_i - \underline{P}(X_i) < 0$$

.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

En logique, on dit qu'une famille de propositions est logiquement fermée (logically closed), lorsqu'elle contient toutes les propositions vraies qu'on peut en déduire. La cohérence correspond, pour des probabilités imprécises, à cette notion de fermeture logique.

Définition 6 *[Walley, 1991, p. 63] Une fonction de disponibilité à payer $\underline{P}$ définie pour tout les paris X ou Y de $\mathcal{L}(\Omega)$ est dite* cohérente *lorsqu'elle vérifie les trois axiomes suivants :*

(P1) $\underline{P}(X) \geq \inf X$ *(accepting sure gains)*

(P2) $\underline{P}(\lambda X) = \lambda \underline{P}(X)$ *pour tout* $\lambda > 0$ *(positive homogeneity)*

(P3) $\underline{P}(X+Y) \geq \underline{P}(X) + \underline{P}(Y)$ *(superlinearity)*

On peut montrer que la fonction de disponibilité à payer définie par l'équation 6.4 est cohérente, et que généralement la cohérence implique l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Les équations ci dessus s'intéressent à $\underline{P}$, mais les deux fonctions de disponibilité sont conjuguées par l'égalité $\overline{P}(X) = -\underline{P}(-X)$. La cohérence de la disponibilité à recevoir $\overline{P}$ est définie par les versions conjuguées de ces axiomes : (P1) devient $\overline{P}(X) \leq \inf X$, (P2) est inchangé et (P3) devient la sous linéarité $\overline{P}(X+Y) \leq \overline{P}(X) + \overline{P}(Y)$. Il est immédiat que l'une des fonctions conjuguées $\overline{P}$ ou $\underline{P}$ est cohérente si et seulement si l'autre l'est aussi.

Considérons maintenant l'approche inverse : soit une fonction $\underline{P}$ donnée, à quelle condition peut-on en déduire un ensemble de probabilités admissibles $\mathcal{C}$?

Les auteurs historiques de Finetti [1937] et Walley [1991] ont nommé *prévision inférieure* (lower prevision) la disponibilité à payer $\underline{P}$, et *prévision supérieure* (upper prevision) le disponibilité à recevoir $\overline{P}$. Toutefois nous en resterons au vocabulaire économique en terme de disponibilités. En effet il a le mérite de mettre l'accent sur le critère de Walley, qui constitue l'originalité de l'approche développée ici par rapport aux autres critères de décision utilisant aussi des ensembles de probabilité.

Pour montrer comment passer de $\underline{P}$ vers $\mathcal{C}$, nous utiliserons la définition suivante : on dit qu'une mesure de probabilité p *domine* la fonction de disponibilité à payer $\underline{P}$ si et seulement si pour tout pari l'espérance de X par rapport à p est supérieure à $\underline{P}(X)$. On peut définir ainsi l'ensemble des mesures de probabilités qui dominent $\underline{P}$:

Définition 7 $\mathcal{C}(\underline{P})$ *= { mesures de probabilité* p, $\forall X \in \mathcal{L}(\Omega), \mathsf{E}_p X \geq \underline{P}(X)$ *}*

Walley [1991, th. 3.3.3a p. 134] a montré que cet ensemble est non vide si et seulement si $\underline{P}$ n'offre pas d'opportunité d'arbitrage.

En terme de Logique, on pourrait dire dans ce cas que $\underline{P}$ est non contradictoire. Il s'agit bien d'une forme de rationalité mais plus limitée que la cohérence au sens de Walley. Dans la suite elle sera appelée *non contradiction*. En effet les expressions 'qui évite les pertes sûres' et 'sans opportunité d'arbitrage' sont trop lourdes, le terme de 'rationalité limitée' est trop chargé. L'expression 'cohérence au sens de de Finetti' risque de créer la confusion car dans la théorie de Walley la cohérence est une propriété plus forte que la non-contradiction.

Muni de cette définition de $\mathcal{C}(\underline{P})$, on souhaite maintenant savoir à quelle condition son enveloppe inférieure coincide avec $\underline{P}$.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

6.3.3 Extension naturelle

Le lien dans les deux sens entre ensemble des probabilités admissibles et disponibilité à payer cohérente est le suivant :

Bijection canonique 1 *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide de mesures de probabilités, alors les fonctions $\underline{P}$ et $\overline{P}$ définies par les équations 5.8-5.9 sont cohérentes.*

Soit $\underline{P}$ une fonction de disponibilité à payer cohérente, alors l'ensemble $\mathcal{C}(\underline{P})$ défini équation 7 est non vide, et $\underline{P}$ coincïde avec son enveloppe inférieure.

Ce théorème de bijection montre que la règle de décision de Walley en situation d'incertitude est à la fois rationnelle et précautionneuse. Elle est rationnelle puisque la disponibilité à payer vérifie les axiomes de cohérence. Elle est précautionneuse puisqu'elle minimise sur l'ensemble des probabilités admissibles, comme si la décision était prise dans un jeu contre la nature qui choisit p dans $\mathcal{C}$ [Shafer and Vovk, 2001].

Le diagramme de la Figure 6.2 illustre la projection de l'ensemble des fonctions non contradictoires dans l'ensemble des fonctions cohérentes. Toute fonction $\underline{P}$ non contradictoire génère un $\mathcal{C}(\underline{P})$ dont on peut considérer l'enveloppe inférieure $\underline{P}$'. La fonction de disponibilité à payer cohérente $\underline{P}$' ainsi obtenue s'appelle l'*extension naturelle* de $\underline{P}$.

L'extension naturelle résoud deux problèmes pratiques que peut poser la révélation des opinions d'expert : les observations sont en nombre fini, et les valeurs révélées ne sont pas nécessairement cohérentes. Supposons en effet que les opinions recueillies concernent un ensemble de paris fini noté $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\}$.

- L'opération 'extension naturelle' permet d'associer une fonction $\underline{P}$' à la fonction de disponibilité à payer $\underline{P}$ non contradictoire définie sur une partie $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}(\Omega)$. En effet, même si $\underline{P}$ n'est définie que sur $\mathcal{K}$, on peut toujours définir un ensemble des probabilités admissibles en remplaçant $\mathcal{L}(\Omega)$ par $\mathcal{K}$ dans l'équation 7, puis prendre l'enveloppe inférieure $\underline{P}$' définie sur $\mathcal{L}(\Omega)$. L'extension naturelle est donc un moyen d'étendre de façon cohérente un jeu de disponibilités à payer révélées sur un petit nombre de pari à tous les paris imaginables. D'où son nom.
- Mais cette extension naturelle n'est pas une extension au sens des fonctions dans la mesure où on n'a pas nécessairement $\underline{P}(X) = \underline{P}'(X)$ pour tous les X de $\mathcal{K}$. L'extension naturelle d'un comportement non contradictoire en un comportement cohérent peut 'corriger' $\underline{P}$ sur certains paris de $\mathcal{K}$. Il peut exister des paris acceptés dans l'extension naturelle alors qu'ils étaient refusés au départ, c'est à dire $\underline{P}(X) < \underline{P}'(X)$. L'inégalité dans l'autre sens est fausse.

On dira qu'une disponibilité à payer $\underline{P}$ définie sur $\mathcal{K}$ est cohérente lorsqu'elle coïncide avec la restriction à $\mathcal{K}$ de son extension naturelle. Si $\underline{P}$ est cohérente sur $\mathcal{K}$, alors la restriction de $\underline{P}$ à toute partie de $\mathcal{K}$ l'est aussi.

Cas particulier : en rapprochant les équations 3 et 7, on voit que toute mesure de croyance (fonction bel définie sur les parties s de Ω) peut être étendue naturellement en une fonction de disponibilité à payer cohérente (fonctionnelle $\underline{P}$ définie sur $\mathcal{L}(\Omega)$) en passant par $\mathcal{C}$ l'ensemble crédal. Toute fonction de croyance bel est cohérente, elle coïncide toujours avec son extension naturelle sur les évènements : $bel(s) = \underline{P}(\mathbf{1}_s)$, en notant $\mathbf{1}_s$ la fonction indicatrice de s, c'est à dire le pari qui rapporte 1 si $\omega \in s$, 0 sinon.

Cette injection n'est pas surjective, il existe des $\underline{P}$ cohérentes qui ne proviennent pas d'une bel, un exemple est illustré graphiquement ci-après.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

FIG. 6.3 – Forme des multiples priors pour diverses théories
Chaque point de ces triangles représente une distribution de probabilité $(p_{Red}, p_{Black}, p_{Yellow})$. Chaque triangle met en valeur une zone $\mathcal{C}$ appelée ensemble crédal. De gauche à droite, les théories représentées sont : information complète, probabilité précise, urne d'Ellsberg, probabilités imprécises, fonction de croyance, possibilité, information non spécifique.

Cas particulier du cas particulier : On a vu qu'une distribution de possibilité définit canoniquement une mesure de plausibilité. Or une mesure de plausibilité pl peut être étendue en fonction de disponibilité à recevoir $\overline{P}$ cohérente (c'est immédiat). En composant les deux injections on voit donc qu'une distribution de possibilité définit une fonction de disponibilité à recevoir. On peut caractériser une fonction de disponibilité à recevoir qui dérive d'une distribution de possibilité par $\max_\omega \overline{P}(\{\mathbf{1}_\omega\}) = 1$ et $\overline{P}(\mathbf{1}_A) = \max_{\omega \in A} \overline{P}(\mathbf{1}_\omega\})$

6.3.4 Illustration graphique

Pour illustrer graphiquement la nature de $\mathcal{C}$, élaborons sur l'urne d'Ellsberg, avec $\Omega = \{Rouge, Noir, Jaune\}$. Tout triplet $(p_{Rouge}, p_{Noir}, p_{Jaune})$ peut être représenté comme un point dans un triangle dont les sommets correspondent à (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1). Géométriquement $\mathcal{C}$ peut alors se représenter comme une zone dans ce triangle. En plaçant par exemple $Rouge$ en haut de la figure, $Noir$ à gauche et $Jaune$ à droite, considérons la galerie de différents ensembles $\mathcal{C}$ définis sur la Figure 6.3 :

Le premier triangle, le plus à gauche avec un seul point au sommet R représente l'information selon laquelle l'urne ne contient que des boules $Rouges$. Le résultat du tirage simple est connu avec certitude.

Le second triangle avec un point au milieu représente une urne de composition connue précisément. Elle contient autant de boules de chaque couleur. Ceci constitue une raison objective de représenter le résultat d'une expérience de tirage simple par une distribution de probabilité (uniforme).

Dans le troisième triangle l'ensemble $\mathcal{C}$ est un segment horizontal aux 2/3 de la hauteur. Cela représente la situation décrite par Ellsberg. L'expérimentateur sait seulement qu'un tiers des boules sont $Rouges$, mais la proportion de $Noir$ et $Jaune$ est inconnue.

Renversons maintenant l'ordre de lecture en repartant par la droite. Le triangle le plus à droite sur la Figure 6.3 représente l'information "L'urne ne contient pas de boules $Jaunes$.". Cela illustre une classe de méthodes importante pour définir $\mathcal{C}$. Il s'agit de la famille d'approches basée sur la satisfaction des contraintes, comme la théorie de la viabilité par exemple. Elle consiste à éliminer de Ω certains futurs pour ne garder qu'un sous-ensemble V de futurs tous également possibles. Dans ce cas $\mathcal{C}$ peut être pris comme l'ensemble des distributions de probabilité de support V. On est dans un cas particulier de mesure de possibilité.

L'avant dernier triangle représente un cas plus général de mesure de possibilité. Il représente l'information « L'urne ne contient pas plus de 70 pourcent de boules $Noires$

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

et pas plus de 60 pourcent de boules $Jaunes$ ». Cela définit la distribution de possibilité $\pi = (1, 0.7, 0.6)$. La distribution est bien normalisée puisque l'urne unicolore rouge n'est pas exclue. On peut illustrer aussi la mesure de croyance (dont les ensembles focaux sont emboités) qui lui correspond. C'est celle dont la distribution de masse est $m(\{R, N, J\}) = 0.6$, $m(\{R, N\}) = 0.1$, $m(\{R\}) = 0.3$, les autres sous-ensembles recevant une masse nulle.

L'antépénultième triangle, en position cinq à partir de la gauche, représente un tirage d'urne contenant des boules des trois couleurs, biaisé en faveur de $Rouge$ et contre $Jaune$. Il peut être représenté par une mesure de croyance. Le triangle 4 immédiatement à sa gauche ajoute à cette information la certitude qu'il y a plus de boules $Noires$ que de $Jaunes$ dans l'urne. Cela supprime les probabilités telles que $p(Jaune) > p(Noir)$. Cet ensemble crédal ne peut être représenté par une mesure de croyance, mais seulement par une fonction de disponibilité à payer (ou à recevoir) ce qui revient à définir ses côtés.

En lisant la figure de droite à gauche, les triangles 6, 5 puis 4 illustrent l'idée d'Ellsberg selon laquelle connaître plus d'information revient à réduire l'ensemble crédal. La taille de l'ensemble crédal est une mesure de non spécificité, l'incertitude qui n'est pas du risque. Concernant l'incertitude qui est du risque, elle peut être mesurée en calculant l'entropie maximum atteinte dans $\mathcal{C}$. Il apparait ainsi que l'information n'est pas une variable unidimensionelle [Klir, 1999].

Il existe bien d'autres façons de définir des ensembles de probabilités admissibles. On peut par exemple définir $\mathcal{C}$ en donnant ses sommets, en abandonnant éventuellement l'hypothèse de convexité. Les modèles de contamination décrivent l'incertitude autour d'un prior π_0 en se donnant un ensemble de contamination admissible Φ et en considérant :

$$\mathcal{C} = \{(1 - \epsilon)\pi_0 + \epsilon\phi,\ \phi \in \Phi\} \tag{6.6}$$

Enfin, les modèles statistiques paramétriques indexent $\mathcal{C}$ par un paramètre de dimension finie.

Remarques de conclusion

Les imbrications de la figure 6.1 ont organisé ce chapitre comme un édifice à trois niveaux. Les probabilités et le couple possibilité/nécessité sont au rez de chaussée. La théorie de l'évidence, constituée du couple mesure de croyance/mesure de plausibilité est au premier étage. On trouve les ensembles crédaux, ainsi que le couple disponibilité à payer/à recevoir au troisième niveau.

Paris à la frontière de l'acceptabilité

Il existe un quatrième niveau, dont on a donné l'aperçu au chapitre précédent en remarquant que tout ensemble de probabilités admissibles génère un cône des paris désirables (des paris que le décideur accepterait de prendre si on lui offrait gratuitement) et une relation de préférence incomplète. La remarque précédente omettait un détail : on peut associer à $\mathcal{C}$ toute une famille de cônes et toute une famille de relations de préférences, qui ne diffèrent qu'en ce qui concerne les paris à la frontière de l'acceptabilité.

Pour un ensemble de probabilités admissibles $\mathcal{C}$ donné, on peut ainsi distinguer l'ensemble des paris strictement acceptables (définis par $X \gneqq 0$ ou $\exists\delta > 0, \forall P \in$

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

$\mathcal{C},\ P(X) > \delta$) de l'ensemble des paris presque acceptables (définis par $\forall P \in \mathcal{C},\ P(X) \geq 0$). Le premier est topologiquement un ensemble fermé, le second est l'ouvert qui lui correspond. On distingue de même une relation de préférence partielle stricte et une relation de presque préférence partielle.

La notion de cône de paris *exactement* acceptables permet ainsi de représenter géométriquement les préférences exactes d'un décideur traitant finement les paris à la frontière. La notion de rationalité ainsi définie prolonge exactement celle de cohérence des disponibilités à payer. C'est pourquoi l'approche la plus générale des probabilités imprécises considère comme structure mathématique fondamentale le cône pointé positif des paris exactement acceptables. La Table 6.1 à la fin de ce chapitre donne les correspondances avec $\mathcal{C}$ et $\underline{P}$.

On n'aura pas besoin de toute cette généralité dans les chapitres suivants, mais Walley [2000] et Nau [1999] ont montré que ces structures mathématiques présentent de nombreux avantages. En plus de permettre de traiter correctement la question des paris à la frontière de l'acceptabilité sans recourir à l'analyse non standard, l'axiomatique correspondante est particulièrement transparente :

Définition 8 *Un ensemble de paris désirables (une sous-partie $\mathcal{D}^+$de $\mathcal{L}(\Omega)$) est dit cohérent si il vérifie les axiomes de rationalité suivants :*

(D1) Sure gains are desirable : $\forall X \in \mathcal{L}(\Omega),\ X > 0 \Rightarrow X \in \mathcal{D}^+$

(D2) Sure losses are not desirable : $\forall X \in \mathcal{L}(\Omega),\ 0 > X \Rightarrow X \notin \mathcal{D}^+$

(D3) Linearity : if $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ *and* $Y \in \mathcal{L}(\Omega)$ *then* $X + Y \in \mathcal{D}^+$ *and* $\forall c \in \Re^+$, $cX \in \mathcal{D}^+$

On retrouve alors la notion fondamentale d'extension naturelle : Étant donné un ensemble quelconque de paris jugés désirables $\mathcal{D}_0^+$, le plus petit ensemble cohérent de paris désirables qui le contient est son extension naturelle.

Les probabilités subjectives

L'approche suivie jusqu'ici par commodité d'exposition mettait en avant $\mathcal{C}$ mais c'est un état cognitif difficilement observable. Or fonder une évaluation scientifique sur des variables non mesurables simplement fait problème. Définir les probabilités comme échelle du « degré de croyance » ou de « la force de conviction » renvoie à une référence psychologique différente pour chaque individu.

Ce chapitre a montré la correspondance entre l'ensemble des probabilités admissibles $\mathcal{C}$et les fonctions de disponibilité à payer cohérentes $\underline{P}$(équations 6.4 et 6.5). Dans la lignée des idées de de Finetti [1937], on peut prendre comme grandeurs fondamentales les observables $\overline{P}$ ou $\underline{P}$, pour définir les probabilités admissibles $\mathcal{C}$. On peut ainsi répondre opérationnellement à la critique sur la mesure scientifique des degrés de croyance. Les fonctions de disponibilité à payer $\underline{P}$ peuvent provenir d'observations réelles $\underline{P}(Z_1), \ldots, \underline{P}(Z_n)$, révélées par exemple par des entretiens en face à face comme dans l'application discutée au chapitre 8.

Supposer ces observations non-contradictoires au sens de la définition 5 (la définition s'applique en prenant les X_i parmi les Z_j pour lesquels $\underline{P}$ est définie) est une hypothèse de rationalité minimale nécessaire mais suffisament simple pour être acceptable.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Critique des axiomes

Les axiomes des probabilités imprécises appellent deux critiques. La première est que l'axiome (P2) suppose la linéarité de l'utilité des gains : cela n'est réaliste que pour des paris petits devant le revenu total du décideur. La seconde critique vise (P3) : si un choix X et un choix Y sont disponibles, en réalité cela n'implique pas que tout choix $\lambda X + Y$ soit une option envisageable. On ne peut se marier qu'avec une seule personne à la fois ! La réponse classique à ces objections, qui consiste à dire que les gains sont mesurés en unités d'utilité, et que les paris peuvent être randomisés, n'est que partiellement satisfaisante.

La bijection entre l'approche des multiple priors et l'approche des disponibilités à payer cohérentes permet un point de vue différent : la réponse aux deux critiques est qu'il s'agit d'une théorie de l'information, et non d'une théorie des choix. Ainsi la théorie s'intéresse au fond aux croyances, et les fonctions $\overline{P}$ et $\underline{P}$ sont des approximations locales des préférences. Ces approximations locales sont fondamentales car elles servent à mesurer l'information incomplète portée par le décideur [de Finetti, 1937]. En effet, l'ensemble crédal est un état cognitif interne difficilement accessible, alors que la valorisation monétaire est une grandeur expérimentale vérifiable.

Comme tous les outils d'aide à la décision, le domaine d'application des probabilités imprécises est limité. Analyser des situations de choix mettant en jeu la richesse globale du décideur nécessiterait de complèter la réflexion sur l'information par une réflexion sur les valeurs et l'utilité.

Bibliographie choisie

Cette introduction informelle aux probabilités imprécises ne rend pas justice à la profondeur du sujet. Pour approfondir je propose une sélection de cinq articles théoriques suivants. Les trois premiers suffisent à donner un panorama complet en ce qui concerne les aspects mathématiques des probabilités imprécises. Les deux derniers articles sont plus avancés et complètent les précédents dans deux directions assez différentes : aspects algorithmiques pour le papier de Smets, fondements philosophico-économiques pour le papier de Nau.

- La brève introduction de Cozman [1999] part d'un niveau élémentaire, sans présupposer connue la théorie de la décision standard. C'est un survol rapide et informel des idées essentielles au prix de quelques court-circuits mathématiques.
- La synthèse de Walley [2000] compare et unifie les diverses façons de représenter les probabilités imprécises évoquées plus haut. Ce texte est une collection d'exemples concrets de problèmes de décision qui discriminent entre ces divers formalismes. Les notations changent : l'ensemble des probabilités est K chez Cozman, $\mathcal{M}$ chez Walley. L'espérance inférieure $\underline{E}$ de Cozman correspond en première lecture à la prévision inférieure $\underline{P}$ de Walley.
- La synthèse théorique de Walley [1998] expose les probabilités imprécises sous l'angle des *prévisions inférieures cohérentes*. Walley résume les principales définitions et les théorèmes fondamentaux de son livre fondateur de 1991 (700 pages, épuisé). L'article ne contient pas les démonstrations, ni les discussions philosophiques, ni les exemples du papier précédent.
- La description du modèle de croyances transférables de Smets [2000a] est une version récente de la théorie de Demster-Shafer. L'avantage majeur de ce type de théories est qu'on a des formules explicites implémentables dans un ordinateur et plus facilement interprétables. La théorie est moins générale mais plus avancée.

Le modèle de croyance transférables sera utilisé au chapitre suivant, il présente l'avantag supplémentaire de ne pas supposer que l'on connaisse exhaustivement les états du monde possible.

– Nau [2002] discute des interprétations économiques et philosophiques de la théorie, en particulier en liaison avec la théorie de l'utilité.

Enfin le site de référence sur cette théorie est `http://ippserv.rug.ac.be`..

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

	$\underline{P}$	$\mathcal{C}$	$\succeq$	$\mathcal{D}$	$\succ$	$\mathcal{D}^+$
$\underline{P}(X) =$	willingness to pay for X	$\inf\{\mathsf{E}_p(X),\, p \in \mathcal{C}\}$	$\max\{\mu,\, X \succeq \mu\}$	$\max\{\mu,\, X - \mu \in \mathcal{D}\}$	$\sup\{\mu,\, X \succ \mu\}$	$\sup\{\mu,\, X - \mu \in \mathcal{D}^+\}$
$p \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$	$\forall X,\, \mathsf{E}_p(X) \geq \underline{P}(X)$	Multiple priors	$X \succeq Y \Rightarrow$ $\mathsf{E}_p(X) \geq \mathsf{E}_p(Y)$	$\forall X \in \mathcal{D},\, \mathsf{E}_p(X) \geq 0$	$X \succ Y$ and not $X \geqslant Y$ $\Rightarrow \mathsf{E}_p(X) > \mathsf{E}_p(Y)$	$\forall X \in \mathcal{D}^+,$ $X \geqslant 0$ or $\mathsf{E}_p(X) > 0$
$X \succeq Y \Leftrightarrow$	$\underline{P}(X - Y) \geq 0$	$\forall p \in \mathcal{C}$ $\mathsf{E}_p(X) \geq \mathsf{E}_p(Y)$	X is almost prefered to Y	$X - Y \in \mathcal{D}$	$\forall \delta > 0,\, X + \delta \succ Y$	$\forall \delta > 0$ $X - Y + \delta \in \mathcal{D}^+$
$X \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$	$\underline{P}(X) \geq 0$	$\forall p \in \mathcal{C}$ $\mathsf{E}_p(X) \geq 0$	$X \succeq 0$	X an almost desirable gamble	$\forall \delta > 0,\, X + \delta \succ 0$	X is in $\mathcal{D}^+$ or is a limit point of $\mathcal{D}^+$
$X \succ Y \Leftrightarrow$	$X \gneqq Y$ or $\underline{P}(X - Y) > 0$	$X \gneqq Y$ or $\exists \delta > 0\, \forall p \in \mathcal{C}$ $\mathsf{E}_p(X) \geq \mathsf{E}_p(Y) + \delta$	$X \gneqq Y$ or $\exists \delta > 0$ $X \succeq Y + \delta$	$X \gneqq Y$ or $\exists \delta > 0$ $X - Y - \delta \in \mathcal{D}$	X is strictly prefered to Y	$X - Y \in \mathcal{D}^+$
$X \in \mathcal{D}^+ \Leftrightarrow$	$X \gneqq 0$ or $\underline{P}(X) > 0$	$X \gneqq 0$ or $\exists \delta > 0$ $\forall p \in \mathcal{C}, \mathsf{E}_p(X) \geq \delta$	$X \gneqq 0$ or $\exists \delta > 0$ $X \succeq \delta$	$X \gneqq 0$ or $X \in \mathring{\mathcal{D}}$	$X \succ 0$	X is a strictly desirable gamble

TAB. 6.1 – Matrice de correspondance entre la disponibilité à payer $\underline{P}$, ensemble des probabilités admissibles $\mathcal{C}$, paris strictement désirables $\mathcal{D}^+$, préférences strictes $\succ$, paris presque désirables et presque préférences. La disponibilité à recevoir s'obtient par dualité : $\overline{P}$(X) = -$\underline{P}$(-X). Source Walley [1991, pp. 133, 156–159]

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 7

Combinaison des croyances

Théorie = données $\times$ méthodes $\times$ interprétation

Les deux chapitres précédents défendent une vue hiérarchique des théories des probabilités imprécises, illustrée à la Figure 6.1 page 64, ou encore Figure 5.1 page 50. Cette vue est basée sur des injections (au sens mathématique) des structures de données moins générales vers des structures de données plus générales. Une distribution de probabilités p, de même qu'une distribution de possibilités π, peut être vue comme une fonction de croyance m, qui elle-même peut être vue comme une disponibilité à payer $\underline{P}$ cohérente. Il suffit pour cela d'utiliser l'extension naturelle, c'est à dire considérer l'ensemble $\mathcal{C}$ des probabilités admissibles, c'est à dire qui dominent la fonction considérée et de définir $\underline{P}$ comme son enveloppe inférieure.

Toutefois une théorie de l'incertitude ne se définit pas seulement par une structure de données, mais aussi par l'interprétation épistémique de ces nombres et les méthodes de recombinaison des croyances. Ces trois aspects doivent être intellectuellement cohérents entre eux pour constituer une théorie convaincante.

- L'interprétation épistémique relie la théorie aux observations et suggère son application pour la prise de décision. Plusieurs interprétations ont été exposées aux deux chapitres précédents. Nous retiendrons en particulier le principe de Dirichlet imprécis pour l'inférence et le critère de Walley pour la décision.
- Les opérateurs mathématiques de recombinaison des croyances sont nécessaires dès qu'on s'intéresse aux aspects dynamiques de l'information. C'est sur ces méthodes de recombinaison des croyances que ce chapitre voudrait faire transparaître l'unité dans la diversité.

Même si la règle de Bayes reste fondamentale, la multi dimensionalité de la notion d'ignorance complique les choses par rapport aux probabilités précises. Il faut bien admettre que les résultats présentés dans la suite sont encore relativement fragmentaires. Ils concernent surtout les fonctions m du modèle de croyances transférables de [Smets, 2000b], même si quelques généralisations aux autres structures de données sont évoquées. Ce n'est pas par commodité d'exposition que l'on se limite au cas $|\Omega|$ fini, mais bien parce le cas général reste à découvrir. Ce chapitre examine successivement trois catégories d'opérateurs :

La section suivante discute les opérations pour transformer et mesurer *une* distribution à la fois. Elle examine la négation qui permet de formaliser l'idée du contraire de m, la renormalisation qui élimine le poids de $m(\emptyset)$, le discrédit qui introduit un doute

systématique sur une fonction de croyance, ainsi que diverses mesures d'ignorance.

La seconde section explore le problème de la fusion de l'information : le décideur dispose de deux sources qui affirment respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, comment les combiner ? Différents outils sont disponibles, selon la nature du lien entre les deux sources. Parmi les opérations qui combinent deux distributions m_1 et m_2, on distinguera ainsi des jonctions non interactives justifiées par une interprétation d'indépendance, et des jonctions prudentes sans indépendance entre les sources.

La troisième section examine deux pistes de recherche pour aller plus loin. La première est la notion de conditionnement, qui combine une distribution de probabilité imprécise avec un sous-ensemble précis de Ω. La seconde est l'étude des bijections probabilités / possibilités.

7.1 Opérateurs unaires du Modèle de Croyances Transférables

7.1.1 Le Transferable Belief Model

Le modèle de croyance transférables est un développement de la théorie de Dempster-Shafer exposée au 6.2 pages 67 et suivantes. On note Ω un ensemble fini décrivant des états du monde futurs. Un état d'information est représenté par une fonction de masse m, définie sur tous les sous-ensembles de Ω, non-négative et dont la somme est égale à un. Cette fonction de masse est une distribution de probabilité, elle est parfois appelée un sous-ensemble aléatoire de Ω. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions de masse m.

L'innovation essentielle du modèle est de relâcher la contrainte $m(\emptyset) = 0$. Une telle distribution modélise par exemple la mise de 100 jetons sur un tapis de casino qui autorise toutes les chances composées ainsi que le zéro. Il est entendu que le zéro n'entre jamais dans les chances composées. À la roulette il n'est ni rouge ni noir, mais vert.

Plus généralement le poids de croyance $m(\emptyset)$ (le nombre de jetons sur zéro) est associé aux états du monde non décrits dans Ω. Il peut être interprété comme le niveau de surprise attendu, qui mesure le degré auquel Ω est exhaustif pour décrire les croyances par l'information portée par la distribution de masse m. Autre exemple, si $\Omega =${ Rouge, Jaune, Vert } représente les couleurs d'un feu de circulation alors $m(\emptyset)$ représente la probabilité que le verre de lampe soit cassé ou tout autre éventualité.

Rappelons également que $m(s)$ mesure le poids de croyance non-spécifique accordé à s. L'information représentée par la fonction de masse m peut être représentée de façon équivalente par d'autres fonctions, comme la fonction de croyance bel qui correspond à la notion de disponibilité à payer $\underline{P}$. La fonction de plausibilité correspond à la notion de disponibilité à recevoir $\overline{P}$.

La Table 7.1 définit les équations de correspondance entre ces trois fonctions, plus deux autres appelées fonctions d'implicabilité b et de commonalité q. L'usage de ces deux fonctions apparaîtra dans la suite. Notons qu'en voyant $\big(m(s)\big)_{s\subset\Omega}$ comme un vecteur de $2^{|\Omega|}$ nombres, les transformations entre m, q, b, bel et pl sont linéaires et bijectives.

7.1.2 Négation, renormalisation et discrédit

On s'intéresse pour commencer aux opérations qui transforment une seule fonction m. Ce sont les opérations de négation, renormalisation et discrédit.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

$m(s) =$	$q(s) =$	$b(s) =$	$bel(s) =$	$pl(s) =$
basic belief assignment	$\sum_{s \subseteq E} m(E)$	$\sum_{E \subseteq s} m(E)$	$\begin{cases} 0 \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{\emptyset \neq E \subseteq s} m(E) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{E \cap s \neq \emptyset} m(E) \end{cases}$
$\sum_{s \subseteq E} (-1)^{\lvert E \rvert - \lvert s \rvert} q(E)$	comonality	$\sum_{E \subseteq \bar{s}} (-1)^{\lvert E \rvert} q(E)$	$\begin{cases} 0 \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{E \subseteq \bar{s}} (-1)^{\lvert E \rvert} q(E) \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{\emptyset \neq E \subseteq s} (-1)^{\lvert E \rvert + 1} q(E) \end{cases}$
$\sum_{E \subseteq s} (-1)^{\lvert s \rvert - \lvert E \rvert} b(E)$	$\sum_{E \subseteq s} (-1)^{\lvert E \rvert} b(\bar{E})$	implicability	$b(s) - m(\emptyset)$	$1 - b(\bar{s})$
$\begin{cases} 1 - bel(\Omega) \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{E \subseteq s} (-1)^{\lvert s \rvert - \lvert E \rvert} bel(E) \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{E \subseteq s} (-1)^{\lvert E \rvert} bel(\bar{E}) \end{cases}$	$bel(s) + m(\emptyset)$	belief	$bel(\Omega) - bel(\bar{s})$
$\begin{cases} 1 - pl(\Omega) \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{E \subseteq s} (-1)^{\lvert s \rvert - \lvert E \rvert + 1} pl(\bar{E}) \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \text{ if } s = \emptyset, \text{ else} \\ \sum_{E \subseteq s} (-1)^{\lvert E \rvert + 1} pl(E) \end{cases}$	$1 - pl(\bar{s})$	$pl(\Omega) - pl(\bar{s})$	plausibility

TAB. 7.1 – Correspondance entre les fonctions du modèle de croyance transférable. Reproduit d'après Smets [2001]

La négation de m est définie par :

$$\tilde{m}(s) = m(\bar{s}) \tag{7.1}$$

où $\bar{s}$ dénote le complémentaire de s dans Ω. Le symbole graphique du tilde, qui dénote la négation, est volontairement proche de la barre supérieure, qui dénote le complémentaire.

Renormaliser m consiste à éliminer la masse de croyance affectée à l'ensemble vide. Mathématiquement, cela consiste à considérer m' définie par :

$$m'(s) = \frac{m(s)}{1 - m(\emptyset)} \text{ si } s \neq \emptyset, \text{ et } m'(\emptyset) = 0 \tag{7.2}$$

La valeur $m(\emptyset)$ s'interprétant comme la masse de croyance attribuée à un futur non décrit dans Ω, la renormalisation s'interprête comme l'application de la convention selon laquelle Ω est un système *exhaustif* d'états du monde futurs mutuellement exclusifs.

L'opérateur de discrédit [Shafer, 1976, p. 251] consiste à ajouter du doute à l'opinion représentée par m. Discréditer la fonction m par un facteur d consiste à remplacer m par :

$$m'(s) = (1 - d)m(s) \text{ si } s \neq \Omega, \text{ et } m'(\Omega) = (1 - d)m(\Omega) + d \tag{7.3}$$

Soit $m_\Omega \in \mathcal{M}$ la fonction de croyance non-informative, c'est à dire définie par :

$$m_\Omega(\Omega) = 1, \text{ et } m_\Omega(s) = 0 \text{ si } s \subsetneq \Omega \tag{7.4}$$

En d'autres termes, discréditer m d'un facteur d consiste à remplacer m par :

$$m' = (1 - d)m + d\, m_\Omega \tag{7.5}$$

Discréditer d'un facteur zéro revient à laisser m inchangée, et discréditer d'un facteur 1 revient à remplacer m par les croyances non-informatives m_Ω.

7.1.3 Mesure d'information et principes d'incertitude

Le modèle de croyance transférable permet de modéliser trois sortes d'ignorance : risque probabiliste avec les $m(\{\omega\})$, incertitude générique avec les $m(s)$ quand s contient plusieurs éléments, et incomplétude avec $m(\emptyset)$. Cela suggère de penser la mesure de l'information portée par dans une distribution de masse m non comme un scalaire, mais comme un triplet de nombres mesurant chacun une de ces dimensions.

Dans une première dimension, l'incertitude peut être mesuré par l'entropie maximum atteinte sur l'ensemble des probabilités admissibles associé à m. Les propriétés et la justification axiomatique de mesure du risque par l'entropie maximum sur $\mathcal{C}$ sont étudiées par Klir [2003], Abellan and Moral [2003]. On note :

$$AU(\mathcal{C}) = \max_{p \in \mathcal{C}} \big[- \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \log_2 p(\omega) \big] \tag{7.6}$$

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

On appelle cardinal de s, noté $|s|$, le nombre d'éléments d'un sous ensemble s de Ω. L'incertitude peut aussi être mesurée par la valeur espérée de $|s|$, en considérant s comme un sous ensemble aléatoire de Ω avec la probabilité m. Cet indicateur est appelé non-spécificité. Le terme 'non-spécificité' traduit l'anglais 'unspecificity'. C'est un néologisme, mais on peut sans doute à peu près comprendre intuitivement le sens du mot. La non-spécificité de la proposition 'Cet effet est attribué à la synergie de k causes' est k.

$$NS(m) = \sum_{s \subset \Omega} |s| \; m(s) \tag{7.7}$$

Plus la non-spécificité est faible, meilleure est l'information. La non-spécificité des croyances non informatives m_Ω est le cardinal de Ω. La non-spécificité d'une probabilité est 1. Cette interprétation reste intuitive pour la non-spécificité de la fonction de masse contradictoire, $m(\emptyset) = 1$, et $m(s) = 0$ si $|s| \geq 1$ qui est zéro.

La formule ci dessus préserve ce caractère intuitif, elle constitue une extension de la notion de cardinalité, qui spécifie un nombre d'alternatives. Deux variantes de la définition ci dessus existent dans la littérature, utilisant une échelle de mesure différente. Rocha [1997] introduit la non-spécificité normalisée entre 0 et 1, en divisant par le cardinal de Ω. Abellan and Moral [1999], et d'autres, qui ont généralisé cet indicateur au cas d'un ensemble $\mathcal{C}$ quelconque, ont considéré l'espérance de $\log_2 |s|$ à la place de l'espérance de $|s|$. Ils obtiennent ainsi une mesure en bits, directement comparable avec l'entropie.

Enfin, dans le modèle de croyances transférables, l'incomplétude se mesure comme :

$$m(\emptyset) = 1 - pl(\Omega) \tag{7.8}$$

la masse de croyance qui n'est attachée à aucun sous-ensemble propre de Ω.

En probabilités précises, une seule dimension existe. Le principe de la raison insuffisante de Laplace est alors relativement simple à traduire en terme d'ignorance maximum. Maximiser l'entropie permet de choisir une distribution de probabilité 'la moins informative' parmi une famille de distributions. Cela permet ainsi de représenter la famille 'le plus prudemment possible'.

En probabilités imprécises, la situation n'est pas aussi simple. Il n'existe pas d'ordre intuitivement naturel, puisque l'ignorance est multidimensionnelle. De plus, on définira plus bas d'autres relations, comme la spécialisation et la comparaison point à point de q qui sont aussi des relations d'ordre partiel entre des distributions de croyance et qui peuvent aussi être interprétées comme 'm_1 est plus informative que m_2'.

7.2 Opérateurs binaires : conjonction et disjonction

Rappelons qu'un opérateur binaire est une fonction qui associe une image $m' \in \mathcal{M}$ à deux éléments m_1 et m_2 de $\mathcal{M}$. Un opérateur $\star$ est dit *idempotent* quand $m_1 \star m_1 = m_1$. Il est dit *commutatif* si et seulement si lorsque $m_1 \star m_2$ existe, alors $m_2 \star m_1$ existe et $m_1 \star m_2 = m_2 \star m_1$. Il est dit *associatif* si et seulement si lorsque $m_1 \star (m_2 \star m_3)$ existe, alors $m_1 \star m_2$ existe, peut être combiné avec m_3 et on a l'égalité $m_1 \star (m_2 \star m_3) = (m_1 \star m_2) \star m_3$. L'opérateur possède un *élément neutre* m_Ω si et seulement $m_1 \star m_\Omega = m_\Omega \star m_1 = m_1$, quel que soit m_1. Il possède un *élément absorbant* m_0

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

si et seulement $m_1 \star m_0 = m_0 \star m_1 = m_0$, quel que soit m_1. L'élément m_2 est un *inverse* de m_1 lorsque $m_1 \star m_2 = m_2 \star m_1 = m_\Omega$.

La conjonction de deux valeurs logiques A et B, notée $A \wedge B$, lue A ET B, est vraie lorsque les deux composantes sont vraies. La disjonction, notée $A \vee B$, lue A OU B, est vraie lorsqu'au moins l'une des deux composantes est vraie. La disjonction exclusive, notée $A \triangle B$, lue A OU EXCLUSIF B, est vraie lorsqu'une et une seule des composantes est vraie. L'opérateur $\triangle$ se lit XOR en anglais.

Les opérateurs binaires définis ci-après sont des outils mathématiques pour combiner deux sources d'information. Quatre opérateurs sont présentés, car il faut croiser deux questions sur la relation entre les sources d'informations : sont-elles indépendantes (auquel cas leur recoupement renforce la précision, mais leur contradiction crée du doute) ? sont-elles en conjonction (deux sources supposées vraies) ou en disjonction (au moins une source est supposée vraie) ?

7.2.1 Conjonctions et disjonctions non interactives

Définissons d'abord l'opération $m_1 \cap m_2$, la conjonction non interactive de m_1 et m_2. Pour tout couple de fonctions de masse m_1 et m_2, en notant respectivement q_1 et q_2 les fonctions de commonalité associées (définies Table 7.1), on peut montrer que les définitions suivantes de $\cap$ sont bien équivalentes :

$$\forall s \subset \Omega, : (q_1 \cap q_2)(s) = q_1(s)q_2(s) \tag{7.9}$$

$$\forall s \subset \Omega, : (m_1 \cap m_2)(s) = \sum_{A,B,\, A\cap B=s} m_1(A)m_2(B) \tag{7.10}$$

En particulier :

$$(m_1 \cap m_2)(\emptyset) = \sum_{A,B,\, A\cap B=\emptyset} m_1(A)m_2(B) \tag{7.11}$$

Même si $m_1(\emptyset) = m_2(\emptyset) = 0$, on peut avoir $(m_1 \cap m_2)(\emptyset) \neq 0$. Ce nombre est d'autant plus grand que les ensembles focaux des deux croyances sont disjoints. Il peut être interprété comme une mesure de la contradiction entre m_1 et m_2.

Dans le modèle de croyances transférables le degré $m(\emptyset)$ de non-pertinence du cadre de référence Ω peut provenir du caractère contradictoire des sources d'informations [Smets, 1992].

Affecter à $\emptyset = A \cap B$ le poids de $m_1(A)m_2(B)$ n'est cependant pas la seule option, on pourrait par exemple l'affecter à $A \cup B$. Une autre idée consiste à abandonner l'hypothèse de l'exclusivité des éléments de Ω, ce qui a conduit Dezert [2002] à proposer récemment une généralisation du modèle de croyance transférables, la théorie DSmT.

Une autre option pour se débarasser de la masse du vide consiste à renormaliser le résultat de la conjonction non-interactive. C'est la règle de combinaison de Dempster :

$$m_1 \oplus m_2 = \frac{m_1 \cap m_2}{1 - (m_1 \cap m_2)(\emptyset)}. \tag{7.12}$$

À la conjonction non interactive correspond un opérateur $\cup$ de disjonction non interactive. Pour tout couple de fonctions de masse m_1 et m_2, en notant respectivement b_1 et b_2 les fonctions d'implicabilité associées, on peut montrer qu'avec les définitions suivantes, $b_1 \cup b_2$ est bien la fonction de commonalité de $m_1 \cup m_2$:

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

$$\forall s \subset \Omega, : (b_1 \cup b_2)(s) = b_1(s)b_2(s) \tag{7.13}$$

$$\forall s \subset \Omega, : (m_1 \cup m_2)(s) = \sum_{A,B,\, A\cup B=s} m_1(A)m_2(B) \tag{7.14}$$

Il est immédiat que chacun de ces deux opérateurs est commutatif et associatif. Cela signifie que lorsque l'on combine par conjonction les opinions de trois experts, le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel les conjonctions sont effectuées. La fonction de croyance vide m_Ω est élément neutre pour la conjonction non interactive.

Kramosil [1997] montre que m_Ω est le seul élément ayant un inverse, et montre comment étendre algébriquement l'espace des fonctions de croyance pour définir des inverses généralisés en utilisant l'analyse non standard. [Smets, 2001, 10.2] démontre les lois de Morgan, avec l'opérateur de négation $\tilde{m}$ introduit plus haut :

$$\widetilde{m_1 \cap m_2} = \widetilde{m_1} \cup \widetilde{m_2} \tag{7.15}$$

$$\widetilde{m_1 \cup m_2} = \widetilde{m_1} \cap \widetilde{m_2} \tag{7.16}$$

En ce qui concerne l'interprétation, une conjonction est un opérateur à considérer pour combiner deux sources d'informations crédibles. Une disjonction est à considérer lorsque l'une au moins des deux sources est crédible. Smets [2000a] donne aussi un opérateur $\triangle$ utilisable si une seule des deux sources est crédible, en remplaçant $A \cup B$ sous la somme dans 7.14 par l'union disjointe ou différence symmétrique (éléments de A ou B mais pas des deux). Smets [1997] justifie axiomatiquement et généralise cette famille d'opérateurs.

Toutefois, à la différence des opérateurs booléens éponymes, ces opérateurs de jonction ne sont pas idempotents. C'est à dire que $m \cap m \neq m$, de même $m \cup m \neq m$ sauf pour m_Ω évidement. La conjonction non interactive peut provoquer un effondrement des incertitudes, par exemple [Dempster, 1967, 4.2] a montré si au moins l'une des deux m_1 ou m_2 est une probabilité, alors la conjonction non interactive est aussi une loi de probabilité.

Cette propriété fait que ces opérateurs ne sont pertinents que pour fusionner des sources d'informations 'distinctes'. C'est pourquoi ces opérateurs sont qualifiés de 'non-interactifs'. Aggréger de cette façon un panel d'experts qui se connaissent tous et partagent les mêmes données risquerait de créer une fausse précision. La section suivante ébauche une réponse à ce problème.

7.2.2 Spécialisation et autres relations d'ordre

Donner une définition générale de la conjonction prudente semble une question de recherche encore ouverte. Pour introduire d'abord la notion de spécialisation, considérons un joueur ayant placé 100 jetons sur un tapis de boule, dont 40 sur « Pair ». Ce joueur décide de reprendre ces 40 jetons et de les redistribuer entre les chances simples 2, 4, 6 et 8. Lorsque la nouvelle distribution gagne, on sait que l'ancienne distribution gagnait déjà. L'inverse n'est pas assuré : c'est le principe de la spécialisation.

On note $\mathcal{S}(m)$ l'ensemble des spécialisations de $m$défini formellement comme suit. On dit que $m' \in \mathcal{S}(m)$ si et seulement si il existe $2^{2|\Omega|}$ coefficients positifs ou nuls notés $a_{s\ t}$ tels que $m'(s) = \sum_{t\subset\Omega} a_{s\ t} m(t)$, où les coefficients vérifient :

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

(i) si $s \not\subseteq t$, alors $a_{s\ t} = 0$, c'est à dire que la masse de $m(t)$ ne peut être redistribuée que sur t ou ses sous-ensembles, et

(ii) $\sum_{s \subset \Omega} a_{s\ t} = 1$ pour tout t, c'est à dire que toute la masse est redistribuée.

Pour tout m, $\mathcal{S}(m)$ est non vide, car il contient au moins m. Réciproquement, lorsque $m' \in \mathcal{S}(m)$ on dit que m est une généralisation de m', ce qu'on note $m \in \mathcal{G}(m')$.

La conjonction non interactive de m_1 avec n'importe quelle autre distribution de masse m_2 est aussi une spécialisation : $m_1 \cap m_2 \in \mathcal{S}(m_1)$. En conséquence la conjonction non-interactive est toujours dans l'intersection des spécialisations $m_1 \cap m_2 \in \mathcal{S}(m_1) \cap \mathcal{S}(m_2)$. On notera $\mathcal{S}(m_1, m_2)$ cette intersection qui est donc non vide.

Le principe d'incertitude maximum ne semble pas suffisant pour choisir parmi $\mathcal{S}(m_1, m_2)$ un élément particulier qui serait la conjonction prudente de m_1 et m_2. Lorsqu'il s'agit de formaliser ce principe par le choix mathématique d'une relation d'ordre, la multi dimensionalité de la notion d'incertitude fait problème. On peut en effet considérer :

- S'il existe m telle que $\mathcal{S}(m_1, m_2) = \mathcal{S}(m)$, un élément maximal pour la relation 'être moins spécialisé que', alors il est unique. Mais l'ensemble des fonctions de croyances les moins spécialisées de $\mathcal{S}(m_1, m_2)$ n'est pas toujours réduit à une seule distribution.
- Dubois et al. [2001] considérent la relation d'ordre partielle $\sqsubseteq_q$ définie entre deux fonctions de masse m et m' à l'aide de la relation d'ordre point à point des fonctions de commonalité q et q' correspondantes, c'est à dire $m \sqsubseteq_q m'$ lorsque $q(s) \leq q'(s)$ pour tout $s \in \Omega$. Cette relation est impliquée si m_1 est une spécialisation de m_2.
- Les auteurs définissent de même une relation d'ordre partielle par la comparaison point à point des fonctions de plausibilité : $pl \sqsubseteq_b pl'$ lorsque $pl(s) \geq pl'(s)$ pour tout s. Là encore, cette relation est impliquée si m_1 est une spécialisation de m_2. Cette relation n'est pas impliquée, et n'implique pas la précédente.
- On peut également comparer les éléments de $\mathcal{S}(m_1, m_2)$ en terme de non-spécificité $NS(m)$, ou avec les autres mesures de l'incertitude évoquées précédement.

On dira que m est s-maximal, respectivement q-maximal, pl-maximal et NS-maximal lorsqu'il est maximal par rapport à chacun des ordres ci dessus. L'existence et surtout l'unicité des éléments maximaux pour chacune de ces relations d'ordre fait problème.

7.2.3 Conjonction prudente

Formellement, considérons l'opérateur que Smets [2000c] appelle la conjonction prudente défini par :

$$(q_1 \Cap q_2)(s) = \min(q_1(s), q_2(s)) \tag{7.17}$$

La fonction $q_1 \Cap q_2$ ainsi définie n'est pas nécessairement une fonction de commonalité, au sens où son inversion par les équations de 7.1 ne conduit pas nécessairement à une fonction m normalisée à l'unité. A défaut de connaître un procédé de renormalisation judicieux, ou d'être prêt à étendre l'espace des distributions à la Kramosil [1997] ou Dezert [2002], la conjonction prudente reste pour l'instant définie seulement lorsque le résultat est bien une fonction de commonalité.

Il existe un sous-ensemble stable des fonctions de croyances pour lequel cet opérateur est toujours défini : les fonctions de croyances consonnantes. Dubois et al. [2001,

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

th. 3.1] montrent que si q_1 et q_2 sont des fonctions de possibilité, alors la conjonction prudente est bien une fonction de commonalité, de surcroît consonnante. C'est aussi l'élément s-maximal et NS-maximal de $\mathcal{S}(m_1, m_2)$.

La conjonction prudente est un opérateur idempotent : $m \Cap m$ existe et est égal à m. Il est commutatif et (au moins parmi les croyances consonnantes) associatif. Je n'ai pas trouvé trace dans la littérature d'un opérateur de disjonction prudente, que l'intuition suggèrerait de définir par le maximum des plausibilités.

Smets, Dubois et Prade proposent la conjonction prudente comme une réponse au problème de la fusion d'experts qui se connaissent et partagent les mêmes données, au moins tant que les opinions sont des fonctions de possibilité. En effet par construction c'est une méthode de combinaison basée sur le principe de s-maximalité, qui ne fait pas la supposition que les deux sources d'information sont indépendantes.

7.3 Conditionnement et bijections probabilités/possibilités

7.3.1 Conditionnements : conjonction avec un évènement

Les opérateurs de conditionnement combinent l'information représentée par un ensemble crédal $\mathcal{C}$ et l'information selon laquelle l'état du monde est dans un sous-ensemble $A \subset \Omega$.

Rappelons qu'un pari $X \in \mathcal{L}(\Omega)$ est une fonction de gain de Ω dans les nombres réels. Tout sous-ensemble $A \subset \Omega$ est caractérisé par sa fonction indicatrice définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, zéro sinon. L'indicatrice de l'intersection de deux sous-ensembles est le produit des indicatrices. La probabilité de A est l'espérance de sa fonction indicatrice, $p(A) = \mathsf{E}_p \mathbf{1}_A$. Enfin il est équivalent de définir un ensemble crédal $\mathcal{C}$ ou une fonction de disponibilité à payer cohérente $\underline{P}$ qui est son enveloppe inférieure : $\mathcal{C} = \{p : \forall X \in \mathcal{L}(\Omega), \mathsf{E}_p(X) \geq \underline{P}(X)\}$, et $\underline{P}(X) = \inf_{p \in \mathcal{C}} \mathsf{E}_p(X)$. On dispose également de la disponibilité à recevoir $\overline{P}(X) = -\underline{P}(-X)$.

Dès que $\mathcal{C}$ n'est plus réduit à une probabilité unique, il est crucial de distinguer deux notions de conditionnement : la focalisation et la révision. La focalisation sur A correspond à la disponibilité à payer *ex ante* pour un pari contingent à A, c'est à dire annulé et remboursé si A ne se produit pas. La révision se rapporte à la construction des croyances postérieures, c'est une modélisation de l'apprentissage : ayant observé A, on souhaite remplacer le contexte global Ω par le nouveau contexte A.

Notons $X|A$ le pari « X contingent à A ». Par définition, acheter ce pari au prix μ rapporte $X - \mu$ si A se produit, mais zéro si A ne se produit pas : le pari est annulé. Notons que dans ce cas la mise est remboursée, contrairement au pari $X \times \mathbf{1}_A$. La fonction de gain net de $X|A$ acheté au prix μ est $\mathbf{1}_A(\omega) \times (X(\omega) - \mu)$.

Walley [1991, ch. 6] montre que si $\underline{P}(A) > 0$, alors l'unique solution de

$$\underline{P}(\mathbf{1}_A(X - \mu)) = 0$$

représente la disponibilité à payer cohérente pour ce pari contingent. Walley [1991, ch. 6.4.2 p. 298] montre que cette disponibilité à payer est aussi égale à :

$$\underline{P}(X|A) = \inf_{p \in \mathcal{C}} \frac{\mathsf{E}_p(X \times \mathbf{1}_A)}{p(A)} \tag{7.18}$$

Dubois and Prade [1997][1] interprètent la focalisation comme décrivant les croyances à propos d'un élément particulier de A. Ils remarquent que si $\overline{P}$ est une fonction de

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

plausibilité, alors $\overline{P}(X|A)$ est aussi une fonction de plausibilité qui se calcule directement :

$$\overline{P}(s|A) = \frac{\overline{P}(s \cap A)}{\overline{P}(s \cap A) + \underline{P}(\overline{s} \cap A)} \tag{7.19}$$

La focalisation conduit à des comportements très prudents. Cela permet d'éviter les opportunités d'arbitrage intertemporel, mais l'information conditionnée dans ce sens est souvent très imprécise. Ce n'est pas un outil mathématique satisfaisant pour formaliser l'apprentissage.

Pour réviser la fonction de plausibilité pl, [Dempster, 1967, 4.2] propose la règle de conditionnement $pl^A(s) = \frac{pl(A \cap s)}{pl(A)}$. [Shafer, 1976, 3.8 p. 67] montre que cela revient à appliquer la combinaison de Dempster-Shafer avec la fonction de masse définie par $m_A(s) = 1$ si $s = A$, sinon 0. Ainsi :

$$pl^A(s) = \frac{pl(A \cap s)}{pl(A)} \tag{7.20}$$

$$bel^A(s) = \frac{bel(s \cup \overline{A}) - bel(\overline{A})}{1 - bel(\overline{A})} \tag{7.21}$$

$$m^A(s) = (m \oplus m_A)(s) \tag{7.22}$$

Dubois and Prade [1997] montrent que si pl est une mesure de possibilité, alors pl^A reste une mesure de possibilité. Ils montrent aussi le résultat suivant :

$$pl^A(s) = \sup_{p \in \mathcal{C}, p(A) = pl(A)} \frac{p(s \cap A)}{p(A)} \tag{7.23}$$

Le rapprochement avec l'équation (7.18) montre que la révision revient à prendre l'enveloppe sur un ensemble crédal plus restreint que la focalisation. Cela produit donc des bornes plus serrées, c'est à dire une information plus précise : $bel(X|A) \leq bel^A(X) \leq pl^A(X) \leq pl(X|A)$ [Dempster, 1967, 4.9].

Pour les probabilités précises, révision et focalisation reviennent tout deux à la loi de Bayes pour des évènements indépendants. Pour les probabilités imprécises, la différence soulève un problème important de cohérence dynamique.

Walley [1991] suggère que la règle de focalisation devrait aussi être utilisée pour réviser les croyances, quite à devoir ajouter de nouvelles informations pour rendre le résultat plus précis. Cette stratégie de modélisation fine est aussi défendue dans [Voorbraak, 1997, p.581], qui suggère explicitement que les croyances résultant de la combinaison doivent être complétées par autant d'hypothèses que nécessaire pour en tirer des conclusions utiles (par exemple sur l'interactivité et la fiabilité des sources.)

7.3.2 Parallèle probabilités/possibilités

Rappelons une interprétation du modèle de croyance transférable dans un contexte de jeu de hasard. Beaucoup de jeux de casino autorisent les mises composées. À la roulette par exemple, on peut jouer 'pair', 'rouge', 'passe', ou à cheval sur plusieurs cases. On peut voir $m(s)$ comme la part de la richesse misée sur la chance multiple s.

[1] Dans l'article de Dubois et Prade et beaucoup d'autres les notations $pl(X|A)$ et $pl_A(X)$ sont inversées par rapport aux notations de Walley que nous suivons.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Une spécialisation remarquable de m est obtenue en répartissant uniformément toutes les mises composées. C'est une distribution de probabilité notée p_m^*. Smets l'appelle la probabilité pignistique, peut-être que l'expression de probabilité spéciale canonique associée à m, qui pourrait être abrégée en 'la probabilité spéciale' serait un terme plus acceptable pour les non-latinistes. Formellement :

$$p_m^*(\omega) = \frac{1}{1 - m(\emptyset)} \sum_{s \subseteq \Omega,\, \omega \in s} \frac{m(s)}{|s|} \tag{7.24}$$

L'équation 7.24 ci dessus la probabilité spéciale p_m^* canoniquement associée à une distribution de croyance m, obtenue en répartissant uniformément la masse de $m(s)$ entre tous les éléments de s.

Réciproquement, pour toute probabilité p donnée, notons $\mathcal{B}(p) = \{m,\, p_m^* = p\}$ la famille des distributions de croyance image inverse de p par cette projection. Autrement dit, la probabilité spéciale associée à toute distribution de $\mathcal{B}(p)$ est p.

Dubois et al. [2001, th. 4] montrent qu'il existe une unique fonction de croyance $\hat{m}$ qui maximise $NS(m)$ sur $\mathcal{B}(p)$. C'est également l'unique fonction de croyance maximale au sens de $\sqsubseteq_q$. Les ensembles focaux de $\hat{m}$ sont emboités, c'est une fonction de possibilité.

Elle se calcule explicitement en indexant les éléments de Ω de telle sorte que $p_1 \geq \ldots \geq p_n$. Posons $p_{n+1} = 0$. Les ensembles focaux sont $A_i = \{\omega_1, \ldots, \omega_i\}$ et :

$$\hat{m}(\{\omega_1, \ldots, \omega_i\}) = i \cdot (p_i - p_{i+1}) \tag{7.25}$$

Cette transformation est illustrée Figure 7.1. Illustrons cette transformation de probabilité en possibilité, au moyen de 100 jetons misés sur une table de jeu. Supposons que $|\Omega| = 3$ pour simplifier, et que l'on parte de $p = (0.1, 0.65, 0.25)$. Cette probabilité se matérialise par la distribution de 10 jetons sur $\{1\}$, 65 sur $\{2\}$ et 25 sur $\{3\}$. C'est une probabilité, elle est uniquement placée sur les chances simples.

L'algorithme considère d'abord la plus petite mise, 10 jetons. On prend 10 jetons de chaque pile, et on mise les 30 sur la chance composée $\{1, 2, 3\}$. Puis on recommence. Le plus petit tas restant est de 15 jetons. On prend donc les 15 jetons sur $\{3\}$, et 15 qui sont sur $\{2\}$ pour miser encore 30 sur la chance composée $\{2, 3\}$. Finalement, on laisse les 40 jetons sur $\{2\}$ à leur place.

Pour résumer, a priori le principe d'incertitude maximale pouvait être interprété de trois façons différentes : $\sqsubseteq_q$, spécialisation ou non-spécificité NS. [Dubois et al., 2001, fig. 1] ont montré que cela ne changeait pas le sens des deux opérations suivantes : passer d'une probabilité p à une possibilité π comme expliqué ci dessus, et combiner deux possibilités par la conjonction prudente.

7.3.3 Conclusion

Ce chapitre présente quelques opérateurs de la théorie des probabilités imprécises. Il montre en particulier la différence entre conjonction non interactive (qui suppose les sources d'informations distinctes) et la conjonction prudente, plus appropriée comme méthode d'aggrégation des opinions d'experts. Plusieurs relations sont introduites pour modéliser la relation 'être plus informatif que'. L'argument essentiel est que pour les fonctions de possibilité, ces modélisations différentes supportent la même définition de la conjonction prudente : prendre le minimum.

Si la marque d'une théorie intéressante est qu'elle pose plus de questions qu'elle n'en résoud, alors les probabilités imprécises sont certainement très intéressantes.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

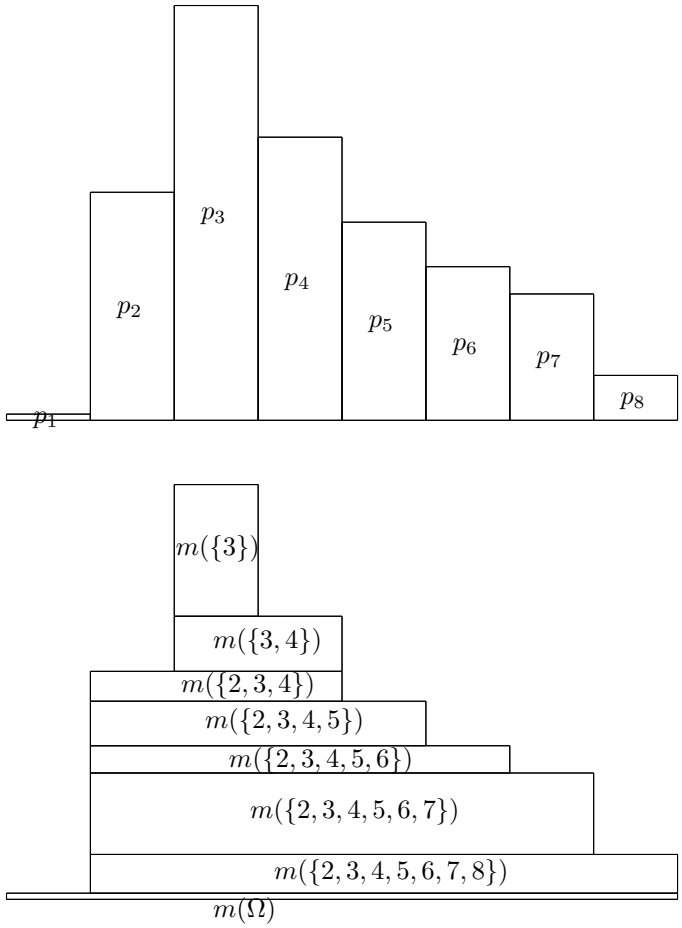


FIG. 7.1 – Correspondance entre, en haut, une distribution de probabilité p représentée par la surface des rectangles et, en bas, une fonction de croyance dont la distribution m est représentée par la surface des tranches successives. Par construction les ensembles focaux sont emboités, c'est à dire que la fonction de croyance est consonnante, c'est une mesure de possibilité. Source des données : opinion de l'expert 1 dans le chapitre 9.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Sur le plan théorique, une certaine unité se dégage mais les morceaux ne sont pas tous reliés entre eux. Comment caractériser un ensemble crédal $\mathcal{C}$ qui résulte d'une fonction de croyance ? Comment généraliser les opérateurs de combinaison lorsque l'information est représentée par $\mathcal{C}$? Comment généraliser la conjonction prudente au delà des fonctions de possibilité, et quel opérateur de conditionnement en découle ?

Les trous dans le parallèlisme entre probabilités et possibilités sont particulièrement criants. On sait que toute fonction de croyance peut se représenter comme le minimum d'une famille de probabilités, ou comme le produit de famille de possibilités, mais où sont les possibilités dans $\underline{P}$? Il serait intéressant de faire le lien entre les deux types d'opérateurs de conjonction, les deux types de conditionnement, les deux formes risque/ignorance et le parallèle probabilité/possibilité.

Il reste aussi des zones entières qui mériteraient d'être mieux exposées, comme la correspondance des probabilités imprécises avec les approches symboliques (c'est à dire les Logiques, voir Halpern [2003]), les approches utilisées pour les bases de données, ainsi que les justifications axiomatiques. Parmi les développements récents qu'il n'a pas été possible de détailler, Kramosil [1997] illustre l'apport de l'analyse non standard, alors que Dezert [2002] montre comment le modèle des croyances transférables n'est qu'un premier pas dans la modélisation des surprises.

Les discussions sur les opérateurs se prêtent peut-être moins aux polarisations périlleuses que les discussions épistémiques sur les interprétations. Leur nature mathématique et non philosophique permet des débats plus apaisés. Mais à moyen terme, le développement d'interprétations claires et d'algorithmes efficaces sera crucial sur le plan pratique. Il reste aussi un important travail de validation expérimentale, en psychologie comme en économie, pour discerner dans quelle mesure les probabilités imprécises permettent de mieux décrire et prédire les comportements que le cadre standard de l'utilité espérée.

Le modèle de croyance transférables relaxe la contrainte sur la probabilité de l'ensemble vide, mais $m(\emptyset)$ souffre d'une interprétation double : mesure d'incomplétude, mais aussi mesure de contradiction. De plus, tous ces modèles conservent un poids total de croyance normalisé à 1, alors qu'en pratique, une information provenant de deux sources indépendantes a une force de conviction nettement supérieure à une information provenant d'une seule source. Ne faudrait-il pas chercher à renormaliser par le nombre de sources indépendantes ?

Dans les limites d'une théorie de l'information qui demande donc à être complétée à l'avenir sur trois aspects importants : l'analyse des interactions entre décideurs (problèmes de jeux), les gains et pertes non-marginales (problèmes d'utilité) et le temps (problèmes de séquentialité), les outils proposés dans cette partie permettent de commencer à modéliser les situations de controverse, comme on va le faire dans la partie suivante.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 8

Croyances, cohérence et masse du vide

L'approche naïve pour construire des probabilités imprécises à partir d'un ensemble d'experts consiste à demander à chacun une distribution de probabilité, puis à considérer pour $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de ces distributions. Mais aucune de ces deux étapes d'élicitation et d'aggrégation de l'information n'est si évidente qu'elle pourrait le paraître à priori.

Ce chapitre se concentre sur l'élicitation. La fusion d'opinions de plusieurs sources sera discutée au chapitre suivant. Les probabilités imprécises permettent de refonder l'élicitation sur une théorie de l'information et de la communication, qui contraint moins les experts que les méthodes probabilistes précises. Ce chapitre développé en collaboration avec Elizabeth Casman et Granger M. Morgan, [Ha-Duong et al., 2004] propose une stratégie pour éliciter de façon cohérente une opinion d'expert en situation d'information incomplète, et en déduire des informations concernant des risques mal caractérisés.

La première section expose la méthode, développée pour un problème d'épidémiologie. On cherche à préciser dans quelle mesure les décès par cancer du poumon peuvent être attribués à certains facteurs de risque tels que tabac, amiante, radon et autres polluants. Le point délicat est la prise en compte des incertitudes et des synergies entre polluants.

La seconde section utilise le modèle de croyance transférable (TBM) pour calculer des bornes cohérentes sur la fraction des décès attribuable à chacun des polluants. Le TBM (voir section 7.1.1 page 82) est une évolution de la théorie de l'évidence de Dempster-Shafer, avec la différence principale qu'un poids non nul peut être attribué à l'évènement vide $\emptyset$. Cette fraction des décès attribuable à aucun polluant se calculera à partir du taux 'naturel' de cancers du poumon observé dans les populations non exposées aux carcinogènes contemporains.

En troisième section cette méthode est appliquée numériquement avec des données sur le risque de cancer du poumon aux USA. Compte tenu des bornes sur les risques bien caractérisés (tabagie, amiante, radon) et du nombre total de décès, il est possible de déduire une borne supérieure sur le nombre de décès attribuables aux polluants mal caractérisés en utilisant un principe d'incertitude maximum.

Facteurs bien caractérisés	Facteurs moins bien caractérisés
Fumée de cigarette	Exposition professionnelle :
Fumée passive	Arsenic
Exposition au Radon	Chromates
Amiante	Chloromethyl ethers
	Particules diésel
	Nickel
	Hydrocarbures aromatiques polycycliques
	Pollution ambiante de l'air

TAB. 8.1 – Exemples de facteurs de risque environnementaux du cancer du poumons

8.1 Statistique et causalité multiple

8.1.1 Objet de la méthode

En général, le risque pour la santé de l'exposition à un contaminant environnemental se calcule par une procédure inductive, voir par exemple BEIR VI [1999]. La méthode standard implique d'estimer les émissions de substances nocives, de modéliser les transferts et transformations dans l'environnement, puis d'employer des modèles d'exposition et d'accumulation physiologique et enfin des fonctions dose/réponse.

Cet enchaînement peut être convaincant lorsque la connaissance est bien maîtrisée à chaque étape. Mais lorsque les facteurs de risque sont multiples et/ou que les experts refusent de conclure, cette procédure peut conduire à des incohérences. Elle peut conduire à attribuer un tel nombre de victimes à chaque facteur de risque qu'au total la somme excède le nombre de victimes observées du cancer du poumon.

Granger Morgan [2001] propose d'utiliser des méthodes d'analyse des bornes pour étudier de façon plus robuste les risques environnementaux mal connus dans le détail. Si les causes du cancer du poumon sont multiples, on connait toutefois l'enveloppe globale du nombre de victimes, ainsi que l'importance des facteurs principaux. La mise en cohérence de ces deux source d'information contraint donc l'importance des facteurs résiduels encore mal étudiés.

Si le total et les facteurs principaux étaient connus avec précision et n'interagissaient pas, le problème serait aussi simple qu'une soustraction. Mais ce n'est pas le cas. Les estimations de risque connues sont en général elles-même le résultat de modèles et d'études statistiques imparfaites. Celles-ci sont basées sur un nombre limité de sujets et présentent toujours des écarts aux conditions idéales d'observation sans biais. Cela entache systématiquement le résultat d'incertitude. C'est pourquoi il est courant de voir les estimations centrales accompagnées d'intervalles de confiance, surtout lorsque plusieurs modèles différents existent. De plus, les interactions entre causes sont particulièrement difficiles à observer.

L'objet de la méthode présentée ici est de quantifier le risque résiduel compte tenu de l'information disponible sur les risques les mieux connus, en tenant compte de cette imprécision inévitable et des interactions. L'exemple illustratif est la mortalité par le cancer du poumon, dont on connait relativement bien certains facteurs de risque et d'autre moins. Ces facteurs sont rappelés Table 8.1. La colonne « Facteurs bien caractérisés » signifie qu'il existe des études longitudinales à l'échelle de la population. Le résultat de la méthode va être une borne supérieure sur la mortalité pouvant être attribuée aux facteurs de l'autre colonne.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Pour calculer borner les risques mal caractérisés, le jugement d'un expert est utilisé pour attribuer une portion des cancers observés aux causes mieux connues comme le tabagisme, le radon et l'amiante.

Si on ne se pose pas le problème des interactions, la borne supérieure sur les facteurs de risque mal connus peut calculée par extension naturelle. C'est le nombre maximum de victimes attribuables à 'autres facteurs' cohérent avec les informations obtenues, où la notion de cohérence est celle de [Walley, 1991, chapter 4] exposée précédemment au 6.3.2. Il suffit de soustraire la somme des bornes inférieures du nombre total de décès.

Si on désire exclure les interactions d'ordre 3 ou plus, alors il devient difficile de raisonner par cohérence des probabilités imprécises. On se place alors dans le cadre du modèle de croyances transférables de Smets [2000a] pour utiliser un principe de non-spécificité maximum. La résolution peut s'effectuer par programmation linéaire. Cette combinaison de programmation linéaire et probabilités imprécises est déjà présente dans un protocole d'élicitation proposé par Lins and de Souza [2001]. Le but poursuivi dans la suite est toutefois différent. Lins et al. cherchent à évaluer une probabilité a priori concernant la valeur d'un seul paramètre scalaire inconnu (Ω est l'ensemble des nombres réels) alors qu'ici on cherche à borner une alternative parmi un petit nombre.

Dans la suite on s'intéresse à la seconde méthode, même si l'élicitation menée auprès des experts a privilégié la première, plus simple à exposer dans le cadre un entretien face à face de durée mesurée.

8.1.2 Cadre statistique avec causes multiples

Soit N le nombre total de décès dans une année donnée par le cancer du poumon. Soit Ω l'ensemble des causes étudiées. Par exemple, $\Omega = \{C, R, A, X\}$ où C signifie la tabagie (on considérera ensemble les tabagismes actif et passif), R l'exposition au radon, A l'amiante et X regroupe tous les autres facteurs environnementaux mal caractérisés dont on cherche à borner l'effet.

Le modèle suppose que N est bien observable et donc connu avec précision. Même si ce n'est pas strictement vrai dans le cas du cancer du poumon [Archer and Lyon, 2000, ACI, 2003] l'hypothèse n'est pas trop gênante puisque les résultats de la méthode sont calculés en pourcentage de N. On suppose que l'exposition à un facteur de risque est binaire (soit la victime a été exposée, soit non), ce qui est évidemment une approximation forte. Cette approximation est néanmoins cohérente avec les définitions de l'exposition à un polluant utilisées dans les études épidémiologiques.

Sous ces deux hypothèses, chaque décès peut être relié à zéro, une ou plusieurs causes possibles dans Ω, en fonction des facteurs de risque auquel l'individu a été exposé avant de contracter la maladie. La majorité des cancers du poumon est causée par le tabagisme seul, mais on doit faire une place aux cas résultants de la synergie de plusieurs facteurs de risque, comme le tabagisme et le radon ensemble par exemple.

La Figure 8.1 représente une façon de partitionner N par causes en incluant les causes multiples. On note $n(s)$ le nombre de décès liés aux causes s, pour tout sous-ensemble s de Ω. Pour raccourcir les notations on notera les sous-ensembles sans les accolades, soit XR pour $\{X,\ R\}$. Sur la figure l'amiante est omise pour ne pas surcharger, mais dans la suite les quatre causes sont considérées. Il pourrait donc y avoir $16 = 2^4$ sous-ensembles s possibles.

La fonction n ne provient pas de données réelles. La mesure directe de la statistique de base n est indisponible. L'exposition à un polluant ne se traduit pas toujours

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

N = Tous cancers mortels du poumon

$n(\emptyset)$	$n(C)$	$n(R)$	$n(CR)$	$n(X)$	$n(XC)$	$n(XR)$	$n(\Omega)$

FIG. 8.1 – La statistique de base n, simplifiée en gardant seulement trois facteurs de risque : tabagie (C), radon (R), et autres polluants (X). Le nombre N est le total des décès par cancer du poumon. La fonction $n(\cdot)$ est le nombre de décès attribuables à chaque facteur de risque ou combinaison de facteur, son argument est un sous-ensemble de Ω. En particulier $n(\emptyset)$ est le nombre de décès par cancer du poumon spontanés qui se produiraient en l'absence de tous les facteurs de risque. Réciproquement $n(\Omega) = n(CRX)$ compte les cas dans lesquels aucun facteur de risque ne peut être écarté.

par un cancer mortel du poumon et rétrospectivement, on ne peut qu'estimer approximativement les doses reçues durant la vie d'un sujet. Cette fonction n'est qu'un objet mathématique pour supporter l'élicitation cohérente des bornes par les experts.

8.1.3 L'interprétation causale du modèle statistique

Il serait utile de disposer d'une définition parfaitement claire de l'attribution d'un effet —par exemple un cancer mortel du poumon— à un facteur de risque —par exemple le tabagisme. Mais la causalité est un concept fondamental en philosophie, particulièrement en philosophie des sciences, qui reste difficile à définir simplement.

On s'intéressera seulement à deux aspects de la causalité bien soulignés dans la littérature épidémiologique [Parascandola and Weed, 2001, Murray et al., 2003] et critiques dans le modèle statistique proposé ci dessus : la causalité est parfois multiple, toujours contrefactuelle.

Premièrement, la causalité peut être multiple, car certains effets découlent de la conjonction de plusieurs causes réunies ensemble. En particulier le cancer du poumon peut être causé par une variété de facteurs comme le tabagisme, l'amiante ou le radon agissant seuls ou *conjointement*. On ne peut pas donc pas considérer seulement les catégories simples pour expliquer les décès par cancer du poumon, il faut aussi tenir compte des causes composées.

Le cadre comptable ébauché ci dessus prend en compte cette multiplicité de façon directe : n est définie sur les sous-ensembles de Ω et non simplement sur les singletons. Soulignons toutefois que ce modèle s'interprète différement du modèle de la multiplicité des causes en épidémiologie exposé dans Rothman [2002], car il s'agit essentiellement d'une variante de la théorie de l'évidence discutée section 6.2[1]

Pour Rothman, quand un effet est attribué à une constellation de facteurs, cela implique que la suppression de l'un de ces facteurs entraînerait certainement la disparition de l'effet. Dans le présent modèle, l'attribution d'un effet à une constellation de facteurs prend la signification complémentaire. Cela signifie que les facteurs hors de la constellation n'ont certainement pas participé à la réalisation de l'effet. Par exemple il s'agit de facteurs de risques auxquels on sait que la victime n'a pas été exposée. On ne peut pas savoir précisément lequel des composants de s a physiologiquement causé le cancer, car il peut y avoir eu des synergies. Autrement dit :

[1] La statistique n correspond à la distribution de masse de croyance m à un facteur multiplicatif N près.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Ici $n(s)$ s'interprête comme le nombre de cas dans lesquels un ou des polluants s peuvent avoir causé la maladie, les polluants dans le complémentaire de s étant mis hors de cause.

Rothman [2002] attire ensuite l'attention sur un autre problème de multiplicité. Il rappelle que « Même si cela peut sembler une exagération de dire que 100% de toutes les maladies proviennent à la fois de l'environnement et de prédispositions génétiques, c'est une bonne approximation. Cela peut sembler contre-intuitif car la plupart du temps on ne peut pas manipuler plusieurs facteurs de risque, et celles qu'on peut contrôler tendent à être soit environnementaux soit génétiques mais rarement les deux. » Dans ce chapitre, on s'intéresse uniquement aux facteurs environnementaux, puisque ce sont ceux sur lesquels la politique publique peut agir.

Deuxièmement la causalité ne peut être définie qu'en faisant appel à une référence contrefactuelle. Comme l'expliquent Parascandola and Weed [2001], la proposition 'fumer un paquet par jour augmente le risque de cancer du poumon' fait implicitement référence à la situation 'ne pas fumer'. Mais on pourrait aussi dire que 'fumer un paquet par jour diminuerait le risque du cancer du poumon' si la référence sociale était d'en fumer deux. En règle générale il est nécessaire de concevoir ce qui serait arrivé si la cause avait été absente.

Cela conduit à examiner de plus près la question du niveau de référence, discutée par exemple dans [Greenland, 2002, chap. 6.2]. Deux points sont particulièrement importants :

- Les indicateurs de nocivité d'un polluant (population attribuable fraction) prennent idéalement pour référence le niveau zéro d'exposition à ce polluant. Non seulement le niveau 'naturel' d'exposition est difficile à définir et à mesurer, mais de plus les mesures envisageables de lutte contre la pollution correspondent rarement à un retour au niveau zéro. Cette idéalisation du point de référence, lorsque les effets sont non linéaires par rapport aux doses, peut fausser l'analyse des bénéfices des politiques publiques intéressées.
- D'autre part, on observe que même chez les populations les plus à l'abri des carcinogènes modernes l'incidence du décès par cancer du poumon n'est pas nulle. On ne peut donc pas considérer que l'exposition zéro aux facteurs de risque de Ω entraîne un risque nul. Certains des fumeurs décédés du cancer du poumon auraient quand même développé la maladie sans fumer. Ce serait une faille méthodologique sérieuse de ne pas prendre en compte ce taux « naturel » de décès.

Dans la méthode proposée le nombre de cancers du poumon pour lequel toutes les causes de Ω sont exclues est $n(\emptyset)$, à gauche sur la Figure 8.1. Ces cas sont considérés comme des cancers du poumon spontanés. On envisage par exemple les effets mutagènes de la radioactivité ambiante naturelle, conjugués à la détérioration des mécanismes de réparation cellulaire avec l'âge.

L'interprétation de $n(\emptyset)$ se distingue de celle de $n(X)$. On dispose d'estimations de $n(\emptyset)$ basées sur des groupes de population rurales sélectionnées pour leur mode de vie et supposées non exposées à X. Au contraire $n(X)$ va être calculé comme un résidu à partir d'opinions sur les autres polluants et non sur la base d'observations empiriques. Ce nombre se rapporte aux cas de décès dans la population générale, dont une partie est exposée aux polluants mal caractérisés.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

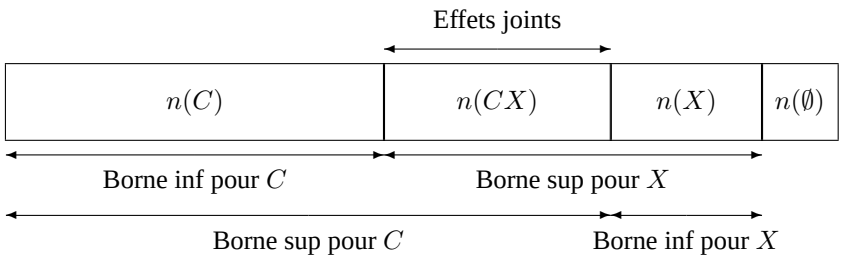


FIG. 8.2 – Bornes sup. et inf. du nombre de décès attribuables à C et X

8.2 Modèle et mise en cohérence des bornes

8.2.1 Bornes sur le risque attribuable à un ou plusieurs polluants

Comme discuté précédement, $n(s)$ représente le nombre de cas dans lesquels les polluants dans s ont pu causer la maladie. Dans ce modèle d'analyse de borne, la seule incertitude provient des effets joints, c'est à dire les cas dans lesquels il n'est pas possible d'attribuer le cancer à l'un ou l'autre des facteurs. Cette statistique de base n peut ainsi être utilisée pour borner le nombre de cas attribuables à la tabagie. En notant respectivement $\overline{n}(C)$ et $\underline{n}(C)$ les bornes supérieures et inférieures :

- La borne inférieure est le nombre de cas attribués à la tabagie seule, c'est à dire $\underline{n}(C)$=$n(C)$.
- La borne supérieure est le nombre de cas exposés à la tabagie et éventuellement d'autres facteurs, c'est à dire $\overline{n}(C) = n(C) + n(XC) + n(CR) + n(XCR) + n(CA) + n(XCA) + n(CRA) + n(XCRA)$.

La formule précédente peut s'écrire aussi :

$$\overline{n}(C) = \sum_{E} : n(E) \text{ pour tous sous-ensembles } E \text{ de } \Omega \text{ contenant } C$$

La Figure 8.2 illustre cette définition des bornes supérieures et inférieures du nombre de décès attribuables à X et C. Pour simplifier la figure est dessinée avec seulement deux facteurs, c'est à dire $\Omega = \{C, X\}$.

Cette définition, qui découle de l'interprétation suggérée par la théorie de Dempster-Shafer, peut être reliée à la notion de fraction attribuable en épidémiologie. Dans cette discipline, la *fraction attribuable* à un polluant C est la proportion des cas qui pourraient être évités si l'exposition au polluant était totalement éliminée. On la note $af(C)$. Le modèle suggère alors les bornes suivantes pour la fraction attribuable, en prenant en compte avec un facteur $1 - r_0$ la part des cancers du poumons spontanés parmi les cas exposés à la fumée du tabac :

$$\frac{\underline{n}(C)}{N}(1 - r_0) \leq af(C) \leq \frac{\overline{n}(C)}{N}(1 - r_0) \tag{8.1}$$

Le taux naturel r_0 est par définition le nombre de décès par cancer du poumon dans la population non-exposée divisé par la taille de la population non exposée. En notant respectivement p_C, p_R et p_A les fréquences relatives de l'exposition aux facteurs respectifs $C,\ R,\ A$ dans la population totale de taille T, et en supposant l'indépendance statistique c'est à dire que les fumeurs ne sont ni plus ni moins exposés au radon ou à

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

l'amiante que les non fumeurs, la population non exposée est de taille $(1-p_C)(1-p_R)(1-p_A)T$. Le nombre de décès 'naturels' dans cette population est donc :

$$n(\emptyset) = r_0(1-p_C)(1-p_R)(1-p_A)T \tag{8.2}$$

Ce nombre correspond à $n(\emptyset)$ les cas dans lesquels tous les facteurs de Ω sont hors de cause. Savoir que la non-spécificité est nulle, c'est à dire $m(\emptyset) = 1$, ce serait savoir qu'aucune des substances de Ω ne cause l'effet considéré. C'est bien l'état d'information maximum atteignable (et souhaitable).

8.2.2 Illustration graphique

Considérons les bornes attribuables à des causes jointes. On se limitera à borner les nombres de décès, les bornes sur les fraction attribuables peuvent se définir et se calculer comme dans l'équation 8.1 en multipliant par $\frac{(1-r_0)}{N}$.

Notons s un sous-ensemble de Ω, par exemple $s = CR$. On distinguera deux interprétations de la causalité jointe. Dans le cas conjonctif, on s'intéresse aux décès causés par la présence simultanée des facteurs C et R en synergie. Dans le cas disjonctif, on s'intéresse aux décès causés par un ou plusieurs facteurs de s, on ajoute donc ceux causés par C seul, R seul et RC ensemble.

Pour les causes jointes agissant conjonctivement, le cas d'un seul facteur se généralise ainsi. Pour la borne inférieure du nombre de décès attribuables aux causes jointes, on peut considérer le nombre de cas exposés à ces facteurs. De même, la borne supérieure est le nombre de cas exposés au moins à s. Ces bornes peuvent être notées en utilisant le signe $\wedge$ de la conjonction :

$$\underset{\wedge}{n}(s) = n(s) \tag{8.3}$$

$$\hat{n}(s) = \sum_{E} : n(E) \text{ pour toutes les parties } E \text{ de } \Omega \text{ contenant } s \tag{8.4}$$

Cette borne supérieure $\hat{n}$ correspond à la fonction de commonalité dans le modèle de croyances transférables de Smets [2000a]. Les bornes sur le nombre de décès attribuables aux causes agissant disjonctivement (tabagie OU radon) correspondent aux deux autres fonctions de la théorie de l'évidence. La fonction de croyance bel se rapporte aux cas exposés à un ou plusieurs facteurs de s, à l'exclusion de tout autre. La plausibilité pl correspond à la borne sur les cas exposés à au moins un facteur de s, c'est à dire :

$$\underset{\vee}{n}(s) = \sum_{E\subset\Omega,\, \emptyset\neq E\in s} : n(E) \overset{\vee}{n}(s) = \sum_{E\subset\Omega,\, s\cap E\neq\emptyset} : n(E) \tag{8.5}$$

Les bornes supérieures et inférieures sont interprétées géométriquement à l'aide de la correspondance avec l'ensemble crédal sur la Figure 8.3 (en omettant A pour simplifier le dessin). Disons qu'une attribution $\pi(s)$ des décès aux causes est catégorielle lorsqu'elle est construite entièrement sur les causes simples, c'est à dire que $\pi(C) + \pi(R) + \pi(X) = N - n(\emptyset)$.

Une attribution catégorielle π sera dite compatible avec une statistique quelconque n lorsqu'elle est dominée par la fonction $\overset{\vee}{n}$ définie précédement, au sens où $\sum_{x\in s} \pi(x) \leq \overset{\vee}{n}(s)$ pour toute combinaison $s \subset \Omega$ de facteurs. La figure montre l'ensemble $\mathcal{P}$ des attributions catégorielles compatibles avec une statistique donnée n.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

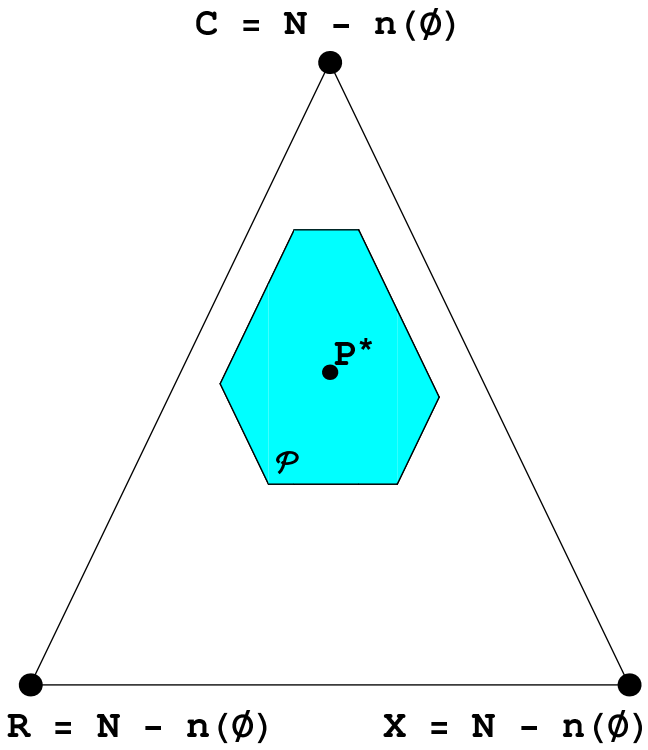


FIG. 8.3 – Attributions catégorielles compatibles avec un jeu donné de bornes supérieures et inférieures sur C, R et X.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

8.2.3 Non contradiction et cohérence des bornes

Les bornes sur les facteurs de risque bien connus doivent être non contradictoires. Par exemple, on ne peut pas admettre que la borne inférieure pour C soit 66 pourcent en même temps que celle pour R soit 50 pourcent : cela ferait au moins 116 pourcent de morts. Une telle contradiction est représentée sur la Figure 8.4, en haut.

Mathématiquement, un système de bornes $(\underline{b}(s),\, \overline{b}(s))_{s\in\Omega}$ défini sur les facteurs de risque simples s est non contradictoire lorsque trois conditions sont réunies : chaque borne inférieure est inférieure à la borne supérieure correspondante ; la somme des bornes inférieures est inférieure à N ; et la somme des bornes supérieures est supérieure à N [Walley, 1991, 4.6.1. p. 198].

L'ensemble $\mathcal{P}$ des attributions catégorielles π compatibles avec un système de bornes est défini par : « $\pi \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\underline{b}(s) \leq \pi(s) \leq \overline{b}(s)$ pour tous les facteurs s ». Un système de bornes est non contradictoire si et seulement si $\mathcal{P}$ est non vide.

On peut alors considérer l'enveloppe inférieure de $\mathcal{P}$, c'est à dire la fonction $\underline{p}$ définie par $\underline{p}(X) = \inf_{p\in\mathcal{P}} \mathsf{E}_p(X)$ et de même l'enveloppe supérieure $\overline{p}$. Il s'agit de l'extension naturelle du système de bornes, notion déjà rencontrée au 6.3.3.

On dira que le système de bornes est cohérent si et seulement si il coïncide avec son extension naturelle, c'est à dire $\underline{b}(s) = \underline{p}(\mathbf{1}_s)$ et $\overline{b}(s) = \overline{p}(\mathbf{1}_s)$ pour tout s. Par exemple, si on sait qu'au moins 70 pourcent des décès sont dus à la cigarette seule ($\underline{b}(C) = 0.70$) alors on peut déjà en déduire qu'au plus 30 pourcent sont dus à A. Dire que la borne supérieure de A est 45 pourcent ne serait pas cohérent, même si ce n'est pas contradictoire. La Figure 8.4 en bas illustre la notion de non cohérence. Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est non vide, mais au moins une borne révélée ne le tangente pas.

On peut alors remarquer que la procédure d'extension naturelle ne suppose pas que les bornes soient définies sur tous les éléments de Ω. Cela permet ainsi de tirer toutes les conséquences des bornes sur les risques bien caractérisés. On peut déduire d'un système de bornes non contradictoires $(\underline{b}(s),\, \overline{b}(s))_{s\in\Omega,\, s\neq X}$ un système de bornes cohérentes $(\underline{p}(s),\, \overline{p}(s))_{s\in\Omega}$. Ce système de bornes cohérentes inclut en particulier la borne supérieure cohérente du nombre de décès attribuables à X, sans toutefois limiter les interactions entre polluants.

Un système non contradictoire de jugements d'expert définit un $\mathcal{P}$ non vide. On peut donc calculer la fonction $\overline{p}$ en tout vecteur X par programmation linéaire. Il suffit de maximiser $p(X)$, par rapport à p contraint dans $\mathcal{P}$.

On peut profiter du dispositif qui limite les experts à donner des jugements sur les bornes, c'est à dire sur les singletons de Ω, pour pousser l'analyse. Un système de bornes cohérentes peut en effet être caractérisé directement. Walley [1991, 4.6.1. p. 198] montre qu'un système de bornes $(\underline{b}(s),\, \overline{b}(s))_{s\in\Omega}$ sur les facteurs de risque simples est cohérent lorsqu'il est non contradictoire et qu'il vérifie pour tous les facteurs s dans Ω la relation :

$$\overline{b}(s) + \sum_{t\in\Omega, t\neq s} \underline{b}(t) \leq 1 \leq \underline{b}(s) + \sum_{t\in\Omega, t\neq s} \overline{b}(s) \tag{8.6}$$

Pour utiliser ces inégalités, il faut d'abord s'assurer que les bornes sur les polluants connus sont cohérentes. On peut alors déterminer la borne supérieure sur X en la considérant comme une inconnue à maximiser dans ce système d'inégalités.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

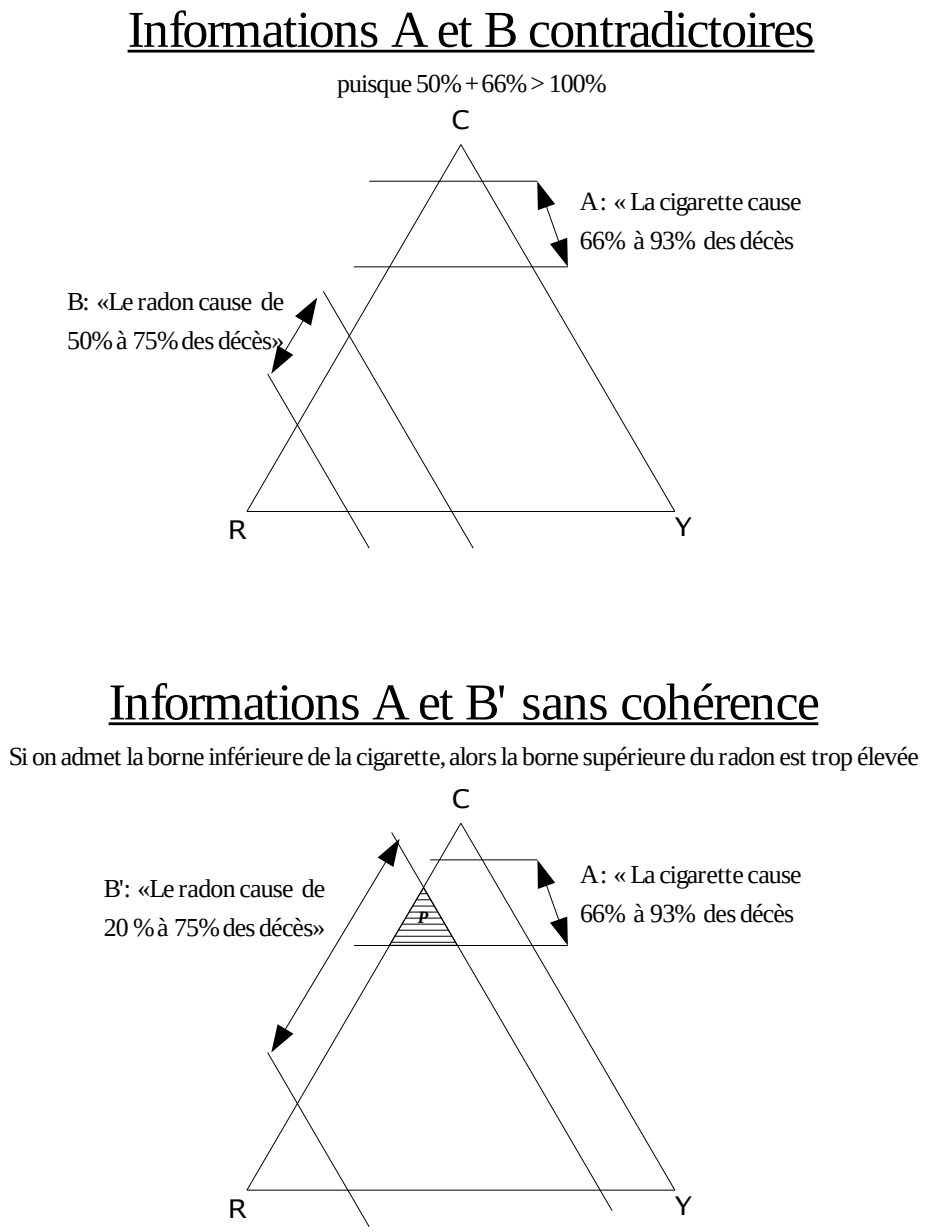


FIG. 8.4 – Contradiction et incohérence.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

8.3 Application : causes du cancer du poumon

Les équations précédentes permettent de calculer une borne supérieure sur X cohérente. Mais elles présentent une limitation : elles autorisent les interactions à 3 facteurs[2]ou plus. On dispose de peu d'information épidémiologique robuste sur ces interactions, mais il semble beaucoup plus réaliste de supposer que l'interaction de 3 ou 4 facteurs est une cause épidémiologique négligeable pour expliquer les décès par cancer du poumon.

Il semble relativement difficile de formuler cette contrainte d'interaction en terme d'attributions compatibles et de paris désirables. Par contre, elle est immédiate à écrire en terme de statistique n, comme on va le voir dans la suite.

8.3.1 Procédure de calcul

La borne est déterminée en résolvant numériquement un problème de programmation linéaire dans un espace à $2^{|\Omega|}$ dimensions : maximiser $\overline{n}(X)$ exprimé comme une fonction de l'inconnue n sous le jeu de contraintes :

- Tous les $n(s)$ sont positifs ou nuls, leur somme est N et $N(\emptyset)$ est donné.
- Pour traduire les bornes sur le risque attribuable à C comme des contraintes égalité, on utilise d'abord l'inéquation 8.1 pour calculer la valeur numérique de $\overline{n}(C)$ (respectivement $\underline{n}(C)$). On contraint alors l'expression de $\overline{n}(C)$ (respectivement $\underline{n}(C)$) en fonction de n à ces valeurs. On procède de même pour les bornes sur R et X.

La satisfiabilité des contraintes égalité nécessite la cohérence des bornes sur les polluants connus. Si les équations 8.6 ne sont pas vérifiées, il faut remplacer les bornes révélées par l'expert par les bornes cohérentes calculées par extension naturelle.

Les bornes calculées avec les contraintes ci dessus peuvent être très larges, car les interactions à trois facteurs ou plus sont autorisées. Il n'existe pratiquement aucune étude sur les interactions au delà de deux facteurs. On peut penser que ces interactions d'ordre élevé devraient être négligées, c'est à dire que si s a 3 élements ou plus alors $n(s) = 0$.

Les résultats présentés dans la suite font cette hypothèse. C'est une approximation d'ordre zéro insatisfaisante, mais l'alternative —autoriser tout à interagir avec l'importe quoi— me semble encore moins satisfaisante. Il serait utile d'approfondir la formalisation de la notion d'indépendance, en lien avec les opérateurs discutés au chapitre 7.

Pour l'implémentation numérique, les calculs ont été réalisés avec *Mathematica*. Ils utilisent le package présenté encadré 8.1, développé à l'occasion pour implémenter le calcul matriciel de Smets [2001] et placé en accès libre sur la page personnelle de l'auteur. Les performances sont acceptables dans le cas où l'ensemble Ω contient au plus une dizaine d'alternatives envisagées.

8.3.2 Résultats sur le risque attribuable

Dans cette illustration, l'ensemble Ω des causes de décès par cancer du poummon aux USA est constitué du tabagisme C, du radon R, de l'amiante A et du groupe des autres facteurs de risque environnementaux X. Après la revue de la littérature présentée plus en détail dans Ha-Duong et al. [2004], Elizabeth Casman propose les bornes suivantes pour le risque attribué : le tabagisme serait responsable de 70 à 95 pourcent des décès, l'exposition au radon pour 2 à 21 pourcent, et l'amiante 1 à 5 pourcent.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Programme 8.1 BeliefMatrices.nb : une librairie *Mathematica* pour le modèle de croyances transferables

```
Nom:  BeliefMatrices.m

Type: Package Mathematica
      Librairie de fonctions implémentant
      Smets (2001) Matrix calculus for belief functions

Fonctionnalités:
      Fonctions de conversion symbolique et numérique entre les 5 représentations:
        bba, croyance, plausibilité, commonalité et implicabilité
      Fonctions de calcul symbolique et numérique des probabilités pignistiques
      Matrices correspondant à ces conversions
      Matrices de spécialisation et de généralisation, matrice conditionnante
      Opérations d'alpha-jonction, dont conjonction et disjonction non-interactive
      Matrices correspondantes à ces opérations
      Calcul symbolique et numérique de la non-spécificité
      Calcul numérique de la conjonction prudente

Limitations:
      Probabilités discrètes avec nombre d'alternatives inférieur à 10.
```

Bounds	C	R	A	X
$\overline{af}$	95%	21%	5%	**3.2**%
$\underline{af}$	70%	02%	1%	0%
$Exposure\ probability$	45%	50%	5%	5%
$\overline{rr}$	43.2	1.53	2.05	1.66
$\underline{rr}$	6.19	1.04	1.20	1.

TAB. 8.2 – Résultat : bornes supérieures et inférieures sur les fractions attribuable et le risque relatif.

Un ordre de grandeur du taux naturel $r_0 = 3\%$ semble réaliste, ce qui conduit à $n(\emptyset) = 0.013N$ avec l'équation 8.2.

La table 8.2 résume les propriétés de la statistique n trouvée compatible avec les contraintes. Les bornes exprimées portent sur le risque attribuable af et le risque relatif rr. Considérons d'abord le risque attribuable. Le résultat central est que le nombre de décès attribuables à X est inférieur à environ 3.2 pourcent du total. Ainsi, si on admet les bornes inférieures sur les facteurs bien caractérisés, alors les facteurs moins bien caractérisés ne peuvent être rendus responsables de plus que 3% de la mortalité totale du cancer du poumon.

Cela implique que les études futures concernant les effets des éléments de X seraient en contradiction avec les données actuelles si elles attribuaient une part de mortalité supérieure à 3% à ces facteurs. Considérons par exemple une étude de deux associations de surveillance de la qualité de l'air sur le nombre de cancers causés par les particules d'échappement des moteurs diesel [State and Territorial Air Pollution Program Administrators and the Association of Local Air Pollution Control Officials, 2000] aux Étas-Unis. Ce rapport évalue à 125.110 le nombre de décès attribuables sur

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

p_X	0.005	0.01	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75
$rr(X)$	7.6	4.3	1.7	1.3	1.13	1.07	1.04

TAB. 8.3 – Analyse de la sensibilité du risque relatif de X au taux d'exposition inconnu.

70 ans, soit un taux annuel de 1.787 cancers. Même sans ajuster pour les autres types de cancers, ce chiffre est significativement en dessous de 3% des 157.200 décès par le cancer du poumon projetés pour 2003, soit 4.716. Il passe donc le test de plausibilité proposé ici.

8.3.3 Commentaire sur le risque relatif

La partie inférieure de la table 8.2 reprend ces résultats en termes de risque relatif. Par définition le risque relatif est le ratio de l'incidence parmi la population exposée sur l'incidence parmi la population non exposée, voir la formule dans [BEIR VI, 1999, appendix C p. 229]. Ce nombre répond à la question : 'Si un sujet fume, par combien multiplie-t-il son risque de périr du cancer du poumon ?'.

Les taux d'exposition pour les polluants connus sont ceux qui ont servi à calculer r_0. En ce qui concerne le radon, il s'agit par exemple de la fraction des maisons aux USA dont la concentration ambiante est supérieure à 25 Bqm^{-1}.

Varier le niveau d'exposition à X ne change pas le résultat en terme de risque attribuable, mais affecte le risque relatif. Lorsque la population exposée augmente, à nombre de cas constants l'incidence parmi la population exposée diminue, et donc le risque relatif diminue. La composition de X étant hétérogène, les facteurs de risques qui le composent ne partagent probablement pas tous le même niveau d'exposition. En l'absence d'une estimation convaincante du niveau d'exposition à ces facteurs, la table 8.3 montre l'analyse de sensibilité à ce paramètre.

La table 8.3 montre que le risque relatif des différents facteurs est finalement assez mal connu. Même pour la cigarette, il varie entre 6 et 43. Une approche traditionnelle basée sur les probabilités précises n'aurait peut-être pas permis de communiquer à ce point l'imprécision des connaissances dans le domaine. Le résultat est une plage dans laquelle aucun chiffre n'est plus convaincant qu'un autre. La différence conceptuelle avec un intervalle d'erreur autour d'une valeur centrale est importante pour au moins deux raisons.

Premièrement, l'incertitude est réelle. On ne peut pas partir sur l'idée que chaque décès est attribuable à une et à une seule cause. Cela ne conduirait qu'à une précision ridiculement indue du résultat compte tenu de la nature des statistiques cliniques. La réalité est qu'il existe des interactions entre les facteurs.

Deuxièmement, le critère de prise de décision ne se réduit pas nécessairement à l'espérance de l'utilité. Comme les chapitres précédents l'ont montré, en situation d'incertitude la précaution peut conduire au contraire à s'intéresser davantage aux points extrêmes qu'à la valeur centrale.

Tout ceci ne signifie pas que les méthodes bayésiennes précises usuelles ignorent totalement le problème. Mais elles conduisent trop souvent à des calculs excessivement obscurs, en se limitant à des familles de distributions de probabilité paramétriques choisies davantage pour leur caractéristiques techniques que par une justification empirique. La méthode proposée vise au contraire des calculs simples et transparents, en faisant le pari que les limites de sa pertinence seront ainsi mieux perçues.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

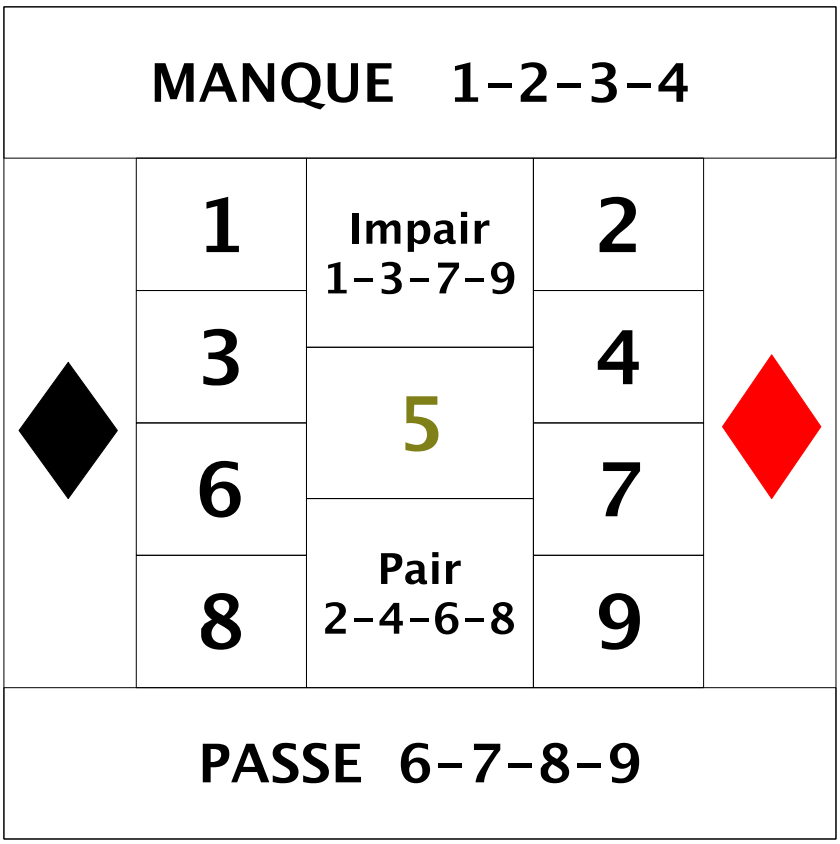


FIG. 8.5 – Ce tapis de Boule (un jeu de casino comparable en plus simple à la Roulette) illustre la causalité multiple. Le joueur peut miser non seulement sur les numéros mais aussi sur des ensembles de 4 numéros. Une disposition des jetons reflète donc une fonction de masse du modèle de croyance transférable, et non une distribution de probabilité. A noter le statut particulier du numéro 5 qui n'est pas impair à ce jeu.

Conclusions

Ce chapitre propose une méthode pour déterminer une borne sur le risque attribuable à un ensemble de polluants mal caractérisés. Pour cela on attribue des bornes à l'effet des polluants pour lesquels des études existent, puis on déduit l'information sur la borne maximale admissible sur X. Cette borne peut être utilisée par exemple pour juger le niveau d'effort qu'il conviendrait de mettre en oeuvre pour contrôler ces polluants.

Cette méthode est compatible pratiquement et philosophiquement avec l'élicitation des opinions d'expert. L'enquête auprès des experts a débuté au printemps 2004. Les méthodes sont expliquées par exemple dans Morgan and Henrion [1990], Morgan and Keith [1995], Morgan et al. [2001]. Les bornes sur le risque attribuable aux facteurs bien caractérisés sont révélées par des entretiens en face à face. Ils ont lieu dans le bureau de l'expert qui peut ainsi consulter ses références, ses collaborateurs et faire des calculs s'il l'estime nécessaire.

Une des méthodes employées dans ce type d'entretien consiste à donner un rouleau

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

de 100 jetons à l'expert et à lui demander de les placer sur la table en fonction de ses croyances. La Figure 8.5 permet de discuter l'apport des probabilités imprécises. Il s'agit d'un tapis de Boule, un jeu de casino comparable en plus simple à la Roulette.

Une distribution des 100 jetons sur les chances simples dans $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ correspond à une distribution de probabilité précise. Mais au casino il est aussi permis de miser sur certaines chances composées, comme 'pair', 'impair', 'passe', 'manque', 'rouge', 'noir' (la roulette permet aussi de miser à cheval entre des cases...). Une telle répartition des jetons se modélise par une statistique n comme utilisée dans ce chapitre. Cette illustration des probabilités imprécises (plus précisément, de la théorie de Dempster-Shafer) revient ainsi aux sources historiques de la théorie des probabilités : le jeu de hasard.

A la table de Boule le numéro 5 est jaune, ni pair ni impair (!), et ni passe ni manque. C'est un numéro qui ne se combine pas avec les autres chances simples (il correspond aux zéros à la Roulette). Dans un contexte d'élicitation, les jetons placés sur cette case notée $\emptyset$ représenteraient le poids d'une cause non décrite dans l'ensemble Ω des alternatives concevables sur lequel les experts formulent leur jugement quantifié.

Admettre $n(\emptyset) > 0$ constitue en quelque sorte une révision de l'hypothèse de normalisation à 1 des probabilités. Abandonner ainsi cette normalisation permet de mieux représenter la question des surprises et de l'information incomplète. Cet apport original du modèle des croyances transférables, est une percée importante car peu de théories peuvent ainsi prétendre aborder le troisième terme de la distinction risque/incertitude/incomplétude.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 9

Fusion d'opinion des experts *es* climat

9.1 Opinions d'experts sur la sensibilité climatique

L'élicitation des opinions d'expert est une méthode de collecte d'information qui consiste à interroger un petit groupe de personnes bien choisies, en posant des questions formulées selon un protocole rigoureusement défini discuté par exemple dans Morgan and Henrion [1990, Chapter 7]. Le chapitre précédent a proposé une nouvelle approche, fondée sur l'analyse des bornes, pour éliciter les opinions d'expert à propos d'un risque environnemental.

Ce chapitre applique les outils des probabilités imprécises pour passer à l'étape suivante : fusionner les opinions résultant de l'élicitation. Le but est d'agréger les opinions des experts interrogés par Morgan and Keith [1995] à propos du paramètre de sensibilité climatique. Ce paramètre sera utilisé au chapitre suivant pour calculer une opinion à propos de l'importance du réchauffement global.

Ce chapitre constitue une analyse originale qui fusionne les résultats de l'étude d'experts de Morgan and Keith [1995] à propos de la sensibilité climatique. La première section présente l'étude. Je remercie David Keith, Université Carnegie Mellon pour la fourniture des données. La seconde section présente la méthode et illustre l'effet des différents opérateurs discutés au chapitre 7. La dernière section présente les résultats de la fusion et conclut. Le reste de cette introduction propose une discussion rapide des méthodes d'agrégation.

9.1.1 Introduction

Clemen and Winkler [1999] distinguent deux familles de méthodes d'agrégation, les approches comportementales et les procédures mathématiques. Dans les approches comportementales, les experts interagissent entre eux, indirectement comme par exemple dans la méthode DELPHI, ou bien directement à l'aide de marchés fictifs de biens contingents. Les marchés fictifs peuvent être construits dans le cadre des probabilités imprécises, en faisant parier les experts selon les modalités décrites par Nau [2001] par exemple. Ces approches interactives ne seront pas discutées davantage ici, on réutilisera les données de 1995.

Le terme de fusion de l'information sera utilisé pour désigner l'agrégation des

probabilités (précises ou imprécises) avec une procédure mathématique, comme par exemple proposé par Coolen [1994].

La procédure de fusion naïve évoquée en introduction du chapitre précédent pour construire des probabilités imprécises à partir d'un ensemble d'experts consistait à demander à chacun une distribution de probabilité, puis à considérer pour $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de ces distributions. En supposant qu'on ait obtenu un ensemble crédal de chaque expert, pourquoi faut-il étudier d'autres opérateurs de fusion que l'enveloppe convexe ?

- Lorsque l'on prend l'enveloppe convexe de l'union des experts, c'est une opération disjonctive, on suppose que n'importe quel expert peut avoir raison. On pourrait aussi défendre l'opinion complémentaire, supposer que tous les experts ont raison en même temps et prendre l'intersection.
- En effet, si les sources d'informations sont indépendantes, leur fusion doit conduire à augmenter la précision et non à la réduire. Remplacer l'enveloppe convexe par l'intersection augmente la précision. Mais on risque alors de se retrouver avec un ensemble de probabilités admissibles vide.
- Prendre l'enveloppe convexe est une opération symétrique qui accorde le même poids à tous les experts. Ce n'est pas toujours souhaitable. Il peut être important de savoir détecter les sources d'informations moins fiables et leur donner un poids moindre.
- Il est important de disposer d'un paramètre pour mesurer le degré de conflit entre les experts. Prendre l'enveloppe convexe impliquerait de confondre (a) Deux experts qui s'accordent à dire que la probabilité est dans [0.1, 0.5] avec (b) un expert qui dit que la probabilité est dans [0.1, 0.2], un autre qui dit qu'elle est dans [0.4, 0.5.].

Tout cela conduit à souligner qu'agréger les experts n'est pas une opération purement arithmétique. Elle fait nécessairement appel au jugement propre de la personne qui réalise la fusion. Ce jugement se formalise dans le choix d'une fonction de fusion, appelé une *copula* dans le cas probabiliste. La théorie ne peut que proposer une boîte à outils d'opérateurs mathématiques, à combiner entre eux au cas par cas.

Par rapport aux méthodes d'agrégation interactives, les procédures mathématiques ont l'avantage pratique de ne pas nécessiter la participation des experts. La contrepartie est que la copula est subjective à l'entité qui réalise la fusion. Ce n'est pas nécessairement un problème dans certains cas, par exemple pour fusionner des données de différents capteurs en robotique. Mais quand la fusion est utilisée pour guider la politique publique en matière d'environnement ou de santé, il n'est pas souhaitable de faire l'économie de publier les données brutes avant agrégation, car différents partis voudront en faire des lectures différentes.

Disposer des opinions d'experts et d'une procédure mathématique clairement explicitée permet de faire ressortir une sorte de rationalité neutre par rapport à un comportement qui consisterait à se focaliser excessivement sur l'opinion de l'expert le plus favorable à l'intérêt du parti. En pratique cette rationalité se heurte encore à des difficultés techniques et de lisibilité, même dans le cas des probabilités précises.

9.1.2 L'enquête

Morgan and Keith [1995] ont mené une enquête auprès de 16 experts climatologues américains afin d'éliciter leurs croyances à propos du problème du changement climatique. Ces experts ont été interrogés séparément, et les résultats rapportés de façon anonyme. Morgan [1996] résume ainsi les six parties du protocole d'entretien :

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

1. Introduction et explications sur le but de la recherche.
2. Discussion générale pendant laquelle on demandait à l'expert de critiquer la note de cadrage et discuter sa propre façon de penser le problème.
3. Jugements sur un petit nombre de variables globales pertinentes pour la politique, élicités sous la forme d'une distribution de probabilité subjective. Elicitation de jugements sur le rapport entre connaissance du changement climatique à l'échelle globale et les prédictions possibles à des échelles plus fines.
4. La désagrégation des sources d'incertitude dans le changement de température global a été étudiée en demandant aux experts d'identifier systématiquement les facteurs clés contribuant à l'incertitude, et la mesure dans laquelle les variables étudiées sont séparables.
5. On demande aux experts de discuter les facteurs qui devraient être considérées pour concevoir un programme de recherche et développement national, puis de faire une série de jugements sur la façon dont les ressources devraient être allouées par un tel programme.
6. On demande aux experts de décrire comment les programmes de recherches peuvent conduire à des résultats surprenants et de prononcer des jugements sur l'état probable de leur connaissance dans 20 ans sur le programme de recherche décrit à l'étape précédente.

Outre la sensibilité climatique, les résultats concernent aussi le gradient de température pôle/équateur, les précipitations moyennes par zone et le forçage radiatif par les aérosols. Les facteurs d'incertitude les plus importants ayant été identifiés par les experts sont, dans l'ordre, les propriétés optiques des nuages, la rétroaction convection/vapeur d'eau, l'échange du CO_2 avec la biosphère terrestre, l'échange du CO_2 avec les océans (y compris le biome océanique) et la convection océanique.

La sensibilité climatique $\Delta T_{2\times}$ est définie comme l'augmentation de la température moyenne de la planète qui se produirait à long terme si la concentration de dioxyde de carbone (CO_2) dans l'atmosphère était doublée par rapport à son niveau préindustriel. C'est un paramètre critique pour évaluer le risque de changement climatique causé par les émissions humaines de gaz à effet de serre. En effet, on peut raisonnablement s'attendre à ce que le doublement du CO_2 se produise au courant de ce siècle si des politiques énergétiques plus énergiques ne sont pas menées. Le niveau préindustriel est de l'ordre de 280 parties par million en volume (ppmv), le niveau en 2000 était environ 370 ppmv, et l'augmentation de 15 ppmv par décennie, commandée par la croissance économique et démographique.

La suite de cette section s'intéresse à la distribution de probabilité obtenue pour ce paramètre $\Delta T_{2\times}$. Globalement l'intervalle de réponse pour la sensibilité climatique de long terme est de -6 à 10 degrés Celsius de réchauffement. En effet, trois experts attribuent une probabilité positive à un refroidissement global. L'un des experts est atypique et ne croit pas à un réchauffement important, ses réponses sont contenues dans l'intervalle [0,1]. Un expert donne deux distributions conditionnelles, avec surprise et sans surprise, mais ne se prononce pas sur la probabilité d'une surprise.

9.1.3 Données : probabilités subjectives

Pour faciliter les calculs numériques, l'intervalle [-6, 12] a été partitionné en $n = 8$ intervalles de réchauffement. Ces intervalles sont les quantiles de la distribution de probabilité moyenne, représentés ci après figure 9.2 :

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

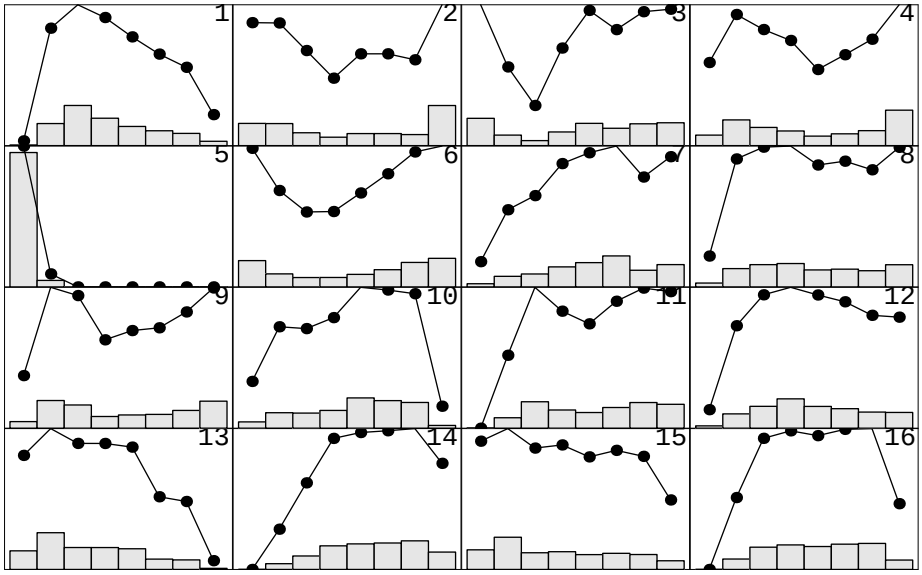


FIG. 9.1 – Résumé des données : Pour chacun des experts (numéros de 1 à 16) : en rectangles, histogramme de la distribution de probabilité subjective révélée concernant la sensibilité climatique. En points reliés, distribution de possibilité de l'expert (degré de non-surprise) déduite de la probabilité subjective révélée. L'axe vertical va de 0 à 1, l'axe horizontal subdivise irrégulièrement l'intervalle de réchauffement [-6, 12] aux points (-6, 0.7, 1.6, 2, 2.5, 2.9, 3.5, 4.4, 12) afin que la distribution de probabilité moyenne soit uniforme.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

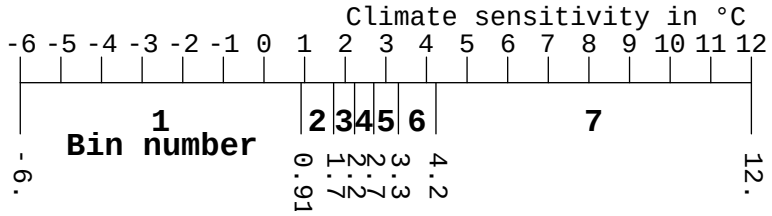


FIG. 9.2 – Partition de l'intervalle de réchauffement en 2100

Les données collectées auprès des experts sont représentées sur la figure 9.1. Chaque case de cette figure correspond à un expert numéroté de 1 à 16. Il n'y a pas de structure par ligne et par colonne, c'est purement pour économiser de la place que les vignettes sont arrangées dans un tableau de 4 par 4. Sur chaque vignette l'axe vertical varie de 0 à 1, et l'axe horizontal représente les 8 intervalles de réchauffement définis ci dessus.

On s'intéresse pour commencer aux données effectivement collectées, c'est à dire des distributions de probabilités sujectives. Le diagrammes en barre de la vignette en haut à gauche représente la distribution de probabilités élicitée pour le premier expert. Comme dans chaque case, la somme des aires des rectangles est 1. Prise sur une subdivision régulière, l'histogramme des probabilités serait beaucoup plus pointu, en cloche. Mais par construction la subdivision de [-6, 12] correspond à une probabilité moyenne uniforme, ce qui entraîne que les histogrammes de probabilité sont relativement plats, voir par exemple les experts 3 ou 15. L'expert 5 se distingue des autres en ce qu'il a accordé une probabilité nulle à une sensibilité supérieure à 1.7.

Sur la même figure, les gros points reliés représentent des distributions de possibilité. Intuitivement, il s'agit du niveau de non-surprise. Pour chaque expert, le maximum de la courbe est normalisé à 1 (le point correspondant est sur la frontière supérieure de la vignette et n'est pas dessiné), ce qui correspond à l'intervalle de réchauffement qui surprendrait le moins cet expert. Par construction, c'est celui qui a la plus grande probabilité subjective, par exemple le second intervalle pour le premier expert. L'expert 6 quand à lui ne serait pas surpris par les évènements extrêmes. On retrouve le fait que cette collection d'opinions est très contradictoire, car la distribution numéro 5 attribue presque toute la croyance au premier intervalle, alors que beaucoup d'autres lui attribuent un poids nul.

Techniquement, chaque distribution de possibilité est déduite des probabilités correspondantes selon la procédure illustrée par la figure 7.1 page 92. Mais l'important n'est pas ici la procédure mathématique suivie pour convertir les probabilités en possibilités. D'autres procédures de conversion existent, et donnent des résultats voisins. L'important est d'expliquer pourquoi une distribution de possibilité peut être appropriée pour représenter l'opinion d'un expert qu'une distribution de probabilité.

9.2 Fusion dans le modèle de croyances transférable

En effet, les opinions d'experts sur la sensibilité climatique ont été révélées en termes de probabilités. Pourquoi avons-nous choisi de les traduire en termes de possibilités ?

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

9.2.1 Le passage aux possibilités

La raison est que si on fait appel aux experts, c'est qu'il n'existe pas d'informations suffisantes pour formuler une opinion précise. Cela ne peut donc se concevoir que dans un cadre de probabilités imprécises.

Cet argument apporte beaucoup d'eau au moulin des prises de positions contre les probabilités subjectives, venant notament de la part des chercheurs exerçant dans des sciences dites dures. Mais il ne faut pas pour autant confondre l'opposition objectif/subjectif et l'opposition probabilité/possibilité.

Dans le modèle de décision objectif, les faits observés entraînent les opinions, et les opinions entraînent les choix. La nécessité découle ici du principe de rationalité scientifique, appliqué premièrement au problème de l'inférence (les opinions sont les fréquences observées) et deuxièmement au problème de la décision (la maximisation de l'espérance de l'utilité) :

$$\boxed{\text{observation}} \rightarrow \boxed{\text{opinion}} \rightarrow \boxed{\text{action}}$$

L'approche subjective utilise l'hypothèse de rationalité dans l'autre sens : elle consiste à dire que l'observation des choix permet de remonter aux opinions :

$$\boxed{\text{croyances}} \leftarrow \boxed{\text{choix}}$$

Bien entendu ces deux approches trouvent leurs limites dans le réalisme de l'hypothèse de rationalité. Elles ne laissent pas de place aux aspects humains de la personne du décideur, même si l'on sait bien que dans la réalité un changement de leader à la tête d'une organisation entraîne le plus souvent une révision de la stratégie, même à environnement constant. Les émotions comptent. Néanmoins ce n'est pas sur ce point qu'elles sont remises en cause par les probabilités imprécises : l'hypothèse de rationalité est conservée.

Ce qui est remis en cause, c'est l'hypothèse, non formulée en générale, de la complétude des observations. Dans le modèle objectif, on ne peut vraiment inférer de loi de probabilité qu'à partir d'observations complètes et en grand nombre. Pour les évènements rares, ou lorsqu'il manque une fraction significative des données, le processus d'inférence n'est pas aussi sûr. De même dans le modèle subjectif, pour déduire une distribution de probabilité il faut pouvoir connaître les préférences complètes.

En somme le problème majeur quand on demande des probabilités subjectives aux experts, ce n'est pas qu'on demande un jugement subjectif quantifié, mais c'est qu'on demande un jugement précis. Ce problème disparait si on passe aux probabilités subjectives imprécises. Les probabilités subjectives précises devraient être réservées aux situations dans lesquelles on observe toutes les transactions en grand nombre sur un marché relativement complet. En économie, on peut penser aux systèmes de marchés financiers, aux sites d'enchères, ou encore aux économies virtuelles des jeux de rôle massivement multijoueurs.

Ainsi les probabilités imprécises sont un outil privilégié dans le domaine de l'acquisition des connaissances. Parmi les formalismes des probabilités imprécises, les possibilités retiennent l'attention pour plusieurs raisons. D'abord, elles sont particulièrement commodes à manipuler puisqu'il suffit de définir une distribution (la possibilité de chaque élément de Ω) pour définir la mesure (la possibilité de chaque sous-ensemble de Ω). De plus, elles peuvent être définies intuitivement en terme de bornes supérieures sur les probabilités.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Enfin elles sont appropriées pour la modélisation du langage naturel, ce qui facilite la communication avec les experts. En effet, le sens du langage naturel est général modélisé avec le concept de nombre flou, qui est un cas particulier de distribution de possibilité : Rappelons la définition d'un nombre flou.

L'élicitation concerne souvent un paramètre réel. Dans ce cas, puisque Ω est muni d'une relation d'ordre total, on peut s'intéresser en particulier aux distributions de possibilité avec une seule bosse. Cette modalité est illustrée par la courbe de l'expert 1 mais pas celle de l'expert 2 sur la figure 9.1. Une distribution de possibilité d'un nombre réel avec une seule bosse est appelée un nombre flou.

Le concept de nombre flou est important car l'imprécision du sens des mots en langage naturel est usuellement modélisée en associant un nombre flou à un adjectif. Cette approche a démontré sa valeur pratique : Un des domaines d'application de l'élicitation des connaissances d'expert à l'aide des possibilités est l'automatique des procédés industriels où, comme l'explique Haber et al. [2002], les contrôleurs flous ont souvent des performances supérieures aux contrôleurs Proportionnel-Intégral-Dérivée classiques.

C'est pourquoi dans la suite, les méthodes de fusion sont illustrées par des distributions de possibilité, même si en coulisse les calculs se font en les traitant comme des distributions de probabilités imprécises.

9.2.2 Importance des poids de discrédit

Comme expliqué en introduction, agréger les experts n'est pas une opération purement arithmétique. Elle fait nécessairement appel au jugement propre de la personne qui réalise la fusion. Ce jugement se formalise dans le choix d'une fonction de fusion, appelé une *copula* dans le cas probabiliste. On utilise ici la boîte à outils mathématique du modèle des croyances transférables décrite au chapitre 7. La copula se formulera donc en terme de poids de discrédit et d'opérateurs de fusion.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la fusion avec un opérateur de conjonction, du type ET, qui suppose donc que tous les experts ont raison. L'étude de sensibilité présentée montre l'importance critique du choix des poids et des opérateurs retenus pour la fusion. On compare trois opérateurs de conjonction et quatre règles de pondération.

La Figure 9.3 illustre comment la fonction agrégée π varie lorsque l'on change la règle de discrédit et l'opérateur de fusion. La légende en bas à droite rappelle les intervalles de la variable considérée : la sensibilité climatique.

La légende en bas à gauche explicite que sur chaque graphique, les trois courbes correspondent à trois opérateurs de fusion : $\oplus$, $HCconj$ et $HCConj$ normalisé. L'opérateur $HCconj$ est noté `Minimum` dans la légende et correspond aux résultats en traits fins interrompus (mathématiquement, c'est le minimum de la fonction de commonalité q). Le résultat est une distribution de croyance non normalisée, on suppose que le poids qui manque pour atteindre 1 est alloué à $\emptyset$. Smets [2000c] appelle conjonction prudente cet opérateur, et propose de l'appliquer pour des experts qui ne sont pas indépendants.

Les deux autres opérateurs sont normalisés. La courbe en traits interrompus marquée par des petits carrés est obtenue en mettant à l'échelle le résultat de la conjonction prudente, pour que le maximum soit 1. Les courbes en trait plein montrent le résultat de l'approche par la théorie de Dempster-Shafer. En notant π_i la distribution de l'expert i et a_i son discrédit, la distribution agrégée tracée est la fonction de commonalité $q_\oplus$:

$$q_\oplus = \oplus_{i\in\{1,\ldots,16\}}(1-a_i)\pi_i + a_i \tag{9.1}$$

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

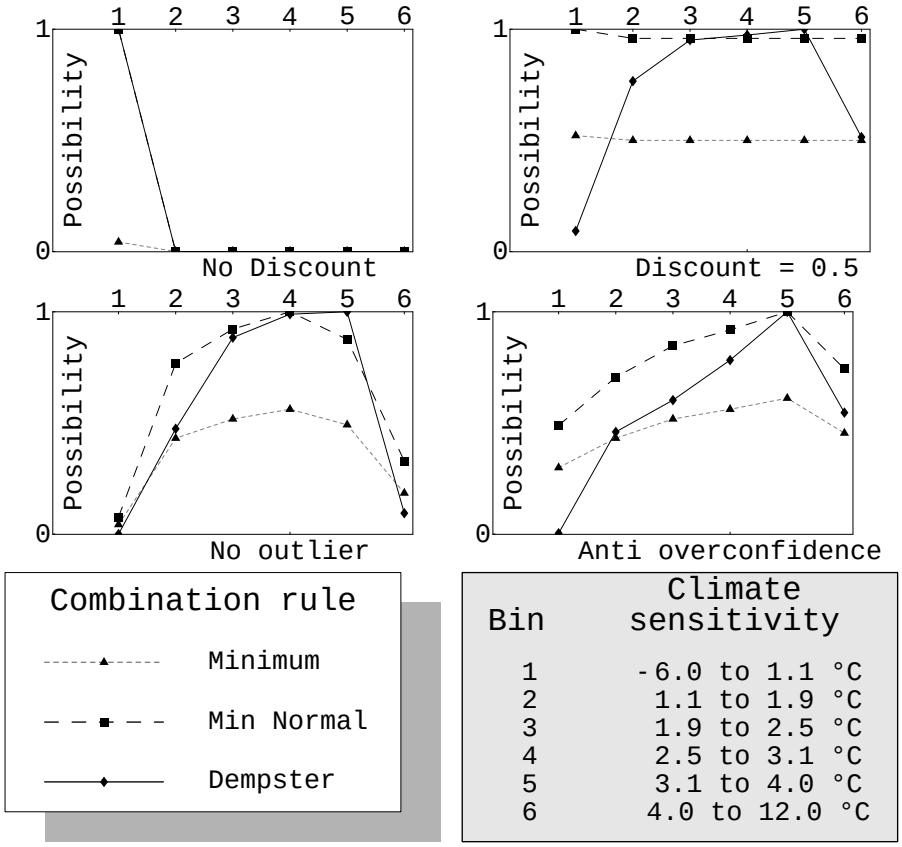


FIG. 9.3 – Sensibilité de la fonction de possibilité agrégée à l'opérateur de conjonction (prudent, prudent normalisé, Dempster) et à la règles de discrédit (aucun, uniforme 50%, exclure l'opinion discordante, réduire l'opinion trop confiante).

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chacun des quatre panneaux supérieurs de la Figure 9.3 illustre une règle de discrédit différente pour définir les a_i. Dans les deux panneaux du haut tous les experts sont discrédités du même poids. Mais à gauche en haut, ce poids est $a_i = 0$ c'est à dire qu'on suppose que tous les experts ont raison en même temps. Comme ils se contredisent presque totalement, c'est une position qui conduit logiquement à un effondrement de la croyance dans le résultat de la fusion.

En effet, la règle de conjonction prudente donne 4 pourcent de croyance au premier intervalle de réchauffement, zéro au reste. Ce résultat peut s'interpréter en disant que le niveau de contradiction entre les experts est $m(\emptyset) = 96\%$. Les deux règles renormalisées donnent l'intervalle de réchauffement [-4 - 0,9] avec certitude. Ce résultat est un paradoxe puisque toute la croyance se retrouve ainsi concentrée dans l'intervalle auquel la majorité des experts croient le moins.

Contrairement à une critique courante, ce paradoxe[1]relevé par L. Zadeh ne démontre pas tant l'incohérence de l'opérateur de Dempster-Shafer que sa nature logique : c'est une conjonction, et supposer que les experts ont tous raison quand ils sont en désaccord ne peut que conduire à un résultat surprenant. Il faut garder à l'esprit que renormaliser détruit l'information sur le degré d'agrément des experts.

Le graphique en haut à droite correspond à $a_i = 0.5$, les experts sont encore discrédités d'un poids égal, mais on ne les croit qu'à moitié. Contrairement à l'intuition, le résultat est assez différent du premier. La conjonction prudente (triangles) donne un poids 0.5 à tous les intervalles, sauf le premier qui reçoit 0.52. On n'est pas beaucoup plus informé, mais comme on ne croit qu'à moitié les experts leur niveau de contradiction est moins critique. La renormalisation de ce résultat (carrés) donne des poids respectifs de 0.96 et 1, c'est à dire une information quasi-nulle. La règle de Dempster (normalisée) donne une courbe en cloche qui pourrait sembler satisfaisante, si on ne devait pas se demander dans quelle mesure ce résultat repose sur une hypothèse très théorique de non-interactivité des experts.

La rangée du milieu montre l'importance de l'opinion dissidente de l'expert 5. Lorsque qu'il est exclus de la fusion, comme sur le graphique de gauche avec $a_5 = 0$ et $a_i = 1$ si $i \neq 5$, alors le degré de contradiction diminue nettement. Le maximum de $pi_{\Cap}$ passe à 0.56, atteind pour l'intervalle [2.5 , 3] degrés de réchauffement. Comme le précédent, ce graphique montre que le résultat de la combinaison de Dempster est plus précis que la conjonction non interactive : on voit que la courbe en trait continu est plus pointue que la courbe en tiretés.

Mais il semble difficilement justifiable d'exclure ainsi l'opinion d'un expert. Le graphique du milieu à droite illustre donc une règle de discrédit moins radicale. Elle pénalise les opinions comparativement plus confiantes que les pairs, sans toutefois les exclure. Plus exactement, le poids dépend du rapport entre de la déviation standard σ_i de p_i, et la déviation standard moyenne σ, ainsi :

$$a_i = \min\big[1, \frac{2\sigma_i}{\sigma}\big] \tag{9.2}$$

Cette règle peut être jugée *ad hoc*, et cela d'autant plus qu'il n'y a pas de tradition établie pour guider le choix de la *copula* en probabilités imprécises. Mais les autres méthodes pour calculer les discrédits n'étaient pas applicables. Il n'est pas possible de

[1]Historiquement, ce problème de normalisation a joué un grand rôle dans le développement du modèle de croyances transférables. A ce stade il serait faux de dire que le problème est totalement résolu. En effet le statut épistémologique de la masse du vide $m(\emptyset)$ est ambigu. Elle peut être vue à la fois comme un niveau de contradiction, et à la fois comme un degré de surprise attendu, puisque c'est la masse de croyance qui n'est reliée à aucun sous-ensemble propre de Ω.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

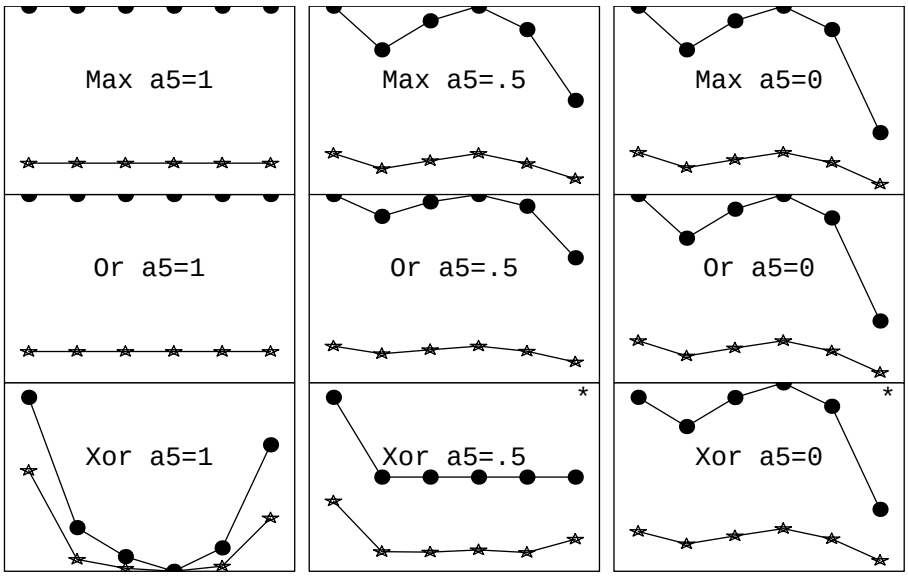


FIG. 9.4 – Distributions de possibilité (ou de commonalité) et de probabilité spéciale obtenues par fusion disjonctive de l'expert 5 avec la conjonction de tous les autres. Sensibilité au choix de l'opérateur de disjonction et au taux de discrédit de l'expert 5.

revenir sur le sondage et demander interactivement aux experts de juger leur fiabilité réciproque (approche interactive endogène), ni de prendre un échantillon de données et optimiser la performance statistique de l'opérateur de fusion (approche utilisée en robotique). La justification de cette règle est psychologique, elle traduit l'idée que les personnes sûres d'elles mêmes sont plus souvent dans l'erreur.

9.2.3 Fusion disjonctive

Toutefois rien n'oblige à supposer que les experts ont raison en même temps. En effet, ils peuvent défendre des théories incompatibles du fonctionnement du climat. Effectuer une fusion en deux temps qui traite séparément l'expert 5 permettrait peut-être de mieux rendre compte des connaissances sociologiques concernant l'organisation de la pensée des experts interrogés. Dans un premier temps, on réalisera la conjonction prudente des 15 experts entre eux. Dans un second temps, l'opinion de ce groupe sera combiné disjonctivement avec l'opinion de l'expert 5, éventuellement discrédité a priori.

Avec une organisation différente des panneaux, la Figure 9.4 montre toutefois comme précédement la sensibilité du résultat au choix des opérateurs de fusion et des poids de discrédit. Le résultat de la fusion est essentiellement une fonction de possibilité représentée par les gros points reliés[2].

Chaque colonne correspond à l'un des trois poids de discrédit $a_5 = 1$ (l'expert 5 est totalement inclus), 0.5 (on croit l'expert dissident à moitié), 0 (l'opinion dissidente

[2]Sauf dans la ligne `Xor`, 0 ou 1/2 de discrédit, où la fonction tracée est la fonction de commonalité du résultat qui n'est pas une distribution de possibilité). Pour mémoire la distribution de probabilité associée au résultat est également représentée, par les étoiles reliées.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

est exclue).

Chaque ligne correspond à l'un des trois opérateurs de disjonction entre le groupe des 15 et l'expert 5. L'opérateur `Max` est appelé disjonction prudente, il suppose que le groupe ou l'expert peuvent avoir raison, en même temps ou non. L'opérateur `Or` est aussi une disjonction, mais non-interactive c'est à dire qu'il suppose que l'expert et le groupe sont indépendants. La ligne du bas montre le résultat d'une disjonction symétrique non interactive `Xor`, c'est à dire que soit l'expert soit le groupe a raison, mais pas les deux en même temps.

La première colonne, à gauche, illustre les opérateurs utilisés. Elle correspond à $a_5 = 1$, c'est à dire que la disjonction est réalisée avec les croyances vides m_Ω. Cela produit des croyances vides dans les deux opérateurs. Le résultat est intuitif : on remplace l'opinion de l'expert 5 par 'tout est possible' (opinion notée m_Ω) et on suppose qu'il peut avoir autant raison que les autres, donc au final on est pas informé. La case à gauche en bas est plus intéressante, c'est le résultat de la disjonction symétrique de l'opinion des 15 avec m_Ω. L'opération logique de disjonction symétrique avec 'Vrai' est la négation[3]. Le résultat est donc la négation des croyances du groupe des 15.

Il apparaît ainsi que si l'on envisage une fusion disjonctive, nier totalement la crédibilité de l'expert dissident conduit soit à un résultat vide d'information, soit à la négation pure et simple de l'opinion du groupe. Contrairement au cas de la conjonction, cette exclusion ne mène donc pas à un résultat de fusion satisfaisant.

Examinons maintenant la première ligne du tableau. Le milieu correspond à un poids de croyance 0.5, et la colonne de droite correspond à $a_5 = 0$, c'est à dire que l'opinion de l'expert 5 est prise entière. Le résultat de la fusion est alors plus représentatif. Il tient compte à la fois des croyances du groupe, par exemple le point de droite est jugé très surprenant (possibilité faible), et des croyances de l'expert 5, par exemple le point de gauche est jugé non surprenant (possibilité proche de 1). De plus on remarque une sensibilité relativement faible au choix de l'opérateur : les courbes se déforment peu lorsqu'on descend dans la colonne de droite.

Le résultat est encore le contraire de la conjonction : précédement, si on prenait l'opinion de l'expert 5 en entier, cela provoquait un effondrement des croyances. Avec la disjonction, on a au contraire intérêt à ne pas discréditer. Comme on le voit sur la case au milieu en bas, discréditer à moitié avec la disjonction symétrique de donne pas un résultat satisfaisant.

9.3 Conclusions

9.3.1 Résultats méthodologiques

Ce texte a clarifié la raison pour laquelle il est préférable d'utiliser des possibilités subjectives, et non des probabilités subjectives, pour représenter la connaissance des experts : c'est que cette connaissance est le plus souvent imprécise.

Puis a exploré l'effet du choix des opérateurs de jonction et de discrédit dans la fusion de l'information à propos de la sensibilité climatique. Il a montré que par rapport au cadre classique, le résultat obtenu avec la disjonction a l'avantage d'être bien une distribution bimodale. La présence d'une opinion divergente n'est pas noyée dans une moyenne écrasée par la majorité des experts. En effet, on peut penser que si les 15 experts se trompent, ils se trompent en même temps. Il s'agit d'une communauté de pensée et non de sources d'informations indépendantes.

[3]Par définition, Vrai `Xor` Vrai = Faux, Faux `Xor` Vrai = Vrai.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

De plus, l'opérateur de combinaison bayésien classique, généralisé par la conjonction de Dempster-Shafer, est un opérateur de conjonction. Le cadre formel classique comporte donc risque logique important. Exclure les opinions en désaccord conduit dans ce cadre à un résultat plus informatif, mais c'est un artifice technique. Lorsque plusieurs hypothèses scientifiques sont en compétition, elles devraient être placées sur le même plan sans supposer que les deux sont nécessairement vraies (conjonction), mais en supposant qu'au moins l'une d'elles l'est (disjonction). Dans ce raisonnement, exclure l'opinion dissidente conduit en fait à un résultat moins informatif.

Les probabilités imprécises permettent de formuler en termes logiques directs la méta-information sur la relation entre les experts.

9.3.2 Résultat de la fusion

Des communications personnelles sur l'évolution de l'opinion de l'expert 5 laissent à croire que la divergence se serait réduite depuis l'année de l'enquête. En conséquence, il n'a pas paru souhaitable de mettre l'accent sur l'aspect bimodal de la fusion. La méthode conjonctive a été utilisée pour calculer une distribution de possibilité concernant le paramètre de sensibilité climatique.

1. Les distributions de probabilité élicitées auprès des experts sont transformées en distribution de possibilité, comme expliqué au chapitre 7.
2. Les experts dont la confiance semble excessive relativement à celle des autres experts sont partiellement discrédités.
3. Les opinions sont fusionnées par conjonction prudente. Le niveau de contradiction est noté.
4. Le résultat est renormalisé et exprimé comme un nombre flou.

La conjonction prudente est l'opérateur retenu pour fusionner les opinions d'experts sur la sensibilité climatique, car il évite l'hypothèse de non-interactivité, reste simple à expliquer dans le cadre de la théorie des possibilités, et dispose de fondements théoriques solides dans le cadre de la théorie du modèle de croyances transférables. Dans l'attente de recherches ultérieures sur la façon la plus convaincante de traiter la contradiction entre experts, j'ai discrédité l'expert 5 de 90%, ce qui revient pratiquement à l'éliminer de l'échantillon.

La figure 9.5 synthétise le jugement subjectif résultant de la fusion : une distribution de possibilité sur la sensibilité climatique. C'est un nombre flou formé à partir du résultat en bas à gauche sur la figure 9.3. Il est normalisé afin que le maximum de possibilité soit 1, sachant que le niveau d'accord des experts était 0.56 avant normalisation (mais après discrédit). La distribution discrète a été re-transformée en fonction continue. On a remplacé la courbe par son enveloppe à gauche dans la partie croissante, puis par son enveloppe à droite dans la partie décroissante, afin d'obtenir un nombre flou.

L'évaluation suggère 2.8 ˚C comme valeur la moins surprenante. La croyance supérieure à 1/2 est concentrée dans l'intervalle 1.5-3.5 ˚C. La distribution est asymétrique : la possibilité d'un refroidissement global (jusqu'à -6) ou au contraire d'une sensibilité très élevée (jusqu'à 10) ne sont pas exclues, mais la seconde alternative serait moins surprenante.

9.3.3 Discussion et perspectives de recherche

Ces résultats sont à prendre avec du recul pour plusieurs raisons. La grossièreté de la subdivision en intervalles devrait être affinée. Il aurait été préférable de disposer de

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

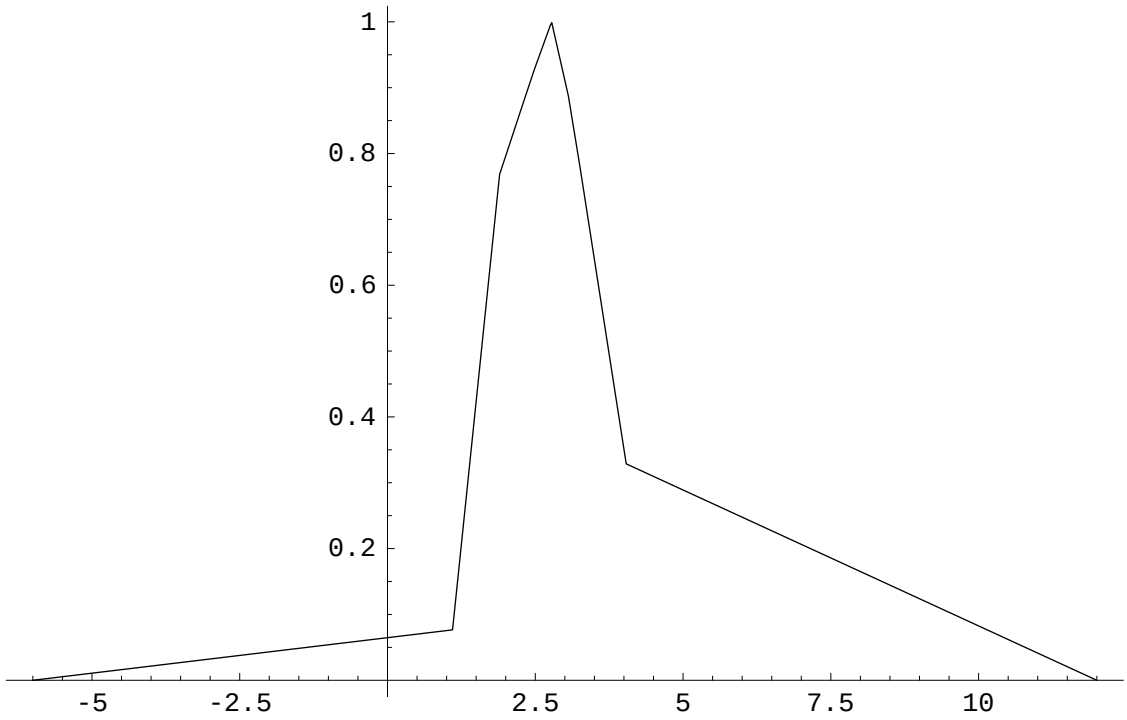


FIG. 9.5 – Distribution de possibilité du paramètre la sensibilité climatique à un doublement du [CO_2] obtenue en fusionnant l'opinion des experts (conjonction prudente de l'opinion des experts avec discrédit pour l'expert trop confiant).

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

distributions de possibilité π données par les experts plutôt que de convertir des probabilités. Une meilleure compréhension des opérateurs de jonction devrait permettre de mieux prendre en compte le degré de désaccord entre les experts, plutôt que de le masquer en renormalisant la distribution.

Ces limitations techniques semblent surmontables à l'avenir dans la lignée des recherches théoriques actuelles. La fusion d'opinions d'experts dans le cadre des probabilités imprécises permet déjà de traiter de façon théoriquement plus saine les priors non informatifs, la non-indépendance des experts, le discrédit et l'information non spécifique. Cela pourrait permettre de rendre plus rigoureuses et plus reconnues scientifiquement les approches subjectives de l'information.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Chapitre 10

Règles de la prospective

Introduction

La prospective est une discipline qui s'intéresse à décrire les futurs possibles afin d'aider la prise de décision aujourd'hui. Elle est par exemple utilisée pour l'analyse stratégique des investissements énergétiques à la Shell, ou bien pour le développement des plans de transports régionaux. Hugues de Jouvenel [1999] distingue quatre caractéristiques essentielles qui la différencient de la prévision :

- La prospective marie le quantitatif et le qualitatif.
- C'est une démarche interdisciplinaire, d'inspiration systémique et non sectorielle.
- Elle intègre la dimension du temps long, passé et à venir.
- La prospective intègre les ruptures et non le principe de continuité.

La prospective vise à remédier à des situations d'incertitude profonde en préparant les esprits à comprendre les évènements futurs. En effet, un schéma ne peut être reconnu que si l'on a été préalement exposé à sa représentation. En ce sens, il ne s'agit en aucun cas de viser à prédire l'avenir comme il sera, mais d'expliciter et de rationaliser des vision du monde. Pour cela prospective peut utiliser des modèles numériques interdisciplinaires qui permettent de calculer formellement les effets à partir des causes représentées par des paramètres quantifiés. Ces modèles intégrés permettent des visualisations intéressantes, surtout pour les modèles géographiquement détaillés comme par exemple le modèle IMAGE du RIVM qui est utilisé pour faire comprendre la nature des changements climatiques.

La modélisation intégrée (discutée au chapitre 1) partage des caractéristiques avec la prospective, puisque sa pratique est aussi interdisciplinaire et tente d'intégrer les ruptures. Elle s'en distingue en étant essentiellement quantitative, et certains modèles intégrés s'intéressent à des problèmes d'environnement de court terme comme la pollution par les pluies acides.

Ce cousinage suggère que la modélisation intégrée peut être un outil utile pour la prospective. Réciproquement, la prospective est un outil qui peut apporter des éclairages intéressants en guidant l'analyse intégrée du changement climatique. Alors que la plupart des modèles climato-économiques existants se sont limités jusqu'à présent à la simulation des changements climatiques réguliers, le scénario de Schwartz and Randall [2003] a récement contribué à focaliser l'attention des décideurs et des médias sur les conséquences d'un changement climatique abrupt. En effet le changement cli-

matique est marqué par les interactions géochimie-sociétés, à l'échelle du siècle, avec risque de non-linéarité ou d'épuisement de certaines ressources. Il serait nécessaire de mieux intégrer cet aspect du danger dans les modèles intégrés.

Ce chapitre propose une application originale des probabilités imprécises à la frontière entre prospective et modélisation intégrée. Il ébauche une méthode pour quantifier le degré de possibilité de scénarios et déterminer quantitativement des futurs possibles, des 'futuribles'. Ce genre de méthode vise à figurer par exemple dans la boîte à outils pour la prospective comme celle de Godet et al. [2002]. En ce sens c'est un élément de réponse aux appels de Chermack [2002] et Gáspár and Nováky [2002] pour une théorisation des méthodes de construction de scénarios. Pour la modélisation intégrée, la vision est également ambitieuse puisqu'elle suggère une nouvelle classe de modèles quantitatifs basés sur la recherche d'ensembles de solutions acceptables en situation d'incertitude profonde.

Le texte est organisé en trois parties. La première expose le problème et la solution proposée : quantifier la plausibilité des scénarios avec la théorie des possibilités. Une brève revue de littérature montre que l'idée d'utiliser la théorie floue en prospective n'est pas nouvelle, mais à notre connaissance cela n'a pas été fait dans le cadre des probabilités imprécises. L'originalité majeure de ce chapitre se situe dans la deuxième section, qui expose des éléments théoriques sur la détermination des scénarios comme un problème de communication d'information. La dernière section du chapitre est une application (originale également) au calcul du réchauffement global possible en 2100.

10.1 La Prospective des futurs possibles : futuribles

10.1.1 Le problème récurent de la quantification des croyances

Les mots *scenario* et *prévision* désignent tous les deux des descriptions d'un futur d'un système. Nous les opposerons pour illustrer un problème fondamental en prospective : un ensemble de scénarios est habituellement donné sans quantifier le degré de croyance dans chacun des futurs, alors qu'un ensemble de prévisions est usuellement traité de façon probabiliste.

Cette distinction est une source de tension permanente en prospective. La tension se place entre d'une part les décideurs qui reçoivent les rapports et demandent souvent une quantification des incertitudes, et d'autre part les consultants en planification stratégique qui soulignent la difficulté à probabiliser les scénarios. Adam Kahane de la Shell, cité par Best [1991], explicite ainsi le problème avec les probabilités :

> We don't assign probabilities to our scenarios, for several reasons. First, we intentionally write several scenarios that are more or less equally plausible, so that none is dismissed out of hand. Second, by definition, any given scenario has only an infinitesimal probability of being right because so many variations are possible. Third, the reason to be hesitant about all scenario quantification — not probabilities, economic growth rate or whatever — is that there is a very strong tendency for people to grab onto the numbers and ignore the more important conceptual or structural messages.

Dans la même discussion, le prospectiviste de renom Peter Wack concluait plus férocement à propos des probabilités :

> But I have a strong feeling that it will be poisonous and will contaminate the logic of scenarios.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

En réponse à quoi David Kline, superviseur de la prospective gazière et du développement des modèles à la California Energy Comission, exprimait son désaccord respectueux et ajoutait :

> Trying to bridge just this kind of gap [...] represents one of the most important intellectual and practical endeavors of our time.

Une discussion de ce type a récemment ressurgi au sein de la communauté d'experts qui étudient le changement climatique. Le GIEC [IPCC, 2000] a élaboré il y a quelques années des scénarios à long terme d'émissions de gaz à effet de serre. Ces séries temporelles servent entre autres à faire tourner les modèles de simulation climatique. La construction de ces références permet de mieux évaluer le risque et de faire ressortir la nécessité ou non d'une action corrective.

L'utilisation de ces scénarios à conduit le GIEC à projeter un réchauffement global en 2100 compris entre 1.4 et 5.8 ˚C (TAR, Summary for Policy Makers, Q3), sans être en mesure de qualifier la plausibilité des extrêmes. Dans le précédent rapport, la borne supérieure du réchauffement projeté était de 3.5 ˚C. Or cette forte révision à la hausse ne provient pourtant pas d'une révision correspondante dans la compréhension des mécanismes du climat. Elle a donné lieu à la controverse récurente sur les probabilités entre les utilisateurs et les concepteurs de scenarios :

- Schneider [2001], ainsi que Reilly et al. [2001] ont soutenu que l'absence de probabilité conduirait à la confusion, les utilisateurs pouvant choisir des scenarios arbitraires ou bien supposer une équiprobabilité. En palliatif, Reilly et al. ont estimé que l'intervalle de confiance à 90% était 1.1 à 4.5 ˚C pour le réchauffement entre 1990 et 2100 . De leur côté Wigley and Raper [2001] ont évalué cet intervalle à 1.7 à 4.9 ˚C.
- Grübler and Nakićenović [2001] et Allen et al. [2001] ont défendu le point de vue opposé, en soutenant qu'il existe des arguments scientifiques solides excluant l'existence de 'probabilités' sur l'occurence de ces évènements futurs. Ils ont expliqué pourquoi les auteurs du rapport du GIEC étaient unanimes à reconnaître qu'aucune méthode pour assigner des probabilités à des prévisions à 100 ans n'était suffisament acceptée et documentée pour passer le test scientifique de revue par les pairs. Ils ont souligné la difficulté à déterminer des probabilités fiables concernant les tendances socioéconomiques de la seconde moitié du XXIe siècle ; la difficulté à obtenir un intervalle de consensus pour des quantiles comme la sensibilité climatique, et la possibilité d'une réponse géophysique non linéaire.

Les outils des probabilités imprécises peuvent être appliqués pour réduire ces controverses.

10.1.2 La prospective avec des possibilités

Pour présenter succintement la méthode proposée à l'aide du vocabulaire théorique du chapitre 6, il s'agit de construire trois scénarios. Le degré de plausibilité de chaque scénario est quantifié par sa possibilité π. Le scénario central a pour possibilité 1, les scénarios extrêmes 1/3.

Rappelons brièvement les interprétations de la possibilité $\pi(s)$ d'un évènement s. On appelle distribution de possibilité π une fonction de S dans [0, 1] qui atteind la borne supérieure de cet intervalle. Pour un scénario s quelconque, trois interprétations de $\pi(s)$ sont possibles.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

– D'une façon intuitive, la possibilité exprime un degré subjectif de surprise ressenti si s se produit : surprise = $1 - \pi(s)$. Le problème de cette interprétation est qu'elle n'est pas interpersonnelle : chaque individu a sa propre échelle de valeurs.
– Pour faire le lien avec la théorie des probabilités, on peut aussi interpréter $\pi(s)$ comme la borne supérieure de la probabilité admissible pour s. C'est comme un tirage dans une urne dont on sait qu'elle contient au plus $\pi(s)$ pourcent de boules gagnantes.
– La possibilité peut être définie opérationnellement à l'aide de la notion d'actif d'Arrow-Debreu. C'est un contrat qui rapporte 1 si s se produit, sinon 0. Le prix minimum auquel on est prêt à vendre ce contrat est $\pi(s)$.

Le dual de la possibilité est la nécessité : $\nu(s) = 1 - \pi(\overline{s})$, et contrairement aux probabilités les deux fonctions ne sont pas confondues. Quand $\pi(s) = 1$, cela veut dire que s n'est pas surprenant du tout. Dans ce cas s pourrait théoriquement avoir un niveau de nécessité $\nu(s)$ non nul. Mais de façon pratique, cela signifierait que s est un grand sous-ensemble de Ω, un sous-ensemble qui comprend tous les cas de possibilité 1. Dans la problématique des scénarios, s est tout petit, de mesure négligeable puisqu'il est composé de trois ou quatre élements et Ω est un espace multi-dimensionnel. Donc on supposera dans la suite que $\nu(s) = 0$. Le degré de nécessité de chaque futurible précis sera toujours zéro.

En termes de comportement mesurés par les paris, il faut discuter séparément deux positions : parier que s se produira, et parier que s ne se produira pas.

Parier que s se produira n'est jamais rationnel, où jamais signifie 'quel que soit le ratio de gain'. Pour le voir, soit p une probabilité (précise mais inconnue) de s. Supposons un pari unitaire qui rapporte x s'il est gagné, -1 s'il est perdu. L'espérance de gain est alors $E_s = px - (1-p) = p(1+x) - 1$. Le critère de rationalité de Walley [1991, p. 82] est d'accepter un pari si et seulement si son espérance de gain est positive pour toutes les valeurs admissibles de p. Or $p = 0$ est admissible, qui correspond à $E_s = -1$, donc le pari que s se produira n'est acceptable à aucun taux

Lorsque $\pi(s) = 1$, parier que s se ne produira pas n'est jamais rationnel non plus. L'espérance de gain d'un tel pari est $E_{\overline{s}} = (1-p)x - p = x - p(1+x)$. Comme $p = 1$ est admissible, qui correspond à $E_{\overline{s}} = -1$, le pari n'est acceptable à aucun taux

En résumé, quand $\pi(s) = 1$, prendre ou recevoir un pari contre ou pour s n'est admissible à aucun taux : on ne se prononce ni pour ni contre l'occurence du scénario.

Quand $\pi(s) = 1/3$, on peut dire que le niveau de surprise est 2/3. L'interprétation en terme de décision est : on accepte les paris dont l'espérance de gain est positive sachant que la probabilité de s est inférieure à 1/3. Dans ce cas on ne se prononce toujours pas sur l'occurence du scénario s : le minimum de E_s reste -1. Mais on peut parier que s ne se produira pas, à condition que le rapport soit suffisament intéressant. En effet, le minimum de $E_{\overline{s}}$ lorsque la p est compris entre 0 et 1/3, c'est à dire que la probabilité est admissible, est $x - 1/3(1+x) = (2x-1)/3$. Pour que ce gain espéré minimal soit positif, il faut et il suffit que le rapport du pari x soit suffisament élevé, plus grand que 1 : 2.

En résumé, affirmer que $\pi(s) = 1/3$, c'est être prêt à parier que s ne se produira pas, tant que le rapport n'est pas plus défavorable que 1 : 2. La notation 1 : 2 signifie que la perte (si s se produit) est le double du gain (si s ne se produit pas).

La littérature employant ce type de distribution de probabilités imprécises en prospective s'organise en deux types d'approches : la théorie des possibilités et la théorie floue. Cette organisation correspond à une division entre deux communautés épisté-

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

miques historiquement distinctes, la première étant davantage composée d'économistes et l'autre d'ingénieurs et d'informaticiens.

– Dans le premier type d'approche, les possibilités sont utilisées pour quantifier l'incertitude en liaison avec une théorie normative de la décision, comme Shackle [1953] qui défendait l'arithmétique des degrés de surprise comme représentation fondamentale de l'incertitude en Économie. Le travail de Young [2001] en économie de l'environnement est représentatif à cet égard. L'auteur a rencontré des décideurs pour révéler leurs degrés de surprise à propos de divers scénarios déterminant la valeur d'une autoroute dans le sud de l'état de Belize au Brésil. La conclusion est que la théorie de Shackle est opérationnelle, et permet un cadre rigoureux pour analyser l'incertitude dure, en particulier par les grands organismes internationaux.
– Le point de vue de l'autre communauté est plus proche de l'intelligence artificielle et de la cybernétique (théorie des systèmes dynamiques), représenté notament par Zadeh [1978] et en France par Dubois and Prade [1988] dont les travaux ont amené le développement d'une masse critique d'applications du contrôle flou en Automatique. L'emploi de la théorie floue pour construire en prospective a été proposé par Misani [1997] et par Canarelli [1997].

Afin de mieux faire ressortir la position de la méthode proposée dans la suite, qui se rattache au premier type d'approche, examinons plus en détail les méthodes floues de l'autre communauté.

Alors que nous cherchons à produire un ensemble de futuribles déterminé globalement, Canarelli [1997] utilise la modélisation floue pour déterminer une trajectoire particulière. Il s'agit d'un modèle de simulation récursive de la dynamique de congestion des centres urbains entre 1950 et 2010. L'état du système à chaque date est décrit par 16 variables scalaires (non géoréférencées), comme le taux de motorisation X, l'attrait pour l'automobile Y ou encore son utilisation Z. La différence essentielle par rapport à un modèle d'analyse de système classique est que l'évolution n'est pas calculée en résolvant un système d'équations récursive, ni en optimisation intertemporelle, mais par un système parallèle inspiré du modèle de fonctionnement neuronal.

L'apport essentiel est la simplification de la modélisation. En effet, les règles sont immédiatement visualisables sous la forme de diagrammes d'influences (cartes cognitives). Les connaissances des experts sont traduites par un ensemble de règles (56 dans ce cas), formulées en langage naturel. Chaque règle explicite comment une variable à l'instant $t + 1$ est influencée par une ou plusieurs autres variables à l'instant t. Par exemple :

Règle 15 : SI le taux de motorisation des ménages x est haut ET SI l'attrait pour l'automibile y est haut ALORS l'utilisation de la bagnole z est haut.

L'adjectif 'haut' est défini par un nombre flou, c'est à dire une fonction de possibilité π_X^H. Il s'agit par exemple d'une fonction linéaire par morceaux qui vaut 0 tant que le taux de motorisation x est inférieur à 0.5 voiture par ménage, puis croît en rampe linéaire, puis vaut 1 si x est supérieur à 1 voiture par ménage. Le niveau de possibilité $\pi_X^H(x)$ représente ainsi le degré de vérité de la proposition 'le taux de motorisation est haut'. On définit ainsi une série de fonctions qui permettent de dire à quel point chaque variable est 'haute', 'moyenne' ou 'basse'.

Chaque règle est alors évaluée individuellement. Pour chacune, on calcule la force des prémices, c'est à dire ici $\pi_X^H(x)$ et $\pi_Y^H(y)$. Puis on évalue à quel point la règle est applicable. Puisqu'il s'agit de la conjonction ET, la force de la règle est obtenue en prenant le minimum de la force des prémices. La contribution de la règle 15 ci dessus

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

à la valeur finale de z est alors une fonction :

$$f_{15}(z_{t+1}) = \pi_Z^H(z_t) \times \min(\pi_X^H(x_t), \pi_Y^H(y_t)) \tag{10.1}$$

C'est à dire qu'on multiplie le résultat 'haut' par la force de la règle. Cette fonction f_{15} reste linéaire par morceaux, même si son maximum n'est plus nécessairement 1.

Une fois ces 56 règles estimées, l'estimation de la valeur de z procède en deux temps. Premièrement, toutes les règles qui concernent z sont fusionnées par addition. Par exemple, si les règles 9 à 15 déterminent cette variable, on va considèrer la fonction $f = f_9 + \cdots + f_{15}$. Il s'agit toujours d'une fonction linéaire par morceaux non normalisée, qui décrit imprécisément la valeur de z. C'est pourquoi, deuxièmement, on défloute cette fonction z pour déterminer un nombre précis z, en considérant par exemple que z est la médiane de f.

Nous reconnaissons l'importance de mieux modéliser les aspects dynamiques des systèmes, mais un exposé et une critique plus approfondie des méthodes évoquées ci dessus devra faire l'objet de recherches ultérieures. En effet, les éléments de méthode pour la prospective proposés dans ce chapitre relèvent davantage de l'approche intéressée par l'incertitude et la décision que de cette approche basée sur la logique floue et la modélisation du langage naturel.

La théorie développée dans la suite se place dans le cadre général des probabilités imprécises, en reconnaissant l'importance pratique du calcul flou. Dès qu'il s'agit de passer à un cas d'application, les calculs seront considérablement simplifiés lorsque l'information sera représentée par des distribution de possibilités.

10.1.3 Cadre théorique : un moyen de communication

Un scénario est un point ω dans l'espace de tous les futurs descriptibles Ω. On suppose l'existence d'une fonction réelle J définie sur Ω qui définit la performance d'un scénario par rapport aux buts du décideur (utilité, bénéfice net ou autre variable d'intérêt). Un ensemble de scénarios S est un sous ensemble de Ω.

L'ensemble S contient typiquement 3 ou 4 éléments, alors que Ω est en général infini et multi-dimensionnel. C'est pourquoi pour toute loi de probabilité p définie sur Ω, la probabilité $p(S)$ est usuellement infinitésimale.

Informellement, cette section représente la construction de scénarios comme un problème de communication à sens unique depuis un analyste (émetteur) vers un décideur (récepteur). L'analyste dispose d'une information abondante représentée par une distribution de probabilités imprécises $\mathcal{C}$ sur Ω, c'est à dire un ensemble de probabilités admissibles au sens du chapitre 6. Mais l'analyste ne peut communiquer au décideur qu'une synthèse simple (S, π), où S est une ensemble de scénarios et π la distribution du niveau de possibilité de chacun d'eux.

Comment choisir (S, π) au mieux ?

Formellement, on suppose (Ω, $\mathcal{C}$, J) donnés, et on s'intéresse à une procédure pour déterminer (S, π). Examinons pour commencer le point de vue de la théorie du signal classique et la notion d'entropie. On cherche en quelque sorte à minimiser la perte inévitable d'information se produisant lors de la communication. La difficulté est que la théorie générale de l'information reconnaît explicitement le caractère multi dimensionnel de l'ignorance et donc de l'information [Smithson, 1988]. On ne peut donc pas minimiser

Pour rappeler la définition introduite au 7.1.3 page 84, [Klir, 1999] appelle Aggregate Uncertainty de $\mathcal{C}$ le maximum de l'entropie de p pour tout $p \in \mathcal{C}$. Soit, en notant

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

$|S|$ le nombre d'éléments de S :

$$\overline{H}(\mathcal{C}) = \max_{p \in \mathcal{C}} - \sum_{i=1}^{|S|} p_i \log_2 p_i \tag{10.2}$$

Cet indicateur mesure la distance entre l'ensemble $\mathcal{C}$ et le centre du simplexe[1], point d'entropie maximum. Mais aucun index unidimensionnel ne saurait résumer à lui seul à la fois la taille et la position d'un ensemble de points. L'Aggregate Uncertainty n'informe pas sur la taille de $\mathcal{C}$, et ne permet pas de distinguer une équiprobabilité précise de l'information nulle, par exemple.

La multi-dimensionalité de l'ignorance est la raison intuitive pour laquelle il n'est pas possible de déterminer S univoquement en minimisant la perte d'information. On retrouve ici l'abandon du paradigme de l'optimum global en probabilités imprécises déjà proposé aux chapitres précédents. En conséquence, mon but n'est pas de définir une méthode optimale, mais d'offrir des règles sensées et pratiques pour justifier un choix acceptable de S et π.

La démarche procède en deux temps. Immédiatement ci dessous, on examine comment choisir π en considèrant S fixé. Comment choisir S sera l'objet de la section suivante.

Supposons S fixé, comment choisir π ? C'est le problème du conditionnement. Or on a vu au 7.3.1 page 89 qu'il existe deux notions de conditionnement par rapport à S étant donné $\mathcal{C}$. La focalisation a été notée $\overline{P}(\cdot|S)$. Elle s'interprête comme le consentement à recevoir pour un pari contingent à S. La révision a été notée $\overline{P}^S(\cdot)$. Elle s'interprête comme une règle de révision des croyances si S se produit. En identifiant un sous ensemble s de S avec sa fonction indicatrice, on a :

$$\begin{aligned} \overline{P}(s|S) &= \frac{\overline{P}(s \cap S)}{\overline{P}(s \cap S) + \underline{P}(\overline{s} \cap S)} \\ &= \sup_{P \in \mathcal{C}} \frac{P(s \cap S)}{P(S)} \end{aligned} \tag{10.3}$$

Alors que :

$$\begin{aligned} \overline{P}^S(s) &= \frac{\overline{P}(s \cap S)}{\overline{P}(S)} \\ &= \sup_{P \in \mathcal{C}, P(S) = \underline{P}(S)} \frac{P(s \cap S)}{P(S)} \end{aligned} \tag{10.4}$$

En pratique la focalisation n'est pas utile ici. Par exemple dans le cas où $\mathcal{C}$ est défini par une distribution de possibilité, et où la nécessité de S est zéro ('so many variations are possible', pour rappeler Kahane cité ci dessus), alors on peut montrer que $\overline{P}(s|S) = 1$. Ainsi en règle générale la focalisation conduit à l'ignorance totale. Il est cohérent de n'accepter ni ne faire aucun pari contingent à S.

Pour déterminer π on utilisera donc la règle de révision des croyances. Si $\mathcal{C}$ dérive d'une fonction de possibilité, alors Dubois and Prade [1997] montrent que $\overline{P}^S(\cdot)$ est

[1] L'ensemble des n-uplets non-négatifs sont la somme est 1, c'est à dire l'ensemble de toutes les distributions de probabilités mathématiquement possibles

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

aussi une fonction de possibilité. Comme de plus on choisira S tel que $\overline{P}(S) = 1$, on aura alors l'égalité $\pi(s) = \overline{P}(s)$. On adoptera donc simplement pour π la possibilité d'origine restreinte à S, sans avoir besoin de renormaliser. Le cas où $\mathcal{C}$ ne dérive pas d'une fonction de croyance reste ouvert.

10.2 Trois règles pour la prospective

Pour déterminer S trois principes sont proposés : (1) aucun scénario ne doit être plus probable qu'un autre, (2) l'ensemble S doit être maximalement plausible, et (3) l'intervalle contenant $J(S)$ doit être le plus large possible. Ces principes permettent de guider formellement le choix des scénarios, extrêmes mais pas trop. La section suivante présente discute ces trois principes et en tire des règles pratiques pour construire S. Le cas possibiliste est examiné en particulier.

Le nombre de scénarios, noté $|S|$ dans la suite, n'est pas fixé *a priori*. Il va y avoir entre 2 et 4 scénarios, selon la forme de $\mathcal{C}$. Lorsqu'il s'agit d'une distribution de possibilité, on va voir que trois scénarios suffisent à maximaliser les règles (2) et (3) sous la contrainte (1).

10.2.1 Aucun futur n'est plus probable

Le postulat de base des probabilités imprécises est que toutes les probabilités dans $\mathcal{C}$ sont également admissibles. La définition suivante est alors naturelle : on affirmera qu'un futur ω_1 est plus probable qu'un autre ω_2 si et seulement si $p(\omega_1) > p(\omega_2)$ pour tout p dans $\mathcal{C}$.

Cette définition de la relation 'plus probable que' définit un ordre incomplet. Par exemple, lorsqu'on fait un tirage dans l'urne d'Ellsberg contenant 30 boules *rouges* et 60 *noires ou jaunes*, on peut ainsi affirmer qu'aucune couleur n'est plus probable qu'une autre. Cette ignorance peut être levée en apportant plus d'information, par exemple si l'on sait qu'il y a au moins 31 boules jaunes.

L'incomplétude est particulièrement intéressante pour les besoins de la prospective puisque cela permet de donner un sens mathématique à l'idée qu'aucun futurible n'est préféré. Par préféré, on entendra 'plus probable que'.

En général, la relation de préférence sera fondée sur des niveaux de possibilité quantifiés subjectivement, on pourra la qualifier de Bayésienne. Dans certains cas, comme dans l'exemple de l'urne d'Ellsberg ci dessus, on pourra disposer d'une distribution de probabilité imprécise objective. La nature objective ou subjective de l'information de l'expert n'entre pas en jeu dans la méthode qui suit. Cependant, puisqu'il s'agit d'un problème d'expert, on emploiera le vocabulaire subjectif.

Rappelons que l'expert dispose d'une information abondante représentée par un ensemble de probabilités admissibles $\mathcal{C}$, et que son problème est de déterminer un jeu S de futuribles, c'est à dire un nombre restreint de points de Ω à communiquer au décideur. Une condition suffisante pour qu'aucun futurible ne soit plus probable qu'un autre est :

Règle 1 (No preference) *L'équiprobabilité des futuribles est une probabilité admissible.*

Cette condition est suffisante pour assurer l'incomparabilité deux à deux des futuribles. Elle n'est pas nécessaire en général, considérer par exemple l'urne d'Ellsberg

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

avec 20 boules rouges et 70 noires ou jaunes. Elle présente néanmoins les avantages suivants :

Le premier avantage est une contingence pratique, mais importante. Lorsque S est présenté sans l'information à propos des croyances sur la plausibilité des différentes alternatives π, certains observateurs y verront une probabilité uniforme. On ne peut négliger cette attitude, car le but de la méthode développée ici est explicitement de communiquer de façon simple une information d'expert vers un décideur. On doit donc supposer que le décideur n'est pas un expert en théorie de l'information généralisée, mais qu'il a reçu une éducation supérieure. Il a donc pu être exposé au principe de la raison insuffisante dans sa version probabiliste précise. Même si l'on recommande de ne pas mettre d'équiprobabilité sur l'ensemble des futuribles, il est préférable ne pas mettre en faux (par rapport aux croyances de l'expert) ceux qui vont le faire quand même.

D'un point de vue de la théorie générale de l'information, la condition est aussi intéressante. Elle signifie que S respecte un principe d'incertitude maximale : à nombre de scénarios donné, l'ensemble choisi maximise l'entropie généralisée $\overline{H}(S)$.

Enfin si $\mathcal{C}$ est défini par une fonction de possibilité, alors la condition suffisante s'écrit simplement $\forall\omega \ : \pi(\omega) \geq \frac{1}{|S|}$. En résumé, il faut que le degré de possibilité de chacun des scénarios soit supérieur à $1/n$, où n est le nombre de scénarios.

10.2.2 Maximiser la plausibilité

Le second principe est une recherche de véracité. Il consiste à maximiser la plausibilité de l'ensemble de futuribles par rapport à l'information de l'émetteur définie par $\mathcal{C}$:

Règle 2 (Maxplausibility) *Choisir S pour maximiser $\overline{P}(S)$.*

Lorsque les croyances sont définies par une distribution de possibilité, il suffit pour satisfaire ce principe d'inclure dans S au moins un futur de possibilité 1. Dans ce cas le principe revient à dire que l'un des futuribles doit être choisi parmi les futurs les moins surprenants, c'est à dire qu'il faut un scénario central.

Donner un scénario de référence présente en pratique un avantage et un inconvénient pour la prospective. L'avantage est qu'il démontre au client la compétence de l'équipe de construction des scénarios : elle connaît les croyances de référence dans le domaine. Ce point peut être important si cette équipe est composée de consultants (spécialistes de la prospective par exemple) extérieurs à l'organisation. Le scénario de référence est ainsi un moyen d'asseoir la crédibilité et la compétence affichée des producteurs par rapport au consommateur des scénarios.

D'un autre côté, le scénario central risque de concentrer excessivement l'attention et d'être interprété comme un futur officiel. Cela mine donc le travail de fond de l'analyse prospective, dont le message essentiel est la multiplicité des futurs possibles.

Pour éviter l'écueil du scénario central, beaucoup d'analyses mettent en œuvre des méthodes qualitatives ou basées sur les contraintes comme par exemple la méthode des 'Safe Landing Corridors' ou des 'Tolerable Windows' [Petschel-Held et al., 1999]. Dans ce cadre le premier principe et le second principe deviennent triviaux, ils prescrivent de se limiter à choisir des futurs viables.

En effet, formellement ces méthodes reviennent à utiliser une fonction de possibilité discrète : zéro ou un. On peut alors dans ce cas définir $\mathcal{C}$ comme l'ensemble de

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

toutes les distributions de probabilités dont le support est le sous ensemble de Ω satisfaisant les contraintes. Un futur viable est un futur de possibilité $\pi(s) = 1$. Le second principe implique de choisir au moins un futur viable, et le premier principe implique de ne pas choisir de futurs non-viables pour que l'équiprobabilité est admissible. Sur cette base qualitative il est alors possible de déterminer un S qui comprend un nombre pair de scénarios.

L'approche qualitative est souvent motivée par le refus des probabilités précises pour quantifier les croyances. Mais elle pose un problème comme méthode générale, car elle revient à jeter le bébé avec l'eau du bain. La réalité psychologique impose de ne pas traiter la question du degré de cohérence interne en noir et blanc. C'est pourquoi cette approche ne fonctionne pas toujours en pratique. Par exemple, les travaux du SRES comportaient initialement 4 scénarios, puis le scénario A1 a reçu une attention particulière et a été décliné en trois.

Pour éviter un scénario central, l'approche alternative consiste à représenter l'information par une fonction de croyance bel qui n'est pas une distribution de possibilité (voir chapitre 6). Cela permet de représenter un problème sous controverse, lorsque les croyances sont réellement dissonantes, c'est à dire qu'il existe divers points de vue en conflit. Dans ce cas le second principe oblige S à représenter la variété des points de vue pour maximiser la plausibilité pl.

Si cette approche alternative est théoriquement plus fidèle, elle est aussi plus technique puisqu'elle utilise des notions de théorie de l'évidence de Dempster-Shafer. En attendant que les probabilités imprécises soient mieux connues par le plus grand nombre, il semble difficile de la regarder autrement que comme une piste de recherche.

A court terme, le cas où l'information imprécise est représentée par une distribution de possibilité est plus facile à traiter. Dans ce cas, la plausibilité peut être appelée possibilité, et la possibilité de S est le maximum de la possibilité de chacun des scénarios de S. Le principe de plausibilité prescrit alors d'inclure au moins un scénario totalement plausible $\pi(s) = 1$ dans S. On peut en choisir deux si il s'agit d'éviter un scénario central et si π admet plusieurs scénarios totalement plausibles.

Ainsi le principe de maximisation de la plausibilité s'interpréte différement en fonction du cadre formel qui représente l'information : contraintes, mesure de croyances ou distribution de possibilité. Cette articulation doit faire l'objet d'un choix conscient de la part du prospectiviste. Le choix de déterminer ou non un scénario central dans un exercice de prospective dépend autant du contexte institutionnel que de la précision des informations disponibles.

10.2.3 Maximiser la diversité

Le troisième principe suggère que l'ensemble des scénarios soit bien contrasté afin de représenter la diversité des futurs possibles. On considère pour cela une fonction objectif $J(\omega)$ scalaire, interprétée comme une échelle de performance pour le système analysé. Dans un contexte d'entreprise, il pourrait s'agir du profit. Dans un contexte de politique publique J serait le bien-être et en modélisation intégrée environnementale il pourrait représenter le niveau de pollution.

On peut alors considérer l'intervalle $[\inf_{\omega \in S} J(\omega)\,,\, \max_{\omega \in S} J(\omega)]$ comme un indicateur de l'intérêt de l'ensemble des scénarios pour le décideur. Le principe est :

Règle 3 (Maxdiversity) *Choisir S pour maximiser (au sens de l'inclusion) l'intervalle de variation de la variable d'intérêt.*

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

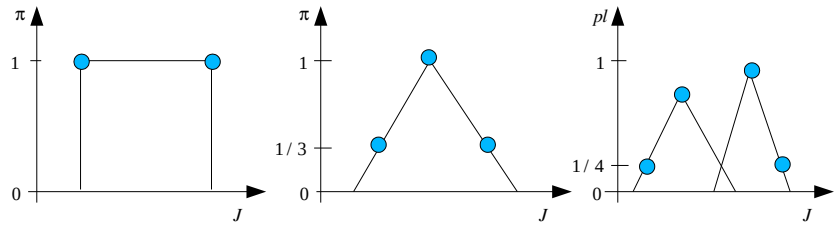


FIG. 10.1 – Comment choisir les futuribles pour maximiser la plausibilité et la diversité sans toutefois avoir de scénario plus probable. Trois cas de figure sont représentés, selon la nature de la distribution de croyances sur J. Dans un modèle de contraintes (à gauche), on prend les scénarios viables aux extrêmités de l'intervalle de variation de la variable d'intérêt J. Avec une distribution de possibilité (au centre), on prend un scénario en haut à $\pi = 1$, et les scénarios extrêmes au niveau de possiblité 1/3. Avec mesure de croyance plus générale (cas représenté à droite), il faut prendre un scénario représentatif dans chaque ensemble focal pour représenter la diversité des points de vue.

Cette formalisation du principe de diversité peut sembler a priori ambigue puisqu'il n'est pas toujours possible de comparer deux intervalles $[J(\omega_1), J(\omega_2)]$ et $[J(\omega_3), J(\omega_4)]$ au sens de l'inclusion. Mais la définition fonctionne puisqu'on peut mélanger les ensembles de scénarios. On peut donc considérer un ensemble de scénarios qui contiendrait le moins performant de ω_1 et ω_3, et le plus performant de ω_2 et ω_4. Cette règle suggère de choisir deux scénarios extrêmes. Le scénario bas minimise J et le scénario haut maximise J.

Ce principe tend à faire inclure dans S des scénarios les plus extrêmes possibles. Mais il est limité par le premier principe qui implique que l'équiprobabilité doit rester acceptable. En effet la plausibilité des cas extrêmes $\overline{p}(\{\omega\})$ doit rester supérieure à $1/|S|$. Les extrêmes ne doivent donc pas être trop peu plausibles. D'autres formalisations du principe de diversité sont peut être possibles. Mais celle-ci suffira pour la suite.

En résumé, la Figure 10.1 illustre comment les principes discutés ci dessus (No preference, maximum plausibility, diversity) interagissent. Trois options sont distinguées, selon la nature de la distribution de croyances sur J : contraintes, distribution de possibilité ou mesure de croyance.

Le cas le plus simple, représenté à gauche, est celui où un ensemble de contraintes est utilisé pour séparer en noir et blanc les futurs viables des autres. Si l'on désire la symétrie entre les futuribles simplement filtrer ainsi les futurs non plausibles est approprié. La méthode proposée prescrit de choisir les deux futurs viables qui extrêmalisent J. Graphiquement, sur la figure où l'axe horizontal est J, et l'axe vertical est π, l'ensemble des futurs viables est un segment à $\pi = 1$, et les deux futuribles sont les extrêmités de ce segment.

Le cas représenté au centre est celui dans lequel chaque futur descriptible a été évalué en fonction de sa cohérence interne : son niveau de possibilité π qui peut s'interpréter comme la borne supérieure de la probabilité admissible de ce futur. Pour évaluer la possibilité d'atteindre un objectif J fixé, il suffit de considérer le maximum de la

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

possibilité de tous les futurs qui impliquent J. On en déduit ainsi une fonction de possibilité sur J, représentée par un triangle sur la figure. Le second principe implique de produire un scénario central, de possibilité 1 à la pointe haute du triangle. C'est le futur le moins surprenant. Il n'est pas nécessairement unique, puisque la distribution de π aurait pu être un trapèze avec un plateau à 1 au lieu d'un triangle pointu. Le troisème et le premier principe interagissent pour impliquer des scénarios haut et bas au niveau de possibilité 1/3.

Finalement le cas représenté à droite est le plus sophistiqué. L'axe vertical n'est plus un niveau de possibilité, mais un niveau de plausiblité. En effet la figure illustre le cas de deux points de vue conflictuels, pour lequel le modèle des croyances transférables (ou une autre théorie de Dempster-Shafer) est le cadre naturel de représentation des croyances. Maximiser la plausibilité, implique de choisir un scénario représentant chaque point de vue. Cette dissonnance implique donc de ne pas avoir de scénario central. Si on souhaite compléter avec des scénarios extrêmes pour produire quatre futurs, la plausibilité de ces extrêmes pourra être réduite à 1/4.

10.3 Prospective du réchauffement climatique

La section suivante applique les trois principes décrits ci dessus pour éclairer certaines controverses à propos du réchauffement global en 2100. Cette petite illustration prétend seulement poser des ordres de grandeur : les croyances $(\Omega, \mathcal{C})$ se visent pas une représentation exhaustive des connaissances scientifiques sur le sujet. Pour un exemple d'étude empirique plus approfondie, voir la distribution de probabilités imprécises récemment proposée par Kriegler and Held [2003].

La variable d'intérêt est le réchauffement global en 2100 notée ΔT_{2100} en degrés Celsius. Les futurs sont décrits par deux paramètres. Le paramètre noté $[CO_2]_{2100}$ représente la concentration atmosphérique de CO_2 en 2100, mesurée en parties par million en volume (ppmv). Le paramètre $\Delta T_{2\times CO_2}$ est la sensibilité climatique, étudiée au chapitre précédent. C'est un paramètre d'équilibre à long terme. La variable d'intérêt est déterminée par le modèle multiplicatif :

$$\Delta T_{2100} = \frac{[CO_2]_{2100} - 275}{275} \times \frac{\Delta T_{2\times CO_2}}{3} \tag{10.5}$$

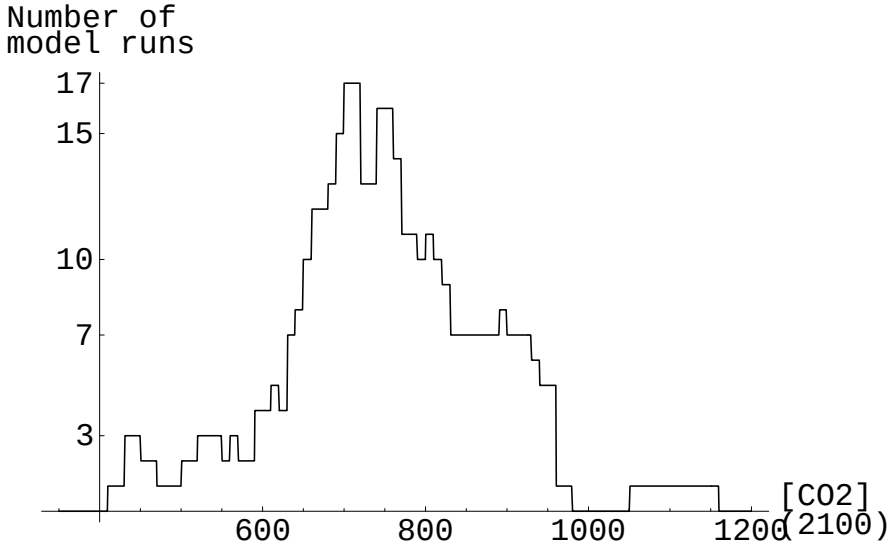
Ceci constitue un modèle très grossier du réchauffement climatique, et les résultats seront nécessairement sensibles au paramètre 1/3 qui ne sera pas discuté ici. On fait l'hypothèse que $\frac{\Delta T_{2\times CO_2}}{3}$ paramétrise les croyances concernant la sensibilité climatique en 2100.

10.3.1 Croyances sur la concentration et la sensibilité

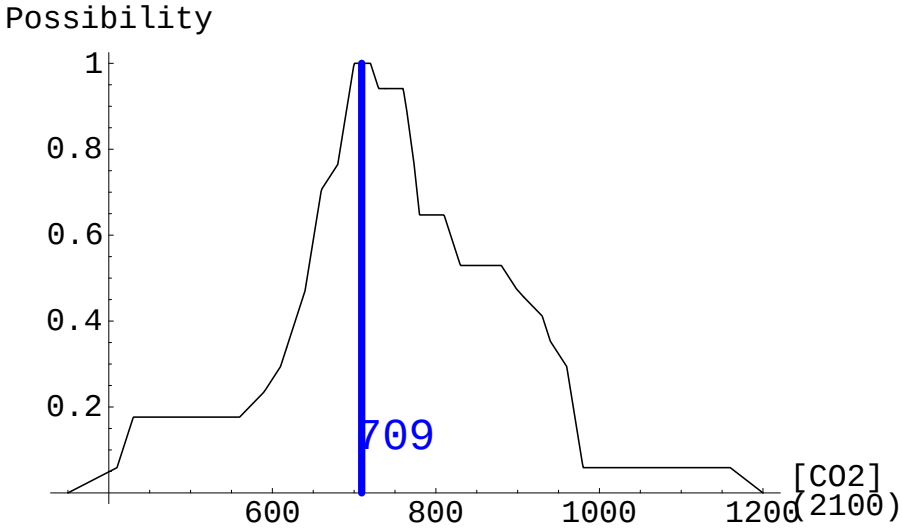
La distribution de possibilité de la sensibilité climatique a été construite au chapitre précédent (figure 9.5), en fusionnant l'opinion des 16 experts de [Morgan and Keith, 1995], dans le cadre théorique de Smets [2000c].

La distribution de possibilité de la concentration de CO_2 en 2100 a été construite pour représenter l'état de l'art parmi une certaine littérature quantitative sur le sujet. L'histogramme de la figure 10.2 en haut est une statistique sur les 56 scénarios d'émissions « sans intervention » de la base de données GIEC SRES de Morita and Lee [2000]. La partie inférieure de la figure 10.2 montre ces mêmes données renormalisées et lissées.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005



(a) Résultats des modèles



(b) Croyance résultante

FIG. 10.2 – La concentration atmosphérique de CO_2 en 2100. En haut, (a) histogramme des résultats pour 56 simulations SRES "sans intervention" enregistrées par Morita. L'axe vertical est le nombre de simulations prédisant $[CO_2](2100)$ à 5% près. En bas, (b) les mêmes données renormalisées à 1 et lissées à gauche et à droite pour en faire une distribution de possibilité de type *nombre flou*. Si rien n'est fait pour réduire les émissions de gaz à effet de serre, le futur le moins surprenant —au sens de majoritaire dans les modèles SRES— serait que la concentration de CO_2 en 2100 soit autour de 709 ppmv.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Les 56 scénarios sont issus de seulement 17 modèles intégrés, et représentent le résultat d'un effort de recherche coordonné et interactif, notament par l'Energy Modeling Forum et les travaux du GIEC. Les émissions cumulées globales ont été converties en concentration atmosphériques avec un modèle linéaire. L'histogramme n'est pas strictement unimodal, avec en particulier quelques simulations autour de 1150 ppmv figurant des émissions de référence très élevées au cours du siècle.

Afin de transformer cette statistique en distribution de possibilité, ces données ont subi une renormalisation et un lissage. La méthode des histogrammes possibilistes qui consiste à renormaliser de telle sorte que le maximum soit 1 est discutée par Joslyn [1997]. Pour justifier le lissage, même si les données expriment la diversité des points de vue entre différentes équipes de modélisation, la petite taille de l'échantillon est sans doute responsable d'une grande partie des irrégularités dans la courbe. Le but du lissage est de faire que les coupes à un niveau de possibilité donné soient des intervalles, c'est à dire que la distribution de possibilité définisse un nombre flou. Ce nombre a été obtenu en prenant les enveloppes à gauche et à droite de l'histogramme.

La distribution de possibilité résultante est la courbe inférieure de la figure 10.2. Elle montre que si rien n'est fait pour réduire les émissions de gaz à effet de serre, le futur le moins surprenant —au sens de majoritaire dans les modèles SRES— serait que la concentration de CO_2 en 2100 soit autour de 709 ppmv. La distribution s'étale entre 400 et 1200 ppm environ, avec le gros des croyances (possibilité > 1/2) entre 650 et 800 ppmv.

10.3.2 Croyances jointes et possibilité du réchauffement

Dans un travail prédictif, on pourrait supposer que si la sensibilité climatique s'avère élevée, alors les politiques énergétiques vont être infléchies pour réduire les émissions de gas à effet de serre avec des résultats sensibles avant la fin du siècle. Ici au contraire, l'étude s'intéresse explicitement à un futur de référence dans lequel on suppose l'absence de politiques climatiques de prévention.

C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que les deux variables n'interagissent pas, et que la possibilité du couple $([CO_2]_{2100}\,,\,\Delta T_{2\times CO_2})$ s'évalue comme le minimum des possibilités marginales $\pi([CO_2]_{2100})$ et $\pi(\Delta T_{2\times CO_2})$.

Dans ces conditions les courbes de niveau de la possibilité jointe $\pi([CO_2]_{2100}\,,\,\Delta T_{2\times CO_2})$ représentées Figure 10.3 sont des rectangles (les coins sont droits aux erreurs numériques près). L'axe horizontal représente la concentration atmosphérique en CO_2 en l'année 2100. L'axe vertical représente la sensibilité climatique. La figure montre les courbes de niveaux de la distribution de possibilité, avec augmentation dans les teintes foncées. Par exemple, on lit que la possibilité de la conjonction « la concentration est entre 660 et 840 ppmv ET la sensibilité du climat est entre 1.6 et 3.5 degré C » est plus grande que 0.6.

Un même réchauffement peut être obtenu avec une sensibilité climatique forte et des émissions faibles, l'inverse et toutes les hypothèses entre les deux. Comme cette variable d'intérêt est déterminée par un modèle multiplicatif de l'équation 10.5 page 136, les courbes d'iso-réchauffement sont des branches d'hyperboles, comme celle illustrée Figure 10.4. Rappellons que l'arithmétique des possibilités est que $\pi(A \text{ OU } B) = \max(\pi(a)\,,\,\pi(b))$. On s'intéresse ainsi à la réalisation $([CO_2]_{2100}\,,\,\Delta T_{2\times CO_2})$ la moins surprenante parmi toutes celles conduisant à un niveau de réchauffement donné. Par exemple, le cas le moins surprenant pour aboutir à 2.4 degrés de réchauffement serait que la sensibilité climatique et les émissions soient toute deux moyennes, c'est à dire au point (709, 2.8) marqué dans le rectangle noir central. La possibilité d'un tel ré-

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

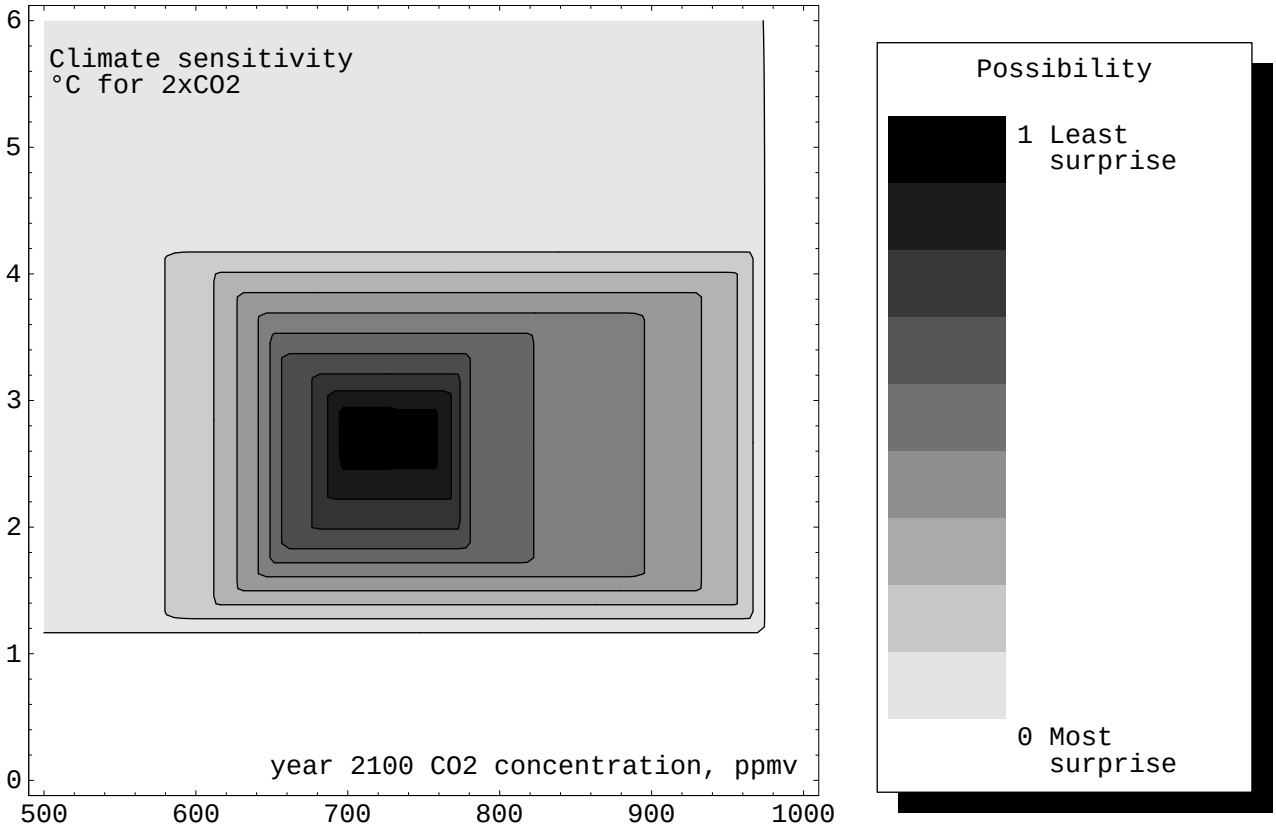


FIG. 10.3 – Courbes de niveau de la distribution de possibilité jointe. L'axe horizontal représente la concentration atmosphérique en CO_2 en l'année 2100. L'axe vertical représente la sensibilité climatique. Le niveau de possibilité augmente (et le degré de surprise diminue) dans les teintes foncées.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

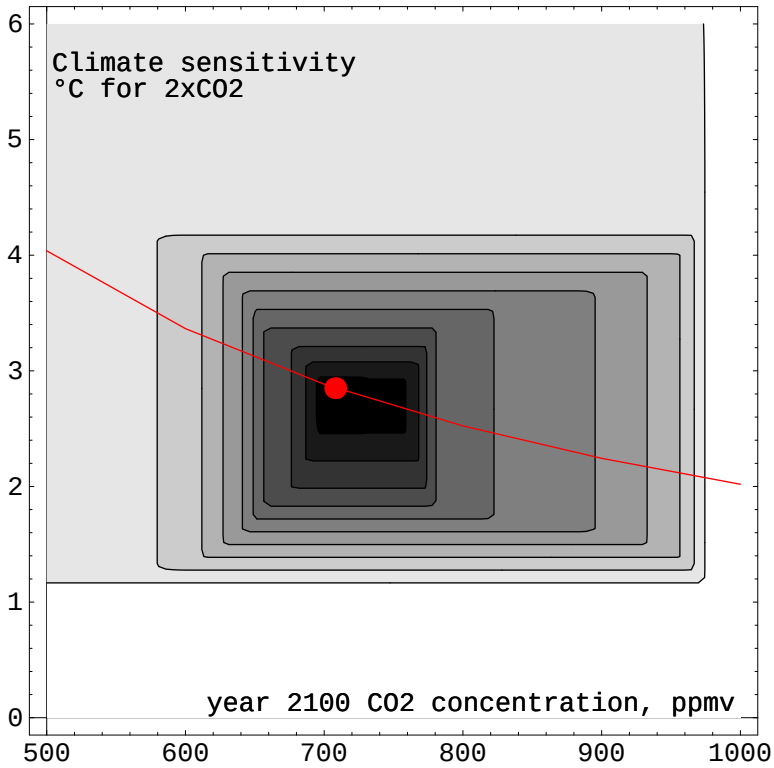


FIG. 10.4 – Calcul de la possibilité d'un réchauffement égal à 2.4 degrés. Compte tenu du modèle multiplicatif, le lieu des points correspondant à un réchauffement de 2.4 degrés est la branche d'hyperbole traversant la figure : un même réchauffement peut être obtenu avec une sensibilité climatique forte et des émissions faibles, l'inverse et toutes les hypothèses entre les deux. Le cas le moins surprenant serait que la sensibilité climatique et les émissions soient toute deux moyennes, c'est à dire au point (709, 2.8) marqué dans le rectangle noir central.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

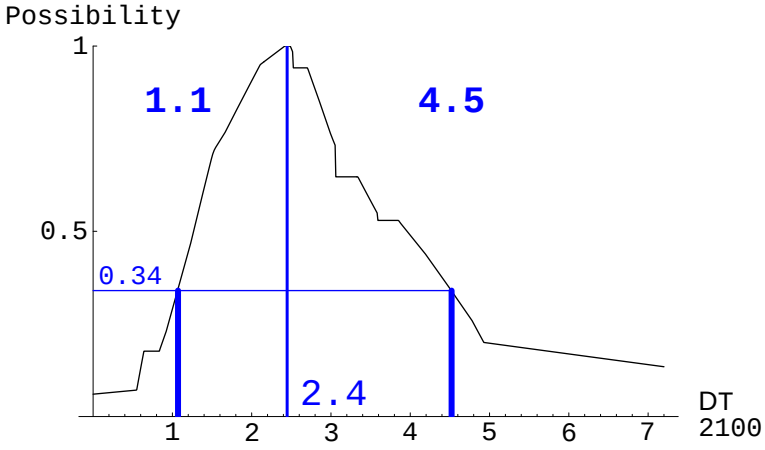


FIG. 10.5 – Distribution de possibilité du réchauffement global en 2100. Trois futurs sont remarquables : le moins surprenant correspond à un réchauffement de 2.4 degrés, les deux futurs extrêmes de possibilité 1/3 correspondent à un réchauffement de 1.1 et 4.5 degrés.

chauffement égal est 1, la branche d'hyperbole passe par le point le plus élevé de la distribution jointe.

Reproduire le même raisonnement pour toute les isothermes permet ainsi de construire une distribution de possibilité pour le réchauffement global en 2100.

10.3.3 Application des règles de Prospective proposées

La Figure 10.5 présente la distribution de possibilité pour la variable d'intérêt —le réchauffement global en 2100—. Cette distribution permet ainsi de proposer une résolution de la controverse suite au chiffre de 5.8 degrés de réchauffement annoncés dans le troisième rapport GIEC. En effet, cela permet de montrer qu'un tel réchauffement surprendrait beaucoup les experts, sans avoir à exhiber une distribution de probabilité. On évite ainsi le problème de fond qui est qu'une distribution de probabilité n'est pas crédible car trop précise par rapport à l'état des connaissances actuelles.

Les trois futurs remarquables sont marqués sur la courbe. Le moins surprenant correspond à un réchauffement de 2.4 degrés, les deux futurs extrêmes de possibilité 1/3 correspondent à un réchauffement de 1.1 et 4.5 degrés. Ce triplet de futuribles est déterminé par les principes de prospective rationelle proposés plus haut page 136, qui permettent d'affirmer que tous les futuribles doivent être pris également au sérieux :

- Dans son ensemble le jeu de scénarios est tout à fait possible car il contient le futur central. Les croyances étant déterminées par une distribution de possibilités, la plausibilité du triplet est le maximum de la possibilité de chacun des trois futurs. Comme le triplet contient le futur le moins surprenant (2.4 degrés), sa plausibilité est maximale, égale à 1.
- Aucun futur n'est plus probable qu'un autre. Les futurs extrêmes ont été choisis juste assez surprenants pour pouvoir affirmer que l'équiprobabilité sur les trois futurs est une probabilité admissible. En effet, le niveau de possibilité de chacun est supérieur ou égal à 1/3.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

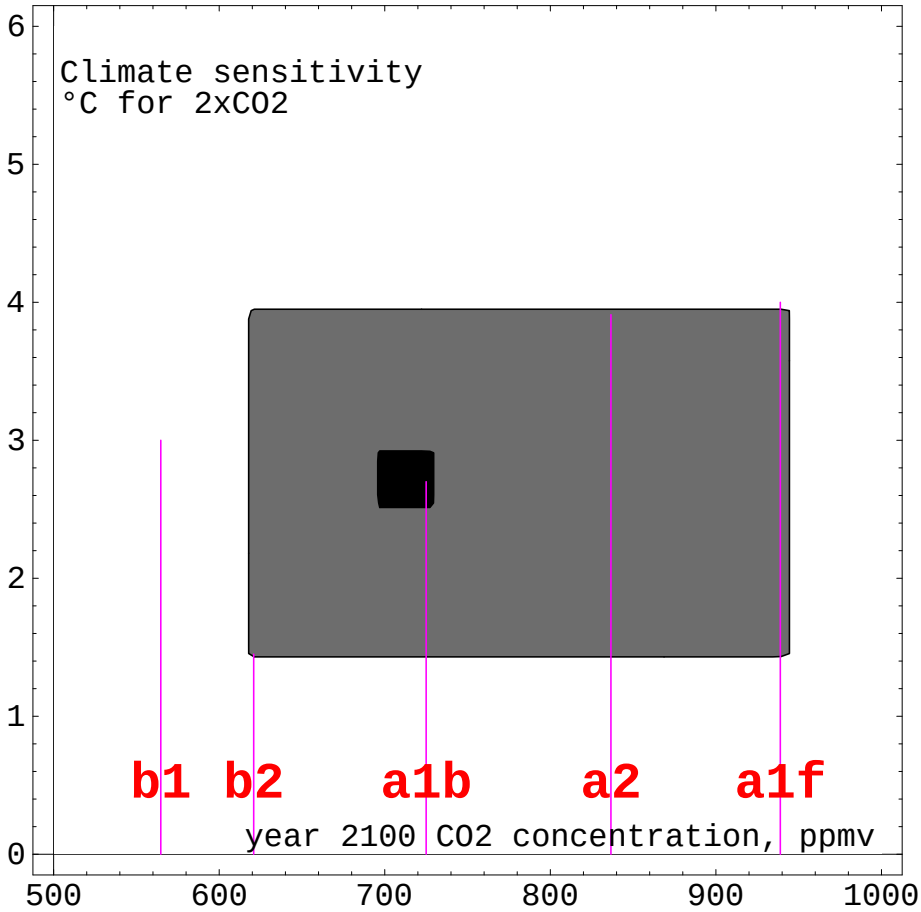


FIG. 10.6 – Position des scénarios SRES du GIEC. Ces scénarios d'émission définissent des niveaux de concentration en 2100. La distribution de possibilité jointe suggère d'associer A1b à la valeur centrale de la sensibilité climatique, et respectivement B2 et A1f aux extrêmes bas et haut de ce paramètre.

– L'intervalle de la variable d'intérêt est maximisé. En effet la possibilité des futurs extrêmes sature la contrainte précédente, on ne peut pas les écarter davantage sinon leur possibilité deviendrait inférieure à 1/3.

La figure 10.6 permet de positionner les principaux scénarios d'émission du GIEC par rapport aux résultats de ce chapitre. Les émissions du rapport SRES ont été traduit en niveaux de concentration avec le même modèle linéaire que précédemment, et portés horizontalement sur le graphe de la distribution jointe de possibilité. Ce type de résultats permet d'éclairer deux débats.

Premièrement, les discussions sur le scénario central dans le SRES. D'après ces calculs il apparaît que le scénario A1b correspond le plus au scénario central, et que A1f et B2 aux scénarios extrêmes. L'intérêt est que la méthode utilisée pour aboutir à cette conclusion est essentiellement basée sur une analyse de nature statistique des résultats dans la littérature scientifique. Elle apporte donc une réponse moins directement biaisée par les enjeux politiques de la question du scénario central.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Deuxièmement, une des critiques apportées au chiffre de 5.8 degrés annoncés dans le rapport GIEC était qu'on ne devrait pas associer émissions élevées et sensibilité climatique élevée. En effet, si on disposait de probabilités sur les deux variables, quand on les suppose indépendantes la probabilité jointe serait très faible, puisque qu'elle serait le produit de deux probabilités faibles.

Une première réponse à cette critique est que les variables ne sont pas indépendantes. Mais cette réponse est insatisfaisante, car si elle est vraie en réalité elle ne s'applique pas ici. Il s'agit de la modélisation des scénarios de référence *sans politique de réduction*, donc les variables sont indépendantes par hypothèse.

Il nous semble plus convaincant de répondre qu'on ne dispose pas de probabilités, mais de possibilités. Et la logique des possibilités suggère bien d'associer aux scénarios d'émissions centraux, haut et bas les hypothèses de sensibilité climatique respectivement centrales, hautes et basses. La vraie question est alors de savoir à quel niveau de possibilité descendre, puisqu'on peut présenter des chiffres aussi élevés que l'on veut si l'on descend dans l'implausible. Si l'on ne présente qu'un intervalle, c'est à dire deux chiffres, le principe de non-préférence suggère que le niveau de possibilité devrait être supérieur à 0.5.

S'il ne fallait retenir que trois scénarios SRES, l'étude suggère que le scénario A1b de choisir comme scénario central, et A1f et B2 pour scénarios extrêmes. La logique des possibilités suggère d'associer à ces scénarios d'émissions les hypothèses de sensibilité climatique respectivement centrales, hautes et basses. Le réchauffement le moins surprenant serait alors de 2.8 ˚C, avec une plage d'incertitude (possibilité supérieure à 1/3) comprise entre 1.1 et 4.5 degrés.

Conclusion : synthèse de la méthode

Ce chapitre propose une définition formelle, en utilisant les probabilités imprécises, de trois principes justifiant la construction de futurs plausibles :

1. (No preference) Aucun futur n'est plus probable qu'un autre. Une condition suffisante pour cela est que l'équiprobabilité soit admissible.
2. (Maxplausibility) L'ensemble des futurs retenu est maximalement plausible.
3. (Maxdiversity) En terme de variable d'intérêt, l'intervalle exploré par les futurs retenus est le plus large possible.

Cette approche se situe entre la Prospective et la Prévision puisqu'elle aboutit à quantifier les croyances sur les futurs décrits, sans toutefois leur assigner de probabilité précise. Les deux conséquences pratiques importantes de cette théorie sont :

– Dans une situation d'incertitude définie par une distribution de possibilité, l'intervalle canonique est la coupe au niveau de possibilité 0.5. En termes subjectifs, cela revient à définir deux dispositions à parier. L'intervalle doit être suffisament large pour qu'on accepte de parier 1 :1 qu'il contient la bonne valeur. Mais l'intervalle doit être suffisament étroit pour exclure toute valeur sur laquelle on accepterait de parier 1 :1 qu'elle ne se produira pas.
– Pour déterminer trois futuribles dans une situation d'incertitude définie par une distribution de possibilité, on prend le futur central au niveau de possibilité 1 et les futurs extrêmes (par rapport à la variable d'intérêt) au niveau 1/3.

En s'appuyant sur ces principes, la méthode consiste à construire une cascade de six niveaux de détail pour présenter l'information disponible. Elle a été mise en oeuvre pour synthétiser les connaissances à propos du réchauffement global en 2100.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

	Low	Middle	High
CO_2 concentration in 2100, ppmv	618	709	944
Climate sensitivity at $2\times CO_2$, ˚C	1.4	2.85	3.9
Global Warming in 2100, ˚C	1.1	2.4	4.5
Possibility	0.34	1	0.34

TAB. 10.1 – Détail de trois futurs climatiques possibles

1. La connaissance primaire est constituée des théorie fondamentales et des données d'observation brutes comme celles représentées sur la figure 10.2(a) ou sur la figure 9.1.
2. Le traitement statistique (précis ou imprécis) appliqué aux données primaires permet de produire une distribution de croyance jointe des variables pertinentes (cf. figure 10.3).
3. Ces variables sont liées par un modèle explicite pour construire une distribution de possibilité sur la variable d'intérêt. La figure 10.5 illustre cette étape. Cela permet de montrer à quel point le chiffre de 5.8 ˚C figurant dans le troisième rapport du GIEC sans qualification de plausibilité serait en fait surprenant par rapport à la littérature analysée.
4. A partir de cette distribution de possibilité, on peut construire et présenter trois futuribles, chacun avec son niveau de possibilité, en expliquant qu'aucun n'est préféré mais que le cas central est moins surprenant que les extrêmes. On arrive à une présentation des résultats synthétique comme illustrée sur la Table 10.1 concernant le réchauffement global en 2100.
5. L'ensemble des trois scénarios est construit de telle sorte qu'il peut être présenté sans information complémentaire concernant les possibilités. En effet, l'attitude naïve de mettre une équiprobabilité est admissible si on présente seulement la troisième ligne du tableau.
6. L'information la plus sommaire est le chiffre le moins surprenant de 2.4 degrés de réchauffement global en 2100. Le considérer isolément est également admissible au sens des probabilités imprécises.

.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Conclusion

L'environnement global est patrimoine commun de l'humanité. Pour gérer rationnellement ce bien public, il est nécessaire de construire des représentations communes du danger qu'entraîne sa dégradation accélérée. La première partie de ce mémoire a montré comment la modélisation intégrée pouvait être utilisée pour représenter la précaution en situation de décision séquentielle. La seconde partie du mémoire propose de dépasser le cadre des probabilités précises pour mieux modéliser la profondeur de l'ignorance actuelle concernant les dynamiques socio-économiques et climatiques de long terme. La troisième partie du mémoire applique les probabilités imprécises aux problèmes de la révélation des opinions d'expert, de la fusion de l'information et des fondements quantitatifs de la prospective.

Ce chapitre final évoque d'abord quelques perspectives de recherche à moyen terme, qui montrent comment les probabilités imprécises pourraient être utilisées pour éclairer la décision dans les problèmes d'environnement controversés. Puis le texte résume les trois points de vues caractéristiques de l'approche développée dans ce mémoire : l'incomplétude, l'orthogonalité imprécision/subjectivité, et le parallèle possibilité/probabilité. La conclusion discute l'aspect paradigmatique des probabilités imprécises, en liaison avec la controverse intuitionisme / formalisme en mathématiques et d'autres discussions sur les fondements de l'économie.

Implications des probabilités imprécises

Le but ultime de ces travaux n'est pas d'opposer les probabilités précises et les probabilités imprécises, c'est au fond un point technique. Le message essentiel, c'est que le futur n'est pas écrit d'avance, et en réalité la prise de décision n'est pas un exercice qui consiste à trouver *la* bonne réponse à des problèmes précisément posés. Dans un environnement changeant, il ne faut pas optimiser par rapport à une pensée unique, mais rechercher des stratégies robustes avec l'information disponible.

Les probabilités imprécises sont un outil qui permet de représenter de façon plus convaincante cette information. Cet outil remedie aux limitations du formalisme des probabilités précises qui se font sentir à propos des trois types de jugements :

- Le diagnostic purement scientifique. Les probabilités objectives sont utilisées pour la modélisation de phénomènes stochastiques. Mais en sciences sociales on ne dispose pas toujours de données complètes et bien contrôlées. Il est plus convaincant de formuler les résultats objectifs en termes moins précis.
- La conjecture. Les probabilités bayésiennes sont utilisées pour la révélation des opinions d'experts. Mais cela peut aboutir à forcer les experts à s'exprimer de façon plus précise qu'ils ne le souhaitent. Les méthodes quasi-bayésiennes qui utilisent la théorie floue et ont fait leur preuves dans l'industrie sont, là aussi,

moins précises mais plus convaincantes.

– Les jugements de valeurs. Les probabilités subjectives sont fondées sur les préférences des agents. Il serait plus satisfaisant de revenir vers une théorie qui sépare l'information et les préférences, pour mieux distinguer les discussions sur la réalité objective du problème et les négociations sur les choix politiques, l'intérêt de chaque agent pouvant être représenté par une fonction d'utilité qui lui est propre.

Remédier aux limites du formalisme probabiliste précis est particulièrement important pour les problèmes d'environnement controversés. En effet, dans ce genre de problèmes où l'information est incomplète, les jugements précis du scientifique et de l'expert peuvent être discrédités assez facilement. Il en résulte que l'interprétation subjective des probabilités reste la mieux fondée, avec une confusion qui fait courir le risque que certaines informations robustes mais imprécises soient finalement perçues comme des jugements de valeur. Les probabilités imprécises permettent de rendre plus robustes à la fois le diagnostic scientifique et l'approche subjective :

Crédibiliser le diagnostic scientifique est l'enjeu des recherches sur la quantification des règles de la prospective. Représenter les dynamiques sociales de façon objective est nécessaire pour intégrer de façon convaincante les modèles socio-économiques avec les modèles géophysiques. En effet, les sciences sociales sont basées sur des données brutes incomplètes et floues [Morgenstern, 1963], alors que les sciences naturelles sont basés, du moins par convention, sur l'observation expérimentale complète et précise.

Ces recherches sur la prospective peuvent se poursuivre avec les outils de modélisation intégrée stylisés comme DIAM. Le premier temps sera, à l'échelle de la prise de décision globale, d'explorer les actions maximales admissibles compte tenu de l'information floue obtenue au chapitre précédent. Une exploration plus approfondie de la précaution avec les probabilités imprécises dans un cadre intertemporel semble nécessaire. En effet il est urgent de rapprocher la notion de précaution en situation de probabilité imprécises avec la notion de précaution basée sur la valeur de l'information et l'irréversibilité, voir par exemple les recherches sur la valeur d'option avec ambiguité de Epstein and Wang [1994].

Puis, afin de mieux modéliser la décision sous controverse, il sera nécessaire de dépasser l'hypothèse du planificateur centralisé unique. Même si on suppose que les différents acteurs partagent une distribution de probabilité imprécise commune, chacun examine les choix avec sa propre fonction d'utilité. Il sera alors intéressant de calculer des politiques à la fois robustes et acceptables par tous.

A terme, je vise à proposer une nouvelle classe de modèles intégrés située entre les modèles de simulation récursive, les modèles d'optimisation intertemporelle, les modèles de viabilité et les systèmes experts. Calculer des futurs plausibles comme discuté au chapitre 10 nécessite de repenser les algorithmes de résolution sans se limiter *a priori* aux boîtes à outils existantes d'optimisation et de simulation.

Les probabilités imprécises permettent aussi de mieux modéliser les problèmes subjectifs. Une question théorique fondamentale en économie de l'environnement concerne la notion de valeur d'un bien pour lequel il n'existe pas de prix de marché facilement observable. Mansfield [1999] souligne en particulier l'importance de la différence entre notion de disponibilité à payer et disponibilité à recevoir. Or la synthèse récentes de Horowitz and McConnel [2002] donne à penser que plus les biens évalués sont imprécis, plus la différence $\overline{P}$-$\underline{P}$ est élevée.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Ce résultat supporte le critère de décision de Walley. Celui ci peut s'expliquer en termes de comportement de précaution par rapport à l'incertitude profonde : lorsque les probabilités ne sont pas connues précisément, mais seulement décrites par un ensemble $\mathcal{C}$ des probabilités admissibles, alors le choix A est préféré à B si et seulement si le gain espéré de A dépasse celui de B pour toutes les probabilités admissibles.

La différence entre consentement à payer et à recevoir est un fait établi en psychologie expérimentale. Le modèle qui l'explique le mieux à l'heure actuelle est peut être la théorie $RDEU$ de l'utilité espérée dépendant du rang [Quiggin, 1993].

Il serait intéressant d'examiner les liens avec les probabilités imprécises. En effet Diecidue and Wakker [2000] rappellent que $RDEU(X)$ peut être vu comme une capacité de Choquet. Or une capacité peut être vue comme une prévision inférieure $\underline{P}(X)$. On pourrait imaginer que les gens décident systématiquement en utilisant des probabilités imprécises, et qu'ils contaminent systématiquement tout message probabiliste précis. La fonction de pondération w du modèle $RDEU$ pourrait ainsi être reliée au paramètre de vitesse d'inférence s du modèle de Dirichlet imprécis discuté au 5.2.1. Le projet de recherche est de revenir aux données d'économie expérimentale pour paramétrer w, dans un modèle de préférences incomplètes.

Un autre lien important avec les résultats de psychologie expérimentale concerne la communication de l'incertitude. Les expériences comme celles de Budescu and Karelitz [2003], Wallsten et al. [1986] pourraient permettre de valider un vocabulaire de référence pour faire correspondre des expressions linguistiques à des probabilités imprécises. Une telle échelle serait utile à des organisations comme le GIEC pour partager une conceptualisation commune de l'incertitude, au delà de la simple notion de probabilité.

Ces liens renforcent l'idée que, comme le chapitre 8 nous l'a montré, les probabilités imprécises offrent un meilleur cadre analytique pour modéliser les croyances. Elles pourraient à court terme être appliquées aux problèmes de perception du risque, par exemple à l'analyse du risque et de l'acceptabilité du stockage géologique du CO_2.

Trois principes

L'originalité de l'approche par rapport à d'autres travaux sur l'incertitude et la décision tient peut-être à la conjonction des trois points de vue suivants : l'abandon de l'axiome de complétude, l'orthogonalité entre imprécision et subjectivité, et le parallèle possibilité/probabilité.

L'incomplétude

C'est volontairement que les recherches présentées dans ce mémoire privilégient l'exploration numérique appliquée par rapport aux discussions sur les fondements axiomatiques. En résumé, les cinquante dernières dernières années de recherche n'ont pas convaincu grand monde qu'abandonner l'un des axiomes P2 à P7 de Savage était raisonnable et efficace en pratique. En ce qui concerne l'abandon de l'axiome P1, celui de la complétude des préférences [Savage, 1954, p.21] écrivait :

> My own conjecture is that it would prove a blind alley losing much in power and advancing little, if at all, in realism ; but only an enthousiastic exploration could shed real light on the question.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Cette citation propose deux justifications pour l'axiome de complétude : l'abandonner ferait peu avancer en réalisme, et cela ferait une théorie moins puissante. Cinquante ans après, que peut-on répondre à cette conjecture ?

À propos du réalisme de l'axiome de complétude des préférences, Tony Cox (communication personnelle) raconte l'histoire suivante :

> Luce et Raiffa donnent l'exemple d'un enfant qui hésite entre recevoir un poney et un vélo pour son anniversaire. Il aime vraiment les deux et ne peut choisir. Son père, un analyste de la décision universitaire, dit : « Je vais te faciliter la tâche — j'ajoute une sonnette au vélo. Maintenant, puisque tu n'avais pas de préférence avant, et donc tu devais être indifférent, tu dois certainement préférer le vélo *avec* la sonnette. » Mais l'enfant n'est toujours pas si sûr !

Cette histoire suggère qu'on peut trouver plus réaliste de rejeter P1 que de l'accepter, c'est à dire qu'il est raisonnable de ne pas se prononcer lorsqu'on ne dispose pas d'informations suffisantes. On peut facilement imaginer qu'un décideur se satisfasse d'un système capable de dire « les données ne permettent pas de conclure sans ambiguité », si par ailleurs ce système produit des résultats robustes lorsqu'il est capable de conclure. Dans une perspective moderne de gestion active du risque, il est important de savoir quand aller acheter des informations complémentaires.

Même si ce n'est pas toujours sous la forme de probabilités imprécises, il faut aussi constater que dans les applications, l'incomplétude revient toujours d'une manière ou d'une autre. Même les tests statistiques les plus rigoureux avec des probabilités précises mettent en jeu des intervalles et peuvent aboutir à l'absence de conclusion quand à la véracité et à la fausseté d'une hypothèse. Admettre l'imprécision dès le départ offre une représentation mathématiquement cohérente de la notion d'information incomplète et de la précaution vis à vis de l'incertitude profonde.

L'autre justification de l'axiome de complétude est qu'il permet d'élaborer une théorie plus puissante. Cela dépend de ce qu'on entend lorsqu'on parle de la puissance d'une théorie.

Sur le plan formel, abandonner un axiome produit une théorie moins contrainte mais qui englobe l'ancienne. Un ordre total est un cas particulier d'ordre partiel. En ceci, la théorie imprécise conserve le pouvoir conceptuel de la théorie précise. Du point de vue mathématique, on a donc en fait une théorie plus puissante car plus générale.

En ce qui concerne les applications aux problèmes de décision, l'avantage de l'axiome de complétude est aussi discutable. Avec l'espérance de l'utilité on peut toujours répondre à la question « est-ce que je préfère intrinsèquement A à B ? ». Mais avec le critère de Walley, on peut toujours répondre à la question « est-ce que j'accepterait d'échanger A contre B ? ». Or il n'est pas si évident que la première question soit plus pertinente que la première. En effet, Kahneman [2003] rappelle que l'utilité psychologique est davantage déterminée par les échanges (ce sont les variations qui provoquent des émotions) que par les valeurs finales des gains. En pratique, l'analyse coût-bénéfice a souvent pour but de savoir si tel projet d'investissement spécifique, ou si telle mesure politique précise est acceptable, sans viser un classement complet de toutes les alternatives imaginables.

A notre avis, l'axiome de complétude n'est pas évident en lui même, et il n'est pas nécessaire pour construire une théorie applicable aux problèmes de décision. Son avantage est essentiellement technique. Combiné aux autres axiomes de rationalité, il permet une théorie basée sur un opérateur linéaire : l'espérance. Sur le plan de la simplicité analytique, on doit admettre que les théories de l'incertitude perdent le pouvoir

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

pratique et élégant de la théorie de l'espérance de l'utilité. Par exemple les calculs pour Dempster-Shafer se font dans un ensemble de base avec 2^n au lieu de n nombres. Cet aspect pourrait expliquer la position de Savage il y a cinquante ans. Et il s'applique aussi, quoique avec moins de force, au calcul possibiliste proposé à la même époque par Shackle. Mais aujourd'hui les moyens de calculs numériques portables ne sont plus négligeables. La complexité algorythmique n'apparaît donc plus comme une impasse, mais comme un défi.

La discussion des implémentations informatiques en réponse à ce défi déborderait largement du cadre de ce mémoire, pour entrer dans l'histoire de l'intelligence artificielle. Elle nécessiterait d'expliquer le parallèle dit sémantique/syntaxique, c'est à dire la correspondance entre le calcul dans un espace de futurs Ω (muni du complément et de l'intersection) et le calcul dans un espace de propositions logiques (muni de la négation et de la conjonction, c'est aussi une algèbre de Boole). Ce parallèle pourrait constituer une direction de recherche intéressante, je ne connais aucune application de l'approche syntaxique en modélisation intégrée des problèmes d'environnement global.

En résumé, ce mémoire ne se place pas de la tradition de Ellsberg, Ramsey et Savage —qui cherchent une théorie de la décision basée sur l'axiome de complétude— mais dans la tradition de la théorie du jugement de Keynes, Koopmans, de Finetti, Allais et Good —qui partent des choix observés et constatent que cet axiome n'est pas tenable.

L'orthogonalité imprécision/subjectivité

Usuellement les discussions sur l'incertitude se polarisent sur la dimension objective/subjective. Dans le modèle de décision objectif, les faits observés entraînent nécessairement les opinions, et les opinions entraînent nécessairement les choix. La nécessité découle ici du principe de rationalité scientifique, appliqué premièrement au problème de l'inférence (les opinions sont les fréquences observées) et deuxièmement au problème de la décision (la maximisation de l'espérance de l'utilité).

L'approche subjective utilise l'hypothèse de rationalité dans l'autre sens : elle consiste à dire que l'observation des choix permet de remonter aux opinions.

Bien entendu ces deux approches trouvent leurs limites dans le réalisme de l'hypothèse de rationalité. Elles ne laissent pas de place aux aspects humains de la personne du décideur, même si l'on sait bien que dans la réalité un changement de leader à la tête d'une organisation entraîne le plus souvent une révision de la stratégie, même à environnement constant. Néanmoins ce n'est pas sur ce point qu'elles sont remises en cause par les probabilités imprécises : l'hypothèse de rationalité est conservée.

Ce qui est remis en cause, c'est l'hypothèse, non formulée en général, de la complétude des observations. Dans le modèle objectif, on ne peut vraiment inférer de loi de probabilité qu'à partir d'observations complètes et en grand nombre. Pour les évènements rares, ou lorsqu'il manque une fraction significative des données, le processus d'inférence n'est pas aussi sûr. De même dans le modèle subjectif, pour déduire une distribution de probabilité il faut pouvoir connaître les préférences complètes.

En somme le problème majeur de l'élicitation des probabilités subjectives des experts, ce n'est pas le caractère subjectif, mais le caractère précis. Ce problème disparait si on passe aux probabilités subjectives imprécises. Les probabilités subjectives précises devraient être réservées aux situations dans lesquelles on observe toutes les transactions en grand nombre sur un marché complet de biens contingents. Il existe de telles situations en économie et en finance (systèmes de trading, sites d'enchères , jeux de rôle massivement multijoueurs), mais ce n'est pas le cas général.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

La confusion du débat concernant l'interprétation épistémique des poids de croyance —c'est à dire la question de la subjectivité— repose en partie sur le manque de visibilité de la différence entre imprécision et subjectivité. En effet, en pratique ces deux dimensions sont souvent corrélées. On oppose ainsi d'une part les probabilités applicables dans les sciences naturelles basées sur les expériences reproductibles dans lesquelles on observe tout, et d'autre part les sciences de l'homme et de la société sont basées sur des observations imprécises et rares. L'économie occupe une place à part, car on y reconnaît à la fois des flux de données statistiques significatifs, et l'importance cruciale du jugement humain.

Afin de redémontrer théoriquement l'orthogonalité entre ces deux concepts d'imprécision et de subjectivité, on peut considérer l'exemple simple suivant :

	Probabilités précises	Probabilités imprécises
Objectives : urne bicolore, 20 boules	10 noires et 10 blanches	au moins 10 blanches
Subjectives : je suis prêt à parier	sur noir ou blanc à 1 :1	blanc si gain net $\geq$ mise

Les tirages dans des urnes de composition variées modélisent des probabilités objectives. L'élicitation des paris acceptables, des prix de biens contingents ou des préférences rationnelles donne des probabilités subjectives.

Si la composition de l'urne est parfaitement connue, les probabilités sont précises. Mais si on ne connait que des inégalités sur les proportions de boules, alors les probabilités sont imprécises[2].

De même, les probabilités subjectives peuvent être précises si on demande des prix francs pour les paris (c'est à dire francs à la fois pour le parieur et le bookmaker), si on suppose les préférences complètes, ou si on suppose que la fourchette de prix de vente $-$ prix d'achat est nulle.

Ce point de vue qui sépare subjectivité et imprécision n'est pas universellement apprécié. Mais la notion de probabilités objectives imprécises nous semble fondamentale pour appliquer la théorie de la décision de façon plus convaincante. Elle permet de reséparer les notions d'information et de jugement de valeur, que la théorie de l'espérance de l'utilité subjective avait fondamentalement réunies.

Il est important de séparer information et évaluation car lorsque l'on demande des probabilités subjectives précises, d'après Savage les réponses sont fondées sur les préférences de l'expert parmi l'ensemble des actions. On n'élicite donc pas vraiment le savoir spécifique de l'expert, mais plutôt ce que le citoyen pense qu'il serait préférable de faire. En d'autres termes, un scientifique convaincu de la nécessité de protéger l'environnement aura tendance à accorder une probabilité subjective élevée au pire des cas et vice versa. On se retrouve alors facilement, comme au chapitre 8 avec des experts en contradiction totale les uns avec les autres, et c'est au final le sondeur qui détermine le résultat du sondage. Eliciter des probabilités imprécises permettrait peut-être de réduire le degré de contradiction, en laissant davantage de place à l'incertitude objective.

Dans des recherches ultérieures, il serait intéressant de pousser jusqu'au bout les conséquences de l'orthogonalité entre imprécision et subjectivité. En continuant dans voie de la non-normalisation ouverte par le modèle de croyances transférables, on pourrait par exemple explorer une théorie dans laquelle le poids total des croyances n'est pas égal à un mais au nombre de sources d'informations indépendantes.

Dans cette perspective, la dimension subjective/objective pourrait alors être vue comme un axe gradué par le nombre de sources d'information indépendantes. Au

[2] Si de plus on ne connait pas limitativement la liste des couleurs des boules possibles, on tombe dans un modèle d'incomplétude, comme le modèle des croyances transférables

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

moyen de cet axe, on peut alors représenter l'idée que les probabilités objectives sont plus convaincantes car fondées sur des fréquences issues d'une expérience idéalement répétable à volonté. Elles correspondent au point à l'infini, avec une infinité de sources d'informations non contradictoires.

Le but ultime est d'asseoir les décisions publiques d'environnement sur des bases peut être moins précises, mais aussi plus objectives.

Le parallèle probabilité/possibilité

La troisième originalité du point de vue développé dans ce mémoire est le parallèle formel entre les probabilités et les possibilités [de Cooman, 1995]. Il s'agit en effet de deux théories mathématiques correspondantes en bien des points. Les deux structures algébriques sont normalisées, dotées d'opérateurs de conjonction, disjonction, négation. On peut développer une théorie de l'intégrale floue comme la théorie de la mesure classique, etc. . .

La notion d'intervalle de confiance, par exemple, existe dans les deux domaines. On se base souvent sur l'intervalle 5% - 95% de probabilité pour représenter la plage de variation d'une grandeur aléatoire. En situation d'incertitude profonde, on pourrait se baser sur l'intervalle au niveau de possibilité 0.5 pour représenter la plage de variation d'une grandeur incertaine. C'est le plus petit intervalle dans lequel on est prêt à parier 1 :1 que la grandeur se trouve.

Quand on monte dans la hiérarchie des formes d'ignorance vers la théorie de Dempster-Shafer et la théorie des probabilités imprécises, on trouve également des correspondances entre couples d'opérateurs : la conjonction prudente et la conjonction non-interactive, le conditionnement au sens des paris contingents et le conditionnement au sens de la révision des croyance, et la mesure de l'incertitude comme entropie maximum et la mesure de l'incertitude comme non spécificité.

Ce parallèle me semble insuffisament poursuivi à l'heure actuelle, et je conjecture que poursuivre la symétrie entre les deux structures algébriques probabilités et possibilités permettra de mieux comprendre ces correspondances.

Le futur du paradigme

La science économique normale (au sens de Kuhn [1962], c'est à dire avant le changement de paradigme) postule que chaque agent économique valorise un bien risqué selon l'espérance de l'utilité. Le critère de Walley postule que la valeur d'un bien que l'agent envisage acheter est le minimum (pour toutes les probabilités admissibles) de l'espérance de l'utilité. Mais si c'est un bien que l'agent veut vendre, cette valeur est le maximum de l'espérance. Ce postulat est justifié par une interprétation de l'idée de précaution. Dire que les gens veulent vendre plus cher qu'ils n'achètent semble frappé de trivialité par la force du bon sens économique.

Pourrait-on considérer l'idée que l'incertitude est une source d'incomplétude des préférences, non comme une trivialité, mais plutôt comme une nouvelle dimension nécessaire à l'analyse coût-bénéfice en situation d'incertitude ? Les probabilités imprécises font-elles un nouveau paradigme en économie ?

On parle d'une théorie disruptive lorsqu'elle remet en jeu les fondements de la discipline. Or Favereau [2000] note que :

> [. . .] le courant dominant, après avoir sacrifié le principe du marché centralisé à la Walras, puis s'être replié sur le seul principe de la rationalité

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

> optimisatrice, est désormais dos au mur. Il tient ou tombe avec ce dernier principe, qu'ont rejeté depuis longtemps tous les courants hétérodoxes de la dernière génération.

Le critère de rationalité de Walley est donc disruptif puisqu'il impose de recadrer les notions de valeur, de décision et d'information. Sans toutefois nier la rationalité optimisatrice, reconnaître le caractère irréductible de l'incertitude qui n'est pas probabilisable implique aussi de réviser sérieusement l'économétrie, compte tenu de la nature floue des observations en sciences sociales [Morgenstern, 1963]. Cet effort est par exemple visible dans les travaux de Horowitz and Manski [2001] sur l'identification avec des données incomplètes.

L'autre aspect disruptif des probabilités imprécises est qu'elles renvoient à une controverse ancienne sur les fondements de la connaissance. Rappelons que la logique classique binaire est basée sur le principe du tiers exclu d'Aristote, qui postule qu'un énoncé est soit vrai, soit faux. Les probabilités précises graduent cette logique bivalente, mais conservent l'idée fondamentale que moins de faux implique plus de vrai. En effet, pour tout évènement s et son contraire $\overline{s}$, on impose $p(s) = 1 - p(\overline{s})$. Les probabilités imprécises remettent en jeu ce fondement du raisonnement formaliste.

En effet les intervalles de probabilité graduent un système logique trivalent vrai / faux / indéterminé, la valeur 'indéterminé' correspondant à l'intervalle [0, 1] qui se distingue de la valeur 0.5 précise. Ce système logique trivalent est par exemple adopté par le philosophe Popper lorsqu'il remarque qu'en ce qui concerne la vérité scientifique une théorie n'est vraie que jusqu'à ce qu'elle soit réfutée. Cette logique est aussi embrassée par les mathématiciens intuitionnistes [Heyting, 1955], qui n'utilisent donc pas le raisonnement par l'absurde mais seulement des démonstrations constructives. L'indéterminé peut s'illustrer par la valeur logique d'une proposition comme *cette phrase est vraie*.[3]

Au surplus, le modèle des croyances transférables ajoute une quatrième valeur qui représente l'incomplétude et la contradiction. C'est la valeur logique d'une proposition comme *cette phrase est fausse*.

Constituer une théorie disruptive formellement correcte ne suffit pas à faire un paradigme émergent. Comme repenser une grande partie de l'édifice disciplinaire est une opération lourde, il est légitime de demander des justifications plus fortes que pour les autres idées nouvelles qui restent dans la science normale. Existe-t-il des avantages particuliers par rapport aux autres théories de la décision visant à dépasser le modèle standard en Économie ?

Après tout, les mathématiciens connaissent depuis des décennies l'existence de propositions indéterminées dans tout système formel contenant l'arithmétique, sans que cette incomplétude influe sur leur pratique courante (ils continuent à utiliser le raisonnement par l'absurde). On pourrait imaginer que les idées des probabilités imprécises continuent à se développer dans les champs connexes à l'intelligence artificielle (robotique, bases de données, décision médicale, logique), alors qu'en économie et en psychologie le modèle de l'utilité dépendante du rang (RDEU) continue à focaliser l'attention.

Kuhn rappelle qu'il est nécessaire qu'une théorie soit élégante mathématiquement. Sur ce plan les probabilités imprécises me semblent plus avantageuses que la théorie RDEU. Les ressorts sont transparents : faire porter la distribution de probabilité sur les sous-ensembles de Ω au lieu des éléments de Ω, inclure l'ensemble vide. L'interprétation est simple, c'est une forme de précaution. Les résultats sont puissants, la théorie

[3] La relation avec l'incertitude quantique de physiciens reste à élucider.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

résoud des problèmes comme les priors non informatifs ou la distribution uniforme sur un ensemble infini.

Contrairement à la théorie RDEU, souvent perçue comme déconnectée du reste de la microéconomie, la théorie de la décision de Walley englobe la théorie en place, et la dépasse en montrant *clairement* les limites de sa validité. Du point de vue épistémologique, la relation entre les probabilités classsiques et les probabilités imprécises est comme la relation entre la mécanique classique et la mécanique relativiste. L'analyse coût-bénéfice univoque est une approximation aux situations d'information précise, mais elle peut être étendue aux situations moins précises en gardant les axiomes de rationalité, au prix de l'axiome de complétude.

Un paradigme émergent doit résoudre des crises dans des sous disciplines causées par des anomalies que la théorie standard peine à expliquer. La première crise est celle de la notion de valeur en économie de l'environnement, problématique à cause de la différence entre consentement à payer et à recevoir. On retrouve bien ici le schéma de Kuhn dans lequel la théorie en place (avec l'utilité espérée) doit faire des contorsions importantes pour expliquer les observations que la théorie nouvelle explique plus facilement [Shogren and Hayes, 1997, Hanemann, 1991, Kolstad and Guzman, 1999].

Le paradigme résoud aussi une autre crise, celle de la théorie de la décision. Son histoire récente est marquée par des débats autour de la notion de précaution, qui peuvent être vues comme une résurgence d'un débat plus ancien sur le comportement rationnel face au risque [Keynes, 1921, Knight, 1921, Allais, 1953]. Le programme de recherche présenté ci-dessus a aussi pour but de montrer que les probabilités imprécises résolvent cette crise traduite par une divergence croissante entre les modèles psychologiques à la RDEU et la théorie classique contredite par les observations.

En conclusion, l'espérance de l'utilité en information précise est une position formaliste. La recherche d'un optimum unique calculable tend à à occulter l'importance des facteurs difficilement mesurables comme les institutions, les contingences historiques et humaines. Reconnaître le caractère incomplet des préférences rationnelles en information limitée est une position intuitioniste, qui implique de porter à un autre niveau l'analyse des décisions économiques.

Le coût-bénéfice en information imprécise permet de mieux prendre en compte des facteurs flous caractéristiques des sciences de l'homme et de la société. Il n'impose pas une neutralité vis à vis de l'incertitude profonde, mais tient compte au contraire ce que les économistes appellent l'aversion à l'ambiguité. Les résultats sont ainsi plus robustes, car ils reposent sur une certaine vision du principe de précaution et peuvent être justifiés par des informations plus objectives.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Bibliographie

Workshop on Carbon Dioxide Capture and Storage, Regina, Canada, November18–21 2002. URL http://arch.rivm.nl/env/int/ipcc/pages_media/ccs2002.html.

Joaquin Abellan and Serafin Moral. A non-specificity measure for convex sets of probability distributions. In *International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications* Ghe [1999]. URL http://ippserv.rug.ac.be/~isipta99/. Also in International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 8(3) : 357-368 (2000).

Joaquin Abellan and Serafin Moral. Maximum of entropy for credal sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 11(5) :587–598, 2003.

American Cancer Institute ACI. Cancer facts & figures. Technical report, American Cancer Society, Inc. Surveillance Research, 2003. URL http://www.cancer.org/docroot/STT/stt_0.asp.

Alternative Fluorocarbons Environmental Acceptability Study AFEAS. Production, sales and atmospheric release of fluorocarbons through 1995, 1997. URL http://www.afeas.org.

Maurice Allais. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica*, 21(4) :503–546, 1953.

Myles Allen, Sarah Raper, and John Mitchell. Uncertainty in the IPCC's third assessment report. *Science*, 293 :430–433, July 20 2001.

Richard B. Alley, J. Marotzke, William D. Nordhaus, J.T. Overpeck, D.M. Peteet, Jr. R.A. Pielke, R.T. Pierrehumbert, P.B. Rhines, T.F. Stocker, L.D. Talleyand, and J.M. Wallace. Abrupt climate change. *Science*, 299 :2005–2010, 2003.

Philippe Ambrosi, Jean-Charles Hourcade, Stéphane Hallegatte, Franck Lecocq, Patrice Dumas, and Minh Ha-Duong. Optimal control models and elicitation of attitudes towards climate change. *Environmental Modeling and Assessment*, 8(3) : 135–147, 2003. Special Issue on Modeling the economic response to global climate change.

V. E. Archer and J. L. Lyon. Errors and biases in the diagnosis of cancer of the lung and their influence on risk estimates. *Medical hypotheses*, 54(3) :400–407, 2000.

Kenneth J. Arrow and Anthony C. Fisher. Environmental preservation, uncertainty, and irreversibity. *Quarterly Journal of Economics*, 88 :312–319, 1974.

Jean-Pierre Aubin. A concise introduction to viability theory and optimal control. Technical report, Université de Paris Dauphine, 1999.

Committee on Health Risks of Exposure to Radon, Board on Radiation Effects Research, Commission on Life Sciences, National Research Council BEIR VI. *Health effects of exposure to radon*. National Academy Press, 1999. ISBN 0-309-05645-4.

Jean-Marc Bernard, Teddy Seidenfeld, and Marco Zaffalon, editors. Number 18, University of Lugano, Switzerland, 14–17 July 2003. Lugano University, Carleton Scientific Proceedings in Informatics. ISBN 1-894145-17-8. URL `http://www.carleton-scientific.com/isipta/preface.html`.

Eric Best. Probabilities — help or hindrance in scenario planning ? Technical Report Vol. 2, Num. 4, The Global Business Network, 1991. URL `http://www.gbn.com/ArticleDisplayServlet.srv?aid=500`.

David V. Budescu and T. M. Karelitz. Interpersonal communication of precise and imprecise subjective probabilities. In Bernard et al. [2003]. ISBN 1-894145-17-8. URL `http://www.carleton-scientific.com/isipta/preface.html`.

Patrick Canarelli. Fuzzy scenarios. In Miguel Aguado-Monsonnet and Fabrice Roubelat, editors, *Scenario Building : Convergences and differences*. Institute for Perspective Technological Studies, European Union, 1997. URL `ftp://ftp.jrc.es/pub/EURdoc/eur17298.pdf`. Report number EUR-17298-EN, proceedings of a Profuture Workshop held in Paris in September 1995.

Thomas J. Chermack. The mandate for theory in scenario planning. *Futures Research Quarterly*, 18(2) :25–28, Summer 2002.

Robert T. Clemen and Robert L. Winkler. Combining probability distributions from experts in risk analysis. *Risk Analysis*, 19(2) :187–203, 1999. URL `http://faculty.fuqua.duke.edu/~clemen/bio`.

M. Cohen and J. M. Tallon. Décision dans le risque et l'incertitude : l'apport des modèles non additifs. *Revue d'Économie Politique*, 110(5) :631–681, 2000.

Frank P. A. Coolen. *Statistical modeling of expert opinions using imprecise probabilities*. PhD thesis, 1994. URL `http://alexandria.tue.nl/extra3/proefschrift/PRF9B/9305256.pdf`.

Second International Symposium on Imprecise Probability and their Applications, New York, USA, 26–29 June 2001. Cornell University. URL `http://ippserv.rug.ac.be/~isipta01/`.

Fabio Cozman. A brief introduction to the theory of sets of probability measures, 1999. URL `http://www-2.cs.cmu.edu/~qbayes/Tutorial/quasi-bayesian.html`.

G. de Cooman. The formal analogy between possibility and probability theory. In G. de Cooman, D. Ruan, and E. E. Kerre, editors, *Foundations and Applications of Possibility Theory – Proceedings of FAPT '95*, pages 88–98. World Scientific, Singapore, 1995.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Bruno de Finetti. La prévision : Ses lois logiques, ses sources subjectives. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré 7*, pages 1–68. Paris, 1937. URL `http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1937__7_1_1_0`. Translated into English by Henry E. Kyburg Jr., Foresight : Its Logical Laws, its Subjective Sources. In Henry E. Kyburg Jr. and Howard E. Smokler (1964, Eds.), Studies in Subjective Probability, 53-118, Wiley, New York.

Hugues de Jouvenel. La démarche prospective. un bref guide méthodologique. *Futuribles*, November 1999. URL `http://www.futuribles.com/revue.html`. Pub. init. sep. 1993, revis. 2002.

A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38 :325–339, 1967.

Jean Dezert. Foundations for a new theory of plausible and paradoxical reasoning. *Information and Security Journal, An International Journal*, November 2002. URL `http://www.bas.bg/clpp/mmosi/partners/isdezert2909.pdf`.

Enrico Diecidue and Peter P. Wakker. On the intuition of rank-dependent utility. Technical Report 2000-74, Center for Economic Research, Tilburg University, August 2000.

Didier Dubois and Henri Prade. *Théorie des possibilités*. Masson, Paris, 1988.

Didier Dubois and Henri Prade. Focusing vs. belief revision : A fundamental distinction when dealing with generic knowledge. In Gabbay et al. [1997], pages 96–107. ISBN 3-540-63095-3.

Didier Dubois, Henri Prade, and Philippe Smets. New semantics for quantitative possibility theory. In *Second International Symposium on Imprecise Probability and their Applications* Cor [2001]. URL `http://iridia.ulb.ac.be/~psmets/SemanticPossSubjObj.pdf`. Also published in ECSQARU 2001 proceedings, without proofs.

D. Ellsberg. Risk, ambiguity and the Savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 75 :643–669, 1961.

Daniel Ellsberg. *Risk, Ambiguity and Decision*. Studies in Philosophy. Routledge, March 2001. ISBN 0-8153-4022-2. Ph. D. thesis.

Larry G. Epstein and Tan Wang. Intertemporal asset pricing under knightian uncertainty. *Econometrica*, 62(2) :283–322, March 1994.

Olivier Favereau. La science économique entre deux siècles. *La Recherche*, 337 : 62–67, December 2000.

Dov M. Gabbay, Rudolf Kruse, Andreas Nonnengart, and Hans Jürgen Ohlbach, editors. *Qualitative and Quantitative Practical Reasoning, First International Joint Conference on Qualitative and Quantitative Practical Reasoning ; ECSQARU–FAPR'97*, number 1244 in Lecture Notes in Artificial Intelligence, Bad Honnef, Germany, June9–12 1997. Springer. ISBN 3-540-63095-3.

Tamás Gáspár and Erzsébet Nováky. Dilemnas for renewal of futures methodology. *Futures*, 34(5) :365–379, June 2002.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Ghent, Belgium, June 29 - July2 1999. Ghent University. URL http://ippserv.rug.ac.be/~isipta99/.

Itzhak Gilboa and David Schmeidler. Maximin expected utility with non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, 18 :141–153, 1989.

Michel Godet, Régine Monti, Francis Meunier, and Fabrice Roubelat. Scenarios and strategies. a toolbox for scenario planning. Technical Report 3rd issue, January 2002. URL http://www.cnam.fr/lipsor/. Disponible en Français, Anglais, Espagnol, Portugais.

Irving J. Good. Kinds of probability. Although there are at least five kinds of probability, we can get along with just one kind. *Science*, 129(3347) :443–447, February 1959.

Sander Greenland. *Causality theory for policy uses of epidemiological measures*, chapter 6.2, pages 291–301. WHO, 2002. ISBN 92 4 154551 8. URL http://www.who.int/pub/smph/en/.

Arnulf Grübler and Nebojša Nakićenović. Identifying dangers in an uncertain climate. *Nature*, 412 :15, July 5 2001.

Minh Ha-Duong. *Comment tenir compte de l'irréversibilité dans l'évaluation intégrée du changement climatique ?* Thèse de doctorat, École des hautes Études en Sciences Sociales, Paris, April 1998a. URL http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/35/05/.

Minh Ha-Duong. Necessities and problems of coupling climate and socioeconomic models for integrated assessments studies from an economist's point of view. In Jürgen Hacker and Arthur Pelchen, editors, *Goals and Economic Instruments for the Achievement of Global Warming Mitigation in Europe*, pages 39–54. Kluwer Academic Publisher, 1998b. Proceedings of the EU Advanced Study Course held in Berlin, Germany, July 1997.

Minh Ha-Duong. Quasi-option value and climate policy choices. *Energy Economics*, 20 :599–620, 1998c.

Minh Ha-Duong. Perspectives sur le changement climatique. *Natures - Sciences - Sociétés*, 8(4) :5–14, 2000a. ISSN 1240-1307.

Minh Ha-Duong. Should climatic change be mitigated ? *Thoi Dai*, 4 :144–161, 2000b. Publication in Vietnamese langage.

Minh Ha-Duong. Transparency and control in engineering integrated assessment models. *Integrated Assessment*, 2(4) :209–218, 2001.

Minh Ha-Duong, Elizabeth Casman, and M. Granger Morgan. A strategy for bounding attributable risk : a lung cancer example. *Risk Analysis*, 24(5) :1071–1083, 2004.

Minh Ha-Duong and Patrice Dumas. Nonlinearity and uncertain climate impacts. In *Challenges of a Changing Earth – Global Change Open Science Conference*, Amsterdam, 10-13 July 2001. IGBP-IHCP-WCRP. Also presented at the EMF/IEW conference in Vienna, 15-18 June 2001.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Minh Ha-Duong, Michael J. Grubb, and Jean-Charles Hourcade. Influence of socioeconomic inertia and uncertainty on optimal CO_2-emission abatement. *Nature*, 390 : 270–274, 1997.

Minh Ha-Duong and Jean-Charles Hourcade. Policy framework and systems management of global climate change. In Antoaneta Yotova, editor, *Encyclopedia of Life Support Systems*, chapter 1.4.7, in Theme 'Natural Resource System Challenge II : Climate Change, Human Systems, and Policy', volume on 'Global Issues and Sustainable Development'. EOLSS Publisher Co., Oxford, UK, 2002. URL `http://www.eolss.net/eolss/E1-04-toc.asp`.

Minh Ha-Duong, Jean-Charles Hourcade, and Franck Lecocq. Dynamic consistency problems behind the Kyoto protocol. *International Journal of Environment and Pollution*, 11(4) :426–446, 1998.

Minh Ha-Duong and David Keith. Climate strategy with CO_2 capture from the air. In *NATO Advanced Research Workshop on Technological Choices for Sustainability*, Piramida Hotel, Maribor, Slovenia, October13–17 2002.

Minh Ha-Duong and David Keith. Carbon storage : the economic efficiency of storing CO_2 in leaky reservoirs. *Clean Technology and Environmental Policy*, 5(2/3), October 2003. Special issue on Technologies for Sustainable Development.

Minh Ha-Duong, Gérard Mégie, and Didier Hauglustaine. A pro-active stratospheric ozone protection scenario. *Global Environmental Change*, 13(1) :43–49, April 2003.

Minh Ha-Duong and Nicolas Treich. Risk aversion, intergenerational equity and climate change. *Environmental and Resource Economics*, 28(2) :195–207, June 2004.

R. E. Haber, R. H. Haber, A. Alique, and S. Ros. Application of knowledge-based systems for supervision and control of machining processes. volume II. World Scientific Pub. Co., May 2002. ISBN 981-02-4514-9. URL `http://www.cse.dmu.ac.uk/~yangli/handbook.htm`. 2 volume set. Vol. I 'Fundamentals' published dec. 2001, ISBN : 981-02-4973-X. Vol. II ISBN : 981-02-4974-8.

Joseph Y. Halpern, editor. *Reasoning about Uncertainty*. MIT Press, 2003. ISBN 9 780262 083201.

W. Michael Hanemann. Willingness to pay and willingness to accept : How much can they differ. *American Economic Review*, 81(3) :635–647, March 1991.

Didier A. Hauglustaine and J.-C. Gérard. Present and future CFC and other trace gas warming : Results from a seasonal climate model. *Annales Geophysicae*, 9 :571–587, 1991.

Claude Henry. Investment decisions under uncertainty : The "irreversibility effect". *American Economic Review*, 64(6) :1006–1012, 1974.

Claude Henry and Marc Henry. Formalization and applications of the precautionary principle. Cahier 2002-008, Laboratoire d'Econométrie de l'École Polytechnique, February 2002.

A. Heyting. *Les fondements des mathématiques. Intuitionisme. Théorie de la démonstration.* Collection de Logique Mathématique, Série A, vol. IX. Gauthier-Villars, 1955. Édition traduite et augmentée du texte original allemand publié en 1934.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Joel L. Horowitz and Charles F. Manski. Imprecise identification from incomplete data. In *Second International Symposium on Imprecise Probability and their Applications* Cor [2001]. URL `http://ippserv.rug.ac.be/~isipta01/`.

John K. Horowitz and Kenneth E. McConnel. A review of WTA/WTP studies. *Journal of Environmental Economics and Management*, 44 :426–447, 2002.

Jean-Charles Hourcade. *Prospective de l'énergie et stratégies de développement dans le tiers monde*. Thèse de doctorat d'etat en sciences economiques, Université Paris VIII Vincennes à Saint-Denis, October 1984.

IPCC. *Le Changement Climatique. Dimensions économiques et sociales*. Dossiers et débats pour le développement durable (4D), 1996. ISBN 2-9511782-9-4 pour 4D, 2-921146-56-8 pour Éditions Multimondes. URL `http://www.ipcc.ch`. Contribution du Groupe de Travail III au Deuxième Rapport d'évaluation du du Groupe d'Experts Intergouvernemental sur l'évolution du climat.

IPCC. *Climate Change 2001 : Synthesis Report*. Cambridge University Press, 2001. ISBN 0-521-01507-3. URL `http://www.ipcc.ch`. Available in French as ISBN 92-9169-215-8, also available in Arabic, Chinese, Spanish and Russian.

IPCC. Special report on carbon dioxide capture and storage. See also the IPCC workshop in Regina, Canada, 18–21 November 2002, 2005.

Working Group III IPCC, editor. *Summary for Policymakers of IPCC special report on emissions scenarios*. UNEP - WMO, 2000. ISBN 92-9169-113-5.

Cliff Joslyn. Measurement of possibilistic histograms from interval data. *International Journal of General Systems*, 26(1-2) :9–33, 1997.

Daniel Kahneman. Maps of bounded rationality. psychology for behavioral economics. *American Economic Review*, 93(5) :1– ?, December 2003.

David W. Keith, Minh Ha-Duong, and Joshua K. Stolaroff. Climate strategy with CO_2 capture from the air. *Climatic Change*, Accepted, 2005.

John Maynard Keynes. *A treatise on probability*. McMillan, London, 1921. Unabridged republication, Dover Phoenix Edition, (2004) ISBN 0-486-49580-9.

George J. Klir. Uncertainty and information measures for imprecise probabilities : an overview. In *International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications* Ghe [1999]. URL `http://ippserv.rug.ac.be/~isipta99/`.

George J. Klir. An update on generalized information theory. In Bernard et al. [2003]. ISBN 1-894145-17-8. URL `http://www.carleton-scientific.com/isipta/preface.html`.

Frank H. Knight. *Risk, Uncertainty and Profit*. Houghton Mifflin, Boston, 1921. URL `http://www.econlib.org/library/Knight/knRUP.html`.

Charles D. Kolstad and Rolando M. Guzman. Information and the divergence between willingness to accept and willingness to pay. *Journal of Environmental Economics and Management*, 38(1) :66–80, July 1999. URL `http://www.econ.ucsb.edu/papers/wp30-98.pdf`.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Ivan Kramosil. Belief functions with nonstandard values. In Gabbay et al. [1997], pages 380–391. ISBN 3-540-63095-3.

Elmar Kriegler and H. Held. Climate projections for the 21st century using random sets. In Bernard et al. [2003]. ISBN 1-894145-17-8. URL `http://www.carleton-scientific.com/isipta/preface.html`.

Thomas Samuel Kuhn. *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press, 3rd, november 1996 edition, 1962. ISBN 0-226-45808-3.

Rik Leemans and Eric Kreilman. The IMAGE-2 model : policy and scientific analysis. Final report NRP no. 410 200 037 481508 011, RIVM, March 1999.

Gertrudes Coelho Nadler Lins and Fernando Menezes Campello de Souza. A protocol for the elicitation of prior distributions. In *Second International Symposium on Imprecise Probability and their Applications* Cor [2001]. URL `http://ippserv.rug.ac.be/~isipta01/`.

Mark J. Machina and David Schmeidler. A more robust definition of subjective probability. *Econometrica*, 60(4) :745–780, July 1992.

Alan S. Manne and Richard Richels. *Buying Greenhouse Insurance : The Economic Cost of CO_2 Emissions Limits*. MIT Press, 1992.

Carol Mansfield. Despairing over disparities : Explaining the difference between willingness to pay and willingness to accept. *Environmental and Resource Economics*, 13(2) :219–234, March 1999.

Nicola Misani. Scenari con le mappe cognitive fuzzy : le dinamiche complesse al servizio dell analisi strategica. *Economia e Management*, 3 :51–65, 1997.

Mario J. Molina and F. Sherwood Rowland. Stratospheric sink for chlorofluoromethanes : chlorine atom-catalysed destruction of ozone. *Nature*, 239 :810–812, 1974.

M. Granger Morgan. Quantitative expert subjective judgment : Does it have a role in future IPCC assessments ? In Session Chairs : Dr. Richard H. Moss and Dr. Stephen H. Schneider, editors, *AGCI Session II : Characterizing and Communicating Scientific Uncertainty*. Aspen Global Change Institute, July 31 to August 8 1996. URL `http://www.gcrio.org/ASPEN/science/eoc96/AGCIEOC96SSSII/AGCIEOC96MorganSSSII.html`.

M. Granger Morgan. The neglected art of bounding analysis. *Environmental Science and Technology*, 35(7) :162A–164A, April1 2001.

M. Granger Morgan and Max Henrion. *Uncertainty : A guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis*. Cambridge University Press, 1990. ISBN 0-521-42744-4.

M. Granger Morgan and David Keith. Subjective judgments by climate experts. *Environmental Science and Technology*, 29(10) :468A–476A, October 1995. URL `http://www.andrew.cmu.edu/user/dk3p/`.

M. Granger Morgan, Louis F. Pitelka, and Elena Shevliakova. Elicitation of experts judgments of climate change impact on forest ecosystems. *Climatic Change*, 49 : 279–307, 2001.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Oskar Morgenstern. *On the accuracy of economic observations*. Princeton University Press, second, completely revised edition, 1963.

Tsuneyuki Morita and Hae-Cheol Lee. IPCC emission scenario database, 2000. URL `http://sres.ciesin.org/OpenProcess/htmls/MoritaDB.html`.

Christopher J. L. Murray, Majid Ezzati, Alan D. Lopez, Anthony Rodgers, and Stephen Vander Hoorn. Comparative quantification of health risks : Conceptual framework and methodological issues. *Population Health Metrics*, 1(1), 2003. URL `http://www.pophealthmetrics.com/content/1/1/1`.

National Academy of Science NAS. *Abrupt climate change : inevitables surprises*. National Academy Press, Washington, D.C., 2002. ISBN 0-309-07434-7. URL `http://books.nap.edu/books/0309074347/html/index.html`.

Robert Nau. De Finetti was right : Probability does not exist. *Theory and Decision*, 51(2–4) :89–124, 2002. URL `http://faculty.fuqua.duke.edu/~rnau/definettiwasright.pdf`.

Robert F. Nau. Arbitrage, incomplete models and interactive rationality, 1999. URL `http://www.duke.edu/~rnau`.

Robert F. Nau. The aggregation of imprecise probabilities. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 105(1) :265–282, 2001. URL `http://www.duke.edu/~rnau`.

William D. Nordhaus. *Managing the Global Commons*. MIT Press, 1994.

Mark Parascandola and Douglas L. Weed. Causation in epidemiology. *Journal of Epidemical Community Health*, 55 :905–912, 2001.

G. Petschel-Held, H. J. Schellnhuber, Th. Bruckner, K. Hasselmann, and F. L. Tóth. The Tolerable Windows approach : Theoretical and methodological foundations. *Climatic Change*, 41 :303–331, 1999.

John Quiggin. Testing between alternative models of choice under uncertainty – comment. *Journal of Risk and Uncertainty*, 6(2) :161–4, 1993.

Franck Plumpton Ramsey. *Truth and Probability*, chapter VII, pages 156–198. London : Kegan, Paul, Trench, Trubner and Co., New York : Harcourt, Brace and Company, 1926. 1999 electronic edition.

John Reilly, Peter H. Stone, Chris E. Forest, Mort D. Webster, Henry D. Jacoby, and Ronald G. Prinn. Uncertainty and climate change assessments. *Science*, 293 :430–433, July 20 2001.

Luis M. Rocha. Relative uncertainty and evidence sets : a constructivist framework. *International Journal of General Systems*, 26(1–2) :35–61, 1997.

Kenneth J. Rothman. *What is causation ?*, chapter 2. March 2002. ISBN 0195135547. URL `http://www.us.oup.com/pdf/0195135547_ch2.pdf`.

Leonard J. Savage. *The Foundations of Statistics*. Dover, second edition, 1954. ISBN 0-486-62349-1.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Mark J. Schervish, Teddy Seidenfield, Joseph B. Kadane, and I. Levi. Extensions of expected utility theory and some limitations of pairwise comparisons. In Bernard et al. [2003], pages 496–510. ISBN 1-894145-17-8. URL `http://www.carleton-scientific.com/isipta/preface.html`.

Stephen H. Schneider. What is 'dangerous' climate change ? *Nature*, 411 :17–19, May 3 2001.

Peter Schwartz and Doug Randall. An abrupt climate change scenario and its implications for United States national security. Technical report, October 2003. URL `http://www.gbn.com`. Public report, prepared by Global Business Network for the U.S. Department of Defense.

G. L. S. Shackle. *Expectation in economics*. Cambridge University Press, 2 edition, 1952.

G. L. S. Shackle. The logic of surprise. *Economica, New Series*, 20(78) :112–117, May 1953.

Glenn Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton (NJ), 1976. ISBN 0-691-10042-X (hardback), 0-608-02508-9 (reprint).

Glenn Shafer and Vladimir Vovk. *Probability and Finance : It's Only a Game !* John Wiley & Sons, Inc., 2001. ISBN 0-471-40226-5. URL `http://www.probabilityandfinance.com/`.

Jason F. Shogren and Dermot J. Hayes. Resolving differences in wilingnes to pay and willingness to accept : Reply. *American Economic Review*, 87(1) :241–244, March 1997. Reply to G. C. Morrison comment, same issue, pp. 236–240.

Herbert A. Simon. *Models of bounded rationality, Economic analyses and Public Policy*. vol 1. MIT Press, 1982. ISBN 0-262-19205-5.

Philippe Smets. The nature of the unnormalized beliefs encountered in the transferable belief model. In D. Dubois, M. P. Wellman, B. D'Ambrosio, and Philippe Smets, editors, *Uncertainty in Artificial Intelligence 92*, pages 292–297. Morgan Kaufman, San Mateo, Ca, 1992.

Philippe Smets. The axiomatic justification of the Transferable Belief Model. Technical Report TR/IRIDIA/95-8, IRIDIA, Bruxelles, 1995.

Philippe Smets. The α-junctions : combination operators applicable to belief functions. In Gabbay et al. [1997], pages 131–153. ISBN 3-540-63095-3.

Philippe Smets. Belief functions and the transferable belief model, 2000a. URL `http://ippserv.rug.ac.be`.

Philippe Smets. Data fusion in the Transferable Belief Model. In *Fusion 2000 Conference*, Paris, 10–13 July 2000b. ISIF (International Society on Information Fusion). URL `http://irida.ulb.ac.be/~psmets/`. Keynote address.

Philippe Smets. Quantified epistemic possibility theory seen as an hyper cautious Transferable Belief Model. Technical report, IRIDIA, Université libre de Bruxelles, 2000c. URL `http://www.iridia.ulb.ac.be/~psmets/`.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Philippe Smets. Matrix calculus for belief functions, 2001. URL http://iridia.ulb.ac.be/~psmets/MatrixRepresentation.pdf.

Philippe Smets. Decision-making in a context where uncertainty is represented by a belief function, 2002. URL http://iridia.ulb.ac.be/~smets.

Douglas A. Smith, Keith Vodden, Leon Rucker, and Rose Cunningham. Global benefits and costs of the Montreal protocol on substances that deplete the ozone layer. Technical report, Applied Research Consultants, September 1997. Published by Environment Canada. Presented at the 10th Anniversary Colloquium, Montreal. Also available in French as : Protocole de Montréal 1987-1997. Avantages et Coûts Mondiaux du Protocole de Montréal Relatif à des Substances qui Appauvrissent la Couche d'Ozone.

Michael Smithson. *Ignorance and Uncertainty - Emerging Paradigms*. Springer-Verlag, 1988. ISBN 3-540-96945-4.

Chris Starmer. Developments in non-expected utility theory : The hunt for a descriptive theory of choice under risk. *Journal of Economic Litterature*, XXXVIII :332–382, June 2000.

State and Territorial Air Pollution Program Administrators and the Association of Local Air Pollution Control Officials. Cancer risk from diesel particulate : National and metropolitan area estimates for the United States. Technical report, March 15 2000. URL http://www.4cleanair.org/comments/cancerriskreport.pdf.

Ferenc L. Toth, Thomas Bruckner, Hans-Martin Füssel, Marian Leimbach, and Gerhard Petschel-Held. The Tolerable Window approach to integrated assessments. In O. K. Cameron, K. Fukuwatari, and T. Morita, editors, *Climate Change and Integrated Assessment Models : Bridging the Gaps–Proceedings of the IPCC Asia Pacific Workshop on Integrated Assessment Models*, pages 403–430, United Nations University, Tokyo, Japan, 10-12 March 1997. National Institute for Environmental Studies, Tsukuba, Japan. CGER Report Nr. I029-97.

Nicolas Treich. Décision séquentielle et principe de précaution. *Cahiers d'Économie et de Sociologie Rurale*, 55-56 :6–24, 2000. URL http://www.inra.fr/Internet/Departements/ESR/publications/cahiers/pdf/treich.pdf.

Ozone Secretariat UNEP. Production and consumption of ozone depleting substances, 1986-1998, 1999. URL http://www.unep.org/ozone/home.htm.

Frans Voorbraak. Combining evidence under partial ignorance. In Gabbay et al. [1997], pages 574–588. ISBN 3-540-63095-3.

Peter Walley. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, London, 1991. ISBN 0-412-28660-2.

Peter Walley. Inferences from multinomial data : Learning about a bag of marbles. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 58(1) :3–57, 1996. URL http://links.jstor.org/sici?sici=0035-9246%281996%2958%3A1%3C3%3AIFMDLA%3E2.0.CO%3B2-3.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005

Peter Walley. Coherent upper and lower previsions, 1998. URL `http://ippserv.rug.ac.be/documentation/upper_lower_prev/upper_lower_prev.html`.

Peter Walley. Towards a unified theory of imprecise probability. *International Journal of Approximate Reasoning*, (24) :125–148, 2000. URL `http://decsai.ugr.es/~smc/isipta99/proc/055.html`.

Thomas S. Wallsten, David V. Budescu, Amon Rapoport, Rami Swick, and Barbara Forsyth. Measuring the vague meanings of probability terms. *Journal of Experimental Psychology : General*, 115(4) :348–365, 1986.

T. M. L. Wigley and S. C. B. Raper. Interpretation of high projections for global-mean warming. *Science*, 293 :451–454, July 20 2001.

T. M. L. Wigley, Richard Richels, and Jae A. Edmonds. Economic and environmental choices in the stabilization of atmospheric CO_2 concentrations. *Nature*, 379(6562) : 240–243, 1996.

Richard A. Young. *Uncertainty and the environment : implications for decision making and environmental policy*. New horizons in environmental economics. Edward Elgar, 2001. ISBN 1-84064-626-8.

L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1) :3–38, 1978. Reprinted in Fuzzy Sets and Systems 100 :9-34, 1999.

halshs-00007520, version 1 - 23 Dec 2005