



**HAL**  
open science

# Cavitation dans l'hélium 3 : un liquide de Fermi à pression négative

Frédéric Caupin

► **To cite this version:**

Frédéric Caupin. Cavitation dans l'hélium 3 : un liquide de Fermi à pression négative. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT: . tel-00000905

**HAL Id: tel-00000905**

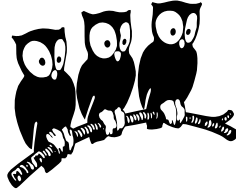
**<https://theses.hal.science/tel-00000905>**

Submitted on 5 Dec 2001

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE**



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6  
Spécialité : Physique quantique

présentée par

M. Frédéric CAUPIN

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

**Cavitation dans l'hélium 3 :  
un liquide de Fermi à pression négative**

Soutenue le 19 janvier 2001 devant le jury composé de :

M. Jacques TREINER	Président
M. Sébastien BALIBAR	Directeur
M. Thierry GIAMARCHI	Rapporteur
M. Pierre-Étienne WOLF	Rapporteur
M. Pierre-Jean NACHER	Examineur



*Dying at my music !  
Bubble ! Bubble !  
Hold me till the Octave's run !  
Quick ! Burst the Windows !  
Ritardando !  
Phials left, and the Sun !*

*Emily Dickinson*

*Mais la céramique ne me fait pas rire.*

*Jean-Paul Sartre, La Nausée*



# Remerciements

Cette thèse ponctue quatre ans de travail au Laboratoire de Physique Statistique du Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure. Je remercie les différents directeurs, MM. Haroche et Voos pour le Département, MM. Balibar et Meunier pour le L. P. S. de m'y avoir accueilli.

Je suis reconnaissant à Sébastien Balibar d'avoir dirigé ma thèse, avec toujours des discussions animées et fructueuses. Je remercie les membres du jury, qui ont critiqué le texte avec attention et rigueur.

Etienne Rolley et Claude Guthmann ont été présents dans l'équipe Hélium durant ces quatre années et ont toujours été de bon conseil. J'ai également été heureux de travailler, à différents stades de l'expérience, avec Xavier Chavanne, Hadrien Lambaré, Sébastien Marchand, Patrice Roche et Florent Saulnier. L'exploitation de mes mesures sous pression a bénéficié des discussions avec Cécile Appert et Dominique D'Humières et des résultats de leurs simulations numériques. De nombreuses personnes m'ont été d'une aide précieuse au Département : Samir Ben Youssef, Sébastien Chavin et Luc Ronayette du service cryogénique, Lucien Brouard, Jacques Kerboriou, José Quintas et Jean-Claude Sutra-Fourcade à l'atelier de mécanique du L. P. S., Christophe Hermann et Daniel Le Moal à l'atelier d'électronique, Jean-Claude Paindorge à l'atelier de soudure, Angélique Manchon, Carole Philippe et Nora Sadaoui au secrétariat du L. P. S., Régine André et Marie-Françoise Ducos au secrétariat du Département.

Je remercie également tous les doctorants qui rendent l'atmosphère si chaleureuse et ne refusent jamais une aide ou un conseil. Merci à ceux qui ont partagé leur bureau avec moi et avec bonne humeur.

Je remercie le Professeur Maris de m'avoir accueilli dans son laboratoire de Brown University : c'est durant ce séjour et grâce aux discussions avec Humphrey que j'ai pu me familiariser avec la théorie de Landau des liquides de Fermi et entamer le travail théorique de ma thèse. J'y ai rencontré plusieurs personnes dont j'ai beaucoup apprécié la gentillesse.

Je ne voudrais pas oublier tous ceux avec qui j'ai parlé d'autre chose que de physique et qui m'ont accompagné durant cette thèse : ils se reconnaîtront. Merci enfin à tous ceux qui m'ont apporté leur aide pour le buffet.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Bilan théorique</b>	<b>15</b>
1.1 Modèle de paroi mince . . . . .	15
1.1.1 Modèle utilisé . . . . .	15
1.1.2 Théorie classique . . . . .	16
1.1.3 Théorie quantique . . . . .	18
1.2 Équation d'état de l'hélium à pression négative . . . . .	20
1.2.1 Existence d'une limite de stabilité de l'état liquide . . . . .	20
1.2.2 Évaluation de la limite spinodale de l'hélium à l'aide des mesures de vitesse du son . . . . .	21
1.2.3 Interprétation . . . . .	23
1.2.4 Autres évaluations de la limite spinodale . . . . .	23
1.2.5 Évaluation de l'énergie libre . . . . .	24
1.3 Fonctionnelle de densité . . . . .	24
1.3.1 Définition . . . . .	24
1.3.2 Évaluation du paramètre $\lambda$ . . . . .	25
1.3.3 Autres types de fonctionnelles . . . . .	26
1.4 Théorie de la cavitation modifiée . . . . .	26
1.4.1 Théorie classique . . . . .	26
1.4.2 Théorie quantique . . . . .	28
1.5 Conclusion . . . . .	30
<b>2 Bilan expérimental</b>	<b>33</b>
2.1 Anciennes expériences . . . . .	33
2.2 Dispositif expérimental . . . . .	34
2.3 Pression de cavitation . . . . .	35
2.4 Statistique de la cavitation . . . . .	36
2.5 Cavitation quantique . . . . .	38
2.6 Dynamique des bulles . . . . .	41
2.7 Bulles électroniques . . . . .	42
2.8 Conclusion . . . . .	44



<b>3</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>47</b>
3.1	Dispositif expérimental . . . . .	47
3.1.1	Principe de l'expérience . . . . .	47
3.1.2	Cryogénie . . . . .	48
3.1.3	Techniques de mesure . . . . .	50
3.2	Cavitation dans l'hélium 3 . . . . .	54
3.2.1	Caractéristiques électriques de la céramique . . . . .	54
3.2.2	Signal détecté . . . . .	55
3.2.3	Statistique de cavitation . . . . .	57
3.2.4	Étude en température . . . . .	64
3.2.5	Variation de la raideur des courbes en S . . . . .	77
3.2.6	Étude en pression . . . . .	79
3.2.7	Retour sur les mesures à basse température . . . . .	88
3.3	Cavitation dans l'hélium 4 . . . . .	89
3.3.1	Caractéristiques électriques de la céramique . . . . .	89
3.3.2	Détection des bulles . . . . .	90
3.3.3	Statistique de cavitation . . . . .	90
3.3.4	Étude en température . . . . .	92
3.3.5	Estimation du préfacteur $\Gamma_0 V \tau$ . . . . .	95
3.3.6	Étude en pression . . . . .	97
3.4	Conclusion . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Le liquide de Fermi à pression négative</b>	<b>105</b>
4.1	Motivation de l'étude . . . . .	105
4.2	Théorie de Landau du liquide de Fermi . . . . .	106
4.2.1	Hypothèses et domaine de validité . . . . .	106
4.2.2	Formalisme . . . . .	107
4.2.3	Oscillations du liquide . . . . .	108
4.2.4	Conditions d'existence du son zéro . . . . .	110
4.2.5	Mise en évidence expérimentale . . . . .	111
4.3	Extrapolation des paramètres de Fermi à pression négative . . . . .	112
4.3.1	Paramètre $F_1$ . . . . .	112
4.3.2	Paramètre $F_0$ . . . . .	113
4.3.3	Paramètre $F_2$ . . . . .	114
4.4	Vitesses remarquables à pression négative . . . . .	115
4.5	Fréquence de transition entre premier son et son zéro . . . . .	117
4.5.1	Extrapolation de la viscosité . . . . .	118
4.5.2	Fréquence de transition . . . . .	119
4.6	Atténuation du son . . . . .	120
4.6.1	Atténuation classique à $\omega \tau$ quelconque . . . . .	120
4.6.2	Régimes de son quantique . . . . .	122
4.6.3	Effet de l'atténuation du son sur la cavitation quantique . . . . .	126
4.7	Effet du son zéro sur la cavitation . . . . .	127

4.8 Conclusion . . . . .	131
<b>Conclusion</b>	<b>133</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>135</b>
<b>A</b> Modèle de paroi mince	<b>143</b>
<b>B</b> Théorie quantique	<b>145</b>
<b>C</b> Relation de dispersion. Énergie de point zéro	<b>149</b>
<b>D</b> Évaluation de l'énergie libre	<b>151</b>
<b>E</b> Évaluation du paramètre $\lambda$	<b>153</b>
<b>F</b> Théorie quantique modifiée	<b>155</b>
F.1 Effet tunnel à plusieurs dimensions. Rebond. . . . .	155
F.2 Application à la cavitation . . . . .	157
<b>G</b> Atténuation de salves ultrasonores de courte durée	<b>159</b>
<b>H</b> Cavitation près d'une paroi	<b>163</b>



# Introduction

Lorsqu'un système présente une transition du premier ordre entre deux phases, chacune de ces phases est susceptible d'exister dans des conditions où l'autre phase est thermodynamiquement plus stable. Ce phénomène dit de métastabilité est rendu possible par l'existence d'une barrière d'énergie entre les deux phases, dont la hauteur diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne des conditions d'équilibre. Près de cet équilibre, elle est suffisamment élevée pour permettre d'observer la phase métastable pendant un certain temps avant qu'une fluctuation ne finisse par apporter l'énergie nécessaire au franchissement de la barrière et ne nucléé l'autre phase, plus stable.

Ce retard à une transition est observé dans de nombreux systèmes (*cf.* Réf [1], Chap. 1). Les liquides peuvent être surchauffés, c'est à dire portés au delà de leur température d'ébullition ; on trouvera une revue sur ce sujet dans la référence [2]. La surchauffe est parfois responsable d'accidents industriels quand la phase gazeuse nucléé violemment en provoquant une explosion. Réciproquement, des substances peuvent demeurer gazeuses à des pressions supérieures à leur pression de vapeur saturante ou à des températures inférieures à leur température de condensation. Une substance peut également demeurer à l'état liquide au dessous de sa température de solidification : c'est le phénomène de surfusion. D'abondantes quantités d'eau en surfusion se trouvent dans les nuages, au dessous de  $-15^{\circ}\text{C}$  [1, p. 27-31].

Nos travaux concernent le cas d'un liquide soumis à une contrainte qui rend sa pression inférieure à la pression de vapeur saturante. Comme dans le cas des liquides surchauffés, la transition vers la phase gazeuse stable s'effectue par formation de bulles, et c'est ce processus que l'on nomme cavitation. Ce phénomène est observé par exemple sur les hélices de navires dont la rotation crée un tourbillon où le liquide est détendu. La formation des bulles est alors nuisible tant par le bruit qu'elle occasionne et qui permet de détecter la présence du navire que par la chute consécutive de rendement du moteur et les dégats causés à l'hélice [3]. *A contrario*, la cavitation peut être mise à profit : c'est le cas par exemple dans le nettoyage et la soudure à l'aide d'ultrasons [1, p. 37].

On rencontre des liquides détendus métastables dans les arbres [1, p. 20-25]. La sève circule depuis les racines jusqu'aux feuilles grâce à l'évaporation à la surface de ces dernières, à l'intérieur de canaux dont l'ensemble constitue le xylème. La

colonne de sève atteint ainsi fréquemment des hauteurs supérieures à la hauteur hydrostatique correspondant à la pression atmosphérique (10,33 m pour l'eau) ce qui signifie que le haut de la colonne se trouve sous tension, c'est à dire à pression négative, tout en demeurant à l'état liquide. De récentes expériences prouvent que le xylème supporte des tensions pouvant atteindre  $-35$  bar [4, 5].

La première observation d'une pression négative est due à Huyghens, qui communiqua sa découverte à la *Royal Society of London* en 1662. Une fiole emplie d'eau est retournée sur un récipient contenant également de l'eau, et le vide est fait au dessus de la surface libre du liquide. Si l'eau a été purgée d'air et qu'aucune bulle d'air ne s'est introduite dans la fiole, l'eau de cette fiole ne tombe pas et par conséquent l'eau qui se trouve au sommet est à une pression inférieure à la pression de vapeur saturante. Huyghens réalisa la même expérience sur le mercure et sur « l'esprit de vin ». Boyle ne parvint pas à répéter l'expérience, jusqu'à ce que Huyghens vienne la réaliser devant la *Royal Society* en 1663. Ils obtinrent le même résultat avec un récipient à la pression atmosphérique et une colonne de mercure purgé d'air haute de 2 m : la pression au sommet de la colonne vaut alors  $-1,7$  bar. On trouvera une revue de ces faits dans la référence [6].

Des expériences analogues furent réalisées au dix-neuvième siècle par Donny en 1843 [7] et Reynolds en 1878 ([8], cité dans [9]) qui ignoraient les travaux de Huyghens. En 1850, Berthelot effectua sur de nombreux liquides des expériences basées sur une méthode de refroidissement isochore [10]. Leurs résultats furent interprétés à la lueur des théories de cohésion au sein des liquides. De nombreuses autres études des liquides sous tension ont été conduites depuis [1, p. 34-39]. Mentionnons les expériences de Briggs dans les années 1950 ; il obtint des pressions très négatives en utilisant un capillaire tournant : la force centrifuge soumet le liquide à des tensions atteignant  $-280$  bar pour l'eau [11] et  $-425$  bar pour le mercure [12].

Citons pour clore cette liste les limites atteintes pour l'eau liquide : sous pression atmosphérique, l'eau liquide peut être chauffée jusqu'à  $279,5$  °C [13] et refroidie jusqu'à  $-41$  °C [14] ; à  $42$  °C, l'eau piégée dans des inclusions cristallines peut être soumise à des tensions de  $-1400$  bar [15].

Toutefois, la pression d'un liquide ne peut être inférieure à une certaine limite, qui dépend du liquide considéré et de la température. Quand la pression atteint cette valeur, la compressibilité devient infinie et le liquide devient thermodynamiquement instable. Cette limite est appelée « limite spinodale ».

L'hélium constitue un système modèle pour l'étude de la cavitation. Au dessous de 14 K, toutes les autres substances sont solides et l'hélium liquide peut être préparé exempt d'impuretés. On peut donc espérer y observer la cavitation homogène, c'est à dire intrinsèque au liquide. Grâce à la connaissance détaillée des propriétés thermodynamiques de l'hélium, la description de la zone métastable a atteint un degré de développement considérable ; nous en dresserons un panorama au chapitre 1. Le calcul du taux de nucléation par activation thermique au voisinage de la limite spinodale fait appel à un formalisme très performant basé sur

les fonctionnelles de densité. Aux plus basses températures, ce taux n'atteint des valeurs importantes que si le liquide devient très proche de la limite spinodale, et la théorie prédit l'existence d'un régime de cavitation quantique dans lequel la nucléation a lieu par un effet tunnel macroscopique impliquant des dizaines d'atomes.

Au chapitre 2, après avoir donné un rapide aperçu de l'historique des expériences réalisées sur l'hélium, nous décrivons la technique expérimentale conçue pour étudier la cavitation loin de toute paroi et en particulier son utilisation dans notre laboratoire par Lambaré *et al.*, qui ont mis en évidence dans l'hélium 4 la signature d'une transition vers le régime de cavitation quantique.

Les expériences menées au cours du travail ici exposé (*cf.* Chap. 3) ont eu pour but de comparer le phénomène de cavitation au sein de l'hélium 3 et de l'hélium 4 : la théorie a été développée pour les deux liquides, mais aucune expérience de cavitation par détente de l'hélium 3 n'avait encore été réalisée. Une étude détaillée de la dépendance de nos mesures en fonction de la pression initiale du liquide avant sa détente nous a permis d'évaluer les valeurs des pressions négatives atteintes, valeurs qu'il n'était pas possible de mesurer directement avec le dispositif expérimental utilisé. Un des objectifs principaux des expériences a été la recherche de la transition vers un régime quantique dans l'hélium 3, prévue théoriquement comme pour l'hélium 4 : la comparaison entre les deux isotopes permet en particulier d'évaluer l'importance de la superfluidité dans ce processus, car seul l'hélium 4 présente cette caractéristique dans la zone expérimentale de température considérée. Le comportement de l'hélium 3 est en réalité très différent des prédictions, et nous suggérons au chapitre 4 une interprétation possible faisant intervenir ses propriétés de liquide de Fermi.



# Chapitre 1

## Bilan théorique

L'étude théorique de l'hélium a atteint un degré de développement considérable en raison de son caractère de système simple et de la bonne connaissance expérimentale de ses propriétés thermodynamiques. Dans ce chapitre, nous dressons un bilan des travaux théoriques concernant la cavitation dans l'hélium liquide, afin de décrire les prédictions que nos expériences permettent de tester (*cf.* Chap. 2 et 3), et de détailler les méthodes dont nous aurons besoin dans la partie théorique de notre travail (*cf.* Chap. 4).

### 1.1 Modèle de paroi mince

#### 1.1.1 Modèle utilisé

La première description théorique de la formation d'une nouvelle phase fluide au sein d'une phase fluide homogène est due à Gibbs [16, 17]. L'annexe A présente un résumé des résultats correspondants. La pression de vapeur saturante de l'hélium gazeux décroît rapidement vers 0 à basse température, et on peut se restreindre au calcul du travail minimal  $W_{\min}$  requis pour former une cavité sphérique vide de rayon  $R$  dans le liquide à la pression  $P$  à partir du liquide homogène. Le calcul conduit à :

$$W_{\min}(R) = 4\pi R^2\sigma + \frac{4}{3}\pi R^3P \quad (1.1)$$

où  $\sigma$  est la tension de surface entre le liquide et sa vapeur.

Cette expression sous forme de la somme d'un terme de surface et d'un terme de volume provient de l'approximation capillaire, ou approximation dite « de paroi mince » : elle consiste à négliger les contributions dues aux variations de courbure. Cette hypothèse est valable dans la limite où l'épaisseur de l'interface est négligeable devant son rayon de courbure.

Le liquide est alors métastable pour  $P < 0$ , comme l'indique la figure 1.1 représentant l'énergie  $W_{\min}$  en fonction du rayon de la cavité. Cette énergie possède



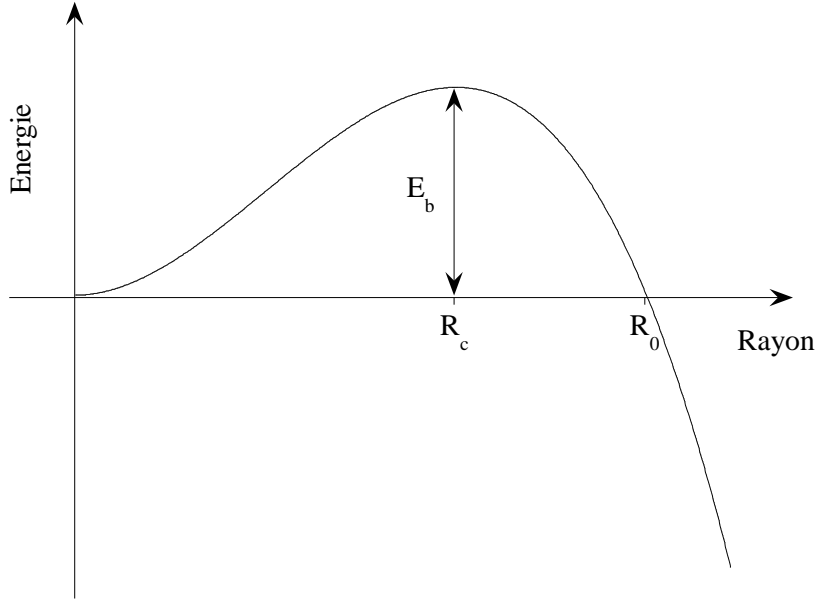


FIG. 1.1 – Travail minimal requis pour former une cavité sphérique de rayon  $R$  dans l'hélium liquide.

un maximum pour le rayon critique  $R_c = -2\sigma/P$ . Ce maximum constitue une barrière d'énergie à franchir et vaut :

$$E_b = \frac{16 \pi \sigma^3}{3 P^2} \quad (1.2)$$

L'énergie  $W_{\min}$  s'annule en 0 et en  $R_0 = -3\sigma/P$ . Les pressions négatives peuvent être atteintes dans un liquide en raison de l'existence d'interactions attractives, c'est à dire de forces de cohésion en son sein : quand la pression est négative, le liquide est mis « sous tension » (*cf.* Introduction).

### 1.1.2 Théorie classique

Dans le cadre de la théorie classique, les fluctuations statistiques de la densité forment des germes de la phase gazeuse dans le liquide métastable. Les germes dont l'énergie est égale à  $E_b$  sont en équilibre instable avec le liquide ; on les nomme « germes critiques ». Si l'énergie d'un germe est inférieure à la barrière d'énergie  $E_b$ , il décroît et disparaît, tandis que si son énergie est supérieure à  $E_b$ , il grandit spontanément et nucléé la phase gazeuse. Le taux de formation de germes critiques par unité de volume et de temps est donné dans la théorie de Becker et Döring par une loi d'Arrhénius [18] :

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-\frac{E_b}{kT}} \quad (1.3)$$

où  $\Gamma_0$  est un préfacteur qui sera discuté plus loin.

Si l'expérience est effectuée sur un volume  $V$  pendant une durée  $\tau$ , la cavitation devient importante pour  $\Gamma V \tau \simeq 1$  (une étude plus détaillée de la statistique de cavitation sera présentée au § 2.4). Ceci définit la pression de cavitation :

$$P_{\text{cav}} = - \left( \frac{16 \pi \sigma^3}{3 k_B T \ln(\Gamma_0 V \tau)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Soulignons au passage que la convention adoptée ici et dans toute la suite consiste à donner les valeurs *algébriques* des pressions négatives. La barrière d'énergie vaut alors :

$$E_b = \ln(\Gamma_0 V \tau) k_B T \quad (1.5)$$

L'évaluation du préfacteur  $\Gamma_0$  est une question délicate qui met en jeu la cinétique du processus de cavitation. Des modèles théoriques satisfaisants existent par exemple dans les cas de condensation dans une vapeur sursaturante diluée ou de cristallisation dans une solution diluée, mais ils ne peuvent être étendus sans certaines hypothèses *ad hoc* aux cas de la nucléation dans les systèmes condensés [18]. Toutefois, on peut construire une quantité homogène à  $\Gamma_0$  en faisant le rapport d'une fréquence et d'un volume. Le volume peut s'interpréter comme celui du germe critique, et la fréquence comme une fréquence d'essai à laquelle les fluctuations du système tentent de dépasser la barrière d'énergie. Pour fixer les idées, on peut évaluer  $\Gamma_0$  à la manière de Pettersen *et al.* [19] en faisant le produit du nombre de sites de nucléation par unité de volume (égal à l'inverse du volume du germe critique  $V_c$ ) par une fréquence d'essai que l'on choisit égale à la fréquence caractéristique des fluctuations thermiques ( $f = 3k_B T/h$ ). Pour un rayon critique typique  $R_c = 0,5$  nm et à une température de 0,1 K, on obtient :

$$\Gamma_0 \simeq \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R_c^3} \frac{3k_B T}{h} \simeq 1,2 \cdot 10^{37} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (1.6)$$

Soulignons que  $\Gamma_0 V \tau$  n'intervient que logarithmiquement dans la détermination de la pression de cavitation : un changement de plusieurs ordres de grandeurs de ce produit n'affecte que peu la pression de cavitation. Ceci entraîne que l'incertitude sur  $\Gamma_0$  ou sa variation en température ont une incidence négligeable et que l'on peut comparer directement les résultats donnés par des expériences utilisant différents volumes et temps expérimentaux.

Pour l'hélium 4 à une température de 0,1 K, en prenant pour la tension de surface  $\sigma = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ J m}^{-2}$  [20], avec  $V \simeq 5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^3$  et  $\tau \simeq 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ , on obtiendrait  $P_{\text{cav}} \simeq -42,9$  bar et  $E_b/k_B T \simeq 40$ . Ce dernier résultat nous indique un autre choix possible pour la fréquence d'essai intervenant dans le préfacteur :  $f_0 \simeq E_b/h \simeq 40k_B T/h$ ; de nouveau, ce choix différent ne modifierait que peu la valeur de la pression de cavitation.

### 1.1.3 Théorie quantique

Dans le régime d'activation thermique, la barrière d'énergie permettant d'atteindre un taux de nucléation fixé varie proportionnellement à la température (*cf.* Éq. 1.5). Par conséquent, d'après l'équation 1.2, la pression de cavitation diverge à basse température :  $P_{\text{cav}} \propto 1/\sqrt{T}$ . Nous verrons toutefois au paragraphe 1.2.1 qu'il existe une borne inférieure finie à la métastabilité du liquide pour laquelle la barrière d'énergie s'annule.

Si l'on néglige l'existence de cette borne, à température nulle, comme il n'existe aucune fluctuation thermique qui permette le franchissement de la barrière d'énergie, la nucléation ne peut être assurée que par un effet tunnel quantique. Lifshitz et Kagan ont développé un traitement dans l'approximation semi-classique Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) de cette transition tunnel dans le cadre du modèle de paroi mince [21]. C'est un point de vue intéressant à examiner même s'il ne constitue qu'une approximation grossière du comportement du liquide dans ces régions extrêmes. Les calculs sont regroupés dans l'annexe B.

À température nulle, la probabilité de transition par effet tunnel est :

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-\frac{2B}{\hbar}} \quad (1.7)$$

où :

$$\frac{B}{\hbar} = -\frac{135 \pi^2 \sqrt{6\rho} \sigma^4}{64 \hbar |P|^{7/2}} \quad (1.8)$$

Le préfacteur  $\Gamma_0$  s'estime d'une manière analogue au cas du régime thermique (*cf.* § 1.1.2) :  $\Gamma_0 = f_0/V_c$ . Dans ce régime quantique, la fréquence d'essai  $f_0 \simeq E_b/h$  correspond à l'inverse du temps de traversée de la barrière par effet tunnel, ce qui donne :

$$\Gamma_0 = \frac{P_{\text{cav}}}{2h} \quad (1.9)$$

Le taux de cavitation quantique vaut :

$$\Gamma = N_c \omega_0 \exp\left(-\frac{135 \pi^2 \sqrt{6\rho} \sigma^4}{32 \hbar |P|^{7/2}}\right) \quad (1.10)$$

si on néglige la densité du gaz devant la densité  $\rho$  du liquide.

On en déduit la pression de cavitation :

$$P_{\text{cav}} = -\left(\frac{135 \pi^2 \sqrt{6\rho} \sigma^4}{32 \hbar \ln(\Gamma_0 V \tau)}\right)^{2/7} \quad (1.11)$$

Pour l'hélium 4, avec  $V \simeq 5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^3$  et  $\tau \simeq 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ , on obtiendrait  $P_{\text{cav}} \simeq -16,6 \text{ bar}$  et  $\Gamma_0 \simeq 1,2 \cdot 10^{39} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

L'approximation WKB est valable dans la limite où la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_{\text{dB}}$  associée à la particule étudiée varie lentement dans l'espace :

$|\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{dB}}/\mathrm{d}x| \ll 4\pi$ . Pour une particule de masse  $m$  (dans le cas de la cavitation, le problème se résume à l'étude d'une particule de masse variable définie dans l'annexe B) :

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2m E(R)}} \quad (1.12)$$

d'où :

$$\left| \frac{\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{dB}}}{\mathrm{d}x} \right| \simeq \frac{h}{2R_c} \sqrt{\frac{E_b}{2m}} \simeq \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E_b}{27\pi\rho R_c^5}} \quad (1.13)$$

où  $\rho$  est la densité du liquide. En utilisant les valeurs caractéristiques du paragraphe 1.1.2, cette expression est de l'ordre de  $1,3 \cdot 10^{-23}$  et l'approximation WKB est largement justifiée.

### Température de transition

Entre les régimes thermique et quantique, il existe une zone étroite de température où les taux de nucléation associés à chaque régime sont comparables. Pour évaluer rapidement la température de transition entre ces deux régimes, on écrit l'égalité des arguments des exponentielles :

$$\frac{2B}{\hbar} = \frac{E_b}{k_B T^*} \quad (1.14)$$

d'où :

$$k_B T^* = \frac{256 \hbar |P|^{3/2}}{405 \pi \sqrt{6\rho} \sigma} \quad (1.15)$$

Pour l'hélium 4, avec  $P \simeq 16,6$  bar, on trouverait  $T^* \simeq 0,3$  K.

Aux températures faibles (inférieures à  $T^*$ ) mais non nulles, le franchissement de la barrière peut non seulement se faire par effet tunnel depuis le niveau quasi-stationnaire fondamental, mais la traversée tunnel peut également s'effectuer à partir d'un niveau excité dans lequel l'agitation thermique a préalablement porté le système. On parle alors d'effet tunnel thermiquement assisté. Lifshitz et Kagan ont discuté ce processus, toujours dans le cadre de l'approximation semi-classique [21]. Ils ont conclu que la traversée tunnel partait toujours du niveau fondamental, le système passant ensuite abruptement à un processus d'activation thermique. Une théorie plus récente permet de décrire le taux de nucléation continûment entre les deux régimes [22] : l'effet tunnel thermiquement assisté n'introduit cependant que de faibles corrections.

La variation en température de la pression de cavitation présenterait donc un plateau pour  $T < T^*$ . Ce plateau peut éventuellement être légèrement déformé si la hauteur de la barrière dépend de la température.

La figure 1.2 donne la pression de cavitation en fonction de la température pour différentes valeurs du produit  $V_{\mathrm{exp}} \tau_{\mathrm{exp}}$  ; pour nos expériences, ce produit vaut environ  $2,5 \cdot 10^{-22} \mathrm{m}^3 \mathrm{s}^3$  (cf. § 2.4, Éq. 2.8). Malgré une variation de plusieurs

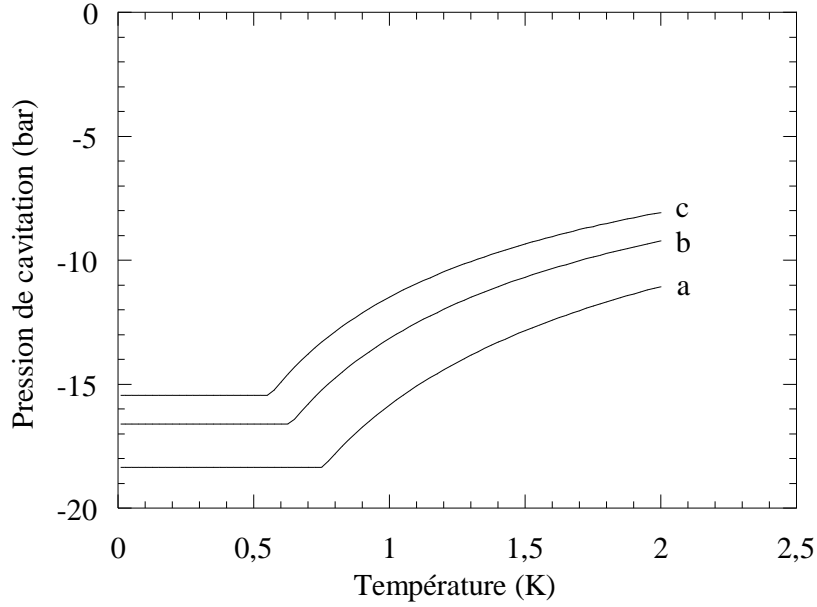


FIG. 1.2 – Pression de cavitation en fonction de la température pour différentes valeurs de  $V_{\text{exp}} \tau_{\text{exp}}$  :  $10^{-17}$  (a),  $10^{-22}$  (b) et  $10^{-27} \text{ m}^3 \text{ s}$  (c). On distingue les deux régimes : classique ( $T > T^* \simeq 0,6 \text{ K}$ ) et quantique (plateau pour  $T < T^*$ ).

ordres de grandeurs de cette quantité, les courbes obtenues sont relativement proches. On constate que la transition a lieu vers 0,6 K : la différence avec la valeur 0,3 K calculée plus haut provient de l'écart entre les préfacteurs estimés dans chaque cas.

## 1.2 Équation d'état de l'hélium à pression négative

### 1.2.1 Existence d'une limite de stabilité de l'état liquide

En réalité, un liquide ne peut être détendu indéfiniment : il existe une pression négative au dessous de laquelle il devient macroscopiquement instable ; il s'agit d'une ligne de décomposition spinodale.

Pour s'en convaincre, supposons que l'on puisse prolonger la fonction donnant l'énergie du liquide en fonction de son volume molaire à tout volume molaire, la pression étant alors définie par  $P = -dE/dV$ . On peut alors noter qu'à température nulle, la pression s'annule à l'équilibre liquide-vapeur, pour la masse volumique d'équilibre  $\rho_0$ , et doit également s'annuler quand la masse volumique tend vers zéro. Par conséquent, il existe une masse volumique critique  $\rho_s$  comprise entre 0 et  $\rho_0$ , où la pression atteint une valeur négative minimale  $P_s$ .

L'origine physique de ce minimum se comprend en remarquant que l'allure

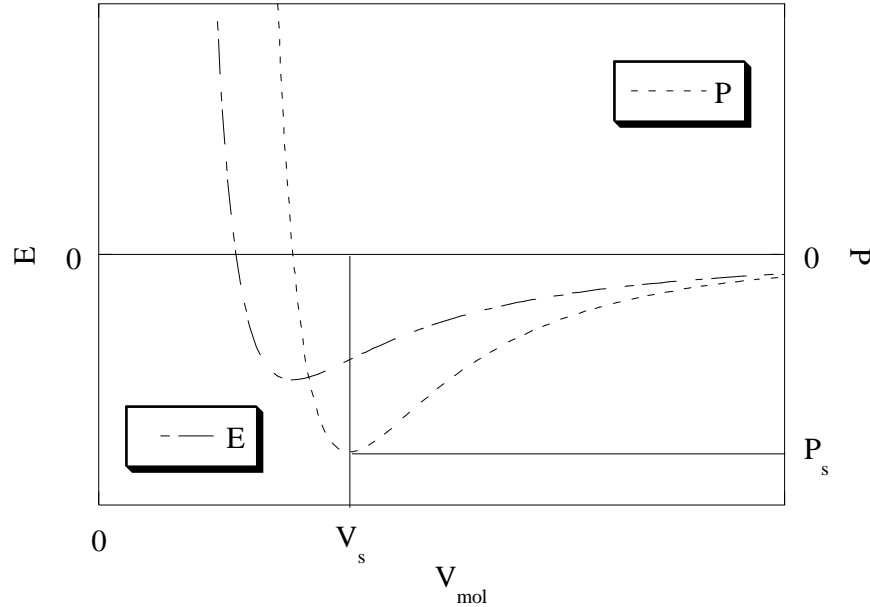


FIG. 1.3 – Allure de l'énergie et de la pression d'un liquide en fonction du volume molaire ; à  $V_s$  la pression atteint sa valeur minimale.

de la fonction donnant l'énergie du liquide en fonction du volume molaire est celle d'un potentiel interatomique, répulsif à courte portée et attractif à grande distance (voir Fig. 1.3). Entre le minimum et les volumes molaires infinis pour lesquels l'énergie tend vers 0 se trouve nécessairement un point d'inflexion ; ce point correspond à la valeur maximale de la pente  $\partial E/\partial V = -P$ , soit à une pression négative minimale  $P_s$  atteinte pour un volume molaire  $V_s = M/\rho_s$ .

Cherchons à relier ce comportement à la vitesse du son  $c$ . Au voisinage de  $\rho_s$ , comme  $P_s$  est un minimum de  $P$ , on aurait dans le cas d'un point d'inflexion simple  $P - P_s \propto (\rho - \rho_s)^2$ , d'où  $c^2 = \partial P/\partial \rho \propto (\rho - \rho_s)$ . La vitesse du son tendrait alors vers zéro, comme :

$$c \propto (P - P_s)^{1/4} \quad (1.16)$$

Cela signifierait qu'à  $P_s$  le liquide deviendrait macroscopiquement instable vis à vis des fluctuations de grande longueur d'onde. La région de masse volumique comprise entre 0 et  $\rho_s$  est inaccessible au liquide homogène, car  $c^2 = \partial P/\partial \rho < 0$  : la moindre fluctuation serait amplifiée et croîtrait jusqu'à ce que le liquide atteigne l'état stable.

### 1.2.2 Évaluation de la limite spinodale de l'hélium à l'aide des mesures de vitesse du son

La limite spinodale de l'hélium a été évaluée pour la première fois par Xiong et Maris [23, 24]. À partir des mesures effectuées par Abraham *et al.* dans l'hé-

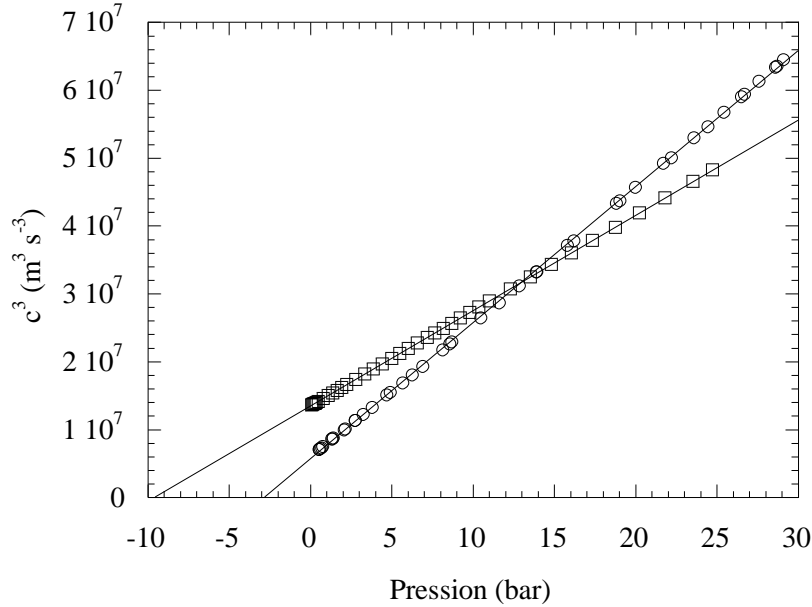


FIG. 1.4 – Données expérimentales de  $c^3$  en fonction de la pression pour l'hélium 3 ( $\circ$ ) et pour l'hélium 4 ( $\square$ ). Les lignes sont des ajustements linéaires permettant d'évaluer  $P_s$ .

lium 3 [25] et dans l'hélium 4 [26], ces auteurs extrapolent la vitesse du son à pression négative. Après avoir essayé une dépendance en puissance 1/4, ils ont remarqué que les données expérimentales étaient mieux ajustées par une loi en  $(P - P_s)^\nu$  avec un exposant  $\nu$  compris entre 0,31 et 0,33 pour l' $^3\text{He}$  et pour l' $^4\text{He}$ . La figure 1.4 représente le cube de la vitesse du son en fonction de la pression : les mesures expérimentales sont remarquablement alignées. L'extrapolation faite par Maris donne la valeur des pressions et des densités spinodales :

$$\begin{aligned} P_s &= -3,097 \text{ bar} & \text{et} & \quad \rho_s = 53,933 \text{ kg m}^{-3} & \text{pour l'hélium 3 [27]} \\ P_s &= -9,5219 \text{ bar} & \text{et} & \quad \rho_s = 94,82 \text{ kg m}^{-3} & \text{pour l'hélium 4 [28]} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Il est plutôt surprenant que cette loi soit vérifiée sur le large domaine couvert par les mesures expérimentales de la vitesse du son, de la pression de vapeur saturante à la pression de solidification. Il serait intéressant de mesurer l'équation d'état pour des pressions proches de  $P_s$  afin de tester la validité de cette loi.

Si l'énergie  $E$  admet près de  $V_s$  un développement de la forme :

$$E(V) = E(V_s) + a_1(V_s - V) + a_\gamma(V_s - V)^\gamma \quad (1.18)$$

on a :

$$P - P_s \propto (V_s - V)^{\gamma-1} \quad (1.19)$$

et

$$c^2 \propto (V_s - V)^{\gamma-2} \propto (P - P_s)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} \quad (1.20)$$

Un comportement du type  $c \propto (P - P_s)^\nu$  correspond donc à

$$\gamma = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \quad (1.21)$$

La valeur de  $\nu$  étant trouvée supérieure à  $1/4$ , cela entraîne  $\gamma > 3$ ; il ne peut s'agir d'un point d'inflexion simple, pour lequel on aurait  $\gamma = 3$ .

### 1.2.3 Interprétation

Maris a interprété ce comportement comme provenant de l'énergie de point zéro de l'hélium [29].

Il suppose que l'énergie de l'hélium liquide peut s'écrire comme somme de deux termes, une énergie potentielle  $U$  et une énergie de point zéro  $K$  :

$$E(V) = U(V) + K(V) \quad (1.22)$$

On détermine  $E(V)$  en employant une méthode de renormalisation. En fixant une expression de  $U(V)$  comme point de départ, on calcule le coefficient de compressibilité  $B = V \partial^2 U / \partial V^2$ , puis la vitesse du son  $c = (B/\rho)^{1/2}$ . On en déduit une approximation de la relation de dispersion, ce qui permet de calculer  $K(V)$ , et d'obtenir une expression de  $E(V)$  (*cf.* annexe C). On l'utilise alors pour trouver une nouvelle valeur de  $B = V \partial^2 E / \partial V^2$ . Le cycle peut continuer, jusqu'à ce qu'on obtienne une convergence de  $E(V)$ .

En itérant ce procédé de renormalisation, Maris obtient finalement

$$c \propto (P - P_s)^{1/3} \quad (1.23)$$

soit  $\nu = 1/3$  et  $\gamma = 4$ .

### 1.2.4 Autres évaluations de la limite spinodale

D'autres méthodes ont été utilisées pour estimer la pression spinodale. Certaines sont basées sur les fonctionnelles de densité (*cf.* § 1.3.1) [30, 31, 32, 33], d'autres utilisent des approches phénoménologiques microscopiques [34, 35] et d'autres enfin des simulations de Monte Carlo quantique [36, 37, 38]. Parmi elles plusieurs étendent les résultats à température non nulle. À température nulle, toutes conduisent à des résultats remarquablement proches pour la pression spinodale et voisins pour la densité spinodale; nous avons par conséquent continué à utiliser les équations d'état de Maris, bien qu'elles puissent être remplacées par les autres.



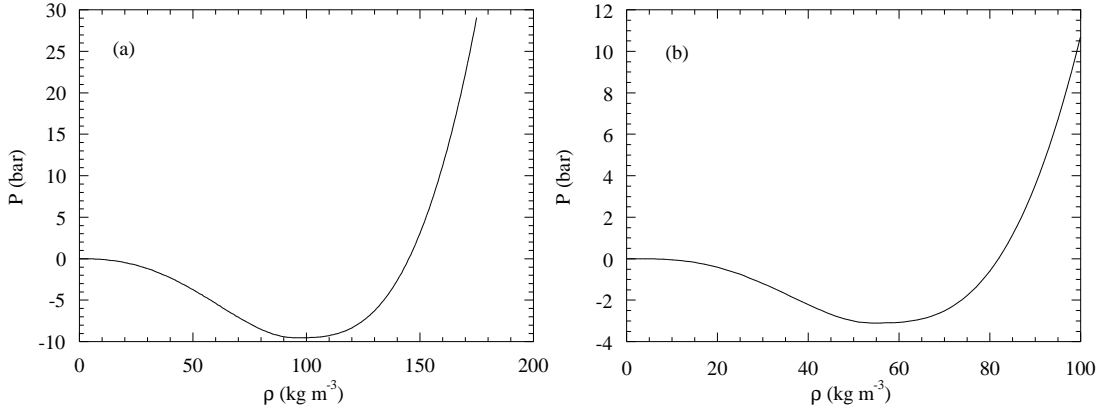


FIG. 1.5 – Pression en fonction de la masse volumique, calculée à partir de l’extrapolation de la vitesse du son pour l’ ${}^4\text{He}$  (a) et pour l’ ${}^3\text{He}$  (b).

### 1.2.5 Évaluation de l’énergie libre

Maris a utilisé la relation déduite des données expérimentales  $c^3 = b(P - P_s)$  (cf. § 1.2.2) pour calculer l’énergie libre par unité de volume  $f(\rho)$  pour l’ ${}^4\text{He}$  [28] et pour l’ ${}^3\text{He}$  [27] pour  $\rho \geq \rho_s$ .

Pour la suite il est nécessaire d’estimer  $f$  pour  $0 \leq \rho \leq \rho_s$ . Nous avons vu que ces valeurs de densité étaient inaccessibles au liquide homogène (cf. § 1.2.1), mais elles se rencontrent dans d’autres cas, comme par exemple à l’interface liquide-gaz. Maris utilise un polynôme  $A\rho^2 + B\rho^3 + C\rho^4$  (l’énergie et la pression sont nulles à densité nulle) où les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont déterminés pour avoir un raccord de classe  $\mathcal{C}^2$  en  $\rho = \rho_s$ . Il en déduit  $P$  en fonction de  $\rho$  par la formule :

$$P = \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} - f \quad (1.24)$$

Les calculs se trouvent dans l’annexe D et les résultats obtenus sont représentés sur la figure 1.5.

## 1.3 Fonctionnelle de densité

### 1.3.1 Définition

Les prédictions du modèle de paroi mince donnant  $P_{\text{cav}} < P_s$  sont en contradiction avec l’existence de la limite spinodale. En réalité, l’épaisseur de l’interface liquide-vapeur (environ 0,7 nm) n’est pas toujours négligeable devant le rayon critique : la séparation de l’énergie en deux termes, l’un de surface et l’autre de volume, n’est alors qu’une approximation grossière.

Afin de remédier à ce problème, Lifshitz et Kagan ont introduit la notion de fonctionnelle de densité [21]. Pour un système non homogène décrit par une

distribution de densité  $\{\rho\}$ , l'énergie libre totale s'écrit :

$$F = F(\{\rho\}) = \int \mathcal{F}(\rho) dV \quad (1.25)$$

où  $\mathcal{F}$  est la densité d'énergie libre. En raison de la présence de gradients de densité, pour donner une estimation de  $\mathcal{F}$ , il faut faire intervenir non seulement  $\rho$ , mais aussi ses dérivées; étant donné qu'une configuration homogène est localement plus stable, la relation la plus simple est :

$$\mathcal{F}(\rho, \nabla\rho, \dots) = f(\rho) + \lambda(\nabla\rho)^2 \quad (1.26)$$

où  $f(\rho)$  est l'énergie libre par unité de volume d'un système uniforme de densité  $\rho$ , et  $\lambda$  un paramètre positif.

La fonctionnelle  $\mathcal{F}$  va servir à un raisonnement variationnel. Les distributions de densité autorisées sont celles qui vérifient la condition de conservation de la masse :

$$\int (\rho - \rho_1) dV = 0 \quad (1.27)$$

où  $\rho_1$  est la densité du liquide homogène métastable.

On peut inclure cette condition dans la fonctionnelle en utilisant un multiplicateur de Lagrange,  $\mu$ . On détermine  $\mu$  en écrivant la condition de métastabilité du liquide homogène : la configuration de densité constante égale à la densité du liquide  $\rho_1$  est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée,  $f'(\rho) - \lambda \Delta\rho - \mu\rho = 0$ , ce qui donne  $\mu = f'(\rho_1)$ .

La variation d'énergie à considérer est donc :

$$\Delta F(\{\rho\}) = F(\{\rho\}) - F(\rho_1) = \int dV [\phi(\rho, \rho_1) + \lambda(\nabla\rho)^2] \quad (1.28)$$

avec  $\phi(\rho, \rho_1) = f(\rho) - f(\rho_1) - (\rho - \rho_1) f'(\rho_1)$ . Cela permet d'étudier toutes les configurations qui relient continûment la phase liquide à la phase gazeuse.

### 1.3.2 Évaluation du paramètre $\lambda$

Le modèle de fonctionnelle de densité doit permettre de retrouver près de l'équilibre entre phases les prédictions du modèle de paroi mince.

Pour cela, il suffit d'ajuster la valeur de  $\lambda$  sur celle de la tension de surface; on considère une interface plane perpendiculaire à l'axe  $x$ , séparant le gaz ( $z = -\infty$ ,  $\rho \rightarrow \rho_2$ ) du liquide ( $z = +\infty$ ,  $\rho \rightarrow \rho_1$ ). Dans l'annexe E, on minimise son énergie par unité de surface, ce qui permet de calculer le profil de densité et de trouver la relation entre le paramètre  $\lambda$  et la tension de surface :

$$\sigma = 2 \int_{\rho_2}^{\rho_1} \sqrt{\lambda \phi(\rho)} d\rho \quad (1.29)$$

Par cette méthode, Xiong et Maris obtiennent  $\lambda = 9,13 \cdot 10^{-11} \text{ m}^7 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  [24].

Ces auteurs relient le modèle à la dépendance en pression de la relation de dispersion des phonons (*cf.* Réf. [24]) :

$$\omega = ck(1 + \alpha_2 k^2 + \dots) \quad (1.30)$$

Le coefficient  $\alpha_2$  est bien décrit à l'aide d'un terme impliquant  $\lambda$  et d'un terme cinétique. Ce calcul est cohérent avec un paramètre  $\lambda$  indépendant de la pression, hypothèse retenue par les différents auteurs.

### 1.3.3 Autres types de fonctionnelles

Différents groupes ont tenu compte de la variation en température de l'énergie libre et parfois utilisé d'autres expressions pour la fonctionnelle [30, 31, 33, 39]. Les expressions retenues pour la fonctionnelles sont analogues à :

$$f(\rho, T) = f_0(\rho, T) + \beta \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} + \xi (\nabla \rho)^2 \quad (1.31)$$

Les estimations des pressions spinodales et des pressions de cavitation, selon la méthode présentée au paragraphe suivant, restent très proches à basse température de celles que donnent la fonctionnelle (1.26). Ces modèles permettent en outre d'estimer ces grandeurs jusqu'à la température du point critique.

## 1.4 Théorie de la cavitation modifiée

### 1.4.1 Théorie classique

Lifshitz et Kagan ont utilisé la fonctionnelle de densité définie précédemment pour calculer la hauteur de la barrière à franchir [21]. Au voisinage de la limite de stabilité ( $P \rightarrow P_s^+$ ), le calcul est analytique et donne  $E_b \propto (P - P_s)^{\frac{3}{4}}$ .

Cette loi étant très différente du résultat donné par le modèle de paroi mince ( $E_b \propto 1/P^2$ , *cf.* § 1.1.2), valable à faible pression, Xiong et Maris ont été conduits à calculer numériquement la hauteur de la barrière dans le cas général ( $0 > P > P_s$ ) [23, 24].

Ils raisonnent de la façon suivante. L'état initial du système est le liquide homogène de densité constante égale à  $\rho_1$ . La distribution de densité est alors modifiée continûment, en suivant un certain chemin, jusqu'à ce que le système atteigne des états pour lesquels  $\Delta F$  est négatif (le système évolue alors spontanément). Mais d'après le développement de  $\Delta F$  (*cf.* § 1.3.1, Éq 1.26), les premières modifications donnent des valeurs de  $\Delta F$  positives ; par conséquent, pour chaque chemin le système passe par une configuration d'énergie maximale  $\Delta F_{\max}$ . Il existe une valeur minimale de cette quantité,  $\Delta F_{\min-\max}$ , atteinte pour un point col (correspondant à une certaine configuration de densité définissant le « noyau

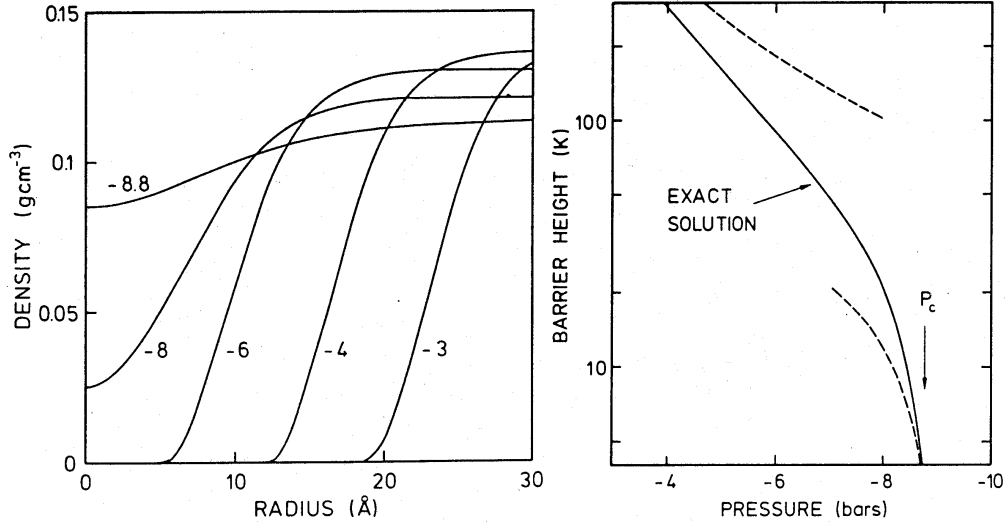


FIG. 1.6 – (a) Profil de densité pour plusieurs noyaux critiques. Les courbes sont indexées par la pression en bars ; on constate que près de la pression spinodale, l'épaisseur de l'interface n'est plus négligeable devant le rayon critique. (b) Hauteur de la barrière en fonction de la pression. Les lignes pointillées correspondent aux calculs analytiques de Lifshitz et Kagan, et la courbe en trait plein à la solution numérique de Xiong et Maris. Ces figures sont extraites de la référence [24].

critique »). Cette dernière valeur  $\Delta F_{\min-\max}$  est la hauteur de la barrière qui intervient dans le calcul du taux de nucléation (*cf.* § 1.1.2, Éq. 1.3).

La distribution de densité au point col vérifie :

$$2\lambda \Delta\rho = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \quad (1.32)$$

Des solutions de symétrie sphérique de cette équation sont représentées pour différentes valeurs de la pression sur la figure 1.6 (a). La variation radiale de la solution est appelée profil critique. Les remarques précédentes sont confirmées : aux pressions proches de la pression de vapeur saturante, le profil critique possède un cœur de faible densité et une paroi d'extension faible par rapport à son rayon ; lorsque  $P$  est proche de  $P_s$ , le profil critique ne présente qu'une faible diminution de la densité au dessous de  $\rho_s$  et la variation se fait sur une échelle comparable au rayon du profil.

Pour chaque profil critique, l'expression 1.28 permet de calculer la hauteur de la barrière. La figure 1.6 (b) compare les résultats numériques aux expressions analytiques : ils sont assez différents, sauf dans les cas limites  $P \rightarrow 0$  et  $P \rightarrow P_s$ .

On calcule ensuite le taux de cavitation et la pression de cavitation comme au § 1.1.2.

## 1.4.2 Théorie quantique

### Application de la méthode du rebond à la cavitation.

La théorie quantique modifiée fait appel à la méthode du rebond issue de la théorie des champs. Le détail en est exposé dans l'annexe F.

S. Coleman a montré que le problème de minimisation rencontré lors du calcul semi-classique WKB de l'effet tunnel à plusieurs dimensions pouvait être reformulé de la façon suivante : on change le potentiel en son opposé, et l'on écrit les nouvelles équations du mouvement ; parmi les solutions partant de l'état initial du système, certaines oscillent dans le potentiel inversé de manière à revenir à leur point de départ : une telle trajectoire est appelée « rebond » [40]. L'argument de l'exponentielle,  $2B/\hbar$ , intervenant dans l'expression du taux de transition tunnel est alors l'action calculée pour le rebond sur un aller-retour dans le potentiel inversé, exprimé en unité de  $\hbar$ . S'il existe plusieurs rebonds, il faut choisir celui dont l'action est minimale.

En ce qui concerne la cavitation, il s'agit de faire le calcul dans le cadre de l'approximation de fonctionnelle de densité introduite au § 1.3.1. Pour cela, Maris décrit le liquide par un champ de vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  et de densité  $\rho(\vec{r}, t)$  et obtient l'équation du rebond [27] :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \nabla (f'(\rho) - f'(\rho_1) - 2\lambda \Delta \rho) \quad (1.33)$$

Dans le puits de potentiel que l'on considère maintenant, la position du liquide homogène au repos est une position d'équilibre instable. N'importe quelle perturbation le fait évoluer de façon plus ou moins complexe, déterminée par les nouvelles équations du mouvement. Pour certaines perturbations, le liquide va évoluer avec une vitesse croissante, puis ralentir, atteindre une configuration de densité non uniforme et de vitesse nulle, avant de revenir en arrière vers la configuration du liquide homogène au repos. Il faut donc calculer l'action pour chaque rebond et choisir pour  $B$  la valeur minimale. Si le rebond correspondant a lieu entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ ,

$$B = \int_{t_1}^{t_2} \int dV \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \phi(\rho, \rho_1) + \lambda (\nabla \rho)^2 \right) \quad (1.34)$$

Les vitesses élevées tendent à diminuer la durée de traversée de la barrière mais à augmenter la valeur de l'énergie cinétique : la minimisation de  $B$  résulte d'un compromis entre ces deux influences.

### Retour au modèle de paroi mince

Il est intéressant d'appliquer la méthode du rebond au problème de paroi mince, pour vérifier que l'on retrouve bien les résultats du § 1.1.3 (*cf.* Réf. [27]).

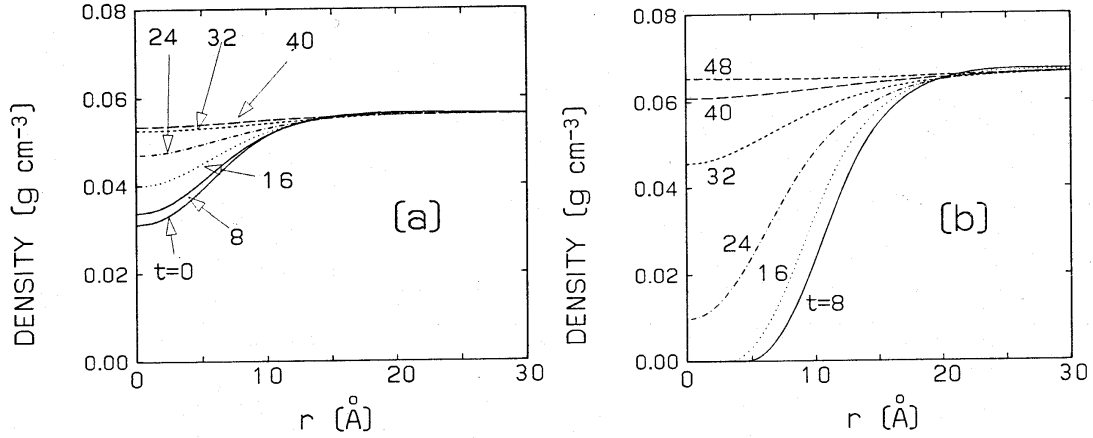


FIG. 1.7 – Profils de densité indexés par le temps en picosecondes, l'origine des temps étant prise à l'instant du rebond. Ces calculs ont été effectués pour  ${}^3\text{He}$  avec une densité au repos de 56 (a) et  $67 \text{ kg m}^{-3}$  (b). Ces figures sont extraites de la référence [27].

L'énergie d'une bulle de rayon  $R$  est alors la somme d'une énergie cinétique  $K$  et d'une énergie potentielle effective  $V$  données par

$$K = 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2 \quad (1.35)$$

$$V = 4\pi R^2 \sigma - \frac{4}{3} R^3 |P| \quad (1.36)$$

La méthode du rebond consiste alors à déterminer le mouvement pour l'hamiltonien  $K - V$ . Si on part du liquide homogène,  $E = 0$  et à chaque instant  $K = V$ .

On en déduit  $R(t)$ , l'action  $B$  et le taux de cavitation :

$$\Gamma = \Gamma_0 \exp\left(-\frac{135\sqrt{6}\pi^2\rho^{1/2}\sigma^4}{16\hbar|P|^{7/2}}\right) \quad (1.37)$$

On retrouve bien le résultat de Lifshitz et Kagan.

### Résultats numériques

Maris a effectué numériquement la recherche du rebond dans le cadre de cette théorie [27]. Il a supposé que le système conservait une symétrie sphérique au cours de son évolution, et a résolu les équations du mouvement en modifiant la perturbation initiale à l'aide de combinaisons linéaires de fonctions d'une famille d'essai jusqu'à trouver un rebond ; il calcule ensuite l'action correspondante. L'évolution des profils de densité pour l'hélium 3 est représenté sur la figure 1.7 pour deux valeurs de la densité au repos. On voit que l'approximation de parois minces ne s'applique certainement pas, l'épaisseur de la paroi de la bulle étant de

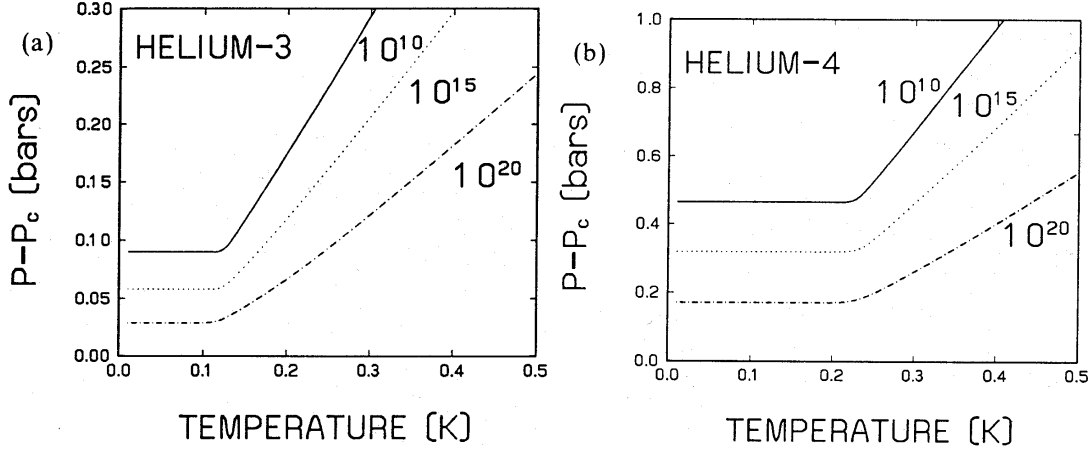


FIG. 1.8 – Différence  $\Delta P$  entre la pression de cavitation (telle que  $\Gamma = 10^{16}$ ,  $10^{21}$  et  $10^{26} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$ ) et la pression critique  $P_s$  en fonction de la température pour l'hélium 3 (a) et l'hélium 4 (b). Ces figures sont extraites de la référence [27].

l'ordre de son rayon ; pour la densité au repos la plus faible, le cœur de la bulle n'est même pas vide.

La température de transition entre les régimes de cavitation quantique et de nucléation par activation thermique est estimée de la même manière qu'au paragraphe 1.1.3 en égalant les arguments des exponentielles intervenant dans l'expression du taux de nucléation. On trouve  $T^* = 120 \text{ mK}$  pour l'hélium 3 et  $T^* = 200 \text{ mK}$  pour l'hélium 4.

Ces calculs nous donnent également un moyen d'estimer le préfacteur apparaissant dans le taux de cavitation de la même manière qu'au § 1.1.2. Les échelles caractéristiques sont  $1 \text{ nm}$  pour le rayon du germe critique et  $50 \text{ ps}$  pour la durée du rebond. Cette dernière valeur est du même ordre de grandeur que les temps caractéristiques que l'on peut construire avec les différents paramètres :  $h/E_b \simeq 10 \text{ ps}$  (où  $E_b$  est la barrière d'énergie à la température de transition) et la période d'un phonon de longueur d'onde égale au rayon critique  $R_c/c \simeq 20 \text{ ps}$ . On obtient alors :

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R_c^3 \tau} \simeq 4,8 \cdot 10^{36} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (1.38)$$

Les résultats théoriques obtenus pour la pression de cavitation sont présentés sur la figure 1.8.

## 1.5 Conclusion

Le développement de techniques variées a permis d'arriver à une description très satisfaisante des propriétés thermodynamiques mesurées de l'hélium. Ces techniques ont été utilisées pour décrire le liquide à pression négative et estimer

la limite spinodale du liquide et les taux de cavitation. Les différentes approches sont toutes en accord. Nous bénéficions donc de prédictions largement admises concernant le seuil de cavitation. La propriété remarquable que possède l'hélium de pouvoir demeurer liquide jusqu'au zéro absolu de température permet la considération intéressante d'un effet de nucléation quantique, pour lequel nous disposons également de prédictions détaillées. Le but des expériences décrites aux chapitres suivants est de vérifier la validité de ces théories. Nous présentons au chapitre 2 les résultats obtenus avant cette thèse avant d'aborder au chapitre 3 les expériences que nous avons réalisées.





# Chapitre 2

## Bilan expérimental

Dans ce chapitre nous résumons les résultats expérimentaux sur la cavitation dans l'hélium 4 liquide obtenus avant cette thèse. Après un bref historique, nous décrivons les expériences réalisées auparavant dans notre laboratoire, puis nous citons les résultats d'une autre équipe concernant des bulles contenant un électron.

### 2.1 Anciennes expériences

Nous donnons dans ce paragraphe un bref aperçu des méthodes utilisées avant la technique de focalisation d'une onde ultrasonore décrite dans la suite et employée dans notre laboratoire.

La première expérience sur la pression de rupture de l'hélium fût réalisée en 1956 par Misener et Hébert [41] par une méthode utilisant des compartiments à soufflets : elle ne permit pas de déterminer un seuil de rupture, mais de montrer que si un tel seuil existait, il était supérieur à  $-0,3$  bar.

Peu après, Beams [42] effectua une mesure de la pression de rupture avec une méthode analogue à celle de Briggs pour l'étude de divers liquides sous tension (*cf.* Introduction). L'hélium était contenu dans un capillaire mis en rotation autour d'un axe perpendiculaire à sa longueur jusqu'à atteindre une vitesse critique pour laquelle la colonne liquide se brisait : la pression de rupture ainsi déterminée valait  $-0,14$  bar à  $1,8$  K.

Dans les années 60 furent conduites d'autres expériences utilisant des transducteurs piézoélectriques plans ou cylindriques soumettant l'hélium à des pressions négatives [43, 44, 45, 46]. La cavitation était détectée par l'intermédiaire de l'émission acoustique associée à l'effondrement de la bulle ou par visualisation directe. Toutes ces expériences conduisirent à des pressions de cavitation supérieures à environ  $-10$  mbar. Les mesures ultérieures de Marston [47] utilisant un transducteur cylindrique donnèrent  $P_{\text{cav}} \geq -0,6$  bar. Des films furent également réalisés pour étudier la dynamique des bulles [48, 49, 47].

Toutes les pressions de cavitation observées sont très supérieures aux prédictions théoriques. Une explication plausible est que, dans les larges volumes impliqués ( $10^{-7}$  à  $10^{-5}$  m<sup>3</sup>), la cavitation observée est hétérogène : la barrière d'énergie de la nucléation peut être abaissée par la présence dans le liquide de particules solides (azote, oxygène...) ou par l'influence des parois. Un effet de mouillage nécessite cependant des angles de contact proches de  $\pi$ , ce qui semble exclu dans le cas de l'hélium 4 superfluide [50]. La surface étrangère peut toutefois être responsable d'un échauffement local par absorption de la lumière ; d'autre part elle crée dans son voisinage un champ de Van der Waals qui structure la densité du liquide. On peut également invoquer la présence d'ions (pour les électrons, voir le paragraphe 2.7) ou de vortex dans le superfluide [28]. Les rayons cosmiques peuvent aussi jouer un rôle : leur passage dans le liquide génère des électrons secondaires susceptibles de déclencher la cavitation, phénomène mis à profit dans les chambres à bulles [51].

Les expériences récentes décrites dans toute la suite mettent en jeu des volumes et des temps expérimentaux nettement inférieurs (respectivement de l'ordre de  $10^{-11}$  m<sup>3</sup> et  $10^{-7}$  s) et sont réalisées loin des parois.

Notons enfin que la surchauffe de l'hélium 4 vers 3 K [52] et de l'hélium 3 vers 2 K [53] ont été étudiées par chauffage d'un monocristal de bismuth qui sert en même temps de thermomètre. Ces mesures sont en accord avec la théorie classique de Becker et Döring (*cf.* 1.1.2). Les bulles apparaissent pour des surchauffes de quelques dixièmes de Kelvin.

## 2.2 Dispositif expérimental

La technique mise au point par Nissen *et al.* [54, 55], puis reprise par Xiong et Maris [56] et par Pettersen *et al.* [19], utilise un transducteur hémisphérique. Ce transducteur émet une onde sonore qui détend fortement le liquide dans la zone de focalisation, loin de toute surface. Le volume mis en jeu est de l'ordre de  $\lambda^3$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde acoustique, d'autant plus petite que la fréquence employée est élevée (typiquement 500 kHz à 1 MHz, soit  $\lambda = 476$  à  $238$   $\mu$ m à pression de vapeur saturante). Cette méthode élimine la possibilité de nucléation hétérogène ; le flux de rayons cosmiques étant d'environ  $1,7 \cdot 10^{-6}$  m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>, leur probabilité de passage est négligeable.

Le schéma du dispositif expérimental utilisé sera donné au paragraphe 3.1.1. Le transducteur est une céramique piézoélectrique hémisphérique PZT (plomb-zirconium-titanate) de rayon intérieur 8 mm et d'épaisseur 2 mm. Elle est immergée dans le liquide et excitée par des salves électriques composées de quelques oscillations sinusoïdales et d'enveloppe carrée.

La cavitation est détectée optiquement à l'aide d'un photomultiplicateur qui mesure soit la transmission, soit la diffusion de la lumière d'un laser hélium-néon, focalisée au point focal acoustique. Des exemples de signaux observés en

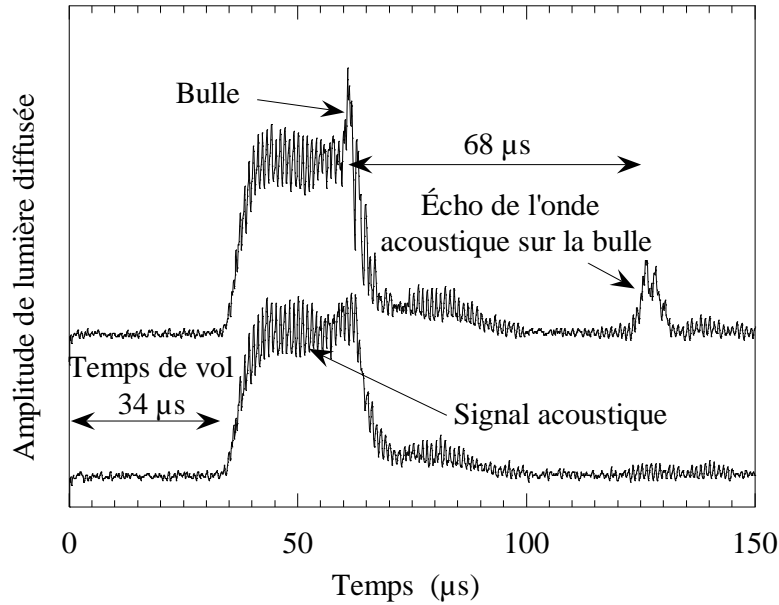


FIG. 2.1 – Signal de diffusion de la lumière détectée par le photomultiplicateur. À faible tension, on n’observe que la diffusion de l’onde acoustique, qui arrive au point focal à  $t = 34 \mu\text{s}$ , puis au delà d’une tension seuil s’y ajoutent des pics correspondant à la formation de bulles ; ils sont suivis d’un écho après un aller-retour du point focal à la céramique, de durée  $68 \mu\text{s}$ .

diffusion par Lambaré *et al.* [57] sont représentés sur la figure 2.1. À faible tension, on observe uniquement la diffusion liée aux gradients d’indice dus à l’oscillation de pression lors du passage de l’onde. Il existe un seuil à partir duquel on assiste à la formation de bulles, qui se manifeste par l’apparition de pics aléatoires.

## 2.3 Pression de cavitation

Dans ce montage, la pression au point focal n’est pas mesurée directement. Nissen *et al.* l’ont évaluée grâce à la lumière diffusée par la région focale, qui donne la variation de l’indice de réfraction, en supposant qu’il variait linéairement avec la pression [55]. Leurs mesures ont été faites à des températures comprises entre 1,7 et 4 K. Pour leur part, Xiong et Maris ont calculé la pression au point focal grâce à une simulation numérique basée sur les caractéristiques du transducteur qu’ils ont mesurées [56]. Les résultats de ces deux groupes couvrent les températures comprises entre 0,8 et 2 K et donnent des pressions de cavitation différentes, mais dans les deux cas inférieures à celles des expériences précédentes, ce qui peut être interprété comme l’indication de l’observation de cavitation homogène.

En raison de l’incertitude sur la pression au point focal, Pettersen *et al.* ont préféré exprimer leurs résultats en terme de tension appliquée au transducteur ;

ils sont présentés au § 2.4.

## 2.4 Statistique de la cavitation

Pettersen *et al.* ont constaté qu'à tension fixée au voisinage d'une tension seuil, la cavitation n'avait lieu que lors de certaines impulsions [58, 19]. Ils ont alors cherché à savoir si ce comportement était lié à la nature statistique du processus de nucléation. Pour une série de tensions d'excitation et de températures, ils ont mesuré la probabilité de cavitation  $\Sigma$  à une pression statique d'un bar, en comptant le nombre de fois où l'on observait le signal caractéristique d'une bulle, sur 100 impulsions acoustiques.

Considérons une expérience débutant à l'origine des temps et durant pendant un temps  $\tau_{\text{exp}}$  dans un volume  $V_{\text{exp}}$  et cherchons à calculer la probabilité  $\Sigma$  d'observer au moins une bulle au cours de cette expérience. Notons  $\Pi(t)$  la probabilité de n'observer aucune bulle avant l'instant  $t$ . Le taux de cavitation  $\Gamma$  défini au § 1.1.2 permet d'écrire la probabilité de n'observer aucune bulle pendant une durée infinitésimale  $dt$  :  $1 - \Gamma V dt$ . On a alors  $\Pi(t + dt) = \Pi(t)(1 - \Gamma V dt)$ , ce qui s'intègre en :

$$\Pi(t) = \exp(-\Gamma V_{\text{exp}} t) \quad (2.1)$$

en remarquant que  $\Pi(0) = 1$ . En écrivant  $\Sigma = 1 - \Pi(\tau_{\text{exp}})$ , on en déduit :

$$\Sigma = 1 - \exp(-\Gamma V_{\text{exp}} \tau_{\text{exp}}) \quad (2.2)$$

Dans le régime d'activation thermique, si  $E(P)$  est la barrière d'énergie à franchir pour nucléer une bulle (*cf.* § 1.1.2, Éq. 1.3), cela se réécrit sous la forme :

$$\Sigma = 1 - \exp\left(-\Gamma_0 V_{\text{exp}} \tau_{\text{exp}} \exp\left(-\frac{E(P)}{k_B T}\right)\right) \quad (2.3)$$

Pettersen *et al.* ont estimé  $V_{\text{exp}}$  et  $\tau_{\text{exp}}$  en supposant que la pression variait de manière sinusoïdale dans le temps et dans l'espace. Une pression minimale  $P_{\text{min}}$  est atteinte au point focal une fois par cycle de l'onde acoustique ; la probabilité de cavitation est alors maximale. Développons la pression au voisinage de ce minimum :

$$P(r, t) = P_{\text{min}}(1 - ar^2)(1 - bt^2) \quad (2.4)$$

La probabilité totale s'écrit :

$$S = 1 - \exp\left(-N \int dV \int dt \Gamma_0 \exp\left(-\frac{E(P)}{k_B T}\right)\right) \quad (2.5)$$

où  $N$  est le nombre de cycles durant l'impulsion ultrasonore. En approchant  $E(P)$  par sa tangente en  $P_{\text{min}}$ , et en effectuant les intégrations, on obtient :

$$\Sigma = 1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 N \Gamma_0 k_B^2 T^2}{(\partial \ln E / \partial \ln |P|)^2 E_{\text{min}}^2 a^{3/2} b^{1/2}} \exp\left(-\frac{E_{\text{min}}}{k_B T}\right)\right) \quad (2.6)$$

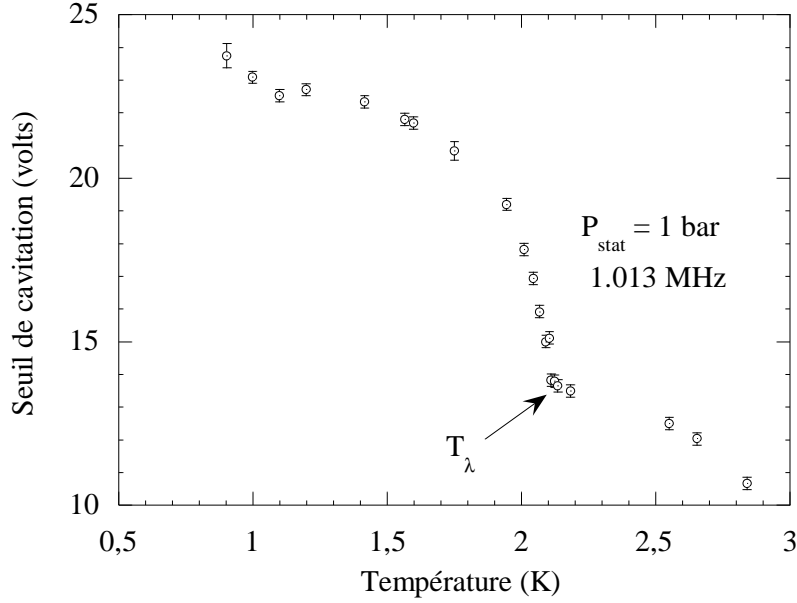


FIG. 2.2 – Tension de cavitation en fonction de la température à pression fixée, égale à 1 bar. On remarque la décroissance rapide au point  $\lambda$ .

Si on approche la variation spatiale de  $P$  par la fonction  $\sin(kr)/kr$ , où  $k$  est le nombre d'onde acoustique, on trouve  $a = 2\pi^2/3\lambda^2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde des ultrasons. De même, si on considère une variation temporelle sinusoïdale, on trouve  $b = 2\pi^2/\tau^2$ , où  $\tau$  est la période de l'oscillation. Ces deux expressions permettent d'écrire la probabilité sous la forme correspondant à une pression statique  $P_{\min}$ , avec

$$V_{\text{exp}} \tau_{\text{exp}} = \frac{3^{3/2} N \lambda^3 \tau k^2 T^2}{4\pi^2 (\partial \ln E / \partial \ln |P|)^2 E_{\min}^2} \quad (2.7)$$

Pour fixer les idées, utilisons les valeurs du modèle de paroi mince (*cf.* § 1.1.2), qui donne  $(\partial \ln E / \partial \ln |P|) = 2$  et  $E_{\min} \simeq 40 k_B T$  et conduit donc à :

$$V_{\text{exp}} \tau_{\text{exp}} = \left( \frac{\lambda}{15} \right)^3 \frac{\tau}{15} \quad (2.8)$$

soit environ  $2,5 \cdot 10^{-22} \text{ m}^3 \text{ s}^3$  pour l'hélium 4 et  $1,2 \cdot 10^{-22} \text{ m}^3 \text{ s}^3$  pour l'hélium 3.

L'étude de la probabilité permet aussi de définir précisément la tension seuil  $V_c$  comme la tension pour laquelle la probabilité vaut  $\frac{1}{2}$ . Grâce à l'étroitesse des courbes  $\Sigma(V)$ , on peut les ajuster par un développement au voisinage de  $V_c$  :

$$\Sigma = 1 - \exp \left( - \ln 2 \exp \left( \xi \left( \frac{V}{V_c} - 1 \right) \right) \right) \quad (2.9)$$

avec

$$\xi = - \frac{V_c}{k_B T} \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{\Sigma=1/2} \quad (2.10)$$

dans le régime d'activation thermique (*cf.* § 1.1.2, Éq. 1.3), et

$$\xi = -\frac{V_c}{\hbar} \left( \frac{\partial B}{\partial V} \right)_{\Sigma=1/2} \quad (2.11)$$

dans le régime de cavitation quantique (*cf.* § 1.1.3, Éq. 1.7).

La variation de  $V_c$  avec la température est donnée sur la figure 2.2. On remarque la brusque décroissance du seuil à la température de transition superfluide : Pettersen *et al.* [19] discutent brièvement cet effet qui n'était pas prévu par les théories existantes.

## 2.5 Cavitation quantique

Lambaré *et al.* ont ensuite repris la même expérience, mais cette fois avec un cryostat à dilution, capable d'atteindre 30 mK [59, 57].

La théorie prévoit une transition d'un régime d'effet tunnel quantique en dessous d'une certaine température  $T^*$  vers un régime d'activation thermique au dessus de  $T^*$  ; pour l'hélium 4, cette température  $T^*$  est estimée à 0,2 K (*cf.* § 1.4.2). On s'attend donc à trouver pour la pression de cavitation, un plateau au dessous de  $T^*$  et une décroissance monotone au dessus de  $T^*$ . La figure 2.3 représente la tension seuil définie au § 2.4 en fonction de la température ( $\circ$ ) : les résultats expérimentaux ont une allure différente de l'allure attendue. On a bien un plateau à basse température, mais il s'étend au moins jusqu'à 0,4 K ; il est suivi par un maximum à 0,75 K avant que  $V_c$  ne commence à décroître.

On peut tenter d'expliquer ce comportement. Il faut d'abord tenir compte de l'atténuation du son, qui présente un maximum à 0,75 K : pour une même tension appliquée à la céramique, l'amplitude de l'oscillation de pression au point focal sera différente à deux températures différentes. Lambaré *et al.* [57, 60] ont mesuré l'amplitude du signal acoustique au point focal en fonction de la température  $T$  à une tension  $V_0$  fixée au voisinage du seuil de cavitation : notons cette quantité  $S(V_0, T)$ . Pour corriger les mesures brutes de la tension de cavitation, il faut alors mesurer, à une température de référence  $T_0$  ( $T_0 = 100$  mK par exemple, pour laquelle l'atténuation est négligeable), l'amplitude du signal acoustique aux tensions  $V$  voisines de la tension seuil, quantité que nous noterons  $S(V, T_0)$ . Ils trouvent un comportement en loi de puissance ; étant donné  $V_1$  et  $V_2$  deux tensions proches du seuil, on a :

$$\frac{S(V_1, T_0)}{S(V_2, T_0)} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad (2.12)$$

avec  $\gamma$  compris entre 1,2 et 1,6 suivant le réglage optique. On en déduit alors à chaque température  $T$  quelle tension effective  $V_{\text{eff}}(T)$  produirait le même signal acoustique que la tension de cavitation  $V_c(T)$  à cette température si l'atténuation était la même qu'à la température  $T_0$ . Ceci revient à résoudre  $S(V_{\text{eff}}, T_0) =$

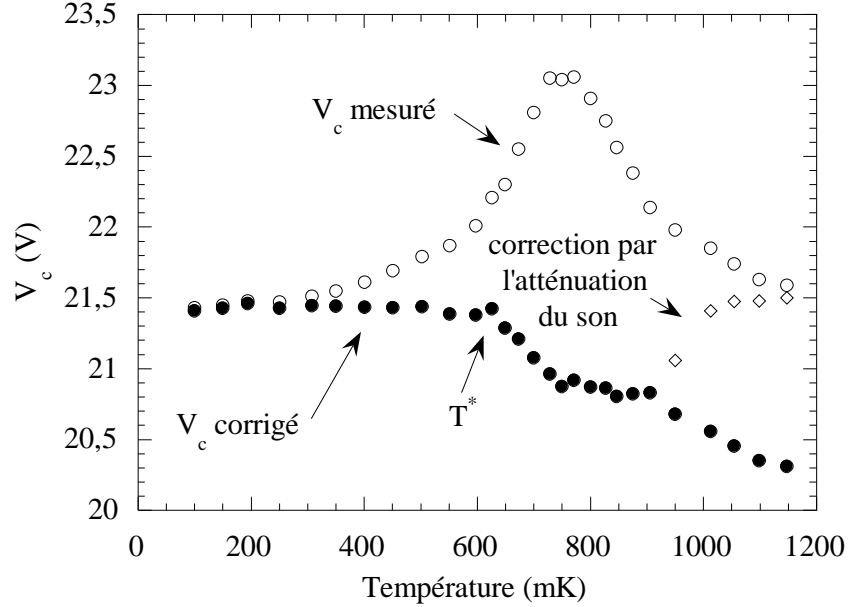


FIG. 2.3 – Tension de cavitation à basse température. Les données brutes ( $\circ$ ) présentent un maximum autour de 0,75 K, qui s’explique par l’atténuation du son. Une fois corrigées ( $\bullet$ ), elles présentent un plateau qui s’étend jusqu’à 0,6 K.

$S(V_c(T), T)$ . En considérant que la variation relative du signal acoustique avec la température est la même pour les tensions proches de  $V_0$ , on a :

$$\frac{S(V_c(T), T)}{S(V_c(T), T_0)} = \frac{S(V_0, T)}{S(V_0, T_0)} \quad (2.13)$$

En utilisant les équations 2.12 et 2.13, on déduit la tension effective :

$$V_{\text{eff}}(T) = \left( \frac{S(V_0, T)}{S(V_0, T_0)} \right)^{\frac{1}{7}} V_c(T) \quad (2.14)$$

Le taux d’atténuation linéaire  $a(T)$  sur une distance égale au rayon de la céramique  $R_{\text{tran}}$  vaut :

$$a(T) = 1 - \exp(-\alpha(T)R_{\text{tran}}) \quad (2.15)$$

où  $\alpha(T)$  est le coefficient d’atténuation dont la valeur dans les conditions de l’expérience ( $P = 1$  bar et  $f = 1$  MHz) a été évaluée par Maris [61] en extrapolant des mesures directes d’atténuation d’ondes planes de fréquences plus élevées [62, 63].

La figure 2.4 compare  $a(T)$  à la valeur déduite des mesures de signal acoustique :  $1 - (V_{\text{eff}}(T)/V_c(T))$ . L’accord est très satisfaisant entre 100 et 900 mK : on peut interpréter ce résultat en considérant qu’en dehors de la zone focale



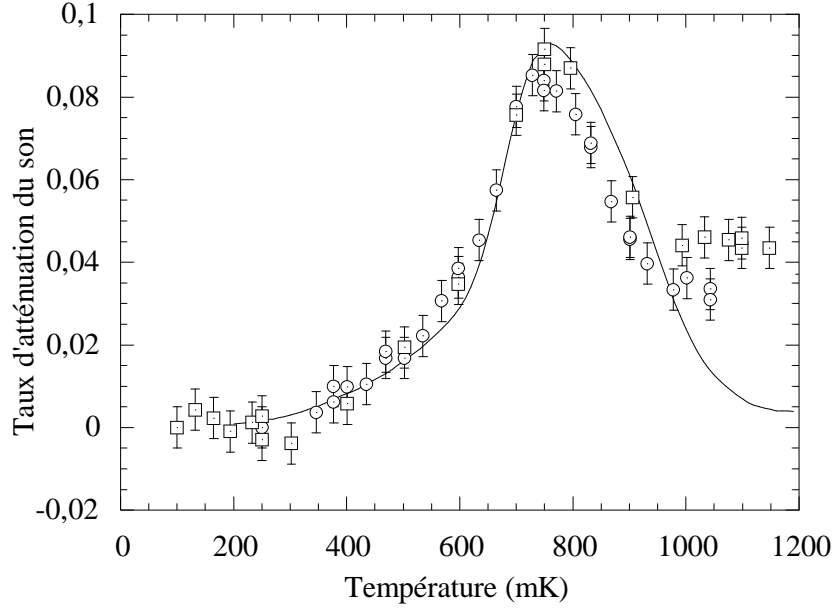


FIG. 2.4 – Taux d’atténuation du son en fonction de la température. Les points représentent les valeurs expérimentales déduites des mesures du signal acoustique et la courbe en trait plein le taux d’atténuation linéaire calculé en extrapolant à 1 bar et 1 MHz des mesures directes d’atténuation à fréquence plus élevées.

de taille comparable à la longueur d’onde et donc sur la plus grande partie du rayon  $R_{\text{tran}}$ , l’amplitude d’oscillation de l’onde acoustique est faible et que les résultats d’acoustique linéaire s’appliquent. En revanche au delà les mesures de signal acoustique donnent une correction constante d’environ 4 % tandis que l’atténuation ultrasonore disparaît vers 1,1 K : aucune explication satisfaisante n’a été trouvée à ce phénomène, qui met peut-être en jeu des effets de diffraction de l’onde acoustique.

Aussi lorsque nous analyserons nos résultats concernant la variation en pression du seuil de cavitation dans l’hélium 4 (*cf.* § 3.3) concentrerons nous notre attention sur les températures inférieures à 900 mK pour lesquelles il semble légitime d’appliquer les formules d’atténuation linéaire.

La correction obtenue pour la tension de cavitation est représentée sur la figure 2.3 (●). On arrive alors à un comportement conforme aux prédictions théoriques, mais avec un plateau qui s’étend jusqu’à 0,6 K au lieu des 0,2 K attendus. On interprète cette différence en remarquant que l’on mesure la température statique  $T_{\text{stat}}$ , et non la température instantanée au point focal. Lambaré *et al.* considèrent l’onde comme adiabatique. L’entropie étant dominée par les phonons à basse température, elle est proportionnelle à  $(T/c)^3$ , et la température lors du passage de l’onde est donc proportionnelle à la vitesse du son  $c$ . Si la pression de cavitation atteint la valeur théoriquement prévue de  $-9,2$  bar, la vitesse du son vaut alors, d’après Maris [29],  $80 \text{ m s}^{-1}$ , soit un tiers de la valeur à 1 bar. L’onde

ultrasonore refroidirait donc le point focal jusqu'à  $T_{\text{stat}}/3$ , ce qui conduirait à une température de transition de  $0,6/3 = 0,2$  K, en accord avec les prédictions théoriques.

On pourrait toutefois songer à d'autres explications. Supposons par exemple que le refroidissement adiabatique introduit plus haut soit plus fort que prévu, et qu'on atteigne une température quasi nulle dès que  $T_{\text{stat}}$  est inférieure à 0,6 K. Cela produirait un plateau en dilatant artificiellement l'échelle des temps, sans qu'il s'agisse de cavitation quantique. Cependant, s'il n'y avait plus de fluctuations, qu'elles soient thermiques ou quantiques, la cavitation deviendrait déterministe, sa probabilité valant 1 ou 0 suivant que l'on atteint ou non la pression spinodale  $P_s$ , et le saut dans la courbe  $\Sigma(V)$  aurait une largeur nulle, contrairement à ce qui est mesuré. On peut penser que le bruit expérimental est susceptible d'élargir une courbe abrupte. Mais il a été étudié : sa largeur n'est que de 0,1 % contre 2 % pour  $\Sigma(V)$ , et il n'est pas corrélé aux événements de cavitation. De plus, l'élargissement produit par le bruit serait symétrique, tandis que le profil de  $\Sigma(V)$  obtenu est asymétrique. Un effet de réchauffement instantané par la dissipation dans la céramique peut être envisagé, mais un calcul et les expériences ultérieures montrent que cet effet est négligeable (*cf.* § 3.3.4). Il est donc probable que la cavitation quantique ait été observée dans l'hélium 4.

## 2.6 Dynamique des bulles

Roche *et al.* ont étudié la dynamique des bulles créées [65]. La bulle créée au point focal acoustique agit comme un obstacle de rayon  $r(t)$  vis à vis du faisceau laser. Ce faisceau est gaussien, avec une taille estimée à  $w = 156 \pm 2 \mu\text{m}$ . Le signal donné par le photomultiplicateur est donc de la forme  $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_0 \exp(-2r(t)^2/w^2)$ , où  $\mathcal{S}_0$  est le signal en l'absence de bulle. Cette méthode permet de résoudre les bulles de rayon supérieur à  $5 \mu\text{m}$ .

L'amplitude de l'impulsion est choisie de façon à ce que la bulle apparaisse lors de la 27<sup>e</sup> oscillation avec une probabilité de 50 %, ce qui est rendu possible en raison du temps de montée en tension non nul de la céramique (*cf.* § 3.2.3). Ce contrôle est crucial pour obtenir des énergies de bulles reproductibles ; elles le sont alors à 10 % près.

Les expériences sont réalisées à des pressions statiques comprises entre 10 et 100 mbar. Le signal obtenu pour deux valeurs de cette pression est représenté sur la figure 2.5 (a). L'oscillation initiale correspond à la fin du signal acoustique, puis après la nucléation, la bulle croît, atteint un rayon maximal  $r_m$  puis décroît. Un écho ultrasonore, correspondant à l'onde réfléchi sur la bulle puis sur la céramique avant d'être à nouveau focalisée, perturbe les bulles ayant une durée de vie  $\tau$  trop longue ; pour s'affranchir de ce problème, seules les pressions supérieures à 12 mbar sont retenues.

On peut expliquer ces observations de la façon suivante. Tout d'abord, la bulle

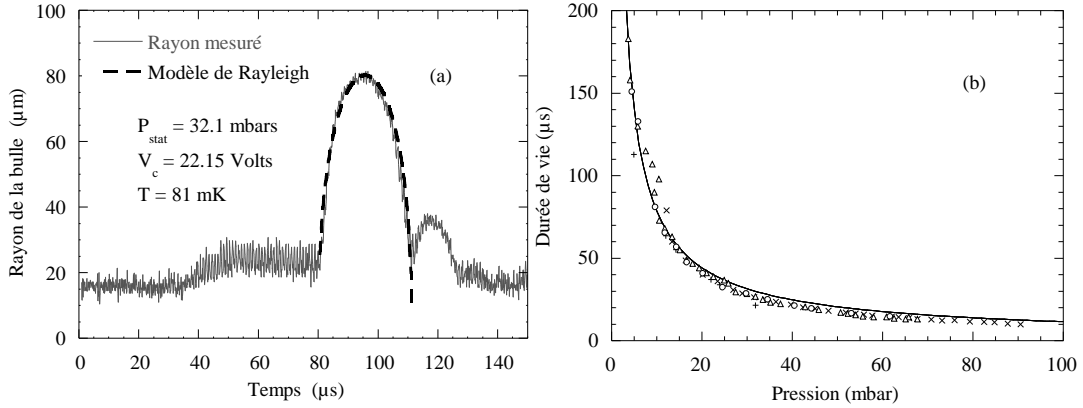


FIG. 2.5 – (a) Signal recueilli par le photomultiplicateur pour deux valeurs de la pression statique. L’effondrement de la première bulle donne naissance à une seconde. (b) Temps de vie des bulles en fonction de la pression statique. Le trait plein correspond à la théorie de Rayleigh.

est créée quand la pression atteint son minimum, voisin de  $-9 \text{ bar}$  (*cf.* § 1.4.2). Elle acquiert alors une énergie cinétique initiale  $\mathcal{E}_0$  en absorbant l’énergie de l’onde ultrasonore durant quelques fractions de période. Ensuite l’impulsion acoustique s’arrête et la bulle croît librement, convertissant son énergie cinétique en énergie potentielle ; si l’on suppose le liquide incompressible, le rayon maximum atteint par la bulle vérifie  $\frac{4}{3}\pi r_m^3 P = \mathcal{E}_0$ . La théorie de Rayleigh donne pour la valeur du temps de vie de la bulle [66] :

$$\tau = 1,83 r_m \sqrt{\frac{\rho}{P}} = 1,14 \sqrt{\rho} \mathcal{E}_0^{1/3} P^{-5/6} \quad (2.16)$$

La figure 2.5 (b) montre que cette loi est bien vérifiée, ce qui indique que la dissipation et la compressibilité du liquide jouent un rôle mineur. L’énergie initiale que l’on en déduit vaut  $\mathcal{E}_0 = 2,5 \pm 0,5 \text{ nJ}$ .

On voit également sur la figure 2.5 (a) qu’une deuxième bulle est formée après l’effondrement de la première, avec une énergie qui représente 5 à 10 % de l’énergie de la première. On ne dispose actuellement d’aucune théorie décrivant ce phénomène pour des bulles dont l’intérieur est à pression nulle comme ici.

## 2.7 Bulles électroniques

Le groupe de Brown University a également étudié l’effet des électrons sur la cavitation dans l’hélium 4 [67]. Un électron peut pénétrer dans l’hélium liquide en franchissant une barrière d’énergie estimée à  $1 \text{ eV}$  ; il existe alors une configuration stable où l’électron forme une cavité sphérique dont l’hélium est quasiment exclu. En première approximation l’énergie du système résulte de la compétition

entre l'énergie de point zéro de l'électron dans cette cavité, l'énergie de surface et l'énergie volumique proportionnelle à la pression appliquée à l'hélium :

$$E = \frac{h^2}{8mR^2} + 4\pi R^2\alpha + \frac{4}{3}\pi R^3P \quad (2.17)$$

où  $R$  est le rayon de la bulle,  $m$  la masse de l'électron et  $\alpha$  la tension de surface. À pression nulle, cette expression possède un minimum absolu pour un rayon  $R_{\min}$  de l'onde de 1,9 nm. À pression négative, cette configuration stable devient métastable : pour  $R > R_{\min}$  l'énergie passe par un maximum à  $R_{\max}$  avant de décroître puis de devenir négative, définissant une barrière d'énergie à franchir pour nucléer une bulle macroscopique. Quand la pression atteint une valeur critique

$$P_c = -\frac{16}{5} \left( \frac{2\pi m}{5h^2} \right)^{1/4} \alpha^{5/4} \quad (2.18)$$

$R_{\min}$  et  $R_{\max}$  se confondent et la barrière d'énergie s'annule : la bulle électronique est alors instable. On peut calculer la pression  $P_c$  et la barrière d'énergie pour  $P > P_c$  dans le cadre du modèle précédent, ou après avoir introduit des effets supplémentaires (interpénétration des fonctions d'onde, polarisabilité, épaisseur non négligeable de l'interface prise en compte à l'aide d'une fonctionnelle de densité, température non nulle et présence de vortex dans le cas de l'hélium superfluide), et calculer la probabilité d'explosion de la bulle électronique d'une manière analogue au problème de cavitation homogène dans l'hélium décrit précédemment.

L'équipe de Brown University a réalisé une étude expérimentale similaire à l'étude de la cavitation à l'aide d'un transducteur piézoélectrique hémisphérique et d'une détection de l'explosion des bulles par diffusion de la lumière ; les électrons étaient produits par une source radioactive  $\beta$  de  $^{204}\text{Tl}$  d'une activité de  $10 \mu\text{Ci}$  placée au sein du liquide en dessous de la face interne de la céramique. On peut faire varier la densité d'électrons en appliquant une tension positive continue sur cette face. La céramique est excitée par des salves électriques sinusoïdales et on mesure la probabilité de cavitation en fonction de l'amplitude de ces salves, ce qui permet de déterminer une tension seuil d'explosion. La mesure de cette tension seuil en fonction de la pression statique appliquée au liquide donne une variation linéaire et permet de déterminer la pression d'explosion  $P_{\min}$ . Cette dépendance est linéaire car  $P_{\min}$  demeure supérieure à  $-2$  bar, et on se trouve donc loin de la limite spinodale. La pression d'explosion  $P_{\min}$  obtenue est représentée sur la figure 2.6 en fonction de la température. L'accord avec le modèle simple de l'équation 2.17 est correct à basse température, et l'accord devient excellent quand on introduit la correction due à la densité du gaz à température non nulle.

Ces résultats sur les bulles électroniques qui introduisent des impuretés calibrées dans le liquide constituent un point de repère intéressant sur la voie de la cavitation homogène.

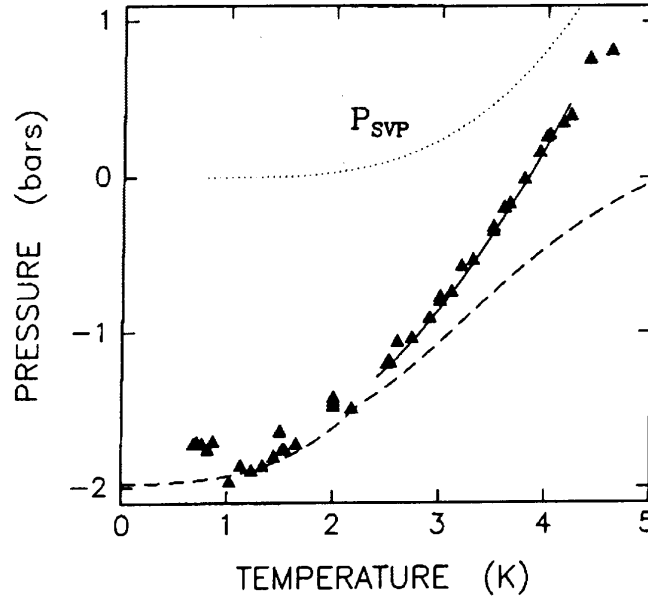


FIG. 2.6 – Pression d’explosion des bulles électroniques en fonction de la température. La courbe en pointillés représente la valeur théorique donnée par le modèle simple de l’équation 2.17, et la courbe en trait plein celle que l’on obtient en tenant compte de la densité du gaz. Cette figure est extraite de la référence [67].

## 2.8 Conclusion

L’étude expérimentale récente de la cavitation dans l’hélium 4 satisfait les théories existantes sur la cavitation homogène et la transition vers un régime de nucléation quantique à basse température, de l’ordre de 200 mK. La limitation principale réside dans l’incertitude concernant la valeur de la pression minimale atteinte dans les expériences. Une mesure directe des quantités au point focal est souhaitable. Dans ce but, une expérience visant à mesurer la densité locale et instantanée est en cours (*cf.* Réf. [68] et Annexe H) : elle consiste à introduire au point focal une plaque de verre qui donne accès à la densité *via* une mesure optique de l’indice de réfraction du liquide ; cela pose toutefois de nouveaux problèmes, en particulier la modification du processus de nucléation en raison de la présence de la paroi et du champ de Van der Waals par elle créé.

Avant de mettre en œuvre cette expérience, il nous a paru intéressant de compléter l’étude de la cavitation dans l’hélium par une étude détaillée en fonction de la pression statique ainsi que par l’étude d’un isotope, l’hélium 3 (*cf.* Chap. 3). Les forces de cohésion sont moindres dans ce dernier que dans l’hélium 4, et la théorie prévoit une pression spinodale trois fois moins négative ; la température de transition vers un régime quantique est également différente, estimée à 120 mK. Contrairement à l’hélium 4, l’hélium 3 n’est pas superfluide à cette température (il ne le devient qu’au dessous de 2,7 mK), et on peut se demander si cette pro-

priété influe sur l'apparition d'un régime de nucléation quantique. Son caractère fermionique pose également d'intéressantes questions sur le comportement d'un liquide de Fermi au voisinage de la limite spinodale (*cf.* Chap 4). Ce sont les réponses à ces différentes interrogations qui constituent l'enjeu de la thèse.



# Chapitre 3

## Résultats expérimentaux

Dans ce chapitre sont présentées les expériences que nous avons effectuées sur l'hélium 3 et l'hélium 4 liquides. Après avoir décrit le dispositif expérimental et les différentes techniques de mesure, nous détaillons le cas de la cavitation dans l'hélium 3 loin de toute paroi [69, 70]. Nous exposons également l'étude détaillée que nous avons réalisée sur chacun des deux liquides sous pression [71]. Le cas échéant, nous discutons les artefacts éventuels et faisons le lien avec la théorie.

### 3.1 Dispositif expérimental

#### 3.1.1 Principe de l'expérience

Dans nos expériences de cavitation, l'hélium liquide est fortement détendu et amené dans la région métastable où les bulles sont susceptibles de nucléer. La détente est provoquée par une onde ultrasonore focalisée. Cette onde est générée à l'aide d'un transducteur piézo-électrique. Il s'agit d'une couronne hémisphérique en céramique de zircono-titanate de plomb (PZT) fabriquée par Quartz & Silice, modèle P7-62. Elle a un rayon interne  $R_{\text{tran}} = 8$  mm et une épaisseur de 2 mm. Sa fréquence de résonance en épaisseur est d'environ 1 MHz. La céramique est excitée à cette fréquence par des salves électriques composées de quelques oscillations sinusoïdales et d'enveloppe carrée. Grâce à cette géométrie, l'onde sonore émise est focalisée au centre de la demi-sphère, dans une région dont la taille caractéristique est de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$ , soit environ  $200 \mu\text{m}$ . Le faisceau d'un laser hélium-néon, de longueur d'onde 632,8 nm, est focalisé sur la région focale acoustique à l'aide d'une lentille convergente de focale 150 mm. Pour rendre cette focalisation possible et permettre au faisceau d'émerger, deux fentes verticales ont été pratiquées en vis à vis sur le bord de la céramique.

Les bulles sont détectées par un photomultiplicateur Hamamatsu modèle R928, équipé d'un filtre interférentiel centré sur la longueur d'onde du laser et d'un diaphragme en papier noir avec une ouverture de 2 mm de diamètre. Deux



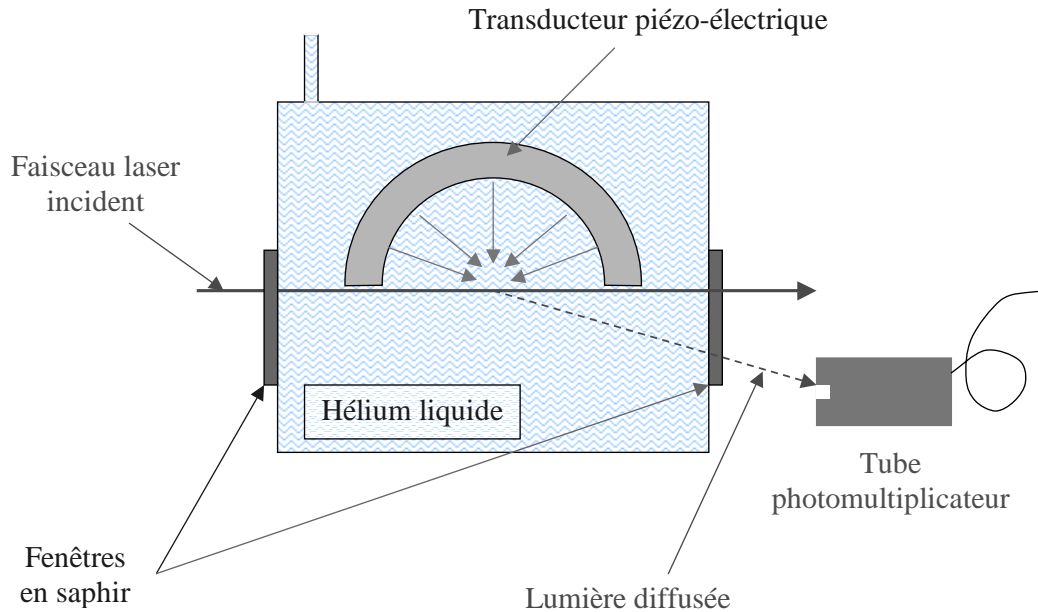


FIG. 3.1 – Schéma du dispositif expérimental

modes de détection sont utilisés :

- par transmission : la bulle masque une partie du faisceau et le déficit lumineux dans le faisceau transmis est détecté ;
- par diffusion : le photomultiplicateur détecte la lumière diffusée par la bulle aux petits angles.

Le dispositif est représenté schématiquement sur la figure 3.1.

### 3.1.2 Cryogénie

Le cryostat utilisé est un cryostat à dilution à garde d'azote. Il contient un réservoir d'hélium liquide de 28 L alimentant un « pot 1 K » par l'intermédiaire d'un capillaire contrôlé par une microvanne. Une unité à dilution pompée par une pompe « roots » en série avec une pompe primaire permet de refroidir la cellule expérimentale ancrée par des barreaux de cuivre à la chambre de mélange. La puissance de refroidissement est d'environ  $50 \mu\text{W}$  à 100 mK et  $12,5 \mu\text{W}$  à 50 mK, cette puissance étant quadratique en température.

La cellule expérimentale utilisée pour l'hélium 3 est réalisée en acier inoxydable ; la figure 3.2 en montre une photographie. Son volume est de  $4,5 \text{ cm}^3$ . Elle possède deux fenêtres de saphir en vis à vis. Un épaulement intérieur permet de supporter la céramique dont la face interne est dirigée vers le bas. Les seules connections électriques présentes à l'intérieur de la cellule sont les deux fils d'alimentation de la céramique, en cuivre 24/100 mm. L'isolation thermique entre les connections électriques et les points plus chauds du cryostat est réalisée grâce à des câbles coaxiaux supraconducteurs.

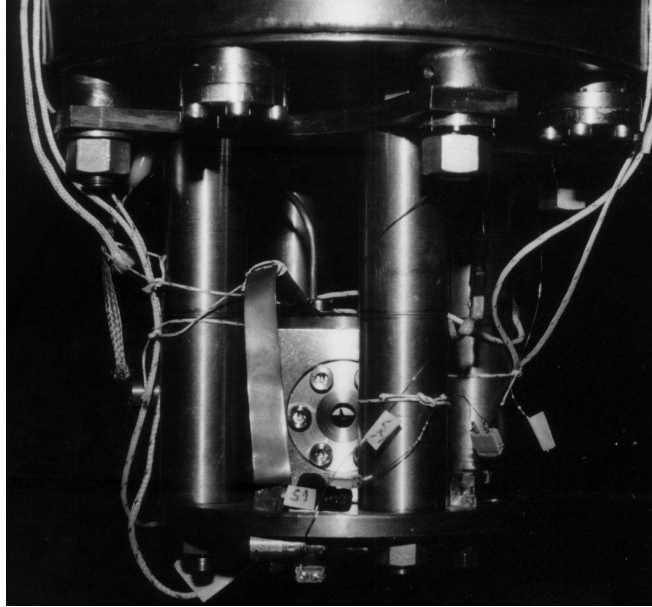


FIG. 3.2 – Photographie de la cellule expérimentale attachée à la chambre de mélange. On distingue à travers la fenêtre l'une des fentes de la céramique qui permet l'observation des bulles (photographie : X. Chavanne).

Le remplissage de la cellule s'effectue par un capillaire en cupro-nickel (diamètre intérieur 0,4 mm, diamètre extérieur 0,7 mm au voisinage de la cellule) au travers d'un filtre de cuivre fritté (diamètre des grains d'environ  $20\ \mu\text{m}$ ). Ce capillaire est thermalisé avant de déboucher à température ambiante. La pression statique dans la cellule est reliée à la position de l'interface liquide-gaz dans le capillaire. Un volume de contrôle à température ambiante est connecté à la cellule en permanence : il permet de mesurer cette pression et d'en diminuer les fluctuations liées aux changements de températures le long du capillaire. Les étanchéités sont assurées par des joints en indium et de la résine époxy Stycast<sup>®</sup> 2850 FT pour les passages de connections électriques.

La cellule est entourée de quatre enceintes métalliques ancrées aux différents étages de température du cryostat. Un vide d'environ  $10^{-6}$  mbar règne entre ces différents boucliers qui protègent la cellule de la source résiduelle de réchauffement par rayonnement thermique. De manière plus précise, deux enceintes étanches sont délimitées : le vide externe, entre 300 et 4 K, qui isole le réservoir d'azote de l'extérieur et le réservoir d'hélium du réservoir d'azote, et le vide interne, entre 4 K et les étages de température inférieure, qui isole la cellule expérimentale du « pot 1 K » et de l'évaporateur. L'accès optique à la région expérimentale est rendu possible par deux jeux de quatre fenêtres. Ce sont des filtres athermiques filtrant l'infrarouge.

L'azote liquide est transféré quotidiennement et l'hélium liquide environ deux fois par semaine, à raison de 25 L environ par transfert, excepté lors du refroidis-

sement initial à 4 K pour lequel 75 L sont consommés, après pré-refroidissement à l'azote. Pour refroidir la cellule en même temps que le vase d'hélium duquel elle est normalement isolée, on introduit quelques torrs d'hélium dans le vide interne. Lors du premier transfert d'hélium, on constate une brusque chute de la résistance des thermomètres situés sur la cellule. Cette chute correspond à la transition supraconductrice des câbles de connexion et indique que la cellule a été suffisamment refroidie. Le gaz d'échange du vide interne est alors remis en pompage.

Les contraintes thermiques associées aux transferts de fluides cryogéniques perturbent l'expérience, notamment à cause des déplacements de la cellule dus aux contractions thermiques, qui rendent nécessaire un nouveau réglage du système optique de détection des bulles. Un délai d'attente d'une heure après les transferts d'azote et de plusieurs heures après ceux d'hélium est requis pour retrouver une détection correcte. Les transferts sont donc de préférence réalisés en soirée, et les programmes régissant l'expérience comportent une boucle d'attente de durée réglable.

### 3.1.3 Techniques de mesure

#### Température

Trois résistances de carbone sont collées par du Stycast<sup>®</sup> 2850 FT dans des pièces de thermalisation en cuivre doré vissées sur la plaque de la cellule. Ces thermomètres sont ceux qui furent utilisés dans notre laboratoire pour l'étude de la cavitation dans l'hélium 4 (*cf.* § 2.5). Ils ont été calibrés entre 20 et 600 mK pour deux d'entre eux et 0,4 et 1,3 K pour le troisième, principalement grâce à la courbe de fusion de l'hélium 3. Ces résistances sont mesurées en deux fils par un pont alternatif automatique RV-Elektroniikka Oy modèle AVS-46, dont la sortie analogique de tension est lue par un multimètre Keithley modèle 2000 qui sert simplement de relais pour l'interfaçage IEEE. Afin d'obtenir des mesures correctes à basse température, un soin tout particulier doit être apporté à l'élimination des boucles de masse. Dans ce but, nous avons été conduits à connecter les masses au cryostat dans une configuration « en étoile » et à utiliser un transformateur d'isolement pour l'alimentation du laser ; ces choix donnent une lecture stable et fiable aux températures les plus basses.

Un boîtier électronique réalisé au laboratoire assure la régulation de température à l'aide de l'un des thermomètres : la valeur de sa résistance est comparée à un point de consigne réglable manuellement. La comparaison est faite par un pont de mesure alternatif et l'écart au point de consigne commande un courant de chauffage par l'intermédiaire d'une rétroaction différentielle-intégrale-proportionnelle (DIP). Ce courant alimente un fil de Constantan<sup>®</sup> collé au Stycast<sup>®</sup> 2850 FT sur une pièce de thermalisation en cuivre doré vissée sur la plaque inférieure de la cellule, dont la résistance à basse température vaut  $65 \Omega$ . Un bon réglage des

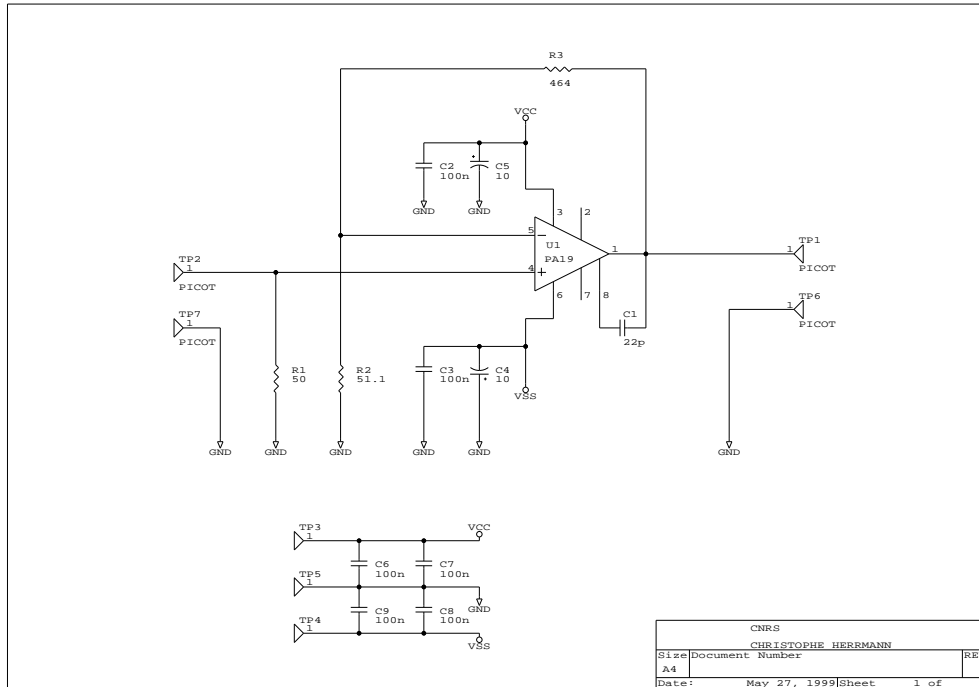


FIG. 3.3 – Schéma d'un étage de l'amplificateur réalisé par C. Hermann. Un étage identique précédé d'un inverseur permet d'utiliser l'ensemble en « push-pull ».

paramètres de la DIP permet d'obtenir une température stable à quelques pour mille près.

## Pression

Pour l'hélium 3, la pression est mesurée à l'aide d'un transmetteur de pression absolue à cellule capacitive en céramique Keller modèle PAA-41. Son étendue de mesure pleine échelle EM est de 400 mbar et sa classe de 0,2 %, c'est à dire que la précision absolue est de 0,2 % EM, soit de l'ordre du millibar. Il est inséré dans la ligne d'hélium 3 à température ambiante, qui représente un volume de contrôle d'environ 1,4 L, en contact avec la cellule en permanence.

Pour l'hélium 4, la pression est mesurée par trois manomètres Blondelle à lame d'acier : de 0 à 200 torr (précision absolue d'environ 1 torr), de 0 à 500 mbar (précision absolue d'environ 2 mbar) et de 0 à 7 bar (précision absolue d'environ 25 mbar). Les deux premiers sont des manomètres absolus, on règle le zéro du troisième après l'avoir mis sous vide.

## Tension et fréquence

Afin de mesurer précisément la tension d'excitation de la céramique, nous avons modifié les câbles d'alimentation situés entre l'extérieur du cryostat et le fond du bain d'hélium à 4 K et ajouté une thermalisation à 77 K. Nous avons

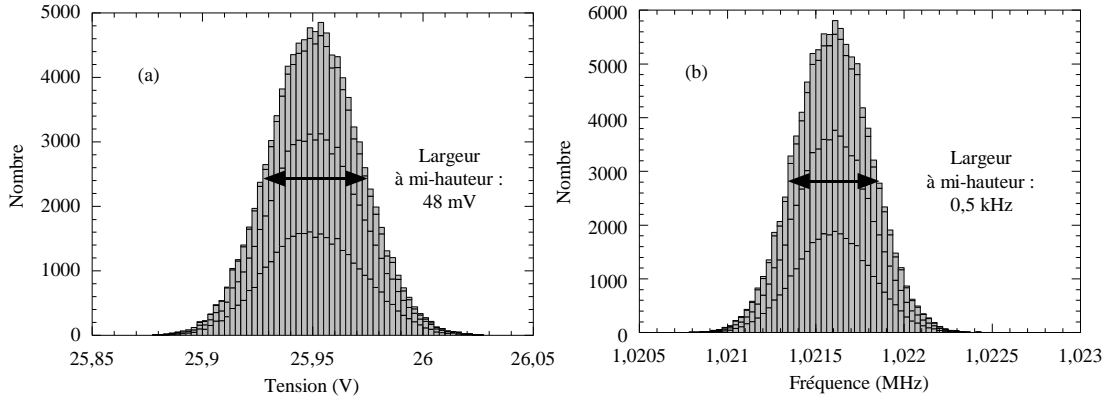


FIG. 3.4 – Résultats de l’ajustement de l’excitation électrique pour 100000 salves répétées dans les mêmes conditions expérimentales pour l’amplitude (a) et pour la fréquence (b)

remplacé les anciens câbles coaxiaux à âme et gaine en acier inoxydable (Lake Shore modèle SS) par des câbles coaxiaux fabriqués par nos soins et présentant les caractéristiques suivantes :

- âme centrale en cuivre 24/100 mm ;
- gaine isolante en tube de Teflon<sup>®</sup>, diamètre intérieur 0,3 mm, diamètre extérieur 0,76 mm ;
- blindage en tube d’acier inoxydable, diamètre intérieur 1,2 mm, diamètre extérieur 1,5 mm.

Chaque câble a une longueur de 1,5 m ; il est à noter qu’un seul câble sera finalement utilisé car, suite à des problèmes de courts-circuits intermittents de l’une des faces de la céramique dans la cellule, nous avons décidé de connecter cette face à la masse au niveau de la cellule. Des mesures à 77 K donnent pour chacun des anciens câbles une résistance de  $24 \Omega$  et une capacité de 290 pF (qui représente une impédance de court-circuit de  $550 \Omega$  à 1 MHz). Pour chacun des nouveaux câbles, la résistance vaut  $0,06 \Omega$  et la capacité 110 pF (soit une impédance de court-circuit de  $1430 \Omega$  à 1 MHz). L’impédance à résonance de la céramique est supérieure à  $12 \Omega$  (*cf.* § 3.2.1 et § 3.3.1), et par conséquent l’effet des nouveaux câbles est négligeable. La conductivité thermique du cuivre intégrée entre 4 et 300 K vaut  $1,6 \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  [72], ce qui donne pour chaque câble une fuite thermique de l’ordre de  $3 \text{ mW}$ , ou encore une évaporation d’hélium de  $4 \text{ mL h}^{-1}$ . Avec une incidence négligeable sur la consommation d’hélium, nous pouvons donc maintenant mesurer directement depuis le haut du cryostat la tension aux bornes de la céramique, et en même temps nous affranchir des précédentes dérives de cette tension, liées au niveau de remplissage des réservoirs de fluides cryogéniques.

Ces précautions étant prises, nous obtenons pour l’alimentation de la céramique une stabilité très satisfaisante. Le générateur utilisé est un générateur de

fonctions Hewlett Packard modèle 33120 A associé à un amplificateur à large bande fabriqué au laboratoire avec deux amplificateurs intégrés de puissance haute tension Apex modèle PA19 (voir Fig. 3.3). L'ensemble présente une impédance de sortie de  $1\ \Omega$  et permet de délivrer une tension maximale de 35 V sur chacune des deux voies sans distorsion. Nous avons préféré connecter volontairement à la masse l'une des faces de la céramique qui présentait un contact intermittent à la masse ; aussi n'utilisons nous pas la fonction « push-pull » disponible en montage flottant. L'amplificateur est inséré dans une boîte isotherme et sa température régulée grâce à une circulation d'eau provenant d'un bain de 40 L (thermostat à eau Tamson modèle TCV 45).

La salve électrique est acquise en tête du cryostat par un oscilloscope digital Tektronix modèle TDS 420A, de bande passante 200 MHz et de fréquence d'échantillonnage  $10^8$  échantillons  $s^{-1}$ . La courbe est transmise à l'ordinateur par l'intermédiaire d'une interface IEEE, qui permet également de commander le générateur de salves et de lire le multimètre pour la mesure de température. La première période étant légèrement distordue, elle n'est pas prise en compte, et le reste de la courbe est ajusté avec une sinusoïde selon la méthode Levenberg Marquardt [73]. Les quatre paramètres ajustables sont les suivants : l'amplitude, la fréquence, la phase et le décalage. La figure 3.4 montre l'amplitude (a) et la fréquence (b) obtenues pour 100000 salves de trois cycles répétées dans les mêmes conditions expérimentales. La stabilité en fréquence est de  $5\ 10^{-4}$  et la stabilité en amplitude de  $1,8\ 10^{-3}$ , soit 36 mV sur 20 V. Pour les mesures, lors des acquisitions répétées à la même tension du générateur, l'amplitude retenue est la moyenne sur l'ensemble de ces acquisitions, au moins au nombre de 100, ce qui donne pour cette moyenne une précision de  $1,8\ 10^{-3}/\sqrt{100} = 1,8\ 10^{-4}$ , soit moins de 4 mV sur 20 V.

Pour les salves les plus courtes, le choix de la fréquence de la porteuse est limité par la fréquence d'échantillonnage du générateur,  $4\ 10^7$  échantillons  $s^{-1}$ . Les points définissant le signal électrique sont espacés d'un temps  $\Delta t = 25\ ns$ , et les salves étant définies par un nombre entier de périodes avec le premier et le dernier point à une tension nulle, on doit avoir pour  $n$  cycles à la fréquence  $f$  :  $n/(f\ \Delta t) \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 3$  et  $f \simeq 1\ MHz$ , le nombre de points définissant la salve est donc de l'ordre de 120 et la fréquence de la porteuse présente des sauts d'environ  $f/120 \simeq 8\ kHz$ . La taille des sauts diminue avec  $n$ . L'ajustement utilisé permet d'observer ces sauts, car la fréquence d'échantillonnage de l'oscilloscope vaut  $10^8$  échantillons  $s^{-1}$ .

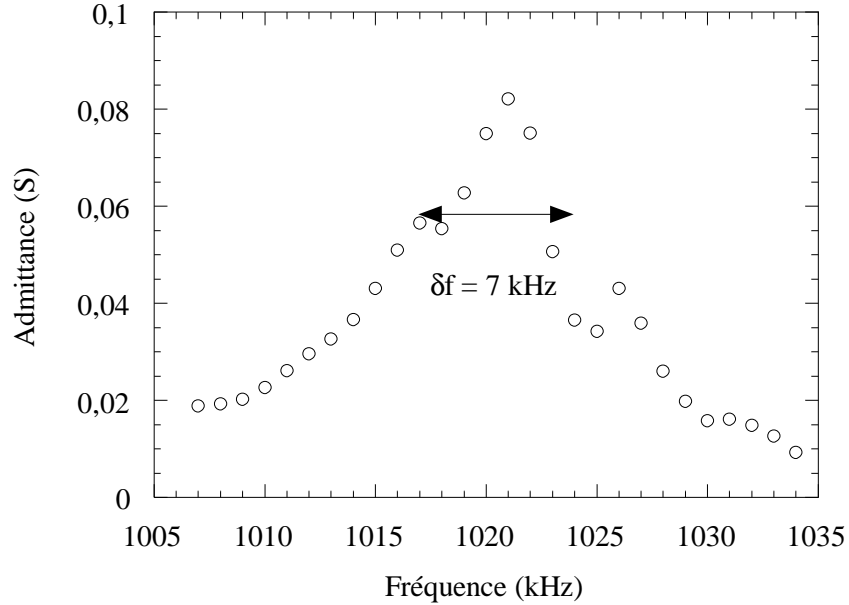


FIG. 3.5 – Admittance électrique de la céramique dans l’hélium 3 liquide à 45 mK en fonction de la fréquence.

## 3.2 Cavitation dans l’hélium 3

### 3.2.1 Caractéristiques électriques de la céramique

L’impédance électrique de la céramique est mesurée en fonction de la fréquence à faible amplitude en utilisant un montage générateur de courant et en mesurant la tension aux bornes de la céramique. Elle présente un minimum  $R = 12,17 \Omega$  à la fréquence de résonance  $f_0 = 1021 \text{ kHz}$ . Les transducteurs piézo-électriques sont souvent modélisés par un circuit équivalent comportant un condensateur en parallèle avec un circuit  $RLC$  série. On peut essayer d’ajuster les mesures par l’impédance correspondante, en tenant compte de la capacité totale mesurée à basse fréquence et à basse température,  $1,047 \text{ nF}$  ; il n’y a alors qu’un paramètre ajustable,  $L$ , qui conduit à un facteur de qualité  $Q = 2\pi f_0 L/R \simeq 200$ . Cet ajustement ne donne de bons résultats que sur un étroit intervalle de fréquence autour de  $f_0$  : aux fréquences de mesures les plus élevées, l’impédance mesurée décroît tandis que l’impédance calculée continue de croître. Ceci indique que le mode de vibration de la céramique n’est pas un mode pur. Nous préférons tracer l’admittance  $Y$  en fonction de la fréquence (voir Fig. 3.5) afin de déterminer l’écart  $\delta f$  entre les fréquences pour lesquelles  $Y = Y_{\max}/\sqrt{2}$ . On trouve  $\delta f$  de l’ordre de  $7 \text{ kHz}$ , soit  $Q = \delta f/f \simeq 146$ . Nous verrons au paragraphe 3.2.3 une meilleure manière d’estimer le facteur de qualité.

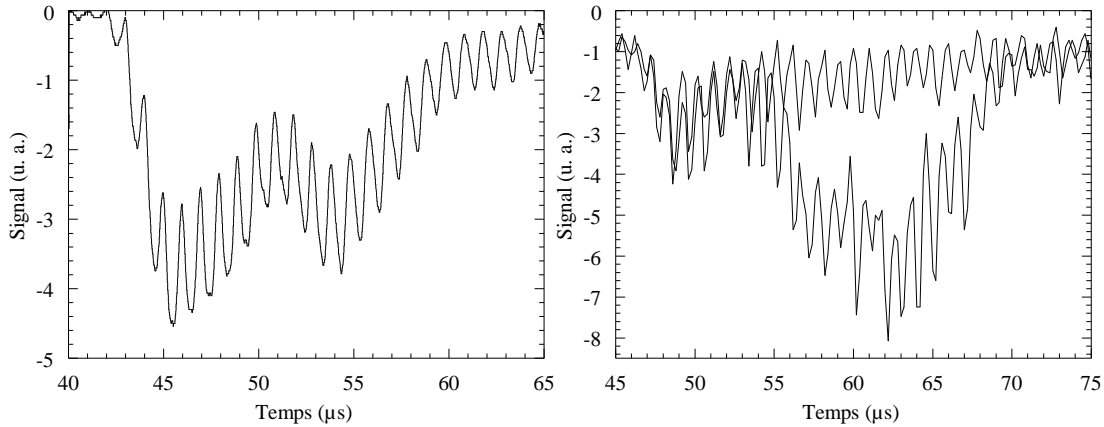


FIG. 3.6 – (a) Signal de diffusion de la lumière à faible amplitude d’excitation de la céramique : la modulation à 1 MHz correspond au passage de l’onde acoustique. (b) Signal de diffusion de la lumière obtenu pour deux salves différentes dans les mêmes conditions expérimentales : l’une des courbes correspond au signal acoustique seul, l’autre indique la présence d’une bulle qui diffuse davantage la lumière.

### 3.2.2 Signal détecté

Nous décrivons dans ce paragraphe les signaux de transmission ou de diffusion de la lumière observés grâce au photomultiplicateur.

#### Signal acoustique

À faible amplitude d’excitation de la céramique, on n’observe pas de cavitation mais un signal modulé à la fréquence de la salve électrique (voir figure 3.6 (a)). Quand le faisceau laser passe par le centre de la céramique, cette modulation apparaît une quarantaine de microsecondes après le début de l’impulsion, ce qui correspond au temps de vol de l’onde acoustique depuis la surface de la céramique (à pression de vapeur saturante, le rayon du transducteur est franchi en  $44 \mu\text{s}$ ), et elle croît pendant une durée égale à celle de la salve avant de disparaître progressivement. Cette modulation est due aux gradients d’indices générés par les variations de densité au voisinage du point focal acoustique. L’enveloppe du signal acoustique présente une bosse dans sa partie décroissante. Cette caractéristique dépend du réglage optique et est distincte des signaux de bulles présentés plus loin ; elle indique vraisemblablement que le mode de vibration de la céramique n’est pas une mode pur.

On peut utiliser ce signal acoustique pour dresser une cartographie sommaire du champ acoustique. Pour cela, on réalise un réglage optique détectant la lumière diffusée, puis les éléments d’éclairage et de détection sont translatés d’une même quantité dans la même direction, et on relève la tension minimale du signal acoustique moyenné sur quelques répétitions des salves. Ce minimum absolu



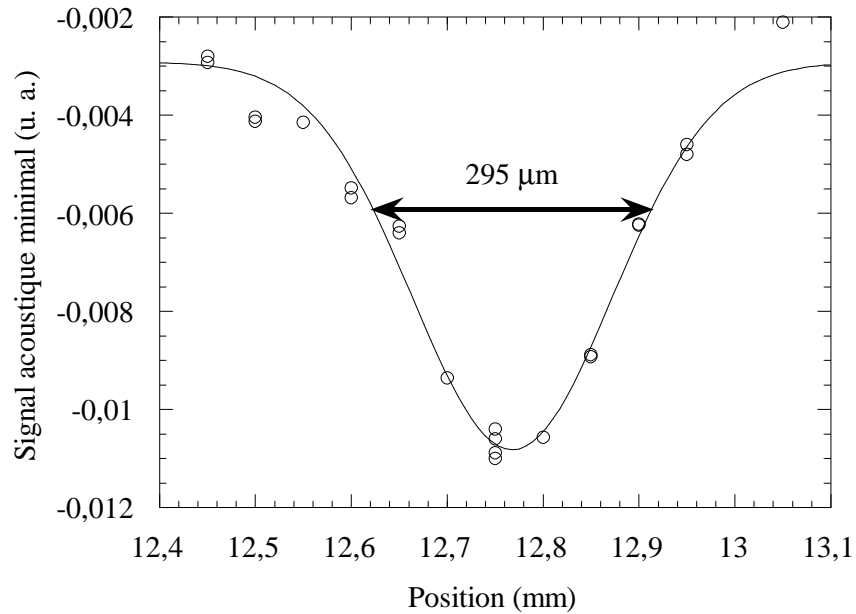


FIG. 3.7 – Carte verticale du signal acoustique. La courbe est un ajustement gaussien.

correspond au quatrième minimum relatif : nous en donnerons la raison au paragraphe 3.2.3. La figure 3.7 montre la carte verticale. La largeur à mi-hauteur de la tâche focale acoustique vaut environ  $\lambda/2 \simeq 89 \mu\text{m}$ . Elle est inférieure au diamètre de la taille du faisceau laser (environ  $300 \mu\text{m}$ , la lentille utilisée pour cette mesure ayant une focale de  $300 \text{ mm}$ ). En première approximation, c'est donc ce dernier qui détermine la largeur de la courbe mesurée : on trouve en effet qu'elle est proche d'une gaussienne de largeur  $295 \mu\text{m}$ .

### Détection des bulles

Lorsque l'on augmente la tension d'excitation de la céramique, le signal acoustique augmente, et à partir d'une certaine tension des pics aléatoires de grande amplitude apparaissent : il s'agit des bulles. La figure 3.6 (b) représente deux enregistrements du signal de diffusion de la lumière détecté par le photomultiplicateur ; un signal de transmission sera présenté dans le cas de l'hélium 4 (*cf.* § 3.3.2). Ils sont effectués dans les mêmes conditions expérimentales. L'un présente la modulation due au signal acoustique, l'autre un événement de cavitation. Aucun paramètre n'ayant été modifié entre les deux enregistrements, ceci met en évidence le caractère stochastique de la cavitation, ce qui nous amène à étudier la statistique de ce phénomène.

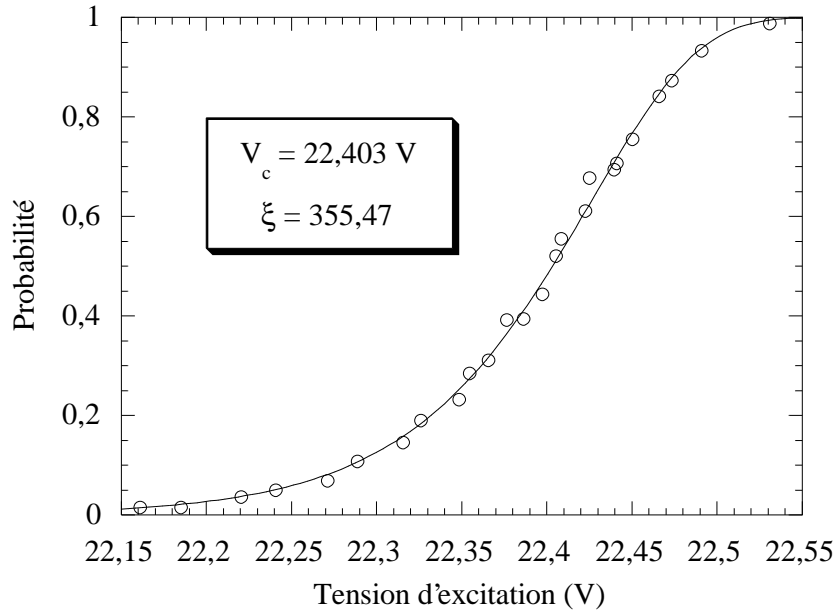


FIG. 3.8 – Probabilité de cavitation en fonction de la tension appliquée à la céramique ( $T_{\text{stat}} = 566 \text{ mK}$ ,  $P_{\text{stat}} = 4 \text{ mbar}$ ). Chaque point correspond à 1600 acquisitions dans les mêmes conditions. La courbe est un ajustement avec la formule 2.9.

### 3.2.3 Statistique de cavitation

#### Courbe en S

Les salves acoustiques sont répétées en gardant les différentes conditions expérimentales fixées ; nous nommerons « échantillon » chacune de ces répétitions. Le principe d'acquisition des courbes de probabilité en fonction de la tension d'excitation de la céramique est le même que dans les expériences précédentes (*cf.* § 2.4) : l'expérience est répétée en gardant les différents paramètres fixés et les événements de cavitation sont dénombrés. La différence réside dans la plus grande stabilité en tension et en fréquence, la meilleure mesure de ces paramètres et le pilotage informatique automatisé de l'expérience, facteurs qui permettent des acquisitions plus longues et plus précises. Un exemple de mesure est présenté sur la figure 3.8 ; dans cette série, chaque probabilité est mesurée sur 1600 échantillons. L'ajustement par la double exponentielle (formule 2.9) est extrêmement satisfaisant, et permet de déterminer la tension seuil (ici  $V_c = 22,403 \text{ V}$ ) et la raideur de la courbe (ici  $\xi = 355,47$ ).

#### Probabilité et bruit statistique

Dans ce paragraphe nous examinons la précision que l'on peut espérer obtenir sur les paramètres de l'ajustement en double exponentielle, afin de définir le protocole de mesure le mieux adapté.

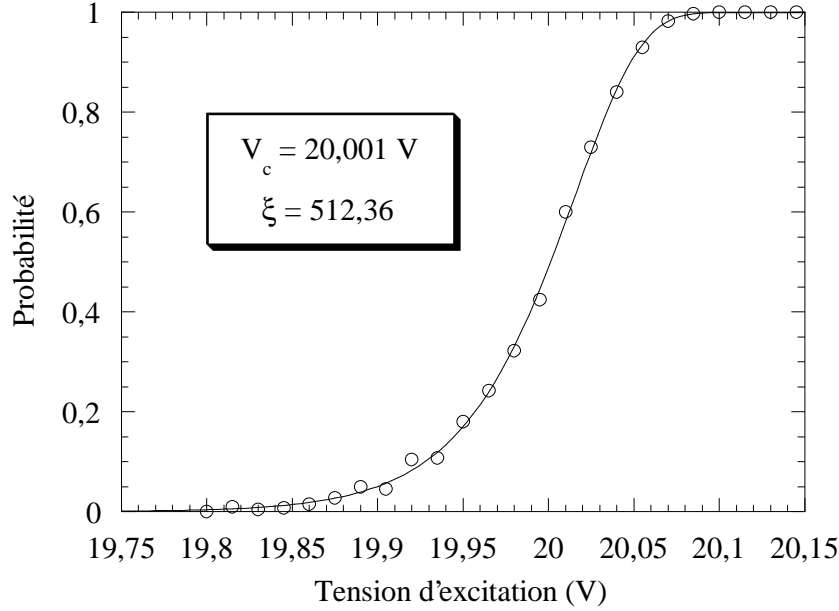


FIG. 3.9 – Simulation de données expérimentales statistiquement bruitées. Cette série utilise 24 moyennes faites sur 400 échantillons réparties régulièrement en tension. La courbe est un ajustement avec la formule 2.9.

Les salves acoustiques sont répétées  $N$  fois en gardant les différentes conditions expérimentales (température, pression, tension, fréquences) fixées. Le nombre  $n$  de salves conduisant à la détection optique d'un signal de cavitation permet de mesurer la probabilité de cavitation dans ces conditions,  $\Sigma = n/N$ . Dans le cas idéal où les conditions sont rigoureusement identiques d'une salve à l'autre, il demeure une source d'incertitude : le bruit statistique. Soit un événement de probabilité  $P_+$  et  $P_- = 1 - P_+$  la probabilité de l'événement contraire. La probabilité  $P(N, n)$  pour que, parmi  $N$  expériences,  $n$  d'entre elles réalisent le premier événement et que les  $N - n$  autres expériences ne le réalisent pas est donnée par la loi binômiale [74, p. 62] :

$$P(N, n) = \frac{N!}{n!(N - n)!} P_+^n P_-^{N-n} \quad (3.1)$$

La variable aléatoire  $n$  a pour valeur moyenne  $\bar{n} = Np$  et pour écart quadratique moyen  $\Delta n = \sqrt{NP_+P_-}$ .

Afin d'évaluer l'incertitude sur la mesure de la tension seuil et de la raideur de la courbe en S, nous simulons une suite de courbes expérimentales. Pour cela, nous fixons les valeurs de la tension seuil et de la raideur dans l'équation 2.9 de la courbe en S à des valeurs caractéristiques de nos expériences, soit respectivement  $V_c = 20 \text{ V}$  et  $\xi = 500$ . Nous choisissons ensuite  $q$  valeurs de tension pré-définies et réparties autour de  $V_c$  et bruitons les valeurs correspondantes de  $\Sigma$  données par l'équation 2.9 suivant la distribution binômiale de l'équation 3.1 en utilisant

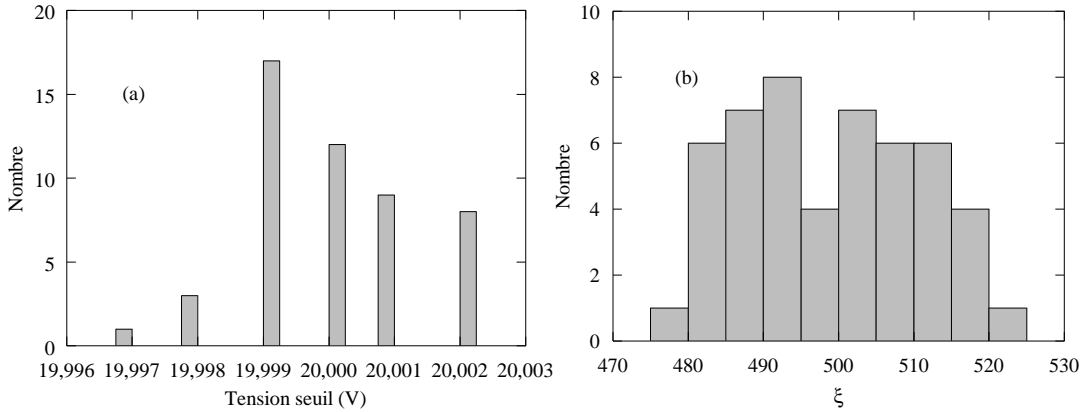


FIG. 3.10 – Dispersion des paramètres  $V_c$  (a) et  $\xi$  (b) sur 50 simulations analogues à celle présentée sur la figure 3.9. Les valeurs attendues sont  $V_c = 20$  V et  $\xi = 500$ .

Nombre de points	Nombre d'échantillons	Écart type	
		$V_{cav}$ (mV)	$\xi$
3	100	3,4	68,2
12	400	1,5	20,5
24	400	1,3	12,1
12	800	1,2	12,8
27	400	0,7	14,7

TAB. 3.1 – Résultat des simulations de bruit statistique. Toutes les séries correspondent à des tensions réparties avec un écart constant, excepté la dernière où l'écart est plus faible au voisinage de la tension seuil.

la méthode du rejet avec fonction de comparaison lorentzienne [73]. Les courbes bruitées obtenues sont alors soumises à l'ajustement selon l'équation de la courbe en S, et donnent une suite de valeurs de la tension seuil et de la raideur qui nous permet d'évaluer la dispersion de ces quantités.

Un exemple de données artificiellement bruitées est donné sur la figure 3.9. La dispersion des valeurs de  $V_c$  et de  $\xi$  est représentée sur la figure 3.10 pour des moyennes sur  $N = 400$  échantillons répartis tous les 15 mV. En faisant varier ces deux paramètres, on peut évaluer l'efficacité de différents protocoles. Les résultats sont résumés dans la table 3.1.

Pour la raideur, la recherche d'un compromis entre précision et durée de mesure nous amène à choisir des moyennes sur 400 échantillons avec une douzaine de tensions réparties régulièrement : l'erreur absolue sur  $\xi$  est alors de l'ordre de 20,5. En revanche, trois moyennes sur 100 salves suffisent à déterminer la tension seuil avec une précision statistique comparable à la précision sur la valeur moyenne des tensions mesurées (*cf.* § 3.1.3). On peut retrouver ce résultat par un argument simple, illustré sur la figure 3.11 : pour des probabilités  $p_+$  comprises

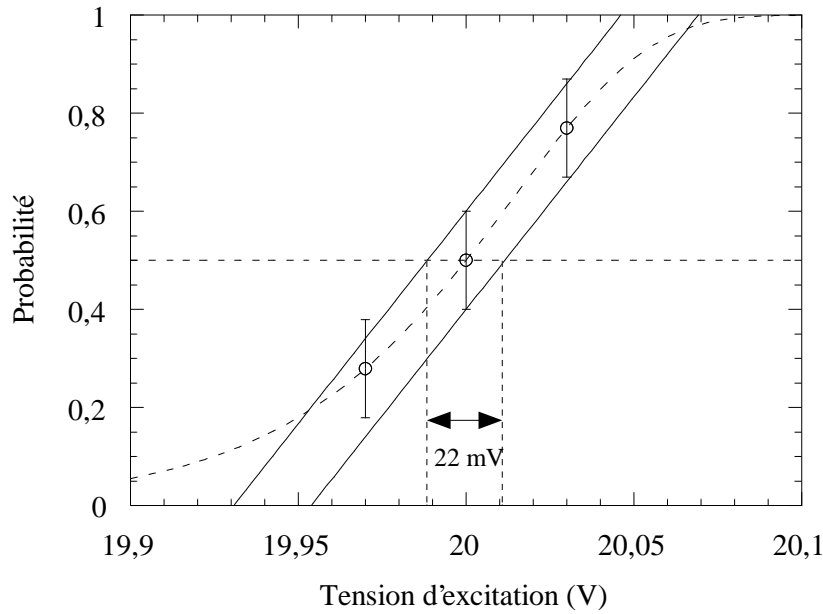


FIG. 3.11 – Illustration de la précision statistique obtenue dans l'évaluation de la tension seuil avec une courbe en S à trois points.

entre 0,2 et 0,8, l'erreur sur la probabilité est de l'ordre de  $1/\sqrt{100} = 0,1$ . Dans cette zone de probabilités, la courbe en S peut être assimilée à sa tangente au point seuil, de pente  $d\Sigma/dV = 500 \ln 2 / (2 \times 20) \simeq 8,9 V^{-1}$ . On peut évaluer la tension seuil en traçant une droite passant au plus près de trois points voisins des probabilités 0,25, 0,5 et 0,75 et en prenant la tension pour laquelle la probabilité sur cette droite vaut 0,5. L'incertitude totale en tension correspondant aux 10% d'erreur statistique est donc  $\delta V \simeq 0,1/8,9 = 11,2 \text{ mV}$ , soit une incertitude relative de 0,06%.

### Influence de la fréquence d'excitation et de la durée des salves sur la tension seuil

Deux paramètres de l'excitation électrique sont susceptibles d'affecter la vibration du transducteur et par conséquent la valeur de la tension seuil : la fréquence de la porteuse et la durée de la salve. La figure 3.12 met en évidence l'influence de la fréquence de la porteuse. Nous portons les résultats en fonction de la fréquence donnée par l'ajustement. Il existe une fréquence, égale à 1021,6 kHz pour les salves de six cycles, à laquelle le seuil de cavitation est minimal : il s'agit de la résonance mécanique de la céramique, qui correspond à l'anti-résonance électrique pour laquelle l'admittance est maximale (*cf.* § 3.2.1). La résonance est plus floue pour les salves plus courtes dont le spectre en fréquence est plus large : nous commettons une erreur négligeable (de quelques pour mille) en utilisant 1021,6 kHz pour des salves de trois cycles.

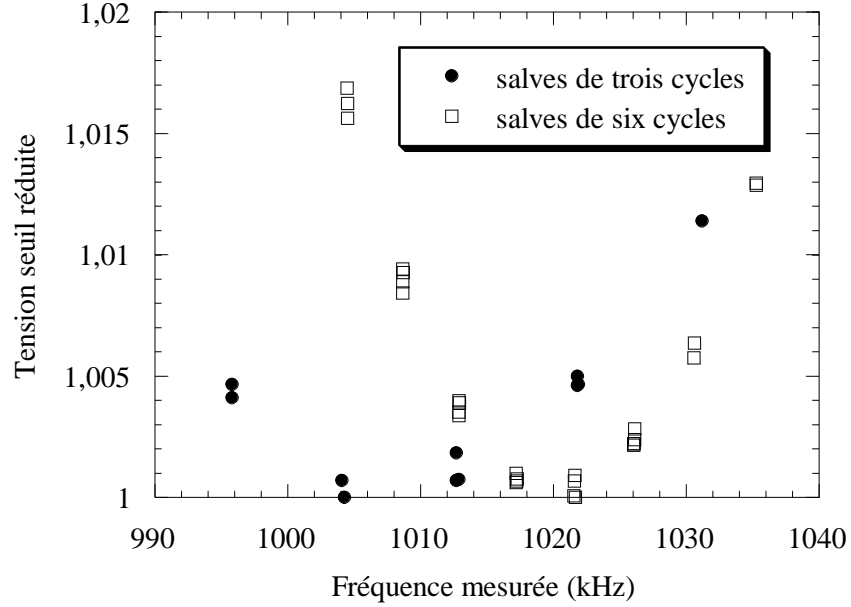


FIG. 3.12 – Seuil de cavitation rapporté à sa valeur minimale en fonction de la fréquence d’excitation de la céramique pour l’hélium 3. La fréquence de résonance vaut 1021,6 kHz pour les salves de six cycles.

La fréquence étant fixée, le seuil de cavitation augmente quand la durée de la salve augmente : ceci est lié au facteur de qualité  $Q$  non nul de la céramique qui se traduit par un temps de montée caractéristique de l’oscillation d’épaisseur,  $\tau_0 = Q/(2\pi f)$ . Afin d’alléger les notations et de nous affranchir de la fréquence dans le raisonnement qui va suivre, nous choisissons comme unité de temps la période ; par exemple la salve s’achève au bout de  $n = f\tau$  périodes. Le modèle le plus simple donnant l’élongation  $\zeta(x)$  à  $x$  périodes après le début de la salve ( $x$  peut prendre des valeurs non entières) en fonction de l’amplitude de l’élongation en régime permanent  $\zeta_{rp}$  correspond à un mode d’oscillation pur ; l’enveloppe de  $\zeta(x)$  est alors exponentielle :

$$\zeta(x) = \zeta_{rp} \sin(2\pi x) \left[ \left(1 - e^{-2\pi \frac{x}{Q}}\right) H(n - x) + \left(1 - e^{-2\pi \frac{n}{Q}}\right) e^{-2\pi \frac{x-n}{Q}} H(x - n) \right] \quad (3.2)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside.

À une température et une pression statique donnée, la pression au point focal atteint le seuil de cavitation pour une certaine valeur  $\zeta_c$  indépendante de la durée de la salve. Autrement dit, la probabilité de cavitation vaut 0,5 lorsque le minimum absolu de la courbe  $\zeta(x)$  est égal à  $\zeta_c$ . Si l’enveloppe de la courbe était rectangulaire, ce minimum serait atteint un quart de période avant la fin de la salve ; dans le cas général, la position du minimum dépend de la phase. Nous allons raisonner dans le cas d’une enveloppe exponentielle. En toute rigueur l’enveloppe modifie la position des minima par rapport à une sinusoïde, mais

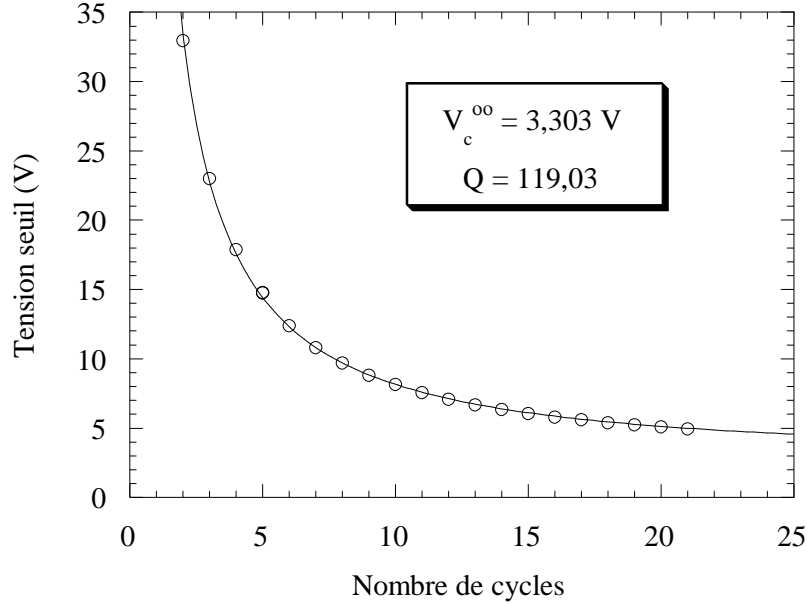


FIG. 3.13 – Seuil de cavitation en fonction du nombre de cycles par salve pour l’hélium 3. La courbe est un ajustement avec l’équation 3.5. On trouve  $Q \simeq 119$ .

pour  $Q = 119$ , l’écart au premier minimum est inférieur au pourcent, et décroît pour les minima suivants : on peut donc considérer les minima relatifs atteints en des nombres impairs de quarts de périodes. La position des minima dépend de la phase : si l’onde débute par une compression, l’abscisse des minima vaut  $(4k + 3)/4$  avec  $k \in \mathbb{N}$  ; si l’onde débute par une dépression, cette abscisse vaut  $(4k + 1)/4$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Dans ce dernier cas, le minimum absolu est atteint soit au bout de  $n - 3/4$  périodes, soit au bout de  $n + 1/4$  périodes ; celle des deux positions qui prévaut est donnée par les valeurs de  $n$  et de  $Q$ , et sa détermination revient à étudier le signe du polynôme  $1 - r - r^{4n-3} + r^{4n+1}$  avec  $r = \exp(-\pi/(2Q))$ . On trouve que le minimum absolu est atteint au bout de  $n + 1/4$  périodes pour  $n \leq 21$  si  $Q \geq 95$ . La qualité des ajustements relatifs aux différentes possibilités (nous ne les détaillerons pas tous), l’observation du signal acoustique (*cf.* § 3.2.2, Fig. 3.6 (a)) et la comparaison avec les premiers résultats de la mesure de la densité instantanée au point focal [68] indiquent que la situation correspond bien à ce cas de figure.

Pour une salve correspondant au seuil de cavitation, l’amplitude  $\zeta_{rp}$  qu’aurait l’elongation si elle continuait à croître jusqu’à atteindre le régime permanent est donc liée, selon l’équation 3.2, au nombre  $n$  de cycles de la salve par :

$$\zeta_{rp} = \frac{e^{\frac{\pi}{2Q}}}{1 - e^{-2\pi\frac{n}{Q}}} \zeta_c \quad (3.3)$$

Étant donnée la grande linéarité de la réponse piézoélectrique des céramiques, on peut supposer  $\zeta_{rp}$  proportionnelle à la tension appliquée. La constante de pro-

portionnalité dépend des caractéristiques électriques de la céramique (fréquence de résonance  $f_0$ , facteur de qualité  $Q$  et résistance à résonance  $R$ ) et de sa masse ( $M = 7,5 \text{ g}$ ) [60, p. 53-54] :

$$\frac{\zeta_{\text{rp}}}{V} = \frac{1}{2(\pi f_0)^{3/2}} \sqrt{\frac{Q}{MR}} \quad (3.4)$$

L'équation 3.3 se traduit alors par une équation analogue sur la tension de cavitation pour une salve de  $n$  cycles :

$$V_c(n) = \frac{e^{\frac{\pi}{2Q}}}{1 - e^{-2\pi\frac{n}{Q}}} V_c^\infty \quad (3.5)$$

où  $V_c^\infty$  est la tension seuil qui correspondrait à une salve de durée infinie. Ce raisonnement ne tient pas compte de la variation du seuil due à l'augmentation du temps expérimental  $\tau_{\text{exp}}$  (*cf.* § 2.4) qui interviendrait quand plusieurs oscillations ont la même amplitude ; cela n'a cependant pas d'importance car la variation est logarithmique et nous n'utilisons que des salves de durée suffisamment courtes pour que seule l'une des oscillations nucléé les bulles.

La mesure du seuil  $V_c$  en fonction du nombre de cycles de la salve permet donc d'évaluer le facteur de qualité mécanique de la céramique, comme le montre la figure 3.13. Ce procédé donne  $Q = 119$ , valeur inférieure à celle donnée par la mesure de l'impédance électrique de la céramique (*cf.* § 3.2.1). Ce désaccord peut être attribué à l'impureté du mode de vibration de la céramique, qui rend approximative sa représentation par un circuit équivalent. Dans la suite nous utiliserons la valeur  $Q = 119$ , car elle est directement reliée au phénomène de cavitation et nous paraît plus fiable. Pour l'impédance à résonance, nous prendrons la valeur mesurée en étudiant la résonance électrique, soit  $R = 12,17 \Omega$  (*cf.* § 3.2.1).

### Durée des régimes transitoires

Afin de garantir la fiabilité des mesures, il faut déterminer le temps requis par le système pour atteindre un nouvel état stable après un changement de température. Pour cela, nous utilisons le protocole suivant, illustré par la figure 3.14 :

- le système se trouvant depuis longtemps à une température basse et constante, le laser étant allumé et la céramique excitée à une tension proche du seuil, nous ajustons la tension d'excitation de manière à observer une probabilité de l'ordre de 20 % ;
- nous augmentons alors rapidement le point de consigne de la régulation de température. Les thermomètres indiquent instantanément une nouvelle valeur, tandis que la probabilité commence à augmenter lentement.
- si la probabilité atteint 90 %, nous diminuons la tension d'excitation de façon à la ramener au voisinage de 50 %, valeur où le système est le plus sensible aux dérives ;



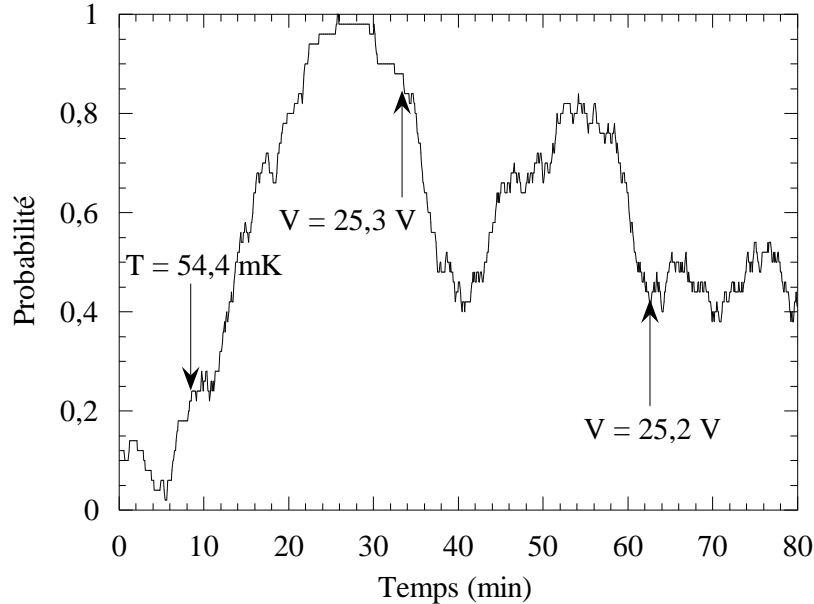


FIG. 3.14 – Probabilité de cavitation moyennée sur 50 échantillons (soit 4 min) en fonction du temps. Au bout de 8 min 20 s la température a été augmentée de 45,3 mK à 54,4 mK, et au bout de 33 min et de 63 min la tension d’excitation a été modifiée afin de ramener la probabilité autour de 50 %.

- nous attendons enfin jusqu’à ce que la probabilité se stabilise, c’est à dire fluctue autour d’une valeur constante.

Les ajustements de tension opérés durant cette procédure n’affectent pas la température car la variation relative de tension correspondante est faible.

Après plusieurs essais autour de différentes températures, nous évaluons la durée du régime transitoire à moins de 90 min aux plus basses températures, et à moins de 30 min au dessus de 200 mK. Nous avons donc attendu de 30 à 90 min après chaque changement de température. Il est également nécessaire de respecter un délai d’attente de plusieurs heures après les transferts de fluide cryogénique qui induisent une dérive de la détection optique (*cf.* § 3.1.2).

### 3.2.4 Étude en température

#### Premiers résultats

Après s’être placé à la fréquence de résonance mécanique (*cf.* § 3.2.3) et avoir choisi une durée de salve, on effectue une première série de mesures du seuil de cavitation en fonction de la température. À chaque température, après que le temps d’attente se soit écoulé, la probabilité de cavitation est mesurée sur des « courbes en S » à trois points moyennés sur cent échantillons.

Le détail de la procédure automatique de mesure est le suivant : l’opérateur

saisit sur l'ordinateur une valeur minimale et un incrément initial de tension. Le programme règle alors le générateur à la tension minimale et mesure grossièrement la probabilité sur cinq échantillons. La première valeur de tension est choisie pour donner une probabilité nulle. L'ordinateur augmente alors la tension de l'incrément initial et effectue à nouveau une évaluation rapide de la probabilité. L'incrément est choisi pour qu'elle soit égale à un. L'ordinateur modifie alors la tension par dichotomie pour trouver une probabilité différente de 0 et 1, augmentant la tension s'il trouve 0 et la diminuant s'il trouve 1. Une fois cette phase de recherche grossière du seuil terminée, le programme entame une séquence de recherche fine, où la probabilité est évaluée sur vingt échantillons et où la dichotomie s'arrête lorsque la probabilité est trouvée égale à 0,45, 0,5 ou 0,55. Le programme conserve une certaine mémoire des mesures effectuées et peut revenir en arrière dans l'éventualité d'une grande fluctuation statistique. La tension d'arrêt est alors proche de la tension seuil. La mesure proprement dite peut débiter : la probabilité est mesurée sur cent échantillons à la tension seuil estimée par la procédure de recherche fine. Deux autres mesures sur cent échantillons sont ensuite effectuées à une tension inférieure et une tension supérieure, dont les rapports à la tension centrale ont été fixés au préalable. Enfin, l'opérateur réalise un ajustement avec la formule 2.9 dite de « courbe en S » sur les trois points obtenus afin de déterminer la tension seuil.

Tout ce processus se déroule à une fréquence de répétition, c'est à dire un taux de répétition des échantillons  $f_{\text{rép}}$  fixée. Les premières mesures de la tension seuil en fonction de la température pour des salves de six cycles et une fréquence de répétition de 1 Hz semblent indiquer un régime de cavitation thermique pour lequel le seuil décroît régulièrement quand la température augmente. Nous verrons cependant dans les paragraphes suivants que l'analyse des résultats demande davantage de précautions.

### Rôle de la fréquence de répétition à basse température

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la fréquence de répétition sur les mesures. Pour cela, d'autres séries de mesures de la tension de cavitation en fonction de la température ont été réalisées pour des salves de 3 cycles à différentes fréquences de répétition : 0,5, 0,2, 0,1 et 0,05 Hz. La comparaison des différentes séries (voir Fig. 3.15) indique à basse température un seuil d'autant plus élevé que la fréquence de répétition est basse. La différence s'amointrit quand la température augmente pour finalement disparaître au dessus de 70 mK. Nous avons également vérifié que pour une même fréquence de répétition et une même température, le seuil correspondant à des salves de trois cycles était, après correction de l'effet du facteur de qualité, plus élevé que le seuil correspondant à des salves de six cycles.

Ce comportement indique l'existence d'un effet thermique : la chaleur libérée par la céramique, qui dépend de la fréquence de répétition et du nombre de cycles,

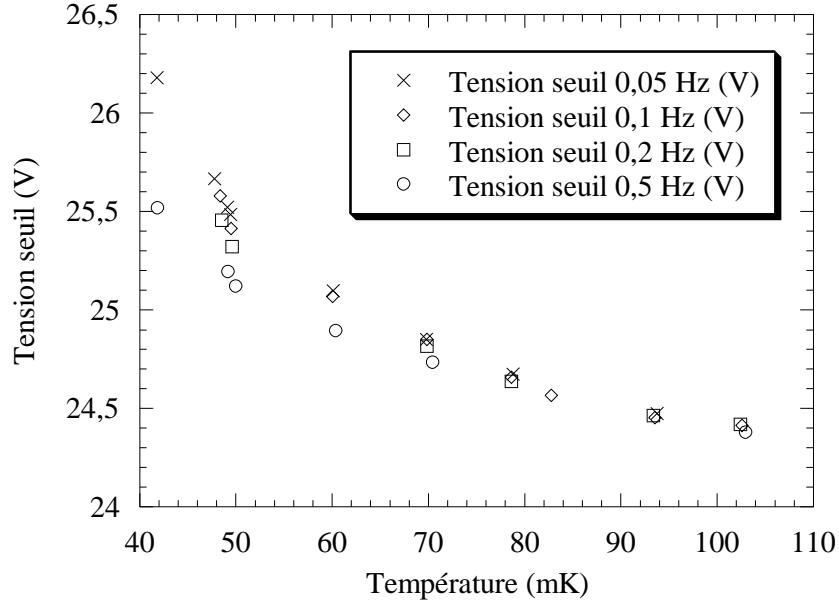


FIG. 3.15 – Comparaison des mesures de la tension de cavitation en fonction de la température pour  $f_{\text{rép}} = 0,5, 0,2, 0,1$  et  $0,05$  Hz.

est susceptible de créer des gradients thermiques, la température dans la région de la céramique devenant supérieure à celle mesurée sur les parois de la cellule, ce qui modifie artificiellement le comportement de la tension seuil.

### Évaluation de la dissipation

Pour évaluer la dissipation, nous mesurons la tension délivrée par la régulation de température aux bornes de la résistance de chauffage qui vaut  $65 \Omega$  (*cf.* § 3.1.3). Lorsque l'on change la fréquence de répétition  $f_{\text{rép}}$ , la puissance dissipée dans cette résistance s'ajuste de façon à compenser la variation de dissipation. La figure 3.16 montre cette puissance mesurée en régime permanent pour différentes valeurs de  $f_{\text{rép}}$  et des salves de six cycles : on obtient approximativement une droite dont la pente vaut environ  $2,6 \mu\text{W Hz}^{-1}$ .

Nous avons par la suite utilisé des salves de trois cycles. En supposant que la dissipation est proportionnelle à l'intégrale du carré de l'élongation et que l'enveloppe de cette élongation est exponentielle (*cf.* § 3.2.3, Éq. 3.2), on peut effectuer un calcul de la dissipation correspondante. Considérons une salve de trois cycles  $\zeta_3(x)$  et une salve de six cycles  $\zeta_6(x)$  présentant la même élongation minimale (*cf.* § 3.2.3) :

$$\zeta_3 \left( 3 + \frac{1}{4} \right) = \zeta_4 \left( 6 + \frac{1}{4} \right) \quad (3.6)$$

Cette condition détermine le rapport des paramètres  $\zeta_{\text{rp}}$  associés à chacune des

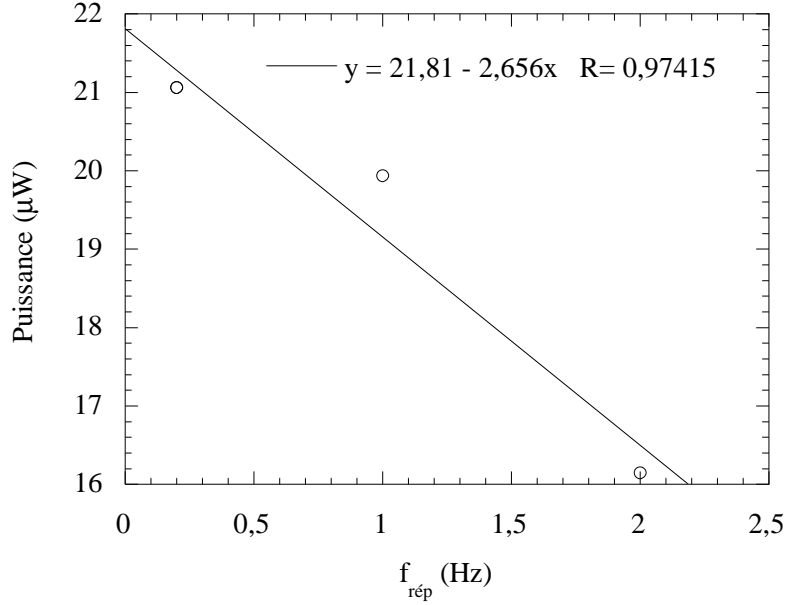


FIG. 3.16 – Puissance nécessaire pour maintenir la température constante en fonction de la fréquence de répétition de salves de six cycles au voisinage de la tension seuil.

deux salves :

$$\frac{\zeta_{rp,3}}{\zeta_{rp,6}} = \frac{1 - e^{-2\pi\frac{6}{Q}}}{1 - e^{-2\pi\frac{3}{Q}}} \quad (3.7)$$

ce qui permet de calculer le rapport des dissipations correspondantes :

$$\frac{\int_0^{+\infty} (\zeta_3(x))^2 dx}{\int_0^{+\infty} (\zeta_6(x))^2 dx} \simeq 0,9 \quad (3.8)$$

La valeur obtenue est peu différente de 1 car, en raison du facteur de qualité relativement élevé et pour des salves courtes, la majeure partie de la dissipation a lieu dans la partie décroissante de l'enveloppe, indépendante du nombre de cycles dans la partie croissante. Nous estimons donc la puissance moyenne dissipée par des salves de trois cycles répétées à la fréquence  $f_{rép}$  (exprimée en Hz) à  $2,35 \times f_{rép} \mu\text{W}$ .

En masquant le faisceau laser et en mesurant la nouvelle puissance de régulation, on constate que le laser joue un rôle plus faible, de l'ordre de  $0,7 \mu\text{W}$ , vraisemblablement dû à l'absorption dans la cellule et en particulier sur la céramique.

Avant de décrire les solutions expérimentales adoptées pour s'affranchir de ces effets de dissipation, nous pouvons montrer de quelle manière corriger la température pour tenir compte des gradients thermiques. Dans un modèle unidimensionnel simple, la chaleur produite dans la céramique diffuse à travers un volume d'hélium de surface  $S$  et de longueur  $L$  vers la paroi thermalisée à la température

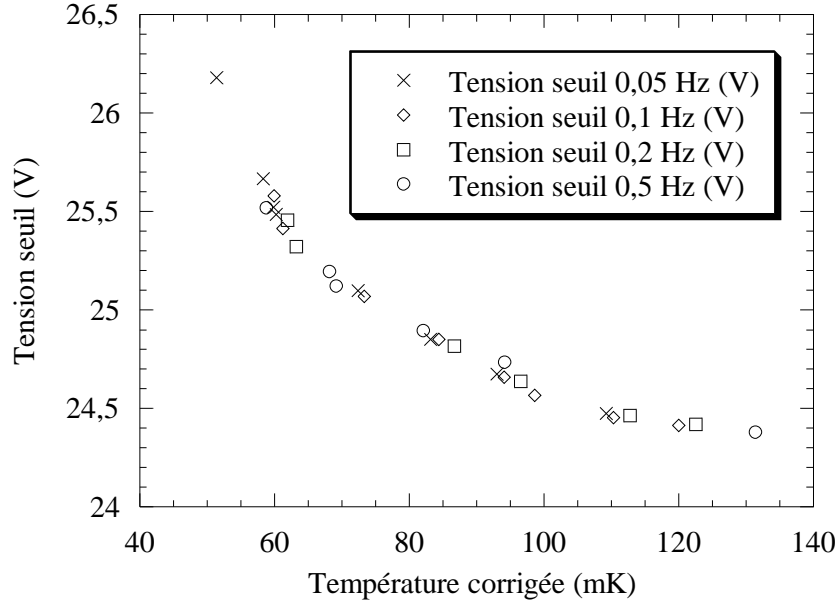


FIG. 3.17 – Tension seuil à différentes fréquences de répétition en fonction de la température corrigée de l'échauffement dû à la céramique.

$T$  lue par nos thermomètres. La conductivité thermique de l'hélium 3 [64, p. 432] est bien représentée à basse température par la formule :

$$\kappa = \left( \frac{0,34853}{T} + 2,3065 + 8,6049 T \right) \text{ mJ s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (3.9)$$

avec  $T$  en  $K$ . En négligeant la résistance de surface de Kapitza et la variation spatiale de  $\kappa$  due au gradient thermique, la température au voisinage de la céramique est donnée par :

$$T_{\text{corr}} = T + \frac{a f_{\text{rép}}}{\kappa(T)} \quad (3.10)$$

avec  $a = 2,35 \cdot 10^{-6} L/S$  pour des salves de trois cycles. On ajuste alors le paramètre  $a$  de manière à ce que les mesures à différentes fréquences de répétition de la figure 3.15 tracées en fonction de cette température corrigée soient réunies sur la même courbe. Cette méthode conduit à  $a = 1,8 \pm 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ . On en déduit  $S/L \simeq 13 \text{ mm}$ , ce qui est du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques du problème ( $R_{\text{tran}} = 8 \text{ mm}$  et dimensions de la cellule de l'ordre du centimètre). Les écarts entre les tensions de cavitation mesurées à différentes fréquences de répétition proviennent donc bien de la dissipation dans la céramique.

### Solutions expérimentales

En ce qui concerne la céramique, la solution consiste à utiliser les salves les plus courtes et les fréquences de répétition les plus basses possibles. Nous sommes limités respectivement par la puissance disponible de l'amplificateur et par les temps de mesure qui ne doivent pas être trop longs, notamment pour des considérations de stabilité (température et réglages optiques). La longueur des salves retenue est de trois oscillations, et la répétition aux plus basses températures de 0,05 Hz. Pour des courbes en S à 3 points, cela correspond à une durée de mesure de  $300 \times 20 \text{ s} = 1\text{h}40 \text{ min}$ , à laquelle il faut ajouter l'attente d'1h30 min et une vingtaine de minutes pour la recherche automatique du seuil, soit en tout 3h30 min par température. À plus haute température, on peut augmenter la fréquence de répétition et diminuer le temps d'attente.

Quant à la dissipation due au laser, il suffit de constater que l'utilisation du faisceau uniquement durant le passage de l'onde acoustique permet de diminuer fortement la puissance moyenne absorbée. Dans ce but, nous avons donc construit un obturateur de faisceau en utilisant un relais électromagnétique dont nous avons prolongé le châssis mobile en collant un léger bras métallique qui permet d'en amplifier la course et de masquer ou transmettre la totalité du faisceau. Le temps d'ouverture obtenu est de l'ordre de 20 ms, soit une réduction de la dissipation d'un facteur 1000 pour  $f_{\text{rép}} = 0,05 \text{ Hz}$ . L'électro-aimant du relais est commandé par un générateur d'impulsions carrées Philips modèle PM-5712 et l'obturateur s'ouvre avec un temps de réponse d'environ 15 ms. Cette durée étant nettement supérieure au temps de vol de l'onde entre la céramique et le point focal, il faut prendre soin de retarder le générateur qui excite le transducteur afin que la focalisation ait lieu durant l'ouverture de l'obturateur. Une chaîne électronique schématisée sur la figure 3.18 réalise cette synchronisation à l'aide d'un second générateur d'impulsions à retard ajustable Philips modèle PM-5715. En raison de la limitation de la fréquence de répétition interne des générateurs d'impulsions aux valeurs supérieures à 1 Hz, une horloge supplémentaire (générateur de fonctions Toellner modèle TOE-7711) est nécessaire pour les fréquences inférieures. Un exemple de signal de transmission observé avec ce dispositif est donné dans la partie concernant l'hélium 4 (*cf.* § 3.3.2, Fig. 3.37).

### Atténuation

Une fois résolu le problème de la dissipation, il faut tenir compte de l'atténuation du son dans l'hélium 3. En effet, cette atténuation dépendant de la température, pour atteindre la même oscillation de pression au point focal à deux températures différentes, il faudra appliquer à la céramique deux tensions différentes. Une partie de la variation de la tension seuil est due à cet effet.

Dans l'hélium 3 normal, le coefficient d'atténuation du son  $\alpha$  a été mesuré par Abel *et al.* [75, 76] et la viscosité  $\eta$  par différents groupes, par exemple par l'étude

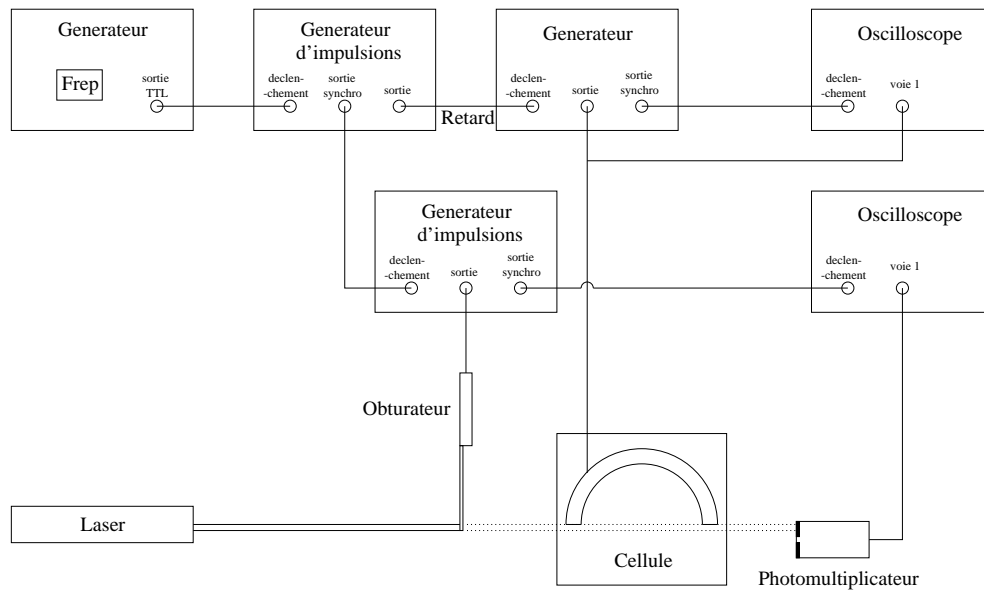


FIG. 3.18 – Schéma de la chaîne électronique de commande (voir texte). L'amplificateur situé entre le générateur et la céramique a été omis par souci de clarté.

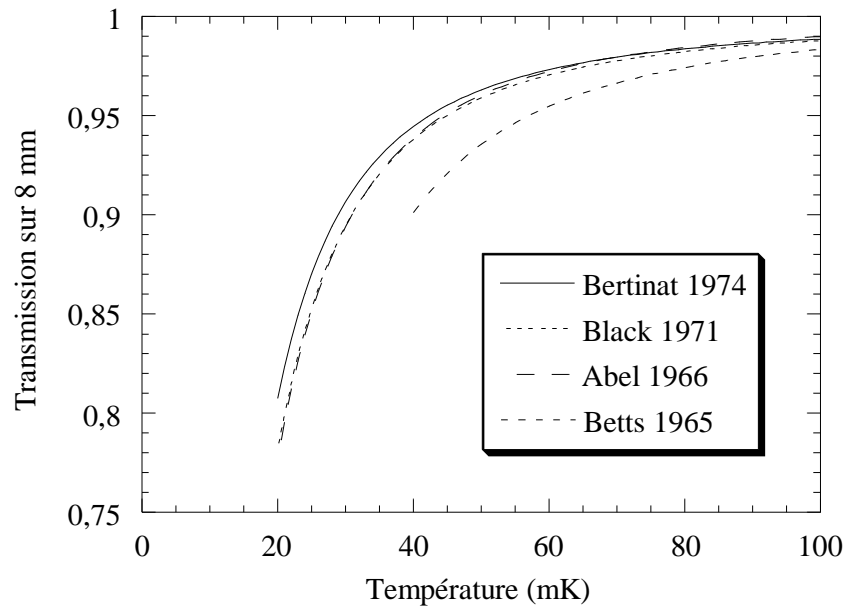


FIG. 3.19 – Transmission sur 8 mm à pression de vapeur saturante pour des ondes de 1,0216 MHz. La légende indique à quel groupe se rapporte chacune des courbes.

de l'amortissement des oscillations de torsion d'un cristal de quartz [77, 78, 79, 80], ou à l'aide d'un viscosimètre à fil vibrant [81]. La transmission correspondante dans les conditions de notre expérience (voir ci-dessous) est donnée sur la figure 3.19 : les résultats des différents groupes sont en bon accord, à l'exception de ceux de Betts *et al.* qui nous semblent par conséquent pouvoir être écartés. Ils montrent tous un comportement de la viscosité en  $1/T^2$  en accord avec la théorie de Landau du liquide de Fermi (*cf.* § 4.5.1 et Réf. [82]). Nous utiliserons les valeurs de la viscosité de Bertinat *et al.* [80] :

- pour  $50 \text{ mK} \leq T \leq 1 \text{ K}$ ,  $\eta T^2 = (1,94 + 23,8 T^{1,58}) 10^{-7} \text{ Pa s}$  ;
- pour  $20 \text{ mK} \leq T \leq 125 \text{ mK}$ ,  $\eta T^2 = (0,545 - 1,594 T)^{-1} 10^{-7} \text{ Pa s}$ .

Les deux quantités  $\alpha$  et  $\eta$  sont reliées par la relation classique [82] :

$$\alpha = \frac{8\pi^2 f^2 \eta}{3\rho c^3} \quad (3.11)$$

où  $f$  est la fréquence du son,  $\rho$  la densité du liquide et  $c$  la vitesse du son. En écrivant cette relation on a négligé les contributions de la conduction thermique et de la seconde viscosité, ce qui est justifié d'après les calculs d'Abrikosov et de Khalatnikov [82].

Dans un régime linéaire, l'amplitude d'une onde acoustique traversant une distance  $l$  doit être multipliée par le facteur  $\exp(-\alpha l)$ . Nous faisons l'hypothèse que lors du trajet entre la céramique et le point focal, l'amplitude de l'onde est suffisamment faible pour que cette formule soit valable, et que les éventuels effets non linéaires n'interviennent que dans la région focale dont la taille caractéristique est de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda \simeq 200 \mu\text{m}$ . Par conséquent nous utilisons le facteur d'atténuation sur la distance  $l$  égale au rayon intérieur de la céramique  $R_{\text{trans}}$  pour calculer la tension seuil corrigée  $V_c^{\text{corr}} = V_c \exp(-\alpha R_{\text{tran}})$ . Cette correction est supérieure au pourcent pour les températures inférieures à 108 mK, et atteint 7,15 % à 35 mK.

Pour justifier une atténuation plus importante que celle prévue de cette manière, on pourrait arguer du fait que les trains d'ondes envoyés sont courts et comportent une part non négligeable d'harmoniques, dont l'atténuation est plus forte que celle de la porteuse (dépendance quadratique en fréquence). Le calcul de cet effet, détaillé dans l'annexe G, montre qu'il peut être négligé.

### Température au sein de l'onde acoustique

Nous avons vu que dans l'hélium 4 le passage de l'onde acoustique s'accompagnait d'un refroidissement adiabatique (*cf.* § 2.5). Dans l'hélium 3 aux températures supérieures à 35 mK et inférieures à 1,5 K, la conductivité thermique  $\kappa$  est inférieure à  $0,02 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  [64, p. 432] et la capacité calorifique volumique  $C$  est supérieure à  $2,2 \cdot 10^4 \text{ J m}^3 \text{ K}^{-1}$  (voir plus bas). La durée typique de diffusion de la chaleur sur une longueur d'onde  $\lambda$  de l'ordre de  $180 \mu\text{m}$ , qui vaut  $\lambda^2 C / \kappa$ , est donc



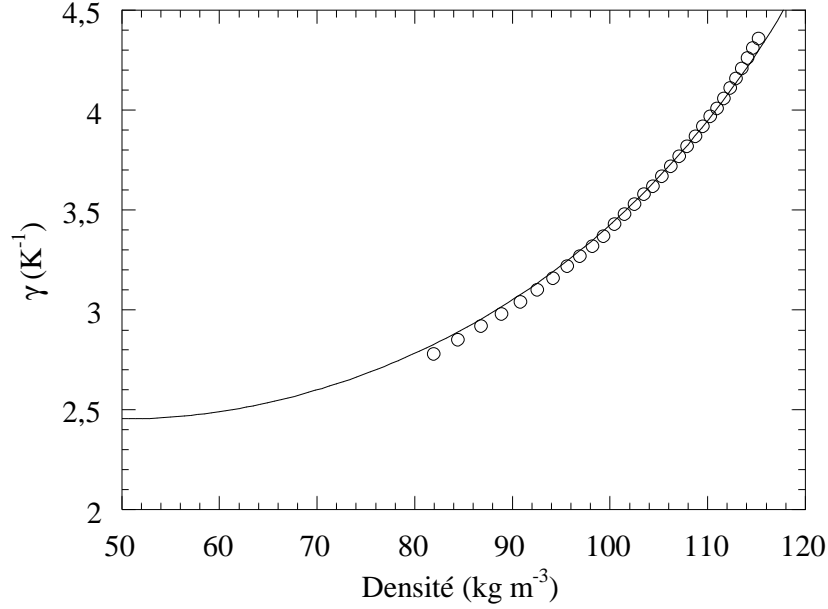


FIG. 3.20 – Ajustement du coefficient  $\gamma$  à l’aide de la formule 3.12. Les cercles représentent les données expérimentales de Greywall.

supérieure à 35 ms. Cette durée est très grande devant la période de l’onde, d’environ  $1 \mu\text{s}$  : par conséquent, la variation de pression peut être considérée comme adiabatique.

Dans l’échelle thermométrique de Greywall, la capacité calorifique molaire de l’hélium 3 s’écrit  $C = \gamma RT$ , où  $\gamma$  est un coefficient indépendant de la température et mesuré expérimentalement par Greywall à différentes densités (*cf.* § 4.3.1). En raison de cette relation linéaire, l’entropie molaire  $S$  est égale à  $C$ . En ajustant les valeurs expérimentales de  $\gamma$  par une loi du type :

$$\gamma(\rho) = \frac{\pi^2 k_B m}{p_F^2} \frac{m^*}{m} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{k_B m^{5/3}}{\hbar^2 \rho^{2/3} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)^2} = \frac{18,9}{\rho^{2/3} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)^2} \quad (3.12)$$

justifiée par un modèle théorique dû à Stringari (*cf.* § 4.3.1). Le résultat est représenté sur la figure 3.20 : on obtient  $\rho_c \simeq 202 \text{ kg m}^{-3}$ . Le paramètre  $\gamma$  décroît de  $2,78 \text{ K}^{-1}$  à la densité d’équilibre liquide-vapeur jusqu’à environ  $2,47 \text{ K}^{-1}$  à la densité spinodale. Nous pouvons alors estimer la variation de température [83]. A la différence de l’hélium 4 (*cf.* § 2.5), on trouve un faible échauffement :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta \gamma}{\gamma} \leq 12\% \quad (3.13)$$

qui n’affecte que peu les résultats ; en particulier la température de transition entre les régimes de nucléation thermique et quantique dans notre expérience doit théoriquement être voisine, compte tenu de cette échauffement, de 100 mK au lieu de 120 mK.

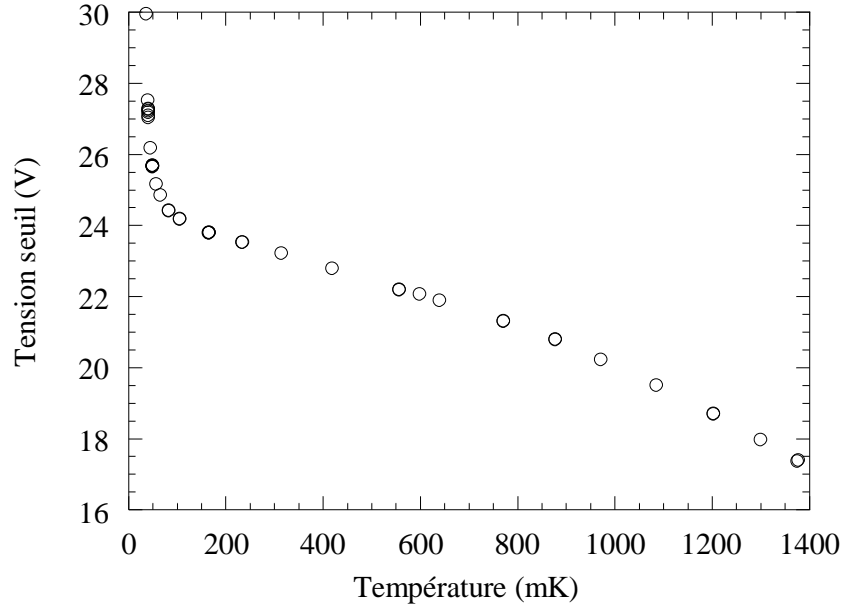


FIG. 3.21 – Tension seuil brute en fonction de la température pour des salves de trois cycles à  $P_{\text{stat}} = 12$  mbar. Par souci de clarté, nous ne représentons pas les données corrigées, qui ne diffèrent des données brutes qu’aux basses températures (voir Fig. 3.22).

### Résultats finals

En mesurant la tension de cavitation dans les conditions où les effets thermiques peuvent être négligés, on obtient les résultats finals représentés sur la figure 3.21. La figure 3.22 est un agrandissement montrant les résultats obtenus au dessous de 200 mK pour les données brutes et les données corrigées obtenues en appliquant la correction due à l’atténuation du son. Au dessus de 150 mK, le seuil de cavitation décroît progressivement quand la température augmente, comme c’est le cas dans un régime de nucléation par activation thermique. En revanche, au dessous de 150 mK, nos résultats mettent en évidence une brusque variation du seuil de cavitation. Ceci est en contradiction avec la théorie qui prévoyait une transition vers un régime de nucléation quantique où le seuil devient indépendant de la température ; de plus, le fait de demeurer en régime thermique ne suffirait pas à expliquer la brusque remontée observée quand la température diminue. Si l’on utilise les valeurs de l’atténuation déduite des mesures d’Abel *et al.* ou de Black *et al.*, la remontée demeure. Pour retrouver une variation régulière de la tension de cavitation à basse température, il faudrait que la correction ramène le seuil de 30 V mesurés à 35 mK à une valeur d’environ 24,25 V, soit un facteur correctif de 0,8 correspondant à l’atténuation à 20 mK : cet écart important permet d’écarter l’hypothèse d’un artefact thermométrique. Nous avons de plus vérifié que les deux résistances au carbone étalonnées à la même époque donnaient la même température à 1 mK près à basse température, et qu’elles étaient

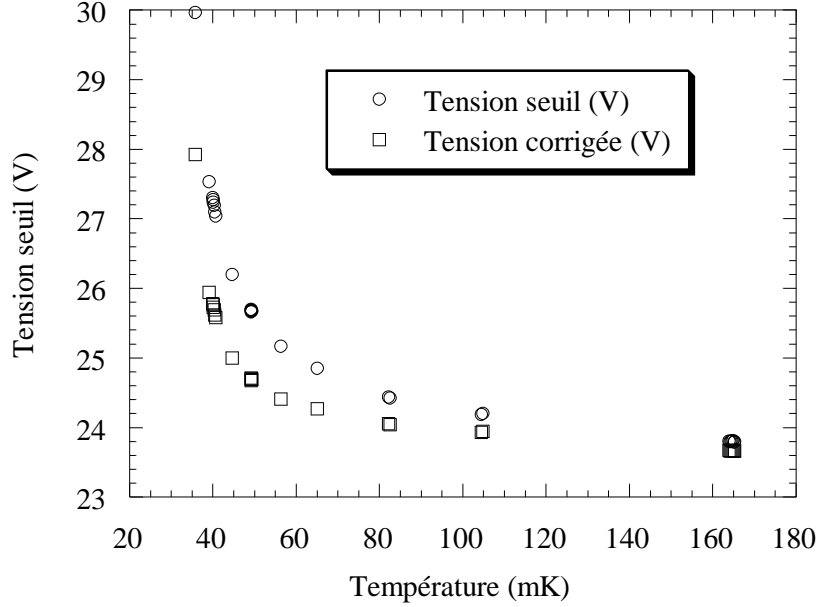


FIG. 3.22 – Tension seuil brute et corrigée en fonction de la température au dessous de 200 mK pour des salves de trois cycles à  $P_{\text{stat}} = 12$  mbar.

en accord à 5% près avec une nouvelle résistance au germanium étalonnée au dessus de 300 mK.

Nous pensons que les propriétés de Fermi et plus précisément le son zéro peuvent expliquer cet effet. Ceci sera discuté au chapitre 4.

### Estimation du préfacteur

Nous pouvons chercher à estimer le préfacteur à partir de la variation de la tension seuil en fonction de la température au dessus de 150 mK. En effet, considérons le régime d'activation thermique et supposons que, près de la spinodale, l'énergie de la barrière à franchir suit une loi de puissance :

$$\frac{E_b}{k_B} = \beta(P - P_s)^\delta \quad (3.14)$$

D'autre part, au seuil de cavitation, l'énergie de la barrière vaut :

$$E_b = \ln\left(\frac{\Gamma_0 V \tau}{\ln 2}\right) k_B T \quad (3.15)$$

En négligeant la variation de  $\Gamma_0 V \tau$  avec la température, ce qui est légitime car cette variation est faible et n'intervient que logarithmiquement, on en déduit :

$$P_{\text{cav}} = P_s + \left(\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{\Gamma_0 V \tau}{\ln 2}\right)\right)^{1/\delta} T^{1/\delta} \quad (3.16)$$

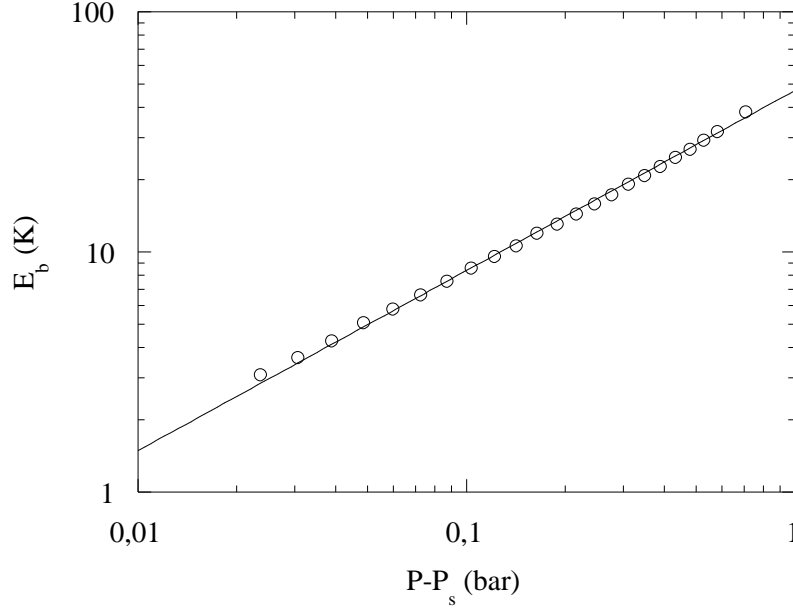


FIG. 3.23 – Barrière d'énergie de cavitation dans l'hélium 3 en fonction de l'écart à la pression spinodale. Les cercles représentent les résultats de calculs numériques et la courbe est un ajustement en loi de puissance avec un exposant  $3/4$ .

Nous avons répété les calculs numériques de Maris (*cf.* § 1.4.1) afin d'étendre les valeurs de l'énergie de  $E_b$  dont nous disposons à des pressions distantes de 25 % de la spinodale, écart relatif correspondant à la variation de la tension seuil mesurée dans notre expérience. Nous avons vérifié que nous retrouvons bien les résultats de Maris dans la zone commune de pression. Les valeurs de l'énergie de barrière pour un écart  $P - P_s$  compris entre 0,02 et 0,7 bar (correspondant à la région de pression estimée par la théorie dans notre expérience) sont bien représentées par l'équation 3.14 avec  $\beta = 47,13$  et  $\delta = 3/4$ , le rapport  $E/k_B$  étant exprimé en Kelvin et la pression en bar (voir Fig. 3.23). Nous réalisons alors un ajustement des mesures de la tension seuil par la formule  $V_c(0) - CT^{4/3}$ , en nous limitant aux températures supérieures à 160 mK afin de s'affranchir de la brusque remontée non décrite par ce modèle de nucléation par activation thermique. Le résultat est représenté sur la figure 3.24 : on trouve  $V_c(0) = 24,11 \text{ V}$  et  $C = 4,24 \text{ V K}^{-4/3}$ . On a :

$$\frac{E_b}{k_B T} = \ln \left( \frac{\Gamma_0 V \tau}{\ln 2} \right) = \beta \left( \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{V=V_{\text{cav}}} \frac{\partial V_{\text{cav}}}{\partial T^{4/3}} \right)^{3/4} \quad (3.17)$$

Si l'on suppose en première approximation que la relation entre la pression au point focal et la tension appliquée à la céramique est linéaire et que l'on confond la pression de cavitation à basse température avec la pression spinodale, on obtient :

$$\frac{\partial P_{\text{cav}}}{\partial V_{\text{cav}}} = \frac{P_s}{V_c(T=0)} = -0,128 \text{ bar V}^{-1} \quad (3.18)$$

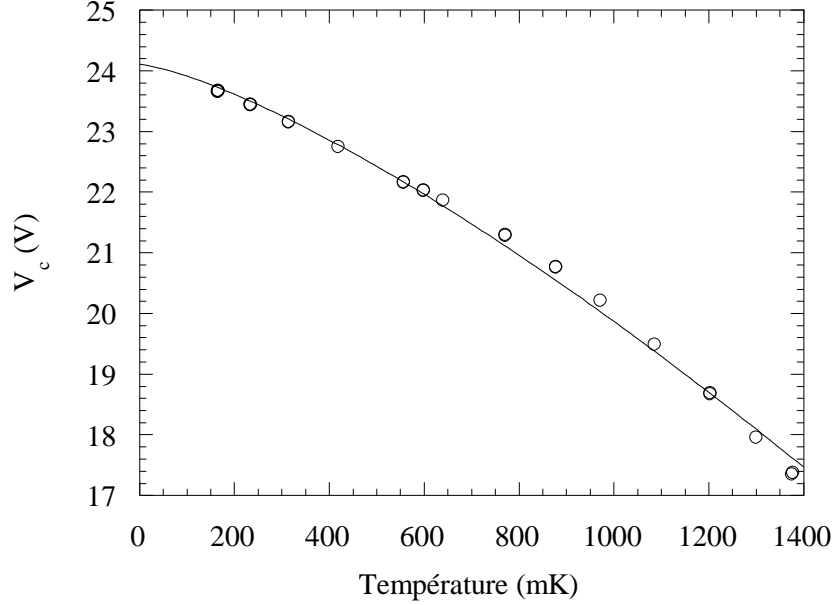


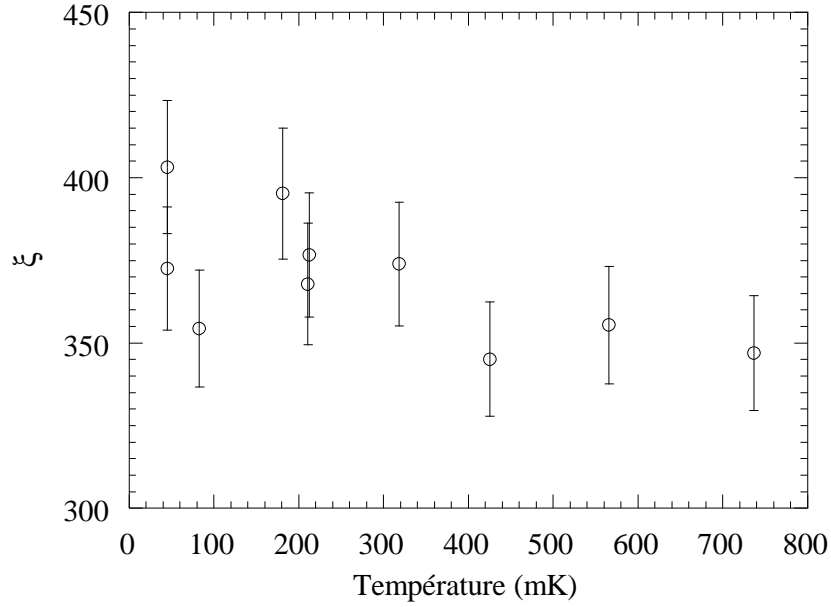
FIG. 3.24 – Ajustement des mesures de la tension seuil par une loi de puissance avec un exposant  $4/3$ .

ce qui conduit à  $E_b/(k_B T) = 29,8$ , soit un préfacteur  $\Gamma_0 V \tau = 6,1 10^{12}$ . L'estimation théorique habituelle donnerait dans le cas de l'hélium 3 à 0,1 K, avec un rayon critique  $R_c$  de l'ordre de 1 nm (*cf.* § 1.4.1) :

$$\Gamma_0 \simeq \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R_c^3} \frac{k_B T}{h} \simeq 5 10^{35} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.19)$$

et avec  $V \tau = 1,2 10^{-22} \text{ m}^3 \text{ s}^3$  (*cf.* § 2.4) la valeur  $\Gamma_0 V \tau = 6,0 10^{13}$ . Si l'on prenait pour fréquence d'essai  $c/R_c$  ou  $E_b/h$  (*cf.* § 1.4.2), on obtiendrait entre 0,9 et  $1,8 10^{15}$ .

Plusieurs interprétations peuvent être évoquées pour comprendre cet écart de un à trois ordres de grandeur. Tout d'abord il faut remarquer que de faibles erreurs sur les différentes valeurs numériques utilisées produisent des erreurs importantes sur le produit  $\Gamma_0 V \tau$  en raison du logarithme : en particulier pour la valeur déduite des mesures de la tension seuil et la valeur théorique on obtient respectivement  $E/(k_B T) = 29,9$  et de 32,1 à 35,5, valeurs relativement proches. D'autre part la relation entre la pression au point focal et la tension appliquée à la céramique pourrait ne pas être linéaire : cependant dans ce cas  $\partial P/\partial V$  décroîtrait aux tensions élevées par rapport au régime linéaire (*cf.* § 3.2.6), ce qui diminuerait le produit  $\Gamma_0 V \tau$  ; nous pensons que l'effet de ces non-linéarités est faible (*cf.* § 3.2.6). Enfin il est possible que la valeur théorique surestime le préfacteur, car elle ne repose pas sur une étude détaillée de la cinétique de nucléation : de nombreuses fluctuations ne font pas évoluer le système vers le profil critique, et on peut imaginer que leur prise en compte conduise à un préfacteur inférieur.

FIG. 3.25 – Mesures de la raideur  $\xi$  à différentes températures.

### 3.2.5 Variation de la raideur des courbes en S

Nous avons réalisé des études précises de la statistique de cavitation à différentes températures. Chaque courbe en S est obtenue avec une douzaine de points moyennés sur 400 échantillons. On s'attend alors à une incertitude sur la raideur  $\xi$  de l'ordre de 5 % (*cf.* § 3.2.3). Les résultats sont représentés sur la figure 3.25 : on constate que la variation est très faible, même si on remarque une tendance à la décroissance de  $\xi$  quand la température augmente. D'après le paragraphe 2.4, on a (*cf.* Eq. 2.10) :

$$\xi = -\frac{V_c}{k_B T} \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{\Sigma=1/2} \quad (3.20)$$

En supposant comme au paragraphe 3.2.4 que l'énergie d'activation suit une loi de puissance :

$$\frac{E_b}{k_B} = \beta(P - P_s)^\delta \quad (3.21)$$

on a :

$$\frac{\xi}{V_c} = -\frac{1}{k_B T} \frac{\partial E}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{E_b}{k_B T} \frac{\delta}{P_{\text{cav}} - P_s} \frac{\partial P}{\partial V} \quad (3.22)$$

La figure 3.26 représente le rapport  $\xi/V_c$  en fonction de la température : on le trouve approximativement constant égal à  $15,8 \text{ V}^{-1}$ . Dans l'équation 3.22, le terme  $E_b/(k_B T)$  est lié au logarithme du préfacteur et peut être considéré comme constant, de l'ordre de 30 (*cf.* § 3.2.4). S'il n'y avait aucune non-linéarité, le terme  $\partial P/\partial V$  serait constant, de l'ordre de  $P_s/V_c(T=0) \simeq -0,13 \text{ bar V}^{-1}$  et le rapport  $\xi/V_c$  divergerait à basse température comme  $5,1 \text{ bar V}^{-1}/(P_{\text{cav}} - P_s)$  (avec

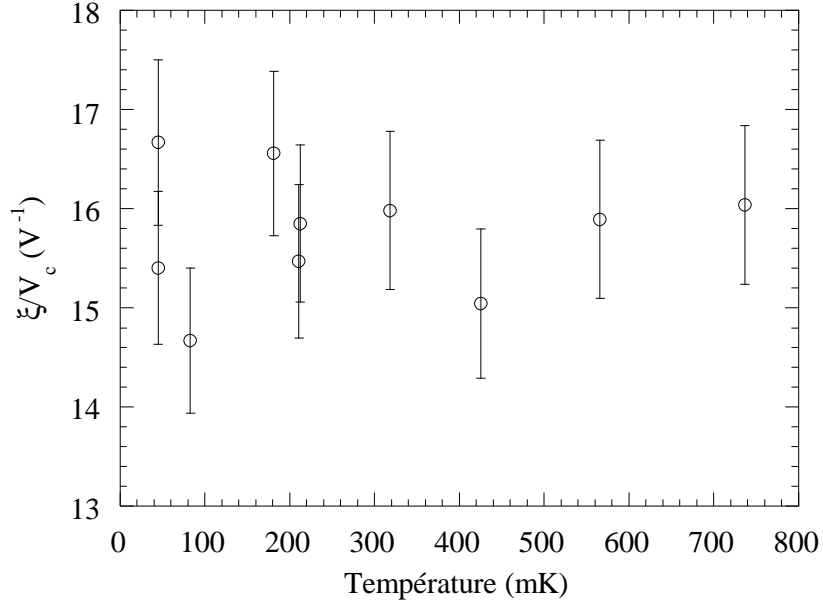


FIG. 3.26 – Rapport  $\xi/V_c$  en fonction de la température.

$\delta = 3/4$ ), dans le régime de nucléation thermique. Le comportement des mesures expérimentales en fonction de la température, représentées sur la figure 3.26, est très différent : le rapport  $\xi/V_c$  est approximativement constant égal à 15,8, alors que l'écart  $P_{\text{cav}} - P_s$  estimé dans ce modèle varie d'un facteur 18 (de 20 mbar à 83 mK à 360 mbar à 737 mK). Ce comportement pourrait s'expliquer par les non-linéarités, à condition d'avoir pour les pressions proches de la pression spinodale :

$$\frac{1}{P_{\text{cav}} - P_s} \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{1}{\delta} \frac{\xi}{V_c} \frac{k_B T}{E_b} \simeq -0,7 V^{-1} \quad (3.23)$$

soit une pente de  $\partial P/\partial V$  qui varie de  $-0,014$  à  $-0,25 \text{ bar } V^{-1}$  entre les deux températures extrêmes dans le modèle précédent. Cette variation semble trop importante, en comparaison des résultats de l'étude en pression présentés au paragraphe suivant, qui indiquent que  $\partial P/\partial V$  serait compris entre  $-0,1$  et  $-0,12 \text{ bar } V^{-1}$  ; nous pensons même qu'au voisinage du seuil de cavitation,  $\partial P/\partial V$  serait proche de la première de ces deux valeurs et peu dépendante de la température. On pourrait attribuer ce désaccord à un artefact dû au bruit des mesures : la fluctuation de tension mesurée pour des salves de trois cycles est de l'ordre de  $1,8 \cdot 10^{-3}$  (*cf.* § 3.1.3) et cette valeur n'est peut-être pas suffisamment faible devant la largeur relative des courbes en S (environ  $1,2 \cdot 10^{-2}$ ) pour ne pas saturer la mesure de la raideur.

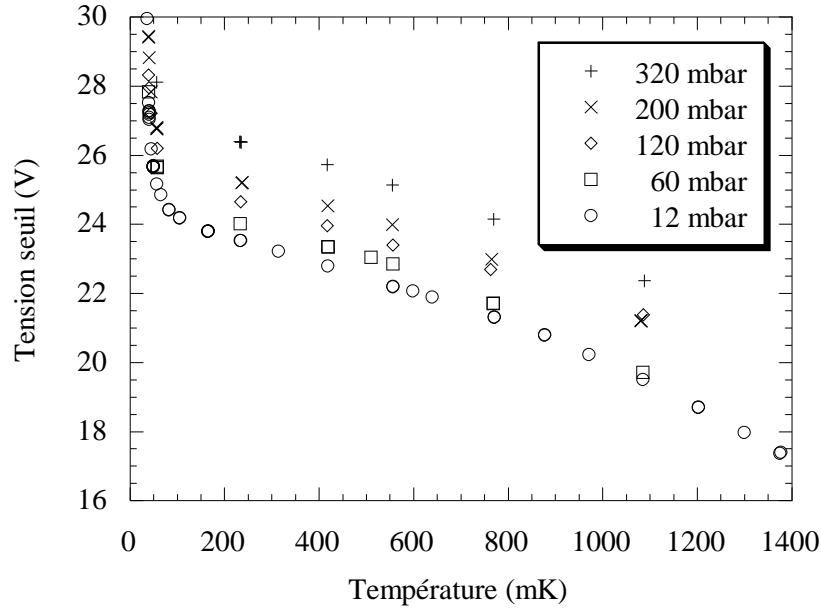


FIG. 3.27 – Tension seuil en fonction de la température à différentes pressions statiques.

### 3.2.6 Étude en pression

#### Résultats bruts

Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence de la pression statique sur la cavitation. Avec une méthode et des précautions identiques à celles décrites au § 3.2, nous avons répété les mesures de la tension de cavitation à différentes pressions statiques et à des températures identiques pour chaque pression. Les bulles deviennent de plus en plus difficiles à détecter quand la pression augmente, et nous avons dû nous limiter à des pressions inférieures à 0,35 bar. En effet, selon la théorie de Rayleigh-Plesset et comme l'ont montré les mesures de Lambaré *et al.* dans l'hélium 4 (*cf.* § 2.6 et Réf. [65]), le rayon maximal de bulles de même énergie est proportionnel à  $P_{\text{stat}}^{-1/3}$  et leur durée de vie à  $P_{\text{stat}}^{-5/6}$ . La pression statique maximale à laquelle nous détectons des bulles de manière satisfaisante est 4 fois plus élevée dans l'hélium 4 (*cf.* § 3.3.6). Cette différence s'explique si l'énergie initiale des bulles est 4 fois plus grande dans l'hélium 4 que dans l'hélium 3 [66] ; ceci peut provenir du fait que les pressions négatives atteintes dans l'hélium 3 sont plus faibles et par conséquent l'onde fournirait moins d'énergie à la bulle pendant leur interaction immédiatement après la cavitation. Les résultats bruts, c'est à dire non corrigés de l'atténuation du son, sont représentés sur la figure 3.27.

On remarque que la tension seuil à température donnée augmente avec la pression statique, comme cela était attendu. Nous allons exploiter quantitativement ces mesures dans les paragraphes suivants.



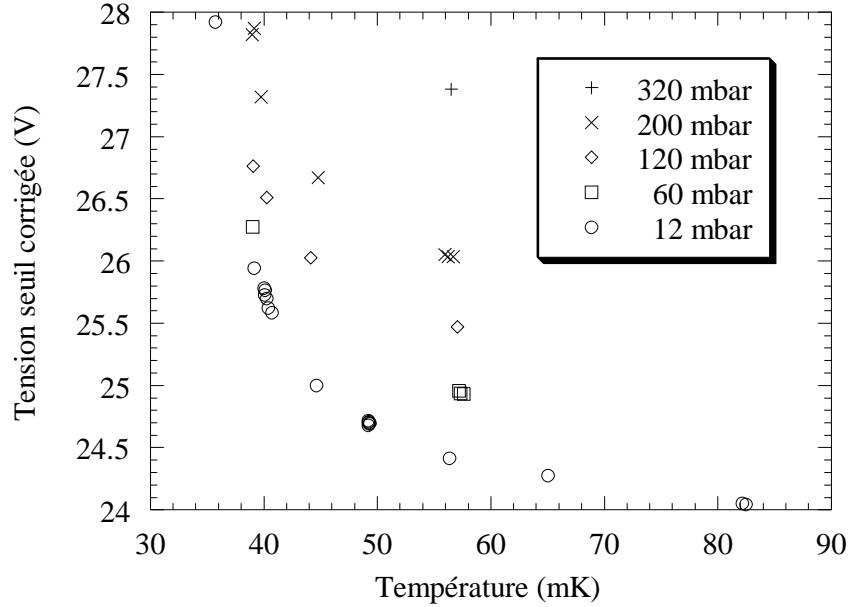


FIG. 3.28 – Tension seuil corrigée à basse température à différentes pressions statiques.

### Atténuation

Il faudrait en principe corriger chaque mesure de l'atténuation du son, de la façon décrite au § 3.2.4, en tenant compte de la dépendance en pression des différents paramètres intervenant dans l'équation 3.11. La valeur du produit  $\eta T^2$  extrapolé à température nulle ne change pas de manière significative sur l'étendue de notre gamme de pression : la variation mesurée entre 0 et 3 atm est inférieure à 6 % selon la référence [85]. Par conséquent, nous considérons le produit  $\eta T^2$  comme indépendant de la pression et corrigeons les mesures à basse température en tenant compte des variations de la densité  $\rho$  et de la vitesse du son  $c$  d'après la loi proposée par Maris (*cf.* § 1.2.2). Après correction, la brusque remontée du seuil à basse température est confirmée à plus haute pression statique, comme le montre la figure 3.28.

Cependant nous n'incluons pas les températures inférieures à 55 mK dans l'étude de la variation du seuil de cavitation avec la pression statique en raison de la forte variation de ce seuil avec la température dans cette zone : les mesures deviennent extrêmement sensibles à de faibles écarts de température et la précision insuffisante pour pouvoir comparer les résultats à différentes pressions. L'atténuation dans notre expérience est négligeable pour les températures supérieures à 150 mK, ce qui correspond à cinq des six températures retenues dans la comparaison entre différentes pressions statiques (233, 418, 556, 768 et 1085 mK). Pour la température la plus basse (57 mK), choisie légèrement supérieure à la température à laquelle se produit la remontée afin d'obtenir le seuil le plus élevé tout en gardant la comparaison entre pressions possible, nous utilisons la tension seuil

corrigée de la façon que nous venons de décrire.

### Exploitation des mesures

Nous pouvons maintenant tracer la tension seuil à une température donnée en fonction de la pression statique. Remarquons tout d'abord que *si la focalisation des ultrasons était linéaire*, on aurait entre l'amplitude de l'oscillation de pression au point focal  $\Delta P$  et l'amplitude du déplacement de la face interne la céramique  $\zeta$  la relation suivante :

$$\Delta P = \rho \omega_0^2 R_{\text{tran}} \zeta \quad (3.24)$$

où  $\rho$  est la densité du liquide,  $\omega_0$  la pulsation de l'onde et  $R_{\text{tran}}$  le rayon interne de la céramique [84] [60, p. 60]. Par conséquent, l'amplitude de l'oscillation de pression  $\Delta P(P_{\text{stat}}, T)$  nécessaire pour atteindre le seuil de cavitation à une pression statique  $P_{\text{stat}}$  et une température  $T$  serait proportionnelle au produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$  où  $V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$  est la tension seuil qui correspondrait à une salve de durée infinie, avec (*cf.* § 3.2.3) :

$$\Delta P(P_{\text{stat}}, T) = 2R_{\text{tran}} \sqrt{\frac{\pi f_0 Q}{MR}} \rho(P_{\text{stat}}) V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T) \quad (3.25)$$

Toujours dans le cadre de l'hypothèse linéaire, on pourrait écrire :

$$\Delta P(P_{\text{stat}}, T) = \Delta P(0, T) + P_{\text{stat}} \quad (3.26)$$

Il est donc plus approprié de tracer pour chaque température  $T$  la pression statique  $P_{\text{stat}}$  en fonction du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$  ; nous appellerons cette courbe  $\Gamma^\infty(T)$ . La densité de l'hélium à pression statique donnée varie peu dans la gamme de température étudiée (moins de 0,35 % entre 100 et 900 mK [64]), et nous négligerons cette dépendance en température. En revanche, nous tenons compte de la variation en pression statique, en utilisant l'équation d'état de Maris (*cf.* § 1.2.2).

### Propriétés des courbes $\Gamma^\infty(T)$

Étant donnée une température, la courbe  $\Gamma^\infty(T)$  indique à chaque pression statique  $P_{\text{stat}}$  la valeur du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$  nécessaire pour que le minimum de l'oscillation de pression au point focal atteigne la pression de cavitation  $P_{\text{cav}}$  à cette température  $T$ . Cette courbe garde un sens dans la région où  $P_{\text{stat}} < 0$  : bien que cette situation ne soit pas accessible expérimentalement, il y a toujours une valeur du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$  solution de ce problème et dont la valeur exacte dépend des non-linéarités.

Notre connaissance de ces non-linéarités est limitée, mais nous pouvons en décrire qualitativement l'effet. Imaginons que nous réalisons l'expérience à partir du liquide à une pression  $P_{\text{stat}}$  négative proche de  $P_{\text{cav}}$ . Une faible amplitude de

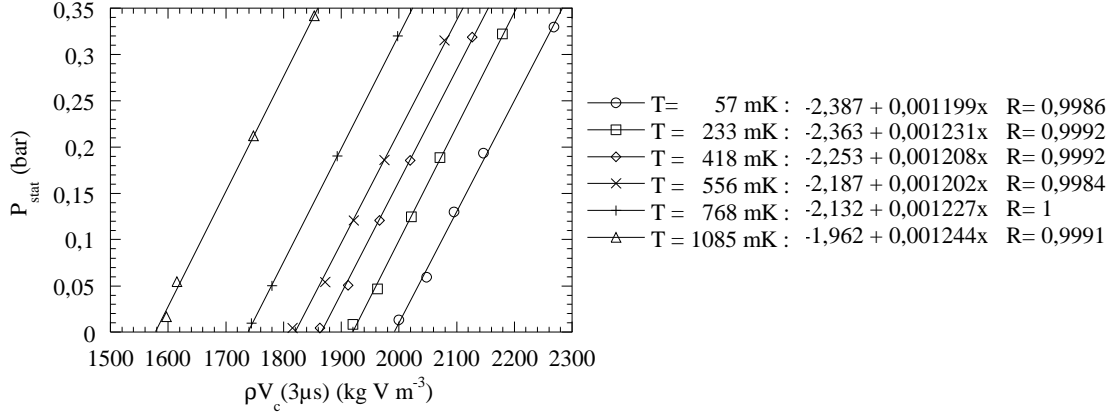


FIG. 3.29 – Pression statique en fonction du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c(P_{\text{stat}}, T)$  à différentes températures. Une régression linéaire à chaque température donne des droites parallèles.

l'onde acoustique suffirait alors pour atteindre  $P_{\text{cav}}$ . Cette amplitude peut être rendue aussi petite que l'on veut en faisant tendre  $P_{\text{stat}}$  vers  $P_{\text{cav}}$ , et la focalisation de l'onde acoustique est par conséquent linéaire malgré la proximité de la limite spinodale. Nous savons donc d'une part que l'ordonnée à l'origine de  $\Gamma^\infty(T)$  est égale à  $P_{\text{cav}}$ , et d'autre part que la pente à l'origine de  $\Gamma^\infty(T)$  est donnée par l'équation 3.25. En l'absence de non-linéarités, la courbe  $\Gamma^\infty(T)$  se réduirait à une droite ayant cette pente et rencontrant l'axe des ordonnées à la pression  $P_{\text{cav}}$ .

Cependant, dans la situation réelle, la pression statique à laquelle est réalisée l'expérience est éloignée de  $P_{\text{cav}}$  et les non-linéarités interviennent : d'une part l'amplitude de l'onde devient plus grande ; d'autre part, dans la partie de l'onde correspondant à une détente, plus la pression diminue et plus le liquide devient compressible, ce qui rend l'excitation de moins en moins efficace. Pour une excitation donnée, la pression minimale atteinte est donc plus élevée qu'elle ne le serait si le régime demeurait linéaire. Dans la partie de l'onde correspondant à une compression, c'est le contraire qui se produit : l'excitation est de plus en plus efficace et la pression maximale atteinte devient plus grande que dans le régime linéaire. Les grandes oscillations de pression au point focal sont donc asymétriques : les parties négatives sont plus larges et moins profondes que l'oscillation sinusoïdale que donnerait un régime linéaire, tandis que les parties positives sont plus étroites et plus hautes. Cet effet est d'autant plus prononcé que la pression statique initiale est grande, et la courbe  $\Gamma^\infty(T)$  est donc concave.

Cette prédiction est confirmée par les simulations numériques de C. Appert *et al.* [86] et par les premiers résultats expérimentaux de mesure de la densité du liquide au point focal [68].

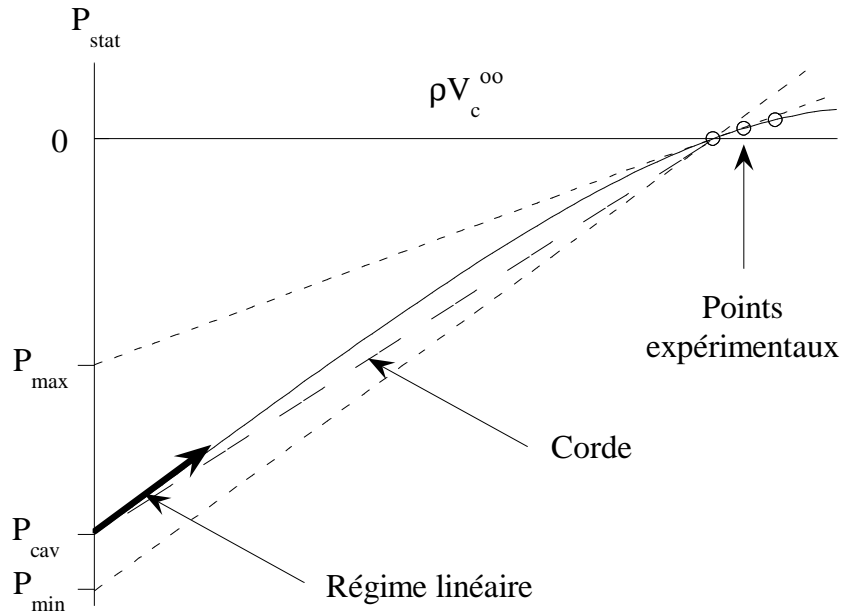


FIG. 3.30 – Illustration de la détermination de l’encadrement de la pression de cavitation (voir texte).

### Majoration de la pression de cavitation

Afin de nous affranchir de l’incertitude sur la détermination du facteur de qualité, nous commençons par tracer sur la figure 3.29 la pression statique  $P_{\text{stat}}$  en fonction du paramètre  $\rho(P_{\text{stat}})V_c(P_{\text{stat}}, T)$ , où  $V_c$  est la tension de cavitation mesurée pour des salves de  $3 \mu\text{s}$ . Nous appellerons  $\Gamma(T)$  cette courbe. Le facteur de qualité peut être considéré comme indépendant de la pression, car le couplage de la céramique au liquide est faible et l’impédance acoustique de ce dernier varie peu (cet argument sera détaillé dans la partie concernant l’hélium 4, *cf.* § 3.3.3).  $\Gamma(T)$  se déduit donc de  $\Gamma^\infty(T)$  par une affinité orthogonale relativement à l’axe des ordonnées : comme  $\Gamma^\infty(T)$ , la courbe  $\Gamma(T)$  est donc concave et rencontre l’axe des ordonnées à la pression de cavitation.

Pour les six températures considérées, nous trouvons six droites parallèles à 2,1% près. Cela ne garantit cependant pas la linéarité de la relation entre  $\Delta P$  et  $V$  : étant donné le faible domaine de pression couvert par les mesures, les droites obtenues par régression linéaire au travers des points expérimentaux ne constituent en réalité qu’une bonne approximation de la tangente à  $\Gamma(T)$  au voisinage des tensions de cavitation.  $\Gamma(T)$  étant concave, elle est nécessairement située au dessous de ses tangentes, et en particulier la pression de cavitation est inférieure à l’ordonnée à l’origine de la droite obtenue expérimentalement. Ce raisonnement est illustré sur la figure 3.30.

On obtient par cette méthode des pressions de cavitation inférieures à  $-1,9$  bar ( $-2,4$  bar à basse température); nous estimons l’incertitude sur les majorants à

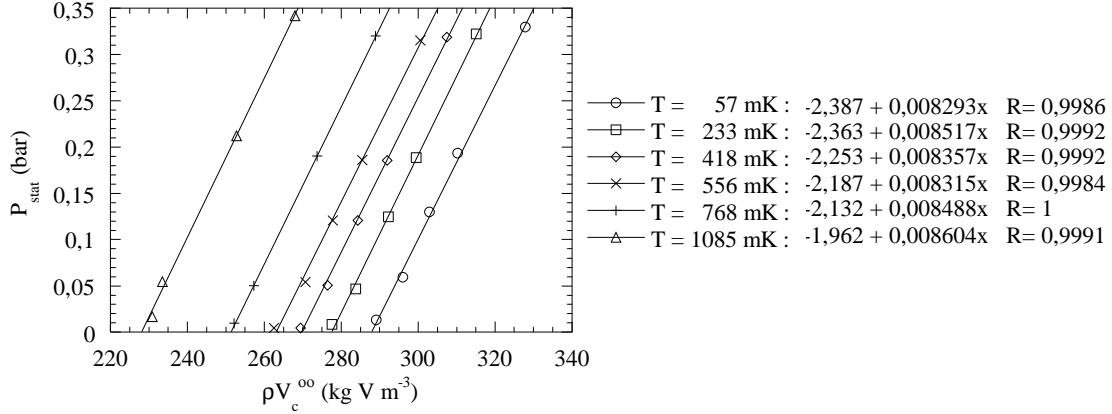


FIG. 3.31 – Pression statique en fonction du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$  à différentes températures. Une régression linéaire à chaque température donne des droites parallèles.

$\pm 0,05$  bar.

### Comparaison avec l'approximation linéaire

Nous allons maintenant comparer la pente calculée en régime linéaire à la pente commune des droites obtenues par régression linéaire au travers des points expérimentaux. Cela nécessite l'extrapolation de  $V_c$  à durée de salve infinie, c'est à dire la connaissance du facteur de qualité  $Q$ . La figure 3.31 représente, pour six températures données, les points de  $\Gamma^\infty(T)$  obtenus expérimentalement en utilisant la valeur  $Q = 119$  mesurée (*cf.* § 3.2.3). Un ajustement linéaire à travers ces groupes de points permet d'estimer la pente de  $\Gamma^\infty$  au voisinage du seuil de cavitation à  $845 \pm 16 \text{ Pa kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ V}^{-1}$ , tandis que le modèle linéaire laissait prévoir une pente de  $1035 \text{ Pa kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ V}^{-1}$ . Ceci est cohérent avec l'existence d'effets non-linéaires du type de ceux décrits au paragraphe 3.2.6.

Afin d'estimer de quelle manière ce résultat est affecté par l'incertitude sur  $Q$ , nous calculons le rapport entre la pente de la tangente et la pente du régime linéaire en fonction de  $Q$ . Le résultat est représenté sur la figure 3.32 ; la courbe n'est pas monotone car  $Q$  intervient à la fois dans le calcul de la pente du régime linéaire et dans l'extrapolation de la tension à durée infinie. Un rapport supérieur à l'unité serait incompatible avec les non-linéarités attendues ; ceci n'intervient que pour les valeurs de  $Q$  supérieures à 195, limite située au delà des incertitudes dans la détermination de  $Q$  : le comportement attendu est donc qualitativement vérifié.

Le degré de non-linéarités est toutefois plus faible que les simulations numériques ne le laissaient prévoir [86] et que les premières expériences de mesure directe de la densité au point focal ne semblent l'indiquer [68] : le rapport des pentes aux intersections avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de  $\Gamma^\infty$  est de l'ordre de 0,8 au lieu de 0,21. De plus cette valeur du rapport des pentes est

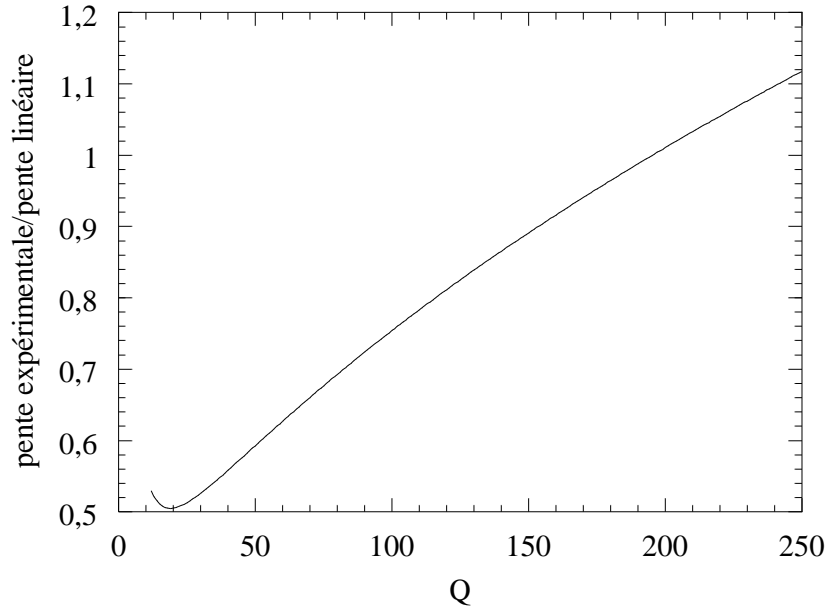


FIG. 3.32 – Rapport des pentes des courbes  $\Gamma^\infty(T)$  mesurée expérimentalement au voisinage du seuil et calculée dans la limite linéaire en fonction du facteur de qualité  $Q$ .

obtenue avec la valeur du déplacement  $\zeta$  de la surface de la céramique à pression statique nulle estimée dans notre expérience (divisée par deux pour tenir compte de la géométrie sphérique) et elle conduit à  $P_{\text{cav}} = -1,73$  bar en raison des non linéarités, valeur éloignée des pressions de cavitation estimées par notre étude. On peut invoquer le rôle de la géométrie pour interpréter ce désaccord. Les expériences décrites dans cette thèse ont été réalisées en géométrie ouverte (avec une céramique hémisphérique), tandis que les simulations et les expériences de X. Chavanne *et. al.* sont réalisées en géométrie fermée (respectivement pour une céramique sphérique et pour une céramique hémisphérique fermée par une plaque de verre, ce qui est en principe équivalent). Dans nos expériences, contrairement aux simulations, il n'y a donc pas de nœud de vitesse au point focal, ce qui constitue peut-être une différence majeure. Il serait intéressant de disposer de simulations numériques en géométrie ouverte, mais cela correspond à un problème à deux dimensions plus délicat à résoudre que le problème sphérique à une dimension.

### Encadrement de la pression de cavitation

Nous allons une nouvelle fois utiliser la concavité des courbes  $\Gamma^\infty(T)$  afin de donner un minorant de la pression de cavitation grâce au raisonnement suivant, illustré sur la figure 3.30. A chaque température, la pente des cordes joignant le point d'intersection de  $\Gamma^\infty(T)$  avec l'axe des ordonnées aux points expérimentaux

est inférieure à la pente de la tangente en ce point d'intersection. La droite de pente égale à cette dernière et passant par les points expérimentaux à la pression la plus basse rencontre donc l'axe des abscisses à une pression inférieure à la pression de cavitation. Cette méthode donne pour minorant de la pression de cavitation à 57 mK une pression de  $-3$  bar, valeur proche de la pression spinodale. Nous estimons l'incertitude sur les minorants à  $\pm 0,2\%$ ; en raison de l'incertitude sur les paramètres  $Q$  et  $R$  qui interviennent dans le calcul de la pente du régime linéaire, il peut également y avoir une erreur systématique de  $\pm 0,15$  bar.

En déterminant le majorant et le minorant pour chacune des températures considérées, on obtient une région dans laquelle la ligne de cavitation doit se situer, comme le montre la figure 3.33. On peut comparer à l'estimation théorique de la pression spinodale par Maris :  $-3,097$  bar [27]. Cette valeur est calculée à température nulle. Nous préférons donc tracer l'estimation dépendant de la température de Guilleumas *et al.* [32]. Pour donner une idée de la pression de cavitation correspondante, nous utilisons les valeurs du paragraphe 3.2.4 : nous calculons  $P_{\text{cav}} - P_s$  en utilisant l'énergie d'activation calculée à température nulle et le préfacteur déduit de la formule 3.19. Le résultat obtenu est en accord avec les prédictions théoriques.

### Estimation du préfacteur $\Gamma_0 V \tau$

Nous utilisons l'encadrement de la pression de cavitation pour encadrer le préfacteur  $\Gamma_0 V \tau$  selon la méthode présentée au paragraphe 3.2.4. Nous ajustons les deux bornes de la pression avec une loi  $P_c(0) + C T^{4/3}$ , en omettant la valeur à la température la plus basse pour laquelle l'effet de la remontée du seuil est déjà sensible (voir Fig. 3.34). La pression de cavitation à température nulle, c'est à dire la pression spinodale dans le régime thermique, est un paramètre ajustable; le résultat est différent de l'estimation théorique mais nous faisons ce choix car nous nous intéressons au terme  $C = \partial P / \partial T^{4/3}$ . Au paragraphe 3.2.4 le préfacteur dépendait de  $\partial P / \partial V$  : cette dépendance est maintenant contenue dans l'extrapolation en pression. On obtient  $C$  compris entre  $0,39$  et  $0,5$  bar  $\text{K}^{-4/3}$ , soit  $\Gamma_0 V \tau$  compris entre  $8,4 \cdot 10^9$  et  $1,25 \cdot 10^{12}$ . De nouveau, ces valeurs sont un peu inférieures à l'estimation théorique.

Dans ce calcul, et dans celui du paragraphe 3.2.4, nous avons supposé la pression spinodale indépendante de la température. Si l'on utilisait la dépendance en température calculée par Guilleumas *et al.* (voir Fig. 3.33), le préfacteur déduit des mesures serait encore plus inférieur à l'estimation théorique. Cependant, l'extrapolation des mesures de la vitesse du son par Abraham *et al.* semblent indiquer un comportement non monotone, la pression spinodale atteignant un minimum de  $-3,2$  bar à  $0,5$  K [61]; ce comportement tendrait à augmenter la valeur du préfacteur déduite des mesures. Au vu de ces différences, nous nous contentons donc de donner le résultat dans le cas d'une limite spinodale indépendante de la température.

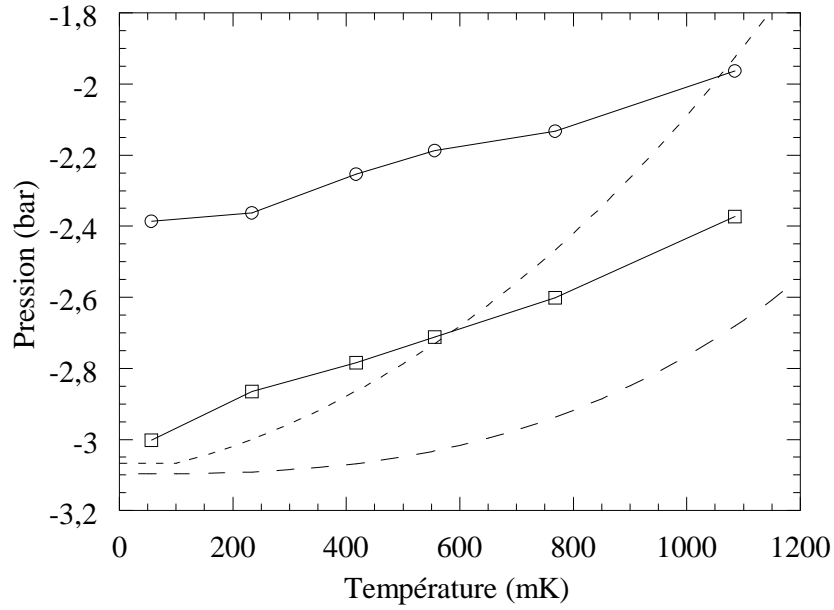


FIG. 3.33 – Délimitation de la zone où se situe la ligne de cavitation. La borne supérieure (○) est obtenue en extrapolant les mesures expérimentales à différentes pressions statiques et la borne inférieure (□) par le calcul en régime linéaire. La ligne en pointillés longs indique la pression spinodale calculée par Guilleumas *et al.* [32] et la ligne en pointillés courts la pression de cavitation estimée dans le régime thermique avec un préfacteur  $\Gamma_0 V \tau = 6 \cdot 10^{14} T$ .

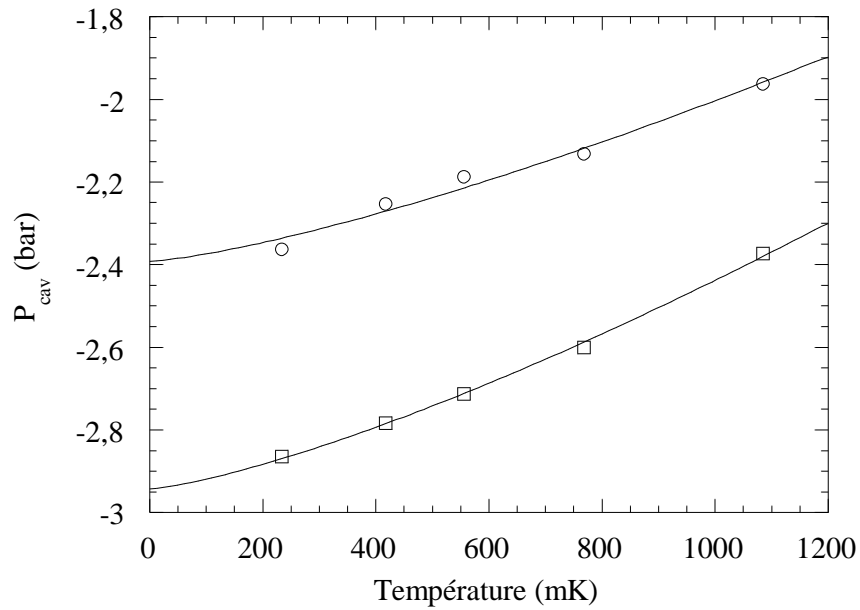


FIG. 3.34 – Ajustement des bornes de l'encadrement de la pression de cavitation par des lois de puissance avec un exposant  $4/3$ .



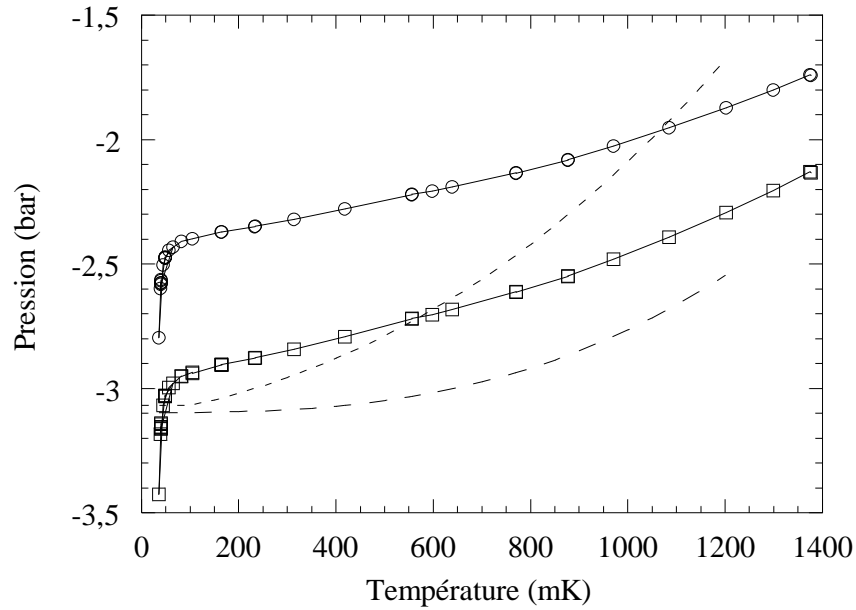


FIG. 3.35 – Estimation de la pression de cavitation à basse température. La ligne en pointillés longs indique la pression spinodale calculée par Guilleumas *et al.* [32] et la ligne en pointillés courts la pression de cavitation estimée dans le régime thermique avec un préfacteur  $\Gamma_0 V \tau = 6 \cdot 10^{14} T$ .

### 3.2.7 Retour sur les mesures à basse température

En utilisant les deux pentes obtenues par l'étude en pression, on peut convertir les mesures de la tension seuil présentées au paragraphe 3.2.4 en pression de cavitation. Le résultat est représenté sur la figure 3.35. On voit que si la pression de cavitation à 100 mK est aussi proche de la limite spinodale que le prévoit la théorie, la brusque remontée du seuil de cavitation à basse température se traduit par le fait que la pression de cavitation traverse la ligne spinodale, ce qui est impossible. Il nous semble difficile à expliquer que la courbe soit plus éloignée de la limite spinodale que ne le prévoit la théorie. Pour expliquer cet effet, nous devons à nouveau invoquer les non linéarités et supposer qu'elles deviennent nettement plus importantes aux pressions atteintes dans la remontée, beaucoup plus proches de la limite spinodale; l'estimation de la figure 3.35 serait alors erronée, et la pression de cavitation réelle pourrait demeurer supérieure à la limite spinodale.

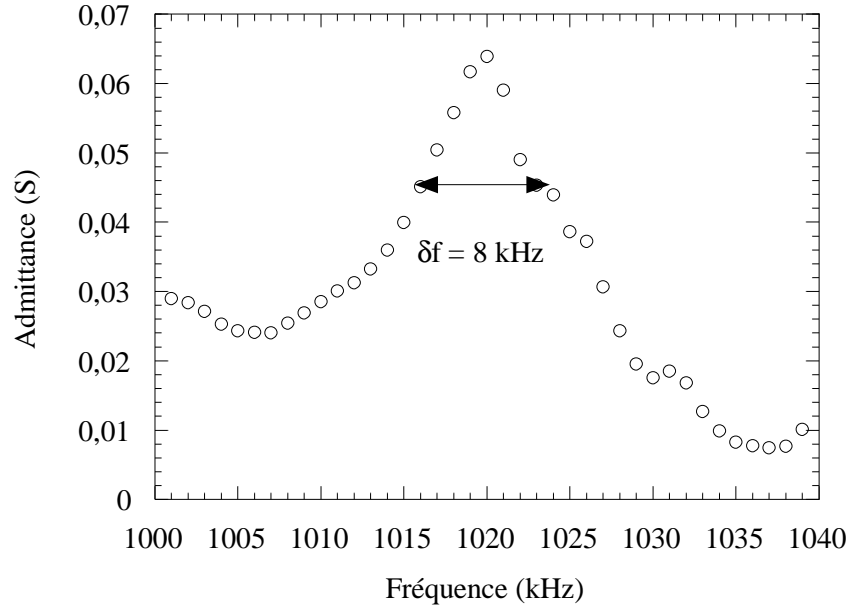


FIG. 3.36 – Admittance électrique de la céramique dans l'hélium 4 liquide à 181 mK en fonction de la fréquence.

### 3.3 Cavitation dans l'hélium 4

Nous avons ensuite répété l'expérience de cavitation dans la même cellule expérimentale avec de l'hélium 4. La plupart des méthodes et difficultés expérimentales ont déjà été décrites dans la partie 3.2 concernant l'hélium 3. Aussi nous contenterons nous ici de donner les résultats en suivant un plan identique et en ne détaillant que les différences entre ces deux expériences.

#### 3.3.1 Caractéristiques électriques de la céramique

L'impédance électrique de la céramique est mesurée en fonction de la fréquence à faible amplitude en utilisant un montage générateur de courant et en mesurant la tension aux bornes de la céramique. Elle présente un minimum  $R = 15,65 \Omega$  à la fréquence de résonance  $f_0 = 1020 \text{ kHz}$ . L'ajustement par l'impédance du circuit équivalent conduit à un facteur de qualité  $Q \simeq 140$ . La largeur caractéristique de la courbe représentant l'admittance en fonction de la fréquence (écart  $\delta f$  entre les fréquences pour lesquelles  $Y = Y_{\max}/\sqrt{2}$ , voir Fig. 3.36) vaut  $\delta f \simeq 8 \text{ kHz}$ , soit  $Q = \delta f/f \simeq 127$ . Nous verrons au paragraphe 3.3.3 une meilleure manière d'estimer le facteur de qualité.

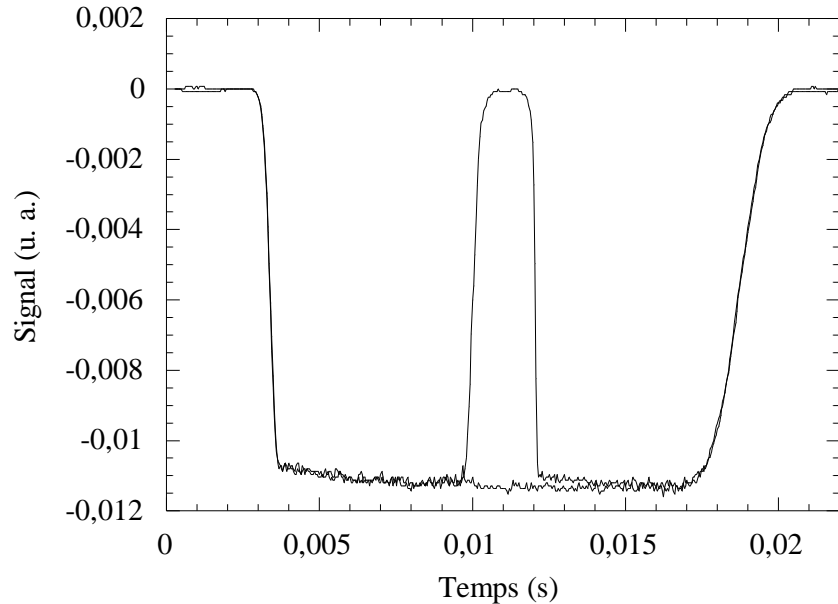


FIG. 3.37 – Signal de transmission de la lumière enregistré en présence de l’obturateur de faisceau. Les deux enregistrements sont réalisés dans les mêmes conditions expérimentales : l’un d’eux met en évidence l’existence d’une bulle qui croît jusqu’à masquer complètement le faisceau incident.

### 3.3.2 Détection des bulles

Nous avons conservé le même dispositif de détection que pour l’hélium 3, avec l’obturateur de faisceau. La figure 3.37 montre le type de signal observé en transmission ; à faible pression la bulle occulte complètement le faisceau, ce qui explique que le signal détecté s’annule. Aux différentes pressions et températures, le caractère stochastique de la cavitation est confirmé.

### 3.3.3 Statistique de cavitation

#### Influence de la fréquence d’excitation et de la durée des salves sur la tension seuil

En procédant de la même façon qu’au paragraphe 3.2.3, on trouve une fréquence de résonance mécanique légèrement différente de celle mesurée dans l’hélium 3 : 1030,7 kHz (voir Fig. 3.38). Ceci peut être lié à la différence d’impédance acoustique entre les deux liquides.

En suivant le raisonnement du paragraphe 3.2.3, on trouve  $Q \simeq 99,7$  grâce à la mesure de la tension seuil en fonction du nombre de cycles de la salve (*cf.* Fig. 3.39).

La valeur obtenue est légèrement inférieure à celle de l’hélium 3 ( $Q \simeq 119$ ). On peut attribuer ce comportement à la différence de couplage entre la céramique et

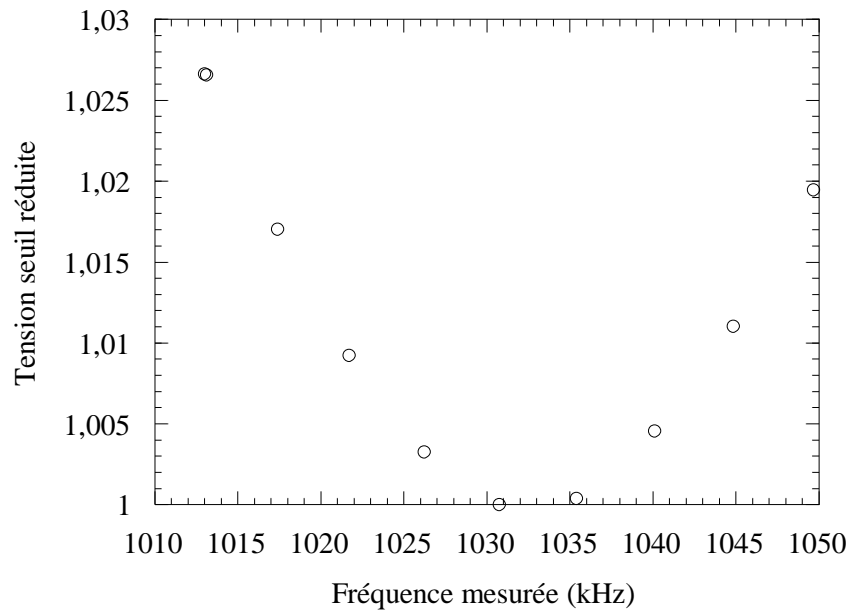


FIG. 3.38 – Seuil de cavitation rapporté à sa valeur minimale en fonction de la fréquence d’excitation de la céramique pour l’hélium 4. La fréquence de résonance vaut 1030,7 kHz pour les salves de six cycles.

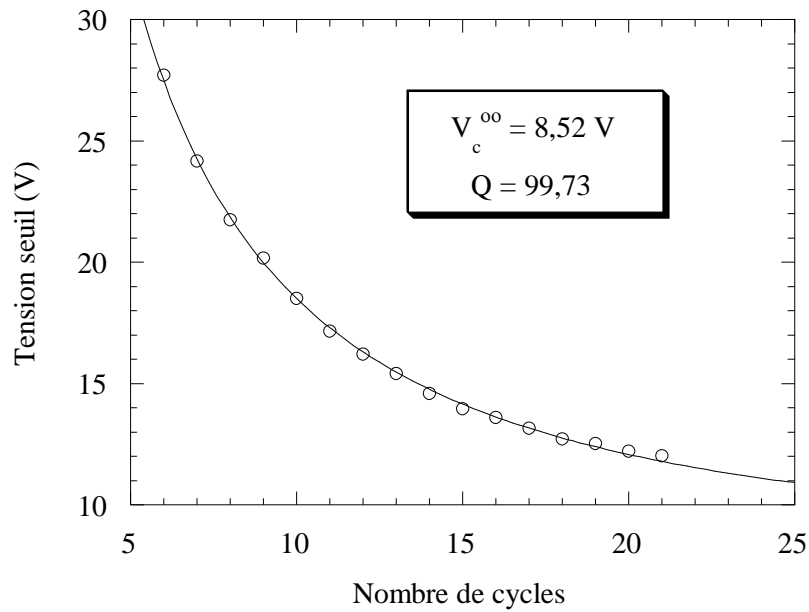


FIG. 3.39 – Seuil de cavitation en fonction du nombre de cycles par salve pour l’hélium 3. La courbe est un ajustement avec l’équation 3.5. On trouve  $Q \simeq 99,7$ .

chacun des deux liquides. En première approximation, le rapport de la puissance acoustique émise  $\mathcal{P}_a$  et de la puissance dissipée  $\mathcal{P}$  dans la céramique vaut [60, p. 54] :

$$\frac{\mathcal{P}_a}{\mathcal{P}} = \frac{4}{\pi} \frac{\rho_{\text{liq}} c_{\text{liq}}}{\rho_{\text{tran}} c_{\text{tran}}} Q \quad (3.27)$$

où l'indice « liq » désigne le liquide et l'indice « tran » le transducteur. Pour ce dernier, en notant  $e$  son épaisseur et  $R_{\text{tran}}$  son rayon intérieur :

$$\rho_{\text{tran}} = \frac{M}{\frac{2}{3}\pi((R_{\text{tran}} + e)^3 - R_{\text{tran}}^3)} = 7338 \text{ kg m}^{-3} \quad (3.28)$$

et, comme les deux faces de la céramique constituent des nœuds de pression :

$$c_{\text{tran}} = \lambda f_0 = 2e f_0 = 4086 \text{ m s}^{-1} \quad (3.29)$$

En utilisant les facteurs de qualité mesurés dans chaque cas, le rapport  $\mathcal{P}_a/\mathcal{P}$  vaut 6,3 % pour l'hélium 3 et 14,6 % pour l'hélium 4. La puissance acoustique émise n'est donc pas tout à fait négligeable. Sa part dans les pertes d'énergie augmente quand l'impédance acoustique du liquide augmente : par conséquent le facteur de qualité dans l'hélium 4 doit être inférieur de quelques pourcents au facteur de qualité dans l'hélium 3, ce qui est compatible avec nos mesures. Cela justifie également la valeur de l'impédance électrique à résonance plus élevée dans l'hélium 4 que dans l'hélium 3 (respectivement 15,6  $\Omega$  et 12,2  $\Omega$ ). En revanche, pour chaque liquide pris séparément, la variation relative de la puissance acoustique émise avec la pression statique vaut environ 6 % dans la gamme considérée, et le fait d'utiliser un facteur de qualité constant pour l'étude en pression (*cf.* § 3.2.6 et § 3.3.6) est donc justifié.

### 3.3.4 Étude en température

#### Premiers résultats

En raison de la limitation en puissance de notre amplificateur utilisé sur une seule voie (*cf.* § 3.1.3), nous avons dû utiliser des salves de six cycles, voire sept cycles, pour la pression statique la plus élevée et dans le pic d'atténuation du son. La figure 3.40 montre les données brutes obtenues à  $P_{\text{stat}} = 37 \text{ mbar}$ . Elles présentent un maximum autour de 750 mK, là où l'atténuation du son est maximale (*cf.* § 3.3.4).

#### Atténuation

Lambaré *et al.* ont étudié l'atténuation avec le même transducteur dans l'ancienne cellule expérimentale, comme cela est décrit au paragraphe 2.5. Pour corriger nos mesures, nous utilisons un ajustement de l'extrapolation du coefficient

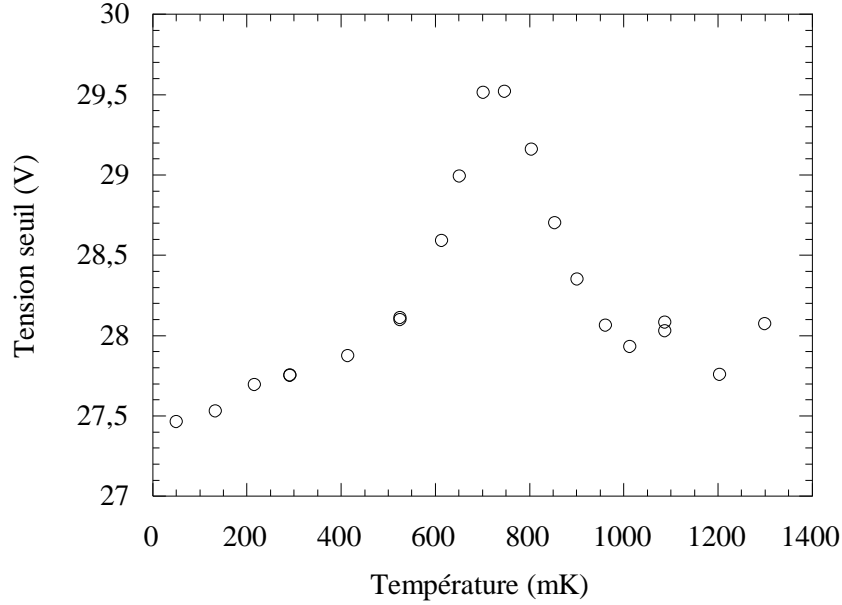


FIG. 3.40 – Tension de cavitation en fonction de la température dans l'hélium 4 à  $P_{\text{stat}} = 37$  mbar.

d'atténuation réduit  $\alpha_r = \frac{\rho c^3}{2\pi^2 f^2} \alpha$  (*cf.* § 3.2.4;  $\alpha_r$  s'apparente à la seconde viscosité [64, 203]) par la formule suivante jusqu'à 850 mK et une atténuation constante au delà :

$$\begin{aligned} \alpha_r(T) &= 7,013 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{551,784}{T^2}} + 8,127 \cdot 10^{-4} e^{-\left(\frac{T-749,068}{90,7226}\right)^2} && \text{pour } T \leq 750 \text{ mK} \\ \alpha_r(T) &= 1,201 \cdot 10^{-3} e^{-\left(\frac{T-763,415}{204,917}\right)^2} && \text{pour } T \geq 760 \text{ mK} \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec  $T$  exprimé en mK et  $\alpha_r$  en Pa.s.

### Résultats finals

Les résultats obtenus après la correction indiquée au paragraphe précédent sont représentés sur la figure 3.41. Ils confirment les mesures précédemment effectuées dans notre laboratoire [57], interprétées par la transition d'un régime de cavitation quantique (au dessous de 600 mK pour la température statique, soit une température au point focal estimée à 200 mK en raison d'un refroidissement adiabatique par l'onde acoustique (*cf.* § 2.5)) où le seuil de cavitation est indépendant de la température vers un régime d'activation thermique à plus haute température où ce seuil est une fonction décroissante (*cf.* § 2.5). Les mesures aux températures supérieures à 750 mK montrent de légères oscillations pour lesquelles nous n'avons pas pu trouver d'explication satisfaisante. Des effets de diffraction de l'onde dépendants de la température en raison de la variation de vitesse du son avaient été avancés pour l'ancienne expérience [60]. Cependant les

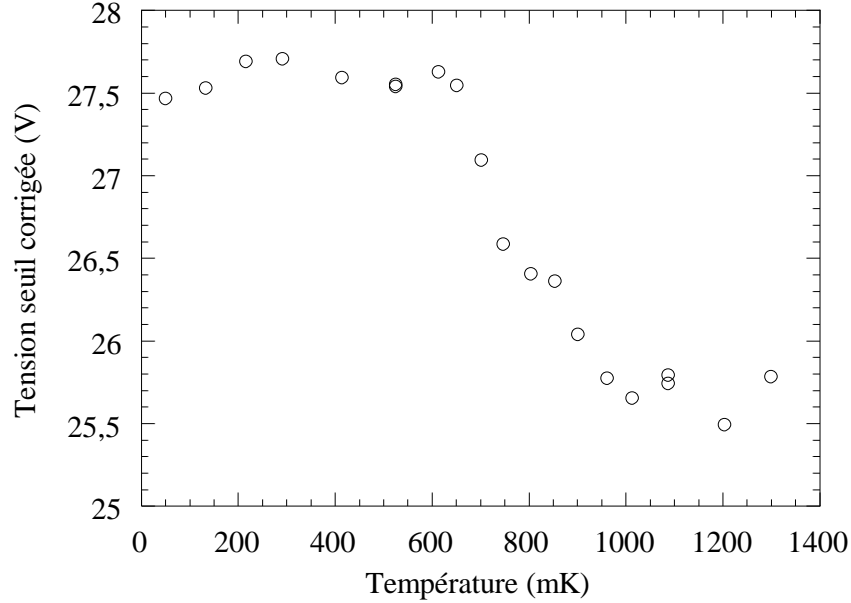


FIG. 3.41 – Tension seuil corrigée en fonction de la température dans l’hélium 4 à  $P_{\text{stat}} = 37$  mbar.

mesures dans l’hélium 3 n’exhibent aucune oscillation (*cf* § 3.2.4). Nous décidons donc d’ignorer dans notre étude en pression ces hautes températures auxquelles l’atténuation dans notre expérience n’est pas bien comprise.

### Effet de la dissipation

Nous avons limité nos mesures aux températures inférieures à 1,5 K : l’hélium 4 est donc superfluide dans toutes nos expériences. Aussi le problème de gradients thermiques dans la cellule abordé au § 3.2.4 ne se pose pas. La dissipation due à la céramique et à l’absorption du laser existe toujours, mais le superfluide assure l’homogénéité thermique dans la cellule. Cependant cette dissipation continue à influencer sur la température minimale atteinte par l’expérience. À basse température, nous avons pu atteindre 49 mK en utilisant une fréquence de répétition de 0,5 Hz et en conservant l’obturateur optique décrit au paragraphe 3.2.4.

On peut s’interroger sur l’éventualité d’un échauffement du liquide dans la région focale au moment de la mesure, car la chaleur qui sort de la céramique se propage balistiquement et commence à atteindre le centre en même temps que l’onde acoustique. Cependant la conductivité thermique de la céramique ralentit notablement la sortie de l’onde de chaleur des couches éloignées de la surface. Le coefficient de diffusion thermique dépend du diamètre  $d$  des grains du matériau, estimée à environ  $1 \mu\text{m}$  par observation au microscope [72] :

$$D = \frac{1}{3} c_{\text{tran}} d \quad (3.31)$$

où  $c_{\text{tran}}$  est la vitesse du son dans la céramique. Avec  $c_{\text{tran}} \simeq 4000 \text{ m s}^{-1}$  (*cf.* § 3.3.3, Eq. 3.29), l'épaisseur de céramique susceptible de contribuer à l'échauffement lors de la mesure, c'est à dire dont la chaleur peut sortir en une durée inférieure à six périodes est  $l = \sqrt{6DT} \simeq 90 \mu\text{m}$ . En supposant la dissipation homogène dans le matériau piézoélectrique et la dissipation totale  $E_{\text{diss}}$  répartie durant un nombre  $Q$  d'oscillations, l'énergie effective qui contribue au réchauffement est de l'ordre de  $E_{\text{eff}}(l/e) (6/Q) E_{\text{diss}}$ . En prenant pour valeur typique de l'énergie par salve  $dE_{\text{diss}} = 3 \mu\text{J}$  (*cf.* § 3.2.4), on a  $E_{\text{eff}} \simeq 8 \text{ nJ}$ . La surface de la céramique présente une rugosité dont l'échelle est grande devant la longueur d'onde des phonons thermiques, et cette énergie n'est vraisemblablement pas focalisée ; elle sert donc à chauffer tout le volume d'hélium compris dans la demi-sphère délimitée par la céramique, soit  $10^{-6} \text{ m}^3$ . La capacité calorifique  $C$  de ce volume est supérieure à  $3 \mu\text{J K}^{-1}$  pour des températures supérieures à 100 mK [64, p. 16] ; par conséquent, l'échauffement calculé dans ce modèle est inférieur à 3 mK. Cette valeur diminue rapidement quand la température  $T$  augmente, car  $C \propto T^3$ . L'effet considéré semble donc négligeable. Enfin, les courbes obtenues dans cette étude à l'aide de salves de six cycles conduisent aux mêmes résultats pour la température de transition vers un plateau que les anciennes expériences qui utilisaient des salves de soixante-dix cycles, sources de dissipation plus importante. La conclusion concernant l'existence d'un plateau ne semble donc pas mise en doute.

### 3.3.5 Estimation du préfacteur $\Gamma_0 V \tau$

Étant donné ces lacunes d'interprétation à propos du comportement du seuil et de l'atténuation à haute température, nous ne pouvons donner qu'une estimation grossière du préfacteur en utilisant la valeur approximative  $\partial V_c / \partial T \simeq 4 \text{ V K}^{-1}$ . Nous considérerons la pression spinodale comme indépendante de la température dans le domaine de mesures, ce qui est légitime pour l'hélium 4 (*cf.* § 3.3.6).

Les valeurs de l'énergie de barrière obtenues numériquement par Maris [61] pour des écarts à la pression spinodale allant jusqu'à 1 bar sont bien représentées par l'équation 3.14 avec  $\beta = 18,22$  et  $\delta = 2/3$ , le rapport  $E/k_B$  étant exprimé en Kelvin et la pression en bar (voir Fig. 3.23). On a :

$$\frac{E_b}{k_B T} = \ln \left( \frac{\Gamma_0 V \tau}{\ln 2} \right) = \beta \left( \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{V=V_{\text{cav}}} \frac{\partial V_{\text{cav}}}{\partial T^{3/2}} \right)^{2/3} \quad (3.32)$$

Nous réalisons donc un ajustement des mesures de la tension seuil par la formule  $V_c(0) - C T^{3/2}$ , en nous limitant aux températures comprises entre 600 et 1020 mK pour ne pas tenir compte du plateau quantique. Le résultat est représenté sur la figure 3.43 : on trouve  $V_c(0) = 29,31 \text{ V}$  et  $C = 3,77 \text{ V K}^{-3/2}$ . Si l'on suppose en première approximation que la relation entre la pression au point focal et la tension appliquée à la céramique est linéaire et que l'on confond la pression



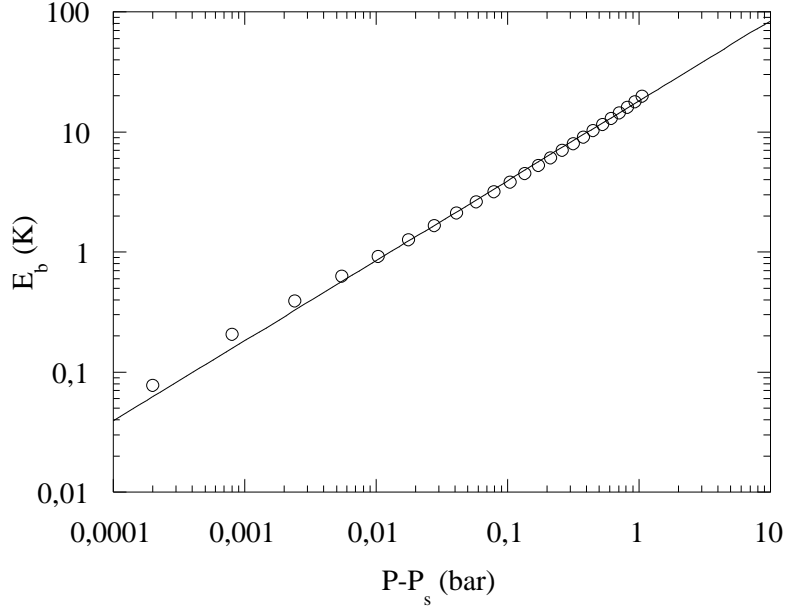


FIG. 3.42 – Barrière d’énergie de cavitation dans l’hélium 4 en fonction de l’écart à la pression spinodale. Les cercles représentent les résultats des calculs numériques de Maris [61] et la courbe est un ajustement en loi de puissance avec un exposant 2/3.

de cavitation à basse température avec la pression spinodale, on obtient :

$$\frac{\partial P_{\text{cav}}}{\partial V_{\text{cav}}} = \frac{P_s}{V_c(T=0)} = -0,325 \text{ bar V}^{-1} \quad (3.33)$$

ce qui conduit à  $E_b/(k_B T) = 20,9$ , soit un préfacteur  $\Gamma_0 V \tau = 8 \cdot 10^8$ . L’estimation théorique habituelle donnerait dans le cas de l’hélium 4 à 0,6 K, avec un rayon critique  $R_c$  de l’ordre de 1 nm (*cf.* § 1.4.1) :

$$\Gamma_0 \simeq \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R_c^3} \frac{k_B T}{h} \simeq 3 \cdot 10^{36} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.34)$$

et avec  $V \tau = 2,5 \cdot 10^{-22} \text{ m}^3 \text{ s}^3$  (*cf.* § 2.4) la valeur  $\Gamma_0 V \tau = 7,2 \cdot 10^{14}$ . Si l’on prenait pour fréquence d’essai  $E_b/h$ , on obtiendrait  $1,5 \cdot 10^{16}$ .

L’écart est nettement plus grand que dans le cas de l’hélium 3. Plusieurs interprétations ont déjà été discutées au paragraphe 3.2.4. Nous pouvons en outre penser au refroidissement adiabatique dû à l’onde (*cf.* § 2.5) : l’échelle de température est faussée et la variation de température au point focal est moindre, ce qui augmente le coefficient  $C$ . Avec l’estimation de Lambaré *et al.*,  $T_{\text{stat}} = 3 T_{\text{foc}}$  (qui fait l’hypothèse que l’entropie n’est déterminée que par les phonons, valable seulement au dessous de 0,6 K), on obtiendrait  $E_b/(k_B T) = 62,6$ , soit un préfacteur  $\Gamma_0 V \tau = 10^{27}$ . En réalité, le refroidissement relatif est moindre pour les températures supérieures à 600 mK car il faut alors prendre en compte la contribution des

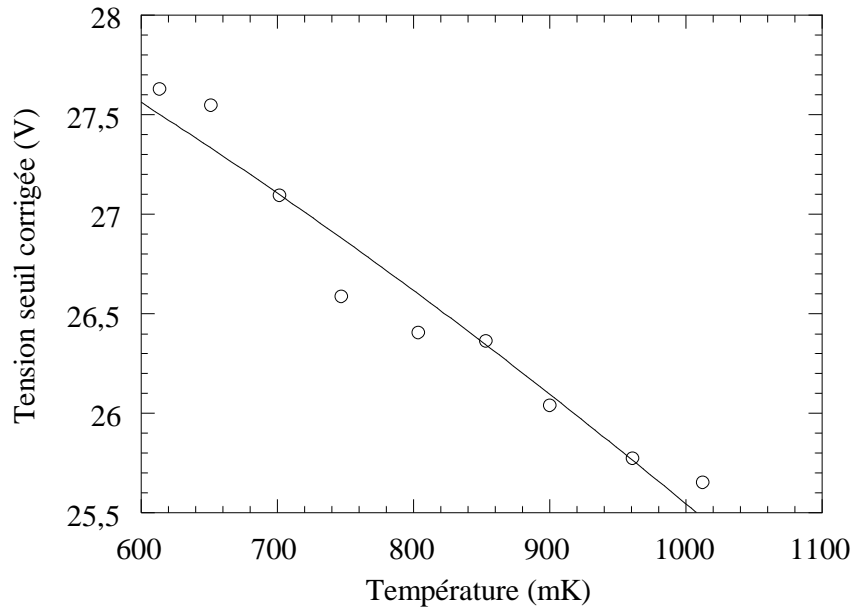


FIG. 3.43 – Ajustement des mesures de la tension seuil par une loi de puissance avec un exposant  $3/2$ .

rotons dans le calcul de l'entropie. Il nous est donc difficile de conclure quant à une valeur précise du préfacteur ; nous verrons cependant au paragraphe 3.3.6 qu'une estimation grossière du refroidissement conduit à une variation de la pression de cavitation compatible avec le préfacteur théorique.

### 3.3.6 Étude en pression

Nous allons maintenant décrire une étude de la dépendance du seuil de cavitation en fonction de la pression statique dans l'hélium 4. L'objectif de cette étude est double : d'une part estimer la pression de cavitation de la manière détaillée au paragraphe 3.2.6, d'autre part vérifier que le plateau en température demeure et que la température de transition est indépendante de la pression statique et de l'amplitude de l'onde.

#### Résultats bruts

De la même manière que pour l'hélium 3 (*cf.* § 3.2.6), la tension seuil est mesurée à des températures fixées au préalable et à trois pressions statiques différentes. Les résultats bruts, c'est à dire non corrigés de l'atténuation du son, sont représentés sur la figure 3.44.

De nouveau, on constate que la tension seuil à température donnée augmente avec la pression statique, comme cela était attendu.

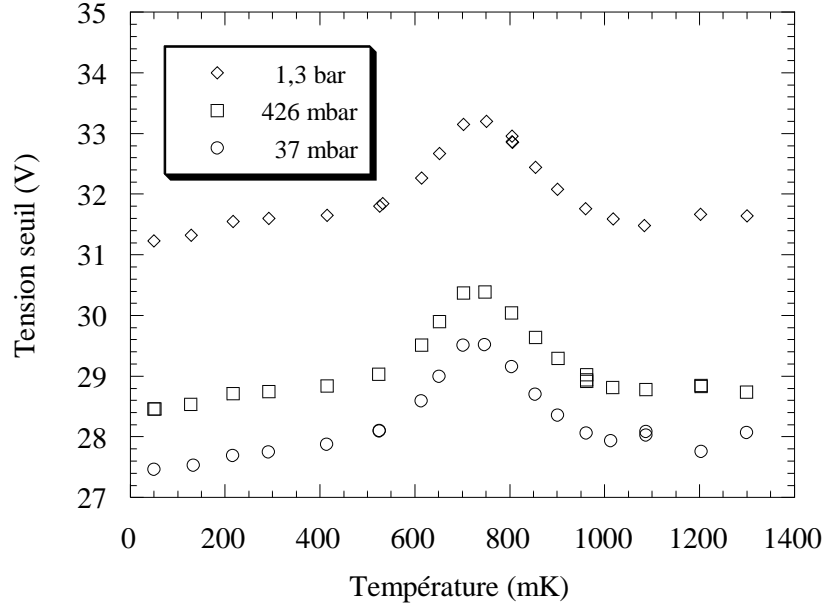


FIG. 3.44 – Tension seuil en fonction de la température à différentes pressions statiques.

### Atténuation

Dans l'hélium 4, la dépendance en pression de l'atténuation du son est peu connue, mais cette atténuation diminue et la température du maximum croît quand la pression augmente. Toutefois, ces effets sont faibles : par exemple, d'après les mesures de Dransfeld *et al.* à pression de vapeur saturante et à 8,4 atm [88], nous les estimons respectivement à  $-2,4$  et  $+1,8\%$   $\text{bar}^{-1}$ . La pression statique maximale que nous avons utilisée étant de 1,3 bar, nous avons par conséquent négligé la variation de la viscosité avec la pression statique. En revanche, dans le calcul de l'absorption du son (*cf.* § 3.2.4, Éq. 3.11), la densité et la vitesse du son interviennent et nous avons tenu compte de leurs variations en pression, selon l'équation d'état proposée par Maris (*cf.* § 1.2.2 et Réf. [28]). Nous obtenons alors les résultats corrigés représentés sur la figure 3.45.

Le plateau dans le seuil de cavitation demeure aux mêmes températures aux différentes pressions statiques.

### Majoration de la pression de cavitation

Nous procédons de la même manière que pour l'hélium 3 (*cf.* § 3.2.6) en traçant la pression statique  $P_{\text{stat}}$  en fonction du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c(P_{\text{stat}}, T)$ . Cependant comme nous savons déjà que l'information procurée par cette figure est contenue dans la figure donnant la pression statique en fonction du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$ , nous ne donnerons que cette dernière (voir Fig. 3.46).

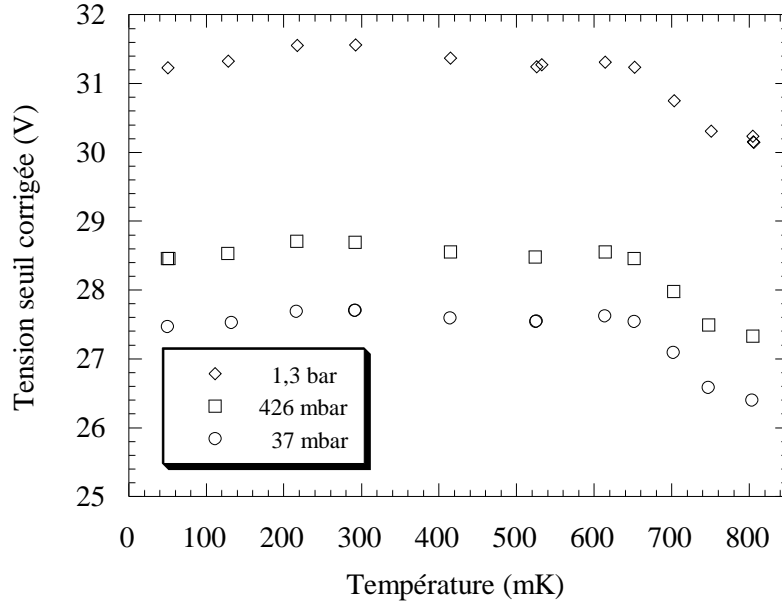


FIG. 3.45 – Tension seuil corrigée en fonction de la température à différentes pressions statiques.

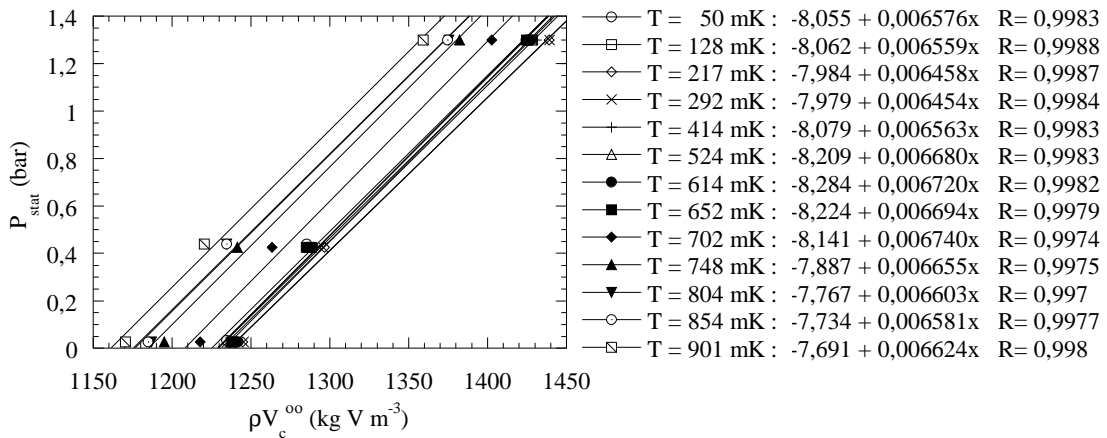


FIG. 3.46 – Pression statique en fonction du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$  à différentes températures. Une régression linéaire à chaque température donne des droites parallèles.

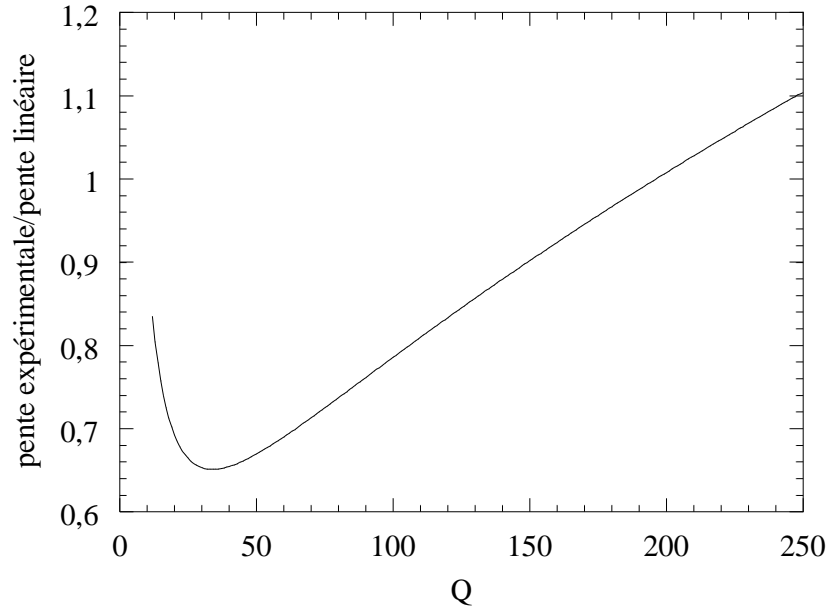


FIG. 3.47 – Rapport des pentes des courbes  $\Gamma^\infty(T)$  mesurée expérimentalement au voisinage du seuil et calculée dans la limite linéaire en fonction du facteur de qualité  $Q$ .

### Comparaison avec l'approximation linéaire

De même que pour l'hélium 3 (*cf.* § 3.2.6), nous représentons sur la figure 3.46 la pression statique  $P_{\text{stat}}$  en fonction du produit  $\rho(P_{\text{stat}})V_c^\infty(P_{\text{stat}}, T)$ . En ne considérant que les treize températures inférieures à 900 mK pour lesquelles l'origine de l'atténuation est bien comprise, nous trouvons treize droites parallèles à 2,5 % près, avec une pente de  $660 \pm 15 \text{ Pa kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ V}^{-1}$ , tandis que les paramètres de la céramique (*cf.* § 3.3.1) laissaient prévoir une pente de  $899 \text{ Pa kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ V}^{-1}$ . Ceci indique l'existence d'effets non-linéaires qui diminuent l'efficacité de la céramique aux grandes amplitudes. Cette conclusion qualitative n'est pas affectée par l'incertitude sur le facteur de qualité  $Q$  : la figure 3.47 montre que les non-linéarités ne disparaissent que pour  $Q > 196$ , limite située au delà des incertitudes dans la détermination de  $Q$ . L'amplitude des non-linéarités donnée par cette méthode est toutefois plus faible que celle qui était attendue [86] : le rapport des pentes aux intersections avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées de  $\Gamma^\infty$  est de l'ordre de 0,8 au lieu de 0,23. De plus cette valeur du rapport des pentes est obtenue avec la valeur du déplacement  $\zeta$  de la surface de la céramique à pression statique nulle estimée dans notre expérience (divisée par deux pour tenir compte de la géométrie sphérique) et elle conduit à  $P_{\text{cav}} = -5,92 \text{ bar}$  en raison des non linéarités, valeur éloignée des pressions de cavitation estimées par notre étude. De même que pour l'hélium 3, nous nous interrogeons sur le rôle de la géométrie (ouverte ou fermée, *cf.* § 3.2.6) dans ce désaccord.

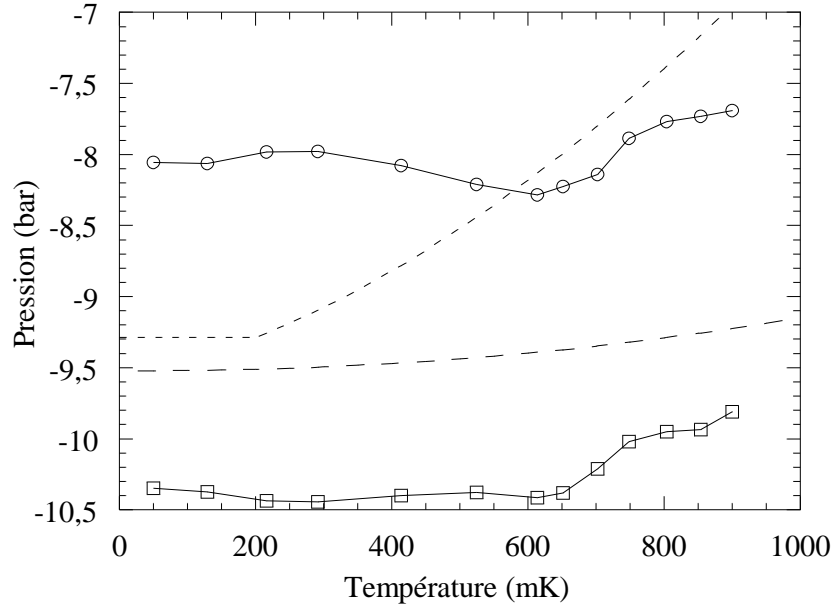


FIG. 3.48 – Délimitation de la zone où se situe la ligne de cavitation. La borne supérieure ( $\circ$ ) est obtenue en extrapolant les mesures expérimentales à différentes pressions statiques et la borne inférieure ( $\square$ ) par le calcul en régime linéaire. La ligne en pointillés longs indique la pression spinodale calculée par Guilleumas *et al.* [32] et la ligne en pointillés courts la pression de cavitation estimée dans le régime thermique avec un préfacteur  $\Gamma_0 V \tau = 1,2 \cdot 10^{15} T$ .

### Encadrement de la pression de cavitation

En déterminant le majorant et le minorant de la pression de cavitation pour chacune des températures considérées selon la méthode exposée au § 3.2.6, nous délimitons une zone de pressions négatives dans laquelle la pression de cavitation doit se situer. Le résultat est représenté sur la figure 3.48. Nous estimons l'incertitude sur les majorants à  $\pm 0,2$  bar et celle sur les minorants à  $\pm 0,2\%$ ; en raison de l'incertitude sur les paramètres  $Q$  et  $R$  qui interviennent dans le calcul de la pente du régime linéaire, il peut également y avoir une erreur systématique de  $\pm 0,5$  bar.

On peut comparer à l'estimation théorique de la pression spinodale par Maris :  $-9,522$  bar [28]. Cette valeur est calculée à température nulle. Nous préférons donc tracer l'estimation dépendant de la température de Guilleumas *et al.* [32]; toutefois, la variation entre 0 et 1 K est faible (quelques pourcents [32, 37]). Nous traçons également la pression de cavitation correspondante déduite des valeurs du paragraphe 3.3.5 : nous calculons  $P_{\text{cav}} - P_s$  en utilisant l'énergie d'activation calculée à température nulle et le préfacteur déduit de la formule 3.34; au dessous de 200 mK, la pression de cavitation devient constante et correspond au régime de cavitation quantique. On distingue un plateau dans les données déduites des

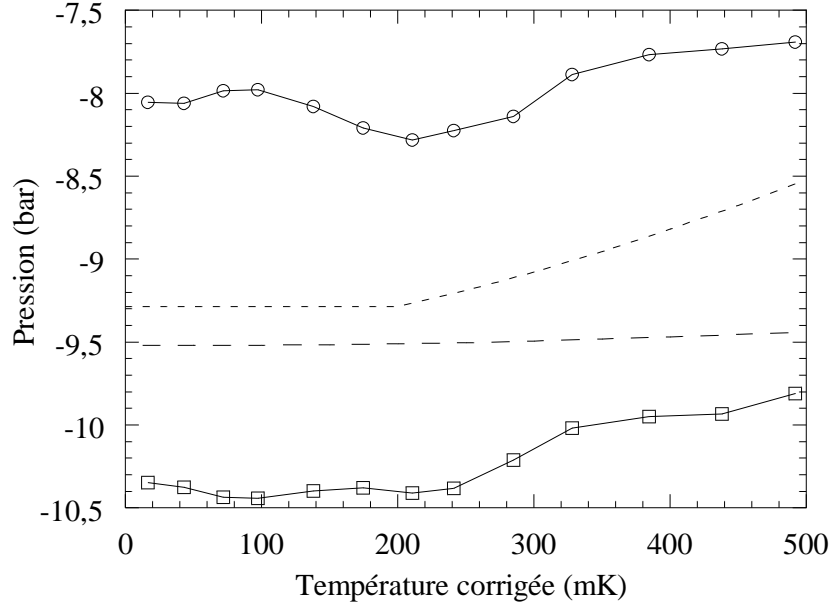


FIG. 3.49 – Délimitation de la zone où se situe la ligne de cavitation en fonction de la température au point focal estimée avec l'équation 3.35. La ligne en pointillés longs indique la pression spinodale calculée par Guilleumas *et al.* [32] et la ligne en pointillés courts la pression de cavitation estimée dans le régime thermique avec un préfacteur  $\Gamma_0 V \tau = 1,2 \cdot 10^{15} T$ .

mesures expérimentales au dessous de 600 mK.

La différence entre l'expérience et la théorie est attribuée à un refroidissement adiabatique par l'onde acoustique, qui rend la température au point focal  $T_{\text{foc}}$  inférieure à la température statique lue  $T_{\text{stat}}$  (*cf.* § 2.5). Un raisonnement simple donne  $T_{\text{foc}} \simeq T_{\text{stat}}/3$  pour  $T_{\text{stat}} \leq 600$  mK, zone de température où l'entropie est dominée par les phonons. Aux températures plus élevées, il faut faire intervenir les rotons et la relation entre  $T_{\text{foc}}$  et  $t_{\text{stat}}$  n'a pas une forme simple. Pour estimer  $T_{\text{foc}}$ , nous utilisons les lignes isentropiques calculées par Maris dans le diagramme  $(P, T)$  [61]. Par exemple, si  $T_{\text{stat}} = 0,8$  K, sans refroidissement on aurait  $P_{\text{cav}} - P_s \simeq 1,9$  bar ; l'isentropique passant par 0,8 K et 0 bar atteint la valeur de  $P_{\text{cav}}$  correspondante pour  $T \simeq 0,5$  K. Mais à cette température  $P_{\text{cav}}$  est plus proche de  $P_s$  et le refroidissement doit donc être plus important ; en répétant le raisonnement précédent, on arrive à  $T_{\text{foc}} \simeq 0,38$  K. Afin de tenir compte du refroidissement pour  $T_{\text{stat}}$  compris entre 0,6 K et 0,9 K, nous choisissons l'interpolation grossière suivante :

$$T_{\text{foc}} = \left[ \frac{1}{3} + \left( \frac{0,38}{0,8} - \frac{1}{3} \right) \frac{T_{\text{stat}} - 0,6}{0,8 - 0,6} \right] T_{\text{stat}} \quad (3.35)$$

où les températures sont exprimées en Kelvin. La figure 3.49 donne l'encadrement de la pression de cavitation en fonction de cette température corrigée : les courbes obtenues sont en accord avec les prédictions théoriques de la pression de cavitation

et elles conduiraient à un préfacteur proche de l'estimation théorique.

### 3.4 Conclusion

L'étude de la tension de cavitation en fonction de la température montre dans l'hélium 3 et l'hélium 4 un régime à haute température où le seuil diminue quand la température augmente. Cette variation est qualitativement compatible avec un régime de nucléation par activation thermique. Dans l'hélium 3 l'évaluation quantitative de cette variation (*cf.* § 3.2.4) conduit à un préfacteur inférieur à la prédiction théorique de deux ordres de grandeur. Les mesures répétées dans l'hélium 4 donnent un préfacteur inférieur de six ordres de grandeur. Si l'on considère que la détente due à l'onde est adiabatique, on peut calculer la température au point focal  $T_{\text{foc}}$  à l'instant de la nucléation. Dans l'hélium 3,  $T_{\text{foc}}$  est de l'ordre de la température statique  $T_{\text{stat}}$  ; le désaccord entre les préfacteurs théoriques et expérimentaux est donc réel et nous amène à reconsidérer la forme de la limite spinodale : l'existence possible d'un minimum expliquerait le désaccord actuel. Pour l'hélium 4,  $T_{\text{foc}}$  est de l'ordre de  $T_{\text{stat}}/3$  ; la prise en compte de cet effet conduit à un accord entre les préfacteurs théoriques et expérimentaux.

A basse température l'existence d'un plateau pour le seuil de cavitation dans l'hélium 4 est confirmé. Ce plateau s'étend jusqu'à 0,6 K et n'est pas modifié quand on augmente la pression statique jusqu'à 1,3 bar. En revanche dans l'hélium 3 aucune saturation du seuil n'est observée à basse température, le seuil augmentant même brusquement quand la température descend au dessous de 50 mK. La divergence de la viscosité à basse température ne suffit pas à expliquer cette augmentation, qui contredit les calculs théoriques qui prévoyaient une transition vers un régime de cavitation quantique avec un seuil indépendant de la température au dessous de 120 mK.

L'amélioration de la précision sur la tension de cavitation et l'étude de cette tension en fonction de la pression statique nous ont permis d'encadrer la pression de cavitation (en dehors de la zone de brusque montée dans l'hélium 3). Les valeurs ainsi trouvées sont proches de la limite spinodale et donc des valeurs de la pression de nucléation prédites théoriquement. Les non linéarités de l'onde acoustique paraissent plus faibles que celles qui sont estimées dans les calculs numériques et observées expérimentalement dans l'hélium 4 avec une céramique hémisphérique fermée par une plaque de verre. Toutefois la variation avec la température de la raideur des courbes en S dans l'hélium 3 est difficilement compatible avec des effets non-linéaires faibles, sauf si la raideur maximale mesurable est limitée par le bruit sur la tension d'excitation de la céramique ; ce point reste à vérifier.

La nouvelle expérience de cavitation près d'une plaque de verre mise en œuvre au laboratoire est brièvement présentée dans l'annexe H. Elle donne accès, *via* la mesure de l'indice de réfraction instantané de l'hélium lors du passage de l'onde,



à la densité du liquide. Elle permet d'étudier la construction de l'oscillation de pression et ses non-linéarités, ainsi que d'obtenir une mesure directe de la densité à laquelle la cavitation a lieu.

# Chapitre 4

## Le liquide de Fermi à pression négative

### 4.1 Motivation de l'étude

Les théories de cavitation dans l'hélium 3 prévoyaient une transition d'un régime d'activation thermique vers un régime de nucléation quantique à une température estimée à 120 mK. Les mesures expérimentales contredisent cette prédiction : le seuil de cavitation ne devient pas indépendant de la température au dessous de 120 mK comme ce serait le cas dans le régime quantique ; il présente même une remontée au dessous de 50 mK. Plusieurs hypothèses ont été émises pour tenter d'interpréter ce comportement.

La vitesse du son intervenant dans les modèles théoriques de cavitation est la vitesse du son adiabatique  $c_S$ . Comme nous allons le rappeler au paragraphe suivant, l'hélium 3 à basse température peut être considéré comme composé de quasiparticules, avec une durée moyenne de collisions entre ces quasiparticules  $\tau$ . Les ondes sonores de pulsation telle que  $\omega\tau \ll 1$  se propagent à la vitesse  $c_S$  ; en revanche, quand  $\omega\tau \gg 1$ , il faut faire intervenir une autre vitesse du son,  $c_0$  (*cf.* § 4.2.3). H. J. Maris a remarqué [83] que cette vitesse  $c_0$  ne s'annule pas à la limite spinodale : bien que la compressibilité du liquide soit infinie, le liquide est donc susceptible d'opposer une compressibilité effective finie aux perturbations se produisant à une échelle de fréquence telle que  $\omega\tau \gg 1$ . Ceci pourrait par exemple modifier le taux de nucléation calculé dans le cadre de la théorie de cavitation quantique qui fait intervenir la dynamique d'évolution des perturbations ; cela conduirait éventuellement à une température de transition  $T^*$  entre le régime thermique et le régime quantique plus basse que celle précédemment calculée (*cf.* § 1.4.2). Le calcul du taux de nucléation par activation thermique est un calcul statique où l'énergie d'activation est celle du profil critique figé ; le son zéro ne peut être pris en compte que dans une approche cinétique.

D'autre part, H. J. Maris a envisagé la possibilité d'apparition d'une source

de dissipation supplémentaire [83] : quand la pression décroît vers la pression spinodale, la vitesse du son  $c_S$  atteint des valeurs inférieures à la vitesse de Fermi et est susceptible d'exciter des paires quasiparticule-trou. Ce phénomène pourrait également modifier le résultat du calcul quantique.

Enfin, Jezek *et al.* ont développé une méthode phénoménologique de calcul de la température de transition  $T^*$  tenant compte de la dissipation [89]. Une difficulté, soulignée par les auteurs, réside dans l'évaluation quantitative du terme de dissipation, qui dépend de la durée de vie  $\tau$  aux basses températures.

Pour tenter de répondre à ces questions, nous avons été amenés à évaluer les propriétés du son dans l'hélium 3 (vitesse, atténuation) à pression négative et à basse température où les propriétés fermioniques entrent en jeu, pour ensuite étudier leur influence sur les théories de cavitation.

## 4.2 Théorie de Landau du liquide de Fermi

### 4.2.1 Hypothèses et domaine de validité

Une théorie des liquides de Fermi a été développée pour la première fois par L. D. Landau [90, 91, 92]. Une introduction est donnée dans la référence [64] (chapitres 17 et 18) et un panorama plus détaillé et plus récent dans la référence [93].

Considérons un gaz de Fermi dans le régime dégénéré, c'est à dire à une température  $T$  faible devant la température de Fermi,  $T_F = \epsilon_F/k_B$  où  $\epsilon_F$  est l'énergie de Fermi :

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.1)$$

pour  $N$  particules de gaz dans un volume  $V$ .

La fonction de distribution des énergies dans le gaz, qui vaut :

$$n(\epsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_F}{k_B T}\right)} \quad (4.2)$$

décroît rapidement de 1 à 0 sur une zone étroite d'énergie autour de  $\epsilon_F$ , appelée zone diffuse, de largeur caractéristique  $k_B T$ .

Introduisons une faible interaction entre les particules du gaz. En raison du principe d'exclusion de Pauli, les collisions sont déterminées par l'occupation des états de la zone diffuse, et la probabilité de collision que l'on obtient est proportionnelle à l'intensité de l'interaction et au carré de la température [94].

La finitude de la durée  $\tau$  entre les collisions est à l'origine d'une incertitude quantique sur l'énergie des quasiparticules :

$$\delta E \simeq \frac{\hbar}{\tau} \quad (4.3)$$

Pour une interaction donnée, le comportement quadratique en température assure que cette incertitude  $\delta E$  devient, à température suffisamment basse, petite devant l'énergie de l'état, mais également devant la taille de la zone diffuse. Lors du « branchement » des interactions, c'est à dire lors du passage du gaz au liquide, il est alors possible de suivre les niveaux d'énergie et de définir des quasiparticules qui correspondraient aux particules en l'absence d'interaction : chacune a une impulsion et une énergie bien définie, elles obéissent à la statistique de Fermi et leur nombre est égal au nombre de particules du liquide. Une quasiparticule peut être considérée comme une particule placée dans le champ auto-cohérent créé par les autres quasiparticules.

Considérons une onde sonore de pulsation  $\omega$ . La divergence de la durée  $\tau$  implique qu'à température suffisamment basse, cette durée dépasse la période de l'onde. On passe alors d'un régime hydrodynamique ( $\omega\tau \ll 1$ ) pour lequel l'équilibre local est réalisé par les collisions à un régime balistique ( $\omega\tau \gg 1$ ). Si les interactions entre atomes n'existaient pas la propagation serait impossible, comme dans le cas d'un gaz raréfié. Cependant, grâce à ces interactions, nous allons voir qu'il demeure possible, sous certaines conditions, de propager du son : le son zéro.

### 4.2.2 Formalisme

Dans le modèle de Landau, l'énergie d'une quasiparticule et l'énergie du système dépendent de la fonction de distribution. Landau introduit alors une fonction d'interaction  $f$  décrivant la variation d'énergie d'une quasiparticule d'impulsion  $\vec{p}$  causée par un changement  $\delta n$  de la fonction de distribution de toutes les quasiparticules :

$$\delta\epsilon = \int f(\vec{p}, \vec{p}') \delta n' d\tau' \quad (4.4)$$

où  $d\tau'$  est l'élément de volume dans l'espace des impulsions. On peut tenir compte dans la définition de cette fonction d'interaction des deux populations de spin, mais nous n'en aurons pas besoin ici. Comme la fonction  $n$  ne varie rapidement qu'autour de  $\epsilon_F$ , toutes les propriétés seront déterminées par les impulsions au voisinage de la surface de Fermi ; il est alors utile d'introduire

$$F(\chi) = \left( \frac{d\tau}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=\epsilon_F} f(\vec{p}, \vec{p}') \quad (4.5)$$

où  $\chi$  est l'angle entre les impulsions  $\vec{p}$  et  $\vec{p}'$ .

Afin de poursuivre les calculs, la fonction  $F$  est développée sur la base des polynômes de Legendre. La série est habituellement tronquée après le troisième terme, et  $F$  est déterminée par les trois coefficients  $F_0$ ,  $F_1$  et  $F_2$  :

$$F(\chi) = F_0 + F_1 \cos \chi + F_2 \frac{3(\cos \chi)^2 - 1}{2} \quad (4.6)$$

On calcule aisément les paramètres tels que masse effective, compressibilité et susceptibilité magnétique [90]. On a pour la masse effective  $m^*$  :

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{F_1}{3} \quad (4.7)$$

et pour la vitesse du premier son  $c_1$  :

$$c_1^2 = \frac{p_F^2}{3m^2} \frac{1 + F_0}{1 + \frac{F_1}{3}} \quad (4.8)$$

La fonction de distribution  $n$  des quasiparticules suit une équation du type équation de Boltzmann, appelée équation cinétique :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial n}{\partial \vec{p}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \vec{r}} = I(n) \quad (4.9)$$

où  $I(n)$  est l'intégrale de collision. Les collisions disparaissent à température nulle et cette intégrale s'annule. Pour les températures intermédiaires, on utilise souvent une approximation de temps de relaxation :

$$I(n) = -\frac{\delta n - (\delta n)_0 - (\delta n)_1 \cos \theta - (\delta n)_1^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \phi}{\tau} \quad (4.10)$$

où  $(\delta n)_0$ ,  $(\delta n)_1$  et  $(\delta n)_1^{\frac{1}{2}}$  sont les trois premières coordonnées de  $\delta n$  sur la base des harmoniques sphériques, introduites dans l'expression de  $I(n)$  afin d'assurer la conservation de l'énergie, de l'impulsion et du nombre de particules.

### 4.2.3 Oscillations du liquide

Pour étudier les oscillations du liquide de Fermi, Landau considère une perturbation de la fonction de distribution à l'équilibre  $n_0$  de la forme suivante :

$$\delta n(\vec{p}) \exp\left(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\right) = \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon}(p) \nu(\theta, \phi) \exp\left(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\right) \quad (4.11)$$

où  $(p, \theta, \phi)$  sont les coordonnées de  $\vec{p}$  en sphérique.

On en déduit l'équation de propagation :

$$(s - \cos \theta) \nu(\theta, \phi) = \cos \theta \int F(\chi) \nu(\theta', \phi') \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (4.12)$$

où  $s = c/v_F$  est la vitesse réduite de l'onde et  $\chi$  l'angle entre les impulsions des quasiparticules  $\vec{p}$  and  $\vec{p}'$ . Les solutions de cette équation implicite sont les modes de son zéro.

Pour fixer les idées on peut résoudre le cas où le développement de  $F$  est limité à  $F_0$  [91]. À température nulle,  $I(n) = 0$  et on a :

$$\nu \propto \frac{\cos \theta}{s - \cos \theta} \quad (4.13)$$

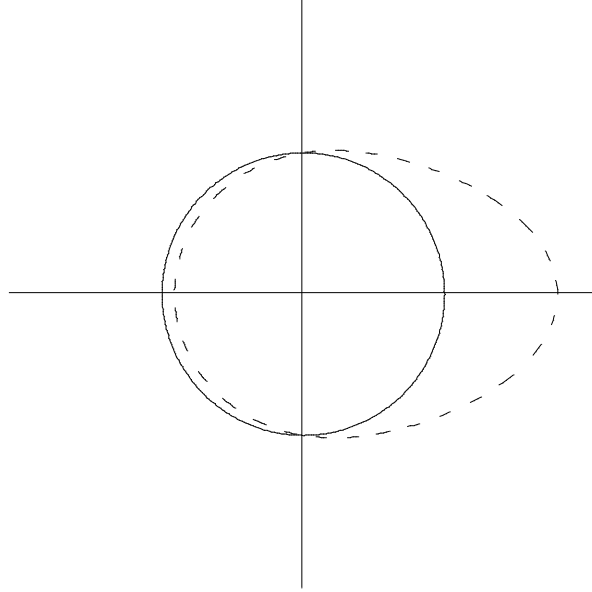


FIG. 4.1 – Distorsion de la surface de Fermi lors du passage d'une onde de son zéro pour  $F = F_0$ . Le cercle en trait plein représente la distribution à l'équilibre, la courbe en pointillés la distorsion.

Nous verrons dans le paragraphe suivant que  $s$  doit être supérieur à 1 ; la solution entraîne donc une distorsion périodique de la surface de Fermi en forme d'œuf schématisée sur la figure 4.1.

Ce comportement est à rapprocher de l'oscillation de la surface de Fermi lors du passage d'une onde de premier son : dans ce cas également, la densité locale oscillant, la surface de Fermi se déforme, mais elle demeure sphérique et seul son rayon varie.

Khalatnikov et Abrikosov décomposent  $\delta n$  et  $F$  à tous les ordres et donnent l'équation à résoudre dans le cas général pour déterminer la vitesse de propagation du son zéro à température nulle (Réf. [95], Éq. (A7)).

Dans l'approximation de temps de relaxation, l'équation à résoudre pour déterminer le module  $k$  du vecteur d'onde pour toute valeur de  $\omega\tau$  est donnée par Khalatnikov et Abrikosov dans le cas où seuls les paramètres de Fermi  $F_0$  et  $F_1$  sont pris en compte (Réf. [95], Éq. (17)) et par Brooker dans le cas où le paramètre  $F_2$  est inclus dans le développement de  $F$  (Réf. [96], Éq. (A1)). Nous reproduisons cette dernière :

$$\xi^2 - \frac{(1 + F_0) \left(1 + \frac{F_1}{3}\right)}{3(1 + \alpha)^2} + \frac{\left(1 + \frac{F_1}{3}\right)}{3(1 + \alpha)} \frac{z}{az + w} = 0 \quad (4.14)$$

avec

$$\xi = \frac{i\omega\tau - 1}{i\tau kv_F}, \quad \alpha = \frac{1}{i\omega\tau - 1}, \quad w = \frac{1}{2} \xi \ln \left( \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right), \quad (4.15)$$

$$z = (1 - 3\xi^2)w + 1 \quad \text{et} \quad a = \frac{F_2}{4 \left(1 + \frac{F_2}{5}\right)}$$

Dans la limite  $\omega\tau \rightarrow 0$ , on retrouve, à l'ordre zéro en  $\omega\tau$ , la vitesse de propagation du premier son (*cf.* § 4.8) [95].

#### 4.2.4 Conditions d'existence du son zéro

La forme de l'équation 4.12 entraîne que le son zéro peut ne pas exister pour certaines fonctions  $F$ . De plus, les solutions réelles, c'est à dire non amorties, doivent satisfaire l'inégalité  $s > 1$ . En effet, si cela n'était pas le cas, le facteur  $s - \cos\theta$  s'annulerait pour une certaine valeur de  $\theta$ , ce qui entrainerait la nullité de l'intégrale pour cette valeur et par conséquent pour tout  $\theta$  car l'intégration se fait sur tous les angles relatifs, d'où l'impossibilité d'une déformation de la surface de Fermi.

Comme nous le verrons au paragraphe 4.3.2, le paramètre  $F_0$  tend vers  $-1$  quand la densité du liquide tend vers la densité spinodale. On peut s'interroger sur l'existence du son zéro dans le cas où  $F_0$  est négatif. Revenons sur l'exemple examiné au paragraphe précédent, où l'on se restreint à une interaction constante  $F = F_0$ . En substituant la solution 4.13 dans l'équation 4.12, on obtient :

$$\frac{1}{2} s \ln \left( \frac{s+1}{s-1} \right) - 1 = \frac{1}{F_0} \quad (4.16)$$

Cette équation n'admet de solutions réelles que pour  $s > 1$  et pour  $F_0 > 0$ . Aussi, pour que le son zéro existe près de la spinodale, il faut faire intervenir les termes suivants dans le développement de  $F$ . Mermin [97] donne une condition suffisante d'existence d'ondes ordinaires de son zéro :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{F_l}{1 + \frac{F_l}{2l+1}} > 0 \quad (4.17)$$

Notons qu'il donne également une condition suffisante d'existence des ondes de spin de son zéro, et qu'en vertu du principe d'exclusion [82] l'une des deux conditions et une seule est vérifiée, ce qui assure l'existence d'au moins un mode de son zéro.

Nous avons déterminé une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'ondes ordinaires de son zéro dans le cas où l'on restreint le développement de  $F$  à ses deux premiers termes :  $F(\chi) = F_0 + F_1 \cos \chi$ . L'équation 4.14 s'écrit, à basse température quand on néglige les collisions :

$$\left( F_0 + \frac{F_1}{1 + \frac{F_1}{3}} s^2 \right) = \frac{1}{w(s)} \quad (4.18)$$

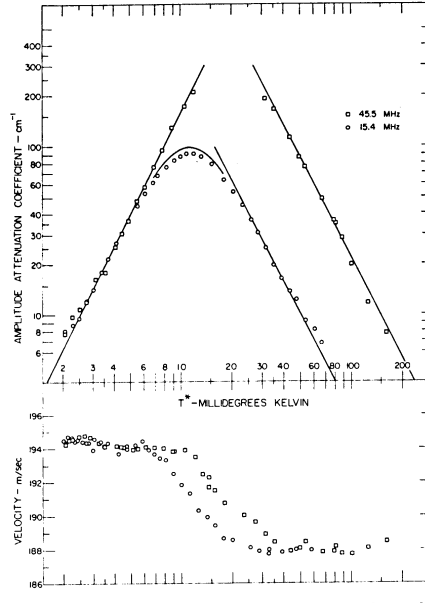


FIG. 4.2 – Coefficient d’atténuation et vitesse de propagation dans l’hélium 3 en fonction de la température. Les cercles correspondent à une fréquence de 15,4 MHz et les carrés à une fréquence de 45,5 MHz (figure extraite de la référence [76]).

En étudiant les variations des deux membres et leurs comportements quand  $s$  tend vers 1 et vers l’infini, on montre que des solutions réelles existent si et seulement si :

$$F_0 + \frac{F_1}{1 + \frac{F_1}{3}} > 0 \quad (4.19)$$

La condition de Mermin 4.17 s’écrit dans le cas considéré :

$$\frac{F_0}{1 + F_0} + \frac{F_1}{1 + \frac{F_1}{3}} > 0 \quad (4.20)$$

La stabilité du liquide impose  $F_0 > -1$ . Si la condition de Mermin est vérifiée, la condition 4.19 l’est *a fortiori* et le son zéro ordinaire existe. Cependant, notre condition est plus forte que celle de Mermin, car la première peut être vérifiée sans que la seconde le soit dès que  $F_0$  devient négatif.

### 4.2.5 Mise en évidence expérimentale

La première mise en évidence expérimentale date de 1965; elle est due à Keen *et al.* [98]. L’expérience repose sur la mesure du changement d’impédance acoustique effective de l’hélium 3 par l’étude de la réflexion du son à l’interface entre un cristal de quartz et l’hélium liquide. Ce groupe trouve une transition vers 92 mK pour une fréquence de 1 GHz. Abel *et al.* réalisèrent en 1966 une expérience d’observation directe de propagation au travers du liquide entre deux



cristaux de quartz [76]. Cette équipe trouve un changement de la vitesse du son et du comportement de l'atténuation conforme aux prédictions théoriques, comme l'indique la figure 4.2. Sköld *et al.* ont d'autre part mis en évidence le son zéro dans le spectre d'excitation de l'hélium 3 par des expériences de diffusion de neutrons [99].

### 4.3 Extrapolation des paramètres de Fermi à pression négative

Afin de décrire le liquide de Fermi à pression négative, c'est à dire aux densités inférieures à la densité du liquide à l'équilibre avec le gaz  $\rho_0$ , nous devons extrapoler les valeurs des paramètres de Fermi. Pour cela, nous considérons les grandeurs physiquement mesurables donnant accès à ces coefficients. Afin de simplifier les différentes relations, nous exprimerons toutes les quantités utiles par la suite comme des fonctions de la densité.

#### 4.3.1 Paramètre $F_1$

Le paramètre  $F_1$  est relié à la masse effective  $m^*$  (*cf.* § 4.7) :

$$F_1 = 3 \left( \frac{m^*}{m} - 1 \right) \quad (4.21)$$

Pour l'évaluation de cette masse, nous utilisons les travaux de D. S. Greywall [100, 101]. La théorie de Landau [90] prévoit que, dans le régime dégénéré, la capacité calorifique molaire à volume constant  $C_V$  d'un liquide de Fermi a la même expression que celle du gaz, à condition de remplacer la masse  $m$  des atomes par leur masse effective  $m^*$  :

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} R = \frac{m^* k}{\hbar^2} \left( \frac{\pi V}{3 N} \right)^{\frac{2}{3}} RT \quad (4.22)$$

où  $V$  est le volume occupé par  $N$  atomes. L'échelle de température choisie par Greywall [101] est telle que cette proportionnalité à la température est vérifiée dans la limite des basses températures ; cette méthode a de plus l'intérêt de concilier, par un simple changement d'échelle thermométrique, les mesures de différents groupes auparavant en désaccord.

Les valeurs de  $m^*$  ainsi obtenues sont bien représentées par une loi du type :

$$\frac{m^*}{m} = \frac{1}{a^2 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right)^2} \quad (4.23)$$

avec  $a = 1,018$  et  $\rho_c = 198,6$ . Cette forme est justifiée par Stringari [102] à partir d'un hamiltonien Hartree-Fock d'interaction effective (en réalité il utilise

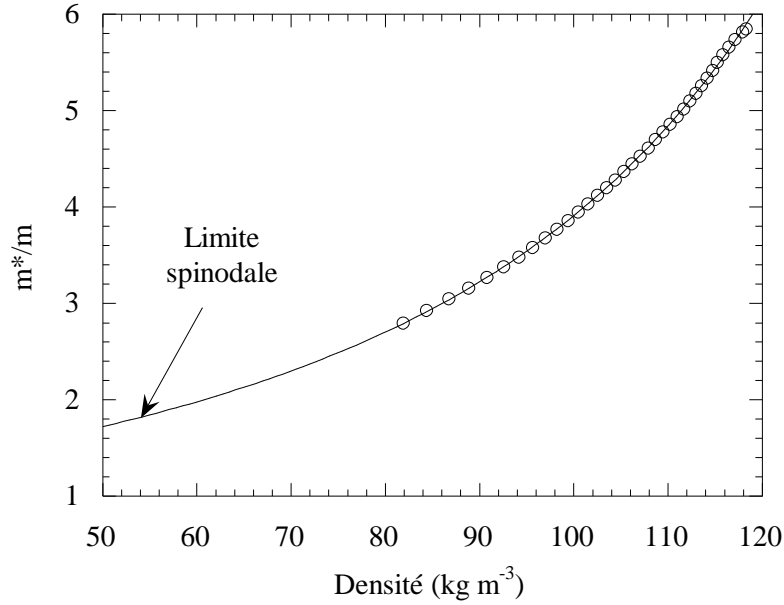


FIG. 4.3 – Ajustement des mesures expérimentales de Greywall du rapport  $m^*/m$  [101] par la formule 4.23.

$a = 1$  : nous pensons que faire ce choix ne modifierait que très peu nos résultats). Les paramètres ajustables de l'interaction sont fixés de manière à reproduire les données expérimentales : variation de la masse effective avec la densité, énergie de liaison, densité et compressibilité à saturation. Le modèle obtenu permet alors de prédire l'équation d'état de l'hélium 3 à température nulle jusqu'à la pression de solidification, et son utilisation pour l'étude des oscillations de densité autour de la densité d'équilibre conduit aux équations de Landau pour le son zéro.

Le paramètre  $F_1$  est minimal à la spinodale et vaut alors 2,6. Avec la condition de stabilité  $F_0 > -1$  (justifiée au paragraphe suivant), on a donc  $F_0 + (F_1/(1 + F_1/3)) > 0,39$  et d'après le paragraphe 4.2.4, si on limite le développement de  $F$  à ses deux premiers termes, les ondes ordinaires de son zéro peuvent se propager.

### 4.3.2 Paramètre $F_0$

Connaissant  $m^*$ , le paramètre  $F_0$  se déduit alors de la vitesse du premier son  $c_1$  (cf. § 4.25) :

$$F_0 = \frac{3m^2 c_1^2}{p_F^2} \frac{m^*}{m} - 1 \quad (4.24)$$

Le modèle de Stringari donne une expression pour cette quantité, mais nous préférons utiliser une relation équivalente à celle remarquée par Maris (cf. § 1.2.2 et Réf. [29]) :

$$c_1 = \frac{b}{3}(\rho - \rho_s) \quad (4.25)$$

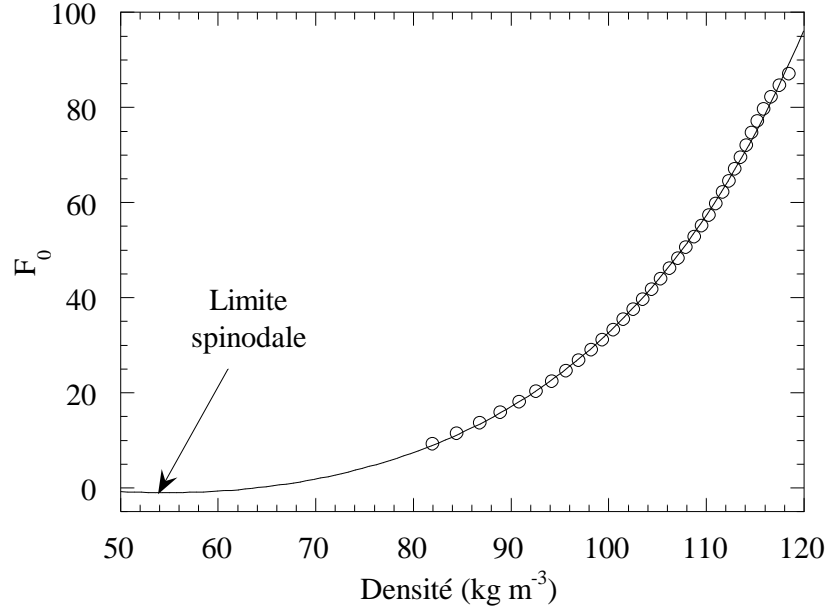


FIG. 4.4 – Paramètre  $F_0$  en fonction de la densité. Les cercles représentent les données expérimentales à pression positive déduites de la vitesse du son [103], la courbe est une extrapolation à l’aide de la formule 4.24.

où  $\rho_s$  est la densité spinodale. Cette relation reproduit parfaitement les données expérimentales (issues de différents groupes et compilées par Halperin et Varoquaux [103]) et donne aux pressions négatives un comportement analogue à celui obtenu en extrapolant le modèle de Stringari ; il présente l’avantage de diminuer le nombre de paramètres ajustables.

Il est intéressant de remarquer que l’instabilité spinodale ( $c_1 = 0$ ) se traduit par une instabilité fermionique : à la spinodale,  $F_0$  atteint la limite permise de  $-1$ . En effet, la limite inférieure du paramètre  $F_1$  s’obtient par l’étude linéaire de stabilité de la distribution d’équilibre et vaut  $-(2l + 1)$  [94]. Pour  $F_0$  (resp.  $F_1$ ), cette limitation caractérise la positivité de  $c_1^2$  (resp.  $m^*$ ).

### 4.3.3 Paramètre $F_2$

Quant au paramètre  $F_2$ , il est obtenu par la mesure de la différence de vitesse entre son zéro et premier son. Dans la limite où  $F_0$  est grand devant 1, on a [93] :

$$F_2 = 5(\epsilon(\epsilon + 2)\alpha - 1) \quad (4.26)$$

avec

$$\alpha = \frac{5}{4} \frac{1 + F_0}{1 + \frac{9}{35} \frac{v_F^2}{c_1^2}} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{c_0 - c_1}{c_1} \quad (4.27)$$

Nous n’avons pas trouvé de justification à une extrapolation particulière de  $F_2$ . Cependant les valeurs admises sont faibles, allant de  $-0,22$  à pression de vapeur

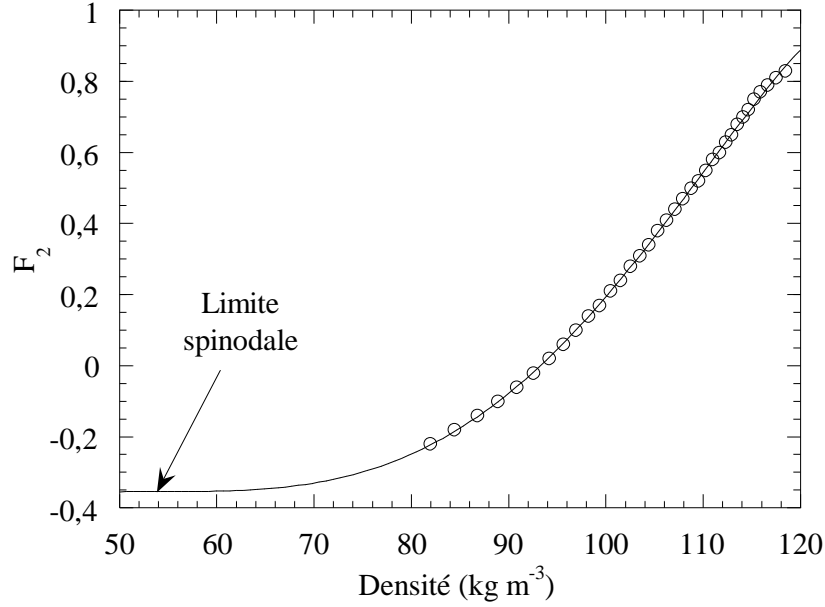


FIG. 4.5 – Paramètre  $F_2$  en fonction de la densité. Les cercles représentent les données expérimentales à pression positive déduites de la différence entre les vitesses du premier son et du son zéro [103], la courbe est une extrapolation à partir d'un ajustement de  $F_2(P)$  par un polynôme du second degré.

saturante à 0,83 près de la courbe de solidification, et la variation en pression est lisse. Aussi utilisons nous une extrapolation par un polynôme du second degré en pression. Pour obtenir la dépendance en densité, il suffit d'utiliser la relation entre  $P$  et  $\rho$  déduite de 4.25. Le résultat est représenté sur la figure 4.5. Nous verrons dans le paragraphe suivant que la troncature de  $F$  aux deux premiers termes de son développement n'affecte que peu les résultats.

## 4.4 Vitesses remarquables à pression négative

La vitesse du premier son à basse température nous est connue par l'extrapolation de Maris selon l'équation 4.25. La vitesse de Fermi se déduit de la masse effective par la relation suivante :

$$v_F = \frac{p_F}{m^*} = \frac{\hbar}{m^*} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.28)$$

En ce qui concerne la vitesse du son zéro à température nulle  $c_0$ , elle se calcule numériquement en résolvant l'équation [93] :

$$\left( \frac{c_0}{v_F} \right)^2 - \left( \frac{c_1}{v_F} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{\left(1 + \frac{F_1}{3}\right) \left(1 + \frac{F_2}{5}\right) \Omega_{20}}{\Omega_{00} + F_2 (\Omega_{00}\Omega_{22} - \Omega_{20}^2)} \quad (4.29)$$

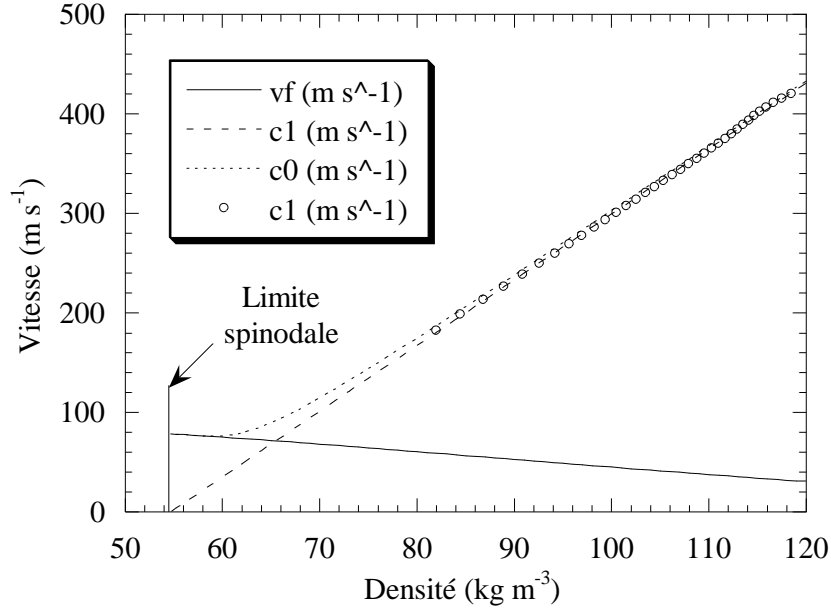


FIG. 4.6 – Vitesses de Fermi, du premier son et du son zéro à température nulle en fonction de la densité. Les points correspondent aux données expérimentales compilées par Halperin [103] et les courbes aux extrapolations du paragraphe 4.3 pour la vitesse de Fermi et la vitesse du premier son, et à la résolution numérique de 4.29 pour la vitesse du son zéro.

avec

$$\begin{aligned}\Omega_{00} &= 1 + \frac{1}{2} s \ln \left( \frac{s-1}{s+1} \right) \\ \Omega_{20} &= \frac{1}{2} + \frac{3s^2-1}{2} \Omega_{00} \\ \Omega_{22} &= \frac{1}{5} + \frac{3s^2-1}{2} \Omega_{20}\end{aligned}\tag{4.30}$$

avec  $s = c_0/v_F$ .

Les résultats utilisant les extrapolations des trois premiers paramètres de Fermi du paragraphe 4.3 sont représentés sur la figure 4.6.

Les vitesses du premier son et du son zéro sont peu différentes aux densités élevées, mais on remarque que l'écart s'accroît quand la densité s'approche de la densité spinodale. La vitesse du premier son devient inférieure à la vitesse de Fermi aux densités inférieures à  $65,5 \text{ kg m}^{-3}$ , ce qui correspond à des pressions supérieures à la spinodale de moins de 185 mbar, tandis que la vitesse du son zéro reste supérieure à la vitesse de Fermi (elle tend vers cette dernière à la spinodale).

Le rôle de  $F_2$  est évalué en résolvant l'équation 4.29 pour  $F_2 = 0$ . L'équation à résoudre est simplifiée [95]. Les deux résultats pour la vitesse du son zéro sont comparés sur la figure 4.7 : les différences constatées sont très faibles.

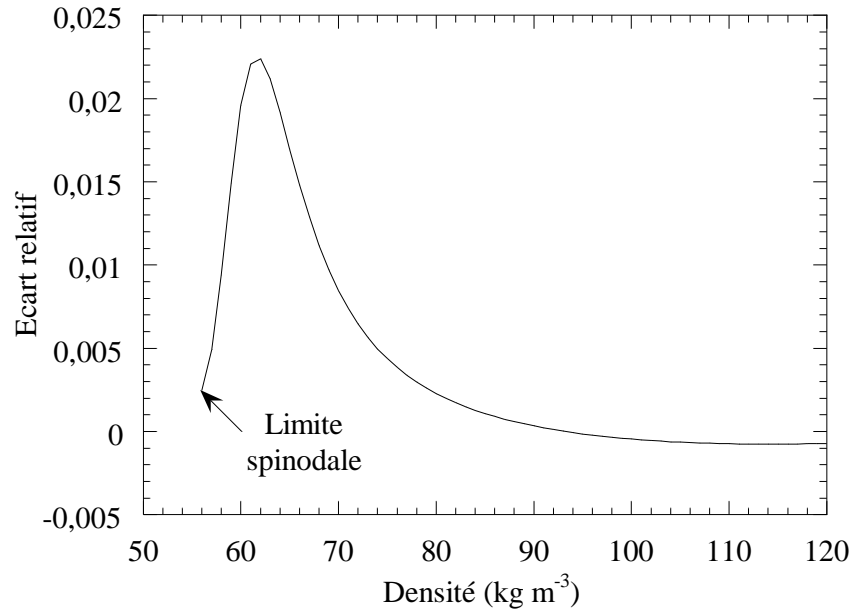


FIG. 4.7 – Ecart relatif entre la valeur de la vitesse du son zéro obtenue par résolution numérique de 4.14 en faisant  $F_2 = 0$  et la valeur obtenue avec l'extrapolation de  $F_2$  du paragraphe 4.3.

La déviation entre les vitesses des deux sons ici mise en évidence est un effet physique fort : quels que soient les choix faits pour l'extrapolation des paramètres de Fermi et à condition que le mode de densité du son zéro ait une solution de vitesse réelle, l'existence d'une spinodale à densité non nulle implique l'existence de ce phénomène. En effet, si la vitesse de propagation est réelle, elle est nécessairement supérieure à la vitesse de Fermi (*cf.* § 4.2.2), qui ne s'annule qu'à densité nulle, tandis que par définition la vitesse du premier son s'annule à la densité spinodale.

## 4.5 Fréquence de transition entre premier son et son zéro

Il convient maintenant de nous interroger sur la fréquence à partir de laquelle apparaît le régime de son zéro, s'il existe, à une température donnée. Cette fréquence correspond au passage du régime hydrodynamique  $\omega\tau \ll 1$  au régime balistique  $\omega\tau \gg 1$ , où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $\tau$  la durée de vie moyenne des quasiparticules. Nous avons donc besoin d'estimer cette dernière quantité à pression négative.

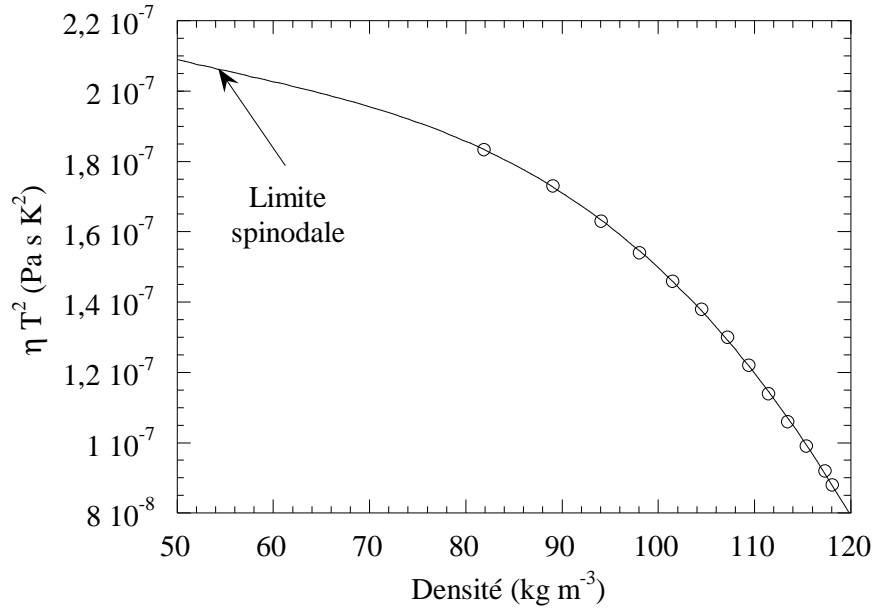


FIG. 4.8 – Extrapolation du produit  $\eta T^2$ . Les cercles correspondent aux données expérimentales de la référence [85]. La courbe est un ajustement par un polynôme du troisième degré.

### 4.5.1 Extrapolation de la viscosité

La durée de vie des quasiparticules  $\tau$  est accessible expérimentalement par l'intermédiaire de la viscosité  $\eta$ . Dans le régime de premier son,  $\eta$  est proportionnelle à  $1/T^2$  (cf. § 4.2.1). Le produit  $\eta T^2$  extrapolé à température nulle pour différentes pressions est compilé par Wheatley à partir des mesures de différents groupes [85]. Les collisions devenant moins nombreuses quand la densité diminue, le temps de vie est une fonction décroissante de la densité, et ce comportement doit persister jusqu'à la densité spinodale. Nous pourrions donc utiliser la plus grande valeur mesurée, à la densité du liquide en équilibre avec le gaz, ce qui nous donnerait une borne supérieure de la fréquence de transition entre premier son et son zéro.

Cependant la variation en densité est lente et lisse, et de même que pour le paramètre  $F_2$  (cf. § 4.3) nous préférons utiliser une extrapolation polynômiale. Pour les densités supérieures à la densité spinodale, un polynôme du second degré donnerait un maximum et un polynôme du quatrième degré un point d'inflexion ; c'est pourquoi nous choisissons un polynôme du troisième degré qui donne un comportement physiquement acceptable. Le résultat est illustré sur la figure 4.8.

Cette extrapolation n'est qu'approximative, mais suffit à calculer une estimation de la fréquence de transition.

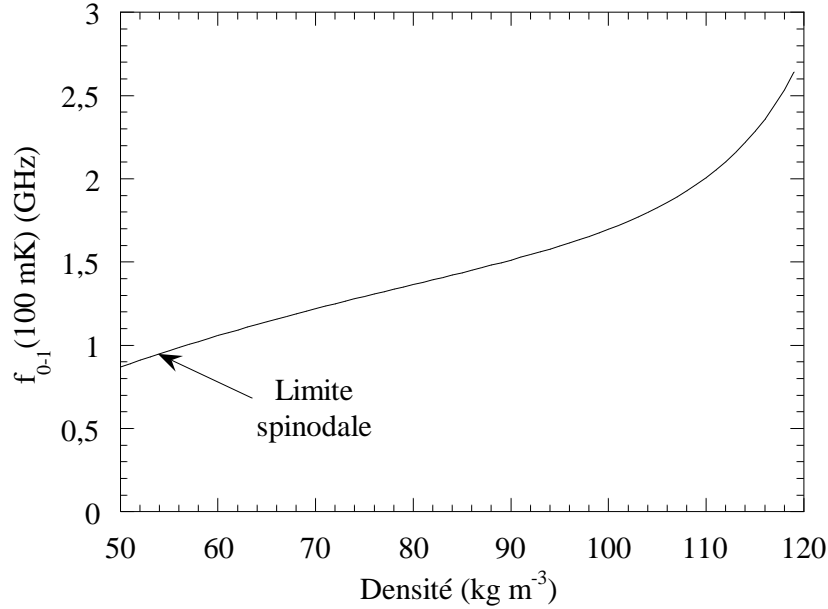


FIG. 4.9 – Fréquence de transition du premier son au son zéro à une température de 100 mK en fonction de la densité.

### 4.5.2 Fréquence de transition

La durée de vie  $\tau$  des quasiparticules est donnée par :

$$\tau T^2 = \frac{5(\eta T^2)}{\rho v_F^2} \frac{m}{m^*} \quad (4.31)$$

On connaît la constante  $\tau T^2$  pour les densités  $\rho < \rho_0$  grâce aux extrapolations des paragraphes 4.3 et 4.5.1.

En définissant la pulsation de transition  $\omega_{0-1}(T)$  à la température  $T$  comme la pulsation à laquelle  $\omega\tau = 1$ , on en déduit  $\omega_{0-1}(T) = T^2/(\tau T^2)$ . La fréquence  $f_{0-1}(T) = \omega_{0-1}(T)/(2\pi)$  est représentée en fonction de la densité sur la figure 4.9 pour une température fixée à 100 mK.

Pour déterminer quel type de son régit les fréquences thermiques  $k_B T/h$ , il faut comparer à densité fixée la fréquence  $k_B T/h$  à  $f_{0-1}(T)$ . En raison du comportement quadratique de cette dernière, il existe une température au dessous de laquelle les fréquences thermiques cessent d'être décrites par le premier son pour l'être par le son zéro. Le calcul donne pour cette température de changement de régime environ 190 mK, température en dehors du domaine de validité de la théorie de Landau : la condition considérée est en effet la même que celle concernant l'incertitude sur les niveaux d'énergie des quasiparticules (*cf.* § 4.2.1). Nous pouvons toutefois conclure qu'aux températures suffisamment basses (typiquement inférieures à 100 mK), les fréquences thermiques doivent être décrites par le son zéro.



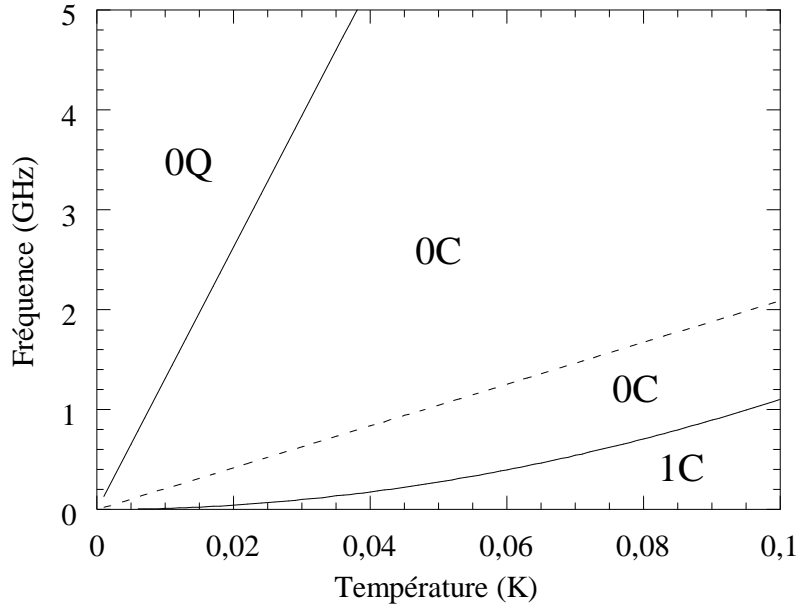


FIG. 4.10 – Diagramme de phase dans le plan (temps, fréquence) pour la densité  $\rho = 62 \text{ kg m}^{-3}$  (l'allure reste la même pour des densités différentes). La droite en traits pointillés correspond aux fréquences thermiques. Les chiffres 1 et 0 symbolisent respectivement le premier son et le son zéro, et les lettres C et Q les régimes classiques et quantique.

La figure 4.10 propose un diagramme de phase illustrant ces résultats. Nous avons également tracé une droite représentant les fréquences de transition vers un régime de son zéro quantique, phénomène qui sera détaillé au paragraphe 4.6.2, et une droite en pointillés correspondant aux fréquences thermiques.

## 4.6 Atténuation du son

Dans ce paragraphe nous calculons l'atténuation du premier son et du son zéro dans le cadre des extrapolations que nous avons effectuées (*cf.* § 4.6.1), considérons l'existence éventuelle d'atténuation d'origine quantique (*cf.* § 4.6.2) et discutons les résultats de Jezek *et al.* concernant l'effet de l'atténuation sur la température de transition vers un régime de cavitation quantique (*cf.* § 4.6.3).

### 4.6.1 Atténuation classique à $\omega\tau$ quelconque

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de  $\omega/k$  pour toutes les valeurs de  $\omega\tau$ , et en particulier au voisinage de la transition entre premier son et son zéro ( $\omega\tau \simeq 1$ ). La partie réelle correspond à la vitesse du son. Le coefficient d'atténuation  $\alpha$  est donné par  $\Im(k)$ .

### Résolution approchée

Dans l'article d'Abel *et al.* [75] cité au paragraphe 4.2.5, les deux régimes d'atténuation prédits théoriquement sont mis en évidence :

- à haute température un régime hydrodynamique visqueux, pour lequel le coefficient d'atténuation vaut  $\alpha_1 = A_1 \omega^2 T^{-2}$  ;
- à basse température un régime de son zéro pour lequel le coefficient d'atténuation vaut  $\alpha_0 = A_0 T^2$ .

Pour estimer le coefficient d'atténuation  $\alpha$  à toutes fréquences et températures les auteurs utilisent alors l'approximation simple :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_1} \quad (4.32)$$

Ceci leur permet d'estimer l'écart entre les vitesses du premier son et du son zéro en utilisant une relation de Kramers-Krönig. Le calcul donne :

$$\frac{c_0 - c_1}{c_1} = \frac{c_0}{w(c_0/v_F)} \sqrt{\alpha_0 \alpha_1} \quad (4.33)$$

où  $w$  est la fonction définie au paragraphe 4.2.3 (Éq. 4.14).

L'équation 4.32 surestime les mesures de 10 % au maximum d'atténuation et l'équation 4.33 surestime l'écart relatif  $(c_0 - c_1)/c_0$  de 14 %.

Le paramètre  $A_1$  est relié à la viscosité  $\eta$  par la relation 3.11 du paragraphe 3.2.4 :

$$\alpha = \frac{8\pi^2 f^2 \eta}{3\rho c^3} \quad (4.34)$$

et l'on peut se servir des résultats du paragraphe 4.4 pour déduire le paramètre  $A_0$ . Quand la densité tend vers la densité spinodale,  $c_1$  tend vers 0,  $c_0$  tend vers  $v_F$  et donc  $w(c_0/v_F)$  tend vers  $+\infty$  ; ceci conduit à une divergence du maximum d'atténuation  $\sqrt{\alpha_0 \alpha_1}/2$  et du paramètre  $A_0$ . Il est en fait hasardeux d'affirmer que l'atténuation va jusqu'à diverger étant donné le caractère approximatif de ce modèle. Cependant nous pouvons dire que la condition d'annulation de  $c_1$  à la spinodale associée à la condition  $c_0 > v_F$  laisse prévoir, par les relations de Kramers-Krönig, un maximum d'atténuation important près de la spinodale.

Signalons qu'un calcul analytique du paramètre  $A_0$  est possible grâce aux calculs asymptotiques dans la limite  $\omega\tau \rightarrow +\infty$  de Khalatnikov et Abrikosov [95]. Nous allons cependant nous limiter à une résolution numérique, mais pour toute valeur du produit  $\omega\tau$ .

### Résolution exacte

Nous avons recherché la solution numérique de l'équation 4.14 à toute densité et pour toute valeur de  $\omega\tau$  en utilisant les extrapolations des paramètres  $F_0$ ,  $F_1$  et  $F_2$  du paragraphe 4.3. La figure 4.11 (a) représente le rapport  $c/c_1$  en fonction de

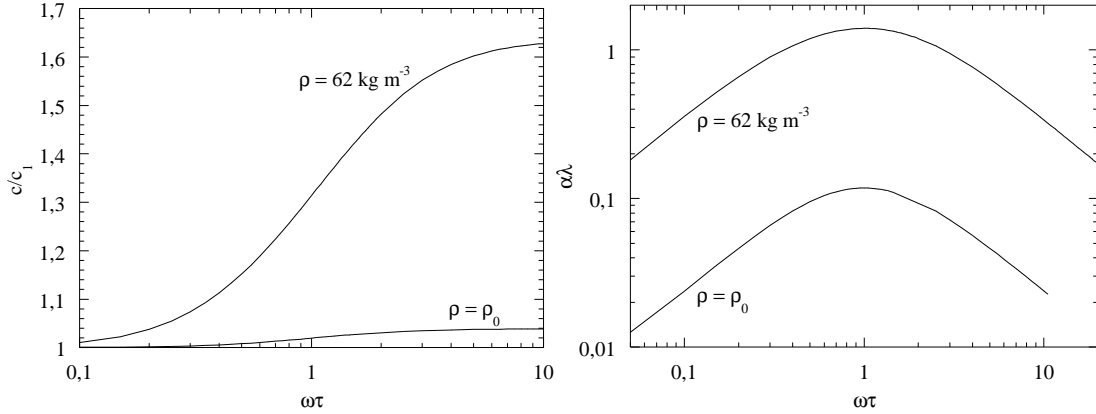


FIG. 4.11 – (a) Rapport entre la vitesse du son et la vitesse du premier son en fonction du produit  $\omega\tau$  à deux densités. (b) Coefficient d'atténuation sur une longueur d'onde en fonction de  $\omega\tau$  à deux densités.

$\omega\tau$  à la densité du liquide à l'équilibre avec le gaz et à une densité de  $62 \text{ kg m}^{-3}$ . La figure 4.11 (b) représente le coefficient d'atténuation sur une longueur d'onde  $\alpha\lambda$  en fonction de  $\omega\tau$  à ces deux densités; pour un produit  $\omega\tau$  donné,  $\alpha\lambda$  ne dépend pas de la fréquence. La figure 4.12 montre la transmission minimale sur une longueur d'onde en fonction de la densité.

## 4.6.2 Régimes de son quantique

Jusqu'à présent les collisions entre quasiparticules, responsables de l'atténuation, ont été traitées classiquement. Ceci n'est valable qu'à condition que les quanta de l'onde soient suffisamment rapprochés pour être traités comme un continuum vis à vis des énergies caractéristiques d'excitation des quasiparticules :

$$\hbar\omega \ll k_B T \quad (4.35)$$

Cette condition est compatible avec la condition d'observation de son zéro  $\omega\tau \gg 1$  à température suffisamment basse en raison du comportement quadratique en  $T$  de la durée de vie des quasiparticules  $\tau$ . On retrouve une fois de plus l'argument qui justifie l'approche de Landau du liquide de Fermi (*cf.* § 4.2.1).

### Prédiction de Landau du son zéro quantique

Quand la fréquence dépasse la limite  $k_B T/h$ , il faut tenir compte de l'absorption de quanta de l'onde lors des collisions à deux quasiparticules. En indiquant par 1 et 2 les paramètres des quasiparticules et en primant ceux d'après le choc, on peut écrire, en tenant compte de l'occupation des états de départ et d'arrivée et du processus inverse d'émission d'un quantum de son, le taux de décroissance

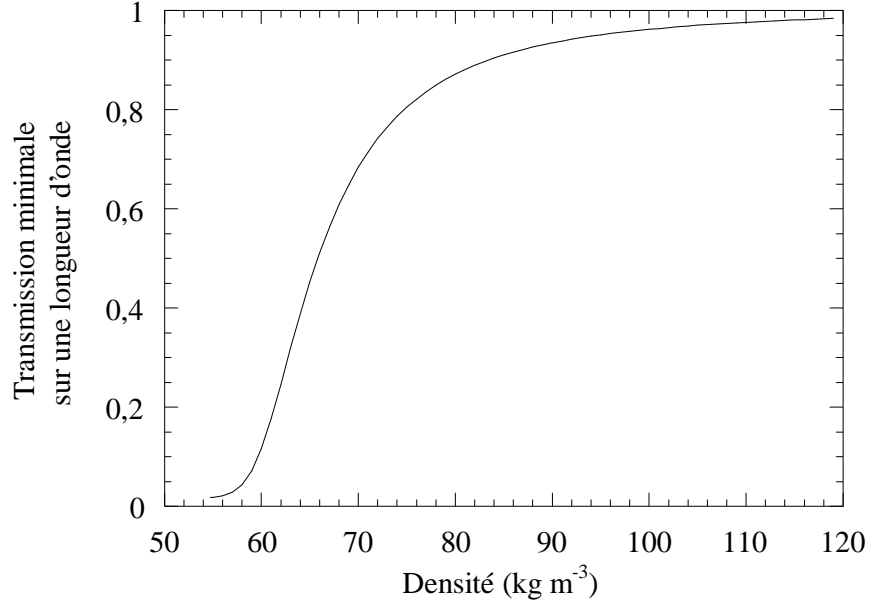


FIG. 4.12 – Transmission minimale sur une longueur d'onde en fonction de la densité.

du nombre de quanta de l'onde :

$$\int d\tau_1 d\tau_2 d\tau'_1 d\tau'_2 \mathcal{W}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1, \vec{p}'_2) [n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1)(1 - n_2)] \delta(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \hbar \vec{k}) \delta(\epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \epsilon_1 - \epsilon_1 - \hbar \omega) \quad (4.36)$$

où  $n$  est la fonction de distribution de Fermi, les  $d\tau$  les éléments de volume d'intégration des quantités correspondantes et où les distributions  $\delta$  assurent la conservation de l'impulsion et de l'énergie.

Ensuite, remarquant qu'en raison du facteur impliquant la fonction  $n$  seules les énergies de la zone diffuse de la distribution de Fermi, c'est à dire à quelques  $k_B T$  de l'énergie de Fermi, contribuent de manière non négligeable à l'intégrale, et que la partie angulaire de cette intégrale change peu entre la région classique ( $\hbar \omega \ll k_B T$ ) et la région quantique ( $\hbar \omega \gg k_B T$ ), Landau se restreint au calcul de l'intégrale sur l'énergie :

$$J = \int d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon'_1 d\epsilon'_2 [n_1 n_2 (1 - n'_1)(1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1)(1 - n_2)] \delta(\epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \epsilon_1 - \epsilon_1 - \hbar \omega) \quad (4.37)$$

qu'il trouve égale à

$$J = (k_B T)^3 \frac{2\pi^2}{3} \frac{\hbar \omega}{k_B T} \left( 1 + \left( \frac{\hbar \omega}{2\pi k_B T} \right)^2 \right) \quad (4.38)$$

Le coefficient d'atténuation  $\alpha$  est proportionnel à  $J$ , et la constante de proportionnalité est déterminée en écrivant que l'on doit retrouver le coefficient d'atténuation classique du son zéro  $\alpha_0$  (cf. § 4.6) dans la limite  $1 \ll \hbar\omega \ll k_B T$ . On obtient alors :

$$\alpha = \alpha_0 \left( 1 + \left( \frac{\hbar\omega}{2\pi k_B T} \right)^2 \right) \quad (4.39)$$

En particulier, pour les hautes fréquences  $\alpha$  est proportionnel à  $\omega^2$  et indépendant de la température.

La transition entre le régime de son zéro classique et le régime de son zéro quantique se produit pour  $\hbar\omega \simeq 2\pi k_B T$ . Le raisonnement précédent n'est toutefois valable que pour des fréquences suffisamment basses par rapport à la température de Fermi ( $\hbar\omega \ll k_B T_F$ ), afin que les quasiparticules du cœur de la sphère de Fermi restent exclues du processus.

### Mesures expérimentales

Les mesures d'Abel *et al.* ne permettaient pas d'atteindre des valeurs de  $\hbar\omega/k_B T$  suffisamment élevées pour observer le régime de son zéro quantique. Matsumoto *et al.* ont observé une tendance de transition vers ce régime en utilisant une onde de 400 MHz vers 2 mK [104], puis Barre *et al.* ont observé ce régime avec une meilleure précision à l'aide de fréquences valant 84, 254, 422 et 592 MHz vers 7 mK [105].

### Éventualité d'un premier son quantique

Le calcul de la transition vers un régime quantique effectué pour le son zéro ne peut s'appliquer au premier son en raison de la condition de validité de la théorie de Landau mentionnée au paragraphe 4.2.1 :

$$\frac{\hbar}{\tau} \ll k_B T \quad (4.40)$$

En effet, la pulsation de l'onde ne peut à la fois vérifier  $\omega\tau \ll 1$  et  $\hbar\omega/(k_B T) \geq 2\pi$ .

Cependant, on peut s'interroger sur l'existence d'un processus différent d'absorption des quanta de l'onde qui apparaîtrait à une pulsation plus basse que  $k_B T/\hbar$ , c'est à dire pour lequel le calcul de l'effet ferait intervenir un facteur grand devant 1 au lieu du facteur  $1/(2\pi)$  trouvé par Landau dans le cas du son zéro quantique (§ 4.6.2, Éq. 4.39).

Pour cela, il faut imaginer un processus différent de l'absorption d'un quantum lors de la collision de deux quasiparticules. Nous écartons les collisions impliquant un plus grand nombre de quasiparticules et nous intéressons à l'absorption par une seule quasiparticule. Ce processus n'a pas été considéré par Landau, car il est en

général interdit pour des raisons cinématiques. En effet, écrivons la conservation de l'impulsion :

$$\vec{p} + \hbar \vec{k} = \vec{p}' \quad (4.41)$$

et la conservation de l'énergie :

$$\epsilon + \hbar \omega = \epsilon' \quad (4.42)$$

En introduisant la masse effective ( $\epsilon = p^2/(2m^*)$ ), la vitesse de l'onde  $c = \omega/k$  et en notant  $\theta$  l'angle de collision, on obtient :

$$2p \cos \theta = 2m^*c - \hbar k \quad (4.43)$$

En général, on peut négliger le second terme du deuxième membre par rapport au premier terme. Leur rapport vaut :

$$\frac{\hbar \omega}{2m^*c^2} \quad (4.44)$$

et reste petit devant 1 tant que la pulsation  $\omega$  reste petite devant  $\omega_0 = 2m^*c^2/\hbar$ . Or la condition 4.40 impose à la pulsation d'être petite devant les fréquences thermiques,  $k_B T/h \leq 4,6$  MHz en dessous de 200 mK. Cette condition est donc vérifiée tant que

$$c \geq \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi m^*}} \geq 7 \text{ ms}^{-1} \quad (4.45)$$

Ce majorant est obtenu avec  $T = 200$  mK et  $m^* = m$ . Le terme  $\hbar k$  est donc négligeable tant que la densité est supérieure à la densité spinodale de plus de  $1,02 \text{ kg m}^{-3}$ , soit une pression supérieure de plus de 0,2 mbar à la pression spinodale. Nous nous placerons dans ce cas.

Ainsi  $2p \cos \theta = 2m^*c$ . Or  $\cos \theta \leq 1$  et à basse température presque toutes les quasiparticules ont une impulsion  $p \leq m^*v_F$ . Ce processus à une quasiparticule est donc impossible quand  $c > v_F$ , ce qui est le cas habituel.

En revanche en raison de l'existence de la spinodale, il existe une pression négative en dessous de laquelle  $c_1 \leq v_F$  et ce processus devient envisageable. Nous avons effectué un calcul analogue à celui de Landau pour le son zéro quantique qui conduit pour le processus considéré à un coefficient d'atténuation :

$$\alpha_{1-1} \propto \frac{\hbar \omega}{k_B T} \tanh \left( \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right) \quad (4.46)$$

On constate alors que l'effet du traitement quantique de l'onde n'apparaît qu'aux pulsations supérieures à  $k_B T/h$ , inaccessibles pour le premier son prévu par la théorie de Landau. On peut imaginer que cet effet intervienne à des températures plus élevées que le domaine de validité de la théorie de Landau, mais son estimation requiert alors une théorie plus élaborée.

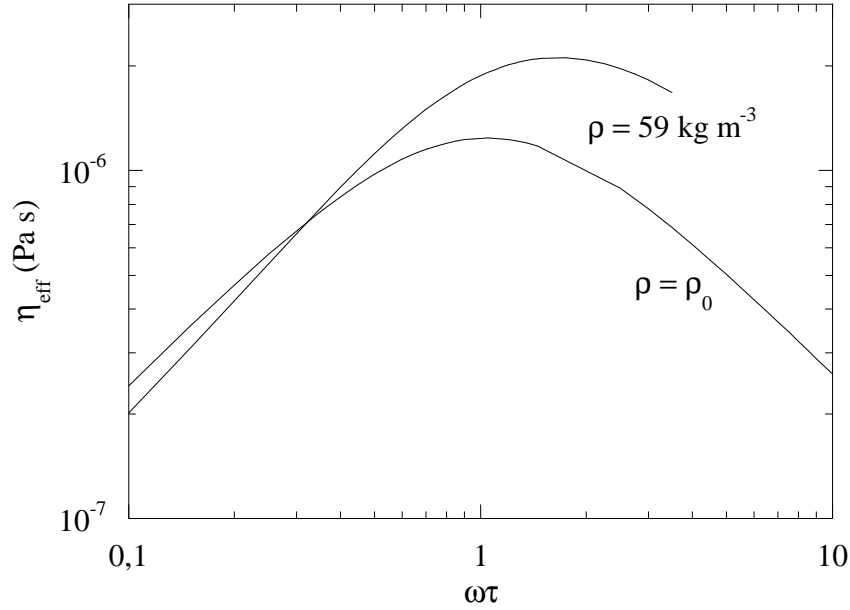


FIG. 4.13 – Viscosité effective à la densité d'équilibre liquide vapeur et à une densité proche de la densité spinodale.

### 4.6.3 Effet de l'atténuation du son sur la cavitation quantique

Jezek *et al.* ont développé un calcul de la température de transition entre cavitation activée thermiquement et cavitation par effet tunnel [89]. Ces auteurs introduisent dans l'hamiltonien une fonction de dissipation phénoménologique dite « de Rayleigh » :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \xi \frac{\dot{\rho}^2}{\rho^2} \quad (4.47)$$

où  $\xi$  est un paramètre qu'ils estiment en l'identifiant à la viscosité du liquide. En prenant pour  $\xi$  la valeur expérimentale de la viscosité à  $P = 0$  et  $T = 100$  mK, soit  $10^{-5}$  Pa s, ils obtiennent un abaissement important de la température de transition :  $T^* \simeq 20$  mK. Toutefois, ils soulignent que la dissipation dans l'hélium 3 à basse température dépend du libre parcours moyen des quasiparticules et qu'en procédant de la sorte, ils surestiment vraisemblablement les effets de dissipation.

D'après les résultats du paragraphe 4.6, nous pensons que cette dissipation est en réalité beaucoup plus faible que l'estimation de Jezek *et al.*. En effet, une fréquence de 10 GHz, caractéristique du processus de nucléation par effet tunnel [27], est décrite à basse température par le régime de son zéro (*cf.* § 4.5.2), et l'atténuation n'est plus donnée par une viscosité hydrodynamique : c'est une fonction croissante de la température et indépendante de la fréquence. On peut toutefois essayer de définir une viscosité effective  $\eta_{\text{eff}}$  sur le modèle de la viscosité

hydrodynamique en écrivant (*cf.* § 3.2.4, Éq. 3.11) :

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{3\rho c^3}{8\pi^2 f^2} \alpha = \frac{3\rho c^2}{8\pi^2 f} \alpha \lambda \quad (4.48)$$

afin de donner un majorant au paramètre  $\xi$  intervenant dans cette théorie simplifiée. La figure 4.13 illustre ce calcul, et donne  $\xi \leq 2 \cdot 10^{-6}$  Pa.s. De plus, pour une fréquence de 10 GHz nous obtenons  $\omega\tau$  proche de 10 à 100 mK et près de la spinodale, soit  $\xi \simeq 10^{-6}$  Pa.s. Pour cette valeur l'effet calculé par Jezek *et al.* est faible : la température de transition  $T^*$  vaut 100 mK au lieu de 120 mK pour  $\xi = 0$ .

De plus Jezek *et al.* ne font intervenir que le premier son. Nous allons proposer dans le paragraphe suivant une interprétation basée sur l'existence du son zéro, et conduisant à un effet nouveau, plus fondamental et plus important que celui de l'atténuation.

## 4.7 Effet du son zéro sur la cavitation

Dans ce paragraphe nous exposons une tentative d'interprétation de la brusque augmentation du seuil de cavitation mesuré expérimentalement quand la température diminue au dessous de 50 mK. Nous pensons que les fluctuations nécessaires à la nucléation des germes critiques, telles qu'on les considérait jusqu'à présent, devraient être décrites par le son zéro. Nous montrons que l'énergie correspondante serait alors si importante que la cavitation ne peut avoir lieu que si au contraire, on demeure dans un régime hydrodynamique de premier son. Enfin nous prouvons que ce nouveau régime n'est atteint qu'à des pressions extrêmement proches de la limite spinodale.

Indiquons tout d'abord les divers ordres de grandeurs intervenant dans le problème. Dans la théorie de fonctionnelle de densité habituelle (*cf.* § 1.4), la taille caractéristique du profil critique  $R_c$  à la pression de cavitation estimée pour les expériences est de l'ordre de 1 nm, ce qui représente aux densités proches de la spinodale une cinquantaine d'atomes. Ceci nous amène à penser que les excitations individuelles des quasiparticules interviennent de manière négligeable dans le processus de nucléation, en raison de la faible probabilité d'en combiner cinquante de manière adéquate pour obtenir une fluctuation critique. Nous faisons donc l'hypothèse que seules les excitations collectives doivent être prises en considération.

Le libre parcours moyen des quasiparticules vaut  $\bar{l} = v_F \tau$ . Nos estimations donnent :  $\tau T^2 \simeq 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s mK}^2$  (*cf.* § 4.5.1) et  $v_F \simeq 75 \text{ m s}^{-1}$  (*cf.* § 4.4) au voisinage de la spinodale, soit  $\bar{l} \geq 11 \text{ nm}$  au dessous de 100 mK ( $\bar{l} \simeq 45 \text{ nm}$  à 50 mK). Le libre parcours moyen devient grand devant le rayon critique de la théorie habituelle, et il nous semble par conséquent que les perturbations de densité qui aboutissent à ces profils critiques ne peuvent être décrites par le



premier son. En revanche, la longueur de Fermi  $l_F = h/(m^* v_F) \simeq 0,14$  nm est suffisamment faible devant  $R_c$  et on peut définir une surface de Fermi locale aux différents points du profil de densité critique. Lors de la croissance de ce germe, nous pensons donc que la propagation du front doit être décrite par le son zéro.

Ceci signifie que nous sommes en désaccord avec Barranco *et al.* [106, p. 96] qui écartent l'intervention du son zéro en expliquant que l'effet attendu sur la température de transition entre les régimes de cavitation thermique et quantique quand on introduit le son zéro est faible parce que le problème se ramène à l'étude d'oscillations radiales du système possédant la symétrie sphérique (rappelons en effet que le son zéro correspond à une oscillation anisotrope de la sphère de Fermi locale). Nous pensons que, bien que l'oscillation de densité soit radiale, lors de la croissance du germe, les surfaces de Fermi locales n'ont pas la symétrie sphérique. En effet, elles sont déformées de manière axiale dans la direction de propagation du front de la perturbation en raison du transfert de matière qui l'accompagne.

Signalons tout de même un problème nouveau qui apparaît quand on définit les surfaces de Fermi à cette échelle : cela revient à introduire un volume de quantification de l'ordre de  $(R_c/10)^3$ , ce qui entraîne un écart entre les quasi-impulsions  $\delta p = 10\hbar/R_c \simeq 10^{-24}$ , soit un écart entre les énergies  $\delta\epsilon = \delta(p^2/2m^*) \simeq v_F \delta p$  qui devient supérieur à la largeur de la zone diffuse  $k_B T$  au dessous de 100 mK. La théorie de Landau ne serait alors plus applicable. Ce problème se pose en fait de manière analogue dans la définition des phonons de courte longueur d'onde : il faut pouvoir définir la surface de Fermi à petite échelle devant cette longueur d'onde et le volume de quantification introduit écarte les niveaux. Nous pensons que la prise en compte du son zéro demeure pertinente même si un calcul complet s'avère ardu.

Revenons maintenant à la nucléation. La fluctuation critique de largeur caractéristique  $R_c$  peut être considérée comme la superposition d'une distribution de phonons. Pour une fluctuation dont le centre de masse reste immobile, cette distribution est centrée en zéro et possède une largeur caractéristique de  $2\pi/R_c$  en nombre d'onde. Cette valeur est très supérieure au nombre d'onde de transition entre le premier son et le son zéro,  $k_{0-1} = 2\pi/\bar{l}$ . Le spectre d'énergie des phonons présente donc deux parties différentes : pour  $k < k_{0-1}$ , les phonons sont décrits par le premier son et possèdent une énergie  $\hbar c_1 k$  d'autant plus faible que la densité est proche de la densité spinodale à laquelle cette énergie s'annule ; pour  $k > k_{0-1}$ , les phonons sont décrits par le son zéro et possèdent une énergie  $\hbar c_0 k$  qui demeure élevée même à la densité spinodale. Pour un seul phonon de nombre d'onde  $k = 2\pi/R_c$  et près de la spinodale, cette énergie vaut  $h v_F/R_c \simeq 3,3$  K, valeur de l'ordre d'un dixième de l'énergie d'activation habituelle, c'est à dire l'énergie de *toute* la distribution critique, calculée en considérant un profil figé. Les fluctuations qui conduisent à un profil critique sont donc extrêmement rares, et le taux de cavitation reste faible tant que le rayon critique n'est pas suffisamment grand pour que les fluctuations responsables de la cavitation soient toutes décrites par le premier son.

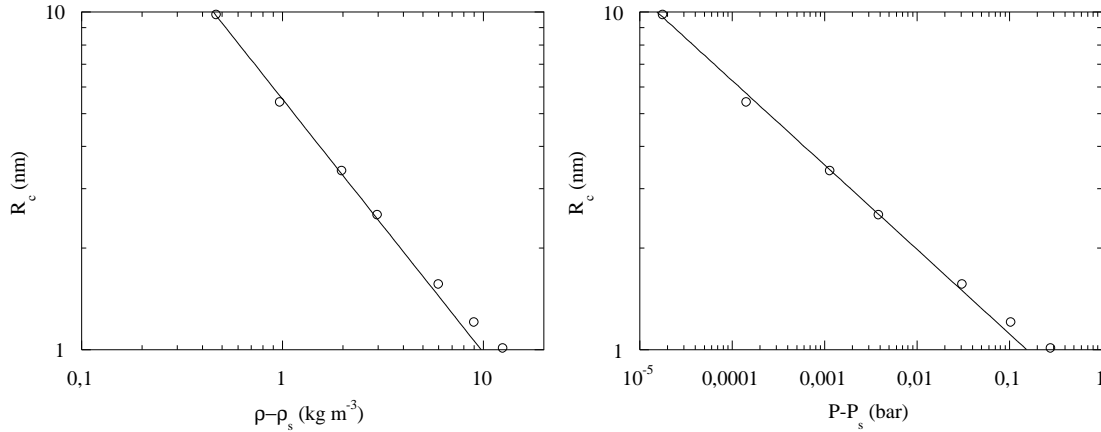


FIG. 4.14 – (a) Rayon critique en fonction de l'écart en densité à la spinodale. La droite est un ajustement par une loi de puissance d'exposant  $-3/4$ . (b) Rayon critique en fonction de l'écart en pression à la spinodale. La droite est un ajustement par une loi de puissance d'exposant  $-1/4$ .

L'existence du son zéro rend donc négligeable le taux de cavitation pour les profils critiques si leur taille est aussi petite qu'on l'admettait (de l'ordre de 1 nm). Il ne fait bien évidemment pas disparaître l'instabilité thermodynamique de la spinodale : le calcul habituel basé sur le premier son redevient valable dès que le rayon critique devient supérieur au libre parcours moyen, ce qui se produit suffisamment près de la spinodale où ce rayon critique diverge. Nous avons répété les calculs numériques de Maris (*cf.* § 1.4.1) à des pressions proches de la spinodale afin d'étudier l'évolution du rayon critique  $R_c$ , que nous définissons comme la distance à laquelle la densité du profil atteint la moyenne de sa valeur au centre et de sa valeur à l'infini. Les résultats sont représentés sur la figure 4.14 (a) en fonction de l'écart en densité à la spinodale, et sur la figure 4.14 (b) en fonction de l'écart en pression à la spinodale. On constate que le rayon critique suit des lois de puissance :  $R_c \propto (\rho - \rho_s)^{-3/4}$  et  $R_c \propto (P - P_s)^{-1/4}$ . Nous pensons qu'il est possible de retrouver ce comportement par un calcul analytique utilisant l'hypothèse  $c_1^3 \propto (P - P_s)$ , à la façon de Lifshitz et Kagan : dans le cas classique où  $c_1^4 \propto (P - P_s)$ , ils obtiennent  $R_c \propto (\rho - \rho_s)^{-1/2}$ . Selon nos résultats, le rayon critique ne devient supérieur au libre parcours moyen à 100 mK ( $\bar{l} \geq 11$  nm) que pour des pressions éloignées de la pression spinodale de moins de 0,02 mbar (voir Fig. 4.14 (b)) ; cette valeur est très faible comparée à l'écart estimé habituellement dans le cadre de la cavitation thermique :  $P - P_s \simeq 10$  mbar à 50 mK. De plus, quand la température diminue, le libre parcours moyen augmente et la pression doit s'approcher encore davantage de la limite spinodale.

En ce qui concerne la cavitation quantique, en négligeant tout effet d'atténuation du son, nous pensons que de la même façon, les fluctuations de courte longueur d'onde sont décrites par le son zéro et l'hamiltonien correspondant conduit

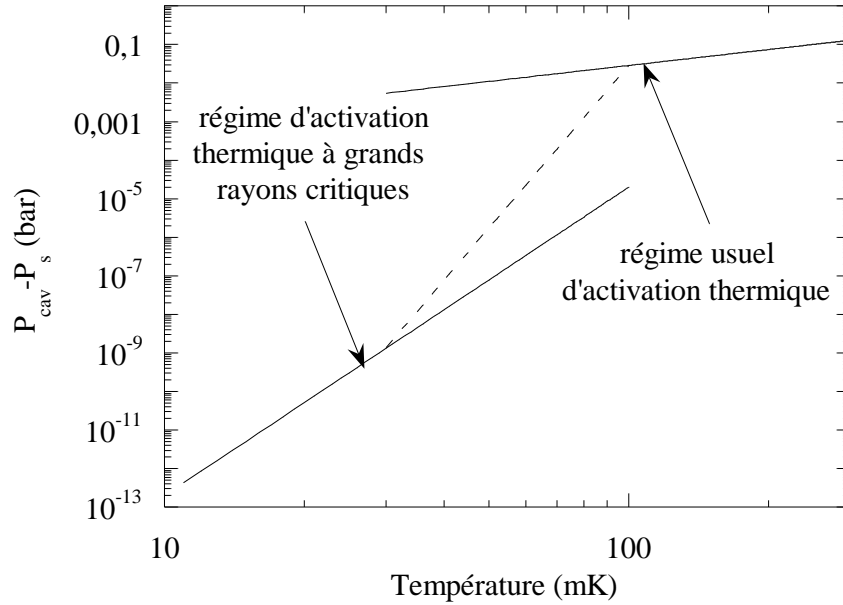


FIG. 4.15 – Écart entre pression de cavitation et pression spinodale en fonction de la température. Au dessous de 100 mK intervient une transition du régime d’activation thermique habituel vers un nouveau régime d’activation thermique pour de grands rayons critiques. La ligne en pointillés est arbitraire et illustre le passage d’un régime à l’autre.

à des énergies élevées qui rendent négligeable le taux de nucléation. Le calcul habituel redevient cependant valable quand les fluctuations critiques sont entièrement décrites par le premier son, c’est à dire aux pressions très proches de la spinodale. Il existe alors une température de transition  $T^*$  entre le régime de cavitation par activation thermique et le régime quantique, mais  $T^*$  est nettement inférieure à celle admise jusqu’à présent. Pour en donner une estimation grossière, on peut utiliser le comportement près de la spinodale calculé par Xiong et Maris à partir des résultats de Lifshitz et Kagan [24] :  $T^* \propto \sqrt{P - P_s}$ . Dans notre description,  $T^* \leq \sqrt{2/10^3} \times 120 \text{ mK} \simeq 5,4 \text{ mK}$ . Cela signifie que dans la zone accessible expérimentalement ( $T \geq 35 \text{ mK}$ ), la cavitation est toujours réalisée par un processus d’activation thermique, contrairement à ce qui était prévu par les théories précédentes.

Pour que le processus que nous avons décrit ait bien lieu, il faut que la température soit suffisamment basse pour que le son zéro soit défini et que la pression atteinte soit suffisamment proche de la pression spinodale pour que la vitesse du son zéro diffère suffisamment de la vitesse du premier son. Pour les préfacteurs admis pour notre expérience ( $\Gamma_0 V \tau$  de l’ordre de  $10^{13}$ ), la pression de cavitation aux températures inférieures à 100 mK est distante de la pression spinodale de moins d’une vingtaine de millibars, soit un écart en densité inférieur à  $5 \text{ kg m}^{-3}$ . D’après la figure 4.6 du paragraphe 4.4, dans cette zone la vitesse du son zéro

devient bien proche de la vitesse de Fermi tandis que la vitesse du premier son tend vers 0. Ajoutons que si les conditions d'existence du son zéro ne sont pas remplies (*cf.* § 4.2.4), notre raisonnement demeure valable car l'absence de son zéro entraîne l'absence de modes collectifs de courte longueur d'onde.

Afin d'illustrer le processus proposé, nous allons donner l'allure de la pression de cavitation en fonction de la température. Aux températures suffisamment élevées, la cavitation s'effectue par le mécanisme d'activation thermique habituel; on a alors (*cf.* § 3.2.4) :  $P_{\text{cav}} - P_s \propto T^{4/3}$ . Aux basses températures, quand la rigidité due au son zéro empêche ce mécanisme, il faut atteindre des pressions pour lesquelles le rayon critique dépasse le libre parcours moyen. Comme ce dernier varie en  $1/T^2$  et que  $R_c \propto (P_{\text{cav}} - P_s)^{-1/4}$ , on a alors  $P_{\text{cav}} - P_s \propto T^8$ . Ces deux comportements sont tracés en coordonnées logarithmiques sur la figure 4.15. Nous ne savons cependant pas décrire précisément sur quel domaine de température s'effectue la transition et quelle est sa forme.

## 4.8 Conclusion

Nous avons étudié de manière détaillée les propriétés de liquide de Fermi de l'hélium 3 à pression négative. Pour cela, nous avons extrapolé les différents paramètres de Fermi à l'aide de deux hypothèses majeures : l'équation d'état de Maris à pression négative et la variation de la masse effective donnée par le modèle de Stringari. Un comportement original apparaît au voisinage de la limite spinodale : la vitesse du premier son s'annule tandis que la vitesse du son zéro, s'il existe, demeure supérieure à la vitesse de Fermi qui ne s'annule pas. Nous avons établi une condition nécessaire et suffisante d'existence du son zéro dans le cas où l'on se restreint aux deux premiers paramètres de Fermi. Nous avons estimé la fréquence de transition entre premier son et son zéro en fonction de la température et de la densité. La différence entre les deux vitesses est responsable d'un pic d'atténuation important à la transition. Nous avons également étudié l'atténuation de part et d'autre de ce pic, dans le régime hydrodynamique visqueux et dans le régime balistique. Ceci nous a amené à critiquer l'article de Jezek *et al.* concernant l'effet de la dissipation sur la cavitation quantique, en montrant que cet effet ne pouvait être important dans le cadre de l'approche habituelle. Mais nous avons alors été amené à proposer un processus original pour tenir compte de la grande différence entre les vitesses des deux sons aux pressions proches de la pression spinodale, et tenter d'expliquer la brusque augmentation du seuil de cavitation observée expérimentalement au dessous de 50 mK. En supposant que seuls les modes collectifs participent à la nucléation, nous montrons que les fluctuations permettant de construire les germes critiques habituellement admis sont décrites par le son zéro et deviennent extrêmement rares à basse température. Les fluctuations présentes, décrites par le premier son, ne permettent de produire que des germes de dimension supérieure au libre parcours moyen des quasiparticules.

Afin que la cavitation ait lieu par activation thermique, la pression doit donc être extrêmement proche de la limite spinodale pour que le rayon critique atteigne ces dimensions. La cavitation quantique, si elle existe, n'apparaît qu'à très basse température.

# Conclusion

Nous avons réalisé la première étude de cavitation dans l'hélium 3 loin de toute paroi, en utilisant la focalisation d'une onde ultrasonore pour détendre le liquide à des pressions négatives de plusieurs bars. Cette technique avait été auparavant utilisée dans l'hélium 4. Une saturation du seuil de cavitation à basse température avait alors été observée et attribuée à la transition vers un régime de cavitation quantique.

De même que dans l'hélium 4, la cavitation dans l'hélium 3 est un phénomène stochastique : la probabilité de nucléation d'une bulle au cours d'une détente varie continuellement de 0 à 1 quand on augmente la tension d'excitation de la céramique. Ceci permet de définir un seuil de cavitation. Nous avons mesuré dans l'hélium 3 une décroissance monotone de ce seuil en fonction de la température. Au dessus de 100 mK, cette décroissance régulière est attribuée au régime de cavitation par activation thermique prévu par la théorie. Le préfacteur déduit des mesures est inférieur à la valeur prédite, mais l'accord est tout de même jugé relativement satisfaisant.

Nous avons réalisé une étude détaillée de la dépendance du seuil de cavitation en fonction de la pression statique du liquide, dans l'hélium 3 et dans l'hélium 4. Nous avons pu confirmer à cette occasion l'existence du plateau pour l'hélium 4 et vérifier une propriété importante : la température de transition entre nucléation thermique et nucléation quantique ne dépend pas de la pression de départ de l'onde acoustique, c'est à dire la pression statique dans la cellule. La précision de cette nouvelle étude nous a permis de donner un encadrement de la pression de cavitation. Pour les deux isotopes, les valeurs trouvées sont proches des estimations théoriques de la pression spinodale : aux plus basses températures, nous obtenons pour l'hélium 3 une pression de cavitation inférieure à  $-2,4$  bar, la pression spinodale étant évaluée à  $-3,1$  bar, et pour l'hélium 4 une pression de cavitation est inférieure à  $-8$  bar, la pression spinodale étant évaluée à  $-9,5$  bar.

La proximité de ces valeurs est liée à la faiblesse de l'amplitude des effets non-linéaires indiquée par cette étude, en désaccord avec les prédictions numériques. Les simulations numériques sont réalisées dans le cas d'une géométrie sphérique, tandis que notre expérience présente une géométrie hémisphérique ouverte : il serait intéressant d'évaluer l'effet des conditions limites différentes au point focal et à terme de réaliser des simulations avec la géométrie expérimentale. La faible

dépendance de la raideur de la variation de la probabilité en fonction de la tension d'excitation ne peut cependant pas s'expliquer avec de faibles non-linéarités. Pour résoudre ces questions, il faudrait avoir accès aux paramètres physiques instantanés au point focal (pression, densité, température) ; une nouvelle expérience où l'on mesure directement la densité de l'hélium a débuté dans notre laboratoire ; elle devrait permettre de mieux comprendre les non linéarités de l'onde et de s'en affranchir, ainsi que de s'affranchir de l'atténuation du son qui ont été l'une des corrections délicates dans le travail exposé ici. Les résultats préliminaires de cette nouvelle expérience dans l'hélium 4 indiquent l'existence de fortes non-linéarités. Une différence existe toutefois par rapport au dispositif précédent : la mesure de l'indice de réfraction nécessite la présence d'une plaque de verre au point focal, et cette nouvelle géométrie ajoute une condition de vitesse nulle au centre comme dans une géométrie sphérique. Il est nécessaire de poursuivre l'étude de la cavitation dans cette nouvelle expérience, en même temps que celle d'un phénomène nouveau que nous venons d'observer : la métastabilité du liquide comprimé au delà de la densité de solidification et la nucléation d'un cristal vers 32 bar, soit 6 bar au dessus de la pression d'équilibre liquide-solide.

En revanche, l'existence d'un plateau quantique pour la cavitation dans l'hélium 3, qui était prévue au dessous de 120 mK, n'a pas été observée. Le seuil de cavitation ne sature pas quand la température diminue ; au contraire, il augmente brusquement vers 50 mK. Cet effet nous a conduits à nous interroger sur le rôle éventuel des propriétés de liquide de Fermi de l'hélium 3 dans le phénomène de cavitation. Nous avons ainsi été amené à extrapoler les paramètres de Fermi à pression négative d'une façon physiquement cohérente. L'abaissement de la température de transition entre régimes thermique et quantique en raison de la dissipation nous semble pouvoir être écartée. Nous proposons une interprétation faisant appel au son zéro qui indique que quand le liquide devient dégénéré, seules les fluctuations de longueur d'onde suffisamment grande sont disponibles et la nucléation ne peut avoir lieu qu'à des pressions beaucoup plus proches de la limite spinodale (à quelques Pascals au lieu de quelques dixièmes de bars). Nous pensons qu'il serait intéressant de poursuivre une étude de la cinétique de nucléation dans l'hélium en considérant les modes collectifs, et éventuellement de refaire une expérience dans l'hélium 3 en présence d'une paroi de verre par exemple, ou encore dans des mélanges hélium 3-hélium 4, bien que nous nous attendions à des problèmes thermiques difficiles.

# Bibliographie

- [1] DEBENEDETTI, P. G. *Metastable liquids*. Princeton : Princeton University Press, 1996.
- [2] REID, R. C. Superheated liquids. *Amer. Sci.*, 1976, **64**, 146-156.
- [3] MARIS, H. J. et BALIBAR, S. Negative pressures and cavitation in liquid helium. *Science*, 2000, **53**, 29-34.
- [4] HOLBROOK, N. M., BURNS, M. J. et FIELDS, C. B. Negative xylem pressures in plants : a test of the balancing pressure technique. *Science*, 1995, **270**, 1193-1194.
- [5] POCKMAN, W. T., SPERRY, J. S. et O'LEARY, J. W. Sustained and significant negative water pressure in xylem. *Nature*, 1995, **378**, 715-716.
- [6] KELL, G. S. Early observations of negative pressures in liquids. *Am. J. Phys.*, 1983, **51**, 1038-1041.
- [7] DONNY, F. Mémoire sur la cohésion des liquides, et sur leur adhérence aux corps solides. *Ann. Chim. Phys.*, 1846, **16**, 167-190.
- [8] REYNOLDS, O. *Mem. Proc. Manchester Liter. Philos. Soc.*, 1882, **7**, 1-19.
- [9] TREVENA, D. H. Reynolds on the internal cohesion of liquids. *Am. J. Phys.*, 1979, **47**, 341-345.
- [10] BERTHELOT, M. Sur quelques phénomènes de dilatation forcée des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 1850, **30**, 232-237.
- [11] BRIGGS, L. J. Limiting negative pressure of water. *J. Appl. Phys.*, 1950, **21**, 721-722.
- [12] BRIGGS, L. J. The limiting negative pressure of mercury in pyrex glass. *J. Appl. Phys.*, 1953, **24**, 488-490.
- [13] APFEL, R. E. Water superheated to 279,5°C at atmospheric pressure. *Nat. Phys. Sci.*, 1972, **238**, 63-64.
- [14] CWILONG, B. M. Sublimation in a Wilson chamber. *Proc. Roy. Soc.*, 1947, **190**, 137-143.
- [15] ZHENG, Q., DURBEN, D. J., WOLF, G. H. et ANGELL, C. A. Liquids at large negative pressures : water at the homogeneous nucleation limit. *Science*, 1991, **254**, 829-832.



- [16] GIBBS, J. W. On the equilibrium of heterogeneous substances. *Trans. Conn. Acad.*, Oct. 1875 - Mai 1876, **III**, 108-248.
- [17] GIBBS, J. W. On the equilibrium of heterogeneous substances. *Trans. Conn. Acad.*, Mai 1877 - Juil. 1878, **III**, 343-524.
- [18] OXTOBY, D. W. Homogeneous nucleation : theory and experiment. *J. Phys. : Condens. Matter.*, 1992, **4**, 7627-7650.
- [19] PETTERSEN, M. S., BALIBAR, S. et MARIS, H. J., Experimental investigation of cavitation in superfluid  $^4\text{He}$ . *Phys. Rev. B*, 1994, **49**, 12062-12070.
- [20] ROCHE, P., DEVILLE, G., APPLEYARD, N. J. et WILLIAMS, F. I. B. Measurement of the surface tension of superfluid  $^4\text{He}$  at low temperature by capillary wave resonances. *J. Low Temp. Phys.*, 1997, **106**, 565-573.
- [21] LIFSHITZ, I. M. et KAGAN, Yu. Quantum kinetics of phase transitions at temperature close to absolute zero. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 1972, **62**, 385-402. Traduit dans *Sov. Phys. JETP*, 1972, **35**, 206-214.
- [22] GUILLEUMAS, M., BARRANCO, M., JEZEK, D. M., LOMBARD, R. J. et PI, M. Quantum cavitation in liquid helium. *Phys. Rev. B*, 1996, **54**, 16135-16138.
- [23] MARIS, H. J. et XIONG, Q. Nucleation of bubbles in liquid helium at negative pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **63**, 1078-1081.
- [24] XIONG, Q. et MARIS, H. J. Liquid helium at negative pressure : nucleation of bubbles and anomalous phonon dispersion. *J. Low Temp. Phys.*, 1989, **77**, 347-369.
- [25] ABRAHAM, B. M., CHUNG, D., ECKSTEIN, Y., KETTERSON, J. B. et ROACH, P. R. Sound propagation, density, and viscosity in liquid  $^3\text{He}$ . *J. Low Temp. Phys.*, 1972, **6**, 521-528.
- [26] ABRAHAM, B. M., ECKSTEIN, Y., KETTERSON, J. B., KUCHNIR, M. et ROACH, P. R. Velocity of sound, density and Grüneisen constant in liquid  $^4\text{He}$ . *Phys. Rev. A*, 1970, **1**, 250-257.
- [27] MARIS, H. J. Theory of quantum nucleation of bubbles in liquid helium. *J. Low Temp. Phys.*, 1995, **98**, 403-424.
- [28] MARIS, H. J. Nucleation of bubbles on quantized vortices in helium-4. *J. Low Temp. Phys.*, 1994, **94**, 125-144.
- [29] MARIS, H. J. Critical phenomena in  $^3\text{He}$  and  $^4\text{He}$  at  $T = 0\text{K}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**, 45-47.
- [30] BARRANCO, M., PI, M., POLLS, A. et VIÑAS, X. The surface tension of liquid  $^3\text{He}$  above 200 mK : a density functional approach. *J. Low Temp. Phys.*, 1990, **80**, 77-88.
- [31] GUIRAO, A., CENTELLES, M., BARRANCO, M., PI, M., POLLS, A. et VIÑAS, X. A density functional model for the surface properties of liquid  $^4\text{He}$ . *J. Phys. : Condens. Matter.*, 1992, **4**, 667-678.

- [32] GUILLEUMAS, M., PI, M., BARRANCO, M., NAVARRO, J. et SOLÍS, M. A. Thermal nucleation of cavities in liquid helium at negative pressures. *Phys. Rev. B*, 1993, **47**, 9116-9119.
- [33] DALFOVO, F., LASTRI, A., PRICAUPENKO, L., STRINGARI, S. et TREINER, J. Structural and dynamical properties of superfluid helium : a density-functional approach. *Phys. Rev. B*, 1995, **52**, 1193-1209.
- [34] SOLÍS, M. A. et NAVARRO, J. Liquid  $^4\text{He}$  and  $^3\text{He}$  at negative pressure. *Phys. Rev. B*, 1992, **45**, 13080-13083.
- [35] CAMPBELL, C. E., FOLK, R. et KROTSCHHECK, E. Critical behavior of liquid  $^4\text{He}$  at negative pressures. *J. Low Temp. Phys.*, 1996, **105**, 13-36.
- [36] BORONAT, J., CASULLERAS, J. et NAVARRO, J. Monte Carlo calculations for liquid  $^4\text{He}$  at negative pressure. *Phys. Rev. B*, 1994, **50**, 3427-3430.
- [37] BAUER, G. H., CEPERLEY, D. M. et GOLDENFELD, N. Path-integral Monte Carlo simulation of helium at negative pressures. *Phys. Rev. B*, 2000, **61**, 9055-9060.
- [38] CASULLERAS, J. et BORONAT, J. Progress in Monte Carlo calculations of Fermi systems : normal liquid  $^3\text{He}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**, 3121-3124.
- [39] HALL, S. C. et MARIS, H. J. Thermodynamics and nucleation of bubbles in normal and superfluid liquid helium-4 at negative pressures. *J. Low Temp. Phys.*, 1997, **107**, 263-282.
- [40] COLEMAN, S. Fate of the false vacuum : semiclassical theory. *Phys. Rev. D*, 1977, **15**, 2929-2936.
- [41] MISENER, A. D. et HÉBERT, G. R. Tensile strength of liquid helium II. *Nature*, 1956, **177**, 946-947.
- [42] BEAMS, J. W. Tensile strength of liquid helium II. *Phys. Rev.*, 1956, **104**, 880-882.
- [43] FINCH, R. D., KAGIWADA, R., BARMATZ, M. et RUDNICK, I. Cavitation in liquid helium. *Phys. Rev.*, 1964, **134**, A1425-1428.
- [44] FINCH, R. D. et WANG, T. G. J. Visible cavitation in liquid helium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1966, **39**, 511-514.
- [45] FINCH, R. D., WANG, T. G. J., KAGIWADA, R., BARMATZ, M. et RUDNICK, I. Studies of the threshold-of-cavitaion noise in liquid helium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1966, **40**, 211-218.
- [46] JARMAN, P. D. et TAYLOR, K. J. The sonically induced cavitation of liquid helium. *J. Low Temp. Phys.*, 1970, **2**, 389-402.
- [47] MARSTON, P. Tensile strength and visible ultrasonic cavitation of superfluid  $^4\text{He}$ . *J. Low Temp. Phys.*, 1976, **25**, 383-407.
- [48] EDWARDS, M. H., CLEARY, R. M. et FAIRBANK, W. M. Bubble formation on vortices in a liquid helium bubble chamber. In : BREWER, D. F. *Quantum Fluids*. Amsterdam : North-Holland, 1966, 140-145.

- [49] MOSSÉ, A., CHU, M. L. JR et FINCH, R. D. Movie films of cavitation in superfluid helium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1970, **47**, 1258-1261.
- [50] CHENG, E., COLE, M. W., DUPONT-ROC, J., SAAM, W. F. et TREINER, J. Novel wetting behavior in quantum fluids. *Rev. Mod. Phys.*, 1993, **65**, 557-567.
- [51] KONSTANTINOV, D., HOMSI, W., LUZURIAGA, J., SU, C.-K., WEILERT, M. A. et MARIS, H. J. How does a bubble chamber work? *J. Low Temp. Phys.*, 1998, **113**, 485-490.
- [52] SINHA, D. N., SEMURA, J. S. et BRODIE, L. C. Homogeneous nucleation in  $^4\text{He}$  : a corresponding state analysis. *Phys. Rev. A*, 1982, **26**, 1048-1060.
- [53] LEZAK, D., BRODIE, L. C., SEMURA, J. S. et BODEGOM, E. Homogeneous nucleation temperature of liquid  $^3\text{He}$ . *Phys. Rev. B*, 1988, **37**, 150-154.
- [54] NISSEN, J. A., BODEGOM, E., BRODIE, L. C. et SEMURA, J. S. *Adv. Cryo. Eng.*, 1988, **33**, 999.
- [55] NISSEN, J. A., BODEGOM, E., BRODIE, L. C. et SEMURA, J. S. Tensile strength of liquid  $^4\text{He}$ . *Phys. Rev. B*, 1989, **40**, 6617-6624.
- [56] XIONG, Q. et MARIS, H. J. Study of cavitation in superfluid helium-4 at low temperatures. *J. Low Temp. Phys.*, 1991, **82**, 105-118.
- [57] LAMBARÉ, H., ROCHE, P., BALIBAR, S., MARIS, H. J., ANDREEVA, O. A., GUTHMANN, C., KESHISHEV, K. O. et ROLLEY, E. Cavitation in superfluid helium-4 at low temperature. *Eur. Phys. J. B*, 1998, **2**, 381-391.
- [58] MARIS, H. J., BALIBAR, S. et PETTERSEN, M. S. Nucleation of bubbles in liquid helium. *J. Low Temp. Phys.*, 1993, **93**, 1069-1078.
- [59] BALIBAR, S., GUTHMANN, C., LAMBARÉ, H., ROCHE, P., ROLLEY, E. et MARIS, H. J. Quantum cavitation in superfluid helium-4? *J. Low Temp. Phys.*, 1995, **101**, 271-277.
- [60] LAMBARÉ, H. *Cavitation quantique dans l'hélium-4 superfluide*. Thèse de doctorat : Sciences physiques : Université Paris VI, 1998.
- [61] MARIS, H. J. Communication privée.
- [62] WATERS, G. W., WATMOUGH, D. J. et WILKS, J. Absorption of sound in helium II below 0,6 K. *Phys. Lett.*, 1967, **26A**, 12-13.
- [63] WATERS, G. W. Communication privée.
- [64] WILKS, J. *The properties of liquid and solid helium*. Oxford : Clarendon Press, 1967.
- [65] ROCHE, P., LAMBARÉ, H., ROLLEY, E., LACOSTE, D., BALIBAR, S., GUTHMANN, C. et MARIS, H. J. Growth and collapse of bubbles in superfluid  $^4\text{He}$ . *Czech. J. Phys.*, 1996, **46**, 381-382.

- [66] RAYLEIGH (Lord). On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.*, 1917, **34**, 94-98.
- [67] CLASSEN, J., SU, C.-K., MOHAZZAB, M. et MARIS, H. J. Electrons and cavitation in liquid helium. *Phys. Rev. B*, 1998, **57**, 3000-3010.
- [68] CHAVANNE, X., BALIBAR, S. et CAUPIN, F. Acoustic crystallization and heterogeneous nucleation. *Soumis à Phys. Rev. Lett.* (5 février 2001).
- [69] CAUPIN, F., ROCHE, P., MARCHAND, S. et BALIBAR, S. Cavitation in normal liquid helium 3. *J. Low Temp. Phys.*, 1998, **113**, 473-478.
- [70] CAUPIN, F. et BALIBAR, S. Search for quantum cavitation in liquid  $^3\text{He}$ . *Physica B*, 2000, **284-288**, 212-213.
- [71] CAUPIN, F. et BALIBAR, S. Cavitation pressure in liquid helium. *Soumis à Phys. Rev. B* (19 février 2001).
- [72] VAN CLEVE, J. E. Special materials. In : RICHARDSON, R. C. et SMITH, E. N. *Experimental techniques in condensed matter physics at low temperatures*. Redwood City, Calif. : Addison Wesley, 1988.
- [73] PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A. et VETTERLING, W. T. *Numerical recipes in Pascal*. Cambridge, Mass. : Cambridge University Press, 1989.
- [74] DIU, B., GUTHMANN, C., LEDERER, D. et ROULET, B. *Éléments de physique statistique*. Paris : Hermann, 1989.
- [75] ABEL, W. R., ANDERSON, A. C. et WHEATLEY, J. C. Propagation of sound in  $\text{He}^3$ . *Phys. Rev. Lett.*, 1961, **7**, 299-301.
- [76] ABEL, W. R., ANDERSON, A. C. et WHEATLEY, J. C. Propagation of zero sound in liquid  $\text{He}^3$  at low temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, 1966, **17**, 74-78.
- [77] BETTS, D. S., OSBORNE, D. W., WELBER, B. et WILKS, J. The viscosity of liquid helium 3. *Phil. Mag.*, 1963, **8**, 977-987.
- [78] BETTS, D. S. et WILKS, J. The viscosity of liquid  $^3\text{He}$  above 0,04 K. In : DAUNT, J. G., EDWARDS, D. O., MILFORD, F. J. et YAQUB, M. *Low Temperature Physics LT9*. New York : Plenum Press, 1965, partie A, 129-132.
- [79] BETTS, D. S., KEEN, B. E. et WILKS, J. The viscosity and acoustic impedance of liquid helium-3. *Proc. R. Soc. A*, 1965, **289**, 34-45.
- [80] BERTINAT, M. P., BETTS, D. S., BREWER, D. F. et BUTTERWORTH, G. J. Damping of torsional oscillations of a quartz crystal cylinder in liquid helium at low temperatures. I. Viscosity of pure  $^3\text{He}$ . *J. Low Temp. Phys.*, 1974, **16**, 479-494.
- [81] BLACK, M. A., HALL, H. E. et THOMPSON, K. The viscosity of liquid helium 3. *J. Phys. C*, 1971, **4**, 129-142.

- [82] ABRIKOSOV, A. A. et KHALATNIKOV, I. M. The theory of a Fermi liquid. *Rep. Prog. Phys.*, 1959, **22**, 329-367.
- [83] BALIBAR, S., CAUPIN, F., ROCHE, P. et MARIS, H. J. Quantum cavitation : a comparison between superfluid helium-4 and normal liquid helium-3. *J. Low Temp. Phys.*, 1998, **113**, 459-471.
- [84] LANDAU, L. et LIFSHITZ, E. *Physique théorique. Mécanique des fluides (tome 6)*. 2<sup>e</sup> éd. Moscou : Mir, 1989, 384-387.
- [85] WHEATLEY, J. C. Experimental properties of superfluid <sup>3</sup>He. *Rev. Mod. Phys.*, 1975, **47**, 415-470.
- [86] APPERT, C., D'HUMIÈRES, D., CHAVANNE, X., CAUPIN, F. et BALIBAR, S. Non linear focusing of acoustic waves in liquid helium. *En préparation*.
- [87] CAUPIN, F. *Cavitation dans l'hélium liquide*. Diplôme d'études approfondies : Physique quantique : Université Paris VI, 1997.
- [88] DRANSFELD, K., NEWELL, J. A. et WILKS, J. The absorption of sound in liquid helium II. *Proc. R. Soc. A*, 1958, **243**, 500-517.
- [89] JEZEK, D. M., PI, M. et BARRANCO, M. Quantum cavitation in liquid <sup>3</sup>He : dissipation effects. *Phys. Rev. B*, 1999, **60**, 3048-3051.
- [90] LANDAU, L. D. The theory of a Fermi liquid. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 1956, **30**, 1058-1064. Traduit dans *Soviet Physics JETP*, 1957, **3**, 920-925.
- [91] LANDAU, L. D. Oscillations in a Fermi liquid. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 1957, **32** 59-66. Traduit dans *Soviet Physics JETP*, 1957, **5**, 101-108.
- [92] LANDAU, L. D. On the theory of the Fermi liquid. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 1958, **35**, 97-103. Traduit dans *Soviet Physics JETP*, 1959, **8**, 70-74.
- [93] BAYM, G. et PETHICK, C. *Landau Fermi-liquid theory*. New York : J. Wiley and Sons, 1991.
- [94] POMERANCHUK, I. Y. On the stability of a Fermi liquid. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 1958, **35**, 524-525. Traduit dans *Soviet Physics JETP*, 1959, **7**, 361-362.
- [95] KHALATNIKOV, I. L. et ABRIKOSOV, A. A. Dispersion of sound in a Fermi liquid. *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 1957, **33**, 110-115. Traduit dans *Soviet Physics JETP*, 1958, **6**, 84-89.
- [96] BROOKER, G. A. The acoustic impedance of liquid helium 3. *Proc. Phys. Soc.*, 1967, **90**, 397-416.
- [97] MERMIN, N. D. Existence of zero sound in a Fermi liquid. *Phys. Rev.*, 1967, **159**, 161-164.
- [98] KEEN, B. E., MATTHEWS, P. W. et WILKS, J. The acoustic impedance of liquid helium-3. *Proc. Roy. Soc. A*, 1965, **284**, 125-136.

- [99] SKÖLD, K., PELIZZARI, C. A., KLEB, R. et OSTROWSKI, G. E. Neutron scattering study of elementary excitations in liquid helium-3. *Phys. Rev. Lett.*, 1976, **37**, 842-845.
- [100] GREYWALL, D. S. Specific heat of normal liquid  $^3\text{He}$ . *Phys. Rev. B*, 1983, **27**, 2747-2766.
- [101] GREYWALL, D. S.  $^3\text{He}$  specific heat and thermometry at millikelvin temperatures. *Phys. Rev. B*, 1986, **33**, 7520-7538.
- [102] STRINGARI, S. Effective interactions and Hartree-Fock calculations in liquid  $^3\text{He}$ . *Phys. Lett. A*, 1984, **106**, 267-270.
- [103] HALPERIN, W. P. et VAROQUAUX, E. Order Parameter Collective Modes in Superfluid  $^3\text{He}$ . In : HALPERIN, W. P. et PITAEVSKII, L. P. *Helium 3*. Amsterdam : North Holland, 1990, 508-512.
- [104] MATSUMOTO, K., IKEGAMI, T. et OKUDA, Y. Observation of quantum limit of zero sound absorption in normal  $^3\text{He}$  at 400 MHz. *Physica B*, 1994, **194-196**, 743-744.
- [105] BARRE, C., PRIEUR, J.-Y., JOFFRIN, J., STENGER, M. et CHAPPELLIER, M. Quantum zero sound in liquid helium-3. *Physica B*, 1996, **219-220**, 663-665.
- [106] BARRANCO, M., GUILLEUMAS, M., JEZEK, D. M., LOMBARD, R. J., NAVARRO, J. et PI. M. Nucleation in dilute  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  mixtures at low temperatures. *J. Low Temp. Phys.*, 1999, **117**, 81-100.



# Annexe A

## Modèle de paroi mince

La théorie de Gibbs [16, 17] de la formation d'une nouvelle phase fluide au sein d'une phase fluide homogène est basée sur la détermination du travail minimal requis pour former un germe de  $N$  particules de la nouvelle phase dans la phase massive :

$$W_{\min} = \sigma S + (P - P')V' + N[\mu'(T, P') - \mu(T, P)] \quad (\text{A.1})$$

où  $T$  est la température,  $\sigma$  la tension de surface,  $S$  l'aire de l'interface entre les deux phases,  $P$  et  $\mu$  la pression et le potentiel chimique de la phase massive,  $P'$ ,  $V'$  et  $\mu'$  la pression, le volume et le potentiel chimique du germe. Pour obtenir cette expression, Gibbs introduit une surface de séparation entre les deux phases dont le choix est légitime dans la limite où les rayons de courbure de l'interface sont grands devant son épaisseur ; cette hypothèse constitue l'approximation capillaire ou approximation dite de « paroi mince ».

Le germe critique est le germe en équilibre instable avec le liquide. Sa pression  $P_c$  vérifie l'égalité des potentiels chimiques  $\mu'(T, P_c) = \mu(T, P)$ . Pour un gaz parfait, auquel on peut assimiler la vapeur de l'hélium à basse température, on a :

$$\mu'(T, P') - \mu'(T, P_c) = k_B T \ln \frac{P'}{P_c} \quad (\text{A.2})$$

et pour un germe sphérique de rayon  $R$  contenant  $N$  particules

$$\frac{4}{3} \pi R^3 P' = N k_B T \quad (\text{A.3})$$

ce qui conduit à

$$W_{\min}(R) = 4\pi R^2 \sigma + \frac{4}{3} \pi R^3 (P - P') + \frac{4}{3} \pi R^3 P' \ln \frac{P'}{P_c} \quad (\text{A.4})$$

À l'équilibre,  $P' = P_c$  et

$$P' - P = \frac{2\sigma}{R_c} \quad (\text{A.5})$$



ce qui donne le travail minimal requis pour former un germe critique :

$$E_b = W_{\min}(R_c) = \frac{4\pi\sigma R_c^2}{3} = \frac{16\pi\sigma^3}{3(P_c - P)^2} \quad (\text{A.6})$$

À basse température, la pression de vapeur saturante de l'hélium gazeux décroît rapidement vers 0, et on peut négliger  $P'$  devant  $|P|$ .

Les expressions A.5 et A.6 se simplifient alors respectivement en :

$$R_c = -\frac{2\sigma}{P} \quad (\text{A.7})$$

et

$$E_b = \frac{16\pi\sigma^3}{3P^2} \quad (\text{A.8})$$

Enfin, pour de faibles écarts à l'équilibre, l'équation A.4 devient :

$$W_{\min}(R) = 4\pi R^2\sigma + \frac{4}{3}\pi R^3P \quad (\text{A.9})$$

expression utilisée au paragraphe 1.1.1 (Éq. 1.1).

# Annexe B

## Théorie quantique

Nous présentons dans cette annexe le calcul du taux de nucléation par effet tunnel à température nulle dans le cadre du modèle de paroi mince, dû à Lifshitz et Kagan [21]. Le calcul est effectué dans l'approximation semi-classique Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB).

Commençons par déterminer l'hamiltonien qui décrit l'évolution d'une bulle. Pour cela, calculons l'énergie cinétique du fluide comportant une bulle sphérique de rayon  $R(t)$  :

$$T = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \rho(r) v(r)^2 4\pi r^2 dr \quad (\text{B.1})$$

où  $\rho$  est la masse volumique.

Calculons le champ des vitesses ; par conservation de la masse, on a, en considérant l'évolution de l'interface :

$$\rho_1(R) v_1(R) - \rho_2(R) v_2(R) = (\rho_1(R) - \rho_2(R)) \dot{R} \quad (\text{B.2})$$

où l'indice 1 correspond à la phase liquide, à l'extérieur de la bulle, et l'indice 2 à la phase gazeuse, à l'intérieur.

Si l'écoulement est incompressible, il y a conservation du débit :  $r^2 v(r)$  est constant dans chacune des phases, ce qui donne  $r^2 v_1(r) = R^2 v_1(R)$  pour  $r > R$  et  $v_2(r) = 0$  pour  $r < R$ .

Par conséquent, le champ des vitesses vaut :

$$v(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R(t) \\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \frac{R^2}{r^2} \dot{R} & \text{si } r > R(t) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Il vient alors :

$$T = 2\pi \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1} R^3 \dot{R}^2 \quad (\text{B.4})$$

En utilisant la coordonnée réduite  $x = R/R_0$  ( $R_0$  est défini au §1.1.2), on a :

$$T = \frac{1}{2} M_0 x^3 \dot{x}^2 \text{ avec } M_0 = 4\pi \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1} R_0^3 \quad (\text{B.5})$$

L'énergie du système est, en prenant pour origine celle du liquide homogène :

$$U = \Delta F = U_c x^2(1-x) \text{ avec } U_c = 4\pi\sigma R_0^2 \quad (\text{B.6})$$

Le lagrangien du système,  $\mathcal{L} = T - U$  correspond à une particule de masse variable  $M_0 x^3$  se déplaçant dans le potentiel unidimensionnel  $U(x)$ .

Son impulsion canonique est :

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M_0 x^3 \dot{x} \quad (\text{B.7})$$

et son hamiltonien :

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2M_0 x^3} + U(x) \quad (\text{B.8})$$

On peut y intégrer la condition  $x > 0$  en imposant  $U(x < 0) = +\infty$ .

L'état initial est l'état fondamental de  $U$  au voisinage de 0 ; notons son énergie  $E_0$ . L'équation différentielle classique  $\mathcal{H}(x, \dot{x}) = E_0$  est à variables séparables ; en l'intégrant entre les deux points où l'énergie cinétique s'annule, on obtient sa demi-période. Ces deux points sont solutions de  $U_c x^2(1-x) = E_0$  ; si  $E_0 \ll U_c$ , on trouve 0 ou  $x_1(E_0) = \sqrt{E_0/U_c}$ . Dans cette limite, en écrivant  $U(x) \simeq U_c x^2$ , on obtient la pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{M_0}} \frac{\pi}{\int_0^{x_1(E_0)} \frac{x^{3/2} dx}{\sqrt{E_0 - U_c x^2(1-x)}}} \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{\int_0^1 \frac{u^{3/2} du}{\sqrt{1-u^2}}} \left(\frac{U_c}{M_0}\right)^{1/2} \left(\frac{U_c}{E_0}\right)^{3/4} \quad (\text{B.10})$$

Pour évaluer  $\omega_0$ , on fait  $E_0 = \hbar\omega_0$ , d'où :

$$\omega_0 = \frac{\gamma^{4/7} U_c^{5/7}}{M_0^{2/7} \hbar^{3/7}} \quad (\text{B.11})$$

avec

$$\gamma = \frac{\pi\sqrt{2}}{\int_0^1 \frac{u^{3/2} du}{\sqrt{1-u^2}}} \quad (\text{B.12})$$

Le taux de transition par effet tunnel vaut :

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-\frac{2B}{\hbar}} \quad (\text{B.13})$$

où  $\Gamma_0 = f_0/V_c$  avec  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$  (cf. § 1.1.2) et où  $B$  est donné par la méthode WKB :

$$B = \int_{x_1(E_0)}^{x_2(E_0)} |p_{\text{class}}(x)| dx \quad (\text{B.14})$$

avec  $p_{\text{class}}(x) = \sqrt{2M_0 x^3 (E_0 - U(x))} = i \sqrt{2M_0 x^3 (U(x) - E_0)}$  et  $x_1(E_0)$  et  $x_2(E_0)$  les solutions de  $U_c x^2(1-x) = E_0$  de part et d'autre de la barrière, soit 0 et 1 quand  $E_0 \ll U_c$ . Alors :

$$B = \sqrt{2M_0 U_c} \int_0^1 x^{5/2} (1-x)^{1/2} dx = \frac{5\pi}{128} \sqrt{2M_0 U_c} \quad (\text{B.15})$$

Finalement, le taux de cavitation quantique vaut :

$$\Gamma = \frac{f_0}{V_c} \exp\left(-\frac{5\sqrt{2}\pi}{64} \left(\frac{M_0 U_c}{\hbar^2}\right)^{1/2}\right) = N_c f_0 \exp\left(-\frac{135\pi^2 \sqrt{6\rho} \sigma^4}{32\hbar |P|^{7/2}}\right) \quad (\text{B.16})$$

si on néglige  $\rho_2$  devant  $\rho = \rho_1$ .

On en déduit la pression de cavitation :

$$P_{\text{cav}} = -\left(\frac{135\pi^2 \sqrt{6\rho} \sigma^4}{32\hbar \ln(\Gamma_0 V \tau)}\right)^{2/7} \quad (\text{B.17})$$



## Annexe C

# Relation de dispersion. Énergie de point zéro

Pour déterminer la relation de dispersion, on utilise une énergie de volume de la forme :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} c^2 \frac{(\delta\rho)^2}{\rho} + \lambda |\vec{\nabla}\rho|^2 \quad (\text{C.1})$$

où  $v$  est la vitesse du liquide,  $\delta\rho$  est la variation de densité par rapport à la densité moyenne  $\rho$  et  $\lambda$  un coefficient. Pour une fluctuation sinusoïdale de vecteur d'onde  $\vec{k}$ ,  $\delta\rho = \rho_m e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = \delta\dot{\rho} + i\rho\vec{k}\cdot\vec{v} = 0 \quad (\text{C.2})$$

soit :

$$v = \frac{\delta\dot{\rho}}{k\rho} \quad (\text{C.3})$$

D'autre part  $\vec{\nabla}\rho = \delta\rho\vec{k}$ , ce qui donne pour l'énergie par unité de volume :

$$\frac{1}{2}m(\delta\dot{\rho})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(\delta\rho)^2 \quad (\text{C.4})$$

avec  $m = 1/k^2\rho$  et  $\omega^2 = (c^2 + 2\lambda\rho k^2)k^2$ .

La relation de dispersion est  $\epsilon = \hbar\omega$ , soit, en posant  $p = \hbar k$  :

$$\epsilon = p \sqrt{c^2 + 2\lambda\rho \frac{p^2}{\hbar^2}} \quad (\text{C.5})$$

Cette expression est valable à faible impulsion ; pour éviter les divergences, on doit introduire une impulsion de coupure  $p_m$ . On calcule alors l'énergie de point zéro :

$$K = \frac{2\pi V}{h^3} \int_0^{p_m} \epsilon p^2 dp \quad (\text{C.6})$$

$$= \frac{4\pi V}{\hbar^4} \sqrt{\frac{\lambda\rho}{2}} p_m^5 \left( \frac{2y^5}{15} + \left( \frac{1}{5} - \frac{2y^2}{15} \right) (1+y^2)^{3/2} \right) \quad (\text{C.7})$$

où  $y = \hbar c / (p_m \sqrt{2\lambda \rho})$ .

## Annexe D

# Évaluation de l'énergie libre

On a  $c^2 = \partial P / \partial \rho$  et

$$P = -\frac{\partial(Vf)}{\partial V} = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{f}{\rho} \right) \quad (\text{D.1})$$

À partir de  $c(P)$ , on obtient donc l'équation d'état grâce aux relations :

$$\rho(P) = \rho_s + \int_{P_s}^P \frac{dP'}{c^2(P')} \quad (\text{D.2})$$

$$f(\rho) = \frac{\rho}{\rho_0} f(\rho_0) + \rho \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{P(\rho')}{\rho'^2} d\rho' \quad (\text{D.3})$$

ce qui donne, avec l'extrapolation de Maris ( $c = b(\rho - \rho_s)/3$ , cf. § 1.2.2) :

$$P - P_s = \frac{b^2}{27} (\rho - \rho_s)^3 \quad (\text{D.4})$$

avec une densité spinodale

$$\rho_s = \rho_0 - \left( \frac{-27P_s}{b^2} \right)^{1/3} \quad (\text{D.5})$$

Pour  $\rho > \rho_s$ , on obtient alors pour  $f$  :

$$f(\rho) = \frac{b^2}{9} \left( \frac{\rho^3}{6} - \rho_s \rho^2 + \rho_s \rho \ln \rho + s\rho + \frac{\rho_s^3}{3} - \frac{9P_s}{b^2} \right) \quad (\text{D.6})$$

avec

$$s = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{9f_0}{b^2} - \frac{\rho_0^3}{6} + \rho_0^2 \rho_s - \frac{\rho_s^3}{3} - \rho_s^2 \rho_0 \ln \rho_0 + \frac{9P_s}{b^2} \right) \quad (\text{D.7})$$

Pour le domaine  $0 < \rho < \rho_s$ , on approche  $f$  par un polynôme :

$$f(\rho) = A\rho^2 + B\rho^3 + C\rho^4 \quad (\text{D.8})$$

Il n'y a pas de terme constant, ni de terme linéaire, car l'énergie et le potentiel chimique du vide sont nuls. Les coefficients  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont choisis de manière à retrouver les mêmes valeurs pour  $f$ ,  $\partial f / \partial \rho$  et  $\partial^2 f / \partial \rho^2$  en  $\rho = \rho_s$  pour les deux expressions.





## Annexe E

# Évaluation du paramètre $\lambda$

Il faut qu'à la limite de paroi mince, valable près de l'équilibre entre phases, on retrouve les prédictions du modèle de paroi mince.

Pour cela, il suffit d'ajuster la valeur de  $\lambda$  sur celle de la tension de surface ; on considère une interface plane perpendiculaire à l'axe  $x$ , séparant le gaz ( $z = -\infty$ ,  $\rho \rightarrow \rho_2$ ) du liquide ( $z = +\infty$ ,  $\rho \rightarrow \rho_1$ ). D'après le § 1.3.1, il faut minimiser son énergie par unité de surface, qui n'est autre que la tension de surface :

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \phi(\rho) + \lambda \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \right] dz \quad (\text{E.1})$$

L'équation d'Euler-Lagrange correspondante est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 2\lambda \frac{d^2 \rho}{dz^2} \quad (\text{E.2})$$

En intégrant une fois par rapport à  $\rho$  entre  $\rho(-\infty) = \rho_2$  et  $\rho(z')$ , on obtient :

$$\phi(\rho(z')) - \phi(\rho_2) = 2\lambda \int_{\rho_2}^{\rho(z')} \frac{d^2 \rho}{dz^2} d\rho \simeq \phi(\rho(z')) \quad (\text{E.3})$$

car le système étant proche de l'équilibre entre phases,  $\phi(\rho_2) \simeq \phi(\rho_1) = 0$ . Or :

$$\int_{\rho_2}^{\rho} \frac{d^2 \rho}{dz^2} d\rho = \int_{-\infty}^{z'} \frac{d^2 \rho}{dz^2} \frac{d\rho}{dz} dz = \left[ \frac{d\rho}{dz} \right]_{-\infty}^{z'} - \int_{-\infty}^{z'} \frac{d\rho}{dz} \frac{d^2 \rho}{dz^2} dz \quad (\text{E.4})$$

soit :

$$\int_{\rho_2}^{\rho} \frac{d^2 \rho}{dz^2} d\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \quad (\text{E.5})$$

d'où enfin :

$$\frac{dz}{d\rho} = \sqrt{\frac{\lambda}{\phi(\rho)}} \quad (\text{E.6})$$

On sépare les variables, et on intègre :

$$z(\rho) = \int_{\rho_2}^{\rho} \frac{\lambda d\rho}{\sqrt{\phi(\rho)}} \quad (\text{E.7})$$

On en déduit l'énergie de surface :

$$\sigma = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[ \phi(\rho) + \lambda \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \right] \frac{dz}{d\rho} d\rho = 2 \int_{\rho_2}^{\rho_1} \sqrt{\lambda \phi(\rho)} d\rho \quad (\text{E.8})$$

Cette méthode a été utilisée par Xiong et Maris [24] qui obtiennent  $\lambda = 9,13 \cdot 10^{-11} \text{ m}^7 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

# Annexe F

## Théorie quantique modifiée

### F.1 Effet tunnel à plusieurs dimensions. Rebond.

Soit une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$  repérée par le vecteur de coordonnées  $\vec{q}$  et se déplaçant dans un potentiel  $V(\vec{q})$ . Elle se situe initialement au voisinage d'un état quasi-stationnaire associé à ce potentiel, qui constitue une barrière la séparant d'états plus stables. L'équation  $V(\vec{q}) = E$  détermine deux surfaces de part et d'autre de la barrière :  $\Sigma_1$  du côté de l'état quasi-stationnaire,  $\Sigma_2$  de l'autre. Soit  $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$  ; le taux de transition tunnel est donné dans l'approximation semi-classique WKB par :

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{-2B/\hbar} \quad (\text{F.1})$$

où

$$B = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} ds (2m(V - E))^{1/2} \quad (\text{F.2})$$

avec  $(ds)^2 = d\vec{q} \cdot d\vec{q}$ . La différence avec le cas unidimensionnel est que cette intégrale est évaluée sur le chemin qui la rend minimale.

Coleman [40] a montré que ce problème de minimisation pouvait être formulé d'une autre façon. Considérons une particule classique de masse  $m$  et d'énergie  $E'$  dans un puits de potentiel  $U$ . On a :

$$E' = \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \frac{d\vec{q}}{dt} + U \quad (\text{F.3})$$

Entre deux points  $\vec{q}_1$  et  $\vec{q}_2$  fixés tels que  $U(\vec{q}_1) = U(\vec{q}_2) = E'$ . la trajectoire qui rend stationnaire  $\int ds (2m(E' - U))^{1/2}$  est la trajectoire réelle, solution de :

$$m \frac{d^2\vec{q}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{q}} \quad (\text{F.4})$$

Pour utiliser ce résultat dans le calcul de  $B$ , il suffit de constater que le premier problème variationnel est équivalent au deuxième à condition de faire  $E' = -E$ ,

$U = -V$  et de laisser  $\vec{q}_1$  et  $\vec{q}_2$  libres de varier respectivement sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Pour l'instant, supposons les fixés. Les équations donnant la trajectoire qui minimise l'intégrale intervenant dans  $B$  sont donc :

$$\frac{d^2\vec{q}}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial \vec{q}} \quad (\text{F.5})$$

avec

$$\frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} - V = -E \quad (\text{F.6})$$

Il s'agit en fait des équations précédentes écrites pour un temps imaginaire  $t = i\tau$ . Elles correspondent aux équations du mouvement d'une particule de lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} + V = 2V - E \quad (\text{F.7})$$

Or, comme

$$\frac{ds}{d\tau} = \left( \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau} \right)^{1/2} = \left( \frac{2}{m}(V - E) \right)^{1/2} \quad (\text{F.8})$$

on a

$$B = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} ds (2m(V - E))^{1/2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau 2(V - E) \quad (\text{F.9})$$

avec  $\tau_1$  l'instant de départ de  $\vec{q}_1$  et  $\tau_2$  l'instant d'arrivée en  $\vec{q}_2$ . Si on choisit l'origine des énergies de façon à avoir  $E = 0$ , on obtient l'action :

$$B = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \mathcal{L} \quad (\text{F.10})$$

Quand la particule est en  $\vec{q}_1$  ou en  $\vec{q}_2$ , comme alors  $V = E$ , l'équation F.7 montre que  $d\vec{q}/d\tau = 0$ ; on montre aisément que pour une trajectoire réelle, l'action entre ces deux points est stationnaire vis à vis des variations des extrémités. Le raisonnement précédent vaut donc pour tout point de  $\Sigma_1$  et de  $\Sigma_2$ .

Si on choisit  $\tau_2$  comme origine des temps, on voit que pour  $\tau > 0$ , la trajectoire  $\vec{q}(\tau) = \vec{q}(-\tau)$  construite à partir de la trajectoire précédente reste solution des équations et des conditions aux limites. Par conséquent, la particule rebondit sur  $\Sigma_2$  et retourne vers  $\Sigma_1$  en empruntant en sens inverse le même chemin qu'à l'aller. Cela correspond en fait aux oscillations de la particule du problème équivalent dans le puits de potentiel  $U = -V$ . La quantité  $2B$  est l'action totale du rebond; si  $2\tau_r$  est sa durée, on a :

$$2B = \int_{-\tau_r}^{\tau_r} d\tau \mathcal{L} \quad (\text{F.11})$$

Pour calculer la probabilité de transition tunnel, il suffit donc de trouver le rebond, c'est à dire la solution de l'équation du mouvement qui part de  $\Sigma_1$  et atteint  $\Sigma_2$  avec une vitesse nulle. Cela élimine bien sûr la solution triviale de l'équation,  $\vec{q}$  constant sur  $\Sigma_1$ . S'il y a plusieurs rebonds, il faut choisir celui dont l'action est minimale.

## F.2 Application à la cavitation

Il s'agit de calculer le taux de cavitation par transition tunnel, dans le cadre de l'approximation de fonctionnelle de densité introduite au § 1.3.1. Pour cela, Maris [27] utilise la méthode du rebond.

On décrit le liquide par un champ de vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  et de densité  $\rho(\vec{r}, t)$ . Ils sont reliés par l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{F.12})$$

Si on prend l'énergie du liquide homogène de densité  $\rho_1$  au repos comme origine des énergies, celle d'une configuration  $(\rho, \vec{v})$  est, en incluant la condition de conservation de la masse totale (*cf.* § 1.3.1) et en sommant sur tout le volume :

$$E(t) = \int d\tau \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \phi(\rho, \rho_1) + \lambda (\vec{\nabla} \rho)^2 \right) \quad (\text{F.13})$$

Le terme  $B$  intervenant dans l'expression du taux de cavitation sera donné, une fois le rebond trouvé, par

$$B = \int E(t) dt \quad (\text{F.14})$$

Écrivons tout d'abord l'équation classique du mouvement ;  $E(t)$  doit être stationnaire par rapport aux variations de  $\rho$  :

$$\int d\tau \left( \frac{1}{2} v^2 + f'(\rho) - f'(\rho_1) - 2\lambda \Delta \rho \right) \quad (\text{F.15})$$

On a une énergie potentielle  $V = f'(\rho) - f'(\rho_1) - 2\lambda \Delta \rho$  ; l'équation classique du mouvement est l'équation d'Euler :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -\vec{\nabla} V \quad (\text{F.16})$$

Il faut enfin changer  $V$  en son opposé, et l'on obtient l'équation du rebond :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \vec{\nabla} (f'(\rho) - f'(\rho_1) - 2\lambda \Delta \rho) \quad (\text{F.17})$$

Dans le puits de potentiel que l'on considère maintenant, la position du liquide homogène au repos est une position d'équilibre instable. N'importe quelle perturbation le fait évoluer de façon plus ou moins complexe, déterminée par les nouvelles équations du mouvement. Pour certaines perturbations, le liquide va évoluer avec une vitesse croissante, puis ralentir, atteindre une configuration de densité non uniforme et de vitesse nulle, avant de revenir en arrière vers la configuration du liquide homogène au repos. Il faut donc calculer l'action pour

chaque rebond et choisir pour  $B$  la valeur minimale. Si le rebond correspondant a lieu entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ ,

$$B = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\tau \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \phi(\rho, \rho_1) + \lambda (\vec{\nabla} \rho)^2 \right) \quad (\text{F.18})$$

## Annexe G

# Atténuation de salves ultrasonores de courte durée

Dans un fluide, le coefficient d'atténuation du son due à la viscosité est proportionnel au carré de la pulsation de l'onde :

$$\alpha = \frac{2\omega^2\eta}{3\rho c^3} = \beta\omega^2 \quad (\text{G.1})$$

ce qui conduit à un facteur d'atténuation sur une distance  $R$  valant  $\exp(-\beta R\omega^2)$ . Dans les expériences de cavitation, nous corrigeons nos mesures avec l'atténuation calculée pour la fréquence des ultrasons employés, de l'ordre de 1 MHz. Cependant, principalement afin de réduire la dissipation, nous sommes amenés à utiliser des salves ultrasonores très courtes (3 ou 6  $\mu\text{s}$ ), et on peut se demander si ces trains d'ondes ne sont pas atténués différemment en raison de leur largeur spectrale non négligeable. Afin de répondre à cette question, nous considérons le problème de l'atténuation sur une distance  $R$  d'un train d'onde généré par la vibration sinusoïdale d'un transducteur  $\zeta(t)$  dont la porteuse a une pulsation  $\omega_0$  et dont l'enveloppe est représentée par la fonction  $f(t)$ . Nous procédons de la façon suivante : nous réalisons une décomposition spectrale de l'excitation en calculant la transformée de Fourier  $\zeta(\omega)$ , nous écrivons la pression correspondant à un mode de pulsation  $\omega$  après un trajet de longueur  $R$  en tenant compte de l'atténuation, puis nous sommes les contributions de chaque mode en calculant la transformée de Fourier inverse pour reconstruire l'onde réelle. Nous traiterons tout d'abord le cas d'une onde plane avec une enveloppe  $f(t)$  rectangulaire (correspondant à un facteur de qualité nul), puis celui d'une onde plane avec une enveloppe exponentielle (correspondant à un facteur de qualité donné).

La décomposition spectrale de la vibration  $\zeta(t)$  est :

$$\zeta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i(\omega_0-\omega)t} dt \quad (\text{G.2})$$



A chacun des modes de pulsation  $\omega$  nous appliquons le facteur d'atténuation déduit de l'équation G.1. Pour une onde plane, la composante de Fourier à la pulsation  $\omega$  de l'oscillation de pression après un trajet de longueur  $R$  vaut :

$$\Delta P(R, \omega) = K e^{-\beta R \omega^2} e^{-i\omega \frac{R}{c}} \zeta(\omega) \quad (\text{G.3})$$

en tenant compte de l'atténuation et de la phase ( $c$  est la vitesse du son, supposée indépendante de  $\omega$  ; nous négligeons la dispersion car l'absorption considérée reste faible). La constante de proportionnalité  $K$  dépend de la densité du liquide et de la vitesse du son ;  $K$  ne dépend donc pas de  $\omega$  et comme nous ne nous intéressons qu'au facteur introduit par l'atténuation, il n'est pas nécessaire de l'expliciter. L'oscillation de pression réelle à la distance  $R$  s'en déduit par la transformée de Fourier inverse :

$$\Delta P(R, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta P(R, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{G.4})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt' K f(t') e^{i(\omega_0 - \omega)t'} e^{i\omega(t - \frac{R}{c})} e^{-\beta R \omega^2} \quad (\text{G.5})$$

Introduisons les quantités adimensionnées suivantes :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \phi = \omega_0 t, \quad \phi' = \omega_0 t', \quad \phi_0 = \omega_0 \frac{R}{c} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \beta R \omega_0^2 \quad (\text{G.6})$$

On peut alors écrire :

$$\Delta P(R, \phi) = \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi' f\left(\frac{\phi'}{\omega_0}\right) e^{i(1-x)\phi'} e^{ix(\phi - \phi_0)} e^{-\alpha_0 x^2} \quad (\text{G.7})$$

Les trains d'ondes expérimentaux sont produits par une salve électrique sinusoïdale de  $n$  cycles. En raison du facteur de qualité du transducteur, la vibration  $\zeta(t)$  associée comporte une partie d'enveloppe croissante durant  $n$  cycles puis une partie décroissante. En première approximation, considérons le cas d'un facteur de qualité nulle, soit une enveloppe carrée :  $f = \zeta_0 \chi_{[0, 2\pi n/\omega_0]}$ . On a alors :

$$\Delta P(R, \phi) = \frac{K \zeta_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{2\pi n} d\phi' e^{i(1-x)\phi'} e^{ix(\phi - \phi_0)} e^{-\alpha_0 x^2} \quad (\text{G.8})$$

$$= \frac{K \zeta_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i2\pi n(1-x)} - 1}{i(1-x)} e^{ix(\phi - \phi_0)} e^{-\alpha_0 x^2} \quad (\text{G.9})$$

On peut considérer cette expression comme une fonction de  $n$  traité comme une variable réelle. En  $n = 0$ , elle vaut 0. Sa dérivée pour tout  $n$  vaut :

$$I(n) = K \zeta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i2\pi n(1-x)} e^{ix(\phi - \phi_0)} e^{-\alpha_0 x^2} \quad (\text{G.10})$$

A l'aide d'un contour rectangulaire dans le plan complexe passant par la droite  $\mathbb{R} - i(2\pi n + \phi_0 - \phi)/(2\sqrt{\alpha_0})$ , on montre aisément que :

$$I(n) = K\zeta_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_0}} e^{-\frac{1}{4\alpha_0}(2\pi n + \phi_0 - \phi)^2 + 2i\pi n} \quad (\text{G.11})$$

Une intégration entre 0 et  $n$  donne alors :

$$\begin{aligned} \Delta P(R, \phi) &= K\zeta_0 e^{-\alpha_0} e^{i(\phi - \phi_0)} \\ &\times \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\phi - \phi_0}{2\sqrt{\alpha_0}} + i\sqrt{\alpha_0} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{2\pi n - (\phi - \phi_0)}{2\sqrt{\alpha_0}} - i\sqrt{\alpha_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

La première ligne correspond à une onde monochromatique et la seconde à la correction introduite quand on tient compte de la durée finie du train d'onde.

Nous allons maintenant tenir compte du facteur de qualité  $Q$  du transducteur. Le transducteur est au repos pour  $\phi < 0$  et l'enveloppe  $f(\phi)$  de la vibration est donnée pour  $\phi \geq 0$  par :

$$f(t) = \zeta_0 \left[ \left(1 - e^{-\frac{\phi}{Q}}\right) H(2\pi n - \phi) + \left(1 - e^{-2\pi \frac{n}{Q}}\right) e^{-\frac{\phi - 2\pi n}{Q}} H(\phi - 2\pi n) \right] \quad (\text{G.13})$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside. La valeur 1 figurant dans la partie croissante de l'enveloppe conduit au résultat précédent que nous notons  $\Delta P_1$  ; pour calculer les contributions des autres termes, il suffit de reprendre le raisonnement précédent avec un facteur exponentiel supplémentaire. Pour la partie croissante, en reprenant les étapes G.8 à G.11, on s'aperçoit que cela revient à remplacer dans l'équation G.11 le terme  $2i\pi n$  par  $2i\pi n(1 + i/Q)$  et à ajouter un signe moins :

$$I_2(n) = -K\zeta_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_0}} e^{-\frac{1}{4\alpha_0}(2\pi n + \phi_0 - \phi)^2 + 2i\pi n(1 + \frac{i}{Q})} \quad (\text{G.14})$$

soit une contribution à l'oscillation de pression :

$$\begin{aligned} \Delta P_2(R, \phi) &= -K\zeta_0 e^{-\alpha_0(1 + \frac{i}{Q})^2} e^{i(\phi - \phi_0)(1 + \frac{i}{Q})} \\ &\times \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\phi - \phi_0}{2\sqrt{\alpha_0}} + i\sqrt{\alpha_0} \left(1 + \frac{i}{Q}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{erf} \left( \frac{2\pi n - (\phi - \phi_0)}{2\sqrt{\alpha_0}} - i\sqrt{\alpha_0} \left(1 + \frac{i}{Q}\right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Pour la partie décroissante, il faut calculer :

$$\begin{aligned} \Delta P_3(R, \phi) &= \frac{K\zeta_0}{2\pi} \left( e^{\frac{2\pi n}{Q}} - 1 \right) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{2\pi n}^{+\infty} d\phi' e^{(i(1-x) - \frac{1}{Q})\phi'} e^{ix(\phi - \phi_0)} e^{-\alpha_0 x^2} \\ &= \frac{K\zeta_0}{2\pi} \left( e^{\frac{2\pi n}{Q}} - 1 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-e^{2\pi n(i(1-x) - \frac{1}{Q})}}{i(1-x) - \frac{1}{Q}} e^{ix(\phi - \phi_0)} e^{-\alpha_0 x^2} \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

L'intégrale apparaissant dans cette expression tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. On calcule à nouveau cette intégrale en dérivant par rapport à  $n$ . La dérivée obtenue est :

$$J_3(n) = -2\pi \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_0}} e^{-\frac{1}{4\alpha_0}(2\pi n + \phi_0 - \phi)^2 + 2i\pi n(1 + \frac{i}{Q})} \quad (\text{G.17})$$

En intégrant entre l'infini et  $n$ , on obtient la contribution à l'oscillation de pression :

$$\begin{aligned} \Delta P_3(R, \phi) &= K\zeta_0 \left( e^{\frac{2\pi n}{Q}} - 1 \right) e^{-\alpha_0(1 + \frac{i}{Q})^2} e^{i(\phi - \phi_0)(1 + \frac{i}{Q})} \\ &\times \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{2\pi n - (\phi - \phi_0)}{2\sqrt{\alpha_0}} - i\sqrt{\alpha_0} \left( 1 + \frac{i}{Q} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

On obtient alors, aux temps  $\phi \geq \phi_0 + 2\pi n$ , le facteur correctif supplémentaire par rapport à la correction retenue pour exploiter les résultats expérimentaux en formant le rapport :

$$\frac{(\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3)(R, \phi)}{K\zeta_0 e^{-\alpha_0} e^{i(\phi - \phi_0)} (1 - e^{-\frac{2\pi n}{Q}}) e^{-\frac{\phi - \phi_0 - 2\pi n}{Q}}} \quad (\text{G.19})$$

où le dénominateur correspond à l'expression obtenue à partir de l'atténuation d'une onde monochromatique de pulsation  $\omega_0$ . Nous considérons l'instant  $\phi = \phi_0 + 2\pi(n + 1/4)$  car il correspond au minimum absolu de pression dans le cas de l'atténuation monochromatique (*cf.* § 3.2.3). Avec les valeurs expérimentales (salves de 3 cycles à la fréquence 1,0216 MHz, distance parcourue  $R = 8$  mm, atténuation calculée à partir de la viscosité donnée par  $\eta T^2 = (0,545 - 1,594T)^{-1} 10^{-7}$  Pas (*cf.* § 3.2.4)) et à la température la plus basse (0,035 K) on trouve pour ce rapport la valeur  $0,999983 - 0,001485i$ , ce qui n'affecte pas nos conclusions.

En réalité, l'expérience correspond à une onde sphérique focalisée sur une distance  $R$  et il conviendrait de multiplier l'expression G.3 par le facteur  $R\omega^2$ . Nous n'avons pas mené à bien le calcul correspondant, mais nous pensons que l'effet associé à la courte durée des impulsions demeure négligeable.

# Annexe H

## Cavitation près d'une paroi

Dans le travail effectué au cours de cette thèse, une difficulté majeure réside dans l'estimation de la pression atteinte au centre de la céramique. Cette estimation est rendue délicate par l'existence possible d'effets non linéaires et, dans certaines zones de température, par l'atténuation du son sur le parcours de l'onde. Afin de surmonter ce problème, une nouvelle expérience a été développée par X. Chavanne *et al.* [68]. Elle est basée sur une méthode optique de mesure de la densité locale et instantanée de l'hélium au point focal acoustique. Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure H.1. Un faisceau laser arrive sous incidence normale sur une lame de verre prismatique placée contre la céramique. Environ 4 % de l'intensité est réfléchiée par l'interface verre/hélium du côté le plus proche de la céramique et modulée par les variations de densité dues l'onde acoustique ; l'intensité réfléchiée est reliée à la densité par la relation de Clausius-Mosotti. L'autre face est traitée anti-reflet et l'angle du prisme permet de séparer les deux réflexions. La réflexion intéressante est recueillie par une photodiode au silicium pour mesurer l'intensité réfléchiée en l'absence d'onde et par une photodiode à avalanche pour mesurer la modulation due à l'onde avec une résolution temporelle de 10 ns. Une résolution spatiale de 30  $\mu\text{m}$  est obtenue grâce à une lentille de très courte focale placée à l'intérieur de la cellule expérimentale. La céramique est percée à son sommet afin que la lumière transmise (96 % de l'intensité incidente) traverse la cellule sans être absorbée.

Les premières expériences indiquent qu'aux faibles tensions d'excitation de la céramique, l'onde de densité observée est sinusoïdale. Quand la tension augmente, les effets non-linéaires se manifestent : la partie de l'onde correspondant à une compression prend la forme de pics plus fins et d'amplitude plus grande que dans le cas d'un régime linéaire, tandis que la partie correspondant à une détente donne des creux plus larges et moins profonds. Ceci est en accord avec les calculs numériques de C. Appert *et al.* [86], réalisés dans une géométrie sphérique, équivalente à l'expérience. Ces effets non-linéaires sont apparemment beaucoup plus importants que ceux que nous avons déduits de nos mesures en géométrie ouverte. Cette différence peut être attribuée au fait que la condition au centre est

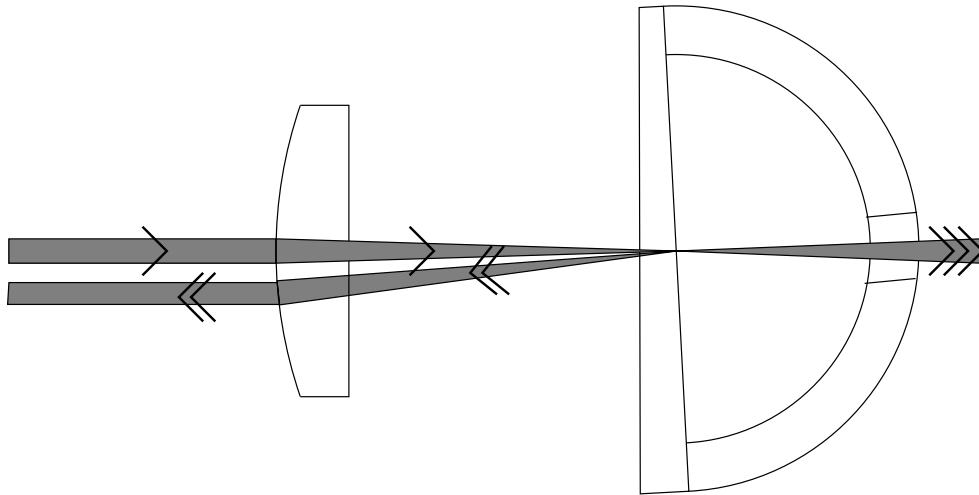


FIG. H.1 – Schéma du dispositif expérimental de mesure optique de la densité. Un faisceau laser est focalisé sur l'interface entre une lame de verre et l'hélium à l'aide d'une lentille de focale 20 mm placée dans la cellule expérimentale. Une partie de la lumière est réfléchi, le reste sort du cryostat grâce à une ouverture pratiquée au sommet de la céramique qui génère les salves acoustiques.

différente : la géométrie sphérique ou hémisphérique fermée y impose une vitesse nulle.

Ce nouveau dispositif permet également d'étudier la cavitation, en observant soit la lumière réfléchi, soit la lumière transmise. Avec des pressions statiques proches de la pression de solidification, la nucléation de la phase solide a également été observée, ce qui n'avait pas été possible dans les expériences en géométrie ouverte n'utilisant pas de plaque. L'étude de la probabilité de cavitation (resp. de cristallisation) en fonction de la densité minimale (resp. maximale) atteinte par l'onde est en cours. Il semble néanmoins que si cette mesure locale de la densité représente une amélioration, la présence de la paroi soulève une difficulté nouvelle car elle modifie le processus de cavitation d'une façon encore mal comprise.