



HAL
open science

Modélisations multi-matériaux multi-vitesses en dynamique rapide

Gauthier Folzan

► **To cite this version:**

Gauthier Folzan. Modélisations multi-matériaux multi-vitesses en dynamique rapide. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2013. Français. NNT : . pastel-00803315

HAL Id: pastel-00803315

<https://pastel.hal.science/pastel-00803315>

Submitted on 21 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'École Polytechnique
(Spécialité : mécanique)

Modélisations multi-matériaux multi-vitesses en dynamique rapide

Thèse présentée par
Gauthier Folzan

devant le jury composé de :

M. Patrick Le Tallec	Directeur de thèse
M. Jean-Philippe Perlat	Directeur de thèse
M. Rémi Abgrall	Rapporteur
M. Bertrand Maury	Rapporteur
M. Jean-Michel Ghidaglia	Examineur
M. Pierre-Henri Maire	Examineur
M. Jean-Jacques Marigo	Examineur
M. Mike Puso	Examineur

Remerciements

Il y a tant de personnes que j'ai rencontrées, fréquentées et que je voudrais remercier que ces quelques lignes ne rendront justice à personne, encore moins à ceux que j'oublie de citer.

Tout d'abord et bien évidemment, je tiens à remercier Patrick Le Tallec et Jean-Philippe Perlat, mes deux directeurs de thèse, respectivement à l'École Polytechnique et au Commissariat à l'Énergie Atomique de m'avoir encadré durant ces trois ans. Sans leurs précieux avis et conseils et sans tout le temps qu'ils m'ont consacré, je n'aurais jamais pu mener à bien cette thèse.

Merci également au président du jury et à tous les membres d'avoir accepté de participer à ma soutenance en particulier lorsqu'il y avait quelques milliers de kilomètres à parcourir (un peu moins en mesurant en miles).

Un grand merci à Claire et aux membres du laboratoire au CEA, pour leur écoute, leur disponibilité et avoir essayé de faire oublier le plus possible cette porte à code qui sépare mon bureau des leurs.

Je suis extrêmement reconnaissant à Patrick, de m'avoir proposé et permis de passer quelques semaines en fin de thèse au Laboratoire National Lawrence Livermore en Californie et merci à Mike Puso d'avoir accepté de me recevoir sur place. Je pense que ce séjour n'était pas sur la voie de la facilité mais je ne regrette aucunement d'avoir passé quelques temps là-bas. Les semaines que j'y ai passées ont été très enrichissantes autant sur le plan scientifique que humain et culturel.

Une thèse ne peut pas se résumer aux échanges scientifiques et je voudrais remercier tous ceux qui, par leur présence, leurs discussions ou leur bonne humeur, ont rendus ces trois années beaucoup plus agréables.

Dans un premier temps, les habitants ou anciens habitants de ce microcosme qu'est le "couloir des thésards et des stagiaires". Dans un ordre plus ou moins chronologique de rencontre, merci à Aude et Franck, pour les conseils d' "anciens" quand je suis arrivé. Merci à Daniel pour la double ironie, à Laurent pour la compagnie durant ces moments solitaires, à deux dans un couloir désert, nos bureaux séparés par au moins 4 portes (Si un jour, je trouve des Tic-Tac bleus ou rouge à pois verts, je te les envoie par la poste, idem pour des plans originaux de catapultes, trébuchets ou autres traités sur la balistique des sachets de thé.), merci à Clotilde d'avoir supporté de partager un bureau (voire deux) avec moi (Heureusement pour toi, ce n'était qu'un ou deux jours par semaine.), merci à Cédric d'avoir fait un séjour dans le couloir même si c'était avant de nous abandonner pour un autre département (Tu passais encore nous voir après donc on te pardonne.) et merci aux différents stagiaires qui se sont succédés et qui apportaient de la vie dans le couloir (Sans ordre d'importance Alexandra, Clémentine, Guillaume, Mélanie, Nicolas, Nicolas, etc).

Merci aux doctorants de DPTA pour les repas du midi tous ensemble dont en particulier, Déborah, Yoann, Alex, Grégoire pour la motivation matinale, les petits déjeuners et autres "early session party" à Massy.

Merci aux doctorants et post-doc du LMS, Jessica, Mathieu (Si je retrouve mes "transparents", tu veux les récupérer?), Matthieu, David et j'en oublie, pour la très bonne ambiance au laboratoire lors de mes visites du jeudi et pour les traditionnelles pauses cafés plus ou moins allongées (L'allongement de la pause étant en général proportionnel à l'allongement du café.) de 9h, 13h et 16h (La caféine fait avancer la science.).

Merci à la banda, Los Hbardos, pour les répèts du mardi voire du vendredi, les animations, les sorties, etc.

Enfin, un grand merci à mes parents et à mon frère pour m'avoir toujours supporté et soutenu même quand je ne donnais plus de nouvelles et un grand merci à mes amis "de l'UTC" (Cette dénomination étant incorrecte, j'espère que les intéressés, s'ils lisent un jour cette page, se reconnaîtront.) pour les régulières visites au Gentleman (aujourd'hui disparu) et autres bons moments passés ensemble qui m'ont permis, même s'ils ne s'en sont pas rendus compte, de me changer les idées et garder le moral dans les moments plus difficiles que les autres.

Résumé

De nombreuses simulations dans les domaines des impacts, des interactions fluide-structure ou des écoulements multiphasiques impliquent différentes structures indépendantes interagissant entre elles à travers des interfaces complexes.

Pour ces problèmes, les stratégies classiques utilisent souvent une approche lagrangienne utilisant un maillage éléments finis par structure et des stratégies de couplage et de mise en contact adéquates. Ceci est très coûteux en terme de génération de maillages et difficile à mettre en place en présence de grandes déformations.

Une alternative est d'utiliser une stratégie « eulérienne » décrivant les différentes structures sur une grille unique en utilisant une vitesse moyenne unique et en développant des lois d'état *ad hoc* pour gérer le caractère multiphasique des éléments traversés par l'interface. La physique de l'interface de ces modèles est en générale assez grossière.

Dans ce contexte, il y a un regain d'intérêt pour les modèles utilisant un maillage global unique non conforme avec les structures et définissant des champs de vitesses éléments finis indépendants pour décrire le mouvement de chacune des structures. Cette stratégie est intéressante mais induit différents problèmes : suivi d'interface, développement d'une formulation ALE adaptée car les matériaux et le maillage ont des vitesses différentes, traitement correct de la contrainte cinématique à l'interface entre les structures.

Une grande attention doit être portée à ce dernier point pour proposer une approche stable, sans verrouillage numérique et restant robuste en cas de grandes déformations.

Dans cette thèse, nous proposons une stratégie originale basée sur une méthode d'éléments finis enrichis. Elle définit un champ de vitesse éléments finis par matériau sur un unique maillage. Les différents champs se recouvrent et forment un champ enrichi qui peut avoir une discontinuité à l'interface et permet de décrire le glissement entre les matériaux. La discontinuité est contrôlée par une contrainte de continuité des vitesses normales et par une inconnue supplémentaire, la pression d'interface qui est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte cinématique.

La formulation ALE utilisée est basée sur une décomposition du pas de temps entre phase lagrangienne et phase de projection. La phase lagrangienne est résolue par le schéma de Wilkins classique des codes hydrodynamiques alors que la projection est réalisée par calcul d'intersection entre les maillages lagrangiens déformés par la matière et un maillage commun plus régulier.

L'interface est construite à partir de la fraction volumique de chaque matériau et sa reconstruction peut être discontinue entre les éléments.

Deux variantes sont introduites, analysées et comparées. Elles diffèrent par la discrétisation du multiplicateur de Lagrange et donc, par celle de la contrainte de vitesse :

- la continuité par nœud utilise un multiplicateur défini aux nœuds. Cette variante est simple et rapide mais ne prend pas correctement en compte les différences de compressibilité entre matériaux,
- la continuité par maille utilise un multiplicateur constant par segment d'interface. Cette

variante donne des résultats meilleurs que la première version. La méthode est stabilisée par l'ajout de nœuds internes dans les mailles mixtes dont les fonctions bulles associés sont linéaires par morceaux dans chaque élément ainsi que par une condensation de la masse adaptée pour assurer un équilibre stable de l'interface. L'équation de mouvement du nœud interne est discrétisée par un schéma implicite en temps. En conséquence, nous devons résoudre un système couplant tous les nœuds de l'interface pour calculer les vitesses autour de l'interface.

Les deux variantes ont été implantées dans un code industriel. Elles sont validées et comparées dans plusieurs cas tests impliquant diverses situations comme des interactions fluide-structure ou du glissement entre solides.

Abstract

Many simulations in fluid structure interactions, multiphase flows or dynamic impacts involve independent structures interacting through complex interfaces.

For such problems, standard strategies often use a Lagrangian approach using one finite element mesh per structure and adequate matching strategies. These are very demanding in mesh generation, and are difficult to use in presence of large mesh distortions.

An alternative is to use an Eulerian strategy describing the different structures on a single grid using a single average velocity field and developing *ad hoc* constitutive laws to handle the multiphase microstructure of each element. These models are usually quite crude on the interface physics.

In this context, there is a renewed interest in models which will use a single global smooth mesh, not matching the structures and independent finite element velocity fields to describe the motion of the structures. This strategy is attractive but faces difficult challenges: interface tracking, development of adequate ALE formulations because materials and mesh velocities are different, proper treatment of the kinematic continuity constraints between the structures.

Great care must be taken at this level in order to propose a stable approach which is locking free and stays robust in large strain elastodynamics.

With this thesis, we propose an original strategy based on an enriched finite element method. It defines one FE velocity field by material on a single mesh, the different fields are overlapping and form an enriched field that can have a discontinuity at the interface and allows to describe sliding between the materials. The discontinuity is controlled by a normal velocity constraint at the interface and an additional unknown of interface pressure that is the Lagrange multiplier associated with the constraint.

The ALE formulation used is based on a time split between Lagrangian phase and remap phase. The Lagrangian phase is solved by the Wilkins explicit scheme widely used while the remap is done by mesh intersections between Lagrangian meshes deformed by material and a smoothed average mesh.

The interface is tracked during the remap by the volume fraction of each material in the cells and its reconstruction can be discontinuous across elements.

Two variants of the methods are introduced, analysed and compared. They differ by their Lagrange multiplier discretization and consequently by their velocity constraint discretization:

- the node continuity uses a Lagrange multiplier defined at nodes. This variant is simple and fast but does not take correctly into account the compressibility of materials,
- the cell continuity uses a Lagrange multiplier constant by interface segment. This variant gives better results than the first one. The method is stabilized by adding internal nodes in the mixed cells using piecewise linear velocity shape functions inside each element and a proper mass lumping ensures a stable equilibration of the interface. The internal node momentum equation is discretized by an implicit scheme. The consequence is that a system coupling the interface nodes has to be solved in order to compute the velocities near the interface.

The two variants have been implemented into an industrial code. They are validated and

compared with several test cases involving different situations like fluid-structure interaction or sliding between solids.

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Modélisation continue du problème	5
2.1	Représentation du problème aux limites	6
2.2	Notations	6
2.3	Formalisme Arbitrairement Lagrangien Eulérien	7
2.4	Équations continues du système dans le cadre multi-matériau non-miscible . . .	11
3	Discrétisation des équations dans le cas mono-matériau	19
3.1	Décomposition du pas de temps	20
3.2	Discrétisation des champs d'inconnues	22
3.3	Phase Lagrangienne	24
3.4	Phase de transport	29
4	Gestion de plusieurs matériaux et leur interface	35
4.1	Vue d'ensemble des méthodes multi-matériaux	36
4.2	Gestion classique : vitesse moyenne et hypothèse d'iso-déformation	43
5	Méthode des éléments finis enrichis	55
5.1	Équations continues	56
5.2	Discrétisation des champs	57
5.3	Traitement des quantités centrées	59
5.4	Équations en quantité de mouvement	60
5.5	Décomposition « Lagrange + projection »	64
5.6	Analyse d'un problème modèle	65
6	Continuité par nœud	71
6.1	Discrétisation en temps	72
6.2	Résolution de la phase Lagrange	76
6.3	Analyse de la stabilité en espace	78
6.4	Discrétisation de la normale à l'interface	80
6.5	Prise en compte des conditions aux limites	82
6.6	Phase de transport	85
6.7	Gestion de plus de 2 matériaux	89
6.8	Prise en compte du contact unilatéral	91
6.9	Résumé et conclusion	93

7	Continuité par maille	97
7.1	Stabilisation du système	98
7.2	Analyse de la stabilité en espace	104
7.3	Calcul des flux à travers l'interface	106
7.4	Discretisation en temps	111
7.5	Pseudo-viscosité dans les mailles mixtes	115
7.6	Système à résoudre lors de la phase Lagrange	118
7.7	Phase de transport	120
7.8	Résumé et conclusion	123
8	Continuité par maille : mise en œuvre	125
8.1	Système d'interface	126
8.2	Linéarisation	128
8.3	Résolution du système linéarisé	132
8.4	Limitation de l'incrément	144
8.5	Calcul de l'état thermodynamique	146
8.6	Critère de convergence de l'algorithme Γ	146
8.7	Prise en compte des conditions aux limites	147
9	Cas test et validation	149
9.1	Rotation d'un disque	150
9.2	Piston 1D	156
9.3	Arrivée d'un choc circulaire sur un solide	162
9.4	Passage d'une interface circulaire par une onde plane	168
9.5	Conclusion	178
10	Conclusion générale	179
	Annexes	182
A	Reconstruction et limitation de gradients	185
A.1	Reconstruction de champs linéaires par morceaux	185
A.2	Calcul du gradient	185
A.3	Limitation du gradient	186
B	Calcul de la normale à l'interface	189
	Bibliographie	191

Chapitre 1

Introduction générale

Les cas faisant intervenir différentes structures interagissant entre elles sont courants dans les études industrielles. Avec l'utilisation de plus en plus répandue de la simulation numérique et leur part de plus en plus importante dans les cycles de conception, de nombreuses méthodes ont été développées pour simuler le comportement de ces structures et leurs interactions.

Ces interactions ont lieu à l'interface entre les matériaux. L'approche la plus immédiate est de simuler les différentes structures par des méthodes lagrangiennes, chacune sur leur maillage propre ([92, 1]). Ceci permet au maillage de suivre la matière. La prise en compte des interactions entre les matériaux nécessite alors un traitement spécial des frontières des maillages. Les méthodes lagrangiennes offrent un cadre naturel pour suivre l'évolution de l'interface au cours du temps, un nœud de l'interface restant sur l'interface tout au long de la simulation. L'interface est dans ce cas sur un bord du maillage, la prise en compte des interactions entre matériaux se fait par le biais de l'application de conditions limites adaptées sur les portions concernées de la frontière des maillages. Ces conditions peuvent être appliquées sous forme forte ([92]) ou sous forme faible ([52, 91, 40]).

Dans de nombreuses applications comme les interactions fluide-structure ou les problèmes d'impact à grande vitesse, les structures en interaction subissent de très grandes déformations que ce soit à cause de la nature d'un des matériaux en présence (gaz ou fluide) ou à cause de l'importance des efforts en jeu. Les méthodes classiques de simulation et de prise en compte du contact deviennent alors inadaptées. D'une part, les déformations trop sévères que subissent les matériaux ne peuvent pas être décrites par les maillages lagrangiens. Le formalisme purement lagrangien usuellement utilisé se révèle inadapté et ne permet plus de mener les simulations à leur terme. D'autre part, l'interface séparant les structures devient trop complexe pour être gérée avec les méthodes classiques.

Dans le cadre de ses missions, le Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) est amené à étudier des systèmes soumis à de grandes vitesses et de grandes sollicitations. Les matériaux en présence peuvent être de natures variées, solides, liquides ou gaz, et subissent de grands changements topologiques. Le CEA est donc confronté aux limitations de méthodes précédentes dans le cas de systèmes multi-matériaux.

Une formulation « Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne » (ALE) est utilisée pour apporter une solution à ces problèmes ([41, 25]). Ce formalisme essaye de combiner les avantages des méthodes lagrangiennes et eulériennes pour conserver une qualité de maillage suffisante au cours de la simulation et améliorer la robustesse des codes. La vitesse du maillage est alors arbitraire, pouvant être localement la même que celle de la matière ce qui permet dans certaines situations de conserver le suivi purement lagrangien de l'interface. Mais cela n'est généralement

pas suffisant. Lorsque les changements topologiques du systèmes sont trop importants, l'interface ne peut plus être suivie de manière lagrangienne et doit également être écrite dans un cadre ALE. L'interface n'est plus contrainte au bord de maille et peut se trouver à l'intérieur des mailles au cours de la simulation. Ce type de méthode se trouve dans la littérature sous le nom d'« *embedded interface* » ([13, 24]).

Nous pouvons utiliser un couplage entre différents calculs en utilisant un maillage par structure ou par matériau. Ce type de méthode couplent alors souvent un schéma lagrangien pour calculer une structure avec un schéma eulérien pour calculer le fluide dans lequel la structure est plongée ([65, 66, 32]). Une seconde approche que nous utiliserons est une approche monolithique. Nous définissons alors les différentes structures sur un unique maillage avec une interface ayant une position quelconque à l'intérieur du maillage ([9, 12, 85, 39]). Par la suite, nous dénommerons indifféremment monolithique, mono-bloc ou mono-domaine, une méthode n'utilisant qu'un seul maillage pour décrire tout le domaine de calcul et les différents milieux en présence.

La question de la gestion de l'interface entre les matériaux se pose alors : d'abord, comment suivre la position au cours du temps d'une interface ayant une vitesse différente de la vitesse du maillage, puis comment décrire les interactions entre les matériaux autour cette interface. L'approche classiquement utilisée dans les simulations est de suivre les différents matériaux par le suivi de la fonction caractéristique de leur domaine. La connaissance des volumes des matériaux permet alors de reconstruire l'interface ([64, 94]). Les différents matériaux ont des grandeurs thermodynamiques propres mais la vitesse utilisée est une vitesse moyenne du système commune à tous les matériaux. Ceci présente deux inconvénients :

- nous ne pouvons simuler le glissement entre matériaux, le champ de vitesse présente une discontinuité dans la direction tangentielle à l'interface qui ne peut pas être décrite avec une vitesse moyenne unique ;
- en fonction des hypothèses de modélisation ([11, 76]), la différence de compressibilité des matériaux n'est pas prise en compte. Ceci peut être une hypothèse acceptable entre deux matériaux similaires, deux gaz ou deux solides mais cette hypothèse est plus que discutable pour une interface entre un solide et un gaz.

L'utilisation d'une vitesse moyenne ne permet pas une description assez riche pour décrire le comportement de l'interface et peut aboutir à de grandes différences dans les résultats obtenus.

Cette thèse est dédiée au développement d'une méthode permettant de prendre en compte les discontinuités de vitesses que l'on peut observer aux interfaces et de gérer le glissement entre matériaux dans le cas de simulations ALE multi-matériaux mono-blocs. Cette méthode doit s'intégrer dans un code industriel pré-existant ce qui impose des contraintes lors de l'écriture de notre schéma afin de prendre en compte les spécificités de ce code.

Un premier chapitre se limitera à la modélisation du problème au niveau continu. Nous rappellerons le formalisme utilisée et introduirons les notations utilisées. Les équations décrivant notre système et qui sont la base de notre étude y seront présentées.

Le chapitre suivant présentera la discrétisation du système et le schéma implanté dans le code que nous cherchons à enrichir. Cette discrétisation est d'abord écrite dans le cas d'un unique matériau ce qui précisera le schéma que notre méthode devra utiliser tout au moins pour les termes volumiques des équations dans les zones assez éloignées de l'interface pour en être indépendantes.

Le troisième chapitre dressera une vue d'ensemble des méthodes possibles pour introduire la gestion de plusieurs matériaux dans un schéma hydrodynamique. Il s'attardera sur la gestion

classique des systèmes multi-matériaux.

Puis, nous aborderons l'écriture générale de notre méthode dans le chapitre quatre en repartant des équations continues et en introduisant la gestion des termes d'interface. Nous proposons ensuite deux variantes de discrétisation de notre méthode qui seront discutées au cours des deux chapitres suivants.

Le cinquième chapitre détaille une première version, dite « par nœuds », de la discrétisation des termes d'interface. Cette variante présente l'avantage d'être simple d'écriture et permet d'avoir un premier aperçu des modifications à apporter pour gérer les discontinuités de vitesses dans le schéma. Il ne résout cependant pas tous les problèmes que la formulation en vitesse moyenne pouvait avoir. Une discussion des avantages et des inconvénients fait guise de conclusion au chapitre.

Une deuxième variante de discrétisation dite « par maille » est présentée au chapitre six. La discrétisation des termes d'interface est modifiée pour essayer de pallier les problèmes résiduels de la première variante. Sans précaution, cette variante ne respecte pas la condition Inf-Sup et requiert un travail supplémentaire pour rétablir sa stabilité. Cette variante est plus complexe à mettre en œuvre et nécessite de traiter avec soin certains points délicats. Ici encore, une discussion sur les avantages et les inconvénients clôt le chapitre.

Les détails d'implémentation sont discutés dans un septième chapitre. La méthode aboutit à un système non-linéaire dont nous détaillons la résolution. Nous y discutons également l'extension à un nombre quelconque de matériaux.

Enfin, des résultats numériques sont présentés dans le dernier chapitre. Ces résultats permettent de valider la méthode dans ses différentes variantes et les comparent avec des méthodes déjà existantes. Les méthodes servant de point de comparaison peuvent être la version « vitesse moyenne » du schéma ALE multi-matériaux ou d'autres méthodes de contact lagrangien entre blocs.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un programme de recherche et de simulation du CEA/DAM et a été réalisé en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique sous la direction conjointe de Patrick Le Tallec (LMS) et Jean-Philippe Perlat (CEA/DAM).

Chapitre 2

Modélisation continue du problème

Sommaire

2.1	Représentation du problème aux limites	6
2.2	Notations	6
2.3	Formalisme Arbitrairement Lagrangien Eulérien	7
2.3.1	Les formalismes classiques	7
2.3.1.1	Descriptions du mouvement	7
2.3.1.2	Dérivées en temps	7
2.3.1.3	Méthodes numériques associées	8
2.3.2	Le formalisme ALE	9
2.3.3	Motivations et principe	9
2.3.3.1	Description du mouvement	10
2.3.3.2	Dérivées en temps	10
2.3.3.3	Méthode	10
2.4	Équations continues du système dans le cadre multi-matériau non-miscible	11
2.4.1	Lois de conservation	11
2.4.1.1	Conservation de la masse	12
2.4.1.2	Conservation de la quantité de mouvement	12
2.4.1.3	Conservation de l'énergie	12
2.4.1.4	Relation de saut sur l'interface	12
2.4.2	Écriture des équations dans le formalisme ALE	13
2.4.3	Tenseur des taux de déformations	14
2.4.4	Tenseur des contraintes	15
2.4.5	Lois constitutives	16
2.4.6	Traitement des chocs : Pseudo-Viscosité	17
2.4.7	Conditions aux limites	17
2.4.8	Déformations planes	18

2.1 Représentation du problème aux limites

Pour notre étude, nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique des milieux continus [56, 73] et nous intéressons à l'évolution d'un domaine \mathcal{D} (illustré figure 2.1) d'un espace euclidien doté d'un repère $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Ce domaine occupe à l'instant initial une configuration notée \mathcal{D}_0 et occupe \mathcal{D}_t à un instant t .

Notre modèle est composé par deux matériaux α et β occupant deux sous-domaines de \mathcal{D} complémentaires notés \mathcal{D}_α et \mathcal{D}_β . Ces matériaux sont considérés comme non-miscibles, c'est-à-dire qu'aucune zone de mélange n'apparaît et il est possible de définir une interface notée Γ , surface séparant les deux matériaux. Elle est caractérisée par sa normale $\underline{n}_\Gamma(\underline{x})$ orientée, par convention, sortante pour α et entrante pour β . Les deux matériaux en présence se différencient par leur loi de comportement et une discontinuité de vitesse, de densité ou d'autres quantités thermodynamiques peut apparaître sur l'interface.

La frontière $\partial\mathcal{D}$ du domaine se décompose en deux parties $\partial\mathcal{D}_d$ et $\partial\mathcal{D}_n$ délimitées par la nature des actions extérieures s'y exerçant et imposant les conditions limites sur la frontière. Ces conditions peuvent être :

- des conditions limites de Dirichlet où la position est imposée au cours du temps sur $\partial\mathcal{D}_d$;
- des conditions limites de Neumann où la pression est imposée sur $\partial\mathcal{D}_n$.

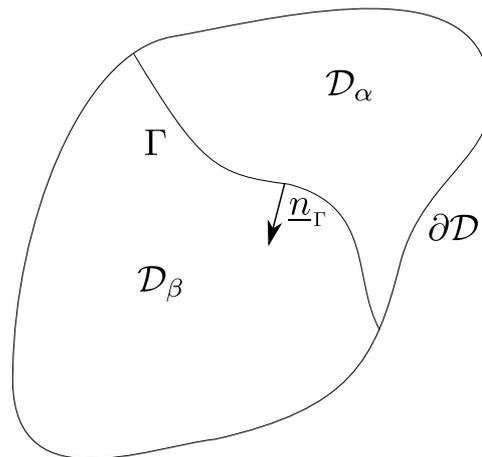


FIGURE 2.1 – Domaine étudié

2.2 Notations

D'une manière générale dans la suite de ce mémoire, une notation indicée d'un α dénotera une quantité ou un domaine propre à un matériau α pouvant être n'importe quel matériau en présence dans le domaine. Les quantités sont généralement définies pour chacun des matériaux présents et les mêmes équations s'y appliquent.

Cependant, lorsque les deux matériaux interviennent simultanément dans une seule équation, nous distinguerons alors par des indices différents, le matériau α d'un côté de l'interface du matériau β de l'autre côté.

Sans précision supplémentaire et seul dans une équation, il faut donc comprendre α comme $\{\alpha, \beta\}$. Par exemple, l'équation

$$\frac{d(\rho_\alpha V_\alpha)}{dt} = 0$$

indique que les masses du matériau α et du matériau β ne varient pas au cours du temps. Lorsqu'il faut distinguer les différents matériaux dans une équation, les indices α et β sont marqués explicitement. Par exemple, l'équation de continuité des vecteurs contraintes

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}_{\beta} - \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha}\right) \cdot \underline{n} = 0$$

indique qu'il faut bien soustraire les contraintes dans le matériau α d'un côté de l'interface aux contraintes dans le matériau β de l'autre côté.

Dans ces notations et par la suite, la notation \bullet précise que la variable est une quantité vectorielle et la notation $\underline{\underline{\bullet}}$ indique une quantité tensorielle.

Les opérateurs différentiels seront notés suivant la notation courante $\nabla(\bullet)$ pour le gradient et $\nabla \cdot (\bullet)$ pour la divergence.

Enfin, lors de la discrétisation, les indices des variables seront réservés à la discrétisation en espace alors que les exposants dénoteront la discrétisation en temps.

2.3 Formalisme Arbitrairement Lagrangien Eulérien

2.3.1 Les formalismes classiques

2.3.1.1 Descriptions du mouvement

Il existe deux grands formalismes permettant de décrire le mouvement des particules du domaine. Ces deux formalismes diffèrent par le référentiel utilisé pour décrire le mouvement.

Le formalisme lagrangien va suivre un point le long de sa trajectoire au cours du temps. Les particules sont différenciées à partir de leurs coordonnées \underline{X} dans la configuration initiale à t_0 . Ces coordonnées \underline{X} sont appelées les coordonnées matérielles d'un point. La position \underline{x} des points au cours du temps est déterminée en fonction de leurs coordonnées dans la configuration initiale en notant que $\underline{X} = \underline{x}(\underline{X}, t_0)$. La trajectoire d'une particule donnée est suivie par l'étude de l'application $\underline{x}(\underline{X}, t)$. Le référentiel lagrangien va suivre la matière et évolue au cours du temps avec celle-ci. Sa vitesse est donc la vitesse de la matière.

Le formalisme eulérien décrit le mouvement de la matière en un point fixe \underline{x} de l'espace. Le référentiel eulérien est donc immobile et sa vitesse est nulle. Les coordonnées \underline{x} d'un point à un instant donné sont appelées les coordonnées spatiales du point. Alors que le formalisme lagrangien va suivre l'histoire d'une particule donnée au cours du temps, dans un formalisme eulérien, nous nous intéressons à la vitesse des particules passant en un point donné de l'espace.

De ce fait, la particule associée à une coordonnée lagrangienne \underline{X} est toujours la même alors que les particules « défilent » devant un point spatial eulérien \underline{x} .

2.3.1.2 Dérivées en temps

Pour suivre l'évolution d'une quantité « eulérienne » $f(\underline{x})$ au cours du temps, sa dérivée (partielle) en temps $\frac{\partial \bullet}{\partial t}$ n'est pas suffisante. En effet, cette dérivée ne prend pas en compte le mouvement des particules dans le temps $\underline{x}(\underline{X}, t)$ et la participation de ce mouvement à l'évolution matérielle de la quantité f .

La dérivée en temps qu'il faut utiliser pour calculer des variations à partir de \underline{X} fixé est la dérivée particulière ou matérielle $\frac{d \bullet}{dt}$. Elle est la dérivée complète en temps de la fonction et prend en compte le mouvement de la matière par rapport au référentiel par un terme d'advection

supplémentaire. La dérivée particulière d'une quantité f a pour expression

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(\underline{x}(X, t), t)}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt}$$

où la notation $\frac{\partial \bullet}{\partial t} \Big|_x$ signifie la dérivée en temps pour un point spatial \underline{x} fixé. En introduisant la vitesse matérielle $\underline{u} = \frac{d\underline{x}}{dt}$ et la notation classique du gradient $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}$, la dérivée matérielle prend la forme plus connue

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla f. \quad (2.1)$$

Par défaut, la notation $\frac{\partial \bullet}{\partial t}$ représente une dérivée en temps à position physique \underline{x} fixée.

2.3.1.3 Méthodes numériques associées

Ces deux descriptions permettent de formuler deux types de méthodes numériques associées. Ces méthodes sont discutées en détails dans de nombreux ouvrages (voir [10] par exemple) et nous dressons ici un résumé rapide des différences, avantages et inconvénients de chacune. Les méthodes numériques discrétisent l'espace continu en le découpant en mailles discrètes. Le maillage va être attaché au référentiel d'étude ainsi, avec une méthode eulérienne, le maillage restera fixe dans l'espace (figure 2.2) alors qu'avec une méthode lagrangienne, le maillage va se déplacer avec la matière (figure 2.3).

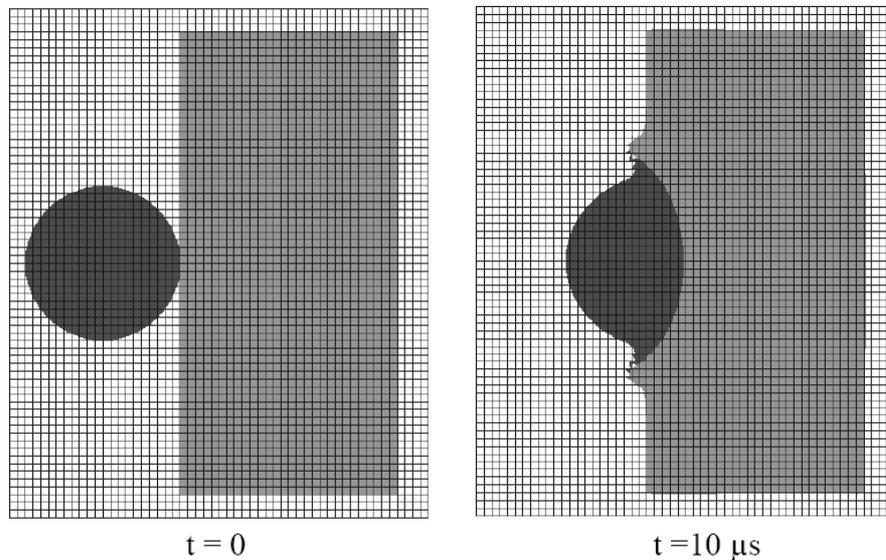


FIGURE 2.2 – Simulation eulérienne de l'impact d'une bille, illustration issue de [82]. L'espace est discrétisé par un maillage fixe et les structures se déplacent à travers celui-ci.

Les deux types de méthode ont leurs domaines d'application privilégiés. Les méthodes lagrangiennes sont couramment utilisées pour traiter les problèmes de mécanique des solides où les transformations restent souvent modérées et où le comportement des matériaux dépend de l'historique de la matière, ce qui est facilité car le référentiel lagrangien va suivre la matière et son histoire au cours du temps.

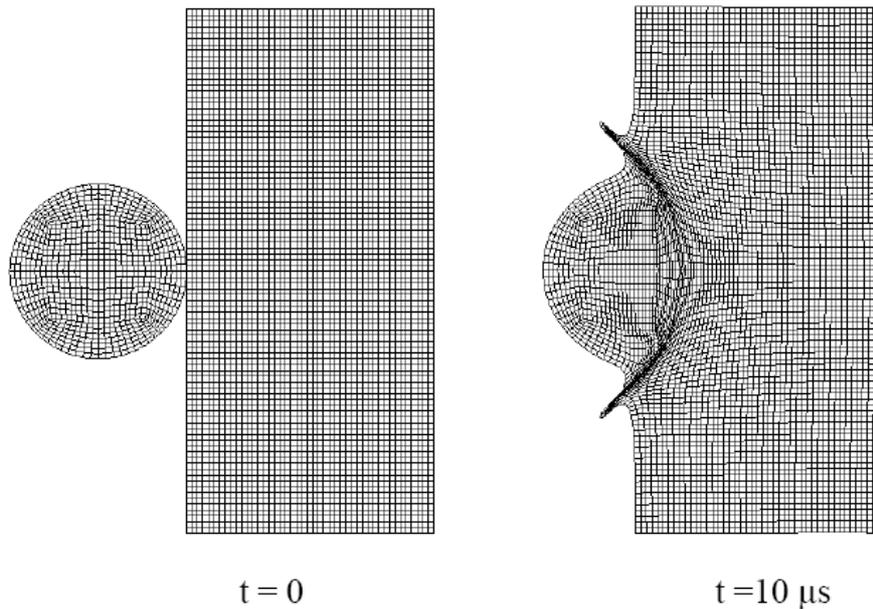


FIGURE 2.3 – Simulation lagrangienne de l’impact d’une bille, illustration issue de [82]. Le maillage est attaché aux structures et se déplace avec la matière.

Les méthodes eulériennes sont usuellement utilisées en mécanique des fluides où les déformations du milieu sont très importantes et où nous nous intéressons à la vitesse des fluides dans le domaine sans chercher à suivre une particule donnée.

Ces méthodes ont toutes les deux inconvénients :

- les méthodes lagrangiennes ne peuvent pas gérer de trop grandes déformations de la matière car le maillage se déforme trop, ne garde pas de bonnes propriétés géométriques et ne permet de mener à terme les simulations ;
- les méthodes eulériennes ne permettent pas de suivre exactement la matière. Il en résulte une incertitude sur la position des matériaux ce qui peut provoquer un phénomène de diffusion numérique par perte d’informations spatiales. Le suivi de la matière et de ses variables d’histoire peut être compliqué.

2.3.2 Le formalisme ALE

2.3.3 Motivations et principe

Les problèmes de solides en grandes déformations ou d’interactions fluide/structure font souvent intervenir des matériaux subissant de grandes déformations tout en accordant une grande importance à la position de la matière et des interfaces.

Les méthodes numériques pour traiter ces situations doivent donc pouvoir gérer de grandes distorsions de la matière en essayant de garder une bonne description de certaines interfaces et un bon suivi des matériaux. Dans cette optique, le formalisme Arbitrairement Lagrangien Eulérien (ALE) a été développé en essayant de combiner les avantages des deux formalismes classiques tout en diminuant leurs inconvénients. Elle a été introduite pour la première fois par Hirt au début des années 70 ([41]). Sa forme est une généralisation des deux formalismes précédents et permet d’exprimer la formulation eulérienne ou lagrangienne comme des cas

particuliers de l’ALE (voir [25]).

Le référentiel utilisé dans cette méthode se déplace à une vitesse arbitraire et indépendante de la matière. Ce déplacement peut être nul dans certaines zones du domaine et égal à celui de la matière dans d’autres. Cela permet de combiner dans un même domaine des zones où le référentiel est équivalent au référentiel eulérien et des zones où le référentiel est équivalent au référentiel lagrangien et donc de suivre certaines interfaces de manière lagrangienne. Le référentiel peut également être quelconque, ayant une vitesse qui n’est ni nulle, ni celle de la matière. En général, le mouvement du référentiel est alors gardé le plus proche possible de celui de la matière sous condition de limiter les déformations du maillage. Cette liberté de mouvement permet de gérer numériquement des déformations de matières plus grandes que ce que permettrait une méthode lagrangienne car la déformation du référentiel n’est pas aussi importante que celle de la matière. La résolution est alors meilleure que ce que donnerait une méthode eulérienne car le référentiel suit mieux la matière dans son ensemble.

2.3.3.1 Description du mouvement

Nous avons vu dans la section précédente que les points du domaine pouvait être localisés à partir de :

- \underline{X} , les coordonnées matérielles pour le formalisme lagrangien ;
- \underline{x} , les coordonnées spatiales pour le formalisme eulérien.

La méthode ALE introduit une nouvelle coordonnées que nous appellerons :

- $\underline{\chi}$, les coordonnées de référence du formalisme ALE.

Ces coordonnées sont liés à notre référentiel se déplaçant à une vitesse \underline{v} dans l’espace euclidien. La vitesse du référentiel est arbitraire et permet de retomber sur $\underline{\chi} = \underline{x}$ si $\underline{v} = 0$ et $\underline{\chi} = \underline{X}$ si $\underline{v} = \underline{u}$. La vitesse \underline{v} est un paramètre indépendant de la physique du système et que nous pouvons choisir.

2.3.3.2 Dérivées en temps

À l’instar de la dérivée en temps eulérienne, la dérivée en temps ALE $\left. \frac{\partial \bullet}{\partial t} \right|_{\underline{\chi}}$ doit prendre en compte le mouvement relatif entre la matière et le référentiel. La dérivée matérielle en temps dans un schéma ALE prend la forme

$$\frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f(\underline{\chi}(\underline{X}, t), t)}{\partial t} \right|_{\underline{X}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\underline{\chi}} + (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \nabla f. \quad (2.2)$$

Dans cette relation, la notation $\nabla \bullet$ représente le gradient par rapport à la position spatiale \underline{x} ,

$$\nabla \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial \underline{x}}.$$

Cette formulation fait apparaître un terme d’advection à une vitesse égale la différence de vitesses entre la matière et le maillage. Nous retrouvons bien $\left. \frac{\partial \bullet}{\partial t} \right|_{\underline{\chi}} = \frac{df}{dt}$ si $\underline{v} = \underline{u}$ et $\left. \frac{\partial \bullet}{\partial t} \right|_{\underline{\chi}} = \frac{\partial f}{\partial t}$ si $\underline{v} = 0$.

2.3.3.3 Méthode

Les méthodes ALE associent donc leur maillage au référentiel défini ci-dessus. Le maillage pourra donc être fixe dans certaines zones, mobiles dans d’autres et il est alors possible de

limiter la vitesse du référentiel pour garder des déformations du maillage acceptable. Dans les zones où le maillage a une vitesse qui n'est pas celle de la matière, des flux de masses s'établissent entre les mailles mais ces flux ne sont pas aussi importants qu'avec un maillage fixe ce qui permet de mieux suivre la matière.

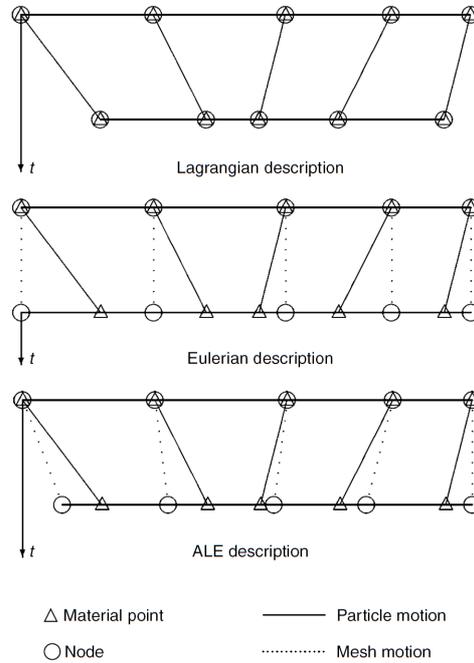


FIGURE 2.4 – Comparaison du déplacement du maillage et de la matière pour les 3 formalismes dans un cas 1D, illustration issue de [25]

La figure 2.4 compare les différents formalismes et illustre le déplacement de la matière et du maillage dans chacun des cas. Nous y voyons le déplacement du maillage nul dans le cas eulérien, le déplacement de maillage identique à celui de la matière dans le cas lagrangien et la description ALE permettant un mouvement arbitraire du maillage.

2.4 Équations continues du système dans le cadre multi-matériau non-miscible

2.4.1 Lois de conservation

Pour les applications qui nous concernent, les effets hydrodynamiques pilotent le système. Les efforts internes dans la matière sont décrits par le tenseur des contraintes de Cauchy. La partie sphérique de ce tenseur traduit les effets hydrodynamiques. Elle est alors prépondérante vis-à-vis de la partie déviatorique ([10, 99]). Les équations décrivant l'évolution des matériaux, solides compris, sont héritées de l'hydrodynamique avec les systèmes de lois de conservation couramment utilisés pour l'étude des écoulements compressibles.

Notre système est donc régi par les trois lois de conservation classiques, écrites ici en termes de variables eulériennes.

2.4.1.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse exprime le transport de la matière sans création de masse à l'intérieur du système. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha) = 0, \quad (2.3)$$

où ρ_α désigne la densité du matériau α (mesuré par unité de volume du référentiel eulérien) et \underline{u}_α , sa vitesse matérielle propre.

2.4.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement relie l'accélération du milieu et les efforts. Elle prend la forme

$$\frac{\partial \rho_\alpha \underline{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha \otimes \underline{u}_\alpha) = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_\alpha. \quad (2.4)$$

Dans cette équation, $\underline{\underline{\sigma}}_\alpha$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. Le terme $\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_\alpha$ est un terme de résultante des efforts intérieurs qui va créer de la quantité de mouvement lorsque les contraintes ne sont pas uniformes dans le milieu. Cette relation est l'écriture du principe fondamental de la dynamique dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

2.4.1.3 Conservation de l'énergie

Une particularité du système utilisé ici est d'exprimer la conservation de l'énergie en terme d'énergie interne spécifique e_α . L'énergie totale E_α est la somme de l'énergie interne et l'énergie cinétique et a pour expression

$$E_\alpha = \rho_\alpha e_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha |\underline{u}_\alpha|^2.$$

L'équation d'évolution de l'énergie interne s'écrit

$$\frac{\partial \rho_\alpha e_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha e_\alpha \underline{u}_\alpha) = \underline{\underline{\sigma}}_\alpha : \underline{\underline{d}}_\alpha. \quad (2.5)$$

Le terme source $\underline{\underline{\sigma}}_\alpha : \underline{\underline{d}}_\alpha$ est le produit contracté des contraintes avec le tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{d}}_\alpha$. Ces deux tenseurs sont décrits plus loin. Ce terme correspond la puissance des efforts internes dans la matière. Les effets de flux thermiques et de source de chaleur ne sont pas pris en compte. On néglige donc en première approximation des sources de chaleur extérieures et les termes de conduction supposés négligeables à l'échelle de temps utilisée.

2.4.1.4 Relation de saut sur l'interface

Dans le cas de système avec un interface à l'intérieur du domaine et pouvant présenter des discontinuités, l'équation (2.3) implique la continuité des vitesses à l'interface dans la direction normale à celle-ci ce qui s'écrit

$$[\underline{u}] \cdot \underline{n}_\Gamma = 0 \quad \text{si} \quad \underline{x} \in \Gamma \quad (2.6)$$

et l'équation (2.4) implique la continuité du vecteur contrainte au passage de l'interface

$$[\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{n}_\Gamma = 0 \quad \text{si} \quad \underline{x} \in \Gamma \quad (2.7)$$

où la notation $[\bullet]$ indique le saut d'une quantité au passage de l'interface $(\bullet_\beta - \bullet_\alpha)$. Le saut de vitesse est donc défini par $[\underline{u}] = \underline{u}_\beta - \underline{u}_\alpha$, où \underline{u}_α , respectivement \underline{u}_β , sont les valeurs limites de \underline{u} approchant l'interface Γ depuis \mathcal{D}_α , respectivement \mathcal{D}_β . La même définition s'applique pour le saut du tenseur des contraintes de Cauchy qui prend la forme $[\underline{\sigma}] = \underline{\sigma}_\beta - \underline{\sigma}_\alpha$.

Ces égalités proviennent de l'intégration sur tout le domaine \mathcal{D} des champs ayant une discontinuité et s'interprète physiquement. La continuité des vitesses normales (2.6) traduit la non-interpénétration des matériaux et la continuité du vecteur contrainte à l'interface (2.7) traduit la troisième loi de Newton, les efforts de α sur β et de β sur α sont égaux en norme et opposés en direction.

L'équation de conservation d'énergie (2.5), écrite en terme d'énergie interne, n'a pas d'interprétation au sens des distributions. Elle doit être intégrée séparément sur chacun des domaines matériaux \mathcal{D}_α et n'implique pas de relation de saut spécifique à vérifier à l'interface en l'absence de flux thermique.

2.4.2 Écriture des équations dans le formalisme ALE

Le système d'équations (2.3), (2.4), (2.5)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha) = 0, & (2.8) \\ \frac{\partial \rho_\alpha \underline{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha \otimes \underline{u}_\alpha) = \nabla \cdot \underline{\sigma}_\alpha, & (2.9) \\ \frac{\partial \rho_\alpha e_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha e_\alpha \underline{u}_\alpha) = \underline{\sigma}_\alpha : \underline{d}_\alpha. & (2.10) \end{cases}$$

est écrit en formulation eulérienne et fait intervenir les dérivées eulérienne en temps. Nous allons ré-écrire ce système dans le cadre du formalisme général ALE pour pouvoir ensuite le discrétiser avec une méthode adéquate.

En utilisant l'expression de la dérivée en temps dans le cadre eulérien (2.1) et dans le cadre ALE (2.2), nous pouvons écrire directement la relation entre la dérivée eulérienne et la dérivée ALE

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_\chi = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + \underline{v} \cdot \nabla f.$$

Les équations continues exprimées dans le cadre ALE prennent donc la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} \Big|_\chi + (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \nabla \rho_\alpha = -\rho_\alpha \nabla \cdot \underline{u}_\alpha, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\alpha \frac{\partial \underline{u}_\alpha}{\partial t} \Big|_\chi + \rho_\alpha (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \nabla \underline{u}_\alpha = \nabla \cdot \underline{\sigma}_\alpha, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\alpha \frac{\partial e_\alpha}{\partial t} \Big|_\chi + \rho_\alpha (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \nabla e_\alpha = \underline{\sigma}_\alpha : \underline{d}_\alpha. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Remarquons que si $\underline{v} = \underline{u}$, $\underline{X} = \underline{\chi}$ et nous retrouvons bien le système classique écrit en variables lagrangiennes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho_\alpha}{dt} = -\rho_\alpha \nabla \cdot \underline{u}_\alpha, \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\alpha \frac{d\underline{u}_\alpha}{dt} = \nabla \cdot \underline{\sigma}_\alpha, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\alpha \frac{de_\alpha}{dt} = \underline{\sigma}_\alpha : \underline{d}_\alpha. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Les méthodes numériques, en particulier les méthodes de type « volumes finis » et « éléments finis » s'intéressent en général à l'intégration de ces équations sur un volume. Regardons le bilan de ces équations sur un volume fixe dans le référentiel ALE, mais mobile dans le référentiel spatial. Pour cela, nous intégrons la conservation de la masse (2.3) sur un volume $V_c(t)$ se déplaçant à la vitesse \underline{v}

$$\int_{V_c(t)} \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha) \right) dV = 0.$$

En notant que

$$\int_{V_c(t)} \nabla \cdot (\rho_\alpha \underline{u}_\alpha) dV = \int_{\partial V_c(t)} \rho_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \underline{n} dS,$$

l'équation devient

$$\int_{V_c(t)} \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} dV + \int_{\partial V_c(t)} \rho_\alpha \underline{u}_\alpha \cdot \underline{n} dS = 0.$$

Le théorème de transport de Reynolds permet d'obtenir l'expression de l'intégrale sur un volume se déplaçant avec une vitesse arbitraire de la dérivée en temps de la densité. Son application transforme (2.11) en

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathcal{X}} \int_{V_c(t)} \rho_\alpha dV + \int_{\partial V_c(t)} \rho_\alpha (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = 0.$$

Dans cette dernière forme, nous remarquons que l'évolution de la masse d'un volume se déplaçant à la vitesse \underline{v} ne va dépendre que du flux de matière balayée par le maillage à l'instant t

$$\int_{\partial V_c(t)} \rho_\alpha (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS$$

et dépend donc de la différence de vitesse entre le maillage et la matière.

Le même raisonnement pour la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie permet d'obtenir le système dans le cadre ALE sous forme intégrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathcal{X}} \int_{V(t)} \rho_\alpha dV + \int_{\partial V(t)} \rho_\alpha (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathcal{X}} \int_{V(t)} \rho_\alpha \underline{u}_\alpha dV + \int_{\partial V(t)} \rho_\alpha \underline{u}_\alpha (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_\alpha dV, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathcal{X}} \int_{V(t)} \rho_\alpha e_\alpha dV + \int_{\partial V(t)} \rho_\alpha e_\alpha (\underline{u}_\alpha - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = \int_{V(t)} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha : \underline{\underline{d}}_\alpha dV. \quad (2.19)$$

Les différentes expressions et quantités intervenant dans ce système sont expliquées plus en détails dans les paragraphes suivants.

2.4.3 Tenseur des taux de déformations

Nous pouvons suivre les transformations du domaine par l'étude de l'application $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t)$ et de son gradient $\underline{\underline{F}} = \frac{d\underline{x}}{d\underline{X}}$ qui nous donne une mesure des déformations subies par le matériau.

Dans le cas de grandes transformations et de dynamique rapide, il est plus aisé et intéressant de regarder les vitesses de déformations. Ces vitesses de déformations sont mesurées par le

gradient de vitesse $\underline{\underline{L}} = \frac{d\underline{u}}{d\underline{x}}$ et plus spécifiquement, la partie symétrique de ce gradient, définie par

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\underline{u}}{d\underline{x}} + \frac{d\underline{u}^T}{d\underline{x}} \right) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T).$$

Le tenseur $\underline{\underline{d}}$ est appelé tenseur des taux de déformations. Il est noté par composante

$$\underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}.$$

Ce tenseur est le gradient spatial des vitesses. Il est donc défini à partir de la configuration eulérienne. Il permet de mesurer les élongations dans les différentes directions de l'espace et les distorsions dans chacun des plans. La trace de ce tenseur $\text{Tr}(\underline{\underline{d}})$ est égale à la divergence de la vitesse $\nabla \cdot \underline{u}$ et mesure le taux de dilatation volumique de la matière.

Ce tenseur est par définition symétrique et nécessite, en 3 dimensions, uniquement six valeurs pour être complètement défini.

Les taux de déformations interviennent dans le calcul des efforts internes et nous seront utiles pour écrire les lois de comportements élastiques sous forme incrémentale.

2.4.4 Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ permet de représenter les efforts internes dans les matériaux. Défini comme le tenseur des déformations $\underline{\underline{d}}$ sur une configuration actuelle, il permet de calculer la puissance des efforts internes $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$ introduite dans (2.5).

Le tenseur de Cauchy est symétrique et peut se décomposer, comme tous les tenseurs, en une partie sphérique représentée par un scalaire et une partie déviatorique de trace nulle. La décomposition prend la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \right) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}.$$

La partie sphérique $\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})$ est un terme correspondant à une pression moyenne qui est l'opposé de la pression hydrodynamique p que l'on retrouve dans la dynamique des fluides. Cette pression est responsable des changements de volumes. La trace d'un tenseur est un de ses invariants, la pression hydrodynamique ne dépend donc pas du repère dans lequel le tenseur des contraintes est exprimé.

Le déviateur des contraintes, noté $\underline{\underline{S}}$, a donc pour expression

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}.$$

Il est lié aux efforts de cisaillements et est responsable des distorsions que subit la matière. La trace de ce tenseur est nulle et les déformations induites se font à volume constant.

Avec ces notations, le tenseur des contraintes s'écrit donc pour chaque matériau

$$\underline{\underline{\sigma}}_\alpha = \underline{\underline{S}}_\alpha - p_\alpha \underline{\underline{1}}.$$

2.4.5 Lois constitutives

Pour assurer la fermeture du système, il faut lui ajouter une relation liant la pression et le déviateur des contraintes aux quantités thermodynamiques décrivant l'état de la matière et ses déformations. Dans le cas d'un matériau isotrope, nous pouvons écrire une loi d'état qui lie la pression à la densité et l'énergie interne et une loi de comportement exprimant le déviateur des contraintes en fonction des déformations du milieu. Dans le cas anisotrope, une telle séparation n'est plus possible. La partie sphérique ne représente plus la pression hydrodynamique. C'est la totalité du tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}_\alpha$ qui va dépendre de la densité ρ_α , de l'énergie interne e_α et des déformations $\underline{\underline{d}}_\alpha$ via une unique loi de comportement.

Dans un cas hydrodynamique pur, les gaz et liquides ne résistent pas en cisaillement, la partie déviatorique est nulle et les lois constitutives se réduisent à

$$p_\alpha = \text{EOS}_\alpha(\rho_\alpha, e_\alpha), \quad \underline{\underline{S}}_\alpha = 0$$

où $\text{EOS}_\alpha(\rho_\alpha, e_\alpha)$ représente la loi d'état caractéristique du matériau α . Dans le cas de solides, cette loi est complétée par une relation sur le déviateur des contraintes $\underline{\underline{S}}$. Cette loi peut prendre une forme élastique en petites déformations

$$p_\alpha = \text{EOS}_\alpha(\rho_\alpha, e_\alpha), \quad \underline{\underline{S}}_\alpha = 2G_\alpha(\underline{\underline{\varepsilon}}_\alpha - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_\alpha)\underline{\underline{1}}),$$

ou une forme hypo-élastique caractérisant l'évolution de $\underline{\underline{S}}$ en fonction $\underline{\underline{d}}$

$$p_\alpha = \text{EOS}(\rho_\alpha, e_\alpha), \quad \dot{\underline{\underline{S}}}_\alpha = 2G_\alpha(\underline{\underline{d}}_\alpha - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{d}}_\alpha)\underline{\underline{1}})$$

voire élasto-plastique en ajoutant une surface de charge, une loi d'écoulement et une loi d'écoulement plastique [22, 77]. Un exemple simple de comportement élasto-plastique est donné sous la forme

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_\alpha = 2G_\alpha(\underline{\underline{d}}_\alpha - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{d}}_\alpha)\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{d}}_{p\alpha})$$

avec $\underline{\underline{d}}_{p\alpha}$ le tenseur des taux de déformations plastiques et en utilisant le critère de Von Mises ([57]) avec écoulement isotrope

$$f_\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{S}}_\alpha : \underline{\underline{S}}_\alpha} - R_\alpha \leq 0$$

et en prenant une loi d'écoulement plastique respectant la règle de normalité

$$\underline{\underline{d}}_{p\alpha} = \dot{\lambda}_\alpha \frac{df_\alpha}{d\underline{\underline{\sigma}}_\alpha}(\underline{\underline{\sigma}}_\alpha)$$

où $\dot{\lambda}_\alpha$ le multiplicateur plastique, positif et nul quand la fonction de charge ne l'est pas

$$f_\alpha \dot{\lambda}_\alpha = 0.$$

Le terme $\dot{\underline{\underline{S}}}_\alpha$ dénote la dérivée matérielle du tenseur $\underline{\underline{S}}_\alpha$ à remplacer dans les cas en grandes rotations par une dérivée temporelle objective de type Jaumann [22, 46].

2.4.6 Traitement des chocs : Pseudo-Viscosité

Un choc est un zone de variation brutale des quantités thermodynamiques, la distance de variation des grandeurs est en dessous de l'échelle de taille des mailles et le choc est représenté mathématiquement par une discontinuité. De tels phénomènes compliquent souvent les méthodes numériques et font apparaître des oscillations non-physiques qui peuvent aboutir à l'échec de la simulations si aucune précaution n'est prise. De manière plus précise, en présence de chocs, les solutions hydrodynamiques peuvent être multiples. Parmi ces solutions, les seules solutions physiques sont les solutions entropiques obtenues comme limite de solution créant de l'entropie. Afin de construire de telles limites, il convient d'introduire un mécanisme de création d'entropie.

Pour n'autoriser que des chocs avec dissipation entropique, un terme de pseudo-viscosité est ajouté à la pression et aux contraintes dans les équations de conservation de mouvement (2.4) et d'énergie (2.5). Cette pseudo-viscosité, introduite pour la première fois par Von Neumann et Richtmyer (voir [88]), est un terme dissipatif similaire aux mécanismes de viscosité ou de diffusion de la chaleur. Il permet d'étaler légèrement les chocs et rétablit la continuité des solutions. En considérant une pseudo-viscosité isotrope similaire à une pression hydrodynamique, le tenseur des contraintes avec ce terme supplémentaire s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{S}} - p\underline{\underline{\mathbf{1}}} - q\underline{\underline{\mathbf{1}}}.$$

Dans cette formule, le terme de pseudo viscosité scalaire q est composé le plus souvent d'un terme linéaire et d'un terme quadratique dépendant de la dérivée en temps du volume spécifique $\nu = \frac{1}{\rho}$:

$$q = \begin{cases} \frac{1}{\nu} [C_A l^2 |\dot{\nu}|^2 + C_L l c |\dot{\nu}|] & \text{si } \dot{\nu} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu} > 0 \end{cases}.$$

Au delà du temps caractéristique pris égal à $\frac{|l|}{|\dot{\nu}|}$, cette pseudo-viscosité fait intervenir une longueur caractéristique l que nous prenons de l'ordre de la taille des mailles utilisées. Cette longueur caractéristique permet de faire tendre la pseudo-viscosité vers 0 lorsque le maillage se raffine et permet d'espérer de converger vers une solution entropique à cette limite. Enfin, la notation c désigne la vitesse du son dans la maille considérée.

Nous observons que, par construction, ce terme de viscosité dissipe de l'énergie mécanique dans les écoulements en compression à un taux $\frac{1}{\rho} q \underline{\underline{\mathbf{1}}}$: $\underline{\underline{d}} = -q \dot{\nu}$ et est inactif dans les zones de détente ($\dot{\nu} > 0$).

Dans notre étude, nous nous limiterons à l'utilisation d'une pseudo-viscosité scalaire. Cette formulation réagit à un choc uniquement par l'intermédiaire de la mesure d'un changement de volume $\dot{\nu}$ sans voir la direction de propagation du choc.

D'autres formulations existent, pouvant donner une structure vectorielle ou tensorielle à la pseudo-viscosité et essayant d'introduire le mécanisme dissipatif uniquement dans la direction du choc ou essayant de discriminer plus finement les chocs des autres phénomènes de compression (voir [20, 19, 50, 89]).

2.4.7 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur le bord du domaine s'écrivent pour les conditions de Dirichlet et de Neumann

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} &= T_l & \text{sur } \partial\mathcal{D}_n, \\ \underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{u}}_l & \text{sur } \partial\mathcal{D}_d. \end{aligned}$$

Il est possible de ne contraindre la vitesse dans une seule direction de l'espace et laisser libre les autres directions. La condition imposée concerne alors la projection de la vitesse dans la direction contrainte ce qui s'écrit

$$\underline{u} \cdot \underline{n}_d = u_l \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_d.$$

où $\underline{n}_d(\underline{x}, t)$ est la normale donnant la direction dans laquelle la vitesse est imposée et $u_d(\underline{x}, t)$ est la valeur imposée dans cette direction. Pour simplifier la suite des développements mathématiques, nous prenons des conditions limites nulles sur le bord du domaine

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} &= \underline{0} \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_n, \\ \underline{u} &= \underline{0} \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{D}_d. \end{aligned}$$

Ces conditions nulles sont imposées uniquement pour simplifier les expressions mathématiques et simplifier les systèmes en cours d'écriture.

La prise en compte de conditions aux limites non-nulles ne présentent pas de difficultés. Nous ré-introduisons le cas plus général des conditions aux limites de Dirichlet non-nulles une fois la méthode complètement écrite.

2.4.8 Déformations planes

Nous considérons que notre système possède une symétrie plane dans un repère cartésien. Nous faisons donc l'hypothèse de déformation plane dans le plan $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$.

L'état du matériau est considéré constant dans la direction e_z ce qui annule toute dérivée $\frac{\partial \bullet}{\partial z}$ dans cette direction. Cette hypothèse permet de ramener l'étude du système tri-dimensionnel à l'étude d'un cas 2D plan. Les déformations se produisant uniquement dans les directions \underline{e}_x et \underline{e}_y . Certains termes du tenseur des taux de déformations s'annulent et il se réduit à 4 composantes

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En partant de la loi d'état et de la loi de comportement, nous pouvons identifier les termes nuls du tenseur des contraintes et le simplifier pour lui donner une expression faisant intervenir 5 composantes

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Discrétisation des équations volumiques dans le cas mono-matériau

Sommaire

3.1	Décomposition du pas de temps	20
3.1.1	Phase lagrangienne	21
3.1.2	Phase d'advection	21
3.2	Discrétisation des champs d'inconnues	22
3.3	Phase Lagrangienne	24
3.3.1	Conservation de la masse	24
3.3.2	Conservation de l'énergie et loi d'état	24
3.3.3	Conservation de la quantité de mouvement	26
3.3.4	Condensation de la masse	26
3.3.5	Pseudo-viscosité	28
3.3.6	Résolution	29
3.4	Phase de transport	29
3.4.1	Régularisation du maillage	30
3.4.2	Projection	31
3.4.2.1	Principe	31
3.4.2.2	Ordre 1	32
3.4.2.3	Ordre 2	34

Dans ce chapitre, nous présentons la discrétisation du système qui servira ensuite de base au développement de notre schéma. La méthode introduite ici est écrite dans un cadre mono-matériau et sans terme d'interface. La discrétisation des équations volumiques présentée dans ce chapitre sera utilisée par la suite pour les mailles éloignées de l'interface. Pour simplifier les notations, nous omettons ici l'indice α dénotant l'appartenance à un matériau. Cette distinction n'a pas lieu d'être dans le cas mono-matériau.

Les équations du système sont discrétisées en suivant le schéma lagrangien de Wilkins ([90]), décalé en temps et en espace. Ce schéma est couramment utilisé dans les codes industriels pour traiter les écoulements hydrodynamiques ou élasto-plastiques. Cette méthode est implantée dans le code hydrodynamique dans lequel nos travaux seront également insérés.

3.1 Décomposition du pas de temps

Dans le formalisme ALE précédemment introduit, les équations à résoudre sont les trois lois de conservations (2.17), (2.18) et (2.19) intégrées sur un volume se déplaçant à une vitesse de maillage arbitraire

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \int_{V(t)} \rho dV + \int_{\partial V(t)} \rho(\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \int_{V(t)} \rho \underline{u} dV + \int_{\partial V(t)} \rho \underline{u}(\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} dV, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \int_{V(t)} \rho e dV + \int_{\partial V(t)} \rho e(\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = \int_{V(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dV. \quad (3.3)$$

Les méthodes ALE dites « directes » résolvent directement ce système mais cela nécessite de connaître *a priori* la vitesse que nous voulons imposer au maillage. Nous utilisons plutôt une méthode de type « Lagrange + projection » [53, 10] qui décompose le pas de temps dt en deux phases (voir figure 3.1) :

- dans un premier temps, la matière et le maillage se déplacent à la même vitesse $\underline{v}_{lag} = \underline{u}_{lag}$ durant une durée dt . Il n'y a pas de transfert de matière entre les mailles durant cette phase ;
- durant la deuxième phase, la matière reste fixe $\underline{u}_{ale} = 0$ alors que le maillage se déplace à une vitesse $\underline{v}_{ale} = -(\underline{u}_{lag} - \underline{v})$ durant une durée dt_{ale} . L'évolution des grandeurs du maillage est alors uniquement due aux flux entre les mailles.

Par addition, nous remarquons que la matière s'est déplacée au final avec une vitesse $\underline{u} = \underline{u}_{ale} + \underline{u}_{lag} = \underline{u}_{lag}$ alors que le maillage s' est déplacé avec une vitesse

$$\underline{v} = \underline{v}_{lag} + \underline{v}_{ale} = \underline{u}_{lag} - (\underline{u}_{lag} - \underline{v}) = \underline{v},$$

\underline{v} étant une vitesse arbitraire de maillage.

Ce type de méthode présente plusieurs avantages dont une facilité de mise en œuvre et un contrôle plus immédiat sur la déformation du maillage en fin de pas temps. Il est possible de récupérer un algorithme lagrangien pré-existant pour gérer la première phase et l'ensemble peut se voir comme une méthode lagrangienne avec remaillage à connectivité de maillage constante.

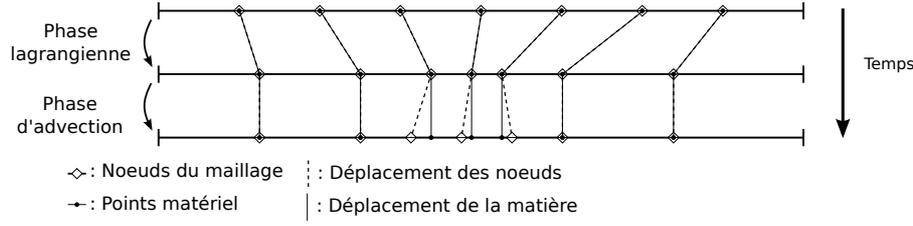


FIGURE 3.1 – Phases ALE

3.1.1 Phase lagrangienne

La vitesse du maillage est ici la même celle de la matière ce qui annule les termes d'advection en $(\underline{u} - \underline{v})$. La première phase se résume à la résolution des équations

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} dV = \int_{V(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} dV, \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e dV = \int_{V(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dV. \quad (3.6)$$

Les domaines d'intégration font ici référence à des volumes se déplaçant à la même vitesse \underline{u} que la matière pendant un pas de temps dt . Écrites sous forme locale, La dérivée ALE est équivalente à la dérivée matérielle dans cette phase. Les équations (2.11)-(2.13) s'écrivent donc, sous forme locale,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{u}, \quad (3.7)$$

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}, \quad (3.8)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}. \quad (3.9)$$

De ce fait, cette phase est appelée la phase lagrangienne du pas de temps.

3.1.2 Phase d'advection

La seconde partie est la résolution du système d'équations

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \int_{V(t)} \rho dV + \int_{\partial V(t)} \rho (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \int_{V(t)} \rho \underline{u} dV + \int_{\partial V(t)} \rho \underline{u} (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_x \int_{V(t)} \rho e dV + \int_{\partial V(t)} \rho e (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS = 0. \quad (3.12)$$

Ici, les équations se réfèrent ici à des volumes allant à la vitesse $-(\underline{u} - \underline{v})$ durant un pas de temps dt_{ale} . Durant cette phase, le maillage se déplace pour atteindre la position qu'il aurait du avoir si nous l'avions déplacé directement à la vitesse \underline{v} durant le pas de temps. Le système d'équations correspond à un système traduisant l'advection de la matière fixe à travers un

maillage en déplacement. L'évolution des grandeurs dans un volume $V(t)$ ne dépend que des flux de quantités $\int_{\partial V(t)} \bullet(\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} dS$ entrants ou sortants à travers la surface de ce volume.

Cette phase sera appelée la phase de transport ou phase d'advection de l'algorithme. Le système (3.10), (3.11), (3.12) fait apparaître les quantités qui doivent être conservées dans le système. Ces quantités sont :

- la masse à travers l'intégrale de la densité $\int \rho dV$;
- la quantité de mouvement à travers l'intégrale de la quantité de mouvement volumique $\int \rho \underline{u} dV$;
- l'énergie interne à travers l'intégrale de l'énergie interne spécifique pondérée par la densité (ce qui donne une énergie interne volumique) $\int \rho e dV$.

Notons que la phase lagrangienne ne fait pas intervenir la vitesse de maillage \underline{v} . Elle n'intervient que dans la phase de transport. Nous pouvons donc choisir *a posteriori* cette vitesse afin de limiter la déformation du référentiel due à la première phase et pour conserver un maillage ayant des qualités géométriques suffisantes. Au final, la quantité importante n'est pas la vitesse du maillage mais la déformation ($\underline{v}_{ale} dt_{ale}$) qui lui est appliquée durant la phase de transport.

3.2 Discrétisation des champs d'inconnues

Nous discrétisons à chaque pas de temps notre domaine d'étude en un maillage non structuré noté par abus de notation $\mathcal{D}(t)$ et composé de K mailles $\Omega_k(t)$ se déplaçant avec la matière. Définissons également un maillage ALE $\mathcal{F}(t)$ ayant le même nombre de mailles, $\mathcal{D}(t) = \bigcup_{l=1, K} \Omega_l(t)$, les mêmes connectivités que $\mathcal{D}(t)$ et étant une régularisation de ce dernier. Autrement dit, $\mathcal{F}(t)$ est un lissage présentant de meilleures qualités géométriques. Les mailles régularisées sont notées $\Omega_l(t)$ et se déplacent à une vitesse différente des mailles lagrangiennes $\Omega_k(t)$. Ces maillages sont composés uniquement de mailles quadrangulaires, un exemple est donné figure 3.2 pour fixer les idées. Nous noterons pour le maillage lagrangien utilisé à

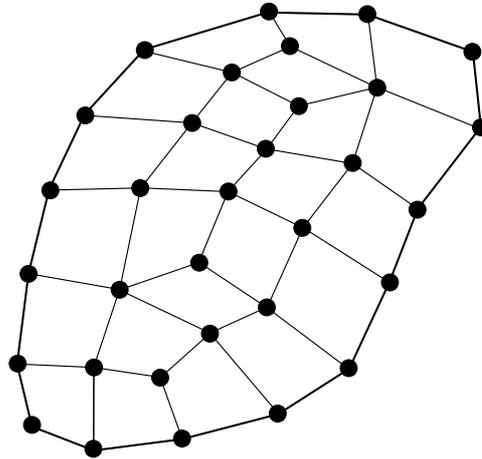


FIGURE 3.2 – Exemple de maillage quadrangulaire du domaine

chaque pas de temps :

Ω_k : la maille (primale) k ;

\underline{x}_k : le centre de la maille Ω_k ;

χ_{Ω_k} : la fonction caractéristique de la maille k , valant 1 si $\underline{x} \in \Omega_k$, 0 sinon ;

N_k : l'ensemble des nœuds i de la maille Ω_k ;

\underline{x}_i : les coordonnées du nœud i ;

Ψ_i : la fonction de forme nodale de type « éléments finis » d'ordre 1, associée au nœud i .
 Cette fonction est linéaire sur les triangles et bi-linéaires sur les quadrangles permettant d'interpoler toute fonction continue f par

$$I_h f(\underline{x}) = \sum_i f(\underline{x}_i) \Psi_i(\underline{x});$$

\underline{u}_i : la vitesse du point x_i ;

Δ_i : la maille duale centrée autour du nœud i ;

χ_{Δ_i} : la fonction caractéristique de la maille duale i , valant 1 si $\underline{x} \in \Delta_i$, 0 sinon ;

M_i : l'ensemble des mailles voisines du nœud i .

D'une manière générale, les indices i ou j dénoteront les variables discrétisées par nœud alors que les indices k et l indiqueront que la variable est définie par maille.

Le schéma de Wilkins est un schéma décalé en espace, c'est à dire que les vitesses et les accélérations seront définies aux nœuds alors que les grandeurs thermodynamiques comme la densité, la pression ou l'énergie interne seront définies centrées sur les mailles. Le schéma est également décalé en temps, les vitesses étant définis aux temps $t^{n+1/2}$ alors que les quantités centrées ainsi que les accélérations et les positions sont définies aux temps t^n .

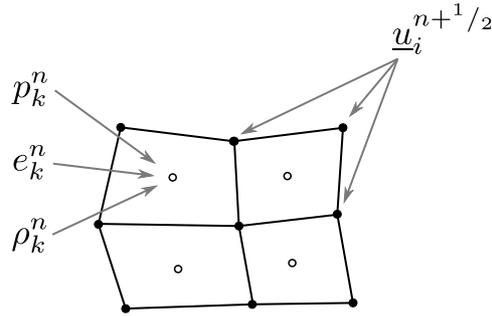


FIGURE 3.3 – Discrétisation du schéma de Wilkins

Les champs de grandeurs centrées sont discrétisés en espace en les écrivant sur la base des fonctions caractéristiques des mailles. Ils sont donc approchés par leur valeur moyenne dans la maille et s'écrivent, sous forme discrétisée en espace et continu en temps,

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sum_k \underline{\underline{\sigma}}_k \chi_{\Omega_k}(\underline{x}), \quad (3.13)$$

$$\rho(\underline{x}) = \sum_k \rho_k \chi_{\Omega_k}(\underline{x}), \quad (3.14)$$

$$e(\underline{x}) = \sum_k e_k \chi_{\Omega_k}(\underline{x}). \quad (3.15)$$

La vitesse est écrite sur la base des fonctions de forme nodales « éléments finis » bi-linéaire par élément et s'écrit

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_i \underline{u}_i \Psi_i(\underline{x}) \quad (3.16)$$

Alors que les grandeurs centrées sont discontinues entre les mailles, le champ de vitesse est continu sur tout le domaine.

3.3 Phase Lagrangienne

3.3.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse est écrite sous forme faible en intégrant (3.7) pondérée par la fonction caractéristique associée à chaque maille Ω_k

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} \right) \chi_{\Omega_k} dV = 0, \forall k.$$

Ceci revient à écrire (3.4) sur Ω_k ce qui donne

$$\frac{d}{dt} (\rho_k V_k) = 0, \forall k \quad (3.17)$$

où V_k est le volume de la maille Ω_k et ρ_k la masse volumique moyenne de la cellule Ω_k .

Enfin, l'intégration en temps entre t^n et t^{n+1} donne finalement

$$\rho_k^n V_k^n = \rho_k^{n+1} V_k^{n+1} = m_k.$$

Le terme m_k est la masse totale de la maille, constante au cours de la phase lagrangienne.

3.3.2 Conservation de l'énergie et loi d'état

L'équation de conservation de l'énergie (3.9) est écrite sous forme faible de la même manière que la conservation de la masse ce qui donne

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\rho \frac{de}{dt} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \right) \chi_{\Omega_k} dV = 0, \forall k.$$

En décomposant les contraintes en partie sphérique et déviatorique, nous obtenons

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{de}{dt} \chi_{\Omega_k} dV = \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{d}} \chi_{\Omega_k} dV - \int_{\mathcal{D}} (p + q) \nabla \cdot \underline{u} \chi_{\Omega_k} dV.$$

Après intégration et en notant que la conservation de la masse (3.7) nous permet d'écrire la divergence de la vitesse sous la forme

$$\nabla \cdot \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

l'équation d'énergie s'écrit en valeurs moyennes

$$\rho_k V_k \frac{de_k}{dt} = V_k \underline{\underline{S}}_k : \underline{\underline{d}}_k + (p_k + q_k) V_k \frac{1}{\rho_k} \frac{d\rho_k}{dt} = 0, \forall k. \quad (3.18)$$

Après division par $\rho_k V_k$ et sachant que $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$, l'équation de la conservation d'énergie discrétisée en espace prend donc la forme finale

$$\frac{de_k}{dt} = -(p_k + q_k) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_k} \right) + \frac{1}{\rho_k} (\underline{\underline{S}}_k : \underline{\underline{d}}_k), \forall k.$$

Indiquons que l'énergie interne utilisée ici comprend théoriquement l'énergie élastique de déformation. Les déformations élastiques interviennent dans la loi d'état par l'intermédiaire de l'énergie interne.

L'intégration en temps est réalisée en utilisant un schéma trapèze pour la pression et les contraintes et un schéma point milieu pour la pseudo-viscosité et le tenseur des taux de déformations ce qui permet d'obtenir la forme discrétisée en temps et en espace

$$e_k^{n+1} = e_k^n - \left(\frac{p_k^{n+1} + p_k^n}{2} + q_k^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_k^{n+1}} - \frac{1}{\rho_k^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_k^{n+1/2}} (\underline{S}_k^{n+1/2} : \underline{d}_k^{n+1/2}), \forall k \quad (3.19)$$

avec le déviateur des contraintes $\underline{S}_k^{n+1/2}$ au temps $t^{n+1/2}$ défini par la moyenne du déviateur entre les temps t^n et t^{n+1} ,

$$\underline{S}_k^{n+1/2} = \frac{\underline{S}_k^{n+1} + \underline{S}_k^n}{2}.$$

Nous noterons que cette équation fait intervenir les pressions p_k^{n+1} au temps t^{n+1} , la pression est fonction de quantités thermodynamiques dont l'énergie interne au temps t^{n+1} . L'équation (3.19) est donc implicite en e_k^{n+1} et couplée avec la loi d'état. Les deux doivent être résolues simultanément. Pour cela, il faut donc résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} e_k^{n+1} = e_k^n - \left(\frac{p_k^{n+1} + p_k^n}{2} + q_k^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_k^{n+1}} - \frac{1}{\rho_k^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_k^{n+1/2}} (\underline{S}_k^{n+1/2} : \underline{d}_k^{n+1/2}) \\ p_k^{n+1} = P(e_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) \end{cases} \quad (3.20)$$

ce qui est fait par une méthode de Newton.

Remarque discrétisation du tenseur des taux de déformations

Le terme $\underline{d}_k^{n+1/2}$ est une valeur moyenne des taux de déformations sur la maille. Il est défini par

$$\underline{d}_k = \frac{1}{V_k} \int_{\Omega_k} \underline{d}(\underline{x}) dV.$$

En remplaçant le taux de déformation par son expression en fonction du champ de vitesse, nous obtenons

$$\underline{d}_k = \frac{1}{V_k} \int_{\Omega_k} \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) dV.$$

Nous pouvons utiliser la discrétisation du champ de vitesse et son expression en fonction des fonctions de formes ce qui donne

$$\underline{d}_k = \frac{1}{2V_k} \sum_{i \in N_k} \int_{\Omega_k} \left(\nabla(\underline{u}_i \Psi_i(\underline{x})) + \nabla(\underline{u}_i \Psi_i(\underline{x}))^T \right) dV.$$

Après développement, le tenseur des taux de déformations moyen dans la maille a pour expression

$$\underline{d}_k = \frac{1}{2V_k} \sum_{i \in N_k} \left(\underline{u}_i \otimes \left(\int_{\partial\Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS \right) + \left(\int_{\partial\Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS \right) \otimes \underline{u}_i \right).$$

Notons que les vitesses étant au temps $t^{n+1/2}$, le tenseur des taux de déformations doit également être défini à ce temps. Pour cela, il faut alors prendre soin de bien intégrer les flux des fonctions de forme sur $\Omega_k(t^{n+1/2})$ afin de calculer un gradient de vitesse $\nabla \underline{u}$ discrétisé correctement au temps $t^{n+1/2}$

$$\nabla \underline{u}^{n+1/2} = \frac{\partial \underline{u}^{n+1/2}}{\partial \underline{x}^{n+1/2}}.$$

3.3.3 Conservation de la quantité de mouvement

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit localement sous la forme (3.8)

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0.$$

La forme faible de cette équation est écrite en prenant l'intégrale sur le domaine \mathcal{D} pondérée par une fonction test. Prenant comme fonction test un champ de vitesse virtuelle cinématiquement admissible $\hat{\mathbf{u}}$ quelconque, ceci nous donne le principe des puissances virtuelles

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} dV = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}.$$

Nous intégrons par partie et utilisons les conditions aux limites pour obtenir la forme plus compacte valable quelque soit la fonction test $\hat{\mathbf{u}}$ cinématiquement admissible

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \hat{\mathbf{u}} dV = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \text{ tel que } \hat{\mathbf{u}}|_{\partial\mathcal{D}_d} = \mathbf{0}.$$

La vitesse virtuelle est discrétisée de la même manière que la vitesse de la matière. En arguant de l'arbitrarité de ce champ et en prenant successivement $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_x \Psi_i(\mathbf{x})$ et $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_y \Psi_i(\mathbf{x})$ pour tous les nœuds du maillage, nous obtenons la forme pondérée équivalente

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Psi_i dV + \int_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \Psi_i dV = 0, \quad \forall i.$$

En réduisant l'intégrale au support de Ψ_i , la forme discrétisée donne

$$\int_{\mathcal{D} \cap \text{Supp} \Psi_i} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Psi_i dV + \int_{\mathcal{D} \cap \text{Supp} \Psi_i} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \Psi_i dV = 0, \quad \forall i.$$

En décomposant l'intégrale par maille et en intégrant une nouvelle fois par partie avec $\underline{\underline{\sigma}}_k$ supposé constant par maille, nous obtenons la forme discrétisée en espace

$$\int_{\mathcal{D} \cap \text{Supp} \Psi_i} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Psi_i dV = - \sum_{k \in M_i} \underline{\underline{\sigma}}_k \cdot \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{n} \Psi_i dS, \quad \forall i. \quad (3.21)$$

Le terme d'accélération reste encore à définir, une approximation du champ de densité, expliqué dans le paragraphe suivant, nous permet de terminer la discrétisation.

3.3.4 Condensation de la masse

Le schéma de Wilkins fait une approximation sur la densité massique et sur le champ de vitesse. Nous remplaçons alors dans le terme d'accélération de l'équation (3.21) le champ de vitesse réelle \mathbf{u} et virtuelle $\hat{\mathbf{u}}$ par des interpolations constantes par maille duale Δ_i (voir figure 3.4 pour la définition des mailles duales),

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \mathbf{u}_i \chi_{\Delta_i}(\mathbf{x}), \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \hat{\mathbf{u}}_i \chi_{\Delta_i}(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

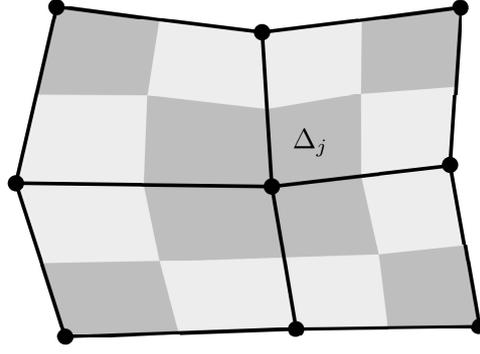


FIGURE 3.4 – Mailles duales. Les différentes mailles duales sont représentées par un damier de couleurs unies alors que les traits pleins représentent les frontières des mailles primales. La maille duale associée à un nœud i est composée du quart des mailles primales entourant ce nœud. Le quart de la maille primaire est défini par le centre de la maille, le nœud i et le centre des faces contenant le nœud i . La maille duale est donc l'union de 4 quadrangles mais n'est pas forcément quadrangulaire.

où χ_{Δ_i} est la fonction caractéristique de la maille duale Δ_i , valant 1 si $\underline{x} \in \Delta_i$, 0 sinon. De ce fait, l'équation (3.21) s'écrit

$$I_i = - \sum_{k \in M_i} \underline{\sigma}_k \cdot \int_{\partial\Omega_k} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i$$

sous la notation

$$I_i = \left(\int_{\Delta_i} \rho dV \right) \frac{du_i}{dt} = \left(\sum_{k \in M_i} \int_{\Delta_i \cap \Omega_k} \rho dV \right) \frac{du_i}{dt}.$$

En supposant une densité ρ uniforme par maille,

$$\rho = \langle \rho \rangle = \frac{m_k}{V_k}, \quad (3.24)$$

il reste

$$I_i = \left(\sum_{k \in M_i} \int_{\Delta_i \cap \Omega_k} \rho dV \right) \frac{du_i}{dt} = \left(\sum_{k \in M_i} \frac{m_k}{\#N_k} \right) \frac{du_i}{dt} = m_i \frac{du_i}{dt}.$$

où nous avons noté

$$m_i = \sum_{k \in M_i} \frac{m_k}{\#N_k}$$

avec m_k , la masse de la maille Ω_k et $\#N_k$, le nombre de nœuds de la maille k . Avec cette dernière formule, nous avons approché le volume de l'intersection entre la maille duale Δ_i et la maille primaire Ω_k par une division égale du volume de la maille primaire entre tous les nœuds,

$$|\Delta_i \cap \Omega_k| = \frac{V_k}{\#N_k}.$$

Cette approximation reste correcte tant que les mailles sont proches de mailles rectangulaires. La masse est donc condensée sur les nœuds et un nœud possède donc le quart des masses des mailles primales l'avoisinant (voir figure 3.5).

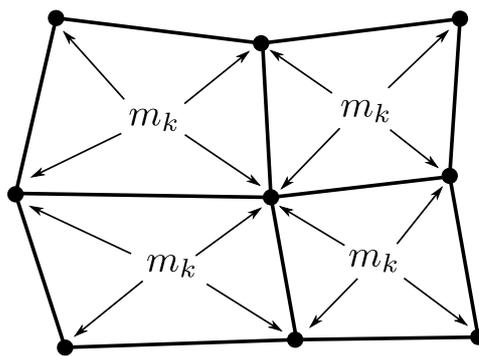


FIGURE 3.5 – Condensation de la masse. La masse des mailles primales est répartie sur leurs nœuds. Chaque nœud reçoit le quart de la masse des mailles voisines.

Cette condensation nous permet de découpler l'accélération des nœuds et de diagonaliser la matrice de masse. Celle-ci est alors triviale à inverser. L'équation (3.21) se réduit à

$$m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = - \sum_{k \in M_i} \underline{\underline{\sigma}}_k \cdot \int_{\partial\Omega_k} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i.$$

La forme finale discrétisée en temps est obtenue en intégrant par un schéma de point milieu entre $t^{n-1/2}$ et $t^{n+1/2}$ ce qui donne

$$m_i^n \frac{\mathbf{u}_i^{n+1/2} - \mathbf{u}_i^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} \underline{\underline{\sigma}}_k^n \cdot \int_{\partial\Omega_k^n} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i$$

avec $\delta t = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}$.

À partir de ces vitesses, les positions en fin de pas de temps sont calculées par la formule de point milieu

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{u}_i^{n+1/2}.$$

Les volumes peuvent alors être calculés à partir de la géométrie des mailles en fin de pas de temps.

3.3.5 Pseudo-viscosité

La pseudo viscosité est discrétisée au temps $t^{n+1/2}$. Elle a alors pour expression

$$q_k^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_k^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{v}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_k^n \left| \frac{\dot{v}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{v}_k^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{v}_k^{n+1/2} > 0 \end{cases}.$$

avec C_A et C_L , deux constantes, la densité $\rho^{n+1/2}$ prise comme la moyenne $\rho^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\rho^n + \rho^{n+1})$, le volume massique $\nu^{n+1/2}$ pris comme la moyenne $\nu^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\rho^n} + \frac{1}{\rho^{n+1}})$ et la dérivée en temps du volume massique

$$\dot{v}_k^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} - \frac{1}{\rho^n} \right).$$

La longueur l_k est une longueur caractéristique de la maille permettant de faire tendre la pseudo-viscosité vers 0 lorsque la taille des mailles tend vers 0. Plusieurs définitions de cette longueur sont possibles. Les méthodes basées sur l'accélération pour déterminer la direction du choc et mesurer la longueur de la maille dans cette direction sont très instables numériquement car en présence de faible accélération, cette longueur peut varier brutalement. Une méthode plus fiable que nous avons choisie et que nous utiliserons par la suite est de calculer la longueur caractéristique comme le rapport entre l'aire de la maille et son périmètre.

Remarquons que pour garder une pseudo-viscosité explicite, la vitesse du son est prise décalée en temps à l'instant t^n et un décalage apparaît également dans le tenseur des contraintes au temps t^n

$$\underline{\underline{\sigma}}_k^n = \underline{\underline{S}}_k^n - p_k^n \underline{\underline{\mathbf{1}}} - q_k^{n-1/2} \underline{\underline{\mathbf{1}}}.$$

Ce dernier décalage ne porte cependant que sur l'équation de dynamique des nœuds.

3.3.6 Résolution

Pour chaque pas de temps, le système complet discrétisé est donc composé des équations

$$m_i^n \frac{u_i^{n+1/2} - u_i^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} \underline{\underline{\sigma}}_k^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i \quad (3.25)$$

$$\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^n + \Delta t \underline{u}_i^{n+1/2}, \quad \forall i \quad (3.26)$$

$$V_k^{n+1} = V(\underline{x}_i^{n+1}), \quad \forall k \quad (3.27)$$

$$\rho_k^n V_k^n = \rho_k^{n+1} V_k^{n+1}, \quad \forall k \quad (3.28)$$

$$q_k^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_k^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{v}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_k^n \left| \frac{\dot{v}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{v}_k^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{v}_k^{n+1/2} > 0 \end{cases}, \quad \forall k, \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} e_k^{n+1} = e_k^n - \left(\frac{p_k^{n+1} + p_k^n}{2} + q_k^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_k^{n+1}} - \frac{1}{\rho_k^n} \right) + \frac{1}{\rho_k^{n+1/2}} (\underline{\underline{S}}_k^{n+1/2} : \underline{\underline{d}}_k^{n+1/2}) \\ p_k^{n+1} = P(e_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k. \quad (3.30)$$

Excepté pour la loi d'état, ce schéma est explicite. Le calcul d'un pas de temps se fait donc de la manière suivante :

1. calcul des vitesses en $t^{n+1/2}$ à partir des contraintes et masses au temps t^n via (3.25) ;
2. calcul des positions en fin de pas de temps via (3.26) ;
3. calcul des volumes en fin de pas de temps via (3.27) ;
4. calcul des densités par la conservation de la masse via (3.28) ;
5. calcul des pseudo-viscosités via (3.29) ;
6. calcul de l'énergie et de la pression en fin de pas de temps par résolution de (3.30).

3.4 Phase de transport

Une fois la phase Lagrange résolue, il faut traiter les termes de transport des quantités. L'écriture de la méthode sous forme « Lagrange + projection » ne fait pas apparaître la vitesse du maillage dans la première phase ce qui nous permet de définir *a posteriori* la vitesse

corrigeant les défauts trop importants qui ont pu se créer avec les déformations de la matière. Cela est fait durant l'étape de régularisation du maillage qui va calculer la position du maillage en fin de pas de temps.

Puis vient l'étape de transport à proprement parler permettant de passer du maillage lagrangien \mathcal{D} (déformé avec la matière) au maillage ALE régularisé \mathcal{F} . Cette phase revient à faire une projection du premier sur le second.

Une première méthode consiste à résoudre directement le système (3.10), (3.11), (3.12) et à calculer les flux de masse, quantité de mouvement et d'énergie interne entre les mailles lors du déplacement du maillage. Cette approche est utilisée dans les méthodes dites de « projection par flux » [53, 55]. Elles présentent l'avantage d'être conservatives sur les grandeurs projetées (tout flux sortant d'une maille entre dans une autre) mais limite la différence que nous pouvons avoir entre le maillage lagrangien et le maillage régularisé afin de pouvoir calculer avec précision les flux entre les mailles.

En regardant la phase de transport réellement comme une projection, il peut exister d'autres méthodes comme l'interpolation des champs. Le but étant toujours de passer de champs définis sur le maillage \mathcal{D} à leur définition sur le maillage \mathcal{F} . Ces méthodes sont pas toujours conservatives et leur utilisation n'est pas adaptée à notre situation où nous résolvons justement des lois de conservations.

La méthode que nous employons est une méthode de projection par intersection exacte (voir [27], [72]). Cette méthode est conservative et accepte des maillages d'origine et de réception arbitraires. Elle ne nécessite aucune vitesse de maillage mais uniquement la position en fin de pas de temps.

Quelle que soit la méthode utilisée, elle doit avoir certaines propriétés :

- être conservative. Nous écrivons durant la phase lagrangienne la conservation de la masse, de l'énergie interne et de la quantité de mouvement ; ces trois grandeurs doivent donc également être conservées lors du transport ;
- être peu diffusive. Une petite variation de maillage doit entraîner une petite variation des champs reconstruits. Dans le cas limite, il faut retrouver exactement les champs d'origine lorsque l'on projette un maillage sur lui même. Une méthode ne respectant pas cette condition va accumuler la diffusion numérique au cours des pas de temps ;
- respecter un principe du maximum et ne pas créer de nouveaux extrema dans les champs reconstruits.

3.4.1 Régularisation du maillage

Dans nos cas en grandes déformations, le maillage peut être trop déformé pour permettre une simulation fiable. Les mailles peuvent présenter certains défauts qui serviront de critères pour mesurer la qualité du maillage. Ces critères peuvent être par exemple :

- des angles trop aigus (figure 3.6.a), des mailles trop déformées ne permettent pas aux méthodes numériques de donner des résultats corrects ;
- des angles rentrants menant à des mailles concaves (figure 3.6.b) ;
- des rapports de volumes trop grands entre mailles voisines (figure 3.6.c) car des maillages trop irréguliers n'assurent pas la précision des méthodes.

Cette liste n'est pas exhaustive et d'autres critères peuvent être étudiés pour mesurer la qualité du maillage (voir [30]).

La régularisation du maillage lagrangien en fin de pas temps va chercher à créer un maillage ALE plus lisse et respectant les critères précédents. Cela peut être réalisé en déplaçant simplement les points problématiques aux barycentres de leurs voisins, en itérant sur une équation de

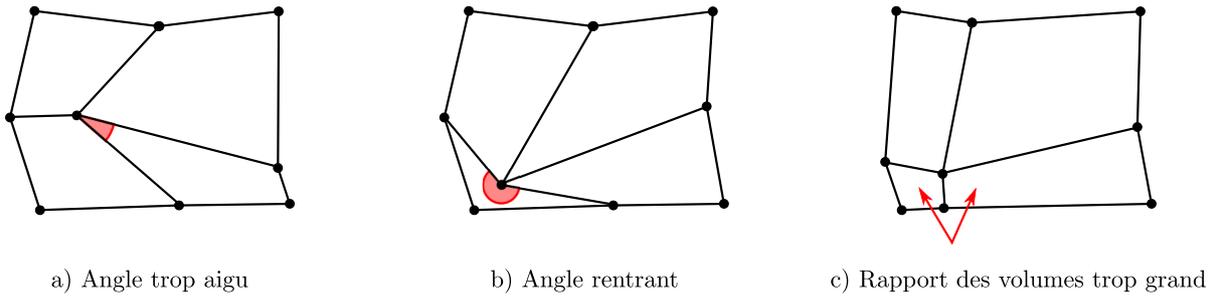


FIGURE 3.6 – Critères géométriques

diffusion pour répartir les nœuds ou en utilisant d'autres méthodes de relaxation de maillage plus complexes [81, 49, 47].

La phase de projection provoque obligatoirement une diffusion numérique des différents champs car la reconstruction utilise des moyennes locales. Le maillage régularisé doit donc rester aussi proche que possible du maillage lagrangien pour limiter le transport et la diffusion des quantités. Pour la même raison, les corrections du maillage doivent rester locale aux zones ne respectant pas les critères. Une régularisation globale du maillage entraîne une diffusion dans tout le domaine alors qu'une régularisation locale ne va provoquer de la diffusion que dans les mailles corrigées.

3.4.2 Projection

3.4.2.1 Principe

La méthode de projection par intersection exacte part de la remarque suivante : si nous avons un champ de densité $\tilde{\rho}$ défini sur le maillage régularisé \mathcal{F} par des valeurs constantes par maille

$$\tilde{\rho}(\underline{x}) = \sum_l \rho_l \chi_{\Omega_l}(\underline{x}),$$

l'intégrale de ce champ sur un volume V doit être égale à l'intégrale du champ d'origine sur le même volume V

$$\int_V \tilde{\rho}(\underline{x}) dV = \int_V \rho(\underline{x}) dV$$

pour assurer la conservation des grandeurs voulues.

En décomposant le champ $\tilde{\rho}$ sur sa base dans \mathcal{F} et en ré-écrivant l'équation précédente pour toutes les mailles Ω_l de \mathcal{F} , nous obtenons l'expression du champ de densité projeté

$$\rho_l = \frac{1}{V_l} \int_{\Omega_l} \tilde{\rho}(\underline{x}) dV = \frac{1}{V_l} \int_{\Omega_l} \rho(\underline{x}) dV, \forall l.$$

Le même raisonnement sur l'énergie interne (en notant que la quantité conservée n'est pas l'énergie interne spécifique e mais l'énergie interne volumique ρe) aboutit à

$$\rho_l e_l = \frac{1}{V_l} \int_{\Omega_l} (\rho e)(\underline{x}) dV, \forall l.$$

Nous nous intéressons maintenant à la quantité de mouvement. Lors de cette projection, nous abandonnons la définition de la vitesse comme champ interpolé par les fonctions de forme et nous faisons la même approximation faite par la condensation de la masse pour les termes

d'accélération lors de la phase lagrangienne. Le champs de vitesse \underline{u} ainsi que le champ de quantité de mouvement $(\rho\underline{u})$ sont approchés par des champs constants par maille duale Δ_j , centrée sur les nœuds j (voir figure 3.7),

$$\widetilde{\rho\underline{u}}(\underline{x}) = \sum_j \rho_j \underline{u}_j \chi_{\Delta_j}(\underline{x}).$$

Cette formule fait intervenir une densité nodale ρ_j qui sera définie par la suite.

La projection suit ensuite la même démarche que les autres grandeurs en écrivant l'intégrale de la quantité de mouvement sur la maille duale Δ_j pour chaque nœud j du maillage \mathcal{F} ,

$$\rho_j \underline{u}_j = \frac{1}{V_j} \int_{\Delta_j} (\rho\underline{u})(\underline{x}) dV, \forall j.$$

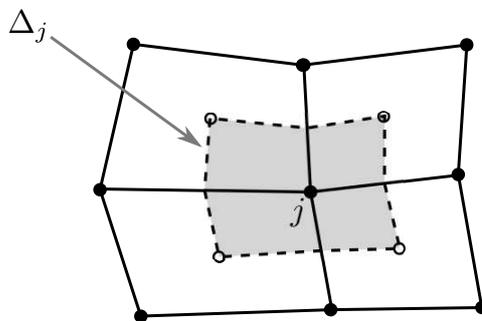


FIGURE 3.7 – Maille duale associée au nœud j

3.4.2.2 Ordre 1

En prenant la définition du champ constant par maille sur le maillage d'origine, nous obtenons une projection à l'ordre 1. Ceci s'écrit pour la masse

$$\rho_l = \frac{1}{V_l} \int_{\Omega_l} \sum_k \rho_k \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) dV, \forall l.$$

En remarquant que $\Omega_l = \bigcup_k (\Omega_l \cap \Omega_k)$ (figure 3.8), nous décomposons l'intégrale en

$$\rho_l = \frac{1}{V_l} \sum_k \rho_k \left(\int_{\Omega_l \cap \Omega_k} dV \right), \forall l.$$

Nous obtenons l'expression des densités sur le maillage de réception en fonction des densités sur le maillage de départ et des volumes des intersections entre les mailles des deux maillages $\int_{\Omega_l \cap \Omega_k} dV$. Les volumes de ces intersections sont à calculer géométriquement. Plusieurs techniques existent pour calculer les intersections entre deux polygones quelconques (voir [84, 78]).

Notons que les termes ρ_l sont des combinaisons linéaires convexes des termes ρ_k , aucun nouveau maximum ne peut donc apparaître sur le maillage régularisé.

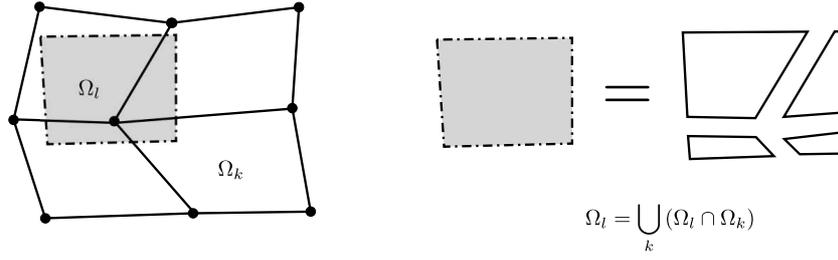


FIGURE 3.8 – Intersections entre le maillage régularisé et le maillage lagrangien

Les énergies internes spécifiques e_l sur \mathcal{F} ont, avec la même méthode, pour expression

$$e_l = \frac{1}{\rho_l V_l} \sum_k \rho_k e_k \left(\int_{\Omega_l \cap \Omega_k} dV \right), \forall l.$$

La projection de la vitesse demande un peu plus d'attention. Le champ de densité est défini constant par maille alors que les vitesses sont définies par nœud. Nous projetons d'abord le champ de densité par maille sur les mailles duales pour obtenir les densités nodales ρ_i sur le maillage dual de départ

$$\rho_i = \frac{1}{V_i} \sum_k \rho_k \left(\int_{\Delta_i \cap \Omega_k} dV \right), \forall i$$

ce qui nous permet de définir un champ de quantité de mouvement $\rho_i \underline{u}_i$ constant par maille duale Δ_i puis d'obtenir les vitesses sur le maillage dual d'arrivée

$$\underline{u}_j = \frac{1}{\rho_j V_j} \sum_i \rho_i \underline{u}_i \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i} dV \right), \forall j.$$

Il nous manque la densité nodale ρ_j sur le maillage d'arrivée. Celle-ci vient de la projection de la densité nodale depuis le maillage lagrangien dual

$$\rho_j = \frac{1}{V_j} \sum_i \rho_i \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i} dV \right) \forall j.$$

Notons que, pour être parfaitement cohérent entre les deux phases du pas de temps, les masses nodales données par la condensation de la masse devraient être les mêmes que les masses nodales utilisées lors de la projection. La condensation de la masse utilise une masse nodale approchée par

$$m_i = \sum_{k \in M_i} \frac{m_k}{\#N_k}$$

alors qu'elle devrait prendre une masse nodale définie par

$$m_i = \sum_{k \in M_i} \rho_k \left(\int_{\Delta_i \cap \Omega_k} dV \right).$$

L'erreur de cette approximation reste faible tant que les mailles sont proches de rectangles.

Cette projection permet de retrouver exactement les valeurs initiales si le maillage d'arrivée est identique à celui de départ mais présente le désavantage de beaucoup diffuser les grandeurs projetées. La diffusion numérique peut être diminuée en utilisant une méthode de projection à l'ordre 2.

3.4.2.3 Ordre 2

Pour améliorer la projection des grandeurs conservées, nous ne prenons plus un champ constant par morceau sur le maillage de départ mais un champ linéaire par morceaux. Après intégration, la densité sur le maillage \mathcal{D} a pour expression

$$\rho(\underline{x}) = \sum_k (\rho_k + \nabla \rho_k \cdot (\underline{x} - \underline{x}_k)) \chi_{\Omega_k}(\underline{x})$$

avec $\nabla \rho_k$ un gradient centré à déterminer (voir Annexe A). La valeur de la densité sur le maillage régularisé est alors

$$\rho_l = \frac{1}{V_l} \sum_k \left((\rho_k + \nabla \rho_k \cdot (\underline{x}_{gkl} - \underline{x}_k)) \left(\int_{\Omega_l \cap \Omega_k} dV \right) \right), \forall l$$

avec \underline{x}_{gkl} , les coordonnées du barycentre de l'intersection $\Omega_l \cap \Omega_k$.

De la même manière, l'énergie interne s'écrit

$$e_l = \frac{1}{\rho_l V_l} \sum_k \left(((\rho_k e_k) + \nabla(\rho_k e_k) \cdot (\underline{x}_{gkl} - \underline{x}_k)) \left(\int_{\Omega_l \cap \Omega_k} dV \right) \right), \forall l$$

et la vitesse prend la forme

$$\underline{u}_j = \frac{1}{\rho_j V_j} \sum_i \left(((\rho_i \underline{u}_i) + \nabla(\rho_i \underline{u}_i) \cdot (\underline{x}_{gij} - \underline{x}_i)) \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i} dV \right) \right) \forall j$$

où \underline{x}_{gij} sont les coordonnées du barycentre de l'intersection $\Delta_l \cap \Delta_k$. La densité nodale ρ_j est obtenue par projection à l'ordre 2 de la densité nodale depuis le maillage lagrangien dual

$$\rho_j = \frac{1}{V_j} \sum_i \left((\rho_i + \nabla \rho_i \cdot (\underline{x}_{gij} - \underline{x}_i)) \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i} dV \right) \right) \forall j.$$

Cette projection ne répartit plus uniformément les quantités dans les mailles ce qui permet de limiter la diffusion en prenant en compte les variations locales des champs. Lors d'une projection sur un maillage identique, la méthode redonne bien les mêmes valeurs de densité et d'énergie. Elle fait cependant une erreur sur le bord du maillage lors de la projection de la vitesse. Cela est dû à un décalage entre la position des nœuds et la position des barycentres des mailles duales aux frontières du maillage. Cette erreur n'existe pas avec une projection à l'ordre 1.

Sans précautions supplémentaires, cette méthode peut créer de nouveaux extrema. Il faut limiter la pente des gradients reconstruits, ceci est discuté dans l'annexe A.

Remarquons que même lors de la projection à l'ordre 2, le champ de densité duale ρ_i sur le maillage lagrangien est toujours obtenu par une projection à l'ordre 1 de la densité primale sur le maillage dual ce qui permet d'obtenir des masses nodales lors de la phase de transport proches des masses nodales utilisées lors de la phase lagrangienne.

Chapitre 4

Gestion de plusieurs matériaux et leur interface

Sommaire

4.1	Vue d'ensemble des méthodes multi-matériaux	36
4.1.1	Méthodes à interface conforme	37
4.1.1.1	Méthodes multi-domaines	37
4.1.1.2	Méthodes monolithiques	38
4.1.2	Méthodes à interface internes	38
4.1.2.1	Méthodes multi-domaines	38
4.1.2.2	Méthodes monolithiques	39
4.1.2.2.1	Méthodes de mélange	39
4.1.2.2.2	Autres méthodes	40
4.1.3	Localisation de l'interface entre les matériaux	41
4.1.3.1	Suivi d'interface	41
4.1.3.2	Capture d'interface	41
4.1.3.2.1	Méthodes de suivi de volume	42
4.1.3.2.2	Méthodes de courbe de niveau	42
4.2	Gestion classique : vitesse moyenne et hypothèse d'iso-déformation	43
4.2.1	Suivi et reconstruction d'interface	43
4.2.1.1	Fraction volumique	43
4.2.1.2	Reconstruction d'interface	44
4.2.2	Discretisation des champs	45
4.2.3	Hypothèse d'iso-déformation	46
4.2.4	Phase Lagrange	47
4.2.4.1	Conservation de la masse	47
4.2.4.2	Conservation de l'énergie et loi d'état	48
4.2.4.3	Conservation de la quantité de mouvement	48
4.2.4.4	Pseudo-viscosité	49
4.2.4.5	Remarques sur les grandeurs moyennes	49
4.2.4.6	Résolution	50
4.2.5	Phase de transport	51
4.2.5.1	Projection du champs de vitesse	51
4.2.5.2	Projection des grandeurs centrées	51
4.2.6	Conclusion sur la méthode	53

4.1 Vue d'ensemble des méthodes multi-matériaux

Les méthodes de simulations de systèmes multi-matériaux peuvent se classer en deux familles : les méthodes à interface conforme (*fitted interface*) et les méthodes à interface interne (*embedded interface*). Elles se différencient par la position de l'interface dans les maillages. Les méthodes à interface conforme vont conserver l'interface sur le bord des mailles ou sur la frontière du maillage alors que les interfaces internes peuvent avoir une position arbitraire à l'intérieur du maillage provoquant l'apparition de mailles partielles ou mixtes, découpées par l'interface entre les matériaux.

Ces deux familles peuvent se sous-diviser en méthodes multi-domaines et mono-domaines (appelées aussi mono-blocs ou monolithiques). La distinction se fait dans la manière de définir les différents matériaux en présence.

Les méthodes multi-domaines définissent un maillage séparé pour chaque matériau. Il convient ensuite de coupler les différents domaines composant le système pour mener à bien la simulation. Elles présentent l'avantage de pouvoir utiliser un solveur spécifique pour chaque matériau mais alourdissent le coût du calcul avec une gestion des différents maillages et leur mise en relation.

Les méthodes mono-blocs définissent tous les matériaux sur un maillage unique simplifiant grandement la gestion de la topologie du système et rendant inutile les procédures de détection des zones en contact. Les schémas employés doivent alors être capables de gérer différentes lois constitutives dans un même domaine de calcul pour pouvoir simuler tous les matériaux.

Par nature, le formalisme lagrangien est adapté pour les méthodes à interface conforme. Le référentiel se déplaçant à la vitesse de la matière, l'interface est fixe par rapport au maillage et reste donc sur les bords des mailles.

Les méthodes à interface interne sont nécessaires dans les méthodes eulériennes où le maillage reste fixe dans l'espace. En effet, l'interface sera obligatoirement à l'intérieur des mailles au moindre déplacement.

Le formalisme ALE par son écriture plus générale peut être employé dans les deux cas mais nécessite de correctement définir la vitesse du maillage pour conserver un suivi lagrangien de l'interface.

Nous essayons ici de présenter une vue d'ensemble des méthodes multi-matériaux. Ces méthodes ne s'appliquent pas toutes obligatoirement dans notre cas mais traitent des problèmes similaires.

L'interaction entre matériaux la plus courante à traiter est le problème du contact entre structures et nous présenterons souvent les méthodes ci-après dans ce contexte. Les problèmes d'interface ne se limitent cependant pas à cela. Par exemple, les études de flux thermiques entre des matériaux ayant des conductivités différentes et pouvant présenter des géométries complexes rentrent également dans cette problématique. La dynamique de l'interface n'est pas forcément due au déplacement des structures : des interfaces mobiles dans le maillage peuvent apparaître dans les problèmes de changement de phase avec un front de solidification ou de vaporisation se déplaçant dans le domaine et délimitant deux matériaux avec des propriétés différentes.

4.1.1 Méthodes à interface conforme

4.1.1.1 Méthodes multi-domaines

Dans cette famille se rangent les méthodes les plus couramment utilisées et les plus documentées ([38, 92, 1]). Ces méthodes regroupent tous les traitements classiques de contact lagrangien.

Cette formulation est la plus naturelle. Les différents maillages évoluent indépendamment, résolus éventuellement par des schémas différents. Un traitement spécial est appliqué dans les zones où les différents domaines sont en contact pour imposer les conditions de saut voulues. La prise en compte des relations à l'interface revient ici à appliquer des conditions aux limites spécifiques car la contrainte est localisée sur la frontière d'un ou des maillages. Ces conditions limites et la manière dont elles sont déterminées et appliquées différencient les méthodes.

D'une manière générale, deux possibilités existent. Les méthodes travaillant en variables « primales » vont imposer directement la variable concernée par exemple la position ou la vitesse de la matière alors que les méthodes travaillant en variables « duales » vont calculer et appliquer les forces aboutissant à des déplacements corrects.

Nous pouvons citer :

- les méthodes qui vont calculer les déplacements et les appliquer sous forme forte par des conditions limites [92] ;
- les techniques de type « mortar finite element » ([17, 52, 91, 93]) qui écrivent les équations d'interface au sens faible et permettent ainsi d'obtenir des méthodes plus robustes. Ces méthodes permettent de gérer plus facilement les différences de discrétisation entre les domaines ; elles font souvent appel à des méthodes de multiplicateur de Lagrange ([7]) qui insèrent le comportement de l'interface dans l'écriture variationnelle globale pour résoudre un système sous contraintes avec variables duales ;
- les méthodes de pénalisation ([26, 44, 37]) qui reviennent à ajouter des ressorts de grandes raideurs entre les matériaux en contact, imposant la valeur de certaines grandeurs à la frontière ; les termes de pénalités peuvent se voir comme une approximation linéaire des multiplicateurs de Lagrange.

Avantages et inconvénients

Ces méthodes ont des avantages :

- la localisation de l'interface est exacte et immédiate car elle coïncide en permanence avec un bord de maillage ;
- les maillages possèdent leurs propres degrés de liberté ce qui permet de gérer des discontinuités de champs comme le glissement ou le frottement de manière transparente ;
- la perte de contact et la séparation des domaines est immédiate. Le vide entre les matériaux correspond implicitement aux parties non-maillées de l'espace. Il n'y a pas besoin de le localiser explicitement.

Mais elles ont aussi des inconvénients :

- la détection des zones en contact et la mise en relation des domaines peuvent être compliquées en particulier lorsque la taille des mailles des deux domaines est très différente et que les nœuds des maillages ne coïncident pas ; des problèmes de verrouillage des éléments (*locking*, verrouillage des éléments en raison d'un nombre trop grand de contraintes sur celui-ci) peuvent se poser ;
- dans les cas de matériaux en grandes déformations, ces méthodes ne sont plus fiables dès que l'interface devient trop déformée.

L'utilisation de méthodes ALE permet d'accepter de plus grandes déformations mais la vitesse du bord du maillage doit toujours rester lagrangienne pour conserver la localisation correcte de l'interface.

4.1.1.2 Méthodes monolithiques

Les méthodes monolithiques avec interface conforme permettent de gérer plusieurs matériaux dans un unique maillage lagrangien. La gestion des différents matériaux se limite en général à changer les lois constitutives s'appliquant dans les mailles.

L'interface est située à l'intérieur du maillage mais coïncide les bras des mailles ce qui délimite clairement la frontière des domaines. Ces méthodes se servent de l'aspect lagrangien du schéma pour restreindre les matériaux à leur domaine et empêcher leur inter-pénétration.

La prise en compte des interactions entre matériaux se fait de la même manière que quand deux mailles voisines interagissent entre elles, sans ajouter de variables supplémentaires.

Avantages et inconvénients

Ces méthodes souffrent des défauts propres aux méthodes lagrangiennes et ne sont plus adaptées en cas de très grandes déformations. Des méthodes ALE [54] peuvent être développées pour améliorer ce point. La vitesse du maillage est définie pour délimiter une zone lagrangienne autour de l'interface et la vitesse du référentiel est construite en partant de cette zone de manière à assurer un maillage régulier. Comme précisé dans [54], ces méthodes restent applicables tant que l'interface ne subit pas de trop grandes déformations.

4.1.2 Méthodes à interface internes

4.1.2.1 Méthodes multi-domaines

Les méthodes multi-domaines de type « embedded interface » sont couramment utilisées dans les problèmes d'interactions fluide structure où un domaine résout le comportement du fluide par une méthode eulérienne adaptée à la physique du milieu alors que le second résout le comportement du solide par une méthode lagrangienne de calcul des structures.

La première méthode de ce type a été décrite par Noh ([65]). Le domaine lagrangien assure le suivi de l'interface et permet sa localisation précise à l'intérieur du domaine eulérien. Le couplage entre les méthodes se fait par l'imposition de pressions ou de déplacements de manière décalée entre les deux domaines. Le milieu eulérien impose une condition limite de pression sur la structure lagrangienne qui va se déplacer au cours du pas de temps en prenant en compte ces forces extérieures et les efforts internes au solide. Une fois le déplacement de l'interface connu, il est imposé au milieu eulérien. La pression dans le fluide évolue alors en fonction de la dynamique du fluide et les vitesses imposées aux nœuds des mailles mixtes.

Une alternative à cette méthode a été proposée par Olovsson ([66]). Cette fois-ci, les deux milieux sont avancés simultanément en temps en appliquant sur le fluide et sur le solide, en plus des efforts internes, des forces de pénalité proportionnelles à la pénétration mesurée lors du pas de temps précédent. Ceci permet un traitement plus régulier et continu de la contrainte à l'interface tout en restant explicite. Des variantes inspirées de ces deux méthodes existent comme celle développée par Flament, Le Tallec et Perlat ([32]).

Les méthodes de « fluides fantômes » (*ghost fluids*), introduites par Fedwick ([31]), de domaines fictifs (Glowinski et al., [36]), ou d'« éléments finis immergés » (*immersed finite element* [97]) connaissent des développements récents assez importants ([98, 18, 80, 96]). Ces méthodes définissent un fluide servant d'arrière-plan dans les zones de la grille eulérienne occupée par la

structure. Le champ de vitesse est donc défini et continu pour le fluide dans tout le domaine. La structure est superposée sur la grille eulérienne du fluide. Le couplage du solide vers le fluide se fait en reportant certaines grandeurs du solide sur le maillage du fluide dans les zones occupées par le solide. Les efforts du fluide doivent ensuite être reportés sur la structure.

Enfin, des méthodes multi-domaines avec interface interne existent pour traiter les problèmes de décomposition de domaine. Dans ce cas, elles présentent l'avantage de s'appliquer dans des cas où l'interface est complexe. Elles sont une généralisation des méthodes *mortar finite element* ([91]) avec interface conforme et font intervenir un champ de multiplicateur de Lagrange associée à la contrainte de saut sur l'interface. Ce type de formulation peut connaître des problèmes de stabilité. Le multiplicateur de Lagrange doit être discrétisé avec précaution, être stabilisé [61, 23] ou être approché par des termes stabilisants ([74, 3]).

Avantages et inconvénients

Toutes ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir prendre en compte une interface de forme et complexité arbitraire sans nécessiter de la décrire de manière lagrangienne dans tous les maillages. L'interface doit alors être positionnée à l'intérieur des domaines où son suivi n'est pas lagrangien (voir paragraphe 4.1.3).

La définition des matériaux sur différents maillages permet d'utiliser des méthodes spécifiques à chacun des milieux en présence. Si un des domaines est une structure subissant des déformations modérées, cela permet également de suivre l'interface précisément par le suivi de la frontière du maillage lagrangien. C'est généralement le cas dans les problèmes d'interactions fluide structure.

Ces méthodes nécessitent cependant une gestion de plusieurs maillages et plusieurs topologies qui peut être lourde, en particulier si le nombre de matériaux est grand. La mise en relation des différents maillages peut être complexe et nécessite de mettre pouvoir prendre en compte des mailles ayant de grands rapports de taille. Sans précaution, des problèmes de verrouillage des éléments ou de fuite d'un matériau dans l'autre peuvent se produire.

4.1.2.2 Méthodes monolithiques

Nous distinguons, dans cette classe de méthodes, celles issues de théories de mélange et les autres, formant un ensemble assez divers et encore peu développé. Dans ces méthodes, les différents matériaux sont définis sur un maillage unique recouvrant tout le domaine. Le positionnement de l'interface à l'intérieur de ce domaine permet de découper les mailles mixtes et de séparer les matériaux.

4.1.2.2.1 Méthodes de mélange

Les méthodes de mélange sont héritées historiquement des codes hydrodynamiques et des théories de mélange classique de la thermodynamique des fluides (*mixture theories*).

Justifiée par les théories d'homogénéisation ([11]), le principe est de considérer un champ de vitesse continu et d'approcher le comportement des mailles mixtes par le comportement qu'aurait une maille de mélange homogène ayant les mêmes proportions volumiques. Le comportement global du système est donc uniforme et continu dans tout le domaine.

Les variantes se différencient par les pondérations qu'elles font pour obtenir les valeurs moyennes de mélange ([11, 12, 76, 8]). La version la plus simple (voir paragraphe 4.2) est de pondérer les grandeurs des matériaux par leur fraction volumique dans la maille mixte.

Les méthodes de mélange, par leur formulation, s'affranchissent des relations de saut existantes à l'interface en remplaçant celles-ci par les équations de mélange.

Avantages et inconvénients

Ces méthodes permettent un gestion aisée et robuste des différents matériaux même en cas de grandes déformations et d'interfaces complexes. La topologie reste simple et la localisation des zones en contact se réduit à une détection des mailles mixtes.

Les interactions entre les structures sont décrites de façon approximative par une loi de comportement moyenne des mailles mixtes. De ce fait, les méthodes de mélange ne retranscrivent généralement pas correctement la physique de l'interface. Certaines formulations tentent de corriger ce défaut en prenant en compte la différence de compressibilité entre les matériaux ou l'orientation de l'interface ([12]) pour rendre compte de la différence de comportement de l'interface dans sa direction normale ou tangentielle.

Ces méthodes proviennent de schémas hydrodynamiques où tous les milieux étaient pris comme des fluides idéaux. La validité des hypothèses peut être discutable dans les cas de grandes discontinuités de densité ou de loi constitutive.

De plus, comme souligné dans [12], [11] et [85], ce type de méthode souffre de la description d'un champ de vitesse unique et continu. En présence de discontinuité, même en supposant une pondération parfaite des grandeurs, le déplacement des matériaux se fait avec une vitesse moyenne. Ce déplacement commun de tous les matériaux induit des déformations artificielles des matériaux autour de l'interface.

4.1.2.2.2 Autres méthodes

Pour simuler correctement le comportement des structures en présence de sauts, le système doit posséder assez de degrés de liberté pour décrire des discontinuités à l'interface. Les différents grandeurs doivent donc posséder des degrés de liberté associés à chaque matériau présent. L'utilisation de méthodes de type « éléments finis étendus » (*eXtended Finite Element Method* [6, 58]) permet d'enrichir les bases d'interpolation des éléments finis et de définir des champs discontinus à l'intérieur du maillage dans un contexte éléments finis.

Lorsque tous les champs sont définis propres à chaque matériau, y compris les champs de vitesse, le système possède d'avantage de degrés de liberté que d'équations dans les mailles mixtes. Des équations supplémentaires doivent être ajoutées pour fermer le système et calculer l'évolution en temps des quantités dans la maille mixte.

Certains méthodes résolvent l'évolution interne des mailles mixtes par la résolution d'un problème de Riemann entre les matériaux à l'interface ([15, 21]). La résolution de ce problème permet de déterminer la dynamique de l'interface, de calculer l'évolution des grandeurs dans les mailles mixtes et de rendre compte des transferts se produisant entre les matériaux.

D'autres méthodes écrivent les égalités à respecter à l'interface et les appliquent localement pour obtenir des déplacements corrects ([85, 86, 87]).

Enfin, certains méthodes cherchent à introduire les contraintes de manière plus rigoureuse. Elles s'inspirent des « mortar finite elements » et écrivent les équations de saut régissant le comportement de l'interface au niveau continu directement dans le système global. Elles imposent ensuite ces équations sous forme de contraintes en insérant la participation de l'interface dans l'écriture variationnelle [24, 75, 39, 9].

Avantages et inconvénients

Ces méthodes présentent l'avantage d'être monoblocs, les matériaux sont définis sur une grille unique ce qui simplifie la gestion de la topologie, la détection des zones de contacts et uniformise la discrétisation des matériaux.

Ces méthodes se développent de plus en plus et peuvent décrire les discontinuités qui peuvent se produire physiquement à l'interface. Le comportement global du système est mieux retranscrit qu'avec une théorie de mélange mais la gestion de champs discontinus nécessite une attention particulière pour préserver la stabilité de la méthode. Il faut définir correctement le transport des matériaux à travers le maillage pour conserver la discontinuité des champs tout au long de la simulation. La qualité de ces méthodes dépend de la description faite de l'interface et de la précision de son suivi au cours du temps.

4.1.3 Localisation de l'interface entre les matériaux

Lors d'études de systèmes multi-matériaux, l'interface doit être correctement localisée dans le domaine. Ceci est particulièrement vrai lorsque l'interface peut se déplacer à l'intérieur des maillages. Plusieurs approches sont possibles pour suivre l'interface au cours du temps ([45]). Nous les classons en deux familles :

- les méthodes de suivi d'interface ;
- les méthodes de capture d'interface.

4.1.3.1 Suivi d'interface

La méthode la plus simple pour suivre une interface est d'utiliser une méthode lagrangienne ou ALE de sorte à conserver l'interface fixe par rapport au maillage. Les méthodes avec une interface conforme (dans le sens où l'interface coïncide avec les bras de mailles du domaines) se basent sur cela.

D'autres méthodes existent et ne nécessitent pas de conserver un déplacement de maillage lagrangien. Elles se trouvent dans la littérature sous le nom de méthode de « suivi de front » (*front tracking* [83, 43, 35]).

Le suivi se fait par la répartition de particules ou de marqueurs sur l'interface. Ces points sont déplacés avec une vitesse d'interface et assurent son suivi de manière lagrangienne. L'interface est ensuite interpolée entre les marqueurs pour obtenir sa nouvelle position. Le nombre de points suivis sur l'interface peut être augmenté ou diminué pour améliorer sa description lors de grands changements topologiques.

Ces méthodes ne conservent en général pas les volumes et posent des problèmes du point de vue de la conservation de la masse.

4.1.3.2 Capture d'interface

Les méthodes de capture d'interface ne vont pas suivre explicitement l'interface mais vont la reconstruire à partir d'une variable auxiliaire plus facile à suivre que la position des points de l'interface. La variable suivie peut-être la fraction volumique des matériaux dans la maille dans le cas des méthodes de type « volume de fluide » (*volume of fluid*) ou une fonction de distance à l'interface dans le cas des méthodes de type « courbe de niveaux » (*level set*).

4.1.3.2.1 Méthodes de suivi de volume

Ces méthodes sont basées sur le suivi de la fonction caractéristique des domaines H_α au cours du temps. La moyenne de la fonction caractéristique sur une maille mixte correspond à la fraction volumique de la maille occupée par le matériau concerné. Cette fonction prend donc des valeurs comprises entre 0 (dans les mailles où le matériau est absent) et 1 (dans les mailles où seul ce matériau est présent). L'interface est placée dans la maille de manière à y respecter les volumes des différents matériaux en présence. Ces méthodes sont donc localement conservatives par construction.

Les méthodes de suivi de volume ont connu de nombreuses évolutions ([51]). Elles ont été introduites par Noh et Woodward ([64]) avec la méthode SLIC (*Simple Linear Interface Reconstruction*). La méthode SLIC place l'interface parallèle aux bords de la maille de manière à diviser correctement les volumes. Cette méthode est adaptée pour des schémas à direction alternée sur grille cartésienne mais fait une approximation grossière de l'orientation de l'interface. Elle a été améliorée par Youngs ([94, 95]) pour pouvoir positionner l'interface avec une orientation quelconque dans la maille. Elle a ensuite donné la méthode « VoF » (*Volume of Fluid* [42]). La normale à l'interface est prise comme le gradient de la fraction volumique. La méthode « VoF » connaît des difficultés lorsque plus de deux matériaux sont présents dans une seule maille. Une solution est de faire une hypothèse sur la répartition des matériaux et de les ordonner en couches parallèles comme cela est fait dans la méthode MOSSO ([60]). Ces méthodes sont généralement d'ordre 1 ([70]).

Enfin, des récents développements tentent de mieux décrire ces mailles possédant trois matériaux ou plus en ajoutant au suivi de la fraction volumique, le suivi des barycentres. Ces méthodes « MoF » (*Moment of Fluid* [28, 2]) fournissent de nouveaux critères à partir des informations données par le suivi des barycentres pour choisir l'ordre de traitement des matériaux lors de la reconstruction de l'interface.

La simplicité et la robustesse des méthodes « VoF » en ont fait des méthodes très populaires. Elles peuvent décrire avec plus ou moins de précision des interfaces de complexité arbitraire mais il est difficile d'obtenir la continuité de l'interface entre les mailles ce qui peut être contraignant dans certains cas.

4.1.3.2.2 Méthodes de courbe de niveau

Les méthodes *level set* ont été pour la première fois proposées par Osher ([69]). Le principe est de décrire l'interface par une courbe de niveau. La position de l'iso-valeur 0 permet d'indiquer la position de l'interface.

La fonction *level set* s'interprète comme une fonction de distance par rapport à l'interface. Elle est transportée à travers le maillage avec la vitesse du fluide ce qui permet de suivre l'évolution en temps de l'interface.

Ces méthodes peuvent rendre compte de topologies complexes et ont l'avantage de reconstruire une interface continue. Elles continuent d'être améliorées ([67, 68]) pour tenter de pallier certains problèmes comme la conservation de la masse ([29]).

4.2 Gestion classique : vitesse moyenne et hypothèse d'iso-déformation

Nous nous intéressons désormais à l'étude de système possédant une interface séparant précisément deux matériaux α et β (ou plus) (figure 4.1). Nous cherchons à modéliser ce

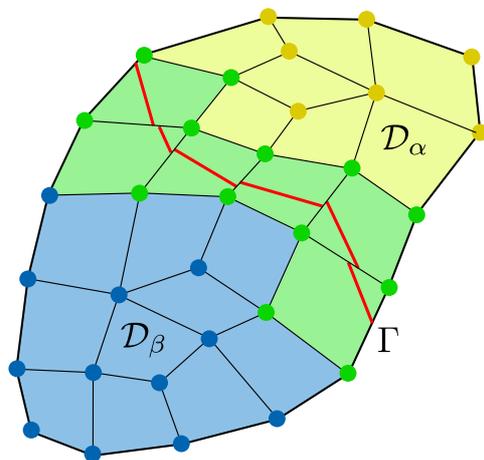


FIGURE 4.1 – Maillage d'un domaine multi-matériau. L'interface est à l'intérieur du maillage et des mailles mixtes apparaissent (en vert sur la figure). L'interface peut être discontinue entre deux mailles mixtes.

système avec une méthode mono-bloc de type *embedded interface* et nous présentons un schéma multi-matériau déjà implanté dans notre code de travail. Ce schéma est une extension du schéma mono-matériau présenté dans le chapitre 2. Nous le présentons dans sa version la plus simple possible. Il existe de légères variantes permettant de pallier localement certains problèmes mis en évidence. Ces modifications ne sont pas présentées ici. Le schéma est basé un enrichissement par matériau des champs centrés et l'utilisation d'une vitesse moyenne. La méthode se classe dans les méthodes de mélange présentées dans le paragraphe 4.1.2.2.1.

Une pondération détermine la pression moyenne pour obtenir l'accélération moyenne des nœuds. Cette pondération permet au schéma d'être conservatif et remplace les équations de saut (2.6) et (2.7) qui existent à l'interface.

4.2.1 Suivi et reconstruction d'interface

Notre système possède plusieurs matériaux dont l'interface peut se trouver à l'intérieur des mailles. Le suivi de l'interface se fait par une méthode de type « VoF » possédant plus de trois matériaux (voir paragraphe 4.1.3.2.1).

4.2.1.1 Fraction volumique

L'interface n'est pas suivie directement au cours de la simulation. Elle est reconstruite à partir du suivi de la fonction caractéristique de chaque domaine matériau que nous appelons H_α . Cette fonction est une fonction de Heaviside ayant pour définition

$$H_\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \underline{x} \in \mathcal{D}_\alpha \\ 0 & \text{if } \underline{x} \notin \mathcal{D}_\alpha \end{cases} .$$

L'intégration de cette fonction sur une maille Ω_k nous donne le volume partiel

$$V_{\alpha k} = \int_{\Omega_k} H_{\alpha}(x) dV = V(\Omega_k \cap \mathcal{D}_{\alpha}),$$

volume de l'intersection entre la maille Ω_k et le domaine \mathcal{D}_{α} . Nous appellerons $\Omega_{\alpha k}$ la restriction de la maille Ω_k au domaine \mathcal{D}_{α} ($\Omega_{\alpha k} = \Omega_k \cap \mathcal{D}_{\alpha}$) et nous appellerons le volume $V_{\alpha k}$, le volume partiel de α dans la maille Ω_k .

Notons $f_{\alpha k}$, la fraction de volume occupée par le matériau α dans la maille Ω_k . Elle est le rapport entre le volume partiel et le volume total de la maille

$$f_{\alpha k} = \frac{V_{\alpha k}}{V_k}.$$

Les matériaux sont considérés non-miscibles, un point du domaine est toujours occupé par un et un seul matériau si bien que l'on a $\sum_{\alpha} f_{\alpha k} = 1$. Dans notre situation, la fraction volumique n'a de sens qu'au niveau discret mais elle peut être vue comme une approximation de la fonction caractéristique du domaine

$$H_{\alpha}(\underline{x}) \approx \sum_k f_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}).$$

En effet, avec les définitions précédentes, nous pouvons écrire la fraction volumique comme la moyenne de la fonction caractéristique sur un volume V de diamètre h

$$f_{\alpha} = \frac{1}{V} \int_V H_{\alpha}(\underline{x}) dV. \quad (4.1)$$

Le suivi des volumes partiels ou des fractions volumiques permet donc bien de suivre la fonction caractéristique des domaines et indirectement les différents matériaux et leurs interfaces.

4.2.1.2 Reconstruction d'interface

La connaissance des fractions volumiques nous donne les volumes occupés par chaque matériau mais cela ne permet pas de déterminer leur position dans la maille. Pour cela, nous approchons, en 2 dimensions, l'interface par des segments constant par maille dont il faut déterminer l'orientation. La direction de la normale à l'interface est donnée par la méthode de Youngs ([94]) qui l'estime au niveau discret par le gradient de fraction volumique dans la maille

$$\underline{n}_{\Gamma k} = -\frac{\nabla f_{\alpha k}}{|\nabla f_{\alpha k}|}.$$

Cette formule se justifie en remarquant la fraction volumique approche la fonction caractéristique du domaine et que pour cette fonction, dans le cas d'un domaine régulier, nous avons au sens des distributions

$$\nabla H_{\alpha}(\underline{x}) = -\underline{n} \delta_{\partial \mathcal{D}_{\alpha}}(\underline{x})$$

avec $\delta_{\partial \mathcal{D}_{\alpha}}$, la mesure de Dirac portée par l'interface. Une fois le gradient de fraction volumique déterminé, nous plaçons l'interface à l'intérieur de la maille, dans la direction calculée et de manière à répartir les volumes en accord avec les fractions volumiques. Les matériaux sont ensuite placés de part et d'autres de l'interface. Les barycentres locaux des matériaux permettent de déterminer de quel côté de l'interface chacun des matériaux se situent ([60]).

Notons que dans cette méthode, rien n'assure que les segments d'interface soient continus entre deux mailles mixtes (voir l'interface de la figure 4.1). Les mailles découpées par l'interface

ne sont plus forcément des quadrangles et les algorithmes utilisés doivent pouvoir gérer des mailles avec un nombre de nœuds variable. Des détails supplémentaires sur le calcul de la normale à l'interface peuvent être trouvés dans l'annexe B.

Gestion de 3 matériaux et plus

Lorsque la maille contient plus de trois matériaux, une hypothèse de modélisation est faite. Le plus simple est de considérer que les interfaces entre les différents matériaux sont parallèles et nous les plaçons en « pelures d'oignons » dans la maille (figure 4.2). Il faut donc calculer une normale moyenne et commune pour tous les matériaux puis les ordonner dans la maille mixte. Le résultat de cette méthode ne dépend pas de l'ordre de traitement des matériaux durant la reconstruction d'interface mais elle ne permet pas de modéliser des cas où l'interface dans la maille est en « T ».

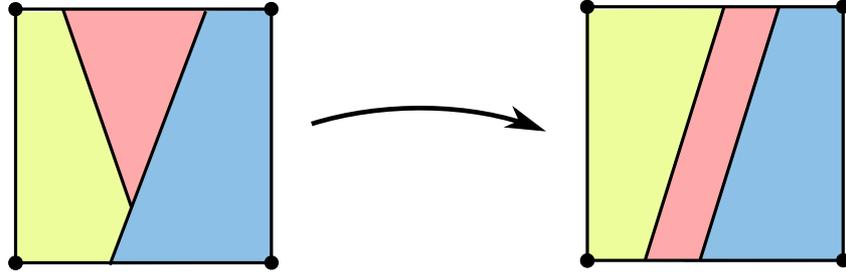


FIGURE 4.2 – Modélisation de maille contenant trois matériaux ou plus. Les interfaces avec des directions différentes sont approchées par une normale unique. Les matériaux sont ensuite répartis en couches parallèles respectant les fractions volumiques dans la maille mixte.

4.2.2 Discrétisation des champs

Introduisons les notations :

- M_α , l'ensemble des mailles ayant une intersection avec \mathcal{D}_α , *i.e.* tel que $f_{\alpha k} > 0$;
- M_Γ , l'ensemble des mailles mixtes ce qui correspond à l'ensemble des mailles ayant une intersection avec Γ , à savoir l'ensemble des mailles tel que $0 < f_{\alpha k} < 1$, $M_\Gamma = M_\alpha \cap M_\beta$.

Les différents champs centrés sont enrichis par matériau et s'écrivent sous la forme

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} \underline{\sigma}_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\beta} \underline{\sigma}_{\beta k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}), \quad (4.2)$$

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\beta} \rho_{\beta k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}), \quad (4.3)$$

$$e(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} e_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\beta} e_{\beta k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}) \quad (4.4)$$

où $\chi_{\Omega_k}(\underline{x})$ est toujours la fonction caractéristique de la maille Ω_k et $H_\alpha(\underline{x})$, la fonction de Heaviside associée au domaine \mathcal{D}_α . Ainsi définis, ces champs peuvent présenter une discontinuité à l'interface et les mailles mixtes possèdent bien plusieurs degrés de liberté car $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$.

Le champ de vitesse n'est pas modifié et nous gardons l'approximation « éléments finis » non-enrichie

$$\underline{u}(x) = \sum_i \underline{u}_i \Psi_i(x). \quad (4.5)$$

La vitesse est approchée par un champ continu dans tout le domaine y compris au passage de l'interface Γ . Cette vitesse correspond à une vitesse moyenne. Ceci implique, par construction, le respect de la condition de continuité des vitesses normales (2.6)

$$[\underline{u}] \cdot \underline{n}_\Gamma = 0$$

mais implique que cette égalité tient aussi dans la direction tangente à l'interface \underline{t}_Γ ,

$$[\underline{u}] \cdot \underline{t}_\Gamma = 0.$$

Cette dernière équation interdit le glissement entre les matériaux puisque nous empêchons tout saut de vitesse tangentielle. Cette méthode revient donc à souder les matériaux entre eux.

4.2.3 Hypothèse d'iso-déformation

Dans les mailles mixtes, nous approchons le gradient de la fonction de forme Ψ_i associée au nœud i dans la maille Ω_k par sa valeur moyenne

$$\nabla \Psi_{ik}(\underline{x}) \approx \left(\frac{1}{V_k} \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV \right) \chi_{\Omega_k}(\underline{x}).$$

Cette approximation revient à considérer que la fonction Ψ_i est linéaire alors qu'elle est bilinéaire dans la maille. De ce gradient de fonction de forme, nous en déduisons par superposition le gradient du champ de vitesse (commun aux deux matériaux)

$$\nabla \underline{u}_k = \sum_i \underline{u}_i \nabla \Psi_{ik}$$

puis le taux de déformation cinématique

$$\underline{\underline{d}}_k = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u}_k + \nabla \underline{u}_k^T).$$

Le tenseur des taux de déformation cinématique du matériau α moyen dans la maille $\Omega_{\alpha k}$ a donc pour expression

$$\underline{\underline{d}}_{\alpha k} = \frac{1}{V_{\alpha k}} \int_{\Omega_{\alpha k}} \underline{\underline{d}}(\underline{x}) dV.$$

Le remplacement du tenseur des taux de déformations en fonction du champ de vitesse donne

$$\underline{\underline{d}}_{\alpha k} = \frac{1}{2V_{\alpha k}} \sum_{i \in N_k} \left(\underline{u}_i \otimes \int_{\Omega_{\alpha k}} \nabla \Psi_i(x) dV + \int_{\Omega_{\alpha k}} \nabla \Psi_i(x) dV \otimes \underline{u}_i \right).$$

En utilisant l'approximation d'un gradient constant que nous avons introduit précédemment, l'expression du tenseur $\underline{\underline{d}}_{\alpha k}$ devient finalement

$$\underline{\underline{d}}_{\alpha k} = \frac{1}{2V_k} \sum_{i \in N_k} \left(\underline{u}_i \otimes \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(x) dV + \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(x) dV \otimes \underline{u}_i \right).$$

Le tenseur du taux de déformation moyen du matériau α dans la maille partielle $\Omega_{\alpha k}$ est donc égal au tenseur du taux de déformation moyen dans la maille entière Ω_k . Nous affectons ce taux à chacun des matériaux présents (hypothèse d'iso-déformation) sans chercher à superposer une micro-déformation locale,

$$\underline{d}_{\alpha k} = \underline{d}_{\beta k} = \underline{d}_k, \quad \forall k.$$

Cette approximation nous permettra de simplifier les intégrales de gradient sur les mailles partielles par

$$\int_{\Omega_{\alpha k}} \bullet dV \approx f_{\alpha k} \int_{\Omega_k} \bullet dV$$

même dans le cas d'un champ non-linéaire comme le champ de vitesse dans les mailles quadrangles. Nous évitons ainsi les procédures d'intégration sur une maille découpée par l'interface.

La dérivée en temps du volume partiel s'écrit

$$\frac{dV_{\alpha k}}{dt} = \frac{df_{\alpha k} V_k}{dt} = V_k \frac{df_{\alpha k}}{dt} + f_{\alpha k} \frac{dV_k}{dt}. \quad (4.6)$$

Elle est aussi égale successivement à

$$\frac{dV_{\alpha k}}{dt} = V_{\alpha k} \text{Tr} \left(\underline{d}_{\alpha k} \right) = f_{\alpha k} V_k \text{Tr} \left(\underline{d}_k \right) = f_{\alpha k} \frac{dV_k}{dt}. \quad (4.7)$$

Nous en déduisons donc

$$\frac{df_{\alpha k}}{dt} = 0. \quad (4.8)$$

Ces résultats impliquent que dans une maille mixte, la compression de chaque matériau est égale à la compression moyenne. Les différences de compressibilité des matériaux sont donc ignorées.

4.2.4 Phase Lagrange

4.2.4.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse est écrite sous forme faible en intégrant (3.7) pondérée par une fonction test. Cette fonction test est définie avec la même discrétisation enrichie que les champs centrés. La forme faible devant être vraie pour toute fonction test, cela nous fait écrire pour chaque maille et chaque matériau

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} \right) \chi_{\Omega_k} H_{\alpha} dV = 0, \quad \forall k, \forall \alpha.$$

L'intégration en espace de cette équation donne la forme discrétisée de la conservation de la masse écrite désormais pour chaque matériau

$$\frac{d}{dt} (\rho_{\alpha k} V_{\alpha k}) = 0, \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (4.9)$$

Il s'agit en fait de l'équation (3.4) écrit sur le volume $V(t) = \Omega_k \cap \mathcal{D}_{\alpha}$. Enfin, l'intégration en temps entre t^n et t^{n+1} donne finalement

$$\rho_{\alpha k}^n V_{\alpha k}^n = \rho_{\alpha k}^{n+1} V_{\alpha k}^{n+1} = m_{\alpha k}. \quad (4.10)$$

4.2.4.2 Conservation de l'énergie et loi d'état

L'équation de conservation de l'énergie (3.9) est écrite sous forme faible avec la fonction test $\chi_{\Omega_k} H_\alpha$ de la même manière que la conservation de la masse ce qui donne après utilisation de (3.7)

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \left(\frac{de}{dt} - \frac{1}{\rho} \underline{S} : \underline{d} + (p+q) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \chi_{\Omega_k} H_\alpha dV = 0, \forall k, \forall \alpha.$$

Après intégration en espace et division par ρ , nous aboutissons à

$$\frac{de_{\alpha k}}{dt} = -(p_{\alpha k} + q_{\alpha k}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}} \right) + \frac{1}{\rho_{\alpha k}} (\underline{S}_{\alpha k} : \underline{d}_k), \forall k, \forall \alpha.$$

Cette équation est intégrée en temps par le même schéma que l'équation mono-matériau (3.19) pour donner

$$e_{\alpha k}^{n+1} = e_{\alpha k}^n - \left(\frac{p_{\alpha k}^{n+1} + p_{\alpha k}^n}{2} + q_{\alpha k}^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha k}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha k}^{n+1/2} : \underline{d}_k^{n+1/2}), \forall k, \forall \alpha. \quad (4.11)$$

Cette forme discrétisée est toujours implicite et couplée à la loi d'état propre de chaque matériau

$$p_{\alpha k}^{n+1} = EOS_\alpha(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}), \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (4.12)$$

4.2.4.3 Conservation de la quantité de mouvement

La forme faible de la quantité de mouvement a pour expression

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{du}{dt} \Psi_i(\underline{x}) dV + \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = 0, \quad \forall i.$$

La condensation de la masse (définie dans le cas mono-matériau au paragraphe 3.3.4) permet d'approcher

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{du}{dt} \Psi_i(\underline{x}) dV \approx m_i \frac{du_i}{dt}. \quad (4.13)$$

Ce calcul suppose que les matériaux α et β sont équi-répartis dans les mailles pour obtenir

$$m_i = \sum_{k \in M_i} \int_{\Delta_i \cap \Omega_{\alpha k}} \rho dV = \sum_{k \in M_i} \sum_{\alpha} \int_{\Delta_i \cap \Omega_{\alpha k}} \rho_{\alpha k} dV = \sum_{k \in M_i} \sum_{\alpha} \frac{\rho_{\alpha k} V_{\alpha k}}{\#N_k} = \sum_{k \in M_i} \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha k}}{\#N_k}.$$

Nous décomposons l'intégrale en contraintes par maille et par domaine matériau ce qui donne

$$m_i \frac{du_i}{dt} + \sum_{k \in M_i} \sum_{\alpha} \int_{\Omega_{\alpha k}} \underline{\sigma}_{\alpha k} \cdot \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = 0, \quad \forall i.$$

En utilisant l'approximation de l'intégrale sur la maille partielle, l'équation de la dynamique des nœuds devient

$$m_i \frac{du_i}{dt} + \sum_{k \in M_i} \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha k} \underline{\sigma}_{\alpha k} \right) \cdot \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = 0, \quad \forall i \quad (4.14)$$

ce qui fait apparaître l'expression d'une contrainte moyenne

$$\underline{\underline{\sigma}}_k = \sum_{\alpha} f_{\alpha k} \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k}. \quad (4.15)$$

Nous obtenons une expression identique au cas mono-matériau (3.25) en intégrant par partie

$$m_i \frac{d\underline{u}_i}{dt} = - \sum_{k \in M_i} \underline{\underline{\sigma}}_k \cdot \int_{\partial \Omega_k} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i.$$

La forme finale discrétisée en temps est obtenue en intégrant par un schéma de point milieu entre $t^{n-1/2}$ et $t^{n+1/2}$ ce qui donne

$$m_i^n \frac{\underline{u}_i^{n+1/2} - \underline{u}_i^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} \underline{\underline{\sigma}}_k^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i. \quad (4.16)$$

4.2.4.4 Pseudo-viscosité

La pseudo viscosité peut être définie comme une grandeur moyenne dépendant des densités et vitesses moyennes

$$q_k^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_k^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{\nu}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_k^n \left| \frac{\dot{\nu}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{\nu}_k^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu}_k^{n+1/2} > 0 \end{cases}.$$

Nous avons dans ce cas, une viscosité artificielle constante dans la maille mixte, $q_{\alpha k} = q_k$, et le tenseur des contraintes par matériau valant

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k}^n = \underline{\underline{S}}_{\alpha k}^n - p_{\alpha k}^n \underline{\underline{1}} - q_k^{n-1/2} \underline{\underline{1}}.$$

4.2.4.5 Remarques sur les grandeurs moyennes

Nous définissons la densité moyenne dans la maille comme la somme des masses des matériaux divisée par son volume total

$$\rho_k = \frac{\sum_{\alpha} \rho_{\alpha k} V_{\alpha k}}{V_k}.$$

Cette densité est une moyenne des densités partielles pondérée par la fraction volumique

$$\rho_k = \sum_{\alpha} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k}.$$

La densité moyenne respecte la conservation de la masse. En effet, nous avons

$$\rho_k^{n+1} = \frac{\sum_{\alpha} \rho_{\alpha k}^{n+1} V_{\alpha k}^{n+1}}{V_k^{n+1}} = \frac{\sum_{\alpha} f_{\alpha k}^n \rho_{\alpha k}^n V_k^n}{V_k^{n+1}} = \frac{\rho_k^n V_k^n}{V_k^{n+1}}.$$

L'énergie interne de la maille est la somme des énergies internes des matériaux

$$(m_k e_k) = \sum_{\alpha} (m_{\alpha k} e_{\alpha k}).$$

L'énergie interne spécifique moyenne de la maille est le rapport entre son énergie interne totale et sa masse totale

$$e_k = \frac{\sum_{\alpha} (m_{\alpha k} e_{\alpha k})}{\rho_k V_k}$$

ce qui permet d'écrire cette énergie sous la forme d'une moyenne des énergies des matériaux pondérée par la masse

$$e_k = \frac{\sum_{\alpha} (f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} e_{\alpha k})}{\sum_{\alpha} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k}}.$$

Par conservation de la masse, cette énergie moyenne respecte également l'équation de conservation d'énergie écrite en terme de contrainte moyenne

$$\rho_k \frac{de_k}{dt} = \rho_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha k} e_{\alpha k}}{m_k} \right) = \rho_k \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha k}}{m_k} \frac{de_{\alpha k}}{dt} = \sum_{\alpha} (f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} \frac{de_{\alpha k}}{dt}) = \sum_{\alpha} (f_{\alpha k} (\underline{\sigma}_{\alpha k} : \underline{d}_k)) = (\underline{\sigma}_k : \underline{d}_k).$$

Enfin, regardons la quantité de mouvement totale d'un nœud sur une maille, en notant que par construction de la condensation de la masse, $m_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha i}$ et que $\underline{u}_{\alpha i} = \underline{u}_i$,

$$m_i \frac{d\underline{u}_i}{dt} = \sum_{\alpha} (m_{\alpha i} \frac{d\underline{u}_{\alpha i}}{dt}) = - \sum_{\alpha} \int_{\Omega_{\alpha k}} \underline{\sigma}_{\alpha k} \cdot \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = - \underline{\sigma}_k \cdot \int_{\partial \Omega_k} \underline{n} \Psi_i dS.$$

La pondération que nous avons écrite permet de respecter les lois de conservation écrites directement sur les grandeurs moyennes. Le système multi-matériau a donc un comportement équivalent à celui d'un système mono-matériau qui aurait des grandeurs égales aux grandeurs moyennes définies comme ci-dessus.

4.2.4.6 Résolution

Pour chaque pas de temps, le système complet discrétisé est donc composé des équations

$$m_i^n \frac{\underline{u}_i^{n+1/2} - \underline{u}_i^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha k}^n \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \right) \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i, \quad (4.17)$$

$$\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^n + \Delta t \underline{u}_i^{n+1/2}, \quad \forall i, \quad (4.18)$$

$$V_k^{n+1} = V(\underline{x}_i^{n+1}), \quad \forall k, \quad (4.19)$$

$$V_{\alpha k}^{n+1} = f_{\alpha k}^n V_k^{n+1}, \quad \forall k, \forall \alpha \quad (4.20)$$

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} V_{\alpha k}^{n+1} = \rho_{\alpha k}^n V_{\alpha k}^n, \quad \forall k, \forall \alpha, \quad (4.21)$$

$$q_k^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_k^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{\nu}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_k^n \left| \frac{\dot{\nu}_k^{n+1/2}}{\nu_k^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{\nu}_k^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu}_k^{n+1/2} > 0 \end{cases}, \quad \forall k, \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha k}^{n+1} = e_{\alpha k}^n - \left(\frac{p_{\alpha k}^{n+1} + p_{\alpha k}^n}{2} + q_k^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha k}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha k}^{n+1/2} : \underline{d}_k^{n+1/2}) \\ p_{\alpha k}^{n+1} = P(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (4.23)$$

Le schéma se déroule d'une manière très semblable au cas mono-matériau. Il commence par résoudre la conservation de la quantité de mouvement moyenne puis la conservation de la masse et de l'énergie par matériau. Le pas de temps suit les étapes :

1. calcul des vitesses moyennes en $t^{n+1/2}$ à partir des fractions volumiques, des contraintes et des masses au temps t^n par (4.17) ;
2. calcul des positions en fin de pas de temps par (4.18) ;
3. calcul des volumes des mailles en fin de pas de temps par (4.19) ;
4. calcul des volumes partiels en fin de pas de temps par (4.20) ;
5. calcul des densités matériaux par la conservation de la masse par (4.21) ;
6. calcul des pseudo-viscosités moyennes par (4.22) ;
7. calcul de l'énergie et de la pression par matériau en fin de pas de temps par résolution du système (4.23).

Remarquons que dans cet extension du schéma, rien n'impose la condition de saut des contraintes (2.7). Les déformations sont les mêmes pour tous les matériaux et les lois d'état sont différentes donc les contraintes ne s'équilibrent pas *a priori* au cours de la simulation. Ce comportement n'est pas physique mais ne bloque pas le déroulement de l'algorithme car les vitesses sont calculées à partir d'un moyenne des contraintes.

4.2.5 Phase de transport

4.2.5.1 Projection du champs de vitesse

La définition du champ de vitesse n'a pas été modifiée par cette extension du schéma. La projection de la vitesse se fait à l'identique de la version mono-matériau (voir paragraphe 3.4.2). Le champ de densité servant pour la construction du champ de quantité de mouvement est le champ de densité moyenne. Les densités nodales sont ainsi en accord avec les masses nodales condensées de la phase lagrangienne.

4.2.5.2 Projection des grandeurs centrées

Nous avons modifié la discrétisation des champs centrés pour les enrichir, nous devons donc modifier en conséquence la phase en transport pour refléter ces changements.

Remarquons tout d'abord que la position de l'interface n'a jamais été utilisée lors de la phase lagrangienne ni lors de la projection des vitesses. Seule l'information de la fraction volumique a été nécessaire. Ce n'est plus le cas pendant la phase de projection.

La reconstruction de l'interface a lieu en fin de phase lagrangienne sur une topologie déformée et découpe les mailles mixtes Ω_k en mailles partielles $\Omega_{\alpha k}$ comme indiquée au paragraphe 4.2.1 à partir des fractions volumiques $f_{\alpha k}^{n+1} = f_{\alpha k}^n$ et du gradient

$$\frac{\partial f_{\alpha k}^{n+1}}{\partial \underline{x}^{n+1}}.$$

Elle reconstruit ainsi la fonction caractéristique $H_\alpha(\underline{x})$ sous la forme

$$H_\alpha(\underline{x}) = \sum_k \chi_{\Omega_{\alpha k}}(\underline{x}).$$

Nous obtenons la fraction volumique sur le maillage régularisé en projetant la fonction caractéristique sur le maillage de réception

$$f_{\alpha l} = \frac{1}{V_l} \int_{\Omega_l} H_{\alpha}(\underline{x}) dV, \forall l.$$

Nous retrouvons une forme similaire à l'équation (4.1) qui donne bien la fraction volumique sur le maillage \mathcal{F} . La décomposition de cette intégrale donne l'expression de la fraction volumique

$$f_{\alpha l} = \frac{1}{V_l} \sum_k \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}} dV, \forall l$$

d'où nous déduisons $V_{\alpha l} = f_{\alpha l} V_l$.

La densité projetée pour une maille k et un matériau α a pour expression

$$\rho_{\alpha l} = \frac{1}{V_{\alpha l}} \int_{\Omega_l \cap \mathcal{D}_{\alpha}} \rho(\underline{x}) dV.$$

En décomposant l'intégrale et en utilisant notre reconstruction du domaine \mathcal{D}_{α} sur le maillage \mathcal{D} de départ, nous pouvons écrire

$$\rho_{\alpha l} = \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_k \int_{\Omega_l \cap \Omega_k \cap \mathcal{D}_{\alpha}} \rho(\underline{x}) dV = \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_k \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}} \rho_{\alpha k} dV, \quad \forall l, \forall \alpha.$$

La densité sur le maillage régularisé a finalement pour expression

$$\rho_{\alpha l} = \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_k \rho_{\alpha k} \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}} dV, \quad \forall l, \forall \alpha.$$

Ceci correspond à la projection du maillage découpé par l'interface sur le maillage régularisé.

Le même raisonnement nous donne l'expression de l'énergie interne spécifique par matériau et par maille

$$e_{\alpha l} = \frac{1}{\rho_{\alpha l} V_{\alpha l}} \sum_k \rho_{\alpha k} e_{\alpha k} \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}} dV, \quad \forall l, \forall \alpha.$$

Le passage à l'ordre deux se fait en reconstruisant des gradients de la même manière que dans le cas mono-matériau (paragraphe 3.4.2). Après projection L^2 à l'ordre 2 sur le maillage régularisé, les champs centrés ont pour expression

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha l} &= \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_k \left((\rho_{\alpha k} + \nabla \rho_{\alpha k} \cdot (\underline{x}_{glk} - \underline{x}_{\alpha k})) \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}} dV \right), \quad \forall l, \forall \alpha, \\ e_{\alpha l} &= \frac{1}{\rho_{\alpha l} V_{\alpha l}} \sum_k \rho_{\alpha k} \left((\rho_{\alpha k} e_{\alpha k} + \nabla(\rho_{\alpha k} e_{\alpha k}) \cdot (\underline{x}_{glk} - \underline{x}_{\alpha k})) \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}} dV \right), \quad \forall l, \forall \alpha \end{aligned}$$

où $\underline{x}_{\alpha k}$ est le barycentre de la maille $\Omega_{\alpha k}$ et \underline{x}_{glk} est le barycentre de $\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}$, l'intersection entre la maille du maillage régularisé Ω_l et la maille partielle lagrangienne $\Omega_{\alpha k}$.

4.2.6 Conclusion sur la méthode

Nous avons présenté une méthode permettant d'étendre le schéma ALE « Wilkins + projection » aux cas multi-matériaux. Cette méthode est une des méthodes classiques pour prendre en compte plusieurs matériaux dans un code hydrodynamique.

La version présentée est la plus simple possible. Elle fait une hypothèse d'iso-déformation des matériaux dans les mailles mixtes et autorise des contraintes partielles non-équilibrées. Dans la pratique, elle est souvent améliorée sur certains points. La pseudo-viscosité peut être calculée par matériau en prenant le taux de déformation volumique moyen mais en utilisant la densité de chacun des matériaux. Une phase de relaxation de pression ([12], [76]) peut être mise en place pour ajuster des fractions volumiques de sorte à rétablir l'équilibre des pressions dans les mailles mixtes. Cela revient à modifier les déformations des matériaux dans les mailles pour respecter la continuité du vecteur contrainte. L'hypothèse du comportement des mailles mixtes n'est alors plus une hypothèse d'iso-déformation des matériaux mais une hypothèse de mélange isobare.

Cette méthode ne prend pas en compte l'interface lors de la phase lagrangienne et garde un champ de vitesse moyen ce qui limite la qualité de ses résultats. L'écriture sous forme de pondération permet toutefois de prendre naturellement en compte un nombre arbitraire de matériaux durant la phase lagrangienne. L'extension de la reconstruction d'interface à plus de deux matériaux fait une hypothèse d'interfaces parallèles dans les mailles mixtes.

Cette méthode servira de premier point de comparaison dans le chapitre 9 pour évaluer les schémas que nous présenterons dans les chapitres suivants.

Chapitre 5

Méthode des éléments finis enrichis

Sommaire

5.1	Équations continues	56
5.2	Discrétisation des champs	57
5.3	Traitement des quantités centrées	59
5.3.1	Conservation de la masse	59
5.3.2	Conservation de l'énergie	59
5.3.3	Pseudo-viscosité	59
5.4	Équations en quantité de mouvement	60
5.4.1	Cinétique	60
5.4.2	Comportement de l'interface	61
5.4.3	Cinématique	61
5.4.4	Discrétisation en espace	61
5.4.4.1	Contraintes de vitesse par nœud	61
5.4.4.2	Contrainte de vitesse par maille	63
5.5	Décomposition « Lagrange + projection »	64
5.6	Analyse d'un problème modèle	65
5.6.1	Introduction	65
5.6.2	Problème modèle	65
5.6.3	Formulation variationnelle mixte : cadre statique	66
5.6.4	Formulation mortier pour l'élasto-dynamique non-conforme	68
5.6.5	Conclusion	69

Nous proposons dans ce chapitre, une nouvelle extension du schéma ALE « Wilkins + projection » du chapitre 3 aux cas multi-matériaux avec *embedded interface*. Nous essayons avec notre méthode d'améliorer deux points problématiques de l'extension présentée dans le chapitre 4 à savoir :

- la soudure des matériaux à l'interface et l'absence de glissement qui en résulte ;
- la bande d'iso-déformation créée en négligeant les différences de compressibilité des matériaux dans les mailles mixtes.

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans un cadre purement lagrangien qui correspondra à la phase lagrangienne de l'algorithme.

Nous avons vu dans le précédent chapitre qu'une gestion correcte du glissement entre les matériaux nécessite d'enrichir tous les champs, y compris le champ de vitesse. Nous commençons donc par enrichir le champ de vitesse pour définir des degrés de liberté par matériau dans les mailles mixtes. L'ajout d'inconnues impose celui d'équations pour fermer le système. Les équations de saut à l'interface (2.6) et (2.7) sont donc ajoutées. Nous résolvons alors un système sous contrainte par une méthode de multiplicateur de Lagrange ([7]). Ce multiplicateur représente la pression d'interface dont il faudra définir la discrétisation. Nous retenons deux variantes possibles qui seront détaillées plus en détail dans les chapitres 6, 7 et 8.

La phase de transport doit également être modifiée pour rendre compte de la nouvelle discrétisation du champ de vitesse et la cinématique modifiée du système. Ces modifications seront expliquées dans les chapitres 6 et 7.

5.1 Équations continues

Le système à résoudre est composé des équations de conservation (3.7), (3.8) et (3.9) à résoudre par matériau dans leur domaine respectif,

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} = -\rho_\alpha \nabla \cdot \underline{u}_\alpha, \quad (5.1)$$

$$\rho_\alpha \frac{d\underline{u}_\alpha}{dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_\alpha, \quad (5.2)$$

$$\rho_\alpha \frac{de_\alpha}{dt} = \underline{\underline{S}}_\alpha : \underline{\underline{d}}_\alpha - (p_\alpha + q_\alpha) \rho_\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_\alpha} \right). \quad (5.3)$$

L'équation de conservation d'énergie (5.3) utilise comme précédemment la décomposition du champ des contraintes en partie sphérique et déviatorique $\underline{\underline{\sigma}}_\alpha = \underline{\underline{S}}_\alpha - (p_\alpha + q_\alpha) \underline{\underline{1}}$ et l'identité (5.1) sous la forme

$$\nabla \cdot \underline{u}_\alpha = -\frac{1}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dt}.$$

À ces équations s'ajoutent les équations de saut sur l'interface (2.6) et (2.7)

$$[\underline{u}] \cdot \underline{n}_\Gamma = 0 \quad \text{si} \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (5.4)$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] \cdot \underline{n}_\Gamma = 0 \quad \text{si} \quad \underline{x} \in \Gamma \quad (5.5)$$

qui ne sont pas automatiquement respectées car le champ de vitesse ainsi que le champ de contrainte peuvent être discontinus à l'interface.

5.2 Discrétisation des champs

Nous considérons dans un premier temps dans un système à deux matériaux α et β . Nous reprenons la discrétisation enrichie (4.2) - (4.4) des champs de grandeurs centrées du chapitre précédent avec la même définition de la fonction caractéristiques H_α des domaines \mathcal{D}_α et des fractions volumiques $f_{\alpha k}$. Ces champs s'écrivent

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\beta} \underline{\underline{\sigma}}_{\beta k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}), \quad (5.6)$$

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\beta} \rho_{\beta k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}), \quad (5.7)$$

$$e(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} e_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\beta} e_{\beta k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}) \quad (5.8)$$

avec χ_{Ω_k} , la fonction caractéristique de la cellule Ω_k . Notons aussi :

- N_α , l'ensemble des nœuds dont le support de la fonction de forme Ψ_i intersecte le domaine \mathcal{D}_α ;
- $N_\Gamma = N_\alpha \cap N_\beta$, l'ensemble des nœuds mixtes ; le support de la fonction de forme de ces nœuds intersecte l'interface Γ .

Remarquons qu'un nœud faisant partie de N_α n'est pas forcément situé à l'intérieur du domaine \mathcal{D}_α ; il suffit que sa fonction de forme ait une intersection avec \mathcal{D}_α .

Nous enrichissons le champ de vitesse avec une méthode de type *enriched finite element* ([24]). Nous définissons des degrés de liberté par matériau pour le champ de vitesse qui a alors pour expression

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in N_\alpha} \underline{u}_{\alpha i} \Psi_i(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{i \in N_\beta} \underline{u}_{\beta i} \Psi_i(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}). \quad (5.9)$$

L'intersection $N_\alpha \cap N_\beta$ n'est pas vide. En ce sens, les différents champs de vitesse des matériaux se superposent et certains nœuds possèdent plusieurs vitesses (nœuds verts sur la figure 4.1, page 43).

Le champ de vitesse enrichi permet bien de décrire une discontinuité à l'interface (figure 5.2) alors qu'un champ de vitesse moyen étale la discontinuité sur la maille mixte (figure 5.1).

L'approximation de calcul du paragraphe 4.2.3 permet à nouveau d'approcher le gradient de la fonction de forme Ψ_i associée au nœud i par sa valeur moyenne dans la maille Ω_k

$$\nabla \Psi_{ik}(\underline{x}) \approx \left(\frac{1}{V_k} \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV \right) \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) \quad (5.10)$$

et d'approcher les intégrales de gradient dans les mailles mixtes par

$$\int_{\Omega_{\alpha k}} \bullet dV \approx f_{\alpha k} \int_{\Omega_k} \bullet dV. \quad (5.11)$$

Le champ de vitesse n'est cependant plus le même pour les différents matériaux et le tenseur des taux de déformations peut être différent pour chacun des matériaux. Nous avons maintenant

$$\underline{\underline{d}}_{\alpha k} = \frac{1}{2V_k} \sum_{i \in N_k} \left(\underline{u}_{\alpha i} \otimes \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV + \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV \otimes \underline{u}_{\alpha i} \right), \quad (5.12)$$

$$\underline{\underline{d}}_{\beta k} = \frac{1}{2V_k} \sum_{i \in N_k} \left(\underline{u}_{\beta i} \otimes \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV + \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV \otimes \underline{u}_{\beta i} \right), \quad (5.13)$$

$$\underline{\underline{d}}_{\alpha k} \neq \underline{\underline{d}}_{\beta k}. \quad (5.14)$$

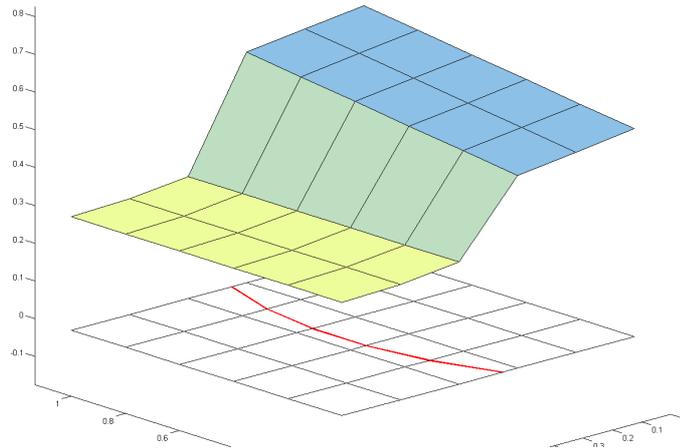


FIGURE 5.1 – Représentation d’une discontinuité avec un champ moyen. La discontinuité est interpolée par un champ continu ce qui empêche une bonne description du saut.

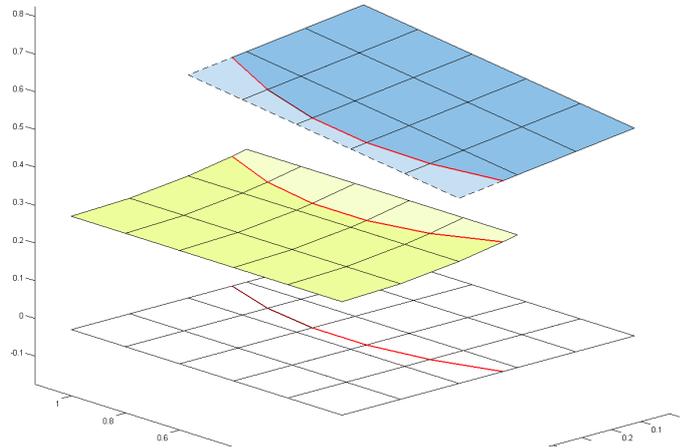


FIGURE 5.2 – Représentation d’une discontinuité avec un champ enrichi. Les degrés de liberté additionnels permettent de décrire correctement l’interface et le saut.

Nous avons une vitesse lagrangienne par matériau. Il y a donc une dérivée matérielle différente par matériau dans les mailles mixtes que nous noterons $\frac{d^\alpha \bullet}{dt}$ en cas de confusion possible. Dans ce contexte, en suivant le même raisonnement que les équations (4.6)-(4.8), nous montrons que nous avons toujours une dérivée matérielle de la fraction volumique nulle

$$\frac{d^\alpha f_{\alpha k}}{dt} = 0$$

puisque la cellule Ω_k est advectée dans ce cas avec la vitesse du milieu \mathcal{D}_α . Avec cette remarque, les volumes partiels en fin de pas de temps s’écrivent pour chaque maille mixte et chaque matériau

$$V_{\alpha k}^{n+1} = f_{\alpha k}^n V_k^{\alpha n+1}$$

où le volume $V_k^{\alpha n+1}$ représente le volume de la maille $\Omega_k^{\alpha n+1}$, calculé géométriquement par la position des nœuds $\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}$ déplacés depuis leur position initiale \underline{x}_i^n avec les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ du

matériau α .

5.3 Traitement des quantités centrées

5.3.1 Conservation de la masse

La discrétisation de l'équation de conservation de la masse n'est pas modifiée par rapport au schéma utilisant une vitesse moyenne. Elle est obtenue en intégrant (5.1) pondérée par la fonction caractéristique des mailles et des domaines matériaux ce qui donne pour chaque maille et chaque matériau

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{d\rho_\alpha}{dt} + \rho_\alpha \nabla \cdot \underline{u}_\alpha \right) \chi_{\Omega_k} H_\alpha dV = 0, \forall k, \forall \alpha.$$

L'intégration en espace de cette équation donne la forme discrétisée de la conservation de la masse toujours écrite pour chaque matériau et pour chaque cellule $\Omega_k \cap \mathcal{D}_\alpha$

$$\frac{d}{dt} (\rho_{\alpha k} V_{\alpha k}) = 0, \forall k, \forall \alpha. \quad (5.15)$$

5.3.2 Conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie est écrite sous forme faible de la même manière que la conservation de la masse ce qui donne

$$\int_{\mathcal{D}} \rho_\alpha \left(\frac{de_\alpha}{dt} - \frac{1}{\rho_\alpha} \underline{S}_\alpha : \underline{d}_\alpha + (p_\alpha + q_\alpha) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_\alpha} \right) \right) \chi_{\Omega_k} H_\alpha dV = 0, \forall k, \forall \alpha.$$

L'intégration en espace aboutit après division par $\rho_{\alpha k} V_{\alpha k}$ à l'expression

$$\frac{de_{\alpha k}}{dt} = -(p_{\alpha k} + q_{\alpha k}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}} \right) + \frac{1}{\rho_{\alpha k}} (\underline{S}_{\alpha k} : \underline{d}_{\alpha k}), \forall k, \forall \alpha. \quad (5.16)$$

Cette forme discrétisée en espace est toujours couplée à la loi d'état propre de chaque matériau

$$p_{\alpha k} = EOS_\alpha(e_{\alpha k}; \rho_{\alpha k}), \quad \forall k, \forall \alpha \quad (5.17)$$

et fait éventuellement intervenir la loi de comportement élastique pour chaque matériau

$$\underline{\dot{S}}_{\alpha k} = 2G_\alpha \left(\underline{d}_{\alpha k} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d}_{\alpha k}) \underline{\mathbf{1}} \right). \quad (5.18)$$

Notons que les équations (5.16) et (5.18) font apparaître le tenseur des taux de déformations propres au matériau α et non plus le tenseur de taux de déformations moyennes.

5.3.3 Pseudo-viscosité

La pseudo viscosité est définie pour chaque matériau et chaque maille par

$$\nu_{\alpha k} = \begin{cases} \rho_{\alpha k} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}}{\nu_{\alpha k}} \right|^2 + C_L l_k c_{\alpha k} \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}}{\nu_{\alpha k}} \right| \right] & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k} > 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

avec $\nu_{\alpha k} = \frac{1}{\rho_{\alpha k}}$, le volume spécifique du matériau α dans la cellule Ω_k . Le tenseur des contraintes par matériau et par maille a pour expression

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k} = \underline{\underline{S}}_{\alpha k} - p_{\alpha k} \underline{\underline{1}} - q_{\alpha k} \underline{\underline{1}}.$$

La définition de la pseudo-viscosité par matériau est nécessaire. Pour s'assurer que la viscosité artificielle soit dissipative et travaille de manière consistante, il faut que le taux de déformation servant à la calculer et le taux de déformation servant à la faire travailler soient les mêmes. Le travail de la pseudo-viscosité se calcule à partir des déformations propres à chaque matériau (équation (5.16)). Il faut donc calculer la pseudo-viscosité à partir de ces mêmes déformations. La viscosité artificielle prend ainsi une valeur différente par matériau.

5.4 Équations en quantité de mouvement

5.4.1 Cinétique

Repartons de l'équation de mouvement continue (5.2). Nous l'écrivons sous forme faible en prenant comme fonction test, un champ de vitesses virtuelles localement cinématiquement admissibles ce qui donne pour chaque domaine

$$\int_{\mathcal{D}_\alpha} \left(\rho_\alpha \frac{du_\alpha}{dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_\alpha \right) \cdot \hat{\underline{u}} dV = 0, \quad \forall \hat{\underline{u}} \text{ tel que } \hat{\underline{u}}|_{\partial \mathcal{D}_d} = \underline{0}.$$

En intégrant par parties sur chacun des domaines matériaux, nous obtenons après addition

$$\sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho_\alpha \frac{du_\alpha}{dt} \cdot \hat{\underline{u}} dV + \sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha : \nabla \hat{\underline{u}} dV = \sum_\alpha \int_{\partial \mathcal{D}_\alpha} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha \cdot \underline{n}_\alpha \cdot \hat{\underline{u}} dS, \quad \forall \hat{\underline{u}}.$$

Notons que nous n'imposons ici aucune condition sur le champ de vitesse virtuelle à l'interface. La frontière des domaines \mathcal{D}_α se décompose entre l'interface Γ et le bord du domaine de calcul $\partial \mathcal{D}$. Comme les fonctions tests sont des fonctions cinématiquement admissibles (*i.e.* $\hat{\underline{u}}|_{\partial \mathcal{D}_d}$), les termes sur le bord du domaine $\partial \mathcal{D}$ s'annulent. La dernière formule se ré-écrit

$$\sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho_\alpha \frac{du_\alpha}{dt} \cdot \hat{\underline{u}} dV + \sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha : \nabla \hat{\underline{u}} dV = \sum_\alpha \int_\Gamma \underline{\underline{\sigma}}_\alpha \cdot \underline{n}_\alpha \cdot \hat{\underline{u}} dS, \quad \forall \hat{\underline{u}} \text{ tel que } \hat{\underline{u}}|_{\partial \mathcal{D}_d} = \underline{0}. \quad (5.20)$$

Notons \underline{p}_Γ , l'opposé du vecteur contrainte à l'interface pour le matériau α

$$\underline{p}_\Gamma = -\underline{\underline{\sigma}}_\alpha \cdot \underline{n}_\Gamma$$

en se rappelant que le tenseur des contraintes regroupe le déviateur des contraintes, la pression hydrodynamique et la pseudo-viscosité scalaire. En utilisant la continuité du vecteur contrainte à l'interface (5.5), nous pouvons écrire

$$\underline{p}_\Gamma = -\underline{\underline{\sigma}}_\alpha \cdot \underline{n}_\Gamma = \underline{\underline{\sigma}}_\beta \cdot \underline{n}_\Gamma.$$

Avec la relation précédente, l'équation (5.20) s'écrit

$$\sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho_\alpha \frac{du_\alpha}{dt} \cdot \hat{\underline{u}} dV + \sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha : \nabla \hat{\underline{u}} dV = \int_\Gamma \underline{p}_\Gamma \cdot [\hat{\underline{u}}] dS, \quad \forall \hat{\underline{u}} \text{ tel que } \hat{\underline{u}}|_{\partial \mathcal{D}_d} = \underline{0}.$$

Rappelons que $[\hat{\underline{u}}]$ dénote la discontinuité de vitesse virtuelle à l'interface, $[\hat{\underline{u}}] = \hat{\underline{u}}_\beta - \hat{\underline{u}}_\alpha$ et que la normale à l'interface \underline{n}_Γ est orientée par convention sortante pour \mathcal{D}_α et entrante pour \mathcal{D}_β .

5.4.2 Comportement de l'interface

Nous supposons dans un premier temps une interface sans frottement. Le vecteur contrainte à l'interface est donc purement normal à l'interface

$$\underline{p}_\Gamma = p_\Gamma \underline{n}_\Gamma. \quad (5.21)$$

Avec cette hypothèse de comportement, l'équation de mouvement s'écrit finalement

$$\sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho_\alpha \frac{d\underline{u}_\alpha}{dt} \cdot \hat{\underline{u}} dV + \sum_\alpha \int_{\mathcal{D}_\alpha} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha : \nabla \hat{\underline{u}} dV = \int_\Gamma p_\Gamma [\hat{\underline{u}}] \cdot \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall \hat{\underline{u}} \text{ tel que } \hat{\underline{u}}|_{\partial\mathcal{D}_d} = \underline{0}. \quad (5.22)$$

Le cas plus général définit $\underline{p}_\Gamma = p_\Gamma \underline{n}_\Gamma + f_\Gamma \underline{t}_\Gamma$, avec f_Γ une composante de frottement fonction de p_Γ et de $[\underline{u}]$ et \underline{t}_Γ , un vecteur unitaire orthogonale à \underline{n}_Γ portant la direction de la force de frottement ce qui rajoute une intégrale $\int_\Gamma f_\Gamma [\hat{\underline{u}}] \cdot \underline{t}_\Gamma dS$ dans l'équation (5.22).

5.4.3 Cinématique

Nous écrivons l'équation de continuité des vitesses (5.4) au sens faible en la multipliant par une fonction test arbitraire \hat{p} dans un espace P et en intégrant sur l'interface Γ ce qui donne

$$\int_\Gamma \hat{p} [\underline{u}] \cdot \underline{n}_\Gamma dS = 0, \quad \forall \hat{p} \in P. \quad (5.23)$$

Cet espace de fonction P et sa discrétisation en espace P_h sont définis dans le paragraphe qui suit. L'équation fait (5.22) apparaître que la pression d'interface p_Γ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de continuité des vitesses (5.23) (voir [7, 14]). Nous allons donc rechercher une approximation spatiale commune pour la pression d'interface p_Γ et la fonction test \hat{p} .

5.4.4 Discrétisation en espace

Nous étudions deux variantes de discrétisation du multiplicateur de Lagrange. Nous les présentons ici rapidement. Elles sont discutées en détail dans le chapitre 6 pour la première, dans les chapitres 7 et 8 pour la seconde.

5.4.4.1 Contraintes de vitesse par nœud

Une première discrétisation consiste à définir un champ de pression d'interface dans P défini par des valeurs nodales sur le maillage en vitesse (voir figure 5.3)

$$p_\Gamma(\underline{x}) = \sum_{i \in N_\Gamma} p_{\Gamma i} \Theta_i(\underline{x}) \quad (5.24)$$

avec Θ_i une fonction de forme propre à chaque nœud i . Nous définissons la fonction de forme par la propriété de dualité par rapport aux fonctions de forme du champ de vitesse

$$\int_\Gamma \Theta_i(\underline{x}) \Psi_j(\underline{x}) \underline{n}_\Gamma dS = \begin{cases} \underline{n}_{\Gamma i} & \text{si } i = j \\ \underline{0} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.25)$$

où $\underline{n}_{\Gamma i}$ est une normale à l'interface au nœud à définir par la suite. L'expression explicite des fonctions de forme Θ_i n'est pas nécessaire et la propriété (5.25) est suffisante pour discrétiser

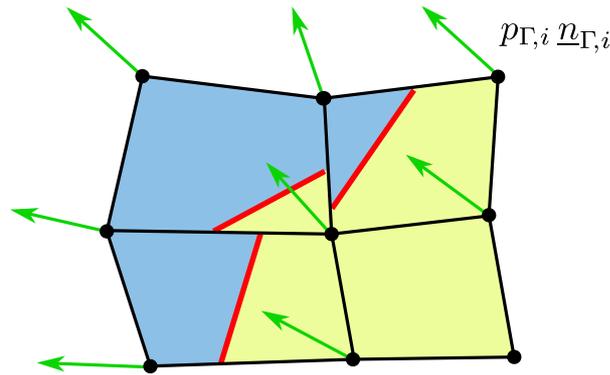


FIGURE 5.3 – Champ de pression par nœud. Les flèches vertes symbolisent les forces d’interface, discrétisées par nœud et s’appliquant sur ceux-ci.

le système. Elle définit une condensation des forces d’interface similaire à la condensation de la masse. Les supports des fonctions de forme nodales Ψ_j du champ de vitesse se superposent et couplent les nœuds, la propriété définissant les fonctions Θ_i permettent de découpler les nœuds et d’assurer que la force d’interface du nœud i n’agit que sur ce nœud.

Observons que dans cette construction, Θ_i est en $\frac{1}{h}$ avec h , une longueur caractéristique de la taille des mailles du maillage. Le terme $p_{\Gamma,i}$ est donc homogène à une force nodale bien que nous continuerons à l’appeler « pression d’interface » par abus de langage.

En utilisant cette définition du champ pour les pressions tests \hat{p} et la définition du champ de vitesse, la continuité des vitesses (5.23) devient

$$\int_{\Gamma} \left(\left(\sum_{j \in N_{\Gamma}} (\underline{u}_{\beta j} - \underline{u}_{\alpha j}) \Psi_j \right) \cdot \underline{n}_{\Gamma} \Theta_i \right) dS = 0, \quad \forall i \in N_{\Gamma}. \quad (5.26)$$

En développant la somme et en utilisant la propriété de dualité (5.25), la continuité des vitesses prend la forme discrétisée par nœud

$$(\underline{u}_{\beta i} - \underline{u}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i} = 0, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \quad (5.27)$$

avec $\underline{n}_{\Gamma i}$, une discrétisation de la normale à l’interface au point i .

Le saut de vitesse a pour expression $[\underline{u}] = \underline{u}_{\beta} - \underline{u}_{\alpha}$. La fonction test \hat{u} peut être n’importe quel champ discontinu à l’interface comme défini par (5.9). En prenant un champ de vitesse arbitraire sur N_{α} et nul sur N_{β} puis arbitraire sur N_{β} et nul sur N_{α} , l’équation (5.22) prend la forme équivalente

$$\int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \rho_{\alpha} \frac{d\underline{u}_{\alpha}}{dt} \Psi_i dV + \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \underline{\sigma}_{\alpha} \cdot \nabla \Psi_i dV - \int_{\Gamma} p_{\Gamma} \Psi_i \cdot \underline{n}_{\Gamma} dS = 0, \quad \forall i \in N_{\alpha}, \quad (5.28)$$

$$\int_{\mathcal{D}_{\beta}} \rho_{\beta} \frac{d\underline{u}_{\beta}}{dt} \Psi_i dV + \int_{\mathcal{D}_{\beta}} \underline{\sigma}_{\beta} \cdot \nabla \Psi_i dV + \int_{\Gamma} p_{\Gamma} \Psi_i \cdot \underline{n}_{\Gamma} dS = 0, \quad \forall i \in N_{\beta}. \quad (5.29)$$

En utilisant la condensation de la masse et l’expression de la pression d’interface, l’équation de

quantité de mouvement prend la forme

$$\begin{aligned} m_{\alpha i} \frac{du_{\alpha i}}{dt} &= - \int_{\mathcal{D}_\alpha} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha \cdot \nabla \Psi_i dV + \sum_{j \in N_\Gamma} \int_\Gamma p_{\Gamma j} \Theta_j n \Psi_i \cdot \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\alpha, \\ m_{\beta i} \frac{du_{\beta i}}{dt} &= - \int_{\mathcal{D}_\beta} \underline{\underline{\sigma}}_\beta \cdot \nabla \Psi_i dV - \sum_{j \in N_\Gamma} \int_\Gamma p_{\Gamma j} \Theta_j \Psi_i \cdot \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\beta. \end{aligned}$$

Les détails de la condensation de la masse dans nos cas multi-matériaux multi-vitesses seront expliqués pour chaque variante dans les chapitres suivantes.

Enfin, l'approximation (5.11) de l'intégrale sur les mailles partielles et la propriété (5.25) permettent d'écrire la forme finale de l'équation de quantité de mouvement intégrée en espace

$$m_{\alpha i} \frac{du_{\alpha i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k} \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k} \cdot \int_{\partial \Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_\alpha \setminus N_\Gamma, \quad (5.30)$$

$$m_{\alpha i} \frac{du_{\alpha i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k} \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k} \cdot \int_{\partial \Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS + p_{\Gamma i} \underline{n}_{\Gamma i}, \quad \forall i \in N_\alpha \cap N_\Gamma, \quad (5.31)$$

$$m_{\beta i} \frac{du_{\beta i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k} \underline{\underline{\sigma}}_{\beta k} \cdot \int_{\partial \Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_\beta \setminus N_\Gamma, \quad (5.32)$$

$$m_{\beta i} \frac{du_{\beta i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k} \underline{\underline{\sigma}}_{\beta k} \cdot \int_{\partial \Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS - p_{\Gamma i} \underline{n}_{\Gamma i}, \quad \forall i \in N_\beta \cap N_\Gamma. \quad (5.33)$$

Dans ces équations, comme pour la continuité des vitesses (5.27), une discrétisation nodale de la normale à l'interface apparaît. Le calcul de cette normale est détaillé dans le paragraphe 6.4.

Avec cette discrétisation, nous retrouvons une formulation similaire aux travaux de Vitali [85, 86, 87]. Dans notre cas, la contrainte de vitesse est introduite directement dans la formulation variationnelle ce qui nous donne une formulation plus générale. Les méthodes résultantes diffèrent, aussi nous citons deux grandes différences. Nous montrons par la suite (voir paragraphe 6.4) que le calcul de la normale à l'interface est primordiale pour préserver les solutions stationnaires et nous la discrétisons de manière consistante avec la divergence des contraintes. De plus, une décomposition du calcul des vitesses nous permet d'écrire une condition de contact et de décollement géométrique (paragraphe 6.8) au lieu de se baser sur un état de compression de la maille.

5.4.4.2 Contrainte de vitesse par maille

La deuxième discrétisation étudiée est la définition d'un champ de pression d'interface constante par maille et donc par segment d'interface (voir figure 5.4)

$$p_\Gamma(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\Gamma} p_{\Gamma k} \Theta_k(\underline{x}), \quad \text{si } \underline{x} \in \Gamma. \quad (5.34)$$

La fonction de forme $\Theta_k(\underline{x})$ est une fonction valant 1 sur la portion d'interface intersectée par Ω_k , 0 sinon ce qui prend la forme

$$\Theta_k(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \Omega_k \cap \Gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (5.35)$$

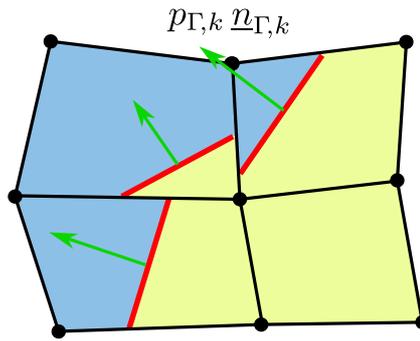


FIGURE 5.4 – Champ de pression par maille. Les flèches vertes symbolisent les pressions d’interface, discrétisées par maille. Elles s’appliquent sur les nœuds par leur intégration sur l’interface dans la maille mixte.

En utilisant cette définition pour le champ de pression test, l’équation de continuité des vitesses (5.23) s’écrit par maille

$$\sum_{i \in N_k} \int_{\Gamma} (\underline{u}_{\beta i} \Psi_i - \underline{u}_{\alpha i} \Psi_i) \cdot \underline{n}_{\Gamma} dS = 0, \quad \forall k \in M_{\Gamma}. \quad (5.36)$$

La continuité des vitesses est ainsi mesurée en moyenne par maille mixte $k \in M_{\Gamma}$ en faisant intervenir tous les nœuds de la maille mixte en question. Une maille mixte est ici une maille intersectant l’interface Γ entre les matériaux comme définie au chapitre 4.

La dynamique des nœuds purs ($i \notin N_{\Gamma}$) est inchangée et la dynamique des nœuds mixtes ($i \in N_{\Gamma}$) voit apparaître un terme dépendant des pressions d’interface dans les mailles voisines. En suivant le même principe que dans le paragraphe précédent, l’équation de mouvement sous forme faible (5.22) prend la forme discrétisée en espace

$$m_{\alpha i} \frac{d\underline{u}_{\alpha i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k} \underline{\sigma}_{\alpha k} \cdot \int_{\partial\Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_{\alpha} \setminus N_{\Gamma}, \quad (5.37)$$

$$m_{\alpha i} \frac{d\underline{u}_{\alpha i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k} \underline{\sigma}_{\alpha k} \cdot \int_{\partial\Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \int_{\Gamma_k} p_{\Gamma k} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS, \quad \forall i \in N_{\alpha} \cap N_{\Gamma}, \quad (5.38)$$

$$m_{\beta i} \frac{d\underline{u}_{\beta i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k} \underline{\sigma}_{\beta k} \cdot \int_{\partial\Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_{\beta} \setminus N_{\Gamma}, \quad (5.39)$$

$$m_{\beta i} \frac{d\underline{u}_{\beta i}}{dt} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k} \underline{\sigma}_{\beta k} \cdot \int_{\partial\Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \int_{\Gamma_k} p_{\Gamma k} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS, \quad \forall i \in N_{\beta} \cap N_{\Gamma}. \quad (5.40)$$

5.5 Décomposition « Lagrange + projection »

Nous avons détaillé notre schéma de notre méthode multi-matériau multi-vitesse dans une formulation eulérienne. Nous nous replaçons maintenant dans le contexte présenté dans le para-

graphe 3.1 de discrétisation en temps de type « Lagrange + projection » pour des formulations eulériennes ou ALE.

Lors d'un pas de temps, la vitesse \underline{u}_α est différente pour chaque matériau mais la vitesse du maillage \underline{v} est unique.

Durant la phase lagrangienne, le système est écrit pour un maillage se déplaçant à une vitesse identique à celle de la matière $\underline{v}_{lag} = \underline{u}_{lag}$. Dans les mailles mixtes, nous avons un champ de vitesse par matériau. Il y a donc différents déplacements de maillage $\Delta t \underline{v}_{lag,\alpha}$. La configuration $n + 1$ du maillage en fin de pas de temps est différente pour chaque matériau. Nous notons cette configuration $\alpha n + 1$ pour indiquer le matériau dont la vitesse a servi à déplacer les nœuds.

Durant la phase de transport, la matière reste fixe ($\underline{u}_{ale,\alpha} = 0$) alors que le maillage se déplace à une vitesse $\underline{v}_{ale,\alpha} = -(\underline{u}_{lag,\alpha} - \underline{v})$. La vitesse lagrangienne était différente pour chaque matériau. Le déplacement du maillage pour arriver à sa configuration régularisée est également différent pour chaque matériau. Lors de la projection, il faut calculer l'advection des quantités par matériau entre le maillage déformé par les vitesses propres du matériau et le maillage ALE qui lui est commun pour tous les matériaux.

La décomposition « Lagrange + projection » est donc distincte pour chaque matériau.

5.6 Analyse d'un problème modèle

5.6.1 Introduction

Les formulations (5.27), (5.30)-(5.33) ou (5.36), (5.37)-(5.40) introduites dans les précédents paragraphes sont des formulations mixtes. Elles font intervenir les deux champs d'inconnues indépendantes : le champ de vitesse enrichi $\underline{u} = \underline{u}_\alpha \oplus \underline{u}_\beta$ et le champ de pression d'interface p_Γ . À ces deux inconnues sont associés deux espaces d'approximation différents. Les vitesses \underline{u} sont définies sur un espace noté U dont l'approximation spatiale U_h est donné par (5.9) alors que les pressions d'interface p_Γ sont définies dans P , l'espace des multiplicateurs d'interface pour lequel deux propositions d'approximation en espace P_h sont données par (5.24) et (5.34).

L'étude de ces problèmes ([5, 14]) montre qu'il n'est pas possible d'approcher de manière indépendante l'espace des multiplicateurs de Lagrange et l'espace des vitesses sous peine de verrouillage numérique lié à l'impossibilité de trouver un sous-espace V_h de U_h suffisamment riche de fonctions satisfaisant la contrainte au sens faible dans P_h .

Il est donc nécessaire de faire une analyse préalable pour valider le choix de discrétisation à effectuer. Notre problème se pose en grandes déformations à maillage mobile. Pour simplifier, nous nous placerons dans le cadre élasto-dynamique en petites déformations. Nous nous retrouvons donc dans une formulation purement lagrangienne avec des dérivées en espace calculées sur des géométries fixes, formulation déjà étudiée dans [40].

5.6.2 Problème modèle

Nous prenons un domaine $\mathcal{D}(t)$ constant au cours du temps et repartons du problème continu sous forme faible en prenant l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.22)

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \rho \frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \hat{\underline{u}} dV + \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \hat{\underline{u}} dV = \int_{\Gamma} p_{\Gamma} [\hat{\underline{u}}] \cdot \underline{n}_{\Gamma} dS, \quad \forall \hat{\underline{u}} \quad (5.41)$$

et l'équation de continuité des vitesses normales (5.23)

$$\int_{\Gamma} \hat{p}[\underline{u}] \cdot \underline{n}_{\Gamma} dS = 0, \quad \forall \hat{p} \in P. \quad (5.42)$$

Notons $a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}, \hat{\underline{u}})$ la forme bi-linéaire associée à (5.41) en élasticité linéaire

$$a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}, \hat{\underline{u}}) = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \underline{\underline{\sigma}}(\nabla \underline{\xi}) : \nabla \hat{\underline{u}} dV = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \kappa_{\alpha} \nabla \cdot \underline{\xi}_{\alpha} \nabla \cdot \hat{\underline{u}} + G_{\alpha} \underline{\underline{\varepsilon}}^D(\underline{\xi}_{\alpha}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^D(\hat{\underline{u}}) dV$$

avec $\underline{\xi}(\underline{x})$ dénotant le champ de déplacement et $\underline{\underline{\varepsilon}}^D(\underline{u})$, la partie déviatorique du tenseur des déformations linéarisé

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^D(\underline{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{u} \underline{\underline{1}}.$$

Rappelons que κ_{α} et G_{α} dénotent respectivement le module de compressibilité et le module de cisaillement du matériau α .

La formulation conforme du problème est obtenue en imposant la continuité des vitesses (5.4) au sens fort et en prenant des fonctions test respectant la contrainte de vitesse. Le problème (5.41) se re-écrit alors en fonction du déplacement $\underline{\xi}$,

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \rho \ddot{\underline{\xi}} \cdot \hat{\underline{u}} dV + a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}, \hat{\underline{u}}) = l(\hat{\underline{u}}), \quad \underline{\xi} \in V, \quad \forall \hat{\underline{u}} \in V \quad (5.43)$$

avec V l'espace des vitesses à composante normale continue au passage de l'interface

$$V = \{ \underline{u} \in \underline{H}_d^1(\mathcal{D}_{\alpha}) \times \underline{H}_d^1(\mathcal{D}_{\beta}), \quad [\underline{u}] \cdot \underline{n}_{\Gamma} = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

L'espace $\underline{H}_d^1(\mathcal{D}_{\alpha})$ est l'espace des vitesses cinématiquement admissibles, ayant pour définition

$$\underline{H}_d^1(\mathcal{D}_{\alpha}) = \{ \underline{u} \in \underline{H}^1(\mathcal{D}_{\alpha}), \quad \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial \mathcal{D}_d \}.$$

La forme linéaire $l(\hat{\underline{u}})$ contient la participation des forces volumiques et des conditions aux limites de type Neumann s'exerçant sur $\partial \mathcal{D}_n$. Elle a pour expression

$$l(\hat{\underline{u}}) = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \underline{f} \cdot \hat{\underline{u}} dV + \int_{\partial \mathcal{D}_n} \underline{f}_n \cdot \hat{\underline{u}} dS.$$

5.6.3 Formulation variationnelle mixte : cadre statique

Nous écrivons dans un premier temps notre problème dans un cadre statique. Le terme d'inertie est négligé,

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \rho \ddot{\underline{\xi}} \cdot \hat{\underline{u}} dV = 0.$$

Le problème (5.43) prend la forme classique des problèmes d'élasticité dans le cadre statique

$$a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}, \hat{\underline{u}}) = l(\hat{\underline{u}}), \quad \underline{\xi} \in V, \quad \forall \hat{\underline{u}} \in V. \quad (5.44)$$

Nous définissons l'espace des vitesses des vitesses cinématiquement admissible U sur tout le domaine \mathcal{D} par

$$U = \{ \underline{u} \in \underline{H}^1(\mathcal{D}_{\alpha}) \times \underline{H}^1(\mathcal{D}_{\beta}), \quad \hat{\underline{u}} = \underline{0} \text{ sur } \partial \mathcal{D}_d \},$$

muni de la norme énergie

$$\|\underline{u}\|_U^2 = \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \kappa_{\alpha} |\nabla \cdot \underline{u}_{\alpha}|^2 + G_{\alpha} |\underline{\underline{\xi}}^D(\underline{u}_{\alpha})|^2 dV.$$

Par construction ([91]), cette norme est équivalente à la norme H^1 si $\partial\mathcal{D}_d$ intersecte \mathcal{D}_{α} et \mathcal{D}_{β} . Notons X l'espace des traces de vitesse sur l'interface, définie par

$$X = \text{Tr}(\underline{H}_d^1(\mathcal{D}_{\alpha}))|_{\Gamma} = \text{Tr}(\underline{H}_d^1(\mathcal{D}_{\beta}))|_{\Gamma}.$$

Nous appelons P le dual de cet espace, $P = X'$. Cet espace est l'espace des pressions d'interface p_{Γ} et des pressions test \hat{p} . Nous définissons également la norme image

$$\|p\|_X = \inf_{u \in \text{Tr}(p)^{-1}} \|u\|_{\underline{H}^1(\mathcal{D}_{\alpha})}.$$

Soit b , la forme bi-linéaire mettant en dualité les espaces X et P . Elle est définie par

$$\begin{aligned} b : U \times P &\rightarrow \mathbb{R}, \\ b(\underline{u}, p) &= \langle [\underline{u}] \cdot \underline{n}_{\Gamma}, p \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Dans le cas de fonctions intégrables sur Γ , le produit de dualité a pour expression

$$b(\underline{u}, p) = \int_{\Gamma} [\underline{u}] \cdot \underline{n}_{\Gamma} p dS.$$

Par construction, en dénotant B l'opérateur associé à la forme bi-linéaire b

$$\begin{aligned} B : U &\rightarrow X, \\ \underline{u} &\rightarrow B\underline{u}, \quad \langle B\underline{u}, p \rangle = b(\underline{u}, p), \quad \forall p \in X', \end{aligned}$$

nous avons $V = \ker B$.

Par construction de l'espace X et de sa norme $\|\bullet\|_X$, l'opérateur B est continu et son image est l'espace X tout entier : $\text{im } B = X$. D'après le théorème de l'image fermée, nous avons donc la relation $\text{im } B^T = (\ker B)^{\perp}$.

Or, la relation (5.44) exprime que la forme linéaire $a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}, \cdot) - l(\cdot)$ est dans $V^{\perp} = (\ker B)^{\perp}$. La solution de (5.44) est donc caractérisée par l'existence de $p_{\Gamma} \in X'$ tel que

$$a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}, \cdot) - l(\cdot) = B^T(p_{\Gamma})$$

ce qui s'écrit sous la forme mixte d'inconnues $\underline{\xi} \in U$ et $p_{\Gamma} \in P$

$$\begin{cases} a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}, \hat{\underline{u}}) + b(\hat{\underline{u}}, p_{\Gamma}) &= l(\hat{\underline{u}}), & \underline{\xi} \in U, \quad p_{\Gamma} \in P, \quad \forall \hat{\underline{u}} \in U, \\ b(\underline{\xi}, \hat{p}) &= 0, & \forall \hat{p} \in P. \end{cases}$$

Ce problème mixte peut s'approcher de manière non conforme par éléments finis mixtes.

Avec la formulation précédente, pour obtenir une approximation stable et convergente, il convient de prendre des espaces éléments finis $U_h \subset U$ et $P_h \subset P$ permettant de vérifier les deux conditions ([16, 33]) :

(i) la forme bi-linéaire $a_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ doit être coercive sur U_h , c'est-à-dire,

$$\exists \alpha > 0, \quad a_{\mathcal{D}}(\underline{v}_h, \underline{v}_h) \geq \alpha \|\underline{v}_h\|_{U_h}^2, \quad \forall \underline{v}_h \in U_h;$$

- (ii) la forme bi-linéaire $b(\cdot, \cdot)$ doit respecter la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) ou condition Inf-Sup

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{p_h \in P_h} \sup_{\underline{u}_h \in U_h} \frac{b(\underline{u}_h, p_h)}{\|\underline{u}_h\|_U \|p_h\|_P} \geq \beta \quad (5.45)$$

où β est une constante indépendante de h .

Avec ces conditions, en introduisant le problème approché

$$\begin{cases} a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}_h, \hat{\underline{u}}_h) + b(\hat{\underline{u}}_h, p_{\Gamma h}) = l(\hat{\underline{u}}_h) & , \quad \underline{\xi}_h \in U_h, \quad p_{\Gamma h} \in P_h, \quad \forall \hat{\underline{u}}_h \in U_h, \\ b(\underline{\xi}_h, \hat{p}_h) = 0 & , \quad \forall \hat{p}_h \in P_h \end{cases} \quad (5.46)$$

nous démontrons le résultat d'existence et de convergence optimale (voir [91], p. 19-26). La solution $(\underline{\xi}_h, p_{\Gamma h})$ du problème (5.46) existe, est unique et vérifie

$$\|\underline{\xi} - \underline{\xi}_h\|_U + \|p_{\Gamma} - p_{\Gamma h}\|_X \leq C \left(\inf_{\hat{\underline{\xi}}_h \in U_h} \|\underline{\xi} - \hat{\underline{\xi}}_h\|_U + \inf_{\hat{p}_h \in P_h} \|p_{\Gamma} - \hat{p}_h\|_X \right).$$

Ici, la coercivité de la forme bi-linéaire $a_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot)$ sur U_h est vérifiée par la construction de la norme $\|\bullet\|_U$. Cette condition pourrait être affaiblie et n'être vérifié que pour les fonctions \underline{v} satisfaisant (5.46). La seconde condition (5.45) pose des difficultés. La norme $\|\bullet\|_P$ est dure à définir dans notre cas (dual d'une norme globale) ce qui empêche de vérifier correctement la condition Inf-Sup. Cette difficulté a été surmontée par Wohlmuth ([91]) en utilisant le même schéma de discrétisation mais en travaillant avec une norme discrète. Le même principe a ensuite été utilisé dans le cadre élasto-dynamique par Hauret et Le Tallec ([40]) dont nous reprenons l'écriture par la suite.

5.6.4 Formulation mortier pour l'élasto-dynamique non-conforme

Soit $P_h \subset L^2(\Gamma)$ et U_h , l'espace élément fini défini comme en (5.9) par

$$U_h = \left\{ \underline{u}_h \in \underline{H}_d^1(\mathcal{D}_\alpha) \times \underline{H}_d^1(\mathcal{D}_\beta), \quad \underline{u}_h|_{\mathcal{D}_\alpha} \in Q_1(\mathcal{D}_\alpha), \quad \underline{u}_h|_{\mathcal{D}_\beta} \in Q_1(\mathcal{D}_\beta) \right\}.$$

Soit V_h , le sous-espace de U_h des fonctions à composantes normales continues à l'interface au sens faible

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ \underline{u}_h \in U_h, \int_{\Gamma} [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_{\Gamma} p_h \, dS = 0, \forall p_h \in P_h \right\} \\ &= \left\{ \underline{u}_h \in U_h, \quad b(\underline{u}_h, p_h) = 0, \forall p_h \in P_h \right\}. \end{aligned}$$

La résolution du problème élasto-dynamique (5.43) discrétisé en espace par

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho \ddot{\underline{\xi}}_h \cdot \hat{\underline{u}}_h \, dV + a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}_h, \hat{\underline{u}}_h) = l(\hat{\underline{u}}_h), \quad \underline{\xi}_h \in V_h, \quad \forall \hat{\underline{u}}_h \in V_h \quad (5.47)$$

peut se faire par la résolution du problème mixte approché

$$(\mathbb{P}_h) \begin{cases} \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho \ddot{\underline{\xi}}_h \cdot \hat{\underline{u}}_h \, dV + a_{\mathcal{D}}(\underline{\xi}_h, \hat{\underline{u}}_h) + b(\hat{\underline{u}}_h, p_{\Gamma h}) = l(\hat{\underline{u}}_h), & \underline{\xi}_h \in U_h, \quad p_{\Gamma h} \in P_h, \quad \forall \hat{\underline{u}}_h \in U_h, \\ b(\underline{\xi}_h, \hat{p}_h) = 0, & \forall \hat{p}_h \in P_h. \end{cases} \quad (5.48)$$

En introduisant les normes discrètes

$$\|\underline{u}\|_{1/2,h,\Gamma}^2 = \sum_{\Gamma_k} \frac{1}{\text{diam } \Gamma_k} \|\underline{u}\|_{L^2(\Gamma_k)}^2 \quad (5.50)$$

et

$$\|p\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 = \sum_{\Gamma_k} \text{diam } \Gamma_k \|p\|_{L^2(\Gamma_k)}^2 \quad (5.51)$$

où $\Gamma_k = \Gamma \cap \Omega_k$, la convergence de ce système a été montrée dans [40] sous hypothèses techniques et sous réserve d'enrichir l'espace des vitesses U_h de manière à avoir

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{p_h \in P_h} \sup_{\underline{u}_h \in U_h} \frac{b(\underline{u}_h, p_h)}{\|\underline{u}_h\|_{1/2,h,\Gamma} \|p_h\|_{-1/2,h,\Gamma}} \geq \beta, \quad (5.52)$$

pour la suite de maillages considérés.

De manière plus précise, dans le cas plus sévère (car plus contraint) où nous remplaçons la condition de continuité normale

$$b(\underline{\xi}_h, \hat{p}_h) = \int_{\Gamma} [\underline{\xi}_h] \cdot \underline{n}_{\Gamma} \hat{p}_h \, dS = 0, \quad \forall \hat{p}_h \in P_h$$

par la condition de continuité plus forte

$$b(\underline{\xi}_h, \hat{p}_h) = \int_{\Gamma} [\underline{\xi}_h] \cdot \hat{p}_h \, dS = 0, \quad \forall \hat{p}_h \in P_h^2,$$

il est démontré dans [40] que l'erreur à tout instant de discrétisation satisfait l'estimation optimale

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \left| \dot{\underline{\xi}} - \dot{\underline{\xi}}_h \right|^2 \, dV + \left\| \underline{\xi} - \underline{\xi}_h \right\|_U^2 \leq C \left(\inf_{\dot{\underline{\xi}}_h \in U_h} \int_{\mathcal{D}} \rho \left| \dot{\underline{\xi}} - \dot{\underline{\xi}}_h \right|^2 \, dV + \inf_{\underline{\xi}_h \in U_h} \left\| \underline{\xi} - \underline{\xi}_h \right\|_U^2 \right) \quad (5.53)$$

à condition d'avoir un maillage régulier en espace sur l'interface, de respecter la condition Inf-Sup

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{p_h \in P_h^2} \sup_{\underline{u}_h \in U_h} \frac{b(\underline{u}_h, p_h)}{\|\underline{u}_h\|_{1/2,h,\Gamma} \|p_h\|_{-1/2,h,\Gamma}} \geq \beta \quad (5.54)$$

et d'avoir une solution régulière

$$\underline{\xi} \in \mathcal{C}^1(0, T; H^2) \cap \mathcal{C}^2(0, T; H^2(\mathcal{D}_\alpha) \times H^2(\mathcal{D}_\beta)) \cap \mathcal{C}^3(0, T; L^2).$$

La condition (5.54) se vérifie avec U_h , un espace des vitesses enrichis par un espace bulle \mathcal{B}_h ,

$$U_h = \left\{ \underline{u}_h \in \underline{H}_d^1(\mathcal{D}_\alpha) \times \underline{H}_d^1(\mathcal{D}_\beta), \quad \underline{u}_h|_{\mathcal{D}_\alpha} \in Q_1(\mathcal{D}_\alpha), \quad \underline{u}_h|_{\mathcal{D}_\beta} \in Q_1(\mathcal{D}_\beta) \right\} \oplus \mathcal{B}_h. \quad (5.55)$$

5.6.5 Conclusion

Nous avons démontré dans cette partie que pour assurer la convergence, une condition suffisante est de respecter la condition Inf-Sup discrète (5.52). Nous allons donc discrétiser (5.22) - (5.23) par la forme (P_h) en essayant de vérifier la condition Inf-Sup (5.52) quitte à enrichir l'espace des vitesses par (5.55) pour la respecter.

Chapitre 6

Continuité par nœud

Sommaire

6.1	Discrétisation en temps	72
6.1.1	Grandeurs centrées	72
6.1.1.1	Conservation de la masse	72
6.1.1.2	Conservation de l'énergie	72
6.1.1.3	Pseudo-viscosité	73
6.1.2	Équations en quantité de mouvement	74
6.1.2.1	Dynamique des nœuds	74
6.1.2.2	Contrainte de vitesse	74
6.1.2.3	Condensation de la masse	75
6.2	Résolution de la phase Lagrange	76
6.2.1	Système	76
6.2.2	Calcul des vitesses	77
6.2.2.1	Efforts internes	77
6.2.2.2	Efforts d'interface	77
6.3	Analyse de la stabilité en espace	78
6.3.1	Choix des normes pour les pressions nodales	79
6.3.2	Vérification de la condition Inf-Sup	80
6.4	Discrétisation de la normale à l'interface	80
6.5	Prise en compte des conditions aux limites	82
6.6	Phase de transport	85
6.6.1	Régularisation du maillage	85
6.6.2	Projection des vitesses	85
6.6.3	Projection des valeurs centrées	87
6.6.4	Renormalisation de la fraction volumique	88
6.7	Gestion de plus de 2 matériaux	89
6.8	Prise en compte du contact unilatéral	91
6.8.1	Phase lagrangienne	91
6.8.2	Phase de transport	92
6.9	Résumé et conclusion	93

6.1 Discrétisation en temps

6.1.1 Grandeurs centrées

6.1.1.1 Conservation de la masse

L'équation (5.15) est discrétisée en temps par le même schéma que dans les chapitres 3 et 4. L'écriture de la conservation de la masse entre t^n et t^{n+1} donne finalement par matériau

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} V_{\alpha k}^{n+1} = \rho_{\alpha k}^n V_{\alpha k}^n = m_{\alpha k}, \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (6.1)$$

Les vitesses à $t^{n+1/2}$ permettent de calculer les positions de chaque matériau à t^{n+1} par la formule d'intégration centrée

$$\underline{x}_{\alpha i}^{n+1} = \underline{x}_{\alpha i}^n + \Delta t \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}, \quad \forall i, \forall \alpha.$$

Une maille mixte Ω_k possède alors une position déformée que nous appelons $\Omega_k^{\alpha n+1}$ différente pour chaque matériau α . Ces mailles ont un volume défini géométriquement par la position des nœuds de la maille

$$V_k^{\alpha n+1} = V(\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}), \quad \forall k, \forall \alpha.$$

L'hypothèse de gradient constant dans les mailles (5.10) nous permet d'écrire que le volume occupé par le matériau α dans la cellule Ω_k en fin de pas de temps est égal à

$$V_{\alpha k}^{n+1} = f_{\alpha k}^n V_k^{\alpha n+1}, \quad \forall k, \forall \alpha.$$

Remarquons que la notation $V_k^{\alpha n+1}$ désigne le volume au temps t^{n+1} de la maille mixte $\Omega_k^{\alpha n+1}$ *entière* déplacée avec les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ alors que la notation $V_{\alpha k}^{n+1}$ désigne le volume à t^{n+1} de la maille mixte $\Omega_{\alpha k}^{n+1}$ *partielle*, c'est-à-dire, le volume partiel occupé par le matériau α dans la maille $\Omega_k^{\alpha n+1}$.

Remarquons également que les matériaux ne sont pas « calculés » avec le même taux de dilatation volumique si bien que le rapport des volumes des mailles partielles en fin de pas de temps peut changer,

$$\frac{V_{\alpha k}^{n+1}}{V_{\beta k}^{n+1}} = \frac{f_{\alpha k}^n V_k^{\alpha n+1}}{f_{\beta k}^n V_k^{\beta n+1}} \neq \frac{V_{\alpha k}^n}{V_{\beta k}^n} = \frac{f_{\alpha}^n}{f_{\beta}^n},$$

même si les fractions volumiques sont constantes pour chaque matériau (voir figure 6.1).

La nouvelle densité est simplement donnée au final par la formule de conservation de la masse

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_{\alpha k}^n}{V_{\alpha k}^{n+1}} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_k^n}{V_k^{\alpha n+1}}, \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (6.2)$$

6.1.1.2 Conservation de l'énergie

L'équation (5.16) est discrétisée en temps par le même schéma que dans les chapitres 3 et 4. L'intégration de la conservation de l'énergie entre t^n et t^{n+1} donne par matériau

$$e_{\alpha k}^{n+1} = e_{\alpha k}^n - \left(\frac{p_{\alpha k}^{n+1} + p_{\alpha k}^n}{2} + q_{\alpha k}^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha k}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha k}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2}), \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (6.3)$$

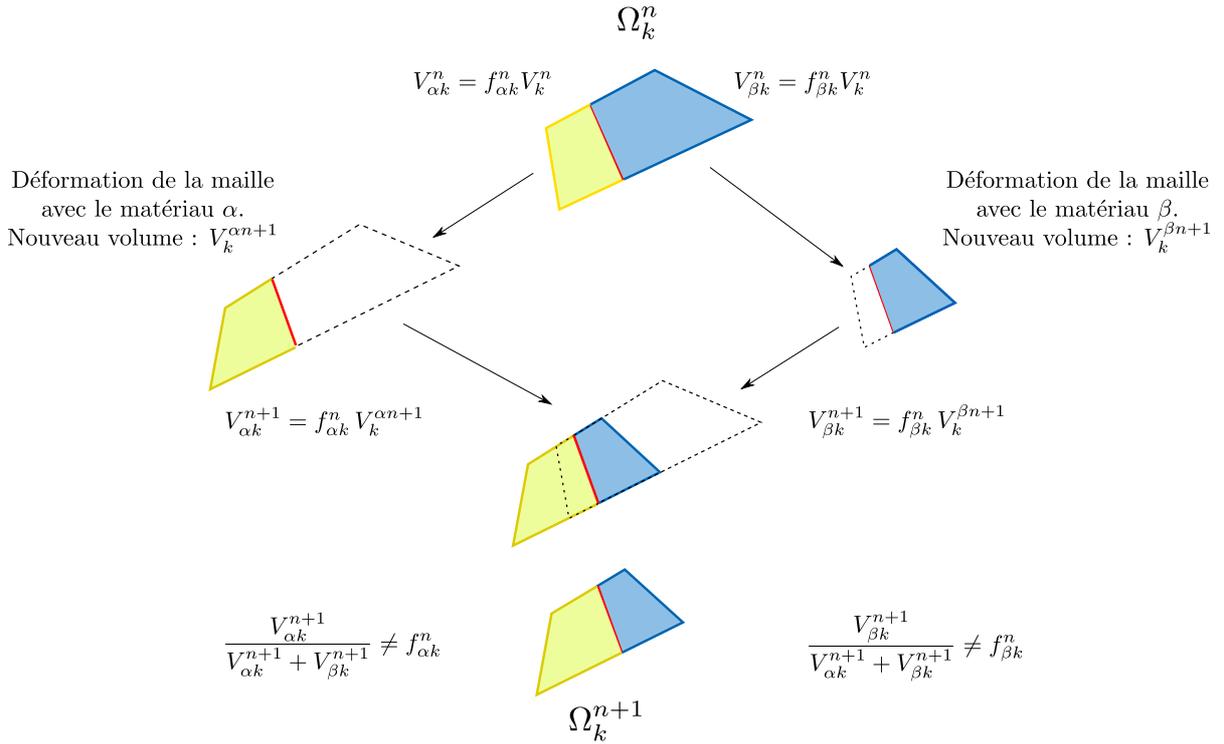


FIGURE 6.1 – Déformation de la maille par matériau. Pour un champ de vitesse donné, la fraction volumique est constante. Les mailles complètes se déformant différemment pour chaque matériau, au final, le rapport des volumes des différents matériaux peut changer.

Cette forme discrétisée en temps et en espace est toujours couplée à la loi d'état propre de chaque matériau écrite au temps t^{n+1}

$$p_{\alpha k}^{n+1} = EOS_{\alpha}(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}), \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (6.4)$$

La vitesse du son $c_{\alpha k}^{n+1}$ du matériau α dans la maille Ω_k est donnée par la loi d'état du matériau,

$$c_{\alpha k}^{n+1} = c_{\alpha k}^{n+1}(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}), \quad \forall k, \forall \alpha.$$

6.1.1.3 Pseudo-viscosité

La pseudo-viscosité (5.19) s'écrit au temps $t^{n+1/2}$ pour chaque matériau et chaque maille par la formule du cas mono-matériau

$$q_{\alpha k}^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_{\alpha k}^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_{\alpha k}^n \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} > 0 \end{cases}.$$

Dans cette expression, la vitesse du son $c_{\alpha k}^n$ dans le matériau α est prise décalée au temps n pour garder une forme explicite de la pseudo-viscosité. Le volume spécifique est l'inverse de la densité $\nu_{\alpha k} = \frac{1}{\rho_{\alpha k}}$, sa valeur au temps $t^{n+1/2}$ est approchée par $\nu_{\alpha k}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} + \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right)$ et

le taux de variation volumique $\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}$ est approché par $\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right)$.

Le terme $l_k \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}}$ est alors homogène à un saut de vitesse, correspondant bien à la définition de la pseudo-viscosité ([20]).

6.1.2 Équations en quantité de mouvement

6.1.2.1 Dynamique des nœuds

Dans les équations (5.30)-(5.33), l'accélération et les efforts internes sont toujours discrétisés par le schéma en temps introduit au chapitre 3. Les pressions d'interface, exprimées en forces nodales p_{Γ_i} , sont écrites au temps t^n . Les équations discrétisées en temps de la dynamique des nœuds prennent donc la forme

$$m_{\alpha i} \frac{u_{\alpha i}^{n+1/2} - u_{\alpha i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k}^n \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_\alpha \setminus N_\Gamma, \quad (6.5)$$

$$m_{\alpha i} \frac{u_{\alpha i}^{n+1/2} - u_{\alpha i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k}^n \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS + p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i \in N_\alpha \cap N_\Gamma, \quad (6.6)$$

$$m_{\beta i} \frac{u_{\beta i}^{n+1/2} - u_{\beta i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k}^n \underline{\underline{\sigma}}_{\beta k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_\beta \setminus N_\Gamma, \quad (6.7)$$

$$m_{\beta i} \frac{u_{\beta i}^{n+1/2} - u_{\beta i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k}^n \underline{\underline{\sigma}}_{\beta k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i \in N_\beta \cap N_\Gamma, \quad (6.8)$$

où N_Γ désigne toujours l'ensemble des nœuds des mailles mixtes. Le tenseur des contraintes au temps t^n dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement a pour expression

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\alpha k}^n = \underline{S}_{\alpha k}^n - p_{\alpha k}^n \underline{\underline{1}} - q_{\alpha k}^{n-1/2} \underline{\underline{1}}$$

où la pseudo-viscosité est décalée en temps. Ceci permet de garder une viscosité artificielle explicite dans les pas de temps.

6.1.2.2 Contrainte de vitesse

L'équation de continuité des vitesses (5.27) est écrite au temps $t^{n+1/2}$ pour les vitesses nodales ce qui donne

$$(\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}) \cdot \underline{n}_{\Gamma_i}^n = 0, \quad \forall i \in N_\Gamma. \quad (6.9)$$

Remarquons que, en toute rigueur, pour obtenir un schéma centré, il faudrait écrire cette condition sur la géométrie au temps $t^{n+1/2}$ et en utilisant les normales nodales $\underline{n}_{\Gamma_i}^{n+1/2}$ à ce même instant. Cependant, nous faisons une approximation et nous utilisons ici la normale nodale $\underline{n}_{\Gamma_i}^n$ au temps t^n . Cette normale est la même que les normales apparaissant dans les équations de quantité de mouvement (6.6) et (6.8).

La pression d'interface $p_{\Gamma_i}^n$ est écrite au temps t^n mais sa valeur dépend de l'équation implicite de continuité des vitesses (6.9). Le calcul de la pression d'interface est donc implicite nœud par nœud.

6.1.2.3 Condensation de la masse

Les équations de dynamique (6.5) et (6.8) font apparaître une masse nodale. Pour la construire, nous faisons toujours une approximation du champ de vitesse réelle et virtuelle dans les termes d'accélération. Nous l'interpolons par valeurs constantes sur les mailles duales. Nous avons enrichi le champ de vitesse. Les nœuds mixtes possèdent désormais une vitesse par matériau. Le même enrichissement de degrés de liberté apparaît dans l'approximation que nous faisons lors de la condensation de la masse. Nous approchons donc le champ de vitesse par matériau par

$$\begin{aligned}\underline{u}_\alpha(\underline{x}) &\approx \sum_{i \in N_\alpha} \underline{u}_{\alpha i} \chi_{\Delta_i}(\underline{x}), \\ \hat{\underline{u}}_\alpha(\underline{x}) &\approx \sum_{i \in N_\alpha} \hat{\underline{u}}_{\alpha i} \chi_{\Delta_i}(\underline{x}).\end{aligned}$$

Nous supposons pour le terme d'inertie que les matériaux sont équi-répartis dans les mailles mixtes ce qui est également l'hypothèse de la condensation de la masse pour le système « vitesse moyenne ». Le champ de densité par matériau qui s'écrivait par matériau

$$\rho_\alpha(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x})$$

avec H_α , la fonction de Heaviside associé au domaine \mathcal{D}_α , est approché par

$$\rho_\alpha(\underline{x}) \approx \sum_{k \in M_\alpha} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}).$$

La masse nodale du nœud i pour le matériau α s'écrit donc

$$m_{\alpha i} = \sum_{k \in M_i} \int_{\Delta_i \cap \Omega_{\alpha k}} \rho_\alpha dV = \sum_{k \in M_i} \int_{\Delta_i \cap \Omega_k} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} dV = \sum_{k \in M_i} \frac{f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} V_k}{\#N_k} = \sum_{k \in M_i} \frac{m_{\alpha k}}{\#N_k}$$

avec $m_{\alpha k}$, la masse du matériau α dans la maille k et $\#N_k$, le nombre de nœuds de la maille k .

Cette formulation permet de préserver un rapport correct entre la masse nodale $m_{\alpha i}$ et la force nodale due aux efforts internes

$$\sum_{k \in M_i} f_{\alpha k} \underline{\sigma}_{\alpha k} \cdot \int_{\partial\Omega_k} \underline{n} \Psi_i dS$$

car les pondérations en $f_{\alpha k}$ sont les mêmes pour ces deux termes. Ainsi, lorsque les fractions volumiques tendent vers 0, la masse nodale et la force nodale tendent de la même manière vers 0 et l'accélération des nœuds reste bornée.

6.2 Résolution de la phase Lagrange

6.2.1 Système

Le système multi-matériau que nous devons résoudre durant la phase lagrangienne est au final composé des équations

$$m_{\alpha i} \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k}^n \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_\alpha \setminus N_\Gamma, \quad (6.10)$$

$$m_{\alpha i} \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k}^n \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS + p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_\alpha \cap N_\Gamma, \quad (6.11)$$

$$m_{\beta i} \frac{\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\beta i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k}^n \underline{\sigma}_{\beta k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_\beta \setminus N_\Gamma, \quad (6.12)$$

$$m_{\beta i} \frac{\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\beta i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i} f_{\beta k}^n \underline{\sigma}_{\beta k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_\beta \cap N_\Gamma, \quad (6.13)$$

$$(\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n = 0, \quad \forall i \in N_\Gamma, \quad (6.14)$$

$$\underline{x}_{\alpha i}^{n+1} = \underline{x}_{\alpha i}^n + \Delta t \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}, \quad \forall i, \forall \alpha, \quad (6.15)$$

$$V_k^{\alpha, n+1} = V(\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}), \quad \forall k, \forall \alpha, \quad (6.16)$$

$$V_{\alpha k}^{n+1} = f_{\alpha k}^n V_k^{\alpha, n+1}, \quad \forall k, \forall \alpha, \quad (6.17)$$

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_k^n}{V_k^{\alpha, n+1}}, \quad \forall k, \forall \alpha, \quad (6.18)$$

$$q_{\alpha k}^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_{\alpha k}^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_{\alpha k}^n \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} > 0 \end{cases}, \quad \forall k, \forall \alpha, \quad (6.19)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha k}^{n+1} = e_{\alpha k}^n - \left(\frac{p_{\alpha k}^{n+1} + p_{\alpha k}^n}{2} + q_k^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right) + \frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha k}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2}) \\ p_{\alpha k}^{n+1} = EOS_\alpha(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k, \forall \alpha. \quad (6.20)$$

La résolution de ce système va suivre la même logique que la résolution du système « vitesse moyenne » :

- calcul des vitesses par les équations (6.10)-(6.14), avec un calcul de pression nodale localement implicite pour garantir la continuité des vitesses normales (6.14) au temps $t^{n+1/2}$;
- calcul des densités par matériau au temps t^{n+1} (6.18) ;
- calcul de la pseudo-viscosité par matériau par son expression (6.19) ;
- calcul couplé de l'énergie interne et de la pression par matériau au temps t^{n+1} par la résolution du système (6.20).

6.2.2 Calcul des vitesses

Les vitesses au temps $t^{n+1/2}$ sont obtenues en résolvant le système (6.10) - (6.14). Pour cela, nous décomposons la résolution en deux étapes :

- une première étape calcule l'accélération due uniquement aux efforts internes. Cette étape nous permet d'obtenir des vitesses prédites que nous appellerons $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$;
- une deuxième étape calcule les forces d'interface en ajoutant l'équation de continuité des vitesses. Nous corrigeons les vitesses prédites pour obtenir les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ du pas de temps en cours.

6.2.2.1 Efforts internes

Les vitesses $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ sont calculées en ne prenant en compte que les efforts internes. Ces vitesses ont pour expression

$$\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} = \underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2} - \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k}^n \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \underline{n} \Psi_i dS, \quad \forall i, \forall \alpha. \quad (6.21)$$

Notons que cette phase est complètement explicite et correspond à l'accélération qu'auraient les différents nœuds des matériaux s'ils étaient sur une surface libre. Cette phase donne directement la vitesse $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ des nœuds purs car ces nœuds n'ont pas de force d'interface s'exerçant sur eux.

6.2.2.2 Efforts d'interface

Les vitesses $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ ne respectent pas la contrainte de vitesse. Nous ajoutons les forces d'interface pour prendre en compte l'équation de continuité des vitesses. Le système (6.11), (6.13), (6.14) s'écrit

$$\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_{\Gamma}, \quad (6.22)$$

$$\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \frac{\delta t}{m_{\beta i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_{\Gamma}, \quad (6.23)$$

$$\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n = \underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \quad (6.24)$$

où $\underline{n}_{\Gamma i}^n$ est une discrétisation nodale de la normale à l'interface Γ . Cette discrétisation est détaillée dans le paragraphe 6.4. Sa résolution donne les vitesses corrigées respectant la continuité des vitesses normales.

Éliminer les vitesses dans (6.24) par leur expression (6.22) et (6.23) donne une équation ne dépendant que de l'inconnue de pression d'interface

$$\left(\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n \right) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n = \left(\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \frac{\delta t}{m_{\beta i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n \right) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n. \quad (6.25)$$

Cette dernière équation permet d'obtenir l'expression des forces d'interface

$$p_{\Gamma i}^n = \frac{1}{\delta t} \frac{1}{\frac{1}{m_{\alpha i}} + \frac{1}{m_{\beta i}}} (\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n. \quad (6.26)$$

Nous remarquons que la force d'interface est proportionnelle au saut de vitesses prédit entre les matériaux au nœud i . Utiliser cette expression dans les équations (6.22) et (6.23) donne

$$m_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = m_{\alpha i} \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + \left(\frac{m_{\alpha i} m_{\beta i}}{m_{\alpha i} + m_{\beta i}} (\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \right) \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_{\Gamma}, \quad (6.27)$$

$$m_{\beta i} \underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} = m_{\beta i} \tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \left(\frac{m_{\alpha i} m_{\beta i}}{m_{\alpha i} + m_{\beta i}} (\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \right) \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \quad (6.28)$$

et met en évidence que la correction de vitesse peut se voir comme un échange de quantité de mouvement entre les matériaux, par nœud, dans la direction de la normale nodale à l'interface $\underline{n}_{\Gamma i}^n$.

Notons qu'en remplaçant les vitesses $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ par leur expression dans (6.26)-(6.28), au final, nous avons bien résolu le système (6.10)-(6.14).

6.3 Analyse de la stabilité en espace

Par construction, notre problème de continuité des vitesses normales s'écrit

$$\langle p_h, [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma} = \sum_{i \in N_{\Gamma}} p_i [\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{\Gamma i} = 0, \quad \forall \hat{p}_i.$$

Nous imposons ici en fait la continuité sur une bande de mailles mixtes M_{Γ} et non pas sur la ligne d'interface Γ . La norme discrète $\|\bullet\|_{1/2, h, \Gamma}$ utilisée dans la condition Inf-Sup (5.52) n'est plus pertinente : elle s'annule pour des fonctions non-nulles sur la bande et n'est pas assez forte.

Nous cherchons alors l'existence de normes de vitesse $\|\underline{u}_h\|_{M_{\Gamma}}$ et de pression d'interface $\|p_h\|_{M_{\Gamma}}$ qui nous permettent respecter la condition Inf-Sup discrète écrite sur la bande de mailles mixtes M_{Γ} autour de l'interface

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{p_h \in P_h} \sup_{\underline{u}_h \in U_h} \frac{\langle p_h, [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_{\Gamma} \rangle_{\Gamma}}{\|\underline{u}_h\|_{M_{\Gamma}} \|p_h\|_{M_{\Gamma}}} \geq \beta. \quad (6.29)$$

Par analogie avec l'analyse discrète réalisée par Wohlmuth dans [91], nous prenons comme norme équivalente la norme $\left\| \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \left(\text{Tr}(\bullet)|_{M_{\Gamma}} \right) \right\|_{1, \mathcal{D}}$ où $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}(\bullet)$ est l'extension par zéro des fonctions éléments finis définies uniquement sur la zone de continuité M_{Γ} . Remarquons que dans le cas classique de [91], nous avons bien

$$\|\underline{u}_h\|_{1/2, h, \Gamma}^2 \approx \left\| \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \left(\text{Tr}(\underline{u}_h)|_{\Gamma} \right) \right\|_{1, \mathcal{D}}^2, \quad \forall \underline{u}_h \in U_h. \quad (6.30)$$

Dans notre cas, nous voulons une norme $\|\underline{u}_h\|_{M_{\Gamma}}$ qui se comporte au moins comme la norme $\left\| \mathcal{H}_{\mathcal{D}} \left(\text{Tr}(\bullet)|_{M_{\Gamma}} \right) \right\|_{1, \mathcal{D}}$.

6.3.1 Choix des normes pour les pressions nodales

Nous choisissons ici pour la vitesse, la norme

$$\|\underline{u}_h\|_{M_\Gamma}^2 = \sum_{i \in N_\Gamma} |\underline{u}_i|^2$$

et pour le multiplicateur de Lagrange, la norme

$$\|p_h\|_{M_\Gamma}^2 = \sum_{i \in N_\Gamma} |p_i|^2.$$

Sur une maille Ω_k , nous avons l'équivalence locale uniformément en k

$$\sum_{i \in N_k} |\underline{u}_i|^2 \approx \left\| \sum_{i \in N_k} \underline{u}_i \Psi_i \right\|_{1, \Omega_k}^2 \quad (6.31)$$

où N_k est l'ensemble des nœuds de la maille k . En effet, ces deux formes ont le même noyau constitué des fonctions nulles sur tous les nœuds de la maille, elles ont un nombre fini de paramètres, dépendent continûment de la forme et sont invariantes par changement d'échelle.

En prenant la somme sur tous les nœuds i du domaine \mathcal{D} , nous pouvons d'abord écrire

$$c \sum_{k \in M} \sum_{i \in N_k} |\underline{u}_i|^2 \leq \sum_{i \in N} |\underline{u}_i|^2 \leq \sum_{k \in M} \sum_{i \in N_k} |\underline{u}_i|^2$$

avec

$$c = \inf_{i \in N} \frac{1}{\#M_i}$$

où $\#M_i$ est le nombre de mailles auxquelles le nœud i appartient. En utilisant l'équivalence (6.31), nous obtenons

$$\sum_{i \in N} |\underline{u}_i|^2 \approx \sum_{k \in M} \left\| \sum_{i \in N_k} \underline{u}_i \Psi_i \right\|_{1, \Omega_k}^2.$$

Par définition, l'extension par zéro de la trace sur M_Γ d'un champ de vitesse vérifie

$$\underline{u}_i = \underline{0}, \quad \forall i \notin N_\Gamma$$

et a donc pour expression

$$\mathcal{H}_\mathcal{D} \left(\text{Tr}(\underline{u}_h)|_{M_\Gamma} \right) = \sum_{i \in N_\Gamma} \underline{u}_i \Psi_i.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\left\| \mathcal{H}_\mathcal{D} \left(\text{Tr}(\underline{u}_h)|_{M_\Gamma} \right) \right\|_{1, \mathcal{D}}^2 = \sum_{k \in M} \left\| \mathcal{H}_\mathcal{D} \left(\text{Tr}(\underline{u}_h)|_{M_\Gamma} \right) \right\|_{1, \Omega_k}^2 = \sum_{k \in M} \left\| \sum_{i \in N_k \cap N_\Gamma} \underline{u}_i \Psi_i \right\|_{1, \Omega_k}^2 \approx \sum_{i \in N_\Gamma} |\underline{u}_i|^2.$$

La norme choisie se comporte comme nous le voulions : elle respecte l'équivalence

$$\|\underline{u}_h\|_{M_\Gamma}^2 \approx \left\| \mathcal{H}_\mathcal{D} \left(\text{Tr}(\underline{u}_h)|_{M_\Gamma} \right) \right\|_{1, \mathcal{D}}^2.$$

6.3.2 Vérification de la condition Inf-Sup

Notre problème de départ s'écrit

$$\sum_{i \in N_\Gamma} [\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{\Gamma i} \hat{p}_i = 0, \quad \forall \hat{p}_i.$$

Quel que soit un champ de pression p_h , nous pouvons prendre un champ de vitesse nulle sur \mathcal{D}_α et non-nulle sur \mathcal{D}_β de la forme

$$\begin{cases} \underline{u}_{\alpha i} = \underline{0}, & \forall i \in N_\alpha, \\ \underline{u}_{\beta i} = p_i \underline{n}_{\Gamma i}, & \forall i \in N_\beta \cap N_\Gamma, \\ \underline{u}_{\beta i} = \underline{0}, & \forall i \in N_\beta \setminus N_\Gamma. \end{cases}$$

Le saut de vitesse pour chaque nœud mixte est alors égal à la vitesse $\underline{u}_{\beta i}$,

$$[\underline{u}_i] = p_i \underline{n}_{\Gamma i}.$$

Nous avons

$$\sum_{i \in N_\Gamma} [\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{\Gamma i} p_i = \sum_{i \in N_\Gamma} |p_i|^2 = \|p_h\|_{M_\Gamma}^2.$$

Nous avons également la norme du champ de vitesse valant

$$\|\underline{u}_h\|_{M_\Gamma}^2 = \sum_{i \in N_\Gamma} |p_i \underline{n}_{\Gamma i}|^2 = \|p_h\|_{M_\Gamma}^2.$$

De là, nous en déduisons

$$\sum_{i \in N_\Gamma} [\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{\Gamma i} p_i = \|p_h\|_{M_\Gamma} \|\underline{u}_h\|_{M_\Gamma}.$$

Quelle que soit la pression \hat{p} , nous avons mis en évidence au moins un champ de vitesse ayant cette dernière propriété. Nous concluons alors avec le lemme suivant prouvant la condition Inf-Sup :

Lemme 1. *Avec la discrétisation des espaces de pression d'interface et de vitesse définie par (5.24) et (5.9), nous avons*

$$\sup_{\underline{u}_h \in U_h} \frac{\langle p_h, [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma \rangle_\Gamma}{\|\underline{u}_h\|_{M_\Gamma}} \geq \|p_h\|_{M_\Gamma}, \quad \forall p_h \in P_h.$$

Notre discrétisation du multiplicateur de Lagrange est donc stable au sens des normes discrètes utilisées et ne nécessite pas de modifications supplémentaires.

6.4 Discrétisation de la normale à l'interface

La reconstruction d'interface du schéma calcule la position de l'interface Γ à l'intérieur des mailles mixtes. L'interface est alors approchée dans ces mailles par des segments constants de normale $\underline{n}_{\Gamma k}$. La normale nodale qui intervient dans les équations (6.22) et (6.23) ne doit pas provenir de cette reconstruction d'interface. Une discrétisation spécifique de la normale à l'interface doit être écrite en respectant certaines conditions.

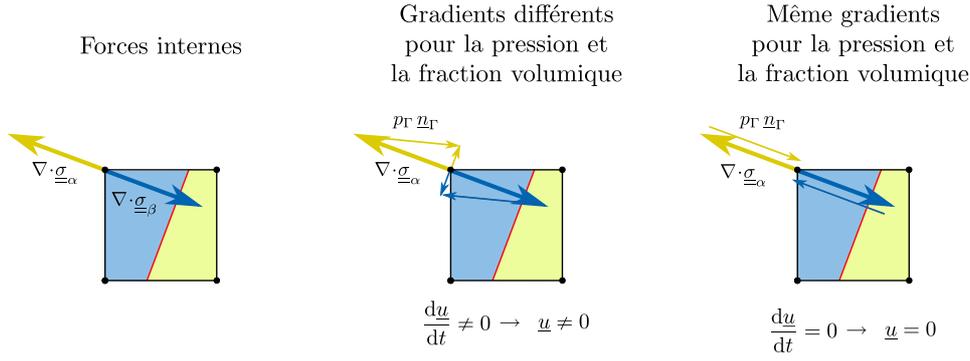


FIGURE 6.2 – Importance de la discrétisation de la normale nodale. Un gradient de fraction volumique différent du gradient de pression ne permet pas d’obtenir des forces d’interface alignées avec les efforts internes et provoque l’apparition de glissements artificiels entre les matériaux.

De manière plus précise, pour des raisons évidentes de stabilité, nous demandons à notre méthode de retrouver *a minima* les solutions stationnaires. En présence d’un champ de vitesse uniforme, un champ de contrainte également uniforme $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ dans tout le domaine \mathcal{D} ne doit accélérer aucun nœud.

Cette condition est respectée pour les nœuds purs mais la divergence discrétisée du tenseur des contraintes pour les nœuds près de l’interface n’est pas nulle à cause de la restriction, dans les équations (5.28) et (5.29), des intégrales aux domaines matériaux \mathcal{D}_α . Dans cette situation, en partant de (5.28) et (5.29), exiger que le champ de vitesse reste constant au cours du pas de temps nous conduit à imposer

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_\alpha} \nabla \Psi_i dV &= -p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i \in N_\Gamma, \\ \int_{\mathcal{D}_\beta} \nabla \Psi_i dV &= p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i \in N_\Gamma. \end{aligned}$$

Pour préserver les états stationnaires, l’équation précédente impose à la force d’interface appliquée aux nœuds d’être alignée avec la force nodale due à la divergence des contraintes. L’équation précédente requiert en réalité d’avoir une normale nodale ayant la même direction que le gradient des fonctions de formes nodales Ψ_i ,

$$\underline{n}_{\Gamma_i}^n \parallel \int_{\mathcal{D}_\alpha} \nabla \Psi_i dV.$$

Cette condition est nécessaire pour éviter l’apparition de glissement non-physique lors de la simulation. Avec n’importe quelle autre discrétisation, la force d’interface et les efforts internes seront désalignés et les matériaux ne resteront pas à l’équilibre même si la divergence de contrainte est nulle dans tout le domaine au niveau continu.

Dans le cas de milieux élastiques, le déplacement peut être compensé par la résistance élastique du matériau à une déformation de cisaillement. Dans le cas d’un milieu fluide, l’erreur concerne l’accélération des nœuds, le phénomène s’amplifie au fil des pas de temps et fait apparaître des courants parasites. Le même problème se rencontre lors du traitement de la tension de surface ([34, 21]). Une condition similaire doit alors être respectée et se trouve sous le nom de « consistance augmentée » ([34, 21]). Dans ces cas, la tension de surface doit être discrétisée de manière consistante avec le gradient de pression afin de conserver les solutions

stationnaires. Cette condition provient de la nature géométrique des forces appliquées (normales à l'interface) et du décalage possible entre la description géométrique du système et la discrétisation des opérateurs différentiels.

Dans notre cas, développer le calcul en utilisant les approximations que nous avons introduites nous donne la direction de la normale nodale sous la forme

$$\underline{n}_{\Gamma_i}^n \parallel \sum_{k \in M_i} f_{\alpha k}^n \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS. \quad (6.32)$$

6.5 Prise en compte des conditions aux limites

Pour le moment, nous avons écrit le système sans considérer les conditions aux limites ou en les considérant nulles. Nous nous replaçons désormais dans un cas plus général d'un problème pouvant avoir des conditions aux limites de type Dirichlet,

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{u}_d(\underline{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{D}_d,$$

avec $\underline{u}_d(\underline{x}, t)$, la vitesse à respecter, pouvant être nulle (position imposée), constante (vitesse imposée) ou variant en fonction du temps (accélération imposée). Dans ce cas, la vitesse est complètement contrainte mais il est possible de ne contraindre la vitesse dans une seule direction de l'espace et laisser libre les autres directions. La condition imposée concerne alors la projection de la vitesse dans la direction contrainte ce qui s'écrit

$$\underline{u}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}_d(\underline{x}, t) = u_d(\underline{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial \mathcal{D}_d$$

où $\underline{n}_d(\underline{x}, t)$ est la normale donnant la direction dans laquelle la vitesse est imposée et $u_d(\underline{x}, t)$ est la valeur imposée dans cette direction.

Ces conditions s'appliquent à tous les matériaux α et peuvent venir se superposer à la contrainte de continuité des vitesses normales si la maille mixte est située sur le bord du maillage. Il faut s'assurer qu'en fin de pas de temps, les vitesses de tous les matériaux des nœuds de ces mailles respectent à la fois les conditions aux limites et la contrainte de continuité.

Soit $N_d = \{i \mid \underline{x}_i \in \partial \mathcal{D}_d\}$, l'ensemble des nœuds sur lesquels s'applique une condition aux limites de Dirichlet. Ces conditions peuvent s'écrire, au niveau discret,

$$\underline{u}_{\alpha i} \cdot \underline{n}_{di} = u_{di}, \quad \forall \alpha, \forall i \in N_d \quad (6.33)$$

avec \underline{n}_{di} , la direction de la contrainte au point i et u_{di} , la norme imposée à la vitesse $\underline{u}_{\alpha i}$ dans cette direction au point i .

Nous imposons les conditions aux limites aux vitesses prédites $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$. En repartant de l'expression des vitesses prédites $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ (6.21), celles-ci ont pour expression en fonction des contraintes, de la condition aux limites et des vitesses du pas de temps précédent

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} = & \underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2} - \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} \sum_{k \in M_i} \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \underline{n} \Psi_i dS \\ & + \left(u_{di} - \left(\underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2} - \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} \sum_{k \in M_i} \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \underline{n} \Psi_i dS \right) \cdot \underline{n}_{di} \right) \underline{n}_{di}, \quad \forall i \in N_d, \forall \alpha. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Nous vérifions bien que la vitesse $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ respecte la condition aux limites (6.33).

Remarquons alors que la condition aux limites étant appliquée à tous les matériaux, le saut de vitesse entre les matériaux selon la direction \underline{n}_{di} est nulle,

$$[\underline{u}] \cdot \underline{n}_{di} = 0. \quad (6.35)$$

Nous devons ensuite appliquer la contrainte de continuité aux vitesses $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ en respectant les conditions aux limites (6.33). Nous distinguons alors deux cas en fonction de l'orientation de la normale à l'interface $\underline{n}_{\Gamma i}^n$ par rapport à la direction de la condition aux limites \underline{n}_{di} :

- si $\underline{n}_{di} = \underline{n}_{\Gamma i}^n$, les vitesses $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ respectent déjà la contrainte de vitesse (6.14). La force $p_{\Gamma i}^n$ est donc nulle et les vitesses en fin de pas de temps valent $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$;
- si $\underline{n}_{di} \neq \underline{n}_{\Gamma i}^n$, nous devons respecter deux conditions : par la continuité des vitesses normales, nous avons

$$[\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n = 0,$$

et par la condition aux limites, nous imposons

$$[\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{di} = 0.$$

Nous appliquons par matériau à chaque nœud i soumis à une condition aux limites, une force de rappel $F_{\alpha i}$ dans la direction \underline{n}_{di} permettant d'assurer le respect de cette dernière. Pour ces nœuds, le système (6.11), (6.13), (6.14) s'écrit avec ces forces supplémentaires et les conditions limites associées

$$\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n - \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} F_{\alpha i} \underline{n}_{di}, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d, \quad (6.36)$$

$$\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \frac{\delta t}{m_{\beta i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n - \frac{\delta t}{m_{\beta i}} F_{\beta i} \underline{n}_{di}, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d, \quad (6.37)$$

$$\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n = \underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d \quad (6.38)$$

$$\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \cdot \underline{n}_{di} = u_{di}, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d \quad (6.39)$$

$$\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} \cdot \underline{n}_{di} = u_{di}, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d \quad (6.40)$$

En remplaçant $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ par son expression (6.36) dans (6.39), nous obtenons

$$\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \cdot \underline{n}_{di} + \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n \cdot \underline{n}_{di} - \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} F_{\alpha i} \underline{n}_{di} \cdot \underline{n}_{di} = u_{di}.$$

En se rappelant que la vitesse $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ respecte la condition limite, $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \cdot \underline{n}_{di} = u_{di}$, nous obtenons l'expression de la force de rappel $F_{\alpha i}$,

$$F_{\alpha i} = p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n \cdot \underline{n}_{di}.$$

La même démarche pour le matériau β aboutit à l'expression de $F_{\beta i}$,

$$F_{\beta i} = -p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n \cdot \underline{n}_{di}.$$

En éliminant les forces de rappel, les équations (6.36) et (6.37) s'écrivent

$$\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} p_{\Gamma i}^n (\underline{n}_{\Gamma i}^n - (\underline{n}_{\Gamma i}^n \cdot \underline{n}_{di}) \underline{n}_{di}), \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d, \quad (6.41)$$

$$\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \frac{\delta t}{m_{\beta i}} p_{\Gamma i}^n (\underline{n}_{\Gamma i}^n - (\underline{n}_{\Gamma i}^n \cdot \underline{n}_{di}) \underline{n}_{di}), \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d. \quad (6.42)$$

Nous remplaçons dans (6.38) les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ et $\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2}$ par leur expression (6.41) et (6.42) ce qui nous permet d'obtenir l'expression de la force d'interface $p_{\Gamma i}^n$,

$$p_{\Gamma i}^n = \frac{1}{\delta t} \frac{m_{\alpha i} m_{\beta i}}{m_{\alpha i} + m_{\beta i}} \frac{(\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n}{\underline{t} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n} \quad (6.43)$$

où nous avons noté \underline{t} , le vecteur

$$\underline{t} = (\underline{n}_{\Gamma i}^n - (\underline{n}_{\Gamma i}^n \cdot \underline{n}_{di}) \underline{n}_{di}).$$

Ce vecteur est orthogonal à \underline{n}_{di} par construction.

Nous insérons ensuite l'expression de la force d'interface dans l'équation de dynamique (6.41) ce qui donne, après multiplication par $(m_{\alpha i} + m_{\beta i})$,

$$(m_{\alpha i} + m_{\beta i}) \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = (m_{\alpha i} + m_{\beta i}) \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + m_{\beta i} \frac{(\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \underline{t}}{\underline{t} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n}, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d.$$

En décomposant le terme $(\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i})$ selon la base $(\underline{n}_{di}, \underline{t})$ et en se rappelant que le saut de vitesse prédit dans la direction \underline{n}_{di} est nulle,

$$(\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{di} = 0,$$

la dernière expression prend la forme

$$(m_{\alpha i} + m_{\beta i}) \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = (m_{\alpha i} + m_{\beta i}) \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + m_{\beta i} \frac{(\tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}) \cdot \underline{t} (\underline{t} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n) \underline{t}}{\underline{t} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n}, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d. \quad (6.44)$$

La simplification par $\underline{t} \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n$ donne

$$(m_{\alpha i} + m_{\beta i}) \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = m_{\alpha i} \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + m_{\beta i} (\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} - (\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \cdot \underline{t}) \underline{t} + (\tilde{\underline{u}}_{\beta i} \cdot \underline{t}) \underline{t}), \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d. \quad (6.45)$$

En remarquant que

$$\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \cdot \underline{n}_{di} = u_{di} = \tilde{\underline{u}}_{\beta i} \cdot \underline{n}_{di},$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} &= (\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \cdot \underline{n}_{di}) \underline{n}_{di} + (\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \cdot \underline{t}) \underline{t} = u_{di} \underline{n}_{di} + (\tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \cdot \underline{t}) \underline{t}, \\ \tilde{\underline{u}}_{\beta i} &= (\tilde{\underline{u}}_{\beta i} \cdot \underline{n}_{di}) \underline{n}_{di} + (\tilde{\underline{u}}_{\beta i} \cdot \underline{t}) \underline{t} = u_{di} \underline{n}_{di} + (\tilde{\underline{u}}_{\beta i} \cdot \underline{t}) \underline{t}, \end{aligned}$$

nous arrivons finalement à

$$(m_{\alpha i} + m_{\beta i}) \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = m_{\alpha i} \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + m_{\beta i} \tilde{\underline{u}}_{\beta i}, \quad \forall i \in N_{\Gamma} \cap N_d. \quad (6.46)$$

Le même raisonnement s'applique également au matériau β . Les matériaux ont donc une vitesse moyenne commune $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \underline{u}_i^{n+1/2}$. Elle est obtenue en prenant la quantité de mouvement totale divisée par la masse totale du nœud

$$\underline{u}_i^{n+1/2} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha i} \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}^{n+1/2}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha i}}. \quad (6.47)$$

Ainsi, nous respectons bien les deux contraintes de vitesses qui s'appliquent sur le nœud.

6.6 Phase de transport

Avec la méthode utilisant une vitesse moyenne, si le maillage lagrangien était de qualité suffisante, nous pouvions prendre une vitesse de maillage identique à la vitesse de la matière. La phase d'advection n'est alors pas nécessaire car nous avons directement les grandeurs sur le maillage ALE.

Avec notre enrichissement des champs, la vitesse est désormais discontinue et plusieurs déplacements indépendants se font durant la phase lagrangienne. La vitesse du maillage ne peut plus coïncider avec la vitesse de la matière en tout point. La phase de projection est maintenant obligatoire pour redéfinir les différents champs sur un maillage moyen pour le pas de temps suivant ([85]).

6.6.1 Régularisation du maillage

Nous construisons un maillage commun, correspondant au maillage en début de pas de temps transporté avec une vitesse moyenne que nous calculons comme dans le chapitre 4. La position des noeuds du maillage commun ont donc pour expression

$$\underline{x}_i^n = \underline{x}_i^{n+1} + \Delta t \underline{u}_i^{n+1/2}, \quad \forall i$$

avec \underline{u}_i^{n+1} , la vitesse moyenne donnée par

$$m_i \frac{d\underline{u}_i}{dt} + \sum_{k \in M_i} \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha k} \underline{\sigma}_{\alpha k} \right) \cdot \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = 0, \quad \forall i.$$

La vitesse de ce maillage correspond à la vitesse de la matière dans les zones éloignées de l'interface. Autour de cette dernière, la vitesse moyenne n'a pas d'autre interprétation qu'une vitesse de maillage permettant de déplacer le référentiel ALE. Cette vitesse ne doit pas servir aux calculs hydrodynamiques de la phase lagrangienne. Après son déplacement, le maillage ALE peut également subir une étape de relaxation pour améliorer sa qualité géométrique (voir paragraphe 3.4.1). Nous avons alors un maillage moyen régularisé servant de maillage commun pour le prochain pas de temps.

6.6.2 Projection des vitesses

Nous avons enrichi le champ de vitesse et devons tenir compte de cet enrichissement et de la modification de la cinématique du système lors de la projection.

Lors de la phase lagrangienne, la condensation de la masse approche le champ de vitesse par un champ constant par maille duale. Les matériaux y sont supposés équi-répartis dans les mailles mixtes et les champs de densité, de vitesse et de quantité de mouvement pour la condensation de la masse sont définis sur l'intégralité des mailles mixtes et non pas sur leur restriction jusqu'à l'interface.

Lors de la projection de la vitesse, nous faisons la même hypothèse. Nous approchons le champ de vitesse et de quantité de mouvement par un champ constant par maille duale à l'ordre 1, linéaire à l'ordre 2. Ils sont définis sur le même domaine étendu que la quantité de mouvement de la phase lagrangienne.

Le maillage sur lequel ces champs sont définis correspond à l'ensemble des mailles pures du matériau α ainsi que les mailles mixtes prises dans leur intégralité. Nous appelons ce maillage, le maillage matériau étendu (voir figure 6.3.b). Ce maillage présente l'avantage de ne posséder que des mailles quadrangles ce qui facilite la définition de son maillage dual.

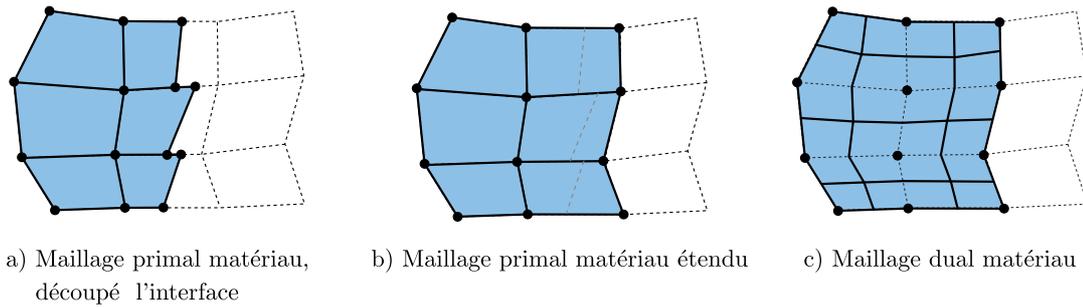


FIGURE 6.3 – Maillages servant à la projection. a) Le découpage des mailles mixtes par l'interface donne le maillage servant de maillage de départ pour projeter les valeurs centrées. b) Le maillage étendu du matériau α est constitué des toutes les mailles contenant ce matériau. La projection de la densité depuis le maillage étendu vers le maillage dual donne les densités duales. c) Le maillage dual est défini à partir du maillage primal étendu. Les nœuds du maillage primal sont au centre des mailles duales sauf sur la frontière de celui-ci. Sur ce maillage sont définies la quantité de mouvement et la vitesse. Pour la projection, ces champs sont considérés constants ou linéaires sur les mailles duales.

Pour obtenir la densité sur le maillage dual, nous construisons d'abord un champ de densité étendu. Ce champ répartit la masse des matériaux dans toute la maille mixte et correspond également au champ de densité utilisé pour définir les masses nodales de la phase lagrangienne. Le champ de densité ne s'écrit plus

$$\rho_\alpha(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x})$$

mais est approché par

$$\rho_\alpha(\underline{x}) \approx \sum_{k \in M_\alpha} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}).$$

Le champ de densité étendu est projeté à l'ordre 1 par calcul d'intersection avec le maillage dual matériau. Le champ de densité duale $\rho_{\alpha i}$ s'écrit donc pour chaque matériau,

$$\rho_{\alpha i} = \frac{1}{V_i} \sum_{k \in M_\alpha} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} \int_{\Omega_k^{\alpha n+1} \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV, \quad \forall i \in N_\alpha, \forall \alpha$$

en notant que ces intégrales font référence à des mailles $\Omega_k^{\alpha n+1}$ et $\Delta_i^{\alpha n+1}$ correspondant à des mailles déplacées avec les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ du matériau α . Avec cette méthode, nous obtenons des densités duales en accord avec les masses nodales de la phase lagrangienne dans le sens où elles sont obtenues à partir de la même approximation du champ de vitesse et du champ de densité nodale.

Ce dernier champ permet de construire le champ de quantité de mouvement $\rho_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i}$ qui sera projeté sur le maillage dual moyen. Après projection L^2 à l'ordre 1 par intersection, les vitesses $\underline{u}_{\alpha j}$ sur le maillage dual commun $\underline{u}_{\alpha j}$ ont finalement pour expression

$$\underline{u}_{\alpha j} = \frac{1}{\rho_{\alpha j} V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \rho_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i} \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right), \quad \forall j, \forall \alpha$$

où la densité $\rho_{\alpha j}$ est la projection des densités $\rho_{\alpha i}$ sur le maillage dual moyen

$$\rho_{\alpha j} = \frac{1}{V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \rho_{\alpha i} \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right), \quad \forall j, \forall \alpha.$$

Dans les expressions précédentes, nous considérons des champs de densité duale et de quantité de mouvement constants par maille duale $\Delta_i^{\alpha n+1}$. L'ordre 2 dans cette phase s'obtient en reconstruisant un gradient centré dans ces mailles (voir paragraphe 3.4.2.3 et annexe A). La vitesse $\underline{u}_{\alpha j}$ sur le maillage commun s'écrit alors

$$\underline{u}_{\alpha j} = \frac{1}{\rho_{\alpha j} V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \left(((\rho_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i}) + \nabla(\rho_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i}) \cdot (\underline{x}_{g_{\alpha i j}} - \underline{x}_{\alpha i})) \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right) \right), \quad \forall j, \forall \alpha$$

où $\underline{x}_{\alpha i}$ est le centre de la maille duale $\Delta_i^{\alpha n+1}$, $\underline{x}_{g_{\alpha i j}}$ est le barycentre de $\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}$, l'intersection entre la maille duale du maillage commun Δ_j et la maille duale du maillage déformé $\Delta_i^{\alpha n+1}$. La densité nodale $\rho_{\alpha j}$ est obtenue par la projection à l'ordre 2 des densités $\rho_{\alpha i}$ sur le maillage dual moyen. Elle a pour expression

$$\rho_{\alpha j} = \frac{1}{V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \left((\rho_{\alpha i} + \nabla \rho_{\alpha i} \cdot (\underline{x}_{g_{\alpha i j}} - \underline{x}_{\alpha i})) \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right) \right), \quad \forall j, \forall \alpha.$$

6.6.3 Projection des valeurs centrées

Depuis le début de la phase lagrangienne et jusqu'ici, comme pour la méthode « vitesse moyenne », nous avons utilisé les fractions volumiques des matériaux mais nous n'avons pas eu besoin de placer l'interface. Cela n'est plus le cas pour la projection des grandeurs centrées et nous devons positionner l'interface des matériaux pour reconstruire les fonctions caractéristiques $H_\alpha(\underline{x})$ des domaines \mathcal{D}_α .

Ces fonctions sont transportées avec des vitesses différentes pour chaque matériau et il faut donc les reconstruire pour chaque matériau sur leur configuration déformée propre. En effet, l'orientation de la normale est définie par le gradient de fraction volumique et ce gradient dépend de la position finale des nœuds du maillage lagrangien.

Nous calculons donc une orientation de normale (voir paragraphe 4.2.1.2 et annexe B) pour chaque matériau à partir des positions des nœuds $\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}$ déplacés avec les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ du matériau considéré et plaçons ces normales dans les mailles mixtes entières $\Omega_k^{\alpha n+1}$ ce qui nous permet de construire les mailles $\Omega_{\alpha k}^{n+1}$ découpées par l'interface (voir figure 6.4).

Une fois ces mailles construites, la projection des grandeurs centrées par matériau se déroule comme dans la méthode « vitesse moyenne » (voir paragraphe 4.2.5.2). La fraction volumique de chaque matériau est donnée par

$$f_{\alpha l} = \frac{1}{V_l} \sum_k \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV, \quad \forall l.$$

Après projection, la densité ρ_l et l'énergie interne spécifique e_l sur le maillage commun ont donc pour expression à l'ordre 1 pour chaque matériau

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha l} &= \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_k \rho_{\alpha k} \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV, \quad \forall l, \forall \alpha, \\ e_{\alpha l} &= \frac{1}{\rho_{\alpha l} V_{\alpha l}} \sum_k \rho_{\alpha k} e_{\alpha k} \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV, \quad \forall l, \forall \alpha. \end{aligned}$$

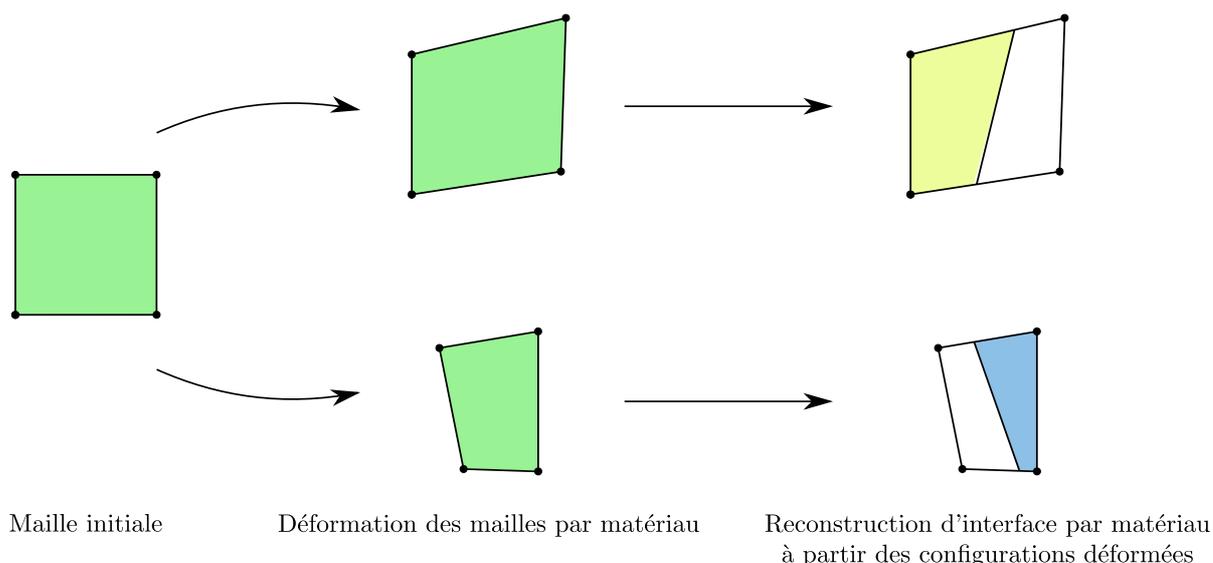


FIGURE 6.4 – Reconstruction d'interface par matériaux. L'interface est reconstruite pour chaque matériau à partir de la configuration déformée du matériau en question. La normale à l'interface peut donc être différente pour chaque matériau.

La méthode à l'ordre 2 considère des champs linéaires par maille primale et reconstruit un gradient centré. Les champs sur le maillage commun s'écrivent alors

$$\rho_{\alpha l} = \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_k \left((\rho_{\alpha k} + \nabla \rho_{\alpha k} \cdot (\underline{x}_{glk} - \underline{x}_{\alpha k})) \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV \right), \quad \forall l, \forall \alpha,$$

$$e_{\alpha l} = \frac{1}{\rho_{\alpha l} V_{\alpha l}} \sum_k \rho_{\alpha k} \left((\rho_{\alpha k} e_{\alpha k} + \nabla(\rho_{\alpha k} e_{\alpha k}) \cdot (\underline{x}_{glk} - \underline{x}_{\alpha k})) \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV \right), \quad \forall l, \forall \alpha.$$

6.6.4 Renormalisation de la fraction volumique

Les mailles mixtes ont une déformation et une reconstruction d'interface différente pour chaque matériau. Il se peut qu'en fin de pas de temps, les volumes transportés et découpés se superposent ou que du vide se crée (voir figure 6.5). Sur le maillage ALE, les matériaux ne sont suivis dans les mailles que par leur fraction volumique. Les superpositions ou les vides qui apparaissent se traduisent par une erreur dans la somme des fractions volumiques des mailles mixtes après projection. Cette somme est inférieure à 1 si du vide est apparu, supérieure à 1 si les matériaux se superposent.

Nous corrigeons cela en re-normalisant la fraction volumique. Nous remplaçons la fraction volumique obtenue en fin de projection par une fraction normalisée ayant pour expression

$$\tilde{f}_{\alpha k} = \frac{f_{\alpha k}}{\sum_{\alpha} f_{\alpha k}}.$$

Cette correction revient à comprimer les matériaux pour faire disparaître l'interpénétration ou à les détendre pour occuper toute la maille mixte. La masse est constante dans la maille et

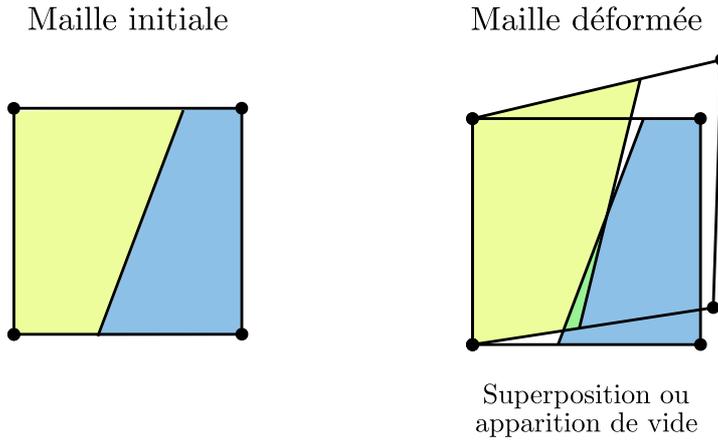


FIGURE 6.5 – Superposition ou création de vide dans les mailles mixtes. Le volume jaune est transporté avec la vitesse \underline{u}_α et sa frontière, calculée avec une normale \underline{n}_α , le volume bleu avec les données \underline{u}_β et \underline{n}_β . En fin de pas de temps, des volumes matériaux peuvent se superposer ou des vides peuvent se créer. Une renormalisation de la fraction volumique corrige ce problème.

la densité doit être modifiée en accord avec la variation de volume imposée, elle a alors pour expression

$$\tilde{\rho}_{\alpha k} = \rho_{\alpha k} \frac{f_{\alpha k}}{\tilde{f}_{\alpha k}}.$$

Enfin, nous utilisons la loi d'état pour s'assurer d'avoir des quantités thermo-dynamiques cohérentes avec le comportement physique des matériaux, la pression corrigée est donnée par

$$\tilde{p}_{\alpha k} = EOS_\alpha(e_{\alpha k}, \tilde{\rho}_{\alpha k}).$$

6.7 Gestion de plus de 2 matériaux

Nous avons écrit notre méthode en ne considérant que deux matériaux en contact. Dans ce paragraphe, nous étendons la méthode à 3 matériaux ou plus.

Lorsque 3 matériaux sont présents dans une maille, la définition du glissement entre eux est ambiguë. En particulier lorsque les trois matériaux ont une interface en « T » et forment un point triple, nous ne pouvons pas définir clairement de direction de glissement et les interactions entre les matériaux. Pour éviter cette situation, nous n'autorisons qu'une seule interface pouvant présenter des discontinuités de vitesse.

Nous regroupons les matériaux en deux groupes de glissement M^1 et M^2 se comportant comme deux matériaux en contact. Au sein d'un groupe, les matériaux sont soudés entre eux et se déplacent à la même vitesse. Nous faisons donc l'hypothèse d'iso-déformation du chapitre 4 (voir paragraphe 4.2.3).

Considérons un système ayant des matériaux α rassemblés dans le groupe M^1 , $\alpha \in M^1$ et des matériaux β regroupés dans M^2 , $\beta \in M^2$. Les champs centrés sont toujours définis pour chaque matériau. Les deux groupes possèdent chacun leur champ de vitesse \underline{u}_1 et \underline{u}_2 et nous

avons la vitesse des matériaux qui est égale à la vitesse des groupes auxquels ils appartiennent,

$$\underline{u}_{\alpha i} = \underline{u}_{1i}, \quad \forall i, \forall \alpha \in M^1, \quad (6.48)$$

$$\underline{u}_{\beta i} = \underline{u}_{2i}, \quad \forall i, \forall \beta \in M^2. \quad (6.49)$$

Avec l'hypothèse d'iso-déformation par groupe, la force nodale due aux efforts intérieurs prend une forme similaire à la celle du cas « vitesse moyenne » apparaissant dans l'équation de dynamique (4.14). La conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc pour chaque groupe

$$\begin{aligned} \underline{u}_{1i}^{n+1/2} &= \underline{u}_{1i}^{n-1/2} - \frac{\delta t}{m_{1i}^n} \sum_{k \in M_i} \sum_{\alpha \in M^1} f_{\alpha k}^n \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS + \frac{\delta t}{m_{1i}^n} p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i, \\ \underline{u}_{2i}^{n+1/2} &= \underline{u}_{2i}^{n-1/2} - \frac{\delta t}{m_{2i}^n} \sum_{k \in M_i} \sum_{\beta \in M^2} f_{\beta k}^n \underline{\sigma}_{\beta k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - \frac{\delta t}{m_{1i}^n} p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i \end{aligned}$$

avec m_{1i}^n et m_{2i}^n , les masses nodales des groupes, prises comme la somme des masses nodales de leurs matériaux. Comme dans le paragraphe 6.2.2.2, ce système se résout nœud par nœud par rapport aux inconnues $\underline{u}_{1i}^{n+1/2}$, $\underline{u}_{2i}^{n+1/2}$ et $p_{\Gamma_i}^n$, en y ajoutant l'équation de continuité

$$\left(\underline{u}_{2i}^{n+1/2} - \underline{u}_{1i}^{n+1/2} \right) \cdot \underline{n}_{\Gamma_i} = \underline{0}, \quad \forall i \in N_{\Gamma}. \quad (6.50)$$

Les vitesses et les déformations des groupes sont affectées aux matériaux qui les composent.

Les volumes partiels des matériaux en fin de pas de temps sont obtenus à partir des mailles Ω_k^{1n+1} et Ω_k^{2n+1} déformées avec les vitesses des groupes et ayant comme volumes V_k^{1n+1} et V_k^{2n+1} . Par l'hypothèse de gradient uniforme dans les mailles, la fraction volumique est constante si bien que nous avons

$$\begin{aligned} V_{\alpha k}^{n+1} &= f_{\alpha k}^n V_k^{1n+1}, \quad \forall k, \forall \alpha \in M^1, \\ V_{\beta k}^{n+1} &= f_{\beta k}^n V_k^{2n+1}, \quad \forall k, \forall \beta \in M^2. \end{aligned}$$

Enfin, les équations de conservation de la masse (6.18) et de l'énergie (6.18) - (6.20) sont résolues pour chaque matériaux pour obtenir les grandeurs thermodynamiques des matériaux au temps t^{n+1} .

Lors de la phase de transport, les deux champs de vitesse des deux groupes sont projetés sur le maillage dual régularisé. L'interface est reconstruite pour chaque configuration déformée de groupe avec la méthode « pelures d'oignons » du paragraphe 4.2.1.2 pour obtenir les maillages découpés des différents matériaux. Enfin, les grandeurs centrées sont projetées par matériau sur le maillage moyen régularisé.

La gestion d'un nombre quelconque de matériaux se résume donc à l'écriture d'un système à deux vitesses moyennes avec une gestion interne des matériaux d'un groupe identique à la gestion des matériaux du chapitre 4 et une gestion des interactions entre les deux groupes identique au traitement de l'interface entre deux matériaux présenté dans ce chapitre.

Aucun critère ne permet de définir de manière systématique le meilleur regroupement de matériaux. Ce choix est fait arbitrairement.

6.8 Prise en compte du contact unilatéral

La méthode « vitesse moyenne » du chapitre 4 utilise un champ de vitesse continu et impose donc un saut de vitesse nul à l'interface

$$[\underline{u}] = \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

ce qui est équivalent à souder les matériaux entre eux.

La méthode présentée dans ce chapitre est écrite en imposant un saut de vitesse normale nul à l'interface

$$[\underline{u}] \cdot \underline{n}_\Gamma = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Dans ce cas, nous laissons libre le déplacement dans la direction tangentielle à l'interface mais nous imposons aux matériaux de rester en contact. Cette condition se justifie lorsqu'un des matériaux est un fluide. Le fluide se détend et comble le vide pouvant apparaître à l'interface.

Lors du contact entre deux solides, cette hypothèse peut s'avérer moins correcte, les deux structures peuvent se séparer et laisser un vide à l'interface. Nous écrivons alors une condition de contact uni-latéral à l'interface. La contrainte de vitesse n'est plus la nullité du saut de vitesse mais sa positivité

$$[\underline{u}] \cdot \underline{n}_\Gamma \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Cette condition empêche les matériaux de s'inter-pénétrer mais permet leur séparation ce qui laisse un degré de liberté supplémentaire à la liaison modélisée à l'interface.

Par définition, le multiplicateur de Lagrange est nul lorsque sa contrainte associée n'est pas active. Nous avons un problème de Signorini modélisant le contact entre nos structures et s'écrivant à chaque nœud mixte

$$[\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{\Gamma_i} \geq 0 \quad - p_{\Gamma_i} \geq 0 \quad p_{\Gamma_i} [\underline{u}_i] \cdot \underline{n}_{\Gamma_i} = 0, \quad \forall i \in N_\Gamma.$$

La modification de la condition se répercute dans la phase lagrangienne et dans la phase de transport.

6.8.1 Phase lagrangienne

Nous reprenons le système (6.22) - (6.24) en modifiant la contrainte de vitesse

$$\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} + \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i \in N_\Gamma, \quad (6.51)$$

$$\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} = \tilde{\underline{u}}_{\beta i} - \frac{\delta t}{m_{\beta i}} p_{\Gamma_i}^n \underline{n}_{\Gamma_i}^n, \quad \forall i \in N_\Gamma, \quad (6.52)$$

$$\left(\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \right) \cdot \underline{n}_{\Gamma_i}^n \geq 0, \quad \forall i \in N_\Gamma. \quad (6.53)$$

et en ajoutant les liaisons

$$- - p_{\Gamma_i} \geq 0, \quad p_{\Gamma_i} \left(\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \right) \cdot \underline{n}_{\Gamma_i}^n = 0.$$

La solution de ce système s'écrit pour chaque nœud mixte

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \tilde{u}_{\alpha i} \\ \underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} = \tilde{u}_{\beta i} \\ p_{\Gamma i}^n = 0 \end{array} \right. \quad \text{si } (\tilde{u}_{\beta i} - \tilde{u}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \geq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \tilde{u}_{\alpha i} + \frac{\delta t}{m_{\alpha i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n \\ \underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} = \tilde{u}_{\beta i} - \frac{\delta t}{m_{\beta i}} p_{\Gamma i}^n \underline{n}_{\Gamma i}^n \\ p_{\Gamma i}^n = \frac{1}{\delta t} \frac{1}{\frac{1}{m_{\alpha i}} + \frac{1}{m_{\beta i}}} (\tilde{u}_{\beta i} - \tilde{u}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \end{array} \right. \quad \text{si } (\tilde{u}_{\beta i} - \tilde{u}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n < 0 \end{array} \right. \quad \forall i \in N_{\Gamma}. \quad (6.54)$$

Nous vérifions bien $(\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \geq 0$ si $(\tilde{u}_{\beta i} - \tilde{u}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \geq 0$ et $(\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n = 0$ si $(\tilde{u}_{\beta i} - \tilde{u}_{\alpha i}) \cdot \underline{n}_{\Gamma i}^n \leq 0$.

La pression d'interface est nulle lorsque la contrainte est inactive, elle est négative sinon. Le reste de la phase lagrangienne n'est pas touchée par cette modification.

6.8.2 Phase de transport

La renormalisation de la fraction volumique présentée dans le paragraphe 6.6.3 permet de corriger une pénétration ou un décollement dû aux écarts de transport des géométries. La prise en compte d'une condition de contact unilatéral provoque l'apparition de vide à l'interface. Ce vide n'est plus une erreur de discrétisation mais un phénomène que l'on souhaite décrire. Nous traitons ce vide comme un matériau v faisant parti des différents matériaux α ou β présents dans la maille. Le vide possède un volume V_{vk} , une fraction volumique f_{vk} mais n'a ni masse, ni énergie, ni loi d'état ($\rho = 0$, $e = 0$, $p = 0$).

La renormalisation de la fraction volumique telle qu'elle a été présentée précédemment n'est donc pas adaptée ici. Il faut mettre en place un traitement particulier du vide pour permettre le décollement ou la mise en contact des matériaux. La correction va donc d'abord s'appliquer sur la fraction volumique du vide avant de s'appliquer sur celle des autres matériaux. Si la somme des fractions volumiques des matériaux α et du vide est inférieure à 1, il faut augmenter les fractions, nous détendons alors uniquement le vide pour obtenir un volume total correct

$$\tilde{f}_{vk} = f_{vk} + (1 - \sum_{\alpha} f_{\alpha k}).$$

Si cette somme est supérieur à 1, nous comprimons d'abord le vide

$$\tilde{f}_{vk} = f_{vk} + (1 - \sum_{\alpha} f_{\alpha k}) \quad \text{si} \quad \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha k} - 1 \right) < f_{vk},$$

et si cela ne suffit pas, nous le faisons disparaître et re-normalisons les fractions des autres matériaux

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_{vk} = 0 \\ \tilde{f}_{\alpha k} = \frac{f_{\alpha k}}{\sum_{\alpha} f_{\alpha k} - f_{vk}} \end{array} \right. \quad \text{si} \quad \left(\sum_{\alpha} f_{\alpha k} - 1 \right) > f_{vk}.$$

Cette correction de fraction volumique permet de créer du vide dans les mailles mixtes lorsque les matériaux s'écartent et ainsi de décrire lors de la phase de transport, le décollement des différents matériaux calculé lors de la phase lagrangienne.

6.9 Résumé et conclusion

Le déroulement d'un pas de temps avec la continuité des vitesses normales par nœud se résume de la manière suivante :

1. Phase lagrangienne :
 - (a) calcul des vitesses nodales prédites $\tilde{u}_{\alpha i}$ par matériau ne prenant pas en compte les efforts d'interface pour chaque matériau,
 - (b) prise en compte de la contrainte de continuité des vitesses normales et calcul des vitesses des matériaux $u_{\alpha i}^{n+1/2}$ au temps $t^{n+1/2}$ par calcul des normales nodales et application des forces d'interfaces $p_{\Gamma i}$,
 - (c) calcul des nouvelles densités sur chaque maillage transporté par conservation de la masse pour chaque matériau,
 - (d) calcul de la pseudo-viscosité pour chaque matériau,
 - (e) calcul des nouvelles énergies et pressions par conservation de l'énergie pour chaque matériau ;
2. Phase de transport :
 - (a) construction d'un maillage moyen régularisé,
 - (b) projection du champ de vitesse pour chaque matériau,
 - (c) projection des grandeurs centrées pour chaque matériau,
 - (d) correction des fractions volumiques.

Nous avons ainsi présenté une extension multi-matériau du schéma de Wilkins classique. Elle ne fait plus l'hypothèse d'un champ de vitesse complètement continu à l'interface. Elle est basée sur un enrichissement du champ de vitesse et l'écriture d'une continuité des vitesses normales à chaque nœud.

Cette version est simple et peu coûteuse à mettre en place dans un schéma déjà existant. Toutefois, la cinématique est modifiée et le déplacement différent du maillage pour chaque matériau rend obligatoire le formalisme ALE et la phase de projection à chaque pas de temps. Nous avons désormais plusieurs champs de vitesse à projeter. Au lieu de projeter un champ de vitesse unique défini sur tout le maillage, nous projetons deux champs de vitesse mais ceux-ci ne sont pas définis sur tout le domaine et ne s'intersectent que dans la zone des mailles mixtes. Le surcoût en terme de calcul de la projection obligatoire vient donc surtout du nombre de phases de projection, le nombre d'intersections à calculer à un pas de temps donné n'étant augmenté que du nombre de nœuds mixtes.

Dans l'introduction du chapitre 5, nous avons noté deux points problématiques de la méthode « vitesse moyenne » que nous voulions améliorer, la soudure des matériaux entre eux et la bande d'iso-déformation négligeant les différences de compressibilité entre les matériaux. Notre méthode autorise des discontinuités de vitesse et le glissement entre les matériaux dans un algorithme mono-bloc. Les matériaux ne sont plus soudés mais l'écriture de la contrainte de vitesse à tous les nœuds des mailles mixtes impose une compression normale identique pour tous les matériaux (la figure 6.6 présente cela dans le cas à 1D, la remarque se généralise au cas 2D en considérant la direction normale à l'interface). Nous négligeons donc la différence de compressibilité des matériaux dans la direction normale à l'interface. Nous n'avons réalisé qu'un seul des deux objectifs présentés dans l'introduction du chapitre 5. La seconde discrétisation, présentée

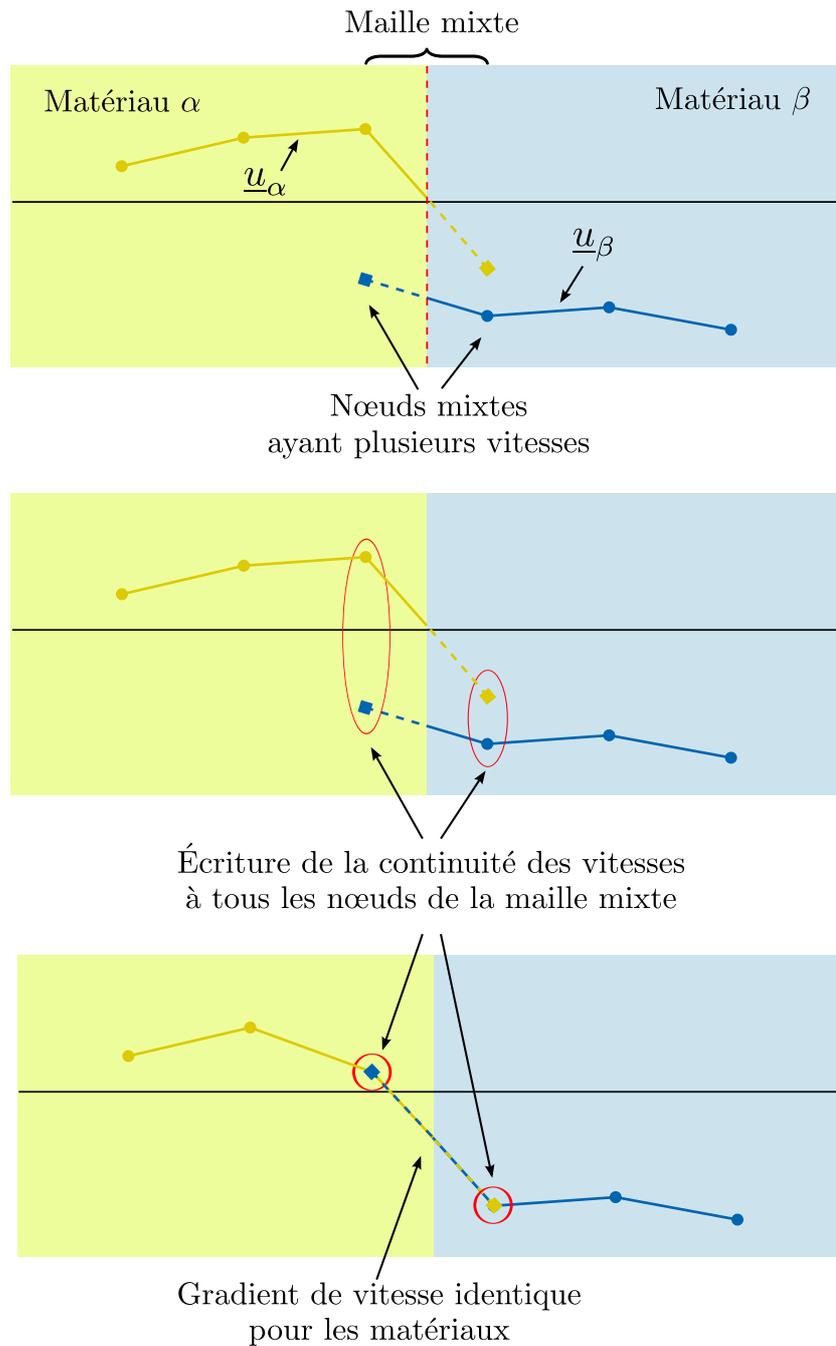


FIGURE 6.6 – Compression des matériaux avec une continuité par nœud : exemple 1D. En 1D, la continuité des vitesses normales correspond à l'égalité des vitesses. Dans la maille mixte, nous imposons la continuité à tous les nœuds. Par interpolation, la vitesse normale est donc identique pour tous les matériaux dans toute la maille mixte. Le gradient de vitesse donne la compression dans la maille. La compression dans la direction normale est donc la même pour tous les matériaux.

dans le chapitre suivant essaye de s'affranchir de cet inconvénient et permet de prendre en compte les différentes compressibilités des matériaux.

Chapitre 7

Continuité par maille

Sommaire

7.1	Stabilisation du système	98
7.1.1	Nécessité de la stabilisation	98
7.1.2	Ajout de nœuds internes	99
7.1.3	Description de la fonction bulle	99
7.1.4	Modification des champs	101
7.1.5	Approximation des termes d'inertie	101
7.2	Analyse de la stabilité en espace	104
7.2.1	Choix des normes	104
7.2.2	Vérification de la condition Inf-Sup	104
7.3	Calcul des flux à travers l'interface	106
7.3.1	Intégration directe sur l'interface reconstruite	107
7.3.2	Approximation du flux par intégration par partie	109
7.4	Discrétisation en temps	111
7.4.1	Grandeurs centrées	111
7.4.1.1	Conservation de la masse	111
7.4.1.2	Taux de déformations	112
7.4.1.3	Conservation de l'énergie	112
7.4.2	Conservation de la quantité de mouvement	113
7.4.2.1	Dynamique des nœuds sommets	113
7.4.2.2	Équilibre des nœuds internes	114
7.4.2.3	Continuité des vitesses normales	114
7.4.3	Remarques	115
7.5	Pseudo-viscosité dans les mailles mixtes	115
7.5.1	Déformations dues au nœud interne	115
7.5.2	Compression de la maille mixte entière	116
7.5.3	Calcul de la pseudo-viscosité	117
7.5.4	Travail de la pseudo-viscosité	117
7.6	Système à résoudre lors de la phase Lagrange	118
7.7	Phase de transport	120
7.7.1	Régularisation du maillage	120
7.7.2	Projection des vitesses	120
7.7.3	Projection des grandeurs centrées	121
7.8	Résumé et conclusion	123

7.1 Stabilisation du système

7.1.1 Nécessité de la stabilisation

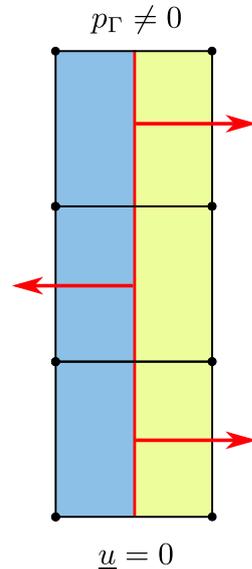


FIGURE 7.1 – Mode de pression d’interface en damier. Un champ de pression d’interface en damier, alternativement positif puis négatif en passant d’une maille à l’autre, ne provoque aucune accélération de nœud. L’existence de ce mode prouve le non-respect de la condition Inf-Sup.

Nous étudions maintenant la seconde proposition de discrétisation du champ de pression d’interface proposée dans le paragraphe 5.4.4.2. Dans cette variante, nous discrétisons la pression d’interface par un champ constant par maille mixte.

Avec cette discrétisation, nous pouvons avoir des modes de pression d’interface parasites (voir figure 7.1). Ces modes en damier présentent des champs de pression d’interface de norme non-nulle se compensant entre mailles voisines et ne causant aucun effort sur les nœuds. La condition Inf-Sup 5.52 n’est donc pas respectée car nous avons dans ce cas, en reprenant les notations du paragraphe 5.6,

$$\exists p_h \in P_h, \|p_h\|_{P_h} \neq 0, \quad \frac{b(\underline{u}_h, p_h)}{\|\underline{u}_h\|_{1/2, h, \Gamma} \|p_h\|_{-1/2, h, \Gamma}} = 0 \not\geq \beta, \quad \forall \underline{u}_h \in U_h.$$

La discrétisation de la pression d’interface par maille sans modification du champ de vitesse ne permet pas de respecter la condition Inf-Sup et n’assure pas la convergence de la méthode. Elle doit être stabilisée pour pouvoir être utilisée.

Nous pouvons penser à deux approches pour restaurer la stabilité avec ce choix de pression :

- le produit de dualité entre contrainte cinématique et multiplicateur de Lagrange peut être modifié par l’ajout d’un terme de pénalité ([9, 3, 74]). Cette méthode se trouve sous le nom de méthode de Nitsche ([63]). Il faut ensuite paramétrer correctement le coefficient de pénalisation ;
- la discrétisation de la vitesse peut être enrichie pour stabiliser le système. Des degrés de liberté sont alors ajoutés au champ de vitesse. Une méthode classique pour cela est l’insertion de nœuds internes aux mailles associés à une fonction bulle ([61, 23]). Cette méthode

utilisée dans le cas de contrainte d'incompressibilité aboutit aux éléments « MINI » ([4]). Cette méthode peut être équivalente à la méthode de Nitsche sous certaines conditions ([61]). Nous utiliserons cette technique par la suite.

7.1.2 Ajout de nœuds internes

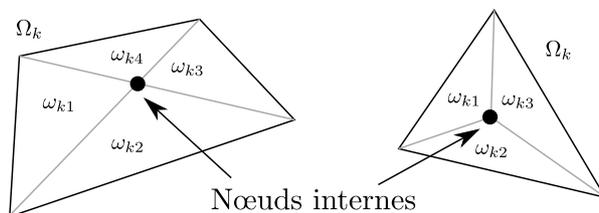


FIGURE 7.2 – Nœuds internes dans les mailles. Le nœud interne est ajouté à l'intérieur de la maille, généralement au centre de celle-ci. Le nœud découpe les mailles mixtes Ω_k en sous-mailles triangulaires ω_{kp} .

Nous stabilisons notre système en enrichissant le champ de vitesse par matériau. Pour cela, nous ajoutons dans les mailles mixtes un nœud interne possédant une vitesse par matériau. Il est placé au barycentre \underline{x}_k de la maille.

Nous notons \underline{u}_k , la vitesse du nœud interne k de la maille Ω_k . Cette maille étant mixte, nous avons $k \in M_\Gamma$. Nous distinguons par la suite les degrés de liberté « sommets » des nœuds i situés aux sommets des mailles mixtes des degrés de liberté « bulles » des nœuds internes k internes aux mailles.

À ce nœud est associée une fonction de forme continue $\varphi_k(\underline{x})$ ayant son maximum au nœud interne et étant nulle aux nœuds sommets de la maille, c'est à dire :

$$\varphi_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} = \underline{x}_k \\ 0 & \text{si } \underline{x} = \underline{x}_i \text{ ou si } x \notin \Omega_k \end{cases} \quad (7.1)$$

La trace de la fonction bulle sur le bord de la maille est nulle et le support de la fonction bulle ne dépasse pas la maille mixte Ω_k . Le nœud interne est donc uniquement affecté par des effets internes à la maille à laquelle il appartient.

Avec l'ajout de nœuds internes, l'existence de modes parasites n'est plus possible. Ces modes provenaient d'un équilibre des pressions d'interface des différentes mailles avoisinant un nœud sommet ce qui n'est plus possible avec les nœuds internes. Nous démontrerons le respect de la condition Inf-Sup dans le paragraphe 7.2.

7.1.3 Description de la fonction bulle

La fonction bulle $\varphi_k(\underline{x})$ peut être définie de plusieurs manières. La seule condition que nous voulons respecter est la propriété (7.1).

Un premier choix est de prendre le produit des fonctions de forme des nœuds sommets ([4, 61])

$$\varphi_k(\underline{x}) = \prod_{i \in N_k} \Psi_i(\underline{x}).$$

La fonction bulle est bien nulle sur le bord de la maille et a son maximum au centre de la maille.

Une autre formulation, par exemple, peut être obtenue en résolvant un problème local avec des conditions aux limites imposées sur le bord de la maille et au nœud interne ([23]). La fonction obtenue respecte la propriété 7.1 et permet de minimiser le résidu du système car elle est basée sur une solution physique.

Nous choisissons une fonction bulle linéaire par morceaux. Le nœud interne découpe la maille en sous-mailles triangulaires ω_{kp} définies chacune par ce nœud et deux nœuds adjacents de la maille mixte (voir figure 7.2). La fonction bulle dans toute la maille mixte est alors prise comme la juxtaposition par sous-maille des fonctions de formes linéaires standards pour les éléments triangulaires (voir figure 7.3). Nous avons bien une fonction valant 1 au nœud interne et 0 sur le bord de la maille. Les fonction de forme $\Psi_i(\underline{x})$ des nœuds sommets sont également modifiées à l'intérieur des mailles mixtes pour respecter la partition de l'unité

$$\sum_i \Psi_i(\underline{x}) + \varphi_k(\underline{x}) = 1.$$

Dans les mailles mixtes, les fonctions de forme des nœuds sommets sont donc linéaires par sous-maille. La fonction Ψ_i prend la valeur 1 au nœud i et 0 aux autres nœuds, y compris pour le nœud interne (cf. figure 7.3). Ce choix de fonction bulle nous facilitera les procédures d'intégration sur les mailles découpées en donnant une expression simple des intégrales sur les mailles partielles.

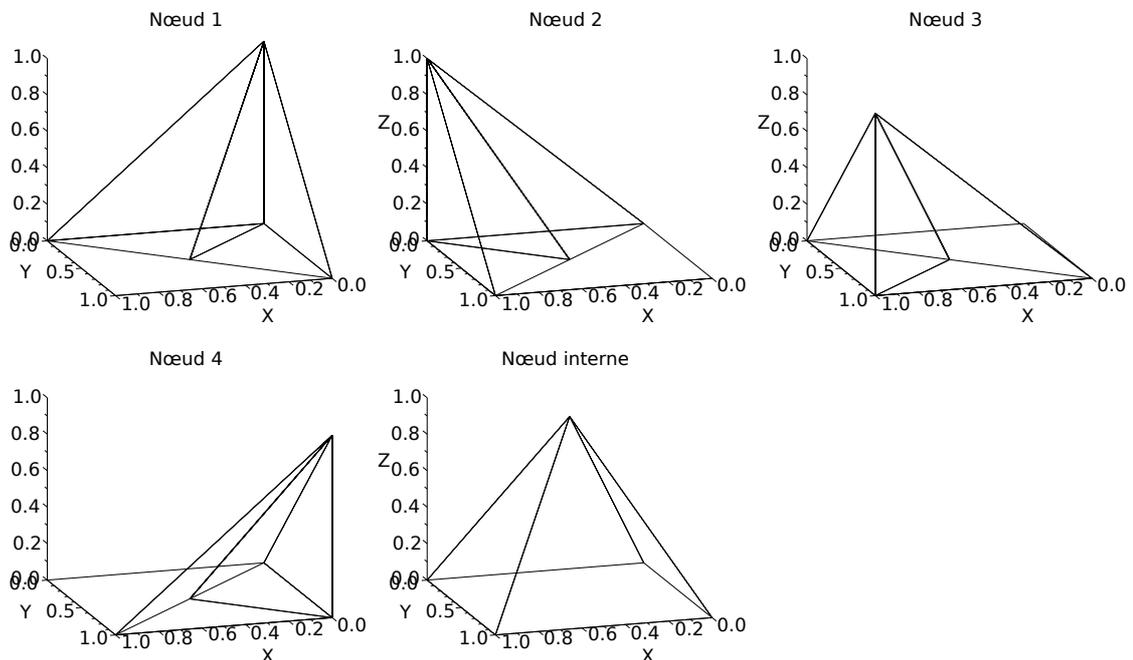


FIGURE 7.3 – Fonctions de forme dans les mailles quadrangles mixtes. La fonction bulle est linéaire par morceaux et les fonctions de forme des nœuds sommets sont modifiées pour respecter la partition de l'unité.

7.1.4 Modification des champs

Avec l'ajout du nœud interne, le champ de vitesse $\underline{u}(\underline{x})$ s'écrit désormais

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i \in N_\alpha} \underline{u}_{\alpha i} \Psi_i H_\alpha + \sum_{k \in M_\Gamma} \underline{u}_{\alpha k} \varphi_k H_\alpha + \sum_{i \in N_\beta} \underline{u}_{\beta i} \Psi_i H_\beta + \sum_{k \in M_\Gamma} \underline{u}_{\beta k} \varphi_k H_\beta \quad (7.2)$$

avec $\underline{u}_{\alpha k}$ et $\underline{u}_{\beta k}$, les vitesses du nœud interne \underline{x}_k de Ω_k associées respectivement aux matériaux α et β . La fonction H_α est la fonction caractéristique du domaine \mathcal{D}_α définie comme dans les chapitres précédents. Elle est transportée par le champ de vitesse \underline{u}_α .

Les champs centrés sont également enrichis dans les mailles mixtes et possèdent un degré de liberté par sous-maille et par matériau. La champ de densité, par exemple, prend la forme enrichie

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}) = & \sum_{k \in M_\alpha \setminus M_\Gamma} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\beta \setminus M_\Gamma} \rho_{\beta k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) \\ & + \sum_{k \in M_\Gamma} \sum_p \rho_{\alpha k p} \chi_{\omega_{kp}}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\Gamma} \sum_p \rho_{\beta k p} \chi_{\omega_{kp}}(\underline{x}) H_\beta(\underline{x}) \end{aligned}$$

où $\chi_{\omega_{kp}}(\underline{x})$ est la fonction caractéristique de la sous-maille ω_{kp} et $\rho_{\alpha k p}$ est la densité moyenne du matériau α dans la sous-maille ω_{kp} . D'une manière générale, l'indice $\bullet_{\alpha k p}$ dénote de l'appartenance de la variable à la sous-maille ω_{kp} et au matériau α . La fonction $H_\alpha(\underline{x})$ est toujours la fonction de Heaviside associée au domaine \mathcal{D}_α .

La discrétisation utilisée pour les fonctions tests pondérant les équations de conservation de la masse (5.1) et de l'énergie (5.3) est la même que la discrétisation des champs centrés. Cela nous fait écrire désormais les équations discrétisées en espace de la conservation de la masse et de l'énergie par sous-maille dans les mailles mixtes (voir paragraphe 7.4.1).

7.1.5 Approximation des termes d'inertie

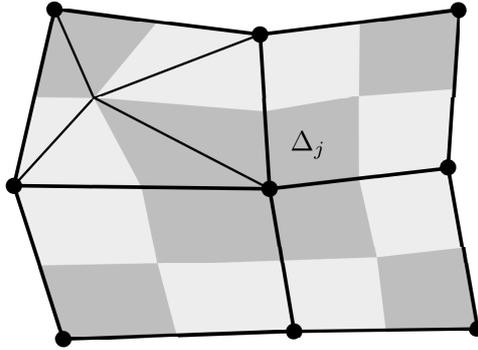


FIGURE 7.4 – Mailles duales autour des mailles mixtes découpées par sous-maille. Les différentes mailles duales sont représentées par un damier de couleurs unies alors que les traits pleins représentent les frontières des mailles primales et des sous-mailles. La maille duale associée à un nœud i est composée du quart des mailles primales pures et la moitié des sous-mailles entourant ce nœud.

Nous faisons à nouveau une approximation du champ de vitesse réelle et virtuelle dans les termes d'accélération : nous l'interpolons par valeurs constantes sur les mailles duales. Avec le

découpage des mailles mixtes en sous-mailles, la définition de la maille duale est modifiée. Nous les re-définissons de la manière suivante. Une maille duale est composée du quart des mailles pures entourant un nœud et de la moitié des sous-mailles voisines de ce nœud (voir figure 7.4).

Ainsi défini, l'ensemble des mailles duales des nœuds sommet couvre la totalité du domaine de calcul \mathcal{D} et les nœuds internes n'ont pas donc de mailles duales associées. Ils n'ont donc pas de masse nodale et la masse du domaine est condensée uniquement sur les nœuds sommets des mailles (voir figure 7.5). Ils n'interviennent pas dans les termes d'accélération et leur équation de conservation de la quantité de mouvement se réduit à une équation d'équilibre statique (voir paragraphe 7.4.2.2).

Cette absence de masse pour les nœuds internes se justifie pour plusieurs raisons :

- d'un point de vue théorique, l'écriture de l'accélération et des liaisons de contact au même nœud conduit à un problème semi-discret mal posé ([48]) ;
- d'un point de vue numérique, la séparation des termes de liaisons et d'accélération aboutit à des méthodes plus efficaces ([91]) ;
- d'un point de vue robustesse, l'absence d'inertie des nœuds internes permet de ne pas avoir d'héritage en vitesse quand ces nœuds apparaissent ou disparaissent.

Dans les termes d'accélération, les champ de vitesse réel $\underline{u}(\underline{x})$ et virtuel $\widehat{\underline{u}}(\underline{x})$ sont donc approchés par matériau par

$$\begin{aligned}\underline{u}_\alpha(\underline{x}) &\approx \sum_{i \in N_\alpha} \underline{u}_{\alpha i} \chi_{\Delta_i}(\underline{x}), \\ \widehat{\underline{u}}_\alpha(\underline{x}) &\approx \sum_{i \in N_\alpha} \widehat{\underline{u}}_{\alpha i} \chi_{\Delta_i}(\underline{x}).\end{aligned}$$

Pour le calcul des termes d'inertie, nous supposons que les matériaux sont équi-répartis dans les sous-mailles. Le champ de densité $\rho(\underline{x})$ enrichi par sous-maille et par matériau qui s'écrivait

$$\rho_\alpha(\underline{x}) = \sum_{k \in M_\alpha \setminus M_\Gamma} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\alpha \cap M_\Gamma} \sum_p \rho_{\alpha k p} \chi_{\omega_{kp}}(\underline{x}) H_\alpha(\underline{x})$$

est approché par

$$\rho_\alpha(\underline{x}) \approx \sum_{k \in M_\alpha \setminus M_\Gamma} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\alpha \cap M_\Gamma} \sum_p f_{\alpha k p} \rho_{\alpha k p} \chi_{\omega_{kp}}(\underline{x}).$$

La masse nodale du nœud i pour le matériau α s'écrit donc

$$\begin{aligned}m_{\alpha i} &= \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \int_{\Delta_i \cap \Omega_k} f_{\alpha k} \rho_{\alpha k} dV + \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_p \int_{\Delta_i \cap \omega_{kp}} f_{\alpha k p} \rho_{\alpha k p} dV \\ &= \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \frac{m_{\alpha k}}{\#N_k} + \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} \frac{m_{\alpha k p}}{2}\end{aligned}\tag{7.3}$$

avec $m_{\alpha k p}$, la masse du matériau α dans la sous-maille ω_{kp} et \mathcal{M}_{ki} , l'ensemble des sous-mailles de Ω_k ayant le nœud i comme sommet.

Comme précédemment, les vitesses restent bornées même lorsque la fraction volumique tend vers 0. Nous préservons le rapport entre les masse nodales et les forces nodales $F_{\alpha i}$ dues aux efforts internes

$$F_{\alpha i} = \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} f_{\alpha k} \underline{\sigma}_{\alpha k} \cdot \int_{\partial \Omega_k} \underline{n} \Psi_i dS + \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\alpha k p} \underline{\sigma}_{\alpha k p} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}} \underline{n} \Psi_i dS$$

car les pondérations en $f_{\alpha k}$ et $f_{\alpha kp}$ sont les mêmes pour la masse nodale $m_{\alpha i}$ et la force nodale $F_{\alpha i}$.

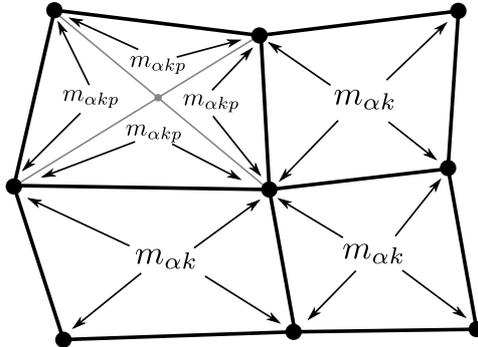


FIGURE 7.5 – Condensation de la masse par sous-maille. Pour un matériau donné, un nœud sommet se voit attribuer le quart de la masse des mailles pures avoisinantes et la moitié de la masse des sous-mailles avoisinantes.

Certaines sous-mailles peuvent ne pas avoir d'intersection avec un des domaines matériaux \mathcal{D}_α (voir figure 7.6). Il est donc possible qu'après condensation de la masse, un nœud sommet n'ait pas de masse associée à un des matériaux. Dans ces cas, nous avons $\text{Supp}\Psi_i \cap \Gamma = \emptyset$ et il vient également

$$\int_{\Gamma_k} \Psi_i(\underline{x}) dS = 0$$

et

$$\int_{\mathcal{D}_\alpha} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = 0.$$

Toutes les équations associées à ce nœud et aux sous-mailles avoisinantes disparaissent et n'interviennent plus dans le système. Nous gardons la vitesse de ces nœuds constante au cours du pas de temps pour des raisons de déformations géométriques des sous-mailles vides.

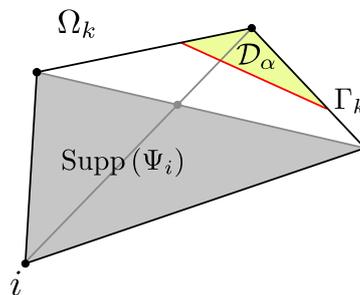


FIGURE 7.6 – Absence d'intersection entre la fonction de forme Ψ_i et l'interface. Le support de la fonction de forme d'un nœud i s'arrête aux deux sous-mailles voisines du nœud. Il se peut que l'intersection avec l'interface Γ ou le domaine matériau \mathcal{D}_α soit nulle.

7.2 Analyse de la stabilité en espace

7.2.1 Choix des normes

Nous reprenons la norme dans l'espace des multiplicateurs de Lagrange P_h (5.51)

$$\|p_h\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 = \sum_{\Gamma_k} \text{diam } \Gamma_k \|p_h\|_{L^2(\Gamma_k)}^2. \quad (7.4)$$

Pour notre discrétisation, cette norme s'écrit

$$\|p_h\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 = \sum_{k \in M_\Gamma} l_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k} p_k^2 dS = \sum_{k \in M_\Gamma} l_{\Gamma k}^2 p_k^2$$

avec $l_{\Gamma k}$ la longueur de l'interface dans la maille Ω_k .

La norme de la vitesse (5.50) s'écrit dans notre cas,

$$\|\underline{u}_h\|_{1/2,h,\Gamma}^2 = \sum_{\Gamma_k} \frac{1}{\text{diam } \Gamma_k} \|\underline{u}_h\|_{L^2(\Gamma_k)}^2 = \sum_{k \in M_\Gamma} \frac{1}{l_{\Gamma k}} \int_{\Gamma_k} |\underline{u}_h|^2 dS. \quad (7.5)$$

7.2.2 Vérification de la condition Inf-Sup

Soit p_h un élément quelconque de P_h , prenons un champ de vitesse \underline{u}_h nul pour tous nœuds sommets et pour les nœuds internes du matériau α et non-nul uniquement pour les nœuds internes du matériau β de la forme

$$\begin{cases} \underline{u}_{\alpha i} = \underline{0}, & \forall i \in N_\alpha, \\ \underline{u}_{\beta i} = \underline{0}, & \forall i \in N_\beta, \\ \underline{u}_{\alpha k} = \underline{0}, & \forall k \in M_\Gamma, \\ \underline{u}_{\beta k} = p_k l_{\Gamma k} \underline{n}_{\Gamma k}, & \forall k \in M_\Gamma. \end{cases}$$

Le champ de vitesse s'écrit donc

$$\underline{u}_h = \sum_{k \in M_\Gamma} \underline{u}_{\beta k} \varphi_k = \sum_{k \in M_\Gamma} p_k l_{\Gamma k} \underline{n}_{\Gamma k} \varphi_k.$$

La norme de \underline{u}_h vaut

$$\|\underline{u}_h\|_{1/2,h,\Gamma}^2 = \sum_{k \in M_\Gamma} \frac{1}{l_{\Gamma k}} \int_{\Gamma_k} |p_k l_{\Gamma k} \underline{n}_{\Gamma k} \varphi_k|^2 dS = \sum_{k \in M_\Gamma} \frac{1}{l_{\Gamma k}} p_k^2 l_{\Gamma k}^2 \int_{\Gamma_k} |\varphi_k|^2 dS = \sum_{k \in M_\Gamma} p_k^2 l_{\Gamma k}^2 \langle \varphi_k^2 \rangle_{l_{\Gamma k}}$$

où $\langle \varphi_k^2 \rangle_{l_{\Gamma k}}$ est la valeur moyenne de φ_k^2 sur la portion d'interface Γ_k . La fonction bulle φ_k est comprise entre 0 et 1, nous avons donc

$$\|\underline{u}_h\|_{1/2,h,\Gamma}^2 \leq \sum_{k \in M_\Gamma} p_k^2 l_{\Gamma k}^2 = \|p_h\|_{-1/2,h,\Gamma}^2. \quad (7.6)$$

Le produit de dualité s'écrit

$$\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma = \int_\Gamma p_h [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma dS.$$

Nous considérons un champ de vitesse non-nul sur \mathcal{D}_β , nul sur \mathcal{D}_α , le saut de vitesse à l'interface $[\underline{u}_h]$ est égal au champ de vitesse. Le produit de dualité dans notre cas se simplifie en

$$\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma = \int_\Gamma p_h \underline{u}_\beta \cdot \underline{n}_\Gamma dS.$$

En utilisant l'expression du champ de vitesse, nous obtenons

$$\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma = \sum_{k \in M_\Gamma} p_k^2 l_{\Gamma k} \int_\Gamma \varphi_k dS.$$

En notant $\langle \varphi_k \rangle_{l_{\Gamma k}}$, la valeur moyenne de φ_k sur $l_{\Gamma k}$, l'expression précédente devient

$$\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma = \sum_{k \in M_\Gamma} p_k^2 l_{\Gamma k}^2 \langle \varphi_k \rangle_{l_{\Gamma k}}.$$

Soit β tel que

$$\beta = \inf_{k \in M_\Gamma} \langle \varphi_k \rangle_{l_{\Gamma k}}.$$

Le produit est alors minoré par

$$\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma \geq \beta \sum_{k \in M_\Gamma} p_k^2 l_{\Gamma k}^2 = \beta \|p_h\|_{-1/2, h, \Gamma}^2.$$

Enfin, en se rappelant que, par construction de \underline{u}_h , nous avons l'inégalité (7.6) entre les normes de p_h et \underline{u}_h , nous avons finalement

$$\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma \geq \beta \sum_{k \in M_\Gamma} p_k^2 l_{\Gamma k}^2 \geq \beta \|p_h\|_{-1/2, h, \Gamma} \|\underline{u}_h\|_{1/2, h, \Gamma}.$$

Nous avons donc montré que pour tout champ de pression d'interface $p_h \in P_h$, nous pouvons trouver un champ de vitesse \underline{U}_h tel que

$$\forall p_h \in P_h, \quad \exists \underline{u}_h \in U_h, \quad \frac{\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma}{\|p_h\|_{-1/2, h, \Gamma} \|\underline{u}_h\|_{1/2, h, \Gamma}} \geq \beta.$$

Si nous pouvons montrer au moins un élément de U_h ayant la propriété précédente quelque soit $p_h \in P_h$, nous pouvons donc conclure avec le lemme prouvant le respect de la condition Inf-Sup (5.52) :

Lemme 2. *Avec la discrétisation des espaces de pression d'interface définie par (5.34) et la discrétisation de vitesse définie par (7.2), nous avons*

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{p_h \in P_h} \sup_{\underline{u}_h \in U_h} \frac{\langle [\underline{u}_h] \cdot \underline{n}_\Gamma, p_h \rangle_\Gamma}{\|\underline{u}_h\|_{1/2, h, \Gamma} \|p_h\|_{-1/2, h, \Gamma}} \geq \beta. \quad (7.7)$$

sous réserve que la valeur moyenne de la fonction bulle sur l'interface par maille soit suffisamment grande.

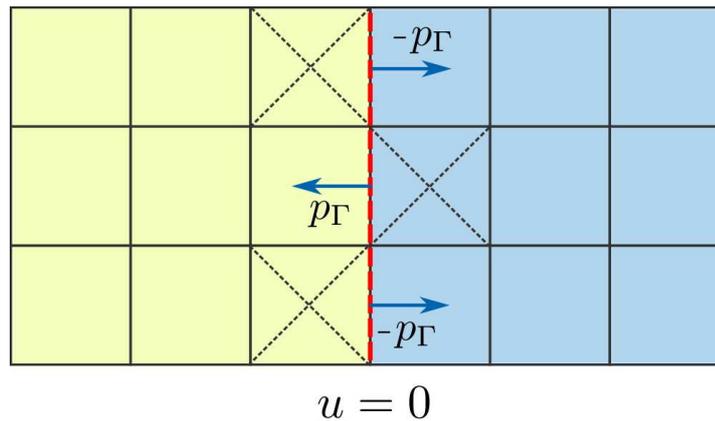


FIGURE 7.7 – Mode de pression d’interface en damier. Lorsque l’interface coïncide avec les bras des mailles, les nœuds internes perdent leur effet stabilisateur. Dans cette situation, aucune bulle ne « voit » l’interface et rien n’assure la stabilité du système.

Cas problématiques

La condition Inf-Sup est respectée tant que la valeur moyenne des fonctions bulles sur l’interface reste suffisante. Nous pouvons avoir des cas problématiques lorsque cette valeur tend vers 0. Cela arrive lorsque l’interface se situe près du bord des mailles. Comme noté dans [61], dans ces situations, la fonction bulle devient négligeable devant les fonctions des nœuds sommets et ne peuvent plus stabiliser le système.

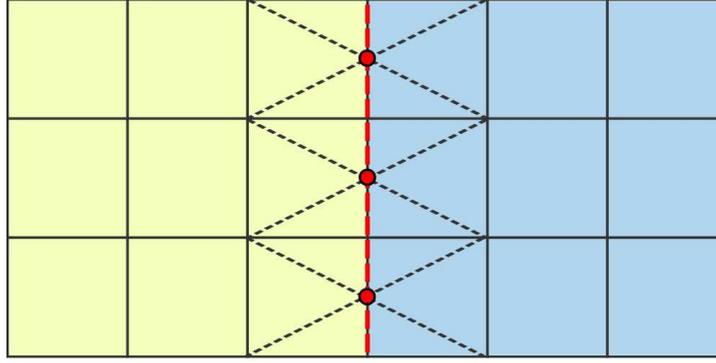
Dans le cas limite où l’interface coïncide avec le bord des mailles, elle n’intersecte aucun support de fonction bulle. Nous pouvons alors appliquer des modes de pression d’interface en damier n’ayant aucun effet sur les nœuds (voir figure 7.7). Ces modes sont proches des modes parasites du schéma de Wilkins classique. Dans ce cas, le système n’est plus stabilisé.

Dans la pratique, même si cette situation peut se produire à un pas de temps donné, l’interface se déplace dans le domaine au cours du temps. Le système récupère ses propriétés de stabilité dès que l’interface est située à l’intérieur des mailles.

Une solution envisageable serait de re-définir les fonctions bulles pour assurer que l’interface soit toujours intersectée par les supports des fonctions bulles. Par exemple, des fonctions bulles basées sur les bras des mailles permettrait cela ([61]). En effet, lorsque l’interface est trop proche du bord d’une maille, placer le nœud interne non plus au barycentre de la maille mais sur un bras correctement choisi permettrait de rétablir une valeur suffisante de l’intégrale $\int_{\Gamma} \varphi_k dS$. Le support de la fonction bulle s’étendrait alors sur deux mailles, chacune d’un côté de l’interface et chacune découpée en sous-mailles (voir figure 7.8). Les deux mailles seraient alors liées et interviendraient comme une seule maille mixte dans le système.

7.3 Calcul des flux à travers l’interface

Nous présentons dans ce paragraphe le calcul des intégrales sur l’interface Γ intervenant dans les équations de dynamique des nœuds sommets (7.27), (7.28), dans les équilibres des nœuds internes (7.29), (7.30) et dans la continuité des vitesses (7.31). Dans ces équations, les intégrales sur l’interface apparaissent sous la forme de flux des fonctions de forme à travers une



● : Nœud interne

FIGURE 7.8 – Nœud interne placé sur un bras. Le support de la fonction bulle s'étend sur les deux mailles avoisinant le bras. Ces mailles sont découpées en sous-mailles et sont considérées comme une maille mixte unique dans le système. L'intégrale de la fonction bulle sur l'interface ne tend plus vers 0. La stabilité du système est donc toujours assurée.

portion d'interface $\int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS$ et $\int_{\Gamma_k} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS$.

Nous montrons qu'un calcul direct de cette intégrale sans condition sur la reconstruction d'interface ne peut pas convenir et proposons une approximation de ces intégrales pour permettre de capturer les solutions uniformes.

7.3.1 Intégration directe sur l'interface reconstruite

Une première approche pour calculer les termes de flux est de reconstruire l'interface avec sa normale et d'écrire directement l'intégrale des fonctions de forme sur celle-ci.

La reconstruction permet de placer l'interface dans la maille mixte et d'obtenir la position des segments dans les sous-mailles triangulaires. Une fois la position de l'interface connue, il est possible de calculer directement le flux à travers l'interface dans une sous-maille. Les fonctions de formes étant linéaires dans les mailles mixtes, cette intégrale vaut

$$\int_{\Gamma_k \cap \omega_{kp}} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS = \frac{\Psi_i(A) + \Psi_i(B)}{2} \|AB\| \underline{n}_{\Gamma_k}$$

où A et B sont les points d'intersection de l'interface avec les bras de la sous-maille ω_{kp} et \underline{n}_{Γ_k} , la direction de l'interface reconstruite dans la maille Ω_k .

Comme dans le cas de la continuité par nœud, nous voulons capturer les solutions stationnaires. Ceci requiert, dans le cas d'une pression uniforme unitaire dans le domaine \mathcal{D} , que l'accélération de tous les nœuds soit nulle. En partant de l'équation des nœuds sommets (5.28) et (5.29), imposer une accélération nulle des nœuds aboutit avec notre discrétisation à

$$\int_{\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \Psi_i dV = \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS. \quad (7.8)$$

Le terme $\int_{\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \Psi_i dV$ peut se ré-écrire par intégration par partie

$$\int_{\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \nabla \Psi_i dV = \int_{\partial(\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i))} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS$$

ce qui transforme la condition précédente en

$$\int_{\partial(\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i))} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS = \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS. \quad (7.9)$$

La fonction de forme Ψ_i est nulle sur le bord de son support. Le domaine d'intégration $\partial(\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i))$ peut donc se réduire à $(\partial \mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i))$ ce qui nous fait finalement écrire

$$\sum_{k \in M_i} \underline{\underline{\sigma}}_k \cdot \int_{\partial \mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS = \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS. \quad (7.10)$$

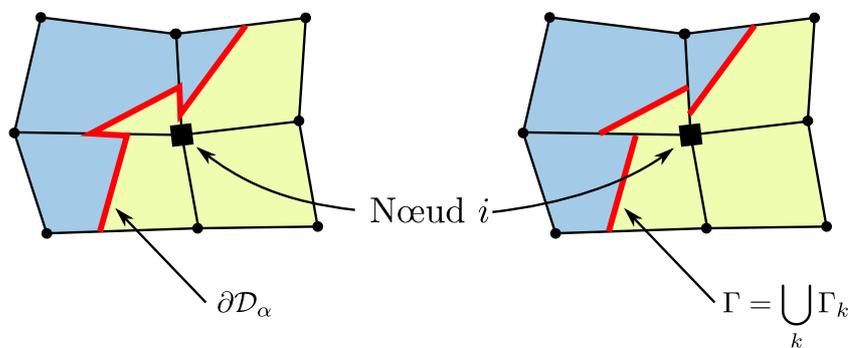


FIGURE 7.9 – Différence de discrétisation entre le bord du domaine $\partial \mathcal{D}_\alpha$ et l'interface Γ . L'intégration de la contrainte se fait sur la surface continue $\partial \mathcal{D}_\alpha$ contenant les segments d'interface reconstruite et les portions de bras des mailles les reliant. L'intégration de la pression d'interface sur Γ se fait uniquement sur l'ensemble des segments de l'interface reconstruite.

Dans cette dernière relation, la frontière du domaine $\partial \mathcal{D}_\alpha$ correspond à la frontière des mailles partielles autour du nœud i (voir figure 7.9). Notre reconstruction d'interface peut être discontinue. Le bord du domaine $\partial \mathcal{D}_\alpha$ est alors composé des segments reconstruits Γ_k ainsi que des portions de bras de maille les reliant. L'intégrale que nous écrivons pour la pression d'interface considère l'interface comme l'union des segments reconstruits $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$. Nous n'écrivons donc pas les deux intégrales sur la même surface car nous avons $\partial \mathcal{D}_\alpha \neq \Gamma$.

Même si les termes de pression d'interface compensent les termes de contraintes sur $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$, des forces nodales résultantes apparaissent. Ces forces proviennent de l'intégrale sur les portions de bras entre les segments d'interface. Si la reconstruction d'interface est continue, ces portions n'existent pas et les solutions stationnaires peuvent être capturées. Dans les autres cas, des courants parasites apparaissent rapidement et viennent perturber l'écoulement étudié.

Cette méthode est donc simple à mettre en place dès que nous connaissons la position des interfaces dans les sous-mailles mais ne permet pas de préserver les états d'équilibre. Pour cela, il faudrait imposer la continuité de l'interface $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$ lors de sa reconstruction. Cette dernière est initialement destinée à éviter la diffusion lors de la phase de projection et n'est pas adaptée telle quelle à l'écriture de conditions cinématiques. Pour éviter cela, nous proposons une alternative dans le paragraphe suivant.

7.3.2 Approximation du flux par intégration par partie

Nous allons chercher à calculer le flux des fonctions de formes sur l'interface $\int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS$ en s'affranchissant le plus possible de la reconstruction d'interface. Pour cela, nous considérons une interface continue $\Gamma = \partial\mathcal{D}_\alpha \cap \partial\mathcal{D}_\beta$, qui n'est plus l'interface reconstruite par segment $\bigcup_k \Gamma_k$ et nous partons de la remarque que, par intégration par partie, l'intégration du gradient de la fonction de forme d'un nœud sur le domaine nous donne une forme proche de celle nous cherchons

$$\int_{\mathcal{D}_\alpha} \nabla \Psi_i dV = \int_{\partial\mathcal{D}_\alpha} \Psi_i \underline{n} dS.$$

La fonction de forme Ψ_i est à support compact si bien que l'on a

$$\int_{\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \nabla \Psi_i dV = \int_{\partial\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS.$$

En remarquant que si l'interface est continue, la frontière du domaine $\partial\mathcal{D}_\alpha$ est l'union de l'interface Γ et de la frontière du domaine de calcul $\partial\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\alpha$,

$$\partial\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i) = (\partial\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)) \cup (\Gamma \cap \text{Supp}(\Psi_i)),$$

nous écrivons

$$\int_{\Gamma \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS = \int_{\mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \nabla \Psi_i dV - \int_{\partial\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS.$$

Cette formulation permet donc d'obtenir le flux à travers l'interface uniquement à partir de la connaissance des volumes partiels sans nécessiter de positionner l'interface. En effet, la décomposition de l'intégration sur les mailles et sous-mailles et l'expression de l'intégrale sur la maille partielle (5.11) donnent

$$\int_{\Gamma \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS = \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i dV + \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_p f_{\alpha kp} \int_{\omega_{kp}} \nabla \Psi_i dV - \int_{\partial\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\alpha \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS. \quad (7.11)$$

Cette dernière relation est pratique car elle ne se base que sur les fractions volumiques qui sont les grandeurs réellement utilisées par la schéma ALE pour suivre les matériaux dans le maillage. Cette valeur du flux ne se base plus sur une reconstruction de l'interface sauf pour le calcul de $f_{\alpha kp}$.

L'intégrale que nous calculons ici n'est plus une intégrale sur l'interface reconstruite. C'est en fait une intégrale sur une autre interface, continue et respectant les volumes partiels, mais qui n'a pas besoin d'être reconstruite. Nous avons une situation similaire dans le cas de la continuité par nœud où la normale servant à calculer la contrainte de vitesse n'est pas la même que celle utilisée pour positionner les matériaux dans la maille.

Dans les équations de dynamique des nœuds sommets (7.27), (7.28), dans les équilibres des nœuds internes (7.29), (7.30) et dans la continuité des vitesses (7.31), l'intégrale qui intervient est une intégrale sur l'intersection Γ_k entre l'interface Γ et la maille Ω_k , $\Gamma_k = \Gamma \cap \Omega_k$ et nous avons ici écrit la valeur du flux sur l'intersection avec le support complet de Ψ_i . Dans le cas d'une solution uniforme où le flux continu est constant, le flux partiel est égal au flux total multiplié par le rapport des longueurs. Nous gardons cette formule dans le cas général. Soit

l_{Γ_k} , la longueur d'interface reconstruite dans la maille Ω_k et l_{Γ_i} , la longueur de l'interface reconstruite dans le support de la fonction Ψ_i . L'intégrale sur Γ_k est alors approchée par

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS &\approx \frac{l_{\Gamma_k}}{l_{\Gamma_i}} \int_{\Gamma} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS \\ &\approx \frac{l_{\Gamma_k}}{l_{\Gamma_i}} \left(\int_{\text{Supp}(\Psi_i) \cap \mathcal{D}_{\alpha}} \nabla \Psi_i dV - \int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS \right). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Cette formulation fait apparaître des poids $w_{ik} = \frac{l_{\Gamma_k}}{l_{\Gamma_i}}$ ayant la propriété $\sum_{k \in M_i} w_{ik} = 1$. Par construction, nous assurons bien la propriété (7.8) de respect des solutions stationnaires.

Le développement du calcul de (7.12) en utilisant l'expression de l'intégrale sur une maille partielle en fonction de l'intégrale sur une maille entière (5.11) donne successivement

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS &= \frac{l_{\Gamma_k}}{l_{\Gamma_i}} \left(\sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} \int_{\Omega_{\alpha k}} \nabla \Psi_i dV + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_p \int_{\omega_{\alpha k p}} \nabla \Psi_i dV - \int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS \right) \\ &= \frac{l_{\Gamma_k}}{l_{\Gamma_i}} \left(\sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} f_{\alpha k} \int_{\Omega_k} \nabla \Psi_i dV + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_p f_{\alpha k p} \int_{\omega_{k p}} \nabla \Psi_i dV - \int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS \right). \end{aligned}$$

En intégrant par partie, nous avons

$$\int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS = \frac{l_{\Gamma_k}}{l_{\Gamma_i}} \left(\sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} f_{\alpha k} \int_{\partial \Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_p f_{\alpha k p} \int_{\partial \omega_{k p}} \Psi_i \underline{n} dS - \int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS \right). \quad (7.13)$$

Si nous supposons que $f_{\alpha k p}$ donne aussi la taille relative de la frontière $(\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \Omega_k)$ par rapport à $(\partial \mathcal{D} \cap \Omega_k)$, nous pouvons écrire l'intégrale sur le bord du domaine de calcul sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \text{Supp}(\Psi_i)} \Psi_i \underline{n} dS &= \sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} \int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \partial \Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_p \int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\alpha} \cap \partial \omega_{k p}} \Psi_i \underline{n} dS \\ &= \sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} f_{\alpha k} \int_{\partial \mathcal{D} \cap \partial \Omega_k} \Psi_i \underline{n} dS + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_p f_{\alpha k p} \int_{\partial \mathcal{D} \cap \partial \omega_{k p}} \Psi_i \underline{n} dS. \end{aligned}$$

En utilisant cette expression dans l'équation (7.13), nous aboutissons finalement à

$$\int_{\Gamma_k} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS = \frac{l_{\Gamma_k}}{l_{\Gamma_i}} \left(\sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} f_{\alpha k} \int_{\partial \Omega_k \setminus \partial \mathcal{D}} \Psi_i \underline{n} dS + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_p f_{\alpha k p} \int_{\partial \omega_{k p} \setminus \partial \mathcal{D}} \Psi_i \underline{n} dS \right). \quad (7.14)$$

La fonction bulle n'intersecte qu'une seule maille mixte. L'expression des intégrales pour ces nœuds se simplifie. La même démarche pour le flux de la fonction bulle φ_k aboutit à l'expression

$$\int_{\Gamma_k} \varphi_k \underline{n}_{\Gamma} dS = \sum_p f_{\alpha k p} \int_{\partial \omega_{k p}} \varphi_k \underline{n} dS. \quad (7.15)$$

Par comparaison avec la première approche, au lieu de faire une erreur sur le domaine d'intégration et de calculer le flux exact sur les portions d'interface reconstruites, nous calculons une valeur approchée du flux mais nous avons fait disparaître les intégrales sur la géométrie reconstruite pour les remplacer par des intégrales basées sur les volumes partiels ce qui nous affranchis en partie du positionnement de l'interface.

7.4 Discrétisation en temps

7.4.1 Grandeurs centrées

Les mailles mixtes sont découpées en sous-mailles en début de pas de temps. Nous projetons à cet instant à l'ordre 1 les champs centrés ρ_α , e_α et \underline{S}_α définis par mailles mixtes entières sur les sous-mailles pour obtenir les champs de grandeurs centrées par sous-maille. Cela revient à faire hériter les sous-mailles des grandeurs centrées de leur maille mixte d'origine. En début de pas de temps, toutes les sous-mailles d'une même maille mixte sont donc dans le même état thermo-dynamique et nous avons

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha kp}^n &= \rho_{\alpha k}^n, & \forall \alpha, \forall k, \forall p, \\ e_{\alpha kp}^n &= e_{\alpha k}^n, & \forall \alpha, \forall k, \forall p, \\ \underline{S}_{\alpha kp}^n &= \underline{S}_{\alpha k}^n, & \forall \alpha, \forall k, \forall p.\end{aligned}$$

L'interface est reconstruite par maille en début de pas de temps en suivant la méthode présentée dans le chapitre 4 (voir paragraphe 4.2.1.2 et annexe B). Cette interface permet d'obtenir les volumes des matériaux dans les sous-mailles par intersection géométrique. Chaque sous-maille a donc sa propre fraction volumique $f_{\alpha kp}$ qui peut être nulle si la sous-maille n'intersecte pas le domaine \mathcal{D}_α (voir figure 7.6). L'interface est toujours approchée par segment dans les mailles mixtes. Elle est continue entre les sous-mailles d'une même maille mixte mais peut être discontinue au changement de maille.

Avec l'ajout du nœud interne et des sous-mailles, la discrétisation en espace écrite dans le chapitre 5 n'est plus correcte et nous devons ré-écrire la discrétisation des équations de conservation de masse (5.1) et d'énergie (5.3) par sous-maille. Les formes discrétisées pour les sous-mailles et les mailles sont cependant très proches. La discrétisation s'obtient en écrivant la forme faible dans les mailles mixtes pour chaque fonction test $\chi_{\omega_{kp}} H_\alpha$ au lieu de l'écrire pour la fonction test $\chi_{\Omega_k} H_\alpha$.

7.4.1.1 Conservation de la masse

En tenant compte du découpage des mailles mixtes en sous-mailles, l'équation de conservation de la masse (5.15) discrétisée en temps s'écrit

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_k^n}{V_k^{n+1}}, \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.16)$$

$$\rho_{\alpha kp}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha kp}^n V_{\alpha kp}^n}{V_{\alpha kp}^{n+1}}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha. \quad (7.17)$$

Comme dans les cas précédents, la fraction volumique $f_{\alpha kp}$ est constante au cours de la phase lagrangienne, nous avons

$$V_{\alpha kp}^{n+1} = f_{\alpha kp}^n V_{kp}^{\alpha n+1}$$

où $V_{\alpha kp}^{n+1}$ est le volume de la sous-maille partielle $\omega_{\alpha kp}$ au temps t^{n+1} et $V_{kp}^{\alpha n+1}$, le volume de la sous-maille entière ω_{kp} au temps t^{n+1} déplacée avec les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$. L'équation de conservation de la masse dans les sous-mailles (7.17) peut donc se ré-écrire en fonction des volumes des sous-mailles entières ce qui donne

$$\rho_{\alpha kp}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha kp}^n V_{kp}^n}{V_{kp}^{\alpha n+1}}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha. \quad (7.18)$$

7.4.1.2 Taux de déformations

Les sous-mailles ω_{kp} possèdent trois nœuds. Deux d'entre eux sont également des sommets de la maille Ω_k et sont regroupés dans un ensemble noté N_{kp} . Le troisième est le nœud interne \underline{x}_k de la maille mixte Ω_k . Le tenseur des taux de déformations $\underline{d}_{\alpha kp}$ moyen du matériau α dans la sous-maille $\omega_{\alpha kp}$ a une forme similaire aux taux de déformations dans les mailles mixtes (5.12) et a pour expression en distinguant les vitesses sommets des vitesses bulles,

$$\underline{d}_{\alpha kp} = \frac{1}{2V_{kp}} \sum_{i \in N_{kp}} \left(\underline{u}_{\alpha i} \otimes \int_{\omega_{kp}} \nabla \Psi_i dV + \int_{\omega_{kp}} \nabla \Psi_i dV \otimes \underline{u}_{\alpha i} \right) + \frac{1}{2V_{kp}} \left(\underline{u}_{\alpha k} \otimes \int_{\omega_{kp}} \nabla \varphi_k dV + \int_{\omega_{kp}} \nabla \varphi_k dV \otimes \underline{u}_{\alpha k} \right)$$

où V_{kp} est le volume de la sous-maille ω_{kp} , défini par la position de ses nœuds.

Le tenseur des taux de déformations est écrit à l'instant $t^{n+1/2}$. L'expression discrétisée en temps de $\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}$ prend la forme

$$\begin{aligned} \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} = & \frac{1}{2V_{kp}^{\alpha n+1/2}} \sum_{i \in N_{kp}} \left(\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \otimes \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \Psi_i dV + \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \Psi_i dV \otimes \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \right) \\ & + \frac{1}{2V_{kp}^{\alpha n+1/2}} \left(\underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} \otimes \int_{\omega_{kp}} \nabla \varphi_k dV + \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \varphi_k dV \otimes \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Notons que dans cette expression, les volumes $V_{kp}^{\alpha n+1/2}$ et les mailles $\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}$ font référence à une configuration déformée par la vitesse $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ du matériau α à partir du temps t^n pendant un temps $\Delta t/2$.

7.4.1.3 Conservation de l'énergie

Nous écrivons la loi d'état (5.17) et l'évolution du déviateur des contraintes (5.18) par sous-maille dans les mailles mixtes pour obtenir

$$p_{\alpha k}^{n+1} = EOS_\alpha(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}), \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.20)$$

$$p_{\alpha kp}^{n+1} = EOS_\alpha(e_{\alpha kp}^{n+1}, \rho_{\alpha kp}^{n+1}), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha, \quad (7.21)$$

$$\underline{\underline{S}}_{\alpha k}^{n+1} = \underline{\underline{S}}_{\alpha k}^n + 2\Delta t G_\alpha(\underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2}) \underline{\underline{1}}), \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.22)$$

$$\underline{\underline{S}}_{\alpha kp}^{n+1} = \underline{\underline{S}}_{\alpha kp}^n + 2\Delta t G_\alpha(\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) \underline{\underline{1}}), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha. \quad (7.23)$$

L'équation de conservation de l'énergie (5.16), couplée à la loi d'état, prend alors une forme différente dans les mailles pures et dans les sous-mailles. L'intégration en temps se fait par le

même schéma que dans les chapitres 3 et 4 ce qui donne

$$\begin{cases} e_{\alpha k}^{n+1} = e_{\alpha k}^n - \left(\frac{p_{\alpha k}^{n+1} + p_{\alpha k}^n}{2} + q_k^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha k}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha k}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2}) \\ p_{\alpha k}^{n+1} = EOS_{\alpha}(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k \notin M_{\Gamma}, \forall \alpha, \quad (7.24)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha kp}^{n+1} = e_{\alpha kp}^n - \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha kp}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha kp}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) - W_{q_{\alpha kp}^{n+1/2}} \\ p_{\alpha kp}^{n+1} = EOS_{\alpha}(e_{\alpha kp}^{n+1}, \rho_{\alpha kp}^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k \in M_{\Gamma}, \forall p, \forall \alpha. \quad (7.25)$$

où $W_{q_{\alpha kp}^{n+1/2}}$ est le travail de la pseudo-viscosité $q_{\alpha kp}^{n+1/2}$ dans la sous-maille $\omega_{\alpha kp}$ entre t^n et t^{n+1} . Nous avons ici séparé le travail de la pression et le travail de la pseudo-viscosité dans les équations de conservation d'énergie des sous-maillages. La pseudo-viscosité est discrétisée par maille et non par sous-maille et il faut s'assurer que son travail soit dissipatif. Le calcul de travail $W_{q_{\alpha kp}^{n+1/2}}$ est expliqué dans le paragraphe 7.5.

7.4.2 Conservation de la quantité de mouvement

Pour prendre en compte l'enrichissement du champ de vitesse par l'ajout des nœuds internes et l'enrichissement des contraintes par sous-maillages, nous repartons de la forme faible de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (5.22)

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \rho_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{D}_{\alpha}} \underline{\sigma}_{\alpha} : \nabla \hat{\mathbf{u}} dV = \int_{\Gamma} p_{\Gamma} [\hat{\mathbf{u}}] \cdot \underline{\mathbf{n}}_{\Gamma} dS, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in U. \quad (7.26)$$

7.4.2.1 Dynamique des nœuds sommets

À l'exception des termes d'accélération, nous discrétisons le champ de vitesse virtuelle par (7.2) de la même manière que la vitesse réelle. En prenant un champ de vitesse arbitraire pour les nœuds sommets i de α , $i \in N_{\alpha}$ et nul pour les degrés de liberté des autres matériaux, $i \in N_{\beta}$ et les nœuds internes, $k \in M_{\Gamma}$ puis arbitraire sur $i \in N_{\beta}$ et nul pour les autres degrés de liberté, l'intégration en espace de l'équation (7.26) donne, après condensation de la masse telle que décrite dans le paragraphe 7.1.5,

$$\begin{aligned} m_{\alpha i} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha i}}{dt} &= - \sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} \underline{\sigma}_{\alpha k} \cdot \int_{\partial \Omega_k} \Psi_i \underline{\mathbf{n}} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\alpha kp} \underline{\sigma}_{\alpha kp} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}} \Psi_i \underline{\mathbf{n}} dS \\ &\quad + \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \int_{\Gamma_k} p_{\Gamma k} \Psi_i \underline{\mathbf{n}}_{\Gamma} dS, \quad \forall i \in N_{\alpha}, \\ m_{\beta i} \frac{d\mathbf{u}_{\beta i}}{dt} &= - \sum_{k \in M_i \setminus M_{\Gamma}} \underline{\sigma}_{\beta k} \cdot \int_{\partial \Omega_k} \Psi_i \underline{\mathbf{n}} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\beta kp} \underline{\sigma}_{\beta kp} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}} \Psi_i \underline{\mathbf{n}} dS \\ &\quad - \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} \int_{\Gamma_k} p_{\Gamma k} \Psi_i \underline{\mathbf{n}}_{\Gamma} dS, \quad \forall i \in N_{\beta} \end{aligned}$$

où $\Gamma_k = \Gamma \cap \Omega_k$ est l'intersection entre la maille Ω_k et l'interface Γ .

La discrétisation en temps par un schéma point milieu entre $t^{n-1/2}$ et $t^{n+1/2}$ donne l'équation de dynamique des nœuds sommets intégrée en temps et en espace

$$\begin{aligned}
 m_{\alpha i} \frac{u_{\alpha i}^{n+1/2} - u_{\alpha i}^{n-1/2}}{\delta t} = & - \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\alpha kp}^n \underline{\sigma}_{\alpha kp}^n \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^n} \Psi_i \underline{n} dS \\
 & + \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\alpha,
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}
 m_{\beta i} \frac{u_{\beta i}^{n+1/2} - u_{\beta i}^{n-1/2}}{\delta t} = & - \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \underline{\sigma}_{\beta k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\beta kp}^n \underline{\sigma}_{\beta kp}^n \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^n} \Psi_i \underline{n} dS \\
 & - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\beta.
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

7.4.2.2 Équilibre des nœuds internes

En prenant un champ de vitesse virtuelle nul pour tous les nœuds sommets, nul pour les vitesses des nœuds internes du matériau β et arbitraire pour les vitesses des nœuds internes du matériau α , l'équation (7.26) aboutit à la discrétisation en espace de l'équation de mouvement des nœuds internes du matériau α ,

$$\sum_p f_{\alpha kp} \underline{\sigma}_{\alpha kp} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}} \underline{n} \varphi_k dS = p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall k \in M_\Gamma.$$

Dans cette équation, l'absence de masse nodale des nœuds internes a fait disparaître le terme d'inertie. Nous avons alors une équation décrivant un équilibre statique du nœud interne. Cette équation donne le déplacement du nœud interne équilibrant les contraintes $\underline{\sigma}_{\alpha kp}$ dans les sous-mailles avec la pression d'interface $p_{\Gamma k}$. Elle est discrétisée en temps par un schéma implicite en contrainte. Nous obtenons une équation d'équilibre des nœuds internes complètement discrétisé en temps et en espace de la forme

$$\sum_p f_{\alpha kp}^{n+1} \underline{\sigma}_{\alpha kp}^{n+1} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{n+1}} \underline{n} \varphi_k dS = p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall k \in M_\Gamma. \tag{7.29}$$

Dans ce schéma, les termes en contraintes sont décentrés ce qui fait intervenir la vitesse du nœud interne dans l'équation à travers les contraintes $\underline{\sigma}_{\alpha kp}^{n+1}$ au temps t^{n+1} . Nous respectons ainsi toutes les équations en fin de pas de temps.

Le même raisonnement pour le matériau β donne

$$\sum_p f_{\beta kp}^{n+1} \underline{\sigma}_{\beta kp}^{n+1} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{n+1}} \underline{n} \varphi_k dS = -p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall k \in M_\Gamma. \tag{7.30}$$

7.4.2.3 Continuité des vitesses normales

La forme faible de la continuité des vitesses (5.23)

$$\int_\Gamma \hat{p}[\underline{u}] \cdot \underline{n}_\Gamma dS = 0, \quad \forall \hat{p} \in P,$$

est discrétisée en espace en utilisant la discrétisation de la pression \hat{p} définie comme en (5.34) et en écrivant que la dernière équation est vraie quelle que soit \hat{p} ce qui donne pour chaque maille mixte

$$\sum_{i \in N_k} \left(\int_{\Gamma_k} (\underline{u}_{\beta i} - \underline{u}_{\alpha i}) \Psi_i \cdot \underline{n}_\Gamma dS \right) + \int_{\Gamma_k} (\underline{u}_{\beta k} - \underline{u}_{\alpha k}) \varphi_k \cdot \underline{n}_\Gamma dS = 0, \quad \forall k \in M_\Gamma.$$

La contrainte est à satisfaire maintenant maille par maille. Comme dans le cas de la continuité par nœud, nous écrivons la contrainte de vitesse de manière implicite au temps $t^{n+1/2}$ pour les vitesses ce qui donne

$$\sum_{i \in N_k} \left((\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) + (\underline{u}_{\beta k}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS = 0, \quad \forall k \in M_\Gamma. \quad (7.31)$$

De nouveau, en toute rigueur, il faudrait écrire cette condition sur la géométrie au temps $t^{n+1/2}$. Nous faisons la même approximation que la variante de continuité par nœud et nous utilisons ici la géométrie au temps t^n . Ces termes de géométrie sont les flux des fonctions de formes nodales à travers l'interface et apparaissent également dans les équations de dynamique des nœuds sommets (7.27), (7.28) et dans les équilibres des nœuds internes (7.29), (7.30).

La pression d'interface $p_{\Gamma k}^n$ est écrite au temps t^n mais sa valeur est fixée par l'équation implicite de continuité des vitesses (7.31). Le calcul de la pression d'interface est donc implicite.

7.4.3 Remarques

- Comme dans les chapitres précédents, nous avons utilisé l'expression de l'intégrale sur la maille partielle en fonction de l'intégrale sur la maille complète (5.11). Ici, nous avons écrit dans les sous-mailles ω_{kp} ,

$$\int_{\omega_{\alpha kp}} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = f_{\alpha kp} \int_{\omega_{kp}} \nabla \Psi_i(\underline{x}) dV = f_{\alpha kp} \int_{\partial \omega_{kp}} \Psi_i(\underline{x}) \underline{n} dS.$$

Les fonctions de forme ont été modifiées dans les mailles mixtes et y sont désormais linéaires par morceaux. *Cette formule d'intégration est donc exacte car le gradient des fonctions de forme est constant dans les sous-mailles et plus généralement dans les mailles triangulaires.*

- Le système final est implicite du fait de l'écriture de la continuité des vitesses (7.31) à $t^{n+1/2}$ et du schéma en temps implicite employé dans l'équation des nœuds internes (7.29)-(7.30). Il est non-linéaire car les lois d'état employées (7.20)-(7.23) sont non-linéaires. Sa résolution est discutée dans le prochain chapitre traitant de la mise en œuvre de la méthode.

7.5 Pseudo-viscosité dans les mailles mixtes

7.5.1 Déformations dues au nœud interne

L'ajout d'un nœud interne dans les mailles mixtes et la décomposition de ces dernières en sous-mailles ajoutent un degré de liberté supplémentaire autorisant des déformations internes à la maille.

La condensation de la masse n'attribue pas de masse aux nœuds internes. Leur équation de dynamique se réduit à un équilibre statique. Le déplacement de ces nœuds lors d'un pas

de temps peut donc être important et les déformations des sous-mailles prises une par une peuvent être grandes même si les vitesses des nœuds sommet restent modérées. Les vitesses de déformations des sous-mailles sont alors très élevées.

Pour pouvoir prendre en compte les chocs et palier le manque d'équation sur le saut d'entropie, un terme de viscosité artificielle est ajouté à la pression hydrodynamique. Ce terme, comme la viscosité, est proportionnel aux vitesses de déformations des mailles. En particulier, dans le cas d'une pseudo-viscosité scalaire, la pseudo-viscosité est fonction de la vitesse de variation de volume des mailles.

L'écriture de la pseudo-viscosité par sous-maille n'est pas pertinent : la déformation des sous-mailles est due à l'équilibre statique des nœuds internes. Les vitesses de déformations cinématiques des sous-mailles ne doivent pas s'interpréter au sens de vitesses de déformations physiques. Dans ce cas, la valeur de la pseudo-viscosité calculée par sous-maille explose et ne permet pas de calculer correctement les accélérations des nœuds. Il ne faut donc pas prendre les vitesses de déformations cinématiques des sous-mailles pour calculer la pseudo-viscosité.

7.5.2 Compression de la maille mixte entière

Il faut utiliser une mesure de la compression lors du pas de temps qui ne prenne pas en compte les vitesses de déformations dues à l'équilibre statique des nœuds internes. Une possibilité est d'utiliser la variation de volume des mailles mixtes entières. En effet, la compression d'une sous-maille due au nœud interne va être compensée par la détente de la sous-maille opposée.

Nous mesurons donc le volume de la maille partielle $\Omega_{\alpha k}^{n+1}$ au temps t^{n+1} comme la somme des volumes partiels des sous-mailles au temps t^{n+1}

$$V_{\alpha k}^{n+1} = \sum_p f_{\alpha kp}^n V_{kp}^{\alpha n+1}$$

avec $V_{kp}^{\alpha n+1}$, le volume de la sous-maille ω_{kp} à t^{n+1} . Il est calculé géométriquement par la position de ses sommets $\underline{x}_{\alpha i}$ déplacés avec la vitesse $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ et la position du nœud interne $\underline{x}_{\alpha k}$ déplacé avec la vitesse $\underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2}$.

De cette manière, la variation de volume des sous-mailles sans matériau α n'est pas prise en compte car leur fraction volumique est nulle. De la même manière, les déplacements des nœuds ayant une très faible masse nodale n'interviendront que peu dans le volume de la maille en fin de pas de temps car les sous-mailles voisines auront des fractions volumiques faibles.

Par conservation de la masse, la densité moyenne $\rho_{\alpha k}$ du matériau α de la maille mixte est la masse au temps t^n divisée par le volume au temps t^{n+1}

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_{\alpha k}^n}{V_{\alpha k}^{n+1}}. \quad (7.32)$$

La vitesse de compression du matériau α dans la maille mixte peut être mesurée par la dérivée en temps du volume spécifique moyen $\dot{\nu}_{\alpha k}$ qui s'écrit discrétisé en temps entre t^n et t^{n+1}

$$\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right)$$

avec $\rho_{\alpha k}^{n+1}$, la densité moyenne dans la maille mixte définie ci-dessus.

7.5.3 Calcul de la pseudo-viscosité

Pour les raisons présentées précédemment, la pseudo-viscosité dans les mailles mixtes est calculée par matériau et par maille (et non pas par sous-maille). La pseudo-viscosité $q_{\alpha kp}^{n+1/2}$ dans chaque sous-maille est prise égale à la pseudo-viscosité $q_{\alpha k}^{n+1/2}$ de la maille mixte et a pour expression

$$q_{\alpha kp}^{n+1/2} = q_{\alpha k}^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_{\alpha k}^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_{\alpha k}^n \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} > 0 \end{cases}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha,$$

avec le volume massique $\nu_{\alpha k} = \frac{1}{\rho_{\alpha k}}$ et $\nu_{\alpha k}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} + \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right)$.

La densité $\rho_{\alpha k}^{n+1}$ est la densité moyenne définie au paragraphe précédent et l_k est la longueur caractéristique de la maille. Nous calculons la viscosité artificielle par maille, nous prenons donc une longueur caractéristique de la maille mixte. La vitesse du son $c_{\alpha k}^n$ est prise au temps t^n pour garder une pseudo-viscosité explicite. À cet instant, l'état thermodynamique des sous-mailles et de la maille mixte sont les mêmes ce qui enlève les ambiguïtés possibles sur le calcul de la vitesse du son.

7.5.4 Travail de la pseudo-viscosité

La pseudo-viscosité $q_{\alpha kp}^{n+1/2}$ pour un matériau α est la même pour toutes les sous-mailles d'une même maille mixte mais ce n'est pas de cas de la variation de volume au cours du pas de temps. Il faut cependant veiller à ce que la variation de volume avec laquelle travaille la pseudo-viscosité dans les sous-mailles soit cohérente avec la variation de volume ayant servi pour la calculer. Dans le cas contraire, une pseudo-viscosité calculée à partir d'une maille mixte en compression peut travailler sur un volume en détente dans une sous-maille. Le signe du travail n'est alors pas assuré et la pseudo-viscosité n'est plus obligatoirement dissipative.

Le travail de la pseudo-viscosité total dans la maille mixte $W_{q_{\alpha k}}^{n+1/2}$ est calculé sur la variation de volume spécifique de la maille mixte entière

$$W_{q_{\alpha k}}^{n+1/2} = q_{\alpha k}^{n+1/2} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right). \quad (7.33)$$

L'énergie $e_{\alpha kp}$ est une énergie interne spécifique, nous répartissons donc le travail de la pseudo-viscosité entre les sous-mailles proportionnellement à leur masse. Le travail de la pseudo-viscosité $W_{q_{\alpha kp}}^{n+1/2}$ dans la sous-maille $\omega_{\alpha kp}$ est donc

$$W_{q_{\alpha kp}}^{n+1/2} = \frac{m_{\alpha kp}}{m_{\alpha k}} W_{q_{\alpha k}}^{n+1/2} = \frac{V_{\alpha kp}^n}{V_{\alpha k}^n} W_{q_{\alpha k}}^{n+1/2}.$$

La dernière égalité étant vraie car la densité du matériau α est constante dans la maille en début de pas de temps.

Cette répartition du travail peut se voir comme une répartition de la variation de volume entre les sous-mailles, chaque sous-maille subissant, pour le travail de la pseudo-viscosité, une variation de volume

$$\Delta t \dot{\nu}_{\alpha kp}^{n+1/2} = \frac{V_{\alpha kp}^n}{V_{\alpha k}^n} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right).$$

7.6 Système à résoudre lors de la phase Lagrange

Le système complet, discrétisé en temps décrivant l'évolution de notre modèle lors d'un pas de temps est composé au final des équations :

- de dynamique des nœuds sommets (7.27), (7.28) ;
- de l'équilibre des nœuds internes (7.29), (7.30) ;
- de la continuité des vitesses normales (7.31) ;
- de déplacement des nœuds ;
- d'évolution des volumes et des volumes partiels écrites pour les mailles et les sous-mailles ;
- de conservation de la masse pour les mailles pures (7.16) et les sous-mailles (7.18) ;
- la densité moyenne dans les mailles mixtes (7.32) ;
- de pseudo-viscosité ;
- du tenseur du taux de déformations dans les mailles pures (5.12) et dans les sous-mailles (7.19) ;
- de l'évolution du déviateur des contraintes dans les mailles mailles pures (7.22) et les sous-mailles (7.23) ;
- de conservation de l'énergie couplée à la loi d'état pour les mailles pures et les sous-mailles (7.24) - (7.25).

Connaissant pour chaque matériau α , les vitesses $\underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2}$, les contraintes $\underline{\sigma}_{\alpha k}^n$, l'énergie interne $e_{\alpha k}^n$, les masses nodales $m_{\alpha i}$, les fractions volumiques $f_{\alpha k p}^n$, les positions des noeuds $\underline{x}_{\alpha i}^n$, les volumes $V_{\alpha k}^n$, les densités $\rho_{\alpha k}^n$ et les pseudo-viscosités $q_{\alpha k}^{n-1/2}$, il nous faut trouver les grandeurs $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$, $p_{\Gamma k}^n$, $\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}$, V_k^{n+1} , $\rho_{\alpha k p}^{n+1}$, $q_{\alpha k}^{n+1/2}$ telles que

$$m_{\alpha i} \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\alpha k p}^n \underline{\sigma}_{\alpha k p}^n \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^n} \Psi_i \underline{n} dS + \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\alpha, \quad (7.34)$$

$$m_{\beta i} \frac{\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\beta i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \underline{\sigma}_{\beta k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\beta k p}^n \underline{\sigma}_{\beta k p}^n \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^n} \Psi_i \underline{n} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\beta, \quad (7.35)$$

$$\sum_p f_{\alpha k p}^{n+1} \underline{\sigma}_{\alpha k p}^{n+1} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{n+1}} \underline{n} \varphi_k dS = p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall k \in M_\Gamma, \quad (7.36)$$

$$\sum_p f_{\beta k p}^{n+1} \underline{\sigma}_{\beta k p}^{n+1} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{n+1}} \underline{n} \varphi_k dS = -p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall k \in M_\Gamma, \quad (7.37)$$

$$\sum_{i \in N_k} \left((\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\beta i}^{n+1/2}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) + (\underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} - \underline{u}_{\beta k}^{n+1/2}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS = 0, \quad \forall k \in M_\Gamma, \quad (7.38)$$

$$\underline{x}_{\alpha i}^{n+1} = \underline{x}_{\alpha i}^n + \Delta t \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}, \quad \forall i, \forall \alpha, \quad (7.39)$$

$$\underline{x}_{\alpha k}^{n+1} = \underline{x}_{\alpha k}^n + \Delta t \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.40)$$

$$V_k^{\alpha n+1} = V(\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}), \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.41)$$

$$V_{kp}^{\alpha n+1} = V(\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}, \underline{x}_{\alpha k}^{n+1}), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.42)$$

$$V_{\alpha kp}^{n+1} = f_{\alpha kp}^n V_{kp}^{\alpha, n+1}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.43)$$

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_k^n}{V_k^{n+1}}, \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.44)$$

$$\rho_{\alpha kp}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha kp}^n V_{kp}^n}{V_{kp}^{\alpha n+1}}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha, \quad (7.45)$$

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_{\alpha k}^n}{\sum_p f_{\alpha kp}^n V_{kp}^{\alpha n+1}}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.46)$$

$$q_{\alpha k}^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_{\alpha k}^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_{\alpha k}^n \left| \frac{\dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\nu}_{\alpha k}^{n+1/2} > 0 \end{cases}, \quad \forall k, \forall \alpha \quad (7.47)$$

$$\underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2} = \frac{1}{2V_k^{n+1/2}} \sum_{i \in N_k} \left(\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \otimes \int_{\Omega_k^{n+1/2}} \nabla \Psi_i dV + \int_{\Omega_k^{n+1/2}} \nabla \Psi_i dV \otimes \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \right), \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} &= \frac{1}{2V_{kp}^{\alpha n+1/2}} \sum_{i \in N_{kp}} \left(\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \otimes \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \Psi_i dV + \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \Psi_i dV \otimes \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \right) \\ &+ \frac{1}{2V_{kp}} \left(\underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} \otimes \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \varphi_k dV + \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \varphi_k dV \otimes \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} \right), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha, \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\underline{S}_{\alpha k}^{n+1} = \underline{S}_{\alpha k}^n + 2\Delta t G_\alpha (\underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2}) \underline{\mathbf{1}}), \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.50)$$

$$\underline{S}_{\alpha kp}^{n+1} = \underline{S}_{\alpha kp}^n + 2\Delta t G_\alpha (\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) \underline{\mathbf{1}}), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha, \quad (7.51)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha k}^{n+1} = e_{\alpha k}^n - \left(\frac{p_{\alpha k}^{n+1} + p_{\alpha k}^n}{2} + q_k^{n+1/2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha k}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha k}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha k}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha k}^{n+1/2}) \\ p_{\alpha k}^{n+1} = P(e_{\alpha k}^{n+1}, \rho_{\alpha k}^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k \notin M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (7.52)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha kp}^{n+1} = e_{\alpha kp}^n - \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha kp}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha kp}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) - W_{q_{\alpha kp}^{n+1/2}}, \\ p_{\alpha kp}^{n+1} = P(e_{\alpha kp}^{n+1}, \rho_{\alpha kp}^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha \quad (7.53)$$

Nous rappelons que, dans ce système, nous avons deux pas de temps décalés, différenciés par la notation $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ et la notation $\delta t = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}$.

7.7 Phase de transport

7.7.1 Régularisation du maillage

Nous construisons un maillage commun à tous les matériaux pour le pas de temps suivant. Ce maillage est construit suivant le même principe que celui utilisé pour la continuité par nœud (voir paragraphe 6.6.1) : le maillage du début de pas de temps est déplacé avec une vitesse moyenne puis obtenu pour conserver une qualité suffisante. Ce maillage n'est pas découpé par sous-maille et n'est constitué dans notre cas que de mailles quadrangles. C'est sur ce maillage que nous projetons les grandeurs pour le pas de temps suivant.

7.7.2 Projection des vitesses

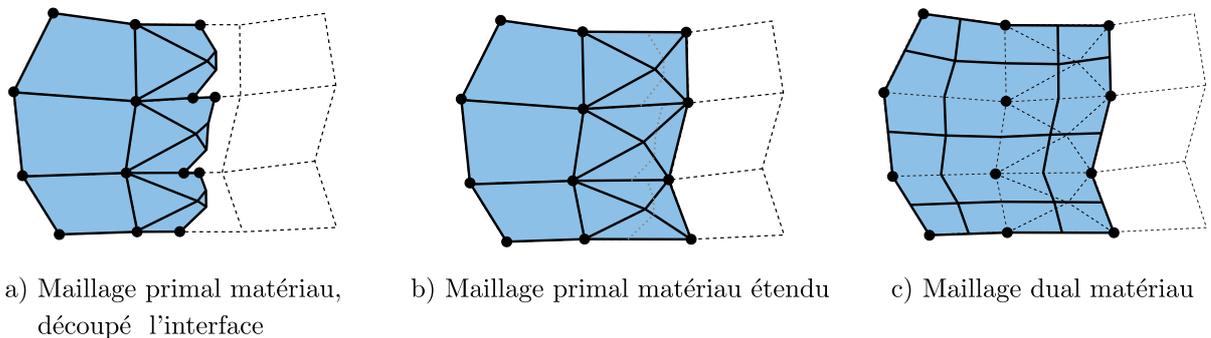


FIGURE 7.10 – Maillages servant à la projection. a) Maillage primal découpé à l'interface. L'interface est placée en début de pas de temps et transportée avec les sous-mailles. Les segments rectilignes dans toute la maille mixte en début de pas de temps ne le sont plus forcément en fin de pas de temps. Ce maillage sert de maillage de départ pour la projection des grandeurs centrées. b) La projection de la densité depuis le maillage étendu par sous-maille vers le maillage dual donne les densités duales. c) Le maillage dual est défini à partir du maillage primal étendu. La maille duale associée à un nœud est composée du quart des mailles avoisinantes. Les nœuds internes n'ont pas de mailles duales associées. Les nœuds sommets du maillage primal sont au centre des mailles duales sauf sur la frontière de celui-ci. Sur ce maillage sont définies la quantité de mouvement et la vitesse. Pour la projection, ces champs sont considérés constants ou linéaires sur les mailles duales.

Nous projetons les quantités de mouvement d'une manière similaire à la méthode du chapitre 6. Quelques différences apparaissent, dues au découpage des mailles mixtes en sous-maille et à la condensation de la masse. Comme lors de la phase lagrangienne, nous approchons pour la quantité de mouvement, le champ de vitesse par un champ constant par maille duale. Les mailles duales associées aux nœuds sommets couvrent la totalité du maillage étendu (voir figure 7.10) et les nœuds internes n'ont pas de quantité de mouvement. Leur vitesse n'est donc pas projetée.

Pour être parfaitement consistant avec la condensation de la masse, durant la phase de projection, il faudrait définir les mailles duales de la même manière. Ici, nous faisons une approximation pour simplifier la construction de ce maillage et nous prenons comme maille duale dans les mailles mixtes, le quart de la maille mixte entière au lieu de prendre la moitié des sous-mailles. La condensation de la masse fait coïncider les nœuds du maillage dual avec les nœuds internes ce qui n'est pas exactement le cas ici (voir figure 7.10.c à comparer avec la figure 7.4).

Nous commençons par approcher le champ de densité par un champ étendu par matériau dans toute la sous-maille comme ce qui est fait dans (7.3) pour la condensation de la masse

$$\rho_\alpha(\underline{x}) \approx \sum_{k \in M_\alpha \setminus M_\Gamma} \rho_{\alpha k} \chi_{\Omega_k}(\underline{x}) + \sum_{k \in M_\alpha \cap M_\Gamma} \sum_p f_{\alpha kp} \rho_{\alpha kp} \chi_{\omega_{kp}}(\underline{x}), \quad \forall \alpha.$$

Ce champ est projeté à l'ordre 1 sur les mailles duales pour obtenir les densités duales $\rho_{\alpha i}$ ayant pour expression

$$\rho_{\alpha i} = \frac{1}{V_i} \left(\sum_{k \in M_\alpha \setminus M_\Gamma} \rho_{\alpha k} \int_{\Omega_k^{\alpha n+1} \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV + \sum_{k \in M_\alpha \cap M_\Gamma} \sum_p f_{\alpha kp} \rho_{\alpha kp} \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1} \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right), \quad \forall i \in N_\alpha, \forall \alpha$$

où $\Delta_i^{\alpha n+1}$ est la maille duale associée au nœud i déplacée avec la vitesse $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}$ entre t^n et t^{n+1} . Après projection L^2 par intersection à l'ordre 1, les vitesses sur le maillage dual commun ont pour expression

$$\underline{u}_{\alpha j} = \frac{1}{\rho_{\alpha j} V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \rho_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i} \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right), \quad \forall j, \forall \alpha$$

où la densité $\rho_{\alpha j}$ est la projection des densités nodales $\rho_{\alpha i}$ sur le maillage dual commun

$$\rho_{\alpha j} = \frac{1}{V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \rho_{\alpha i} \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right), \quad \forall j, \forall \alpha.$$

La reconstruction linéaire des champs de vitesses, densités duales et quantité de mouvement permettent d'obtenir une projection à l'ordre 2. La vitesse après projection a alors pour expression

$$\underline{u}_{\alpha j} = \frac{1}{\rho_{\alpha j} V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \left(((\rho_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i}) + \nabla(\rho_{\alpha i} \underline{u}_{\alpha i}) \cdot (\underline{x}_{g\alpha ij} - \underline{x}_{\alpha i})) \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right) \right), \quad \forall j, \forall \alpha$$

où $\underline{x}_{\alpha i}$ est le centre de la maille duale $\Delta_i^{\alpha n+1}$, $\underline{x}_{g\alpha ij}$ est le barycentre de $\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}$, l'intersection entre la maille duale du maillage commun Δ_j et la maille duale du maillage déformé $\Delta_i^{\alpha n+1}$ et où la densité $\rho_{\alpha j}$ est la projection également à l'ordre 2 des densités nodales $\rho_{\alpha i}$ sur le maillage dual commun

$$\rho_{\alpha j} = \frac{1}{V_j} \sum_{i \in N_\alpha} \left((\rho_{\alpha i} + \nabla \rho_{\alpha i} \cdot (\underline{x}_{g\alpha ij} - \underline{x}_{\alpha i})) \left(\int_{\Delta_j \cap \Delta_i^{\alpha n+1}} dV \right) \right), \quad \forall j, \forall \alpha.$$

7.7.3 Projection des grandeurs centrées

Les grandeurs thermodynamiques ont été définies par sous-maille dans les mailles mixtes. Nous projetons ces champs enrichis sur le maillage primal régularisé.

Nous devons alors reconstruire les fonctions caractéristiques H_α des domaines matériaux \mathcal{D}_α . L'interface est reconstruite en début de pas de temps pour déterminer les fractions volumiques des sous-mailles (voir paragraphe 7.4.1). Nous transportons les points d'intersection de l'interface avec les bras des mailles grâce à l'interpolation des vitesses ce qui nous donne la position de l'interface en fin de pas de temps. Notons que le transport de l'interface de cette

manière n'est possible que si le champ de vitesse est linéaire ce qui est le cas dans les sous-maillages triangulaires. Les sous-maillages d'une même maille mixte ont des déformations différentes. L'interface n'est donc plus forcément rectiligne par maille mixte en fin de pas de temps (voir figure 7.10.a). Elle reste toutefois continue entre les sous-maillages d'une même maille mixte.

La densité $\rho_{\alpha l}$ et l'énergie interne spécifique $e_{\alpha l}$ du matériau α dans la maille Ω_l du maillage régularisé (sans exposant de temps mais « virtuellement » à t^{n+1}) ont pour expression

$$\rho_{\alpha l} = \frac{1}{V_{\alpha l}} \left(\sum_{k \in M_{\alpha} \setminus M_{\Gamma}} \rho_{\alpha k} \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV + \sum_{k \in M_{\alpha} \cap M_{\Gamma}} \sum_p \rho_{\alpha k p} \int_{\Omega_l \cap \omega_{\alpha k p}^{n+1}} dV \right), \quad \forall l, \forall \alpha,$$

$$e_{\alpha l} = \frac{1}{\rho_{\alpha l} V_{\alpha l}} \left(\sum_{k \in M_{\alpha} \setminus M_{\Gamma}} \rho_{\alpha k} e_{\alpha k} \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV + \sum_{k \in M_{\alpha} \cap M_{\Gamma}} \sum_p \rho_{\alpha k p} e_{\alpha k p} \int_{\Omega_l \cap \omega_{\alpha k p}^{n+1}} dV \right), \quad \forall l, \forall \alpha.$$

Encore une fois, l'ordre 2 lors de la projection s'obtient en reconstruisant le gradient centré de grandeur par maille. Les champs projetés s'écrivent alors

$$\rho_{\alpha l} = \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_{k \in M_{\alpha} \setminus M_{\Gamma}} (\rho_{\alpha k} + \nabla \rho_{\alpha k} \cdot (\underline{x}_{glk} - \underline{x}_{\alpha k})) \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV$$

$$+ \frac{1}{V_{\alpha l}} \sum_{k \in M_{\alpha} \cap M_{\Gamma}} \sum_p (\rho_{\alpha k p} + \nabla \rho_{\alpha k p} \cdot (\underline{x}_{glkp} - \underline{x}_{\alpha k p})) \int_{\Omega_l \cap \omega_{\alpha k p}^{n+1}} dV, \quad \forall l, \forall \alpha,$$

$$e_{\alpha l} = \frac{1}{\rho_{\alpha l} V_{\alpha l}} \sum_{k \in M_{\alpha} \setminus M_{\Gamma}} (\rho_{\alpha k} e_{\alpha k} + \nabla(\rho_{\alpha k} e_{\alpha k}) \cdot (\underline{x}_{glk} - \underline{x}_{\alpha k})) \int_{\Omega_l \cap \Omega_{\alpha k}^{n+1}} dV$$

$$+ \frac{1}{\rho_{\alpha l} V_{\alpha l}} \sum_{k \in M_{\alpha} \cap M_{\Gamma}} \sum_p (\rho_{\alpha k p} e_{\alpha k p} + \nabla(\rho_{\alpha k p} e_{\alpha k p}) \cdot (\underline{x}_{glkp} - \underline{x}_{\alpha k p})) \int_{\Omega_l \cap \omega_{\alpha k p}^{n+1}} dV, \quad \forall l, \forall \alpha,$$

où $\underline{x}_{\alpha k}$ et $\underline{x}_{\alpha k p}$ sont les centres des mailles $\Omega_{\alpha k}^{n+1}$ et des sous-maillages $\omega_{\alpha k p}$ et \underline{x}_{glk} et \underline{x}_{glkp} , les barycentres de l'intersection entre la maille Ω_l et la maille $\Omega_{\alpha k}^{n+1}$ ou la sous-maille $\omega_{\alpha k p}^{n+1}$. Les volumes des différents matériaux en fin de pas de temps peuvent se superposer ou s'écartier créant ainsi des vides. La correction de la fraction volumique présentée dans le paragraphe 6.6.3 est de nouveau appliquée ici afin de renormaliser la fraction volumique.

7.8 Résumé et conclusion

Le déroulement d'un pas de temps avec la continuité des vitesses normales par maille se résume de la manière suivante :

1. Phase lagrangienne :
 - (a) décomposition des mailles en sous-mailles,
 - (b) calcul des vitesses prédites aux sommets $\tilde{u}_{\alpha i}$ ne prenant pas en compte les efforts d'interface pour chaque matériau,
 - (c) résolution du système non-linéaire d'interface pour imposer la contrainte de vitesse et obtenir les vitesses des nœuds internes et des nœuds sommets des mailles mixtes ainsi que les grandeurs thermodynamiques des sous-mailles en fin de pas de temps, y compris la pseudo-viscosité et les énergie internes en maille mixte,
 - (d) calcul des nouvelles densités des mailles pures par conservation de la masse pour chaque matériau,
 - (e) calcul de la pseudo-viscosité des mailles pures pour chaque matériau,
 - (f) calcul des nouvelles énergies et pressions des mailles pures par conservation de l'énergie pour chaque matériau ;
2. Phase de transport :
 - (a) construction d'un maillage moyen régularisé,
 - (b) projection du champ de vitesse pour chaque matériau,
 - (c) projection des grandeurs centrées pour chaque matériau,
 - (d) correction des fractions volumiques.

Nous avons présenté dans ce chapitre une discrétisation de la pression d'interface permettant d'imposer la continuité des vitesses normales en moyenne par maille. Cette continuité est imposée uniquement à l'interface ce qui permet des discontinuités de gradient de vitesse dans les mailles mixtes.

De plus, l'utilisation de nœuds internes et la condensation de la masse permettent d'équilibrer les contraintes entre les matériaux dans la maille et ainsi de respecter la continuité du vecteur contrainte à l'interface.

Nous avons donc une méthode permettant de pallier les deux problèmes que nous avons soulignés en début de chapitre 5, à savoir l'iso-compressibilité des matériaux dans une maille et la soudure des matériaux entre eux.

Des points délicats apparaissent et ont été résolus :

- la gestion d'une topologie de maillage découpée en sous-mailles ;
- le respect des solutions stationnaires ;
- le développement d'une formulation de pseudo-viscosité compatible avec des mouvements de nœuds internes importants.

L'écriture de la méthode est plus complexe que la variante précédente. La continuité par maille couple les nœuds et mailles mixtes. Elle aboutit à un système implicite regroupant la bande de mailles coupées par l'interface ainsi que leurs nœuds. La discrétisation de l'équilibre des nœuds internes par un schéma implicite fait intervenir les lois de comportement des sous-mailles. Le système à résoudre est donc non-linéaire et la technique utilisée pour sa solution est détaillée dans le prochain chapitre.

Les résultats obtenus avec cette méthode sont présentés et comparés dans le chapitre 9.

Chapitre 8

Continuité par maille : mise en œuvre

Sommaire

8.1	Système d'interface	126
8.2	Linéarisation	128
8.2.1	Volume et positions	128
8.2.2	Tenseur des taux de déformation	129
8.2.3	Conservation de la masse	129
8.2.4	Dynamique des nœuds sommets	129
8.2.5	Équilibre des nœuds internes	129
8.2.6	Continuité des vitesses	130
8.2.7	Déviateur des contraintes dans le cadre élastique	130
8.2.8	Conservation d'énergie	130
8.2.9	Pression hydrodynamique	131
8.2.10	Résumé du système linéarisé	131
8.3	Résolution du système linéarisé	132
8.3.1	Notation matricielle	133
8.3.2	Écriture du système linéarisé sous forme matricielle	135
8.3.2.1	Dynamique des nœuds de maille mixte	135
8.3.2.2	Équilibre des nœuds internes	136
8.3.2.3	Continuité des vitesses	137
8.3.2.4	Tenseur des taux de déformations	137
8.3.2.5	Pression hydrodynamique	138
8.3.2.6	Déviateur des contraintes	139
8.3.2.7	Tenseur des contraintes	139
8.3.2.8	Système sous forme matricielle	140
8.3.3	Élimination des inconnues du système	141
8.3.4	Expression des matrices de rigidité	143
8.3.4.1	Expression de $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb}$	143
8.3.4.2	Expression de $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bi}$	143
8.4	Limitation de l'incrément	144
8.4.1	Limitation de la correction dans une sous-maille	144
8.4.2	Limitation de la correction du système	145
8.5	Calcul de l'état thermodynamique	146
8.6	Critère de convergence de l'algorithme Γ	146
8.7	Prise en compte des conditions aux limites	147

8.1 Système d'interface

La discrétisation des équations des nœuds et mailles pures est inchangée par rapport au schéma des chapitres 3 et 4. Ces équations sont résolues directement de manière explicite.

Par rapport au schéma classique multi-matériau du chapitre 4, nous avons modifié la discrétisation des nœuds et mailles mixtes. Leurs équations couplent les mailles mixtes avec les mailles mixtes voisines. Nous avons donc à résoudre le système implicite du paragraphe 7.6 regroupant toutes les mailles mixtes $k \in M_\Gamma$ ainsi que tous les nœuds de maille mixte $i \in N_\Gamma$ et formant une bande de mailles intersectées par l'interface.

Nous commençons, comme dans l'écriture de la continuité par nœud, par calculer la vitesse prédite des nœuds sommets $\tilde{u}_{\alpha i}$ ne prenant en compte que les efforts internes. Ces vitesses sont explicites. Elles s'écrivent pour chaque nœud et chaque matériau par solution de

$$m_{\alpha i} \frac{\tilde{u}_{\alpha i} - \underline{u}_{\alpha i}^{n-1/2}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i \setminus M_\Gamma} \underline{\sigma}_{\alpha k}^n \cdot \int_{\partial \Omega_k^n} \Psi_i \underline{n} dS - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} \sum_{p \in \mathcal{M}_{ki}} f_{\alpha kp}^n \underline{\sigma}_{\alpha kp}^n \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^n} \Psi_i \underline{n} dS, \quad \forall i \in N_\Gamma, \forall \alpha.$$

Les vitesses des nœuds sommets de maille mixte en fin de pas de temps sont obtenues en ajoutant aux vitesses prédites $\tilde{u}_{\alpha i}$, la contribution des pressions d'interface, ce qui donne

$$m_{\alpha i} \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{u}_{\alpha i}}{\delta t} = + \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\alpha, \quad (8.1)$$

$$m_{\beta i} \frac{\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \tilde{u}_{\beta i}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k}^n \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\beta. \quad (8.2)$$

Nous réduisons le système global (7.34)-(7.53) à sa partie implicite composée des mailles et nœuds de maille mixte, $k \in M_\Gamma$, $i \in N_\Gamma$. En utilisant les vitesses prédites $\tilde{u}_{\alpha i}$, le système permettant de résoudre l'évolution en temps de l'interface est composé des équations

$$m_{\alpha i} \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{u}_{\alpha i}}{\delta t} = \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\alpha, \quad (8.3)$$

$$m_{\beta i} \frac{\underline{u}_{\beta i}^{n+1/2} - \tilde{u}_{\beta i}}{\delta t} = - \sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall i \in N_\beta, \quad (8.4)$$

$$\sum_p f_{\alpha kp}^{n+1} \underline{\sigma}_{\alpha kp}^{n+1} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{n+1}} \underline{n} \varphi_k dS = p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall k \in M_\Gamma, \quad (8.5)$$

$$\sum_p f_{\beta kp}^{n+1} \underline{\sigma}_{\beta kp}^{n+1} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{n+1}} \underline{n} \varphi_k dS = -p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad \forall k \in M_\Gamma, \quad (8.6)$$

$$\sum_{i \in N_k} \left((\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \underline{u}_{\beta i}^{n+1/2}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) + (\underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} - \underline{u}_{\beta k}^{n+1/2}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS = 0, \quad \forall k \in M_\Gamma, \quad (8.7)$$

$$\underline{x}_{\alpha i}^{n+1} = \underline{x}_{\alpha i}^n + \Delta t \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}, \quad \forall i, \forall \alpha, \quad (8.8)$$

$$\underline{x}_{\alpha k}^{n+1} = \underline{x}_{\alpha k}^n + \Delta t \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (8.9)$$

$$V_{kp}^{\alpha n+1} = V(\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}, \underline{x}_{\alpha k}^{n+1}), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (8.10)$$

$$V_{\alpha kp}^{n+1} = f_{\alpha kp}^n V_{kp}^{\alpha, n+1}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (8.11)$$

$$\rho_{\alpha kp}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha kp}^n V_{kp}^n}{V_{kp}^{\alpha n+1}}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha, \quad (8.12)$$

$$\rho_{\alpha k}^{n+1} = \frac{\rho_{\alpha k}^n V_{\alpha k}^n}{\sum_p f_{\alpha kp}^n V_{kp}^{\alpha n+1}}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (8.13)$$

$$q_{\alpha k}^{n+1/2} = \begin{cases} \rho_{\alpha k}^{n+1/2} \left[C_A (l_k)^2 \left| \frac{\dot{v}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right|^2 + C_L l_k c_{\alpha k}^n \left| \frac{\dot{v}_{\alpha k}^{n+1/2}}{\nu_{\alpha k}^{n+1/2}} \right| \right] & \text{si } \dot{v}_{\alpha k}^{n+1/2} < 0 \\ 0 & \text{si } \dot{v}_{\alpha k}^{n+1/2} > 0 \end{cases}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall \alpha, \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} &= \frac{1}{2V_{kp}^{\alpha n+1/2}} \sum_{i \in N_{kp}} \left(\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \otimes \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \Psi_i dV + \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \Psi_i dV \otimes \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2V_{kp}^{\alpha n+1/2}} \left(\underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} \otimes \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \varphi_k dV + \int_{\omega_{kp}^{\alpha n+1/2}} \nabla \varphi_k dV \otimes \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} \right), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\underline{S}_{\alpha kp}^{n+1} = \underline{S}_{\alpha kp}^n + 2\Delta t G_\alpha (\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) \underline{\mathbf{1}}), \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha, \quad (8.16)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha kp}^{n+1} = e_{\alpha kp}^n - \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha kp}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha kp}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) - W_{q_{\alpha kp}^{n+1/2}}, \\ p_{\alpha kp}^{n+1} = P(e_{\alpha kp}^{n+1}, \rho_{\alpha kp}^{n+1}) \end{cases}, \quad \forall k \in M_\Gamma, \forall p, \forall \alpha., \quad (8.17)$$

$$\underline{\sigma}_{\alpha kp}^{n+1} = \underline{S}_{\alpha kp}^{n+1} - (p_{\alpha kp}^{n+1} + q_{\alpha k}^{n+1/2}) \underline{\mathbf{1}} \quad (8.18)$$

Du fait des lois d'états utilisées, le système d'interface est non-linéaire. Nous utilisons alors une méthode de type Newton avec recherche linéaire pour résoudre ce système. Cette méthode parcourt une suite d'états « * » du système convergant vers l'état « $n + 1$ » du système en fin de pas de temps. La résolution se déroule par itérations composées de plusieurs étapes ; que nous dénoterons « algorithme Γ » :

1. construction d'un système linéarisé autour de l'état prédit « * » ;
2. résolution du système pour obtenir la direction de recherche ;
3. calcul de la correction maximale dans la direction de recherche ;
4. calcul de l'état non-linéaire corrigé « $n + 1$ » ;
5. vérification de la convergence et retour éventuel à l'étape 1.

Notons que l'utilisation des vitesses prédites $\tilde{u}_{\alpha i}$ a fait disparaître du système toute référence aux mailles pures. Ce système peut être résolu sur un maillage indépendant ne contenant que les mailles mixtes et leurs sous-mailles. Il nous permet d'obtenir les vitesses des nœuds sommet de maille mixte et des nœuds internes au temps $t^{n+1/2}$ ainsi que toutes les quantités thermodynamiques des sous-mailles au temps t^{n+1} .

8.2 Linéarisation

Nous linéarisons autour d'un état prédit « * » et cherchons une correction $\delta\bullet$ de cet état de sorte à avoir l'état du système en fin de pas de temps défini par

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} &= \underline{u}_{\alpha i}^* + \delta\underline{u}_{\alpha i}, \\
 \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2} &= \underline{u}_{\alpha k}^* + \delta\underline{u}_{\alpha k}, \\
 p_{\Gamma k}^n &= p_{\Gamma k}^* + \delta p_{\Gamma k}, \\
 \underline{x}_{\alpha i}^{n+1} &= \underline{x}_{\alpha i}^* + \delta\underline{x}_{\alpha i}, \\
 \underline{x}_{\alpha k}^{n+1} &= \underline{x}_{\alpha k}^* + \delta\underline{x}_{\alpha k}, \\
 V_{\alpha kp}^{n+1} &= V_{\alpha kp}^* + \delta V_{\alpha kp}, \\
 \rho_{\alpha kp}^{n+1} &= \rho_{\alpha kp}^* + \delta\rho_{\alpha kp}, \\
 \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} &= \underline{d}_{\alpha kp}^* + \delta\underline{d}_{\alpha kp}, \\
 \underline{S}_{\alpha kp}^{n+1} &= \underline{S}_{\alpha kp}^* + \delta\underline{S}_{\alpha kp}, \\
 e_{\alpha kp}^{n+1} &= e_{\alpha kp}^* + \delta e_{\alpha kp}, \\
 p_{\alpha kp}^{n+1} &= p_{\alpha kp}^* + \delta p_{\alpha kp}.
 \end{aligned}$$

Lors de la première itération, l'état « * » est pris identique à l'état « n » excepté pour les vitesses qui sont prises comme les vitesses $\tilde{u}_{\alpha i}$ et les pression d'interface $p_{\Gamma k}^*$ qui sont prises nulles. Le tenseur des taux de déformations est alors calculé pour être cohérent avec les vitesses prédites $\tilde{u}_{\alpha i}$.

La pseudo-viscosité n'est pas linéarisée dans ce système,

$$q_{\alpha kp}^{n+1/2} = q_{\alpha kp}^*.$$

Elle intervient dans le système linéaire mais elle est considérée constante et son évolution n'est pas prise en compte dans la linéarisation. En considérant cela, nous faisons une approximation qui peut affecter la vitesse de convergence de l'algorithme de résolution mais n'influence pas le résultat final. En effet, la pseudo-viscosité est calculée correctement par (8.14) lors du calcul de l'état non-linéaire « $n+1$ » et à convergence du système, nous résolvons bien le système du paragraphe précédent.

8.2.1 Volume et positions

La correction de la position des nœuds est donnée par la linéarisation de l'équation (8.8) qui s'écrit

$$\delta\underline{x}_{\alpha i} = \Delta t \delta\underline{u}_{\alpha i}. \quad (8.19)$$

La variation de volume peut s'exprimer en fonction de la trace du tenseur gradient d'accroissement de position

$$\frac{\delta V}{V} = \text{tr}(\nabla \delta \underline{x}).$$

La forme linéarisée de cette équation a pour expression

$$\delta V_{\alpha kp} = V_{\alpha kp}^* \Delta t \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}). \quad (8.20)$$

8.2.2 Tenseur des taux de déformation

Le tenseur des taux de déformations est une fonction linéaire des vitesses. La correction $\delta \underline{d}_{\alpha kp}$ de ce tenseur en fonction de la correction de vitesses $\delta \underline{u}_\alpha$ s'écrit

$$\delta \underline{d}_{\alpha kp} = \frac{1}{2} (\nabla \delta \underline{u}_\alpha + \nabla \delta \underline{u}_\alpha^T)$$

ce qui donne une fois discrétisée pour une sous-maille ω_{kp} pour chaque matériau α ,

$$\delta \underline{d}_{\alpha kp} = \frac{1}{2} \frac{1}{V_{kp}^*} \left(\sum_{i \in N_{kp}} \left(\delta \underline{u}_{\alpha i} \otimes \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \Psi_i \underline{n} dS + \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \Psi_i \underline{n} dS \otimes \delta \underline{u}_{\alpha i} \right) + \delta \underline{u}_{\alpha k} \otimes \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS + \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS \otimes \delta \underline{u}_{\alpha k} \right). \quad (8.21)$$

Remarquons que nous avons ici écrit les intégrales sur la géométrie de la configuration prédite « * ». De plus, ces configurations sont différentes pour chaque matériau. Il faut donc les réactualiser à chaque itération. Par contre, comme pour la pseudo-viscosité, l'évolution de la géométrie n'est pas linéarisée. Le problème linéaire suppose une géométrie figée.

8.2.3 Conservation de la masse

La linéarisation de l'équation de conservation de la masse (8.12) donne

$$\delta \rho_{\alpha kp} = -\frac{\rho_{\alpha kp}^*}{V_{\alpha kp}^*} \delta V_{\alpha kp}. \quad (8.22)$$

En utilisant l'expression de la linéarisation de l'évolution du volume $\delta V_{\alpha kp}$ (8.20) que nous avons écrite précédemment, nous obtenons

$$\delta \rho_{\alpha kp} = -\rho_{\alpha kp}^* \Delta t \operatorname{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}). \quad (8.23)$$

8.2.4 Dynamique des nœuds sommets

La linéarisation des équations de dynamique des nœuds sommets (8.3) et (8.4) donne

$$\delta \underline{u}_{\alpha i} = \frac{\delta t}{m_{\alpha i}^n} \sum_{k \in M_i} \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS, \quad (8.24)$$

$$\delta \underline{u}_{\beta i} = -\frac{\delta t}{m_{\alpha i}^n} \sum_{k \in M_i} \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS. \quad (8.25)$$

8.2.5 Équilibre des nœuds internes

La linéarisation des équations d'équilibre des nœuds internes (8.5) et (8.6) aboutit à

$$\sum_p f_{\alpha kp}^n \delta \underline{\sigma}_{\alpha kp} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS - \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS = -\sum_p f_{\alpha kp}^n \underline{\sigma}_{\alpha kp}^* \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS + p_{\Gamma k}^* \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS, \quad (8.26)$$

$$\sum_p f_{\beta kp}^n \delta \underline{\sigma}_{\beta kp} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\beta*}} \varphi_k \underline{n} dS + \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS = -\sum_p f_{\alpha kp}^n \underline{\sigma}_{\alpha kp}^* \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\beta*}} \varphi_k \underline{n} dS - p_{\Gamma k}^* \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS. \quad (8.27)$$

Remarquons que les intégrales des termes de contraintes sont les mêmes que les intégrales apparaissant dans l'expression du tenseur des taux de déformations (8.21) et sont écrites sur la géométrie de la configuration prédite « * » de chaque matériau.

8.2.6 Continuité des vitesses

La linéarisation de l'équation de continuité des vitesses (8.7) donne

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N_k} \left((\delta \underline{u}_{\beta i} - \delta \underline{u}_{\alpha i}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) + (\delta \underline{u}_{\beta k} - \delta \underline{u}_{\alpha k}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS = \\ - \sum_{i \in N_k} \left((\underline{u}_{\beta i}^* - \underline{u}_{\alpha i}^*) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) - (\underline{u}_{\beta k}^* - \underline{u}_{\alpha k}^*) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_\Gamma dS. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Notons que cette linéarisation écrit la continuité des vitesses normales au temps $t^{n+1/2}$ sans supposer son respect à l'état « * » ce qui laisse la liberté aux itérations précédentes de ne pas respecter la contrainte de vitesses.

8.2.7 Déviateur des contraintes dans le cadre élastique

L'équation d'évolution du déviateur des contraintes (8.16) a pour forme linéarisée

$$\delta \underline{S}_{\alpha k}^p = 2G_\alpha \Delta t \left(\delta \underline{d}_{\alpha k p} - \frac{1}{3} \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha k p}) \underline{\mathbf{1}} \right). \quad (8.29)$$

8.2.8 Conservation d'énergie

Nous linéarisons l'équation de conservation de l'énergie (8.17) par

$$\delta e_{\alpha k p} = - \frac{\delta p_{\alpha k}^p}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k p}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha k p}^n} \right) + \left(\frac{p_{\alpha k p}^n + p_{\alpha k p}^* + 2q_{\alpha k p}^*}{2 (\rho_{\alpha k p}^*)^2} \right) \delta \rho_{\alpha k p}. \quad (8.30)$$

Cette équation fait plusieurs approximations :

- la linéarisation du dépôt d'énergie élastique $\frac{\Delta t}{\rho_{\alpha k p}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha k p}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha k p}^{n+1/2})$ est négligée ;
- la correction de la pseudo-viscosité $\delta q_{\alpha k p}$ et son travail $\delta q_{\alpha k p} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha k p}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha k p}^n} \right)$ ne sont pas pris en compte, la pseudo-viscosité est considérée constante dans le système linéaire ;
- la pseudo-viscosité $q_{\alpha k p}^*$ est prise comme travaillant sur la variation de volume de la sous-maille $\frac{\delta \rho_{\alpha k p}}{(\rho_{\alpha k p}^*)^2}$ et non pas sur une variation de volume de maille quadrangle $\frac{\delta \rho_{\alpha k}}{(\rho_{\alpha k}^*)^2}$ sur laquelle elle travaille réellement.

Ces approximations s'appliquent uniquement au système linéaire et sa résolution. Dans la suite de l'itération, l'état non-linéaire est calculé à partir de l'équation (8.17). À convergence, le système résolu est bien le système du paragraphe 8.1.

8.2.9 Pression hydrodynamique

La loi d'état (8.17) a pour forme linéarisée

$$\delta p_{\alpha kp} = \frac{\partial P(e_{\alpha kp}^*, \rho_{\alpha kp}^*)}{\partial \rho_{\alpha kp}^*} \delta \rho_{\alpha kp} + \frac{\partial P(e_{\alpha kp}^*, \rho_{\alpha kp}^*)}{\partial e_{\alpha kp}^*} \delta e_{\alpha kp},$$

elle sera notée pour des soucis de compacité d'écriture

$$\delta p_{\alpha kp} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \delta \rho_{\alpha kp} + \frac{\partial P}{\partial e} \delta e_{\alpha kp}. \quad (8.31)$$

En remplaçant le terme en énergie interne par son expression (8.30) dans la loi d'état (8.31), nous obtenons

$$\delta p_{\alpha kp} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial e} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) \right) = \frac{\partial P}{\partial \rho} \delta \rho_{\alpha kp} + \frac{\partial P}{\partial e} \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^* + 2q_{\alpha kp}^*}{2(\rho_{\alpha kp}^*)^2} \right) \delta \rho_{\alpha kp}. \quad (8.32)$$

En regroupant par inconnues et en utilisant l'expression de $\delta \rho_{\alpha kp}$, nous obtenons finalement

$$\delta p_{\alpha kp} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial e} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) \right) = -\Delta t \left(\rho_{\alpha kp}^* \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial P}{\partial e} \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^* + 2q_{\alpha kp}^*}{2\rho_{\alpha kp}^*} \right) \right) \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}). \quad (8.33)$$

En fonction des lois d'état utilisées, la valeur des dérivées $\frac{\partial P}{\partial e}$ et $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ peuvent ne pas être explicites. Dans ce cas, nous approchons la dérivée par différences finies centrées en évaluant la loi d'état en 2 points autour de l'état prédit « * ». Les dérivées ont alors pour expression

$$\frac{\partial P(e_{\alpha kp}^*, \rho_{\alpha kp}^*)}{\partial \rho_{\alpha kp}^*} = \frac{P(e_{\alpha kp}^*, (1 + \varepsilon_p)\rho_{\alpha kp}^*) - P(e_{\alpha kp}^*, (1 - \varepsilon_p)\rho_{\alpha kp}^*)}{2\varepsilon_p \rho_{\alpha kp}^*}, \quad (8.34)$$

$$\frac{\partial P(e_{\alpha kp}^*, \rho_{\alpha kp}^*)}{\partial e_{\alpha kp}^*} = \frac{P((1 + \varepsilon_e)e_{\alpha kp}^*, \rho_{\alpha kp}^*) - P((1 - \varepsilon_e)e_{\alpha kp}^*, \rho_{\alpha kp}^*)}{2\varepsilon_e e_{\alpha kp}^*}, \quad (8.35)$$

où ε_p et ε_e sont des paramètres devant rester petits pour obtenir une bonne approximation des dérivées.

8.2.10 Résumé du système linéarisé

Le système linéarisé à résoudre est donc composé des équations

$$\delta \underline{x}_{\alpha i} = \Delta t \delta \underline{u}_{\alpha i}, \quad (8.36)$$

$$\delta V_{\alpha kp} = V_{\alpha kp}^* \Delta t \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}), \quad (8.37)$$

$$\delta \rho_{\alpha kp} = -\rho_{\alpha kp}^* \Delta t \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}), \quad (8.38)$$

$$\delta \underline{u}_{\alpha i} - \frac{\delta t}{m_{\alpha i}^n} \sum_{k \in M_i} \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS = 0, \quad (8.39)$$

$$\delta \underline{u}_{\beta i} + \frac{\delta t}{m_{\beta i}^n} \sum_{k \in M_i} \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS = 0, \quad (8.40)$$

$$\sum_p f_{\alpha kp}^n \delta \underline{\sigma}_{\alpha kp} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS - \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_{\Gamma} dS = - \sum_p f_{\alpha kp}^n \underline{\sigma}_{\alpha kp}^* \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS + p_{\Gamma k}^* \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_{\Gamma} dS, \quad (8.41)$$

$$\sum_p f_{\beta kp}^n \delta \underline{\sigma}_{\beta kp} \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\beta*}} \varphi_k \underline{n} dS + \delta p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_{\Gamma} dS = - \sum_p f_{\beta kp}^n \underline{\sigma}_{\beta kp}^* \cdot \int_{\partial \omega_{kp}^{\beta*}} \varphi_k \underline{n} dS - p_{\Gamma k}^* \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_{\Gamma} dS, \quad (8.42)$$

$$\sum_{i \in N_k} \left((\delta \underline{u}_{\alpha i} - \delta \underline{u}_{\beta i}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS \right) + (\delta \underline{u}_{\alpha k} - \delta \underline{u}_{\beta k}) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_{\Gamma} dS = - \sum_{i \in N_k} \left((\underline{u}_{\alpha i}^* - \underline{u}_{\beta i}^*) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS \right) - (\underline{u}_{\alpha k}^* - \underline{u}_{\beta k}^*) \cdot \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k \underline{n}_{\Gamma} dS, \quad (8.43)$$

$$\delta e_{\alpha kp} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) \frac{\partial P}{\partial e} \right) = -\Delta t \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^* + 2q_{\alpha kp}^*}{2\rho_{\alpha kp}^*} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_{\alpha kp}^*}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}), \quad (8.44)$$

$$\delta p_{\alpha kp} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial e} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) \right) = -\Delta t \left(\rho_{\alpha kp}^* \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial P}{\partial e} \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^* + 2q_{\alpha kp}^*}{2\rho_{\alpha kp}^*} \right) \right) \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}), \quad (8.45)$$

$$\delta \underline{S}_{\alpha kp}^p = 2G_{\alpha} \Delta t \left(\delta \underline{d}_{\alpha kp} - \frac{1}{3} \text{tr}(\delta \underline{d}_{\alpha kp}) \underline{\mathbf{1}} \right), \quad (8.46)$$

$$f_{\alpha kp}^n \delta \underline{\sigma}_{\alpha kp} = f_{\alpha kp}^n \delta \underline{S}_{\alpha kp} - f_{\alpha kp}^n \delta p_{\alpha kp} \underline{\mathbf{1}}, \quad (8.47)$$

$$\delta \underline{d}_{\alpha kp} = \frac{1}{2} \frac{1}{V_{kp}^{\alpha*}} \left(\sum_i \left(\delta \underline{u}_{\alpha i} \otimes \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \Psi_i \underline{n} dS + \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \Psi_i \underline{n} dS \otimes \delta \underline{u}_{\alpha i} \right) + \delta \underline{u}_{\alpha k} \otimes \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS + \int_{\partial \omega_{kp}^{\alpha*}} \varphi_k \underline{n} dS \otimes \delta \underline{u}_{\alpha k} \right). \quad (8.48)$$

Dans ce système, les équations (8.36), (8.37), (8.38) et (8.44) en $\delta \underline{x}$, δV , $\delta \rho$ et δe peuvent être éliminées car elles ont déjà été utilisées pour éliminer ces inconnues du système.

8.3 Résolution du système linéarisé

Notre système possède comme inconnues à ce point :

- les contraintes, déviateurs et pressions hydrodynamiques ;
- les vitesses ;
- les taux de déformations ;
- les pressions d'interface.

Nous allons introduire une notation matricielle qui nous facilitera l'élimination des inconnues restantes et l'assemblage du système.

Nous éliminerons d'abord le tenseur de taux de déformations puis les contraintes pour obtenir un système ne dépendant plus que des vitesses et des pressions d'interface. Puis, nous éliminerons les vitesses pour ne garder que les pressions d'interface. Le système est alors réduit à un système ayant un nombre d'inconnues égal au nombre de mailles mixtes.

8.3.1 Notation matricielle

Nous écrivons les contraintes dans les sous-mailles sous forme d'un vecteur colonne pour chaque maille mixte et chaque matériau. Les contraintes sont pondérées par la fraction volumique. Ce vecteur regroupe, pour un matériau α donné, les trois composantes des contraintes des 4 sous-mailles d'une mailles mixte. Il possède donc 12 composantes et a pour expression

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha k}^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{\alpha k}^n \sigma_{11\alpha k 1}^{n+1} \\ f_{\alpha k}^n \sigma_{22\alpha k 1}^{n+1} \\ f_{\alpha k}^n \sigma_{12\alpha k 1}^{n+1} \\ f_{\alpha k 2}^n \sigma_{11\alpha k 2}^{n+1} \\ f_{\alpha k 2}^n \sigma_{22\alpha k 2}^{n+1} \\ f_{\alpha k 2}^n \sigma_{12\alpha k 2}^{n+1} \\ f_{\alpha k 3}^n \sigma_{11\alpha k 3}^{n+1} \\ f_{\alpha k 3}^n \sigma_{22\alpha k 3}^{n+1} \\ f_{\alpha k 3}^n \sigma_{12\alpha k 3}^{n+1} \\ f_{\alpha k 4}^n \sigma_{11\alpha k 4}^{n+1} \\ f_{\alpha k 4}^n \sigma_{22\alpha k 4}^{n+1} \\ f_{\alpha k 4}^n \sigma_{12\alpha k 4}^{n+1} \end{pmatrix}$$

où l'indice $12\alpha k 3$, par exemple, dénote de la composante 12 ou xy du tenseur des contraintes moyennes du matériau α dans la 3^e sous-maille de la maille Ω_k . En suivant la même logique, le déviateur des contraintes $\boldsymbol{S}_{\alpha k}^{n+1}$ s'écrit

$$\boldsymbol{S}_{\alpha k}^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{\alpha k}^n S_{11\alpha k 1}^{n+1} \\ f_{\alpha k}^n S_{22\alpha k 1}^{n+1} \\ f_{\alpha k}^n S_{12\alpha k 1}^{n+1} \\ f_{\alpha k 2}^n S_{11\alpha k 2}^{n+1} \\ f_{\alpha k 2}^n S_{22\alpha k 2}^{n+1} \\ f_{\alpha k 2}^n S_{12\alpha k 2}^{n+1} \\ f_{\alpha k 3}^n S_{11\alpha k 3}^{n+1} \\ f_{\alpha k 3}^n S_{22\alpha k 3}^{n+1} \\ f_{\alpha k 3}^n S_{12\alpha k 3}^{n+1} \\ f_{\alpha k 4}^n S_{11\alpha k 4}^{n+1} \\ f_{\alpha k 4}^n S_{22\alpha k 4}^{n+1} \\ f_{\alpha k 4}^n S_{12\alpha k 4}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Suivant la même logique, la pression hydrodynamique $\mathbf{p}_{\alpha k}^{n+1}$ sera écrite

$$\mathbf{p}_{\alpha k}^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{\alpha k 1}^n p_{\alpha k 1}^{n+1} \\ f_{\alpha k 2}^n p_{\alpha k 2}^{n+1} \\ f_{\alpha k 3}^n p_{\alpha k 3}^{n+1} \\ f_{\alpha k 4}^n p_{\alpha k 4}^{n+1} \end{pmatrix}$$

Le tenseur des taux de déformation sera noté selon le même principe et prend la forme pour le matériau α et la maille Ω_k ,

$$\mathbf{d}_{\alpha k}^{\alpha n+1/2} = \begin{pmatrix} d_{11\alpha k}^{\alpha n+1/2} \\ d_{22\alpha k}^{\alpha n+1/2} \\ d_{12\alpha k}^{\alpha n+1/2} \\ d_{11\alpha k 2}^{\alpha n+1/2} \\ d_{22\alpha k 2}^{\alpha n+1/2} \\ d_{12\alpha k 2}^{\alpha n+1/2} \\ d_{11\alpha k 3}^{\alpha n+1/2} \\ d_{22\alpha k 3}^{\alpha n+1/2} \\ d_{12\alpha k 3}^{\alpha n+1/2} \\ d_{11\alpha k 4}^{\alpha n+1/2} \\ d_{22\alpha k 4}^{\alpha n+1/2} \\ d_{12\alpha k 4}^{\alpha n+1/2} \end{pmatrix} .$$

Nous noterons le vecteur regroupant les vitesses de tous les nœuds sommets du système d'interface pour le matériau α ,

$$\mathbf{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} u_{x\alpha 1}^{n+1/2} \\ u_{y\alpha 1}^{n+1/2} \\ \vdots \\ u_{x\alpha i}^{n+1/2} \\ u_{y\alpha i}^{n+1/2} \\ \vdots \\ u_{x\alpha I}^{n+1/2} \\ u_{y\alpha I}^{n+1/2} \end{pmatrix} .$$

Ce vecteur à une longueur $2NI$ égale à deux fois le nombre de nœuds de maille mixte.

Le vecteur de longueur 2 regroupant les vitesses bulles d'une maille mixte est noté pour un matériau α

$$\mathbf{u}_{\alpha kb}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} u_{x\alpha k}^{n+1/2} \\ u_{y\alpha k}^{n+1/2} \end{pmatrix} .$$

La pression d'interface dans la maille mixte est un scalaire . Elle est toujours notée $p_{\Gamma k}$.

8.3.2 Écriture du système linéarisé sous forme matricielle

8.3.2.1 Dynamique des nœuds de maille mixte

Nous écrivons maintenant le système en utilisant la notation matricielle que nous avons introduite dans paragraphe précédent.

Les équations de dynamique des nœuds de maille mixte (8.39) et (8.40) prennent la forme pour les matériaux α et β

$$\delta \mathbf{u}_{\alpha i} = \delta t \mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l}, \quad (8.49)$$

$$\delta \mathbf{u}_{\beta i} = \delta t \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l} \quad (8.50)$$

avec $\mathbf{M}_{\alpha i}^{-1}$, l'inverse de la matrice de masse regroupant tous les nœuds sommets du système. Cette matrice est diagonale grâce à la condensation de la masse et a pour expression

$$\mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1/m_{\alpha 1} & 0 \\ 0 & 1/m_{\alpha 1} \end{matrix}} & & 0 & \dots \\ & & & \\ & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1/m_{\alpha 2} & 0 \\ 0 & 1/m_{\alpha 2} \end{matrix}} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Le terme \mathbf{b}_{ki}^T de longueur $2N\Gamma$ correspond à la discrétisation de la forme bi-linéaire $b(\hat{u}, p_\Gamma)$ du système éléments finis mixtes. Il permet de d'obtenir les efforts sur les nœuds sommets à partir des pressions d'interface et a pour expression

$$\mathbf{b}_{ki}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_1} n_{x\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_1} n_{y\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_2} n_{x\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_2} n_{y\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_3} n_{x\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_3} n_{y\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_4} n_{x\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \Psi_{i_4} n_{y\Gamma} dS \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans \mathbf{b}_{ki}^T , les termes non nuls apparaissent seulement sur les lignes i_1, i_2, i_3 et i_4 correspondant aux indices des nœuds de la maille k .

Dans ces matrices et vecteurs, l'encadrement des composantes essaye de mettre en évidence la structure des termes en regroupant les matrices élémentaires par nœud, par maille ou par sous-maille.

8.3.2.2 Équilibre des nœuds internes

Les équilibres des nœuds internes (8.41) et (8.42) deviennent, pour chaque maille mixte,

$$\mathbf{B}_{\alpha kb}^T \delta \boldsymbol{\sigma}_{\alpha k} = \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} + \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\alpha k}^*, \quad (8.51)$$

$$\mathbf{B}_{\beta kb}^T \delta \boldsymbol{\sigma}_{\beta k} = -\mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} - \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\beta kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\beta k}^* \quad (8.52)$$

avec $\mathbf{B}_{\alpha kb}^T$, une matrice 2×12 de la forme

$$\mathbf{B}_{\alpha kb}^T = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha*}} \varphi_k n_x dS & 0 & \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha*}} \varphi_k n_y dS & \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha*}} \varphi_k n_x dS & 0 & \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha*}} \varphi_k n_y dS & \dots & & & & & \\ 0 & \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha*}} \varphi_k n_y dS & \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha*}} \varphi_k n_x dS & 0 & \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha*}} \varphi_k n_y dS & \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha*}} \varphi_k n_x dS & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & \end{array} \right)$$

et le terme \mathbf{b}_{kb}^T permettant d'obtenir les forces sur le nœud interne \underline{x}_k dues à la pression d'interface $p_{\Gamma k}$,

$$\mathbf{b}_{kb}^T = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k n_{x\Gamma} dS \\ \int_{\Gamma_k^n} \varphi_k n_{y\Gamma} dS \end{pmatrix}.$$

8.3.2.3 Continuité des vitesses

L'équation de continuité des vitesses (8.43) devient sous forme matricielle pour chaque maille mixte

$$\mathbf{b}_{ki}(\delta\mathbf{u}_{\alpha i} - \delta\mathbf{u}_{\beta i}) + \mathbf{b}_{kb}(\delta\mathbf{u}_{\alpha kb} - \delta\mathbf{u}_{\beta kb}) = -\mathbf{b}_{ki}(\mathbf{u}_{\alpha i}^* - \mathbf{u}_{\beta i}^*) - \mathbf{b}_{kb}(\mathbf{u}_{\alpha kb}^* - \mathbf{u}_{\beta kb}^*). \quad (8.53)$$

Les termes \mathbf{b}_{ki} et \mathbf{b}_{kb} sont la discrétisation de la forme bi-linéaire $b(\underline{u}, \hat{p})$, introduits dans les paragraphes 8.3.2.1 et 8.3.2.2. Ces termes permettent d'obtenir le saut de vitesse normale à l'interface dans la maille Ω_k à partir des vitesses nodales.

8.3.2.4 Tenseur des taux de déformations

Le tenseur des taux de déformations (8.48) s'écrit pour chaque maille mixte et pour chaque matériau sous la forme

$$\delta\mathbf{d}_{\alpha k} = \mathbf{V}\mathbf{d}_{\alpha k}^{-1} (\mathbf{B}_{\alpha ki} \delta\mathbf{u}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\alpha kb} \delta\mathbf{u}_{\alpha kb}) \quad (8.54)$$

faisant intervenir la matrice 12×12 ,

$$\mathbf{V}\mathbf{d}_{\alpha k}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{1}{V_{k1}^{\alpha*}} & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{1}{V_{k1}^{\alpha*}} & 0 & & & & 0 & & & & \dots & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2V_{k1}^{\alpha*}} & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & \frac{1}{V_{k2}^{\alpha*}} & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & \frac{1}{V_{k2}^{\alpha*}} & 0 & & \dots & \\ & & & & & & 0 & 0 & \frac{1}{2V_{k2}^{\alpha*}} & & & \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots \end{array} \right)$$

et la matrice creuse $12 \times 2N\Gamma$,

$$\mathbf{B}_{\alpha ki} = \begin{pmatrix} \dots & \begin{matrix} \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_x dS & 0 \\ 0 & \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_y dS \\ \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_y dS & \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_x dS \end{matrix} & \begin{matrix} \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_x dS & 0 \\ 0 & \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_y dS \\ \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_y dS & \int_{\partial\omega_{k1}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_x dS \end{matrix} & \dots \\ \dots & 0 & \begin{matrix} \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_x dS & 0 \\ 0 & \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_y dS \\ \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_y dS & \int_{\partial\omega_{k2}^{\alpha^*}} \Psi_{i_2} n_x dS \end{matrix} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \begin{matrix} \int_{\partial\omega_{k4}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_x dS & 0 \\ 0 & \int_{\partial\omega_{k4}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_y dS \\ \int_{\partial\omega_{k4}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_y dS & \int_{\partial\omega_{k4}^{\alpha^*}} \Psi_{i_1} n_x dS \end{matrix} & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Dans cette matrice, les seuls coefficients non nuls correspondent aux colonnes i_1, i_2, i_3 et i_4 .

8.3.2.5 Pression hydrodynamique

La loi d'état linéarisée (8.45) prend la forme matricielle

$$\delta \mathbf{p}_{\alpha k} = \Delta t \mathbf{Cp}_{\alpha k} (\mathbf{B}_{\alpha ki} \delta \mathbf{u}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\alpha kb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb}) \quad (8.55)$$

avec $\mathbf{Cp}_{\alpha k}$, une matrice 4×12 donnée par

$$\mathbf{Cp}_{\alpha k} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{cp}_{\alpha k1} & \text{cp}_{\alpha k1} & 0 \end{matrix} & 0 & \dots \\ 0 & \begin{matrix} \text{cp}_{\alpha k2} & \text{cp}_{\alpha k2} & 0 \end{matrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

où

$$cP_{\alpha kp} = -\frac{f_{\alpha kp}^n}{V_{kp}^{\alpha*}} \frac{\partial P}{\partial e} \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^* + 2q_{\alpha kp}^*}{2\rho_{\alpha kp}^*} \right) + \rho_{\alpha kp}^* \frac{\partial P}{\partial \rho}.$$

$$1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) \frac{\partial P}{\partial e}.$$

Les trois termes de la matrice élémentaire d'une sous-maille

$$\boxed{cP_{\alpha kp} \quad cP_{\alpha kp} \quad 0}$$

correspondent aux trois composantes du tenseur de taux de déformations, d_{11} , d_{22} et d_{12} . La pression hydrodynamique ne dépend que de la variation de volume et pas du cisaillement d'où un troisième terme nul.

8.3.2.6 Déviateur des contraintes

La forme matricielle de l'évolution du déviateur des contraintes (8.46) est

$$\delta \mathbf{S}_{\alpha k} = \Delta t \mathbf{C} \mathbf{s}_{\alpha k} (\mathbf{B}_{\alpha ki} \delta \mathbf{u}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\alpha kb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb}) \quad (8.56)$$

avec une matrice 12×12 , diagonale par blocs,

$$\mathbf{C} \mathbf{s}_{\alpha k} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{4}{3} \frac{f_{\alpha k1}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & -\frac{2}{3} \frac{f_{\alpha k1}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{f_{\alpha k1}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & \frac{4}{3} \frac{f_{\alpha k1}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{\alpha k1}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} \end{matrix}} & 0 & \dots \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \frac{4}{3} \frac{f_{\alpha k2}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & -\frac{2}{3} \frac{f_{\alpha k2}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{f_{\alpha k2}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & \frac{4}{3} \frac{f_{\alpha k2}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_{\alpha k2}^n}{V_{\alpha*}^k} G_{\alpha} \end{matrix}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

8.3.2.7 Tenseur des contraintes

La forme matricielle de la linéarisation du tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit alors

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\sigma}_{\alpha k} &= \Delta t (\mathbf{C} \mathbf{s}_{\alpha k} - \mathbf{I} \mathbf{C} \mathbf{p}_{\alpha k}) (\mathbf{B}_{\alpha ki} \delta \mathbf{u}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\alpha kb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb}) \\ &= \Delta t \mathbf{C}_{\alpha k} (\mathbf{B}_{\alpha ki} \delta \mathbf{u}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\alpha kb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb}). \end{aligned} \quad (8.57)$$

Le terme $\mathbf{C}_{\alpha k}$, diagonal par blocs, de dimension 12×12 , traduit le comportement complet (pression hydrodynamique et déviateur des contraintes) du matériau α en fonction des vitesses

résumé, il s'écrit

$$\delta \mathbf{u}_{\alpha i} = \delta t \mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l}, \quad (8.58)$$

$$\delta \mathbf{u}_{\beta i} = \delta t \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l}, \quad (8.59)$$

$$\mathbf{B}_{\alpha kb}^T \delta \sigma_{\alpha k} = \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} + \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \sigma_{\alpha k}^*, \quad \forall k \in M_{\Gamma}, \quad (8.60)$$

$$\mathbf{B}_{\beta kb}^T \delta \sigma_{\beta k} = -\mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} - \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\beta kb}^T \sigma_{\beta k}^*, \quad \forall k \in M_{\Gamma}, \quad (8.61)$$

$$\delta \sigma_{\alpha k} = \Delta t \mathbf{C}_{\alpha k} (\mathbf{B}_{\alpha ki} \delta \mathbf{u}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\alpha kb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb}), \quad \forall k \in M_{\Gamma}, \quad (8.62)$$

$$\delta \sigma_{\beta k} = \Delta t \mathbf{C}_{\beta k} (\mathbf{B}_{\beta ki} \delta \mathbf{u}_{\beta i} + \mathbf{B}_{\beta kb} \delta \mathbf{u}_{\beta kb}), \quad \forall k \in M_{\Gamma}, \quad (8.63)$$

$$\mathbf{b}_{ki} (\delta \mathbf{u}_{\alpha i} - \delta \mathbf{u}_{\beta i}) + \mathbf{b}_{kb} (\delta \mathbf{u}_{\alpha kb} - \delta \mathbf{u}_{\beta kb}) = -\mathbf{b}_{ki} (\mathbf{u}_{\alpha i}^* - \mathbf{u}_{\beta i}^*) - \mathbf{b}_{kb} (\mathbf{u}_{\alpha kb}^* - \mathbf{u}_{\beta kb}^*), \quad \forall k \in M_{\Gamma}. \quad (8.64)$$

8.3.3 Élimination des inconnues du système

Nous commençons par éliminer les contraintes dans les équations d'équilibre des nœuds internes (8.60) et (8.61) en utilisant les équations (8.62) et (8.63) ce qui donne

$$\Delta t \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \mathbf{C}_{\alpha k} (\mathbf{B}_{\alpha ki} \delta \mathbf{u}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\alpha kb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb}) = \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} + \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \sigma_{\alpha k}^*, \quad (8.65)$$

$$\Delta t \mathbf{B}_{\beta kb}^T \mathbf{C}_{\beta k} (\mathbf{B}_{\beta ki} \delta \mathbf{u}_{\beta i} + \mathbf{B}_{\beta kb} \delta \mathbf{u}_{\beta kb}) = -\mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} - \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\beta kb}^T \sigma_{\beta k}^*. \quad (8.66)$$

Introduisons la matrice 2×2 de rigidité locale $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb} = \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \mathbf{C}_{\alpha k} \mathbf{B}_{\alpha kb}$ et la matrice de rigidité $2 \times 2N_{\Gamma}$ $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bi} = \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \mathbf{C}_{\alpha k} \mathbf{B}_{\alpha ki}$. Les deux équations précédentes se ré-écrivent

$$\Delta t \mathbf{K}_{\alpha k}^{bb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb} = \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} + \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \sigma_{\alpha k}^* - \Delta t \mathbf{K}_{\alpha k}^{bi} \delta \mathbf{u}_{\alpha i}, \quad (8.67)$$

$$\Delta t \mathbf{K}_{\beta k}^{bb} \delta \mathbf{u}_{\beta kb} = -\mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} - \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\beta kb}^T \sigma_{\beta k}^* - \Delta t \mathbf{K}_{\beta k}^{bi} \delta \mathbf{u}_{\beta i}. \quad (8.68)$$

Puis nous éliminons les vitesses des nœuds sommets en utilisant leur expression (8.58) et (8.59) dans les équations des nœuds internes (8.67) et (8.68) et dans la continuité des vitesses (8.64) pour obtenir pour tout $k \in M_{\Gamma}$, le système

$$\Delta t \mathbf{K}_{\alpha k}^{bb} \delta \mathbf{u}_{\alpha kb} = \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} + \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \sigma_{\alpha k}^* - \Delta t \mathbf{K}_{\alpha k}^{bi} (\delta t \mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l}), \quad (8.69)$$

$$\Delta t \mathbf{K}_{\beta k}^{bb} \delta \mathbf{u}_{\beta kb} = -\mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} - \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \mathbf{B}_{\beta kb}^T \sigma_{\beta k}^* - \Delta t \mathbf{K}_{\beta k}^{bi} (-\delta t \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l}), \quad (8.70)$$

$$\mathbf{b}_{kb} (\delta \mathbf{u}_{\alpha kb} - \delta \mathbf{u}_{\beta kb}) + \mathbf{b}_{ki} (\delta t \mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l} + \delta t \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l}) = -\mathbf{b}_{ki} (\mathbf{u}_{\alpha i}^* - \mathbf{u}_{\beta i}^*) - \mathbf{b}_{kb} (\mathbf{u}_{\alpha kb}^* - \mathbf{u}_{\beta kb}^*). \quad (8.71)$$

Enfin, nous éliminons les vitesses des nœuds internes dans l'équation de continuité des vitesses (8.71) grâce aux expressions (8.69) et (8.70) pour obtenir un système ne dépendant que des

pressions d'interface

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{b}_{kb} \mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\alpha k}^* - \mathbf{K}_{\alpha k}^{bi} \left(\delta t \mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l} \right) \right) \\
 & - \mathbf{b}_{kb} \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \left(-\frac{1}{\Delta t} \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^* - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{\beta kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\beta k}^* - \mathbf{K}_{\beta k}^{bi} \left(-\delta t \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l} \right) \right) \\
 & + \delta t \mathbf{b}_{ki} \left(\mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} + \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \right) \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l} = -\mathbf{b}_{ki} (\mathbf{u}_{\alpha i}^* - \mathbf{u}_{\beta i}^*) - \mathbf{b}_{kb} (\mathbf{u}_{\alpha kb}^* - \mathbf{u}_{\beta kb}^*).
 \end{aligned} \tag{8.72}$$

Nous regroupons les termes de pressions d'interface pour obtenir finalement après multiplication par Δt :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{b}_{kb} \left(\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} + \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \right) \mathbf{b}_{kb}^T \delta p_{\Gamma k} + \delta t \Delta t \left(\mathbf{b}_{ki} \left(\mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} + \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \right) - \mathbf{b}_{kb} \left(\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} \mathbf{K}_{\alpha k}^{bi} \mathbf{M}_{\alpha i}^{-1} + \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \mathbf{K}_{\beta k}^{bi} \mathbf{M}_{\beta i}^{-1} \right) \right) \sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l} \\
 & = \mathbf{b}_{kb} \left(\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\alpha k}^* - \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \mathbf{B}_{\beta kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\beta k}^* \right) - \Delta t \mathbf{b}_{ki} (\mathbf{u}_{\alpha i}^* - \mathbf{u}_{\beta i}^*) - \Delta t \mathbf{b}_{kb} (\mathbf{u}_{\alpha kb}^* - \mathbf{u}_{\beta kb}^*) + \mathbf{b}_{kb} \left(\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} + \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \right) \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^*.
 \end{aligned} \tag{8.73}$$

Cette dernière équation traduit le système linéarisé à résoudre exprimé uniquement en terme de pressions d'interface. Nous rappelons que cette équation s'écrit pour chaque maille mixte. Les termes qui y apparaissent sont propres à chaque maille exceptés les termes concernant les vitesses des nœuds sommets ($\mathbf{K}_{\alpha k}^{bi}$, $\mathbf{M}_{\alpha i}^{-1}$, \mathbf{b}_{ki} , $\mathbf{u}_{\alpha i}^*$) qui eux, englobent tous les degrés de liberté des nœuds sommets du système d'interface.

Le système en pression n'est pas symétrique du fait du schéma en temps explicite sur les nœuds sommets et implicite sur les nœuds internes, mais cette perte de symétrie n'intervient que sur le terme en $\Delta t \delta t \approx \Delta t^2$.

Le couplage entre les mailles est mis en évidence par l'apparition dans l'équation de la maille mixte, des pressions d'interfaces des mailles voisines par le terme $\sum_{l \in M_{\Gamma}} \mathbf{b}_{li}^T \delta p_{\Gamma l}$. Ce couplage est

cependant faible car pondéré par un terme de l'ordre de Δt^2 .

Notons enfin que l'incrément de pression d'interface dépend de deux termes. Il dépend :

- de la pénétration des matériaux de l'itération précédente par le terme

$$\Delta t \mathbf{b}_{ki} (\mathbf{u}_{\alpha i}^* - \mathbf{u}_{\beta i}^*) + \Delta t \mathbf{b}_{kb} (\mathbf{u}_{\alpha kb}^* - \mathbf{u}_{\beta kb}^*),$$

- du déséquilibre des nœuds internes de l'itération précédente par le terme

$$\mathbf{b}_{kb} \left(\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\alpha k}^* - \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \mathbf{B}_{\beta kb}^T \boldsymbol{\sigma}_{\beta k}^* \right) + \mathbf{b}_{kb} \left(\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} + \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \right) \mathbf{b}_{kb}^T p_{\Gamma k}^*.$$

Le système est à diagonale dominante avec un terme $\mathbf{b}_{kb} \left(\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} + \mathbf{K}_{\beta k}^{-bb} \right) \mathbf{b}_{kb}^T$ qui est non-nul par construction des nœuds internes. À la limite quand $\Delta t \rightarrow 0$, ce système est bien posé si, dans cette limite, la matrice de rigidité $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb}$ ou $\mathbf{K}_{\beta k}^{bb}$ est définie positive et si $\mathbf{b}_{kb} \neq 0$. Nous pouvons avoir un problème si l'interface est proche d'un coin car \mathbf{b}_{kb} tend vers zéro plus vite que \mathbf{b}_{ki} .

À partir de cette équation, nous pouvons assembler le système. Sa résolution est réalisée par une méthode classique de pivot de Gauss. Une maille mixte a un nombre limité de mailles

mixtes voisines et la largeur de bande de la matrice du système est faible. L'élimination de Gauss tire parti de cette caractéristique lors de la résolution pour augmenter ses performances.

Le pivot de Gauss est une méthode de résolution directe. Le passage à une méthode itérative permettrait une parallélisation plus facile. Notre méthode est ici écrite et implantée dans un cadre « séquentiel ». Ce cadre limite la taille des problème que nous résolvons, le nombre de mailles mixtes reste assez faible et donc, la taille du système d'interface est assez petite. Le passage à des cas de plus grandes tailles posent des problèmes comme le stockage de la matrice du système. Le passage à un stockage de type « matrice creuse » serait alors nécessaire.

8.3.4 Expression des matrices de rigidité

8.3.4.1 Expression de $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb}$

La matrice $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb}$ a pour expression $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb} = \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \mathbf{C}_{\alpha k} \mathbf{B}_{\alpha kb}$. En développant les produits matriciels, nous obtenons un matrice de la forme

$$\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb} = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \sum_p (k_{2\alpha kp}^* + 2k_{1\alpha kp}^*) \left(\int \varphi_k n_x dS \right)_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}}^2 + k_{1\alpha kp}^* \left(\int \varphi_k n_y dS \right)_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}}^2, \\ b &= \sum_p (k_{2\alpha kp}^* + 2k_{1\alpha kp}^*) \left(\int \varphi_k n_y dS \right)_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}}^2 + k_{1\alpha kp}^* \left(\int \varphi_k n_x dS \right)_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}}^2, \\ c &= \sum_p (k_{2\alpha kp}^* + k_{1\alpha kp}^*) \int \varphi_k n_x dS_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}} \int \varphi_k n_y dS_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}}, \\ d &= \sum_p (k_{2\alpha kp}^* + k_{1\alpha kp}^*) \int \varphi_k n_x dS_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}} \int \varphi_k n_y dS_{\partial\omega_{kp}^{\alpha*}}. \end{aligned}$$

Avec la notation précédente, l'inverse de la matrice $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bb}$ a pour expression

$$\mathbf{K}_{\alpha k}^{-bb} = \frac{1}{ab - cd} \begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$$

8.3.4.2 Expression de $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bi}$

La matrice $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bi}$ a pour expression $\mathbf{K}_{\alpha k}^{bi} = \mathbf{B}_{\alpha kb}^T \mathbf{C}_{\alpha k} \mathbf{B}_{\alpha ki}$. En développant les produits matriciels, nous obtenons une matrice de la forme

$$\mathbf{K}_{\alpha k}^{bi} = \left(0 \quad \dots \quad 0 \quad \boxed{\mathbf{k}_{\alpha ki_1}^{bi}} \quad \boxed{\mathbf{k}_{\alpha ki_2}^{bi}} \quad \boxed{\mathbf{k}_{\alpha ki_3}^{bi}} \quad \boxed{\mathbf{k}_{\alpha ki_4}^{bi}} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)$$

avec $\mathbf{k}_{\alpha ki}^{bi}$, une matrice 2×2

$$\mathbf{k}_{\alpha ki}^{bi} = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}
 a &= \sum_p (k_{2\alpha kp}^* + 2k_{1\alpha kp}^*) \int \varphi_k n_x dS \int \Psi_i n_x dS + k_{1\alpha kp}^* \int \varphi_k n_y dS \int \Psi_i n_y dS, \\
 b &= \sum_p (k_{2\alpha kp}^* + 2k_{1\alpha kp}^*) \int \varphi_k n_y dS \int \Psi_i n_y dS + k_{1\alpha kp}^* \int \varphi_k n_x dS \int \Psi_i n_x dS, \\
 c &= \sum_p k_{2\alpha kp}^* \int \varphi_k n_x dS \int \Psi_i n_y dS + k_{1\alpha kp}^* \int \varphi_k n_y dS \int \Psi_i n_x dS, \\
 d &= \sum_p k_{2\alpha kp}^* \int \varphi_k n_y dS \int \Psi_i n_x dS + k_{1\alpha kp}^* \int \varphi_k n_x dS \int \Psi_i n_y dS.
 \end{aligned}$$

8.4 Limitation de l'incrément

Au cours des pas de temps, la fraction volumique de certaines mailles peut être très faible, le saut de contrainte entre les matériaux peut être grand ou la discontinuité de vitesses normales peut être élevée. Dans ces situations, le nœud interne peut être amené à avoir de grands déplacements et donc de grandes vitesses pour permettre de respecter toutes les équations en fin de pas de temps. Les sous-mailles subissent alors une grande compression ou détente en un seul pas de temps.

La résolution du système non-linéaire se fait par itérations de systèmes linéarisés. Ces systèmes approchent le comportement du système autour de l'état prédit « * ». Lors de grande variation de la position du nœud interne, l'approximation linéaire peut sortir de son domaine de validité et la correction d'une itération peut être trop importante. Dans ces cas, les nœuds internes peuvent avoir une vitesse trop grande qui les fait sortir de leur maille mixte. La géométrie du système n'a alors pas sens et il n'est plus possible de continuer la résolution du système.

Pour éviter cela, nous limitons l'amplitude de la correction appliquée dans une itération de l'algorithme Γ . Cette limitation s'apparente à une recherche linéaire dans notre méthode de Newton (*Newton with line search*). Nous limitons alors le changement de volume des sous-mailles en une seule itération ce qui permet de rester dans des domaines où l'approximation linéaire reste valide et évite ainsi aux nœuds internes de sortir des mailles mixtes.

La résolution du système nous donne alors la direction de recherche de la solution et nous cherchons ensuite la « distance » que nous pouvons parcourir dans cette direction. Après limitation, la pression d'interface n'est plus suffisante pour maintenir les matériaux en non-pénétration. La continuité des vitesses n'est donc pas obligatoirement respectée après la correction. Lors de l'itération suivante, le nouveau système corrige le résidu de la continuité des vitesses introduit par la limitation de l'itération précédente avec une linéarisation autour du nouvel état « * ».

8.4.1 Limitation de la correction dans une sous-maille

Nous cherchons donc à limiter la variation des volumes de chaque sous-maille lors d'une itération. Soit un triangle ABC , son volume est donné par la formule

$$2V_{ABC}^* = \|\underline{BA} \wedge \underline{BC}\| = (x_A - x_B)(y_C - y_B) - (y_A - y_B)(x_C - x_B)$$

Dans notre cas, nous appliquons une correction de vitesse aux nœuds A , B et C pendant un temps Δt , le volume en fin de pas de temps est donc

$$2V_{ABC}^{n+1} = (x_A + \Delta t \delta u_A - x_B - \Delta t \delta u_B)(y_C + \Delta t \delta v_C - y_B - \Delta t \delta v_B) \\ - (y_A + \Delta t \delta v_A - y_B - \Delta t \delta v_B)(x_C + \Delta t \delta u_C - x_B - \Delta t \delta u_B),$$

avec x et y , les composantes du vecteur position \underline{x} et u et v , les composantes de la vitesse \underline{u} . Le volume final ne doit pas passer en dessous d'un seuil limite V_{\min} et nous cherchons le coefficient α de limitation de l'incrément tel que

$$2V_{\min} < 2V_{ABC}^{n+1} = (x_A - x_B + \alpha \Delta t (\delta u_A - \delta u_B))(y_C - y_B + \alpha \Delta t (\delta v_C - \delta v_B)) \\ - (y_A - y_B + \alpha \Delta t (\delta v_A - \delta v_B))(x_C - x_B + \alpha \Delta t (\delta u_C - \delta u_B)).$$

En développant et regroupant les termes en $\alpha \Delta t$, la condition précédente devient

$$2V_{\min} < 2V_{ABC}^{n+1} = 2V_{ABC}^* + \\ \alpha \Delta t ((\delta u_A - \delta u_B)(y_C - y_B) + (x_A - x_B)(\delta v_C - \delta v_B)) \\ + (\alpha \Delta t)^2 (\delta u_A - \delta u_B)(\delta v_C - \delta v_B) \\ - \alpha \Delta t ((\delta v_A - \delta v_B)(x_C - x_B) + (y_A - y_B)(\delta u_C - \delta u_B)) \\ - (\alpha \Delta t)^2 (\delta v_A - \delta v_B)(\delta u_C - \delta u_B).$$

Nous avons donc un polynôme d'ordre 2 en $\alpha \Delta t$ à résoudre pour obtenir la limitation dans notre sous-maille

$$a(\alpha \Delta t)^2 + b(\alpha \Delta t) + c > 0 \quad (8.74)$$

avec

$$a = (\delta u_A - \delta u_B)(\delta v_C - \delta v_B) - (\delta v_A - \delta v_B)(\delta u_C - \delta u_B), \\ b = ((\delta u_A - \delta u_B)(y_C - y_B) + (x_A - x_B)(\delta v_C - \delta v_B)) \\ - ((\delta v_A - \delta v_B)(x_C - x_B) + (y_A - y_B)(\delta u_C - \delta u_B)), \\ c = 2V_{ABC}^* - 2V_{\min}.$$

Le pas de temps est positif et le coefficient α est un terme positif compris entre 0 et 1. Nous cherchons alors la plus grande valeur de α assurant le respect de la limitation.

Si le volume est V_{ABC}^* est plus petit que le volume minimal, $c < 0$ et il n'est pas possible de trouver un incrément assurant le respect de la limitation. Le facteur α est alors nul et le système ne peut plus converger.

Si c est positif, la limitation de l'incrément est la plus petite valeur de $\alpha \Delta t$, racine de l'équation (8.74), comprise dans $[0, \Delta t]$. Si les racines de l'équation ne sont pas comprises dans cet intervalle, aucune limitation ne s'applique. Appelons α_1 et α_2 , les deux racines de (8.74), la limitation α a pour expression locale sur la sous-maille ω_{kp} déformée à la vitesse \underline{u} ,

$$\alpha_{\alpha kp} = \max(0; \min(\min(\alpha_1; \alpha_2); 1)).$$

8.4.2 Limitation de la correction du système

La recherche de cette limitation pour toutes les sous-maillles triangulaires et pour chaque matériau nous donne alors une limitation $\alpha_{\alpha kp}$ locale de la correction. La limitation appliquée à tout le système est la valeur minimale de la correction dans les sous-maillles,

$$\alpha = \min_{\alpha, k, p} \alpha_{\alpha kp}.$$

Cette limitation est globale sur toute l'interface. Lors de la résolution du système non-linéaire, si une maille est limitée, elle ralentit donc la convergence de toute l'interface. Dans le pire des cas, si l'état « * » est sur la frontière du domaine admissible, α peut être nul et la convergence du système ne peut plus évoluer. En pratique, cela peut arriver lorsque les fractions volumiques de certaines mailles sont très faibles. Dans ce cas, la continuité des vitesses n'est pas respectée en fin de pas de temps mais elle est rétablie par la résolution du système au pas de temps suivant sur un maillage avec des fractions volumiques différentes. L'écriture d'une limitation locale permettrait de rendre la résolution du système plus robuste.

8.5 Calcul de l'état thermodynamique

Une fois le système résolu et la limitation déterminée, nous obtenons la correction à appliquer à la pression d'interface dans chaque maille

$$p_{\Gamma k}^n = p_{\Gamma k}^* + \alpha \delta p_{\Gamma k}.$$

Nous pouvons ensuite en déduire l'incrément de vitesse des nœuds sommets par (8.58) et (8.59) et des nœuds internes par (8.67) et (8.68).

La suite de l'itération de notre méthode de Newton se déroule dans le même ordre que la phase lagrangienne du schéma classique (voir paragraphe 4.2.4.6). Les positions $\underline{x}_{\alpha i}^{n+1}$ sont mises à jour par l'équation (8.8) pour chaque matériau pour calculer géométriquement les nouveaux volumes $V_{kp}^{\alpha n+1}$. Les densités $\rho_{\alpha kp}^{n+1}$ des sous-maillles sont mises à jour grâce aux déformations des mailles par (8.12). La pseudo-viscosité est calculées par son expression (8.14). Enfin, le nouvel état thermodynamique des sous-maillles est obtenu en résolvant le système (8.16)-(8.17) :

$$e_{\alpha kp}^{n+1} = e_{\alpha kp}^n - \left(\frac{p_{\alpha kp}^n + p_{\alpha kp}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\alpha kp}^{n+1}} - \frac{1}{\rho_{\alpha kp}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha kp}^{n+1/2}} (\underline{S}_{\alpha kp}^{n+1/2} : \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) - W_{q_{\alpha kp}^{n+1/2}}, \quad (8.75)$$

$$p_{\alpha kp}^{n+1} = P(e_{\alpha kp}^{n+1}, \rho_{\alpha kp}^{n+1}), \quad (8.76)$$

complété par l'actualisation du déviateur des contraintes,

$$\underline{S}_{\alpha kp}^{n+1} = \underline{S}_{\alpha kp}^n + 2G_{\alpha}(t^{n+1} - t^n) \left(\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}) \mathbf{1} \right). \quad (8.77)$$

8.6 Critère de convergence de l'algorithme Γ

À la fin du calcul de l'état thermodynamique, les valeurs des contraintes estimées $\underline{\sigma}_{\alpha kp}^* + \delta \underline{\sigma}_{\alpha kp}$ et $\underline{\sigma}_{\beta kp}^* + \delta \underline{\sigma}_{\beta kp}$ lors de la première étape peuvent être différentes des contraintes calculées $\underline{\sigma}_{\alpha kp}^{n+1}$ et $\underline{\sigma}_{\beta kp}^{n+1}$ par la loi d'état. Dans ce cas, les vitesses des nœuds internes et des nœuds sommets ne sont pas en accord avec leurs équations de quantité de mouvement (8.3)-(8.4) ou d'équilibre

(8.5)-(8.6). Nous faisons alors une nouvelle itération en posant :

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_{\alpha i}^* &= \underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2}, \\
 \underline{u}_{\alpha k}^* &= \underline{u}_{\alpha k}^{n+1/2}, \\
 p_{\Gamma k}^* &= p_{\Gamma k}^n, \\
 \underline{x}_{\alpha i}^* &= \underline{x}_{\alpha i}^{n+1}, \\
 \underline{x}_{\alpha k}^* &= \underline{x}_{\alpha k}^{n+1}, \\
 V_{\alpha kp}^* &= V_{\alpha kp}^{n+1}, \\
 \rho_{\alpha kp}^* &= \rho_{\alpha kp}^{n+1}, \\
 \underline{d}_{\alpha kp}^* &= \underline{d}_{\alpha kp}^{n+1/2}, \\
 \underline{\underline{S}}_{\alpha kp}^* &= \underline{\underline{S}}_{\alpha kp}^{n+1}, \\
 e_{\alpha kp}^* &= e_{\alpha kp}^{n+1}, \\
 p_{\alpha kp}^* &= p_{\alpha kp}^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Puis nous cherchons la correction de pression d'interface qui va permettre de respecter toutes les équations en résolvant à nouveau le système linéarisé.

L'algorithme a convergé si la norme de l'incrément de pression d'interface $\|\delta p_{\Gamma}\|$ est assez faible,

$$\|\delta p_{\Gamma}\| = \left(\sum_{k \in M_{\Gamma}} \delta p_{\Gamma k} \right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

En effet, nous avons alors bien dans ce cas, à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\underline{\underline{\sigma}}_{\alpha kp}^{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha kp}^*$ et $\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} = \underline{u}_{\alpha i}^*$.

8.7 Prise en compte des conditions aux limites

Le calcul des vitesses étant implicite, les conditions aux limites doivent être prises en compte lors de la résolution du système. Remarquons d'abord que les conditions aux limites s'appliquent sur le bord du domaine et n'affectent donc jamais les nœuds internes.

Comme dans le chapitre précédent, nous considérons les conditions aux limites de type Dirichlet

$$\underline{u}_{\alpha i}(t) \cdot \underline{n}_{di}(t) = c_i(t), \quad \forall \alpha, \forall i \in N_d.$$

Si nous supposons que les vitesses $\tilde{\underline{u}}_{\alpha i}$ respectent déjà les conditions aux limites, nous pouvons écrire

$$\left(\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \right) \cdot \underline{n}_{di} = 0. \quad (8.78)$$

Nous pouvons ré-écrire l'équation de dynamique des nœuds sommets (8.3)

$$m_{\alpha i} \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}}{\delta t} = \sum_{k \in M_i \cap M_{\Gamma}} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_{\Gamma} dS$$

en décomposant selon la normale et la tangente à la condition aux limites ce qui donne

$$\frac{m_{\alpha i}}{\delta t} \left(\left(\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \right) \cdot \underline{n}_{di} \underline{n}_{di} + \left(\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i} \right) \cdot \underline{t}_{di} \underline{t}_{di} \right) =$$

$$\left(\sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) \cdot \underline{n}_{di} \underline{n}_{di} + \left(\sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) \cdot \underline{t}_{di} \underline{t}_{di}.$$

En utilisant (8.78), la prise en compte des conditions aux limites nous permet d'écrire

$$m_{\alpha i} \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}}{\delta t} = \left(\sum_{k \in M_i \cap M_\Gamma} p_{\Gamma k} \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i \underline{n}_\Gamma dS \right) \cdot \underline{t}_{di} \underline{t}_{di} \quad (8.79)$$

ce qui peut également s'écrire sous la forme

$$m_{\alpha i}^n \frac{\underline{u}_{\alpha i}^{n+1/2} - \tilde{\underline{u}}_{\alpha i}}{\delta t} = (\underline{t}_{di} \otimes \underline{t}_{di}) \cdot \sum_{k \in M_i} p_{\Gamma k}^{n+1} \underline{n}_\Gamma^n \int_{\Gamma_k^n} \Psi_i dS, \quad \forall \alpha, \forall i \in N_d \cap N_\Gamma.$$

Cette dernière équation remplace l'équation de la dynamique du nœud (8.3) si le nœud est soumis à une condition aux limites. Dans l'écriture matricielle de notre système, la modification de cette équation se traduit par la modification de la matrice de masse élémentaire des nœuds soumis à une condition aux limites

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1/m_{\alpha i} & 0 \\ \hline 0 & 1/m_{\alpha i} \\ \hline \end{array}$$

pour lui donner la forme

$$(\underline{t}_{di} \otimes \underline{t}_{di}) \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1/m_{\alpha i} & 0 \\ \hline 0 & 1/m_{\alpha i} \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{n_{dy}^2}{m_{\alpha i}} & -\frac{n_{dy} n_{dx}}{m_{\alpha i}} \\ \hline -\frac{n_{dy} n_{dx}}{m_{\alpha i}} & \frac{n_{dx}^2}{m_{\alpha i}} \\ \hline \end{array}.$$

Sous cette forme, nous faisons apparaître que la prise en compte de la condition aux limites revient à augmenter la masse du nœud dans la direction normale de la condition aux limites. En augmentant la masse dans une direction, nous limitons son déplacement dans cette direction.

Nous avons supposé que les vitesses prédites $\tilde{\underline{u}}_\alpha$ respectaient les conditions aux limites, nous prenons donc soin d'appliquer les conditions aux limites avant de résoudre le système implicite.

Chapitre 9

Cas test et validation

Sommaire

9.1	Rotation d'un disque	150
9.1.1	Description	150
9.1.2	Résultats et interprétations	153
9.2	Piston 1D	156
9.2.1	Description	156
9.2.2	Résultats et interprétations	157
9.3	Arrivée d'un choc circulaire sur un solide	162
9.3.1	Description	162
9.3.2	Résultats et interprétations	163
9.4	Passage d'une interface circulaire par une onde plane	168
9.4.1	Description	168
9.4.2	Résultats et interprétations	169
9.5	Conclusion	178

Nous présentons dans ce chapitre, différents cas tests pour valider notre méthode. Pour cela, nous comparons les deux variantes de notre schéma et les confrontons lorsque cela est possible avec le schéma ALE présenté lors du chapitre 4 utilisant une vitesse moyenne ou avec un schéma lagrangien avec une méthode de glissement classique « lagrangienne ». Nous étudions différents cas :

- le premier est la rotation d'un disque, permettant d'étudier un cas de glissement pur ;
- le second est un tube à choc 1D, présentant le comportement de l'interface dans sa direction normale ;
- le troisième et le quatrième couplent ces deux effets. D'abord, nous étudions un choc circulaire dans un gaz et transmis à un solide puis un glissement entre solide sous choc.

Dans ces cas, nous nous intéressons tout particulièrement aux discontinuités de vitesses dans le domaine ainsi que le comportement en terme de pression et contrainte de l'interface.

Pour des raisons de simplicité de comparaison, les schémas ALE utilisés dans ce chapitre (vitesse moyenne, continuité par nœud, continuité par maille) projettent toutes les grandeurs sur le maillage initial à chaque pas de temps. Nous avons alors des schémas équivalents à des schémas eulériens. Cette situation provoque une diffusion numérique importante des champs mais facilitent les comparaisons en se plaçant sur des maillages identiques quelle que soit le schéma utilisé.

9.1 Rotation d'un disque

9.1.1 Description

Le premier cas auquel nous nous intéressons est un cas de glissement pur. Ce test permet dans un premier temps de vérifier que notre méthode peut prendre en compte une discontinuité de vitesse ainsi que le glissement entre deux matériaux même si l'interface est située à l'intérieur des mailles.

Un disque en aluminium de 0,25m de rayon est en rotation dans un support constitué du même matériau (voir figure 9.1 pour la géométrie du système). Nous testons ici principalement

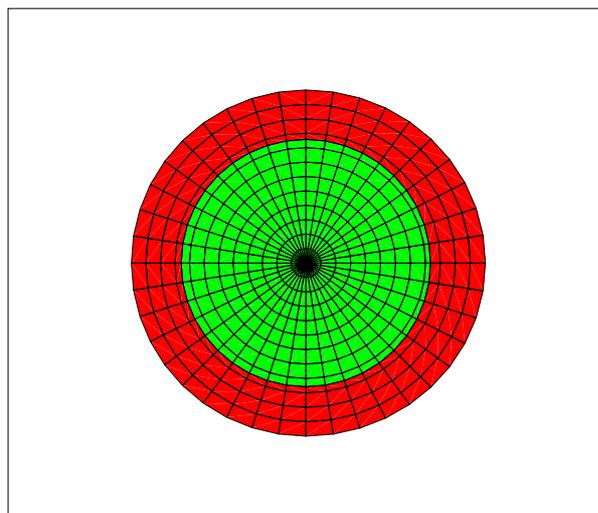


FIGURE 9.1 – Disque en rotation : géométrie initiale. La partie verte représente le disque en rotation et la rouge, le support. Le périmètre extérieur du domaine est encasté.

la discontinuité de vitesse tangentielle à l'interface. Les efforts radiaux se résument aux forces centrifuges.

Les matériaux sont modélisés par un comportement élastique pour la partie déviatorique des contraintes et dotés d'un loi d'état de type « Mie Gruneisen » pour la partie sphérique. La pression initiale dans le domaine est nulle et le densité de l'aluminium est de 2785 kg/m^3 . Le support est encastré sur sa frontière extérieure. Le disque est initialisé avec une vitesse de rotation de $628,32 \text{ rad.s}^{-1}$ soit 6000 tours/min (figure 9.2) et la simulation dure 10ms. Nous avons une hypothèse de glissement parfait. À la fin de ce temps, le disque doit avoir toujours la même vitesse et aura donc réalisé un tour complet.

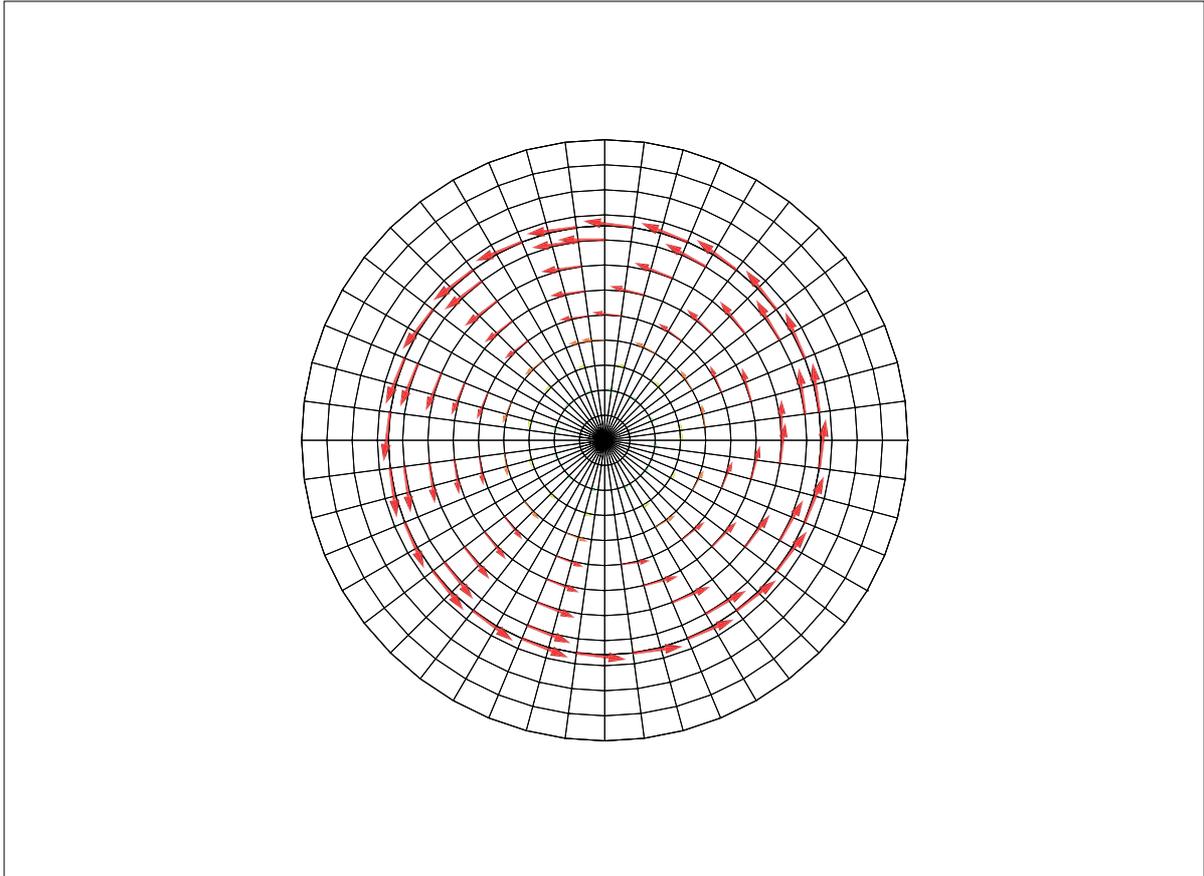


FIGURE 9.2 – Disque en rotation : vitesse initiale. À l'instant initial, le support est au repos et le disque a une vitesse de rotation (Pour plus de lisibilité, la vitesse n'est représentée que sur quelques nœuds du maillage.).

Plusieurs niveaux de raffinement de maillage sont testés (voir figure 9.3) pour les deux variantes, *i.e.* la continuité par nœud et par maille :

1. 12 éléments le long d'un rayon, 48 le long du périmètre,
2. 20 éléments le long d'un rayon, 80 le long du périmètre,
3. 40 éléments le long d'un rayon, 160 le long du périmètre.

Dans tous les cas, l'interface se situe à l'intérieur d'une bande de maille faisant le tour du disque.

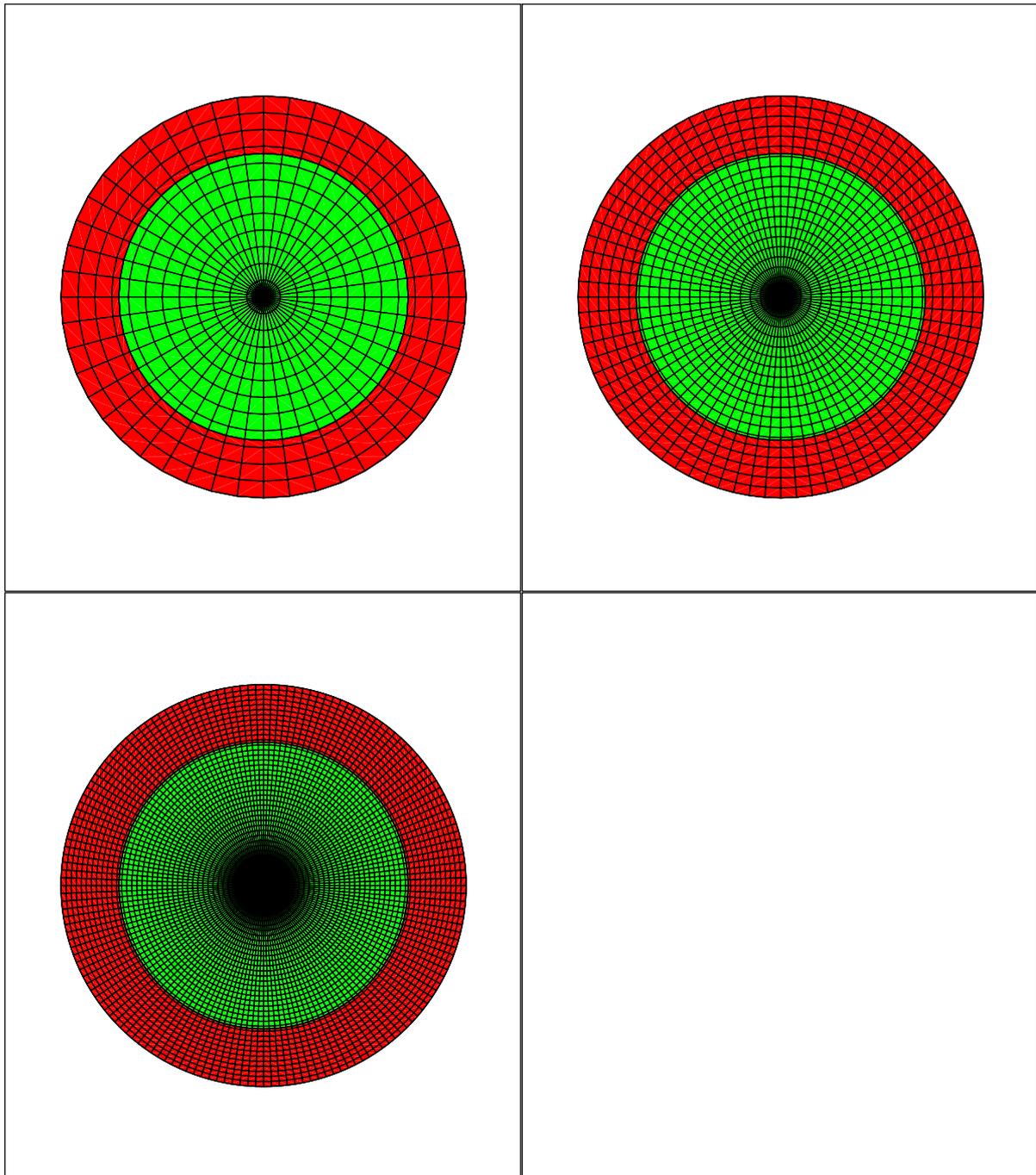


FIGURE 9.3 – Disque en rotation : niveaux de raffinement testés. Trois niveaux de raffinement du maillage sont testés. Ils seront numérotés de 1 à 3 en allant du plus grossier au plus fin.

9.1.2 Résultats et interprétations

Vitesse de rotation du point 0.125;0 (écart par rapport à la vitesse initiale en pourcentage)

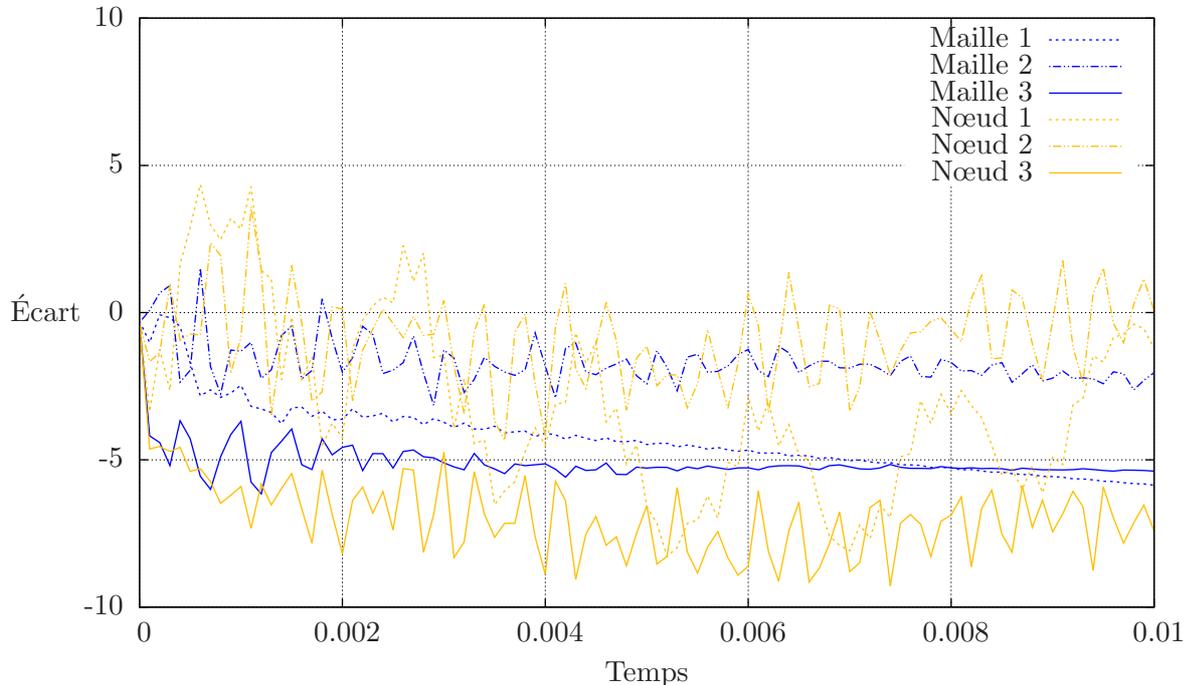


FIGURE 9.4 – Disque en rotation : vitesse de rotation. La vitesse du point ($x=0.125$; $y=0$) pour les deux variantes (nœud et maille) ainsi que les 3 maillages (1, grossier ; 2, moyen ; 3, fin) sont représentés sur le graphe. Des oscillations apparaissent à cause d'effet radiaux dus à la mise en rotation instantanée du disque. Même si la vitesse de rotation n'est pas la vitesse de rotation initiale, le disque continue son mouvement de corps rigide avec peu ou pas de ralentissements.

La figure 9.4 présente la vitesse de rotation d'un point situé au milieu du rayon du disque (coordonnées $x = 0,125$; $y = 0$) pour les deux variantes et les différents maillages.

Nous avons au début de la simulation une phase transitoire où le système se met en équilibre. En effet, le disque est mis instantanément en rotation à l'instant initial. Des forces centrifuges apparaissent et créent des ondes mécaniques dans le disque et dans le support. Elles sont la cause des oscillations que nous pouvons voir dans la vitesse de rotation (figure 9.4). Ces ondes peuvent s'observer en regardant la vitesse radiale du même point ($x = 0,125$; $y = 0$) (figure 9.6). Lorsque la taille des mailles diminue, ces effets sont mieux décrits et leur dissipation est moins importante d'où une amplitude d'oscillations plus grande lorsque la taille des mailles diminue. Ceci explique également la phase transitoire plus longue avec un maillage plus fin. Notons toutefois que la vitesse radiale qui apparaît reste faible ($\approx 0,8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) devant la vitesse orthoradiale ($\approx 75\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$).

Un ralentissement de la rotation du disque peut être observé. Cela s'explique par une diffusion de la quantité de mouvement lors des phases de projections et par une transmission de quantité de mouvement au support dans la direction radiale. Cette transmission est plus importante avec la continuité par maille car elle écrit l'équilibre des contraintes. Nous avons donc un ralentissement plus important avec la continuité par maille. Ce ralentissement diminue lorsque nous raffinons le maillage et la continuité par maille donne finalement de meilleurs

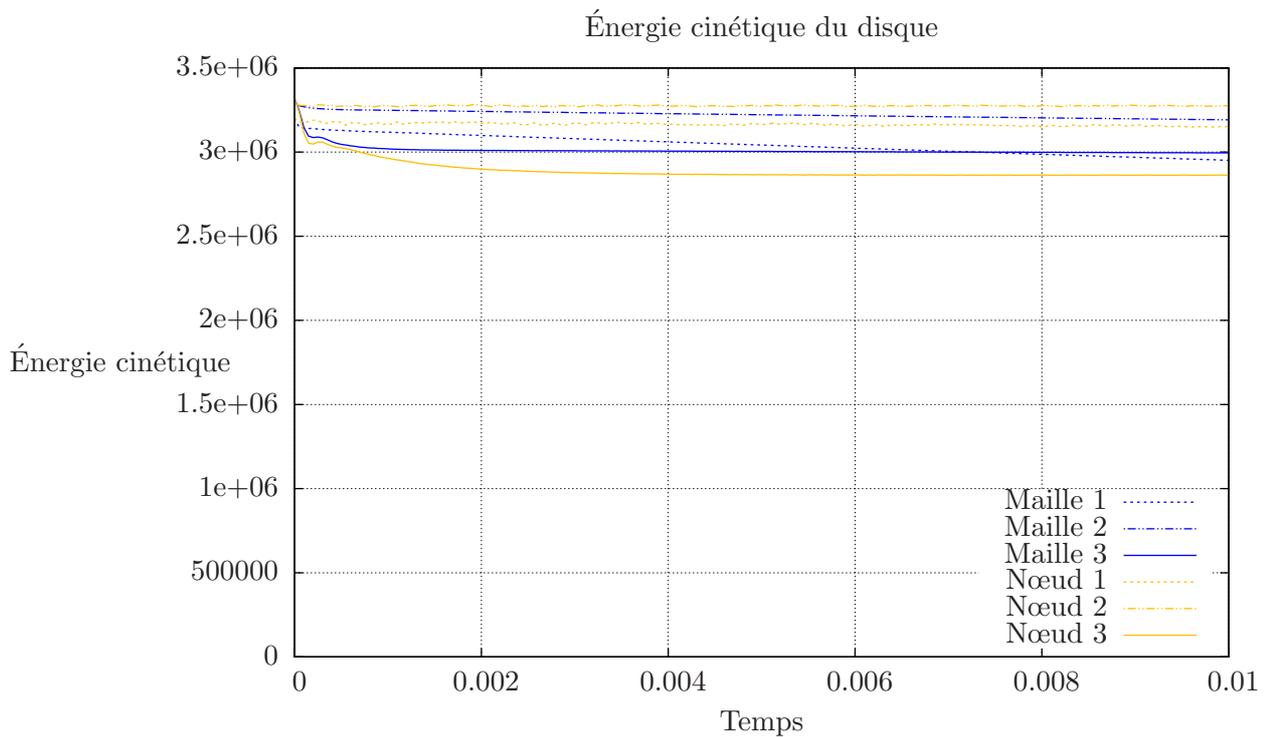


FIGURE 9.5 – Disque en rotation : énergie cinétique du disque. L'énergie cinétique du disque permet de suivre la rotation du disque au cours du temps. La diminution de l'énergie cinétique peut venir de la transmission de quantité de mouvement au support ou de dissipation de l'énergie cinétique lors de la projection de la quantité de mouvement.

résultats avec le maillage le plus fin. Elle présente moins d'oscillations car la contrainte de vitesse est écrite en moyenne et est moins sensible à la discrétisation du système.

Avec toutes ces variantes, la rotation du disque se maintient même si la vitesse de rotation finale est plus faible que celle théorique. La différence de palier s'explique par une différence d'équilibre des contraintes dues à la force centrifuge. Ces différences proviennent d'une discrétisation différente du domaine et d'un comportement en pression différent pour les deux méthodes.

L'énergie cinétique du disque au cours du temps (figure 9.5) confirme les observations faites sur les vitesses. L'énergie cinétique du disque connaît une phase transitoire et atteint un état d'équilibre où elle reste constante ou bien avec une diminution lente.

D'un point de vue temps de calcul, la continuité par nœud est meilleure. Pour le maillage le plus grossier, le temps moyen pour un pas de temps est de 0,12s alors qu'il est de 0,18s pour la continuité par maille. La continuité par maille donne donc de meilleurs résultats mais est plus coûteuse en terme de calcul.

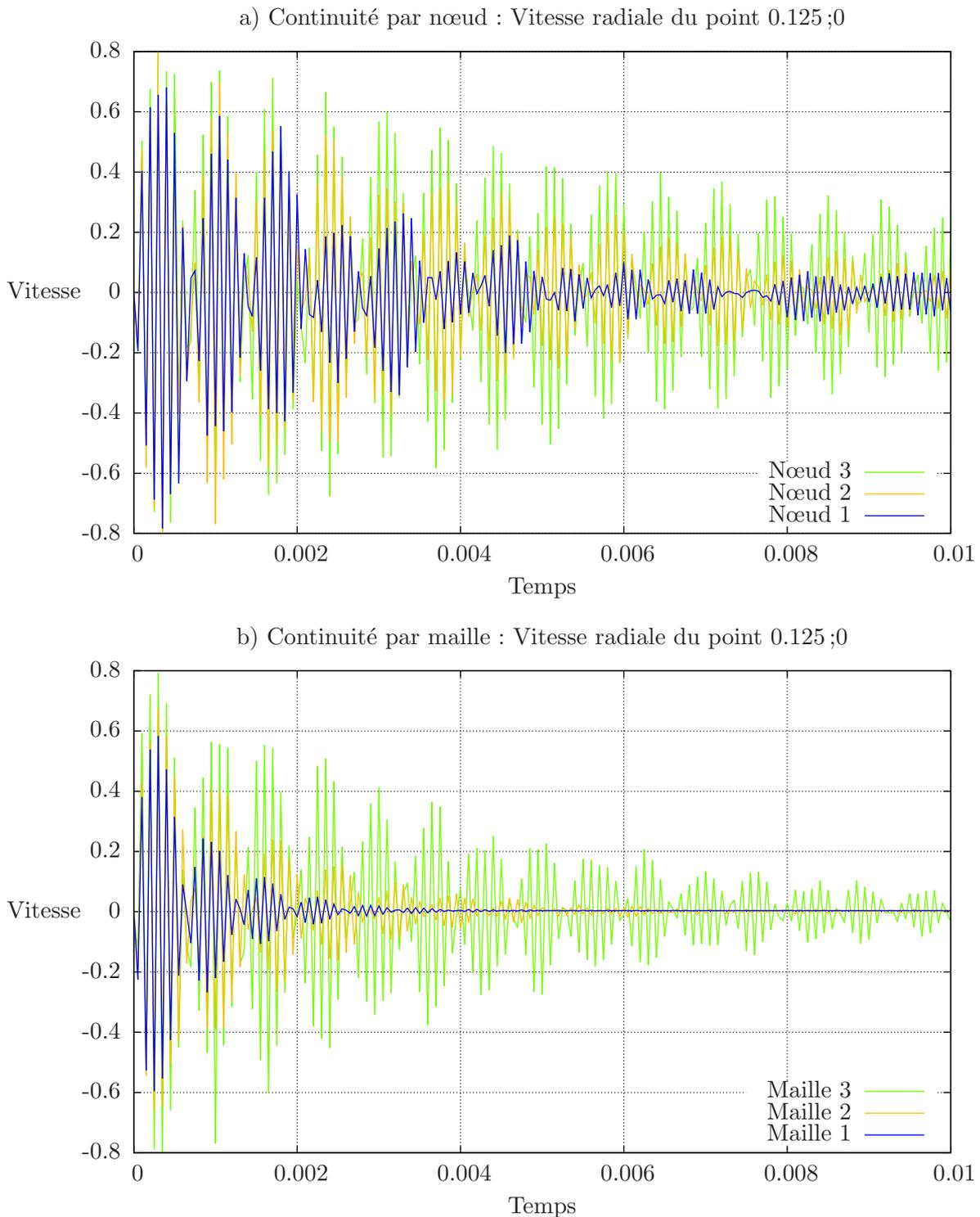


FIGURE 9.6 – Disque en rotation : vitesse radiale. La vitesse radiale d'un point du disque nous montre les compressions et détentes que connaît le disque au cours du temps. Ces effets sont dus à la mise en rotation instantanée du disque à $t = 0$. Ils sont mieux décrit lorsque le maillage se raffine, expliquant ainsi leur dissipation plus lente pour les cas les plus fin. La continuité par maille équilibre les contraintes et impose la continuité en moyenne ce qui dissipe plus rapidement les oscillations.

9.2 Piston 1D

9.2.1 Description

Le deuxième cas que nous étudions est un tube à choc dans lequel nous plaçons un piston solide. Une choc est initialisé dans un gaz (noté « gaz1 » sur la figure 9.7), il se propage et vient mettre en mouvement le piston.

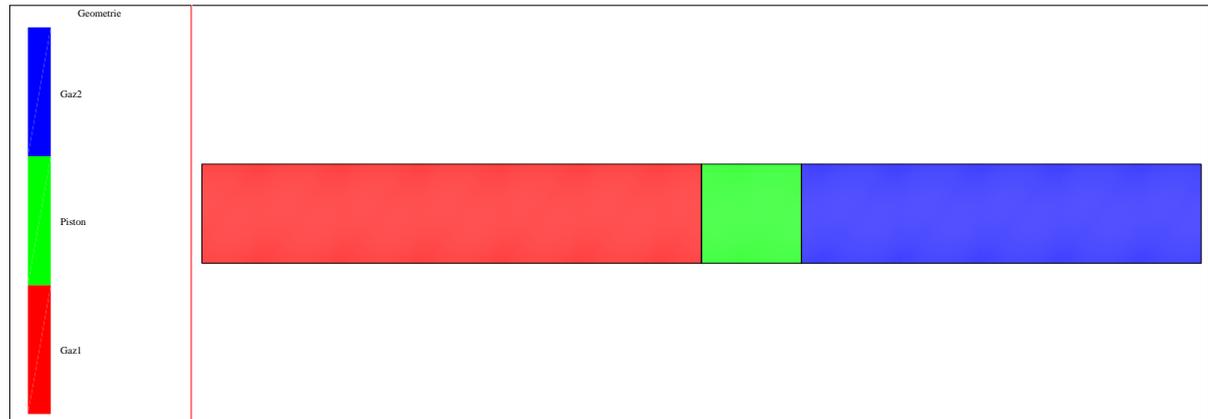


FIGURE 9.7 – Piston 1D : géométrie. La partie rouge ou bleue représente le gaz autour du piston. La partie verte est le piston solide.

Ce cas nous permet d'étudier le passage d'un choc à l'interface dans un cas simple. Ici, le système a une géométrie 1D et il n'y a pas de glissement à l'interface. Nous testons donc uniquement le comportement des matériaux et de l'interface dans la direction normale à celle-ci.

Le tube a une longueur de 1m et une largeur de 0.1m. Le piston est placée au milieu du tube et a une épaisseur de 10cm. Sur toute la frontière du domaine de calcul, des conditions aux limites équivalentes à un mur sont imposées. La vitesse normale au bord du domaine est imposée à zéro alors que la vitesse tangentielle le long du bord est laissée libre.

La loi d'état choisie pour le gaz est une loi de gaz parfait. Le choc est initialisé dans le gaz à l'abscisse $x = 0,25$ (voir figure 9.8) de la manière suivante :

	État gauche	État droit
Densité $\rho =$	50 kg/m ³	1 kg/m ³
Pression $p =$	10 ⁸ Pa	10 ⁵ Pa
Vitesse $u =$	0 m.s ⁻¹	0 m.s ⁻¹

Le piston est modélisé par un aluminium ayant un comportement élastique pour la partie déviatorique et doté d'une loi de type « Mie Gruneisen » pour la partie sphérique avec une pression hydrostatique initiale de 10⁵ Pa. Sa densité est de 2785 kg/m³. Le temps de simulation est de 2ms.

De nouveau, plusieurs niveaux de raffinement sont étudiés pour nos deux variantes :

1. 101 éléments dans le sens de la longueur, 3 dans la largeur,
2. 201 éléments dans le sens de la longueur, 6 dans la largeur,
3. 501 éléments dans le sens de la longueur, 10 dans la largeur.

Ces cas sont comparés aux résultats d'une simulation lagrangienne 1D finement discrétisée (2000 éléments) servant de référence et à une simulation ALE 2D utilisant une vitesse moyenne avec le maillage le plus fin (501 × 10 éléments).

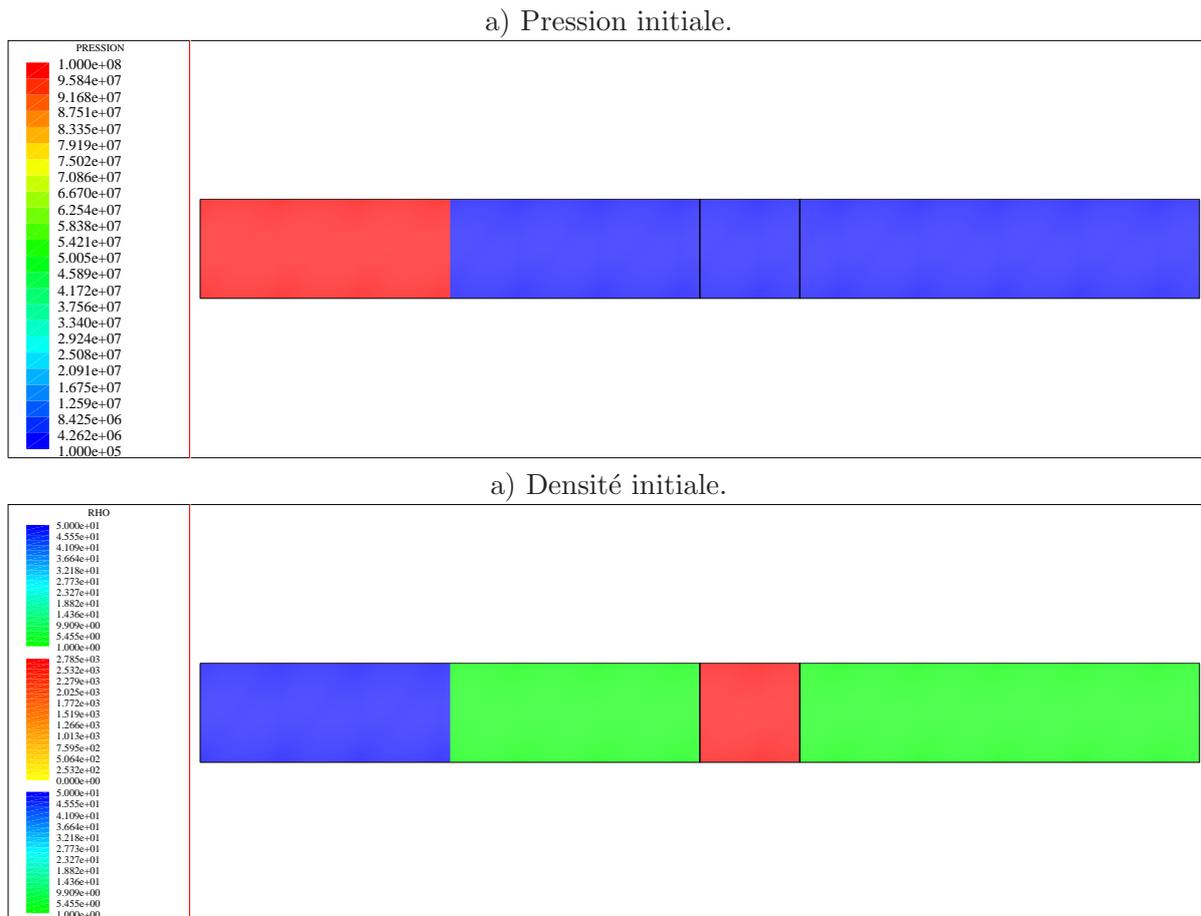


FIGURE 9.8 – Piston 1D : conditions initiales. Le choc est initialisé dans le gaz au quart du tube. La pression entre le piston et le gaz est à l'équilibre à l'instant initial.

9.2.2 Résultats et interprétations

Les graphes de la figure 9.9 présentent la vitesse le long du domaine en fin de simulation. Les solutions des méthodes ALE (vitesse moyenne, continuité par nœud et par maille) présentent des différences par rapport à la solution de référence de la méthode lagrangienne. Pour avoir des simulations plus facile à comparer, nous imposons aux 3 méthodes ALE de projeter les champs sur le maillage initial à chaque pas de temps. Nous avons ainsi des schémas équivalents à un schéma eulérien mais cette situation provoque une diffusion des champs à chaque pas de temps. Les différences entre la solution de référence lagrangienne et la solution des schémas ALE proviennent de la diffusion numérique lors des phases de projection que nous avons quelle que soit le schéma ALE utilisé. La diffusion est plus importante dans les zones de choc, où le gradient de vitesse est élevé. Le choc est ralenti et, à un temps donné, sa position est donc décalée entre les schémas (abscisse $x = 0,4$ sur la figure 9.9). Notons qu'un raffinement supplémentaire du maillage des schémas ALE devrait faire tendre les solutions des méthodes ALE vers la solution de la méthode lagrangienne.

Le détail du champ de vitesse autour du piston est présenté par la figure 9.10. La continuité par nœud ne retrouve pas la même vitesse pour le piston en fin de simulation. De plus, elle présente des oscillations qui n'apparaissent pas avec la continuité par maille. Le schéma avec continuité par maille améliore les résultats grâce à l'écriture de l'équilibre des contraintes entre

le piston et le gaz. Ce schéma ne présente pas d'oscillations du champ de vitesse dans le piston et retrouve bien la vitesse du piston obtenue avec la méthode lagrangienne.

L'erreur par rapport à la solution du schéma lagrangien est présentée figure 9.11 et confirme les remarques précédentes. La continuité par nœud n'obtient pas la même vitesse de piston et a une erreur importante alors que la continuité par maille obtient la bonne solution. L'erreur de cette dernière tend vers 0 lorsque nous raffinons le maillage et la solution converge bien vers la solution du schéma lagrangien. Notons que les oscillations de l'erreur avant l'interface (abscisse $x \leq 0,845$) sont dues en fait à la solution lagrangienne (voir la solution du schéma lagrangien sur la figure 9.10). Dans cette zone, le gaz est comprimé et le nombre de mailles est important. Les schémas ALE conservent des mailles fixes. Le nombre de maille dans cette zone est donc plus faible et la diffusion lors des phases de transport, plus importante. Cette diffusion permet de lisser les oscillations que nous obtenons avec le schéma lagrangien.

D'un point de vue temps de calcul, le schéma ALE classique a un temps moyen, pour une itération, de 0,19s. Pour le même maillage, la continuité par nœud a un temps d'itération de 0,22s alors que la continuité par maille a un temps d'itération moyen de 0,31s. Comme pour le cas précédent, le schéma « continuité par maille » met donc environ 50% de temps supplémentaire par rapport à la variante par nœud.

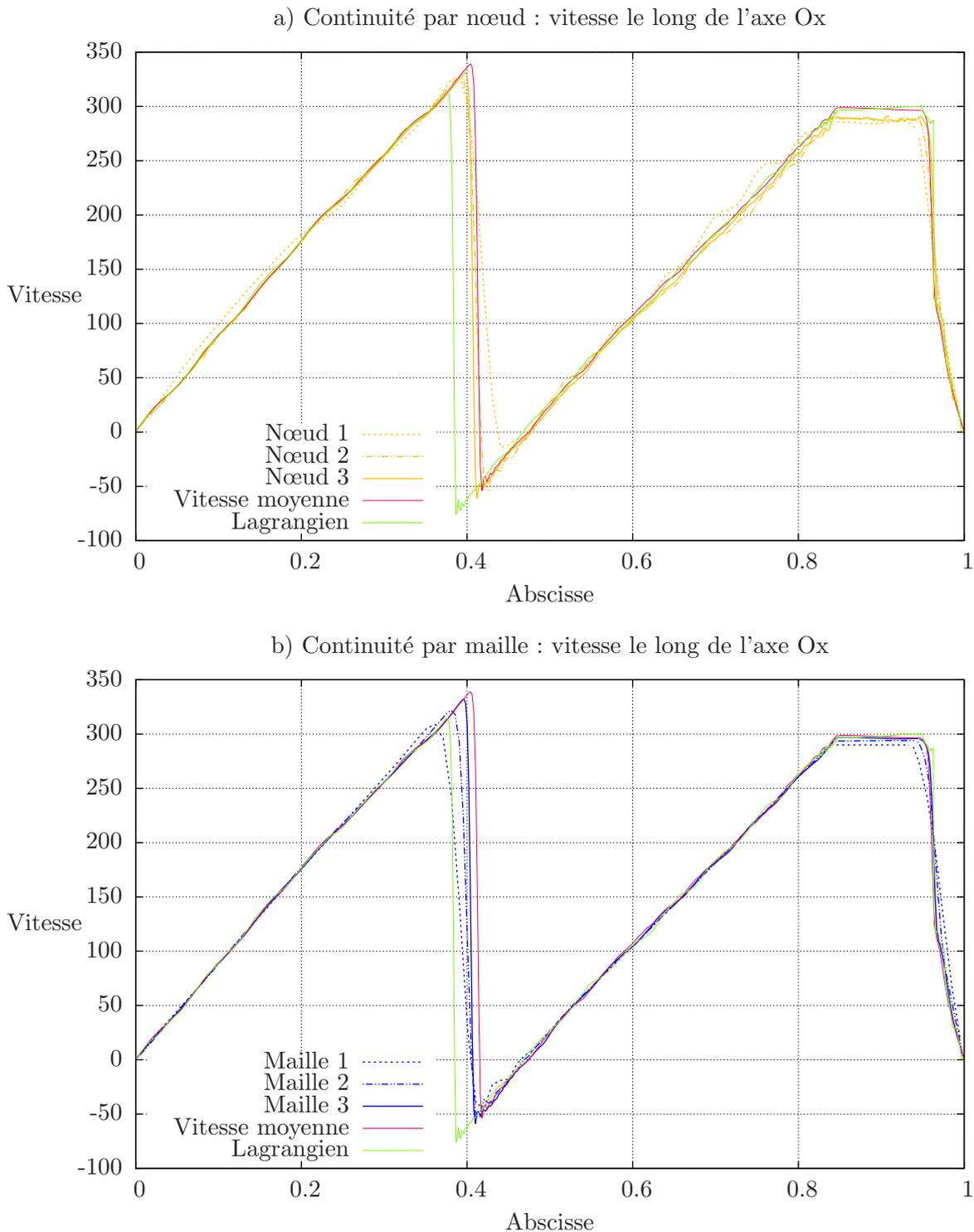


FIGURE 9.9 – Piston 1D : vitesse selon la direction Ox dans le domaine en fin de simulation. La diffusion lors des phases de projection des schémas ALE diffuse le champ de vitesse et ralentit la propagation des chocs. La position de la discontinuité de vitesses est donc décalée par rapport à la solution du schéma lagrangien.

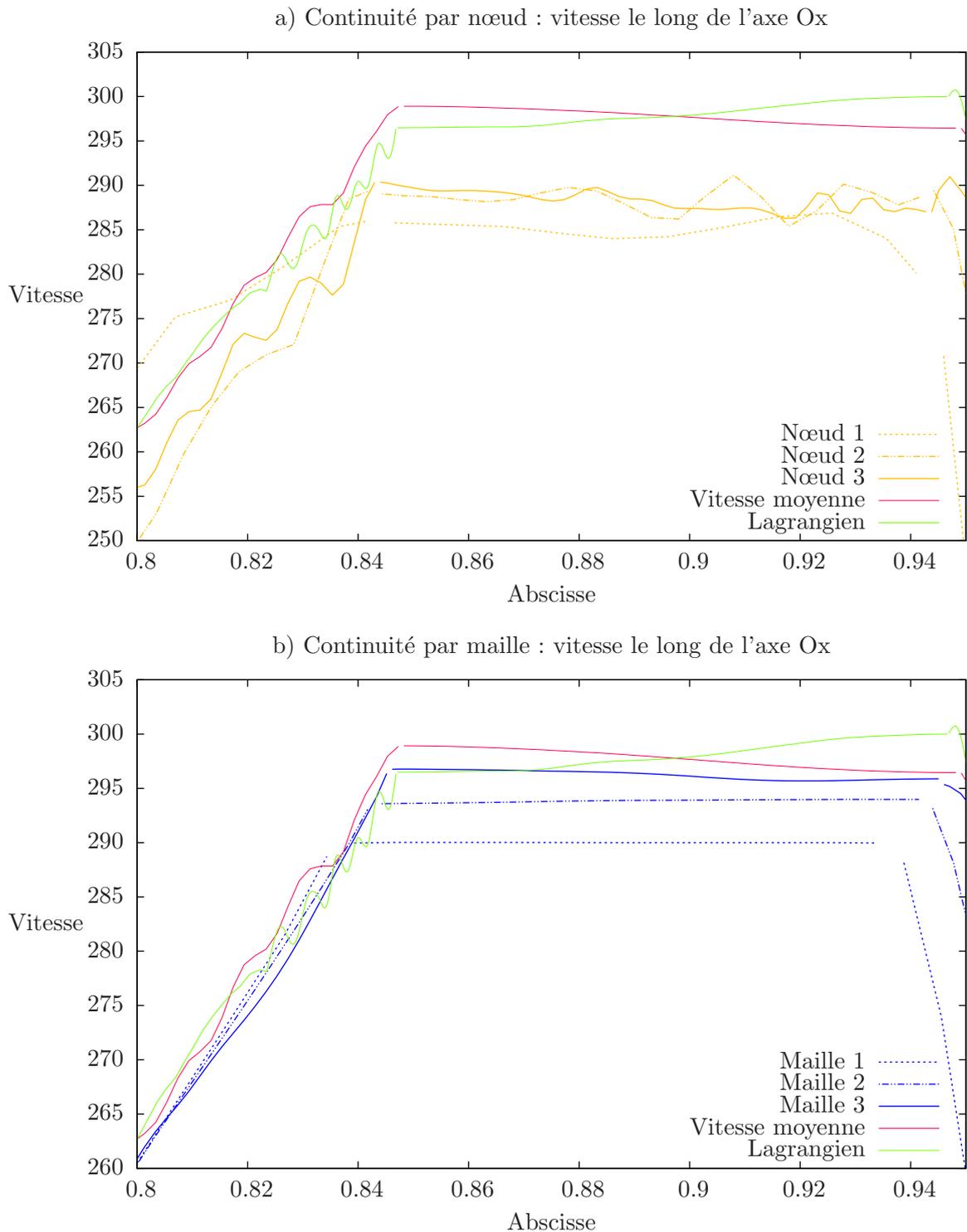
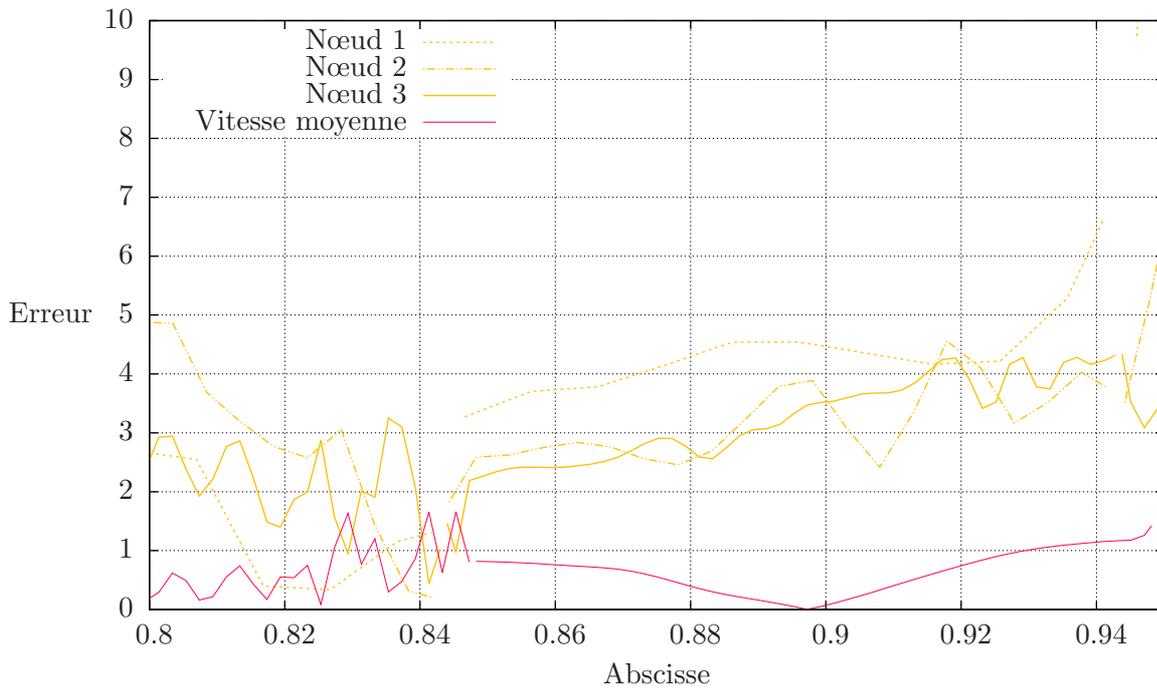


FIGURE 9.10 – Piston 1D : vitesse selon la direction Ox dans le domaine en fin de simulation (zoom aux alentours du piston). La continuité par nœud présente des oscillations et n'obtient pas la même vitesse de piston que le schéma lagrangien. La continuité par maille, quant à elle, obtient de meilleurs résultats et permet d'obtenir une vitesse correcte du piston.

a) Continuité par nœud : erreur relative par rapport à la solution lagrangienne de référence (en pourcentage)



b) Continuité par maille : erreur relative par rapport à la solution lagrangienne de référence (en pourcentage)

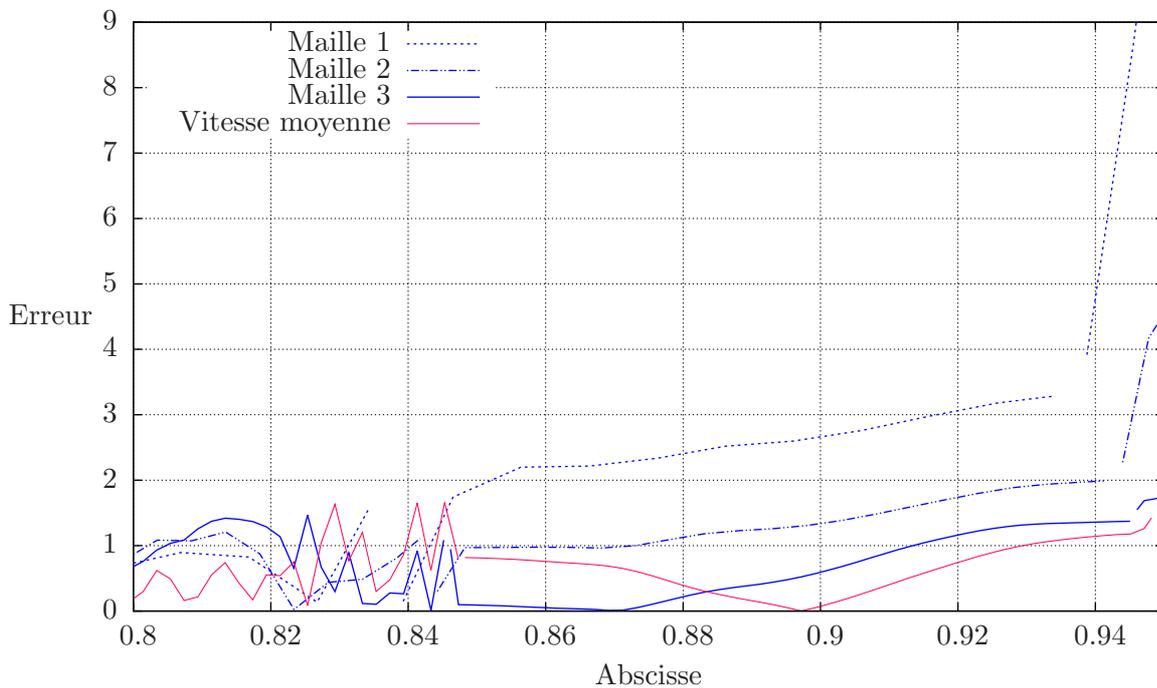


FIGURE 9.11 – Piston 1D : erreur de vitesse dans le domaine en fin de simulation (zoom aux alentours du piston). La continuité par nœud n’obtenant pas la même vitesse pour le piston, son erreur est plus importante. La continuité par maille converge bien vers la solution de référence. Les oscillations dans le gaz avant le piston ($x \leq 0,845$) sont dues aux oscillations de la solution de référence.

9.3 Arrivée d'un choc circulaire sur un solide

9.3.1 Description

Le cas suivant est l'étude d'un choc circulaire se propageant dans un gaz et arrivant sur un solide. Un domaine carré de $1 \times 1\text{m}$ est divisé en deux. La moitié gauche est remplie par un gaz alors que la moitié droite est une solide (voir figure 9.12). Le domaine est maillé par une grille cartésienne de 300×300 éléments.

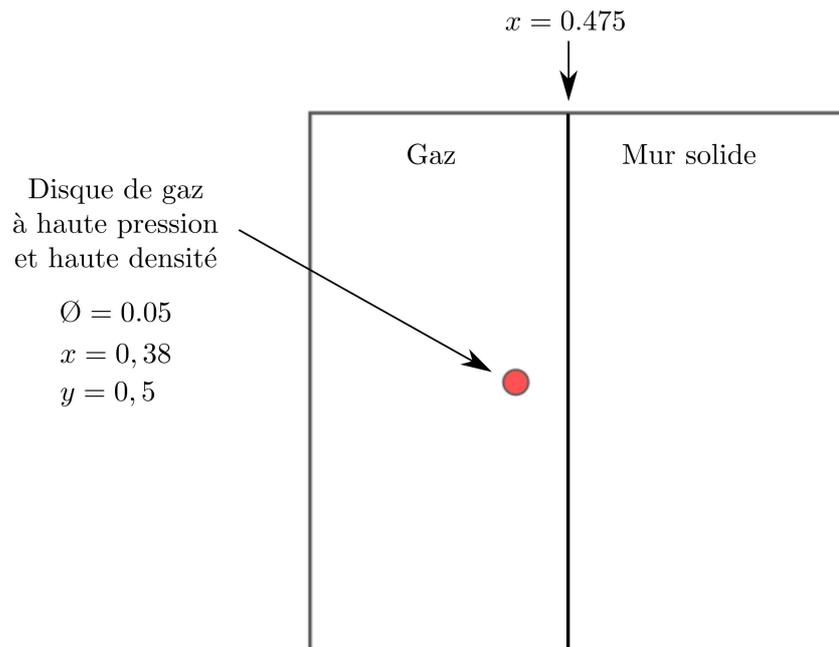


FIGURE 9.12 – Choc circulaire : géométrie.

Un disque de gaz à de haute pression est placé à proximité du mur (voir figure 9.12). Ce point crée un choc circulaire qui va mettre en mouvement le gaz. Celui-ci se déplace et glisse le long du mur. Ce cas permet de combiner la transmission d'un choc dans la direction normale à l'interface avec l'apparition de glissement entre les milieux.

Le gaz est modélisé par une loi de gaz parfait alors que le mur est un acier élasto-plastique parfait. L'acier est également doté d'une loi d'état en pression de type « Mie Gruneisen ».

Des conditions aux limites de mur sont imposées sur les bords de la boîte. La vitesse normale au bord y est imposée nulle et la vitesse tangentielle est laissée libre.

Le mur est initialisé à l'équilibre avec le gaz avec une pression hydrodynamique de 10^5Pa . Le point de départ du choc est un disque de 5cm de diamètre initialisé avec une grande densité et une grande pression. Le gaz est donc initialisé de la manière suivante en fonction de la position initiale :

	Point de départ du choc	Reste du domaine
Densité $\rho =$	129.3 kg/m^3	1.293 kg/m^3
Pression $p =$	10^9 Pa	10^5 Pa
Vitesse $u =$	0 m.s^{-1}	0 m.s^{-1}

La simulation se déroule jusqu'à un temps $t = 45\mu\text{s}$ et nous comparons nos deux méthodes avec la méthode ALE « vitesse moyenne » et un schéma lagrangien 2D.

9.3.2 Résultats et interprétations

La figure 9.13 présente la vitesse selon la direction Oy dans le domaine de calcul pour les 4 méthodes. Nous avons un glissement du gaz sur le mur et donc une discontinuité de vitesse tangentielle à l'interface. La méthode ALE classique ne permet pas le décrire correctement et la propagation du choc le long de l'interface est moins importante (voir l'extrémité de la « boule » dans le gaz sur les figures 9.13.a et 9.15.a). De plus, une couche limite de gaz immobile apparaît à l'interface (figure 9.13.a). Le schéma lagrangien ainsi que nos deux variantes permettent de décrire cette situation et les 3 schémas donnent des résultats similaires.

Notons que dans le but de diminuer les oscillations qui apparaissent dans le solide lors du passage de l'interface par le choc, pour le schéma ALE utilisant une vitesse moyenne et pour la continuité par nœud, une phase de relaxation des pressions dans les mailles mixtes est activée. En effet, lors d'une maille mixte avec des matériaux très différents (comme ici, un gaz et un solide), l'erreur sur le comportement moyen de la maille mixte est grande et fait apparaître des oscillations dans le champ de vitesse du solide. Cette phase permet d'équilibrer les pressions entre matériaux en ajustant les compressions locales des matériaux par maille mixte et vient ainsi tenter de corriger la discontinuité de pression qui apparaît dans les mailles pour ces méthodes. Elle diminue fortement les oscillations que nous avons avec ces deux schémas mais elles restent cependant d'amplitude supérieure à celle obtenue avec la continuité par maille et avec le schéma lagrangien (voir le champ de vitesse du solide dans la figure 9.13 et les coupes figures 9.16).

La coupe horizontale ($y = 0.65$) présentée figure 9.14 met en avant la discontinuité de vitesse que nous obtenons avec nos méthodes et la continuité des vitesses qu'impose par la méthode « vitesse moyenne ». Les solutions des trois méthodes ALE coïncident dans les zones éloignées de l'interface ce qui s'expliquent par l'utilisation de maillages identiques. Leur différence avec la solution du schéma lagrangien est due à la diffusion induite par les phases de projection.

La figure 9.15 présente le champ de pression dans une zone autour de l'interface. L'absence de glissement de la méthode ALE classique ralentit le déplacement du gaz et explique la différence de position du choc par rapport aux autres méthodes. Une bande de discontinuité de pression à l'interface entre le gaz et le solide peut se voir pour la méthode ALE classique et la continuité des vitesses par nœud. Cette bande est identique pour les deux schémas et vient du même traitement en terme de pression des mailles mixtes. Les deux autres schémas, lagrangien et continuité par maille, ont l'équilibre des contraintes entre les matériaux inclus dans leur formulation et ne présentent pas cette bande. Cette différence de traitement modifie la transmission du choc dans le solide et donc sa position dans le mur dans la direction normale à l'interface ce qui peut s'observer sur la figure 9.15.

La figure 9.16 présente des coupes verticales de la vitesse horizontale et de la pression dans le mur à proximité de l'interface ($x = 0.5$). Pour ces deux coupes, nous pouvons noter que la continuité par maille permet de retrouver une solution similaire à la méthode de contact lagrangien. Les phases de projection du schéma ALE à chaque pas de temps provoquent une diffusion qui diminue les oscillations. La continuité par maille donne au final une solution qui semble avoir moins d'oscillations que le schéma lagrangien. La continuité par nœud donne des résultats se situant entre la méthode ALE « vitesse moyenne » et le schéma lagrangien. Elle fait apparaître des oscillations plus importantes que la continuité par maille dans les champs de vitesse et de pression.

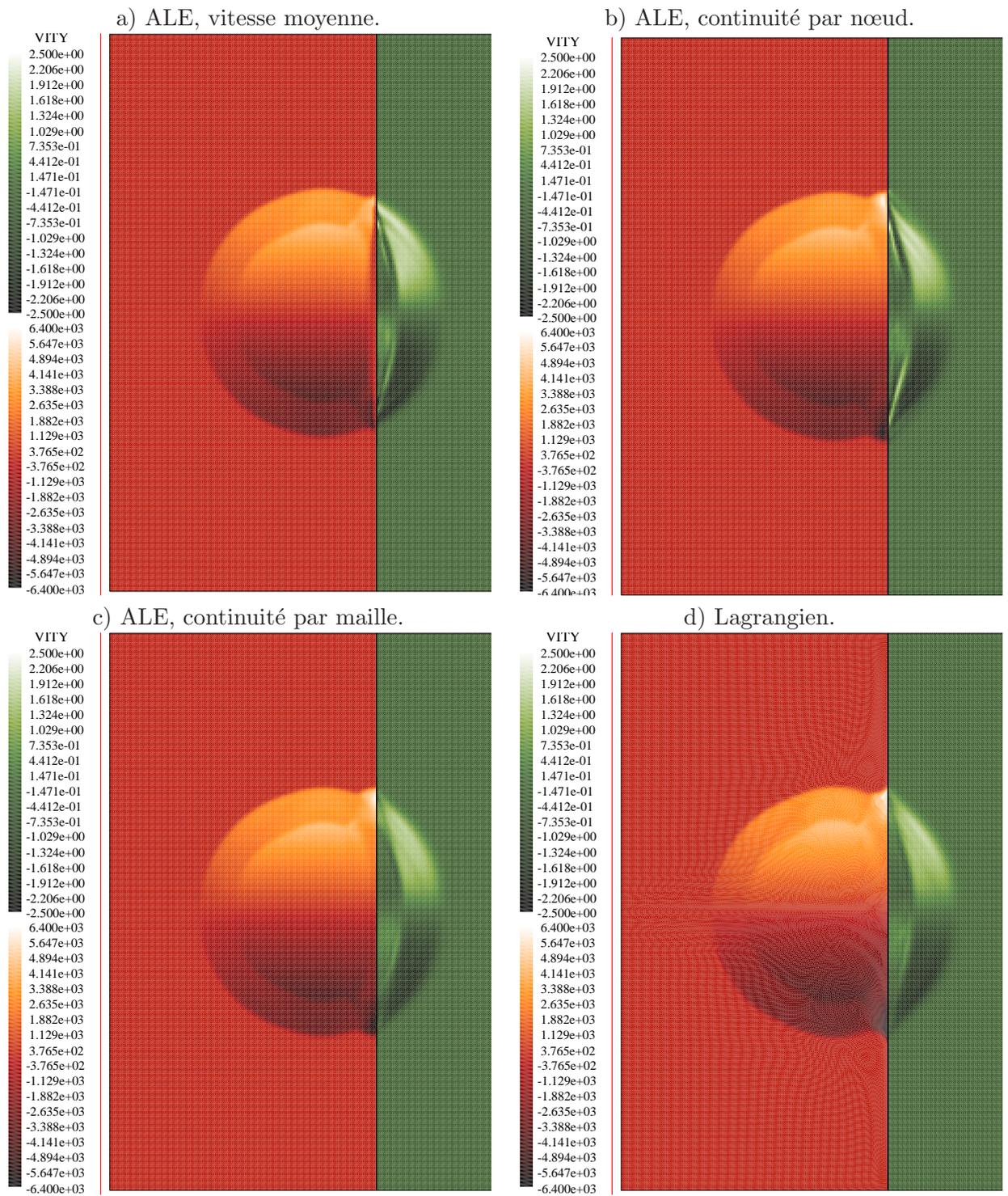


FIGURE 9.13 – Choc circulaire : vitesse dans la direction verticale dans le domaine. Deux échelles différentes de vitesses permettent de montrer la vitesse du gaz (en rouge) et du solide (en vert) sur une même figure. Le schéma ALE « classique » ne permet pas le glissement du gaz le long du mur. Elle présente une couche de gaz immobile et une position du choc différente des 3 autres méthodes.

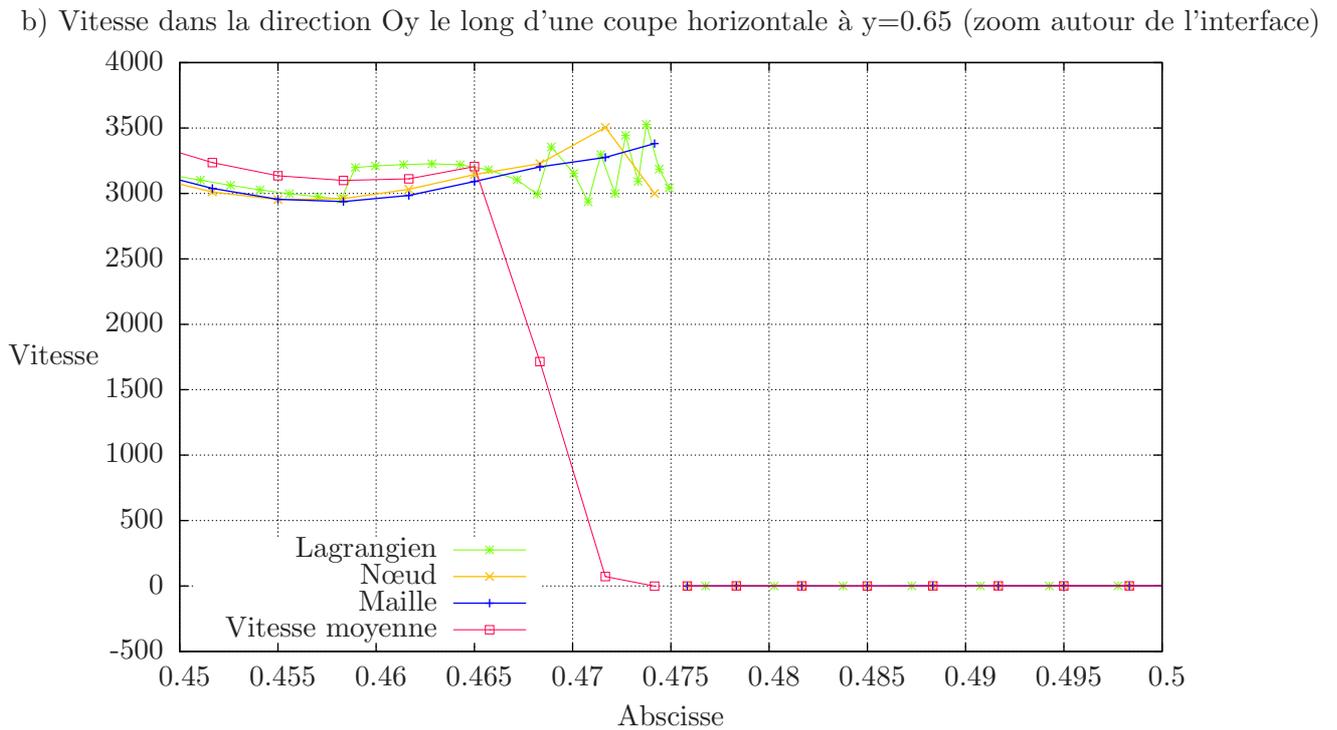
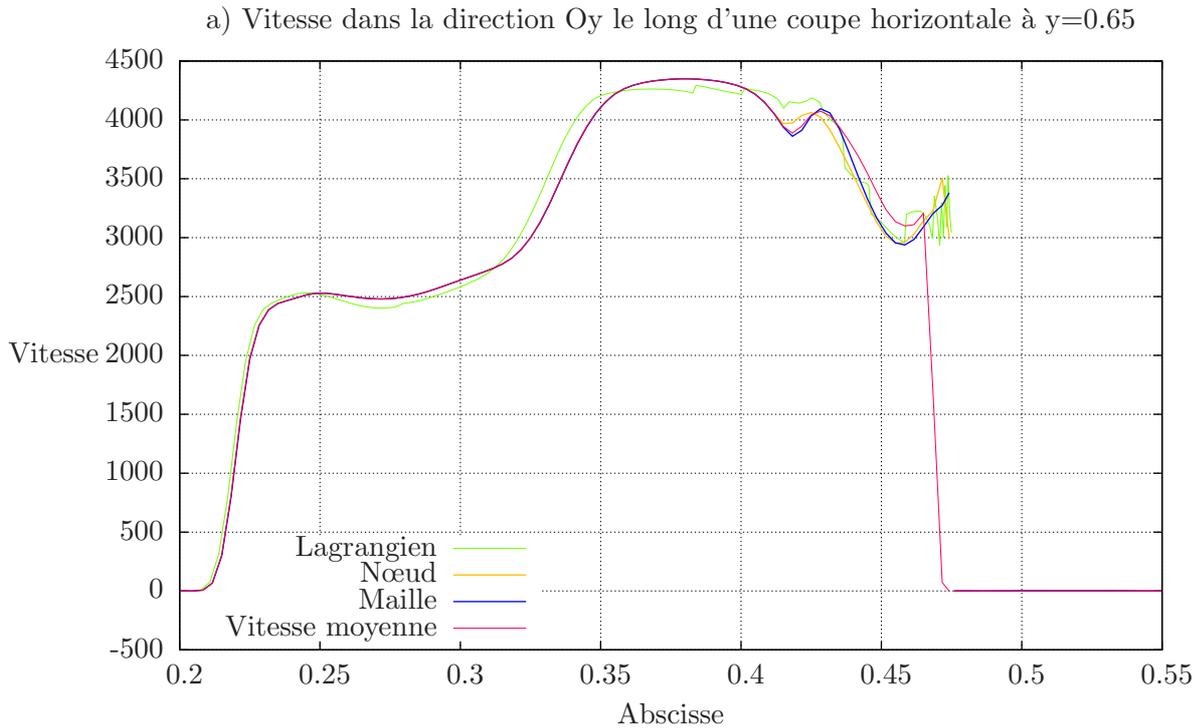


FIGURE 9.14 – Choc circulaire : vitesse selon l'axe Oy le long d'une coupe à $y = 0.65$. Dans la zone avant l'interface ($x \leq 0.475$), les trois schémas ALE sont équivalents et obtiennent la même solution. Le schéma ALE classique ne peut cependant pas décrire le glissement et la discontinuité de vitesse. Avec ce schéma, la vitesse est donc continue au passage de l'interface. Les trois autres schémas autorisent le glissement et obtiennent la même discontinuité de vitesse entre le gaz et le solide.

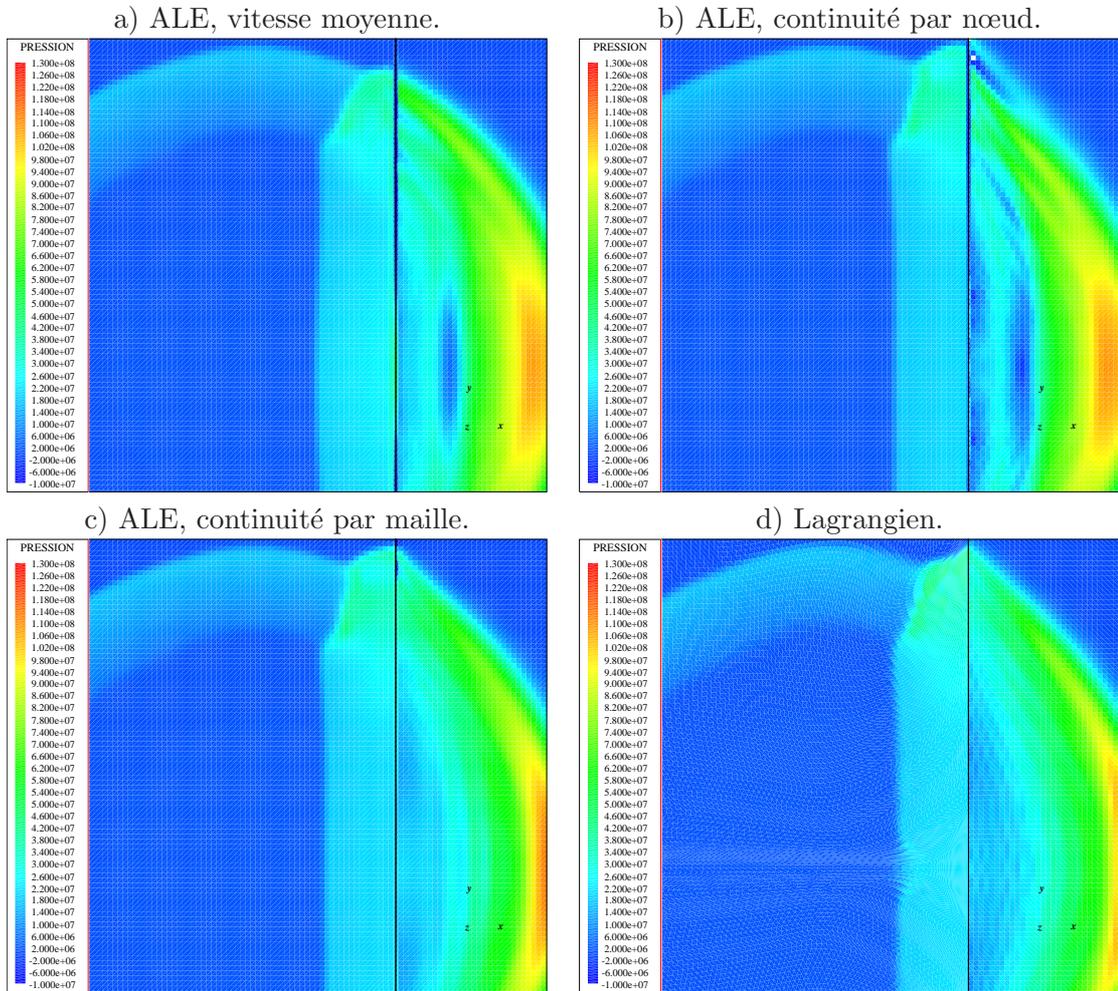


FIGURE 9.15 – Choc circulaire : pression dans le domaine. Un zoom autour du choc permet de montrer des détails du champs de pression. Le cadrage est identique pour les 4 méthodes ce qui nous permet de comparaison plus facile des différentes variantes. La position du choc le long de l’interface est similaire pour toutes les méthodes sauf pour le schéma ALE classique. Cela est dû au déplacement du gaz qui est ralenti par l’absence de glissement. Dans la direction normale à l’interface, la position du choc transmis dans le solide est la même pour ces deux schémas. Une bande de discontinuité de pression, identique pour le schéma ALE classique et la continuité par nœud, apparaît à l’interface.

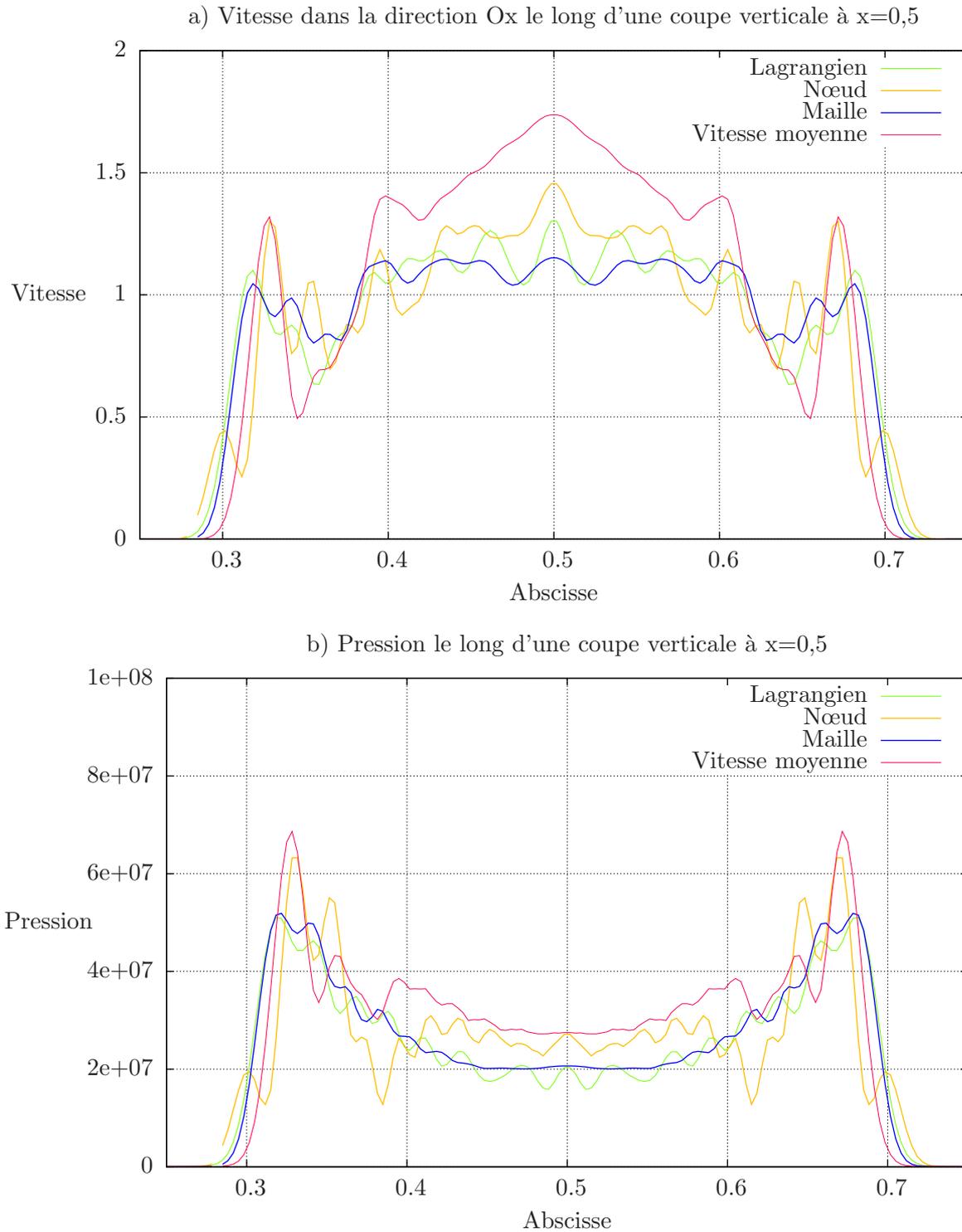


FIGURE 9.16 – Choc circulaire : Coupes verticales à $x = 0.5$. Ces coupes se situent dans le mur à proximité de l'interface. Le schéma ALE classique et la continuité par nœud donnent des solutions similaires alors que la continuité par maille donne une solution obtenue proche de celle obtenue avec le schéma lagrangien. Les phases de projection des schémas ALE augmentent la diffusion et permettent, en particulier pour la continuité par maille, d'obtenir une solution avec moins d'oscillations.

9.4 Passage d'une interface circulaire par une onde plane

9.4.1 Description

Une sphère d'acier est placée dans un tube d'aluminium (voir figure 9.17). À l'instant initial, la vitesse du bord gauche du tube est imposée, provoquant ainsi la propagation d'une onde de compression plane. À l'arrivée du choc sur la boule d'acier, l'onde est en partie réfléchie, en

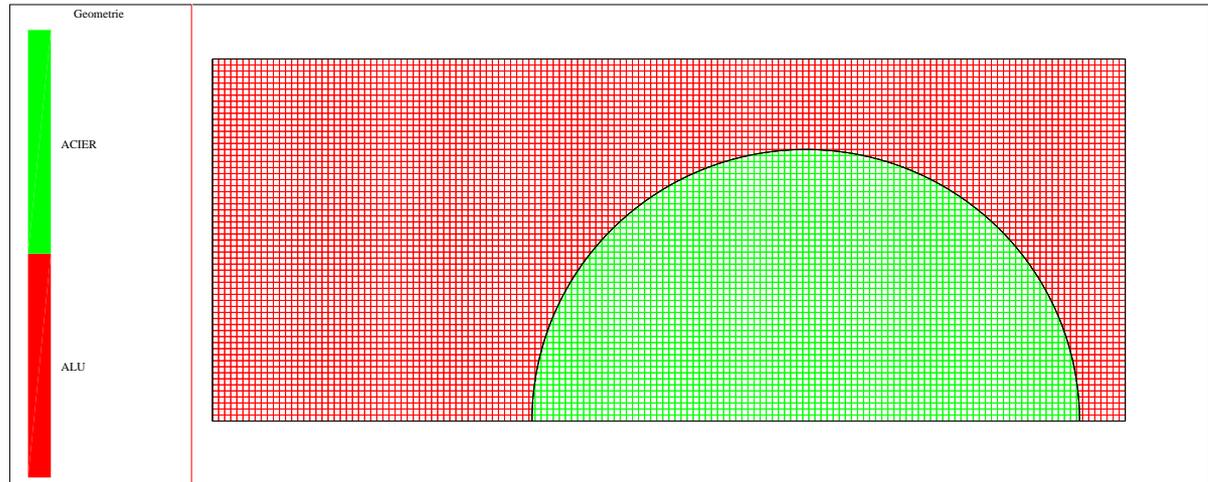


FIGURE 9.17 – Onde plane : géométrie et maillage.

partie transmise et un glissement apparaît entre les deux matériaux. Ce cas nous permet de tester le glissement et le contact entre deux solides lors du passage d'une interface oblique par un choc. Les deux matériaux sont des métaux parfaitement élasto-plastiques dotés d'une loi de comportement de type « Mie Gruneisen » pour la partie sphérique.

La vitesse du bord gauche du tube est imposée à $1000\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (voir figure 9.18) alors que le glissement sur les autres faces du domaine est laissé libre et la vitesse dans la direction normale est imposée nulle. À l'instant initial, les matériaux sont au repos avec une pression

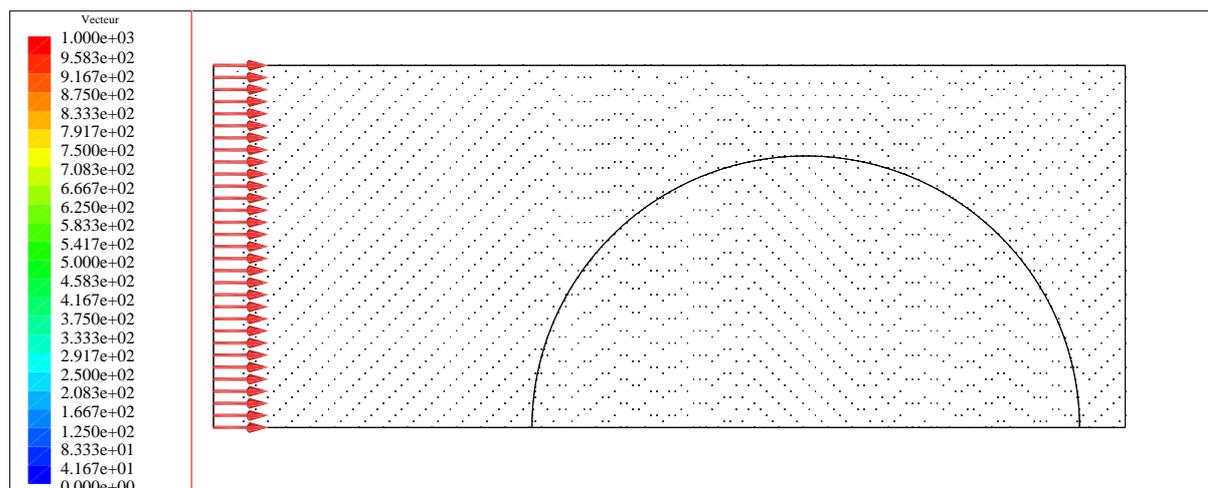


FIGURE 9.18 – Onde plane : vitesse initiale.

hydrodynamique de 10^5Pa dans tout le domaine. Nous comparons nos méthodes avec un schéma

lagrangien 2D et la méthode « vitesse moyenne » à un temps $t = 99\mu\text{s}$ après la mise en mouvement de l'extrémité du tube.

Pour les trois méthodes ALE, le domaine est discrétisé par une grille cartésienne possédant 150×60 éléments (voir figure 9.17). La méthode lagrangienne utilise un maillage ayant un raffinement équivalent mais possédant une interface entre les matériaux conforme avec le maillage (voir figure 9.19).

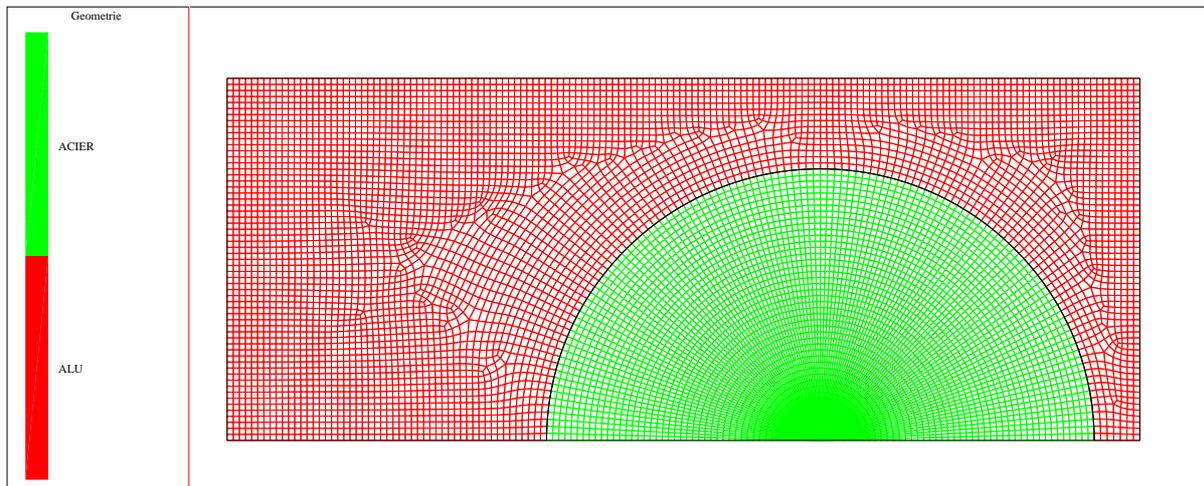


FIGURE 9.19 – Onde plane : maillage conforme avec l'interface.

9.4.2 Résultats et interprétations

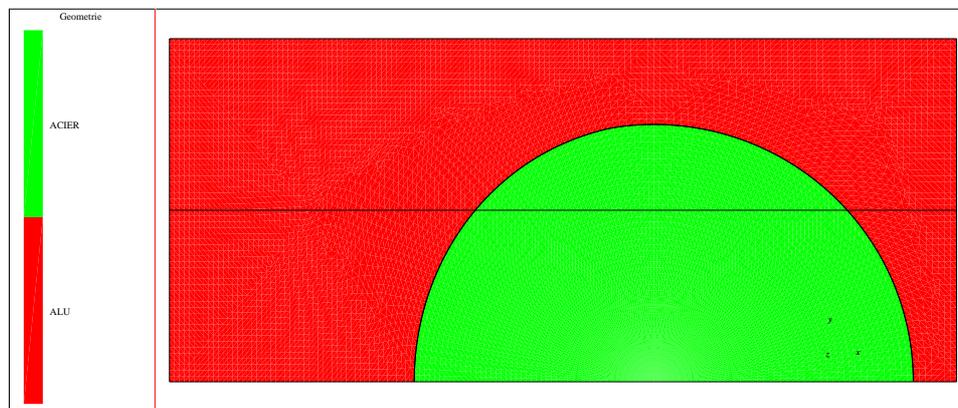


FIGURE 9.20 – Onde plane : coupe du domaine. La ligne noire précise la position de la coupe sur laquelle sont tracées les vitesses de la figure 9.23.

Les figures 9.21 et 9.22 présentent les vitesses obtenues avec les différents schémas selon l'axe Ox et Oy dans le domaine de calcul. Nous pouvons observer que la méthode ALE classique présente, autour de l'interface, une couche limite où les matériaux ont la même vitesse. Nos deux méthodes, à l'instar de la méthode lagrangienne, permettent le glissement entre les matériaux et présentent une discontinuité nette de vitesse à l'interface.

Cette discontinuité de vitesse est également illustrée par la figure 9.23 présentant une coupe horizontale du champs de vitesse dans le domaine à $y = 0.4$ (voir position de la coupe sur

la figure 9.20). Dans les zones éloignées de l'interface, les solutions des différentes méthodes coïncident mais, aux alentours de l'interface, la soudure de l'interface de la méthode ALE « vitesse moyenne » impose une vitesse continue et ne permet pas d'obtenir la solution obtenue par le schéma lagrangien. Les deux variantes de continuité par nœud et par maille obtiennent une cinématique correcte.

Le champ de pression dans le domaine peut être observé sur la figure 9.24. La déformation autour de l'interface pour la méthode ALE classique est la même pour tous les matériaux. Le comportement des matériaux étant différents de chaque côté de l'interface, la pression des matériaux en réponse à la même déformation est différente. Nous pouvons donc voir une discontinuité de pression à l'interface. La figure 9.25 présente plus en détail la pression et les discontinuités qui apparaissent autour de l'interface en fonction de la méthode utilisée. Cette discontinuité peut également s'observer avec la continuité par nœud. Son amplitude est toutefois plus faible car la déformation des matériaux est la même uniquement dans la direction normale à l'interface. La continuité par maille et la méthode lagrangienne écrivent un équilibre des contraintes à l'interface. Le champ de pression obtenu est équilibré entre les matériaux à l'interface.

Les problèmes dus à l'iso-déformation des matériaux dans les mailles mixtes peuvent aussi se voir sur le déviateur des contraintes. La figure 9.26 présente le cisaillement dans les matériaux par le tracé de la composante de S_{xy} du déviateur des contraintes dans l'ensemble du domaine et la figure 9.27 montre le détail de ce champ autour de l'interface. Pour le schéma ALE « vitesse moyenne », la vitesse unique soude les matériaux ensemble et impose le même cisaillement moyen pour tous les matériaux autour de l'interface. Nous avons alors une bande où la contrainte de cisaillement est nulle. Cette bande n'est pas physique. En effet, les deux matériaux devraient glisser l'un sur l'autre et se déformer dans des directions opposées. Les matériaux devraient être en cisaillement dans des directions différentes et la composante S_{xy} devrait changer de signe au passage de l'interface. La continuité par nœud permet de mieux décrire ce cisaillement que le schéma classique. Ces déformations sont dans la direction tangentielle à l'interface et l'iso-déformation des matériaux n'affecte que la direction normale à l'interface. Remarquons que cette méthode fait apparaître des oscillations dans le champ de contrainte (voir figure 9.27.b). La continuité par maille donne de meilleurs résultats et permet d'obtenir une solution proche du schéma lagrangien. La discontinuité de cisaillement au passage de l'interface est nette et ce schéma fait apparaître beaucoup moins d'oscillations que la continuité par nœud.

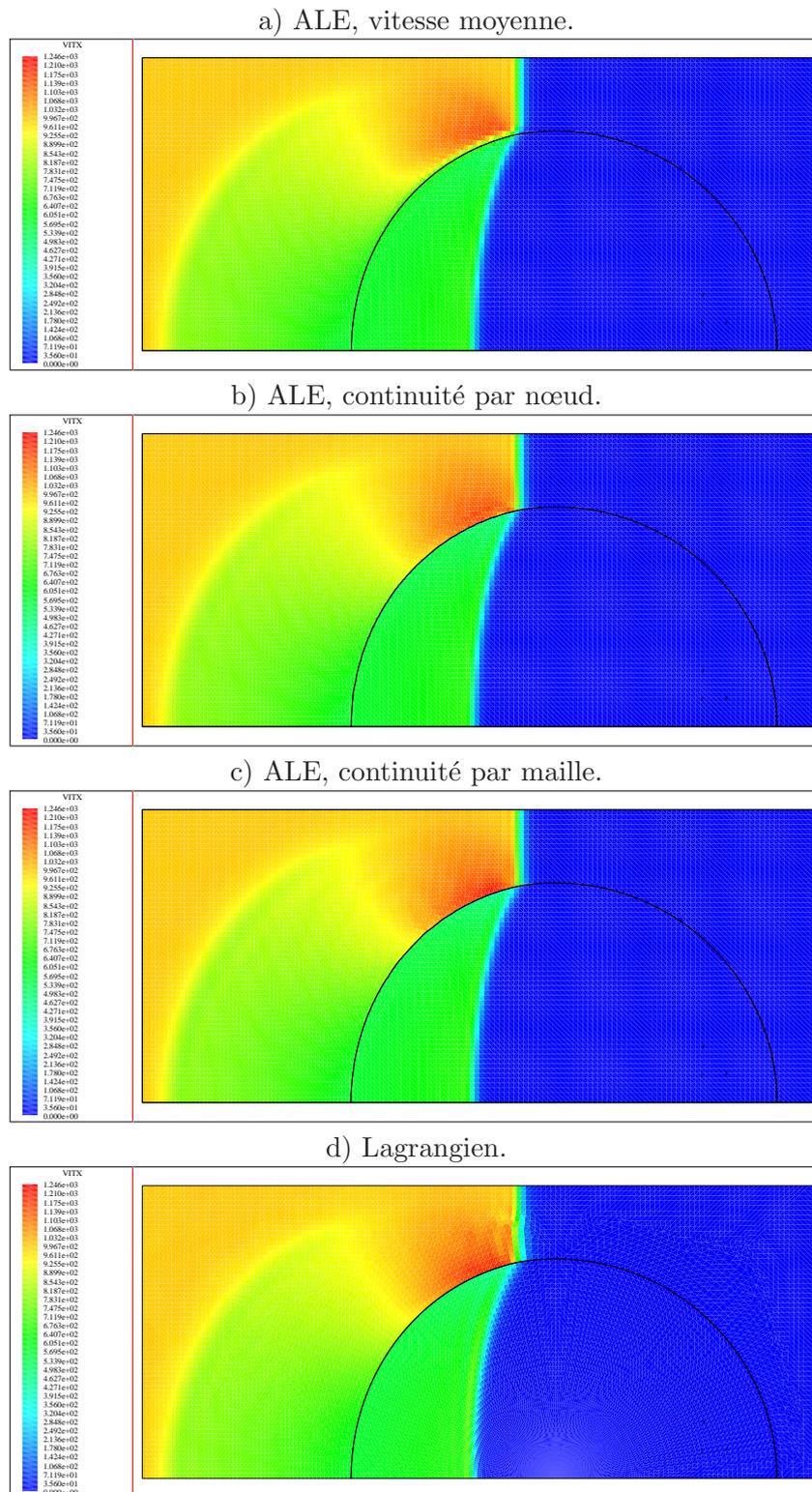


FIGURE 9.21 – Onde plane : vitesse selon Ox dans le domaine pour les différentes méthodes. Le schéma ALE classique fait apparaître une couche limite dans le champ de vitesse alors que les 3 autres schémas présentent un discontinuité de vitesse et un glissement à l'interface.

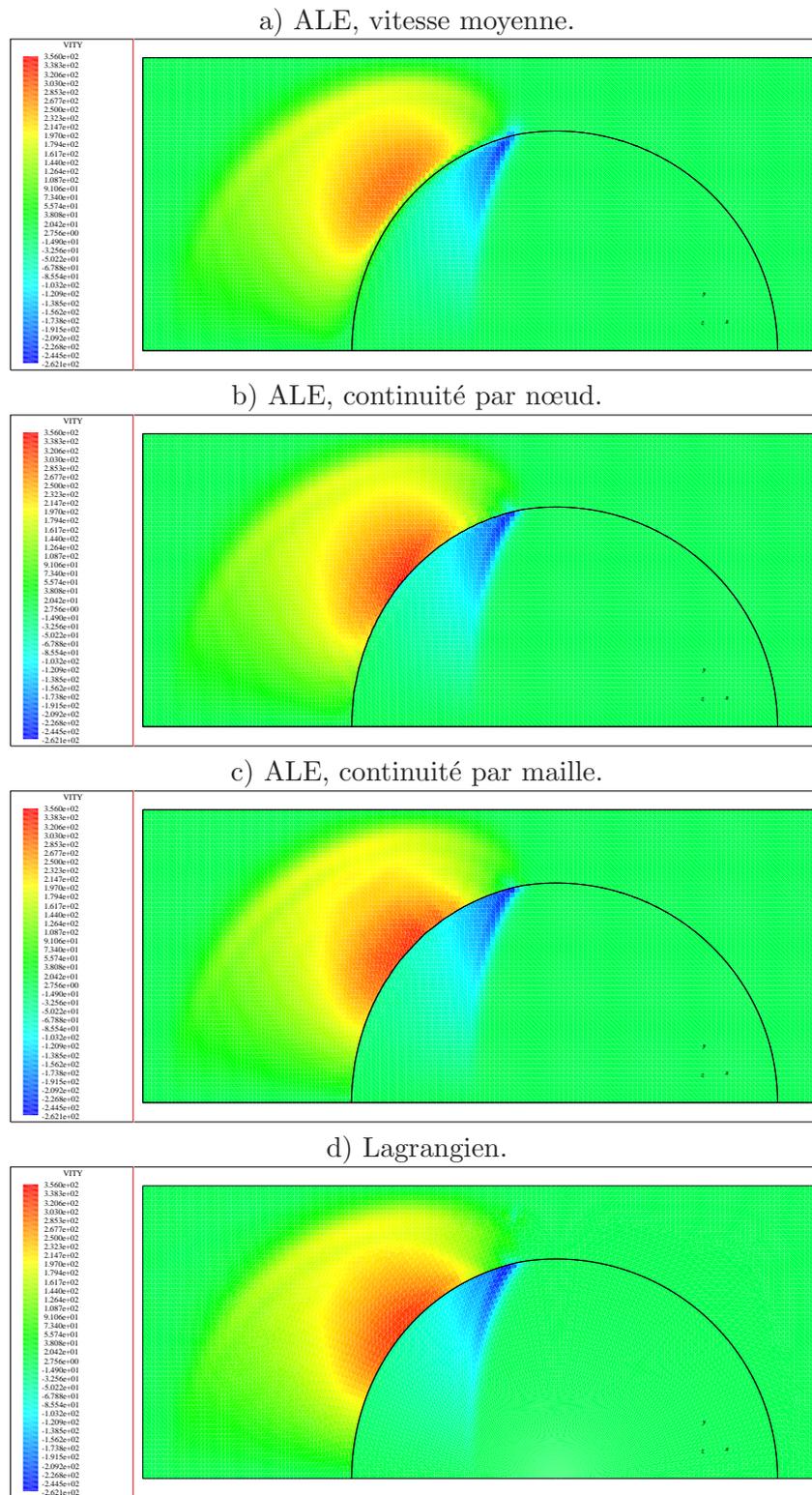


FIGURE 9.22 – Onde plane : vitesse selon Oy dans le domaine pour les différentes méthodes. Le schéma ALE classique fait apparaître une couche limite dans le champ de vitesse alors que les 3 autres schémas présentent un discontinuité de vitesse et un glissement à l'interface.

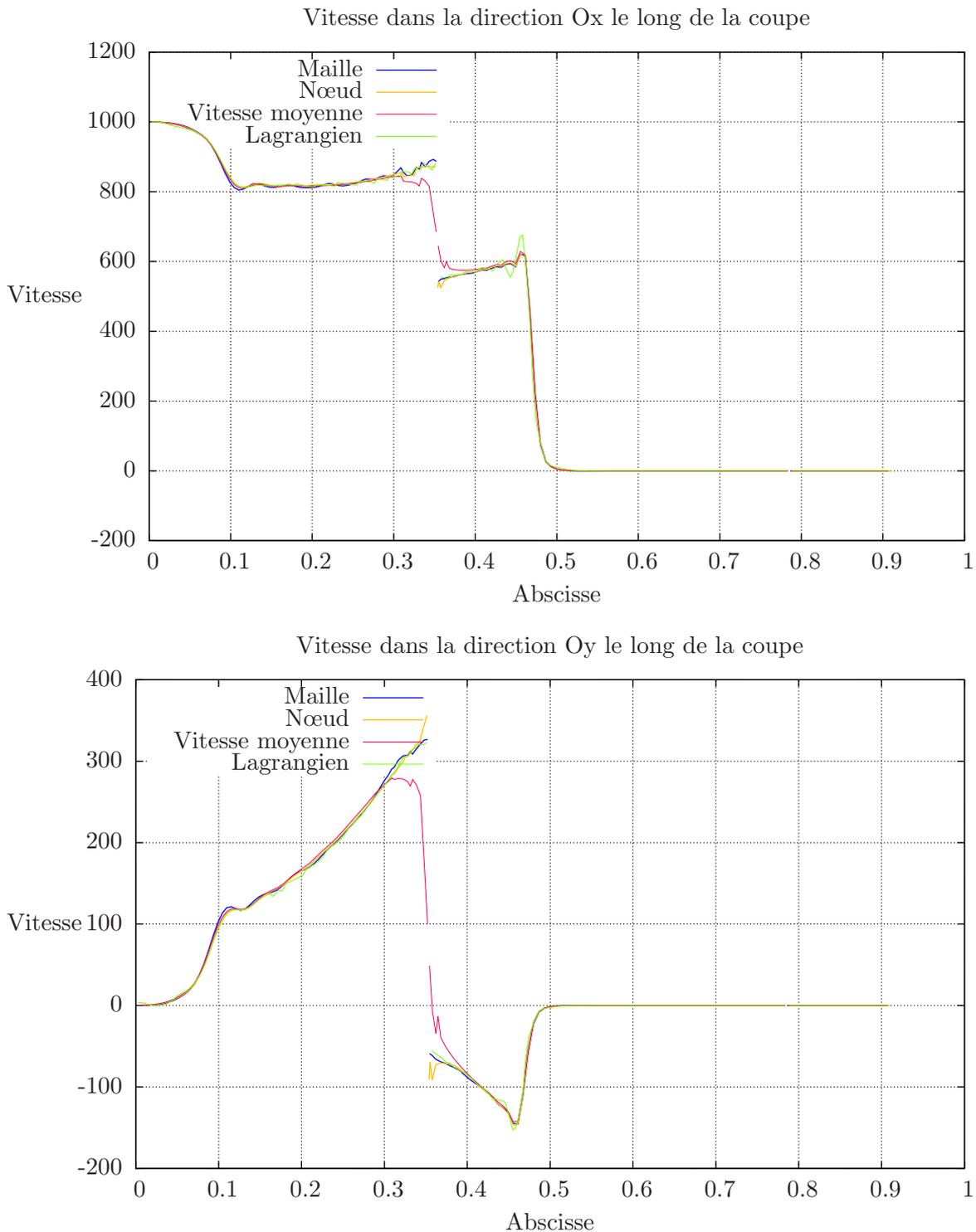


FIGURE 9.23 – Onde plane : vitesse le long de la coupe horizontale à $y = 0,4$ (figure 9.20). Le schéma ALE classique ne permet pas d'obtenir la même solution que le schéma lagrangien. La continuité par nœud et par maille, permettent, quant à eux, de retrouver la cinématique du gaz obtenue avec le schéma lagrangien.

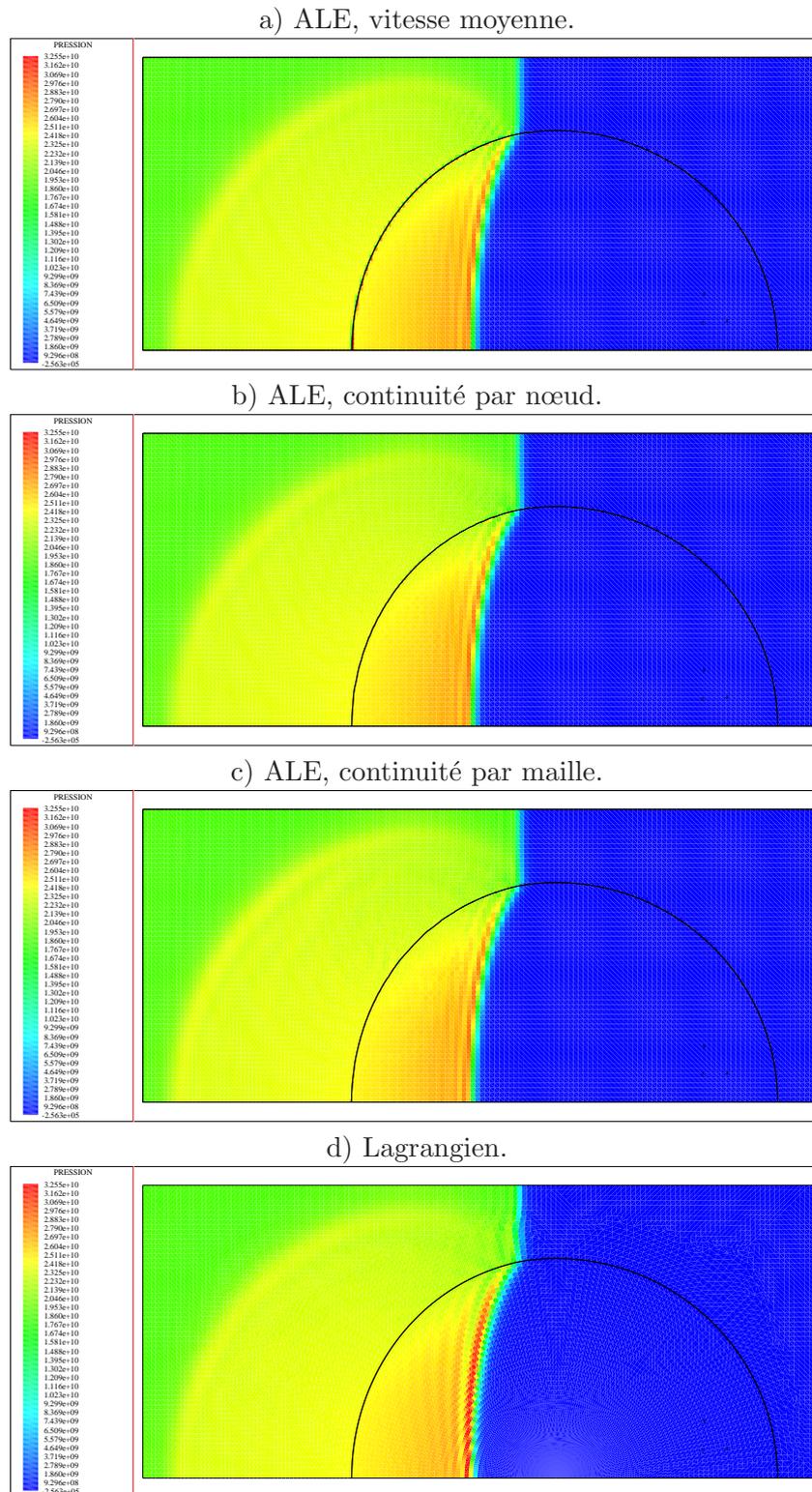


FIGURE 9.24 – Onde plane : pression dans le domaine pour les différentes méthodes. Autour de l'interface, les schémas ALE vitesse moyenne et continuité par nœud font apparaître des discontinuités de pressions absentes avec la continuité par maille et le schéma lagrangien.

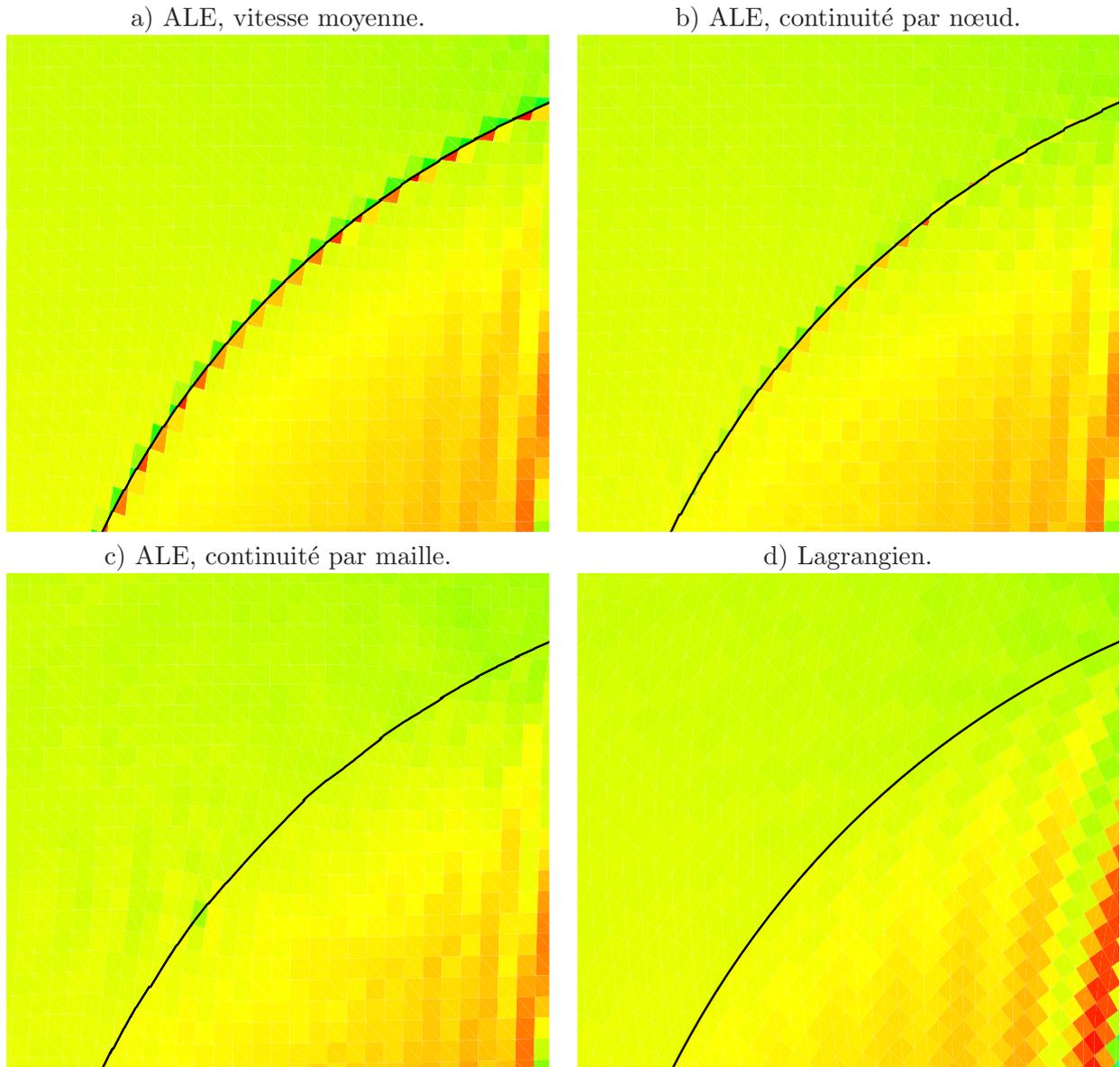


FIGURE 9.25 – Onde plane : pression dans le domaine pour les différentes méthodes. Un zoom autour de l'interface permet de montrer plus en détail les discontinuités de pression qui peuvent apparaître à l'interface.

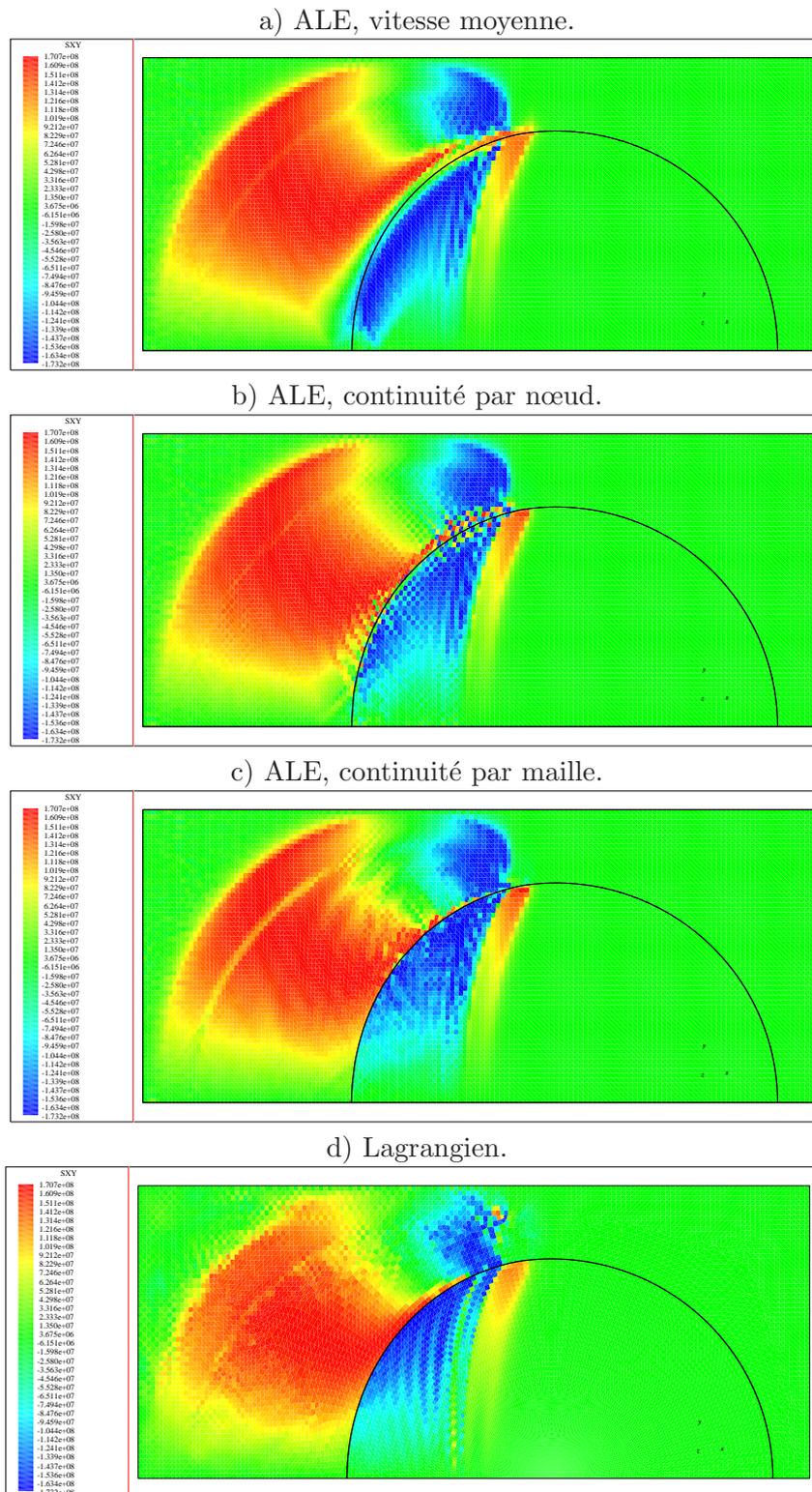


FIGURE 9.26 – Onde plane : composante S_{xy} du déviateur des contraintes dans le domaine pour les différentes méthodes. La bande d'iso-déformation du schéma ALE classique ne permet pas d'obtenir le discontinuité de cisaillement que nous avons lorsque les matériaux glissent l'un sur l'autre à l'interface. La continuité par nœud obtient un saut dans le champ de contrainte mais fait apparaître des oscillations. La continuité par maille permet finalement d'obtenir une solution proche d'un schéma avec contact lagrangien.

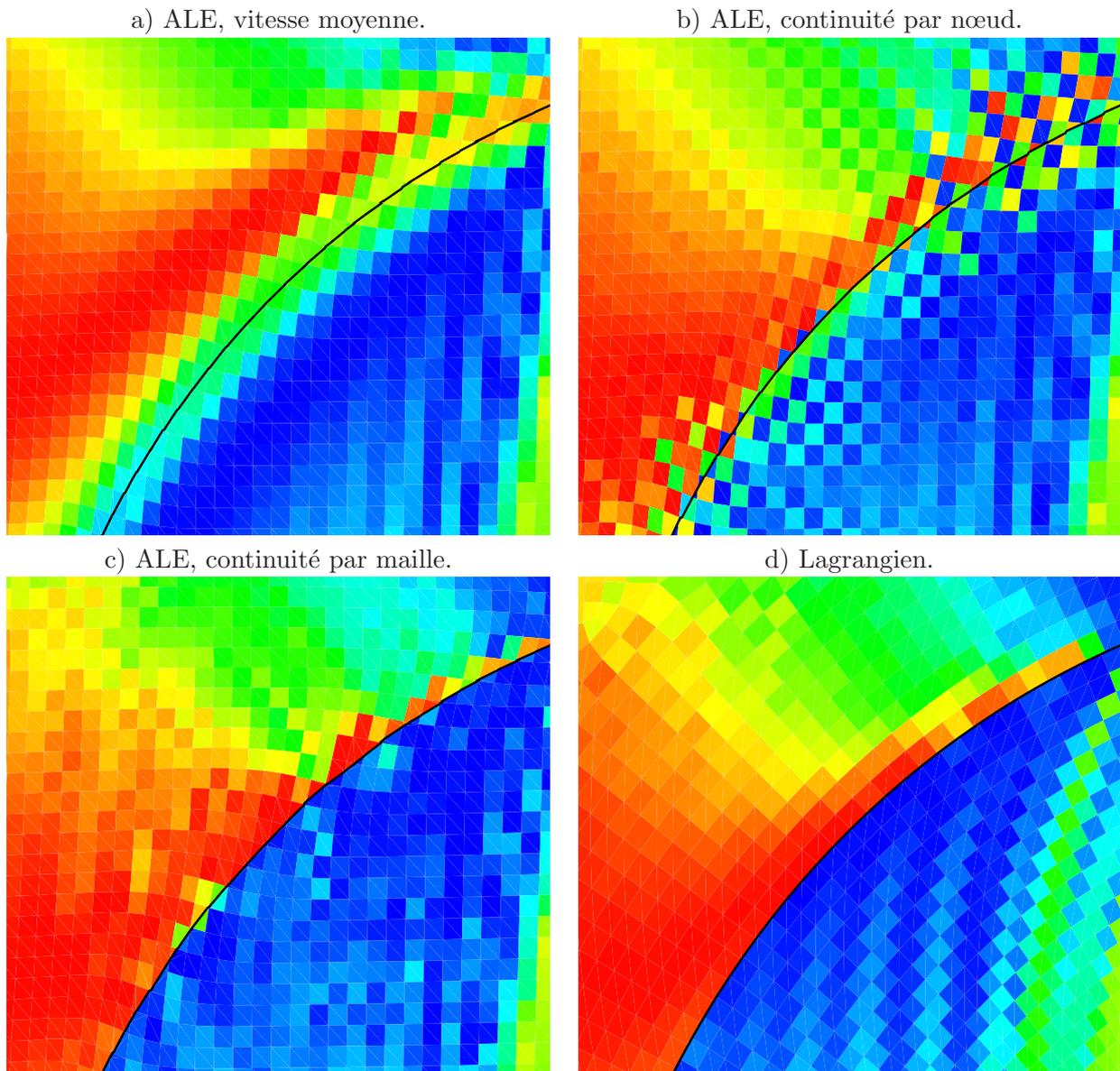


FIGURE 9.27 – Onde plane : composante S_{xy} du déviateur des contraintes dans le domaine pour les différentes méthodes. Un zoom autour de l'interface permet de montrer les discontinuités de cisaillement qui peuvent apparaître à l'interface et de comparer les résultats obtenus avec les différents schémas.

9.5 Conclusion

Nous avons montré, à travers différents cas tests, que les deux variantes de notre méthode permettent bien de prendre en compte une discontinuité de vitesse entre les matériaux. Comme avec un algorithme de contact lagrangien, avec les deux discrétisations de la pression d'interface, notre méthode permet de prendre en compte le contact entre les matériaux : les efforts normaux sont transmis à travers l'interface et le glissement entre matériaux est laissé libre.

Les résultats en termes d'effort autour de l'interface sont meilleurs avec le schéma utilisant une continuité par maille. En effet, la continuité par nœud est, au final, une discrétisation purement cinématique du contact alors que la continuité par maille utilise le nœud interne dans les mailles mixtes pour écrire l'équilibre des contraintes à l'interface.

Notre méthode et ses deux variantes sont basées sur le formalisme ALE. Elles souffrent également des mêmes défauts que la version « vitesse moyenne ». Le principal étant la diffusion numérique des champs. Le mouvement de la matière est différent de celui du maillage et la phase de transport doit obligatoirement être effectuée à chaque pas de temps. Un choix adapté de critère de régularisation de maillage et un remaillage moins important permettraient de profiter au mieux des avantages de ce formalisme tout en limitant la diffusion numérique. Cet aspect n'a pas été traité ici pour pouvoir comparer plus facilement les différentes méthodes. De la même manière, nous avons choisi de mailler le domaine par une grille cartésienne. Choisir un maillage respectant mieux les interfaces permettrait d'avoir une meilleure description de cette dernière et améliorerait les résultats.

La continuité des vitesses écrites par nœud est plus simple et performante en terme de coût de calcul mais fait apparaître des oscillations de vitesses et de contraintes dues à l'absence d'équilibre des contraintes entre les matériaux. Ces oscillations s'atténuent lorsque nous diminuons le pas de temps. En effet, dans ce cas, nous effectuons un nombre de pas de temps plus important et donc un nombre de projections plus important ce qui tend à relaxer les contraintes entre les matériaux. La seconde variante, la continuité par maille, n'a pas ce problème puisque l'équilibre des contraintes entre les matériaux est compris dans cette formulation. Cela donne un comportement plus physique de l'interface. Les résultats sont donc meilleurs mais au prix d'un système à résoudre et d'un temps de calcul plus élevé.

Chapitre 10

Conclusion générale

Lors de cette thèse, nous avons écrit une méthode permettant de prendre en compte le glissement entre matériaux dans le cas de simulations ALE ou eulérienne mono-blocs. Après avoir présenté le cadre général de l'étude au niveau continu dans le chapitre 2, nous avons introduit la formulation ALE utilisée et le cadre général de la discrétisation du système dans le chapitre 3.

Nous avons présenté les difficultés que pose la gestion de plusieurs matériaux et de leur interface ainsi que les différentes approches possibles pour prendre en compte les interactions entre les milieux dans le chapitre 4. Les approches mono-domaines avec interface « non conforme » présentent plusieurs avantages dont celui de pouvoir prendre en compte une interface de complexité arbitraire. La méthode classiquement utilisée est présentée en deuxième partie du chapitre 4. Elle enrichit les grandeurs thermodynamiques par matériaux sans enrichir le champ de déplacement ni le champ de vitesse. Ceci aboutit à la soudure des matériaux entre eux et ne permet de prendre en compte le glissement à l'interface. De plus, en fonction de l'hypothèse faite pour le comportement des mailles mixtes, cette approche gomme localement toute différence de comportement des matériaux en présence.

Pour notre méthode, nous avons donc commencé par enrichir le champ de vitesse en définissant un champ par matériau dans le domaine de calcul. Cet enrichissement est présenté dans un contexte général dans le chapitre 5. Il permet d'avoir une discontinuité de déplacement et de vitesse à l'interface et laisse la liberté aux matériaux de glisser entre eux. Des équations supplémentaires sont à résoudre à l'interface, en particulier, la vitesse doit avoir un composante normale continue au passage de l'interface afin d'empêcher les matériaux de s'interpénétrer. Cette contrainte fait intervenir une inconnue additionnelle de pression d'interface — pression exercée par un matériau sur l'autre et correspondant en fait au multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte cinématique. Cette inconnue est introduite dans le système au niveau continu et doit être discrétisée en respectant certaines conditions afin d'assurer la stabilité de la méthode. Deux possibilités de discrétisation de la pression d'interface ont été étudiées et leurs avantages et inconvénients ont été comparés dans le chapitre 9. Ces deux variantes ont été implantées dans un code de calcul industriel du CEA ce qui a permis leur validation.

La première variante (chapitre 6) utilise une description nodale de la pression d'interface et de la continuité des vitesses associée. Cette méthode introduit une condensation de la force permettant de découpler complètement les nœuds et permettant d'obtenir une expression simple des forces d'interface. Ceci simplifie grandement l'implantation de la méthode, la rend robuste et efficace. Nous avons également montré que la description de l'interface pour la condition de glissement doit être traitée avec attention et la discrétisation de sa normale doit être cohérente avec la discrétisation des forces nodales dues aux efforts internes afin d'obtenir une orientation

correcte des forces d'interface. La force nodale résultante permet ainsi de préserver les équilibres et les solutions stationnaires. Cette variante est stable et nous montrons qu'avec un choix adapté de normes, nous respectons une condition Inf-Sup volumique dans une zone regroupant l'ensemble des mailles traversées par l'interface. Cette méthode permet le glissement entre matériaux défini sur un même maillage mais la condensation de la force a remplacé la continuité des vitesses normales sur l'interface par une continuité des vitesses normales plus forte, définie sur une bande d'une maille d'épaisseur. De ce fait, la compression dans la direction normale à l'interface est donc la même pour tous les matériaux de la maille. En particulier, lors d'une grande discontinuité de compressibilité, à l'interface entre un gaz et un solide par exemple, la compressibilité du gaz est diminuée lorsque les deux matériaux sont présents dans une même maille. Une couche de gaz ayant une faible compressibilité dans la direction normale apparaît alors à l'interface et modifie le comportement du milieu autour de l'interface.

Une seconde discrétisation du multiplicateur de Lagrange est introduite dans le chapitre 7 et améliore ce point. La pression d'interface est alors constante par portion d'interface et la contrainte de vitesse est imposée en moyenne sur ces mêmes portions d'interface. Cette méthode donne de meilleurs résultats mais elle est plus complexe à mettre en œuvre. Il faut ajouter un nœud interne à chaque maille mixte qui enrichit le champ de vitesse et permet de respecter la condition Inf-Sup, stabilisant ainsi le système. Ce nœud interne n'a pas de masse et sa discrétisation en temps permet d'obtenir un équilibre des contraintes entre les matériaux. Son déplacement provient d'un équilibre statique et entre en conflit avec le caractère fondamentalement dynamique de la pseudo-viscosité. Il faut donc écrire une formulation adaptée de la pseudo-viscosité pour ne pas prendre en compte les déformations dues aux nœuds internes. Enfin, comme pour la première variante, la discrétisation des termes d'interface doit être faite manière consistante avec la discrétisation des autres équations du système pour pouvoir préserver les solutions stationnaires.

Cette version couple les nœuds et mailles mixtes autour de l'interface et nous avons alors un système implicite permettant de résoudre le comportement du domaine autour de l'interface. Ce système est non-linéaire du fait des lois d'états employées et sa résolution a été détaillée dans le chapitre 8. Au cours de la résolution, une limitation de l'incrément du solveur non-linéaire améliore sa robustesse.

Par la suite, certains aspects de la méthode peuvent encore être améliorés ou développés, principalement pour la version « continuité par maille » qui est plus prometteuse :

- la robustesse du système pourrait encore être améliorée en distinguant les mailles où la fraction volumique d'un des matériaux est trop faible et en leur appliquant un traitement adapté ou bien en écrivant une limitation locale de l'incrément lors de la résolution du système. De plus, le problème du respect de la condition Inf-Sup lorsque la fonction bulle tend vers 0 sur l'interface se pose encore. Nous avons proposé, dans le paragraphe 7.2, une piste pour résoudre ce problème. Le placement judicieux du nœud interne permettrait de rétablir la stabilité. Les détails de cette solution doivent encore être étudiés ;
- la méthode ne permet pas de prendre en compte un nombre arbitraire de matériaux. Ceci peut être traité en utilisant une stratégie similaire à celle utilisée dans la variante « continuité par nœud », à savoir, rassembler les matériaux en deux groupes. Le glissement entre les groupes est résolu par notre méthode comme s'il s'agissait de deux matériaux. Le comportement des milieux au sein d'un groupe est résolu comme les différents matériaux d'un cas « vitesse moyenne ». Il faudra alors distinguer certaines mailles devant subir un traitement particulier : les matériaux d'une maille mixte peuvent n'appartenir qu'à un seul groupe, ces mailles ne feront pas partie du système d'interface de même que les

-
- mailles contenant du vide et un seul matériau ;
- le contact unilatéral n'a pas non plus été traité pour la continuité par maille. La gestion de la perte de contact et du décollement entre les matériaux change la contrainte linéaire d'égalité des vitesses normales en une contrainte linéaire d'inégalité. Suivant la stratégie de résolution, après linéarisation, nous n'aboutissons alors plus à un système d'équations linéaires à résoudre mais à un problème de complémentarité linéaire (voir [62]). Avec notre formulation, nous avons ici plus précisément un problème de complémentarité linéaire mixte (mLCP, *mixed Linear Complementarity problem*) possédant des algorithmes de résolution optimisés (voir [59] par exemple).

La physique du système pourrait être étendue en ajoutant des équations supplémentaires sur l'interface pour prendre en compte d'autres effets, frottement, tension de surface, effets thermiques, *etc.* La manière dont nous avons écrit et implantée notre méthode peut se voir comment une correction qui vient modifier les grandeurs autour de l'interface et devrait permettre d'étendre la physique du système sans trop de difficultés.

Annexes

Annexe A

Reconstruction et limitation de gradients

A.1 Reconstruction de champs linéaires par morceaux

La phase de transport à l'ordre 1 considère des champs constants par maille. En prenant comme exemple la densité, nous considérons un champ de la forme

$$\rho(\underline{x}) = \sum_k \rho_k \chi_{\Omega_k}(\underline{x})$$

où ρ_k est la valeur moyenne de la densité sur la maille Ω_k et $\chi_{\Omega_k}(\underline{x})$ est la fonction caractéristique de cette maille, valant 1 si $\underline{x} \in \Omega_k$, 0 sinon.

Pour obtenir l'ordre 2 durant la projection, nous ne considérons plus des champs constants par maille mais des champs linéaires par maille. Notre champ de densité, toujours pris pour exemple, va alors s'écrire

$$\rho(\underline{x}) = \sum_k (\rho_k + \nabla \rho_k \cdot (\underline{x} - \underline{x}_k)) \chi_{\Omega_k}(\underline{x})$$

où $\nabla \rho_k$ est le gradient du champ de densité dans la maille Ω_k et \underline{x}_k est le barycentre de cette maille. Ce champ est linéaire par morceaux mais il est discontinu à la frontière entre les mailles. La densité ρ_k est toujours la densité moyenne dans la maille Ω_k . En effet, nous avons

$$\int_{\Omega_k} \rho(\underline{x}) dV = \int_{\Omega_k} (\rho_k + \nabla \rho_k \cdot (\underline{x} - \underline{x}_k)) dV = \rho_k V_k$$

ce qui permet d'assurer que la projection du champ sur le nouveau maillage sera bien conservative, quelque soit la valeur du gradient $\nabla \rho_k$.

A.2 Calcul du gradient

Le gradient dans la maille reste à déterminer car nous n'avons pas d'information sur sa valeur dans la phase lagrangienne. Il est reconstruit à partir des variations locales des grandeurs moyennes dans les mailles. Pour cela, nous utilisons la méthode de Dukowicz ([27]). Nous partons de la remarque que l'intégrale du gradient d'une quantité sur une maille quelconque est égale à son flux sur le bord de cette maille,

$$\int_{\Omega_k} \nabla \rho(\underline{x}) dV = \int_{\partial \Omega_k} \rho(\underline{x}) \underline{n} dS.$$

Nous obtenons donc la valeur moyenne du gradient $\nabla\rho_k$ dans la maille Ω_k par la formule

$$\nabla\rho_k = \frac{1}{V_k} \left(\sum_{b \in B_k} \int_{l_b} \rho(\underline{x}) \underline{n} dS \right)$$

où B_k est l'ensemble des bras de la maille Ω_k , et où l'intégrale $\int_{l_b} \bullet dS$ dénote l'intégrale curviligne sur le bras b .

Nous noterons ρ_b la valeur de $\rho(\underline{x})$ sur le bras b . Cette densité est considérée constante sur tout le segment. Elle est déterminée par interpolation linéaire entre les deux mailles voisines Ω_k et Ω_l du bras selon la formule

$$\rho_b = \frac{|\underline{x}_b - \underline{x}_k| \rho_k + |\underline{x}_b - \underline{x}_l| \rho_l}{|\underline{x}_b - \underline{x}_k| + |\underline{x}_b - \underline{x}_l|}.$$

Dans cette expression, les mailles Ω_k de barycentre \underline{x}_k et Ω_l de barycentre \underline{x}_l ont pour le bras b comme bras commun et \underline{x}_b est le centre du bras. Finalement, le gradient dans la maille Ω_k a pour expression

$$\nabla\rho_k = \frac{1}{V_k} \left(\sum_{b \in B_k} \int_{l_b} \rho_b \underline{n} dS \right).$$

Les grandeurs vectorielles et tensorielles sont projetées composante par composante ce qui nous ramène au cas d'une quantité scalaire. Le gradient est donc calculé également composante par composante.

Certains grandeurs ne sont pas projetée directement. Elles sont pondérées par la densité avant d'être projetées. C'est le cas de la vitesse $\underline{u}(\underline{x})$ qui est transportée par l'intermédiaire de la quantité de mouvement $(\rho\underline{u})(\underline{x})$ et l'énergie interne spécifique $e(\underline{x})$ qui est projetée par l'intermédiaire de l'énergie interne volumique $(\rho e)(\underline{x})$. Le gradient de ces quantités est calculé en développant le gradient du produit des deux champs. Le gradient de l'énergie interne volumique s'écrit donc

$$\nabla(\rho e)(\underline{x}) = \nabla\rho(\underline{x})e(\underline{x}) + \rho(\underline{x})\nabla e(\underline{x})$$

et le gradient de la quantité de mouvement a pour expression

$$\nabla(\rho\underline{u})(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x}) \otimes \nabla\rho(\underline{x}) + \rho(\underline{x})\nabla\underline{u}(\underline{x}).$$

Le gradient des champs pris individuellement est calculé selon la méthode présenté ci-dessus en notant que pour la quantité de mouvement, la maille considérée est la maille duale Δ_i et non plus la maille primale Ω_k .

A.3 Limitation du gradient

Afin de préserver le principe du maximum lors de la projection et d'éviter l'apparition d'oscillations parasites dans la solution, l'estimation du gradient du paragraphe précédent est limitée, c'est-à-dire que nous approchons en fait le champ par

$$\rho(\underline{x}) = \sum_k (\rho_k + \alpha_k \nabla\rho_k \cdot (\underline{x} - \underline{x}_k)) \chi_{\Omega_k}(\underline{x})$$

où ρ_k est la grandeur moyenne dans la maille Ω_k , $\nabla\rho_k$ est le gradient défini comme précédemment et le paramètre α_k est le limiteur de pente propre à chaque maille. Ce terme peut être déterminé de plusieurs manières (voir [79]).

La méthode que nous employons est celle du limiteur MinMod qui consiste à imposer localement dans chaque maille que le champ

$$\rho(\underline{x}) = \rho_k + \nabla\rho_k \cdot (\underline{x} - \underline{x}_k)$$

reste dans l'encadrement donné par les valeurs moyennes ρ_l des mailles Ω_l voisines de Ω_k afin de ne pas créer de nouveau maximum local. Le maximum dans la maille doit respecter

$$\rho(\underline{x}) \leq \max_l \rho_l$$

et le minimum doit respecter

$$\rho(\underline{x}) \geq \min_l \rho_l.$$

La paramètre de limitation a donc pour expression

$$\alpha_k = \min \left(1; \max \left(0; \frac{\rho_{lM} - \rho_k}{\rho_M - \rho_k} \right), \max \left(0; \frac{\rho_{lm} - \rho_k}{\rho_m - \rho_k} \right) \right)$$

où ρ_{lM} est la valeur moyenne maximale sur les mailles voisines de Ω_k ,

$$\rho_{lM} = \max_l \rho_l$$

et ρ_{lm} , la valeur minimale

$$\rho_{lm} = \min_l \rho_l.$$

Les densités ρ_M et ρ_m sont les valeurs maximales et minimales du champs $\rho(\underline{x})$ dans la maille Ω_k avant limitation. Le champ $\rho(\underline{x})$ est linéaire, ses extrema se situent donc sur les nœuds de la maille.

Les gradients de quantité de mouvement et d'énergie interne volumique sont limités champ par champ. Ils ont donc au final deux limiteurs α_k^1 et α_k^2 chacun et ces gradients ont pour expression

$$\begin{aligned} \nabla(\rho e)(\underline{x}) &= \alpha_k^1 \nabla\rho(\underline{x})e(\underline{x}) + \alpha_k^2 \rho(\underline{x})\nabla e(\underline{x}), \\ \nabla(\rho \underline{u})(\underline{x}) &= \alpha_k^1 \underline{u}(\underline{x}) \otimes \nabla\rho(\underline{x}) + \alpha_k^2 \rho(\underline{x})\nabla \underline{u}(\underline{x}). \end{aligned}$$

Annexe B

Calcul de la normale à l'interface

Comme présenté dans le paragraphe 4.2.1.2, nous reconstruisons l'interface par des segments. Sa normale est donc constante par maille mixte. Elle peut être décrite au niveau discret par le gradient de la fraction volumique dans la maille, c'est-à-dire

$$\underline{n}_{\Gamma k} // \nabla f_{\alpha k}.$$

La fraction volumique est une grandeur définie constante par maille. Dans le cadre d'un schéma décalé, son gradient est naturellement défini pour chaque nœud mais nous avons ici besoin d'une estimation du gradient par maille. Nous commençons d'abord par définir la fraction volumique $f_{\alpha i}$ des nœuds du maillage. Celle-ci est la fraction volumique du matériau α dans le support de la fonction de forme du nœud i . Elle s'écrit donc

$$f_{\alpha i} = \frac{\sum_{k \in M_i} V_{\alpha k}}{\sum_{k \in M_i} V_k},$$

où M_i est l'ensemble des mailles voisines du nœud i , $V_{\alpha k}$ est le volume occupé par le matériau α dans la maille Ω_k et V_k est le volume total de la maille Ω_k .

Le gradient de la fraction volumique nous permet d'écrire un champ de fraction volumique linéaire dans les mailles mixtes sous la forme

$$f_{\alpha}(\underline{x}) = f_{\alpha k} + \nabla f_{\alpha k} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_k).$$

Comme proposé dans [71], nous prenons un gradient de fraction volumique au sens des moindres carrés en cherchant le plan permettant de minimiser les écarts quadratiques entre les valeurs nodales $f_{\alpha i}$ et la valeur du champ reconstruit en ces points et qui a pour expression

$$f_{\alpha}(\underline{x}_i) = f_{\alpha k} + \nabla f_{\alpha k} \cdot (\underline{x}_i - \underline{x}_k)$$

avec $f_{\alpha k}$, la fraction volumique dans la maille Ω_k et \underline{x}_k , le barycentre de cette dernière maille.

Le problème de minimisation à résoudre s'écrit donc

$$\min I_k = \sum_{i \in N_k} (f_{\alpha i} - f_{\alpha k} - \nabla f_{\alpha k} \cdot (\underline{x}_i - \underline{x}_k))^2. \quad (\text{B.1})$$

Au point minimum, ce problème a une dérivée nulle par rapport au gradient. Le point stationnaire que nous cherchons respecte l'équation

$$\frac{\partial I_k}{\partial \nabla f_{\alpha k}} = \underline{0}.$$

En utilisant l'expression de I_k , après dérivation, nous obtenons

$$\frac{\partial I_k}{\partial \nabla f_{\alpha k}} = -2 \sum_{i \in N_k} (\underline{x}_i - \underline{x}_k) (f_{\alpha i} - f_{\alpha k} - \nabla f_{\alpha k} \cdot (\underline{x}_i - \underline{x}_k)) = 0.$$

Appelons n_x et n_y , les deux composantes de $\nabla f_{\alpha k}$ et x_i et y_i les deux composantes de \underline{x}_i , le problème s'écrit alors sous la forme d'un système linéaire à deux inconnues ayant pour expression, après simplification par -2 ,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k) (f_{\alpha i} - f_{\alpha k}) &= n_x \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k)^2 && + n_y \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k) (y_i - y_k), \\ \sum_{i \in N_k} (y_i - y_k) (f_{\alpha i} - f_{\alpha k}) &= n_x \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k) (y_i - y_k) && + n_y \sum_{i \in N_k} (y_i - y_k)^2. \end{aligned}$$

L'utilisation d'une notation matricielle nous permet finalement d'écrire l'expression du gradient de la fraction volumique ce qui donne

$$\nabla f_{\alpha k} = \left(\begin{array}{cc} \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k)^2 & \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k) (y_i - y_k) \\ \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k) (y_i - y_k) & \sum_{i \in N_k} (y_i - y_k)^2 \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} \sum_{i \in N_k} (x_i - x_k) (f_{\alpha i} - f_{\alpha k}) \\ \sum_{i \in N_k} (y_i - y_k) (f_{\alpha i} - f_{\alpha k}) \end{array} \right). \quad (\text{B.2})$$

La normale à l'interface est alors donnée par la normalisation de ce gradient,

$$\underline{n}_{\Gamma k} = -\frac{\nabla f_{\alpha k}}{|\nabla f_{\alpha k}|}.$$

Cas de trois matériaux ou plus

Lorsque nous avons deux matériaux α et β , la direction de l'interface est définie de manière unique car nous avons $f_{\alpha k} + f_{\beta k} = 1$ et par conséquent $\nabla f_{\alpha k} = -\nabla f_{\beta k}$.

Si trois matériaux ou plus sont présents, nous faisons l'hypothèse d'une répartition des matériaux en couches parallèles (voir paragraphe 4.2.1.2). Il nous faut donc une normale unique dans la maille mais la direction des gradients ne sont plus forcément les mêmes. Nous considérons alors que le gradient le plus grand parmi les matériaux est le plus significatif et le choisissons comme normale à l'interface dans la maille. Dans le cas d'un nombre arbitraire de matériaux, la normale à l'interface dans la maille Ω_k est donc donnée par

$$\underline{n}_{\Gamma k} = -\frac{\max_{\alpha} (\nabla f_{\alpha k})}{\left| \max_{\alpha} (\nabla f_{\alpha k}) \right|}$$

où les $\nabla f_{\alpha k}$ sont les gradients de fraction volumique de chaque matériau α présent dans la maille, calculés comme présenté dans le paragraphe précédent.

Bibliographie

- [1] H. Aliabadi, C.A. Brebbia, and Wessex Institute of Technology. *Contact mechanics : computational techniques*. First International Conference on Contact Mechanics 93. Computational Mechanics, 1993. 1, 37
- [2] H. R. Anbarlooei and K. Mazaheri. Moment of fluid interface reconstruction method in multi-material arbitrary lagrangian eulerian (mmale) algorithms. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 198(47-48) :3782–3794, OCT 1 2009. 42
- [3] Chandrasekhar Annavarapu, Martin Hautefeuille, and John E. Dolbow. A robust nitsche’s formulation for interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225–228(0) :44–54, 2012. 39, 98
- [4] D. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the stokes equations. *Calcolo*, 21 :337–344, 1984. 10.1007/BF02576171. 99
- [5] Ferdinando Auricchio, Franco Brezzi, and Carlo Lovadina. Mixed finite element methods. *Encyclopedia of computational mechanics*, 2004. 65
- [6] I. Babuska and J. M. Melenk. The partition of unity method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 40 :727–758, 1996. 40
- [7] Ivo Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20 :179–192, 1973. 10.1007/BF01436561. 37, 56, 61
- [8] Andrew J. Barlow. A compatible finite element multi-material ale hydrodynamics algorithm. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 56(8) :953–964, MAR 20 2008. 9th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Reading, England, 2007. 39
- [9] Roland Becker, Erik Burman, and Peter Hansbo. A nitsche extended finite element method for incompressible elasticity with discontinuous modulus of elasticity. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 198(41-44) :3352–3360, 2009. 2, 40, 98
- [10] David J. Benson. Computational methods in lagrangian and eulerian hydrocodes. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 99(2-3) :235–394, 1992. 8, 11, 20
- [11] David J. Benson. A mixture theory for contact in multi-material eulerian formulations. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 140(1-2) :59–86, JAN 15 1997. 2, 39, 40
- [12] David J. Benson and S. Okazawa. Contact in a multi-material eulerian finite element formulation. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 193(39-41) :4277–4298, 2004. 2, 39, 40, 53
- [13] E. Benvenuti. A regularized xfem framework for embedded cohesive interfaces. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 197(49-50) :4367–4378, 2008. 2

- [14] Dietrich Braess. *Finite Elements : Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory*. Cambridge University Press, 2007. 61, 65
- [15] Jean-Philippe Braeunig, Bruno Desjardins, and Jean-Michel Ghidaglia. A totally eulerian finite volume solver for multi-material fluid flows. *European Journal Of Mechanics B-Fluids*, 28(4) :475–485, JUL-AUG 2009. 40
- [16] Franco Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *R.A.I.R.O. Anal. Numér.* 8, pages 129–151, 1974. 67
- [17] C. Bègue, C. Bernardi, N. Debit, Y. Maday, G.E. Kariadakis, C. Mavriplis, and A.T. Patera. Non-conforming spectral element-finite element approximations for partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 75(1–3) :109 – 125, 1989. 37
- [18] Li Cai, Jian-Hu Feng, and Wen-Xian Xie. An efficient ghost fluid method for compressible multifluids in lagrangian coordinate. *Applied Numerical Mathematics*, 58(6) :859 – 870, 2008. 38
- [19] J.C. Campbell and M.J. Shashkov. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm. *Journal of Computational Physics*, 172(2) :739 – 765, 2001. 17
- [20] E.J. Caramana, M.J. Shashkov, and P.P. Whalen. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations. *Journal of Computational Physics*, 144(1) :70 – 97, 1998. 17, 74
- [21] Daniel Chauveheid. *Écoulements multi-matériaux et multi-physiques : solveur volumes finis eulérien co-localisé avec capture d’interfaces, analyse et simulations*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de Cachan, 2012. 40, 81
- [22] Franck Dambakizi. *Modélisation thermo-mécanique multi-échelles des frottements sous chocs*. PhD thesis, École Polytechnique, 2009. 16
- [23] John Dolbow and Leopoldo P. Franca. Residual-free bubbles for embedded dirichlet problems. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 197(45-48) :3751–3759, 2008. 39, 98, 100
- [24] John Dolbow and Isaac Harari. An efficient finite element method for embedded interface problems. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 78(2) :229–252, APR 9 2009. 2, 40, 57
- [25] J. Donea, A. Huerta, J.P. Ponthot, and A. Rodríguez-Ferran. Arbitrary lagrangian–eulerian methods. *Encyclopedia of computational mechanics*, 2004. 1, 10, 11
- [26] G. Donida, R. Bernetti, and R. Bruschi. The ‘penalty function’ method for problems of contact. *Computers & Structures*, 36(4) :777 – 782, 1990. 37
- [27] John K Dukowicz. Conservative rezoning (remapping) for general quadrilateral meshes. *Journal of Computational Physics*, 54(3) :411 – 424, 1984. 30, 185
- [28] Vadim Dyadechko and Mikhail Shashkov. Reconstruction of multi-material interfaces from moment data. *Journal Of Computational Physics*, 227(11) :5361–5384, MAY 10 2008. 42
- [29] Douglas Enright, Ronald Fedkiw, Joel Ferziger, and Ian Mitchell. A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *J. Comput. Phys.*, 183(1) :83–116, November 2002. 42
- [30] J.M. Escobar, E. Rodríguez, R. Montenegro, G. Montero, and J.M. González-Yuste. Simultaneous untangling and smoothing of tetrahedral meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(25) :2775 – 2787, 2003. 30

-
- [31] Ronald P Fedkiw, Tariq Aslam, Barry Merriman, and Stanley Osher. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of Computational Physics*, 152(2) :457–492, 1999. 38
- [32] Jacques Flament, Patrick Le Tallec, and Jean-Philippe Perlat. Méthode de couplage euler-lagrange pour la dynamique rapide. In *10e colloque national en calcul des structures*, page Clé USB, Giens, France, 2011. 2, 38
- [33] Michel Fortin. An analysis of the convergence of mixed finite element methods. *R.A.I.R.O. Anal. Numér.* 11, page 341–354, 1977. 67
- [34] Jean-Michel Ghidaglia. Numerical computation of 3d two phase flow by finite volumes methods using flux schemes. In *Finite Volumes for Complex Applications : Problems and Perspectives*, pages 69–94. Hermes Science Publications, 1999. 81
- [35] J. Glimm, M.J. Graham, J. Grove, X.L. Li, T.M. Smith, D. Tan, F. Tangerman, and Q. Zhang. Front tracking in two and three dimensions. *Computers & Mathematics with Applications*, 35(7) :1 – 11, 1998. `Advanced Computing on Intel Architectures`. 41
- [36] Roland Glowinski, Tsorng-Whay Pan, and Jacques Periaux. A fictitious domain method for dirichlet problem and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 111(3-4) :283 – 303, 1994. 38
- [37] R.J. Gu, P. Murty, and Q. Zheng. Use of penalty variable in finite element analysis of contacting objects. *Computers & Structures*, 80(31) :2449 – 2459, 2002. 37
- [38] J.O. Hallquist, G.L. Goudreau, and D.J. Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1–3) :107 – 137, 1985. 37
- [39] A Hansbo and P Hansbo. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 193(33-35) :3523–3540, 2004. 2, 40
- [40] Patrice Hauret and Patrick Le Tallec. A discontinuous stabilized mortar method for general 3d elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49 – 52) :4881 – 4900, 2007. 1, 65, 68, 69
- [41] C.W Hirt, A.A Amsden, and J.L Cook. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 14(3) :227 – 253, 1974. 1, 9
- [42] C.W Hirt and B.D Nichols. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :201 – 225, 1981. 42
- [43] Helge Holden and Nils Henrik Risebro. *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2011. 41
- [44] I. Huněk. On a penalty formulation for contact-impact problems. *Computers & Structures*, 48(2) :193 – 203, 1993. 37
- [45] James M. Hyman. Numerical methods for tracking interfaces. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1-3) :396–407, 1984. 41
- [46] Gustav Jaumann. Geschlossenes system physikalischer und chemischer differentialgesetze. In *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftliche*, pages 385–530. Wien : K.-K. Hof- und Staatsdruckerei, 1911. 16
- [47] B.I. Jun. A modified equipotential method for grid relaxation. *Journal of Computational Physics*, 2003. 31
-

- [48] Houari Boumediène Khenous, Patrick Laborde, and Yves Renard. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. *EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS A-SOLIDS*, pages 918–932, 2008. 102
- [49] Patrick Knupp, Len G. Margolin, and Mikhail Shashkov. Reference jacobian optimization-based rezone strategies for arbitrary lagrangian eulerian methods. *Journal of Computational Physics*, 176(1) :93 – 128, 2002. 31
- [50] Tz.V. Kolev and R.N. Rieben. A tensor artificial viscosity using a finite element approach. *Journal of Computational Physics*, 228(22) :8336 – 8366, 2009. 17
- [51] Milan Kucharik, Rao V. Garimella, Samuel P. Schofield, and Mikhail J. Shashkov. A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations. *Journal Of Computational Physics*, 229(7) :2432–2452, APR 1 2010. 42
- [52] T. A. Laursen and J. C. Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation–frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(20) :3451–3485, 1993. 1, 37
- [53] Bram Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov’s method. *Journal of Computational Physics*, 32(1) :101 – 136, 1979. 20, 30
- [54] H Luo, JD Baum, and R Lohner. On the computation of multi-material flows using ale formulation. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :304–328, FEB 10 2004. 38
- [55] L.G. Margolin and Mikhail Shashkov. Second-order sign-preserving conservative interpolation (remapping) on general grids. *Journal of Computational Physics*, 184(1) :266 – 298, 2003. 30
- [56] Alain Miranville and Roger Temam. *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*. Scopus (Berlin). Springer, 2002. 6
- [57] Richard Von Mises. Mechanik der plastischen formänderung von kristallen. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 8(3) :161–185, 1928. 16
- [58] Nicolas Moes, John Dolbow, and Ted Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 46(1) :131–150, SEP 10 1999. 40
- [59] Jose Luis Morales, Jorge Nocedal, and Mikhail Smelyanskiy. An algorithm for the fast solution of linear complementarity problems. Technical report, Optimization Technology Center, Northwestern University, June 2007. 181
- [60] S.J. Mosso, B.K. Swartz, D.B. Kothe, and R.C. Ferrell. A parallel, volume-tracking algorithm for unstructured meshes. In P. Schiano, A. Ecer, J. Periaux, and N. Satofuka, editors, *Parallel Computational Fluid Dynamics 1996*, pages 368 – 375. North-Holland, Amsterdam, 1997. 42, 44
- [61] Hashem M. Mourad, John Dolbow, and Isaac Harari. A bubble-stabilized finite element method for dirichlet constraints on embedded interfaces. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 69(4) :772–793, JAN 22 2007. 39, 98, 99, 106
- [62] Katta G. Murty and Vincent F. Yu. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Helderman-Verlag, 1988. 181
- [63] J. Nitsche. Über ein variationsprinzip zur lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem*

-
- Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36 :9–15, 1971. 10.1007/BF02995904. 98
- [64] W. Noh and Paul Woodward. Slic (simple line interface calculation). In Adriaan van de Vooren and Pieter Zandbergen, editors, *Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28 – July 2, 1976 Twente University, Enschede*, volume 59 of *Lecture Notes in Physics*, pages 330–340. Springer Berlin / Heidelberg, 1976. 10.1007/3-540-08004-X_336. 2, 42
- [65] W. F. Noh. Cel : A time-dependent, two-space-dimensional, coupled eulerian-lagrangian code. In M. Rotenberg B. Alder, S. Fernbach, editor, *Methods in Computational Physics, Volume 3, Fundamental Methods in Hydrodynamics*, pages 117–179. Academic Press, New York, NY, 1964. 2, 38
- [66] Lars Olovsson. *On the Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method*. PhD thesis, Linköpings University, 2000. 2, 38
- [67] Stanley Osher and Ronald P. Fedkiw. Level set methods : An overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, 169(2) :463–502, 2001. 42
- [68] Stanley Osher and Ronald P. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2002. 42
- [69] Stanley Osher and James A Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) :12 – 49, 1988. 42
- [70] James Edward Pilliod and Elbridge Gerry Puckett. Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces. *Journal of Computational Physics*, 199(2) :465 – 502, 2004. 42
- [71] Elbridge Gerry Puckett. A volume of fluid interface tracking algorithm with applications to computing shock wave refraction. In H. A. Dwyer, editor, *4th international symposium on computational fluid dynamics*, pages 933–938, 1991. 189
- [72] John D Ramshaw. Conservative rezoning algorithm for generalized two-dimensional meshes. *Journal of Computational Physics*, 59(2) :193 – 199, 1985. 30
- [73] Jean Salençon. *Mécanique des milieux continus : Concepts généraux*. Mécanique des milieux continus. Éd. de l’École polytechnique, 2005. 6
- [74] Jessica Sanders, Tod Laursen, and Michael Puso. A nitsche embedded mesh method. *Computational Mechanics*, 49 :243–257, 2012. 10.1007/s00466-011-0641-2. 39, 98
- [75] Jessica D. Sanders, John E. Dolbow, and Tod A. Laursen. On methods for stabilizing constraints over enriched interfaces in elasticity. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 78(9) :1009–1036, MAY 28 2009. 40
- [76] Mikhail Shashkov. Closure models for multimaterial cells in arbitrary lagrangian-eulerian hydrocodes. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 56(8) :1497–1504, MAR 20 2008. 9th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Reading, England, 2007. 2, 39, 53
- [77] Juan C. Simó and Thomas J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary applied mathematics : Mechanics and materials. Springer, 1998. 16
- [78] Ivan E. Sutherland and Gary W. Hodgman. Reentrant polygon clipping. *Commun. ACM*, 17(1) :32–42, January 1974. 32
- [79] P. K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal On Numerical Analysis*, 21(5) :995–1011, 1984. 187
-

- [80] Hiroshi Terashima and Grétar Tryggvason. A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 228(11) :4012 – 4037, 2009. 38
- [81] R. Tipton. Grid optimization by equipotential relaxation. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, 1992. 31
- [82] R Tosello. Hydrocodes - codes de dynamiques rapide, 2006. 8, 9
- [83] Salih Ozen Unverdi and Grétar Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 99(1) :180 –, 1992. 41
- [84] Bala R. Vatti. A generic solution to polygon clipping. *Commun. ACM*, 35(7) :56–63, July 1992. 32
- [85] Efrem Vitali and David J. Benson. An extended finite element formulation for contact in multi-material arbitrary lagrangian-eulerian calculations. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 67(10) :1420–1444, SEP 3 2006. 2, 40, 63, 85
- [86] Efrem Vitali and David J. Benson. Contact with friction in multi-material arbitrary lagrangian-eulerian formulations using x-fem. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 76(6) :893–921, NOV 5 2008. 40, 63
- [87] Efrem Vitali and David J. Benson. Kinetic friction for multi-material arbitrary lagrangian eulerian extended finite element formulations. *Computational Mechanics*, 43(6) :847–857, MAY 2009. 40, 63
- [88] John VonNeumann and Robert D. Richtmyer. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21(3) :232–237, 1950. 17
- [89] Burton Wendroff. A compact artificial viscosity equivalent to a tensor viscosity. *Journal of Computational Physics*, 229(19) :6673 – 6675, 2010. 17
- [90] M. Wilkins. Calculation of elastoplastic flows. *Methods Of Computational Physics*, 3 :211–263, 1964. 20
- [91] Barbara I. Wohlmuth. *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2001. 1, 37, 39, 67, 68, 78, 102
- [92] Peter Wriggers and Tod A. Laursen. *Computational Contact Mechanics*. Courses and lectures. Springer, 2008. 1, 37
- [93] Bin Yang and Tod A. Laursen. A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6–8) :756 – 772, 2008. 37
- [94] David L. Youngs. Time dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pages 273–285, 1982. 2, 42, 44
- [95] David L. Youngs. Numerical simulation of turbulent mixing by rayleigh-taylor instability. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1–3) :32–44, 1984. 42
- [96] Xianyi Zeng and Charbel Farhat. A systematic approach for constructing higher-order immersed boundary and ghost fluid methods for fluid–structure interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 231(7) :2892 – 2923, 2012. 38
- [97] Lucy Zhang, Axel Gerstenberger, Xiaodong Wang, and Wing Kam Liu. Immersed finite element method. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 193(21–22) :2051–2067, 2004. Flow Simulation and Modeling. 38

- [98] Xueying Zhang and Ning Zhao. A robust algorithm for moving interface of multi-material fluids based on riemann solutions. *Acta Mechanica Sinica*, 22(6) :509–519, DEC 2006. 38
- [99] J.A. Zukas. *Introduction to Hydrocodes*. Studies in Applied Mechanics. Elsevier, 2004. 11