



**HAL**  
open science

# conception et réalisation d'un gyromètre à atomes froids fondé sur l'effet Sagnac pour les ondes de matière

David Holleville

## ► To cite this version:

David Holleville. conception et réalisation d'un gyromètre à atomes froids fondé sur l'effet Sagnac pour les ondes de matière. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2001. Français. NNT: . tel-00001098

**HAL Id: tel-00001098**

**<https://theses.hal.science/tel-00001098v1>**

Submitted on 12 Feb 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse présentée pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences  
de l'Université Paris XI

par

**David HOLLEVILLE**

Sujet :

CONCEPTION ET RÉALISATION D'UN GYROMÈTRE  
À ATOMES FROIDS FONDÉ SUR L'EFFET SAGNAC POUR LES  
ONDES DE MATIÈRES

Soutenue le 27 septembre 2001 devant le jury composé de :

|     |             |                    |
|-----|-------------|--------------------|
| MM. | A. Aspect   | Rapporteur         |
|     | J. Vigué    | Rapporteur         |
|     | J.T. Audren | Examineur          |
|     | Ch. Bordé   | Examineur          |
|     | Ch. Delsart | Examineur          |
|     | N. Dimarcq  | Directeur de thèse |
|     | E. Rasel    | Membre invité      |



**REMERCIEMENTS :**

Mon travail de thèse s'est déroulé au Laboratoire de l'Horloge Atomique, situé sur le campus de l'Université d'Orsay les trois premières années, puis sur le campus de l'Observatoire de Paris la dernière année. Je remercie les directeurs successifs du LHA Michel DESAINTFUSCIEN et Michel GRANVAUD pour m'avoir accueilli et permis de travailler dans de bonnes conditions, malgré les désagréments causés par le déménagement. A son arrivée à Paris, le LHA a été intégré comme équipe du DANOF-UMR 8630. Je remercie sa directrice, Nicole CAPITAINÉ pour sa disponibilité et son efficacité.

Je remercie chaleureusement les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, et plus particulièrement Christian DELSART pour avoir présidé ce jury. Un grand merci à Alain ASPECT et à Jacques VIGUÉ qui n'ont pas hésité une seconde à être rapporteurs de cette thèse, malgré le travail que cela représente, et pour les précieuses remarques qu'ils ont apportées sur le manuscrit. Jean-Thierry AUDREN, Christian BORDÉ et Ernst M. RASEL m'ont fait le plaisir de participer à ce jury et je les en remercie sincèrement.

Le projet de gyromètre à atomes froids a été dirigé par Noël DIMARCQ avec qui j'ai eu le bonheur de travailler. Il a su donner à ce projet l'impulsion nécessaire pour le faire démarrer, puis pour le faire vivre auprès des différents organismes financiers (DGA, CNES, BNM). Il s'est investi sans compter dans la survie du LHA, afin que les doctorants et autres personnels puissent travailler correctement, et que le rapprochement avec le LPTF se fasse dans les meilleures conditions possibles. Je le remercie profondément pour tout cela, le LHA lui doit énormément. Le côtoyer quotidiennement est un grand plaisir et travailler avec lui est un véritable enrichissement personnel. Il a su me stimuler et me motiver pour que, même dans les moments les plus difficiles, le travail soit toujours un plaisir. Sa conception de la recherche, pluridisciplinaire et technologique, est à l'origine de la plupart des astuces techniques du Gyro. Son enthousiasme, son dynamisme, son imagination débordante et sa gentillesse n'ont toujours pas fini de m'impressionner, et je suis très fier d'être le premier doctorant dont Noël soit officiellement le directeur de thèse.

J'ai eu la chance extrême de travailler trois années avec Pierre PETIT, avant qu'il ne parte pour une retraite bien méritée. Concepteur de génie, personne ne connaît mieux le tube Gyro que lui. Il m'a initié aux techniques du vide, aux hyperfréquences, au magnétisme, à la mécanique, à la thermique, à la résistance des matériaux et à bien d'autres choses encore. Il m'a également donné le goût de la technique et de la « belle mécanique ». Sa rigueur, sa ténacité et sa modestie restent pour moi un modèle. Si je peux dire que la thèse a été pour moi un lieu d'apprentissage, c'est en partie à lui que je le dois. Même si nous avons eu ensemble des moments parfois difficiles, travailler à ses côtés restera pour moi un grand souvenir, rempli à la fois de plaisir et de nostalgie.

L'équipe Gyro, c'est aussi Arnaud LANDRAGIN. Il a su s'intégrer dans l'équipe existante, et c'est rapidement révélé comme une des pièces maîtresses. Expérimentateur hors du commun, il possède une faculté à déterminer les problèmes et à concevoir les solutions, qui

nous a tiré d'embarras bien des fois. Travailler à ces côtés a été pour moi un enrichissement formidable ; il a été une source intarissable de réponses à toutes les questions scientifiques que je pouvais me poser, et même à celles que je ne me posais pas !

La présence d'André CLAIRON dans l'équipe a également été une grande chance pour moi. Ses connaissances de la métrologie, des asservissements, des lasers, des matériaux et de tout ce qui fait nos manip, semblent illimitées, et pour chaque problème qui s'est posé, André a toujours eu une solution à proposer.

J'ai eu la chance de travailler également avec Jérôme FILS. Sa double compétence théorique / expérimentale a largement contribué à l'avancement du gyro, et sa prise en charge de certaines parties de la manip a constitué un soutien important pour moi.

J'ai profité de la collaboration de Philippe BOUYER sur le projet. Son expérience sur le gyromètre atomique américain a été pour nous d'un grand secours lors de la conception de notre appareil ; et son dynamisme et son enthousiasme au cours de nos réunions ont largement contribué à la stimulation du groupe.

Je ne pourrais assez remercier Christian BORDÉ, l'un des pères de l'interférométrie atomique, d'avoir bien voulu collaborer avec nous. Tous les outils et les formalismes qu'il a développés depuis vingt ans se sont révélés irremplaçables pour la compréhension et l'analyse de notre appareil. Son soutien à notre groupe face aux différents organismes de recherches a toujours été solide et déterminant, et son action auprès de la communauté scientifique et des organismes financeurs est à l'origine de la notoriété du projet Gyro.

La famille Gyro s'agrandit encore avec l'arrivée d'un nouveau membre, Florence YVER. C'est avec enthousiasme que nous l'avons accueilli pour son stage de DEA sur les bruits de phase des faisceaux Raman. C'est avec autant d'enthousiasme, mais avec la confiance en plus, que nous l'accueillons maintenant pour une thèse sur le projet Gyro, et je lui souhaite autant de plaisir à faire fonctionner cet appareil, que j'en ai eu à le réaliser.

La conception et la réalisation du gyromètre ont demandé un énorme effort de mécanique qui a été assuré de façon infailible par les mécaniciens du LHA : Daniel GUITARD et Jacques DUPONT. La dextérité et le savoir-faire de Daniel en font à mes yeux un véritable artiste et un magicien qui m'a tiré d'embarras bien des fois pour un taraud cassé ou pour un trou percé trop loin. Sa gentillesse et sa disponibilité m'ont permis de m'initier aux joies de la réalisation mécanique et c'est toujours avec beaucoup de plaisir et d'émerveillement que je travaille avec lui, ou même que je le regarde juste travailler. Quant à Jacques, sa présence rassurante et le travail de force qu'il a réalisé sur la mécanique du Gyro ont été des ingrédients indispensables au bon déroulement de cette phase importante dans la réalisation de l'appareil.

Je remercie chaleureusement notre gestionnaire, Lina JEGAM-BOITIER pour tout le travail de l'ombre qu'elle effectue quotidiennement pour nous. Le code des marchés publics est lourd, complexe, rigide et intransigeant, mais c'est toujours avec beaucoup de plaisir que

je viens m'y confronter dans son bureau. Sans son efficacité et sa connaissance des labyrinthes administratif et financier, le gyromètre ne serait toujours qu'un tas de devis et d'offre de prix en attente de « régularisation », de « passage de marché » ou de « mise en compétition ».

Ce projet de gyromètre à atomes froids a été supporté financièrement en grande partie par la DGA. Je remercie Eric PLESKA pour avoir assuré l'interface entre le laboratoire et la DGA et de nous avoir permis ainsi de travailler dans de bonnes conditions.

Je remercie également le CNRS et le BNM pour le soutien financier qu'ils nous ont apporté.

La bourse BDI dont j'ai profité au cours de ma thèse a été cofinancée par SFIM-Industrie, puis par SAGEM. Je remercie mon « parrain SFIM », Jean-Thierry AUDREN qui m'a fait confiance pour mener à bien ce projet. Ce cofinancement a constitué mon premier contact avec le monde industriel, et J.T. AUDREN a été un interlocuteur disponible et compréhensif. Même dans les périodes mouvementées de propriété industrielle, il a toujours su rester franc avec le laboratoire et je l'en remercie.

La collaboration industrielle s'est poursuivie ensuite avec SAGEM. Grâce à Paul FEATONBY, notre interlocuteur SAGEM, cette collaboration a été fructueuse et enrichissante pour nous. Sa double expérience dans les domaines de la recherche puis de l'entreprise, lui a permis de nous sensibiliser en douceur, aux contraintes du monde industriel. Il a su gagner ma confiance totale, et c'est toujours avec un très grand plaisir que je participe aux réunions de travail avec lui. Je remercie également Bernard BRUCHON et Jean-Michel CARON pour l'intérêt qu'ils portent au projet.

J'ai effectué mes premiers pas au LHA au cours de mon stage de DEA en été 1996, dans l'équipe Etalons Optiques. Je remercie sincèrement Marie HOUSSIN de m'y avoir accueilli et pour sa gentillesse. J'ai eu la chance de travailler avec Bruno FERMIGIER, qui m'a fait découvrir ce composant incroyable qu'est la diode laser, et surtout qui m'a initié au montage des diodes laser en cavité étendue, élément indispensable d'un banc de refroidissement. Je le remercie pour sa simplicité et pour sa bonne humeur contagieuse.

Mon entrée dans le domaine des atomes froids a eu lieu pendant mon service militaire à l'IOTA en 96/97. Je remercie sincèrement Alain ASPECT de m'avoir accueilli pendant un an dans son équipe. Cette année a été énormément enrichissante pour moi au niveau scientifique. J'ai eu la chance de travailler avec Laurent COGNET sur l'expérience de diffraction atomique sur une onde évanescente. Il m'a fait partager son goût pour la physique expérimentale et m'a appris à appréhender efficacement ces dispositifs expérimentaux complexes que sont les manip à atomes froids. Son enthousiasme et sa perspicacité restent pour moi un exemple. Travailler aux côtés de Gabriel HORVATH a également été un grand plaisir et mes réalisations informatiques lui doivent beaucoup.

J'ai eu la chance d'effectuer un stage au DASGAL en 1995 avec mon quasi homonyme David HORVILLE, et c'est avec plaisir que j'ai retrouvé toute l'équipe lors du

déménagement du LHA à l'observatoire de Paris. Je tiens à remercier plus particulièrement David HORVILLE pour nos nombreuses discussions dans les couloirs et pour nous avoir prêté l'analyseur de front d'onde Shack-Hartmann qui s'est révélé indispensable au réglage des collimateurs de refroidissement. Je remercie également Patrice BAROSO pour ces conseils avisés sur le collage UV et pour les découpes d'optique qu'il a gentiment réalisées pour la détection du Gyro. Plus généralement je remercie Françoise GEX pour sa bienveillance à mon égard et l'ensemble de l'équipe du DASGAL pour leur gentillesse, leur disponibilité et les nombreux services qu'ils nous ont rendus.

Pendant les deux dernières années de ma thèse, j'ai eu la possibilité d'encadrer des travaux pratiques d'optiques à l'Ecole Supérieure d'Optique. Je remercie le personnel des TPs pour m'avoir aidé et soutenu dans cette tâche. Le contrôle optique des hublots Raman a été réalisé grâce à l'interféromètre à décalage de phase Zygo des TPs et je remercie plus particulièrement Gaëlle LUCAS-LECLIN, Thierry AVIGNON-VÉRITÉ, Lionel JACUBOVIEZ et Marie-Thérèse PLANTAGENEST pour m'avoir autorisé d'une part, et aidé d'autre part, à utiliser cet appareil.

Je remercie de plus Catherine ARMELLIN, du service général d'optique de l'IOTA, pour avoir efficacement déterminé la combinaison optique des collimateurs de refroidissement, et l'atelier d'optique pour la découpe des lentilles cylindriques.

Je remercie sincèrement Pierre THEYSSANDIER et Peter WOLF pour les multiples explications théoriques qu'ils ont su m'apporter sur l'effet Sagnac et sur le lagrangien en physique. Ils ont toujours été disponibles et surtout accessibles, pour un non relativiste comme moi. Le chapitre 3 leur doit énormément, et l'existence du chapitre 8 est liée en partie à l'intérêt qu'ils ont su susciter en moi pour les effets relativistes.

Je remercie également Pierre UHRICH pour avoir éclairer ma compréhension des bruits et des dérives.

L'ambiance au laboratoire a été pour moi un élément déterminant dans cette fin de thèse, et je ne pourrais remercier assez Virgile HERMANN et Luc CHASSAGNE, dont j'ai partagé le bureau, pour avoir su préserver malgré le stress ambiant, une atmosphère chaleureuse, amicale et simulante. Virgile a été un soutien infaillible pendant toute cette thèse et il est certainement la seule personne en qui j'ai encore plus confiance qu'en moi-même. Son soutien logistique au moment de ma soutenance a été pour moi irremplaçable et m'a permis d'appréhender cette étape de la façon la plus sereine possible. Son organisation et sa gestion des situations resteront des exemples (malheureusement inaccessibles) pour moi. Quant au Ptiluc, sa présence attachante a constitué un soutien important tout au long de cette thèse. Ses compétences en électronique ont été déterminantes notamment pour la modulation de diode à 4,6 GHz et ses connaissances générales en montage de manip m'ont permis d'éviter bien des erreurs. Durant la phase de rédaction, il a su m'extraire de mon travail aux bons moments et m'a ainsi permis de terminer en bonnes conditions physiques et morales.

Je ne pourrais remercier assez Gaëlle qui ma prodigué un soutien indéfectible pendant ces quatre années de thèse. Elle a toujours été là pour adoucir les moments les plus durs et a su, à chaque fois, me remotiver et me redonner espoir. L'intérêt qu'elle a porté à l'avancement des manip a été pour moi une source constante de stimulation, et ses multiples et incessantes relectures du manuscrit ont très largement participé à cette version finale.

Je remercie bien évidemment tous les thésards, stagiaires, scientifiques du contingent et post-doc que j'ai eu l'occasion de côtoyer pendant ces années de thèse, et qui ont contribué à la bonne humeur générale. Je les cite en vrac, en espérant en oublier le moins possible : Emmanuel GUILLOT, Christelle GUILLEMOT, Paul-Eric POTTIE, Albane DOUILLET, To KAING, Sébastien BIZE, Yvan SORTAIS, Franck DUCOS, Shougang ZHANG, Michel ABGRALL, Irène COURTILOT, Frédéric ALLARD, Florence YVER, Thomas ZANON, Audrey QUESSADA, Charles ANTOINE, Pascal, Valérie, Stéphanie, Karine, Julien ...

Un énorme merci à tous le personnel du LHA qui m'a accueilli, m'a fait confiance et m'a toujours soutenu : Claude AUDOIN, Pierre CÉREZ, Geneviève THÉOBALD, Michèle FICHET, Pascale MICHEL, Roland BARILLET, Constance VALENTIN. Merci à tous le personnel du LPTF et en particulier à Catherine LAURENT, Annie GÉRARD et à l'équipe d'électroniciens (Gorgio SANTARELLI, Michel LOURS, Michel DEQUIN, Laurent VOLODIMER et Eric PIERRE) pour leur disponibilité et leur efficacité. Merci également aux différents services techniques de l'Observatoire et surtout à J.P. Aoustin pour les dépannages imprévus en mécanique, et à Mme KÉRIMIAN que j'ai eue si souvent au téléphone, pour sa gentillesse et son efficacité.

Je remercie chaleureusement Arnaud LANDRAGIN et Noël DIMARCQ pour la lecture du manuscrit, et pour leurs commentaires et reproches éclairés. Un des objectifs de ce manuscrit était de présenter le travail de thèse de façon simple et surtout accessible par des non spécialistes en interférométrie atomique. Je remercie sincèrement Gaëlle LUCAS-LECLIN et Luc CHASSAGNE pour avoir bien voulu jouer les rôles de candides. Leurs interrogations ont été à l'origine de la réécriture de plusieurs chapitres. Je remercie également Florence YVER, Jérôme FILS et Thomas ZANON pour la correction des diverses coquilles et autres fautes d'orthographe.

Je remercie bien sûr, ma famille et tous mes amis, qui m'ont soutenu pendant ces quatre années et surtout pendant les six derniers mois. Sans forcément comprendre, ils ont accepté mes caprices, mes accès de mauvaise humeur et ma fatigue générale. Ils ont toujours été là dans les moments de doute et de démotivation, et leur présence m'a donné l'impulsion nécessaire pour repartir et terminer ce travail.

Je sais ce que je leur dois, et je leur promets dorénavant, bonne humeur, dynamisme, attention et écoute :

Julien et Laure, Julien et Valérie, Gaëlle, Nicolas, Anne, Jean-Baptiste et Annette, Mathieu et Anne, Laurence et Matthieu, Victor et Clément, Francine et Alain, Bruno, Ptiluc, Virgile et Stéphanie, Jean-Pierre, Françoise et Fanny, Stéphane, Antoine et Sophie, Max, Xavier, Maud, Marie, Mathieu ... et bien sûr mes parents, Mathilde, Isabelle et Bernard.

Que ceux que j'ai oubliés ici me pardonnent ...



## TABLE DES MATIERES

### Chapitre 1 : INTRODUCTION

|         |  |   |
|---------|--|---|
| 1.1     | L'ATOME COMME APPAREIL DE MESURE       | 5 |
| 1.1.1   | La mesure du temps                     | 5 |
| 1.1.2   | Les capteurs inertiels                 | 6 |
| 1.1.2.1 | Gravimètres et gradiomètres atomiques  | 6 |
| 1.1.2.2 | Gyromètres atomiques                   | 6 |
| 1.1.3   | Intérêts des atomes froids             | 7 |
| 1.1.4   | Des applications déjà envisagées       | 7 |
| 1.2     | LE PROJET DE GYROMETRE A ATOMES FROIDS | 8 |
| 1.3     | PLAN DU MEMOIRE                        | 9 |

### Chapitre 2 : Caractérisation d'un capteur inertiel

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 2.1     | RAPPEL DE MECANIQUE NEWTONIENNE   | 17 |
| 2.1.1   | Notion de référentiel   | 17 |
| 2.1.2   | L'inertie et le mouvement   | 19 |
| 2.1.2.1 | Notion d'inertie et principe de Mach  | 19 |
| 2.1.2.2 | Rappel sur la 2 <sup>ième</sup> loi de Newton dans un repère non inertielle | 20 |
| 2.1.2.3 | Application du principe d'inertie aux senseurs inertiels                    | 21 |
| 2.2     | DESCRIPTION ET CARATERISATION D'UN CAPTEUR INERTIEL                         | 24 |
| 2.2.1   | Gyromètre, Gyroscope et Accéléromètre                                       | 24 |
| 2.2.2   | Le modèle d'erreur  | 25 |
| 2.2.3   | $K_0$ : Le facteur d'échelle  | 25 |
| 2.2.4   | $B_0$ : Le biais  | 27 |
| 2.2.5   | $\tilde{\varepsilon}(t)$ : Le bruit limite en sortie                        | 27 |
| 2.2.6   | $K(t)$ et $B(t)$ : Les fluctuations du facteur d'échelle et du biais        | 27 |
| 2.2.7   | Formes de bruits dans les capteurs inertiels optiques et mécaniques         | 28 |
| 2.2.8   | Autres grandeurs importantes  | 32 |
| 2.2.9   | Les unités  | 34 |
| 2.2.10  | Caractérisation d'un capteur inertiel                                       | 35 |
| 2.2.11  | Comparaison de deux capteurs inertiels                                      | 36 |
| 2.3     | PERFORMANCES DES DIFFERENTS GYROSCOPES ET ...                               | 36 |
| 2.3.1   | Appareils industriels   | 37 |
| 2.3.2   | Appareils de laboratoire  | 37 |
|         | BIBLIOGRAPHIE   | 39 |

### Chapitre 3 : L'EFFET SAGNAC

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 3.1     | L'effet Sagnac   | 45 |
| 3.1.1   | Un peu d'histoire sur l'effet Sagnac                           | 45 |
| 3.1.2   | Calcul de l'effet Sagnac optique                               | 46 |
| 3.1.2.1 | Méthode de calcul usuellement décrite                          | 47 |
| 3.1.2.2 | Remarques à propos de cette méthode de calcul                  | 49 |
| 3.1.2.3 | Méthode générale pour une onde se propageant à la vitesse $V$  | 50 |
| 3.1.3   | Cas des ondes de matière                                       | 51 |
| 3.1.3.1 | Calcul relativiste   | 51 |
| 3.1.3.2 | Calcul classique / relativiste                                 | 52 |
| 3.1.3.3 | Comparaison entre le calcul relativiste et le calcul quantique | 53 |
| 3.1.3.4 | Calcul quantique   | 54 |
| 3.1.3.4 | Une idée fausse ... mais tenace                                | 55 |
| 3.2     | Comparaison entre le déphasage optique et atomique             | 56 |
| 3.3     | L'effet Sagnac pour mesurer les rotations                      | 57 |
| 3.3.1   | Gyromètre ou Gyroscope?  | 57 |
| 3.3.2   | Axe d'entrée   | 57 |
| 3.3.3   | Influence de la forme de l'interféromètre                      | 58 |
| 3.3.4   | Influence de la position de l'axe de rotation                  | 58 |
| 3.3.5   | Facteur d'échelle et biais                                     | 59 |
| 3.3.6   | Sensibilité sur une seconde                                    | 60 |
| 3.3.7   | Cas d'une vitesse de rotation non constante                    | 60 |
| 3.4     | Conclusion   | 61 |
|         | BIBLIOGRAPHIE  | 62 |

## **Chapitre 4 : TRANSITIONS RAMAN STIMULEES ET MACH-ZEHNDER ATOMIQUE**

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.1   | MODELE DE L'ATOME A DEUX NIVEAUX           | 69 |
| 4.1.1 | Modèle sans degrés de liberté externe      | 69 |
| 4.1.2 | Modèle avec les degrés de liberté externes | 74 |
| 4.1.3 | Séparation spatiale du paquet d'ondes      | 77 |
| 4.2   | TRANSITIONS RAMAN STIMULEES                | 78 |
| 4.2.1 | Description                                | 78 |
| 4.2.2 | Résolution du système à trois niveaux      | 79 |
| 4.2.3 | Equivalence avec un système à deux niveaux | 82 |
| 4.2.4 | Compensation des déplacements lumineux     | 82 |
| 4.2.5 | Séparation angulaire                       | 83 |
| 4.2.6 | Sélectivité en vitesse transverse          | 83 |
| 4.3   | INTERFEROMETRE DE MACH-ZEHNDER             | 84 |
| 4.3.1 | Le Mach-Zehnder optique                    | 84 |
| 4.3.2 | Le Mach-Zehnder atomique                   | 85 |
| 4.3.3 | Calcul général du déphasage                | 85 |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 4.3.3.1 | Cas d'un interféromètre optique  | 85  |
| 1)      | Calcul du déphasage dans le cas immobile                                   | 85  |
| 2)      | Déphasage en présence de rotation ou d'accélération                        | 87  |
| 4.3.3.2 | Interféromètres « <i>spatiaux</i> » - interféromètres « <i>temporels</i> » | 87  |
| 4.4     | LES DIFFERENTS OUTILS NECESSAIRES  | 89  |
| 4.4.1   | Présentation de la méthode   | 89  |
| 4.4.2   | Quelques mots sur le formalisme de Feynman et des «matrices S»             | 90  |
| 1)      | Formalisme de Feynman  | 90  |
| 2)      | Formalisme des «matrices S»  | 92  |
| 4.5     | CALCUL DU DEPHASAGE  | 94  |
| 4.5.1   | Calcul le long des trajectoires non perturbées                             | 95  |
| 1)      | Calcul du déphasage pour l'interféromètre immobile                         | 95  |
| 2)      | Déphasage lié à la rotation ou à l'accélération                            | 97  |
| 4.5.2   | Calcul le long des trajectoires perturbées                                 | 98  |
| 1)      | Détermination des trajectoires perturbées dans le cas d'une rotation       | 99  |
| 2)      | Déphasage de propagation   | 100 |
| 3)      | Déphasage lié aux passages dans les lames lumineuses                       | 101 |
| 4)      | Déphasage dû à l'écart en position   | 102 |
| 5)      | Déphasage total  | 103 |
| 6)      | Influence des fronts d'ondes des faisceaux Raman                           | 106 |
| 4.6     | LIMITES DE CE MODELE   | 107 |
| 4.6.1   | Impulsions infiniment courtes  | 107 |
| 4.6.2   | Ondes atomiques planes   | 107 |
|         | BIBLIOGRAPHIE  | 109 |

## **Chapitre 5 : CONCEPTION DU GYROMETRE A ATOMES FROIDS**

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 5.1     | LA SOURCE ATOMIQUE  | 117 |
| 5.1.1   | Choix de l'atome  | 117 |
| 5.1.2   | Les différents types de sources                           | 119 |
| 5.1.2.1 | Le jet thermique  | 119 |
| 5.1.2.2 | Le jet supersonique                                       | 120 |
| 5.1.2.3 | Le piège magnéto-optique                                  | 120 |
| 5.1.2.4 | Le jet continu d'atomes froids                            | 121 |
| 5.1.2.5 | Résumé  | 121 |
| 5.2     | LA PREPARATION ATOMIQUE                                   | 122 |
| 5.2.1   | Pompage hyperfin + sélection Zeeman optique ou micro-onde | 122 |
| 5.2.2   | Comparaison entre sélection micro-onde et sélection Raman | 123 |
| 5.2.3   | Pompage Zeeman  | 124 |
| 5.2.4   | Notre configuration                                       | 124 |
| 5.3     | CHOIX DE LA GEOMETRIE                                     | 124 |
| 5.3.1   | Le Ramsey-Bordé   | 125 |
| 5.3.2   | Le Mach-Zehnder   | 126 |
| 5.3.3   | Conclusion  | 127 |
| 5.3.4   | Le double jets atomiques                                  | 127 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 5.4   | LES SEPARATRICES ATOMIQUES                | 129 |
| 5.4.1 | Les composants mécaniques                 | 130 |
| 5.4.2 | Les lames lumineuses                      | 131 |
| 5.4.3 | Fonctionnement spatial ou temporel        | 132 |
| 5.4.4 | Les impulsions multiples                  | 134 |
| 5.4.5 | Avantages des transitions Raman stimulées | 135 |
| 5.5   | LA DETECTION                              | 135 |
| 5.5.1 | Détection de l'impulsion                  | 136 |
| 5.5.2 | Détection optique de l'état interne       | 137 |
| 5.5.3 | Détection avec renormalisation            | 137 |
| 5.6   | LA CONCEPTION                             | 138 |
|       | BIBLIOGRAPHIE                             | 144 |

## **Chapitre 6: REALISATION DU PROTOTYPE**

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 6.1     | ENCEINTE A VIDE  | 155 |
| 6.1.1   | Choix du matériau  | 155 |
| 6.1.2   | Description de l'assemblage                                      | 155 |
| 6.1.3   | Précision mécanique  | 156 |
| 6.1.4   | Les hublots  | 157 |
| 6.1.5   | La réserve de Césium   | 160 |
| 6.2     | LA SOURCE ATOMIQUE   | 161 |
| 6.2.1   | Le banc de refroidissement                                       | 162 |
| 6.2.2   | Les coupleurs de fibres optiques                                 | 169 |
| 6.2.2.2 | Description et caractérisation                                   | 169 |
| 6.2.2.3 | Utilisation des coupleurs de fibres                              | 171 |
| 6.2.3   | La boule de refroidissement                                      | 172 |
| 6.2.4   | Les collimateurs de refroidissement                              | 173 |
| 6.2.5   | Les gradients de champs magnétiques                              | 176 |
| 6.2.6   | Les blindages magnétiques  | 177 |
| 6.2.7   | Les différentes phases de piégeage, de refroidissement et de ... | 179 |
| 6.2.7.1 | Piège magnéto-optique  | 182 |
| 6.2.7.2 | Coupure du gradient de champ magnétique                          | 185 |
| 6.2.7.3 | Mélasse mouvante et lancement des atomes                         | 185 |
| 6.3     | PREPARATION ATOMIQUE   | 187 |
| 6.3.1   | La cavité micro-onde   | 188 |
| 6.3.2   | Le faisceau pousseur   | 190 |
| 6.3.3   | Mise en œuvre de la préparation atomique                         | 190 |
| 6.4     | LA ZONE D'INTERACTION RAMAN                                      | 191 |
| 6.4.1   | Production des faisceaux Raman                                   | 191 |
| 6.4.1.1 | Diode modulée à 4,6 GHz  | 192 |
| 6.4.1.2 | Le verrouillage de phase   | 194 |
| 6.4.1.3 | Puissance optique nécessaire aux faisceaux Raman                 | 195 |
| 6.4.2   | Le reste du montage des faisceaux Raman                          | 196 |
| 6.5     | LA DETECTION   | 197 |

|       |                            |     |
|-------|----------------------------|-----|
| 6.5.1 | Les faisceaux de détection | 197 |
| 6.5.2 | Le système de détection    | 198 |
|       | BIBLIOGRAPHE               | 200 |

## Chapitre 7 : ELEMENTS DE CARACTERISATION DU GYROMETRE A ATOMES FROIDS

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 7.1     | NOTATIONS   | 208 |
| 7.2     | LE CAS IDEAL  | 209 |
| 7.2.1   | Description du problème   | 209 |
| 7.2.2   | Sensibilité à $\Omega_z$  | 211 |
| 7.2.3   | Sensibilité à $a_y$   | 211 |
| 7.2.4   | Réponse en fréquence du gyromètre / accéléromètre :                                       | 212 |
| 7.2.5   | Bande passante du gyromètre / accéléromètre:  | 213 |
| 7.2.6   | Vers une représentation plus réaliste   | 213 |
| 7.3     | ORGANISATION DE L'ETUDE   | 214 |
| 7.3.1   | Description de la procédure de calcul de la simulation                                    | 214 |
| 7.3.2   | Forme générale du signal de sortie – Paramètres de sortie                                 | 215 |
| 7.3.3   | Facteur d'échelle et biais  | 218 |
| 7.3.4   | Quelques précisions sur ce que l'on veut faire  | 218 |
| 7.3.5   | Le bruit blanc limite de l'appareil   | 219 |
| 7.4     | IDENTIFICATION DES DIFFERENTES DEPENDANCES  | 220 |
| 7.5     | ATOME MOYEN ARFAIT + DISTRIBUTION DE VITESSE  | 222 |
| 7.5.1   | Influence de la température longitudinale $\Delta V_x$ sur le contraste sur $\mathcal{G}$ | 222 |
| 7.5.2   | Influence de température $\Delta V_z$ sur le contraste $\mathcal{G}$                      | 224 |
| 7.5.3   | Influence de température transverse $\Delta V_y$ sur le facteur d'amplitude               | 225 |
| 7.5.3   | Influence de l'accélération transverse $a_y$ sur le déphasage                             | 225 |
| 7.5.4   | Conclusion sur un atome parfait avec distribution de vitesse                              | 226 |
| 7.6     | ATOME NON PARFAIT SANS DISTRIBUTION DE VITESSE  | 226 |
| 7.6.1   | Influence de la vitesse de lancement horizontale $V_x$ sur le déphasage                   | 226 |
| 7.6.2   | Influence de la vitesse de lancement verticale $V_z$ sur le déphasage                     | 227 |
| 7.6.4   | Les défauts d'impulsions  | 228 |
| 7.6.4.1 | Description des faisceaux Raman   | 228 |
| 7.6.4.2 | Calcul du défaut d'aire des impulsions  | 230 |
| 7.6.4.3 | Influence des fluctuations d'intensité sur le facteur d'amplitude et ...                  | 231 |
| 7.6.4.4 | Influence de la vitesse de lancement sur le facteur d'amplitude et ...                    | 233 |
| 7.6.4   | Influence des déplacements lumineux   | 235 |
| 7.7     | CONCLUSION  | 237 |
|         | BIBLIOGRAPHIE   | 238 |

## Chapitre 8: APPLICATIONS DES CAPTEURS INERTIELS A ONDES ATOMIQUES

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 8.1     | LES CAPTEURS INERTIELS EN PHYSIQUE FONDAMENTALE              | 242 |
| 8.1.1   | Introduction   | 242 |
| 8.1.1.1 | Détection des ondes gravitationnelles                        | 243 |
| 8.1.1.2 | Mise en évidence de l'effet Lense-Thirring                   | 244 |
| 8.1.2   | Notion de métrique   | 245 |
| 8.1.2.1 | Métrique en l'absence de gravitation                         | 246 |
| 8.1.2.2 | Métrique en l'absence de gravitation dans un repère tournant | 246 |
| 8.1.2.3 | La métrique en présence de gravitation                       | 247 |
| 8.1.3   | Analogie avec l'électromagnétisme                            | 248 |
| 8.1.3.1 | Premier terme rotation de la Terre                           | 250 |
| 8.1.3.2 | Deuxième terme: l'effet de Sitter                            | 251 |
| 8.1.3.3 | troisième terme: l'effet Lense-Thirring                      | 251 |
| 8.1.4   | le formalisme PPN  | 252 |
| 8.1.4.1 | Le paramètre $\alpha_1$                                      | 252 |
| 8.1.4.2 | Le paramètre $\gamma$  | 253 |
| 8.1.4.3 | Les paramètres $\Delta_1$ et $\Delta_2$                      | 253 |
| 8.1.4.4 | L'expérience de Schiff dans le formalisme PPN                | 253 |
| 8.1.4.5 | Comparaison des ordres de grandeurs                          | 255 |
| 8.1.5   | Les différents tests de l'effet Lense-Thirring               | 255 |
| 8.1.5.1 | Le projet Gravity Probe B                                    | 257 |
| 8.1.5.2 | Le projet HYPER  | 258 |
| 8.1.5.3 | Expériences avec les satellites LAGEOS                       | 259 |
| 8.1.6   | Conclusion   | 261 |
|         | BIBLIOGRAPHIE  | 262 |

## ANNEXE A: L'ATOME DE CESIUM

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| A.1   | Configuration électronique   | 270 |
| A.2   | Configuration énergétique  | 270 |
| A.2.1 | Couplage spin de l'électron – moment orbital : structure fine      | 270 |
| A.2.2 | Couplage spin nucléaire – moment cinétique : structure hyperfine   | 271 |
| A.2.3 | Structure Zeeman   | 271 |
| A.3   | Transitions autorisées   | 273 |
| A.3.1 | Probabilité de transition entre niveaux hyperfins par émission ... | 273 |
| A.3.2 | Coefficients de Clebsch-Gordan                                     | 273 |
| A.4   | les transitions utiles   | 273 |
| A.4.1 | La transition cyclante $F = 4 \rightarrow F' = 5$                  | 274 |
| A.4.2 | La transition pompante $F = 3 \rightarrow F' = 4$                  | 274 |
| A.4.3 | La transition d'horloge $F = 3 \leftrightarrow F = 4$              | 275 |

## **ANNEXE B : NOTIONS SUR LES BRUITS POUR LA CARACTERISATION DES CAPTEURS INERTIELS**

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| B.1 | Position du problème                     | 279 |
| B.2 | Bruits et densité spectrale de puissance | 280 |
| B.3 | Filtrage et détection d'un bruit         | 283 |
| B.4 | Bruit blanc                              | 285 |

## **ANNEXE C: LES GYROSCOPES MECANIQUES**

|       |  |            |
|-------|--|------------|
| C.1   | Un peu d'histoire  | 290        |
| C.2   | Le moment d'inertie et les gyroscopes à élément tournant | 291        |
| C.2.1 | Le moment d'inertie et la loi de la gyroscopie           | 291        |
| C.2.2 | Gyroscopes à un degré de liberté                         | 292        |
| C.2.3 | Gyroscopes à deux degrés de liberté                      | 294        |
| C.3   | Force de Coriolis et gyros à éléments vibrants           | 295        |
| C.3.1 | La force de Coriolis                                     | 295        |
| C.3.2 | Les gyroscopes à lames vibrantes                         | 296        |
| C.3.3 | Les gyroscopes à résonateur hémisphérique                | 296        |
| C.3.2 | Conclusion   | 297        |
|       | <b>BIBLIOGRAPHIE</b>                                     | <b>298</b> |

## **ANNEXE D: LES GYROMETRES OPTIQUES**

|       |   |            |
|-------|---|------------|
| D.1   | Les gyros optiques                            | 300        |
| D.1.1 | Les gyromètres à fibre optique                | 301        |
| D.1.2 | Les gyroscopes optiques actifs ou gyro-lasers | 303        |
| D.1.3 | Les gyros optiques à anneau résonnant passif  | 305        |
| D.2   | Conclusion sur les gyros optiques             | 306        |
|       | <b>BIBLIOGRAPHIE</b>                          | <b>307</b> |

|  |                      |            |
|--|----------------------|------------|
|  | <b>BIBLIOGRAPHIE</b> | <b>311</b> |
|--|----------------------|------------|



**Chapitre 1 : INTRODUCTION**

**TABLE DES MATIÈRES :**

|  |   |
|--|---|
| 1.1 L'ATOME COMME APPAREIL DE MESURE .....         | 5 |
| 1.1.1 La mesure du temps.....                      | 5 |
| 1.1.2 Les capteurs inertiels.....                  | 6 |
| 1.1.2.1 Gravimètres et gradiomètres atomiques..... | 6 |
| 1.1.2.2 Gyromètres atomiques.....                  | 6 |
| 1.1.3 Intérêts des atomes froids.....              | 7 |
| 1.1.4 Des applications déjà envisagées .....       | 8 |
| 1.2 LE PROJET DE GYROMÈTRE À ATOMES FROIDS.....    | 8 |
| 1.3 PLAN DU MÉMOIRE.....                           | 9 |

## CHAPITRE 1 :

### INTRODUCTION

Depuis une quinzaine d'années, le développement des techniques de manipulation d'atomes par lasers permet d'accéder de plus en plus facilement à la nature ondulatoire des atomes, et apporte tout un panel de composants applicables à ces ondes atomiques. On sait maintenant réaliser des miroirs, des lames séparatrices, des réseaux de diffraction, des lentilles et toutes sorte d'autres composants permettant de développer une réelle optique atomique.

Contrairement aux photons, les atomes, de part leur structure complexe, interagissent énormément avec leur environnement. Bien que neutre électriquement, les atomes possèdent des moments dipolaires électrique et magnétique, les rendant sensibles aux champs électriques et magnétiques extérieurs. Ils interagissent donc avec les photons par l'intermédiaire d'une multitude d'effets (effet STARK, effet ZEEMAN, ...) et leur structure énergétique permet alors toute une gamme de transitions (dipolaire électrique ou magnétique, quadripolaire, ...). C'est aussi par cette interaction avec les champs électriques et magnétiques que s'expliquent les phénomènes de collisions élastiques entre deux atomes, où l'apparition de certaines forces (force de VAN DER WAALS, ...). Dans certains cas, l'atome peut même interagir avec les potentiels électrique et magnétique, sans qu'il y ait de champ électrique ou magnétique (effet AHARANOV-BOHM scalaire et vectoriel).

Les atomes possèdent également une masse qui leur permet d'interagir avec le champ gravitationnel, comme n'importe quel autre corps massif. Leur vitesse d'agitation thermique élevée (plusieurs centaines de mètres voire plusieurs kilomètres par seconde) rend généralement imperceptible cette interaction. Mais on sait maintenant ralentir les atomes, grâce à des faisceaux laser, jusqu'à des vitesses de quelques  $\text{mm.s}^{-1}$ , rendant ainsi l'interaction avec le champ de gravitation tout à fait observable. Leur masse rend les atomes également sensibles aux champs d'inertie (force de CORIOLIS, force centrifuge) qui apparaissent dans les référentiels non galiléens.

Avec ces multiples interactions possibles, l'atome apparaît donc comme un outil idéal pour sonder l'environnement extérieur. A la fois magnétomètre, balance, horloge, ... quelle que soit la grandeur physique que vous souhaitez déterminer, l'atome possède une propriété qui vous permettra de la mesurer. Le fait de pouvoir accéder à la nature ondulatoire de l'atome permet alors d'imaginer des techniques de mesures interférométriques (mettant en jeu la phase atomique), améliorant ainsi énormément la sensibilité de la mesure. L'interférométrie atomique est rendue possible grâce aux nombreux composants atomiques que nous évoquions précédemment. On sait maintenant réaliser des interféromètres à atomes équivalents à des interféromètres de MICHELSON, de MACH-ZEHNDER, de FABRY-PEROT, et de bien d'autres encore. Ces dispositifs ont déjà permis de mesurer un certain nombre de grandeurs physiques avec une extrême précision.

## 1.1 L'ATOME COMME APPAREIL DE MESURE

### 1.1.1 La mesure des fréquences

La première de ces grandeurs a bien sûr été la fréquence, qui a pu être mesurée si finement grâce aux horloges atomiques, que l'atome est passé du statut de chronomètre à celui d'étalon de temps. En effet, en 1967, la 13<sup>ème</sup> Conférence Internationale des Poids et Mesures a décidé de changer la définition de la seconde. Ce n'est plus la Terre, mais l'atome qui décide de l'heure qu'il est. Cette nouvelle définition repose sur des horloges stables et exactes à quelques  $10^{-15}$ , c'est à dire se décalant d'une seconde en 30 millions d'années. On peut se demander à quoi sert une telle précision, et pourtant les industriels sont déjà demandeurs d'horloges à  $10^{-11}$  pour la synchronisation des réseaux de télécommunications à hauts débits, et à  $10^{-12}$  pour le nouveau système européen de navigation par satellite GALILEO. La mise en orbite de l'horloge spatiale à atomes froids PHARAO [LAURENT 98], dans le cadre du projet ACES, permettra de comparer, grâce à des liens micro-ondes, les horloges du monde entier avec une précision de  $10^{-16}$ . Et on peut imaginer un système de positionnement par satellites utilisant une constellation d'horloges PHARAO. Ce système permettrait alors un positionnement sub-millimétrique en n'importe quel point de la surface de la Terre. Les failles sismiques et la tectonique des plaques pourraient alors être étudiées de manière globale.

On peut ajouter que le développement des lasers ultra-stabilisés permet aujourd'hui d'interroger des transitions atomiques dans le domaine optique, au lieu des transitions micro-ondes utilisées dans les horloges atomiques traditionnelles. Des projets d'horloges utilisant des atomes de strontium, de magnésium ou même des ions hydrogénéoïdes sont en cours, et ces horloges à transition optique apparaissent déjà comme des candidats potentiels pour atteindre des stabilités sur une seconde dans la gamme des  $10^{-16}$  voire  $10^{-17}$ .

Fort de son succès dans la mesure du temps, l'atome s'est ensuite attaqué à un certain nombre d'autres grandeurs. Parmi elles on peut citer certaines grandeurs atomiques, comme

la mesure de polarisabilité atomique grâce à l'effet STARK DC [MORINAGA 93 et 96, RIEGER 93]. Puis grâce au développement des atomes refroidis par lasers, la mesure du champ de pesanteur a été rendue possible.

### **1.1.2 Les capteurs inertiels**

Les capteurs inertiels sont les appareils permettant de mettre en évidence le caractère inertiel ou non, des repères auxquels ils sont liés. Ils s'agit donc essentiellement des gyromètres et des accéléromètres, et par extension des gravimètres et des gradiomètres. Le rapide développement de ces appareils a très largement profité des travaux théoriques de Ch. BORDÉ, qui a, à la fois introduit les notions utilisées en interférométrie atomique [BORDÉ 89, BORDÉ 91], et développé les outils permettant d'interpréter les résultats obtenus [BORDÉ 84, BORDÉ 92].

En une dizaine d'années, de nombreux capteurs inertiels atomiques ont alors été réalisés à travers le monde.

#### **1.1.2.1 Gravimètres et gradiomètres atomiques**

Le phase induite par le champ de pesanteur sur l'onde atomique varie très rapidement avec la valeur de ce champ. Cette phase peut être mesurée très précisément grâce à un interféromètre atomique de type MACH-ZEHNDER temporel par exemple [KASEVICH 91-2]. On accède ainsi à une mesure de  $g$  extrêmement précise. Les dernières expériences réalisées révèlent une sensibilité de quelques  $10^{-9} \text{ g}/\sqrt{\text{Hz}}$  [PETERS 99], correspondant à la variation du champ de pesanteur au sol sur une hauteur de l'ordre du centimètre.

De la même façon le gradient du champ de pesanteur a pu être mesuré par interférométrie atomique, et la sensibilité atteinte par cet appareil s'approche de celles des meilleurs instruments mécaniques actuels [SNADDEN 98]. Ces gradiomètres mécaniques sont déjà largement utilisés dans des domaines aussi variés que la recherche pétrolière, le sondage du sous-sol terrestre ou la navigation inertielle des sous-marins. Nul doute qu'un appareil de ce type fonctionnant sur le principe de l'interférométrie atomique trouvera sa place parmi toutes ces applications.

#### **1.1.2.2 Gyromètres atomiques**

La mesure de vitesse de rotation a également subi sa révolution atomique. En 1991 tout d'abord, où une équipe allemande de la PTB réalise le premier gyromètre atomique [RIEHLE 91]. Les résultats sont interprétés par Ch. BORDÉ en termes d'effet SAGNAC appliqué aux ondes atomiques. L'effet SAGNAC, appliqué aux ondes lumineuses est le principe physique à la base de tous les gyromètres optiques [SAGNAC 13]. On peut montrer que ce

principe, lorsqu'il est appliqué aux ondes atomiques, produit à aire d'interféromètre égale un effet intrinsèquement cent milliards de fois plus sensible que dans le cas optique. On comprend donc l'intérêt que peut présenter le développement de tels capteurs inertiels utilisant des ondes atomiques. En 1998, l'équipe de M. KASEVICH à l'Université de Yale, présente un appareil dont la sensibilité de  $6 \cdot 10^{-10} \text{ rad.s}^{-1}.\text{Hz}^{-1/2}$  dépasse celles des meilleurs gyroscopes mécaniques et gyromètres optiques existant [GUSTAVSON 00-2]. Cela signifie qu'en une seconde de mesure, cet appareil permet de déterminer des vitesses de rotation aussi faibles que  $1/100.000^{\text{ème}}$  de la rotation de la Terre. De telles performances ne sont pas trop luxueuses, voire même encore un peu faibles, pour les applications de géophysique ou pour certains tests de relativité générale.

Si l'on effectue la mesure sur une durée plus longue, le bruit lié à la mesure se moyenne lentement et la sensibilité de l'appareil peut encore être améliorée. Ceci reste vrai tant qu'aucune dérive ne vient perturber la mesure. Malheureusement, en pratique ces dérives apparaissent toujours, au bout d'un temps plus ou moins long, liées à des fluctuations de certains paramètres expérimentaux (température, champs magnétiques, vibrations mécaniques, ...).

A titre d'exemple, le gyromètre atomique de M. KASEVICH que nous évoquions précédemment, utilise un jet thermique de césium à  $300 \text{ m.s}^{-1}$ . La durée d'intégration maximale avant que les dérives n'apparaissent est limitée à quelques dizaines de secondes.

### 1.1.3 Intérêts des atomes froids

L'intérêt des atomes froids dans les capteurs inertiels atomiques ou dans les horloges est double :

- D'une part les atomes froids, de part leur vitesse réduite, permettent d'augmenter considérablement la sensibilité court-terme de l'appareil en allongeant la durée d'interaction entre les atomes et la grandeur physique que l'on veut mesurer (champ de gravitation ou d'inertie pour les capteurs inertiels, champ micro-onde pour une horloge atomique). La très bonne définition de la vitesse atomique et sa faible dispersion permettent également d'obtenir un facteur d'échelle très bien connu et très stable.

- D'autre part, dans le domaine des horloges atomiques, l'utilisation d'atomes froids a démontré que les dérives apparaissent beaucoup plus tardivement que dans les horloges à jet thermique. Ainsi le signal de l'horloge à atomes froids FO1 du LPTF peut être intégré sur plusieurs jours sans qu'aucune dérive n'apparaisse. Ceci permet alors aux meilleures horloges à atomes froids d'atteindre des stabilités long termes et des exactitudes de quelques  $10^{-15}$ .

On peut espérer un gain similaire dans le domaine de l'interférométrie atomique. Une durée d'intégration de plusieurs jours abaisserait alors de presque 3 ordres de grandeur la sensibilité ultime du gyromètre de M. KASEVICH.

#### **1.1.4 Des applications déjà envisagées**

Ces nouveaux capteurs atomiques aux performances si exceptionnelles intéressent un grand nombre de personnes.

Certains aimeraient les installer dans des satellites afin de mettre en évidence des effets de relativité générale jusqu'ici indécélables. Le projet Hyper par exemple vise à mettre en orbite deux gyromètres atomiques pour mesurer l'effet LENSE-THIRRING [RASEL 00]. Cet effet pourrait être mis en évidence par la précession d'un repère d'inertie local défini grâce à des gyroscopes et des accéléromètres, comparée à un repère défini par trois étoiles lointaines.

D'autres voudraient les embarquer à bord de sous-marins ; intégrés à un navigateur inertiel, ces capteurs atomiques permettraient aux sous-marins de naviguer pendant de très longues durées sans avoir à remonter à la surface pour faire le point [PLESKA 00].

Le problème principal est que pour l'instant, ces appareils ne sont pas transportables. Plutôt expériences de laboratoire que réels instruments de mesure, ces premiers dispositifs avaient pour objectif principal la démonstration de la faisabilité.

Il paraissait donc important de démontrer la faisabilité d'un tel capteur atomique de taille plus réduite, voire transportable, mais à performance sensiblement équivalente. C'est dans cette optique que le laboratoire s'est lancé dans un projet de gyromètre atomique à atomes refroidis par lasers.

## **1.2 LE PROJET DE GYROMÈTRE À ATOMES FROIDS**

Le projet dans lequel nous nous sommes lancés consiste à réaliser un gyromètre atomique utilisant des atomes froids, ce qui n'a encore jamais été réalisé ailleurs pour l'instant. L'intérêt que présente un tel appareil est bien sûr grandement augmenté si cet appareil est transportable, compte tenu des applications potentielles que nous avons évoquées. Un des objectifs du projet est donc de réaliser un appareil relativement compact, afin d'ouvrir la voie des capteurs inertiels atomiques transportables.

Comme on l'a mentionné précédemment, l'utilisation d'atomes froids permet de conserver une stabilité à court-terme comparable à celle des grands instruments déjà construits. A titre d'exemple, la zone d'interaction du gyromètre de M. KASEVICH est longue de 2 mètres, alors que la notre ne fait que 3 centimètres. Les atomes froids nous permettent également d'espérer obtenir une stabilité à long terme bien meilleure, et d'envisager des durées d'intégration de l'ordre de la journée, voire plus longues encore.

Afin de vérifier cette double condition de petites dimensions et de bonne stabilité long-terme, un effort considérable a été fait dans la conception et la réalisation de ce dispositif. A ce titre, notre gyromètre a beaucoup bénéficié du travail déjà effectué dans ce sens sur le projet PHARAO, et surtout du savoir-faire de P. PETIT qui a conçu et dessiné les tubes de PHARAO et du GYRO. Cette phase de conception s'appuie sur un grand nombre de considérations technologiques que nous avons résumées dans le Chapitre 6. La mise en œuvre

et les tests de nouvelles solutions technologiques dans notre instrument, a constitué une grosse part du travail de thèse. C'est pourquoi nous les détaillons de façon approfondie.

Notre projet de gyromètre atomique se situe à la rencontre de deux communautés. D'une part la communauté de la physique atomique avec les nombreux laboratoires participant au projet (LHA, LPTF, LCFIO, LPL, LKB), et d'autre part la communauté de la navigation inertielle (DGA, LRBA, CNES, SFIM-Industrie, SAGEM). Les nombreuses réunions de travail ont permis à ces deux communautés de se rencontrer, de discuter ... et de se rendre compte qu'elles ne parlaient pas la même langue. Même pour des laboratoires aguerris dans l'art de la métrologie du temps et des fréquences, comme le LHA et le LPTF, les termes employés par l'autre partie restaient flous et obscurs. Là où les horlogers parlent stabilité et exactitude, les « gyroscopistes » répondent facteur d'échelle et dérive du biais !

Il a donc fallu commencer par définir les termes et se mettre d'accord sur les définitions. Le Chapitre 2 tente de faire une synthèse de ce travail, afin de poser les bases qui serviront à la caractérisation métrologique de ce gyromètre.

Les nombreuses interactions que nous avons eu avec la communauté des théoriciens de la gravitation nous ont montré que ceux-ci maîtrisaient bien mieux que nous l'effet SAGNAC, à la base du gyromètre atomique. Et pour cause, cet effet est purement relativiste. Il nous a donc semblé utile de consacrer un chapitre à cet effet, afin de dissiper le voile flou et les erreurs que l'on rencontre parfois dans la littérature.

### 1.3 PLAN DU MÉMOIRE

Ce mémoire s'organise de la façon suivante :

Le « **chapitre 2 – Caractérisation d'un capteur inertielle** » traite de la caractérisation des capteurs inertiels en général, et des gyroscopes et gyromètres en particulier. Nous y détaillons les diverses sources de bruit propres à chaque type d'appareil, les grandeurs essentielles permettant de les caractériser, ainsi que les considérations à prendre en compte quand on veut les comparer.

Le « **chapitre 3 – L'effet SAGNAC** » décrit de façon détaillée l'effet SAGNAC, tout d'abord dans le cas des ondes lumineuses, puis appliquée aux ondes atomiques. Nous verrons quelles différences entraînent ce changement de la nature de l'onde, et nous mettrons en évidence l'extrême sensibilité intrinsèque des gyromètres atomiques, comparée à celle des gyromètres optiques. Ce chapitre est également l'occasion d'adapter aux gyromètres à effet SAGNAC, les notions introduites au chapitre 2.

Le « **chapitre 4 – MACH-ZEHNDER atomique** » présente deux outils théoriques très importants pour décrire notre gyromètre. D'une part nous décrivons les transitions RAMAN

stimulées servant à séparer, à diriger et à recombinaison les paquets d'ondes atomiques, grâce au modèle de l'atome à deux niveaux avec degrés de liberté externes.

D'autre part nous présentons une méthode de calcul du déphasage introduit à la sortie du gyromètre atomique, s'appuyant sur les formalismes des intégrales de FEYNMAN (propagation dans l'espace libre) et des matrices S (passage dans les lames lumineuses).

Les chapitres 5 et 6 décrivent les phases de conception et de réalisation du prototype. Dans le « **chapitre 5 – Conception du gyromètre à atomes froids** » nous développons les multiples possibilités qui s'offraient à nous dans l'élaboration de la structure de l'appareil. Nous discutons des avantages et des inconvénients de chacune des solutions possibles et finalement nous donnons les raisons qui ont motivé notre choix.

Le « **chapitre 6 – Réalisation du prototype** » quant à lui décrit de façon détaillée notre dispositif expérimental. Un certain nombre d'astuces technologiques ont été développées et il nous a semblé important d'en donner un aperçu dans ce mémoire.

Le « **chapitre 7 – Caractérisation** » présente les prémices de la caractérisation métrologique de notre appareil. Un certain nombre de modèles sont développés, permettant d'interpréter le signal de sortie, et de le relier à la valeur de la vitesse de rotation, ou de l'accélération. Ces modèles s'appuient sur les notions développées au chapitre 2.

Le « **chapitre 8 – Applications des gyromètres de grande sensibilité** » détaille une application prometteuse dans laquelle le gyromètre atomique pourrait apporter de nouveaux résultats. Ce chapitre aurait pu être mis en annexe, mais il nous a semblé important de justifier dans ce mémoire l'intérêt de cette course à la précision, qui pourrait sinon apparaître comme un pur caprice de métrologue. Cette application est la mise en évidence de l'effet relativiste LENSE-THIRRING, autrement appelé effet d'entraînement du repère d'inertie local. Nous décrivons en quoi consiste cet effet, ce qu'apporterait sa mise en évidence, et nous donnons le calcul permettant de trouver l'ordre de grandeur de la sensibilité nécessaire.

On trouvera également à la fin de ce mémoire une série d'annexes apportant des informations complémentaires sur certains points développés.

Ainsi « **l'annexe A – L'atome de césium** » présente les caractéristiques importantes de l'atome de césium et les transitions utiles dans notre expérience.

« **L'annexe B – Notions sur les bruits pour la caractérisation des capteurs inertiels** » donne quelques rappels sur les bruits blancs, les dérives, la variance d'ALLAN et sur différents outils utilisés pour la caractérisation.

Les « **annexe C – gyroscopes mécaniques** » et « **annexe D – gyromètres optiques** » développent les principes de fonctionnement de ces différents appareils. Ils nous a semblé important de décrire ces dispositifs car c'est à eux que se raccrochent les « gyroscopistes » pour appréhender le gyromètre atomique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BORDÉ 84] Ch. J. Bordé, Ch. Salomon, S. Avrillier, A. Van Leberghe, Ch. Bréant, D. Bassi, G. Scoles, "Optical Ramsey fringes with traveling waves", *Phys. Rev. A*, **30**, 4, p 1836, (1984)
- [BORDÉ 89] Ch. Bordé, "Atomic interferometry with internal state labelling", *Phys. Lett. A*, **140**, p 10 (1989)
- [BORDÉ 91] Ch. J. Bordé, "Atomic Interferometry and Laser Spectroscopy", in *Laser Spectroscopy X*, Ed. M. Ducloy, E. Giacobino, G. Camy, World Scientific, p 239, (1991)
- [BORDÉ 92] Ch. Bordé, "Propagation of Laser Beams and of Atomic Systems", in *Système fondamentaux en Optique Quantique / Fundamental Systems in Quantum Optics*, course 5, J. Dalibard, J.M. Raymond, J. Zinn-Justin, Ed. Les Houches, Session LIII, (1990).
- [GUSTAVSON 00-2] T. Gustavson, A. Landragin, M. Kasevich, "Rotation sensing with a dual-atom interferometer Sagnac gyroscope", *Class. Quantum Grav.*, **17**, p 1 (2000)
- [KASEVICH 91-2] M. Kasevich, S. Chu, "Atomic Interferometry Using Stimulated Raman transitions", *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 181, (1991)
- [LAURENT 98] Ph. Laurent, P. Lemonde, E. Simon, G. Santarelli, A. Clairon, N. Dimarcq, P. Petit, C. Audoin, C. Salomon, "A cold atom clock in absence of gravity", *Eur. Phys. J. D*, **3**, p 201, (1998)
- [MORINAGA 93] A. Morinaga, T. Tako, N. Ito, "Sensitive measurement of phase shifts due to ac Stark effect in a Ca optical Ramsey interferometer", *Phys. Rev. A*, **48**, p 1364, (1993)
- [MORINAGA 96] A. Morinaga, M. Nakamura, T. Kurosu, N. Ito, "Phase shift induced from the dc Stark effect in an atom interferometer comprised of four copropagating laser beams", *Phys. Rev. A*, **54**, 1, p R21, (1996)
- [PETERS 99] A. Peters, C. Keng Yeow, S. Chu, "Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms", *Nature (London)*, **400**, p 849, (1999)
- [PLESKA 00] E.M.A. Pleska, J.F. Kieffer, P. Bouniol, " les senseurs inertiels du XXI<sup>e</sup> siècle ", *Revue scientifique et technique de la défense*, **49**, p 115, juillet (2000)
- [RASEL 00] E.M. Rasel et al., "HYPER : Hyper-Precision Cold Atom Interferometry in Space", *ESA Assessment Study Report*, ESA-SCI(2000)10, (2000)
- [RIEGER 93] V. Rieger, K. Sengstock, U. Sterr, J.H. Müller, W. Ertmer, *Opt. Commun.*, **99**, p 172, (1993)
- [RIEHLE 91] F. Riehle, Th. Kister, A. Witte, J. Helmcke, Ch. Bordé, "Optical Ramsey Spectroscopy in a Rotating Frame : Effect in a Matter-Wave Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 177 (1991)

- [SAGNAC 13] G. Sagnac, "L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme", *C. R. Acad. Sci.*, **157**, p 708, (1913)
- [SNADDEN 98] M. Snadden, J. McGuirk, P. Bouyer, K. Haritos, M. Kasevich, "Measurement of the Earth's Gravity Gradient with an Atom Interferometer-Based Gravity Gradiometer", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5, p 971, (1998)





## Chapitre 2 : CARACTÉRISATION D'UN CAPTEUR INERTIEL

## TABLE DES MATIERES :

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 2.1     | RAPPEL DE MECANIQUE NEWTONIENNE .....  | 17 |
| 2.1.1   | Notion de référentiel.....   | 17 |
| 2.1.2   | L'inertie et le mouvement.....   | 19 |
| 2.1.2.1 | Notion d'inertie et principe de MACH.....                                      | 19 |
| 2.1.2.2 | Rappel sur la 2 <sup>ième</sup> loi de NEWTON dans un repère non inertiel..... | 20 |
| 2.1.2.3 | Application du principe d'inertie aux senseurs inertiels.....                  | 21 |
| 2.2     | DESCRIPTION ET CARATERISATION D'UN CAPTEUR INERTIEL.....                       | 24 |
| 2.2.1   | Gyromètre, Gyroscope et Accéléromètre.....                                     | 24 |
| 2.2.2   | Le modèle d'erreur.....  | 25 |
| 2.2.3   | $K_0$ : Le facteur d'échelle .....   | 26 |
| 2.2.4   | $B_0$ : Le biais .....   | 27 |
| 2.2.5   | $\tilde{\varepsilon}(t)$ : Le bruit limite en sortie.....                      | 27 |
| 2.2.6   | $K(t)$ et $B(t)$ : Les fluctuations du facteur d'échelle et du biais .....     | 27 |
| 2.2.7   | Formes de bruits dans les capteurs inertiels optiques et mécaniques.....       | 28 |
| 2.2.8   | Autres grandeurs importantes.....  | 32 |
| 2.2.9   | Les unités.....  | 34 |
| 2.2.10  | Caractérisation d'un capteur inertiel .....                                    | 35 |
| 2.2.11  | Comparaison de deux capteurs inertiels.....                                    | 36 |
| 2.3     | PERFORMANCES DES DIFFERENTS GYROSCOPES ET GYROMETRES.....                      | 36 |
| 2.3.1   | Appareils industriels.....   | 37 |
| 2.3.2   | Appareils de laboratoire .....   | 37 |
|         | BIBLIOGRAPHIE .....  | 39 |

## **CHAPITRE 2 :**

### **CARACTERISATION D'UN CAPTEUR INERTIEL**

Le but de ce chapitre est d'énoncer les principes physiques qui conduisent à la réalisation de capteurs inertiels. Par capteur inertiel, on entend tout type d'appareil qui sert à mettre en évidence le caractère non inertiel du référentiel auquel il est lié. Comme on le verra dans la première partie de ce chapitre, un référentiel perd son caractère inertiel lorsqu'il est soumis à un mouvement de rotation ou d'accélération par rapport aux autres référentiels d'inertie. Les capteurs inertiels sont donc essentiellement les gyroscopes et les accéléromètres.

Les domaines de l'accélérométrie et surtout de la gyroscopie sont des domaines qui ont évolué très rapidement depuis la seconde guerre mondiale grâce à la demande croissante pour les applications de navigation, de contrôle d'attitude et de guidage. Chaque application nécessite des besoins particuliers, en termes de performance, qui ont conduit à la réalisation de multitudes d'appareils, chacun adapté à une application bien particulière. Il est clair que l'on ne demande pas les mêmes performances à un gyroscope utilisé dans un stabilisateur d'image de caméscope, qu'à celui servant pour la navigation d'un sous-marin. Le terme "performance" regroupe ici un certain nombre de grandeurs qui permettent de caractériser et de comparer les différents capteurs inertiels. Par exemple, les notions de facteur d'échelle, de biais, de dynamique, permettent de comparer deux gyroscopes fonctionnant sur des principes physiques complètement différents, comme un gyroscope mécanique et un gyro-laser. Ces grandeurs caractéristiques se retrouvent dans la description de tous les capteurs (inertiels, thermiques, barométriques, ...).

Le plan de ce chapitre est le suivant :

Dans le paragraphe 2.1 nous allons faire quelques rappels de mécanique classique, ceci avec un double objectif, d'une part définir précisément par rapport à quels repères sont définies les rotations et les accélérations qui sont mesurées avec un capteur inertiels ; et d'autre part mettre en évidence les lois physiques qui conduisent aux principes de fonctionnement de ces capteurs. Nous verrons ainsi comment la deuxième loi de NEWTON et le principe d'inertie permettent d'obtenir des effets sensibles aux rotations et aux accélérations.

Dans une seconde partie nous nous intéresserons à la caractérisation des capteurs inertiels. A partir d'un modèle d'erreur assez général, nous définirons les notions, essentielles par la suite, de facteur d'échelle, de biais, de dérive et de bruit limite qui nous permettront de caractériser et de comparer entre eux les différents gyroscopes et accéléromètres.

Dans une troisième partie nous présenterons les performances des différents gyroscopes et gyromètres que l'on peut trouver sur le marché et dans les laboratoires.

## 2.1 RAPPEL DE MECANIQUE NEWTONIENNE

La principale application des capteurs inertiels de grande sensibilité est la navigation des véhicules sur ou autour de la Terre. Cela signifie que lorsque l'on fait une mesure de rotation ou d'accélération, on veut connaître cette valeur par rapport à la Terre. Mais par rapport à quoi les gyroscopes mesurent-ils les rotations en réalité ?

### 2.1.1 Notion de référentiel

Afin d'étudier les mouvements d'un point matériel ou d'un solide, on a besoin d'un RÉPÈRE D'ESPACE (ou d'un solide de référence)  $\{R\}$  par rapport auquel on va comparer les déplacements de tous les objets. Ce repère d'espace définit donc l'ensemble des points immobiles. Les mouvements se repèrent également par rapport à un REPÈRE DE TEMPS, qui va permettre de calculer des dérivées temporelles et ainsi de définir la vitesse et l'accélération. L'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère de temps constitue un RÉFÉRENTIEL  $\{R, t\}$ .

En mécanique newtonienne le temps a un caractère absolu, c'est-à-dire que lorsque l'on change de référentiel, seul le repère d'espace change. On verra au chapitre 8.1 qu'il n'en est plus de même en mécanique relativiste. Dans cette partie on utilisera donc indifféremment les termes référentiel et repère (sous-entendu repère d'espace).

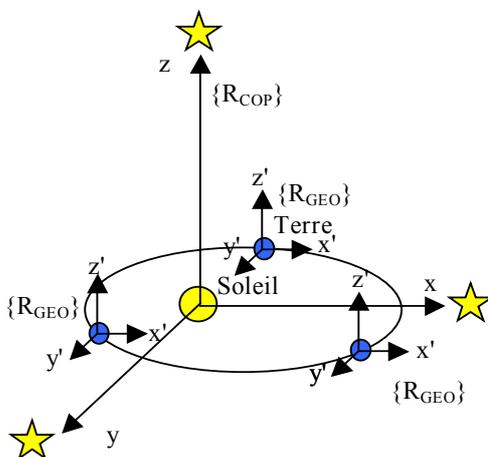
Afin de formuler les déplacements de façon analytique, on munit généralement le repère d'espace d'un SYSTÈME DE COORDONNÉES. L'ensemble des trois vecteurs unitaires définissant ce système de coordonnées s'appelle une BASE. Le repère d'espace est entièrement décrit par la donnée d'une base  $B$  et d'un point origine  $O$ .

La mécanique newtonienne postule l'existence de référentiels particuliers dans lesquels le mouvement du centre de gravité d'un solide soumis à aucune force est rectiligne uniforme.

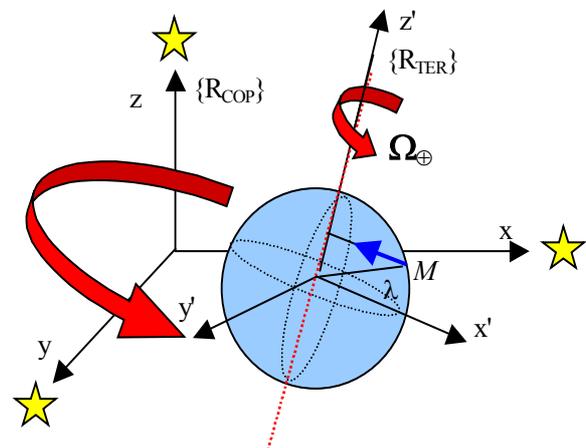
De tels référentiels sont appelés RÉFÉRENTIELS D'INERTIE ou encore RÉFÉRENTIELS GALILÉENS. On peut montrer [BRIDGMAN 61] qu'une très bonne approximation de tels référentiels sont tous ceux dont le repère d'espace est donné par trois étoiles lointaines pour les directions des vecteurs de base, et par un point soumis à aucune force pour l'origine. En pratique, on choisira généralement comme représentation du repère d'inertie, un repère d'espace centré sur le Soleil et pointant vers trois étoiles lointaines. Ce repère s'appelle REPÈRE DE COPERNIC que l'on notera  $\{R_{COP}\}$  <sup>(1)</sup>.

On définit également le REPÈRE GÉOCENTRIQUE (noté  $\{R_{GEO}\}$ ), dont l'origine est le centre de la Terre, et qui est en translation par rapport au repère de COPERNIC (voir **Figure 2. 1**). Le référentiel géocentrique n'est pas un référentiel d'inertie car il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de COPERNIC ; en effet, son origine (le centre de la Terre) est soumise à l'attraction du Soleil. Les points fixes du repère géocentrique coïncidant avec la Terre, subissent de ce fait une accélération centripète de  $6.10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$  dirigée vers le soleil.

Enfin on définit le REPÈRE TERRESTRE (noté  $\{R_{TER}\}$ ), donné par le centre de la Terre et dont les axes sont donnés par trois points fixes de la Terre (voir **Figure 2. 2**). Le référentiel terrestre n'est pas un référentiel d'inertie non plus, car son origine est le centre de la Terre, et de plus parce que ses axes sont en rotation par rapport à ceux du repère de COPERNIC. Un point  $M$  lié à la Terre subit, en plus de l'attraction gravitationnelle terrestre, une accélération centripète d'environ  $3,4 \cdot 10^{-2} \cos^2(\lambda) \text{ m.s}^{-2}$  dirigée vers la projection de  $M$  sur l'axe de rotation de la Terre ( $\lambda$  est la latitude du lieu de  $M$ ).



**Figure 2. 1** : repère géocentrique, les axes restent parallèles à ceux d'un repère d'inertie.



**Figure 2. 2** : repère terrestre, les axes tournent avec la Terre.

<sup>(1)</sup> En fait on sait que le Soleil n'est pas immobile, il décrit une orbite circulaire ( $R \sim 3.10^{20} \text{ m}$ ) autour du centre de la Galaxie avec une vitesse d'environ  $400 \text{ km.s}^{-1}$ , ce qui provoque une accélération centripète de  $3.10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$ . En toute rigueur le repère de COPERNIC n'est donc pas un repère d'inertie, mais il en constitue une très bonne approximation pour la majorité des expériences réalisées au voisinage de la Terre.

Il est clair que le repère le mieux adapté pour l'étude des mouvements sur la Terre – que ce soit le mouvement d'un véhicule ou celui d'un solide dans un laboratoire - est le repère terrestre. Il est donc important de garder en mémoire que ce repère n'est pas un repère d'inertie et qu'il est animé d'un mouvement de rotation à la vitesse  $\Omega_{\oplus}$  selon l'axe des pôles, par rapport à un repère d'inertie.

## 2.1.2 L'inertie et le mouvement

### 2.1.2.1 Notion d'inertie et principe de MACH

Le problème de la définition d'un repère d'inertie est un problème complexe, et la notion même de repère d'inertie n'est pas complètement claire. On a défini, dans le paragraphe précédent, le repère d'inertie à partir du mouvement d'un solide soumis à aucune force et on a donné une des méthodes pour réaliser un tel repère à partir d'étoiles lointaines. Mais comme nous allons le voir, la définition donnée par GALILÉE du repère d'inertie telle qu'elle est donnée ici, pose encore quelques questions.

Afin de donner un aperçu des difficultés conceptuelles qui entourent l'inertie nous allons reprendre une expérience de pensée proposée par NEWTON [NEWTON 62 ou voir par exemple KITTEL 72]. Considérons un seau rempli d'eau suspendu à une corde. Si la corde est enroulée sur elle-même, le seau va se mettre à tourner sur lui-même, par rapport à un repère d'inertie donné par trois étoiles fixes, et la surface de l'eau va prendre une forme de parabolôïde. Que se passe-t-il maintenant si le seau est immobile (la corde n'est pas enroulée) mais que l'on fait tourner les étoiles et tout l'univers, par rapport au seau, de telle façon que le mouvement relatif soit le même que dans la première expérience ? NEWTON pensait que la surface de l'eau resterait plane, il attribuait ainsi les propriétés d'inertie à l'espace géométrique fixe et par rapport auquel il pouvait alors définir une accélération absolue. Au contraire MACH, en 1933, a développé l'idée que l'inertie était liée à l'espace physique (c'est-à-dire aux masses qui composent l'univers) et pensait donc que la surface de l'eau se courberait, car seule l'accélération relative du seau par rapport au reste de la matière importait. Le principe de MACH a ainsi initié les concepts de "repère d'inertie local" et "d'entraînement du repère d'inertie", que l'on retrouve en relativité générale (voir Chapitre 8). Aucune des deux conceptions, de NEWTON ou de MACH, n'a pu être vérifiée par l'expérience, vue la difficulté de réaliser un quelconque test <sup>(1)</sup>.

Nous ne développerons pas plus ici ces différentes conceptions de l'inertie, car quel que soit le point de vue que l'on adopte, la suite de ce que l'on va dire reste valable.

---

<sup>(1)</sup> Le projet spatial de recensement et de positionnement d'étoiles GAIA devrait permettre de définir de façon très précise un repère d'inertie de MACH. Une comparaison du mouvement d'un repère d'inertie newtonien (défini par des accéléromètres et des gyroscopes) par rapport à un repère d'inertie machien (défini par rapport aux étoiles) pourra ainsi être réalisée.

### 2.1.2.2 Rappel sur la 2<sup>ème</sup> loi de NEWTON dans un repère non inertiel

Expérimentalement, la seule façon que l'on a de mettre en évidence le caractère inertiel ou non-inertiel d'un repère est d'étudier l'influence des forces d'inertie, c'est-à-dire de la force d'entraînement, de la force centrifuge, et de la force de CORIOLIS. On considère un point matériel  $M$  en mouvement dans le repère  $\{R\}$  non inertiel, on note alors  $\mathbf{OM}_R$ ,  $\mathbf{V}(M)_R$  et  $\mathbf{a}(M)_R$  respectivement la position, la vitesse et l'accélération de  $M$  dans  $\{R\}$ . Si l'on veut exprimer la vitesse et l'accélération de  $M$  dans un repère d'inertie  $\{R_0\}$ , on a alors les équations de transformations suivantes :

$$\mathbf{V}(M)_{R_0} = \underbrace{\mathbf{V}(M)_R}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\mathbf{V}(O)_{R_0} + \boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \times \mathbf{OM}_R}_{\text{vitesse d'entraînement} = \text{vitesse du point coïncidant}} \quad (\text{Eq. 2. 1})$$

$$\mathbf{a}(M)_{R_0} = \underbrace{\mathbf{a}(M)_R}_{\text{relative}} + \underbrace{\mathbf{a}(O)_{R_0}}_{\text{entraînement}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \times (\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \times \mathbf{OM}_R)}_{\text{centripète}} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}}{dt} \times \mathbf{OM}_R + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \times \mathbf{V}(M)_R}_{\text{CORIOLIS}} \quad (\text{Eq. 2. 2})$$

où  $\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}$  est le vecteur rotation instantané de  $\{R\}$  par rapport à  $\{R_0\}$ .  $O$ ,  $\mathbf{V}(O)_{R_0}$  et  $\mathbf{a}(O)_{R_0}$  sont respectivement la position, la vitesse et l'accélération du point origine du repère  $\{R\}$  exprimées dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$ .

- L'accélération d'entraînement correspond à l'accélération d'un repère  $\{R'\}$  dont l'origine est confondue avec  $O$ , mais dont les axes restent toujours parallèles à ceux de  $\{R_0\}$  (translation).
- L'accélération centripète est le terme lié aux mouvements de rotation du repère  $\{R\}$  par rapport à  $\{R_0\}$ . La somme de l'accélération d'entraînement et de l'accélération centripète correspond à l'accélération du point de  $\{R\}$  coïncidant avec  $M$  à l'instant considéré.
- L'accélération de CORIOLIS est purement liée au fait que le point  $M$  se déplace dans le repère  $\{R\}$ .

Dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$  la seconde loi de NEWTON s'écrit :

$$m \mathbf{a}(M)_{R_0} = \mathbf{F} \quad (\text{Eq. 2. 3})$$

où  $\mathbf{F}$  représente l'ensemble des forces physiques réelles auquel est soumis le point  $M$  de masse  $m$ . On utilise ici le terme « forces physiques réelles », par opposition aux forces d'inertie.

La relation (Eq. 2.3) exprimée dans le repère non inertiel  $\{R\}$  s'écrit :

$$m \mathbf{a}(M)_R = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{Ce} + \mathbf{F}_{Co} \quad (\text{Eq. 2. 4})$$

avec la force d'inertie d'entraînement :

$$\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}(O)_{R_0} \quad (\text{Eq. 2. 5})$$

la force d'inertie centrifuge :

$$\mathbf{F}_{Ce} = -m \left[ \boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \times (\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \times \mathbf{OM}_R) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}}{dt} \times \mathbf{OM}_R \right] \quad (\text{Eq. 2. 6})$$

la force d'inertie de CORIOLIS :

$$\mathbf{F}_{Co} = -2m [\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \times \mathbf{V}(M)_R] \quad (\text{Eq. 2. 7})$$

La relation (Eq. 2.4) exprime le fait que pour rester au repos dans un repère non inertiel, le point  $M$  doit subir un certain nombre de forces physiques compensant les forces d'inertie : pour que  $\mathbf{a}(M)_R = 0$  il faut que  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_e - \mathbf{F}_{Ce} - \mathbf{F}_{Co}$ . Il n'y a que dans les repères d'inertie que le point  $M$  peut rester au repos sans l'aide de forces physiques. Ceci constitue le principe d'inertie tel que nous allons l'utiliser pour réaliser un capteur inertiel. Parmi les trois forces d'inertie, la force de CORIOLIS est très utile pour déterminer les rotations car elle est directement proportionnelle à  $\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}$  et indépendante de la position de l'axe de rotation. De même pour déterminer les accélérations, les forces d'inertie d'entraînement et centrifuge vont être utilisées. En pratique, on choisit généralement l'origine du repère  $\{R\}$  là où est placé le capteur inertiel, l'action de la force centrifuge est alors incluse dans le terme de force d'entraînement.

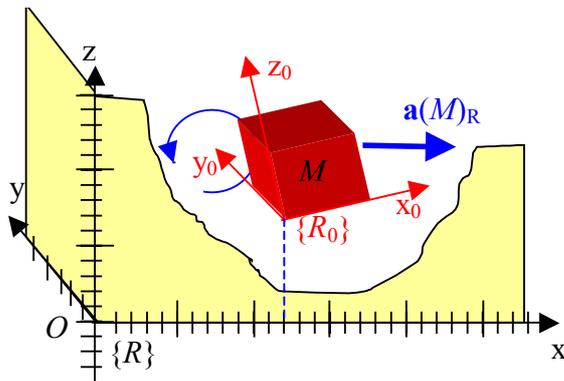
### 2.1.2.3 Application du principe d'inertie aux senseurs inertiels

Deux types de capteurs inertiels vont être étudiés : les accéléromètres, sensibles aux accélérations, et les gyroscopes, sensibles aux rotations.

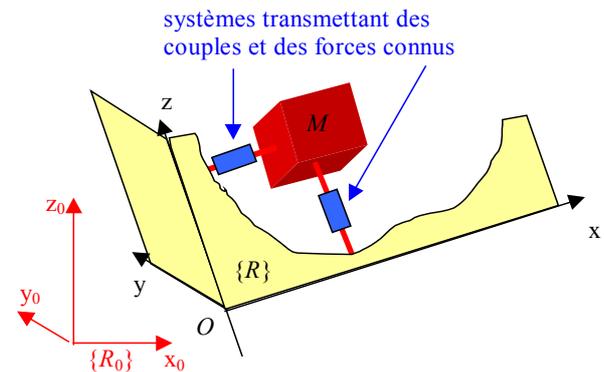
Il y a deux façons différentes de réaliser un capteur inertiel par application du principe d'inertie. La première consiste à utiliser le capteur comme repère d'inertie, et à comparer le mouvement du laboratoire par rapport au capteur. La seconde méthode est de fixer le capteur au repère du laboratoire, et de mesurer les forces qu'il faut lui appliquer pour le maintenir au repos dans ce repère. Ces deux méthodes vont être détaillées ici, afin de préciser clairement à quoi sont sensibles ces capteurs.

1<sup>ère</sup> méthode : on dispose d'une masse d'épreuve complètement découplée de l'extérieur, c'est-à-dire que cette masse n'est soumise à aucune force, elle constitue donc un repère d'inertie  $\{R_0\}$ . On suppose qu'à l'instant  $t = 0$  la masse  $M$  est en  $O$  origine de  $\{R\}$ . On compare alors les mouvements du repère du laboratoire  $\{R\}$  par rapport à cette masse d'épreuve. L'orientation de la masse dans  $\{R\}$  donne l'information sur la rotation  $\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}$ , et la position donne l'information sur l'accélération  $\mathbf{OM} = \frac{1}{2} \mathbf{a}(M)_R t^2$  (voir **Figure 2. 3**), et

$\mathbf{a}(M)_R = -\mathbf{a}(O)_{R_0}$ . Le problème de cette méthode est que la masse d'épreuve se déplace dans le repère  $\{R\}$  s'il y a une accélération. Or le laboratoire n'est pas d'extension infinie et la masse peut frapper les parois du laboratoire. Par contre, les rotations ne font que changer l'orientation de  $M$  dans  $\{R\}$ , on peut donc réaliser un gyroscope par cette méthode. Le capteur est alors lié au repère  $\{R\}$  par un dispositif ne transmettant que des forces (pour compenser les accélérations) mais aucun couple. Le capteur est donc totalement libre en rotation.



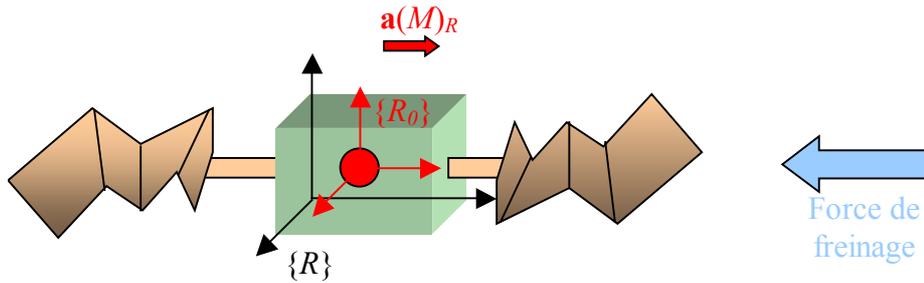
**Figure 2. 3** : la masse d'épreuve  $M$  est libre dans le repère du laboratoire  $\{R\}$  et constitue donc un repère d'inertie  $\{R_0\}$ . L'orientation de  $M$  dans  $\{R\}$  renseigne sur la rotation de  $\{R_0\}$  par rapport à  $\{R\}$  et la position de  $M$  renseigne sur l'accélération de  $\{R_0\}$  par rapport à  $\{R\}$ .



**Figure 2. 4** : la masse d'épreuve  $M$  est gardée fixe par rapport au repère du laboratoire  $\{R\}$  grâce à un système qui transmet des couples et des forces connus. La mesure de ce couple et de cette force permet de connaître l'orientation de  $\{R\}$  par rapport à un repère d'inertie  $\{R_0\}$ .

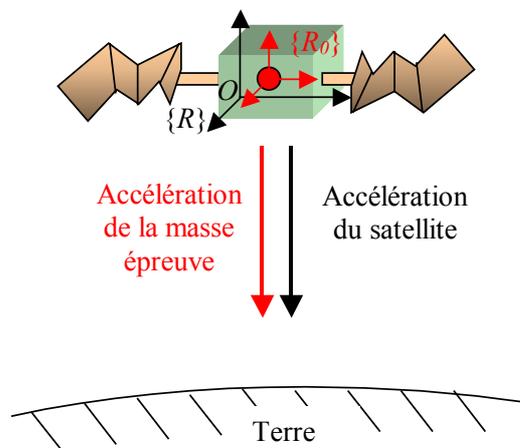
2<sup>ème</sup> méthode : on peut fixer la masse d'épreuve au repère du laboratoire par l'intermédiaire d'un système permettant de transmettre une force et un couple parfaitement connus (voir **Figure 2. 4**). En mesurant la force et le couple qu'il faut fournir à la masse d'épreuve pour la conserver au repos dans le repère du laboratoire on en déduit les valeurs des différentes forces d'inertie et ainsi le mouvement relatif du repère du laboratoire par rapport à un repère d'inertie. Les capteurs ainsi fixés sur la structure d'un véhicule sont appelés : *composants liés* (ou *strapdown* en anglais).

En pratique on ne peut pas complètement découpler la masse d'épreuve des forces extérieures. Il est facile de s'affranchir des forces de contact qui transmettent les accélérations inertielles, ainsi, une masse d'épreuve en apesanteur dans un satellite ne subira pas la force de freinage que l'atmosphère exerce sur celui-ci, la décélération du satellite pourra alors être mise en évidence par le mouvement relatif du repère du laboratoire (le satellite) par rapport à la masse d'épreuve (voir **Figure 2. 5**).



**Figure 2. 5** : la masse d'épreuve n'est pas soumise à la force de freinage car les parois du satellite font écran. On détecte donc l'accélération de la masse d'épreuve  $a(M)_R$  dans le repère du satellite  $\{R\}$ , qui est égale et opposée en direction à l'accélération du satellite par rapport à un repère d'inertie  $\{R_0\}$ .

Par contre, il est impossible de s'affranchir des forces gravitationnelles qui entraînent les accélérations d'origine gravitationnelle. En effet si l'on reprend notre masse d'épreuve dans le satellite, l'accélération gravitationnelle est identique sur le satellite et sur la masse d'épreuve. Le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre ne permet donc pas de mettre en évidence cette accélération. Ainsi, le satellite, tout au long de son orbite, est soumis à une accélération d'entraînement  $a(O)_{R_0}$  dirigée vers le centre de la Terre, qui ne peut être détectée par notre dispositif (voir **Figure 2. 6**). On peut expliquer cette différence entre les accélérations d'origine inertielle et celles d'origine gravitationnelle, par le fait que les forces de contact agissant sur des surfaces, il est donc possible de les écranter, comme le font les parois du satellite avec la force de freinage. Au contraire la force gravitationnelle agit sur des volumes (c'est un champ de force), il n'y a alors aucun écrantage possible [SAUMONT 88 – p 63], [SAUMONT 00]. Ou encore, une autre façon de voir les choses est de dire que pour la gravitation il n'existe des « charges » que d'un seul signe, conduisant forcément à une force attractive, contrairement aux forces électromagnétiques par exemple.



**Figure 2. 6**: la gravité exerce la même accélération sur la masse d'épreuve et sur le satellite. L'accélération gravitationnelle du satellite est donc indécélable.

Cette remarque a une implication très importante pour les accéléromètres. En effet, le fait que ce dispositif ne permette pas de déterminer les accélérations d'origine gravitationnelle, entraîne que les accéléromètres ne sont sensibles qu'aux accélérations par rapport au repère uniformément accéléré par le champ de gravité local, et non par rapport à un repère d'inertie. On appellera dans la suite de ce mémoire REPÈRE LOCAL, le repère accéléré par la gravité locale.

Au contraire, le fait que la force de gravitation n'affecte que le terme d'accélération d'entraînement  $\mathbf{a}(O)_{R0}$  et pas les termes dépendants de  $\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}$ , implique que l'on mesure effectivement le vecteur rotation instantané par rapport à un repère d'inertie ; les gyroscopes indiquent donc les rotations par rapport aux repères d'inertie.

Dans toute la suite de ce mémoire  $\{R_0\}$  représentera un repère d'inertie et  $\{R'_0\}$  sera un repère local.

## 2.2 DESCRIPTION ET CARACTERISATION D'UN CAPTEUR INERTIEL

Tous les appareils de mesures sont caractérisés par un certain nombre de données qui permettent d'évaluer la qualité et les performances de l'appareil. Ces données permettent de déterminer la précision que l'on peut attendre d'une mesure, les précautions à prendre pour minimiser l'incertitude entachant une mesure, ou la gamme de mesure pour laquelle l'appareil est conçu. Ces différentes données seront utilisées dans toute la suite de ce mémoire afin de comparer les différents gyromètres, gyroscopes et accéléromètres, il est donc très important de les définir précisément. Les grandeurs que l'on définit ici s'appuient largement sur celles données dans [IEEE - 74, IEEE - 81].

### 2.2.1 Gyromètre, Gyroscopie et Accéléromètre

La langue française possède deux mots "gyromètre" et "gyroscopie" pour définir les appareils sensibles aux rotations. Ces deux mots ne sont pas synonymes et définissent deux types d'appareils différents :

- Un GYROMÈTRE est un appareil sensible aux vitesses de rotation, c'est-à-dire que son signal de sortie est une fonction de la composante le long de l'axe d'entrée <sup>(1)</sup> de l'appareil  $\mathbf{e}_a$ , du vecteur rotation instantané de l'appareil  $\{S\}$  par rapport à un repère d'inertie  $\{R_0\}$ .

$$S_{\text{sortie}} = f(\boldsymbol{\Omega}_{S/R_0} \cdot \mathbf{e}_a) \quad (\text{Eq. 2. 8})$$

---

<sup>(1)</sup> Ce terme sera défini précisément au paragraphe 2.2.8. Il correspond à la direction suivant laquelle l'appareil est sensible.

• Un GYROSCOPE (ou gyromètre intégrateur) est un appareil sensible aux angles de rotation, c'est-à-dire que le signal de sortie est une fonction du déplacement angulaire de l'appareil  $\{S\}$  par rapport à un repère d'inertie  $\{R_0\}$ .

$$S_{\text{sortie}} = f(\theta_a) \quad (\text{Eq. 2. 9})$$

Cette distinction entre gyroscope et gyromètre a été introduite par RADIX en 1967 [RADIX 67].

En anglais le mot "gyroscope" existe , mais le mot "gyrometer" n'existe pas. On ne peut donc pas faire facilement la distinction entre les deux types d'appareils. Ce problème peut être écarté en utilisant le terme "gyro", qui ne donne aucune information sur le fait qu'il s'agisse d'un gyromètre ou d'un gyroscope. Une autre solution, consiste alors à appeler les gyromètres : "rate gyro" ; et les gyroscopes : "rate-integrating gyro", bien que cette dénomination sous-entend généralement qu'il s'agit de gyromètres ou de gyroscopes mécaniques.

• Un ACCÉLÉROMÈTRE est un appareil sensible aux accélérations, c'est-à-dire que le signal de sortie est proportionnel à l'accélération de l'appareil  $\{S\}$  par rapport à un repère local  $\{R'_0\}$ .

$$S_{\text{sortie}} = f(\mathbf{a}_{S/R'_0} \cdot \mathbf{e}_a) \quad (\text{Eq. 2. 10})$$

### 2.2.2 Le modèle d'erreur

Les capteurs sont caractérisés par un modèle d'erreur qui permet de relier la valeur indiquée par l'appareil à la valeur de la grandeur mesurée. La grandeur mesurée (vitesse ou angle de rotation, ou accélération) est appelée grandeur d'entrée. Nous allons traiter le cas où la grandeur d'entrée est la vitesse de rotation, elle sera donc notée  $\Omega$ . La valeur indiquée par l'appareil est appelée grandeur de sortie et sera notée  $S$ .

Le modèle que l'on prend est aussi général que possible. La grandeur de sortie  $S$  est reliée à la grandeur d'entrée  $\Omega$  par la relation :

$$S(t) = [K_0 + K(t)] \Omega(t) + [B_0 + B(t)] + \tilde{\varepsilon}(t) \quad (\text{Eq. 2. 11})$$

Nous allons expliciter chacun des termes de ce modèle, mais nous pouvons dire d'ores et déjà que les termes  $K_0$  et  $B_0$  sont des constantes,  $K(t)$  et  $B(t)$  sont des termes dépendant de façon déterministe de l'environnement, et  $\tilde{\varepsilon}(t)$  est une fonction aléatoire de moyenne nulle. Dans toute la suite le  $\sim$  indiquera une fonction aléatoire. Nous appelons dans la suite « conditions d'étalonnage », les conditions d'environnement et l'historique de l'appareil au moment de l'étalonnage de celui-ci. C'est dans ces conditions que les valeurs  $K_0$  et  $B_0$  ont été déterminées en prenant arbitrairement  $K(t) = 0$  et  $B(t) = 0$ . Dans les conditions d'étalonnage le modèle (Eq. 2. 11) se réduit donc à :

$$S(t) = K_0 \Omega(t) + B_0 + \tilde{\varepsilon}(t) \quad (\text{Eq. 2. 12})$$

### 2.2.3 $K_0$ : Le facteur d'échelle

Lorsque l'appareil détecte un signal en entrée, il fournit un signal à sa sortie donné par (Eq. 2. 12). Une modification  $d\Omega$  du signal d'entrée entraîne une modification  $dS$  du signal de sortie. Le rapport de la variation du signal de sortie à la variation du signal d'entrée, dans les conditions d'étalonnage, est appelé le *facteur d'échelle* et vaut :

$$K_0 = \frac{dS}{d\Omega} \quad (\text{Eq. 2. 13})$$

Le signal de sortie du capteur peut être un signal électrique, une valeur angulaire, un déplacement, une intensité lumineuse, un nombre d'atomes détectés, ... il peut être analogique ou numérique. Dans la plupart des cas ce rapport est constant, le facteur d'échelle est alors juste un nombre qui définit le facteur de proportionnalité entre le signal d'entrée (vitesse de rotation, angle ou accélération) et la valeur du signal de sortie.

Il arrive que le facteur d'échelle dépende de la valeur du signal d'entrée. Typiquement, dans notre gyromètre atomique la probabilité de transition  $P_e$  varie comme le cosinus de la vitesse de rotation  $\Omega$  (voir Eq. 3.38). On peut se rapprocher du modèle décrit par (Eq. 2. 11) en faisant un développement limité du signal de sortie autour du point de fonctionnement. Notre gyromètre est utilisé autour du point  $\Delta\phi^{total} = \pi/2$ , le développement limité donne donc :

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(\Delta\phi^{total}) \right] = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2mA}{\hbar} \Omega \right) \quad (\text{Eq. 2. 14})$$

avec  $\Delta\phi^{total} = \pi/2 + (2mA/\hbar)\Omega$  <sup>(1)</sup>. On retrouve alors le facteur d'échelle reliant  $P_e$  à  $\Omega$  autour du point de fonctionnement :

$$K_0 = -\frac{mA}{\hbar} \quad (\text{Eq. 2. 15})$$

Si l'on s'éloigne trop du point de fonctionnement, le développement limité doit alors être poussé à des ordres supérieurs, le facteur d'échelle devient alors une fonction de la grandeur d'entrée. Typiquement dans notre cas à l'ordre 3 on trouve :

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2mA}{\hbar} \Omega + \frac{1}{3} \left( \frac{2mA}{\hbar} \right)^3 \Omega^3 \right] \quad (\text{Eq. 2. 16})$$

Le facteur d'échelle vaut alors :

$$K_0(\Omega) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{2mA}{\hbar} - \frac{1}{3} \left( \frac{2mA}{\hbar} \right)^3 \Omega^2 \right] \quad (\text{Eq. 2. 17})$$

<sup>(1)</sup> Cette expression du déphasage sera détaillée au chapitre 3,  $m$  est la masse de l'atome,  $A$  est l'aire de l'interféromètre et  $\hbar$  est la constante de PLANCK divisée par  $2\pi$ .

Il est alors la somme du terme défini par (Eq. 2. 15) et d'un terme en  $\Omega^2$  appelé *non linéarité d'ordre 2 du facteur d'échelle*. Plus on s'éloigne du point de fonctionnement, plus le nombre d'ordres dont il faudra tenir compte sera élevé.

#### 2.2.4 $B_0$ : Le biais

Lorsque le signal d'entrée  $\Omega$  est nul, il peut arriver que le signal de sortie  $S$  ne le soit pas. Cette valeur du signal de sortie, dans les conditions d'étalonnage, est appelée le *biais* de l'appareil. Il correspond donc à  $B_0$ . On ne prend pas en compte  $\tilde{\varepsilon}(t)$  car on suppose que sur un grand nombre de mesures à  $\Omega = 0$ , l'incertitude apportée par  $\tilde{\varepsilon}(t)$  est négligeable.

#### 2.2.5 $\tilde{\varepsilon}(t)$ : Le bruit limite en sortie

Lorsque l'on réalise une mesure dans les conditions d'étalonnage à l'instant  $t = t_0$ , le signal de sortie est donné par (Eq. 2. 12), où  $K_0$  et  $B_0$  sont les seules valeurs déterministes connues. Sur une mesure, la valeur estimée de  $\Omega$  à partir de  $S$ , notée  $\tilde{\Omega}$  est alors donnée par :

$$\tilde{\Omega} = \frac{S - B_0}{K_0} \quad (\text{Eq. 2. 18})$$

On réalise donc une erreur  $\Delta\tilde{\Omega}$  sur la valeur de  $\Omega$  de :

$$\Delta\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega} - \Omega) = \frac{\tilde{\varepsilon}(t_0)}{K_0} \quad (\text{Eq. 2. 19})$$

$\tilde{\varepsilon}(t)$  est appelé le bruit limite en sortie, et  $(\tilde{\varepsilon}(t)/K_0)$  représente le bruit limite en entrée. L'écart-type  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$  de la variable aléatoire  $\Delta\tilde{\Omega}$  correspond à l'incertitude sur la mesure de  $\Omega$ . C'est ce paramètre qui caractérise la qualité de la mesure.

Si l'on suppose que le signal d'entrée reste constant au cours du temps, on peut réaliser un grand nombre de mesures. Le bruit  $\tilde{\varepsilon}(t)$  est alors moyenné et tend à s'annuler. On réduit ainsi l'erreur faite sur la mesure de  $\Omega$ . La façon dont  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$  évolue avec le nombre de mesures réalisées dépend de la nature du bruit  $\tilde{\varepsilon}(t)$ . Même dans un appareil « parfait » il existe toujours une source de bruit intrinsèque à l'appareil que l'on ne peut pas supprimer. Ce bruit d'origine quantique est une réelle limitation physique, et non une limitation expérimentale. Nous verrons au paragraphe 2.2.7 l'influence de ce bruit limite sur  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$ , et d'autres formes de bruits que l'on peut également rencontrer.

#### 2.2.6 $K(t)$ et $B(t)$ : Les fluctuations du facteur d'échelle et du biais

Les valeurs du facteur d'échelle et du biais peuvent fluctuer au cours du temps en fonction des différents paramètres propres à l'environnement (pression, température, vibrations, ...), mais aussi en fonction de l'historique de l'appareil (nombre et durée des utilisations, chocs, ...). Lorsque l'on s'éloigne des conditions d'étalonnage il faut remplacer le modèle d'erreur (Eq. 2. 12) par le modèle (Eq. 2. 11) qui prend en compte les fluctuations du

facteur d'échelle et du biais. Ces fluctuations sont d'origine purement déterministe mais dépendent de tellement de paramètres que leur modélisation complète est impossible.

Les contributions modélisables à ces fluctuations peuvent être incorporées dans les termes  $K_0$  et  $B_0$ . Par exemple, supposons que l'on connaisse parfaitement la dépendance du facteur d'échelle avec la température, on peut alors remplacer le terme  $K_0$  par  $K_0(T)$ , et en mesurant constamment la température on en déduit alors la valeur du facteur d'échelle dans les nouvelles conditions de température.

Les contributions qui ne peuvent être modélisées de façon déterministe sont alors traitées comme des bruits. On leur associe alors une fonction aléatoire dont la densité spectrale de puissance est évaluée expérimentalement voire parfois empiriquement. Le modèle d'erreur (Eq. 2. 12) peut alors être réécrit sous la forme :

$$S(t) = K_0(x_i)\Omega(t) + B_0(y_j) + \tilde{b}(t) \quad (\text{Eq. 2. 20})$$

où les  $x_i$  et les  $y_j$  représentent tous les paramètres dont la dépendance respectivement du facteur d'échelle et du biais peuvent être modélisables.  $\tilde{b}(t)$  est une fonction aléatoire possédant une contribution liée au bruit limite  $\tilde{\varepsilon}(t)$ , et une contribution liée à toutes les dépendances non modélisables de façon déterministe du facteur d'échelle  $\tilde{\kappa}(t)$  et du biais  $\tilde{\beta}(t)$ .  $\tilde{b}(t)$  peut alors s'écrire :

$$\tilde{b}(t) = \tilde{\kappa}(t)\Omega(t) + \tilde{\beta}(t) + \tilde{\varepsilon}(t) \quad (\text{Eq. 2. 21})$$

Nous allons voir maintenant quelles sont les formes de bruits usuellement rencontrées dans les différents types de capteurs inertiels.

### 2.2.7 Formes de bruits dans les capteurs inertiels optiques et mécaniques

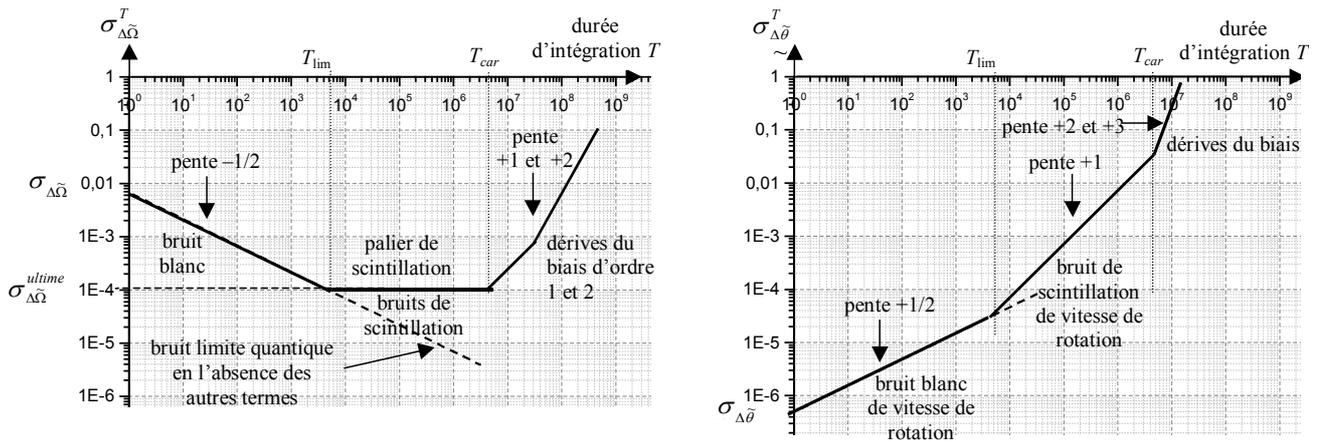
Les capteurs inertiels peuvent être divisés en deux catégories, suivant l'effet physique qu'ils utilisent. On distingue ainsi dans le domaine de la gyrométrie, les gyroscopes mécaniques fonctionnant sur un principe mécanique (loi de la gyroscopie, force de CORIOLIS – voir Annexe C), et les gyromètres optiques exploitant l'effet SAGNAC (décrit au chapitre 3 et en Annexe D). Ces deux types de capteurs sont très différents, et les bruits qui les caractérisent sont propres à chacun d'eux. Nous allons les détailler ici.

#### 1) Les capteurs inertiels optiques et atomiques

Dans les capteurs optiques et atomiques les bruits liés aux fluctuations du facteur d'échelle et du biais sont très faibles, et c'est donc le bruit limite  $\tilde{\varepsilon}(t)$  qui prédomine. Dans le cas où le signal de sortie est un flux lumineux, ce bruit limite est appelé *bruit de photons*. Il est lié à la statistique poissonnienne du nombre de photons détectés par un photodétecteur pendant une durée  $T$  : c'est donc un bruit blanc.

Dans le cas d'un gyromètre optique, ce bruit blanc en détection  $\tilde{\varepsilon}$  se traduit par un bruit blanc  $\Delta\tilde{\Omega}$  sur la vitesse de rotation mesurée  $\tilde{\Omega}$ . Par intégration temporelle, ce bruit blanc induit alors un bruit de marche aléatoire sur la détermination de l'angle de rotation  $\tilde{\theta}_T = \tilde{\Omega}T$ , qui conduit à une incertitude sur l'angle  $\sigma_{\Delta\tilde{\theta}}^I$  proportionnelle à  $\sqrt{T}$ , où  $T$  est la durée d'observation. Par contre, la détermination de la vitesse de rotation moyenne  $\tilde{\Omega}_T$ , à partir d'une observation sur une durée  $T$ , est entachée d'une incertitude  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^I = \sigma_{\Delta\tilde{\theta}}^I / T$  diminuant comme  $1/\sqrt{T}$  (on pourra se reporter à l'Annexe B pour plus de précisions).

### Les gyromètres



### Les gyroscopes

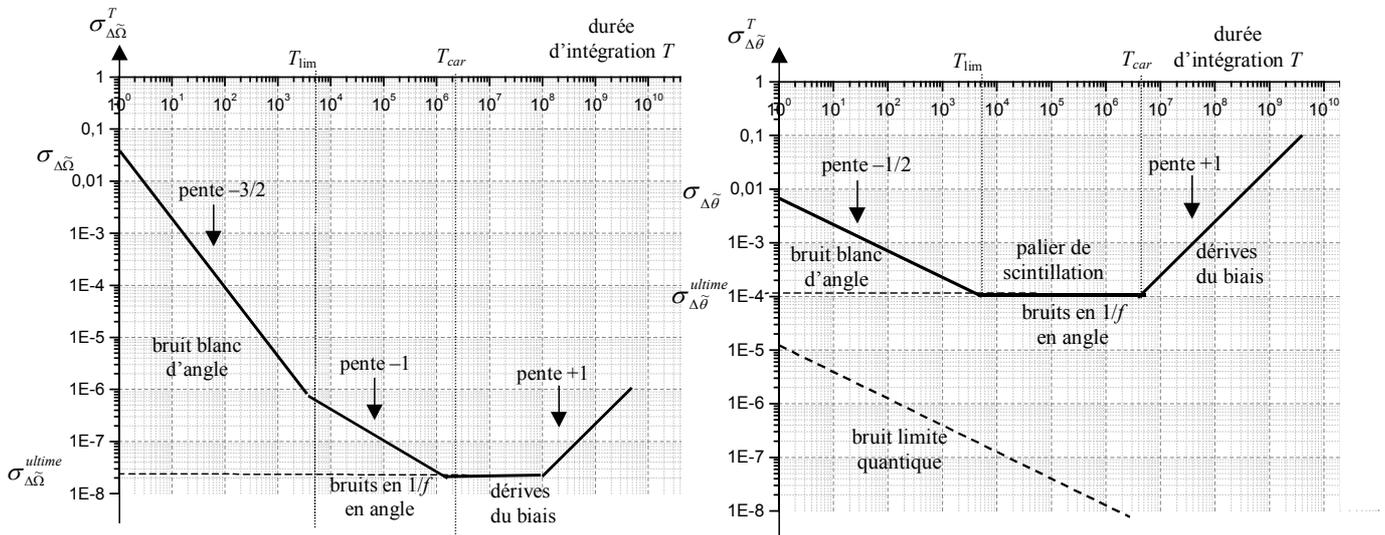


Figure 2. 8 : évolution de l'incertitude sur la mesure de vitesse de rotation en fonction du temps d'intégration, avec un gyromètre (en haut) et avec un gyroscope (en bas). Les unités mentionnées sur les axes sont purement arbitraires.

Figure 2. 9 : évolution de l'incertitude sur la mesure de l'angle de rotation en fonction du temps d'intégration, avec un gyromètre (en haut) et avec un gyroscope (en bas). Les unités mentionnées sur les axes sont purement arbitraires.

Si l'on considère maintenant un gyroscope <sup>(1)</sup>, le bruit blanc de détection  $\tilde{\varepsilon}$  donne un bruit blanc  $\Delta\tilde{\theta}$  sur l'angle de rotation mesuré  $\tilde{\theta}$ . L'incertitude sur l'angle de rotation moyen  $\sigma'_{\Delta\tilde{\theta}}$  sur une durée  $T$  diminue donc comme  $1/\sqrt{T}$ , et celle sur la vitesse de rotation moyenne,  $\sigma'_{\Delta\tilde{\Omega}} = \sigma'_{\Delta\tilde{\theta}}/T$ , est déduite des mesures d'angles et diminue comme  $1/T^{3/2}$ .

Pour  $T = 1$  seconde on a évidemment les relations :

$$\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}} = \sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^{T=1\text{seconde}} = \frac{\sigma_{\Delta\tilde{\theta}}}{1\text{seconde}} = \frac{\sigma_{\Delta\tilde{\theta}}^{T=1\text{seconde}}}{1\text{seconde}} \quad (\text{Eq. 2. 22})$$

$\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$  (resp.  $\sigma_{\Delta\tilde{\theta}}$ ) est parfois appelée la *sensibilité sur une seconde* du gyromètre (resp. du gyroscope).

$\sigma_{\Delta\tilde{\theta}}$  s'exprime en (rad .Hz<sup>-1/2</sup>) et  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$  s'exprime en (rad.s<sup>-1</sup> . Hz<sup>-1/2</sup>). Pour un gyromètre on utilise souvent comme unité de  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$  le (deg / √h), avec la conversion :

$$1 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1/2} = \left( \frac{180}{\pi} \times 3600 \right) \frac{1}{\sqrt{3600}} = 3437,75 \text{ deg} / \sqrt{\text{h}} \quad (\text{Eq. 2. 23})$$

Expérimentalement on observe qu'au bout d'un temps d'intégration  $T_{\text{lim}}$  l'incertitude  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^T$  ne diminue plus, et peut même augmenter. Ce phénomène est lié au fait que pour des temps d'intégration relativement longs, les termes liés aux fluctuations du biais  $\tilde{\beta}(t)$  et du facteur d'échelle  $\tilde{\kappa}(t)$  deviennent prépondérants devant  $\tilde{\varepsilon}(t)$ . Ces deux termes contiennent essentiellement une contribution de bruit en  $1/f$ , ainsi que des termes de dérives linéaires ou d'ordres plus élevés. Par intégration sur une durée  $T \geq T_{\text{lim}}$ , le bruit en  $1/f$  conduit à un palier limite appelé *palier de scintillation* (ou *palier flicker*). Les termes de dérives quant à eux induisent une remontée de  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^T$  proportionnelle à  $T$ . L'évolution de  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^T$  a alors la forme représentée **Figure 2. 9**.

## 2) Les capteurs inertiels mécaniques

Expérimentalement on constate que les sources de bruits prédominantes dans un capteur mécanique sont liées aux fluctuations du biais  $\tilde{\beta}(t)$  et du facteur d'échelle  $\tilde{\kappa}(t)$ . Ces fluctuations ont des causes très diverses et la densité spectrale de puissance représentant ces fluctuations est généralement complexe. Elle présente souvent des fréquences caractéristiques liées par exemple au nombre de billes contenues dans un roulement à billes, ou à la vitesse de rotation du roulement.

<sup>(1)</sup> Il n'y a pas de gyroscope optique limité par un bruit blanc d'angle, par contre certains gyroscopes mécaniques peuvent être limités par un bruit blanc d'angle pour une certaine durée d'intégration. Ce bruit blanc est toujours beaucoup plus élevé que le bruit limite quantique.

De même que pour un gyromètre optique, le bruit total  $\tilde{b}(t)$  peut être décomposé en trois contributions suivant la formule (Eq. 2. 21). Mais à l'inverse du gyromètre optique, les fluctuations du biais et du facteur d'échelle sont prédominantes par rapport à  $\tilde{\varepsilon}(t)$ , et cela quelle que soit la durée d'intégration. Les deux premiers termes de (Eq. 2. 21) produisent en général un bruit blanc d'origine technique, un bruit en  $1/f$  d'origine thermique, et une contribution liée aux dérives du biais, notamment d'origine mécanique. La dérive est généralement linéaire et devient prédominante devant toutes les autres sources de bruits au bout d'un temps caractéristique  $T_{car}$ , typiquement de l'ordre de quelques secondes.

Le bruit limite d'origine quantique  $\tilde{\varepsilon}(t)$  existe aussi. Il est lié au bruit thermique (d'origine quantique) dans les composants mécaniques, mais il reste invisible, masqué par les deux autres contributions <sup>(1)</sup>.

### 3) Comparaison entre les gyroscopes mécaniques et les gyromètres optiques

- Dans un gyroscope mécanique, les temps  $T_{lim}$  et  $T_{car}$  sont tous les deux inférieurs à la seconde. On va donc considérer que les gyroscopes ne présentent que des dérives. Les gyroscopes mécaniques sont donc généralement caractérisés par la fluctuation moyenne relative du facteur d'échelle  $\langle \tilde{\kappa}(t) \rangle / K_0$  exprimée en ppm (1 ppm =  $10^{-6}$ ), et par la valeur moyenne de la dérive du biais  $\langle \beta(t) \rangle$ , exprimée en deg.h<sup>-1</sup>.

- Dans un gyromètre optique le temps  $T_{lim}$  est compris entre 10 minutes et deux heures et  $T_{car}$  est de l'ordre de quelques heures. On caractérise généralement un gyromètre optique par les valeurs du palier de scintillation  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^{ultime}$  (appelé parfois *sensibilité ultime* de l'appareil) et de la durée  $T_{lim}$  au bout de laquelle ce palier est atteint. On remonte donc à la sensibilité sur une seconde  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}$  par la relation :

$$\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}} = \sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^{ultime} \times \sqrt{T_{lim}} \quad (\text{Eq. 2. 24})$$

On précise rarement la valeur de la dérive car celle-ci augmente tellement vite que l'on n'utilise jamais le gyromètre sur des durées d'intégration supérieures à  $T_{lim}$ .

On trouvera en Annexe D les descriptions de ces différents gyromètres optiques et des causes physiques qui provoquent les diverses fluctuations du biais et du facteur d'échelle, ainsi que leurs sensibilités ultimes.

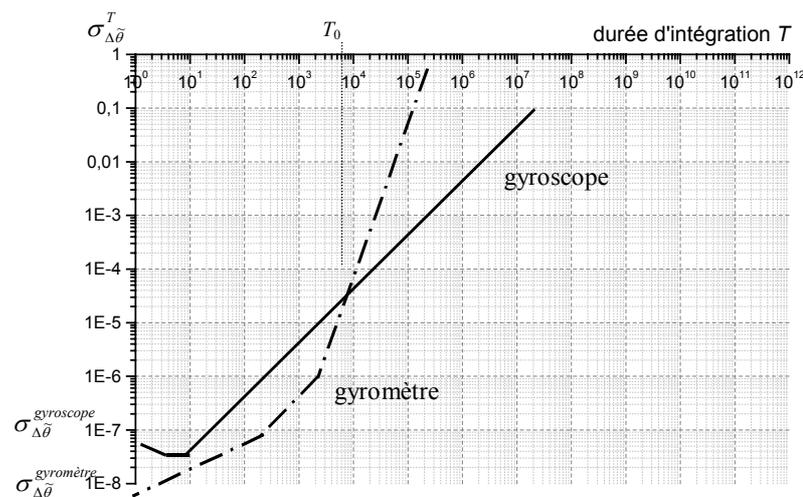
- Comparaison :

Dans le domaine de la navigation inertielle, c'est généralement l'incertitude sur l'angle de mesure  $\sigma_{\Delta\tilde{\theta}}$  qui importe, c'est donc ce paramètre que nous allons utiliser pour comparer

---

<sup>(1)</sup> Le seul gyroscope mécanique limité effectivement par un bruit blanc sur de longues durées d'intégration est, à notre connaissance, le gyroscope réalisé pour le test de relativité générale Gravity Probe B. Mais en tout état de cause ce bruit blanc est largement supérieur au bruit limite quantique. Cette expérience, ainsi que le gyroscope sont décrits dans le paragraphe 8.1.

les sensibilités de gyroscopes mécaniques et des gyromètres optiques. On peut alors tracer les courbes typiques de sensibilité des gyroscopes et gyromètres en fonction du temps d'intégration (voir **Figure 2. 10**). On constate que pour des applications où le temps d'intégration doit être long (plusieurs mois pour un sous-marin) et où aucun recalage n'est possible pendant cette durée, les gyroscopes mécaniques sont mieux appropriés. Pour les trajets de courte durée (avion de ligne, obus, drones, ...) les gyromètres optiques sont utilisés d'autant plus qu'en général un recalage est possible grâce au système GPS ou à des balises au sol.



**Figure 2. 10** : sensibilité typique d'un gyroscope mécanique (trait plein) et d'un gyromètre optique (pointillé) en fonction du temps d'intégration. Au bout d'un temps  $T_0$  de l'ordre de quelques heures, la dérive du gyromètre devient supérieure à celle du gyroscope. (unités arbitraires, voir paragraphe 2.3 pour plus d'informations)

## 2.2.8 Autres grandeurs importantes

### 1) Axe d'entrée

Les capteurs inertiels ne sont sensibles, en général, que suivant une seule direction particulière. On appelle *axe d'entrée* la direction suivant laquelle le capteur est sensible. Cette direction sera notée  $\mathbf{e}_a$  dans tout le reste de ce mémoire. Pour un gyromètre, la grandeur d'entrée (notée précédemment  $\Omega$ ) est la projection du vecteur rotation instantanée sur l'axe d'entrée de l'appareil.

- On considère un gyromètre avec son axe d'entrée donné par  $\mathbf{e}_a$  et on suppose maintenant que le repère  $\{R\}$  auquel est lié le gyromètre est animé d'un mouvement de rotation par rapport à un repère d'inertie  $\{R_0\}$ , donné par le vecteur rotation instantané  $\mathbf{\Omega}_{R/R_0}$ . On exprime  $\mathbf{\Omega}_{R/R_0}$  et  $\mathbf{e}_a$  dans la base  $\{x, y, z\}$  de  $\{R_0\}$  :

$$\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_a = \begin{pmatrix} e_a^x \\ e_a^y \\ e_a^z \end{pmatrix}$$

alors la grandeur d'entrée  $\Omega$  est donnée par la projection du vecteur rotation instantané sur l'axe d'entrée du gyromètre, c'est-à-dire à :

$$S \propto \boldsymbol{\Omega}_{R/R_0} \cdot \mathbf{e}_a = \Omega_x e_a^x + \Omega_y e_a^y + \Omega_z e_a^z = \Omega_{R/R_0} \cos(\theta_a) \quad (\text{Eq. 2. 11})$$

où  $\theta_a$  est l'angle entre l'axe de rotation instantané  $\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}$  et l'axe d'entrée du gyromètre  $\mathbf{e}_a$ .

On pourra trouver en Annexe C des gyroscopes mécaniques à deux axes d'entrée distincts. Dans ce cas, le gyroscope possède alors généralement deux sorties distinctes, une pour chacun des axes d'entrée, et il peut alors être traité comme un ensemble de deux gyroscopes uni-axe.

## 2) Dynamique

On appelle la *dynamique*, la plage de valeurs de la grandeur d'entrée  $\Omega$  qui donne une valeur correcte du signal de sortie  $S$ , c'est-à-dire reliée par (Eq. 2.11) ou (Eq. 2.20). La dynamique de l'appareil est un critère extrêmement important pour choisir le capteur inertielle en fonction de l'application. Un gyromètre de très bonne sensibilité mais de dynamique limitée à  $1 \text{ deg.s}^{-1}$  sera par exemple inutilisable dans un sous-marin plongeant avec une vitesse de rotation autour d'un axe horizontal de  $3 \text{ deg.s}^{-1}$ . Il s'agit donc souvent de trouver le meilleur compromis entre sensibilité et dynamique.

## 3) Bande passante

Tous les appareils se comportent comme des filtres passe-bas de fréquence de coupure plus ou moins élevée. On conçoit aisément que si la vitesse de rotation oscille entre deux valeurs avec une fréquence très rapide, l'appareil ne distinguera pas ces variations et donnera, dans le meilleur des cas, une valeur moyenne intégrée sur le temps de réponse de l'appareil. La bande passante correspond au domaine de fréquence dans lequel le signal de sortie de l'appareil est relié à la grandeur d'entrée grâce au facteur d'échelle. Elle est définie en Hz.

Il arrive de plus que l'appareil ne soit pas sensible dans le continu, notamment pour les accéléromètres. On définit alors également une fréquence de coupure basse.

### 2.2.9 Les unités

#### 1) rad, deg

- les angles de rotation
- les dynamiques de gyroscope

sont mesurés en *radian* (rad) ou en *degré* (deg). On a :

$$1 \text{ rad} = 180/\pi \text{ deg} \sim 57,3 \text{ deg}$$

#### 2) rad.s<sup>-1</sup>, deg.h<sup>-1</sup>, deg.s<sup>-1</sup>

- les dérivées angulaires linéaires (dérives du biais pour un gyroscope)
- les vitesses de rotations
- les dynamiques de gyromètre

s'expriment en *radian par seconde* (rad.s<sup>-1</sup>) ou bien en *degré par heure* (deg.h<sup>-1</sup>). Ces deux unités sont liées par la relation :

$$1 \text{ rad.s}^{-1} = 3600 \times 180/\pi \text{ deg.h}^{-1} = 206.265 \text{ deg.h}^{-1} \sim 2.10^5 \text{ deg.h}^{-1}$$

Pour les gyroscopes de faibles performances on utilise aussi le degré par seconde (deg.s<sup>-1</sup>) pour caractériser la dérive du biais :

$$1 \text{ deg.s}^{-1} = \pi/180 \text{ rad.s}^{-1} = 1/3600 \text{ deg.h}^{-1}$$

#### 3) rad.s<sup>-1</sup>.Hz<sup>-1/2</sup>, deg.h<sup>-1/2</sup>

Dans le cas d'un gyromètre limité par un bruit d'origine poissonnienne (typiquement un gyromètre optique ou atomique limité par le bruit de photons) on définit la sensibilité sur une seconde  $\sigma_{\Delta\tilde{\omega}}$  en rad.s<sup>-1</sup>.Hz<sup>-1/2</sup> ou en deg.h<sup>-1/2</sup> avec la correspondance donnée en (Eq. 2. 23):

$$1 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1/2} = \left( \frac{180}{\pi} \times 3600 \right) \frac{1}{\sqrt{3600}} = 3437,75 \text{ deg.h}^{-1/2}$$

#### 4) m.s<sup>-2</sup>, Gal, g

- Les accélérations s'expriment en *mètre par seconde carré* (m.s<sup>-2</sup>).

Lorsqu'il s'agit d'accélération d'origines gravitationnelles on utilise généralement le *Gal*, avec la correspondance :

$$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm.s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

Dans la littérature, on utilise souvent abusivement le  $g$  comme unité (et ses sous-unités le  $mg$  et le  $\mu g$ ) pour les accéléromètres et les gravimètres. Cette unité n'est pas clairement définie, c'est l'accélération de la gravité à la surface de la Terre. On a donc la correspondance approximative :

$$1 g \sim 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

### 2.2.10 Caractérisation d'un capteur inertiel

La caractérisation complète d'un capteur inertiel est un travail extrêmement compliqué. Il n'est pas rare d'avoir une fiche technique de plusieurs dizaines de pages, juste pour indiquer les spécifications de l'appareil. Ceci peut s'expliquer par deux considérations importantes :

- Les capteurs inertiels sont des appareils faisant appel à beaucoup de technologies de haute précision. Les conditions d'utilisation et l'environnement sont donc souvent très critiques. Ainsi la dépendance du facteur d'échelle avec la température, la pression atmosphérique ou l'hygrométrie sont des caractéristiques qui sont souvent indiquées. De même, l'incertitude entachant une mesure peut être donnée en fonction de la durée depuis laquelle l'appareil est allumé, et du nombre d'allumages. Sans vraiment modéliser toutes ces influences, les constructeurs fournissent généralement des courbes et des abaques permettant de les évaluer.

- Les capteurs inertiels sont souvent sensibles à plusieurs effets inertiels. Ainsi un gyroscope peut avoir une dépendance de son signal de sortie en fonction de l'accélération et réciproquement un accéléromètre peut être sensible aux rotations. Le modèle d'erreur (Eq. 2.11) doit alors être remplacé par un modèle dépendant de deux grandeurs d'entrée  $\Omega$  et  $a$  :

$$S(t) = [K_0 + K(t)] \Omega(t) + [K_0' + K'(t)] a(t) + [B_0 + B(t)] + \varepsilon(t)$$

Il convient alors de caractériser précisément comment influent ces dépendances "parasites" sur le signal de sortie et de les intégrer dans un modèle similaire à (Eq. 2.11) où le facteur d'échelle et le biais sont décrits par des fonctions  $K_0(x_i, a)$  et  $B_0(y_j, a)$ .

Nous verrons au chapitre 4 que notre gyromètre atomique est en fait un gyromètre / accéléromètre. Il convient donc, pour réaliser un appareil métrologique, de mettre en œuvre des méthodes permettant de séparer les dépendances accélérométrique et gyrométrique (double jet atomique détaillé paragraphe 5.3.4).

### 2.2.11 Comparaison de deux capteurs inertiels

La comparaison de capteurs inertiels fonctionnant sur des principes physiques différents (mécanique, optique) est encore plus difficile. Les performances sont souvent données en fonction de l'utilisation qui sera faite du capteur. Ainsi, pour un capteur inertiel utilisé en navigation, la performance sera couramment donnée en m-h, qui correspond au nombre de milles nautiques d'erreur par rapport à la position prévue, après une heure de voyage (1 mille nautique = 1852 mètres). Cette unité dépend donc de la vitesse du véhicule.

On peut retenir que :

- les gyroscopes mécaniques sont limités par des bruits d'origine technique, et seront généralement caractérisés par la dérive du biais, exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}$  ou en  $\text{deg.h}^{-1}$ .

- Les gyromètres optiques (et notre gyromètre atomique) sont limités par le bruit limite quantique et sont caractérisés par la sensibilité sur 1 seconde, exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}.\text{Hz}^{-1/2}$  ou en  $\text{deg.h}^{-1/2}$  et par la valeur du palier de scintillation (ou sensibilité ultime) exprimée en  $\text{rad.s}^{-1}$  ou en  $\text{deg.h}^{-1}$ .

## 2.3 PERFORMANCES DES DIFFERENTS GYROSCOPES ET GYROMETRES

On a recensé dans le tableau ci-dessous les performances des différents gyroscopes et gyromètres de haute sensibilité que l'on trouve sur le marché et dans les laboratoires. On pourra trouver une description des différents gyroscopes mécaniques en Annexe C et des gyromètres optiques en Annexe D.

### 2.3.1 Appareils industriels

| Gyroscopes mécaniques | Nom       | Dérive Deg.h <sup>-1</sup> | Commentaires               |
|-----------------------|-----------|----------------------------|----------------------------|
| Disque tournant       | SDFG      | $\sim 10^{-4}$             | fragile et très cher       |
| Sphère tournante      | 2DFG, GSE | $< 10^{-4}$                |                            |
| Élément vibrant       | THG, DART | $\sim 1$                   | très robuste et bon marché |
| Bol vibrant           | HRG       | $\sim 10^{-3}$             | fragile et cher            |

| Gyromètres optiques       | Nom  | Sensibilité sur 1 s rad.s <sup>-1</sup> .Hz <sup>-1/2</sup> | palier ultime                                  |
|---------------------------|------|---|--|
| Gyromètre à fibre optique | IFOG | $3 \cdot 10^{-7}$   | qq $10^{-3}$ deg.h <sup>-1</sup> en 30 minutes |
| Gyrolaser                 | RLG  | $Qq \cdot 10^{-8}$  | qq $10^{-4}$ deg.h <sup>-1</sup> en qq heures  |

### 2.3.2 Appareils de laboratoire

| Type de gyromètre         | référence      | Sensibilité sur 1 s rad.s <sup>-1</sup> .Hz <sup>-1/2</sup> | Commentaires  |
|---------------------------|----------------|---|---|
| Gyro atomique PRITCHARD   | [LENEF 97]     | $3,6 \cdot 10^{-6}$   | Réseaux mécaniques  |
| Gyro à hélium superfluide | [AVENEL 97]    | $2 \cdot 10^{-7}$   |   |
| Gyro laser                | [ROWE 99]      | $1,3 \cdot 10^{-9}$   | Aire = 1 m <sup>2</sup>                                   |
| Gyro atomique KASEVICH    | [GUSTAVSON 00] | $6 \cdot 10^{-10}$  | Séparatrices RAMAN<br>durée d'intégration max $\sim 10$ s |

|            |                 |                                |  |
|------------|-----------------|--------------------------------|--|
| Notre Gyro | [HOLLEVILLE 00] | Attendue : $3,5 \cdot 10^{-8}$ | durée d'intégration espérée<br>plusieurs heures voire plus |
|------------|-----------------|--------------------------------|--|

On donne à titre d'exemple la sensibilité attendue pour le projet spatial Gravity Probe B, visant à mettre en évidence l'effet relativiste LENSE-THIRRING provoqué par la rotation de la Terre. L'appareil est un gyroscope mécanique supraconducteur qui devrait présenter un bruit blanc d'angle sur de longues durées (typiquement 4 heures). Ce dispositif permettrait donc de diminuer l'incertitude sur la mesure de vitesse de rotation comme  $T^{-3/2}$ , où  $T$  est le temps d'intégration.

| Appareil gyroscope | référence    | sensibilité sur 1 s<br>rad. Hz <sup>-1/2</sup> | palier limite estimé, ramené en<br>rad.s <sup>-1</sup> après 4 h d'intégration |
|--------------------|--------------|--|--|
| Gravity Probe B    | [BUCHMAN 96] | 5,8 10 <sup>-7</sup>                           | 3,4 10 <sup>-13</sup>  |

Un autre projet spatial, visant également à mettre en évidence l'effet LENSE-THIRRING est en cours d'étude au CNES et à l'ESA. Il s'agit du projet Hyper qui devrait utiliser deux gyromètres à atomes froids de très grande sensibilité, et permettrait de réaliser une réelle cartographie du champ gravito-magnétique créé par la Terre (voir paragraphe 8.1).

| Appareil gyromètre | référence  | sensibilité sur 1 s<br>rad.s <sup>-1</sup> .Hz <sup>-1/2</sup> | palier limite estimé en rad.s <sup>-1</sup> |
|--------------------|------------|--|---|
| Hyper              | [RASEL 00] | ~ 10 <sup>-12</sup>  | qq 10 <sup>-16</sup>                        |

## BIBLIOGRAPHIE

- [AVENEL 97] O. Avenel, P. Hakonen, E. Varoquaux, " Detection of the rotation of the Earth with a superfluid gyrometer", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 3602, (1997)
- [BRIDGMAN 61] P. W. Bridgman, *Am. J. Phys.*, **29**, **32**, (1961)
- [BUCHMAN 96] S. Buchman, F. Everitt, B. Parkinson, et al., "Experimental techniques for gyroscope performance enhancement for the Gravity Probe B relativity mission", *Class. Quant. Grav.*, **13**, p A185, (1996)
- [GUSTAVSON 00] T.L. Gustavson, " Precision rotating sensing using atom interferometry", thèse de doctorat, Stanford University, Stanford, (2000)
- [HOLLEVILLE 00] D. Holleville, J. Fils, P. Petit, N. Dimarcq, A. Clairon, P. Bouyer, CH. Bordé, Ch. Salomon, "Réalisation d'un gyromètre à atomes froids", *J. Phys. IV France*, **10**, Pr8-171, (2000)
- [IEEE – 74] "IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Degree-of Freedom Rate-Integrating Gyros ", *Published by The Institute of Electrical and Electronical Engineers*, New York, (1974)
- [IEEE – 81] "IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros", *Published by The Institute of Electrical and Electronical Engineers*, New York, (1981)
- [KITTEL 72] C. Kittel, W. Knight, M. Ruderman, "Mécanique", Berkeley cours de Physique Vol 1, *coll. U, Ed. Armand Colin*, Paris, (1972)
- [LAWRENCE 98] A. Lawrence, "Modern Inertial Technology : Navigation, Guidance, and Control", *Ed. Springer*, (1998) second edition, ISBN 0 387 98507 7
- [LENEF 97] A. Lenef, T. D. Hammond, E. T. Smith, M. S. Chapman, R. A. Rubenstein, D. E. Pritchard, "Rotation Sensing with an Atom Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 760, (1997)
- [NEWTON 62] I. Newton, "Principia", *University of California Press, Berkeley*, vol 1, **10**, (1962)
- [RADIX 67] J.C. Radix, "La navigation par inertie", ed. Que sais-je ?, Paris, 1235, (1967)
- [RASEL 00] E.M. Rasel et al., "HYPER : Hyper-Precision Cold Atom Interferometry in Space", *ESA Assessment Study Report*, ESA-SCI(2000)10, (2000)
- [ROWE 99] C. H. Rowe, U. K. Schreiber, S. J. Cooper, B. T. King, M. Poulton, G. E. Stedman, "Design and operation of a very large ring laser gyroscope", *Appl. Opt.*, **38**, p 2516, (1999)
- [SAUMONT 88] R. Saumont, "Analyse dimensionnelle et similitude en physique fondamentale", *Editions Européennes*, Antony, (1988)
- [SAUMONT 00] R. Saumont, "Antigravitation mythe ou réalité ?", *Fusion*, **81**, **9**, (2000)







## Chapitre 3 : L'EFFET SAGNAC

## TABLE DES MATIÈRES :

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 3.1     | L'EFFET SAGNAC.....   | 45 |
| 3.1.1   | Un peu d'histoire sur l'effet Sagnac.....                                 | 45 |
| 3.1.2   | Calcul de l'effet Sagnac optique.....                                     | 46 |
| 3.1.2.1 | Méthode de calcul élémentaire pour les ondes lumineuses dans le vide..... | 47 |
| 3.1.2.2 | Remarques à propos de cette méthode de calcul.....                        | 49 |
| 3.1.2.3 | Cas général d'une onde se propageant à la vitesse $V$ .....               | 50 |
| 3.1.3   | Cas des ondes de matière.....   | 51 |
| 3.1.3.1 | Calcul relativiste.....   | 51 |
| 3.1.3.2 | Calcul classique / relativiste.....                                       | 52 |
| 3.1.3.3 | Comparaison entre le calcul relativiste et le calcul quantique.....       | 53 |
| 3.1.3.4 | Calcul quantique.....   | 54 |
| 3.1.3.5 | Une idée fausse ... mais tenace.....                                      | 55 |
| 3.2     | COMPARAISON ENTRE LE DÉPHASAGE OPTIQUE ET ATOMIQUE.....                   | 56 |
| 3.3     | L'EFFET SAGNAC POUR MESURER LES ROTATIONS.....                            | 57 |
| 3.3.1   | Gyromètre ou Gyroscope ?.....   | 57 |
| 3.3.2   | Axe d'entrée.....   | 57 |
| 3.3.3   | Influence de la forme de l'interféromètre.....                            | 58 |
| 3.3.4   | Influence de la position de l'axe de rotation.....                        | 58 |
| 3.3.5   | Facteur d'échelle et biais.....   | 59 |
| 3.3.6   | Sensibilité sur une seconde.....  | 60 |
| 3.3.7   | Cas d'une vitesse de rotation non constante.....                          | 60 |
| 3.4     | CONCLUSION.....   | 61 |
|         | BIBLIOGRAPHIE.....  | 62 |

## CHAPITRE 3 :

### L'EFFET SAGNAC

Nous avons décrit, au chapitre précédent, les moyens de caractériser des capteurs inertiels, ainsi que les performances des appareils disponibles sur le marché. Deux types d'appareils ont pu être distingués :

les gyroscopes mécaniques utilisant les principes d'inertie, et conduisant à des appareils performants (jusqu'à  $10^{-4}$  deg.h<sup>-1</sup> pour les gyroscopes mécaniques à suspension électrostatique) largement utilisés en navigation, mais qui restent fragiles et très coûteux.

les gyromètres optiques (ou atomiques) fondés sur l'effet SAGNAC, que nous allons détailler maintenant.

Sous certaines conditions, le déphasage à la sortie d'un interféromètre peut être sensible à la rotation et à l'accélération du repère lié à l'appareil. Cet effet est connu sous le nom d'effet SAGNAC ; il est très général et peut s'appliquer à des ondes de natures très différentes.

En utilisant des ondes lumineuses dans l'interféromètre, l'effet SAGNAC optique conduit à la réalisation de gyromètres optiques qui constituent des capteurs de haute sensibilité, peu encombrants et faciles d'utilisation.

On peut également appliquer l'effet SAGNAC aux ondes de matière, et l'on réalise ainsi des gyromètres neutroniques ou atomiques d'extrême sensibilité.

L'objectif de ce chapitre est de décrire comment fonctionne un capteur inertielle interférométrique. Nous commencerons, dans le paragraphe 3.1, par détailler l'effet SAGNAC dans le cas optique. Le calcul que l'on trouve généralement dans la littérature s'applique exclusivement au cas d'une onde lumineuse se propageant dans le vide. Ce calcul simple cache en réalité un grand nombre de difficultés que nous allons tenter d'explicitier. Nous donnerons alors la formule de l'effet SAGNAC dans le cas général d'une onde lumineuse dans

un milieu d'indice  $n$ . A partir du cas général précédent, nous déterminerons la forme que prend l'effet SAGNAC dans le cas des ondes de matière, en mettant l'accent sur les subtilités qui apparaissent.

Au paragraphe 3.2 nous comparerons les deux relations obtenues dans le cas optique et dans le cas atomique, et nous montrerons que les gyromètres utilisant l'effet SAGNAC pour les ondes atomiques sont potentiellement beaucoup plus sensibles que les gyromètres optiques.

Le paragraphe 3.3 reprendra les notions de facteur d'échelle et de biais introduites au paragraphe 2.2, et présentera comment celles-ci s'adaptent aux cas des gyromètres à effet SAGNAC.

### 3.1 L'EFFET SAGNAC

#### 3.1.1 Un peu d'histoire sur l'effet SAGNAC

Cet effet a été mis en évidence en 1913 par G. SAGNAC [SAGNAC 13], [SAGNAC 14] grâce à un interféromètre optique pentagonal placé sur une table tournant rapidement. Pourtant, l'utilisation d'un interféromètre optique pour détecter la rotation de la Terre avait déjà été proposée par Sir OLIVER LODGE en 1893 [LODGE 93], mais ce travail est resté méconnu car il s'appuyait sur la théorie de l'Ether. On peut citer également le travail de thèse de F. HARRESS qui aurait vraisemblablement observé cet effet deux ans avant SAGNAC, au cours d'une expérience d'entraînement de la lumière dans un milieu optique en mouvement, mais sa mort prématurée l'a empêché de concrétiser ses travaux. HARZER en 1914 reprend les études menées par HARRESS et donne, un an après SAGNAC, mais apparemment de façon indépendante la formule du déphasage produit par une rotation [HARZER 14]. La première mise en évidence de la rotation de la Terre par effet SAGNAC a été réalisée en 1925 par MICHELSON, GALE et PEARSON [MICHELSON 25], grâce à un gigantesque interféromètre optique d'aire  $0,21 \text{ km}^2$ . De nos jours cet effet est utilisé dans tous les gyromètres optiques. Pour plus de précision sur l'historique de l'effet SAGNAC, on pourra se reporter à [HARIHARAN 75].

Avec l'avènement du laser dans les années 60, des gyromètres optiques utilisables pour la navigation se sont développés. Cette évolution a débuté avec le premier gyro-laser réalisé par MACEK et DAVIS Jr en 1963 [MACEK 63], puis s'est poursuivie essentiellement avec l'apparition des fibres optiques avec pour application directe : le gyromètre à fibre optique développé par VALI et SHORTHILL en 1976 [VALI 76] et celui élaboré par EZEKIEL et BALSAMO en 1977 [EZEKIEL 77]. L'évolution de ce type d'appareil a été très rapide et leur sensibilité n'a cessé de s'améliorer. Les meilleurs gyro-lasers commerciaux atteignent de nos jours des sensibilités ultimes proches de  $10^{-4} \text{ deg.h}^{-1}$  et certains appareils de laboratoire affichent des sensibilités sur une seconde voisines de  $10^{-9} \text{ rad.s}^{-1}.\text{Hz}^{-1/2}$  [ROWE 99].

L'effet SAGNAC optique peut être interprété comme une force de CORIOLIS appliquée à une particule de masse fictive  $m = h\nu/c^2$ . Il était donc logique d'essayer de réaliser des

interféromètres avec de vraies particules massives. Historiquement, la première mise en évidence de l'influence d'une rotation sur le déphasage d'un interféromètre à ondes de matière a été réalisée en 1964 par ZIMMERMAN et MERCEREAU [ZIMMERMAN 64], [ZIMMERMAN 65]. Dans leur dispositif, les ondes de matière étaient des électrons associés en paires de COOPER circulant dans une boucle supraconductrice. Un an plus tard BONSE et HART [BONSE 65] obtiennent des franges d'interférences avec un interféromètre optique utilisant des rayons X, ils ouvrent ainsi le domaine de l'interférométrie à l'échelle de l'angström. Dans leur interféromètre, les rayons X sont séparés puis recombinaés grâce à la diffraction dans un cristal de Silicium. En 1974 RAUCH, TREIMER et BONSE démontrent la possibilité de transposer ce type d'interféromètre à cristal aux ondes de matière associées à des neutrons [RAUCH 74], dont la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que celle des rayons X. Ce sont finalement les expériences de OVERHAUSER, COLELLA, WERNER et STAUDENMANN qui démontreront la sensibilité des interféromètres à neutrons au champ de gravité [OVERHAUSER 74], [COLELLA 75] et de rotation [WERNER 79] (une revue globale sur l'ensemble de ces expériences pourra être trouvée dans la référence [STAUDENMANN 80]). Le premier interféromètre à ondes atomiques mettant en évidence un déphasage produit par une rotation date de 1991 et a été réalisé avec des atomes de Calcium par RIEHLE, KISTER, WITTE, HELMCKE et BORDÉ [RIEHLE 91]. Depuis cette date, plusieurs projets de gyromètres à ondes atomiques se sont développés [LENEF 97], [GUSTAVSON 97], et les sensibilités obtenues sont maintenant équivalentes à celles des meilleurs gyromètres optiques [LANDRAGIN 99].

### 3.1.2 Calcul de l'effet SAGNAC optique

L'effet SAGNAC est un effet complexe qui, si on n'y prend pas garde, peut être mal interprété. Les articles traitant de cet effet dans le cas optique ne manquent pas et les façons de le calculer sont quasiment aussi nombreuses. On trouve ainsi des calculs à partir de considérations de relativité restreinte [HEHL 90], et générale [CHOW 85], des calculs d'effet DOPPLER dans le repère d'inertie [DRESDEN 79], ou de dynamique dans le repère tournant [TSAI 88], en réécrivant les équations de MAXWELL dans le repère tournant [WILKINSON 87], ou encore par des méthodes plus exotiques comme le calcul par extension de l'hypothèse de localité [MASHHOON 88], ou par invariance adiabatique [FORDER 84]. Tous ces calculs donnent évidemment le même résultat ; parfois par des méthodes très simples, alors que d'autres sont quasiment incompréhensibles pour des non relativistes !

Nous avons choisi de présenter ici, dans un premier temps, la méthode la plus simple possible que l'on rencontre dans la plupart des ouvrages [STOREY 94, CHOW 85, ARANOWITZ 71, ...]. Cette méthode de calcul n'est pas à prendre telle quelle ; elle est donnée ici pour servir de base à un certain nombre de remarques qu'il nous semble important de développer.

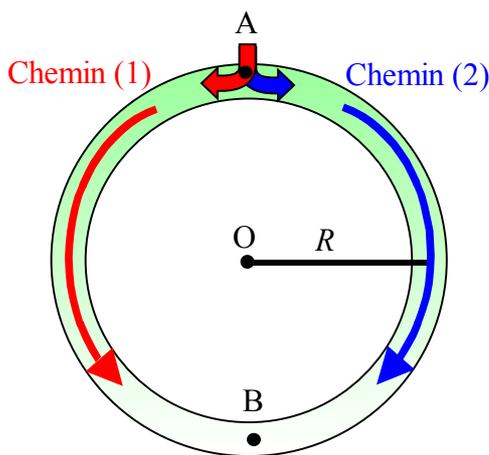
### 3.1.2.1 Méthode de calcul élémentaire pour les ondes lumineuses dans le vide

Considérons un interféromètre optique circulaire de rayon  $R$  comme celui représenté sur la **Figure 3. 1**. L'onde lumineuse peut parcourir la boucle dans les deux sens. Expérimentalement cette forme est obtenue avec une fibre optique, mais dans le calcul qui nous intéresse ici, nous supposons que la lumière se propage dans un milieu d'indice  $n = 1$ .

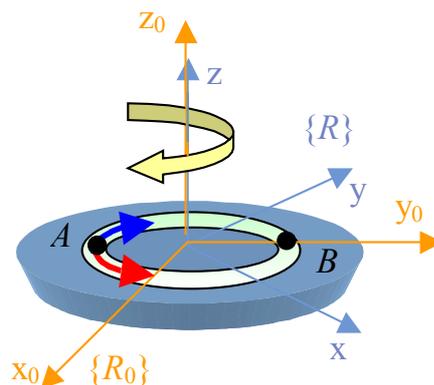
Cet appareil est posé sur un plateau tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  par rapport à l'axe ( $Oz$ ) (voir **Figure 3. 2**).  $\{R\}$  est un repère non inertiel lié au plateau et  $\{R_0\}$  est un repère d'inertie. C'est dans ce repère d'inertie que nous allons décrire le système, et les grandeurs physiques seront alors notées avec l'indice  $^0$ .

On injecte l'onde lumineuse en un point  $A$  le long des deux chemins (1) et (2). Après avoir parcouru la moitié de la boucle, les deux ondes sont recombinaées en  $B$  et interfèrent ensemble. L'interféromètre, et en particulier les points  $A$  et  $B$ , sont liés au repère tournant  $\{R\}$ .

L'effet SAGNAC est l'apparition, à la sortie de cet interféromètre, d'un déphasage induit par la rotation de l'ensemble du dispositif.



**Figure 3. 1** : Schéma de principe de l'interféromètre. L'onde est injectée dans les deux sens en  $A$ . Les ondes se propagent jusqu'en  $B$  où elles vont interférer.



**Figure 3. 2** : l'interféromètre est fixé sur un plateau pouvant tourner autour de l'axe ( $Oz$ ).  $\{R_0\}$  est un repère d'inertie,  $\{R\}$  est un repère tournant lié au plateau.

Calculons pour commencer la différence des temps mis par les deux ondes pour atteindre le point  $B$  par les trajets (1) et (2). A un instant  $t = t_0$ , les deux ondes sont émises. La vitesse des ondes définie dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$  vaut  $c$  dans les deux sens. Le point  $B$  étant lié à  $\{R\}$ , il tourne pendant que les ondes se propagent. L'onde (1) atteint le point  $B$  après une durée  $\tau_{(1)}^0$  vérifiant la relation (voir **Figure 3. 3**) :

$$c \tau_{(1)}^0 = \pi R - R \Omega \tau_{(1)}^0 \quad \text{donc} \quad \tau_{(1)}^0 = \frac{\pi R}{c + R \Omega} \quad (\text{Eq. 3. 1})$$

$\Omega$  est pris positif dans le sens des aiguilles d'une montre.

De même, l'onde (2) atteint le point  $B$  après une durée  $\tau_{(2)}^0$  vérifiant :

$$c \tau_{(2)}^0 = \pi R + R \Omega \tau_{(2)}^0 \quad \text{donc} \quad \tau_{(2)}^0 = \frac{\pi R}{c - R \Omega} \quad (\text{Eq. 3. 2})$$

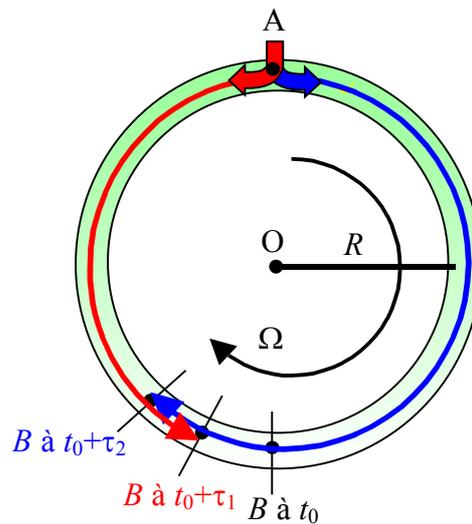
La différence entre les temps d'arrivée vaut alors :

$$\Delta \tau^0 = \tau_{(2)}^0 - \tau_{(1)}^0 = \frac{2\pi R^2 \Omega}{c^2 - R^2 \Omega^2} \quad (\text{Eq. 3. 3})$$

En négligeant les termes du second ordre en  $(R\Omega / c)$ , on obtient l'expression :

$$\boxed{\Delta \tau^0 \approx \frac{2A\Omega}{c^2}} \quad (\text{Eq. 3. 4})$$

Où  $A = \pi R^2$  est l'aire de l'interféromètre.



**Figure 3. 3 :** l'interféromètre est en rotation à la vitesse  $\Omega$  dans le sens des aiguilles d'une montre. Les deux ondes n'arrivent pas au même instant au point  $B$ .

Le déphasage au point  $B$  entre les deux ondes se calcule alors simplement à partir de (Eq. 3. 4) :

$$\Delta \phi_{\text{sortie}}^B = \omega \Delta \tau^0 = \frac{2A\omega}{c^2} \Omega \quad (\text{Eq. 3. 5})$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde lumineuse. Ce déphasage est appelé DÉPHASAGE SAGNAC.

Bien que la formule trouvée soit tout à fait correcte, la méthode de calcul utilisée ici use d'un certain nombre de raccourcis que nous allons détailler maintenant.

### 3.1.2.2 Remarques à propos de cette méthode de calcul

1- Le fait d'avoir négliger les termes en  $R^2\Omega^2/c^2$  dans (Eq. 3. 3) ne signifie pas que le calcul n'est pas relativiste, comme nous allons le voir dans les remarques suivantes.

2- Pour calculer  $\Delta\tau^0$ , on a écrit que la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens, définie dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$ , ce qui est un des principes de base de la relativité restreinte <sup>(1)</sup>. Si l'on s'intéresse maintenant à la vitesse de l'onde dans le repère tournant  $\{R\}$ , il suffit de constater que la source lumineuse est liée à ce repère pour en conclure que la vitesse de l'onde est  $c$  dans les deux sens définie dans  $\{R\}$ . Il est donc important de constater que la composition classique des vitesses ne s'applique évidemment pas dans cette expérience. Seule une transformation relativiste permet de passer de  $\{R_0\}$  à  $\{R\}$ . Cette transformation est toutefois complexe puisque  $\{R\}$  n'est pas un repère d'inertie, la simple transformation de LORENTZ ne s'applique donc pas. Cette transformation relativiste entre un repère d'inertie et un repère tournant a été développée par P. LANGEVIN [LANGEVIN 21], et un calcul complet du déphasage à la sortie du gyromètre, traité dans le repère tournant peut être trouvé dans [POST 67]

3- La remarque précédente nous indique donc que le calcul direct de la différence  $\Delta\tau$  entre les instants d'arrivée dans le repère tournant  $\{R\}$  doit forcément utiliser cette transformation de LANGEVIN. Le raisonnement utilisant les deux arguments 1) que la vitesse de la lumière définie dans  $\{R\}$  est  $c$  dans les deux sens, et 2) que les points  $A$  et  $B$  étant liés à  $\{R\}$  les deux chemins sont égaux ; conduit à un résultat faux puisqu'on trouve un déphasage nul.

On peut toutefois trouver simplement une estimation de  $\Delta\tau$ , à des termes en  $1/c^2$  près, car la transformation de LANGEVIN est équivalente à la transformation de LORENTZ à des termes en  $1/c^2$  près. On détermine donc  $\Delta\tau$  à partir de  $\Delta\tau^0$  et de la transformation de LORENTZ, ce qui donne :

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}} \Delta\tau^0 \quad (\text{Eq. 3. 6})$$

Le déphasage exprimé dans  $\{R\}$  vaut alors :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \omega \Delta\tau = \frac{2A\omega}{c^2} \Omega \sqrt{1 - \frac{R^2\Omega^2}{c^2}} \quad (\text{Eq. 3. 7})$$

qui est bien équivalent à (Eq. 3. 5) à des termes en  $(R\Omega)^2/c^2$  près.

---

<sup>(1)</sup> Le calcul que nous avons fait est donc valable en relativité restreinte, mais également dans le cadre de la théorie de l'éther au repos par rapport à l'espace absolu, ce qui explique que SAGNAC ait trouvé la bonne relation alors qu'il appliquait la théorie de l'éther.

4 – Dans le cadre de la théorie de l'éther le terme  $1/c^2$  qui apparaît dans (Eq. 3. 4) peut être relié à la vitesse de l'onde se propageant dans l'interféromètre. Au contraire dans le cadre de la relativité restreinte le terme  $1/c^2$  est lié au caractère invariant de  $c$  dans la transformation de LORENTZ, et est donc totalement indépendant de la vitesse de propagation de l'onde. En particulier il serait faux de remplacer  $c$  par  $c/n$  ou par  $V$  dans (Eq. 3. 4) si l'onde se propage à la vitesse  $V$ . Cette remarque a une certaine importance car pour passer de (Eq. 3. 3) à (Eq. 3.4) on a été amené à négliger des termes en  $R^2\Omega^2/c^2$ . Ces termes restent donc en  $R^2\Omega^2/c^2$ , même si la vitesse de propagation de l'onde est  $V \ll c$ .

### 3.1.2.3 Cas général d'une onde se propageant à la vitesse $V$

Nous effectuons ici le calcul dans le cadre de la relativité restreinte. On ne se préoccupe pas ici de la nature de l'onde, il peut s'agir d'une onde lumineuse, d'une onde de matière, ...

Reprenons l'interféromètre en anneau de la **Figure 3. 1**, et supposons maintenant que l'onde se propage à la vitesse  $V$  par rapport au repère  $\{R\}$ . On aura par exemple  $V = c/n$  dans le cas de la propagation dans une fibre optique d'indice  $n$ . Déterminons  $V_1^0$  et  $V_2^0$ , les vitesses de propagation des ondes (1) et (2) dans le repère  $\{R_0\}$ . La formule d'addition des vitesses en relativité restreinte donne :

$$V_1^0 = \frac{V - R\Omega}{1 - \frac{R\Omega V}{c^2}} \quad \text{et} \quad V_2^0 = \frac{V + R\Omega}{1 + \frac{R\Omega V}{c^2}} \quad (\text{Eq. 3. 8})$$

Les instants  $\tau_{(1)}^0$  et  $\tau_{(2)}^0$  d'arrivée en  $B$  sont alors donnés par :

$$V_1^0 \tau_{(1)}^0 = \pi R - R\Omega \tau_{(1)}^0 \quad (\text{Eq. 3. 9})$$

$$V_2^0 \tau_{(2)}^0 = \pi R + R\Omega \tau_{(2)}^0 \quad (\text{Eq. 3. 10})$$

La résolution de ces équations conduit à :

$$\Delta\tau^0 = \tau_{(2)}^0 - \tau_{(1)}^0 = \frac{2\pi R^2 \Omega}{c^2 - R^2\Omega^2} \approx \frac{2A\Omega}{c^2} \quad (\text{Eq. 3. 11})$$

On retrouve exactement la même formule que (Eq. 3. 4).

Il faut souligner ici que la vitesse  $V$  de l'onde n'intervient pas dans (Eq. 3. 11), seule la constante  $c$  intervient. En multipliant (Eq. 3. 11) par  $\omega$  on trouve alors l'expression du déphasage :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \frac{2 A \omega}{c^2} \Omega \quad (\text{Eq. 3. 12})$$

La valeur du déphasage ne dépend donc pas de la vitesse de propagation de l'onde, mais uniquement de sa pulsation  $\omega$ .

### 3.1.3 Cas des ondes de matière

Les méthodes pour calculer l'effet SAGNAC appliqué aux ondes de matière sont aussi diverses que dans le cas optique. On en a recensé ici quelques unes : calcul par analogie optique [PAGE 75], approximation WKB [WERNER 79], calcul de cinématique classique [HASSELBACH 88], calcul de dynamique dans le repère tournant [ TSAI 88], par analogie avec l'effet AHARANOV-BOHM [SAKURAI 90]. Nous allons présenter deux méthodes ici : la première s'appuie sur les mêmes considérations relativistes que celles développées au paragraphe précédent [POST 67]. La seconde utilise des arguments de mécanique classique et quantique [ANANDAN 81].

#### 3.1.3.1 Calcul relativiste

Le calcul précédent donne l'expression générale (Eq. 3. 12) du déphasage à la sortie de l'interféromètre pour une onde à la vitesse  $V$ .

La valeur de  $\omega$  à prendre pour cette onde de matière à la vitesse  $V$  est donnée par la relation d'EINSTEIN-PLANCK [ANANDAN 81] :

$$\hbar\omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{Eq. 3. 16})$$

On obtient donc l'expression du déphasage SAGNAC pour une onde de matière à un terme en  $V^2/c^2$  près :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \frac{2 A m}{\hbar} \Omega \quad (\text{Eq. 3. 17})$$

En faisant un développement limité en  $(V^2/c^2)$  de (Eq. 3. 16), on trouve :

$$\hbar\omega = mc^2 + \frac{1}{2} mV^2 \quad (\text{Eq. 3. 18})$$

Ce terme est l'analogie de l'hamiltonien d'un atome de masse  $m$  à la vitesse  $V$  incluant l'énergie de masse et l'énergie cinétique :

$$H = mc^2 + \frac{P^2}{2m} \quad (\text{Eq. 3. 19})$$

où  $P$  est l'impulsion de l'atome.

On constate donc que le terme de l'hamiltonien qui produit le déphasage SAGNAC donné par (Eq. 3. 17) est celui correspondant à l'énergie de masse. Le terme d'énergie cinétique introduit une modification négligeable sur la pulsation  $\omega$  (correction en  $V^2/c^2$ ). On retrouve donc bien le fait que (Eq 3. 4) et (Eq 3. 17) sont indépendants de la vitesse  $V$  de propagation de l'onde.

### 3.1.3.2 Calcul classique / relativiste

Nous allons maintenant présenter un calcul de l'effet SAGNAC pour les ondes de matière qui ne fait pas intervenir d'argument relativiste pour le calcul de  $\Delta\tau$ , mais qui utilise l'expression relativiste de la pulsation puisqu'elle prend en compte l'énergie de masse de la particule.

Reprenons l'interféromètre de la **Figure 3.1**, et considérons qu'un atome se trouve au point  $A$ . A l'instant  $t = t_0$ , l'onde atomique est séparée en deux de façon cohérente, et chaque « partie » est lancée à la vitesse  $V$  (définie dans  $\{R\}$ ), chacune dans un sens. Un calcul de mécanique classique simple donne :

$$\Delta\tau = 0$$

Les deux fonctions d'ondes atomiques arrivent en même temps au point  $B$ . Les pulsations atomiques sont données par (Eq. 3. 16) que l'on approxime par (Eq. 3. 18).

Dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$ , les vitesses sont données par la formule galiléenne de composition des vitesses :

$$V_1^0 = V - R\Omega \quad (\text{Eq. 3. 20})$$

$$V_2^0 = V + R\Omega \quad (\text{Eq. 3. 21})$$

On en déduit les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  par les relations relativistes :

$$\omega_1 = \frac{m}{\hbar} \left[ c^2 + \frac{1}{2}(V - R\Omega)^2 \right] \quad (\text{Eq. 3. 22})$$

$$\omega_2 = \frac{m}{\hbar} \left[ c^2 + \frac{1}{2}(V + R\Omega)^2 \right] \quad (\text{Eq. 3. 23})$$

On écrit alors la différence des pulsations :

$$\Delta\omega = 2 \frac{m}{\hbar} V R \Omega \quad (\text{Eq. 3. 24})$$

On en déduit le déphasage  $\Delta\phi_{\text{sortie}}^B$  par la relation :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \int_{\text{durée du trajet}} \Delta\omega dt = \frac{2m}{\hbar} V R \Omega \times \frac{\pi R}{V} \quad (\text{Eq. 3. 25})$$

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \frac{2 A m}{\hbar} \Omega \quad (\text{Eq. 3. 26})$$

toujours avec  $A = \pi R^2$ , l'aire de l'interféromètre.

L'indépendance de (Eq. 3. 26) avec la vitesse  $V$  résulte ici du fait que la différence de pulsations ( $\omega_2 - \omega_1$ ) est proportionnelle à  $V$ , alors que la durée de propagation est inversement proportionnelle à  $V$ .

Dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$ , la différence de pulsations ( $\omega_2 - \omega_1$ ) est liée au fait que les vitesses  $V_1^0$  et  $V_2^0$  sont différentes.

Dans le repère tournant  $\{R\}$ , la différence de pulsations est liée au champ d'inertie produit par  $\Omega$ . L'hamiltonien dans  $\{R\}$  s'écrit :

$$H_R = \frac{P^2}{2m} - \frac{m}{2} (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 + m \mathbf{V} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (\text{Eq. 3. 27})$$

On reconnaît dans (Eq. 3. 27) le terme d'énergie cinétique, le terme correspondant à la force centrifuge et celui de la force de CORIOLIS.

### 3.1.3.3 Comparaison entre le calcul relativiste et le calcul quantique

Le déphasage trouvé en (Eq. 3. 26) est bien égal à (Eq. 3. 17), mais il a été obtenu comme le déphasage de deux ondes atomiques de vitesses différentes (dans  $\{R_0\}$ ) arrivant au même instant, et non pas comme le déphasage de deux ondes de même fréquence arrivant à des instants différents. Les deux méthodes donnent la bonne formule à des termes en  $R^2 \Omega^2 / c^2$  près.

### 3.1.3.4 Calcul quantique

Nous présentons enfin un dernier calcul que l'on pourra trouver de façon plus détaillée dans les références [BORDÉ 91 et BORDÉ 92]. Ce calcul s'appuie directement sur des considérations quantiques et consiste à intégrer l'équation de SHRÖDINGER dans le repère tournant.

Cette équation permettant de déterminer l'évolution de la fonction d'onde atomique  $|\psi(t)\rangle$  s'écrit dans notre cas :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \left[ H_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{P} \right] |\psi(t)\rangle$$

- $H_0$  est l'hamiltonien interne de l'atome.
- $\frac{\mathbf{P}^2}{2m}$  est le terme d'énergie cinétique.
- $-\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{P}$  est le terme lié au repère tournant à la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  <sup>(1)</sup>.

L'intégration de cette équation d'évolution donne une solution de la forme :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t U(t, t') |\psi(t')\rangle dt'$$

$$\text{avec } U(t, t') = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{P} dt_1 \right] \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( H_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right) (t - t') \right]$$

Appliquons cette relation à notre interféromètre en forme de boucle précédent. En prenant l'origine des positions au centre de la boucle,  $t_A$  l'instant où les ondes sont en  $A$  et  $t_B = t_A + (\pi R/V)$  l'instant où les ondes sont en  $B$ , Le calcul de l'intégrale le long de la boucle :

$$\int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{P} dt_1 = 2\boldsymbol{\Omega} R (m\pi R/V) (t_B - t_A) = 2m A \boldsymbol{\Omega}$$

On retrouve bien alors l'expression du déphasage lié à la rotation :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \frac{2mA}{\hbar} \boldsymbol{\Omega}$$

Précisons également qu'un calcul quantique / relativiste est également possible et consiste à utiliser l'équation de DIRAC au lieu de l'équation de SHRÖDINGER. Un tel calcul est présenté par exemple dans la référence [BORDÉ 00].

---

(1) Dans le cas où l'on veut déterminer la fonction d'onde d'un atome dans le champ de gravité, le terme  $-\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{P}$  est à remplacer par le potentiel de pesanteur :  $-mg \cdot \mathbf{r}$ .

### 3.1.3.5 Une idée fausse ... mais tenace

La relation (Eq. 3. 12) peut être écrite en fonction de la longueur d'onde  $\lambda_0 = 2\pi c / \omega$  dans le vide de l'onde lumineuse :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \frac{4\pi A}{\lambda_0 c} \Omega \quad (\text{Eq. 3. 28})$$

De même l'équation (Eq. 3. 26) peut être écrite en fonction de la longueur d'onde DE BROGLIE de l'onde atomique :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \frac{4\pi A}{\lambda_{dB} V} \Omega \quad (\text{Eq. 3. 29})$$

Mais il est faux de penser que l'on peut passer de (Eq. 3. 28) à (Eq. 3. 29) en remplaçant directement  $c$  par  $V$  et  $\lambda_0$  par  $\lambda_{dB}$ , car cela laisserait supposer que les termes négligés sont alors en  $R^2 \Omega^2 / V^2$ , ce qui est totalement faux, ils restent en  $R^2 \Omega^2 / c^2$ .

(Eq. 3. 29) provient en réalité de (Eq. 3. 12) dans laquelle on a exprimé  $\omega$  en fonction de  $\lambda_{dB}$  :

$$\omega = \frac{2\pi V_\phi}{\lambda_{dB}} \quad (\text{Eq. 3. 30})$$

où  $V_\phi$  est la vitesse de phase de l'onde atomique, reliée à la vitesse de groupe  $V$  par la relation :

$$V \times V_\phi = c^2 \quad (\text{Eq. 3. 31})$$

(Eq. 3. 30) et (Eq. 3. 31) donnent alors :

$$\omega = \frac{2\pi c^2}{\lambda_{dB} V} \quad (\text{Eq. 3. 32})$$

(Eq. 3. 29) est donc obtenu directement à partir de (Eq. 3. 12) en remplaçant  $\omega$  par son expression donnée en (Eq. 3. 32). On peut remarquer qu'en remplaçant  $\lambda_{dB}$  dans (Eq. 3. 32), par son expression bien connue :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mV} \quad (\text{Eq. 3. 33})$$

on trouve :

$$\omega = \frac{mc^2}{\hbar} \quad (\text{Eq. 3. 34})$$

qui correspond bien à l'expression donnée en (Eq. 3. 16) à des termes en  $(V^2 / c^2)$  près.

### 3.2 COMPARAISON ENTRE LE DÉPHASAGE OPTIQUE ET ATOMIQUE

Nous allons comparer dans ce paragraphe, les déphasages produit par effet SAGNAC dans un interféromètre à ondes lumineuses, et pour un interféromètre à ondes de matière. On rappelle les deux expressions (Eq. 3. 4) et (Eq. 3. 17) :

$$\text{Ondes optiques} : \Delta\phi_{\text{optique}}^B = \frac{2 A \omega}{c^2} \Omega$$

$$\text{Ondes de matière} : \Delta\phi_{\text{atomique}}^B = \frac{2 A m}{\hbar} \Omega$$

Afin de comparer les effets, nous allons considérer deux interféromètres de même aire, soumis à la même rotation  $\Omega$ . Le rapport des déphasages donne alors :

Le rapport des deux déphasages vaut donc :

$$\frac{\Delta\phi_{\text{matière}}^B}{\Delta\phi_{\text{optique}}^B} = \frac{m c^2}{\hbar \omega} \quad (\text{Eq. 3. 35})$$

où  $m$  est la masse de la particule associée à l'onde de matière et  $\omega$  est la pulsation de l'onde lumineuse. On reconnaît au numérateur l'énergie de masse de la particule, et au dénominateur le quantum d'énergie transporté par le photon. Avec les valeurs  $m = 133 \text{ UA}$  (masse d'un atome de Césium) et  $\omega = 1,8 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  (pulsation d'une onde à  $1,06 \mu\text{m}$ ), on trouve :

$$\frac{\Delta\phi_{\text{matière}}^B}{\Delta\phi_{\text{optique}}^B} \approx 10^{11}$$

Ainsi, à aire d'interféromètre égale, le facteur d'échelle du gyromètre à atomes de césium est  $10^{11}$  fois plus élevé que celui d'un gyromètre optique. Mais il convient de faire tout de suite deux remarques :

- L'aire d'un gyromètre optique peut aisément atteindre  $50 \text{ m}^2$ , alors que pour l'instant, les aires des interféromètres à ondes de matière ne dépassent pas le  $\text{cm}^2$ . Des expériences ont déjà montré que des solutions existaient pour augmenter considérablement l'aire de l'interféromètre [PFAU 93, JOHNSON 95], mais ces techniques n'ont pour l'instant pas été mises en œuvre sur des gyromètres atomiques.

- Le rapport signal à bruit est beaucoup plus faible dans un interféromètre à ondes de matière comparé à celui d'un interféromètre optique, car il est difficile d'obtenir des sources intense d'ondes de matière. On donne par exemple les flux typiques pour quelques sources :

- jet thermique de Césium :  $10^{11}$  atomes détectés /seconde [LANDRAGIN 99]
- boule d'atomes de Césium froids :  $10^8$  atomes détectés / seconde

- jet de neutrons :  $2 \cdot 10^6$  neutrons détectés / seconde [STAUDENMANN 80]

Ces valeurs sont à comparer aux flux lumineux typiques utilisés dans les gyromètres optiques qui sont  $10^{14}$  photons /seconde.

Ces deux remarques permettent de comprendre pourquoi, bien que l'effet SAGNAC soit  $10^{11}$  fois plus sensible pour les ondes atomiques que pour les ondes optiques, les gyromètres atomiques réalisés jusqu'à présent n'affichent des sensibilités que très légèrement supérieures aux meilleurs gyromètres optiques. Il convient de rajouter que les gyromètres optiques sont développés depuis presque 40 ans alors que les gyromètres atomiques n'ont démarré que depuis une dizaine d'années, et restent encore à l'heure actuelle du domaine de la recherche.

### 3.3 L'EFFET SAGNAC POUR MESURER LES ROTATIONS

Nous allons considérer un interféromètre comme celui décrit sur la **Figure 3.1**. Tout ce que nous allons dire dans cette partie s'applique aussi bien aux interféromètres à ondes optiques, qu'à ceux à ondes de matière. Nous allons écrire les formules dans le cas des ondes de matière, on pourra retrouver les formules pour le cas optique en remplaçant  $(m/\hbar)$  par  $(\omega/c^2)$ .

#### 3.3.1 Gyromètre ou Gyroscope ?

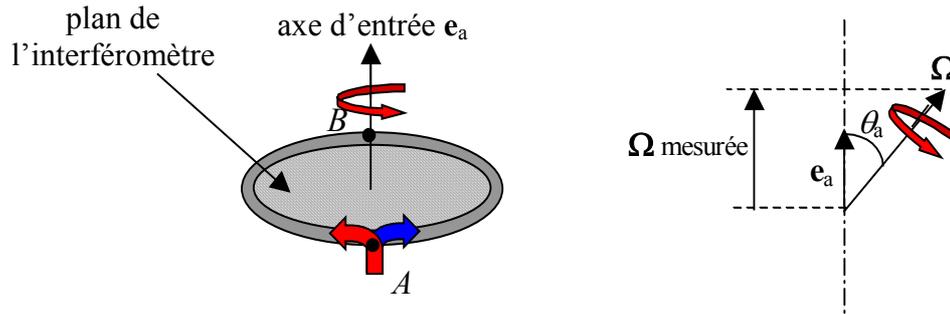
D'après les expressions (Eq. 3.4) et (Eq. 3.17), le déphasage SAGNAC est proportionnel à la vitesse de rotation instantanée  $\Omega$  de l'interféromètre. Cet appareil constitue donc un gyromètre, suivant la distinction définie paragraphe 2.2.1.

#### 3.3.2 Axe d'entrée

L'effet SAGNAC ne donne un déphasage non nul que pour une rotation d'axe perpendiculaire au plan de l'interféromètre. On réalise donc un gyromètre à un axe d'entrée (voir **Figure 3.4**). Dans le calcul permettant d'aboutir à (Eq. 3.17) on a considéré une rotation suivant l'axe d'entrée ( $Oz$ ), L'expression générale du déphasage SAGNAC pour une rotation d'axe quelconque s'écrit :

$$\Delta\phi_{sortie}^B = \frac{2Am}{\hbar} \mathbf{e}_a \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (\text{Eq. 3.36})$$

où  $\mathbf{e}_a$  est un vecteur unitaire normal à la surface de l'interféromètre, qui constitue alors l'axe d'entrée du gyromètre. Le gyromètre est donc sensible à la composante de la vitesse de rotation suivant son axe d'entrée. Si la surface de l'interféromètre n'est pas plane, l'aire  $A$  à considérer est alors la projection de cette surface courbe sur un plan perpendiculaire au vecteur  $\boldsymbol{\Omega}$ .



**Figure 3. 4** : l'axe d'entrée d'un gyromètre optique est l'axe perpendiculaire au plan de l'interféromètre

### 3.3.3 Influence de la forme de l'interféromètre

Au paragraphe 3.1, on a pu calculer facilement le retard d'arrivée des faisceaux (1) et (2) au point  $B$  car l'interféromètre est circulaire et on a supposé qu'il tournait par rapport à son centre de symétrie  $O$ . On peut montrer [HARZER 14] que les formules (Eq. 3. 5) et (Eq. 3. 17) sont valables quelle que soit la forme de l'interféromètre <sup>(1)</sup>, seule la valeur de l'aire projetée est importante. En particulier la formule est valable pour notre gyromètre atomique dont la surface est un parallélogramme.

On a considéré, dans tous les calculs précédents que le détecteur est placé au point  $B$ , symétrique de  $A$  sur le cercle. Chaque onde parcourt donc la moitié de l'interféromètre et le déphasage est donné par les formules (Eq. 3. 5) et (Eq. 3. 17). Dans la plupart des gyromètres optiques le détecteur est en réalité placé en  $A$ , tout comme la source. Dans ce cas chaque onde parcourt l'ensemble de la boucle. On appelle « *interféromètre bouclé* » cette configuration, par opposition à « *l'interféromètre non bouclé* » décrit précédemment. Le déphasage en sortie d'un interféromètre bouclé est deux fois plus important que celui d'un interféromètre ouvert, car les ondes parcourent deux fois plus de distance. Le déphasage pour un gyromètre optique bouclé s'écrit donc :

$$\Delta\phi_{\text{sortie}}^A = \frac{4 A \omega}{c^2} \Omega \quad (\text{Eq. 3. 37})$$

### 3.3.4 Influence de la position de l'axe de rotation

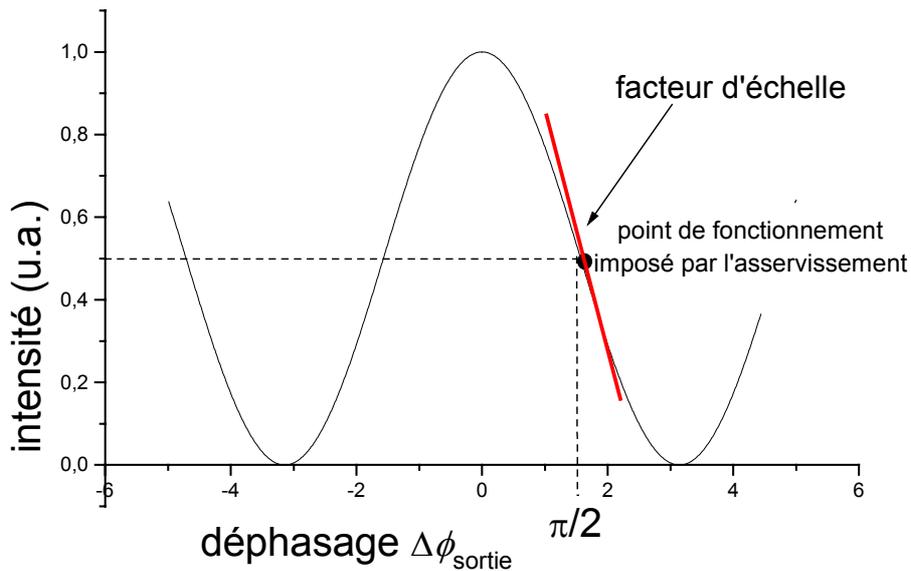
On peut montrer [HARZER 14] que pour un interféromètre bouclé, la position de l'axe de rotation n'influe pas sur la valeur du déphasage. Par contre pour un interféromètre ouvert, si l'axe de rotation ne passe pas par le centre de symétrie de l'interféromètre, il faut alors rajouter un déphasage supplémentaire dû à l'accélération centripète. Ce point sera approfondi dans le cas particulier de l'interféromètre atomique au chapitre suivant.

<sup>(1)</sup> Cette démonstration sera faite dans le cas d'un interféromètre atomique dans le chapitre suivant.

### 3.3.5 Facteur d'échelle et biais

Comme dans la plupart des interféromètres, on n'a pas accès directement au déphasage, mais à l'intensité <sup>(1)</sup>  $I_{\text{sortie}}$ , reliée à  $\Delta\phi_{\text{sortie}}^B$  par (voir par exemple [PEREZ 84]) :

$$I_{\text{sortie}} = I_0 \left[ \frac{1 + \cos(\Delta\phi_{\text{sortie}}^B)}{2} \right] \quad (\text{Eq. 3. 38})$$



**Figure 3. 5** : variation de l'intensité en sortie de l'interféromètre, en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$ . Afin d'être toujours dans une zone où le facteur d'échelle est linéaire et au maximum de sensibilité, on se place autour du point  $\phi_{\text{sortie}} = \pi/2$ .

La relation entre le signal de sortie  $I_{\text{sortie}}$  et la grandeur d'entrée  $\Omega$  n'est donc pas linéaire (voir **Figure 3. 5**) contrairement au modèle d'erreur décrit paragraphe 2.2.2. On peut toutefois, comme mentionné au paragraphe 2.2.3, se ramener à un facteur d'échelle linéaire en faisant fonctionner l'appareil autour d'un point, grâce à un asservissement imposant de fonctionnement autour de  $\Delta\phi_{\text{sortie}}^B = \pi/2$ . Dans ce cas, le facteur d'échelle vaut alors (voir Eq. 2. 14) :

$$K_0 = \frac{Am}{\hbar} \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_\Omega \quad (\text{Eq. 3. 39})$$

où  $\mathbf{e}_a$  et  $\mathbf{e}_\Omega$  sont des vecteurs unitaires respectivement suivant l'axe d'entrée du gyromètre, et suivant l'axe de rotation de l'appareil.

Les fluctuations du facteur d'échelle sont essentiellement dues aux modifications de l'aire de l'interféromètre, en valeur absolue ( $A$ ) ou en direction ( $\mathbf{e}_a$ ).

<sup>(1)</sup> Le terme intensité désigne ici une intensité lumineuse pour un gyromètre optique ou bien un nombre d'atomes détectés pour un gyromètre atomique.

Le biais peut être produit par tous les phénomènes qui introduisent des déphasages différents sur les trajets (1) et (2). Afin de limiter ce biais on utilise, dans le cas optique, des interféromètres bouclés. Ainsi les phases parasites sont identiques pour les ondes (1) et (2). Seuls les déphasages de nature non réciproque (i.e. dépendant du sens de propagation de l'onde) influent sur le signal de sortie.

### 3.3.6 Sensibilité sur une seconde

On a indiqué au chapitre 2 que les gyromètres optiques sont limités par le bruit de photons correspondant au bruit limite quantique. Dans ce cas, le rapport signal à bruit ne dépend alors que du nombre de photons détectés  $N_{ph}$  :

$$S / B = \sqrt{N_{ph}} \quad (\text{Eq. 3. 40})$$

La plus petite rotation mesurable en une seconde est alors donnée par (voir Eq. 2. 19) :

$$\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}} = \frac{1}{K_0 \sqrt{N_{ph}}} \quad (\text{Eq. 3. 41})$$

Lorsqu'on intègre le signal sur une durée  $T$ , la valeur de  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^T$  s'améliore en  $\sqrt{T}$ , jusqu'à une valeur  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^{ultime}$  :

$$\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}^{ultime} = \frac{\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}}}{\sqrt{T_{lim}}} \quad (\text{Eq. 3. 42})$$

Il est très difficile, voire impossible, de connaître la valeur de  $T_{lim}$  tant que l'on n'a pas effectué sa mesure.

### 3.3.7 Cas d'une vitesse de rotation non constante

Si la vitesse de rotation n'est pas constante entre les instants  $t_0$  et  $(t_0 + \tau_{(1)}^0)$  alors les équations (Eq. 3. 9) et (Eq. 3. 10) à résoudre deviennent :

$$V \tau_{(1)}^0 = \pi R - R \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{(1)}^0} \Omega(t) dt \quad (\text{Eq. 3. 43})$$

$$V \tau_{(2)}^0 = \pi R + R \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{(2)}^0} \Omega(t) dt \quad (\text{Eq. 3. 44})$$

On mesure donc la valeur moyenne de  $\Omega$  sur  $t_0 + \tau_{(2)}^0$  ou  $t_0 + \tau_{(1)}^0$ . Ces deux équations ne permettent pas d'obtenir une formule simple de  $\Delta\tau^0 = (\tau_{(2)} - \tau_{(1)})$  sans faire d'hypothèse sur la façon dont  $\Omega$  varie avec le temps.

Il est clair que dans le cas d'un gyromètre optique, la durée  $\tau_{(2)}$  n'est jamais très grande (exemple : pour un gyromètre optique avec une fibre de 1 kilomètre de longueur, la durée est d'environ 5  $\mu s$ ), on peut alors généralement considérer  $\Omega$  comme constante entre  $t_0$

et  $(t_0 + \tau_{(2)})$ . Dans le cas de notre gyromètre à atomes froids la durée  $\tau_{(2)}$  vaut environ 100 ms, et  $\Omega$  peut varier sur cette durée. On mesure alors la valeur moyenne de  $\Omega$  sur 100 ms.

### **3.4 CONCLUSION**

L'effet SAGNAC pour les ondes atomiques apparaît comme un effet extrêmement sensible, comparé à celui pour les ondes lumineuses. Sa mise en œuvre est toutefois relativement complexe puisqu'elle nécessite de réaliser un interféromètre à ondes atomiques. Les techniques de manipulation d'atomes par laser développées depuis une vingtaine d'années rendent accessible la réalisation de tels interféromètres.

Nous allons décrire, dans le chapitre suivant, un modèle permettant de calculer le déphasage en sortie d'un interféromètre à ondes atomiques dans lequel la séparation des paquets d'ondes atomiques se fait de façon optique. Ce modèle nous permettra de retrouver l'expression du déphasage (Eq. 3. 17), et de façon générale, le déphasage produit par n'importe quelle accélération. Enfin, le modèle nous aidera à identifier les sources de déphasages parasites et en évaluer les effets.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ANANDAN 81] J. Anandan, "Sagnac effect in relativistic and nonrelativistic physics", *Phys. Rev. D*, **24**, p 338, (1981)
- [ARANOWITZ 71] F. Aranowitz, "The Laser Gyro", in *Lasers applications*, vol 1, Ed. Academic Press, New York & London, p 133, (1971)
- [BERGH 81] R. A. Bergh, H. C. Lefevre, H. J. Shaw, *Opt. Lett.*, **6**, p 198, (1981)
- [BONSE 65] U. Bonse, M. Hart, *Appl. Phys. Lett.*, **6**, p 155, (1965)
- [BORDÉ 91] Ch. J. Bordé, "Atomic Interferometry and Laser Spectroscopy", in *Laser Spectroscopy X*, Ed. M. Ducloy, E. Giacobino, G. Camy, World Scientific, p 239, (1991)
- [BORDÉ 92] Ch. Bordé, "Propagation of Laser Beams and of Atomic Systems", in *Système fondamentaux en Optique Quantique / Fundamental Systems in Quantum Optics*, course 5, J. Dalibard, J.M. Raymond, J. Zinn-Justin, Ed. Les Houches, Session LIII, (1990)
- [BORDÉ 00] Ch. Bordé, J.-C. Houard, A. Karasiewicz, "relativistic phase shifts for Dirac particles interacting with weak gravitational fields in a matter-wave interferometers", in *Gyros, Colcks, and Interferometers : Testing Relativistic Gravity in Space*, Edited by C. Lämmerzahl, C.W.F. Everitt, F.W. Hehl, Springer-Verlag, Berlin, (2000)
- [CHOW 85] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, "The Ring Laser Gyro", *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 1, p 61, (1985)
- [COLELLA 75] R. Colella, A. W. Overhauser, S. A. Werner, "Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference", *Phys. Rev. Lett.*, **34**, p 1472, (1975)
- [DRESDEN 79] M. Dresden, C. N. Yang, "Phase shift in a rotating neutron or optical interferometer", *Phys. Rev. D*, **20**, p 1840, (1979)
- [EZEKIEL 77] S. Ezekiel, S. R. Balsamo, "Passive ring laser gyroscope", *Appl. Phys. Lett.*, **30**, p 478, (1977)
- [FORDER 84] P. W. Forder, "Ring gyroscopes: an application of adiabatic invariance", *J. Phys. A*, **17**, p 1343, (1984)
- [GUSTAVSON 97] T. L. Gustavson, P. Bouyer, M. A. Kasevich, "Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 2046, (1997)
- [HARIHARAN 75] P. Hariharan, "Sagnac or Michelson-Sagnac interferometer ? ", *Appl. Opt.*, **14**, 10, p 2319, (1975)
- [HASSELBACH 88] F. Hasselbach, M. Nicklaus, *Physica B*, **151**, p 230, (1988)
- [HEER 61] C. V. Heer, "Interference of electromagnetic and matter waves in a nonpermanent gravitational field", *Bull. Am. Phys. Soc.*, **6**, p 58, (1961)
- [HEHL 90] F. W. Hehl, W.-T. Ni, "Inertial effects of a Dirac particle", *Phys. Rev. D*, **42**, p 2045, (1990)

- [JOHNSON 95] K. Johnson, A. Chu, T. Lynn, K. Berggren, M. Shahriar, M. Prentiss, "Demonstration of a nonmagnetic blazed-grating atomic beam splitter", *Opt. Lett.*, **20**, 11, p 1310, (1995)
- [LANDRAGIN 99] A. Landragin, T. L. Gustavson, M.A. Kasevich, "Precision atomic gyroscope", *Laser Spectroscopy XIV*, Edited by R. Blatt, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, World Scientific, Singapore, p 170 (1999)
- [LANGEVIN 21] P. Langevin, *C. R. Acad. Sci.*, **173**, p 831, (1921)
- [LAWRENCE 98] A. Lawrence, "Modern Inertial Technology : Navigation, Guidance, and Control", *Ed. Springer*, (1998) second edition, ISBN 0 387 98507 7
- [LENEF 97] A. Lenef, T. D. Hammond, E. T. Smith, M. S. Chapman, R. A. Rubenstein, D. E. Pritchard, "Rotation Sensing with an Atom Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 760, (1997)
- [LODGE 93] O. J. Lodge, *Philos. Trans. R. Soc. London*, **184**, p 727, (1893)
- [MACEK 63] W. M. Macek, T. M. Davis Jr, "Rotation Rate Sensing with Travelling-Wave Ring Lasers", *Appl. Phys. Lett.*, **2**, p 67, (1963)
- [MASHHOON 88] B. Mashhoon, "Neutron Interferometry in a Rotating Frame of Reference", *Phys. Rev. Lett.*, **61**, p 2639, (1988)
- [MICHELSON 25] A. A. Michelson, H. G. Gale, F. Pearson, , *Astrophys. J.*, **61**, p 137, (1925)
- [OVERHAUSER 74] A. W. Overhauser, R. Colella, "Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference", *Phys. Rev. Lett.*, **33**, p 1237, (1974)
- [PAGE 75] L. A. Page, "Effect of Earth's Rotation in Neutron Interferometry", *Phys. Rev. Lett.*, **35**, p 543, (1975)
- [PEREZ 84] J.P. Perez, "Optique, fondements et applications", *Ed. Masson*, Paris, (1984) ISBN 2-225-85213-8
- [PFAU 93] T. Pfau, Ch. Kurtsiefer, C. Adams, M. Sigel, J. Mlynek, "Magneto-Optical Beam Splitter for Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 21, p 3427, (1993)
- [POST 67] E.J. Post, "Sagnac Effect", *Rev. Mod. Phys.*, **39**, p 475, (1967)
- [RAUCH 74] H. Rauch, W. Treimer, U. Bonse, *Phys. Lett.*, **47A**, p 425, (1974)
- [RIEHLE 91] F. Riehle, Th. Kister, A. Witte, J. Helmcke, Ch. Bordé, "Optical Ramsey Spectroscopy in a Rotating Frame : Effect in a Matter-Wave Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 177, (1991)
- [ROWE 99] C. H. Rowe, U. K. Schreiber, S. J. Cooper, B. T. King, M. Poulton, G. E. Stedman, "Design and operation of a very large ring laser gyroscope", *Appl. Opt.*, **38**, p 2516, (1999)
- [SAGNAC 13] G. Sagnac, "L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme", *C. R. Acad. Sci.*, **157**, p 708, (1913)
- [SAGNAC 14] G. Sagnac, *J. Phys. (Paris)*, **4**, p 177, (1914)
- [SAKURAI 90] J. J. Sakurai, "Comments on quantum-mechanical interference due to the Earth's rotation", *Phys. Rev. D*, **21**, p 2993, (1990)

- [STAUDENMANN 80] J. -L. Staudenmann, S. A. Werner, R. Colella, A. W. Overhauser, "Gravity and inertia in quantum mechanics", *Phys. Rev. A*, **21**, p 1419, (1980)
- [STOREY 94] P. Storey, C. Cohen-Tannoudji, "The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial", *J. Phys. II France*, **4**, p 1999, (1994)
- [ TSAI 88] C.-H. Tsai, D. Neilson, "New quantum interference effect in rotating systems", *Phys. Rev. A*, **37**, p 619, (1988)
- [VALI 76] V. Vali, R. W. Shorthill, "Passive ring interferometer", *Appl. Opt.*, **15**, p 1099, (1976)
- [WERNER 79] S. A. Werner, J.-L. Staudenmann, R. Colella, "Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron ", *Phys. Rev. Lett.*, **42**, p 1103, (1979)
- [WILKINSON 87] J. R. Wilkinson, "Ring lasers", *Prog. Quant. Electr.*, **11**, p 1, (1987)
- [ZIMMERMAN 64] J. E. Zimmerman, J. E. Mercereau, "Quantized Flux Pinning in Superconducting Niobium", *Phys. Rev. Lett.*, **13**, p 125, (1964)
- [ZIMMERMAN 65] J. E. Zimmerman, J. E. Mercereau, "Compton Wavelength of Superconducting Electrons", *Phys. Rev. Lett.*, **14**, p 887, (1965)





## Chapitre 4 : TRANSITIONS RAMAN STIMULEES ET MACH-ZEHNDER ATOMIQUE

### TABLE DES MATIÈRES :

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 4.1     | MODÈLE DE L'ATOME À DEUX NIVEAUX .....                                | 69 |
| 4.1.1   | Modèle sans degrés de liberté externe.....                            | 69 |
| 4.1.2   | Modèle avec les degrés de liberté externes .....                      | 75 |
| 4.1.3   | Séparation spatiale du paquet d'ondes.....                            | 77 |
| 4.2     | TRANSITIONS RAMAN STIMULÉES.....                                      | 78 |
| 4.2.1   | Description .....   | 78 |
| 4.2.2   | Résolution du système à trois niveaux .....                           | 79 |
| 4.2.3   | Equivalence avec un système à deux niveaux.....                       | 82 |
| 4.2.4   | Compensation des déplacements lumineux.....                           | 82 |
| 4.2.5   | Séparation angulaire .....  | 83 |
| 4.2.6   | Sélectivité en vitesse transverse .....                               | 83 |
| 4.3     | L'INTERFÉROMÈTRE DE MACH-ZEHNDER.....                                 | 84 |
| 4.3.1   | Le MACH-ZEHNDER optique.....  | 84 |
| 4.3.2   | Le MACH-ZEHNDER atomique.....   | 85 |
| 4.3.3   | Calcul général du déphasage .....                                     | 86 |
| 4.3.3.1 | Cas d'un interféromètre optique.....                                  | 86 |
| 1)      | Calcul du déphasage dans le cas immobile .....                        | 86 |
| 2)      | Déphasage en présence de rotation ou d'accélération.....              | 87 |
| 4.3.3.2 | Interféromètres « spatiaux » - interféromètres « temporels » .....    | 87 |
| 4.4     | LES DIFFÉRENTS OUTILS NÉCESSAIRES .....                               | 89 |
| 4.4.1   | Présentation de la méthode.....                                       | 89 |
| 4.4.2   | Quelques mots sur le formalisme de FEYNMAN et des « matrices S »..... | 90 |
| 1)      | Formalisme de FEYNNAM.....  | 90 |
| 2)      | Formalisme des « matrices S ».....                                    | 92 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 4.5   | CALCUL DU DÉPHASAGE DANS L'INTERFÉROMÈTRE ATOMIQUE .....                   | 94  |
| 4.5.1 | Calcul le long des trajectoires non perturbées.....                        | 95  |
| 1)    | Calcul du déphasage pour l'interféromètre immobile.....                    | 95  |
| 2)    | Déphasage lié à la rotation ou à l'accélération.....                       | 98  |
| 4.5.2 | Calcul le long des trajectoires perturbées.....                            | 99  |
| 1)    | Détermination des trajectoires perturbées dans le cas d'une rotation ..... | 99  |
| 2)    | Déphasage de propagation .....   | 101 |
| 3)    | Déphasage lié aux passages dans les lames lumineuses .....                 | 101 |
| 4)    | Déphasage dû à l'écart en position.....                                    | 102 |
| 5)    | Déphasage total .....  | 103 |
|       | Influence des fronts d'ondes des faisceaux RAMAN.....                      | 106 |
| 4.6   | LIMITES DE CE MODÈLE .....   | 107 |
| 4.6.1 | Impulsions infiniment courtes .....  | 107 |
| 4.6.2 | Ondes atomiques planes .....   | 107 |
|       | BIBLIOGRAPHIE .....  | 109 |



## CHAPITRE 4 :

### TRANSITIONS RAMAN STIMULEES ET MACH-ZEHNDER ATOMIQUE

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé le déphasage d'un interféromètre atomique en fonction de la rotation (Eq. 3. 17). Cette formule a été obtenue en considérant un modèle très simple d'interféromètre circulaire, où l'on ne se préoccupait pas de savoir comment étaient réalisées la séparation et la recombinaison des paquets d'ondes atomiques. Nous allons reprendre ce calcul dans le cas de l'interféromètre atomique de type MACH-ZEHNDER à séparatrices optiques.

Ce chapitre se divise en six parties :

Dans le paragraphe 4.1 nous détaillons, à l'aide du modèle de l'atome à deux niveaux, la séparation cohérente des paquets d'ondes atomiques grâce à des « *lames lumineuses* ». En prenant en compte les degrés de liberté externes de l'atome, nous mettrons en évidence la séparation spatiale des paquets d'ondes atomiques, grâce à l'impulsion de recul encaissée par l'atome au moment de l'absorption ou de l'émission d'un photon.

Nous nous intéresserons ensuite aux transitions RAMAN stimulées. Nous verrons comment ces transitions à deux photons peuvent, sous certaines conditions, être décrites par le modèle détaillé au paragraphe 4.1. Nous mettrons en évidence les avantages de ces transitions par rapport à celles à un seul photon.

La troisième partie est consacrée à la description de l'interféromètre de MACH-ZEHNDER, dans les cas optique et atomique. La comparaison de ces deux interféromètres mettra en évidence les différentes méthodes pour déterminer le déphasage à la sortie de

l'interféromètre atomique. Nous discuterons également des interféromètres dits « spatiaux » pour lesquels les impulsions lumineuses sont limitées dans l'espace, et les interféromètres « temporels » pour lesquels les impulsions sont limitées dans le temps.

Le paragraphe 4.4 développe les différents outils nécessaires au calcul du déphasage en sortie d'un interféromètre de MACH-ZEHNDER atomique utilisant des lames séparatrices optiques. Nous nous attacherons au formalisme des intégrales de FEYNMAN pour déterminer le déphasage lié à la propagation des ondes atomiques, et au formalisme des matrices S pour calculer le déphasage lié aux passages dans les lames lumineuses.

Au paragraphe 4.5 nous déterminerons le déphasage en sortie de notre interféromètre grâce aux outils développés au paragraphe précédent. Le calcul sera mené dans un premier temps par intégration de la phase atomique le long des trajectoires non perturbées, puis dans un deuxième temps le long des trajectoires perturbées par la rotation. Enfin nous terminerons ce paragraphe en montrant que l'on retrouve le même résultat par un calcul classique prenant en compte uniquement les déphasages introduits par les lames lumineuses.

Enfin dans la dernière partie nous regarderons les limitations de la méthode de calcul utilisée, puis nous donnerons un aperçu des diverses techniques permettant de décrire précisément le système.

## 4.1 MODÈLE DE L'ATOME À DEUX NIVEAUX

### 4.1.1 Modèle sans degrés de liberté externes

#### Description du système

Le modèle de l'atome à deux niveaux sans degrés de liberté externe est un modèle simple très largement détaillé et utilisé dans la littérature [RAMSEY 56, VANIER 89], notamment pour les horloges atomiques utilisant des transitions micro-ondes. Nous ne développerons pas toutes les étapes du calcul, mais la description que l'on va faire ici s'appuie sur la référence [YOUNG 97], à laquelle on pourra se reporter pour plus de détails. Nous ne réécrivons ici que les formules nécessaires à la compréhension.

Considérons un atome à deux niveaux  $|f\rangle$  (fondamental) et  $|e\rangle$  (excité) de très longue durée de vie  $\tau_{vie}$ , de telle sorte que l'émission spontanée puisse être négligée. Les énergies associées à ces deux niveaux sont :

$$E_f = \hbar\omega_f^0 \quad \text{et} \quad E_e = \hbar\omega_e^0 \quad (\text{Eq. 4. 1})$$

On appelle :

$$\Delta\omega^0 = \omega_e^0 - \omega_f^0 \quad (\text{Eq. 4. 2})$$

la différence de pulsation entre ces deux niveaux de l'atome. Si l'on ne tient pas compte des degrés de liberté externes et en l'absence de rayonnement,  $\omega_f^0$  et  $\omega_e^0$  sont les valeurs propres de l'hamiltonien du système.

$$H_0 = \hbar\omega_f^0 |f\rangle\langle f| + \hbar\omega_e^0 |e\rangle\langle e| \quad (\text{Eq. 4. 3})$$

Le fait d'avoir pris des valeurs bien définies pour les énergies propres se justifie par la très longue durée de vie des niveaux atomiques ( $\Delta E = \hbar/\tau_{vie} \sim 0$  d'après la relation d'incertitude d'HEISENBERG), et revient à considérer l'atome comme une onde plane du point de vue temporel, puisque l'équation d'évolution de la fonction d'onde est donnée par :

$$|\psi(t_0 + t)\rangle = a_f(t_0)e^{-i\omega_f^0 t} |f\rangle + a_e(t_0)e^{-i\omega_e^0 t} |e\rangle \quad (\text{Eq. 4. 4})$$

On ajoute maintenant au système une onde laser de pulsation  $\omega_L$  qui introduit un couplage électromagnétique entre les deux niveaux atomiques, que l'on supposera de type dipolaire électrique. Ceci se traduit dans l'hamiltonien par l'ajout d'un opérateur anti-symétrique proportionnel à l'amplitude du champ électrique :

$$H = \hbar\omega_f^0 |f\rangle\langle f| + \hbar\omega_e^0 |e\rangle\langle e| - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_L \quad (\text{Eq. 4. 5})$$

où :

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_L t + \phi_L) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 4. 6})$$

est le champ électrique défini comme une onde plane monochromatique polarisée dans la direction  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , et  $\hat{\mathbf{d}}$  est l'opérateur vectoriel dipôle électrique associé à la transition atomique  $|f\rangle \rightarrow |e\rangle$ . On définit alors le désaccord à résonance par :

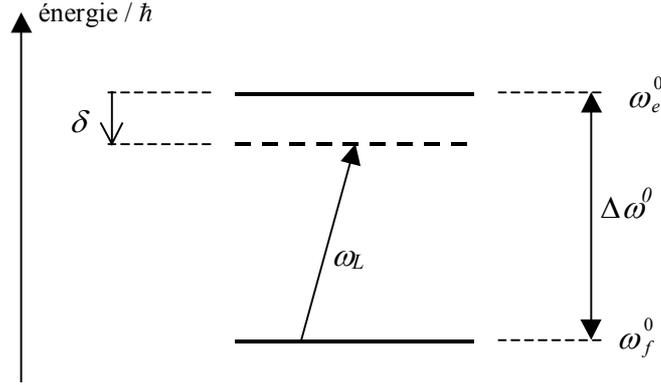
$$\delta = \omega_L - \Delta\omega^0 \quad (\text{Eq. 4.7})$$

et la pulsation de RABI :

$$\Omega_{ef} = -\frac{\langle e | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 | f \rangle}{\hbar} \quad (\text{Eq. 4. 8})$$

Le couplage électromagnétique s'écrit alors :

$$V = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_L = \hbar\Omega_{ef} \cos(\omega_L t + \phi_L) \quad (\text{Eq. 4. 9})$$



**Figure 4. 1** : atome à deux niveaux soumis à une radiation de pulsation  $\omega_L$ . Sur la figure le désaccord  $\delta$  est négatif (transition désaccordée vers le rouge).

### Recherche des états propres de $H$

Dans le cas où  $\Omega_{ef}$  est très inférieure à  $\omega_f^0$  et  $\omega_e^0$ , on peut réécrire l'équation de SCHRÖDINGER dans le cadre de l'approximation du champ tournant. L'hamiltonien, exprimé dans la base  $\{|e\rangle, |f\rangle\}$ , s'écrit alors :

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{ef} e^{-i(\delta t + \phi_L)} \\ \Omega_{ef} e^{i(\delta t + \phi_L)} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4. 10})$$

On supprime la dépendance temporelle de l'hamiltonien en se plaçant dans un repère tournant à la pulsation  $\delta$ . Dans ce repère, l'hamiltonien du système s'écrit, dans la base  $\{|e\rangle_R, |f\rangle_R\}^{(1)}$  :

$$H_R = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\delta & \Omega_{ef} e^{-i\phi_L} \\ \Omega_{ef} e^{i\phi_L} & \delta \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4. 11})$$

On trouve alors les deux états propres  $|\lambda_-\rangle$  et  $|\lambda_+\rangle$  de l'hamiltonien donné par (Eq. 4. 10) [COHEN-TANNOUDI 77], qui s'écrivent comme combinaisons linéaires des états  $|f\rangle_R$  et  $|e\rangle_R$  exprimés dans le repère tournant :

$$\begin{cases} |\lambda_+\rangle = \cos(\theta/2) e^{-i\phi_L/2} |e\rangle_R + \sin(\theta/2) e^{i\phi_L/2} |f\rangle_R \\ |\lambda_-\rangle = -\sin(\theta/2) e^{-i\phi_L/2} |e\rangle_R + \cos(\theta/2) e^{i\phi_L/2} |f\rangle_R \end{cases} \quad (\text{Eq. 4. 12})$$

avec  $\Omega_r = \sqrt{|\Omega_{ef}|^2 + \delta^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{-\delta}{\Omega_r}$ ,  $\sin \theta = \frac{\Omega_{ef}}{\Omega_r}$  et  $0 \leq \theta \leq \pi$

Les valeurs propres associées à ces états propres sont alors :

(1) La nouvelle base est déduite de la première par la transformation :

$$|e\rangle_R = e^{i\delta t} |e\rangle \quad |f\rangle_R = e^{-i\delta t} |f\rangle$$

$$\lambda_+ = \frac{\hbar\Omega_r}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_- = -\frac{\hbar\Omega_r}{2} \quad (\text{Eq. 4.13})$$

### Mise en évidence des déplacements lumineux

Par rapport aux niveaux d'énergie  $(-\hbar\delta/2)$  et  $(\hbar\delta/2)$  de l'hamiltonien non perturbé (Eq. 4.11 sans les termes anti-diagonaux), on constate que le couplage avec le champ électromagnétique déplace les niveaux d'énergie de :

$$\Delta E_+ = \frac{\hbar}{2}(\Omega_r - \delta) \quad \text{et} \quad \Delta E_- = \frac{\hbar}{2}(\delta - \Omega_r) = -\Delta E_+ \quad (\text{Eq. 4.14})$$

Ce décalage d'énergie est appelé *déplacement lumineux*, ou encore *effet STARK AC*. Lorsqu'on se place à grand désaccord  $|\delta| \gg \Omega_{ef}$ , on peut faire un développement limité à l'ordre 2 en  $(\Omega_{ef}/\delta)$ . Le déplacement lumineux prend alors la forme simplifiée :

$$\Delta E_+ = -\Delta E_- = \frac{\hbar\Omega_{ef}^2}{4\delta} \quad (\text{Eq. 4.15})$$

C'est sous cette forme que nous l'utiliserons par la suite.

### Evolution du système

Considérons maintenant un atome dans un état atomique initial quelconque :

$$|\psi(t_0)\rangle = c_e(t_0)|e\rangle + c_f(t_0)|f\rangle \quad (\text{Eq. 4.16})$$

On obtient l'expression de la fonction d'onde atomique après une interaction de durée  $\tau$  avec le champ laser par la méthode suivante :

1) on exprime  $|\psi(t_0)\rangle$  dans la base  $\{|e\rangle_R, |f\rangle_R\}$  du repère tournant.

2) On décompose  $|\psi(t_0)\rangle_R$  sur la base des vecteurs propres  $\{|\lambda_+\rangle, |\lambda_-\rangle\}$ .

$$|\psi(t_0)\rangle_R = \alpha_+ |\lambda_+\rangle + \alpha_- |\lambda_-\rangle \quad (\text{Eq. 4.17})$$

3) On propage chacune des composantes pendant la durée  $\tau$ , ce qui revient à multiplier  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  respectivement par les facteurs de phases  $e^{-i\Omega_r\tau/2}$  et  $e^{i\Omega_r\tau/2}$ .

$$|\psi(t_0 + \tau)\rangle_R = \alpha_+ e^{-i\Omega_r\tau/2} |\lambda_+\rangle + \alpha_- e^{i\Omega_r\tau/2} |\lambda_-\rangle \quad (\text{Eq. 4.18})$$

4) On réexprime  $|\psi(t_0 + \tau)\rangle_R$  dans la base  $\{|e\rangle_R, |f\rangle_R\}$  puis dans la base  $\{|e\rangle, |f\rangle\}$ . On obtient alors les coefficients  $c_e(t_0 + \tau)$  et  $c_f(t_0 + \tau)$  :

$$c_e(t_0 + \tau) = \left\{ c_e(t_0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) - i \cos \theta \sin\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) \right] + c_f(t_0) e^{-i(\delta t_0 + \phi_L)} \left[ -i \sin \theta \sin\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) \right] \right\} e^{-i\delta\tau/2} \quad (\text{Eq. 4. 19})$$

$$c_f(t_0 + \tau) = \left\{ c_e(t_0) e^{i(\delta t_0 + \phi_L)} \left[ -i \sin \theta \sin\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) \right] + c_f(t_0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) + i \cos \theta \sin\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) \right] \right\} e^{i\delta\tau/2} \quad (\text{Eq. 4. 20})$$

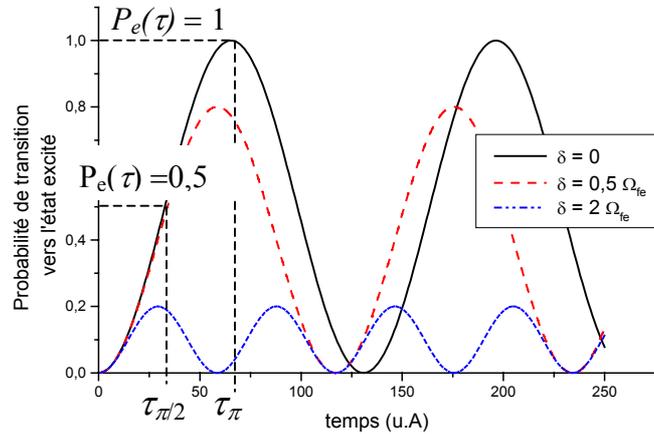
A partir de ces expressions, on peut déterminer la probabilité de présence de l'atome dans l'état  $|e\rangle$  après une interaction de durée  $\tau$ . Supposons que l'atome soit initialement dans l'état fondamental, on a alors  $c_e(t_0) = 0$  et  $c_f(t_0) = 1$ . (Eq. 4. 19) donne alors :

$$c_e(t_0 + \tau) = -i e^{-i(\delta t_0 + \phi_L)} \left[ \sin \theta \sin\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) \right] \quad (\text{Eq. 4. 21})$$

et la probabilité de présence dans l'état  $|e\rangle$  vaut :

$$P_e(\tau) = |c_e(t_0 + \tau)|^2 = \frac{\Omega_{ef}^2}{\Omega_r^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_r \tau}{2}\right) \quad (\text{Eq. 4.22})$$

La probabilité de trouver l'atome dans l'état  $|e\rangle$  oscille donc au cours du temps (voir **Figure 4. 2**). On appelle ce phénomène : *oscillation de RABI*. La pulsation de RABI  $\Omega_{ef}$  correspond à la pulsation temporelle de ces oscillations lorsque le désaccord  $\delta$  est nul.



**Figure 4. 2 :** on a tracé pour trois désaccords différents la probabilité de trouver l'atome dans l'état excité en fonction du temps. Dans la formule (Eq. 4. 21), le désaccord n'intervient qu'au carré, on retrouve donc les même courbes pour  $\delta$  positif et négatif.

### Impulsions $\pi$ et $\pi/2$

Plaçons nous à désaccord nul ( $\delta = 0$ ), dans ce cas  $\cos\theta = 0$  et  $\sin\theta = 1$ . Les expressions (Eq. 4. 19) et (Eq. 4. 20) se simplifient et donnent :

$$c_e(t_0 + \tau) = c_e(t_0) \cos\left(\frac{\Omega_{ef}\tau}{2}\right) - i c_f(t_0) \sin\left(\frac{\Omega_{ef}\tau}{2}\right) e^{-i\phi_L} \quad (\text{Eq. 4. 23})$$

$$c_f(t_0 + \tau) = -i c_e(t_0) e^{i\phi_L} \sin\left(\frac{\Omega_{ef}\tau}{2}\right) + c_f(t_0) \cos\left(\frac{\Omega_{ef}\tau}{2}\right) \quad (\text{Eq. 4. 24})$$

En choisissant maintenant la durée d'interaction  $\tau$  on peut distinguer deux cas :

- Si  $\Omega_{ef}\tau = \pi$

$$c_e(t_0 + \tau) = -i c_f(t_0) e^{-i\phi_L} \quad (\text{Eq. 4. 25})$$

$$c_f(t_0 + \tau) = -i c_e(t_0) e^{i\phi_L} \quad (\text{Eq. 4. 26})$$

On échange les populations des états  $|e\rangle$  et  $|f\rangle$ , à un facteur de phase près, cette interaction correspondant donc à un miroir pour les populations atomiques. Une telle interaction sera appelée *impulsion  $\pi$* .

- Si  $\Omega_{ef}\tau = \pi/2$

$$c_e(t_0 + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} [c_e(t_0) - i c_f(t_0) e^{-i\phi_L}] \quad (\text{Eq. 4. 27})$$

$$c_f(t_0 + \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-i c_e(t_0) e^{i\phi_L} + c_f(t_0)] \quad (\text{Eq. 4. 28})$$

On obtient une superposition cohérente équiprobable des états  $|e\rangle$  et  $|f\rangle$ . Cette interaction correspondant donc à une lame séparatrice 50/50 pour les populations atomiques. Une telle interaction sera appelée *impulsion  $\pi/2$* .

La phase  $\phi_L$  de l'onde lumineuse est imprimée sur la composante qui effectue la transition  $|f\rangle \rightarrow |e\rangle$ , et la phase  $-\phi_L$  est imprimée pour la transition  $|e\rangle \rightarrow |f\rangle$ . Cette remarque sera importante lorsque l'on calculera le déphasage total dans un interféromètre de MACH-ZEHNDER.

### 4.1.2 Modèle avec les degrés de liberté externes

#### Position du problème

Lorsque le déplacement de l'atome dans la direction des faisceaux lumineux fait qu'il peut voir des phases lumineuses différentes dans les diverses zones d'interaction, il faut prendre en compte les degrés de liberté externes de l'atome. Ceci intervient typiquement lorsque  $(\hbar kT)/m \geq \lambda$ , où  $k$  et  $\lambda$  sont respectivement le vecteur d'onde et la longueur d'onde du laser,  $m$  est la masse de l'atome et  $T$  est la durée moyenne entre deux impulsions. Plusieurs méthodes ont été développées pour permettre de prendre en compte l'impulsion et la position de l'atome [FRIEDBERG 93, ISHIKAWA 94]. Nous allons utiliser ici un modèle simple en ondes planes. On suppose que l'atome se déplace suivant l'axe (Ox) perpendiculaire au faisceau laser (Oy). Le mouvement de l'atome dans les directions (Ox) et (Oz) va être traité classiquement. Par contre son mouvement dans la direction (Oy) des lasers est traitée quantiquement. On affecte alors à l'atome une certaine impulsion  $\mathbf{P}$  et une position  $\mathbf{r}$ . La fonction d'onde atomique s'exprime alors comme une onde plane progressive. Pour un atome au repos, la fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a e^{-i\left[\omega t - \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right]} \psi_0 \quad (\text{Eq. 4. 29})$$

où  $\omega$  est la valeur propre de l'énergie,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{r}$  sont l'impulsion et la position de l'atome, et  $\psi_0$  représente la fonction d'onde en  $\mathbf{r} = 0$  et à  $t = 0$ .

De même l'expression du champ laser devient :

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_L t - \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} + \phi_L) \quad (\text{Eq. 4. 30})$$

#### Correspondance entre état interne et impulsion

Si on appelle  $\mathbf{P}_f$  l'impulsion de l'atome dans le niveau fondamental  $|f\rangle$ , la transition vers le niveau excité  $|e\rangle$  s'effectue en absorbant un photon d'impulsion  $\hbar \mathbf{k}_L$ . L'impulsion de l'atome dans l'état excité vaut alors  $\mathbf{P}_e = \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_L$ .

De plus si l'on néglige les processus d'émission spontanée, l'atome se désexcite obligatoirement en émettant un photon stimulée d'impulsion  $\hbar \mathbf{k}_L$ . L'impulsion de l'atome dans l'état  $|f\rangle$ , après un cycle absorption - émission stimulée, vaut de nouveau  $\mathbf{P}_f$ . Il y a alors une correspondance parfaite entre l'état atomique interne et l'impulsion. Les états avec degrés de liberté externes sont alors notés  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  et  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_L\rangle$ . Les énergies associées sont données par les valeurs propres de l'hamiltonien incluant le terme d'énergie cinétique :

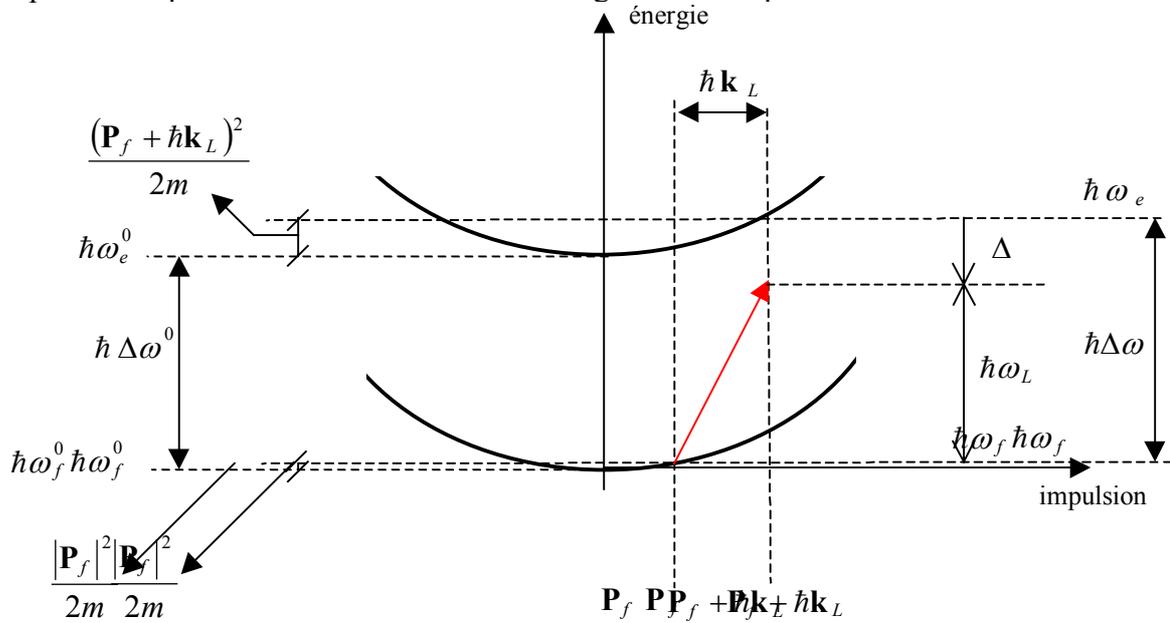
$$H = H_0 + \frac{|\mathbf{P}|^2}{2m} \quad (\text{Eq. 4. 31})$$

où  $H_0$  est l'hamiltonien interne défini par (Eq. 4. 3). Ces énergies ont alors une dépendance parabolique en fonction de l'impulsion (voir **Figure 4. 3**) :

Pour l'état  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  : 
$$E_{|f, \mathbf{P}_f\rangle} = \hbar\omega_f^0 + \frac{\mathbf{P}_f^2}{2m} = \hbar\omega_f \quad (\text{Eq. 4. 32})$$

Pour l'état  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_L\rangle$  : 
$$E_{|e, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_L\rangle} = \hbar\omega_e^0 + \frac{(\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_L)^2}{2m} = \hbar\omega_e \quad (\text{Eq. 4. 33})$$

Ces équations expriment la conservation de l'énergie et de l'impulsion.



**Figure 4. 3** : en tenant compte des degrés de liberté externes de l'atome, les niveaux d'énergie sont des paraboles en fonction de l'impulsion.

La différence d'énergie entre les deux états s'écrit alors :

$$\hbar\Delta\omega = \hbar(\Delta\omega^0 + \omega_D + \omega_R) \quad (\text{Eq. 4. 34})$$

avec  $\Delta\omega^0$  défini par (Eq. 4. 2).  $\omega_D$  est le terme lié à l'effet DOPPLER :

$$\omega_D = \frac{\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{P}_f}{m} \quad (\text{Eq. 4. 35})$$

et  $\omega_R$  le terme lié à l'effet de recul :

$$\omega_R = \frac{\hbar|\mathbf{k}_L|^2}{2m} \quad (\text{Eq. 4. 36})$$

## Conclusion

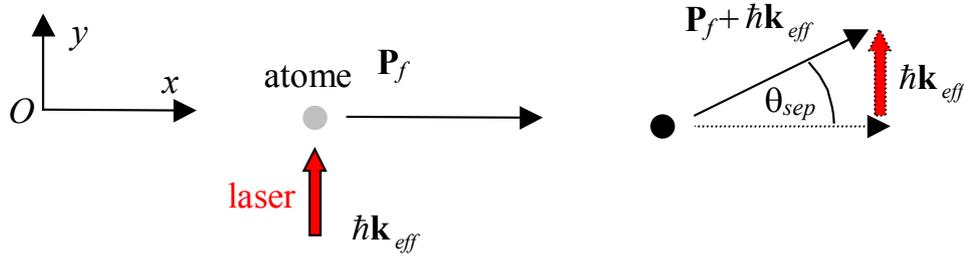
Tout le calcul effectué au paragraphe précédent reste donc valable (en particulier les relations Eq. 4.19 et Eq. 4. 20), à condition de remplacer le désaccord  $\delta$  (défini par Eq. 4. 7) par le nouveau désaccord  $\Delta$  qui prend en compte l'effet DOPPLER et l'effet du recul :

$$\Delta = \delta - \omega_D - \omega_R \quad (\text{Eq. 4. 37})$$

### 4.1.3 Séparation spatiale du paquet d'ondes

Considérons le cas où le faisceau lumineux se propage suivant l'axe ( $Oy$ ) perpendiculaire à la trajectoire ( $Ox$ ) de l'atome (ie :  $\mathbf{P}_f \perp \mathbf{k}_L$ ), alors le passage vers l'état  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_L\rangle$  s'accompagne d'un changement de direction d'un angle  $\theta_{sep}$  égal à (voir **Figure 4. 4**) :

$$\theta_{sep} \approx \frac{\hbar |\mathbf{k}_L|}{|\mathbf{P}_f|} \quad (\text{Eq. 4. 38})$$

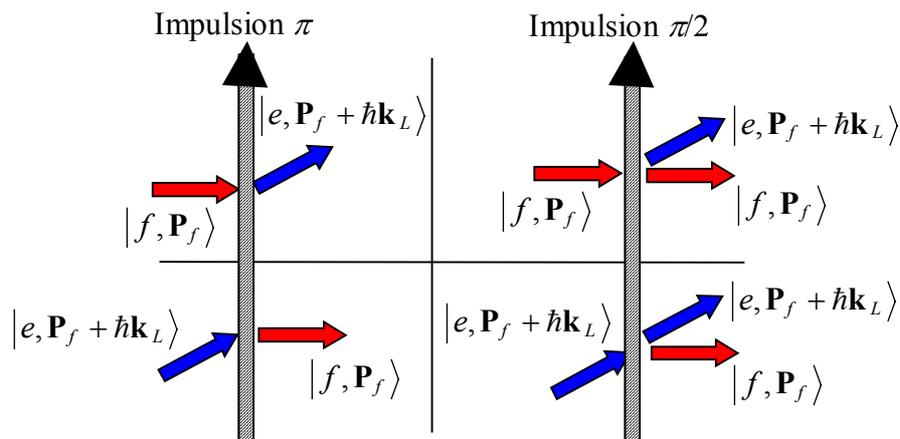


**Figure 4. 4** : lorsque l'atome encaisse l'impulsion du photon, sa trajectoire est modifiée. Si l'atome est placé dans une superposition d'états  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  et  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_L\rangle$ , les deux composantes de la fonction d'onde ont des trajectoires différentes, on obtient donc la séparation spatiale des états atomiques.

Si l'on reprend les impulsions  $\pi$  et  $\pi/2$  définies au paragraphe 4.1.1, on constate que (voir **Figure 4. 5**) :

- Une impulsion  $\pi/2$  place l'atome dans une superposition cohérente d'états  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  et  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_L\rangle$  et revient donc à séparer spatialement les deux composantes de la fonction d'onde atomique.

- Une impulsion  $\pi$  échange les populations des niveaux  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  et  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_L\rangle$  et revient donc du point de vue des trajectoires à échanger les directions.



**Figure 4. 5** : évolution des différentes composantes de la fonction d'onde au passage d'impulsion  $\pi$  et  $\pi/2$ .

## 4.2 TRANSITIONS RAMAN STIMULÉES

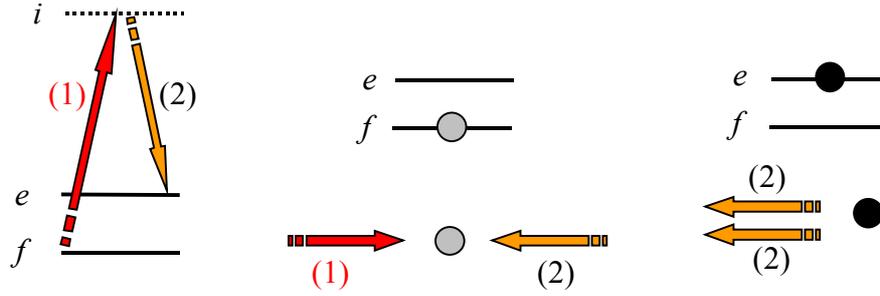
Notre interféromètre atomique utilise des transitions à deux photons comme lames séparatrices. Le but de cette partie est d'expliquer le principe de ces transitions, et de montrer qu'elles peuvent être décrites par le modèle de l'atome à deux niveaux détaillé précédemment.

Les transitions RAMAN stimulées sont largement utilisées en optique atomique, pour réaliser du refroidissement Raman sub-recul [KASEVICH 92, REICHEL 95], pour sélectionner très finement une classe de vitesse transverse [KASEVICH 91, SAVALLI 00], pour interroger les atomes dans une horloge atomique [VANIER 98, KITCHING 00], ou encore, comme nous allons le voir, pour séparer de façon cohérente les ondes atomiques. Son application en interférométrie atomique a été proposée par Ch. BORDÉ [BORDÉ 91] et mise en œuvre par M. KASEVICH et S. CHU [KASEVICH 91, MOLER 92].

### 4.2.1 Description

Dans le cas de l'atome de césium, les deux états de très grande durée de vie  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$  du modèle précédent correspondent aux deux niveaux hyperfins de l'état fondamental  $6S_{1/2}$  (voir annexe A). L'écart d'énergie entre ces deux niveaux est de  $h \times 9,2$  GHz, qui correspond donc à un photon micro-onde d'impulsion très faible. L'absorption d'un tel photon pour séparer le paquet d'ondes atomiques correspondrait à une modification de la vitesse transverse de  $100 \text{ nm}\cdot\text{s}^{-1}$ , ce qui est négligeable. Afin d'accroître l'impulsion transférée lors de la transition  $|f\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , on peut réaliser une transition à deux photons optiques, c'est alors une transition RAMAN stimulée. Nous allons montrer que du point de vue des états atomiques internes, cette transition correspond à l'absorption d'un photon micro-onde à 9,2 GHz. Du point de vue de l'impulsion et des degrés de liberté externes, cette transition correspond à l'absorption de deux photons optiques.

Dans ce type de processus, on effectue la transition  $|f\rangle \rightarrow |e\rangle$  grâce à l'intermédiaire d'un troisième état  $|i\rangle$ . L'atome, initialement dans l'état  $|f\rangle$ , absorbe un photon optique du laser (1) et est excité vers l'état  $|i\rangle$ . Il émet alors de façon stimulée un photon dans le mode du laser (2) et il se désexcite alors vers l'état  $|e\rangle$  (voir **Figure 4. 6**). Pour que ce processus à deux photons soit opérant, la différence de pulsation  $\Delta\omega$  entre les photons (1) et (2) doit être égale à  $\Delta\omega = (\omega_e - \omega_f) = 2\pi \times 9,2$  GHz.



**Figure 4. 6** : principe d'une transition RAMAN stimulée. L'atome, initialement dans l'état  $|f\rangle$ , absorbe un photon (1), il est excité vers l'état intermédiaire  $|i\rangle$ , puis il se désexcite vers l'état  $|e\rangle$  en émettant de façon stimulée un photon (2).

L'état intermédiaire utilisé dans notre expérience est le niveau  $6P_{3/2}$ . Les deux photons optiques ont donc une longueur d'onde proche de 852 nm (raie  $D_2$ ). On négligera dans la suite la structure hyperfine de ce niveau car les désaccords des deux lasers par rapport aux transitions  $|f\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  et  $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  seront toujours beaucoup plus grands que la largeur en fréquence de cette structure (environ 600 MHz pour le niveau  $6P_{3/2}$  – voir Annexe A).

#### 4.2.2 Résolution du système à trois niveaux

L'hamiltonien de ce système à trois niveaux vaut alors :

$$H = \hbar\omega_f |f\rangle\langle f| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| - (\hat{\mathbf{d}}_{if} + \hat{\mathbf{d}}_{ie}) \cdot (\mathbf{E}_1^L + \mathbf{E}_2^L) \quad (\text{Eq. 4. 39})$$

avec :

$$\mathbf{E}_1^L = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega_1^L t - \mathbf{k}_1^L \cdot \mathbf{r} + \phi_1^L) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2^L = \mathbf{E}_{02} \cos(\omega_2^L t - \mathbf{k}_2^L \cdot \mathbf{r} + \phi_2^L) \quad (\text{Eq. 4. 40})$$

$\hat{\mathbf{d}}_{if}$  et  $\hat{\mathbf{d}}_{ie}$  sont les opérateurs dipôles électriques associés respectivement aux transitions  $|f\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  et  $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ . Il faut alors considérer chacun des couplages  $|f\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  et  $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$  induits par les champs  $\mathbf{E}_1^L$  et  $\mathbf{E}_2^L$ . On a ainsi quatre termes de couplage, chacun caractérisé par une pulsation de RABI :

$$\Omega_{kj} = \frac{\langle j | \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{E}_k^L | i \rangle}{\hbar} \quad (\text{Eq. 4. 41})$$

où  $k$  vaut 1 ou 2 et représente le champ laser, et  $j$  vaut  $e$  ou  $f$  et représente l'état atomique. Les différents désaccords sont donnés par :

$$\Delta_{kji} = \omega_k^L - (\omega_{ik} - \omega_j) \quad (\text{Eq. 4.42})$$

avec :

$$\omega_f = \omega_f^0 + \frac{\mathbf{P}_f^2}{2m} \quad \omega_e = \omega_e^0 + \frac{[\mathbf{P}_f + \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)]^2}{2m} \quad \omega_{ik} = \omega_i^0 + \frac{[\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_k]^2}{2m} \quad (\text{Eq. 4.43})$$

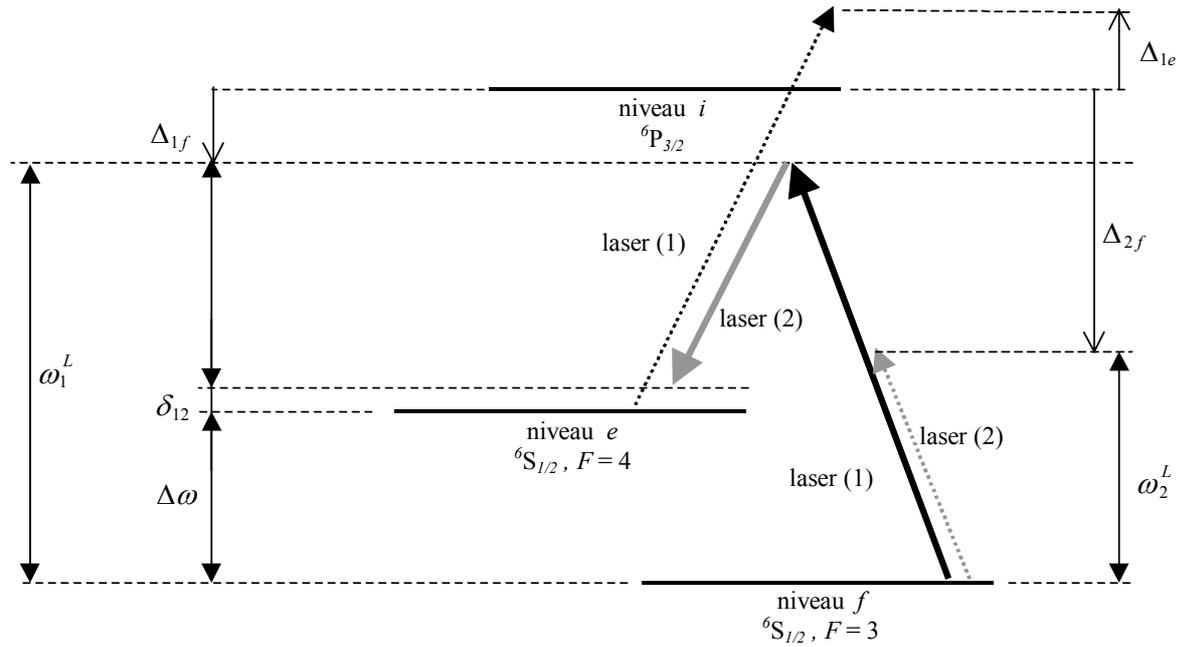


Figure 4. 7 : système à trois niveaux équivalent à la transition RAMAN.

On obtient donc quatre états différents :

$$|f, \mathbf{P}_f\rangle \quad |e, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle \quad |i, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_1\rangle \quad |i, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_2\rangle$$

Les deux états  $|i\rangle$  traduisent le fait que l'atome peut être excité vers le niveau  $|i\rangle$  par l'un ou l'autre des lasers. L'impulsion qu'il acquiert au cours de cette transition dépend donc du laser. Afin de simplifier les écritures on pose :

$$\begin{aligned} |f, \mathbf{P}_f\rangle &\rightarrow |f\rangle & |i, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_1\rangle &\rightarrow |i_1\rangle \\ |e, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle &\rightarrow |e\rangle & |i, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_2\rangle &\rightarrow |i_2\rangle \end{aligned}$$

On écrit la fonction d'onde atomique comme une superposition linéaire des quatre états possibles :

$$|\psi(t_0)\rangle = c_e(t_0)|e\rangle + c_f(t_0)|f\rangle + c_{i1}(t_0)|i_1\rangle + c_{i2}(t_0)|i_2\rangle \quad (\text{Eq. 4. 44})$$

L'équation de SHRÖDINGER permet d'obtenir le système d'équations différentielles traduisant l'évolution temporelle des populations atomiques :

$$\begin{cases} \frac{dc_e}{dt}(t) = \frac{i}{2} \left[ \Omega_{1e}^* e^{i\Delta_{1ei}t} e^{-i\phi_1^L} c_{i1}(t) + \Omega_{2e}^* e^{i\Delta_{2ei}t} e^{-i\phi_2^L} c_{i2}(t) \right] \\ \frac{dc_f}{dt}(t) = \frac{i}{2} \left[ \Omega_{1f}^* e^{i\Delta_{1fi}t} e^{-i\phi_1^L} c_{i1}(t) + \Omega_{2f}^* e^{i\Delta_{2fi}t} e^{-i\phi_2^L} c_{i2}(t) \right] \\ \frac{dc_{i1}}{dt}(t) = \frac{i}{2} \left[ \Omega_{1e} e^{-i\Delta_{1ei}t} e^{i\phi_1^L} c_e(t) + \Omega_{1f} e^{-i\Delta_{1fi}t} e^{i\phi_1^L} c_f(t) \right] \\ \frac{dc_{i2}}{dt}(t) = \frac{i}{2} \left[ \Omega_{2e} e^{-i\Delta_{2ei}t} e^{i\phi_2^L} c_e(t) + \Omega_{2f} e^{-i\Delta_{2fi}t} e^{i\phi_2^L} c_f(t) \right] \end{cases} \quad (\text{Eq. 4. 45})$$

Dans la limite où  $\Delta \gg \Omega$ , l'émission spontanée des niveaux intermédiaires  $|i_1\rangle$  et  $|i_2\rangle$  peut être négligée. On peut alors éliminer les coefficients  $c_{i1}$  et  $c_{i2}$  de (Eq. 4. 45) de façon adiabatique [MOLER 92]. On obtient ainsi un système équivalent à celui d'un système à deux niveaux :

$$\begin{cases} \frac{dc_e}{dt}(t) = -i\Omega_e^{AC} c_e(t) - i e^{-i\delta_{12}t} e^{-i\phi_{eff}} \Omega_{eff} c_f(t) \\ \frac{dc_f}{dt}(t) = -i\Omega_f^{AC} c_f(t) - i e^{i\delta_{12}t} e^{i\phi_{eff}} \Omega_{eff} c_e(t) \end{cases} \quad (\text{Eq. 4. 46})$$

avec  $\Omega_{eff}$  la pulsation de RABI équivalente de ce système :

$$\Omega_{eff} = \frac{\Omega_{1f}^* \Omega_{2e}}{2\Delta_{1f}} \quad (\text{Eq. 4. 47})$$

$\phi_{eff}$  est la phase équivalente vue par l'atome qui effectue la transition RAMAN :

$$\phi_{eff} = \phi_1^L - \phi_2^L \quad (\text{Eq. 4. 48})$$

$\Omega_e^{AC}$  et  $\Omega_f^{AC}$  sont les termes de déplacements lumineux :

$$\Omega_e^{AC} = \frac{|\Omega_{1e}|^2}{4\Delta_{1e}} + \frac{|\Omega_{2e}|^2}{4\Delta_{2e}} \quad \Omega_f^{AC} = \frac{|\Omega_{1f}|^2}{4\Delta_{1f}} + \frac{|\Omega_{2f}|^2}{4\Delta_{2f}} \quad (\text{Eq. 4. 49})$$

Le désaccord de la transition RAMAN s'exprime par (voir **Figure 4. 6**):

$$\delta_{12} = (\omega_1^L - \omega_2^L) - (\omega_e - \omega_f) = \Delta_{1fi} - \Delta_{2ei} \quad (\text{Eq. 4. 50})$$

On définit également la différence de déplacements lumineux :

$$\delta^{AC} = (\Omega_e^{AC} - \Omega_f^{AC}) \quad (\text{Eq. 4. 51})$$

Les valeurs propres  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  sont données par :

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega_r^R}{2} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega_{eff}^2 + (\delta_{12} - \delta^{AC})^2} \quad (\text{Eq. 4.52})$$

### 4.2.3 Equivalence avec un système à deux niveaux

(Eq 4. 46) montre que le système à trois niveaux est équivalent à un système à deux niveaux dont :

- la pulsation de l'onde est :  $\omega_{eff} = \omega_1^L - \omega_2^L$  (Eq. 4. 53)

- le vecteur d'onde est :  $\mathbf{k}_{eff} = \mathbf{k}_1^L - \mathbf{k}_2^L$  (Eq. 4. 54)

- la phase de l'onde est :  $\phi_{eff}$  donnée par (Eq. 4. 48)

- la pulsation de RABI est :  $\Omega_{eff}$  donnée par (Eq. 4. 47)

- le désaccord à résonance est :  $\delta_{12}$  donné par (Eq. 4. 50)

On peut alors appliquer la méthode développée aux paragraphes 4.1.1 et 4.1.2 en faisant la transposition suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \omega \\ \mathbf{k}_L \\ \Omega_{ef} \\ \Delta \\ \Omega_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{l} \omega_{eff} \\ \mathbf{k}_{eff} \\ \Omega_{eff} \\ \delta_{12} \\ \Omega_r^R \end{array}$$

Il faut signaler que les formules (Eq. 4. 19) et (Eq. 4. 20) ne sont pas totalement exactes avec cette transposition, puisqu'il apparaît en plus un facteur de phase supplémentaire dans ces deux équations. Ce facteur de phase traduit le fait que les niveaux d'énergie ne sont pas déplacés de façon symétrique par rapport à leur valeur d'origine, et il vaut [YOUNG 96] :

$$e^{-i(\Omega_e^{dC} + \Omega_f^{dC})\tau/2} \quad (\text{Eq. 4.55})$$

Ce facteur de phase étant identique pour les deux composantes de la fonction d'onde atomique, il n'entraîne pas de déphasage supplémentaire.

### 4.2.4 Compensation des déplacements lumineux

On peut choisir les intensités lumineuses pour égaler les déplacements lumineux des deux niveaux  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$ . Dans ce cas  $\delta^{AC} = 0$ . En prenant  $\Omega_{1e} \approx \Omega_{1f}$  et  $\Omega_{2e} \approx \Omega_{2f}$ , (Eq. 4. 49) donne la relation :

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \left(\frac{|\Omega_2|^2}{|\Omega_1|^2}\right) = \frac{(\Delta_{1f} - \Delta_{1e})}{\Delta_{1f}\Delta_{1e}} \times \frac{\Delta_{2f}\Delta_{2e}}{(\Delta_{2e} - \Delta_{2f})} \quad (\text{Eq. 4.56})$$

En constatant que :  $\Delta_{1e} = \Delta_{1f} + \Delta\omega$        $\Delta_{2f} = \Delta_{1f} - \Delta\omega + \delta$        $\Delta_{2e} = \Delta_{1f} + \delta$

et en prenant :  $\delta \ll \Delta_{1f}$ , on trouve la relation :

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \frac{\Delta_{1f} - \Delta\omega}{\Delta_{1f} + \Delta\omega} \quad (\text{Eq. 4. 57})$$

avec  $\Delta_{1f} < 0$  et  $\Delta\omega > 0$  sur la **Figure 4. 6**. Typiquement dans notre expérience,  $\delta \approx 0$ ,  $\Delta_{1f} = -2\pi \times 2$  GHz, et  $\Delta\omega = 2\pi \times 9,2$  GHz, on obtient donc  $(I_2 / I_1) = 1,55$ .

#### 4.2.5 Séparation angulaire

Dans le cas où les lasers (1) et (2) sont contra-propageants,  $\mathbf{k}_{eff} \approx 2\mathbf{k}_1^L$  l'atome encaisse donc l'impulsion des deux photons dans le même sens, la séparation angulaire est alors deux fois plus importante. La variation de vitesse transverse produite par une transition RAMAN vaut :

$$\Delta V_y = \frac{\hbar \mathbf{k}_{eff}}{m} \quad (\text{Eq. 4. 58})$$

ce qui donne  $\Delta V_y = 2V_{recul} = 7 \text{ mm.s}^{-1}$  dans le cas de la raie D<sub>2</sub> du césium.

#### 4.2.6 Sélectivité en vitesse transverse

Dans le cas où les deux ondes (1) et (2) sont contra-propageantes, le désaccord DOPPLER associé à une classe de vitesse atomique transverse  $V_{transverse}$  est opposé pour les deux ondes :

$$\delta_1^{Doppler} = -\frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{V}_{transverse}}{2\pi} \quad (\text{Eq. 4.59})$$

$$\delta_2^{Doppler} = -\frac{\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{V}_{transverse}}{2\pi} \approx -\delta_1^{Doppler} \quad (\text{Eq. 4.60})$$

Les durées de vie des états  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  et  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_{eff}\rangle$  étant très longues, la largeur de la transition RAMAN est limitée par la durée d'interaction  $\tau$  entre l'atome et les lasers, elle vaut :

$$\Delta V^{Raman} = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (\text{Eq. 4.61})$$

On obtient donc une sélectivité en vitesse transverse de la transition RAMAN (à mi-hauteur) donnée par :

$$\Delta V_{transverse} = \frac{c}{(\omega_1^L + \omega_2^L) \tau} \quad (\text{Eq. 4.62})$$

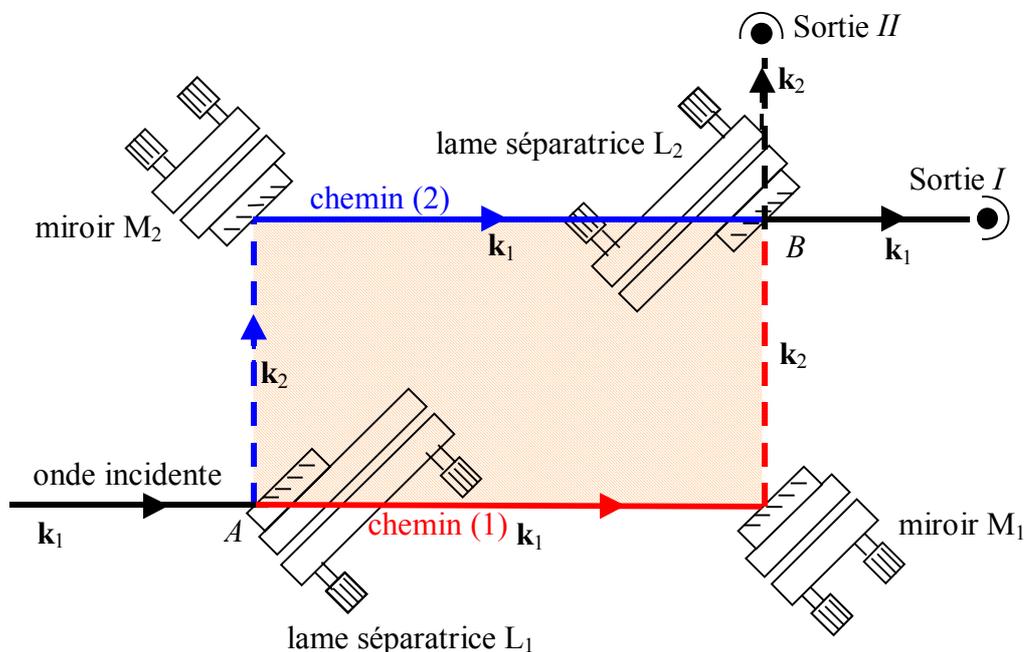
Dans notre cas  $\tau \approx 20 \mu\text{s}$ , donne un  $\Delta V_{transverse}$  de  $3,4 \text{ mm.s}^{-1} \sim 1 V_{recul}$ .

## 4.3 L'INTERFÉROMÈTRE DE MACH-ZEHNDER

### 4.3.1 Le MACH-ZEHNDER optique

L'interféromètre de MACH-ZEHNDER est un interféromètre à séparation d'amplitude dont les bras englobent une surface d'aire non nulle. Dans sa version optique, une onde lumineuse de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  est séparée spatialement, et de façon cohérente par une lame séparatrice  $L_1$ , en deux composantes, de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  réparties sur chacun des deux bras (voir **Figure 4. 8**). Deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  viennent alors rediriger les ondes lumineuses vers un même point  $B$ . Les deux ondes atteignent le point  $B$  avec des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  différents. Afin de produire des interférences, une deuxième lame séparatrice  $L_2$  vient alors recombiner les deux ondes. On obtient ainsi une répartition d'énergie lumineuse suivant les deux directions  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , dépendante de la différence de phase entre les deux bras de l'interféromètre.

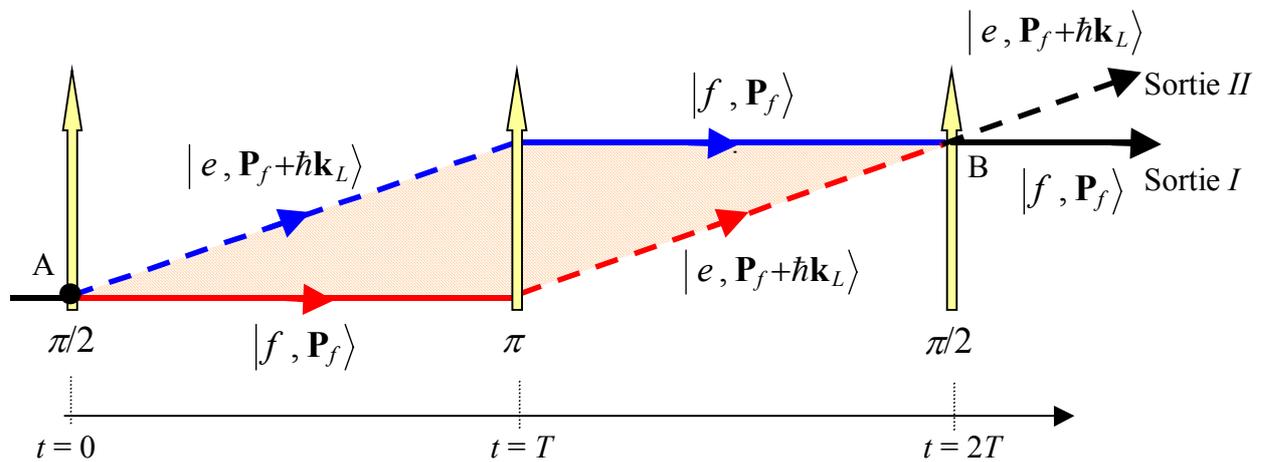
Dans cet interféromètre, on peut décrire l'onde lumineuse par une fonction d'onde à deux états d'impulsions différentes  $|\hbar\mathbf{k}_1\rangle$  et  $|\hbar\mathbf{k}_2\rangle$ . Chacune des deux sorties correspond à un des deux états donnés d'impulsion. Le passage d'un état à l'autre s'effectue par interaction avec une lame séparatrice, équivalente à une impulsion  $\pi/2$ , ou par interaction avec un miroir, équivalent à une impulsion  $\pi$ . Les trajets  $\{L_1, M_1, L_2\}$  et  $\{L_1, M_2, L_2\}$  sont donc équivalents à une séquence d'impulsions  $\{\pi/2, \pi, \pi/2\}$ .



**Figure 4. 8** : schéma d'un interféromètre de Mach-Zehnder optique. Une onde incidente de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  est séparée en deux composantes de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Les deux composantes sont alors redirigées par des miroirs vers un même point  $B$ , où elles sont recombinées grâce à une deuxième lame séparatrice. On observe les deux sorties dans les deux directions  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ .

### 4.3.2 Le MACH-ZEHNDER atomique

On réalise un interféromètre de MACH-ZEHNDER à ondes atomiques grâce à une succession d'impulsions  $\pi$  et  $\pi/2$ . La séquence correspondant à cette géométrie est  $(\pi/2, \pi, \pi/2)$ , chaque impulsion étant séparée de la suivante par une durée  $T$  (voir **Figure 4. 9**). Cette géométrie d'interféromètre atomique a été proposée pour la première fois par Ch. BORDÉ en 1991 et est parfois appelée géométrie « RAMSEY-BORDÉ symétrique » dans la littérature. Nous garderons dans la suite de ce mémoire l'appellation MACH-ZEHNDER atomique, par analogie avec le cas optique, et pour éviter toute ambiguïté avec la géométrie « RAMSEY-BORDÉ asymétrique » qui est généralement appelée simplement géométrie « RAMSEY-BORDÉ » (voir paragraphe 5.3).



**Figure 4. 9** : schéma d'un interféromètre de MACH-ZEHNDER atomique avec séparatrices optiques. L'onde atomique de quantité de mouvement  $\mathbf{P}_f$  est séparée en deux composantes de quantité de mouvement  $\mathbf{P}_f$  et  $\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_L$  par une impulsion lumineuse  $\pi/2$ . Les deux composantes sont redirigées par l'impulsion  $\pi$  vers un même point B, où elles sont recombinaisonnées par la deuxième impulsion  $\pi/2$ . On observe les deux sorties dans les directions  $\mathbf{P}_f$  et  $\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_L$ .

L'objectif de cette partie est de déterminer le déphasage introduit entre les deux bras de cet interféromètre dans le cas où l'interféromètre est au repos, puis dans le cas où il est soumis à une rotation ou à une accélération. Pour nous aider, nous allons tout d'abord étudier le cas de l'interféromètre optique de MACH-ZEHNDER présenté **Figure 4. 8**.

### 4.3.3 Calcul général du déphasage

#### 4.3.3.1 Cas d'un interféromètre optique

##### 1) Calcul du déphasage dans le cas immobile

La méthode que nous allons utiliser ici consiste à déterminer les phases accumulées  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sur chacun des deux trajets optiques 1 et 2. Le déphasage en sortie est alors égal à la différence de ces deux phases :  $\Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1)$ . Dans le cas simple où l'interféromètre est immobile (pas de rotation ni d'accélération), les phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  se calculent très facilement, elles sont chacune composées de deux contributions :

##### • Déphasage de propagation

une contribution due à la propagation de la phase de l'onde lumineuse le long des chemins 1 et 2. Dans le cas d'une onde plane d'expression :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ , cette phase s'écrit, pour chacun des deux chemins :

$$\phi^{propagation} = -\omega T + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{Eq. 4. 63})$$

où  $T$  est la durée mise par l'onde pour arriver au point  $B$  et  $\mathbf{r}$  est la position de  $B$  par rapport à une origine donnée. Dans le cas du MACH-ZEHNDER optique, le déphasage lié à la propagation jusqu'au point  $B$  s'exprime par :

$$\Delta\phi^{propagation} = \omega (T_2 - T_1) = \frac{\omega}{c} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi (L_2 - L_1)}{\lambda} \quad (\text{Eq. 4. 64})$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les longueurs optiques des chemins 1 et 2, et  $\lambda$  est la longueur d'onde. Le terme  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  ne participe pas au déphasage car on observe les interférences au même point  $B$  pour les deux chemins 1 et 2. Nous verrons dans la suite que pour les interféromètres « temporels », cette contribution n'est pas nulle (voir paragraphe 4.5.2).

##### • Déphasage lié aux composants

une contribution due au passage sur les miroirs ou les lames séparatrices. Chaque réflexion d'un milieu d'indice  $n_1$  à un milieu d'indice  $n_2$ , avec  $n_1 < n_2$  s'accompagne d'un déphasage de  $\pi$ , par rapport à la partie transmise. Ainsi, si l'on considère la sortie  $I$  de l'interféromètre de la **Figure 4. 8**, il y a deux réflexions de ce type sur chacun des chemins 1 et 2, la contribution au déphasage total est donc nulle. Par contre si l'on considère la sortie  $II$ , il y a deux réflexions de ce type sur le chemin 2, et une seule sur le chemin 1, la contribution vaut alors  $\pi$ .

On trouve finalement pour le déphasage total en  $B$ , pour la sortie  $I$  ou  $II$  :

$$\Delta\phi_I^{total} = (\phi_2^{total} - \phi_1^{total}) = \frac{2\pi(L_2 - L_1)}{\lambda} \quad (\text{Eq. 4. 65})$$

$$\Delta\phi_{II}^{total} = (\phi_2^{total} - \phi_1^{total}) = \frac{2\pi(L_2 - L_1)}{\lambda} + \pi \quad (\text{Eq. 4. 66})$$

Les sorties  $I$  et  $II$  sont en opposition de phase, ceci exprime le fait que lorsque l'on observe un maximum d'intensité sur la sortie  $I$  (frange brillante), on a un minimum d'intensité sur la sortie  $II$  (frange sombre).

## 2) Déphasage en présence de rotation ou d'accélération

Si l'interféromètre est soumis à une rotation ou une accélération, le déphasage possède toujours les deux mêmes contributions, mais le calcul devient plus compliqué. Il faut en effet déterminer les instants où les faisceaux atteignent les lames séparatrices et les miroirs afin d'évaluer leurs positions dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$ , et ainsi pouvoir remonter aux vrais trajets optiques 1 et 2. Les phases de propagation  $\phi_1^{propagation}$  et  $\phi_2^{propagation}$  le long des deux chemins sont alors modifiées <sup>(1)</sup>. Nous ne ferons pas ici ce calcul quelque peu laborieux et inutile dans le cas de notre interféromètre. En effet, le fait que notre interféromètre soit de type « temporel » va grandement simplifier la détermination de ces phases liées à la propagation.

### 4.3.3.2 Interféromètres « spatiaux » - interféromètres « temporels »

Lorsque l'on souhaite calculer le déphasage lié à la propagation de la phase lumineuse, on peut mener le calcul de deux façons différentes :

- On cherche le déphasage en un point  $B$  unique correspondant à la sortie de l'interféromètre. Dans ce cas les deux ondes 1 et 2 arrivent à des instants différents en  $B$  et le déphasage de propagation est uniquement dû au terme :

$$\Delta\phi^{propagation} = -\omega(T_2 - T_1) \quad (\text{Eq. 4. 67})$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les durées des trajets 1 et 2. C'est ce que l'on vient de faire pour l'interféromètre optique de MACH-ZEHNDER immobile.

En réalité, il est clair que seules peuvent interférer les ondes qui arrivent au même endroit au même instant. Il faut donc considérer deux ondes émises à des instants différents en

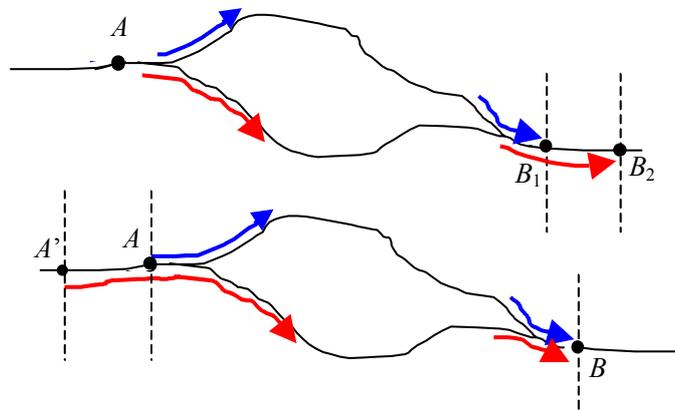
<sup>(1)</sup> Une autre façon de tenir compte de la rotation ou de l'accélération est de se placer dans le repère tournant ou accéléré  $\{R\}$ . Dans ce repère, les longueurs optiques des deux chemins sont les mêmes que dans le cas où l'interféromètre est immobile. Mais l'écriture des relations de Maxwell dans le repère tournant montre que les vitesses de phase des deux ondes ne sont plus égales [WILKINSON 87]. Il apparaît alors un déphasage dû au fait que les ondes se propagent avec des fréquences différentes.

A. Ce qui rend la méthode valide est que la différence d'instants d'émission en  $A$  est justement égale à la différence  $(T_2 - T_1)$  d'arrivée en  $B$ .

- On peut également considérer qu'à un instant  $T$  supérieur à  $T_1$  et  $T_2$ , les deux ondes 1 et 2 sont à deux endroits différents  $B_1$  et  $B_2$  relativement proches (de distance inférieure à la longueur de cohérence de l'onde), et le déphasage s'exprime alors par :

$$\Delta\phi^{propagation} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (\text{Eq. 4. 68})$$

où  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont les positions des points  $B_1$  et  $B_2$  repérés par rapport à une origine commune  $O$ . De même que précédemment il faudrait en fait considérer que lorsque l'onde (2) est en  $A$ , l'onde (1) est en  $A'$ , et qu'après propagation elles arrivent simultanément en  $B$ . La distance  $AA'$  est bien sûr égale à  $B_1B_2$ .



**Figure 4. 9** : Le déphasage peut être calculé soit en considérant que les deux ondes sont émises simultanément en  $A$ , quand la seconde arrive en  $B_1$ , la première est alors en  $B_2$ . Soit en considérant que les deux ondes arrivent simultanément en  $B$ , elles étaient alors respectivement en  $A$  et  $A'$ .

Ces deux façons de calculer le déphasage (Eq. 4. 67) et (Eq. 4. 68) sont bien sûr équivalentes car  $\omega$  et  $\mathbf{k}$  sont reliés par la célérité de l'onde :  $\omega = c \mathbf{k}$ .

Dans le cas des interféromètres dits « spatiaux », pour lesquels la séparation et la recombinaison des deux ondes sont réalisées à des positions bien précises, on préférera la première méthode. L'interféromètre optique de MACH-ZEHNDER présenté **Figure 4. 8**, avec ses lames séparatrices et ses miroirs, fait partie de cette catégorie.

Dans le cas des interféromètres dits « temporels », pour lesquels la séparation et la recombinaison sont réalisées à des instants bien précis quelle que soit la vitesse ou la position, on préférera la deuxième méthode. Le calcul du déphasage est alors grandement simplifié par le fait que les instants où se produisent la séparation et la recombinaison sont parfaitement connus, quel que soit le mouvement de rotation ou d'accélération de l'interféromètre. Notre gyromètre atomique correspond à cette deuxième catégorie.

## 4.4 LES DIFFÉRENTS OUTILS NÉCESSAIRES

### 4.4.1 Présentation de la méthode

De même que dans le cas optique, nous allons déterminer les phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  accumulées par l'onde atomique sur chacun des deux chemins. Le déphasage final est alors la différence entre ces deux phases.  $\phi_1$  et  $\phi_2$  s'expriment de nouveau comme une somme de deux contributions, une liée à la propagation de la phase atomique le long des deux chemins 1 et 2, et l'autre liée aux passages dans les lames lumineuses. Une différence importante toutefois est que dans le cas des ondes atomiques, l'impulsion n'est pas de norme constante le long des deux chemins, contrairement au cas optique.

Nous allons détailler ici ces deux contributions, puis nous développerons ensuite leur calcul.

- *La contribution liée à la propagation de la phase atomique.*

De même que dans le cas optique, nous allons considérer ici uniquement le cas d'ondes planes. Si l'on appelle  $\psi(\mathbf{r}_a, t_a)$  la fonction d'onde associée à un atome au point  $A$  de position  $\mathbf{r}_a$  à l'instant  $t = t_a$ , la fonction d'onde de cet atome au point  $B(\mathbf{r}_b, t_b)$  est donnée par :

$$\psi(\mathbf{r}_b, t_b) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( \int_{t_a}^{t_b} H dt - \int_{AB} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} \right) \right] \psi(\mathbf{r}_a, t_a) \quad (\text{Eq. 4. 69})$$

La phase atomique le long d'un chemin s'obtient donc à partir de l'intégrale d'action  $S$  :

$$S = - \int_{\substack{\text{durée du} \\ \text{chemin}}} H dt + \int_{\text{chemin}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{Eq. 4. 70})$$

où  $H$  est l'hamiltonien du système tenant compte de la structure interne et des degrés de liberté externes de l'atome,  $\mathbf{P}$  est l'impulsion de l'atome. Cette contribution va être calculée grâce au formalisme des « intégrales de FEYNMAN » qui nous indique le long de quel chemin cette intégrale doit être calculée.

- *La contribution liée au passage des lames lumineuses*

On a vu au paragraphe 4.1.1 que chaque changement d'état s'accompagne d'un déphasage égal à  $\pm \phi_{eff}$  où  $\phi_{eff}$  est la phase lumineuse vue par l'atome à l'endroit où il interagit, donnée par (Eq. 4. 48). Cette contribution va être calculée à partir du formalisme des « matrices S ».

#### 4.4.2 Quelques mots sur le formalisme de FEYNMAN et des « matrices S »

##### 1) Formalisme de FEYNMAN [FEYNMAN 65, COHEN-TANNOUDJI 92-cours IV, STOREY 94]

Lorsque nous avons écrit les équations (Eq. 4. 67) et (Eq. 4. 68), il se pose un problème que nous n'avons pas encore soulevé. On considère un atome au point  $\mathbf{r}_a$ , et on lui associe une fonction d'onde plane, qui correspond à un atome délocalisé dans tout l'espace. De même pour la fonction d'onde au point  $B$ . La question qui se pose alors est quel est le chemin reliant  $A$  à  $B$  sur lequel il faut intégrer la phase ? Le formalisme de FEYNMAN permet de répondre à cette question. L'idée de base est que le propagateur  $K$  donnant la probabilité de trouver l'atome en  $B(\mathbf{r}_b, t_b)$  résulte de l'interférence de tous les chemins possibles  $\Gamma$  partant de  $A(\mathbf{r}_a, t_a)$ , et menant à  $B(\mathbf{r}_b, t_b)$  :

$$K(A, B) = \sum_{\substack{\text{tous les chemins} \\ \Gamma \text{ possibles}}} e^{iS_{\Gamma}/\hbar} \quad (\text{Eq. 4. 71})$$

Ceci est en quelque sorte l'équivalent du principe d'HUYGHENS pour les ondes atomiques. Le point clé est alors que, dans la mesure où l'action  $S$  est très grande devant  $\hbar$ , seuls les chemins très proches de la trajectoire classique réelle (i.e. ceux vérifiant le principe de moindre action :  $\partial S/\partial z = 0$  et  $\partial S/\partial t = 0$  pour une trajectoire classique) donnent des interférences constructives. Les autres, oscillant trop rapidement se brouillent. Ainsi, seule la trajectoire classique contribue au propagateur. Il suffit alors de calculer l'action le long de cette trajectoire classique pour avoir le facteur de phase entre  $A$  et  $B$ .

Ceci justifie donc l'utilisation d'ondes atomiques planes avec la **Figure 4. 9**, où l'on a représenté les trajectoires classiques des atomes.

Pour déterminer le déphasage en présence de rotation ou d'accélération, il suffit alors de déterminer les trajectoires classiques perturbées et de calculer la phase le long de ces trajectoires.

Dans le cas où les trajectoires classiques perturbées par la rotation ou l'accélération sont compliquées à déterminer (ce qui est le cas pour les interféromètres « spatiaux »), on peut connaître le déphasage au premier ordre en  $\mathbf{a}$  ou en  $\mathbf{\Omega}$ , en considérant les trajectoires classiques non perturbées, puis en intégrant un terme de perturbation le long de ces trajectoires. Ce terme de perturbation est calculé dans [COHEN-TANNOUDJI 92-cours V] pour une accélération et dans [COHEN-TANNOUDJI 92-cours VII] pour une rotation. On donne ici leurs expressions :

$$V^{\text{accélération}} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}(t) \quad (\text{Eq. 4. 72})$$

$$V^{\text{rotation}} = m \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)) \quad (\text{Eq. 4. 73})$$

où  $m$  est la masse de l'atome,  $\mathbf{a}$  est le vecteur accélération,  $\mathbf{\Omega}$  est le vecteur rotation et  $\mathbf{v}(t)$  est le vecteur vitesse de l'atome. Ces termes sont à ajouter dans l'hamiltonien, et ils doivent être intégrés par rapport au temps, sur la durée du trajet, pour donner le déphasage.

### Calcul de la phase accumulée sur un tronçon AB

Regardons ce que donne ce calcul pour la propagation pendant une durée  $T$  dans l'espace libre, d'un atome initialement décrit par la fonction d'onde atomique :

$$\psi(\mathbf{r}_a, t_a) = a_e |e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_{eff}\rangle + a_f |f, \mathbf{P}_f\rangle \quad (\text{Eq. 4. 74})$$

La fonction d'onde après la propagation se trouve grâce à la relation (Eq. 4.69). L'intégrale d'action se calcule grâce à l'hamiltonien du système incluant l'énergie cinétique dont l'expression est donnée en (Eq. 4. 31). L'intégrale d'action s'écrit alors :

$$S = - \int_{\text{durée du chemin}} \left( H_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right) dt + \int_{\text{chemin}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{Eq. 4. 75})$$

On intègre le deuxième terme le long du chemin classique, on a alors :

$$d\mathbf{r} = \mathbf{V} dt = \frac{\mathbf{P}}{m} dt \quad (\text{Eq. 4. 76})$$

où  $\mathbf{V}$  est le vecteur vitesse de l'atome. (Eq. 4. 75) se réécrit donc :

$$S = - \int_{\text{durée du chemin}} \left( H_0 - \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right) dt \quad (\text{Eq. 4. 77})$$

A partir de l'expression précédente, de (Eq. 4. 69) et de (Eq. 4.74), on déduit :

$$\psi(\mathbf{r}_b, t_b) = a_e e^{-i \left( \omega_e^0 - \frac{(\mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_{eff})^2}{2m} \right) T} |e, \mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_{eff}\rangle + a_f e^{-i \left( \omega_f^0 - \frac{\mathbf{P}_f^2}{2m} \right) T} |f, \mathbf{P}_f\rangle \quad (\text{Eq. 4. 78})$$

On peut ainsi écrire un propagateur matriciel permettant de relier  $\psi(\mathbf{r}_a, t_a)$  à  $\psi(\mathbf{r}_b, t_b)$  :

$$\psi(\mathbf{r}_b, t_b) = K(t_b - t_a) \psi(\mathbf{r}_a, t_a) \quad (\text{Eq. 4. 79})$$

avec :

$$K(t_b - t_a) = \begin{pmatrix} e^{-i \left( \omega_e^0 - \frac{(\mathbf{P}_f + \hbar \mathbf{k}_{eff})^2}{2m} \right) (t_b - t_a)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{-i \left( \omega_f^0 - \frac{\mathbf{P}_f^2}{2m} \right) (t_b - t_a)} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4. 80})$$

Afin de suivre l'atome le long des bras de l'interféromètre on va énoncer une *règle de propagation* s'appliquant directement à un atome dans un état propre ; cette règle découle naturellement de (Eq. 4. 80). Un atome dans un état propre  $|j, \mathbf{P}_j\rangle$  se propageant pendant une durée  $T$ , accumule une phase liée à la propagation, donnée par :

$$\phi^{propagation} = \left( \omega_j^0 - \frac{\mathbf{P}_j^2}{2m} \right) \times T \quad (\text{Eq. 4.81})$$

où  $j$  est un indice représentant l'état atomique et vaut  $e$  ou  $f$ , et représente l'impulsion de l'atome dans l'état  $|j, \mathbf{P}_j\rangle$ . Nous verrons au paragraphe 4.5.2 que l'atome peut être dans l'état interne  $|f\rangle$  (resp.  $|e\rangle$ ) et que son impulsion peut être différente de  $\mathbf{P}_f$  (resp.  $\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff}$ ).

## 2) Formalisme des « matrices S » [BORDÉ 84, COHEN-TANNOUJJI 92-cours II]

Le but de cette partie est de déterminer les phases et les facteurs d'amplitude des différentes composantes de la fonction d'onde atomique, lors de la traversée d'une lame lumineuse. Ceci a déjà été fait au paragraphe 4.1.1 pour un atome au repos (i.e. pas de rotation ni d'accélération) et sans degré de liberté externe, et a abouti à l'obtention des relations (Eq. 4. 19) et (Eq. 4. 20).

Au paragraphe 4.1.2, les degrés de liberté externes de l'atome ont été ajoutés, et on a montré que les relations (Eq. 4. 19) et (Eq. 4. 20) restaient valables, à condition de remplacer le désaccord  $\delta$  par  $\Delta$ , donné par (Eq. 4. 37).

Enfin au paragraphe 4.2 on a montré que les relations (Eq. 4. 19) et (Eq. 4. 20), moyennant une transposition indiquée au paragraphe 4.2.3, permettaient de calculer le déphasage entre les deux composantes de la fonction d'onde atomique (mais pas les phases) dans le cas de transitions RAMAN stimulées.

En réécrivant (Eq. 4. 19) et (Eq. 4. 20) sous forme matricielle, dans le cas des transitions RAMAN, et en prenant  $\delta_{12} = \delta^{AC} = 0$  (ce qui est notre cas expérimentalement), on obtient :

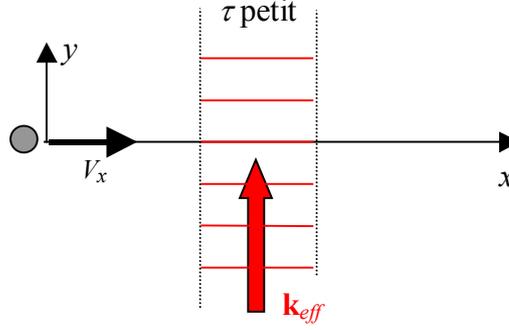
$$\begin{pmatrix} c_e(t_0 + \tau) \\ c_f(t_0 + \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Omega_{eff}\tau}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\Omega_{eff}\tau}{2}\right) e^{-i\phi_{eff}} \\ -i \sin\left(\frac{\Omega_{eff}\tau}{2}\right) e^{i\phi_{eff}} & \cos\left(\frac{\Omega_{eff}\tau}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e(t_0) \\ c_f(t_0) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4 .82})$$

On peut donc associer à chaque lame lumineuse, une matrice, appelée « matrice S » permettant de déterminer la fonction d'onde à la sortie  $|\psi(t_0 + \tau)\rangle$  en fonction de celle à l'entrée  $|\psi(t_0)\rangle$  :

$$|\psi(t_0 + \tau)\rangle = S_L(\tau) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{Eq. 4 .83})$$

Ce formalisme repose sur un certain nombre d'approximations qui ont déjà été décrites lors des calculs précédents, mais que nous rappelons ici :

- Les atomes sont représentés par des ondes planes, et tout phénomène d'émission spontanée est négligé. L'atome est supposé se déplacer suivant l'axe ( $Ox$ ) à la vitesse  $V_x$  (voir **Figure 4. 10**). Les deux grandeurs  $x$  et  $V_x$  seront considérées classiquement. Par contre le mouvement dans la direction des faisceaux laser ( $Oy$ ), sera traité quantiquement.



**Figure 4. 10** : l'atome est représenté par une onde plane. Il se propage suivant la direction ( $Ox$ ). L'onde lumineuse est perpendiculaire, suivant la direction ( $Oy$ ). L'impulsion et la position de l'atome suivant ( $Oy$ ) sont des observables. La durée d'interaction  $\tau$  est courte devant la durée d'observation totale. Les fronts d'ondes lumineux sont plans.

Lorsque l'atome interagit avec le champ lumineux, on suppose :

- que la durée de passage  $\tau$  de l'atome dans le champ lumineux est négligeable par rapport au temps d'observation de l'atome, ce qui signifie que ce modèle ne pourra pas décrire l'atome à l'intérieur de la lame lumineuse ou même aux proches abords. Le profil spatial du faisceau lumineux n'intervient pas, seule l'aire de l'impulsion intervient :

$$\Theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_{eff}(t) dt \quad (\text{Eq. 4. 84})$$

On peut alors remplacer  $\Omega_{eff} \tau$  par  $\Theta$  dans (Eq. 4. 82)

- que les fronts d'onde des ondes lumineuses sont plans là où ils interagissent avec l'atome.

Notre interféromètre est composé uniquement d'impulsions  $\pi/2$  et  $\pi$ . Nous allons donc expliciter la forme de la matrice  $S$  dans ces deux cas :

$$S_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\phi_{eff}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{i\phi_{eff}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4. 85})$$

$$S_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & -i e^{-i\phi_{eff}} \\ -i e^{i\phi_{eff}} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4. 86})$$

Les deux matrices (Eq. 4. 85) et (Eq. 4. 86), associées avec le propagateur défini par (Eq. 4. 80) permettent de déterminer la fonction d'onde atomique en sortie de l'interféromètre, en fonction de celle en entrée.

On peut également à partir de (Eq. 4. 81), (Eq. 4. 85) et (Eq. 4. 86) définir un ensemble de règles lors de la propagation de l'atome dans une lame lumineuse ou dans l'espace libre :

*Règles de d'évolution lors de la propagation dans une lame lumineuse ou dans l'espace libre*

| transition                        | impulsion $\pi/2$       |               | impulsion $\pi$ |               | Propagation dans l'espace libre |  |
|-----------------------------------|-------------------------|---------------|-----------------|---------------|---------------------------------|--|
|                                   | amplitude               | phase         | amplitude       | phase         | amplitude                       | phase  |
| $ e\rangle \rightarrow  e\rangle$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$    | 0             |                 |               | 1                               | $\left[ \omega_e^0 - \frac{(\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff})^2}{2m} \right] \times T$ |
| $ f\rangle \rightarrow  f\rangle$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$    | 0             |                 |               | 1                               | $\left[ \omega_f^0 - \frac{\mathbf{P}_f^2}{2m} \right] \times T$                           |
| $ e\rangle \rightarrow  f\rangle$ | $\frac{-i}{\sqrt{2}} e$ | $-\phi_{eff}$ | $-i$            | $-\phi_{eff}$ |                                 |  |
| $ f\rangle \rightarrow  e\rangle$ | $\frac{-i}{\sqrt{2}} e$ | $+\phi_{eff}$ | $-i$            | $+\phi_{eff}$ |                                 |  |

(Eq. 4. 87)

L'avantage de ce tableau de règles de transition par rapport aux matrices (Eq. 4. 85) et (Eq. 4. 86) est que l'on peut suivre l'atome sur chacun des bras de l'interféromètre.

#### 4.5 CALCUL DU DÉPHASAGE DANS L'INTERFÉROMÈTRE ATOMIQUE

Nous allons calculer le déphasage en sortie d'un MACH-ZEHNDER atomique temporel. On suppose donc que quelle que soit la vitesse atomique ou les mouvements de l'interféromètre, la séquence est toujours  $(\pi/2, T, \pi, T, \pi/2)$  avec  $T$  fixé (voir **Figure 4. 11**). Nous allons effectuer ce calcul de deux façons différentes :

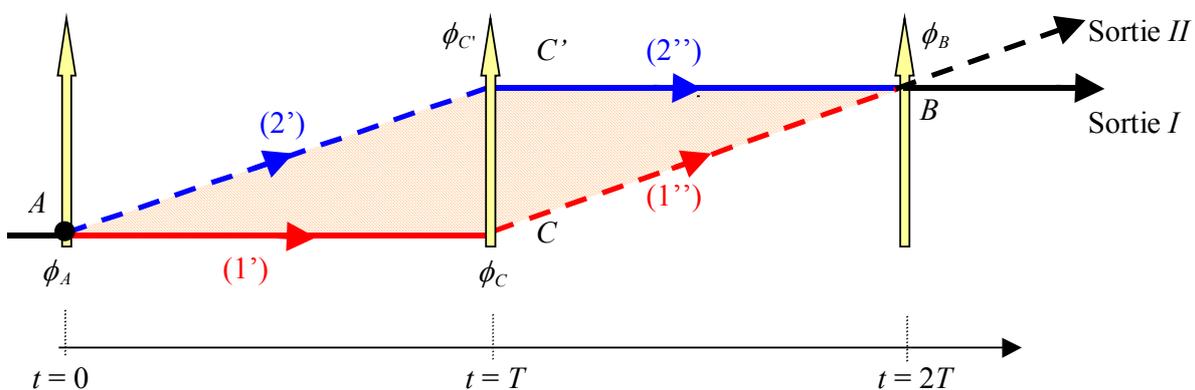
1<sup>ère</sup> méthode : calculer les déphasages dus à la propagation de la phase atomique et aux lames lumineuses pour un interféromètre immobile. On introduit ensuite le mouvement de

rotation ou d'accélération comme une petite perturbation. Le déphasage lié à cette perturbation se détermine alors facilement grâce à (Eq. 4. 72) et (Eq. 4. 73). Cette méthode donne un résultat valable au premier ordre en  $(\Omega T)/V_{atomique}$  ou en  $(aT)/V_{atomique}$  avec  $\Omega$  le vecteur rotation,  $a$  l'accélération,  $T$  la durée du passage dans l'interféromètre et  $V_{atomique}$  la vitesse des atomes.

2<sup>ème</sup> méthode : calculer les déphasages dus à la propagation et aux lames lumineuses directement le long des trajectoires perturbées par le mouvement de rotation ou d'accélération. Ces trajectoires perturbées se déterminent aisément dans le cas d'un interféromètre temporel. Ce n'est pas le cas pour un interféromètre spatial.

#### 4.5.1 Calcul le long des trajectoires non perturbées

On considère ici un interféromètre immobile, les trajectoires atomiques « classiques » le long desquelles se propagent les phases sont donc celles représentées **Figure 4. 11**. La rotation ou l'accélération sera introduite ensuite comme une perturbation.



**Figure 4. 11** : trajectoires classiques non perturbées. Le chemin 1 (resp. 2) est coupé en deux tronçons 1' et 1'' (resp. 2' et 2'') le long desquels l'état atomique est différent.

##### 1) Calcul du déphasage pour l'interféromètre immobile

Les *règles de transitions* (Eq. 4. 87) nous donnent les facteurs de phase et d'amplitude à la traversée des lames lumineuses lors de la propagation.

##### Déphasage lié à la propagation

Nous allons décomposer chacun des deux trajets (1) et (2) en deux tronçons (voir **Figure 4. 11**) où l'impulsion est constante.

Sur le trajet (1), l'atome passe une durée  $T$  dans l'état  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  (tronçon 1') et une durée  $T$  dans l'état  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle$  (tronçon 1''). La phase accumulée vaut donc :

$$\phi_1^{propagation} = \left[ \omega_f^0 - \frac{\mathbf{P}_f^2}{2m} \right] T + \left[ \omega_e^0 - \frac{(\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff})^2}{2m} \right] T \quad (\text{Eq. 4. 88})$$

De même sur le trajet (2), l'atome passe une durée  $T$  dans l'état  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle$  (tronçon 2') et une durée  $T$  dans l'état  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  (tronçon 2''). La phase accumulée est donc identique à celle du trajet (1) :  $\phi_2^{propagation} = \phi_1^{propagation}$ .

$$\Delta\phi^{propagation} = 0 \quad (\text{Eq. 4. 89})$$

Le déphasage lié à la propagation entre les deux bras est donc nul.

### Déphasage lié au passage dans les lames lumineuses

On cherche le déphasage introduit sur la sortie  $I$  de l'interféromètre, on a alors :

- Pour le bras 1 :   impulsion  $\pi/2$    ( $f \rightarrow f$ )   à  $t = 0$   
                           impulsion  $\pi$        ( $f \rightarrow e$ )   à  $t = T$   
                           impulsion  $\pi/2$    ( $e \rightarrow f$ )   à  $t = 2T$

Le facteur de phase - amplitude vaut donc d'après (Eq. 4. 79) pour la séquence :

$$\eta e^{-i\phi_1^{laser}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-i)e^{-i\phi_C} \times \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{i\phi_B} = \frac{-1}{2} e^{-i(\phi_C - \phi_B)} \quad (\text{Eq. 4. 90})$$

$\swarrow$   
 lame  $\pi/2$   
 ( $f \rightarrow f$ )

$\downarrow$   
 lame  $\pi$   
 ( $f \rightarrow e$ )

$\searrow$   
 lame  $\pi/2$   
 ( $e \rightarrow f$ )

- Pour le bras 2 :   impulsion  $\pi/2$    ( $f \rightarrow e$ )   à  $t = 0$   
                           impulsion  $\pi$        ( $e \rightarrow f$ )   à  $t = T$   
                           impulsion  $\pi/2$    ( $f \rightarrow f$ )   à  $t = 2T$

$$\eta e^{-i\phi_2^{laser}} = \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\phi_A} \times (-i)e^{i\phi_C} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2} e^{-i(\phi_A - \phi_C)} \quad (\text{Eq. 4. 91})$$

$\swarrow$   
 lame  $\pi/2$   
 ( $f \rightarrow e$ )

$\downarrow$   
 lame  $\pi$   
 ( $e \rightarrow f$ )

$\searrow$   
 lame  $\pi/2$   
 ( $f \rightarrow f$ )

où  $\phi_A$ ,  $\phi_B$ ,  $\phi_C$  et  $\phi_{C'}$  sont les phases des lasers (voir **Figure 4.11**). On obtient donc le déphasage entre les deux bras, lié aux passages dans les lames lumineuses :

$$\Delta\phi_I^{laser} = (\phi_2^{laser} - \phi_1^{laser}) = (\phi_A - \phi_C - \phi_{C'} + \phi_B) \quad (\text{Eq. 4. 92})$$

Dans le cas où l'onde laser est une onde plane et où la phase est conservée entre les trois impulsions on a alors :  $\phi_A = \phi_C$  et  $\phi_B = \phi_{C'}$ , et ainsi :

$$\boxed{\Delta\phi_I^{laser} = 0 \quad \text{sortie I}} \quad (\text{Eq. 4. 93})$$

De même si l'on considère la sortie *II* :

$$\text{Bras 1 :} \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-i) e^{-i\phi_C} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-i}{2} e^{-i\phi_C} \quad (\text{Eq. 4. 94})$$

$$\text{Bras 2 :} \quad = \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\phi_A} \times (-i) e^{i\phi_C} \times \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\phi_B} = \frac{i}{2} e^{-i(\phi_A - \phi_C + \phi_B)} \quad (\text{Eq. 4. 95})$$

$$\text{Ce qui donne :} \quad \Delta\phi_{II}^{laser} = (\phi_A - \phi_C - \phi_{C'} + \phi_B + \pi) \quad (\text{Eq. 4. 96})$$

On a donc en considérant l'onde laser comme plane :

$$\boxed{\Delta\phi_{II}^{laser} = \pi \quad \text{sortie II}} \quad (\text{Eq. 4. 97})$$

On retrouve bien le fait que les deux sorties sont en opposition de phase, comme dans le MACH-ZEHNDER optique.

Le facteur d'amplitude  $\eta = -1/2$  apparaissant pour le deux bras 1 et 2 dans les équations (Eq. 4. 90) et (Eq. 4. 91), nous indique que les deux ondes qui interfèrent ont même amplitude, le contraste des franges d'interférences est donc égal à 1. La probabilité de présence de l'atome sur les sorties *I* et *II* est donc de la forme :

$$P_I = \frac{1 + \cos(\Delta\phi_I^{laser})}{2} \quad \text{et} \quad P_{II} = \frac{1 + \cos(\Delta\phi_{II}^{laser})}{2} = 1 - P_I \quad (\text{Eq. 4. 98})$$

quelles que soit les valeurs de  $\Delta\phi_I^{laser}$  et  $\Delta\phi_{II}^{laser}$ . Cela signifie que ces deux formules resteront vraies même en présence de rotation ou d'accélération.

## 2) Déphasage lié à la rotation ou à l'accélération

Comme indiqué au paragraphe 4.4.2, on obtient le déphasage lié à la perturbation (rotation ou accélération) en intégrant le terme de perturbation donné par (Eq. 4. 72) et (Eq. 4. 73) sur les chemins non perturbés.

- cas d'une rotation :

$$\Delta\phi^{rotation} = \frac{m}{\hbar} \boldsymbol{\Omega} \cdot \left[ \int_{AC'B} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{V}(t) dt - \int_{ACB} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{V}(t) dt \right] \quad (\text{Eq. 4. 99})$$

Si on suppose que le chemin sur lequel on intègre est un segment de droite  $[MN]$ . Comme  $\mathbf{V}(t)dt = d\mathbf{r}(t)$ , le terme :

$$\int_{MN} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{V}(t) dt \quad (\text{Eq. 4. 100})$$

est égal à deux fois l'aire orientée du triangle  $OMN$ , où  $O$  est l'origine du repère.

En intégrant ce terme sur les quatre tronçons 1', 1'', 2' et 2'' et en faisant la différence (2'+ 2''-1'-1'') on trouve finalement :

$$\Delta\phi^{rotation} = \frac{2m}{\hbar} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{Eq. 4. 101})$$

où  $\mathbf{A}$  est un vecteur normal au parallélogramme  $AC'BC$  et de norme égale à l'aire de ce parallélogramme et de direction donnée par la règle du bonhomme d'AMPÈRE. Ce déphasage est donc proportionnel au flux du vecteur rotation à travers l'aire de l'interféromètre. On retrouve bien le fait que l'interféromètre n'est sensible qu'aux rotations d'axe perpendiculaire au plan de celui-ci.

- cas d'une accélération :

$$\Delta\phi^{accélération} = \frac{m}{\hbar} \mathbf{a} \cdot \left[ \int_{AC'B} \mathbf{r}(t) dt - \int_{ACB} \mathbf{r}(t) dt \right] \quad (\text{Eq. 4. 102})$$

Le calcul de ce terme le long des deux bras donne alors :

$$\Delta\phi^{accélération} = \frac{m}{\hbar} \mathbf{a} \cdot \oint_{AC'BC} \mathbf{r}(t) dt \quad (\text{Eq. 4. 103})$$

où l'intégrale représente une intégrale de contour le long du parallélogramme  $AC'BC$ . Le calcul de cette intégrale donne :

$$\oint_{AC'BC} \mathbf{r}(t) dt = \overrightarrow{CC'} \times T = \frac{\hbar \mathbf{k}_{eff}}{m} T^2 \quad (\text{Eq. 4. 104})$$

on a ainsi :

$$\Delta\phi^{accélération} = \mathbf{k}_{eff} \cdot \mathbf{a} T^2 \quad (\text{Eq. 4. 105})$$

#### 4.5.2 Calcul le long des trajectoires perturbées

Nous allons refaire le calcul du déphasage dû à la propagation de la phase de l'onde atomique, et aux passages dans les lames lumineuses, mais en considérant cette fois les trajectoires perturbées par la rotation. Nous aurons alors directement le déphasage en présence de rotation, sans avoir à ajouter le terme de perturbation que l'on a considéré précédemment. On pourra trouver le calcul du déphasage le long des trajectoires perturbées par une accélération (en l'occurrence par la gravité) dans [PETERS 98, COHEN-TANNOUDJI 92 cours *V* et *VI*].

##### 1) Détermination des trajectoires perturbées dans le cas d'une rotation

On va se placer dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$ . Dans ce repère on peut considérer que les atomes sont libres (hamiltonien  $H = H_0 + \mathbf{P}^2/2m$ ) et que ce sont les lasers qui tournent. On suppose que la rotation se fait par rapport à l'axe perpendiculaire au plan défini par la vitesse atomique et les faisceaux laser. Les trois impulsions n'ont plus la même direction (voir **Figure 4. 12**). L'impulsion de recul subie par l'atome n'est donc plus forcément perpendiculaire à son impulsion de départ.

Angle des lames lumineuses en fonction du temps :

$$\begin{aligned} \text{Première impulsion à } t = 0 & \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \text{Deuxième impulsion à } t = T & \rightarrow \alpha_2 = \Omega T \\ \text{Troisième impulsion à } t = 2T & \rightarrow \alpha_3 = 2\Omega T \end{aligned}$$

On en déduit les composantes de l'impulsion de l'atome sur chacun des quatre tronçons 1', 1'', 2' et 2'' :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1'} &= \begin{pmatrix} |\mathbf{P}_f| \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{P}_{1''} &= \begin{pmatrix} |\mathbf{P}_f| - \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \sin(\Omega T) \\ \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \cos(\Omega T) \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{2'} &= \begin{pmatrix} |\mathbf{P}_f| \\ \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \end{pmatrix} & \mathbf{P}_{2''} &= \begin{pmatrix} |\mathbf{P}_f| + \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \sin(\Omega T) \\ \hbar |\mathbf{k}_{eff}| (1 - \cos(\Omega T)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4. 106})$$

En intégrant les deux composantes de l'impulsion par rapport au temps, on en déduit les positions pour  $t = 2T$ , instant où l'on recombine les ondes atomiques :

Pour le bras 1 :

$$B_1 = \frac{1}{m} \left( \begin{array}{c} \int_0^T |\mathbf{P}_f| dt + \int_T^{2T} [|\mathbf{P}_f| - \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \sin(\Omega T)] dt \\ \int_T^{2T} \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \cos(\Omega T) dt \end{array} \right) = \frac{1}{m} \left( \begin{array}{c} [2|\mathbf{P}_f| - \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \sin(\Omega T)] T \\ \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \cos(\Omega T) T \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 4. 107})$$

Pour le bras 2 :

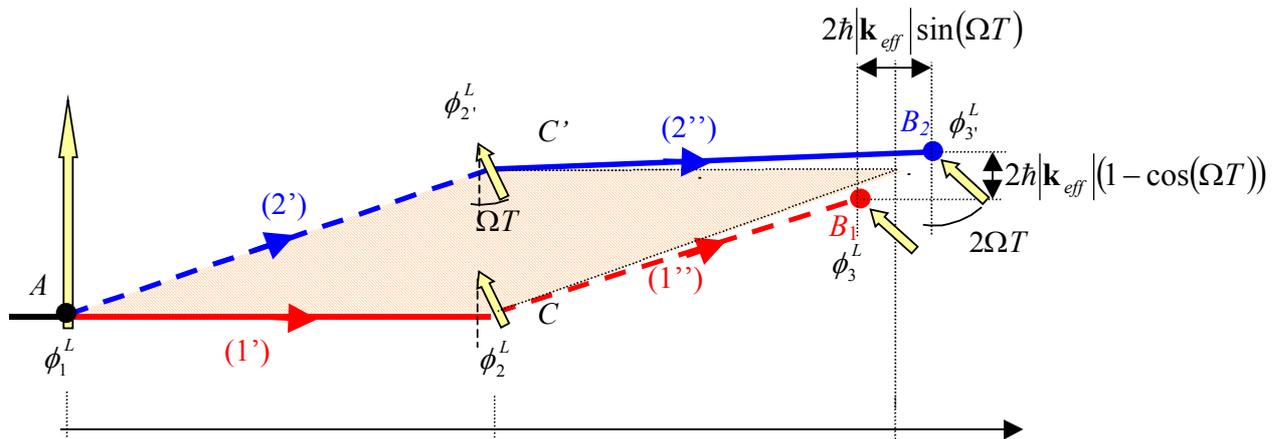
$$B_2 = \frac{1}{m} \left( \begin{array}{c} \int_0^T |\mathbf{P}_f| dt + \int_T^{2T} [|\mathbf{P}_f| + \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \sin(\Omega T)] dt \\ \int_0^T \hbar |\mathbf{k}_{eff}| dt + \int_T^{2T} \hbar |\mathbf{k}_{eff}| [1 - \cos(\Omega T)] dt \end{array} \right) = \frac{1}{m} \left( \begin{array}{c} [2|\mathbf{P}_f| + \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \sin(\Omega T)] T \\ \hbar |\mathbf{k}_{eff}| [2 - \cos(\Omega T)] T \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 4. 108})$$

Les deux points d'arrivée sont donc différents et séparés de :

$$\overrightarrow{B_2 B_1} = -\frac{1}{m} \left( \begin{array}{c} 2\hbar |\mathbf{k}_{eff}| \sin(\Omega T) \\ 2\hbar |\mathbf{k}_{eff}| [1 - \cos(\Omega T)] \end{array} \right) \quad (\text{Eq. 4. 109})$$

il faudra donc ajouter en plus, un déphasage dû à l'écart en position (voir paragraphe 4.3.3.1) :

$$\Delta\phi^{position} = \mathbf{k}_{atomique} \cdot \overrightarrow{B_2 B_1} \quad (\text{Eq. 4. 110})$$



**Figure 4. 12** : trajectoires perturbées par la rotation. La deuxième lame est tournée de  $\Omega T$  et la troisième de  $2\Omega T$ . A  $t = 2T$ , les deux ondes ne sont pas au même point B, elles sont en  $B_1$  et  $B_2$ .

## 2) Déphasage de propagation

De même qu'au paragraphe précédent, on va utiliser la relation (Eq. 4. 73) sur les quatre tronçons. On obtient alors les quatre phases :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{1'} = \frac{\mathbf{P}_{1'}^2}{2m\hbar} = \frac{\mathbf{P}_f^2}{2m\hbar} \\ \phi_{1''} = \frac{\mathbf{P}_{1''}^2}{2m\hbar} = \frac{\mathbf{P}_f^2 - 2\hbar|\mathbf{P}_f||\mathbf{k}_{eff}|\sin(\Omega T) + (\hbar\mathbf{k}_{eff})^2}{2m\hbar} \\ \phi_{2'} = \frac{\mathbf{P}_{2'}^2}{2m\hbar} = \frac{\mathbf{P}_f^2 + (\hbar\mathbf{k}_{eff})^2}{2m\hbar} \\ \phi_{2''} = \frac{\mathbf{P}_{2''}^2}{2m\hbar} = \frac{\mathbf{P}_f^2 + 2\hbar|\mathbf{P}_f||\mathbf{k}_{eff}|\sin(\Omega T) + 2(\hbar\mathbf{k}_{eff})^2(1 - \cos(\Omega T))}{2m\hbar} \end{array} \right. \quad (\text{Eq. 4. 111})$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{propagation} &= (\phi_{2''} + \phi_{2'} - \phi_{1'} - \phi_{1''}) \\ &= \frac{T}{2m\hbar} \left[ 4\hbar|\mathbf{k}_{eff}||\mathbf{P}_f|\sin(\Omega T) + 2(\hbar\mathbf{k}_{eff})^2(1 - \cos(\Omega T)) \right] \quad (\text{Eq. 4. 112}) \end{aligned}$$

Si on suppose que  $\Omega T$  est très petit devant 1, alors on peut faire un développement limité à l'ordre 1 en  $\Omega T$ , on a alors :

$$\Delta\phi^{propagation} = \frac{2T}{m} \hbar|\mathbf{k}_{eff}||\mathbf{P}_f|\Omega T \quad (\text{Eq. 4. 113})$$

Que l'on peut réécrire :

$$\Delta\phi^{propagation} = \frac{2m}{\hbar} A\Omega \quad \text{à l'ordre 1 en } \Omega T \quad (\text{Eq. 4. 114})$$

où  $A$  est l'aire du parallélogramme  $ACBC'$ .

## 3) Déphasage lié au passage dans les lames lumineuses

De la même façon qu'au paragraphe 4.5.1, le déphasage sur la sortie  $I$  vaut :

$$\Delta\phi_I^{Laser} = (\phi_A + \phi_{B_1} - \phi_C - \phi_{C'}) \quad (\text{Eq. 4. 115})$$

et sur la sortie  $II$  :

$$\Delta\phi_{II}^{Laser} = (\phi_A + \phi_{B_2} - \phi_C - \phi_{C'} - \pi) \quad (\text{Eq. 4. 116})$$

En prenant l'origine des position au point  $A$  on peut déterminer les différentes phases par :

$$\phi_i = -\mathbf{k}_{eff} \cdot \mathbf{r}_i \quad (\text{Eq. 4. 117})$$

On trouve alors :

$$\begin{cases}
 \phi_A = 0 \\
 \phi_C = |\mathbf{k}_{eff}| L \sin(\Omega T) \\
 \phi_{C'} = |\mathbf{k}_{eff}| L \sin(\Omega T) - \frac{\hbar \mathbf{k}_{eff}^2}{m} T \cos(\Omega T) \\
 \phi_{B_1} = 2|\mathbf{k}_{eff}| L \sin(2\Omega T) - \frac{\hbar \mathbf{k}_{eff}^2}{m} T \cos(\Omega T) \\
 \phi_{B_2} = 2|\mathbf{k}_{eff}| L \sin(2\Omega T) + \frac{\hbar \mathbf{k}_{eff}^2}{m} T [\cos(\Omega T) - 2 \cos(2\Omega T)]
 \end{cases} \quad (\text{Eq. 4. 118})$$

où  $L$  est la longueur  $AC = |\mathbf{P}_f| T / m$ .

On obtient donc en rassemblant tous ces termes:

$$\Delta\phi_I^{Laser} = 2|\mathbf{k}_{eff}| L \sin(\Omega T) [2 \cos(\Omega T) - 1] \quad (\text{Eq. 4. 119})$$

$$\Delta\phi_{II}^{Laser} = 2|\mathbf{k}_{eff}| L \sin(\Omega T) [2 \cos(\Omega T) - 1] + \frac{2\hbar \mathbf{k}_{eff}^2}{m} T [\cos(\Omega T) - \cos(2\Omega T)] - \pi \quad (\text{Eq. 4. 120})$$

Si on suppose que  $\Omega T$  est très petit devant 1, alors on peut faire un développement limité à l'ordre 1 en  $\Omega T$ . On a alors :

$$\Delta\phi_I^{Laser} = 2|\mathbf{k}_{eff}| L \Omega T \quad (\text{Eq. 4. 121})$$

$$\Delta\phi_{II}^{Laser} = 2|\mathbf{k}_{eff}| L \Omega T - \pi \quad (\text{Eq. 4. 122})$$

Que l'on peut réécrire:

$$\Delta\phi_I^{Laser} = \frac{2m}{\hbar} A \Omega \quad \text{à l'ordre 1 en } \Omega T \quad (\text{Eq. 4. 123})$$

$$\Delta\phi_{II}^{Laser} = \frac{2m}{\hbar} A \Omega - \pi \quad (\text{Eq. 4. 124})$$

#### 4) Déphasage dû à l'écart en position

Ce déphasage est donné par la formule (Eq. 4. 110). Suivant que l'on regarde la sortie  $I$  ou  $II$ ,  $\mathbf{k}_{atomique}$  a pour expression à l'ordre 1 en  $\Omega T$  :

$$\mathbf{k}_{atomique}^I = \frac{\mathbf{P}_{2''}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} |\mathbf{P}_f| + \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \Omega T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4. 125})$$

et

$$\mathbf{k}_{atomique}^{II} = \frac{\mathbf{P}_{1''}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} |\mathbf{P}_f| - \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \Omega T \\ \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 4. 126})$$

Le vecteur  $\overrightarrow{B_2 B_1}$  est donné par (Eq 4. 109). On peut réécrire ses coordonnées au premier ordre en  $\Omega T$  :

$$\overrightarrow{B_2 B_1} = -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} 2\hbar \mathbf{k}_{eff} \\ 0 \end{pmatrix} \Omega T \quad (\text{Eq. 4. 127})$$

On trouve donc que le déphasage dû à l'écart de position est le même pour les sorties *I* et *II*, et il vaut :

$$\Delta\phi^{position} = -\frac{2}{m} |\mathbf{k}_{eff}| |\mathbf{P}_f| \Omega T \quad (\text{Eq. 4. 128})$$

Ce terme peut être réécrit :

$$\Delta\phi^{position} = -\frac{2m}{\hbar} A\Omega \quad (\text{Eq. 4. 129})$$

Dans le cas où  $\Omega T$  n'est pas très petit devant 1, les deux ondes issues des chemins 1 et 2 ne sortent pas exactement avec la même direction (leur quantité de mouvements différent d'un terme du deuxième ordre en  $\Omega T$ ). Le déphasage de position est alors donné par :

$$\Delta\phi_1^{position} = \frac{1}{\hbar} [\mathbf{P}_1^{sortie I} \cdot \overrightarrow{OB_1} - \mathbf{P}_2^{sortie I} \cdot \overrightarrow{OB_2}] \quad (\text{Eq. 4. 130})$$

Où  $\mathbf{P}_1^{sortie I}$  est la quantité de mouvement de l'atome issu du chemin 1 sur la sortie *I*, et  $\mathbf{P}_2^{sortie I}$  est la quantité de mouvement de l'atome issu du chemin 2 sur la sortie *I*.

## 5) Déphasage total

En sommant tous les déphasages trouvés, on obtient :

$$\Delta\phi^{total} = \frac{\Delta\phi^{propagation}}{\frac{2m}{\hbar} A\Omega} + \frac{\Delta\phi^{Laser}}{\frac{2m}{\hbar} A\Omega} + \frac{\Delta\phi^{position}}{-\frac{2m}{\hbar} A\Omega} \quad (\text{Eq. 4. 131})$$

On trouve donc finalement :

$$\Delta\phi^{total} = \frac{2m}{\hbar} A\Omega \quad (\text{Eq. 4. 132})$$

On retrouve bien ici au premier ordre en  $(\Omega T)$  l'expression (Eq. 4. 101) qui avait été calculée par la méthode perturbative au paragraphe précédent.

## Comparaison des deux méthodes

Il est clair que le calcul perturbatif (le long des trajectoires non perturbées), n'est qu'une approximation du calcul le long des trajectoires perturbées. Pourtant les deux méthodes donnent le même résultat à l'ordre 1 en  $\Omega T$ . Toutefois, comme le fait remarquer A. PETERS [PETERS 98], STOREY et COHEN-TANNOUDI ne donnent pas une justification claire de la validité de cette méthode perturbative lorsqu'on prend en compte les modifications de trajectoire introduites par l'interaction avec le champ lumineux.

### 4.5.3 Calcul avec une particule classique

Les formules obtenues pour les déphasages liés à la rotation et à l'accélération sont données par (Eq. 4. 101) et (Eq. 4. 105). De la même façon que (Eq. 4. 105), (Eq. 4. 101) peut être réécrite en faisant intervenir  $\mathbf{k}_{eff}$ ,  $\mathbf{V}$ , et  $T$ , plutôt que  $m$ ,  $A$  et  $\hbar$ . On obtient alors :

$$\Delta\phi^{rotation} = 2T^2 \mathbf{k}_{eff} \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (\text{Eq. 4.133})$$

On retrouve alors exactement la même expression que (Eq. 4. 105) avec la transposition :

$$\mathbf{a} \leftrightarrow 2(\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega})$$

qui n'est autre que l'expression de l'accélération de CORIOLIS.

Le déphasage total à la sortie de l'interféromètre peut donc s'écrire sous la forme générale prenant en compte la rotation et l'accélération :

$$\Delta\phi^{total} = T^2 \mathbf{k}_{eff} \cdot \mathbf{a}^{totale} \quad (\text{Eq. 4.134})$$

où  $\mathbf{a}^{totale}$  est la somme de toutes les accélérations (entraînement, centripète, CORIOLIS) subies par l'atome.

Cette approche laisse penser que  $\Delta\phi^{total}$  a une origine purement classique. Regardons ce qui se passe si l'on considère une particule classique qui se propage dans l'interféromètre. On considère donc la limite où  $\hbar \rightarrow 0$ . Dans ce cas, l'impulsion de recul fournie par les lasers à la particule est nulle, les deux bras de l'interféromètre sont donc confondus. Le seul déphasage à prendre en compte est celui produit par l'interaction avec les lames lumineuses donné par (Eq. 4. 92). Si l'on suppose que la particule classique est en  $\mathbf{r}_0$  à l'instant  $t_0$  avec la vitesse  $\mathbf{V}_0$ , et est soumis à l'accélération (supposée constante)  $\mathbf{a}^{totale}$ , alors on en déduit sa position aux instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{a}^{totale} (t - t_0)^2 \quad (\text{Eq. 4.135})$$

Les phases sont données par  $\phi_i = -\mathbf{k}_{eff} \cdot \mathbf{r}(t_i)$ . Si on se place dans le repère  $\{R\}$  lié aux lasers, le vecteur d'onde est constant et vaut  $\mathbf{k}_{eff} = k \mathbf{e}_y$ . Seule la composante suivant l'axe (Oy) de  $\mathbf{r}(t)$  intervient donc. On en déduit en prenant  $t_1 = t_0$  :

$$\phi_1 = -k y_0 \quad (\text{Eq. 4.136})$$

$$\phi_2 = \phi_1 - k \left( V_y T + \frac{1}{2} a_y^{totale} T^2 \right) \quad (\text{Eq. 4.137})$$

$$\phi_3 = \phi_1 - k \left( 2V_y T + 2 a_y^{totale} T^2 \right) \quad (\text{Eq. 4.138})$$

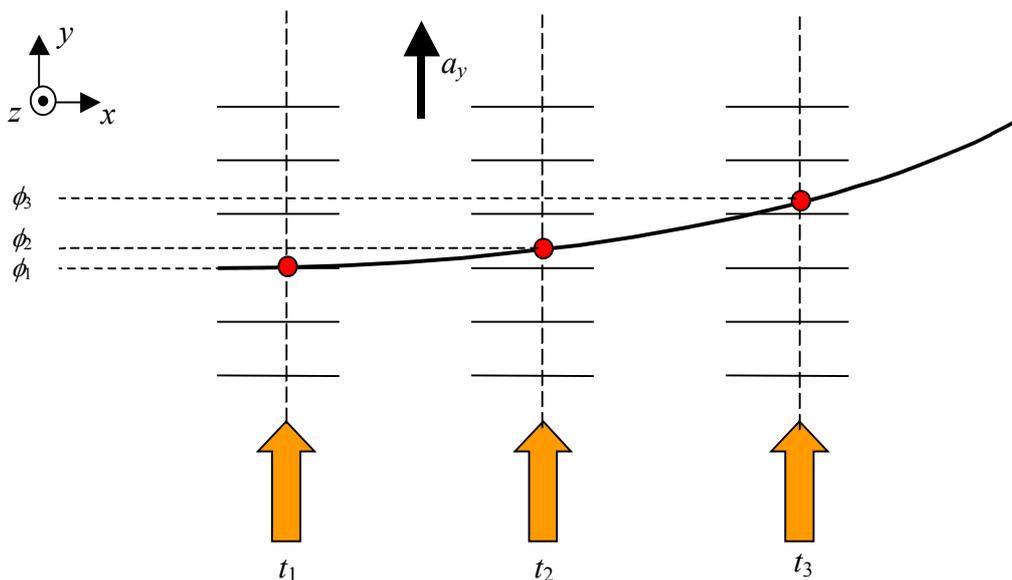
On a posé  $(t_2 - t_1) = (t_3 - t_2) = T$

et le déphasage vaut alors :

$$\Delta\phi^{total} = (\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3) = -kT^2 a_y^{totale} \quad (\text{Eq. 4.139})$$

Le calcul avec une particule classique donne bien la même expression que celle trouvée en (Eq. 4. 134).

Physiquement, ce calcul revient à déterminer la position d'une particule classique avec une règle finement graduée (l'onde laser), et ce, à trois instants différents (voir **Figure 4. 13**). La différences des deux premières mesures permet de déterminer la vitesse moyenne entre  $t_1$  et  $t_2$ . De même, la différence des deux dernières mesures permet de déterminer la vitesse moyenne entre  $t_2$  et  $t_3$ . La différence des deux vitesses moyennes trouvées permet alors de connaître l'accélération moyenne entre  $t_1$  et  $t_3$ .



**Figure 4. 13** : avec une particule classique, le mesure consiste à déterminer les positions de la particule aux trois instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ , et ainsi à remonter aux vitesses moyennes, puis à l'accélération moyenne.

Si l'appareil est en rotation par rapport à l'axe (Oz) et que le centre de rotation est un point  $H$  quelconque, le repère  $\{R\}$  est alors un repère tournant par rapport au repère d'inertie  $\{R_0\}$ . L'accélération prend donc la forme donnée par (Eq. 2. 2) faisant intervenir les termes d'accélération d'entraînement, centripète et de CORIOLIS.

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_{R_0} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad (\text{Eq. 4.140})$$

Les deux premiers termes (entraînement et centripète) seront considérés comme des termes d'accélération ; le troisième (CORIOLIS) est le terme de rotation. Pourtant le terme d'accélération centripète dépend aussi de  $\boldsymbol{\Omega}$ . Il pourrait donc être considéré comme un terme de rotation, mais nous verrons au chapitre suivant que la méthode du double jet utilisé pour discriminer les contributions liées à l'accélération et à la rotation fait apparaître l'accélération centripète comme un terme équivalent à une accélération, et non à une rotation (voir paragraphe 5.2.4).

On aurait pu faire tout ce calcul classique dans le repère d'inertie  $\{R_0\}$ . Dans ce repère, les atomes ont alors une trajectoire rectiligne uniforme (en négligeant la pesanteur). Le déphasage  $\Delta\phi^{total}$  provient de l'effet DOPPLER lié au fait que les lasers sont en mouvement dans  $\{R_0\}$  [RIEHLE 91].

Il est clair que cette méthode de calcul, bien que très simple, ne s'applique plus du tout dans le cas où un déphasage supplémentaire est introduit sur l'un des deux bras de l'interféromètre, puisque ce calcul ne prend qu'un seul bras en compte. Dans la plupart des autres cas, ce calcul donne un résultat valable au premier ordre en  $\Omega T$ , simple et intuitif. Nous l'utiliserons donc au chapitre 7 pour l'étude des différents paramètres influants sur le signal de sortie.

#### 4.5.4 Influence des fronts d'ondes des faisceaux RAMAN

Lorsque l'on a écrit (Eq. 4. 139), on a supposé que les fronts d'ondes étaient plans, c'est à dire que si  $y_1 = y_2 = y_3$ , alors  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ . Dans le cas où les fronts d'ondes ne peuvent être considérés comme plans, il faut alors rajouter le déphasage lié aux défauts de front d'onde.

Posons  $\phi^0$  la phase en  $y_1$  position de la particule à l'instant  $t_1$ . On peut alors écrire la phase au instants  $t_2$  et  $t_3$  toujours en  $y = y_1$ , en prenant en compte les défauts de fronts d'ondes :

$$\phi_2 = \phi_0 + \phi_2^{ab} \quad (\text{Eq. 4.141})$$

$$\phi_3 = \phi_0 + \phi_3^{ab} \quad (\text{Eq. 4.142})$$

Le déphasage total vaut alors :

$$\Delta\phi^{total} = (\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3) = -kT^2 a_y^{totale} + \Delta\phi^{aberration} \quad (\text{Eq. 4.143})$$

avec 
$$\Delta\phi^{aberration} = \phi_3^{ab} - 2\phi_2^{ab} \quad (\text{Eq. 4.144})$$

Nous verrons au chapitre 5 que dans notre cas d'un faisceau Raman unique pour réaliser les trois impulsions, il est très important de connaître précisément ce déphasage lié aux aberrations géométriques.

## 4.6 LIMITES DE CE MODÈLE

### 4.6.1 Impulsions infiniment courtes

La principale limitation du modèle que l'on vient de développer est que l'on néglige tous les effets extérieurs (effets inertiels en particulier) pendant la durée des impulsions lumineuses. C'est une des raisons pour lesquelles on suppose que les impulsions sont de durées très courtes devant la durée d'observation des atomes.

Une méthode de résolution de l'équation de SHRÖDINGER incluant le couplage électromagnétique lié à l'onde laser ainsi que le potentiel de gravitation a été proposée par Ch. BORDÉ [LÄMMERZAHN 95].

### 4.6.2 Ondes atomiques planes

Les ondes atomiques ont été considérées comme planes aussi bien au niveau temporel (énergie interne parfaitement définie) qu'au niveau spatial (vecteur quantité de mouvement parfaitement défini). Si cette approximation se justifie au niveau temporel compte tenu de la très longue durée de vie des états atomiques mis en jeu, elle est beaucoup moins valable au niveau spatial puisqu'elle conduit à considérer l'atome comme complètement délocalisé dans la direction des faisceaux laser. Un modèle plus correct est de représenter l'atome par un paquet d'onde planes d'impulsions différentes.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left[-i\left(\omega t - \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right)\right] \quad \leftrightarrow \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \exp[-i(\omega t)] \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{P}) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})\right] d\mathbf{P}$$

(Eq. 4. 141)

où  $f(\mathbf{P})$  est une fonction de  $\mathbf{P}$  de largeur caractéristique  $\Delta\mathbf{P}$  vérifiant le principe d'incertitude d'HEISENBERG :  $\Delta\mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{r} \geq \hbar$ , avec  $\Delta\mathbf{r}$  le volume dans lequel se situe l'atome.

En considérant  $f(\mathbf{P})$  comme une fonction gaussienne, la fonction d'onde atomique  $\psi(\mathbf{r}, t)$  décrite par (Eq. 4. 29) s'écrit alors comme une fonction sphérido-gaussienne analogue à celle décrivant le champ électrique dans un laser. On peut alors reprendre le calcul des phases accumulées le long des deux bras de l'interféromètre, en remplaçant les ondes planes utilisées précédemment par ces ondes sphérido-gaussiennes. Ce calcul peut être réalisé très simplement dans le cadre du formalisme des « matrices ABCD » introduit par Ch. BORDÉ en 1989 [BORDÉ 89] et largement détaillé dans [BORDÉ 91]. Ce formalisme est analogue aux

matrices utilisées pour propager le champ laser dans un montage optique (voir par exemple [SIEGMAN 86] ) et il présente plusieurs intérêts :

- Il prend en compte la diffraction naturelle du paquet d'onde (optique ou atomique) au cours de sa propagation.
- Il permet de définir clairement la longueur de cohérence de paquet d'onde atomique correspondant à un atome, et ainsi de déterminer la perte de contraste dû au recouvrement partiel des deux paquets d'ondes à la sortie de l'interféromètre.

Dans ce cadre, la résolution de l'équation de SHRÖDINGER incluant un terme de gravité et un gradient de gravité a été réalisée dans [BORDÉ 92]. La prise en compte supplémentaire de la rotation devient compliquée car disymétrise le problème. Néanmoins, un calcul complet permettant de traiter ces paquets d'ondes sphérico-gaussiens en présence de rotation, d'accélération, de gravitation et d'un gradient de gravitation sera détaillé dans la thèse de J. FILS [FILS 02]. Nous n'en parlerons donc pas davantage dans ce mémoire.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BORDÉ 84] Ch. J. Bordé, Ch. Salomon, S. Avrillier, A. Van Leberghe, Ch. Bréant, D. Bassi, G. Scoles, "Optical Ramsey fringes with travelling waves", *Phys. Rev. A*, **30**, 4, p 1836, (1984)
- [BORDÉ 89] Ch. Bordé, "Atomic interferometry with internal state labelling", *Phys. Lett. A*, **140**, p 10 (1989)
- [BORDÉ 91] Ch. J. Bordé, "Atomic Interferometry and Laser Spectroscopy", in *Laser Spectroscopy X*, Ed. M. Ducloy, E. Giacobino, G. Camy, World Scientific, p 239, (1991)
- [BORDÉ 92] Ch. Bordé, "Propagation of Laser Beams and of Atomic Systems", in *Système fondamentaux en Optique Quantique / Fundamental Systems in Quantum Optics*, course 5, J. Dalibard, J.M. Raymond, J. Zinn-Justin, Ed. Les Houches, Session LIII, (1990).
- [COHEN-TANNOUJDI 77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "Mécanique Quantique", Ed. Hermann, Paris, (1977), ISBN 2 7056 5733 9
- [COHEN-TANNOUJDI 92] C. Cohen-Tannoudji, "Interférométrie atomique", *Cours du Collège de France*, (1992-93)
- [FEYNMAN 65] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", Ed. Mc Graw Hill, New-York, (1965)
- [FILS 02] J. Fils, "Caractérisation métrologique d'un gyromètre à atomes froids : étude théorique et expérimentale", *thèse de doctorat de l'Université Paris XI*, Orsay, à paraître, (2002)
- [FRIEDBERG 93] R. Friedberg, S.R. Hartmann, "Billiard balls and matter-wave interferometry", *Phys. Rev. A*, **48**, 2, p 1448, (1993)
- [ISHIKAWA 94] J. Ishikawa, F. Riehle, J. Helmcke, Ch. J. Bordé, "Strong-field effects in coherent saturation spectroscopy of atomic beams", *Phys. Rev. A*, **49**, 6, p 4794, (1994)
- [KASEVICH 91] M. Kasevich, D. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu, "Atomic Velocity Selection using Stimulated Raman Transitions", *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 18, p 2297, (1991)
- [KASEVICH 92] M. Kasevich, S. Chu, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, p 1741, (1992)
- [KITCHING 00] J. Kitching, S. Knappe, N. Vukicevic, L. Hollberg, R. Wynands, W. Weidemann, "A microwave frequency reference based on VCSEL-driven dark line resonance in Cs vapor", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **49**, p 1313, (2000)
- [LÄMMERZAHN 95] C. Lämmerzahl, Ch. Bordé, "Rabi oscillation in gravitational field : Exact solution", *Phys. Lett. A*, **203**, p 59, (1995)
- [MOLER 92] K. Moler, D. Weiss, M. Kasevich, S. Chu, "Theoretical analysis of velocity selective Raman transitions", *Phys. Rev. A*, **45**, 1, p 342, (1992)
- [PETERS 98] A. Peters, "High precision gravity measurements using atom interferometry", *PhD thesis*, Stanford University, Stanford, (1998)
- [RAMSEY 56] N.F. Ramsey, "Molecular beams", Ed. Oxford Uni. Press, Oxford, (1956)

- [REICHEL 95] J. Reichel, F. Bardou, M. Ben-Dahan, E. Peik, S. Rand, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, "Ramn cooling of cesium atom below 3 nK : new approach inspired by Levy flights statistics", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, p 4575, (1995)
- [SAVALLI 00] V. Savalli, "Etude à haute résolution de la spécularité d'un miroir atomique à onde évanescente", *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI*, Paris, (2000)
- [SIEGMAN 86] A. Siegman, "Lasers", *University Science Books*, 1986
- [STOREY 94] P.Storey, C. Cohen-Tannoudji, "The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial", *J. Phys. II France*, **4**, p 1999, (1994)
- [VANIER 89] J. Vanier, C. Audoin, "The quantum physics of atomic frequency standards", *Ed. Adam Hilger Ltd*, Bristol, (1989)
- [VANIER 98] J. Vanier, A. Godone, F. Levi, "Coherent Population Trapping in Cesium: Dark lines and coherent microwave emission", *Phys. Rev. A*, **58**, 3, p 2345, (1998)
- [YOUNG 97] B. Young, M. Kasevich, S. Chu, "Precision atom interferometry with light pulses", *in Atom Interferometry by P. Berman, Ed. Academic Press*, p 363, (1997)





## Chapitre 5 : CONCEPTION DU GYROMETRE A ATOMES FROIDS

## TABLE DES MATIERES :

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 5.1     | La SOURCE ATOMIQUE.....   | 117 |
| 5.1.1   | Choix de l'atome.....   | 117 |
| 5.1.2   | Les différents types de sources.....                            | 119 |
| 5.1.2.1 | Le jet thermique .....  | 119 |
| 5.1.2.2 | Le jet supersonique.....  | 120 |
| 5.1.2.3 | Le piège magnéto-optique.....                                   | 120 |
| 5.1.2.4 | Le jet continu d'atomes froids .....                            | 121 |
| 5.1.2.5 | Résumé.....   | 121 |
| 5.2     | LA PREPARATION ATOMIQUE.....                                    | 122 |
| 5.3.1   | Pompage hyperfin + sélection ZEEMAN optique ou micro-onde.....  | 122 |
| 5.3.2   | Comparaison entre sélection micro-onde et sélection Raman ..... | 123 |
| 5.3.3   | Pompage ZEEMAN .....  | 124 |
| 5.3.4   | Notre configuration .....                                       | 124 |
| 5.3     | CHOIX DE LA GÉOMÉTRIE .....                                     | 124 |
| 5.3.1   | Le RAMSEY-BORDÉ .....   | 125 |
| 5.3.2   | Le MACH-ZEHNDER.....  | 126 |
| 5.3.3   | Conclusion.....   | 127 |
| 5.3.4   | Le double jet atomique.....                                     | 127 |
| 5.4     | LES SEPARATRICES ATOMIQUES .....                                | 129 |
| 5.4.1   | Les composants mécaniques .....                                 | 130 |
| 5.4.2   | Les lames lumineuses.....                                       | 131 |
| 5.4.3   | Fonctionnement spatial ou temporel .....                        | 132 |
| 5.4.4   | Les impulsions multiples.....                                   | 134 |
| 5.4.5   | Avantages des transitions RAMAN stimulées.....                  | 135 |

|   |     |
|---|-----|
| <u>TABLE DES MATIERES</u>                       | 114 |
| 5.5 LA DÉTECTION .....                          | 125 |
| 5.5.1 Détection de l'impulsion .....            | 136 |
| 5.5.2 Détection optique de l'état interne ..... | 137 |
| 5.5.3 Détection avec renormalisation .....      | 137 |
| 5.6 LA CONCEPTION .....                         | 138 |
| BIBLIOGRAPHIE .....                             | 144 |



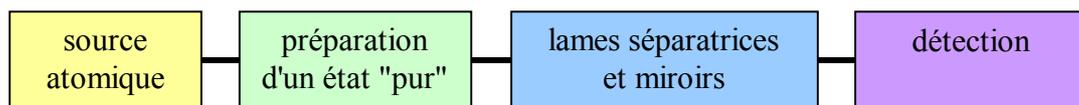
## CHAPITRE 5 :

### CONCEPTION DU GYROMETRE A ATOMES FROIDS

Le but de ce chapitre est de détailler l'ensemble des choix qui ont guidé la conception de notre gyromètre atomique, et qui sont responsables de son anatomie. Pour chacun des éléments constituant l'appareil, nous discuterons les différentes possibilités qui s'offraient à nous, et nous expliquerons les motivations qui nous ont orientés vers telle ou telle solution.

La structure générale d'un interféromètre atomique est similaire à celle d'un interféromètre optique, on y trouve donc une source d'atomes suivie d'un dispositif permettant de préparer un état atomique "pur", puis des composants servants à séparer et à diriger les paquets d'ondes atomiques, et pour finir un système de détection permettant de déterminer le déphasage entre les deux bras de l'interféromètre.

Le schéma de principe de l'interféromètre est donc le suivant :



**Figure 5. 1** : schéma de principe d'un interféromètre à onde atomique.

La source d'atomes est détaillée paragraphe 5.1, nous y discutons en particulier le choix de l'atome utilisé, et nous comparons les intérêts et inconvénients des jets thermiques (thermique et supersonique) et des sources d'atomes froids (continue ou pulsée).

La phase de préparation atomique ne pose pas de problème particulier. Bien qu'il existe de multiples techniques pour préparer un état atomique pur, la méthode utilisée n'influe que très peu sur la suite de l'expérience. Nous regarderons deux méthodes différentes au paragraphe 5.2 , l'une utilisant une transition micro-onde, et l'autre à base de transitions RAMAN stimulées.

La zone d'interaction constituant l'interféromètre est de loin la plus importante, c'est le cœur du gyromètre. Tous les choix concernant cette zone influenceront directement sur les performances du gyromètre. Nous discuterons du choix de la géométrie de l'interféromètre (RAMSEY-BORDÉ, MACH-ZEHNDER), de la façon de séparer et de recombinaison des paquets d'ondes atomiques (nano-composants mécaniques, lames lumineuses) et de la manière dont on peut mettre en œuvre ces actions cohérentes sur les atomes (impulsions spatiales ou temporelles, impulsions multiples, faisceau RAMAN unique). Toutes ces considérations sont étudiées dans les paragraphes 5.3 et 5.4.

Il est clair que chaque élément de notre expérience n'est pas indépendant des autres. Ainsi, le fait d'utiliser des séparatrices lumineuses dans la zone d'interaction, va nous permettre de réaliser une détection sur les états atomiques internes, et non sur la quantité de mouvement. La méthode de détection est donc très classique pour une expérience d'optique atomique. Nous détaillerons toutefois la technique de renormalisation mise en œuvre dans notre dispositif, qui permet de s'affranchir des fluctuations du nombre d'atomes participant au signal.

Enfin nous terminerons ce chapitre en récapitulant les choix effectués et nous donnerons la structure générale de notre interféromètre ainsi que les différentes configurations dans lesquelles il peut être utilisé.

## 5.1 LA SOURCE ATOMIQUE

### 5.1.1 Choix de l'atome

Lorsque l'on veut réaliser une source d'atomes pour une expérience de physique atomique, la première question à se poser est : « est ce que l'atome à utiliser doit avoir des propriétés physiques particulières ? ». Ainsi, il est clair que si l'on veut faire une expérience de condensation de BOSE-EINSTEIN, l'atome doit absolument être un boson, ou si l'on veut réaliser une horloge atomique, il faut choisir un atome possédant une transition atomique très fine.

Dans le cas du gyromètre atomique, la seule contrainte physique *à priori*, est d'éviter absolument tout phénomène de décohérence (en particulier les processus d'émission spontanée) entre le moment où le paquet d'ondes est séparé en deux, et celui où il est recombinaison. A ce titre, Les atomes hydrogénéoïdes (Li, Rb, Cs, Hg<sup>+</sup>, ...) sont bien adaptés pour cette expérience, car leur état fondamental se décompose en deux sous-niveaux hyperfins de très longue durée de vie.

Contrairement à ce que peut laisser penser la formule (Eq. 3.17), la masse de l'atome n'intervient pas dans le facteur d'échelle d'un gyromètre utilisant des lames lumineuses ou des réseaux mécaniques pour séparer les paquets d'ondes atomiques. En effet l'aire de

l'interféromètre est proportionnelle à  $1/m$ , par l'intermédiaire de la vitesse transverse acquise au moment de la transition RAMAN :

$$A = \frac{\hbar |\mathbf{k}_{eff}| T}{m} \times L \quad (\text{Eq. 5. 1})$$

En remplaçant l'aire par cette expression dans (Eq. 3. 17), on retrouve l'expression donnée en (Eq. 4. 133), qui ne dépend que des paramètres expérimentaux.

$$\Delta\phi^{rotation} = 2T^2 \mathbf{k}_{eff} \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \quad (\text{Eq. 5. 2})$$

Il n'y a donc aucun intérêt, *a priori*, à prendre un atome de masse élevée. Expérimentalement, lorsque l'on utilise des atomes refroidis par laser, la dispersion de vitesse est inversement proportionnelle à la masse de l'atome. Or dans notre expérience, une trop forte dispersion de vitesse entraîne une perte de contraste des franges d'interférences et une diminution du nombre d'atomes sensible aux transitions RAMAN sélectives en vitesse transverse. De ce point de vue là, il est donc intéressant de prendre des atomes de masse élevée. On donne, à titre d'exemple, la dispersion de vitesse classique pour un piège de lithium, de rubidium et de césium :

| Atome    | Masse (u.a.) | Température            | Dispersion                  |
|----------|--------------|------------------------|-----------------------------|
| Lithium  | 7            | $\sim 100 \mu\text{K}$ | $\sim 20 \text{ cm.s}^{-1}$ |
| Rubidium | 87           | $\sim 10 \mu\text{K}$  | $\sim 2 \text{ cm.s}^{-1}$  |
| Césium   | 133          | Quelques $\mu\text{K}$ | $1 \text{ cm.s}^{-1}$       |

Un certain nombre de contraintes supplémentaires, liés aux techniques que l'on va mettre en œuvre dans l'expérience doivent également être considérées. Ainsi pour réaliser un gyromètre à atomes froids, il faut évidemment choisir un atome que l'on sait refroidir. De même l'utilisation de lames lumineuses pour séparer les paquets d'ondes atomiques guide le choix de l'atome.

Compte tenu de toutes ces contraintes, nous avons finalement sélectionné le césium comme atome pour notre expérience. On pourra trouver ces principales caractéristiques dans l'annexe A. Il présente pourtant certains désavantages par rapport au rubidium, comme par exemple un déplacement de fréquence collisionnel presque 50 fois plus élevé [SORTAIS 00]), ou encore la valeur de la longueur de diffusion qui empêche, jusqu'à présent, la production d'un condensat de BOSE-EINSTEIN de césium. Le choix du césium se justifie par des considérations plus technologiques : les fréquences de transitions sont accessibles par des diodes laser dont la puissance atteint jusqu'à 200 mW (contre seulement 70 mW pour le rubidium) ; et de plus le laboratoire possède une grande expérience du césium car il est utilisé dans les horloges atomiques.

Les deux états atomiques de grandes durées de vie  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$  considérés au chapitre précédent correspondent donc aux deux sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental  $6^2S_{1/2}$  :  $|F=3, m_F=0\rangle$  et  $|F=4, m_F=0\rangle$ . Il s'agit donc des mêmes niveaux atomiques que ceux utilisés dans une horloge atomique. L'utilisation des sous-niveaux ZEEMAN  $m_F=0$  permet de s'affranchir, au premier ordre, des fluctuations du champ magnétique qui pourrait introduire des déphasages parasites dans la partie interféromètre.

### 5.1.2 Les différents types de sources

Plusieurs types de sources atomiques peuvent être utilisées dans ce genre d'expérience. Les quatre sources différentes que nous allons considérer dans cette partie sont, le jet thermique, le jet supersonique, le piège magnéto-optique et le jet continu d'atomes froids. Chacune de ces sources possède des avantages et des inconvénients que nous allons discuter. Les caractéristiques de ces sources portent essentiellement sur la distribution de vitesse des atomes.

#### 5.1.2.1 Le jet thermique

Les atomes qui sortent d'un four chauffé aux alentours de  $100^\circ\text{C}$ , ont une répartition de vitesse longitudinale donnée par la formule [RAMSEY 56] :

$$I(V) = I_0 (V - V_0)^3 \exp\left[-\frac{3}{2} \left(\frac{V - V_0}{\Delta V}\right)^2\right] \quad (\text{Eq. 5. 3})$$

avec 
$$\Delta V = \sqrt{\frac{3k_B T}{2m}} \quad (\text{Eq. 5. 4})$$

Pour un four de césium chauffé à  $100^\circ\text{C}$ , on trouve généralement une courbe centrée sur  $\bar{V} = 300 \text{ m.s}^{-1}$  et d'environ  $\Delta V_L = 200 \text{ m.s}^{-1}$  de large à  $(1/e)$ . La vitesse atomique n'est donc pas bien définie, et, dans le cas d'un gyromètre atomique, le signal de sortie est alors la somme d'une multitude d'interféromètres d'aires différentes, qui se traduit par un brouillage rapide des franges d'interférences en fonction du déphasage (voir Chapitre 7).

Les jets thermiques ont généralement une forte divergence, et donc une forte dispersion en vitesse transverse  $\Delta V_T$ , dont la valeur dépend de la forme de l'éjecteur du four (valeur typique :  $100 \text{ mrad}$  de demi angle). la divergence du jet peut être réduite en utilisant deux diaphragmes (diamètre typique  $10 \mu\text{m}$ ) qui tronquent la distribution de vitesse transverse, mais la perte d'atomes est alors importante. Une autre solution consiste à collimater le jet atomique grâce à une mélasse DOPPLER 2-D, la perte d'atomes est alors moindre.

En contrepartie de ces inconvénients, les jets thermiques sont des sources faciles à mettre en œuvre, et qui ont des flux relativement importants pour des sources atomiques, permettant ainsi d'obtenir un rapport signal à bruit de plusieurs dizaines de milliers. De plus

ils présentent l'intérêt de fournir un signal de sortie continu, contrairement aux pièges magnéto-optiques. Cette dernière remarque est importante car le fonctionnement pulsé d'une horloge ou d'un capteur inertielle atomique entraîne un bruit lié aux phénomènes d'échantillonnage appelé : effet DICK [DICK 87, SANTARELLI 96].

A titre d'exemple, on donne ici les caractéristiques du jet thermique de césium utilisé par KASEVICH, dans son expérience de gyromètre atomique [LANDRAGIN 99, GUSTAVSON 00]:  $\bar{V} = 300 \text{ m.s}^{-1}$  ( $\Delta V_L / \bar{V} \sim 0,7$ ). Cette dispersion relativement importante, fait chuter le contraste des franges de plus de 80 % dès la troisième frange.

Le jet est collimaté transversalement par un mélasse 2-D. Le flux d'atomes participant au signal vaut alors  $10^{10}$  atomes/s à 2,5 mètres de distance, permettant d'atteindre un rapport signal à bruit expérimental de 33.000. La divergence du jet est ramenée à quelques  $10^{-2}$  deg, ce qui donne une dispersion en vitesse transverse de l'ordre de  $\Delta V_T = 30 V_{recoil}$ .

### 5.1.2.2 Le jet supersonique

Les jets supersoniques sont très similaires aux jets thermiques, mais leur distribution en vitesse longitudinale est beaucoup plus réduite. L'idée est d'ajouter aux atomes issus de la source, un gaz inerte porteur en régime supersonique. Grâce à des mécanismes d'expansion adiabatique, tous les atomes se propagent à la vitesse supersonique avec une très faible dispersion. L'inconvénient principal de ces sources est que leur vitesse moyenne est toujours relativement rapide.

Un jet supersonique de sodium, entraîné par de l'argon, est utilisé par PRITCHARD [KEITH 91, LENEFF 97], les caractéristiques sont les suivantes :  $\bar{V} = 1030 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\Delta V_L / \bar{V} \sim 0,04$ .

### 5.1.2.3 Le piège magnéto-optique

Le piège magnéto-optique (noté PMO dans la suite) présente l'intérêt de fournir des atomes très froids (typiquement quelques  $\mu\text{K}$  pour le césium), donc avec une dispersion de vitesse longitudinale et transverse très étroite. Ceci implique que l'aire de l'interféromètre est bien mieux définie, le contraste varie lentement avec le déphasage et le nombre de franges visibles en est d'autant plus important. La vitesse longitudinale moyenne des atomes  $\bar{V}$  est aussi beaucoup plus faible, et permet donc de réaliser des aires plus grandes pour une longueur d'appareil fixée. A longueur d'interféromètre  $2L$  fixée, l'aire est donnée par :

$$A = \hbar |\mathbf{k}_{eff}| \frac{L^2}{\bar{V}} \quad (\text{Eq. 5. 5})$$

L'inconvénient majeur de ce type de source est son fonctionnement pulsé. Outre l'apparition de bruits parasites tel que l'effet DICK, le fonctionnement pulsé d'un capteur inertielle tel qu'un gyromètre limite sérieusement la bande passante de l'appareil. La durée

nécessaire pour piéger une boule d'atomes est typiquement de 0,5 seconde, la cadence de cycle du gyromètre ne peut donc pas excéder 2 Hz. Des méthodes permettant d'augmenter la bande passante, voire d'arriver à un fonctionnement discret jointif peuvent être étudiées, mais restent difficiles à mettre en œuvre.

Les ordres de grandeurs typiques pour un PMO ( et pour le notre en particulier) sont : nombre d'atomes  $N \sim 10^8$  (dont seulement  $10^6$  participent au signal),  $\bar{V} = 30 \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $\Delta V_L / \bar{V} = 3 \%$ , et  $\Delta V_L = \Delta V_T < 3 V_{recul}$  (voir paragraphe 6.2.7 pour plus de détails).

#### 5.1.2.4 Le jet continu d'atomes froids

Des jets continus d'atomes froids peuvent être obtenus à partir de pièges magnéto-optiques 2D. L'extraction des atomes se fait soit de façon magnéto-optique [AUCOUTURIER 97, WEYERS 97, BERTHOUD 98], soit par une technique de mélasse mouvante (voir paragraphe 6.2.7 et [CLAIRON 91]). Une des difficultés principales de ce type d'expérience est d'éviter que la lumière parasite produite dans la zone de piégeage ne se propage dans le reste du dispositif.

Ces sources présentent des températures tout de même très supérieures aux PMO, mais ont l'énorme intérêt de fournir un signal continu (voir les remarques du paragraphe précédent).

On donne à titre d'exemple les performances du jet continu réalisé dans l'équipe de P. THOMANN [BERTHOUD 99]. Un flux de  $2 \cdot 10^8$  atomes de césium par seconde à une température longitudinale de  $70 \mu\text{K}$  a été obtenu. La température transverse est estimée à environ  $100 \mu\text{K}$  dans les deux directions. La vitesse du jet peut être ajustée entre 1 et  $10 \text{ m.s}^{-1}$ .

#### 5.1.2.5 Résumé

Nous présentons dans le tableau récapitulatif ci-dessous l'ensemble des caractéristiques des quatre sources atomiques passées en revue.

| Type             | Flux<br>(atomes /s) | $\bar{V}$<br>( $\text{m.s}^{-1}$ ) | $\Delta V_L / \bar{V}$<br>(%) | $\Delta V_T$<br>( $V_{recul}$ ) | Commentaires |
|------------------|---------------------|------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|--------------|
| jet thermique    | $\sim 10^{11}$      | 300                                | 60 %                          | 30                              | Continu      |
| jet supersonique | $\sim 10^{10}$      | 1000                               | 4 %                           | 30                              | Continu      |
| jet continu      | $2 \cdot 10^8$      | de 1 à 10                          | de 10 à 1 %                   | $\sim 30$                       | Continu      |
| PMO              | qq $10^6$           | 0,1 à 10                           | de 10 à 0,1 %                 | $< 3$                           | Pulsé        |

C'est le piège magnéto-optique 3D qui a été retenu pour notre dispositif. Sa faible dispersion de vitesse dans les trois directions, nous garantit un contraste élevé des franges d'interférence, et une bonne stabilité du facteur d'échelle à long terme. De plus les faibles vitesses de lancement permettent d'obtenir une bonne sensibilité avec un encombrement relativement réduit. Enfin les techniques d'obtention des PMO sont maintenant bien connues et ne présentent plus de difficultés particulières.

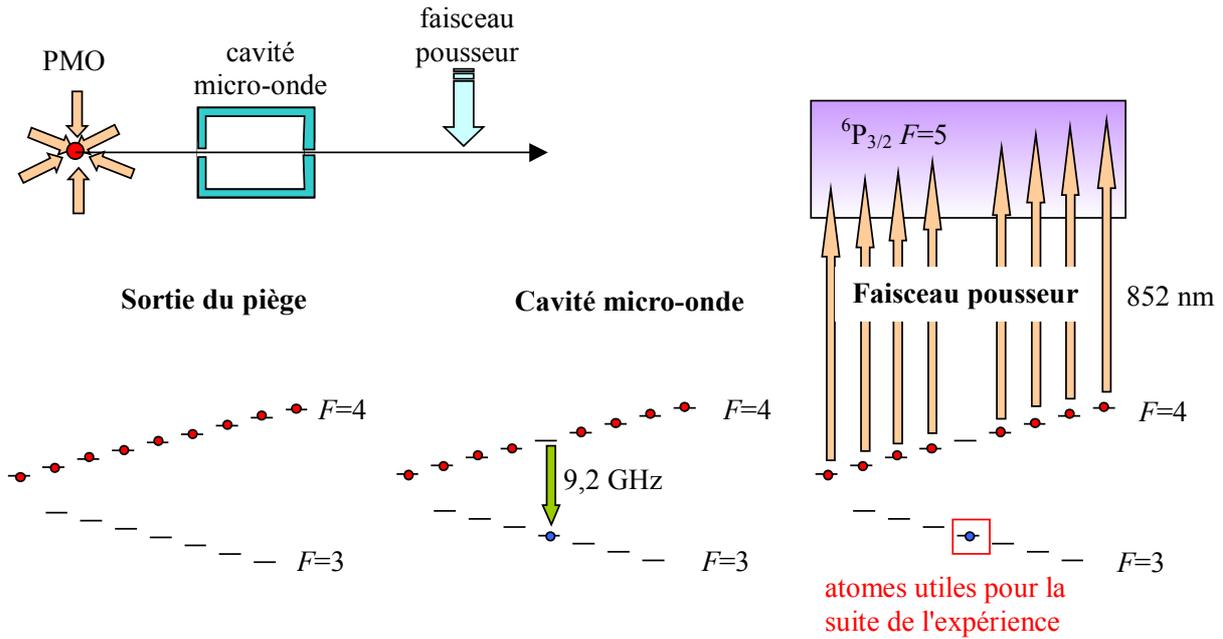
## 5.2 LA PREPARATION ATOMIQUE

Le rôle de la phase de préparation atomique est de préparer les atomes dans un état insensible au premier ordre au champ magnétique, à l'entrée de l'interféromètre. En effet, il est très important que l'état atomique soit parfaitement connu, si l'on veut pouvoir relier le nombre final d'atomes dans un état donné, au déphasage entre les deux bras de l'interféromètre. La phase de préparation atomique permet donc de sélectionner l'état  $|F = 3, m_F = 0\rangle$ . Les atomes qui ne sont pas dans cet état à l'entrée de l'interféromètre doivent être éjectés car ce sont des atomes qui ne contribuent pas au signal mais qui contribuent au bruit de fond. Plusieurs solutions sont possibles pour réaliser cette préparation.

### 5.2.1 Pompage hyperfin + sélection ZEEMAN optique ou micro-onde

A la sortie du piège magnéto-optique, on effectue un pompage hyperfin en éteignant le faisceau repompeur légèrement après le faisceau refroidisseur. Il est important que ce pompage soit total afin d'éviter le bruit associé aux atomes non pompés [LUCAS-LECLIN 98]. En pratique il l'est, compte tenu de la probabilité de désexcitation vers l'état  $F = 4$ , et du nombre de cycles absorption-émission spontanée réalisables. Les atomes à la sortie du PMO sont donc tous dans l'état  $F = 4$ , mais sont dans une superposition de tous les sous-niveaux ZEEMAN.

Le principe de la sélection ZEEMAN est de séparer les différents sous-niveaux ZEEMAN grâce à un champ magnétique constant, afin que seule la transition  $F = 4, m_F = 0 \rightarrow F = 3, m_F = 0$  soit résonante. Cette transition est alors réalisée par une impulsion  $\pi$  (probabilité de transition = 100 %) d'un champ micro-onde ou bien d'une transition à deux photons (voir paragraphe 4.2). Les atomes restants dans  $F = 4$  sont alors expulsés de l'expérience grâce à la pression de radiation induite par une onde progressive accordée sur la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  (voir Figure 5. 2).



**Figure 5.2** : à la sortie du piège les atomes sont dans l'état  $F = 4$ . La phase de préparation se déroule en deux étapes: une cavité micro-onde ou une transition à deux photons induit la transition  $F = 4, m_F = 0 \rightarrow F = 3, m_F = 0$ . Un faisceau pousseur expulse de l'expérience tous les atomes qui restent dans  $F = 4$ .

L'inconvénient de cette méthode est que l'on perd un grand nombre d'atomes, ce qui diminue le rapport signal à bruit final. En supposant les atomes équi-répartis dans tous les sous-niveaux ZEEMAN du niveau  $F = 4$  à la sortie du PMO, la perte d'atomes est de  $8/9^{\text{ième}}$ , soit presque 90 %. Des calculs plus précis d'efficacité de pompage prenant en compte la largeur de raie et la polarisation du laser peuvent être trouvés dans [CÉREZ 91].

### 5.2.2 Comparaison entre sélection micro-onde et sélection Raman

Dans le principe il est équivalent de réaliser la sélection ZEEMAN avec une transition micro-onde ou bien une transition RAMAN stimulée. Néanmoins, dans notre cas où les séparatrices atomiques utilisent des transitions RAMAN sélectives en vitesse transverse (voir paragraphe 4.2.6 et Eq. 4.62), il peut être intéressant de supprimer, dès la phase de préparation atomique, les atomes qui sont dans le bon état interne mais qui ont une impulsion telle qu'ils ne seront pas adressés par la séparatrice atomique. Ainsi en utilisant une transition RAMAN sélective en vitesse transverse (faisceaux contra-propageants) pour induire la transition  $F = 4, m_F = 0$  vers  $F = 3, m_F = 0$ , on s'assure que seuls les atomes qui ont aussi la bonne vitesse transverse vont effectuer la transition. Les autres sont éjectés avec le faisceau pousseur. Cette méthode garantit que seuls les atomes qui vont effectivement participer au signal sont encore présents à l'entrée de l'interféromètre.

Une telle sélection ZEEMAN utilisant des transitions RAMAN sélectives en vitesse transverse à été mise en œuvre par A. PETERS dans son gravimètre à atomes froids [PETERS 98].

### 5.2.3 Pompage ZEEMAN

Le *pompage ZEEMAN*, ou *pompage total*, est une solution pour accumuler tous les atomes dans un sous-niveau ZEEMAN déterminé, grâce à une combinaison astucieuse de fréquences et de polarisations [DE CLERCQ 84]. Des taux de pompage supérieurs à 99 % peuvent être obtenus, rendant ainsi négligeable la perte d'atomes.

L'inconvénient de cette technique est qu'elle réchauffe considérablement les atomes, il faut donc réaliser ensuite une sélection en vitesse, qui fait perdre quasiment autant d'atomes que ceux qu'on a gagnés avec le pompage total.

### 5.2.4 Notre configuration

La phase de préparation atomique est donc réalisée par un pompage hyperfin suivi d'une sélection ZEEMAN par transition micro-onde dans une cavité résonnante. Bien qu'une transition Raman sélective en vitesse transverse eut probablement été plus judicieuse, le laboratoire a une grande expérience des cavités micro-ondes, et de plus cette solution présentait l'avantage de ne pas nécessiter d'accès optique supplémentaire.

## 5.3 CHOIX DE LA GÉOMÉTRIE

Le choix de la géométrie est guidé par un certain nombre de considérations :

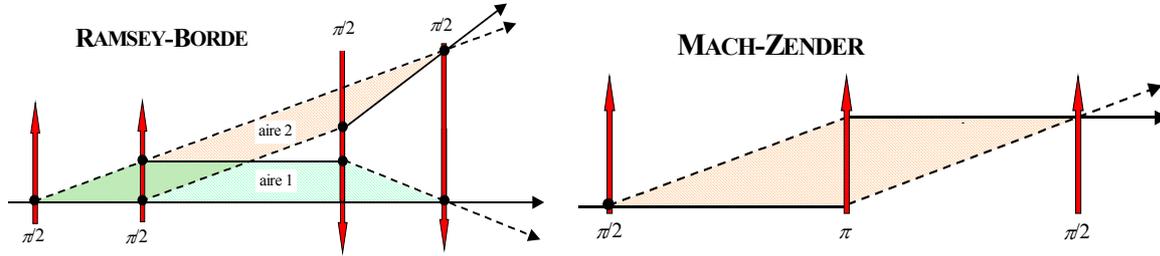
- pour pouvoir observer le phénomène d'interférence atomique, les paquets d'ondes issus des deux bras de l'interféromètre doivent se recombiner sur une distance inférieure à la longueur de cohérence de l'onde atomique. Cette longueur est donnée dans chaque direction par :

$$\Delta u_{\text{cohérence}} = \frac{\hbar}{2m\Delta V_u} \quad \text{où } u \text{ vaut } x, y, \text{ ou } z \quad (\text{Eq. 5. 6})$$

et  $m$  représente la masse de l'atome et  $\Delta V_u$  sa dispersion de vitesse dans la direction  $u$ .

- pour que le déphasage soit sensible à la rotation, les deux bras de l'interféromètre doivent englober une surface d'aire non nulle (d'après Eq. 3. 17) , ce qui exclut les géométries de type MICHELSON.

Le premier gyromètre atomique réalisé utilisait une configuration de type RAMSEY-BORDÉ [RIEHLE 91], celui de KASEVICH [GUSTAVSON 97] utilise une configuration de type MACH-ZEHNDER. Nous allons détailler ces deux configurations pour voir quels en sont les avantages et les inconvénients (voir **Figure 5.3**).



**Figure 5.3** : configuration de RAMSEY-BORDÉ (à gauche) et configuration de MACH-ZENDER (à droite).

### 5.3.2 Le RAMSEY-BORDÉ - (autrement appelé RAMSEY-BORDÉ asymétrique)

Cette géométrie a été utilisée pour la première fois par CHEBOTAYEV en 1976 [BAKLANOV 76] et par HALL en 1977 [BERQUIST 77], dans le but d'étendre le phénomène des franges de RAMSEY au domaine optique. C'est en 1984 que Ch. BORDÉ interprète cette configuration en terme d'interférométrie atomique [BORDÉ 84]. Cette géométrie est maintenant usuellement utilisée pour réaliser des horloges atomiques à transition optique, pour des mesures de recul [WEISS 93], de polarisabilité atomique [RIEGER 93, EKSTROM 95], de déphasages liés à l'effet STARK AC ou DC [RIEHLE 92, MORINAGA 93], de moment dipolaire électrique pour des transitions faibles [MORINAGA 88], de phase de BERRY [MORINAGA 89] ou encore d'effet AHARANOV-BOHM [MÜLLER 95] ou AHARANOV-CASHER [ZEISKE 95]. On peut rajouter que le premier gyromètre atomique a été réalisé en 1991 à la PTB [RIEHLE 91], il utilisait également cette géométrie et il présentait une stabilité sur une seconde de  $0,3 \text{ rad.s}^{-1}.\text{Hz}^{-1/2}$ .

On obtient en réalité deux interféromètres distincts (**Figure 5.3**), dont les déphasages en sortie diffèrent de  $2\omega_R T$ , où  $\omega_R$  est le désaccord lié au recul induit par le photon donné par (Eq. 4.36), et  $T$  est la durée entre la première et la seconde lame lumineuse.

Si l'on ne considère maintenant plus qu'un seul des deux interféromètres (voir **Figure 5.4**), on constate que sur le trajet (1) l'atome se propage pendant la durée  $(2T + T')$  dans l'état  $|f\rangle$ , alors que sur le trajet (2) il se propage pendant la durée  $T'$  dans l'état  $|f\rangle$  et la durée  $2T$  dans l'état  $|e\rangle$ . D'après les remarques faites au chapitre 4, le déphasage en sortie de cet interféromètre aura donc une contribution liée au désaccord des lasers utilisés par rapport à la transition atomique.

Un calcul du déphasage entre les deux bras par la méthode de calcul développée au chapitre précédent donne le résultat :

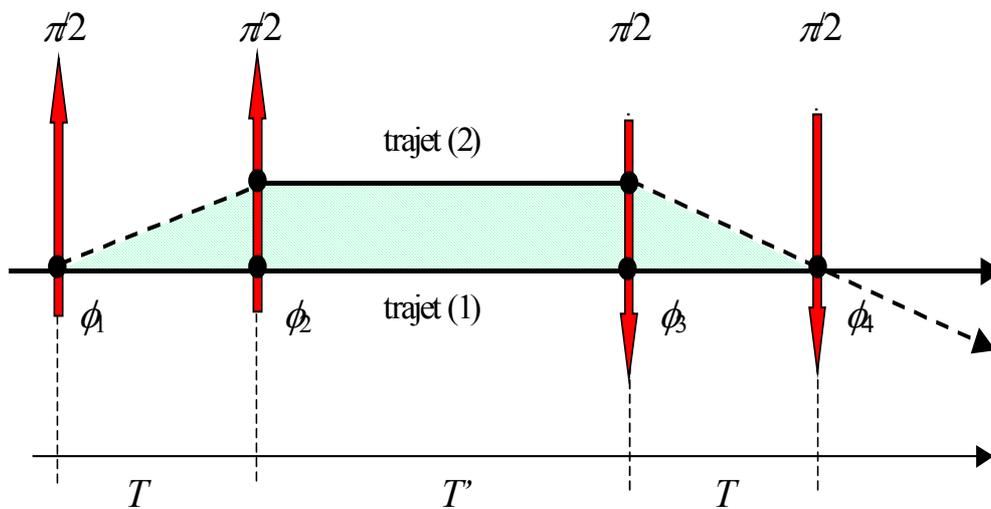
$$\Delta\phi^{total} = (\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4) - 2\delta T \quad (\text{Eq. 5.7})$$

où  $\phi_i$  est la phase du  $i^{\text{ème}}$  laser et  $\delta$  est le désaccord à résonance donné par (Eq. 4. 7).

La probabilité de transition s'écrit alors :

$$P_f = \frac{1}{8} [1 + \cos(\Delta\phi^{total})] \quad (\text{Eq. 5. 8})$$

Le facteur 1/8 est lié au nombre important de trajectoires classiques dans l'interféromètre (16 au total).



**Figure 5. 4 :** interféromètre de RAMSEY-BORDÉ. Le déphasage en sortie possède une contribution dépendant du désaccord des lasers par rapport à la transition atomique.

De plus l'interféromètre est sensible à toutes les sources de déphasages qui influent différemment sur les états  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$ . Parmi celles-ci, le champ magnétique provoque directement un déphasage en modifiant la fréquence de transition atomique. Cette configuration impose donc de connaître précisément la valeur du champ magnétique dans la partie interféromètre.

### 5.3.3 Le MACH-ZEHNDER – (autrement appelé RAMSEY-BORDÉ symétrique)

Cette géométrie, proposée initialement par Ch. Bordé en 1991, a été utilisée pour la première fois par KASEVICH et CHU en 1991, pour réaliser un mesure de  $g$  [KASEVICH 91].

On rappelle la probabilité de transition à la sortie de l'interféromètre, calculée au chapitre précédent:

$$P_f = \frac{1}{2} [1 + \cos(\phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3)] \quad (\text{Eq. 5. 9})$$

Contrairement au RAMSEY-BORDÉ, le MACH-ZEHNDER est insensible au désaccord. Le champ magnétique n'a donc pas besoin d'être connu, il faut juste limiter ses fluctuations. Il est donc plus approprié pour réaliser un appareil métrologique tel qu'un gyromètre.

De plus, le nombre de trajets interférant dans le MACH-ZEHNDER est beaucoup plus faible que dans le RAMSEY-BORDÉ. L'amplitude du signal est donc plus importante (comparer le facteur  $1/2$  dans Eq. 5. 9, contre  $1/8$  dans Eq. 5. 8).

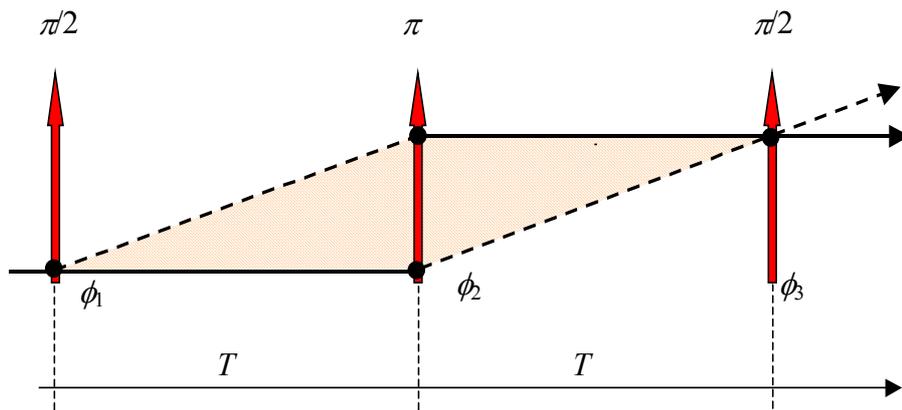


Figure 5. 5 : interféromètre de MACH-ZEHNDER.

Cette géométrie est très bien appropriée pour mesurer les effets inertiels [AUDRETSCH 92] et est maintenant couramment utilisée pour réaliser des capteurs inertiels (gravimètre [PETERS 99], gyromètre [LENEF 97, GUSTAVSON 97], gradiomètre [SNADDEN 98])

### 5.3.4 Conclusion

Pour plus de détails sur la comparaison des deux configurations, et d'autres encore, on pourra se reporter à [BORDÉ 91] et [STERR 98].

Dans l'optique de réaliser un appareil métrologique stable et exact, nous avons choisi une configuration de type MACH-ZEHNDER, qui a l'avantage d'être insensible à plus d'effets parasites que le RAMSEY-BORDÉ.

### 5.3.5 Le double jet atomique

Les calculs du déphasage réalisés au chapitre précédent nous ont montré que l'interféromètre était sensible aux rotations, aux accélérations et aux défauts de fronts d'ondes des lasers RAMAN. La probabilité de transition d'un atome est alors donnée par :

$$P_f = \left[ \frac{1 + \cos(\Delta\phi^{rotation} + \Delta\phi^{accélération} + \Delta\phi^{aberration})}{2} \right] \quad (\text{Eq. 5. 10})$$

avec  $\Delta\phi^{rotation}$ ,  $\Delta\phi^{accélération}$  et  $\Delta\phi^{aberration}$  donnés par les expressions (Eq. 4. 101), (Eq. 4. 105) et (Eq. 4. 144), que l'on rappelle ici :

$$\Delta\phi^{rotation} = 2T^2 \mathbf{k}_{eff} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) \quad (\text{Eq. 5. 11})$$

$$\Delta\phi^{accélération} = T^2 \mathbf{k}_{eff} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{Eq. 5. 12})$$

$$\Delta\phi^{aberration} = (\phi_1^{ab} - 2\phi_2^{ab} + \phi_3^{ab}) \quad (\text{Eq. 5. 13})$$

L'expression (Eq. 5. 10) fait apparaître un problème de discrimination entre les différents déphasages. Pour être utilisable, un gyromètre doit être insensible aux accélérations, et vice versa, un accéléromètre doit être insensible aux rotations.

La comparaison de (Eq. 5. 11 ) et (Eq. 5. 12) nous montre que le signe de  $\Delta\phi^{rotation}$  dépend du signe de la vitesse atomique  $\mathbf{V}$ , alors que  $\Delta\phi^{accélération}$  et  $\Delta\phi^{aberration}$  n'en dépendent pas. Ainsi, en réalisant deux interféromètres notés + et - dans lesquels la vitesse atomique est respectivement  $\mathbf{V}_+ = +V_x \mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{V}_- = -V_x \mathbf{e}_x$  (voir **Figure 5. 6**), on obtient deux déphasages donnés par :

$$\Delta\phi_+^{total} = \Delta\phi_+^{rotation} + \Delta\phi_+^{accélération} + \Delta\phi_+^{aberration} \quad (\text{Eq. 5. 14})$$

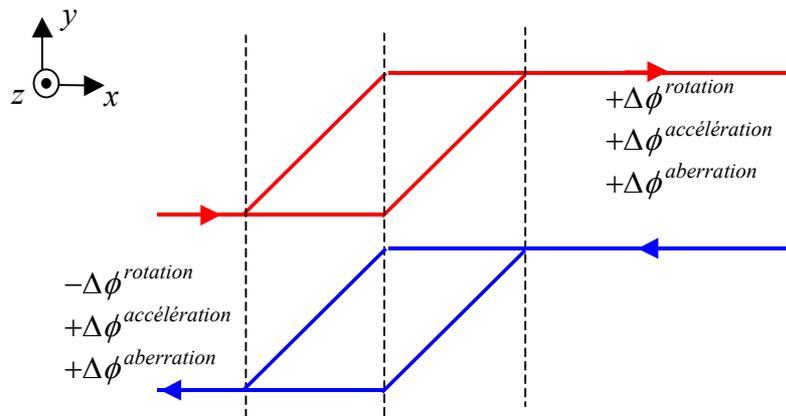
$$\Delta\phi_-^{total} = \Delta\phi_-^{rotation} + \Delta\phi_-^{accélération} + \Delta\phi_-^{aberration} \quad (\text{Eq. 5. 15})$$

avec :

$$\Delta\phi_-^{rotation} = -\Delta\phi_+^{rotation} \quad (\text{Eq. 5. 16})$$

En faisant la différence de ces deux déphasages, on obtient donc :

$$(\Delta\phi_+^{total} - \Delta\phi_-^{total}) = 2\Delta\phi_+^{rotation} \quad (\text{Eq. 5. 17})$$



**Figure 5. 6** : les déphasages liés à l'accélération et aux aberrations des front d'ondes sont identiques pour les deux jets atomiques. Par contre le déphasage lié à la rotation change de signe avec le sens de propagation.

On a supposé que  $\Delta\phi_-^{accélération} = \Delta\phi_+^{accélération}$  et que  $\Delta\phi_-^{aberration} = \Delta\phi_+^{aberration}$ . La première égalité est vraie dès que les deux interféromètres sont montés sur un même châssis rigide. Par contre la deuxième égalité suppose que les trajectoires atomiques des deux interféromètres sont parfaitement superposées et parcourues dans des sens opposés. Cette condition nous assure que les défauts de front d'onde vus par les atomes au moment des trois impulsions Raman sont bien identiques pour les deux sens de propagation.

De même en faisant la somme des deux déphasages on a :

$$\left(\Delta\phi_+^{total} + \Delta\phi_-^{total}\right) = 2\left(\Delta\phi_+^{accélération} + \Delta\phi_+^{aberration}\right) \quad (\text{Eq. 5. 18})$$

Le  $\Delta\phi^{aberration}$  peut être connu par d'autres techniques. Si l'on suppose par exemple, qu'il ne contient que des termes d'aberrations géométriques indépendants du temps, on peut préalablement mesurer les fronts d'ondes grâce à un analyseur de front d'onde de type SCHACK-HARTMANN, et connaître ainsi la valeur de  $\Delta\phi^{aberration}$ . Cette valeur est ensuite soustraite de la somme des déphasages lorsque l'on veut avoir accès à  $\Delta\phi^{accélération}$ .

Cette technique de double jet atomique est en quelque sorte l'équivalent de l'aller retour des atomes dans la cavité micro-onde d'une horloge atomique de type fontaine. Cette méthode permet de s'affranchir de la plupart des déphasages parasites, en particulier, les déphasages propres à la cavité et ceux liés à l'effet DOPPLER du premier ordre.

Un double jet atomique a été mis en œuvre sur le gyromètre de Yale [GUSTAVSON 98], et a montré son intérêt puisqu'il a permis de distinguer la rotation de l'accélération, et ainsi d'augmenter la stabilité court terme.

On peut rajouter que la réjection de l'accélération devrait être encore plus efficace avec des atomes froids. En effet, le déphasage lié à l'accélération (Eq. 5.12) dépend de la vitesse des atomes, par l'intermédiaire de  $T$ . Si les atomes dans les direction + et - n'ont pas la même vitesse, les déphasages  $\Delta\phi^{accélération}$  sont différents et la réjection ne se fait pas parfaitement. Pour des atomes froids la vitesse moyenne est bien mieux contrôlée et la réjection en est alors d'autant meilleure.

### 5.3 LES SEPARATRICES ATOMIQUES

La méthode utilisée pour séparer et recombinaer les ondes atomiques a une importance capitale sur les performances de l'appareil et sur sa conception. De la même façon que la cavité micro-onde dans une horloge atomique, les séparatrices atomiques sont le cœur de l'appareil.

Il y a un grand nombre de façons de séparer de façon cohérente des ondes atomiques, mais toutes ces méthodes se regroupent en deux grandes catégories : les composants mécaniques et les lames lumineuses.

### 5.4.1 Les composants mécaniques

De la même façon que la lumière est diffractée dans plusieurs ordres par un réseau, on peut réaliser des réseaux pour les ondes atomiques. Le pas du réseau  $a$  détermine l'angle de diffraction des différents ordres. En incidence normale, l'angle de diffraction est donné par :

$$\sin(\theta_{diff}) \approx \theta_{diff} = \frac{\lambda_{dB}}{a} = \frac{h}{mV a} \quad (\text{Eq. 5. 19})$$

On constate donc que pour avoir un angle de diffraction du même ordre de grandeur que celui donné par le recul d'un photon de longueur d'onde  $\lambda$  (voir paragraphe 4.1.3 et Eq. 4. 38), le pas du réseau doit être de l'ordre de  $\lambda$  soit typiquement inférieur au micromètre. De tels réseaux ont été réalisés [KEITH 91, EKSTROM 92], par dépôt de méthacrylate de polyméthyle (PPMA) sur des substrats de silicone. Le pas typique obtenu est de 140 nm avec une précision de quelques dizaines de nanomètres. Ces composants permettent donc d'atteindre des angles de séparation plus importants qu'avec des séparatrices optiques.

Ces réseaux présentent toutefois un certain nombre de désavantages :

- 1) La surface utile du réseau n'étant jamais très grande (environ  $50\mu\text{m} \times 50\mu\text{m}$ ), le diamètre du faisceau atomique doit donc être du même ordre de grandeur.
- 2) Le réseau est constitué de fentes d'environ 140 nm à travers lesquelles passent les atomes, ces fentes étant séparées de la même distance par un matériau opaque aux atomes. La transmission totale du réseau est donc proche de 50%.
- 3) Ces réseaux nécessitent l'utilisation de sources atomiques très bien collimatées car l'angle de divergence du jet atomique doit être très faible par rapport à  $\theta_{diff}$  afin de séparer les ordres de diffraction [SCHMIEDMAYER 97].
- 4) Les réseaux de diffraction ne provoquent pas de changement de l'état interne de l'atome, mais seulement de son impulsion. La détection est donc plus difficile à mettre en œuvre et les ordres doivent être parfaitement séparés (voir paragraphe 5.6).
- 5) La formule (Eq. 5.19) indique que l'angle de déviation de l'onde atomique, donc l'aire de l'interféromètre dépend du pas du réseau  $a$ . La valeur du pas doit être très bien connue et constante sur toute la surface des réseaux afin de garantir une bonne connaissance du facteur d'échelle. Les technologies actuelles ne donnent une reproductibilité que de 10 % sur la valeur du pas.
- 6) Si l'on veut réaliser un interféromètre de type MACH-ZEHNDER avec des réseaux de diffraction, les trois réseaux doivent être parfaitement alignés. La moindre rotation d'un des réseaux par rapport à l'un de ses axes entraîne un déphasage

supplémentaire en sortie, une perte du contraste des franges, et une modification de la valeur du facteur d'échelle [CHAMPENOIS 99].

### 5.4.2 Les lames lumineuses

Il existe un grand nombre de lames lumineuses différentes, utilisant des ondes stationnaires ou progressives, des transitions à un ou deux photons. Certaines méthodes permettent de transférer un grand nombre de fois l'impulsion du photon et ainsi d'augmenter considérablement l'angle de déviation.

Les interféromètres utilisant la diffraction de BRAGG de l'onde atomique sur des lames lumineuses stationnaires très désaccordées sont très similaires à ceux utilisant des réseaux mécaniques puisque la séparation des paquets d'ondes se fait sans changement d'état interne. Par contre le facteur d'échelle est bien connu car il dépend directement de la longueur d'onde optique. Parmi ces interféromètres on peut citer [RASEL 95 , GILTNER 95, DELHUILLE 01].

La séparation des ondes atomiques avec des lames lumineuses fonctionne sur le principe décrit au paragraphe 4.1.3. C'est l'impulsion de recul transférée par le photon à l'atome qui provoque la déviation angulaire de la trajectoire atomique. L'angle de déviation vaut alors (Eq 4. 38) :

$$\theta_{dev} = \frac{h}{mV \lambda_0} = \frac{\hbar |\mathbf{k}_{eff}|}{mV} \quad (\text{Eq. 5. 20})$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde du laser utilisé. Dans le cas de transitions RAMAN stimulées à faisceaux contra-propageants,  $\mathbf{k}_{eff} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 \approx 2\mathbf{k}_2$ , l'angle de déviation est donc deux fois plus important que dans le cas d'une transition à un seul photon.

On peut voir la lame lumineuse également comme un réseau de phase dont le pas est donné par  $a = 2\pi / k_{eff}$ , et dont la transmission est proche de 100 %.

Intérêts des lames lumineuses :

- 1) l'angle de déviation dépend directement de la longueur d'onde du laser, celle-ci étant très bien définie, le facteur d'échelle est donc connu très précisément.
- 2) les lames lumineuses peuvent être utilisées pour créer des impulsions limitées dans l'espace (interféromètre spatial) ou dans le temps (interféromètre temporel), ce qui permet d'avoir plus de souplesse dans la séquence d'impulsions.
- 3) l'interféromètre est plus lumineux puisque les lames transmettent quasiment 100% des atomes.

- 4) Si l'on se place dans le régime de BRAGG, un seul ordre de diffraction peut être peuplé, on obtient alors un contraste théorique de 100%.
- 5) Dans le cas de transitions RAMAN la diffraction se fait avec changement de l'état atomique interne, rendant ainsi la détection plus simple à mettre en œuvre. De plus la source n'a alors pas besoin d'être collimatée à un angle inférieur à  $\theta_{dev}$ .

### 5.4.3 Fonctionnement spatial ou temporel

Les lames lumineuses peuvent être limitées dans l'espace ou dans le temps. Nous avons déjà vu au chapitre 4 comment cette différence se traduisait sur les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Nous allons détailler ici d'autres caractéristiques, plus propres aux interféromètres atomiques.

#### 5.4.3.1 Fonctionnement spatial

Dans le premier cas, le faisceau laser est allumé en permanence et est généralement de direction perpendiculaire à la trajectoire atomique. La durée d'interaction est alors donnée par la vitesse atomique :  $\tau = D/V$ , où  $D$  est le diamètre du faisceau laser et  $V$  est la vitesse atomique. Dans un interféromètre réalisé avec de tel lames lumineuses, la durée de propagation entre les différentes lames dépend également de la vitesse atomique. La dispersion en vitesse atomique influe donc à deux niveaux :

- Une lame lumineuse est caractérisée par son aire  $\Theta$  donnée par (Eq. 4. 84) :  $\Theta = \Omega_{eff} \tau$ , où  $\Omega_{eff}$  est la pulsation de RABI correspondant à la transition utilisée. Si la durée d'interaction  $\tau$  dépend de la vitesse atomique, des atomes répartis dans des classes de vitesses différentes  $V_0$  et  $V_0 + dV$  ne verront donc pas le même type d'impulsion. Typiquement, un développement limité à l'ordre 1 en  $(dV/V_0)$  montre qu'une lame 50/ 50 (impulsion  $\pi/2$ ) pour la vitesse  $V_0$ , a un coefficient de réflexion  $R$  de :

$$R = 0,5 \times \left( 1 - \frac{\pi}{2} \frac{dV}{V_0} \right) \quad (\text{Eq. 5. 21})$$

pour la classe de vitesse  $V_0 + dV$ . Ce phénomène est parfois appelé aberration chromatique atomique. Il est du premier ordre en  $(dV/V_0)$  pour une impulsion  $\pi/2$  et du deuxième ordre pour une impulsion  $\pi$  <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> on peut montrer que dans le cas général d'une lame lumineuse d'aire  $\Theta$ , le coefficient de réflexion sans aberration vaut  $\sin^2(\Theta/2)$ , et le coefficient avec aberration chromatique due à la vitesse atomique est donné au

premier ordre en  $(dV/V_0)$  par :  $R = R_0 \left( 1 - \frac{\Theta \sin(\Theta)}{2R_0} \frac{dV}{V_0} \right)$

- La séparation transverse entre les paquets d'ondes atomiques est donnée par :

$$\Delta y = \theta_{sep} T \quad (\text{Eq. 5. 22})$$

où  $\theta_{sep}$  est donné par (Eq. 4. 38) et  $T = L/V$  est le temps de propagation entre deux lames successives séparées d'une distance  $L$ . Ainsi  $\Delta y$ , et par conséquent l'aire de l'interféromètre

$$A = L \times \Delta y = \frac{\hbar k_{eff}}{m} \frac{L^2}{V} \quad (\text{Eq. 5. 23})$$

dépendent de la vitesse atomique. Pour un gyromètre, ceci est très gênant car cela conduit à un brouillage des franges (comme mentionné au paragraphe 5.1.2.1).

La plupart des interféromètres à jet thermique et tous les interféromètres à réseaux de diffraction mécaniques utilisent un fonctionnement spatial.

### 5.4.3.2 Fonctionnement temporel

Dans ce cas les lasers sont allumés et éteints au cours du temps. Ce type de fonctionnement à l'avantage d'être plus souple et de permettre de changer facilement les paramètres expérimentaux tels que l'aire, la séquence d'impulsions, ...

- La durée de la lame lumineuse est donc parfaitement déterminée, et identique pour tous les atomes quelle que soit leur vitesse. Il peut néanmoins exister une aberration chromatique due au fait que le faisceau lumineux n'a pas un profil d'intensité uniforme, dans ce cas, des atomes situés à des endroits différents voient des intensités différentes, et donc des aires d'impulsion différentes. De la même façon que (Eq. 5. 21), le coefficient de réflexion de la lame lumineuse peut être relié au défaut relatif d'intensité ( $dI/I_0$ ). Pour une impulsion  $\pi/2$ , Ce coefficient de réflexion vaut, au premier ordre en ( $dI/I_0$ ) :

$$R = 0,5 \times \left( 1 - \frac{\pi}{4} \frac{dI}{I_0} \right) \quad (\text{Eq. 5. 24})$$

- La séparation transverse du paquet d'onde est donnée par (Eq. 5. 22), mais où  $T$  est indépendant de la vitesse atomique  $V$ . Par contre, l'aire de l'interféromètre dépend toujours de  $V$  :

$$A = L \times \theta_{sep} T = \frac{\hbar k_{eff}}{m} V T^2 \quad (\text{Eq. 5. 25})$$

Ainsi le fonctionnement temporel conduit également à un brouillage des franges d'interférences, pour un gyromètre, car l'aire  $A$  dépend de la vitesse atomique.

Les expériences fonctionnant de façon temporelle sont principalement celles utilisant des atomes froids. En effet, déterminons, dans le cas d'une transition RAMAN spatiale, le diamètre  $D = V\tau$  du laser nécessaire pour effectuer une impulsion  $\pi$  sur un atome froid lancé

à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . La relation (Eq. 4. 62) donne la sélectivité en vitesse transverse pour une telle impulsion. Si l'on veut au moins sélectionner les atomes à  $1 V_{\text{recul}} = 3,5 \text{ mm.s}^{-1}$ , la durée de l'impulsion doit être au plus de quelques dizaines de  $\mu\text{s}$ , le diamètre du faisceau vaut alors typiquement une dizaine de  $\mu\text{m}$ . Un tel faisceau est très difficile à réaliser, d'un part parce qu'il doit être collimaté et que pour de telles dimensions la divergence naturelle vaut environ  $3^\circ$ , d'autre part parce que les deux faisceaux RAMAN doivent être superposés à beaucoup mieux que le diamètre afin d'éviter les déphasages liés aux déplacements lumineux.

#### 5.4.4 Les impulsions multiples

Il existe des méthodes pour transférer l'impulsion de plusieurs photons pendant le passage dans la lame lumineuse. On appelle ces méthodes « à impulsions multiples », ou encore « multipulse ».

Dans le cas d'impulsion temporelle, des séparations de  $4\sqrt{2}\hbar k$  et  $8\hbar k$  ont été obtenus [FEATONBY 98, WEITZ 96] mais en utilisant des transitions sensibles au premier ordre au champ magnétique, ce qui n'est pas souhaitable pour un interféromètre ayant pour but une bonne stabilité et une bonne exactitude. Des techniques utilisant des transitions insensibles au premier ordre au champ magnétique ont été réalisées en rajoutant une succession d'impulsions  $\pi$  entre les trois lames lumineuses initiales. La difficulté de la méthode est d'inverser le sens de propagation de l'onde lumineuse après chaque impulsion pour que le transfert d'impulsion se fasse toujours dans le même sens. Des séparations de  $6\hbar k$  ont été produites par cette technique [MCGUIRK 00].

Dans le cas d'impulsion spatiale, plusieurs méthodes sont réalisables. On peut citer le cas de la lame magnéto-optique développée dans l'équipe de MLYNEK [ADAMS 93]. Cette technique consiste à diffracter l'onde atomique sur un potentiel magnéto-optique triangulaire. Ce potentiel est alors analogue à un réseau de phase blazé. L'efficacité de la diffraction est très bonne et des séparations de  $42 \hbar k$  ont ainsi été obtenues [PFAU 93].

Un tel potentiel triangulaire peut également être obtenu sans champ magnétique, grâce à deux ondes stationnaires désaccordées symétriquement par rapport aux deux transitions d'un atome à trois niveaux en V. Si les deux ondes ont un déphasage spatial relatif de  $\pi/2$ , l'un des trois états propres de l'atome est alors modulé spatialement par une fonction approximativement triangulaire. Une impulsion de  $38 \hbar k$  a ainsi été transférée à l'atome [JOHNSON 95].

Précisons que ces deux dernières techniques ne permettent pas encore de placer tous les atomes dans un ordre de diffraction unique, on obtient donc une multitude d'interféromètres d'aires différentes.

Toutes ces techniques permettent d'augmenter considérablement l'aire de l'interféromètre, et donc le facteur d'échelle, dans le cas d'un gyromètre.

### 5.4.5 Avantages des transitions Raman stimulées

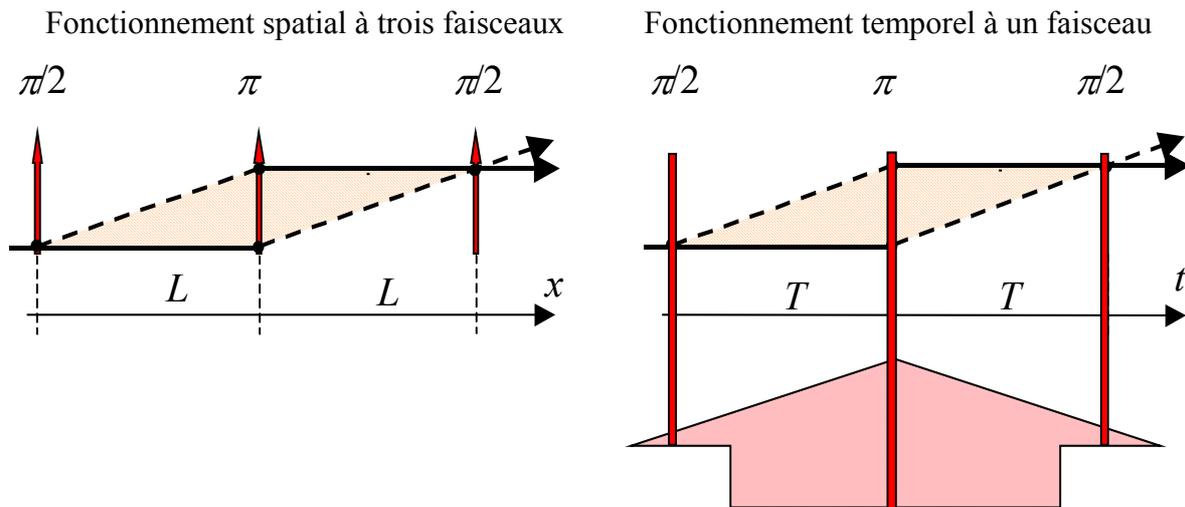
L'utilisation de transitions RAMAN stimulées dans les interféromètres atomiques a été proposé par Ch. BORDÉ [BORDÉ 91] et la réalisation expérimentale a été faite par M. KASEVICH et S. CHU en 1991 [KASEVICH 91]. Ces transitions présentent un certain nombre d'avantages :

- Les transitions RAMAN provoquent la transition vers un niveau atomique interne différent, ce qui rend la détection beaucoup plus simple à mettre en œuvre, et ne nécessitent pas de collimation du jet atomique plus petite que  $\theta_{dev}$ .
- Seule la différence de fréquence entre les deux lasers doit être stabilisée (i.e. fréquence dans le domaine micro-onde), ce qui est beaucoup plus simple que de stabiliser une fréquence dans le domaine optique. Dans le cas du césium, cette différence de fréquence vaut 9,2 GHz.
- La séparation des paquets d'ondes par transitions RAMAN s'apparente à de la diffraction en régime de BRAGG. Il est donc possible de peupler un unique ordre de diffraction et ainsi d'obtenir un contraste très élevé.
- L'efficacité de diffraction peut être ajustée simplement pour réaliser des lames 50/50 ou une déflexion de 100%.

### 5.4.6 Le faisceau unique

De même que dans le cas des réseaux mécaniques, les lames lumineuses composant un interféromètre doivent être parfaitement alignées, et leur direction ne doit pas fluctuer au cours du temps.

Une des limitations sur la stabilité long terme du gyromètre réalisé à Yale est due aux fluctuations de direction et de position des trois faisceaux laser composant l'interféromètre. En effet, le moindre défaut d'alignement des deux faisceaux induisant une transition RAMAN, provoque un déphasage parasite lié au fait que les faisceaux ne se recouvrent plus exactement, et donc les déplacements lumineux ne se compensent plus (voir paragraphe 4.2.4). L'utilisation d'un gros faisceau laser unique, appliqué dans le domaine temporel, pour réaliser les trois lames lumineuses permet de réduire considérablement ces fluctuations (voir Figure 5.7). Le calcul des déplacements lumineux sera explicité au chapitre 7.



**Figure 5.7** : l'interféromètre peut être réalisé dans le domaine spatial avec trois faisceaux distincts, la longueur  $L$  peut alors être relativement grande ( $L = 1$  mètre pour le gyromètre de Yale [GUSTAVSON 97]). Il peut être réalisé dans le domaine temporel avec un gros faisceau laser. Dans ce cas la distance entre deux impulsions successives est limitée par la taille du faisceau.

## 5.5 LA DETECTION

Il existe plusieurs méthodes de détection de l'état atomique en sortie de l'interféromètre. Nous allons en considérer deux ici, la première est une détection directe de l'impulsion des atomes, la seconde est une détection de l'état atomique interne.

### 5.5.1 Détection de l'impulsion

A la sortie de l'interféromètre, les atomes peuvent sortir dans deux états d'impulsions différentes  $|\mathbf{P}_f\rangle$  et  $|\mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle$ . Après une durée  $t_d$  après la dernière impulsion  $\pi/2$ , ces deux états se retrouvent séparés transversalement d'une distance  $d$  égale à :

$$d = \frac{\hbar\mathbf{k}_{eff}}{m}t_d \quad (\text{Eq. 5. 27})$$

On peut alors mettre en œuvre une détection des atomes utilisant le fait qu'ils sont localisés à des endroits différents. Ce type de détection est généralement constitué de fils chaud pour les atomes alcalins, ou bien de galettes de micro-canaux (channeltron) pour les gaz rares métastables. L'inconvénient de ces techniques est que le jet atomique doit être collimaté à mieux que la séparation transverse du paquet d'onde. On est obligé d'attendre un certain temps  $t_d$  après la dernière lame séparatrice avant de détecter les atomes.

L'utilisation de sources cohérentes telles que les condensats de BOSE-EINSTEIN présenterait un réel intérêt pour ce type de détection.

### 5.5.2 Détection optique de l'état interne

Dans notre expérience, l'utilisation de transitions RAMAN stimulées pour séparer les paquets d'ondes atomiques s'accompagne d'un changement d'état interne de l'atome (voir paragraphe 4.2). Les deux états possibles en sortie de l'interféromètre sont alors  $|f, \mathbf{P}_f\rangle$  et  $|e, \mathbf{P}_f + \hbar\mathbf{k}_{eff}\rangle$ . La détection des états internes est beaucoup plus simple à mettre œuvre que celle sur les états externes. Un simple laser accordé sur une transition cyclante  $|f\rangle \rightarrow |i\rangle$  (resp.  $|e\rangle \rightarrow |i\rangle$ ) permet, grâce au signal de fluorescence recueilli, de déterminer le nombre d'atomes dans l'état  $|f\rangle$  (resp.  $|e\rangle$ ), avec une très bonne efficacité. Le nombre d'atomes dans l'état  $|e\rangle$   $N_e$  permet alors de déterminer la probabilité de transition vers l'état  $|e\rangle$  :

$$P_e = \frac{N_e}{N_0} \quad (\text{Eq. 5. 28})$$

où  $N_0$  est le nombre d'atomes initial, ce nombre étant supposé connu et/ou constant au cours du temps.

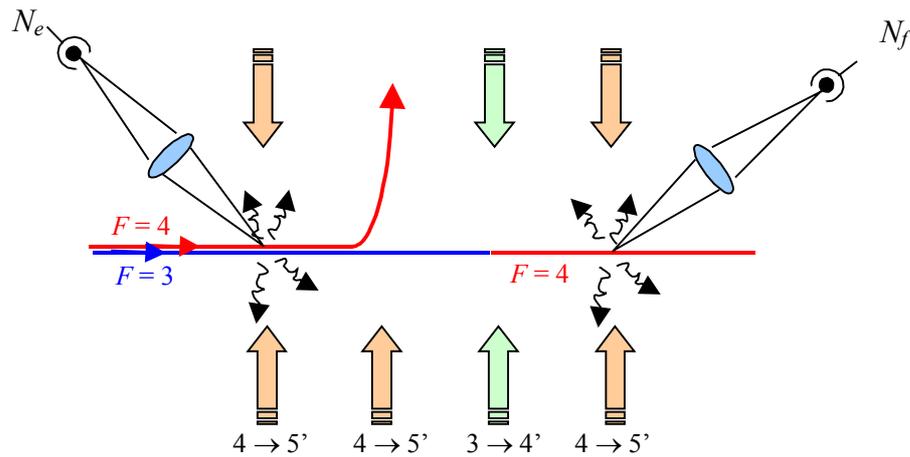
### 5.5.3 Détection avec renormalisation

Afin de s'affranchir des fluctuations du nombre d'atomes initial  $N_0$ , on peut mettre en œuvre une détection avec renormalisation. Cette technique consiste à déterminer les nombres d'atomes  $N_f$  et  $N_e$  respectivement dans les états  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$ , la probabilité de transition vers l'état  $|e\rangle$  est alors donnée par :

$$P_e = \frac{N_e}{N_f + N_e} \quad (\text{Eq. 5. 29})$$

Dans notre expérience, cette renormalisation est relativement simple à appliquer. Comme indiqué au paragraphe 5.3, les états  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$  correspondent respectivement aux deux sous niveaux hyperfins de l'état  $^6S_{1/2}$ ,  $|F = 3, m_F = 0\rangle$  et  $|F = 4, m_F = 0\rangle$ . La détection avec renormalisation se déroule en quatre étapes successives (voir **Figure 5. 8**) :

- 1) Une onde stationnaire accordée sur la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  de la raie D<sub>2</sub> permet de déterminer le nombre d'atomes  $N_e$ .
- 2) Une onde progressive de même fréquence que la précédente expulse ensuite ces atomes de l'expérience.
- 3) Une onde stationnaire accordée sur la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de la raie D<sub>2</sub> permet de repomper tous les atomes restant vers le niveau  $F = 4$ .
- 4) Une onde stationnaire identique à celle utilisée pour la première étape permet alors de déterminer le nombre d'atomes  $N_f$ .



**Figure 5.8** : détection avec renormalisation en quatre phases : détermination des atomes dans  $F = 4$ , éjection de ces atomes, pompage des atomes de  $F = 3$  vers  $F = 4$ , détermination des atomes dans  $F = 4$ .

## 5.6 LA CONCEPTION

Nous résumons ici l'ensemble des choix effectués pour la conception de l'appareil.

### La source atomique

La source atomique est un piège magnéto-optique d'atome de césium, lancée par une méthode de mélasse mouvante. L'angle de lancement est de  $8^\circ$  par rapport à la verticale et a été choisi pour optimiser la durée passée dans le faisceau RAMAN unique. La trajectoire est donc parabolique dans le plan  $(Oxz)$ . Cet angle a été choisi car il réalise un bon compromis entre une grande durée d'interaction (aire relativement importante) et faible temps de parcours des atomes avant la zone d'interaction, afin de réduire la dispersion de position des atomes dans le faisceau RAMAN.

### La préparation atomique

La préparation des atomes se fait par pompage hyperfin puis par sélection ZEEMAN micro-onde. La zone de préparation contient donc une cavité micro-onde et un faisceau pousseur.

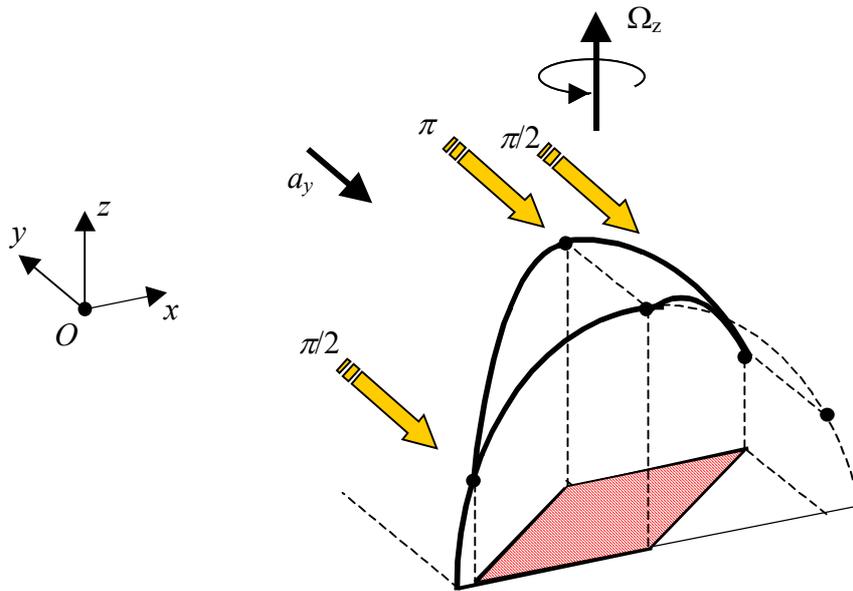
## Les séparatrices atomiques

Les séparatrices atomiques sont réalisées grâce à des transitions Raman stimulées. Ces impulsions lumineuses sont de type temporel, compte tenu de la faible vitesse des atomes. Dans le but d'avoir une très bonne stabilité long terme, on utilise un seul gros faisceau Raman pour les trois impulsions. Ceci limite notre zone d'interaction RAMAN à environ 3 centimètres.

La direction suivant laquelle les faisceaux sont appliqués donne l'axe d'entrée de l'appareil. On peut réaliser trois configurations différentes :

- *Sensibilité à  $\Omega_z$  et à  $a_y$  :*

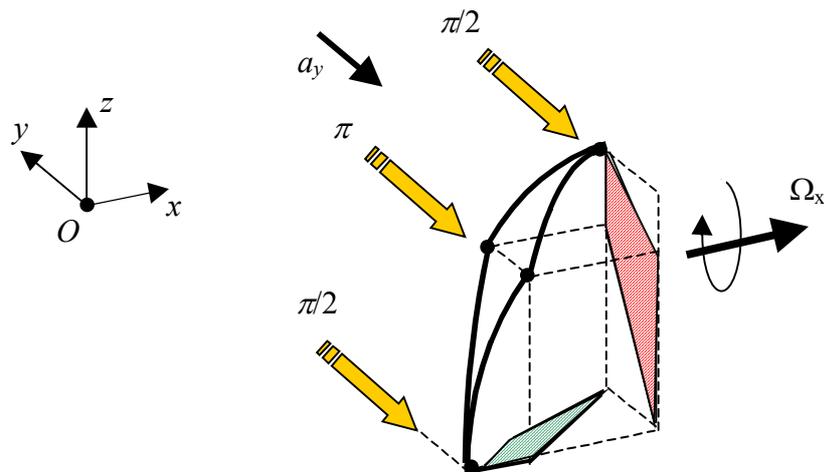
Les faisceaux RAMAN se propagent suivant la direction ( $Oy$ ) et permettent de séparer le paquet d'ondes atomiques suivant la direction ( $Oy$ ). La formule (Eq. 4. 105) indique que l'appareil est sensible aux accélérations d'axe ( $Oy$ ). En effectuant l'impulsion  $\pi$ , juste au sommet de la trajectoire atomique, les deux contributions de l'aire dans le plan ( $Oyz$ ) s'annulent, et seule reste la contribution de l'aire dans le plan ( $Oxz$ ), l'appareil est ainsi sensible aux rotations d'axe ( $Oz$ ) (voir **Figure 5. 9**).



**Figure 5. 9** : Les lasers sont suivant ( $Oy$ ) et sont appliqués de façon symétrique par rapport au sommet de la trajectoire atomique. La composante de l'aire dans le plan ( $Oyz$ ) s'annule et seule reste la composante dans le plan ( $Oxz$ ).

- *Sensibilité à  $\Omega_x$  et à  $a_y$  :*

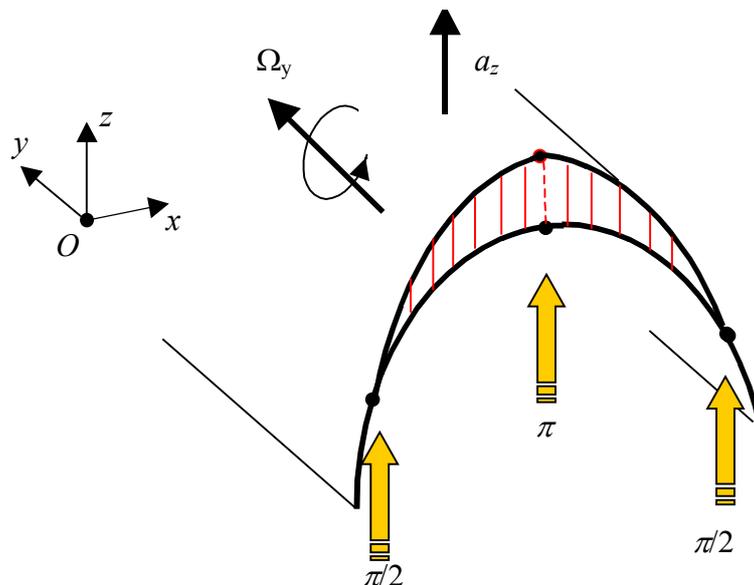
Si on effectue l'impulsion lorsque les atomes ne sont pas au sommet de leur trajectoire alors il reste une aire résiduelle dans le plan( $Oyz$ ). Cette aire donne une sensibilité aux rotations d'axe ( $Ox$ ) (voir **Figure 5. 10**).



**Figure 5. 10** : Les lasers sont suivant  $(Oy)$  et les trois impulsions sont appliquées pendant la montée. On obtient ainsi une composante de l'aire dans le plan  $(Oxy)$  et une dans le plan  $(Oyz)$ .

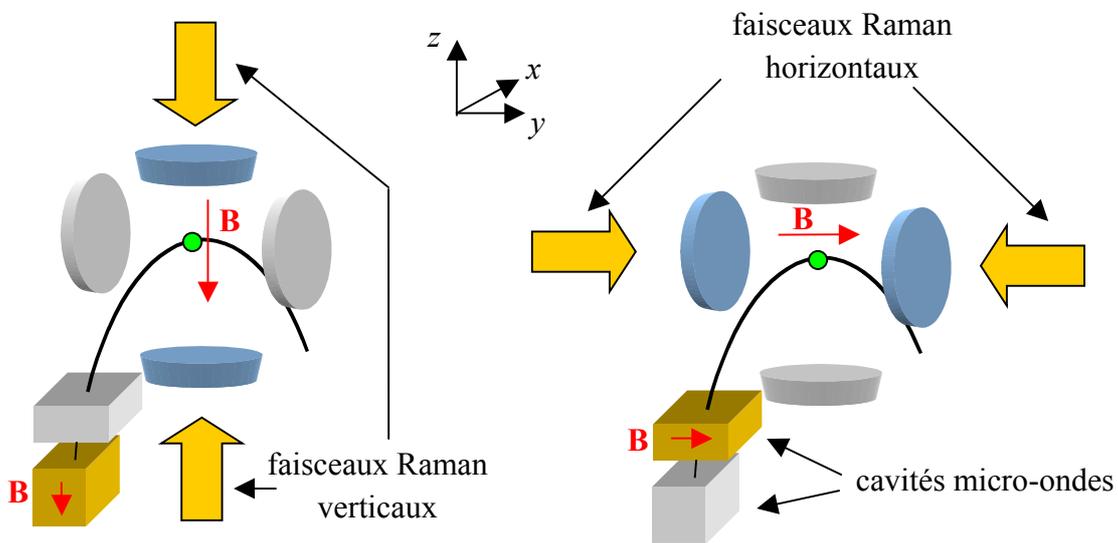
• *Sensibilité à  $\Omega_y$  et à  $a_z$  :*

En plaçant les faisceaux laser dans la direction  $(Oz)$ , l'appareil devient sensible aux accélérations d'axe  $(Oz)$ . L'aire de l'interféromètre apparaît dans le plan  $(Oxz)$ , et produit donc une sensibilité aux rotations d'axe  $(Oy)$  (voir Figure 5. 11).



**Figure 5. 11** : Les lasers sont suivant l'axe  $(Oz)$ , l'aire de l'interféromètre est donc dans le plan  $(Oxz)$ .

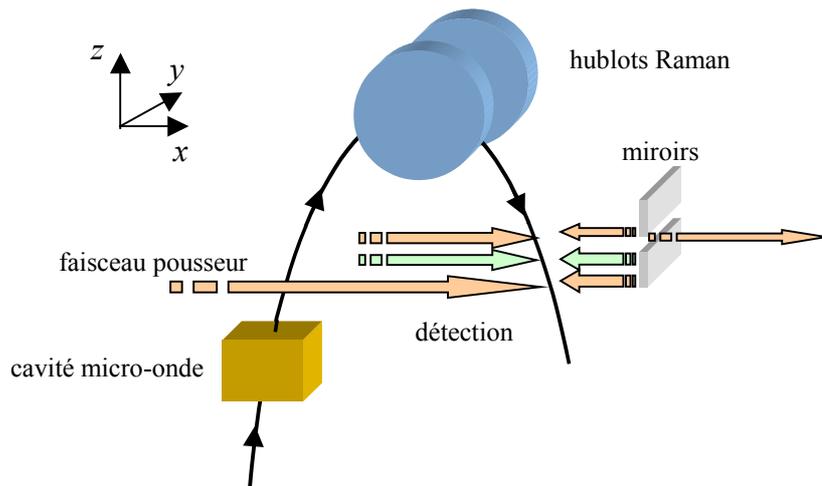
Le fait de pouvoir accéder aux trois configurations décrites complique sérieusement le dispositif expérimental. Outre les problèmes d'accès optiques dans les directions ( $Oy$ ) et ( $Oz$ ), les faisceaux RAMAN sont associés à un champ magnétique statique dirigé dans le sens des lasers, afin de ne rendre résonnant que les transitions  $F = 3, m_F = 0 \leftrightarrow F = 4, m_F = 0$ . Il faut donc prévoir deux champs magnétiques orthogonaux dans la zone d'interaction RAMAN. De plus afin d'éviter les transitions de MAJORANA, le même champ magnétique est appliqué dans la zone d'interaction RAMAN et dans la zone de préparation atomique. Cette préparation étant réalisée grâce à une cavité micro-onde rectangulaire  $TE_{0,1,1}$ , la cavité doit être alignée avec le champ magnétique statique. On prévoit alors deux cavités, la première alignée avec le champ magnétique suivant ( $Oy$ ), et la seconde suivant ( $Oz$ ) (voir **Figure 5. 12**).



**Figure 5. 12** : L'appareil dispose de deux cavités micro-ondes, une pour chacune des directions des faisceaux Raman ( $Oz$ ) à gauche et ( $Oy$ ) à droite.

### La détection

La détection, avec renormalisation, se fait de façon optique sur les états atomiques internes. Le fonctionnement séquentiel et la trajectoire parabolique permettent d'utiliser le même faisceau laser comme pousseur, au moment de la préparation atomique, et comme sonde au moment de la détection (voir **Figure 5. 13**).



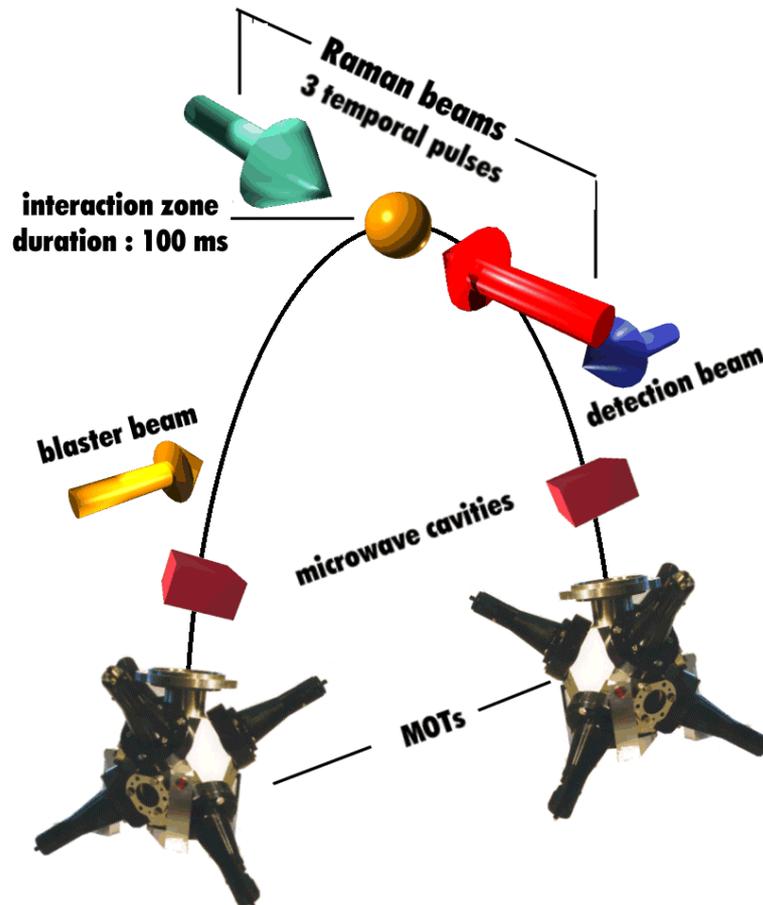
**Figure 5. 13** : Le même faisceau sert de pousseur au moment de la préparation atomique (désaccordé vers le bleu), et de sonde pour la phase de détection (accordé sur la transition).

### Le double jet atomique

L'appareil possède deux sources atomiques symétriques afin de mettre en œuvre une technique de double jet atomique dans le but de discriminer les déphasages liés à la rotation et à l'accélération (voir paragraphe 5.2.4).

### Schéma général

On donne **Figure 5. 14** le schéma de principe global de notre interféromètre.



**Figure 5. 14** : schéma de principe de notre appareil. On reconnaît les deux sources d'atomes froids symétriques, les deux doubles cavités micro-ondes et le faisceau pousseur pour la préparation atomique, le gros faisceau Raman et les faisceaux de détection.

Nous allons voir dans le chapitre suivant, comment toutes ces fonctions ont été intégrées dans le dispositif expérimental. De gros efforts ont été faits pour rendre cet appareil le plus compact et le plus modulable possible. De plus, les considérations de rapport signal à bruit, de contraste des franges de déphasage parasite et de stabilité à court et long terme ont été prises en compte afin de réaliser un appareil à vocation métrologique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ADAMS 93] C. Adams, T. Pfau, Ch. Kurtsiefer, J. Mlynek, "Interaction of atoms with a magneto-optical potential", *Phys. Rev. A*, **48**, 3, p 2108, (1993)
- [AUCOUTURIER 97] E. Aucouturier, "Nouvelles sources d'atomes froids pour l'horloge atomique", *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, Orsay, (1997)
- [AUDRETSCH 92] J. Audretsch, C. Lämmerzahl, "New Inertial and Gravitational Effects made Measurable by atomic Beam Interferometry", *Appl. Phys. B*, **54**, p 351, (1992)
- [BAKLANOV 76] Y. V. Baklanov, B. Y. Dubetsky, V. P. Chebotaeyev, *Appl. Phys.*, **9**, p 171, (1976)
- [BERQUIST 77] J. C. Berquist, S. A. Lee, J. L. Hall, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, p 159, (1977)
- [BERTHOUD 98] P. Berthoud, e al., *Europhys. Lett.*, **41**, p 141, (1998)
- [BERTHOUD 99] P. Berthoud, E. Fretel, P. Thomann, "Bright, slow and continuous beam of laser-cooled cesium atoms", *Phys. Rev. A*, **60**, 6, p 4241, (1999)
- [BORDÉ 91] Ch. J. Bordé, "Atomic Interferometry and Laser Spectroscopy", in *Laser Spectroscopy X*, Edited by M. Ducloy, E. Giacobino, G. Camy, World Scientific, p 239, (1991)
- [CÉREZ 91] P. Cérez, G. Théobald, V. Giordano, N. Dimarcq, M. de Labachellerie, "Laser diode optically pumped cesium beam frequency standard investigations at LHA", *IEEE Trans. Instr. Meas.*, **40**, 2, p 137, (1991)
- [CHAMPENOIS 99] C. Champenois, M. Büchner, J. Vigué, "Fringe contrast in three grating Mach-Zehnder atomic interferometers", *Eur. Phys. J. D*, **5**, p 363, (1999)
- [CLAIRON 91] A. Clairon, C. Salomon, S. Guellati, W. Phillips, "Ramsey resonance in a Zacharias fountain", *Europhys. Lett.*, **16**, p 165, (1991)
- [DE CLERCQ 84] E. de Clercq, M. de Labachellerie, G. Avila, P. Cérez, "Laser diode optically pumped caesium beam", *J. Physique*, **45**, p 239, (1984)
- [DELHUILLE 01] R. Delhuille, C. Champenois, M. Büchner, L. Jozefowski, Th. Lahaye, R. Mathevet, A. Miffre, C. Rizzo, C. Robillard, G. Trénetc, J. Vigué, "Some theoretical and experimental aspects of three grating Mach-Zehnder atom interferometers", *C.R. Acad. Sci Paris*, t. 2, **Série IV**, p 587, (2001)
- [DICK 87] G. Dick, "Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards", in *Proc. of Precise Time and Time Interval*, Redondo Beach, p 133, (1987)
- [EKSTROM 92] C.R. Ekstrom, D. W. Keith, D. E. Pritchard, "Atom Optics Using Microfabricated Structures", *Appl. Phys. B*, **54**, p 369, (1992)
- [EKSTROM 95] C. Ekstrom, J. Schmiedmayer, M. Chapman, T. Hammond, D. Pritchard, "Measurement of the electric polarizability of sodium with an atom interferometer", *Phys. Rev. A*, **51**, p 3883, (1995)

- [FEATONBY 98] P. Featonby, G. Summy, C. Webb, R. Godun, M. Oberthaler, A. Wilson, C. Foot, K. Burnett, "Separated-Path Ramsey Atom Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, p 495, (1998)
- [GILTNER 95] D. Giltner, R. McGowan, S. Lee, "Atom Interferometer Based on Bragg Scattering from Standing Light Waves", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 14, p 2638, (1995)
- [GUSTAVSON 97] T. Gustavson, P. Bouyer, M. Kasevich, "Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 11, p 2046, (1997)
- [GUSTAVSON 98] T. L. Gustavson, P. Bouyer, M. Kasevich, "Methods for ultra-sensitive detection", *Ed. B. L. Fearey Proc. SPIE 3270*, p 62, (1998)
- [GUSTAVSON 00] T.L. Gustavson, " Precision rotating sensing using atom interferometry", thèse de doctorat, Stanford University, Stanford, (2000)
- [HOUDE 00] O. Houde, D. Kadio, L. Pruvost, "Cold Atom Beam Splitter Realized with Two Crossing Dipole Guides", *Phys. Rev. Lett.*, **85**, p 5543, (2000)
- [JOHNSON 95] K. Johnson, A. Chu, T. Lynn, K. Berggren, M. Shahriar, M. Prentiss, "Demonstration of a nonmagnetic blazed-grating atomic beam splitter", *Opt. Lett.*, **20**, 11, p 1310, (1995)
- [KASEVICH 91] M. Kasevich, D. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu, " Atomic Velocity Selection using Stimulated Raman Transitions", *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 18, p 2297, (1991)
- [KASEVICH 91-2] M. Kasevich, S. Chu, "Atomic Interferometry Using Stimulated Raman transitions", *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 181, (1991)
- [KEITH 91] D.W. Keith, C.R. Ekstrom, Q.A. Turchette, D.E. Pritchard, "An Interferometer for Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **66**, p 2693, (1991)
- [LANDRAGIN 99] A. Landragin, T. L. Gustavson, M.A. Kasevich, "Precision atomic gyroscope", *Laser Spectroscopy XIV*, Edited by R. Blatt, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, World Scientific, Singapore, p 170 (1999)
- [LENEF 97] A. Lenef, T. D. Hammond, E. T. Smith, M. S. Chapman, R. A. Rubenstein, D. E. Pritchard, "Rotation Sensing with an Atom Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 760, (1997)
- [LUCAS-LECLIN 98] G. Lucas-Leclin, "Importance des propriétés spectrales des lasers pour les performances des horloges atomiques à pompage optique", *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, Orsay, (1998)
- [MCGUIRK 00] J. McGuirk, M. Snadden, M. Kasevich, "Large Area Light-Pulse Atom Interferometry", *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 21, p 4498, (2000)
- [MORINAGA 88] A. Morinaga, J. Helmcke, *Appl. Phys. B*, **45**, p 273, (1988)
- [MORINAGA 89] A. Morinaga, F. Riehle, J. Ishikawa, J. Helmcke, *Appl. Phys. B*, **48**, p 165, (1989)
- [MORINAGA 93] A. Morinaga, T. Tako, N. Ito, " Sensitive measurement of phase shifts due to ac Stark effect in a Ca optical Ramsey interferometer ", *Phys. Rev. A*, **48**, p 1364, (1993)

- [MÜLLER 95] J. Müller, D. Battermann, V. Rieger, K. Sengstock, U. Sterr, W. Ertmer, *Appl. Phys. B*, **60**, p 199, (1995)
- [PETERS 98] A. Peters, "High precision gravity measurements using atom interferometry", thèse de doctorat, Stanford University, Stanford, (1998)
- [PETERS 99] A. Peters, C. Keng Yeow, S. Chu, "Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms", *Nature (London)*, **400**, p 849, (1999)
- [PFAU 93] T. Pfau, Ch. Kurtsiefer, C. Adams, M. Sigel, J. Mlynek, "Magneto-Optical Beam Splitter for Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 21, p 3427, (1993)
- [RAMSEY 56] N.F. Ramsey, "Molecular beams", *Ed. Oxford Uni. Press*, Oxford, (1956)
- [RASEL 95] E. Rasel, M. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, A. Zeilinger, "Atom wave Interferometry with Diffraction Grating of Light", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 14, 2633, (1995)
- [RIEGER 93] V. Rieger, K. Sengstock, U. Sterr, J. Müller, W. Ertmer, *Opt. Commun.*, **99**, p 172, (1993)
- [RIEHLE 91] F. Riehle, Th. Kister, A. Witte, J. Helmcke, Ch. Bordé, "Optical Ramsey Spectroscopy in a Rotating Frame : Effect in a Matter-Wave Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 177 (1991)
- [RIEHLE 92] F. Riehle, T. Kister, A. Witte, J. Helmcke, in *Laser Spectroscopy X*, Ed. M. Ducloy, E. Giacobino, G. Camy, World Scientific, p 239, (1992)
- [SANTARELLI 96] G. Santarelli, "Contribution à la réalisation d'une Fontaine atomique", *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI*, Paris, (1996)
- [SCHMIEDMAYER 97] J. Schmiedmayer, M. Chapman, C. Ekström, T. Hammond, D. Kokorowski, A. Lenef, R. Rubenstein, E. Smith, D. Pritchard, "Optics an interferometry with atoms and molecules", in *Atom Interferometry by P. Berman*, Ed. Academic Press, p 1, (1997)
- [SNADDEN 98] M. Snadden, J. McGuirk, P. Bouyer, K. Haritos, M. Kasevich, "Measurement of the Earth's Gravity Gradient with an Atom Interferometer-Based Gravity Gradiometer", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5, p 971, (1998)
- [SORTAIS 00] Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, A. Clairon, Ch. Salomon, C. Williams, "Cold Collision Frequency Shifts in a  $^{87}\text{Rb}$  Atomic Fountain", *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 15, p 3117, (2000)
- [STERR 97] U. Sterr, K. Sengstock, W. Ertmer, "Atom Interferometry based on separated light fields", in *Atom Interferometry by P. Berman*, Ed. Academic Press, p 293, (1997)
- [WEISS 93] D. Weiss, B. Young, S. Chu, " Precision Measurement of the Photon Recoil of an Atom using Atomic Interferometry", *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 18, p 2706, (1993)
- [WEITZ 96] M. Weitz, T. Heupel, T. Hansch, "Multiple Beam Atomic Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **77**, p 2356, (1996)

- [WEYERS 97] S. Weyers, E. Aucouturier, C. Valentin, N. Dimarcq, "A continuous beam of cold cesium atoms extracted from a two-dimensional magneto-optical trap", *Opt. Commun.*, **143**, p. 30, (1997)
- [ZEISKE 95] K. Zeiske, G. Zinner, F. Riehle, J. Helmcke, *Appl. Phys. B*, **60**, p 205, (1995)







## Chapitre 6 : REALISATION DU PROTOTYPE

## TABLE DES MATIERES :

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 6.1     | ENCEINTE A VIDE .....   | 155 |
| 6.1.1   | Choix du matériau .....   | 155 |
| 6.1.2   | Description de l'assemblage .....   | 155 |
| 6.1.4   | Précision mécanique.....  | 156 |
| 6.1.3   | Les hublots .....   | 157 |
| 6.1.5   | La réserve de césium .....  | 160 |
| 6.2     | LA SOURCE ATOMIQUE .....  | 161 |
| 6.2.1   | Le banc de refroidissement .....  | 162 |
| 6.2.2   | Les coupleurs de fibres optiques .....  | 169 |
| 6.2.2.2 | Description et caractérisation .....  | 169 |
| 6.2.2.3 | Utilisation des coupleurs de fibres .....                                     | 171 |
| 6.2.3   | La boule de refroidissement .....   | 172 |
| 6.2.4   | Les collimateurs de refroidissement.....                                      | 173 |
| 6.2.5   | Les gradients de champs magnétiques .....                                     | 176 |
| 6.2.6   | Les blindages magnétiques.....  | 177 |
| 6.2.7   | Les différentes phases de piégeage, de refroidissement et de lancement... 179 |     |
| 6.2.7.1 | Piège magnéto-optique.....  | 182 |
| 6.2.7.2 | Coupure du gradient de champ magnétique .....                                 | 185 |
| 6.2.7.3 | Mélasse mouvante et lancement des atomes.....                                 | 185 |
| 6.3     | PREPARATION ATOMIQUE .....  | 187 |
| 6.3.1   | La cavité micro-onde.....   | 188 |
| 6.3.2   | Le faisceau pousseur .....  | 190 |
| 6.3.3   | Mise en œuvre de la préparation atomique.....                                 | 190 |
| 6.4     | LA ZONE D'INTERACTION RAMAN.....  | 191 |
| 6.4.1   | Production des faisceaux RAMAN.....   | 191 |
| 6.4.1.1 | Diode modulée à 4,6 GHz .....   | 192 |
| 6.4.1.2 | Le verrouillage de phase .....  | 194 |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 6.4.1.3 | Puissance optique nécessaire aux faisceaux RAMAN..... | 195 |
| 6.4.2   | Le reste du montage des faisceaux RAMAN.....          | 196 |
| 6.5     | LA DETECTION .....                                    | 197 |
| 6.5.1   | Les faisceaux de détection.....                       | 197 |
| 6.5.2   | Le système de détection .....                         | 198 |
| 6.6     | CONCLUSION .....                                      | 199 |
|         | BIBLIOGRAPHIE .....                                   | 200 |



## CHAPITRE 6 :

### REALISATION DU PROTOTYPE

Le but de ce chapitre est de décrire le prototype. Cette réalisation a constitué la principale partie du travail de thèse et il nous semble donc important de la décrire en détail. Si les bancs optiques de refroidissement et RAMAN ressemblent beaucoup à ceux qui sont couramment utilisés dans les expériences à atomes froids, une attention toute particulière a été apportée au TUBE. On désigne ici par TUBE, l'ensemble de l'enceinte à vide et de tous les composants optiques qui viennent se fixer sur cette enceinte mécanique. Cette partie de l'expérience a été complexe à concevoir, et l'est aussi à décrire. Un certain nombre d'éléments sont connectés entre eux et il n'est pas toujours facile d'en décrire un sans avoir décrit les autres.

Afin de rendre compte de la complexité du TUBE, on peut le résumer en quelques chiffres : 2 pièges magnéto-optiques, 4 cavités micro-ondes, 4 blindages magnétiques, 7 types de colles différents, 16 ou 18 fibres optiques reliant le tube aux différents bancs optiques, 28 hublots permettant de rentrer les faisceaux lasers ou de récupérer les photons de fluorescence, plus d'une centaine de composants optiques (lentilles, cubes, lames, ...) fixés directement sur le TUBE, plusieurs centaines de vis et plusieurs milliers d'heures de travail. Au bout du compte, plus qu'un simple gyromètre, on obtient un appareil qui potentiellement peut mesurer 3 rotations suivant trois axes orthogonaux, et 2 accélérations dans un plan vertical.

La stratégie choisie pour décrire cette machine infernale est de suivre les atomes dans un cycle expérimental complet, du piégeage jusqu'à la détection.

On commence ainsi par détailler l'enceinte à vide.

On verra ensuite les ingrédients nécessaires aux phases de piégeage, de refroidissement et de lancement des atomes. Ceci nous amènera à décrire les BOULES DE REFROIDISSEMENT, les coupleurs de fibres optiques et le banc de refroidissement.

Une fois les atomes lancés vers le haut, ils vont subir la phase de PRÉPARATION ATOMIQUE, grâce aux cavités micro-ondes et au faisceau pousseur.

Les atomes ainsi préparés dans un état atomique insensible au champ magnétique, pénètrent alors dans la ZONE D'INTERACTION, qui constitue véritablement le cœur de l'appareil.

C'est dans cette zone que les paquets d'ondes atomiques sont, grâce aux impulsions RAMAN, séparés en deux puis recombinaés pour interférer. Nous détaillerons le banc optique RAMAN, ainsi que toute l'optique *in vitro*, permettant de contrôler la phase des faisceaux RAMAN.

Nous terminerons notre voyage par la ZONE DE DÉTECTION, où les atomes sont interrogés sur les différents effets inertiels qu'ils ont subis pendant la phase d'interaction RAMAN.

## 6.1 ENCEINTE A VIDE

### 6.1.1 Choix du matériau

L'inox, qui est couramment utilisé pour réaliser des enceintes à vide, était dans notre cas exclu car son magnétisme est trop important, même dans sa version inox "amagnétique", et il nécessite un étuvage à 300°C pour désorber l'hydrogène. Notre enceinte à vide est donc réalisée en alliage d'aluminium : le dural AU4G, qui nous garantit une très bonne tenue à l'ultra-vide, un magnétisme résiduel inférieur à quelques  $\mu$ Gauss, et un étuvage proche de 100°C pour désorber la vapeur d'eau. Cette dernière remarque est importante car dans notre cas, les traitements antireflet des hublots ne supportent pas des températures supérieures à 150°C. Il faut préciser de plus, qu'aucun des autres éléments que l'on place dans l'enceinte à vide ne nécessite d'étuvage supérieur à 100 °C. Le dural est alors très bien adapté <sup>(1)</sup> (les graphites sont étuvés séparément à 800°C)

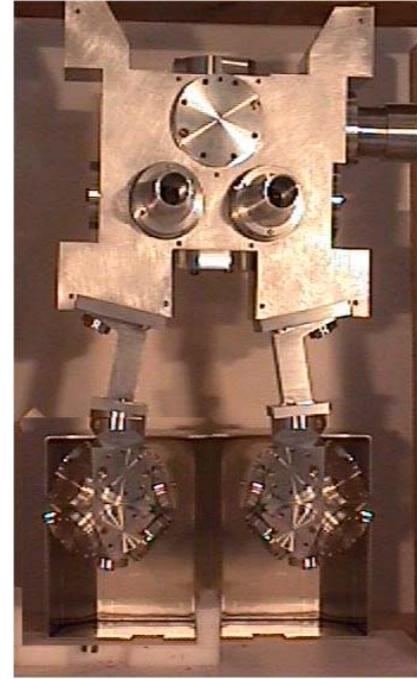
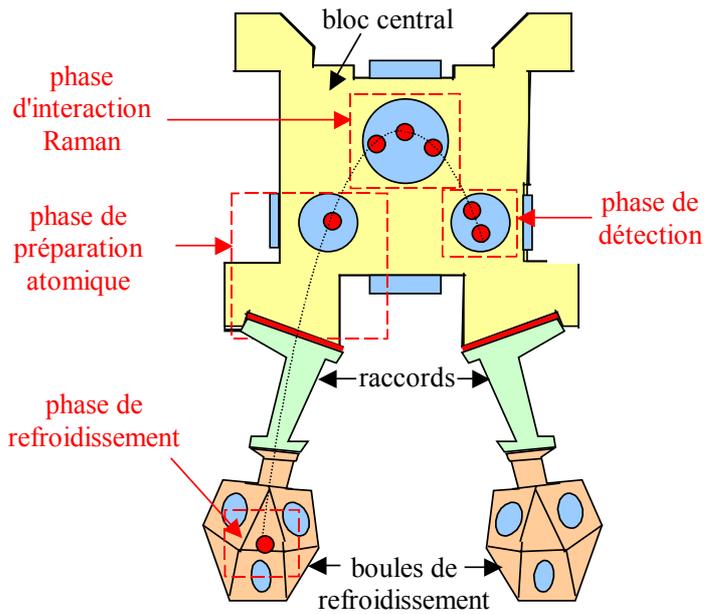
### 6.1.2 Description de l'assemblage

Vue de l'extérieur, cette enceinte est composée de cinq sous-ensembles principaux : un bloc central qui constitue la partie interféromètre de l'expérience, auquel sont reliés, par l'intermédiaire de raccords, deux boules de refroidissement dans lesquelles les atomes vont être piégés (voir **Figure 6. 1**). Les atomes sont lancés à partir des boules de refroidissement, les phases de préparation atomique, d'interaction RAMAN et de détection se situent quant à elles dans le bloc central.

L'ensemble de cette enceinte à vide fait environ 500 mm de haut sur 250 mm de large et 150 mm de profondeur. Elle est pompée par une pompe ionique de 25 litres/s, assurant un vide de quelques  $10^{-9}$  à  $10^{-10}$  hPa, ce qui nous permet de minimiser considérablement les effets de collision avec le gaz résiduel.

---

<sup>(1)</sup> Dans le cas où l'on veut une enceinte amagnétique mais pouvoir étuver à plus de 200°C, on peut utiliser un alliage de titane (TA6V), qui présente en plus l'avantage d'être plus dur, on obtient alors des états de surfaces de meilleurs qualités. C'est ce qui a été fait pour l'enceinte à vide de l'horloge spatiale PHARAO. Cet alliage coûte cependant deux fois plus cher que le dural et présente une moins bonne conductivité thermique que ce dernier.



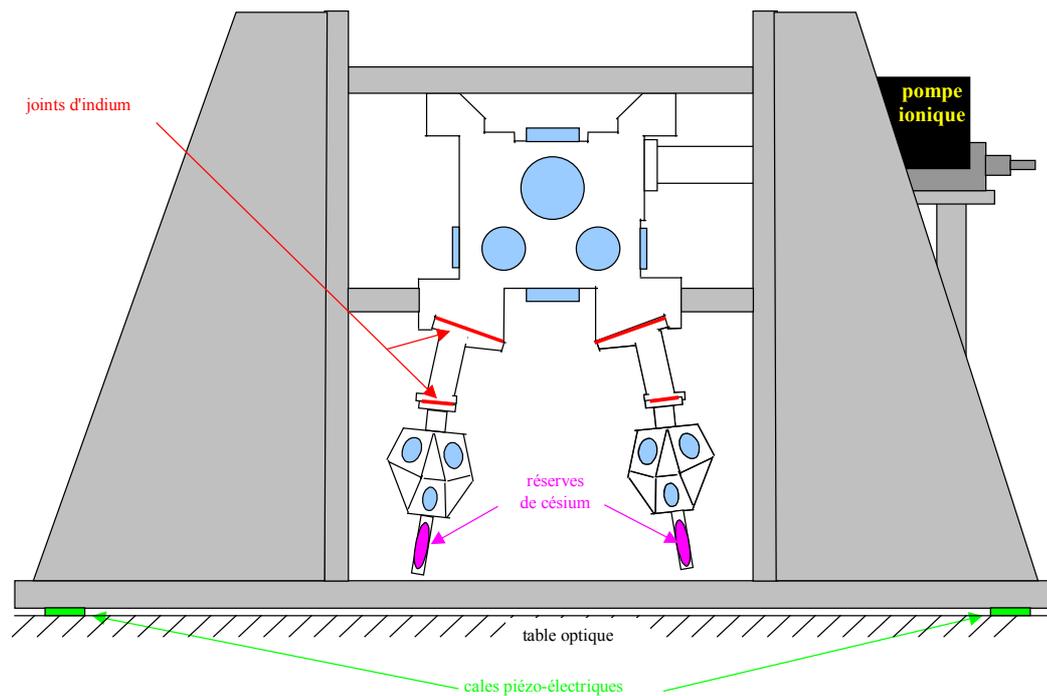
**Figure 6. 1** : schéma de l'enceinte à vide où l'on peut voir les principaux éléments : le bloc central, les deux raccords et les deux boules de refroidissement.

#### 6.1.4 Précision mécanique

La précision mécanique des pièces constituant l'enceinte à vide est typiquement de  $50 \mu\text{m}$  ( $5/100^{\text{ième}}$  de millimètre) pour les longueurs et de quelques arcsecondes pour les angles. Il faut préciser que l'étanchéité entre les cinq sous-ensembles constituant l'enceinte à vide est réalisée avec des joints en indium. Lorsque ceux-ci s'écrasent ils gardent une épaisseur résiduelle d'environ  $100 \mu\text{m}$  qui conduit à une légère incertitude ( $10^{-3}$  radian) sur l'angle entre les différentes pièces (voir **Figure 6. 2**).

La rigidité de l'ensemble du dispositif est assurée par un châssis en plaques pré-usinées de Fortal<sup>(1)</sup>. En jouant sur l'orientation du châssis grâce à des cales piézo-électriques ou avec du clinquant, on peut à l'aide d'un niveau électronique, régler la verticalité du dispositif avec une précision de quelques  $\mu\text{rad}$ .

<sup>(1)</sup> C'est un alliage d'aluminium plus robuste que le dural et qui présente une meilleure qualité d'usinage et de plus faibles déformations thermiques.



**Figure 6. 2** : schéma du châssis supportant l'enceinte à vide.

Les atomes sont en interaction avec la lumière laser dans plusieurs zones différentes du gyro, au cours de leur refroidissement et de leur piégeage, lors du lancement, pendant la phase de préparation atomique, dans la partie interféromètre, et enfin au cours de la détection. Tous ces faisceaux lasers sont injectés dans l'enceinte à vide à travers des hublots en verre.

### 6.1.3 Les hublots

Le rôle des hublots est de permettre le passage de la lumière (faisceaux lasers ou lumière de fluorescence) à travers l'enceinte à vide, tout en assurant une très bonne étanchéité. Deux techniques de montages de hublot sur l'enceinte (toutes les deux amagnétiques) ont été utilisées, suivant la qualité de front d'onde que l'on souhaitait obtenir.

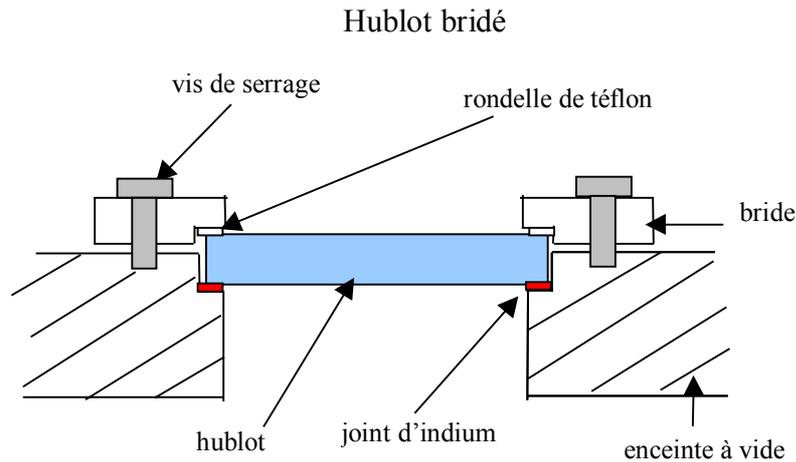
#### 1) Hublots bridés

Au niveau des boules de refroidissement, les faisceaux lasers rentrent dans l'enceinte à vide en passant à travers des hublots en verre BK7 de diamètre 30 mm ( $\varnothing 30$ ), de qualité optique  $\lambda/10$ , traités antireflet et serrés sur les boules avec une bride en dural. L'étanchéité est assurée grâce à un joint en indium de 1 mm de diamètre (voir **Figure 6. 3**). Le serrage est réalisé avec des vis en Arcap amagnétique. Une rondelle de téflon est placée entre le hublot et la bride pour répartir les contraintes mécaniques et limiter le risque de casse. Cette technique de serrage par bride exerce des contraintes importantes sur le hublot qui tend à se déformer.

Des tests réalisés par mesure interférométrique <sup>(1)</sup> sur un hublot initialement à  $\lambda/20$  montre qu'après le serrage par bride, sa qualité optique se dégrade à  $\lambda/2,5$  (voir **Figure 6. 5**).

Chaque boule de refroidissement possède également trois hublots  $\varnothing 25$  à  $\lambda/4$  pour récupérer la fluorescence du piège, et imager ce dernier avec une caméra, afin d'en déterminer les caractéristiques. Ces hublots sont bridés de la même façon que les précédents.

Le bloc central possède six hublots de détection  $\varnothing 40$  à  $\lambda/4$  traités antireflet, deux pour rentrer les faisceaux de détection et quatre pour récupérer la fluorescence. Vu la faible qualité optique nécessaire, ces hublots sont également bridés sur l'enceinte à vide.



**Figure 6. 3** : le hublot en verre est serré sur l'enceinte à vide grâce à une bride en aluminium. L'étanchéité est assurée par un joint en indium.

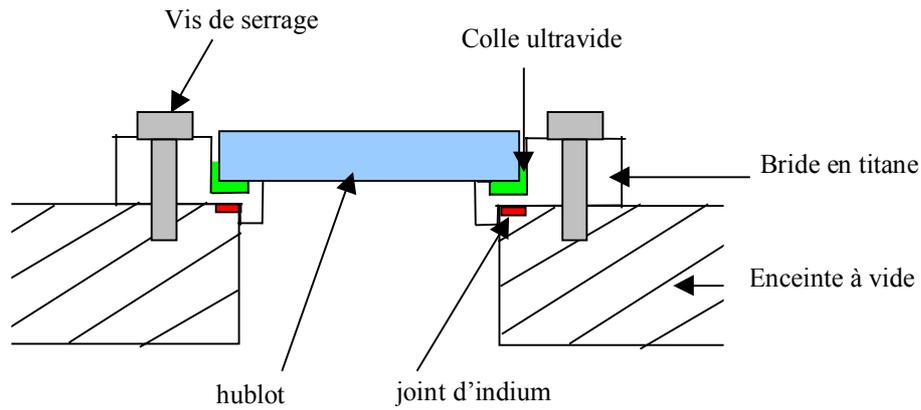
### 1) Hublots collés

Les faisceaux RAMAN rentrent dans le bloc central par quatre hublots  $\varnothing 50$  à  $\lambda/20$ . La qualité optique de ces hublots doit être extrêmement bonne pour ne pas rajouter dans l'interféromètre, des déphasages dus aux aberrations géométriques des faisceaux. Ces hublots ne peuvent donc pas être bridés comme les autres, vu les contraintes mécaniques que cette technique introduit.

Une solution consiste à serrer préalablement la bride sans hublot, sur l'enceinte à vide, puis à venir coller le hublot sur la bride (voir **Figure 6. 4**). Une bride en titane a été choisie car son coefficient de dilatation ( $8,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^\circ\text{C}$ ) est très proche de celui du verre BK7 ( $7,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^\circ\text{C}$ ). Les fluctuations de température n'introduisent donc quasiment pas de contrainte par dilatation différentielle. Cette solution a également été testée et la qualité optique du hublot collé s'est révélée être de l'ordre de  $\lambda/16$  (voir **Figure 6. 6**).

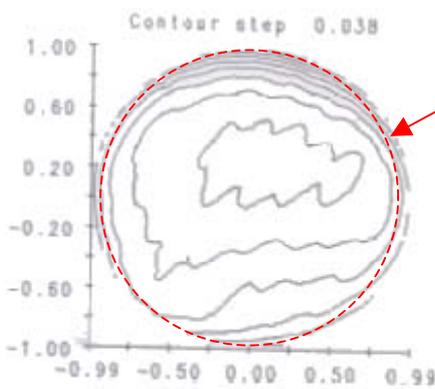
<sup>(1)</sup> Ces tests ont été réalisés à l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée, grâce à l'interféromètre à décalage de phase (Zygo).

Hublot collé

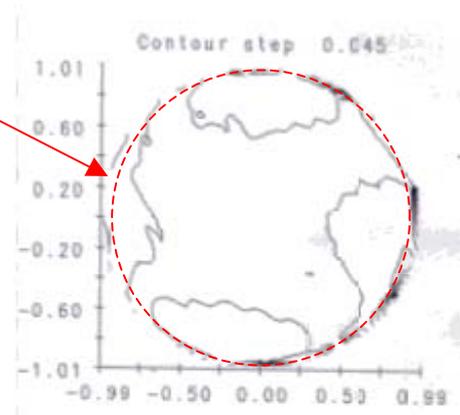


**Figure 6. 4** : la bride est vissée sur l'enceinte à vide avec un joint d'indium pour assurer l'étanchéité. Le hublot en verre est ensuite collé sur la bride avec de la colle ultravide.

On observe que si on serre ou on desserre une vis de la bride, une fois le hublot collé alors des contraintes réapparaissent sur le hublot. Ainsi en tournant une des vis d'un angle de 5°, on détériore la qualité optique du hublot à  $\lambda/7$ . Le système reste donc démontable (dans le cas où on raye un hublot par exemple) mais dès que l'on démonte la bride il faut changer le hublot.



**Figure 6. 5** : hublot Ø50 bridé, qualité :  $\lambda/2,5$ . On observe les courbes isophases sur la surface du hublot. L'écart entre deux courbes correspond à une variation d'épaisseur optique de  $\lambda/26$ . On observe une dizaine de courbes sur la surface utile.



**Figure 6. 6** : hublot Ø50 collé, : qualité :  $\lambda/16$ . L'écart entre deux courbes correspond à une variation d'épaisseur optique de  $\lambda/22$ . On observe environ une courbe et demi sur la surface utile.

La colle utilisée pour coller les hublots doit assurer l'étanchéité de l'enceinte à vide au niveau de  $10^{-10}$  hPa et avoir un taux de dégazage le plus faible possible. Quatre colles différentes ont été testées. C'est finalement une colle bi-composant Epotek qui a été retenue, celle-ci permettant d'obtenir un vide de  $2.10^{-10}$  mbar ( $2.10^{-8}$  Pa) après un étuvage à 100°C en

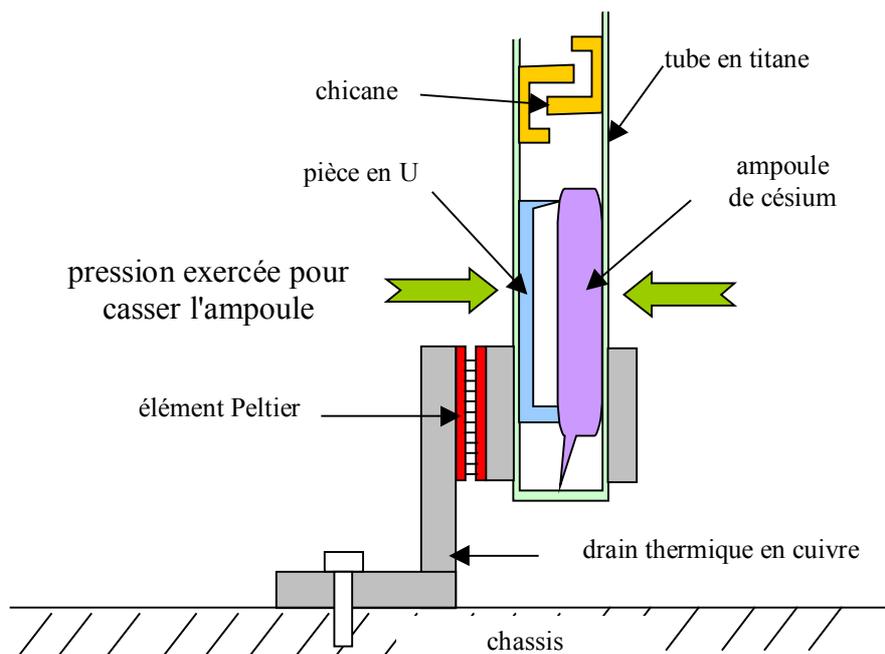
un temps de pompage d'environ une journée. Cette colle est de plus conçue spécialement pour le collage d'optique de précision car elle introduit très peu de tension mécanique.

### 6.1.5 La réserve de césium

L'enceinte à vide dispose de deux réserves de césium placées en dessous des boules de refroidissement (voir **Figure 6. 2**). C'est une ampoule de verre contenant 1 gramme de césium placée dans un tube en titane de paroi très mince ( $300 \mu\text{m}$ ). Ce dispositif permet de casser l'ampoule de verre par pincement élastique du tube de titane, lorsque l'expérience est sous vide. Pour augmenter l'efficacité, une amorce de rupture est réalisée au diamant sur l'ampoule de verre, et celle-ci est placée dans une pièce en U, de telle façon que l'ensemble ampoule + pièce en U soit ajusté dans le tube en titane (voir **Figure 6. 7**).

On contrôle la pression de césium dans la boule grâce à un élément PELTIER fixé sur le tube en titane. La face chaude du PELTIER est reliée au châssis, qui sert de radiateur, par l'intermédiaire d'un drain thermique.

Afin d'éviter tout jet de césium direct dans l'expérience, une chicane peut être disposée à la sortie du tube en titane.

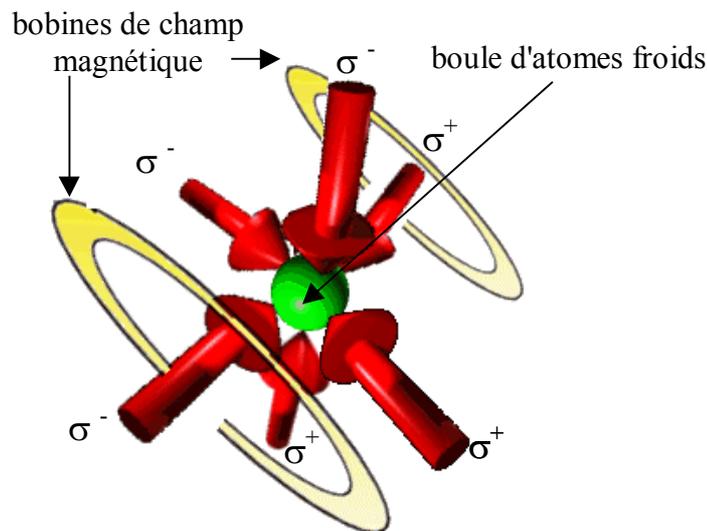


**Figure 6. 7** : schéma de la réserve de césium. On y voit le système pour casser l'ampoule de césium, le système de régulation de température pour contrôler la pression de césium dans la boule, et la chicane qui sert à éviter le jet direct de césium dans l'expérience.

Dans les expériences qui vont suivre, la température de la réserve de césium est réglée à  $40 \text{ }^\circ\text{C}$ , la densité de vapeur de césium dans la zone de piégeage, mesurée en absorption, est de l'ordre de quelques  $10^9$  atomes par  $\text{cm}^3$ .

## 6.2 LA SOURCE ATOMIQUE

Notre source atomique est un piège magnéto-optique [RAAB 87, DALIBARD 89] contenant environ  $10^8$  atomes refroidis à une température proche du  $\mu\text{K}$ . Cette boule d'atomes est ensuite lancée vers le haut par une technique dite de "mélasse mouvante" [CLAIRON 91]. Ce dispositif nécessite l'utilisation de six faisceaux laser de polarisation adaptée, associés par paire dans les trois directions de l'espace, et d'un gradient de champ magnétique dans les directions des lasers (voir **Figure 6. 8**).



**Figure 6. 8** : schéma de principe du piège magnéto-optique. Il est composé de 6 faisceaux refroidisseurs de polarisation adaptées et d'un gradient de champ magnétique. Un laser repompeur est superposé au faisceaux refroidisseurs.

La mise en œuvre de ces techniques étant très largement détaillée dans la littérature [METCALF 99], nous ne reviendrons pas ici sur les différents mécanismes physiques qui entrent en jeu.

L'originalité de notre source atomique réside essentiellement dans deux points :

- Tout d'abord sa réalisation technique. Nous avons élaboré un « *module* » source d'atomes froids de petites dimensions (cube de 200 mm de côté), facilement transportable grâce à l'utilisation de fibres optiques, et relativement indépendant de l'environnement magnétique grâce à des blindages magnétiques.
- Ensuite sa modularité, qui fait qu'il est aussi facile à partir de notre système de réaliser une ou deux sources d'atomes froids identiques, ceci grâce à l'utilisation de coupleurs à fibres optiques. Notre expérience utilise donc deux sources d'atomes froids identiques, symétriques, comme décrit dans le paragraphe 5.6.

Nous allons détailler chacun des six éléments constituant cette source d'atomes froids :

- Un banc optique permettant de produire les différentes fréquences optiques utiles.

Dans la suite du chapitre, ce banc optique sera appelé le BANC DE REFROIDISSEMENT.

- Un système transportant les faisceaux générés par le banc de refroidissement jusqu'à l'enceinte à vide. Nous allons voir que dans notre expérience, cette fonction est assurée par deux COUPLEURS À FIBRES OPTIQUES.

- Une zone mécanique ayant la géométrie adéquate pour réaliser le refroidissement et le piégeage. Cette partie de l'enceinte à vide est la BOULE DE REFROIDISSEMENT, déjà mentionnée au paragraphe 6.1.2.

- Une optique de mise en forme pour chacun des différents faisceaux laser, directement disposée sur le tube à vide. Ces systèmes optiques sont appelés COLLIMATEURS DE REFROIDISSEMENT par la suite.

- Un système de BOBINES DE CHAMP, en configuration anti-HELMOLTZ créant un gradient de champ magnétique dans les trois directions de l'espace.

- Un BLINDAGE MAGNÉTIQUE servant à isoler magnétiquement la zone de piégeage du reste de l'environnement.

Nous terminerons cette partie en détaillant les différentes phases nécessaires à la production de cette source (refroidissement DOPPLER, sub-DOPPLER, lancement), puis nous regarderons les performances de cette source atomique, nous donnerons en particulier les valeurs du flux et de la température atomique, et la stabilité de la vitesse et de la direction de lancement.

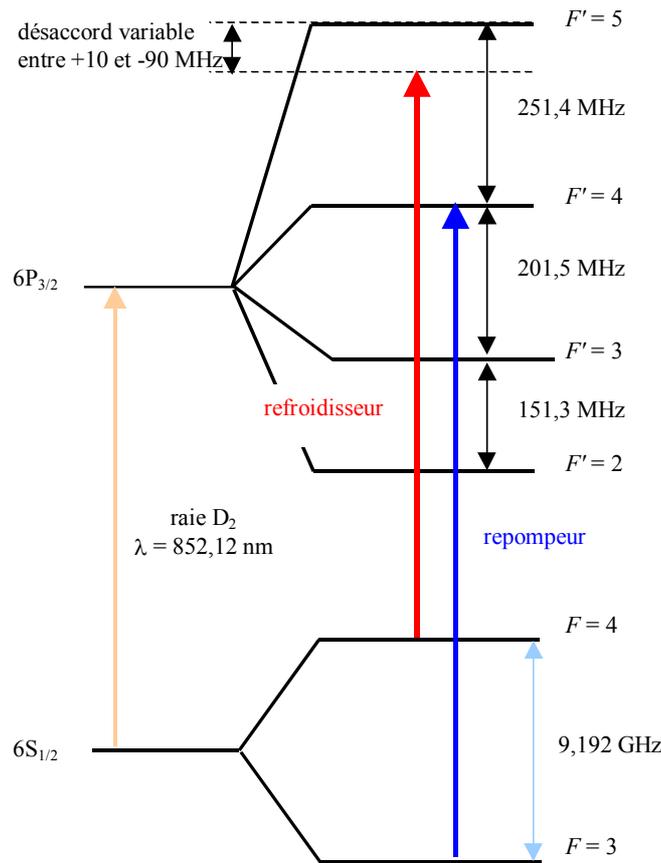
### 6.2.1 Le banc de refroidissement

Ce banc fournit les faisceaux nécessaires au refroidissement, au piégeage et au lancement des atomes. Il génère différents faisceaux dont les fréquences sont voisines de la raie  $D_2$  du césium (voir **Figure 6. 9**) :

- Un faisceau appelé REFROIDISSEUR, accordé à une fréquence proche de la fréquence de transition atomique  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  (transition cyclante). C'est en jouant sur le désaccord de ce faisceau par rapport à la transition atomique que l'on réalise soit un refroidissement DOPPLER, soit un refroidissement sub-DOPPLER, soit le lancement des atomes.

- Un faisceau appelé REPOMPEUR, qui est asservi sur la transition atomique  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  (transition pompante). Sa fréquence et son intensité sont fixes tout au long des différentes phases.

Le refroidissement des atomes est réalisé grâce aux cycles absorption-émission induits par le laser refroidisseur. Le laser repompeur sert à ramener dans le cycle de refroidissement, les atomes qui seraient retombés sur le niveau  $F = 3$ , et pour qui le laser refroidisseur est alors trop désaccordé.



**Figure 6. 9** : diagramme d'énergie de la raie D<sub>2</sub> du césium. Le repompeur est accordé sur la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$ , son rôle étant de ramener vers le niveau  $F = 4$  les atomes qui ont échoué dans  $F = 3$ . Le refroidisseur, légèrement décalé vers le rouge par rapport à la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ , fait effectuer aux atomes des cycles de refroidissement absorption – émission.

### 6.2.1.1 Faisceaux refroidisseurs

Les faisceaux refroidisseurs sont générés à partir de deux diodes de puissance R1 et R2, qui réalisent respectivement les faisceaux refroidisseurs du bas et du haut. R1 et R2 sont injectées optiquement par une même diode laser maître RM de bonne finesse spectrale. Ceci nous assure que les fluctuations de fréquence des différents faisceaux refroidisseurs seront complètement corrélées (pas de dissymétrie de la force de friction), et que l'intensité optique sera suffisante pour chaque faisceau refroidisseur.

Pour les phases de piégeage et de refroidissement, les fréquences de R1 et R2 sont identiques. Par contre, au moment de la phase de lancement la fréquence de R2 doit différer de quelques MHz de celle de R1. Les chemins optiques servant à faire les injections des diodes R1 et R2, à partir de la diode maître RM, sont donc indépendants, permettant ainsi d'obtenir des fréquences différentes sur ces deux diodes.

Les diodes R1 et R2 servent également à générer les faisceaux de détection. C'est pour ce rôle que la contrainte sur la largeur de raie des lasers est la plus sévère. Une largeur de raie inférieure à quelques centaines de kHz doit être obtenue si l'on ne veut pas dégrader le rapport signal à bruit au niveau de la détection [DIMARCQ 93, SIMON 97]. Ceci explique pourquoi la diode maître RM est un laser en cavité étendue, et non pas une diode DBR (largeur de raie :  $\sim 3$  MHz).

### 1) Diode maître RM et trajet d'injection

#### • Description de la diode RM

La diode maître RM est une diode laser 150 mW (SDL 5422 G1) montée en cavité étendue auto-alignée dépliée [DIMARCQ 94, FERMIGIER 98]. L'élément sélectif utilisé est un réseau (1500 traits / mm) et l'auto-alignement est réalisé par un dièdre plein. La diode laser est régulée en température par un élément PELTIER externe, au niveau de quelques centièmes de degré. Ce montage est issu des études réalisées dans le cadre du projet d'horloge spatiale PHARAO. Par rapport à une cavité étendue auto-alignée standard, il possède trois particularités techniques intéressantes :

- La semelle du montage et le support de la diode laser sont réalisés en un seul bloc d'INVAR, garantissant une très bonne stabilité mécanique.
- L'accord en fréquence est assuré par deux cales piézo-électriques permettant de réaliser un mouvement de rotation / translation du dièdre de renvoi. Ceci assure un accord continu plus important que pour un mouvement de translation simple [FAVRE 86].
- Le mouvement de rotation est transmis au dièdre par une pièce spéciale réalisée par électro-érosion, assurant ainsi une transmission du mouvement sans contrainte au niveau du dièdre.

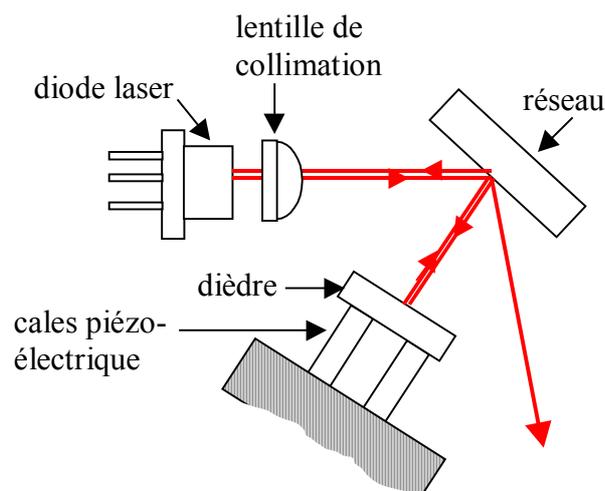


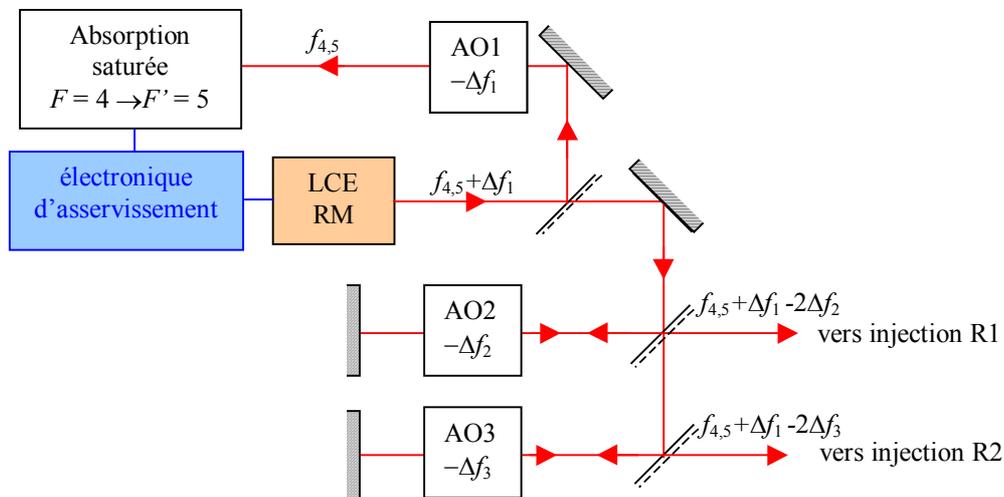
Figure 6. 10 : schéma du laser en cavité étendue dépliée auto-alignée

La largeur de raie de cette diode en cavité n'a pas été mesurée, mais cette mesure a été faite sur des lasers équivalents. Elle est de l'ordre de 150 kHz. La puissance de sortie est volontairement limitée à 15 mW pour un courant de 68 mA, afin d'augmenter la durée de vie de la diode.

- Asservissement de la diode RM

La diode maître RM est asservie sur la transition atomique  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  de la raie  $D_2$  par une technique d'absorption saturée dans une cellule de césium. En réalité ce n'est pas le faisceau directement issu de RM qui est asservi, mais ce faisceau, dont la fréquence est décalée de  $-\Delta f_1$  grâce à un modulateur acousto-optique AO1 ( $\Delta f_1$  varie entre 150 et 250 MHz). Comme AO1 est dans la boucle d'asservissement, le faisceau sortant de RM a donc sa fréquence asservie à  $+\Delta f_1$  par rapport à la fréquence  $f_{4,5}$  de la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  (voir **Figure 6. 11**). L'asservissement de fréquence est réalisé grâce à une détection synchrone fonctionnant autour de 100 kHz. Le signal d'erreur est une première fois intégré et envoyé sur le courant de diode, puis intégré une seconde fois et envoyé sur la commande des cales piézo-électriques.

Pour éviter que cet asservissement ne décroche lorsque l'on change brutalement la fréquence  $\Delta f_1$  de 160 MHz à 250 MHz au moment du refroidissement sub-DOPPLER, on ajoute un petit courant sur l'entrée de diode pour aider l'asservissement à suivre la fréquence. D'après l'amplitude du signal d'erreur en boucle fermée, les fluctuations de fréquences résiduelles de RM sont de l'ordre de quelques dizaines de kHz.



**Figure 6. 11** : schéma de l'asservissement de la diode maître RM, et des trajets d'injection des diodes esclaves R1 et R2 .

- Injection des diodes R1 et R2.

Le faisceau issu de RM à la fréquence  $f_{4,5} + \Delta f_1$  est séparé en deux parties égales, puis chacune des deux parties passe dans un modulateur acousto-optique (AO2 de fréquence  $-\Delta f_2$  et AO3 de fréquence  $-\Delta f_3$ ) utilisé en double passage. Les fréquences  $\Delta f_2$  et  $\Delta f_3$  sont égales à 80 MHz pour le piégeage et le refroidissement et ne diffèrent entre elles que pour la phase de

lancement : on a alors  $\Delta f_2 = 80 \text{ MHz} - \delta f / 2 = 79,2 \text{ MHz}$  et  $\Delta f_3 = 80 \text{ MHz} + \delta f / 2 = 80,8 \text{ MHz}$ . Les deux faisceaux sont ensuite utilisés pour injecter optiquement les deux diodes laser esclaves R1 et R2. La forme des faisceaux et leur polarisation sont adaptées pour optimiser l'injection. Quelques centaines de  $\mu\text{W}$  seulement sont nécessaires pour les faisceaux d'injection.

- Pilotage des modulateurs acousto-optiques

Tous les modulateurs acousto-optiques sont pilotés par des VCO générant des fréquences commandables en tension. Afin d'éviter toute fluctuation de fréquence entre les faisceaux servant à injecter R1 et R2, AO2 et AO3 sont pilotés par le même VCO lors des phases de piégeage et de refroidissement. Ce VCO délivre un signal à 80 MHz, issu de la multiplication par 8 du signal 10 MHz généré par synthétiseur DS 45 SRS. Pour la phase de lancement AO2 et AO3 sont pilotés par deux VCO distincts eux mêmes pilotés par deux synthétiseurs utilisant la même base de temps à 10 MHz. Pour réaliser le lancement, les fréquences de ces synthétiseurs sont fixées à  $(10\text{MHz} - \delta f / 16)$  et  $(10 \text{ MHz} + \delta f / 16)$ . On génère ainsi les fréquences symétriques nécessaires au lancement.

## 2) Les diodes esclaves R1 et R2

Les diodes utilisées pour R1 et R2 sont des diodes SDL 5422- H1 de type FABRY-PEROT avec élément PELTIER intégré, dont la puissance de sortie atteint 150 mW. L'injection optique transfère les qualités spectrales de la diode maître RM, aux deux diodes esclaves R1 et R2 [KOBAYASHI 81]. La largeur de raie de R1 et R2 est donc voisine de 100 kHz.

La diode R1 est utilisée pour générer les faisceaux refroidisseurs du bas, et R2 réalise ceux du haut. La coupure en intensité de ces deux faisceaux est réalisée par deux modulateurs acousto-optiques AO4 et AO5 fonctionnant à  $\Delta f_4 = \Delta f_5 = -80 \text{ MHz}$ . Les VCO pilotant AO4 et AO5 sont également asservis en fréquence sur la même référence, pour éviter toutes fluctuations de fréquence de l'un par rapport à l'autre. On rappelle qu'une différence de fréquence de 1 kHz suffit pour lancer les atomes à  $1 \text{ mm.s}^{-1}$ . Les faisceaux sont ensuite injectés chacun dans un coupleur à fibres optiques (détaillé paragraphe 6.2.2). On dispose pour chacun de ces faisceaux d'environ 75 mW de puissance optique à l'entrée de chaque coupleur.

On a ainsi réalisé deux faisceaux refroidisseurs asservis en fréquence l'un avec l'autre, dont les désaccords respectifs par rapport à la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  peuvent être différents l'un de l'autre, et varier entre  $-90 \text{ MHz}$  et  $+10 \text{ MHz}$ .

On a représenté dans le tableau ci-dessous les fréquences typiques des cinq modulateurs acousto-optiques en fonction des phases de refroidissement. Les colonnes HAUT et BAS désignent respectivement les désaccords résultants par rapport à  $f_{4,5}$  pour le trièdre de faisceaux du haut et pour celui du bas. Les différentes phases seront décrites en détails au paragraphe 6.2.7.

| Phase       | AO1  | AO2        | AO3        | AO4 | AO5 | BAS       | HAUT      |
|-------------|------|------------|------------|-----|-----|-----------|-----------|
| DOPPLER     | -230 | -80 (×2)   | -80 (×2)   | -80 | -80 | -10 MHz   | -10 MHz   |
| Coupure B   | -215 | -80 (×2)   | -80 (×2)   | -80 | -80 | -25 MHz   | -25 MHz   |
| Lancement   | -230 | -79,2 (×2) | -80,8 (×2) | -80 | -80 | -23,4 MHz | -26,6 MHz |
| Sub-DOPPLER | -165 | -80 (×2)   | -80 (×2)   | -80 | -80 | -75 MHz   | -75 MHz   |

### 6.2.1.2 Faisceau repompeur

Le faisceau repompeur est issu d'une diode laser 150 mW (SDL 5422-H1) montée en cavité étendue de type LITTROW. Ce montage est bien connu et décrit largement dans la littérature [LUCAS-LECLIN 98]. Ce laser est asservi en fréquence sur le croisement de niveaux  $F = 3$ ,  $F' = 4$ , par un montage en absorption saturée. La diode laser est donc asservie à -100 MHz par rapport à la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$ . La partie utile du faisceau est remise à résonance avec cette transition grâce au modulateur acousto-optique AO6, puis est injectée dans la deuxième entrée du coupleur n° II. La puissance du faisceau repompeur à l'entrée du coupleur est de l'ordre de 5 mW. Le modulateur acousto-optique AO6 est utilisé à fréquence fixe  $\Delta f_6 = 100$  MHz, et il ne sert qu'à la coupure rapide ( $\leq 1 \mu s$ ) du faisceau repompeur. L'association du modulateur AO6 et de l'injection dans le coupleur donne une extinction supérieure à 80 dB.

On présente **Figure 6. 12**, un schéma détaillé du banc de refroidissement.

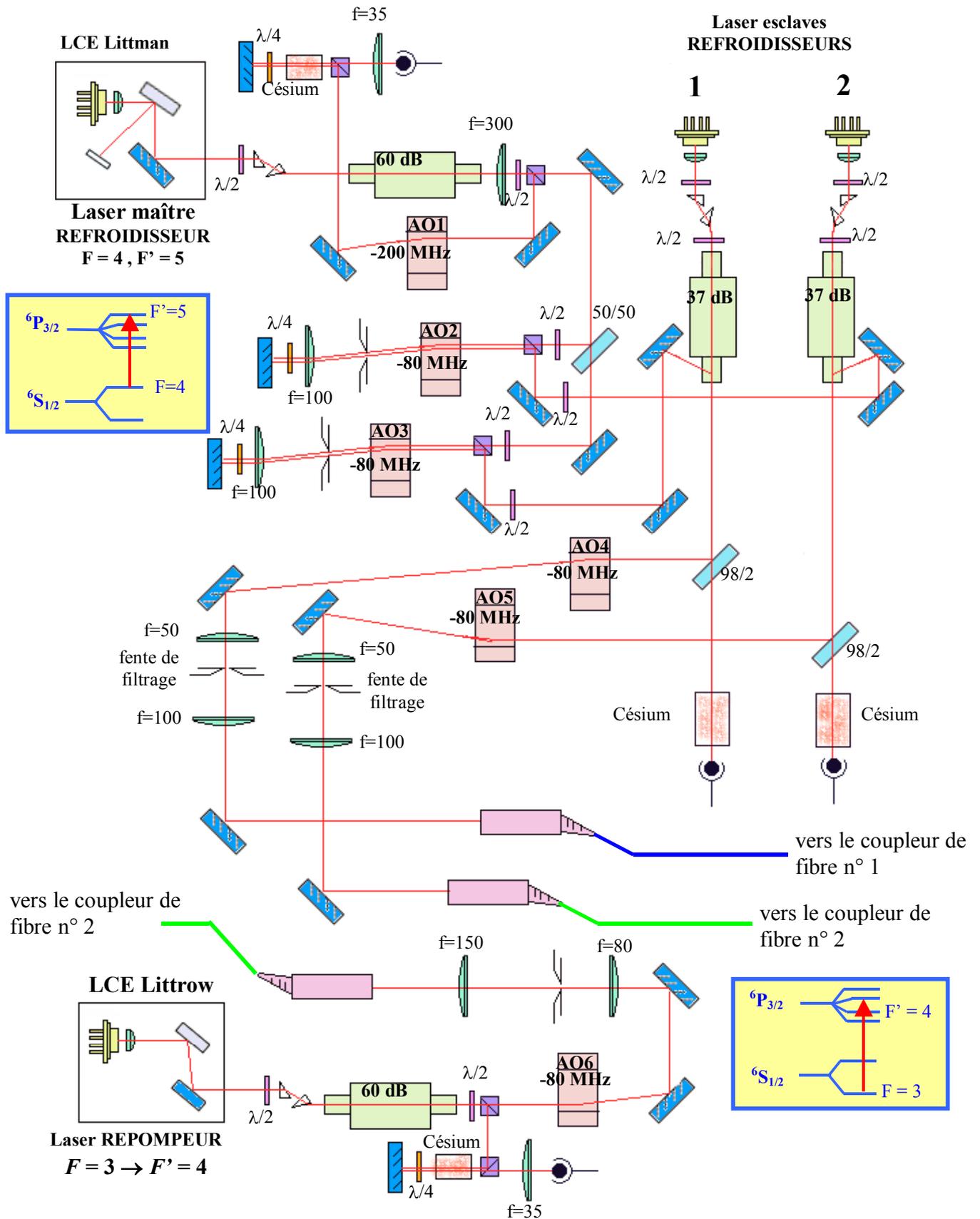


Figure 6. 12 : schéma du banc de refroidissement

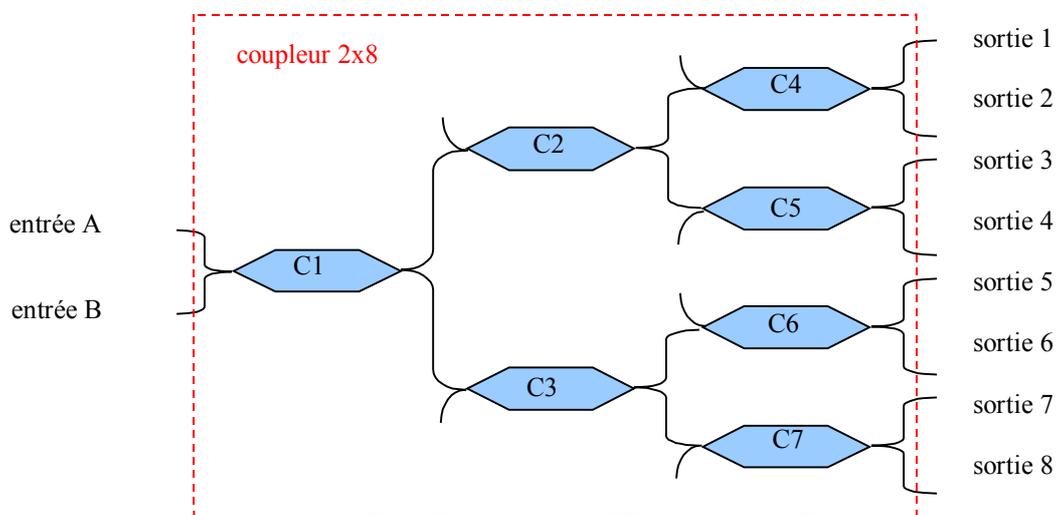
## 6.2.2 Les coupleurs de fibres optiques

### 6.2.2.2 Description et caractérisation

Pour relier le banc de refroidissement optique à l'enceinte à vide, on utilise des fibres optiques. Cette technique permet d'avoir un dispositif plus souple au niveau de la disposition des éléments et de le rendre transportable. Quatorze fibres optiques vont jusqu'à l'enceinte à vide : six pour chacune des zones de refroidissement, et deux pour la détection. Afin d'éviter d'injecter séparément quatorze fibres optiques, on utilise deux coupleurs à fibres à 2 entrées et 8 sorties.

Ces coupleurs sont réalisés en fibre à maintien de polarisation par la technique de couplage évanescent <sup>(1)</sup>. Ils ont été réalisés par la société Canadian Instrument, mais ont nécessité un grand nombre de caractérisations complémentaires et de modifications par nous-mêmes afin de remplir les spécifications demandées.

Ces coupleurs 2×8 sont composés de sept coupleurs 2×2 mis en cascade (Figure 6. 13).



**Figure 6. 13** : schéma du coupleur à 2 entrées et 8 sorties. Il est composé de 7 coupleurs 2×2 disposés en cascade.

<sup>(1)</sup> Cette technique a l'avantage, sur la technique de fusion étirage, de minimiser les pertes, et d'assurer une meilleure stabilité du couplage.

Les caractéristiques de ces coupleurs sont résumés dans le tableau suivant :

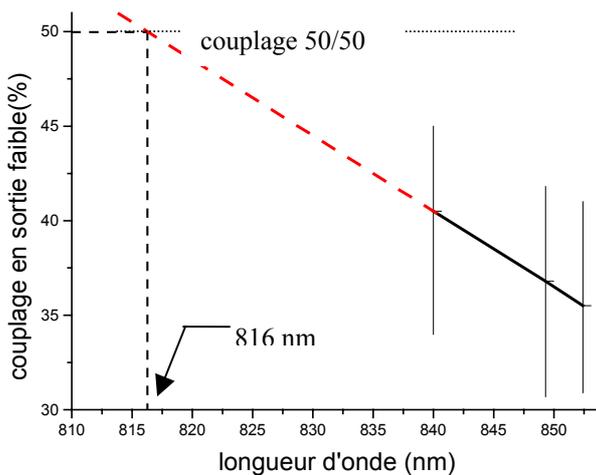
|   |                      |
|---|----------------------|
| Perte totale de puissance dans le coupleur      | 42 % au mieux        |
| Equilibrage des sorties                         | très mauvais         |
| Fluctuations de puissance lié à la température  | assez faible         |
| Fluctuations de puissance lié à la polarisation | ~ 60 % après un cube |

Les caractéristiques de ces coupleurs de fibres sont très mauvaises, et loin des spécifications demandées.

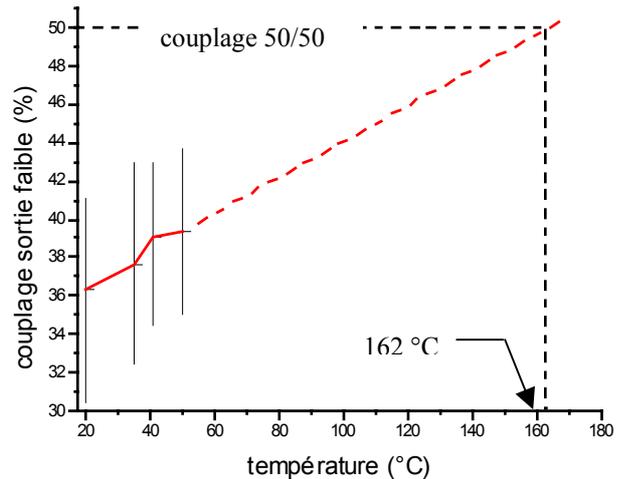
On constate que l'équilibrage des huit sorties est plutôt mauvais : la sortie la plus puissante est environ 6 fois plus forte que la plus faible. Une étude plus poussée a permis d'établir que ce problème est induit par le fait que chaque coupleur 2×2 composant le système, a un équilibrage de sortie proche de 35/65 au lieu de 50/50 comme spécifié. On obtient donc en sortie du système :

|                               |                        |        |
|-------------------------------|------------------------|--------|
| 1 sortie très faible          | $(0,35)^3$             | ~ 0,04 |
| 2 sorties moyennement faibles | $0,65 \times (0,35)^2$ | ~ 0,08 |
| 2 sorties moyennement fortes  | $0,35 \times (0,65)^2$ | ~ 0,15 |
| 1 sortie très forte           | $(0,65)^3$             | ~ 0,27 |

On suppose que cette différence est liée à une erreur dans la longueur d'onde utilisée lors de l'étalonnage par le fabricant, bien que ce dernier aie toujours refusé de l'admettre. Des tests supplémentaires ont en effet montré que le rapport de sorties des coupleurs 2×2 tendaient vers 50/50 pour une longueur d'onde proche de 815 nm (voir **Figure 6. 14**). Une solution pour améliorer l'équilibrage des huit sorties est de chauffer le coupleur. Le rapport de sorties des coupleurs 2×2 dépend lentement de la température comme le montre la **Figure 6. 15**. Une extrapolation linéaire permet de dire que ces rapports s'équilibreront à environ 160 °C.



**Figure 6. 14** : taux de couplage faible moyen en fonction de la longueur d'onde. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion sur les 7 coupleurs 2×2.



**Figure 6. 15** : taux de couplage faible moyen en fonction de la température. Les barres d'erreur correspondent à la dispersion sur les 7 coupleurs 2×2.

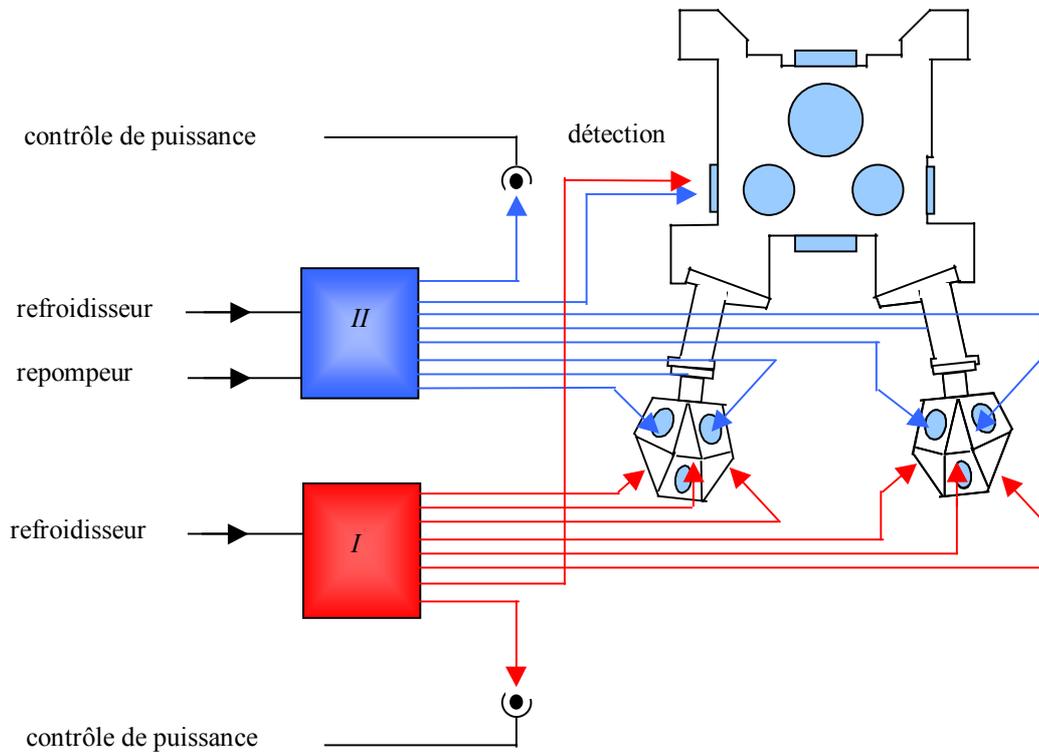
Afin de minimiser les fluctuations de puissance liées à la température, et d'améliorer l'équilibrage des sorties, les coupleurs sont asservis en température à une valeur de consigne fixée à 42 °C.

Un autre problème rencontré lors de l'utilisation de ce coupleur est que l'axe de maintien de polarisation n'est pas correctement conservé à la traversée de chaque coupleur 2×2. La direction de la polarisation en sortie de fibre est alors très sensible aux contraintes thermiques et mécaniques subies tout au long des fibres. Il en résulte, à la traversée d'un cube séparateur de polarisation, des interférences entre les deux composantes de polarisation données par la fibre. Le déphasage entre ces deux ondes fluctuant avec la température, on observe des variations d'intensité lumineuse allant jusqu'à 50 % sur certaines sorties. L'utilisation de polariseurs Polarcor (fabriqué par Corning), garantissant 97 % de transmission et 40 dB d'atténuation sur la mauvaise polarisation permet de nettoyer la polarisation à la sortie de la fibre, et ainsi de supprimer le phénomène d'interférence. On arrive ainsi à réduire les fluctuations d'intensité à  $\pm 2\%$ .

### 6.2.2.3 Utilisation des coupleurs de fibres

Chacun des deux coupleurs de fibres fournit huit sorties, qui vont être utilisées pour refroidir les atomes et pour les détecter. Pendant la phase de lancement de la boule d'atomes, les faisceaux refroidisseurs du haut et du bas doivent être désaccordés symétriquement d'environ 1 MHz. Il est clair que si les six faisceaux d'un piège proviennent du même coupleur, il est impossible de réaliser ce désaccord symétrique car les huit sorties sont à la même fréquence. Le premier coupleur est donc utilisé pour produire les trois faisceaux du bas de chacun des deux pièges, l'autre coupleur est utilisé pour les faisceaux du haut. Six des huit sorties de chaque coupleur sont ainsi utilisées pour le refroidissement d'atomes. Le faisceau

refroidisseur ( $F = 4 \rightarrow F' = 5$ ) est injecté en entrée de chacun des deux coupleurs, le faisceau repompeur ( $F = 3 \rightarrow F' = 4$ ) quant à lui n'est injecté que sur un seul des deux coupleurs (voir **Figure 6. 16**). La raison de cette façon de faire sera expliquée au paragraphe 6.5 à propos de la détection. Les deux dernières sorties de chaque coupleur sont utilisées pour la détection et pour réaliser un contrôle de puissance.



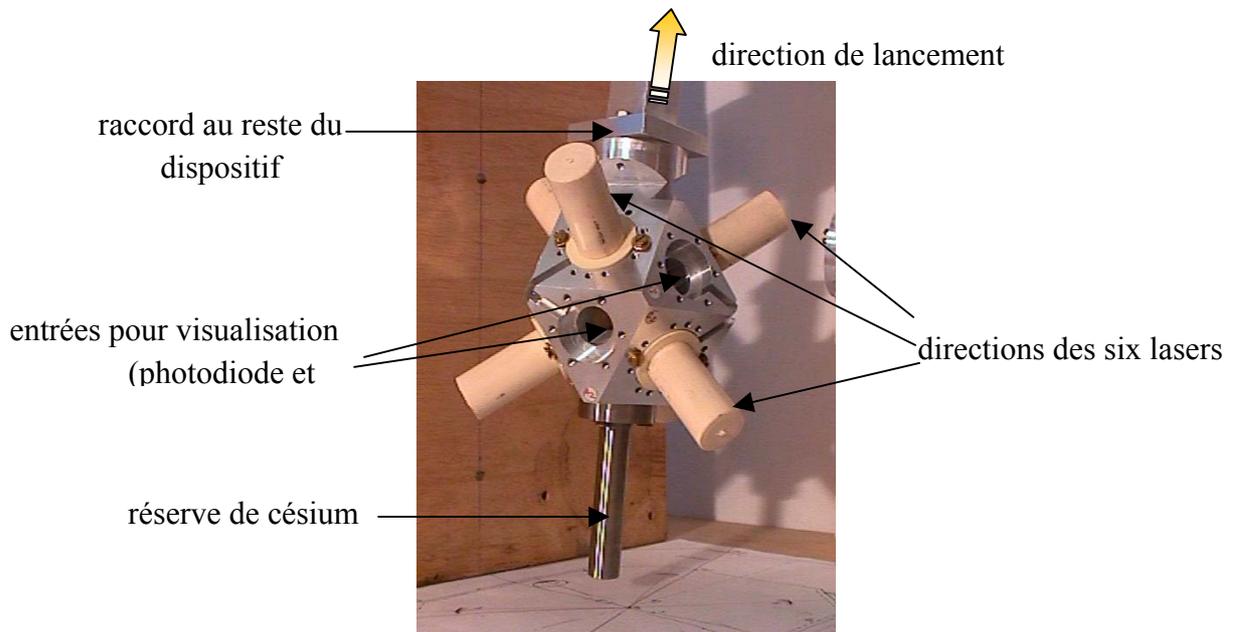
**Figure 6. 16** : utilisation des deux coupleurs de fibres optiques. Le coupleur *I* est utilisé pour faire les faisceaux du bas des deux pièges, le coupleur *II* sert aux faisceaux du haut.

Les fibres optiques issues des coupleurs amènent donc les faisceaux refroidisseurs et repompeurs jusqu'à l'enceinte à vide, et plus particulièrement jusqu'à la BOULE DE REFROIDISSEMENT que nous allons décrire maintenant.

### 6.2.3 La boule de refroidissement

La boule de refroidissement est similaire à celle réalisée pour le prototype d'horloge spatiale PHARAO [SIMON 97, LEMONDE 97], mais à l'échelle 8/10. C'est en fait un cube de 83 mm de côté auquel on a coupé les huit coins. On dispose donc d'un volume avec quatorze faces. Les six faces initiales du cube sont utilisées pour injecter les six faisceaux de refroidissement, qui sont alors dirigés selon un trièdre trirectangle, dont la diagonale est la direction de lancement des atomes. Les autres faces sont utilisées pour placer la réserve de césium, relier la boule au reste du dispositif, et visualiser le piège magnéto-optique à l'aide

d'une photodiode et de deux caméras (voir **Figure 6. 17**). Comme on l'a vu au paragraphe 6.1.3, tous les hublots sont bridés sur la boule.



**Figure 6. 17** : photographie de la boule de refroidissement en cours de réalisation.

Les faisceaux laser de refroidissement sont amenés jusqu'à la boule par des fibres optiques issues des coupleurs décrits précédemment, la mise en forme des faisceaux (diamètre, collimation, polarisation, intensité) étant assurée par des collimateurs situés en sortie de fibre et fixés directement sur la boule de refroidissement.

#### 6.2.4 Les collimateurs de refroidissement

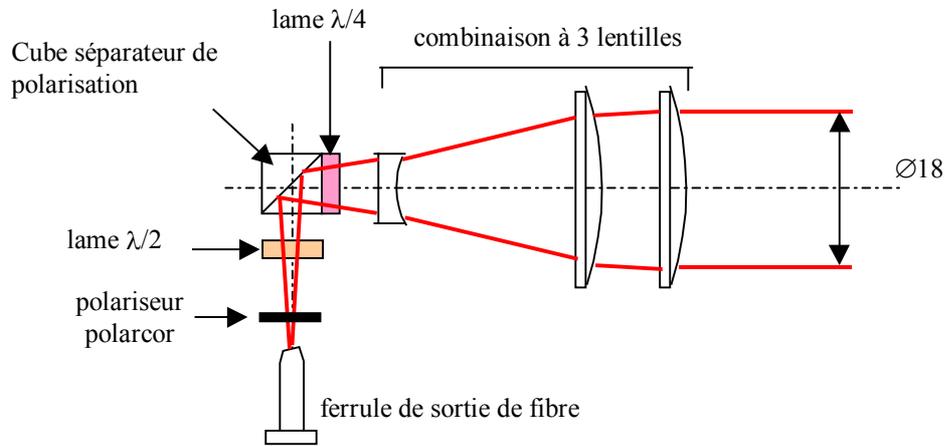
Pour réaliser un refroidissement et un piégeage efficace, les faisceaux lasers de refroidissement doivent avoir des caractéristiques bien particulières : les lasers doivent être collimatés ; deux lasers de directions opposées doivent avoir des intensités lumineuses égales et des polarisations circulaires  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  [DALIBARD 89]. Ils doivent de plus être alignés et centrés l'un sur l'autre.

Les collimateurs sont chargés de réaliser toutes ces fonctions. Ils sont de plus soumis à une contrainte d'encombrement car chaque boule de refroidissement est placée dans un blindage magnétique <sup>(1)</sup>, afin de s'affranchir de l'influence magnétique d'une boule sur l'autre, les collimateurs doivent donc rentrer dans ce blindage. La longueur disponible pour le collimateur, suivant l'axe du faisceaux laser est de 60 mm.

Une combinaison optique à trois lentilles a été élaborée, permettant d'obtenir des faisceaux collimatés de 18 mm de diamètre à partir d'une source ponctuelle d'ouverture numérique 0,1 (ce qui correspond à la sortie des fibres optiques). Afin de s'adapter aux contraintes d'encombrement, l'axe optique de la combinaison est replié par un cube séparateur

<sup>(1)</sup> Ces blindages seront décrits au paragraphe 6.2.6.

de polarisation. Une lame  $\lambda/4$  ordre 0 placée après le cube permet de régler la polarisation finale du faisceau. L'intensité lumineuse est réglée par une lame  $\lambda/2$  placée devant le cube séparateur de polarisation (voir **Figure 6. 18**).

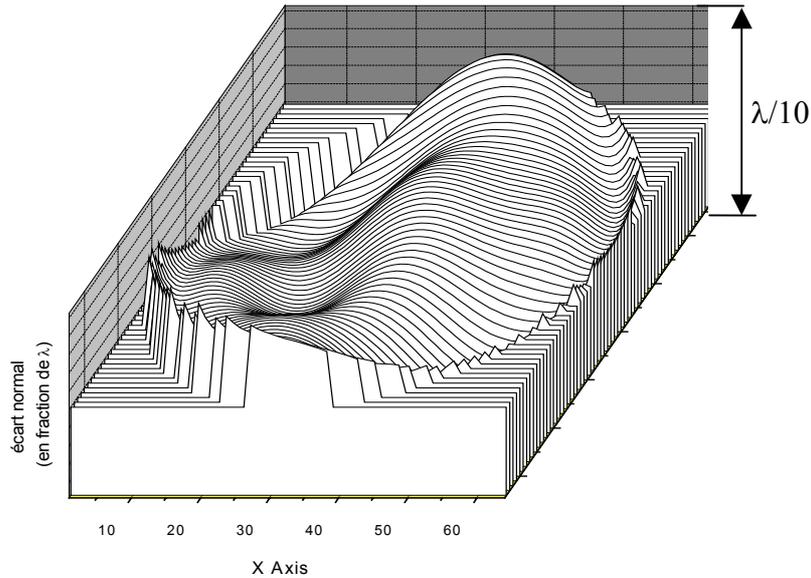


**Figure 6. 18** : schéma optique du collimateur de refroidissement. La lame  $\lambda/2$  sert à régler la puissance du faisceau, la lame  $\lambda/4$  assure une polarisation circulaire.

La combinaison optique a été calculée et optimisée pour minimiser les aberrations géométriques <sup>(2)</sup>. Un front d'onde théorique meilleur que  $\lambda/100$  a ainsi été obtenu. En pratique, les collimateurs ont été caractérisés avec un analyseur de front d'onde de type SCHACK-HARTMANN <sup>(3)</sup> (H-Line commercialisé par la société Imagine Optic) et après montage et alignement, des qualités de fronts d'onde typiques de  $\lambda/30$  ont été obtenues, et certaines étaient même meilleures que  $\lambda/50$  (limite de résolution de l'appareil) (voir **Figure 6. 19**).

<sup>(2)</sup> Ce travail a été effectué par Catherine ARMELLIN de l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée.

<sup>(3)</sup> Cet appareil nous a été prêté par le Département d'Astrophysique Stellaire et Galactique (DASGAL) de l'Observatoire de Paris.



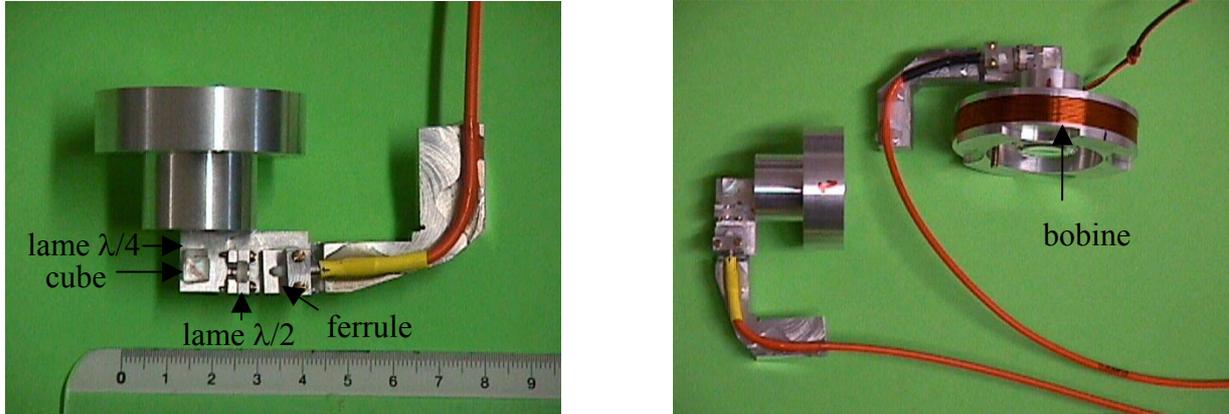
**Figure 6.19** : courbe de front d'onde d'un des collimateurs. L'écart normal pic-vallée est inférieur à  $\lambda/10$ , sa valeur RMS vaut  $\lambda/30$ .

Ces collimateurs sont réglés une fois grâce à l'analyseur de front d'onde et ensuite les différents éléments (cube, lame  $\lambda/4$ , ferrule <sup>(1)</sup>) sont collés à la colle UV. La lame  $\lambda/2$  est placée dans un support qui permet sa rotation afin de permettre le réglage de l'intensité lumineuse. Les faisceaux sont équilibrés par paire, mais les paires ne sont pas équilibrées entre elles. La puissance de chaque paire dépend de la sortie de fibre utilisée. L'alignement et le centrage de chaque faisceau laser est réalisé par rapport à sa face de référence respectivement avec une précision d'environ  $100 \mu\text{rad}$ , et  $2/10^{\text{ème}}$  de mm. Deux photographies de collimateurs sont présentées **Figure 6.20**.

L'alignement des faisceaux par paire ne peut pas être fait par autocollimation comme dans [LEMONDE 97], car compte tenu des polarisations le faisceau ne peut pas être réinjecté dans la fibre. On réalise donc l'alignement en ré-injectant le faisceau issu de chaque collimateur du haut (coupleur II) dans le collimateur en face. Cette intensité rentre donc dans le coupleur I par une sortie et est récupérée sur l'entrée inutilisée de ce coupleur. Le réglage de l'alignement se fait en jouant sur les vis de fixation de chaque collimateur. La très bonne qualité de front d'onde des collimateurs permet une remarquable réinjection de la lumière, à tel point que les diodes R1 et R2 peuvent se perturber mutuellement si leurs isolateurs optiques (37 dB) ne sont pas parfaitement réglés. Compte tenu de l'acceptance angulaire pour injecter de la lumière dans une fibre optique, on estime que ce réglage garantit un alignement de chaque faisceau composant une paire à mieux que  $100 \mu\text{rad}$ .

<sup>(1)</sup> On a utilisé des sorties de fibres non connectorisées car le ressort qui est usuellement placé dans le connecteur a un magnétisme de plusieurs dizaines de mGauss (plusieurs  $\mu\text{T}$ ). De plus les sorties de fibres sont clivées avec un angle de 8 degrés (norme APC). Le faisceau sort donc avec un angle de 4 degrés par rapport à l'axe de la fibre.

Les douze faisceaux refroidisseurs ont une puissance finale comprise entre 2 et 3 mW suivant les paires, ce qui donne une intensité lumineuse au centre comprise entre 2,5 et 3,6  $\text{mW.cm}^{-2}$ , correspondant à une saturation à résonance de 2,3 à 3,3 ( $I_{sat} = 1,1 \text{ mW.cm}^{-2}$ ).



**Figure 6. 20** : photographies de collimateurs réglés et collés. On voit un collimateur simple (à gauche) avec ces différents composants, et à droite un collimateur avec le support de bobine.

Douze collimateurs de fibre totalement amagnétiques, d'encombrement réduit et donnant des faisceaux de très bonne qualité de front d'onde ont ainsi été réalisés de cette façon.

Afin de réaliser le piège magnéto-optique, un gradient de champ magnétique d'environ  $0,1 \text{ T.m}^{-1}$  ( $10 \text{ G.cm}^{-1}$ ) doit être ajouté afin de créer la force de rappel qui attire les atomes au centre du piège.

### 6.2.5 Les gradients de champs magnétiques

Le piège magnéto-optique nécessite un gradient de champ magnétique dans les trois directions des faisceaux refroidisseurs. Ce gradient est réalisé grâce à une paire de bobines placées suivant l'axe  $z$  (voir **Figure 6. 8**) en configuration anti-HELMHOLTZ. Le champ magnétique vaut alors [DURAND 53] :

$$\mathbf{B} = b_0 \left( z \cdot \mathbf{e}_z - \frac{1}{2} x \cdot \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} y \cdot \mathbf{e}_y \right) \quad (\text{Eq. 6.1})$$

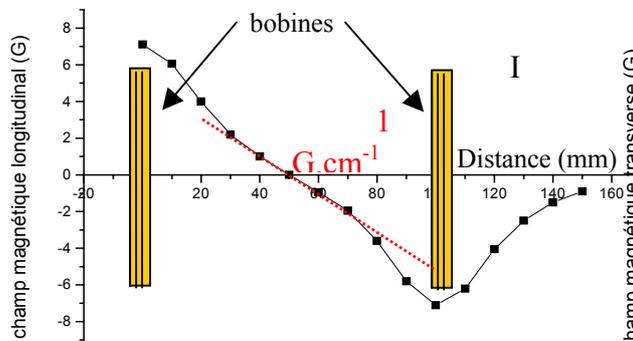
et le gradient vaut :

$$b_0 = \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = \frac{3\mu_0 a^2 d}{(a^2 + d^2)^{5/2}} NI \quad (\text{Eq. 6.2})$$

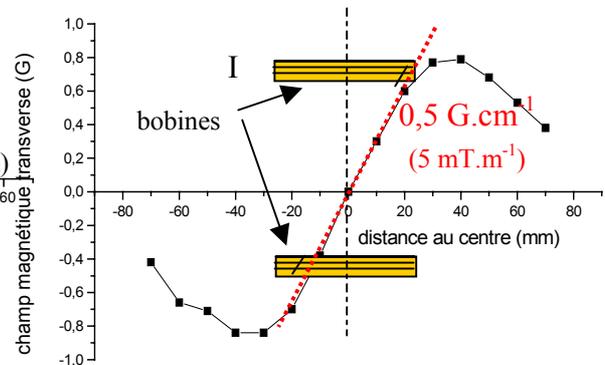
où  $a$  est le rayon des bobines,  $d$  est la demi distance entre les bobines,  $N$  est le nombre de spires de chaque bobine et  $I$  est le courant circulant dans chaque bobine.

La géométrie de l'expérience nous impose  $a = 27$  mm et  $d = 43,5$  mm. Le produit  $N.I$  doit donc valoir environ 300 pour réaliser un gradient de  $10 \text{ G.cm}^{-1}$  ( $0,1 \text{ T.m}^{-1}$ ). On réalise quatre bobines de 150 spires chacune, dans lesquelles circule un courant de 2 A.

Les champs magnétiques longitudinal et transverse ont été mesurés expérimentalement à l'intérieur des blindages magnétiques (voir **Figure 6. 21** et **Figure 6. 22**).



**Figure 6. 21** : champ magnétique longitudinal. Un gradient de  $1 \text{ G.cm}^{-1}$  ( $10 \text{ mT.m}^{-1}$ ) a été obtenu avec un courant de 0,2 A.



**Figure 6. 22** : champ magnétique transverse. On obtient un gradient de  $0,5 \text{ G.cm}^{-1}$  ( $5 \text{ mT.m}^{-1}$ ) avec un courant de 0,2 A.

Les bobines sont montées directement sur les collimateurs de fibres qui jouent alors le rôle de dissipateur de chaleur (voir **Figure 6. 20**). Elles consomment environ 6 Watts de puissance électrique chacune qu'il faut dissiper.

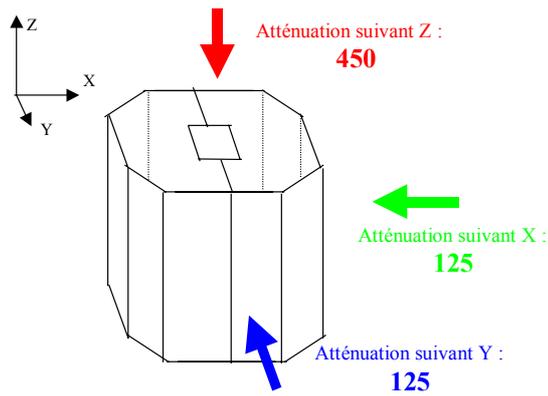
Chaque boule de refroidissement a son gradient de champ magnétique. Les deux boules étant relativement proche l'une de l'autre, on protège chacune de ces zones du magnétisme de l'autre grâce à un blindage magnétique.

### 6.2.6 Les blindages magnétiques

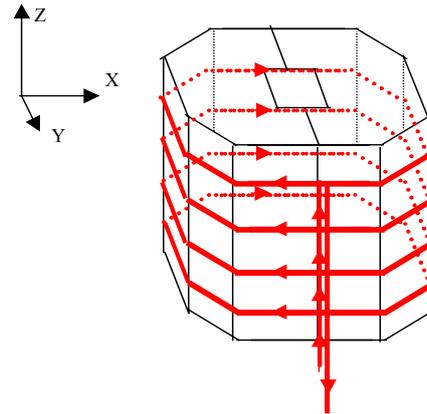
Afin de protéger les zones sensibles aux champs magnétiques on utilise des blindages magnétiques réalisés en  $\mu$ -métal. La zone de refroidissement est protégée par un blindage de ce type, ceci avec un double but :

- ⊖ Limiter les fluctuations du champ magnétique dans la zone de refroidissement qui conduiraient à des fluctuations de position du piège magnéto-optique.
- ⊖ Eviter que le champ magnétique important créé par les bobines vienne polluer l'environnement magnétique des autres zones du dispositif, principalement de la zone d'interaction RAMAN.

Les coefficients d'atténuations magnétiques des blindages, après démagnétisation, ont été mesurés dans les trois directions. Les valeurs trouvées sont  $\mu_z = 450$  suivant l'axe du blindage, et  $\mu_x = \mu_y = 125$  dans les directions transverses (voir **Figure 6. 23**) :

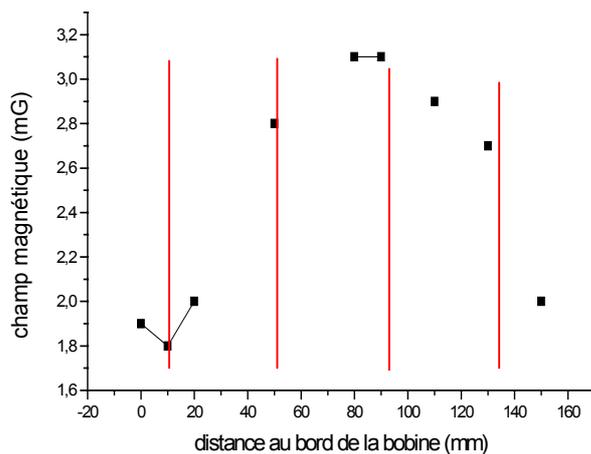


**Figure 6. 23** : coefficients d'atténuations magnétiques dans les trois directions.

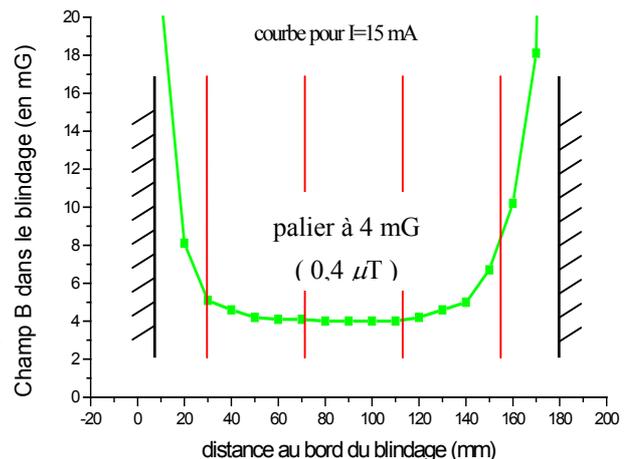


**Figure 6. 24** : bobine à quatre spires pour créer le champ magnétique uniforme suivant l'axe Z.

Le blindage magnétique joue aussi le rôle de miroir pour les champs magnétiques situés à l'intérieur du blindage. Ainsi, afin d'assurer un champ magnétique homogène dans la zone de refroidissement, on place une bobine dans le blindage pour créer un champ constant suivant l'axe Z. Le rôle de ce champ est aussi de donner un axe de quantification en levant la dégénérescence des sous-niveaux ZEEMAN. Une bobine avec seulement quatre spires (voir **Figure 6. 24**) permet, grâce à "l'effet miroir" du blindage, d'obtenir un champ magnétique homogène. Afin de mettre en évidence cet effet, le champ magnétique créé par la bobine a été mesuré à l'extérieur du blindage puis à l'intérieur (voir **Figure 6. 25** et **Figure 6. 26**). Un courant de 15 mA suffit pour créer un champ magnétique constant de  $0,4 \mu\text{T}$  (4 mG) dans la zone de refroidissement.

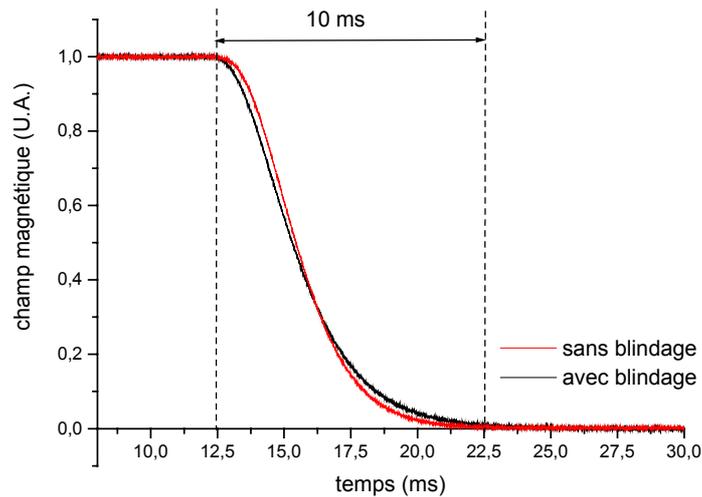


**Figure 6. 25** champ créé par la bobine à quatre spires suivant l'axe Z, sans blindage.



**Figure 6. 26** : champ créé par la bobine à quatre spires à l'intérieur du blindage suivant l'axe Z. Pour  $I=15\text{mA}$  on a un palier au centre du blindage à 4 mG ( $0,4 \mu\text{T}$ ).

Des mesures de temps de coupure du gradient de champ magnétique (décrit au paragraphe précédent) ont également été effectuées. En effet, il était important de contrôler que la présence du blindage magnétique autour du gradient ne rallonge pas de façon significative le temps de coupure. Ces tests, d'abord effectués avec une boucle recueillant les variations du flux magnétique, puis grâce à un sonde magnétique, montrent que le gradient peut être coupé en moins de 5 ms, et ce même à l'intérieur du blindage magnétique.



**Figure :** temps de coupure du gradient de champ magnétique dans le blindage. On n'observe quasiment aucune différence entre la durée avec les blindages et sans les blindages.

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour réaliser un piège magnéto-optique et pour le lancer. Nous allons détailler les différentes phases nécessaires en donnant les résultats obtenus.

### 6.2.7 Les différentes phases de piégeage, de refroidissement et de lancement

Un cycle classique de production d'une boule d'atomes froids se décompose comme suit :

#### 1) Piégeage ( $\sim 500$ ms)

Les atomes sont refroidis par un processus de refroidissement DOPPLER, et sont ramenés au centre du piège grâce aux gradients de champs magnétiques. A ce stade on obtient une boule de 2 mm de diamètre contenant environ  $10^8$  atomes à une température de l'ordre de  $100 \mu\text{K}$ .

#### 2) Coupure du champ magnétique ( $\sim 15$ ms)

On coupe le gradient de champ magnétique, le désaccord des lasers refroidisseurs est choisi pour minimiser la diffusion des atomes en position pendant l'amortissement du champ magnétique.

### 3) Lancement ( $\sim 2$ ms)

Les lasers refroidisseurs sont désaccordés symétriquement pour créer la mélasse mouvante. Un désaccord symétrique de 1,6 MHz permet de lancer les atomes à  $2,4 \text{ m.s}^{-1}$ .

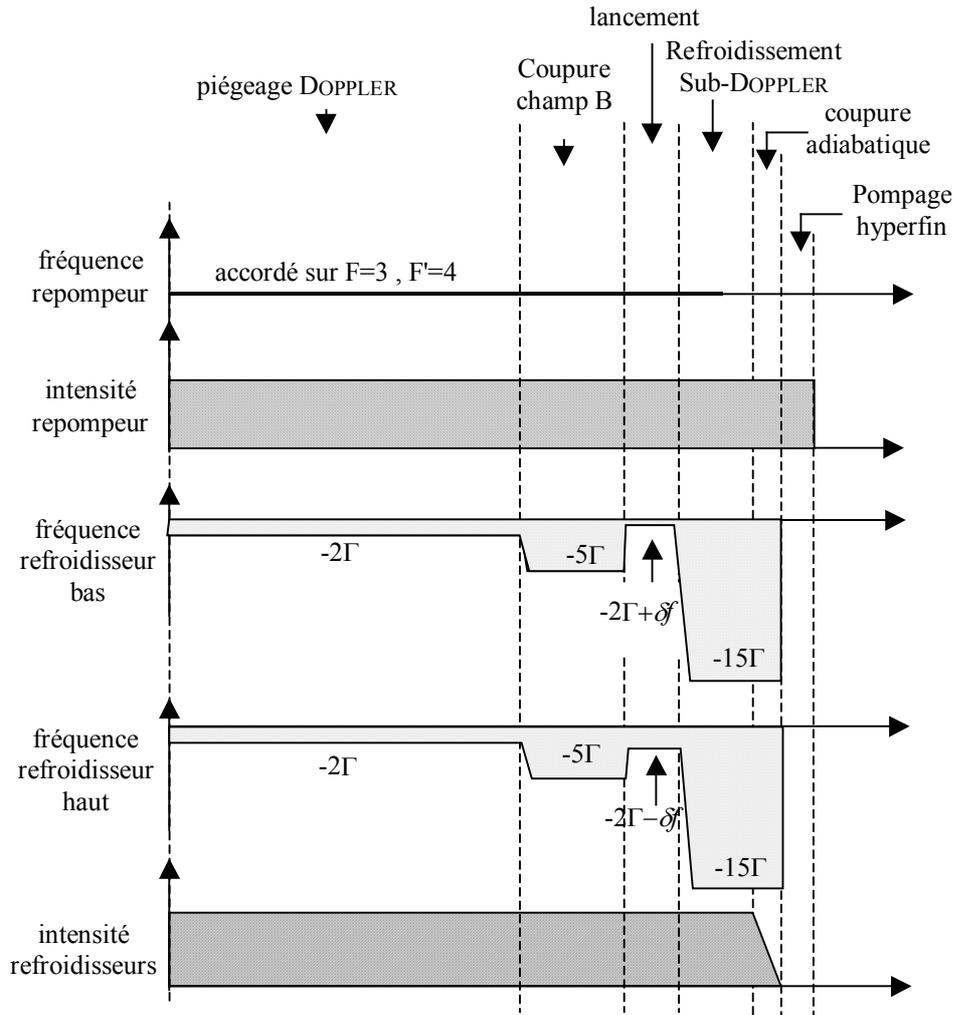
### 4) Refroidissement sub-DOPPLER ( $\sim 1$ ms)

Le désaccord des faisceaux refroidisseurs est augmenté jusqu'à  $-15 \Gamma$ . La température atomique décroît alors jusqu'à quelques  $\mu\text{K}$  grâce à des mécanismes de refroidissement sub-DOPPLER.

### 5) Coupure adiabatique

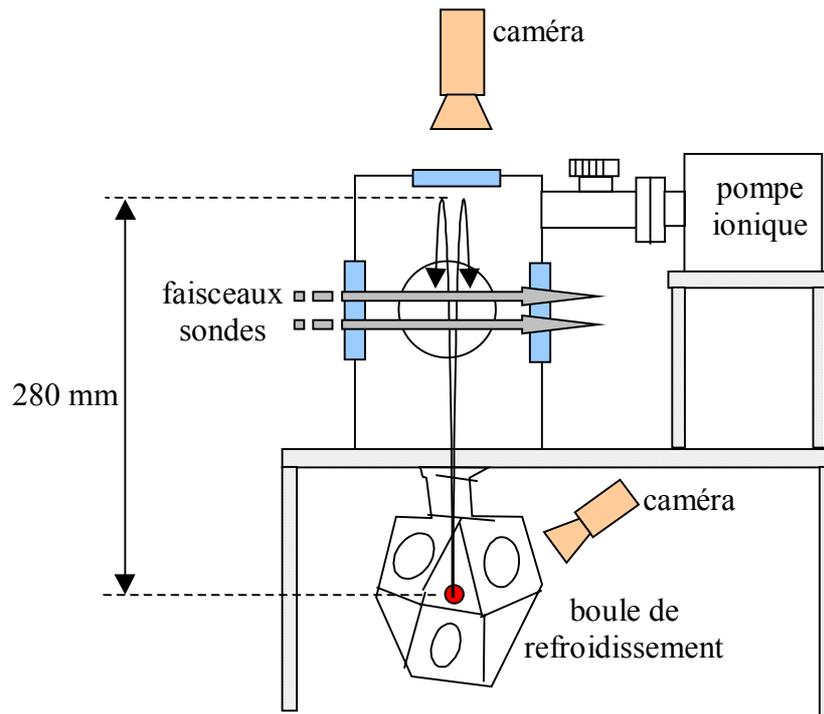
L'intensité des lasers est coupée le plus adiabatiquement possible. Le faisceau repompeur est coupé légèrement après les faisceaux refroidisseurs afin d'effectuer un pompage hyperfin vers l'état  $F = 4$ .

On représente sur la **Figure 6. 27** les fréquences et les intensités des différentes faisceaux suivant les phases :



**Figure 6. 27** : représentation des fréquences et des intensités des différents faisceaux au cours des phases de piégeage et de refroidissement sub-DOPPLER et de lancement.

Il est important de signaler que la mise au point des différents paramètres pour les phases de piégeage, de refroidissement et de lancement a été réalisée sur une expérience préliminaire baptisée « MANIP VERTICALE ». L'intérêt de cette configuration est de lancer la boule d'atomes verticalement, ce qui est beaucoup plus simple pour l'étude de la mélasse mouvante. Cette expérience intermédiaire nous a de plus permis de démarrer l'étude de la source atomique alors que le tube de l'expérience définitive (« tube GYRO ») n'était pas encore prêt. La MANIP VERTICALE contient donc une source atomique complète, telle quelle vient d'être décrite, un tube permettant de lancer les atomes jusqu'à 280 mm au-dessus de la zone de piégeage, un faisceau sonde et deux optiques de détection centrées à une hauteur de 228,8 mm. Le plan de cette expérience est représenté **Figure 6. 28**.



**Figure 6. 28** : schéma de la « MANIP VERTICALE ». Les atomes sont piégés dans la boule de refroidissement puis lancés vers le haut jusqu'à une hauteur pouvant atteindre 280 mm. Un système de détection avec renormalisation permet de faire des mesures de temps de vol afin d'optimiser les paramètres de refroidissement de lancement.

### 6.2.7.1 Piège magnéto-optique

Les pièges magnéto-optiques sont habituellement caractérisés par un certain nombre de grandeurs qui permettent de déterminer leurs performances. Les grandeurs que nous allons utiliser ici sont : le nombre d'atomes piégés, le temps de chargement du piège, la taille du piège et la température atomique à l'issue de la phase de piégeage. Si les trois premières grandeurs peuvent aisément être mesurées grâce à un système de visualisation, la détermination de la température atomique nécessite une mesure en temps de vol qui nous oblige à lancer les atomes.

#### 1) Système de visualisation du piège

On utilise une optique qui réalise l'image de la boule d'atomes sur une photodiode carrée en silicium de 6 mm de côté. Cette photodiode ainsi que le circuit trans-impédance qui l'accompagne sont déportés à l'extérieur du blindage magnétique.

Le système optique, composé d'une lentille simple biconvexe ( $f = 20$  mm), assure un angle solide de détection de  $\Omega = 0,6$  stéradians. Compte tenu du grandissement du système ( $g_y = -0,85$ ), la taille de la zone imagée sur la photodiode est de  $5 \times 5$  mm, ce qui est largement

suffisant, attendu que la taille du piège est d'environ 2 mm de diamètre. Le facteur de sensibilité de la photodiode est de  $S = 0,55 \text{ A/W}$ , et le gain du circuit trans-impédance est  $G = 2,2 \cdot 10^6 \text{ V/A}$ .

On peut alors relier le nombre d'atomes dans le piège à la tension fournie par le circuit trans-impédance grâce à la formule :

$$n_{\text{atomes/Volt}} = \left( \frac{\Gamma}{2} \frac{s_{\text{totale}}}{1 + s_{\text{totale}}} \right) \times \left( \frac{\Omega}{4\pi} \right) \times (h\nu) \times 0,55 \times 2,2 \cdot 10^6 \quad (\text{Eq. 6.3})$$

avec  $s_{\text{totale}}$  la saturation totale dans le piège avec les six faisceaux :

$$s_{\text{totale}} = 6 \times \left[ \frac{I / I_{\text{sat}}}{1 + I / I_{\text{sat}} + 4(\delta / \Gamma)^2} \right] \quad (\text{Eq. 6.4})$$

On néglige ici les effets d'interférences entre les faisceaux refroidisseurs et on prend les coefficients de CLEBSH-GORDAN égaux à 1 (ce qui donnera la valeur la plus pessimiste).

Dans notre cas on a  $I \sim 2,5 I_{\text{sat}}$ , et  $\delta = -2\Gamma$ , ce qui donne  $s_{\text{totale}} \sim 0,8$ .

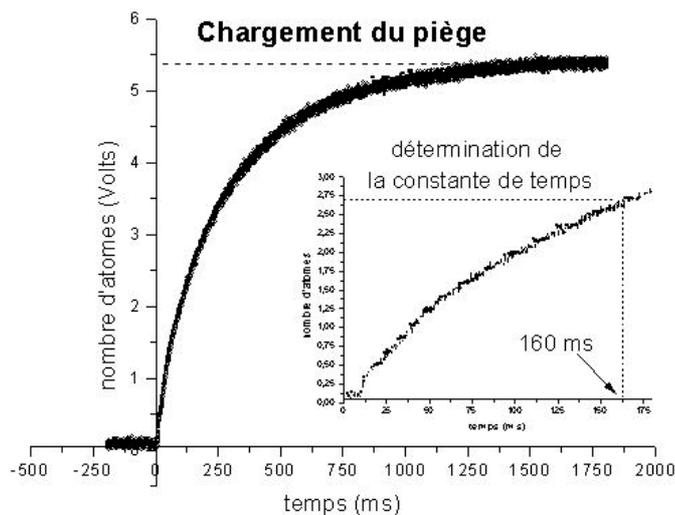
On obtient alors finalement un nombre d'atomes par volt de :  $n_{\text{atomes/Volt}} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ at/V}$ .

## 2) Résultats

Une mesure de chargement du piège nous permet ainsi de déterminer (voir **Figure 6. 29**) :

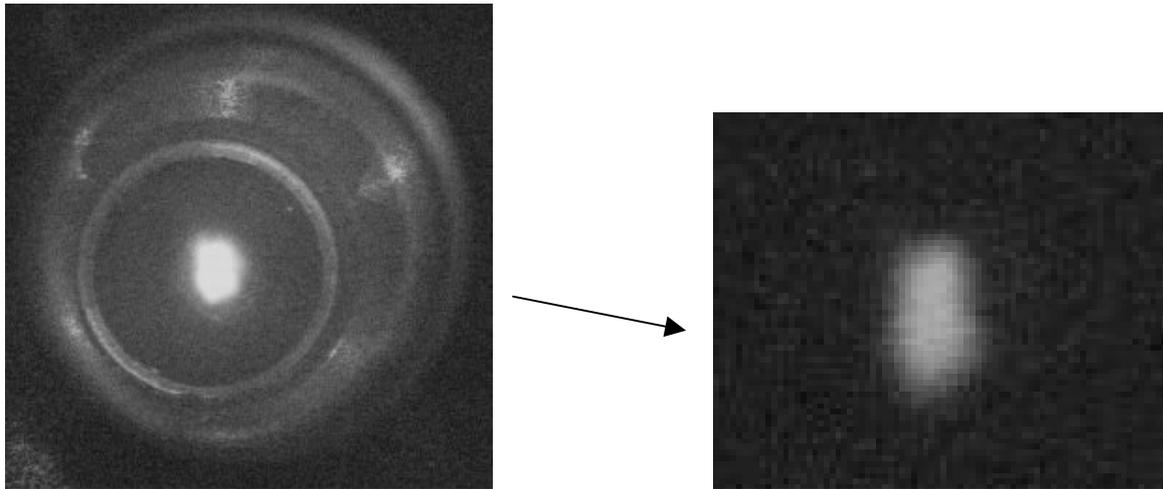
- Le nombre d'atomes :  $N = 10^8$  atomes.
- La constante de temps de chargement à mi hauteur :  $\tau_{\text{chargement}} = 160 \text{ ms}$ .

La température de la réserve de Césium était fixée à 40 °C pour ces mesures.

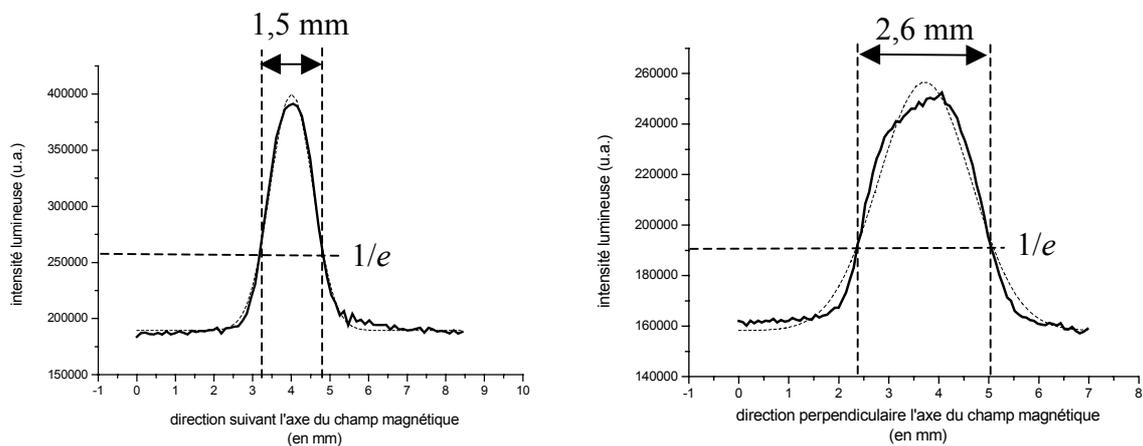


**Figure 6. 29** : courbe de chargement du piège magnéto-optique. On trouve une valeur maximale de 5,44 Volts correspondant à environ  $10^8$  atomes dans le piège. La constante de temps de chargement à mi hauteur vaut 160 ms.

Le piège peut aussi être visualisé par deux caméras placées à  $90^\circ$  l'une de l'autre dans un plan incliné d'environ  $60^\circ$  par rapport à la direction de lancement. Ceci permet d'étudier la forme du piège afin de détecter d'éventuels problèmes de symétrie ou d'équilibrage des faisceaux refroidisseurs (voir **Figure 6. 30**). Cette image du piège nous permet également de déterminer les dimensions de la boule d'atomes dans deux directions (voir **Figure 6. 31**).



**Figure 6. 30** : image du piège magnéto-optique donnée par la caméra. Vue d'ensemble (à gauche), l'image du piège est saturée. Grossissement du piège (à droite), le gain a été réglé pour ne pas saturer l'image.



**Figure 6. 31** : dimension du piège dans deux directions. Le piège est plus étroit dans la direction de l'axe des bobines car le gradient est deux fois plus important. En pointillé on a représenté un fit par une fonction gaussienne. Les courbes ont été moyennées sur 50 images.

### 6.2.7.2 Coupure du gradient de champ magnétique

On a mentionné au paragraphe 6.2.6 que la coupure du gradient de champ magnétique à l'intérieur du blindage ne pose pas de problème particulier. Afin d'éviter la diffusion spatiale des atomes, entraîné par les fluctuations de champ magnétique pendant la phase d'amortissement, les lasers refroidisseurs sont désaccordés de  $-5 \Gamma$ , désaccord correspondant au minimum de diffusion spatiale des atomes.

### 6.2.7.3 Mélasse mouvante et lancement des atomes

Afin de lancer la boule d'atomes, on désaccorde de façon symétrique les lasers refroidisseurs du haut (issus du coupleur de fibres *II*) et du bas (issus du coupleur de fibres *I*). On montre alors que les pressions de radiation s'équilibrent non plus dans le repère fixe, mais dans un repère en mouvement à la vitesse  $V_{\text{lancement}}$ . La direction de lancement est donnée par la trisectrice des faisceaux supérieurs et inférieurs, et la vitesse de lancement est reliée au désaccord par la relation [LEMONDE 97] :

$$V_{\text{lancement}} = \sqrt{3} \delta f \lambda \quad (\text{Eq. 6. 5})$$

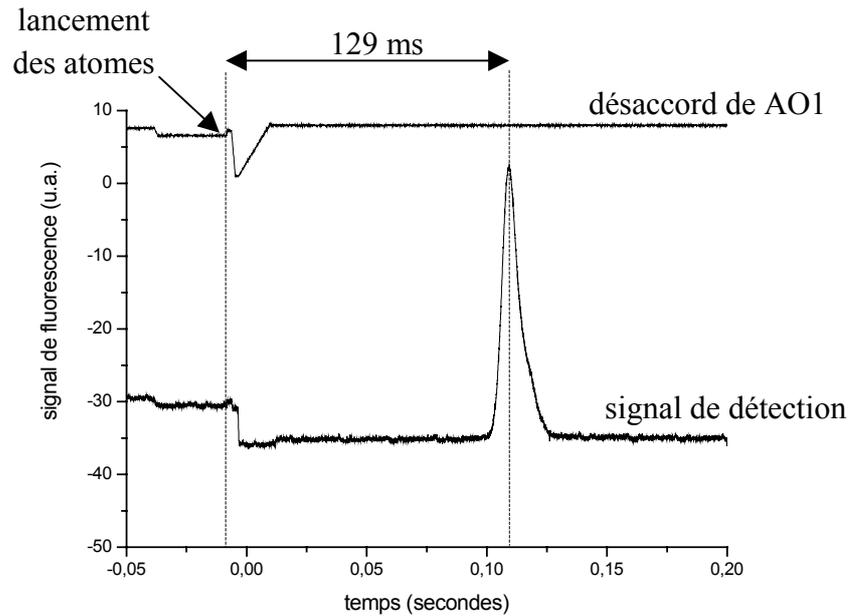
où  $\delta f$  est le désaccord en fréquence, et  $\lambda$  est la longueur d'onde des faisceaux refroidisseurs. Afin de lancer la boule d'atomes vers le haut, on désaccorde les faisceaux du haut vers le rouge ( $\delta f < 0$ ), et ceux du bas vers le bleu ( $\delta f > 0$ ).

Pour obtenir une vitesse de lancement de  $2,4 \text{ m.s}^{-1}$  il faut désaccorder de  $\delta f = 1,62 \text{ MHz}$ . Le décalage  $\delta f$  étant réalisé par un synthétiseur DS 45 SRS ayant une résolution de  $1 \mu\text{Hz}$ , la vitesse moyenne de lancement est théoriquement connue avec une très bonne précision ( $< 1 \text{ nm.s}^{-1}$ ). En réalité les fluctuations d'intensité et de direction des faisceaux refroidisseurs limite notre connaissance de la vitesse de lancement au niveau de  $(V_{\text{lancement}} / 1000)$ . De même la direction de lancement est imposée par l'orientation des collimateurs sur la BOULE DE REFROIDISSEMENT. Cette direction est donc constante au cours du temps mais n'est connue qu'à la précision mécanique des angles de la boule près.

Le lancement des atomes nous permet de faire une mesure de temps de vol, et d'obtenir ainsi la valeur de la température atomique.

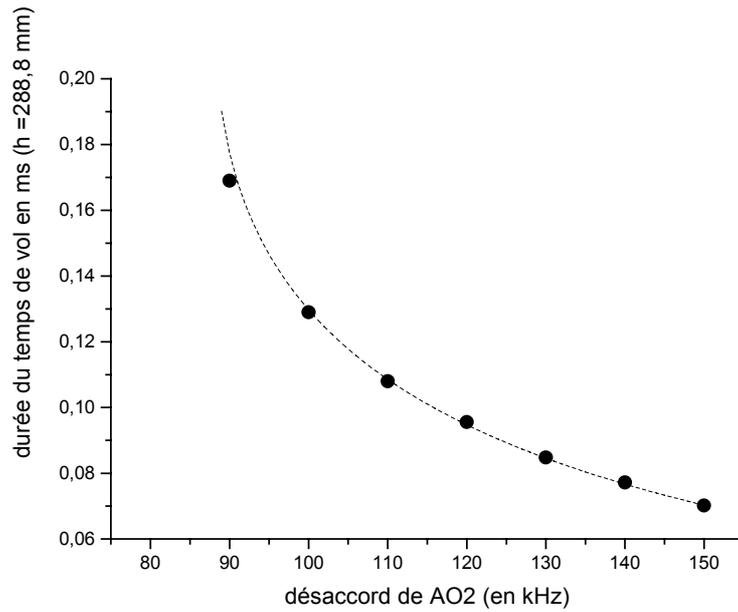
#### Vitesse de lancement

La fréquence de lancement est choisie égale à  $1,62 \text{ MHz}$  (ce qui donne  $V_{\text{lancement}} = 2,4 \text{ m.s}^{-1}$ ). La sonde, située  $288,8 \text{ mm}$  au dessus de la zone de lancement, est un pinceau lumineux de lumière horizontal de  $2 \text{ mm}$  de hauteur. Le signal de temps de vol est représenté sur la **Figure 6. 32**.



**Figure 6.32** : signal de temps de vol. La courbe du haut représente la fréquence du modulateur acousto-optique AO1. Ce signal sert de référence pour l'instant de lancement des atomes. Le signal du bas est le signal de fluorescence recueilli par la photodiode de détection, au niveau des faisceaux sondes (voir Figure 6.28). Ce signal est obtenu en un coup sans moyennage.

Afin de vérifier que l'on contrôle correctement la vitesse de lancement des atomes on étudie la durée du temps de vol en fonction de cette vitesse. Cette vitesse est reliée aux désaccords  $\pm \delta f$  imposés aux faisceaux refroidisseurs grâce à la relation (Eq. 6.5). La **Figure 6.33** présente les résultats obtenus : la vitesse de lancement observée est en parfaite accord avec celle déterminée à partir de (Eq. 6.5). Les faisceaux pièges et les faisceaux sondes étant issus des mêmes coupleurs à fibres optiques, il faut prendre garde à ne pas allumer la sonde trop tôt pour ne pas pousser les atomes avec la pression de radiation issue de la zone de piégeage. Pour cette raison, le premier point expérimental présenté **Figure 6.33** présente une durée de temps vol légèrement plus courte que celle attendue,.

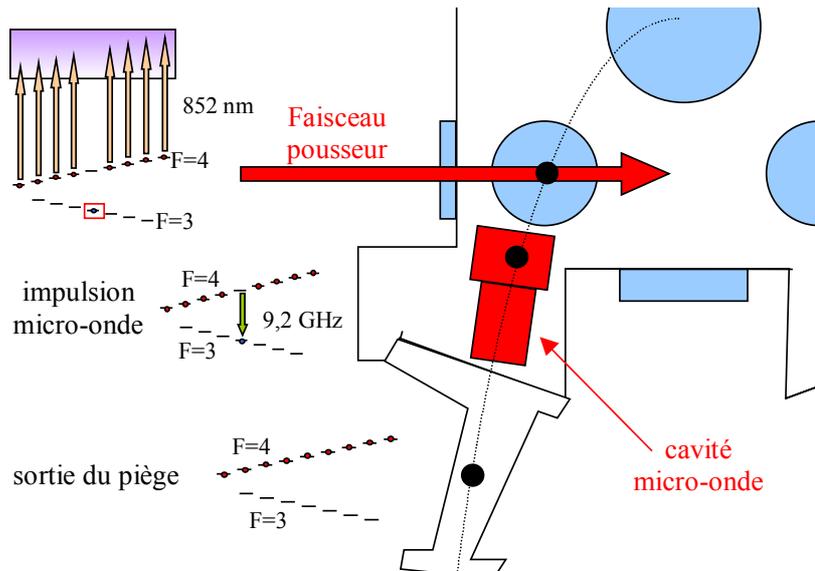


**Figure 6. 33 :** durée du temps de vol en fonction du désaccord appliqué aux modulateurs acousto-optiques AO2 (positif) et AO3 (négatif). La valeur de  $\delta f$  est obtenue en multipliant par 16 ce désaccord. La courbe en pointillée représente les valeurs attendues à partir de (Eq. 6.5) et les ronds noirs représentent les points expérimentaux obtenus.

### 6.3 PREPARATION ATOMIQUE

A la sortie du piège magnéto-optique, les atomes sont dans une superposition des différents sous-niveaux ZEEMAN de l'état hyperfin  $F = 4$ . Pour la suite de l'expérience, on ne veut conserver que les atomes dans le sous-niveau  $m_F = 0$ , car ce sous-niveau est insensible au premier ordre aux déphasages d'origine magnétique. Pour réaliser cette préparation on sépare les différents sous-niveaux ZEEMAN de  $\Delta E_{m_F} = m_F \times 70$  kHz avec un champ magnétique constant de  $10 \mu\text{T}$  (100 mG), puis on utilise une cavité micro-onde résonante à 9,2 GHz, induisant une transition ( $F = 4, m_F = 0$ )  $\rightarrow$  ( $F = 3, m_F = 0$ ). La durée d'interaction micro-onde et la puissance à injecter dans la cavité pour produire une impulsion  $\pi$  sont alors donnée par la relation  $\Omega_{\mu\text{onde}} \tau = \pi$ .

Un faisceau pousseur (onde progressive) accordé sur la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  expulse alors de l'expérience tous les atomes qui n'ont pas effectué la transition vers le niveau  $F = 3$ . Il ne reste donc après cette phase de préparation atomique que des atomes dans l'état  $F = 3, m_F = 0$ . (voir **Figure 6. 31**).



**Figure 6. 31** : la phase de préparation à lieu après le lancement de la boule d'atomes. Elle est réalisée en deux temps : les atomes subissent une impulsion micro-onde dans la cavité, ensuite un faisceau expulse de l'expérience tous les atomes qui n'ont pas effectué la transition micro-onde.

Nous allons décrire ici les deux éléments qui réalisent cette préparation atomique : la cavité micro-onde et le faisceau pousseur.

### 6.3.1 La cavité micro-onde

La cavité micro-onde utilisée est une cavité rectangulaire  $TE_{011}$  réalisée en alliage d'aluminium étiré. Comme mentionné au paragraphe 5.6 , il y a en réalité deux cavités micro-ondes, une orientée suivant l'axe ( $Oy$ ) et la seconde suivant l'axe ( $Oz$ ). Elles sont placées à l'intérieur du bloc central, posées sur le raccord (voir **Figure 6. 31**). Le couplage est réalisé par une boucle de courant <sup>(1)</sup>. Les dimensions de ces cavités font qu'elles sont résonnantes à une fréquence proche de la fréquence de transition hyperfine  $F = 4 \rightarrow F = 3$  : 9,192 631 770 Hz.

#### 1) Accord de la cavité

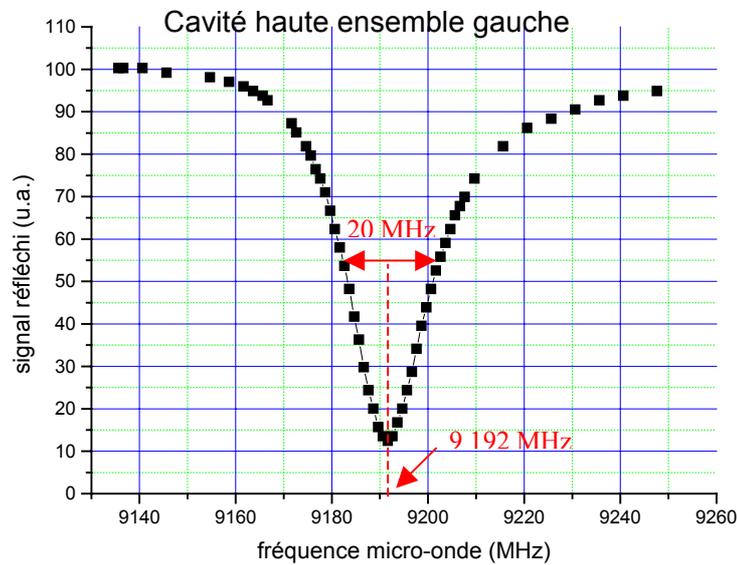
Contrairement aux cavités utilisées dans les horloges atomiques, notre cavité de sélection n'a pas besoin d'avoir un bon facteur de qualité. Son accord précis en est d'autant moins important. Il faut tout de même tenir compte de deux effets importants :

- Le passage sous vide augmente la fréquence de résonance de la cavité de 2,5 MHz environ.
- La fréquence de résonance de la cavité varie avec la température d'environ  $-150$  kHz/°K.

<sup>(1)</sup> Les couplages par antennes sont beaucoup moins propres que les couplages par boucles, autant au niveau de l'amplitude du champ que de sa polarisation.

L'accord de la cavité à la fréquence du césium se fait en réduisant la dimension de la cavité dans une direction, la dépendance typique est de  $-300 \text{ kHz} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ .

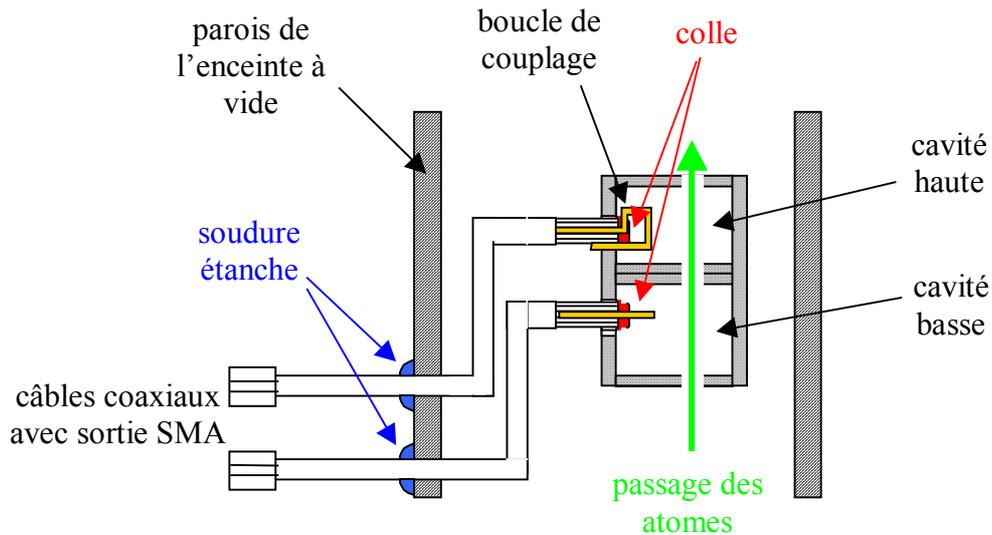
Notre cavité a un facteur de qualité d'environ 500, c'est à dire que la largeur de raie à mi-hauteur de la courbe de résonance vaut près de 20 MHz (voir **Figure 6. 32**).



**Figure 6. 32** : courbe de résonance d'une des quatre cavités micro-ondes, réalisée en réflexion. La largeur à mi-hauteur de la résonance vaut environ 20 MHz.

## 2) Etanchéité des câbles coaxiaux

La difficulté principale dans la réalisation de cette cavité a été de concevoir un passage étanche au vide et amagnétique pour le câble coaxial servant à amener la puissance micro-onde dans la cavité. En effet, le téflon, utilisé comme isolant entre l'âme et la gaine du câble, n'est pas étanche au vide. Une technique de collage du bout du connecteur coaxial a donc été développée pour remédier à ce problème (voir **Figure 6. 33**). Une étanchéité au niveau de quelques  $10^{-10}$  mbar ( $10^{-8}$  Pa) a pu ainsi être obtenue par cette méthode.



**Figure 6. 33** : schéma du montage des boucles de couplage. L'étanchéité interne du câble coaxial est assurée par un point de colle.

### 6.3.2 Le faisceau pousseur

Comme mentionné au paragraphe 5.6 le faisceau pousseur est un des faisceaux sondes de la détection. La seule différence est qu'il est désaccordé vers le bleu de la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  afin de rester résonnant plus longtemps avec les atomes lorsqu'ils sont éjectés.

Ce faisceau sera donc décrit avec la détection au paragraphe 6.5.

### 6.3.3 Mise en œuvre de la préparation atomique

Au champ micro-onde créé dans la cavité est superposé le champ magnétique constant de 100 mG qui écartent des différents sous-niveaux ZEEMAN de  $m_F \times 70$  kHz. Afin d'éviter les transitions de MAJORANA entre la sortie de la cavité et la zone d'interaction RAMAN, tout le bloc central baigne dans ce champ magnétique constant. La Figure 6.34 présente une photographie de cette double cavité.

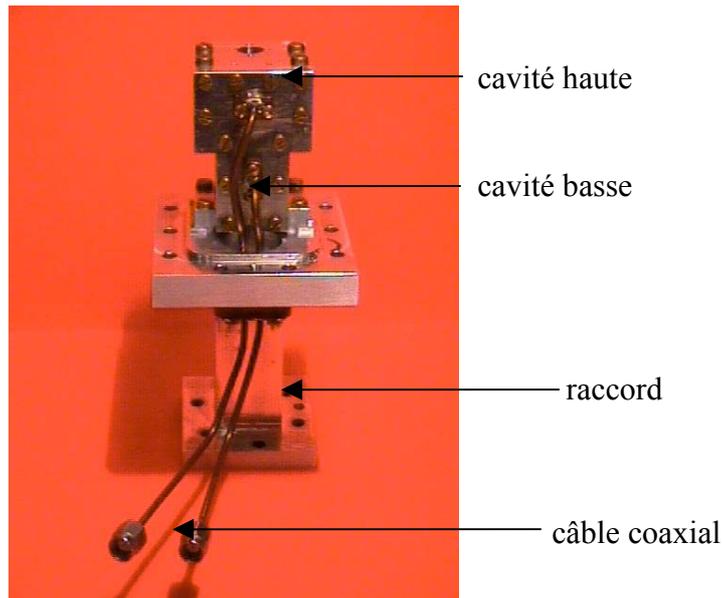


Figure 6. 34 : photographie de la double cavité.

## 6.4 LA ZONE D'INTERACTION RAMAN

### 6.4.1 Production des faisceaux RAMAN

Les transitions RAMAN sont induites par deux faisceaux laser stabilisés en fréquence, désaccordés par rapport à une transition optique. Le point essentiel est que la différence de fréquence des lasers doit être égale à l'écart en fréquence entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental du césium, soit 9,2 GHz (la théorie des transitions RAMAN stimulées est décrite paragraphe 4.2). De plus, la phase  $\phi_{eff}$  (donnée par Eq. 4. 48) ne doit pas fluctuer entre les trois impulsions (voir par exemple Eq. 4. 92). Plus qu'un asservissement de fréquence, c'est donc un réel asservissement de phase qu'il faut réaliser entre les deux lasers afin de limiter les fluctuations de phases à un niveau inférieur au mrad <sup>(1)</sup> sur au moins 100 ms.

Plusieurs méthodes sont disponibles pour produire ces deux faisceaux laser asservis en phase.

Une méthode, utilisée par T. GUSTAVSON à Yale [BOUYER 96], utilise un modulateur acousto-optique à 4,6 GHz. L'ordre +1 est utilisé pour injecter une diode de puissance R1. L'ordre 0 est rétro-réfléchi puis est diffracté dans l'ordre -1 au second passage dans le modulateur acousto-optique et est finalement utilisé pour injecter une deuxième diode R2. L'écart entre les ordres -1 et +1 vaut bien 9,2 GHz. L'efficacité de diffraction n'est que de 0,03 % mais les 30  $\mu$ W diffractés dans les deux ordres suffisent pour injecter les diodes R1 et R2.

<sup>(1)</sup> Cette valeur provient d'une estimation du rapport signal à bruit de 1000, ne nous permettant pas de discriminer du bruit blanc les déphasages inférieurs au mrad .

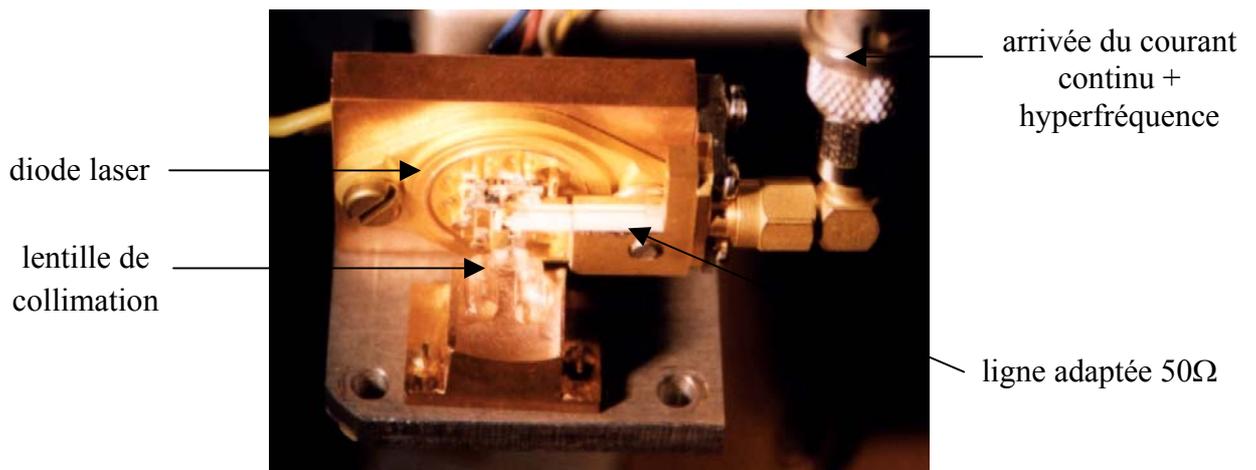
Une seconde méthode consiste à faire une modulation de fréquence ou de phase à la fréquence  $f_0$  sur un faisceau laser. On fait alors apparaître des bandes latérales dans son profil spectral, séparées en fréquence de  $f_0$  par rapport à la porteuse. Cette modulation peut être réalisée grâce à un modulateur électro-optique [SZYMANIEC 97], ou encore par modulation directe sur le courant d'alimentation de la diode [RINGOT 98]. C'est cette seconde méthode que nous avons développée initialement, et bien que ce ne soit pas celle qui aie été finalement retenue, nous allons la présenter brièvement.

#### 6.4.1.1 Diode modulée à 4,6 GHz

Nous avons modulé le courant d'alimentation d'une diode laser DBR 150 mW (SDL 5722 – H1), à 4,6 GHz, dans le but de créer deux bandes latérales espacées l'une de l'autre de 9,2 GHz.

Pour amener le signal hyperfréquence jusqu'à la partie active de la diode, on ne peut pas utiliser les connecteurs de la diode car ses contacts ne réalisent pas un circuit adapté pour cette fréquence. La puissance RF est alors réfléchiée et ne parvient pas jusqu'à la surface active. Une ligne adaptée  $50 \Omega$  à 4,6 GHz (*microstrip*) a donc été conçue puis branchée directement sur la jonction laser <sup>(1)</sup> (voir **Figure 6. 35**). Cette ligne adaptée est constituée d'une couche d'or de largeur et d'épaisseur déterminée déposée sur un substrat d'alumine.

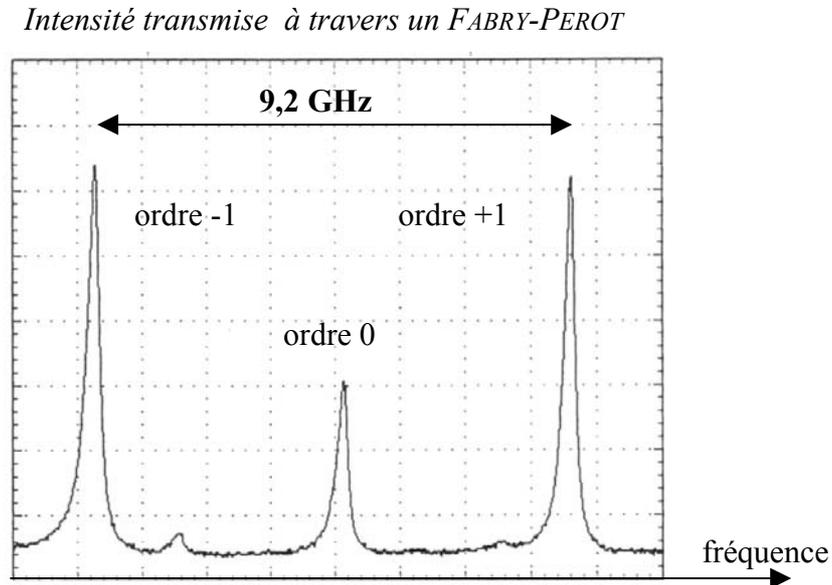
L'alimentation de la diode laser et la modulation à 4,6 GHz sont additionnées dans un Té de polarisation, puis injectées dans la diode laser par l'intermédiaire de cette ligne adaptée. Un triple stub permet d'adapter l'impédance de l'ensemble (diode – ligne adaptée – Té de polarisation) vis à vis de l'amplificateur RF. Ce triple stub est un élément essentiel pour optimiser la puissance RF parvenant jusqu'à la diode.



**Figure 6. 35** : photographie de la diode modulée.

<sup>(1)</sup> Ces deux opérations ont été réalisées par la société Micronic.

Le profil spectral de la diode modulée est analysé grâce à un interféromètre de FABRY-PEROT modulé. On optimise alors l'amplitude des bandes latérales grâce à la puissance RF, au stub, au courant et à la température de la diode. Le profil spectral présenté **Figure 6. 36** a été obtenu pour 2W de puissance RF et pour un courant de diode de 75 mA (soit une puissance totale de 20 mW).

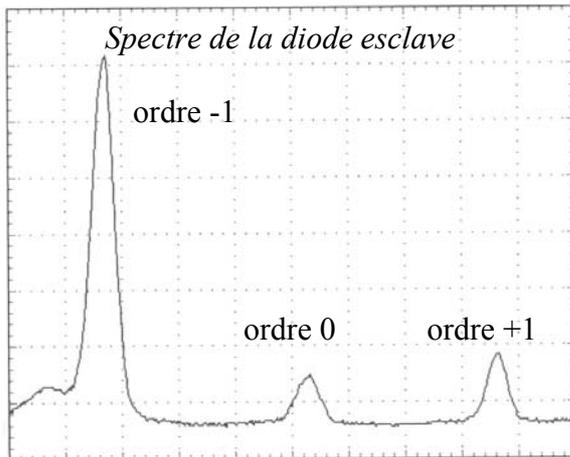


**Figure 6. 36** : spectre de la diode modulée à 4,6 GHz. Cette courbe a été obtenue par analyse dans un FABRY-PEROT d'intervalle spectrale libre 12 GHz. On voit apparaître deux bandes latérales séparées entre elles de 9,2 GHz.

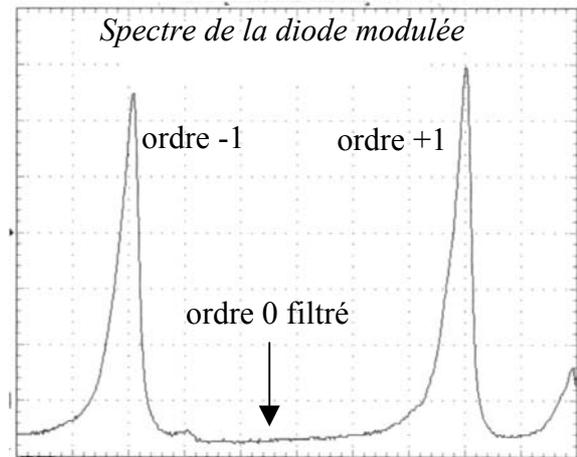
La puissance optique dans chacune des bandes latérales d'ordre 1 est environ de 7 mW. Il reste 3,5 mW dans l'ordre 0 et on retrouve 1,7 mW dans chacune des bandes latérales d'ordre 2. Cette méthode est donc particulièrement efficace, puisqu'elle permet d'obtenir près d'un tiers de la puissance totale dans chacune des bandes d'ordre 1.

Des tests d'injection de diode directement à partir de ce faisceau ont été faits et ont montré que bien que la plage d'injection typique d'une diode laser SDL (5422) soit d'environ 3 GHz, une petite partie de la puissance s'injecte tout de même sur l'ordre 0 (voir **Figure 6. 37**). Un filtrage de l'ordre 0 par absorption dans une cellule de césium a montré ses qualités (voir **Figure 6. 38**), mais nécessite que l'ordre 0 soit à résonance, les deux faisceaux RAMAN (ordre  $\pm 1$ ) se retrouvent alors désaccordés de 4,6 GHz.

Cette technique de modulation de diode ne permettant pas d'obtenir simplement, et de façon satisfaisante les deux faisceaux nécessaires à la transition RAMAN, nous avons finalement choisi d'utiliser une autre méthode, déjà bien connue au laboratoire, le verrouillage de phase grâce à un asservissement électronique.



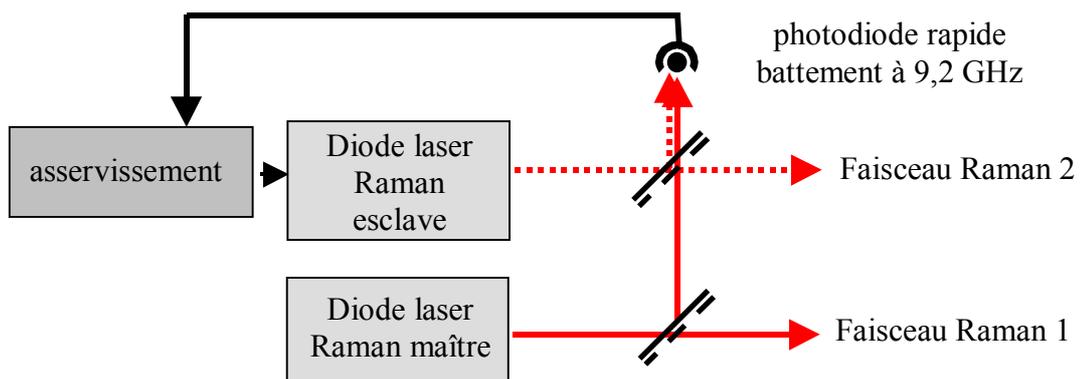
**Figure 6. 37** : spectre de la diode esclave injectée sur l'ordre -1. De la puissance s'injecte également à la fréquence des ordre 0 et +1.



**Figure 6. 38** : spectre de la diode modulée. Le pic central (ordre 0) a été filtré par le passage dans une cellule de césium.

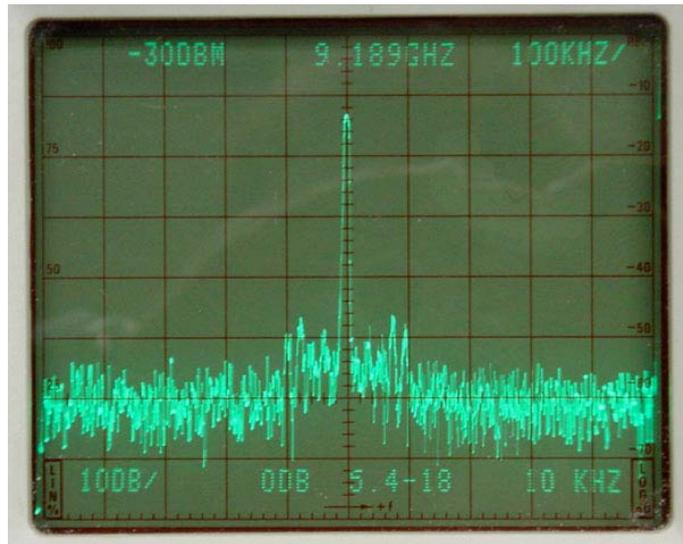
### 6.4.1.2 Le verrouillage de phase

Cette technique consiste à utiliser deux diodes laser différentes pour générer les deux faisceaux RAMAN. La cohérence en phase entre ces deux faisceaux est alors assurée par un asservissement électronique de grande bande passante, qui vient réagir sur la fréquence d'une des deux diodes (la diode esclave) pour reproduire les variations de l'autre diode (la diode maître). Le signal d'erreur est obtenu en réalisant le battement optique des deux faisceaux sur une photodiode rapide, et en ne conservant que la composante du battement à 9,2 GHz (voir Figure 6.39).



**Figure 6. 39** : schéma du montage des deux diodes laser RAMAN asservies en phase. La photodiode rapide recueille le battement à 9,2 GHz, puis un asservissement électronique reproduit les variations de la diode maître sur la fréquence de la diode esclave.

La courbe de battement visualisée à l'analyseur de spectre est représentée **Figure 6. 40**.



**Figure 6. 40** : courbe de battement visualisée à l'analyseur de spectre.

Dans notre montage, la diode maître est le laser proche de la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$ , et la diode esclave est le laser proche de la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 4$ . On ajuste ensuite le désaccord  $\Delta_{1f}$  (voir **Figure 4. 7**) entre la diode maître et la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  en réalisant un battement entre cette diode et le laser repompeur. Ce battement est recueilli sur une deuxième photodiode rapide, puis grâce à un asservissement de fréquence, permet de contrôler le désaccord  $\Delta_{1f}$  entre 0 et 2 GHz. On a dit précédemment que ce désaccord devait être de l'ordre du GHz afin de minimiser les phénomènes d'émission spontanée au moment de la transition RAMAN.

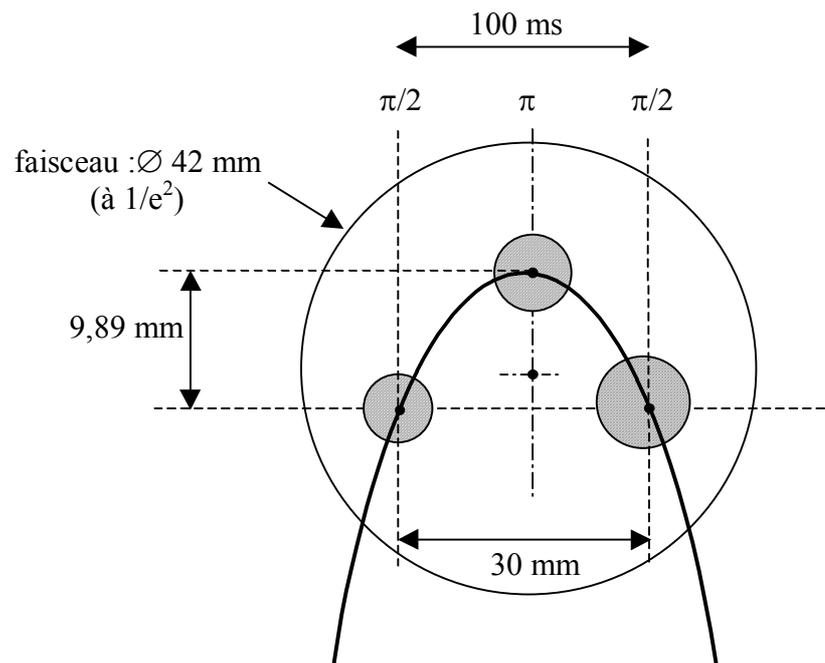
### 6.4.1.3 Puissance optique nécessaire aux faisceaux RAMAN

Pour réaliser une impulsion  $\pi$  (resp.  $\pi/2$ ), l'aire de l'impulsion RAMAN doit vérifier la relation  $\Omega_{eff} \tau = \pi$  (resp.  $\Omega_{eff} \tau = \pi/2$ ), où  $\Omega_{eff}$  est la pulsation de RABI équivalente à la transition RAMAN et  $\tau$  est la durée de l'impulsion. Or d'après la relation (Eq. 4. 62) la largeur de la distribution en vitesse transverse  $\Delta V_{transverse}$  des atomes adressés par la transition RAMAN est inversement proportionnelle à  $\tau$ . Pour avoir le plus grand nombre d'atomes participant au signal, on a donc intérêt à faire des impulsions les plus courtes possibles. Pour que la relation  $\Omega_{eff} \tau = \pi$  reste vérifiée, il faut donc que  $\Omega_{eff}$ , et par conséquent la puissance optique, soit plus grand.

Nous utilisons donc des puissances optiques relativement importantes pour les faisceaux Raman. Les diodes maître et esclave de faible puissance asservies en phase viennent alors injecter des composants de forte puissance. Il s'agit dans notre montage d'une diode SDL 5432-H1 de 200 mW pour la diode maître (transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$ ), et d'un MOPA (Master Oscillator Power Amplifier) SDL pouvant émettre jusqu'à 450mW pour la diode esclave (transition  $F = 4 \rightarrow F' = 4$ ). Le déséquilibre entre ces deux puissances est dicté par la relation (Eq. 4. 57) traduisant la compensation des déplacements lumineux.

### 6.4.2 Le reste du montage des faisceaux RAMAN

Les deux faisceaux issus de la diode 200mW et du MOPA sont alors recombinaés ensemble en polarisation croisée puis passent dans un modulateur acousto-optique servant à préparer et à contrôler les impulsions, puis sont amenés jusqu'à la zone d'interaction RAMAN dans l'enceinte à vide grâce à des fibres optiques. Le reste de ce montage, en particulier le contrôle des phases des faisceaux RAMAN, jusqu'à la zone d'interaction et le contrôle des durées d'impulsions, sera détaillé dans la thèse de J. FILS [FILS 02]. Nous pouvons tout de même préciser que la configuration retenue pour la zone d'interaction est de réaliser les trois impulsions Raman de façon symétrique par rapport au sommet de la trajectoire atomique. La durée totale d'interaction est alors de  $2T = 100$  ms et la longueur de cette zone est de  $2L = 30$  mm (voir **Figure 6. 41**). La petite taille de cette zone d'interaction nous permet alors d'utiliser un gros couple de faisceaux Raman pour réaliser les trois impulsions, comme décrit au paragraphe 5.4.6.



**Figure 6. 41** : schéma de la zone d'interaction RAMAN. La zone fait 30 mm de long et a une durée total de 100 ms. LA séquence d'impulsions est répartie de façon symétrique par rapport au sommet de la trajectoire.

## 6.5 LA DETECTION

La technique de détection avec renormalisation a été détaillée paragraphe 5.5.3. Elle est très similaire à celle utilisée dans le prototype d'horloge spatiale PHARAO [LEMONDE 97].

### 6.5.1 Les faisceaux de détection

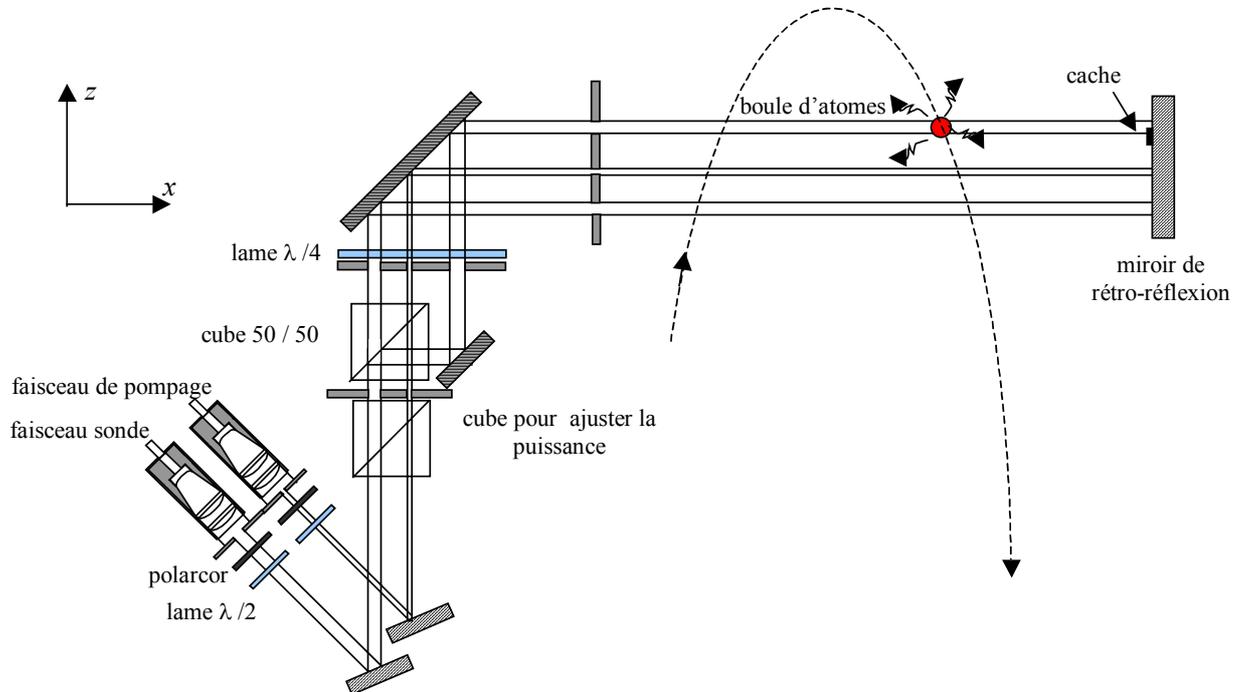
Elle se compose de trois faisceaux de polarisation circulaire, deux sont accordés sur la transition cyclante  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ , ils seront appelés faisceaux sondes dans la suite, et un accordé sur la transition pompante  $F = 3 \rightarrow F' = 4$ , appelé faisceau de pompage. Ces deux fréquences sont disponibles sur le banc de refroidissement, et sont amenées jusqu'à la zone de détection grâce aux coupleurs à fibres optiques. Les deux faisceaux sondes sont issus de la même fibre et séparés en deux au dernier moment, afin de s'affranchir de la partie basse fréquence du bruit d'amplitude du laser [SIMON 97]. Les trois faisceaux sont diaphragmés pour donner des tranches lumineuses horizontales de 10 mm de long et de 2 mm de haut pour le faisceau de pompage, et de 5 mm pour les faisceaux sondes.

- Les faisceaux sondes :

La polarisation circulaire des faisceaux sondes provoque le pompage des atomes dans le sous niveau ZEEMAN  $F = 4$ ,  $m_F = 4$  où ils vont effectuer un grand nombre de cycles absorption-émission, avec une très faible probabilité de retomber vers le niveau  $F = 3$ . La puissance de chacun de ces deux faisceaux est de  $100\mu\text{W}$ , ce qui correspond à une intensité lumineuse de  $200\mu\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}$ . Compte tenu du temps que les atomes passent dans chacun des faisceaux sondes (environ 5 ms), le nombre de photons de fluorescence par atome vaut environ  $2 \cdot 10^4$ .

- Le faisceau de pompage :

Un atome initialement dans l'état  $F = 3$  a 60 % de chance de passer dans l'état  $F = 4$  après un cycle absorption-émission. Au bout de huit cycles il ne reste donc plus que  $1/1000^{\text{ème}}$  des atomes dans le niveau  $F = 3$ . Le faisceau de pompage a une puissance de  $3\mu\text{W}$ , ce qui donne une intensité moyenne de  $10\mu\text{W}/\text{cm}^{-2}$ . Compte tenu du temps d'interaction de 2 ms le nombre de cycles effectués vaut plusieurs milliers, le pompage vers le niveau  $F = 4$  est donc total.

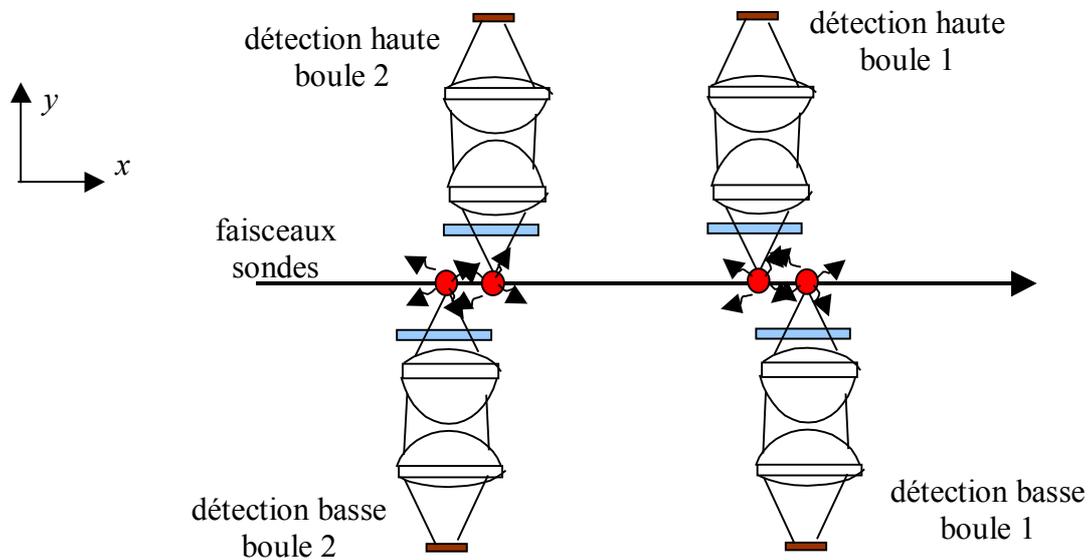


**Figure 6.39** : schéma de la détection. Les ondes stationnaires sont réalisées par rétro-réflexion sur un miroir. Un petit cache sur le miroir permet d'obtenir une onde progressive pour le faisceau pousseur.

## 6.5.2 Le système de détection

La fluorescence produite lors du passage des atomes dans les deux faisceaux sondes est recueillie par deux photodiodes faible bruit (Hamamatsu 1327BQ de sensibilité 0,55 A/W) par l'intermédiaire de deux condenseurs, fixant l'angle solide de collection des photons à 0,6 stéradians. Les photodiodes sont reliées à des circuits trans-impédances de gain  $G = 10^6$  V/A,

Les mêmes faisceaux de détection servent pour les deux sources atomiques, par contre il y a un système de deux photodiodes par boule d'atomes.



**Figure 6. 40** : schéma des quatre détecteurs Les détecteurs hautes sont situées dans un plan  $z = 222,6$  mm, et les détecteurs basses sont dans le plan  $z = 234$  mm.

## 6.6 CONCLUSION

Nous avons décrit ici les éléments du dispositif expérimental déjà existant. Bien que le montage ne soit pas encore terminé, ces éléments vont nous permettre d'évaluer la forme du signal de sortie attendue, et de caractériser un certain nombre d'effets parasites. C'est ce que nous allons faire dans le chapitre suivant.

## BIBLIOGRAPHIE

- [CLAIRON 91] A. Clairon, C. Salomon, S. Guellati, W. Phillips, "Ramsey resonance in a Zacharias fountain", *Europhys. Lett.*, 16, **165**, (1991)
- [DALIBARD 86] J. Dalibard, "Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique", Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure, Paris, (1986)
- [DALIBARD 89] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, "Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models", *J. Opt. Soc. Am.*, B6, **2023**, (1989)
- [DIMARCQ 93] N. Dimarcq, V. Giordano, P. Cerez, G. Theobald, "Analysis of the noise sources in an optically pumped cesium beam resonator", *IEEE Trans. On Inst. And Meas.*, 42, **116**, (1993)
- [DIMARCQ 94] N. Dimarcq, M. Houssin, E. Aucouturier, M. de Labachellerie, "New extended-cavity semiconductor laser structures using auto-alignment techniques", *OSA Annual Meeting / ILS-X*, Dallas, (1994)
- [DREWSSEN 94] M. Drewsen, P. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, C. Salomon, "Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap", *Appl. Phys. B*, 59, **283**, (1994)
- [DURAND 53] E. Durand, "Electrostatique et Magnétostatique", *Ed. Masson*, (1953)
- [FAVRE 86] F. Favre, D. Le Guen, J.-C Simon, B. Landousie, "External-Cavity semiconductor laser with 15 nm continuous tuning range", *Electron. Lett.*, **22**, p 795, (1986)
- [FERMIGIER 98] B. Fermigier, G. Lucas-Leclin, J. Dupont, F. Plumelle, M. Houssin, "Self-aligned external-cavity semiconductor lasers for high resolution spectroscopy", *Opt. Commun.*, **153**, 1-3, p 73, (1998)
- [KOBAYASHI 81] S. Kobayashi, T. Kimura, "Injection locking in AlGaAs semiconductor laser", *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-17**, p 681, (1981)
- [LEMONDE 97] P. Lemonde, « PHARAO : étude d'une horloge spatiale utilisant des atomes refroidis par laser : réalisation d'un prototype », *Thèse de doctorat de l'université Paris VI*, Paris, (1997)
- [LUCAS-LECLIN 98] G. Lucas-Leclin, "Importance des propriétés spectrales des lasers pour les performances des horloges atomiques à pompage optique", *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, Orsay, (1998)
- [METCALF 99] H. J. Metcalf, P. Van der Straten, "Laser cooling and trapping", *Ed. Springer-Verlag*, New-York, (1999)
- [RAAB 87] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard, "Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure", *Phys. Rev. Lett.*, 59, **2631**, (1987)
- [RINGOT 98] J. Ringot, Y. Lecoq, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, "Generation of phase-coherent laser beams for Raman spectroscopy and cooling by direct current modulation of a diode laser", soumis à EPJD

- [SAGNA 96] N. Sagna, "Refroidissement d'atomes de césium : étude expérimentale et théorique sur les caractéristiques du piègeage", Thèse de doctorat, Université de Neuchatel, (1996)
- [SIMON 97] E. Simon, « Vers une stabilité et une exactitude de  $10^{-16}$  pour les horloges atomiques : le rayonnement de corps noir, la détection optique », *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, Orsay, (1997)
- [SZYMANIEC 97] K. Szymaniec, S. Guezali, L. Cagnet, A. Clairon, "Injection locking of diode lasers to frequency modulated source", *Opt. Commun*, **144**, p 50, (1997)







## Chapitre 7 : ÉLÉMENTS DE CARACTÉRISATION DU GYROMÈTRE À ATOMES FROIDS

### TABLE DES MATIERES :

|   |     |
|---|-----|
| 7.1 NOTATION .....  | 208 |
| 7.2 LE CAS IDEAL .....  | 209 |
| 7.2.1 Description du problème.....  | 209 |
| 7.2.2 Sensibilité à $\Omega_z$ .....  | 211 |
| 7.2.3 Sensibilité à $a_y$ .....   | 211 |
| 7.2.4 Réponse en fréquence du gyromètre / accéléromètre : .....                                   | 212 |
| 7.2.5 Bande passante du gyromètre / accéléromètre : .....   | 213 |
| 7.2.6 Vers une représentation plus réaliste.....  | 213 |
| 7.3 ORGANISATION DE L'ÉTUDE.....  | 214 |
| 7.3.1 Description de la procédure de calcul de la simulation.....                                 | 214 |
| 7.3.2 Forme générale du signal de sortie – Paramètres de sortie .....                             | 215 |
| 7.3.3 Facteur d'échelle et biais .....  | 218 |
| 7.3.4 Quelques précisions sur ce que l'on veut faire .....  | 218 |
| 7.3.5 Le bruit blanc limite de l'appareil.....  | 219 |
| 7.4 IDENTIFICATIONS DES DIFFÉRENTES DÉPENDANCES .....   | 220 |
| 7.5 ATOME MOYEN PARFAIT + DISTRIBUTION DE VITESSE .....   | 222 |
| 7.5.1 Influence de la température longitudinale $\Delta V_x$ sur le contraste $\mathcal{G}$ ..... | 222 |
| 7.5.2 Influence de température $\Delta V_z$ sur le contraste $\mathcal{G}$ .....                  | 224 |
| 7.5.3 Influence de température transverse $\Delta V_y$ sur le facteur d'amplitude $A$ .....       | 225 |
| 7.5.3 Influence de l'accélération transverse $a_y$ sur le déphasage $\Delta\phi^{total}$ .....    | 225 |
| 7.5.4 Conclusion pour un atome parfait avec distribution de vitesse.....                          | 226 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.6 ATOME NON PARFAIT SANS DISTRIBUTION DE VITESSE .....   | 226 |
| 7.6.1 Influence de la vitesse de lancement horizontale $V_x$ sur le déphasage $\Delta\phi^{total}$ ... | 226 |
| 7.6.2 Influence de la vitesse de lancement verticale $V_z$ sur le déphasage $\Delta\phi^{total}$ ..... | 227 |
| 7.6.4 Les défauts d'impulsions .....   | 228 |
| 7.6.4.1 Description des faisceaux RAMAN .....  | 228 |
| 7.6.4.2 Calcul du défaut d'aire des impulsions .....   | 230 |
| 7.6.4.3 Influence des fluctuations d'intensité sur le facteur d'amplitude et le contraste .....        | 231 |
| 7.6.4.4 Influence de la vitesse de lancement sur le facteur d'amplitude et le contraste .....          | 233 |
| 7.6.4 Influence des déplacements lumineux .....  | 235 |
| 7.7 CONCLUSION .....   | 237 |
| BIBLIOGRAPHIE .....  | 238 |

## **Chapitre 7 :**

# ÉLÉMENTS DE CARACTÉRISATION DU GYROMÈTRE À ATOMES FROIDS

L'objectif de ce chapitre est de donner un certain nombre d'éléments qui vont permettre d'interpréter les résultats expérimentaux donnés par l'appareil. Au Chapitre 2 on a défini un modèle d'erreur permettant de relier, dans le cas général, le signal de sortie à la grandeur d'entrée. Trois paramètres importants ont été identifiés : le facteur d'échelle, le biais et le bruit limite de sortie. Les valeurs du biais et du facteur d'échelle peuvent dépendre d'un certain nombre de paramètres intérieurs ou extérieurs à l'appareil. Les dépendances que l'on peut modéliser (sous forme d'expressions mathématiques ou d'abaques) sont appelées variation du biais ou du facteur d'échelle. Les dépendances trop complexes pour être modélisées de façon déterministe sont appelées fluctuations du biais ou du facteur d'échelle. Ce sont elles qui entraînent les phénomènes de dérive qui viennent limiter le temps d'intégration (et par conséquent la sensibilité ultime de l'appareil). Il est clair qu'un appareil si bien caractérisé que toutes les dépendances ont pu être modélisées, ne présentera pas de fluctuation, et donc pas de dérive. Avec un tel appareil on pourrait diminuer indéfiniment l'incertitude de mesure en allongeant le temps d'intégration. Cet appareil parfait n'existe pas, mais le but de la caractérisation métrologique est de s'en approcher le plus possible en explicitant les dépendances du biais et du facteur d'échelle.

La première partie de ce chapitre va traiter le cas d'un appareil parfait placé dans un monde parfait. Nous rappellerons alors le calcul permettant d'aboutir à la mesure de vitesse de rotation ou d'accélération, et ceci nous permettra alors de décrire le cheminement calculatoire réalisé par la simulation que l'on utilisera dans toute la suite de ce chapitre.

La seconde partie sera l'occasion de dresser un tableau des différents effets perturbateurs, ainsi que de décrire leurs influences qualitatives sur le signal de sortie. Nous

étudierons alors précisément ces effets à l'aide de la simulation et de formules analytiques, puis nous déterminerons des courbes de dépendance qui nous permettront de prévoir l'évolution du signal de sortie en fonction de ces différents paramètres.

## 7.1 NOTATION

### Atome parfait $\rightarrow$ $^0$

Nous considérons ici un cas idéal dans lequel les trois interactions RAMAN sont considérées comme parfaites. C'est à dire que les trois impulsions sont exactement  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $\pi/2$ , que le déphasage lié à ces interactions est nul, et que l'impulsion  $\pi$  a lieu juste au moment où l'atome arrive au sommet de sa trajectoire. En pratique, cette condition ne peut être vérifiée que pour une seule classe de vitesse et de position atomique. Dans toute la suite de ce chapitre on appellera *atome parfait*, un atome vérifiant la condition précédente. Les paramètres se rapportant à cet atome parfait (vitesse, position, intensité vue, ...) seront repérés par :  $^0$ .

### Distribution de position et de vitesse initiales $\rightarrow$ $g, f$

En pratique les atomes sont répartis suivant des distributions de position et de vitesse initiales à la sortie du piège, notées respectivement  $g(x, y, z)$  et  $f(V_x, V_y, V_z)$

### Atome moyen $\rightarrow$ $^m$

Pour chacune des deux distributions  $g(x, y, z)$  et  $f(V_x, V_y, V_z)$ , on peut définir une valeur moyenne  $E(g)$  et  $E(f)$ . L'atome dont la position et la vitesse sont données par  $E(g)$  et  $E(f)$  sera appelé *atome moyen*. Les paramètres se rapportant à cet atome moyen seront repérés par :  $^m$ .

### $n, i, j, r$

$n$  servira à indiquer les atomes ( $n$  varie de 1 à  $N_0$ , le nombre total d'atomes)

$i$  sera utilisé pour représenter les trois impulsions RAMAN ( $i = 1, 2$  ou  $3$ )

$j$  représentera les trois directions de l'espace ( $j = x, y$  ou  $z$ )

$r$  désignera chacun des deux faisceaux RAMAN ( $r = 1$  ou  $2$ )

Dans toute la suite de ce chapitre, l'origine des positions est prise au sommet de la trajectoire de l'atome parfait. L'axe (Oy) est un axe horizontal dans la direction des faisceaux RAMAN, l'axe (Ox) est horizontal et perpendiculaire à (Oy), l'axe (Oz) est un axe vertical ascendant.

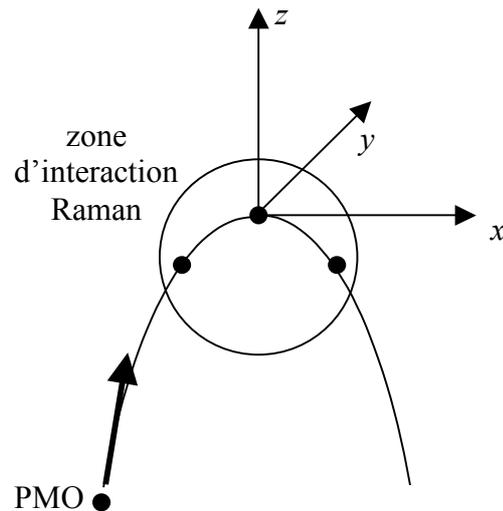


Figure 7.1 : définition des axes par rapport au dispositif.

## 7.2 LE CAS IDEAL

### 7.2.1 Description du problème

On suppose pour le moment que tous les atomes sont des atomes parfaits. La boule atomique a donc une dimension et une température nulle. On peut dans ce cas considérer un atome unique, et dire que le signal de sortie est égal à  $N_0$  fois le signal donné pour cet atome, où  $N_0$  est le nombre total d'atomes.

Le calcul du signal de sortie devient alors très simple. Ce calcul a été explicité dans le cadre du modèle perturbatif au paragraphe 4.5.1, on en rappelle ici les grandes lignes :

- Le signal de sortie a exactement la même forme que pour un interféromètre de MACH-ZENDER optique, on remplace juste l'intensité lumineuse par le nombre d'atomes :

$$N = N_0 \left( \frac{1 + \cos(\phi)}{2} \right) \quad (\text{Eq. 7. 1})$$

Le fait que les impulsions soient parfaites ( $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $\pi/2$ ) nous garantit que les deux ondes atomiques qui interfèrent ont même amplitude, le contraste des franges d'interférences est donc maximal et égal à 1.

- Le déphasage  $\phi$  est obtenu en sommant trois termes :  
le déphasage dû à la propagation de l'onde atomique

le déphasage dû aux interactions avec les lasers  
le déphasage dû aux perturbations (rotation ou accélération)

L'expression de ces différents déphasages donne finalement (voir Eq. 4. 89, Eq. 4.92, Eq. 4. 101, Eq. 4.105 et **Figure 4. 11**) :

$$\Delta\phi^{propagation} = 0 \quad (\text{Eq. 7. 2})$$

$$\Delta\phi^{Raman} = \phi_1^{Raman} - 2\phi_2^{Raman} + \phi_3^{Raman} \quad (\text{Eq. 7. 3})$$

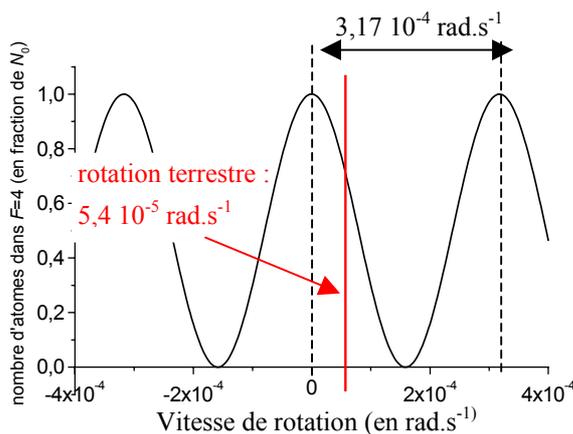
$$\Delta\phi^{perturbation} = \Delta\phi^{rotation} + \Delta\phi^{accélération} \quad (\text{Eq. 7. 4})$$

Dans le cas idéal considéré pour l'instant, l'aire de l'interféromètre est plane et horizontale (impulsion  $\pi$  au sommet de la trajectoire et impulsions  $\pi/2$  réparties symétriquement par rapport à l'impulsion  $\pi$ ). Le terme  $\Delta\phi^{rotation}$  ne dépend donc que de la composante  $\Omega_z$ . De même, les faisceaux RAMAN étant suivant l'axe  $y$ , le terme  $\Delta\phi^{accélération}$  ne dépend que de  $a_y$ . Et enfin  $\Delta\phi^{Raman} = 0$  car les fronts d'ondes sont plans et on néglige les fluctuations de phase entre les trois impulsions.

On peut alors tracer l'évolution du nombre d'atomes détectés dans l'état  $F = 4$ , en fonction de  $\Omega_z$  d'une part, et en fonction de  $a_y$  d'autre part. Ces deux courbes sont tracées pour les valeurs utilisées dans notre expérience :

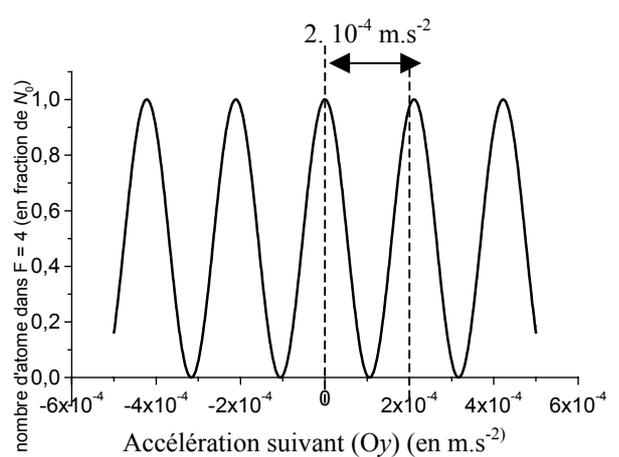
$$V_{atome}^x = 0,33 \text{ m.s}^{-1}, T = 45 \text{ ms et } k_{eff} = 2 k_{laser} = 14,7 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}.$$

Dépendance à la rotation d'axe ( $Oz$ )



**Figure 7. 2** : courbe de sensibilité aux rotations d'axe ( $Oz$ ). Une rotation de  $3,17 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$  provoque un déphasage de  $2\pi$ . La rotation de la Terre suivant cet axe vaut  $5,4 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ , soit  $1/6^{\text{ème}}$  de frange.

Dépendance à l'accélération suivant ( $Oy$ )



**Figure 7. 3** : courbe de sensibilité aux accélérations de direction ( $Oy$ ). Une accélération de  $2 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$  provoque un déphasage de  $2\pi$ .

### 7.2.2 Sensibilité à $\Omega_z$

Sur la **Figure 7. 2**, on constate qu'une frange correspond à une vitesse de rotation de  $\Omega_{2\pi} = 3,17 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$ . Pour comparaison, la composante verticale de la vitesse de rotation terrestre vaut  $\Omega_z^{\text{Terre}}(\varphi) = 7,27 \cdot 10^{-5} \times \sin(\varphi) \text{ rad.s}^{-1}$ , où  $\varphi$  est la latitudes. Soit pour Paris  $\varphi_{\text{Paris}} = 48^\circ$  donne  $\Omega_z^{\text{Terre}}(\varphi_{\text{Paris}}) = 5,46 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ , ce qui correspond à environ 1/6<sup>ième</sup> de frange de notre gyromètre.

La formule (Eq. 3. 34) donne alors la plus petite vitesse de rotation mesurable en une seconde :

$$\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}} = \frac{\Omega_{2\pi}}{2\pi \times (S/B) \times \sqrt{n_{\text{mes}}}} \quad (\text{Eq. 7. 5})$$

où  $(S/B)$  est le rapport signal à bruit et  $n_{\text{mes}}$  est le nombre de mesures réalisables par seconde. Avec notre appareil :  $(S/B) = 1000$ , et  $n_{\text{mes}} = 2$ , on obtient :  $\sigma_{\Delta\tilde{\Omega}} = 35,4 \cdot 10^{-9} \text{ rad.s}^{-1}$ . Cette valeur est à comparer avec celle obtenue dans l'expérience de M. KASEVICH de  $6 \cdot 10^{-10} \text{ rad.s}^{-1}$  [GUSTAVSON 00-2]. Le rapport 60 entre les deux valeurs s'explique d'une part par la différence d'aires des deux interféromètres, et d'autre part par la différence des flux atomiques qui entraîne des valeurs de  $(S/B)$  très différentes. On compare ces différences dans le tableau ci-dessous :

|                         | Notre gyromètre                  | Gyromètre de M. KASEVICH            |
|-------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| aire atomique           | 4,8 mm <sup>2</sup>              | 26 mm <sup>2</sup>                  |
| Flux atomique $N_0$     | 10 <sup>6</sup> atomes par coups | 10 <sup>10</sup> atomes par seconde |
| $(S/B) \leq \sqrt{N_0}$ | 1000                             | 33000                               |

### 7.2.3 Sensibilité à $a_y$

De même la **Figure 7. 3** présente la courbe de dépendance avec l'accélération suivant l'axe  $(Oy)$ . Une frange correspond à une accélération de :  $a_{2\pi} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2}$ . De la même façon que précédemment on peut déterminer la plus petite accélération mesurable en 1 seconde, et on obtient alors :  $\sigma_{\Delta\tilde{a}} = 22 \cdot 10^{-9} \text{ m.s}^{-2}$ . Cette valeur nous indique que notre appareil est également très sensible à l'accélération. Compte tenu du niveau d'accélération résiduelle qui règne sur Terre (vibrations du sol, déformations des bâtiments, tectonique des plaques, ...), cette forte sensibilité à l'accélération va produire un effet parasite très important lorsque l'appareil fonctionne en gyromètre. Afin de s'affranchir de cette dépendance accélérométrique, plusieurs solutions peuvent être mises en œuvre, utilisant des dispositifs d'amortissement des accélérations [PETERS 98], un accéléromètre de très grande sensibilité, ou encore le double jet atomique décrit au paragraphe 5.3.5.

### 7.2.4 Réponse en fréquence du gyromètre / accéléromètre :

Comme mentionné au chapitre 4, le principe de la mesure de vitesse de rotation avec un interféromètre de MACH-ZEHNDER consiste à échantillonner la position, dans la direction ( $Oy$ ), d'une particule test à trois instants différents  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  espacés chacun d'une durée  $T$ . On en déduit alors la vitesse moyenne aux deux instants  $(t_1 + t_2)/2$  et  $(t_2 + t_3)/2$ , d'où l'on tire alors l'accélération moyenne à l'instant  $t_2$  dans la direction ( $Oy$ ) pendant la durée  $2T$ . Cette accélération peut être une accélération de CORIOLIS due à la rotation de l'appareil suivant l'axe ( $Oz$ ), ou bien une accélération d'entraînement dans la direction ( $Oy$ ).

L'accélération à laquelle est soumis l'appareil peut être décomposée par transformation de FOURIER en ses différentes composantes spectrales. Considérons une de ces composantes à la pulsation  $\omega$ , et déterminons la réponse de l'appareil.

Nous allons faire le calcul en utilisant les trajectoires perturbées, pour une accélération d'entraînement. On retrouve le résultat pour une rotation en utilisant la relation  $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_{atome}$ . La composante spectrale de l'accélération à la pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$a_\omega(t) = a_\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{Eq. 7. 6})$$

Le déphasage à la sortie du gyromètre est donné en fonction des phases des faisceaux RAMAN vues aux instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  par (Eq. 4. 117), avec :

$$\phi_i^{Raman} = -\mathbf{k}_{eff} \cdot \mathbf{r}_i = -k_{eff} y_i \quad (\text{Eq. 7. 7})$$

On en déduit alors l'expression du déphasage :

$$\Delta\phi^{total} = \Delta\phi^{Raman} = -k_{eff} (y_1 - 2y_2 + y_3) \quad (\text{Eq. 7. 8})$$

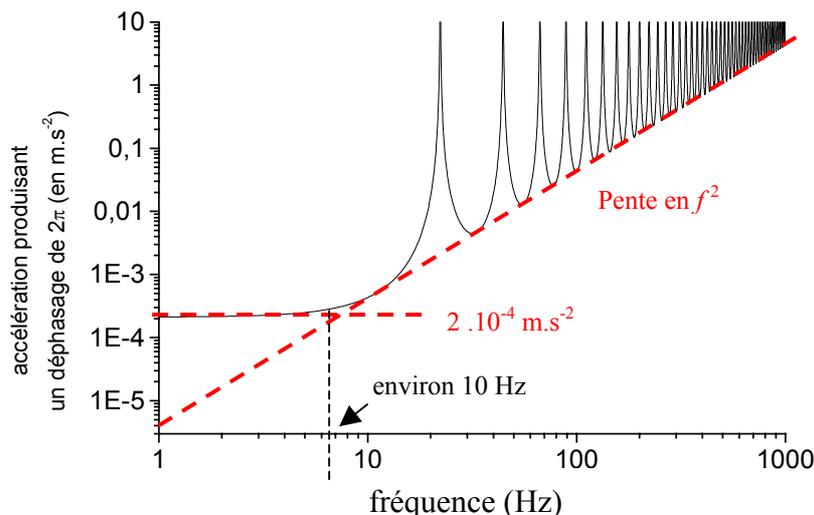
On pose  $y_1 = 0$  et on calcule  $y_2$  et  $y_3$  par double intégration de (Eq. 7. 6). On obtient alors :

$$\Delta\phi^{total} = -\frac{2k_{eff} a_\omega}{\omega^2} \cos(\omega T + \varphi) [1 - \cos(\omega T)] \quad (\text{Eq. 7. 9})$$

On trouve ainsi que pour  $\omega = 2\pi/T$ , le déphasage est nul, quelle que soit la valeur de  $a_\omega$ . La réponse spectrale de l'appareil a donc la forme présentée sur la **Figure 7. 4** (tracée pour  $\varphi = 0$ ). Les deux asymptotes tracées sur la courbe correspondent à :

$$\left| \begin{array}{ll} 2 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-2} & \text{dans la bande } 0 - 10 \text{ Hz} \\ 2 \cdot 10^{-6} \times f^2 \text{ m.s}^{-2} & \text{au dessus de } 10 \text{ Hz} \\ \text{sensibilité nulle pour toutes les fréquences } f \text{ telles que } f = n/T. \end{array} \right.$$

On retrouve évidemment le même type de courbe pour la réponse spectrale en vitesse de rotation, en remplaçant l'accélération  $\mathbf{a}$  par l'accélération de CORIOLIS  $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_{atome}$ .



**Figure 7.4** : réponse spectrale de notre appareil en mode accéléromètre. On a tracé la valeur de l'accélération produisant un déphasage de  $2\pi$ , en fonction de la fréquence.

### 7.2.5 Bande passante du gyromètre / accéléromètre :

Notre appareil donne une valeur moyenne de l'accélération (entraînement et CORIOLIS) déterminée sur une durée égale à  $2T = 90$  ms. La bande passante, définie à  $-3$  dB, peut être déterminée sur la **Figure 7.4** et est voisine de 10 Hz.

### 7.2.6 Vers une représentation plus réaliste

Par rapport au cas idéal que l'on vient d'étudier dans le paragraphe précédent, trois modifications importantes sont à apporter pour décrire correctement le signal de sortie :

- 1) Tous les atomes ne sont pas équivalents, ils sont répartis suivant les distributions de vitesse et de position initiales  $f$  et  $g$ .
- 2) L'atome moyen n'est pas forcément un atome parfait, ainsi même si le moyennage sur les distributions de vitesse et de position peut conduire à un déphasage nul, la probabilité de transition n'est pas forcément donnée par la relation (Eq. 7.1)
- 3) L'appareil n'est pas parfait ; l'intensité lumineuse, la phase et la direction des faisceaux RAMAN peuvent varier ; l'alignement de l'appareil avec la verticale peut changer, ...

Afin d'étudier l'influence de ces trois modifications sur le signal d'erreur, nous avons réalisé une étude s'appuyant à la fois sur une simulation numérique calculant la probabilité de transition par la méthode perturbative décrite au paragraphe 4.5.1, et sur un ensemble de

modèles analytiques permettant de valider la simulation et d'obtenir des formules analytiques plutôt que des abaques pour décrire les différentes dépendances. Nous présentons brièvement la procédure de calcul de la simulation, puis nous développerons l'organisation de cette étude.

## 7.3 ORGANISATION DE L'ÉTUDE

### 7.3.1 Description de la procédure de calcul de la simulation

Chaque atome a une probabilité de sortir dans l'état  $F = 4$  qui dépend de la phase et de l'intensité des faisceaux RAMAN vues au moment de chacune des trois impulsions. Cette phase et cette intensité dépendent entre autre de la trajectoire de l'atome, et donc de sa position et de sa vitesse initiales.

Le signal de sortie de l'interféromètre, correspond à la probabilité de transition moyenne des atomes, et s'exprime donc comme la somme des probabilités de tous les atomes, divisée par le nombre total d'atomes participant au signal  $N_0$ .

$$S \propto P_{moy} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} P_n \quad (\text{Eq. 7. 13})$$

que l'on peut réécrire en introduisant les distributions de vitesse  $f(V_x, V_y, V_z)$  et de position  $g(x, y, z)$  des atomes à la sortie du piège :

$$S = N_0 \int f(V_x, V_y, V_z) g(x, y, z) P_n(x, y, z, V_x, V_y, V_z) dx dy dz dV_x dV_y dV_z \quad (\text{Eq. 7. 14})$$

Ces deux distributions sont supposées gaussiennes, caractérisées par leur demi-largeur à  $1/\sqrt{e}$  dans chaque direction  $\Delta V_j$  et  $\Delta j$ , où  $j$  vaut  $x, y$  ou  $z$ . La simulation détermine donc la probabilité  $P_n(x, y, z, V_x, V_y, V_z)$  puis intègre numériquement sur les deux distributions.

Le calcul de  $P_i$  se fait sur les trajectoires non perturbées, de la même façon qu'au paragraphe 4.5.1.

- 1) L'atome est affecté d'une position et d'une vitesse initiales, ainsi que d'une fonction d'onde :

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \\ V_{z0} \end{pmatrix} \quad \psi_0 = \begin{pmatrix} a_e \\ a_f \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 7. 15})$$

- 2) Les trois positions  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  et  $\mathbf{r}_3$  où l'atome subit les impulsions RAMAN sont déterminées de façon classique :

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_0 + V_{x0}t_i \\ y_0 + V_{y0}t_i \\ z_0 + V_{z0}t_i - 1/2gt_i^2 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (\text{Eq. 7. 16})$$

3) On en déduit l'intensité et la phase RAMAN vues par l'atome au moment des trois impulsions :

$$I_1, I_2, I_3 \quad \text{et} \quad \phi_1^{Raman}, \phi_2^{Raman}, \phi_3^{Raman}$$

Le produit des trois matrices S correspondantes (données par Eq. 4 . 82) nous permet alors de déterminer la fonction d'onde à la sortie B de l'interféromètre.

$$\psi_B = \begin{pmatrix} a_e^B \\ a_B^B \\ a_f^B \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 7. 17})$$

4) On rajoute « à la main » les déphasages liés à la rotation et à l'accélération donnés par (Eq. 4. 101 et Eq. 4. 105).

5) La probabilité de transition vers l'état  $F=4 (|e\rangle)$  s'exprime alors par :

$$P_n = |a_e^B|^2 \quad (\text{Eq. 7. 18})$$

Voici donc la simulation que nous allons utiliser pour étudier les différentes dépendances du signal de sortie avec les paramètres de l'expérience.

### 7.3.2 Forme générale du signal de sortie – Paramètres de sortie

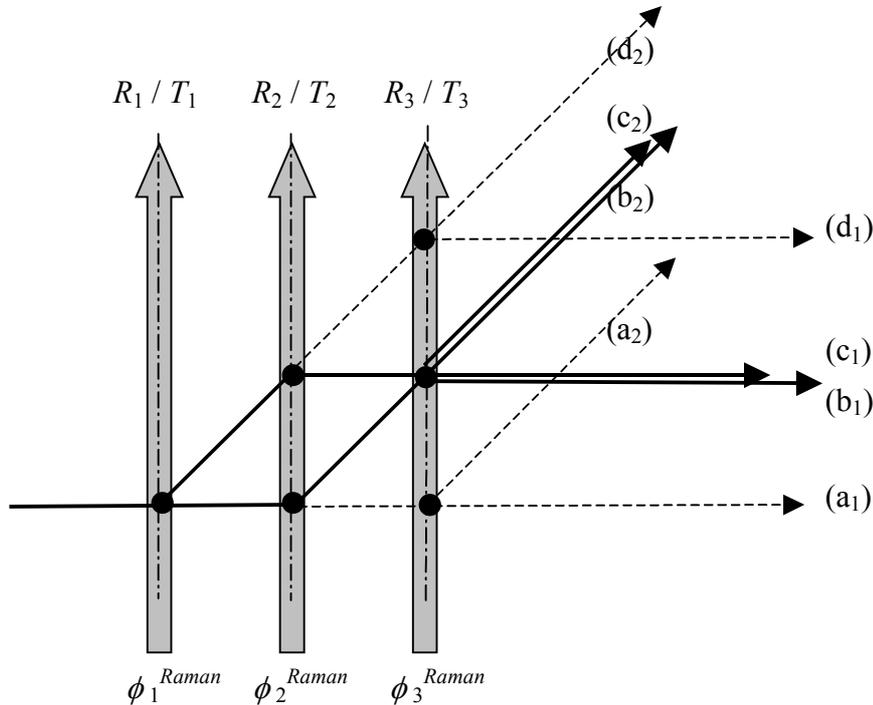
La simulation nous donne des courbes brutes en fonction des valeurs des différents paramètres expérimentaux. Afin de pouvoir interpréter et comparer ces courbes, il est important de définir un ensemble de paramètres de sortie qui caractérisent le signal. La caractérisation de l'appareil consiste alors à expliciter les dépendances de ces paramètres de sortie, en fonction des paramètres expérimentaux.

Au chapitre 2 nous avons décrit de manière générale les capteurs inertiels par un modèle d'erreur qui nous a permis de définir différentes grandeurs telle que le facteur d'échelle ou le biais. De la même façon nous allons ici développer un modèle permettant de prévoir la forme générale du signal de sortie, ceci afin de dégager les paramètres de sortie.

Comme mentionné au paragraphe précédent, à chaque atome  $n$  correspond un interféromètre de MACH-ZEHNDER fournissant un signal  $P_n$  en sortie. Le signal total est donc la somme, sur tous les atomes, des signaux de tous ces interféromètres.

Dans un modèle en ondes planes, l'état d'interférence en sortie d'un interféromètre de MACH-ZEHNDER réalisé avec trois lames séparatrices de coefficients de réflexion /

transmission ( $r_i / t_i$ ) et de déphasages  $\phi_i$  est donné par une expression relativement compliquée, car résultant des interférences de quatre ondes distinctes (voir **Figure 7. 5**).



**Figure 7. 5** : si les impulsions  $\pi/2$  et  $\pi$  ne sont pas parfaites, il apparaît quatre ondes distinctes qui, dans un modèle en ondes planes, interfèrent à la sortie de l'appareil.

En réalité, dans notre cas, les ondes (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, d<sub>1</sub> et d<sub>2</sub>) doivent être négligées pour déterminer l'expression du signal de sortie. En effet, les ondes (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, d<sub>1</sub> et d<sub>2</sub>) transmises par la deuxième lame lumineuse sont séparées transversalement des autres ondes d'une distance de 300  $\mu\text{m}$  dans notre cas. Si l'on prend en compte l'extension finie du paquet d'ondes atomiques, cette distance est bien supérieure à la longueur de cohérence de l'onde atomique, les quatre ondes en pointillé ne participent donc pas aux interférences. Dans un calcul en ondes planes, ces termes se moyennent sur la distribution de vitesse transverse, leur contribution est donc nulle.

D'autre part on montrera au paragraphe 7.7.4.2 que l'aire de l'impulsion  $\pi$  ne varie qu'au deuxième ordre avec la vitesse atomique et les fluctuations d'intensité, le coefficient de transmission  $T_2$  de la deuxième séparatrice est donc toujours très faible.

Le signal de sortie correspond alors à l'interférence de deux ondes d'amplitude et de phase différentes, il est donné par (voir par exemple [PEREZ 84]) :

$$P_n = (T_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 T_3) \left[ 1 + \left( \frac{2t_1 r_1 t_3 r_3}{T_1 R_3 + R_1 T_3} \right) \cos(\Delta\phi^{total}) \right] \quad (\text{Eq. 7. 19})$$

Cette expression peut se mettre sous la forme générale :

$$P_n = \frac{A}{2} \left[ 1 + \mathcal{G} \cos(\Delta\phi^{total}) \right] \quad (\text{Eq. 7. 20})$$

où  $A$  est le facteur d'amplitude du signal,  $\mathcal{G}$  est le facteur de visibilité (ou le contraste) et  $\Delta\phi^{total}$  est le déphasage total. Les trois paramètres  $A$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\Delta\phi^{total}$  seront nos paramètres de sortie. Chaque courbe donnée par la simulation sera comparée à cette expression pour tenter d'en déduire les valeurs des paramètres de sortie.

Le déphasage  $\Delta\phi^{total}$  peut être exprimé en fonction des différentes contributions au déphasage :

$$\Delta\phi^{total} = \Delta\phi^{inertiel} + \Delta\phi^{Raman} + \Delta\phi^{parasite} + \Delta\phi_0 \quad (\text{Eq. 7. 21})$$

- $\Delta\phi^{inertiel}$  est le déphasage lié aux rotations et aux accélérations de l'appareil. En considérant que les faisceaux RAMAN sont orientés dans la direction ( $Oy$ ), on peut donner l'expression de  $\Delta\phi^{inertiel}$  :

$$\Delta\phi^{inertiel} = -k_{eff} T^2 (a_y + 2V_z \Omega_x - 2V_x \Omega_z) \quad (\text{Eq. 7. 22})$$

où  $V_x$  et  $V_z$  sont les composantes de la vitesse de l'atome au moment de l'impulsion  $\pi$ .

- $\Delta\phi^{Raman}$  est le déphasage lié aux passages dans les lames lumineuses. Ce déphasage est essentiellement lié aux aberrations géométriques des faisceaux RAMAN. On suppose que ce déphasage a été mesuré au cours d'une phase d'étalonnage de l'appareil. Si l'on reste dans les conditions d'étalonnage, ce déphasage est donc constant et connu. Son expression est donnée par (Eq. 4. 92), que l'on rappelle ici :

$$\Delta\phi^{Raman} = \phi_1^{Raman} - 2\phi_2^{Raman} + \phi_3^{Raman} \quad (\text{Eq. 7. 23})$$

- $\Delta\phi^{parasite}$  est un déphasage parasite, non prévu qui peut être dû aux fluctuations de  $\Delta\phi^{Raman}$  lorsque l'on s'éloigne des conditions d'étalonnage. Son origine peut également être liée aux déplacements lumineux dans les lames séparatrices. Il correspond à toutes les contributions au déphasage  $\Delta\phi^{total}$ , qui ne pourront pas être modélisées. De la même façon qu'au chapitre 2, ce terme pourra être décrit par une fonction aléatoire dont la densité de probabilité sera à déterminer.

- $\Delta\phi_0$  est un déphasage contrôlable que l'on s'autorise à ajouter expérimentalement, afin d'asservir le signal à flanc de frange par exemple. Il peut également servir à moduler le déphasage de part et d'autre du sommet de la frange afin de déterminer précisément le sommet.

### 7.3.3 Facteur d'échelle et biais

Dans tout le reste de ce chapitre nous considérerons que l'appareil est un gyromètre dont l'axe d'entrée est orienté suivant la direction ( $Oz$ ). Notre grandeur d'entrée est donc  $\Omega_z$ . C'est par rapport à la mesure de cette grandeur que l'on va étudier les dépendances des différents paramètres expérimentaux. Une étude en fonction de  $a_y$  ou de  $\Omega_x$  pourra être menée de la même manière.

Par rapport à l'expression du déphasage  $\Delta\phi^{total}$  donnée en (Eq. 7. 21), on peut regrouper les termes afin de faire apparaître explicitement le facteur d'échelle et le biais, dans le terme de déphasage :

$$\Delta\phi^{total} = K_\phi \Omega_z + B_\phi \quad (\text{Eq. 7. 24})$$

avec :

$$K_\phi = 2k_{eff} T^2 V_x \quad (\text{Eq. 7. 25})$$

$$B_\phi = \left[ k_{eff} T^2 (a_y + 2V_z \Omega_x) + \Delta\phi^{Raman} + \Delta\phi^{parasite} + \Delta\phi_0 \right] \quad (\text{Eq. 7. 26})$$

On peut choisir  $\Delta\phi_0$  de telle façon que  $(\Delta\phi_0 + \Delta\phi^{Raman}) = \pi/2$ , on peut ainsi linéariser le signal de sortie  $P_n$  en fonction de  $\Omega_z$  en effectuant un développement limité à l'ordre 1 en  $(\Delta\phi^{inertiel} + \Delta\phi^{parasite})$  de (Eq. 7. 20) :

$$P_n = \frac{A \mathcal{G} K_\phi}{2} \Omega_z + \frac{A(1 + \mathcal{G} B_\phi)}{2} \quad (\text{Eq. 7. 27})$$

On pose :

$$K_p = \frac{A \mathcal{G} K_\phi}{2} \quad \text{et} \quad B_p = \frac{A(1 + \mathcal{G} B_\phi)}{2} \quad (\text{Eq. 7. 28})$$

$K_p$  et  $B_p$  sont respectivement le facteur d'échelle et le biais du signal de sortie, autour du point  $(\Delta\phi_0 + \Delta\phi^{Raman}) = \pi/2$ . Dans le cas où l'on asservit le signal de sortie autour de ce point, les paramètres  $K_p$  et  $B_p$  pourront être utilisés comme paramètres de sortie à la place de  $A$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\Delta\phi^{total}$ .

### 7.3.4 Quelques précisions sur ce que l'on veut faire

Dans notre étude, les paramètres de sortie sont l'amplitude  $A$ , le contraste  $\mathcal{G}$  et le déphasage  $\Delta\phi^{total}$ . Ces paramètres subissent des variations liées à l'environnement extérieur et au fonctionnement de l'appareil. Les variations des paramètres de sortie en fonction de certains paramètres expérimentaux peuvent être modélisées, dans ce cas le paramètre de sortie

devient une fonction de ce paramètre expérimental. Typiquement si le contraste  $\mathcal{G}$  dépend de la température atomique dans la direction  $x$  par exemple, on remplace  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{G}(\Delta V_x)$  dans (Eq. 7. 20) et on sait qu'en mesurant cette température on a accès à  $\mathcal{G}(\Delta V_x)$ .

L'objectif de cette étude est donc de déterminer dans quelles situations le signal de sortie de l'appareil pourra être représenté par un expression de la forme (Eq. 7. 1) :

$$P_n = \left[ \frac{1 + \cos(\Delta\phi^{total})}{2} \right] \quad (\text{Eq. 7. 29})$$

et dans quelles situations ce signal de sortie sera mieux représenté par une expression de la forme (Eq. 7. 20) :

$$P_n = \frac{A}{2} \left[ 1 + \mathcal{G} \cos(\Delta\phi^{total}) \right] \quad (\text{Eq. 7. 30})$$

Dans ce deuxième cas quelles sont les dépendances de  $A$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\Delta\phi^{total}$  en fonction des différents paramètres perturbateurs seront mises en évidence

Afin de faire une étude quantitative de l'influence de ces paramètres, il est important de savoir à partir de quelles valeurs les variations des paramètres de sortie ne peuvent plus être négligées. On est alors amené à distinguer deux cas :

- Les fluctuations rapides qui modifient le signal d'une mesure à l'autre. Lorsque l'on moyenne sur un grand nombre de mesures, ces fluctuations s'annulent, mais sur une mesure les variations doivent être inférieures au bruit quantique de l'appareil sur un coup, donné par le niveau de bruit blanc. Ce niveau va être calculé dans le prochain paragraphe.

- Les dérives lentes du signal de sortie. Ces dérives ne perturbent pas la mesure sur un coup, mais limitent la durée d'intégration maximale accessible par l'appareil. Le niveau de ces dérives doit être inférieur à la sensibilité ultime de l'appareil. Seule la détermination expérimentale de la stabilité du dispositif nous permettra de savoir à quel niveau se trouve cette sensibilité ultime.

### 7.3.5 Le bruit blanc limite de l'appareil

A partir de (Eq. 7.27), on peut réécrire un modèle d'erreur analogue à celui décrit au chapitre 2. La grandeur de sortie  $P_n$  est alors reliée à la grandeur d'entrée  $\Omega_z$  par la relation :

$$P_n = \frac{A}{2} \left[ 1 + \mathcal{G} \cos(\Delta\phi^{total}) \right] + \tilde{\varepsilon}(t) \quad (\text{Eq. 7. 31})$$

où  $\tilde{\varepsilon}(t)$  est le bruit limite en sortie de l'appareil, correspondant au bruit blanc lié au nombre d'atomes détectés. L'écart-type de ce bruit est relié au rapport signal à bruit ( $S/B$ ) sur un coup par la relation :

$$\sigma_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{(S/B)\sqrt{n_{mes}}} \quad (\text{Eq. 7. 32})$$

où  $n_{mes}$  est le nombre de mesures par seconde. La grandeur  $(S/B)\sqrt{n_{mes}}$  correspond donc au rapport signal à bruit sur une seconde.

Pour notre appareil  $(S/B)\sqrt{n_{mes}}$  vaut environ 1400, on trouve donc  $\sigma_{\tilde{\varepsilon}} = 7 \cdot 10^{-4}$ , que l'on arrondira par la suite à  $10^{-3}$ , ceci afin de nous laisser un peu de marge. Ce bruit correspond donc au bruit quantique de l'appareil sur une seconde. Afin d'exploiter pleinement les performances de l'appareil, toutes les autres sources de fluctuations non contrôlables doivent donc avoir un niveau inférieur à  $10^{-3}$ .

L'objectif de la caractérisation est donc de connaître les variations du facteur d'amplitude  $A$  à mieux que  $2 \cdot 10^{-3}$ , et celles du contraste  $\mathcal{G}$  et du déphasage  $\Delta\phi^{total}$  à mieux que  $10^{-3}$ .

#### 7.4 IDENTIFICATIONS DES DIFFÉRENTES DÉPENDANCES

Le nombre de paramètres expérimentaux dont dépend le signal de sortie est relativement important, et un même paramètre peut influencer sur plusieurs paramètres de sortie, comme le montre la **Figure 7. 6**. Le but de ce paragraphe est d'élaborer une stratégie d'étude de ces différentes dépendances.

L'étude que nous allons mener maintenant s'organise en deux étapes :

Dans un premier temps nous allons supposer que l'atome moyen est un atome parfait, et nous regarderons alors les modifications qu'apporte le moyennage sur la distribution de vitesse. La taille de la boule d'atomes étant relativement petite (environ 2 mm de diamètre), la distribution de position est très étroite. Une étude à l'aide de la simulation numérique a montré que son influence était négligeable devant celle liée à la distribution de vitesse.

Dans un second temps, nous regarderons comment évolue le signal de sortie pour un atome qui n'est pas parfait. Cette étude nous permettra également d'exprimer les dépendances du signal de sortie par rapport aux différents paramètres expérimentaux tels que l'intensité ou la phase des faisceaux lasers, ou encore les défauts d'alignement par rapport à la verticale.

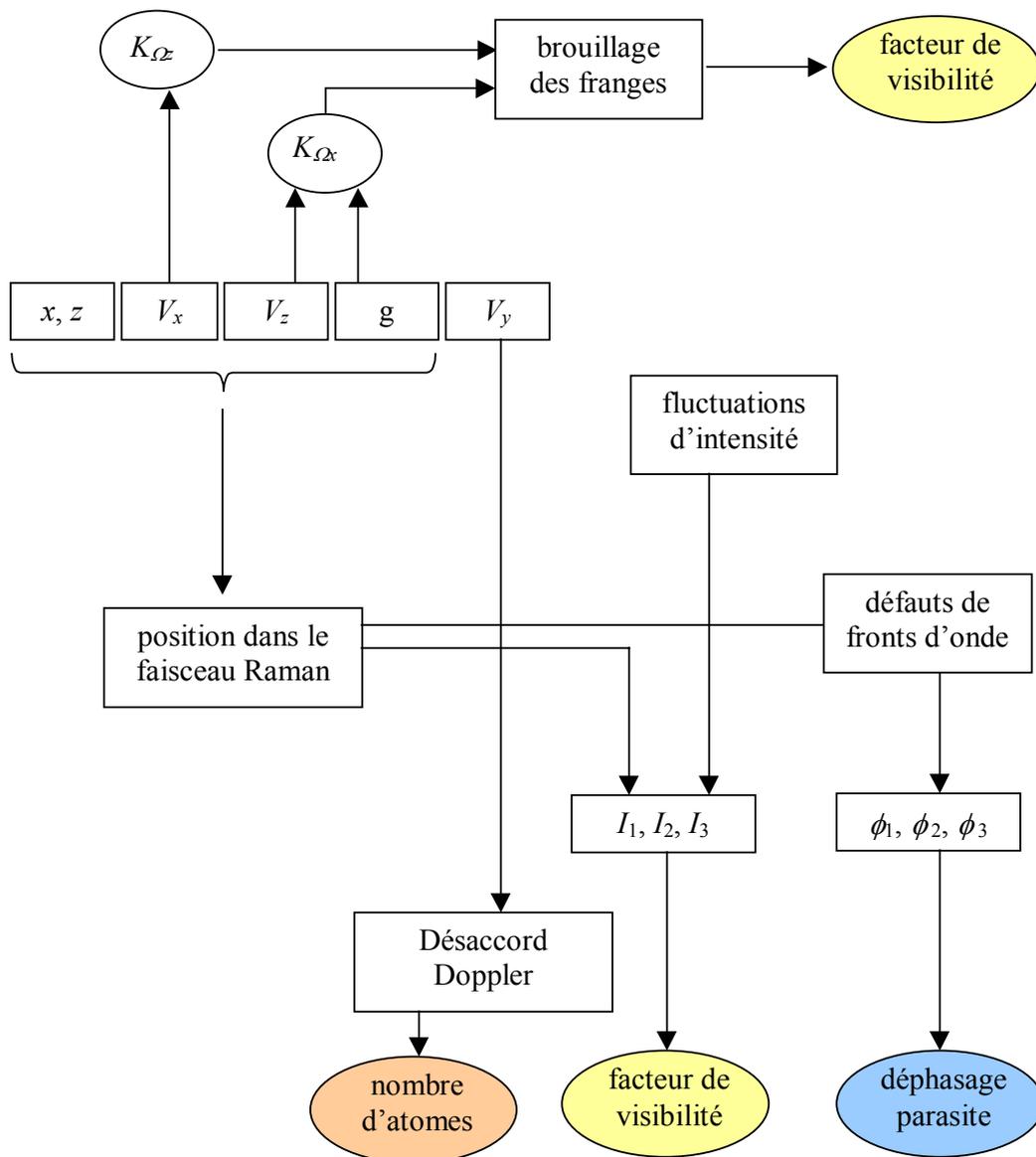


Figure 7. 6 : diagramme des différents paramètres influant sur le facteur d'amplitude (nombre d'atomes), le facteur de visibilité et le déphasage.

## 7.5 ATOME MOYEN PARFAIT + DISTRIBUTION DE VITESSE

On a vu au paragraphe 7.1 que le signal de sortie pour un atome parfait est donné par :

$$P_n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( -\frac{k_{eff} T^2}{2} a_y + (k_{eff} T^2 V_x) \Omega_z \right) \right] \quad (\text{Eq. 7. 33})$$

On a pris ici  $\Delta\phi^{Raman} = 0$  et  $\Delta\phi^{parasite} = 0$ . La dépendance en  $\Omega_x$  a disparu puisque, pour un atome parfait, l'aire dans le plan  $(Oyz)$  s'annule. On ne se préoccupe pas pour l'instant du facteur de visibilité  $\mathcal{G}$  introduit par le fait que les impulsions ne sont pas forcément  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $\pi/2$ . Cela revient à considérer que les faisceaux RAMAN ont des profils d'intensité rectangulaires.

On habille cet atome parfait de la distribution de vitesse. On suppose que les atomes sont répartis dans une distribution gaussienne de vitesse dans les trois directions. Cette distribution est donc caractérisée par les trois demi-largeurs à  $1/\sqrt{e}$   $\Delta V_j$ . La distribution de vitesse s'écrit ainsi :

$$f(V_x, V_y, V_z) = \frac{1}{\Delta V_x \Delta V_y \Delta V_z \sqrt{(2\pi)^3}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{V_x - V_x^0}{\Delta V_x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{V_y - V_y^0}{\Delta V_y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{V_z - V_z^0}{\Delta V_z} \right)^2 \right] \quad (\text{Eq. 7. 34})$$

A la sortie du piège magnéto-optique les  $\Delta V_j$  sont égaux et valent typiquement  $7 \text{ mm.s}^{-1}$ .

### 7.5.1 Influence de la température longitudinale $\Delta V_x$ sur le contraste sur $\mathcal{G}$

Le facteur d'échelle  $K_\phi$  est directement proportionnel à  $V_x$  d'après (Eq. 7. 25). Cette dépendance va conduire à un brouillage des franges d'interférences de la même façon que dans un interféromètre optique utilisant une source étendue spectralement. Le contraste vaut alors 1 à la teinte plate ( $\Omega_z = 0$  dans notre cas) et diminue lorsque  $\Omega_z$  augmente. Dans le cas d'un profil de vitesse gaussien, le contraste est alors également gaussien (d'après le théorème de VAN CITTER et ZERNIKE, c'est la transformée de FOURIER de la distribution de vitesse). Son expression est alors donnée par :

$$\mathcal{G}_x(\Omega_z) = e^{-\frac{1}{2} (2k_{eff} \Omega_z T^2 \Delta V_x)^2} \quad (\text{Eq. 7. 35})$$

On retrouve évidemment ce résultat en exprimant directement la somme sur la distribution de vitesse des signaux de sortie des multiples interféromètres de MACH-ZEHNDER correspondant à chaque atome.

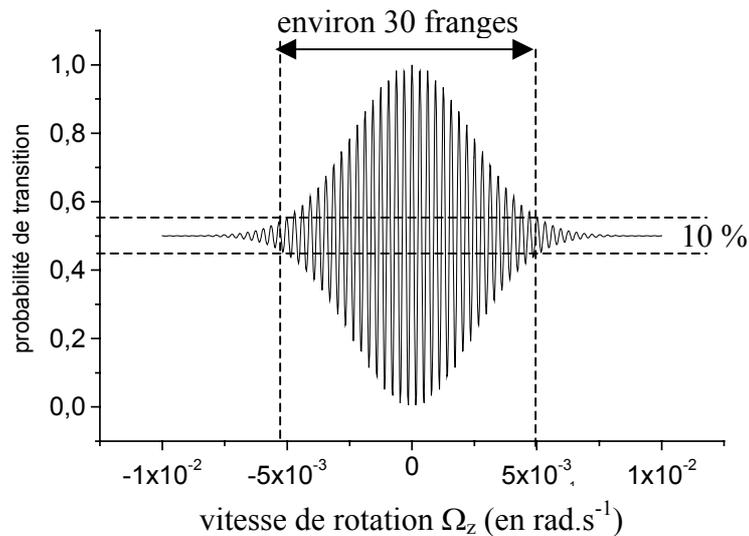
$$P = \frac{1}{2\Delta V_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( 1 + \cos(2k_{\text{eff}} V_x T^2 \Omega_z) \right) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{V_x - V_x^0}{\Delta V_x} \right)^2} \right] dV_x \quad (\text{Eq. 7. 36})$$

Cette intégrale se calcule et donne :

$$P = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{2} (2k_{\text{eff}} T^2 \Delta V_x \Omega_z)^2} \cos(2k_{\text{eff}} V_x^0 T^2 \Omega_z)}{2} \quad (\text{Eq. 7. 37})$$

On retrouve donc bien le résultat obtenu en (Eq. 7. 35).

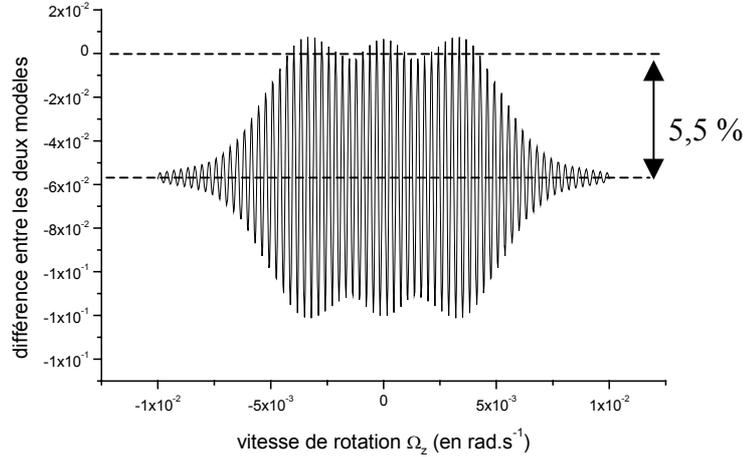
En prenant les paramètres de notre expérience :  $\Delta V_x = 7 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $T = 45 \text{ ms}$ , on trouve  $\mathcal{G}_x(\Omega_z) = 10 \%$  pour  $\Omega_z = 5.10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$ . En prenant la valeur de  $\Omega_{2\pi} = 3,17.10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$  on trouve donc 32 franges (voir Figure 7. 7).



**Figure 7. 7 :** chute du contraste lié à la distribution de vitesse longitudinale. Le contraste baisse lentement, on observe environ 30 franges d'interférences. (On a supposé le profil d'intensité des faisceaux RAMAN rectangulaire).

En faisant tourner la simulation avec les valeurs de  $\Delta V_x$  et de  $T$  données, et en prenant un profil d'intensité rectangulaire, on retrouve bien exactement la même courbe que celle de la Figure 7. 7. Par contre l'expression (Eq. 7. 37) n'est pas suffisante pour expliquer complètement ce que donne la simulation. En effet (Eq. 7. 37) ne prend pas en compte le fait que des atomes dont la vitesse  $V_x$  n'est pas celle de l'atome parfait, ne voient pas exactement des impulsions  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $\pi/2$ , à cause du profil d'intensité gaussien des faisceaux RAMAN. Cet

effet sera détaillé au paragraphe 7.7.4. La **Figure 7. 8** présente la différence entre le signal de sortie obtenu avec (Eq. 7. 37) et celui obtenu avec la simulation. On constate que le fait de prendre en compte le profil gaussien introduit un biais, variant avec  $\Omega_z$ , dont la valeur moyenne est de 5,5 %. On reconnaît dans cette fonction, une structure oscillante à laquelle se superpose une décroissance de type exponentielle.



**Figure 7. 8** : différence entre l'expression (Eq. 7. 37) et la simulation. On observe un biais de 5,5 % et une structure oscillante dont l'enveloppe présente une décroissance exponentielle.

### 7.5.2 Influence de température $\Delta V_z$ sur le contraste $\mathcal{G}$

La distribution de vitesse dans la direction  $z$  n'influe pas directement sur le facteur d'échelle  $K_\phi$ . Par contre le moyennage sur la distribution  $V_z$  modifie également le facteur de visibilité :

$$P = \frac{1}{2\Delta V_z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \cos\left(2k_{eff}T^2(\Omega_z V_x - \Omega_x V_z(t_2))\right) \right] e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_z - V_z^0(t_2)}{\Delta V_z}\right)^2} dV_z \quad (\text{Eq. 7. 38})$$

pour un atome parfait on a bien sûr  $V_z^0(t_2) = 0$ , puisqu'en  $t = t_2$ , il est au sommet de la trajectoire. Cette intégrale donne donc :

$$P = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{2}(2k_{eff}\Omega_x T^2 \Delta V_z)^2} \cos(2k_{eff}T^2 \Omega_z V_x)}{2} \quad (\text{Eq. 7. 39})$$

Le moyennage sur la distribution de vitesse suivant la direction ( $Oz$ ) ne se traduit donc pas par un déphasage mais par un facteur de visibilité indépendant de  $\Omega_z$ . Ce facteur de visibilité vaut :

$$\mathcal{G}_z = e^{-\frac{1}{2}(2k_{eff}\Omega_x T^2 \Delta V_z)^2} \quad (\text{Eq. 7. 40})$$

Avec nos paramètres  $\Delta V_z = 7 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $T = 45 \text{ ms}$ , et  $\Omega_x = \Omega_x^{\text{Terre}}(\varphi_{\text{Paris}}) = 4,79.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  on trouve  $\vartheta = 0,9998$ . Ce terme est bien inférieur à  $2 \cdot 10^{-3}$ , les modifications du signal qu'il va introduire seront donc invisibles car masquées par le bruit blanc de l'appareil. On le négligera donc dans la suite de ce chapitre.

Par contre si l'appareil est soumis à une rotation suivant l'axe ( $Ox$ ) de vitesse de rotation supérieure à  $9 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$ , la réduction du facteur de visibilité devient discernable.

### 7.5.3 Influence de la température transverse $\Delta V_y$ sur le facteur d'amplitude $A$

La distribution de vitesse suivant l'axe ( $Oy$ ) n'intervient pas dans l'expression de  $K_\phi$ . Par contre ce paramètre va influencer sur le nombre d'atomes détectés en sortie de l'interféromètre. En effet, les transitions RAMAN sont sélectives en vitesse transverse. La largeur de cette transition est donnée par (Eq. 4. 62) dont on donne une expression approchée ici :

$$\Delta V_y^{\text{Raman}} \approx \frac{1}{k_{\text{eff}} \tau} \quad (\text{Eq. 7. 41})$$

Il apparaît donc une diminution relative du nombre d'atomes donnée en première approximation par :

$$A^y = \frac{1}{\Delta V_y \sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta V_y^{\text{Raman}}}^{\Delta V_y^{\text{Raman}}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{V_y}{\Delta V_y} \right)^2} dV_y \quad (\text{Eq. 7. 42})$$

Dans notre cas  $\Delta V_y^{\text{Raman}}$  vaut environ  $3,4 \text{ mm.s}^{-1}$ . La distribution de vitesse dans la direction ( $Oy$ ) ayant pour largeur  $\Delta V_y = 7 \text{ mm.s}^{-1}$ , on trouve une perte d'atomes de 32 %. Si l'on veut connaître  $A^y$  à mieux que  $2 \cdot 10^{-3}$ , il faut connaître la valeur de  $\Delta V_y$  à  $4 \cdot 10^{-3}$  près en valeur relative, ce qui est relativement compliqué. Néanmoins des méthodes particulières permettent de s'affranchir des variations du facteur d'amplitude. Ainsi dans les horloges atomiques, un déphasage est ajouté afin de se placer de part et d'autre du sommet de la frange à chaque coup. Cette méthode permet de pointer le sommet en s'affranchissant des fluctuations d'amplitude.

### 7.5.4 Influence de l'accélération transverse $a_y$ sur le déphasage $\Delta\phi^{\text{total}}$

Comme on l'a déjà mentionné, les accélérations suivant l'axe des faisceaux RAMAN provoquent directement un déphasage donné par (Eq. 4. 105). On a déjà donné au paragraphe 7.2.3 la dépendance du déphasage  $\Delta\phi^{\text{total}}$  avec l'accélération transverse.

On s'affranchit de cette dépendance grâce à la méthode du double jet atomique. La précision avec laquelle les deux trajectoires atomiques doivent se superposer pour pouvoir négliger l'influence des aberrations géométriques des faisceaux RAMAN sera étudiée en détails dans la thèse J. FILS [FILS 02]. Dans la suite de notre étude nous supposons donc que  $\Delta\phi_y^{\text{acceleration}} = 0$ .

### 7.5.5 Conclusion pour un atome parfait avec distribution de vitesse

L'étude que l'on vient de mener nous permet d'explicitier les coefficients  $A$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\Delta\phi$  de (Eq. 7.20) ou (Eq. 7.27) dans le cas d'un interféromètre pour lequel l'atome moyen est un atome parfait, et en négligeant le profil gaussien des faisceaux RAMAN. On a alors trouvé :

$$\begin{aligned} A &= A^y && \text{donné par (Eq. 7.42)} \\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}_x(\Omega_z) \times \mathcal{G}_z && \text{avec } \mathcal{G}_x(\Omega_z) = e^{-\frac{1}{2}(2k_{eff}\Omega_z T^2 \Delta V_x)^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_z = e^{-\frac{1}{2}(2k_{eff}\Omega_x T^2 \Delta V_z)^2} \\ \Delta\phi &= 0 \end{aligned}$$

Le signal de sortie dans ce cas prend donc la forme générale suivante :

$$P = \frac{A^y}{2} \left[ 1 + \mathcal{G}_x(\Omega_z) \mathcal{G}_z \cos(\Delta\phi_z^{rotation} + \Delta\phi^{Raman} + \Delta\phi^{parasite} + \Delta\phi_0) \right] \quad (\text{Eq. 7. 43})$$

## 7.6 ATOME NON PARFAIT SANS DISTRIBUTION DE VITESSE

On considère maintenant le cas d'un atome unique dont les paramètres initiaux ne correspondent pas à ceux d'un atome parfait.

### 7.6.1 Influence de la vitesse de lancement horizontale $V_x$ sur le déphasage $\Delta\phi^{total}$

Le facteur d'échelle  $K_\phi$  dépend linéairement de  $V_x$ . Si l'on veut connaître la valeur de  $\Delta\phi^{total}$  à  $10^{-3}$ , il faut contrôler la vitesse de lancement  $V_x$  à mieux que  $10^{-3}$  en valeur relative. L'utilisation d'un décalage de fréquence pour définir la vitesse de lancement  $|\mathbf{V}|$  nous permet de la contrôler très précisément.  $V_x$  est alors donné par :

$$V_x = |\mathbf{V}| \cos(\alpha) \quad (\text{Eq. 7. 44})$$

Pour connaître la valeur de  $(dV_x/V_x)$  à  $10^{-3}$  près, il faut donc connaître  $\alpha$  précisément. Un développement limité en  $d\alpha$  nous donne :

$$\frac{dV_x}{V_x} = -\text{tg}(\alpha) d\alpha \quad (\text{Eq. 7. 45})$$

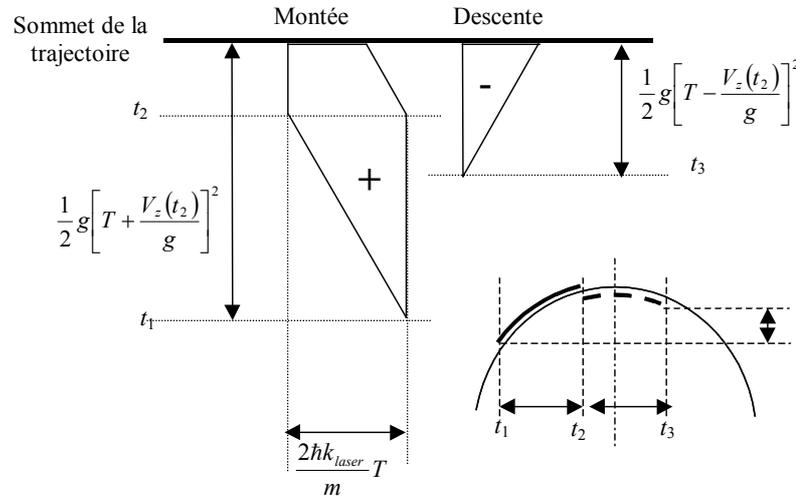
Avec  $\alpha=82^\circ$  on obtient  $d\alpha=140 \mu\text{rad}$ . La précision mécanique et le réglage des collimateurs de refroidissement permettent d'atteindre cette valeur au moment de l'étalonnage de l'appareil. Par contre si l'on veut éviter les dérives long terme du facteur d'échelle il faut contrôler cet angle régulièrement.

### 7.6.2 Influence de la vitesse de lancement verticale $V_z$ sur le déphasage $\Delta\phi^{total}$

Supposons que la vitesse initiale de l'atome suivant ( $Oz$ ) diffère de celle de l'atome parfait de  $dV_z^0$ . Cela signifie que l'impulsion  $\pi$  ne se produit plus au sommet de la trajectoire atomique, il apparaît alors une aire dans le plan ( $Oyz$ ) qui donne une sensibilité aux rotations d'axe ( $Ox$ ). Cette aire vaut :

$$A_{\Omega_x} = 2 \frac{\hbar k_{eff} T^2}{m} V_z(t_2) \quad (\text{Eq. 7. 46})$$

où  $V_z(t_2)$  est la vitesse de l'atome dans la direction  $z$  au moment de l'impulsion  $\pi$ .



**Figure 7.9** : si la vitesse suivant l'axe ( $Oz$ ) ne s'annule pas au moment de l'impulsion  $\pi$ , il apparaît une aire dans le plan ( $Oyz$ ).

Le signal de sortie présente alors un déphasage lié aux rotations autour de l'axe ( $Ox$ ), valant :

$$\Delta\phi_x^{rotation} = -4k_{eff} T^2 dV_z(t_2) \Omega_x \quad (\text{Eq. 7. 47})$$

En prenant  $\Omega_x = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  (valeur de la rotation de la Terre dans la direction  $x$ ), on obtient un déphasage de 2 mrad pour une erreur de vitesse de  $dV_z^0 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ . Comme précédemment la précision que l'on a sur le module de la vitesse de lancement des atomes nous permet d'être bien en dessous de cette valeur. La précision sur l'angle est moins critique qu'au paragraphe précédent, on trouve  $d\alpha = 5 \text{ mrad}$ .

Si l'on considère maintenant le signal donné par la méthode du double jet atomique, (les deux sources atomiques étant supposées identiques et symétriques), le déphasage  $\Delta\phi_x^{rotation}$  ne dépend pas du sens de la vitesse  $V_x$ , la réjection de ce déphasage se fait donc.

### 7.6.3 Influence du champ de pesanteur $g$ sur le déphasage $\Delta\phi^{total}$

De même qu'au paragraphe précédent, si le champ de pesanteur  $g$  n'a pas la valeur prévue, alors l'atome a une composante non nulle de sa vitesse dans la direction ( $Oz$ ) au moment de l'impulsion  $\pi$ . Il apparaît alors de nouveau une sensibilité à  $\Omega_z$  donnée par (Eq. 7. 47). Une variation  $dg$  sur la valeur de  $g$  est équivalente à une variation  $dV_z$  sur la vitesse  $V_z(t_2)$  donnée par :

$$dV_z = dg \times t_2 \quad (\text{Eq. 7. 48})$$

avec  $t_2 = 242$  ms et toujours avec  $\Omega_x = 4,8 \cdot 10^{-5}$  rad.s<sup>-1</sup>, on trouve qu'une variation de  $(dg/g) = 3 \cdot 10^{-4}$  produit un déphasage de 2 mrad. A titre d'exemple, cette variation de  $g$  est équivalente à un défaut d'alignement par rapport à la verticale de 300  $\mu$ rad ( $\sim 1'$  d'arc). Dans le cas des vibrations rapides du sol, il faut donc isoler l'appareil grâce à un amortisseur. Pour éviter les dérives long terme du biais, il sera donc indispensable de contrôler la verticalité du dispositif régulièrement.

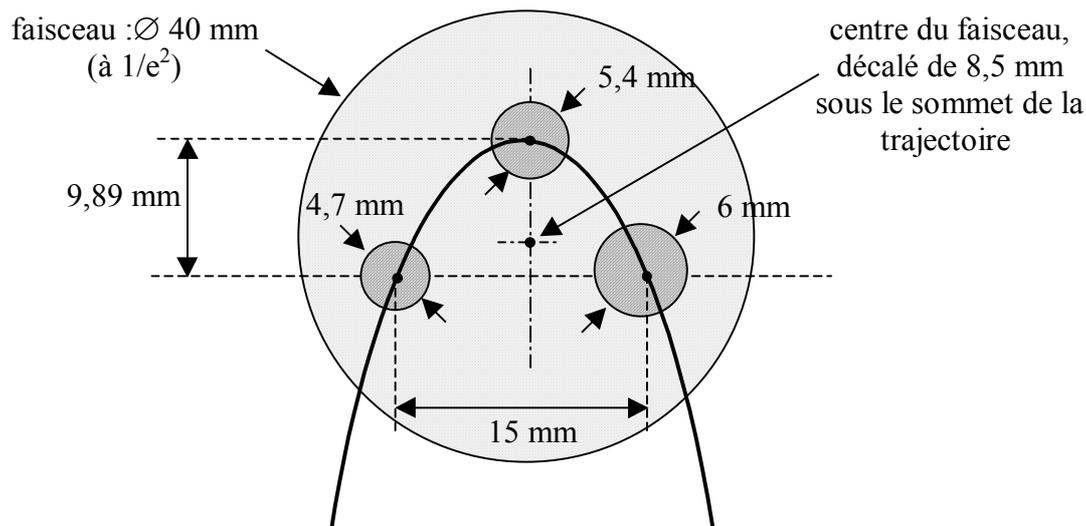
## 7.6.4 Les défauts d'impulsions

### 7.6.4.1 Description des faisceaux RAMAN

Le fait d'utiliser une seule paire de gros faisceaux RAMAN pour les trois impulsions pose un réel problème de puissance. Les faisceaux doivent en effet couvrir la boule d'atomes au moment des impulsions. Compte tenu des caractéristiques de la trajectoire atomique, ces positions sont donc exprimées en millimètres dans la base  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z\}$  (voir **Figure 7. 10**) :

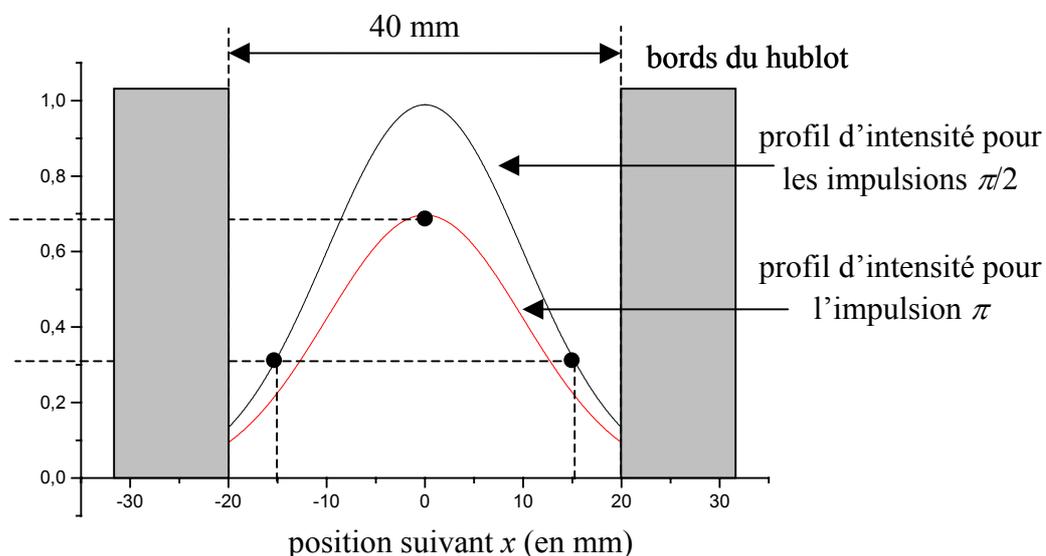
$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ -9,89 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} +15 \\ -9,89 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 7. 49})$$

D'après la dispersion de vitesse atomique, on peut également estimer le diamètre  $D_i = 2mm + 2\Delta V_i \times t_i$  de la boule d'atomes (défini à  $1/\sqrt{e}$ ) en  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . On trouve alors  $D_1 = 4,7$  mm,  $D_2 = 5,4$  mm et  $D_3 = 6$  mm (on a pris  $\Delta V_i = 7$  mm.s<sup>-1</sup>,  $t_1 = 197$  ms,  $t_2 = 242$  ms et  $t_3 = 287$  ms)



**Figure 7.10** : schéma du faisceau RAMAN avec les positions de la boule d'atomes aux moments des trois impulsions. Afin d'optimiser la répartition de puissance lumineuse, le faisceau RAMAN est centré 8,5 mm sous le sommet de la trajectoire.

Afin de conserver une bonne qualité de front d'onde, nous avons choisi des optiques sphériques ce qui explique que le faisceau RAMAN est circulaire. On aurait pu utiliser des optiques cylindriques pour mieux répartir l'intensité lumineuse, mais les qualités des fronts d'ondes seraient alors moins bonnes. Le diamètre des faisceaux RAMAN a été choisi afin de minimiser la durée d'interaction aux moments des trois impulsions  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $\pi/2$ . Son diamètre à  $1/e^2$  vaut 40 mm et il est décalé de 8,5 mm sous le sommet de la trajectoire.



**Figure 7.11** : profil d'intensité lumineuse en  $z = 0$  (impulsion  $\pi$ ) et en  $z = 9,98$  mm (impulsion  $\pi/2$ ). Le diamètre et la position du centre du faisceau RAMAN sont choisis pour minimiser la durée des trois impulsions, afin de sélectionner une classe de vitesse transverse la plus large possible.

Le profil d'intensité de chacun de deux faisceaux RAMAN est donné par la relation :

$$I^r(x, z) = I_0^r e^{-2 \left[ \left( \frac{x}{w} \right)^2 + \left( \frac{z - z_R}{w} \right)^2 \right]} \quad (\text{Eq. 7. 50})$$

avec  $w = 20$  mm et  $z_R = 8,5$  mm.  $r$  vaut 1 ou 2 et désigne les deux faisceaux composant la paire RAMAN. Dans notre expérience,  $I^2(x, z) = \alpha I^1(x, z)$  afin de compenser les déplacements lumineux.  $\alpha$  est un coefficient qui ne dépend que du désaccord du faisceau  $A$  par rapport à la transition atomique (voir paragraphe 4.2.4 et Eq. 4. 57).

En posant  $I(x, z) = \sqrt{\alpha} I^1(x, z)$ , on a alors d'après (Eq. 4. 47) :

$$\Omega_{\text{eff}}(x, z) \propto I(x, z) \quad (\text{Eq. 7. 51})$$

Et on pose :

- $I_1^0 =$  intensité  $I(x_1, z_1)$  vue par l'atome parfait pour la première impulsion.
- $I_2^0 =$  intensité  $I(x_2, z_2)$  vue par l'atome parfait pour la seconde impulsion.
- $I_3^0 =$  intensité  $I(x_3, z_3)$  vue par l'atome parfait pour la troisième impulsion.

On constate aisément, sur la **Figure 7. 11**, que si les atomes ne sont pas aux bonnes positions aux moments des impulsions  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $\pi/2$ , ils vont voir une aire d'impulsion incorrecte.

#### 7.6.4.2 Calcul du défaut d'aire des impulsions

On a vu que si les impulsions n'étaient pas exactement  $\pi/2$ , et  $\pi$ , l'expression de la probabilité de transition pour un atome n'est plus donnée par (Eq. 7. 1) mais par (Eq. 7. 19), que l'on rappelle ici :

$$P_n = (T_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 T_3) \left[ 1 + \left( \frac{2t_1 r_1 t_3 r_3}{T_1 R_3 + R_1 T_3} \right) \cos(\Delta\phi^{\text{total}}) \right] \quad (\text{Eq. 7. 52})$$

Dans ce paragraphe nous allons exprimer la dépendance des divers coefficients de réflexion et transmission  $R_i / T_i$  en fonction de la vitesse atomique et des fluctuations de l'intensité des faisceaux RAMAN.

Le modèle développé au chapitre 4 décrivant le passage dans les lames lumineuses nous permet de relier les coefficients de réflexion et transmission ( $r / t$ ) en amplitude, à l'aire de l'impulsion lumineuse (voir Eq. 4. 23 par exemple). On obtient donc ces coefficients en intensité :

$$T_i = \cos^2 \left( \frac{\Theta_i}{2} \right) \quad R_i = \sin^2 \left( \frac{\Theta_i}{2} \right) \quad (\text{Eq. 7. 53})$$

Ces coefficients dépendent de l'aire  $\Theta_i$  vue par l'atome aux moments des trois impulsions. Pour l'atome parfait ces aires valent  $\Theta_1 = \pi/2$ ,  $\Theta_2 = \pi$  et  $\Theta_3 = \pi/2$ . Pour un atome dont la

vitesse diffère de celle de l'atome parfait de  $dV_x$ ,  $dV_y$  et  $dV_z$ , sa position dans le faisceau RAMAN aux moments des trois impulsions va être différente de celle de l'atome parfait, et compte tenu du profil gaussien d'intensité de ce faisceau, les aires vues par l'atome ne valent plus exactement  $\pi/2$ ,  $\pi$  et  $\pi/2$ . On définit alors la nouvelle variable  $\xi_i$  par :

$$\begin{aligned}\Theta_i &= \frac{\pi}{2}(1 + \xi_i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 3 \\ \Theta_2 &= \pi(1 + \xi_2)\end{aligned}$$

Un développement limité au deuxième ordre en  $\xi_i$  des coefficients de transmission et de réflexion  $R_i$  et  $T_i$  des trois impulsions RAMAN donne alors :

$$T_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\pi}{2} \xi_i \right] \quad R_i = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \xi_i \right] \quad (\text{Eq.7. 54})$$

$$T_2 = \frac{(\pi \xi_2)^2}{4} \quad R_2 = \left[ 1 - \frac{(\pi \xi_2)^2}{4} \right] \quad (\text{Eq.7. 55})$$

Les coefficients  $R_i$  et  $T_i$  varient donc au premier ordre en  $\xi_i$  pour une impulsion  $\pi/2$ , et au deuxième ordre pour une impulsion  $\pi$ . On peut également exprimer le facteur d'amplitude  $A$  et le facteur de visibilité  $\mathcal{G}$  définis en (Eq. 7. 20). On trouve, tout calcul fait au deuxième ordre en  $\xi_i$  :

$$A = \left[ 1 - \frac{\pi^2}{4} (\xi_1 \xi_3 + \xi_2^2) \right] \quad (\text{Eq.7. 56})$$

$$\mathcal{G} = \left[ 1 - \frac{\pi^2}{8} (\xi_1 - \xi_3)^2 \right] \quad (\text{Eq.7. 57})$$

On constate que, bien que (Eq. 7. 54) soit du premier ordre en  $\xi_i$ , les coefficients  $A$  et  $\mathcal{G}$  sont quant à eux du second ordre en  $\xi_i$ . Ceci est lié à la géométrie MACH-ZEHNDER. L'impulsion  $\pi$  réalisée au milieu de l'interféromètre renverse un grand nombre d'effets parasites entre la première partie  $\pi/2 - \pi$ , et la seconde partie  $\pi - \pi/2$ .

### 7.6.4.3 Influence des fluctuations d'intensité sur le facteur d'amplitude et le contraste

Supposons que les deux faisceaux RAMAN présentent une variation relative d'intensité identique  $m = (\Delta I / I)$ , par exemple causée par un désalignement de l'injection dans la fibre optique. D'après leur définition, les  $\xi_i$  sont reliés à  $m$  par :

$$\xi_i = \frac{\Delta I_i}{I_i^0} = m \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (\text{Eq. 7. 58})$$

On peut alors directement exprimer les termes  $A$  et  $\mathcal{G}$  en fonction de  $m$  :

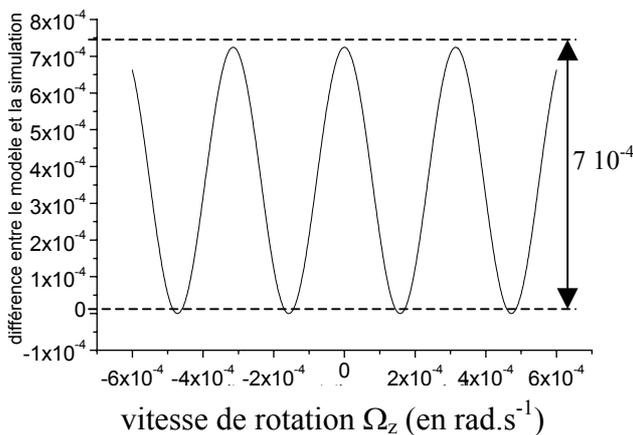
$$A = \left[ 1 - \frac{\pi^2}{2} m^2 \right] \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = 1 \quad (\text{Eq. 7. 59})$$

Le signal de sortie s'exprime alors par :

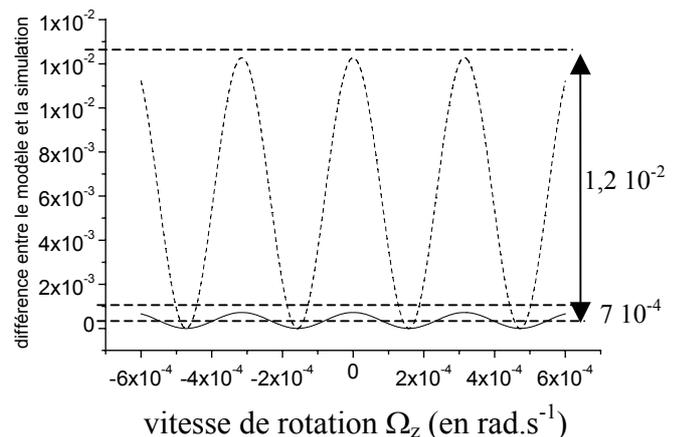
$$P_n = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi^2}{2} m^2 \right) \left[ 1 + \cos(\Delta\phi^{total}) \right] \quad (\text{Eq. 7. 60})$$

On peut comparer cette expression au résultat donné par la simulation, en prenant  $m = 5\%$ . La **Figure 7. 12** représente la différence des résultats donnés par (Eq. 7. 60) et par la simulation. On constate que la différence est toujours très inférieure à  $10^{-3}$ , l'expression (Eq. 7. 60) sera donc suffisante pour exprimer la dépendance du signal de sortie avec les fluctuations d'intensité, au niveau de précision que l'on veut atteindre.

*Différence entre le modèle et la simulation pour un défaut relatif d'intensité de 5%*



**Figure 7. 12** : différence entre le modèle donné par (Eq. 7. 60) et la simulation. On constate que les deux descriptions concordent à  $7 \cdot 10^{-4}$  près pour une fluctuation d'intensité de 5 %.



**Figure 7. 13** : différence entre le modèle donné par (Eq. 7. 60) et la simulation (en trait plein). Si l'on ne prend pas en compte la modification du facteur d'amplitude  $A$ , on constate que la différence avec la simulation augmente à  $1,2 \cdot 10^{-2}$ , ce qui est largement supérieur au niveau de bruit blanc de l'appareil.

On peut se demander s'il est nécessaire de prendre en compte la modification apportée par (Eq. 7. 60), par rapport à la formule de base (Eq. 7. 1). La **Figure 7. 13** présente les deux différences (Eq. 7. 60 – simulation) et (Eq. 7. 1 – simulation). On constate que le fait d'utiliser (Eq. 7. 1) par rapport à (Eq. 7. 60) fait augmenter l'erreur de  $7 \cdot 10^{-4}$  à  $1,2 \cdot 10^{-2}$ . L'erreur qui était noyée dans le bruit blanc de l'appareil devient alors parfaitement discernable.

On peut préciser que l'on pourra utiliser la formule simple (Eq. 7. 1) dans le modèle d'erreur tant que les fluctuations d'intensité des faisceaux RAMAN ( $\Delta I / I$ ) seront inférieures à

1%. Si les fluctuations d'intensité sont supérieures à cette valeur, il faudra alors en tenir compte dans le modèle en utilisant les relations (Eq. 7. 60).

Si les intensités des deux faisceaux RAMAN fluctuent différemment, les déplacements lumineux ne sont alors plus exactement compensés et il apparaît un terme de déphasage  $\Delta\phi^{parasite}$ . Ce terme sera étudié au paragraphe 7.6.5.

#### 7.6.4.4 Influence de la vitesse de lancement sur le facteur d'amplitude et le contraste

Considérons un atome avec une vitesse initiale différente de  $dV_x$  et  $dV_z$  de la vitesse de l'atome parfait. Exprimons alors  $\xi_i$  en fonction de  $dV_x$  et  $dV_z$  :

La position  $\mathbf{r}_i$ , par rapport au sommet de la trajectoire de l'atome parfait s'écrit alors :

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} V_x t_i - V_x^0 t_2 \\ V_z t_i - V_z^0 t_2 - \frac{1}{2} g (t_i^2 - t_2^2) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 7. 61})$$

que l'on peut réécrire en fonction de  $dV_x$  et  $dV_z$  :

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} V_x^0 (t_i - t_2) + dV_x t_i \\ V_z^0 (t_i - t_2) + dV_z t_i - \frac{1}{2} g (t_i^2 - t_2^2) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 7. 62})$$

L'intensité lumineuse  $I_i$  vues aux moments de trois impulsions est alors donnée par :

$$I_i = I_0 \exp \left[ -2 \left( \left( \frac{V_x^0 (t_i - t_2) + dV_x t_i}{w} \right)^2 + \left( \frac{V_z^0 (t_i - t_2) + dV_z t_i - \frac{1}{2} g (t_i^2 - t_2^2) - z_R}{w} \right)^2 \right) \right] \quad (\text{Eq. 7. 63})$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en  $dV_x$  et  $dV_z$ , on trouve :

$$I_i = I_i^0 \left[ 1 - 4 \left( \frac{V_x^0 (t_i - t_2) dV_x t_i}{w^2} + \frac{\left( V_z^0 (t_i - t_2) - \frac{1}{2} g (t_i^2 - t_2^2) - z_R \right) dV_z t_i}{w^2} \right) \right] \quad (\text{Eq. 7. 64})$$

En utilisant la relation (Eq. 7. 58) on peut exprimer les  $\xi_i$  en fonction de  $dV_x$  et  $dV_z$  :

$$\xi_i = \frac{I_i - I_i^0}{I_i^0} = -4 \left( \frac{V_x^0 (t_i - t_2) dV_x t_i}{w^2} + \frac{\left( V_z^0 (t_i - t_2) - \frac{1}{2} g (t_i^2 - t_2^2) - z_R \right) dV_z t_i}{w^2} \right) \quad (\text{Eq. 7. 65})$$

En injectant ces valeurs de  $\xi_i$  dans (Eq. 7. 56) et (Eq. 7. 57), on en déduit les variations des facteurs d'amplitude et de visibilité en fonction de  $dV_x$  et  $dV_z$ .

### Variation avec la vitesse de lancement horizontale $V_x$

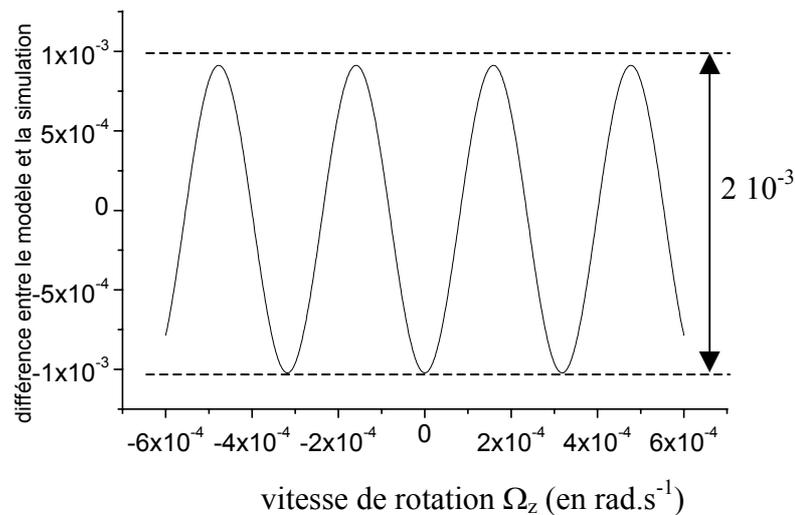
La détermination de  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3$  à partir de (Eq. 7. 65) donne, avec nos paramètres expérimentaux :

$$\xi_1 = 30 dV_x \quad \xi_2 = 0 \quad \xi_3 = -43 dV_x \quad (dV_x \text{ en m.s}^{-1})$$

On en déduit alors l'expression des facteurs d'amplitude et de visibilité :

$$A = 1 + 3161 dV_x^2 \quad \mathcal{G} = 1 - 6549 dV_x^2$$

En prenant  $dV_x/V_x^0 = 1\%$ , on obtient  $A = 1,0352$  et  $\mathcal{G} = 0,927$ . On Compare la formule obtenue avec la courbe donnée par la simulation. La **Figure 7. 14** représente la différence entre (Eq. 7. 20) et la simulation.



**Figure 7. 14** : différence entre l'équation (Eq. 7. 20) avec les valeurs déterminées de  $A$  et  $\mathcal{G}$ , et la simulation. On constate que pour une erreur de vitesse de lancement horizontale de 1 %, le modèle s'écarte de près de  $2.10^{-3}$  de la simulation. Ceci correspond donc à la limite de validité de (Eq 7.20) dans ce cas précis.

On trouve évidemment le même type de résultat en étudiant l'influence de  $V_z$  sur  $A$  et  $\mathcal{G}$ , à la différence que dans la direction verticale,  $\xi_2$  est du premier ordre en  $dV_z$  (alors qu'il était du second ordre en  $dV_x$ ) car le profil d'intensité ne présente pas une dérivée nulle dans cette direction pour l'impulsion  $\pi$ . On donne les valeurs de  $A$  et  $\mathcal{G}$  en fonction de  $dV_z$  :

$$A = 1 - 1030 dV_z^2 \quad \mathcal{G} = 1 - 128 dV_z^2$$

Ceci donne, pour une erreur relative  $dV_z$  de 1 % (ce qui correspond à  $dV_z \sim 2 \text{ mm.s}^{-1}$ ) :  $A=0,9945$  et  $\mathcal{G} = 0,99932$ .

### 7.6.5 Influence des déplacements lumineux

Dans le cas où l'intensité des deux faisceaux RAMAN n'est pas adaptée pour compenser les déplacements lumineux, il apparaît un déphasage lié à cet effet. Ceci apparaît par exemple si l'un des faisceaux RAMAN s'est déplacé par rapport à l'autre. Les deux profils gaussiens ne sont alors plus superposés. L'effet apparaît aussi dans le cas où l'intensité d'un des faisceaux RAMAN fluctue par rapport à l'autre.

Le déplacement des deux niveaux d'énergie a été donné au chapitre 4 (Eq. 4. 49) :

$$\Omega_e^{AC} \approx \frac{|\Omega_{2e}|^2}{4\Delta_{2e}} \quad \text{et} \quad \Omega_f^{AC} \approx \frac{|\Omega_{1f}|^2}{4\Delta_{1f}}$$

On rappelle que l'on définit  $\delta^{AC}$  la différence des déplacements des deux niveaux par :  $\delta^{AC} = \Omega_e^{AC} - \Omega_f^{AC}$ .

Le déphasage résultant a été calculé dans le cas d'un interféromètre de MACH-ZEHNDER dans [WEISS 94] et est relié à  $\delta^{AC}$  par :

$$\Delta\phi^{AC} = \frac{\delta_3^{AC}}{\Omega_{eff}} - \frac{\delta_1^{AC}}{\Omega_{eff}} \quad (\text{Eq. 7. 66})$$

où  $\delta_1^{AC}$  et  $\delta_3^{AC}$  représentent les différences de déplacements lumineux aux instants  $t_1$  et  $t_3$ , et  $\Omega_{eff}$  est la pulsation de RABI équivalente pour la transition RAMAN, donnée par (Eq. 4. 47) :

$$\Omega_{eff} = \frac{\Omega_{1f}^* \Omega_{2e}}{2\Delta_{1f}} \quad (\text{Eq. 7. 67})$$

On constate donc que le déplacement lumineux au moment de l'impulsion  $\pi$  n'influe pas sur le déphasage final.

Le rapport d'intensité des deux faisceaux RAMAN a été choisi pour compenser les déplacements lumineux (voir paragraphe 4.2.4), on a donc  $I^2(x, z) = \alpha I^1(x, z)$  avec les notations du paragraphe 7.7.4 et  $\delta^{AC} = 0$ . Exprimons  $\delta^{AC}$  en fonction de la variation  $d\alpha$  du rapport des intensités. Un calcul simple permet de mettre en évidence qu'au voisinage du point  $\delta^{AC}=0$ ,  $\delta^{AC}$  varie au premier ordre en fonction de  $d\alpha$ . On trouve :

$$d\left(\frac{\delta^{AC}}{\Omega_{eff}}\right) = \frac{d\alpha}{2\alpha^{3/2}} \quad (\text{Eq. 7. 68})$$

Et le déphasage donné par (Eq. 7. 66) devient alors :

$$d(\Delta\phi^{total}) = \left( \frac{d\alpha_3}{\alpha_3^{3/2}} - \frac{d\alpha_1}{\alpha_1^{3/2}} \right)$$

### Variation de l'intensité d'un des faisceaux RAMAN

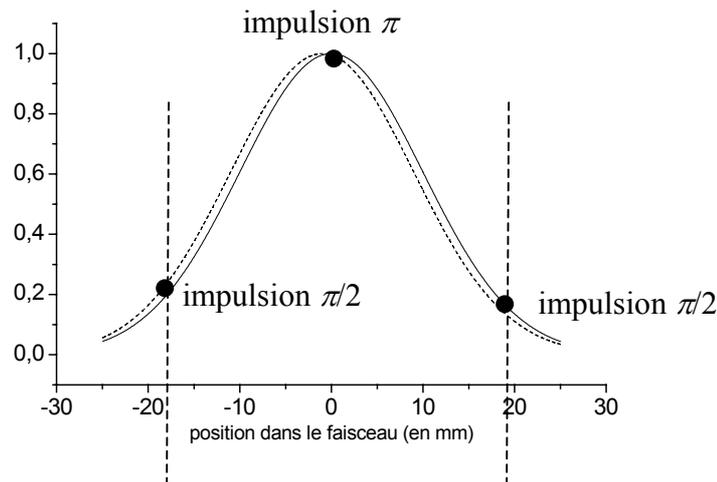
Si l'intensité  $I^r$  d'un faisceau RAMAN varie de  $dI^r$  ( $r$  valant 1 ou 2), cela entraîne une variation de la valeur de  $\alpha$  de :

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dI^2}{I^2} - \frac{dI^1}{I^1}$$

Les deux impulsions  $\pi/2$  ont lieu à des positions symétriques dans le faisceau RAMAN, les variations sont donc identiques  $d\alpha_3 = d\alpha_1$ , le déphasage associé au déplacement lumineux est donc nul. La symétrie du problème peut toutefois être brisée par le fait que les boules d'atomes ont des tailles différentes aux instants  $t_1$  et  $t_3$ .

### Défaut d'alignement d'un des deux faisceaux RAMAN

Si les deux faisceaux RAMAN ne sont pas alignés l'un sur l'autre de  $dx$  et  $dz$ , les profils gaussiens ne se superposent plus et les déplacements lumineux ne sont donc plus compensés. Au trois instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ , on a donc trois valeurs de  $\alpha$  différentes. En  $t_2$  il est clair que  $\alpha$  n'est sensible qu'au deuxième ordre en  $dx$  dans la direction horizontale, et au premier ordre en  $dz$  dans la direction verticale. On peut dire également que  $d\alpha_1 \approx -d\alpha_3$  au premier ordre en  $dx$  et  $dz$  pour les deux impulsions  $\pi/2$  (voir **Figure 7.15**).



**Figure 7.15** : profil d'intensité des deux faisceaux RAMAN en fonction de la position horizontale. Les faisceaux sont décalés de 1 mm l'un par rapport à l'autre. On constate que pour l'impulsion  $\pi$ , l'effet est du second ordre, alors qu'il est du premier ordre et opposé pour les deux impulsions  $\pi/2$ .

Si l'on considère que le faisceau 1 est décalé de  $dx=1$  mm dans la direction horizontale par rapport au faisceau 2, de telle façon que  $\alpha_1 > \alpha_3$ , on trouve :

$$\frac{d\alpha_i}{\alpha} = \frac{dI^1}{I^1} = -4 \frac{x_i dx}{w^2}$$

où  $x_i$  représente les positions suivant l'axe (Ox) pour les trois impulsions. On a donc  $x_1=-15$  mm et  $x_3=+15$  mm. Le déphasage en sortie de l'interféromètre vaut alors :

$$d(\Delta\phi^{total}) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha_3}{\alpha_3^{3/2}} - \frac{d\alpha_1}{\alpha_1^{3/2}} \right) = -4 \frac{15 \times 1}{20^2 \sqrt{2}} \approx 0,1 \text{ rad}$$

Pour que les fluctuations du déphasage liées aux déplacements lumineux soient inférieures à  $10^{-3}$ , il faut donc contrôler la superposition des faisceaux Raman à  $10\mu\text{m}$  près. Cette valeur est relativement contraignante et va vraisemblablement être une des sources principales de la dérive du biais.

## 7.7 CONCLUSION

Cette étude, bien que théorique, nous permet de mieux interpréter le signal de sortie du gyromètre. Plusieurs modèles, plus ou moins complexes, peuvent être utilisés suivant le degré de précision que l'on souhaite obtenir. Certains de ces modèles nécessitent de mesurer des paramètres expérimentaux, comme la vitesse de lancement ou l'intensité lumineuse par exemple. Nous avons indiqué pour chacun de ces paramètres la précision à laquelle sa valeur doit être connue pour obtenir la valeur du signal de sortie à mieux que  $10^{-3}$ .

De cette étude, on peut identifier les paramètres les plus critiques à court terme : les fluctuations de la température atomique qui modifient le contraste, et les déplacements lumineux qui introduisent un déphasage parasite. A plus long terme, les modifications de la direction de vitesse de lancement risquent d'être le paramètre prédominant.

Nous avons présenté dans ce chapitre les premiers éléments de la caractérisation du gyromètre à atomes froids. Il reste bien sûr encore beaucoup de paramètres à étudier. Par exemple l'influence des aberrations géométriques des faisceaux RAMAN jouent un rôle important sur le déphasage total et surtout sur la qualité de la réjection des effets parasites lorsque le gyromètre fonctionne avec le double jet. La suite de la caractérisation sera largement développée dans la thèse de J. FILS [FILS 02].

**BIBLIOGRAPHIE**

- [GUSTAVSON 00-2] T. Gustavson, A. Landragin, M. Kasevich, "Rotation sensing with a dual-atom interferometer Sagnac gyroscope", *Class. Quantum Grav.*, **17**, p 1 (2000)
- [PETERS 98] A. Peters, "High precision gravity measurements using atom interferometry", thèse de doctorat, Stanford University, Stanford, (1998)
- [WEISS 94] D. Weiss, B. Young, S. Chu, *Appl. Phys. B*, **59**, p 217, (1994)





## Chapitre 8 : APPLICATIONS DES CAPTEURS INERTIELS A ONDES ATOMIQUES

### TABLE DES MATIERES :

|                     |   |     |
|---------------------|---|-----|
| 8.1                 | LES CAPTEURS INERTIELS EN PHYSIQUE FONDAMENTALE .....             | 242 |
| 8.1.1               | Introduction .....  | 242 |
| 8.1.1.1             | Détection des ondes gravitationnelles.....                        | 243 |
| 8.1.1.2             | Mise en évidence de l'effet Lense-Thirring .....                  | 244 |
| 8.1.2               | Notion de métrique .....  | 245 |
| 8.1.2.1             | Métrique en l'absence de gravitation.....                         | 246 |
| 8.1.2.2             | Métrique en l'absence de gravitation dans un repère tournant..... | 246 |
| 8.1.2.3             | La métrique en présence de gravitation .....                      | 247 |
| 8.1.3               | Analogie avec l'électromagnétisme.....                            | 248 |
| 8.1.3.1             | Premier terme : rotation de la Terre .....                        | 251 |
| 8.1.3.2             | Deuxième terme : l'effet de Sitter.....                           | 251 |
| 8.1.3.3             | Troisième terme : l'effet Lense-Thirring .....                    | 251 |
| 8.1.4               | Le formalisme PPN .....   | 252 |
| 8.1.4.1             | Le paramètre $\alpha_1$ .....                                     | 253 |
| 8.1.4.2             | Le paramètre $\gamma$ .....                                       | 253 |
| 8.1.4.3             | Les paramètres $\Delta_1$ et $\Delta_2$ .....                     | 253 |
| 8.1.4.4             | L'expérience de Schiff dans le formalisme PPN .....               | 254 |
| 8.1.4.5             | Comparaison des ordres de grandeur.....                           | 255 |
| 8.1.5               | Les différents tests de l'effet Lense-Thirring .....              | 256 |
| 8.1.5.1             | Le projet Gravity Probe B.....                                    | 257 |
| 8.1.5.2             | Le projet HYPER.....  | 258 |
| 8.1.5.3             | Expériences avec les satellites LAGEOS .....                      | 259 |
| 8.1.6               | Conclusion .....  | 261 |
| BIBLIOGRAPHIE ..... |   | 262 |

## CHAPITRE 8 :

# APPLICATIONS DES CAPTEURS INERTIELS A ONDES ATOMIQUES

L'objectif de ce chapitre est de présenter trois applications particulières dans lesquelles l'utilisation de capteurs inertiels de grande sensibilité, et en particulier de gyromètres atomiques, pourraient apporter des résultats importants.

### 8.1 LES CAPTEURS INERTIELS EN PHYSIQUE FONDAMENTALE

#### 8.1.1 Introduction

Depuis le début des années 60 avec la mise en évidence du décalage vers le rouge de la fréquence d'un photon s'éloignant d'un corps massif [POUND 60], les scientifiques n'ont cessé d'imaginer des expériences visant à tester la validité de la relativité générale. L'objectif de ces expériences est de mettre en évidence des effets prédits par la théorie, mais encore jamais observés, et de comparer leur ordre de grandeur avec celui prédit. Jusqu'à présent, essentiellement quatre effets ont permis de valider la théorie de la relativité générale <sup>(1)</sup>.

Parallèlement à ces travaux expérimentaux, la théorie de la gravitation a subi de profonds changements avec l'apparition d'une multitude de théories alternatives à la relativité générale d'EINSTEIN. On comptait plus de vingt théories alternatives au début des années 80. Certaines d'entre elles se sont révélées non viables face aux résultats expérimentaux toujours plus précis, mais d'autres sont encore en compétition avec la théorie de la relativité générale. Il est donc important d'une part de faire des mesures encore plus précises des effets déjà démontrés (tester le principe d'équivalence à  $10^{-18}$  avec le projet

---

<sup>(1)</sup> Il s'agit du décalage vers le rouge des photons s'éloignant d'un corps massif [POUND 60], [VESSOT 79], de la déflexion par le soleil des photons issus des étoiles [MUHLEMAN 70], [JONES 76], [FOMALONT 77], du déplacement du périhélie de Mercure [DICKE 74], et de la mise en évidence de l'effet SHAPIRO [SHAPIRO 64], [REASENBERG 79].

STEP par exemple), et d'autre part de mettre en œuvre de nouveaux tests permettant d'infirmer ou de confirmer telle ou telle théorie.

La difficulté de mise en œuvre de ces expériences réside principalement dans le fait que les effets que l'on cherche à mettre en évidence sont extrêmement faibles dans notre système solaire, celui-ci étant trop peu massif pour que les effets relativistes dus à la gravitation aient un ordre de grandeur conséquent. Ces expériences s'appuient donc à la fois sur un travail très important de modélisation des différents effets parasites, et sur l'utilisation de capteurs extrêmement précis. C'est donc dans ce sens que les gyromètres de très grande sensibilité peuvent apporter leur contribution à ce type d'expériences.

Parmi ces expériences, imaginées mais encore jamais mises en œuvre, deux sont en cours de développement.

### 8.1.1.1 Détection des ondes gravitationnelles

La première expérience en cours, et la plus avancée, est la détection des ondes gravitationnelles [SCHUTZ 84] dont l'existence est prédite par la relativité générale. Plusieurs projets d'antennes gravitationnelles sont en cours de réalisation dans le monde (LIGO aux USA, VIRGO et GEO 600 en Europe, TAMA au Japon, ...). Le but de ces expériences est de détecter le passage d'une onde gravitationnelle grâce à la variation de longueur qu'elle provoque sur l'un des bras d'un interféromètre optique ultra-sensible de type MICHELSON. D'après la théorie d'EINSTEIN, ces ondes sont émises par les corps très massifs en accélération (coalescence d'étoiles, trous noirs en rotation, ...) et se propagent à la vitesse de la lumière. La difficulté de la mesure tient au fait que la variation de longueur à détecter est tellement faible qu'elle sera souvent noyée dans le bruit. La méthode de détection se fait donc par corrélation avec les formes de signaux attendus a priori, et repose également sur la coïncidence d'un même événement détecté par plusieurs antennes gravitationnelles.

On a résumé dans le tableau ci-dessous les différents projets en cours <sup>(1)</sup> :

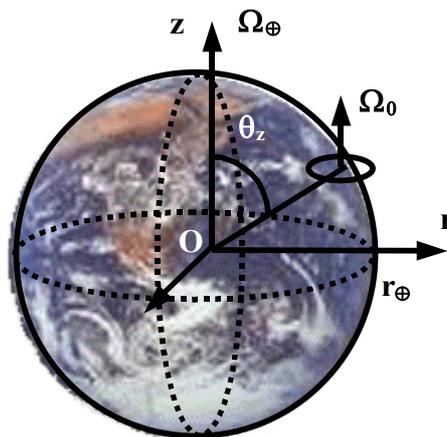
| Nom     | Pays            | Taille d'un bras | Sensibilité attendue              |
|---------|-----------------|------------------|-----------------------------------|
| TAMA    | Japon           |                  |                                   |
| GEO 600 | GB / Allemagne  | 600 mètres       | $10^{-20}$ .. $10^{-26}$ sur 1 an |
| VIRGO   | France / Italie | 3 kilomètres     | $10^{-22}$ .. $10^{-23}$          |
| LIGO    | USA             | 4 kilomètres     |                                   |

<sup>(1)</sup> On peut citer également la préparation d'une antenne gravitationnelle spatiale : c'est le projet international (américain / européen) LISA. L'interféromètre a une forme de triangle équilatéral (cavité en anneau) de 4,3 millions de kilomètres de côté, situé dans le plan de l'écliptique derrière la Terre. Un satellite est à chaque sommet et envoie un faisceau vers les deux autres, en même temps qu'il reçoit les faisceaux provenant des deux autres. Les distances entre les trois satellites sont alors déterminées par interférométrie. La sensibilité de cette antenne devrait atteindre le niveau de  $10^{-23}$  dans la bande de fréquence  $10^{-3} - 10^{-2}$  Hz en intégrant un an, ce qui semble suffisant d'après les études théoriques réalisées pour espérer détecter les ondes gravitationnelles émises par des systèmes binaires de notre galaxie ou par des trous noirs en formation.

### 8.1.1.2 Mise en évidence de l'effet LENSE-THIRRING

La seconde expérience est la mise en évidence de l'effet d'entraînement du repère d'inertie local par un corps massif en rotation, autrement appelé effet LENSE-THIRRING [LENSE 18]. Cet effet repose sur l'existence du champ gravito-magnétique, également prédit par la relativité générale, mais encore jamais détecté. La mise en évidence de l'effet LENSE-THIRRING s'appuie sur la notion d'inertie (comme définie au paragraphe 2.1.2.1), et repose sur la méthode suivante. Imaginons un satellite muni de deux repères d'inertie. Le premier, que l'on appelle repère d'inertie global, est défini par rapport à trois étoiles lointaines pointées par des viseurs d'étoiles. Le second, appelé repère d'inertie local, est défini à l'aide d'accéléromètres et de gyromètres embarqués. Ces deux repères ont la même origine et initialement les mêmes axes. L'effet LENSE-THIRRING se traduit par l'apparition d'un mouvement de précession des axes du repère local par rapport à ceux du repère global. Cette précession est liée à la présence d'un corps massif en rotation au voisinage du satellite (la Terre par exemple).

Cette expérience a été initialement proposée par SCHIFF en 1960 [SCHIFF 60], à la différence qu'elle était proposée sur Terre et non dans un satellite. Les gyscopes auraient alors été également sensibles à la rotation de la Terre (voir **Figure 8. 1**). Nous ferons référence à cette expérience dans la suite de cette partie, et nous l'appellerons expérience de SCHIFF. Nous supposons que le capteur inertiel n'est plus un gyroscope mais un gyromètre atomique, il ne s'agira donc plus de détecter le mouvement de précession de l'axe du gyroscope, mais le déphasage en sortie du gyromètre.



**Figure 8. 1** : expérience de mise en évidence de l'effet LENSE-THIRRING proposée par SCHIFF. Un gyroscope mécanique est placé sur Terre en un point de latitude donnée par l'angle de colatitude  $\theta_z$ . Par rapport à un repère d'inertie global défini par trois étoiles lointaines, ce gyroscope va présenter un mouvement de précession de son axe dont l'origine a une contribution liée à la rotation de la Terre et une contribution d'origine relativiste.

Parmi les deux expériences que nous venons de décrire (détection des ondes gravitationnelles et mise en évidence de l'effet LENSE-THIRRING), seule la seconde sera développée ici car c'est la seule qui nécessite l'utilisation de gyromètres de très grande sensibilité. Nous allons dans la suite de cette partie développer les notions nécessaires à l'interprétation du mouvement de précession que l'on vient d'évoquer, et à son évaluation quantitative. Cette étude passe nécessairement par l'utilisation de quelques formules issues de la relativité générale. Ces formules font appel à un formalisme assez complexe qu'il n'est pas question de détailler ici. Nous indiquons les références nécessaires pour plus d'informations.

La structure de cette partie est la suivante :

Nous commençons par donner quelques informations sur les métriques qui sont à la base des théories métriques de la gravitation. Le calcul du déphasage du gyromètre dans l'expérience de SCHIFF à partir de la métrique est compliqué et peu intuitif pour des non relativistes. Nous ne le présenterons donc pas ici.

L'expression du déphasage à la sortie du gyromètre sera déterminée par analogie avec l'électromagnétisme. Nous définirons la notion importante de champ gravito-magnétique et nous mettrons en évidence un autre effet associé à l'effet LENSE-THIRRING : l'effet DE SITTER.

La mise en évidence de l'effet LENSE-THIRRING présente un grand intérêt pour comparer et départager différentes théories alternatives. Cette étude est facilitée par le formalisme PPN, que nous présenterons au paragraphe 8.1.4.

Enfin nous terminerons en présentant les projets en cours visant à mesurer l'effet LENSE-THIRRING. Il s'agit des deux projet spatiaux Gravity-Probe B et HYPER. Nous présenterons également l'étude réalisée par CIUFOLINI à partir des données orbitographiques des satellites LAGEOS.

### 8.1.2 Notion de métrique

La théorie de la relativité générale n'est pas la seule théorie de la gravitation permettant d'expliquer les phénomènes physiques déjà observés. Il existe plusieurs dizaines de théories alternatives, plus ou moins complexes. Toutes ces théories s'appuient sur la relativité restreinte (à la limite où le potentiel de gravitation est nul) et utilisent donc un espace à quatre dimensions (une dimension de temps et trois dimensions d'espace) pour décrire les évènements physiques. Cet espace est appelé *espace-temps* et les évènements sont représentés par des points spatio-temporels.

Parmi toutes ces théories, on peut distinguer celles qui interprètent la gravitation comme une modification de la courbure de l'espace-temps, de la même façon qu'une masse posée sur un trampoline déforme localement ce dernier. La forme locale de l'espace-temps en un point est alors donnée par une grandeur que l'on appelle la *métrique* et qui dépend de la répartition des masses et des courants de masses au voisinage de ce point. Toutes les théories

qui vérifient cette condition sont appelées *théories métriques de la gravitation*. La relativité générale en est un exemple, ainsi que les théories de NI ou de BRANS-DICKE-JORDAN. Les théories métriques diffèrent entre elles par la façon dont les distributions de masses et de courants de masses influent sur la métrique.

### 8.1.2.1 Métrique en l'absence de gravitation

Dans la limite où, localement au voisinage d'un point, les champs de gravitation sont négligeables, la courbure de l'espace temps est nulle et l'espace prend alors la forme d'un espace de MINKOWSKI (c'est l'espace fixant le cadre de la relativité restreinte). Cet espace est plan et isotrope, et sa métrique est donnée par l'équation d'un rayon lumineux :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{Eq. 8. 1})$$

Cet équation exprime le fait que pendant une durée  $t$ , un rayon lumineux aura parcouru une distance  $ct$ , et ce quelle que soit la direction dans laquelle il va et le point d'où il part.

### 8.1.2.2 Métrique en l'absence de gravitation dans un repère tournant

Reprenons le cas d'un point complètement isolé de tout champ gravitationnel, mais exprimons la métrique  $ds$  dans un repère tournant à la vitesse  $\Omega$  par rapport à l'axe (Oz). Le changement de repère permettant de passer du repère galiléen  $\{t, x, y, z\}$  au repère tournant  $\{t', x', y', z'\}$  s'écrit alors :

$$\begin{cases} c't' = ct \\ x' = x \cos(\Omega_{\oplus} t) - y \sin(\Omega_{\oplus} t) \\ y' = x \sin(\Omega_{\oplus} t) + y \cos(\Omega_{\oplus} t) \\ z' = z \end{cases} \quad (\text{Eq. 8. 2})$$

La métrique dans ce nouveau repère s'écrit donc :

$$ds'^2 = \left[ 1 - \frac{\Omega_{\oplus}^2 (x'^2 + y'^2)}{c^2} \right] c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) + 2\Omega_{\oplus} \frac{y'}{c} c dt' dx' - 2\Omega_{\oplus} \frac{x'}{c} c dt' dy' \quad (\text{Eq. 8. 3})$$

On constate que le fait de passer dans un repère tournant change la métrique.

### 8.1.2.3 La métrique en présence de gravitation

Le principe d'équivalence d'EINSTEIN  $m_{pesante} \equiv m_{inerte}$  implique qu'un observateur qui réalise une expérience de physique en présence de gravitation peut considérer qu'il n'y a pas de gravitation mais que son référentiel est accéléré par rapport à un référentiel d'inertie. Ainsi tous les champs de gravitation peuvent être interprétés comme des mouvements du référentiel du laboratoire par rapport à un référentiel d'inertie, et réciproquement, tout mouvement du référentiel du laboratoire par rapport à un référentiel d'inertie peut être interprété comme un champ de gravitation dans un référentiel d'inertie.

Par conséquent, de la même façon que le passage dans un référentiel tournant modifie la métrique (voir paragraphe précédent et Eq. 8.3), les champs de gravitation vont modifier la métrique de l'espace de MINKOWSKI. La métrique ne correspond plus à un espace-temps homogène et isotrope : on parle alors d'espace de MINKOWSKI courbe, ou d'espace de RIEMANN.

#### 1) Métrique au voisinage d'un corps massif au repos

Si l'on considère un point situé au voisinage d'un corps sphérique massif, et par conséquent dans son champ direct de gravitation, la métrique en ce point est déformée par rapport à celle d'un espace de MINKOWSKI. Dans le cadre de la relativité générale, cette métrique prend la forme suivante en coordonnées sphériques (appelée métrique de SCHWARZSCHILD) :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{Eq. 8. 4})$$

où G est la constante de gravitation et M la masse du corps massif. On reconnaît le terme de potentiel gravitationnel newtonien classique  $U = -GM/r$ . La métrique donnée par (Eq. 8. 4) permet d'expliquer le décalage vers le rouge des photons s'éloignant d'un corps massif, ou encore la déflexion des rayons lumineux. Nous verrons qu'elle induit également l'effet DE SITTER [DE SITTER 16], inséparable de l'effet LENSE-THIRRING. Dans la limite où on se trouve très loin du corps massif ( $r \rightarrow \infty$ ), la métrique reprend la forme de celle d'un espace de MINKOWSKI donnée par (Eq. 8. 1).

#### 2) Métrique au voisinage d'un corps massif en rotation

Si l'on reprend le corps massif du paragraphe précédent en supposant qu'il est en rotation sur lui-même, il possède alors un moment cinétique J. La métrique étant déterminée par la répartition des masses, et par les courants de masse, la métrique au voisinage de ce corps est donc modifiée par le fait que le corps tourne sur lui-même. Dans le cas où la vitesse de rotation du corps n'est pas trop rapide, la métrique prend la forme suivante (appelée métrique de KERR-NEWMAN) :

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{4J}{r} \sin^2 \theta d\varphi dt$$

(Eq. 8. 5)

On reconnaît dans les trois premiers termes la métrique de SCHWARZSCHILD, auquel s'ajoute un terme lié au moment cinétique du corps en rotation. C'est cette métrique qui permet d'interpréter l'effet LENSE-THIRRING que nous évoquions au paragraphe 8.1.1. Le calcul du mouvement de précession du gyroscope ou du déphasage du gyromètre atomique dans l'expérience de SCHIFF peut se faire à partir de cette métrique. Le calcul est néanmoins compliqué. Notre propos ici n'est pas de présenter un calcul rigoureux des différents effets relativistes apparaissant au voisinage d'un corps massif en rotation, mais plutôt de donner une interprétation simple des différents termes apparaissant dans le mouvement de précession.

Nous avons indiqué précédemment que l'intérêt de mettre en évidence l'effet LENSE-THIRRING est double : d'une part démontrer l'existence du champ gravito-magnétique, et d'autre part fournir un test supplémentaire pour départager les différentes théories de la gravitation. Nous allons donc reprendre l'expérience de SCHIFF et voir comment elle permet d'atteindre ces deux objectifs. Dans la prochaine partie, nous allons détailler le lien entre l'effet LENSE-THIRRING et le champ gravito-magnétique. Dans le paragraphe 8.1.4 nous étudierons l'influence de ce test sur les différentes théories alternatives grâce au formalisme PPN.

### 8.1.3 Analogie avec l'électromagnétisme

Il existe une analogie au niveau du formalisme entre la gravitation et l'électromagnétisme. Cette analogie, déjà soupçonnée par HEAVISIDE en 1893, a été montrée par FORWARD (1961) et BRAGINSKY (1977) [BRAGINSKY 77].

En électromagnétisme, le champ électrique  $\mathbf{E}$  découle du potentiel coulombien scalaire  $V$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  découle du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . De même en gravitation, le champ de pesanteur  $\mathbf{G}$  (appelé aussi champ gravito-électrique) découle du potentiel newtonien  $U$  et, par analogie il devrait exister un champ gravito-magnétique  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{h}$  qui découlerait d'un potentiel vecteur  $\mathbf{h}$ .

On sait par exemple qu'un champ électrique pur  $\mathbf{E}$  dans un référentiel donné peut apparaître comme un mélange de champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans un autre référentiel. Ainsi un observateur, qui se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport à un champ  $\mathbf{E}$  pur voit apparaître un champ  $\mathbf{B}$  perpendiculaire à  $\mathbf{v}$  donné par l'expression :  $\mathbf{B} \approx \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ . De la même façon on peut dire que la Terre rayonne du fait de sa masse, un champ  $\mathbf{G}$  radial pur. Un observateur placé à une distance  $r$  d'une masse  $M$  et se déplaçant par rapport à elle à la vitesse  $\mathbf{v}$ , va se déplacer dans ce champ de gravitation et va donc voir apparaître un champ gravito-magnétique  $\mathbf{H}$ , dont l'expression est donnée par :

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{h} = -\frac{3}{2} \frac{GM}{c^2 r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \tag{Eq. 8.6}$$

Considérons maintenant une sphère de rayon  $a$  uniformément chargée et en rotation sur elle-même. Du fait de sa rotation cette sphère produit, en plus du champ électrique  $\mathbf{E}$ , un champ magnétique  $\mathbf{B}$  donné par :

$$\mathbf{B} = \frac{3 \mathbf{e}_r (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{M}}{r^3} \tag{Eq. 8.7}$$

où  $\mathbf{e}_r$  est un vecteur unitaire dans la direction radiale,  $\mathbf{M}$  est le moment magnétique de la sphère,  $a$  est le rayon de la sphère et  $r$  est la distance du point d'observation par rapport au centre de la sphère. Le point d'observation est extérieur à la sphère ( $r \geq a$ ).

Par analogie entre le champ magnétique et le champ gravito-magnétique, une sphère de masse  $M$ , de rayon  $a$ , et de vitesse de rotation  $\mathbf{\Omega}$ , va avoir un moment cinétique  $\mathbf{J} = 2Ma^2\mathbf{\Omega}/5$  et va produire, outre le champ de pesanteur  $\mathbf{G}$  dû à sa masse, un champ gravito-magnétique  $\mathbf{H}$  donné par l'expression :

$$\mathbf{H} = (\nabla \times \mathbf{h}) = -\frac{1}{c^2} \left[ \frac{3 \mathbf{e}_r (\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{J}}{r^3} \right] \tag{Eq. 8.8}$$

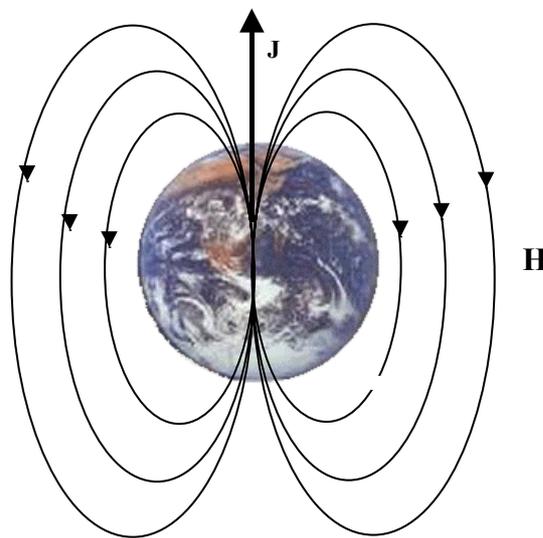


Figure 8.2 : les lignes de champ du champ gravito-magnétique ressemblent aux lignes de champs magnétiques créées par un dipôle.

Si l'on reprend l'expérience du gyromètre proposé par SCHIFF, le point qui manque maintenant pour interpréter le déphasage d'origine relativiste à la sortie de l'interféromètre est que le déphasage est proportionnel au flux du champ gravito-magnétique à travers l'aire de

l'interféromètre. Ce résultat a été montré dans le cas d'un gyromètre optique par PLEBANSKI [PLEBANSKI 60]. Le point de départ de cette démonstration est d'écrire les équations de MAXWELL en tenant compte de la métrique associée à la Terre en rotation (métrique de KERR-NEWMAN). PLEBANSKI montre alors qu'il aurait obtenu les mêmes équations s'il avait négligé la métrique mais supposé que les ondes lumineuses se propagent dans un diélectrique. Les équations constitutives de ce matériau fictif sont directement reliées au potentiel gravito-magnétique <sup>(1)</sup>.

On détermine alors le déphasage entre les deux ondes en écrivant l'équation de propagation pour le champ électrique  $\mathbf{E}$ , on trouve que ce déphasage est directement proportionnel au flux du champ gravito-magnétique à travers l'aire de l'interféromètre :

$$\Delta\phi^{optique} = \frac{2}{\lambda} \iint_{aire} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{2}{\lambda} \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{Eq. 8. 9})$$

et de la même façon dans le cas d'un interféromètre à ondes atomiques on obtient :

$$\Delta\phi^{atomique} = \frac{2mc}{\lambda} \iint_{aire} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{2mc}{\hbar} \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{Eq. 8. 10})$$

Le déphasage total à la sortie du gyromètre est donc donné par la valeur du champ gravito-magnétique, qui dans le cas de la Terre en rotation vaut :

$$\mathbf{H} = \left[ \frac{\Omega_{\oplus}}{c} \mathbf{e}_z - \frac{3GM_{\oplus}}{2c^2 r_{\oplus}} \Omega_{\oplus} \sin(\theta_z) \mathbf{e}_{\varphi} \times \mathbf{e}_r - \frac{1}{c^2 r_{\oplus}} (3\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{J}_{\oplus} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{J}_{\oplus}) \right] \quad (\text{Eq. 8. 11})$$

On a supposé que le gyromètre était posé sur la Terre en un point dont la colatitude est  $\theta_z$ . Si de plus l'axe d'entrée du gyromètre est suivant l'axe (Oz), on obtient alors :

$$\Delta\phi^{total} = \frac{2Am}{\hbar} \left\{ \Omega_{\oplus} - \frac{1}{c} \left[ \frac{3GM_{\oplus}}{2r_{\oplus}} \Omega_{\oplus} \sin^2(\theta_z) - \frac{J_{\oplus}}{r_{\oplus}} (1 - 3\cos^2(\theta_z)) \right] \right\} \quad (\text{Eq. 8. 12})$$

où  $M_{\oplus}$ ,  $r_{\oplus}$ ,  $\Omega_{\oplus}$  et  $J_{\oplus}$  sont respectivement la masse, le rayon, la vitesse de rotation et le moment angulaire de la Terre.

Nous allons maintenant détailler ces trois termes :

<sup>(1)</sup> On pourra trouver un calcul précis du déphasage, dans le cas d'un atome à deux niveaux de spin  $\frac{1}{2}$ , par intégration de l'équation de DIRAC dans le cadre de la métrique relativiste limitée aux champs faibles dans [BORDÉ 94]. Ce calcul est ensuite généralisé et interprété en terme de champs gravito-magnétique et gravito-électrique dans les références [BORDÉ 01 et BORDÉ 01-2]. Ce dernier calcul montre que l'effet LENSE-THIRING est dû pour moitié à l'action du champ gravito-magnétique et pour l'autre moitié, à l'action du champ gravito-électrique.

### 8.1.3.1 Premier terme : rotation de la Terre

Le premier terme est bien sûr le déphasage lié à la rotation de la Terre. Le gyromètre étant posé sur le sol avec son axe d'entrée parallèle à celui de la rotation de la Terre, la contribution au déphasage est directement :

$$\Delta\phi^{\text{rotation}} = \frac{2Am}{\hbar} \Omega_{\oplus} \quad (\text{Eq. 8. 13})$$

### 8.1.3.2 Deuxième terme : l'effet DE SITTER

Ce terme correspond à l'effet de SITTER. Il est dû au fait que la masse de la Terre courbe légèrement l'espace-temps et que les ondes atomiques de notre gyromètre se déplacent dans cet espace courbé.

$$\Delta\phi^{\text{deSitter}} = \frac{2Am}{\hbar c} \frac{3GM_{\oplus}}{2r_{\oplus}} \Omega_{\oplus} \sin^2(\theta_z) \quad (\text{Eq. 8. 14})$$

On constate que si le gyromètre est placé à l'un des pôles de la Terre ( $\theta_z = 0$ ), cet effet est nul, ce qui se comprend bien car le mouvement du gyromètre dans le champ de gravitation est alors nul.

### 8.1.3.3 Troisième terme : l'effet LENSE-THIRRING

Ce terme correspond à l'effet LENSE-THIRRING. Il est lié au fait que la Terre tourne sur elle même, et entraîne avec elle le repère d'inertie local.

$$\Delta\phi^{\text{Lense-Thirring}} = -\frac{2Am}{\hbar c} \frac{J_{\oplus}}{r_{\oplus}} (1 - 3\cos^2(\theta_z)) \quad (\text{Eq. 8. 15})$$

Les masses en mouvement produisent une double modification de la courbure : une modification liée à leur masse, comme on vient de le voir, et une modification liée à leur énergie cinétique. Pour un corps en rotation par exemple, on peut donner une image simple. Considérons une serviette quadrillée sur laquelle on pose son doigt. Le quadrillage va être notre référentiel d'inertie. Si on tourne son doigt sur lui même, on entraîne localement la serviette, qui va donc s'enrouler autour du doigt, ainsi le quadrillage va localement se déformer et se mettre à tourner avec le doigt, mais pas forcément à la même vitesse : la vitesse d'enroulement dépend de la pression que l'on exerce avec le doigt sur la serviette. L'effet LENSE-THIRRING est analogue à cette expérience. Le référentiel d'inertie local est entraîné en rotation par les courants de masses proches de lui, qui vont provoquer un changement d'orientation de ses axes par rapport à un autre référentiel d'inertie donné par trois étoiles lointaines. C'est pourquoi cet effet s'appelle aussi effet « *d'entraînement du référentiel d'inertie local* ».

On constate que l'entraînement du repère d'inertie local se fait dans le même sens que la rotation de la Terre pour ( $3\cos(\theta_z) \geq 1$ ), et dans le sens inverse de la rotation de la Terre pour les points proches de l'équateur ( $3\cos(\theta_z) \leq 1$ ). Un entraînement dans le sens inverse peut paraître surprenant, on peut toutefois en donner une explication intuitive dans le cas d'un gyroscope mécanique. Si ce gyroscope est placé au niveau de l'équateur, l'action de l'entraînement de repère local est plus important sur la partie du gyroscope proche de la Terre, que sur la partie plus éloignée. L'entraînement du repère d'inertie a alors tendance à provoquer la rotation du gyroscope comme s'il était lié à la Terre comme un engrenage, la rotation du gyroscope est alors de sens opposée à celle de la Terre.

Tous les calculs que nous présentés dans cette partie supposent que la théorie de la relativité générale est correcte. Ils peuvent être généralisés dans le cas des champs de gravitation faibles et des déplacement lents, à l'ensemble des théories métriques alternatives. Nous allons décrire, dans le paragraphe suivant, le formalisme PPN qui offre un cadre d'étude idéal pour la comparaison des théories alternatives.

#### 8.1.4 Le formalisme PPN

Dans le domaine des champs de gravitation faibles et des faibles déplacements, dont le système solaire constitue un bon exemple, le couplage entre les distributions de masses et la métrique peut être caractérisé par un certain nombre de paramètres, que l'on appelle *paramètres post newtoniens*, ou *paramètres PPN*. Ces paramètres sont à la base du formalisme PPN développé par M. WILL et K. NORDEVEDT en 1972 [WILL 72-1], [WILL 72-2]. Outre le fait de présenter un cadre d'étude simplifié pour les champs faibles et les faibles déplacements, l'intérêt de ce formalisme est de comparer entre elles les différentes théories métriques de la gravitation. Chaque théorie est représentée par la donnée d'un ensemble de dix paramètres PPN. On compare donc les théories en comparant les valeurs de leurs paramètres PPN.

Le principal objectif des tests de la gravitation est donc de déterminer expérimentalement les valeurs de ces dix paramètres le plus précisément possible afin de valider ou d'éliminer certaines théories. Parmi les dix paramètres PPN, nous n'en utiliserons que quatre dans cette étude ; ils sont notés  $\alpha_1$ ,  $\gamma$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> En fait  $\alpha_1$  ne fait pas partie des dix paramètres PPN car il se déduit des autres :  $\alpha_1 = 7\Delta_1 + \Delta_2 - 4(\gamma + 1)$ . Nous avons choisi de décrire le formalisme PPN avec cet ensemble de paramètres introduit par Will [WILL 71]. Il existe d'autres descriptions de ce formalisme s'appuyant sur d'autres paramètres avec des noms différents, mais parfois aussi avec des noms identiques, d'où une certaine confusion possible. Les quatre paramètres utilisés sont décrits par la suite. Dans le cadre de la relativité générale d'EINSTEIN :  $\gamma = \Delta_1 = \Delta_2 = 1$  et  $\alpha_1 = 0$ .

#### 8.1.4.1 Le paramètre $\alpha_1$

Ce paramètre est associé au « référentiel de préférence ». La théorie de la relativité générale d'EINSTEIN prévoit qu'il n'existe pas de référentiel de préférence pour appliquer les lois de la physique. Tous les référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres sont équivalents. Dans cette théorie le paramètre  $\alpha_1$  est donc nul. D'autres théories prévoient l'existence d'un référentiel dans lequel l'univers est au repos qui serait le référentiel de préférence. Ce référentiel serait par exemple celui dans lequel le rayonnement à 3 K (rayonnement fossile du Big Bang correspondant au rayonnement du corps noir de l'ensemble de l'univers) serait isotrope. Des expériences réalisées en 1977 [SMOOT 77] et en 1979 [SMOOT 79] dans les hémisphères nord et sud ont déjà montré une anisotropie de ce rayonnement dont la température serait, bien qu'elle varie un peu suivant les expériences et les termes correctifs utilisés, de  $3,5 \text{ K} \pm 0,6 \text{ mK}$ . Ces résultats indiqueraient que la Terre se déplace par rapport au référentiel de repos du rayonnement fossile avec une vitesse de  $390 \pm 60 \text{ km.s}^{-1}$  dans la direction de la constellation du Lion (direction  $11 \pm 0,5 \text{ h R.A.}, 6^\circ \pm 10^\circ \text{ dec}$ ).

La théorie d'EINSTEIN prévoit que  $\alpha_1$  est nul. Les expériences permettent pour l'instant de dire qu'il est inférieur, en valeur absolue, à 0,02 [SCULLY 81].

#### 8.1.4.2 Le paramètre $\gamma$

Ce paramètre est associé à la courbure de l'espace-temps provoquée par la présence d'une masse. Le paramètre  $\gamma$  détermine le rayon de courbure produit par une masse au repos de 1 kg. Il intervient dans l'effet de décalage vers le rouge ou dans la déflexion des rayons lumineux. Dans la théorie de la relativité générale,  $\gamma$  vaut 1. La valeur de  $\gamma$  a été déterminée expérimentalement en 1991 [ROBERTSON 91] en utilisant des techniques de VLBI (Very Large Base Interferometry) et a été trouvée égale à  $1,0002 \pm 0,002$ .

#### 8.1.4.3 Les paramètres $\Delta_1$ et $\Delta_2$

Ces paramètres sont associés à l'effet d'entraînement des axes d'un référentiel d'inertie par un corps massif en rotation. Les paramètres  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  déterminent l'amplitude de cet entraînement. Dans la théorie de la relativité générale  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  valent tous les deux 1, mais ces deux paramètres n'ont, pour l'instant, jamais été mesurés expérimentalement (voir cependant le paragraphe 8.1.5.3 et [CIUFOLINI 97]).

On donne à titre d'exemple les valeurs des paramètres  $\alpha_1$ ,  $\gamma$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  pour différentes métriques issues de diverses théories alternatives :

| Théories                                     | $\alpha_1$ | $\gamma$                    | $\Delta_1$                      | $\Delta_2$ |
|--|------------|-----------------------------|---------------------------------|------------|
| Théorie de la relativité générale d'EINSTEIN | 0          | 1                           | 1                               | 1          |
| Théorie de NI <sup>(1)</sup>                 | -8         | 1                           | -1/7                            | 1          |
| Théorie de BRANS-DICKE-JORDAN                | 0          | $\frac{1+\omega}{2+\omega}$ | $\frac{10+7\omega}{14+7\omega}$ | 1          |

$\omega$  est un paramètre que nous ne détaillerons pas ici. Pour plus de précisions sur les autres paramètres PPN et sur les théories alternatives on pourra se reporter à [WILL 81 p 116 et 255, MISNER 73, p 1066].

#### 8.1.4.4 L'expérience de SCHIFF dans le formalisme PPN

L'expression (Eq. 8. 12) nous a permis de déterminer l'expression du déphasage à la sortie du gyromètre atomique dans le cadre de la relativité générale. Cette expression peut être généralisée dans le cadre du formalisme PPN. On pourra trouver le détail de ce calcul dans [HAUGAN 80], on ne donne ici que le résultat :

$$\Delta\phi^{total} = \frac{2Am}{\hbar} \left[ \Omega_{\oplus} + \alpha_1 T_{\alpha} + \frac{1}{2}(\gamma+1)T_{\gamma} + \frac{1}{8}(7\Delta_1 + \Delta_2)T_{\Delta} \right] \quad (\text{Eq. 8. 16})$$

- $T_{\alpha}$  est le terme lié à l'effet du référentiel de préférence. Le déphasage associé à cet effet vaut :

$$\Delta\phi^{préférence} = \frac{2Am}{\hbar c} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}} w \quad (\text{Eq. 8.17})$$

où  $w$  est la vitesse de la Terre par rapport au référentiel de préférence. La mesure de ce déphasage permet donc d'accéder au paramètre  $\alpha_1$ . En relativité générale ce terme n'apparaît pas car il n'y a pas de référentiel de préférence ( $\alpha_1=0$ ).

- $T_{\gamma}$  est le terme lié à l'effet DE SITTER dû à la courbure de l'espace, provoquée par la masse de la Terre. L'équation (Eq. 8. 14) de la relativité générale doit donc être remplacée dans le formalisme PPN par :

<sup>(1)</sup> Il est clair que compte tenu de la valeur de  $\alpha_1$  prédite par la théorie de NI, et de celle déterminée expérimentalement par SCULLY [SCULLY 82], cette théorie n'est pas viable. Elle est donnée ici juste à titre d'exemple.

$$\Delta\phi^{deSitter} = \frac{2Am}{\hbar c} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) \frac{3GM_{\oplus}}{2r_{\oplus}} \Omega_{\oplus} \sin^2(\theta_z) \quad (\text{Eq. 8.18})$$

On constate donc que la mesure de l'effet DE SITTER permet d'accéder à la valeur du paramètre  $\gamma$ . Dans le cadre de la relativité générale  $(\gamma + 1)/2$  est égal à 1, et on retrouve bien (Eq. 8.14).

•  $T_{\Delta}$  est le terme lié à l'effet LENSE-THIRRING induit par la rotation de la Terre. L'expression (Eq. 8.15) doit alors être remplacée par :

$$\Delta\phi^{Lense-Thirring} = -\frac{2Am}{\hbar c} \left( \frac{7\Delta_1 + \Delta_2}{8} \right) \frac{J_{\oplus}}{r_{\oplus}} (1 - 3 \cos^2(\theta_z)) \quad (\text{Eq. 8.19})$$

La mesure de l'effet LENSE-THIRRING permet donc d'accéder à la valeur des paramètres  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

#### 8.1.4.5 Comparaison des ordres de grandeurs

En optimisant la latitude et la direction de l'axe d'entrée du gyromètre [CHOW 85], les ordres de grandeur de ces termes sont :

$$\left| \begin{array}{l} 1,2 \cdot 10^{-7} \alpha_1 \Omega_{\oplus} \text{ pour l'effet du référentiel de préférence.} \\ 1,4 \cdot 10^{-9} (\gamma + 1)/2 \Omega_{\oplus} \text{ pour l'effet DE SITTER.} \\ 5,6 \cdot 10^{-10} (7\Delta_1 + \Delta_2)/8 \Omega_{\oplus} \text{ pour l'effet LENSE-THIRRING.} \end{array} \right.$$

On peut donner des valeurs précises de ces effets pour la relativité générale d'EINSTEIN, dans le cas d'une expérience réalisée sur Terre :

$$\left| \begin{array}{l} \text{aucun effet dû au référentiel de préférence car } \alpha_1=0. \\ \text{Effet DE SITTER : } 1,02 \cdot 10^{-13} \text{ rad.s}^{-1} \\ \text{Effet LENSE-THIRRING : } 4,07 \cdot 10^{-14} \text{ rad.s}^{-1} \end{array} \right.$$

On constate que le niveau de sensibilité nécessaire à cette expérience est bien inférieur à celui des meilleurs gyroscopes et gyromètres actuels. Néanmoins le fonctionnement en microgravité des capteurs atomiques apparaît comme une des solutions les plus prometteuses pour augmenter la sensibilité et assurer une bonne stabilité long terme. C'est dans ce cadre que se situe le projet PHARAO/ACES d'horloge spatiale à atomes froids [LAURENT 98] et le projet HYPER décrit dans le paragraphe 8.1.5.2.

### 8.1.5 Les différents tests de l'effet LENSE-THIRRING

Les effets DE SITTER et LENSE-THIRRING n'ont pour l'instant jamais été observés. Cependant des mesures du paramètre  $\gamma$  ont déjà été réalisées avec de très bonnes précisions ( $\sim 10^{-3}$ ) par d'autres expériences, notamment par des techniques de VLBI [ROBERTSON 91], et par des mesures de l'effet SHAPIRO [REASENBERG 79]. On comprend donc l'intérêt que pourrait avoir la mise en évidence de l'effet LENSE-THIRRING pour l'évaluation des paramètres  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et pour la mise en évidence du champ gravito-magnétique.

Nous allons détailler deux projets visant à mettre en évidence l'effet LENSE-THIRRING. Le principe de ces tests repose sur l'expérience proposée par SCHIFF, à la différence que le capteur inertiel est placé dans un satellite en orbite autour de la Terre.

Réaliser ce type d'expérience sur un satellite présente plusieurs avantages importants. D'une part le déphasage induit par l'effet LENSE-THIRRING est masqué par des déphasages bien plus grands produits par des effets "parasites" (moment quadrupolaire de la Terre, effet DE SITTER, précession de THOMAS, ...). Réaliser l'expérience sur Terre augmente encore le nombre et l'amplitude de ces effets parasites (vibrations du sol, effet de marée, déplacement des plaques tectoniques, ...).

D'autre part, le choix de l'orbite devrait permettre de séparer les contributions des effets LENSE-THIRRING et DE SITTER. Cette séparation est impossible pour un fonctionnement sur Terre.

Ainsi, à partir des équations (Eq.8. 14) et (Eq. 8. 15), on trouve que pour une orbite équatoriale circulaire ( $\theta_z = \pi/2$ ), les deux contributions au champ gravito-magnétique (LENSE-THIRRING et DE SITTER) sont constantes tout au long de l'orbite et valent :

$$\mathbf{H}_{\text{Lense-Thirring}}^{\text{équatorial}} \propto -\frac{J_{\oplus}}{c^2 r^3} \mathbf{e}_z \quad (\text{Eq. 8. 20})$$

$$\mathbf{H}_{\text{deSitter}}^{\text{équatorial}} \propto -\frac{G M_{\oplus}}{c^2 r} \omega \mathbf{e}_z \quad (\text{Eq. 8. 21})$$

où  $r$  est la distance du satellite au centre de la Terre et  $\omega$  est sa vitesse de rotation le long de son orbite. Les deux effets étant suivant le même axe ( $Oz$ ), il sera par conséquent impossible de séparer leurs contributions.

Au contraire, si l'on considère une orbite polaire dans le plan ( $Oxz$ ), les deux contributions au champ gravito-magnétique ne sont plus constantes sur la trajectoire :

$$\mathbf{H}_{\text{Lense-Thirring}}^{\text{polaire}} \propto -\frac{J_{\oplus}}{c^2 r^3} \begin{pmatrix} 3 \cos(\theta_z) \sin(\theta_z) \\ 0 \\ 1 - 3 \cos^2(\theta_z) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 8. 22})$$

$$\mathbf{H}_{\text{deSitter}}^{\text{polaire}} \propto -\frac{GM_{\oplus}}{r} \omega \mathbf{e}_y \quad (\text{Eq. 8. 23})$$

où  $\theta_z$  est l'angle de colatitude du satellite sur sa trajectoire. On constate alors que les deux effets sont suivant des axes perpendiculaires : il sont donc parfaitement discernables. D'après (Eq. 8. 22) on constate de plus que les deux composantes de l'effet LENSE-THIRRING sont dans le plan de l'orbite et sont modulées dans le temps. On peut déterminer la valeur moyenne de ces deux composantes sur la trajectoire :

$$\left\langle \mathbf{H}_{\text{Lense-Thirring}}^{\text{polaire}} \right\rangle_{\text{orbite}} \propto -\frac{J_{\oplus}}{c^2 r^3} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 8. 24})$$

En pratique, on choisira généralement une orbite polaire pour ce type d'expérience afin de découpler les effets DE SITTER et LENSE-THIRRING.

### 8.1.5.1 Le projet Gravity Probe B

Le projet Gravity-Probe B [EVERITT 74] a été initié dans les années 1970 à l'université de Stanford. Ce projet est maintenant une collaboration entre la NASA et cette université.

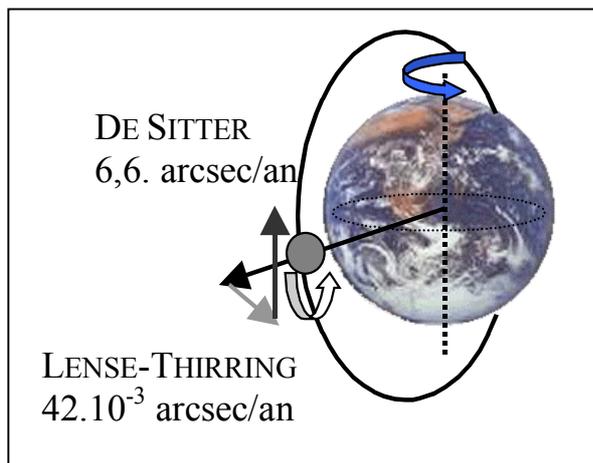
Trois gyroscopes mécaniques sont placés dans un satellite en orbite polaire autour de la Terre à une altitude de 650 kilomètres. L'effet LENSE-THIRRING fait tourner l'axe du référentiel local de  $42.10^{-3}$  arcsec en un an dans le sens de rotation de la Terre. Ce référentiel est aussi soumis à l'effet DE SITTER. Cet effet fait tourner le référentiel local de 6,6 arcsec dans le plan de son orbite. Gravity-Probe B devrait être capable de mesurer l'effet LENSE-THIRRING à  $10^{-2}$  près et l'effet DE SITTER à  $10^{-5}$  près (**Figure 8. 3**). La mesure se fait par intégration du signal moyenné (Eq. 7.24) sur la trajectoire du satellite.

Le gyroscope mécanique est constitué d'un rotor – une sphère en quartz de 3,8 cm de diamètre recouverte de Niobium supraconducteur – en suspension électrostatique. La lecture de la direction de l'axe de rotation du rotor se fait par effet LONDON afin de ne pas perturber le dispositif. L'ensemble est placé dans un dewar refroidi à l'Hélium liquide (1,8 K). Les défauts de forme de la sphère sont inférieurs à 10 nm<sup>(1)</sup>, ce qui fait dire à ses concepteurs que cette boule est l'objet le plus rond jamais réalisé (**Figure 8. 4**). Le gyroscope est limité par un bruit blanc sur une très longue durée, l'amélioration de la mesure se fait donc en  $T^{-3/2}$ , où  $T$  est le temps d'intégration (voir Chapitre 2).

<sup>(1)</sup> Cette contrainte de forme a pour but de minimiser l'effet de marée produit par la Terre sur la boule. La boule n'étant pas ponctuelle, elle est donc dans un champ de gravitation non constant (décroissance en  $1/r^2$ ) qui fait que l'attraction Terrestre d'un côté de la boule n'est pas égale à celle du côté opposé. On montre que pour un corps parfaitement sphérique, l'effet de marée est nul.

L'attitude du satellite est asservie en rotation grâce à un viseur d'étoile pointant l'étoile Rigel, et en accélération grâce à une masse épreuve en apesanteur. Ces deux systèmes contrôlent de petites fusées de poussée permettant de corriger l'attitude du satellite, qui constitue ainsi un référentiel d'inertie. Le but de cette expérience est de mettre en évidence un mouvement de précession de l'axe des gyroscopes proportionnel à la valeur moyenne de l'effet LENSE-THIRRING sur toute la trajectoire.

Le lancement est prévu fin 2002 pour une durée de deux ans.



**Figure 8. 3** : les différentes précessions subies par les gyroscopes de Gravity-Probe B.



**Figure 8. 4** : photographie du rotor du gyroscope de Gravity-Probe B.

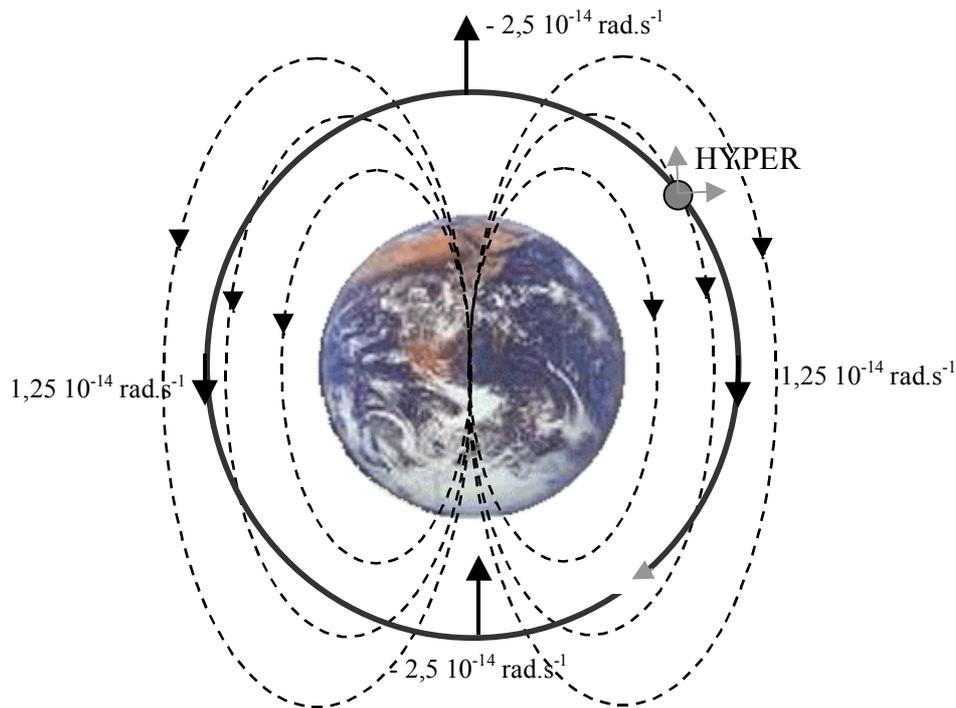
### 8.1.5.2 Le projet HYPER

Le projet HYPER [RASEL 00] est une collaboration européenne (France, Allemagne, Grande-Bretagne, Italie) financée par l'Agence Spatiale Européenne (ESA). Ce projet est similaire au projet Gravity-Probe B, mais à la différence que les gyroscopes mécaniques sont remplacés par deux gyromètres à ondes atomiques dont les axes d'entrée sont dans le plan de l'orbite, suivant les axes ( $Ox$ ) et ( $Oz$ ). L'extrême sensibilité des gyromètres utilisés ( $\sim 10^{-12}$  rad.s<sup>-1</sup>.Hz<sup>-1/2</sup>) devrait permettre de mettre en évidence la modulation des deux composantes du champ gravito-magnétique au cours du temps (voir Eq. 8.22). Sur une orbite polaire à 450 km

d'altitude, l'effet LENSE-THIRRING induit une vitesse de rotation variant de  $-2,5 \cdot 10^{-14} \text{ rad.s}^{-1}$  aux pôles, à  $1,25 \cdot 10^{-14} \text{ rad.s}^{-1}$  à l'équateur (voir **Figure 8. 5**). Ce niveau est donc accessible en moins d'une heure d'intégration, et ainsi, une véritable cartographie du champ gravito-magnétique à 1 % près pourrait être envisagée en un an.

On peut préciser de plus que ce projet se propose aussi la mesure de la constante de structure fine [KINOSHITA 96].

Ce projet a démarré en 1999, pour un lancement prévu dans les années 2015.



**Figure 8. 5** : champ gravito-magnétique de la Terre avec l'orbite de HYPER.

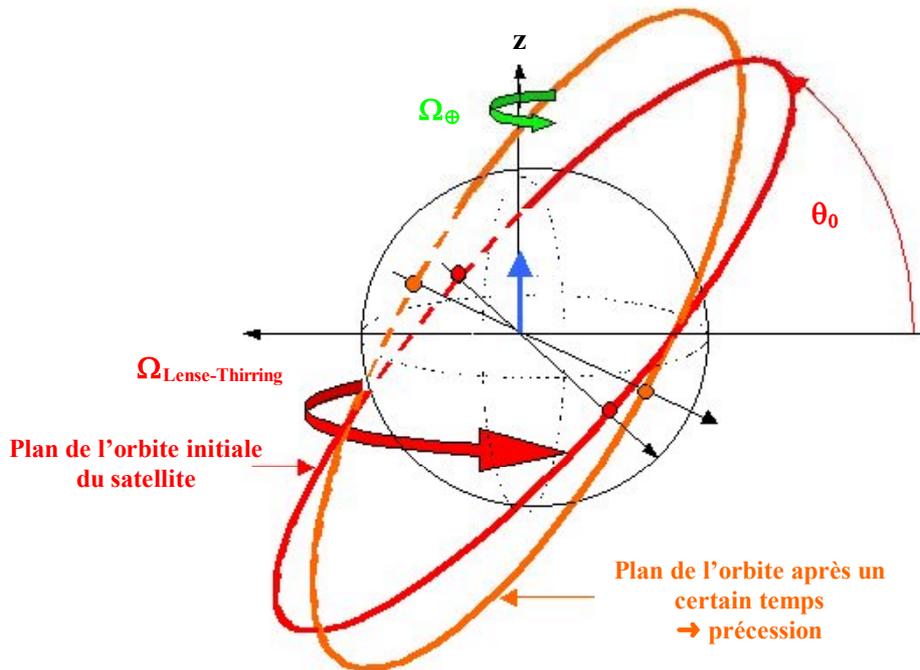
### 8.1.5.3 Expériences avec les satellites LAGEOS

L'orbite d'un satellite tournant autour de la Terre se comporte comme un énorme gyroscope (pour un mouvement soumis à une force centrale) qui va être entraîné par le champ gravito-magnétique créé par la Terre en rotation. L'orbite du satellite va subir un couple qui se traduit par un mouvement de rotation des points d'intersection entre l'orbite du satellite et le plan équatorial de la Terre (voir **Figure 8. 6**), avec une vitesse angulaire [CIUFOLINI 97] :

$$\Omega_{\text{Lense-Thirring}} = \frac{[3(\mathbf{J}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{J}]}{r^3} \quad (\text{Eq. 8. 25})$$

où  $\mathbf{J}$  est le moment cinétique de la Terre. Cet équation ressemble beaucoup à l'équation (Eq. 8. 8), mais elle est obtenue d'une façon complètement différente. L'équation (Eq. 8.25) est obtenue en déterminant la trajectoire d'un point matériel (le satellite) dans l'espace courbe

produit par la Terre en rotation en utilisant la métrique de KERR-NEWMAN (voir paragraphe 8.1.2.3).



**Figure 8. 6 :** précession du plan de l'orbite d'un satellite soumis à l'effet LENSE-THIRRING.

Ce type d'expérience a été proposée par VAN PATEN et EVERITT en 1976 [VAN PATTEN 76], puis par CIUFOLINI en 1989 [CIUFOLINI 89]. La principale difficulté est de soustraire les différents effets parasites, en particulier les effets de marée et du moment quadrupolaire <sup>(1)</sup> de la Terre, qui entraînent une précession environ 10 millions de fois plus grande que celle que l'on veut détecter. L'utilisation de deux satellites dont les plans d'orbites sont symétriques de part et d'autre de l'axe de rotation de la Terre permet une bien meilleure réjection de ces effets parasites. L'expérience a été réalisée en 1997 [CIUFOLINI 97] en dépouillant les données d'orbites et de trajectoires des satellites LAGEOS ( $\theta_0 = 109,9^\circ$  et  $r \sim 12000$  km) et LAGEOS II ( $\theta_0 = 52,65^\circ$  et  $r \sim 12000$  km) sur une durée d'observation de trois ans. Les auteurs déduisent de leur mesure une valeur de :

$$\mu_{Lense-Thirring} = \frac{1}{8} (7\Delta_1 + \Delta_2) = 1,1 \pm 0,3$$

Ce résultat reste pour l'instant assez controversé compte tenu de l'incertitude très importante (30 %) qui entache la valeur trouvée et de l'utilisation de modèles pour déterminer les effets parasites à soustraire.

<sup>(1)</sup> Le potentiel gravitationnel ne vaut exactement  $U = -GM/r$  que pour une distribution sphérique de matière. Dans le cas contraire on doit faire un développement multipolaire du potentiel. La Terre n'est pas une sphère parfaite (le diamètre équatorial diffère du diamètre polaire d'environ 0,3 %), il faut donc tenir compte du moment quadrupolaire lorsque l'on calcule les trajectoires de satellites par exemple. L'influence de ce terme est de faire précesser le plan de l'orbite du satellite autour de l'axe de rotation de la Terre.

### **8.1.6 Conclusion**

La mise en évidence de l'effet LENSE-THIRRING reste donc un enjeu important pour la validation de la relativité générale. Bien que prédit en 1917, ce n'est que depuis les années 60 que les premiers projets expérimentaux sont apparus. L'extrême petitesse de l'effet à observer ( $\sim 4.10^{-14}$  rad.s<sup>-1</sup>) place les gyromètres atomiques en microgravité comme des candidats idéaux pour déceler cet effet.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [ADELBERGER 90] E. G. Adelberger, C. W. Stubbs, B. R. Heckel, Y. Su, H. E. Swanson, G. Smith, J. H. Gundlach, W. F. Rogers, *Phys. Rev. D*, **42**, p 3267, (1990)
- [BORDÉ 94] Ch. J. Bordé, A. Karasiewicz, Ph. Tournenc, "General relativistic framework for atom interferometry ", *Int. J. Mod. Phys. D*, **3**, 1, p. 157, (1994)
- [BORDÉ 01] Ch. J. Bordé, "Theoretical tools for atom optics and interferometry", *C.R. Acad. Sci.*, t. 2, Série IV, p 509, Paris, (2001)
- [BORDÉ 01-2] Ch. J. Bordé, "Atomic Clocks and Atom Interferometry ", in *Advances in the Interplay between Quantum and Gravity Physics*, Ed. by V. de Sabbada, Kluwer, Academic Publisher, (2001)
- [BRAGINSKY 77] C. M. Braginsky, C. M. Caves, K. S. Thorne, "Laboratory experiments to test relativity gravity", *Phys. Rev. D*, **15**, p 2047, (1977)
- [CHOW 85] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, "The Ring Laser Gyro", *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 1, p 61, (1985)
- [CIUFOLINI 89] Ciufolini, "A comprehensive introduction to the LAGEOS gravitomagnetic experiment : from the importance of the gravitomagnetic field in physics to preliminary error analysis and error budget", *Int. J. Mod. Phys. A*, **4**, p 3083, (1989)
- [CIUFOLINI 97] I. Ciufolini, F. Chiappa, D. Lucchesi, F. Vespe, "Test of Lense-Thirring orbital shift due to spin", *Class. Quantum Grav*, **14**, p 2701, (1997)
- [DE SITTER 16] W.de Sitter, "On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences", *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **77**, p 155, (1916)
- [DICKE 74] R. H. Dicke, H. M. Goldenberg, "The oblateness of the Sun", *Astrophys. J. Supp.*, **27**, p 131, (1974)
- [DICKEY 94] J. O. Dickey et al, *Science*, **265**, p 482, (1994)
- [EVERITT 74] C. Everitt, "The gyroscope experiment. I. General description and analysis of gyroscope performance", in *Experimental Gravitation*, Ed. B. Bertotti, Academic Press, New York, (1974)
- [FOMALONT 77] E. B. Fomalont, R. A. Sramek, *Comm. Astrophys.*, **7**, p 19, (1977)
- [HAKIM 94] R. Hakim, "Gravitation Relativiste", ed. InterEditions / CNRS Editions, (1994), ISBN 2729605193
- [HAUGAN 80] M. P. Haugan, M. O. Scully, K. Just, "A Proposed Optical Test of Preferred Frame Cosmologies", *Phys. Lett.*, 77A, **1**, p 88, (1980)
- [JONES 76] B. F. Jones, *Astron. J.*, **81**, p 455, (1976)
- [KINOSHITA 96] T. Kinoshita, *Rep. Prog. Phys.*, **59**, p 1459, (1996)
- [KURODA 89] K. Kuroda, N. Mio, *Phys. Rev. Lett.*, **62**, p 1941, (1989)
- [LAURENT 98] Ph. Laurent, P. Lemonde, E. Simon, G. Santarelli, A. Clairon, N. Dimarcq, P. Petit, C. Audoin, C. Salomon, "A cold atom clock in absence of gravity", *Eur. Phys. J. D*, **3**, p 201, (1998)
- [LENSE 18] J. Lense, H. Thirring, *Phys. Z.*, **19**, p 156, (1918)
- [MICHELSON 87] A. A. Michelson, E. W. Morley, *Am. J. Sci.*, **34**, p 333, (1887)

- [MISNER 73] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "Gravitation", Ed. *Freeman*, San Francisco, (1973), ISBN 0716703343
- [MUHLEMAN 70] D. O. Muhleman, R. D. Ekers, E. B. Fomalont, "Radio Interferometric Test of the General Relativity", *Phys. Rev. Lett.*, **24**, p 1377, (1970)
- [PLEBANSKI 60] J. Plebanski, *Phys. Rev.*, **118**, p 1369, (1960)
- [POUND 60] R. V. Pound, G. A. Rebka, "Apparent weight of photons", *Phys. Rev. Lett.*, **4**, p 337, (1960)
- [RASEL 00] E.M. Rasel et al., "HYPER : Hyper-Precision Cold Atom Interferometry in Space", *ESA Assessment Study Report*, ESA-SCI(2000)10, (2000)
- [REASENBERG 79] R. D. Reasenberg, I. I. Shapiro, P. E. MacNeil, R. B. Goldstein, J. C. Breidenthal, J. P. Brenkle, D. L. Cain, T. M. Kaufman, T. A. Komarek, A. I. Zygielbaum, *Astrophys. J.*, **234**, p L219, (1979)
- [ROBERTSON 91] D. S. Robertson, W. E. Carter, W. H. Dillinger, *Nature*, **349**, p 768, (1991)
- [ROLL 64] P. G. Roll, R. V. Krotkov, R. H. Dicke, *Ann. Phys. (NY)*, **26**, p 442, (1964)
- [SCHIFF 60] L. Schiff, "Possible new experimental test of general relativity theory", *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 5, p 215, (1960)
- [SCHUTZ 84] B. F. Schutz, *Am. J. Phys.*, **52**, p 412, (1984)
- [SCULLY 81] M. O. Scully, M. S. Zubairy, K. Just, "Proposed optical test of metric gravitation theories", *Phys. Rev. A*, **24**, 4, p 2009, (1981)
- [SHAPIRO 64] I. I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, p 789, (1964)
- [SMOOT 77] G. F. Smoot, M. V. Gorenstein, R. A. Muller, "Detection of Anisotropy in the Cosmic Blackbody Radiation", *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 14, p 898, (1977)
- [SMOOT 79] G. F. Smoot, P. M. Lubin, "Southern Hemisphere Measurements of the Anisotropy in the Cosmic Microwave Background Radiation", *Ap. J.*, **234**, p L83, (1979)
- [TOURENC] P. Tourenc, "Gravitation et Relativité", Ed. *Armand Colin*, ISBN 2200212097
- [VAN PATTEN 76] R. A. Van Patten, C. W. F. Everitt, "Possible experiment with two counter-orbiting drag-free satellites to obtain new test of Einstein's general theory of relativity and improved measurements in geodesy", *Phys. Rev. Lett.*, **36**, p 629, (1976)
- [VESSOT 79] R. F. C. Vessot, M. W. Levine, *J. Gen. Rel. and Grav.*, **10**, p 181, (1979)
- [WILL 71] C. M. Will, "Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, II : Parametrized post-Newtonian Hydrodynamics, and the Nordtvedt effect ", *Astrophys. J.*, **163**, p 611, (1971)
- [WILL 72-1] C. M. Will, K. Nordtvedt, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. I. Preferred-frame theories and an Extended PPN formalism", *Astrophysics*, **177**, p 757, (1972)

- [WILL 72-2] C. M. Will, K. Nordtvedt, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. II. Experimental evidence to rule out preferred-frame theories of gravity" *Astrophysics*, **177**, p 775, (1972)
- [WILL 81] C. M. Will "Theory and Experiment in Gravitational Physics", *ed. Cambridge University Press*, Cambridge, (1981), ISBN 0521439736





## ANNEXES

- Annexe A : L'atome de Césium
- Annexe B : Notions sur les bruits pour la  
caractérisation des capteurs inertiels
- Annexe C : Les gyroscopes mécaniques
- Annexe D : Les gyromètres optiques



**ANNEXE A : L'ATOME DE CESIUM****Table des matières**

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| A.1   | CONFIGURATION ÉLECTRONIQUE.....  | 270 |
| A.2   | CONFIGURATION ÉNERGÉTIQUE .....  | 270 |
| A.2.1 | Couplage spin de l'électron – moment orbital : structure fine .....            | 270 |
| A.2.2 | Couplage spin nucléaire – moment cinétique : structure hyperfine.....          | 271 |
| A.2.3 | Structure Zeeman .....   | 271 |
| A.3   | TRANSITIONS AUTORISÉES .....   | 273 |
| A.3.1 | Probabilité de transition entre niveaux hyperfins par émission spontanée ..... | 273 |
| A.3.2 | Coefficients de Clebsch-Gordan .....   | 273 |
| A.4   | LES TRANSITIONS UTILES.....  | 273 |
| A.4.1 | La transition cyclante $F = 4 \rightarrow F' = 5$ .....                        | 274 |
| A.4.2 | La transition pompante $F = 3 \rightarrow F' = 4$ .....                        | 274 |
| A.4.3 | La transition d'horloge $F = 3 \leftrightarrow F = 4$ .....                    | 275 |

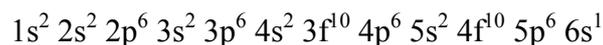
## ANNEXE A :

### L'ATOME DE CESIUM

Le césium est un métal alcalin, il est placé dans le tableau de MENDELEIV dans la première colonne et sur la sixième ligne. Son numéro atomique est 55 (nombre de protons), son nombre de masse vaut 133 (nombre total de nucléons) et sa masse atomique est de  $220,8 \cdot 10^{-27}$  kg.

#### A.1 CONFIGURATION ÉLECTRONIQUE

L'atome de césium a 55 électrons, sa configuration électronique est donc :



Seule la couche incomplète nous intéresse, il s'agit de la couche  $6s^1$  donc de l'électron unique situé sur la couche énergétique repérée par le nombre quantique principal  $n = 6$ .

#### A.2 CONFIGURATION ÉNERGÉTIQUE

##### A.2.1 Couplage spin de l'électron – moment orbital : structure fine

• L'atome de césium dans l'état fondamental  $6S^1$  a un moment orbital  $L = 0$ . Associé avec le spin de l'électron unique  $S = 1/2$ , le moment cinétique issu du couplage spin-orbite (couplage  $L - S$ ) vaut :

$$|L-S| \leq J \leq L+S \quad (\text{Eq. A. 1})$$

On trouve ici la valeur unique:  $J = 1/2$ .

• Lorsque l'atome de césium est excité, il passe dans l'état  $6P^1$ , son moment orbital vaut donc  $L = 1$ . Le moment cinétique peut alors valoir  $J = 1/2$  ou  $J = 3/2$ , d'après (Eq. A.1).

### A.2.2 Couplage spin nucléaire – moment cinétique : structure hyperfine

Le spin nucléaire du césium vaut  $I = 7/2$ . Associé au moment cinétique trouvé précédemment, on obtient le nombre quantique hyperfin  $F$ , issu du couplage  $J - I$ , donné par :

$$|J-I| \leq F \leq J+I \quad (\text{Eq. A. 2})$$

pour le niveau  $6S_{1/2}$  :  $L = 0, J = 1/2$  on trouve  $F = 3$  et  $F = 4$ .

pour le niveau  $6P_{1/2}$  :  $L = 1, J = 1/2$  on trouve  $F = 3$  et  $F = 4$ .

pour le niveau  $6P_{3/2}$  :  $L = 1, J = 3/2$  on trouve  $F = 2, F = 3, F = 4$  et  $F = 5$ .

### A.2.3 Structure ZEEMAN

Chaque niveau hyperfin est dégénéré en  $m$  sous-niveaux ZEEMAN avec :

$$-F \leq m \leq F \quad (\text{Eq. A. 3})$$

On peut lever cette dégénérescence en appliquant un champ magnétique. Chaque sous-niveaux ZEEMAN est alors déplacé en énergie d'une quantité :

$$\Delta E = -m g_F \mu_B B \quad (\text{Eq. A. 4})$$

où  $g_F$  est le facteur de LANDÉ du niveau hyperfin  $F$ ,  $\mu_B$  est la magnéton de BOHR, et  $B$  est le module du champ magnétique. Ce déplacement d'énergie peut être traduit en déplacement de fréquence  $\Delta f = \Delta E / h$ .

On obtient ainsi la structure énergétique de l'atome de césium représentée **Figure A. 1** :

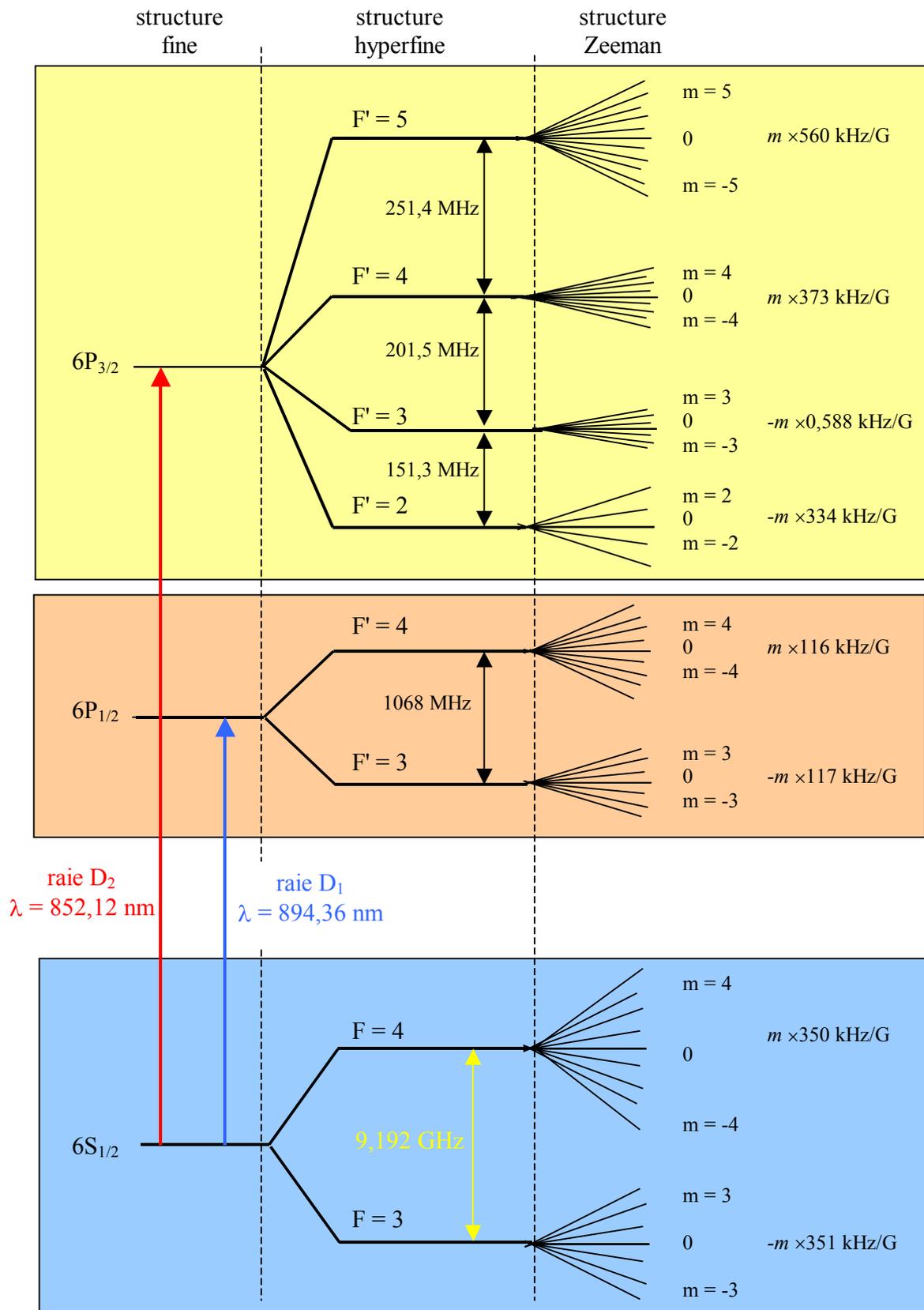


Figure A. 1 : diagramme énergétique du Césium. Seules les raies D1 et D2 sont représentées.

### A.3 TRANSITIONS AUTORISÉES

La conservation du moment cinétique au cours d'une transition impose des règles de sélection. Seules les transitions  $\Delta F = 0, \pm 1$  et  $\Delta m = 0, \pm 1$  sont autorisées, à l'exception de la transition  $\Delta F = 0$  et  $\Delta m = 0$ .

#### A.3.1 Probabilité de transition entre niveaux hyperfins par émission spontanée

Lorsqu'un atome est dans l'état excité  $6P_{3/2}$ , il se désexcite par émission spontanée vers le niveau  $6S_{1/2}$ . La probabilité de redescendre dans les sous-niveaux hyperfins  $F = 3$  ou  $F = 4$  est donnée par la force de raie. Ces probabilités sont résumées dans le tableau ci-dessous :

|         | $F = 2$ | $F = 3$ | $F = 4$ | $F = 5$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| $F = 3$ | 1       | 3/4     | 5/12    | 0       |
| $F = 4$ | 0       | 1/4     | 7/12    | 1       |

**Figure A. 2** : probabilité de désexcitation par émission spontanée du niveau  $6P_{3/2}$  vers le niveau  $6S_{1/2}$ .

#### A.3.2 Coefficients de CLEBSCH-GORDAN

Lors d'une transition  $|F, m\rangle \rightarrow |F', m+q\rangle$ , la probabilité de transition est proportionnelle au carré du coefficient de CLEBSCH-GORDAN  $cg_m^{\Delta m=q}$  défini par :

$$cg_m^{\Delta m=q} = \langle F', m+q | \hat{\epsilon}_q \cdot \hat{d}^+ | F, m \rangle \quad (\text{Eq. A. 5})$$

où  $\hat{d}$  est l'opérateur dipôle réduit et  $\hat{\epsilon}_q$  est le vecteur polarisation du champ électrique,  $q = 0, +1$  ou  $-1$  respectivement pour les polarisations  $\pi, \sigma^+$  et  $\sigma^-$ , définies par rapport à l'axe de quantification donné par le champ magnétique.

Ces coefficients sont normalisés pour que la somme des carrés des coefficients partant des sous-niveaux ZEEEMAN de l'état excité soit égal à 1. Pour une transition  $F \rightarrow F' = F+1$ , ce coefficient est défini suivant la valeur de  $q$  par :

$$cg_m^{\Delta m=\pm 1} = \sqrt{\frac{(F \mp m+1)(F \mp m+2)}{(2F+1)(2F+2)}} \quad \text{et} \quad cg_m^{\Delta m=0} = \sqrt{\frac{(F+1)^2 - m^2}{(2F+1)(F+1)}} \quad (\text{Eq. A. 6})$$

### A.4 LES TRANSITIONS UTILES

Toutes les interactions atomes / lasers que nous utilisons pour les différentes phases de l'expérience (refroidissement, faisceau pousseur, interaction RAMAN, détection) peuvent être décrites par trois transitions différentes que nous allons détailler ici.

### A.4.1 La transition cyclante $F = 4 \rightarrow F' = 5$

Dans notre expérience, la transition dite "cyclante" ou "fermée"  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  est très souvent utilisée, comme par exemple pour les phases de refroidissement ou de détection.

Un atome initialement dans l'état  $F = 4$  est placé dans un champ lumineux accordé sur la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ . Cet atome est alors excité vers l'état  $F' = 5$ . Il n'a pas d'autre choix ensuite que de se désexciter par émission spontanée vers le niveau  $F = 4$ , seul niveau autorisé par les règles de sélection. L'atome revenu dans l'état  $F = 4$  va pouvoir effectuer à nouveau un cycle absorption – émission spontanée. Le nombre de cycles que l'atome va effectuer par seconde dépend de la largeur de raie de la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ , de l'intensité lumineuse du laser et du désaccord à résonance :

$$n_{cycles} = \frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{I / I_{sat}}{1 + I / I_{sat} + 4(\delta / \Gamma)^2} \right] \quad (\text{Eq. A. 7})$$

Pour la transition considérée ici  $\Gamma = 2\pi \times 5,3$  MHz et  $I_{sat} = 1,1$  mW.cm<sup>-2</sup>.

Cette formule nous sera très utile pour relier le nombre de photons détectés au nombre d'atomes présents au cours de la détection par exemple, ou pour calculer le nombre de reculs pris par un atome pendant la phase de refroidissement ou avec le faisceau pousseur.

En pratique la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 5$  n'est pas complètement fermée. En effet, il y a une probabilité non nulle (donnée par Eq. 4. 22), avec un laser accordé sur cette transition, d'exciter la transition  $F = 4 \rightarrow F' = 4$ , qui n'est séparée de la première que de 251,4 MHz. Or un atome dans l'état  $6P_{3/2}$ ,  $F' = 4$  a une probabilité 5/12 de se désexciter vers l'état  $6S_{1/2}$ ,  $F = 3$  par émission spontanée, ce qui le met alors complètement hors résonance du laser car désaccordé d'environ 9,2 GHz, les cycles absorption-émission sont alors interrompus. Pour éviter cette perte d'atomes pendant la phase de refroidissement, on utilise un deuxième laser, accordé sur la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  qui va ré-exciter les atomes vers le niveau  $F' = 4$  afin qu'ils réintègrent le cycle de refroidissement.. Nous allons décrire plus précisément cette transition.

### A.4.2 La transition pompante $F = 3 \rightarrow F' = 4$

Cette transition est utilisée pendant la phase de refroidissement pour récupérer les atomes qui quittent le cycle de refroidissement en tombant dans l'état  $F = 3$ , ou bien pendant la phase de détection pour repomper tous les atomes de  $F = 3$  vers  $F = 4$  afin de les détecter par la transition cyclante  $F = 4 \rightarrow F' = 5$ .

D'après le tableau (Figure A. 2), un atome dans sur le niveau  $F' = 4$  a une probabilité 7/12 (~ 60 %) de se désexciter vers le niveau  $F = 4$ . Ainsi après  $n$  cycles, le nombre d'atomes qui sont passés dans l'état  $F = 4$  vaut  $1 - (5/12)^n$ . Après 10 cycles par exemple le nombre

d'atomes restant dans  $F = 4$  est de  $2/10.000^{\text{ème}}$ . Le nombre de cycles par seconde est donné par la relation (Eq. A. 7). Ce pompage est donc extrêmement performant car une intensité résonnante de  $1\text{nW.cm}^{-2}$  appliquée pendant une durée de 1ms est suffisante pour que les atomes effectuent 10 cycles.

#### A.4.3 La transition d'horloge $F = 3 \leftrightarrow F = 4$

Dans notre expérience nous utilisons une autre transition très importante. C'est la transition entre les deux niveaux hyperfins fondamentaux :  $6S_{1/2}, F = 3$  et  $6S_{1/2}, F = 4$ . Ces deux niveaux sont séparés de 9,2 GHz. La transition se situe donc dans le domaine micro-onde. Compte tenu de la très longue durée de vie des deux états fondamentaux, l'émission spontanée peut être négligée et la transition est alors décrite par le modèle de l'atome à deux niveaux développé au paragraphe 4.1.

La transition peut être induite par un photon micro-onde (généralement à l'intérieur d'une cavité) : c'est ce qui est fait au moment de la préparation atomique.

La transition peut également être induite par un processus à deux photons, il s'agit alors d'une transition RAMAN stimulée. Ce mécanisme est détaillé au paragraphe 4.2.



## ANNEXE B : NOTIONS SUR LE BRUIT POUR LA CARACTERISATION DES CAPTEURS INERTIELS

### Table des matières

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| B.1 | POSITION DU PROBLÈME .....                    | 279 |
| B.2 | BRUIT ET DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE ..... | 280 |
| B.3 | FILTRAGE ET DÉTECTION D'UN BRUIT .....        | 283 |
| B.4 | BRUIT BLANC .....                             | 285 |

**ANNEXE B :**

**NOTIONS SUR LES BRUITS**

**POUR LA CARATERISATION DES CAPTEURS INERTIELS**

La caractérisation d'un appareil est effectuée au moment de la phase d'étalonnage. Comme on l'a vu au chapitre 2, c'est au cours de cette phase que l'on va construire le modèle d'erreur de l'appareil, et déterminer son facteur d'échelle et son biais, ainsi que leur dépendance en fonction de différents paramètres extérieurs. Toutes les contributions que l'on ne peut pas caractériser de façon déterministe sont alors incorporées dans un modèle de bruit. Ceci se traduit par l'expression (Eq 2. 20) qui relie le signal de sortie aux différents paramètres d'entrées de l'appareil :

$$S(t) = K(x_i)\Omega + B(x_i) + \tilde{b}(t) \quad (\text{Eq. B. 1})$$

$K(x_i)$  et  $B(x_i)$  représentent respectivement le facteur d'échelle et le biais en fonction des paramètres  $x_i$  dont on a réussi à modéliser la dépendance. Le terme  $b(t)$  est une fonction aléatoire représentant le modèle d'erreur de l'appareil. Ce terme contient évidemment le bruit limite quantique de l'appareil  $\varepsilon(t)$  qui est très bien représenté par un bruit blanc, et toutes les contributions non modélisables de façon déterministe du facteur d'échelle  $\tilde{\kappa}(t)$  et du biais  $\tilde{\beta}(t)$  :

$$\tilde{b}(t) = \tilde{\kappa}(t)\Omega + \tilde{\beta}(t) + \tilde{\varepsilon}(t) \quad (\text{Eq. B. 2})$$

## B.1 POSITION DU PROBLÈME

Dans la description que nous venons de faire, nous avons négligé une étape très importante qui est à la base de la caractérisation, c'est la construction du modèle de bruit. C'est-à-dire que l'on cherche à partir des quelques mesures effectuées au moment de l'étalonnage, à déterminer les fonctions  $\tilde{\kappa}(t)$  et  $\tilde{\beta}(t)$ .

Considérons un capteur avec lequel on effectue une série de  $N$  mesures d'une grandeur d'entrée  $x$  que l'on supposera indépendante du temps. Si l'appareil n'a aucun bruit, on obtient  $N$  fois la même valeur  $S_0$ . Si de plus le facteur d'échelle et le biais de l'appareil sont parfaitement connus, on peut dire que la grandeur d'entrée vaut  $x_0$  de façon certaine.  $x_0$  est relié à  $S_0$  par la relation issue du modèle d'erreur :

$$S_0 = K_0 x_0 + B_0 \quad (\text{Eq. B. 3})$$

Si l'appareil est bruité, ce qui en pratique est toujours le cas, on obtient une série de valeurs  $\{S_1, \dots, S_i, \dots, S_N\}$ . Cette série nous permet de déterminer la valeur moyenne des  $N$  valeurs trouvées, ainsi que l'écart-type :

$$\bar{S}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \quad (\text{Eq. B. 4})$$

Et

$$\sigma_s(N) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S}(N))^2} \quad (\text{Eq. B. 5})$$

Comme on a supposé la grandeur d'entrée constante, il est clair que si l'on observe une dérive sur la série de mesures, celle-ci doit être corrigée grâce à une droite de régression dans le cas d'une dérive linéaire ou par une forme plus complexe dans le cas de dérives d'ordres supérieurs.

La valeur moyenne  $\bar{S}(N)$  nous permet alors de décomposer a posteriori chaque mesure  $S_i$  en deux contributions :

$$S_i = \bar{S}(N) + b_i \quad (\text{Eq. B. 6})$$

$\bar{S}(N)$  est la contribution du signal, c'est une valeur constante, c'est à dire indépendante de  $i$ , mais qui dépend de  $N$ .

$b_i$  est la contribution du bruit, c'est la  $i^{\text{ème}}$  valeur d'une variable  $b(N)$  à moyenne nulle (par construction) et d'écart-type  $\sigma_s(N)$ , mais dont on ne connaît pas, a priori, la loi de probabilité.

On peut alors, à partir de  $\bar{S}(N)$  et de  $\sigma_s(N)$  définir un intervalle de confiance, c'est à dire que l'on pourra prétendre que la valeur de  $x$  que l'on cherche est incluse dans l'intervalle  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ , avec une forte probabilité. Les deux valeurs  $\bar{x}$  et  $\sigma$  sont reliées à  $\bar{S}(N)$  et  $\sigma_s(N)$  par la relation (Eq. B. 3). Afin de donner une information plus quantitative à l'expression « forte probabilité », il est intéressant d'étudier plus précisément le terme de bruit

$b(N)$ , et d'essayer de l'approcher par des fonctions aléatoires dont on connaît la loi de probabilité.

## B. 2 BRUIT ET DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE

Cette approximation de  $b(N)$  par des fonctions aléatoires consiste en quelque sorte à faire un passage à la limite ( $N \rightarrow \infty$ ). Bien qu'impossible expérimentalement, ceci va nous permettre d'estimer le modèle de bruit de l'appareil. Les variables aléatoires  $S_i$  et  $b_i$  sont alors remplacées par des fonctions aléatoires  $S(t)$  et  $b(t)$  qui sont reliées entre elles par la relation :

$$S(t) = E(S) + b(t) \quad (\text{Eq. B. 7})$$

$E(S)$  représente l'espérance de  $S(t)$ , et va être définie dans le prochain paragraphe.

Le fait d'avoir transformé nos  $N$  valeurs  $b_i$  en une fonction aléatoire  $b(t)$  nous permet alors de définir un ensemble de grandeurs caractéristiques que nous présentons ici brièvement (on a donné des unités à ces grandeurs en supposant que  $b(t)$  était un bruit de vitesse de rotation en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) :

- l'espérance (ou la moyenne) :

$$E(b) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt \quad \text{en rad.s}^{-1} \quad (\text{Eq. B. 8})$$

pour un bruit l'espérance est toujours nulle (car on s'est affranchi des dérives) :  $E(b) = 0$ .

- la fonction d'auto-corrélation :

$$R_b(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t)b(t-\tau) dt \quad \text{en } (\text{rad.s}^{-1})^2 \quad (\text{Eq. B. 9})$$

cette fonction traduit la corrélation entre l'amplitude du bruit à deux instants séparés d'une durée  $\tau$ . Si l'amplitude du bruit à l'instant  $t$  n'influe pas du tout sur son amplitude à l'instant  $t+\tau$ , alors  $R_b(\tau) = 0$ . Par contre l'amplitude du bruit à l'instant  $t$  est toujours corrélée avec elle même et on a :  $R_b(0) = \sigma_b^2$ .

- la densité spectrale de puissance unilatérale (notée DSP dans la suite) :

$$S_b(f) = 2 \int_0^{\infty} R_b(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau \quad \text{en } (\text{rad.s}^{-1})^2 \cdot \text{Hz}^{-1} \quad (\text{Eq. B. 10})$$

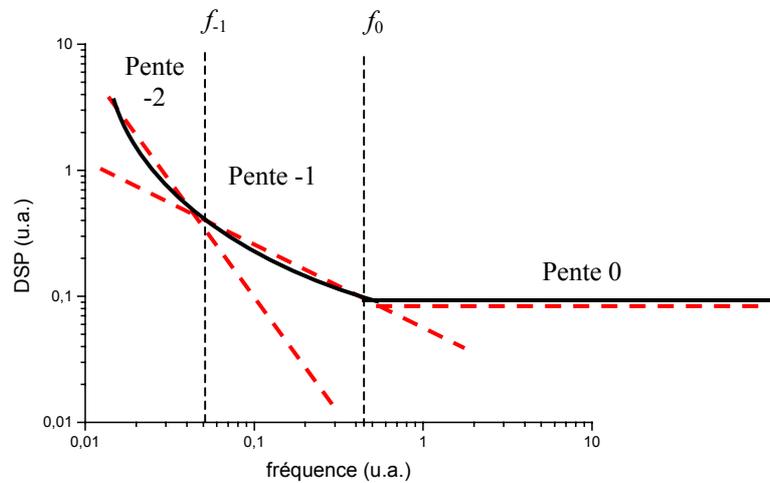
C'est la transformée de FOURIER de la fonction d'auto-corrélation qui traduit la densité de puissance de bruit pour chaque composante de fréquence. On ne considère ici que le domaine des fréquences positives, ce qui explique le facteur 2 dans (Eq. B.10).

- la puissance totale de bruit :

$$P_b = \int_0^{\infty} S_b(f) df = R_b(0) = \sigma_b^2 \quad \text{en } (\text{rad.s}^{-1})^2 \quad (\text{Eq. B. 11})$$

La puissance totale de bruit est donc égale à la variance. L'incertitude qui entache une mesure, du fait de ce bruit est donnée par l'écart-type, qui est donc égal à la racine carrée de la puissance totale de bruit.

Pour approximer le bruit  $b(N)$  avec des fonctions aléatoires dont on connaît le loi de probabilité, on utilise généralement la densité spectrale de puissance comme moyen de comparaison. En appliquant les expressions (Eq. B. 9) puis (Eq. B. 10) à  $b(N)$ , on obtient sa DSP. Si  $N$  est suffisamment grand, on obtient typiquement une courbe comme celle représentée **Figure B. 1**.



**Figure B. 1** : forme classique de la DSP d'un bruit dans un capteur inertiel (en traits pleins). En pointillés on a représenté une approximation de cette courbe par des processus de bruits en puissances de  $f$ . On peut approximer la DSP par trois fonctions différentes comme indiqué par (Eq. B.13) dans chacune des zones  $[0, f_{-1}]$ ,  $[f_{-1}, f_0]$  et  $[f_0, \infty[$ .

Cette DSP peut alors être approximée par une expression de la forme :

$$S_b(f) = \sum_{\alpha} h_{\alpha} \times f^{\alpha} \quad (\text{Eq. B. 12})$$

suivant que la DSP de  $b(N)$  présente une remontée plus ou moins rapide en basse fréquence, on fera intervenir des valeurs de  $\alpha$  plus ou moins grandes. Par exemple pour la courbe représentée **Figure B. 1**, une décomposition sous la forme :

$$S_b(f) = \left( h_{-2} \times \frac{1}{f^2} \right) + \left( h_{-1} \times \frac{1}{f} \right) + h_0 \quad (\text{Eq. B. 13})$$

semble une bonne approximation. On reconnaît alors un bruit de marche aléatoire en  $(1/f^2)$ , un bruit de scintillation en  $(1/f)$ , et un bruit blanc indépendant de  $f$ .

On ne s'est pas préoccupé des problèmes de convergence des intégrales dans les expressions (Eq. B. 8) à (Eq. B. 11). Ce problème de convergence peut être levé en utilisant des variances plus élaborées que la variance statistique. La variance d'ALLAN par exemple permet de rendre convergentes en  $f=0$  les intégrales pour  $\alpha = -2$  ou  $-1$ . La convergence en  $f \rightarrow \infty$  ne pose pas de problème car en pratique le système de détection se comporte toujours comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$ . Nous ne développerons pas la variance d'ALLAN dans cette annexe mais on pourra se reporter à [CHRONOS 91] pour plus de précisions.

Cette approximation de  $b(N)$  par des fonctions aléatoires connues nous permet alors de déterminer l'incertitude qui entache une mesure. En effet on a vu que cette incertitude est égale à la racine carrée de la puissance de bruit, or cette puissance de bruit se calcule simplement grâce à l'expression (Eq. B. 12). On donne dans le **Tableau B. 1** les puissances de bruit pour les différentes valeurs de  $\alpha$  (on a supposé que la grandeur d'entrée est la vitesse de rotation,  $\alpha = 0$  correspond donc à un bruit blanc de vitesse de rotation).

| $\alpha$ | Type de bruit   | Forme de la DSP        | Puissance de bruit                               | Pente de stabilité |
|----------|---|------------------------|--|--------------------|
| 2        | Bruit blanc en $\theta$                                 | $h_2 \times f^2$       | $\frac{3h_2 f_c}{8\pi T^2}$                      | -1                 |
| 1        | Bruit de scintillation en $\theta$                      | $h_1 \times f$         | $\frac{3h_1 \text{Log}(2\pi f_c T)}{4\pi^2 T^2}$ | -1                 |
| 0        | Bruit blanc en $\Omega$ ou marche aléatoire en $\theta$ | $h_0$                  | $\frac{h_0}{2T}$                                 | -1/2               |
| -1       | Bruit de scintillation en $\Omega$                      | $h_{-1} \times f^{-1}$ | $2h_{-1} \text{Log}(2)$                          | 0                  |
| -2       | Marche aléatoire en $\Omega$                            | $h_{-2} \times f^{-2}$ | $\frac{2\pi^2 h_{-2} T}{3}$                      | 1/2                |

**Tableau B. 1** : La puissance de bruit est donnée dans le cas où la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre passe bas est bien plus grande que  $1/(2T)$ , où  $T$  est la durée d'observation. Pour les deux derniers bruits (scintillation et marche aléatoire de fréquence) la variance n'est pas définie car l'intégrale n'est pas convergente. On utilise alors la variance d'ALLAN qui s'interprète comme la variance de l'incrément du premier ordre.

Une question importante à laquelle on va essayer de répondre est comment évolue l'incertitude de mesure lorsque l'on intègre le signal sur une durée  $T$ . Pour répondre à cette question nous allons utiliser la notion de filtre qui est rappelée brièvement dans le paragraphe suivant.

### B.3 FILTRAGE ET DÉTECTION D'UN BRUIT

Lorsque l'on détecte un signal bruité, il faut tenir compte du filtrage introduit par le système de détection. Ce filtrage a pour effet que la densité spectrale de puissance du bruit détecté n'est pas égale à celle du bruit initial. En particulier, tous les systèmes de détection se comportent comme des filtres passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$ . Pour un filtre du premier ordre  $f_c$  est reliée au temps de réponse  $\tau_R$  du détecteur par :

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau_R} \quad (\text{Eq. B. 14})$$

Ainsi, les composantes spectrales du bruit dont les fréquences sont supérieures à  $f_c$  seront filtrées, c'est à dire atténuées. Afin de déterminer la DSP du bruit détecté, on introduit la notion de réponse impulsionnelle du filtre de détection  $h(t)$ . Cette fonction correspond à la réponse en sortie du système de détection lorsque le signal d'entrée est une distribution de DIRAC. Si on appelle  $d(t)$  la fonction aléatoire décrivant le bruit après filtrage par le système de détection, on a :

$$d(t) = b(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t') h(t-t') dt' \quad (\text{Eq. B. 15})$$

La fonction d'auto-corrélation  $R_d(\tau)$  est alors donnée par :

$$R_d(\tau) = R_b(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \quad (\text{Eq. B. 16})$$

Et la densité spectrale de puissance s'en déduit par :

$$S_d(f) = S_b(f) |H(f)|^2 \quad (\text{Eq. B. 17})$$

où  $H(f)$  est la transformée de FOURIER de la réponse impulsionnelle, on l'appelle fonction de transfert du filtre de détection.

On définit enfin la bande de bruit  $\Delta f$  d'un filtre comme :

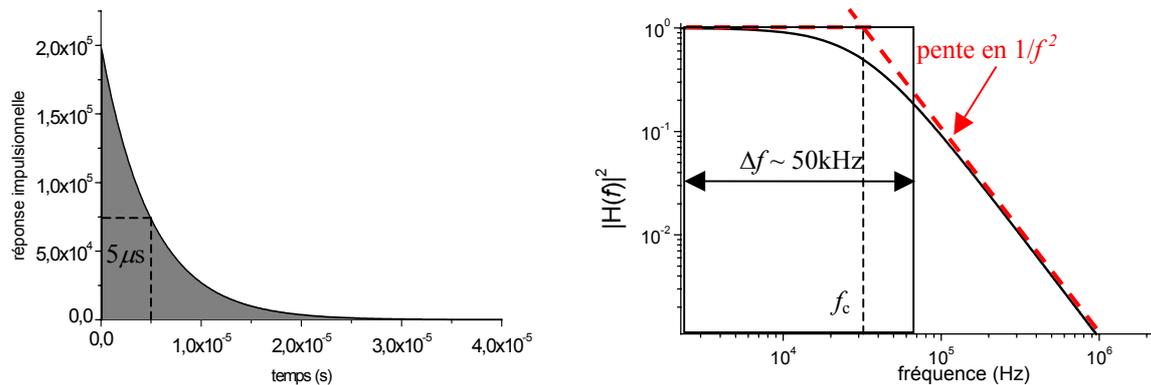
$$\Delta f = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{|H(f)|_{\max}^2} \quad (\text{Eq. B. 18})$$

Cette définition nous sera utile pour calculer la puissance de bruit d'un bruit blanc filtré. Dans la suite de cette partie, nous allons considérer trois filtres très importants. Il s'agit du filtre passe bas du premier ordre qui représentera notre système de détection, de l'intégration sur une durée  $T$ , et de la moyenne temporelle sur une durée  $T$ . Les grandeurs caractéristiques de ces filtres sont résumées dans le **Tableau B. 2** :

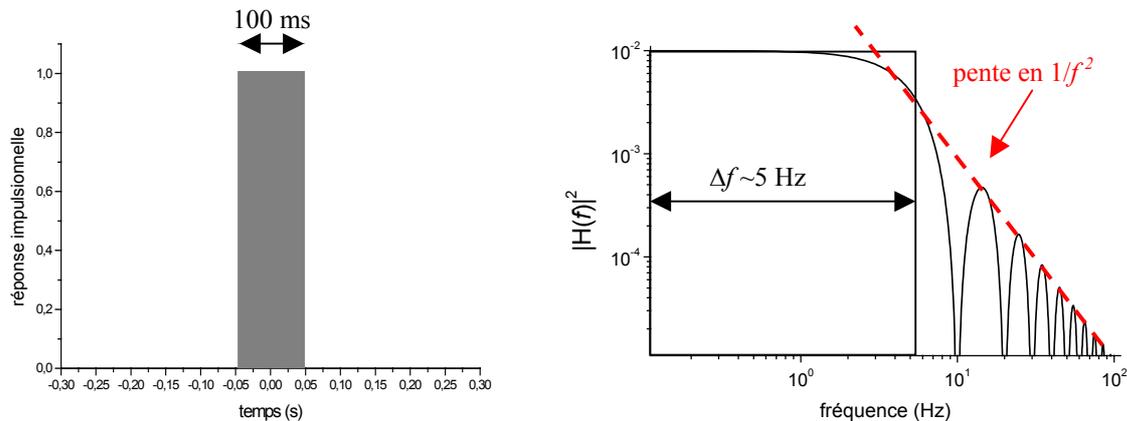
| Filtre                               | réponse impulsionnelle  | module carré de la fonction de transfert                       | Bande de bruit  |
|--------------------------------------|---|--|---|
| Premier ordre                        | $h_{pb,1}(t) = \frac{1}{\tau_R} e^{-t/\tau_R}$ $f_c = 1/(2\pi\tau_R)$ | $ H_{pb,1}(f) ^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$ | $\Delta f_{pb,1} = \frac{1}{4\tau_R} = \frac{\pi}{2} f_c$ |
| Intégration sur une durée $T$        | $h_T(t) = \text{Rect}_T(t)$   | $ H_T(f) ^2 = T^2 \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$           | $\Delta f_T = \frac{1}{2T}$                               |
| Moyenne temporelle sur une durée $T$ | $h_{moy,T}(t) = \frac{1}{T} \text{Rect}_T(t)$                         | $ H_{moy,T}(f) ^2 = \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$         | $\Delta f_T = \frac{1}{2T}$                               |

**Tableau B. 2** : réponse impulsionnelle, fonction de transfert et bande de bruit pour trois filtres que nous allons utiliser dans la suite.

### Filtre passe-bas du premier ordre



**Figure B. 2** : réponse impulsionnelle (à gauche) et module carré de la fonction de transfert (à droite en échelle logarithmique) pour un filtre passe-bas du premier ordre de constante de temps  $5 \mu\text{s}$ . La fréquence de coupure vaut alors environ 50 kHz.

Intégration sur une durée  $T$ 

**Figure B. 3** : réponse impulsionnelle (à gauche) et module carré de la fonction de transfert (à droite en échelle logarithmique) pour un filtre correspondant à une intégration sur 100 ms.

Pour un moyennage sur une durée  $T$  la réponse impulsionnelle et le module carré de la fonction de transfert sont semblables à ceux présentés **Figure B. 3**, seuls les niveaux sont différents (voir les valeurs dans le tableau présenté précédemment).

Nous allons regarder maintenant comment ces différents filtres interviennent en fonction de la forme de DSP de  $b(N)$ . Nous allons supposer que l'appareil a un bruit blanc et nous déterminerons comment évolue l'incertitude de mesure en fonction du temps d'intégration  $T$ . Ce cas est typiquement ce qui se produit dans un gyromètre optique ou atomique. La grandeur d'entrée de l'appareil est alors la vitesse de rotation.

#### B. 4 BRUIT BLANC

Le bruit blanc est le bruit qui donne la limite ultime théorique de tous les appareils. Il est dû essentiellement au bruit de photons (distribution de POISSON) pour un capteur optique, ou au bruit thermique (distribution de BOLTZMANN) pour un capteur mécanique ou électronique.

On note dans cette partie  $\Omega(t)$  le bruit car on suppose qu'il s'agit d'un bruit de vitesse de rotation. Ceci nous permettra de retrouver les notations utilisées dans le chapitre 2. Considérons que  $\Omega(t)$  est un bruit blanc c'est à dire que :

- Sa fonction d'auto-corrélation est une distribution de DIRAC :  $R_{\Omega}(\tau) = \sigma_{\Omega}^2 \delta(\tau)$
- sa densité spectrale de puissance est une fonction constante :  $S_{\Omega}(f) = h_0$
- la puissance de bruit contenue dans une bande spectrale de largeur  $\Delta f$  est égale à :

$$P_{\Omega}(\Delta f) = h_0 \Delta f \quad (\text{Eq. B. 19})$$

On constate que si la bande passante de mesure est infinie ( $\Delta f \rightarrow \infty$ ), la puissance de bruit est infinie aussi. Le filtre passe-bas introduit par le système de détection transforme le bruit blanc  $\Omega(t)$  en un bruit  $\Omega_1(t)$  dont la DSP est donnée par :

$$S_{\Omega_1}(f) = \frac{h_0}{1 + (f/f_c)^2} \quad (\text{Eq. B. 20})$$

La puissance du bruit détecté vaut alors :

$$P_{\Omega_1} = h_0 \times \Delta f_{pb,1} = \frac{h_0}{4\tau_R} \quad (\text{Eq. B. 21})$$

L'incertitude de mesure sur un coup, sur la vitesse de rotation avec un tel gyromètre est alors donnée par :

$$\sigma_{\Omega_1} = \sqrt{P_{b_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_0}{\tau_R}} \quad (\text{Eq. B. 22})$$

Si l'on suppose que toutes les fréquences que l'on va considérer par la suite sont inférieures à  $f_c$ , alors le bruit détecté peut à nouveau être considéré comme blanc, car on se place dans la partie constante de la fonction de transfert (voir **Figure B. 2**). Pour un temps de réponse de 5  $\mu\text{s}$ , la fréquence de coupure  $f_c$  est d'environ 50 kHz.

On peut avec ce gyromètre essayer d'estimer l'angle de rotation en faisant une intégration du signal sur une durée  $T$ . La fonction aléatoire à considérer est alors  $\theta_T(t) = \Omega(t) * h_T(t)$ , où  $h_T(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un intégration de durée  $T$ . On obtient alors :

$$S_{\theta_T}(f) = h_0 \times T^2 \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2} \quad (\text{Eq. B. 23})$$

La DSP est en  $1/f^2$ ,  $\theta_T(t)$  n'est donc pas un bruit blanc. L'intégrale d'un bruit blanc correspond à un bruit de marche aléatoire (bruit brownien).

On en déduit alors la puissance de bruit en intégrant la DSP :

$$\sigma_{\theta_T}^2(T) = h_0 \times T^2 \times \Delta f_T = \frac{h_0 T}{2} \quad (\text{Eq. B. 24})$$

Ainsi l'incertitude qui entache l'estimation de la valeur de l'angle de rotation  $\theta_T(t)$  croît comme  $\sqrt{T}$ , lorsque la mesure est effectuée à l'aide d'un gyromètre limité par un bruit blanc.

Si l'on s'intéresse maintenant à l'estimation de la moyenne temporelle de la vitesse de rotation, sur une durée  $T$ , la fonction aléatoire à considérer est alors :  $\Omega_{\text{moy},T}(t) = \Omega(t) * h_{\text{moy},T}(t)$ . De la même façon que précédemment, on obtient :

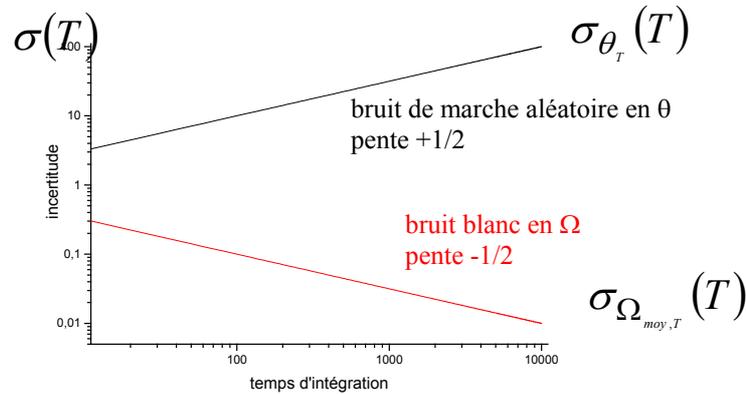
$$S_{\Omega_{\text{moy},T}}(f) = h_0 \times \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2} \quad (\text{Eq. B. 25})$$

Et la puissance de bruit vaut alors :

$$\sigma_{\Omega_{\text{moy},T}}^2(T) = \frac{h_0}{2T} \quad (\text{Eq. B. 26})$$

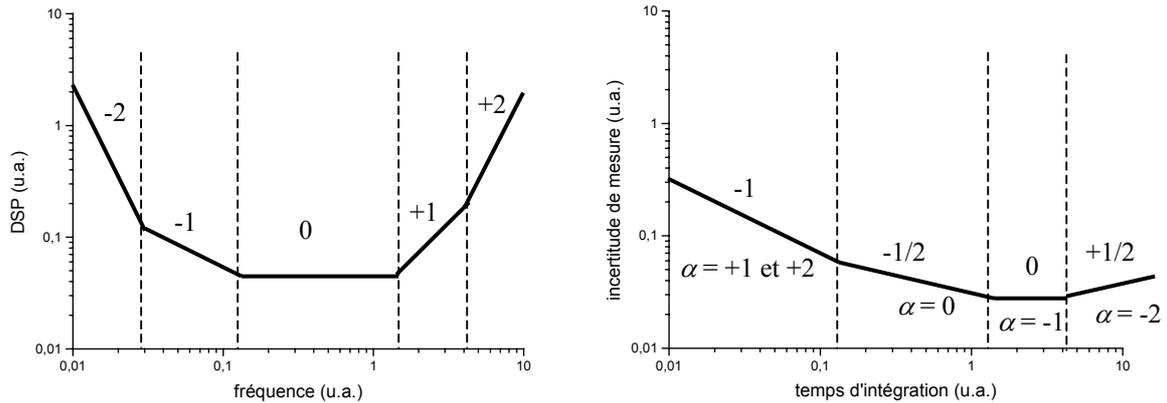
Ainsi l'incertitude qui entache l'estimation de la valeur de  $\Omega_{\text{moy},T}(t)$  décroît comme  $1/\sqrt{T}$ .

On retrouve bien ce que l'on disait au chapitre 2 : si  $\Omega(t)$  correspond à la vitesse de rotation mesurée avec un gyromètre optique, la présence de bruit blanc (lié au bruit de photons) va produire un bruit de marche aléatoire sur la valeur intégrée  $\theta_T(t)$ , donc sur l'angle de rotation. Ainsi l'incertitude sur l'angle de rotation augmente comme  $\sqrt{T}$ . Par contre la valeur de la vitesse de rotation déduite d'une mesure intégrée sur la durée  $T$ , correspondant à  $\Omega_{\text{moy},T}(t)$ , conduit à une diminution de l'incertitude sur la vitesse de rotation moyenne comme  $1/\sqrt{T}$ .



**Figure B. 4 :** évolution de l'incertitude sur la vitesse de rotation (courbe descendante) et sur l'angle (courbe montante) en fonction du temps d'intégration, mesurée avec un gyromètre.

L'étude que l'on vient de faire pour un bruit blanc peut être répétée pour les autres types de bruit en fonction de la valeur de  $\alpha$ . Nous ne ferons pas cette étude ici. Nous allons juste donner l'évolution de l'incertitude de mesure en fonction du temps d'intégration, pour les valeurs  $\alpha = -2, -1, 0, 1$  et  $2$ . Cette évolution est caractérisée par la pente de  $\sigma_{\Omega_{\text{moy},T}}$  dans un digramme logarithmique. On a vu que pour un bruit blanc  $\sigma_{\Omega_{\text{moy},T}}$  évolue en  $1/\sqrt{T}$ , ce qui correspond à une pente  $-1/2$ . Les pentes ont été indiquées pour les différents bruits dans la dernière colonne du **tableau B. 1**. On résume graphiquement ces résultats sur la **Figure B. 5**.



**Figure B. 5** : à gauche, courbe représentant les DSP pour les différentes valeurs de  $\alpha$ . A droite courbe représentant l'évolution de l'incertitude de mesure en, fonction de la durée d'intégration pour les différentes formes de DSP représentée à gauche. Les valeurs au dessus de la courbe représentent la pente de la courbe. Les valeurs notées sous la courbe représentent les valeurs de  $\alpha$  correspondantes.

On retrouve bien le résultat que l'on indiquait précédemment, pour un bruit blanc ( $\alpha = 0$ ), l'incertitude de mesure diminue comme  $1/\sqrt{T}$  (pente  $-1/2$ ) alors que pour un bruit de marche aléatoire ( $\alpha = -2$ ), l'incertitude de mesure augmente comme  $\sqrt{T}$  (pente  $+1/2$ ). En pratique au bout d'un temps  $T$  suffisamment long il apparaît toujours des phénomènes de dérive (qui ont été négligés jusqu'à présent) qui provoquent une augmentation de l'incertitude de mesure avec une pente dépendant du type de dérive. On retrouve alors des courbes similaires à celles présentées au chapitre 2 **Figures 2. 8** et **2. 9**.

## BIBLIOGRAPHIE

- [CHRONOS 91] C. Audoin, M.Y. Bernard, R. Besson, J.J. Gagnepain, J. Gros Lambert, M. Granveaud, J.C. Neau, M. Olivier, J. Rutman, « La mesure de la fréquence des oscillateurs », *Collection Technique et Scientifique des Télécommunications*, Masson, (1991)

## **ANNEXE C : LES GYROSCOPES MECANIQUES**

### **Table des matières**

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| C.1   | UN PEU D'HISTOIRE.....  | 290 |
| C.2   | LE MOMENT D'INERTIE ET LES GYROSCOPES À ÉLÉMENT TOURNANT..... | 291 |
| C.2.1 | Le moment d'inertie et la loi de la gyroskopie .....          | 291 |
| C.2.2 | Gyroscopes à un degré de liberté .....                        | 292 |
| C.2.3 | Gyroscopes à deux degrés de liberté .....                     | 294 |
| C.3   | FORCE DE CORIOLIS ET GYROS À ÉLÉMENTS VIBRANTS .....          | 295 |
| C.3.1 | La force de Coriolis.....                                     | 295 |
| C.3.2 | Les gyroscopes à lames vibrantes .....                        | 296 |
| C.3.3 | Les gyroscopes à résonateur hémisphérique .....               | 296 |
| C.4   | CONCLUSION .....  | 297 |
|       | BIBLIOGRAPHIE .....   | 298 |

## ANNEXE C :

### LES GYROSCOPES MECANIQUES

Cette annexe a pour but de présenter les principes de fonctionnement et les performances des gyroscopes mécaniques de grande sensibilité. Deux classes de gyroscopes vont être étudiées : les gyroscopes à élément tournant, fondés sur la loi de la gyroscopie, et les gyroscopes à élément vibrant, utilisant la force de CORIOLIS.

Pour plus d'informations sur tous ces gyroscopes mécaniques, on pourra se reporter à la référence [LAWRENCE 98].

#### C.1 UN PEU D'HISTOIRE

La première mise en évidence de la rotation de la Terre à l'aide d'un gyroscope a été réalisée par L. FOUCAULT en 1851. Il avait alors utilisé un pendule mécanique de 67 mètres de long muni d'une boule en acier de 28 kilogrammes, le tout étant suspendu sous le dôme du Panthéon à Paris. La période de ce pendule était de 16,4 secondes ( $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ ) et l'amplitude des oscillations d'environ 3 mètres. Sous l'action de la rotation de la Terre, le pendule subissait alors dans le référentiel terrestre une rotation de son plan d'oscillation dans le sens des aiguilles d'une montre à la vitesse  $\Omega = \Omega_{\oplus} \sin(\lambda)$  ( $\lambda$  est l'angle des latitudes,  $\lambda = 45^\circ$  pour cette expérience) correspondant à une période d'environ 34 heures. Cette expérience, relativement sensible, était aussi très sujette aux courants d'air, qui faussaient les mesures. L'année suivante, FOUCAULT développe alors un nouvel appareil constitué d'une roue tournant à l'intérieur d'un cardan. Il appelle cet appareil : gyroscope [FOUCAULT 52-1], [FOUCAULT 52-2].

C'est durant la seconde guerre mondiale que les premiers gyros mécaniques sont utilisés pour la navigation des missiles V2, mais le véritable essor de la navigation inertielle date des années 50. De nombreuses études sur des gyros mécaniques à éléments tournants

(SDFG et 2DFG) sont alors réalisées aux Etats-Unis, en particulier par DRAPER au MIT. De tels gyros sont rapidement commercialisés et utilisés en navigation inertielle, mais ils restent fragiles et très chers. Ces gyros vont être détaillés dans le prochain paragraphe.

Dans les années 60, un nouveau type de gyroscope vibrant (HRG) est développé, fondé sur les travaux de G. BRYAN datant de plus d'un siècle. A l'heure actuelle, ces gyroscopes vibrants restent peu utilisés. Pourtant leurs performances les rendent intéressants pour de nombreuses applications. Nous décrirons ces gyroscopes au paragraphe C.3.3. Le principe des gyroscopes vibrants, associé au développement de la micro-électronique, ouvre maintenant la voie des micro-capteurs très peu encombrants et peu cher. Leurs performances encore faibles sont néanmoins suffisantes pour le guidage de munitions ou de drones.

Pour plus d'informations sur les nouvelles technologies dans le domaine de la gyroscopie et de l'accélérométrie, on pourra se reporter à la référence [PLESKA 00].

## C.2 LE MOMENT D'INERTIE ET LES GYROSCOPES À ÉLÉMENT TOURNANT

### C.2.1 Le moment d'inertie et la loi de la gyroscopie

Considérons un disque tournant sans frottement à la vitesse de rotation  $\omega$  par rapport à son axe de symétrie ( $Oz$ ) dans un repère d'inertie  $\{R_0\}$ . Le disque est caractérisé par son moment d'inertie  $I_z$  par rapport à l'axe ( $Oz$ ), et par son moment angulaire  $\mathbf{H} = I_z \omega \mathbf{e}_z$  (voir Figure C. 1). Si le disque subit un couple de torsion  $\mathbf{C}$ , l'évolution de son moment angulaire dans  $\{R_0\}$  est donnée par la deuxième loi de NEWTON :

$$\left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right) = \mathbf{C} \quad (\text{Eq. C. 1})$$

Nous allons distinguer deux cas distincts :

- Si le couple  $\mathbf{C}$  est parallèle à ( $Oz$ ) alors la vitesse de rotation du disque va être modifiée selon la formule :

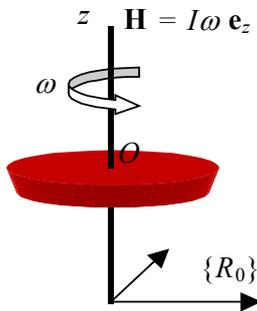
$$\alpha = \left( \frac{d\omega}{dt} \right) = \frac{|\mathbf{C}|}{I_z} \quad (\text{Eq. C. 2})$$

où  $\alpha$  est l'accélération angulaire dans  $\{R_0\}$  du disque le long de l'axe ( $Oz$ ).

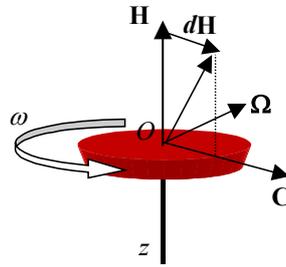
- Si le couple  $\mathbf{C}$  est perpendiculaire à ( $Oz$ ), la vitesse de rotation  $\omega$  n'est pas modifiée, mais le moment angulaire  $\mathbf{H}$  du disque va subir un changement de direction, donné par la relation :

$$\left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right) = \mathbf{C} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \quad (\text{LOI DE LA GYROSCOPIE}) \quad (\text{Eq. C. 3})$$

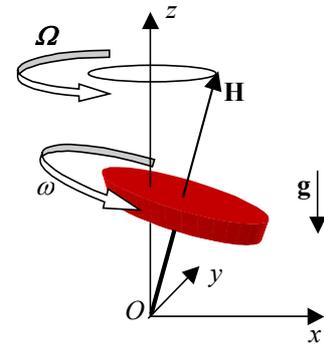
Le moment angulaire du disque  $\mathbf{H}$  tend donc à s'aligner avec le couple  $\mathbf{C}$  (voir **Figure C. 2**).  $\mathbf{H}$  tourne autour de la direction perpendiculaire à  $\mathbf{H}$  et à  $\mathbf{C}$  avec une vitesse de rotation  $\Omega = C/H$ .



**Figure C. 1 :** éléments d'inertie d'un disque tournant autour de l'axe (Oz).



**Figure C. 2 :** lorsque le disque est soumis à un couple  $\mathbf{C}$ , le moment angulaire  $\mathbf{H}$  tend à s'aligner avec  $\mathbf{C}$ .



**Figure C. 3 :** le disque tournant soumis au couple produit par la pesanteur se met à précesser autour de la verticale.

Comme application directe de la loi de la gyroscopie, on trouve l'explication du mouvement de précession d'une toupie soumise à la gravité. En effet, si le disque est légèrement décalé par rapport à la verticale dans le plan (Oxz), alors la pesanteur exerce un couple suivant l'axe (Oy), c'est à dire que le couple tend à faire tourner l'axe du disque dans le plan (Oxz) (voir **Figure C. 3**). D'après la loi de la gyroscopie, le moment angulaire  $\mathbf{H}$  du disque tend donc à s'aligner avec  $\mathbf{C}$ , et le vecteur  $\mathbf{H}$  sort donc du plan (Oxz). Mais au fur et à mesure que  $\mathbf{H}$  se déplace, le couple  $\mathbf{C}$  tourne en même temps que  $\mathbf{H}$ . Le mouvement résultant est alors un précession de  $\mathbf{H}$  autour de la verticale (Oz).

Le principe que l'on vient de voir est utilisé pour réaliser des gyroscopes et des gyromètres mécaniques à un ou deux axes d'entrée. Le nombre d'axes d'entrée est égal au nombre de degrés de liberté de l'axe de rotation du disque. Nous allons présenter succinctement la conception de tels gyros en indiquant les performances et les limitations.

### C.2.2 Gyroscopes à un degré de liberté

Nous présentons ici les gyros à un degré de liberté appelés couramment SDFG de l'anglais "*single degree of freedom gyroscope*". Nous allons voir que suivant que l'appareil est utilisé en boucle ouverte ou en boucle fermée, il constitue respectivement un gyromètre ou un gyroscope.

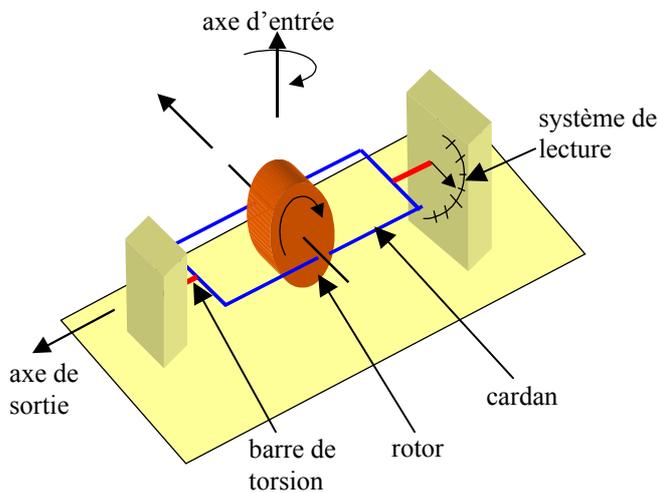
Le cœur d'un tel appareil est un disque en rotation que l'on appelle toupie. La toupie tournant très rapidement ( entre 12.000 et 60.000 tours par minute) autour de l'axe (Oy), acquiert un moment d'inertie très élevé  $\mathbf{H}$ , même si le disque est petit et léger. Cette toupie est fixé dans un cardan, l'ensemble pouvant alors tourner par rapport au châssis, autour de l'axe

( $Ox$ ), par l'intermédiaire d'une barre de torsion. L'axe ( $Ox$ ) constitue alors l'axe de sortie du gyromètre. L'axe d'entrée du gyromètre est l'axe ( $Oz$ ).

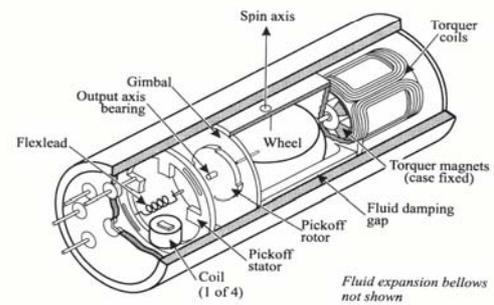
Lorsque l'appareil tourne autour de ( $Oz$ ), un couple gyroscopique  $\mathbf{C} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}$  apparaît et tend à faire tourner le cardan autour de ( $Ox$ ). La barre de torsion se tord alors jusqu'à ce que le couple  $C_{torsion} = K_{torsion} \theta \cdot \mathbf{e}_x$  qu'elle exerce sur le cardan compense le couple gyroscopique. Le cardan a alors tourné d'un angle :

$$\theta = \frac{|\mathbf{H}|}{K_{torsion}} \Omega \quad (\text{Eq. C. 4})$$

Un dispositif convertit ensuite l'angle  $\theta$  en tension électrique proportionnel à  $\Omega$ . Cet appareil constitue donc un gyromètre. Afin d'éviter tout phénomène d'oscillation du cardan, un système d'amortissement est installé entre le cardan et le châssis.



**Figure C. 4** : schéma de principe d'un gyromètre à disque tournant. Lorsque l'appareil tourne autour de l'axe d'entrée, l'effet gyroscopique provoque un couple autour de l'axe de sortie, qui entraîne la rotation du cardan. On mesure l'angle de rotation grâce à un système de lecture.



**Figure C. 5** : plan d'un SDFG. On retrouve, le disque tournant, le cardan, le couple de torsion et le système de mesure. (d'après [Lawrence 98] )

L'équation dynamique de l'angle du cardan est alors une équation différentielle du deuxième ordre [LAWRENCE 98] :

$$I_0 \left( \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + c \left( \frac{d\theta}{dt} \right) + K_{torsion} \theta = |\mathbf{H}| \Omega \quad (\text{Eq. C. 5})$$

où  $I_0$  est le moment d'inertie du cardan autour de ( $Ox$ ), et  $c$  le coefficient d'amortissement, On retrouve bien la solution stationnaire indiquée (Eq. C. 4).

Le principal point dur dans la conception de tels gyromètres est de suspendre la toupie d'une manière très rigide en translation, tout en ne lui transmettant qu'un couple minimum, car ce couple introduit des dérives du signal de sortie. En particulier, l'axe du cardan qui transmet

les forces doit passer exactement par le centre de gravité du disque, afin d'éviter les mouvements de précession décrits précédemment. Plusieurs types de suspension sont utilisés, parmi lesquels on peut citer : les roulements à billes (dérives  $\sim 0,1 \text{ deg.h}^{-1}$ ), la suspension électrostatique (dérives  $\sim 10^{-3} \text{ deg.h}^{-1}$ ) ou encore la suspension supraconductrice.

On peut aussi faire fonctionner cet appareil en boucle fermée. La barre de torsion est alors remplacée par un "générateur de couple" commandé par la tension électrique  $V_{\text{sortie}}$ . Comme il n'y a plus de barre de torsion l'équation (Eq C. 5) devient alors :

$$I_0 \left( \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + c \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = |\mathbf{H}| \Omega \quad (\text{Eq. C. 6})$$

dont la solution est :

$$\theta(t) = \theta_i(t) \frac{|\mathbf{H}|}{c} \left( 1 - e^{-\frac{c}{I_0} t} \right) \quad (\text{Eq. C. 7})$$

où  $\theta_i(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \Omega(t) dt$  est l'angle dont a tourné le gyro pendant la durée  $t$ . La limite de (Eq. 2.24) quand  $t$  devient grand est :

$$\theta(t) = \frac{|\mathbf{H}|}{c} \theta_i(t) \quad (\text{Eq. C. 8})$$

et l'on constate ainsi que le signal de sortie est proportionnel, cette fois, à l'angle  $\theta_i$  dont a tourné l'appareil. On a donc réalisé un gyroscope.

Les gyros à suspension électrostatique (GSE) ont été très largement développés et améliorés depuis les années 50 et leurs performances actuelles en font des instruments indispensables pour la navigation des engins dits stratégiques (sous-marins nucléaires, missiles balistiques intercontinentaux). Leurs performances sont pour cette raison assez difficiles à connaître précisément. On peut néanmoins dire que pour les plus performants de ces appareils, la dérive est inférieure à  $10^{-4} \text{ deg.h}^{-1}$ , soit exprimée en terme de navigation une dérive inférieure à 1 mile par jour ( $< 1 \text{ m-d}$ ). Depuis une dizaine d'années, ils sont aussi utilisés pour la navigation des avions de ligne, soit comme navigateur principal (dérive  $< 1 \text{ m-h}$ ), soit pour assister le guidage par système GPS (dérive  $< 10 \text{ m-h}$ ).

### C.2.3 Gyroscopes à deux degrés de liberté

Les gyros à deux degrés de liberté (appelés usuellement 2DFG ou "*free gyros*") ressemblent beaucoup aux SDFG, sauf que l'axe de la toupie est libre dans deux directions. Ceci est réalisé soit en utilisant deux cardans d'axes de rotation perpendiculaire ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ), soit en utilisant une toupie en forme de sphère et placée en suspension (électro ou hydro statique, supraconductrice, ...). L'axe de rotation de la toupie garde alors toujours la même direction dans un repère d'inertie.

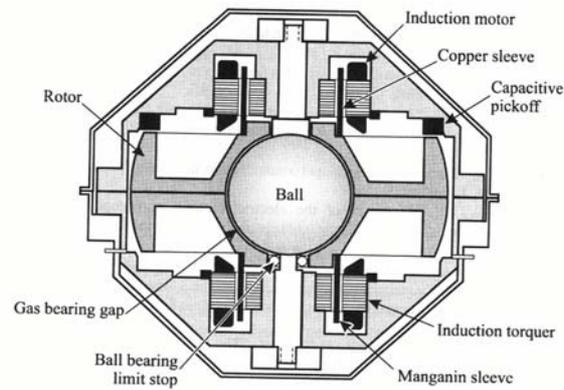


Figure C. 6 : plan d'un 2DFG à suspension aérostatique. (d'après [Lawrence 98] ).

Les gyroscopes à deux degrés de liberté ont longtemps été délaissés par les industriels qui pensaient que leurs performances seraient moindres que celles des SDFG. Finalement ces gyros se sont révélés très bons (dérive  $< 0,1$  m-h pour les gyros à suspension électrostatique, cryogénique ou à gaz), et ils équipent maintenant un grand nombre d'avions de ligne et sont utilisés dans les plates-formes inertielles.

### C.3 FORCE DE CORIOLIS ET GYROS À ÉLÉMENTS VIBRANTS

Parallèlement aux gyroscopes à élément tournant, il existe toute une gamme de gyros utilisant un élément vibrant. Ces dispositifs exploitent le couplage de modes transverses induit par la force de CORIOLIS sur les vibrations acoustiques dans un résonateur solide. Cet effet peut être produit à une dimension (corde vibrante), ou bien à deux dimensions, de type bol vibrant. Ces appareils sont décrit en détail dans [LÉGER 97].

#### C.3.1 La force de CORIOLIS

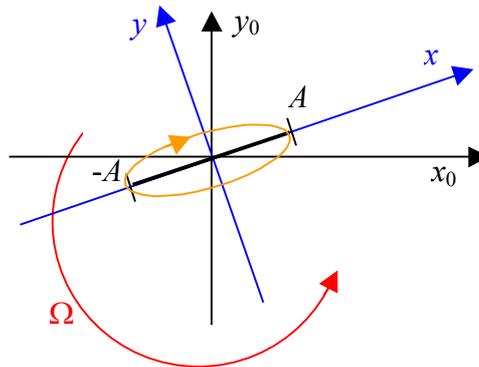
Considérons un point  $M$  de masse  $m$  oscillant suivant l'axe  $(Ox)$  d'un repère  $\{R\}$ . Le mouvement de ce point est donc :

$$\mathbf{r}(M)_R = A \cos(\omega t) \mathbf{e}_x \quad (\text{Eq. C. 9})$$

Si le repère  $\{R\}$  se met à tourner par rapport à un repère d'inertie  $\{R_0\}$  à la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}_{R/R_0}$  suivant l'axe  $(Oz)$ , le point  $M$  est alors soumis à la force de CORIOLIS dont l'expression a été donnée (Eq. 2.7). Le mouvement du point  $M$  devient alors :

$$\mathbf{r}(M)_R = \begin{pmatrix} A \cos(\omega t) \\ -\frac{\Omega A}{\omega} \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. C. 10})$$

En mesurant l'amplitude du mouvement suivant l'axe ( $Oy$ ), on a donc directement un signal proportionnel à  $\Omega_{R/R_0}$  (voir **Figure C. 7**).



**Figure C. 7** : force de CORIOLIS sur une masse oscillante. La masse A oscille suivant l'axe ( $Ox$ ). SI cet axe se met à tourner par rapport l'axe ( $Oz_0$ ) d'un repère inertie, la force de CORIOLIS provoque un déplacement de la masse suivant l'axe ( $Oy$ ). L'oscillation rectiligne se transforme alors en ellipse.

### C.3.2 Les gyroscopes à lames vibrantes

Les gyroscopes à lames et à cordes vibrantes [QUICK 84] ont été les premiers gyros réalisés sur le principe que l'on vient de décrire. Leur conception a nécessité énormément de travail et les performances sont toujours restées bien inférieures à celles des SDFG. Ils sont néanmoins beaucoup plus robustes et bien meilleur marché que ces derniers. Avec une sensibilité d'environ  $10^{-2} \text{ deg.s}^{-1}$ , ils sont suffisamment performants pour être utilisés pour le guidage de bombes et de missiles de courte portée.

### C.3.3 Les gyroscopes à résonateur hémisphérique

Les gyroscopes à résonateur hémisphérique HRG (Hemispherical Resonator Gyroscope), autrement appelés bols vibrants, sont constitués d'une cavité en quartz dans laquelle résonnent deux modes acoustiques. Le premier mode est appelé mode pilote ou moteur, il est entretenu de façon électrique. Le second mode, transverse au premier, est produit par la force de CORIOLIS, il est appelé mode récepteur ou mode de CORIOLIS. Lorsque l'appareil tourne, le plan de vibration de ce mode se met à précesser d'un angle proportionnel à l'angle de rotation de l'appareil. La constante de proportionnalité dépend de la géométrie de la cavité, et vaut typiquement 0,3.

La cavité est recouverte d'une couche conductrice de chrome, pour la rendre conductrice, et permettre ainsi l'excitation du mode pilote et la détection du mode de CORIOLIS.

De tels dispositifs ont démontré des performances remarquables avec des dérives inférieures à  $5 \cdot 10^{-3} \text{ deg.h}^{-1}$  [LYNCH 84], et une stabilité du facteur d'échelle de l'ordre de 0,02 ppm.

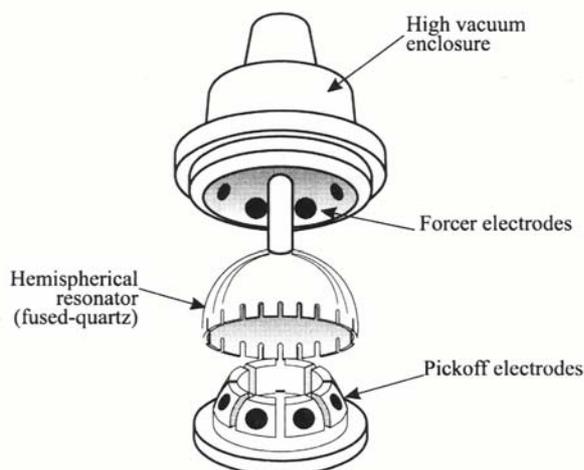


Figure C. 7 : schéma d'un gyroscope hémisphérique résonnant (d'après [Lawrence 98] )

#### C.4 CONCLUSION

On a résumé dans le tableau ci-dessous les principales performances des gyroscopes mécaniques présentés. On pourra se reporter à la fin du chapitre 2 pour trouver les différents tableaux récapitulatifs des performances des gyromètres optiques et des prototypes de laboratoire, et à la fin de l'Annexe D pour une comparaison de l'utilisation des gyroscopes mécaniques et des gyromètres optiques en navigation inertielle.

| Type de gyros    | Nom       | Dérive                            | Commentaires               |
|------------------|-----------|-----------------------------------|----------------------------|
| Disque tournant  | SDFG      | $\sim 10^{-4} \text{ deg.h}^{-1}$ | fragile et très cher       |
| Sphère tournante | 2DFG, GSE | $< 10^{-4} \text{ deg.h}^{-1}$    | fragile et très cher       |
| Élément vibrant  | THG, DART | $\sim 10^{-2} \text{ deg.s}^{-1}$ | très robuste et bon marché |
| Bol vibrant      | HRG       | $\sim 10^{-3} \text{ deg.h}^{-1}$ | fragile et cher            |

## BIBLIOGRAPHIE

- [BRIDGMAN 61] P. W. Bridgman, *Am. J. Phys.*, 29, **32**, (1961)
- [FOUCAULT 52-1] L. Foucault, "Sur un nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la Terre fondée sur la fixité du plan de rotation", *C. R. Acad. Sci.*, 35, **421**, (1852)
- [FOUCAULT 52-2] L. Foucault, "Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants entraînés par un axe fixe à la surface de la Terre", *C. R. Acad. Sci.*, 35, **424**, (1852)
- [LAWRENCE 98] A. Lawrence, "Modern Inertial Technology : Navigation, Guidance, and Control", Ed. Springer, (1998) second edition, ISBN 0 387 98507 7
- [LÉGER 97] P. Léger, "Gyroscopes mécaniques vibrants", *Revue technique de l'ingénieur, traité mesures et contrôle*, France, (1997)
- [LYNCH 84] D. D. Lynch, "Hemispherical resonator gyro", in "Inertial technology for the future" *IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems* AES-20, 4, **414**, (1984)
- [PLESKA 00] E.M.A. Pleska, J.F. Kieffer, P. Bouniol, « les senseurs inertiels du XXI<sup>e</sup> siècle », *Revue scientifique et technique de la défense*, 49, **115**, juillet (2000)
- [QUICK 84] W. H. Quick, "Theory of the vibrating strings as an angular motion sensor", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **523**, sept. (1964)

## **ANNEXE D : LES GYROMETRES OPTIQUES**

### **Table des matières**

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| D.1   | LES GYROS OPTIQUES .....                            | 300 |
| D.1.1 | Les gyromètres à fibre optique .....                | 301 |
| D.1.2 | Les gyroscopes optiques actifs ou gyro-lasers ..... | 303 |
| D.1.3 | Les gyros optiques à anneau résonnant passif.....   | 305 |
| D.2   | CONCLUSION SUR LES GYROS OPTIQUES .....             | 306 |
|       | BIBLIOGRAPHIE .....                                 | 307 |

## ANNEXE D :

### LES GYROMETRES OPTIQUES

On pourra se reporter à l'introduction du chapitre 3 pour une brève description historique de l'effet Sagnac et des gyromètres optiques.

#### D.1 LES GYROS OPTIQUES

Nous allons voir maintenant comment cet effet peut être exploité dans différents types d'appareils à visée commerciale, utilisés principalement pour la navigation. Un calcul préalable d'ordre de grandeur va nous permettre de commenter les différents choix techniques effectués dans la conception de ces appareils.

Considérons un interféromètre optique bouclé englobant une aire de  $1\text{m}^2$ . Le déphasage produit par une rotation de  $1 \text{ deg.h}^{-1}$  (i.e.  $5 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$ ) n'est que  $\Delta\phi_{\text{sortie}} = 2\pi/50.000$  (avec  $\lambda_0 = 1\mu\text{m} \Rightarrow \omega = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ ), ce qui est relativement faible quand on sait que les besoins en navigation se situent dans la gamme de  $10^{-4}$  à  $1 \text{ deg.h}^{-1}$ . Ainsi, avec les dimensions réalistes des appareils que l'on peut fabriquer, l'effet SAGNAC n'est pas très sensible à la rotation. Les appareils que nous allons décrire s'appuient donc sur quelques développements techniques permettant d'améliorer leur sensibilité à la rotation.

Bien qu'ils aient été réalisés après les gyro-lasers, nous allons commencer par décrire les gyromètres à fibres optiques, dont le fonctionnement se rapproche le plus du modèle utilisé au paragraphe 3.1.1.

### D.1.1 Les gyromètres à fibre optique

Les gyromètres à fibre optique ( en anglais "Interferometric Fiber-Optic Gyro" - IFOG) sont fondés exactement sur l'effet SAGNAC tel qu'il vient d'être décrit. La solution choisie ici pour améliorer la sensibilité du gyromètre est d'augmenter son aire géométrique. Ceci est réalisé grâce à une fibre optique <sup>(1)</sup> que l'on enroule en  $N$  spires de surface unitaire  $\pi R^2$ . L'aire totale d'un tel gyromètre est alors :

$$A = N \pi R^2 = R L / 2 \quad (\text{Eq. D. 1})$$

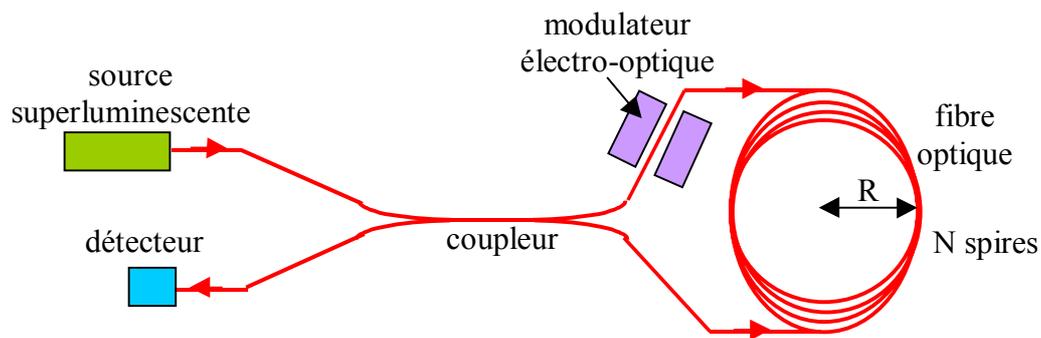
où  $L$  est la longueur de la fibre et  $R$  le rayon de chaque spire (voir **Figure 3. 8**). Le déphasage à la sortie de cet interféromètre s'écrit donc (il s'agit d'un interféromètre bouclé, on utilise donc Eq. 3. 37) :

$$\Delta\phi = \frac{2 RL\omega}{c^2} \Omega_{\text{entrée}} \quad (\text{Eq. D. 2})$$

que l'on exprime avec la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  :

$$\Delta\phi = \frac{4\pi RL}{\lambda_0 c} \Omega_{\text{entrée}} \quad (\text{Eq. D. 3})$$

Avec les dimensions typiquement utilisées :  $R = 10$  cm et  $L = 1$  km, l'aire vaut  $A = 50$  m<sup>2</sup>. On réalise ainsi un appareil de grande aire dans un volume réduit. Le déphasage provoqué par une rotation de 1 deg.h<sup>-1</sup> est donc de 1/1000<sup>ième</sup> de frange environ. Le flux lumineux vaut quelques centaines de pW ( $\sim 10^{12}$  photons.s<sup>-1</sup>), et permet ainsi d'avoir un très bon rapport signal à bruit permettant théoriquement de voir le millionième de frange.



**Figure D. 1** : schéma d'un gyromètre à fibre optique. On augmente l'aire de l'interféromètre jusqu'à 100 m<sup>2</sup> en enroulant une fibre optique. En fonctionnement en boucle fermée, on compense le déphasage dû à la rotation en décalant un des faisceau par un modulateur acousto ou électro-optique.

<sup>(1)</sup> Cette solution a été proposée par R. BROWN en 1968 (Naval Research Laboratories), et réalisée expérimentalement pour la première fois au milieu des années 70.

Les pertes de puissance lumineuse dans la fibre donnent une limite à la longueur de fibre que l'on peut utiliser dans ces appareils. Cette longueur limite est de quelques kilomètres [EZEKIEL 77], ce qui donnerait, en théorie, une sensibilité sur une seconde limitée par le bruit de photons <sup>(2)</sup>, d'environ  $10^{-3}$  deg.h<sup>-1</sup>. En pratique, le bruit relatif d'intensité lié à la lumière rétro-diffusée dans la fibre est souvent prépondérant et limite donc la sensibilité sur une seconde [LIN 78, TAYLOR 90]. Ce bruit diminue comme  $1/\sqrt{\Gamma}$ , où  $\Gamma$  est la largeur de raie de la source. On utilise alors généralement des sources de largeur de raie de 50 nm ou plus, telles que des diodes superluminescentes, des diodes lasers modulées en fréquence, ou encore des fibres superfluorescentes ("Superfluorescent Fiber Source" - SFS) <sup>(3)</sup> [WYSOCKI 94].

D'autres bruits à plus long terme viennent limiter la durée d'intégration des gyromètres à fibre. Parmi les principaux on peut citer les effets de polarisation [ULRICH 79] et le bruit d'origine thermique qui induit des non-réciprocités dans la fibre, conduisant à des fluctuations du biais. Ainsi une variation de température de  $3,5 \cdot 10^{-3}$  °C en une heure induit des fluctuations du biais équivalentes à un niveau de dérive de  $4 \cdot 10^{-3}$  deg.h<sup>-1</sup> [SHUPE 80].

Les meilleures sensibilités que l'on obtient avec des gyros à fibre fonctionnant sur le principe que l'on vient de décrire sont de l'ordre de 0,2 deg.h<sup>-1</sup> ( $10^{-6}$  rad.s<sup>-1</sup>) sur une durée d'intégration de 30 minutes [BERGH 81], limitée par la lumière rétro-diffusée et les pertes dans la fibre.

Pour utiliser en permanence le gyromètre au point où son facteur d'échelle est maximal ( $\Delta\phi = \pi/2$ ) on utilise généralement un modulateur acousto-optique [DAVIS 81], ou électro-optique [LEONBERGER 82] sur l'une des voies du coupleur afin de rajouter un déphasage (voir **Figure D. 1**). On travaille en boucle fermée, le signal de sortie est alors la différence de fréquence que l'on applique par le modulateur pour compenser la rotation. Cette différence de fréquence vérifie la relation :

$$2\pi(f_0 + \Delta f)\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi RL}{\lambda_0 c}\Omega \quad (\text{Eq. D. 4})$$

où  $\tau = (nL/c)$  est le temps de parcours dans la fibre, et  $f_0 = 1/(4\tau)$  est la fréquence à appliquer au modulateur acousto-optique pour obtenir le déphasage de  $\pi/2$  en l'absence de rotation.  $\Delta f$  est alors donné par la relation :

$$\Delta f = \frac{2R}{n\lambda_0}\Omega \quad (\text{Eq. D. 5})$$

<sup>(2)</sup> Les flux lumineux importants que l'on utilise dans ces appareils ( quelques  $10^{14}$  photons / seconde) permettent d'obtenir un rapport signal à bruit élevé de l'ordre de  $10^7$ . On suppose ici que le rapport signal à bruit est limité par le bruit de photons. Nous allons voir que ce n'est pas toujours le cas.

<sup>(3)</sup> Ce sont des fibres dopées à l'Erbium pompées par laser. Le faisceau en sortie fait environ 50 mW à 1,55  $\mu\text{m}$  et de largeur de raie 50 nm.

Pour plus d'informations sur les gyroscopes à fibre optique on pourra se reporter aux recueils d'articles des références [EZEKIEL 82] et [SMITH 89] et à la référence [LAWRENCE 98 p 188].

### D.1.2 Les gyroscopes optiques actifs ou gyro-lasers

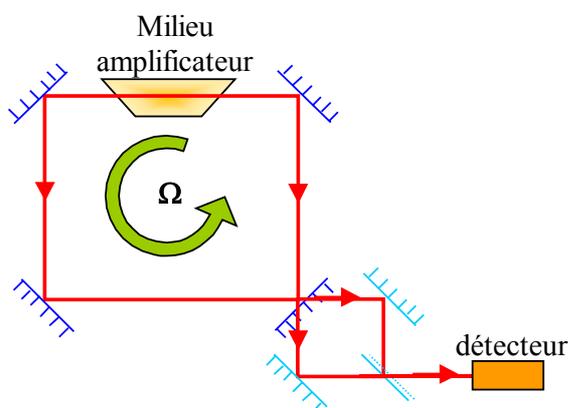
Le gyro-laser <sup>(1)</sup> ( en anglais "Ring Laser Gyro" RLG) est une autre solution pour augmenter la sensibilité de l'appareil à la rotation. Il se compose d'un milieu amplificateur placé à l'intérieur d'une cavité en anneau de grande finesse  $F$ . Les ondes laser peuvent circuler dans les deux sens à l'intérieur de la cavité et on récupère le battement entre les deux ondes sur un des miroirs de la cavité (voir **Figure D. 2**) [MACEK 63]. Si la cavité ne tourne pas, les deux ondes ont même fréquence et le battement est à fréquence nulle. Si la cavité tourne, les longueurs de cavité vues par chaque onde diffèrent et les fréquences des deux ondes ne sont alors plus égales. On obtient un battement à une fréquence donnée par la relation :

$$2\pi \Delta f \tau = \frac{8\pi A}{\lambda_0 c} \Omega \quad (\text{Eq. D. 6})$$

Avec  $\tau = (nL/c)$  le temps de parcourt dans la cavité. Cette relation est équivalente à (Eq. D.5). La différence de fréquence est alors donnée par :

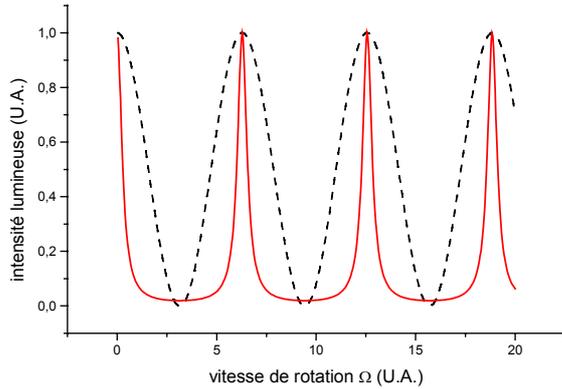
$$\Delta f = \frac{4A}{nL\lambda_0} \Omega \quad (\text{Eq. D. 7})$$

L'intérêt de ce dispositif est que le facteur d'échelle en intensité est  $F$  fois plus important que celui en  $\Delta f$ . L'effet FABRY-PEROT qui se produit dans la cavité donne une réponse en intensité extrêmement fine (voir **Figure D. 3**), qui augmente d'un facteur  $F$ , la sensibilité du gyromètre lorsqu'on se place à flanc de frange. La finesse de la cavité d'un bon gyro-laser vaut typiquement 5000.



**Figure D. 2** : schéma d'un gyro-laser. Les deux faisceaux voient des longueurs de cavité différentes et ont donc des fréquences différentes. On réalise le battement des deux faisceaux sur le détecteur.

<sup>(1)</sup> La théorie du gyro-laser a été développée par C. HEER [HEER 61] et A. ROSENTHAL en 1961 [ROSENTHAL 62], et la première réalisation date de 1963 par W. MACEK et D. DAVIS [MACEK 63].



**Figure D. 3** : réponse comparée d'un gyromètre de même aire, sans (pointillé) et avec (trait plein) effet FABRY-PEROT. Dans le deuxième cas, la pente à flanc de frange est beaucoup importante, la sensibilité à la rotation s'en trouve donc largement augmentée.

Du fait que le milieu amplificateur est à l'intérieur de la cavité, les gyro-lasers sont extrêmement sensibles à la rétro-diffusion sur les miroirs qui provoque le verrouillage de la fréquence d'un mode sur l'autre mode, lorsque les deux fréquences sont trop proches (voir **Figure D. 4**). Ceci se produit pour les très faibles vitesses de rotation et donne naissance à une zone aveugle autour de la vitesse de rotation nulle. On peut déporter le problème vers une autre zone en rajoutant un déphasage entre les deux ondes. Ce déphasage peut être créé soit en faisant tourner mécaniquement le gyro-laser sur lui même à une vitesse de rotation constante et symétrique (par exemple alternativement +50 deg/s et -50 deg/s) [MATTHEWS 89], soit à l'aide de composants déphasants non réciproques comme des miroirs magnétiques par exemple [KREBS 80].

On peut faire une application numérique à partir de données typiques de gyro-lasers : géométrie en triangle équilatéral de  $P = 30\text{cm}$  de périmètre, et d'aire  $A = 43\text{cm}^2$ , longueur d'onde de  $\lambda = 630\text{nm}$ , finesse de la cavité  $F = 5000$ . La sensibilité en une seconde vaut alors environ  $10^{-8}\text{rad.s}^{-1}$  ( $\sim 10^{-4}\text{deg.h}^{-1}$ ).

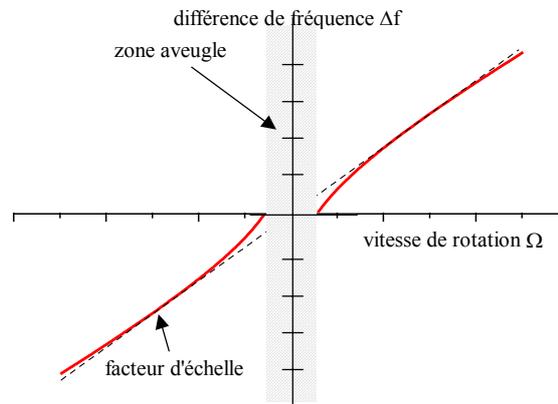
Le bruit limitant la stabilité court terme de ce type d'appareil est essentiellement l'émission spontanée dans le milieu amplificateur [EZEKIEL 82 - p7]. Pour les limitation à plus long terme, on peut citer les dérives dans le système mécanique de rotation utilisé pour déporter la zone aveugle. On verra au paragraphe suivant une solution où le milieu amplificateur est placé à l'extérieur de la cavité, évitant ainsi les problème de verrouillage de modes.

On considère souvent comme signal de sortie le nombre de franges  $N$  qui ont défilé devant le photodétecteur pendant la durée  $T$ . Ce nombre est proportionnel à :

$$N = \frac{4A}{n\lambda L} \int_0^T \Omega_{\text{entrée}} dt = \frac{4A}{n\lambda L} \theta_{\text{entrée}} \quad (\text{Eq. D. 8})$$

L'appareil a donc une sortie digitale dont la valeur est proportionnelle à l'angle duquel tourne le dispositif pendant le durée  $T$ , il constitue alors un gyroscope. Cependant l'appareil présente un bruit blanc en  $\Omega$ , qui se traduit par un bruit de marche aléatoire en  $\theta$  lorsqu'il fonctionne en gyroscope. Contrairement aux gyroscopes mécaniques où l'incertitude sur l'angle diminue en  $1/\sqrt{T}$ , pour le gyro-laser cette incertitude augmente comme  $\sqrt{T}$ .

Pour plus d'informations sur les gyro-lasers on pourra se reporter aux références [ARANOWITZ 71] et [LAWRENCE 98 - p 208].



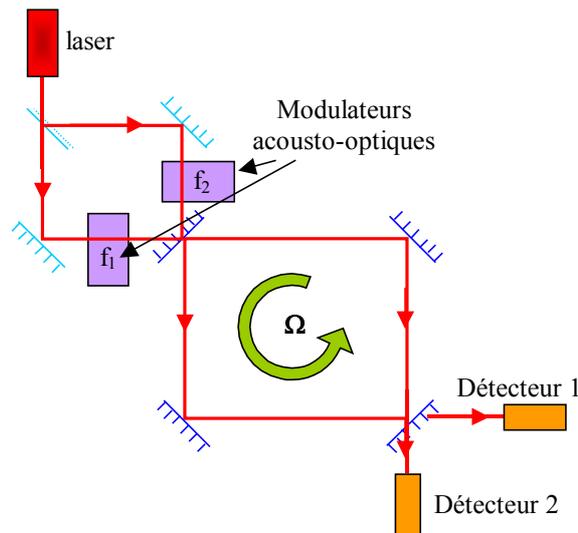
**Figure D. 4** : signal de sortie d'un gyro-laser en fonction de la rotation (courbe rouge). On voit le facteur d'échelle (courbe pointillée) et la zone aveugle (zone hachurée), due au verrouillage d'un mode sur l'autre.

### D.1.3 Les gyros optiques à anneau résonnant passif

Cet appareil ressemble à un gyro-laser, mais le faisceau est issu d'une source laser de longueur d'onde  $\lambda_0$  placé à l'extérieur de la cavité. On s'affranchit ainsi de tous les effets parasites liés à la présence du milieu amplificateur dans la cavité. (voir **Figure D. 5**) [EZEKIEL 77]. La longueur de la cavité est choisie pour être résonnante à la fréquence  $\nu_0$  associée à  $\lambda_0$  lorsque l'appareil ne tourne pas.

Lorsque l'appareil subit une rotation  $\Omega$ , on maintient les deux ondes résonnantes dans la cavité grâce à deux modulateurs acousto-optiques placés hors cavité. La différence des fréquences à appliquer aux deux modulateurs acousto-optiques est la même que celle qui apparaît dans un gyro-laser, donnée par (Eq. D. 7).

Les phénomènes qui limitent la stabilité long terme de ce type d'appareil sont les fluctuations de fréquence du laser source, ainsi que les désalignements des miroirs de la cavités.



**Figure D. 5** : schéma d'un gyroscope à anneau résonnant passif. Les deux faisceaux, issus du même laser, sont décalés en fréquence par des modulateurs acousto-optiques pour les garder en résonance avec la cavité.

## D.2 CONCLUSION SUR LES GYROS OPTIQUES

Bien que les performances des gyromètres résonnants passifs soient prometteuses, aucun appareil de ce genre n'a pour l'instant été commercialisé. Nous allons donc nous intéresser plus particulièrement aux gyromètres à fibre optique et aux gyro-lasers. Les comparaisons porteront essentiellement sur les applications militaires, qui constituent de loin la plus grosse part du marché des gyroscopes et gyromètres de haute performance.

Parmi les gyromètres optiques, les gyro-lasers sont les plus performants. Dans la gamme de sensibilité stratégique de  $10^{-4}$   $\text{deg.h}^{-1}$  à  $10^{-3}$   $\text{deg.h}^{-1}$ , ils concurrencent même les gyroscopes mécaniques dans le domaine du guidage des missiles balistiques intercontinentaux.

Dans la gamme de sensibilité des  $10^{-2}$   $\text{deg.h}^{-1}$  jusqu'à  $1$   $\text{deg.h}^{-1}$ , les gyro-lasers sont largement concurrencés par les gyromètres à fibre optique plus robustes et moins chers, notamment dans les systèmes de navigation assistés par GPS. Toutefois pour les applications où le facteur d'échelle doit être constant à mieux que  $100$  ppm ( $10^{-4}$ ), le gyro-laser sera préféré.

Dans la gamme tactique ( $1$   $\text{deg.h}^{-1}$  et plus), le prix devient le critère décisif et les gyromètres à fibres optiques sont plus largement utilisés en concurrence avec les petits gyroscopes mécaniques à éléments vibrants.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [ARANOWITZ 71] F. Aranowitz, "The Laser Gyro", in *Lasers applications*, vol 1, Ed. Academic Press, New York & London, **133**, (1971)
- [BERGH 81] R. A. Bergh, H. C. Lefevre, H. J. Shaw, *Opt. Lett.*, **6**, **198**, (1981)
- [DAVIS 81] J. L. Davis, S. Ezekiel, "Closed loop, low noise fiber-optic rotation sensor", *Opt. Lett.*, **6**, **505**, (1981)
- [EZEKIEL 77] S. Ezekiel, S. R. Balsamo, "Passive ring laser gyroscope", *Appl. Phys. Lett.*, **30**, **478**, (1977)
- [EZEKIEL 82] S. Ezekiel, H. J. Arditty, "Fiber-Optic Rotation Sensors", Ed. Springer-Verlag, New York, (1982)
- [FORDER 84] P. W. Forder, *J. Phys. A*, **17**, **1343**, (1984)
- [KREBS 80] J.J. Krebs, W.G. Maisch, G.A. Prinz, D.W. Forester, "Applications of magneto-optics in ring laser gyroscopes", *IEEE Trans. on Magnetics*, MAG-16, **5**, **1179**, (1980)
- [LAWRENCE 98] A. Lawrence, "Modern Inertial Technology : Navigation, Guidance, and Control", Ed. Springer, (1998) second edition, ISBN 0 387 98507 7
- [LEONBERGER 82] F.J. Leonberger, "Guided-wave electro-optic modulators", in *Fiber-Optic Rotation Sensors*, Edited by S. Ezekiel, H.J. Arditty, Springer-Verlag, New-York, **130** (1982)
- [LIN 78] S. C. Lin, T. G. Giallorenzi, "Sensitivity analysis of the Sagnac-effect optical-fiber ring interferometer", *Appl. Opt.*, **18**, **915**, (1978)
- [MACEK 63] W. M. Macek, T. M. Davis Jr, " Rotation Rate Sensing with Travelling-Wave Ring Lasers", *Appl. Phys. Lett.*, **2**, **67**, (1963)
- [MATTHEWS 89] A. Matthews, H. Welter, "Cost-effective, high-accuracy inertial navigation", *J. Inst. Nav.*, **36**, **2**, **157**, (1989)
- [ROSENTHAL 62] A. H. Rosenthal, " Regenerative circulatory multiple-beam interferometry for the study of light propagation effect", *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, **1143**, (1962)
- [ROWE 99] C. H. Rowe, U. K. Schreiber, S. J. Cooper, B. T. King, M. Poulton, G. E. Stedman, "Design and operation of a very large ring laser gyroscope", *Appl. Opt.*, **38**, **2516**, (1999)
- [SHUPE 80] D. M. Shupe, *Appl. Opt.*, **19**, **654**, (1980)
- [SMITH 89] R. B. Smith, "Selected Papers on Fiber-Optic Gyroscopes", *SPIE Milestone Series MS8*, (1989)
- [TAYLOR 90] H.F. Taylor, "Intensity noise and spontaneous emission coupling in superluminescent light sources", *IEEE J. Quantum Electronics*, **26**, **1**, (1990)
- [ULRICH 79] R. Ulrich, M. Johnson, "Fiber ring interferometer : Polarization analysis", *Opt. Lett.*, **4**, **152**, (1979)
- [VALI 76] V. Vali, R. W. Shorthill, "Passive ring interferometer", *Appl. Opt.*, **15**, **1099**, (1976)

- [WYSOCKI 94] P. F. Wysocki, M. J. F. Digonnet, B. Y. Kim, H. J. Shaw, "Characteristics of Erbium-doped superfluorescent fiber sources for interferometric sensor applications", *IEEE J. Lightwave Tech.*, 12, **550**, (1994)





## BIBLIOGRAPHIE

- [ADELBERGER 90] E. G. Adelberger, C. W. Stubbs, B. R. Heckel, Y. Su, H. E. Swanson, G. Smith, J. H. Gundlach, W. F. Rogers, "Testing the equivalence principle in the field of the Earth: Particle physics at masses below  $1\mu\text{eV}$  ? ", *Phys. Rev. D*, **42**, p 3267, (1990)
- [ANANDAN 81] J. Anandan, "Sagnac effect in relativistic and nonrelativistic physics", *Phys. Rev. D*, **24**, p 338, (1981)
- [ARANOWITZ 71] F. Aranowitz, "The Laser Gyro", in *Lasers applications*, vol 1, Ed. Academic Press, New York & London, p 133, (1971)
- [AUCOUTURIER 97] E. Aucouturier, "Nouvelles sources d'atomes froids pour l'horloge atomique", *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, Orsay, (1997)
- [AUDRETSCH 92] J. Audretsch, C. Lämmerzahl, "New Inertial and Gravitational Effects made Measurable by atomic Beam Interferometry", *Appl. Phys. B*, **54**, p 351, (1992)
- [AVENEL 97] O. Avenel, P. Hakonen, E. Varoquaux, "Detection of the rotation of the Earth with a superfluid gyrometer", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 3602, (1997)
- [BAKLANOV 76] Y. V. Baklanov, B. Y. Dubetsky, V. P. Chebotayev, *Appl. Phys.*, **9**, p. 171, (1976)
- [BERGH 81] R. A. Bergh, H. C. Lefevre, H. J. Shaw, *Opt. Lett.*, **6**, p 198, (1981)
- [BERQUIST 77] J. C. Berquist, S. A. Lee, J. L. Hall, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, p. 159, (1977)
- [BERTHOUD 98] P. Berthoud et al., *Europhys. Lett.*, **41**, p. 141, (1998)
- [BERTHOUD 99] P. Berthoud, E. Fretel, P. Thomann, "Bright, slow and continuous beam of laser-cooled cesium atoms", *Phys. Rev. A*, **60**, 6, p 4241, (1999)
- [BONSE 65] U. Bonse, M. Hart, *Appl. Phys. Lett.*, **6**, p 155, (1965)
- [BORDÉ 84] Ch. J. Bordé, Ch. Salomon, S. Avrillier, A. Van Leberghe, Ch. Bréant, D. Bassi, G. Scoles, "Optical Ramsey fringes with traveling waves", *Phys. Rev. A*, **30**, 4, p 1836, (1984)
- [BORDÉ 89] Ch. Bordé, "Atomic interferometry with internal state labelling", *Phys. Lett. A*, **140**, p 10 (1989)
- [BORDÉ 91] Ch. J. Bordé, "Atomic Interferometry and Laser Spectroscopy", in *Laser Spectroscopy X*, Ed. M. Ducloy, E. Giacobino, G. Camy, World Scientific, p 239, (1991)
- [BORDÉ 92] Ch. Bordé, "Propagation of Laser Beams and of Atomic Systems", in *Système fondamentaux en Optique Quantique / Fundamental Systems in Quantum Optics*, course 5, J. Dalibard, J.M. Raymond, J. Zinn-Justin, Ed. Les Houches, Session LIII, (1990)
- [BORDÉ 94] Ch. J. Bordé, A. Karasiewicz, Ph. Tournenc, "General relativistic framework for atom interferometry ", *Int. J. Mod. Phys. D*, **3**, 1, p. 157, (1994)

- [BORDÉ 00] Ch. Bordé, J.-C. Houard, A. Karasiewicz, "relativistic phase shifts for Dirac particles interacting with weak gravitational fields in a matter-wave interferometers", in *Gyros, Colcks, and Interferometers : Testing Relativistic Gravity in Space*, Edited by C. Lämmerzahl, C.W.F. Everitt, F.W. Hehl, Springer-Verlag, Berlin, (2000)
- [BORDÉ 01] Ch. J. Bordé, "Theoretical tools for atom optics and interferometry", *C.R. Acad. Sci.*, t. 2, Série IV, p 509, Paris, (2001)
- [BORDÉ 01-2] Ch. J. Bordé, "Atomic Clocks and Atom Interferometry ", in *Advances in the Interplay between Quantum and Gravity Physics*, Ed. by V. de Sabbada, Kluwer, Academic Publisher, (2001)
- [BRAGINSKY 77] C. M. Braginsky, C. M. Caves, K. S. Thorne, "Laboratory experiments to test relativistic gravity", *Phys. Rev. D*, **15**, p 2047, (1977)
- [BRIDGMAN 61] P. W. Bridgman, *Am. J. Phys.*, **29**, p 32, (1961)
- [BUCHMAN 96] S. Buchman, F. Everitt, B. Parkinson, et al., "Experimental techniques for gyroscope performance enhancement for the Gravity Probe B relativity mission", *Class. Quant. Grav.*, **13**, p A185, (1996)
- [CÉREZ 91] P. Cérez, G. Théobald, V. Giordano, N. Dimarcq, M. de Labachellerie, "Laser diode optically pumped cesium beam frequency standard investigations at LHA", *IEEE Trans. Instr. Meas.*, **40**, 2, p 137, (1991)
- [CHAMPENOIS 99] C. Champenois, M. Büchner, J. Vigué, "Fringe contrast in three grating Mach-Zehnder atomic interferometers", *Eur. Phys. J. D*, **5**, p 363, (1999)
- [CHOW 85] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, "The Ring Laser Gyro", *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 1, p 61, (1985)
- [CHRONOS 91] C. Audoin, M.Y. Bernard, R. Besson, J.J. Gagenpain, J. Gros Lambert, M. Granveaud, J.C. Neau, M. Olivier, J. Rutman, « La mesure de la fréquence des oscillateurs », Collection Technique et Scientifique des Télécommunications, Masson, (1991)
- [CIUFOLINI 89] Ciufolini, "A comprehensive introduction to the LAGEOS gravitomagnetic experiment : from the importance of the gravitomagnetic field in physics to preliminary error analysis and error budget", *Int. J. Mod. Phys. A*, **4**, p 3083, (1989)
- [CIUFOLINI 97] I. Ciufolini, F. Chiappa, D. Lucchesi, F. Vespe, "Test of Lense-Thirring orbital shift due to spin", *Class. Quantum Grav*, **14**, p 2701, (1997)
- [CLAIRON 91] A. Clairon, C. Salomon, S. Guellati, W. Phillips, "Ramsey resonance in a Zacharias fountain", *Europhys. Lett.*, **16**, p 165, (1991)
- [COHEN-TANNOUDJI 77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "Mécanique Quantique", Ed. Hermann, Paris, (1977), ISBN 2 7056 5733 9
- [COHEN-TANNOUDJI 92] C. Cohen-Tannoudji, " Interférométrie atomique ", *Cours du Collège de France*, (1992-93)

- [COLELLA 75] R. Colella , A. W. Overhauser, S. A. Werner, "Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference", *Phys. Rev. Lett.*, **34**, p 1472, (1975)
- [DALIBARD 86] J. Dalibard, "Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique", Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure, Paris, (1986)
- [DALIBARD 89] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, "Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models", *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**, p 2023, (1989)
- [DAVIS 81] J. L. Davis, S. Ezekiel, "Closed loop, low noise fiber-optic rotation sensor", *Opt. Lett.*, **6**, p 505, (1981)
- [DE CLERCQ 84] E. de Clercq, M. de Labacherie, G. Avila, P. Cérez, "Laser diode optically pumped caesium beam", *J. Physique*, **45**, p 239, (1984)
- [DELHUILLE 01] R. Delhuille, C. Champenois, M. Büchner, L. Jozefowski, Th. Lahaye, R. Mathevet, A. Miffre, C. Rizzo, C. Robillard, G. Trénet, J. Vigué, "Some theoretical and experimental aspects of three grating Mach-Zehnder atom interferometers", *C.R. Acad. Sci Paris*, t. 2, **Série IV**, p 587, (2001)
- [DE SITTER 16] W.de Sitter, "On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences", *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **77**, p 155, (1916)
- [DICK 87] G. Dick, "Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards", in *Proc. of Precise Time and Time Interval*, Redondo Beach, p 133, (1987)
- [DICKE 74] R. H. Dicke, H. M. Goldenberg, "The oblateness of the Sun", *Astrophys. J. Supp.*, **27**, p 131, (1974)
- [DICKEY 94] J. O. Dickey et al, *Science*, **265**, p 482, (1994)
- [DIMARCQ 93] N. Dimarcq, V. Giordano, P. Cerez, G. Theobald, "Analysis of the noise sources in an optically pumped cesium beam resonator", *IEEE Trans. On Inst. And Meas.*, **42**, p 116, (1993)
- [DIMARCQ 94] N. Dimarcq, M. Houssin, E. Aucouturier, M. de Labacherie, "New extended-cavity semiconductor laser structures using auto-alignment techniques", *OSA Annual Meeting / ILS-X*, Dallas, (1994)
- [DRESDEN 79] M. Dresden, C. N. Yang, "Phase shift in a rotating neutron or optical interferometer", *Phys. Rev. D*, **20**, p 1840, (1979)
- [DREWSSEN 94] M. Drewsen, P. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, C. Salomon, "Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap", *Appl. Phys. B*, **59**, p 283, (1994)
- [DURAND 53] E. Durand, "Electrostatique et Magnétostatique", *Ed. Masson*, (1953)
- [EKSTROM 92] C.R. Ekstrom, D. W. Keith, D. E. Pritchard, "Atom Optics Using Microfabricated Structures", *Appl. Phys. B*, **54**, p 369, (1992)
- [EKSTROM 95] C. Ekstrom, J. Schmiedmayer, M. Chapman, T. Hammond, D. Pritchard, "Measurement of the electric polarizability of sodium with an atom interferometer", *Phys. Rev. A*, **51**, p 3883, (1995)

- [EVERITT 74] C. Everitt, "The gyroscope experiment. I. General description and analysis of gyroscope performance", in *Experimental Gravitation*, Ed. B. Bertotti, Academic Press, New York, (1974)
- [EZEKIEL 77] S. Ezekiel, S. R. Balsamo, "Passive ring laser gyroscope", *Appl. Phys. Lett.*, **30**, p 478, (1977)
- [EZEKIEL 82] S. Ezekiel, H. J. Arditty, "Fiber-Optic Rotation Sensors", Ed. Springer-Verlag, New York, (1982)
- [FAVRE 86] F. Favre, D. Le Guen, J.-C Simon, B. Landousie, " External-Cavity semiconductor laser with 15 nm continuous tuning range", *Electron. Lett.*, **22**, p 795, (1986)
- [FEATONBY 98] P. Featonby, G. Summy, C. Webb, R. Godun, M. Oberthaler, A. Wilson, C. Foot, K. Burnett, "Separated-Path Ramsey Atom Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, p 495, (1998)
- [FERMIGIER 98] B. Fermigier, G. Lucas-Leclin, J. Dupont, F. Plumelle, M. Houssin, "Self-aligned external-cavity semiconductor lasers for high resolution spectroscopy", *Opt. Commun.*, **153**, 1-3, p 73, (1998)
- [FEYNMAN 65] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", Ed. Mc Graw Hill, New-York, (1965)
- [FILS 02] J. Fils, "Caractérisation métrologique d'un gyromètre à atomes froids : étude théorique et expérimentale", *thèse de doctorat de l'Université Paris XI*, Orsay, à paraître, (2002)
- [FOMALONT 77] E. B. Fomalont, R. A. Sramek, *Comm. Astrophys.*, **7**, p 19, (1977)
- [FOUCAULT 52-1] L. Foucault, "Sur un nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la Terre fondée sur la fixité du plan de rotation", *C. R. Acad. Sci.*, **35**, p 421, (1852)
- [FOUCAULT 52-2] L. Foucault, "Sur les phénomènes d'orientation des corps tournants entraînés par un axe fixe à la surface de la Terre", *C. R. Acad. Sci.*, **35**, p 424, (1852)
- [FORDER 84] P. W. Forder, "Ring gyroscopes: an application of adiabatic invariance", *J. Phys. A*, **17**, p 1343, (1984)
- [FRIEDBERG 93] R. Friedberg, S.R. Hartmann, "Billiard balls and matter-wave interferometry", *Phys.Rev. A*, **48**, 2, p 1448, (1993)
- [GILTNER 95] D. Giltner, R. McGowan, S. Lee, "Atom Interferometer Based on Bragg Scattering from Standing Light Waves", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 14, p 2638, (1995)
- [GUSTAVSON 97] T. L. Gustavson, P. Bouyer, M. A. Kasevich, "Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 2046, (1997)
- [GUSTAVSON 00] T.L. Gustavson, "Precision rotating sensing using atom interferometry", *thèse de doctorat*, Stanford University, Stanford, (2000)
- [GUSTAVSON 00-2] T. Gustavson, A. Landragin, M. Kasevich, "Rotation sensing with a dual-atom interferometer Sagnac gyroscope", *Class. Quantum Grav.*, **17**, p 1 (2000)

- [HAKIM 94] R. Hakim, "Gravitation Relativiste", *ed. InterEditions / CNRS Editions*, (1994), ISBN 2729605193
- [HARIHARAN 75] P. Hariharan, "Sagnac or Michelson-Sagnac interferometer ? ", *Appl. Opt.*, **14**, 10, p 2319, (1975)
- [HARZER 14] P. Harzer, *Astron. Nachr.*, **198**, p 378, (1914)
- [HASSELBACH 88] F. Hasselbach, M. Nicklaus, *Physica B*, **151**, p 230, (1988)
- [HAUGAN 80] M. P. Haugan, M. O. Scully, K. Just, "A Proposed Optical Test of Preferred Frame Cosmologies", *Phys. Lett.*, **77A**, 1, p 88, (1980)
- [HEER 61] C. V. Heer, "Interference of electromagnetic and matter waves in a nonpermanent gravitational field", *Bull. Am. Phys. Soc.*, **6**, p 58, (1961)
- [HEHL 90] F. W. Hehl, W.-T. Ni, "Inertial effects of a Dirac particle", *Phys. Rev. D*, **42**, p 2045, (1990)
- [HOLLEVILLE 00] D. Holleville, J. Fils, P. Petit, N. Dimarcq, A. Clairon, P. Bouyer, CH. Bordé, Ch. Salomon, "Réalisation d'un gyromètre à atomes froids", *J. Phys. IV France*, **10**, Pr8-171, (2000)
- [HOUDE 00] O. Houde, D. Kadio, L. Pruvost, "Cold Atom Beam Splitter Realized with Two Crossing Dipole Guides", *Phys. Rev. Lett.*, **85**, p 5543, (2000)
- [IEEE – 74] "IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Degree-of-Freedom Rate-Integrating Gyros ", *Published by The Institute of Electrical and Electronical Engineers*, New York, (1974)
- [IEEE – 81] "IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros", *Published by The Institute of Electrical and Electronical Engineers*, New York, (1981)
- [ISHIKAWA 94] J. Ishikawa, F. Riehle, J. Helmcke, Ch. J. Bordé, "Strong-field effects in coherent saturation spectroscopy of atomic beams", *Phys. Rev. A*, **49**, 6 , p 4794, (1994)
- [JOHNSON 95] K. Johnson, A. Chu, T. Lynn, K. Berggren, M. Shahriar, M. Prentiss, "Demonstration of a nonmagnetic blazed-grating atomic beam splitter", *Opt. Lett.*, **20**, 11, p 1310, (1995)
- [JONES 76] B. F. Jones, *Astron. J.*, **81**, p 455, (1976)
- [KASEVICH 91] M. Kasevich, D. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu, " Atomic Velocity Selection using Stimulated Raman Transitions", *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 18, p 2297, (1991)
- [KASEVICH 91-2] M. Kasevich, S. Chu, "Atomic Interferometry Using Stimulated Raman transitions" , *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 181, (1991)
- [KASEVICH 92] M. Kasevich, S. Chu, , *Phys. Rev. Lett.*, **69**, p 1741, (1992)
- [KEITH 91] D.W. Keith, C.R. Ekstrom, Q.A. Turchette, D.E. Pritchard, "An Interferometer for Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **66**, p 2693, (1991)
- [KINOSHITA 96] T. Kinoshita, "The fine structure constant", *Rep. Prog. Phys.*, **59**, p 1459, (1996)
- [KITCHING 00] J. Kitching, S. Knappe, N. Vukicevic, L. Hollberg, R. Wynands, W. Weidemann, "A microwave frequency reference based on VCSEL-driven dark line resonance in Cs vapor", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **49**, p 1313, (2000)

- [KOBAYASHI 81] S. Kobayashi, T. Kimura, "Injection locking in AlGaAs semiconductor laser", *IEEE J. Quantum Electron.*, **QE-17**, p 681, (1981)
- [KREBS 80] J.J. Krebs, W.G. Maisch, G.A. Prinz, D.W. Forester, "Applications of magneto-optics in ring laser gyroscopes", *IEEE Trans. on Magnetics*, **MAG-16**, 5, p 1179, (1980)
- [KURODA 89] K. Kuroda, N. Mio, "Test of a Composition-Dependent Force by a Free-Fall Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **62**, p 1941, (1989)
- [LÄMMERZAHN 95] C. Lämmerzahl, Ch. Bordé, "Rabi oscillation in gravitational field : Exact solution", *Phys. Lett. A*, **203**, p 59, (1995)
- [LANDRAGIN 99] A. Landragin, T. L. Gustavson, M.A. Kasevich, "Precision atomic gyroscope", *Laser Spectroscopy XIV*, Edited by R. Blatt, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, World Scientific, Singapore, p 170 (1999)
- [LANGEVIN 21] P. Langevin, *C. R. Acad. Sci.*, **173**, p 831, (1921)
- [LAURENT 98] Ph. Laurent, P. Lemonde, E. Simon, G. Santarelli, A. Clairon, N. Dimarcq, P. Petit, C. Audoin, C. Salomon, "A cold atom clock in absence of gravity", *Eur. Phys. J. D*, **3**, p 201, (1998)
- [LAWRENCE 98] A. Lawrence, "Modern Inertial Technology : Navigation, Guidance, and Control", Ed. Springer, (1998) second edition, ISBN 0 387 98507 7
- [LÉGER 97] P. Léger, "Gyroscopes mécaniques vibrant", *Revue technique de l'ingénieur, traité mesures et contrôle*, France, (1997)
- [LEMONDE 97] P. Lemonde, « PHARAO : étude d'une horloge spatiale utilisant des atomes refroidis par laser : réalisation d'un prototype », *Thèse de doctorat de l'université Paris VI*, Paris, (1997)
- [LENEF 97] A. Lenef, T. D. Hammond, E. T. Smith, M. S. Chapman, R. A. Rubenstein, D. E. Pritchard, "Rotation Sensing with an Atom Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, p 760, (1997)
- [LENSE 18] J. Lense, H. Thirring, *Phys. Z.*, **19**, p 156, (1918)
- [LEONBERGER 82] F.J. Leonberger, "Guided-wave electro-optic modulators", in *Fiber-Optic Rotation Sensors*, Edited by S. Ezekiel, H.J. Arditty, Springer-Verlag, New-York, p 130 (1982)
- [LIN 78] S. C. Lin, T. G. Giallorenzi, "Sensitivity analysis of the Sagnac-effect optical-fiber ring interferometer", *Appl. Opt.*, **18**, p 915, (1978)
- [LODGE 93] O. J. Lodge, *Philos. Trans. R. Soc. London*, **184**, p 727, (1893)
- [LUCAS-LECLIN 98] G. Lucas-Leclin, "Importance des propriétés spectrales des lasers pour les performances des horloges atomiques à pompage optique", *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, Orsay, (1998)
- [LYNCH 84] D. D. Lynch, "Hemispherical resonator gyro", in "Inertial technology for the future" *IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems* AES-20, **4**, p 414, (1984)
- [MACEK 63] W. M. Macek, T. M. Davis Jr, " Rotation Rate Sensing with Travelling-Wave Ring Lasers", *Appl. Phys. Lett.*, **2**, p 67, (1963)
- [MASHHOON 88] B. Mashhoon, "Neutron Interferometry in a Rotating Frame of Reference", *Phys. Rev. Lett.*, **61**, p 2639, (1988)

- [METCALF 99] H. J. Metcalf, P. Van der Straten, "Laser cooling and trapping", *Ed. Springer-Verlag*, New-York, (1999)
- [MATTHEWS 89] A. Matthews, H. Welter, "Cost-effective, high-accuracy inertial navigation", *J. Inst. Nav.*, **36**, 2, p 157, (1989)
- [MCGUIRK 00] J. McGuirk, M. Snadden, M. Kasevich, "Large Area Light-Pulse Atom Interferometry", *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 21, p 4498, (2000)
- [MICHELSON 87] A. A. Michelson, E. W. Morley, *Am. J. Sci.*, **34**, p 333, (1887)
- [MICHELSON 25] A. A. Michelson, H. G. Gale, F. Pearson, *Astrophys. J.*, **61**, p 137, (1925)
- [MISNER 73] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, "Gravitation", *ed. Freeman*, San Francisco, (1973), ISBN 0716703343
- [MOLER 92] K. Moler, D. Weiss, M. Kasevich, S. Chu, "Theoretical analysis of velocity selective Raman transitions", *Phys. Rev. A*, **45**, 1, p 342, (1992)
- [MORINAGA 88] A. Morinaga, J. Helmcke, *Appl. Phys. B*, **45**, p 273, (1988)
- [MORINAGA 89] A. Morinaga, F. Riehle, J. Ishikawa, J. Helmcke, *Appl. Phys. B*, **48**, p 165, (1989)
- [MORINAGA 93] A. Morinaga, T. Tako, N. Ito, "Sensitive measurement of phase shifts due to ac Stark effect in a Ca optical Ramsey interferometer", *Phys. Rev. A*, **48**, p 1364, (1993)
- [MORINAGA 96] A. Morinaga, M. Nakamura, T. Kurosu, N. Ito, "Phase shift induced from the dc Stark effect in an atom interferometer comprised of four copropagating laser beams", *Phys. Rev. A*, **54**, 1, p R21, (1996)
- [MUHLEMAN 70] D. O. Muhleman, R. D. Ekers, E. B. Fomalont, "Radio Interferometric Test of the General Relativity", *Phys. Rev. Lett.*, **24**, p 1377, (1970)
- [MÜLLER 95] J. Müller, D. Battermann, V. Rieger, K. Sengstock, U. Sterr, W. Ertmer, *Appl. Phys. B*, **60**, p 199, (1995)
- [NEWTON 62] I. Newton, "Principia", *University of California Press, Berkeley*, vol 1, p 10, (1962)
- [OVERHAUSER 74] A. W. Overhauser, R. Colella, "Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference", *Phys. Rev. Lett.*, **33**, p 1237, (1974)
- [PAGE 75] L. A. Page, "Effect of Earth's Rotation in Neutron Interferometry", *Phys. Rev. Lett.*, **35**, p 543, (1975)
- [PERCIVAL 97] I. C. Percival, W. T. Stunz, "Detection of spacetime fluctuations by a model matter interferometer", *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **453**, p 431, (1997)
- [PEREZ 84] J.P. Perez, "Optique, fondements et applications", *Ed. Masson*, Paris, (1984) ISBN 2-225-85213-8
- [PETERS 98] A. Peters, "High precision gravity measurements using atom interferometry", thèse de doctorat, Stanford University, Stanford, (1998)
- [PETERS 99] A. Peters, C. Keng Yeow, S. Chu, "Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms", *Nature (London)*, **400**, p 849, (1999)
- [PFAU 93] T. Pfau, Ch. Kurtsiefer, C. Adams, M. Sigel, J. Mlynek, "Magneto-Optical Beam Splitter for Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 21, p 3427, (1993)
- [PLEBANSKI 60] J. Plebanski, *Phys. Rev.*, **118**, p 1369, (1960)

- [PLESKA 00] E.M.A. Pleska, J.F. Kieffer, P. Bouniol, " les senseurs inertiels du XXI<sup>e</sup> siècle ", *Revue scientifique et technique de la défense*, **49**, p 115, juillet (2000)
- [POST 67] E.J. Post, "Sagnac Effect", *Rev. Mod. Phys.*, **39**, p 475, (1967)
- [POUND 60] R. V. Pound, G. A. Rebka, "Apparent weight of photons", *Phys. Rev. Lett.*, **4**, p 337, (1960)
- [QUICK 84] W. H. Quick, "Theory of the vibrating strings as an angular motion sensor", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, p 523, sept. (1964)
- [RAAB 87] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard, "Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure", *Phys. Rev. Lett.*, **59**, p 2631, (1987)
- [RADIX 67] J.C. Radix, "La navigation par inertie", *Ed. Que sais-je ?*, Paris, **1235**, (1967)
- [RAMSEY 56] N.F. Ramsey, "Molecular beams", *Ed. Oxford Uni. Press*, Oxford, (1956)
- [RASEL 95] E. Rasel, M. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, A. Zeilinger, " Atom wave Interferometry with Diffraction Grating of Light", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 14, 2633, (1995)
- [RASEL 00] E.M. Rasel et al., "HYPER : Hyper-Precision Cold Atom Interferometry in Space", *ESA Assessment Study Report*, ESA-SCI(2000)10, (2000)
- [RAUCH 74] H. Rauch, W. Treimer, U. Bonse, *Phys. Lett.*, **47A**, p 425, (1974)
- [REASENBERG 79] R. D. Reasenberg, I. I. Shapiro, P. E. MacNeil, R. B. Goldstein, J. C. Breidenthal, J. P. Brenkle, D. L. Cain, T. M. Kaufman, T. A. Komarek, A. I. Zygielbaum, *Astrophys. J.*, **234**, p L219, (1979)
- [REICHEL 95] J. Reichel, F. Bardou, M. Ben-Dahan, E. Peik, S. Rand, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, "Ramn cooling of cesium atom below 3 nK : new approach inspired by Levy flights statistics", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, p 4575, (1995)
- [RIEGER 93] V. Rieger, K. Sengstock, U. Sterr, J. Müller, W. Ertmer, *Opt. Commun.*, **99**, p 172, (1993)
- [RIEHLE 91] F. Riehle, Th. Kister, A. Witte, J. Helmcke, Ch. Bordé, "Optical Ramsey Spectroscopy in a Rotating Frame : Effect in a Matter-Wave Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **67**, p 177 (1991)
- [RINGOT 98] J. Ringot, Y. Lecoq, J. C. Garreau, P. Szriftgiser, "Generation of phase-coherent laser beams for Raman spectroscopy and cooling by direct current modulation of a diode laser", soumis à EPJO, (1998)
- [ROBERTSON 91] D. S. Robertson, W. E. Carter, W. H. Dillinger, *Nature*, **349**, p 768, (1991)
- [ROLL 64] P. G. Roll, R. V. Krotkov, R. H. Dicke, *Ann. Phys. (NY)*, **26**, p 442, (1964)
- [ROOKS 95] M. J. Rooks, R. C. Tiberio, M. S. Chapman, T. D. Hammond, E. T. Scmith, A. Lenef, R. A. Rubenstein, D. E. Pritchard, S. Adams, *J. Vac. Sci. Technol.*, **B13**, p 2745, (1995)

- [ROSENTHAL 62] A. H. Rosenthal, "Regenerative circulatory multiple-beam interferometry for the study of light propagation effect", *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, p 1143, (1962)
- [ROWE 99] C. H. Rowe, U. K. Schreiber, S. J. Cooper, B. T. King, M. Poulton, G. E. Stedman, "Design and operation of a very large ring laser gyroscope", *Appl. Opt.*, **38**, p 2516, (1999)
- [SAGNA 96] N. Sagna, "Refroidissement d'atomes de césium : étude expérimentale et théorique sur les caractéristiques du piègeage", Thèse de doctorat, Université de Neuchatel, (1996)
- [SAGNAC 13] G. Sagnac, "L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme", *C. R. Acad. Sci.*, **157**, p 708, (1913)
- [SAGNAC 14] G. Sagnac, *J. Phys. (Paris)*, **4**, p 177, (1914)
- [SAKURAI 90] J. J. Sakurai, "Comments on quantum-mechanical interference due to the Earth's rotation", *Phys. Rev. D*, **21**, p 2993, (1990)
- [SANTARELLI 96] G. Santarelli, "Contribution à la réalisation d'une Fontaine atomique", *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI*, Paris, (1996)
- [SAUMONT 88] R. Saumont, "Analyse dimensionnelle et similitude en physique fondamentale", *Editions Européennes*, Antony, (1988)
- [SAUMONT 00] R. Saumont, "Antigravitation mythe ou réalité ?", *Fusion*, **81**, p 9, (2000)
- [SAVALLI 00] V. Savalli, "Etude à haute résolution de la spécularité d'un miroir atomique à onde évanescente", *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI*, Paris, (2000)
- [SCHIFF 60] L. Schiff, "Possible new experimental test of general relativity theory", *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 5, p 215, (1960)
- [SCHMIEDMAYER 97] J. Schmiedmayer, M. Chapman, C. Ekström, T. Hammond, D. Kokorowski, A. Lenef, R. Rubenstein, E. Smith, D. Pritchard, "Optics and interferometry with atoms and molecules", in *Atom Interferometry by P. Berman, Ed. Academic Press*, p 1, (1997)
- [SCHUTZ 84] B. F. Schutz, "gravitational waves on the back of an envelope", *Am. J. Phys.*, **52**, p 412, (1984)
- [SCULLY 81] M. O. Scully, M. S. Zubairy, K. Just, "Proposed optical test of metric gravitation theories", *Phys. Rev. A*, **24**, 4, p 2009, (1981)
- [SHAPIRO 64] I. I. Shapiro, "Fourth test of general relativity", *Phys. Rev. Lett.*, **13**, p 789, (1964)
- [SHUPE 80] D. M. Shupe, "Thermally induced nonreciprocity in the fiber-optic interferometer", *Appl. Opt.*, **19**, p 654, (1980)
- [SIEGMAN 86] A. Siegman, "Lasers", *University Science Books*, 1986
- [SIMON 97] E. Simon, « Vers une stabilité et une exactitude de  $10^{-16}$  pour les horloges atomiques : le rayonnement de corps noir, la détection optique », *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, Orsay, (1997)

- [SMITH 89] R. B. Smith, "Selected Papers on Fiber-Optic Gyroscopes", *SPIE Milestone Series MS8*, (1989)
- [SMOOT 77] G. F. Smoot, M. V. Gorenstein, R. A. Muller, "Detection of Anisotropy in the Cosmic Blackbody Radiation", *Phys. Rev. Lett.*, **39**, 14, p 898, (1977)
- [SMOOT 79] G. F. Smoot, P. M. Lubin, "Southern Hemisphere Measurements of the Anisotropy in the Cosmic Microwave Background Radiation", *Ap. J.*, **234**, p L83, (1979)
- [SNADDEN 98] M. Snadden, J. McGuirk, P. Bouyer, K. Haritos, M. Kasevich, "Measurement of the Earth's Gravity Gradient with an Atom Interferometer-Based Gravity Gradiometer", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5, p 971, (1998)
- [SORTAIS 00] Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, A. Clairon, Ch. Salomon, C. Williams, "Cold Collision Frequency Shifts in a  $^{87}\text{Rb}$  Atomic Fountain", *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 15, p 3117, (2000)
- [STAUDENMANN 80] J. -L. Staudenmann, S. A. Werner, R. Colella, A. W. Overhauser, "Gravity and inertia in quantum mechanics", *Phys. Rev. A*, **21**, p 1419, (1980)
- [STERR 97] U. Sterr, K. Sengstock, W. Ertmer, "Atom Interferometry based on separated light fields", in *Atom Interferometry* by P. Berman, Ed. Academic Press, p 293, (1997)
- [STOREY 94] P. Storey, C. Cohen-Tannoudji, "The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial", *J. Phys. II France*, **4**, p 1999, (1994)
- [SZYMANIEC 97] K. Szymaniec, S. Guezali, L. Cognet, A. Clairon, "Injection locking of diode lasers to frequency modulated source", *Opt. Commun.*, **144**, p 50, (1997)
- [TOURRENC] P. Tournenc, "Gravitation et Relativité", ed. Armand Colin, (19 ??), ISBN 2200212097
- [TSAI 88] C.-H. Tsai, D. Neilson, "New quantum interference effect in rotating systems", *Phys. Rev. A*, **37**, p 619, (1988)
- [ULRICH 79] R. Ulrich, M. Johnson, "Fiber ring interferometer : Polarization analysis", *Opt. Lett.*, **4**, p 152, (1979)
- [VALI 76] V. Vali, R. W. Shorthill, "Passive ring interferometer", *Appl. Opt.*, **15**, p 1099, (1976)
- [VAN PATTEN 76] R. A. Van Patten, C. W. F. Everitt, "Possible Experiment with Two Counter-Orbiting Drag-Free Satellites to Obtain a New Test of Einstein's General Theory of Relativity and Improved Measurements in Geodesy", *Phys. Rev. Lett.*, **36**, p 629, (1976)
- [VANIER 89] J. Vanier, C. Audoin, "The quantum physics of atomic frequency standards", Ed. Adam Hilger Ltd, Bristol, (1989)
- [VANIER 98] J. Vanier, A. Godone, F. Levi, "Coherent Population Trapping in Cesium: Dark lines and coherent microwave emission", *Phys. Rev. A*, **58**, 3, p 2345, (1998)

- [VESSOT 79] R. F. C. Vessot, M. W. Levine, *J. Gen. Rel. and Grav.*, **10**, p 181, (1979)
- [WEISS 93] D. Weiss, B. Young, S. Chu, " Precision Measurement of the Photon Recoil of an Atom using Atomic Interferometry", *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 18, p 2706, (1993)
- [WEITZ 96] M. Weitz, T. Heupel, T. Hansch, , "Multiple Beam Atomic Interferometer", *Phys. Rev. Lett.*, **77**, p 2356, (1996)
- [WERNER 79] S. A. Werner, J.-L. Staudenmann, R. Colella, "Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron ", *Phys. Rev. Lett.*, **42**, p 1103, (1979)
- [WEYERS 97] S. Weyers, E. Aucoeurier, C. Valentin, N. Dimarcq, "A continuous beam of cold cesium atoms extracted from a two-dimensional magneto-optical trap", *Opt. Commun.*, **143**, p. 30, (1997)
- [WILKINSON 87] J. R. Wilkinson, "Ring lasers", *Prog. Quant. Electr.*, **11**, p 1, (1987)
- [WILL 71] C. M. Will, " Theoretical frameworks for testing relativistic gravity, II : Parametrized post-Newtonian Hydrodynamics, and the Nordtvedt effect ", *Astrophys. J.*, **163**, p 611, (1971)
- [WILL 72-1] C. M. Will, K. Nordtvedt, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. I. Preferred-frame theories and an Extended PPN formalism", *Astrophysics*, **177**, p 757, (1972)
- [WILL 72-2] C. M. Will, K. Nordtvedt, "Conservation laws and preferred frames in relativistic gravity. II. Experimental evidence to rule out preferred-frame theories of gravity " *Astrophysics*, **177**, p 775, (1972)
- [WILL 81] C. M. Will "Theory and Experiment in Gravitational Physics", *ed. Cambridge University Press*, Cambridge, (1981), ISBN 0521439736
- [WYSOCKI 94] P. F. Wysocki, M. J. F. Digonnet, B. Y. Kim, H. J. Shaw, "Characteristics of Erbium-doped superfluorescent fiber sources for interferometric sensor applications", *IEEE J. Lightwave Tech.*, **12**, p 550, (1994)
- [YOUNG 97] B. Young, M. Kasevich, S. Chu, "Precision atom interferometry with light pulses", *in Atom Interferometry by P. Berman, Ed. Academic Press*, p 363, (1997)
- [ZEISKE 95] K. Zeiske, G. Zinner, F. Riehle, J. Helmcke, *Appl. Phys. B*, **60**, p 205, (1995)
- [ZIMMERMAN 64] J. E. Zimmerman, J. E. Mercereau, "Quantized Flux Pinning in Superconducting Niobium", *Phys. Rev. Lett.*, **13**, p 125, (1964)
- [ZIMMERMAN 65] J. E. Zimmerman, J. E. Mercereau, "Compton Wavelength of Superconducting Electrons", *Phys. Rev. Lett.*, **14**, p 887, (1965)





## **Résumé :**

L'objectif de la thèse était d'utiliser les développements de la manipulation d'atomes par lasers pour réaliser un appareil capable de mesurer les vitesses de rotation avec une sensibilité équivalente à celle des meilleurs gyromètres optiques. Les gyromètres atomiques, comme les gyromètres optiques sont fondés sur l'effet Sagnac. Cet effet est l'apparition d'un déphasage à la sortie d'un interféromètre d'aire non nulle, lorsque le dispositif est en rotation. On montre que l'effet Sagnac appliqué aux ondes de matière associées à des atomes de césium par exemple, est  $10^{11}$  fois plus sensible que lorsqu'il est appliqué aux ondes lumineuses.

La principale difficulté du dispositif est de séparer et de recombiner de façon cohérente les ondes atomiques. Dans notre dispositif, ceci est réalisé dans la zone d'interaction, grâce à des transitions à deux photons appelées transitions Raman stimulées. C'est l'impulsion des deux photons qui, une fois transférée à l'atome au cours de la transition, va provoquer la séparation angulaire des deux paquets d'ondes atomiques.

La réalisation du dispositif s'appuie sur un grand nombre de nouvelles solutions techniques qui ont été validées au cours de la thèse. L'un des soucis principal a été de réaliser un appareil compact et suffisamment insensible aux paramètres extérieurs (champ magnétique, température, ...) pour qu'il puisse être transportable. Notre source atomique est une source à atomes refroidis par lasers, permettant ainsi d'avoir une zone d'interaction réduite tout en conservant un très bon niveau de performance. L'appareil est également sensible aux accélérations ; une technique de double jets atomiques contra-propageant a donc été mise en œuvre pour discriminer les déphasages liés à la rotation et à l'accélération.

## **Mots-clés :**

interférométrie atomique, gyromètre, effet Sagnac, Mach-Zehnder, Ramsey-Bordé, atomes refroidis par laser

## **Abstract :**

The purpose of my thesis was to use the recent developments of atom laser manipulation to build a device that can measure rotation rate as accurately as the best optical gyroscopes. Like optical gyroscopes, atomic gyroscopes are based on the Sagnac effect. The Sagnac effect consists in a extra phase shift at the output of a non zero area interferometer, when it is rotating. We show that the Sagnac effect for matter waves of Cesium atoms, for example, is  $10^{11}$  times more sensitive than for optical waves.

The main difficulty concerning the device is to coherently separate and recombine the atomic waves. We do this in the interaction zone thanks to two-photon transitions called stimulated Raman transitions. The impulses of the two photons, once transferred to the atom, is what provokes the angular separation for the two atomic wave packets.

Building the device implied finding many new technical solutions, which proved to work well. One of the main problems was to build a device small enough, and as unchanged by outside parameters (magnetic fields, temperature, etc.) as possible, to be transportable. Our atomic source is a laser cooled atom source, which allows a small interaction zone while maintaining a very good level of performance. The device is also sensitive to accelerations ; a counter-propagating double atomic jet technique has therefore been used to discriminate between rotation and acceleration phase shift.

## **Keywords**

Atomic interferometry, gyroscope, Sagnac effect, Mach-Zehnder, Ramsey-Bordé, laser cooled atoms