



**HAL**  
open science

## Sur le volume des simplexes hyperboliques idéaux

Richard Pereyrol

► **To cite this version:**

Richard Pereyrol. Sur le volume des simplexes hyperboliques idéaux. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT: . tel-00000956

**HAL Id: tel-00000956**

**<https://theses.hal.science/tel-00000956>**

Submitted on 8 Jan 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LE VOLUME DES SIMPLEXES  
HYPERBOLIQUES IDÉAUX

Richard PÉREYROL

Université Joseph Fourier Grenoble I – Institut Fourier

Sous la direction de Gérard BESSON

21 décembre 2001

Je remercie vivement Gérard Besson, mon directeur de thèse pour les éléments mathématiques et le soutien qu'il m'a apportés durant ce travail.

Je remercie aussi Ruth Kellerhals et Jean-Louis Cathelineau pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être rapporteurs et membres du jury. José Bertin et Lucien Guillou ont accepté de participer au jury et je leur en suis très reconnaissant.

Enfin, je n'oublie pas les membres de l'Institut Fourier et notamment Arlette Guttin-Lombard, pour sa patience et son efficacité, Vincent Bayle et Vidian Rousse pour les nombreuses remarques et corrections.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Calcul du volume hyperbolique</b>	<b>7</b>
1.1	Aire des triangles hyperboliques . . . . .	7
1.2	Volume des tétraèdres hyperboliques . . . . .	9
1.3	Théorème de Haagerup-Munkholm . . . . .	10
1.4	Une formule due à Milnor . . . . .	12
1.5	La Formule de Schläfli . . . . .	12
1.6	Objectif . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Une formule de calcul du volume des simplexes</b>	<b>15</b>
2.1	Aire des triangles euclidiens . . . . .	15
2.2	Les simplexes hyperboliques . . . . .	18
2.2.1	Les simplexes hyperboliques finis . . . . .	18
2.2.2	Les simplexes hyperboliques idéaux . . . . .	25
<b>3</b>	<b>La base des harmoniques sphériques</b>	<b>37</b>
3.1	Les polynômes harmoniques homogènes sur $\mathbb{S}^{n-1}$ . . . . .	37
3.1.1	Les espaces de polynômes harmoniques homogènes . . . . .	37
3.1.2	Projection harmonique . . . . .	38
3.1.3	Décomposition canonique . . . . .	40
3.2	Construction de la base . . . . .	41
3.3	Polynômes de Gegenbauer . . . . .	45
3.4	Normalisation des $\Xi_K^n$ . . . . .	52
3.5	Passage de $n$ variables à $n - 1$ variables . . . . .	54
3.6	Une base de $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$ . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Décomposition du volume des simplexes en harmoniques sphériques</b>	<b>57</b>
4.1	Principe général . . . . .	57
4.1.1	L'action de la translation hyperbolique $g'_n(\theta_n)$ . . . . .	61
4.1.2	Action des rotations . . . . .	62
4.2	La dimension 2. Les triangles idéaux . . . . .	63
4.2.1	Action de $g'_2(\theta_2)$ . . . . .	63
4.3	La dimension 3. Le cas des tétraèdres idéaux . . . . .	66

4.3.1	L'action de la translation hyperbolique $g'_3(\theta_3)$ . . . . .	66
4.3.2	L'action de la rotation $g_2(\theta_2)$ . . . . .	71
4.3.3	L'action de la rotation $g_1(\theta_1)$ . . . . .	75
4.4	Synthèse . . . . .	75
<b>A</b>	<b>La dimension 2 – Programmation Maple V</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>La dimension 3 – Programmation Maple V</b>	<b>81</b>
<b>C</b>	<b>Pour le degré total de 3 à 11 – Résultats Maple V</b>	<b>85</b>

# Introduction

Un des premiers exemples de variété hyperbolique est dû à Gieseking en 1912 ; il se construit en partant d'un tétraèdre hyperbolique idéal et en recollant certaines faces. Cette variété bien que non orientable est complète, non compacte et de volume fini. De telles constructions peuvent se généraliser en prenant plusieurs tétraèdres et en recollant des faces. On obtient le complémentaire du noeud en huit à partir de deux tétraèdres. Bien sûr, avec leur domaine fondamental polyédral, on peut alors calculer le volume d'une variété ainsi construite (cf. [R]) si l'on sait calculer le volume d'un tétraèdre (d'un simplexe en général) hyperbolique. D'après [EP], une telle construction est toujours possible pour une variété hyperbolique non compacte de volume fini.

D'après le théorème de rigidité de Mostow (voir 5), le volume d'une variété hyperbolique complète orientée est un invariant topologique (le volume simplicial se calcule :  $\|M\| = \frac{\text{vol}(M^n)}{v_n}$ , cf. [R]). Mais le volume d'une variété hyperbolique est une quantité qui reste encore difficile à calculer. On peut néanmoins, par exemple, obtenir dans certains cas une borne inférieure ([K2] et [K3]).

Dans [BCG], la question de la minimalité de l'entropie d'une métrique hyperbolique sur une surface est traitée en utilisant une forme calibrante construite à partir de la fonction volume des triangles hyperboliques idéaux. En dimensions supérieures, connaissant mieux la fonction volume des simplexes hyperboliques on pourrait donner une preuve du résultat et peut-être généraliser la construction au cas des produits de surfaces qui est encore ouvert.

C'est en m'intéressant initialement au volume simplicial des espaces localement symétriques que j'ai été amené à étudier le volume des simplexes hyperboliques.

Tout d'abord, nous présentons quelques résultats connus sur les simplexes hyperboliques. Ensuite, nous exposons une formule qui donne le volume d'un simplexe hyperbolique idéal en fonction de ses sommets sur la sphère à l'infini. Enfin, après avoir déterminé une base des harmoniques sphériques de  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ , nous donnons une méthode pour développer en harmoniques sphériques la fonction volume des simplexes hyperboliques idéaux. Malheureusement, cette méthode ne permet pas encore d'avoir la forme générale des

coefficients du développement, mais seulement d'en calculer des termes (ce que nous faisons avec l'aide du logiciel de calcul formel Maple V).

Nous utiliserons dans toute la suite les bases de la géométrie hyperbolique. Nous en utiliserons les différents modèles : celui du demi-espace de Poincaré, noté  $\mathbb{H}_+^n$ , celui de la boule de Poincaré  $\mathbb{B}^n$  et enfin le modèle projectif de Klein  $\mathbb{K}^n$ . On peut trouver des références dans, entre autres, [R], [BP] ou [Be].

# Chapitre 1

## Calcul du volume hyperbolique

Le calcul du volume des simplexes euclidiens se réduit à un calcul de déterminant, puisque le volume du simplexe  $(A_0, \dots, A_n)$  est donné par la formule  $\frac{1}{n!} \det(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ . Par contre, le volume d'un simplexe hyperbolique est beaucoup plus difficile à calculer en général.

Lorsqu'il s'agit de trouver les simplexes de plus grand volume, il suffit de s'intéresser aux simplexes idéaux, car étant donné un simplexe non idéal, en prolongeant les rayons géodésiques issus d'un point intérieur et pointant vers les sommets, on obtient des points à l'infini qui sont les sommets d'un simplexe idéal contenant strictement le simplexe initial.

Une première approche – plutôt analytique –, consiste à intégrer directement la mesure hyperbolique sur le simplexe.

Nous exposons maintenant quelques résultats sur le volume des simplexes hyperboliques.

### 1.1 Aire des triangles hyperboliques

Le cas le plus simple est celui des triangles hyperboliques.

Nous avons

**Théorème 1.** *L'aire d'un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  est :*

$$\text{aire}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Plaçons-nous dans le modèle du demi-plan de Poincaré. Un triangle est alors déterminé par ses côtés, qui sont des arcs de cercle orthogonaux au bord du demi-plan. Voir par exemple [GHL], [R] ou [BP].

Nous donnons une preuve très succincte. Étant donné que tout triangle est la « différence » de deux triangles ayant un sommet à l'infini (voir figure 1.1), il suffit de faire le calcul dans ce cas là. En supposant de plus que le point  $C$  à l'infini n'est pas sur le bord du demi-plan (voir figure 1.2), on a à



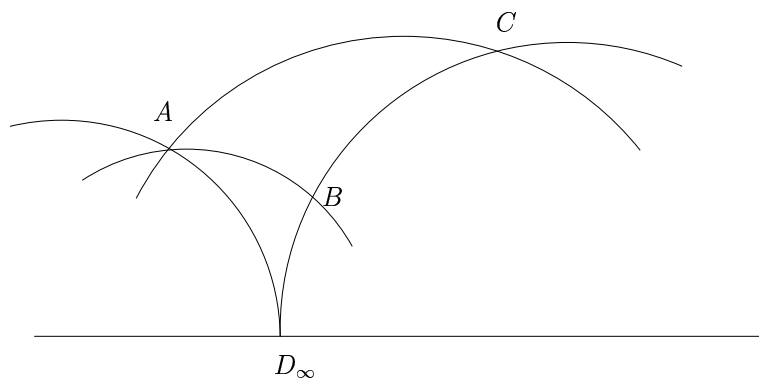


FIG. 1.1 – Différence de deux triangles avec un sommet à l'infini

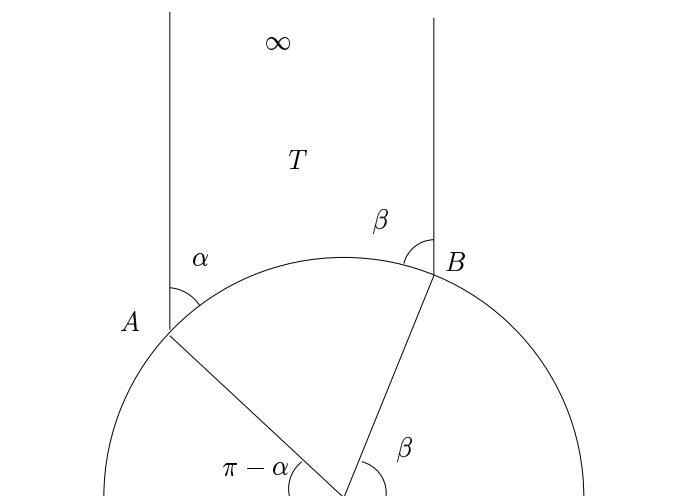
calculer :

$$\int_T \frac{dx dy}{y^2}$$

qui, par la formule de Stokes, est égal à

$$\int_{\partial T} \frac{dx}{y}.$$

$\partial T$  est constitué de deux demi-droites verticales et d'un arc de cercle  $\widehat{AB}$  que

FIG. 1.2 – Quand  $C$  est à l'infini

l'on paramètre en coordonnées polaires – de centre celui de l'arc de cercle.

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} \frac{dx}{y} &= \int_{\widehat{AB}} \frac{dx}{y} \\ &= \int_{\beta}^{\pi-\alpha} \frac{-r \sin \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \pi - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

### Remarques

1) Pour un triangle sphérique, la formule est :

$$\text{aire}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

2) Lorsque le triangle est idéal, l'aire vaut alors exactement  $\pi$ .

Nous obtenons alors :

**Proposition 1.** *L'aire des triangles hyperboliques est majorée par  $\pi$  et cette borne est atteinte uniquement par les triangles idéaux.*

Voyons ce qui se passe en dimension 3.

## 1.2 Volume des tétraèdres hyperboliques

Comme précisé plus haut, il suffit de considérer les simplexes idéaux pour majorer le volume.

Dans le modèle du demi-espace, on peut envoyer le point  $D$  du tétraèdre  $ABCD$  à l'infini. Alors, si on coupe le tétraèdre par un plan horizontal (c'est-à-dire par une horosphère basée en  $\infty$ ) suffisamment « haut », on obtient dans l'intersection un triangle translaté du triangle euclidien  $ABC$ . Les angles de ce triangle sont les angles dièdres autour du sommet  $D$ . On peut de la même manière couper le tétraèdre par des horosphères et obtenir ainsi les angles dièdres autour de chaque sommet. Ces angles apparaissent alors comme les angles d'un triangle sur une horosphère (qui est plate), par conséquent leur somme est égale à  $\pi$ . On peut assez facilement vérifier en utilisant le fait que chaque angle dièdre se retrouve à deux sommets, que les triplés d'angles dièdres sont identiques en chaque sommet.

Ces angles permettent donc de paramétrer le volume des tétraèdres.

Nous avons alors (pour une preuves, voir [R], [M1] ou encore [M2]) :

**Théorème 2.** *Le volume d'un tétraèdre idéal dont les angles dièdres sont  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  est donné par :*

$$\text{vol}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathfrak{J}(\alpha) + \mathfrak{J}(\beta) + \mathfrak{J}(\gamma).$$

où

**Définition 1 (Fonction dilogarithme).**

$$\mathfrak{Jl}(\theta) = - \int_0^\theta \ln |2 \sin t| dt.$$

Cette fonction apparaît dans le calcul de l'intégrale donnant le volume du tétraèdre.

On peut montrer que

$$\mathfrak{Jl}(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{n^2}.$$

En appliquant le principe des extrema liés, on montre que le volume est maximal lorsque  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ . Cela correspond à un tétraèdre régulier :

**Définition 2 (Simplexe régulier).** *Un simplexe est dit régulier si toute permutation de ses sommets peut être réalisée par une isométrie.*

Si  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ , il est clair que l'on peut permuer les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  par une isométrie fixant  $D = \infty$  et ensuite, on permute  $A$  et  $D$  par une inversion par rapport à la sphère euclidienne de centre  $A$  passant par  $B$  et  $C$ . Réciproquement, un tétraèdre régulier a tous ses angles dièdres égaux.

**Théorème 3.** *Les tétraèdres hyperboliques de volume maximal sont les tétraèdres idéaux réguliers.*

Le volume maximal pour un tétraèdre hyperbolique est donc

$$V_3^{\max} = 3\mathfrak{Jl}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 1,0149.$$

Puisque le volume est paramétré par les angles dièdres, on peut aussi le voir comme le volume d'un tétraèdre hyperbolique dont les sommets sont  $\infty$ ,  $0$ ,  $1$  et  $z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \simeq \partial\mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\}$  (on vérifie que dans ce cas-là,  $z$  est le birapport des sommets). Les angles dièdres sont alors  $\arg(z)$ ,  $\arg(1 - \frac{1}{z})$  et  $\arg(\frac{1}{1-z})$  (voir [NZ]). Dans ce cas, on peut établir que le volume comme fonction de  $z$  se calcule ainsi

$$V(z) = \operatorname{Im} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \right) + \log |z| \arg(1 - z).$$

### 1.3 Théorème de Haagerup-Munkholm

Le résultat du théorème 3 se généralise en dimension supérieure :

**Théorème 4 (Haagerup-Munkholm).** *Dans l'espace hyperbolique de dimension  $n \geq 2$ , un simplexe est de volume maximal si et seulement si c'est un simplexe idéal régulier.*

Ce théorème a été démontré par U. Haagerup et H.J. Munkholm dans [HM], par une preuve par récurrence qui utilise en les comparant deux expressions intégrales suivantes pour le calcul du volume.

- a) La première dans le modèle du demi-espace, un sommet étant à l'infini et les autres sur la sphère unité  $(n-2)$ -dimensionnelle  $\mathbb{S}^{n-2}$  centrée en  $0$  dans le bord du demi-espace :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_{\mathbb{H}}(A_1, \dots, A_n, \infty)) &= \int_{x \in \Sigma_E(A_1, \dots, A_n)} \int_{\sqrt{1-|x|^2}}^{+\infty} \frac{dx dy}{y^n} \\ &= \frac{1}{n-1} \int_{\Sigma_E} \frac{dx}{(1-|x|^2)^{(n-1)/2}} \end{aligned}$$

où  $\Sigma_{\mathbb{H}}(A_1, \dots, A_n, \infty)$  est le simplexe hyperbolique et  $\Sigma_E(A_1, \dots, A_n)$  est le  $(n-1)$ -simplexe euclidien engendré par les sommets  $A_1, \dots, A_n$ .

- b) La deuxième dans la même situation, mais considérant les sommets  $A_1, \dots, A_n$  dans le modèle projectif. Alors, cette fois :

$$\text{vol}(\Sigma_{\mathbb{H}}(A_1, \dots, A_n)) = \int_{\Sigma_E(A_1, \dots, A_n)} \frac{dx}{(1-|x|)^{n/2}} \quad (1.1)$$

puisque dans le modèle projectif les simplexes hyperboliques sont représentés par les simplexes euclidiens et que la mesure hyperbolique s'écrit alors

$$\frac{dx}{(1-|x|)^{n/2}}$$

dans  $\mathbb{H}^{n-1}$ .

Notons que Norbert Peyerimhoff a donné une preuve de ce résultat plus géométrique. Cette preuve utilise la symétrisation de Steiner et se rapproche dans l'esprit de celle de la maximalité du volume des simplexes euclidiens réguliers parmi les simplexes inscrits dans une sphère (si en un sommet les arêtes ne sont pas de la même longueur, alors on peut augmenter le volume en rendant ces longueurs identiques car on augmente alors la longueur de la hauteur issue de ce sommet).

**Application** Ce résultat est utilisé par M. Gromov pour montrer le théorème de rigidité de Mostow (cf. [R])

**Théorème 5 (Rigidité de Mostow).** *S'il existe une équivalence d'homotopie entre deux variétés hyperboliques compactes connexes orientées de dimension  $n \geq 3$  alors elles sont isométriques.*

## 1.4 Une formule due à Milnor

Dans [M1], John Milnor part de (1.1), l'écrit en coordonnées sphériques,  $r = |x|$  et développe l'intégrand en série entière en  $r$ . Ensuite, il passe aux coordonnées barycentriques

$$x = \sum_{i=0}^n \xi_i A_i, \quad \sum_{i=0}^n \xi_i = 1, \quad \xi_i \geq 0.$$

Notant  $\Delta_0 = \{(\xi_0, \dots, \xi_n) \mid \sum_{i=0}^n \xi_i = 1, \xi_i \geq 0\}$ , il obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_{\mathbb{H}}(A_0, \dots, A_n)) \\ = \det(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{n-1}{2} + k - 1}{k} \int_{\Delta_0} r^{2k} d\xi_0 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

Cependant, cette formule n'est pas commode à intégrer dans le cas général, et Milnor ne l'applique qu'à deux cas particuliers : celui des simplexes réguliers et celui des orthosimplexes<sup>1</sup>.

Par exemple, dans le premier cas, il obtient :

$$\begin{aligned} V_n^{max} = \sqrt{n} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2} + 1} \dots \binom{\frac{n+1}{2} + k - 1}{n + 2k}}{(n + 2k)!} \right) \times \\ \times \left( \sum_{\substack{i_0 + \dots + i_n = k \\ i_j \geq 0}} \frac{(2i_0)!}{i_0!} \dots \frac{(2i_n)!}{i_n!} \right). \end{aligned}$$

## 1.5 La Formule de Schläfli

Une autre approche consiste à essayer d'exprimer le volume en fonction de quantités géométriques. Par exemple, pour les triangles euclidiens, la formule de Héron

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

exprime l'aire du triangle en fonction des longueurs des côtés.

De même, nous avons vu que l'aire des triangles hyperboliques s'exprimait en fonction des angles au sommets (théorème 1). Ainsi, il s'est avéré que le volume des tétraèdres hyperboliques s'exprimait en fonction des angles dièdres.

En dimensions supérieures toutefois, aucune formule n'est connue. Cependant, il y a un moyen de relier le volume d'un simplexe à des aires de faces et des angles dièdres, c'est la formule de Schläfli (cf [M3]) :

<sup>1</sup>Un simplexe dont les faces  $F_j$  sont ordonnées et tel que  $F_i \perp F_j$  si  $|i - j| \geq 2$

**Théorème 6 (Formule de Schläfli).** *Soit  $\mathcal{P}$  une famille lisse paramétrée de polyèdres dans  $\mathbb{H}^n$ . Alors, pour tout polyèdre  $P \in \mathcal{P}$ ,*

$$d\text{Vol}_n(P) = \frac{1}{n-1} \sum_{F, (n-2)\text{-face de } P} \text{Vol}_{n-2}(F) dw_F.$$

$w_F$  désigne l'angle diédral entre les deux  $(n-1)$ -faces dont l'intersection est  $F$ .

Malheureusement, cette formule n'est en général pas intégrable pour des simplexes, sauf dans quelques cas particuliers comme celui des orthosimplexes. Voir à ce sujet [K1]

## 1.6 Objectif

Notre objectif dans la suite est d'obtenir une méthode pour développer la fonction volume d'un simplexe dans un cadre d'analyse harmonique. À cette fin, nous allons considérer le volume comme fonction des sommets dans le modèle de la boule  $B^n$  de Poincaré. Ainsi, nous ne particularisons pas un sommet. L'outil de cette décomposition sera la formule développée dans le prochain chapitre.

Nous obtenons bien une méthode, mais pour le moment, les calculs ne peuvent pas être simplifiés littéralement jusqu'au terme afin d'avoir une formule générale. Cependant, nous donnons quelques valeurs des coefficients calculés par le logiciel de calcul formel Maple V. Ce ne sont donc pas des valeurs approchées, et leur relative « simplicité » laisse penser qu'une formule synthétique doit exister.



## Chapitre 2

# Une formule de calcul du volume des simplexes

Nous exposons dans ce chapitre une formule intégrale donnant le volume d'un simplexe euclidien ou hyperbolique – la formule s'applique aussi aux simplexes sphériques. Cette formule ne permet pas de calculer explicitement le volume, mais en donne une expression exploitable analytiquement.

Elle est utilisée par Alain Connes dans [C] section 9, pour les triangles euclidiens et hyperboliques.

Nous commençons par le cas des triangles, puis nous passons au cas général des simplexes hyperboliques.

### 2.1 Aire des triangles euclidiens

Soit un triangle  $ABC$  dans  $\mathcal{P}$  le plan euclidien. On suppose les sommets du triangle décrits dans le sens direct.

On définit, pour  $m \in \mathcal{P}$ , les angles orientés suivants (voir la figure 2.1) :

$$\begin{aligned}\alpha(m) &= \widehat{(\overrightarrow{mB}, \overrightarrow{mC})}, & \alpha(B) &= \alpha(C) = 0; \\ \beta(m) &= \widehat{(\overrightarrow{mC}, \overrightarrow{mA})}, & \beta(C) &= \beta(A) = 0; \\ \gamma(m) &= \widehat{(\overrightarrow{mA}, \overrightarrow{mB})}, & \gamma(A) &= \gamma(B) = 0.\end{aligned}$$

**Proposition 2.** *Soit  $\Phi$  une fonction réelle impaire ayant pour développement limité en 0 :*

$$\Phi(x) = x + O(x^3).$$

Alors

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} \left( \Phi(\alpha(m)) + \Phi(\beta(m)) + \Phi(\gamma(m)) \right) dm,$$

où  $dm$  représente la mesure de Lebesgue.



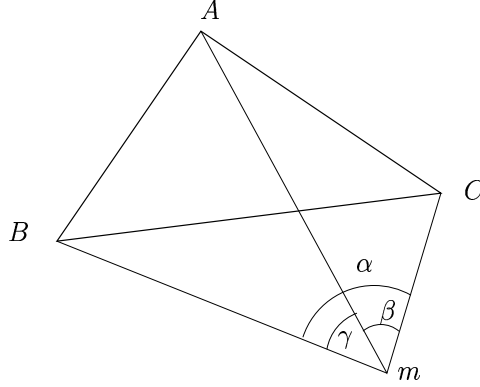


FIG. 2.1 – Le triangle ABC

*Preuve.* Nous allons montrer que  $m \mapsto (\Phi(\alpha(m)) + \Phi(\beta(m)) + \Phi(\gamma(m)))$  est intégrable puis établir la formule. Pour cela, nous allons nous ramener au cas où  $\Phi(x) = x$ .

En effet dans ce cas,  $m \mapsto \alpha(m) + \beta(m) + \gamma(m)$  est intégrable car :

$$\begin{aligned} \alpha(m) + \beta(m) + \gamma(m) &= 2\pi \text{ si } m \text{ est à l'intérieur du triangle} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

et le triangle est d'aire finie. Remarquons que si les sommets du triangle sont classés dans le sens indirect, alors  $\alpha(m) + \beta(m) + \gamma(m) = -2\pi$ .

On obtient aussi immédiatement

$$\int_{\mathcal{P}} (\alpha(m) + \beta(m) + \gamma(m)) dm = 2\pi \text{ Aire}(ABC).$$

En considérant l'aire algébrique – i.e. positive si  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  est une base directe et négative sinon –, la formule est valable dans tous les cas.

Pour l'intégrabilité, nous montrons que  $\Phi(\alpha) - \alpha$  est intégrable Il en sera de même pour les autres angles.

**Lemme 1.**

$$\alpha(m) = O(r^{-1}),$$

quand  $r = \|\vec{Am}\|$  tend vers  $+\infty$ .

*Preuve du lemme.*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{mB^2 + mC^2 - BC^2}{2mBmC} \\ &\sim \frac{2r^2 + O(r)}{2(r + O(1))(r + O(1))} \\ &\sim 1 \end{aligned}$$

Cela permet d'affirmer, puisque  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$ , que :

$$\alpha(m) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors, un développement limité donne :

$$\sin(\alpha) = \alpha + O(\alpha^3).$$

Mais

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\det(\overrightarrow{mB}, \overrightarrow{mC})}{\|\overrightarrow{mB}\| \|\overrightarrow{mC}\|} = \frac{\det(\overrightarrow{mB}, \overrightarrow{BC})}{\|\overrightarrow{mB}\| \|\overrightarrow{mC}\|} \\ |\sin(\alpha)| &\leq \frac{\|\overrightarrow{mB}\| \|\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{mB}\| \|\overrightarrow{mC}\|} \\ &\leq \frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{mC}\|} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\sin(\alpha) = O(r^{-1}),$$

et donc

$$\alpha(m) = O(r^{-1}).$$

□

Par hypothèse

$$\Phi(\alpha(m)) - \alpha(m) = O(\alpha^3).$$

Donc

$$\Phi(\alpha(m)) - \alpha(m) = O(r^{-3}),$$

ce qui assure l'intégrabilité de

$$m \mapsto \Phi(\alpha(m)) - \alpha(m),$$

et, par suite, en faisant de même pour les autres angles, celle de

$$m \mapsto \Phi(\alpha(m)) - \alpha(m) + \Phi(\beta(m)) - \beta(m) + \Phi(\gamma(m)) - \gamma(m).$$

La fonction  $m \mapsto \Phi(\alpha(m)) - \alpha(m)$  est changée en son opposée par la symétrie par rapport à  $(BC)$ . On a donc nécessairement :

$$\int_{\mathcal{P}} \left( \Phi(\alpha(m)) - \alpha(m) \right) dm = 0.$$

En raisonnant de la sorte pour les deux autres angles, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \left( \Phi(\alpha(m)) + \Phi(\beta(m)) + \Phi(\gamma(m)) \right) dm &= \int_{\mathcal{P}} (\alpha + \beta + \gamma)(m) dm \\ &= 2\pi \text{Aire}(ABC). \end{aligned}$$

□

**Exemple important** On peut choisir pour la fonction  $\Phi$  la fonction sinus car les hypothèses de la propriété 2 sont bien vérifiées.

## 2.2 Les simplexes hyperboliques

L'intérêt de ce type de formule est qu'elle est largement généralisable. D'abord aux dimensions supérieures et ensuite en courbure constante négative ou positive.

Dans tous les cas, le principe reste le même : intégrer une somme de fonctions associées à chacune des faces qui se comportent asymptotiquement comme l'angle solide sous lequel est « vue » la face et qui ont une propriété d'antisymétrie par rapport à cette face. Ces fonctions seront des déterminants, choisis pour leurs simplicités géométrique et analytique.

Nous nous intéresserons dans la suite seulement aux simplexes hyperboliques, et en particulier aux simplexes idéaux.

Nous étudions d'abord le cas des simplexes finis.

### 2.2.1 Les simplexes hyperboliques finis

Soit donc un  $n$ -simplexe  $\Sigma = (A_0, A_1, \dots, A_n)$  hyperbolique dont les sommets  $A_0, A_1, \dots, A_n$  sont des éléments de  $\mathbb{H}^n$ . Nous désignerons par  $F_i$  la face du simplexe opposée au sommet  $A_i$ .

Pour un point  $m \in \mathbb{H}^n$ , nous définissons les vecteurs  $u_0(m), \dots, u_n(m)$  comme étant les vecteurs vitesses unitaires de  $T_m \mathbb{H}^n$  des géodésiques joignant  $m$  à  $A_0, \dots, A_n$ . Ce sont les vecteurs unitaires qui « pointent » vers les sommets du simplexe  $\Sigma$ .

Alors les fonctions qui vont intervenir dans la formule sont données par :

$$\Phi_i(m) = \frac{(-1)^i}{(n-1)!} \det(u_0(m), \dots, \widehat{u_i(m)}, \dots, u_n(m)).$$

Cette notation signifie qu'on omet  $u_i(m)$  dans la liste  $u_0(m), \dots, u_n(m)$ .

Nous utiliserons les angles solides  $\omega_i(m)$  qui sont les angles solides sous-tendus par les cônes de sommet  $m$  sur les faces  $F_i$ . Nous supposons ces angles solides orientés, d'orientation celle de la base  $(u_0, \dots, \widehat{u_i(m)}, \dots, u_n(m))$ .

Alors nous définissons

$$\alpha_i = (-1)^i \omega_i,$$

de sorte que  $\alpha_i$  et  $\Phi_i$  sont de même signe.

Les étapes de l'élaboration de la formule vont être sensiblement les mêmes que pour les triangles euclidiens : montrer l'intégrabilité puis utiliser les symétries.

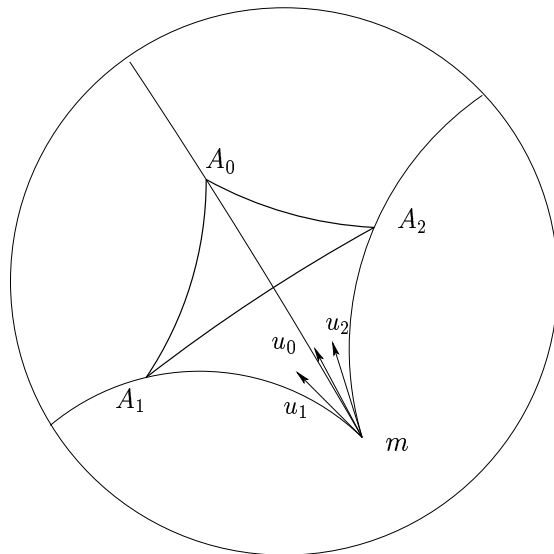


FIG. 2.2 – En dimension 2

**Intégrabilité** La fonction que nous voulons intégrer est

$$m \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-1)!} \det(\dots, \widehat{u_i(m)}, \dots).$$

**Proposition 3.** *La fonction  $m \rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i \det(\dots, \widehat{u_i(m)}, \dots)$  est intégrable sur  $\mathbb{H}^n$ .*

Comme dans la section 2.1, nous allons montrer que  $|\Phi_i - \alpha_i|$  est intégrable.

Pour cela, étudions le comportement asymptotique de cette différence. Nous allons faire le calcul pour  $i = 0$ , mais le calcul pour les autres faces est exactement le même.

Dans le modèle de la boule de Poincaré  $\mathbb{B}^n$ , supposons que le point  $m$  est à distance  $t$  du centre  $O$  de la boule. Alors les distances aux sommets de  $F_0$  sont majorées par des fonctions du type  $t + \delta$ , avec  $\delta \geq 0$ .

**Lemme 2.**  $|\Phi_0 - \alpha_0| = O(e^{-(n+1)t})$ .

*Preuve du lemme.* La situation est la suivante : soit  $n$  vecteurs unitaires  $u_1, \dots, u_n$  dont nous voulons estimer le déterminant et l'angle solide. Voyons les vecteurs  $u_j$  comme des points  $U_1, \dots, U_n$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , dont nous appelons  $O$  le centre. Alors, en notant « conv » l'enveloppe convexe,

$$\det(u_1, \dots, u_n) = \det(\overrightarrow{OU_1}, \dots, \overrightarrow{OU_n}) = n! \text{Vol}(\text{conv}(O, U_1, \dots, U_n)). \quad (2.1)$$

Le volume du simplexe étant orienté.

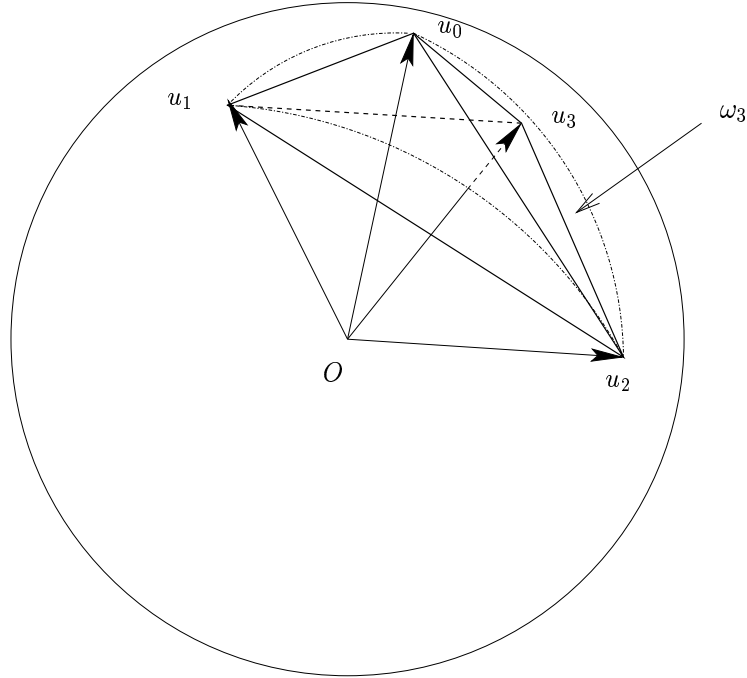


FIG. 2.3 – En dimension 3

En ce qui concerne l'angle solide, nous avons :

$$\alpha_0 = \int_{\text{conv}(U_1, \dots, U_n)} \frac{\vec{Op} \cdot \vec{n}}{\|\vec{Op}\|^{n-1}} dp$$

si  $\vec{n}$  est la normale unitaire orientée au simplexe  $\text{conv}(U_1, \dots, U_n)$ , i.e.

$$\vec{n} = \frac{(\vec{U}_1 - \vec{U}_2) \wedge \dots \wedge (\vec{U}_1 - \vec{U}_n)}{\|(\vec{U}_1 - \vec{U}_2) \wedge \dots \wedge (\vec{U}_1 - \vec{U}_n)\|}$$

La quantité  $\vec{Op} \cdot \vec{n}$  est exactement la hauteur  $h$  signée (le signe est celui du déterminant  $\det(\vec{OU}_1, \dots, \vec{OU}_n)$ ) du simplexe  $(O, U_1, \dots, U_n)$  issue de  $O$ . On peut la mettre en facteur.

Ainsi,

$$\alpha_0 = h \int_{\text{conv}(U_1, \dots, U_n)} \frac{dp}{\|\vec{Op}\|^{n-1}}. \tag{2.2}$$

De (2.1), on déduit :

$$\det(u_1, \dots, u_n) = (n-1)! h \text{vol}(\text{conv}(U_1, \dots, U_n)) \tag{2.3}$$

$$= (n-1)! hV \tag{2.4}$$

où  $V = \text{vol}(U_1, \dots, U_n)$ .

Cette fois, nous notons le volume « vol » sans majuscule pour indiquer qu'il est non signé. En effet, un simplexe de dimension non maximale n'a pas d'orientation naturelle.

Le reste de la preuve de l'intégrabilité réside dans l'estimation asymptotique de ces quantités quand  $t$  tend vers l'infini, en utilisant la quantité suivante :

$$a = \max_{i \neq j} \|\overrightarrow{U_i U_j}\|.$$

Or

$$U_i U_j = \|\overrightarrow{U_i U_j}\| = 2 \left| \sin \frac{\widehat{u_i, u_j}}{2} \right|. \quad (2.5)$$

Désignons par  $\eta_{ij}$  l'angle géométrique  $\widehat{u_i, u_j}$  et par  $\kappa$  l'angle au sommet  $A_i$  dans le triangle hyperbolique  $(m, A_i, A_j)$ . Alors, dans ce triangle hyperbolique, la loi des sinus hyperbolique (cf [R]) nous donne :

$$\frac{\text{sh } d_{\mathbb{H}}(A_i, A_j)}{\sin \eta_{ij}} = \frac{\text{sh } d_{\mathbb{H}}(m, A_j)}{\sin \kappa}.$$

D'où

$$\sin \eta_{ij} = \frac{\sin \kappa \text{sh } d_{\mathbb{H}}(A_i, A_j)}{\text{sh } d_{\mathbb{H}}(m, A_j)}.$$

Alors, puisque  $d_{\mathbb{H}}(A_i, A_j) < \infty$  et  $d_{\mathbb{H}}(m, A_j) = t + \delta$ , il existe une constante réelle strictement positive  $C_1$  telle que :

$$|\sin \eta_{ij}| \leq C_1 e^{-t}.$$

De la même manière, la première loi du cosinus (cf [R]) montre que le cosinus de  $\eta_{ij}$  tend vers 1. Cela prouve que  $\eta_{ij} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ .

Ainsi, pour  $t$  assez grand,  $|\sin \frac{\eta_{ij}}{2}| \leq |\sin \eta_{ij}|$ .

Ceci nous permet, grâce à (2.5), de conclure que

$$a = O(e^{-t}).$$

Majorons maintenant le volume  $V$  :

$$\begin{aligned} V &= \text{vol}(U_1, \dots, U_n) \\ &= \frac{1}{n!} \left| \det(\overrightarrow{U_1 U_2}, \dots, \overrightarrow{U_1 U_n}) \right| \\ &\leq \frac{U_1 U_2 \times \dots \times U_1 U_n}{n!} \\ &\leq \frac{a^{n-1}}{n!} \\ &= O(e^{-(n-1)t}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ensuite, nous allons estimer l'intégrale

$$\int_{\text{conv}(U_1, \dots, U_n)} \frac{dp}{\|\vec{OP}\|^{n-1}},$$

en minorant  $\|\vec{OP}\|$ .

**Lemme 3.**

$$\forall p \in \text{conv}(U_1, \dots, U_n), 1 \geq \|\vec{OP}\|^2 \geq 1 - \frac{n-1}{2n}a^2$$

*Preuve du lemme 3.*

La première inégalité  $1 \geq OP^2$  est évidente.

Appelons  $P$  le point (unique par convexité) du simplexe  $(U_1, \dots, U_n)$  qui réalise le minimum de la distance  $OP$ . Désignons par  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur l'hyperplan affine engendré par le simplexe.

Il y a deux possibilités :  $P = H$  ou  $P \neq H$ .

Si  $P = H$ , alors  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \vec{OP} \perp \vec{PU}_i$ . Et donc

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \vec{OP} \cdot \vec{u}_i = OP^2.$$

Par le théorème de Pythagore, il est facile de voir que les distances  $PU_i$  sont identiques, et donc  $P$  est le centre de la  $(n-1)$ -sphère circonscrite au simplexe  $(U_1, \dots, U_n)$ .

Puisque  $P \in \text{conv}(U_1, \dots, U_n)$ , nous pouvons écrire

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^n t_i u_i, \text{ avec } \sum_{i=1}^n t_i = 1, \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, t_i \geq 0.$$

Alors,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, OP^2 = t_i + \sum_{j \neq i} t_j u_i \cdot u_j$$

Par ailleurs,

$$u_i \cdot u_j = \cos(\widehat{u_i, u_j}) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\widehat{u_i, u_j}}{2} = 1 - \frac{U_i U_j^2}{2}$$

c'est-à-dire

$$u_i \cdot u_j \geq 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, OP^2 &\geq t_i + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \sum_{j \neq i} t_j \\ &\geq \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \sum_{j=1}^n t_j + \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\right) t_i \\ OP^2 &\geq \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^2}{2} t_i \end{aligned}$$

En sommant cette inégalité pour chaque  $i$ , on obtient

$$nOP^2 \geq n \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^2}{2}$$

i.e.

$$OP^2 \geq 1 - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2n}\right)$$

$$OP^2 \geq 1 - \frac{n-1}{2n}a^2$$

C'est l'inégalité souhaitée, mais il reste à envisager la possibilité  $P \neq H$ , c'est-à-dire le cas où  $H$  n'est pas un point du simplexe.

Si  $P \neq H$ , alors, encore par le théorème de Pythagore, le point  $P$  réalise sur le simplexe le minimum de la distance à  $H$  ( $Hp^2 = Op^2 - OH^2 \geq OP^2 - OH^2 = HP^2$ ). Considérons la face de dimension maximale  $k$  qui contient  $P$  dans son intérieur. Puisque sur cette face,  $P$  réalise la distance minimale à  $H$ , et que  $H$  est équidistant des sommets ( $HU_i^2 = 1 - OH^2$ ),  $P$  est donc le centre de la  $(k-1)$ -sphère circonscrite à la face.

Nous sommes alors ramenés au cas où «  $P = H$  », mais non plus pour le simplexe, mais seulement pour la face en question. Cependant les calculs faits plus haut demeurent valables.

Donc

$$OP^2 \geq 1 - \frac{k-1}{2k}a^2.$$

Conclusion, dans tous les cas

$$OP^2 \geq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \left(1 - \frac{k-1}{2k}a^2\right).$$

Finalement, comme  $k \mapsto 1 - \frac{k-1}{2k}a^2$  est décroissante, le lemme est prouvé.  $\square$

Le lemme précédent donne :

$$V \leq \int_{\text{conv}(U_1, \dots, U_n)} \frac{dp}{\|\vec{Op}\|^{n-1}} \leq \frac{V}{\left(1 - \frac{n-1}{2n}a^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (2.7)$$

Soit

$$0 \leq \left| V - \int_{\text{conv}(U_1, \dots, U_n)} \frac{dp}{\|\vec{Op}\|^{n-1}} \right| \leq V \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{n-1}{2n}a^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} - 1 \right]$$

d'où, en utilisant (2.2), (2.6) et  $|h| \leq 1$ ,

$$|\Phi_0 - \alpha_0| \leq |h|V \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{n-1}{2n}a^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} - 1 \right]$$

$$|\Phi_0 - \alpha_0| \leq \frac{a^{n-1}}{n!} \left[ \frac{(n-1)^2}{4n}a^2 + o(a^2) \right] \quad (2.8)$$



Enfin, nous avons

$$|\Phi_0 - \alpha_0| = O(e^{-(n+1)}).$$

Le lemme 2 est prouvé.  $\square$

Pour en terminer avec l'intégrabilité, la mesure sur la boule de Poincaré  $\mathbb{B}^n$  est

$$\frac{2^n dx_1 \dots dx_n}{(1 - |x|^2)^n} = \frac{2^n r^{n-1} dr du}{(1 - r^2)^n}$$

en coordonnées polaires où  $r = d_{\mathbb{R}^n}(O, x)$  et  $du$  est la mesure sur  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Or  $r = \text{th } \frac{t}{2}$  donc la mesure s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{2^{n-1} \text{th}^{n-1} \frac{t}{2} (1 - \text{th}^2 \frac{t}{2}) dt du}{(1 - \text{th}^2 \frac{t}{2})^n} &= 2^{n-1} \text{th}^{n-1} \frac{t}{2} \text{ch}^{2n-2} \frac{t}{2} dt du \\ &= 2^{n-1} \text{sh}^{n-1} \frac{t}{2} \text{ch}^{n-1} \frac{t}{2} dt du \\ &= \text{sh}^{n-1} t dt du \end{aligned}$$

Or  $e^{-(n+1)t} \text{sh } t \sim \frac{1}{2} e^{-nt}$ , donc pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|\Phi_i - \alpha_i|$  est intégrable.

**Calcul** De la même manière que dans le cas des triangles euclidiens, nous avons

**Lemme 4.** Pour  $m \in \mathbb{H}^n$ ,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(m) = \begin{cases} \pm \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) & \text{si } m \in \overbrace{\text{conv}(A_0, \dots, A_n)}^{\circ} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

le signe dépendant de l'orientation du simplexe.

*Preuve.* Voyons déjà que si  $m$  est à l'intérieur du simplexe, tous les angles solides  $\alpha_i(m)$  sont de même signe. Nous savons que l'angle solide  $\omega_i$  est de même signe que le déterminant  $\det(u_0, \dots, \widehat{u}_i, \dots, u_n)$ . Or ce déterminant est de signe constant pour tous les  $m$  du même côté de l'hyperplan contenant la face  $F_i$ . Donc, pour tous les points à l'intérieur du simplexe,  $\omega_i(m)$  est du signe de  $\omega(A_i)$ .  $\omega_0(A_0)$  est du signe de  $\det(u_1(A_0), \dots, u_n(A_0))$ , c'est-à-dire du même signe que l'orientation du simplexe. Ensuite,  $\omega_i(A_i)$  est le signe de l'orientation du simplexe  $(A_i, A_0, A_1, \dots, \widehat{A}_i, \dots, A_n)$ , soit  $(-1)^i$  fois le signe de  $\omega_0(A_0)$ . Vu que  $\alpha_i = (-1)^i \omega_i$ , il est clair que tous les  $\alpha_i$  sont de même signe à l'intérieur du simplexe. Leur somme est alors  $\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})$  à ce signe près, c'est la mesure de l'angle solide total.

Si  $m$  est à l'extérieur du simplexe, tout rayon issu de  $m$  et rencontrant une  $(n-1)$ -face en entrant dans le simplexe ressort en traversant une deuxième face. Cela signifie que dans une direction de  $T_m \mathbb{H}^n$ , on traverse 0 ou 2 faces.

Pour ces deux faces cette direction « compte » pour les deux angles solides associés, mais avec deux signes opposés, puisque  $m$  se trouve du même côté d'une face que le simplexe, et de l'autre côté pour l'autre face. Donc, lorsque l'on calcule la somme des  $\alpha_i$ , on obtient 0.  $\square$

Cela prouve, puisque le simplexe  $\Sigma$  est de volume fini, que la somme des  $\alpha_i$  est intégrable et que

$$\int_{\mathbb{H}^n} \sum_{i=0}^n \alpha_i(m) dm = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \text{Vol}(\Sigma).$$

On en déduit l'intégrabilité de la somme des  $\Phi_i$  et la formule finale :

$$\int_{\mathbb{H}^n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \det(\dots, \widehat{u_i(m)}, \dots) dm = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \text{Vol}(\Sigma).$$

### 2.2.2 Les simplexes hyperboliques idéaux

Pour les simplexes idéaux, la situation est quasiment la même, sauf que les sommets  $A_0, \dots, A_n$  sont sur le bord de  $\mathbb{H}^n$ . Les vecteurs unitaires  $u_i$  sont définis de la même manière, ainsi que les angles solides  $\alpha_i$  et la fonction que l'on veut intégrer :

$$F : m \mapsto \sum_{i=0}^n \Phi_i(m) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-1)!} \det(\dots, \widehat{u_i(m)}, \dots).$$

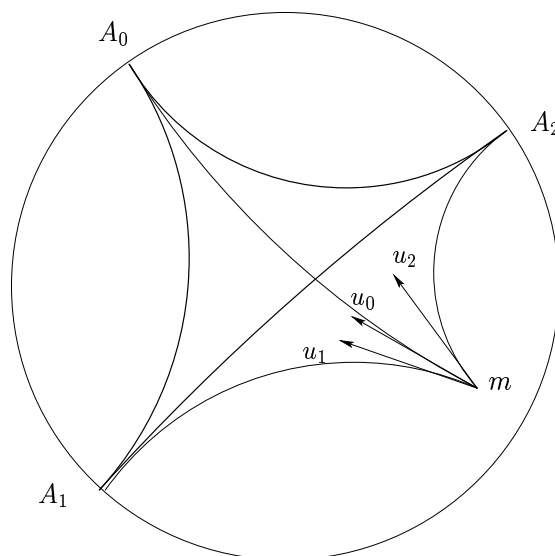


FIG. 2.4 – Un triangle idéal

Cependant, la preuve de l'intégrabilité est un peu plus délicate. En effet, l'étude asymptotique de  $|\Phi_i - \alpha_i|$  doit prendre en compte non seulement la distance à un point (l'origine dans le modèle de la boule de Poincaré  $\mathbb{B}^n$  par exemple), mais aussi la direction dans laquelle le point tend vers l'infini, car les sommets étant à l'infini, on peut tendre vers l'infini et se « rapprocher » d'un sommet.

Nous allons voir cela plus précisément. Comme nous l'avons vu dans le cas des simplexes finis, nous allons essayer d'estimer le maximum des distances des vecteurs  $u_i$  dans l'espace tangent en  $m$ , c'est la quantité que nous avons appelée  $a$ .

Pour simplifier les calculs, nous allons cette fois utiliser le modèle projectif de Klein  $\mathbb{K}^n$ . Choisissons une direction à l'origine, un vecteur unitaire  $v$ . Le point  $m$  sera le point  $m(t, v)$  à distance hyperbolique  $t$  de  $O$  – qui désigne le centre de la boule de Klein (modèle projectif) – dans la direction  $v$ . Dans le modèle,  $m(t, v)$  est le point  $(\text{th } t)v$ .

Comme le modèle projectif n'est pas conforme, nous devons placer  $m$  en  $O$  pour que les angles solides et déterminants dans le modèle correspondent aux véritables valeurs. À cette fin, nous appliquons une isométrie qui amène  $m$  en  $O$ . Tout d'abord, effectuons une rotation  $\rho_v$  qui envoie  $v$  sur le vecteur  $(0, \dots, 0, -1)$ . Alors, le point  $m$  est envoyé sur  $(0, \dots, 0, -\text{th } t)$ . Ensuite, nous appliquons une isométrie hyperbolique  $g'_t$  dont l'action dans le modèle de l'hyperboloïde est donnée par la matrice  $(n + 1) \times (n + 1)$

$$g'_t \longleftrightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \text{ch } t & \text{sh } t \\ & \text{sh } t & \text{ch } t \end{pmatrix}.$$

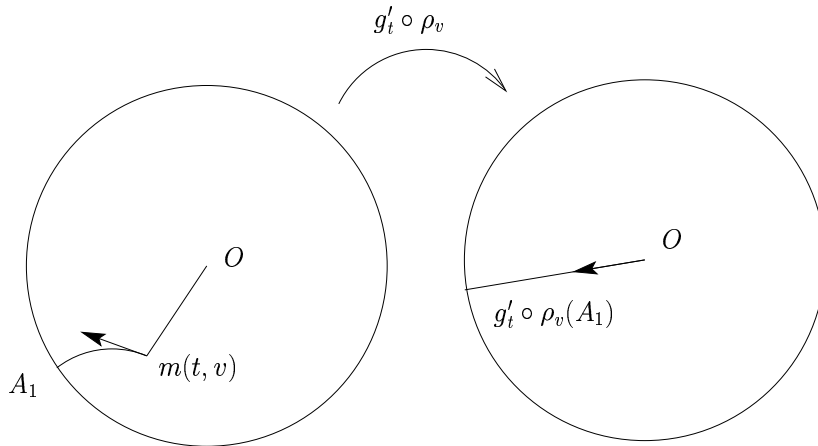


FIG. 2.5 – On ramène  $m(t, v)$  en  $O$

Cette rotation agit dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la manière suivante :

$$g'_t(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) \\ = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \operatorname{ch} t + x_{n+1} \operatorname{sh} t, x_n \operatorname{sh} t + x_{n+1} \operatorname{ch} t).$$

Cela donne dans le modèle projectif :

$$g'_t(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \left( \frac{x_1}{x_n \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}, \frac{x_n \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_n \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right).$$

Cette formule est valable pour les points du bord.

$$\text{Alors, } \Phi_0(m(t, v)) = \det \left( \overrightarrow{Og'_t \circ \rho_v(A_1)}, \dots, \overrightarrow{Og'_t \circ \rho_v(A_n)} \right).$$

$$\text{Notons } u_i(t, v) = \overrightarrow{Og'_t \circ \rho_v(A_i)}.$$

Si  $\rho_v(A_i)$  a pour coordonnées  $(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$ , alors

$$u_i(t, v) = \left( \frac{x_{1,i}}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}, \dots, \frac{x_{n-1,i}}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}, \frac{x_{n,i} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right).$$

Nous voyons déjà, qu'à moins que  $x_{n,i} = -1$ ,  $u_i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (0, \dots, 0, 1)$ .

Supposons donc que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_{n,i} > -1$  (l'ensemble des  $m(t, v)$  tels que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_{n,i} = -1$  est de mesure nulle).

$$\|u_i(t, v) - u_j(t, v)\| = \left( \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{x_{k,i}}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{k,j}}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right)^2 + \left( \frac{x_{n,i} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{n,j} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{x_{k,i}}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{k,j}}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right| + \left| \frac{x_{n,i} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{n,j} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right| \quad (2.9)$$

Majorons les premiers termes :

$$\left| \frac{x_{k,i}}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{k,j}}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right| \\ = \left| \frac{x_{k,i}(x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) - x_{k,j}(x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)}{(x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)(x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)} \right| \\ = \frac{|(x_{k,i}x_{n,j} - x_{k,j}x_{n,i}) \operatorname{sh} t + (x_{k,i} - x_{k,j}) \operatorname{ch} t|}{(x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)(x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)} \\ = \frac{|(x_{k,i}(1 + x_{n,j}) - x_{k,j}(1 + x_{n,i})) e^t + (x_{k,i}(1 - x_{n,j}) - x_{k,j}(1 - x_{n,i})) e^{-t}|}{((1 + x_{n,i})e^t + (1 - x_{n,i})e^{-t})((1 + x_{n,j})e^t + (1 - x_{n,j})e^{-t})}$$

Si  $x_{k,i}(1+x_{n,j}) - x_{k,j}(1+x_{n,i}) \neq 0$ ,

$$\left| \frac{x_{k,i}}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{k,j}}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x_{k,i}(1+x_{n,j}) - x_{k,j}(1+x_{n,i})|}{(1+x_{n,i})(1+x_{n,j})} e^{-t} \quad (2.10)$$

et si  $x_{k,i}(1+x_{n,j}) - x_{k,j}(1+x_{n,i}) = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_{k,i}}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{k,j}}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right| \\ &= O \left( \frac{|(x_{k,i}(1-x_{n,j}) - x_{k,j}(1-x_{n,i})) e^{-t}|}{(1+x_{n,i})(1+x_{n,j}) e^t} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x_{n,i})(1+x_{n,j})} O(e^{-2t}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour le dernier terme,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_{n,i} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{n,j} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right| &= \frac{|(x_{n,i} - x_{n,j})(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t)|}{(x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)(x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)} \\ &= \frac{|x_{n,i} - x_{n,j}|}{(x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)(x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)} \\ &\leq \frac{2}{(x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)(x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)} \end{aligned}$$

Et donc

$$\left| \frac{x_{n,i} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,i} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} - \frac{x_{n,j} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{x_{n,j} \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} \right| = \frac{1}{(1+x_{n,i})(1+x_{n,j})} O(e^{-2t}) \quad (2.12)$$

De (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12) on déduit que

$$\begin{aligned} & \|u_i(t, v) - u_j(t, v)\| \\ &\leq \frac{\left( \max_{k \in \{1, \dots, n-1\}} |x_{k,i}(1+x_{n,j}) - x_{k,j}(1+x_{n,i})| \right) O(e^{-t}) + O(e^{-2t})}{(1+x_{n,i})(1+x_{n,j})}. \end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned} a \leq & \left( \max_{\substack{i \neq j \\ k \in \{1, \dots, n-1\}}} \frac{|x_{k,i}(1+x_{n,j}) - x_{k,j}(1+x_{n,i})|}{(1+x_{n,i})(1+x_{n,j})} \right) O(e^{-t}) + \\ & + \left( \max_{i \neq j} \frac{1}{(1+x_{n,i})(1+x_{n,j})} \right) O(e^{-2t}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nous conservons le second terme pour le cas où le premier est nul.

La majoration (2.8) reste valable puisque nous l'avons établie en raisonnant seulement sur les vecteurs unitaires  $u_i$ .

Nous obtenons

$$|\Phi_0 - \alpha_0| = O(a^{n+1}) \quad (2.14)$$

Le problème est que le terme de droite de (2.13) n'est pas intégrable comme fonction de  $m(t, v)$  pour la mesure hyperbolique en coordonnées polaires  $\text{sh}^{n-1} t dt dv = \text{sh}^{n-1} t \sin^{n-1} \theta dt d\theta$ ,  $\theta$  étant la colatitude de  $v$ . En effet, nous pouvons supposer que par exemple  $A_1 = (0, \dots, -1)$  et que  $v$  est proche de  $\overrightarrow{OA_1}$ , soit – cela n'enlève en fait aucune généralité – que  $v = (0, \dots, -\sin \theta, -\cos \theta)$ . Pour  $\rho_v$  choisissons la rotation de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \dots & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

dans la base canonique.

Alors,  $x_{n,1} = -\cos \theta$ , et  $x_{n-1,1} = \sin \theta$ , donc la quantité à intégrer est

$$\left( \frac{2 \sin \theta + 1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^{n+1} \sin^{n-1} \theta \text{sh}^{n-1} t O(e^{-(n+1)t}) \sim \frac{O(e^{-2t})}{\theta^2}$$

qui n'est pas intégrable. Nous ne pouvons pas montrer que  $|\Phi_0 - \alpha_0|$  est intégrable de cette façon.

Nous allons avoir besoin d'une étude plus fine.

Mais montrons d'abord une propriété de la fonction  $F$  que nous voulons intégrer.

**Proposition 4.** *La fonction  $F$  est du signe de  $\text{Vol}(\Sigma)$  (c'est-à-dire positive si  $\Sigma$  est orienté dans le sens direct).*

*Preuve.* Envisageons pour la preuve les deux situations suivantes :  $m$  est à l'intérieur ou à l'extérieur de  $\Sigma$ .

Si  $m$  est à l'intérieur de  $\Sigma$ , nous avons vu dans la preuve du lemme 4 que toutes les  $\Phi_i$  sont du même signe, en l'occurrence celui de l'orientation de  $\Sigma$ .

Si  $m$  est à l'extérieur, alors, cela signifie qu'il existe au moins un sommet  $A_{i_0}$  tel que  $m$  et  $A_{i_0}$  ne sont pas du même côté de l'hyperplan  $H_{i_0}$  contenant la face  $F_{i_0}$ . Donc le rayon géodésique joignant  $m$  à  $A_{i_0}$  traverse  $H_{i_0}$ , ou encore le segment de droite  $[OU_{i_0}]$  rencontre l'hyperplan affine engendré par les autres  $U_i$ . Cela force  $u_{i_0}$  à être une combinaison linéaire « barycentrique »

des vecteurs  $u_i$ ,  $i \neq i_0$  (si  $m$  est à l'intérieur de  $\Sigma$ , c'est un multiple négatif). C'est-à-dire :

$$\exists(t_0, \dots, \widehat{t_{i_0}}, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \exists \lambda \geq 1, \begin{cases} \sum_{i \neq i_0} t_i = 1 \\ u_{i_0} = \lambda \left( \sum_{i \neq i_0} t_i u_i \right) \end{cases}$$

$\lambda \geq 1$  nécessairement, puisque la droite affine  $(OU_{i_0})$  coupe l'hyperplan  $(U_0, \dots, \widehat{U_{i_0}}, \dots, U_n)$  à l'intérieur de la boule de rayon 1, or  $u_{i_0}$  est de norme 1.

$$F = (-1)^{i_0} \det(\dots, \widehat{u_{i_0}}, \dots) + \sum_{i \neq i_0} (-1)^i \det(\dots, \widehat{u_i}, \dots)$$

Dans les déterminants où apparaît  $u_{i_0}$ , on peut le remplacer par la combinaison linéaire ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned} \det(\dots, u_{i_0}, \dots, \widehat{u_i}, \dots) &= \lambda t_i \det(\dots, u_i, \dots, \widehat{u_i}, \dots) \\ &= \lambda t_i (-1)^{i-i_0-1} \det(\dots, \widehat{u_{i_0}}, \dots) \end{aligned}$$

car à présent  $u_{i_0}$  n'apparaît plus et le coefficient  $(-1)^{i-i_0-1}$  vient du fait que l'on a remis  $u_i$  à sa place. Donc

$$\begin{aligned} F &= (-1)^{i_0} \det(\dots, \widehat{u_{i_0}}, \dots) - \sum_{i \neq i_0} (-1)^{i_0} \lambda t_i \det(\dots, \widehat{u_{i_0}}, \dots) \\ &= (-1)^{i_0} \det(\dots, \widehat{u_{i_0}}, \dots) \left( 1 - \lambda \sum_{i \neq i_0} t_i \right) \\ &= (-1)^{i_0} \det(\dots, \widehat{u_{i_0}}, \dots) (1 - \lambda) \end{aligned}$$

Par construction,  $1 - \lambda \leq 0$ .

Quant au signe du déterminant  $\det(\dots, \widehat{u_{i_0}}, \dots)$ , il est opposé à celui de  $\det(u_0 - u_{i_0}, \dots, \widehat{u_{i_0} - u_{i_0}}, \dots, u_n - u_{i_0})$  car  $u_k - u_{i_0} = \overrightarrow{U_{i_0} U_k}$  et de plus  $O$  et  $U_{i_0}$  ne sont pas du même côté de l'hyperplan affine  $(U_0, \dots, \widehat{U_{i_0}}, \dots, U_n)$ .

Si  $i_0 = 0$ ,  $\det(u_0 - u_{i_0}, \dots, \widehat{u_{i_0} - u_{i_0}}, \dots, u_n - u_{i_0})$  est du signe de l'orientation de  $\Sigma$ . Sinon, en enlevant  $u_0 - u_{i_0}$  aux autres vecteurs du déterminant, on obtient

$$\begin{aligned} \det(u_0 - u_{i_0}, \dots, \widehat{u_{i_0} - u_{i_0}}, \dots, u_n - u_{i_0}) &= \det(u_0 - u_{i_0}, \dots, \widehat{u_{i_0} - u_0}, \dots, u_n - u_0) \\ &= -\det(u_{i_0} - u_0, u_1 - u_0, \dots, \widehat{u_{i_0} - u_0}, \dots, u_n - u_0) \\ &= -(-1)^{i_0-1} \det(u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0) \end{aligned}$$

Finalement,  $F$  est donc du même signe que

$$(-1)^{i_0} (-(-1)^{i_0-1}) \det(u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0) = \det(u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0),$$

soit du signe de l'orientation de  $\Sigma$ .  $\square$

Passons à la preuve du résultat principal :

**Proposition 5.** *La fonction  $F$  est intégrable sur  $\mathbb{H}^n$  et*

$$\int_{\mathbb{H}^n} F(m) dm = \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \text{Vol}(\Sigma).$$

*Preuve.* Nous avons vu que l'obstacle à l'intégrabilité de  $\Phi_i - \alpha_i$  se situe au voisinage des sommets autres que  $A_i$ .

Soit  $r > 0$ . Considérons pour chaque  $j \in \{1, \dots, n\}$ , l'horosphère  $\mathfrak{H}_j$  au point  $A_j$  de rayon euclidien  $r$  dans le modèle  $\mathbb{B}^n$  de la boule de Poincaré. Soit  $\mathfrak{B}_j$  la boule bordée par la sphère euclidienne  $\mathfrak{H}_j$ . Posons

$$\Omega_i(r) = \mathbb{H}^n \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{B}_j.$$

Nous prendrons  $r$  suffisamment petit pour que les différentes horosphères  $\mathfrak{H}_j$  ne se coupent pas.

**Lemme 5.**  $\Phi_i - \alpha_i$  est intégrable sur  $\Omega_i(r)$  et

$$\int_{\Omega_i(r)} (\Phi_i - \alpha_i)(m) dm = 0.$$

*Preuve du lemme.* Nous faisons la preuve que  $|\Phi_0 - \alpha_0|$  est intégrable, c'est évidemment le même principe pour les autres indices.

Puisque le problème d'intégrabilité se situe au voisinage des sommets  $A_j$ , pour  $j \neq 0$ , il suffit de montrer l'intégrabilité dans ces voisinages. Montrons que  $|\Phi_0 - \alpha_0|$  est intégrable au voisinage de  $A_1$  par exemple.

Reprenons les notations utilisées dans l'étude de l'estimation (2.14). On paramètre  $v$  par  $v_0 \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ , et  $\theta \in [0, \pi]$  de telle sorte que  $v$  est l'image de  $v_0$  par la rotation (2.15). Nous prenons pour les calculs  $v_0 = (0, \dots, 0, 1, 0)$ . On peut toujours s'y ramener par une rotation de repère.

Pour  $\theta$  assez petit – disons  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  –, les réels  $t$  pour lesquels le point  $m(t, v(\theta))$  appartient à  $\Omega_0(r)$  sont dans un ensemble de la forme  $[0, t_1(\theta)[\cup]t_2(\theta), +\infty]$ . Les réels  $t_1(\theta)$  et  $t_2(\theta)$  étant les valeurs de  $t$  pour lesquelles le rayon  $t \mapsto m(t, v(\theta))$  coupe  $\mathfrak{H}_1$ .

D'après les estimations (2.14) et (2.13), il nous suffit donc de prouver que sur l'ensemble  $\{(t, \theta) ; 0 < \theta \leq \theta_0 \text{ et } t \geq t_2(\theta)\}$ , les fonctions

$$(t, \theta) \mapsto \left( \frac{2 \sin \theta + 1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{n+1} \sin^{n-1} \theta e^{-(n+1)t} \text{sh}^{n-1} t$$



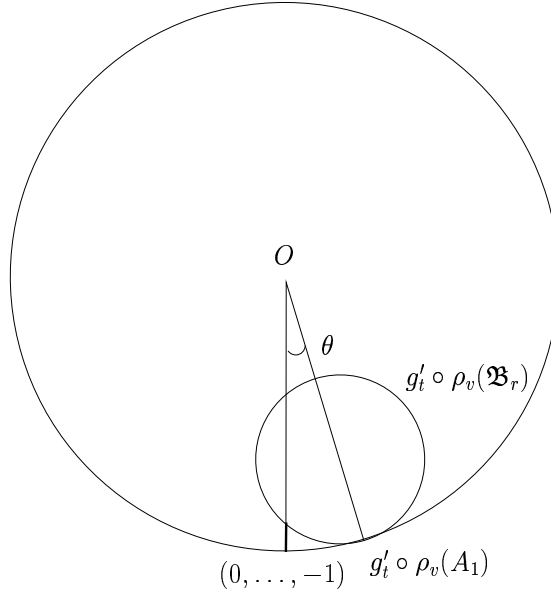


FIG. 2.6 – Quand  $\theta$  tend vers 0

et

$$(t, \theta) \mapsto \left( \frac{1}{1 - \cos \theta} \right)^{n+1} \sin^{n-1} \theta e^{-2(n+1)t} \operatorname{sh}^{n-1} t$$

sont intégrables pour la mesure  $d\theta dt$ .

Cela passe par le calcul de  $t_2(\theta)$ .

**Lemme 6.**

$$t_2(\theta) = \ln \theta^{-2} + O(1).$$

*Preuve du lemme 6.* Nous notons  $l$  la distance euclidienne de  $m(t_2(\theta), v(\theta))$ . Alors  $l^2 = y_{n-1}^2 + y_n^2$  et  $l = \operatorname{th} \frac{t_2}{2}$ .

Le fait que  $m(t_2(\theta), v(\theta)) = (0, \dots, 0, y_{n-1}, y_n)$  est sur le rayon issu  $t \mapsto m(t, v(\theta))$  s'écrit

$$\begin{cases} x_{n-1} &= -t_2 \sin \theta \\ x_n &= -t_2 \cos \theta \end{cases} .$$

Traduisons que  $m(t_2(\theta), v(\theta))$  est sur l'horosphère :

$$\begin{aligned} l^2 \sin^2 \theta + (-l \cos \theta - (-1 + r))^2 &= r^2 \\ l^2 - 2l(1 - r) \cos \theta + 1 - 2r &= 0 \end{aligned}$$

On choisit  $\theta \leq \theta_0$  de telle sorte que cette équation ait deux solutions réelles. La solution qui nous intéresse est la plus grande, elle correspond à la sortie du rayon de l'horosphère.

$$\begin{aligned}
l &= (1-r) \cos \theta + \sqrt{(1-r)^2 \cos^2 \theta - 1 + 2r} \\
&= (1-r) \cos \theta + \sqrt{r^2 - (1-r)^2 \frac{\theta^2}{2}} + O(\theta^4) \\
&= (1-r) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + r \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1-r}{r}\right)^2 \theta^2\right] + O(\theta^4) \\
l &= 1 - \frac{1-r}{4r} \theta^2 + O(\theta^4).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
t_2 &= 2 \operatorname{argth}(l) \\
&= \ln \frac{1+l}{1-l} \\
&= \frac{2 - \frac{1-r}{4r} \theta^2 + O(\theta^4)}{\frac{1-r}{4r} \theta^2 + O(\theta^4)} \\
t_2 &= \ln \frac{8r}{1-r} \theta^{-2} + O(1).
\end{aligned}$$

□

Et enfin les deux quantités qui nous intéressent sont bien intégrables :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\theta_0} \int_{t_2}^{+\infty} \left( \frac{2 \sin \theta + 1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{n+1} \sin^{n-1} \theta e^{-(n+1)t} \operatorname{sh}^{n-1} t \, dt \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} O(\theta^{-(n+1)}) \sin^{n-1} \theta \int_{t_2}^{+\infty} (e^{-2t} - e^{-2nt}) \, dt \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} O(\theta^{-2}) \left[ -\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2n} e^{-2nt} \right]_{t_2}^{+\infty} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} O(\theta^{-2}) \left( \frac{1}{2} e^{-2t_2} - \frac{1}{2n} e^{-2nt_2} \right) d\theta \\
&= \int_0^{\theta_0} O(\theta^{-2}) O(\theta^4) \, d\theta \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\theta_0} \int_{t_2}^{+\infty} \left( \frac{1}{1 - \cos \theta} \right)^{n+1} \sin^{n-1} \theta e^{-2(n+1)t} \operatorname{sh}^{n-1} t \, dt \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} O(\theta^{-(n+3)}) \int_{t_2}^{+\infty} (e^{-(n+3)t} - e^{-(3n+1)t}) \, dt \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} O(\theta^{-(n+3)}) \left[ -\frac{1}{n+3} e^{-(n+3)t} + \frac{1}{3n+1} e^{-(3n+1)t} \right]_{t_2}^{+\infty} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} O(\theta^{-2}) O(\theta^{2n+6}) \, d\theta \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la première partie du lemme 5.

La nullité de l'intégrale provient de l'antisymétrie de  $\Phi_i - \alpha_i$  par la symétrie par rapport à l'hyperplan contenant la face  $F_i$  et du fait que par construction  $\Omega_i(r)$  est stable par cette symétrie.  $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition 5, nous devons passer de  $\Omega_i(r)$  à  $\mathbb{H}^n$ .

Soit

$$\begin{aligned}
\Omega(r) &= \mathbb{H}^n \setminus \bigcup_{i=0}^n \mathfrak{B}_i \\
&= \Omega_i(r) \setminus \mathfrak{B}_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

Pour chaque  $i$ ,  $\Phi_i - \alpha_i$  est intégrable sur  $\Omega_i(r)$  donc sur  $\Omega(r)$  et puisque  $\mathfrak{B}_i(r) \subset \Omega_i(r)$ ,  $\Phi_i - \alpha_i$  est intégrable sur  $\mathfrak{B}_i(r)$ .

Et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega(r)} (\Phi_i - \alpha_i)(m) \, dm &= \int_{\Omega_i(r)} (\Phi_i - \alpha_i)(m) \, dm - \int_{\mathfrak{B}_i(r)} (\Phi_i - \alpha_i)(m) \, dm \\
&= - \int_{\mathfrak{B}_i(r)} (\Phi_i - \alpha_i)(m) \, dm.
\end{aligned}$$

Soit, en sommant sur  $i$ ,

$$\int_{\Omega(r)} \left( F(m) - \sum_{i=0}^n \alpha_i(m) \right) dm = \int_{\mathfrak{B}_i(r)} (\Phi_i - \alpha_i)(m) \, dm$$

Mais  $r \leq r' \Rightarrow \mathfrak{B}_i(r) \subset \mathfrak{B}_i(r')$  et

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{B}_i \left( \frac{1}{n} \right) = \emptyset,$$

donc

$$\int_{\mathfrak{B}_i(r)} (\Phi_i - \alpha_i)(m) \, dm \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0.$$

Enfin,  $\mathbb{H}^n$  étant l'union croissante des  $\Omega_i(r)$ , nous avons

$$\int_{\Omega(r)} \left( F(m) - \sum_{i=0}^n \alpha_i(m) \right) \, dm \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} \int_{\mathbb{H}^n} \left( F(m) - \sum_{i=0}^n \alpha_i(m) \right) \, dm = 0.$$

Cela termine la preuve. □



## Chapitre 3

# La base des harmoniques sphériques

Dans ce chapitre, nous présentons une base de  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ .

Cela nous donnera alors une base de  $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$  par le biais de

$$L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}) \simeq \overline{L^2(\mathbb{S}^{n-1})^{\otimes(n+1)}}.$$

Cette base sera construite à partir des polynômes de Gegenbauer (ou polynômes ultrasphériques). Il y a différentes définitions de ces polynômes (par une série génératrice, par la donnée des coefficients, par récurrence, ou encore par la formule de Rodrigues associée), mais nous aurons besoin de plusieurs de ces caractérisations. C'est pourquoi nous allons prouver leur équivalence. On peut trouver une définition de ces polynômes dans [V2] ou [S]. Nous faisons tous les calculs complètement afin d'obtenir les bonnes constantes, étant donné que selon les ouvrages, les polynômes de Gegenbauer ne sont pas toujours normalisés de la même manière.

### 3.1 Les polynômes harmoniques homogènes sur $\mathbb{S}^{n-1}$

Le but de cette section est d'obtenir une base de  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  constituée de polynômes harmoniques homogènes.

Nous notons  $\mathfrak{R}^{n,l}$  l'espace des polynômes homogènes (en rajoutant 0) à  $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n)$  de degré  $l$  et  $\mathfrak{H}^{n,l}$  le sous-espace des polynômes harmoniques. Notons aussi  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $r_k^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2$  et  $r = r_n$ .

Pour des raisons de concordance dans les formules, on considèrera que si  $l < 0$ ,  $\mathfrak{R}^{n,l} = \{0\}$ .

#### 3.1.1 Les espaces de polynômes harmoniques homogènes

On peut voir  $\mathfrak{H}^{n,l}$  comme un sous-espace de  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  par restriction des polynômes de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Nous désignerons alors par  $\mathfrak{H}^{n,l}$  l'espace des res-

trictions des polynômes de  $\mathfrak{H}^{nl}$  à  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Pour le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ , ces espaces  $\tilde{\mathfrak{H}}^{nl}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , sont deux à deux orthogonaux. On peut justifier cela par le fait que la représentation quasi-régulière de  $SO(n)$  dans  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  se scinde en sous-représentations irréductibles deux à deux non équivalentes réalisées dans ces sous-espaces. Mais on peut aussi remarquer que, étant donné l'expression du laplacien sur  $\mathbb{R}^n$  en coordonnées polaires,

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

et les relations

$$\forall P \in \mathfrak{A}^{n,l}, \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{l}{r} P \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{l(l-1)}{r^2} P \end{cases},$$

dues à l'homogénéité, on a pour tout polynôme  $H \in \mathfrak{H}^{nl}$ ,

$$0 = \Delta_{\mathbb{R}^n} H = \frac{l(l-1) + (n-1)l}{r^2} H + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} H.$$

Cela signifie que les espaces  $\tilde{\mathfrak{H}}^{nl}$  sont des espaces propres pour  $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$  associés aux valeurs propres  $-l(l+n-2)$ , toutes différentes.

Afin de montrer que  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  est la somme hilbertienne des espaces  $\tilde{\mathfrak{H}}^{nl}$ , nous allons montrer que l'espace des restrictions à  $\mathbb{S}^{n-1}$  des fonctions polynômes est engendré par les  $\tilde{\mathfrak{H}}^{nl}$ .

### 3.1.2 Projection harmonique

Tout d'abord nous avons la décomposition suivante (la preuve s'inspire de [V1]) :

$$\mathfrak{A}^{n,l} = \mathfrak{H}^{nl} \oplus r^2 \mathfrak{A}^{n,l-2} \quad (3.1)$$

*Preuve* : Introduisons un produit scalaire sur  $\mathfrak{A}^{n,l}$ , et montrons que les deux sous-espaces de la décomposition sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Définissons alors la forme bilinéaire suivante sur  $\mathfrak{A}^{n,l}$  :

$$\langle P, Q \rangle_{n,l} = P(D)(\overline{Q}),$$

où  $P(D)$  est l'opérateur différentiel de symbole  $P(x_1, \dots, x_n)$ . Il faut montrer que cette forme est symétrique définie positive. Nous allons montrer pour cela que sa matrice dans la base de  $\mathfrak{A}^{n,l}$  constituée des monômes, est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont strictement positifs.

Notons à cette fin  $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$  si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Alors

$$\langle x^\alpha, x^\beta \rangle_{n,l} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} x^\beta.$$

- Si  $\alpha \neq \beta$  alors, puisque  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = l$ , il existe un indice  $j$  pour lequel  $\alpha_j > \beta_j$ . Donc l'ordre de dérivation partielle par rapport à  $x_j$  est supérieur au degré en  $x_j$  et  $\langle x^\alpha, x^\beta \rangle_{n,l} = 0$  ;
- Si  $\alpha = \beta$ , alors un calcul direct donne  $\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} x^\beta = \prod_{i=1}^n (\alpha_i)!$ .

On en déduit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,l}$  est bien un produit scalaire sur  $\mathfrak{R}^{n,l}$  et que  $\left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^n (\alpha_i)!} x^\alpha ; \sum_{i=1}^n \alpha_i = l \right\}$  est une base orthonormée.

Alors

$$\begin{aligned}
P \in (r^2 \mathfrak{R}^{n,l-2})^\perp &\Leftrightarrow \forall Q \in \mathfrak{R}^{n,l-2}, \langle r^2 Q, P \rangle_{n,l} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall Q \in \mathfrak{R}^{n,l-2}, Q(D) \cdot \Delta \bar{P} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall Q \in \mathfrak{R}^{n,l-2}, \langle Q, \Delta P \rangle_{n,l-2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta P \in \mathfrak{R}^{n,l-2 \perp \langle \cdot, \cdot \rangle_{n,l-2}} = \{0\} \\
&\Leftrightarrow P \in \mathfrak{H}^{nl}.
\end{aligned}$$

Nous avons montré

$$\mathfrak{H}^{nl} = (r^2 \mathfrak{R}^{n,l-2})^{\perp \langle \cdot, \cdot \rangle_{n,l}}.$$

□

On peut alors définir pour un polynôme homogène sa *projection harmonique* :

$$\mathcal{H}_l : \begin{cases} \mathfrak{R}^{n,l} & \longrightarrow \mathfrak{H}^{nl} \\ P & \longmapsto \mathcal{H}_l(P) \end{cases},$$

où  $\mathcal{H}_l(P)$  est le polynôme qui apparaît dans la décomposition (3.1) de  $P$ .

Nous allons maintenant voir comment calculer la projection harmonique d'un polynôme  $P \in \mathfrak{R}^{n,l}$ .

(3.1) nous permet d'écrire :

$$P = \mathcal{H}_l(P) + r^2 Q,$$

où  $Q \in \mathfrak{R}^{n,l-2}$ . Si nous calculons le laplacien de  $P$ , nous avons :

$$\Delta P = \Delta(r^2 Q)$$

Mais nous avons le

**Lemme 7.** Pour  $F \in \mathfrak{R}^{n,m}$ ,

$$\Delta(r^2 F) = r^2 \Delta F + 2(n + 2m)F.$$

*Preuve du lemme :* Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Par la formule de Leibniz,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(r^2 F) = 2F + 2(2x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} + r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}.$$

D'où le résultat en appliquant la formule d'Euler à  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(r^2 F) = \Delta(r^2 F)$ .

□



Donc

$$\Delta P = r^2 \Delta Q + 2(n + 2l - 4)Q.$$

Si on applique à nouveau le laplacien, et ceci de manière itérée, on montre facilement par récurrence à l'aide du lemme que :

$$\Delta^k P = r^2 \Delta^k Q + 2k(n + 2l - 2(k + 1))\Delta^{k-1}Q.$$

Posons  $a_k = \frac{1}{2k(n+2l-2(k+1))}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0 = 1$ . Ainsi

$$\Delta^k Q = a_{k+1} \left( \Delta^{k+1} P - r^2 \Delta^{k+1} Q \right).$$

Il est alors possible d'exprimer la projection harmonique de  $P$  en fonction des itérées du laplacien de  $P$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l(P) &= P - r^2 Q \\ &= P - a_1 r^2 (\Delta P - r^2 \Delta Q) \\ &= P - a_1 r^2 \Delta P + a_1 r^4 (a_2 \Delta^2 P - a_2 r^2 \Delta^2 Q) \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \left( \prod_{j=0}^k a_j \right) r^{2k} \Delta^k P - (-1)^N \left( \prod_{j=0}^N a_j \right) r^{2(N+1)} \Delta^N Q. \end{aligned}$$

et ceci pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ . Mais  $Q$  est de degré  $l - 2$  donc, pour  $N > \frac{l}{2} - 1$ ,  $\Delta^N Q = 0$ . Prenons  $N = \lfloor l/2 \rfloor$  et nous avons l'expression cherchée

$$\mathcal{H}_l(P) = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \frac{(-1)^k r^{2k} \Delta^k P}{2^k k! (n + 2l - 4)(n + 2l - 6) \dots (n + 2l - 2(k + 1))} \quad (3.2)$$

### 3.1.3 Décomposition canonique

Maintenant, en itérant la décomposition (3.1), nous obtenons

$$\mathfrak{R}^{n,l} = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} r^{2k} \mathfrak{H}^{n,l-2k} \quad (3.3)$$

Nous appellerons *décomposition canonique* l'unique écriture d'un polynôme de  $\mathfrak{R}^{n,l}$  sous la forme de (3.3).

En restriction à la sphère  $r = 1$ , (3.3) montre qu'on peut écrire tout monôme – donc tout polynôme – comme somme de fonctions de  $\tilde{\mathfrak{H}}^{n,l-k}$ .

Par densité des polynômes dans  $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})$ , et de  $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})$  dans  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ , nous en déduisons

$$L^2(\mathbb{S}^{n-1}) = \bigoplus_{l=0}^{+\infty} \tilde{\mathfrak{H}}^{nl}.$$

### 3.2 Construction de la base

Pour obtenir une base de  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ , il va nous suffire d'expliciter une base de  $\tilde{\mathfrak{H}}^{nl}$ .

Dans un premier temps, nous allons établir une nouvelle décomposition, qui va permettre de construire la base cherchée par récurrence, en se ramenant à  $n - 1$  variables :

$$\mathfrak{R}^{n,l} = r^2 \mathfrak{R}^{n,l-2} \oplus \bigoplus_{s=0}^l x_n^{l-s} \mathfrak{H}^{n-1,s} \quad (3.4)$$

*Preuve* : Montrons d'abord que la somme est totale. Soit  $f \in \mathfrak{R}^{n,l}$ . Dans l'expression de  $f$ , en remplaçant toutes les occurrences de  $x_n^2$  par la quantité  $r^2 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)$ , nous obtenons  $f$  sous la forme suivante :

$$f(x) = r^2 F(x) + x_n \phi_1(x') + \phi_2(x')$$

avec  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $F \in \mathfrak{R}^{n,l-2}$ ,  $\phi_1 \in \mathfrak{R}^{n-1,l-1}$  et  $\phi_2 \in \mathfrak{R}^{n-1,l}$ .

Puis, on applique la décomposition canonique à  $\phi_1$  et  $\phi_2$  et cela donne :

$$f(x) = r^2 F(x) + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} x_n r_{n-1}^{2s} \widehat{H}_{l-2s-1}(x') + \sum_{s=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} r_{n-1}^{2s} \widehat{H}_{l-2s}(x'),$$

où les  $\widehat{H}_i$  sont des polynôme harmoniques de  $\mathfrak{H}^{n-1,i}$ . Il ne reste plus qu'à effectuer la substitution  $r_{n-1}^2 = r^2 - x_n^2$  et à regrouper tous les termes contenant  $r^2$  :

$$f(x) = r^2 G(x) + \sum_{s=0}^l x_n^{l-s} H_s(x').$$

Dans cette dernière écriture, on a posé  $H_i(x') = (-1)^i \widehat{H}_i(x')$ .

Il faut maintenant prouver que la somme est directe.

À cette fin, nous allons montrer que la somme des dimensions des espaces sommés est exactement la dimension totale.

**Lemme 8.** *Si  $n \geq 2$ ,*

- a)  $\dim \mathfrak{R}^{n,l} = \binom{n+l-1}{l}$
- b)  $\dim \mathfrak{H}^{nl} = \frac{(n+2l-2)(n+l-3)!}{(n-2)!l!}$

Le a) est un calcul combinatoire classique et le b) provient du a) et de

(3.1) :

$$\begin{aligned}
\dim \mathfrak{H}^{nl} &= \dim \mathfrak{A}^{n,l} - \dim \mathfrak{A}^{n,l-2} \\
&= \binom{n+l-1}{l} - \binom{n+l-3}{l-2} \\
&= \frac{(n+l-3)!}{(l-2)!(n-1)!} \left[ \frac{(n+l-1)(n+l-2)}{l(l-1)} - 1 \right] \\
&= \frac{(n+l-3)!}{(l-2)!(n-1)!} \frac{((n-1)+l)((n-1)+(l-1)) - l(l-1)}{l(l-1)} \\
&= \frac{(n+l-3)!}{l!(n-1)!} (n-1)(n+2l-2) = \frac{(n+2l-2)(n+l-3)!}{(n-2)!l!}
\end{aligned}$$

La somme des dimensions des espaces sommés est

$$\begin{aligned}
&\dim \mathfrak{A}^{n,l-2} + \sum_{s=0}^l \dim \mathfrak{H}^{n-1,s} \\
&= \dim \mathfrak{A}^{n,l-2} + \sum_{s=0}^l (\dim \mathfrak{A}^{n-1,s} - \dim \mathfrak{A}^{n-1,s-2}) \\
&= \dim \mathfrak{A}^{n,l-2} + \dim \mathfrak{A}^{n-1,l} + \dim \mathfrak{A}^{n-1,l-1} \\
&= \binom{n+l-3}{l-2} + \binom{n+l-2}{l} + \binom{n+l-3}{l-1} \\
&= \frac{(n+l-3)!}{l!(n-1)!} [l(l-1) + (n+l-2)(n-1) + l(n-1)] \\
&= \frac{(n+l-3)!}{l!(n-1)!} [(n+l-2)(n-1) + l(n+l-2)] \\
&= \frac{(n+l-3)!}{l!(n-1)!} (n+l-2)(n+l-1) \\
&= \frac{(n+l-1)!}{l!(n-1)!} = \binom{n+l-1}{l} = \dim \mathfrak{A}^{n,l}
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de (3.4).  $\square$ 

Cette décomposition (3.4) nous donne une base de  $\mathfrak{H}^{nl}$  connaissant une base de chaque  $\mathfrak{H}^{n-1,s}$  pour  $s < l$ .

En effet, en appliquant la projection harmonique à (3.4), il vient :

$$\mathfrak{H}^{nl} = \bigoplus_{s=0}^l \mathcal{H}_l(x_n^{l-s} \mathfrak{H}^{n-1,s}) \quad (3.5)$$

puisque  $\mathcal{H}_l(r^2 \mathfrak{A}^{n,l-2}) = \{0\}$  par définition de  $\mathcal{H}_l$ . La somme ci-dessus est directe car le noyau de  $\mathcal{H}_l$ , qui est  $r^2 \mathfrak{A}^{n,l-2}$ , est précisément en somme directe avec les  $x_n^{l-s} \mathfrak{H}^{n-1,s}$ .

Grâce à (3.2), nous allons expliciter la forme des espaces  $\mathcal{H}_l(x_n^{l-s}\mathfrak{H}^{n-1,s})$ . Soit  $s \in \mathbb{N} \cap [0, l]$  et  $H \in \mathfrak{H}^{n-1,s}$ . Calculons  $\Delta^k(x_n^{l-s}H(x'))$ .

Remarquons que l'on peut écrire  $\Delta = \Delta' + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  où  $\Delta' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

Alors

$$\begin{aligned} \Delta^k(x_n^{l-s}H(x')) &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \Delta'^m \frac{\partial^{2(k-m)}}{\partial x_n^{2(k-m)}}(x_n^{l-s}H(x')) \\ &= \left( \frac{\partial^{2k}}{\partial x_n^{2k}}(x_n^{l-s}) \right) H(x') \end{aligned}$$

car  $H$  est  $\Delta'$ -harmonique.

$$\Delta^k(x_n^{l-s}H(x')) = (l-s)(l-s-1)\dots(l-s-2k+1)x_n^{l-s-2k}H(x'),$$

expression qui est non nulle pour  $2k \leq l-s$ .

Nous pouvons cette fois écrire (3.2) pour  $x_n^{l-s}H(x')$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l(x_n^{l-s}H(x')) &= H(x') \times \\ &\times \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l-s}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (l-s)(l-s-1)\dots(l-s-2k+1)}{2^k k! (n+2l-4)(n+2l-6)\dots(n+2l-2(k+1))} r^{2k} x_n^{l-s-2k} \right) \\ &= H(x') \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l-s}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(l-s+1) \Gamma(\frac{n}{2} + l - (k+1))}{2^k k! \Gamma(l-s-2k+1) 2^k \Gamma(\frac{n}{2} + l - 1)} r^{2k} x_n^{l-s-2k} \right) \end{aligned}$$

La fonction qui est entre parenthèses est un polynôme homogène que l'on peut exprimer en terme de polynômes ultrasphériques ou *polynômes de Gegenbauer* – voir à ce sujet la section 3.3. En effet, comparons les coefficients du polynôme ci-dessus avec ceux des polynômes ultrasphériques donnés par (3.9) dans la section 3.3. L'identification va se faire avec  $C_N^\lambda$  où  $N = l-s$  et  $\lambda = \frac{n-2}{2} + s$  :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^k \Gamma(l-s+1) \Gamma(\frac{n}{2} + l - (k+1))}{2^k k! \Gamma(l-s-2k+1) 2^k \Gamma(\frac{n}{2} + l - 1)} &= \frac{(-1)^k \Gamma(N+1) \Gamma(\lambda + N - k)}{4^k k! \Gamma(N-2k+1) \Gamma(\lambda + N)} \\ &= \frac{(-1)^k N! \Gamma(N + \lambda - k)}{4^k k! (N-2k)! \Gamma(N + \lambda)} \\ &= \frac{N! \Gamma(\lambda)}{2^N \Gamma(N + \lambda)} \left( (-1)^k \frac{\Gamma(\lambda + N - k)}{k! (N-2k)! \Gamma(\lambda)} 2^{N-2k} \right) \end{aligned}$$

Or le terme entre parenthèses est exactement le coefficient de  $x^{N-2k}$  dans  $C_N^\lambda$  – c'est la formule (3.9).

Il apparaît donc que nous avons

$$\mathcal{H}_l(x_n^{l-s}H(x')) = \frac{(l-s)!\Gamma(\frac{n-2}{2}+s)}{2^{l-s}\Gamma(\frac{n-2}{2}+l)} r^{l-s} C_{l-s}^{\frac{n-2}{2}+s} \left(\frac{x_n}{r}\right) H(x'). \quad (3.6)$$

Nous en déduisons

$$\mathcal{H}_l(x_n^{l-s}\mathfrak{H}^{n-1,s}) = r^{l-s} C_{l-s}^{\frac{n-2}{2}+s} \left(\frac{x_n}{r}\right) \mathfrak{H}^{n-1,s}.$$

En combinant ce résultat avec (3.5), il vient

$$\mathfrak{H}^{nl} = \bigoplus_{s=0}^l r^{l-s} C_{l-s}^{\frac{n-2}{2}+s} \left(\frac{x_n}{r}\right) \mathfrak{H}^{n-1,s}.$$

Finalement, pour obtenir une base de  $\mathfrak{H}^{nl}$ , il suffit d'en trouver une pour les  $\mathfrak{H}^{n-1,s}$ , mais ceci se fait de la même manière en décomposant  $\mathfrak{H}^{n-1,s}$  comme ci-dessus. À la fin du procédé, on aboutit à un espace  $\mathfrak{H}^{2,s}$  qui est de dimension 2, engendré par  $(x_2 + ix_1)^s$  et  $(x_2 - ix_1)^s$ .

Quand on est arrivé au bout du procédé, on a choisit successivement  $n-2$  entiers naturels «  $s$  », que l'on note  $k_1, k_2, \dots, k_{n-2}$ . Le dernier choix s'accompagne aussi du choix d'un signe, qui détermine le choix  $(x_2 + ix_1)^s$  ou  $(x_2 - ix_1)^s$ . On a les inégalités suivantes :  $l \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-2} \geq 0$ .

Ainsi, on indexe chaque élément de la base par un  $(n-1)$ -uplet :  $K = (l = k_0, k_1, \dots, \pm k_{n-2})$ .

Le polynôme obtenu est de la forme (pour  $n \geq 3$ ) :

$$\Xi_K^n(x) = A_K^n \prod_{j=0}^{n-3} r^{k_j - k_{j+1}} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1}} \left(\frac{x_{n-j}}{r_{n-j}}\right) (x_2 \pm ix_1)^{k_{n-2}} \quad (3.7)$$

où  $A_K^n$  est une constante – que l'on calculera plus tard – choisie de telle manière que  $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Xi_K^n(\xi)|^2 d\xi = 1$ .

Pour  $n = 2$ ,  $K = (k_0) = (k)$ , et

$$\Xi_k^2 = A_k^2 (x_2 \pm ix_1)^k. \quad (3.8)$$

**Notation** Nous noterons parfois dans la suite :

$$\Xi_{K'}^{n,l} = \Xi_{(l,K')}^n.$$

Nous verrons dans la section 3.4 que la base construite est en fait ortho-normée.

### 3.3 Polynômes de Gegenbauer

Dans cette section nous allons introduire les polynômes de Gegenbauer et donner quelques propriétés. Nous en déduisons l'orthonormalité de la base construite précédemment.

Nous donnons d'abord une définition, puis montrons certaines propriétés de la famille de polynômes. On peut prendre une des propriétés comme définition, mais il nous semble que le choix que nous avons fait permet plus simplement d'établir les autres propriétés. Encore une fois, nous effectuons tous les calculs, car ils ne sont pas faits dans les livres que nous avons trouvés sur le sujet, et nous avons besoin d'être sûrs des différentes constantes qui vont apparaître.

**Définition 3.** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lambda > -\frac{1}{2}$ , on appelle polynôme ultrasphérique ou de Gegenbauer  $C_n^\lambda$  le polynôme défini par la série génératrice

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^\lambda},$$

c'est-à-dire  $C_n^\lambda(x)$  est le coefficient de  $t^n$  dans le développement en série de la fonction de  $t$  ci-dessus.

Les polynômes ultrasphériques sont aussi les polynômes orthogonaux pour le poids  $w_\lambda(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$  sur  $[-1, 1]$ .

Pour montrer cela, nous allons procéder par identification : définissons une autre famille de polynômes

Soit

$$Q_n^\lambda(x) = (1 - x^2)^{-\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1 - x^2)^{n + \lambda - \frac{1}{2}} \right]$$

**Proposition 6.**  $(Q_n^\lambda)$  est une famille orthogonale dans  $L_\lambda^2([-1, 1])$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\lambda = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} w_\lambda(x) dx.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant

**Lemme 9.** Il existe des polynômes  $P_k^\alpha$  de degré  $k$  tels que

$$\frac{d^k}{dx^k} (1 - x^2)^\alpha = P_k^\alpha(x) (1 - x^2)^{\alpha - k}.$$

Ces polynômes vérifient la relation de récurrence

$$P_{k+1}^\alpha(x) = P_k^{\alpha'}(x) (1 - x^2) - 2(\alpha - k)x P_k^\alpha(x).$$

La preuve se fait facilement par récurrence :  $P_0^\alpha = 1$  et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^k}{dx^k} (1 - x^2)^\alpha \right] &= \frac{d}{dx} \left[ P_k^\alpha(x) (1 - x^2)^{\alpha - k} \right] \\ &= P_k^{\alpha'}(x) (1 - x^2)^{\alpha - k} - 2x(\alpha - k) P_k^\alpha(x) (1 - x^2)^{\alpha - k - 1} \end{aligned}$$

Notons  $B_k^\alpha$  le coefficient dominant de  $P_k^\alpha$ . Il suffit alors de poser

$$P_{k+1}^\alpha(x) = P_k^\alpha(x)(1-x^2) - 2(\alpha-k)xP_k^\alpha(x).$$

Il est clair que le degré augmente car le coefficient de  $x^{k+1}$  est  $B_k^\alpha(-2\alpha+k) \neq 0$ .

*Preuve de la proposition 6 :* Le lemme 9 nous dit que  $Q_n^\lambda = P_n^{n+\lambda-\frac{1}{2}}$ . Donc  $Q_n^\lambda$  est de degré  $n$ .

Soit  $p > q$ .

$$\begin{aligned} \langle Q_p^\lambda, Q_q^\lambda \rangle_\lambda &= \int_{-1}^1 \frac{d^p}{dx^p} \left[ (1-x^2)^{p+\lambda-\frac{1}{2}} \right] \times \\ &\quad \times \frac{d^q}{dx^q} \left[ (1-x^2)^{q+\lambda-\frac{1}{2}} \right] (1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{d^p}{dx^p} \left[ (1-x^2)^{p+\lambda-\frac{1}{2}} \right] Q_q^\lambda(x) dx \end{aligned}$$

Effectuons  $p$  intégrations par parties successives. Le terme intégré est toujours nul car il contient  $(1-x^2)$  en facteur.  $Q_q^\lambda$  est de degré  $q < p$  donc

$$\langle Q_p^\lambda, Q_q^\lambda \rangle_\lambda = (-1)^p \int_{-1}^1 (1-x^2)^{p+\lambda-\frac{1}{2}} \frac{d^p}{dx^p} (Q_q^\lambda) dx = 0$$

Calculons de la même manière la norme de  $Q_n^\lambda$  dans  $L_\lambda^2([-1, 1])$ .

$$\begin{aligned} \|Q_n^\lambda\|_\lambda^2 &= \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \right] Q_n^\lambda(x) dx \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (Q_n^\lambda) dx \\ &= (-1)^n n! B_n^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

Comme  $B_0^{n+\lambda-\frac{1}{2}} = 1$  et  $B_{k+1}^{n+\lambda-\frac{1}{2}} = (k-2(n+\lambda-\frac{1}{2}))B_k^{n+\lambda-\frac{1}{2}}$ ,

$$\begin{aligned} B_n^{n+\lambda-\frac{1}{2}} &= (-1)^n (2(n+\lambda-\frac{1}{2})) \dots (2(n+\lambda-\frac{1}{2}) - (n-1)) \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(2(n+\lambda-\frac{1}{2})+1)}{\Gamma(2(n+\lambda-\frac{1}{2})-n+1)} \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(2n+2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)} \end{aligned}$$

Pour terminer le calcul, nous avons besoin de la généralisation des formules de Wallis aux exposants non entiers que nous obtenons dans le lemme suivant après quelques propriétés de la fonction  $\Gamma$  :

**Lemme 10.** *Pour  $\operatorname{Re}(p) > 0$  et  $\operatorname{Re}(q) > 0$ , posons*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

*Alors*

$$a) B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$b) \Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

c)

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx = \int_0^\pi \sin^{2\alpha} \varphi d\varphi = \frac{\pi\Gamma(2\alpha+1)}{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)^2}$$

*Preuve du lemme.* a)

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{q-1} dt \right) \\ &= 4 \left( \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2p-1} du \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2q-1} dt \right) \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(p+q)-2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p+q-1} dt \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \end{aligned}$$

Par le changement de variable  $\tau = \cos^2 \theta$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 2\Gamma(p+q) \int_0^1 \tau^{p-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{q-\frac{1}{2}} \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau(1-\tau)}} \\ &= \Gamma(p+q)B(p, q). \end{aligned}$$



b) a) avec  $p = q$  donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(p)^2}{\Gamma(2p)} &= B(p, p) = \int_0^1 (t(1-t))^{p-1} dt \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - u^2\right)^{p-1} du \quad \text{avec } u = \frac{1}{2} - t \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - u^2\right)^{p-1} du \\
&= 2^{1-2(p-1)} \int_0^1 (1-x)^{p-1} \frac{dx}{4\sqrt{x}} \quad \text{avec } x = 4u^2 \\
&= 2^{1-2p} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= 2^{1-2p} B\left(p, \frac{1}{2}\right) = 2^{-2p} \frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

Puisque  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , cela donne bien b).

c)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx &= 2^{2\alpha} \int_0^1 u^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-u)^{\alpha-\frac{1}{2}} du \quad \text{avec } u = \frac{1-x}{2} \\
&= 2^{2\alpha} B\left(\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right) \\
&= 2^{2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})^2}{\Gamma(2\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

Mais b), avec  $p = \alpha + \frac{1}{2}$ , donne

$$\Gamma(2\alpha + 1)^2 = \frac{4^{2\alpha}}{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 \Gamma(\alpha + 1)^2$$

et donc

$$\frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} = \frac{\pi \Gamma(2\alpha + 1)}{4^{2\alpha} \Gamma(\alpha + 1)^2}.$$

Soit

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi \Gamma(2\alpha + 1)}{2^{2\alpha} \Gamma(\alpha + 1)^2}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Finalement,

$$\|Q_n^\lambda\|_\lambda^2 = \frac{n! \pi \Gamma(2n + 2\lambda) \Gamma(2n + 2\lambda + 1)}{4^{n+\lambda} \Gamma(n + 2\lambda) \Gamma(n + \lambda + 1)^2}$$

□

L'étape suivante dans l'identification des polynômes  $C_n^\lambda$  et  $Q_n^\lambda$  consiste à exprimer leurs dérivées.

- Pour  $C_n^\lambda$  : soit  $\Phi(t, x) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda}$ . Pour  $x$  fixé,  $\Phi(\cdot, x)$  est développable en série entière avec un rayon non nul. Nous avons donc  $C_n^\lambda(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n}(0, x)$ . Alors  $C_n^{\lambda'}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x \partial t^n} \Phi(0, x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^n \partial x} \Phi(0, x)$  c'est-à-dire le coefficient de  $t^n$  dans le développement de  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, 0)$ . Puisque  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, 0) = \frac{2\lambda t}{(1-2xt+t^2)^{\lambda+1}}$ , ce coefficient vaut  $2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}$ . D'où

$$C_n^{\lambda'} = 2\lambda C_{n-1}^{\lambda+1}.$$

- Pour  $Q_n^\lambda$  : Utilisons le fait que  $(Q_n^{\lambda+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est orthogonale. Soit  $k \leq n-2$ .

$$\langle Q_n^{\lambda'}, Q_k^{\lambda+1} \rangle_{\lambda+1} = \int_{-1}^1 Q_n^{\lambda'}(x) Q_k^{\lambda+1}(x) w_{\lambda+1}(x) dx.$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \langle Q_n^{\lambda'}, Q_k^{\lambda+1} \rangle_{\lambda+1} &= - \int_{-1}^1 Q_n^\lambda(x) Q_k^{\lambda+1'}(x) w_{\lambda+1}(x) dx + \\ &\quad + \int_{-1}^1 Q_n^\lambda(x) Q_k^{\lambda+1}(x) \times 2(\lambda+1)x w_\lambda(x) dx \\ &= - \langle Q_n^\lambda, \underbrace{(1-x^2)Q_k^{\lambda+1'}}_{d^\circ \leq n-1} \rangle_\lambda + 2(\lambda+1) \langle Q_n^\lambda, \underbrace{xQ_k^{\lambda+1}}_{d^\circ \leq n-1} \rangle_\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que  $Q_n^{\lambda'} = \mu_n^\lambda Q_{n-1}^{\lambda+1}$ . Déterminons  $\mu_n^\lambda$  grâce au coefficient dominant.

Notons  $D_n^\lambda = B_n^{n+\lambda-\frac{1}{2}}$ .

Alors  $nD_n^\lambda = \mu_n^\lambda D_{n-1}^{\lambda+1}$ , ce qui donne

$$\mu_n^\lambda = \frac{nD_n^\lambda}{D_{n-1}^{\lambda+1}} = - \frac{n \frac{\Gamma(2n+2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda)}}{\frac{\Gamma(2n+2\lambda)}{\Gamma(n+2\lambda+1)}} = - \frac{n\Gamma(n+2\lambda+1)}{\Gamma(n+2\lambda)} = -n(n+2\lambda).$$

D'où

$$Q_n^{\lambda'} = -n(n+2\lambda)Q_{n-1}^{\lambda+1}.$$

Afin de procéder à l'identification, posons

$$\begin{aligned} R_n^\lambda &= \frac{(-2)^n \binom{n+\lambda-1}{n}}{n! \binom{2n+2\lambda-1}{n}} Q_n^\lambda \\ &= \frac{(-2)^n \Gamma(n+\lambda) \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(\lambda) \Gamma(2n+2\lambda)} Q_n^\lambda. \end{aligned}$$

Ce choix est fait pour que  $R_n^{\lambda'} = 2\lambda R_{n-1}^{\lambda+1}$ . Nous allons plus précisément montrer par récurrence que  $\forall \lambda \geq \frac{1}{2}$ ,  $R_n^\lambda = C_n^\lambda$ .

- $R_0^\lambda = C_0^\lambda = 1$ ;
- Supposons que  $\forall \lambda \geq \frac{1}{2}$ ,  $R_{n-1}^{\lambda+1} = C_{n-1}^{\lambda+1}$ .

$$\begin{aligned}
R_n^{\lambda'} &= \frac{(-2)^n \Gamma(n+\lambda) \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(\lambda) \Gamma(2n+2\lambda)} \times (-n(n+2\lambda)) Q_{n-1}^{\lambda+1} \\
&= -n(n+2\lambda) \frac{(-2)^n \Gamma(n+\lambda) \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(\lambda) \Gamma(2n+2\lambda)} \times \\
&\quad \times \frac{(n-1)! \Gamma(\lambda+1) \Gamma(2n+2\lambda)}{(-2)^{n-1} \Gamma(n+\lambda) \Gamma(n+2\lambda+1)} R_{n-1}^{\lambda+1} \\
&= 2n(n+2\lambda) \frac{\Gamma(n+2\lambda) \Gamma(\lambda+1)}{n \Gamma(\lambda) \Gamma(n+2\lambda+1)} R_{n-1}^{\lambda+1} \\
&= 2\lambda R_{n-1}^{\lambda+1}
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence,  $R_n^{\lambda'} = C_n^{\lambda'}$ .

Si  $n$  est impair,  $C_n^\lambda$  et  $R_n^\lambda$  sont aussi impairs et on peut donc en déduire  $C_n^\lambda = R_n^\lambda$ .

Sinon, on peut calculer la valeur en 1 :

$$C_n^\lambda(1) = \binom{2\lambda+n-1}{n} \text{ car}$$

$$\frac{1}{(1-2t+t^2)^\lambda} = \frac{1}{(1-t)^{2\lambda}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2\lambda+k-1}{k} t^k$$

La formule de récurrence du lemme 9 avec  $\alpha = n + \lambda - \frac{1}{2}$  nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
P_n^{n+\lambda-\frac{1}{2}}(1) &= (-2)^n (n+\lambda-\frac{1}{2}) \dots (\lambda+\frac{1}{2}) \\
&= (-1)^n \frac{(2n+2\lambda-1)(2n+2\lambda-2) \dots (2\lambda+1)}{(2n+2\lambda-2)(2n+2\lambda-4) \dots (2\lambda+2)} \\
&= (-1)^n \frac{\frac{\Gamma(2n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda+1)}}{2^{n-1} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda+1)}} \\
&= -\frac{\Gamma(2n+2\lambda) \Gamma(\lambda+1)}{(-2)^{n-1} \Gamma(2\lambda+1) \Gamma(n+\lambda)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
R_n^\lambda(1) &= -\frac{\Gamma(2n+2\lambda) \Gamma(\lambda+1)}{(-2)^{n-1} \Gamma(2\lambda+1) \Gamma(n+\lambda)} \times \frac{(-2)^n \Gamma(n+\lambda) \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(\lambda) \Gamma(2n+2\lambda)} \\
&= \frac{2\lambda \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(2\lambda+1)} = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(2\lambda)} = \binom{n+2\lambda-1}{n} \\
&= C_n^\lambda.
\end{aligned}$$

Les égalités des dérivées et des valeurs en 1 permettent donc d'en conclure que :

$$C_n^\lambda = R_n^\lambda$$

En résumé, nous avons montré que la famille des polynômes de Gegenbauer était orthogonale pour le poids  $w_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$  sur  $[-1, 1]$ . Nous avons au passage établi une expression pour ces polynômes, qu'on appelle :

### Formule de Rodrigues pour les polynômes de Gegenbauer

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(-2)^n \Gamma(n+\lambda) \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(\lambda) \Gamma(2n+2\lambda)} (1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}} \right].$$

Cherchons maintenant une écriture développée des polynômes de Gegenbauer.

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} = \sum_{s=0}^{+\infty} \binom{-\lambda}{s} (-2xt+t^2)^s.$$

Afin de déterminer le coefficient de  $t^n$ , il suffit de se limiter aux termes d'ordre  $s \leq n$ . Mais

$$\sum_{s=0}^n \binom{-\lambda}{s} (-2xt+t^2)^s = \sum_{s=0}^n \binom{-\lambda}{s} \sum_{m=0}^s \binom{s}{m} (-2x)^m t^{2s-m}.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\sum_{\substack{0 \leq s \leq n \\ 0 \leq m \leq s \\ 2s-m=n}} \binom{-\lambda}{s} \binom{s}{m} (-2x)^m.$$

Effectuons le changement de variable  $k = n - s$ . Alors  $m = n - 2k$  est dans  $[0, n - k]$  quand  $k \leq \frac{n}{2}$ .

Donc

$$\begin{aligned} C_n^\lambda(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{-\lambda}{n-k} \binom{n-k}{n-2k} (-2x)^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\lambda+n-k)}{(n-k)! \Gamma(\lambda)} \times \frac{(n-k)!}{(n-2k)! k!} (-2x)^{n-2k} \end{aligned}$$

$$\boxed{C_n^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(\lambda+n-k)}{k! (n-2k)! \Gamma(\lambda)} (2x)^{n-2k}.} \quad (3.9)$$



Ce qui montre au passage que  $A_k^2 = 1$ .

Passons maintenant au cas  $n \geq 3$ .

Avec les formules au-dessus et (3.7), il est aisé d'exprimer  $\Xi_K^n$  en coordonnées sphériques :

$$\Xi_K^n(x) = A_K^n r^l \prod_{j=0}^{n-3} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1}} (\cos \theta_{n-j-1}) \sin^{k_{j+1}} \theta_{n-j-1} e^{\pm i k_{n-2} \theta_1}. \quad (3.12)$$

Notons  $\tilde{\Xi}_K^n$  la restriction à la sphère de  $\Xi_K^n$ . Dans ce cas, pour  $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,

$$\tilde{\Xi}_K^n(\xi) = A_K^n \prod_{j=0}^{n-3} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1}} (\cos \theta_{n-j-1}) \sin^{k_{j+1}} \theta_{n-j-1} e^{\pm i k_{n-2} \theta_1}. \quad (3.13)$$

Soit  $K = (l = k_0, k_1, \dots, \varepsilon_K k_{n-2})$  et  $M = (l = m_0, m_1, \dots, \varepsilon_M m_{n-2})$ .  $\varepsilon_K$  et  $\varepsilon_M$  valent  $-1$  ou  $+1$  car on prend  $k_{n-2}$  et  $m_{n-2}$  positifs.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \tilde{\Xi}_M^n(\xi) \overline{\tilde{\Xi}_K^n(\xi)} d\xi \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} A_M^n A_K^n \prod_{j=0}^{n-3} \int_{\theta_{n-j-1}=0}^{\pi} C_{m_j - m_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2} + m_{j+1}} (\cos \theta_{n-j-1}) \times \\ & \times C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1}} (\cos \theta_{n-j-1}) \sin^{m_{j+1} + k_{j+1} + n - j - 2} \theta_{n-j-1} d\theta_{n-j-1} \times \\ & \times \int_{\theta_1=0}^{2\pi} e^{i(\varepsilon_M m_{n-2} - \varepsilon_K k_{n-2}) \theta_1} d\theta_1 \end{aligned}$$

À cause de la dernière intégrale, pour que le produit scalaire soit non nul, il faut que  $\varepsilon_M m_{n-2} = \varepsilon_K k_{n-2}$ . Ensuite, on raisonne de proche en proche : si  $\varepsilon_M m_{n-2} = \varepsilon_K k_{n-2}$ , l'intégrale sur  $\theta_2$  donne :

$$\int_{\theta_2=0}^{\pi} C_{m_{n-3} - k_{n-2}}^{\frac{1}{2} + k_{n-2}} (\cos \theta_2) C_{k_{n-3} - k_{n-2}}^{\frac{1}{2} + k_{n-2}} (\cos \theta_2) \sin^{2k_{n-2} + 1} \theta_2 d\theta_2$$

La formule d'orthogonalité des polynômes de Gegenbauer (3.10) dit alors que pour que cette intégrale soit non nulle, il faut que  $m_{n-3} = k_{n-3}$ . En continuant ainsi, il est clair que si  $M \neq K$ , alors

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \tilde{\Xi}_M^n(\xi) \overline{\tilde{\Xi}_K^n(\xi)} d\xi = 0.$$

Nous en venons au calcul de  $A_K^n$  :

$$\begin{aligned}
1 &= \|\widetilde{\Xi}_K^n\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2 = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\widetilde{\Xi}_K^n(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2\pi \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} (A_K^n)^2 \times \\
&\quad \times \prod_{j=0}^{n-3} \int_{\theta_{n-j-1}=0}^{\pi} \left( C_{k_j-k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2}+k_{j+1}} (\cos \theta_{n-j-1}) \sin^{2k_{j+1}} \theta_{n-j-1} \right)^2 \times \\
&\quad \times \sin^{n-j-2} \theta_{n-j-1} d\theta_{n-j-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(A_K^n)^2 &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}) \prod_{j=0}^{n-3} \left\| C_{k_j-k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2}+k_{j+1}} \right\|_{\lambda}^2} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}) \prod_{j=0}^{n-3} \frac{\pi \Gamma(k_j + k_{j+1} + n - j - 2)}{2^{n-j+2k_{j+1}-3} (k_j - k_{j+1})! (k_j + \frac{n-j-2}{2}) \Gamma(\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1})^2}} \\
&= \frac{\pi^{1-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \prod_{j=0}^{n-3} \frac{2^{n-j+2k_{j+1}-4} (k_j - k_{j+1})! (2k_j + n - j - 2) \Gamma(\frac{n-j-2}{2} + k_{j+1})^2}{\Gamma(k_j + k_{j+1} + n - j - 2)}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

### 3.5 Passage de $n$ variables à $n - 1$ variables

Dans cette partie, nous allons exposer un moyen de relier les harmoniques sphériques à  $n$  et  $n - 1$  variables. Cela permettra par la suite de simplifier certains calculs de coefficients.

Nous définissons l'application linéaire suivante :

$$S : \begin{cases} \mathfrak{A}^{n,l} & \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n-1}] \\ P(x_1, \dots, x_n) & \longmapsto P(x_1, \dots, x_{n-1}, ir_{n-1}) \end{cases}$$

qui consiste à substituer  $ir_{n-1}$  à  $x_n$ . Alors,  $S(r_n) = 0$ , donc le noyau de  $S$  contient évidemment le sous-espace  $r_n^2 \mathfrak{A}^{n,l-2}$ , et lui est en fait égal. Ceci se voit en écrivant un polynôme  $P$  de  $\mathfrak{A}^{n,l}$  sous la forme

$$P(x_1, \dots, x_n) = r_n^2 F + x_n R + T,$$

où  $F \in \mathfrak{A}^{n,l-2}$ ,  $R \in \mathfrak{A}^{n-1,l-1}$  et  $T \in \mathfrak{A}^{n-1,l}$ . Alors  $S(P) = ir_{n-1}R + T$  ne peut être nul que si  $R$  et  $T$  le sont.

Donc, puisque  $\mathfrak{H}^{nl} \cap r_n^2 \mathfrak{A}^{n,l-2} = \{0\}$ ,  $S$  établit un isomorphisme de  $\mathfrak{H}^{nl}$  sur son image, qui est toute l'image de  $S$  en vertu de (3.1). Appelons  $\mathfrak{U}^{nl}$  cette image. Les polynômes  $\Xi_{(l,K')}^n$  (que l'on notera  $\Xi_{K'}^{n,l}$ ) formant une base de  $\mathfrak{H}^{n,l}$ , nous disposons donc d'une base de  $\mathfrak{U}^{nl}$  avec  $\left(S(\Xi_{K'}^{n,l})\right)_{K'}$ .

En conséquence, pour trouver la décomposition d'un polynôme de  $\mathfrak{H}^{n,l}$  en harmoniques sphériques, il nous suffira de décomposer son image par  $S$  dans la base  $\left(S(\Xi_{K'}^{n,l})\right)_{K'}$ . Mais cette tâche va être facilitée par le fait suivant :

**Lemme 11.** *La base  $\left(S(\Xi_{K'}^{n,l})\right)_{K'}$  de  $\mathfrak{U}^{nl}$  est orthogonale pour le produit scalaire  $L^2$  sur  $\mathbb{S}^{n-2}$  :*

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-2}} F(\xi') \overline{G(\xi')} d\xi'.$$

Nous allons d'abord expliciter les polynômes  $S(\Xi_{K'}^{n,l})$ . D'après (3.7) et (3.8), en isolant le facteur correspondant à l'indice  $j = 0$ , on obtient la relation suivante :

$$\Xi_K^n = \frac{A_K^n}{A_{K'}^{n-1}} r_n^{k_0-k_1} C_{k_0-k_1}^{\frac{n-2}{2}+k_1} \left(\frac{x_n}{r_n}\right) \Xi_{K'}^{n-1} \quad (3.15)$$

où  $K = (k_0, \dots, \pm k_{n-2})$  et  $K' = (k_1, \dots, \pm k_{n-2})$ , c'est-à-dire  $K = (k_0, K')$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} S(\Xi_{K'}^{n,l}) &= \frac{A_K^n}{A_{K'}^{n-1}} S\left(r_n^{l-k_1} C_{l-k_1}^{\frac{n-2}{2}+k_1} \left(\frac{x_n}{r_n}\right) \Xi_{K'}^{n-1}\right) \\ &= \frac{A_K^n}{A_{K'}^{n-1}} S\left(r_n^{l-k_1} C_{l-k_1}^{\frac{n-2}{2}+k_1} \left(\frac{x_n}{r_n}\right)\right) \Xi_{K'}^{n-1} \end{aligned}$$

étant donné que  $\Xi_{K'}^{n-1}$  n'est fonction que des  $n-1$  premières coordonnées. De plus, comme  $C_{l-k_1}^{\frac{n-2}{2}+k_1}$  est un polynôme de degré  $l-k_1$ ,  $r_n$  est en facteur dans tous les termes de  $r_n^{l-k_1} C_{l-k_1}^{\frac{n-2}{2}+k_1} \left(\frac{x_n}{r_n}\right)$  sauf celui qui correspond au terme de plus haut degré dans  $C_{l-k_1}^{\frac{n-2}{2}+k_1}$ . Lorsque l'on applique  $S$ , il ne reste donc que ce terme dans lequel on substitue  $ir_{n-1}$  à  $x_n$ . D'après (3.9), il vient donc :

$$S\left(r_n^{l-k_1} C_{l-k_1}^{\frac{n-2}{2}+k_1} \left(\frac{x_n}{r_n}\right)\right)(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 + l)(2ir_{n-1})^{l-k_1}}{(l-k_1)! \Gamma(\frac{n}{2} - 1 + k_1)}$$

Finalement, si on calcule  $S(\Xi_{K'}^{n,l})$  en restriction à  $\mathbb{S}^{n-2}$ , on a :

$$\forall \xi' \in \mathbb{S}^{n-2}, S(\Xi_{K'}^{n,l})(\xi') = \frac{A_K^n}{A_{K'}^{n-1}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1 + l)}{(l-k_1)! \Gamma(\frac{n}{2} - 1 + k_1)} (2i)^{l-k_1} \Xi_{K'}^{n-1}(\xi').$$



Appelons  $D_K^n$  la constante qui apparaît ci-dessus, pour avoir

$$\forall \xi' \in \mathbb{S}^{n-2}, S(\Xi_{K'}^{n,l})(\xi') = D_K^n \Xi_{K'}^{n-1}(\xi').$$

Le lemme découle alors de l'orthonormalité des  $\Xi_{K'}^{n-1}$  dans  $L^2(\mathbb{S}^{n-2})$ .

Nous sommes désormais capables de déterminer la coordonnée d'un polynôme  $P$  de  $\mathfrak{H}^{nl}$  sur le vecteur de base  $\Xi_K^n$  grâce à une intégration sur  $\mathbb{S}^{n-2}$  : cette coordonnée vaut :

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} P(\xi) \overline{\Xi_{K'}^{nl}(\xi)} d\xi = \frac{1}{D_K^n} \int_{\mathbb{S}^{n-2}} S(P)(\xi') \overline{\Xi_{K'}^{n-1}(\xi')} d\xi' \quad (3.16)$$

### 3.6 Une base de $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$

Comme nous l'avons dit au début du chapitre, nous nous intéressons au volume d'un simplexe idéal comme fonction des sommets sur  $\partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ . Puisqu'il y a  $n+1$  sommets, l'espace à considérer est  $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$ .

Par le théorème de Stone-Weierstrass, l'espace  $\mathcal{C}(\mathbb{S}^{n-1})^{\otimes(n+1)}$  est dense dans  $\mathcal{C}((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$ , et donc on a bien :

$$L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}) \simeq \overline{L^2(\mathbb{S}^{n-1})^{\otimes(n+1)}}.$$

Pratiquement, cela signifie que la famille suivante est une base hilbertienne de  $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$  :

$$\left( \tilde{\Xi}_{K_0}^n \otimes \cdots \otimes \tilde{\Xi}_{K_n}^n \mid K_i = (k_{0,i}, \dots, \pm K_{n-2,i}) \right).$$

$L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$  étant muni du produit scalaire naturel :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \cdots \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\xi_0, \dots, \xi_n) \overline{g(\xi_0, \dots, \xi_n)} d\xi_0 \cdots d\xi_n,$$

on vérifie facilement que la base ci-dessus est orthonormée.

## Chapitre 4

# Décomposition du volume des simplexes en harmoniques sphériques

### 4.1 Principe général

Étant donné un simplexe idéal  $\Sigma$  dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , nous pouvons le définir dans le modèle de la boule de Poincaré par ses sommets  $\Omega_0, \dots, \Omega_n \in \partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ .

L'objectif de ce chapitre est d'exposer une méthode pour décomposer la fonction volume du simplexe idéal – vue comme fonction des sommets  $V(\Omega_0, \dots, \Omega_n)$  – en harmoniques sphériques dans la base de  $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}) \simeq L^2(\mathbb{S}^{n-1})^{\otimes(n+1)}$  qui a été construite dans le chapitre 3.

D'après les résultats du chapitre 2, cette fonction est :

$$\text{Vol}(\Sigma) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{H}^n} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-1)!} \det(u_0(m), \dots, \widehat{u_i(m)}, \dots, u_n(m)) \, dm \quad (4.1)$$

où, rappelons-le,  $dm$  est la mesure canonique sur  $\mathbb{H}^n$  et  $u_i(m)$  est le vecteur unitaire tangent en  $m$  à la géodésique issue de  $m$  et dirigée vers le sommet  $\Omega_i$ .

Pour faire des calculs, utilisons une paramétrisation de  $\mathbb{H}^n$ . Pour cela, plaçons-nous d'abord dans le modèle du demi-hyperboloïde  $H_+^n$ . Si  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^{n,1}$ , alors

$$\forall \xi \in H_+^n, \xi = g_1(\theta_1) \circ \dots \circ g_{n-1}(\theta_{n-1}) \circ g'_n(\theta_n)(e_n)$$

avec

$$\begin{cases} \theta_1 & \in [0, 2\pi[, \\ \theta_j & \in [0, \pi[, \quad \text{pour } j \in \{2, \dots, n-1\} \\ \theta_n & \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$g_j(\theta_j)$  est la rotation d'angle  $\theta_j$  dans le plan  $(x_j, x_{j+1})$  de  $\mathbb{R}^{n,1}$  (dans le modèle du demi-hyperboloïde  $H_+^n$ ) et  $g'_n(\theta_n)$  est la translation hyperbolique d'« angle »  $\theta_n$  (il y a une analogie formelle avec une rotation au niveau de la matrice, mais c'est une isométrie hyperbolique alors que les rotations sont elliptiques) dans le plan  $(x_n, x_{n+1})$ , c'est-à-dire l'élément de matrice

$$g'_n(\theta_n) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{I} & & 0 \\ 0 & \text{ch}(\theta_n) & \text{sh}(\theta_n) \\ & \text{sh}(\theta_n) & \text{ch}(\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Dans ces coordonnées, la mesure s'écrit :

$$d\xi = \frac{dx_1 \dots dx_n}{|x_{n+1}|} = \text{sh}^{n-1} \theta_n \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Dans la suite, nous allons surtout utiliser le modèle  $\mathbb{K}^n$  de Klein. Dans ce modèle, les isométries ci-dessus agissent projectivement et non plus linéairement. Afin de simplifier (4.1), ramenons comme dans le chapitre 2 le point  $m$  en  $O$ , c'est-à-dire en  $e_n$  dans le modèle  $H_+^n$ . Nous avons alors facilement une isométrie qui fait cela :

$$(g_1(\theta_1) \circ \dots \circ g_{n-1}(\theta_{n-1}) \circ g'_n(\theta_n))^{-1} = g_n'^{-1}(\theta_n) \circ \dots \circ g_1^{-1}(\theta_1).$$

Notons  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  et

$$g_\Theta = g(\theta_1, \dots, \theta_n) = g_1(\theta_1) \circ \dots \circ g_{n-1}(\theta_{n-1}) \circ g'_n(\theta_n).$$

En ramenant  $m$  en  $O$ , les vecteurs  $u_i$  sont envoyés sur les vecteurs unitaires tangents en  $O$  aux géodésiques pointant vers  $g_\Theta^{-1}(\Omega_i)$  (action projective). Mais, dans  $\mathbb{K}^n \subset \mathbb{R}^n$  ce vecteur s'identifie au vecteur  $\overrightarrow{Og_\Theta^{-1}(\Omega_i)}$  i.e. à  $g_\Theta^{-1}(\Omega_i)$ . Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} V(\Omega_0, \dots, \Omega_n) &= \text{Vol}(\Sigma) \\ &= \frac{1}{(n-1)! \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^n (-1)^i \times \\ &\quad \times \det(g_\Theta^{-1}(\Omega_0), \dots, \widehat{g_\Theta^{-1}(\Omega_i)}, \dots, g_\Theta^{-1}(\Omega_n)) \times \\ &\quad \times \text{sh}^{n-1} \theta_n \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Formule avec intégration sur le groupe d'isométries** Remarquons que nous pouvons écrire cette intégrale comme une intégrale sur le groupe d'isométrie  $G = SO_0(n, 1)$ . En effet, puisque  $\mathbb{H}^n = SO_0(n, 1)/SO(n)$ , tout  $g \in G$  peut s'écrire sous la forme :  $g_\Theta k$ , où  $k \in SO(n)$ . La mesure sur  $G$  est, à un facteur de normalisation près,

$$dg = \text{sh}^{n-1} \theta_n \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_n dk.$$

Donc, en remarquant que dans la formule (4.2), on peut remplacer  $g_{\Theta}^{-1}$  par  $k^{-1}g_{\Theta}^{-1} = (g_{\Theta}k)^{-1}$  puisque le déterminant est invariant par l'action diagonale de  $SO(n)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Sigma) &= \frac{1}{(n-1)! \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^n (-1)^i \times \\ &\quad \times \det \left( (g_{\Theta}k)^{-1}(\Omega_0), \dots, \widehat{(g_{\Theta}k)^{-1}(\Omega_i)}, \dots, (g_{\Theta}k)^{-1}(\Omega_n) \right) \times \\ &\quad \times \text{sh}^{n-1} \theta_n \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 \, d\theta_1 \dots d\theta_n \frac{dk}{\text{vol}(SO(n))}. \\ &= \frac{1}{(n-1)! \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \text{vol}(SO(n))} \times \\ &\quad \times \int_G \sum_{i=0}^n (-1)^i \det(g^{-1}(\Omega_0), \dots, \widehat{g^{-1}(\Omega_i)}, \dots, g^{-1}(\Omega_n)) \, dg \end{aligned}$$

### La méthode de décomposition

Pour alléger les notations, notons  $I_{\Theta} = [0, 2\pi[ \times [0, \pi[ \times \cdots \times [0, \pi[ \times [0, +\infty[$  le domaine de paramétrisation,

$$dg_{\Theta} = \text{sh}^{n-1} \theta_n \sin^{n-2} \theta_{n-1} \dots \sin \theta_2 \, d\theta_1 \dots d\theta_n$$

et

$$D(V_0, \dots, V_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \det(V_0, \dots, \widehat{V_i}, \dots, V_n). \quad (4.3)$$

Si  $\zeta_i$  est la  $i$ -ème fonction coordonnée dans  $\mathbb{R}^n$  – dans lequel on voit la boule  $\mathbb{K}^n$  comme la boule unité –, en posant  $\zeta_0 \equiv 1$  et en développant le déterminant, on obtient :

$$D(g_{\Theta}^{-1}(\Omega_0), \dots, g_{\Theta}^{-1}(\Omega_n)) = \sum_{\tau \in \Sigma(0, \dots, n)} \varepsilon(\tau) \prod_{i=0}^n \zeta_{\tau(i)}(g_{\Theta}^{-1}(\Omega_i)). \quad (4.4)$$

Pour base de  $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$ , on a choisi la base suivante construite à partir des harmoniques sphériques (voir la section 3.6) :

$$\Psi_{K_0, K_1, \dots, K_n} = \widetilde{\Xi}_{K_0}^n \otimes \widetilde{\Xi}_{K_1}^n \otimes \cdots \otimes \widetilde{\Xi}_{K_n}^n.$$

C'est une base orthonormée de  $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$ .

La fonction volume d'un simplexe idéal  $(\Omega_0, \dots, \Omega_n) \mapsto V(\Omega_0, \dots, \Omega_n)$  est bornée sur  $(\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}$  (par le théorème 3) donc est dans  $L^2((\mathbb{S}^{n-1})^{n+1})$ .

Pour calculer la coordonnée de la fonction volume sur  $\Psi_{K_0, K_1, \dots, K_n}$ , on intègre le volume contre  $\overline{\Psi_{K_0, K_1, \dots, K_n}}$ .

À cette fin, on peut décomposer d'abord la fonction  $D$  puis intégrer sur le groupe, c'est-à-dire inverser l'ordre d'intégration, et cela grâce au théorème de Fubini.

Précisément, si  $\Psi$  représente  $\Psi_{K_0, K_1, \dots, K_n}$  et si on note

$$g_\Theta \cdot D(\Omega_0, \dots, \Omega_n) = D(g_\Theta^{-1} \cdot \Omega_0, \dots, g_\Theta^{-1} \cdot \Omega_n),$$

l'action diagonale de  $g_\Theta$ , on veut montrer que

**Lemme 12.**

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}} \left[ \int_{I_\Theta} g_\Theta \cdot D(\Omega_0, \dots, \Omega_n) dg_\Theta \right] \overline{\Psi(\Omega_0, \dots, \Omega_n)} d\Omega_0 \dots d\Omega_n \\ &= \int_{I_\Theta} \left[ \int_{(\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}} g_\Theta \cdot D(\Omega_0, \dots, \Omega_n) \overline{\Psi(\Omega_0, \dots, \Omega_n)} d\Omega_0 \dots d\Omega_n \right] dg_\Theta \end{aligned}$$

où, comme dans (3.11),  $d\Omega_i$  est la mesure **de probabilité** sur  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Preuve.* Il suffit pour cela de montrer que la fonction

$$(\Theta, \Omega_0, \dots, \Omega_n) \longmapsto g_\Theta \cdot D(\Omega_0, \dots, \Omega_n) \overline{\Psi(\Omega_0, \dots, \Omega_n)}$$

est intégrable pour la mesure  $dg_\Theta d\Omega_0 \dots d\Omega_n$ . Mais puisque  $\overline{\Psi(\Omega_0, \dots, \Omega_n)}$  est bornée, il suffit de montrer que

$$(\Theta, \Omega_0, \dots, \Omega_n) \longmapsto g_\Theta \cdot D(\Omega_0, \dots, \Omega_n)$$

est intégrable, c'est-à-dire que sa valeur absolue est d'intégrale finie.

Or  $g_\Theta \cdot D(\Omega_0, \dots, \Omega_n) = (n-1)!F(g_\Theta(O))$  et, d'après la proposition 4 (page 29), la fonction  $F$  (voir page 25) est de signe constant.

Donc  $|F| = \varepsilon(\Omega_0, \dots, \Omega_n)F$ , où  $\varepsilon(\Omega_0, \dots, \Omega_n) = \pm 1$  selon l'orientation de  $\Sigma$ .

Ainsi, il suffit de voir que l'intégrale suivante est finie :

$$\begin{aligned} & \int_{I_\Theta \times (\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}} \varepsilon(\Omega_0, \dots, \Omega_n) F_{\Sigma(\Omega_0, \dots, \Omega_n)}(g_\Theta(O)) dg_\Theta d\Omega_0 \dots d\Omega_n \\ &= \int_{(\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}} \varepsilon(\Omega_0, \dots, \Omega_n) \left[ \int_{I_\Theta} F_{\Sigma(\Omega_0, \dots, \Omega_n)}(g_\Theta(O)) dg_\Theta \right] d\Omega_0 \dots d\Omega_n \\ &= \int_{(\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}} \varepsilon(\Omega_0, \dots, \Omega_n) \left[ \int_{\mathbb{H}^n} F(m) dm \right] d\Omega_0 \dots d\Omega_n \\ &= \int_{(\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}} \varepsilon(\Omega_0, \dots, \Omega_n) [\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \text{Vol}(\Sigma)] d\Omega_0 \dots d\Omega_n \\ &= \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{(\mathbb{S}^{n-1})^{n+1}} |\text{Vol}(\Sigma)| d\Omega_0 \dots d\Omega_n \\ &\leq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) V_{max}(n) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

où  $V_{max}(n)$  est la valeur maximale du volume d'un  $n$ -simplexe hyperbolique, dont l'existence est garantie par le théorème d'Haagerup-Munkholm (voir 1.3).  $\square$

D'après (4.4) et la forme de la base, il nous suffit de savoir décomposer les fonctions du type  $\zeta_j(g_\Theta^{-1}(\Omega_i))$  dans  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ .

Pour cela, nous allons procéder par étapes en considérant successivement les actions des différentes isométries composant  $g_\Theta$ . Examinons d'abord l'action de la translation hyperbolique  $g'_n(\theta_n)$ .

Mais vu (4.4) et le fait que  $\zeta_0 \equiv 1$ , nous pouvons déjà dire que les  $\Psi_{K_0, K_1, \dots, K_n}$  où il n'y a pas un  $K_j = (0, \dots, 0)$ , seront orthogonaux à  $V$ , car la constante 1 est orthogonale à  $\tilde{\Xi}_K^n$  si  $K \neq (0, \dots, 0)$ , et  $\zeta_0$  apparaît toujours au moins une fois.

#### 4.1.1 L'action de la translation hyperbolique $g'_n(\theta_n)$

$\zeta_i(g'_n(\theta_n)^{-1}(\Omega'))$  peut être interprété comme  $(g'_n(\theta_n) \cdot \zeta_i)(\Omega')$ , c'est-à-dire en introduisant une représentation de  $SO_0(n, 1)$ . Nous pouvons définir cette représentation de la manière suivante : pour  $g \in SO_0(n, 1)$ , et  $f$  une fonction de  $\mathfrak{D}^n$ , l'ensemble des fonctions lisses définies sur la « partie supérieure » du cône de lumière de  $\mathbb{R}^{n,1}$  et invariante par homothéties de centre 0. Alors

$$(T(g)f)(x) = f(g^{-1}(x))$$

donne une fonction  $(T(g)f)$  qui appartient à  $\mathfrak{D}^n$ . Une fonction de  $\mathfrak{D}^n$  est uniquement déterminée par sa restriction à la  $(n-1)$ -sphère des points du cône de dernière coordonnée  $x_{n+1} = 1$ . On peut ainsi identifier  $\mathfrak{D}^n$  à l'ensemble des fonctions lisses sur  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Ensuite, on prolonge  $T(g)$  à  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  par un opérateur borné. Cela est possible car l'adjoint de  $T(g)$  est densément défini (il apparaît dans l'adjoint le jacobien de  $g : T(g)^*(f) = Jac(g)T(g^{-1})(f)$ ).

Maintenant, il nous faut regarder l'action de cette représentation sur les fonctions  $\zeta_i$ , i.e. écrire une identité dans  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  du type :

$$g'_n(\theta_n) \cdot \zeta_i = \sum_K F_K^i(\theta_n) \tilde{\Xi}_K^n.$$

Ceci nous permettra d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta_i(g_\Theta^{-1}(\Omega_j)) \overline{\tilde{\Xi}_{K_j}^n(\Omega_j)} d\Omega_j \\ = \sum_K F_K^i(\theta_n) \tilde{\Xi}_K^n(g_{n-1}(\theta_{n-1})^{-1} \dots g_1(\theta_1)^{-1}(\Omega_j)) \overline{\tilde{\Xi}_{K_j}^n(\Omega_j)} d\Omega_j. \end{aligned}$$

Ainsi, à ce stade, il faudra étudier l'action de la rotation  $g_{n-1}(\theta_{n-1})$  sur la base des  $\tilde{\Xi}_K^n$  et continuer le procédé jusqu'à terminer avec l'action de  $g_1(\theta_1)$ .

En fait, en écrivant effectivement l'action de  $g'_n(\theta_n)$  sur les coordonnées sphériques grâce à sa matrice, on s'aperçoit avec (3.12) que  $g'_n(\theta_n) \cdot \tilde{\Xi}_K^n$  n'a des composantes non nulles dans la base que sur les éléments  $\tilde{\Xi}_L^n$  avec  $K' = L'$ , c'est-à-dire que seuls les degrés  $k_0$  et  $l_0$  peuvent différer. Ce qui veut dire que l'on a :

$$g'_n(\theta_n) \cdot \tilde{\Xi}_K^n = \sum_{a=1}^{+\infty} F_{(a,K')}^i(\theta_n) \tilde{\Xi}_{(a,K')}^n.$$

Remarquons de plus que les fonctions coordonnées  $\zeta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sont des harmoniques sphériques de degré 1.

On peut se rendre compte assez simplement qu'au coefficient de normalisation près,

– pour  $k \geq 3$ ,  $\zeta_k$  est proportionnelle à  $\tilde{\Xi}_{\Pi_k}^n$ , où

$$\Pi_k = (1, \dots, 0, \overbrace{1}^{n+1-k}, 0, \dots, 0)$$

c'est-à-dire  $\Pi_{ki} = 0$  sauf pour  $i = 0$  et  $i = n + 1 - k$ .

– pour  $k = 1$  et  $k = 2$ , c'est différent à cause de la présence de l'exponentielle complexe dans (3.12). On a plutôt  $\zeta_1$  qui est proportionnel à  $\tilde{\Xi}_{(1,0,\dots,0,1)}^n - \tilde{\Xi}_{(1,0,\dots,0,-1)}^n$  et  $\zeta_2$  à  $\tilde{\Xi}_{(1,0,\dots,0,1)}^n + \tilde{\Xi}_{(1,0,\dots,0,-1)}^n$ .

### 4.1.2 Action des rotations

Pour les rotations, il s'agit de décomposer  $g_k(\theta_k) \cdot \tilde{\Xi}_K^n$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$  dans la base. La représentation qui intervient cette fois est celle de  $SO(n)$  (ou des sous-groupes  $SO(k + 1)$ ). Cette fois, on dispose de la représentation quasi-régulière de  $SO(n)$  dans l'espace  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ . Mais celle-ci se scinde en représentations irréductibles dans les espaces de polynômes harmoniques homogènes  $\tilde{\mathfrak{H}}^{nl}$  (la stabilité de ces espaces est évidente).

Cela indique que l'on va avoir une décomposition du type :

$$g_k(\theta_k) \cdot \tilde{\Xi}_K^n = \sum_{L'} H_{(k_0,L')}^{i,k}(\theta_k) \tilde{\Xi}_{(k_0,L')}^n.$$

Là encore, si on regarde dans le détail, on s'aperçoit que l'action de  $g_k$  ne donne dans la décomposition ci-dessus des coefficients  $H_{(k_0,L')}^{i,k}$  non nuls que lorsque  $L'$  et  $K'$  ne diffère que par un indice (le numéro  $n - k$ , pour  $k \geq 2$ ) ou si  $k = 1$ , la rotation se contente de multiplier par un nombre complexe.

C'est dans l'étude de l'action des rotations que nous utilisons les résultats de la section 3.5.

Mais nous allons voir cela en dimensions 2 et 3. En effet, nous allons à partir de maintenant nous attacher à faire les calculs dans les cas des dimensions  $n = 2$  et  $n = 3$ . Le traitement du cas de la dimension 2 est assez

peu intéressant puisque la fonction volume est parfaitement connue et que la méthode que nous exposons ne permet pas encore de retrouver ce qui est connu dans la mesure où les calculs ne se simplifient pas aisément.

## 4.2 La dimension 2. Les triangles idéaux

Un triangle hyperbolique idéal dans  $\mathbb{H}^2$  est donné par ses sommets. Ceux-ci peuvent être paramétrés par un argument :

$$\Omega_i = e^{i\phi_i}, \quad i \in [0, 2\pi[.$$

Les harmoniques sphériques sur  $\mathbb{S}^1$  sont les  $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ . D'après la section précédente, il nous suffit de savoir développer en série de Fourier les fonctions  $((g_1(\theta_1) \circ g_2'(\theta_2)) \cdot X$  et  $((g_1(\theta_1) \circ g_2'(\theta_2)) \cdot Y$ ,  $X$  et  $Y$  étant les fonctions coordonnées.

L'action de  $g_1(\theta_1)$  est simple : elle multiplie le coefficient de Fourier indexé par  $k$  par  $e^{-ik\theta_1}$ .

Comme vu précédemment, la fonction volume n'aura de coefficient non nul que sur les fonctions de la base de  $L^2((\mathbb{S}^1)^3)$  du type  $e^{ik_i\phi_i} e^{ik_j\phi_j}$  avec  $i \neq j$ .

Le coefficient est alors :

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (-1)^{3-i-j} \left[ g_{\Theta} \cdot X(e^{i\phi_i}) g_{\Theta} \cdot Y(e^{i\phi_j}) \right. \\ \left. - g_{\Theta} \cdot Y(e^{i\phi_i}) g_{\Theta} \cdot X(e^{i\phi_j}) \right] e^{-ik_i\phi_i} e^{-ik_j\phi_j} \frac{d\phi_i d\phi_j d\theta_1}{(2\pi)^3} \text{sh } \theta_2 d\theta_2$$

Suivant la remarque ci-dessus,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{\Theta} \cdot X(e^{i\phi_i}) g_{\Theta} \cdot Y(e^{i\phi_j}) d\phi_i d\phi_j = \\ e^{-i(k_i+k_j)\theta_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2'(\theta_2) \cdot X(e^{i\phi_i}) g_2'(\theta_2) \cdot Y(e^{i\phi_j}) d\phi_i d\phi_j$$

et donc si  $k_i + k_j \neq 0$ , lors de l'intégration en  $\theta_1$  on obtient 0.

Conclusion : nous n'avons à chercher que les coefficients sur  $e^{ik\phi_i} e^{-ik\phi_j}$ . Puisqu'en permutant les sommets on multiplie par la signature de la permutation, il suffit calculer le coefficient pour  $i = 1$  et  $j = 2$ . Notons  $\Upsilon_{(0,k,-k)}$  ce coefficient.

### 4.2.1 Action de $g_2'(\theta_2)$

$$g_2'(\theta_2)^{-1}(x, y) = \left( \frac{x}{\text{ch } \theta_2 - y \text{ sh } \theta_2}, \frac{y \text{ ch } \theta_2 - \text{sh } \theta_2}{\text{ch } \theta_2 - y \text{ sh } \theta_2} \right).$$



**Attention :** Nous choisissons le paramétrage  $x = \sin \phi$  et  $y = \cos \phi$  pour nous accorder avec les dimensions supérieures. Alors, cela signifie que le sens trigonométrique n'est dans notre cas pas le sens direct. Alors

$$\begin{aligned} F_k^X(\theta_2) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2'(\theta_2) \cdot X(e^{i\phi}) e^{-ik\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi e^{-ik\phi}}{\operatorname{ch} \theta_2 - \cos \phi \operatorname{sh} \theta_2} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi \operatorname{sh} \theta_2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi e^{-ik\phi}}{\mu - \cos \phi} d\phi \end{aligned}$$

En notant  $\mu = \operatorname{coth} \theta_2$ .

Pour  $Y$ , le coefficient est

$$\begin{aligned} F_k^Y(\theta_2) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2'(\theta_2) \cdot Y(e^{i\phi}) e^{-ik\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \phi \operatorname{ch} \theta_2 - \operatorname{sh} \theta_2) e^{-ik\phi}}{\operatorname{ch} \theta_2 - \cos \phi \operatorname{sh} \theta_2} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mu \cos \phi - 1) e^{-ik\phi}}{\mu - \cos \phi} d\phi \end{aligned}$$

Nous voyons qu'il nous suffit de savoir calculer

$$K(m, \mu) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{im\phi}}{\mu - \cos \phi} d\phi$$

puisque'alors

$$\begin{aligned} F_k^X(\theta_2) &= \frac{1}{4i\pi \operatorname{sh} \theta_2} (K(-k+1, \mu) - K(-k-1, \mu)) \\ F_k^Y(\theta_2) &= \frac{1}{4\pi} (2K(-k, \mu) - \mu(K(-k+1, \mu) + K(-k-1, \mu))) \end{aligned}$$

Pour des raisons de parité,

$$K(m, \mu) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\phi}{\mu - \cos \phi} d\phi.$$

Ainsi,  $K(m, \mu) = K(|m|, \mu)$ . Il suffit de calculer  $K$  pour  $m \in \mathbb{N}$ .

En utilisant les polynômes de Tchebychev  $T_m$ ,

$$K(m, \mu) = \int_0^{2\pi} \frac{T_m(\cos \phi)}{\mu - \cos \phi} d\phi.$$

Calculons

$$J_k = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^k \phi}{\mu - \cos \phi} d\phi.$$

Pour cela, nous utilisons le fait que

$$\frac{\cos^k \phi}{\mu - \cos \phi} = \frac{\mu^k}{\mu - \cos \phi} - \sum_{j=0}^{k-1} \mu^j \cos^{k-1-j} \phi.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\mu - \cos \phi} &= 2 \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{\mu - \cos \phi} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\mu - (1-t^2)}, \quad (t = \tan \frac{\phi}{2}) \\ &= 4 \frac{1}{\mu-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}} du, \quad (u = t \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu-1}}) \\ &= 4 \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi \operatorname{sh} \theta_2 \end{aligned}$$

et les autres termes donnent des intégrales de Wallis :

$$\int_0^{2\pi} \cos^{k-1-j} \phi d\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } k-1-j \text{ est impair} \\ 4 \frac{\pi}{2} \frac{(k-1-j)!}{2^{k-1-j} (\frac{k-1-j}{2})!^2} & \text{si } k-1-j \text{ est pair} \end{cases}$$

En combinant cela avec l'expression des polynômes de Tchebychev :

$$\begin{aligned} T_m(\cos \phi) &= \operatorname{Re}((\cos \phi + i \sin \phi)^m) \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2l} \cos^{m-2l} \phi (-1)^l \sin^{2l} \phi \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2l} \cos^{m-2l} \phi (-1)^l \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} (-1)^s \cos^{2s} \phi \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{s=0}^l \binom{m}{2l} \binom{l}{s} (-1)^{l+s} \cos^{m-2l+2s} \phi \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} &K(m, \mu) \\ &= 2\pi \sum_{l=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{s=0}^l \binom{m}{2l} \binom{l}{s} (-1)^{l+s} \left[ \mu^{m-2l+2s} \operatorname{sh} \theta_2 - \sum_{u=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - l + s} \mu^{2u} \frac{(2u)!}{2^{2u} u!^2} \right] \end{aligned}$$

Nous avons les ingrédients pour calculer les coefficients, mais à ce stade, les calculs ne sont pas assez simplifiés pour être « humainement » vraiment

réalisables. Par contre, nous pouvons faire des calculs sur un ordinateur grâce au logiciel de calcul formel Maple V. C'est que nous avons fait en annexe.

Cependant, le résultat attendu étant très simple, nous pouvons espérer que certaines simplifications rendent le calcul littéral possible.

En effet,

**Proposition 7.**  $\Upsilon_{(0,k,-k)} = -\frac{i}{k}$ .

*Preuve :*  $V(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = \pm\pi$  selon l'orientation du triangle, c'est-à-dire selon l'ordre circulaire des sommets. Ici, vu nos conventions, l'orientation est directe si  $\phi_0 \leq \phi_2 \leq \phi_1$ .

Alors

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_{(0,k,-k)} &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\phi_0, \phi_1, \phi_2) e^{-ik\phi_1} e^{ik\phi_2} d\phi_0 d\phi_1 d\phi_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(0, \phi_1, \phi_2) e^{ik\phi_2} d\phi_1 d\phi_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[ -\pi \int_0^{\phi_2} e^{-ik\phi_1} d\phi_1 + \pi \int_{\phi_2}^{2\pi} e^{-ik\phi_1} d\phi_1 \right] e^{ik\phi_2} d\phi_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{e^{-ik\phi_2} - 1}{-ik} + \frac{1 - e^{-ik\phi_2}}{-ik} \right] e^{ik\phi_2} d\phi_2 \\
 &= \frac{i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-ik\phi_2}) e^{ik\phi_2} d\phi_2 \\
 &= -\frac{i}{2\pi k} \times 2\pi \\
 &= -\frac{i}{k}
 \end{aligned}$$

□

### 4.3 La dimension 3. Le cas des tétraèdres idéaux

#### 4.3.1 L'action de la translation hyperbolique $g'_3(\theta_3)$

Nous noterons dans la suite  $\tilde{\Xi}_k^{3,l} = \tilde{\Xi}_{(l,k)}^3$ .

Alors, en utilisant les expressions de  $\tilde{\Xi}_k^{3,l}$  et les normalisations qui se trouvent dans la section 3.4, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 = X &= -i \frac{\tilde{\Xi}_1^{3,1} - \tilde{\Xi}_{-1}^{3,1}}{\sqrt{6}} \\
 \zeta_2 = Y &= \frac{\tilde{\Xi}_1^{3,1} + \tilde{\Xi}_{-1}^{3,1}}{\sqrt{6}} \\
 \zeta_3 = Z &= \frac{\tilde{\Xi}_0^{3,1}}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Le bord  $\mathbb{S}^2$  dans le modèle projectif est l'intersection du cône isotrope avec le plan  $\{\zeta_4 = 1\}$ . Dans  $\mathbb{R}^{3,1}$ , l'action linéaire de  $g'_3$  s'écrit :

$$g'_3(\theta_3)^{-1}(x, y, z, 1) = (x, y, z \operatorname{ch} \theta_3 - \operatorname{sh} \theta_3, -z \operatorname{sh} \theta_3 + \operatorname{ch} \theta_3),$$

ce qui correspond projectivement au point de  $S^2$  de coordonnées :

$$\left( \frac{x}{-z \operatorname{sh} \theta_3 + \operatorname{ch} \theta_3}, \frac{y}{-z \operatorname{sh} \theta_3 + \operatorname{ch} \theta_3}, \frac{z \operatorname{ch} \theta_3 - \operatorname{sh} \theta_3}{-z \operatorname{sh} \theta_3 + \operatorname{ch} \theta_3} \right)$$

Soit

$$g'_3(\theta_3) \cdot X(x, y, z) = \frac{1}{\operatorname{sh} \theta_3 \operatorname{coth} \theta_3 - z} x$$

On va utiliser les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x &= \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \\ y &= \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \\ z &= \cos \varphi_2 \end{cases}$$

Dans ces coordonnées, la mesure sur  $\mathbb{S}^2$  s'écrit (voir (3.11))

$$\frac{\sin \varphi_2 \, d\varphi_2 \, d\varphi_1}{4\pi}.$$

Et pour  $\xi \in \mathbb{S}^2$ , d'après (3.13),

$$\tilde{\Xi}_{\varepsilon k}^{3,a}(\xi) = A_{a,k}^3 C_{a-k}^{\frac{1}{2}+k}(z) e^{i\varepsilon k \varphi_1} \sin^k \varphi_2.$$

**Pour  $X$  et  $Y$**  Alors,

$$\begin{aligned} \langle g'_3(\theta_3) \cdot X, \tilde{\Xi}_{\varepsilon k}^{3,a} \rangle &= \frac{A_{a,k}^3}{4\pi \operatorname{sh} \theta_3} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \int_{\varphi_2=0}^{\pi} \frac{\sin \varphi_2 \sin \varphi_1}{\operatorname{coth} \theta_3 - \cos \varphi_2} \times \\ &\times C_{a-k}^{\frac{1}{2}+k}(\cos \varphi_2) e^{-i\varepsilon k \varphi_1} \sin^{k+1} \varphi_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \end{aligned}$$

Dans cette expression on isole l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi_1 e^{-i\varepsilon k \varphi_1} \, d\varphi_1$$

qui vaut  $-i\varepsilon \pi \delta_{k1}$ . Donc, en notant  $\mu = \operatorname{coth} \theta_3$ ,

$$\begin{aligned} \langle g'_3(\theta_3) \cdot X, \tilde{\Xi}_{\varepsilon k}^{3,a} \rangle &= \frac{-i\delta_{k1} \varepsilon \pi A_{a,1}^3}{4\pi \operatorname{sh} \theta_3} \int_0^{\pi} \frac{C_{a-1}^{\frac{3}{2}}(\cos \varphi) \sin^3 \varphi}{\mu - \cos \varphi} \, d\varphi \\ &= \frac{i\delta_{k1} \varepsilon \pi A_{a,1}^3}{4\pi \operatorname{sh} \theta_3} \int_{-1}^1 \frac{C_{a-1}^{\frac{3}{2}}(x)(1-x^2)}{x-\mu} \, dx \end{aligned}$$

par le changement de variable  $x = \cos \varphi$ .

Pour  $Y$ , nous avons

$$(g'_3(\theta_3) \cdot Y, \tilde{\Xi}_{\varepsilon k}^{3,a}) = \frac{\delta_{k1} \pi A_{a,1}^3}{4\pi \operatorname{sh} \theta_3} \int_{-1}^1 \frac{C_{a-1}^{\frac{3}{2}}(x)(1-x^2)}{x-\mu} dx$$

Calculons l'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{C_{a-1}^{\frac{3}{2}}(x)(1-x^2)}{x-\mu} dx$ .

Posons  $P_N(x) = C_N^{\frac{3}{2}}(x)(1-x^2)$ .

Calculons  $\int_{-1}^1 \frac{x^k}{x-\mu} dx$  avec

$$\frac{x^k}{x-\mu} = \frac{\mu^k}{x-\mu} + \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \mu^j.$$

Cela donne, pour  $k \geq 1$ ,

$$\int_{-1}^1 \frac{x^k}{x-\mu} dx = \mu^k [\ln |x-\mu|]_{-1}^1 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1 - (-1)^{k-j}}{k-j} \mu^j$$

L'étude des polynômes de Gegenbauer donne (voir (3.9)) :

$$C_N^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(N-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)k!(N-2k)!} (2x)^{N-2k}.$$

En écrivant  $P_N(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor + 1} a_{N+2-2k}^N x^{N+2-2k}$ , l'identification donne

-  $k = 0$ ,

$$a_{N+2}^N = -\frac{\Gamma(N+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})N!} 2^N;$$

-  $1 \leq k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ ,

$$\begin{aligned} a_{N+2-2k}^N &= (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(N-k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})(k-1)!(N-2k)!} 2^{N-2k} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{4(N-k+\frac{3}{2})}{(N+1-2k)(N+2-2k)} + \frac{1}{k} \right]; \\ &= (-1)^{k-1} 2^{N-2k} \frac{\Gamma(N-k+\frac{3}{2})(N+1)(N+2)}{\Gamma(\frac{3}{2})k!(N+2-2k)!} \end{aligned}$$

$$- k = \lfloor N/2 \rfloor + 1,$$

$$a_{N-2\lfloor N/2 \rfloor}^N = (-1)^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\Gamma(N - \lfloor N/2 \rfloor + \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})\lfloor N/2 \rfloor!(N - 2\lfloor N/2 \rfloor)!} 2^{N-2\lfloor N/2 \rfloor}.$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{C_N^{\frac{3}{2}}(x)(1-x^2)}{x-\mu} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor + 1} a_{N+2-2k}^N \left\{ \mu^{N+2-2k} \ln \left| \frac{1-\mu}{1+\mu} \right| + \sum_{j=0}^{N+1-2k} \frac{1 - (-1)^{N-j}}{N+2-2k-j} \mu^j \right\} \\ &= P_N(\mu) \ln \left| \frac{1-\mu}{1+\mu} \right| + \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor + 1} a_{N+2-2k}^N \sum_{j=0}^{N+1-2k} \frac{1 - (-1)^{N-j}}{N+2-2k-j} \mu^j \\ &= -2\theta_3 P_N(\mu) + \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor + 1} a_{N+2-2k}^N \sum_{j=0}^{N+1-2k} \frac{1 - (-1)^{N-j}}{N+2-2k-j} \mu^j \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\frac{\Gamma(N-k+\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdots \frac{2N-2k+1}{2} = \frac{(2N-2k+2)!}{2^{2N-2k+1}(N-k+1)!},$$

nous pouvons synthétiser l'étude des différents cas faite au-dessus, par l'expression :

$$a_{N+2-2k}^N = \frac{(N+1)(N+2)(-1)^{k+1}(2N+2-2k)!}{2^{N+1}(N+1-k)!k!(N+2-2k)!}$$

En utilisant (3.14), on obtient

$$A_{a,\varepsilon}^3 = \sqrt{\frac{2a+1}{a(a+1)}},$$

qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \langle g'_3(\theta_3) \cdot X, \tilde{\Xi}_\varepsilon^{3,a} \rangle &= -i \frac{\varepsilon\pi}{4\pi \operatorname{sh} \theta_3} \sqrt{\frac{2a+1}{a(a+1)}} \times \\ &\times \left( -2\theta_3 P_{a-1}(\operatorname{coth} \theta_3) + \sum_{k=0}^{\lfloor (a-1)/2 \rfloor + 1} a_{a+1-2k}^N \sum_{j=0}^{a-2k} \frac{1 + (-1)^{a-j}}{a+1-2k-j} \operatorname{coth}^j \theta_3 \right) \end{aligned}$$

et

$$\langle g'_3(\theta_3) \cdot Y, \tilde{\Xi}_\varepsilon^{3,a} \rangle = i\varepsilon \langle g'_3(\theta_3) \cdot X, \tilde{\Xi}_\varepsilon^{3,a} \rangle$$

Pour avoir une formule synthétique, nous écrivons :

$$\langle g'_3(\theta_3) \cdot X, \tilde{\Xi}_\varepsilon^{3,a} \rangle = \varepsilon F_a^X(\theta_3)$$

et de même,

$$\langle g'_3(\theta_3) \cdot Y, \tilde{\Xi}_\varepsilon^{3,a} \rangle = F_a^Y(\theta_3)$$

avec évidemment  $F_X \equiv -iF_Y$ .

**Pour  $Z$**

$$\begin{aligned} \langle g'_3(\theta_3) \cdot Z, \tilde{\Xi}_{\varepsilon k}^{3,a} \rangle &= \frac{A_{a,k}^3}{4\pi} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \int_{\varphi_2=0}^{\pi} \frac{\coth \theta_3 \cos \varphi_2 - 1}{\coth \theta_3 - \cos \varphi_2} \times \\ &\quad \times C_{a-k}^{\frac{1}{2}+k}(\cos \varphi_2) e^{-i\varepsilon k \varphi_1} \sin^{k+1} \varphi_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \end{aligned}$$

À cause de l'intégration par rapport à  $\varphi_1$ , ce produit scalaire est nul si  $k \neq 0$ .

Il reste donc :

$$\langle g'_3(\theta_3) \cdot Z, \tilde{\Xi}_0^{3,a} \rangle = \frac{A_{a,0}^3}{2} \int_0^\pi \frac{\coth \theta_3 \cos \varphi_2 - 1}{\coth \theta_3 - \cos \varphi_2} C_a^{\frac{1}{2}}(\cos \varphi_2) \sin \varphi_2 \, d\varphi_2$$

Effectuons le changement de variable  $x = \cos \varphi_2$  :

$$\langle g'_3(\theta_3) \cdot Z, \tilde{\Xi}_0^{3,a} \rangle = \frac{A_{a,0}^3}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - x\mu}{x - \mu} C_a^{\frac{1}{2}}(x) \, dx$$

Rappelons que

$$C_a^{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(a - k + 1/2)}{\Gamma(1/2) k! (a - 2k)!} (2x)^{a-2k}.$$

Posons

$$\begin{aligned} Q_a(x) &= (1 - \mu x) C_a^{\frac{1}{2}}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(a - k + 1/2)}{\Gamma(1/2) k! (a - 2k)!} 2^{a-2k} [x^{a-2k} - \mu x^{a+1-2k}]. \end{aligned}$$

Alors, sachant que

$$A_{a,0}^3 = \sqrt{2a+1},$$

en utilisant la même méthode que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2a+1}} \langle g'_3(\theta_3) \cdot Z, \tilde{\Xi}_0^{3,a} \rangle &= -2\theta_3 Q_a(\mu) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} (-1)^k \frac{\Gamma(a-k+1/2)}{\Gamma(1/2)k!(a-2k)!} 2^{a-2k} \times \\ &\times \left\{ \sum_{j=0}^{a-2k-1} \left[ \frac{1-(-1)^{a-j}}{a-2k-j} - \mu \frac{1+(-1)^{a-j}}{a-2k-j+1} \right] \mu^j - 2\mu^{a-2k+1} \right\} \end{aligned}$$

On notera

$$\langle g'_3(\theta_3) \cdot Z, \tilde{\Xi}_0^{3,a} \rangle = F_a^Z(\theta_3).$$

### 4.3.2 L'action de la rotation $g_2(\theta_2)$

Nous venons donc de voir l'action des « translations » hyperboliques sur les fonctions coordonnées. Afin de connaître complètement l'action du groupe, il nous faut regarder l'action des autres rotations sur les fonctions qui sont apparues dans l'étude précédente. C'est-à-dire que nous allons étudier dans la suite l'action d'une rotation dans le plan  $(y, z)$  sur les fonctions  $\tilde{\Xi}_0^{3a}$ ,  $\tilde{\Xi}_1^{3a}$  et  $\tilde{\Xi}_{-1}^{3a}$ .

Pour cela, utilisons le principe développé dans la section 3.5. En effet,  $\Xi_{\varepsilon_k k}^{3a} \in \mathfrak{H}^{3a}$  et puisque  $\mathfrak{H}^{3a}$  est invariant par l'action de  $SO(3)$ ,  $g_2 \cdot \Xi_{\varepsilon_k k}^{3a} \in \mathfrak{H}^{3a}$ . (Nous notons  $\varepsilon_k$  le signe associé à  $k \geq 0$ , i.e.  $-1$  ou  $+1$ .) Donc, nous sommes bien dans les conditions d'application de (3.16) et celle-ci se traduit par

$$\langle g_2 \cdot \Xi_{\varepsilon_k k}^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{D_{(a,m)}^3} \langle S(g_2 \cdot \Xi_{\varepsilon_k k}^{3a}), \Xi_{\varepsilon_m m}^2 \rangle_{\mathbb{S}^1}.$$

Poussons le calcul de ce coefficient un peu plus loin. D'après (3.6) et (3.7), on peut déduire que

$$\Xi_{\varepsilon_k k}^{3a}(x, y, z) = A_{(a,k)}^3 \frac{2^{a-k} \Gamma(a + \frac{1}{2})}{(a-k)! \Gamma(k + \frac{1}{2})} \mathcal{H}_a(z^{a-k}(y + \varepsilon_k i x)^k).$$

Mais l'action de  $SO(3)$  commute avec la projection harmonique  $\mathcal{H}_a$  grâce à l'unicité et l'invariance des termes dans (3.1). Cela signifie que

$$g_2 \cdot \mathcal{H}_a(z^{a-k}(y + \varepsilon_k i x)^k) = \mathcal{H}_a(g_2 \cdot (z^{a-k}(y + \varepsilon_k i x)^k)).$$

Encore d'après (3.1), puisque  $S(r^2 \mathfrak{R}^{na}) = 0$ , on a  $S \circ \mathcal{H}_a = S$ .

Donc

$$\begin{aligned} \langle g_2 \cdot \Xi_{\varepsilon_k k}^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} &= \frac{A_{(a,k)}^3 \times 2^{a-k} \Gamma(a + \frac{1}{2})}{D_{(a,m)}^3 (a-k)! \Gamma(k + \frac{1}{2})} \times \\ &\times \langle S(g_2 \cdot (z^{a-k}(y + \varepsilon_k i x)^k)), \Xi_{\varepsilon_m m}^2 \rangle_{\mathbb{S}^1}. \end{aligned}$$



La matrice de  $g_2^{-1}(\theta_2)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} g_2 \cdot (z^{a-k}(y + \varepsilon_k i x)^k) \\ = (y \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)^{a-k} (y \cos \theta_2 - z \sin \theta_2 + \varepsilon_k i x)^k. \end{aligned}$$

Nous allons déterminer la restriction à  $\mathbb{S}^1$  de l'image de ce polynôme par  $S$  avec

$$\begin{cases} x = \sin \varphi \\ y = \cos \varphi \end{cases}.$$

Cela revient à remplacer  $z$  par  $i$  :

$$\begin{aligned} S((y \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)^{a-k} (y \cos \theta_2 - z \sin \theta_2 + \varepsilon_k i x)^k)|_{\mathbb{S}^1} \\ = (\cos \varphi \sin \theta_2 + i \cos \theta_2)^{a-k} (\cos \varphi \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 + \varepsilon_k i \sin \varphi)^k. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle S(g_2 \cdot (z^{a-k}(y + \varepsilon_k i x)^k)), \Xi_{\varepsilon_m m}^2 \rangle_{\mathbb{S}^1} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \theta_2 + i \cos \theta_2)^{a-k} \times \\ \times (\cos \varphi \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 + \varepsilon_k i \sin \varphi)^k e^{-i\varepsilon_m m \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Maintenant, souvenons-nous que les harmoniques sphériques qui nous intéressent à cette étape sont celles qui sont intervenues lors de l'étude de l'action de la translation hyperbolique, c'est-à-dire les harmoniques sphériques du type  $\Xi_0^{3a}$ ,  $\Xi_1^{3a}$  et  $\Xi_{-1}^{3a}$ . Cela simplifie les calculs ci-dessus, puisqu'alors  $k = 0$  ou  $k = 1$ .

**Action de  $g_2$  sur  $\Xi_0^{3a}$**  D'après ce qui précède, nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale suivante :

$$K_{a, \varepsilon_m m}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \theta + i \cos \theta)^a e^{-i\varepsilon_m m \varphi} d\varphi.$$

D'abord, nous pouvons remarquer avec le changement de variable  $\phi = -\varphi$  que  $K_{a, -m} = K_{a, m}$ . Nous pouvons donc faire le calcul avec  $m = |m|$ . Développons :

$$(\cos \varphi \sin \theta + i \cos \theta)^a = \sum_{r=0}^a \binom{a}{r} \sin^r \theta (i \cos \theta)^{a-r} \cos^r \varphi. \quad (4.5)$$

Nous avons donc besoin de calculer le coefficient de Fourier de  $\cos^u \varphi$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^u \varphi e^{-im\varphi} d\varphi &= \frac{1}{2\pi \times 2^u} \sum_{j=0}^u \binom{u}{j} \int_0^{2\pi} e^{(2j-u-m)i\varphi} d\varphi \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^u} \binom{u}{\frac{u+m}{2}} & \text{si } u+m \text{ est pair et } u \geq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc dans (4.5), seuls vont compter les exposants plus grands que  $m$  et de même parité que  $m$ . Si nous faisons le changement d'indice  $r = m + 2t$ , nous avons

$$\begin{aligned} K_{a,m}(\theta) &= \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{a-m}{2} \rfloor} \binom{a}{m+2t} \binom{m+2t}{m+t} \left(\frac{\sin \theta}{2}\right)^{m+2t} (i \cos \theta)^{a-m-2t} \\ &= i^{a-m} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{a-m}{2} \rfloor} (-1)^t \binom{a}{m+2t} \binom{m+2t}{m+t} \left(\frac{\sin \theta}{2}\right)^{m+2t} \cos^{a-m-2t} \theta \end{aligned}$$

Finalement,

$$\langle g_2 \cdot \Xi_0^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} = \frac{A_{(a,0)}^3 \times 2^a \Gamma(a + \frac{1}{2})}{D_{(a,m)}^3 a! \Gamma(\frac{1}{2})} K_{a,m}(\theta_2)$$

Grâce à (3.14), nous pouvons simplifier

$$A_{(a,0)}^3 = \sqrt{2a+1} \quad (4.6)$$

et

$$D_{(a,m)}^3 = \frac{A_{(a,m)}^3}{A_m^2} \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{(a-m)! \Gamma(m + \frac{1}{2})} (2i)^{a-m}$$

où

$$\begin{aligned} A_m^2 &= 1 \\ A_{(a,m)}^3 &= \frac{4^m (a-m)! (2a+1) \Gamma(m + \frac{1}{2})^2}{\pi (a+m)!} \end{aligned}$$

En utilisant

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2m)!}{4^m m!},$$

cela donne

$$A_{(a,m)}^3 = \frac{(2a+1)(2m)!^2 (a-m)!}{4^m (m!)^2 (a+m)!}$$

En combinant tout cela, il vient :

$$\begin{aligned} D_{(a,m)}^3 &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \sqrt{\frac{(a-m)!(2a+1)}{(a+m)!}} \frac{(2a)!m!}{4^{a-m}(a-m)!a!(2m)!} (2i)^{a-m} \\ &= \frac{(2a)!}{2^a a!} \sqrt{\frac{(2a+1)}{(a-m)!(a+m)!}} i^{a-m} \end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned} \langle g_2 \cdot \Xi_0^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} &= \frac{\sqrt{(a-m)!(a+m)!}}{a!} i^{m-a} K_{a,m}(\theta_2) \\ \langle g_2 \cdot \Xi_0^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} &= \frac{\sqrt{(a-m)!(a+m)!}}{a!} \times \\ &\quad \times \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{a-m}{2} \rfloor} \binom{a}{m+2t} \binom{m+2t}{m+t} (-1)^t \left(\frac{\sin \theta}{2}\right)^{m+2t} \cos^{a-m-2t} \theta \end{aligned}$$

**Action de  $g_2$  sur  $\Xi_{\pm 1}^{3a}$**  Cette fois-ci, nous nous intéressons aux intégrales :

$$\begin{aligned} J_{a,\varepsilon_m m}^{\pm}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \theta_2 + i \cos \theta_2)^{a-1} \times \\ &\quad \times (\cos \varphi \cos \theta - i \sin \theta \pm i \sin \varphi) e^{-i\varepsilon_m m \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

On peut l'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J_{a,\varepsilon_m m}^{\pm}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \theta_2 + i \cos \theta_2)^{a-1} \times \\ &\quad \times \left( \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \cos \theta - i \sin \theta \pm \left( \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} \right) \right) e^{-i\varepsilon_m m \varphi} d\varphi \\ J_{a,\varepsilon_m m}^{\pm}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \theta_2 + i \cos \theta_2)^{a-1} \times \\ &\quad \times \left( \frac{(\cos \theta \pm 1)e^{-(\varepsilon_m m - 1)i\varphi}}{2} + \frac{(\cos \theta \mp 1)e^{-(\varepsilon_m m + 1)i\varphi}}{2} - i \sin \theta e^{-i\varepsilon_m m \varphi} \right) d\varphi \\ J_{a,\varepsilon_m m}^{\pm}(\theta) &= \frac{1}{2} [(\cos \theta \pm 1)K_{a-1,\varepsilon_m m-1}(\theta) + (\cos \theta \mp 1)K_{a-1,\varepsilon_m m+1}(\theta)] \\ &\quad - i \sin \theta K_{a-1,\varepsilon_m m}(\theta) \end{aligned}$$

De la même manière que plus haut, on obtient par calcul :

$$\langle g_2 \cdot \Xi_{\pm 1}^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} = \sqrt{\frac{(a-m)!(a+m)!}{a(a+1)}} \frac{i^{m-a}}{(a-1)!} J_{a,\varepsilon_m m}^{\pm}(\theta)$$

Comme pour  $g'_3$ , par souci d'alléger les formules, nous noterons

$$\langle g_2 \cdot \Xi_0^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} = H_{a, \varepsilon_m m}^Z(\theta_2)$$

et

$$\langle g_2 \cdot \Xi_{\pm 1}^{3a}, \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2} = H_{a, \varepsilon_m m}^{\pm}(\theta_2)$$

Enfin, nous devons étudier l'action des rotations  $g_1$  dans le plan  $(x, y)$  sur les harmoniques sphériques qui apparaissent après la deuxième étape, c'est-à-dire les harmoniques sphériques  $\Xi_{\varepsilon_m m}^{3a}$  où  $m \leq a$ .

### 4.3.3 L'action de la rotation $g_1(\theta_1)$

Cette action est très simple, étant donnée la forme d'une harmonique sphérique (3.7) :

$$g_1(\theta_1) \cdot \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a}(x, y, z) = e^{-i\varepsilon_m m \theta_1} \Xi_{\varepsilon_m m}^{3a}(x, y, z)$$

Nous utiliserons la notation

$$E_m(\theta_1) = e^{-im\theta_1}.$$

## 4.4 Synthèse

Connaissant les actions de chacune des rotations, nous pouvons maintenant décomposer l'action du groupe lui-même.

Regardons tout d'abord ce qui se passe pour les fonctions coordonnées.

Dans la décomposition de  $X$ , on trouvera une coordonnée sur  $\Xi_m^{3a}$  de deux manières différentes : en « passant » par  $\Xi_{-1}^{3a}$  ou par  $\Xi_1^{3a}$ . Les coefficients obtenus sont  $E_m(\theta_1)H_{a,m}^+(\theta_2)F_a^X(\theta_3)$  et  $E_m(\theta_1)H_{a,m}^-(\theta_2)(-F_a^X(\theta_3))$ . Dans la décomposition de  $Y$  nous avons de manière similaire  $E_m(\theta_1)H_{a,m}^+(\theta_2)F_a^Y(\theta_3)$  et  $E_m(\theta_1)H_{a,m}^-(\theta_2)F_a^Y(\theta_3)$ . Pour regrouper ces termes, notons

$$H_{a,m}^X = H_{a,m}^+ - H_{a,m}^-$$

et

$$H_{a,m}^Y = H_{a,m}^+ + H_{a,m}^-$$

Résumant ce qui a été fait au-dessus, nous pouvons écrire dans  $L^2(\mathbb{S}^2)$  :

$$\begin{aligned} (g_1(\theta_1)g_2(\theta_2)g'_3(\theta_3)) \cdot X &= \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{m=-a}^a E_m(\theta_1)H_{a,m}^X(\theta_2)F_a^X(\theta_3)\Xi_m^{3a} \\ (g_1(\theta_1)g_2(\theta_2)g'_3(\theta_3)) \cdot Y &= \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{m=-a}^a E_m(\theta_1)H_{a,m}^Y(\theta_2)F_a^Y(\theta_3)\Xi_m^{3a} \\ (g_1(\theta_1)g_2(\theta_2)g'_3(\theta_3)) \cdot Z &= \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{m=-a}^a E_m(\theta_1)H_{a,m}^Z(\theta_2)F_a^Z(\theta_3)\Xi_m^{3a} \end{aligned}$$

Rappelons la fonction  $D$  que nous voulons décomposer – voir (4.3) et (4.4) – :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\text{vol}(\mathbb{S}^2)} D(g_{\Theta}^{-1} \cdot \Omega_0, \dots, g_{\Theta}^{-1} \cdot \Omega_3) = \\ \frac{1}{2\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \sum_{\tau \in \Sigma(0, \dots, 3)} \varepsilon(\tau) X(g_{\Theta}^{-1} \cdot \Omega_{\tau(1)}) Y(g_{\Theta}^{-1} \cdot \Omega_{\tau(2)}) Z(g_{\Theta}^{-1} \cdot \Omega_{\tau(3)}). \end{aligned}$$

Nous avons écrit  $g_{\Theta} = g_1 g_2 g'_3$ . Il reste à décomposer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\text{vol}(\mathbb{S}^2)} D((g_1(\theta_1)g_2(\theta_2)g'_3(\theta_3))^{-1}(\Omega_0), \dots, (g_1(\theta_1)g_2(\theta_2)g'_3(\theta_3))^{-1}(\Omega_3)) \\ = \frac{1}{8\pi} \sum_{\tau \in \Sigma(0, \dots, 3)} \varepsilon(\tau) \left( \sum_{a=1}^{+\infty} \sum_{m=-a}^a E_m(\theta_1) H_{a,m}^X(\theta_2) F_a^X(\theta_3) \Xi_m^{3a}(\Omega_{\tau(1)}) \right) \times \\ \times \left( \sum_{b=1}^{+\infty} \sum_{k=-b}^b E_k(\theta_1) H_{b,k}^Y(\theta_2) F_b^Y(\theta_3) \Xi_k^{3b}(\Omega_{\tau(2)}) \right) \times \\ \times \left( \sum_{c=1}^{+\infty} \sum_{h=-c}^c E_h(\theta_1) H_{c,h}^Z(\theta_2) F_c^Z(\theta_3) \Xi_h^{3c}(\Omega_{\tau(3)}) \right) \quad (4.7) \end{aligned}$$

Essayons de déterminer la coordonnée sur une harmonique sphérique fixée que l'on notera

$$\Psi_{\alpha, \kappa} = \tilde{\Xi}_{\kappa_0}^{3\alpha_0} \otimes \dots \otimes \tilde{\Xi}_{\kappa_3}^{3\alpha_3}.$$

Nous avons  $\forall i \in \{0, \dots, 3\}, |\kappa_i| \leq \alpha_i$ .

Notons  $\Lambda_{\alpha, \kappa}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  cette coordonnée.

Nous avons déjà une contrainte pour que  $\Lambda_{\alpha, \kappa}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \neq 0$  :

$$\exists i \in \{0, \dots, 3\}, \alpha_i = 0$$

ce qui correspond à  $\Xi_{\kappa_i}^{3\alpha_i} = \Xi_0^{3,0} \equiv 1$ . Le calcul de  $\Lambda_{\alpha, \kappa}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  se fait en envisageant toutes les possibilités d'obtenir  $\Psi_{\alpha, \kappa}$  dans (4.7). On doit tenir compte des permutations des trois indices  $i$  pour lesquels  $\alpha_i \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha, \kappa}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{\tau \in \Sigma(0, \dots, 3) \\ \alpha_i = 0 \Rightarrow i = \tau(i)}} \varepsilon(\tau) E_{\kappa_{\tau(1)}}(\theta_1) H_{\alpha_{\tau(1)}, \kappa_{\tau(1)}}^X(\theta_2) F_{\alpha_{\tau(1)}}^X(\theta_3) \times \\ \times E_{\kappa_{\tau(2)}}(\theta_1) H_{\alpha_{\tau(2)}, \kappa_{\tau(2)}}^Y(\theta_2) F_{\alpha_{\tau(2)}}^Y(\theta_3) E_{\kappa_{\tau(3)}}(\theta_1) H_{\alpha_{\tau(3)}, \kappa_{\tau(3)}}^Z(\theta_2) F_{\alpha_{\tau(3)}}^Z(\theta_3) \end{aligned}$$

Maintenant, pour avoir la coordonnée sur  $\Psi_{\alpha, \kappa}$  de la fonction volume – que l'on notera  $\Upsilon_{\alpha, \kappa}$  –, il reste à intégrer par rapport aux angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  :

$$\Upsilon_{\alpha, \kappa} = \int_{\theta_1 \in [0, 2\pi]} \int_{\theta_2 \in [0, \pi]} \int_{\theta_3 \in \mathbb{R}^+} \Lambda_{\alpha, \kappa}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \text{sh}^2 \theta_3 \sin \theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\theta_3$$

Mais il y a en facteur dans  $\Lambda_{\alpha,\kappa}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  la fonction

$$E_{\kappa_0}(\theta_1)E_{\kappa_1}(\theta_1)E_{\kappa_2}(\theta_1)E_{\kappa_3}(\theta_1) = \exp\left(-i\theta_1 \sum_{i=0}^3 \kappa_i\right)$$

(Rappelons qu'un des  $\kappa_i$  au moins est nul). Lors de l'intégration par rapport à  $\theta_1$  on obtient 0 si  $|\kappa| := \sum_{i \neq 0}^3 \kappa_i = 0$ . Cela donne une nouvelle contrainte :

$$|\kappa| \neq 0 \implies \Upsilon_{\alpha,\kappa} = 0.$$

Faire une permutation des sommets correspond à permuter les indices, et cela multiplie le volume par la signature de la permutation :

$$\Upsilon_{\sigma(\alpha,\kappa)} = \varepsilon(\sigma) \Upsilon_{(\alpha,\kappa)}.$$

Cela permet de restreindre l'étude des coefficients aux cas où

$$0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3.$$

Une autre remarque permet d'éliminer beaucoup de cas : lorsqu'on applique la symétrie centrale par rapport à  $O$  – antipodation – (dans  $\mathbb{R}^n$ , par exemple dans le modèle  $\mathbb{B}^n$ ), le volume  $V$  du tétraèdre est multiplié par  $-1$ , comme pour tous les  $n$  impairs. Cela est dû au fait que l'orientation du simplexe peut-être donnée par le signe d'un déterminant de  $n$  « arêtes vectorielles »  $(\overrightarrow{\Omega_0\Omega_1}, \dots, \overrightarrow{\Omega_0\Omega_n})$  que l'antipodation change en leur opposé. En ce qui concerne  $\Psi_{\alpha,\kappa}$ , elle est multipliée par  $(-1)^{\sum \alpha_i}$ . Conclusion : les  $\Psi_{\alpha,\kappa}$  dont le degré total ( $\sum \alpha_i$ ) est pair n'apparaissent pas dans la décomposition de  $V$ .

Moins encore qu'en dimension 2, les calculs ne sont pas – en l'état – faisables « à la main ». Nous donnons en annexe un programme Maple V qui calcule les valeurs de  $\Psi_{\alpha,\kappa}$ . La liste qui suit est ordonnée par degré total, sous la forme :

$$[[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3], \Psi_{\alpha,\kappa}]$$

(on suppose  $\alpha_0 = 0$ .)

### Quelques précisions supplémentaires

Dans [GM], on trouve des formules explicites pour les éléments de la base  $\Xi_{\pm m}^{3a}$  ainsi que pour les coefficients  $\langle g_2 \cdot \Xi_{\pm k}^{3a}, \Xi_{\pm m}^{3a} \rangle_{\mathbb{S}^2}$  en terme de polynômes orthogonaux (respectivement de Legendre et de Jacobi). Par exemple, on obtient

$$\langle g_2(\theta_2) \cdot \Xi_{\pm k}^{3a}, \Xi_{\pm m}^{3a} \rangle_{S^2} = P_{m,k}^a(\cos \theta_2),$$

avec

$$P_{m,k}^a(t) = C(1-t)^{\frac{\alpha}{2}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}}P_s^{\alpha\beta}(t),$$

où  $\alpha = |m - k|$ ,  $\beta = |m + k|$ ,  $s = a - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  et  $P_s^{\alpha\beta}$  est le polynôme de Jacobi

$$P_s^{\alpha\beta}(t) = \frac{(-1)^s}{2^s s!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^s}{dt^s} \left[ (1-t)^{s+\alpha} (1+t)^{s+\beta} \right].$$

En poussant les calculs, on obtient des expressions des coefficients du type  $H_{a,k}^X(\theta)$ ,  $H_{a,k}^Y(\theta)$ , et  $H_{a,k}^Z(\theta)$ .

On peut montrer que ces expressions sont proportionnelles respectivement à

$$\frac{d^{a-1}}{dt^{a-1}} \left[ (1-x)^{a-k} (1+x)^{a+k} \right] (\cos \theta),$$

$$\frac{d^{a+1}}{dt^{a+1}} \left[ (1-x)^{a-k} (1+x)^{a+k} \right] (\cos \theta),$$

et

$$\frac{d^a}{dt^a} \left[ (1-x)^{a-k} (1+x)^{a+k} \right] (\cos \theta).$$

Alors, quand on calcule  $\Upsilon_{\alpha,\kappa}$ , il apparaît dans l'intégrale une somme de termes dans lesquels il y a chaque fois un produit du type  $H^X(\theta)H^Y(\theta)H^Z(\theta)$ . En intégrant, d'après les expressions ci-dessus, on vérifie à l'aide d'intégrations par parties successives que

**Proposition 8.** *Le coefficient  $\Upsilon_{\alpha,\kappa}$  est nul si les trois coefficients  $\alpha_i$  non nuls ne sont pas les longueurs des côtés d'un triangle.*

Par exemple, si  $\alpha = (0, 1, 4, 6)$ ,  $6 > 4 + 1$ , donc  $\Upsilon_{\alpha,\kappa} = 0$ .

## Annexe A

# La dimension 2 – Programmation Maple V

```

K:=proc(m::integer,t)
RETURN(1/2/Pi*convert(
[seq(convert([seq((-1)^(1+s)*binomial(abs(m),2*1)*binomial(1,s)*(-2*Pi*sinh(t)*coth
(t)^(abs(m)+2*s-2*1)+convert(
[seq(coth(t)^j*Pi*GAMMA(abs(m)+2*s-2*1-j)*(1-(-1)^(abs(m)-j))/2^(abs(m)
)+2*s-2*1-j-1)/GAMMA((abs(m)+2*s-2*1-j-1)/2+1)^2,j=0..abs(m)+2*s-2*1-1
)]
,'+'),s=0..1])
,'+',1=0..floor(abs(m)/2))]
,'+')
end;

Fx:=proc(k::integer,t)
RETURN(-1/(2*I*sinh(t))*(K(-k+1,t)-K(-k-1,t)))
end;

Fy:=proc(k::integer,t)
RETURN(-1/(2*sinh(t))*cosh(t)*(K(-k+1,t)+K(-k-1,t))+K(k,t))
end;

l:=proc(aa::list,t)
RETURN(
Fx(aa[1],t)*Fy(aa[2],t))
end;

Lambda:=proc(a::integer,t)
RETURN(l([a,-a],t)-l([-a,a],t)) end;

```



```

Upsilon:=proc(a::integer) local resultat;
resultat:=int(simplify(Lambda(a,t))*sinh(t),t=0..infinity);
#if has(resultat,limit) then
resultat:=limit(series(op(resultat)[1],t3=0,convert(aa,'+')+6),t3=0)
fi;
RETURN(resultat)
end;

seq(Upsilon(k),k=1..20);

```

$$\begin{aligned}
& -I, -\frac{1}{2}I, -\frac{1}{3}I, -\frac{1}{4}I, -\frac{1}{5}I, -\frac{1}{6}I, -\frac{1}{7}I, -\frac{1}{8}I, -\frac{1}{9}I, -\frac{1}{10}I, -\frac{1}{11}I, \\
& -\frac{1}{12}I, -\frac{1}{13}I, -\frac{1}{14}I, -\frac{1}{15}I, -\frac{1}{16}I, -\frac{1}{17}I, -\frac{1}{18}I, -\frac{1}{19}I, \\
& -\frac{1}{20}I
\end{aligned}$$

## Annexe B

# La dimension 3 – Programmation Maple V

```
with(orthopoly);with(combinat);
```

```
A:=proc(k0::integer,k1::integer)
  local n;
  n:=3;
  RETURN(sqrt((1/GAMMA(n/2))*(2^(2*abs(k1) + n - 4)*(k0 - k1)!*((n +
2*k0) - 2)*GAMMA((n - 2)/2 + abs(k1))^2)/(sqrt(Pi)*GAMMA(((k0 +
abs(k1) + n) - 2))))
end;
```

```
r:=(x,y,z)->((x^2+y^2+z^2)^(1/2));
```

```
X:=proc(l::integer,k::integer,x,y,z)
RETURN((A(l,abs(k))*r(x,y,z)^(l-abs(k)+1)*G(l-abs(k),1/2+abs(k),z/r(x,
y,z))*(y+sign(k)*I*x)^(abs(k))));end;
```

```
Xs:=proc(l::integer,k::integer,x,y,z)
RETURN((A(l,abs(k))*G(l-abs(k),1/2+abs(k),z)*(y+sign(k)*I*x)^(abs(k))));
end;
```

```
Fx:=proc(a::integer,t)
RETURN(-I/4/sinh(t)*sqrt((2*a+1)/(a*(a+1)))*(-
2*t*G(a-1,3/2,coth(t))*(1-coth(t)^2)
+convert(
[seq( (a*(a+1)*(-1)^(k+1)*(2*a-2*k)!/(2^a*(a-k)!*k!*(a+1-2*k)!))
convert(
[seq((1+(-1)^(a-j))/(a+1-2*k-j)*(coth(t))^j
,j=0..a-2*k)], '+'),k=0..floor((a-1)/2+1)], '+'))
```

```
end;
```

```
Fy:=I*Fx;
```

```
Fz:=proc(a::integer,t)
RETURN(1/2*sqrt(2*a+1)*(
-2*t*G(a,1/2,coth(t))*(1-coth(t)^2)+
convert(
[seq((-1)^k*GAMMA(a-k+1/2)*2^(a-2*k)/GAMMA(1/2)/k!/(a-2*k)!
*(
convert([seq(
((1-(-1)^(a-j))/(a-2*k-j)-coth(t)*(1+(-1)^(a-j))/(a-2*k-j+1))*coth(t)^
j,
j=0..a-2*k-1)],'+')-2*coth(t)^(a-2*k+1)),
k=0..floor(a/2)],'+')
));
end;
```

```
K:=proc(a::integer,m::integer,t)
RETURN(I^(a-abs(m))*convert([seq(binomial(a,abs(m)+2*s)*binomial(abs(m)
)+2*s,abs(m)+s)*(-1)^s*(sin(t)/2)^(abs(m)+2*s)*cos(t)^(a-abs(m)-2*s)
,s=0..floor((a-abs(m))/2))],'+')
)
end;
```

```
Hx:=proc(a::integer,m::integer,t)
RETURN(sqrt((a-abs(m))*!(a+abs(m)))/a!*I^(abs(m)-a)*K(a,m,t)
)
end;
```

```
Hx:=proc(a::integer,m::integer,t)
RETURN(sqrt((a-abs(m))*!(a+abs(m)))/a/(a+1))*I^(abs(m)-a)/(a-1)!*(K(a-
1,m-1,t)-K(a-1,m+1,t))
)
end;
```

```
Hy:=proc(a::integer,m::integer,t)
RETURN(sqrt((a-abs(m))*!(a+abs(m)))/a/(a+1))*I^(abs(m)-a)/(a-1)!*(cos(
t)*(K(a-1,m-1,t)+K(a-1,m+1,t))-2*I*sin(t)*K(a-1,m,t)
))
end;
```

```
signature:=proc(n::integer,L::list)
RETURN(convert(map((p->(L[p[1]]-L[p[2]]))/(p[1]-p[2])),choose(n,2)), '* ')
```

```

));
end;

l:=proc(aa::list,kk::list,P::list,T::list)
RETURN(signature(3,P)*Fx(aa[P[1]],T[3])*Fy(aa[P[2]],T[3])*Fz(aa[P[3]],
T[3])*Hx(aa[P[1]],kk[P[1]],T[2])*Hy(aa[P[2]],kk[P[2]],T[2])*Hz(aa[P[3]]
],kk[P[3]],T[2])
)
end;

Lambda:=proc(aa::list,kk::list,T::list)
RETURN(exp(-I*convert([seq(kk[i],i=1..3)],'+')*T[1])*
convert(map((x->l(aa,kk,x,T)),combinat[permute](3)),'+')
);
end;

Upsilon:=proc(aa::list,kk::list) local
resultat;
resultat:=(1/2*int(int(simplify(Lambda(aa,kk,[0,t2,t3]))*sinh(t3)^2*sin(t2
),t2=0..Pi),t3=0..infinity));
if has(resultat,limit) then
resultat:=limit(series(op(resultat)[1],t3=0,convert(aa,'+')+6),t3=0)
fi;
RETURN(resultat)
end;

liste:=proc(d::integer) local li,i;
li:=[op(map(X->[X[1],X[2],Upsilon(X[1],X[2])]),
(map(V->op(select(w->convert(w[2],'+')=0,[seq(seq(seq([V,[a,b,c]],a=-V
[1]..V[1]),b=-V[2]..V[2]),c=-V[3]..V[3]))),select(x->(nops(x)=3),part
ition(d) ))))]);
for i from 1 to nops(li) do print(li[i]);
od
end;

```



## Annexe C

# Pour le degré total de 3 à 11 – Résultats Maple V

**Remarque :** Les calculs ont été fait sans diviser par l'aire de  $\mathbb{S}^2$ . Pour avoir les véritables coefficients, il suffit de diviser les coefficients suivants par  $4\pi$ .

> liste(3);

$$\begin{aligned} & [[1, 1, 1], [1, 0, -1], \frac{1}{8} I \sqrt{3}] \\ & [[1, 1, 1], [0, 1, -1], -\frac{1}{8} I \sqrt{3}] \\ & [[1, 1, 1], [1, -1, 0], -\frac{1}{8} I \sqrt{3}] \\ & [[1, 1, 1], [0, 0, 0], 0] \\ & [[1, 1, 1], [-1, 1, 0], \frac{1}{8} I \sqrt{3}] \\ & [[1, 1, 1], [0, -1, 1], \frac{1}{8} I \sqrt{3}] \\ & [[1, 1, 1], [-1, 0, 1], -\frac{1}{8} I \sqrt{3}] \end{aligned}$$

> liste(5);

$$\begin{aligned} & [[1, 2, 2], [1, 1, -2], \frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\ & [[1, 2, 2], [0, 2, -2], -\frac{1}{36} I \sqrt{3}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[1, 2, 2], [1, 0, -1], \frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [0, 1, -1], -\frac{1}{72} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 2, 2], [-1, 2, -1], \frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 2, 2], [1, -1, 0], -\frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [0, 0, 0], 0] \\
& [[1, 2, 2], [-1, 1, 0], \frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [1, -2, 1], -\frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 2, 2], [0, -1, 1], \frac{1}{72} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 2, 2], [-1, 0, 1], -\frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [0, -2, 2], \frac{1}{36} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 2, 2], [-1, -1, 2], -\frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 1, 3], [1, 1, -2], 0] \\
& [[1, 1, 3], [1, 0, -1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [0, 1, -1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [1, -1, 0], 0] \\
& [[1, 1, 3], [0, 0, 0], 0] \\
& [[1, 1, 3], [-1, 1, 0], 0] \\
& [[1, 1, 3], [0, -1, 1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [-1, 0, 1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [-1, -1, 2], 0] \\
& [[1, 2, 2], [1, 1, -2], \frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 2, 2], [0, 2, -2], -\frac{1}{36} I \sqrt{3}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[1, 2, 2], [1, 0, -1], \frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [0, 1, -1], -\frac{1}{72} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 2, 2], [-1, 2, -1], \frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 2, 2], [1, -1, 0], -\frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [0, 0, 0], 0] \\
& [[1, 2, 2], [-1, 1, 0], \frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [1, -2, 1], -\frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 2, 2], [0, -1, 1], \frac{1}{72} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 2, 2], [-1, 0, 1], -\frac{1}{24} I] \\
& [[1, 2, 2], [0, -2, 2], \frac{1}{36} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 2, 2], [-1, -1, 2], -\frac{1}{72} I \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 1, 3], [1, 1, -2], 0] \\
& [[1, 1, 3], [1, 0, -1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [0, 1, -1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [1, -1, 0], 0] \\
& [[1, 1, 3], [0, 0, 0], 0] \\
& [[1, 1, 3], [-1, 1, 0], 0] \\
& [[1, 1, 3], [0, -1, 1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [-1, 0, 1], 0] \\
& [[1, 1, 3], [-1, -1, 2], 0]
\end{aligned}$$

> liste(7);

$$\begin{aligned}
& [[2, 2, 3], [2, 1, -3], \frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& [[2, 2, 3], [1, 2, -3], -\frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& [[2, 2, 3], [2, 0, -2], \frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 2, 3], [1, 1, -2], 0] \\
& [[2, 2, 3], [0, 2, -2], -\frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& [[2, 2, 3], [2, -1, -1], -\frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& \quad [[2, 2, 3], [1, 0, -1], \frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[2, 2, 3], [0, 1, -1], -\frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[2, 2, 3], [-1, 2, -1], \frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& \quad [[2, 2, 3], [2, -2, 0], \frac{1}{504} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 2, 3], [1, -1, 0], -\frac{1}{252} I \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 2, 3], [0, 0, 0], 0] \\
& \quad [[2, 2, 3], [-1, 1, 0], \frac{1}{252} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 2, 3], [-2, 2, 0], -\frac{1}{504} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 2, 3], [1, -2, 1], -\frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& \quad [[2, 2, 3], [0, -1, 1], \frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[2, 2, 3], [-1, 0, 1], -\frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& \quad [[2, 2, 3], [-2, 1, 1], \frac{1}{504} I \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& [[2, 2, 3], [0, -2, 2], \frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 2, 3], [-1, -1, 2], 0] \\
& [[2, 2, 3], [-2, 0, 2], -\frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& [[2, 2, 3], [-1, -2, 3], \frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& [[2, 2, 3], [-2, -1, 3], -\frac{1}{504} I \sqrt{5} \sqrt{7}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[1, 3, 3], [1, 2, -3], \frac{1}{96} I] \\
& [[1, 3, 3], [0, 3, -3], -\frac{1}{96} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 3, 3], [1, 1, -2], \frac{1}{288} I \sqrt{3} \sqrt{5}] \\
& [[1, 3, 3], [0, 2, -2], -\frac{1}{144} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 3, 3], [-1, 3, -2], \frac{1}{96} I] \\
& [[1, 3, 3], [1, 0, -1], \frac{1}{96} I \sqrt{2}] \\
& [[1, 3, 3], [0, 1, -1], -\frac{1}{288} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 3, 3], [-1, 2, -1], \frac{1}{288} I \sqrt{3} \sqrt{5}] \\
& [[1, 3, 3], [1, -1, 0], -\frac{1}{96} I \sqrt{2}] \\
& [[1, 3, 3], [0, 0, 0], 0] \\
& [[1, 3, 3], [-1, 1, 0], \frac{1}{96} I \sqrt{2}] \\
& [[1, 3, 3], [1, -2, 1], -\frac{1}{288} I \sqrt{3} \sqrt{5}] \\
& [[1, 3, 3], [0, -1, 1], \frac{1}{288} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 3, 3], [-1, 0, 1], -\frac{1}{96} I \sqrt{2}] \\
& [[1, 3, 3], [1, -3, 2], -\frac{1}{96} I] \\
& [[1, 3, 3], [0, -2, 2], \frac{1}{144} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 3, 3], [-1, -1, 2], -\frac{1}{288} I \sqrt{3} \sqrt{5}] \\
& [[1, 3, 3], [0, -3, 3], \frac{1}{96} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 3, 3], [-1, -2, 3], -\frac{1}{96} I] \\
& [[1, 2, 4], [1, 2, -3], 0] \\
& [[1, 2, 4], [1, 1, -2], 0]
\end{aligned}$$

$[[1, 2, 4], [0, 2, -2], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [1, 0, -1], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [0, 1, -1], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [-1, 2, -1], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [1, -1, 0], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [0, 0, 0], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [-1, 1, 0], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [1, -2, 1], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [0, -1, 1], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [-1, 0, 1], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [0, -2, 2], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [-1, -1, 2], 0]$   
 $[[1, 2, 4], [-1, -2, 3], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [1, 1, -2], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [1, 0, -1], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [0, 1, -1], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [1, -1, 0], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [0, 0, 0], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [-1, 1, 0], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [0, -1, 1], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [-1, 0, 1], 0]$   
 $[[1, 1, 5], [-1, -1, 2], 0]$

> liste(9);

$[[3, 3, 3], [3, 0, -3], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}]$   
 $[[3, 3, 3], [2, 1, -3], \frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}]$

$$[[3, 3, 3], [1, 2, -3], -\frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 3, 3], [0, 3, -3], \frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [3, -1, -2], \frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 3, 3], [2, 0, -2], \frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [1, 1, -2], 0]$$

$$[[3, 3, 3], [0, 2, -2], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [-1, 3, -2], -\frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 3, 3], [3, -2, -1], -\frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 3, 3], [2, -1, -1], 0]$$

$$[[3, 3, 3], [1, 0, -1], \frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [0, 1, -1], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [-1, 2, -1], 0]$$

$$[[3, 3, 3], [-2, 3, -1], \frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 3, 3], [3, -3, 0], \frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [2, -2, 0], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [1, -1, 0], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [0, 0, 0], 0]$$

$$[[3, 3, 3], [-1, 1, 0], \frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [-2, 2, 0], \frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [-3, 3, 0], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 3, 3], [2, -3, 1], -\frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 3, 3], [1, -2, 1], 0]$$

$$\begin{aligned}
& [[3, 3, 3], [0, -1, 1], \frac{1}{864} I \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 3], [-1, 0, 1], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}] \\
& \quad [[3, 3, 3], [-2, 1, 1], 0] \\
& [[3, 3, 3], [-3, 2, 1], \frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[3, 3, 3], [1, -3, 2], \frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& \quad [[3, 3, 3], [0, -2, 2], \frac{1}{864} I \sqrt{7}] \\
& \quad \quad [[3, 3, 3], [-1, -1, 2], 0] \\
& [[3, 3, 3], [-2, 0, 2], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 3], [-3, 1, 2], -\frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& \quad [[3, 3, 3], [0, -3, 3], -\frac{1}{864} I \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 3], [-1, -2, 3], \frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[3, 3, 3], [-2, -1, 3], -\frac{1}{864} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& \quad [[3, 3, 3], [-3, 0, 3], \frac{1}{864} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [2, 2, -4], \frac{1}{720} I \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[2, 3, 4], [1, 3, -4], -\frac{1}{720} I \sqrt{3} \sqrt{5}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [2, 1, -3], \frac{1}{288} I \sqrt{2}] \\
& [[2, 3, 4], [1, 2, -3], -\frac{1}{1440} I \sqrt{5}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [0, 3, -3], -\frac{1}{480} I \sqrt{5}] \\
& [[2, 3, 4], [2, 0, -2], \frac{1}{1008} I \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [1, 1, -2], \frac{1}{2016} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [0, 2, -2], -\frac{1}{2520} I \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{5}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[2, 3, 4], [-1, 3, -2], \frac{1}{3360} I \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{5}] \\
& [[2, 3, 4], [2, -1, -1], -\frac{1}{1008} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[2, 3, 4], [1, 0, -1], \frac{1}{2016} I \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [0, 1, -1], -\frac{1}{2016} I \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [-1, 2, -1], \frac{1}{1440} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [-2, 3, -1], -\frac{1}{10080} I \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [2, -2, 0], \frac{1}{1008} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [1, -1, 0], -\frac{1}{2016} I \sqrt{2} \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [0, 0, 0], 0] \\
& [[2, 3, 4], [-1, 1, 0], \frac{1}{2016} I \sqrt{2} \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [-2, 2, 0], -\frac{1}{1008} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [2, -3, 1], \frac{1}{10080} I \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [1, -2, 1], -\frac{1}{1440} I \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [0, -1, 1], \frac{1}{2016} I \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [-1, 0, 1], -\frac{1}{2016} I \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [-2, 1, 1], \frac{1}{1008} I \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[2, 3, 4], [1, -3, 2], -\frac{1}{3360} I \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{5}] \\
& [[2, 3, 4], [0, -2, 2], \frac{1}{2520} I \sqrt{3} \sqrt{7} \sqrt{5}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [-1, -1, 2], -\frac{1}{2016} I \sqrt{7}] \\
& [[2, 3, 4], [-2, 0, 2], -\frac{1}{1008} I \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 3, 4], [0, -3, 3], \frac{1}{480} I \sqrt{5}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[2, 3, 4], [-1, -2, 3], \frac{1}{1440} I \sqrt{5}] \\
& [[2, 3, 4], [-2, -1, 3], -\frac{1}{288} I \sqrt{2}] \\
& [[2, 3, 4], [-1, -3, 4], \frac{1}{720} I \sqrt{3} \sqrt{5}] \\
& [[2, 3, 4], [-2, -2, 4], -\frac{1}{720} I \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[1, 4, 4], [1, 3, -4], \frac{1}{400} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [0, 4, -4], -\frac{1}{200} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [1, 2, -3], \frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& [[1, 4, 4], [0, 3, -3], -\frac{3}{800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [-1, 4, -3], \frac{1}{400} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [1, 1, -2], \frac{3}{800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [0, 2, -2], -\frac{1}{400} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [-1, 3, -2], \frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{7}] \\
& [[1, 4, 4], [1, 0, -1], \frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[1, 4, 4], [0, 1, -1], -\frac{1}{800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [-1, 2, -1], \frac{3}{800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [1, -1, 0], -\frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[1, 4, 4], [0, 0, 0], 0] \\
& [[1, 4, 4], [-1, 1, 0], \frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[1, 4, 4], [1, -2, 1], -\frac{3}{800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [0, -1, 1], \frac{1}{800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 4, 4], [-1, 0, 1], -\frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}]
\end{aligned}$$

$$[[1, 4, 4], [1, -3, 2], -\frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{7}]$$

$$[[1, 4, 4], [0, -2, 2], \frac{1}{400} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 4, 4], [-1, -1, 2], -\frac{3}{800} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 4, 4], [1, -4, 3], -\frac{1}{400} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 4, 4], [0, -3, 3], \frac{3}{800} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 4, 4], [-1, -2, 3], -\frac{1}{800} I \sqrt{3} \sqrt{7}]$$

$$[[1, 4, 4], [0, -4, 4], \frac{1}{200} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 4, 4], [-1, -3, 4], -\frac{1}{400} I \sqrt{3}]$$

$$[[2, 2, 5], [2, 2, -4], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [2, 1, -3], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [1, 2, -3], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [2, 0, -2], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [1, 1, -2], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [0, 2, -2], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [2, -1, -1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [1, 0, -1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [0, 1, -1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-1, 2, -1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [2, -2, 0], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [1, -1, 0], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [0, 0, 0], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-1, 1, 0], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-2, 2, 0], 0]$$



$$[[2, 2, 5], [1, -2, 1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [0, -1, 1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-1, 0, 1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-2, 1, 1], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [0, -2, 2], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-1, -1, 2], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-2, 0, 2], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-1, -2, 3], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-2, -1, 3], 0]$$

$$[[2, 2, 5], [-2, -2, 4], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [1, 3, -4], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [1, 2, -3], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [0, 3, -3], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [1, 1, -2], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [0, 2, -2], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [-1, 3, -2], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [1, 0, -1], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [0, 1, -1], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [-1, 2, -1], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [1, -1, 0], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [0, 0, 0], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [-1, 1, 0], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [1, -2, 1], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [0, -1, 1], 0]$$

$$[[1, 3, 5], [-1, 0, 1], 0]$$

$[[1, 3, 5], [1, -3, 2], 0]$

$[[1, 3, 5], [0, -2, 2], 0]$

$[[1, 3, 5], [-1, -1, 2], 0]$

$[[1, 3, 5], [0, -3, 3], 0]$

$[[1, 3, 5], [-1, -2, 3], 0]$

$[[1, 3, 5], [-1, -3, 4], 0]$

$[[1, 2, 6], [1, 2, -3], 0]$

$[[1, 2, 6], [1, 1, -2], 0]$

$[[1, 2, 6], [0, 2, -2], 0]$

$[[1, 2, 6], [1, 0, -1], 0]$

$[[1, 2, 6], [0, 1, -1], 0]$

$[[1, 2, 6], [-1, 2, -1], 0]$

$[[1, 2, 6], [1, -1, 0], 0]$

$[[1, 2, 6], [0, 0, 0], 0]$

$[[1, 2, 6], [-1, 1, 0], 0]$

$[[1, 2, 6], [1, -2, 1], 0]$

$[[1, 2, 6], [0, -1, 1], 0]$

$[[1, 2, 6], [-1, 0, 1], 0]$

$[[1, 2, 6], [0, -2, 2], 0]$

$[[1, 2, 6], [-1, -1, 2], 0]$

$[[1, 2, 6], [-1, -2, 3], 0]$

$[[1, 1, 7], [1, 1, -2], 0]$

$[[1, 1, 7], [1, 0, -1], 0]$

$[[1, 1, 7], [0, 1, -1], 0]$

$[[1, 1, 7], [1, -1, 0], 0]$

$$[[1, 1, 7], [0, 0, 0], 0]$$

$$[[1, 1, 7], [-1, 1, 0], 0]$$

$$[[1, 1, 7], [0, -1, 1], 0]$$

$$[[1, 1, 7], [-1, 0, 1], 0]$$

$$[[1, 1, 7], [-1, -1, 2], 0]$$

> liste(11);

$$[[3, 4, 4], [3, 1, -4], -\frac{3}{8800} I \sqrt{5} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [2, 2, -4], \frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [1, 3, -4], -\frac{3}{8800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [0, 4, -4], \frac{3}{4400} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 4, 4], [3, 0, -3], -\frac{3}{1760} I]$$

$$[[3, 4, 4], [2, 1, -3], \frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [1, 2, -3], -\frac{3}{8800} I \sqrt{2} \sqrt{3}]$$

$$[[3, 4, 4], [0, 3, -3], -\frac{3}{8800} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 4, 4], [-1, 4, -3], -\frac{3}{8800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [3, -1, -2], \frac{3}{12320} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [2, 0, -2], \frac{3}{12320} I \sqrt{7} \sqrt{3}]$$

$$[[3, 4, 4], [1, 1, -2], \frac{3}{30800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [0, 2, -2], -\frac{39}{61600} I \sqrt{7}]$$

$$[[3, 4, 4], [-1, 3, -2], -\frac{3}{8800} I \sqrt{2} \sqrt{3}]$$

$$[[3, 4, 4], [-2, 4, -2], \frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}]$$

$$[[3, 4, 4], [3, -2, -1], -\frac{3}{12320} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{2}]$$

$$\begin{aligned}
& [[3, 4, 4], [2, -1, -1], 0] \\
& [[3, 4, 4], [1, 0, -1], \frac{9}{61600} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& [[3, 4, 4], [0, 1, -1], -\frac{27}{61600} I \sqrt{7}] \\
& [[3, 4, 4], [-1, 2, -1], \frac{3}{30800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [-2, 3, -1], \frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [-3, 4, -1], -\frac{3}{8800} I \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [3, -3, 0], \frac{3}{1760} I] \\
& [[3, 4, 4], [2, -2, 0], -\frac{3}{12320} I \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& [[3, 4, 4], [1, -1, 0], -\frac{9}{61600} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& [[3, 4, 4], [0, 0, 0], 0] \\
& [[3, 4, 4], [-1, 1, 0], \frac{9}{61600} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& [[3, 4, 4], [-2, 2, 0], \frac{3}{12320} I \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& [[3, 4, 4], [-3, 3, 0], -\frac{3}{1760} I] \\
& [[3, 4, 4], [3, -4, 1], \frac{3}{8800} I \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [2, -3, 1], -\frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [1, -2, 1], -\frac{3}{30800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [0, -1, 1], \frac{27}{61600} I \sqrt{7}] \\
& [[3, 4, 4], [-1, 0, 1], -\frac{9}{61600} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
& [[3, 4, 4], [-2, 1, 1], 0] \\
& [[3, 4, 4], [-3, 2, 1], \frac{3}{12320} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [2, -4, 2], -\frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[3, 4, 4], [1, -3, 2], \frac{3}{8800} I \sqrt{2} \sqrt{3}] \\
& [[3, 4, 4], [0, -2, 2], \frac{39}{61600} I \sqrt{7}] \\
[[3, 4, 4], [-1, -1, 2], -\frac{3}{30800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [-2, 0, 2], -\frac{3}{12320} I \sqrt{7} \sqrt{3}] \\
[[3, 4, 4], [-3, 1, 2], -\frac{3}{12320} I \sqrt{5} \sqrt{7} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [1, -4, 3], \frac{3}{8800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [0, -3, 3], \frac{3}{8800} I \sqrt{7}] \\
[[3, 4, 4], [-1, -2, 3], \frac{3}{8800} I \sqrt{2} \sqrt{3}] \\
[[3, 4, 4], [-2, -1, 3], -\frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [-3, 0, 3], \frac{3}{1760} I] \\
& [[3, 4, 4], [0, -4, 4], -\frac{3}{4400} I \sqrt{7}] \\
[[3, 4, 4], [-1, -3, 4], \frac{3}{8800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
[[3, 4, 4], [-2, -2, 4], -\frac{3}{8800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
& [[3, 4, 4], [-3, -1, 4], \frac{3}{8800} I \sqrt{5} \sqrt{2}] \\
[[3, 3, 5], [3, 2, -5], \frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
[[3, 3, 5], [2, 3, -5], -\frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
[[3, 3, 5], [3, 1, -4], \frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
& [[3, 3, 5], [2, 2, -4], 0] \\
[[3, 3, 5], [1, 3, -4], -\frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
& [[3, 3, 5], [3, 0, -3], \frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
[[3, 3, 5], [2, 1, -3], \frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[3, 3, 5], [1, 2, -3], -\frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [0, 3, -3], -\frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
[[3, 3, 5], [3, -1, -2], -\frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [2, 0, -2], \frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [1, 1, -2], 0] \\
& [[3, 3, 5], [0, 2, -2], -\frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
[[3, 3, 5], [-1, 3, -2], \frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [3, -2, -1], \frac{1}{9504} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
[[3, 3, 5], [2, -1, -1], -\frac{1}{3168} I \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [1, 0, -1], \frac{1}{9504} I \sqrt{11} \sqrt{10}] \\
[[3, 3, 5], [0, 1, -1], -\frac{1}{9504} I \sqrt{11} \sqrt{10}] \\
& [[3, 3, 5], [-1, 2, -1], \frac{1}{3168} I \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
[[3, 3, 5], [-2, 3, -1], -\frac{1}{9504} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [3, -3, 0], -\frac{1}{9504} I \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [2, -2, 0], \frac{1}{2376} I \sqrt{11}] \\
[[3, 3, 5], [1, -1, 0], -\frac{5}{9504} I \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [0, 0, 0], 0] \\
& [[3, 3, 5], [-1, 1, 0], \frac{5}{9504} I \sqrt{11}] \\
[[3, 3, 5], [-2, 2, 0], -\frac{1}{2376} I \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [-3, 3, 0], \frac{1}{9504} I \sqrt{11}] \\
[[3, 3, 5], [2, -3, 1], \frac{1}{9504} I \sqrt{5} \sqrt{11}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[3, 3, 5], [1, -2, 1], -\frac{1}{3168} I \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [0, -1, 1], \frac{1}{9504} I \sqrt{11} \sqrt{10}] \\
& [[3, 3, 5], [-1, 0, 1], -\frac{1}{9504} I \sqrt{11} \sqrt{10}] \\
& [[3, 3, 5], [-2, 1, 1], \frac{1}{3168} I \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [-3, 2, 1], -\frac{1}{9504} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[3, 3, 5], [1, -3, 2], -\frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [0, -2, 2], \frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& \quad [[3, 3, 5], [-1, -1, 2], 0] \\
& [[3, 3, 5], [-2, 0, 2], -\frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [-3, 1, 2], \frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [0, -3, 3], \frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [-1, -2, 3], \frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [-2, -1, 3], -\frac{1}{9504} I \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [-3, 0, 3], -\frac{1}{4752} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[3, 3, 5], [-1, -3, 4], \frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
& \quad [[3, 3, 5], [-2, -2, 4], 0] \\
& [[3, 3, 5], [-3, -1, 4], -\frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
& [[3, 3, 5], [-2, -3, 5], \frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
& [[3, 3, 5], [-3, -2, 5], -\frac{1}{9504} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{11} \sqrt{2}] \\
& \quad [[2, 4, 5], [2, 3, -5], \frac{1}{3960} I \sqrt{6} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [1, 4, -5], -\frac{1}{1980} I \sqrt{3} \sqrt{11}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[2, 4, 5], [2, 2, -4], \frac{1}{19800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& \quad [[2, 4, 5], [1, 3, -4], -\frac{1}{9900} I \sqrt{5} \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [0, 4, -4], -\frac{1}{3300} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [2, 1, -3], \frac{1}{19800} I \sqrt{6} \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [1, 2, -3], 0] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [0, 3, -3], -\frac{1}{3300} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-1, 4, -3], \frac{1}{9900} I \sqrt{5} \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [2, 0, -2], \frac{1}{3960} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [1, 1, -2], \frac{1}{19800} I \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [0, 2, -2], -\frac{1}{19800} I \sqrt{11} \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [-1, 3, -2], \frac{1}{3960} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-2, 4, -2], -\frac{1}{19800} I \sqrt{2} \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [2, -1, -1], -\frac{1}{3960} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& \quad \quad \quad [[2, 4, 5], [1, 0, -1], \frac{1}{1980} I \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [0, 1, -1], -\frac{1}{19800} I \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{6}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [-1, 2, -1], \frac{1}{4950} I \sqrt{2} \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-2, 3, -1], -\frac{1}{19800} I \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [2, -2, 0], \frac{1}{3960} I \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [1, -1, 0], -\frac{1}{3960} I \sqrt{6} \sqrt{11}] \\
& \quad \quad \quad [[2, 4, 5], [0, 0, 0], 0] \\
& \quad \quad [[2, 4, 5], [-1, 1, 0], \frac{1}{3960} I \sqrt{6} \sqrt{11}]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& [[2, 4, 5], [-2, 2, 0], -\frac{1}{3960} I \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [2, -3, 1], \frac{1}{19800} I \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [1, -2, 1], -\frac{1}{4950} I \sqrt{2} \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [0, -1, 1], \frac{1}{19800} I \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{6}] \\
& [[2, 4, 5], [-1, 0, 1], -\frac{1}{1980} I \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-2, 1, 1], \frac{1}{3960} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [2, -4, 2], \frac{1}{19800} I \sqrt{2} \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [1, -3, 2], -\frac{1}{3960} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [0, -2, 2], \frac{1}{19800} I \sqrt{11} \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [-1, -1, 2], -\frac{1}{19800} I \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [-2, 0, 2], -\frac{1}{3960} I \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [1, -4, 3], -\frac{1}{9900} I \sqrt{5} \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [0, -3, 3], \frac{1}{3300} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-1, -2, 3], 0] \\
& [[2, 4, 5], [-2, -1, 3], -\frac{1}{19800} I \sqrt{6} \sqrt{5} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [0, -4, 4], \frac{1}{3300} I \sqrt{5} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-1, -3, 4], \frac{1}{9900} I \sqrt{5} \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-2, -2, 4], -\frac{1}{19800} I \sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{2} \sqrt{11} \sqrt{7}] \\
& [[2, 4, 5], [-1, -4, 5], \frac{1}{1980} I \sqrt{3} \sqrt{11}] \\
& [[2, 4, 5], [-2, -3, 5], -\frac{1}{3960} I \sqrt{6} \sqrt{11}] \\
& [[1, 5, 5], [1, 4, -5], \frac{1}{1800} I \sqrt{3} \sqrt{5}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [[1, 5, 5], [0, 5, -5], -\frac{1}{360} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [1, 3, -4], \frac{1}{600} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [0, 4, -4], -\frac{1}{450} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [-1, 5, -4], \frac{1}{1800} I \sqrt{3} \sqrt{5}] \\
& [[1, 5, 5], [1, 2, -3], \frac{1}{300} I] \\
& [[1, 5, 5], [0, 3, -3], -\frac{1}{600} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [-1, 4, -3], \frac{1}{600} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [1, 1, -2], \frac{1}{1800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 5, 5], [0, 2, -2], -\frac{1}{900} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [-1, 3, -2], \frac{1}{300} I] \\
& [[1, 5, 5], [1, 0, -1], \frac{1}{600} I \sqrt{5}] \\
& [[1, 5, 5], [0, 1, -1], -\frac{1}{1800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [-1, 2, -1], \frac{1}{1800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 5, 5], [1, -1, 0], -\frac{1}{600} I \sqrt{5}] \\
& [[1, 5, 5], [0, 0, 0], 0] \\
& [[1, 5, 5], [-1, 1, 0], \frac{1}{600} I \sqrt{5}] \\
& [[1, 5, 5], [1, -2, 1], -\frac{1}{1800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}] \\
& [[1, 5, 5], [0, -1, 1], \frac{1}{1800} I \sqrt{3}] \\
& [[1, 5, 5], [-1, 0, 1], -\frac{1}{600} I \sqrt{5}] \\
& [[1, 5, 5], [1, -3, 2], -\frac{1}{300} I] \\
& [[1, 5, 5], [0, -2, 2], \frac{1}{900} I \sqrt{3}]
\end{aligned}$$

$$[[1, 5, 5], [-1, -1, 2], -\frac{1}{1800} I \sqrt{7} \sqrt{3} \sqrt{2}]$$

$$[[1, 5, 5], [1, -4, 3], -\frac{1}{600} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 5, 5], [0, -3, 3], \frac{1}{600} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 5, 5], [-1, -2, 3], -\frac{1}{300} I]$$

$$[[1, 5, 5], [1, -5, 4], -\frac{1}{1800} I \sqrt{3} \sqrt{5}]$$

$$[[1, 5, 5], [0, -4, 4], \frac{1}{450} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 5, 5], [-1, -3, 4], -\frac{1}{600} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 5, 5], [0, -5, 5], \frac{1}{360} I \sqrt{3}]$$

$$[[1, 5, 5], [-1, -4, 5], -\frac{1}{1800} I \sqrt{3} \sqrt{5}]$$

$$[[2, 3, 6], [2, 3, -5], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [2, 2, -4], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [1, 3, -4], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [2, 1, -3], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [1, 2, -3], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [0, 3, -3], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [2, 0, -2], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [1, 1, -2], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [0, 2, -2], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [-1, 3, -2], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [2, -1, -1], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [1, 0, -1], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [0, 1, -1], 0]$$

$$[[2, 3, 6], [-1, 2, -1], 0]$$

[[2, 3, 6], [-2, 3, -1], 0]  
[[2, 3, 6], [2, -2, 0], 0]  
[[2, 3, 6], [1, -1, 0], 0]  
[[2, 3, 6], [0, 0, 0], 0]  
[[2, 3, 6], [-1, 1, 0], 0]  
[[2, 3, 6], [-2, 2, 0], 0]  
[[2, 3, 6], [2, -3, 1], 0]  
[[2, 3, 6], [1, -2, 1], 0]  
[[2, 3, 6], [0, -1, 1], 0]  
[[2, 3, 6], [-1, 0, 1], 0]  
[[2, 3, 6], [-2, 1, 1], 0]  
[[2, 3, 6], [1, -3, 2], 0]  
[[2, 3, 6], [0, -2, 2], 0]  
[[2, 3, 6], [-1, -1, 2], 0]  
[[2, 3, 6], [-2, 0, 2], 0]  
[[2, 3, 6], [0, -3, 3], 0]  
[[2, 3, 6], [-1, -2, 3], 0]  
[[2, 3, 6], [-2, -1, 3], 0]  
[[2, 3, 6], [-1, -3, 4], 0]  
[[2, 3, 6], [-2, -2, 4], 0]  
[[2, 3, 6], [-2, -3, 5], 0]  
[[1, 4, 6], [1, 4, -5], 0]  
[[1, 4, 6], [1, 3, -4], 0]  
[[1, 4, 6], [0, 4, -4], 0]  
[[1, 4, 6], [1, 2, -3], 0]

$[[1, 4, 6], [0, 3, -3], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, 4, -3], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [1, 1, -2], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [0, 2, -2], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, 3, -2], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [1, 0, -1], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [0, 1, -1], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, 2, -1], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [1, -1, 0], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [0, 0, 0], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, 1, 0], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [1, -2, 1], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [0, -1, 1], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, 0, 1], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [1, -3, 2], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [0, -2, 2], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, -1, 2], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [1, -4, 3], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [0, -3, 3], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, -2, 3], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [0, -4, 4], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, -3, 4], 0]$   
 $[[1, 4, 6], [-1, -4, 5], 0]$   
 $[[2, 2, 7], [2, 2, -4], 0]$   
 $[[2, 2, 7], [2, 1, -3], 0]$

[[2, 2, 7], [1, 2, -3], 0]  
[[2, 2, 7], [2, 0, -2], 0]  
[[2, 2, 7], [1, 1, -2], 0]  
[[2, 2, 7], [0, 2, -2], 0]  
[[2, 2, 7], [2, -1, -1], 0]  
[[2, 2, 7], [1, 0, -1], 0]  
[[2, 2, 7], [0, 1, -1], 0]  
[[2, 2, 7], [-1, 2, -1], 0]  
[[2, 2, 7], [2, -2, 0], 0]  
[[2, 2, 7], [1, -1, 0], 0]  
[[2, 2, 7], [0, 0, 0], 0]  
[[2, 2, 7], [-1, 1, 0], 0]  
[[2, 2, 7], [-2, 2, 0], 0]  
[[2, 2, 7], [1, -2, 1], 0]  
[[2, 2, 7], [0, -1, 1], 0]  
[[2, 2, 7], [-1, 0, 1], 0]  
[[2, 2, 7], [-2, 1, 1], 0]  
[[2, 2, 7], [0, -2, 2], 0]  
[[2, 2, 7], [-1, -1, 2], 0]  
[[2, 2, 7], [-2, 0, 2], 0]  
[[2, 2, 7], [-1, -2, 3], 0]  
[[2, 2, 7], [-2, -1, 3], 0]  
[[2, 2, 7], [-2, -2, 4], 0]  
[[1, 3, 7], [1, 3, -4], 0]  
[[1, 3, 7], [1, 2, -3], 0]

$[[1, 3, 7], [0, 3, -3], 0]$

$[[1, 3, 7], [1, 1, -2], 0]$

$[[1, 3, 7], [0, 2, -2], 0]$

$[[1, 3, 7], [-1, 3, -2], 0]$

$[[1, 3, 7], [1, 0, -1], 0]$

$[[1, 3, 7], [0, 1, -1], 0]$

$[[1, 3, 7], [-1, 2, -1], 0]$

$[[1, 3, 7], [1, -1, 0], 0]$

$[[1, 3, 7], [0, 0, 0], 0]$

$[[1, 3, 7], [-1, 1, 0], 0]$

$[[1, 3, 7], [1, -2, 1], 0]$

$[[1, 3, 7], [0, -1, 1], 0]$

$[[1, 3, 7], [-1, 0, 1], 0]$

$[[1, 3, 7], [1, -3, 2], 0]$

$[[1, 3, 7], [0, -2, 2], 0]$

$[[1, 3, 7], [-1, -1, 2], 0]$

$[[1, 3, 7], [0, -3, 3], 0]$

$[[1, 3, 7], [-1, -2, 3], 0]$

$[[1, 3, 7], [-1, -3, 4], 0]$

$[[1, 2, 8], [1, 2, -3], 0]$

$[[1, 2, 8], [1, 1, -2], 0]$

$[[1, 2, 8], [0, 2, -2], 0]$

$[[1, 2, 8], [1, 0, -1], 0]$

$[[1, 2, 8], [0, 1, -1], 0]$

$[[1, 2, 8], [-1, 2, -1], 0]$

$[[1, 2, 8], [1, -1, 0], 0]$  $[[1, 2, 8], [0, 0, 0], 0]$  $[[1, 2, 8], [-1, 1, 0], 0]$  $[[1, 2, 8], [1, -2, 1], 0]$  $[[1, 2, 8], [0, -1, 1], 0]$  $[[1, 2, 8], [-1, 0, 1], 0]$  $[[1, 2, 8], [0, -2, 2], 0]$  $[[1, 2, 8], [-1, -1, 2], 0]$  $[[1, 2, 8], [-1, -2, 3], 0]$  $[[1, 1, 9], [1, 1, -2], 0]$  $[[1, 1, 9], [1, 0, -1], 0]$  $[[1, 1, 9], [0, 1, -1], 0]$  $[[1, 1, 9], [1, -1, 0], 0]$  $[[1, 1, 9], [0, 0, 0], 0]$  $[[1, 1, 9], [-1, 1, 0], 0]$  $[[1, 1, 9], [0, -1, 1], 0]$  $[[1, 1, 9], [-1, 0, 1], 0]$  $[[1, 1, 9], [-1, -1, 2], 0]$





# Bibliographie

- [Be] A.F. BEARDON, *The geometry of discrete groups*, Graduate texts in Math., Springer-Verlag, New-York 91 (1983).
- [BP] R. BENEDETTI, C. PETRONIO *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, Springer-Verlag (1992).
- [BCG] G. BESSON, G. COURTOIS, S.GALLOT, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, GAFA, vol. 5, n° 5 (1995).
- [C] A. CONNES, *Non-commutative differential geometry*, Pub. Math. IHES, vol. 62, 1986.
- [EP] D.B.A. EPSTEIN, R.C. PENNER, *Euclidean decomposition of non-compact hyperbolic manifolds*, J.Diff.Geom. vol.27, n°1 (1988), 67-80.
- [GHL] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, 1993.
- [GM] I.M. GEL'FAND, R.A. MINLOS, Z.Ya. SHAPIRO, *Representation of the rotation and Lorentz groups and their applications*, Pergamon Press, 1963.
- [HM] U. HAAGERUP, H.J. MUNKHOLM, *Simplicies of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space*, Acta.Math. 147 (1981), 1-11.
- [K1] R. KELLERHALS, *On the volume of hyperbolic polyhedra*, Math. Ann. 285 (1989), 541-569.
- [K2] R. KELLERHALS, *Regular simplicies and lower volume bounds for hyperbolic  $n$ -manifolds*, Annals of Global Analysis and Geometry, 13 (1995), 377-392.
- [K3] R. KELLERHALS, *Volumes of cusped hyperbolic manifolds*, Topology 37, n°4 (1998), 719-734.
- [M1] J. MILNOR, *How to compute volume in hyperbolic space*, Oeuvres complètes.
- [M2] J. MILNOR, *Hyperbolic Geometry : the first 150 years*, Bull.AMS 6 (1982), 9-24 et Oeuvres complètes p 245-260.
- [M3] J. MILNOR, *The Schläfli differential equality*, Oeuvres complètes.

- [NZ] W.D. NEUMANN, D. ZAGIER, *Volumes of hyperbolic three-manifolds*, Topology, vol. 24, n°3 (1985), 307-332.
- [P] N. PEYERIMHOFF, *Isoperimetric properties in symmetric spaces of noncompact type*, Thèse d'habilitation, Université de Bochum, Avril 2000.
- [R] J.G. RATCLIFFE, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer Verlag.
- [S] G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, AMS 1959.
- [V0] N.Ja. VILENKIN, *Special functions and the theory of group representations*, Translations of mathematical monographs vol. 22 – AMS 1968.
- [V1] N.Ja. VILENKIN, *Representation of Lie groups and special functions, vol. 1*. Kluwer Academic Publishers.
- [V2] N.Ja. VILENKIN, *Representation of Lie groups and special functions, vol. 2*. Kluwer Academic Publishers.