HAL
open science

Effets quantiques dans les images optiques

Nicolas Treps

To cite this version:

Nicolas Treps. Effets quantiques dans les images optiques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT : . tel-00000400

HAL Id: tel-00000400

https://theses.hal.science/tel-00000400v1

Submitted on 23 Jul 2001

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Kastler Brossel

Université Pierre et Marie Curie

Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Nicolas Treps

sur le sujet :

Effets quantiques dans les images optiques

Soutenue le 11 juillet 2001 devant le jury composé de :

M. Claude Boccara	rapporteur
M. Robert W. Boyd	
M. Claude Fabre	directeur de thèse
M. Mikhaïl Kolobov	rapporteur
M. Luigi Lugiato	
Mme Agnès Maître	

Ce travail a été réalisé au laboratoire Kastler Brossel de 1998 à 2001. Je remercie ses directeurs successifs, Michèle Leduc, Elisabeth Giacobino et Franck Laloë, pour m'avoir accueilli et m'avoir offert d'excellentes conditions pour commencer dans le monde de la recherche.

Claude Fabre et Agnès Maître ont encadré ce travail, et il m'est impossible de citer tout ce qu'ils m'ont apporté. Je tiens surtout à insister sur la confiance qu'ils m'ont accordé durant ces trois années et sur l'ambiance qu'ils ont su créer à l'intérieur de l'équipe. Je remercie tout particulièrement Claude pour sa très grande disponibilité, ses conseils et idées toujours très constructifs et pour sa relecture rapide et efficace de ce manuscrit. Je remercie Agnès également pour sa disponibilité, et pour m'avoir appris à mener une expérience et à passer les caps difficiles.

J'ai eu l'occasion de travailler sur l'expérience en compagnie d'un grand nombre de personnes différentes, je remercie Sara Ducci pour avoir partagé avec moi les longues heures d'alignement, mais également pour m'avoir aidé pendant la rédaction de cette thèse. Un grand merci à Marcello Martinelli qui a repris l'expérience à son compte alors que nous étions tous par monts et par vaux et qui a réussi à voir les premiers effets quantiques, et à Sylvain Gigan qui va avoir la lourde charge de tout remonter tout seul, courage ! Enfin je remercie Matthias Vaupel pour avoir monté l'expérience avant mon arrivée.

Je tiens à remercier également tout particulièrement les membres de l'équipe australienne, Hans Bachor qui m'a invité à Canberra, Ulrik Andersen qui a fait l'expérience avec moi et avec lequel nous avons formé une équipe très efficace, Ping Koy Lam et Ben Buchler qui ont participé activement à l'expérience et enfin tous les membres de ce laboratoire qui m'ont convaincu d'y revenir faire mon Post Doc.

Je remercie chaleureusement les membres du Jury, Claude Boccara, Robert Boyd, Luigi Lugiato et Mikhaïl Kolobov pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail alors qu'ils avaient tous des emplois du temps très chargés (et cela relève du miracle que l'on ait trouvé une date de soutenance convenant à tout le monde !).

J'ai pu apprendre également pendant cette thèse l'importance d'être épaulé par des techniciens efficaces. Ainsi, je remercie tout particulièrement l'équipe d'électronique du laboratoire : Jean Pierre Okpisz, Mohamed Boujrad et Philippe Pace qui nous ont aidé à développer l'électronique des détecteurs à quadrants et ont activement participé à mon départ en Australie. De la même façon, je remercie Bernard Rodriguez, Pascal Travers et Francis Tréhin qui ont toujours pris le temps de réfléchir au problèmes posés pour me proposer des solutions adéquates.

Je remercie également très chaleureusement les secrétaires : Monique Bonamy, Karima Nouira, Christelle Sansa et Karine Vasseur pour leur disponibilité, leur gentillesse et pour m'avoir permis de faire tous ces voyages !

Tout aux long de ces trois années, j'ai eu également la chance de collaborer étroitement avec tous les membres du groupe d'optique quantique. Je les remercie de l'ambiance dans laquelle tout s'est déroulé, merci à Laurent Longchambon pour son travail sur l'auto-verouillage des cavités, à Thomas Coudreau, Jean-Pierre Hermier, Isabelle Maurin, Jean-Philippe Karr, Augustin Baas, Gaëtan Messin, Laurent Vernac et Vincent Josse pour les échanges d'idées et de matériel.

Toute page de remerciement comporte en général un merci global à tous les membres du laboratoire. Je tiens ici à insister tout spécialement dessus, car l'ambiance et la collaboration à l'intérieur de ce laboratoire me paraissent tout à fait exceptionnels. Je remercie en conséquence

- *les membres de mon bureau : Pierre François Cohadon, Cyriaque Genêt, Tristan Briant, Kuanshou Zhang et Laurent Hilico qui ont supporté sans faiblir les gémissements du ventilateur de mon ordinateur...*
- *mes partenaires 'sportifs', Jean-Pierre Hermier et Pierre-François Cohadon pour les pauses de midi, ainsi que tous les thésards du labo, Bruno Manil, Eric-Olivier Le Bigot, Gustavo Rodrigues, Thibaut Jonckherre, Gaëtan Hagel et Rémi Battesti pour les agréables moments passés à discuter.*
- *tous les membres permanents de ce laboratoire, toujours disponibles pour répondre à mes questions, merci à Lucile Julien et ses conseils en matière d'enseignement, Serge Reynaud, Astrid Lambrecht, Benoit Grémaud, Jean-Michel Courty, Michel Pinard, François Nez, Catherine Schowb, Antoine Heidmann, François Biraben, Nicolas Billy, Dominique Delande, Bernard Cagnac, Jean-Pierre Faroux, Saïda Guelatti, Jean-Pierre Descoubes et Corinne Poisson (pour sa victoire finale face à l'imprimante !).*

Pour finir, je dois mentionner que j'ai eu la chance pendant cette thèse d'être moniteur à Paris VI, et je remercie très vivement Jacques Chauveau, Christian Carimalo, Wilfried Da Silva et Jean-Michel Mariot pour les très bons moments que j'ai passé à enseigner à leurs côté.

Sur un plan plus personnel, je remercie mes colocataires successifs, Benoit Wattellier, Pierre-Olivier Weill et Wilfried Texier (qui a notamment mis cette thèse sur le bruit en musique...).

Cette thèse n'aurait enfin certainement pas été possible sans le soutien permanent de ma famille, merci pour tout, ils partagent cette réussite avec moi.

Table des matières

Table des matières i

Table des figures v

Introduction 1

Première partie : Optique quantique des images transverses 5

1. Introduction à l'optique quantique des images 7
- A Champ électromagnétique quantifié 7
- B Quantification transverse 10
  - B.1 Opérateurs photoniques transverses 10
  - B.2 «Pixelisation» de l'espace 11
  - B.3 Décomposition en modes transverses 13
  - B.4 Conclusion 17
- C Observables 19
  - C.1 Cahier des charges 19
  - C.2 Quantités locales 21
  - C.3 Quantités intégrées sur un pavage transverse 24
- D Bruit Quantique - Corrélations 27
  - D.1 Bruit quantique standard 27
  - D.2 Variance 29
  - D.3 Corrélations quantiques 30
- E Résumé des formules importantes 35

2. Effets quantiques dans les images 37
- A Exemples 37
  - A.1 Champ monomode transverse 37

A.2 États cohérents et opérateurs pixels 44
B Propagation dans un milieu non linéaire 47
B.1 Position du problème 47
B.2 Résolution 48
B.3 Calcul des observables 51

3. Principe des mesures 55
A Analyse spectrale 55
A.1 Courant délivré par une photodiode 55
A.2 Variance de bruit 56
B Exemple : les photodiodes à quadrants 57
B.1 Introduction 57
B.2 Calibration des photodiodes 59
B.3 Chaine d'acquisition 64
B.4 Exploitation des données 67

Deuxième partie : Images quantiques : utilisation et production 73

4. Limites de résolution dans les images optiques 75
A Contraste dans les images 75
A.1 Champ monomode cohérent 75
A.2 Réduction de bruit locale 78
B Mesures de petits déplacements 79
B.1 Introduction 79
B.2 Analyse théorique 81
B.3 Étude de faisabilité 93
B.4 Résultats expérimentaux 99
B.5 Conclusion 116

5. Bruit quantique dans un soliton spatial 119
A Introduction 119
B Le soliton spatial 119
B.1 Le soliton $\chi^{(3)}$ 120
B.2 Le soliton $\chi^{(2)}$ 121
C Image quantique du soliton 121
C.1 Figures de corrélation 122

C.2 Géométrie circulaire 123
D Conclusion 125
E Article sur le bruit quantique dans un soliton spatial 125

6. L'oscillateur paramétrique optique 137
A Description du système 137
A.1 Le cristal 137
A.2 La cavité 139
A.3 Conclusion 145
B Description détaillée de l'expérience 146
B.1 Schéma général 146
B.2 Préparation de la pompe 146
B.3 Géométrie de l'OPO 148
B.4 Modes transverses des cavités 152
C Motifs optiques ou «patterns» dans les OPO 157
C.1 Revue bibliographique 157
C.2 Cavité plane 159
C.3 Cavité concentrique 161
C.4 Cavité semi-concentrique 167
C.5 Cavité confocale 169
D Effets thermiques et analyse en fréquence 176
D.1 Effets thermiques 176
D.2 Analyse en fréquence 179
E Verrouillage de phase 184
E.1 Introduction 184
E.2 Principe 184
E.3 Réalisation expérimentale 186
E.4 Problèmes 187
E.5 Conclusion 188
F Mesures quantiques 189
F.1 Introduction 189
F.2 Tests de la chaîne : faisceaux jumeaux 189
F.3 Mesures multimodes 190

Conclusion 197

Annexe 201
A Génération de second harmonique 201
A.1 Introduction 201
A.2 La solution standard 201
A.3 Description quantique 204
A.4 Equation de Fokker-Plank 205
A.5 Diagonalisation du hamiltonien 207
A.6 Conclusion 207
B Champ multimode 212
C Programmes de traitement des données 214

Bibliographie 221

Table des figures

1.1 Détection homodyne 22
1.2 Schéma expérimental de mise en oeuvre de la variance conditionnelle. . 32

2.1 Propagation de N champs à travers un milieu non linéaire. 47

3.1 Photodiode à quadrants : à gauche, la diode, à droite, schéma de la disposition des quadrants. 58
3.2 Interface entre la photodiode, à gauche, et l'ordinateur, à droite. 58
3.3 Circuit électrique branché en sortie des photodiodes 59
3.4 Montage utilisé pour calibrer les sorties DC des photodiodes. 60
3.5 Montage utilisé pour calibrer les sorties HF des photodiodes. 63
3.6 Chaîne d'acquisition complète entre la sortie HF des photodiodes et l'ordinateur (une seule des voies à été matérialisée). 64
3.7 Programme d'acquisition de données «analyse.vi» 68
3.8 Programme de calcul des bruits de fond «dark.vi» 69
3.9 Programme de calcul des gains. 70

4.1 Bruit sur la mesure d'une image par un ensemble de pixels. 76
4.2 Géométrie des détecteurs adjacents. 77
4.3 Mesure de position d'un faisceau lumineux par une photodiode à deux zones. La quantité d représente la position relative du faisceau par rapport au centre du détecteur. 79
4.4 Limite dans la précision de la mesure de position imposée par le bruit quantique de la lumière. 80
4.5 Détecteur de position, scindé en deux partie symétriques avec une zone noire entre les deux 84

4.6 Forme des modes utilisés pour obtenir une réduction de bruit dans une mesure de différence. A droite, u_1 est un mode TEM_{00}, et à gauche u_0 est le même mode mais avec un facteur de phase π entre sa partie gauche et sa partie droite. 90
4.7 Représentation du transfert des anticorrélations en corrélations grâce au mode retourné. a) les deux modes que l'on additionne, le mode E_1 étant le vide comprimé. b) résultat de l'addition en amplitude : le mode E_1 ne contribue que pour les fluctuations. c) profil de l'intensité du faisceau obtenu : les fluctuations de ses parties gauches et droites sont corrélées. 91
4.8 Forme des modes utilisés pour obtenir une réduction de bruit dans une mesure de différence, avec des corrélations. 92
4.9 Production du faisceau bimode non classique : la lame de phase retourne le champ cohérent qui est ensuite mélangé grâce à la lame séparatrice au vide comprimé. 94
4.10 Bruit dans une mesure de différence en fonction du bruit du vide comprimé normalisé à un, dans le cas d'une simple propagation entre la lame de phase et le détecteur. 96
4.11 a) Profil d'intensité du faisceau lumineux après 40mm de propagation libre depuis la lame de phase. b) Signal que donne ce faisceau dans une mesure de différence en fonction de sa position. 97
4.12 Schéma expérimental permettant de mélanger le champ cohérent et le vide comprimé tout en imageant parfaitement le plan de la lame de phase sur le détecteur. 97
4.13 Bruit dans une mesure de différence en fonction du bruit du vide comprimé normalisé à un, dans le cas où on image le plan de la lame de phase sur le détecteur. 98
4.14 Bruit sur la mesure de différence en fonction des positions relatives du champ comprimé et de l'état cohérent par rapport au détecteur, pour un vie comprimé en intensité à 60% 99
4.15 Schema expérimental du «squeezer» 100
4.16 Conception de la lame de phase : à gauche la lame demi-onde séparée en quatre zone, à droite la réunification des zones 1 et 3 avec un angle de 90° entre les deux. 102
4.17 Photographie de la lame de phase sur son support. 102
4.18 Modulation de la position d'un faisceau laser à $4,5MHz$ à l'aide d'un cristal biréfringeant, de deux électrodes et d'un générateur de signal. . . 103

4.19 Le générateur de signal 104
4.20 Photographie du montage expérimental : le support blanc en bas à droite contient le cristal, et on peut voir les deux lentilles de focale 5cm en amont et en aval de ce dernier. Au milieu de la photographie on retrouve la lame de phase, avec derrière elle la lame séparatrice. 105
4.21 Signal de différence mesuré expérimentalement en fonction de la position du faisceau. A gauche, zoom de la partie centrale où l'on a représenté la tangente en 0 avec une droite. 106
4.22 Partie haute fréquence du signal de différence en fonction de la fréquence d'analyse. Le pic que l'on aperçoit est une mesure de l'amplitude du déplacement. A $4,5MHz$, les courbes de haut en bas correspondent à ce que l'on mesure lorsque l'on écarte le faisceau du centre du détecteur. 107
4.23 Bruit sur le faisceau complet, sans lame de phase, en fonction de la phase relative entre le champ cohérent et le vide comprimé. La ligne horizontale représente le bruit quantique standard. 109
4.24 Schéma expérimental complet pour une mesure de petits déplacement en dessous de la limite quantique standard. 110
4.25 Réduction de bruit spatiale à 4,5MHz : la courbe supérieure est le bruit sur la somme des deux détecteurs, et se confond avec le bruit quantique standard. Les deux courbes du milieux sont les bruits respectifs de chacun des quadrants La courbe inférieure est le bruit sur la mesure de différence. 111
4.26 Bruit sur la mesure de différence en fonction de la fréquence d'analyse. La courbe du haut représente le bruit quantique standard. 113
4.27 Bruit sur la mesure de différence à 4,5MHz en fonction du temps. La courbe du haut représente le bruit quantique standard. 114
4.28 Mesure de petit déplacement améliorée par l'utilisation d'un faisceau non classique multimode. La courbe du haut représente la même mesure effectuée avec un faisceau monomode. Mesure faite avec une bande de résolution de 100kHz. 115
4.29 Même mesure que dans la figure précédente mais avec une amplitude de déplacement moins importante et une bande de résolution de 10kHz. . . 116

5.1 Comparaison entre un soliton et un faisceau divergent. 120
5.2 Fonction de corrélation normalisée entre deux quadratures du fondamental et du second harmoniques : $\langle \delta \hat{I}_0^1(r) \delta \hat{I}_{\pi/2}^2(r') \rangle_N$ dans le soliton $\chi^{(2)}$ . . 122

5.3 Même fonction de corrélation qu'en figure 5.2 mais pour des détecteurs de taille finie, soit $\langle \delta \hat{I}_0^1(D_r) \delta \hat{I}_{\pi/2}^2(D_{r'}) \rangle_N$ 123
5.4 Mesure du centre du faisceau à l'aide d'un diaphragme 124
5.5 Ligne pleine : bruit en intensité du second harmonique en fonction de la taille du diaphragme : $\langle \delta \hat{I}_0^2(D_R)^2 \rangle_N$. Ligne pointillée : variance conditionnelle de ce même champ connaissant les fluctuations de phase du fondamental : $V_{\delta \hat{I}_0^2(D_R)|\delta \hat{I}_{\pi/2}^1(D_R)}$. Ligne tiretée : même quantité que la précédente mais connaissant en plus les corrélations avec la partie extérieure du second harmonique : $V_{V_{\delta \hat{I}_0^2(D_R)|\delta \hat{I}_{\pi/2}^1(D_R)}|\delta \hat{I}_0^2(D-D_R)}$ où $D - D_R$ représente le complémentaire du détecteur centré. 124

6.1 Processus quantique dans le cristal : un photon pompe donne naissance à un photon signal et à un photon complémentaire parfaitement corrélés. 138
6.2 Les photons siamois : en plus de l'ordre temporel, il y a une parfaite corrélation entre les parties hautes et basses du faisceau. 139
6.3 L'oscillateur paramétrique optique 139
6.4 Mesure de photons jumeaux. a) configuration pour mesurer le bruit quantique standard. b) configuration pour mesurer la réduction sur le bruit de la différence. 141
6.5 Oscillateur paramétrique optique : chemin du photon signal dans le cas général (nous n'avons par représenté le photon complémentaire. . .) . . 142
6.6 La cavité plane 143
6.7 La cavité concentrique 143
6.8 La cavité semi-concentrique 144
6.9 La cavité confocale 144
6.10 Schéma général pour l'observation de motifs optiques dans un oscillateur paramétrique optique. 146
6.11 La cavité de doublage. 148
6.12 L'oscillateur paramétrique optique : schéma technique 149
6.13 Le cristal avec walk off compensé. On a représenté le chemin typique de la pompe, du signal et du complémentaire. 151
6.14 Positions des résonances des modes transverses en fonction de la longueur de cavité. 154
6.15 Cavité d'ordre de dégénérescence 3 155

6.16 Seuil de la cavité plane, pour un waist de pompe de $150\mu m$ (triangle) et de $100\mu m$ (carrés) en fonction de la fréquence de balayage. Les lignes ne sont qu'un guide pour l'oeil. 160
6.17 Waist propre de la cavité quasi-concentrique, en fonction de la longueur de la cavité (100mm correspond à la dégénérescence parfaite). 161
6.18 Distance entre deux modes transverses consécutifs, normalisée à l'intervalle spectral libre, pour une cavité quasi-concentrique. La zone hachurée correspond à la zone de dégénérescence en tenant compte de la finesse de la cavité. 162
6.19 Seuil de la cavité concentrique (carrés) et de la cavité semi-concentrique(triangles) en fonction de la longueur de cavité. La dégénérescence parfaite à été arbitrairement mise, dans les deux cas, à 10 cm. 164
6.20 Structures sur le signal, loin de dégénérescence. 165
6.21 Orientation de la «queue» sur le signal en fonction du positionnement du cristal. 165
6.22 Deux exemples de structures proche de dégénérescence. 166
6.23 Deux exemples de structures très proche de dégénérescence 167
6.24 Waist et valeur de N_{tr} pour une cavité semi-concentrique en fonction de sa longueur. 168
6.25 Structure sur le signal loin de dégénérescence pour une cavité semi-concentrique. 169
6.26 Structure sur le signal à une centaine de microns de la semi-concentricité. À gauche, le champ proche, à droite le champ lointain. 169
6.27 Structure sur le signal à moins de 20 microns de la semi-concentricité. À gauche, le champ proche, à droite le champ lointain. 169
6.28 Waist propre de la cavité confocale 170
6.29 À gauche, distance entre deux modes transverses paires normalisée à l'intervalle spectral libre dans une cavité confocale. La zone hachurée correspond à la zone de dégénérescence en tenant compte de la finesse de la cavité. À droite, valeur de N_{tr} correspondante. 170
6.30 Seuil de la cavité confocale, en fonction de la longueur relative à la longueur de dégénérescence. Les carrés représentent le seuil d'émission des structures optiques. 172
6.31 Structures dans une cavité confocale sur le signal : à gauche le champ proche et à droite le champ lointain correspondant. 173

6.32 Approximation du centre de la structure par une superposition de 25 modes gaussiens. 173
6.33 Résultat théorique de l'interaction de 15 modes gaussiens dans une cavité confocale. 174
6.34 Structures en champ proche en fonction de la taille (w_0) de la pompe. . 174
6.35 Champ proche du signal, du complémentaire et de la pompe. 175
6.36 Centre du champ lointain du signal dans une cavité confocale, en fonction de l'écart ΔL à la longueur de dégénérescence. 176
6.37 Dispositif expérimental pour l'étude des propriétés thermiques et fréquentielles de l'OPO. 176
6.38 Dépendance de la distance entre modes transverses avec l'intensité du champ de pompe. 177
6.39 Nombre de mode transverse par intervalle spectrale libre en fonction de la longueur de cavité et de la puissance de pompe 178
6.40 Position de la confocalité en fonction de la puissance de pompe (mesure directe effectué avec un OPO doublement résonnant). 179
6.41 Choix de la fréquence de battement entre le signal et le complémentaire 181
6.42 Dépendance de la fréquence de battement $\Delta\nu$ avec la température du cristal 182
6.43 Dépendance de la fréquence de battement $\Delta\nu$ avec la puissance de la pompe 183
6.44 Introduction d'une lame quart d'onde dans une cavité confocale. 184
6.45 Couple de valeurs de la longueur de la cavité et de la température du cristal à une puissance de pompe donnée et avec un angle de 5° de la lame quart d'onde pour lesquels le mode dégénéré est le mode au seuil le plus bas. Les positions sont relatives à la position de dégénérescence exacte avec une lame à 0° et les longueurs sont normalisées à la longueur d'onde de l'infrarouge. 186
6.46 Dégénérescence en fréquence : la courbe du haut est l'intensité de sortie du faisceau infrarouge et celle du bas du faisceau vert. Celle du milieu est la transmission du faisceau infrarouge par une cavité Fabry-Pérot. . 187
6.47 Schéma expérimental pour la mesure d'effets quantiques transverses. . . 189
6.48 Définition des secteurs des photodiodes 190
6.49 Exemple typique du résultat d'une acquisition pendant le balayage de la cavité : la courbe supérieure (trait plein) correspond au faisceau signal et la courbe inférieur (trait pointillé) au faisceau complémentaire. . . . 191

6.50 Mesure de photons jumeaux à la sortie de la cavité concentrique. 192
6.51 Mesure de faisceaux jumeaux dans une cavité légèrement plus longue que la cavité confocale, en fonction de l'ouverture du diaphragme. . . . 194
6.52 Mesure de faisceaux jumeaux dans une cavité légèrement plus courte que la cavité confocale, en fonction de l'ouverture du diaphragme. . . . 195
6.53 Le banc d'optique. 196
7.1 Intensité du fondamental (trait plein) et de second harmonique (pointillé) en fonction de la distance de propagation 202
7.2 Bruit en intensité du champ second-harmonique (pointillé) et du fondamental (trait plein) en fonction de la distance de propagation. 203
7.3 Intensité du fondamental (trait plein) et du second harmonique (pointillé) en fonction de la distance de propagation. 205
7.4 Amortissement de la renaissance de champ en représentation «positive P» (ligne pleine) et en représentation de Wigner (ligne pointillée) . . . 206
7.5 Bruit sur le champ fondamental en fonction de la distance de propagation. 206
7.6 Intensité du second harmonique (en haut) et bruit sur le second harmonique normalisé à 1 (en bas) en fonction de la distance de propagation, pour un calcul avec 2000 photons. 207
7.7 Face avant du programme «Jumeaux.vi» 214
7.8 Diagramme du programme «Jumeaux.vi» 216
7.9 Diagramme du programme «Acquisition.vi» décrit au chapitre 3 section B. On voit l'ensemble des modules qui permettent de synchroniser les cartes d'acquisitions. 217
7.10 Diagramme du programme «Analyse.vi» décrit au chapitre 3 section B. Il utilise le sous-programme «Acquisition.vi» (représenté par *Acq.* sur la figure) et gère l'enregistrement des données. 218
7.11 Diagramme montrant comment réaliser le calcul de la variance conditionnelle 219
7.12 Diagramme montrant comment réaliser le calcul des photons jumeaux . 220

Introduction

Déterminer la limite ultime au pouvoir de résolution en optique est depuis longtemps une question fondamentale, à la fois théorique et pratique, pour les physiciens. À la fin du XIXe siècle, Lord Rayleigh y donna une réponse désormais classique. Il étudiait à l'époque les propriétés de résolution d'instruments comme le télescope ou le spectroscope, et se posa la question suivante : quelle est la plus petite séparation angulaire entre deux objets dans l'espace que je peux mesurer ? Cela l'amena à définir le fameux «critère de Rayleigh» [Rayleigh 1879]: deux sources incohérentes sont considérées comme discernables lorsque leurs motifs de diffraction, sur le plan d'observation, sont placés de telle sorte que le premier zéro de l'un coïncide avec le maximum de l'autre. Dans le cas de l'utilisation d'optiques circulaires, cela donne comme séparation angulaire $1{,}22\lambda/D$ où D est la distance entre les objets et le plan d'observation, et λ la longueur d'onde de la lumière utilisée. Cette limite physique n'est pas uniquement liée aux propriétés de la lumière, mais également à celles de l'oeil humain, très peu capable de voir les contrastes. Ce fonctionnement de l'oeil idéalisé en mode binaire (il y a ou il n'y a pas de lumière) fait que le bruit dans le champ lumineux n'intervient pas dans le critère, seul le signal compte. L'utilisation de détecteurs modernes, comme les photodiodes ou les caméras CCD, change profondément la situation : en effet, de tels détecteurs permettent de mesurer très précisément l'intensité locale du champ et d'obtenir une carte détaillée de la figure de diffraction, à partir de laquelle on peut déterminer des détails beaucoup plus petits que la tache focale, et même que la longueur d'onde. Ainsi, le critère de résolution va maintenant reposer sur le rapport entre le signal mesuré et le bruit sur ce signal. La longueur d'onde de la lumière n'est donc plus nécessairement la taille ultime des détails que l'on peut discerner.

De nombreuses expériences d'optique utilisent ces détecteurs de haute précision, et obtiennent des résultats tout à fait spectaculaires. On citera par exemple les mesures de position d'un faisceau laser faîtes grâce à un détecteur à deux zones. Si le faisceau est incident au centre de ce détecteur, la différence entre les courants délivrés par les deux zones donne une information très précise sur la position relative du détecteur et

du faisceau. Cette technique permet d'obtenir le positionnement du faisceau avec une précision de l'ordre du nanomètre (sachant que la longueur d'onde de la lumière est de l'ordre du micromètre, et que le diamètre caractéristique du faisceau est le millimètre), et est utilisée, par exemple, dans la mesure de coefficients d'absorption de gaz par effet mirage [Boccara 80, Charbonnier 90], dans le microscope à force atomique [Putman 92] ou encore pour mesurer les déplacements de molécules en biophysique [Kojima 97]. Sur le plan théorique, de nombreuses études utilisant par exemple les fonctions propres du passage à travers les systèmes optiques comportant des diaphragmes que sont les «fonctions prolate sphériques» [Toraldo 69, Bertero 82] permettent d'obtenir des algorithmes de reconstruction d'image très efficaces [Lantz 91].

D'un autre côté, il y a cent ans, Planck introduisait la notion de quanta, reprise par Einstein pour définir le photon. La nature quantique de la lumière était démontrée. Celle-ci se manifeste notamment par le biais des inégalités de Heisenberg : pour un champ monochromatique, le produit des fluctuations d'intensité et de phase est supérieur à une certaine constante. Un laser fonctionnant très au dessus du seuil produit un état minimal du champ, qui permet d'atteindre l'égalité dans l'inégalité de Heisenberg. En outre, toutes les quadratures du champ sont affectées du même niveau de bruit, que l'on appelle alors la limite quantique standard. Le bruit d'intensité correspondant est alors le bruit de grenaille ou "shot noise". Mais l'inégalité de Heisenberg n'impose de contrainte que sur le produit de deux variances : il est concevable par exemple de réduire très fortement le bruit d'intensité en dessous du shot noise, si on augmente dans les mêmes proportions le bruit de phase pour que le produit reste constant. De tels états de la lumière ont été produits à partir des années 85. Parmi tous les résultats obtenus, citons les états comprimés [Slusher 85] et les "faisceaux jumeaux" [Mertz 91a]. Une revue de l'ensemble de ces résultats est publiée dans [Kimble 92].

Toutes ces études prennent en compte le faisceau lumineux dans sa totalité, et le considèrent comme une seule entité quantique : c'est ce que l'on appelle l'optique quantique monomode. Un seul oscillateur quantique est nécessaire pour décrire les propriétés du champ. Pour rendre compte de mesures plus détaillées dans le plan transverse, il faut accroître le nombre de degrés de liberté quantiques dans le plan transverse du champ, pour en faire une description complètement multimode. Ce sujet a commencé à être étudié à la fin des années 80 [Seng-Tiong Ho 88] et fait l'objet d'études théoriques de plus en plus nombreuses. Citons en particulier l'introduction des notions de réduction de bruit spatial dans [Kolobov 89] et la définition de la notion d'image quantique dans [Lugiato 95]. Cette dernière référence met également en évidence le lien très fort entre les propriétés spatiales du bruit et la formation spontanée structures optiques. Une re-

vue de l'ensemble de ces effets transverses en régime continu est faite dans [Kolobov 99].

D'un autre côté, expérimentalement, très peu d'études existent à ce jour. Des résultats très importants ont été obtenus dans le régime du comptage de photons, avec par exemple la mesure de corrélations spatiales entre deux photons créés par génération paramétrique [Malygin 85, Joobeur 96], propriété qui a été utilisée pour contrôler la visibilité des franges d'Young [Souto Ribeiro 94]. Par contre, à notre connaissance, il n'y a pas eu à ce jour d'étude expérimentale de ces phénomènes avec des faisceaux "macroscopiques" contenant un grand nombre de photons.

Ces nouveaux états de la lumière, appelés «non-classiques» (qu'ils soient monomodes ou multimodes), permettent d'améliorer la sensibilité des mesures en réduisant le bruit sur les quantités mesurées. Expérimentalement, il a ainsi été possible avec des faisceau non-classiques monomodes d'améliorer la sensibilité des mesures interférométriques de phase [Min Xiao 87], ou encore de spectroscopie [Polzik 92, Souto Ribeiro 97, Marin 97]. Cependant, on montre que ce type de lumière ne peut apporter aucune amélioration à la mesure des images optiques. En effet, les détails dans les images sont par définition liés aux propriétés multimodes de la lumière, il est donc nécessaire d'utiliser des faisceaux non-classiques multimodes [Fabre 00]. C'est ce type d'étude expérimentale que nous avons entrepris au cours de ce travail de thèse, et qui nous a permis en particulier de produire le premier état macroscopique de la lumière à posséder des propriétés transverses non classiques.

La première partie de ce mémoire est constituée d'une synthèse des différentes études théoriques sur la répartition transverse du bruit dans un faisceau lumineux, dans le régime du grand nombre de photons. Ce rappel sera orienté de manière à définir des observables les plus proches possible de la réalité expérimentale, et à pouvoir s'adapter à toute taille et géométrie de détecteur. Cela nous amènera à étudier en détail la structure transverse d'un champ monomode, pour en voir ses limites et introduire une nouvelle méthode de calcul permettant d'obtenir toutes les fonctions de corrélations du champ après son passage à travers un milieu non linéaire. Nous terminerons cette première partie par décrire en détail les techniques expérimentales permettant de mesurer les observables que nous aurons définies, et nous introduirons l'utilisation et la calibration de détecteurs à quadrants permettant d'obtenir la structure spatiale du champ.

Dans une deuxième partie, nous étudierons plus en détail trois problèmes particuliers. Tout d'abord, nous définirons les limites de résolution dans les images optiques, du fait du bruit quantique. Nous nous attarderons sur le cas particulier à deux modes, adapté aux mesures de position comme nous les avons décrites en début de cette introduction. Nous montrerons que, en théorie, l'utilisation adéquate de deux modes

transverses permet de s'affranchir complètement du bruit quantique. Nous présenterons ensuite une expérience mettant en oeuvre ces idées, et réalisant des mesures de petits déplacements (de l'ordre de l'Angström) en dessous de la limite quantique standard. Comme deuxième exemple, nous appliquerons les méthodes de calcul développées pour obtenir l'image quantique complète d'un soliton spatial après propagation dans un milieu non linéaire. Ces études montreront les propriétés importantes des milieux non linéaires en termes de répartition spatiale du bruit quantique, et l'importance de la géométrie du système. Cela sera l'occasion d'utiliser la notion de corrélation quantique (définie en terme de variance conditionnelle), et de démontrer la présence de corrélations purement quantiques dans un soliton spatial. Nous finirons par décrire une expérience avec un oscillateur paramétrique optique multimode transverse : nous utilisons une géométrie de cavité permettant à plusieurs modes transverses de la cavité d'osciller pour la même longueur de cavité. La présence d'un cristal non linéaire dans la cavité va introduire un couplage entre les modes, créant des corrélations spatiales quantiques. Ce système est très riche car il fait le lien entre deux branches de la physique : d'un côté l'optique quantique, et de l'autre la physique non linéaire et plus précisément l'étude de la formation spontanée de structures. Nous étudierons en détail les propriétés non linéaires classiques en mettant en évidence, pour plusieurs géométries de cavité, la formation de motifs optiques multimodes. Nous terminerons en présentant les premières mesures quantiques réalisées.

Première partie

Optique quantique des images transverses

Chapitre 1

Introduction à l'optique quantique des images

Le contenu de cette thèse repose essentiellement sur une quantification 'pratique' du champ électromagnétique. Par 'pratique' nous entendons une description proche de la réalité expérimentale et des quantités que nous voulons mesurer. En effet, la description habituelle utilise l'opérateur champ électrique [Cohen-Tannoudji 87] $\hat{E}(x, y, z, t)$ valable en tout point. Cependant, expérimentalement nous considérons toujours des détecteurs et des temps d'intégration finis, et nos faisceaux ont une direction de propagation privilégiée. Il convient alors d'utiliser des opérateurs correspondant à cette situation. Nous allons rappeler ici quelle est la description standard en montrant comment elle mène aux équations sur les opérateurs quantiques. Ensuite, nous montrerons comment on peut décomposer le champ électromagnétique en modes transverses, puis associer à chacun de ces modes un opérateur quantique.

A Champ électromagnétique quantifié

Quantification continue

Considérons un champ électromagnétique dans l'espace ayant une polarisation bien déterminée. Soit $\hat{E}(\vec{r}, t)$ l'opérateur champ électrique que nous écrirons comme la somme de l'opérateur de fréquence positive et de son conjugué :

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{r}, t). \tag{1-1}$$

Dans toute cette thèse nous allons privilégier la direction z comme direction de propagation pour un champ à la fréquence ω_0. Nous utiliserons alors les variables spatiales z et $\vec{\rho}$, cette dernière représentant la position dans le plan orthogonal à la direction de

propagation. Nous récrirons alors l'opérateur champ :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t) = \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t) e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})} \tag{1-2}$$

où $e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})}$ représente la porteuse pour une onde se propageant à la vitesse c (qui peut différer de la vitesse de la lumière dans le vide quand nous sommes dans un milieu matériel) et $\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t)$ est l'enveloppe du champ. Notons que cette écriture n'implique aucune approximation.

Opérateur de création spatial

La quantification du champ électrique dans le vide et dans tout l'espace (sans considérer une boite de coté L) donne comme expression pour cet opérateur :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\omega(k)}\ \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega(k)t)}. \tag{1-3}$$

Dans cette équation, $\omega(k)$ est donné par la relation de dispersion dans le vide $\omega(k) = c.k$ et $\hat{a}(\vec{k})$ et $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ sont les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon de vecteur d'onde $\vec{k}$. Ces opérateurs vérifient les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= 0. \end{aligned} \tag{1-4}$$

Nous allons, comme indiqué en tête de chapitre, favoriser dans l'écriture la fréquence ω_0 et le vecteur d'onde $\vec{k}_0 = k_0\vec{z}$ et utiliser l'opérateur enveloppe. Afin de faire apparaître des opérateurs homogènes à des nombres de photons, nous écrirons l'opérateur enveloppe :

$$\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}} \hat{a}(\vec{\rho}, z, t). \tag{1-5}$$

et dans le texte nous appellerons opérateur enveloppe indifféremment $\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t)$ ou $\hat{a}(\vec{\rho}, z, t)$. Son expression peut être facilement dérivée de l'équation 1-3 :

$$\hat{a}(\vec{\rho}, z, t) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\omega(k)}{\omega_0}} \hat{a}(\vec{k}) e^{i(\vec{q}.\vec{\rho}+(k_z-k_0)z-(\omega(k)-\omega_0)t)} \tag{1-6}$$

Cette réécriture est en fait toujours valable, et nous n'avons pas encore fait d'approximation, mais c'est cette expression qui nous permettra d'utiliser nos hypothèses,

notamment dans le commutateur qui peut s'écrire formellement, en utilisant 1-4 :

$$[\hat{a}(\vec{\rho}, z, t), \hat{a}\dagger(\vec{\rho}\,', z', t')] = \int \frac{dk_z}{2\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{\omega(k)}{\omega_0} e^{i(\vec{q}.(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')+(k_z-k_0)(z-z')-(\omega(k)-\omega_0)(t-t'))}. \tag{1-7}$$

Équation de propagation

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre de l'approximation paraxiale et quasi-monochromatique, c'est à dire que le vecteur d'onde et la pulsation correspondante peuvent s'écrire :

$$k = \sqrt{k_z^2 + q^2} \approx k_z + \frac{q^2}{2k_0} \tag{1-8}$$

$$\frac{\omega(k)}{\omega_0} \approx 1 + \frac{k_z - k_0}{k_0} + \frac{q^2}{2k_0^2} \tag{1-9}$$

où q est la partie transverse du vecteur d'onde, supposée petite devant k_0 (approximation paraxiale) et k le module du vecteur d'onde, tel que $|k - k_0| \ll k_0$ (approximation quasi-monochromatique). Dans ces conditions, la relation de commutation entre les opérateurs enveloppes à deux positions différentes mais au même temps s'écrit [Kolobov 99] :

$$[\hat{a}(\vec{\rho}, z, t), \hat{a}^\dagger(\vec{\rho}\,', z', t)] = \left(1 - \frac{i}{k_0}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2k_0^2}\Delta_{\vec{\rho}}\right)\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{1-10}$$

où $\Delta_{\vec{\rho}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien transverse. Cette expression est très riche car elle contient toute la propagation du champ électromagnétique dans le vide dans le cadre de l'approximation de l'enveloppe lentement variable. En effet, en utilisant l'équation d'évolution de l'opérateur enveloppe, on obtient les équations habituelles de propagation du champ où le terme en $\frac{\partial}{\partial z}$ représente l'évolution longitudinale et le terme en $\Delta_{\vec{\rho}}$ représente la diffraction. Ainsi on retrouve les équations habituelles de l'optique mais pour des opérateurs quantiques. On peut faire le même type de calcul en présence d'un milieu matériel, et obtenir les équations de l'optique non linéaire [Kolobov 99]. Ces formules nous autorisent donc à calculer l'évolution des champs en tenant compte de leur forme transverse complète. Cependant, pour regarder l'état du champ dans le plan transverse, ces commutateurs sont complexes à manipuler; nous allons donc avancer un peu dans nos approximations.

B Quantification transverse

B.1 Opérateurs photoniques transverses

Nous allons maintenant complètement privilégier le plan d'analyse qui est le plan transverse d'équation $z = z_0$, et la direction de propagation z. Nous supposerons que $\omega(k) \simeq ck_z$ où k_z est la composante du vecteur $\vec{k}$ selon z. Dans ce cas, on peut, dans l'expression de l'opérateur enveloppe (1-6), effectuer l'intégrale transverse et le récrire :

$$\hat{a}(\vec{\rho}, z, t) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega(k_z)}{\omega_0}} \hat{a}(\vec{\rho}, k_z) e^{i((k_z - k_0)z - (\omega(k_z) - \omega_0)t)} \tag{1-11}$$

où $\hat{a}(\vec{\rho}, k_z)$, opérateur d'annihilation en un point du plan transverse est donné par

$$\hat{a}(\vec{\rho}, k_z) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \hat{a}(\vec{q}, k_z) e^{i\vec{q}.\vec{\rho}} \tag{1-12}$$

et est associé à l'énergie $\hbar\omega(k_z)$. On montre directement que[1]

$$[\hat{a}(\vec{\rho}, k_z), \hat{a}^\dagger(\vec{\rho}\,', k_z')] = 2\pi\delta(k_z - k_z')\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,') \tag{1-13}$$

On peut récrire maintenant cet opérateur en privilégiant dans l'écriture l'aspect pulsation, avec $\omega = ck_z$ on note $\hat{a}_\omega(\vec{\rho}) = \hat{a}(\vec{\rho}, k_z)$ et on peut résumer ses propriétés ainsi :

$$\boxed{\hat{a}_\omega(\vec{\rho}) : \begin{cases} \text{Destruction d'un photon d'énergie } \hbar\omega \text{ à la position transverse } \vec{\rho} \\ \left[\hat{a}_\omega(\vec{\rho}), \hat{a}^\dagger_{\omega'}(\vec{\rho}\,')\right] = 2\pi c\delta(\omega - \omega')\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,') \end{cases}} \tag{1-14}$$

Largeur spectrale

Nous pouvons à partir de cet opérateur définir l'opérateur champ que nous allons utiliser, avec une autre approximation : nous supposerons que sa fréquence est centrée

1. Cette approche simplifiée nous permet d'arriver rapidement au bon résultat mais masque quelque peu la complexité du problème. En fait, la bonne méthode pour obtenir les équations de propagation du paragraphe précédent consiste à écrire complètement la propagation du champ avec une intégrale de Huygens-Fresnel. Dans l'esprit de cette écriture, on comprend que chaque point du plan de départ est considéré comme une source ponctuelle, et que le laplacien vient de la propagation du champ. Ainsi, du moment que l'on se place toujours dans le même plan, le commutateur est bien celui que l'on trouve ici. Toutes les difficultés sont en fait liés à l'impossibilité de localiser parfaitement un photon, qui vient du caractère ondulatoire du champ électromagnétique (et c'est donc une propriété purement classique). On se reportera à [Cohen-Tannoudji 87] pour plus de détail, et notamment une étude détaillée de la fonction «delta transverse».

sur ω_0 dans une bande de fréquence $\delta\omega$ telle que $\delta\omega \ll \omega_0$. Si $\Omega = \omega(k) - \omega_0$, les relations entre $\omega(k)$ et ω_0 deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\omega(k)}{\omega_0} &\simeq 1 + \frac{\Omega}{\omega_0} \quad \text{où } \Omega < \delta\omega \\ \omega(k) - \omega_0 &\simeq c(k_z - k_0) \end{aligned} \tag{1-15}$$

et l'opérateur enveloppe (1-11) se récrit sous la forme :

$$\hat{a}(\vec{\rho}, z, t) = \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} \frac{\delta\Omega}{2\pi c} \sqrt{\frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0}} \hat{a}_\omega(\vec{\rho}) e^{-i\Omega(t - \frac{z}{c})}. \tag{1-16}$$

Cette expression permet de calculer les relations de commutation, sur un plan transverse donné puisque nous ne prenons pas en compte les processus de propagation :

$$[\hat{a}(\vec{\rho}, z, t), \hat{a}^\dagger(\vec{\rho}\,', z, t')] = \frac{1}{c}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,')\delta_1(t - t') \tag{1-17}$$

où

$$\delta_1(t - t') = \int_{-\delta\omega}^{+\delta\omega} \frac{\delta\Omega}{2\pi} \frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0} e^{-i\Omega(t - t')} \tag{1-18}$$

et peut être approximée sous certaines condition par une distribution de Dirac (nous aborderons ce point à la fin du chapitre).

Il vient alors pour l'opérateur champ électrique :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}} a(\vec{\rho}, z, t) e^{-i\omega_0(t - \frac{z}{c})} \tag{1-19}$$

dont les relations de commutations vérifient :

$$\boxed{[\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}, z, t), \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,', z, t')] = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,')\delta_1(t - t')} \tag{1-20}$$

Il faut remarquer que dans ces dernières expressions deux nouveaux paramètres sont apparus, z et t, alors que nous n'avons fait qu'une seule transformée de Fourier. En fait, une seule variable intervient qui est le temps propre $\tau = t - \frac{z}{c}$, mais comme nous n'avons pas considéré les processus de propagation et fixé le plan transverse, on peut utiliser la véritable variable temps.

B.2 «Pixelisation» de l'espace

Dans la section précédente nous avons défini des opérateurs champs transverse locaux et continus. Cependant, lorsque que l'on veut faire des calculs numériques sur

les champs, on est obligé de discrétiser l'espace transverse en pixels. Nous avons vu que les équations de propagation des champs quantiques étaient les mêmes que les équations classiques, les algorithmes informatiques seront donc les mêmes. Cependant, il est nécessaire de savoir comment l'on passe d'un opérateur local à un opérateur sur un pixel, et quelles sont les approximations que cela implique. Cela permettra également de définir proprement les conditions initiales que l'on doit utiliser lors des simulations, sachant que dans le cas quantique il faut non seulement la donnée de la valeur moyenne du champ mais également des fonctions de corrélations et de tous les moments. Cependant, nous n'aborderons pas ici l'aspect de discrétisation temporelle qui sera étudié en fin de chapitre.

B.2.1 Description du plan transverse

Considérons un pavage du plan transverse (Ox, Oy) d'équation $z = z_0$ par l'ensemble des pixels $\{S_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ qui vérifie :

$$S_i \bigcap S_j = \delta_{ij} S_i \quad \text{et} \quad \bigcup_i S_i = plan\ transverse, \tag{1-21}$$

et par commodité d'écriture nous appellerons également S_i la surface du pixel S_i. Par exemple, dans le cas de la discrétisation du plan transverse en vue d'un calcul par ordinateur, nous prendrons souvent des pixels carrés de côté l, soit :

$$S^l_{i,j} = \{(x, y)\} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{c} i * l \leq x < (i+1) * l \\ j * l \leq y < (j+1) * l \end{array} \right\} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z} \tag{1-22}$$

B.2.2 Opérateur sur un pixel

On définit l'opérateur de destruction d'un photon sur la zone S_i par :

$$\hat{a}_{i,\omega} = \frac{1}{\sqrt{S_i}} \int_{S_i} \hat{a}_\omega(\vec{\rho}) d^2\rho. \tag{1-23}$$

Le calcul du commutateur se fait directement. En utilisant les opérateurs transverses que nous avons définis précédemment, on trouve :

$$[\hat{a}_{i,\omega}, \hat{a}^\dagger_{j,\omega'}] = \frac{2\pi}{c} \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \tag{1-24}$$

B.2.3 L'opérateur pixel

Nous allons définir l'opérateur pixel comme l'opérateur enveloppe sur un pixel, autrement dit nous pouvons comme dans la section précédente intégrer l'opérateur de

création sur un pixel dans une bande de fréquence. Nous obtenons alors, en faisant exactement les même approximations, l'opérateur $\hat{a}_i(z_0,t)$, destruction d'un photon de fréquence ω_0 sur le pavé S_i. Les relations de commutations vérifiées par cet opérateur sont :

$$\boxed{[\hat{a}_i(z_0,t),\hat{a}_j^\dagger(z_0,t')] = \frac{1}{c}\delta_{ij}\delta_1(t-t')} \tag{1-25}$$

et on en déduit l'opérateur champ sur un pixel, que l'on peut aussi exprimer :

$$\hat{E}_i^{(+)}(z_0,t) = \frac{1}{\sqrt{S_i}}\int_{S_i}\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho},z_0,t)d^2\rho \tag{1-26}$$

Cet opérateur représente la valeur moyenne du champ électrique sur la surface S_i, et n'est pas en lui même une 'bonne' quantité physique, dans le sens où elle serait mesurable. Une des quantités intéressantes est la puissance du champ mesuré sur un pixel, qui s'exprime en Watts et vaut :

$$\hat{P}_i(z_0,t) = 2\epsilon_0 c\int_{S_i}\hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{\rho},z_0,t)\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho},z_0,t)d^2\rho. \tag{1-27}$$

On voit ici que si l'on veut exprimer directement la puissance en fonction de l'opérateur champ sur un pixel, on est obligé de supposer que la variation du champ sur la surface du pixel est très faible. C'est l'hypothèse principale qui est faite lors de la simulation informatique, et qui se traduit dans les faits par la non prise en compte de tous les effets physiques de taille caractéristique inférieure à celle du pixel. Cela donne :

$$\begin{aligned}\hat{P}_i(z_0,t) &= 2\epsilon_0 c\hat{E}_i^{(+)\dagger}(z_0,t)\hat{E}_i^{(+)}(z_0,t)\\ &= \hbar\omega_0 c\hat{a}_i^\dagger(z_0,t)\hat{a}_i(z_0,t).\end{aligned} \tag{1-28}$$

Nous avons pu ainsi définir un opérateur de destruction spatiale qui transpose de façon simple les propriétés des opérateurs de destruction d'un photon à une fréquence donnée. Ces opérateurs sont tout à fait adaptés à la description du champ dans le cadre d'une discrétisation de l'espace, en vue, par exemple, d'un calcul numérique. Toutes les quantités physiques peuvent se calculer simplement, par simple sommation discrète, tout en sachant que nous n'avons pas accès à des propriétés physiques de taille inférieure à celle d'un pixel. Il faudra alors s'assurer systématiquement de la taille caractéristique de variation des champs dans le plan transverse.

B.3 Décomposition en modes transverses

Dans la section précédente nous avons vu qu'il était possible de définir des opérateurs dans le plan transverse, quite à oublier tous les aspects propagatifs du champ. Il est

possible d'aller plus loin en tenant compte de la géométrie particulière des dispositifs optiques. En effet, la présence de cavités optiques rend naturelle l'utilisation de modes transverses, modes propres de la cavité, que ce soit à l'intérieur où à l'extérieur de cette cavité. Il sera ainsi possible d'associer à chacun des modes un opérateur quantique, et d'écrire le champ quantique comme la somme de ces modes. L'avantage principal est que tous les effets propagatifs sont pris en compte dans la description des modes, et que l'on obtient des opérateurs de création avec des relations de commutation simples. L'inconvénient est que tout effet d'interaction devra être décrit comme un couplage entre les modes, ce qui peut s'avérer très inadéquat quand ce couplage se fait, par exemple, dans un cristal en l'absence de cavité.

B.3.1 Champ classique

Considérons comme dans la section précédente la partie de fréquence positive du champ électromagnétique, nous allons supposer que ce champ représente la propagation d'un faisceau lumineux le long de la direction Oz. Ce champ est quasi-monomode en fréquence, de fréquence centrale ω_0, de largeur spectrale $\delta\omega \ll \omega_0$ et de polarisation bien déterminée. On peut alors écrire classiquement :

$$E^{(+)}(\vec{r},t) = e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})}u(z,\vec{\rho})\varepsilon(t,z) \tag{1-29}$$

où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu considéré et $\vec{\rho}$ la coordonnée dans le plan transverse. $e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})}$ décrit les variations rapides du champ (aussi appelée porteuse) et $\varepsilon(t,z)$ les variations lentes du champ (son enveloppe) selon Oz.

La fonction $u(z,\vec{\rho})$ décrit la structure transverse du champ, elle est normalisée à 1 :

$$\int u^*(z,\vec{\rho})u(z,\vec{\rho})d^2\rho = 1 \quad \forall z \tag{1-30}$$

On supposera également que cette fonction est régulière et s'annule à l'infini (autrement dit qu'elle est C^∞ à support compact). On peut alors trouver une *base dénombrable* de cet espace qui soit *orthonormale et complète*, ce qui signifie que l'on peut choisir un ensemble de fonctions $u_i(z,\vec{\rho})$ vérifiant :

$$\int u_i^*(z,\vec{\rho})u_j(z,\vec{\rho})d^2\rho = \delta_{ij} \tag{1-31}$$

avec de plus une relation de complétude :

$$\sum_i u_i^*(z,\vec{\rho})u_i(z,\vec{\rho}\,') = \delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,'). \tag{1-32}$$

On notera que cet ensemble de fonctions dépend de z. Pour chaque fonction enveloppe $u(z, \vec{\rho})$ il existe un unique ensemble de fonctions $c_i(z)$ tel que :

$$u(z, \vec{\rho}) = \sum_i c_i(z) u_i(z, \vec{\rho}). \tag{1-33}$$

Finalement, et parce que nous en aurons besoin par la suite, nous allons introduire le poids d'une surface dans un mode, qui correspond à la fraction du mode contenue par la surface. Si D est une surface du plan transverse à une position $z = z_0$, alors

$$\mu_i(D) = \int_D u_i^*(\vec{\rho}) u_i(\vec{\rho}) d^2\rho \quad \text{pour } z = z_0 \tag{1-34}$$

B.3.2 Quantification par modes

La procédure de quantification standard du champ électromagnétique consiste à associer à chaque mode propre d'oscillation un opérateur quantique [Walls 94]. Pour quantifier, il nous faut donc en plus supposer que les vecteurs $u_i(z, \vec{\rho})$ de notre base sont *vecteurs propres de l'équation de propagation du champ*. Sous cette hypothèse, la forme transverse du champ électrique se propageant dans le vide s'écrit de façon unique :

$$u(z, \vec{\rho}) = \sum_i c_i u_i(z, \vec{\rho}) \tag{1-35}$$

où les coefficients c_i ne dépendent plus de z. De plus, comme on a supposé que notre champ avait une certaine largeur en fréquence, pour chaque longueur d'onde nous devrons avoir une base transverse différente. Ainsi, nous prenons un ensemble continu de bases :

$$u_i(z, \vec{\rho}, \omega) e^{-i\Omega(t - \frac{z}{c})} \quad \text{où} \quad \Omega = \omega - \omega_0 \tag{1-36}$$

où nous avons privilégié la direction de propagation Oz dans l'écriture mais où l'ensemble de l'expression est bien une solution exacte des équations de propagation.

On peut maintenant, en accord avec l'équation 1-3, associer à chaque mode un opérateur de création $\hat{a}_i^\dagger(\omega)$ et un opérateur d'annihilation $\hat{a}_i(\omega)$ qui vérifient les règles de commutation standard :

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i(\omega), \hat{a}_j^\dagger(\omega')] &= 2\pi c \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \\ [\hat{a}_i(\omega), \hat{a}_j(\omega')] &= 0 \\ [\hat{a}_i^\dagger(\omega), \hat{a}_j^\dagger(\omega')] &= 0 \end{aligned} \tag{1-37}$$

Reprenons maintenant l'hypothèse faite en début de section d'un champ quasi-monochromatique autour de la fréquence ω_0, nous supposerons alors que dans cette bande de fréquence la dépendance en fréquence de la partie transverse est négligeable et nous écrirons :

$$u_i(z,\vec{\rho},\omega)e^{-i\Omega(t-\frac{z}{c})} \approx u_i(z,\vec{\rho},\omega_0)e^{-i\Omega(t-\frac{z}{c})} \equiv u_i(z,\vec{\rho})e^{-i\Omega(t-\frac{z}{c})} \tag{1-38}$$

Nous allons donc pourvoir définir l'opérateur de création d'un photon dans un mode transverse, de fréquence ω_0 dans une bande de fréquence $\delta\omega$ d'une manière similaire à celle utilisée pour la définition de l'opérateur pixel dans le paragraphe précédent, nous l'appellerons l'opérateur modal, et garderons les mêmes notations que pour l'opérateur pixel car nous verrons que dans les domaines de paramètres où les définitions se recoupent, elles sont équivalentes.

$$\hat{a}_i(z,t) = \int_{\Omega\ll\omega_0} \sqrt{\frac{\omega_0+\Omega}{\omega_0}} e^{-i\Omega(t-\frac{z}{c})}\hat{a}_i(\omega_0+\Omega)\frac{d\Omega}{2\pi}. \tag{1-39}$$

dont les relations de commutation sont :

$$[\hat{a}_i(z,t),\hat{a}_j^\dagger(z',t')] = \frac{1}{c}\delta_{ij}\delta_1(t-t'+\frac{z-z'}{c}) \tag{1-40}$$

où δ_1 est la fonction introduite en (1-18). On remarque qu'ici on a tout à fait le droit de considérer le commutateur pour deux positions longitudinales différentes puisque l'on s'est placé dans un mode propre de la propagation. On voit cependant qu'en fait une seule variable est pertinente, c'est le temps propre $\tau = t - z/c$.

Venons en à l'opérateur champ électrique, il s'écrit :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho},z,t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}}\left[\sum_i \hat{a}_i(z,t)u_i(z,\vec{\rho})\right]e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})} \tag{1-41}$$

On peut calculer ses relations de commutations, il vient :

$$[\hat{E}^{(+)}(z,\vec{\rho},t),\hat{E}^{(+)\dagger}(z',\vec{\rho}\,',t')] = \left[\sum_i u_i(z,\vec{\rho})u_i^*(z',\vec{\rho}\,')\right]\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\delta_1(t-t'-\frac{z-z'}{c}) \tag{1-42}$$

qui ne peut pas se simplifier de façon générale, car encore une fois il faut pour ça tenir compte de la propagation. Par contre, si on se place dans le cas particulier où $z = z'$, en utilisant (1-32) :

$$[\hat{E}^{(+)}(z,\vec{\rho},t),\hat{E}^{(+)\dagger}(z,\vec{\rho}\,',t')] = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\delta_1(t-t')\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,') \tag{1-43}$$

et on retrouve exactement le résultat de la section précédente (équation (1-20)). Cela était attendu puisque le champ quantique est le même, cependant nous avons ici

généralisé l'approche par mode en mettant en évidence l'importance des modes propres de la propagation.

Il est intéressant, pour faire le parallèle avec les opérateurs pixels, de formuler la puissance du champ. Le vecteur de Poynting (qui est l'énergie du champ par unité de temps et unité de surface), s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(\vec{\rho},z,t) &= 2\epsilon_0 c\hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{\rho},z,t)\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho},z,t)\\ &= \hbar\omega_0 c\sum_{i,j} u_i^*(\vec{\rho},z)u_j(\vec{\rho},z)\hat{a}_i^\dagger(z,t)\hat{a}_j(z,t). \end{aligned} \tag{1-44}$$

et fait intervenir le produit entre deux modes transverses différents, qui n'est autre que les interférences entre ces modes. Si l'on intègre cette relation sur tout le plan transverse pour obtenir la puissance totale, il vient en utilisant les propriétés des modes transverses :

$$\boxed{\hat{P}_{tot}(t) = \hbar\omega_0 c\sum_i \hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_i(t)} \tag{1-45}$$

B.4 Conclusion

B.4.1 Unification des notations

Il est possible d'obtenir un seul jeu de notations, à la fois pour les opérateurs pixel et pour les opérateurs modaux. En effet, si l'on considère des modes transverses qui valent un sur la surface du pixel et 0 partout ailleurs, on peut écrire la quantification en pixel sous la forme de la quantifications en modes. Cependant, ces deux approches bien qu'elles puissent se résumer en une seule écriture ne sont pas complètement équivalentes. En effet l'approche pixel n'a pas accès à des détails plus petits que le pixel, mais ne suppose pas que le champ est nul à l'infini; de plus si on veut calculer les valeurs du champ pour un autre plan transverse il faut déterminer la propagation des pixels. C'est ce que nous feront en fait lors des simulations numériques.

Définissons les modes pixels de cette façon :

$$u_i(\vec{\rho}) = \sqrt{\frac{1}{S_i}}\chi_i(\vec{\rho}) \tag{1-46}$$

où χ_i est la fonction caractéristique du pavé S_i. Par rapport aux modes transverses, on vérifie bien l'orthonormalité (1-31), par contre nous n'avons plus de relation de complétude (1-32) et nous n'avons pas une base. Avec cette définition, on obtient l'écriture unifiée de la manière suivante : dans le plan $z = z_0$ nous avons à notre

disposition des opérateurs du type $\hat{a}_i(t)$ et un ensemble de fonction u_i qui vérifient :

$$\begin{aligned}
[\hat{a}_i(t), \hat{a}_j^\dagger(t')] &= \frac{1}{c}\delta_{ij}\delta_1(t-t') \\
\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}, t) &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}}\sum_i \hat{a}_i(t)u_i(\vec{\rho}) \\
\hat{P}_{tot}(t) &= \hbar\omega_0 c\sum_i \hat{a}_i^\dagger(t)\hat{a}_i(t)
\end{aligned} \tag{1-47}$$

B.4.2 Intégration temporelle

Considérons maintenant que nous avons un temps d'intégration non nul T. Afin de simplifier les calculs, nous allons supposer que toutes nos observables sont mesurées sur le même intervalle de temps : $[t_0, t_0+T]$ et nous n'allons pas considérer de quantités à des temps différents[2]. On définit :

$$\hat{a}_i = \sqrt{\frac{c}{T}}\int_{t_0}^{t_0+T} \hat{a}_i(t)dt \tag{1-48}$$

où le facteur $\sqrt{\frac{c}{T}}$ sert à assurer l'homogénéité avec un nombre de photons. Cette quantité ne dépend pas a priori de t_0 pour un phénomène stationnaire. Si on suppose à la fois que $T \gg \frac{1}{\delta\omega}$ et que $\delta\omega \ll \omega_0$ la fonction δ_1 peut être approximée par une distribution de Dirac, et il vient

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{1-49}$$

On peut alors résumer les propriétés des opérateurs photoniques que nous avons défini, en donnant également l'expression de l'énergie qui serait mesurée par une photodiode prenant la totalité du faisceau pendant le temps T, que nous noterons I :

$$\boxed{\begin{aligned}
[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij} \\
\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) &= i\sqrt{\tfrac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}}\textstyle\sum_i \hat{a}_i u_i(\vec{\rho}) \\
\hat{I}_{tot} &= \hbar\omega_0 \textstyle\sum_i \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i
\end{aligned}} \tag{1-50}$$

I_{tot} représente bien l'énergie du champ contenue dans la tranche $[t_0, t_0+T]$ et la quantité de charges récoltée, par exemple, pendant un temps de pose T sur un pixel de caméra CCD d'efficacité quantique 1 serait $\hat{Q} = \frac{q}{\hbar\omega_0}\hat{I}$.

2. Cette approche nous permet d'éviter les problèmes de conditions aux bords lorsque l'on veut comparer des opérateurs à des temps différents, elle correspond de plus parfaitement à ce que l'on utilise expérimentalement

Il n'est pas possible par contre d'unifier les relations de commutations des opérateurs champs, bien qu'elles soient assez proches, en effet, dans le cadre de la décomposition en modes transverses il vient :

$$[\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}), \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,')] = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'). \tag{1-51}$$

Par contre, dans le cadre de la pixélisation, il faut considérer des relations de commutations entre deux pixels, ce qui oblige à prendre la valeur moyenne des quantités sur la surface des pixels, comme nous l'avons fait en équation (1-26). On obtient ainsi une relation de la forme suivante :

$$[\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(S_i), \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(S_j)] = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{S_i S_j}} \tag{1-52}$$

où S_i et S_j sont deux pixels du plan transverse.

Nous sommes maintenant arrivé à la notation synthétique que nous voulions. Dans le plan transverse $z = z_0$ nous avons défini des opérateurs modaux pour prendre en compte la forme transverse du champ et la structure spatiale du bruit quantique. Nous nous sommes placés dans des conditions comparables à celle d'un détecteur recevant le champ et dans le cadre de l'approximation paraxiale. Ces quantités sont donc parfaitement adaptées à la description du champ transverse dans le cas stationnaire. Nous les utiliserons également en Annexe et nous verrons certaines des limites de ce modèle.

C Observables

C.1 Cahier des charges

Maintenant que nous avons quantifié le champ électromagnétique, nous pouvons nous intéresser aux observables que nous allons utiliser pour donner nos résultats. Toutes les définitions qui vont suivre sont en fait basées sur les procédures de mesure expérimentales. Nous reviendrons au chapitre 3 sur ce que l'on mesure effectivement expérimentalement, nous allons pour l'instant considérer que nous disposons de photodétecteurs de surfaces données, que l'on peut placer où l'on veut dans le champ électromagnétique. Nous supposerons également que ce sont des détecteurs d'efficacité quantique égale à 1, autrement dit que chaque photon incident sur le détecteur va donner un électron mesuré. Ainsi, les fluctuations d'intensité du faisceau incident seront parfaitement «recopiées» sur le courant électrique délivré par les photodiodes. Nous pouvons donc considérer dans toute la suite que l'énergie locale du champ est

une bonne quantité à laquelle nous avons accès expérimentalement, et nous allons voir que cette quantité suffit à définir toutes nos observables.

Nous considérerons de plus toujours que les mesures que l'on fait sont intégrées sur un temps T comme nous l'avons défini au paragraphe précédent; ainsi tous les détecteurs sont synchronisés, on observe des états stationnaires : on peut oublier dans toute la suite la variable temps. De la même façon, tous les opérateurs seront considérés à la même position z, que nous ne mentionnerons pas non plus.

Pour ce qui est de notations, définissons tout d'abord l'opérateur de fluctuation associé à tout opérateur, il s'écrit par exemple dans le cas du champ électrique :

$$\delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r},t) = \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r},t) - \langle\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r},t)\rangle \tag{1-53}$$

Il est de valeur moyenne nulle et possède les même relations de commutation que l'opérateur d'origine. Il sera considéré comme un infiniment petit du premier ordre dans le cadre de la *limite des petites fluctuations quantiques* [Reynaud 92]. Les procédures de quantification que nous avons défini au chapitre précédent sont encore valables pour cet opérateur.

L'énergie du champ est la quantité à laquelle nous avons accès avec un détecteur, nous la noterons $I(D)$ où D est la surface du détecteur considéré. Cependant, dans certains cas, il est utile de considérer la densité d'énergie par unité de surface, afin de ne pas multiplier les notations nous la noterons simplement $\mathcal{I}(\vec{\rho})$ où $\vec{\rho}$ est un point du plan transverse, étant entendue que l'homogénéité des formules est données par

$$I(D) = \int_D \mathcal{I}(\vec{\rho})d\vec{\rho} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}(\vec{\rho}) = \int_{t_0}^{t_0+T} \Pi(\vec{\rho},t)dt$$

où Π est le vecteur de Poynting projeté sur la direction Oz. Finalement, pour alléger les notations il sera souvent agréable d'utiliser la quantité sans dimensions qu'est le nombre de photons N. Nous ferons la même confusion de notations que pour l'énergie du champ, et on écrira :

$$N(D) = \frac{I(D)}{\hbar\omega_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(\vec{\rho}) = \frac{\mathcal{I}(\vec{\rho})}{\hbar\omega_0} \tag{1-54}$$

Nous commencerons par définir les observables localement puis nous les intégrerons sur des zones transverses de taille macroscopique.

C.2 Quantités locales

C.2.1 L'opérateur densité d'énergie

a En fonction de l'opérateur champ

Écrivons l'énergie par unité de surface en fonction de l'opérateur champ, elle est donnée par :

$$\boxed{\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) = 2\epsilon_0 c \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}).} \tag{1-55}$$

Son expression en fonction de l'opérateur de fluctuation est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) &= 2\epsilon_0 c \Big(\langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\rangle \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle + \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\rangle \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \\ &\quad + \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle + \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\Big).\end{aligned} \tag{1-56}$$

Si l'on considère que les fluctuations sont petites, le dernier terme de l'équation précédente est un terme quadratique et peut être négligé : c'est la procédure de linéarisation. On obtient alors, avec $\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) = \langle \hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho})\rangle + \delta\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho})$:

$$\langle \hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho})\rangle = 2\epsilon_0 c \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\rangle \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle$$

et

$$\boxed{\delta\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) = 2\epsilon_0 c \Big(\langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\rangle \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) + \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\Big)} \tag{1-57}$$

b Forme modale

Dans le cadre des équations (1-50) il vient

$$\boxed{\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) = \hbar\omega_0 \sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho})} \tag{1-58}$$

et dans la limite des petites fluctuations

$$\delta\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) = \hbar\omega_0 \sum_{i,j} \Big(\delta\hat{a}_i^\dagger \langle \hat{a}_j\rangle + \delta\hat{a}_i \langle \hat{a}_j^\dagger\rangle \Big) u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho}) \tag{1-59}$$

que l'on peut récrire en faisant apparaître le champ moyen :

$$\boxed{\delta\hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) = -i\sqrt{\frac{2\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}} \sum_i \delta\hat{a}_i^\dagger u_i^*(\vec{\rho}) \langle \hat{\mathcal{E}}(\vec{\rho})\rangle + h.c.} \tag{1-60}$$

où *h.c.* désigne la quantité hermitienne conjuguée. C'est cette dernière expression que nous utiliserons le plus souvent pour décrire les fluctuations d'intensité d'un champ

électrique. Cet opérateur a cependant le désavantage de ne pas avoir d'opérateur conjugué simple, et donc pas de relation de commutation. On pourrait définir un opérateur phase, mais soit cette définition est techniquement complexe [Barnett 95], soit elle n'est valable qu'en présence d'un champ moyen intense [Fabre 95]. Or, nous allons considérer des cas où le champ ne sera pas forcément localement intense, dans ce cas il faut utiliser des opérateurs de quadrature.

C.2.2 Les observables de quadrature

a Introduction

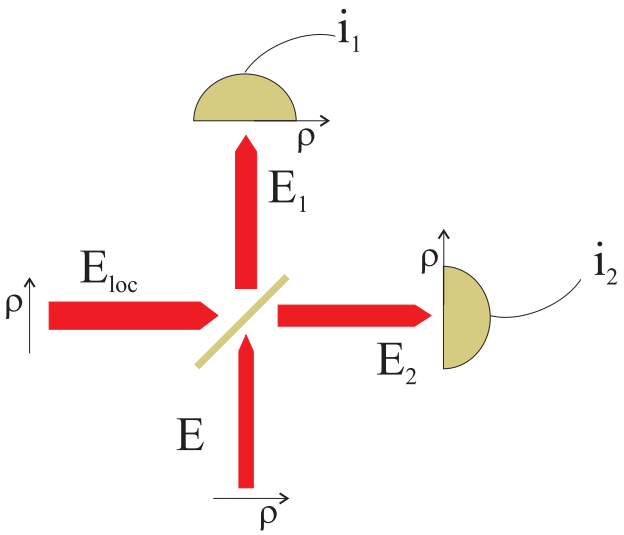

Fig. 1.1 – Détection homodyne : un champ intense $\mathcal{E}_{loc}$ et le champ analysé $\mathcal{E}$ sont incidents sur une lame séparatrice. Le signal de différence $i_1 - i_2$ donne une quantité proportionnelle aux fluctuations d'une quadrature du champ analysé. Nous avons également représenté sur la figure comment disposer la variable transverse ρ afin de tenir compte de la taille transverse du champ.

Lorsque nous avons défini l'opérateur champ électrique, nous avons toujours écrit ses relations de commutation avec sa quantité conjuguée. Or expérimentalement, à l'aide d'une photodiode nous avons accès uniquement à l'intensité du champ. La procédure expérimentale habituelle consiste à utiliser une détection homodyne équilibrée dont le principe est décrit en détail dans [Fabre 95]. Nous allons l'évoquer ici sommairement et l'étendre à une distribution locale. Considérons que notre champ est incident sur une lame séparatrice de coefficients de réflexion et de transmission égaux, et qu'un champ cohérent que nous appellerons oscillateur local est incident sur l'autre voie de la lame, comme représenté en figure 1.1. Deux photodécteurs détectent chacun une des deux sorties de la lame. Dans le cas où l'oscillateur local est beaucoup plus intense que le

champ détecté, seul sa partie classique intervient, et si on l'écrit $\mathcal{E}_{loc}^{(+)}(\vec{\rho}) = \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})e^{i\theta(\vec{\rho})}$ où $\mathcal{E}_{loc} = |\mathcal{E}_{loc}^{(+)}|$ on montre que l'opérateur correspondant à la différence des intensités détectées par chacune des photodiodes est donné par

$$\hat{\mathfrak{I}}(\vec{\rho}) = 2\epsilon_0 c\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\left(e^{i\theta(\vec{\rho})}\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) + e^{-i\theta(\vec{\rho})}\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\right). \tag{1-61}$$

Or expérimentalement il est possible de faire varier la phase de l'oscillateur local, on peut donc définir un opérateur homogène à une énergie par unité de surface dépendant du paramètre continu θ, par

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{I}}_\theta(\vec{\rho}) &= 2\epsilon_0 c\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\left(e^{i\theta}\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) + e^{-i\theta}\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\right)\\ &= 2\epsilon_0 c\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}).\end{aligned} \tag{1-62}$$

On remarque par exemple que quand le champ mesuré a une valeur moyenne réelle, pour $\theta = 0$ cette observable donne un signal proportionnel à la quadrature du champ parallèle à son amplitude et quand $\theta = \pi/2$ il donne un signal proportionnel à la quadrature perpendiculaire. L'opérateur $\hat{\mathcal{E}}_\theta$ représente bien l'observable de quadrature et l'opérateur $\hat{I}_\theta$ un opérateur dans sa direction mais homogène à une intensité. Par abus de langage nous appellerons donc cet opérateur l'observable de quadrature du champ car c'est la quantité que l'on peut mesurer expérimentalement[3].

b *En fonction de l'opérateur champ*

Résumons ici les différentes définitions pour l'opérateur de quadrature en fonction de l'opérateur champ, il vient d'après l'introduction :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) &= e^{i\theta}\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) + e^{-i\theta}\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\\ \hat{\mathfrak{I}}_\theta(\vec{\rho}) &= 2\epsilon_0 c\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho})\end{aligned}} \tag{1-63}$$

où $\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})$ est réel positif. Les relations de commutation vérifiées par ces opérateurs, pour deux valeurs de θ déphasées de $\pi/2$, sont

$$\boxed{[\hat{\mathfrak{I}}_\theta(\vec{\rho}), \hat{\mathfrak{I}}_{\theta+\pi/2}(\vec{\rho}\,')] = 4\epsilon_0^2 c^2\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}\,') \times 2i[\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}), \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,')]} \tag{1-64}$$

3. Il est important de préciser que la seule hypothèse que nous avons faite ici est que l'oscillateur local est intense, mais nous n'avons pas besoin de linéariser le champ analysé. En fait nous pouvons aussi écrire les opérateurs de fluctuations :

$$\delta\hat{\mathfrak{I}}_\theta(\vec{\rho}) = 2\epsilon_0 c\left[\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})e^{i\theta}\delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) + \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})e^{-i\theta}\delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\right]$$

Sous cette forme si l'on prend $\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})e^{i\theta} = \langle\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle$ on retrouve exactement l'opérateur intensité dans le cadre de la limite des petites fluctuations. Tous les calculs que nous allons faire sur l'opérateur de quadrature seront donc directement applicables à l'observable intensité linéarisée.

Nous avons ainsi défini des opérateurs correspondant à des observables mesurables expérimentalement et vérifiant des relations de commutation standard.

c Forme modale

Faisons maintenant le lien avec les opérateurs photoniques, il vient, dans le cadre de l'écriture simplifiée (1-50), et en utilisant la relation de commutation (1-51) valable uniquement pour les modes transverses[4] :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathfrak{I}}_\theta(\vec{\rho}) &= 2\epsilon_0 c \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) \\ \hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}}\sum_k e^{-i\theta}\hat{a}_k u_k(\vec{\rho}) + h.c. \\ [\hat{\mathfrak{I}}_\theta(\vec{\rho}), \hat{\mathfrak{I}}_{\theta+\pi/2}(\vec{\rho}\,')] &= 4i\epsilon_0 c \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}\,') \times \hbar\omega_0\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,') \end{aligned}} \tag{1-65}$$

On remarquera que pour les opérateurs de quadrature nous n'avons pas donné les expressions des opérateurs de fluctuation, ceci car leur expression se déduit immédiatement des précédentes en ajoutant simplement un δ devant chaque opérateur (car nous n'avons pas ici de produit d'opérateurs comme c'était le cas pour l'observable intensite). Pour l'opérateur nombre de photons, on obtient la formule simplifiée suivante :

$$\hat{\mathcal{N}}_\theta(\vec{\rho}) = i\sqrt{\mathcal{N}_{loc}(\vec{\rho})}\sum_k e^{-i\theta}\hat{a}_k u_k(\vec{\rho}) + h.c. \tag{1-66}$$

où $\mathcal{N}_{loc}(\vec{\rho})$ est le nombre de photons par unité de surface de l'oscillateur local.

C.3 Quantités intégrées sur un pavage transverse

C.3.1 Description des détecteurs

Les définitions de nos opérateurs de quadrature étant données, on peut maintenant regarder la mesure effectuée par un détecteur de taille finie. En toute généralité, on va plutôt s'intéresser à un ensemble de détecteurs de taille finie à la position $z = z_0$. On peut voir cela comme la modélisation d'une caméra CCD mais également de toute géométrie complexe de détecteurs[5]. C'est la dernière étape de notre recherche

4. Nous utilisons ici la relation de commutation valable uniquement pour les modes transverses et non pas pour les modes pixels. Cependant, lorsque nous en viendrons aux opérateurs sur des surfaces transverses de taille finie, on retrouvera des formules valables dans les deux cas. On verra également en fin de chapitre un exemple précis d'utilisation des modes pixels.

5. Il faut faire attention à ne pas confondre la mesure du plan transverse avec des photodiodes avec la décomposition en pixels. En effet, ici il n'est nullement besoin de supposer que le champ est constant

d'observables et c'est celle qui décrit complètement les dispositifs que nous utiliserons expérimentalement afin de mesurer les fluctuations quantiques dans le plan transverse d'un faisceau lumineux.

Considérons un ensemble de photodiodes qui occupent chacune une surface D_i du plan transverse. La seule condition que nous allons imposer est que :

$$D_i \bigcap D_j = \delta_{ij} D_i \tag{1-67}$$

Par rapport à la quantification par discrétisation, nous supposerons que la surface de nos photodiodes est bien plus grande qu'un pixel, et peut être parfaitement décrite par une somme de pixels.

C.3.2 L'opérateur intensité

a En fonction de l'opérateur champ

Lorsque l'on intègre le champ sur une surface transverse, et pendant un temps T, on obtient exactement l'énergie contenue dans cette portion de champ, qui est directement proportionnelle au nombre de photons et au signal délivré par une caméra CCD. Par abus de langage nous appellerons cette quantité l'observable intensité, ainsi définie :

$$\hat{I}(D_i) = \int_{D_i} \hat{\mathfrak{I}}(\vec{\rho}) d^2\rho. \tag{1-68}$$

Son expression exacte en fonction de l'opérateur champ ainsi que la valeur de l'opérateur de fluctuation découlent directement des expression que nous avons donnée pour les quantités locales, nous ne les donnerons donc pas ici.

b Forme modale

Pour obtenir l'opérateur énergie en fonction des modes transverses, il suffit d'intégrer l'équation (1-58), et ceci peut s'exprimer sous la forme synthétique suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{I}(D_i) &= \hbar\omega_0 \sum_{k,k'} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} D_i^{k,k'} \\ D_i^{k,k'} &= \int_{D_i} u_k^*(\vec{\rho}) u_{k'}(\vec{\rho}) d^2\rho \end{aligned}} \tag{1-69}$$

sur la surface du détecteur, au contraire on s'intéresse ici aux interférences entre les différents modes sur la surface du détecteur.

Où $D_i^{k,k'}$ représente le recouvrement des deux modes sur la surface de la photodiode. Dans le cadre de la décomposition en modes transverses c'est en fait le facteur d'interférences, et on voit que l'énergie du champ dépend non seulement de l'intensité de chaque mode mais également des fonctions de corrélations entre les différents modes. Pour la pixélisation, il vient immédiatement que $D_i^{k,k'} = \delta_{kk'}$ pour des pixels à l'intérieur de la photodiode, et 0 sinon; dans ce cas, l'observable intensité s'écrit bien comme la somme des intensités sur tous les pixels contenus dans la photodiode et il n'y a aucun terme croisé : ce fait rend, dans certains cas, l'utilisation des modes pixels particulièrement simple.

Nous n'allons pas ici non plus donner l'expression de l'opérateur de fluctuation puisque nous avons vu en section C.2.2 remarque 3 qu'il y avait une correspondance exacte avec les opérateurs de quadrature.

C.3.3 Les observables de quadrature

a En fonction de l'opérateur champ

Comme pour l'opérateur intensité, il faut effectuer l'intégrale sur la surface du détecteur, il vient :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{I}_\theta(D_i) &= \int_{D_i} 2\epsilon_0 c \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho})d^2\rho \\ [\hat{I}_\theta(D_i), \hat{I}_{\theta+\pi/2}(D_j)] &= \iint_{D_i\times D_j} [\hat{\mathcal{I}}_\theta(\vec{\rho}), \hat{\mathcal{I}}_{\theta+\pi/2}(\vec{\rho}\,')]d^2\vec{\rho}d^2\vec{\rho}\,' \end{aligned}} \tag{1-70}$$

b Forme modale

Pour obtenir l'expression de ces opérateurs en fonctions des modes transverses, il suffit d'intégrer les relations (1-65), il vient, en mentionnant également les résultats avec le nombre de photons :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{I}_\theta(D_i) &= \hbar\omega_0 \sum_k \hat{a}_k C_i^k e^{-i\theta} + h.c. \\ \hat{N}_\theta(D_i) &= \sum_k \hat{a}_k C_i^k e^{-i\theta} + h.c. \\ C_i^k &= \int_{D_i} \mathcal{C}^k(\vec{\rho})d^2\rho \\ \mathcal{C}^k(\vec{\rho}) &= i\sqrt{\frac{2\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}}\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})u_k(\vec{\rho}) = i\sqrt{\mathcal{N}_{loc}(\vec{\rho})}u_k(\vec{\rho}) \end{aligned}} \tag{1-71}$$

Cette fois-ci l'observable fait intervenir le recouvrement C_i^k entre un mode et l'oscillateur local. En effet, ce dernier étant considéré comme classique, seule sa valeur moyenne intervient et on n'a pas besoin de double somme; dans le cas de l'observable intensité linéarisée, on retrouve ce type de formule. On a finalement un opérateur de quadrature sur la quantité 'opérateur photonique $\times$ intégrale de recouvrement'.

Il reste à en donner les relations de commutations, elles viennent directement en intégrant celles de l'équation (1-65) :

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{I}_\theta(D_i), \hat{I}_{\theta+\pi/2}(D_j)] &= i4\hbar\omega_0\delta_{ij}I_{loc}(D_i) \\ I_{loc}(D_i) &= 2\epsilon_0 c\int_{D_i}\mathcal{E}_{loc}^2(\vec{\rho})d^2\vec{\rho} \end{aligned}} \tag{1-72}$$

On vérifiera aisément que cette relation de commutation est également valable pour les modes pixels, du moment que les détecteurs peuvent s'écrire parfaitement comme somme de pixels.

En conclusion, nous avons pu décrire un ensemble de détecteurs, en leur associant des observables vérifiant de 'bonnes' relation de commutation, qui vont nous permettre d'associer à chacun d'eux un niveau de bruit quantique standard, des notions de réduction de bruit; et entre eux d'introduire des fonctions de corrélations qui seront proprement normalisées. Cependant nous avons dû pour ce faire utiliser des observables homogènes à des intensités, qui, contrairement à l'opérateur champ, permettent de passer facilement d'une définition locale à la description de zones transverses de taille finie.

D Bruit Quantique - Corrélations

D.1 Bruit quantique standard

Nous allons rappeler ici les différentes notions sur le bruit quantique utilisées en optique. Pour plus de détails se reporter à [Scully 97, Walls 94], nous le ferrons ici sur l'exemple des opérateurs de quadratures que nous avons défini précédemment.

Si on prend deux opérateurs de quadrature I_θ et $I_{\theta+\pi/2}$, comme tout couple d'opérateurs hermitiens ils vérifient une relation de Heisenberg généralisée [Reynaud 90] :

$$(\Delta\hat{I}_\theta)^2(\Delta\hat{I}_{\theta+\pi/2})^2 \geq \frac{1}{4}\langle\delta\hat{I}_\theta\delta\hat{I}_{\theta+\pi/2} + \delta\hat{I}_{\theta+\pi/2}\delta\hat{I}_\theta\rangle^2 + \frac{1}{4}\left|[\hat{I}_\theta, \hat{I}_{\theta+\pi/2}]\right|^2 \tag{1-73}$$

où

$$(\Delta\hat{I}_\theta)^2 = \langle\hat{I}_\theta^2\rangle - \langle\hat{I}_\theta\rangle^2. \tag{1-74}$$

Dans cette relation le terme inhabituel est celui de corrélation. Nous l'avons introduit pour montrer simplement que la relation de Heisenberg habituelle n'est vérifiée que quand il n'y a pas de corrélation. Autrement dit il faut trouver l'angle θ pour lequel les deux quadratures en θ et $\theta+\pi/2$ sont le moins corrélées; pour obtenir un état minimal, il faut un angle où il n'y ait pas de corrélations.

Nous définirons donc le bruit quantique standard pour un tel ensemble continus d'opérateurs par :

$$B_{qs}(\hat{I}_\theta) = \frac{1}{2}\left|[\hat{I}_\theta, \hat{I}_{\theta+\pi/2}]\right| \tag{1-75}$$

et nous dirons que le bruit sur une observable est comprimé quand sa variance est inférieure au bruit quantique standard.

Cette dernière expressions donne une définition du bruit quantique standard indépendamment de l'angle θ, et de façon intrinsèque à la famille d'opérateurs que nous avons considéré. En effet, on pourrait obtenir la même définition pour tout ensemble continu d'opérateurs hermitiens $\{\hat{O}_\theta\}_{\theta\in[0,2\pi]}$ tel que quels que soient deux éléments O_θ et $O_{\theta+\pi/2}$ ils constituent une base de l'ensemble et ils vérifient une relation de commutation indépendante de θ. Cette définition propre à une famille d'opérateurs est possible car tous les opérateurs ont la même dimension physique. Cependant on définit souvent le bruit quantique standard pour deux variables ne commutant pas mais de dimension différente, comme l'intensité et la phase pour un faisceau laser. La méthode mathématiquement la plus rigoureuse semble être dans ce cas de lier les opérateurs en questions à une famille d'opérateurs comme celle que nous venons de décrire. Physiquement, il est courant de définir le bruit quantique standard, autrement appelé bruit de grenaille, à partir des propriétés des états cohérents (voir notamment une étude complète dans [Zhang 90], ou [Scully 97] pour une approche plus appliquée à l'optique quantique). Ces états sont ceux dont le comportement se rapproche le plus de celui des états classiques, et leurs propriétés servent à définir la frontière entre des effets classiques et des effets quantiques. Un état cohérent est un état propre de l'opérateur de création $\hat{a}$ (pour les opérateurs de quadratures, c'est donc un état propre de $\hat{I}_{\theta+\pi/2} - i\hat{I}_\theta$). Pour toute observable, le bruit quantique standard pourra alors être défini comme le bruit de l'état cohérent correspondant.

D.2 Variance

a *En fonction de l'opérateur champ*

Nous pouvons maintenant exprimer la variance des observables de quadratures sur le détecteur. Après refactorisation il vient :

$$(\Delta\hat{I}_\theta(D_i))^2 = 4\epsilon_0^2c^2 \iint_{D_i\times D_i} \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}\,') \Big[\langle\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho})\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}\,')\rangle - \langle\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho})\rangle\langle\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}\,')\rangle\Big] d^2\vec{\rho}d^2\vec{\rho}\,' \quad (1\text{-}76)$$

En utilisant les opérateurs de fluctuation, et en remarquant que pour tout opérateur $\hat{O}$, sa variance s'écrit en fonction de l'opérateur de fluctuation :

$$(\Delta\hat{O})^2 = \langle\delta\hat{O}^2\rangle \quad (1\text{-}77)$$

il vient pour la variance de l'opérateur de quadrature :

$$\boxed{\langle\delta\hat{I}_\theta(D_i)^2\rangle = 4\epsilon_0^2c^2 \iint_{D_i\times D_i} \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}\,')\langle\delta\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho})\delta\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}\,')\rangle d^2\vec{\rho}d^2\vec{\rho}\,'} \quad (1\text{-}78)$$

Formule qui montre que pour calculer la variance d'une quadrature du champ sur une zone transverse, nous avons besoin de toutes les fonctions de corrélation à l'intérieur de cette zone.

b *Forme modale*

Il est possible de donner une formule générale en fonction des opérateurs photoniques et des intégrales de recouvrement, pour se faire il faut utiliser l'expression (1-71) valable également pour des opérateurs de fluctuations, il vient en utilisant $\langle\delta\hat{a}_k\delta\hat{a}_k^\dagger\rangle = 1 + \langle\delta\hat{a}_k^\dagger\delta\hat{a}_k\rangle$

$$\langle\delta\hat{I}_\theta(D_i)^2\rangle = (\hbar\omega_0)^2\sum_k |C_i^k|^2 + (\hbar\omega_0)^2\sum_{k,k'}\Big[\langle\delta\hat{a}_k^\dagger\delta\hat{a}_{k'}\rangle(C_i^k)^*C_i^{k'} + \langle\delta\hat{a}_k\delta\hat{a}_{k'}\rangle C_i^kC_i^{k'}e^{-2i\theta} + c.c.\Big] \quad (1\text{-}79)$$

on peut calculer le premier terme de cette équation, en effet il s'écrit

$$\sum_k |C_i^k|^2 = \frac{2\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}\sum_k \int_{D_i\times D_i} \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}\,')u_k(\vec{\rho})u_k^*(\vec{\rho}\,')d^2\rho \quad (1\text{-}80)$$

en faisant rentrer la somme sous l'intégrale et en utilisant la relation de complétude (1-32) sur les modes transverses il vient

$$\sum_k |C_i^k|^2 = \frac{2\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}\int_{D_i} \mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})^2 d^2\rho = \frac{I_{loc}(D_i)}{\hbar\omega_0} \tag{1-81}$$

et représente le bruit quantique standard associé avec la mesure sur la photodiode (en accord avec le commutateur (1-72)), terme qui est toujours présent quel que soit l'état du champ et qui sous cette forme est homogène à un nombre de photons. La variance de l'observable de quadrature s'écrit finalement

$$\boxed{\langle \delta\hat{I}_\theta(D_i)^2\rangle = \hbar\omega_0 I_{loc}(D_i) + (\hbar\omega_0)^2 \sum_{k,k'} \langle : (\delta\hat{a}_k C_i^k e^{-i\theta} + h.c.)(\delta\hat{a}_{k'} C_i^{k'} e^{-i\theta} + h.c.) : \rangle} \tag{1-82}$$

où :: représente l'ordre normal des opérateurs. Cette expression fait ressortir le bruit quantique standard, qui vient du commutateur, plus un terme de corrélation entre les opérateurs de quadrature (cette façon de formuler la variance est courante, on la trouve par exemple dans [Kolobov 99, Gardiner 91]).

On peut également calculer la variance de l'observable intensité, cependant ce calcul est légèrement plus complexe. Nous renvoyons au chapitre 4 section B.2 pour plus de détails. Donnons ici simplement l'expression du carré de l'opérateur intensité, car elle servira par la suite

$$\hat{I}(D_i)^2 = (\hbar\omega_0)^2 \sum_{k,k',l,l'} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l'} D_i^{k,k'} D_i^{l,l'} \tag{1-83}$$

D.3 Corrélations quantiques

D.3.1 Fonction de corrélation

Toutes les définitions précédentes nous permettent d'en venir à la forme la plus générale de la fonction de corrélation entre deux quadratures à deux positions différentes du champ. Cependant pour se placer en toute généralité, nous allons de plus considérer des corrélations entre deux faisceaux différents, que nous noterons avec les indices n et m (qui s'appliquent aussi pour les oscillateurs locaux qui peuvent être différents). De plus, la relation de Heisenberg généralisée de la formule (1-73) fait intervenir une fonction de corrélation symétrisée, qui correspond à une mesure où l'ordre n'intervient pas. Nous allons donc nous limiter à ce type de fonction de corrélation, ainsi nous définirons, si $\hat{O}$ et $\hat{P}$ sont des opérateurs :

$$\langle \hat{O}\hat{P}\rangle_s = \frac{1}{2}\langle \hat{O}\hat{P} + \hat{P}\hat{O}\rangle \tag{1-84}$$

Il faut noter que cette définition n'a d'influence sur le résultat que si les opérateurs que l'on considère ne commutent pas.

On peut maintenant écrire les fonctions de corrélations :

$$\langle \delta \hat{I}^n_\theta(D_i,t)\delta \hat{I}^m_{\theta'}(D_j,t)\rangle_s = 4\epsilon_0^2 c^2 \iint_{D_i\times D_j} \mathcal{E}^n_{loc}(\vec{\rho},t)\mathcal{E}^m_{loc}(\vec{\rho}\,',t)\langle \delta\hat{\mathcal{E}}^n_\theta(\vec{\rho},t)\delta\hat{\mathcal{E}}^m_{\theta'}(\vec{\rho}\,',t)\rangle_s d^2\rho d^2\rho\,' \quad (1\text{-}85)$$

et en utilisant une démarche similaire à celle qui nous a mené à l'équation (1-82) il vient

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\langle \delta \hat{I}^n_\theta(D_i)\delta \hat{I}^m_{\theta'}(D_j)\rangle_s & = & \delta_{nm}\delta_{ij}\hbar\omega_0 I_{loc}(D_i)\cos(\theta-\theta') \\ & + & (\hbar\omega_0)^2\sum_{k,k'}\langle :(\delta\hat{a}^n_k C^{n,k}_i e^{-i\theta}+h.c.)(\delta\hat{a}^m_{k'}C^{m,k'}_i e^{-i\theta'}+h.c.):\rangle\end{array}} \quad (1\text{-}86)$$

où $C_i^{n,k'}$ est défini de la même manière qu'en (1-71) mais pour le champ n. Pour l'exploitation des résultats, la fonction qui nous intéresse est la fonction de corrélation normalisée, que nous noterons

$$\left\langle \delta \hat{I}^n_\theta(D_i)\delta \hat{I}^m_{\theta'}(D_j)\right\rangle_N = \frac{\left\langle \delta \hat{I}^n_\theta(D_i)\delta \hat{I}^m_{\theta'}(D_j)\right\rangle_s}{\sqrt{\left\langle \delta \hat{I}^n_\theta(D_i)^2\right\rangle\left\langle \delta \hat{I}^m_{\theta'}(D_j)^2\right\rangle}} \quad (1\text{-}87)$$

qui vérifie :

$$0 \leq \left|\left\langle \delta \hat{I}^n_\theta(D_i)\delta \hat{I}^m_{\theta'}(D_j)\right\rangle_N\right| \leq 1 \quad (1\text{-}88)$$

D.3.2 Critère quantique

La fonction de corrélation que nous avons définie permet de donner une valeur pour les corrélations, mais pas directement une idée de l'information quantique qu'elles contiennent. En effet, si l'on considère deux faisceaux très bruités, mais avec des bruits de type classique, ils peuvent avoir une fonction de corrélation très proche de 1 sans que cela fasse intervenir le moindre processus quantique. Pour faire ressortir cette information, nous allons utiliser une approche courante dans les recherches sur les mesures quantiques non destructives [Poizat 94], celle de la variance conditionnelle. En probabilités la variance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport à une autre représente la variance de la première variable, connaissant la valeur de l'autre variable. Ainsi, si deux variables sont très corrélées, même si elle sont indépendamment très bruitées on peut avoir une variance conditionnelles très faible.

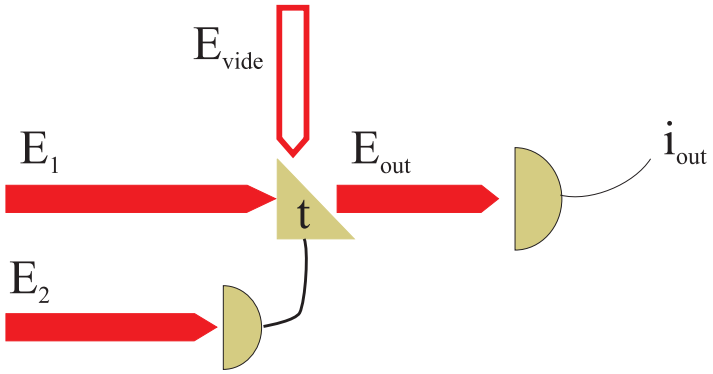

Fig. 1.2 – Dispositif optique de transmission t pilotable par le champ $\mathcal{E}_2$ de manière à réduire les fluctuations de $\mathcal{E}_1$. Nous avons également représenté sur la figure l'entrée des fluctuations du vide.

Reprenons ces idées avec une approche plus physique. Imaginons que nous voulions faire l'expérience suivante : nous disposons de deux faisceaux corrélés, dont nous connaissons la fonction de corrélation, et nous voulons fabriquer un dispositif qui permette de réduire les fluctuations du premier champ en utilisant les informations fournies par le deuxième. Considérons un dispositif optique sur lequel est incident le premier champ, et dont la transmission t est proche de un. Supposons que cette transmission est pilotable par les fluctuations du champ 2 : on peut par exemple utiliser un modulateur électro-optique comme cela a été fait avec succès dans [Mertz 91b], on trouver également dans cette référence une étude théorique détaillée de ce procédé. Nous noterons respectivement $\hat{\mathcal{E}}_1$, $\hat{\mathcal{E}}_2$ et $\hat{\mathcal{E}}_{out}$ les champs incident, correcteur et sortant. Nous noterons également $\hat{\mathcal{E}}_v$ le vide (voir figure 1.2). Le champ sortant est donné par :

$$\hat{\mathcal{E}}_{out} = t(\hat{\mathcal{E}}_2)\hat{\mathcal{E}}_1 + \sqrt{1-t^2}\hat{\mathcal{E}}_v \tag{1-89}$$

Ses fluctuations peuvent alors s'obtenir en se plaçant dans la limite des petites fluctuations :

$$\delta\hat{\mathcal{E}}_{out} = t(\hat{\mathcal{E}}_2)\delta\hat{\mathcal{E}}_1 + \frac{dt}{d\mathcal{E}_2}\langle\hat{\mathcal{E}}_1\rangle\delta\hat{\mathcal{E}}_2 + \sqrt{1-t^2}\delta\hat{\mathcal{E}}_v. \tag{1-90}$$

En supposant que $\frac{dt}{d\mathcal{E}_2} = g$ est une constante, nous pouvons calculer la variance $\langle\delta\hat{\mathcal{E}}^2_{out}\rangle$ en fonction de g, et enfin calculer la valeur optimale de g pour minimiser cette variance. On supposera que t est très proche de 1, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de linéarisation. Ce qui nous donne comme valeur minimale pour la variance du champ de sortie :

$$V_{\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2} = \langle\delta\hat{\mathcal{E}}^2_{out}\rangle_{optimale} = \langle\delta\hat{\mathcal{E}}^2_1\rangle\left[1 - \frac{\langle\delta\hat{\mathcal{E}}_1\delta\hat{\mathcal{E}}_2\rangle_s^2}{\langle\delta\hat{\mathcal{E}}^2_1\rangle\langle\delta\hat{\mathcal{E}}^2_2\rangle}\right]. \tag{1-91}$$

$V_{\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2}$ est la variance conditionnelle de $\mathcal{E}_1$ connaissant $\mathcal{E}_2$. Définissons maintenant les corrélations quantiques :

> *Les corrélations entre deux champs sont dites quantiques quand la variance conditionnelle de l'un par rapport à l'autre est inférieure au bruit quantique standard.*

$$\text{Corrélations quantiques} \quad \Longleftrightarrow \quad V_{\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2} \leq B_{qs}(\hat{\mathcal{E}}_1). \tag{1-92}$$

On remarquera que ce calcul a été fait avec des opérateurs champs, mais il peut s'appliquer à un grand nombre de phénomènes physiques où apparaissent des corrélations et où il y a une notion de limite quantique standard.

D.3.3 Lien avec les critères QND et de téléportation

La 'science des critères' est en fait en ébullition en ce moment dans le monde de la physique. La raison en est que de plus en plus nous sommes capables de faire des expériences venant tester directement le monde quantique. Cependant, souvent ces expériences se font sur des systèmes macroscopiques où les effets quantiques apparaissent sous formes de propriétés statistiques, comme par exemple dans le cas des inégalités de Bell. Il devient alors important de déterminer quels sont les domaines de valeurs de ces paramètres pour lesquels nous sommes dans le régime quantique. Les corrélations transverses font partie de ce genre de quantités et c'est pourquoi nous retrouvons les mêmes critères. En effet, la variance conditionnelle sert par exemple à signifier l'existence de faisceaux intriqués, de type EPR, à décider de la réussite d'une mesure quantique non destructive, à mettre en évidence la téléportation quantique,... Parmi la nombreuse littérature à ce sujet on pourra lire par exemple [Grangier 00] ou encore [Holland 90].

E Résumé des formules importantes

Nous résumons ici l'ensemble des formules importantes qui seront utilisées dans les chapitres suivants, en employant systématiquement l'observable nombre de photons.

Quantification du champ		
$\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}}\sum_i \hat{a}_i u_i(\vec{\rho})$	u_i : mode transverse $\hat{a}_i$ opérateur d'annihilation	$\int u_i^*(\vec{\rho})u_j(\vec{\rho})d^2\rho = \delta_{ij}$ $\sum_i u_i^*(\vec{\rho})u_i(\vec{\rho}\,') = \delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')$ $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$
Observables locales		
$\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}) = \sum_{i,j}\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_j u_i^*(\vec{\rho})u_j(\vec{\rho})$ $\hat{\mathcal{N}}_\theta(\vec{\rho}) = 2\frac{\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho})$	$\delta\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}) = -i\sum_i \delta\hat{a}_i^\dagger u_i^*(\vec{\rho})\langle\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho})\rangle + h.c.$ $\hat{\mathcal{E}}_\theta(\vec{\rho}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}}\sum_k e^{-i\theta}\hat{a}_k u_k(\vec{\rho}) + h.c$	
$[\hat{\mathcal{N}}_\theta(\vec{\rho}), \hat{\mathcal{N}}_{\theta+\pi/2}(\vec{\rho}\,')] = 4i\frac{\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}\,')\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')$		
Observables intégrées sur un détecteur D_i		
$\hat{N}(D_i) = \sum_{k,k'}\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_{k'}D_i^{k,k'}$ $\hat{N}_\theta(D_i) = \sum_k \hat{a}_k C_i^k e^{-i\theta} + h.c.$	$D_i^{k,k'}$: rec. de u_k et $u_{k'}$ C_i^k : rec. de u_k et $\mathcal{E}_{loc}$	$D_i^{k,k'} = \int_{D_i} u_k^*(\vec{\rho})u_{k'}(\vec{\rho})d^2\rho$ $C_i^k = \int_{D_i} i\sqrt{\frac{2\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}}\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})u_k(\vec{\rho})d^2\rho$
$[\hat{N}_\theta(D_i), \hat{N}_{\theta+\pi/2}(D_j)] = 4i\delta_{ij}N_{loc}(D_i)$		
Variance - Corrélations		
$\hat{N}(D_i)^2 = \sum_{k,k',l,l'}\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_{k'}\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_{l'}D_i^{k,k'}D_i^{l,l'}$ $\langle\delta\hat{N}_\theta(D_i)^2\rangle = N_{loc}(D_i) + \sum_{k,k'}\langle:(\delta\hat{a}_k C_i^k e^{-i\theta} + h.c.)(\delta\hat{a}_{k'}C_i^{k'}e^{-i\theta} + h.c.):\rangle$ $\langle\delta\hat{N}_\theta^n(D_i)\delta\hat{N}_{\theta'}^m(D_j)\rangle_s = \delta_{nm}\delta_{ij}N_{loc}(D_i)\cos(\theta-\theta')$ $+\sum_{k,k'}\langle:(\delta\hat{a}_k^n C_i^{n,k}e^{-i\theta} + h.c.)(\delta\hat{a}_{k'}^m C_i^{m,k'}e^{-i\theta'} + h.c.):\rangle$		

Chapitre 2

Effets quantiques dans les images

A Exemples

Dans le cadre des exemples, et afin d'alléger les notations, nous utiliserons uniquement l'opérateur nombre de photons, dont on rappelle la définition :

$$\hat{N} = \frac{\hat{I}}{\hbar\omega_0}$$

et nous définirons également

$$N_i = \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle \tag{2-2}$$

qui représente le nombre total de photons dans le mode i.

A.1 Champ monomode transverse

Nous allons ici analyser la structure transverse d'un champ monomode, afin de bien comprendre la répartition du bruit dans ce cas; cela nous permettra ensuite de définir des répartitions non standards. Intuitivement, on peut déjà décrire ce champ : comme une seule variable quantique décrit sa structure transverse, la répartition des photons dans ce plan est complètement aléatoire, pondérée par l'intensité du champ. Toute cette étude est faite dans le cadre de la décomposition en modes transverses et ne s'applique pas directement aux modes pixels.

A.1.1 Analyse locale

Supposons que nous ayons un champ qui se décompose en modes transverses, que nous écrirons selon les notations simplifiées que nous avons définies dans les formules 1-50 dans le cadre d'une mesure sur une photodiode :

$$\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}} \sum_i \hat{a}_i u_i(\vec{\rho}) \tag{2-3}$$

Dire que le champ est monomode signifie que tous les modes du champ sauf un sont vides, et non corrélés (on en donnera une définition plus rigoureuse dans l'annexe B). Nous supposerons que c'est le mode 0 qui est non vide.

a *Champ électrique*

Tout d'abord, donnons les corrélations vérifiées par le champ électrique, qui servent comme description transverse du champ monomode. Nous allons détailler ici ce calcul qui reviendra souvent par la suite, en utilisant que $\langle \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \rangle = N_i + 1$ il vient

$$\langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,') \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \sum_i (N_i + 1) u_i(\vec{\rho}) u_i^*(\vec{\rho}\,') \tag{2-4}$$

or sachant que seul $N_0 \neq 0$ et en utilisant la relation de complétude (1-32) il vient

$$\langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,') \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,') + \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} N_0 u_0(\vec{\rho}) u_0^*(\vec{\rho}\,') \tag{2-5}$$

Le dernier terme de cette expression vient du champ moyen, pour l'éliminer il faut passer aux opérateurs de fluctuations. En remarquant que $\langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \rangle \langle \hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,') \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \langle \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^\dagger \rangle u_0(\vec{\rho}) u_0^*(\vec{\rho}\,')$ et en utilisant les opérateurs de fluctuation photoniques $\delta\hat{a}_i = \hat{a}_i - \langle \hat{a}_i \rangle$ il vient pour toutes les fonctions de corrélation

$$\begin{aligned}
\langle \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,') \rangle &= \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,') + \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_0 \rangle u_0(\vec{\rho}) u_0^*(\vec{\rho}\,') \\
\langle \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}\,') \rangle &= 0 + \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_0 \rangle u_0^*(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}\,') \\
\langle \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}\,') \rangle &= 0 + \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \langle \delta\hat{a}_0^2 \rangle u_0(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}\,') \\
\langle \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}) \delta\hat{\mathcal{E}}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,') \rangle &= 0 + \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c} \langle \delta\hat{a}_0^{\dagger 2} \rangle u_0^*(\vec{\rho}) u_0^*(\vec{\rho}\,').
\end{aligned} \tag{2-6}$$

La colonne de droite de ces relations est constituée de termes quadratiques sur les fluctuations, qui représentent en fait l'écart du mode considéré par rapport à un état cohérent et donc le caractère non classique du mode. En effet, dans le cas d'un état cohérent, tous les termes de la colonne de droite sont nuls, et les fonctions de corrélations deviennent très simples : elles correspondent dans ce dernier cas aux fluctuations quantiques du vide.

b *Intensité*

Voyons maintenant ce qu'il advient de l'intensité locale. Elle s'écrit selon (1-58)

$$\langle \hat{\mathcal{I}}(\vec{\rho}) \rangle = \hbar\omega_0 \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle |u_0(\vec{\rho})|^2 \tag{2-7}$$

On déduit de cette même équation la fonction de corrélation en intensité, en utilisant l'opérateur nombre de photons elle s'écrit :

$$\langle \hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}\,')\rangle = \sum_{k,k',l,l'} \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l'}\rangle u_k^*(\vec{\rho}) u_{k'}(\vec{\rho}) u_l^*(\vec{\rho}\,') u_{l'}(\vec{\rho}\,'). \tag{2-8}$$

Pour la calculer, il faut évaluer des termes de la forme $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l'}\rangle$, or on peut recenser les seuls non nuls :

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0\rangle &= \langle \hat{a}_0^{\dagger 2} \hat{a}_0^2\rangle + \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0\rangle \\ \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_0\rangle &\underset{k\neq 0}{=} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0\rangle \end{aligned} \tag{2-9}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}\,')\rangle &= N_0 u_0^*(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}\,') \sum_i u_i^*(\vec{\rho}\,') u_i(\vec{\rho}) + \langle \hat{a}_0^{\dagger 2} \hat{a}_0^2\rangle |u_0(\vec{\rho})|^2 |u_0(\vec{\rho}\,')|^2 \\ &= N_0 |u_0(\vec{\rho})|^2 \delta(\vec{\rho}\,' - \vec{\rho}) + \langle \hat{a}_0^{\dagger 2} \hat{a}_0^2\rangle |u_0(\vec{\rho})|^2 |u_0(\vec{\rho}\,')|^2. \end{aligned} \tag{2-10}$$

En utilisant

$$\langle \hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho})\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}\,')\rangle = \langle \hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho})\rangle \langle \hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}\,')\rangle + \langle \delta\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho})\delta\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}\,')\rangle \tag{2-11}$$

on obtient directement les fonctions de corrélations sur les fluctuations :

$$\boxed{\langle \delta\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho})\delta\hat{\mathcal{N}}(\vec{\rho}\,')\rangle = N_0 |u_0(\vec{\rho})|^2 \delta(\vec{\rho}\,' - \vec{\rho}) + R_0 |u_0(\vec{\rho})|^2 |u_0(\vec{\rho}\,')|^2} \tag{2-12}$$

où

$$R_0 = \langle \hat{a}_0^{\dagger 2} \hat{a}_0^2\rangle - \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0\rangle^2 \tag{2-13}$$

et représente la réduction de bruit en intensité du mode considéré. En effet, dans le cas d'un état cohérent, on montre directement que $R_0 = 0$ et on trouve bien que la fonction de corrélation n'est non nulle que quand $\vec{\rho} = \vec{\rho}\,'$. Un état cohérent est un état qui ne présente pas de corrélations spatiales.

c *Opérateurs de quadrature*

Pour les opérateurs de quadrature, les formules découlent directement de celles sur les opérateurs champ, et on peut écrire la formule générale dans une forme similaire à celle de (1-82), en utilisant la notation (1-71). Il faut cependant ici utiliser les fonctions de corrélation symétrisées, tous calculs faits il vient :

$$\begin{aligned} \langle \delta\hat{\mathcal{N}}_\theta(\vec{\rho})\delta\hat{\mathcal{N}}_{\theta'}(\vec{\rho}\,')\rangle_s &= \mathcal{N}_{loc}(\vec{\rho})\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,')\cos(\theta - \theta') \\ &\quad + \langle : (\delta\hat{a}_0 \mathcal{C}^0(\vec{\rho}) e^{-i\theta} + h.c.)(\delta\hat{a}_0 \mathcal{C}^0(\vec{\rho}\,') e^{-i\theta'} + h.c.) : \rangle \end{aligned} \tag{2-14}$$

où le premier terme est celui du bruit quantique standard, et le second celui de réduction de bruit, tourné en direction de l'oscillateur local.

En résumé, toutes les formules précédentes comportent 2 termes :

- l'un associé au bruit quantique standard (qui est le seul restant dans le cas d'un état cohérent) toujours pondéré par une distribution de Dirac entre deux position transverses différentes. Il montre que tous les effets sont locaux et qu'il n'y a aucune communication entre deux points transverses différents.
- l'autre vient du caractère non classique du mode considéré. Il est intéressant de remarquer que ce caractère non classique se traduit par des effets non locaux, avec des termes de corrélations entre 2 points différents du plan transverse. Lorsque l'on s'intéresse à des quantités en un seul point transverse, ces termes deviennent négligeables par rapport à la distribution de Dirac.

A.1.2 Bruit sur un détecteur

a Intensité

En suivant la même démarche, nous allons maintenant regarder ce que donne la mesure par un détecteur d'un champ monomode; le nombre de moyen de photons s'exprime à partir de l'équation (1-69), il vient :

$$\langle \hat{N}(D_i) \rangle = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle D_i^{0,0} = N_0 \mu_0(D_i) \tag{2-15}$$

où $\mu_0(D_i)$ est la fraction du mode 0 contenu dans la surface D_i (introduite en (1-34)). Pour exprimer la variance de ce champ, on utilise la formule (1-83) et la même méthode que pour le calcul de la variance locale du paragraphe précédant, il vient alors

$$(\Delta \hat{N}(D_i))^2 = R_0 \, \mu_0(D_i)^{\,2} + \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \sum_k D_i^{0,k} D_i^{k,0} \tag{2-16}$$

Pour calculer le dernier terme, il faut évaluer la somme, ce calcul peut être fait complètement :

$$\sum_k D_i^{0,k} D_i^{k,0} = \sum_k \int_{D_i \times D_i} u_0(\vec{\rho}) u_0^*(\vec{\rho}\,') u_k^*(\vec{\rho}) u_k(\vec{\rho}\,') d^2\rho d^2\rho' \tag{2-17}$$

En faisant rentrer la somme sous l'intégrale et en utilisant la relation de complétude (1-32), il vient :

$$\sum_k D_i^{0,k} D_i^{k,0} = \int_{D_i} u_0^*(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}) d^2\rho = \mu_0(D_i) \tag{2-18}$$

On obtient finalement la variance du nombre de photons :

$$\boxed{(\Delta\hat{N}(D_i))^2 = N_0\mu_0(D_i) + R_0\ \mu_0(D_i)^2} \tag{2-19}$$

Cette équation peut s'analyser ainsi : le premier terme correspond au bruit quantique standard, il est en facteur de la fraction d'intensité incidente sur le détecteur, il représente en fait exactement le nombre de photons incidents sur le détecteur. Le deuxième terme est la partie réduction de bruit, comme mentionné précédemment dans le cas d'un état cohérent il est nul, par contre ce qui est intéressant est qu'il est en facteur de la fraction d'intensité au carré, ce qui signifié que l'importance de ce terme varie quadratiquement avec la fraction de faisceau détecté; on retrouve en fait exactement la même variation que si l'on avait placé un filtre pour atténuer le faisceau [Bachor 98]. Ici, le bruit mesuré dépend uniquement de la fraction d'intensité mesurée : il n'y a pas d'effet quantiques transverses.

b *Opérateurs de quadrature*

Dans le cas des opérateurs de quadrature, la formule continue (2-14) s'intègre facilement en utilisant des notations comparables à celle de (1-82). Donnons les deux cas intéressants :

$$\begin{aligned}\langle\delta\hat{N}_\theta(D_i)\delta\hat{N}_{\theta+\pi/2}(D_i)\rangle_s &= -i\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle\ {C_i^0}^2\, e^{-2i\theta} + c.c.\\ \langle\delta\hat{N}_\theta(D_i)^2\rangle &= N_{loc}(D_i) + \langle:(\delta\hat{a}_0 C_i^0 e^{-i\theta} + h.c.)^2:\rangle\end{aligned} \tag{2-20}$$

Angle optimal

On peut se demander maintenant quel est l'angle nous permettant de retrouver un état minimal, la relation de Heisenberg (1-73) implique que la fonction de corrélation entre les opérateurs déphasés de $\pi/2$ doit être nulle. D'après les équations précédentes, on voit que l'angle θ optimal est tel que

$$\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle\ {C_i^0}^2\, e^{-2i\theta} \in \mathbb{R} \tag{2-21}$$

On peut arriver à une expression simplifiée dans le cas particulier où la phase du mode transverse u_0 est constante. On peut supposer alors, sans perdre de généralité, que ce mode transverse est réel, ce qui implique que ${C_i^0}^2$ est réel. La relation (2-21) est alors vérifiée dans le cas où la phase de l'oscillateur local est égale à la phase des fluctuations $\delta\hat{a}_0$, modulo $\pi/2$. Cela nous donne les deux quadratures intéressantes à

analyser expérimentalement, si l'on appelle θ_0 la phase des fluctuations $\delta\hat{a}_0$ il vient alors en développant les expressions dans l'ordre normal :

$$\begin{aligned}
\langle\delta\hat{N}_{\theta_0}(D_i)\delta\hat{N}_{\theta_0+\pi/2}(D_i)\rangle_s &= 0 \\
\langle\delta\hat{N}_{\theta_0}(D_i)^2\rangle &= N_{loc}(D_i) + 2|\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle|\, {C_i^0}^2 + 2\langle\delta\hat{a}_0^\dagger\delta\hat{a}_0\rangle|C_i^0|^2 \\
\langle\delta\hat{N}_{\theta_0+\pi/2}(D_i)^2\rangle &= N_{loc}(D_i) - 2|\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle|\, {C_i^0}^2 + 2\langle\delta\hat{a}_0^\dagger\delta\hat{a}_0\rangle|C_i^0|^2 \qquad (2\text{-}22)
\end{aligned}$$

On voit immédiatement que les meilleures réductions de bruit seront obtenues avec un recouvrement maximal, il faut donc maximiser ${C_i^0}^2$, qu'il soit positif ou négatif. Or il vient

$$ {C_i^0}^2 = -\frac{2\epsilon_0 c}{\hbar\omega_0}\left(\int_{D_i}\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho})u_0(\vec{\rho})d^2\rho\right)^2 \qquad (2\text{-}23)$$

Dans le cas où le détecteur D_i est grand devant la taille du champ, il est évident que les propriétés des modes transverses impliquent que le meilleur recouvrement est atteint si $\mathcal{E}_{loc}$ est proportionnel à u_0, et c'est donc ce que nous allons supposer. Cependant il faut remarquer que dans le cas de certaines distributions particulières ce n'est pas forcément le meilleur choix[1]. Nous utiliserons donc un oscillateur local de la forme :

$$\mathcal{E}_{loc}(\vec{\rho}) = i\beta\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}}\langle\hat{a}_0\rangle u_0(\vec{\rho}) \qquad (2\text{-}24)$$

ce qui implique, comme nous avons supposé que u_0 était réel, que $\langle\hat{a}_0\rangle$ l'est aussi et donc que $N_{loc}(D_i) = \beta^2\langle\hat{a}_0\rangle^2\mu_0(D_i)$. Il vient alors

$$ {C_i^0}^2 = -N_{loc}(D_i)\mu_0(D_i) \qquad (2\text{-}25)$$

et les variances deviennent :

$$\begin{aligned}
\langle\delta\hat{N}_{\theta_0}(D_i)\delta\hat{N}_{\theta_0+\pi/2}(D_i)\rangle_s &= 0 \\
\langle\delta\hat{N}_{\theta_0}(D_i)^2\rangle &= N_{loc}(D_i)\left[1 + 2\mu_0(D_i)\left(\langle\delta\hat{a}_0^\dagger\delta\hat{a}_0\rangle - |\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle|\right)\right] \\
\langle\delta\hat{N}_{\theta_0+\pi/2}(D_i)^2\rangle &= N_{loc}(D_i)\left[1 + 2\mu_0(D_i)\left(\langle\delta\hat{a}_0^\dagger\delta\hat{a}_0\rangle + |\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle|\right)\right] \qquad (2\text{-}26)
\end{aligned}$$

1. Le choix du meilleur oscillateur local est un problème complexe et mériterait à lui seul une étude approfondie. La formulation présentée ici en donne une bonne piste mais n'est pas suffisamment générale. En effet, nous avons supposé que la phase de l'oscillateur local était constante sur le détecteur ce qui n'a rien d'obligatoire. On peut compenser ce choix en modulant la phase du champ analysé, où en refaisant tous les calculs présentés ici avec θ dépendant de $\vec{\rho}$; cela n'est pas plus difficile mais alourdit notablement les notations, surtout dans le cas multimode qui est le cas intéressant. On pourra se reporter à [Shapiro 97] pour une étude approfondie sur le sujet, où l'on prend le point de vue inverse : on calcul les intégrales de recouvrement, puis on adapte la décomposition en mode transverses au choix de l'oscillateur local.

Encore une fois on voit apparaître le nombre de photons observés - le bruit quantique standard - plus un terme de réduction de bruit en facteur du poids du mode transverse au carré. On retrouve donc les mêmes lois de variation que dans le cas de l'observable intensité : quel que soit l'état du champ, si l'on fait tendre la taille du détecteur vers 0, le bruit de la mesure tend vers le bruit quantique standard. Le terme de réduction de bruit $\langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_0 \rangle - |\langle \delta\hat{a}_0^2 \rangle|$ qui apparaît dans les formules représente bien cette réduction dans toute sa généralité. On peut s'en convaincre sur le cas particulier des états comprimés du rayonnement. En effet, si l'on prend un état comprimé $|\alpha, r, \theta\rangle$ (voir [Scully 97] pour les propriétés de ces états, avec les mêmes notations que celles utilisées ici), quel que soit l'angle de compression, il vient (ce calcul est détaillé au chapitre 4 section c)

$$\langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_0 \rangle - |\langle \delta\hat{a}_0^2 \rangle| = \frac{1}{2}\left(e^{-2r} - 1\right) \tag{2-27}$$

ce qui donne pour la variance de la quadrature comprimée

$$\langle \delta\hat{N}_{\theta_0}(D_i)^2 \rangle = N_{loc}(D_i)\left[1 - \mu_0(D_i)\left(1 - e^{-2r}\right)\right]. \tag{2-28}$$

On peut de plus montrer que ce terme de réduction de bruit est égal à R_0 dans le cas où la quadrature comprimée est en direction de l'intensité et où on se place dans la limite des petites fluctuations.

A.1.3 Corrélations entre détecteurs

Examinons maintenant ce que valent les fonctions de corrélation entre deux détecteurs, ceci nous permettra de déterminer quelles sont ces relations dans le cas des opérateurs pixel. On voit qu'en utilisant la même méthode que précédemment pour faire les sommes sur les intégrales de recouvrement, il vient directement que

$$\sum_k (C_i^{k,\theta})^* C_j^{k,\theta} \underset{i\neq j}{=} \sum_k D_i^{0,k} D_j^{k,0} \underset{i\neq j}{=} 0 \tag{2-29}$$

d'où l'on obtient directement les formules de corrélation :

$$\langle \delta\hat{N}(D_i)\delta\hat{N}(D_j) \rangle \underset{i\neq j}{=} R_0 \mu_0(D_i)\mu_0(D_j) \tag{2-30}$$

Le terme d'autocorrélation a bien sur disparu, par contre il reste le terme de corrélation global du au caractère non classique du champ.

De la même façon, la fonction de corrélation entre deux opérateurs de quadrature s'écrit

$$\langle \delta\hat{N}_\theta(D_i)\delta\hat{N}_{\theta'}(D_j) \rangle \underset{i\neq j}{=} \langle : (\delta\hat{a}_0 C_i^0 e^{-i\theta} + h.c.)(\delta\hat{a}_0 C_j^0 e^{-i\theta'} + h.c.) : \rangle. \tag{2-31}$$

On peut tenter maintenant de regarder ce qu'il se passe pour deux quadratures perpendiculaires comme nous l'avons fait pour un seul détecteur. Cependant la formule générale ne se simplifie pas et il faut tout de suite passer à l'angle optimal.

Angle optimal

Dans ce cadre que nous avons défini pour un seul détecteur, il est évident que ce qui était valable pour C_i^0 l'est pour C_j^0, ces deux quantités sont réelles et nous avons

$$C_i^0 C_j^0 = -\sqrt{N_{loc}(D_i)N_{loc}(D_j)\mu_0(D_i)\mu_0(D_j)} = -N_{loc}\mu_0(D_i)\mu_0(D_j) \tag{2-32}$$

ce qui donne pour nos fonctions de corrélations :

$$\begin{aligned}
\langle \delta\hat{N}_{\theta_0}(D_i)\delta\hat{N}_{\theta_0+\pi/2}(D_j)\rangle_s &= 0 \qquad (2\text{-}33)\\
\langle \delta\hat{N}_{\theta_0}(D_i)\delta\hat{N}_{\theta_0}(D_j)\rangle &\underset{i\neq j}{=} 2N_{loc}\mu_0(D_i)\mu_0(D_j)\left(\langle\delta\hat{a}_0^\dagger\delta\hat{a}_0\rangle - |\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle|\right)\\
\langle \delta\hat{N}_{\theta_0+\pi/2}(D_i)\delta\hat{N}_{\theta_0+\pi/2}(D_j)\rangle &\underset{i\neq j}{=} 2N_{loc}\mu_0(D_i)\mu_0(D_j)\left(\langle\delta\hat{a}_0^\dagger\delta\hat{a}_0\rangle + |\langle\delta\hat{a}_0^2\rangle|\right)
\end{aligned}$$

et on retrouve exactement la même formule que dans le cas d'un seul détecteur, en dehors, bien sur, du bruit quantique standard. On voit que le terme de corrélation ne dépend absolument pas de la position mais uniquement de la fraction d'intensité détectée.

Interprétation

L'ensemble des résultats précédents nous amène à une description spatiale un peu plus intuitive d'un état monomode comprimé du rayonnement :

- c'est un état qui ne présente pas de réduction de bruit locale, autrement dit si l'on prend une toute petite partie du champ on a des fluctuations quantiques correspondant au bruit quantique du vide.
- la réduction de bruit globale provient d'anticorrélations uniformément réparties dans le champ. Lorsque l'on somme sur toute la surface transverse du champ, ces anticorrélations permettent d'obtenir des fluctuations inférieures à celles du bruit quantique standard.

A.2 États cohérents et opérateurs pixels

Dans le cas des opérateurs pixels, il n'est plus possible de décrire le champ comme on l'a fait dans l'exemple précédent, avec un seul état cohérent. En effet, dans ce cas

nous n'avons plus la même notion de mode transverse qui peut prendre n'importe quelle forme mais nous avons plutôt une description par pixels du champs, dont il faut donner la description de chacun, et c'est leur somme qui va nous décrire la totalité du champ. De la même façon, cette approche va nous permettre de décrire les détails d'un état comprimé. Supposons donc dans une certaine généralité que sur chacun des pixels nous avons un état cohérent, qui peut être comprimé; le champ sur le pixel S_k sera décrit par la fonction d'onde $|\alpha_k, r_k, \theta_k\rangle$ ou α_k est sa partie cohérente et r_k et θ_k respectivement le facteur de réduction et la phase de l'état comprimé. Afin de simplifier notre étude, nous allons supposer ici que tous les facteurs de réduction sont en direction de l'intensité, soit que $\forall k,\ \theta_k = 0$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on peut faire le lien entre le facteur de réduction R_k que nous avons introduit en (2-13) et le facteur de réduction r_k; il vient [Scully 97]

$$e^{-2r_k} - 1 = \frac{R_k}{N_k} = \frac{\langle \hat{a}_k^{\dagger 2}\hat{a}_k^2\rangle - \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k\rangle^2}{\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k\rangle} \tag{2-34}$$

Pour se replacer dans le cadre précédent, nous supposerons que le champ est incident sur un ensemble de détecteurs $\{D_i\}$ et pour décrire que le pixel S_k est dans le détecteur nous écrirons simplement $k \in D_i$. Il vient pour le nombre de photons

$$N(D_i) = \langle \sum_{k\in D_i} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k\rangle = \sum_{k\in D_i} N_k \tag{2-35}$$

Passons maintenant à la variance, avec un calcul similaire à celui de la section précédente il vient :

$$\left(\Delta\hat{N}(D_i)\right)^2 = \sum_{k,k'\in D_i} \left[\langle \hat{N}_k\hat{N}_{k'}\rangle - \langle \hat{N}_k\rangle\langle \hat{N}_{k'}\rangle\right]$$

qui s'écrit :

$$\boxed{\left(\Delta\hat{N}(D_i)\right)^2 = N(D_i) + \sum_{k\in D_i} R_k + \sum_{k\neq k'\in D_i} \langle \delta\hat{N}_k \delta\hat{N}_{k'}\rangle.} \tag{2-37}$$

Cette expression est intéressante car elle s'applique non seulement aux modes pixels, mais également au résultat de la sommation d'un ensemble de détecteurs disjoints dans le cas où les champs incidents sur chacun des détecteurs sont indépendants. On y voit apparaître les trois contributions attendues : le bruit quantique standard, le facteur de réduction de chacun des pixels et les termes de corrélation.

A.2.1 Sans corrélations entre pixels

Supposons que nous n'ayons aucunes corrélations entre les différents pixels, cela signifie que ce sont tous des modes indépendants. Il vient, en utilisant l'écriture intro-

duite en (2-34)

$$\left(\Delta\hat{N}(D_i)\right)^2 = N(D_i) + \sum_{k\in D_i} N_k(e^{-2r_k} - 1) \tag{2-38}$$

et dans le cas où tous les pixels ont le même facteur de réduction, soit que $\forall k,\ r_k = r$, il vient

$$\left(\Delta\hat{N}(D_i)\right)^2 = e^{-2r}N(D_i). \tag{2-39}$$

Cette expression correspond au bruit sur un détecteur d'un champ monomode comprimé de facteur de réduction r. Ceci est très différent de l'équation (2-19) puisque le terme faisant intervenir la surface au carré n'apparaît pas. En effet, nous avons ici un état complètement multimode où les propriétés de bruit sont locales et donc s'additionnent linéairement. Dans le cas particulier que nous avons choisi, on voit que le bruit en intensité ne dépend pas de la zone du faisceau considérée, et qu'il est égal au bruit sur un seul des pixels. C'est ce que l'on appelle la *réduction de bruit locale*, dont nous verrons une approche intuitive au chapitre 4. Il faut noter cependant que dans le cas où $r = 0$ on voit qu'*il n'y a pas de différence entre en état monomode cohérent et un état multimode cohérent sans corrélations.*

A.2.2 Pixels cohérents avec corrélations

Nous avons vu en section précédente par l'équation (2-19), que quel que soit le facteur de compression d'un champ monomode, si l'on en prend une toute petite partie on se retrouve à la limite quantique standard. A l'inverse, nous allons donc supposer ici que tous nos pixels sont à la limite quantique standard, et déterminer les corrélations entre eux pour obtenir un champ comprimé.

Avec les même hypothèse générales que celles du paragraphe précédent, nous allons donc supposer que tous les R_k sont nuls, mais par contre nous allons avoir une fonction de corrélation entre pixels, définie à partir de l'équation (2-30) :

$$\langle\delta\hat{N}_k\delta\hat{N}'_k\rangle \underset{k\neq k'}{=} R\frac{N_kN_{k'}}{N^2} \tag{2-40}$$

Dans ce cas, le bruit sur un détecteur D_i devient :

$$\left(\Delta\hat{N}(D_i)\right)^2 = N(D_i) + \frac{R}{N^2}\sum_{k\neq k'\in D_i} N_kN_{k'} \tag{2-41}$$

Si la surface du détecteur est suffisamment grande par rapport à celle du pixel, et que donc chaque pixel reçoit une toute petite fraction de l'intensité totale, on peut faire

l'approximation suivante :

$$\sum_{k\neq k'\in D_i} N_k N_{k'} \simeq \left(\sum_k N_k\right)^2 = N(D_i)^2. \tag{2-42}$$

On retrouve alors l'équivalent de la formule (2-19)

$$\left(\Delta\hat{N}(D_i)\right)^2 = N(D_i) + R\frac{N(D_i)^2}{N^2} \tag{2-43}$$

Nous avons pu reconstruire un état monomode comprimé du rayonnement à partir d'états cohérents sur des pixels et de corrélations; on pourrait faire le même calcul avec les opérateurs de quadrature. Toutes ces expression nous permettent d'exprimer les états monomodes selon la décomposition transverse adaptée à notre problème.

B Propagation dans un milieu non linéaire

L'interaction entre un milieu non linéaire et le rayonnement a montré ces dernières années sa capacité à produire des états non classiques du champ électromagnétique. Seulement, les études théoriques se sont pour l'instant limités à des approches où l'on supposait le milieu mince, et l'interaction se faisait dans une cavité. D'autres études on été faites dans un cristal en simple propagation mais dans le cadre d'impulsions courtes. Ici nous allons nous intéresser à l'état stationnaire, lorsque l'on injecte le cristal avec un champ continu. Dans ce cas, et moyennant quelques approximations, il est possible d'obtenir toutes les fonctions de correlations transverses à la sortie du cristal.

B.1 Position du problème

Fig. 2.1 – Propagation de N champs à travers un milieu non linéaire.

Supposons que nous ayons un cristal non linéaire, dont nous ne précisons pas ici le type de non linéarité, qui mélange N champs monochromatiques E_n, dans le cadre des approximations que nous avons faîtes au premier chapitre de cette thèse. On peut alors écrire de façon très générale les équations vérifiées par l'enveloppe du champ électrique dans le cadre d'une solution stationnaire :

$$2ik_i\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}_n\left(\vec{\rho},z\right) + \Delta_{\vec{\rho}}\mathcal{E}_n\left(\vec{\rho},z\right) = F_n\left(\mathcal{E}_1,...,\mathcal{E}_N\right) \tag{2-44}$$

où $\Delta_{\vec{\rho}}$ est comme au chapitre 1 le Laplacien transverse et $F_n\left(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_N\right)$ est proportionnel à la polarisation induite dans le milieu par les différents champs.

À conditions initiales données, ces équations possèdent toujours une solution, que nous appellerons $\overline{\mathcal{E}}_n(\vec{\rho}, z)$ pour tout n compris entre 1 et N. Dans les faits, cette solution peut être soit analytique, soit numérique.

Les équations vérifiées par l'opérateur enveloppe sont les même que celles vérifiées par le champ classique, nous n'allons donc pas les réécrire. Nous considérerons comme cela a toujours été fait la partie de fréquence positive du champ. Ensuite, le point important est que nous allons considérer que les fluctuations quantiques du champ sont petites par rapport au champ moyen, alors en utilisant l'écriture (1-53) nous pouvons linéariser les équations (2-44) en supposant que $\langle\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z)\rangle = \overline{\mathcal{E}}_n(\vec{\rho}, z)$. Cette hypothèse est vérifiée dans le cadre des petites fluctuations, on obtient alors

$$\begin{aligned} 2ik_i\frac{\partial}{\partial z}\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z) + \Delta_{\vec{\rho}}\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z) \\ = \sum_m \left(\frac{\partial F_n}{\partial \mathcal{E}_m}\right)_{\mathcal{E}=\overline{\mathcal{E}}} \delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)}(\vec{\rho}, z) + \sum_m \left(\frac{\partial F_n}{\partial \mathcal{E}_m^*}\right)_{\mathcal{E}=\overline{\mathcal{E}}} \delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)\dagger}(\vec{\rho}, z) \end{aligned} \quad (2\text{-}45)$$

Nous allons maintenant considérer la propagation sur une portion finie d'un milieu non linéaire, et ce que nous cherchons ce sont les fluctuations dans le plan transverse à la sortie du milieu en fonction des fluctuations à l'entrée. Il nous reste donc à préciser les conditions initiales : les calculs peuvent être fait dans la plus grande généralité mais nous supposerons par soucis de simplicité qu'à l'entrée du milieu nous avons pour chaque fréquence un état cohérent, et que ces états ne sont pas corrélés entre eux. Ceci nous permet d'écrire les fluctuations à l'entrée comme en (2-6)

$$\begin{aligned} \langle\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z^{in})\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,', z^{in})\rangle &= \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\delta_{nm}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,') \\ \langle\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)\dagger}(\vec{\rho}, z^{in})\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)}(\vec{\rho}\,', z^{in})\rangle &= 0 \\ \langle\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z^{in})\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)}(\vec{\rho}\,', z^{in})\rangle &= 0 \\ \langle\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)\dagger}(\vec{\rho}, z^{in})\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,', z^{in})\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2\text{-}46)$$

B.2 Résolution

B.2.1 Analytique

Commençons par décrire le principe générale de résolution : nous avons des équations linéaires sur les fluctuations, étant linéaires on peut les résoudre en terme de fonctions

de Green. En utilisant les fonctions de corrélations à l'entrée du milieu il est possible de déterminer tous les fonctions de corrélation à la sortie comme des intégrales sur les fonctions de Green.

Rentrons dans les détails, nous pouvons introduire les fonctions de Green $G_n^m(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')$ et $H_n^m(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')$ qui sont les fonctions de Green donnant la contribution d'un point du plan $z = z^{in}$ à un point du plan $z = z^{out}$. Les fluctuations à la sortie du milieu s'écrivent alors :

$$\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z^{out}) = \sum_m \int G_n^m(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)}(\vec{\rho}\,', z^{in})d^2\rho' + \sum_m \int H_n^m(\vec{\rho}, \vec{\rho}\,')\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,', z^{in})d^2\rho' \quad (2\text{-}47)$$

Il est maintenant aisé de combiner les équations (2-46) et (2-47) afin de calculer les fonctions de corrélation à la sortie du milieu. Il vient par exemple

$$\begin{aligned} \langle\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z^{out})\delta\hat{\mathcal{E}}_l^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,', z^{out})\rangle &= \sum_m \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\int G_n^m(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1)G_l^{m*}(\vec{\rho}\,', \vec{\rho}_1)d^2\rho_1 \\ \langle\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z^{out})\delta\hat{\mathcal{E}}_l^{(+)}(\vec{\rho}\,', z^{out})\rangle &= \sum_m \frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}\int G_n^m(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1)H_l^m(\vec{\rho}\,', \vec{\rho}_1)d^2\rho_1 \quad (2\text{-}48) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons accès, à travers les fonctions de Green, à toutes les fonctions de corrélation et d'autocorrélation du champ, donc à toute l'image quantique du champ à la sortie du milieu.

Il nous reste à évaluer ces fonctions. L'idée repose sur la nature même des fonctions de Green : si comme conditions initiales un seul 'point' est éclairé, alors nous obtiendrons directement la fonction de Green associée à ce point. Plus mathématiquement, pour évaluer ces fonctions, on peut considérer l'équation (2-45) comme une équation classique puisque les fonctions de Green ne dépendent que des équations. Les opérateurs de fréquence positive et de fréquence négative étant des quantités indépendantes, pour faire le calcul il faut les remplacer chacune par une fonction classique, ainsi nous remplacerons dans les équations $\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(\vec{\rho}, z)$ par $\delta\mathcal{E}_n(\vec{\rho}, z)$ et $\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)\dagger}(\vec{\rho}, z)$ par $\delta\mathcal{E}'_n(\vec{\rho}, z)$. Dans ce cas, si l'on prend comme conditions initiales, à l et $\vec{\rho}_1$ donnés

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_m(\vec{\rho}\,', z^{in}) &= \delta_{lm}\delta(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}\,') \\ \delta\mathcal{E}'_m(\vec{\rho}\,', z^{in}) &= 0 \end{aligned} \quad (2\text{-}49)$$

il vient :

$$\delta\mathcal{E}_n(\vec{\rho}, z^{out}) = G_n^l(\vec{\rho}, \vec{\rho}_1) \quad (2\text{-}50)$$

de cette manière on peut obtenir tout les fonctions de Green (les fonctions H_n^m étant obtenues en mettant les conditions initiales sur les fonctions $\delta\mathcal{E}'$).

B.2.2 Numérique-Discrétisaton

Un tel programme n'est cependant pas réalisable analytiquement, il va donc falloir passer à la résolution informatique, le but étant de calculer les fonctions de Green. Pour ce faire, nous devons discrétiser les équations, en découpant le plan transverse en petits carrés comme cela est fait en (1-22). Dans ce cadre, le calcul discret nous mène à la valeur moyenne des fonctions sur un pavé transverse, et on peut réécrire la solution générale :

$$\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(S_\alpha, z^{out}) = \sum_m \sum_\beta G_n^m(S_\alpha, S_\beta)\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)}(S_\beta, z^{in})S_\beta + \sum_m \sum_\beta H_n^m(S_\alpha, S_\beta)\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)\dagger}(S_\beta, z^{in})S_\beta \quad (2\text{-}51)$$

Les opérateurs présents ici sont maintenant les opérateurs pixels, et cette expression est valide dans le cadre des approximations du chapitre 1. De la même façon, on peut écrire les conditions initiales correspondant à un état cohérent, comme nous l'avons fait au Chapitre 1 section A.1 dans le cadre de la discrétisation de l'espace. Toutes les formules du paragraphe précédent se discrétisent alors sans problème, et pour obtenir les fonctions de Green discrètes $G_n^m(S_\alpha, S_\beta)$ il suffit de prendre comme conditions initiales :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_m(S_\gamma, z^{in}) &= \frac{1}{S_\beta}\delta_{lm}\delta_{\beta\gamma} \\ \delta\mathcal{E}'_m(S_\gamma, z^{in}) &= 0 \end{aligned} \quad (2\text{-}52)$$

et il vient

$$G_n^l(S_\alpha, S_\beta) = \delta\mathcal{E}_n(S_\alpha, z^{out}) \quad (2\text{-}53)$$

Enfin, nous allons regarder les corrélations sur les variable de quadratures comme nous les avons définies au chapitre 1 section D.3 mais dans le cadre des modes pixels, qui sont des fonctions symétrisées et normalisées :

$$\langle\delta\hat{I}_\theta^n(S_\alpha, z^{out})\delta\hat{I}_{\theta'}^m(S_\beta, z^{out})\rangle_N \quad (2\text{-}54)$$

où nous avons ici la valeur moyenne des corrélations entre deux pixels de deux champs différents, sachant que l'on a oublié tous les détails inférieurs à la taille des pixels. Ce

sont ces fonctions que nous utiliseront pour décrire le plan transverse du faisceau, car elles ont l'avantage, par rapport aux opérateurs champ électrique, de s'intégrer sans problème sur des zones de taille plus grande. De plus, nous avons avec elles également accès aux fonctions d'intensité linéarisées.

Pour faire le calcul numérique, la méthode que nous avons employée dans l'exemple des solitons (et qui n'est pas la seule possible) est connue sous le nom de 'split step method' [Press 92]. Son principe peut se résumer ainsi : on fait le calcul par tranche temporelle, chaque pas étant effectué en deux étapes

- Dans la première on calcul l'apport des termes non linéaire par une méthode de Runge-Kutta, en oubliant les termes de diffraction.
- Dans la deuxième on calcul l'apport des termes de diffraction par une méthode de 'Fast Fourier Transform' (FFT) en oubliant les termes non linéaires.

Le fait d'utiliser une FFT impose des conditions aux limites périodiques, il faut donc prendre soin d'utiliser une grille assez grande. Ce point est le principal obstacle au calcul sur de grande distances de propagations puisque l'on est limité par des effets de diffraction.

B.3 Calcul des observables

B.3.1 Quadratures

Finissons ce chapitre en donnant précisément les expressions des observables que l'on calcule. Nous avons pour l'instant décrit dans le détail comment calculer les fonction de Green et les fonctions de corrélation entre pixels, voyons ce qu'il se passe sur des détecteurs de taille plus importante. Commençons par donner l'expression des opérateurs de quadrature sur un pixel, en sous entendant $z = z^{out}$ quand ce n'est pas précisé :

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{E}}_\theta^n(S_\alpha) &= e^{i\theta}\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)\dagger}(S_\alpha, z^{out}) + e^{-i\theta}\delta\hat{\mathcal{E}}_n^{(+)}(S_\alpha, z^{out}) \\ &= \sum_m \sum_\beta B_n^m(\theta, S_\alpha, S_\beta)\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)}(S_\beta, z^{in})S_\beta + h.c. \end{aligned} \tag{2-55}$$

où l'on a défini

$$B_n^m(\theta, S_\alpha, S_\beta) = e^{-i\theta}G_n^m(S_\alpha, S_\beta) + e^{i\theta}\ H_n^m(S_\alpha, S_\beta)^*\,. \tag{2-56}$$

Il vient pour l'observable de quadrature, en mettant en indice la dépendance en le pixel α

$$\delta\hat{I}_{\theta,\alpha}^n = 2\epsilon_0 c\mathcal{E}_{loc}^n(S_\alpha)\sum_m \sum_\beta B_n^m(\theta, S_\alpha, S_\beta)\delta\hat{\mathcal{E}}_m^{(+)}(S_\beta, z^{in})S_\beta + h.c. \tag{2-57}$$

Ce qui nous permet de donner la fonction de corrélation entre deux observables de quadrature à la sortie du cristal, où nous considérons la forme symétrisée comme nous l'avons définie en (1-84) :

$$\langle \delta \hat{I}^n_{\theta,\alpha} \delta \hat{I}^l_{\theta',\beta} \rangle_s = \epsilon_0 \hbar \omega_0 \mathcal{E}^n_{loc}(S_\alpha) \mathcal{E}^l_{loc}(S_\beta) \sum_m \sum_\gamma B^m_n(\theta, S_\alpha, S_\gamma)\ B^m_l(\theta', S_\beta, S_\gamma)^* + c.c. \tag{2-58}$$

B.3.2 Corrélations entre détecteurs

Nous pouvons maintenant donner l'expression de la fonction de corrélation entre deux détecteurs, D_i et D_j dans l'esprit de la formule (1-85). Rappelant que :

$$\delta \hat{I}^n_\theta(D_i) = \sum_{\alpha \in D_i} \delta \hat{I}^n_{\theta,\alpha}, \tag{2-59}$$

il vient

$$\langle \delta \hat{I}^n_\theta(D_i) \delta \hat{I}^l_{\theta'}(D_j) \rangle_s = \epsilon_0 \hbar \omega_0 \sum_{\substack{\alpha \in D_i \\ \beta \in D_j}} \Bigg[\mathcal{E}^n_{loc}(S_\alpha) \mathcal{E}^l_{loc}(S_\beta) \times \sum_m \sum_\gamma B^m_n(\theta, S_\alpha, S_\gamma)\ B^m_l(\theta', S_\beta, S_\gamma)^* + c.c. \Bigg] \tag{2-60}$$

Cette dernière formule conclue le développement de cette méthode de calcul des images quantiques dans les milieux non linéaires. Nous avons ici l'expression directe de toutes les fonctions de corrélations à partir des propagateurs que nous pouvons calculer numériquement. En effet, l'expression précédente donne non seulement les corrélations entre détecteurs, mais elle est également valable pour les fonctions d'autocorrélation, autrement dit le bruit local. A propos de l'oscillateur local, nous utiliserons en général le champ moyen solution des équations de propagation, ce qui permet d'avoir accès au bruit en intensité lorsque nous sommes sur la bonne quadrature. Cependant, il serait également intéressant de tester toute sorte d'oscillateur local (voir à ce propos la remarque 1 on page 42). La formule précédente n'autorisant qu'un seul angle par détecteur, on peut la généraliser. Nous pourrons ainsi définir des fonctions de corrélation et d'autocorrélation tout à fait physiques, en écrivant un ensemble de valeurs de l'angle sous la forme $\{\theta\}$ qui sur chaque pixel S_α vaut θ_α. La fonction de corrélation la plus générale est alors :

$$\langle \delta \hat{I}^n_{\{\theta\}}(D_i) \delta \hat{I}^l_{\{\theta'\}}(D_j) \rangle_s = \epsilon_0 \hbar \omega_0 \sum_{\substack{\alpha \in D_i \\ \beta \in D_j}} \Bigg[\mathcal{E}^n_{loc}(S_\alpha) \mathcal{E}^l_{loc}(S_\beta) \times \sum_m \sum_\gamma B^m_n(\theta_\alpha, S_\alpha, S_\gamma)\ B^m_l(\theta'_\beta, S_\beta, S_\gamma)^* + c.c. \Bigg] \quad (2\text{-}61)$$

Dans les faits, nous essaierons effectivement d'optimiser la valeur de θ_α sur chaque pixel mais par contre nous nous limiterons à un oscillateur local de forme transverse celle du champ moyen. N'oublions pas enfin que nous utiliserons les fonctions de corrélation normalisées.

Chapitre 3

Principe des mesures

A Analyse spectrale

Nous avons décrit dans les chapitres précédents le comportement idéal des détecteurs quantiques. Cependant, il existe une grande différence avec ce que l'on peut mesurer expérimentalement : il est impossible de faire des mesures à fréquence nulle, du fait des bruits classiques venant perturber les mesures. Nous sommes donc obligés de faire une analyse spectrale des signaux et de choisir les fréquences qui nous permettent de faire des mesures dans de bonne conditions. Nous allons voir ici rapidement quel est le lien entre ce que nous avons décrit dans les chapitres précédents et les mesures réelles, nous renvoyons à [Fabre 95, Scully 97] pour plus de détails.

A.1 Courant délivré par une photodiode

Appelons $i(t)$ le courant délivré par une photodiode en fonction du temps. Idéalement, ce courant reproduit parfaitement les fluctuations quantiques du champ; en supposant que le champ est stationnaire sur la période d'observation, nous pouvons appeler $\overline{i(t)}$ sa valeur moyenne et $\delta i(t) = i(t) - \overline{i(t)}$ ses fluctuations. La transformée de Fourier des fluctuations est définie par la relation :

$$\delta i[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta i(t) e^{i\Omega t} dt. \tag{3-1}$$

Avec un analyseur de spectre, il est possible d'obtenir la composante de fréquence Ω de ce courant pour une bande de résolution $1/T$, soit un temps d'intégration T. Ce temps T correspond à celui que nous avons introduit au chapitre 1 pour représenter le temps d'intégration d'un détecteur. La seule différence est qu'ici ce temps est utilisé uniquement après avoir ramené la composante du signal de fréquence Ω à fréquence nulle, comme nous le décrirons dans la deuxième section de ce chapitre. On s'affranchit

ainsi des bruits basses fréquence, mais la description du champ que nous avons donné est toujours valable. Ainsi on peut écrire la variance du courant délivrée par l'analyseur de spectre :

$$(\Delta i(\Omega_0, t))^2 = \left| \int_{-\infty}^{t} f_T(t' - t) i(t') e^{-i\Omega_0 t'} dt' \right|^2 \tag{3-2}$$

où f_T représente le filtre de bande passante $1/T$.

A.2 Variance de bruit

D'un autre côté, pour décrire les fluctuations du champs, il est nécessaire d'introduire la fonction de corrélation à deux temps :

$$C_i(t, t') = \overline{i(t) i(t')} - \overline{i(t)}\ \overline{i(t')} \tag{3-3}$$

Nous allons supposer, ce qui est également cohérent avec la théorie que nous avons développé, que le phénomène que nous analysons est stationnaire sur le temps d'intégration T. Ce temps étant grand devant les fréquences d'analyse, on peut alors supposer que C_i ne dépend que de la différence des temps $\tau = t - t'$. On va alors définir sa transformée de Fourier, qui représente la densité spectrale de bruit :

$$S_i(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_i(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau. \tag{3-4}$$

On peut alors montrer que

$$\overline{\delta i[\Omega] \delta i[\Omega']^*} = S_i(\Omega) 2\pi \delta(\Omega - \Omega'). \tag{3-5}$$

Il vient pour la variance du bruit

$$(\Delta i)^2 = \overline{\delta i^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(\Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}. \tag{3-6}$$

Dans ce cadre, on matérialise la bande passante par une fonction $f[\Omega]$ qui donne la réponse de l'appareillage en fonction de la fréquence. Dans le cas où cette fonction est très étroite, c'est à dire qu'elle est centré autour de la fréquence Ω_0 pour une petite largeur de fréquence δf (correspondant par exemple à notre bande passante $1/T$) il vient

$$(\Delta i_f)^2 = 2\delta f S_i(\Omega_0). \tag{3-7}$$

La connaissance de $(\Delta i_f)^2$ nous permet donc de déduire $S_i(\Omega_0)$ en divisant par la bande passante du filtre. On peut ensuite montrer que la densité spectrale de bruit, ainsi définie, est le reflet à haute fréquence de toutes les relations que nous avons utilisé à fréquence nulle, et c'est donc une quantité tout à fait adaptée à l'analyse du champ.

B Exemple : les photodiodes à quadrants

B.1 Introduction

La technologie des détecteurs optiques est d'un tel niveau de précision qu'elle permet, avec des champs intenses et continus, de se placer dans un régime où l'on peut mesurer les fluctuations quantiques des champs. L'efficacité quantique typique est de l'ordre de 90%, ce qui signifie que 90% des photons incidents sur la photodiode produisent un électron. Les mesures quantiques habituelles utilisent un ou deux détecteurs (dans le cadre des détections homodynes), avec des électroniques permettant de prélever la partie haute fréquence du signal, la mesure de ce signal étant faite par un analyseur de spectre. On se reportera notamment à la thèse de Y. Hadjar [Hadjar 98] pour une description détaillée de l'utilisation et de l'équilibrage de deux photodiodes. Cependant, dans le cadre des images quantiques, nous ne pouvons plus nous contenter de tels détecteurs, car nous avons besoin d'analyser les différentes zones du faisceau. Nous aurons donc besoin de détecteurs composés d'un ensemble de photodiodes placées dans le plan transverse nous permettant de reconstruire une image. Afin de réaliser des détections homodynes, nous avons besoin de deux détecteurs ayant la même géométrie. Ceci conduit à une nouvelle approche des mesures quantiques :

- Le grand nombre de voies à mesurer rend l'utilisation d'analyseurs de spectre (un par voie) prohibitif. Nous avons alors fait le choix de faire des acquisitions numériques séparées et synchronisées de chaque voie, et de faire l'analyse spatiale des signaux obtenus à partir de cette information. On peut ensuite calculer à partir de ces signaux numériques aussi bien les variances des fluctuations de courant à une fréquence d'analyse donnée que les corrélations entre ces fluctuations.
- L'ensemble des photodiodes doit être équilibré afin de pouvoir comparer les résultats, leur nombre important impose de nouvelles procédures de calibration par rapport au système habituel.

Nous allons décrire ici en détail les détecteurs que nous avons utilisés aussi bien pour l'oscillateur paramétrique optique que pour les mesures de petits déplacements. Nous avions à notre disposition des détecteurs à quadrants de marque *EPITAXX ETX 505Q* qui sont des détecteurs fonctionnant à l'InGaAS et dont on a représenté la géométrie en figure 3.1. Chaque détecteur comporte donc 4 voies, et la chaine d'acquisition complète, interface entre le faisceau et le résultat, se décompose ainsi (voir figure 3.2) :

- L'électronique interne des boîtiers de photodiode : les photodiodes sont directe-

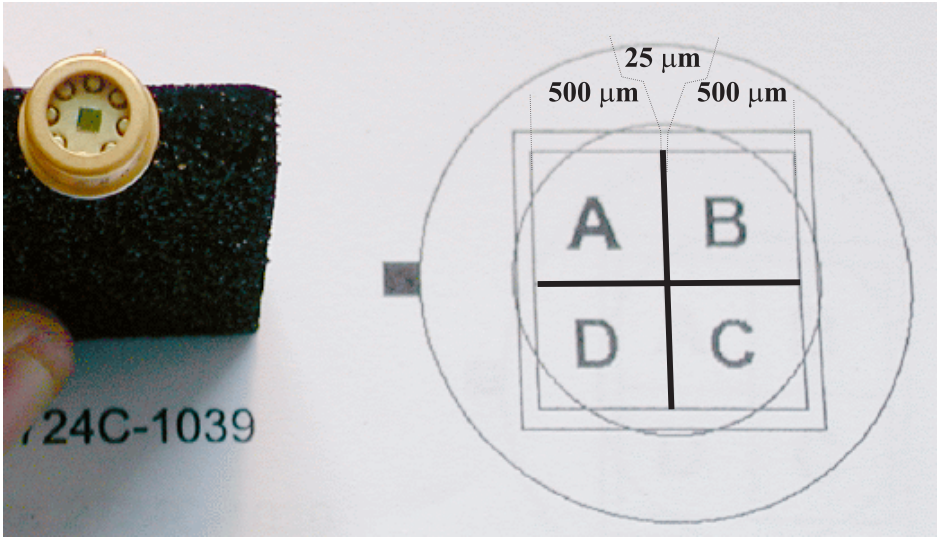

Fig. 3.1 – Photodiode à quadrants : à gauche, la diode, à droite, schéma de la disposition des quadrants.

ment branchées sur une carte électronique réalisée au laboratoire, qui fournit en sortie, par photodiode, une voie continue (DC) et une voie haute fréquence (HF). L'ensemble est placé dans une boite et constitue un tout. La calibration des photodiode consiste à équilibrer l'ensemble des voies de ces deux boites.

– La chaine de démodulation : elle permet, à partir des sorties HF, de fournir n'importe quelle composante de fréquence du signal ramené en basse fréquence, et d'amplifier ce signal afin de l'adapter aux cartes d'acquisition.

– Les cartes d'acquisition : elle permettent d'acquérir des signaux analogiques avec l'ordinateur. Nous avons deux cartes de 4 voies chacune, pouvant fonctionner de façon parfaitement synchrone.

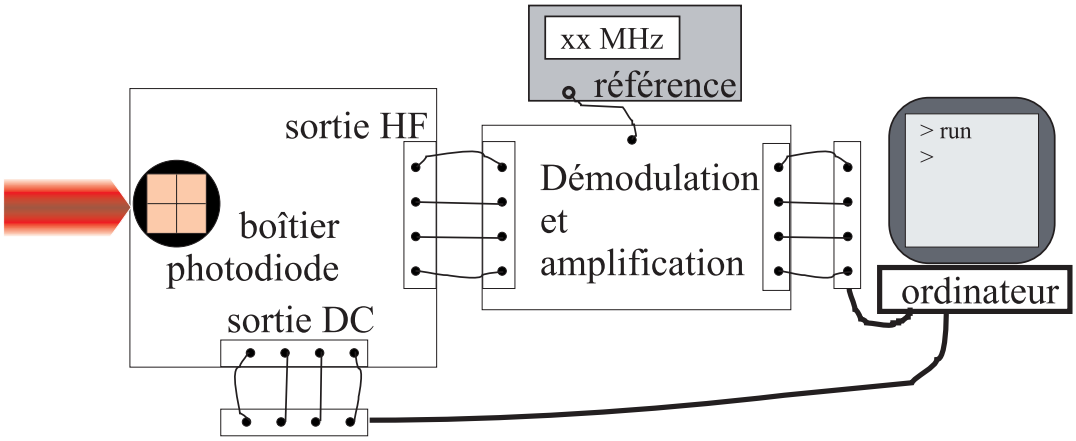

Fig. 3.2 – Interface entre la photodiode, à gauche, et l'ordinateur, à droite.

Nous nous intéressons ici principalement aux procédures utilisées, pour les résultats obtenus et les détails techniques on se reportera au guide écrit par M. Martinelli [Martinelli].

B.2 Calibration des photodiodes

B.2.1 Description du circuit électronique

Le circuit électronique général est représenté en figure 3.3, il fait apparaître les trois zones : l'alimentation, les voies DC et les voies HF.

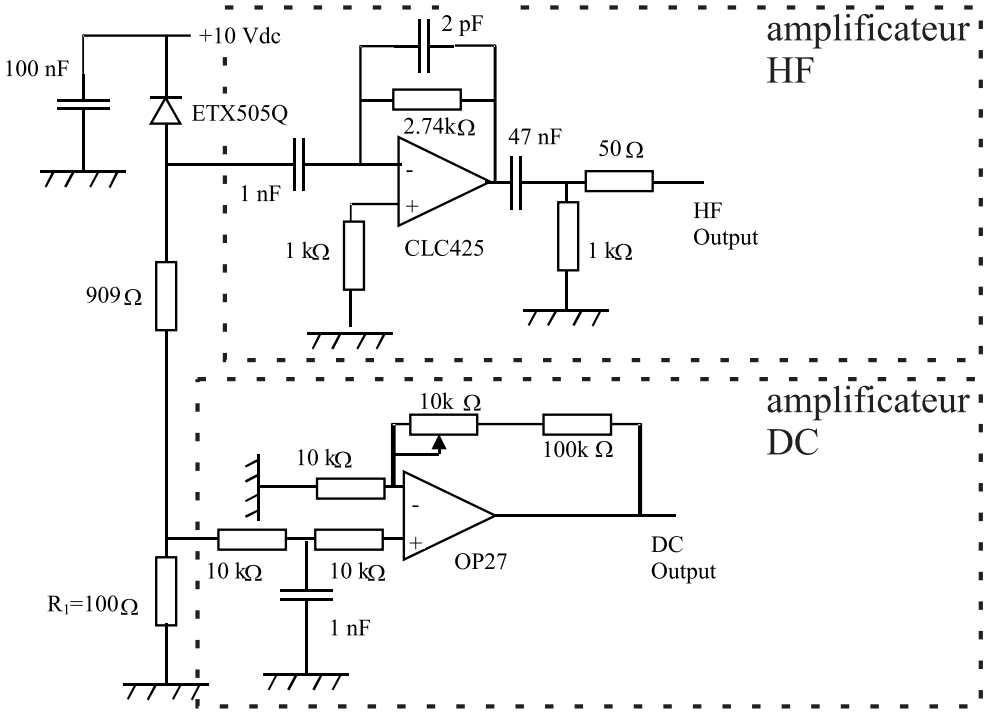

Fig. 3.3 – Circuit électrique branché en sortie des photodiodes

B.2.2 Calibration DC

Circuit électronique

Cette partie fournit un signal proportionnel à la tension autour de la résistance de 100 Ω. Elle comporte à l'entrée un condensateur de 1 nF qui coupe toutes les hautes fréquences. Cette voie fournit donc une mesure de la puissance incidente moyenne. Le gain de l'amplificateur opérationnel est assuré par la résistance de 100 kΩ en série avec le potentiomètre de 10 kΩ. C'est en jouant sur ce potentiomètre que nous équilibrerons

les voies DC. On note que la faible précision des potentiomètres, ainsi que leur possible dérive avec le temps, n'est pas un problème pour la précision dont nous avons besoin ici. Cependant ce dispositif n'est pas utilisable pour les voies HF.

Montage expérimental

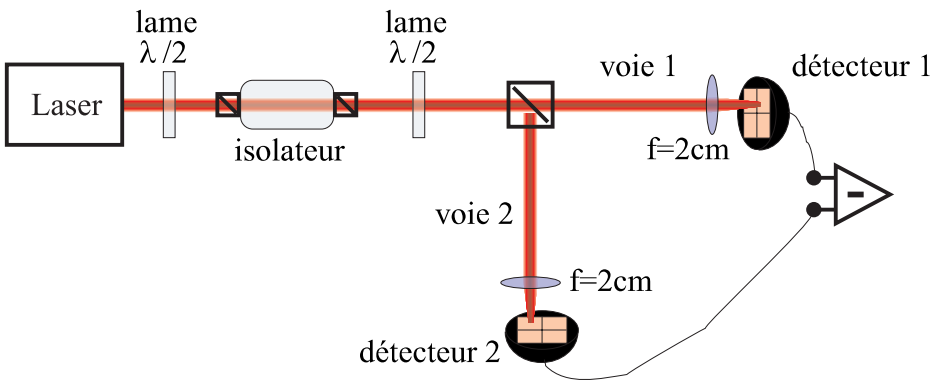

Fig. 3.4 – Montage utilisé pour calibrer les sorties DC des photodiodes.

La méthode d'équilibrage consiste à comparer les gains des différentes voies DC dont nous disposons, et à les ajuster afin d'obtenir la même réponse pour la même puissance incidente. Pour ce faire, nous avons utilisé le montage expérimental représenté figure 3.4, qui consiste en une source laser continue et stable, isolée optiquement, bien polarisée rectilignement, incidente sur un cube polariseur après le passage par une lame demi-onde. A l'aide de cette lame et d'un microwattmètre, nous pouvons égaler les puissances de sortie des deux voies du cube polariseur. Une fois cet équilibrage effectué, l'orientation de la lame demi-onde n'est plus modifiée jusqu'à la fin de la procédure.

Les photodiodes sont alors placées en sortie du cube, précédées de lentilles de focalisation (de focale 2cm) traitées antireflet.

Equilibrage des voies

Pour équilibrer les voies, il faut comparer les réponses de toutes les diodes à une photodiode de référence. Celle-ci peut être soit une photodiode précédemment utilisée, soit un des quadrants des détecteurs. Dans ce dernier cas, la procédure générale de calibration se décompose ainsi :

– Le quadrant 1 du détecteur 1 est utilisé comme référence, il est donc placé sur le faisceau de la voie 1. En comparant sa réponse à celle du microwattmètre on

ajuste son gain approximativement de sorte à obtenir réponse simple, comme par exemple 1 V/mW.

– On place ensuite le détecteur 2 sur le faisceau de la voie 2. En focalisant le faisceau successivement sur chacun des quadrants on ajuste le gain pour obtenir la même réponse que le quadrant 1 du détecteur 1. Afin de faire une bonne comparaison des puissances, nous avons utilisé un voltmètre différentiel de grande précision, permettant de mesurer un ΔV de l'ordre de 40 μV. La différence de tension mesurée doit bien sur être corrigée de la différence sans laser incident (offset). On arrive par cette méthode à équilibrer tous les quadrants du détecteur 2.

Pour équilibrer l'autre détecteur, il faut d'abord s'assurer que l'équilibrage optique était bon. Dans la configuration actuelle, supposons que nous ayons le détecteur 1 quadrant 1 sur la voie 1 et le détecteur 2 quadrant 1 sur la voie 2, ils délivrent respectivement les tensions $V^1_{D_1}(I_1)$ et $V^1_{D_2}(I_2)$. Nous allons supposer que les gains respectifs sont g et $g + \delta g$ et que les intensités respectives sont $I_1 = I(1+\epsilon)$ et $I_2 = I(1-\epsilon)$, avec δg et ϵ des infiniments petits du premier ordre. La mesure de différence donne alors

$$V^1_{D_1}(I_1) - V^1_{D_2}(I_2) \simeq gI(2\epsilon - \frac{\delta g}{g}) \tag{3-8}$$

Comme nous avons optimisé l'équilibrage dans cette configuration, il vient

$$V^1_{D_1}(I_1) - V^1_{D_2}(I_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\epsilon = \frac{\delta g}{g} \tag{3-9}$$

Pour obtenir la valeur de δg ou de ϵ il suffit d'inverser les détecteurs, de telle sorte que l'on mesure :

$$\frac{V^1_{D_1}(I_2) - V^1_{D_2}(I_1)}{V^1_{D_1}(I_2) + V^1_{D_2}(I_1)} \simeq \frac{gI}{2}(-2\epsilon - \frac{\delta g}{g}) = \begin{cases} -2\epsilon \\ -\dfrac{\delta g}{g} \end{cases} \tag{3-10}$$

Pour équilibrer optiquement, il suffit alors de tourner la lame demi-onde pour diminuer de moitié ce rapport. On finit l'équilibrage en ajustant le gain. On peut ensuite de nouveau inverser les photodiodes pour mesurer le δg restant, et évaluer la précision de la technique. Typiquement, cette méthode nous a permis d'équilibrer les voies à environ $0,1\%$. Pour équilibrer le détecteur 1, il suffit maintenant de prendre comme référence un quadrant du détecteur 2 et de recommencer la procédure.

Il est utile ensuite de vérifier la linéarité des diodes ainsi que la courbe de réponse, en remplaçant dans le montage un des détecteurs par le microwattmètre. Cela permet en même temps de mesurer la saturation.

Efficacité quantique

L'intensité I_{in} délivrée par une photodiode s'exprime simplement en fonction de son efficacité quantique η et de la puissance incidente P_{in} par

$$I_{in} = \eta \frac{\lambda e}{hc} P_{in} \qquad \text{où} \quad \frac{\lambda e}{hc} = 0,86 A/W \quad \text{à 1064nm} \tag{3-11}$$

où λ est la longueur d'onde du laser et e la charge électrique élémentaire.

Si G est le gain en tension de la partie DC, la tension de sortie V_{out} s'écrit $V_{out} = GR_1 I_{in}$ (voir figure 3.3 pour la définition de R_1) et il vient pour l'efficacité quantique :

$$\boxed{\eta = \frac{hc}{\lambda e} \frac{1}{GR_1} \frac{V_{out}}{P_{in}}} \tag{3-12}$$

Expérimentalement, nous mesurons la résistance R_1 avec un ohmmètre. Pour le gain G, on utilise un générateur de tension que l'on branche à l'entrée de la résistance R_1, puis à l'aide d'un voltmètre on mesure la tension à l'entrée et à la sortie de la zone DC. Finalement, on mesure le rapport V_{out}/P_{in} à l'aide du microwattmètre, et l'erreur finale vient principalement de cet appareil, que l'on peut estimer à 5%. Cette méthode donne des efficacités quantiques égales à $1 \pm 0,05$ et très proches les unes des autres (avec un écart type de $0,5\%$) pour les détecteurs que nous avons utilisé. On notera que dans notre cas il n'est pas possible de sélectionner les quadrants ayant les efficacités quantiques les plus proches, cette procédure permet donc simplement de vérifier l'équilibrage entre les quadrants et de décider, le cas échéant, de changer de détecteur.

B.2.3 Calibration HF

Circuit électronique

La zone HF est un amplificateur trans-impédance : le courant haute fréquence dans le condensateur d'entrée est converti en un signal en tension à la sortie du dispositif. Ce signal est proportionnel à la tension aux bornes de la résistance de 2,74 kΩ, la modification de cette dernière permet donc d'ajuster le gain de l'amplificateur. Le condensateur de 2 pF en parallèle est une sécurité et permet d'éviter la mise en résonance à haute fréquence.

Montage expérimental

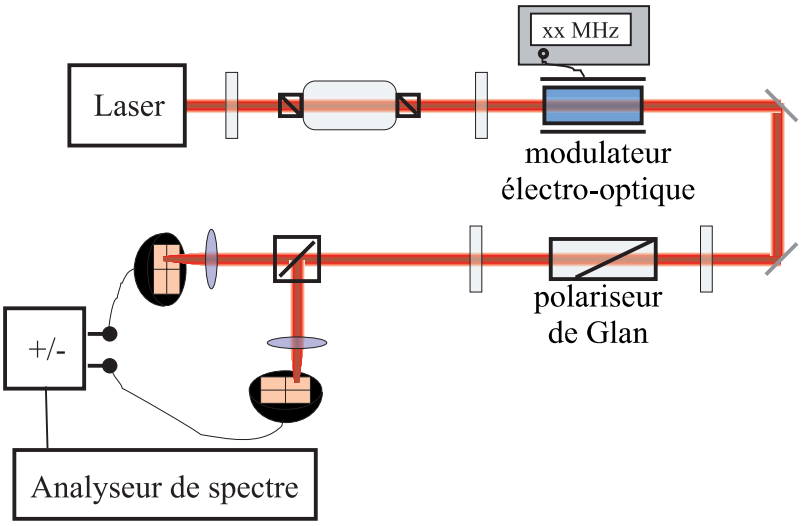

Fig. 3.5 – Montage utilisé pour calibrer les sorties HF des photodiodes.

Pour équilibrer les voies HF, il faut une modulation en amplitude du laser. Pour ce faire nous avons utilisé un modulateur électro-optique, qui fournit une modulation de la polarisation, qui est convertie en modulation d'amplitude grâce à une lame demi-onde et à un polariseur de Glan. La suite du montage est la même que celle pour le DC, pour équilibrer les voies de sortie du cube polariseur. La différence entre deux voies HF est effectuée par un soustracteur *Mini-Circuit* qui a un taux de réjection supérieur à 50 dB. Le signal de différence est mesuré à l'aide d'un analyseur de spectre (voir figure 3.5).

Équilibrage des voies

Pour l'équilibrage, il faut d'abord fixer une fréquence de modulation de l'ordre de quelques MHz (afin de bien étudier la réponse des diodes, il faudra ensuite refaire la procédure pour plusieurs fréquences). Comme en DC, le quadrant 1 du détecteur 1 sert de référence pour analyser les 4 quadrants du détecteur 2. On équilibre les deux voies à l'aide des signaux DC. Puis, en coupant successivement le faisceau sur les voies 1 et 2, on mesure les bruits de chacune des voies V_1 et V_2. On utilise pour cela l'analyseur de spectre en mode «zero-span», avec une bande de résolution de 100 kHz et une bande vidéo de 1 kHz. Laissant le laser sur les deux voies, on peut ensuite mesurer le signal de différence ΔV. L'écart entre les deux voies est donné par le rapport

$$\frac{\Delta V}{V_1 + V_2} \tag{3-13}$$

En général, nos composants sont suffisamment bons pour avoir directement un équilibrage à mieux que 1%. Quand ce n'est pas le cas il faut ajuster les gains en modifiant la

résistance de 2,74 kΩ, proportionnellement à l'écart entre les voies. En considérant que la valeur de cette résistance est précise à quelques pourcents, il suffit en général de la remplacer et de procéder par essais successifs. Nous avons finalement obtenu un équilibrage entre tous les quadrants à mieux que 1% dans une bande de fréquence allant de 2 à 14 MHz.

Tests de fonctionnement

Nous avons également procédé à des tests sur le fonctionnement des photodiodes, dont les détails sont donnés dans le guide [Martinelli]. Nous avons notamment vérifié la linéarité de la réponse HF en fonction de la puissance incidente, l'uniformité de la surface de chaque détecteur, et l'influence de la séparation entre deux quadrants. Toutes ces études ont donné des résultats conformes aux prévisions et nous permettent d'utiliser nos détecteurs avec confiance.

B.3 Chaine d'acquisition

B.3.1 Principe général

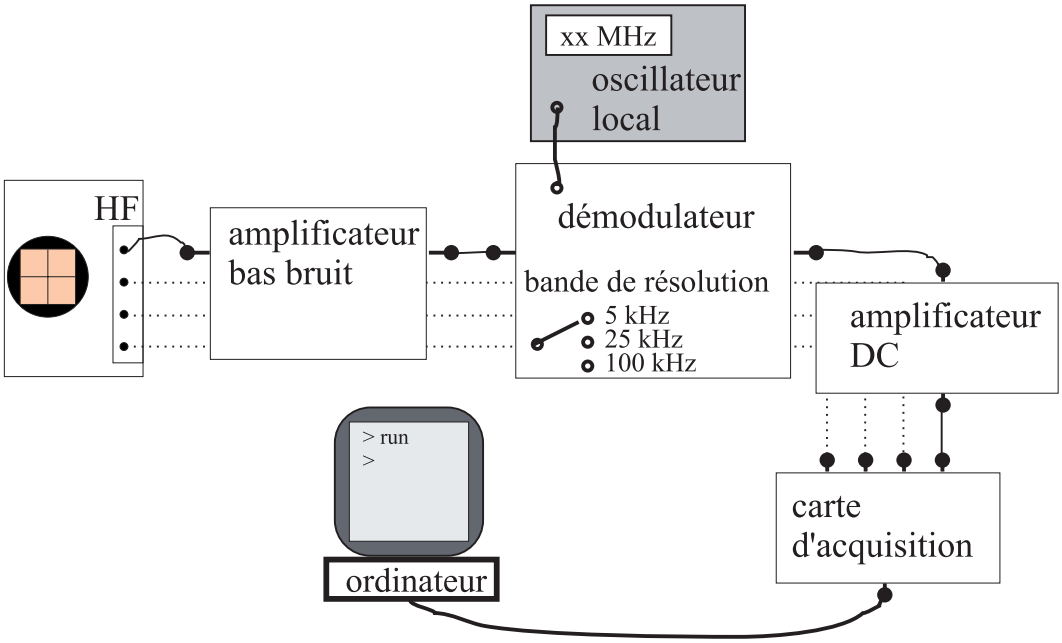

Fig. 3.6 – Chaîne d'acquisition complète entre la sortie HF des photodiodes et l'ordinateur (une seule des voies à été matérialisée).

Nous avons représenté en figure 3.6 les différentes étapes de l'acquisition, que l'on

peut décomposer ainsi, à partir de la sortie HF d'une photodiode :

- un amplificateur HF très bas bruit.
- un démodulateur dont la fréquence est pilotée par un générateur de fonctions.
- un amplificateur DC.
- une voie de la carte d'acquisition informatique.

B.3.2 Description des éléments

a *Amplificateur HF*

Nous avons utilisé des amplificateurs de marque *Nuclétude* modèle *10.36.2*, fournissant 36 dB de gain, avec une puissance de maximale de +17dBm dans une bande de fréquence allant de 1 à 1000 MHz. La fragilité de ces appareils à toute surtension, et la présence dans notre laser d'une modulation à 15 MHz donnant un signal susceptible d'endommager cet amplificateur, nous ont obligé à fabriquer des boîtiers de protection placés à l'entrée des amplificateurs. Ils se composent d'un filtre coupe bande et d'un jeu de diodes pour éviter les pics de tension. Les gains de tous ces ensembles ampli+protection ont été vérifiés.

b *Démodulateurs - amplificateurs*

La sortie de chaque amplificateur est envoyée vers un démodulateur, qui mélange le signal d'entrée avec une tension oscillante servant d'oscillateur local de référence, suivi par un filtre basse fréquence. La composante du signal de départ à la fréquence de l'oscillateur local est donc ramenée à basse fréquence, dans une bande de fréquence appelée «resolution bandwidth» (RBW). De manière formelle, si la photodiode délivre le courant électrique $i(t)$, le démodulateur va fournir le courant $i_T(\omega_0)$ où $1/T$ est la bande de résolution et ω_0 la pulsation de l'oscillateur local, de telle sorte que :

$$i_T(\omega_0, t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(t-t')i(t')\cos(\omega_0 t' + \phi)dt' \tag{3-14}$$

où ϕ est la phase de l'oscillateur local et où $f_T(t)$ est un filtre de bande passante $1/T$. Dans notre cas, le filtre est un simple circuit RC et donc son expression s'écrit :

$$f_T(t) = e^{-t/T}. \tag{3-15}$$

À titre de comparaison, on rappel ce que donne un analyseur de spectre placé dans les même conditions :

$$(\Delta i(\Omega_0, t))^2 = \left| \int_{-\infty}^{t} f_T(t-t')i(t')e^{i\Omega_0 t'}dt' \right|^2 \tag{3-16}$$

Dans cette dernière expression il n'est pas besoin de tenir compte de la phase de l'oscillateur local car elle ne change pas le résultat final. On voit que notre système ne nous donne accès qu'à une seule quadrature du bruit mesuré, l'hypothèse que nous faisons est donc que le phénomène que nous mesurons est stationnaire au sens statistique du terme que nous avons donné en début de chapitre. Sous cette hypothèse, les deux systèmes fournissent le même signal (au carré près), qui est pour chaque temps une réalisation quantique de notre expérience. Ainsi, ce signal est une variable stochastique qui reflète les fluctuations quantique du système à la fréquence ω_0 dans la bande de résolution du filtre. Il faut alors faire une moyenne des mesures que l'on obtient pour obtenir la moyenne quantique des réalisations (c'est ce que l'on nomme souvent la bande vidéo dans un analyseur de spectre).

Nous avons testé la linéarité de ces éléments, leur puissance de saturation ainsi que leur réponse en fonction de la fréquence. L'ensemble de ces résultats est présenté en détail dans le guide. En sortie des démodulateurs sont branchés des amplificateurs basse fréquence, afin d'adapter la puissance du signal aux caractéristiques de la carte d'acquisition.

c Cartes d'acquisition

Nous avons utilisé deux cartes d'acquisition *National Instrument* modèle *PCI-6110E*. Chacune possède 4 entrées différentielles avec une vitesse d'échantillonnage maximale de 5 MHz et une résolution de 12 bits (soit 1 sur 4096), pouvant être utilisées dans des calibres allant de $\pm 200\ mV$ à $\pm 50\ V$. Le principal attrait de ces cartes est que l'ensemble des voies peut être parfaitement synchronisé informatiquement, avec une précision supérieure à 10 fois la fréquence d'échantillonnage maximale.

B.3.3 Calibration

Il n'est pas possible, avec des chaînes aussi complexes, de procéder comme nous l'avons fait pour les boîtiers des photodiodes. En effet, les gains de chaque chaîne dépendant d'un nombre important de paramètres, notamment de la fréquence utilisée, et étant susceptibles de légèrement dériver avec le temps, une procédure de calibration directe serait à la fois fastidieuse et peu fiable. Nous avons donc opté pour une méthode toute informatique.

A l'aide d'un générateur de bruit, nous produisons un signal qui est envoyé successivement à l'entrée de chacune des chaînes, et nous mesurons la puissance de sortie sur l'ordinateur à l'aide du logiciel «LabView» (voir section suivante sur l'acquisi-

tion informatique). Nous faisons ces mesures pour différentes puissances de bruit afin d'obtenir une courbe de réponse pour chacune des chaînes d'acquisition. Toutes les mesures que nous avons pu faire se sont révélées très concluantes quant à la linéarité de la réponse de chaque chaîne. Pour obtenir des voies équivalentes, il suffit de corriger informatiquement les différences de gain et d'offset entre les différentes chaînes. Il faut noter cependant que cette procédure doit être appliquée pour chaque fréquence de démodulation, puisque la réponse des chaînes n'est pas parfaitement linéaires en fonction de la fréquence.

B.4 Exploitation des données

B.4.1 Principe

Nous avons développé un ensemble d'outils d'acquisition informatique à l'aide du logiciel «LabView», dont nous allons ici expliquer le principe général. On trouvera en annexe la reproduction de l'ensemble des diagrammes et des faces avants des programmes utilisés.

L'ensemble des logiciels développés se décompose en plusieurs modules :

- Un module d'acquisition de données.
- Un module de calcul des gains et du bruit de fond.
- Un module d'exploitation des données.

B.4.2 L'acquisition de données

La partie d'acquisition de données comporte deux programmes. Le premier, «Acquisition.vi», est un sous programme qui gère la communication avec les cartes d'acquisition. Il permet de déclencher les cartes simultanément et de procéder à une acquisition d'un nombre spécifiés de points, sur les voies choisies et avec des calibres spécifiés. Il gère également les erreurs pouvant provenir lors de cette acquisition.

Le deuxième programme, «analyse.vi» (représenté en figure 3.7), est celui utilisé directement pour acquérir des données et comporte une interface utilisateur; il utilise le programme «acqusition.vi». Il demande en entrée le nombre de voies utilisées sur chacune des cartes, la fréquence d'acquisition, et les calibres de chacune des voies. Une fois lancé, il commence l'acquisition quand la carte n° 1 reçoit un signal de déclenchement de type «TTL». Ce signal peut être soit externe, soit généré par le programme lui-même qui ainsi s'auto-déclenche. On peut lui préciser le nombre d'acquisition ainsi

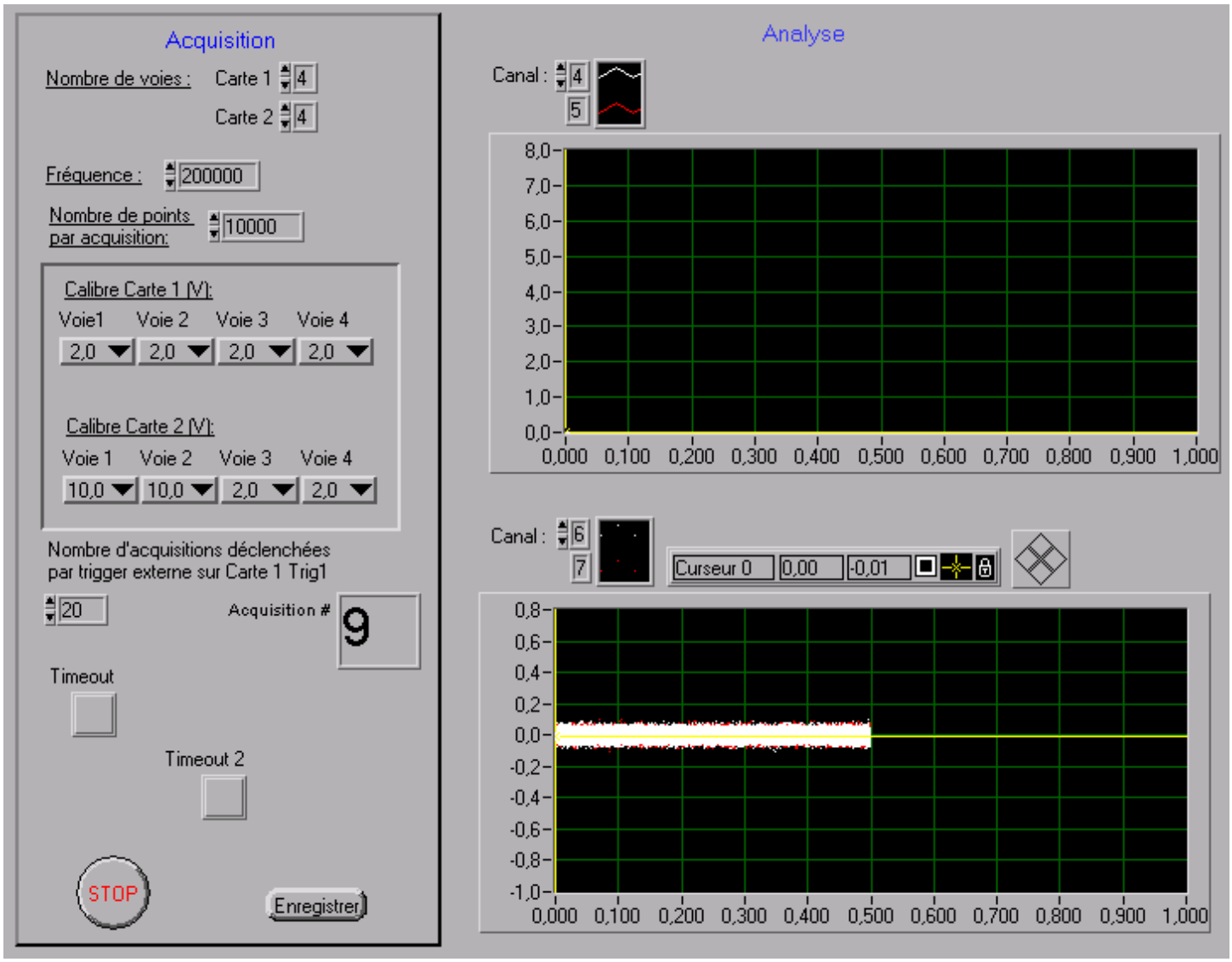

Fig. 3.7 – Programme d'acquisition de données «analyse.vi»

que le nombre de points par acquisition (une acquisition correspond à l'arrivée d'un «TTL»). Il possède deux fenêtres graphiques pour visualiser et contrôler l'acquisition, et il permet d'enregistrer les donnée sur le disque.

B.4.3 Calibration des gains

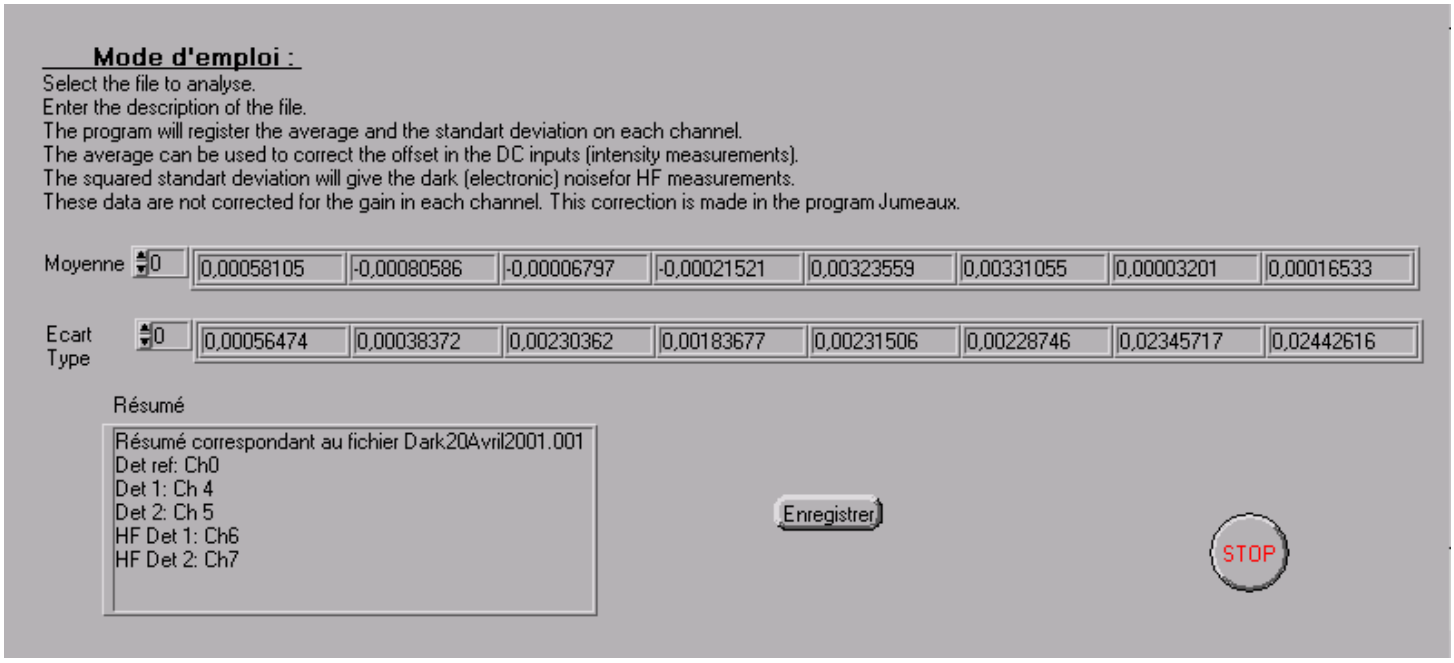

Fig. 3.8 – Programme de calcul des bruits de fond «dark.vi»

Comme nous l'avons déjà évoqué en section précédente, il est nécessaire de calibrer les gains des différentes chaines d'acquisition nécessaire pour chaque fréquence de démodulation. Pour ce faire, on utilise le programme «analyse.vi» pour acquérir les données de réponse à l'injection d'un bruit, mais également quand il n'y a rien à l'entrée pour avoir le bruit de fond. Nous avons ensuite deux outils : «dark.vi» (figure 3.8) prend les fichiers réalisés avec le bruit de fond, calcule les moyennes et les écarts type et enregistre les résultats sur le disque. «calibre.vi» (figure 3.9) prend les données de réponse à un bruit, effectue les moyennes, écarts types et régressions linéaires afin d'obtenir la courbe de réponse, qui est une droite. A partir de là, on spécifie arbitrairement une des voies qui a un gain 1, et le programme calcule les gains correspondants de toutes les autres voies, et enregistre l'ensemble dans un fichier. Toutes ces données, de bruit de fond et de gain, sont ensuite utilisées par les programmes d'exploitation.

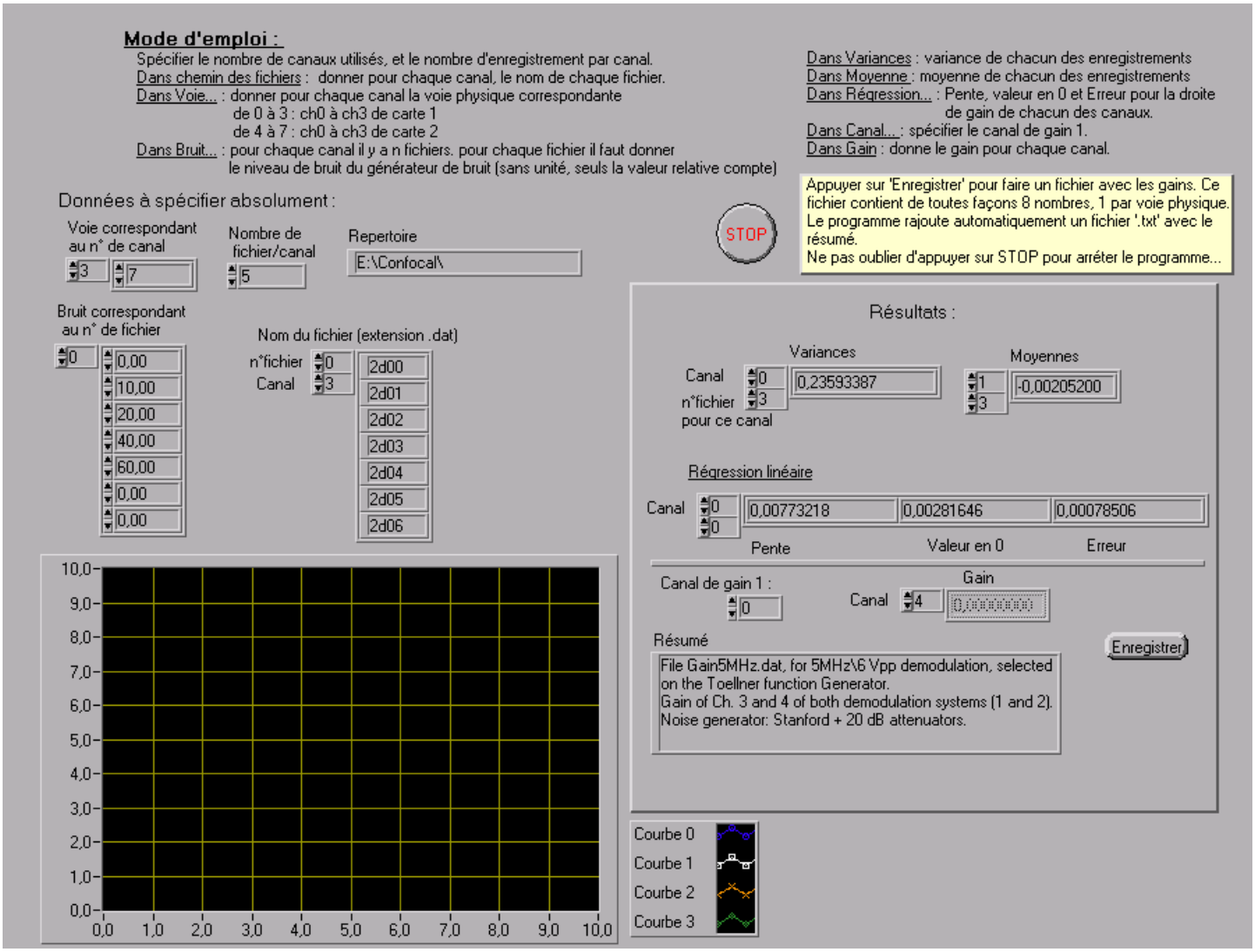

Fig. 3.9 – Programme de calcul des gains.

B.4.4 La variance du champ

L'ensemble des données que l'on peut récolter avec ce système permet de faire tous les calculs imaginables de corrélations et de bruit local, mais également de calculer la variance conditionnelle ou encore de regarder des photons jumeaux. Le seul problème inhérent a ce système est celui de la normalisation, nous avons donc opté pour la méthode suivante. Si l'on prend un faisceau laser de bruit la limite quantique standard, il vient pour la variance du nombre de photons sur le détecteur :

$$\left(\Delta\hat{N}\right)^2 =< \hat{N} > \tag{3-17}$$

Comme les détecteurs nous permettent de mesurer simultanément les sorties HF et DC, nous avons accès à la puissance incidente sur le détecteur, nous connaissons donc $< \hat{N} >$ ou au moins une quantité qui lui est proportionnelle. Ainsi, si l'on appelle $i_{HF}(t_k)$ le courant mesuré par la carte d'acquisition après la chaîne de démodulation, où $\{t_k\}$ est l'ensemble des moments d'acquisition (typiquement, nous prenons des ensembles de 10000 points), et i_{DC} le courant mesuré via la sortie continue des photodiodes, il vient :

$$\left\langle \frac{i_{HF}(t_k)^2}{i_{DC}(t_k)} \right\rangle_k = S = constante \tag{3-18}$$

On voit dans cette équation que la puissance moyenne n'a pas besoin d'être constante, puisque l'on peut normaliser point à point, la quantité S est donc une constante générale nous donnant le niveau du bruit quantique. C'est cette constante, que l'on peut directement calculer avec l'ordinateur, qui nous sert à normaliser toutes les quantités. Il est ensuite possible de développer pour chaque système physique des logiciels spécifiques calculant les bruits locaux, les corrélations, les variances conditionnelles,...

La quantité que nous calculons effectivement informatiquement à partir des acquisition tient compte du bruit de fond et des gains des différentes cartes. Supposons que nous utilisions 4 voies, numéro 1, 2, 3 et 4. Le programme lit directement sur les cartes les intensités $i_\alpha(t_k)$ où $\alpha \in 1, 2, 3, 4$. Supposons que nous ayons fait les branchements de telle sorte que i_1 soit la voie HF du quadrant 1 (branchée donc sur une chaîne de démodulation) et i_2 la mesure directe de la sortie DC du quadrant 1. De même i_3 et i_4 sont respectivement les voies HF et DC du quadrant 2. Avec le programme «Dark.vi» nous avons pu calculer les gain g_1 et g_3 des chaînes de démodulation correspondant à i_1 et i_3, mais également la variance du bruit de fond des chaînes correspondantes V_1^{bruit} et V_3^{bruit} (déjà corrigée par le gain). Si on suppose que nous avons fait une première acquisition de telle sorte que le bruit sur la différence des deux voies est égal au bruit

de grenaille, la quantité S est donnée par :

$$S = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(i_1(t_k)/g_1 - i_3(t_k)/g_3)^2 - V_1^{bruit} - V_3^{bruit}}{i_2(t_k) + i_4(t_k)} \tag{3-19}$$

Si maintenant, on fait une autre acquisition dans les même conditions mais où cette fois le bruit de la différence doit faire apparaître des photons jumeaux, le facteur de réduction de bruit de la différence normalisé à 1 est donné par :

$$r = \frac{1}{S}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(i_1(t_k)/g_1 - i_3(t_k)/g_3)^2 - V_1^{bruit} - V_3^{bruit}}{i_2(t_k) + i_4(t_k)}. \tag{3-20}$$

Pour la variance conditionnelle, la normalisation est plus difficile. En effet, pour calculer une fonction de corrélation comme celle donné en (1-87), il faut normaliser le produit des intensités des deux voies par le produit des variances de chaque voie. Or, si l'intensité du champ varie au cours de l'acquisition, il n'est pas possible comme nous l'avons fait pour la variance de trouver une fonction de corrélation indépendante de l'intensité. Nous avons donc, en général, choisi de sélectionner dans nos acquisitions les points ayant des intensités proches.

Deuxième partie

Images quantiques : utilisation et production

Chapitre 4

Limites de résolution dans les images optiques

Nous avons vu dans l'introduction que le critère de Rayleigh n'est pas adapté aux limites de résolutions dans les images lorsque l'on utilise des détecteurs très sensibles. En effet, dans ce cas le facteur limitant est le bruit de la lumière et la quantité pertinente sera donc le rapport entre le signal mesuré et le bruit associé à la mesure. Nous allons introduire ici les quantités dont la mesure est limitée par le bruit quantique, qui se ramènent toutes à la comparaison des mesures faites par deux détecteurs : dans quelles conditions sont-elles discernables ?

A Contraste dans les images

Considérons un ensemble de photodétecteurs D_i carrés de même surface, jointifs, placés dans le plan transverse d'un faisceau. En utilisant les résultats du chapitre 2 on peut déterminer lorsque l'on utilise un état cohérent quelle est la limite quantique standard à la résolution.

A.1 Champ monomode cohérent

Considérons tout d'abord un faisceau *monomode cohérent* incident sur ce système (voir figure 4.1). D'après ce qui précède, le nombre de photons mesuré par une photodiode est

$$N(D_i) = N_0 \mu_0(D_i) \tag{4-1}$$

où

$$\mu_0(D_i) = \int_D u_0^*(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}) d^2\rho \tag{4-2}$$

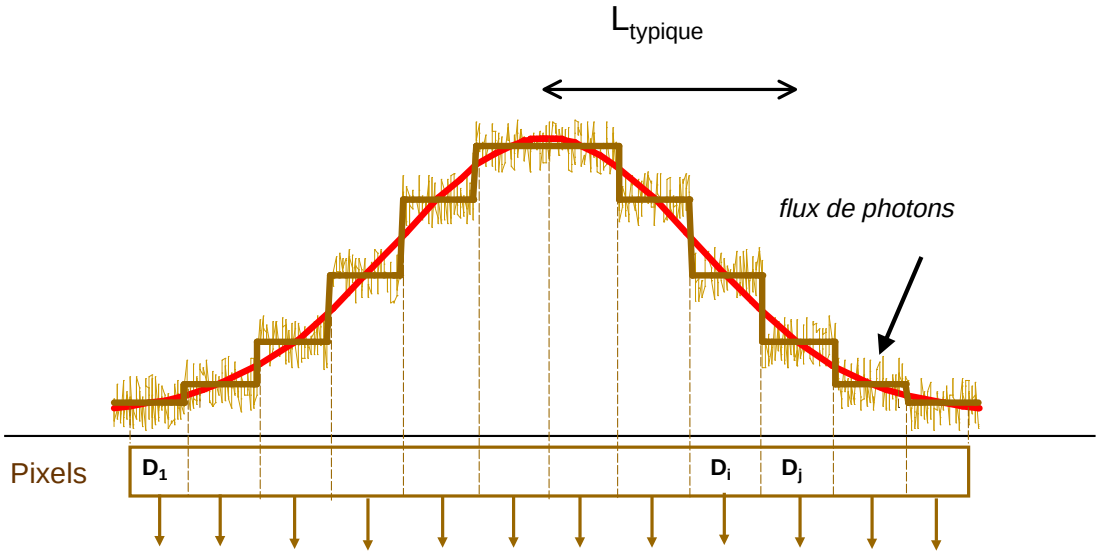

Fig. 4.1 – Bruit sur la mesure d'une image par un ensemble de pixels.

et a été introduit par l'équation (1-34). Le bruit associé est

$$\Delta\hat{N}(D_i) = \sqrt{N_0\mu_0(D_i)} = \sqrt{N(D_i)}. \tag{4-3}$$

Ce qui donne pour le rapport signal/bruit :

$$r = \sqrt{N(D_i)} \tag{4-4}$$

En terme de nombres de photons ce résultat semble évident : nous avons un rapport signal/bruit égal à 1 pour un seul photon détecté. La limite correspondante est donc que le détecteur doit recevoir au moins un photon en moyenne ! Du fait du courant d'obscurité dans les photodétecteurs, il est impossible technologiquement d'atteindre une telle précision, le bruit quantique de la lumière ne constitue donc pas une réelle limite dans une mesure d'intensité. Par contre, il est intéressant de regarder le contraste que l'on peut mesurer avec ce système. On entend par contraste la différence entre les intensités reçues par deux détecteurs connexes, que l'on peut formuler

$$\hat{N}_-^{i,i+1} = \hat{N}(D_i) - \hat{N}(D_{i+1}) = \hat{N}_0[\mu_0(D_i) - \mu_0(D_{i+1})]. \tag{4-5}$$

C'est la mesure de cette quantité qui nous permet de décrire les détails dans une image, et c'est donc à la limite dans la mesure de cette quantité que nous allons nous intéresser.

Le bruit associé à une telle mesure est donné par :

$$\left(\Delta\hat{N}_{-}^{i,i+1}\right)^2 = (\Delta\hat{N}(D_i))^2 + (\Delta\hat{N}(D_{i+1}))^2$$
$$-\Big(\langle\hat{N}(D_i)\hat{N}(D_{i+1})\rangle - \langle\hat{N}(D_i)\rangle\langle\hat{N}(D_{i+1})\rangle + \langle\hat{N}(D_{i+1})\hat{N}(D_i)\rangle - \langle\hat{N}(D_{i+1})\rangle\langle\hat{N}(D_i)\rangle\Big) \tag{4-6}$$

Dans le cas d'un état cohérent la dernière partie de cette équation est nulle et il vient alors simplement

$$\left(\Delta\hat{N}_{-}^{i,i+1}\right)^2 = N_0[\mu_0(D_i) + \mu_0(D_j)] \tag{4-7}$$

Le rapport signal sur bruit est alors, en utilisant uniquement les notations en terme de nombre de photons :

$$r = \frac{\langle\hat{N}_{-}^{ij}\rangle}{\Delta\hat{N}_{-}^{i,i+1}} = \frac{N(D_i) - N(D_{i+1})}{\sqrt{N(D_i) + N(D_{i+1})}} \tag{4-8}$$

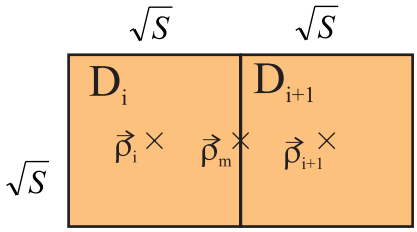

Fig. 4.2 – Géométrie des détecteurs adjacents.

Considérons que les deux détecteurs D_i et D_{i+1} sont des carrés de surface S et donc de côté $\sqrt{S}$, adjacents, de telle sorte que le milieu des deux est repéré par $\vec{\rho}_m$ et que le centre de chacun est repéré respectivement par $\vec{\rho}_i$ et $\vec{\rho}_{i+1}$ (voir figure 4.2). Si S est petit devant les dimensions caractéristiques de l'image mesurée il vient

$$\begin{aligned}
N(D_i) &\simeq S\mathcal{N}(\vec{\rho}_i) \\
N(D_j) &\simeq S\mathcal{N}(\vec{\rho}_{i+1}) \\
N(D_i) - N(D_{i+1}) &\simeq S\vec{\nabla}\mathcal{N}(\vec{\rho}_m).(\vec{\rho}_{i+1} - \vec{\rho}_i) \leq S\sqrt{S}\|\vec{\nabla}\mathcal{N}(\vec{\rho}_m)\| \\
N(D_i) + N(D_{i+1}) &\simeq 2S\mathcal{N}(\vec{\rho}_m)
\end{aligned} \tag{4-9}$$

où, on le rappelle, $\mathcal{N}(\vec{\rho})$ représente le nombre de photons par unité de surface. Cela donne pour le rapport signal sur bruit :

$$r \leq S\frac{\|\vec{\nabla}\mathcal{N}(\vec{\rho}_m)\|}{\sqrt{2\mathcal{N}(\vec{\rho}_m)}} \tag{4-10}$$

La limite de résolution est atteinte pour un rapport signal sur bruit égal à un, cette inégalité nous donne donc la plus petite surface utile d'un détecteur. Ceci signifie que si l'on utilise des détecteurs plus petits, on ne pourra de toute façon pas discerner des détails plus petits que la limite donnée par le bruit quantique standard :

$$\boxed{S_{lqs} = \frac{\sqrt{2\mathcal{N}(\vec{\rho})}}{\|\vec{\nabla}\mathcal{N}(\vec{\rho})\|}} \tag{4-11}$$

où $\vec{\rho}$ est la position du détecteur.

Il est possible de donner une valeur approchée de cette formule, si on suppose que le champ mesuré est régulier on peut donner une valeur approchée du gradient :

$$\|\vec{\nabla}\mathcal{N}(\vec{\rho}_m)\| \simeq \frac{\mathcal{N}(\vec{\rho})}{L_{typique}} \tag{4-12}$$

où $L_{typique}$ est la longueur caractéristique du champ. Il vient alors :

$$S_{lqs} \simeq \sqrt{2}\frac{L_{typique}}{\sqrt{\mathcal{N}(\vec{\rho})}} \tag{4-13}$$

Dans cette expression, on voit que la limite de résolution est inversement proportionnelle à la racine du nombre de photons au point considéré. Ainsi, si l'intensité est plus importante, la résolution est améliorée. Cependant, il n'est pas toujours possible d'augmenter l'intensité du champ, et dans ce cas nous sommes effectivement limités par le bruit quantique de la lumière. On remarquera enfin que si l'on agrandit le champ avec un jeu de lentille, la précision que l'on peut atteindre n'est pas supérieure car $L_{typique}$ et $1/\sqrt{\mathcal{N}(\vec{\rho})}$ augmentent proportionnellement. La quantité que nous avons définie est donc bien une propriété intrinsèque du champ mesuré.

A.2 Réduction de bruit locale

Dans le cas où il n'y a pas de corrélation entre les différents points de l'image, on voit que le bruit associé à la mesure du contraste de l'image est égal à la somme des bruits sur les deux détecteurs considérés. Si la lumière incidente est constituée d'un champ monomode cohérent ou comprimé, ce bruit est égal au bruit quantique standard associé au nombre total de photons mesurés (en effet, même dans le cas d'un état comprimé car on a vu en première partie de cette thèse que la mesure d'une toute petite partie d'un état comprimé était associée au bruit quantique standard). Une solution envisageable pour améliorer la précision dans la résolution des images est donc d'avoir un champ

dont le bruit est réduit même quand on en prend une toute petite partie. C'est ce que l'on appelle la réduction de bruit locale, qui a été décrite de manière formelle au chapitre 2 section A.2. On verra au chapitre 6 comment il est possible de produire expérimentalement de tels champs.

B Mesures de petits déplacements

B.1 Introduction

Un cas particulièrement simple de mesure sur une image optique est l'utilisation d'un faisceau lumineux pour mesurer la position ou le déplacement d'un objet. L'utilisation d'un détecteur à deux zones sur lequel ce faisceau est incident constitue une mesure de haute sensibilité de la position du faisceau, le couplage de ce faisceau à un système physique permet d'en tirer des informations très précises. Par exemple, dans les microscopes à force atomique la position de la pointe est souvent mesurée par la déflexion d'un faisceau laser; en biologie, le déplacement de molécules est mesuré en le couplant au positionnement d'un faisceau laser [Kojima 97]. On fait également des mesures de coefficients d'absorption en mesurant la déflexion d'un faisceau laser par le gradient d'indice dans le milieu créé par effet thermique grâce à un autre laser [Boccara 80] (c'est l'effet mirage). Toutes ces mesures requièrent de très grandes précisions et se rapprochent souvent de la limite fixée par le bruit quantique de la lumière. Nous allons calculer la limite quantique standard dans cette mesure, et voir comment, en utilisant un faisceau non classique multimode, cette limite peut être franchie, à la fois théoriquement et expérimentalement.

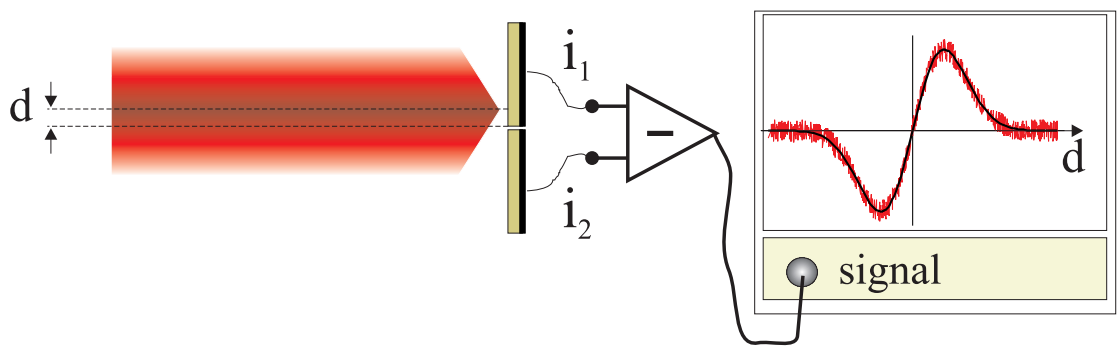

Fig. 4.3 – Mesure de position d'un faisceau lumineux par une photodiode à deux zones. La quantité d représente la position relative du faisceau par rapport au centre du détecteur.

On voit en figure 4.3 le schéma simplifié d'une mesure de déplacement : on réalise la différence entre les photocourants mesurés sur les deux zones du détecteur. Ce signal est représenté à droite de la figure, en fonction de la position du faisceau laser. On voit que si le faisceau est proche du centre, on obtient une réponse linéaire en fonction de la position. Cependant, comme cela est représente en figure 4.4, ce signal est affecté d'un bruit, qui vient uniquement du bruit quantique de la lumière si tous les autre bruits techniques ont été supprimés, et qui va limiter la précision de la mesure. Supposons dans un premier temps que l'on utilise un état cohérent, monomode ou multimode, et de forme transverse quelconque; nous avons vu au chapitre 2 que la mesure partielle d'un état cohérent était affectée par un bruit de grenaille, sans corrélations entre différentes zones transverses. Si on fait la différence entre deux détecteurs mesurant chacun une partie d'un même état cohérent, le système est affecté du même bruit que sur la somme des intensités, c'est à dire le bruit quantique standard associé à l'intensité totale. Ainsi, la mesure de position est affectée du bruit correspondant au bruit quantique standard du faisceau total.

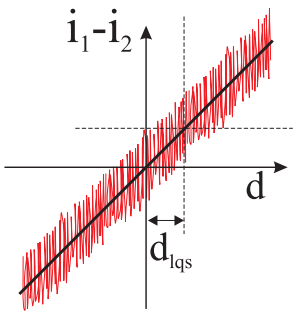

Fig. 4.4 – Limite dans la précision de la mesure de position imposée par le bruit quantique de la lumière.

Comme on le voit toujours en figure 4.4, cela impose une limite au plus petit déplacement que l'on peut mesurer. On verra également dans ce chapitre que l'utilisation d'un champ monomode comprimé n'améliore pas la précision de la mesure.

Il est donc nécessaire d'utiliser des champs non classiques multimodes. Nous donnerons plusieurs exemples de tels états se décomposant sur deux modes transverses où plus. Dans ce chapitre, nous verrons un calcul explicite et complet à deux modes, et nous introduirons d'autres exemples au chapitre 6.

B.2 Analyse théorique

B.2.1 Mesure de différence

Considérons le problème simplifié d'un faisceau incident sur une photodiode à deux zones, que nous appellerons respectivement D_1 et D_2. Nous allons nous intéresser au signal que l'on obtient si l'on mesure la différence des intensités reçues par les deux photodiodes, qui correspond à une mesure de position du faisceau par rapport au photodétecteur. Décrivons le champ incident sous la forme donnée au chapitre 1 de telle sorte que $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ soit l'opérateur nombre de photons dans le mode i[1] . Nous écrirons alors (avec $\vec{\rho}$ la position dans le plan transverse).

$$\hat{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{\rho}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 c}} \sum_i \hat{a}_i u_i(\vec{\rho}). \tag{4-14}$$

Le nombre de photons reçus par la première zone s'écrit :

$$\langle \hat{N}(D_1) \rangle = \int_{D_1} \sum_{i,j} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho}) d^2\rho. \tag{4-15}$$

A titre de comparaison, nous appellerons dans toute la suite le cas 'classique' (et nous le noterons par l'exposant $^{cl.}$) le cas où nous avons un faisceau monomode cohérent, nous supposerons que c'est le mode u_0 qui contient l'état cohérent de nombre moyen de photons N_0 et que les autres modes sont vides[2]. De plus, nous supposerons qu'il n'y a aucune corrélation entre ces modes. Dans ce cas si $i \neq j$ alors $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle = 0$, ce qui donne :

$$\langle \hat{N}(D_1)^{cl.} \rangle = N_0 \int_{D_1} u_0^*(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}) d^2\rho = \mu_0(D_1) N_0 \tag{4-16}$$

où $\mu_0(D_1)$ est le poids du mode introduit au chapitre 1 équation (1-34) et représente la fraction du mode u_0 incidente sur la photodiode. Le signal d'intensité de la différence est alors donné par :

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_-^{cl.} \rangle &= \langle \hat{N}(D_1)^{cl.} - \hat{N}(D_2)^{cl.} \rangle \\ &= N_0 \left[\mu_0(D_1) - \mu_0(D_2) \right] \end{aligned} \tag{4-17}$$

1. De manière à rendre ce chapitre indépendant, nous rappelons rapidement les résultats et notations obtenus aux chapitres précédents

2. On remarquera que le fait de supposer que notre faisceau est monomode ne va pas à l'encontre d'un mode à la structure transverse compliquée, en effet il suffit dans ce cas d'appeler u_0 la superposition de modes transverses et de compléter notre base orthonormale. La seule contrainte est qu'un seul opérateur quantique est associé à ce mode transverse. Plus généralement, on peut aussi démontrer que la somme de plusieurs modes cohérents est équivalente à un seul mode cohérent à la structure transverse adéquate. On verra en annexe B une définition précise du caractère monomode d'un champ.

Comme attendu à priori, le signal de la différence est proportionnel à la différence des recouvrements de chacune des photodiodes.

Dans le cas général, l'opérateur correspondant à une mesure de différence s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{N}_- &= \int_{D_1} \sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho}) d^2\rho - \int_{D_2} \sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho}) d^2\rho \\ &= \sum_{i,j} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j D_-^{i,j} \end{aligned} \tag{4-18}$$

où l'on a défini :

$$D_-^{i,j} = \int_{D_1} u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho}) d^2\rho - \int_{D_2} u_i^*(\vec{\rho}) u_j(\vec{\rho}) d^2\rho = D_1^{i,j} - D_2^{i,j} \tag{4-19}$$

($D_\alpha^{i,j}$ étant la notation introduite au chapitre 1). On peut écrire exactement le carré de cet opérateur :

$$\boxed{\hat{N}_-^2 = \sum_{i,j,k,l} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l D_-^{i,j} D_-^{k,l}.} \tag{4-20}$$

Pour prendre la valeur moyenne de cette opérateur, nécessaire au calcul du bruit, il faut calculer $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \rangle$.

a *Limite quantique standard*

Le calcul de $\langle \hat{N}_-^2 \rangle$ dans le cas classique se fait facilement en constatant que la plupart des termes de la forme $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \rangle$ sont nuls. Ne sont non nuls que le cas où tous les indices sont égaux à 0, et les cas de la forme $\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_0 \rangle$. L'ensemble des termes non nuls s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_0 \rangle &= \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_0 \rangle + \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \underset{i \neq 0}{=} N_0 \\ \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle &= N_0^2 + N_0 \end{aligned} \tag{4-21}$$

En injectant ces expression dans l'équation 4-20 il vient :

$$\langle \hat{N}_-^{cl.\,2} \rangle = N_0^2 \; D_-^{0,0\,2} + N_0 \sum_i D_-^{0,i} D_-^{i,0} \tag{4-22}$$

Exprimons la somme sur i figurant dans l'équation (4-22) :

$$\begin{aligned}\sum_i D_-^{0,i} D_-^{i,0} &= \sum_i \Bigg[\sum_{\alpha \in \{1,2\}} \int_{D_\alpha \times D_\alpha} u_0(\vec{\rho}) u_0^*(\vec{\rho}\,') u_i^*(\vec{\rho}) u_i(\vec{\rho}\,') d^2\rho d^2\rho' \\ &\quad - \sum_{\alpha \neq \beta \in \{1,2\}^2} \int_{D_\alpha \times D_\beta} u_0(\vec{\rho}) u_0^*(\vec{\rho}\,') u_i^*(\vec{\rho}) u_i(\vec{\rho}\,') d^2\rho d^2\rho' \Bigg] \end{aligned} \tag{4-23}$$

En faisant rentrer la somme sur i sous l'intégrale, et en utilisant la relation de complétude 1-32 sur les modes transverses il vient :

$$\sum_i D_-^{0,i} D_-^{i,0} = \int_{D_1 \cup D_2} u_0^*(\vec{\rho}) u_0(\vec{\rho}) d^2\rho = \mu_0(D_1 \cup D_2) \tag{4-24}$$

soit exactement le recouvrement de l'ensemble des détecteurs par le mode 0. En introduisant le nombre de photons effectivement détectés par le détecteur "total"

$$N_0(D_{1+2}) = \mu_0(D_1 \cup D_2) N_0 \tag{4-25}$$

où, pour alléger les notations, nous avons renommé la surface totale : $D_{1+2} = D_1 \cup D_2$. Il vient pour la variance de l'intensité de la mesure de différence (sachant que $\langle \hat{N}_-^{cl.} \rangle^2 = D_-^{0,0\,2}$) :

$$\boxed{\langle \Delta\ \hat{N}_-^{cl.\,2} \rangle = N_0(D_{1+2})} \tag{4-26}$$

On retrouve la loi de la variance de l'intensité d'un état cohérent, indépendamment de la mesure de différence, ce qui était attendu puisqu'il n'y a aucune corrélation entre les différentes parties transverses d'un état cohérent. Ce résultat se généralise directement à la mesure du champ par un nombre fini de détecteurs, indépendamment de l'opération que l'on effectue sur les différentes intensités (+ où -). Autrement dit, le bruit introduit dans une mesure partielle d'intensité d'un état cohérent est toujours égal à la racine de l'intensité effectivement incidente sur l'ensemble des détecteurs.

b *Cas d'un état sub-Poissonien monomode*

On peut se demander ce qu'il advient de ce calcul si au lieu d'utiliser un état monomode cohérent on utilise un état monomode comprimé en intensité (ou état sub-Poissonien).

Il faut de nouveau calculer l'ensemble des termes de la forme $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \rangle$ qui sont non nuls. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_0 \rangle &= \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_0 \rangle + \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \underset{i \neq 0}{=} N_0 \\ \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle &= N_0^2 + R_0 + N_0 \end{aligned} \tag{4-27}$$

où $R_0 = \langle \hat{a}_0^{\dagger 2} \hat{a}_0^2 \rangle - \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle^2$ caractérise l'écart au bruit quantique standard. Par rapport au cas standard, il faut donc remplacer dans l'équation 4-22 le coefficient N_0^2 par $N_0^2 + R_0$. Tout le calcul de recouvrement reste valable, par contre ce terme réapparaît dans l'équation 4-26 et on obtient :

$$\langle \Delta\ \hat{N}_-^{comprime\,2} \rangle = N_0(D_{1+2}) + R_0\ D_-^{0,0\,2} \tag{4-28}$$

On rappelle que $D_-^{0,0}$ représente la différence entre les recouvrements des deux zones du détecteur par le mode u_0. Dans le cas où chacune des deux zones reçoit à peu près la même intensité (ce qui correspond aux cas qui nous intéresseront par la suite) $D_-^{0,0} \simeq 0$. Le terme ajouté par l'utilisation d'un état comprimé devient négligeable et on retrouve un bruit de la différence égal à la racine de l'intensité totale détectée. On peut comprendre ce résultat physiquement : lorsque l'on regarde deux zones complémentaires d'un faisceau comprimé en intensité, ces deux zones sont complètement anticorrélées (comme nous l'avons vu au chapitre 1 section A.1) et les bruits introduits lorsque l'on fait la différence vont s'ajouter, compensant exactement le gain que l'on avait grâce à l'utilisation d'un champ comprimé. D'autre part, d'après l'équation précédente on voit que l'on a quand même une amélioration lorsque les deux recouvrements ne sont pas identiques, mais cela est directement relié à l'intensité supplémentaire détectée par une des deux zones.

B.2.2 Mesure de déplacement

a Le photodétecteur et le faisceau

Supposons que les deux zones de notre photodétecteur sont symétriques par rapport à l'axe des x, c'est à dire que

$$\text{si} \quad (x, y) \in D_1 \quad \text{alors} \quad (-x, y) \in D_2. \tag{4-29}$$

Nous supposerons en plus que la zone comprise entre les deux photodiodes, que nous appellerons G, est petite par rapport à la taille caractéristique de D_1 et D_2,(voir figure 4.5).

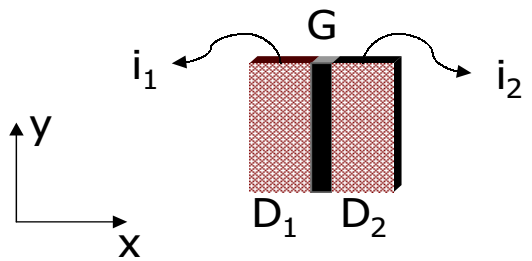

Fig. 4.5 – Détecteur de position, scindé en deux partie symétriques avec une zone noire entre les deux

Nous allons considérer dans toute la suite que le faisceau est fixe selon la direction y et nous prendrons en compte uniquement des déplacements selon la direction x. Ainsi, notre dispositif correspond à une mesure de position selon cette direction, que nous repérerons par la quantité algébrique d comme représenté en figure 4.3.

b *Déplacement minimal*

Afin de déterminer le déplacement minimal que l'on peut détecter avec notre dispositif, nous allons considérer que le faisceau est initialement centré sur le détecteur et que les déplacements sont petits par rapport à la taille du faisceau. Dans ce cas, le signal de différence $\langle \hat{N}_- \rangle$ est directement proportionnel au déplacement d de telle sorte que

$$\langle \hat{N}_- \rangle \simeq d \left. \frac{\partial \langle \hat{N}_- \rangle}{\partial d} \right|_{d=0} . \tag{4-30}$$

Cette mesure est affectée du bruit $\Delta \hat{N}_-$ que nous avons déterminé au paragraphe précédent par l'équation 4-20. Le déplacement minimal mesurable correspond à la valeur de d pour laquelle le rapport signal sur bruit est égal à 1 (voir figure 4.4).

$$d_{min} = \frac{\Delta \hat{N}_-}{\left. \frac{\partial \langle \hat{N}_- \rangle}{\partial d} \right|_{d=0}} \tag{4-31}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial \langle \hat{N}_- \rangle}{\partial d}$ que nous avons introduite est en fait proportionnelle à l'intensité du champ. Nous allons donc définir la taille effective du faisceau Δ par

$$\Delta = \frac{\langle \hat{N}_0 \rangle}{\left. \frac{\partial \langle \hat{N}_- \rangle}{\partial d} \right|_{d=0}} \tag{4-32}$$

Pour un faisceau gaussien de waist w_0, on verra dans la section suivante de ce chapitre que $\Delta \simeq 0,63 w_0$. Le déplacement minimum vaut alors :

$$d_{min} = \frac{\Delta \hat{N}_-}{N_0} \Delta \tag{4-33}$$

Dans le cas classique ou sub-Poissonien monomode (comme nous les avons définis en début de chapitre), on peut calculer exactement ce déplacement minimal. Il correspond à la limite quantique standard, limite inférieure pour des états monomodes classiques du champ. En combinant les équations 4-33 et 4-26 il vient, en supposant que $N_0(D_{1+2}) \simeq N_0$ (ce qui signifie que le détecteur prend tout le faisceau, et que l'écart entre les deux zones est petit) :

$$\boxed{d_{lqs} = \frac{\Delta}{\sqrt{N_0}}} \tag{4-34}$$

On peut faire plus précisément le calcul de Δ en introduisant explicitement le déplacement dans le calcul des recouvrement. La manière la plus simple consiste à considérer que les détecteurs sont fixes et à introduire le déplacement dans l'argument des modes, ainsi on peut écrire :

$$D_{-}^{i,j}(d) = D_1^{i,j}(d) - D_2^{i,j}(d) \tag{4-35}$$

avec, en séparant les coordonnées transverses,

$$D_1^{i,j}(d) = \int_{D_1} u_i^*(x+d,y)u_j(x+d,y)dxdy. \tag{4-36}$$

En supposant que les zones D_α sont grandes par rapport au faisceau et que la séparation entre les deux est très petite :

$$\left.\frac{\partial D_1^{i,j}}{\partial d}\right|_{d=0} \simeq \int_y u_i^*(0,y)u_j(0,y)dy \tag{4-37}$$

Et finalement, en supposant que nous sommes dans le cas classique, on trouve :

$$\left.\frac{\partial \langle \hat{N}_{-}^{classique}\rangle}{\partial d}\right|_{d=0} = 2N_0 \int_y u_0^*(0,y)u_0(0,y)dy \tag{4-38}$$

soit

$$\Delta = \frac{1}{2\int_y |u_0(0,y)|^2 dy} \tag{4-39}$$

On peut comprendre cette expression en réalisant que la largeur d'un mode dont l'intégrale est normalisée à 1 est inversement proportionnelle à sa valeur en 0 (en supposant que ce faisceau ait son maximum en 0).

B.2.3 Déplacement d'un champ multimode

Nous avons vu que le cas monomode nous menait à la limite quantique standard, infranchissable même avec des états comprimés. Nous allons donc maintenant faire le calcul complet dans le cas d'un nombre quelconque de modes transverses. Pour faire ce calcul, nous allons nous placer dans la limite des petites fluctuations quantiques.

On écrit donc :

$$\delta\hat{a}_i = \hat{a}_i - \langle \hat{a}_i \rangle \tag{4-40}$$

et on va résoudre l'équation à l'ordre le plus bas en ne gardant que les termes quadratiques et en négligeant les termes d'ordre supérieur.

Avant de commencer ce calcul, il est agréable d'introduire une nouvelle notation

qui nous permette d'abaisser le nombre d'indices :

$$\begin{aligned} C_-^i &= \sum_j \langle \hat{a}_j \rangle D_-^{i,j} \\ &= \int_{D_1} u_i^*(\vec{\rho}) \left(\sum_j \langle \hat{a}_j \rangle u_j(\vec{\rho}) \right) d^2\rho - \int_{D_2} u_i^*(\vec{\rho}) \left(\sum_j \langle \hat{a}_j \rangle u_j(\vec{\rho}) \right) d^2\rho \\ &= -i\sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\hbar\omega_0}} \left[\int_{D_1} u_i^*(\vec{\rho}) \langle \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}) \rangle d^2\rho - \int_{D_2} u_i^*(\vec{\rho}) \langle \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}) \rangle d^2\rho \right] \end{aligned} \tag{4-41}$$

C_-^i représente la différence, entre les deux zones, du recouvrement entre le mode i et le champ total. Cette quantité est directement reliée au recouvrement C_α^i défini au chapitre 1 équation (1-71) de la manière suivante : $C_-^i = C_1^{i*} - C_2^{i*}$ (et ce dans le cas où l'oscillateur local est égal au champ moyen). On notera également que :

$$C_-^{i*} = \sum_j \langle \hat{a}_j^\dagger \rangle D^{j,i}. \tag{4-42}$$

L'opérateur $\hat{N}_-$ s'écrit, à la limite des petites fluctuations :

$$\begin{aligned} \hat{N}_- &= \sum_{i,j} \left[\langle \hat{a}_i^\dagger \rangle \langle \hat{a}_j \rangle + \langle \hat{a}_i^\dagger \rangle \delta\hat{a}_j + \delta\hat{a}_i^\dagger \langle \hat{a}_j \rangle \right] D_-^{i,j} \\ \langle \hat{N}_- \rangle &= \sum_{i,j} \langle \hat{a}_i^\dagger \rangle \langle \hat{a}_j \rangle D_-^{i,j} \end{aligned} \tag{4-43}$$

d'où il vient :

$$\delta\hat{N}_- = \hat{N}_- - \langle \hat{N}_- \rangle = \sum_i \left[\delta\hat{a}_i^\dagger C_-^i + \delta\hat{a}_i C_-^{i*} \right]. \tag{4-44}$$

Calculons maintenant la variance de cette quantité, en utilisant le fait que

$$\langle \delta\hat{a}_i \delta\hat{a}_j^\dagger \rangle = \langle \delta\hat{a}_j^\dagger \delta\hat{a}_i \rangle + \delta_{ij}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \langle \delta\hat{N}_-^2 \rangle = \sum_i |C_-^i|^2 + \sum_{i,j} \Big[&\langle \delta\hat{a}_i^\dagger \delta\hat{a}_j^\dagger \rangle C_-^i C_-^j + \langle \delta\hat{a}_i \delta\hat{a}_j \rangle C_-^{i*} C_-^{j*} \\ &+ \langle \delta\hat{a}_i^\dagger \delta\hat{a}_j \rangle C_-^i C_-^{j*} + \langle \delta\hat{a}_j^\dagger \delta\hat{a}_i \rangle C_-^{i*} C_-^j \Big]. \end{aligned} \tag{4-45}$$

Or, on peut calculer le premier terme en effectuant un calcul semblable à 4-23 :

$$\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0}\sum_i |C_-^i|^2 = \sum_i \left[\sum_{\alpha\in\{1,2\}} \int_{D_\alpha\times D_\alpha} \langle \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle \langle \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,')\rangle u_i^*(\vec{\rho}) u_i(\vec{\rho}\,') d^2\rho d^2\rho' \right.$$
$$\left. - \sum_{\alpha\neq\beta\in\{1,2\}^2} \int_{D_\alpha\times D_\beta} \langle \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle \langle \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{\rho}\,')\rangle u_i^*(\vec{\rho}) u_i(\vec{\rho}\,') d^2\rho d^2\rho' \right] \quad (4\text{-}46)$$

et en utilisant la relation de complétude sur les modes transverses on trouve

$$\begin{aligned} \sum_i |C_-^i|^2 &= \frac{2\epsilon_0}{\hbar\omega_0} \int_{D_1\cup D_2} \langle \hat{E}^{(+)\dagger}(\vec{\rho})\rangle \langle \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho})\rangle d^2\rho \\ &= N_{tot}(D_{1+2}) \end{aligned} \quad (4\text{-}47)$$

où $N_{tot}(D_{1+2})$ représente comme dans le cas monomode le nombre total de photons incidents sur le photodétecteur. On peut alors réécrire la variance de la différence :

$$\boxed{\langle \delta\hat{N}_-^2\rangle = N_{tot}(D_{1+2}) + \sum_{i,j} \left[\langle \delta\hat{a}_i^\dagger \delta\hat{a}_j^\dagger\rangle C_-^i C_-^j + \langle \delta\hat{a}_i^\dagger \delta\hat{a}_j\rangle C_-^i C_-^{j*} + c.c. \right]} \quad (4\text{-}48)$$

où *c.c.* représente le complexe conjugué de l'expression à l'intérieur du crochet. Cette expression est cohérente avec le cas monomode, puisque si nous avons un état cohérent sans corrélations entre modes, toutes les fonctions de corrélations sont nulles et on retrouve $N_{tot}(D_{1+2})$ comme niveau de bruit.

a *Faisceau multimode cohérent*

Supposons que nous ayons une sommes d'états cohérents non corrélés entre eux. Dans ce cas, non seulement toutes les fonctions de corrélations entre deux modes sont nulles, mais également toutes les fonctions d'auto-corrélation. On retrouve alors la limite obtenue pour un état cohérent monomode, ce qui était attendu car les fluctuations quantiques associées à un état cohérent sont exactement les mêmes que celles du vide quantique.

b *Multimode non classique sans corrélations croisées*

Dans le cas où nous avons un faisceau multimode, mais sans corrélations entre les modes, la formule précédente peut se simplifier. Il vient :

$$\langle \delta\hat{N}_-^2\rangle = N_{tot}(D_{1+2}) + \sum_i \left[\langle \delta\hat{a}_i^{\dagger 2}\rangle\, {C_-^i}^2 + \langle \delta\hat{a}_i^\dagger \delta\hat{a}_i\rangle |C_-^i|^2 + c.c. \right] \quad (4\text{-}49)$$

Deux paramètres sont donc en jeu pour réduire le bruit sur la mesure de différence : le caractère non classique des fluctuations dans les modes et les intégrales de recouvrement. Ces deux quantités représentent des phénomènes physiques à la fois différents et complémentaires : la valeur des fonctions d'autocorrélations est une propriété purement quantique du mode considéré, alors que les intégrales de recouvrement sont liées aux interférences entre les modes. On peut ainsi avoir un champ qui s'écrit comme la superposition de modes non classiques mais non corrélés entre eux et qui présente néanmoins des corrélations spatiales du fait des interférences entre les modes.

c *Cas particulier à deux modes non classiques et non corrélés*

Nous allons maintenant prendre le cas particulier de deux modes non corrélés; l'un, u_0, dans en état cohérent du rayonnement de coefficient $\underline{\alpha} = \alpha e^{i\phi}$ (ce qui annule toutes ses fonctions de corrélations); l'autre, u_1, dans un état non classique. La variance du signal de différence s'écrit alors :

$$\langle \delta \hat{N}_-^2 \rangle = N_{tot}(D_{1+2}) + \left[\langle \delta \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle \, C_-^{1\ 2} + \langle \delta \hat{a}_1^\dagger \delta \hat{a}_1 \rangle |C_-^1|^2 + c.c. \right] \tag{4-50}$$

Nous allons de plus supposer que le mode 1 est dans un vide comprimé, de coefficient de compression r et où θ est l'angle de la quadrature comprimée [Scully 97]. On peut ainsi résumer les propriétés de bruit des deux modes :

$$\begin{array}{lll} \langle \hat{a}_0 \rangle = \underline{\alpha} & \langle \delta \hat{a}_0^{\dagger 2} \rangle = 0 & \langle \delta \hat{a}_0^\dagger \delta \hat{a}_0 \rangle = 0 \\ \langle \hat{a}_1 \rangle = 0 & \langle \delta \hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle = -e^{-i\theta} \cosh r \sinh r & \langle \delta \hat{a}_1^\dagger \delta \hat{a}_1 \rangle = \sinh^2 r. \end{array} \tag{4-51}$$

Dans ce cas l'expression de C_-^1 se simplifie grandement :

$$C_-^1 = \underline{\alpha} D_-^{1,0} \tag{4-52}$$

L'expression de la variance du signal devient :

$$\langle \delta \hat{N}_-^2 \rangle = N_{tot}(D_{1+2}) - \left[\alpha^2 e^{-i(\theta+2\phi)} \cosh r \sinh r (D_-^{1,0})^2 - \alpha^2 \sinh^2 r |D_-^{1,0}|^2 + c.c. \right] \tag{4-53}$$

Choisissons la phase relative entre les deux champs de telle sorte que $\theta + 2\phi = 0$. Ceci revient en fait à placer les fluctuations réduites du mode 1 dans la direction de l'intensité du mode 0. La variance du signal de différence s'écrit alors :

$$\boxed{\langle \delta \hat{N}_-^2 \rangle = N_{tot}(D_{1+2}) \left[1 + (e^{-2r} - 1) \frac{|D_-^{1,0}|^2}{\mu_0(D_{1+2})} + 2 \sinh 2r \frac{(\mathrm{Im} D_-^{1,0})^2}{\mu_0(D_{1+2})} \right]} . \tag{4-54}$$

où Im est la partie imaginaire et e^{-2r} représente la variance au carré de la quadrature comprimée, soit le facteur habituel de réduction de bruit. Remarquons qu'ici nous avons fait l'approximation que le vide comprimé comportait un nombre négligeable de photons, ce qui est faux quand r tend vers l'infini, et dans ce cas il faudrait rajouter en facteur des deuxièmes et troisièmes termes du crochet le rapport $\frac{N_0(D_{1+2})}{N_{tot}(D_{1+2})}$, que nous supposons ici très proche de 1 (ce qui revient à dire que $\sinh^2 r\mu_1 \ll N_0\mu_0$). Cependant, notre modèle n'étant pas valable pour une réduction de bruit infinie (puisque dans ce cas les fluctuations de phase divergent et la procédure de linéarisation n'est plus valable) la formule (4-54) est juste dans le cadre global de nos approximations.

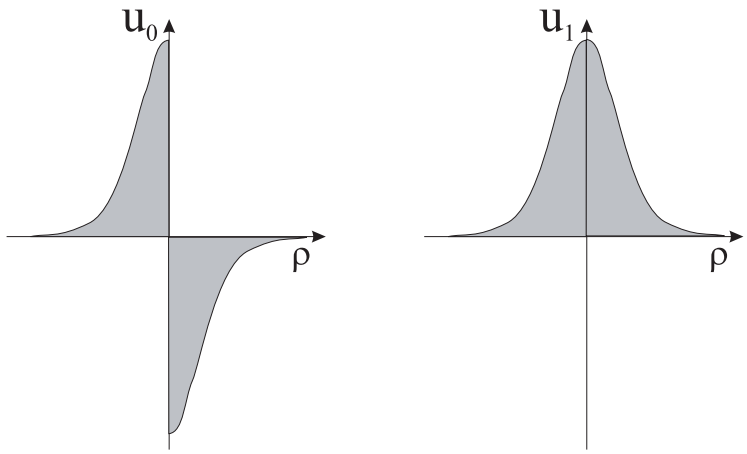

Fig. 4.6 – Forme des modes utilisés pour obtenir une réduction de bruit dans une mesure de différence. A droite, u_1 est un mode TEM_{00}, et à gauche u_0 est le même mode mais avec un facteur de phase π entre sa partie gauche et sa partie droite.

Pour obtenir une réduction du bruit, il faut donc maximiser $|D_-^{1,0}|^2$ tout en minimisant $(\mathrm{Im}D_-^{1,0})^2$. La solution théorique est simple : il suffit que les modes transverses aient partout le même facteur de phase et que leur recouvrement soit parfait sur la zone D_1 et 'anti parfait' sur la zone D_2. Nous choisirons donc le mode u_0 impair par rapport à l'axe des x, et prendrons les deux modes réels. Dans le cas idéal, les deux modes auront donc exactement la même forme transverse, modulo un déphasage de π sur la zone 2 pour le mode u_0. (voir figure 4.6). Dans ce cas :

$$\langle \delta\, \hat{N}_-^{ideal\,2} \rangle = e^{-2r} N_{tot}(D_{1+2}) \tag{4-55}$$

et le déplacement minimum de l'équation (4-33) devient :

$$\boxed{d_{min} = e^{-r} \frac{\Delta}{\sqrt{N_{tot}(D_{1+2})}} = e^{-r} \times d_{lqs}} \tag{4-56}$$

Ce déplacement tend vers 0 de la même façon que le bruit en intensité du vide comprimé tend vers 0. Cette formule montre qu'il est possible d'éliminer complètement le bruit dans une mesure de différence en utilisant le faisceau non classique de la figure 4.6. Une étude plus approfondie que l'on trouvera dans [Barnett 00] dans laquelle on ne néglige pas l'énergie du vide comprimé et où l'approximation de linéarisation n'est pas effectuée donne comme limite, avec l'utilisation d'un vide parfaitement comprimé :

$$d_{min} = \frac{\Delta}{N_{tot}(D_{1+2})^{2/3}} \tag{4-57}$$

Cette limite est bien inférieure à la limite quantique standard quand $N_0 \gg 1$ (par exemple avec un champ de $1mW$).

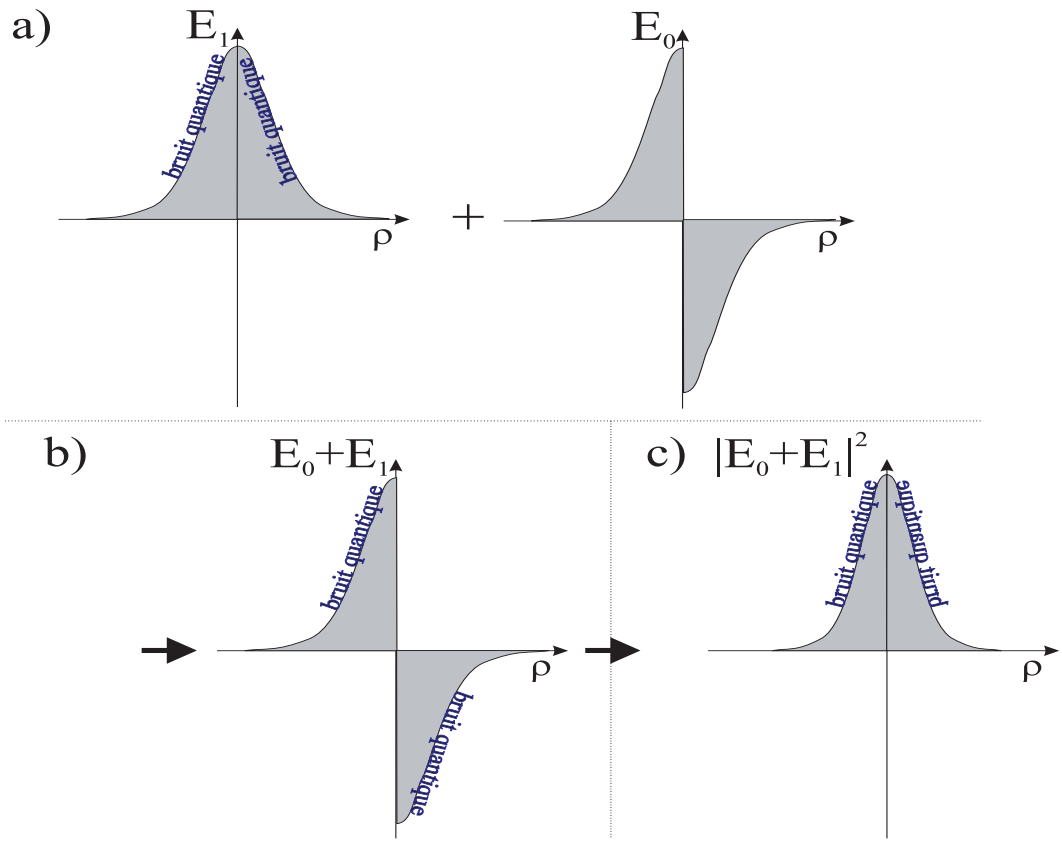

Fig. 4.7 – Représentation du transfert des anticorrélations en corrélations grâce au mode retourné. a) les deux modes que l'on additionne, le mode E_1 étant le vide comprimé. b) résultat de l'addition en amplitude : le mode E_1 ne contribue que pour les fluctuations. c) profil de l'intensité du faisceau obtenu : les fluctuations de ses parties gauches et droites sont corrélées.

Nous avons pu démontrer qu'il était possible, en utilisant deux modes transverses, de faire des mesures de déplacement en dessous de la limite quantique standard. Le résultat

obtenu peut somme toute se comprendre de façon assez intuitive. Dans le cas d'un champ monomode comprimé, les parties gauche et droite du faisceau sont anticorrélées, ce qui explique que quand on en fait la somme il y a une réduction de bruit, mais que par contre lorsque l'on prend la différence les bruits s'additionnent et l'on retrouve le bruit quantique standard. L'idée est donc de transférer cette anticorrélation en corrélation. On voit en figure 4.7 que dans notre schéma on fait interférer la partie gauche du vide avec un champ gaussien, dont les phases relatives sont choisies de telle sorte que l'on "place" les fluctuations du vide comprimé en direction de l'intensité du champ cohérent. Dans la partie droite, on fait la même chose mais le facteur π change le signe des fluctuations en amplitude, et transfère ce qui était des anticorrélations en corrélations. Ce principe est exactement le même que celui utilisé pour une détection homodyne : dans ce dernier cas, les relations d'entrée sortie de la lame séparatrice induisent un facteur de phase π sur l'une des voies, et c'est pourquoi on retrouve les fluctuations du vide comprimé en faisant la différence des courants des photodiodes.

d Cas particulier à deux modes cohérents corrélés

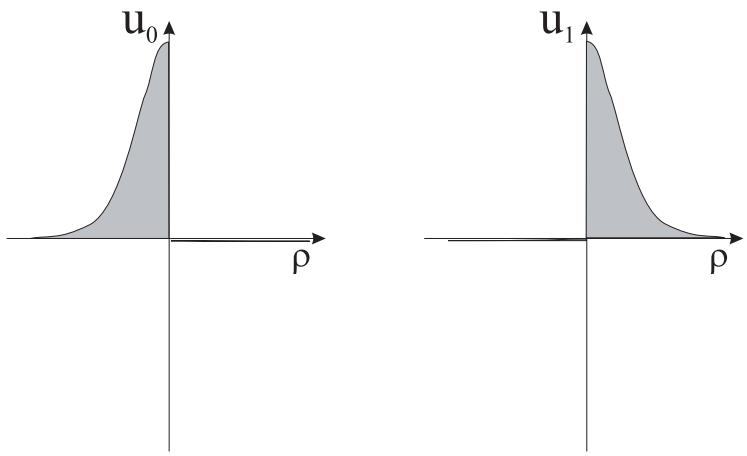

Fig. 4.8 – Forme des modes utilisés pour obtenir une réduction de bruit dans une mesure de différence, avec des corrélations.

Nous voyons ici un autre cas particulier montrant que la solution au problème n'est pas unique. Supposons que nous superposions deux modes cohérents, corrélés entre eux, d'enveloppes respectives u_0 et u_1. Nous allons poser directement la forme à priori des modes que nous allons considérer, pour arriver rapidement au résultat. Nous allons utiliser des modes «moitié» : chacun des modes est la moitié, gauche ou droite, d'un mode TEM_{00} comme cela est représenté en figure 4.8, de même amplitude et de même

facteur de phase, nous les supposerons réels. Écrivons alors la valeur des quantités importantes :

$$\begin{array}{lll} \langle \hat{a}_0 \rangle = \langle \hat{a}_1 \rangle = \alpha & \langle \delta\hat{a}_0^{\dagger 2} \rangle = \langle \delta\hat{a}_1^{\dagger 2} \rangle = 0 & \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_0 \rangle = \langle \delta\hat{a}_1^\dagger \delta\hat{a}_1 \rangle = 0 \\ \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1^\dagger \rangle = \langle \delta\hat{a}_1^\dagger \delta\hat{a}_0^\dagger \rangle & \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1 \rangle = \langle \delta\hat{a}_1 \delta\hat{a}_0^\dagger \rangle & \end{array} \tag{4-58}$$

Pour les intégrales de recouvrement, il vient directement que $D_-^{0,0} = -D_-^{1,1} = D^{0,0} = \mu_0(D_{1+2})$ car les modes sont complètement sur l'un ou l'autre des détecteurs et ne se recouvrent pas du tout. Ainsi

$$N_{tot}(D_{1+2}) = \alpha^2(\mu_0(D_1) + \mu_1(D_2)) = 2\alpha^2 D_-^{0,0} \tag{4-59}$$

En remarquant que $D_-^{1,0} = 0$, la variance du bruit de différence de l'équation (4-48) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \delta\hat{N}_-^2 \rangle &= N_{tot}(D_{1+2}) - \left[2(\langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1^\dagger \rangle + \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1 \rangle)\alpha^2 (D_-^{0,0})^2 + c.c. \right] \\ &= N_{tot}(D_{1+2}) \left[1 - (\langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1^\dagger \rangle + \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1 \rangle + c.c.) D_-^{0,0} \right] \end{aligned} \tag{4-60}$$

Or la fonction de corrélation s'écrit :

$$\langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1^\dagger \rangle + \langle \delta\hat{a}_0^\dagger \delta\hat{a}_1 \rangle + c.c = \langle (\delta\hat{a}_0 + \delta\hat{a}_0^\dagger)(\delta\hat{a}_1 + \delta\hat{a}_1^\dagger) \rangle \tag{4-61}$$

et représente donc la fonction de corrélation en intensité normalisé. Dans le cas d'une parfaite corrélation, cette fonction sera égale à 1, si de plus le recouvrement du détecteur est de bonne qualité il vient $D_-^{0,0} \simeq 1$ et une nouvelle fois les fluctuations sur la différence sont réduites.

Cette configuration n'est pas celle que nous avons adoptée, cependant il est possible de faire des propositions pour sa réalisation. En effet, Lugiato *et al.* ont montré [Gatti 99] qu'il était possible, avec un amplificateur paramétrique optique, d'obtenir deux images identiques et parfaitement corrélées si on injecte très faiblement une copie de cette image à l'entrée. Il suffit alors pour nous d'injecter ce système avec le mode moitié (en utilisant une simple lame de rasoir et un mode TEM_{00}) pour obtenir le champ bimode voulu à la sortie.

B.3 Étude de faisabilité

B.3.1 Principe expérimental

Nous allons ici étudier la faisabilité de l'expérience avec deux modes non classiques mais non corrélés. Les calculs montrent plusieurs éléments nécessaires à la réalisation

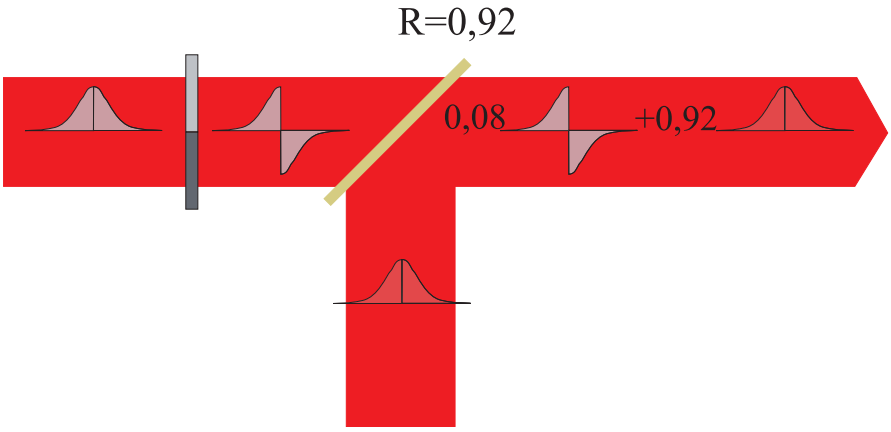

Fig. 4.9 – Production du faisceau bimode non classique : la lame de phase retourne le champ cohérent qui est ensuite mélangé grâce à la lame séparatrice au vide comprimé.

expérimentale d'une mesure de petit déplacement en dessous du bruit quantique standard. Tout d'abord, il faut produire le mode retourné décrit en figure 4.6, l'idée étant d'utiliser une lame de phase qui produirait un déphasage de π entre la partie gauche et la partie droite du mode. Il faut ensuite du vide comprimé, et enfin un montage expérimental permettant d'avoir la superposition des deux modes sur le détecteur. Pour mélanger le champ cohérent et le vide cohérent, la méthode consiste à utiliser une lame de coefficient de réflexion élevé (de l'ordre de 90%) comme représenté en figure 4.9 : le vide est pratiquement complètement réfléchi, il y a donc très peu de pertes de réduction de bruit, et le champ cohérent est très atténué mais il suffit d'injecter une puissance importante.

D'un autre côté, il faut produire les petits déplacements à mesurer, il faut donc également s'interroger sur la nature de ces déplacements. Calculons le déplacement à la limite quantique standard avec un faisceau gaussien de puissance $1mW$, de waist $w = 200\mu m$ et de longueur d'onde $\lambda = 1064nm$. Sa forme transverse s'écrit :

$$u(\vec{\rho}) = \frac{1}{w}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{\vec{\rho}^2}{w^2}} \tag{4-62}$$

la taille caractéristique Δ du faisceau est donné par l'équation 4-39 :

$$\Delta = \frac{1}{2\int_y |u_0(0,y)|^2 dy} = w\sqrt{\frac{\pi}{8}} \simeq 125\mu m. \tag{4-63}$$

Le nombre de photons par unité de temps s'écrit :

$$N(t) = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{P}{\hbar 2\pi c/\lambda} \simeq \frac{P}{18,66.10^{-20}} \simeq 5,3.10^{15}\ photons/s \tag{4-64}$$

Si l'on considère un temps d'intégration $T = 1ms$ il vient

$$N_0 = 5,3.10^{12}\ photons \tag{4-65}$$

et pour la limite quantique standard

$$d_{lqs} = \frac{\Delta}{\sqrt{N_0}} \simeq 0,5\text{Å} \tag{4-66}$$

Il faut donc être techniquement capable de produire de si petits déplacements, et il faut en plus s'affranchir de tous les bruits classiques pouvant perturber la mesure. La méthode à priori retenue consiste à produire une oscillation rapide du faisceau à une fréquence élevée (quelques MHz), la mesure de déplacement consistant en la mesure de l'amplitude de l'oscillation.

B.3.2 Propagation du faisceau

Deux méthodes peuvent être à priori envisagées pour obtenir le champ bimode voulu sur la photodiode : soit l'on travaille en simple propagation, et il faut se placer très près de la lame de phase pour éviter les effets de la diffraction, soit on fait une image du plan de la lame de phase avec une lentille, sur la photodiode, mais il faut dans ce cas prendre des optiques suffisamment grandes pour éviter de perdre une partie du faisceau.

a Simple propagation

Cette méthode n'a finalement pas été retenue pour les problèmes techniques que nous allons exposer ici. Elle apporte cependant quelques enseignements sur les propriétés du système.

Nous avons étudié numériquement les résultats obtenus avec une telle méthode, en considérant le champ gaussien décrit en tête de section, des photodétecteurs carrés de $500\mu m$ de côté et séparés par un espace de $25\mu m$ (ce sont ceux décrits au chapitre 3) et une distance de propagation libre entre la lame de phase et la photodiode de $4cm$ (cette distance semble être le minimum réalisable expérimentalement, sachant qu'il faut placer entre la lame de phase et le détecteur la lame séparatrice qui sert à mélanger les deux modes). Nous avons calculé numériquement la propagation du champ avec une intégrale de Huygens-Fresnel, puis nous avons calculé les intégrales de recouvrement qui apparaissent dans la formule (4-54). Le bruit associé à une mesure de différence, quand le faisceau est parfaitement centré sur le photodiode, est représenté figure 4.10,

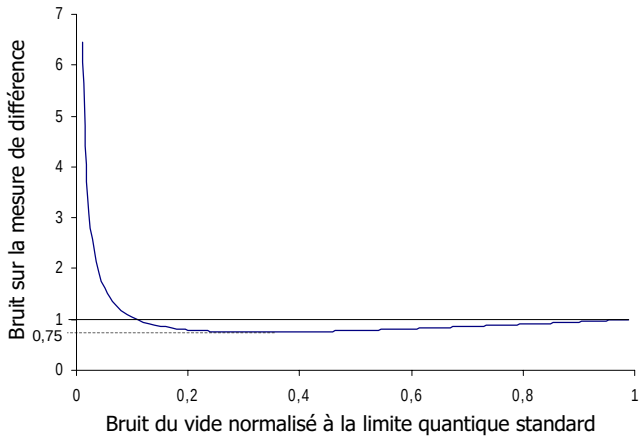

Fig. 4.10 – Bruit dans une mesure de différence en fonction du bruit du vide comprimé normalisé à un, dans le cas d'une simple propagation entre la lame de phase et le détecteur.

où l'on voit le bruit sur la mesure de différence en fonction du bruit du vide comprimé normalisé à 1. Cette courbe appelle plusieurs commentaires :

- pour un vide très bien comprimé, le bruit de la différence augmente significativement avec le taux de compression : on voit dans la formule (4-54) que le terme qui dépend de la partie imaginaire de l'intégrale de recouvrement est multiplié par $\sinh 2r$. Ce terme correspond en fait au bruit de phase du vide comprimé qui n'apparaît que quand il y a un déphasage entre le champ cohérent et le vide comprimé. Or, lors de la propagation libre, du fait de la lame de phase il apparaît une partie imaginaire dans l'intégrale de recouvrement, qui devient prépondérante avec une réduction de bruit important.
- la meilleure réduction de bruit est de 25%, et elle est obtenue avec une compression du vide de 70% : cette perte d'efficacité est due à la mauvaise qualité du recouvrement entre les modes après propagation libre.

De plus, si l'on regarde la forme du mode, et le signal de différence en fonction du déplacement (formule 4-43 dans notre cas particulier) on obtient les courbes représentées en figure 4.11. On voit que l'intensité présente un «trou» au milieu, dû à la diffraction, et que donc le signal est presque nul proche du centre. Ainsi, non seulement les propriétés de bruit ne sont pas convaincante, mais en plus le signal est beaucoup plus faible que le signal normal. Cette méthode n'est donc pas adéquate.

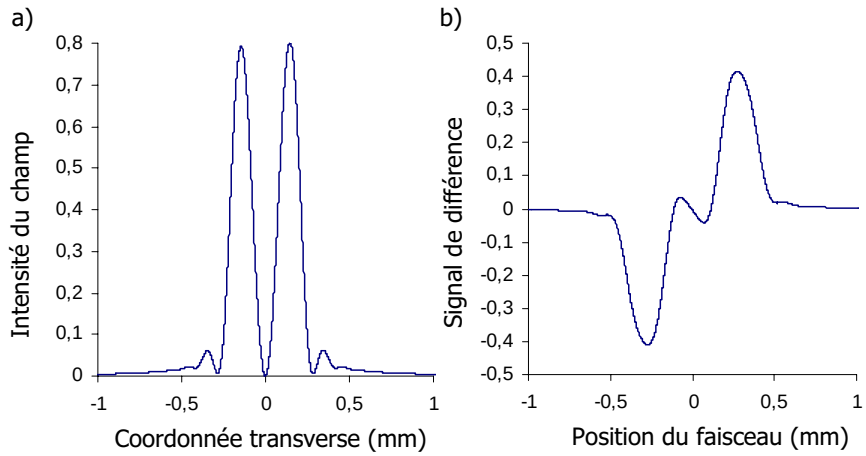

Fig. 4.11 – a) Profil d'intensité du faisceau lumineux après 40mm de propagation libre depuis la lame de phase. b) Signal que donne ce faisceau dans une mesure de différence en fonction de sa position.

b *Lame de phase imagée par une lentille*

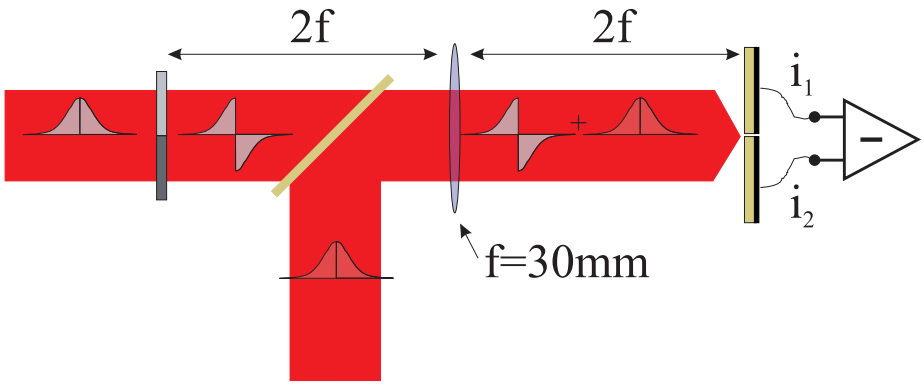

Fig. 4.12 – Schéma expérimental permettant de mélanger le champ cohérent et le vide comprimé tout en imageant parfaitement le plan de la lame de phase sur le détecteur.

La deuxième méthode consiste à imager la lame de phase sur la photodiode. Si cette image est faite parfaitement, il n'y plus aucun problème d'intégrale de recouvrement, la seule chose à laquelle il faille faire attention est donc la taille des optiques. Nous avons donc de nouveau effectué le calcul numérique dans la configuration représentée en figure 4.12 où l'on image le champ avec une lentille de focale $30mm$. Pour simuler la taille transverse finie des optiques nous avons utilisé une zone d'intégration de largeur $5mm$. De plus, nous avons effectué les calculs dans trois cas différents : des détecteurs de taille infinie parfaitement jointifs, des détecteurs infinis séparés de $25\mu m$, et enfin la configuration expérimentale de détecteurs de taille finie. On voit le résultat en figure

4.13 :

- on voit que dans le cas des détecteurs infinis et jointifs, on perd de l'ordre de 2% de la réduction de bruit de départ. Cela est du à la taille finie des optiques. De plus, la dépendance est parfaitement linéaire, contrairement à la méthode par simple propagation, car il n'apparaît aucun facteur de phase résiduelle et la partie imaginaire de l'intégrale de recouvrement reste nulle.
- dans le cas de détecteurs physiques, on voit que l'on perd environ 20% de la réduction de bruit du vide, mais globalement les résultats sont très positifs, l'essentiel des pertes étant dû à l'interface entre les deux détecteurs.

Cette méthode semble donc très efficace pour mesurer des petits déplacements, il reste maintenant à déterminer la sensibilité de ces mesures au positionnement des faisceaux.

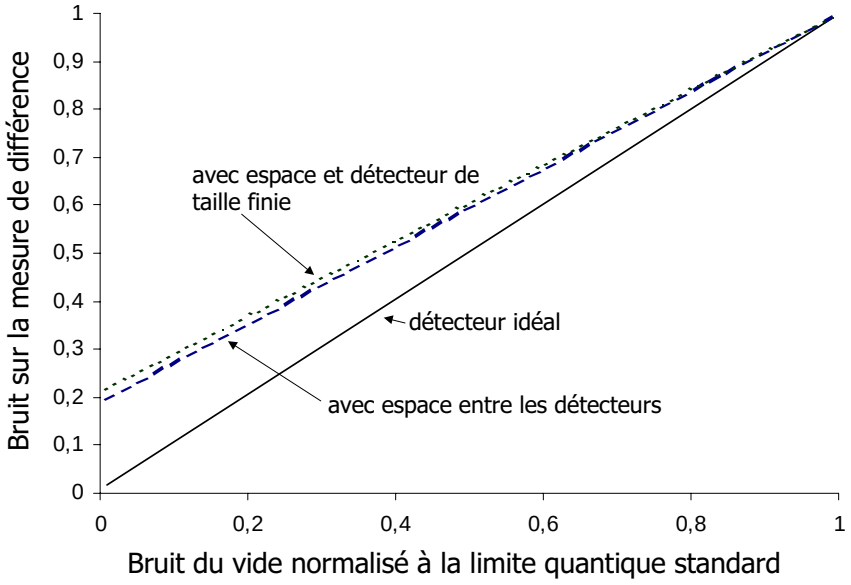

Fig. 4.13 – Bruit dans une mesure de différence en fonction du bruit du vide comprimé normalisé à un, dans le cas où on image le plan de la lame de phase sur le détecteur.

Nous avons représenté en figure 4.14 un graphique en deux dimensions où chaque point donne la réduction sur le bruit de la différence en fonction de la position de chacun des champs, et ce pour une réduction de bruit du vide de 60%. On voit que le désalignement ne perturbe pas les mesures tant qu'il reste inférieur à $5\mu m$.

B.3.3 Quantités pertinentes dans une mesure de petits déplacements

Pour évaluer la précision d'une mesure il ne suffit pas d'avoir la valeur absolue du déplacement. En effet, si l'on agrandit le faisceau avec une lentille on agrandit de la

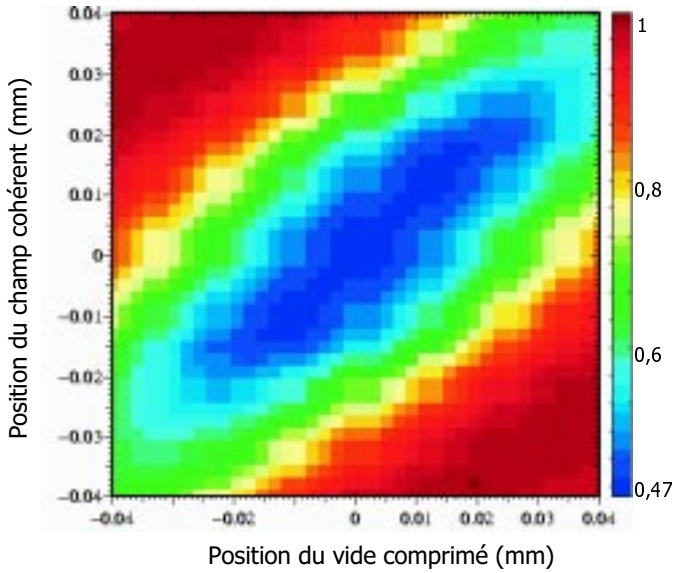

Fig. 4.14 – Bruit sur la mesure de différence en fonction des positions relatives du champ comprimé et de l'état cohérent par rapport au détecteur, pour un vie comprimé en intensité à 60%

même façon le déplacement. Par contre, on conserve le rapport entre le déplacement et la taille du faisceau. Il en est de même pour la limite quantique standard : pour une puissance de faisceau donnée, le déplacement minimum que l'on peut détecter est proportionnel à la taille caractéristique du faisceau, leur rapport est donc une constante. La quantité pertinente est donc :

$$\delta = \frac{d}{\Delta} \quad \text{avec} \quad \delta_{lqs} = \frac{d_{lqs}}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{N_{tot}(D_{1+2})}} \tag{4-67}$$

Cette quantité dépend de la puissance : les mesures de déplacement sont améliorée si l'on prend un champ de plus grande puissance. Il faudra donc comparer les différentes mesures à puissance égale.

B.4 Résultats expérimentaux

B.4.1 Un grand déplacement pour en mesurer un petit...

L'outil dont nous avions besoin, et dont nous ne disposions pas au laboratoire, était une source de vide comprimé. Nous avons donc tiré profit d'une collaboration avec le département de physique de l'Université Nationale Australienne (ANU) à Canberra. Le groupe d'optique quantique de ce laboratoire a développé cet outil [Lam 99] à partir d'un oscillateur paramétrique optique sous le seuil (aussi appelé OPA). Cette expérience

a donc été réalisée en Australie au cours du mois d'avril 2001, en mettant en commun les différentes compétences de chacun des laboratoires.

B.4.2 Description de l'expérience

a Le «squeezer»

On peut voir en figure 4.15 le schéma expérimental de la source de vide comprimé. Le laser de départ est un laser YAG à $1064nm$ délivrant environ $700mW$ en continu. Une partie de ce signal est dirigée dans une cavité de doublage, avec un cristal de $MgO:LiNbO_3$, qui permet d'obtenir jusqu'à $250mW$ de vert stabilisé par un asservissement en bandes latérales (grâce à une modulation à $30MHz$ d'un courant électrique appliqué au cristal).

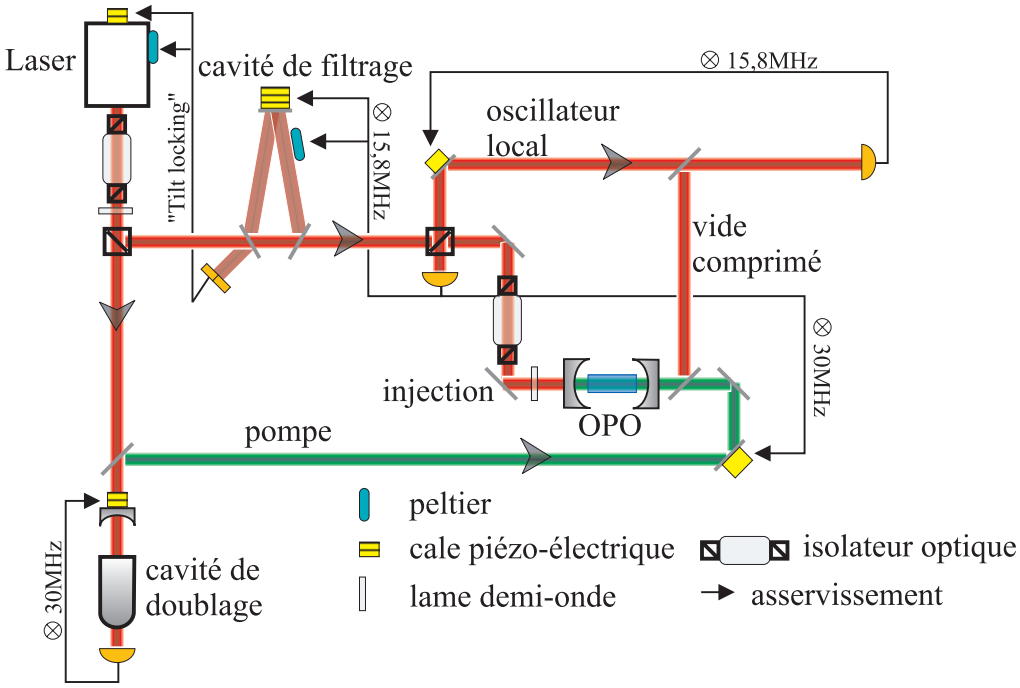

Fig. 4.15 – Schema expérimental du «squeezer»

Le reste du faisceau est injecté dans une cavité de filtrage spatial et fréquentiel et permet d'obtenir un mode TEM_{00} très propre. La fréquence du laser est asservie sur la résonance de la cavité par une méthode dite de «tilt locking» [Shaddock 99] : les interférences entre les réflexion des modes TEM_{00} et TEM_{01} à l'entrée de la cavité sont analysées avec un détecteur à deux zones qui fournit directement le signal d'erreur pour l'asservissement. Cette cavité de filtrage a une bande passante de $1,5MHz$ et filtre tout excès de bruit du laser au delà de cette fréquence. La sortie de la cavité de filtrage est

de nouveau séparée en deux : une partie sert d'oscillateur local, et l'autre sert à injecter l'OPO (voir figure 4.15 pour un schéma général avec les boucles d'asservissement).

L'amplificateur paramétrique optique est une cavité de type OPO avec un cristal de MgO:$LiNbO_3$. Il est pompé d'un coté par le faisceau vert sortant de la cavité de doublage, et de l'autre elle est injectée par le faisceau infrarouge. Une modulation à $15,8MHz$ appliquée au cristal permet d'asservir la fréquence de la cavité de filtrage sur la puissance d'infrarouge réfléchie par la cavité, et donc finalement la fréquence du laser est asservie aux propriétés de l'OPO. Lorsque le vert est injecté dans la cavité, la puissance de la réflexion (et de la transmission) du faisceau infrarouge dépendent de la phase relative du vert et de l'infrarouge injecté (il y a dans un cas amplification, et dans l'autre désamplification). Le signal de réflexion porte également des informations sur cette phase relative, mais à $30MHz$ (fréquence de modulation du vert). Donc cette composante de fréquence de la réflexion de l'infrarouge est utilisée pour asservir la phase du vert, de telle sorte qu'il y ait désamplification de l'infrarouge. Ainsi, à la sortie de l'OPA, on a un faisceau comprimé infrarouge qui a une puissance de l'ordre de $4\mu W$, que l'on appelle le «vide» comprimé. On notera que sans la pompe on a une puissance de sortie de l'infrarouge de l'ordre de $15\mu W$, nous avons donc environ 75% de désamplification.

Ce signal est mélangé, via une lame séparatrice de coefficient de réflexion $R = 0,92$ à l'oscillateur local. La sortie de cette lame qui comporte 92% du vide comprimé et 8% de l'oscillateur local est envoyée sur un détecteur de grande efficacité quantique. Pour obtenir une réduction de bruit en intensité stable sur le détecteur il faut asservir la phase relative du vide comprimé et de l'oscillateur local. Une partie du signal de la photodiode est donc prélevée et démodulée à $15,8MHz$ et sert à cet asservissement. Nous pouvions, au début de l'expérience, obtenir de l'ordre de $3,5dB$ de réduction de bruit après correction du bruit électronique de la photodiode.

b La lame de phase

L'idée pour obtenir le mode retourné consiste à injecter un faisceau gaussien sur une lame dont la partie gauche produit un déphasage de π par rapport à la partie droite. Pour réaliser une telle lame, nous avons utilisé une lame demi-onde (voir figure 4.16) : une telle lame produit une polarisation symétrique de la polarisation incidente par rapport à l'axe principal de la lame. Ainsi, si l'axe principal de la lame a pour direction $O\vec{i}$ et que la polarisation de la lumière incidente fait un angle θ avec cet axe, la polarisation de sortie fait un angle $-\theta$ avec la direction $O\vec{i}$. Si l'on coupe cette lame en 4 parties, et que l'on recolle deux parties en ayant fait subir une rotation de 45°

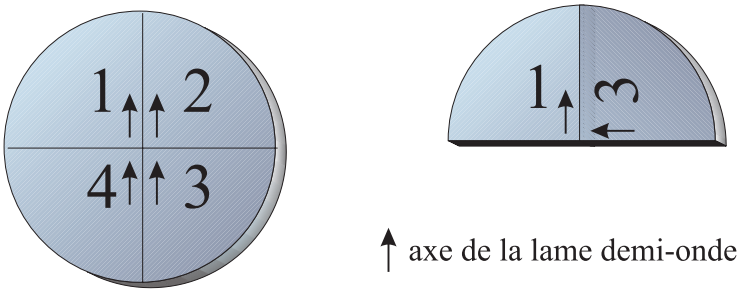

Fig. 4.16 – Conception de la lame de phase : à gauche la lame demi-onde séparée en quatre zone, à droite la réunification des zones 1 et 3 avec un angle de 90º entre les deux.

à l'une des parties (voir figure), on obtient une lame demi-onde dont la partie gauche a pour axe principal la direction $O\vec{i}$ et la partie droite la direction $O\vec{j}$. Ainsi, si l'on prend la même lumière incidente que précédemment, à la sortie la polarisation de sa partie gauche fait un angle $-\theta$ avec $O\vec{i}$ et sa partie droite un angle $-(\theta - \pi/2)$ avec $O\vec{j}$ soit un angle $-\theta + \pi$ avec $O\vec{i}$: les deux zones ont de nouveau la même polarisation mais il y a un déphasage de π entre les deux. Cette lame a été réalisée par Jeff Seckold dans le département de *Telecommunication & Industrial Physics* du *CSIRO* à Sydney, et on peut voir le résultat en figure 4.17.

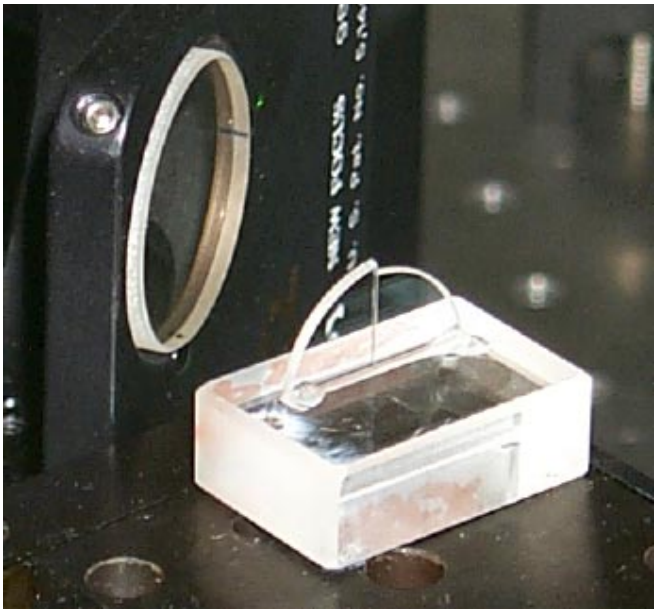

Fig. 4.17 – Photographie de la lame de phase sur son support.

On voit également sur cette photographie que cette lame était montée sur un support permettant d'effectuer une translation horizontale et orthogonale au faisceau, ainsi que d'effectuer une rotation autour de l'axe du faisceau et une rotation autour de l'axe vertical.

c Le détecteur à deux zones et le faisceau

Le détecteur utilisé est du même type que ceux décrits au chapitre 3 section B. Nous n'avons utilisé que deux quadrants de la photodiode, ce qui pour le faisceau impose une taille inférieure à $500\mu m$. Nous avons donc choisi de travailler avec un faisceau de waist $300\mu m$ au niveau de la photodiode.

La lame de phase telle que nous l'avons présentée au paragraphe précédent comporte une zone de transition entre ses parties gauches et droites. afin d'optimiser l'efficacité de notre système nous avons décidé de choisir la taille du faisceau au niveau de la lame en fonction de la taille de cette zone et des caractéristiques du détecteurs. En effet, la zone de transition entre les deux détecteurs est de $25\mu m$, cela nous donne un rapport entre cette zone et le waist du faisceau à ce niveau égal à $r = 300\mu m/25\mu m = 12$. L'optimisation du système consiste à s'adapter pour que la zone de transition de la lame soit imagée à l'intérieur de la zone de transition du détecteur, il faut donc dans le cas idéal avoir le même rapport. Le constructeur nous ayant indiqué que cette zone faisait au plus $250\mu m$, nous avons choisi un faisceau de $3mm$ au niveau de la lame. Cependant, il est nécessaire de modifier un peu le schéma présenté en section précédente : nous avons imagé le plan de la lame de phase avec une lentille de focale $f = 3cm$, mais de telle sorte qu'il y ait également une réduction de la taille d'un facteur 10 (voir le schéma final en figure 4.24). Afin de permettre un bon ajustement de ce champ proche, la photodiode avait deux degrés de liberté : un transverse et un longitudinal, et la lentille trois : deux transverses et un longitudinal.

d Les petits déplacements

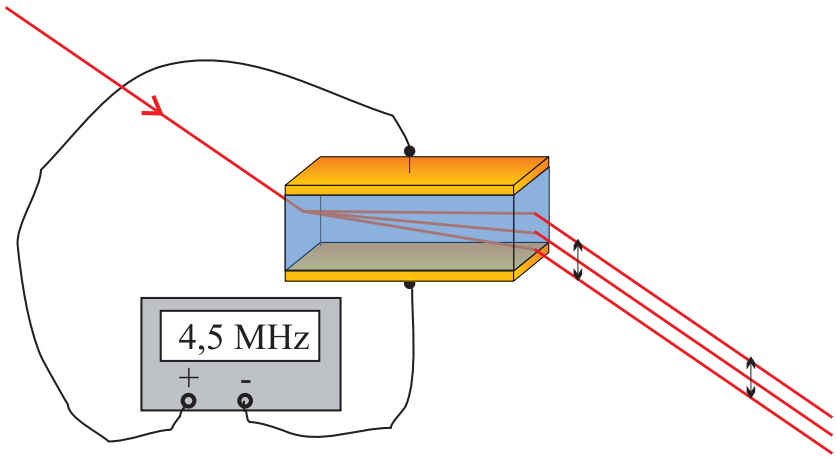

Fig. 4.18 – Modulation de la position d'un faisceau laser à $4,5MHz$ à l'aide d'un cristal biréfringeant, de deux électrodes et d'un générateur de signal.

La solution retenue pour produire les petits déplacement consiste à injecter le faisceau dans un cristal biréfringent, polarisé selon la polarisation principale du cristal mais faisant un petit un angle avec l'axe du cristal. On voit en figure 4.18 l'effet produit par un tel dispositif : le point de sortie du cristal dépend de l'indice du cristal, puisque la direction de propagation du champ dans le cristal dépend de son indice. Ainsi, si l'on applique sur le cristal à l'aide de deux électrodes un champ électrique alternatif modulé à la fréquence de l'oscillation que l'on veut produire, cela va induire une variation de l'indice du cristal et donc une variation de la position de sortie du faisceau. Le déplacement induit ne dépendant pas de la taille du faisceau, afin d'obtenir le déplacement relatif δ le plus grand possible il est utile de minimiser la taille du faisceau dans le cristal.

Fig. 4.19 – Le générateur de signal

Nous avons donc utilisé un cristal de Tantalate de Lithium de $25mm$ de longueur, et de $5 \times 5mm$ de dimensions transverses. Il était inséré entre deux lentilles de longueur focale $5cm$ placées à $10cm$ l'une de l'autre (en distance effective, car il faut tenir compte de l'indice du cristal) afin de ne pas modifier la forme transverse du faisceau. Le signal électrique était produit par un générateur dont la modernité n'a pas été mise en doute en quarante année d'existence ... (que l'on peut voir en figure 4.19). On peut voir en

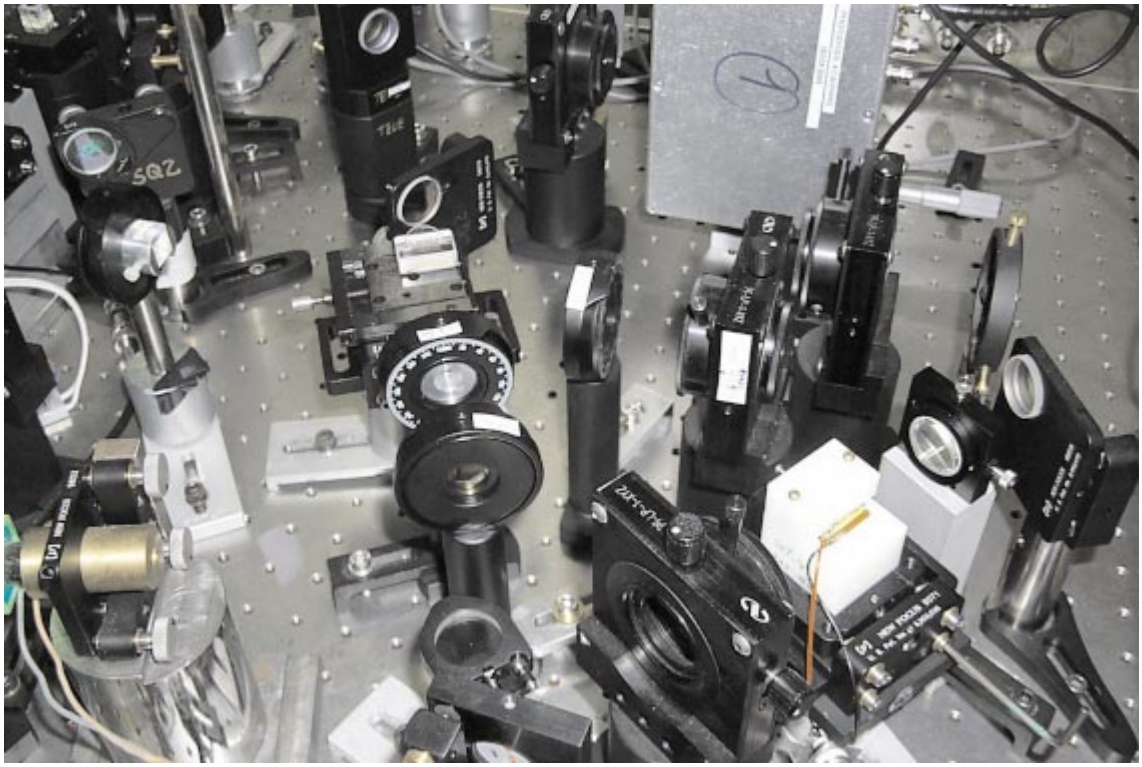

Fig. 4.20 – Photographie du montage expérimental : le support blanc en bas à droite contient le cristal, et on peut voir les deux lentilles de focale 5cm en amont et en aval de ce dernier. Au milieu de la photographie on retrouve la lame de phase, avec derrière elle la lame séparatrice.

figure 4.20 une photographie du dispositif expérimental final.

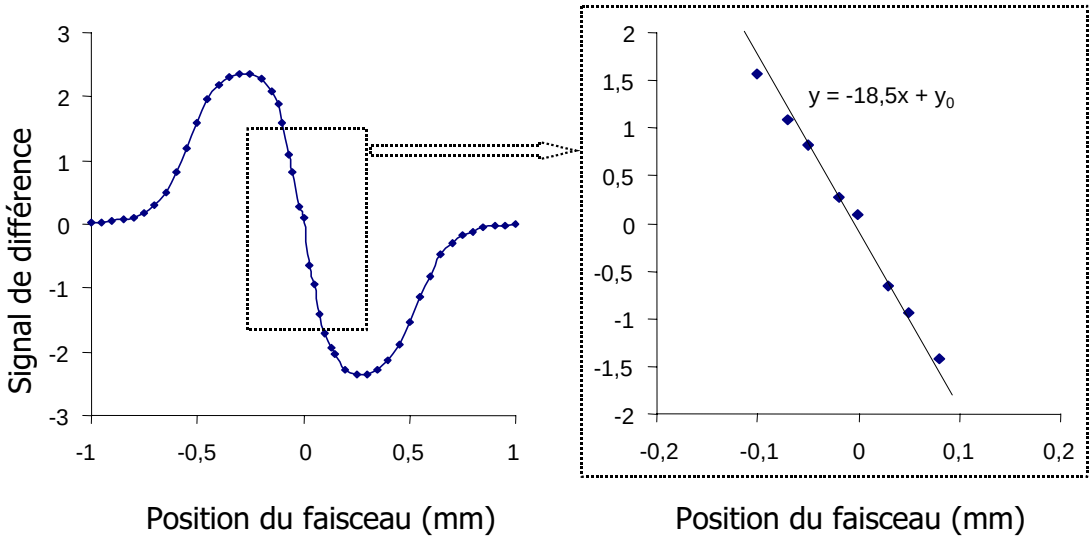

Fig. 4.21 – Signal de différence mesuré expérimentalement en fonction de la position du faisceau. A gauche, zoom de la partie centrale où l'on a représenté la tangente en 0 avec une droite.

Nous avons analysé les caractéristiques du déplacement mesuré par la photodiode à quadrants. Tout d'abord, on peut regarder le signal mesuré en fonction de la position du faisceau sur la photodiode, il est représenté en figure 4.21. On retrouve bien la courbe théorique de la figure 4.3, avec quelques défauts dus aux imperfections du cristal et à un alignement que nous n'avons pas eu le temps d'optimiser complètement. Ce signal a été obtenu avec le montage expérimental complet, et nous permet donc de calculer la pente et de prédire l'amplitude du signal de déplacement en fonction du signal mesuré. Sur la même figure, on voit l'agrandissement de la partie centrale, qui est bien linéaire avec le déplacement, et qui donne la pente de la courbe. Sachant qu'un Volt mesuré par les photodiodes correspond à un milliwatt, le signal en fonction de la position s'écrit :

$$P_{-}(mW) = 18,5\ d(mm) \tag{4-68}$$

Si l'on appelle P_{tot} la puissance totale du faisceau, on voit sur le même graphique que $P_{tot} = 2,3mW$, on peut ainsi déterminer exactement la taille effective du faisceau intervenant dans l'expression du déplacement :

$$\Delta = \frac{P_{tot}}{\left.\frac{\partial P_{-}}{\partial d}\right|_{d=0}} = 124\mu m \tag{4-69}$$

Le déplacement correspondant à la limite quantique standard, pour un temps d'intégration $T = 0,1ms$, vaut alors (en utilisant les calculs faits en début de section) :

$$d_{lqs} = \frac{\Delta}{\sqrt{P_{tot}T/\hbar\omega}} = 1,12\text{Å} \tag{4-70}$$

ce qui donne comme déplacement relatif :

$$\delta_{lqs} = 9,1.10^{-7} \tag{4-71}$$

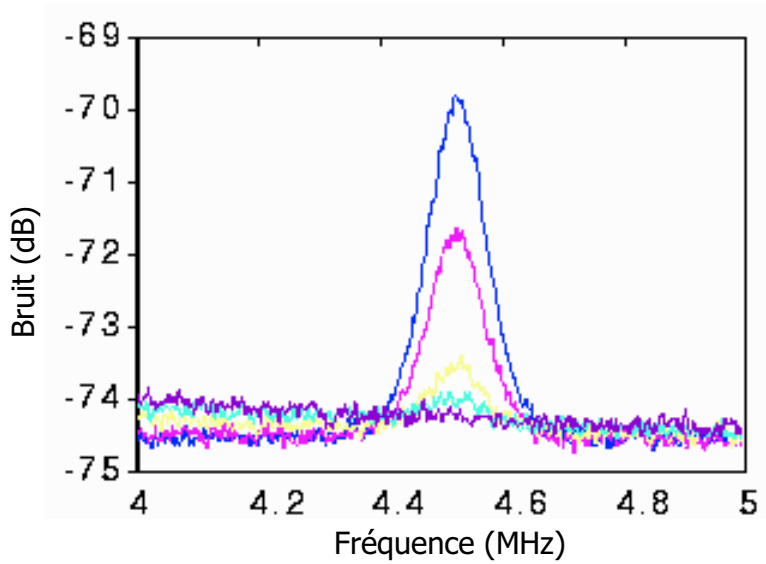

Fig. 4.22 – Partie haute fréquence du signal de différence en fonction de la fréquence d'analyse. Le pic que l'on aperçoit est une mesure de l'amplitude du déplacement. A $4,5MHz$, les courbes de haut en bas correspondent à ce que l'on mesure lorsque l'on écarte le faisceau du centre du détecteur.

Nous avons finalement regardé la réponse haute fréquence obtenue lorsque le faisceau était centré sur les deux photodiodes et l'oscillation branchée. On pouvait observer un pic à $4,5MHz$. Afin de vérifier que ce pic correspond bien à un déplacement, nous avons analysé la hauteur de ce signal en fonction de la position macroscopique du faisceau par rapport au détecteur. On voit en figure 4.22 que la hauteur du pic diminue jusqu'à devenir complètement nulle quand le faisceau est complètement centré sur un quadrant. Nous avons simultanément regardé le signal sur la somme des deux quadrants et nous avons pu observer qu'aucune modulation n'apparaissait. On peut comparer les signaux obtenus dans la figure précédente à la pente de la courbe de déplacement 4.21. Nous connaissons le niveau de bruit quantique standard grâce à la

puissance du faisceau, nous pouvons donc en déduire, avec ce qui précède, quel est le déplacement mesuré quand le faisceau est centré. En effet, si nous avons sur l'analyseur de spectre un signal V_S^{dB} avec un bruit de fond V_N^{dB} (le bruit quantique standard), la variance du signal effectivement mesuré est donné par

$$V_S = 10^{V_S^{dB}/10} - 10^{V_N^{dB}/10}. \tag{4-72}$$

Le rapport signal sur bruit est alors donné, sachant qu'il faut prendre la racine carré car l'analyseur de spectre mesure des puissances de bruit, par :

$$R_{S/B} = \sqrt{\frac{10^{V_S^{dB}/10} - 10^{V_N^{dB}/10}}{10^{V_N^{dB}/10}}} \tag{4-73}$$

où nous avons supposé que nous avions déjà supprimé tout bruit électronique. Le déplacement correspondant au signal mesuré est finalement donné par

$$d_{mesure} = d_{lqs} \times R_{S/B}. \tag{4-74}$$

La figure précédente nous permet donc de déterminer l'oscillation du faisceau quand il est parfaitement centré. Comme l'amplitude de cette oscillation reste constante pendant que l'on déplace macroscopiquement le faisceau par rapport au détecteur, on peut déduire de l'amplitude du signal HF pour une position macroscopique d_1 du faisceau la pente de la courbe DC à cette même position :

$$\frac{signalHF_{d=0}}{signalHF_{d=d_1}} = \frac{\left.\dfrac{\partial P_-}{\partial d}\right|_{d=0}}{\left.\dfrac{\partial P_-}{\partial d}\right|_{d=d_1}} \tag{4-75}$$

On peut comparer ce rapport à celui fait directement à partir de la courbe DC de la figure 4.21 et cela donne :

Position du faisceau (μm)		0	50	100	160	220
Rapport entre les pentes	DC	1	0,8	0,5	0,2	0
mesuré grâce au signal :	HF	1	0,7	0,36	0,21	0

Ce tableau montre globalement un bon accord entre les deux quantités. Néanmoins, pour un décalage relatif de $100\mu m$ entre le faisceau et le détecteur les deux valeurs sont assez différentes. On peut expliquer ce fait par le faible nombre de points sur la courbe du signal DC, ce qui implique que la mesure de la pente est très imprécise. De plus,

la forme peu régulière du champ ne permet pas d'ajuster de façon satisfaisante cette courbe avec une gaussienne. Dans ce cadre, on voit que l'évolution globale de la pente mesurée grâce au signal HF est similaire à celle mesurée grâce au signal DC, la mesure HF est donc de bonne qualité.

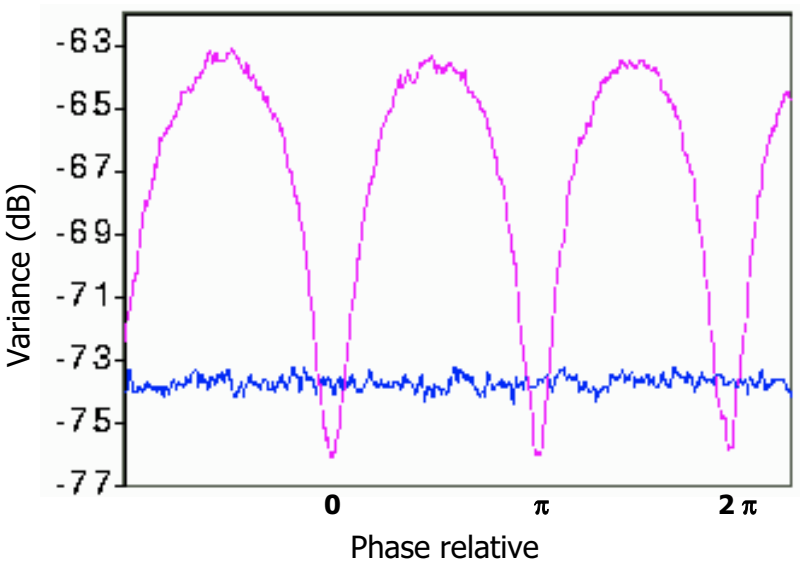

Fig. 4.23 – Bruit sur le faisceau complet, sans lame de phase, en fonction de la phase relative entre le champ cohérent et le vide comprimé. La ligne horizontale représente le bruit quantique standard.

Nous avons cherché à analyser si les petits déplacements ne détérioraient pas la réduction de bruit, dans une configuration sans la lame de phase. Dans cette configuration, la réduction de bruit apparaît sur la somme des deux quadrants, alors que le déplacement apparaît sur la différence. Afin de bien comprendre ce que nous voyons, nous avons représenté en figure 4.23 le bruit sur la somme en fonction de la phase relative entre l'oscillateur local et le vide comprimé. On balaye ainsi toutes les quadratures du vide comprimé, et on peut voir à la fois la réduction de bruit et l'excès de bruit. Lorsque nous avons voulu voir une réduction de bruit sur la somme avec le déplacement, il est apparu un pic à la fréquence du déplacement dans le spectre de la somme. Comme la somme n'est pas sensible au déplacement, nous avons déduit que ce pic venait d'une modulation de phase de l'oscillateur local. En effet, la variation d'indice dans le cristal qui sert à faire le déplacement induit également une variation de chemin optique, et donc une variation de phase. Or, la figure précédente montre que si la phase relative entre les deux champs n'est pas bien fixée, on observe une partie des quadratures non comprimées. Ceci nous interdit d'utiliser notre dispositif en l'état, car

nous serons incapables, dans une configuration complète, de faire la différence entre la partie du signal qui vient du déplacement et celle qui vient de la variation de la phase. Il est donc nécessaire de compenser cette variation de phase : nous avons donc ajouté un autre cristal en amont sur le faisceau afin de compenser parfaitement cette phase. Nous avons utilisé un cristal de $liNbO_3$ en incidence normale afin de ne pas créer de déplacement. On peut voir en figure 4.24 le dispositif expérimental complet utilisé pour les mesures :

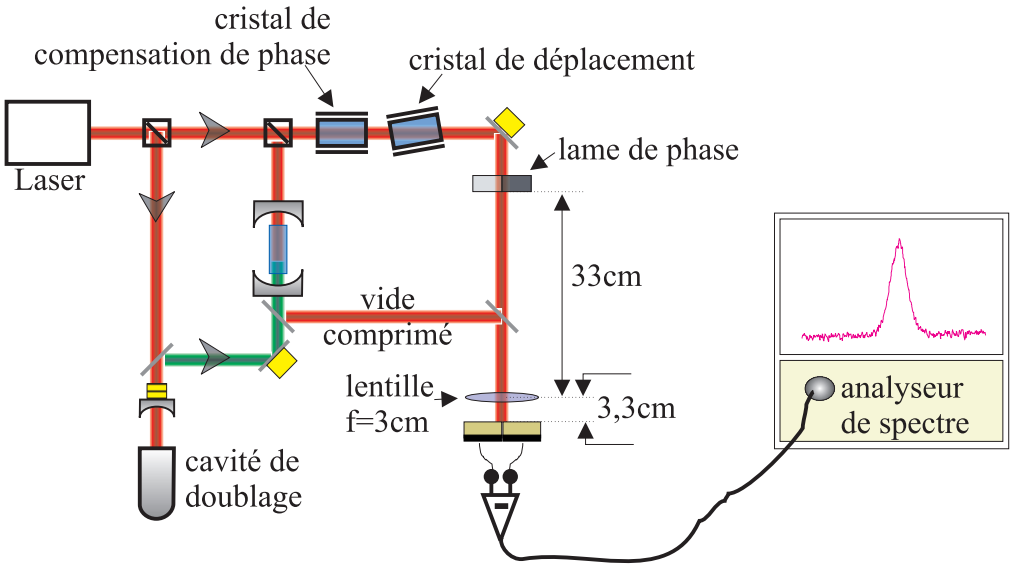

Fig. 4.24 – Schéma expérimental complet pour une mesure de petits déplacement en dessous de la limite quantique standard.

B.4.3 Résultats

a *Observation d'une réduction de bruit spatiale*

Nous avons commencé par étudier notre système avec le montage complet mais sans déplacer le faisceau, supposé bien centré sur le détecteur. Nous sommes partis d'une configuration où le faisceau était incident sur le coté de la lame de phase (et ne subissait donc pas de déphasage) et nous avions donc une réduction de bruit sur la somme des détecteurs. Afin de positionner précisément la lame de phase, nous avons enlevé le détecteur et mis à la place un appareil permettant de visualiser sur un ordinateur la forme transverse du faisceau. Nous l'avons utilisé pour faire les deux réglages suivants :

– vérifier que la lentille fait bien un champ proche du plan de la lame de phase sur le détecteur : nous avons coupé le faisceau au niveau de la lame de phase avec

une lame de rasoir et regardé l'image sur l'ordinateur, ceci a permis de repérer précisément la position du champ proche. Enfin, nous avions mesuré le waist du faisceau au niveau de la lame, et ainsi nous avons pu vérifier que nous avions bien un facteur de réduction égal à dix.

– vérifier que la lame fait un bon facteur de phase égal à π et que l'on conserve un bon recouvrement entre le champ comprimé et l'oscillateur local : pour cela, nous avons utilisé le champ infrarouge sortant de la cavité non pompée, nous avons placé la lame de phase au centre du faisceau, et nous avons regardé les interférences sur l'écran en s'arrangeant pour que les deux faisceaux aient la même puissance. En fonction de la phase de l'oscillateur local, nous avons pu observer les interférences soit sur la partie gauche, soit sur la partie droite du faisceau.

Dans les faits, la forme transverse de l'oscillateur local était modifié par la traversée des deux cristaux (dû certainement à des défauts dans le deuxième, et à un alignement imparfait) et nous n'avons pas pu obtenir un contraste en intensité sur les interférences supérieur à 90%.

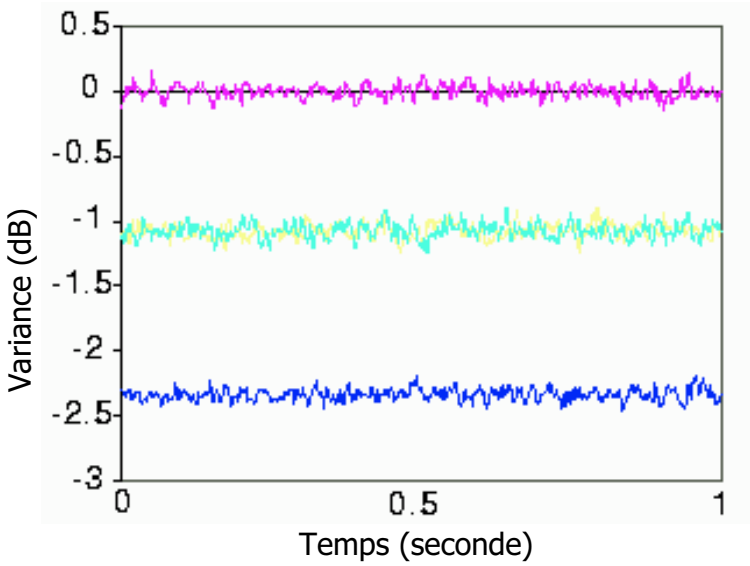

Fig. 4.25 – Réduction de bruit spatiale à 4,5MHz : la courbe supérieure est le bruit sur la somme des deux détecteurs, et se confond avec le bruit quantique standard. Les deux courbes du milieux sont les bruits respectifs de chacun des quadrants La courbe inférieure est le bruit sur la mesure de différence.

Nous avons donc placé l'ensemble des éléments et tenté de voir une réduction de bruit sur la différence. Après optimisation, les meilleurs résultats que nous avons pu

obtenir sont représenté en figure 4.25. Nous avons regardé la réduction de bruit sur un quadrant, sur l'autre quadrant, sur la somme et sur la différence. Les résultats sont présentés sur le tableau d. Nous avons bien observé la même réduction de bruit sur chacun des quadrants qui vaut $1,08dB$, alors que la somme des deux quadrants ne présente aucune réduction de bruit et que la différence est réduite sous le bruit quantique standard de $2,34dB$. Ceci constitue la première mise en évidence expérimentale d'une réduction de bruit spatiale sur un faisceau continu et intense.

Connaissant le facteur de réduction sur le faisceau total il est possible de calculer la meilleur réduction de bruit que l'on peut espérer sur le signal de différence. En effet, si nous avons un champ monomode comprimé en intensité de facteur de réduction R, il vient d'après (2-19) et en appelant $N_{1/2}$ le nombre de photon détecté par l'un ou l'autre des deux quadrants :

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta\hat{N}_{tot})^2}{N_{tot}} &= 1+\frac{R}{N_{tot}} \\ \frac{(\Delta\hat{N}_{1/2})^2}{N_{1/2}} &= 1+\frac{R}{2N_{tot}} = -1,08dB \end{aligned} \tag{4-76}$$

d'où

$$\frac{(\Delta\hat{N}_{tot})^2}{N_{tot}} = 2.10^{-1,08/10} - 1 = 0,58 = -2,52dB \tag{4-77}$$

Or le processus de renversement de la phase transpose idéalement la totalité de la réduction de bruit de la somme sur la différence. $2,52dB$ correspondent bien à ce que nous pourrions observer dans le cas idéal.

La réduction de bruit idéale est donc légèrement supérieure à celle que nous avons

quantité mesurée	Q_1	Q_2	Q_1+Q_2	Q_1-Q_2
réduction de bruit	1,08 dB	1,08 dB	0 dB	2,34 dB
réduction de bruit idéale			0 dB	2,52 dB

TAB. 4.1 – *Réduction de bruit observé sur Q_1 : quadrant 1, Q_2 : quadrant 2, leur somme et leur différence.*

mesuré, notre système est donc très efficace. Deux causes peuvent être à priori envisagées pour expliquer la différence résiduelle :

– soit la lame de phase ne génère pas un parfait déphasage de π entre la gauche et la droite du faisceau. Cependant, nous avons pu regarder à l'oscilloscope les interférences entre le vide comprimé et l'oscillateur local, et voir qu'il y avait une

parfaite opposition de phase entre les deux détecteurs. De plus, cela est confirmé par le fait que sur la somme des détecteurs on ne voit aucune variation du bruit en fonction de la phase de l'oscillateur local.

– soit le faisceau n'est pas parfaitement symétrique : nous avons pu observer que notre faisceau était légèrement abîmé par le passage à travers les cristaux, ce qui fait qu'il a été très difficile de réaliser un bon recouvrement entre le vide et l'oscillateur local. Il semble que ce soit là la bonne explication.

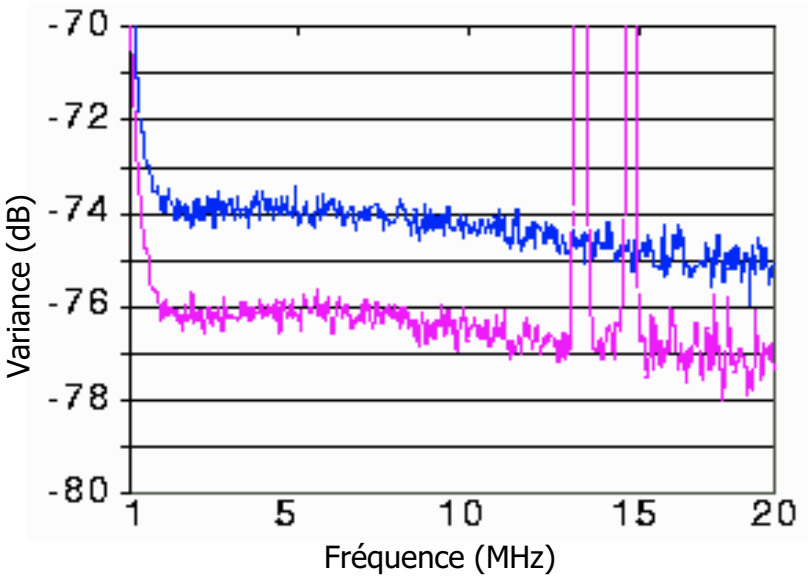

Fig. 4.26 – Bruit sur la mesure de différence en fonction de la fréquence d'analyse. La courbe du haut représente le bruit quantique standard.

La stabilité du «squeezer» nous a permis d'observer une telle réduction de bruit spatiale sur une large bande : de 1 à 20 MHz, comme on peut le voir en figure 4.26. Nous avons pu également observer de la réduction de bruit pendant des temps longs : il était possible de rester stabilisé pendant au moins une heure (la figure 4.27 montre une acquisition pendant une demi-heure, où la réduction de bruit est la meilleure que nous ayons observée : $-2,4dB$).

b *Amélioration du rapport signal/bruit*

Ces bons résultats de réduction de bruit nous ont permis d'aborder l'expérience complète de mesure de petits déplacements. Nous avons donc mis en marche les modulations des deux cristaux, et travaillé longtemps à faire disparaître tous les bruits

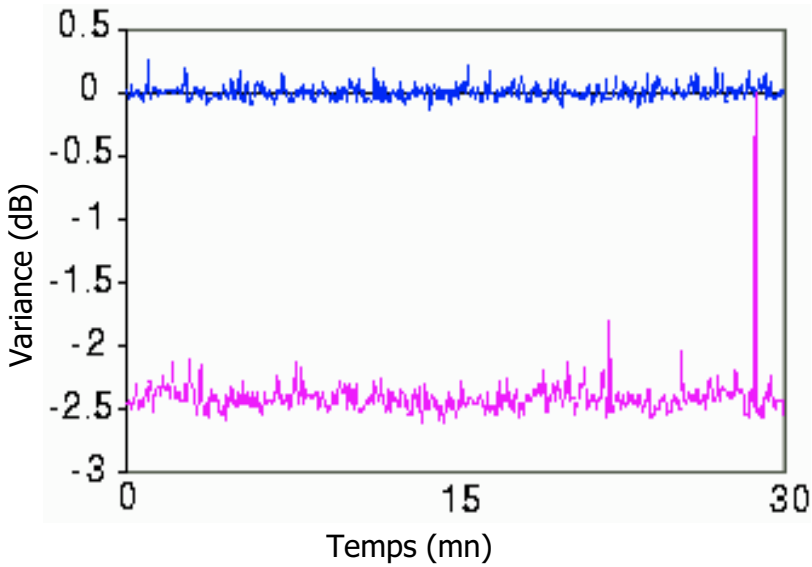

Fig. 4.27 – Bruit sur la mesure de différence à 4,5MHz en fonction du temps. La courbe du haut représente le bruit quantique standard.

électroniques venant interférer avec les mesures... Pour analyser le déplacement, nous avons placé l'analyseur de spectre dans la configuration suivante :

- Bande de résolution : 100 kHz, ce qui correspond à un temps d'acquisition de 0,01ms.
- Bande vidéo de 100 Hz
- temps d'acquisition de 530 ms.
- fréquence allant de 4 à 6 MHz.

Dans cette configuration nous avons pu observer les déplacements représentés en figure 4.28. Dans cette figure, la courbe du haut a été prise en coupant le vide comprimé, et on voit, centré sur la fréquence de $4,4MHz$, le pic de modulation correspondant au déplacement. La courbe inférieure a été prise exactement dans les même conditions, simplement en laissant passer le vide comprimé. On voit que le niveau de bruit global est diminué du fait de la réduction de bruit spatiale, et que de plus le pic correspondant au déplacement est plus important. Nous avons pu ainsi augmenter le rapport signal/bruit dans la mesure de déplacement, en utilisant un champ multimode non classique. On remarquera que nous avons fait des mesures dans des cas où les déplacements était toujours visibles, que ce soit avec ou sans réduction de bruit, car nous nous sommes simplement attaché à montrer une amélioration du rapport signal/bruit. Cette mesure ne représente donc pas la plus petite mesure de déplacement que nous avons pu faire,

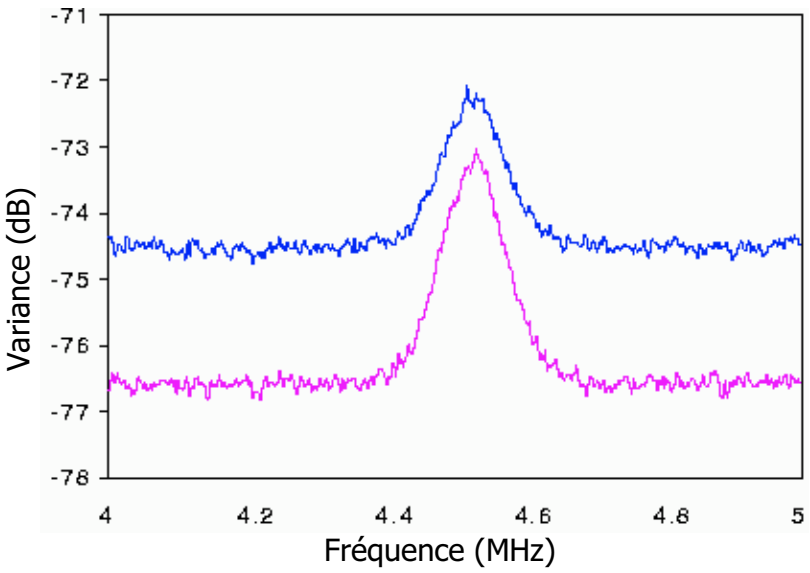

Fig. 4.28 – Mesure de petit déplacement améliorée par l'utilisation d'un faisceau non classique multimode. La courbe du haut représente la même mesure effectuée avec un faisceau monomode. Mesure faite avec une bande de résolution de 100kHz.

car cela n'a pas en soit de l'intérêt, et que nous n'avions pas optimisé notre système de détection en ce sens.

Nous avons également pu faire ces mesures avec une bande de résolution de 10 kHz, comme représenté en figure 4.29, dans ce cas on voit toujours la même augmentation du rapport signal/bruit, avec une précision supérieure du fait d'une bande de résolution plus faible. On voit que l'effet observé ne dépend pas de l'analyseur de spectre, et peut donc être appliqué aux conditions expérimentales utilisées dans d'autres système physiques. Nous avons récapitulé l'ensemble des propriétés des mesures que nous avons faites sur le tableau 4.2. Dans ce tableau, on voit l'amélioration effectivement réalisée

Fréquence d'analyse	amplitude du déplacement	Signal/bruit sans réduction	Signal/bruit avec réduction	amélioration	cas idéal
100 kHz	2.9 Å	0,68	1,2	1,7	1,7
10 kHz	1.15 Å	1.04	1,65	1,6	1,7

TAB. 4.2 – *Caractéristiques des mesures de petits déplacements, avec et sans le vide comprimé.*

dans le rapport signal sur bruit. La dernière colonne donne la valeur théorique de cette amélioration en connaissant le niveau de réduction de bruit, on voit que l'on a un excellent accord à $100kHz$, et un accord un peu moins bon à $10kHz$: à cette fréquence

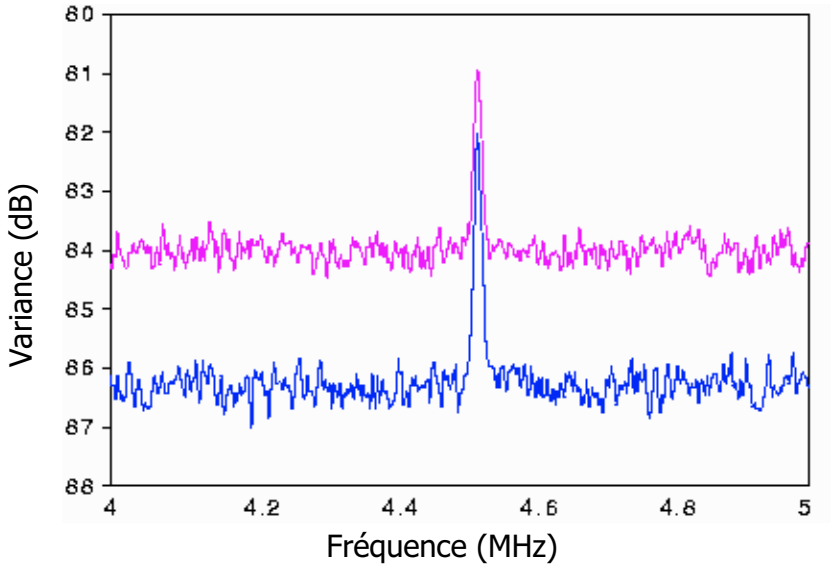

Fig. 4.29 – Même mesure que dans la figure précédente mais avec une amplitude de déplacement moins importante et une bande de résolution de 10kHz.

la mesure du déplacement est moins précise, de plus l'amplitude de la modulation étant plus faible on commence à sentir les fluctuations du générateur de signal.

B.5 Conclusion

Cette expérience représente la première mise en évidence de l'ordre spatial dans un faisceau lumineux (la première fois où l'on arrive à placer les photons «en rang par deux») et ouvre la voie à de nombreuses autres études sur les propriétés spatiales de la lumière. Notamment, nous nous sommes contentés ici d'un ordre à une dimension transverse, il semble maintenant réaliste d'envisager des expérience où les photons seraient rangés dans les deux dimensions du plan transverse.

Avec ce faisceau multimode non classique, nous avons pu faire des mesures transverses sous le bruit quantique standard, et prouvé ainsi que dans une mesure réelle de petits déplacement, utilisant la même fréquence d'acquisition et la même puissance incidente sur le détecteur, la sensibilité peut être amélioré en utilisant ce faisceau particulier. Beaucoup d'études restent à faire : notre système s'applique pour un déplacement à haute fréquence, alors que généralement les mesures sont faites à quelques kHz, il serait alors utile de produire un faisceau comprimé spatiallement à basse fréquence. En terme d'utilisation du faisceau lui-même, on voit que l'on perd 90% du champ cohérent, ainsi une mesure effectuée avec le champ cohérent total serait plus précise que celle que

nous avons faite ici. Cependant, dans un certain nombre de systèmes on est limité par la puissance que l'on peut injecter sans perturber le système en question, si dans ce cas on utilise le faisceau comprimé spatiallement ayant la puissance optimale on obtiendra effectivement une amélioration dans la mesure.

Chapitre 5

Bruit quantique dans un soliton spatial

A Introduction

Nous allons ici utiliser la méthode développée au chapitre 2 section B de calcul des fluctuations quantiques lors de la propagation dans un milieu non linéaire. Le cas auquel nous allons nous intéresser est celui du soliton spatial, et plusieurs points motivent ce choix : les milieux non linéaires, qu'ils soient d'ordre deux ou trois, on souvent été utilisés pour la production d'état quantiques particuliers. En simple propagation, on peut penser a priori que les effets quantiques vont s'accumuler et augmenter avec la longueur du milieu. On est cependant limité par la diffraction qui conduit à un élargissement rapide du faisceau. Le soliton spatial est un bon compromis : sa forme transverse constante permet de profiter des propriétés quantiques sur une distance a priori infinie. De plus, le mélange 'diffraction - effets non linéaires' permet d'espérer l'apparition d'effets quantiques transverses spectaculaires (l'autre solution, très étudiée, consiste à utiliser une fibre optique pour confiner le faisceau).

Nous allons cependant ici nous limiter à exposer les résultats de cette étude, et nous renvoyons le lecteur à la lecture de l'article [Treps 00] qui est reproduit à la fin de cette section. Notamment nous ne reviendrons pas du tout sur ce qui touche à la description des solitons, leur domaines de validité,...

B Le soliton spatial

Expérimentalement, les solitons spatiaux ont été observés depuis longtemps dans les milieux $\chi^{(3)}$ (lire notamment [Taylor 92]) et récemment dans les milieux $\chi^{(2)}$ [Stegeman 97]. Rappelons ici simplement ce qu'est un soliton spatial. Dans un milieu non linéaire, il existe un mode particulier du champ pour lequel la non-linéarité compense parfaitement les effets de la diffraction. Ainsi, le champ se propage sans subir aucune déformation, et

son enveloppe reste constante tout au long du milieu. On obtient un état stationnaire du rayonnement, du moment que l'on injecte le milieu de façon continue. Dans un milieu $\chi^{(3)}$ ce phénomène est assez courant mais pose quelques problèmes notamment de filamentation. Dans un milieu $\chi^{(2)}$ le fait qu'il n'ait été observé que récemment est simplement dû à la puissance nécessaire à son apparition et à la difficulté pour avoir des milieux $\chi^{(2)}$ de grande longueur. On se reportera à [Torner 95] pour les ordres de grandeur. Cependant, il apparaît qu'une fois que l'on dispose de la puissance nécessaire, c'est une expérience relativement facile à réaliser et ce phénomène est très robuste, notamment vis à vis des conditions initiales.

On peut voir en figure 5.1 tirée du site internet de G. Stegeman (et on lira à ce propos une revue des propriétés des solitons dans un milieu non-linéaire d'ordre 2 dans [Segev 98]) une comparaison entre la propagation d'un soliton et d'un faisceau subissant la diffraction.

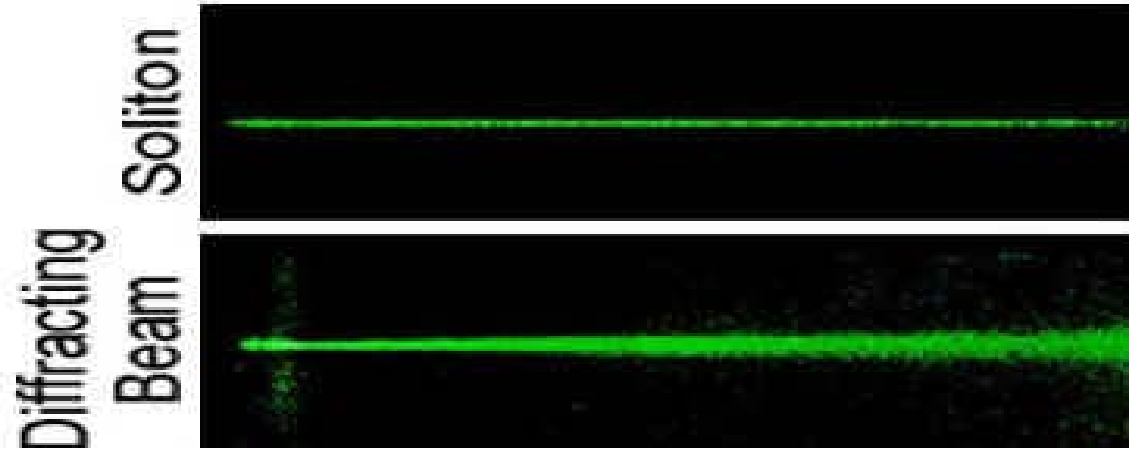

Fig. 5.1 – Comparaison entre un soliton et un faisceau divergent.

Dans les deux types de milieux, il existe des domaines de paramètres pour lesquels nous disposons de solutions analytiques, dans le cas où l'on ne considère qu'une seule dimension transverse, ρ. C'est ce que nous allons faire ici pour simplifier l'analyse.

B.1 Le soliton $\chi^{(3)}$

Un seul champ est ici impliqué dans le phénomène, que l'on peut comprendre simplement en remarquant que l'indice du milieu $\chi(3)$ dépend de l'intensité du champ. Ainsi, la forme transverse du faisceau crée une lentille par variation d'indice : c'est ce que l'on appelle l'autofocalisation. Quand on se place dans les bonnes conditions, l'autofocalisation compense exactement la diffraction. On peut donner une expression analytique de la variation transverse de l'amplitude du champ soliton en variables

adimensionnées, dans le cas d'une seule dimension transverse :

$$u(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh \rho} \tag{5-1}$$

B.2 Le soliton $\chi^{(2)}$

Dans ce cas, c'est l'interaction entre deux champs, l'un à la fréquence ω (le fondamental), l'autre à la fréquence 2ω (le second harmonique) qui est à l'origine de l'effet dit de «self trapping». On peut le comprendre en voyant que la variation d'un champ dépend du carré de l'amplitude de l'autre. Ainsi, chaque champ est alimenté préférentiellement là où l'autre est intense, ce qui induit un effet de focalisation. Pour certaines valeurs des paramètres (qui correspondent en fait au cas où il y a le même nombre de photons dans chacun des deux champs) il est possible de trouver une solution analytique. Si l'on appelle u l'amplitude transverse du fondamental et v celle du second harmonique, on obtient en variables adimensionnées [Karamzin 74, Menyuk 94] :

$$\begin{aligned} u(\rho) &= \frac{3\sqrt{2}}{2\cosh^2 \rho/2} \\ v(\rho) &= \frac{3}{2\cosh^2 \rho/2} \end{aligned} \tag{5-2}$$

Nous utiliserons ici préférentiellement cette solution analytique, mais nous regarderons aussi ce qui se passe pour d'autres valeurs des paramètres où la solution est numérique.

C Image quantique du soliton

En appliquant la méthode de calcul du bruit aux équations du milieu non linéaire, avec les champ moyens donnés précédemment, à l'aide d'une méthode numérique, nous avons maintenant à notre disposition toutes les fonctions de corrélation entre deux pixels de deux champs. Pour fixer les idées, lorsque nous parlerons du soliton $\chi^{(3)}$ nous ne mettrons pas d'indice de numéro de champ, alors que dans le milieu $\chi^{(2)}$ le 1 désignera le fondamental et 2 le second harmonique. Notons également que comme les champs moyens sont réels, il apparaît que la quadrature correspondant à $\theta = 0$ correspond à l'intensité et celle où $\theta = \pi/2$ à la phase. Nous resterons ici dans les généralités et nous intéresserons plutôt aux conséquences physiques. Pour tous les détails comme les distances de propagation utilisées où les correspondances expérimentales on se reportera à l'article reproduit en fin de chapitre. Enfin, pour ce qui est des notations,

nous nous sommes placés ici à une seule dimension transverse, r, qui bien qu'elle soit discrétisée en pixels, sera notée par souci de lisibilité comme une variable continue.

C.1 Figures de corrélation

Le soliton $\chi^{(3)}$ ne faisant intervenir qu'un seul champ n'offre pas la même liberté de corrélations que le soliton $\chi^{(2)}$ et on se reportera à l'article pour en voir les propriétés quantiques. Nous donnerons ici quelques exemples de corrélations spatiales pour le soliton $\chi^{(2)}$ et en particulier les figures de corrélations définies par (2-58) entre deux pixels de deux champs différents. Le résultat le plus intéressant est donné figure 5.2, où nous avons la corrélation entre la quadrature parallèle à l'intensité du fondamental avec celle parallèle à la phase du second harmonique.

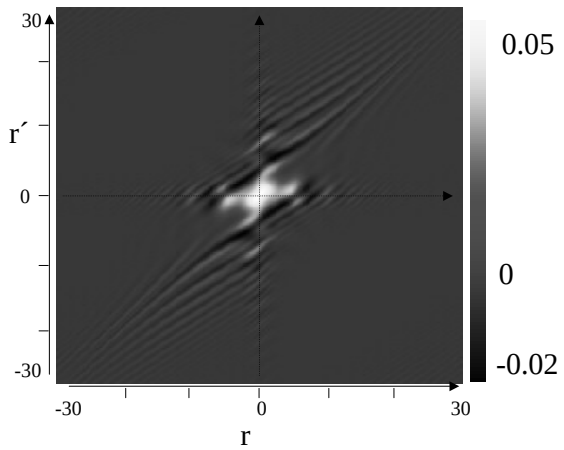

Fig. 5.2 – Fonction de corrélation normalisée entre deux quadratures du fondamental et du second harmoniques : $\langle \delta\hat{I}_0^1(r)\delta\hat{I}_{\pi/2}^2(r')\rangle_N$ *dans le soliton* $\chi^{(2)}$

Cette image amène deux principale observations. Tout d'abord, les "vagues" que l'on observe presque parallèles à la première diagonale viennent de la propagation des fluctuations sous l'influence de la diffraction. En effet, les fluctuations sont une perturbation du mode du soliton qui est stable vis à vis de ces perturbations. Elles sont donc diffractées afin de revenir sur ce mode. C'est ce que l'on observe ici indirectement sur la fonction de corrélation. D'autre part, on voit que cette figure est dissymétrique par rapport à la première diagonale : il apparaît des corrélations entre le centre du second harmonique et les 'ailes' du fondamental. Cet effet est caractéristique d'un mode à deux champs et ne peut pas être observé dans le cadre du soliton $\chi^{(3)}$.

Cependant, la valeur des corrélations, qui est normalisée à 1, peut sembler très

faible (de l'ordre de 1%). Cela est du à la taille des pixels qui n'est pas adaptée à la taille caractéristique des effets que l'on observe (cela confirme à posteriori que nos pixels sont suffisamment petits pour décrire fidèlement le phénomène). Nous pouvons donc maintenant nous intéresser à des corrélations entre des détecteurs de taille plus grande, à l'aide de la formule (2-60).

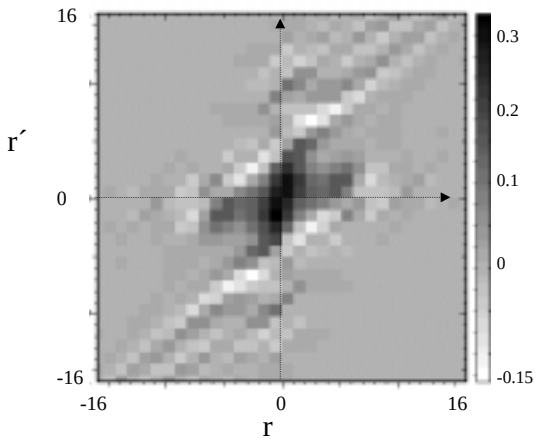

Fig. 5.3 – Même fonction de corrélation qu'en figure 5.2 mais pour des détecteurs de taille finie, soit $\langle \delta \hat{I}_0^1(D_r) \delta \hat{I}_{\pi/2}^2(D_{r'}) \rangle_N$

Sur la figure 5.3, la taille des pixels est à peu près égale au quart de la taille du soliton et les corrélations sont maintenant supérieures à 20% dans la partie centrale du soliton. Pour une taille inférieure, le niveau des corrélations est plus faible, pour une taille supérieure on perd des détails dans la forme de la figure. On voit donc qu'il existe une taille optimale pour les effets quantiques transverses dans une telle structure.

C.2 Géométrie circulaire

Les corrélations entre pixels rectangulaires distribués dans le faisceaux ne permettent pas, en général, de remplir le critère quantique défini en (1-92). Il faut pour se faire s'adapter à la géométrie cylindrique du soliton. Nous allons donc regarder notre soliton en prenant des détecteurs respectant cette géométrie, autrement dit nous allons intégrer les formules sur des anneaux dont le centre correspond au centre du soliton.

Tout d'abord, nous allons regarder les propriétés de bruit en analysant la partie centrale, ou la partie externe du soliton. Ce mode d'analyse revient à placer un diaphragme sur le faisceau avant le détecteur, comme cela est illustré en figure 5.4. Dans le cas d'un champ monomode, si l'on trace le bruit du faisceau en fonction de la taille du

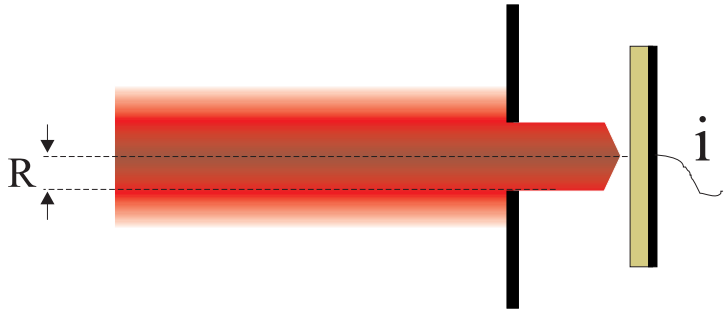

Fig. 5.4 – Mesure du centre du faisceau à l'aide d'un diaphragme

diaphragme, on observe que la variance du signal mesuré est directement proportionelle à la fraction d'intensité du faisceau, comme nous l'avons vu au chapitre 1. Dans le cas du champ second harmonique du soliton, on observe que ce n'est plus du tout le cas : la réduction de bruit optimale est obtenue pour une petite ouverture du diaphragme, comme le montre la ligne pleine de la figure 5.5 (on se reportera à l'article pour une illustration plus complète du phénomène).

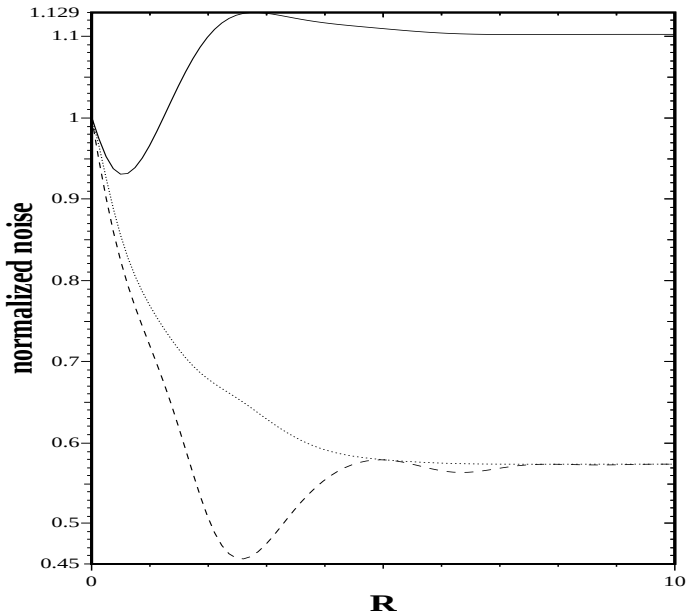

Fig. 5.5 – Ligne pleine : bruit en intensité du second harmonique en fonction de la taille du diaphragme : $\langle \delta \hat{I}_0^2 (D_R)^2 \rangle_N$. *Ligne pointillée : variance conditionnelle de ce même champ connaissant les fluctuations de phase du fondamental :* $V_{\delta \hat{I}_0^2(D_R)|\delta \hat{I}^1_{\pi/2}(D_R)}$. *Ligne tiretée : même quantité que la précédente mais connaissant en plus les corrélations avec la partie extérieure du second harmonique :* $V_{V_{\delta \hat{I}_0^2(D_R)|\delta \hat{I}^1_{\pi/2}(D_R)}|\delta \hat{I}_0^2(D-D_R)}$ *où* $D - D_R$ *représente le complémentaire du détecteur centré.*

La particularité qui va nous intéresser ici est l'aspect corrélation : en effet l'étude

sur les images nous a montré que celles-ci apparaissaient entre le centre et l'extérieur des faisceaux. Nous avons donc tracé parallèlement au bruit en intensité du second harmonique en fonction de l'ouverture du diaphragme, la variance conditionnelle de ce même champ en fonction de la même zone de la phase du fondamental, comme on peut le voir en figure 5.5. On voit sur cette figure que la variance conditionnelle est bien inférieure au bruit en intensité du champ, et est en dessous de la limite quantique standard même quand le champ de départ ne l'est pas. Nous mettons donc ici en évidence des corrélations qui sont purement dans le domaine quantique. Cependant, sur cette courbe a disparu la taille caractéristique, et le meilleur effet est obtenu en prenant la totalité du faisceau.

Nous avons donc regardé les corrélations entre le champ obtenu précédemment (la variance conditionnelle d'un centre par rapport à l'autre) avec la partie extérieure du second harmonique, et tracé une variance conditionnelle à trois champs. On voit toujours en figure 5.5 le tracé de cette nouvelle quantité, elle est bien sur inférieure à la précédente variance conditionnelle mais le plus intéressant est que l'on voit apparaître de nouveau une taille caractéristique, avec une réduction de bruit très importante. Il y a de fortes corrélations entre les parties intérieures et extérieures du champ, et elle semble définir un certain nombre de zones dont la géométrie est imposée par les effets de diffraction.

D Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre un exemple d'utilisation de la méthode de calcul des fluctuations quantiques. Le soliton spatial apparaît comme un bon candidat pour produire des images quantiques complexes et riches. Ainsi, bien que la diffraction ne déforme pas le soliton, elle reste prépondérante pour la propagation des effets quantiques. Tout l'enjeu de ces systèmes est de trouver la géométrie permettant d'observer des effets intéressants, comme nous l'avons fait en comparant la géométrie en pixels et la géométrie circulaire. D'autres études ont été faites avec des solitons numériques, et semblent donner les même résultats, cependant il est nécessaire de les poursuivre et d'adapter le modèle pour travailler avec des solitons à deux dimensions transverses.

E Article sur le bruit quantique dans un soliton spatial

PHYSICAL REVIEW A, VOLUME 62, 033816

Transverse distribution of quantum fluctuations and correlations in spatial solitons

N. Treps and C. Fabre
Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Case 74, 75252 Paris Cedex 05, France
(Received 23 December 1999; revised manuscript received 23 March 2000; published 17 August 2000)

We give in this paper a general method by which to determine the transverse spatial distribution of quantum fluctuations in a light beam as it propagates through a nonlinear medium. We apply this method to the particular case of spatial solitons that propagate without distortion in $\chi^{(2)}$ or $\chi^{(3)}$ materials. We find, for example, that in the $\chi^{(2)}$ case the central part of the soliton has lower intensity quantum fluctuations than its outer part, and that in most cases strong correlations develop among the field quadrature components measured in different areas of the transverse plane.

PACS number(s): 42.50.Lc, 42.65.Tg, 42.50.Dv

I. INTRODUCTION

During the last decade, a new field has emerged in quantum optics, which aims at studying the spatial aspects of the quantum fluctuations of the electromagnetic field. So far, the analysis has mainly been focused on the quantum spatial correlations in fields generated by parametric fluorescence [1] and containing much fewer than one photon per mode on average, or in the more macroscopic fields generated by parametric amplification or oscillation inside an optical cavity [2,3]. Many interesting effects have been predicted, concerning, among others, spatial interference patterns measured in correlation functions [1], the spatial repartition of squeezing in degenerate parametric amplification [4], and the concept of quantum images [5] or of quantum correlated images [6]. In most cases, the nonlinear effect is small for a single propagation of light over the length of the crystal, and macroscopic effects can be reached only by the use of the optical cavity as a recycling tool. The cavity has propagation eigenmodes, which of course play a key role in the quantum spatial effects.

Our aim in this paper is to study the spatial quantum effects associated with the propagation of light in a nonlinear medium without the help of an optical cavity, but also without any restriction on the propagation length. Our hope is that the accumulated and combined effects of diffraction and nonlinearity over long distances will enhance the quantum correlations and also the local quantum noise reduction effects.

In most cases, the interaction length in a bulk nonlinear medium is limited to the diffraction length of the beam in the medium, which is usually short, on the order of a few millimeters, because one needs to strongly focus the light in the nonlinear medium in order to obtain sizable nonlinear effects in a single path. There are at least two ways to beat the limiting effect of diffraction on the nonlinear interaction length: to use guided modes in nonlinear waveguides, or to reach a regime of spatial soliton propagation, where the nonlinearity creates its own waveguide.

The classical properties of spatial solitons have been extensively studied, theoretically and experimentally, in third-order [7] and more recently in second-order [22] nonlinear materials, and they are now well known. The purpose of this paper is to determine the quantum properties of these objects, which, to the best of our knowledge, are still unknown. Only temporal solitons have been considered in this respect, and nonclassical temporal solitons, having fluctuations below the standard quantum limit, have been experimentally produced [8,9]. We will see in the following that there exist some similarities between the quantum properties of temporal solitons and those of spatial solitons.

The structure of this paper is as follows. In Sec. II, we describe in very general terms the method that we use to determine the spatial distribution of quantum fluctuations for a field propagating inside a nonlinear medium. In Sec. III, we briefly recall the main properties of $\chi^{(3)}$ and $\chi^{(2)}$ spatial solitons that are useful for our analysis. In Sec. IV, we present different interesting phenomena that are found when one applies the general method of Sec. II to the determination of the quantum spatial fluctuations and correlations within such spatial solitons.

II. GENERAL METHOD

We present here the outline of the method allowing us to determine the spatial distribution of quantum fluctuations in the regime of free propagation. As we will apply it to the two different cases of $\chi^{(2)}$ and $\chi^{(3)}$ solitons, we will present the method in the general case of a nonlinear coupling between n monochromatic complex electric fields of frequency ω_i, written as $E_i(\vec{r},z)e^{i(k_i z-\omega_i t)}$, where z is the main propagation direction, $k_i=n_i\omega_i/c$ the longitudinal k vector (n_i being the linear index of refraction of the medium at frequency ω_i), and $\vec{r}$ the position in the transverse plane.

A. Propagation equations for the fluctuations

Within the slowly varying envelope, paraxial, and scalar approximations, the coupled propagation equations for the classical field envelopes E_i are [10]

$$2ik_i\frac{\partial}{\partial z}E_i(\vec{r},z)+\Delta_{\vec{r}}E_i(\vec{r},z)=F_i(E_1,\ldots,E_n), \qquad (1)$$

where $\Delta_{\vec{r}}$ is the transverse Laplacian and $F_i(E_1,\ldots,E_n)$ a term proportional to the nonlinear polarization created in the medium at frequency ω_i by the different field Fourier components. We will assume that we are able to determine, by

 ©2000 The American Physical Society

analytical or numerical means, the solutions of Eq. (1), which we will call $\overline{E}_i(\vec{r},z)$ $(i=1,\ldots,n)$.

Coming now to the same problem, but treated at the quantum level, it is possible to show using the methods of quantum optics in the Wigner representation [12,11], also called the ''semiclassical approach'' [13–16], that one can use the classical solution $\overline{E}_i(\vec{r},z)$ to determine the quantum fluctuations within the small quantum fluctuation limit. More precisely, let us write the quantum positive frequency field operator $\hat{E}_i(\vec{r},z)$ as

$$\hat{E}_i(\vec{r},z)=\langle\hat{E}_i(\vec{r},z)\rangle+\delta\hat{E}_i(\vec{r},z), \tag{2}$$

where $\delta\hat{E}_i(\vec{r},z)$ is the local quantum fluctuation operator of the field at frequency ω_i, the total electric field Hermitian operator $\hat{E}(\vec{r},z)$ being given by the sum $\Sigma_i[\hat{E}_i(\vec{r},z)e^{i(k_iz-\omega_it)}+\hat{E}_i^+(\vec{r},z)e^{-i(k_iz-\omega_it)}]$. If the fluctuations remain small compared to the mean fields, which is true as long as the field contains a macroscopic number of photons, then the quantum mean field is nothing other than the field given by classical nonlinear optics, $\langle\hat{E}_i(\vec{r},z)\rangle=\overline{E}_i(\vec{r},z)$, and the fluctuations $\delta\hat{E}_i(\vec{r},z)$ obey a simple propagation equation, obtained by linearizing the classical equation of propagation (1) around the mean field, namely,

$$2ik_i\frac{\partial}{\partial z}\delta\hat{E}_i(\vec{r},z)+\Delta_{\vec{r}}\delta\hat{E}_i(\vec{r},z)=\sum_j\left(\frac{\partial F_i}{\partial E_j}\right)_{E=\overline{E}}\delta\hat{E}_j(\vec{r},z)+\sum_j\left(\frac{\partial F_i}{\partial E_j^*}\right)_{E=\overline{E}}\delta\hat{E}_j^+(\vec{r},z). \tag{3}$$

B. Green's-function approach

A major advantage of the propagation equation (3) is its linear character, so that one can find its solution in a given transverse plane $z=z^{out}$ as a linear combination of the input fluctuations in plane $z=z^{in}$:

$$\delta\hat{E}_i(\vec{r},z^{out})=\sum_j\int\int d^2r'G_i^j(\vec{r},\vec{r}')\delta\hat{E}_j(\vec{r}',z^{in})+\sum_j\int\int d^2r'H_i^j(\vec{r},\vec{r}')\delta\hat{E}_j^+(\vec{r}',z^{in}), \tag{4}$$

where $G_i^j(\vec{r},\vec{r}')$ and $H_i^j(\vec{r},\vec{r}')$ are the Green's functions associated with the linear propagation equation (3). Equation (4) is a kind of Huygens-Fresnel integral, which describes the propagation of the quantum fluctuations within the small fluctuation limit.

Let us assume for the sake of simplicity that the input field fluctuations are those of a vacuum field, or of a coherent field. They obey the following relations [2] in the scalar field and paraxial approximation:

$$\langle\delta\hat{E}_j(\vec{r},z^{in})\delta\hat{E}_k^+(\vec{r}',z^{in})\rangle=C_j\delta_{jk}\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}'),$$
$$\langle\delta\hat{E}_j(\vec{r},z^{in})\delta\hat{E}_k(\vec{r}',z^{in})\rangle=0,$$
$$\langle\delta\hat{E}_j^+(\vec{r},z^{in})\delta\hat{E}_k(\vec{r}',z^{in})\rangle=0,$$
$$\langle\delta\hat{E}_j^+(\vec{r},z^{in})\delta\hat{E}_k^+(\vec{r}',z^{in})\rangle=0 \tag{5}$$

(where $C_j=\omega_j/2\varepsilon_0L$, L being the length along Oz of the quantization box).

From Eqs. (3) and (5), one can easily derive the correlation function between the quantum fluctuations of the different operators. One finds, for example,

$$\langle\delta\hat{E}_i(\vec{r},z^{out})\delta\hat{E}_k^+(\vec{r}',z^{out})\rangle=\sum_j C_j\int\int d^2r_1G_i^j(\vec{r},\vec{r}_1)G_k^{j*}(\vec{r}',\vec{r}_1). \tag{6}$$

Any correlation function or variance is thereby a given combination of the Green's functions $G_i^j(\vec{r},\vec{r}')$ and $H_i^j(\vec{r},\vec{r}')$, which we must now calculate. To do so, one replaces in the propagation equation (3) the operators $\delta\hat{E}_i(\vec{r},z)$ and $\delta\hat{E}_i^+(\vec{r},z)$ by classical functions $\delta E_i(\vec{r},z)$ and $\delta E_i'(\vec{r},z)$: $G_i^j(\vec{r},\vec{r}')$ is then the solution of this equation when one takes the following initial conditions:

$$\delta E_k(\vec{r},z^{in})=\delta_{jk}\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}'),$$
$$\delta E_k'(\vec{r},z^{in})=0. \tag{7}$$

$H_i^j(\vec{r},\vec{r}')$ is the solution of the same equation with initial conditions for $\delta E_k(\vec{r},z^{in})$ and $\delta E_k'(\vec{r},z^{in})$ exchanged. The two Green's functions are then approximately evaluated by numerical techniques: one discretizes the transverse plane and one calculates using the split-step method [17] the solution of propagation equation (3) with, as an initial condition, 1 on a given pixel and zero on all the others. One must also choose the size of the transverse grid large enough compared to the soliton radius to avoid any spurious effect due to the periodic boundary condition imposed at the limits of this grid by the fast Fourier transform (FFT) procedure.

C. Photocurrent fluctuations at the crystal output

In order to measure the local field fluctuations, we use a photodetector that has a quantum efficiency 1 and is sensitive only to the field component of frequency ω_j. Let z^{out} be the position of the end face of the nonlinear medium, assumed to be covered by an antireflection coating. The photodetector is placed at position z^{out}, immediately against this end face. If it has a very small area dS around the point $\vec{r}$, the standard quantum photodetection theory implies in the small fluctuation limit that the photocurrent fluctuations in direct photodetection, $\delta\hat{I}_j(\vec{r})$, are given by

$$\delta\hat{I}_j(\vec{r})=\overline{E}_j(\vec{r},z^{out})dS\sum_i \int\int d^2r_1[A_j^i(\vec{r},\vec{r}_1)\,\delta\hat{E}_i(\vec{r}_1,z^{in}) + \text{H.c.}] \tag{8}$$

in the case where the mean field $\overline{E}_j(\vec{r},z^{out})$ is real (which is the case for the analytical solitons given in Sec. III), $A_j^i(\vec{r},\vec{r}')$ being the following combination of the G and H Green's functions:

$$A_j^i(\vec{r},\vec{r}')=G_j^i(\vec{r},\vec{r}')+H_j^i(\vec{r},\vec{r}')^*. \tag{9}$$

One can also use a balanced homodyne scheme, with the help of a local oscillator field of amplitude $E_{loc}(\vec{r})=|E_{loc}(\vec{r})|e^{i\theta}$, in order to measure the local fluctuations of a given quadrature component. Provided that the local oscillator amplitude is much larger than that of the field being measured, the photocurrent fluctuations are given in this case by

$$\delta\hat{I}_j(\theta,\vec{r})=|E_{loc}(\vec{r})|dS\sum_i C_i\int\int d^2r_1[B_j^i(\theta,\vec{r},\vec{r}_1) \times\delta\hat{E}_i(\vec{r}_1,z^{in})+\text{H.c.}], \tag{10}$$

$B_j^i(\theta,r,r')$ being given by

$$B_j^i(\theta,r,r')=e^{i\theta}G_j^i(r,r')+e^{-i\theta}H_j^i(r,r')^*. \tag{11}$$

In particular, when $\theta=0$ or $\pi/2$, the photocurrent fluctuations give a signal proportional to the quadrature components parallel or orthogonal to the mean amplitude, which are the amplitude and phase quadrature fluctuations. Knowing these local photocurrent fluctuations as a function of the input fluctuations $\delta E_i(\vec{r},z^{in})$ from Eqs. (8) and (10) and the input correlation functions (5), one can then derive the value of the correlation function between the photocurrents at two different points, or the local photocurrent variance. It is also possible to determine the correlation function or the local variance in the case of large area photodetectors by integrating these expressions over the detector surface. For example, the photocurrent variance directly measured by a photodetector of large area S is equal to

$$\langle\delta I_j^2(S)\rangle=\sum_i C_i\int\int_S d^2r\int\int_S d^2r'\int\int d^2r_1 \times\overline{E}_i(\vec{r},z^{out})\overline{E}_i(\vec{r}',z^{out})A_j^i(\vec{r},\vec{r}_1)A_j^i(\vec{r}',\vec{r}_1)^*. \tag{12}$$

III. SPATIAL SOLITONS: MEAN VALUES

The method presented in the previous section can be applied to any configuration of fields propagating in a nonlinear medium. We will consider in the present paper the case of spatial solitons, which are particular transverse configurations of the different fields having the property that their transverse intensity distribution is invariant along the z propagation axis. For such configurations, the defocusing effect of diffraction is balanced by the focusing effect due to nonlinearity. These configurations exist, in particular, for second- and third-order nonlinearities. We will recall their properties in the two following subsections.

A. $\chi^{(3)}$ spatial soliton

Let us consider the case of a medium having an intensity-dependent index of refraction: $n=n_0+n_2|E|^2$. The complex envelope $E(\vec{r},z)$ of a monochromatic field $E(\vec{r},z)e^{i(kz-\omega t)}$, with $k=n_0\omega/c$, obeys the propagation equation [10]

$$i\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{1}{2k}\Delta_{\vec{r}}E+n_2\frac{\omega}{c}|E|^2E=0. \tag{13}$$

We will restrict our study in the following to the simpler case of a single transverse dimension x. Then Eq. (13) can be written in the universal form

$$i\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-u+|u|^2u=0 \tag{14}$$

when one uses the adimensional quantities u, ζ, and r depending on a free scaling parameter η (giving the inverse of the diffraction length),

$$\zeta=\eta z,$$
$$r=x\sqrt{2\eta k},$$
$$u=\sqrt{\frac{kn_2}{n_0}}\frac{E}{\sqrt{\eta}}e^{-i\zeta}. \tag{15}$$

Equation (15) has the well-known ζ-invariant hyperbolic secant solution [18]

$$u=\frac{\sqrt{2}}{\cosh r}. \tag{16}$$

Such solitons have been observed for a long time in various circumstances. To fix the orders of magnitudes in the numerical simulations so that they correspond to realistic cases, let us mention the experiment described in [19], performed in the case of one transverse dimension using a plane waveguide of thickness 4 μm. The spatial soliton had a width of 15 μm for a power of 400 kW. In our reduced units, this corresponds to a propagation parameter $\zeta=1$ for a propagation in Schott glass ($n_2=3.4\times10^{-16}$ cm^2 W^{-1}) over a length of 1.4 mm.

B. $\chi^{(2)}$ spatial soliton

In a $\chi^{(2)}$ medium, the complex envelopes of a fundamental field $E_1(\vec{r},z)e^{i(k_1z-\omega t)}$ and a second-harmonic field $E_2(\vec{r},z)e^{i(k_2z-2\omega t)}$ are coupled through the following set of equations [10], in the case where there is no walk-off:

$$2ik_1\frac{\partial}{\partial z}E_1(\vec{r},z)+\Delta_{\vec{r}}E_1(\vec{r},z)=-2\frac{\omega^2}{c^2}\chi^{(2)}E_1^*E_2e^{-i\Delta kz};$$

$$2ik_2\frac{\partial}{\partial z}E_2(\vec{r},z)+\Delta_{\vec{r}}E_2(\vec{r},z)=-4\frac{\omega^2}{c^2}\chi^{(2)}E_1^2e^{i\Delta kz} \quad (17)$$

with $\Delta k=2k_1-k_2$. Here also we will limit our analysis to the case of a single transverse dimension x. Equation (17) can also be written in a universal form [20],

$$i\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\alpha u+u^*v=0,$$

$$i\sigma\frac{\partial v}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\sigma(2\alpha+\beta)v+\frac{1}{2}u^2=0, \quad (18)$$

when one introduces the scaling parameter η as in the $\chi^{(3)}$ case, and a free longitudinal phase shift parameter α, setting

$$\zeta=\eta z,$$

$$r=x\sqrt{2\eta k_1},$$

$$\sigma=\frac{k_2}{k_1},\quad \beta=\frac{\Delta k}{\eta},$$

$$u=2\frac{\omega^2\chi^{(2)}}{k_1c^2}\frac{E_1}{\eta}e^{-i\alpha\zeta},$$

$$v=\frac{\omega^2\chi^{(2)}}{k_1c^2}\frac{E_2}{\eta}e^{-i(2\alpha+\beta)\zeta}. \quad (19)$$

Equations (18) have an infinite set of ζ-invariant solutions, even in the diffraction-free case [21], each one giving a precise value to the ratio between the powers of the fundamental and second-harmonic fields. Among these solutions, one is interesting for computational reasons: it is the only one known so far that has an analytical expression. It corresponds to the particular case $\alpha=1$, $\sigma(2\alpha+\beta)=1$, and is given by (Fig. 1)

$$u=\frac{3\sqrt{2}}{2\cosh^2 r/2},$$

$$v=\frac{3}{2\cosh^2 r/2}. \quad (20)$$

For this analytical soliton, the ratio between the second-harmonic power and the fundamental power is 2 (''equiphotonic'' case), and the scaling parameter η has a well-defined value $\eta=k_2(2k_1-k_2)/(k_1-2k_2)\approx-2\Delta k/3$. In this case, the soliton half width at half maximum is 1.21 in intensity and 1.76 in amplitude. When the relation between the scaling parameter and the phase mismatch is not fulfilled, the soliton exists, but is no longer analytical. Its shape remains almost the same as Eq. (20). We will therefore use in the following the analytical soliton (20) as a typical example, keeping in mind that the results obtained using a soliton corresponding to neighboring parameters should not differ appreciably from those derived with the help of the analytical soliton.

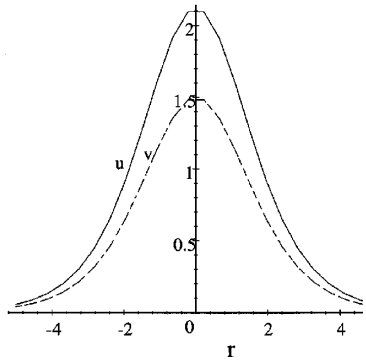

FIG. 1. Amplitudes of the fundamental field u (full line) and the second-harmonic field v (dashed line) for the equiphotonic $\chi^{(2)}$ soliton (particular case of a single transverse dimension), in the dimensionless units of Eq. (20).

These $\chi^{(2)}$ solitons have been observed only recently [22]. Here again, we will fix the orders of magnitudes using the experiment described in [23], even though it was not made in the case of one transverse dimension. The spatial soliton had a width of 20 μm for input irradiance of roughly 50 GW/cm^2. In our reduced units, this corresponds to a propagation parameter $\zeta=1$ for propagation in the potassium titanyl phosphate (KTP) nonlinear crystal over a length of 0.3 mm.

IV. SPATIAL DISTRIBUTION OF SQUEEZING

Applying the methods of Sec. II, we are now able to determine the spatial quantum properties of the solitons defined in Sec. III. We give in the following some striking quantum features of the spatial solitons deduced by this procedure.

A. Squeezing on the total beam

In $\chi^{(3)}$ media, when one neglects diffraction, i.e., in the plane wave case, the nonlinear interaction produces a significant squeezing, not on the intensity, but on a given quadrature component. The noise reduction on this quadrature increases monotoically with the propagation distance ζ [24]. We can compare this well-known prediction of the plane wave model to the spatial soliton case by using the methods of Sec. II C in the case of a photodetector having an area much larger than the soliton spot. This corresponds to the usual case of measurement over the entire transverse plane, but in the situation where diffraction is fully taken into account during the propagation. Figure 2 gives the photocurrent noise calculated from the formulas given in Sec. II C, normalized to shot noise, on the soliton quadrature component that provides the minimum noise (''best squeezing''), as a function of ζ. One observes that the squeezing increases up

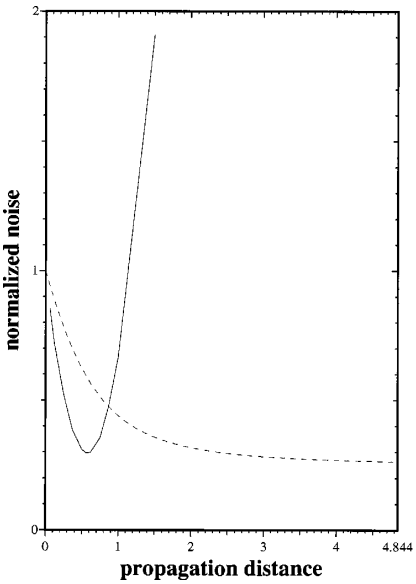

FIG. 2. Best squeezing observed on the $\chi^{(3)}$ soliton in the total transverse plane, as a function of normalized propagation distance ζ (the value 1 corresponds to the shot noise level). The dashed line corresponds to the plane wave case. The propagation distance variable is set so that both solitons have the same nonlinear phase (i.e., the factor η is taken equal to the phase factor of the plane wave case).

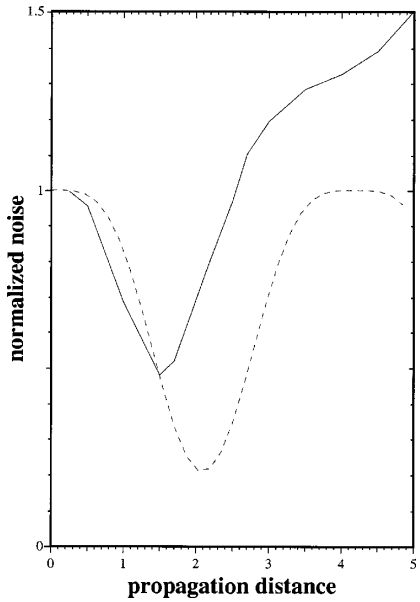

FIG. 3. Intensity noise, normalized to shot noise observed on the $\chi^{(2)}$ soliton (fundamental field) in the total transverse plane, as a function of normalized propagation distance ζ. The dashed line corresponds to the plane wave soliton case. The propagation distance variable is set in a similar way as in the $\chi^{(3)}$ case.

to a value roughly equal to 70%, then decreases when $\zeta > 0.6$: the diffraction thereby degrades the quantum noise reduction for long propagation distances.

In $\chi^{(2)}$ media, and in the plane wave case, when one starts at $\zeta = 0$ from the fundamental field only, second-harmonic generation leads to a gradually increasing intensity squeezing on the total fundamental field [25], which becomes almost perfect at long propagation lengths [26]. The situation is different when one starts from nonzero fundamental and second-harmonic fields. There exists a ''plane wave soliton'' when the ratio between the two amplitudes is $\sqrt{2}$ [27]: the intensity of the two fields is independent of ζ, because of the exact balance between the simultaneous effects of frequency doubling and parametric downconversion. In this case, one can show [28] that the squeezing oscillates with the propagation length, and reaches a maximum value of 80%.

In the analytical soliton case of Eq. (20), one can also determine the photocurrent fluctuations on a photodetector of very large area. Figure 3 gives the intensity noise on the total fundamental field, normalized to shot noise, as a function of ζ. One observes, as in the $\chi^{(3)}$ soliton case, that diffraction reduces the quantum noise reduction effect on the total beam, noise that eventually grows above the standard quantum limit for long propagation lengths. This conclusion seems to be general and not restricted to the soliton case. This is due to the coupling by diffraction of the measured area to many empty modes, which bring their own vacuum fluctuations.

B. Local quantum fluctuations

Formula (12) and the analogous formula derived from Eq. (10) for the case of balanced homodyne detection allow us to determine the photocurrent fluctuations measured with photodetectors having a surface S of any area and shape. The minimum area for which our approximate calculation gives a physical result is the pixel area, having a size equal to the transverse discretization length used to calculate the Green's functions G and H. In our calculation, the pixel size is 0.125 in our adimensional units. Figure 4 gives, for a given propagation length, the best squeezing in the $\chi^{(3)}$ soliton case, measured on a pixel located at position r, together with the angle θ of the quadrature component yielding the minimal value of the recorded noise. For this propagation length, the optimal squeezing on the total beam is 70%. One notes that the optimum angle varies with the position, in a way very simular to what is obtained in temporal solitons, where the best squeezing angle depends on the exact measurement time [29], and that the squeezing is reduced by a large factor when one measures such a small fraction of the beam. Let us also note that the noise reduction is very small: this is due to the fact that it is measured by a very small photodetector, as we will see now.

In the case where the field is in a single transverse mode state of field amplitude $u_i(r)$ (i.e., when it is described by a state vector tensor product of the vacuum in all modes except u_i), one knows that partial photodetection is strictly equivalent to the effect of a lossy medium with a transmission coefficient equal to the proportion of intensity actually measured in the partial photodetection [30]: for a light beam that

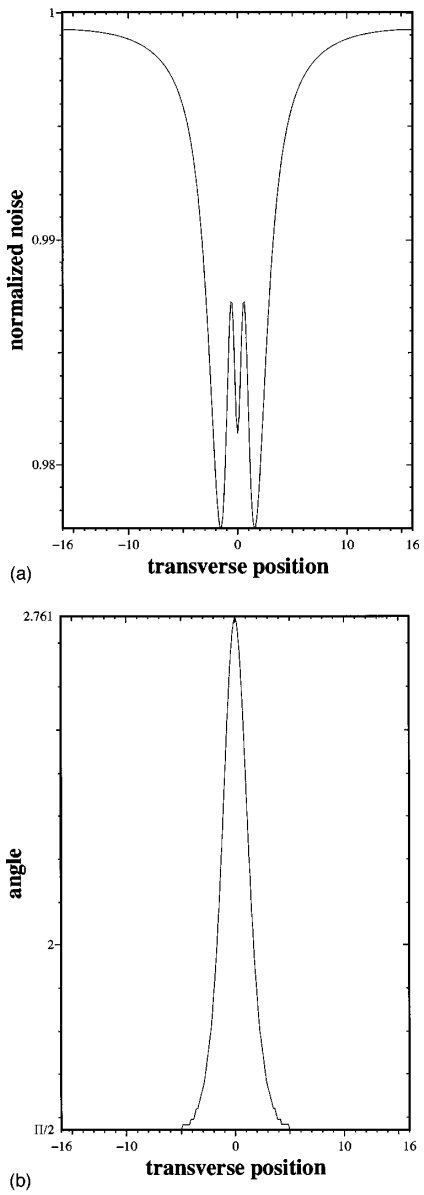

FIG. 4. (a) Best squeezing (with respect to θ), normalized to shot noise, observed on the $\chi^{(3)}$ soliton for a given normalized propagation distance $\zeta=0.62$ and on a pixel of minimum size as a function of its transverse position r; (b) angle θ in radians of the quadrature component yielding the minimal value of the recorded noise as a function of r ($\theta=0$ corresponds to the amplitude quadrature, and $\theta=\pi/2$ corresponds to the phase quadrature).

is squeezed when measured on the whole transverse plane, the squeezing is reduced when the region of measurement is reduced, and the noise tends to shot noise when the detection area becomes very small. Let us stress that a single mode $u_i(r)$ can have an arbitrary shape, and in particular that of

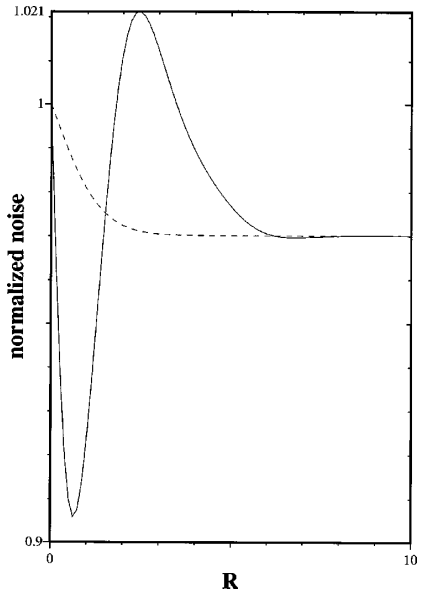

FIG. 5. Variation of the normalized intensity noise of the second-harmonic field in the $\chi^{(2)}$ case, for a given propagation length $\zeta=2.5$, measured with a photodetector centered on the soliton center $r=0$ and of half-length R, as a function of R. The dashed line gives the intensity noise for a single mode field having the same mean intensity distribution and the same total squeezing.

the solitons given in the preceding section. It is therefore very interesting to determine the variation of squeezing in the soliton case when the size of the detector is changed whereas its center is kept fixed, in order to point out precisely the differences between the single mode case and the actual transverse multimode case under study, differences that cannot appear in the mean fields but only in the noise or the correlations [31]. We give in Fig. 5 the variation of the intensity noise of the second-harmonic field in the $\chi^{(2)}$ case, for a given propagation length, measured with a photodetector centered on the soliton center and of half-length R. This corresponds to the simple experiment where a diaphragm of variable radius R is put in front of the photodetector. When R is very small, the measured fluctuations are at the shot noise level, as expected, and, when R is much larger than the soliton radius, they reach the value (below the standard quantum limit) that would be measured by integrating over the whole transverse dimension. But one observes that the variation between these two limits is not monotonic, as it would be for a single mode beam of the same mean field (given by the dashed line): when R is decreased, one first gets an increase of the noise when the edges of the diaphragm reach the far wings of the soliton, and then a sharp drop of the noise to a minimum value of 10% below the shot noise level when just the center of the soliton is measured. The noise then goes back to the shot noise limit when the measured zone is very small. The center of the soliton has thereby smaller intensity fluctuations than its wings, so that there is an optimum size for the photodetector, on the order of the soliton radius. We

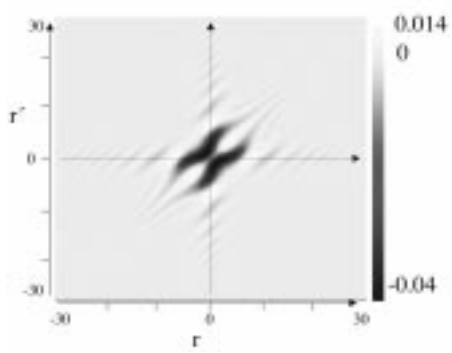

FIG. 6. Normalized autocorrelation function $\langle \delta I(\theta,r)\,\delta I(\theta,r')\rangle/\sqrt{\langle \delta I(\theta,r)^2\rangle\langle \delta I(\theta,r')^2\rangle}$ in the $\chi^{(3)}$ soliton, where θ corresponds to the the squeezed quadrature component, for a given propagation length $\zeta=0.62$. The pixels on the diagonal have been removed, as they correspond to another quantity, which is the local squeezing.

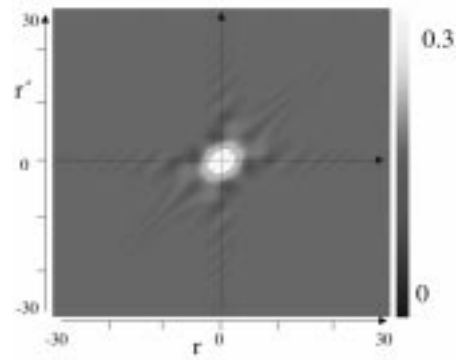

FIG. 7. Normalized autocorrelation function $\langle \delta I(\theta',r)\,\delta I(\theta',r')\rangle/\sqrt{\langle \delta I(\theta',r)^2\rangle\langle \delta I(\theta',r')^2\rangle}$ in the $\chi^{(3)}$ soliton, where $\theta'=\theta+\pi/2$ corresponds to the the ''antisqueezed'' (or noisiest) quadrature component, in the same conditions as in Fig. 6. In this figure also, the diagonal pixels have been removed.

therefore see that the effect of diffraction is not always detrimental for the reduction of quantum fluctuations. It may lead, in some instances, to a *concentration, or focusing, of squeezing* in definite partial areas of the transverse space. This conclusion is also valid for the $\chi^{(3)}$ soliton, which we will not show in this paper because it is very similar to what is observed in Fig. 5.

V. QUANTUM CORRELATIONS BETWEEN FIELD QUADRATURES AT DIFFERENT POINTS

Applying the methods of Sec. II, and using formulas analogous to Eq. (12), we are also able to determine the spatial quantum correlations between the different field quadrature components measured in two spatially separated areas.

A. Spatial correlations in $\chi^{(3)}$ solitons

Figure 6 gives the normalized autocorrelation function of the squeezed quadrature measured at two different points r and r' for a fixed propagation length, for which the squeezing on the total beam is equal to 70%. One observes a positive correlation when r and r' are close to each other, and a stronger anticorrelation located mainly along the two axes $r=0$ and $r'=0$, i.e., between the central part of the soliton and its wings. This general shape for the autocorrelation on a squeezed quadrature turns out to be found for various parameter values, and therefore has some kind of universality, which is easy to understand: as the total beam has a noise that is smaller than that on each pixel, these noises must be anticorrelated in order to interfere destructively when they are added in a large area photodetector.

In contrast, one observes in Fig. 7, which corresponds to the autocorrelation function of the noisiest quadrature, a different kind of behavior: there is in almost the whole plane a positive correlation between the different pixels, especially between the points r and r' where the soliton intensity is important. Except for the ripples far from the center, the correlation is roughly proportional to the local intensity, as is expected in the case of a classical noise. This behavior is also ''universal,'' which leads us to the conclusion that the noisy quadrature, well above the vacuum noise level, behaves mainly in a classical way.

B. Spatial correlations in $\chi^{(2)}$ solitons

We have calculated for the $\chi^{(2)}$ soliton the same quantities as for the $\chi^{(3)}$ soliton. We will not show the autocorrelation functions, as they are very much like the plots of Figs. 6 and 7. We will concentrate here on a quantity specific to the $\chi^{(2)}$ case and that has interesting features, namely, the spatial correlation between the fundamental and the second-harmonic fields, which is the spatial counterpart of the temporal correlation between these two fields that has already been noticed in the plane wave case when one starts from the fundamental field alone (pure second-harmonic generation [24]). Figure 8 shows the normalized correlation function between the amplitude quadrature of the fundamental field and the phase quadrature of the second-harmonic field, $\langle \delta I_1(0,r)\,\delta I_2(\pi/2,r')\rangle/\sqrt{\langle \delta I_1(0,r)^2\rangle\langle \delta I_2(\pi/2,r')^2\rangle}$. The result is no longer symmetrical with respect to the first diagonal, as it is not an autocorrelation function. One notices that there is an important correlation between the center part of one soliton and the outer part of the other. The other similar correlation functions, for example, between the intensity fluctuations of the two modes, have similar features, with somewhat smaller values.

One notices that in Fig. 8 (as well as in Figs. 6 and 7), the normalized correlation modulus never exceeds 5%, which is a rather small quantity. This is due to the fact that these results correspond to correlations between individual pixels, which have a very small area (they are squares of side equal to 1/30 of the soliton width at half maximum). Figures 9(a) and 9(b) show the same correlation as in Fig. 8, but now for increasing sizes of the photodetector width. One notices that there is now an anticorrelation between the wings of the

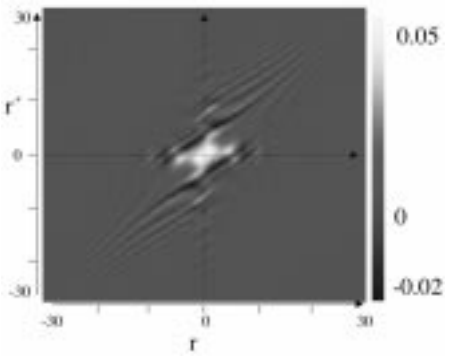

FIG. 8. Normalized correlation function between quadrature components of the two interacting fields, $\langle \delta I_1(0,r)\delta I_2(\pi/2,r')\rangle/\sqrt{\langle \delta I_1(0,r)^2\rangle\langle \delta I_2(\pi/2,r')^2\rangle}$, in the $\chi^{(2)}$ soliton, for a propagation length $\zeta=3.5$.

fundamental soliton and the center of the second-harmonic soliton, and a strong correlation between the center parts of the two solitons, which both increase with the photodetector size and reach, respectively, significant values of -20% and 40% when the width of the photodetector is roughly half the soliton size. Note also that this strong quantum correlation occurs between the intensity of one soliton and the phase quadrature of the second harmonic, whereas it occurs between the intensity quadratures in pure second-harmonic generation with plane waves.

C. Criterion for quantum spatial correlation: Conditional variance

Let us recall that when one takes a coherent field, either single mode or multimode, the spatial correlations of the fluctuations recorded at different points are zero [30]. This seems to imply that any nonzero correlation is the signature of a quantum effect. This is certainly not true, since it is easy to show that one gets nonzero correlations between two beams emerging from the two output ports of a beam splitter on which a light beam with excess classical noise (above the shot noise limit) is incident. So we need to define a more precise criterion of a ''quantum spatial correlation.''

Let $\delta\hat{E}_a$ and $\delta\hat{E}_b$ be the quantum fluctuations of two field quadratures measured on two different photodetectors of areas S_a and S_b. We will use here one of the criteria that have been introduced in the case of quantum nondemolition (QND) measurements [32], and state that the correlation is quantum when the measurement of, for instance, $\delta\hat{E}_b$ is a QND measurement of the field fluctuations $\delta\hat{E}_a$; in other words, that the knowledge of $\delta\hat{E}_b$, when used in some kind of optoelectronic loop acting on the beam with fluctuations $\delta\hat{E}_a$, allows us to reduce such fluctuations below the standard quantum limit. This implies that the *conditional variance* $V_{a|b}$ of $\delta\hat{E}_a$ (given that we know $\delta\hat{E}_b$) is smaller than the standard quantum limit S:

$$V_{a|b}=\langle \delta\hat{E}_a^2\rangle\left(1-\frac{\langle \delta\hat{E}_a\delta\hat{E}_b\rangle^2}{\langle \delta\hat{E}_a^2\rangle\langle \delta\hat{E}_b^2\rangle}\right)<S. \tag{21}$$

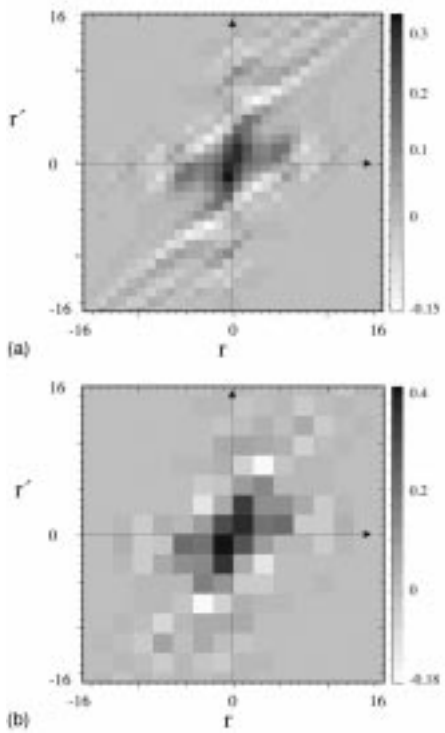

FIG. 9. Same normalized correlation function as in Fig. 8, between photocurrents measured by photodetectors of large areas centered on points r and r', $\langle \delta I_1(0,S_r)\delta I_2(\pi/2,S_{r'})\rangle/\sqrt{\langle \delta I_1(0,S_r)^2\rangle\langle \delta I_2(\pi/2,S_{r'})^2\rangle}$. The photodetector width is 1 (8 pixels) in (a) and 2 (16 pixels) in (b).

$V_{a|b}$ is actually the best level of squeezing that can be reached when a perfect feedback loop is used. Condition (21) is equivalent to stating that the normalized correlation function $C_{ab}=\langle \delta\hat{E}_a\delta\hat{E}_b\rangle/\sqrt{\langle \delta\hat{E}_a^2\rangle\langle \delta\hat{E}_b^2\rangle}$ between the two fluctuations, which is always between -1 and 1, obeys the inequality

$$1-\frac{S}{\langle \delta\hat{E}_a^2\rangle}<|C_{ab}|^2\leqslant 1. \tag{22}$$

For a beam at the shot noise limit ($\langle \delta\hat{E}_a^2\rangle=S$), it simply implies that there exists a nonzero correlation. For a beam with some excess noise, the correlation must be close enough to 1 or -1 to be of quantum character. Let us note that this condition is automatically fulfilled for fluctuations that are already below the standard quantum noise limit.

One can also define multiple conditional variances $V_{a|b,c,\ldots}$ of $\delta\hat{E}_a$ (knowing $\delta\hat{E}_b$, $\delta\hat{E}_c$, ...) to assess the quantum character of the correlations between more than two measurements. This concept will be used in the next section.

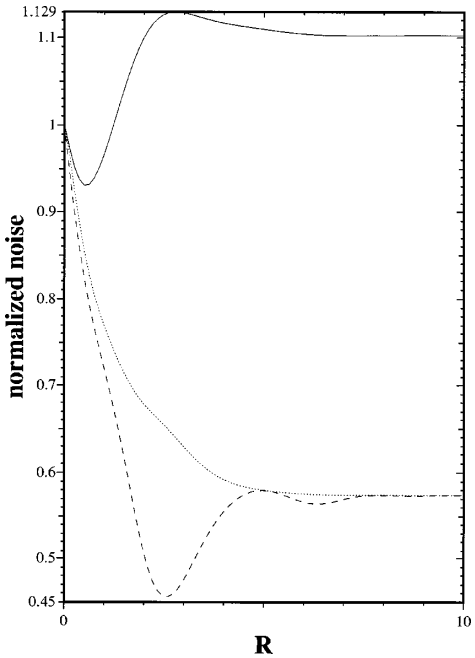

FIG. 10. Full line: normalized intensity noise of the second-harmonic field, $\langle \delta I_2(0,P_R)^2 \rangle$, measured on a surface P_R of dimension $2R$ centered on $r=0$, as a function of R for a propagation length $\zeta=2.7$. Dotted line: conditional variance of the second-harmonic intensity noise measured on the surface P_R, knowing the phase quadrature fluctuations of the fundamental measured on P_R. Dashed line: conditional variance of the second-harmonic intensity noise measured on P_R, knowing the phase quadrature fluctuations of the fundamental measured on P_R and the intensity fluctuations of the second harmonic measured on the complementary area $\overline{P_R}$.

D. Quantum correlations between ''circular'' zones

We have so far calculated correlations between zones of definite size S_r centered at a variable point r. It is also important to look at other kinds of photodetector shapes, which respect more closely the axial symmetry of our problem. In the two-dimensional case, this corresponds to circular zones, for example, defined by a diaphragm of variable radius R centered on the soliton axis $r=0$. In the one-dimensional case of our present calculations, it corresponds to a photodetector P_R of variable length $2R$ centered on $r=0$, and to its complement in the transverse space P_R, which has already been studied in Sec. IV B.

As an example, the full line of Fig. 10 gives the variation of the intensity noise of the second harmonic field, $\langle \delta I_2(0,P_R)^2 \rangle$, using a centered diaphragm of variable ''radius'' $2R$, as in Fig. 4, but for a different propagation length. One observes the same kind of nonmonotonic variation of the intensity noise when R is varied. To illustrate the interest of the concept of conditional variance recalled in the previous paragraph, we have also plotted in Fig. 10 (dotted line) the conditional variance $V_{I_2}(0,P_R)|\mathrm{I}_1(\pi/2,P_R)$ of the same quantity, knowing the phase quadrature fluctuations of the fundamental recorded in the same area. One observes that this variance is smaller than the standard quantum noise, which is an unambiguous proof of the pure quantum character of the correlations between these two quantities. The dashed line gives the multiple conditional variance $V_{I_2}(0,P_R)|I_1(\pi/2,P_R),I_2(0,\overline{P_R})$ of the same second-harmonic intensity noise recorded in the central region P_R, knowing the phase quadrature fluctuations of the fundamental recorded in the same area and also the intensity fluctuations of the second harmonic recorded in the complementary outer area $\overline{P_R}$. One observes a further decrease in the variance, due to the existence of correlations of quantum character between the center of the soliton and its outer parts. The minimum value of the variance, obtained for a radius of 2.5, is now as low as 45%. This is an example of the importance of the spatial quantum correlations between the different parts of the two interacting beams, which build up as the propagation length increases.

VI. CONCLUSION

We have calculated in this article the effect of diffraction on the spatial quantum fluctuations of a light beam within the small fluctuation approximation and in the particular case of the spatial soliton regime. The method presented here is actually very general, and can be applied to many other configurations, for example, to the usual second-harmonic generation in free propagation, when one starts from a given fundamental field and only vacuum fluctuations for the second harmonic.

In the cases of $\chi^{(2)}$ and $\chi^{(3)}$ soliton propagation, we have observed that the main effect of diffraction is to ''dilute'' in the transverse plane the squeezing properties generated by the nonlinear interaction, but in some cases also to focus them in a small part of the beam. Generally speaking, the quantum effects are not destroyed by diffraction, since we have assumed no losses in the medium: they are mainly transferred into various kinds of quantum spatial correlations, inside a given beam or between the different interacting beams. We have also been able to define a kind of coherence area for the spatial correlations. From an experimental point of view, the best nonclassical effects will be obtained only by using photodetectors of areas close to this coherence area, and also by choosing a detector geometry that respects the radial symmetry of the soliton beams.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank G. L. Oppo, A. Gatti, and A. Sukhorukov for stimulating discussions. This work has been supported by the European Union TMR network QSTRUCT. Laboratoire Kastler Brossel, of the École Normale Supérieure and Université Pierre et Marie Curie, is associated with CNRS.

[1] P. Souto Ribeiro, S. Padua, J. Da Silva, and G. Barbosa, Phys. Rev. A **49**, 4176 (1994); D. Strekalov, A. Sergienko, D. Klyshko, and Y. Shih, Phys. Rev. Lett. **74**, 3600 (1996); C. Monken, P. Souto Ribeiro, and S. Padua, Phys. Rev. A **57**, 3123 (1998); B. Saleh, A. Joobeur, and M. Teich, *ibid.* **57**, 3991 (1998).

[2] L. Lugiato, A. Gatti, and H. Wiedemann, in *Quantum Fluctuations*, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Les Houches, 1995, edited by S. Reynaud, E. Giacobino, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1997), p. 431.

[3] M. Kolobov, Rev. Mod. Phys. **71**, 1539 (1999).

[4] L. Lugiato and A. Gatti, Phys. Rev. Lett. **70**, 3868 (1993).

[5] A. Gatti and L. Lugiato, Phys. Rev. A **52**, 1675 (1995).

[6] A. Gatti, E. Brambilla, L. A. Lugiato, and M. I. Kolobov, Phys. Rev. Lett. **83**, 1763 (1999).

[7] *Optical Solitons. Theory and Experiment*, edited by J. R. Taylor (Cambridge University Press, Cambridige, 1992).

[8] P. D. Drummond and S. J. Carter, J. Opt. Soc. Am. B **4**, 1465 (1987).

[9] M. Rosenbluh and R. M. Shelby, Phys. Rev. Lett. **66**, 153 (1991); P. D. Drumond, R. M. Shelby, S. R. Friberg, and Y. Yamamoto, Nature (London) **365**, 307 (1993).

[10] Y. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York, 1984).

[11] A. Ekert and P. Knight, Phys. Rev. A **42**, 487 (1990).

[12] A. Gatti, H. Wiedemann, L. Lugiato, I. Marzoli, G. L. Oppo, and S. Barnett, Phys. Rev. A **56**, 877 (1997).

[13] C. Fabre and S. Reynaud, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Les Houches, 1990, edited by J. Dalibard and J. M. Raymond (Elsevier, Amserdam, 1992), p. 679.

[14] S. Reynaud and A. Heidmann, Opt. Commun. **71**, 209 (1989).

[15] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre, Prog. Opt. **30**, 1 (1992).

[16] C. Fabre, in *Quantum Fluctuations* (Ref. [2]), p. 181.

[17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flamery, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

[18] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes, Phys. Rev. Lett. **13**, 479 (1964).

[19] Y. Silberberg, in *Anisotropic and Nonlinear Optical Waveguides*, edited by C. G. Someda and G. Stegeman (Elsevier, Amsterdam, 1992), p. 143.

[20] A. V. Buryak and Y. S. Kivshar, Phys. Rev. A **197**, 407 (1995).

[21] Y. Karamzin and A. Sukhorukov, Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz. **20**, 734 (1974) [JETP Lett. **20**, 339 (1974)].

[22] G. I. Stegeman, R. Schiek, R. Fuerst, Y. Baek, D. Baboiu, W. Torruellas, L. Torner, and B. Lawrence, in *Advanced Photonics with Second-order Optically Nonlinear Processes*, edited by A. D. Boardman, L. Pavlov, and S. Tanev (Kluwer, Dordrecht, 1999), p. 133.

[23] W. E. Torruelas, Z. Wang, D. J. Hagen, E. W. Van Stryland, G. I. Stegeman, L. Torner, and C. R. Menyuk, Phys. Rev. Lett. **74**, 5036 (1995).

[24] M. Kitagawa and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **34**, 3974 (1986).

[25] Z. Ou, Phys. Rev. A **49**, 2106 (1994).

[26] M. Olsen, R. Horowicz, L. Plimak, N. Treps, and C. Fabre, Phys. Rev. A **61**, 021803 (2000).

[27] A. P. Sukhorukov, in *Advanced Photonics with Second-Order Optically Nonlinear Processes* (Ref. [22].

[28] A. Maître and C. Fabre (unpublished).

[29] S. Friberg, S. Machida, M. Werner, A. Levanon, and T. Mukai, Phys. Rev. Lett. **77**, 3775 (1996); S. Spälter, N. Korolkova, F. Konig, A. Sizmann, and G. Leuchs, *ibid.* **81**, 786 (1998).

[30] C. Fabre, J. B. Fouet, and A. Maitre, Opt. Lett. **25**, 76 (2000).

[31] M. Levenson, W. Richardson, and S. Perlmutter, Opt. Lett. **14**, 779 (1990).

[32] P. Grangier, in *Quantum Fluctuations* (Ref. [2]), p. 337.

Chapitre 6

L'oscillateur paramétrique optique

A Description du système

La méthode la plus couramment utilisée au laboratoire pour produire des états non classiques du rayonnement électromagnétique est l'emploi d'un oscillateur paramétrique optique (OPO). Ce dispositif optique, qui consiste en un cristal non linéaire d'ordre 2 inséré à l'intérieur d'une cavité optique, est optimisé pour profiter des propriétés quantiques du cristal et des qualités d'amplification et de modes transverses de la cavité. Ce système a déjà largement fait ses preuves notamment en terme de photons jumeaux [Mertz 91a] ou de réduction des fluctuations du vide [Lam 99]. Nous allons dans cette section tenter de décrire de façon intuitive quels sont les mécanismes mis en jeu et comment nous comptons adapter ce système à la création d'images quantiques.

A.1 Le cristal

Nous n'allons pas reprendre ici en détail les propriétés des cristaux non linéaires qu'on trouvera dans [Shen 84] pour les aspects classiques et à dans [Bachor 98, Boyd 92] pour une description quantique. Le cristal, pompé par le champ second harmonique à la fréquence ω_p, génère par émission paramétrique un faisceau signal et un faisceau complémentaire aux fréquences respectives ω_s et ω_c. Le processus inverse, dit de génération de second harmonique, est également susceptible de se produire.

On peut décrire intuitivement le processus à l'intérieur du cristal, au niveau quantique : un photon à la fréquence ω_p donne naissance à deux photons aux fréquences ω_s et ω_c dits respectivement photons signal et complémentaire. Ce processus vérifie la condition de conservation de l'énergie :

$$\omega_p = \omega_s + \omega_c. \tag{6-1}$$

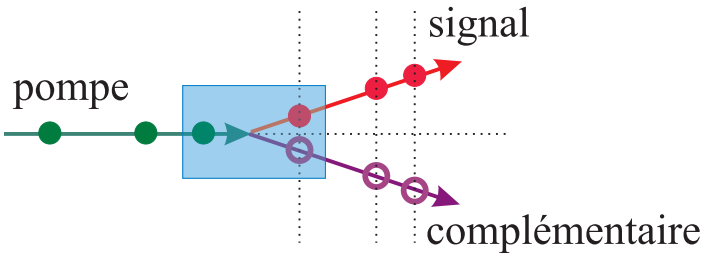

Fig. 6.1 – Processus quantique dans le cristal : un photon pompe donne naissance à un photon signal et à un photon complémentaire parfaitement corrélés.

Dans le cas d'un cristal infini dans toutes les directions et d'une pompe plane, du fait de l'invariance par translation du sytème dans toutes les directions on a conservation de l'impulsion. Celle-ci s'écrit si l'on associe aux champs les vecteurs d'onde $\vec{k}_p$, $\vec{k}_s$ et $\vec{k}_c$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_c \tag{6-2}$$

Dans le cas général, cette relation n'est jamais parfaitement vérifiée, et on définit l'accord de phase dans le cristal par $\Delta\vec{k} = \vec{k}_p - \vec{k}_s - \vec{k}_c$. L'efficacité maximale de la génération paramétrique coïncide avec le parfait accord de phase. La figure 6.1 donne une idée intuitive des particularités de ce phénomène : les deux photons sont créés en 'même temps' ce qui induit un ordre temporel, et ils ont des impulsions opposées, ce qui induit un ordre spatial.

A.1.1 L'ordre temporel : les photons jumeaux

L'ordre temporel ainsi créé implique une corrélation quantique parfaite entre les intensités des faisceaux signal et complémentaire, c'est ce que l'on appelle des faisceaux jumeaux. Expérimentalement, cet effet peut être mis en évidence en prenant la différence des intensités délivrées par deux photodiodes, chacune sur un des faisceaux. Le bruit de cette différence est alors bien en dessous du bruit que l'on obtient avec deux champs cohérents non corrélés.

A.1.2 L'ordre spatial : les photons siamois

L'ordre temporel associé à l'ordre spatial venant de la parfaite symétrie axiale, due à la conservation de l'impulsion (en supposant que les fréquences signal et complémentaires sont suffisamment proches), produit ce que l'on appelle des faisceaux «siamois», comme illustré figure 6.2. C'est une solution du problème de mesure de petits déplacements posé au chapitre 4, les parties haute et basse du faisceau étant parfaitement corrélées

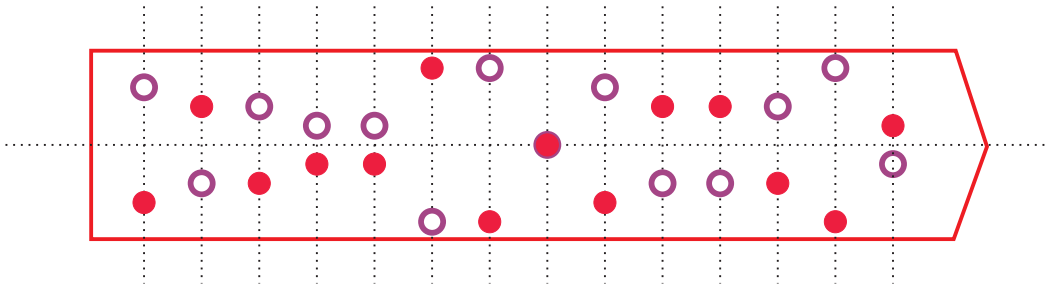

Fig. 6.2 – Les photons siamois : en plus de l'ordre temporel, il y a une parfaite corrélation entre les parties hautes et basses du faisceau.

le bruit sur la mesure de différence est nul. Cependant, sans cavité pour amplifier le signal, l'intensité utile est très faible.

A.2 La cavité

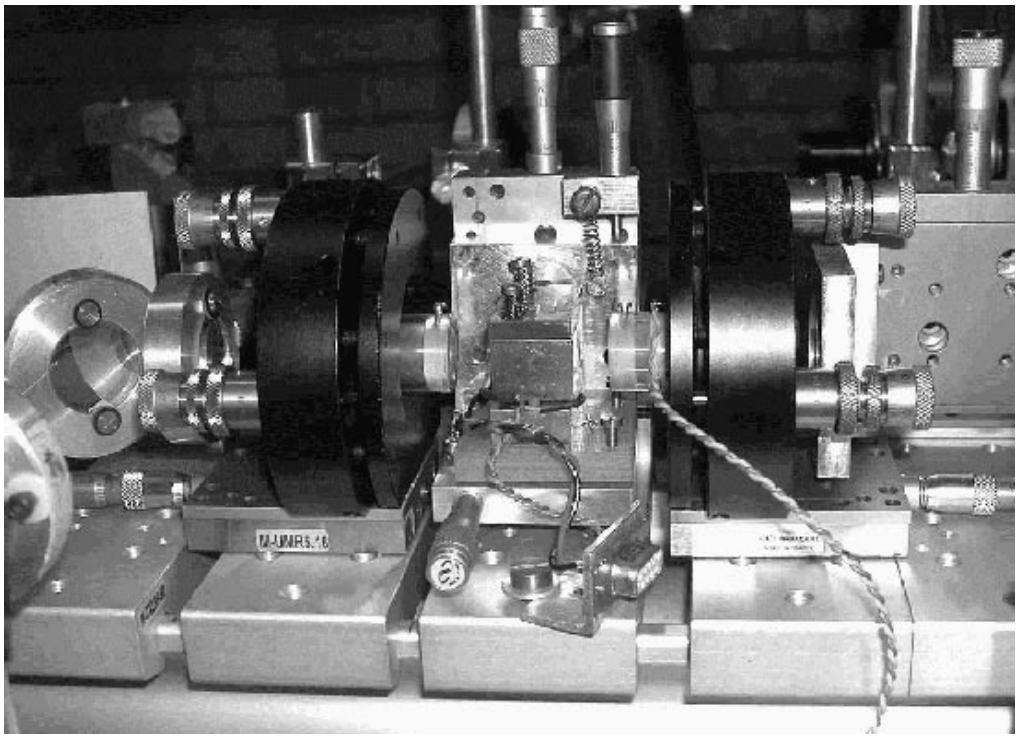

Fig. 6.3 – L'oscillateur paramétrique optique

A.2.1 L'ordre temporel

Les processus que nous avons décrits précédemment ont, dans les cristaux habituels, des efficacités très faibles, et il est nécessaire de placer le cristal à l'intérieur d'une cavité

afin d'amplifier le phénomène. La contrainte principale est que la cavité doit conserver les ordres temporels et spatiaux créés à l'intérieur du cristal. Pour l'ordre temporel, ce problème a été résolu depuis longtemps et notamment lors de la réalisation de photons jumeaux. On peut aborder le phénomène intuitivement de la façon suivante : nous allons détecter les phénomènes quantiques avec une certaine fréquence d'analyse, typiquement de l'ordre du MHz pour se placer au dessus de tous les bruits basses fréquences (voir la suite pour plus de détails). Pour observer une corrélation d'intensité entre les deux faisceaux, il faut que pendant le temps caractéristique de l'acquisition si on détecte un photon sur un champ la probabilité que le photon correspondant de l'autre champ sorte de la cavité soit importante. Autrement dit, il faut que le temps caractéristique de la détection soit supérieur au temps de vie des photons à l'intérieur de la cavité. Ce que l'on exprime en général en disant que la fréquence d'analyse doit être inférieure à la fréquence de coupure de la cavité. La fréquence de coupure dans une cavité linéaire de longueur L et de finesse $\mathcal{F}$ est donnée par

$$f_c = \frac{2\pi}{\mathcal{F}} \times \frac{c}{2L} \tag{6-3}$$

De manière générale, l'ensemble des pertes dans une cavité peut se décomposer ainsi : transmission T_1 du miroir 1, transmission T_2 du miroir de 2 (voir figure 6.5) et absorption A du cristal sur un tour de cavité. La finesse[1] s'écrit alors :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{A + T_1 + T_2}. \tag{6-4}$$

Cependant, la fréquence de coupure pour les effets quantiques est uniquement déterminée par le coefficient de transmission du miroir par lequel sort le faisceau infrarouge. On donnera le calcul précis dans la description détaillée de l'expérience, nous voulons simplement insister ici sur un des points clé dans la réalisation d'un OPO : la fréquence de coupure diminue avec la transmission du miroir, pour avoir des effets mesurables à haute fréquence il faut donc un miroir de transmission importante. D'un autre côté, le seuil d'un OPO augmente quadratiquement avec la transmission du miroir, pour obtenir une cavité à seuil bas il faut donc un miroir de faible transmission. Il y a donc là un compromis à trouver.

1. De manière plus générale, la finesse se définit comme le rapport entre la distance entre deux pics de cavité pour le même mode transverse et la largeur, dans la même unité, d'une résonance de cavité. Les résultats que nous donnons ici sont valables pour de grands coefficients de réflexion et de faibles absoptions. On pourra également se reporter à [Grynberg 97] pour plus de détails.

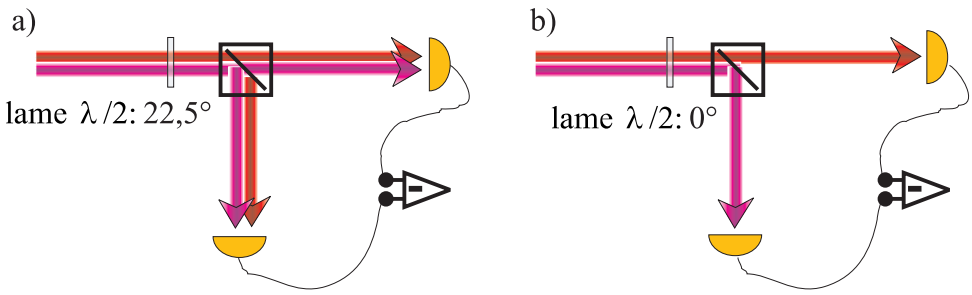

Fig. 6.4 – Mesure de photons jumeaux. a) configuration pour mesurer le bruit quantique standard. b) configuration pour mesurer la réduction sur le bruit de la différence.

La meilleur manière de mettre en évidence les photons jumeaux consiste à mesurer séparément l'intensité des deux faisceaux, et ensuite à prendre la différence de ces intensités, comme on peut le voir figure 6.4. Dans cette figure, on voit que le champ sortant de la cavité est incident sur un cube polariseur, qui sépare signal et complémentaire et les envoie chacun sur une photodiode. Une lame $\lambda/2$ placée en amont du cube permet d'adapter la polarisation. La procédure adoptée est la suivante : pour une certaine position de la lame, chacun des faisceaux signal et complémentaire est séparé en deux parties égales (fig. 6.4a), la différence des intensités donne dans ce cas accès au bruit quantique standard associé à un champ de puissance la somme des puissances signal et complémentaire (voir chapitre 4 section B.2). Pour l'autre position de la lame (fig. 6.4b) on mesure bien les corrélations en intensité entre les deux champs, qu'il faut normaliser par rapport au bruit quantique standard.

A.2.2 L'ordre spatial

La nouveauté de l'expérience que nous allons décrire ici est qu'elle s'intéresse plus spécifiquement à l'ordre spatial apparaissant lors de la génération paramétrique.

Afin de cerner ce problème dans le cadre d'une cavité optique, il est agréable de faire un petit détour par la décomposition en modes transverses de cette cavité. On peut en effet décomposer la structure transverse du champ dans une cavité en modes gaussiens TEM_{pq} [Siegman 86], modes propres de la cavité, comme nous l'avons fait lors de la quantification du champ en modes. On montre en outre que dans le cas général, du fait de la phase de Gouy associée à chaque mode gaussien, les différents modes TEM_{pq} de même fréquence sont résonnants pour des longueurs de cavité différentes. Or, comme nous l'avons vu au chapitre 1, lors de la quantification on associe à chacun de ces modes une seule variable quantique. Pour une longueur de cavité donnée, où nous avons donc en général un seul mode résonnant, le champ sortant est monomode

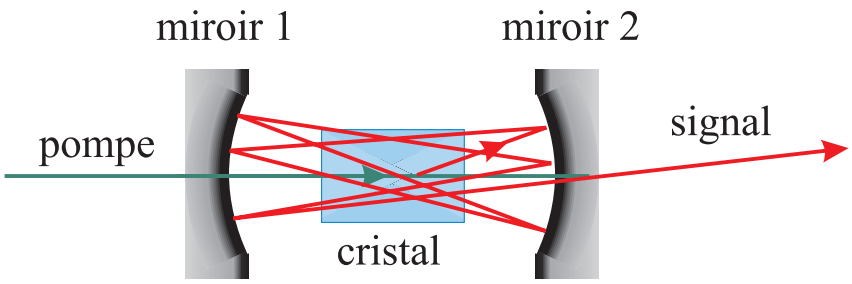

Fig. 6.5 – Oscillateur paramétrique optique : chemin du photon signal dans le cas général (nous n'avons par représenté le photon complémentaire...)

dans le sens quantique que nous avons donné. Ainsi, comme nous l'avons montré au chapitre 2 section A.1, il n'y a dans ce cas aucune corrélation possible autre que celle liée globalement à l'aspect non classique du mode. Il n'y a donc dans ce cas aucun espoir d'observer des corrélations spatiales quantiques fortes comme par exemple des photons siamois. *Pour observer des phénomènes quantiques, une condition nécessaire est d'avoir une cavité dégénérée transversalement*, ce qui signifie que pour une même longueur de cavité plusieurs modes transverses sont résonnants (nous reviendrons plus tard sur une définition précise de la dégénérescence transverse). On peut voir cela en terme de trajet de photons : le trajet d'un photon dans une cavité composée de deux miroirs sphériques à une distance quelconque l'un de l'autre est complètement aléatoire vis à vis de la symétrie axiale de la cavité. La direction originelle d'émission des photons, donnée par la génération paramétrique, est complètement perdue au bout de quelques allers-retours (voir figure 6.5). Ce n'est qu'avec une cavité dégénérée transversalement que l'on peut espérer conserver une information sur la direction d'émission de photons. On trouvera dans [Siegman 86] une étude approfondie sur ce sujet, prenons pour l'instant les trois cavités types : la plane, la concentrique et la confocale.

A.2.3 Cavité plane

La cavité plane (figure 6.6) paraît la plus évidente, puisque les directions d'émission des photons ne sont pas modifiées par la cavité. Intuitivement, on peut donc la voir comme un excellent candidat pour la production de faisceaux siamois. De plus, elle a l'avantage d'avoir été étudiée en profondeur par les théoriciens (voir la section sur les structures transverses), ce qui facilite l'interprétation des résultats. Cependant, nous

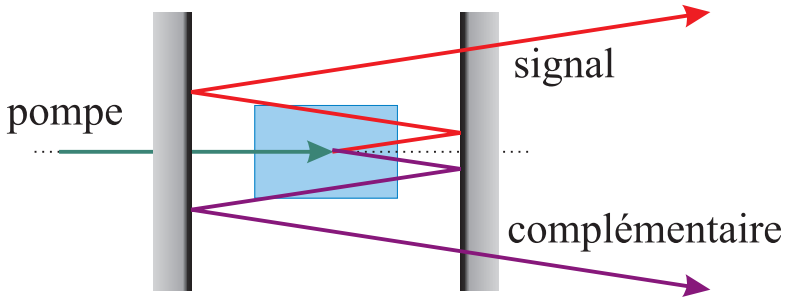

Fig. 6.6 – La cavité plane

verrons qu'expérimentalement elle est très délicate à mettre en oeuvre.

A.2.4 Cavité concentrique et semi-concentrique

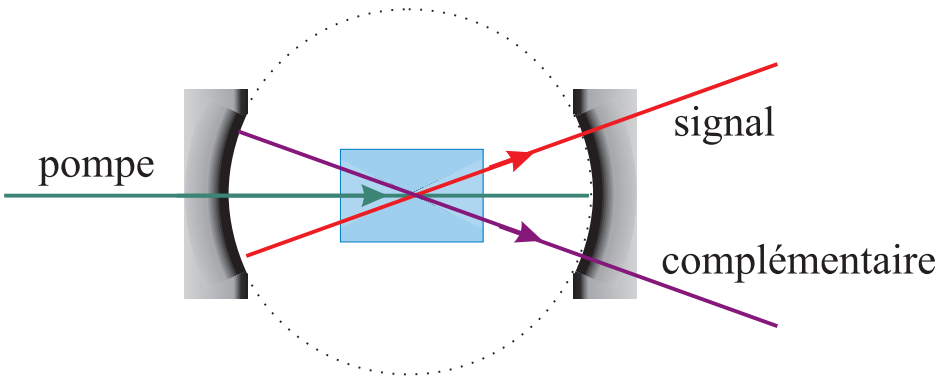

Fig. 6.7 – La cavité concentrique

La cavité concentrique consiste en deux miroir sphériques de même rayon de courbure R et une longueur de cavité $L = 2R$. Géométriquement, cette cavité correspond à une sphère (voir figure 6.7), et on voit directement que tout photon émis près du centre de la cavite va rester sur un même diamètre. Cette cavité est donc, comme la cavité plane, un bon candidat pour produire des faisceaux siamois, de plus elle est expérimentalement plus facile à mettre en oeuvre que la cavité plane.

La cavité semi-concentrique est géométriquement la moitié de la cavité concentrique, puisque sa longueur est moitié et que l'un des miroirs est un miroir plan (Voir figure 6.8). Cependant, en terme de modes transverses, la symétrie de la cavité semi-concentrique fait que seuls les modes de même parité sont résonnants pour la même longueur de cavité. Cette cavité, qui mélange signal et complémentaire, ne va donc pas conserver les photons siamois.

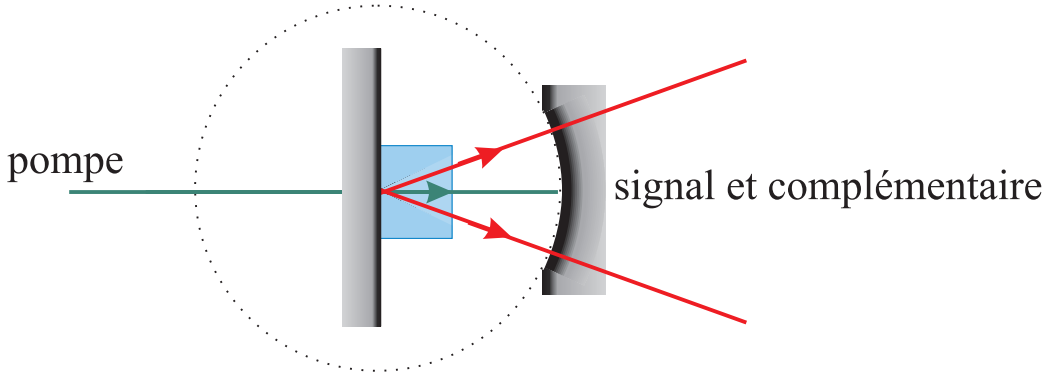

Fig. 6.8 – La cavité semi-concentrique

A.2.5 Cavité confocale

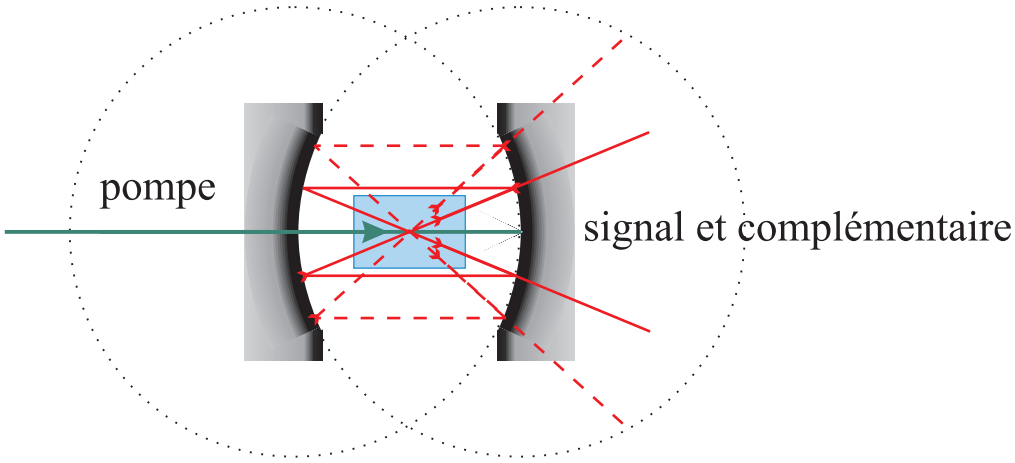

Fig. 6.9 – La cavité confocale

La cavité confocale est une cavité de longueur $L = R$ où R est le rayon de courbure des miroirs. La figure 6.9 montre qu'un photon émis près du centre reviendra sur son chemin après avoir effectué un 'huit' à l'intérieur de la cavité. On voit ainsi que les deux photons, signal et complémentaire, sont émis dans le même mode transverse. D'un autre coté, on voit que la sortie de la cavité conserve une information sur l'angle d'émission des photons, il n'y a donc pas de mélange entre des photons émis avec un petit vecteur $\vec{k}$ transverse et ceux émis avec un grand vecteur $\vec{k}$ transverse : si on place un diaphragme en champ lointain (qui va donc couper les grands vecteurs $\vec{k}$ transverse), on ne devrait pas voir de dégradation de la corrélation entre signal et complémentaire

en termes de photons jumeaux (contrairement à ce qui arrive dans le cas d'un filtre). Si l'on associe ce phénomène aux autres propriétés spatiales on montre [Lugiato 97] que cette cavité est un bon candidat pour la réduction de bruit locale, comme nous l'avons définie au chapitre 4 section A. De manière plus détaillée, il a été prédit par Lugiato *et al.* que sous le seuil le niveau de réduction de bruit obtenu est indépendant de la forme de l'oscillateur local (et donc de la zone du champ que l'on considère). De plus, si les deux champs signal et complémentaire sont dégénérés en fréquence, cette cavité va produire des paires de photons dans le même mode, susceptibles de donner de la réduction de bruit en quadrature.

A.2.6 Motifs optiques

Les cavités présentées ont pour particularité d'être multimodes transverses. Avant toute étude quantique la plus grande partie du travail présenté ici va consister à mettre en évidence ce caractère multimode qui se manifeste classiquement par l'apparition de structures optiques transverse. Les motifs optiques (ou «patterns») seront les principales indications pour décider du caractère multimode de la cavité.

A.3 Conclusion

Nous avons introduit ici les caractéristiques principales de l'expérience que nous allons maintenant décrire en détail. Cette approche amène cependant quelques remarques :

- Les images en terme de photons sont très pratiques pour se faire une idée des effets que nous allons observer. Il faut cependant avoir conscience qu'elles cachent une grande partie de la réalité physique : la phase n'apparaît pas du tout, ainsi que les effets de propagation. Nous verrons notamment que les notions de champ proche et de champ lointain sont cruciales dans notre système.
- Le nombre important de paramètres dans le système implique, lors des calculs théoriques, des approximations importantes, ce qui réduit d'autant leur caractère prédictif. De ce fait, l'expérience présentée ici a un côté exploratoire très important.

B Description détaillée de l'expérience

B.1 Schéma général

L'expérience en cours au laboratoire se décompose en trois parties : la préparation de la pompe, l'oscillateur paramétrique optique, les systèmes de détéction. Nous allons ici décrire en détail les deux premières, les systèmes de détection ayant été décrits de manière générale au chapitre 3. On peut voir en figure 6.10 le schéma général de l'expérience.

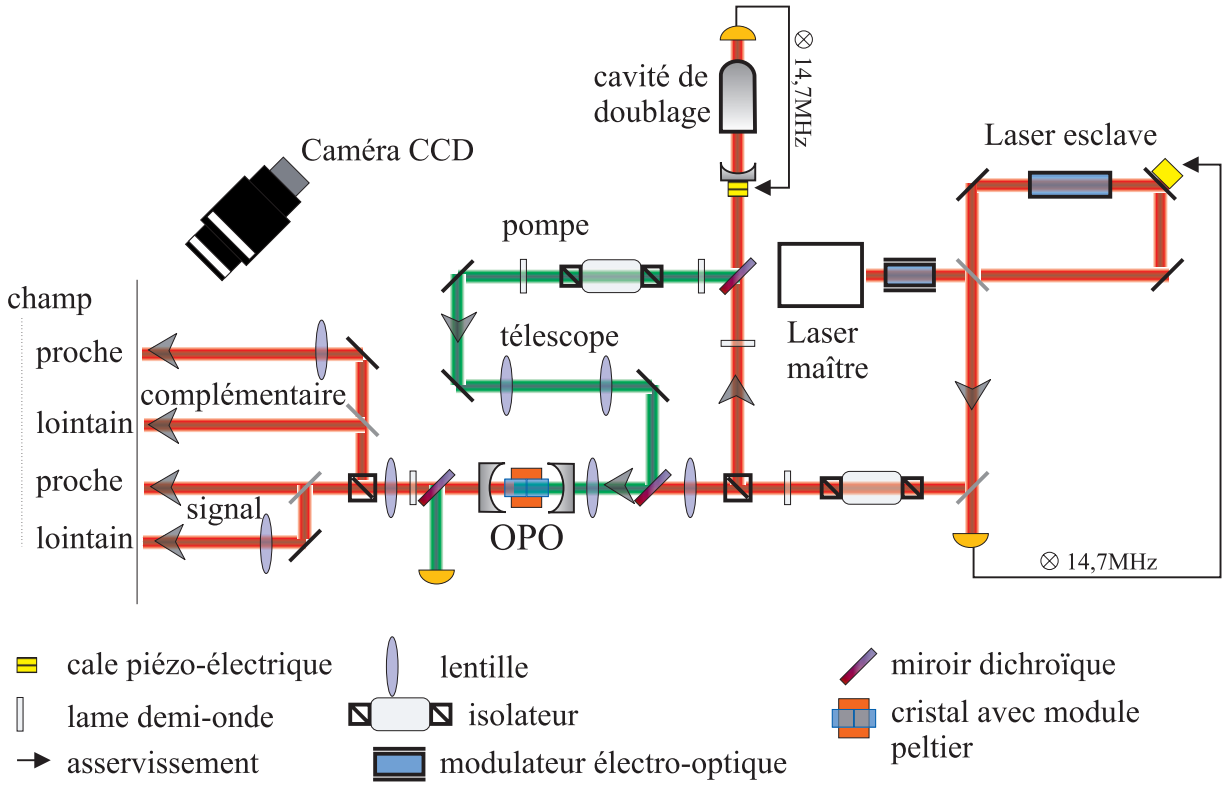

Fig. 6.10 – Schéma général pour l'observation de motifs optiques dans un oscillateur paramétrique optique.

B.2 Préparation de la pompe

La longueur d'onde utilisée pour pomper l'OPO est de 532nm, et nous avons besoin d'une source stable et monomode transverse. Pour ce faire, nous commençons par produire une source à 1,06 micromètres à l'aide de deux lasers Nd:YAG asservis l'un par rapport à l'autre avec une technique de type maître/esclave. Plus précisément, le laser maître est un laser commercial *lightwave* avec une puissance de sortie continue de

350mW, très stable et très monomode. A l'aide d'un modulateur électro-optique ce laser est modulé en phase à une fréquence de 15MHz. Le laser esclave est un laser commercial *Spectron* pompé par lampe flash placé dans une cavité en anneau réalisée au laboratoire. Ce système est capable de produire seul 3W en continu (dans la configuration en anneau, si l'on place simplement deux miroirs plans autour du cristal on peut obtenir des puissances beaucoup plus importantes mais complètement multimodes) mais avec beaucoup d'instabilités spatiales, et il est donc injecté par le laser maître. Afin de combiner les propriétés de puissance du laser esclave et la stabilité du laser maître, on a réalisé un asservissement par bandes latérales avec la modulation à 15MHz, en prélevant une fraction du signal de sortie. La composante de fréquence à 15MHz du signal de sortie nous donne en effet une indication sur l'adaptation entre le mode du laser maître et la cavité. La modulation en phase du laser est équivalente à une modulation en fréquence; ainsi, à longueur de cavité fixée, la modulation en fréquence permet d'explorer une petite partie du pic de transmission, et nous donne donc directement la dérivée de ce pic à la longueur de cavité considérée. L'asservissement va donc consister à utiliser cette dérivée pour corriger la longueur de cavité. L'asservissement nous ramène vers le sommet du pic de transmission et permet de faire osciller la cavité sur le mode du laser maître. Le signal à 15MHz est récupéré grâce à un démodulateur fabriqué par l'équipe d'électronique du laboratoire. Ce système nous permet d'obtenir, dans le meilleur des cas, de l'ordre de 5W en continu, stable et monomode. Typiquement, lorsque l'asservissement est mis en marche il peut fonctionner plusieurs heures sans intervention, et est assez peu sensible au chocs sur la table optique.

Une grande partie de ce faisceau infrarouge est ensuite utilisée pour produire la pompe à 532nm, dans une cavité de doublage. Pour cela, on l'injecte dans une cavité semi-monolithique contenant un cristal de $LiNbO_3$ stabilisé en température à une centaine de degrés Celsius. La cavité est asservie grâce à une technique similaire à celle du YAG, en utilisant le signal de transmission de l'infrarouge par la cavité. L'avantage de ce système est de nous assurer que le mode transverse du faisceau vert est bien TEM_{00}, ce qui est crucial pour l'interprétation des résultats de l'OPO (On a pu mesurer la forme transverse du faisceau à l'aide d'un 'ModeMaster', et nous avons mesuré un écart à la limite de diffraction -aussi appelé M^2 - de 1,1, ce qui est très satisfaisant). Les difficultés associées à cette cavité de doublage sont sa stabilité et son extrême sensibilité au chocs sur la table d'expérience. Néanmoins, nous arrivons ainsi à produire un faisceau doublé en fréquence de l'ordre de 1,5W continu, monomode.

Un jeu de lentille, équivalent à un télescope, est placé entre la cavité de doublage

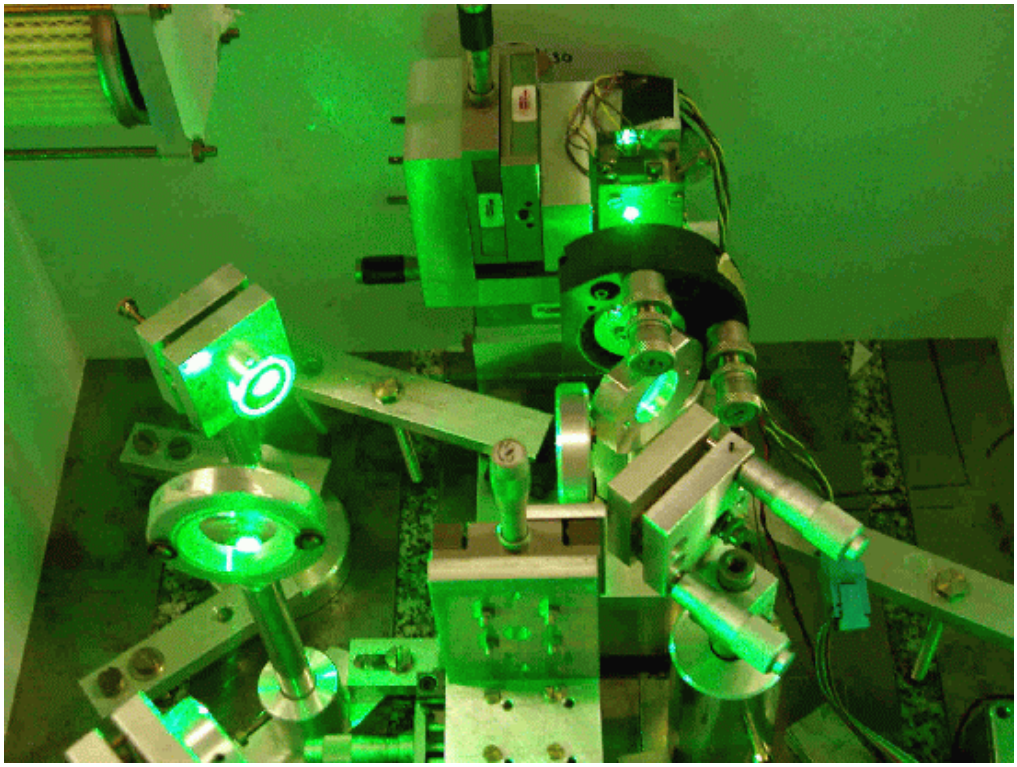

Fig. 6.11 – La cavité de doublage.

et l'OPO afin d'adapter le mode de la pompe au mode de la cavité.

B.3 Géométrie de l'OPO

B.3.1 La cavité

La cavité optique (voir figure 6.12) est utilisée en transmission et comporte donc un miroir d'entrée M_1 et un miroir de sortie M_2. Cette cavité est dite triplement résonnante, ce qui signifie qu'elle est résonnante pour les trois longueurs d'onde mises en jeu : la pompe, le signal et le complémentaire. En fait, dans notre cas les fréquences du signal et du complémentaire sont suffisamment proches pour qu'un traitement spécifique à la longueur d'onde YAG soit suffisant pour les deux champs infrarouges (on trouvera une étude en fréquence en section D). Les propriétés des traitements des miroirs sont données sur le tableau 6.1, où est également mentionnée la finesse expérimentale de la cavité vide et de la cavité avec le cristal; ce qui permet dans la dernière colonne d'en déduire les pertes liées au cristal (voir le paragraphe sur le cristal).

Les miroirs d'entrée et de sortie sont montés sur des translations qui permettent un réglage grossier -d'une précision de $10\mu m$- sur la longueur de cavité. De plus, le

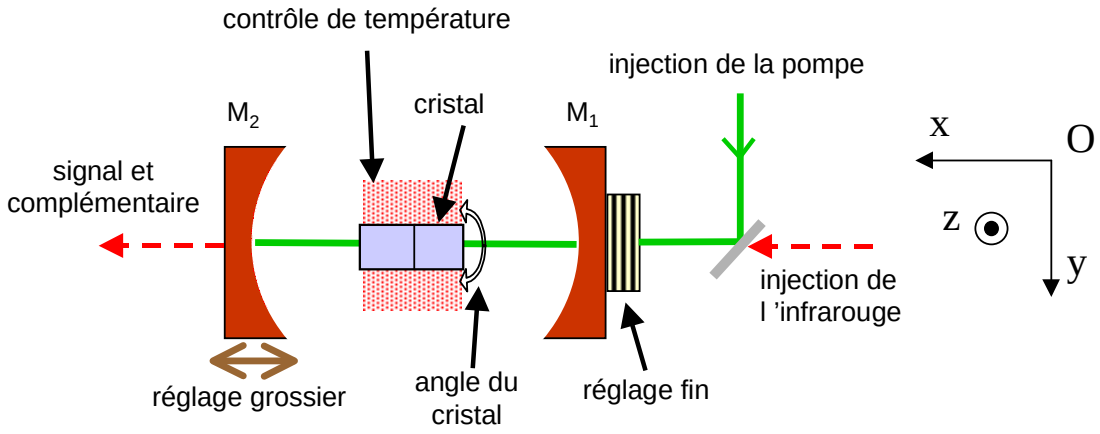

Fig. 6.12 – L'oscillateur paramétrique optique : schéma technique

Longueur d'onde λ	Coefficient de réflexion à l'entrée R_1	à la sortie R_2	Finesse à vide $\mathcal{F}_v$	Finesse avec cristal $\mathcal{F}_c$	Absorption (pourcentage) A
$532nm$	0,9	0,999	70	55	3%
$1{,}06\mu m$	0,999	0,99	450	340	0,45%

TAB. 6.1 – *Coefficients de réflexion des miroirs de l'OPO en fonction de la longueur d'onde, finesses expérimentales correspondantes et absorption du cristal de KTP avec walk-off compensé.*

miroir d'entrée est collé sur une cale piézo-électrique qui permet un réglage fin de la longueur de cavité -échelle du nanomètre- afin de balayer les conditions de résonance des différents modes transverses.

Nous disposons d'une grande variété de miroirs qui permettent de réaliser toutes sortes de cavité. Ces miroirs sont placés sur des supports avec des vis micrométriques afin d'aligner la cavité. La précision de ces vis est supérieure au micron (voir la photographie de la cavité en figure 6.3).

B.3.2 Le cristal

Il existe une grande variété de cristaux avec des non-linéarités et des accords de phase variés. On distingue dans un cristal la polarisation ordinaire (o) (orthogonale au plan formé par le vecteur $\vec{k}$ et l'axe optique du cristal) et extraordinaire (e) (dans le plan formé par $\vec{k}$ et l'axe optique). Pour assurer l'accord de phase entre les différentes ondes on introduit un angle θ entre l'axe optique et le vecteur $\vec{k}$. Le problème de cette technique est qu'elle induit un angle entre le vecteur de Poynting de la polarisation extraordinaire et le vecteur $\vec{k}$: c'est l'angle de double réfraction ou «walk-off» qui modifie la direction de propagation de l'énergie pour la polarisation (e)(pour une étude détaillée de l'optique non linéaires et des cristaux on pourra se reporter à [Boyd 92]). Nous avons ici utilisé des cristaux de «type I» et de «type II» dont les polarisations sont rappelées dans le tableau 6.2.

Type de cristal	Polarisation		
	pompe	signal	complémentaire
type I	(e)	(o)	(o)
type II	(e)	(o)	(e)

TAB. 6.2 – *Polarisation des faisceaux pompe, signal et complémentaire en fonction du type de cristal.*

Le cristal de type II que nous avons utilisé mérite quelques commentaires. L'avantage principal est que ce type de cristal permet de séparer facilement le signal et le complémentaire, car ils sont polarisés othogonalement. Nous avons utilisé du KTP (Phosphate de Potassium et de Titane) car il a un coefficient de non linéarité $\chi^{(2)}$ important. Le walk-off est pour nous un obstacle car il complique notablement l'alignement de la cavité (voir à ce sujet la thèse de Pierre Suret [Suret 00a]). Nous avons donc opté pour une géométrie particulière : nous avons deux cristaux retournés l'un par rapport à l'autre, de telle sorte que le walk-off de l'un soit exactement compensé par

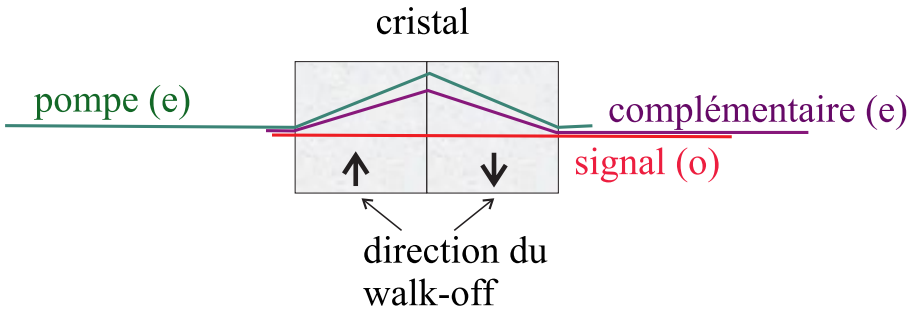

Fig. 6.13 – Le cristal avec walk off compensé. On a représenté le chemin typique de la pompe, du signal et du complémentaire.

celui de l'autre, ces deux cristaux ont été collé optiquement et nous ont été dans un premier temps aimablement prêtés par Cristal Laser (voir figure 6.13). Ainsi, le walk-off est parfaitement compensé à l'extérieur du cristal, cependant ses effets à l'intérieur sont loin d'être négligeables, comme nous en verrons un exemple plus loin. Le cristal total a pour dimensions $10mm \times 5mm \times 5mm$. Nous avons résumé les différents indices en fonction de la polarisation et de la longueur d'onde dans le tableau 6.3.

Cristal de KTP	Polarisation (e)		Polarisation (o)	
	$532nm$	$1064nm$	$532nm$	$1064nm$
indice	1,78	1,74	1,89	1,83

TAB. 6.3 – *Indices dans le cristal de KTP.*

Nous avons également mesuré précisément la finesse de la cavité avec le cristal. Les résultats sont donnés dans le tableau (6.1), dans lequel figure aussi l'absorption déduite de la formule (6-4). Celle qui nous intéresse principalement est celle à $1,06\mu m$ car c'est la longueur d'onde du champ sur lequel nous allons faire des mesures quantiques. On peut calculer la réduction de bruit optimale sur la différence des intensités que l'on peut obtenir avec notre système [Mertz 91a]. Il vient alors pour la réduction de bruit atteignable

$$R_{max} = 1 - \frac{A + T_1}{A + T_1 + T_2} \simeq 70\% \tag{6-5}$$

Le montage dans lequel est placé le cristal autorise 5 degrés de libértés : 3 de translation selon les 3 axes de l'espace, et 2 de rotation autour des deux axes orthogonaux à l'axe de la cavité (les axes x et z selon la figure 6.12). Ce système permet de parfaitement centrer le cristal dans la cavité et d'adapter son axe à l'axe de la cavité. La rotation autour de l'axe y n'est pas nécessaire du fait de la symétrie cylindrique de la cavité et de la possibilité d'adapter la polarisation de la pompe à l'orientation du cristal grâce à une lame demi-onde placée en amont.

B.3.3 Imagerie

À la sortie de la cavité est placée une lame dichroïque qui permet de prélever la pompe résiduelle et de l'envoyer sur une photodiode. Dans la configuration d'observation des motifs optiques, le cristal produit des faisceaux signal et complémentaire de polarisations orthogonales; il sont donc séparés à l'aide d'un cube polariseur puis imagés à l'aide d'un jeu de lentilles sur un écran. Les lentilles permettent de visualiser les champs proches et lointains des faisceaux. On notera que ce système présente plusieurs difficultés : tout d'abord il faut définir la position du champ proche (nous prendrons en général le centre du cristal), puis tenir compte du miroir de sortie. Techniquement, pour calculer les lentilles nécessaires on utilise la technique des matrices 'ABCD' [Kogelnik 66]. Ceci amène une autre remarque : le champ lointain est défini comme la transformée de Fourier du champ proche, mais la répartition d'intensité du champ lointain n'est pas forcément la transformée de Fourier de la répartition d'intensité du champ proche, à cause des facteurs de phase. L'étude des propriétés relatives des champs proches et lointains nous servira à analyser le caractère multimode du faisceau.

B.4 Modes transverses des cavités

B.4.1 Description en modes gaussien

Comme nous l'avons déjà mentionné, les modes propres de vibration d'une cavité optique se décomposent sur une base transverse, dont nous allons ici simplement rappeler les propriétés, sans rien démontrer (les formules étant tirées de [Siegman 86, Grynberg 97]). De manière générale, on peut écrire le champ électrique, pour une polarisation donnée, comme nous l'avons fait pour la quantification transverse avec l'équation (1-29), rappelée ici :

$$E^{(+)}(\vec{r},t) = e^{-i\omega_0(t-\frac{z}{c})}u(z,\vec{\rho})\varepsilon(t,z). \tag{6-6}$$

La partie transverse $u(z,\vec{\rho})$ se décompose sur les modes de Hermite-Gauss $u_{nm}(x,y,z)$ de la façon suivante :

$$u_{nm}(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2^{n+m}n!m!}}\frac{e^{-i(n+m+1)\phi(z)}}{w(z)} \times H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right)e^{i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}-\frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)}} \tag{6-7}$$

où :

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \\ R(z) &= z+\frac{z}{z_R} \\ \phi(z) &= \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right) \\ z_R &= \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \\ H_n &: \text{polynôme de Hermite de degré n} \end{aligned} \tag{6-8}$$

La première partie de cette formule ne dépend que de z, le facteur de phase $\phi(z)$ dans l'exponentielle est appelé phase de Gouy et est responsable des longueurs de résonance différentes pour différents modes transverses. La deuxième partie fait apparaître les structures transverses avec les polynômes de Hermite, un facteur de phase dû à la dépendance de la courbure du mode en fonction de z, et enfin une enveloppe transverse gaussienne de taille caractéristique le waist $w(z)$. Cette famille de modes ne dépendant que d'un seul paramètre : w_0 (le waist du mode à $z = 0$) et bien sûr de la longueur d'onde λ. Dans une cavité optique, les conditions de stabilité impliquent que la forme des miroirs coïncide exactement avec les surfaces d'onde, d'où l'utilisation de miroirs sphériques. C'est la géométrie de la cavité qui imposera le waist propre w_0. Pour finir, mentionnons que ces modes transverses sont en général nommés par la notation TEM_{nm}.

B.4.2 Modes de cavités

Prenons une cavité optique avec deux miroirs de rayons de courbure R_1 et R_2 (éventuellement infinis), et une distance L entre les deux miroirs. Si l'on définit les paramètres g_1 et g_2 tels que

$$g_1 = 1-\frac{L}{R_1} \quad \text{et} \quad g_2 = 1-\frac{L}{R_2} \tag{6-9}$$

le waist propre de la cavité est donné par

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{g_1 g_2(1-g_1 g_2)}{(g_1+g_2-2g_1 g_2)^2}} \tag{6-10}$$

D'un autre côté, il est intéressant d'obtenir la longueur de cavité pour laquelle un mode u_{nm} dont le waist w_0 et donné par (6-10) est résonnant dans une telle cavité. Il

vient

$$L = \left[q + (n+m+1) \frac{\cos^{-1} \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} \right] \frac{\lambda}{2} \tag{6-11}$$

où q est un entier quelconque qui représente le nombre de demies longueurs d'onde à l'intérieur de la cavité. Ce résultat confirme que la longueur de cavité dépend du mode transverse pour une longueur d'onde fixée. Dans cette formule, on voit également que du fait de la symétrie cylindrique de la cavité la longueur de la cavité ne dépend que de $n+m$. Ainsi, si l'on défini l'ensemble de modes S_p par $S_p = \{TEM_{nm}\}_{n+m=p}$, tous ces modes sont résonnants pour la même longueur de cavité. Le paramètre qui est important expérimentalement est la différence de longueur de cavité entre les résonances de deux ensembles de modes. Il vient directement

$$\delta L_{pp'} = \frac{\lambda}{2\pi} |p - p'| \cos^{-1} \sqrt{g_1 g_2}. \tag{6-12}$$

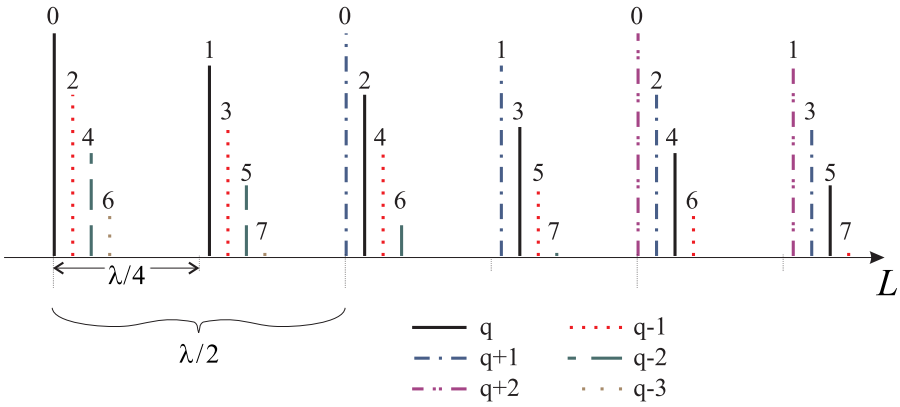

Fig. 6.14 – Positions des résonances des modes transverses en fonction de la longueur de cavité. Les lignes de même motifs correspondent à des modes de même paramètre q, les chiffres sur les modes donnent l'appartenance à l'ensemble de modes S_p. Le dessin correspond à une cavité proche de confocalité : la résonance d'ordre $q+1$ du mode S_0 est proche de la résonance d'ordre q du mode S_2.

Plus précisément, cette quantité représente la différence de longueur de cavité pour un entier q donné (voir équation (6-11)). Cette quantité étant linéaire avec $|p - p'|$ la connaissance de sa valeur pour $|p - p'| = 1$ nous donne toute l'information sur la répartition des modes en fonction de la longueur de cavité. Or, du fait du nombre q de la formule (6-11), les positions de résonance d'un mode S_p sont périodiques de période $\lambda/2$ (voir figure 6.14), on peut alors définir comme quantité représentative de la structure de la cavité le nombre de modes transverses par intervalle spectral libre :

$$N_{tr} = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\delta L_{p,p+1}}. \tag{6-13}$$

De façon intuitive, ce nombre représente le nombre de mode transverses de même nombre q présents entre deux résonances d'un même mode transverse de nombres de phase q et $q+1$.

B.4.3 Dégénérescence transverse

Nous pouvons maintenant en venir à la notion de cavité dégénérée transversalement. Nous dirons qu'une cavité est dégénérée quand elle est résonnante pour plusieurs ensembles de modes S_p, autrement dit s'il existe $p \neq p'$ tels que $\delta L_{pp'} = 0$ $[\lambda/2]$. Mathématiquement, cela correspond au fait que $\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\sqrt{g_1 g_2}$ est rationnel, et donc N_{tr} est rationnel. La réciproque étant évidente, nous définirons l'ordre de dégénérescence d'une cavité comme la valeur de N_{tr} correspondante. Dans le tableau 6.4 sont résumées les propriétés des cavités dégénérées habituelles. On y retrouve celles que nous avons présentées en début de chapitre, mais également une ligne «symétrique» où sont rassemblées toutes les cavités dégénérées de même rayon de courbure et de longueur inférieure à celle de la confocale. C'est ce que nous appelons des dégénérescence occasionnelles.

Type de cavité	Rayons de courbure	longueur	ordre de dégénérescence
Concentrique	$R_1 = R_2 = R$	$L = 2R$	1
Semi-concentrique	$R_1 = R$, $R_2 = \infty$	$L = R$	2
Confocale	$R_1 = R_2 = R$	$L = R$	2
Symétrique	$R_1 = R_2 = R$	$L = 2R\sin^2(\frac{\pi}{2k})$	k
Plane	$R_1 = R_2 = \infty$	indifférent	∞

TAB. 6.4 – *Cavités dégénérées usuelles*

Il est intéressant de voir que d'autres cavités hors celles décrites dans l'introduction de ce chapitre possèdent des interprétations en terme de trajet de photon simples. Par exemple, pour $N_{tr} = 3$, le tableau précédent indique que $L = R/2$, ce qui signifie que le milieu d'un miroir se situe sur le point focal de l'autre. On peut alors représenter le trajet d'un photon comme en figure 6.15. Cependant, on voit que l'émission du photon doit se faire du milieu d'un miroir, et non du milieu de la cavité.

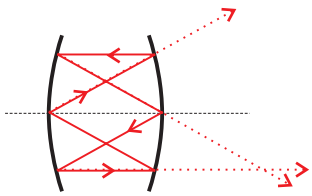

Fig. 6.15 – Cavité d'ordre de dégénérescence 3

B.4.4 OPO multimode transverse

Les définitions précédentes nous ont permis de définir les dégénérescences parfaites qu'il est très difficile de réaliser expérimentalement. Les pics de résonance des cavités ont une certaine largeur (qui dépend de la finesse de la cavité), ce qui autorise une définition plus souple de l'OPO multimode : nous dirons que notre cavité est multimode lorsqu'il existe deux ensembles de modes S_p et $S_{p'}$ tels que la longueur $\delta L_{pp'}$ entre les deux modes est inférieure à la largeur d'un pic de résonance. En utilisant la finesse de la cavité cela donne

$$\frac{2}{\lambda}\delta L_{pp'} < \frac{1}{\mathcal{F}}. \tag{6-14}$$

La différence de longueur $\delta L_{pp'}$ dépendant de la longueur de la cavité L, on peut déduire de cette formule, pour une cavité dégénérée donnée, la plage de longueur ΔL autour de la longueur de dégénérescence exacte pour laquelle la cavité est multimode transverse. Dans le tableau 6.5 sont données les résultats pour différentes cavités avec le cristal de KTP, et sont également mentionnées les longueur de dégénérescence exacte pour la pompe, le signal et le complémentaire en tenant compte de l'indice du cristal. En effet, la présence du cristal induit un raccourcissement de la cavité pour les modes transverses de telles sorte que la longueur apparente de la cavité devient

$$L_{\text{app}} = L_{\text{réelle}} - (1 - \frac{1}{n})L_{\text{cristal}} \tag{6-15}$$

où $L_{cristal}$ est la longueur du cristal et n son indice. On voit dans ce tableau que pour

Type de cavité	Rayons de courbure	Longueur de dégénérescence			Étendue(1064nm)
		pompe	signal	complémentaire	ΔL
Concentrique	$R = 50mm$	$104,38mm$	$104,54mm$	$104,25mm$	$2,5\mu m$
Confocale	$R = 100mm$	$104,38mm$	$104,54mm$	$104,25mm$	$500\mu m$

TAB. 6.5 – *Cavités multimodes*

la cavité confocale, la différence entre les longueurs de dégénérescence pour le signal et le complémentaire est bien inférieure à la taille de la zone de dégénérescence; par contre, ce n'est pas le cas pour la cavité concentrique. On peut penser que ceci interdit de faire une cavité 'triplement multimode' dans ce cas mais nous verrons que les effets de lentille thermique peuvent tout à fait compenser ce phénomène.

C Motifs optiques ou «patterns» dans les OPO

C.1 Revue bibliographique

L'étude des motifs optiques à la sortie d'un oscillateur paramétrique optique s'inscrit dans le cadre plus général de l'étude de la formation spontanée de structures en physique. En lui même, ce phénomène est l'objet d'une intense activité scientifique, aussi bien sur le plan théorique que sur le plan expérimental. Nous allons tenter ici de dégager les grandes lignes des ces études afin de voir comment notre expérience s'inscrit dans ce cadre.

C.1.1 Études théoriques

De nombreuses études ont été faites dans la configuration simplifiée suivante : cavité à miroirs plans, pompe représentée par une onde plane, effets thermiques considérés comme négligeables et OPO parfaitement dégénéré en fréquence (le signal et le complémentaire ont exactement la même fréquence). On notera par exemple une des premières études sur le sujet dans [Oppo 94a] où l'on étudie la formation spontanée de rouleaux dans un OPO de type I sur les champs signal et complémentaire. Cette étude met en évidence le caractère instable d'une cavité dégénérée transversalement lorsque l'on prend en compte les effets de la diffraction. On trouvera en complément dans [Staliunas 95] l'étude des cas simplement et doublement dégénérés (cavité résonnante pour le signal seulement, puis pour la pompe et le signal), avec l'apparition dans le premier cas d'une équation de type *Ginzburg-Landau* et dans le deuxième cas d'une équation du type *Swift-Hohenberg*.

L'OPO non dégénéré en fréquence (signal et complémentaire de fréquences différentes) a été en premier considéré par [Oppo 94b], les autres approximations étant conservées. Ce système montre que le seuil de la cavité peut dépendre de l'axe de l'émission et qu'il y a parallèlement apparition de structures optiques. On y retrouve l'apparition de rouleaux, mais les structures évoluent pendant une période transitoire limitée par les conditions aux bords. Cette étude est confirmée par [Longhi 96] qui, dans les même conditions, montre que la solution en terme d'ondes progressives est préférée à celle en terme d'ondes stationnaires. La stabilité de ces solutions est analysée, ainsi que l'influence de petites instabilités de phase ou d'amplitude qui peuvent réduire la région d'apparition de ces phénomènes. Il est par ailleurs confirmé dans [Longhi 96b] que la solution en ondes stationnaires n'est jamais stable.

L'étape suivante dans les études théoriques a consisté en la prise en compte des effets

de double réfraction à l'intérieur du cristal. Dans [Santagiustina 98] on trouvera une étude sur l'influence du walk-off vis à vis de la sélection des structures par le système, on voit alors apparaître un ensemble de "plis" délimitant des états stationnaires. Les structures avec et sans double réfraction sont comparées dans [Izus 99] et il est prouvé, dans le cas particulier d'un OPO de type II, que sans double réfraction seules des structures sur la phase du champ peuvent apparaître. De plus, le walk-off peut faire passer les instabilités d'un régime absolu à un régime convectif (c'est à dire qu'elle vont se déplacer transversalement jusqu'à être éjectées du champ). L'aspect dynamique de ces structures, ainsi que l'influence du bruit, sont approfondis dans [Ward 98] et la propagation de parois de domaine est plus spécifiquement étudiée dans [Taki 00].

La possibilité d'apparition de structures localisées dans le plan transverse est également très étudiée. On en trouve les premières démonstrations dans [Longhi 97] (où ces structures apparaissent du fait de la prise en compte des contraintes physiques de la cavité) et dans [Staliunas 97] (où l'on voit apparaître des anneaux pour une cavité dégénérée à deux dimensions transverses). Ces structures localisées, souvent appelées solitons spatiaux en cavités car elle apparaissent du fait de la compétition entre la diffraction et les effets paramétriques dans le cristal, peuvent être expliquées par l'existence de deux domaines dans le plan transverse ayant un décalage de phase de π (et dans ce cas le soliton constitue la zone de transition, voir [Trillo 97, Oppo 99, Staliunas 98]). D'un autre côté, des structures localisées peuvent également émerger à cause de la présence d'instabilités sous-critiques (voir par exemple [Tlidi 99]). Récemment, les études se sont plus spécifiquement portées sur la nature des parois entre les différents domaines du plan transverse; dans le cas d'un OPO de type II il a été prouvé l'existence de parois de Bloch [Izus 00]. La dynamique de ces parois est étudiées dans [Le Berre 00], et l'existence et la dynamique de parois circulaires est démontrée dans [Tlidi 00a]. Enfin, une étude comparée des modèles de champ moyens et de propagation dans ces derniers cas est faites par [Tlidi 00b], et on trouvera une étude approfondie du modèle de propagation et de l'influence de la limite du cristal mince et de l'hypothèse de la cavité remplie par le cristal dans [Le Berre 99]. On notera également tout un ensemble d'études faites sur la génération de second harmonique intra-cavité en compétition avec la génération paramétrique dans le cadre d'un OPO simplement [Lodahl 99] ou doublement [Lodahl 00a] résonnant. Ces études montrent et détaillent la présence de structures en rouleaux et de solitons [Lodahl 01], ainsi que la possibilités de structures en spirales [Lodahl 00b].

Dans le cas de miroirs non plans, très peu d'études théoriques ont été publiées, on notera néanmoins [Lugiato 98] où sont étudiées les zones de paramètres autorisant

l'apparition de structures dans le cas d'une cavité à miroirs sphériques, avec de plus l'étude des propriétés quantiques d'un tel système.

C.1.2 Résultats expérimentaux

Dans le domaine de milieux $\chi^{(3)}$ de nombreux résultats ont été obtenus, par contre les milieux $\chi^{(2)}$ très peu d'expériences ont été menées. Les premiers résultats ont été obtenus dans le régime des lasers pulsés car ils permettent d'obtenir une densité d'énergie beaucoup plus importante et également de s'affranchir des effets thermiques dans le cristal, beaucoup plus lents que le temps caractéristique des impulsions. Dans ce régime, des structures en forme d'anneaux ont été observées dans le cas de l'amplificateur paramétrique (sans cavité) par [Di Trapani 98] où les résultats sont comparés à une simulation numérique qui est reprise en détails dans [Berzanski 99].

En régime continu, le première (et, semble-t-il, seule à ce jour) étude a été réalisée ici-même [Vaupel 99] et sera décrite en détail dans les chapitres qui suivent. Des études parallèles ont été faites dans la même configuration que la notre, mais en utilisant un cristal avec walk-off non compensé (voir plus loin), et en s'intéressant plus spécifiquement aux aspects dynamiques de l'OPO. On notera ainsi l'étude sur les effets thermiques [Suret 00b] et celle sur la formation de structures [Suret 00a] avec un ensemble de modèles simples permettant d'expliquer la plupart des effets observés. On peut également citer, dans des domaines légèrement différents, l'observation de parois de domaines dans un milieu photoréfractif dans le cadre du mélange à quatre ondes [Taranenko 98], et des études sur la structure transverse du champ lors de la génération paramétrique avec dans [Nishikawa 96] une étude précise sur l'influence de la double réfraction et dans [Devaux 00] l'étude de l'émission paramétrique spontanée.

C.2 Cavité plane

Nous avons réalisé une cavité avec des miroirs plans de diamètre $25,4mm$ placés à une distance de $16mm$ l'un de l'autre, sachant que le cristal fait un centimètre de long c'était la plus petite cavité réalisable techniquement. Cette cavité était pompé avec un faisceau vert de waist important, allant de 80 à 200 micromètres. Après de longues procédures d'alignement il a été possible de faire osciller cette cavité, avec des seuils très importants. Le seuil de la cavité a été déterminé expérimentalement en balayant la longueur de la cavité de façon périodique à l'aide de la cale piézoélectrique et d'un générateur de signal. Nous avons pu ainsi constater une dépendance

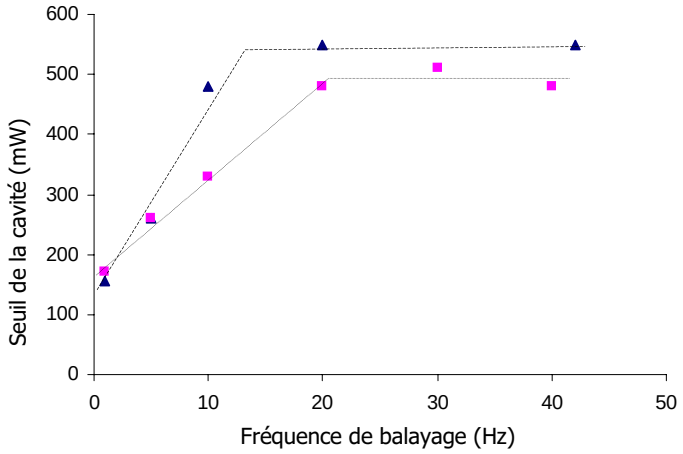

Fig. 6.16 – Seuil de la cavité plane, pour un waist de pompe de $150\mu m$ *(triangle) et de* $100\mu m$ *(carrés) en fonction de la fréquence de balayage. Les lignes ne sont qu'un guide pour l'oeil.*

du seuil de la cavité en fonction de la fréquence de balayage, comme cela est reporté en figure (6.16), pour deux tailles de waist différentes. On constate ainsi que le seuil de la cavité est plus bas à basse fréquence de balayage, et ne dépend que peu du waist de la pompe. On peut comprendre ce phénomène en examinant les pics de transmission du vert pendant le balayage : plus la fréquence de balayage est basse, plus les pics s'élargissent par effet thermique; ceux-ci semblent donc beaucoup plus présents à basse fréquence, ce qui est cohérent avec le temps caractéristique faible des effets thermiques (de l'ordre de la milliseconde, voir [Suret 00a, Suret 00b]). De façon simplifiée (voir pour plus de détails l'étude faite sur la cavité confocale) on peut comprendre que la forme transverse du champ pompe dans la cavité crée un gradient d'indice dans le cristal, qui est équivalent à une lentille placée dans la cavité. Cette lentille transforme la cavité plane en cavité stable au seuil plus bas, et ce d'autant plus que le temps de «chauffage» est important. Ce fait est également confirmé par les structures optiques que l'on a pu observer à la sortie de la cavité, aussi bien en champ lointain qu'en champ proche : nous n'avons observé qu'un mode rond apparemment TEM_{00}, invariant avec la distance de propagation, et aucunes des structures prévues théoriquement. Il semble donc que notre système ne soit pas capable de fonctionner en régime multimode, et nous avons donc du abandonner ce type de cavité.

C.3 Cavité concentrique

C.3.1 Étude géométrique

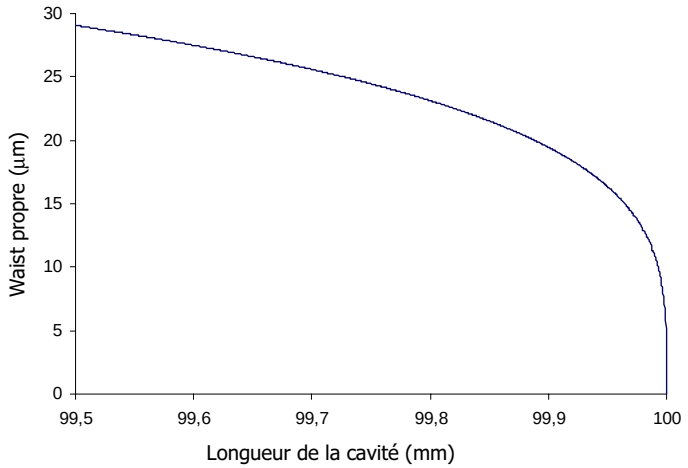

Fig. 6.17 – Waist propre de la cavité quasi-concentrique, en fonction de la longueur de la cavité (100mm correspond à la dégénérescence parfaite).

Comme nous l'avons mentionné dans le tableau 6.4, la cavité concentrique est une sphère. Nous avons principalement utilisé une cavité avec des miroirs de rayon de courbure $R = 5cm$, de longueur de dégénérescence à vide $L = 10cm$. Cette cavité est stable uniquement pour des longueurs inférieures à la longueur de dégénérescence, et le waist propre de la cavité tend vers 0 quand on s'approche de la dégénérescence, comme cela est représenté en figure 6.17.

Sachant que pour cette cavité à dégénérescence $N_{tr} = 1$, deux modes transverses consécutifs vont donc se rapprocher lorsque qu'on se rapproche de la concentricité. Nous avons représenté en figure 6.18 la distance entre deux modes transverses consécutifs en fonction de la longueur de cavité, on voit que cette distance chute très rapidement quand on s'approche de concentricité, ce qui fait que la zone de dégénérescence expérimentale est très courte et signifie que l'on a besoin d'une très grande précision sur la longueur de la cavité. Enfin, nous avons utilisé pour la cavité concentrique le cristal de KTP avec walk-off compensé décrit précédemment.

C.3.2 Propriétés générales et procédures d'alignement

La cavité concentrique est une cavité très délicate à aligner car l'axe de la cavité, défini par les centres de courbure des deux miroirs, varie très vite avec les réglages si

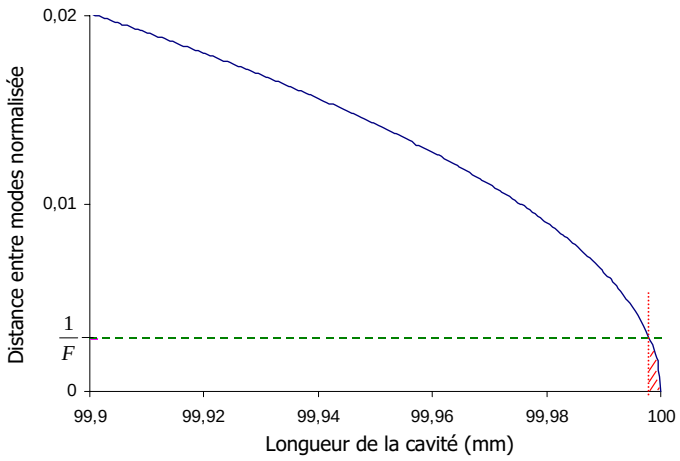

Fig. 6.18 – Distance entre deux modes transverses consécutifs, normalisée à l'intervalle spectral libre, pour une cavité quasi-concentrique. La zone hachurée correspond à la zone de dégénérescence en tenant compte de la finesse de la cavité.

ces deux points sont presque coïncidents. Il a donc été nécessaire de développer des procédures très précises, que nous allons expliciter ici. Le réglage se passe en deux étapes : cavité vide et cavité avec cristal, l'objectif étant que l'axe de l'injection soit parfaitement coïncident avec l'axe de la translation du miroir d'entrée, de sorte que lorsque l'on change la position de ce miroir afin de s'approcher de la concentricité parfaite, la cavité reste réglée.

Réglage de la cavité vide :

- tout d'abord, on place sur le banc d'optique uniquement le miroir de sortie, et on règle la position du faisceau pompe en réflexion, en s'assurant qu'il est bien incident sur le centre du miroir. Il est utile d'ajuster l'orientation du miroir de sortie de sorte que le faisceau d'injection soit parfaitement parallèle au banc d'optique et à la table d'optique. La position du miroir de sortie est alors fixée définitivement.
- On place ensuite le miroir d'entrée sur le banc d'optique à une distance du miroir de sortie telle que l'on soit légèrement en deçà de la longueur de dégénérescence (quelques mm) et on l'oriente de sorte à optimiser la réflexion du faisceau d'injection. On peut enfin mettre en marche le balayage de la cale piézo-électrique et optimiser les pics de cavités à l'aide d'un oscilloscope. Cela se fait en jouant d'abord sur l'orientation du miroir d'entrée, puis sur l'axe de l'injection. Le critère utilisé consiste à optimiser la transmission du mode TEM_{00}.
- Il faut maintenant rendre parallèles l'axe de la cavité (axe donné par la position

des deux centres de courbures des miroirs) et l'axe de la translation du miroir d'entrée. En effet, lorsque la cavité est réglée pour une longueur bien précise, le fait de changer sa longueur introduit dans le cas général un décalage entre l'axe des centres des miroirs et l'axe de l'injection. La méthode pour rattraper ce décalage est la suivante : on optimise les pics de la cavité loin de la longueur de dégénérescence (environ 10mm), on s'approche ensuite de cette longueur en agrandissant progressivement la cavité avec la translation du miroir d'entrée. Si les axes ne sont pas coïncidents, cette opération s'accompagne de l'apparition sur l'oscilloscope de pics correspondants à des modes impairs. Il faut alors tenter de supprimer ces pics en jouant uniquement sur l'orientation du miroir d'entrée. En effet, cette opération rapproche les centres des deux miroirs, et cette procédure va avoir pour effet de rendre ces centres coïncidents lorsque la cavité sera à parfaite dégénérescence. Lorsque que l'on agrandit la cavité de sorte qu'il n'est plus possible de rattraper le réglage avec le miroir d'entrée, il faut revenir à la position de départ (cavité de longueur 10mm inférieure à la longueur de dégénérescence) et optimiser l'injection. Il faut ensuite recommencer la procédure jusqu'à ce que le déplacement du miroir d'entrée ne s'accompagne plus de l'apparition de pics impairs.

Réglage de la cavité avec cristal :

- La cavité vide étant alignée, et le walk off du cristal étant compensé, il est théoriquement possible de placer le cristal de sorte que la cavité reste réglée. C'est ce que l'on fait : on place le cristal et on optimise les pics de cavité en jouant sur l'orientation du cristal.
- La longueur de dégénérescence avec cristal étant supérieure de celle sans cristal (voir tableau 6.5), il est nécessaire ensuite d'augmenter la longueur de la cavité. Cependant, l'imprécision dans les différents alignements fait que la cavité ne reste pas réglée sur une telle translation. Il est donc nécessaire de procéder, avec le cristal, à la dernière étape du réglage de la cavité vide jusqu'à parfaite optimisation.

Le critère final que nous avons utilisé pour évaluer le réglage de notre cavité est le seuil d'émission de celle-ci. Cette dernière optimisation se fait en déplaçant le cristal dans la cavité, en optimisant ainsi son centrage ainsi que le point d'interaction. On peut voir en figure 6.19 les résultats que nous avons obtenus pour les seuil de la cavité en fonction de sa longueur, à waist de pompe fixe. On voit que ce seuil augmente significativement lorsque l'on s'approche de la cavité multimode, et cela semble dû à

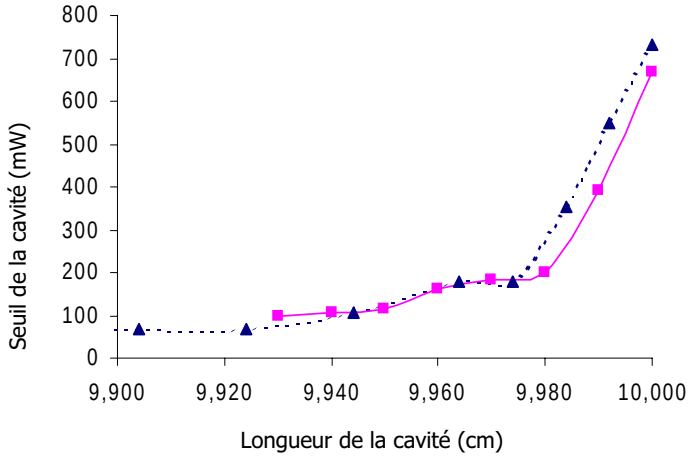

Fig. 6.19 – Seuil de la cavité concentrique (carrés) et de la cavité semi-concentrique(triangles) en fonction de la longueur de cavité. La dégénérescence parfaite à été arbitrairement mise, dans les deux cas, à 10 cm.

l'inadaptation du waist du faisceau pompe au waist propre de la cavité (puisque ce dernier tend vers 0).

C.3.3 Motifs Optiques

Afin de regarder les structures optiques à la sortie de la cavité, nous avons utilisé le dispositif expérimental représenté en figure 6.10 : à la sortie de la cavité, à l'aide de cubes polariseurs et de lentilles, nous projetons les champs proches et lointains du signal et du complémentaire sur un écran. Nous filmons ensuite cet écran en réflexion à l'aide d'une caméra CCD, branchée en sortie sur un moniteur vidéo et un magnétoscope. La stabilisation de la cavité se faisait à la main en jouant sur la tension de la cale piézo-électrique.

Pour la formation de motifs optiques, il est possible de dégager trois zones principales que nous allons décrire ici. Expérimentalement, on retrouve systématiquement ces trois zones (nous avons étudié des cavités concentriques de diverses longueurs), par contre les motifs changent d'une configuration à l'autre.

a *Loin de dégénérescence*

Les premières structures différentes d'un mode TEM_{00} apparaissent pour une cavité $500\mu m$ plus courte que la dégénérescence parfaite (qui, on le rappelle, est atteinte à $L_d \simeq 104mm$). On voit se former, sur le champ signal, une «queue» d'un côté de la tache principale, comme on peut le voir en figure 6.20. L'orientation de cette queue

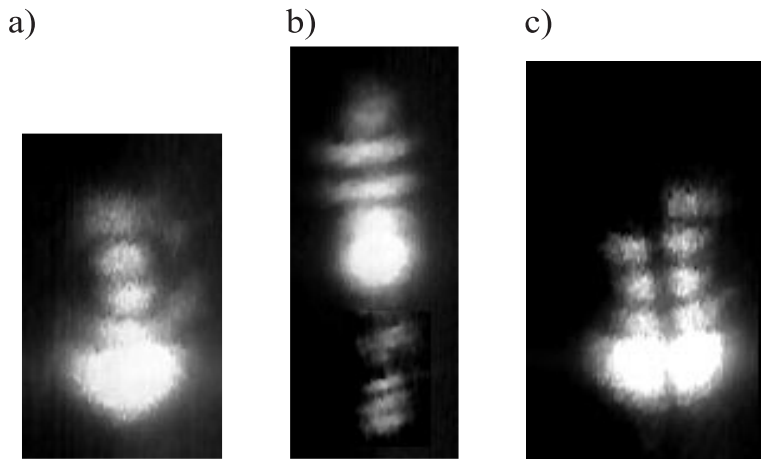

Fig. 6.20 – Structures sur le signal, loin de dégénérescence.

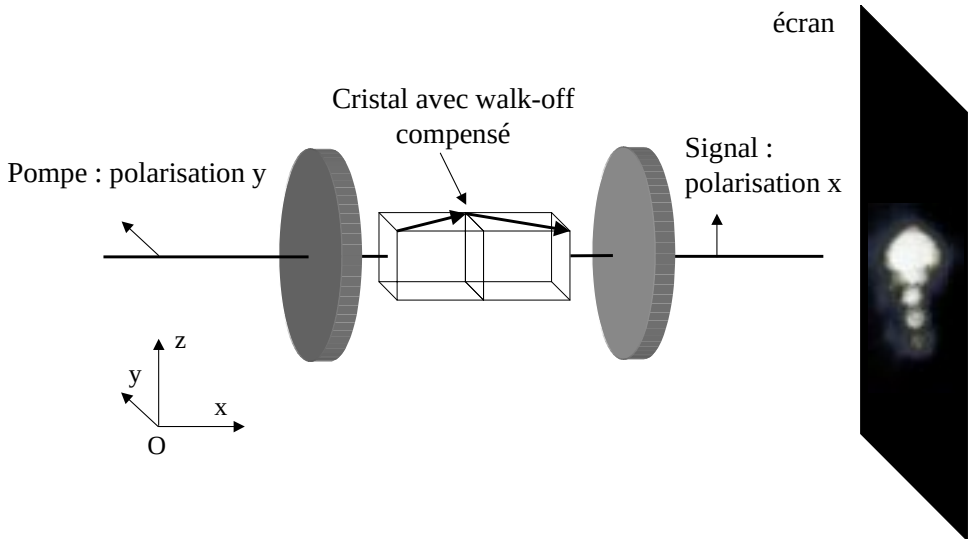

Fig. 6.21 – Orientation de la «queue» sur le signal en fonction du positionnement du cristal.

est orthogonale à la direction du walk off, et change de sens lorsque l'on tourne le cristal de 180° autour de l'axe x ou y (voir figure 6.21). Cet effet est donc bien dû au walk off, alors que celui-ci est compensé. On pourrait penser en premier lieu que cela est dû à une compensation non parfaite, cependant on pourra lire dans [Suret 00a] une étude sur la formation de motifs optiques dans une cavité concentrique avec un cristal non compensé. Dans ce cas, on observe également la formation de structures allongées, pour les même domaines de paramètres, mais dans la direction du walk off (donc orthogonale à ce que l'on observe ici). Ces structures s'expliquent très bien par des considérations géométriques dues à la présence du walk off, et ne s'appliquent donc pas dans notre cas. Le walk off de notre cristal est alors bien compensé, et il reste à trouver une explication convaincante pour ces structures. On notera que pour cette longueur de cavité, les champs pompe et complémentaire restent dans des modes transverses proche du TEM_{00}.

b Proche de dégénérescence

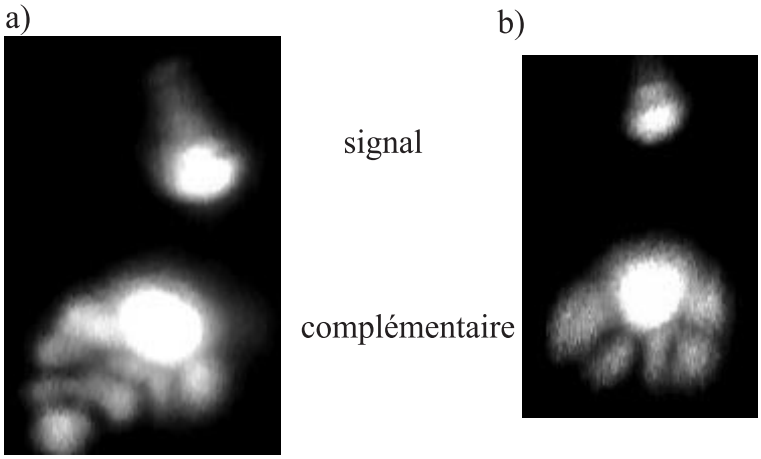

Fig. 6.22 – Deux exemples de structures proche de dégénérescence.

Lorsque l'on se place à $200\mu m$ de la concentricité, on observe une autre famille de structures. La queue sur le signal s'étend de telle sorte qu'elle devient plus grande que la taille des miroirs, et disparaît de l'écran. Par contre, sur le champ complémentaire on voit apparaître des modes plus complexes, comme représenté en figure 6.22. L'étude simultanée des champs proches et lointains montre une invariance de ces structures vis à vis de la propagation, ce qui est une indication de leur caractère monomode.

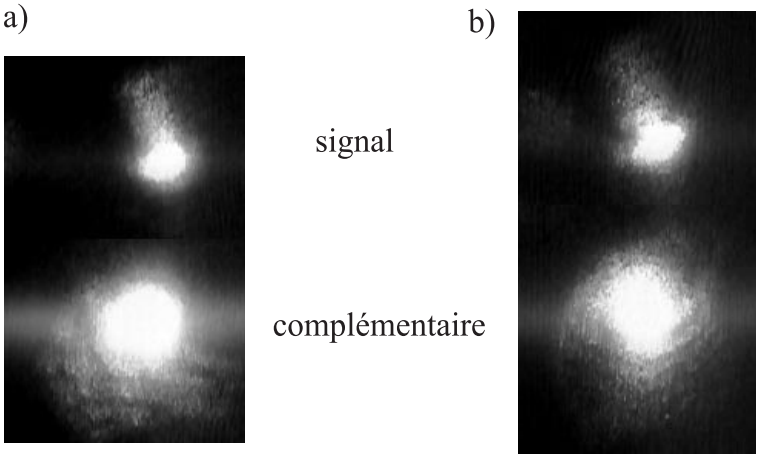

Fig. 6.23 – Deux exemples de structures très proche de dégénérescence

c Très proche de dégénérescence

On passe dans un régime complètement différent lorsque l'on se place très proche de la dégénérescence pour la pompe, soit à moins de $50\mu m$. L'ensemble des structures ayant pu apparaître sur le signal et le complémentaire disparaissent pour laisser place à des figures très larges et diffuses, où l'on voit en plus quelques lignes apparaître (voir figure 6.23). La pompe ne change pas de forme quelle que soit la longueur de cavité, ce qui prouve que ce ne sont pas des structures propres à la pompe qui forcent le système à osciller dans ces modes transverses.

Il est possible de continuer à allonger la cavité, de telle sorte que l'on dépasse la longueur de dégénérescence pour la pompe, et la cavité devrait devenir instable. Cependant, avec de grandes puissances de pompe on arrive à obtenir un signal de sortie, ceci étant certainement dû à des effets thermiques dans le cristal. On étudiera les effets thermiques de façon détaillée dans le cas de la cavité confocale, où on verra que la lentille thermique induite par la pompe augmente la longueur effective de la cavité. Cependant, l'effet observé ici est inverse et il semble qu'il faille prendre en compte l'épaisseur du cristal pour expliquer ce phénomène.

C.4 Cavité semi-concentrique

C.4.1 Étude géométrique

La cavité semi-concentrique est l'exacte moitié géométrique de la cavité concentrique, nous en avons étudié une avec un miroir de rayon de courbure $R = 5cm$ et un miroir plan, avec donc une longueur de dégénérescence à vide $L = 5cm$. En terme de modes transverses, la cavité semi-concentrique n'est dégénérée que pour les modes

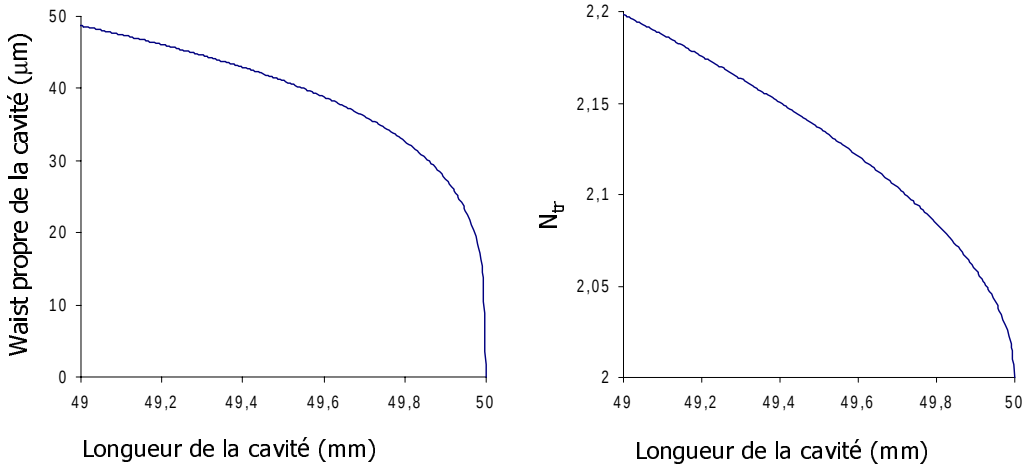

Fig. 6.24 – Waist et valeur de N_{tr} pour une cavité semi-concentrique en fonction de sa longueur.

paires, comme on peut le voir en figure 6.24 où on voit qu'à dégénérescence $N_{tr} = 2$. Afin d'avoir vraiment la moitié de la cavité précédente nous avons utilisé un cristal de KTP avec walk-off non compensé, de dimensions $7mm \times 3mm \times 3mm$. Cependant, il reste quelques petites différences avec la cavité concentrique car il est impossible de coller complètement le cristal au miroir plan, et sa taille n'est pas exactement la moitié de celle du cristal avec walk off compensé.

Les procédures d'alignement de la cavité semi-concentrique sont beaucoup plus simples, notamment du fait du miroir plan qui est très facile à aligner en réflexion. Nous avons donc pu arriver assez facilement à une cavité multimode, et observer une évolution du seuil comparable à celle obtenue pour la cavité concentrique, comme on peut le voir en figure 6.19 (sur cette figure, afin de comparer avec le cas concentrique, la longueur de la cavité semi-concentrique a été multipliée par 2).

C.4.2 Motifs optiques

Nous avons pu observer avec la cavité semi-concentrique une évolution des structures optiques similaire à celle de la cavité concentrique, avec trois zones bien séparées. Cependant, on voit quelques différences sur la nature même des structures.

Loin de dégénérescence, on observe une structure allongée sur le signal, mais cette fois ci symétrique par rapport au centre de la structure. De fait, de par les propriétés géométriques de cette cavité, il n'est possible d'observer que des structures paires et cela explique la différence avec le cas concentrique. Par contre, les propriétés de ces

Fig. 6.25 – Structure sur le signal loin de dégénérescence pour une cavité semi-concentrique.

structures sont tout à fait similaires aux précédentes. (voir figure 6.25).

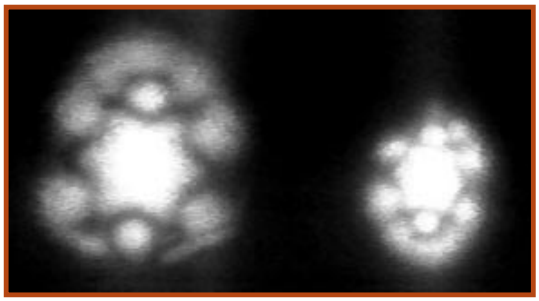

Fig. 6.26 – Structure sur le signal à une centaine de microns de la semi-concentricité. À gauche, le champ proche, à droite le champ lointain.

Proche de dégénérescence, on voit également des modes d'ordre plus élevé, mais invariants par la propagation, comme on le voit sur la figure 6.26.

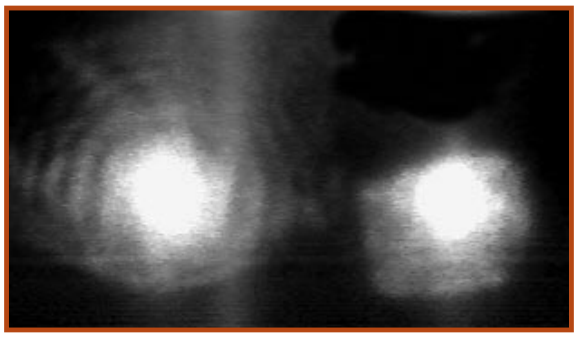

Fig. 6.27 – Structure sur le signal à moins de 20 microns de la semi-concentricité. À gauche, le champ proche, à droite le champ lointain.

Très proche de dégénérescence, les structures deviennent très grandes, et il est parfois possible d'observer quelques lignes parallèles, comme on le voit en figure 6.27.

C.5 Cavité confocale

C.5.1 Étude géométrique

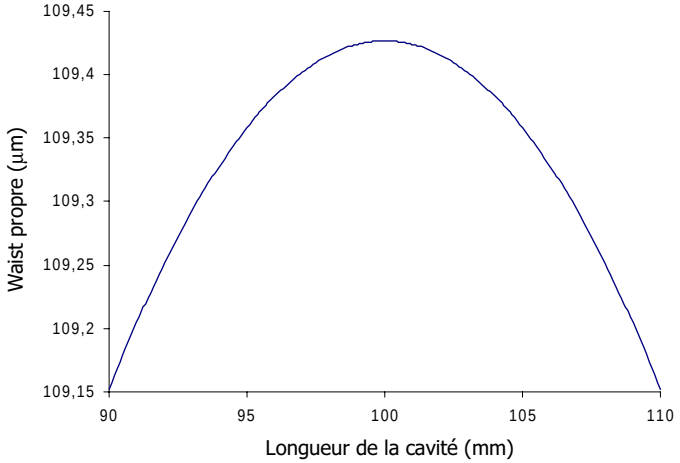

Fig. 6.28 – Waist propre de la cavité confocale

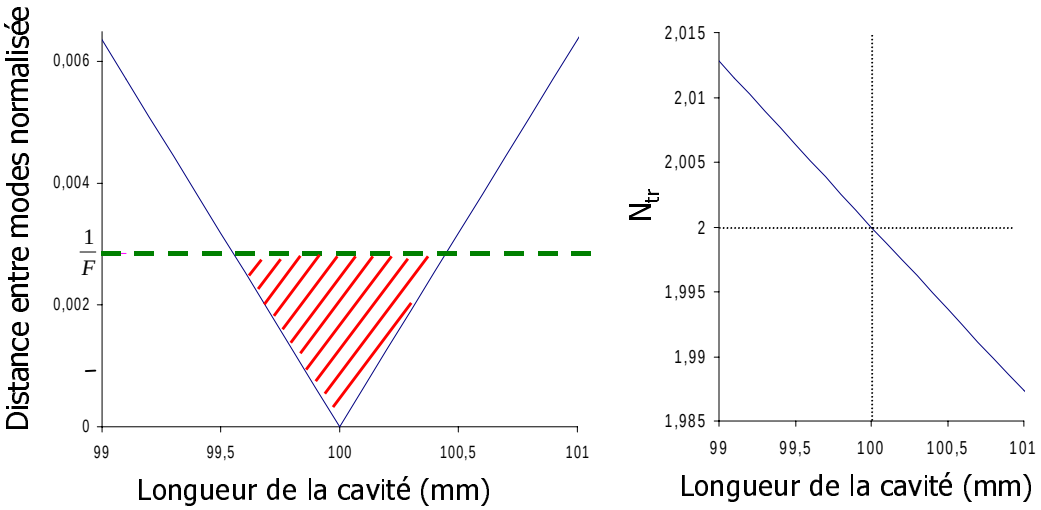

Fig. 6.29 – À gauche, distance entre deux modes transverses paires normalisée à l'intervalle spectral libre dans une cavité confocale. La zone hachurée correspond à la zone de dégénérescence en tenant compte de la finesse de la cavité. À droite, valeur de N_{tr} correspondante.

Comme pour la cavité concentrique, nous avons représenté en figure 6.28 le waist propre de la cavité et en figure 6.29 la distance entre deux mode transverses, plus le nombre de modes transverses par intervalle spectral libre en fonction de la longueur de la cavité, et ce pour une cavité avec des miroirs de rayon de courbure $R = 10cm$ et d'une longueur de dégénérescence $L = 10cm$. On voit bien que dans ce cas il n'y a pas de discontinuité, comme il pouvait y en avoir pour la cavité concentrique, et cela va simplifier l'alignement.

C.5.2 Propriétés générales et procédures d'alignement

La cavité confocale est beaucoup plus facile à régler que la cavité concentrique, cependant il faut quand même procéder avec méthode pour obtenir un résultat reproductible.

Réglage de la cavité

- Comme dans le cas concentrique, il faut commencer par régler la cavité vide. La procédure est celle d'une cavité habituelle, on fera cependant bien attention à obtenir, comme précédemment, un réglage qui se conserve lorsque l'on change la longueur de cavité. On peut ici de plus régler la cavité pour une longueur qui corresponde à la longueur de dégénérescence avec cristal.
- On place le cristal avec la même méthode que pour la cavité concentrique, et ensuite on ajuste le réglage de l'ensemble. Il est utile de vérifier une nouvelle fois la conservation de l'alignement avec le changement de la longueur de cavité. L'orientation du cristal est très importante, notamment pour obtenir le seuil minimal d'oscillation.

Le qualité du réglage est donné dans ce cas également par le seuil de la cavité. On peut voir en figure 6.30 l'évolution de seuil de la cavité en fonction de sa longueur, et on remarque que le seuil reste constant et relativement bas (de l'ordre de $25mW$). On observe également sur cette figure une autre courbe, qui correspond au seuil d'apparition des motifs optiques. On voit que les motifs apparaissent au seuil normal de la cavité lorsque que l'on se situe très proche de dégénérescence, qu'ils n'apparaissent pas pour des cavité plus longues, et qu'ils apparaissent pour des cavités plus courtes mais avec un seuil d'autant plus important que la cavité est courte. Cet effet est induit par des effets thermiques dans le cristal et sera expliqué au paragraphe D.

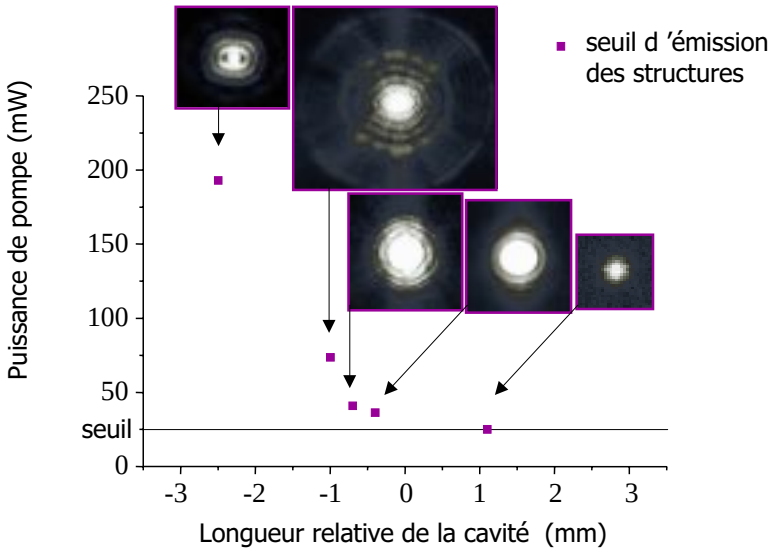

Fig. 6.30 – Seuil de la cavité confocale, en fonction de la longueur relative à la longueur de dégénérescence. Les carrés représentent le seuil d'émission des structures optiques.

C.5.3 Motifs Optiques

On n'observe pas, dans la cavité confocale, d'évolution du type de celle de la cavité concentrique. En effet, dans ce cas la cavité est stable quelle que soit sa longueur, il n'y a donc pas d'augmentation du seuil et pas de point singulier. Le seul effet particulier est celui des effets thermiques, qui implique que pour une cavité légèrement plus courte que la confocale on peut néanmoins obtenir des structures en augmentant la puissance de pompe. Par contre, les structures obtenues ne dépendent pas de la longueur de la cavité et c'est pourquoi nous ne la mentionneront pas systématiquement. On pourra trouver certains détails supplémentaires sur la description des structures dans [Vaupel 99].

Structures très multimodes

On obtient relativement facilement des structures très complexes, conservant néanmoins, en général, une certaine symétrie de rotation, avec des puissances de pompes de quelques centaines de milliwatts. On en voit un exemple en figure 6.31, où sont représentés le champ proche et le champ lointain du signal, ainsi que le centre du champ proche quand on place un filtre devant la caméra CCD pour éviter la saturation. On voit que les anneaux que l'on peut observer sur le champ proche se répercutent dans l'espace de fourier sur le champ lointain, avec une correspondance entre les grands anneaux et les petits vecteurs k au centre du champ lointain et les petits anneaux et les grands vecteurs k du champ lointain. On voit de plus que le centre du champ proche présente des

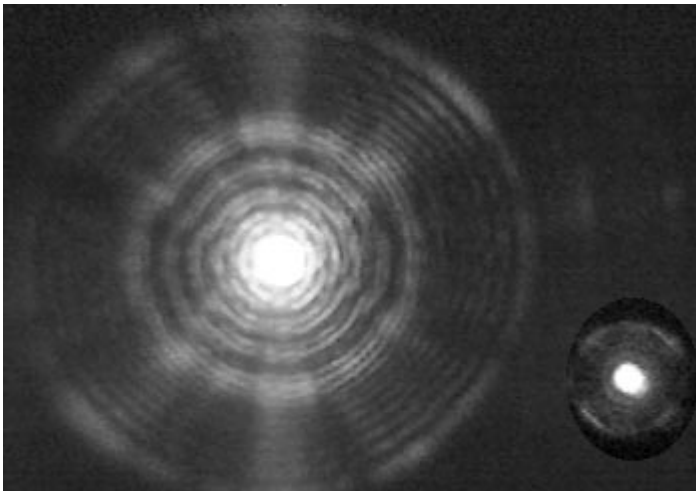

Fig. 6.31 – Structures dans une cavité confocale sur le signal : à gauche le champ proche et à droite le champ lointain correspondant.

structures qui sont plus petites que celles du mode TEM_{00} : il y a donc superposition de modes.

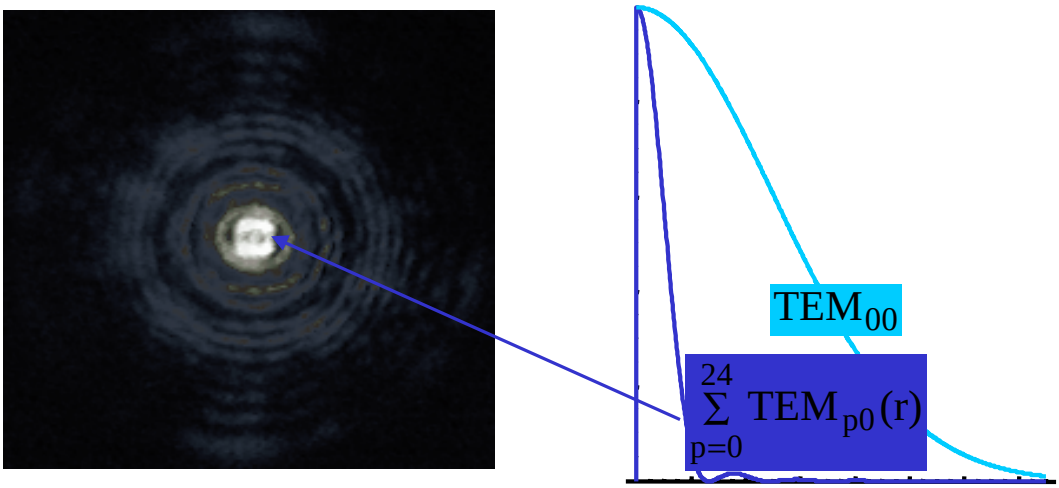

Fig. 6.32 – Approximation du centre de la structure par une superposition de 25 modes gaussiens.

Pour analyser le caractère multimode de ce champ, plusieurs études ont été menées : tout d'abord, une simple étude géométrique de la forme transverse a permis de déterminer le nombre minimum de modes transverses nécessaires pour reproduire la taille du centre, on voit en figure 6.32 que l'on y arrive avec 25 modes. D'un autre côté, une étude numérique de l'OPO confocal a été commencée au laboratoire par Enrico Brambilla : dans une cavité triplement résonnante, non dégénérée en fréquence, on injecte un certain nombre de modes gaussiens, et on calcule leur évolution dans la cavité en

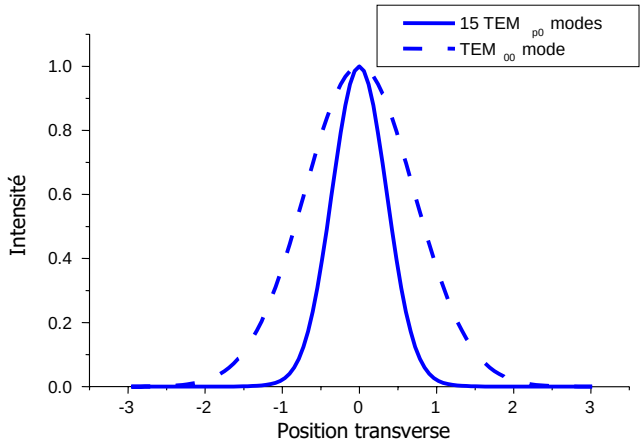

Fig. 6.33 – Résultat théorique de l'interaction de 15 modes gaussiens dans une cavité confocale.

prenant en compte la taille finie du cristal. Les résultats préliminaires montrent qu'avec au départ une superposition de 15 modes, on voit bien un amincicement du centre de la structure.

Influence de la taille de la pompe

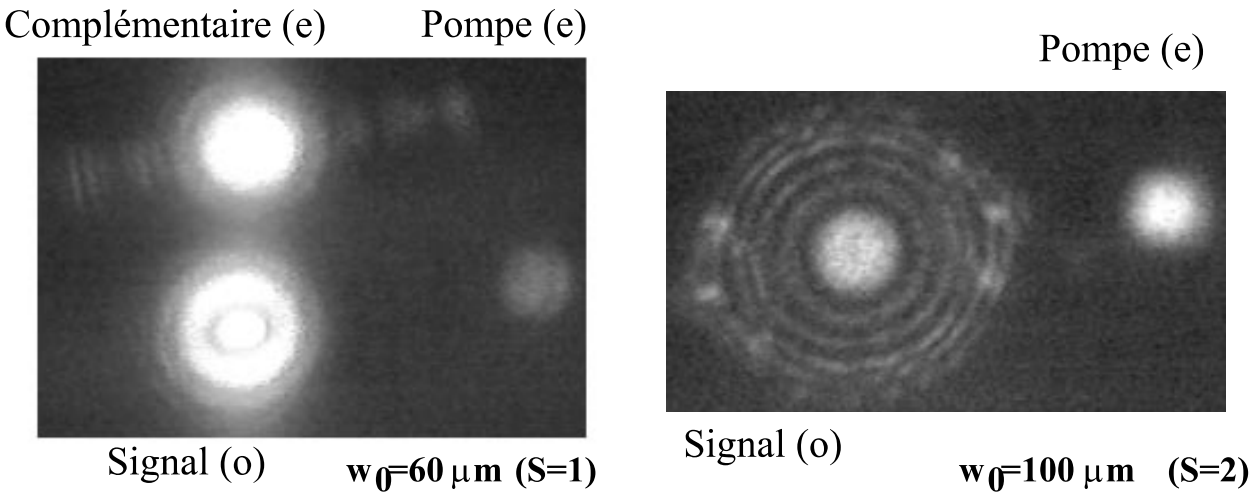

Fig. 6.34 – Structures en champ proche en fonction de la taille (w_0) de la pompe.

Nous avons également étudié l'influence de la taille du waist de la pompe sur l'apparition des structures, en en voit les résultats en figure 6.34. Si on définit la quantité :

$$S = \frac{w_{pompe}^2}{w_{cavite}^2} \tag{6-16}$$

qui correspond au rapport entre les surfaces transverses de la pompe et du mode propre

de la cavité, on voit que les structures commencent à apparaître pour $S = 1$ et qu'à partir de $S = 2$ la taille de la pompe n'a plus d'influence sur ce que l'on peut observer.

Autres observations

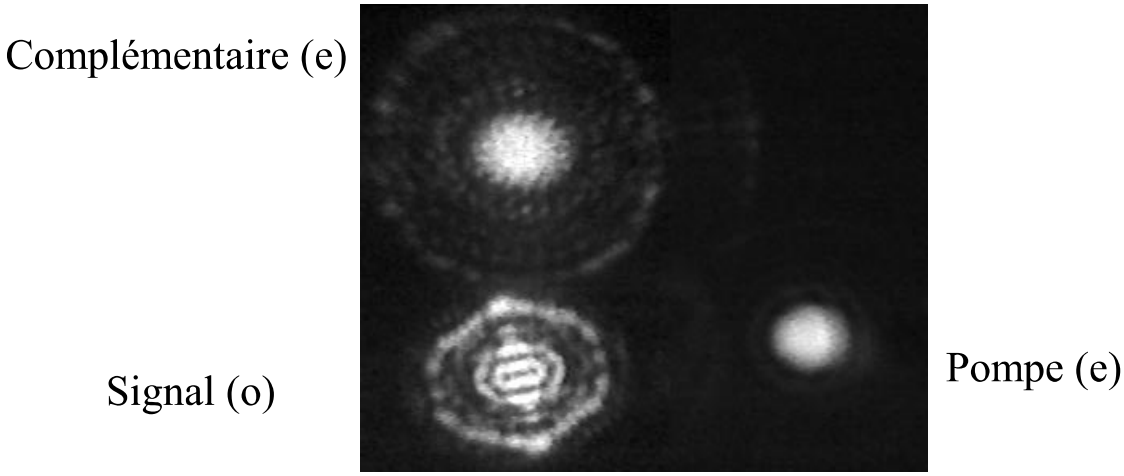

Fig. 6.35 – Champ proche du signal, du complémentaire et de la pompe.

La zoologie des structures que l'on peut observer dans la cavité confocale est relativement importante, nous en montrons ici quelques exemple caractéristiques. Tout d'abord, on voit en figure 6.35 les champs lointains du signal, du complémentaire et de la pompe pour une cavité $500\mu m$ plus courte que la confocalité exacte et $350mW$ de puissance de pompe. Cet exemple est caractéristique en ce sens que l'on voit des structures très différentes sur le signal et le complémentaire, et qu'en plus la pompe reste TEM_{00}. Cela prouve que ce ne sont pas des structures résiduelles présentes dans la pompe qui influencent la structure des motifs optiques, et c'est une bonne indication de ce que ces structure sont dues au couplage non linéaire entre les différents champs.

Un phénomène plus spectaculaire, et assez facilement reproductible, est l'apparition de points brillants et points sombres au centre du champ lointain du signal. On voit en figure 6.36 que si l'on agrandit le centre, par exemple de la figure précédente, on voit apparaître des détails beaucoup plus petits que la taille caractéristique du mode TEM_{00}. De plus, si l'on change très légèrement la longueur de la cavité avec la cale piézo électrique (tout en conservant l'oscillation de la cavité : elle continue d'émettre pendant cette opération), on observe une inversion des zones claires et des zones sombres. Il semble donc que ces effets soient dus à des effets d'interférences en champ lointains entre différents modes transverses.

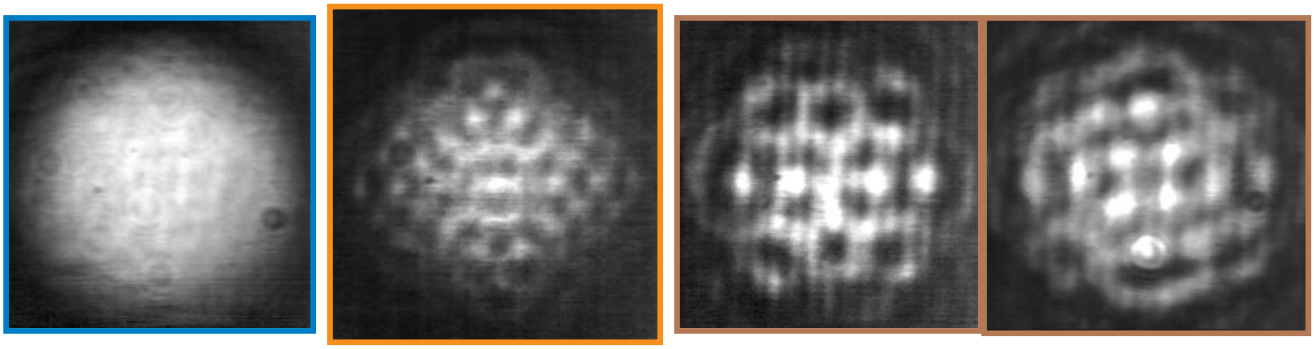

Fig. 6.36 – Centre du champ lointain du signal dans une cavité confocale, en fonction de l'écart ΔL à la longueur de dégénérescence.

D Effets thermiques et analyse en fréquence

Nous avons regroupé dans cette section un certain nombre d'études qui ont été faites sur la cavité confocale, afin de mieux la comprendre et de l'améliorer. Nous avons tout d'abord étudié de façon détaillé les effets thermiques dans cette cavité, puis nous avons regardé comment variaient les fréquences respectives du signal et du complémentaires.

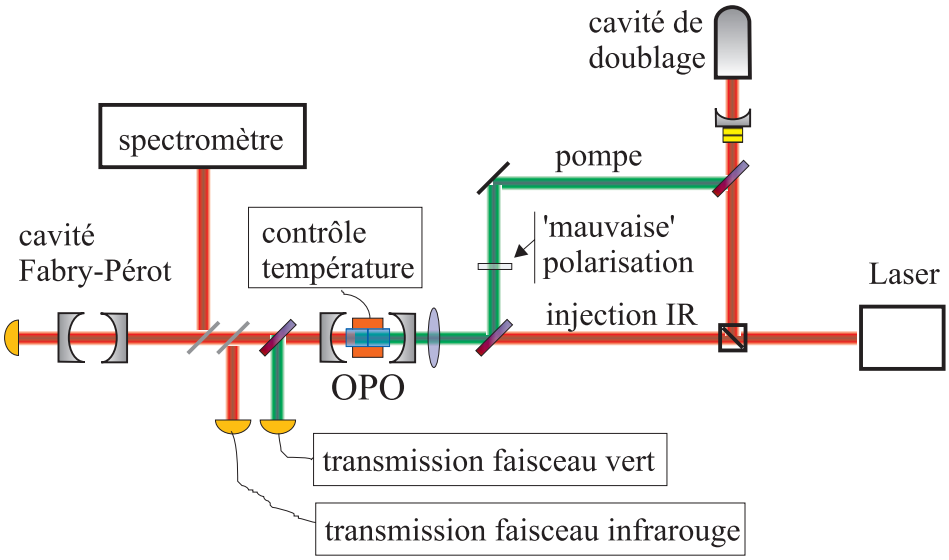

Fig. 6.37 – Dispositif expérimental pour l'étude des propriétés thermiques et fréquentielles de l'OPO.

D.1 Effets thermiques

Toute l'étude présentée ici a consisté à déterminer l'influence des effets thermiques dans le cristal induits par le champ de pompe sur la structure et la répartition des

modes transverses du signal et du complémentaire. Pour ce faire, nous avons injecté la cavité avec une partie du faisceau infrarouge et mesuré la transmission de ce faisceau par la cavité en fonction de la longueur de la cavité. Cela donne la répartition des modes transverses. Afin d'obtenir en même temps les effets thermiques, nous avons pompé la cavité avec le faisceau vert mais avec la mauvaise polarisation, ainsi nous conservions les effets thermiques tout en annihilant tout effet de génération paramétrique qui perturberait la lecture de la transmission de l'infrarouge injecté (voir figure 6.37).

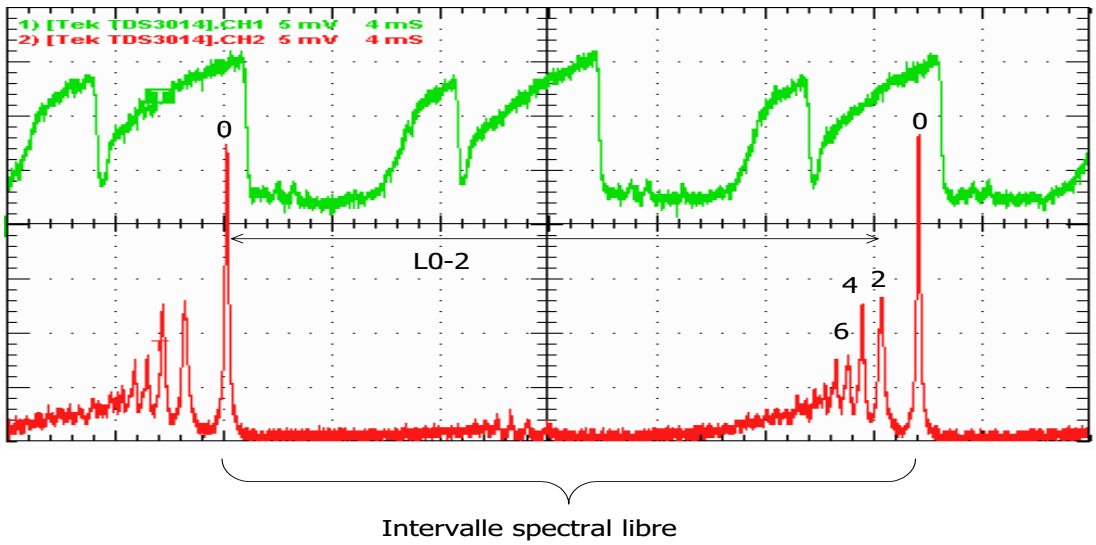

Fig. 6.38 – Intensité du champ de pompe (courbe du haut) et de l'infrarouge injecté (courbe du bas) mesurée en transmission de la cavité pendant le balayage de celle-ci. Les numéros correspondent aux modes TEM_{n0}.

Nous avons commencé par étudier la dépendance de la quantité N_{tr} définie par l'équation 6-13 avec la longueur de la cavité et la puissance de pompe. En effet, nous avons vu que pour une cavité confocale $N_{tr} = 2$. L'écart de N_{tr} à cette valeur nous donne donc une indication de la distance à la confocalité, que l'on peut comparer au résultat théorique donné en figure 6.29 et qui montre que lorsque l'on ne s'éloigne pas trop de la confocalité, N_{tr} dépend linéairement de la longueur de cavité.

Précisons tout d'abord la procédure expérimentale utilisée, ainsi que les difficultés techniques associées. On voit en figure 6.38 une image d'oscilloscope donnant la transmission simultanée de la pompe et de l'injection en fonction du balayage de la cavité, la périodicité correspondant à l'intervalle spectral libre de la cavité. On remarque que les modes de la pompe sont très élargis par des effets de bistabilité thermique. Afin d'observer des effets thermiques sur l'infrarouge, il faut que les résonances de l'infra-

rouge soient coïncidentes avec celles de la pompe : pour ce faire, nous changions la température du cristal, car la variation des positions de résonance avec la température dépend de la longueur d'onde. On voit ainsi très nettement sur la figure que la distance entre deux modes transverses consécutifs de l'infrarouge (deux pics) dépend de la puissance de pompe correspondante : on voit un élargissement à l'endroit où le pic de résonance du faisceau vert est maximum. Pour mesurer N_{tr} il suffit de comparer la longueur entre deux pics principaux (les modes TEM_{00} repérés par un 0 sur la figure) qui donne l'intervalle spectral libre avec la longueur entre un pic principal et le premier pic secondaire (la distance $L0 - 2$ sur la figure, le premier mode secondaire étant le mode TEM_{02}, les modes impairs n'étant pas résonnants quand la cavité est bien alignée. Il faut donc multiplier le résultat obtenu par deux pour qu'il corresponde à la définition théorique de N_{tr}). Il faut donc s'assurer de la coïncidence des pics car la valeur mesurée en dépend de façon cruciale.

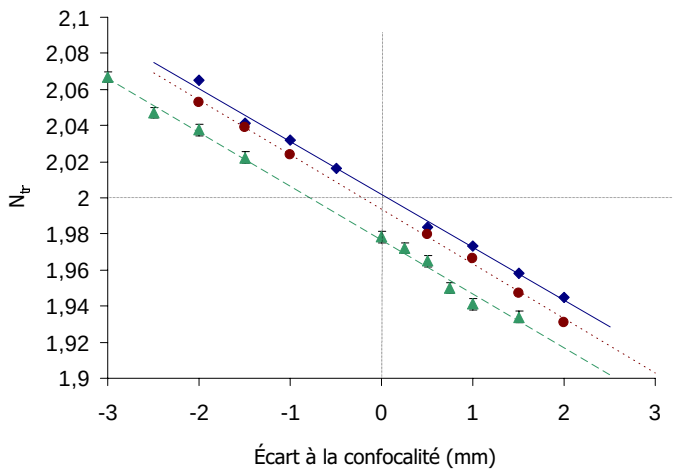

Fig. 6.39 – Nombre de modes transverses par intervalle spectral libre en fonction de la longueur de la cavité. Triangles : cavité froide. Cercles : cavité injectée avec 500mW de pompe mais sans coïncidence entre les pics de verts et de rouge. Carrés : cavité injectée avec 500mW de pompe et avec coïncidence entre les pics de verts et de rouge.

Cette procédure permet d'aboutir aux courbes expérimentales de la figure 6.39. On voit que l'on obtient bien une dépendance linéaire en fonction de l'écart à la confocalité, et que l'endroit où la courbe coupe la valeur $N_{tr} = 2$ dépend du chauffage de la cavité. On voit ainsi que le chauffage induit un déplacement macroscopique du point de dégénérescence transverse, qui va dans le sens de l'allongement de la cavité (la dégénérescence de la cavité chauffée est obtenue pour une cavité physiquement plus

courte que celle de la cavité froide).

Cet effet peut s'expliquer intuitivement : le champ pompe, de forme transverse gaussienne, induit par effet thermique une variation transverse d'indice dans le cristal de forme gaussienne. Cette variation d'indice induit un effet de lentille sur la propagation de l'infrarouge, qui modifie les propriétés transverses de la cavité.

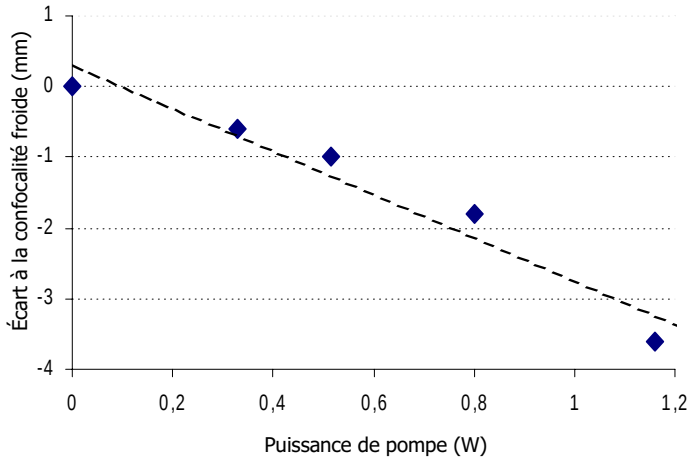

Fig. 6.40 – Position de la confocalité en fonction de la puissance de pompe (mesure directe effectué avec un OPO doublement résonnant).

Afin de s'affranchir des problèmes liés à la position de la résonance de la pompe nous avons étudié une cavité doublement dégénérée. Cela signifie que nous avons utilisé des miroirs ayant les même rayons de courbure et coefficients de réflexion dans l'infrarouge, mais parfaitement transparents pour la pompe. Ainsi, la puissance de chauffage ne dépend aucunement de la longueur de la cavité. Nous avons pu alors mesurer directement la longueur de la cavité à confocalité en fonction de la puissance de pompe, ce qui est représenté en figure 6.40. On voit une dépendance à peu près linéaire, et qui confirme le caractère macroscopique du déplacement avec une pente de l'ordre de $3mm$ par Watt de puissance de pompe.

D.2 Analyse en fréquence

La température à laquelle nous utilisons notre cristal (de l'ordre de 25°C) fait que les fréquences d'émission du signal et du complémentaires sont très proches, mais pas identiques. Nous avons étudié leur dépendance en fonction des effets thermiques et de la température du cristal.

D.2.1 Un peu de théorie

On trouvera tous les détails sur les fréquences d'émission des oscillateur paramétriques optiques dans [Debuisschert 93]. Nous allons ici simplement résumer les propriétés d'un tel système. La quantité conservée dans le système est l'énergie, via la relation $\omega_p = \omega_s + \omega_c$ (relation entre les pulsations respectives de la pompe, du signal et du complémentaire). Comme la pompe a une fréquence imposée, $\omega_s + \omega_c$ est une constante, pour connaître les fréquence d'émission du champ signal et du champ complémentaire il suffit alors de connaître $\Delta\omega = \omega_s - \omega_c$. Les fréquences d'émission seront donc caractérisées par la fréquence de battement :

$$\Delta\nu = \nu_s - \nu_c. \tag{6-17}$$

Résumons les paramètres responsables du choix de $\Delta\nu$ par le système, et leur dépendance avec la température :

Résonance signal et complémentaire

Les champs signal et complémentaire doivent respecter les conditions de résonance de la cavité (comparables à l'équation (6-11)). Ces conditions, avec la conservation de l'énergie, imposent la discrétisation des valeurs de $\Delta\nu$ possibles en fonction de la longueur de cavité. Le système est alors susceptible de 'sauter' d'un mode d'oscillation à l'autre, la distance entre deux modes vaux dans notre cas (voir [Debuisschert 93]) :

$$\Delta_{\Delta\nu} = \frac{c}{L} \simeq 3\ GHz. \tag{6-18}$$

où L est la longueur effective de la cavité. On appellera les fréquences de battements imposées par cette condition de résonance $\Delta\nu_m$ où m est un entier. Lorsque l'on change la température du cristal, cela change les indices du cristal et donc les conditions de résonance, celles-ci vont donc se déplacer avec la température du cristal.

Résonance de la pompe

L'émission avec une puissance de pompe proche du seuil d'oscillation ne peut avoir lieu que pour une longueur de cavité pour laquelle la pompe est proche de la résonance. A l'intérieur de chaque pic de résonance de pompe, se trouvent plusieurs résonances de signal et complémentaire remplissant les conditions précédentes. Il y a donc un ensemble de fréquences d'oscillation possibles pour chaque résonance de pompe. Le passage d'une résonance de pompe à l'autre induit une variation de la fréquence de

battement. Avec δn la différence d'indice entre les deux polarisations et l la longueur du cristal il vient

$$\Delta_{\Delta\nu} = \frac{c}{\delta n l} \simeq 300\ GHz. \tag{6-19}$$

Accord de phase

En plus de ces conditions de résonance, il faut également prendre en compte la conservation de l'impulsion lors du processus paramétrique. Si l'on appelle $\Delta k = k_p - k_s - k_c$ le désaccord de phase, où k_p, k_s et k_c sont respectivement les vecteurs d'onde de la pompe, du signal et du complémentaire, le seuil de la cavité est minimum pour $\Delta k = 0$. Cette valeur correspond à une fréquence de battement $\Delta\nu_k$ qui n'est pas forcément une des fréquences autorisées par les conditions de résonance. Le système choisit donc la fréquence de battement $\Delta\nu_m$ autorisée par les conditions de résonance la plus proche possible de $\Delta\nu_k$. Lorsque l'on change la température du cristal, on change les indices respectifs des deux polarisations et donc la condition d'accord de phase. Cet effet induit un changement de la fréquence de battement en fonction de la température du cristal.

Synthèse

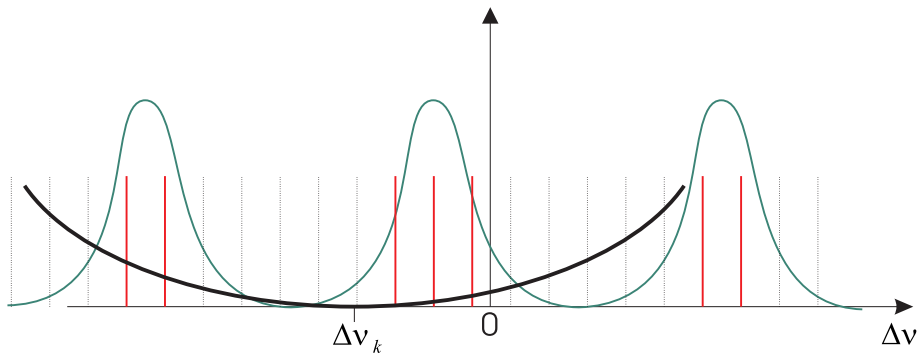

Fig. 6.41 – Choix de la fréquence de battement entre le signal et le complémentaire. La courbe de minimum $\Delta\nu_k$ est celle de l'accord de phase, les lignes verticales correspondent aux résonances successives et la dernière courbe représente les résonances de la pompe. La fréquence choisi par le système sera celle, dans une résonance de pompe, la plus proche du parfait accord de phase.

On peut voir en figure 6.41 comment se répartissent les différents processus pour le choix de la fréquence d'émission. On voit que globalement celle-ci est imposée par l'accord de phase, et que sa valeur précise est déterminée par les conditions de

résonance. Lorsque l'on change la température du cristal, cela change à la fois les conditions de résonance et les conditions d'accord de phase, cependant, toujours d'après [Debuisschert 93], on voit que le rapport entre ces deux variations, si l'on appelle T la température, est donné par

$$\frac{[\partial(\Delta\nu_m)]/\partial T}{[\partial(\Delta\nu_k)]/\partial T} \simeq -\frac{\delta nl}{2(L+nl)} \simeq 1,5.10^{-2}. \tag{6-20}$$

Ainsi la variation due à l'accord de phase est beaucoup plus importante que celle due aux conditions de résonance. On peut donc, en faisant varier expérimentalement la température, voir les variations associées aux conditions d'accord de phase.

D.2.2 Étude expérimentale

Dépendance avec la température du cristal

Pour étudier les fréquences d'émission du système, nous avons placé en sortie de l'OPO un spectromètre et une cavité Fabry-Pérot (voir figure 6.37). Le spectromètre avait une résolution effective de l'ordre de 30 GHz. La cavité Fabry-Pérot était une cavité confocale de 10cm de long, avec donc un intervalle spectral libre correspondant à une fréquence de $1,5$ GHz. La résolution de cette cavité est donnée par sa finesse, qui est de l'ordre de 50 soit une résolution de 30 MHz modulo $1,5GHz$. Nous avions donc une bande d'incertitude située entre 1.5 GHz et 30 GHz. De fait, pour l'étude des fréquences d'émission en fonction de la température nous n'avons utilisé que le spectromètre, le Fabry-Pérot nous permettant simplement de visualiser les sauts de mode.

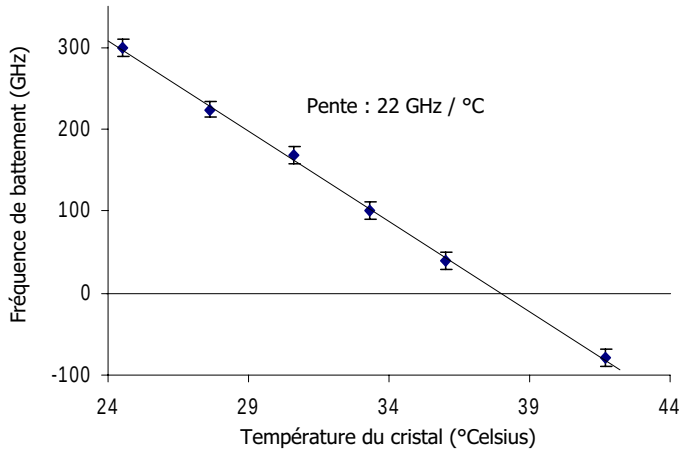

Fig. 6.42 – Dépendance de la fréquence de battement $\Delta\nu$ avec la température du cristal

Les résultats expérimentaux sont donnés en figure 6.42. On voit une dépendance parfaitement linéaire de la fréquence de battement avec la température du cristal, et on voit que l'on coupe la dégénérescence parfaite à une température d'environ 38^oC.

Dépendance avec la puissance de pompe

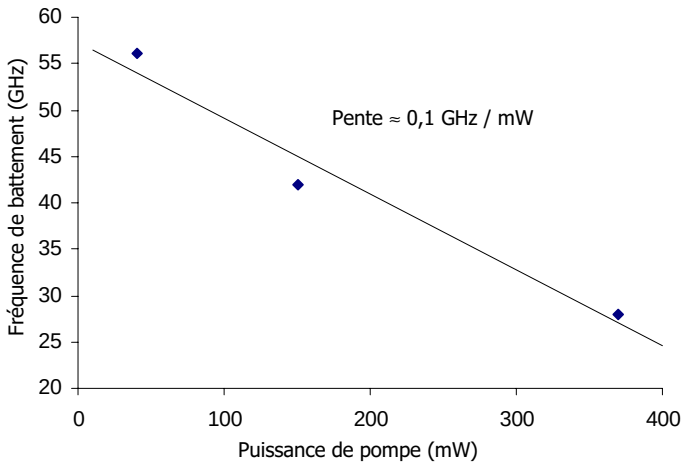

Fig. 6.43 – Dépendance de la fréquence de battement $\Delta\nu$ avec la puissance de la pompe

Nous avons étudié l'influence de la puissance de la pompe sur les fréquences d'émission. Nous avons donc, pour une longueur de cavité donnée, mesuré $\Delta\nu$ en fonction de la puissance de pompe, comme cela est représenté en figure 6.43. On voit une dépendance à peu près linéaire, qui permet de déduire, pour une variation de puissance de pompe donnée, la variation de fréquence de battement, et donc à partir de la courbe 6.42 la variation de température du cristal associée :

$$\Delta\text{Puissance}_{pompe} = 10mW \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_{\Delta\nu} = 1\ GHz \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta T = 0,05\ K.$$

Conclusion

Ces études nous montrent que l'on travaille en général proche de la dégénérescence transverse, mais qu'aucun mécanisme ne fixe les fréquence d'émission. Ainsi, d'une réalisation sur l'autre, même avec des conditions expérimentales proches, les fréquences d'émission seront différentes.

E Verrouillage de phase

E.1 Introduction

Les études précédentes nous montrent que les domaines de paramètres dans lesquels nous travaillons nous permettent d'espérer avoir exactement la même fréquence pour le signal et le complémentaire. Cette condition est intéressante dans le cas d'une cavité confocale où l'on s'intéresse à la réduction de bruit locale. En effet, ces effets sont prévus sur la totalité du champ sortant, et donc pour les observer il faut une dégénérescence en fréquence parfaite. Nous avons donc essayé de nous placer dans ces conditions.

E.2 Principe

Il n'est pas possible d'obtenir une dégénérescence parfaite uniquement en jouant sur la température du cristal, car ceci ne fait que rapprocher les fréquences mais ne couple pas les deux modes de manière à en faire un seul. Il est donc nécessaire d'introduire dans la cavité un élément qui va coupler les deux oscillateurs (i.e. le signal et le complémentaire), et les forcer à osciller à la même fréquence : c'est ce que l'on appelle l'auto-verrouillage. L'idée consiste à introduire dans la cavité une lame quart d'onde avec un petit angle. Celle-ci va légèrement coupler les deux champs et on montre qu'ainsi on obtient une cavité dont le mode au seuil le plus bas est le mode dégénéré en fréquence. Cet effet a été observé expérimentalement sur un OPO monomode transverse doublement résonnant par [Mason 98], puis la théorie en a été développée dans [Fabre 99]. Nous voulons le reproduire ici pour une cavité confocale triplement résonnante.

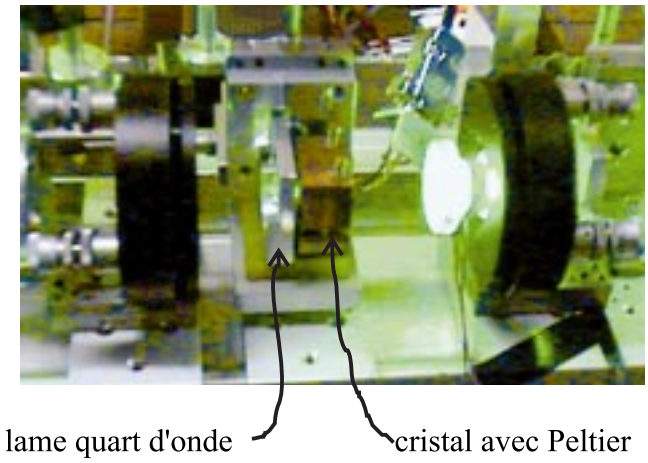

Fig. 6.44 – Introduction d'une lame quart d'onde dans une cavité confocale.

On voit en figure 6.44 une photographie de la cavité avec la lame quart d'onde. Une rotation permettait de tourner cette lame d'un angle θ. Si l'on appelle $\epsilon = i \sin 2\theta$ le coefficient de couplage, on peut écrire les équations de l'OPO doublement dégénéré :

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= -(\kappa - i\Delta_1)A_1 + \chi A_p A_2^* + \epsilon A_2 e^{i(\omega_1-\omega_2)t} \\ \frac{dA_2}{d\tau} &= -(\kappa - i\Delta_2)A_1 + \chi A_p A_1^* + \epsilon^* A_1 e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \\ A_p &= e_p - \frac{\chi}{2} A_1 A_2 \end{aligned} \tag{6-21}$$

où A_p, A_1 et A_2 sont respectivement les enveloppes des champs pompe, signal et complémentaire à l'intérieur de la cavité, τ est le temps normalisé au temps d'aller retour dans la cavité, κ le coefficient d'absorption, Δ_i l'écart à la fréquence de résonance du champ i et χ la non-linéarité.

La résolution numérique de ces équations montre l'existence de deux modes dégénérés en fréquence, l'un au seuil plus bas que l'autre, c'est donc ce premier que nous considérerons uniquement. Dans ce mode, on voit que non seulement, comme c'est le cas dans tout OPO, la valeur de la somme des phase des deux champs est constante, mais également leur différence. On montre que la condition optimale pour obtenir la dégénérescence en fonction des écarts à résonance est :

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 2\theta \simeq |\epsilon|. \tag{6-22}$$

Pour finir de caractériser les conditions dans lesquelles nous allons nous placer pour obtenir cette dégénérescence, il est utile de regarder la dépendance de ce seuil avec la longueur de la cavité et la température du cristal. Nous avons reproduit en figure 6.45 l'ensemble des couples de points (L, T) où L est la longueur de la cavité et T la température du cristal pour lesquels, pour une puissance donnée de pompe, le mode dégénéré est le mode de la cavité au seuil le plus bas, et ce pour un angle de la lame quart d'onde de 5°. Plus précisément, sur la figure le couple $(0, 0)$ correspond à la température de dégénérescence exacte avec la longueur de cavité associée, pour une lame avec un angle nul. Les valeurs des longueurs et des températures données sont donc les écarts à cette position. On peut déduire de cette figure la plage de paramètres sur laquelle il est possible de dégénérer la cavité, on obtient :

$$\Delta T_{verouillage} \simeq 0,5K \qquad \Delta L_{verouillage} \simeq 0,5\lambda. \tag{6-23}$$

Ces conditions sont tout à fait réalisables expérimentalement, cependant en notant que la pente de la fréquence de battement en fonction de la température donnée par la figure 6.42 est de 22GHz/^{o}K on voit que la précision demandée est supérieure à celle du spectromètre.

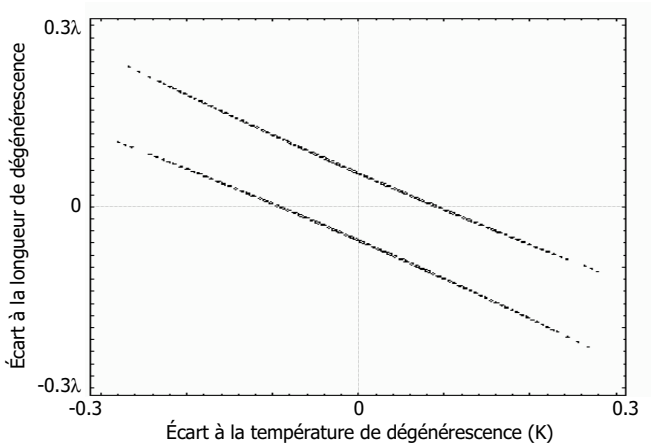

Fig. 6.45 – Couple de valeurs de la longueur de la cavité et de la température du cristal à une puissance de pompe donnée et avec un angle de 5° de la lame quart d'onde pour lesquels le mode dégénéré est le mode au seuil le plus bas. Les positions sont relatives à la position de dégénérescence exacte avec une lame à 0° et les longueurs sont normalisées à la longueur d'onde de l'infrarouge.

E.3 Réalisation expérimentale

Le dispositif expérimental utilisé est celui de la figure 6.44 avec le système de mesure de la figure 6.37. Nous avons de plus utilisé l'injection de la cavité par l'infrarouge comme référence de fréquence. En effet, la fréquence de dégénérescence est exactement la même que celle qui sert à la génération de la pompe, du fait de la conservation de l'énergie, on peut ainsi visualiser au Fabry-Pérot la position des pics correspondants à la dégénérescence exacte. La courbe de la dépendance de la fréquence avec la température de la figure 6.42 nous a permis avec l'interpolation linéaire de déterminer une bonne température de départ. Puis nous explorions autour de cette température avec des pas de $0,05K$ autour de cette température. Nous nous sommes placés dans une cavité légèrement plus longue que la cavité confocale afin d'utiliser, quelle que soit la puissance de pompe, une cavité très légèrement multimode. N'ayant pas d'asservissement pour la cavité, la stabilisation se faisait à la main en jouant sur la tension de la cale piézo-électrique, ce qui permettait d'obtenir des modes stables pendant une dizaine de secondes. Il faut noter que l'alignement de l'ensemble des éléments dans la cavité est assez délicat et il est nécessaire d'aligner d'abord la cavité vide puis d'ajouter les éléments un par un en conservant le réglage.

Nous avons ainsi, par essais successifs, réussi à obtenir la dégénérescence comme cela est montré sur la capture d'écran d'oscilloscope de la figure 6.46. Cette figure a été obtenue avec un angle de 5° pour la lame quart d'onde. Nous avons pu constater que

cet état était relativement plus stable que les modes non dégénérés, et que l'on pouvait le maintenir sur une plage de température de $0,12K$.

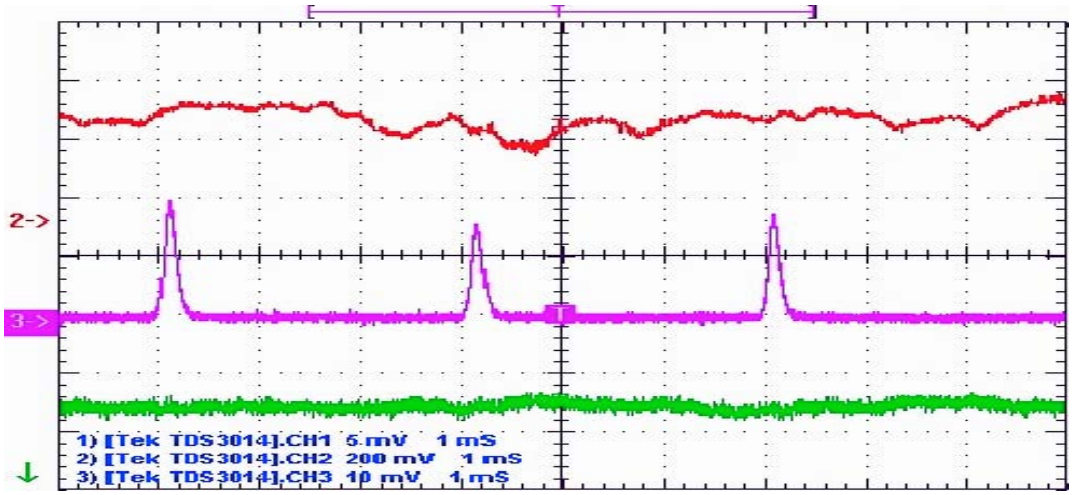

Fig. 6.46 – Dégénérescence en fréquence : la courbe du haut est l'intensité de sortie du faisceau infrarouge et celle du bas du faisceau vert. Celle du milieu est la transmission du faisceau infrarouge par une cavité Fabry-Pérot.

E.4 Problèmes

La réalisation de cette dégénérescence est associée à un nombre important de difficultés, affectant notamment la reproductibilité de l'expérience, que nous allons décrire ici tout en tentant de proposer des améliorations au dispositif.

Résonance de la pompe

La plage de température mesurée expérimentalement est plus petite que celle théorique, en fait le facteur limitant n'était pas cette température mais la taille de la zone de résonance de la pompe. En effet, il est nécessaire que le pic de transmission dégénéré se situe dans un pic de résonance de la pompe, or lorsque l'on change la température la position relative des pics se déplace également (voir à ce propos la section sur les effets thermiques). Il n'était donc pas possible de conserver suffisamment cette coïncidence pour obtenir toute la plage de température. Pour améliorer le système, il faudrait donc pouvoir faire varier indépendamment la position des pics de résonance du vert et de l'infrarouge. Nous avons essayé de faire varier la fréquence du laser maître, car la variation des indices du cristal dépend de la fréquence, mais cet effet était très insuffisant.

Il semble donc nécessaire d'introduire dans la cavité un élément à biréfringence variable de façon adéquate (on peut penser par exemple à un cristal dont on fait varier la température). Il est à noter que ce problème de résonance de pompe est bien sur spécifique à la cavité triplement dégénérée, et n'apparaissait donc pas dans l'expérience de la référence [Mason 98].

Modes transverses

La caractère légèrement multimode de la cavité fait que le nombre de résonances du faisceau infrarouge à l'intérieur d'une résonance de la pompe est très important. Or la dégénérescence dépend du jeu de mode transverse donc il faut être sur qu'à chaque fois on se place sur la même résonance. La seule méthode que nous avons trouvé pour résoudre ce problème a été de systématiquement compter les résonances de l'infrarouge.

Puissance de pompe

Dans la section précédente, nous avons vu qu'une variation de 10 mW de la puissance de la pompe entraînait une variation de 0,05 K de la température du cristal, ce qui représente la moitié de notre plage de variation en température. Or, en fonction notamment de la température de la pièce, mais également des réglages au jour le jour, on a des fluctuation de la puissance à la sortie de la cavité de doublage de l'ordre de 15 %. Quand on sait que l'on utilise typiquement des puissances de pompe de l'ordre de 100 mW on voit que ces fluctuations nuisent énormément à la reproductibilité de l'expérience. L'amélioration que l'on peut apporter ici consiste à ajouter une mesure indépendante de la puissance de la pompe, afin de la garder bien constante.

E.5 Conclusion

Nous avons pu observer la dégénérescence en fréquence pour une cavité triplement dégénérée proche de la dégénérescence transverse. La plage de température observée correspond à une fréquence de battement, avant mise de la lame, de l'ordre de 2GHz. Nous n'avons pas pu cependant avec notre dispositif expérimental obtenir un état reproductible facilement et il est nécessaire d'apporter des améliorations techniques avant de recommencer cette expérience.

F Mesures quantiques

F.1 Introduction

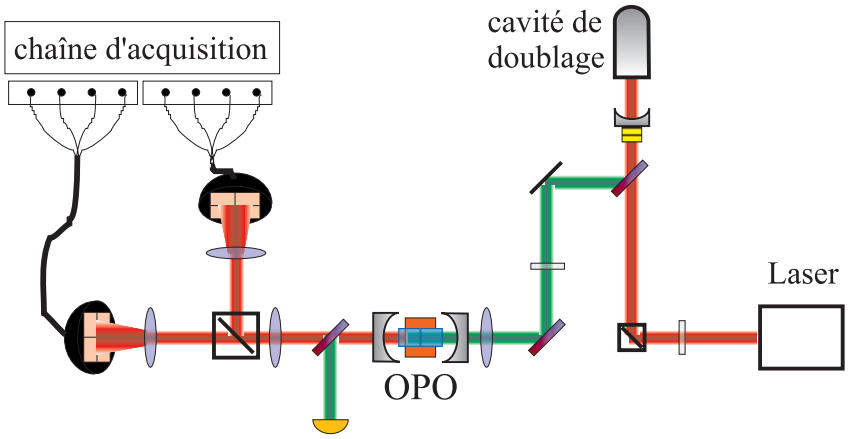

Fig. 6.47 – Schéma expérimental pour la mesure d'effets quantiques transverses.

Au moment où cette thèse est écrite, les mesures de bruit quantique sur les faisceaux sortant des cavités en sont encore à leur débuts. Le désir de voir des effets spatiaux entraîne de multiples difficultés expérimentales qui obligent à adapter les méthodes habituelles de mesure de bruit. Tout d'abord, nous avons vu au chapitre 3 section B que nous faisons toutes nos mesures avec des acquisitions informatiques, il faut alors synchroniser l'ordinateur avec les expériences. Ensuite, les formes différentes des structures sur le signal et le complémentaire nous mènent à adapter séparément la mesure de chacun de ces faisceaux, et ce pour chaque nouvelle forme de structure. Enfin, l'impossibilité de stabiliser la cavité nous fait travailler avec des temps d'acquisition courts et donc des fréquences d'échantillonage élevées. On voit en figure 6.47 le dispositif expérimental utilisé pour de telles mesures.

F.2 Tests de la chaîne : faisceaux jumeaux

Afin de tester le fonctionnement commun des chaînes d'acquisition et des photodiodes nous avons fait des mesures de faisceaux jumeaux sur une cavité avec des miroirs sphériques de 5cm mais légèrement plus courte que la concentricité, de sorte qu'elle fonctionnait de façon monomode transverse. Pour faire ces mesures, nous avons utilisé un seul quadrant par photodiode, sur lequel le faisceau était complètement focalisé. Nous avons utilisé une fréquence de démodulation de 2MHz avec une bande de résolution de 100kHz. La cavité étant dans cette configuration relativement stable

il était possible de la stabiliser à la main et ensuite de lancer une acquisition. Nous avons donc fait des acquisitions électroniques de 10000 points à une fréquence d'échantillonnage de 200kHz. Rappelons enfin la quantité S décrite au chapitre 3 section B qui donne le niveau de bruit quantique standard : dans le cas où i_{HF} et i_{DC} sont respectivement les voies HF et DC d'une acquisition faite aux instants t_k, et ce dans le cas où l'on mesure un faisceau dont le bruit est le bruit quantique standard, il vient :

$$S = \left\langle \frac{i_{HF}(t_k)^2}{i_{DC}(t_k)} \right\rangle_k = constante \tag{6-24}$$

La procédure de mesure expérimentale des photons jumeaux est décrite en section A de ce chapitre. En se plaçant dans la configuration donnant accès au bruit quantique standard, nous avons pu calculer la quantité S et vérifier, sur un grand nombre d'acquisitions, que l'on obtenait bien une constante. Nous nous sommes alors placés dans la configuration permettant de mesurer des photons jumeaux, et nous avons pu voir une réduction de bruit sur la différence de l'ordre de 50%. Il faut comparer cette valeur à la prédiction théorique que nous avions fait en début de chapitre et qui était de 70% de réduction de bruit (en tenant compte de la bande passante de la cavité et des pertes de la cavité). Cela signifie que nous avons environ 25% de pertes par rapport au cas idéal, qui viennent : du détecteur qui a une efficacité quantique de l'ordre de 90%, de la lame dichroïque, et de la taille finie des optiques.

F.3 Mesures multimodes

F.3.1 Cavité concentrique

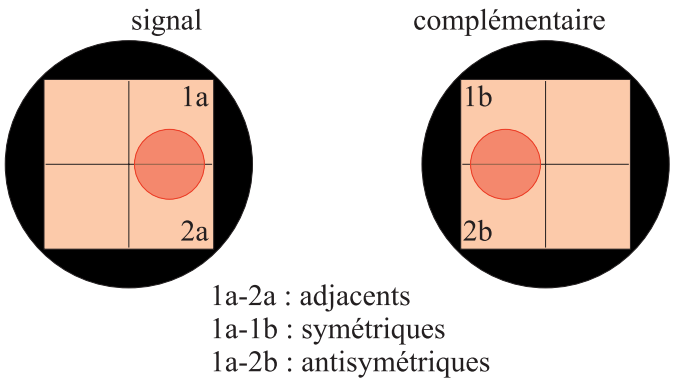

Fig. 6.48 – Définition des secteurs des photodiodes

Nous avons commencé par faire des mesures de corrélation dans une cavité concentrique. Nous avons vu que les prédictions théoriques menaient à une corrélation une

zone du signal et la zone opposée du complémentaire (que nous appellerons zones “anti-symétriques” du faisceau). Nous avons donc cherché à faire des mesures de photons jumeaux sur des zones antisymétriques, comme cela est décrit en figure 6.48 : le signal et le complémentaire sont chacun incidents sur deux quadrant d’une photodiode, ce qui fournit 4 signaux. Ceci permet de faire un calcul de photons jumeaux entre :

- la totalité du signal et la totalité du complémentaire. On devrait trouver la même réduction de bruit que dans le paragraphe précédent.
- deux moitiés du même champ. Cela devrait donner le bruit quantique standard.
- un quadrant du signal et un quadrant du complémentaire. Dans le cas où les quadrants sont symétriques (i.e. on mesure la même partie de chaque champ) on devrait trouver le bruit quantique standard. Dans le cas où les quadrants sont anti-symétriques (i.e. on mesure des parties opposées des deux champs) où on devrait voir la même réduction de bruit que sur la totalité des champs.

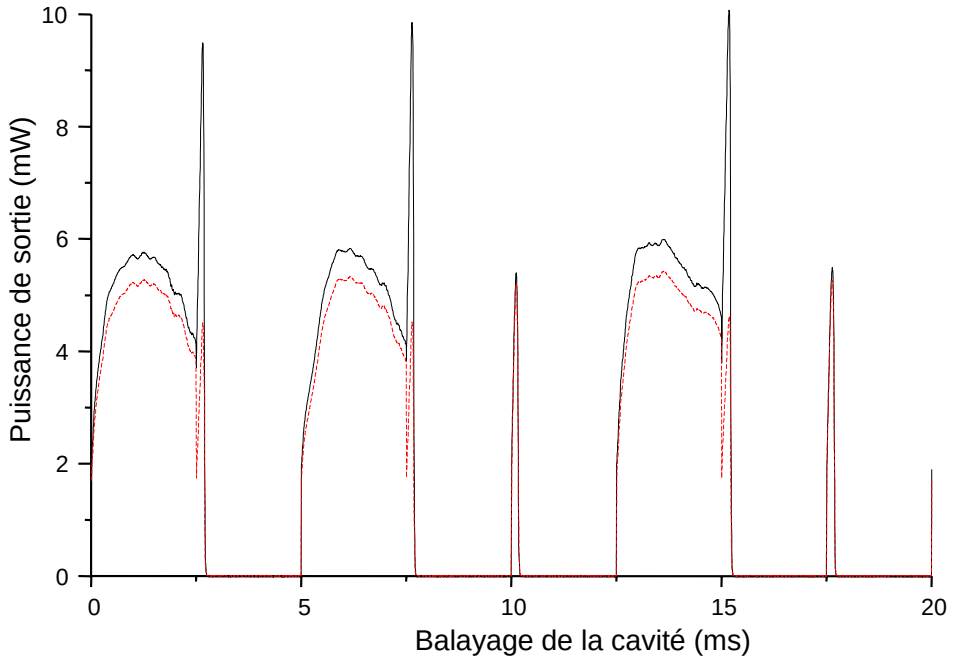

Fig. 6.49 – Exemple typique du résultat d’une acquisition pendant le balayage de la cavité : la courbe supérieure (trait plein) correspond au faisceau signal et la courbe inférieur (trait pointillé) au faisceau complémentaire.

Nous avons utilisé une cavité concentrique avec des miroirs de rayon de courbure R=5cm, de sorte que la fréquence de coupure de la cavité était assez basse. De plus, la faible stabilité de la cavité concentrique, notamment dans la zone très proche de

concentricité, ne permettait pas de mettre la cavité en oscillation puis d'acquérir. La méthode adoptée a été de balayer la longueur de cavité et de déclencher automatiquement l'acquisition sur le faisceau infrarouge sortant de la cavité. Ainsi, les acquisitions effectuées ressemblaient à ce que l'on peut voir en figure 6.49. Il fallait donc ensuite filtrer les données pour ne conserver que les points d'intensité non nulle (voir annexe C). On voit de plus que les intensités du signal et du complémentaire ne sont pas parfaitement identiques, il en résulte que lorsque l'on fait la différence des bruits entre les deux faisceaux, le bruit classique ne sera pas complètement éliminé. Cela a constitué pour nous un des obstacles majeurs à des mesures de qualité, et ce d'autant plus que le rapport entre ces intensité n'est pas constant d'une acquisition sur l'autre. Nous avons donc choisi de conserver les acquisitions où la différence entre les deux intensités était inférieure à 20%.

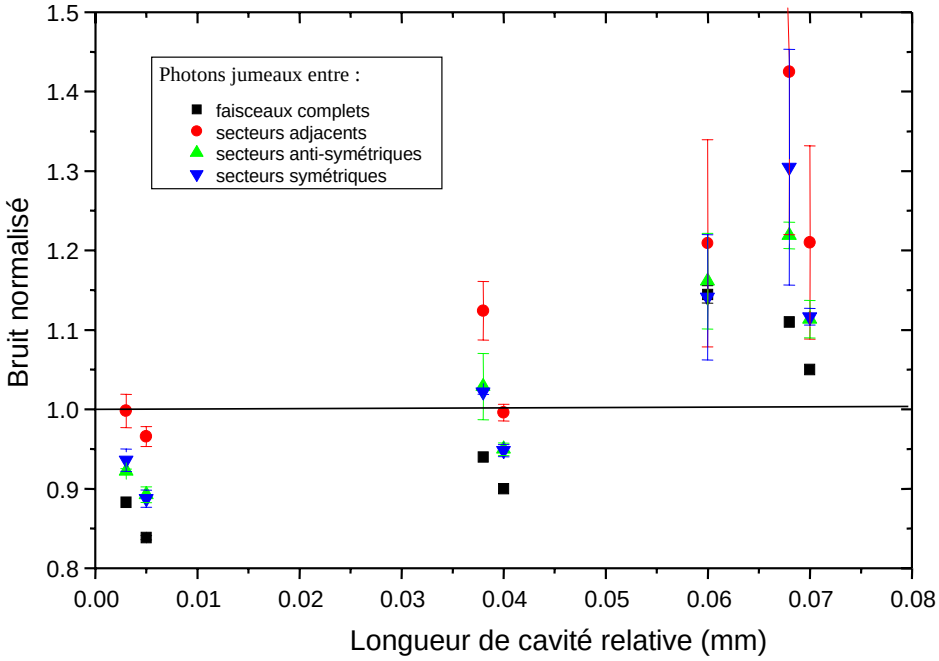

Fig. 6.50 – Mesure de photons jumeaux à la sortie de la cavité concentrique.

Les mesures que nous avons pu faire sont résumées sur la figure 6.50, où, pour plusieurs longueurs de cavité, sont reportées les quatre types de mesure que nous avons décrites. On voit que lorsque l'on part d'une cavité concentrique presque parfaite (à gauche de la figure), la réduction de bruit de différence sur les faisceaux complets est assez faible (de l'ordre au mieux de 20%). Ce phénomène s'explique d'une part par la différence entre les intensité signal et complémentaires, et d'autre part par les

pertes globales dues à la taille très importante des champs. Ainsi, plus on allonge la cavité, plus le niveau du bruit de la différence monte, jusqu'à passer au dessus du bruit quantique standard. Si on regarde ce qui se passe sur les mesures partielles, on voit que pour les secteurs adjacents on retrouve bien (au moins pour une cavité pas trop longue) le bruit quantique standard, alors que pour les secteurs symétriques ou antisymétriques on trouve la même valeurs, qui correspond à ce que l'on obtiendrait en atténuant chacun des faisceaux de 50%. Nous ne voyons donc dans cette configuration aucune corrélation transverse. Il faut mentionner que toutes ces mesures ont été faites dans le champ lointain du milieu de la cavité. Ces mesures permettent cependant de voir comment améliorer le système : il est indispensable d'obtenir une cavité mieux stabilisée, afin d'avoir une intensité constante à la sortie. De plus, il peut être nécessaire de faire varier de façon continue le plan que l'on analyse afin de voir une dépendance. Enfin, il semble également nécessaire de trouver un moyen pour que la longueur de dégénérescence de la cavité pour le signal et le complémentaire soit la même; on peut par exemple penser à l'insertion d'un autre cristal identique mais tourné de 90° afin de compenser la variation d'indice.

F.3.2 Cavité confocale

Nous avons également testé en détail la cavité confocale, beaucoup plus facile à mettre en œuvre. Cependant, au dessus de seuil, sans dégénérescence en fréquence entre le signal et le complémentaire, la seule mesure que nous pouvons faire est un effet de diaphragme sur la réduction de bruit de différence (photons jumeaux). Nous avons donc placé en sortie de la cavité confocale, dans le champ lointain, un diaphragme permettant de ne conserver que la partie centrale du champ. Nous avons utilisé une cavité avec des miroirs sphériques de rayon de courbure R=10cm et d'une longueur de 10cm (nous avons donc du faire des acquisitions à une fréquence de démodulation de 2MHz). Enfin, nous avons continué à travailler en déclenchant automatiquement l'acquisition, tout en enregistrant avec une caméra CCD les structures sur les champs signal et complémentaire.

On voit en figure 6.51 les résultats que nous avons pu obtenir pour une cavité légèrement plus longue que la cavité confocale. On voit sur ce graphique le niveau de bruit de différence en fonction de l'ouverture du diaphragme, celui-ci suit parfaitement la ligne droite théorique correspondant à ce que l'on obtiendrait avec un champ monomode ayant la même réduction de bruit totale. Cela confirme que la cavité est monomode.

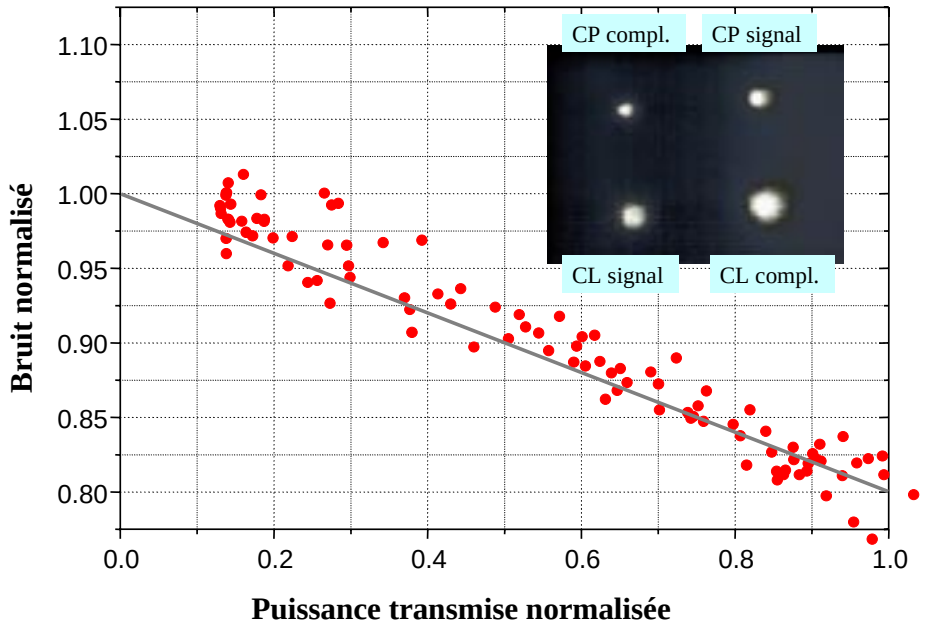

Fig. 6.51 – Mesure de faisceaux jumeaux dans une cavité légèrement plus longue que la cavité confocale, en fonction de l'ouverture du diaphragme.

On voit en figure 6.52 ce que nous avons pu obtenir pour une cavité légèrement plus courte que la cavité confocale. Dans ce cas, les observations classiques nous prédisent des champs multimodes. Et on voit en effet que les mesures ne suivent plus la droite théorique : dès que le diaphragme est légèrement fermé il y a un excès de bruit par rapport à un champ monomode. Cela signifie que la partie centrale du champ est plus bruyante que la partie extérieure. Cependant, on voit que la dispersion de ces résultats est très importante, cela est principalement du à la différence entre les intensités signal et complémentaire. En effet, les structures sur les deux champs étant différentes, le diaphragme n'a pas le même effet sur les deux champs.

Malgré tout, ces mesures de répartition non classiques du bruit en fonction de l'ouverture du diaphragme sont tout à fait reproductibles, et se manifestent le mieux quand le signal et le complémentaire ont la même puissance. Nous avons donc ici une preuve du caractère multimode transverse de la lumière émise par l'OPO. Nous avons également fait des interpolations pour tenir compte des pertes de puissance sur le signal ou sur le complémentaire, et elles confirment toute cet aspect multimode quantique. Cela valide donc à la fois le système physique, et le système de détection. Nous prévoyons maintenant de prendre en compte toutes ces informations pour reconstruire

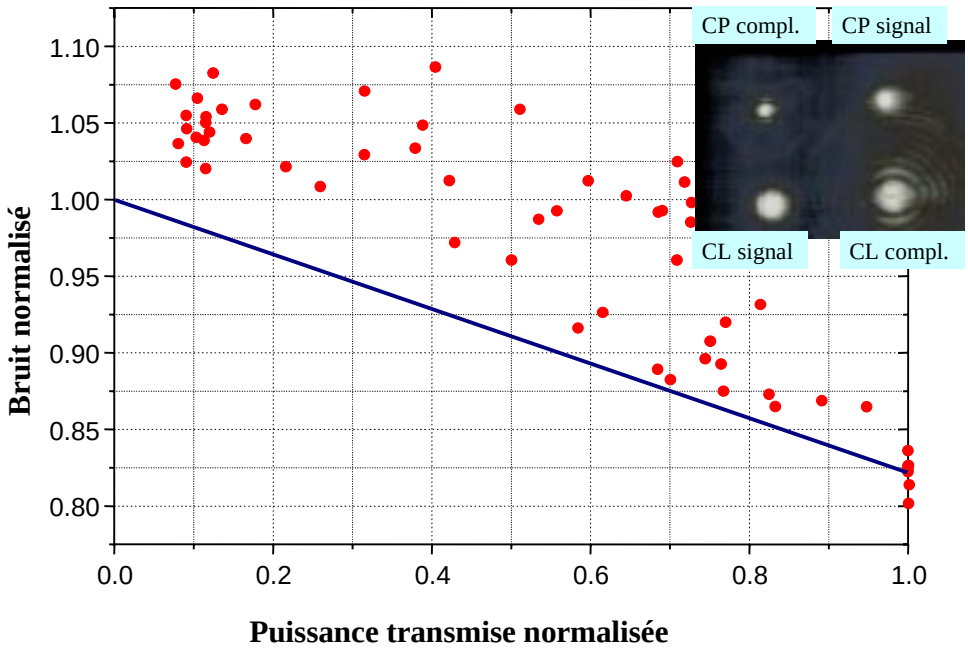

Fig. 6.52 – Mesure de faisceaux jumeaux dans une cavité légèrement plus courte que la cavité confocale, en fonction de l'ouverture du diaphragme.

l'expérience et confirmer ces résultats. L'expérience présentée ici constitue donc à la fois la preuve de faisabilité et la définition des zones de paramètres pertinents pour réaliser une expérience définitive et obtenir des effets plus importants.

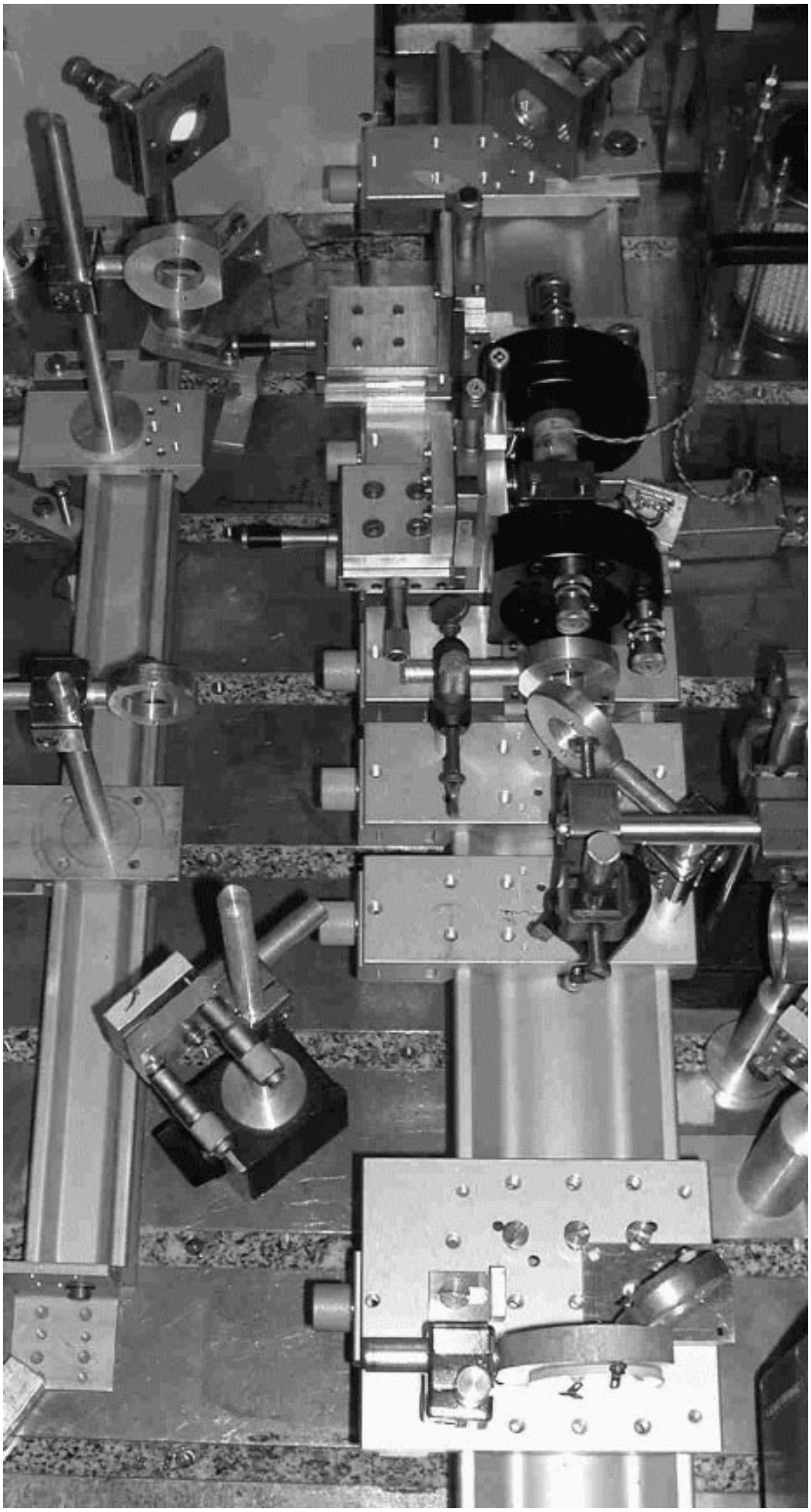

Fig. 6.53 – Le banc d'optique.

Conclusion

Nous avons étudié dans ce mémoire les propriétés des images quantiques dans le régime des champs continus et intenses. Nous avons fait le lien, à la fois théorique et expérimental, entre les propriétés multimodes transverses de la lumière et la possibilité d'améliorer la précision des mesures dans les images optiques.

Nous avons commencé par reprendre en détail la théorie quantique de la lumière dans le plan transverse. Nous avons pu ainsi, dans le cadre de l'approximation paraxiale, définir des observables proches de ce que mesurent les détecteurs en optique. Ceci nous a permis de définir de façon détaillée les notions de bruit quantique standard, de faisceau multimode quantique et de corrélations quantiques. Nous avons pu démontrer que, pour un champ monomode, qu'il soit classique ou comprimé, la mesure partielle de ce champ est complètement équivalente, sur le plan des fluctuations, à la présence d'un filtre sur le faisceau. En utilisant la décomposition en pixels, il a alors été possible de décrire un état où la réduction de bruit ne dépend pas de la fraction spatiale du faisceau que l'on mesure. Cet état est complément multimode et illustre la notion de réduction de bruit locale.

Nous avons alors appliqué la décomposition en pixel pour développer une méthode de calcul des fluctuations du champ. Cette méthode de calcul générale permet de trouver des relations d'entrée/sortie pour les fluctuations d'un nombre quelconque de champs se propageant dans un milieu non linéaire. Pour ce faire, en considérant la limite des petites fluctuations quantiques, nous avons linéarisé les équations et calculé les fonctions de Green de ce système. Ceci nous a permis de donner une expression générale des fonctions de corrélations spatiales du champ à la sortie du cristal en fonction de ses fluctuations à l'entrée.

Nous avons fini cette revue des outils de l'optique quantique en donnant un exemple de méthode expérimentale pour détecter des fluctuations quantiques. Nous avons ainsi décrit en détail la calibration et l'utilisation de détecteurs à quadrants, permettant de mesurer la structure transverse du champ.

Sur le plan des applications, nous avons mis en oeuvre la méthode de calcul des

fluctuations quantiques au cas d'un mode du champ particulier où les effets de la diffraction sont compensés par l'interaction non-linéaire : le soliton spatial. Nous avons alors comparé les résultats entre le milieu non linéaire d'ordre 3, où un seul champ est impliqué, à celui d'ordre 2 où deux champs sont en interaction. Ceci permet de définir des répartitions standard que l'on peut comparer aux fonctions de corrélations à deux champs. Nous avons pu dans ce dernier cas mettre en évidence des corrélations purement quantiques, et faire apparaître l'importance de la géométrie. Cette méthode s'est révélée efficace pour décrire la structure transverse du champ et nous sommes en train de l'appliquer à d'autres systèmes. Tout d'abord, nous souhaitons faire les mêmes calculs dans le cas d'un soliton à deux dimensions transverses. D'un autre côté nous adaptons la méthode de calcul aux milieux non linéaires en cavité, ce qui sera utile, par exemple, pour étudier les solitons en cavité dont l'existence a été démontrée récemment. Enfin, cette méthode ne fonctionne que dans le cadre de la limite des petites fluctuations, or cela n'est pas toujours valable comme l'a prouvé l'exemple de la génération de second harmonique. Nous cherchons donc à étendre le domaine de validité de la méthode en allant au delà de la limite des petites fluctuations.

Nous avons ensuite étudié le système de l'oscillateur paramétrique optique dégénéré transversalement. Ce dispositif permet d'exploiter les propriétés multimodes des cristaux non linéaires mais dans une configuration nécessitant beaucoup moins de puissance que le soliton, et permettant de travailler dans le régime continu. Nous avons fait apparaître les propriétés multimodes de ces cavités en observant la formation spontanée de structures optiques. Nous avons déterminé précisément les domaines de paramètres autorisant le fonctionnement dégénéré de la cavité. Nous avons alors présenté les premières mesures quantiques, qui font apparaître une répartition de bruit non monomode pour une cavité confocale. Nous avons mis ainsi en évidence une asymétrie entre le centre et l'extérieur du faisceau, qui reflète des corrélations entre les modes. Cependant, les effets sont encore assez faibles, et nous tentons donc d'améliorer l'expérience en mesurant la distribution spatiales des fluctuations quand l'oscillateur fonctionne sous le seuil. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser un oscillateur local dont la forme soit adaptée à l'image quantique que l'on veut mesurer, et une des parties importantes du travail à venir va consister à déterminer cet oscillateur local optimal.

Nous avons finalement étudié en détail le problème plus simple du champ à deux modes pour la mesure des petits déplacements. Nous avons fait deux propositions théoriques pour améliorer cette mesure et nous en avons mis une en oeuvre. En mélangeant du vide comprimé avec un état cohérent possédant un facteur de phase π entre sa gauche et sa droite nous avons pu réduire les fluctuations du signal de différence délivré

par un détecteur à deux zones sous la limite quantique standard. Ceci nous a permis d'améliorer le rapport signal/bruit dans la mesure d'une petite oscillation du faisceau. La suite de cette expérience peut être vue sous plusieurs angles: tout d'abord, en vue d'applications futures, il est nécessaire de mesurer des oscillations à basse fréquence, et donc par exemple de produire du vide comprimé à basse fréquence. D'un autre côté, il semble possible d'enrichir les corrélations dans le faisceau, selon le même principe que celui utilisé pour des corrélations à deux zones, pour réaliser des mesures de position dans les deux directions. Sur le plan des images quantiques, il faut continuer à développer la théorie en se tournant vers des exemples concrets comme la microscopie à contraste de phase ou encore l'holographie. Il faut alors réfléchir à des méthodes expérimentales permettant de produire des champs complètement multimodes ayant des propriétés adaptées aux mesures désirées.

Annexe

A Génération de second harmonique

A.1 Introduction

Tout au long de cette thèse nous avons utilisé le lien fort existant entre les cristaux non linéaires et les propriétés quantiques de la lumière. Pour calculer ces propriétés nous avons en général linéarisé les fluctuations autour de la valeur moyenne du champ. Dans certains cas, pourtant, cette linéarisation n'est plus valable, et elle peut même cacher des effets quantiques importants. Afin d'étudier certaines des limites de notre modèle, nous allons nous intéresser ici à l'un des problèmes les plus classiques de l'optique non linéaire : la génération de second harmonique. Cette étude a été publiée dans un article que est reproduit à la fin de cette section, nous en faisons donc ici une présentation rapide.

A.2 La solution standard

A.2.1 Le champ classique

Nous allons considérer ce problème sous l'angle théorique le plus simple possible : une onde plane à la fréquence ω est incidente sur un cristal avec une non-linéarité d'ordre 2. C'est le cas particulier du doublage de fréquence où l'interaction avec le milieu va générer une onde plane à la fréquence 2ω. Nous cherchons une solution stationnaire au problème posé, la dépendance temporelle des équations va donc être oubliée. Ainsi, si l'on se place dans le cas du parfait accord de phase :

$$\Delta k = 2k_1 - k_2 = 0,$$

on obtient les équations de propagations pour l'enveloppe des deux champs dans le cristal :

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = i\kappa A_1^* A_2$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = i\kappa A_1^2. \tag{A-1}$$

Ces équations sont les mêmes que celles utilisées pour le soliton spatial, mais sans dépendance transverse. Dans ce cas, on peut trouver une solution analytique (voir notamment [Shen 84]) que nous allons exprimer ici en terme de nombre de photons. Soient donc $n_1(z)$ et $n_2(z)$ le nombre de photons respectivement dans le fondamental et dans le second harmonique. La conservation de l'énergie nous donne que la quantité $N_0 = n_1(0) = n_1(z) + 2n_2(z)$ est conservée pendant la propagation. On peut donc exprimer le résultat en terme de nombres de photons normalisé :

$$N_1 = \frac{n_1}{N_0} \quad ; \quad N_2 = \frac{n_2}{N_0}. \tag{A-2}$$

Nous pouvons maintenant écrire la solution des ces équations, représentée figure 7.1 :

$$N_1(\zeta) = sech^2(\zeta)$$
$$N_2(\zeta) = \frac{1}{2} tanh^2(\zeta), \tag{A-3}$$

où $\zeta = z\kappa\sqrt{\frac{N_0}{2}}$ est la distance de propagation normalisée. Il y a conversion complète du fondamental en second harmonique, et on tend vers un état stationnaire.

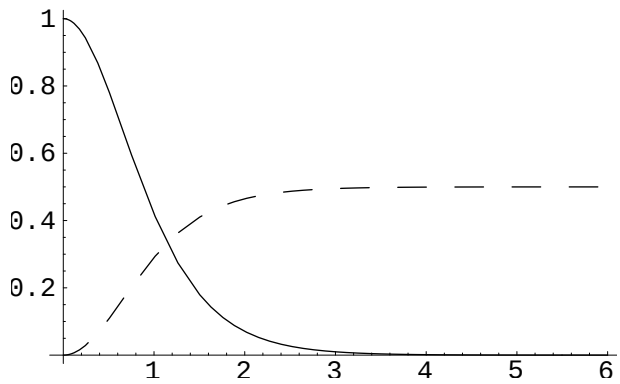

Fig. 7.1 – Intensité du fondamental (trait plein) et de second harmonique (pointillé) en fonction de la distance de propagation

A.2.2 Les fluctuations quantiques

Maintenant que nous connaissons le champ moyen, nous pouvons calculer les fluctuations quantiques du système, en utilisant la procédure semi-classique habituelle. Les équations linéaires sur les fluctuations ainsi obtenues possèdent une solution analytique [Ou 94], représentée figure (7.2). Le fondamental devient complètement comprimé en intensité : c'est du vide comprimé. Cela vient du processus de génération de second harmonique, en effet, deux photons du fondamental sont convertis en un photons du second harmonique, ce processus étant d'autant plus probable que les deux photons du fondamental sont proches (temporellement) l'un de l'autre. Ainsi, le processus enlève du fondamental les photons les plus proche, il ajoute donc un ordre temporel au faisceau.

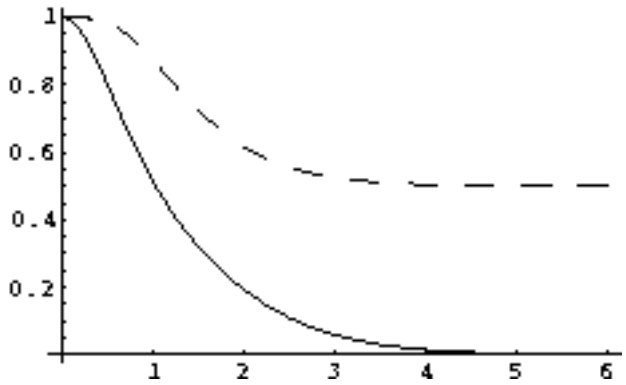

Fig. 7.2 – Bruit en intensité du champ second-harmonique (pointillé) et du fondamental (trait plein) en fonction de la distance de propagation.

A.2.3 Comportement à longue distance

La solution présentée ici, qui est celle couramment admise, présente un comportement étonnant pour des grandes distances d'interaction. En effet, la solution tend vers un état stable où seul le second harmonique est présent. La génération paramétrique du fondamental ne se produit pas. On peut interpréter ce phénomène en constatant que la phase relative entre le fondamental et le second harmonique n'est pas la même dans le cas de la génération de second harmonique et dans le cas de la génération paramétrique. Ici, la phase étant fixée au départ par le processus de doublage de fréquence, la conversion inverse ne peut pas se produire.

Au delà de ce comportement surprenant de la solution classique, on voit également que les prédictions sur les fluctuations ne peuvent être valides pour de grande distance de propagation. Le modèle prévoit une réduction totale du bruit d'intensité du fondamental, accompagnée d'une divergence de son bruit de phase, alors que le champ

moyen tend vers 0. L'approximation des petites fluctuations n'est donc plus valide, et il apparaît qu'une résolution plus fine de ce système nécessite la prise en compte de ce phénomène.

A.3 Description quantique

A.3.1 Introduction : les équations sur les opérateurs

Si l'on considère l'opérateur de création d'un photon à la fréquence ω : $a^+(z)$ et celui à la fréquence 2ω : $b^+(z)$, on obtient le hamiltonien du système :

$$\mathcal{H} = \frac{i\hbar\kappa}{2}\left[\hat{a}^2\hat{b}^\dagger - \hat{a}^{\dagger\,2}\hat{b}\right], \tag{A-4}$$

et les équations de propagation dans le milieu [Li 94] :

$$\frac{d\hat{a}}{dz} = -\kappa\hat{a}^\dagger\hat{b} \quad ; \quad \frac{db}{dz} = \frac{\kappa}{2}\hat{a}^2. \tag{A-5}$$

Ces équations sont des équations exactes dont il n'existe pas de solution analytique. Nous allons illustrer ici trois méthodes pour les résoudre, en dehors de la procédure de linéarisation. Tout d'abord, nous allons regarder les équations vérifiées par les opérateurs nombre de photons; puis nous regarderons ce que donne une approche en terme d'équation de Fokker-Plank; enfin nous tenterons de trouver une solution exacte pour un nombre fini de photons en diagonalisant le hamiltonien.

A.3.2 Équation sur le nombre de photons

Si l'on considère les opérateurs nombre de photons $\hat{N}_1 = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ et $\hat{N}_0 = \hat{N}_1 + 2\hat{N}_2$, on trouve une équation unique décrivant leur évolution :

$$\frac{d^2\hat{N}_1}{dz^2} = -\kappa^2(3\hat{N}_1^2 - 2\hat{N}_0\hat{N}_1 - \hat{N}_0). \tag{A-6}$$

C'est une équation exacte dont on ne connaît pas de solution. La première approximation consiste à négliger les termes de corrélations, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle\hat{N}_1^2\rangle &= \langle\hat{N}_1\rangle^2 \\ \langle\hat{N}_0\hat{N}_1\rangle &= \langle\hat{N}_0\rangle\langle\hat{N}_1\rangle. \end{aligned} \tag{A-7}$$

L'équation sur $\langle\hat{N}_1\rangle$ ainsi trouvée possède une solution analytique en terme de fonction elliptique de Jacobi, que nous ne détaillerons pas ici (cela est fait dans l'article reproduit en fin de section). La figure (7.3) représente l'évolution des deux champs dans

cette approximation, et on voit qu'après une certaine distance de propagation, et une conversion quasi complète du fondamental, il y a une renaissance du fondamental, puis une oscillation du phénomène. Cette prédiction est en contradiction avec la prédiction classique, et la différence vient du terme $\hat{N}_0$ dans l'équation (A-6), ce terme n'existant pas dans l'équation classique. Il apparaît du fait de la prise en compte du commutateur entre les opérateurs de création et d'annihilation, il représente l'émission paramétrique spontannée. C'est ce terme qui est responsable de la renaissance du champ, celle-ci démarrant sur le bruit.

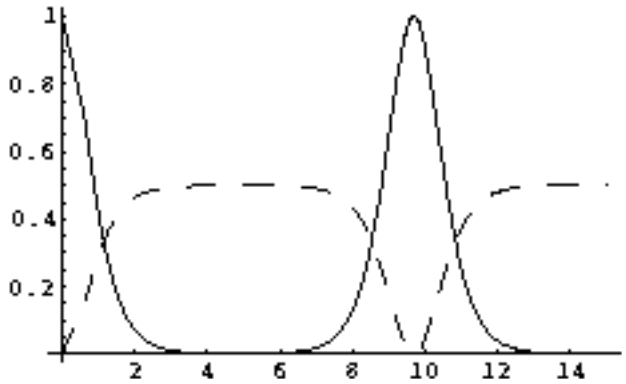

Fig. 7.3 – Intensité du fondamental (trait plein) et du second harmonique (pointillé) en fonction de la distance de propagation.

Notons simplement que ce modèle permet de calculer exactement la période de ce phénomène, ainsi que le minimum atteint par le fondamental. On trouve comme période $ln(8\sqrt{N_0})$, soit à peu près le double de la validité de la procédure semi-classique, et comme minimum $\sqrt{N_0}$, soit exactement le bruit du fondamental au début du cristal. On peut penser que la partie incohérente du faisceau -son bruit- n'est pas convertie et qu'elle permet de démarrer la conversion inverse. Une dernière constation, alors que la forme de la figure de conversion classique, une fois passé en variables adimensionnées, ne dépend pas des conditions initiales, ici la période du phénomène dépend de N_0.

A.4 Equation de Fokker-Plank

La deuxième méthode présentée ici consiste à trouver des équations de Fokker-Plank [Gardiner 91], et à les résoudre numériquement. Nous renvoyons à l'article pour l'établissement de ces équations. La méthode en représentation «positive P» a été privilégiée et à titre de comparaison, une simulation en représentation de Wigner a également été réalisée.

Nous voyons en figure 7.4 le nombre de photons dans le fondamental en fonction de la distance de propagation, les paramètres de normalisation ayant été ajustés afin de correspondre à ceux de la solution analytique. On voit que cette solution est en bon accord avec la précédente jusqu'à l'apparition de la renaissance du champ, mais par contre il y a ici un amortissement du champ qui ne retrouve plus son niveau initial. On note également le très bon accord entre les solutions obtenues avec les deux représentations.

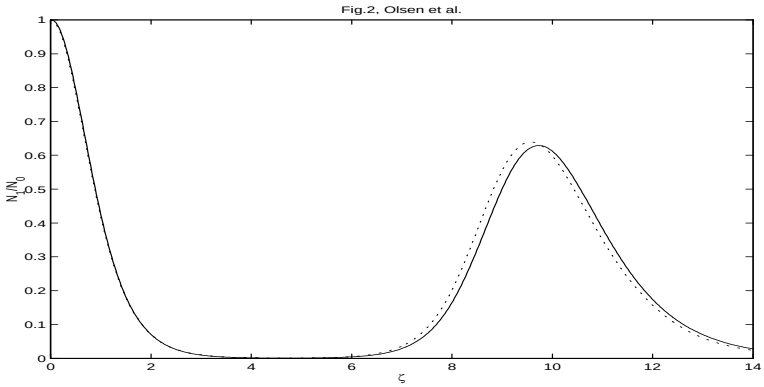

Fig. 7.4 – Amortissement de la renaissance de champ en représentation «positive P» (ligne pleine) et en représentation de Wigner (ligne pointillée)

Pour expliquer ce phénomène, il faut analyser la courbe de bruit du fondamental qui est représentée en figure 7.5. On voit en effet que ce bruit suit bien la solution linéarisée jusqu'au début de la renaissance, et qu'a ce moment elle se met à diverger. Ce bruit très important, qui n'était pas pris en compte dans la solution analytique, semble être responsable de l'amortissement.

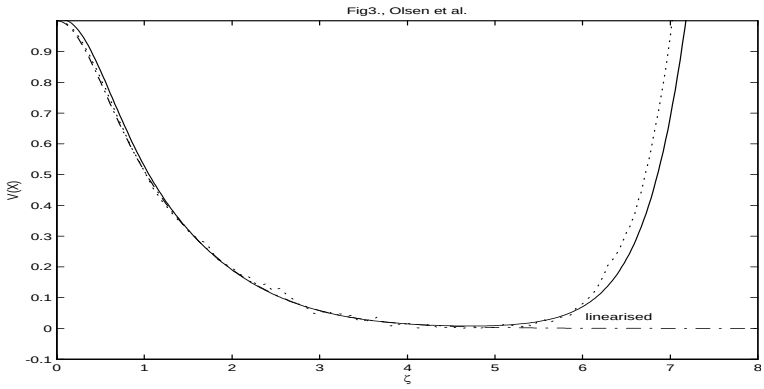

Fig. 7.5 – Bruit sur le champ fondamental en fonction de la distance de propagation.

A.5 Diagonalisation du hamiltonien

L'étude précise de l'évolution du bruit peut être faite dans le cadre d'une approche avec un nombre de photons fini, où l'on tente de diagonaliser le hamiltonien. Nous commentons ici des résultats développés par Singh *et al.* sur le modèle de [Sazonova 99]. Ces auteurs ont choisi de prendre un nombre de photon fini, d'écrire complètement le hamiltonien d'interaction et de le diagonaliser pour calculer les vecteurs et les valeurs propres. On voit sur la figure 7.6 que encore une fois notre résultat est confirmé : il y a une oscillation entre les deux champs. On voit de plus que ici le résultat tend vers une solution stationnaire, de même que le bruit, qui, réduit pour une courte distance de propagation, se stabilise très au dessus du bruit quantique standard pour une grande distance de propagation.

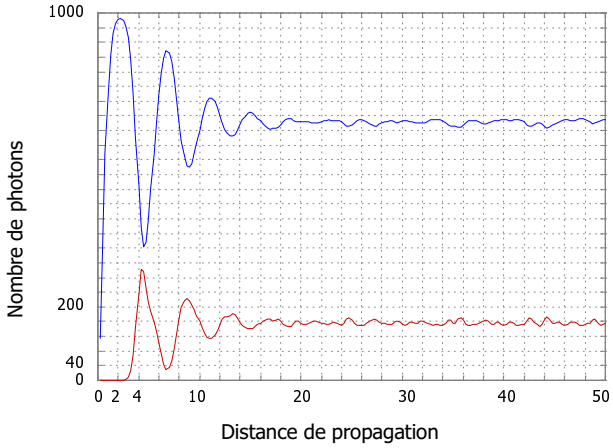

Fig. 7.6 – Intensité du second harmonique (en haut) et bruit sur le second harmonique normalisé à 1 (en bas) en fonction de la distance de propagation, pour un calcul avec 2000 photons.

A.6 Conclusion

Nous avons vu ici une des limites du modèle des petites fluctuations quantiques. Nous avons pu, de plus, mettre un évidence une manifestation macroscopique d'un phénomène quantique en montrant que la solution classique est fausse pour de grandes distances d'interaction. Cependant cette étude mérite d'être approfondie, notamment pour clarifier ce qu'est physiquement le nombre de photons N_0.

RAPID COMMUNICATIONS

PHYSICAL REVIEW A, VOLUME 61, 021803(R)

Quantum-noise-induced macroscopic revivals in second-harmonic generation

M. K. Olsen and R. J. Horowicz
Instituto de Física, Universidade de São Paulo–USP, CX Postal 66318, São Paulo–SP, 05389-970, Brazil

L. I. Plimak
Department of Physics, University of Auckland, Private Bag 92019, Auckland, New Zealand

N. Treps and C. Fabre
Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Case 74, 75252 Paris Cedex 05, France
(Received 21 September 1999; published 5 January 2000)

We investigate the behavior of the fundamental and second-harmonic fields in phase-matched traveling plane-wave second-harmonic generation, using the full-operator equations of motion. We find that, after a certain interaction length, both the macroscopic and quantum-statistical properties of the harmonic and fundamental fields are qualitatively different from those found in previous analyses. The mean fields do not vary in a monotonic way, but oscillate with the propagation length, leading to an unexpected periodic revival of the fundamental field, triggered by the quantum fluctuations always present in the mode. Accordingly, the amplitude noise of the fundamental, previously predicted to be perfectly squeezed for long interaction lengths, actually reaches a very small minimum for a definite length, then increases again.

PACS number(s): 42.50.Dv, 42.50.Lc, 42.65.−k

Second-harmonic generation (SHG) has been studied in great detail since the first years of nonlinear optics, and is often taken as the simplest example of a nonlinear optical process. In the simple traveling plane-wave configuration, the solution for the generated fields as a function of the propagation length z is well known [1,2]. It predicts that, when one starts from a nonzero fundamental field and no second harmonic, one gets a total and irreversible transfer to the second harmonic mode when z grows to infinity. SHG is also of great importance for the generation of nonclassical states of light, either in an intracavity configuration [3–8] or in the pure propagation case [9–13]. In this second case, the amount of squeezing present in the fields has been calculated using the standard linearized fluctuation analysis. In the case of perfect phase matching, this analysis [9] predicts that the fundamental field evolves into a perfectly amplitude squeezed vacuum, whereas the second-harmonic field undergoes a 50% amplitude squeezing, and strong quantum correlations develop between the two modes [14]. However, it is clear that the prediction that a perfectly squeezed vacuum is generated is in contradiction to the assumption that the quantum fluctuations of the different fields are much smaller than mean fields, which is at the basis of the linearization technique. Moreover, there is reason to doubt that the situation predicted by the classical model, where the second-harmonic field is large and the fundamental is zero, can remain stable when z tends to infinity. It is well known that, starting with these values of the mean fields, one finds a growing of the fundamental mode by parametric splitting of the second harmonic triggered by parametric fluorescence.

In this article, using more accurate approaches that do not rely on linearization, we show that the behavior both of the mean fields and of the quantum fluctuations is qualitatively different from the previous results for long interaction lengths. In particular, we find that the mean fields do not have a monotonic variation, but oscillate with z. We thus predict a very spectacular macroscopic revival of the fundamental field that is induced by the quantum noise present in the interacting modes.

Let us call $\hat{a}$ and $\hat{b}$ the annihilation operators for the fundamental and harmonic mode at point z, and κ the effective strength of the nonlinear interaction between the light modes in the nonlinear crystal. The exact propagation equations for these operators are [9,11]

$$\frac{d\hat{a}}{dz}=\kappa\hat{a}^{\dagger}\hat{b}, \quad \frac{db}{dz}=-\frac{\kappa}{2}\hat{a}^{2}. \tag{1}$$

No exact analytical solutions are known for these operator equations. However, it is possible to find numerical solutions by stochastic simulations in the phase-space representations of quantum optics [15], either exactly in the positive-P [16], or approximately in the Wigner representation [17,18].

When one replaces the operators $\hat{a}$ and $\hat{b}$ by the c numbers α and β, one retrieves the well-known classical propagation equations of nonlinear optics, which can be solved exactly. In the pure SHG case with $\beta(z=0)=0$ and $\alpha(z=0)\in\mathbb{R}$, one finds

$$\alpha(\zeta)=\alpha(0)\,\mathrm{sech}(\zeta), \quad \beta(\zeta)=-\frac{\alpha(0)}{\sqrt{2}}\tanh(\zeta), \tag{2}$$

where $\zeta=z[\kappa|\alpha(0)|/\sqrt{2}]$. Setting

$$\hat{a}(\zeta)=\alpha(\zeta)+\delta\hat{a}(\zeta), \quad \hat{b}(\zeta)=\beta(\zeta)+\delta\hat{b}(\zeta), \tag{3}$$

and assuming that the fluctuations are small, one can linearize the operator equations (1) around the classical solutions, which leads to simple analytical expressions for the quadrature variances and the correlation functions of the two fields [9]. However, the linearization procedure is not valid when ζ

 ©2000 The American Physical Society

is large, because the phase quadrature fluctuations of the fundamental field are found to diverge exponentially, whereas the mean field decreases. In this model the mean field and the rms fluctuations are equal when $\zeta=\zeta_0=\frac{1}{4}\ln[32|\alpha(0)|^2]$, with linearization only being valid where $\zeta \ll \zeta_0$.

We now show that it is possible to obtain a more accurate, but still approximate, propagation equation for the mean fields that does not rely on linearization. Letting $\hat{N}_1=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ and $\hat{N}_2=\hat{b}^\dagger\hat{b}$, and using $[\hat{a}(z),\hat{a}^\dagger(z')]=[\hat{b}(z),\hat{b}^\dagger(z')]=\hat{1}\,\delta(z-z')$, we find exact propagation equations for these two operators,

$$\frac{d\hat{N}_1}{dz}=-2\frac{dN_2}{dz}=-\hat{S}, \tag{4}$$

where $\hat{S}=\kappa[\hat{a}^2\hat{b}^\dagger+\hat{a}^{\dagger\,2}\hat{b}]$. Equation (4) implies that $\hat{N}_1+2\hat{N}_2$ is constant in the propagation, as required by energy conservation. From Eq. (1), one finds that the evolution of the operator $\hat{S}$ is given by

$$\frac{d\hat{S}}{dz}=\kappa^2[\hat{N}_1^2-4\hat{N}_1\hat{N}_2-\hat{N}_1-2\hat{N}_2]. \tag{5}$$

The energy invariant requires that $\hat{N}_2(z)=\frac{1}{2}[\hat{N}_0-\hat{N}_1(z)]$, where $\hat{N}_0=\hat{N}_1(0)+2\hat{N}_2(0)$. We can write an exact quantum propagation equation which only involves the operators $\hat{N}_1(z)$ and $\hat{N}_0$,

$$\frac{d^2\hat{N}_1}{dz^2}=-\kappa^2[3\hat{N}_1^2-2\hat{N}_0\hat{N}_1-\hat{N}_0]. \tag{6}$$

This second-order equation cannot be solved alone, because it depends on the operators $\hat{N}_1^2(z)$ and $\hat{N}_0\hat{N}_1(z)$, which obey other propagation equations that one can also derive from Eq. (4), giving an infinite hierarchy of propagation equations. In order to get an approximate solution, one must stop this hierarchy at a given level. The first level of approximation is to neglect all correlations and write

$$\langle\hat{N}_1^2(z)\rangle=\langle\hat{N}_1(z)\rangle^2, \quad \langle\hat{N}_1(z)\hat{N}_0\rangle=\langle\hat{N}_1(z)\rangle\langle\hat{N}_0\rangle. \tag{7}$$

The operator equation (6) is then transformed into an ordinary differential equation for the mean photon number $[N_1(z)=\langle\hat{N}_1(z)\rangle]$, depending on the initial photon number N_0. It is easy to show that there is a quantity conserved in the propagation

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dN_1}{dz}\right)^2+\kappa^2(N_1^3-N_0N_1^2-N_0N_1)\right]=0. \tag{8}$$

This quantity can be considered as the total mechanical energy for a pseudoparticle of position N_1, with $\frac{1}{2}(dN_1/dz)^2$ as the kinetic energy and $\kappa^2(N_1^3-N_0N_1^2-N_0N_1)$ as the potential energy, which is shown in Fig. (1a). The pseudoparticle will oscillate without damping in this potential well, which means that N_1 will exhibit full periodic revivals of the fundamental intensity. We can now understand why $N_1(z)$ cannot vanish, as, starting from $N_1(z=0)=N_0$ with zero kinetic energy (because $dN_1/dz=0$ when the second-harmonic field is zero), the total pseudoenergy has a negative value, so that the second turning point of the periodic motion is reached at a nonzero value of N_1. The minimum value for N_1 is found to be equal to $\sqrt{N_0}$.

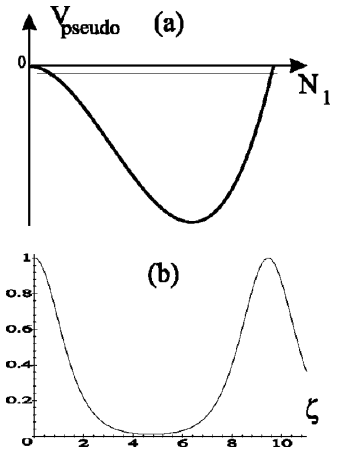

FIG. 1. (a) The effective semiclassical potential in which N_1 *moves* with a slightly negative total energy. (b) Analytical solution for the proportion of photons in the fundamental mode as a function of normalized propagation length ζ, with $N_0=10^6$.

It is possible to find an exact solution of Eq. (6) using the approximation (7), in terms of Jacobi elliptic functions, as in the general classical solution of three-wave mixing found in [1]. Letting $f(\zeta)=N_1(z)/N_0$ with ζ as in Eq. (2), Eq. (6) becomes

$$\frac{d^2f}{d\zeta^2}=-6f^2+4f+2\epsilon, \tag{9}$$

where $\epsilon=1/N_0$. If ϵ is taken equal to zero, one obtains the classical limit given in Eq. (2). When $\epsilon\neq 0$, the solution of Eq. (9) is

$$f(\zeta)=(1-\sqrt{\epsilon})\,\mathrm{cn}^2(\sqrt{1+\sqrt{\epsilon}}\zeta)+\sqrt{\epsilon} \tag{10}$$

where cn is the Jacobi cosine-amplitude [19] of modulus $k=\sqrt{1-\epsilon}/(1+\sqrt{\epsilon})$. This solution is displayed in Fig. (1b). One observes the expected periodic behavior of the fundamental, with full revivals, for any nonzero value of ϵ. The inclusion of ϵ, arising from the commutators of the field operators, means that we have included some quantum fluctuations, at least in the initial conditions. Though ϵ may be almost vanishingly small, it has a huge macroscopic effect on the system dynamics. It is apparent that the quantum noise, which is always present, causes oscillations between the regimes of up- and down-conversion, with the period of the oscillations becoming infinite as ϵ vanishes.

The period ζ_R of the revival has a simple expression when $N_0 \gg 1$,

$$\zeta_R = \ln(8\sqrt{N_0}), \tag{11}$$

which is roughly twice the validity length of the linearized solution.

The approximation made in Eqs. (7) consists in neglecting, at first order, the intensity noise of the fundamental field and the intensity correlations between the field at the considered position and the field at its starting point. This obviously becomes less valid for large values of ζ, when the fundamental field decreases and the quantum correlations develop. It is possible to go further than this approximation by correcting Eq. (7) with the intensity noise and correlations calculated by the linearized technique, valid until half of the period. We have numerically calculated the mean field using this second-order approximation with $N_0 = 10^6$, and found again a total revival of the fundamental field, shifted to a slightly larger ζ value.

To solve exactly the long-range behavior of the mean fields in SHG, and also their quantum fluctuations, we use numerical stochastic integration. Using the method of operator correspondences [20], and proceeding via the master and Fokker-Planck equations, we find the system of equations in the positive-P representation,

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dz} &= \kappa\alpha^\dagger\beta + \sqrt{\kappa\beta}\,\eta_1(z), \\ \frac{d\alpha^\dagger}{dz} &= \kappa\alpha\beta^\dagger + \sqrt{\kappa\beta^\dagger}\,\eta_2(z), \\ \frac{d\beta}{dz} &= -\frac{\kappa}{2}\alpha^2, \\ \frac{d\beta^\dagger}{dz} &= -\frac{\kappa}{2}\alpha^{\dagger\,2}, \end{aligned} \tag{12}$$

where α and $\alpha^\dagger$, as well as β and $\beta^\dagger$, are independent c-number variables that are not complex conjugate except in the average over a large number of trajectories. The noise sources are real and δ correlated : $\overline{\eta_i(z)\,\eta_j(z')} = \delta_{ij}\delta(z - z')$.

The differential equation found for the Wigner quasiprobability distribution has third-order derivatives, which means that there is no Fokker-Planck equation in this representation. As there is no simple way to deal with third-order derivatives in a stochastic differential equation [21], we find an approximate equation by truncating these third-order terms. This leaves us with the same equations found by linearization, but with one very important difference: the initial conditions for each stochastic trajectory are found from the Wigner distribution for a coherent state. The advantage of the Wigner distribution is that the numerical simulations are generally more stable than with the positive-P representation, but we must remember that the truncation means that higher-order nonlinear effects are partially neglected. The advantage of the positive-P representation is that, where the integration converges, it gives exact solutions for the full operator equations.

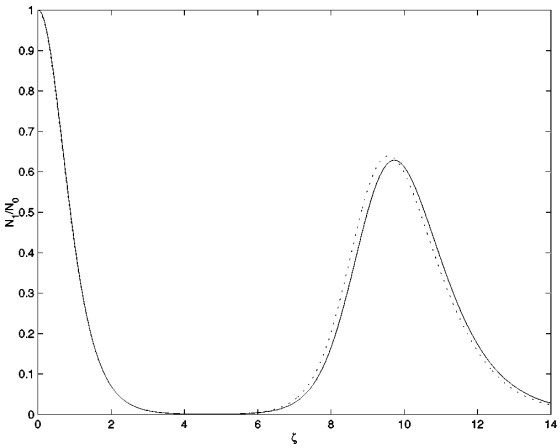

FIG. 2. Proportion of photons in the fundamental mode as a function of normalized propagation length ζ, given by numerical simulations using the positive-P representation (dotted line), and the Wigner representation (full line), with $N_0 = 10^6$.

The behavior of the mean fields, obtained by averaging 10 000 computed trajectories, is shown in Fig. 2, for values of $N_0 = 10^6$. The two methods give results that are in good agreement. One still finds an oscillatory behavior in the photon number, although the first revival is no longer total. The minimum value for N_1 found here is $\approx 30\%$ less than the value predicted by expression (9). For comparison, we have also plotted the semiclassical solution, which gives a revival for almost the same value of ζ, but is obviously not accurate for very long interaction lengths.

Figure 3 gives the computed variance of the amplitude quadrature $X = a + a^\dagger$. We observe that it reaches a nonzero minimum, then suddenly increases drastically to give a large

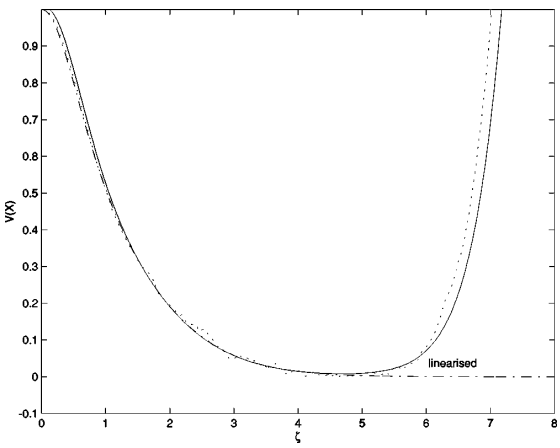

FIG. 3. Variance of the amplitude quadrature of the fundamental as a function of normalized propagation length ζ, calculated using the positive-P representation (dotted line), and the Wigner representation (full line), with $N_0 = 10^6$. The linearized solution is shown for comparison.

degree of excess noise when the revival begins. This is analogous to, but more drastic than a result previously found with the optical parametric oscillator [22], where increasing fluctuations in the phase quadrature fed back into the squeezed amplitude quadrature, and the quantum noise suppression had a maximum at a particular pumping value. The $Y=-i(a-a^{\dagger})$ quadrature always exhibits a noise larger than the standard quantum limit for as far as we have run our simulations. It is apparent that the solution for the mean fields found from Eq. (6) becomes inaccurate at just the point where the quantum noise increases.

In conclusion, by solving the quantum propagation equations, we have shown that the mean fields depart strongly from the classical solution of SHG for long interaction lengths, and also that the linearization procedure previously used to determine the quantum fluctuations breaks down relatively quickly. This is a distinct signature of the effect of quantum noise on the macroscopic behavior, with the revivals found not being possible without the inclusion of the small $(1/N_0)$ term in the propagation equation. We have also found that the analytical solution (10) has a restricted region of validity. The full quantum evolution of the mean fields diverges from it when the quantum noise increases drastically. In particular, the full periodic revivals of the fundamental field are no longer present.

Note that the propagation equation that we have obtained, and its analytical solution, can also be used in other physical situations. For example, this equation also describes parametric down-conversion, when one starts from the second-harmonic field without any fundamental wave, because the initial quantum noise of spontaneous parametric fluorescence is directly built in. This is not the case for the classical equations of nonlinear optics, which will not describe down-conversion without the artificial addition of fluctuations in the fundamental.

In order to predict actual experimental data for such macroscopic changes induced by very small quantum effects in SHG, one first needs to extend our analysis to Gaussian beams instead of simple plane waves. We expect that the main conclusions drawn in this paper will remain valid as long as the revival length is small compared to the Rayleigh length of the light beams. Such a situation can be encountered using very powerful laser systems.

This research was supported by FAPESP, by the COFECUB-USP cooperation project UC57/98, by the EC ESPRIT IV program ACQUIRE 20029, and by the Marsden Fund of the Royal Society of New Zealand. We would also like to thank Arun Roy for helpful discussions. Laboratoire Kastler Brossel, of the Ecole Normale Superieure and University Pierre et Marie Curie, is associated with CNRS.

[1] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P.S. Pershan, Phys. Rev. **127**, 1918 (1962).
[2] Y.R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley, New York, 1984).
[3] P.D. Drummond, K.J. McNeil, and D.F. Walls, Opt. Acta **27**, 321 (1980).
[4] L. Lugiato, G. Strini, and F. De Martini, Opt. Lett. **8**, 256 (1983).
[5] R.J. Horowicz, Europhys. Lett. **10**, 537 (1989).
[6] S.F. Pereira, M. Xiao, H.J. Kimble, and J.L. Hall, Phys. Rev. A **38**, 4931 (1989).
[7] A. Sizman, R.J. Horowicz, G. Wagner, and G. Leuchs, Opt. Commun. **80**, 138 (1990).
[8] R. Paschotta, M. Collett, P. Kürz, K. Fiedler, H.A. Bachor, and J. Mlynek, Phys. Rev. Lett. **72**, 3807 (1994).
[9] Z.Y. Ou, Phys. Rev. A **49**, 2106 (1994).
[10] R.D. Li and P. Kumar, Opt. Lett. **18**, 1961 (1993).
[11] R.D. Li and P. Kumar, Phys. Rev. A **49**, 2157 (1994).
[12] R.D. Li and P. Kumar, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 2310 (1995).
[13] S. Youn, S.K. Choi, P. Kumar, and R.D. Li, Opt. Lett. **21**, 1597 (1996).
[14] Z.Y. Ou, Phys. Rev. A **49**, 4902 (1994).
[15] D.F. Walls and G.J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
[16] P.D. Drummond and C.W. Gardiner, J. Phys. A **13**, 2353 (1980).
[17] E.P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
[18] R. Graham, *Statistical Theory of Instabilities in Stationary Nonequilibrium Systems with Applications to Lasers and Non Linear Optics*, Springer Tracts in Modern Physics Vol. 66 (Springer, Berlin, 1973).
[19] I. Gradshtein, I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1994).
[20] C.W. Gardiner, *Quantum Noise* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
[21] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
[22] L. Plimak and D.F. Walls, Phys. Rev. A **50**, 2627 (1994).

B Champ multimode

La notion de champ multimode en dehors de la cavité, donc en propagation libre, ne peut pas se définir classiquement. En effet, il suffit dans ce cas de définir l'enveloppe du champ comme un mode et de compléter la base transverse : tout champ est monomode. Seule l'analyse des fluctuations du champ permet de mettre en évidence le caractère monomode ou multimode d'un faisceau lumineux. Nous en voyons ici une définition rigoureuse. Nous allons faire ce calcul de façon très générale : considérerons le champ $|\psi\rangle$ qui se décompose sur un ensemble de modes u_i associés aux opérateurs d'annihilation $\hat{a}_i$.

Supposons tout d'abord que le système est monomode, par exemple sur le mode 0, cela peut s'écrire :

$$\hat{a}_0|\psi\rangle = |\psi_0\rangle \qquad \text{et} \qquad \hat{a}_i|\psi\rangle = 0 \quad \forall i \neq 0 \tag{B-1}$$

Considérons une autre base du système, avec les modes v_i associés aux opérateurs d'annihilation $\hat{b}_i$. Il existe une matrice unitaire $[c_{ij}]$ telle que

$$\hat{b}_i = \sum_j c_{ij}\hat{a}_j \tag{B-2}$$

La projection du champ $|\psi\rangle$ sur ce mode donne

$$\begin{aligned} \hat{b}_i|\psi\rangle &= \sum_j c_{ij}\hat{a}_j|\psi\rangle \\ &= c_{i0}\psi_0 \end{aligned} \tag{B-3}$$

On montre ainsi que toutes les projections sont proportionnelles, ce que l'on peut écrire :

$$|\psi\rangle \text{ monomode} \quad \Longrightarrow \quad \exists\ |\phi\rangle \text{ tel que } \forall\{\hat{b}_i\} \text{ base, } \exists\{\beta_i\} \text{ tel que } \forall_i\ \hat{b}_i|\psi\rangle = \beta_i|\phi\rangle \tag{B-4}$$

Réciproquement, prenons un champ $|\psi\rangle$ qui vérifie la condition de proportionnalité. Pour une base $\{\hat{b}_i\}$ associée aux modes transverses $\{v_i\}$ nous avons un vecteur $|\phi\rangle$ tel qu'il existe un ensemble de coefficients $\{\beta_i\}$ qui vérifient :

$$b_i|\psi\rangle = \beta_i|\phi\rangle \tag{B-5}$$

il est toujours possible de normaliser $|\phi\rangle$ de telle sorte que

$$\sum_i |\beta_i| = 1, \tag{B-6}$$

c'est ce que nous supposerons donc pour alléger l'écriture. Posons alors

$$\hat{a}_0 = \sum_i \beta_i^* \hat{b}_i \tag{B-7}$$

il vient :

$$\hat{a}_0 |\psi\rangle = |\phi\rangle \tag{B-8}$$

et cet opérateur est associé au mode transverse :

$$u_0 = \sum_i \beta_i^* v_i. \tag{B-9}$$

Complétons u_0 avec un ensemble de modes transverses $\{u_i\}_{i>0}$ de telle sorte que l'on ai une base orthonormale que l'on peut écrire :

$$u_i = \sum_j c_{ij} v_j \quad \text{avec} \quad c_{0j} = \beta_j^* \quad \text{et} \quad \sum_j c_{ij} c_{kj}^* = \delta_{ik}. \tag{B-10}$$

La base d'opérateurs associée est :

$$\hat{a}_i = \sum_j c_{ij} \hat{b}_j \tag{B-11}$$

et la projection du champ $|\psi\rangle$ sur un vecteur de cette base s'écrit :

$$\hat{a}_i |\psi\rangle = \sum_j c_{ij} \hat{b}_j |\psi\rangle = \sum_j c_{ij} \beta_j^* |\phi\rangle = \sum_j c_{ij} c_{0j} |\phi\rangle = \delta_{0i}. \tag{B-12}$$

Le champ $|\psi\rangle$ est monomode dans cette base, il est donc monomode. Nous avons démontré la réciproque de l'implication B-4 et nous pouvons donc écrire une définition exacte du caractère monomode d'un champ :

Un champ quantique est monomode si et seulement si, pour toute base de l'espace, toutes ses projections sur les vecteurs de base sont proportionnelles.

$$\boxed{\begin{array}{c} |\psi\rangle \text{ décrit un champ monomode} \\ \Updownarrow \\ \exists\ |\phi\rangle \text{ tel que } \forall \{\hat{b}_i\} \text{ base, } \forall_i\ \hat{b}_i |\psi\rangle = \beta_i |\phi\rangle \\ \text{dont le mode correspondant est } u_0 = \sum_i \beta_i^* v_i \end{array}}$$

Rajoutons que, dans cette équivalence, il est écrit que la propriété de proportionnalité est vraie quelque soit la base, mais pour que le champ soit monomode il est suffisant de trouver une seul base satisfaisant cette relation.

C Programmes de traitement des données

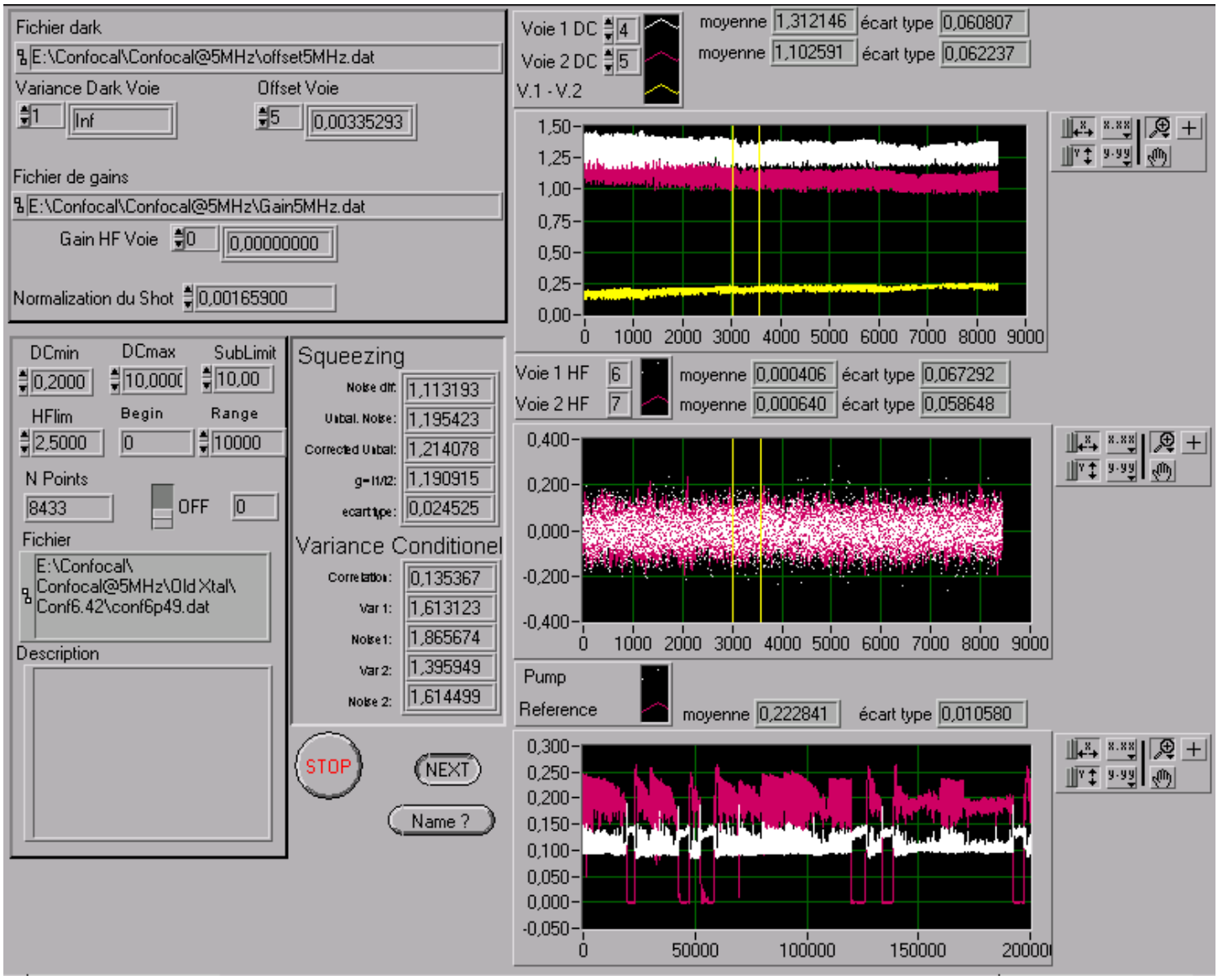

Fig. 7.7 – Face avant du programme «Jumeaux.vi»

Pour nos besoins spécifiques nous avons développé le programme «Jumeaux.vi» dont on peut voir la face avant en figure 7.7. Ce logiciel prend comme données le fichier de bruit de fond et le fichier de gain, ainsi que la valeur du bruit quantique standard : la quantité S que nous avons définie au chapitre 3 section B. Afin d'obtenir la valeur de S il est nécessaire de faire fonctionner une première fois le programme en la fixant à 1, en utilisant un fichier pris dans une configuration permettant d'obtenir le bruit quantique standard (par exemple avec une détection équilibrée où la différence entre

les signaux de deux photodiodes est au bruit quantique standard). On peut ensuite fixer cette valeur de S. Un fois lancé, ce programme demande un fichier de données. On lui spécifie ensuite quelle voie DC correspond à quelle voie HF, et il fait des calculs de photons jumeaux, ainsi que la variance conditionnelle. Les trois fenêtres à droite permettent de visualiser simultanément : en haut les voies DC, au milieu les voies HF, en bas une voie DC et la pompe avant sélections des points. En effet, ce programme permet de poser des limites “DCmin” et “DCmax” pour sélectionner les points qui conviennent, et il y a également une option “HFlim” pour supprimer les pics de bruit HF. On voit sur la figure, en bas à droite, une acquisition typique. Nous avons ensuite représenté un certain nombre des diagrammes utilisés, comme notice technique.

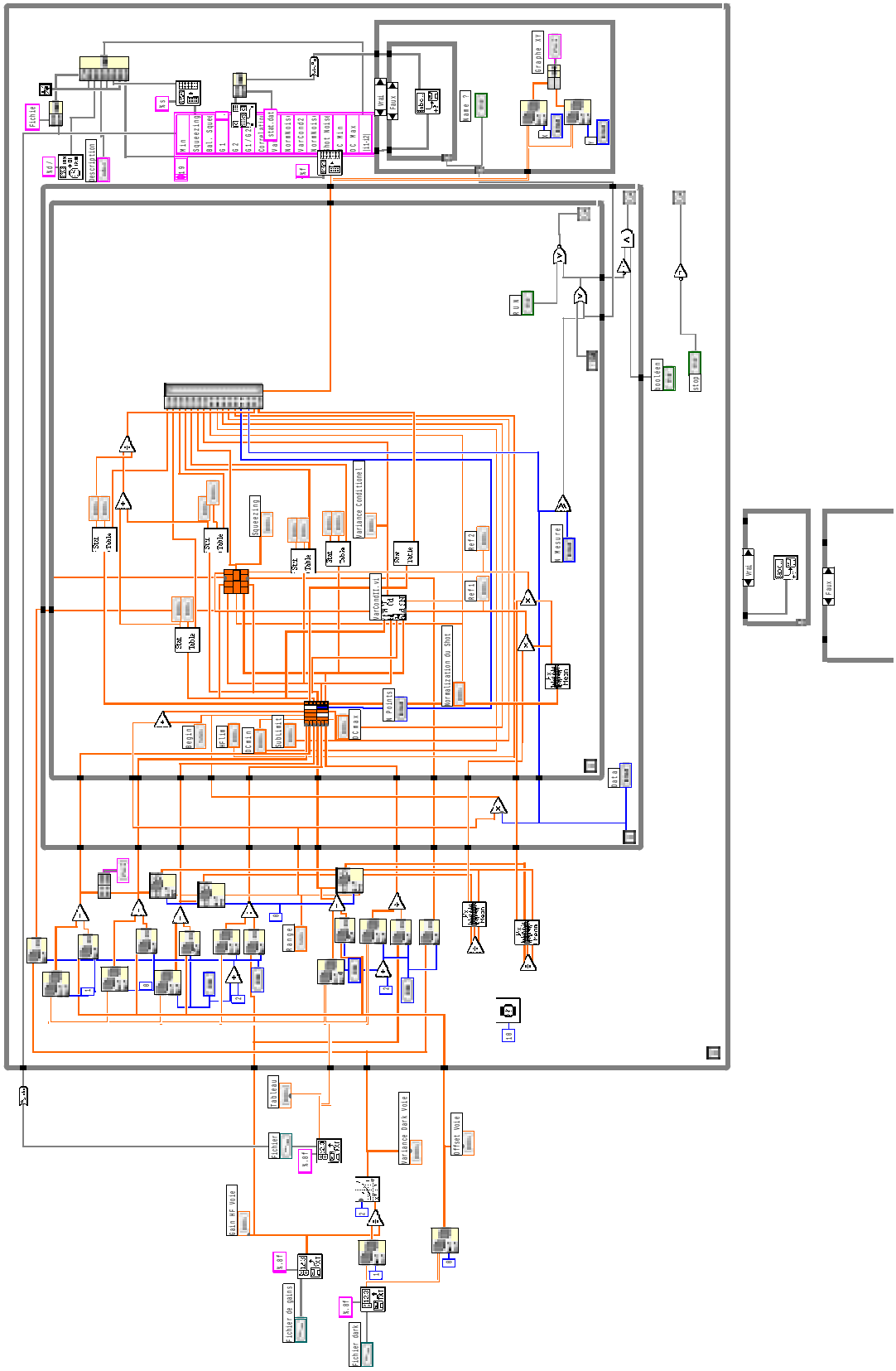

Fig. 7.8 – Diagramme du programme «Jumeaux.vi»

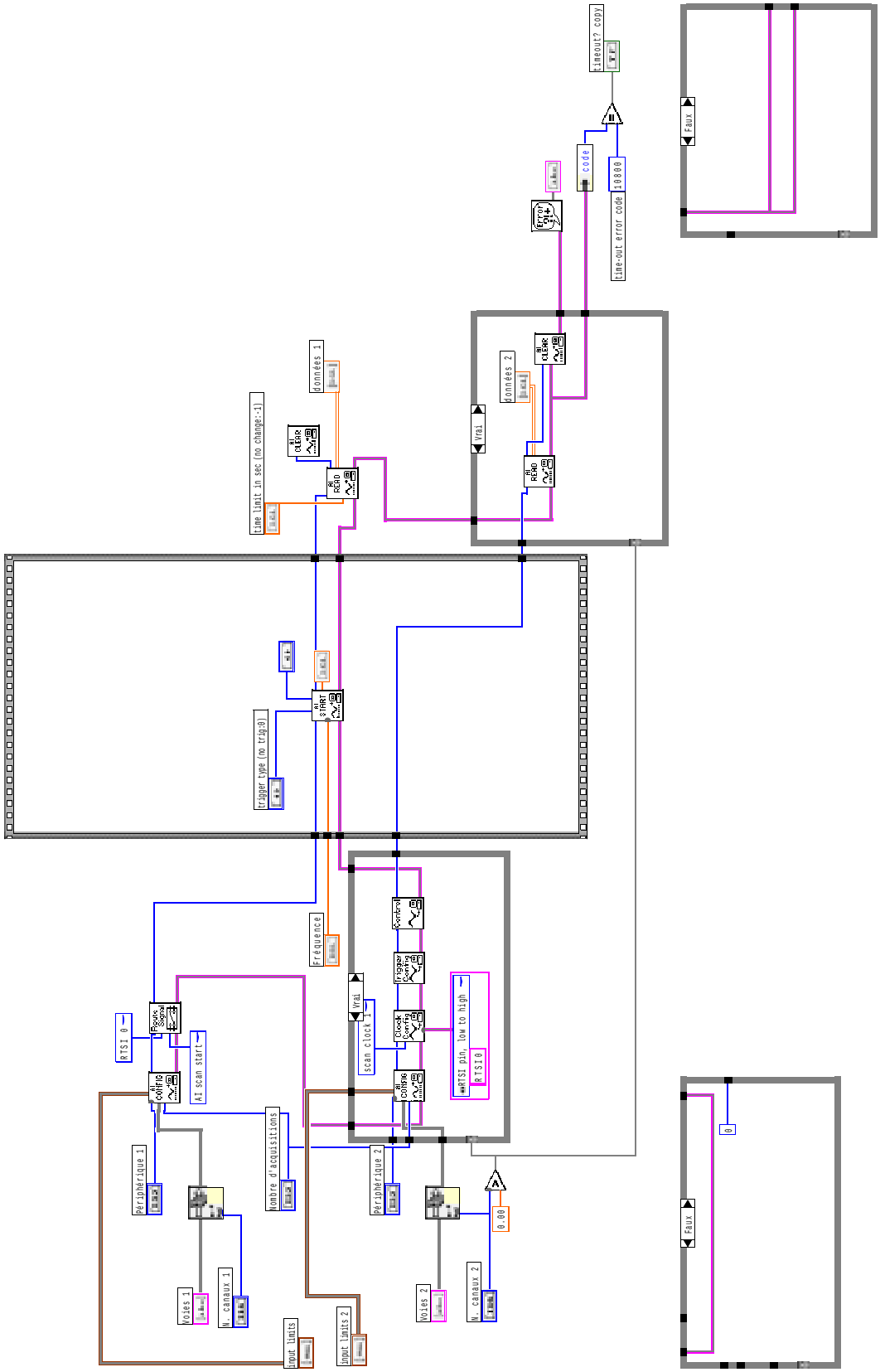

Fig. 7.9 – Diagramme du programme «Acquisition.vi» décrit au chapitre 3 section B. On voit l'ensemble des modules qui permettent de synchroniser les cartes d'acquisitions.

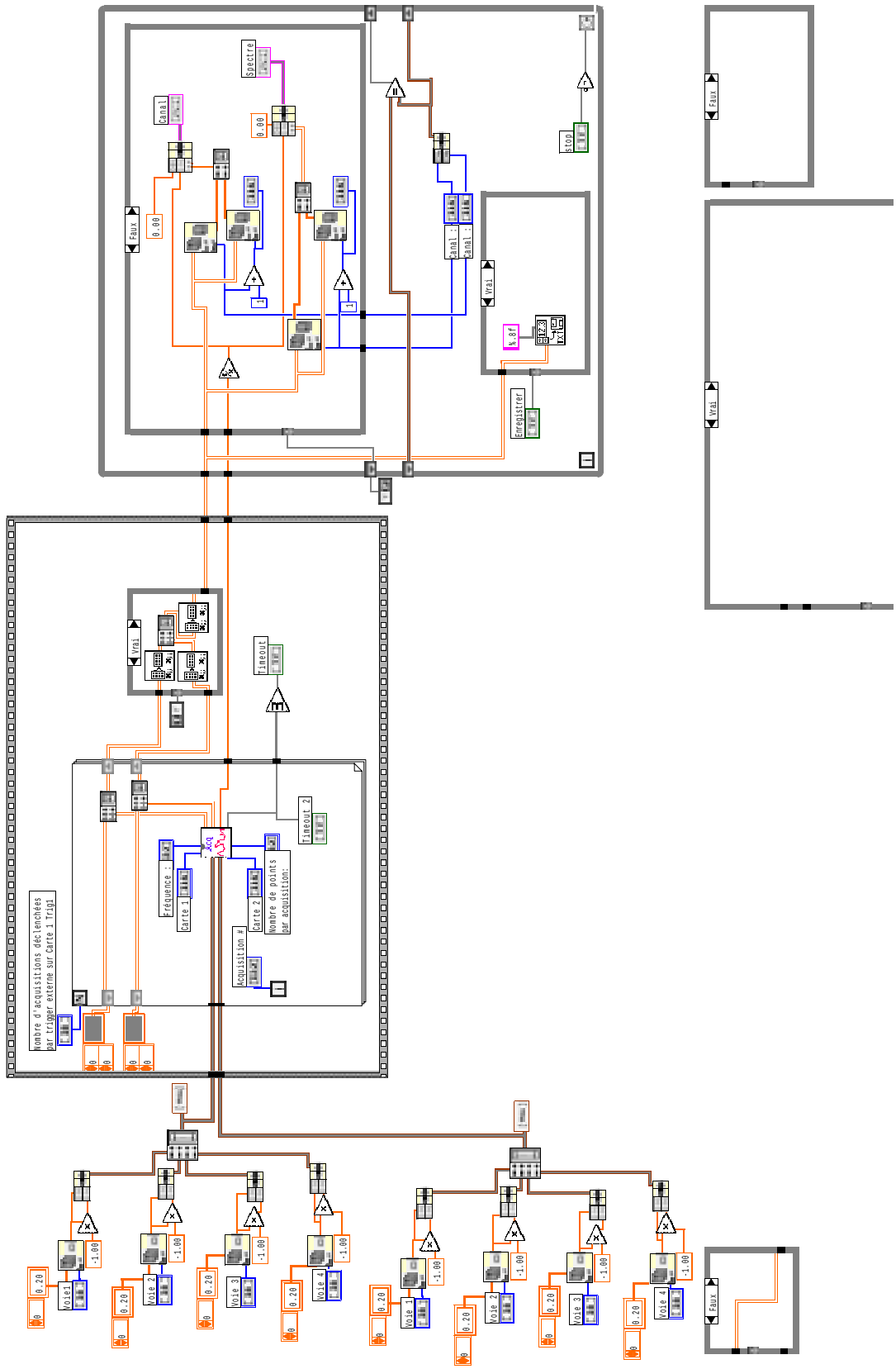

Fig. 7.10 – Diagramme du programme «Analyse.vi» décrit au chapitre 3 section B. Il utilise le sous-programme «Acquisition.vi» (représenté par Acq. sur la figure) et gère l'enregistrement des données.

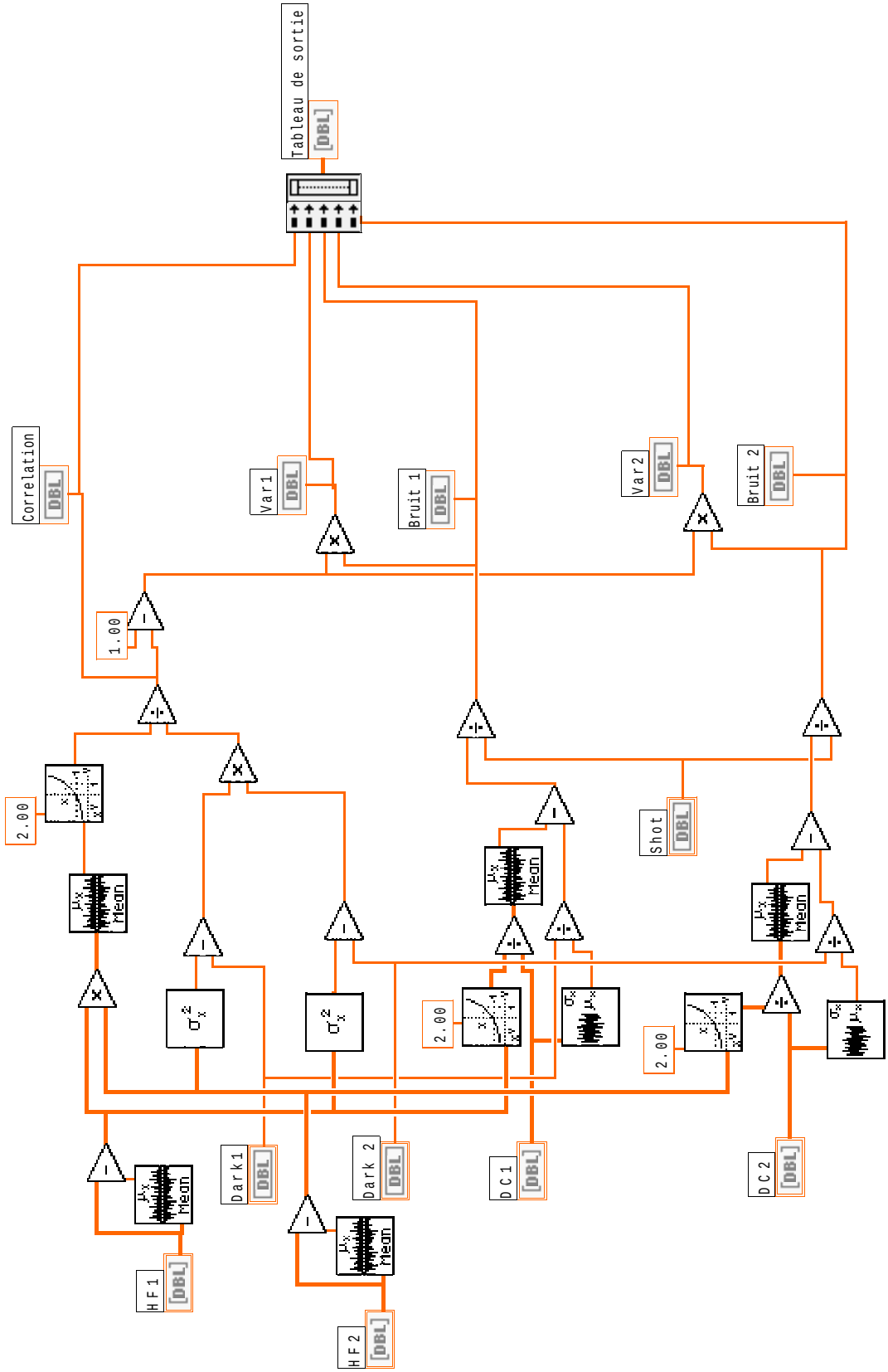

Fig. 7.11 – Diagramme montrant comment réaliser le calcul de la variance conditionnelle

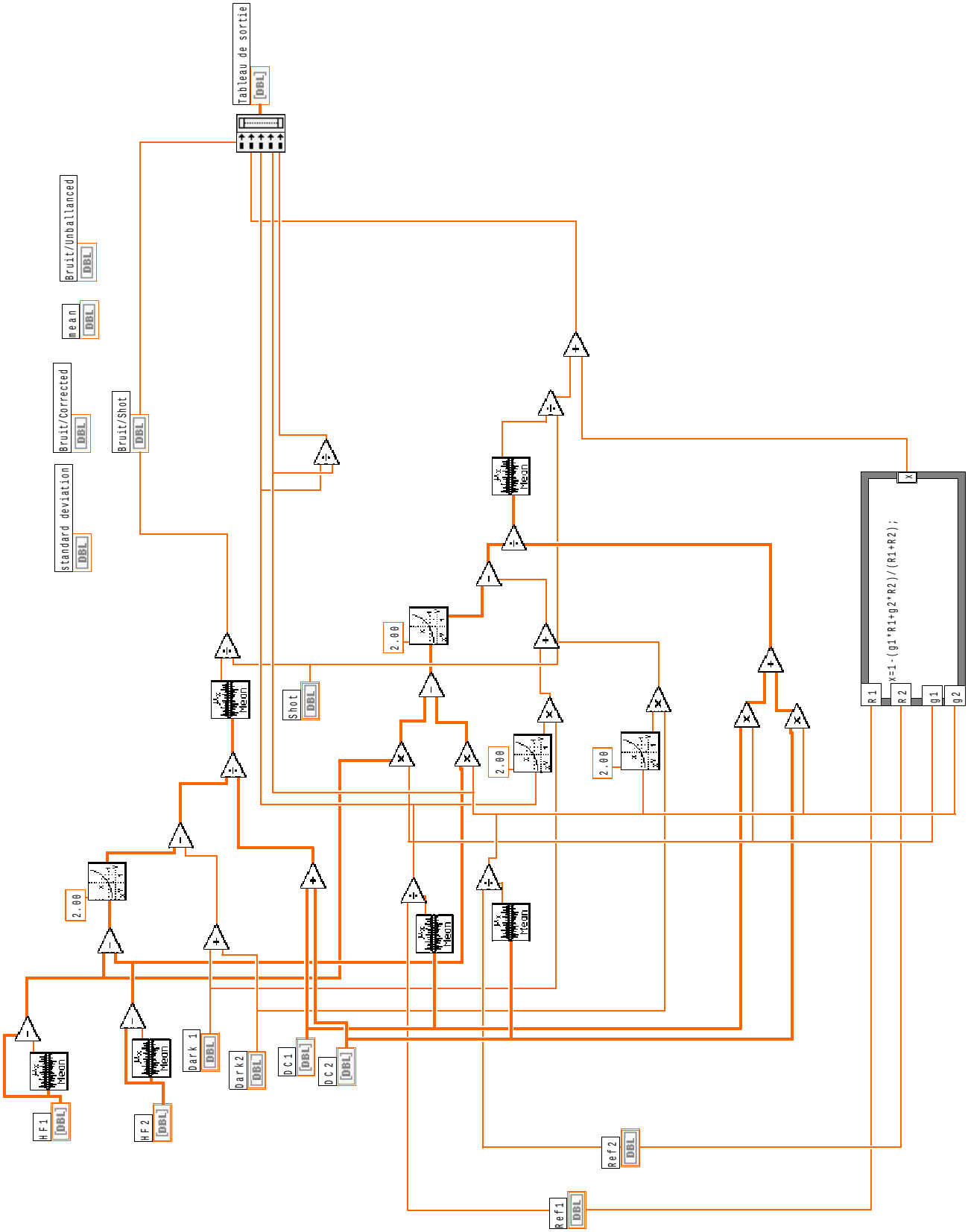

Fig. 7.12 – Diagramme montrant comment réaliser le calcul des photons jumeaux

Bibliographie

[Bachor 98] *A guide to experiments in quantum optics*, Hans-A. Bachor, *WILEY-VCH éditeurs*, Weinheim, Allemagne (1998).

[Barnett 95] *The Hermitian Optical Phase Operator*, S.M. Barnett et D.T. Pegg, dans *Quantum fluctuations*, proceedings de l'école d'été des Houches, 1995, éditée par S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1997).

[Barnett 00] Communication interne au réseau européen TMR-QSTRUCT.

[Bertero 82] *Resolution in diffraction-limited imaging, a singular value analysis. I. The case of coherent illumination*, M. Bertero et E.R. Pike, *Opt. Acta* **29**, 727 (1982).

[Berzanski 99] *Spatial structures in optical parametric amplification*, A. Berzanskis, W. Chinaglia, L. A. Lugiato, K.-H. Feller et P. Di Trapani, *Phys. Rev. A* **60**, 1626 (1999).

[Boccara 80] *Thermo-optical spectroscopy: detection by the 'mirage effect'*, A.C. Boccara, D. Fournier et J. Badoz, *Appl. Phys. Lett.* **36**, 130 (1980).

[Boyd 92] *Nonlinear Optics*, Robert W. Boyd, Academic Press, 1992.

[Charbonnier 90] *Capteur à effet mirage à détecteur simple et à détecteur multiple : application au contrôle non destructif avec excitation photothermique*, F. Charbonnier, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1990.

[Cohen-Tannoudji 87] *Photons et atomes : Introduction à l'optique quantique*, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *InterÉditions/Éditions du CNRS*, Paris (1987).

[Debuisschert 93] *Type-II continuous-wave optical parametric ocsillator : oscillation and frequency-tuning characteristics*, T. Debuisshert, A. Sizmann, E. Giacobino et C. Fabre, *J. Opt. Soc. Am. B*, **10** 1668 (1993).

[Devaux 00] *Spatial and temporal properties of parametric fluorescence around degeneracy in a type I LBO crystal*, F. Devaux et E. Lantz, *Eur. Phys. J. D* **8**, 117 (2000).

[Di Trapani 98] *Observation of Optical Vortices and J0 Bessel-Like Beams in Quantum-Noise Parametric Amplification*, P. Di Trapani, A. Beržanskis, S. Minardi, S. Sapone et W. Chinaglia, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5133 (1998).

[Fabre 95] *Quantum fluctuations in Light Beam*, C. Fabre, dans *Quantum fluctuations*, proceedings de l'école d'été des Houches, 1995, éditée par S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1997).

[Fabre 99] *Theoretical analysis of self-phase locking in a type II phase-matched optical parametric oscillator*, C. Fabre, E.J. Mason et N.C. Wong, *Opt. Com.* **170** 299 (1999).

[Fabre 00] *Quantum limits in the measurement of very small displacements in optical images*, C. Fabre, J.B. Fouet et A. Maître, *Optics Lett.*, **25** 76 (2000).

[Gardiner 91] *Quantum noise*, C.W. Gardiner (Springer, Berlin, 1991).

[Gatti 99] *Quantum Entangled Images*, A. Gatti, E. Brambilla, L.A. Lugiato et M.I. Kolobov, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1763 (1999).

[Grangier 00] *Quantum teleportation criteria for continuous variables*, P. Grangier et F. Grosshans, *arXiv:quant - ph/0009079* (2000).

[Grynberg 97] *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*, G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre, cours de l'école Polytechnique, Ellipses, 1997.

[Hadjar 98] *Etude du couplage optomécanique dans une cavité de grande finesse. Observation du mouvement Brownien d'un miroir*, Yassine Hadjar, thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 1998.

[Holland 90] *Nonideal quantum nondemolition measurements*, M.J. Holland, M.J. Collett, D.F. Walls et M.D. Levenson, *Phys. Rev. A* **42**, 2995 (1990).

[Izus 99] *Pattern formation in the presence of walk-off for a type II optical parametric oscillator*, G. Izus, M. Santagiustina, M. San Miguel et P. Colet, *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 1592 (1999).

[Izus 00] *Bloch domain walls in type II optical parametric oscillators*, G. Izus, M. San Miguel et M. Santagiustina, *Opt. Lett.* **25**, 1454 (2000).

[Joobeur 96] *Coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion : theory and experiment*, A. Joobeur, B.E.A. Saleh, T.S. Larchuk et M.C. Teich, *Phys. Rev. A* **53**, 5349 (1996).

[Karamzin 74] *Nonlinear interaction of diffracting beams of light in a medium of quadratic nonlinearity, mutual focusing of beams and restriction of optical frequency convertor efficiency*, Yu.N. Karamzin et A.P. Sukhorukov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma Red* **20**, 734 (1974).

[Kimble 92] *Squeezed states of light: an (incomplete) survey of experimental progress and prospects*, H.J. Kimble, *Physics Reports* **219**, 227 (1992).

[Kogelnik 66] *Laser Beams and Resonators*, H. Kogelnik et T. Li, *App. Opt.* **5**, 1550 (1966).

[Kojima 97] *Mechanics of Single Kinesin Molecules Measured by Optical Trapping Nanometry*, H. Kojima, E. Muto, H. Higuchi et T. Yanagida, *Biophysical Journal* **73**, 2012 (1997).

[Kolobov 89] *Squeezed states of light and noise-free optical images*, M.I. Kolobov et I.V. Sokolov, *Phys. Lett. A* **140**, 101 (1989).

[Kolobov 99] *The spatial behavior of nonclassical light*, M.I. Kolobov, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 1539 (1999).

[Lam 99] *Optimization and transfer of vacuum squeezing from an optical parametric oscillator*, P.K. Lam, T.C. Ralph, B.C. Buchler, D.E. McClelland, H-A. Bachor et J. Gao, *J. Opt. B:Quantum and Semiclassical Optics* **1** 469 (1999).

[Lantz 91] *Retrieval of a phase-and-amplitude submicrometric object from images obtained in partially coherent microscopy*, E. Lantz, *Jour. Opt. Soc. Am. A* **8**, 791 (1991).

[Le Berre 99] *Beyond the mean-field model of the ring cavity*, M. Le Berre, D. Leduc, S. Patrascu, E. Ressayre et A. Tallet, *Chaos, Solitons and Fractals* **10**, 627 (1999).

[Le Berre 00] *Kinetics of domain wall in the degenerate optical parametric*

oscillator, M. Le Berre, E. Ressayre et A. Tallet, *J. Opt. B: Quantum and Semiclassical Optics* **2**, 247 (2000).

[Li 94] *Quantum-noise reduction in traveling-wave second-harmonic generation*, R.D. Li et P. Kumar, *Phys. Rev. A* **49**, 2157 (1994).

[Lodahl 99] *Patterns formation in singly resonant second-harmonic generation with competing parametric oscillation*, P. Lodahl et M. Saffman, *Phys. Rev. A* **60**, 3251 (1999).

[Lodahl 00a] *Modification of pattern formation in doubly resonant second-harmonic generation by competing parametric oscillation*, P. Lodahl, M. Bache et M. Saffman, *Opt. Lett.* **25**, 654 (2000).

[Lodahl 00b] *Spiral Intensity Patterns in the Internally Pumped Optical Parametric Oscillator*, P. Lodahl, M. Bache et M. Saffman, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4506 (2000).

[Lodahl 01] *Spatiotemporal structures in the internally pumped optical parametric oscillator*, P. Lodahl, M. Bache et M. Saffman, *Phys. Rev. A* **63**, 023815 (2001).

[Longhi 96] *Traveling-wave states and secondary instabilities in optical parametric oscillators*, S. Longhi, *Phys. Rev. A* **53**, 4488 (1996).

[Longhi 96b] *Alternating rolls in nondegenerate optical parametric oscillators*, S. Longhi, *J. Mod. Opt.* **43**, 1569 (1996).

[Longhi 97] *Localized structures in optical parametric oscillators*, S. Longhi, *Physica Scripta* **56**, 611 (1997).

[Lugiato 95] *Quantum fluctuations and nonlinear optical patterns*, L.A. Lugiato, A. Gatti et H. Wiedemann, dans *Quantum fluctuations*, proceedings de l'école d'été des Houches, 1995, éditée par S. Reynaud, E. Giacobino et J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1997).

[Lugiato 97] *Improving quantum-noise reduction with spatially multimode squeezed light*, L.A. Lugiato et P. Grangier, *J. Opt. Soc. Am. B : Optical Physics* **14**, 225 (1997).

[Lugiato 98] *Spatial patterns in optical parametric oscillators with spherical mirrors: classical and quantum effects*, L.A. Lugiato, C. Fabre, H. Ritsch, M.A. Marte, A. Gatti, K. Petsas et D. Leduc, *Optics Express* **3**, 71 (1998).

[Malygin 85] *Spatiotemporal grouping of photons in spontaneous parametric scattering of light*,A.A. Malygin, A.N. Penin et A.V. Sergienko, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **281**, 308 (1995). [*Sov. Phys. Dokl.* **30**, 227 (1985)]

[Marin 97] *Demonstration of high sensitivity spectroscopy with squeezed semiconductor lasers*, F. Marin, A. Bramati, V. Jost et E. Giacobino, *Opt. Comm.* **140**, 146 (1997).

[Martinelli] *User's Guide to Quadrant Photodetectors and Demodulation Circuit*, M. Martinelli, note interne du Laboratoire Kastler-Brossel, que nous pouvons envoyer sur toute demande adressée à Agnès Maître, maitre@spectro.jussieu.fr.

[Mason 98] *Observation of two distinct phase state in a self-phase-locked type II phase-matched optical parametric oscillator*, E.J. Mason et N.C. Wong, *Opt. Lett.* **23** 1733 (1998).

[Menyuk 94] *Solitary waves due to* $\chi^{(2)} : \chi^{(2)}$ *cascading*, C.R. Menyuk, R. Schiek et L. Torner, *J. Opt. Soc. Am. B* **11**, 2434 (1994).

[Mertz 91a] *Improvements in the observed intensity correlation of optical parametric oscillator twin beams*, J. Mertz, T. Debuisschert, A. Heidmann, C. Fabre, and E. Giacobino *Opt. Lett.*, **16** (16), 1234 (1991).

[Mertz 91b] *Generation of sub-Poissonian light using active control with twin beams*, J. Mertz, A. Heidmann et C. Fabre, *Phys. Rev. A* **44**, 3229 (1991).

[Nishikawa 96] *Transverse beam profile characteristics of traveling-wave parametric generation in KTiOPO4 crystals*, T. Nishikawa et N. Uesugi, *Opt. Comm.* **124**, 512 (1996).

[Oppo 94a] *Formation and evolution of roll patterns in optical parametric oscillators*, G.L. Oppo, M. Brambilla et L.A. Lugiato, *Phys. Rev. A*, **49**, 2028 (1994).

[Oppo 94b] *Spatiotemporal dynamics of optical parametric oscillators*, G.L. Oppo, M. Brambilla, D. Camesasca, A. Gatti et L.A. Lugiato, *J. Mod. Opt.*, **41**, 1151 (1994).

[Oppo 99] *From domain walls to localized structures in degenerate optical parametric oscillators*, G.L. Oppo, A.J. Scroggie et W.J. Firth, *J. Opt. B: Quantum and Semiclassical Optics* **1**, 133 (1999).

[Ou 94] *Propagation of quantum fluctuations in single-pass second-harmonic generation for arbitrary interaction length*, Z.Y. Ou, *Phys. Rev. A* **49**, 2106 (1994).

[Poizat 94] J.-Ph. Poizat, J.-F Roch et P. Grangier, *Ann. Phys. Fr.* **19**, 265 (1994).

[Polzik 92] *Atomic spectroscopy with squeezed light for sensitivity beyond the vacuum-state limit*, E. S. Polzik, J. Carri, and H. J. Kimble, *Appl. Phys. B*, **55** (33), 279 (1992)

[Press 92] *Numerical Recipes*, W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling et B.P. Flamery, *Cambridge University Press* Cambridge (1992).

[Putman 92] *A detailed analysis of the optical beam deflection technique for use in atomic force microscopy*, C.A.J. Putman, B.G. De Grooth, N.F. Van Hulst et J. Greve, *Jour. Appl. Phys.* **72**, 6 (1992).

[Rayleigh 1879] *Collected Optics Papers of Lord Rayleigh*, *Philos. Mag.* **261**, 403, 477 (1879) (Optical Society of America, Washington D.C., 1994), part A, p117.

[Reynaud 90] *Introduction à la réduction de bruit quantique*, S. Reynaud, *Ann. Phys. Fr.* **15**, 63 (1990).

[Reynaud 92] *Quantum fluctuations in optical systems*, S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino et C. Fabre, *Progress in Optics* Elsevier Science Publishers, E. Wolf, **XXX** (1992).

[Santagiustina 98] *Walk-off and pattern selection in optical parametric oscillators*, M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel et D. Walgraef, *Opt. Lett.* **23**, 1167 (1998).

[Sazonova 99] *Exact quantum solution of third harmonic*, Z.S. Sazanova et R. Singh, *Laser Phys.* **9**, 1240 (1999).

[Scully 97] *Quantum Optics*, M.O. Scully et M.S. Zubairy, *Combridge University Press*, Cambridge, Royaume Uni (1997)

[Segev 98] *Self-trapping of optical beams: spatial solitons*, M. Segev et G. Stegeman, *Phys. Today (USA)* **51** no. 8 (1998).

[Seng-Tiong Ho 88] *Quantum theory of nondegenerate multiwave mixing: general formulation*, Seng-Tiong Ho, P. Kumar et J.H. Shapiro, *Phys. Rev. A* **37**, 2017 (1988).

[Shaddock 99] *Frequency locking a laser to an optical cavity by use of spatial mode interference*, D.A. Shaddock, M.B. Gray et D.E. McClelland, *Opt. Lett.* **24** 1499 (1999).

[Shapiro 97] *Optimizing homodyne detection of quadrature-noise squeezing by local-oscillator selection*, J.H. Shapiro et A. Shakeel, *J. Opt. Soc. Am. B*, **14** 232 (1997).

[Shen 84] *The principles of nonlinear optics*, Y.R. Shen, *Wiley-Interscience Publication* USA (1984).

[Siegman 86] *Lasers*, A.E. Siegman, University Science Books, Mill Valley, California 1986.

[Slusher 85] *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in optical cavity*, R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley, *Phys. Rev. Lett.*, **55** (22), 2409 (1985)

[Souto Ribeiro 94] *Controlling the degree of visibility of Young's fringes with photon coincidence measurements*, P.H. Souto Ribeiro, S. Pádua, J.C. Machado da Silva et G.A. Barbosa, *Phys. Rev. A* **49**, 4176 (1994).

[Souto Ribeiro 97] *Sub-shot-noise high-sensitivity spectroscopy with optical parametric oscillator twin beams*, P.H. Souto Ribeiro,C. Schwob, A. Maitre et C. Fabre, *Opt. Lett.* **22**, 1893 (1997).

[Staliunas 95] *Transverse pattern formation in optical parametric oscillator*, K. Staliunas, *J. Mod. Opt.*, **42**, 1261 (1995).

[Staliunas 97] *Localized structures in degenerate optical parametric oscillator*, K. Staliunas et V.J. Sánchez-Morcillo, *Opt. Comm.* **139**, 306 (1997).

[Staliunas 98] *Spatial-localized structures in degenerate optical parametric oscillators*,K. Staliunas et V.J. Sánchez-Morcillo, *Phys. Rev. A* **57**, 1454 (1998).

[Stegeman 97] *Experiments on quadratic spatial solitons*, G.I. Stegeman, R. Schiek, R. Fuerst, Y. Baek, D. Baboiu, W. Torruellas, L. Torner et B. Lawrence, *Advanced Photonics with Second-Order Optically Nonliear Processes*, édité par A.D. Boardman, L. Pavlov et S. Tanev (Kluwer, Dordrecht,1998), p 133.

[Suret 00a] *Dynamique temporelle et effets transverse dans les oscillateurs paramétriques optiques continus : observations expérimentale et*

modélisation, Pierre Suret, thèse de doctorat de l'Université de Paris Sud (Paris XI) 2000.

[Suret 00b] *Self-pulsing instabilities in an optical parametric oscillator : Experimental observation and modeling of the mechanism*, P. Suret, D. Derozier, M. Lefranc, J. Zemmouri et S. Bielawski, *Phys. Rev. A*, **61** 021805(R) (2000)

[Taki 00] *Nonlinear front propagation in optical parametric oscillators*, M. Taki, N. Ouarzazi, H. Ward et P. Glorieux, *J. Opt. Soc. Am. B* **17** 997 (2000).

[Taranenko 98] *Pattern Formation and Localized Structures in Degenerate Optical Parametric Mixing*, V.B. Taranenko, K. Staliunas et C.O. Weiss, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2236 (1998).

[Taylor 92] *Optical Solitons : Theory and Experiment*, édité par J.R. Taylor, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1992.

[Tlidi 99] *Space-time localized structures in the degenerate optical parametric oscillator*, M. Tlidi et P. Mandel, *Phys. Rev. A* **59**, R2575 (1999).

[Tlidi 00a] *Phase-separation dynamics of circular domain walls in the degenerate optical parametric oscillator*, M. Tlidi, P. Mandel, M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet et L. Di Menza, *Opt. Lett.* **25**, 487 (2000).

[Tlidi 00b] *High-intensity localized structures in the degenerate optical parametric oscillator: Comparison between the propagation and the mean-field models*, M. Tlidi, M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet et L. Di Menza, *Phys. Rev. A* **61**, 043806 (2000).

[Toraldo 69] *Degrees of freedom of an image*, G. Toraldo di Francia, *J. Opt. Soc. Am.* **59**, 799 (1969).

[Torner 95] , L. Torner, D. Mihalache, D. Mazilu, E.M. Wright, W.E. Torruellas et G.I. Stegeman, *Opt. Comm* **121**, 149 (1995).

[Treps 00] *Transverse distribution of quantum fluctuations and correlations in spatial solitons*, N. Treps et C. Fabre, *Phys. Rev. A*, **62** 033816 (2000).

[Trillo 97] *Stable topologicalspatial solitons in optical parametric oscillators*, S. Trillo, M. Haelterman et A. Sheppard, *Opt. Lett.* **22**, 970 (1997).

[Vaupel 99] *Observation of Pattern Formation in Optical Parametric Oscillators*, M. Vaupel, A. Maître et C. Fabre, *Phys. Rev. Lett.* **83** 5278 (1999)

[Walls 94] *Quantum Optics* D.F. Walls et G.J. Milburn, *Springer-Verlag Editions* Berlin (1994).

[Ward 98] *Transverse dynamics of optical parametric oscillators in presence of walk-off*, H. Ward, M.N. Ouarzazi, M. Taki et P. Glorieux, *Eur. Phys. Journ. D.* **3**, 275 (1998).

[Min Xiao 87] *Precision measurement beyond the shot-noise limit*, Min Xiao, Ling-An Wu et H.J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 278 (1987).

[Zhang 90] *Coherent states: Theory and some applications*, W.-M. Zhang, D.H. Feng et R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 867 (1990).

Effets quantiques dans les images optiques

Résumé

Nous étudions les propriétés quantiques des images optiques. Sur le plan théorique, nous nous plaçons dans le plan transverse du champ électromagnétique pour définir des observables les plus proches possibles de ce que mesurent les détecteurs en optique. Nous montrons alors la nécessité d'une approche multimode transverse pour la description des images. Nous élaborons une méthode de calcul des fluctuations en tout point du plan transverse d'un nombre quelconque de champs après leur interaction avec un cristal non linéaire.

Nous appliquons ces principes pour définir les limites de résolution dans les images optiques imposées par la mécanique quantique. Nous appliquons le cas particulier du champ bimode aux mesures de positions d'un faisceau effectuées par un détecteur à deux zones. Nous montrons alors, à la fois théoriquement et expérimentalement, que le choix adéquat de deux modes non classiques permet de faire des mesures de déplacement en dessous de la limite quantique standard. D'un autre côté, nous appliquons la méthode de calcul des fluctuations au cas particulier du soliton spatial, système permettant de s'affranchir de la diffraction. On montre que, même si elle ne modifie pas le champ moyen, la diffraction est responsable de la diffusion des propriétés quantiques, qui se retrouvent alors dans les fonctions de correlations entre deux points transverses. Finalement, nous décrivons une expérience réalisée avec un oscillateur paramétrique optique dégénéré transversalement, qui permet de faire osciller pour une même longueur de cavité un grand nombre de modes transverses. La présence d'un cristal non linéaire d'ordre deux permet de coupler les modes et d'obtenir des effets quantiques non monomodes transverses.

Mots-clefs : image quantique, oscillateur paramétrique optique, corrélations quantiques, bruit quantique, précision dans les mesures optiques, effets transverses

Quantum effects in optical images

Abstract

We study the quantum properties of optical images. On the theoretical side, we define, in the transverse plane of the electromagnetic field, observables as close as possible to quantities measured by optical detectors. We show then the necessity of a transverse multimode description of the field in order to describe optical image. We build up a method to calculate the transverse quantum fluctuations of an arbitrary number of fields which interact with a nonlinear medium.

We apply these ideas in order to define limits in the resolution in optical images imposed by quantum mechanics. We apply the special case of a two-mode beam to the position measurement of a beam by a two quadrants detector. We show, theoretically and experimentally, that the good choice of two non classical modes leads to measurement below the shot noise limit. We also apply the method designed to compute the transverse quantum fluctuations to the special case of the spatial soliton. We show that, even if diffraction does not affect the shape of the soliton, it is responsible for the diffusion of quantum properties, which then appear in the correlation functions between two areas of the transverse plane. Finally, we describe an experiment with an optical parametric oscillator transversally degenerate, in which a large number of transverse modes can oscillate for the same cavity length. The presence of a non-linear crystal couples all the modes and allows one to observe non monomode transverse quantum effects.

Keywords : quantum image, optical parametric oscillator, quantum correlation, quantum noise, high sensitivity optical measurements, transverse effects.