



HAL
open science

Theoremes limites pour les fonctionnelles du periodogramme

Gilles Fay

► **To cite this version:**

Gilles Fay. Theoremes limites pour les fonctionnelles du periodogramme. Mathématiques [math]. Ecole nationale supérieure des telecommunications - ENST, 2000. Français. NNT: . tel-00001139

HAL Id: tel-00001139

<https://theses.hal.science/tel-00001139>

Submitted on 26 Feb 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÉORÈMES LIMITES POUR LES FONCTIONNELLES DU PÉRIODOGRAMME

Gilles FAÿ

Thèse soutenue le 28 janvier 2000 pour obtenir le grade de

Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
Spécialité « Signal et Images »

devant le jury composé par

Danièle Florens
Marie-Claude Viano
Rainer von Sachs
Judith Rousseau
Patrice Bertail
Eric Moulines

Présidente
Rapporteurs
Examineurs
Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier très sincèrement Eric Moulines qui a dirigé ce travail pendant trois ans et qui a su l'orienter vers ce sujet intéressant et porteur. Sa rigueur scientifique et son enthousiasme inébranlable ont été d'une grande aide.

Je remercie Philippe Soulier pour m'avoir dispensé ses lumières sur de nombreux problèmes de statistique à l'occasion de notre collaboration.

Je remercie Marie-Claude Viano qui a accepté de rapporter mon travail, aussi indigeste soit-il (surtout en période de fêtes); je suis content et honoré de la compter comme collègue l'année prochaine au laboratoire «Statistiques et Probabilités» de l'Université Lille-I.

Mes remerciements vont également à Rainer von Sachs qui a considéré ces recherches avec attention et bienveillance. Ses travaux antérieurs ont été pour moi un fructueux point de départ, et ses nombreuses remarques sur le présent rapport en ont grandement amélioré la qualité.

Je remercie enfin Danièle Florens pour avoir bien voulu présider mon jury, Judith Rousseau et Patrice Bertail pour y avoir participé.

J'ai passé quatre années joyeuses et pleines de rencontres au département «Traitement du signal et des images» de l'ENST. Merci à mes «collègues» de luxe : Stéphanie Dubost, Gersende Fort, Christian Berthommier, Matthieu Carré, Cyril Touzé, Olivier Thomas, Olivier Bermond, Randal Douc, François Roueff, Vincent Buchoux, Jamal Najim, Jean-François Cardoso, Olivier Cappé, Mila Nikolova. Je suis spécialement reconnaissant envers ces deux dernières personnes pour leur ultime relecture. Merci aussi à Frédéric Bimbot pour m'avoir accueilli au département.

L'Annexe A devait faire l'objet d'un article dans *IEEE Trans. in Signal Processing*. Il n'en sera rien, semble-t-il. Je ne remercie pas Karim Drouiche.

J'ai terminé ma thèse en tant qu'ATER à Dauphine. Je remercie Mme Bellec, Directrice de l'UFR «Mathématiques de la décision» pour m'avoir très gentiment proposé un service intéressant et un emploi du temps adapté au mieux à cette période.

Le périodogramme ne fut pas l'unique facteur de sudation ces derniers temps. Merci à l'Enorme Football Club pour avoir servi de soupape enchantée à mes efforts intellectuels ou dactylographiques.

Je remercie enfin mes amis, en particulier mes camarades mathématiciens Nicolas Vayatis, Yves Capdeboscq, Yann Gousseau et Laurent Charles, ainsi que mon cher ami Sébastien et ma tendre soeur Anne-Florence.

Ce travail est dédié à mes parents pour la confiance et l'écoute qu'ils m'ont toujours accordées, et à Claire pour «tout ... et même le reste».

Table des matières

Introduction à la thèse	7
Présentation générale	7
Structure du document et résumé des chapitres	13
Références bibliographiques de l'auteur	16
Bibliographie de l'introduction	16
Première partie. Préambule et résultats principaux	19
Chapitre 1. Généralités sur les développements d'Edgeworth	21
1.1. Introduction et outils	21
1.2. Principaux théorèmes	23
1.3. Inversion de fonction caractéristique	24
1.4. Développements d'Edgeworth dans le cas i.i.d mono-dimensionnel	26
1.5. Généralisation aux tableaux triangulaires	32
1.6. Applications au périodogramme	36
Bibliographie du chapitre 1	40
Chapitre 2. Le périodogramme du bruit blanc et d'un processus linéaire en courte portée	43
2.1. Introduction et définitions	43
2.2. Résultats élémentaires	44
2.3. Fonctionnelles linéaires du périodogramme	49
2.4. Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme d'un processus i.i.d.	50
2.5. Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme d'un processus linéaire	55
Bibliographie du chapitre 2	60
Deuxième partie. Articles	63
Chapitre 3. Le périodogramme du bruit blanc	65
3.1. Introduction	65
3.2. Main result	68
3.3. Non linear functionals of the periodogram	70
3.4. Functional central limit theorem for the empirical spectral measure	72
3.5. Proof of Theorem 3.1	73
3.6. Proof of Proposition 3.5 and of Lemmas 3.1 and 3.2	74
3.7. Proof of Theorem 3.4	78
3.8. Proof of Lemma 3.3	79
Bibliography	85
Chapitre 4. Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme	87
4.1. Introduction	87

4.2. Assumptions and main results	88
4.3. Applications	92
4.4. Proof of Theorem 4.1	96
4.5. Edgeworth expansions	99
4.6. Bounds related to the Bartlett decomposition	102
4.7. Proof of Lemma 4.1	105
4.8. Proof of Proposition 4.4	107
Bibliography	109
Chapitre 5. Développements d'Edgeworth pour les tableaux multidimensionnels infinis	111
5.1. Introduction	111
5.2. Notations and assumptions	112
5.3. Main result	114
5.4. Applications	115
5.5. Appendix : Proof of Lemmas 5.2-5.4	123
5.6. Appendix : Proof of Lemma 5.1	126
Bibliography	127
Annexes	129
Annexe A. Calculs pour le chapitre 2	131
A.1. Preuve du Théorème 2.7	131
Annexe B. Un nouveau test de blancheur	135
Bibliographie générale	165

Introduction à la thèse

Présentation générale

Processus stochastiques à temps discret. Les processus stochastiques à temps discret constituent une classe de modèles mathématiques très utilisés pour décrire l'évolution temporelle de phénomènes, naturels ou non, ayant un comportement aléatoire. L'utilisation de ces processus permet de prendre en compte l'imprédictibilité des observations futures d'une série chronologique, une observation étant alors vue comme la réalisation d'une certaine variable aléatoire, et l'observation d'une série complète comme la réalisation d'un processus aléatoire.

L'inférence statistique pour de tels processus s'est beaucoup développée depuis une cinquantaine d'années (voir par exemple Azencott et Dacunha-Castelle, 1984; Gouriéroux et Monfort, 1997; Brockwell et Davis, 1991; Hamilton, 1994 et les références contenues dans ces ouvrages) et l'application de ces modèles est toujours active pour le traitement du signal, l'analyse et la prédiction de séries financières, la modélisation de trafic par exemple. Nous avons choisi une approche fréquentielle de ces problèmes.

Densité spectrale et périodogramme. Nous nous concentrons dans cette thèse sur l'étude de processus centrés et stationnaires au second ordre. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un tel processus et soit γ sa fonction d'autocovariance

$$\gamma(\tau) = \mathbb{E}(X_t X_{t+\tau}), \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

On dit de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ qu'il est faiblement dépendant (ou à courte portée, ou à mémoire courte), si sa fonction d'autocovariance est absolument sommable. Dans le cas contraire ($\sum_{\tau \in \mathbb{Z}} |\gamma(\tau)| = \infty$), on parlera de processus fortement dépendant (ou à longue portée, ou à mémoire longue)

Les coefficients d'autocovariance sont les coefficients de Fourier d'une mesure positive, la mesure spectrale du processus. Nous supposons dans la suite que cette mesure spectrale admet une densité, dite spectrale, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$, que nous notons $f(x)$. Lorsque $\sum_{\tau \in \mathbb{Z}} |\gamma(\tau)| < \infty$, la densité spectrale est définie comme la transformée de Fourier des coefficients d'autocovariance

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \gamma(\tau) e^{i\tau x}. \quad (\text{I.1})$$

Lorsque $\sum_{\tau \in \mathbb{Z}} |\gamma(\tau)| = \infty$, cette égalité doit être prise au sens de L^2 . On s'intéresse ici à l'estimation de fonctionnelles non-linéaires de la densité spectrale (voir exemples ci-dessous).

Supposons que l'on dispose de n observations X_1, \dots, X_n consécutives du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Nous pouvons alors évaluer les coefficients d'autocovariance empiriques

$$\hat{\gamma}_n(\tau) = \begin{cases} n^{-1} \sum_{t=1}^{n-|\tau|} X_t X_{t+\tau} & \text{si } 0 \leq |\tau| \leq n-1 \\ 0 & \text{si } |\tau| \geq n \end{cases}$$

ou directement le périodogramme des observations, défini comme le module au carré de la transformée de Fourier discrète des observations,

$$I_n(x) := \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{itx} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \hat{\gamma}_n(\tau) e^{i\tau x}. \quad (\text{I.2})$$

Cette dernière relation fait du périodogramme un estimateur naturel de la densité spectrale définie en (I.1). Le plus souvent, on évalue le périodogramme aux fréquences de Fourier

$$I_{n,k} = I_n(x_k) \quad , \quad x_k = 2k\pi/n \quad , \quad k = 1, \dots, n,$$

cette évaluation pouvant être effectuée au moyen d'algorithmes rapides. Le périodogramme est à la base de beaucoup de procédures d'inférence et a été étudié par de nombreux auteurs. Voir par exemple Hannan (1970), Priestley (1981), Brillinger (1981), Dzhaparidze (1986), Rosenblatt (1985).

Il est bien connu que sous des hypothèses de régularité de la densité spectrale, le périodogramme est un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale, mais qu'il n'est pas consistant*. Aussi, le périodogramme d'un processus indépendant et identiquement distribué (i.i.d) gaussien évalué aux fréquences de Fourier de $]0, \pi[$ forme une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées selon des lois du χ^2 centré à deux degrés de liberté. Cette propriété n'est vérifiée que dans ce cas. Toutefois, sous des hypothèses de dépendance faible et de moments, pour tout p -uplet (k_1, \dots, k_p) d'entiers distincts fixés, le vecteur

$$(I_{n,k_1}/f(x_{k_1}), \dots, I_{n,k_p}/f(x_{k_p}))' \quad (\text{I.3})$$

converge en loi vers un vecteur de variables indépendantes et identiquement distribuées selon des lois du χ^2 centré à deux degrés de liberté. Ce n'est plus le cas lorsqu'on considère un nombre croissant de fréquences.

Pour les processus fractionnaires à mémoire longue, processus pour lesquels la densité spectrale s'exprime sous la forme

$$f(x) = |1 - e^{ix}|^{-2d} f^*(x), \quad 0 < d < 1/2$$

où f^* est une fonction positive, ce comportement asymptotique n'est plus vérifié : les valeurs du périodogramme sont asymptotiquement biaisées, asymptotiquement corrélées (voir Künsch 1986) et pour tout p -uplet (k_1, \dots, k_p) , le vecteur (I.3) admet une distribution explicite différente de celle annoncée ci-dessus pour les processus faiblement dépendants (voir Deo, 1997).

Le périodogramme est un outil central de l'analyse spectrale, et il continue de faire l'objet de recherches et de publications dans la littérature récente (voir par ex. Davis et Mikosch, 1999; Kokoszka et Mikosch, 1999). Les hypothèses de gaussianité et/ou de dépendance faible sur le processus étudié ont une incidence importante sur la structure du périodogramme du périodogramme et facilitent son étude. Une motivation primordiale des travaux cités et du nôtre est de s'en affranchir.

Notons ici que le périodogramme peut être modifié par deux opérations (compatibles):

- le fenêtrage des données (*data tapering*) qui rend le périodogramme plus robuste aux valeurs aberrantes et réduit son biais (cf. Dahlhaus, 1983; Janas et von Sachs, 1995). Le *tapering* peut être souverain en longue portée (voir par exemple Velasco, 1999; Hurvich et Chen, 1999)

* Une explication intuitive de ce fait est qu'on ne peut estimer les n premiers $\gamma(\tau)$ qui interviennent dans la définition du périodogramme à partir de n observations.

- l’agrégation du périodogramme (*pooling*), qui consiste à sommer m valeurs voisines du périodogramme et peut avoir des effets de réduction de variance. Cette étape s’avère également indispensable pour des questions techniques, par la modification de la distribution du périodogramme qu’elle provoque.

Si nous n’avons pas travaillé sur le périodogramme de données fenêtrées, nous utiliserons en revanche souvent le périodogramme agrégé (notons bien que m est un entier fixé). Dans cette introduction, nous considérerons toujours le périodogramme « brut ».

Problématique. Dans les exemples ci-dessus et beaucoup d’autres applications (toutes celles traitées dans cette thèse), la grandeur d’intérêt s’écrit comme un tableau triangulaire de fonctionnelle du périodogramme, génériquement

$$S_n = \sum_{k=1}^{K_n} \beta_{n,k} \phi_{n,k}(I_{n,k}). \quad (\text{I.4})$$

Les $(\beta_{n,k})$ sont des poids déterministes, les $\phi_{n,k}$ des fonctions mesurables. Que l’on veuille prouver la normalité asymptotique de S_n ou sa convergence en moment, l’intrication de la structure de dépendance des ordonnées du périodogramme ne permet pas d’utiliser les méthodes classiques de preuve (Lindeberg, martingales, mélanges).

Si les fonctions $\phi_{n,k}$ sont *linéaires*, le tableau S_n est une forme quadratique des observations X_1, \dots, X_n ,

$$S_n = \sum_{k,j} \beta_{n,k,j} X_k X_j$$

De nombreux résultats peuvent être obtenus dans un tel contexte, sous des hypothèses variées, de type mélange faible ou de martingales, les formes quadratiques étant un cas simple de U -statistiques (on se référera à Brillinger 1969 pour des résultats élémentaires basés sur les développements de cumulants et à Doukhan, 1994 pour les résultats sous des hypothèses de mélange). Pour les processus fractionnaires à longue mémoire, des résultats sur les formes quadratiques ont été obtenus par Fox et Taquq (1985) pour des processus gaussiens. Ils ont ensuite été étendus aux processus linéaires par Giraitis et Surgailis (1990) puis plus récemment par Ho et Hsing (1997) pour des fonctionnelles plus générales que les formes quadratiques.

La présente recherche s’intéresse aux fonctionnelles *non-linéaires* du périodogramme de la forme (I.4) qui interviennent dans de nombreux problèmes d’estimation paramétrique, semi-paramétrique ou non paramétrique, comme le montrent les exemples qui suivent.

EXEMPLE 1. *Estimation « directe » de la variance de l’innovation.* Celle-ci vaut, par la formule de Kolmogorov

$$\sigma^2 = 2\pi \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f_X(x) dx \right\}.$$

L’estimateur de σ^2 étudié par Chen et Hannan (1980) se déduit du tableau

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(I_{n,k}).$$

EXEMPLE 2. *Régression sur le log-périodogramme.* Dans un contexte paramétrique où la densité spectrale $f(x) = f(x; \theta)$, θ étant un vecteur de paramètres fini, ces estimateurs consistent à

minimiser le risque quadratique

$$C_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\log I_{n,k} - \log f(x_k; \theta))^2.$$

De tels estimateurs ont été proposés (dans un contexte de courte portée) par Taniguchi (1980). Ils sont particulièrement intéressants lorsque $\log f(x; \theta)$ dépend linéairement de θ , auquel cas on est ramené à un problème de régression linéaire. Cette approche a été utilisée en longue portée pour des problèmes paramétriques (Comte et Hardouin, 1997) et semi-paramétriques (voir Moulines et Soulier, 1999).

EXEMPLE 3. *Estimation spectrale robuste.* Soit l'estimateur ponctuel (à noyau) de la densité spectrale $f_X(x)$

$$\hat{f}_n(x) = K^{-1} \sum_{k=-K}^K W_{b_n}(x - y_k) I_{n,k}$$

où la suite b_n et le noyau W sont tels que $\hat{f}_n(x)$ soit consistant (voir Brillinger, 1981, §5.6). Cet estimateur est non robuste (au sens de Huber, 1964). Typiquement, il résiste mal à la contamination du signal par une composante harmonique, se comporte mal en présence d'une sinusoïde parasite au voisinage de la fréquence considérée. Un estimateur robuste de $f(x)$, proposé par von Sachs (1994), s'obtient en résolvant en s l'équation suivante

$$\hat{\Lambda}_{n,x}(s) := K^{-1} \sum_{k=-K}^K W_{b_n}(x - y_k) \phi\left(\frac{I_{n,k}^X}{s} - 1\right) = 0.$$

où la fonction ϕ est une fonction de robustification au sens de Huber; elle est donc non-linéaire. Il est prouvé dans von Sachs (1994) que l'estimateur ainsi construit est consistant, et asymptotiquement normal sous l'hypothèse supplémentaire de gaussianité.

EXEMPLE 4. *Estimation semi-paramétrique du coefficient de différentiation fractionnaire*

Comme nous l'avons vu, un processus fractionnaire est un processus stationnaire au second ordre dont la densité spectrale est de la forme $f(x) = |1 - e^{ix}|^{-2d} f^*(x)$ avec f^* « régulière ». On a donc $f(x) \sim Cx^{-2d}$ au voisinage de zéro. Geweke et Porter-Hudak (1983) ont proposé un estimateur semi-paramétrique de d obtenu en régressant localement le log-périodogramme dans un voisinage de la fréquence nulle, soit

$$(\hat{C}, \hat{d}) = \arg \min \sum_{k=1}^{m_n} (\log I_{n,k} - \log C - 2d \log x_k)^2$$

où m_n est une suite d'entiers positifs telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n/n = 0$. On vérifie que \hat{d} dit « estimateur GPH » s'écrit

$$\hat{d} = \left(\sum_{k=1}^{m_n} L_{n,k}^2 \right)^{-1} \sum_{k=0}^{m_n} L_{n,k} \log I_{n,k}$$

avec, pour $k = 1, \dots, \tilde{n}$, $L_{n,k} = -2 \log |x_k| + 2m_n^{-1} \sum_{j=1}^{m_n} \log |x_j|$. C'est donc bien un tableau de la forme (I.4). Cet estimateur a été étudié par Robinson (1995), Hurvich *et al.* (1998) pour des processus gaussiens.

Pour prouver la normalité asymptotique de S_n , la seule approche classique qui semble applicable est la méthode des moments, qui consiste à prouver la convergence de tous les moments de S_n vers ceux d'une loi gaussienne. Cette approche nécessite en particulier d'évaluer les quantités

$$\mathbb{E}[\phi_{n,k(1)}(I_{n,k(1)}) \dots \phi_{n,k(m)}(I_{n,k(m)})] \quad (\text{I.5})$$

où $(k(1), \dots, k(m))$ est un p -uplet de $\{1, \dots, n\}$. Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est gaussien, les $\phi_{n,k(i)}(I_{n,k(i)})$ sont des fonctions non-linéaires de variables gaussiennes, et il est possible d'évaluer ces moments (de les borner) par des techniques *spécifiques* au cas gaussien, en utilisant des généralisations multidimensionnelles des formules de Mehler (voir Arcones, 1994; également Soulier, 1998). Ces méthodes n'admettent pas d'extension directe.

Nous avons considéré dans ce travail la classe des processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ linéaires, c.-à-d. admettant la représentation

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{t-j} Z_j \quad , \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2 < \infty$$

où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (bruit blanc fort), centrée et de variance 1 (par convention). Cette classe inclut les processus gaussiens. L'étude des tableaux S_n qui en résulte est alors tout à fait non-classique.

Nous avons mené deux approches distinctes, que nous baptisons respectivement « méthode de Bartlett » et « méthode des développements d'Edgeworth directs », pour les raisons qui suivent. La première conduit à des résultats de type « limite centrale », mais ne permet pas d'évaluer les moments de S_n . À l'inverse, la seconde permet d'évaluer des moments de S_n , mais ne permet pas pour l'instant d'en déduire des théorèmes limites.

Méthode de Bartlett. Nous avons utilisé cette méthode pour prouver des principes de limite centrale

$$S_n \Rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \tag{I.6}$$

pour des tableaux de la forme $S_n = \sum_k \beta_{n,k} \phi_{n,k}(I_{n,k})$ où on suppose $\sum \beta_{n,k}^2 = 1$.

Elle dérive de la décomposition de Bartlett (Bartlett, 1955, Walker, 1965), qui relie le périodogramme du processus linéaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à sa densité spectrale f et au périodogramme $(I_{n,k}^Z)$ du bruit blanc Z_1, \dots, Z_n sous-jacent

$$I_{n,k} = 2\pi f(x_k) I_{n,k}^Z + R_{n,k}.$$

Le terme dominant de cette décomposition est $2\pi f(x_k) I_{n,k}^Z$, parfois appelé « pseudo-périodogramme ».

Le terme $R_{n,k}$ est un reste stochastique. Sous des hypothèses de décroissance des (a_j) (qui exclut les processus fortement dépendants) et des conditions de moments sur le bruit i.i.d. $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, on sait prouver typiquement (voir Walker, 1965; Brockwell et Davis, 1991; chapitre 4 de ce document)

$$\mathbb{E}|R_{n,k}|^p \leq C n^{-p/2} \quad \text{uniformément en } k$$

En longue portée, ce résultat n'est plus vérifié. On peut toutefois montrer (Moulines et Soulier, 1999)

$$\mathbb{E}|R_{n,k}/f(x_k)|^p \leq c k^{-p} \log^p(1+k).$$

Formellement, S_n se scinde alors en deux tableaux triangulaires

$$S_n = \sum_{k=1}^{K_n} \beta_{n,k} \phi_{n,k}(2\pi f(x_k) I_{n,k}^Z) + \sum_{k=1}^{K_n} \beta_{n,k} [\phi_{n,k}(I_{n,k}) - \phi_{n,k}(2\pi f(x_k) I_{n,k}^Z)]$$

et le traitement de S_n se scinde en deux volets. Sous des conditions techniques précises sur les fonctions $(\phi_{n,k})$, les poids $(\beta_{n,k})$ et le processus lui-même, on prouve que le second tableau triangulaire vérifie

$$\sum_{k=1}^{K_n} \beta_{n,k} [\phi_{n,k}(I_{n,k}) - \phi_{n,k}(2\pi f(x_k) I_{n,k}^Z)] = o_P(1). \tag{I.7}$$

Le chapitre 4 est en partie consacré à ce résultat dont la preuve est relativement technique parce qu'elle demande une étude précise des restes de Bartlett $(R_{n,k})$. Cependant, sauf dans le cas de fonctions $(\phi_{n,k})$ extrêmement régulières (par exemple deux fois dérivables et à dérivées secondes uniformément bornées), on ne sait calculer les moments de ce tableau.

Pour compléter (I.7) et en déduire (I.6), il reste à prouver que, pour deux réels $\sigma^2 > 0$ et m ,

$$\sum_{k=1}^{K_n} \beta_{n,k} \phi_{n,k}(2\pi f(x_k) I_{n,k}^Z) \Rightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2). \quad (\text{I.8})$$

Ce dernier tableau est une fonctionnelle (*a priori* non-linéaire) du périodogramme d'une suite de variables i.i.d. Nous avons su prouver la normalité asymptotique de tels tableaux par la *méthode des moments*. Pour évaluer *toutes* les quantités de type

$$\mathbb{E}[\phi_{n,k(1)}(I_{n,k(1)}^Z) \cdots \phi_{n,k(m)}(I_{n,k(m)}^Z)], \quad (\text{I.9})$$

nous avons approché les distributions asymptotiques des vecteurs $(I_{n,k(1)}^Z, \dots, I_{n,k(m)}^Z)$ par des développements d'Edgeworth des transformées de Fourier discrètes de la série (non-observée) Z_1, \dots, Z_n , soit les variables aléatoires

$$c_{n,k} = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n Z_t \cos(x_k t) \quad \text{et} \quad s_{n,k} = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n Z_t \sin(x_k t),$$

telles que $I_{n,k}^Z = c_{n,k}^2 + s_{n,k}^2$. Le lemme 3.3 est le résultat crucial car il décrit la structure précise et complexe des moments considérés et qui permet de conclure à la normalité asymptotique (I.8). Tous les détails sur cette étape se trouvent au chapitre 3.

Méthode des développements d'Edgeworth directs. Comme nous l'avons déjà signalé, l'approche précédente souffre d'un inconvénient majeur : nous ne pouvons en général obtenir sur le tableau « reste » un meilleur résultat que la convergence en probabilité (I.7). On ne peut donc pas établir la convergence des moments de S_n par cette méthode. Celle-ci ne permet pas d'estimer, par exemple, le risque quadratique moyen de l'estimateur GPH (de l'Exemple 4), soit la quantité $\mathbb{E}(\hat{d} - d)^2$, ou le risque des estimateurs de régression du log-périodogramme.

Pour prouver la convergence en moment (disons d'ordre 2) d'un tableau S_n de type (I.4), soit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(S_n)^2] = 0,$$

il faut être capable d'évaluer les moments

$$\mathbb{E}[\phi_{n,k}(I_{n,k}) \phi_{n,j}(I_{n,j})]$$

pour $k, j = 1, \dots, n$.

Nous proposons ici une évaluation asymptotique des moments (I.10) par développements d'Edgeworth de la distribution de la transformée de Fourier discrète de X_1, \dots, X_n . Notons que dans la méthode de Bartlett, on estimait des moments similaires, également par développements d'Edgeworth, mais pour le processus i.i.d. sous-jacent, d'où l'appellation « méthode des développements d'Edgeworth *directs* ».

Von Sachs (1994), Janas et von Sachs (1995) montrent la convergence en moment de fonctionnelles non-linéaires du périodogramme (calculé à partir de données éventuellement fenêtrées). Leur technique repose sur un résultat de Götze et Hipp (1983), qui valide le développement d'Edgeworth formel de sommes de vecteurs faiblement dépendants. Les sommes en question ici sont des vecteurs de transformées de Fourier discrètes des observations (dépendantes) X_1, \dots, X_n . Traduite dans le contexte des processus linéaires, les hypothèses de Götze et Hipp imposent une décroissance géométrique aux coefficients du filtre, conditions vérifiées par les processus ARMA

par exemple, mais qui exclut beaucoup de processus faiblement dépendants et tous les processus fortement dépendants.

Nous avons pu exploiter plus loin cette méthode « directe » pour des processus *linéaires*, processus dont les transformées de Fourier discrètes se réécrivent comme un tableau infini du processus i.i.d d'innovation. Par exemple:

$$C_{n,k} := (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t \cos(x_k t) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} Z_j \sum_{t=1-j}^{n-j} a_t \cos(x_k(t+j)). \quad (\text{I.10})$$

En s'inspirant des techniques de preuve classiques pour les sommes *finies* de variables indépendantes (voir Bhattacharya et Ranga Rao, 1976) et moyennant des hypothèses de négligibilité asymptotique, nous avons prouvé la validité de développements d'Edgeworth pour la distribution de tableaux infinis et multidimensionnels de la forme

$$\mathbf{T}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j.$$

Ces hypothèses sont vérifiées facilement dans un contexte de courte portée. En longue portée, les conditions de validité du développement restent vérifiées sous des conditions assez générales sur la densité spectrale. Le résultat s'énonce dans ce cas sur les transformées de Fourier renormalisées par la densité spectrale (ce qui leur confère une variance uniformément bornée):

$$(2\pi n f(x_k))^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t \cos(x_k t) \quad \text{et} \quad (2\pi n f(x_k))^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t \sin(x_k t). \quad (\text{I.11})$$

Revenons à l'exemple 4 et considérons un processus *linéaire*, dont la densité spectrale est à variation régulière en zéro, soit

$$f(x) \sim x^{-2d} L(1/x), \quad x \rightarrow 0,$$

où L est une fonction à variation lente à l'infini[†]. Notre résultat nous permet de valider les développements d'Edgeworth formels des densités de probabilités des vecteurs composés des (I.11), et ce uniformément par rapport aux fréquences considérées. Par intégration de ces densités, on évalue les moments

$$\mathbb{E}[\log(I_{n,k}/f(x_k)) \log(I_{n,j}/f(x_j))], \quad k, j = 1, \dots, n.$$

et on en déduit une expression du risque quadratique moyen $\mathbb{E}(\hat{d} - d)^2$ de l'estimateur GPH.

Structure du document et résumé des chapitres

Tous les résultats de nos recherches présentables à cette date ont été rédigés sous la forme d'articles de revue, au nombre de quatre. L'un de ces articles est accepté pour publication, deux autres sont soumis à lecture et un quatrième le sera prochainement. Nous avons choisi de les reproduire intégralement dans leur anglais d'origine et présentons ici un rapport de thèse *sur travaux*. Ces articles se veulent relativement concis et trois d'entre eux prennent place dans le corps du document.

Pour rendre celui-ci plus lisible et plus complet, nous avons resitués ces articles dans leur contexte par un long préambule (en français), composé de deux chapitres, qui ont pour fonction d'introduire les outils que nous avons utilisé (développements asymptotiques, décomposition de Bartlett). Ces chapitres s'ouvrent sur des généralités pour aboutir à l'énoncé et au commentaire

[†] Cette condition est équivalente à l'hypothèse $\gamma(\tau) = L(|\tau|)\tau^{-\gamma}$, très fréquente en modélisation de processus à longue portée

rapide de nos contributions. Ces dernières prennent place exhaustivement et avec leurs applications, dans les chapitres 3, 4 et 5. Un quatrième article, plus applicatif, est reproduit en Annexe B.

Chapitre 1 (préambule). Les développements asymptotiques constituant l'outil principal pour l'obtention de nos résultats, nous leur consacrons ce chapitre d'introduction. Nous montrons comment s'obtiennent les développements d'Edgeworth dans le cas le plus simple d'une moyenne de variables i.i.d. Nous énonçons quelques résultats généraux et citons notre apport (extrait du chapitre 5) pour une classe de tableaux infinis. Nous montrons enfin pourquoi ces développements sont utiles à l'étude asymptotique du périodogramme dans les cas exemplaires d'un processus i.i.d. et d'un processus à longue portée.

Chapitre 2 (préambule). Le deuxième chapitre d'introduction définit d'abord le périodogramme d'un processus aléatoire, et fournit ensuite les premiers résultats quand ce processus est i.i.d ou linéaire. La décomposition de Bartlett y est introduite, dans le cadre des processus faiblement dépendants. Les théorèmes limites que nous avons prouvés pour les fonctionnelles non linéaires du périodogramme sont ensuite énoncés, accompagnés des principaux arguments qui y mènent et de leurs applications majeures.

Chapitre 3 (article). Ce chapitre reproduit l'article *The periodogram of an i.i.d sequence* (Fay et Soulier, 1999), où la normalité asymptotique de fonctionnelles non linéaires du périodogramme d'un processus i.i.d est établie sous un ensemble de conditions portant sur les poids $\beta_{n,k}$, les fonctions $\phi_{n,k}$ et la loi des variables i.i.d (nombre de moments, régularité). Un théorème fonctionnel de limite centrale, pour le processus empirique construit sur le périodogramme en est une application.

Chapitre 4 (article). Ce chapitre reproduit l'article *Non-Linear functionals of the Periodogram* (Fay, Moulines et Soulier, 1999), où les résultats du chapitre précédent sont étendus à une classe de processus linéaires à courte portée. Une grande part de cet article est réservée aux applications possibles : regression sur le log-périodogramme, estimation spectrale robuste, approximation polynomiale locale, estimation de fonctionnelles non linéaires de la densité spectrale.

Chapitre 5 (article). Ce chapitre reproduit une version intermédiaire d'un article à soumettre, *Edgeworth expansions for infinite triangular arrays* (Fay, 1999). On y prouve la validité du développement d'Edgeworth formel pour la densité de probabilité d'un tableau triangulaire de la forme $\mathbf{T}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^{set}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j$ où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus i.i.d et $\mathbf{U}_{n,j}$ un tableau infini de poids dans \mathbb{R}^d . Ce résultat est utilisé pour approcher précisément la distribution des transformées de Fourier discrètes d'un processus linéaire, y compris en longue portée. On développe ensuite l'application au calcul du risque quadratique moyen de l'estimateur de Geweke et Porter-Hudak (1983) du paramètre de mémoire.

Annexe B (article). Cette annexe reproduit l'article *A New test for Whiteness* (Drouiche et Fay, 1999). Il y est développé une application des résultats précédents à un test de blancheur. Ce test est basé sur la quantité

$$\log\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f(x) dx$$

qui est nulle (par l'inégalité de Jensen) si et seulement si la densité spectrale f est plate (c.-à-d. si le processus est un bruit blanc au sens large). Pour contruire un test de blancheur, cette quantité est évaluée par une statistique de la forme (I.4), dont les distributions limites sont fournies par le Théorème 3.2 du chapitre 3 si le bruit est i.i.d, et le Théorème 4.1 du chapitre 4 sous l'hypothèse

alternative que le processus est linéaire strictement stationnaire. Ce test est comparé au test de Portmanteau.

Bibliographie. Les références sont données à la fin de chaque chapitre, et regroupées dans une bibliographie générale à la fin du document.

Références bibliographiques de l'auteur

Articles de revue soumis à publication.

- [21] *The Periodogram of an i.i.d sequence*, Gilles Fay et Philippe Soulier. Soumis en septembre 1999 à la revue *Stochastic Processes and applications*. Reproduit au **chapitre 3**.
- [20] *Non-Linear Functionals of the Periodogram*, Gilles Fay, Eric Moulines et Philippe Soulier. Soumis en novembre 1999 à la revue *Journal of Time Series Analysis*. Reproduit au **chapitre 4**.

Article de revue à soumettre.

- [16] *Edgeworth expansions for multidimensional infinite arrays*, Gilles Fay. Reproduit au **chapitre 5**.

Article de revue à paraître.

- [14] *A New test for Whiteness*, Karim Drouiche et Gilles Fay. A paraître dans *IEEE Transactions on Signal Processing*, février ou mars 2000. Reproduit en **annexe B**.

Articles de conférences.

- [19] *Estimation de fonctionnelles non linéaires de la densité spectrale. Application aux tests d'ajustement et à l'estimation spectrale robuste*, G.Fay, E. Moulines et Ph. Soulier, 17è colloque GRETSI, 13-17 septembre 1999, Vannes.
- [23] *Estimation de fonctionnelle non linéaire du périodogramme d'une série linéaire non gaussienne*, G.Fay, E. Moulines et Ph. Soulier, , XXXIè Journées de Statistique, 17-21 mai 1999, Grenoble.
- [18] *Log-periodogram regression for non parametric estimation of spectral density for a non gaussian series*, G.Fay, E. Moulines et Ph. Soulier, 9th IEEE SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing, Portland, 14-16 septembre 1998.
- [17] Sur un tout autre sujet : *Polynomial quasi-harmonic models for speech analysis and synthesis*, G. Fay, E. Moulines, O. Cappé et F. Bimbot, IEEE Conference on Acoustical and Speech Signal Processing, Seattle 1998.

Bibliographie de l'introduction

- [1] M. Arcones, *Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors*, Annals of Probability **22** (1994), no. 4, 2243–2274.
- [2] R. Azencott and D. Dacunha-Castelle, *Séries d'observations irrégulières. Modélisation et prévision*, Techniques Stochastiques, Masson, 1984.
- [3] M.S. Bartlett, *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1955.
- [4] R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.
- [5] D.R. Brillinger, *Asymptotic properties of spectral estimates of second order*, Biometrika **56** (1969), 375–390.
- [6] D.R. Brillinger, *Time series. data analysis and theory*, Holden-Day, 1981.
- [7] P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
- [8] Z.-G. Chen and E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 73–82.
- [9] F. Comte and C. Hardouin, *Régression sur le log-périodogramme régularisé pour des processus gaussiens à densité spectrale bornée*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math. **325** (1997), no. 11, 1203–1206.
- [10] R. Dahlhaus, *Spectral analysis with tapered data*, J. of Time Series Analysis **4** (1983), 163–175.

- [11] R.A. Davis and T. Mikosch, *The maximum of the periodogram of a non-Gaussian sequence*, Ann. Probab. **27** (1999), no. 1, 522–536.
- [12] R.S. Deo, *Asymptotic theory for certain regression models with long memory errors.*, J. of Time Series Analysis **18** (1997), no. 4, 385–393.
- [13] P. Doukhan, *Mixing: Properties and examples.*, Lecture Notes in Statistics, Springer, 1994.
- [14] K. Drouiche and G. Fay, *A new test for whiteness*, accepted for publication, 2000.
- [15] K. Dzhaparidze, *Parameter estimation and hypothesis testing in spectral analysis of stationary time series*, Springer series in statistics, Springer-Verlag, 1986.
- [16] G. Fay, *Edgeworth expansions for multidimensional infinite arrays*, en cours de finition, 1999.
- [17] G. Fay, E. Moulines, O. Cappé, and F. Bimbot, *Polynomial quasi-harmonic models for speech analysis and synthesis*, Intl. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998.
- [18] G. Fay, E. Moulines, and Ph. Soulier, *Data driven order selection for projection estimator of the spectral density of time series with long range dependence*, Proceedings of the 9th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing, 1998.
- [19] ———, *Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme*, 17è colloque GRETSI, Vannes, 1999.
- [20] ———, *Non linear functionals of the periodogram*, soumis à publication, 1999.
- [21] G. Faÿ and Ph. Soulier, *The periodogram of an i.i.d sequence*, To appear in *Stochastic Processes and their Applications*.
- [22] R. Fox and M.S. Taqqu, *Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence*, Annals of Probability **13** (1985), 428–446.
- [23] E. Moulines G. Fay and P. Soulier, *Estimation de fonctionnelle non-linéaire du périodogramme d'une série linéaire non gaussienne*, XXXIè Journées de Statistique. Résumés, 1999, pp. 781–783.
- [24] J. Geweke and S. Porter-Hudak, *The estimation and application of long memory time series models*, J. of Time Series Analysis **4** (1983), 221–238.
- [25] L. Giraitis and D. Surgailis, *A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of whittles's estimate*, Probab. Theory Related Fields **86** (1990), 87–104.
- [26] F. Götze and C. Hipp, *Asymptotic expansions for sum of weakly dependent random vectors*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **64** (1983), 211–239.
- [27] C. Gouriéroux and A. Monfort, *Time series and dynamic models*, Themes in Modern Econometrics, Cambridge University Press, 1997.
- [28] J. D. Hamilton, *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [29] E.J. Hannan, *Multiple time series*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley et Sons, 1970.
- [30] H.-C. Ho and T. Hsing, *Limit theorems for functionals of moving averages.*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 4, 1636–1669.
- [31] P.J. Huber, *Robust estimation of a location parameter*, Ann. Math. Statist. **35** (1964), 73–101.
- [32] C. M. Hurvich, R. Deo, and J. Brodsky, *The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **19** (1998), no. 1, 19–46.
- [33] C. W. Hurvich and W.W. Chen, *An efficient taper for potentially overdifferenced long-memory time series*, J. of Time Series Analysis **00** (1999), 000–000.
- [34] D. Janas and R. von Sachs, *Consistency for non-linear functions of the periodogram of tapered data*, J. of Time Series Analysis **16** (1995), 585–606.
- [35] P. Kokoszka and T. Mikosch, *The periodogram at Fourier frequencies*, forthcoming in *Stochastic Processes and Applications*, 1999.
- [36] H.R. Künsch, *Discrimination between monotonic trends and long-range dependence*, J. Applied Probability **23** (1986), 1025–1030.
- [37] E. Moulines and Ph. Soulier, *Broad band log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **27** (1999), no. 3, 1415–1539.
- [38] M.B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic Press, 1981.
- [39] P.M. Robinson, *Log-range periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **23** (1995), 1043–1072.
- [40] M. Rosenblatt, *Stationary sequences and random fields*, Birkaüser, 1985.

- [41] Ph. Soulier, *Some new bounds and a central limit theorem for functions of Gaussian vectors*, Prépublication de l'université d'Evry val d'Essonne, 1998.
- [42] M. Taniguchi, *On estimation of the integrals of certain functions of spectral density*, J. of Applied Probability **17** (1980), 73–83.
- [43] C. Velasco, *Non-Gaussian log-periodogram regression*, Econometric Theory **16** (2000), 44–79.
- [44] R. von Sachs, *Peak-insensitive non-parametric spectrum estimation*, Journal Of Time Series Analysis **15** (1994), no. 4, 453–474.
- [45] A.M. Walker, *Some asymptotic results for the periodogram of a stationary times series*, J. Aust. Math. Soc. **5** (1965), 107–128.

Première partie

Préambule et résultats principaux

CHAPITRE 1

Généralités sur les développements d'Edgeworth

Nous proposons ici une introduction aux développements asymptotiques. Nous verrons en section 1.6 en quoi ils seront utiles pour établir des théorèmes limites pour des fonctionnelles du périodogramme.

1.1. Introduction et outils

L'idée des développements asymptotiques pour les distributions de probabilités est due à Chebyshev (1890) et Edgeworth (1896,1905), et leur théorie précise à Cramér (1928,1946). Ce chapitre a pour but de les définir et de les re-situer par rapport à des résultats plus connus comme le théorème de la limite centrale (TLC) et l'inégalité de Berry-Esseen. Pour des références plus précises et les démonstrations, nous renvoyons aux ouvrages dont notre premier chapitre s'inspire : Hall (Chapitre 2, 1992), Barndorff-Nielsen et Cox (Chapitres 4 et 6, 1989), Petrov (Chapitre 5, 1995) et Bhattacharya et Ranga Rao (1976).

Il sera ici question de convergence faible dans \mathbb{R}^d . A chaque variable aléatoire X est associée une fonction de répartition Q , $Q(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ et une mesure de probabilité μ , $\mu(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $A \subset \mathbb{R}^d$. On notera $\mathbf{1}_A(\cdot)$ la fonction indicatrice de l'ensemble A et $\mathcal{B}(x, \epsilon)$ la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $\epsilon \geq 0$, pour la norme euclidienne notée $|\cdot|$. On dit que la suite de variable X_n (associée aux suites Q_n, μ_n) converge en loi (ou en distribution) vers X (Q, μ) si les mesures μ_n convergent faiblement vers μ , c.-à-d. que pour toute fonction f continue bornée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu$$

ou de façon équivalente, si en tout point de continuité x de Q ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x) = Q(x).$$

On notera alors $X_n \Rightarrow X$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, $Q_n \Rightarrow Q$, $\mu_n \Rightarrow \mu$, ou, par abus, $X_n \Rightarrow Q$. Par ailleurs, soient \widehat{Q}_n et \widehat{Q} les fonctions caractéristiques de X_n et X définies respectivement comme les transformées de Fourier-Stieltjes des mesures μ_n et μ :

$$\widehat{Q}(t) := \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} \mu(dx).$$

Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, c.-à-d. $d\mu = q(x)dx$, alors $\widehat{\widehat{Q}} = q$ presque-partout. La convergence faible de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers X est à équivalente la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques

$$\forall t, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{Q}_n(t) = \widehat{Q}(t).$$

C'est le « Théorème de continuité » (voir par exemple Théorème 26.3, Billingsley, 1986). Plus précisément (voir par exemple les Théorèmes 1.9 et 1.10 de Petrov, 1995)

THÉORÈME 1.1. *Soit μ_1, μ_2, \dots une suite de mesures de probabilité de \mathbb{R}^d et $\widehat{Q}_1, \widehat{Q}_2, \dots$ la suite des fonctions caractéristiques associées. Si μ_n converge faiblement vers une mesure de probabilité μ , alors $\widehat{Q}_n(t) \rightarrow \widehat{Q}(t)$ uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^d . Réciproquement, supposons que \widehat{Q}_n converge ponctuellement vers une limite $\widehat{Q}(t)$ continue en 0, alors il existe une mesure de probabilité μ telle que $\mu_n \Rightarrow \mu$ et dont la fonction caractéristique est \widehat{Q} .*

L'ingrédient principal dans l'établissement des résultats qui suivent est l'évaluation de la distance uniforme entre deux fonctions de répartition par la proximité de leurs fonctions caractéristiques, comme le suggère ce Théorème, ainsi que les théorèmes d'inversion (Théorèmes 1.7 et 1.8). Nous reviendrons plus en détail sur cette méthode en section 1.3. On notera \star la convolution opérant sur des mesures (finies) ou les distributions et on note

$$Q^{(n\star)} = \underbrace{Q \star Q \star \dots \star Q}_{n \text{ fois}}.$$

Pour toute matrice carrée V définie positive de dimension d , on notera ϕ_V et Φ_V la fonction de densité et la fonction de distribution de la loi normale centrée de covariance V ,

$$\begin{aligned} \phi_V(x) &= (2\pi)^{-d/2} |\det V|^{-1/2} e^{-\langle x, V^{-1}x \rangle / 2} \\ \Phi(x) &= \int_{u \leq x} \phi_V(u) du \quad , \quad \widehat{\Phi}_V(t) = e^{-\langle t, Vt \rangle / 2} \end{aligned}$$

et simplement ϕ, Φ et $\widehat{\Phi}$ ces mêmes fonctions pour la loi normale de \mathbb{R}^d centrée réduite, *i.e.* $V = I_d$.

Soient $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et de variance finie $\sigma_k^2 = \text{var}(Y_k)$, et que nous supposons dans un premier temps réelles. On pose

$$B_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$$

et on suppose que $B_n > 0$ pour tout n suffisamment grand, *c.-à-d.* que l'une au moins des variables aléatoires Y_k est non dégénérée. On s'intéresse à la convergence en loi de la somme

$$S_n = B_n^{-1/2} \sum_{k=1}^n Y_k \tag{1.1.1}$$

de variance 1 et de fonction de répartition $Q_n(\cdot)$. Les théorèmes cités en section 1.2 sont des premières réponses aux questions de normalité asymptotique et de vitesse de convergence dans le théorème de limite centrale. En section 1.3, nous montrerons comment on parvient à de tels résultats en travaillant sur les fonctions caractéristiques. Notons bien que d'autres approches sont possibles (voir par exemple la preuve du Théorème de Lindeberg-Feller par substitution successive des éléments du tableau par des variables gaussiennes également indépendantes, Théorème 7.2 dans Billingsley, 1968). Nous introduirons ensuite les développements d'Edgeworth en section 1.4 pour le cas des variables réelles indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*), avant de les généraliser aux vecteurs aléatoires indépendants et à certains tableaux triangulaires en section 1.5, où nous citerons nos résultats du chapitre 5. Enfin, nous énoncerons quelques applications de ces résultats à l'étude asymptotique du périodogramme d'un processus *i.i.d.* et d'un processus linéaire à longue portée.

1.2. Principaux théorèmes

Le Théorème de la limite centrale donne la normalité asymptotique dans le cas de $(Y_k)_{k=1,\dots,n}$ indépendantes et identiquement distribuées. Celui de Lindeberg-Feller fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de variables aléatoires satisfaisant une condition de négligibilité asymptotique soit asymptotiquement normale.

THÉORÈME 1.2 (Théorème de la limite centrale). *Supposons les variables $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ indépendantes, identiquement distribuées, centrées et de variance finie σ^2 . Alors $S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.*

THÉORÈME 1.3 (Théorème de Lindeberg-Feller). *Supposons les variables $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ indépendantes de variance finie $\sigma_k^2 = \text{var}(Y_k)$, de fonction de répartition F_k et au moins l'une d'entre elles non dégénérée. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{-1} \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |Q_n(x) - \Phi(x)| = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{-1} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \epsilon B_n^{-1/2}} x^2 dF_k(x) = 0 \quad (1.2.1)$$

pour tout $\epsilon > 0$ fixé.

Cette dernière condition est dite « condition de Lindeberg » et s'écrit aussi:

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{-1} \sum_{k=1}^n \text{var}(Y_k \mathbf{1}_{|Y_k| > \epsilon B_n^{-1/2}}) = 0.$$

Il est souvent plus facile de vérifier une condition de Lyapunov de type (1.2.2). Notons aussi que dans le cas des tableaux de la forme

$$S_n = \sum_{k=1}^n \beta_{n,k} Y_k$$

où les $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont i.i.d. et les poids triangulaires $(\beta_{n,k})$ normalisés $\sum_{k=1}^n \beta_{n,k}^2 = 1$, la condition de Lindeberg s'écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} |\beta_{n,k}| = 0.$$

THÉORÈME 1.4 (Théorème de Lyapunov). *Supposons les variables $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ indépendantes de variance finie $\sigma_k^2 = \text{var}(Y_k)$ et au moins l'une d'entre elles non dégénérée. Supposons de plus $\mathbb{E}|Y_n|^{2+\delta} < \infty$ pour un réel $\delta > 0$. Supposons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{-1-\delta/2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^{2+\delta} = 0. \quad (1.2.2)$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |Q_n(x) - \Phi(x)| = 0$$

Pour la preuve des deux théorèmes suivants, voir par exemple Petrov (1995).

Les inégalités d'Esseen (1.2.3) et de Berry-Esseen (1.2.4) donnent une borne sur la vitesse à laquelle Q_n converge vers Φ , sous une hypothèse d'existence d'un moment d'ordre 3 supplémentaire mais toujours uniformément en x .

THÉORÈME 1.5 (Théorème de Berry-Esseen). *Sous les hypothèses du Théorème 1.3 et en supposant de plus $\mathbb{E}|Y_k|^3 < \infty$ pour tout k , soit $L_n = B_n^{-3/2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|Y_k|^3$. Alors*

$$\sup_x |Q_n(x) - \Phi(x)| \leq AL_n. \quad (1.2.3)$$

Pour la démonstration, voir par exemple les preuves du Théorème 12.4 dans Bhattacharya et Ranga Rao (1976) ou du Théorème 2.6.1 dans Kolassa (1997).

Dans le cas où les (Y_k) sont i.i.d., (1.2.3) devient

$$\sup_x |Q_n(x) - \Phi(x)| \leq A\rho n^{-1/2} \quad (1.2.4)$$

avec $\rho = \mathbb{E}|Y_1|^3/\sigma^3$ et A une constante universelle qui peut être prise égale à 3 (borne de Feller). En imposant une hypothèse de régularité supplémentaire sur la distribution des Y_k , on peut affiner le résultat précédent (pour des Y_k i.i.d). Rappelons qu'une variable aléatoire réelle Y est dite « treillis » (*lattice* en anglais) s'il existe deux réels a et b tels que $P(Y \in \{a+tb, t \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Cette condition est équivalente à la condition suivante sur la fonction caractéristique \widehat{Q} de Y (voir par exemple le Théorème 1.3 dans Petrov 1995)

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}, t_0 \neq 0 \text{ et } |\widehat{Q}(t_0)| = 1.$$

THÉORÈME 1.6 (Théorème 5.22 dans Petrov, 1995). *Considérons des $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i.i.d. centrées et de variance 1. En supposant de plus la distribution de Y_1 « non-treillis » et $\mathbb{E}|Y_1^3| < \infty$, et en posant $m_3 = \mathbb{E}[Y_1^3]$, on a alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |Q_n(x) - \Phi(x) - n^{-1/2} \frac{m_3}{6} (1-x^2)\phi(x)| = o(n^{-1/2})$$

Dans les sections 1.4 et 1.5, nous généraliserons le résultat précédent à des développements d'ordres supérieurs de la fonction de distribution Q_n et de sa densité de probabilité lorsque celle-ci existe. Nous aurons besoin pour cela d'hypothèses supplémentaires sur la régularité des fonctions caractéristiques des variables aléatoires (Y_k) . L'hypothèse des (Y_k) mono-dimensionnelles et i.i.d facilite l'introduction des notions (section 1.4), mais n'est pas nécessaire comme nous le verrons dans un second temps (section 1.5).

1.3. Inversion de fonction caractéristique

1.3.1. Théorèmes. Les résultats qui suivent sont la base des développements d'Edgeworth que nous présenterons dans les sections suivantes. Ils permettent de traduire dans le domaine des mesures de probabilité ou des densités, les comparaisons faites entre deux fonctions caractéristiques, typiquement celle de S_n définie en (1.1.1) et celle de la loi gaussienne standard $\widehat{\Phi}(t) = e^{-t^2/2}$. L'intérêt de ces résultats réside dans la plus grande facilité à étudier les fonctions caractéristiques $\widehat{Q}_n(t) = [\widehat{Q}(t/\sqrt{n})]^n$ ou les « secondes fonctions caractéristiques » $\log \widehat{Q}_n(t) = n \log \widehat{Q}(t/\sqrt{n})$ que les convolutions Q^{n*} .

Les deux théorèmes suivants, énoncés ici dans un cadre probabiliste, sont connus sous les noms de « formule d'inversion » et « théorème d'inversion » des transformées de Fourier.

THÉORÈME 1.7. *Soit Q une distribution de probabilité, \widehat{Q}_n sa fonction caractéristique, x_1 et x_2 deux points de continuité de Q . Alors*

$$Q(x_2) - Q(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_2} - e^{-itx_1}}{-it} \widehat{Q}(t) dt \quad (1.3.1)$$

THÉORÈME 1.8. *Soit Q une distribution de probabilité, telle que $\widehat{Q} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors Q est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d et la version continue de sa densité q s'obtient par inversion de Fourier de \widehat{Q}*

$$q(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \widehat{Q}(t) dt.$$

1.3.2. Applications. Soient Q_1 et Q_2 deux distributions de probabilité. Les Théorèmes 1.7 et 1.8 permettent de comparer ces distributions et leurs densités si elles existent *via* la comparaison de leurs fonctions caractéristiques. Supposons d'abord celles-ci sommables. D'après le Théorème 1.8, Q_1 et Q_2 ont des densités q_1 et q_2 dont les versions continues vérifient de plus

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |q_1(x) - q_2(x)| \leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{Q}_1(t) - \widehat{Q}_2(t)| dt \quad (1.3.2)$$

Considérons ensuite le cas où Q_1 n'est pas absolument continue (par exemple si c'est une distribution discrète) et Q_2 est par contre dérivable à dérivée bornée. Pour fixer les idées, Q_1 sera dans la pratique la distribution éventuellement discrète d'un terme d'une suite de v.a. S_n dont on veut étudier la convergence faible quand $n \rightarrow \infty$ vers une distribution absolument continue Q_2 (loi normale en général). La comparaison des distributions *via* une majoration uniforme de la différence de leurs fonctions caractéristiques est dans ce cas moins immédiate que dans le cas des distributions absolument continues car l'intégrale de (1.3.1) dont on calcule la valeur principale n'est pas nécessairement absolument convergente. Un argument de lissage des fonctions de distributions Q_1 et Q_2 permet de se ramener à une intégrale sur un compact à une erreur maîtrisée près. Les résultats suivants concernent les variables mono-dimensionnelles, mais pourraient s'étendre à toute dimension finie (voir Bhattacharya et Ranga Rao, 1976, section 10).

LEMME 1.1 (Lemme 2.5.1 dans Kolassa, 1997). *Soit Q_1 une fonction de répartition, Q_2 une fonction différentiable telle que $\sup_x |Q_2'(x)| \leq m < \infty$ et de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Soit la distribution V_T dont la fonction caractéristique \widehat{V}_T est à support compact*

$$\widehat{V}_T(t) = (1 - |t|/T) \mathbf{1}_{|t| < T}.$$

Alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |Q_1(x) - Q_2(x)| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |Q_1 \star V_T(x) - Q_2 \star V_T(x)| + 24 \frac{m}{\pi T}$$

REMARQUE. L'opération de convolution (ou lissage) des fonctions de distributions considérée ci-dessus se traduit en termes de variables aléatoires de la façon suivante. Soient X et Y de distributions respectives Q_1 et Q_2 , et V_T une variable aléatoire indépendante de X et Y et de densité

$$v_T(x) = \frac{T}{\pi} \frac{1 - \cos Tx}{(Tx)^2}$$

dont la fonction caractéristique est \widehat{V}_T . Les distributions Q_1^T et Q_2^T des variables $X + V_T$ et $Y + V_T$ sont les convoluées $Q_1 \star V_T$ et $Q_2 \star V_T$ et sont donc absolument continues pour tout $T > 0$ et arbitrairement proches de Q_1 et Q_2 en choisissant T suffisamment grand. Les fonctions caractéristiques de $X + V_T$ et $Y + V_T$ sont $\widehat{Q}_1 \widehat{V}_T$ et $\widehat{Q}_2 \widehat{V}_T$, et celles-ci sont à support compact inclus dans $[-T, T]$.

L'évaluation de $\sup_{x \in \mathbb{R}} |Q_1^T(x) - Q_2^T(x)|$ peut se faire par des raisonnements du type précédent puisque \widehat{Q}_1^T et \widehat{Q}_2^T sont dans L_1 . Il découle alors du Lemme 1.1

THÉORÈME 1.9 (Feller, 1971). *Soit Q_1 une fonction de distribution, Q_2 une fonction différentiable telle que $|Q_2'| \leq m < \infty$, de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$, dont la fonction caractéristique associée a une dérivée qui vaut 0 en 0. Alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |Q_1(x) - Q_2(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{|\widehat{Q}_1(t) - \widehat{Q}_2(t)|}{|t|} dt + 24 \frac{m}{\pi T} \quad (1.3.3)$$

1.4. Développements d'Edgeworth dans le cas i.i.d mono-dimensionnel

Nous montrons dans cette section comment on obtient des développements pour la suite de densités de probabilité q_n ou de fonctions de distributions Q_n associée à la suite de variables réelles

$$S_n = n^{-1/2} \sum_{k=1}^n Y_k \quad (1.4.1)$$

où les $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, centrées, de variance 1. La suite S_n est asymptotiquement $\mathcal{N}(0, 1)$ d'après le Théorème de la limite centrale (Théorème 1.2). Ces développements asymptotiques sont de la forme

$$\begin{aligned} \Psi_{n,s-3}(x) &= \Phi(x) + n^{-1/2}P_{n,1}(x) + n^{-1}P_{n,2}(x) + \cdots + n^{(s-3)/2}P_{n,s-3}(x) + \text{reste}, \\ \text{ou } \psi_{n,s-3}(x) &= \phi(x) + n^{-1/2}p_{n,1}(x) + n^{-1}p_{n,2}(x) + \cdots + n^{(s-3)/2}p_{n,s-3}(x) + \text{reste}. \end{aligned}$$

où s est un entier plus grand que 3 tel que $\mathbb{E}|Y_1|^s < \infty$. Le premier terme du développement sera toujours une distribution ou une densité normale, et la question soulevée est la vitesse de convergence dans un Théorème de limite centrale.

On dit ces développements « valides » si chaque terme du développement est asymptotiquement négligeable devant celui qui le précède. On s'attachera à vérifier par exemple,

- pour des fonctions de répartitions, des bornes uniformes

$$\sup_{C \in \mathcal{C}} |Q_n(C) - \Psi_{n,s-3}(C)| = O(n^{-(s-2)/2}) \quad (1.4.2)$$

où le sup est pris sur l'ensemble \mathcal{C} des convexes et mesurables de \mathbb{R}^d , et des bornes non-uniformes (plus précises)

$$\sup_{C \in \mathcal{C}} (1 + d(0, \partial C)^s) |Q_n(C) - \Psi_{n,s-3}(C)| = O(n^{-(s-2)/2})$$

où $d(0, \partial C)$ désigne la distance de la frontière du convexe C à l'origine.

- pour des densités, des bornes uniformes

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |q_n(x) - \psi_{n,s-3}(x)| = O(n^{-(s-2)/2}) \quad (1.4.3)$$

ou non-uniformes

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^s) |q_n(x) - \psi_{n,s-3}(x)| = O(n^{-(s-2)/2}).$$

Nous commencerons par construire formellement ces développements, puis nous montrerons sous quelles hypothèses on sait les valider, en distinguant s'il s'agit de densités, de distributions ou directement de moments de la forme $\int_{\mathbb{R}} f dQ_n$.

1.4.1. Développements formels ou approximation d'Edgeworth. Notons \widehat{Q} et \widehat{Q}_n les fonctions caractéristiques de Y_1 et S_n définie en (1.4.1), qui sont reliées par

$$\widehat{Q}_n(t) = [\widehat{Q}(t/\sqrt{n})]^n. \quad (1.4.4)$$

Sachant que $\widehat{Q}(0) = 1$ et que \widehat{Q} est (uniformément) continue sur \mathbb{R} , il existe un voisinage de 0 sur lequel $\log \widehat{Q}$ est bien défini, \log étant la branche principale de la fonction logarithme sur \mathbb{C} . Si Y_1 à s moments finis, \widehat{Q} est s fois dérivable sur \mathbb{R} et $\log \widehat{Q}$ est donc s fois dérivable sur un voisinage de 0. Soit κ_r le cumulants d'ordre r de Y_1 pour $1 \leq r \leq s$

$$\kappa_r = (-i)^r \frac{d}{dt^r} (\log \widehat{Q}(t)) \Big|_{t=0}.$$

On a en particulier $\kappa_1 = 0$ et $\kappa_2 = 1$. Alors, à t fixé,

$$\begin{aligned} \log \widehat{Q}_n(t) &= n \log \widehat{Q}(t/\sqrt{n}) \\ &= n \sum_{r=1}^{s-1} \frac{d}{dt^r} \log \widehat{Q}(t/\sqrt{n}) \Big|_{t=0} + O(n^{-(s-2)/2}) \\ &= -t^2/2 + \sum_{r=3}^{s-1} \frac{\kappa_r(it)^r}{r!} n^{-(r-2)/2} + O(n^{-(s-2)/2}) \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow \infty$. Par passage à l'exponentielle et développement en série entière on obtient *pour t fixé*

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_n(t) &= e^{-t^2/2} \exp \left\{ \sum_{r=3}^{s-1} \frac{\kappa_r(it)^r}{r!} n^{-(r-2)/2} + O(n^{-(s-2)/2}) \right\} \\ &= e^{-t^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{r=3}^{s-1} \frac{\kappa_r(it)^r}{r!} n^{-(r-2)/2} + O(n^{-(s-2)/2}) \right]^m \\ &= e^{-t^2/2} \left[1 + \sum_{r=3}^{s-1} n^{-(r-2)/2} \tilde{P}_{r-2}(it) \right] (1 + O(n^{-(s-2)/2})) \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

quand $n \rightarrow \infty$ en définissant les polynômes \tilde{P}_r par $\tilde{P}_0 \equiv 1$ et, pour $r > 0$

$$\tilde{P}_r(it) = \sum_{m=1}^r \frac{1}{m!} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m}^* \prod_{k=1}^m \frac{\kappa_{\nu_k}}{(\nu_k)!} (it)^{\nu_k}. \quad (1.4.6)$$

où la somme \sum^* porte sur les m -uplets d'entiers (ν_1, \dots, ν_m) supérieurs à 3 et tels que $\sum_{k=1}^m (\nu_k - 2) = r$. Les coefficients de ces polynômes dépendent des cumulants $\{\kappa_r\}_{3 \leq r \leq s}$ et cette dépendance est implicite dans la notation \tilde{P}_r . On a en particulier

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(it) &= \frac{\kappa_3}{3!} (it)^3 \\ \tilde{P}_2(it) &= \frac{\kappa_4}{4!} (it)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_3(it)^3}{3!} \right)^2 = \frac{\kappa_4}{24} (it)^4 + \frac{\kappa_3^2}{72} (it)^6 \\ \tilde{P}_3(it) &= \frac{\kappa_5}{5!} (it)^5 + \frac{\kappa_3(it)^3}{3!} \frac{\kappa_4(it)^4}{4!} + \left(\frac{\kappa_3(it)^3}{3!} \right)^3 \end{aligned}$$

Une caractéristique, qui s'avérera cruciale, des \tilde{P}_r est que ces polynômes ont la même parité que r . Ils sont de degré $3r$ et de valance $r + 2$.

L'expression (1.4.5) présente l'avantage de s'inverser facilement par linéarité de la transformation de Fourier et parce que chaque terme de la somme est un polynôme en t multiplié par $e^{-t^2/2}$, dont on sait calculer explicitement les transformées de Fourier (inverses). En effet, en intégrant par parties successivement, on a

$$(it)^j e^{-t^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\{(-D^j)\Phi(x)\}$$

où D représente l'opérateur de dérivation d/dx . Donc, la transformée de Fourier d'un polynôme en x multiplié par $\phi(x)$ est un polynôme en t multiplié par $e^{-t^2/2}$. On notera $p_r(x)$ la « densité » continue dont $e^{-t^2/2} \tilde{P}_r(it)$ est la transformée de Fourier, et qui s'obtient formellement à partir de \tilde{P}_r en remplaçant les $(it)^\nu$ par $(-1)^{|\nu|} D^\nu \phi$ (voir le Lemme 7.2 dans Bhattacharya et Ranga Rao 1976). D'après cette remarque, les polynômes d'Hermite $(H_r)_{r \in \mathbb{N}}$ définis par

$$H_r(x) = (-1)^r e^{x^2/2} \frac{d^r}{dx^r} e^{-x^2/2}$$

$$\text{d'où } H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1, \quad H_3(x) = x^3 - 3x, \quad \text{etc.}$$

apparaissent naturellement dans l'expression des p_r . Ainsi

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \phi(x), \\ p_1(x) &= \frac{\kappa_3}{3!} H_3(x) \phi(x), \\ p_2(x) &= \frac{\kappa_4}{24} H_4(x) \phi(x) + \frac{\kappa_3^2}{72} H_6(x) \phi(x), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Nous notons P_r les mesures signées (sur \mathbb{R}) de densité p_r par rapport à la mesure de Lebesgue et nous convenons dans la suite d'utiliser les mêmes notations pour la mesure P_r et la fonction de distribution associée à cette mesure. Les p_r , P_r et \tilde{P}_r sont dits « polynômes de Cramér-Edgeworth ».

On appelle « développement d'Edgeworth formel de S_n à l'ordre $s-3$ » la distribution signée $\Psi_{n,s}$ ou sa densité $\psi_{n,s}$

$$\Psi_{n,s-3}(x) = \Phi(x) + \sum_{r=1}^{s-3} n^{-r/2} P_r(x) \quad (1.4.7)$$

$$\psi_{n,s-3}(x) = \phi(x) + \sum_{r=1}^{s-3} n^{-r/2} p_r(x) \quad (1.4.8)$$

obtenues par inversion de Fourier du développement

$$e^{-t^2/2} \left[1 + \sum_{r=1}^{s-3} n^{-r/2} \tilde{P}_r(it) \right],$$

c'est-à-dire de la relation (1.4.5) où l'on a omis le terme de reste. La relation (1.4.5) est un développement asymptotique en puissance de $n^{-1/2}$, c'est-à-dire qu'à t fixé, chaque terme de ce développement est asymptotiquement négligeable devant celui qui le précède, quand $n \rightarrow \infty$. En revanche, les séries telles que

$$\sum_{r=1}^{s-3} \frac{\kappa_{r+2}(it)^{r+2}}{(r+2)!} n^{-r/2} \quad \text{ou} \quad \sum_{r=1}^{s-3} n^{-r/2} \tilde{P}_r(it)$$

ne convergent quand $s \rightarrow \infty$ que pour des distributions de Y_1 bien particulières*. Les asymptotiques que nous étudions sont pour $n \rightarrow \infty$ à s fixé, et non pas pour $s \rightarrow \infty$.

1.4.2. Validité d'un développement pour une densité. L'existence d'une densité pour une distribution Q est garantie par l'appartenance de \hat{Q} à L_1 . D'après (1.4.4), \hat{Q}_n est dans L_1 dès \hat{Q} est dans L_n , On fera donc l'hypothèse de régularité

$$\int |\hat{Q}(t)|^p dt < \infty \quad \text{pour un certain } p \geq 1. \quad (1.4.9)$$

pour s'assurer de l'existence d'une densité pour S_n pour tout n suffisamment grand ($n \geq p$). Nous montrons dans cette section la Proposition suivante.

PROPOSITION. *Soit $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d centrée et de variance 1, telle que $\mathbb{E}|Z_1|^s < \infty$. On suppose que la fonction caractéristique \hat{Q} de Z_1 vérifie (1.4.9). Alors la somme $S_n = n^{-1/2} \sum_{k=1}^n Y_k$ admet une densité q_n pour tout n suffisamment grand. Soit $\psi_{n,s-3}(x)$ le développement d'Edgeworth formel de q_n donné par (1.4.8). On a alors*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |q_n(x) - \psi_{n,s-3}(x)| = O(n^{-(s-2)/2}) \quad (1.4.10)$$

* Pour des Y_1 a composante continue non nulle, Cramér (1928) a montré que la condition pour avoir convergence de ces séries était $\mathbb{E}e^{Y_1^2/4} < \infty$

L'existence d'une densité provient de la remarque ci-dessus. D'après (1.3.2), il suffit de prouver

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{Q}_n(t) - \hat{\Psi}_{n,s-3}(t)| dt = O(n^{-(s-2)/2}).$$

pour établir (1.4.10). Cette intégrale se borne de la façon suivante, pour une constante réelle δ à déterminer :

$$\begin{aligned} & \int_{t \in \mathbb{R}} |\hat{Q}_n(t) - \hat{\Psi}_{n,s-3}(t)| dt \\ & \leq \int_{|t| < \delta\sqrt{n}} |\hat{Q}_n(t) - \hat{\Psi}_{n,s-3}(t)| dt + \int_{|t| > \delta\sqrt{n}} |\hat{Q}_n(t)| dt + \int_{|t| > \delta\sqrt{n}} |\hat{\Psi}_{n,s-3}(t)| dt \\ & =: I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Pour δ bien choisi, ces intégrales sont toutes trois en $O(n^{-(s-2)/2})$. En effet:

1. Tous les $\hat{\Psi}_{n,s}$ peuvent être majorés par une exponentielle à argument négatif, e.g. $Ce^{-t^2/4}$, indépendamment de n , donc I_3 est à décroissance exponentielle en n , et *a fortiori* $O(n^{-(s-2)/2})$ quel que soit $\delta > 0$.
2. I_2 se majore grâce à la condition de régularité faite sur \hat{Q} . Puisque $|\hat{Q}|^p$ est sommable, on a la majoration suivante

$$\forall |t| > \delta/\sqrt{n}, |\hat{Q}_n(t)| = \left| \prod_{k=1}^n \hat{Q}(t) \right| \leq C |\hat{Q}(t)|^p \left(\sup_{|t| > \delta/\sqrt{n}} |\hat{Q}(t)| \right)^{n-p} \quad (1.4.11)$$

Le précédent suprémum est strictement inférieur à 1 sous la condition de Cramér

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\hat{Q}(t)| < 1. \quad (1.4.12)$$

qui est impliquée par $\hat{Q} \in L_p$ (par le lemme de Riemann-Lebesgue) et donc, pour un $\epsilon < 1$, $I_3 \leq C \|\hat{Q}\|_p^p \epsilon^{n-p} = O(n^{-(s-2)/2})$.

3. Le développement de Taylor de la seconde fonction caractéristique permet de comparer les fonctions caractéristiques et leurs premières dérivées sur un voisinage de zéro et de borner I_2 à la vitesse en n annoncée. Notons d'abord que

$$\begin{aligned} & |\hat{Q}_n(t) - \Psi_{n,s-3}(t)| \\ & \leq \left| \hat{Q}_n(t) - \exp\left\{ \sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2} \right\} \right| + \left| \exp\left\{ \sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2} \right\} - \Psi_{n,s-3}(t) \right| \end{aligned}$$

Ces deux termes se traitent séparément.

Le second terme est la différence entre $\exp\left\{ \sum_{r=1}^{s-3} n^{-r/2} \kappa_{r+2} (it)^{r+2} / (r+2)! \right\}$ et son développement en série, tronqué à $1 + \sum_{r=1}^{s-3} n^{-r/2} \tilde{P}_r(it)$. Son traitement est purement algébrique ne présente pas de réelle difficulté[†]. Il mène à la majoration

$$\left| \exp\left\{ \sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2} \right\} - \Psi_{n,s-3}(t) \right| \leq C n^{-(s-2)/2} R_1(t) e^{-t^2/4}$$

où C est une constante et R_1 est un polynôme en t ne dépendant pas de n .

Le premier terme se traite de la façon suivante. Posons

$$h_n(t) := \log \hat{Q}_n(t) - \sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2}.$$

[†] Nous renvoyons aux preuves du Lemme 9.8 dans Bhattacharya et Ranga Rao (1976) et du Lemme 5.2 du chapitre 5, qui traitent de cas plus généraux.

Cette fonction est bien définie pour tout $|t| < \delta\sqrt{n}$ et δ suffisamment petit puisque $\log \hat{Q}_n(t) = n \log \hat{Q}(t/\sqrt{n})$. Alors :

$$|\hat{Q}_n(t) - \exp\{\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2}\}| \leq \exp\{\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2}\} |\exp h_n(t) - 1|. \quad (1.4.13)$$

Bornons les deux facteurs de cette dernière majoration. Primo,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2} + t^2/2 \right| &= \left| \sum_{r=3}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2} \right| \\ &\leq t^2 \sum_{r=1}^{s-3} \frac{\kappa_{r+2}}{(r+2)!} (|t|/\sqrt{n})^r \\ &\leq t^2 \sum_{r=1}^{s-3} \frac{\kappa_{r+2}}{(r+2)!} \delta^r \\ &\leq t^2/8 \end{aligned}$$

pour δ suffisamment petit. Donc

$$\exp\left\{\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2}\right\} \leq e^{-3t^2/8} \quad (1.4.14)$$

Secundo, par définition des cumulants κ_r , h_n a ses $s-1$ premières dérivées nulles en zéro et il découle alors d'un développement de Taylor de $\log \hat{Q}(t)$ en zéro que

$$|h_n(t)| \leq C|t|^s n^{-(s-2)/2} \leq t^2/8$$

pour δ suffisamment petit. La première borne fait apparaître la vitesse $n^{-(s-2)/2}$. En utilisant ces deux majorations de $|h_n(t)|$ et la formule $|\exp h_n(t) - 1| \leq |h_n(t)| \exp |h_n(t)|$, on obtient

$$|\exp h_n(t) - 1| \leq Cn^{-(s-2)/2} |t|^s e^{t^2/8} \quad (1.4.15)$$

On déduit de (1.4.13), (1.4.14) et (1.4.15) la majoration

$$|\hat{Q}_n(t) - \exp\{\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} (it)^r n^{-(r-2)/2}\}| \leq Cn^{-(s-2)/2} |t|^s e^{-t^2/4} \quad (1.4.16)$$

Finalement, on aura établi que pour un polynôme R de t dont les coefficients ne dépendent pas de n mais de s et des cumulants κ_r , on a

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathcal{B}(0, \delta/\sqrt{n}), \quad |\hat{Q}_n(t) - \hat{\Psi}_{n,s-3}(t)| \\ \leq Cn^{-(s-2)/2} R(t) \exp\{-t^2/4\} \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

pour δ un réel positif convenable. La fonction majorante étant sommable en t , il découle

$$\int_{|t| < \delta/\sqrt{n}} |\hat{Q}_n(t) - \hat{\Psi}_{n,s-3}(t)| dt = O(n^{-(s-2)/2})$$

1.4.3. Validité d'un développement pour une distribution. La condition de Cramér (1.4.12) est en fait suffisante quand on effectue un développement des distributions. Elle exclut entre autres les distributions en treillis (*lattice variables*), en particulier les distributions discrètes. Elle assure que la distribution Q ne charge aucun hyperplan.

Grâce au Théorème 1.3.3, la norme sup de la différence $Q_n - \Psi_{n,s-3}$ est majorée par l'intégrale sur le compact $[-T, T]$ de la différence $\widehat{Q}_n - \widehat{\Psi}_{n,s-3}$ et un terme en $1/T$. Pour que cette norme soit d'ordre $n^{-(s-2)/2}$, choisissons $T = n^{(s-2)/2}$. D'après le Théorème 1.9,

$$\begin{aligned} |Q_n(x) - \Psi_{n,s-3}(x)|_\infty &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{|\widehat{Q}_n(t) - \widehat{\Psi}_{n,s-3}(t)|}{|t|} dt + 24 \frac{m}{\pi T} \\ &\leq C_1 \int_{|t| < \delta\sqrt{n}} \frac{|\widehat{Q}_n(t) - \widehat{\Psi}_{n,s-3}(t)|}{|t|} dt \\ &\quad + C_2 \int_{\delta\sqrt{n} < |t| < n^{(s-2)/2}} \frac{|\widehat{Q}_n(t) - \widehat{\Psi}_{n,s-3}(t)|}{|t|} dt + C_3 n^{-(s-2)/2}. \end{aligned}$$

Comme dans la section précédente pour les densités, on sait majorer avec la précision souhaitée la différence $\widehat{Q}_n(t) - \widehat{\Psi}_{n,s-3}(t)$ sur un voisinage de 0 de la forme $\mathcal{B}(0, \delta\sqrt{n})$ ce qui permet de borner la première intégrale. L'intégrale sur la couronne $\delta\sqrt{n} < |t| < n^{(s-2)/2}$ est majorée par

$$n^{1/2} \int_{\delta\sqrt{n} < |t| < n^{(s-2)/2}} |\widehat{Q}_n(t)| dt + n^{1/2} \int_{\delta\sqrt{n} < |t| < n^{(s-2)/2}} |\widehat{\Phi}(t)| dt.$$

Le second terme décroît exponentiellement en t et le premier vérifie

$$\int_{\delta\sqrt{n} < |t| < n^{(s-2)/2}} |\widehat{Q}_n(t)| dt \leq \left(\sup_{\delta < |t| < n^{(s-3)/2}} |Q(t)| \right)^n. \quad (1.4.18)$$

Si $s = 3$, l'intervalle sur lequel est pris le sup précédent est constant. Alors,

$$\sup_{\delta < |t| < n^{(s-3)/2}} |Q(t)| < \epsilon < 1$$

dès que la distribution de Y_1 est « non-treillis » soit $\forall t \neq 0, |\widehat{Q}(t)| \neq 1$. Ceci assure la décroissance également exponentielle (en ϵ^n) de l'intégrale de (1.4.18). On retrouve ici l'hypothèse faite dans l'énoncé du Théorème 1.6, qui correspond bien au cas $s = 3$. Si $s > 3$, la condition plus forte de Cramér (1.4.12) est nécessaire puisque l'intervalle $\delta < |t| < n^{(s-3)/2}$ croît avec n .

REMARQUE. Des développements de distribution sont néanmoins possibles pour des sommes de variables « treillis ». Dans ce cas, la distribution Q_n de S_n assigne à un ensemble de valeurs ponctuelles des probabilités d'ordre $n^{-1/2}$ et il est donc impossible de l'approcher par les distributions absolument continues $\Psi_{n,s}$ avec un meilleur ordre que $n^{-1/2}$. Les développements asymptotiques valides de Q_n sont en deux parties, l'une classique de la forme $\Psi_{n,s}$, l'autre de correction, discontinue. Voir Esseen (1945), Bhattacharya et Ranga Rao (1976, chapitre 5) ou Kolassa (1997, Théorèmes 3.14.1 et 3.14.2)

1.4.4. Validité d'un développement pour un moment. L'étude asymptotique de Q_n , ou q_n lorsqu'elle existe, est souvent motivée par l'estimation de moments de la forme $\int f d(Q_n)$ ou $\int f(x)q_n(x)dx$, comme nous le verrons au chapitre 3. On souhaite majorer la différence

$$\int_{\mathbb{R}} f d(Q_n - \Psi_{n,s})$$

où f est une fonction mesurable telle que l'intégrale précédente ait un sens pour tout n suffisamment grand. Prendre par exemple $f(x) = |x|^r$ avec $r \leq s$ revient à considérer la convergence en moment dans le Théorème de limite centrale, comme cela fut étudié par von Bahr (1965).

Sous des conditions de régularité sur la fonction f , Götze et Hipp (1978) ont montré que l'on pouvait valider des développements pour $\int_{\mathbb{R}} f dQ_n$ en se dispensant de la condition de Cramér (1.4.12), étendant ainsi les résultats de Hipp (1977) pour les fonctions f à dérivée quatrième continue et uniformément bornée.

1.4.5. Théorèmes. Les Théorèmes qui suivent sont des versions « mono-dimensionnelles-i.i.d. » des théorèmes cités. Pour toute fonction f à valeur réelle et tout $\epsilon > 0$, définissons l'oscillation moyenne de f sous la mesure Φ :

$$\bar{\omega}_f(\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \omega_f(x : \epsilon) \Phi(dx)$$

avec $\omega_f(x : \epsilon) = \sup_{(y,z) \in \mathcal{B}(x,\epsilon)^2} |f(y) - f(z)|$.

THÉORÈME 1.10 (Bhattacharya et Ranga Rao, 1976, Théorème 20.1). *Supposons les variables Y_i i.i.d. centrées, de variance 1 et $\mathbb{E}|Y_1|^s < \infty$ pour $s \geq 3$. Si \hat{Q} vérifie (1.4.12), alors pour toute fonction f telle que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|(1 + |x|^s)^{-1} < \infty$, on a l'inégalité suivante*

$$\left| \int f d(Q_n - \sum_{r=0}^{s-2} n^{-r/2} P_r) \right| \leq c(f)\delta(n) + c(s,k)\bar{\omega}_f(2e^{-dn})$$

pour un réel positif d convenable, où $\delta = o(n^{-(s-2)/2})$ quand $n \rightarrow \infty$ et ne dépend pas de f .

THÉORÈME 1.11 (Bhattacharya et Ranga Rao, 1976, Théorème 19.2). *Sous les hypothèses du Théorème précédent et en supposant que \hat{Q} vérifie (1.4.9), alors Q_n admet une densité q_n pour tout n suffisamment grand. De plus*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^s) \left| q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-2} n^{-r/2} p_r(x) \right| = o(n^{-(s-2)/2})$$

quand $n \rightarrow \infty$.

Pour des sommes normalisées de vecteurs aléatoires indépendants, Götze et Hipp (1978) montrent la validité d'un développement de moment sans l'hypothèse de Cramér (1.4.12), dont une version simplifiée est donnée ici.

THÉORÈME 1.12 (Götze et Hipp, 1978, Théorème 3.6). *Supposons les variables Y_i i.i.d. centrées, de variance 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^s)^{-1} |f(x)| < \infty$ et s un réel tel que $\mathbb{E}|Y_1|^s < \infty$, f est $[s] - 2$ fois continûment dérivable et pour tout r , $0 \leq r \leq [s] - 2$, et un p entier, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^p)^{-1} |f^{(r)}(x)| < \infty$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f d(Q_n - \sum_{r=0}^{[s]-2} n^{-r/2} P_r) = o(n^{-([s]-2)/2})$$

1.5. Généralisation aux tableaux triangulaires

On s'intéresse à l'extension des résultats précédents aux « tableaux » de type

$$S_n = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} Y_{n,k} \tag{1.5.1}$$

où les $Y_{n,k}$ sont des variables centrées de variance finie, de distribution $Q_{n,k}$, et que nous supposerons encore dans un premier temps mono-dimensionnelles. On désigne par \mathcal{K}_n est une suite de sous-ensembles de \mathbb{Z} . On pourra avoir $\mathcal{K}_n = \{1, \dots, k_n\}$ où $k_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ et on dira ce tableau « triangulaire » si la suite (k_n) est d'ordre n . Cela inclut les sommes normalisées de variables Y_k indépendantes mais pas forcément identiquement distribuées. On parlera aussi de « tableaux infinis », pour lesquels $\mathcal{K}_n = \mathbb{Z}$. On note $m_{n,r}$ et $\chi_{n,r}$ les moment et cumulant d'ordre

r de la variable S_n s'ils existent et on suppose S_n renormalisée de sorte que $\mathbb{E}[S_n^2] = 1$ (donc $m_{n,1} = \chi_{n,1} = 0$ et $m_{n,2} = \chi_{n,2} = 1$ pour tout n). Dans le cadre des tableaux triangulaires, on appelle « condition de négligibilité asymptotique » (*smallness condition* en anglais) l'hypothèse

$$\forall \epsilon > 0, \max_{k=1, \dots, k_n} P(|Y_{n,k}| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (1.5.2)$$

Elle exclut les tableaux triangulaires dont un ou quelques termes dominent les autres, et pour lesquels tous les comportements de S_n sont alors possibles.

THÉORÈME 1.13 (Théorème 4.3 dans Petrov, 1995). *Supposons pour tout n les $Y_{n,1}, \dots, Y_{k,k_n}$ centrées et indépendantes. Alors*

$$S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (1.5.3)$$

et la condition de négligibilité asymptotique (1.5.2) est vérifiée si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{k=1}^{k_n} P(|Y_{n,k}| \geq \epsilon) \rightarrow 0 \quad (1.5.4)$$

et

$$\forall \tau > 0, \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}[Y_{n,k}^2 \mathbf{1}_{|Y_{n,k}| < \tau}] \rightarrow 1 \quad (1.5.5)$$

1.5.1. Développements formels. La méthode utilisée dans la section précédente pour obtenir des développements d'ordre supérieur peut être utilisée ici. Par indépendance de $Y_{n,k}$, la fonction caractéristique de S_n est le produit des fonctions caractéristiques de $Q_{n,k}(t) = \mathbb{E}e^{itY_{n,k}}$ et les cumulants de S_n sont les sommes des cumulants de même ordre des $Y_{n,k}$. Le développement d'Edgeworth formel de S_n s'obtient alors exactement de la même façon que dans le cas i.i.d. en remplaçant les cumulants $n^{-r/2}\kappa_r$ par $\chi_{n,k} = \sum_{k=1}^{k_n} \kappa_{n,k}$. On définit alors de nouveaux polynômes de Cramér-Edgeworth qui incluent l'ordre (qui est généralement $n^{r/2}$ pour P_r) puisque leurs coefficients dépendent des cumulants $\chi_{n,k}$. Posons pour une famille quelconque $\{\chi_r\}_{r \leq s}$

$$\tilde{P}_0(it, \{\chi_r\}) = 1 \quad ; \quad \tilde{P}_r(it, \{\chi_r\}) = \sum_{m=1}^r \frac{1}{m!} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m}^* \prod_{k=1}^m \frac{\chi_{\nu_k}}{(\nu_k)!} (it)^{\nu_k} \quad (1.5.6)$$

où la somme \sum^* porte sur les m -uplets d'entiers (ν_1, \dots, ν_m) supérieurs à 3 et tels que $\sum_{k=1}^m (\nu_k - 2) = r$. On peut définir ainsi, à partir des $\tilde{P}(it, \{\chi_r\}_{r \leq s})$ un développement d'Edgeworth formel à l'ordre s pour n'importe quelle variable aléatoire admettant $s + 2$ cumulants finis $\{\chi_r\}_{r \leq s}$. Ils ne peuvent avoir une valeur de développement *asymptotique* que si la famille $\{\chi_r\}_{r \leq s}$ est en fait une suite de familles qui tend vers zéro. Les polynômes \tilde{P}_r définis en (1.4.6) pour les sommes normalisées de variables i.i.d. sont reliés à ces polynômes par la relation $\tilde{P}_r(it) = \tilde{P}_r(it, \{n^{-(r-2)/2}\kappa_r\})$.

Les versions *multidimensionnelles* des polynômes $p_r(it, \{\chi_{n,s}\})$ s'obtiennent de la même façon. Les $\{\bar{\chi}_{n,\nu}\}$ sont alors les cumulants d'ordre ν du *vecteur aléatoire* S_n , où ν désigne un vecteur d'entiers positifs ou nuls. Enfin, pour étudier des vitesses de convergence en loi vers un vecteur gaussien de covariance V , on définit des polynômes de Cramér-Edgeworth $\tilde{P}_r(it, V, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})$, $P_r(x, V, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})$, « basés » non pas sur la loi gaussienne centrée réduite mais sur la gaussienne centrée de covariance V . Pour les définitions précises de ces polynômes, nous renvoyons au chapitre 5, section 5.2.

1.5.2. Validité. La méthode de comparaison dans le domaine caractéristique reste inchangée, et pour les petites valeurs de la variable associée t , les majorations sont du même type[‡]. Le traitement des grandes valeurs de t qui mène à (1.4.11) demande des hypothèses de négligibilité asymptotique. En effet, on a désormais

$$\hat{Q}_n(t) = \prod_{k \in \mathcal{K}_n} \hat{Q}_{n,k}(t)$$

et il faut des conditions supplémentaires pour s'assurer qu'un nombre assez grand de termes de ce produit sont petits pour que son intégrale sur les grandes valeurs de la variable t décroisse à la vitesse souhaitée. Ces conditions peuvent s'exprimer directement sur les fonctions caractéristiques comme dans le Théorème 1.14 ci-dessous, ou sur le tableau lui-même, comme dans le deuxième exemple. Prenons d'abord le cas particulier des suites $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ où les Y_k sont indépendantes (mais plus identiquement distribuées) centrées de covariances finies.

THÉORÈME 1.14 (Théorème 19.3, Bhattacharya et Ranga Rao, 1976). *Soit $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ où les Y_k sont des variables centrées de \mathbb{R}^d , de covariance finie et de moments absolus finis d'ordre s tels que*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|Y_k|^s < \infty$$

Soit B_n la matrice symétrique définie positive telle que

$$B_n^2 = V_n^{-1} \quad , \quad V_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n \text{cov}(Y_k)$$

définie pour tout n suffisamment grand. Supposons qu'il existe un entier positif p tel que les fonctions

$$g_{m,n}(t) = \prod_{j=m+1}^{m+p} |\mathbb{E}(e^{i \langle t, B_n Y_j \rangle})|, \quad 0 \leq m \leq n-p, n \geq p+1$$

vérifient

$$\gamma := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} g_{m,n}(t) dt < \infty : 0 \leq m \leq n-p, n \geq p+1 \right\}$$

et pour tout $\delta > 0$

$$\epsilon(\delta) := \sup \{ g_{m,n}(t) : |t| > \delta, 0 \leq m \leq n-p, n \geq p+1 \} < 1.$$

Alors la distribution de $n^{-1/2} B_n S_n$ admet une densité pour tout n suffisamment grand dont le développement d'Edgeworth formel est valide.

Considérons ensuite les tableaux de la forme

$$S_n = \sum_{j \in \mathcal{K}_n} U_{n,j} Z_j. \tag{1.5.7}$$

avec $\sum U_{n,j}^2 = 1$ et posons $U_n^* = \max_{k \in \mathcal{K}_n} |U_{n,j}|$. Pour valider le développement, on devra vérifier une condition de type

$$\int_{|t| > \delta/U_n^*} |\hat{Q}_n(t)| dt = \int_{|t| > \delta/U_n^*} \prod_{k \in \mathcal{K}_n} |\hat{Q}(U_{n,j} t)| dt = O(n^{-(s-2)/2}). \tag{1.5.8}$$

[‡] L'expression du rayon de la boule sur laquelle les approximations de la fonction caractéristiques sont valides est par contre modifiée.

Le résultat s'obtient si suffisamment de $U_{n,j}$ sont de l'ordre de U_n^* , c.-à-d.

$$|U_{n,j}| \in (\alpha U_n^*, U_n^*) \quad (1.5.9)$$

pour un α donné. Lorsque le tableau est proprement triangulaire, c'est à dire de longueur en $O(n)$, la condition peut ne porter que sur U_n^* . Si par exemple U_n^* est d'ordre $n^{-1/2}$, il est facile de voir que le nombre de poids $U_{n,j}$ satisfaisant (1.5.9) est lui même d'ordre n , pour tout α suffisamment petit. Ceci assure une certaine « mélangeance » au tableau. Lorsque le tableau est infini, la connaissance de la vitesse de décroissance de U_n^* ne suffit pas. Il faut donner une condition explicite sur les $U_{n,j}$, et c'est le rôle de l'hypothèse **(H1.4)** pour le résultat qui suit, et qui porte sur une version multidimensionnelle des tableaux (1.5.7).

1.5.3. Résultats. Le théorème énoncé ci-dessous est prouvé au chapitre 5. On y considère des tableaux infinis multidimensionnels de la forme

$$\mathbf{T}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j \quad (1.5.10)$$

où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est i.i.d. et les $\mathbf{U}_{n,j}$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^d tels que $\sum \mathbf{U}_{n,j} = 0$, autrement dit $\mathbb{E}[\mathbf{T}_n] = 0$. Notons que nous nous sommes intéressés à ces tableaux parce qu'ils apparaissent naturellement dans l'étude de la distribution limite de la transformée de Fourier discrète d'un processus linéaire, comme nous le verrons en section 1.6.2.

Cette classe de tableaux est particulière puisque le caractère multidimensionnel et triangulaire porte uniquement sur les poids déterministes $(\mathbf{U}_{n,j})$ qui pondèrent le processus i.i.d. scalaire $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, qui est le même sur chaque ligne du tableau. Soit $U_n^* = \max_{j \in \mathbb{Z}} |U_{n,j}|$. Pour énoncer la validité du développement d'Edgeworth de \mathbf{T}_n , nous avons besoin de définir les hypothèses qui suivent.

(H1.1) $\mathbb{E}[\mathbf{T}_n] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} = (0, \dots, 0)'$ et $V_n := \text{cov}(\mathbf{T}_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}'_{n,j}$ est inversible pour tout n suffisamment grand et telle que

$$\underline{\lim}_n \lambda_n > 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_n \Lambda_n < \infty.$$

où λ_n et Λ_n désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de V_n .

(H1.2) $\mathbb{E}[\mathbf{T}_n] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} = (0, \dots, 0)'$ et $\text{cov}(\mathbf{T}_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}'_{n,j} = I_d$.

(H1.3) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ et tout α positif, soit $f_{n,\alpha}(t)$ le nombre d'indices j tels que $|t' \mathbf{U}_{n,j}| \geq \alpha |t| U_n^*$ et soit $g_{n,\alpha} = \inf_{t \in \mathbb{R}^{2m}} f_{n,\alpha}(t)$.

(H1.4) Il existe des constantes positives C, β telles que, pour tout k_1, \dots, k_m et tout n suffisamment grand, il existe $p + s$ d -uplets disjoints $B_q = \{j_{1,q}, \dots, j_{d,q}\}$ tels que

$$|\det \mathbf{M}(B_q)| > C (U_n^*)^\beta, \quad q = 1, \dots, p.$$

De plus, pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, il existe α tel que

$$\epsilon^{g_{n,\alpha}} = O((U_n^*)^{s+\beta})$$

THÉORÈME (5.1). *Soit (Z_t) un processus i.i.d dont la distribution Q satisfait (1.4.9) et $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$ pour un entier $s \geq 3$. Supposons que les $\{\mathbf{U}_{n,j}\}$ vérifient **(H1.2)**, **(H1.3)** et **(H1.4)** (avec ce même entier s). Alors il existe une constante C dépendant seulement de la distribution de Z telle*

que, pour tout n suffisamment grand, la distribution de $\mathbf{T}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j$ admet une densité q_n qui vérifie

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^s) \left| q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} p_r(x, \{\bar{X}_{n,\nu}\}) \right| < C \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathbf{U}_{n,j}|^s$$

COROLLAIRE (5.2). Soit (Z_t) un processus i.i.d dont la distribution Q satisfait (1.4.9) et $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$ pour un entier $s \geq 3$. Supposons que les $\{\mathbf{U}_{n,j}\}$ vérifient **(H1.1)**, **(H1.3)** et **(H1.4)** (avec ce même entier s). Alors il existe une constante C dépendant seulement de la distribution de Z telle que, pour tout n suffisamment grand, la distribution de $\mathbf{T}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j$ admet une densité q_n qui vérifie

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^s) \left| q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} p_r(x, V_n, \{\bar{X}_{n,\nu}\}) \right| < C \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathbf{U}_{n,j}|^s$$

1.6. Applications au périodogramme

Les résultats que nous avons énoncés précédemment trouvent leur motivation dans l'étude de statistiques construites sur le périodogramme des observations X_1, \dots, X_n d'un processus à temps discret, strictement stationnaire, aux fréquences de Fourier $x_k = 2k\pi/n$, $k = 1, \dots, [(n-1)/2]$

$$I_{n,k}^X = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{itx_k} \right|^2,$$

L'évaluation fine de la distribution jointe asymptotique du périodogramme s'avère cruciale. Elle est reliée à celle des vecteurs de transformées de Fourier discrètes

$$C_{n,k}^X = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n X_t \cos x_k t, \quad S_{n,k}^X = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n X_t \sin x_k t,$$

qui sont des tableaux triangulaires des variables $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, d'où l'étude des développements d'Edgeworth pour de tels vecteurs aléatoires.

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus i.i.d, la question des développements pour les $C_{n,k}^X, S_{n,k}^X$ entre directement dans le cadre des tableaux triangulaires de la section 1.5. Chen et Hannan (1980) furent les premiers à les pratiquer. Leur résultat de développement de densité à l'ordre 2 s'étend facilement à tous les ordres. Pour des développements de moments, on adaptera les résultats de Götze et Hipp (1978). La section 1.6.1 fournit pour ces deux cas un résultat de validité, sous forme de lemme.

Si, en revanche, $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus dépendant, alors peu de résultats de validité sont disponibles. On doit à Götze et Hipp (1983) la validité du développement d'Edgeworth pour des vecteurs faiblement dépendants, mais sous des hypothèses de mélange qui restreint à des processus à courte portée (décroissance géométrique des coefficient du filtre, pour les processus linéaires). Nous avons prouvé des résultats nouveaux en supposant justement le processus X linéaire

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{t-j} Z_j, \quad Z \text{ i.i.d, } \mathbb{E}[Z_1] = 0, \quad \mathbb{E}[Z_1^2] = 1 \quad (1.6.1)$$

avec $\sum_j \psi_j^2 < \infty$. Soit $\mathbf{k} = (k(1), \dots, k(m))$ un m -uplet d'entiers distincts de $\{1, \dots, [(n-1)/2]\}$,

$$\mathbf{C}_t = (\cos(x_{k(1)} t), \sin(x_{k(1)} t), \dots, \cos(x_{k(m)} t), \sin(x_{k(m)} t)),$$

et \mathbf{F}_n la matrice diagonale de dimension $2m$ dont les éléments diagonaux sont

$$(f(x_{k(1)})^{-1/2}, f(x_{k(1)})^{-1/2}, \dots, f(x_{k(m)})^{-1/2}, f(x_{k(m)})^{-1/2}).$$

Soit le vecteur de transformées de Fourier renormalisées

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_n &= \left(f(x_{k(1)})^{-1/2} C_{n,k(1)}^X, f(x_{k(1)})^{-1/2} S_{n,k(1)}^X, \dots, \right. \\ &\quad \left. f(x_{k(m)})^{-1/2} C_{n,k(m)}^X, f(x_{k(m)})^{-1/2} S_{n,k(m)}^X \right) \\ &= (2\pi n)^{-1/2} \mathbf{F}_n \sum_{t=1}^n X_t \mathbf{C}_t. \end{aligned}$$

D'après (1.6.1), ce vecteur admet bien la représentation (1.5.10) avec

$$\mathbf{U}_{n,j} = (2\pi n)^{-1/2} \mathbf{F}_n \sum_{t=1}^n \psi_{t-j} \mathbf{C}_t, j \in \mathbb{Z}. \quad (1.6.2)$$

L'application du Théorème 5.1 traduit ci-dessus au tableau \mathbf{T}_n permet de valider des développements de densité pour les vecteurs de transformées de Fourier des processus linéaires, moyennant la vérification des hypothèses de négligibilité asymptotique. Cette étape est la plus délicate pour les processus à longue mémoire et c'est dans ce dernier cas que la renormalisation des $C_{n,k}^X$ et $S_{n,k}^X$ par la densité spectrale est indispensable. Notre résultat sur les processus à dépendance longue est énoncé en section 1.6.2 et prouvé au chapitre 5.

1.6.1. Le périodogramme de l'i.i.d. Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus i.i.d centré de variance. Nous verrons dans par suite l'importance que revêt un théorème limite sur les tableaux triangulaires du périodogramme de Z_1, \dots, Z_n de la forme

$$S_n = \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \beta_{n,k} \phi(I_{n,k}^Z)$$

où ϕ est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Que l'on veuille prouver la consistance en moment ou la normalité asymptotique (par la méthode des moments) de S_n , on aura besoin d'évaluer les moments des $\phi(I_{n,k}^Z)$, par exemple

$$\mathbb{E}[\phi(I_{n,k}^Z) \phi(I_{n,j}^Z)].$$

Cette évaluation peut se faire si l'on connaît la distribution exacte des $(I_{n,k}^Z)$ (cas gaussien), ou une approximation de celle-ci (son développement d'Edgeworth à un ordre suffisant dans le cas général). Le lemme suivant est la généralisation à tout ordre du Lemme 2 de Chen et Hannan (1980). Il s'établit en adaptant le Théorème 19.3 de Bhattacharya et Ranga Rao (1976) concernant les sommes de variables i.i.d. aux tableaux triangulaires de la forme $\sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{n,j} Z_j$ que sont les vecteurs de transformées de Fourier discrète

$$W_{n,\mathbf{k}} = (C_{n,k(1)}^Z, S_{n,k(1)}^Z, \dots, C_{n,k(d)}^Z, S_{n,k(m)}^Z)'$$

où $\mathbf{k} = (k(1), \dots, k(m))$ une m -uplet d'entiers distincts de $\{1, \dots, [(n-1)/2]\}$.

LEMME. *Sous les conditions $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$, $s \geq 3$, $\mathbb{E}[e^{itZ}] \in L_p$ pour un $p \geq 1$ et pour tout n suffisamment grand, la distribution du vecteur $W_{n,\mathbf{k}}$ dont on note $\{\chi_{\nu,n}\}$ les cumulants d'ordre ν , admet une densité q_n telles que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{2d}} (1 + |x|^s) |q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} n^{-r/2} p_r(x, \{\bar{\chi}_{\nu,n}\})| < C n^{-(s-2)/2}$$

pour une constante C pouvant être choisie uniformément par rapport à \mathbf{k} .

Toujours pour la distribution du vecteur aléatoire $W_{n,\mathbf{k}}$, nous avons montré (voir section 3.8.1) qu'un développement du moment $\int f dQ_n$ était valide pour des fonctions f régulières, sous

des hypothèses de moments, et sans la condition de Cramér, en vérifiant les hypothèses de Götze et Hipp (1978). Ce résultat peut se formuler de la façon suivante.

LEMME. *Supposons que $\mathbb{E}|Z_1|^s < \infty$ pour un entier $s \geq 3$. Posons $r_0 := (s - 2 - 2m)^+ + 2$ et soit f une fonction de \mathbb{R}^{2m} dans \mathbb{R} , r_0 fois continuellement dérivable, et telle que pour tout $2m$ -uplet $(\beta_1, \dots, \beta_{2m})$ tel que $\sum \beta_i = r_0$, on ait $\int_{\mathbb{R}^{2m}} D^\beta f(x) dx < \infty$. Soit Q_n la distribution du vecteur $W_{n,\mathbf{k}}$. Alors le développement d'Edgeworth formel $\int_{\mathbb{R}^{2m}} f d\Psi_{n,s-2}$ du moment $\int f dQ_n$ est valide au sens où*

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} f d(Q_n - \Psi_{n,s-2}) = o(n^{-(s-2)/2})$$

avec un o qui ne dépend que de la fonction f et des moments de Z_1 .

1.6.2. Le périodogramme d'un processus linéaire à longue portée. Nous présentons ici un résultat de validité pour le développement de la densité des transformées de Fourier d'un processus linéaire, dans le contexte des processus à mémoire longue. Notons que dans ce cadre, d'autres approches comme la méthode de Bartlett (présentée au chapitre suivant), ne sont plus aussi fructueuses qu'en courte portée. Nous présentons ici l'application de ce résultat au calcul du risque quadratique moyen de l'estimateur de Geweke et Porter-Hudak (1983) du paramètre de mémoire longue.

Processus à longue portée. On dit que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est à longue portée si sa fonction d'autocovariance n'est pas absolument sommable, ce qui peut se traduire par une ou plusieurs singularités de la densité spectrale f et des propriétés très particulières du périodogramme. Les signaux aléatoires présentant de la longue dépendance font l'objet d'un intérêt accru, et motivé par l'observation commune de tels signaux dans des domaines divers (hydrologie, télétrafic, etc.). On se limitera ici aux processus X à longue mémoire *non-saisonniers* (pour le cas saisonnier, voir par exemple Viano *et al.*, 1995), dont la densité spectrale en zéro vérifie :

$$f(x) \sim Cx^{-2d} \quad \text{quand } x \rightarrow 0$$

où d est un réel dans $(0, \frac{1}{2})$. Cette classe de processus décrit efficacement beaucoup des phénomènes naturels; de plus, elle inclut les modèles FARIMA(p, d, q) (voir Granger et Joyeux 1980; Brockwell et Davis 1991 §13.2), le modèle FEXP de Bloomfield (1973; voir aussi Robinson 1994; Moulines et Soulier 1999) ou le bruit gaussien fractionnaire (Mandelbrot et Van Ness, 1968). Nous définissons f^* la « partie régulière » de f par

$$f(x) = x^{-2d} f^*(x) \quad , \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (1.6.3)$$

Qu'on l'appelle d ou $\gamma = 1 - d$, ou $H = \frac{1}{2} - d$ (dit « coefficient de Hurst »), le « paramètre » qui contrôle la singularité en zéro et qui mesure l'intensité de la longue dépendance est d'importance cruciale dans la pratique, et son estimation pose de nombreux problèmes théoriques. Plusieurs approches sont possibles, certaines dans le domaine temporel — méthode de la variance (Taqqu *et al.*, 1995), des coefficients de corrélation — d'autres dans le domaine fréquentiel — méthode de Whittle, de Whittle locale, de Whittle «agrégé» (Fox et Taqqu, 1986; Robinson 1995) ou régression sur le log-périodogramme. C'est cette dernière approche, initiée par Geweke et Porter-Hudak (1983), qui nous intéresse.

Résultat. Partant du Théorème 5.1, nous avons prouvé la validité d'un développement de densité pour les vecteurs de transformées en sinus et en cosinus de X_1, \dots, X_n renormalisés par la densité spectrale f du processus X :

$$\mathbf{S}_n = (2\pi n)^{-1/2} \mathbf{F}_n \sum_{t=1}^n X_t \mathbf{C}_t \quad (1.6.4)$$

avec $k(1), \dots, k(m)$ m entiers fixés de $\{1, \dots, [(n-1)/2]\}$,

$$\mathbf{C}_t = (\cos(x_{k(1)}t), \sin(x_{k(1)}t), \dots, \cos(x_{k(m)}t), \sin(x_{k(m)}t)),$$

et \mathbf{F}_n la matrice diagonale de dimension $2m$ dont les éléments diagonaux sont

$$(f(x_{k(1)})^{-1/2}, f(x_{k(1)})^{-1/2}, \dots, f(x_{k(m)})^{-1/2}, f(x_{k(m)})^{-1/2}).$$

THÉORÈME (5.4). *Supposons X linéaire strictement stationnaire et causal*

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{t-j} Z_j \quad , \quad Z \text{ i.i.d.}, \quad \mathbb{E}[Z_1] = 0, \quad \mathbb{E}[Z_1^2] < \infty$$

avec $\psi_j = 0$ pour $j \leq 0$ et $\psi_j = CL(j)j^{-\gamma}$ pour $j > 0$, $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$ et L une fonction à variation lente, c.-à-d. telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\lambda t)/L(t) = 1$ pour tout λ positif. Supposons de plus $\mathbb{E}e^{itZ_1} \in L_p$ pour un certain $p \geq 2$ et $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$ pour un entier $s \geq 3$. Soit S_n défini en (1.6.4), $V_n = \text{cov}(\mathbf{S}_n)$ et $B_n = B'_n$, $B_n^2 = V_n^{-1}$. Alors, uniformément en $k(1), \dots, k(m)$ dans $\{1, \dots, a_n\}$ où a_n est une suite d'entiers positifs vérifiant $a_n/n \rightarrow 0$, et pour tout n suffisamment grand, la fonction de répartition de S_n admet une densité q_n telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{2m}} (1 + |x|^s) |q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} p_r(x, V_n, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})| < Cn^{-(s-2)/2}$$

pour une certaine constante C , où $\bar{\chi}_{n,\nu}$ est le cumulante d'ordre $\nu \in \mathbb{N}^d$ de $B_n \mathbf{S}_n$.

Risque quadratique moyen de l'estimateur GPH. Geweke et Porter-Hudak (1983) proposèrent d'estimer l'exposant de la singularité de f en 0 par régression sur le log-périodogramme et sur un intervalle dégénérant autour de 0, soit précisément :

$$\hat{d} = \left(\sum_{j=1}^m L_{n,j}^2 \right)^{-1} \sum_{j=0}^m L_{n,j} Y_{n,j} \tag{1.6.5}$$

avec, pour $j = 1, \dots, \tilde{n}$, $L_{n,j} = -2 \log |x_j| + 2m^{-1} \sum_{k=1}^m \log |x_k|$ et :

$$Y_{n,j} := \log I_{n,j}^X + \mathcal{E}. \tag{1.6.6}$$

La dépendance de m en n est implicite dans la notation. \hat{d} est communément appelé « estimateur GPH ». Ces auteurs suggéraient de prendre m d'ordre $\sqrt{\tilde{n}}$, qui donne de bons résultats empiriques. Depuis, cet estimateur a été largement étudié. Robinson (1995) a prouvé sa consistance et sa normalité asymptotique pour X gaussien. Hurvich *et al.* (1998) ont récemment exprimé l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}(\hat{d} - d)^2$, dont ils déduisent une vitesse optimale de m pour une certaine modélisation de la partie régulière de f en 0. La consistance de \hat{d} a été prouvée par Velasco (1999) pour un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ linéaire, au moyen d'une technique de type « Bartlett » telle que nous allons la décrire en section 2.5, et qui est utilisable en longue portée moyennant le fenêtrage (*tapering*) des données. Cette méthode ne permet aucune maîtrise des moments et le risque quadratique moyen restait donc un problème ouvert dans le cas non-gaussien.

Partons de la décomposition suivante :

$$Y_{n,j} = -2d \log x_j + \log f^*(x_j) + \epsilon_{n,j}, \quad j = 1, \dots, \tilde{n} \tag{1.6.7}$$

où l'on a posé

$$\epsilon_{n,j} = \log \left(\frac{I_{n,j}^X}{f(x_j)} \right) + \mathcal{E}, \quad j = 1, \dots, \tilde{n}.$$

L'intérêt de cette écriture est de faire apparaître le périodogramme renormalisé a été étudié précisément en longue portée (Künsch 1986 ; Robinson 1995 ; Moulines et Soulier 1999). Injectée dans le calcul de $\mathbb{E}(d - \hat{d})^2$, elle fait apparaître deux termes dominants.

Le premier, dû aux $\log f^*(x_j)$, est un terme de biais déterministe, qui rend compte de l'erreur commise en approchant $f(x)$ par Cx^{-2d} autour de zéro. Sa forme est donc induite par les hypothèses faites sur la partie régulière f^* en zéro.

Le second terme est donné par le moment suivant

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \epsilon_{n,j}\right)^2$$

Son évaluation nécessite des expressions des biais, variances et covariances des $(\epsilon_{n,j})$. Voyons le cas des covariances. La matrice de covariance du vecteur :

$$\mathbf{T}_{n,j,k} = \left(\frac{c_{n,j}}{\sqrt{f(x_j)}}, \frac{s_{n,j}}{\sqrt{f(x_j)}}, \frac{c_{n,k}}{\sqrt{f(x_k)}}, \frac{s_{n,k}}{\sqrt{f(x_k)}} \right)' \quad (1.6.8)$$

peut être évaluée grâce aux résultats de Hurvich et Beltrao (1993), Robinson (1995), Moulines et Soulier (1999). Lorsque le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est gaussien, cette connaissance permettent d'évaluer la distribution jointe du vecteur $(\epsilon_{n,j}, \epsilon_{n,k})$, ce qui n'est plus vrai lorsque $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ n'est pas gaussien. Des résultats plus précis sur la distribution de $\mathbf{T}_{n,j,k}$ sont nécessaires. Ils sont procurés par le Théorème 5.4 traduit ci-dessus. En les appliquant, on déduit alors une expression du risque quadratique moyen $\mathbb{E}(d - \hat{d})^2$ en non-gaussien.

PROPOSITION (5.5). *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus linéaire strictement stationnaire et causal*

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{t-j} Z_j \quad , \quad Z \text{ i.i.d.}, \quad \mathbb{E}[Z_1] = 0, \quad \mathbb{E}[Z_1^2] < \infty$$

avec $\psi_j = 0$ pour $j \leq 0$ et $\psi_j \sim Cj^{-\gamma}$ pour $j \rightarrow \infty$, $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, tel que la partie régulière f^* de la densité spectrale f de X soit non-nulle en zéro, trois fois dérivable sur $[-\pi, \pi] \setminus 0$, $f'(0) = 0$ et f'' et f''' bornées sur un voisinage de zéro. Supposons de plus $\mathbb{E}e^{itZ_1} \in L_p$ pour un certain $p \geq 2$ et $\mathbb{E}|Z|^{-5} < \infty$. Soit \hat{d} défini par (1.6.5) et supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/m + m \log(m)/n = 0$. Alors

$$\mathbb{E}(d - \hat{d})^2 = \frac{4\pi^4}{81} \left\{ \frac{f^{*''}(0)}{f^*(0)} \right\} \frac{m^4}{n^4} + \frac{\pi^2}{24m} + O\left\{ \frac{m(\log^3 m)}{n^2} \right\} + o\left(\frac{m^4}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

REMARQUE. C'est la modélisation de f^* en zéro (empruntée à Hurvich *et al.*, 1998) qui détermine la forme du terme de biais dans l'expression précédente. La vitesse optimale de m s'obtient alors en équilibrant les deux termes de ce risque quadratique, elle est dans ce cas en $O(n^{4/5})$.

Bibliographie du chapitre 1

1. O.E. Barndorff-Nielsen and D.R. Cox, *Asymptotic techniques for use in statistics*, Chapman and Hall, 1989.
2. R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.
3. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, 1968.
4. P. Bloomfield, *An exponential model for the spectrum of a scalar time series*, *Biometrika* **60** (1973), 217–226.
5. P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
6. P.L. Chebyshev, *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités*, *Acta Math.* **14** (1890), 305–315.
7. Z.-G. Chen and E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, *J. of Time Series Analysis* **1** (1980), 73–82.
8. H. Cramér, *On the composition of elementary errors*, *Skand. Aktuarietidskr.* **11** (1928), 13–74, 141–180.
9. ———, *Mathematical methods of statistics*, Princeton University Press, 1946.
10. F.Y. Edgeworth, *The asymmetrical probability curve*, *Philos. Mag.* **41** (1896), 90–99.
11. ———, *The law of error*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **20** (1905), 26–65.
12. C.G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions*, *Acta Mathematica* **77** (1945), 1–125.
13. R. Fox and M.S. Taqqu, *Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series*, *Annals of Statistics* **14** (1986), 517–532.

14. J. Geweke and S. Porter-Hudak, *The estimation and application of long memory time series models*, J. of Time Series Analysis **4** (1983), 221–238.
15. F. Götze and C. Hipp, *Asymptotic expansions in the central limit theorem under moment conditions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **42** (1978), 67–87.
16. ———, *Asymptotic expansions for sum of weakly dependent random vectors*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **64** (1983), 211–239.
17. C.W.J. Granger and R. Joyeux, *An introduction to long memory time series and fractional differencing*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 15–30.
18. P. Hall, *The bootstrap and Edgeworth expansion*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1992.
19. C. Hipp, *Edgeworth expansions for integrals of smooth functions*, Ann. Probab. **5** (1977), 1004–1011.
20. C. M. Hurvich and K. I. Beltrao, *Asymptotics for the low-frequency ordinates of the periodogram of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **14** (1993), no. 5, 455–472.
21. C. M. Hurvich, R. Deo, and J. Brodsky, *The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **19** (1998), no. 1, 19–46.
22. J.E. Kolassa, *Series approximation methods in statistics*, 2nd ed., Lecture Notes in Statistics, no. 88, Springer, 1997.
23. H.R. Künsch, *Discrimination between monotonic trends and long-range dependence*, J. Applied Probability **23** (1986), 1025–1030.
24. B.B. Mandelbrot and Van Ness J.W., *Fractional brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Rev. **10** (1968), 422–437.
25. E. Moulines and Ph. Soulier, *Broad band log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **27** (1999), no. 3, 1415–1539.
26. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory*, Oxford University Press, 1995.
27. P.M. Robinson, *Semiparametric analysis of long-memory time series*, Annals of Statistics **22** (1994), 515–539.
28. ———, *Gaussian semiparametric estimation of long range dependence*, Annals of Statistics **24** (1995), 1630–1661.
29. ———, *Log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **23** (1995), 1043–1072.
30. M. S. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger, *Estimators for long-range dependence: An empirical study*, Fractals **3** (1995), no. 4, 785–798.
31. C. Velasco, *Non-Gaussian log-periodogram regression*, Econometric Theory **16** (2000), 44–79.
32. M.-C. Viano, C. Deniau, and G. Oppenheim, *Long-range dependence and mixing for discrete time fractional processes.*, J. Time Ser. Anal. **16** (1995), no. 3, 323–338.
33. B. von Bahr, *On the convergence of moments in the central limit theorem*, Ann. Math. Statist. **36** (1965), 808–18.

CHAPITRE 2

Le périodogramme du bruit blanc et d'un processus linéaire en courte portée

2.1. Introduction et définitions

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés asymptotiques du périodogramme de l'échantillon Y_1, \dots, Y_n où $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une série temporelle stationnaire de moyenne nulle et dont la fonction d'autocovariance $\gamma_Y(\cdot)$ est absolument sommable

$$\sum_{\tau \in \mathbb{Z}} |\gamma_\tau| < \infty. \quad (2.1.1)$$

On note f_Y la densité spectrale de Y ,

$$\forall x \in [0, 2\pi], f_Y(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \gamma_Y(\tau) e^{i\tau x}, \quad (2.1.2)$$

et sous l'hypothèse de courte portée (2.1.1), f_Y existe et est continue en tout x . On considèrera le cas particulier où Y est un bruit blanc, qu'on notera alors $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, puis celui où Y est un processus linéaire, noté $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, et dont le bruit blanc d'excitation sous-jacent sera lui aussi noté $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, soit $X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j Z_{t-j}$ avec $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| < \infty$. Pour $Y = Z$ ou $Y = X$, on notera

$$\begin{aligned} d_{n,k}^Y &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n e^{ix_k t} Y_t, \\ c_{n,k}^Y &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n \cos(x_k t) Y_t, \\ s_{n,k}^Y &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{t=1}^n \sin(x_k t) Y_t \end{aligned}$$

la transformée de Fourier discrète et les transformées en sinus et en cosinus de $(Y_t)_{t=1, \dots, n}$ aux fréquences de Fourier

$$x_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Le périodogramme de Y aux fréquences de Fourier est défini comme suit

$$I_{n,k}^Y = |d_{n,k}^Y|^2 = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n Y_t e^{ix_k t} \right|^2, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (2.1.3)$$

et admet donc la représentation $I_{n,k}^Y = (c_{n,k}^Y)^2 + (s_{n,k}^Y)^2$. Soit $\tilde{n} = [(n-1)/2]$ et $\mathcal{K} = \{1, \dots, \tilde{n}\}$.

Avec Fuller (1976), on définit la fonction $I_n^Y(\cdot)$ en toute fréquence x de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ comme la valeur du périodogramme discret à la fréquence de Fourier la plus proche de x (et la plus petite fréquence de Fourier en valeur absolue s'il y en a deux plus proches), soit

$$I_n^Y(x) = \begin{cases} I_{n,k}^Y & \text{si } x_k - \pi/n < x \leq x_k + \pi/n \text{ et } x \in [0, \pi] \\ I_{n,k}^Y(-x) & \text{si } x \in [-\pi, 0]. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Les fonctions $c_n^Y(x)$ et $s_n^Y(x)$ se déduisent des $c_{n,k}^Y$ et de $s_{n,k}^Y$ de la même façon.

Il sera parfois profitable et/ou nécessaire de faire appel non pas au périodogramme lui-même, mais à une version agrégée (ou “moyennée”) de celui-ci (*pooled periodogram*), telle que définie par Robinson (1994). L’axe des fréquences est découpé en blocs de taille m fixée, et les valeurs du périodogramme sont sommées sur chacun de ces blocs. Comme m est fixé, le périodogramme agrégé n’est pas « lissé » ni plus consistant que le périodogramme simple. Il a par contre une distribution limite différente. Posons $K = [(n - 1)/2m]$ (la dépendance de K en n est implicite). Pour $k = 1, \dots, K$, définissons le k -ème bloc de fréquences par l’ensemble d’indice $J_k = \{m(k - 1) + 1, \dots, mk\}$, la fréquence centrale associée $y_k = ((2k - 1)m + 1)\pi/n$ et définissons la k -ème ordonnée du périodogramme agrégé de Y_1, \dots, Y_n comme la somme:

$$\bar{I}_{n,k}^Y = \sum_{j \in J_k} I_{n,j}^Y \quad (2.1.5)$$

Nous allons d’abord énoncer des premiers résultats sur le périodogramme du bruit blanc et d’un processus linéaire en courte portée, d’après la section §10.3 du livre *Time Series: Theory and Methods* de Brockwell et Davis (1991) et l’article *Some asymptotic results for the periodogram of a stationary series* de Walker (1965). Nous nous intéresserons ensuite à des statistiques plus élaborées obtenues par mélange d’un nombre croissant — éventuellement en $O(n)$ — de valeurs du périodogramme. De façon générique, nous considérerons les tableaux triangulaires de la forme

$$S_n = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \beta_{n,k} \phi_{n,k} (I_{n,k}^Y / f_Y(x_k))$$

où Y sera un bruit blanc ou un processus linéaire. Nous évoquerons d’abord le cas particulier où les $\phi_{n,k}$ sont linéaires (section 2.3). Nos résultats originaux cités dans ce chapitre — portant sur les fonctionnelles non-linéaires du périodogramme d’un bruit blanc ou d’un processus linéaire à courte portée — sont extraits respectivement des Chapitres 3 et 4 où la méthodologie et les applications sont traitées en détail. Nous les présentons succinctement en Sections 2.4 et 2.5.

2.2. Résultats élémentaires

Soit $\hat{\gamma}_Y$ la fonction d’autocovariance empirique calculée à partir des observations Y_1, \dots, Y_n :

$$\hat{\gamma}_Y(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|\tau|} X_t X_{t+|\tau|}, \quad |\tau| < n.$$

Notons que

$$I_{n,k}^Y = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau| < n} \hat{\gamma}_Y(\tau) e^{ix_k \tau}, \quad (2.2.1)$$

ce qui fait du périodogramme (2.2.1) le candidat naturel pour toute estimation de la densité spectrale (2.1.2). Il est en tout cas asymptotiquement non-biaisé sous l’hypothèse de courte portée (2.1.1) comme le montre la proposition suivante. On verra par la suite qu’il n’est jamais consistant.

PROPOSITION 2.1 (D’après la Proposition 10.3.2 de Brockwell et Davis, 1991). *Soit Y un processus stationnaire de moyenne nulle dont la fonction d’autocovariance est absolument sommable. Alors $\mathbb{E}[I_n^Y(x)]$ converge uniformément vers f_Y sur $[-\pi, \pi]$.*

PREUVE. Pour tout τ , $\mathbb{E}[\hat{\gamma}_Y(\tau)] = (1 - |\tau|/n)\gamma_Y(\tau)$, donc, d’après (2.2.1),

$$\mathbb{E}[I_n^Y(x)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{|\tau| < n} (1 - |\tau|/n)\gamma_Y(\tau) e^{ig_n(x)\tau},$$

où $g_n(x)$ est la fréquence de Fourier la plus proche de x , selon la définition continue du périodogramme (2.1.4). Le théorème de convergence dominée fournit le résultat sous l'hypothèse $\sum_{\tau} |\gamma_Y(\tau)| < \infty$ et d'après (2.1.2), \square

Considérons d'abord le périodogramme du bruit blanc.

PROPOSITION 2.2 (D'après la Proposition 10.3.2 de Brockwell et Davis, 1991). *Soit Z un bruit i.i.d de moyenne nulle et de variance σ^2 .*

1. Si $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < \pi$, alors le vecteur aléatoire $(I_n^Z(\lambda_1), \dots, I_n^Z(\lambda_m))'$ converge en loi vers un vecteur de variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre $\sigma^2/2\pi$, qui est la distribution exacte de ce vecteur pour tout n si Z est gaussien.
2. Si $\mathbb{E}[Z^4] < \infty$, x_j et x_k deux fréquences de Fourier distinctes dans $]0, \pi[$, alors

$$\text{var}(2\pi I_{n,j}^Z) = \begin{cases} 2\sigma^4 + \frac{\kappa_4}{n} & \text{si } x_k = 0 \text{ ou } \pi \\ \sigma^4 + \frac{\kappa_4}{n} & \text{si } 0 < x_k < \pi \end{cases} \quad (2.2.2)$$

et

$$\text{cov}(2\pi I_{n,j}^Z, 2\pi I_{n,k}^Z) = \frac{\kappa_4}{n} \quad (2.2.3)$$

PREUVE.

1. Pour tout n , la covariance du vecteur

$$U_n := (c_n^Z(y_1), s_n^Z(y_1), \dots, c_n^Z(y_m), s_n^Z(y_m))$$

est $(4\pi)^{-1}\mathbf{I}_{2m}$ par orthogonalité de la base de Fourier réelle. Si Z est gaussien, U_n est également gaussien d'où le résultat. Dans le cas général, le Théorème 1.3 de Lindeberg-Feller implique la normalité asymptotique de chaque composante de U_n et de l'argument de Cramér-Wold découle la normalité asymptotique multidimensionnelle suivante : $U_n \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \frac{1}{4\pi}\mathbf{I}_{2m})$. D'où le résultat.

2. De l'expression $2\pi I_n(x_j) = n^{-1} \sum_{s,t=1}^n Z_s Z_t e^{ix_j(t-s)}$ on obtient

$$\mathbb{E}[2\pi I_n(x_k)] = n^{-1} \sum_{s,t=1}^n e^{ix_j(t-s)} \mathbb{E}[Z_s Z_t] = \sigma^2, \quad (2.2.4)$$

$$\mathbb{E}[4\pi^2 I_n(x_j) I_n(x_k)] = n^{-2} \sum_{s,t,u,v=1}^n \mathbb{E}[Z_s Z_t Z_u Z_v] e^{ix_j(t-s)} e^{ix_k(v-u)}.$$

Or

$$\mathbb{E}[Z_s Z_t Z_u Z_v] = \begin{cases} \mathbb{E}[Z_s^4] = \kappa_4 + 3\sigma^4 & \text{si } s = t = u = v, \\ \mathbb{E}[Z_s^2] \mathbb{E}[Z_u^2] = \sigma^4 & \text{si } s = t \neq u = v, \\ \mathbb{E}[Z_s] \mathbb{E}[Z_t Z_u Z_v] = 0 & \text{si } s \neq t, s \neq u, s \neq v. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[4\pi^2 I_n(x_j) I_n(x_k)] &= n^{-1} \kappa_4 \\ &+ \sigma^4 (1 + n^{-2} \left| \sum_{t=1}^n e^{it(x_j+x_k)t} \right|^2 + n^{-2} \left| \sum_{t=1}^n e^{it(x_j-x_k)t} \right|^2). \end{aligned}$$

De cette dernière relation et de (2.2.4) découlent (2.2.2) et (2.2.3). \square

En courte portée, cette Proposition peut s'étendre aux processus linéaires de la forme

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j Z_{t-j} \quad , \quad (Z_t) \text{ IID}(0, \sigma^2) \quad , \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| < \infty. \quad (2.2.5)$$

Soit alors $A(e^{-ix}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{-ijx}$ la fonction de transfert du filtre $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. Les densités spectrales f_X et f_Z sont reliées par la relation

$$\forall x \in [0, 2\pi], f_X(x) = |A(e^{-ix})|^2 f_Z(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |A(e^{-ix})|^2 \quad (2.2.6)$$

dont il existe des relations analogues en termes de transformées de Fourier discrètes et périodogramme de (X_1, \dots, X_n) et de (Z_1, \dots, Z_n) appelées « décompositions de Bartlett »

$$d_{n,k}^X = A(e^{-ix_k}) d_{n,k}^Z + r_n(x_k) \quad (2.2.7)$$

$$I_{n,k}^X = 2\pi f(x_k) I_{n,k}^Z + R_{n,k}. \quad (2.2.8)$$

Ces équations définissent les grandeurs aléatoires $r_{n,k}$ et $R_{n,k}$ qui sont vues comme des « restes » stochastiques, reliés par la relation suivante :

$$\forall k \in \{1, \dots, \tilde{n}\}, \quad R_{n,k} = |r_{n,k}|^2 + A(e^{-ix_k}) d_{n,k}^Z r_{n,k}^* + A^*(e^{-ix_k}) (d_{n,k}^Z)^* r_{n,k} \quad (2.2.9)$$

où c^* désigne le complexe conjugué de c . Ces décompositions furent proposées originellement par Bartlett (1955), et par la suite largement étudiées par Walker (1965) surtout, également par Chen et Hannan (1980) et An *et al.* (1983). La proposition qui suit, d'après le Lemme 4.10 du Chapitre 4 et le Théorème 10.3.1 de Brockwell et Davis (1991), montre qu'en courte portée, il s'agit bien de « restes » qui tendent en moment vers zéro.

PROPOSITION 2.3. *Soit X un processus linéaire défini en (2.2.5) et Z le processus i.i.d de variance finie sous-jacent. Alors pour $k \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$,*

$$\max_{k \in \{1, \dots, \tilde{n}\}} \mathbb{E}|R_{n,k}| \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$. Si on suppose de plus que $\sum_j |a_j| |j|^{1/2} < \infty$ et $\mathbb{E}[Z_1^{2p}] < \infty$ pour $p \geq 2$ entier, alors on a

$$\max_{k \in \{1, \dots, \tilde{n}\}} (\mathbb{E}|R_{n,k}|^p)^{1/p} = O(n^{-1/2}).$$

PREUVE. Dérivons d'abord l'expression exacte des $r_{n,k}$ d'après la définition des $d_{n,k}^{(X,Z)}$.

$$\begin{aligned} d_{n,k}^X &= (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t e^{-ix_k t} \\ &= (2\pi n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{-ijx_k} \left(\sum_{t=1}^n Z_{t-j} e^{-ix_k(t-j)} \right) \\ &= (2\pi n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{-ijx_k} \left(\sum_{t=1-j}^{n-j} Z_t e^{-ix_k t} \right) \\ &= d_{n,k}^Z A(e^{-ix_k}) + (2\pi n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{-ijx} U_{n,k,j} \end{aligned}$$

avec

$$U_{n,k,j} := \sum_{t=1-j}^{n-j} Z_t e^{-ix_k t} - \sum_{t=1}^n Z_t e^{-ix_k t}$$

donc

$$r_n(x_k) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{-ix_k j} U_{n,k,j}.$$

Chaque $U_{n,k,j}$ est la somme d'au plus $\min(2|j|, 2n)$ variables aléatoires indépendantes donc, sous l'hypothèse $\mathbb{E}[|Z|^p] < \infty$, $p \geq 1$

$$\max_{k=1, \dots, n} \mathbb{E}[|U_{n,k,j}|^p] \leq C(\min(|j|, n))^{p/2} \quad (2.2.10)$$

d'après l'inégalité de Rosenthal (voir par exemple Petrov, Théorème 2.9). L'inégalité de Minkowski fournit ensuite

$$(\mathbb{E}[|r_{n,k}|^p])^{1/p} \leq C n^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\mathbb{E}[|U_{n,k,j}|^p])^{1/p} \leq C n^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| \min(|j|, n)^{1/2}.$$

uniformément en k . Si $\mathbb{E}[Z^{2p}] < \infty$ et $\sum_j |j|^{1/2} |a_j| < \infty$, on déduit directement

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} \mathbb{E}|r_{n,k}|^p = O(n^{-p/2}). \quad (2.2.11)$$

Sinon, soit k_n une suite positive telle que $1/k_n + k_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| \min(|j|, n)^{1/2} &\leq n^{-1/2} \sum_{|j| < k_n} |a_j| |j|^{1/2} + \sum_{|j| \geq k_n} |a_j| \\ &\leq (k_n/n)^{1/2} \sum_{|j| < k_n} |a_j| + \sum_{|j| \geq k_n} |a_j| \end{aligned}$$

et ces deux termes tendent vers zéro quand $n \rightarrow \infty$ d'où

$$\max_{k=1, \dots, n} \mathbb{E}|r_{n,k}|^2 = o(1). \quad (2.2.12)$$

L'inégalité de Rosenthal fournit également, toujours pour $\mathbb{E}[Z^{2p}] < \infty$, $p \geq 1$

$$\max_{k=1, \dots, n} \mathbb{E}[|d_{n,k}^Z|^p] = O(1). \quad (2.2.13)$$

De (2.2.12), (2.2.13) avec $p = 1$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux derniers termes de (2.2.9), on obtient $\max_{k \in \{1, \dots, \tilde{n}\}} \mathbb{E}|R_{n,k}| \rightarrow 0$. De (2.2.11) et (2.2.13) avec $2p$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux derniers termes de (2.2.9), on obtient $\max_{k \in \{1, \dots, \tilde{n}\}} (\mathbb{E}|R_{n,k}|^p)^{1/p} = O(n^{-1/2})$. \square

Suivant Walker (1965), on prouve également (Lemme 4.10) le résultat suivant. Supposons

$$\sum_j |j|^{1/4+\epsilon} |a_j| < \infty$$

pour un certain $\epsilon > 0$. Alors

$$\mathbb{E}[\max_{1 \leq k \leq n} |r_{n,k}|] = O(n^{-\epsilon}).$$

De ces résultats sur le reste de Bartlett, on déduit l'analogie de la Proposition 2.2 pour les séries stationnaires à courte portée.

PROPOSITION 2.4 (D'après le Théorème 10.3.2. de Brockwell et Davis, 1991). *Soit X un processus linéaire de la forme (2.2.5).*

1. *Supposons de plus la densité spectrale de X strictement positive et $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < \pi$, alors le vecteur aléatoire $(I_n^X(\lambda_1), \dots, I_n^X(\lambda_m))'$ converge en loi vers un vecteur de variables aléatoires indépendantes et exponentielles dont la i -ème coordonnées est de paramètre $f(\lambda_i)$.*

2. Si $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| |j|^{1/2} < \infty$, $\mathbb{E}[Z_1]^4 < \infty$, et x_j et x_k sont deux fréquences de Fourier distinctes dans $[0, \pi]$, alors

$$\text{cov}(I_{n,j}, I_{n,k}) = \begin{cases} 2f^2(x_j) + O(n^{-1/2}) & \text{si } x_j = x_k = 0 \text{ ou } \pi, \\ f^2(x_j) + O(n^{-1/2}) & \text{si } 0 < x_j = x_k < \pi, \\ O(n^{-1}) & \text{si } x_j \neq x_k, \end{cases}$$

où les termes $O(n^{-1/2})$ et $O(n^{-1})$ peuvent être bornés uniformément en j et k par $c_1 n^{-1/2}$ et $c_2 n^{-1}$ pour certaines constantes c_1 et c_2 .

PREUVE. La convergence faible est une conséquence immédiate des Propositions 2.2 et 2.3, de même que les expressions des variances. Un traitement similaire du terme de covariance mènerait à une borne en $O(n^{-1/2})$. Nous référons à Fuller (1976) pour la preuve de la meilleure majoration en $O(n^{-1})$. \square

Les propositions précédentes s'étendent sans peine au périodogramme agrégé avec la définition d'un reste de Bartlett aggloméré suivant :

$$\bar{I}_{n,k}^X = 2\pi f(y_k) \bar{I}_{n,k}^Z + \bar{R}_{n,k}$$

COROLLAIRE 2.5. Sous les hypothèses de la Proposition 2.2

1. Si $\mathbb{E}[Z_1^4] < \infty$, j et k distincts dans $1, \dots, K$, alors

$$\text{var}(2\pi \bar{I}_{n,j}^Z) = m\sigma^4 + n^{-1}m\kappa_4 \quad (2.2.14)$$

$$\text{cov}(2\pi \bar{I}_{n,j}^Z, 2\pi \bar{I}_{n,k}^Z) = n^{-1}m^2\kappa_4 \quad (2.2.15)$$

2. Soient k_1, \dots, k_p p entiers fixés dans $1, \dots, K$. Alors

$$(2\pi \bar{I}_{n,k_1}^Z, \dots, 2\pi \bar{I}_{n,k_p}^Z) \Rightarrow (\xi_1, \dots, \xi_p) \quad (2.2.16)$$

où les $\xi_i, i = 1, \dots, p$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées selon des $\frac{1}{2}\chi_{2m}^2$.

En définissant le périodogramme agrégé *continu* comme un fonction en escalier dont les paliers sont centrés sur les points $(y_k, \bar{I}_{n,k}^{(X,Z)})$ on a le Corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.6. Soit X un processus linéaire de la forme (2.2.5).

1. Supposons de plus la densité spectrale de X strictement positive et $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m < \pi$, alors le vecteur aléatoire $(\bar{I}_n^X(\lambda_1), \dots, \bar{I}_n^X(\lambda_m))'$ converge en loi vers un vecteur de variables aléatoires indépendantes dont la i -ème coordonnée est distribuée selon $f(\lambda_i)\chi_{2m}^2/2$.
2. Si $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| |j|^{1/2} < \infty$, $\mathbb{E}[Z_1]^4 < \infty$,

$$\text{cov}(\bar{I}_{n,j}, \bar{I}_{n,k}) = \begin{cases} m^2 f^2(y_j) + O(n^{-1/2}) & \text{si } 0 < y_j = y_k < \pi, \\ O(n^{-1}) & \text{si } y_j \neq y_k, \end{cases}$$

où les termes $O(n^{-1/2})$ et $O(n^{-1})$ peuvent être bornés uniformément en j et k par $c_1 n^{-1/2}$ et $c_2 n^{-1}$ pour certaines constantes c_1 et c_2 .

Lorsque Z est gaussien, les variables aléatoires $2\pi \bar{I}_{n,k}^Z$ sont exactement des $\frac{1}{2}\chi_{2m}^2$ indépendants. La densité d'un $\frac{1}{2}\chi_{2m}^2$ est la fonction

$$g_m(t) = \Gamma(m)^{-1} e^{-t} t^{m-1} = ((m-1)!)^{-1} e^{-t} t^{m-1}.$$

où Γ désigne la fonction *Gamma*: $\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Pour des raisons parfois seulement techniques, on devra majorer des moments de la forme $\mathbb{E}\zeta(\bar{I}_{n,k}^Z)$ où ζ est une fonction mesurable présentant une singularité non sommable en 0. Un intérêt majeur du périodogramme agrégé est

qu'il peut parfois rendre ce moment fini en prenant m suffisamment grand. Toujours pour un bruit blanc gaussien, l'espérance de $(I_{n,k}^Z)^{-\beta}$ pour un $\beta > 0$ réel, est donnée par la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty t^{-\beta} g_m(t) dt$ qui est finie si et seulement si $m > \beta$.

2.3. Fonctionnelles linéaires du périodogramme

Nous proposons ici une façon d'étudier la convergence faible des tableaux triangulaires de la forme

$$S_n := \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_{n,k} (I_{n,k}^X / f_X(x_k) - 1). \quad (2.3.1)$$

qui dépendent linéairement du périodogramme $(I_{n,k})_{k=1,\dots,\tilde{n}}$ et donc quadratiquement des observations X_1, \dots, X_n . Des conditions suffisantes sont données pour que S_n soit asymptotiquement normale. Ces conditions porteront sur les poids $(\beta_{n,k})$ et sur les propriétés spectrales de X .

Pour écrire (2.3.1), on aura supposé la densité spectrale f supérieure à un $\epsilon > 0$. Notons aussi que puisqu'il s'agit de mélanges linéaires, les variables S_n construites sur le périodogramme *agrégé*, défini dans la section précédente, ne sont que des cas particuliers de ces S_n -ci.

Les preuves des résultats annoncés ici sont très spécifiques au caractère linéaire des fonctionnelles de périodogramme considérées, donc quadratique par rapport processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Elles diffèrent des approches choisies pour nos travaux sur les fonctionnelles non-linéaires dans les chapitres-articles qui suivent. xxx Nous avons choisi de les regrouper en Annexe A.

Partant de la décomposition $S_n = S_n^Z + S_n^R$ avec

$$S_n^Z := \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_{n,k} (2\pi I_{n,k}^Z - 1) \quad \text{et} \quad S_n^R := \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_{n,k} (I_{n,k}^X / f_X(x_k) - 2\pi I_{n,k}^Z)$$

suggérée par (2.2.8), on montre sous des conditions appropriées que pour un certain $\gamma > 0$

$$S_n^Z \Rightarrow \mathcal{N}(0, \gamma) \quad \text{et} \quad S_n^R = o_P(1).$$

De là découle la convergence de S_n vers la même loi limite que S_n^Z , $\mathcal{N}(0, \gamma)$.

Le premier tableau S_n^Z est une fonctionnelle linéaire du périodogramme d'un processus i.i.d que nous traitons en section 2.3.1. Le second tableau, S_n^R , asymptotiquement négligeable en probabilité en utilisant les résultats de la décomposition de Bartlett sous des conditions données en section 2.3.2).

2.3.1. Fonctionnelles linéaires de l'i.i.d. Considérons les tableaux triangulaires de la forme

$$S_n := \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_{n,k} (2\pi I_{n,k}^Z - 1). \quad (2.3.2)$$

Comme nous l'avons noté, les v.a. $(I_{n,k}^Z)$ sont i.i.d. dans le cas gaussien et le Théorème de Lindeberg-Feller (Théorème 1.3) implique la normalité asymptotique de S_n dès que les poids $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq \tilde{n}}$ satisfont la condition

(H2.1)

$$\sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_{n,k}^2 = 1, \quad (2.3.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq \tilde{n}} |\beta_{n,k}| = 0. \quad (2.3.4)$$

Pour généraliser, et plutôt que prendre $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus i.i.d. (ou *bruit blanc*), on supposera de façon moins restrictive que $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un accroissement de martingale, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}[Z_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0$$

où $\mathcal{F}_k = \sigma(Z_l, l \leq k)$ est la filtration naturelle de (Z_t) . On suppose de plus

(H2.2)

$$\mathbb{E}[Z_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = 1, \quad \text{p.s.} \quad (2.3.5)$$

$$\mathbb{E}[Z_k^3 | \mathcal{F}_{k-1}] = \mu_3, \quad \text{p.s.} \quad (2.3.6)$$

$$\mathbb{E}[Z_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] = \mu_4, \quad \text{p.s.} \quad (2.3.7)$$

Nous imposerons que le tableau des poids satisfasse

(H2.3) Il existe un réel L tel que

$$\limsup n^{-1} \sum_{1 \leq j \neq k \leq \bar{n}} |\beta_{n,k} \beta_{n,l}| < \infty, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{1 \leq j \neq k \leq \bar{n}} \beta_{n,j} \beta_{n,k} = L. \quad (2.3.8)$$

On établit sous ces hypothèses le théorème suivant.

THÉORÈME 2.7. *Supposons (H2.2)-(H2.1)-(H2.3). Alors*

$$S_n \rightarrow_d \mathcal{N}(0, 1 + \kappa_4 L)$$

PREUVE. Voir l'Annexe A □

2.3.2. Fonctionnelles linéaires du périodogramme d'un processus linéaire. On énonce ici un Théorème qui atteste de la négligibilité asymptotique de S_n^R . Il s'obtient en prouvant que son moment d'ordre 2 tend vers 0, soit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_n^R]^2 = 0.$$

La preuve est reportée en Annexe A

THÉORÈME 2.8. *Supposons (H2.2)-(H2.1)-(H2.3). Supposons de plus que*

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j Z_{t-j}, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{3/4+\epsilon} |\psi_j| \text{ pour un } \epsilon > 0.$$

et $\forall x \in [0, 2\pi], f_X(x) > \eta$ pour un $\eta > 0$. Alors $S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1 + \kappa_4 L)$.

2.4. Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme d'un processus i.i.d.

Notre travail a porté sur l'établissement de la normalité asymptotique de statistiques dépendant de façon non-linéaire d'un nombre croissant de valeurs du périodogramme d'un bruit i.i.d., *a priori* non-gaussien. Nous avons prouvé un principe de limite centrale pour une classe de tableaux triangulaires S_n de la forme :

$$S_n^Z = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} [\phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z) - \gamma_m(\phi)] \quad (2.4.1)$$

où $\gamma_m(\phi)$ est défini ci-dessous. Notons \mathbb{E}^0 l'espérance sous l'hypothèse gaussienne (c.-à-d. Z gaussien). On suppose que ϕ est une fonction mesurable sur \mathbb{R} telle que $\mathbb{E}[\phi^2(\xi)] < \infty$ avec ξ une v.a. distribuée selon la loi $\Gamma(m, 1)$, soit $\xi \sim \frac{1}{2}\chi_{2m}^2$ ou encore $\xi = |\xi|^2/2$, où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2m})'$ est un vecteur gaussien standard de dimension $2m$ et $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. D'après le Corollaire 2.5, cela revient à supposer

$$\mathbb{E}^0[\phi^2(2\pi I_{n,k}^Z)] < \infty.$$

On peut alors définir les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_m(\phi) &= \mathbb{E}[\phi(|\xi|^2/2)], \\ \sigma_m^2(\phi) &= \text{var}(\phi(|\xi|^2/2)) = \mathbb{E}[\phi^2(|\xi|^2/2)] - \gamma_m^2(\phi), \\ C_m(\phi) &= \mathbb{E}[(\xi_1^2 - 1)\phi(|\xi|^2/2)].\end{aligned}$$

Pour énoncer nos résultats, nous avons besoin de quelques hypothèses sur les différents entités composant ce tableau, c.-à-d. sur la fonction ϕ , les poids $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$, et la distribution de la v.a. Z_1 . L'hypothèse

(H2.4) Il existe un réel $p \geq 1$ tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{E}(e^{itZ_1})|^p dt < \infty$

permet de réaliser des développements asymptotiques de la densité de probabilité des transformées de Fourier de Z_1, \dots, Z_n , qui existe sous cette hypothèse, pour tout $n \geq q$ (voir la section 1.4.2).

Concernant le tableau triangulaire de poids $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$, on pourra supposer la condition de Lindeberg **(H2.1)** et

(H2.5) $\forall \epsilon > 0, \max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}| = O(\mu_n^{-1/2+\epsilon})$ avec $\mu_n := \#\{k : 1 \leq k \leq K, \beta_{n,k} \neq 0\}$;

(H2.6) Il existe un réel γ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k \neq l} \beta_{n,k} \beta_{n,l} = \gamma$.

2.4.1. Théorème de limite centrale.

THÉORÈME (3.2). *Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit i.i.d tel que $\mathbb{E}[Z_1^2] = 1$ et $\mathbb{E}|Z_1|^\mu < \infty$ pour un certain entier μ . Supposons l'une des deux hypothèses suivantes :*

– ϕ est deux fois différentiable et il existe un entier ν tel que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\phi(x)| + |\phi'(x)| + |\phi''(x)|}{1 + |x|^\nu} < \infty$$

et $\mu \geq 4\nu \vee 4$.

– la fonction caractéristique Q de Z_1 appartient à un espace L_p (hypothèse **(H2.4)**) et il existe un entier positif α tel que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi^2(|x|^2)(1 + |x|^2)^{-\alpha} dx < \infty$$

et $\mu \geq 2\alpha + 2$.

Supposons que le tableau $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ vérifie les conditions **(H2.1)**, **(H2.5)** et **(H2.6)**, et que $\sigma_m^2(\phi) + \gamma m^2 \kappa_4 C_m^2(\phi) \neq 0$. Alors

$$S_n^Z \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_m^2(\phi) + \gamma m^2 \kappa_4 C_m^2(\phi)). \quad (2.4.2)$$

Les hypothèses sur les poids $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ peuvent être allégées dans certains cas :

- si $\kappa_4 = 0$ alors **(H2.6)** n'est plus nécessaire.
- si $\mu_n = o(n^{2/3})$ alors **(H2.5)** n'est plus nécessaire et **(H2.6)** est vérifiée avec $\gamma = 0$.
- si $C_m(\phi) = 0$, alors **(H2.5)** et **(H2.6)** ne sont plus nécessaires et le principe de limite centrale est observé sous les mêmes conditions sur les $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ et avec la même variance limite $\sigma_m^2(\phi)$ que dans le cas gaussien.

Schéma de la preuve du Théorème 3.2. Le Théorème 3.2 découle du Théorème 3.1 portant sur des tableaux de la forme :

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^K w_{n,k} \psi_{n,k}(W_{n,k}) \quad (2.4.3)$$

avec

$$W_{n,k} = \sqrt{4\pi}(c_{n,m(k-1)+1}^Z, s_{n,m(k-1)+1}^Z, \dots, c_{n,mk}^Z, s_{n,mk}^Z) \quad (2.4.4)$$

et dont les tableaux de la forme (2.4.1) sont des cas particuliers. Les $W_{n,k}$ sont les vecteurs de transformées en sinus et en cosinus de Z_1, \dots, Z_n contribuant à $\bar{I}_{n,k}^Z$ de covariance asymptotique \mathbf{I}_{2m} (voir la preuve de la Proposition 2.2). Comme dans le cas des fonctionnelles linéaires traité en section 2.3.1, l'hypothèse de gaussianité sur Z simplifie grandement le problème, puisque les vecteurs aléatoires $W_{n,k}$ sont dans ce cas indépendants. Ceci donne accès aux arguments classiques de type Lindeberg pour prouver la normalité asymptotique de \tilde{S}_n . Dans le cas non-gaussien, nous avons recours à la méthode des moments pour établir (2.4.2). Il s'agit donc de prouver, *pour tout s entier*, la convergence suivante :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_n^s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N^s),$$

où N est la variable gaussienne limite, ce qui demande l'évaluation de *tous* les moments de type

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^d (\psi_{n,k(j)}(W_{n,k(j)}))^{\alpha_j}\right] \quad (2.4.5)$$

où les $(k(1), \dots, k(d))$ sont des entiers de $1, \dots, K$. Cette évaluation est rendue possible par le « lemme des moments » (Lemme 3.3), sur lequel nous reviendrons ci-dessous. Une fois ces moments évalués, des arguments combinatoires et les conditions de négligibilité asymptotique sur les $\beta_{n,k}$ (section 3.6.1) permettent de conclure.

2.4.2. Lemme des moments. Le Lemme 3.3 traite les moments de la forme (2.4.5). Nous considérons ce lemme comme l'élément principal dans l'édification des résultats et donc la contribution la plus importante de l'article reproduit au chapitre 3.

Pour l'énoncer, introduisons quelques notations supplémentaires. Soit $\xi^{(0)}$ un vecteur gaussien de dimension $2m$ et de matrice de covariance \mathbf{I}_{2m} . Pour toute fonction ψ de \mathbb{R}^{2m} dans \mathbb{R} , notons

$$M_\alpha^2(\psi) = \int_{\mathbb{R}^{2m}} \psi^2(x)(1 + |x|^2)^{-\alpha} dx$$

(qui vaut éventuellement $+\infty$) et

$$\mathcal{H}_\alpha = \{\psi : M_\alpha^2(\psi) < \infty\}$$

l'espace de Hilbert induit par la norme M_α . Notons $\|\cdot\|^2$ la norme L^2 de \mathbb{R}^{2m} sous la mesure gaussienne :

$$\|\psi\|^2 = \mathbb{E}\psi^2(\xi^{(0)}).$$

Notons que $\|\psi\|^2 < \infty$ dès que $M_\alpha(\psi) < \infty$ pour un certain α . Rappelons enfin que le rang d'Hermite (multidimensionnel) d'une fonction ψ telle que $\|\psi\|^2 < \infty$ est le plus petit entier τ pour lequel existe un polynôme P de degré τ tel que $\mathbb{E}P(\xi)\psi(\xi) \neq 0$.

LEMME (3.3). *Soient $s \leq d$ deux entiers, $k = (k_1, \dots, k_d)$ un d -uplet d'entiers $1 \leq k_1 < \dots < k_d \leq K$. Soient ψ_1, \dots, ψ_d d fonctions de \mathbb{R}^{2m} dans \mathbb{R} . Supposons vérifiée l'une des hypothèses suivantes*

(BR) (H2.4) *est vérifiée et pour tout $i = 1, \dots, d$, il existe un réel α_i tel que $M_{\alpha_i}(\psi_i) < \infty$ et Z possède des moments absolus finis à l'ordre $\alpha_1 + \dots + \alpha_d + 3$.*

(GH) Pour tout $i = 1, \dots, d$, ψ_i est $((s - 2md)^+ + 2)$ fois différentiable et il existe un entier D_i et une constante C_i tels que ψ_i et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $((s - 2md)^+ + 2)$ soient bornées en valeur absolue par $C_i |x|^{D_i}$. Notons $D^* = \max\{D_1 + \dots + D_d, s + 2\}$, $r^* = D^* - s - 2$. Z possède des moments absolus finis à l'ordre D^* .

Soit τ_i le rang d'Hermite de ψ_i , $1 \leq i \leq s$ et $\tau = \inf_{1 \leq i \leq s} \tau_i$.

– Si $\tau = 2$ ou 3 alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d \psi_i(W_{n,k_i})\right] &= n^{-s/2} \frac{s! k_4^{s/2}}{2^{3s/2} (s/2)!} \sum_{j_1, \dots, j_s=1 \dots 2m} \prod_{j=1}^s C_2(\psi_i, j_i) \prod_{i=s+1}^d \mathbb{E}(\psi_i(\xi^{(i)})) \mathbf{1}_{\{s \in 2\mathbb{N}\}} \quad (2.4.6) \\ &+ \sum_{r=\lceil (2s+2)/3 \rceil}^s n^{-r/2} \mathbb{F}_{r,k}(\psi_1, \dots, \psi_d) + n^{-s/2} r_n(\psi_1, \dots, \psi_d, k), \end{aligned}$$

$$|\mathbb{F}_{r,k}(\psi_1, \dots, \psi_d)| \leq C \prod_{i=1}^d \|\psi_i\| \Delta_r(k),$$

où Δ_r est uniformément borné par 1 et s'annule en dehors d'une réunion finie d'hyperplans de \mathbb{R}^d , tous de dimension strictement inférieure à $d + (r - s)/2$.

– Si $\tau \geq 4$, alors

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d \psi_i(W_{n,k_i})\right] = \prod_{i=1}^d \mathbb{E}[\psi_i(\xi^{(i)})] + n^{-s/2} r_n(\psi_1, \dots, \psi_d, k). \quad (2.4.7)$$

r_n est borné de la façon suivante:

– sous **(BR)** :

$$|r_n(\psi_1, \dots, \psi_d, k)| \leq C n^{-(1)/2} \prod_{i=1}^d M_{\alpha_i}(\psi_i); \quad (2.4.8)$$

– Sous **(GH)**, il existe une constante $C(\psi_1, \dots, \psi_d)$ dépendant uniquement des bornes sur les dérivées des fonctions ψ_i , telle que :

$$|r_n(\psi_1, \dots, \psi_d, k)| = C(\psi_1, \dots, \psi_d) \left\{ O(n^{-1/2}) + o(n^{r^*}) \right\} \quad (2.4.9)$$

où les $O(n^{-1/2})$ and $o(n^{r^*})$ dépendent seulement de la distribution de Z .

Commentaires et schéma de la preuve. Le développement asymptotique des moments (2.4.5) suivants des puissances croissantes de $n^{-1/2}$ s'obtient par développement d'Edgeworth de la distribution Q_n du vecteur aléatoire de dimension $2md$

$$W_{n,\mathbf{k}} = (W'_{n,k(1)}, \dots, W'_{n,k(r)})', \quad \mathbf{k} = (k(1), \dots, k(r))$$

puis par l'intégration

$$\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2mr}} \prod_{j=1}^r \psi_j((x_{2m(k(j)-1)+1}, \dots, x_{2mk(j)})') Q_n(d\mathbf{x}).$$

A notre connaissance, Chen et Hannan (1980) furent les premiers à utiliser cette méthode pour établir la consistance de la moyenne du log-périodogramme (voir les sections 1.6.1 et 2.5.2) en évaluant seulement les premiers moments. Récemment, Velasco (1999) a étudié les relations entre cumulants à tous ordres des $c_{n,k}$ et $s_{n,k}$, et notamment l'annulation de nombre d'entre eux du fait de l'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus aux fréquences considérées. Nous avons largement exploité ces idées.

La *validité* du développement d'Edgeworth s'établit sous l'un ou l'autre ensemble d'hypothèses que nous avons noté **(GH)** par référence à Götze et Hipp (1978) ou **(BR)** par référence à Bhattacharya et Ranga Rao (1976). La distinction se fait suivant que les fonctions $\psi_{n,k}$ sont régulières ou non. En substance, il est important que les arguments des $\psi_{n,k}$ (les vecteurs W_{n,k_i}) ne chargent pas l'ensemble des points singuliers des $\psi_{n,k}$ s'il en existe. Pour cela, on demande à la distribution de Z ou à un mélange de p répliques de celle-ci, d'avoir une densité — c'est l'hypothèse **(H2.4)** — et on réalise un développement de la densité de W_n tels qu'il est présenté en section 1.4.2 dans le cas mono-dimensionnel et dans le Chapitre 20 de la monographie de Bhattacharya et Ranga Rao (1976). Si les fonctions $\psi_{n,k}$ sont régulières, cette précaution n'est pas nécessaire, et un développement asymptotique de la distribution de W est suffisant. Sous des hypothèses de moments et de régularité des fonctions considérées, Götze et Hipp (1978) ont montré que l'hypothèse de Cramér

$$\overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} \hat{Q}(t) < 1,$$

plus faible que **(H2.4)**, n'était même pas nécessaire pour valider ces développements.

La *forme* du développement des moments (2.4.5) est la suivante. Le terme dominant (2.4.6) correspond au moment (2.4.5) si Z est gaussien. Les termes suivants ont la particularité de s'annuler pour une majorité de r -uplets $(k(1), \dots, k(r))$. En effet, une fois validé le développement d'Edgeworth du moment (2.4.5) s'écrit

$$\mathbb{E}[\psi_1(W_{n,k_1}) \cdots \psi_d(W_{n,k_d})] = \sum_{r=0}^{\mu^*} n^{-r/2} \mathbb{E}_{r,k}(\psi_1, \dots, \psi_d) + n^{-s/2} \epsilon_n R_n(\psi_1, \dots, \psi_d),$$

avec

$$\mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) = \sum_{t=1}^r \frac{1}{t!} \sum_{r,t}^* \frac{\chi_{\nu_1}(k) \cdots \chi_{\nu_t}(k)}{\nu_1! \cdots \nu_t!} \mathbb{E}[H_{\nu_1 + \dots + \nu_t}(\xi) \psi(\xi)],$$

La somme $\sum_{r,t}^*$ porte sur les t -uplets de multi-indices ν_1, \dots, ν_t tels que $\nu_i = (\nu_i(1), \dots, \nu_i(2md)) \in \mathbb{N}^{2md}$,

$$|\nu_i| = \nu_i(1) + \dots + \nu_i(2md) \geq 3, \quad \sum_{i=1}^t |\nu_i| = r + 2t,$$

avec pour $\nu \in \mathbb{N}^{2md}$, $\nu! = \prod_{j=1}^{2md} \nu(j)!$. H_ν est un polynôme d'Hermite multidimensionnel, *i.e.* $H_\nu(\xi) = H_{\nu(1)}(\xi_1) \cdots H_{\nu(2md)}(\xi_{2md})$, et pour $k \in \{1, \dots, K\}^{md}$ et $\nu \in \mathbb{N}^{2md}$, $\chi_\nu(k)$ est le cumulants

$$\chi_\nu(k) = 2^{|\nu|/2} \kappa_{|\nu|} A_\nu(k),$$

$$A_\nu(k) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \prod_{j=1}^d \prod_{i=1}^m \cos(tx_{m(k_j-1)+i})^{\nu_{2m(j-1)+2i-1}} \sin(tx_{m(k_j-1)+i})^{\nu_{2m(j-1)+2i}},$$

où $\kappa_{|\nu|}$ est le cumulants d'ordre $|\nu|$ de Z_1 . Les propriétés d'orthogonalité des polynômes d'Hermite entraînent la nullité de nombreux moments $\mathbb{E}[H_{\nu_1 + \dots + \nu_t}(\xi) \psi(\xi)]$. Des arguments plus sophistiqués (voir la section 3.8) concernant les cumulants $\chi_\nu(k)$ permettent d'aboutir à la forme annoncée.

2.4.3. Application : un théorème de limite centrale fonctionnel pour la mesure spectrale empirique. Considérons le processus empirique associé au périodogramme :

$$\hat{F}_n(x) = K^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{1}_{[0,x]}(2\pi I_{n,k}^Z).$$

Freedman et Lane (1980) ont montré, pour le périodogramme non-agrégé, un résultat de type Glivenko-Cantelli, à savoir la convergence

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_x |F_n(x) - F(x)| > \epsilon) = 0.$$

où F_E est la distribution de la loi exponentielle de paramètre 1, asymptotiquement suivie par chaque $2\pi I_{n,k}^Z$. An *et al.* (1983) ont étendu ce résultat à la convergence presque sûre sous des hypothèses supplémentaires. Plus récemment, Kokoszka et Mikosch (1999) ont montré, sous l'hypothèse **(H2.4)**, que les moments de $F_n(x) - F_E(x)$ coïncidaient avec ceux du pont brownien G de fonction de covariance

$$\text{cov}(G(x)G(y)) = F_E(x \wedge y) - F_E(x)F_E(y)$$

sous l'hypothèse que les premiers moments de Z soient ceux d'une variable gaussienne (les 6 premiers moments pour l'existence et la convergence du troisième moment de $F_n(x) - F_E(x)$).

Nous avons montré un théorème fonctionnel de limite centrale sur $\hat{F}_n(x)$ (Théorème 3.4) qui n'était disponible que pour un bruit gaussien i.i.d. Kokoszka et Mikosch (1999) décrivent d'ailleurs de façon très éclairante la difficulté que nous avons rencontrée à étendre ce résultat.

Ce théorème procède classiquement de la vérification d'un critère de tension et de l'établissement de la convergence des distributions finies-dimensionnelles. Pour cette seconde étape, on doit donc prouver pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tous $x_1 < \dots < x_p$, la convergence en loi du vecteur $(\hat{F}_n(x_1), \dots, \hat{F}_n(x_p))$ vers une certaine distribution, ce qui s'obtient grâce au théorème 3.2. Les fonctions indicatrices ni singulières, ni continues, ces moments s'obtiennent par lissage, en approchant les fonctions indicatrices par des fonctions régulières. La tension est vérifiée par un critère de Shao et Yu (1996) pour les processus empiriques.

2.5. Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme d'un processus linéaire

La décomposition de Bartlett, ici exprimée pour $\mathbb{E}[Z^2] = 1$

$$I_{n,k}^X = 2\pi f_X(x_k)I_{n,k}^Z + R_{n,k}$$

va nous permettre d'étendre les résultats obtenus précédemment pour les tableaux triangulaires de fonctionnelles non-linéaires du périodogramme du *bruit blanc* aux *processus linéaires à courte portée* $X = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j Z_j$, $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ i.i.d., $\mathbb{E}[Z_1] = 0$, $\mathbb{E}[Z_1^2] = 1$ vérifiant

(H2.7) Il existe un réel $\delta > 3/4$ pour lequel $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^\delta |a_j| < \infty$ et $A(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j \neq 0$ pour $|z| = 1$.

Soit un tableau triangulaire de poids $(\beta_{n,k})_{k \in \{1, \dots, n\}}$ dont on pourra éventuellement supposer les hypothèses **(H2.1)**, **(H2.5)**

(H2.8) Il existe un réel τ_m tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} = \tau_m.$$

(H2.9) Il existe un réel $\Sigma_m^2(\phi, f)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \sigma_m^2(\phi, f(y_k)) = \Sigma_m^2(\phi, f).$$

(H2.10) Il existe un réel $\tau_m(\phi, f)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} C_m(\phi, f(y_k)) C_m(\phi, f(y_l)) = \tau_m(\phi, f).$$

On rappelle que $\gamma_m(\phi) := \mathbb{E}[\phi(\xi)]$, pour $\xi \sim \frac{1}{2}\chi_{2m}^2$, et on définit de plus $\gamma_m(\phi, u) = \mathbb{E}[\phi(u\xi)]$ pour tout u positif. Définissons alors

$$S_n^X(\phi) := \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \left\{ \phi\left(\frac{I_{n,k}^X}{f_X(y_k)}\right) - \gamma_m(\phi) \right\} \quad (2.5.1)$$

$$\tilde{S}_n^X(\phi) := \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \left\{ \phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^X) - \gamma_m(\phi, f_X(y_k)) \right\}. \quad (2.5.2)$$

Le Théorème 4.1 donne des conditions sous lesquelles ces tableaux sont asymptotiquement normaux. Quatre applications de ce Théorème sont largement traitées au Chapitre 4. Nous reviendrons sur l'une d'entre elles en section 2.5.2, avec un cas particulier d'estimation de fonctionnelle non-linéaire de la densité spectrale.

2.5.1. Théorème de limite centrale.

THÉORÈME (4.1). *Soit un processus linéaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant **(H2.7)** et $\mathbb{E}|Z_1|^\mu < \infty$ pour un $\mu \geq 4$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^\delta |a_j| < \infty$ pour un réel $\delta > 3/4$ et $f_X > 0$. Supposons de plus l'un ou l'autre de ces deux ensembles d'hypothèses.*

(S1) ϕ est deux fois dérivable et il existe un entier ν tel que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\phi(x)| + |\phi'(x)| + |\phi''(x)|}{1 + |x|^\nu} < \infty,$$

et $\mu \geq 8\nu \vee 4$.

(S2) **(H2.4)** est vérifiée, ϕ est deux fois dérivable sur $(0, \infty)$ et il existe des entiers, $\nu_0 \geq 3$, $\nu_1 \geq 4$, $\nu_2 \geq 3$ et $\nu_3 \geq 3$ et des réels α et β tels que $m > \beta$ et

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi^2(|x|^2/2)(1 + |x|)^{-\nu_0} dx < \infty \quad (2.5.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{4m}} \phi(|x|^2/2)\phi(|y|^2/2)(1 + |x| + |y|)^{-\nu_1} dx dy < \infty \quad (2.5.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} [\phi'(|x|^2/2)]^4 (1 + |x|)^{-\nu_2} dx < \infty, \quad (2.5.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{4m}} |\phi'(|x|^2/2)| |x| |\phi'(|y|^2/2)| |y| (1 + |x| + |y|)^{-\nu_3} dx dy < \infty, \quad (2.5.6)$$

$$|\phi''(x)| \leq C(x^\alpha \mathbf{1}_{\{x \geq 1\}} + x^{-\beta} \mathbf{1}_{\{x \leq 1\}}), \quad (2.5.7)$$

et $\mu \geq \max\{8, 4\alpha, [2(m - \beta)] + 1, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3 + 2\}$.

Soit $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ un tableau triangulaire de poids satisfaisant les hypothèses **(H2.1)** and **(H2.5)**. Alors

- sous l'hypothèse **(H2.8)**, $S_n(X, \phi)$ est asymptotiquement centrée normale de variance $\sigma_m^2(\phi) + \tau_m m^2 C_m^2(\phi) \kappa_4$.
- sous les hypothèses **(H2.9)** et **(H2.10)**, $\tilde{S}_n(X, \phi)$ est asymptotiquement centrée normale de variance $\Sigma_m^2(\phi, f) + \tau_m(\phi, f) m^2 \kappa_4$.

SCHEMA DE LA PREUVE DU THÉORÈME 4.1. Formellement d'après (2.5.1) et (2.2.8),

$$\begin{aligned} S_n^X(\phi) &= \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi(2\pi I_{n,k}^Z) + \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \left[\phi\left(\frac{I_{n,k}^X}{f_X(y_k)}\right) - \phi(2\pi I_{n,k}^Z) \right] \\ &=: S_n^Z(\phi) + S_n^{(\text{reste})}(\phi, f_X). \end{aligned}$$

Le premier tableau $S_n^Z(\phi)$ est une fonctionnelle non-linéaire du périodogramme du bruit i.i.d $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Le Théorème 3.2 traduit dans la section précédente établit la normalité asymptotique de

$S_n^Z(\phi)$ sous des conditions sur Z , ϕ et les $(\beta_{n,k})$ incluses dans celles du Théorème 4.1. Il reste donc à prouver

$$S_n^{(\text{reste})}(\phi, f_X) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \left[\phi\left(\frac{I_{n,k}^X}{f_X(y_k)}\right) - \phi(2\pi I_{n,k}^Z) \right] = o_P(1). \quad (2.5.8)$$

C'est le propos des Lemmes 4.1 et 4.2 traduits ci-dessous. Notons que le Théorème 4.1 énonce la normalité asymptotique de $S_n^X(\phi, f_X)$ sous la réunion des hypothèses du Théorème 3.2 et de ces Lemmes. Ainsi par exemple les hypothèses (2.5.3) et (2.5.4) ci-dessous ne sont-elles pas nécessaires à (2.5.8). \square

Nous avons traité $S_n^{(\text{reste})}(\phi, f_X)$ pour des fonctions ϕ deux fois dérivables, par développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$S_n^{(\text{reste})}(\phi, f_X) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi'(2\pi I_{n,k}^Z) R_{n,k} + \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi''(2\pi I_{n,k}^Z + \theta_{n,k} R_{n,k}) R_{n,k}^2$$

Le premier moment absolu de la première somme tend vers 0 (Lemme 4.1). La seconde somme est simplement $o_P(1)$, sans convergence vers 0 en moment à moins que ϕ'' ne soit bornée (voir le Lemme 4.2).

LEMME (4.1). *Supposons les hypothèses (H2.1), (H2.7) vérifiées ainsi que (S1) ou (H2.4)-(2.5.5)-(2.5.6). Supposons aussi $\mathbb{E}[|Z_t|^\mu] < \infty$ avec $\mu \geq \nu_2 \vee (\nu_3 + 2) \vee 8$. Alors,*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi'(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z) \bar{R}_{n,k} \right| = o(1).$$

LEMME (4.2). *Supposons les hypothèses (H2.1), (H2.7) vérifiées ainsi que (S1) ou (H2.4), (2.5.7) avec $m > \beta$ et $\mathbb{E}[|Z_t|^\mu] < \infty$ avec $\mu \geq 6 \vee 4\alpha \vee ([2m - 2\beta] + 1)$. Alors,*

$$\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi''(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k} \bar{R}_{n,k}) \bar{R}_{n,k}^2 = o_P(1).$$

Commentaire. Ces sommes ne se traitent pas facilement, par exemple avec des inégalités d'Hölder. Pour les deux, il faut d'ailleurs faire appel à l'expression exacte du reste de Bartlett. Notons aussi qu'un traitement direct de la somme de (2.5.8) à partir des majorations générales du reste de Bartlett (voir la Proposition 2.3) ne fournit pas la convergence souhaitée. Supposons par exemple les poids $\beta_{n,k}$ d'ordre $n^{-1/2}$ comme ils le sont typiquement, ϕ uniformément lipschitzienne — cas très favorable —, et f_X bornée, on aurait alors :

$$\begin{aligned} |S_n^{(\text{reste})}(\phi, f_X)| &\leq C n^{1/2} \max_{k \in \{1, \dots, K\}} \left| \frac{I_{n,k}^X}{f_X(x_k)} - 2\pi I_{n,k}^Z \right| \\ &= C n^{1/2} \max_{k \in \{1, \dots, K\}} |R_{n,k}| \\ &= O_P(1) \end{aligned}$$

car ce maximum est d'ordre $n^{-1/2}$ en probabilité, et jamais meilleur. Une erreur consiste à croire que l'on peut imposer à $R_{n,k}$ une décroissance en probabilité à une vitesse arbitrairement grande de la forme $n^{-\beta}$ en imposant une décroissance du même type sur les coefficients du filtre linéaire, comme cela est suggéré par le Théorème 6.2.2 de Priestley (1981). On voit sur des cas très simples (ex. processus MA(1)) que cette vitesse est exactement en $O_P(n^{-1/2})$.

2.5.2. Application : estimation de la variance de l'innovation. Nous traitons ici une application du Théorème 4.1 d'une façon détaillée. Elle est un cas particulier de la question de l'estimation d'une fonctionnelle non-linéaire de la densité spectrale, résolue de façon générale par le Théorème 4.2.

Pour un processus stationnaire au second ordre de moyenne nulle, une grandeur d'intérêt est le risque quadratique moyen de prédiction à un pas :

$$\sigma^2 = \mathbb{E}|X_{t+1} - P_{\mathcal{M}_t} X_{t+1}|^2$$

où $P_{\mathcal{M}_t}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{M}_t = \overline{\text{sp}}\{X_j, -\infty < j \leq t\}$ dans l'espace de Hilbert $\overline{\text{sp}}\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ équipé du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ (voir Brockwell et Davis 1991, Chapitres 2 et 5). La décomposition de Wold justifie l'appellation « variance de l'innovation » pour σ^2 et la formule de Kolmogorov la relie à la densité spectrale :

$$\sigma^2 = 2\pi \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f_X(x) dx\right\}. \quad (2.5.9)$$

Pour estimer cette quantité à partir d'un grand échantillon Y_1, \dots, Y_n , on se ramène (par le « théorème de l'application continue », voir par ex. Théorème 25.7 dans Billingsley, 1986) à l'estimation de l'intégrale de (2.5.9), puis à celle de la la somme de Riemann

$$A_n = \tilde{n}^{-1} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \log f_X(x_k) \quad (2.5.10)$$

avec $\tilde{n} = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$.

On peut songer à remplacer chaque $f_X(x_k)$ par un estimateur consistant de cette grandeur, comme un estimateur à noyau basé sur le périodogramme (périodogramme lissé). On obtiendrait un estimateur de σ^2 de variance asymptotique en $O(B_n n^{-1})$ où B_n est la largeur de bande (voir Brillinger, 1969), soit une convergence strictement moins rapide que $\sqrt{\tilde{n}}$.

La seconde approche que nous allons développer ici est supérieure au sens où elle peut fournir un estimateur à la vitesse $\sqrt{\tilde{n}}$ (voir la Proposition 2.9 ci-dessous). Elle fut initiée par Davis et Jones (1968) qui proposèrent d'estimer A_n par la somme suivante :

$$S_n = \tilde{n}^{-1} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} [\log I_{n,k}^X + \mathcal{E}] \quad (2.5.11)$$

où \mathcal{E} désigne la constante d'Euler. Notons que $\mathbb{E}^0(\log(\xi)) = -\mathcal{E}$. La statistique $\sqrt{\tilde{n}}(S_n - A_n)$ s'écrit donc comme un tableau triangulaire de type (2.5.2). En supposant $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gaussien, Hannan et Nicholls (1977) ont prouvé la consistance de l'estimateur de σ^2 qui en découle :

$$\hat{\sigma}^2 = 2\pi \exp\left\{\frac{1}{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} [\log I_{n,k}^X + \mathcal{E}]\right\} \quad (2.5.12)$$

ainsi que sa normalité asymptotique

$$\sqrt{\tilde{n}}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \Rightarrow \mathcal{N}(0, v). \quad (2.5.13)$$

On doit à Chen et Hannan (1980) les premiers résultats théoriques sur cet estimateur pour $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ linéaire, à savoir la consistance forte de $\hat{\sigma}^2$ (c.-à-d. $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2$ presque sûrement). Ces auteurs déplorent pourtant de ne pouvoir étendre (2.5.13) au cas d'un signal linéaire, faute d'une maîtrise

suffisamment précise de la contribution des cumulants d'ordre supérieur à la distribution limite*. Le Théorème 4.1 permet d'établir ce résultat.

PROPOSITION 2.9. *Supposons (H2.4), $\mathbb{E}[|Z|^\mu] < \infty$ pour $\mu \geq 2m + 1$ et $m \geq 5$. Soit*

$$\hat{\sigma}_n^2 = \exp\{(2\pi K)^{-1} \sum_{k=1}^K (\log(\bar{I}_{n,k}^X) - \psi(m))\}$$

Alors

$$\sqrt{\tilde{n}}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) \Rightarrow \mathcal{N}(0, (2m\psi'(m) + \kappa_4)\sigma^4)$$

2.5.3. Autres applications. Nous présentons ici des applications du Théorème 4.1 sans détails et précision mathématique. Nous renvoyons pour cela le lecteur au chapitre 4, section 4.3.

Régression sur le log-périodogramme. Cette méthode est une alternative aux méthodes de maximum de vraisemblance ou de moments pour l'estimation spectrale paramétrique (Taniguchi 1987). Elle suppose que la densité spectrale f_X appartienne à une famille paramétrique $\mathcal{P} = \{f(x; \theta) : \theta_0 \in \Theta\}$, soit $f_X = f(\cdot, \theta_0)$ et satisfasse à des conditions supplémentaires, comme à celle d'être différentiable et strictement positive. On estime alors θ_0 par régression aux moindres carrés sur le log-périodogramme agrégé :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1}^K (\log \bar{I}_{n,k}^X - \psi(m) - l(y_k; \theta))^2$$

avec $l(y_k; \theta) = \log f_\theta(y_k)$ et l'on montre (Théorème 4.3) la consistance faible et la normalité asymptotique de $\hat{\theta}$ par adaptation des résultats de Jennrich (1969).

Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme. Une seconde application est l'estimation de fonctionnelles de la densité spectrale. Si la fonctionnelle est *linéaire* :

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \zeta(x) f(x) dx,$$

avec ζ à variation bornée, alors un estimateur « canonique » en est :

$$\hat{\Lambda}_n(f) = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \zeta(x_k) I_{n,k}^X.$$

Consistance et normalité asymptotique de cette dernière quantité sont accessibles (Brillinger, 1969, Walker, 1964), y compris pour des observations fenêtrées (Dahlhaus 1983, Janas 1994). Taniguchi (1979, 1980) aborde la question plus générale de l'estimation de fonctionnelle *non-linéaire* de la densité spectrale

$$\Lambda(f) = \int_0^\pi \zeta(x) G(f(x)) dx.$$

Cette question est motivée par l'estimation paramétrique robuste de cette densité à partir du périodogramme, qui passe par la minimisation d'un critère non-linéaire. Nous l'avons déjà rencontré

* Ils relient ce problème à l'absence d'un théorème de limite centrale fonctionnel pour la mesure spectrale empirique

$$F_n(x) = \tilde{n}^{-1} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \mathbf{1}_{[0,x]} \left(\frac{I_{n,k}^X}{f_X(x_k)} \right) \quad (2.5.14)$$

avec $\tilde{n} = \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor$, à savoir un résultat du type $\sqrt{\tilde{n}}(F_n(x) - F(x)) \Rightarrow G(x)$ dans l'espace de Skorohod des fonctions càdlàg $D([0, \infty[)$ munis de la topologie J_1 (voir Pollard 1984 ou Billingsley 1968 pour la définition de ces espaces fonctionnels) et pour un certain processus limite $G(x, \omega)$. Nous avons résolu cette question pour un processus i.i.d (voir la section 2.4.3)

cette question en section 2.5.2, avec $G = \log$. Le Théorème 4.2 montre la normalité asymptotique d'estimateur de $\Lambda(f)$ construits sur le périodogramme agrégé de la forme :

$$\hat{\Lambda}_n(f) = \frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^K \zeta_{n,k} \phi(\bar{I}_{n,k}^X)$$

où ϕ est une fonction déduite de G par une transformation intégrale de type transformation de Laplace. La consistance de ces estimateurs a été établie par Janas et von Sachs (1995).

Estimation spectrale robuste. Soit l'estimateur ponctuel de la densité spectrale $f_X(x)$

$$\hat{f}_n(x) = K^{-1} \sum_{k=-K}^K W_{b_n}(x - y_k) \frac{\bar{I}_{n,k}^X}{m}$$

où la suite b_n et le noyau W sont tels que $\hat{f}_n(x)$ soit consistant (voir Brillinger, 1981, §5.6). Cet estimateur se comporte mal en présence d'une sinusoïde parasite au voisinage de la fréquence considérée. Une estimateur robuste de $f_X(x)$, proposé par von Sachs (1994), s'obtient en résolvant en s l'équation suivante

$$\hat{\Lambda}_{n,x}(s) := K^{-1} \sum_{k=-K}^K W_{b_n}(x - y_k) \phi\left(\frac{\bar{I}_{n,k}^X}{ms} - 1\right) = 0.$$

où la fonction ϕ doit avoir la vertu d'atténuer les incursions trop grandes du périodogramme (typiquement, ϕ est une fonction sigmoïde), en plus d'autres propriétés que l'on trouvera en section 4.3.3. Elle doit donc être non-linéaire. Il est prouvé dans von Sachs (1994) que l'estimateur ainsi construit est consistant, et asymptotiquement normal sous l'hypothèse supplémentaire de gaussianité. Par la Proposition 4.4, nous avons étendu cette normalité asymptotique au cas des processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ linéaires.

Bibliographie du chapitre 2

1. H.-Z. An, Z.-G. Chen, and E.J. Hannan, *The maximum of the periodogram*, J. Multivariate Anal. **13** (1983), 383–400.
2. M.S. Bartlett, *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1955.
3. R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.
4. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, 1968.
5. ———, *Probability and measure. 2nd ed.*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, New York etc., John Wiley et Sons, 1986.
6. D.R. Brillinger, *Asymptotic properties of spectral estimates of second order*, Biometrika **56** (1969), 375–390.
7. D.R. Brillinger, *Time series. data analysis and theory*, Holden-Day, 1981.
8. P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
9. Z.-G. Chen and E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 73–82.
10. R. Dahlhaus, *Spectral analysis with tapered data*, J. of Time Series Analysis **4** (1983), 163–175.
11. H.T. Davis and R.H. Jones, *Estimation of the innovation variance of stationary time series*, JASA **63** (1968), 141–149.
12. D. Freedman and D. Lane, *The empirical distribution of Fourier coefficients.*, Ann. Stat. **8** (1980), 1244–1251.
13. W.A. Fuller, *Introduction to statistical time series*, John Wiley, New York, 1976.
14. F. Götze and C. Hipp, *Asymptotic expansions in the central limit theorem under moment conditions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **42** (1978), 67–87.
15. E.J. Hannan and D.F. Nicholls, *The estimation of the prediction error variance*, J. Amer. Statist. Assoc. **72** (1977), 834–840.
16. D. Janas, *Edgeworth expansions for spectral mean estimates with applications to Whittle estimates.*, Ann. Inst. Stat. Math. **46** (1994), no. 4, 667–682.

17. D. Janas and R. von Sachs, *Consistency for non-linear functions of the periodogram of tapered data*, J. of Time Series Analysis **16** (1995), 585–606.
18. R.I. Jennrich, *Asymptotic properties of non-linear least squares estimators*, Ann. Math. Statist. **40** (1969), 633–43.
19. P. Kokoszka and T. Mikosch, *The periodogram at Fourier frequencies*, to appear, 1999.
20. D. Pollard, *Convergence of stochastic processes*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1984.
21. P.M. Robinson, *Semiparametric analysis of long-memory time series*, Annals of Statistics **22** (1994), 515–539.
22. Q.M. Shao and Y.X. Yu, *Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences*, Annals of Probability **24** (1996), 2098–2127.
23. M. Taniguchi, *On estimation of parameters of Gaussian stationary processes*, J. of Applied Probability **16** (1979), 575–591.
24. _____, *On estimation of the integrals of certain functions of spectral density*, J. of Applied Probability **17** (1980), 73–83.
25. _____, *Minimum contrast estimation for spectral densities of stationary processes*, J. R. Statist. Soc. B **49** (1987), 315–325.
26. C. Velasco, *Non-Gaussian log-periodogram regression*, Econometric Theory **16** (2000), 44–79.
27. R. von Sachs, *Peak-insensitive non-parametric spectrum estimation*, Journal Of Time Series Analysis **15** (1994), no. 4, 453–474.
28. A.M. Walker, *Asymptotic properties of least-squares estimates of parameters of the spectrum of a stationary non-deterministic time series*, J. Aust. Math. Soc. **4** (1964), 363–384 (English).
29. A.M. Walker, *Some asymptotic results for the periodogram of a stationary times series*, J. Aust. Math. Soc. **5** (1965), 107–128.

Deuxième partie

Articles

Le périodogramme du bruit blanc

Ce chapitre reproduit un article intitulé *The periodogram of an i.i.d sequence* en collaboration avec Philippe Soulier et soumis pour publication à la revue *Stochastic Processes and their Applications*.

3.1. Introduction

Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a white noise with unit variance, *i.e.* an i.i.d sequence such that $\mathbb{E}[Z_0] = 0$ and $\mathbb{E}[Z_0^2] = 1$. Define the discrete Fourier transform and the periodogram as

$$d_n^Z(x) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n Z_t e^{itx} \quad \text{and} \quad I_n^Z(x) = |d_n^Z(x)|^2.$$

The Fourier frequencies are usually defined as $x_k = 2\pi k/n$, $1 \leq k \leq \tilde{n}$ where $\tilde{n} = [(n-1)/2]$ (the dependency with respect to n will be omitted). It is a well known fact that if the variables Z_t are moreover Gaussian, then the periodogram ordinates computed at Fourier frequencies are independent and $2\pi I_n^Z(x_k)$ has a $\Gamma(1, 1)$ distribution. The $\Gamma(a, \lambda)$ distribution is the distribution with density function $\Gamma(a)^{-1} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}$ with respect to Lebesgues measure on \mathbb{R}^+ (where Γ is the Γ function). Gaussianity and the specific choice of the Fourier frequencies are the fundamental reasons for this independence. Let $0 \leq k < j < \tilde{n}$.

$$\mathbb{E}[d_n(x_k) d_n(\pm x_j)] = \frac{1}{2\pi n} \sum_{t=1}^n e^{it(x_k \pm x_j)} = 0.$$

The last sum vanishes because of the specific choice of the Fourier frequencies. This implies uncorrelatedness of the variables $d_n^Z(x_k)$, hence independence in the Gaussian case. This latter property no longer holds in the non Gaussian case, thus independence no longer holds. For instance, let κ_4 denote the fourth cumulant of Z_0 . An easy computation yields, for $0 \leq k < j < \tilde{n}$,

$$\text{cov}(I_n^Z(x_k), I_n^Z(x_j)) = \frac{\kappa_4}{4\pi^2 n}.$$

The fourth cumulant of a standard Gaussian variable is 0, but it is not necessarily so for an arbitrary distribution. Nevertheless, the central limit theorem implies that for any fixed u , $d_n^Z(x_{k_1}), \dots, d_n^Z(x_{k_u})$ are asymptotically independent, in the sense that the asymptotic distribution of the $2u$ -dimensional vector

$$(Re\{d_n^Z(x_{k_1})\}, Im\{d_n^Z(x_{k_1})\}, \dots, Re\{d_n^Z(x_{k_u})\}, Im\{d_n^Z(x_{k_u})\})$$

is the $2u$ -dimensional standard Gaussian distribution, *i.e.* the distribution of $2u$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ random variables. This implies that $2\pi I_n(x_{k_1}), \dots, 2\pi I_n(x_{k_u})$ are asymptotically independent exponentials. The problem is that this property for fixed u is of very little interest, since the statistics of interest involve an increasing number of periodogram ordinates. Among important problems, we can mention the following.

Asymptotic distribution of the maximum. In the Gaussian case, $M_n = 2\pi \max_{1 \leq k \leq \tilde{n}} I_n(x_k)$ has a $\gamma(\tilde{n}, 1)$ distribution. Thus $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n - \log(\tilde{n}) \leq x) = e^{-e^{-x}}$. Davis and Mikosch (1999) have shown that this asymptotic property still holds true in the non Gaussian case.

Weighted sums of functionals of the periodogram Consider real numbers $\beta_{n,k}$ such that $\sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_{n,k}^2 = 1$ and a function ϕ and define

$$S_n^Z(\phi) = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \beta_{n,k} \phi(I_n(x_k)).$$

In the Gaussian case, such a sum is asymptotically Gaussian under the necessary assumption that $\mathbb{E}[\phi^2(I_n(x_k))] < \infty$ and under the Lindeberg condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq \tilde{n}} |\beta_{n,k}| = 0.$$

Because of the considerations above, one may expect that this result still holds in the non Gaussian case. However, no general result of this kind is known. We recall now some previous results. In the case of a linear functional *i.e.* $\phi(x) = x$, if the weights $\beta_{n,k}$ are the value of a function g at Fourier frequencies, it is known that $S_n^Z(\phi)$ is asymptotically Gaussian, with an asymptotic variance that depends on κ_4 . For instance, if $\beta_{n,k} = \tilde{n}^{-1/2}$, $\tilde{n}^{-1/2} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} (2\pi I_n(x_k) - 1)$ is asymptotically Gaussian with variance $1 + \kappa_4/2$. This can be proved by the method of cumulants, see Brillinger (1981). In the case of non linear functionals, very little is known. The first attempt to derive an asymptotic theory for such sums in the non-linear case is due to Chen and Hannan (1980) in the case $\phi(x) = \log(x)$. They used the technique of Edgeworth expansions for triangular arrays of independent random variables to compute the variance of $\tilde{n}^{-1/2} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \log(2\pi I_{n,k}) - \log(2) - \gamma$, where γ is Euler's constant. If q_n denotes the joint density of $R\{d_n^Z(x_k)\}, I\{d_n^Z(x_k)\}, \{d_n^Z(x_j)\}, I\{d_n^Z(x_j)\}$, for $0 < k < j \leq \tilde{n}$, a second order Edgeworth expansion of q_n yields (with the weights $\beta_{n,k}$ set equal to $\tilde{n}^{-1/2}$)

$$\text{var}(S_n^Z(\log)) = \frac{\pi^2}{6} + \kappa_4/2 + O(n^{-1/2}).$$

Note that $\pi^2/6$ is exactly the variance in the Gaussian case. The problem with this method is that the computation of higher moments is extremely involved, but this may be overcome, and that the existence of the joint density q_n and the validity of its Edgeworth expansion require a regularity assumption on the distribution of Z_0 , which nearly amounts to the existence of a density with respect to Lebesgue measure, and the necessity of which is not obvious. Let it be said, nevertheless, that in the case of non regular functionals, some regularity is needed since if the distribution of Z_0 has, say, a positive mass at zero, then the log-periodogram cannot be computed. Recently, Velasco (1999) using the same method, proved a central limit theorem in the case of the function \log and in the particular case where the number, say μ_n , of non vanishing coefficients $\beta_{n,k}$ is negligible with respect to n . The asymptotic variance is then $\pi^2/6$, that is, the same as in the Gaussian case. The central limit theorem is proved using the method of moments, and this necessitates to assume that $\mathbb{E}[|Z_0|^s]$ is finite for all s . This is obviously a strong assumption that one would like to omit.

Empirical spectral distribution function. Another important unsolved problem was to prove a functional central limit theorem for the empirical spectral measure, defined as

$$\hat{F}_n(x) = \tilde{n}^{-1} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \mathbf{1}_{[0,x]}(2\pi I_n(x_k)), \quad x \geq 0.$$

Freedman and Lane (1980) and Kokoszka and Mikosch (1999) proved that under the only assumption that $\mathbb{E}(Z_t^2) < \infty$, $\sup_{x \geq 0} |\hat{F}_n(x) - F_1(x)|$ converges in probability to zero, where

$F_1(x) = 1 - e^{-x}$ is the standard exponential cumulative distribution function. Kokoszka and Mikosch (1999) strengthened this result and proved convergence of the first three moments of $\tilde{n}^{-1/2}(\hat{F}_n(x) - F_1(x))$ under the natural assumptions of finiteness of the six first moments of Z_0 (but on the not so natural assumption that they all coincide with those of a $\mathcal{N}(0, 1)$ distribution) and under the regularity assumption on the distribution of Z_0 mentioned above.

In this paper, using the ideas of Chen and Hannan (1980) and generalizing (and making more formal) the deep ideas of Velasco (1999), we present a full theory for weighted sums of (eventually) non linear functionals of the periodogram of an i.i.d. sequence, and we solve the abovementioned problems. We also bring a new tool to the study of this problem. While the cited authors used Edgeworth expansion of the joint density of a finite number of discrete Fourier transforms, which necessitates the regularity assumption, we use the results of Götze and Hipp (1978) on Edgeworth expansions for moments of smooth functions. This allows, in the case of smooth functionals, to get rid of the regularity assumption on the distribution of Z_0 . This, in its turn, allows to use truncation arguments to get also rid of the assumption of finite moments of all order to obtain a central limit theorem by means of the method of moments.

Before concluding this already long introduction, let us mention that in statistical applications, the quantity of interest is never $S_n^Z(\phi)$, but $S_n^X(\phi)$, where X is a process which admits a linear representation with the i.i.d. sequence Z , *i.e.* X writes

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of real numbers such that $\sum_{t \in \mathbb{Z}} a_t^2 < \infty$. The spectral density of the process X is then

$$f_X = (2\pi)^{-1} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e_j \right|^2,$$

where $e_j(x) = e^{ijx}$. If the coefficients a_j are absolutely summable, then f_X is continuous and the process X is said weakly dependent. If the coefficients a_j are not absolutely summable, then f_X may not be continuous and even have singularities, in which case the process X is usually said strongly dependent. The study of $S_n^X(\phi)$ is then based on the so-called Bartlett's decomposition (cf. Bartlett, 1955), which consists in relating the periodogram of X to that of Z :

$$I_n^X(x) = 2\pi f_X(x) I_n^Z(x) + R_n(x),$$

where the superscript indicates the process with respect to which the periodogram is computed. Then one can write

$$S_n^X(\phi) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi(2\pi I_n^Z(x)) + T_n,$$

$$T_n = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \{ \phi(2\pi I_n^Z(x)) - \phi(2\pi f_X(y_k) I_n^Z(x)) \}.$$

Under reasonable regularity assumptions, one can hope to prove that T_n tends to zero in probability, and the remaining task is to obtain a central limit theorem for $S_n^Z(\phi)$. The problem with this decomposition is that the remainder term R_n is rather large, even if the coefficients a_j decay very rapidly or are only finitely many. We will not give any statistical applications in this paper, but for the problem mentioned above, we can already say that our results yield a central limit theorem for the estimator of the estimation variance considered in Chen and Hannan (1980), and that we improve on Velasco (1999) since we prove that his central limit theorem holds if Z_0 has only a finite number of finite moments (the exact number depends on many parameters not specified

here). Other applications for weak dependent linear processes are presented in Fay, Moulines and Soulier (1999) and an application to the estimation of the dependence coefficient of a fractional process is presented in Hurvich, Moulines and Soulier (1999).

The rest of the paper is organized as follows. Since the technique of Edgeworth expansion is applied to the distribution of the discrete Fourier transforms, we first state a very general for functionals of the Fourier transforms. In section 3.3, we apply this result to general linear functionals of the periodogram and in section 3.4, we state a functional central limit theorem for the empirical spectral distribution function. The proof of the main theorem, being very involved is split in several sections. The main technical tool, a moment expansion (Lemma 3.3) is stated in section 3.8 (Lemma 3.3) and proved in section 3.6. Even though it is just a technical lemma, we consider it as the actual main result of this paper, since all the other results easily derive from it, and because it offers the deepest insight in the dependence structure of periodogram ordinates at Fourier frequencies of a non Gaussian i.i.d. sequence.

3.2. Main result

Let m be a fixed positive integer. Put $K = [(n-1)/2m]$ and define the *pooled periodogram* by

$$\bar{I}_{n,k} = \sum_{j=m(k-1)+1}^{n} mk I_{n,j} \quad , \quad k = 1, \dots, K.$$

For all $n \geq 1, 1 \leq k \leq K$, define the $2m$ -dimensional vector

$$W_{n,k} = (2/n)^{1/2} \sum_{t=1}^n Z_t (\cos(tx_{m(k-1)+1}), \sin(tx_{m(k-1)+1}), \dots, \cos(tx_{mk}), \sin(tx_{mk}))^T. \quad (3.2.1)$$

so that $2\pi \bar{I}_{n,k} = \|W_{n,k}\|^2/2$. In this section, we give conditions on a triangular array of functions $(\psi_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ to obtain a central limit theorem for sums $S_n := \sum_{k=1}^n \beta_{n,k} \psi_{n,k}(W_{n,k})$.

In the case of functions of non smooth functions, as mentioned in the introduction, a regularity assumption on the distribution of the white noise Z_0 is necessary.

(A3.1) There exists some real $r \geq 1$, such that $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{E}(e^{itZ_0})|^r dt < \infty$.

Assumption **(A3.1)** ensures that $n^{-1/2} \sum_{t=1}^n Z_t$ has a density q_n for all sufficiently large n ($n \geq p$) and that this density converges uniformly to the standardized Gaussian distribution (see, for example, Bhattacharya and Rao (1976), Theorem 19.1,p.189). It is a strengthening of the usual Cramer's condition which excludes "lattice" variables. We now define the classes of admissible functions.

DEFINITION 1. \mathcal{H}_α is the set of measurable functions on \mathbb{R}^{2m} such that $N_\alpha(\psi) < \infty$, where

$$N_\alpha^2(\psi) = \int_{\mathbb{R}^{2m}} \psi^2(x) (1 + |x|^2)^{-\alpha} dx.$$

It is easily seen that \mathcal{H}_α , endowed with the norm N_α is a Hilbert space and that the set of compactly supported C^∞ functions is dense in this space.

DEFINITION 2. For integers ν and r , let \mathcal{S}_r^ν be the space of r times differentiable function on \mathbb{R}^{2m} such that for all $2m$ -tuples of integers $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{2m})$ that satisfy $\beta_1 + \dots + \beta_{2m} \leq r$,

$$M_\nu(D^\beta \psi) < \infty,$$

where D^β denotes the partial derivative of ψ of order β_i with respect to the i -th component, and for any function ϕ on \mathbb{R}^{2m} ,

$$M_\nu(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^{2m}} \frac{|\phi(x)|}{1 + |x|^\nu}.$$

The notation M_ν comes from Götze and Hipp (1978). For convenience, we introduce the following notation. For $\psi \in \mathcal{S}_\nu^r$, denote

$$M_{\nu,r}(\psi) = \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_{2m} \leq r} M_\nu(D^\beta \psi). \quad (3.2.2)$$

Obviously, the space \mathcal{S}_ν^0 is included in \mathcal{H}_α for any $\alpha > \nu + m$. For $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, we can also define

$$\|\psi\|^2 = \mathbb{E}[\psi^2(\xi)], \quad (3.2.3)$$

$$C_2(\psi, j) = \mathbb{E}[(\xi_j^2 - 1)\psi(\xi)], \quad (3.2.4)$$

where $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2m})^T$ denotes a $2m$ -dimensional standard Gaussian vector. If $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$ for some $\alpha > 0$, then $\|\psi\| < \infty$. Moreover, there exists a constant C_α such that for all $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, $\|\psi\| \leq C_\alpha N_\alpha(\psi)$. Also, for all $j = 1, \dots, 2m$, $|C_2(\psi, j)| \leq \sqrt{2}\|\psi\|$. Recall now that the Hermite rank of a function ψ such that $\|\psi\| < \infty$ is the smallest integer τ such that there exists a polynomial P of degree τ with $\mathbb{E}[P(\xi)\psi(\xi)] \neq 0$. In this section, for the sake of simplicity, only functions of Hermite rank at least 2 will be considered. A very frequently verified sufficient condition for a function ψ to have Hermite rank at least 2 is $\mathbb{E}[\psi(\xi)] = 0$ and ψ is componentwise even.

For a triangular array of functions $(\psi_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ such that $\|\psi_{n,k}\| < \infty$, and for a triangular array of reals $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$, define

$$S_n = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \psi_{n,k}(W_{n,k}). \quad (3.2.5)$$

The assumptions needed to prove the asymptotic normality of S_n are now stated.

(A3.2) $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ is a triangular array of real numbers such that $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$ and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}| = 0.$$

(A3.3) There exists a real $\sigma > 0$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \|\psi_{n,k}\|^2 = \sigma^2.$$

(A3.4) There exists a real τ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{1 \leq k < l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} \sum_{i,j=1, \dots, 2m} C_2(\psi_{n,k}, i) C_2(\psi_{n,l}, j) = \tau$$

and $\sigma^2 + \kappa_4 \tau / 4 \neq 0$.

(A3.5)

$$\forall \epsilon > 0, \max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}| = O(\mu_n^{-1/2+\epsilon}).$$

where $\mu_n := \#\{k : 1 \leq k \leq K, \beta_{n,k} \neq 0\}$.

Assumption **(A3.2)** implies the Lindeberg-Lévy smallness condition and together with **(A3.3)** is sufficient in the Gaussian case. Assumption **(A3.4)** is necessary in the non Gaussian case since it appears in the expansion of $\text{var}(S_n)$. Assumption **(A3.5)** means that $\mu_n (\max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}|)^2$ is bounded by a slowly varying function of μ_n . It holds when $\beta_{n,k}$ is defined as $g(y_k) / \left(\sum_{k=1}^K g^2(y_k) \right)^{1/2}$ for most "reasonable" functions g (such as continuous functions on $[-\pi, \pi]$ or $g(x) = \log(x)$) and evenly spaced frequencies y_k , $1 \leq k \leq K$. This assumption does not seem necessary, but we cannot prove our result without it. See the comment after Theorem 3.1. The next assumption is necessary to replace eventually non smooth functions $\psi_{n,k}$ by smooth ones.

(A3.6) For all real $\epsilon > 0$, there exists a sequence of compactly supported C^∞ functions $\psi_{n,k}^\epsilon$ with same support \mathcal{K}_ϵ and with Hermite rank 2 such that

$$\max_n \max_{1 \leq k \leq K} \|\psi_{n,k} - \psi_{n,k}^\epsilon\| \leq \epsilon, \quad (3.2.6)$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall r \in \mathbb{N}, \exists C_{r,\epsilon}, M_{0,r}(\psi_{n,k}^\epsilon) \leq C_{r,\epsilon}, \quad (3.2.7)$$

and there exist a real $\sigma^2(\epsilon) > 0$ and a real $\tau(\epsilon)$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \|\psi_{n,k}^\epsilon\|^2 = \sigma^2(\epsilon),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{1 \leq k < l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} \sum_{i,j=1,\dots,2m} C_2(\psi_{n,k}^\epsilon, i) C_2(\psi_{n,l}^\epsilon, j) = \tau(\epsilon).$$

Note that if **(A3.3)**, **(A3.4)** and **(A3.6)** hold, then $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma^2(\epsilon) = \sigma^2$ and $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tau(\epsilon) = \tau$.

THEOREM 3.1. *Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a unit variance white noise with finite moment of order μ . Let $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array of reals and $(\psi_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array of functions such that Assumptions **(A3.2)**, **(A3.5)**, **(A3.3)**, **(A3.4)** and **(A3.6)** hold. Assume either*

- For all $1 \leq k \leq K$, $\psi_{n,k} \in \mathcal{H}_\alpha$, assumption **(A3.1)** holds and $\mu \geq 2\alpha + 2$.
- For all $1 \leq k \leq K$, $\psi_{n,k} \in \mathcal{S}_\nu^2$ and $\mu \geq 4\nu \vee 4$.

*Then the distribution of S_n is asymptotically Gaussian with mean zero and variance $\sigma^2 + \tau\kappa_4/4$. Moreover, Assumptions **(A3.4)** and **(A3.5)** are not necessary in the following cases :*

- If $\kappa_4 = 0$ then Assumption **(A3.4)** is not necessary.
- If $\mu_n = o(n^{2/3})$ then Assumption **(A3.5)** is not necessary and Assumption **(A3.7)** holds with $\gamma = 0$.
- If for all $k \leq K$, $C_2(\psi_{n,k}) = 0$, then Assumptions **(A3.5)** and **(A3.7)** are not necessary and thus the central limit theorem holds under the same assumption on the weights $\beta_{n,k}$ and with the same limit as in the Gaussian case.

Comments. This result gives a better understanding of the differences between the Gaussian and the non Gaussian case. Recall that in the Gaussian case only assumption **(A3.2)** is necessary. Here, we need a stronger assumption on the functions considered, and also a restriction on the admissible weights. Note that assumption **(A3.1)** holds in the Gaussian case, so it cannot be considered as a restriction. The strengthened assumptions on the functions considered are not somehow necessary, since some conditions are needed to insure integrability of $\psi_{n,k}(d_{n,k})$. The conditions we impose are nearly minimal, and in the case of smooth functions, they are optimal in terms of the requirement on the moments of Z_0 . Assumption **(A3.5)** is probably not necessary. As mentioned in the Theorem, it is indeed not necessary in some cases.

3.3. Non linear functionals of the periodogram

Since Theorem 3.1 is stated for arbitrary m , we can derive a central limit theorem for non linear functionals of the aggregated (or averaged, or pooled) periodogram. Let m be a fixed integer and set $K = \lceil (n - m)/2m \rceil$. Define

$$\bar{I}_{n,k} = \sum_{s=(k-1)m+1}^{km} I_n(x_s), \quad 1 \leq k \leq K.$$

Let ϕ be a measurable function on \mathbb{R} such that $\mathbb{E}[\phi^2(Y)] < \infty$ where Y is a $\Gamma(m, 1)$ random variable, or, equivalently, Y is distributed as $|\xi|^2/2$, where ξ denote a $2m$ -dimensional standard Gaussian

vector, and $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm. The following quantities are then well defined.

$$\gamma_m(\phi) = \mathbb{E}[\phi(|\xi|^2/2)], \quad (3.3.1)$$

$$\sigma_m^2(\phi) = \text{var}(\phi(|\xi|^2/2)) = \mathbb{E}[\phi^2(|\xi|^2/2)] - \gamma_m^2(\phi), \quad (3.3.2)$$

$$C_m(\phi) = \mathbb{E}[(\xi_1^2 - 1)\phi(|\xi|^2/2)]. \quad (3.3.3)$$

Let $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array of real numbers such that **(A3.2)** holds. In the context of this section, assumption **(A3.3)** will hold automatically, while **(A3.4)** will be a consequence of the following assumption.

(A3.7) There exists a real γ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k \neq l} \beta_{n,k} \beta_{n,l} = \gamma.$$

Define finally

$$S_n(\phi) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \{\phi(2\pi \bar{I}_{n,k}) - \gamma_m(\phi)\} \quad (3.3.4)$$

THEOREM 3.2. *Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a unit variance white noise with finite moment of order μ . Assume either*

- *ϕ is twice differentiable, there exists an integer ν such that*

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\phi(x)| + |\phi'(x)| + |\phi''(x)|}{1 + |x|^\nu} < \infty$$

and $\mu \geq 4\nu \vee 4$.

- *Assumption **(A3.1)** holds, there exists a positive integer α such that*

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi^2(|x|^2)(1 + |x|^2)^{-\alpha} dx < \infty$$

and $\mu \geq 2\alpha + 2$.

*Let $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array satisfying Assumptions **(A3.2)**, **(A3.5)** and **(A3.7)**, and such that $\sigma_m^2(\phi) + \gamma m^2 \kappa_4 C_m^2(\phi) \neq 0$. Then $S_n(\phi)$ converges in distribution to the standard Gaussian distribution with variance $\sigma_m^2(\phi) + \gamma m^2 \kappa_4 C_m^2(\phi)$. Assumptions **(A3.7)** and **(A3.5)** are not necessary in the following cases.*

- *If $\kappa_4 = 0$ then Assumption **(A3.7)** is not necessary.*
- *If $\mu_n = o(n^{2/3})$ then Assumption **(A3.5)** is not necessary and Assumption **(A3.7)** holds with $\gamma = 0$.*
- *If $C_m(\phi) = 0$, then Assumptions **(A3.5)** and **(A3.7)** are not necessary and thus the central limit theorem holds under the same assumption on the weights $\beta_{n,k}$ as in the Gaussian case and with the same limit $\sigma_m^2(\phi)$.*

Proof of Theorem 3.2. If ϕ satisfy the assumptions of Theorem 3.2, define, for $x \in \mathbb{R}^{2m}$, $\psi(x) = \phi(|x|^2/2) - \gamma_m(\phi)$ and $\psi_{n,k} = \psi$ for all $1 \leq k \leq K$. As mentioned above, ψ has Hermite rank 2 since $\mathbb{E}[\psi(\xi)] = 0$ and ψ is componentwise even. If the array $\beta_{n,k}$ satisfy Assumptions **(A3.2)** and **(A3.7)** then Assumptions **(A3.3)** and **(A3.4)** hold with $\sigma^2 = \sigma_m^2(\phi)$ and $\tau = 4m^2 \gamma C_m^2(\phi)$. Under the assumptions of Theorem 3.2, ϕ can be approximated by a sequence of compactly supported C^∞ function ϕ^ϵ , *i.e.*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{E}[(\phi(|\xi|^2/2) - \phi^\epsilon(|\xi|^2/2))^2] \leq \epsilon.$$

Define then $\psi^\varepsilon(x) = \phi^\varepsilon(|x|^2/2)$ and $\psi_{n,k} = \psi$ for all n and k . It can be assumed, without loss of generality, that $\mathbb{E}[\phi(\xi)] = \mathbb{E}[\phi^\varepsilon(|\xi|^2/2)] = 0$. Thus the functions $\psi_{n,k}$ and $\psi_{n,k}^\varepsilon$ all have Hermite rank at least 2, and assumption **(A3.6)** holds. This concludes the proof of theorem 3.2.

The proof of Theorem 3.1 is based on the so-called method of moments. Thus, under a relevant moment assumption, it is easily seen that the convergence of moments holds.

PROPOSITION 3.3. *Let q be an integer. Under the assumptions of Theorem 3.2, if moreover $\mathbb{E}[Z_0^{2q}] < \infty$, then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_n^q(\phi)] = (\sigma_m(\phi) + \gamma m^2 \kappa_4 C_2^2(\phi))^q.$$

3.4. Functional central limit theorem for the empirical spectral measure

The empirical spectral distribution function is defined as

$$\hat{F}_n(x) = K^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{1}_{[0,x]}(2\pi \bar{I}_{n,k}), \quad x \geq 0.$$

In the case $m = 1$, it has been shown by Freedman and Lane (1980) and in Kokoszka and Mikosch (1999) that under the only assumption that $\mathbb{E}(Z_t^2) < \infty$, $\sup_{x \geq 0} |\hat{F}_n(x) - F_1(x)|$ converges in probability to zero, where $F_1(x) = 1 - e^{-x}$ is the standard exponential cumulative distribution function. Kokoszka and Mikosch (1999) also proved that if the distribution of Z_0 satisfies the Cramer condition **(A3.1)**, if $\mathbb{E}(|Z_t|^6) < \infty$ and the first 6 moments of Z_0 coincide with those of a standard normal variable, then $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{s/2} \mathbb{E}[(\hat{F}_n(x) - F_1(x))^s] = 0$ for $s = 1, 3$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{E}[(\hat{F}_n(x) - F_1(x))^2] = 2F_1(x)(1 - F_1(x))$. But these author were unable to derive convergence in distribution of $\sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F_1(x))$ and ask if a functional central limit theorem can be proved. Applying Theorem 3.2, we prove here that under **(A3.1)** and a suitable moment condition, the functional central limit theorem holds, and that $n^q \mathbb{E}[(\hat{F}_n(x) - F_1(x))^{2q}]$ converges to $\{2F_1(x)(1 - F_1(x))\}^q$ under the only additional assumption that $\kappa_4 = 0$. Define $F_m(x) = ((m-1)!)^{-1} \int_0^x t^{m-1} e^{-t} dt$, the distribution function of the $\Gamma(m, 1)$ distribution. Define also $C_m(x) = (m+1)F_{m+1}(x) - F_m(x)$.

THEOREM 3.4. *If Assumption **(A3.1)** holds and if $\mathbb{E}(|Z_0|^8) < \infty$, then $\sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F_m(x))$ converges in the space $\mathcal{D}([0, \infty[)$ of left-limited right-continuous (cadlag) functions on $[0, \infty)$ to the Gaussian process $G(x)$ with covariance function*

$$\mathbb{E}[G(x)G(y)] = 2mF_m(x \wedge y)(1 - F_m(x \vee y)) + m^2 \kappa_4 C_m(x)C_m(y).$$

If moreover $\mathbb{E}(|Z_0|^q) < \infty$, then

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{q/2} \mathbb{E}[(\hat{F}_n(x) - F_m(x))^q] \\ = \begin{cases} 0 & \text{if } q \text{ is odd,} \\ \{2mF_m(x \wedge y)(1 - F_m(x \vee y)) + m^2 \kappa_4 C_m(x)C_m(y)\}^{q/2} & \text{if } q \text{ is even.} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarks.

- If $\kappa_4 = 0$ then the limit process is the same as if Z_t were Gaussian white noise, or, equivalently, if the periodogram ordinates $\bar{I}_{n,k}$ were i.i.d. random variables with $\Gamma(m, 1)$ distribution (i.i.d. exponentials in the case $m = 1$). If enough moments of Z_0 are finite, the limiting moments are also the same as in the Gaussian case. Thus, the difference with the behaviour of an i.i.d. sequence appears only through the fourth cumulant.

- The proof of Theorem 3.4 is as usual split into two parts. The convergence of finite distribution is an obvious consequence of Theorem 3.2 and holds under finiteness of the fourth moment of Z_0 only. Tightness is proved using the criterion for empirical processes of Shao and Yu (1996) and needs finiteness of the eighth moment of Z_0 .

3.5. Proof of Theorem 3.1

Theorem 3.1 is proved by means of the method of moments and Edgeworth expansions. Thus the first step in its proof is to prove a central limit theorem in the case of smooth functions and when all the moments of Z_0 are finite.

PROPOSITION 3.5. *Assume that $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a unit variance white noise such that for all integers s , $\mathbb{E}(|Z_0|^s) < \infty$. Assume that for all $1 \leq k \leq K$ $\psi_{n,k}$ is compactly supported C^∞ and*

$$\forall r \in \mathbb{N}, \exists C_r, \forall n, \forall k \leq K, M_{0,r}(\psi_{n,k}) \leq C_r. \quad (3.5.1)$$

*Let $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array of reals such that Assumptions **(A3.2)**, **(A3.5)**, **(A3.3)** and **(A3.4)** hold. Then S_n is asymptotically Gaussian with variance $\sigma^2 + \tau\kappa_4/4$.*

We must now relax the assumption that Z_0 has finite moments of all orders. Define $Z_t^{(M)} = \sigma_M^{-1} Z_t \mathbf{1}_{\{|Z_t| \leq M\}}$ and with $\sigma_M^2 = \mathbb{E}((Z_t \mathbf{1}_{\{|Z_t| \leq M\}})^2)$. Without loss of generality, we can assume that for all M , $\mathbb{E}(Z_t^{(M)}) = 0$, since we will compute discrete Fourier transforms at Fourier frequencies. Define $W_{n,k}^{(M)}$ in the same way as $W_{n,k}$, replacing Z by $Z^{(M)}$.

LEMMA 3.1. *Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be an i.i.d. sequence of zero-mean random variables with finite moment of order 4. Let $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array of real numbers such that $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$. Assume that $(\psi_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ is a triangular array of compactly supported C^2 functions with same support \mathcal{K} and that there exists a constant C such that*

$$\forall n, \forall k \leq K, M_{0,2}(\psi_{n,k}) \leq C. \quad (3.5.2)$$

Then

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \{ \psi_{n,k}(W_{n,k}) - \psi_{n,k}(W_{n,k}^{(M)}) \} \right)^2 = 0.$$

PROPOSITION 3.6. *Assume that $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a unit variance white noise such $\mathbb{E}(|Z_0|^4) < \infty$. Assume that for all $1 \leq k \leq K$ $\psi_{n,k}$ is compactly supported C^∞ and (3.5.1) holds. Let $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array of reals such that Assumptions **(A3.2)**, **(A3.5)**, **(A3.3)** and **(A3.4)** hold. Then S_n is asymptotically Gaussian with variance $\sigma^2 + \tau\kappa_4/4$.*

Proof of Proposition 3.6. Define $S_n^{(M)} = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \psi_{n,k}(W_{n,k}^{(M)})$. Applying Proposition 3.5 and Lemma 3.1, we get

$$\forall M \in \mathbb{N}, S_n^{(M)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(M)), \quad (3.5.3)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_n \mathbb{E}(S_n(M) - S_n)^2 = 0. \quad (3.5.4)$$

where $\sigma^2(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2(M)$ and $s_n^2(M)$ is defined as s_n^2 with the fourth cumulant $\kappa_4^{(M)}$ of $Z_0^{(M)}$ instead of κ_4 . $\sigma^2(M)$ is well defined because of assumptions **(A3.3)** and **(A3.4)**. Moreover,

$$|s_n^2(M) - s_n^2| \leq C |\kappa_4^{(M)} - \kappa_4| \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \|\psi_{n,k}\|^2.$$

This last sum is bounded because $\max_{1 \leq k \leq K} \|\psi_{n,k}\| < \infty$ under assumption (3.5.1). Thus $\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma^2(M) = \sigma^2$. Theorem 4.2 in Billingsley (1968) concludes the proof of Proposition 3.6.

To conclude the proof of Theorem 3.1, there only remains to replace the sequence $\psi_{n,k}$ by a sequence of smooth functions.

LEMMA 3.2. *Assume either*

- **(A3.1)** holds, there exists a positive integer α and a constant C such that for all n and $1 \leq k \leq K$, $\psi_{n,k} \in \mathcal{H}_\alpha$ and $N_\alpha(\psi_{n,k}) \leq C$, and $\mathbb{E}(|Z_t|^{2\alpha+2}) < +\infty$;
- there exists an integer ν and a constant C such that for all n and $1 \leq k \leq K$, $\psi_{n,k} \in \mathcal{S}_\nu^2$ and $M_{\nu,2}(\psi_{n,k}) \leq C$, and $\mathbb{E}(|Z_t|^{2\nu}) < +\infty$.

Then, for all triangular array of integers $\beta_{n,k}$ such that $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$, for large enough n ,

$$\limsup_n \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \psi_{n,k}(W_{n,k}) \right)^2 \right] \leq \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \|\psi_{n,k}\|^2.$$

We can now conclude the proof of Theorem 3.1. Using the notations of assumption **(A3.6)**, denote $S_n(\epsilon) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \psi_{n,k}^\epsilon(W_{n,k})$. Applying Proposition 3.6 and Lemma 3.2, we have

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, S_n(\epsilon) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\epsilon)), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \mathbb{E}(S_n(\epsilon) - S_n)^2 &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma^2(\epsilon) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

We conclude as above by applying Theorem 4.2 in Billingsley (1968).

3.6. Proof of Proposition 3.5 and of Lemmas 3.1 and 3.2

The proofs of Proposition 3.5 and of Lemmas 3.1 and 3.2 are based on a moment expansion for functions of the periodogram.

LEMMA 3.3. *Let $s \leq d$ be two integers. Let $k = (k_1, \dots, k_d)$ be a d -tuple of pairwise distinct integers. Let ϕ_1, \dots, ϕ_d be d functions defined on \mathbb{R}^{2m} . Assume that one of the following assumption holds.*

- (BR)** **(A3.1)** holds and for all $i = 1, \dots, d$, $N_{\alpha_i}(\phi_i) < \infty$ for some integers $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ and $\mathbb{E}[|Z_0|^\alpha] < \infty$ with $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_d + 2$.
- (GH)** Denote $r = (s - 2md)^+ + 2$. Let ν_1, \dots, ν_d be non negative integers and denote $\nu = (\nu_1 + \dots + \nu_d) \vee (s + 2)$. For all $i = 1, \dots, d$, $\phi_i \in \mathcal{S}_{\nu_i}^r$ and $\mathbb{E}(|Z_0|^\nu) < \infty$.

Let τ_i be the Hermite rank of ϕ_i , $1 \leq i \leq s$ and $\tau = \inf_{1 \leq i \leq s} \tau_i$.

- If $\tau = 2$ or 3 then

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d \phi_i(W_{n,k_i}) \right] &= n^{-s/2} \frac{s! \kappa_4^{s/2}}{2^{3s/2} (s/2)!} \sum_{j_1, \dots, j_s=1 \dots 2m} \prod_{j=1}^s C_2(\phi_i, j_i) \prod_{i=s+1}^d \mathbb{E}[\phi_i(\xi)] \mathbf{1}_{\{s \in 2\mathbb{N}\}} \\ &\quad + \sum_{r=\lceil (2s+2)/3 \rceil}^s n^{-r/2} \mathbb{F}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) + n^{-s/2} r_n(\phi_1, \dots, \phi_d, k), \\ |\mathbb{F}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d)| &\leq C \prod_{i=1}^d \|\phi_i\| \Delta_r(k), \end{aligned}$$

where Δ_r is uniformly bounded by one and vanishes outside a finite union of subspaces of \mathbb{R}^d , the greatest dimension of which is strictly less than $d + (r - s)/2$.

- If $\tau \geq 4$, then

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d \phi_i(W_{n,k_i})\right] = \prod_{i=1}^d \mathbb{E}[\phi_i(\xi)] + n^{-s/2} r_n(\phi_1, \dots, \phi_d, k). \quad (3.6.1)$$

ϵ_n is a sequence which depends only on $d, s, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ or ν_1, \dots, ν_d and the distribution of Z_0 and such that $\lim_n \epsilon_n = 0$. The following bounds hold for r_n :

- if assumption **(BR)** holds :

$$|r_n(\phi_1, \dots, \phi_d, k)| \leq \prod_{i=1}^d N_{\alpha_i}(\phi_i), \quad (3.6.2)$$

- if assumption **(GH)** holds :

$$|r_n(\phi_1, \dots, \phi_d, k)| = \prod_{i=1}^d M_{\nu_i, r}(\phi_i). \quad (3.6.3)$$

Remarks.

- The constants involved in the above bounds are uniform wrt n and k_1, \dots, k_d but depend on d .
- In the context of Theorem 3.2 or 3.4, Lemma 3.3 is used with $\phi_1 = \dots = \phi_s = \psi$ for some function ψ such that $\|\psi\| < \infty$ and $C_2(\psi, 1) = \dots = C_2(\psi, 2m) := C_2(\psi)$. Then the first term in the expansion of $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^d \phi_i(W_{n,k_i})]$ becomes, if s is even and $\tau \geq 2$,

$$n^{-s/2} \frac{s!(m^2 C_2^2(\psi) \kappa_4 / 2)^{s/2}}{(s/2)!} \prod_{j=s+1}^d \mathbb{E}[\phi_j(\xi)].$$

- In (3.6.1), the product vanishes if $s > 0$.
- The case $\tau = 0$ is included in the case $s = 0$.
- In view of Lemma 3.2, it is important that the bound (3.6.2) is explicit in terms of the norms $N_{\alpha_i}(\phi_i)$.

3.6.1. Proof of Proposition 3.5. The proof is based on the method of moments. Denote $Y_{n,k} = \psi(\bar{I}_{n,k})$ and $\sigma_{n,k}^2 = \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(\xi)]$. Recall that $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$. Let $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$.

$$\mathbb{E}(S_n^q) = \sum_{v=1}^q \sum'_{v,q} \frac{q!}{q_1! \dots q_v!} \frac{1}{v!} A_n(q_1, \dots, q_v),$$

$$A_n(q_1, \dots, q_v) = \sum''_{v,n} \prod_{i=1}^v \beta_{n,k_i}^{q_i} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^v Y_{n,k_i}^{q_i} \right),$$

$\sum'_{v,q}$ extends on all v -tuples of positive integers (q_1, \dots, q_v) such that $q_1 + \dots + q_v = q$ and $\sum''_{v,n}$ extends on all v -uplets (k_1, \dots, k_v) of pairwise distinct integers in the range $\{1, \dots, K\}$.

For any v -tuple (q_1, \dots, q_v) such that $q_1 + \dots + q_v = q$, let s be the number of indices i such that $q_i = 1$ and u be the number of indices i such that $q_i = 2$. Denote $w = v - s - u$. If $w > 0$, we easily get that $A_n(q_1, \dots, q_v) = o(1)$. Indeed, Assumption **(A3.6)** and Lemma 3.3 yield, with $b_n = \max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}|$,

$$|A_n(q_1, \dots, q_v)| \leq C b_n^q \mu_n^{v-s/2}.$$

Now, $w > 0$ implies that $v - s/2 = s/2 + u + w \leq q/2 - 1/2$. Thus, under assumption **(A3.5)**,

$$|A_n(q_1, \dots, q_v)| \leq C (b_n^2 \mu_n)^{q/2} \mu_n^{-1/2} = o(1).$$

Consider now (q_1, \dots, q_v) a v -tuple such that $w = 0$, i.e. $s + u = v$ and $s + 2u = q$.

- If s is even, Lemma 3.3 yields

$$\begin{aligned} A_n(q_1, \dots, q_v) &= A_n(1, \dots, 1, 2, \dots, 2) \\ &= n^{-s/2} \frac{s! \kappa_4^{s/2}}{2^{3s/2} (s/2)!} \sum''_{v,n} \prod_{i=1}^s \left\{ \beta_{n,k_i} \sum_{j_i=1}^{2m} C_2(\psi_{n,k_i}, j_i) \right\} \prod_{i=s+1}^v \beta_{n,k_i}^2 \sigma_{n,k_i}^2 + \epsilon_n \\ |\epsilon_n| &\leq C(b_n^2 \mu_n)^{q/2} \mu_n^{-1}. \end{aligned}$$

- If s is odd (when $w = 0$ and q is odd), Lemma 3.3 yields

$$|A_n(q_1, \dots, q_v)| \leq C(b_n^2 \mu_n)^{q/2} \mu_n^{-1}.$$

The leading term in the expansion of $\mathbb{E}(S_n^q)$ for any even q is thus, (note that $v = (q + s)/2$ and denote $t = s/2$),

$$\tilde{s}_{n,q} = \frac{q!}{(q/2)! 2^{q/2}} \sum_{t=0}^{q/2} \binom{q/2}{t} \left(\frac{\kappa_4}{4n} \right)^t n^{-t} \sum''_{t+q/2,n} \prod_{i=1}^{2t} \beta_{n,k_i} \sum_{j_i=1}^{2m} C_2(\psi_{n,k_i}, j_i) \prod_{i=2t+1}^v \beta_{n,k_i}^2 \sigma_{n,k_i}^2.$$

Denote

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \|\psi_{n,k}\|^2 + \frac{\kappa_4}{4n} \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} \sum_{i,j=1, \dots, 2m} C_2(\psi_{n,k}, i) C_2(\psi_{n,l}, j).$$

s_n^2 is the leading term of $\mathbb{E}[S_n^2]$ and assumptions **(A3.3)** and **(A3.4)** imply that $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2 = \sigma^2 + \tau \kappa_4 / 4$. Since $b_n = o(1)$ (Assumption **(A3.2)**), it also holds that

$$\begin{aligned} s_n^q &= \sum_{t=0}^{q/2} \binom{q/2}{t} \left(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \sigma_{n,k}^2 \right)^{\frac{q}{2}-t} \left(\frac{\kappa_4}{4n} \sum_{k_1 \neq k_2} \beta_{n,k_1} \beta_{n,k_2} \sum_{j_1, j_2=1, \dots, 2m} C_2(\psi_{n,k_1}, j_1) C_2(\psi_{n,k_2}, j_2) \right)^t \\ &= \left(\frac{q!}{2^{q/2} (q/2)!} \right)^{-1} \tilde{s}_{n,q} (1 + O(b_n)), \end{aligned}$$

and finally

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_n^q) = \frac{q!}{2^{q/2} (q/2)!} (\sigma + \tau \kappa_4 / 4)^q,$$

which concludes the proof of Proposition 3.5.

Proof of Proposition 3.5 in the case $\mu_n = o(n^{2/3})$. Let q_1, \dots, q_u be such that $\#\{i, q_i = 1\} = s$. Then $\sum_{\{i, q_i \geq 2\}} (q_i - 2) = q - 2u + s$. Since $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$, we have, by definition of μ_n , $\sum_{k=1}^K |\beta_{n,k}| = O(\mu_n^{1/2})$. Thus,

$$\sum'' |\beta_{n,k_1}^{q_1} \dots \beta_{n,k_u}^{q_u}| \leq C \mu_n^{s/2} b_n^{q-2u+s}.$$

Since all terms involved in the expansion of $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^u Y_{n,k_i}^{q_i})$ are of order $n^{-s/3}$ at most, we get, if $s > 0$,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^u Y_{n,k_i}^{q_i}\right) = O(\mu_n^{s/2} b_n^{q-2u+s} n^{-s/3}) = O((\mu_n/n^{2/3})^{s/2}) = o(1).$$

If $s = 0$ then either $u < q/2$ or $u = q/2$ and $q_1 = \dots = q_u = 2$. In both cases, the condition $b_n = o(1)$ yields the required limit.

Proof of Proposition 3.5 in the case $\tau \geq 4$. Assume that for all n and $1 \leq k \leq K$, the Hermite rank of $\psi_{n,k}$ is at least 4. This yields

$$A_n(q_1, \dots, q_v) = \sum_{v,n} \prod_{i=1}^v \beta_{n,k_i}^{q_i} \left\{ \prod_{i=1}^v \mathbb{E}[\psi_{n,k_i}^{q_i}(\xi)] + o(n^{-s/2}) \right\}.$$

The expectation term above vanishes when the number (s) of indices i such that $q_i = 1$ is not zero, we get, for such v -tuples,

$$|A_n(q_1, \dots, q_v)| \leq C \epsilon_n n^{-s/2} \left(\sum_{k=1}^K |\beta_{n,k}| \right)^s b_n^{v-s},$$

where $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$. Since $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$, applying Hölder inequality, we have $\sum_{k=1}^K |\beta_{n,k}| = O(\sqrt{n})$, thus if $s \neq 0$, $A_n(q_1, \dots, q_v) = o(1)$. If $s = 0$ and $v < q/2$, then as before $A_n(q_1, \dots, q_v) = o(1)$. If $s = 0$ and $v = q/2$, then

$$A_n(2, \dots, 2) = \sum_{q/2, n} \prod_{i=1}^{q/2} \sigma_{n,k}^2 + o(1).$$

The proof is concluded as in the general case by noting that under the Lindeberg condition $b_n = o(1)$, $s_n^q = \sum_{q/2, n} \prod_{i=1}^{q/2} \sigma_{n,k}^2 + o(1)$.

3.6.2. Proof of Lemma 3.1. Define $\tilde{\sigma}_M^2 = \mathbb{E}(Z_t^2 \mathbf{1}_{\{|Z_t| > M\}})$ and $\tilde{Z}_t^{(M)} = \tilde{\sigma}_M^{-1} Z_t \mathbf{1}_{\{|Z_t| > M\}}$. Define $\tilde{W}_{n,k}^{(M)}$ in the obvious way wrt $\tilde{Z}_t^{(M)}$. With these notations, we have $W_{n,k} = \sigma_M W_{n,k}^{(M)} + \tilde{\sigma}_M \tilde{W}_{n,k}^{(M)}$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \{ \psi_{n,k}(W_{n,k}) - \psi_{n,k}(W_{n,k}^{(M)}) \} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \left\{ \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(W_{n,k})] + \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(W_{n,k}^{(M)})] - 2\mathbb{E}[\psi_{n,k}(W_{n,k})\psi_{n,k}(W_{n,k}^{(M)})] \right\} \\ &+ \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} \mathbb{E}[\{ \psi_{n,k}(W_{n,k}) - \psi_{n,k}(W_{n,k}^{(M)}) \} \{ \psi_{n,l}(W_{n,l}) - \psi_{n,l}(W_{n,l}^{(M)}) \}] \\ &=: A_{n,M} + B_{n,M}. \end{aligned}$$

Let $\xi^{(1)}$ and $\xi^{(2)}$ be two independent $2m$ -dimensional standard Gaussian vectors. As shown in section 3.8.1 below, we can apply Theorem 3.17 in Götze and Hipp (1978) and we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(W_{n,k})] &= \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(\xi^{(1)})] + O(n^{-1/2}), \\ \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(W_{n,k}^{(M)})] &= \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(\xi^{(1)})] + O(n^{-1/2}), \\ \mathbb{E}[\psi_{n,k}(W_{n,k})\psi_{n,k}(W_{n,k}^{(M)})] &= \mathbb{E}[\psi_{n,k}(\xi^{(1)})\psi_{n,k}(\sigma_M \xi^{(1)} + \tilde{\sigma}_M \xi^{(2)})] + O(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

where the bounds are uniform because of (3.5.2). These expansions yield

$$A_{n,M} = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \mathbb{E}[\psi_{n,k}(\xi^{(1)}) \{ \psi_{n,k}(\sigma_M \xi^{(1)} + \tilde{\sigma}_M \xi^{(2)}) - \psi_{n,k}(\xi^{(1)}) \}] + O(n^{-1/2}).$$

Applying Hölder inequality, (3.5.2) and the mean value theorem, we get, for some constant C that does not depend on M ,

$$A_{n,M} \leq C \mathbb{E}^{1/2} [(|\sigma_M \xi^{(1)} + \tilde{\sigma}_M \xi^{(2)}|^2 - |\xi^{(1)}|^2)^2] + O(n^{-1/2}).$$

Thus $\limsup_n A_{n,M} \leq \mathbb{E}^{1/2} [(|\sigma_M \xi^{(1)} + \tilde{\sigma}_M \xi^{(2)}|^2 - |\xi^{(1)}|^2)^2]$, and since $\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = 1$, by the bounded convergence theorem, we get $\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_n A_{n,M} = 0$.

To deal with the second term $B_{n,M}$ we need to use an Edgeworth expansion up to the order n^{-1} . Applying again Theorem 3.17 in Götze and Hipp (1978), with assumption (3.5.2), we get

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} \mathbb{E}[\psi_{n,k}(W_{n,k}) \psi_{n,l}(W_{n,l})] \\ &= \frac{\kappa_4}{4n} \sum_{k_1 \neq k_2} \beta_{n,k_1} \beta_{n,k_2} \sum_{j_1, j_2=1 \dots 2m} C_2(\psi_{n,k_1}, j_1) C_2(\psi_{n,k_2}, j_2) + o(1), \\ & \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} \mathbb{E}[\psi_{n,k}(W_{n,k}) \psi_{n,l}(W_{n,l}^{(M)})] \\ &= \frac{\kappa_4^{(M)} - \sigma_M^2 \tilde{\sigma}_M^2}{4n} \sum_{k_1 \neq k_2} \beta_{n,k} \beta_{n,l} \sum_{j_1, j_2=1 \dots 2m} C_2^M(\psi_{n,k_1}, j_1) C_2(\psi_{n,k_2}, j_2) + o(1), \end{aligned}$$

where $\kappa_4^{(M)}$ is the fourth order cumulant of $Z_0^{(M)}$ and $C_2^{(M)}(\psi, j) = \mathbb{E}[H_2(\xi_j^{(1)}) \psi(\sigma_M \xi^{(1)} + \tilde{\sigma}_M \xi^{(2)})]$. Under (3.5.2), the coefficients $C_2(\psi_{n,k}, j)$ and $C_2^M(\psi_{n,k}, j)$ are uniformly bounded and thus we get, applying Hölder inequality and the mean value theorem,

$$\limsup_n B_{n,M} \leq C \left(\sigma_M^2 \tilde{\sigma}_M^2 + |\kappa_4 - \kappa_4^{(M)}| \right).$$

As for $A_{n,M}$, we conclude by applying the bounded convergence theorem.

3.6.3. Proof of Lemma 3.2. Under the assumptions of Lemma 3.2, using Lemma 3.3, it is easily seen that for all $1 \leq k \neq j \leq K$, the following expansions are valid.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi_{n,k}^2(W_{n,k})] &= \|\psi_{n,k}\|^2 + O(n^{-1/2}), \\ \mathbb{E}[\psi_{n,k}(W_{n,k}) \psi_{n,k}(W_{n,k})] &= \frac{\kappa_4}{4n} \sum_{i_1, i_2=1}^{2m} C_2(\psi_{n,k}, i_1) C_2(\psi_{n,k}, i_2) + n^{-1/2} \mathbb{F}(\psi_{n,k}, \psi_{n,k}) + o(n^{-1}), \\ |\mathbb{F}(\psi_{n,k}, \psi_{n,j})| &\leq C \|\psi_{n,k}\| \|\psi_{n,j}\| \Delta(k, j), \end{aligned}$$

where Δ vanishes outside a subspace of \mathbb{N}^2 of dimension at most 1, and the terms $O(n^{-1/2})$ and $o(n^{-1})$ are uniform because of the assumptions of Lemma 3.2. Summing these expressions yields Lemma 3.2.

3.7. Proof of Theorem 3.4

We need only prove the tightness of the sequence $\xi_n(x) := \sqrt{K} \{\hat{F}_n(x) - F_m(x)\}$ on a compact set $[0, M]$. For that we must compute the moments of $\xi_n(x) - \xi_n(y)$ for some $0 \leq x < y \leq M$. Denote $\psi_{x,y}(t) = \mathbf{1}_{\{x < t \leq y\}} - (F_m(y) - F_m(x))$. Let q be a positive integer and let $m_{n,q}(x, y) = \mathbb{E}[(\xi_n(x) - \xi_n(y))^{2q}]$. Using the same notations as in the proof of Proposition 3.5, we have the expansion

$$\begin{aligned} m_{n,q}(x, y) &= \sum_{v=1}^q \sum'_{v,q} \frac{q!}{q_1! \dots q_v!} \frac{1}{v!} A_n(q_1, \dots, q_v), \\ A_n(q_1, \dots, q_v) &= n^{-q/2} \sum''_{v,n} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^v \psi_{x,y}^{q_i}(2\pi \bar{I}_{n,k_i}) \right]. \end{aligned}$$

We now use Lemma 3.3 to obtain an expansion of the expectation above under Assumption **(A3.1)**.

Denote $C_m(x, y)$ Assuming Z_0 has enough finite moments, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^v \psi_{x,y}^{q_i} (2\pi \bar{I}_{n,k_i}) \right] &= n^{-s/2} \frac{s!(m^2 C_m^2(x, y) \kappa_4/2)^{s/2}}{(s/2)!} \prod_{\{j, q_j \geq 2\}} \mathbb{E}[\psi_{x,y}^{q_j}(\xi)] \mathbf{1}_{\{s \in 2\mathbb{N}\}} \\ &+ \sum_{r=\lceil(2s+2)/3\rceil}^s n^{-r/2} \mathbb{F}_{r,k}(\psi_{x,y}^{q_1}, \dots, \psi_{x,y}^{q_v}) + n^{-s/2} r_n(\psi_{x,y}^{q_1}, \dots, \psi_{x,y}^{q_v}, k), \end{aligned}$$

We must now bound all these terms by powers of $y-x$. It is easily seen that there exists a constant C such that $|C_m(x, y)| \leq C(y-x)$ and $|\mathbb{E}[\psi_{x,y}^{q_j}(\xi)]| \leq C(y-x)$. Thus the first term is bounded by $n^{-s/2}(y-x)^v$. Since it also holds that $\|\psi_{x,y}^q\|^2 \leq C(y-x)$ and $N_\alpha(\psi_{x,y}^q) \leq C(y-x)$ for any positive integer q , we get

$$\begin{aligned} \sum_{r=\lceil(2s+2)/3\rceil}^s n^{-r/2} \mathbb{F}_{r,k}(\psi_{x,y}^{q_1}, \dots, \psi_{x,y}^{q_v}) &\leq C \sum_{r=\lceil(2s+2)/3\rceil}^s n^{-r/2} \Delta_r(k)(y-x)^v \leq C n^{v-s/2}(y-x)^v, \\ n^{-s/2} r_n(\psi_{x,y}^{q_1}, \dots, \psi_{x,y}^{q_v}, k) &\leq C n^{-(s+1)/2}(y-x)^v. \end{aligned}$$

Altogether, we get

$$A_n(q_1, \dots, q_v) \leq C n^{-q/2} n^{v-s/2}(y-x)^v = C n^{-q/2+v-s/2}(y-x)^v.$$

Since for a given q , v is at least equal to one and at most equal to q , we get for $|y-x| \leq 1/n$,

$$m_{n,q}(x, y) \leq C(n^{-q/2+1}|x-y| + |y-x|^{q/2}).$$

If $|y-x| \geq 1/n$, then since $v \leq (q+s)/2$, it always holds that

$$m_{n,q}(x, y) \leq C n^{-(q+s)/2} (n|y-x|)^v \leq C n^{-(q+s)/2} (n|y-x|)^{(q+s)/2} \leq C |y-x|^{q/2}.$$

Finally, we get, for $q=4$, provided that $\mathbb{E}[|Z_0|^8] < \infty$,

$$\mathbb{E}[(\xi_n(x) - \xi_n(y))^4] \leq C(n^{-1}|x-y| + |y-x|^2).$$

This ensures the tightness of the empirical spectral process.

3.8. Proof of Lemma 3.3

Let $k = (k_1, \dots, k_d)$ be a d -tuple of pairwise distinct integers. Let $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)}$ be d independent $2m$ -dimensional standard Gaussian vectors and denote $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(d)})^T$. Denote $\psi(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{j=1}^d \phi_j(\xi^{(j)})$. In section 3.8.1, it will be proved that assumptions **(BR)** and **(GH)** imply respectively that the assumptions of Theorem 19.4 in Bhattacharya and Rao (1976) and Theorem 3.17 in Götze and Hipp (1978) hold. Then

$$\mathbb{E}[\phi_1(W_{n,k_1}) \cdots \phi_d(W_{n,k_d})] = \sum_{r=0}^{\mu^*} n^{-r/2} \mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) + n^{-s/2} \epsilon_n R_n(\phi_1, \dots, \phi_d), \quad (3.8.1)$$

where ϵ_n depends only on the distribution of Z_0 and α^* and verifies $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, and

- under assumption **(BR)**, $\mu^* = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ and

$$|R_n(\phi_1, \dots, \phi_d)| \leq \epsilon_n \prod_{i=1}^d N_{\alpha_i}(\phi_i),$$

- under assumption **(GH)**, $\mu^* = \nu - 2$ and

$$|R_n(\phi_1, \dots, \phi_d)| \leq C \prod_{i=1}^d M_{\nu_i, r}.$$

If $\mu^* > s$, then we must first prove that the terms $\mathbb{E}_{r,k}$ can be conveniently bounded for $s + 1 \leq r \leq \mu^*$. Let us first give explicit expressions for the quantities $\mathbb{E}_{r,k}$. They derive from the formal Edgeworth expansion up to the order s of $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^d \phi_i(W_{n,k_i})]$, which is the same under both sets of assumptions.

$$\mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) = \sum_{t=1}^r \frac{1}{t!} \sum_{r,t}^* \frac{\chi_{\nu_1}(k) \cdots \chi_{\nu_t}(k)}{\nu_1! \cdots \nu_t!} \mathbb{E}[H_{\nu_1 + \dots + \nu_t}(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi})], \quad (3.8.2)$$

- $\sum_{r,t}^*$ extends over all t -tuples of multi-indices ν_1, \dots, ν_t such that $\nu_i = (\nu_i(1), \dots, \nu_i(2md)) \in \mathbb{N}^{2md}$,

$$|\nu_i| = \nu_i(1) + \dots + \nu_i(2md) \geq 3, \quad \sum_{i=1}^t |\nu_i| = r + 2t,$$

- for $\nu \in \mathbb{N}^{2md}$, $\nu! = \prod_{j=1}^{2md} \nu(j)!$
- H_ν is a multidimensional Hermite polynomial, *i.e.* $H_\nu(\boldsymbol{\xi}) = H_{\nu(1)}(\xi_1) \cdots H_{\nu(2md)}(\xi_{2md})$,
- for $k \in \{1, \dots, K\}^{md}$ and $\nu \in \mathbb{N}^{2md}$, $\chi_\nu(k)$ is the following cumulant

$$\chi_\nu(k) = 2^{|\nu|/2} \kappa_{|\nu|} A_\nu(k), \quad (3.8.3)$$

$$A_\nu(k) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \prod_{j=1}^d \prod_{i=1}^m \cos(tx_{m(k_j-1)+i})^{\nu_{2m(j-1)+2i-1}} \sin(tx_{m(k_j-1)+i})^{\nu_{2m(j-1)+2i}}, \quad (3.8.4)$$

where $\kappa_{|\nu|}$ is the cumulant of order $|\nu|$ of Z_0 .

Clearly, $|A_\nu| \leq 1$, thus, for $0 \leq r \leq \mu^*$, there exists a constant C_d , uniform wrt n and $k = (k_1, \dots, k_d)$ such that

$$|\mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d)| \leq C_d \prod_{i=1}^d \|\phi_i\|.$$

Thus, under both assumptions, if $\mu^* > s$, we have

$$\left| \sum_{r=s+1}^{\mu^*} n^{-r/2} \mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) \right| \leq C n^{-(s+1)/2} \prod_{i=1}^d \|\phi_i\|,$$

for some constant which depends only on the distribution of Z_0 and μ^* . Since $\|\phi\| \leq C_\alpha N_\alpha(\phi)$ and $\|\phi\| \leq C_{\nu,r} M_{\nu,r}(\phi)$, we finally get

$$\left| \mathbb{E}[\phi_1(W_{n,k_1}) \cdots \phi_d(W_{n,k_d})] - \sum_{r=0}^s n^{-r/2} \mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) \right| \leq n^{-s/2} \epsilon_n r_n(\phi_1, \dots, \phi_d),$$

where r_n satisfies either (3.6.2) or (3.6.3). We can now consider the terms $\mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d)$ for $1 \leq r \leq s$. The desired properties of these terms derive from considerations on moments and on cumulants.

Moments. We need only consider the t -tuples of multi-indices $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_t)$ such that

$$\mathbb{E}[H_{\nu_1 + \dots + \nu_t}(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi})] \neq 0. \quad (3.8.5)$$

Let τ_i be the Hermite rank of ϕ_i $1 \leq i \leq s$, and recall that $\tau = \inf\{\tau_i, i = 1, \dots, s\}$. By definition of the Hermite rank, we get

$$\text{If } |\nu_1 + \dots + \nu_t| < s\tau, \quad \mathbb{E}[H_{\nu_1 + \dots + \nu_t}(\boldsymbol{\xi}) \psi(\boldsymbol{\xi})] = 0. \quad (3.8.6)$$

The definition of $\sum_{r,t}^*$ implies that $t \leq r$ and $|\nu_1 + \dots + \nu_t| = r + 2t \leq 3r$, thus, $3r$ must be greater than or equal to $s\tau$ for the term $\mathbb{E}_{r,k}(\phi_1, \dots, \phi_d)$ not to vanish. If $\tau \geq 4$, this implies that

all terms $\mathbb{E}_{r,k}$ are vanishing for $r \leq s$ and (3.6.1) is proved. If $\tau = 2$, we must study all terms $2s/3 \leq r \leq s$. Since the ξ_i 's are i.i.d. standard Gaussian, the expectation in (3.8.6) writes

$$\mathbb{E}[H_{\nu_1+\dots+\nu_t}(\xi)\psi(\xi)] = \prod_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{2m} H_{\nu_1(2m(i-1)+j)+\dots+\nu_t(2m(i-1)+j)}(\xi_{2m(i-1)+j})\phi_i(\xi^{(i)})\right].$$

Since $\tau_i \geq 2$ for all $1 \leq i \leq s$, (3.8.5) implies the following condition

$$\sum_{j=1}^{2m} \sum_{l=1}^t \nu_l(2m(i-1)+j) \geq 2, \quad 1 \leq i \leq s; \quad (3.8.7)$$

Cumulants. The well known orthogonality properties of the functions sine and cosine computed at the Fourier frequencies imply that A_ν writes

$$A_\nu(k) = 2^{-|\nu|/2} + \delta_\nu(k), \quad (3.8.8)$$

if all the components of ν are even, ($\nu \in (2\mathbb{N})^{2md}$), and

$$A_\nu(k) = \delta_\nu(k), \quad (3.8.9)$$

if at least one of the component of ν is odd, δ_ν having following properties

1. δ_ν depends only on ν ;
2. δ_ν identically vanishes outside a finite union of strict hyperplanes of \mathbb{R}^d ;
3. $\forall k \in \mathbb{N}^d, |\delta_\nu(k)| \leq 1$;

Thus, for each ν , $A_\nu(\cdot)$ is constant outside a finite union of strict hyperplanes of $\{1, \dots, K\}^d$. To illustrate these properties, we give two examples in the case $m = 1, d = 2$. Assume n is even and let $\nu = (2, 0, 1, 1)$. Then $|\nu| = 4$ and

$$\begin{aligned} A_\nu(k) &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \cos^2(tx_{k_1}) \cos(tx_{k_3}) \sin(tx_{k_4}) \\ &= \frac{1}{8n} \sum_{t=1}^n (2 \sin t(x_{k_3} + x_{k_4}) - 2 \sin t(x_{k_3} - x_{k_4}) + \sin t(2x_{k_1} + x_{k_3} + x_{k_4}) \\ &\quad + \sin t(2x_{k_1} - x_{k_3} + x_{k_4}) + \sin t(-2x_{k_1} + x_{k_3} + x_{k_4}) + \sin t(-2x_{k_1} - x_{k_3} + x_{k_4})). \end{aligned}$$

Thus $A_\nu(k) = 1/4 + \delta_\nu(k)$, where δ_ν vanishes outside the sets $2k_1 + k_3 + k_4 = 0$, $2k_1 - k_3 + k_4 = 0$, $-2k_1 + k_3 + k_4 = 0$, $-2k_1 - k_3 + k_4 = 0$, $k_3 + k_4 = 0$ and $k_3 - k_4 = 0$, where the equalities must hold modulo n .

Let $\nu = (2, 0, 2, 0)$, then $|\nu| = 4$ and

$$\begin{aligned} A_\nu(k) &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \cos^2(tx_{k_1}) \cos^2(tx_{k_3}) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8n} \sum_{t=1}^n (2 \cos(2tx_{k_1}) + 2 \cos(2tx_{k_3}) + \cos(2t(x_{k_1} + x_{k_3})) + \cos(2t(x_{k_1} - x_{k_3}))). \end{aligned}$$

Thus $A_\nu(k) = 1/4 + \delta_\nu(k)$, where δ_ν vanishes outside the sets $2k_1 = 0, (\text{mod } n)$, $k_3 = 0, (\text{mod } n)$, $2k_3 = n, (\text{mod } n)$, $k_1 \pm k_3 = 0, (\text{mod } n)$.

We return to the general case. For each $\underline{\nu}$, the multi-indices k such that

$$\prod_{i=1}^t \chi_{\nu_i}(k) \neq 0 \quad (3.8.10)$$

belong to a finite union of subspaces of \mathbb{R}^d , and denote $d(\underline{\nu})$ the greatest dimension of these subspaces. Lemma 3.3 will be proved as a consequence of the following fact

$$\text{for all } \underline{\nu} \text{ such that (3.8.5) holds, } d(\underline{\nu}) < d + (r - s)/2. \quad (3.8.11)$$

We now prove (3.8.11), first in the case $r = s$.

Case $r = s$. First note that

$$\exists i = 1, \dots, t, \exists j = 1, \dots, 2md, \nu_i(j) \notin 2\mathbb{N} \Rightarrow d(\underline{\nu}) < d.$$

Consider now the t -tuples of multi-indices ν_1, \dots, ν_t without any odd component. Since $|\nu_i|$ must be greater than or equal to 3 for all $i = 1, \dots, t$, $|\nu_i| \geq 4$ necessarily holds. This implies that $r + 2t = |\nu_1 + \dots + \nu_t| \geq 4t$, and thus $2t \leq r$ and $2s \leq r + 2t \leq 2r \leq 2s$. Finally, we conclude that $r = s$ and $4t = 2s$ which implies that s must be even, and for all $i = 1, \dots, s/2$, $|\nu_i| = 4$. Notice now that no single component of any of the ν_i can be equal to 4, otherwise (3.8.7) would not hold. Thus, if $\underline{\nu}$ is such that (3.8.5) holds, the following conditions must hold

$$\forall j \in \{1, \dots, s\}, \exists ! l_j \in \{2m(j-1) + 1, \dots, 2mj\}, \nu_1 + \dots + \nu_{s/2}(l_j) = 2; \quad (3.8.12)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, s\}, \forall l \in \{2m(j-1) + 1, \dots, 2mj\} \setminus \{l_j\}, \nu_1 + \dots + \nu_{s/2}(l) = 0; \quad (3.8.13)$$

$$\forall j \in \{s+1, \dots, d\}, \forall l \in \{2m(j-1) + 1, \dots, 2mj\}, \nu_1 + \dots + \nu_{s/2}(l) = 0. \quad (3.8.14)$$

For such a $\underline{\nu}$, there exist integers j_1, \dots, j_s in $\{1, \dots, 2m\}$ such that

$$\mathbb{E}[H_{\nu_1 + \dots + \nu_t}(\boldsymbol{\xi})\psi(\boldsymbol{\xi})] = \prod_{j=1}^s C_2(\phi_j, j_j) \prod_{j=s+1}^d \mathbb{E}[\phi_j(\boldsymbol{\xi}^{(j)})].$$

Conversely, each s -tuple j_1, \dots, j_s is obtained by exactly $2^{-s/2}s!$ $\underline{\nu}$'s. Thus if s is even, we get

$$\mathbb{E}_{s,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) = \frac{s! \kappa_4^{s/2}}{(s/2)! 2^{3s/2}} \left[\sum_{j_1, \dots, j_s=1 \dots 2m} \prod_{i=1}^s C_2(\phi_i, j_i) \right] \prod_{i=s+1}^d \mathbb{E}[\phi_j(\boldsymbol{\xi}^{(i)})] + \mathbb{F}_{s,k}(\phi_1, \dots, \phi_d),$$

and if s is odd, $\mathbb{E}_{s,k}(\phi_1, \dots, \phi_d) = \mathbb{F}_{s,k}(\phi_1, \dots, \phi_d)$ where, in both cases, $\mathbb{F}_{s,k}$ has the claimed properties.

Case $r < s$. If $r < s$, then there is at least one index i such that $|\nu_i| = 3$. Let $l(\underline{\nu})$ be the number of indices i such that ν_i has at least one odd component. Since $r + 2t \geq 2s$, let $r + 2t = 2s + q$. By definition of $l(\underline{\nu})$, we have $r + 2t \geq 3l(\underline{\nu}) + 4(t - l(\underline{\nu}))$, whence $r + l(\underline{\nu}) \geq 2t$. Since $r + 2t = 2s + q$ and $r < s$, we get for any $d \geq s$,

$$\begin{aligned} r + l(\underline{\nu}) &\geq 2t = 2s + q - r > s + q, \\ l(\underline{\nu}) - q &> s - r, \\ d - (l(\underline{\nu}) - q)/2 &< d + (r - s)/2. \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

The proof of Lemma 3.3 will be concluded if we prove the following bound :

$$d(\underline{\nu}) \leq d - [(l(\underline{\nu}) - q)/2 \vee 1]. \quad (3.8.16)$$

Proof of (3.8.16). To prove (3.8.16), we momentarily forget any reference to moments conditions. Denote $m(\underline{\nu}) = d - d(\underline{\nu})$. $m(\underline{\nu})$ is the minimum codimension of any subspace of \mathbb{N}^{md} on which $A_{\underline{\nu}}(\cdot)$ does not identically vanish. Following Velasco (1999) $m(\underline{\nu})$ will be called the NRES, *i.e.* the minimum number of linear restrictions necessary to make the cumulants considered different from zero. The NRES $m(\underline{\nu})$ is obviously a non decreasing function of the number of indices i such that ν_i has at least one odd component, as can be seen from (3.8.9) and the properties of δ_{ν} .

(i). Our first argument is that if there are at most two odd component in any single column of the array $\underline{\nu}$, then $m(\underline{\nu})$ is at least equal to $l(\underline{\nu})/2$, since each line of the array (*i.e.* each ν_i) with at least one odd component yields one restriction, and different lines will yield different restrictions, except if their odd components are in the same columns. Thus (3.8.16) holds in this case.

(ii). If there exists at least one column with at least three odd components, let $z(\underline{\nu})$ denote the number of such columns and let $y(\underline{\nu})$ denote the total number of odd components in these columns. We now prove by induction on $y(\underline{\nu})$ that the following inequality holds :

$$m(\underline{\nu}) \geq (l(\underline{\nu}) - (y(\underline{\nu}) - 2z(\underline{\nu}))/2) \vee 1. \quad (3.8.17)$$

We have proved this property for $y(\underline{\nu}) = 0$, but we cannot start the induction at 0 since if $y(\underline{\nu}) \neq 0$, then $y(\underline{\nu}) \geq 3$. Thus we prove the property for $y(\underline{\nu}) = 3$, which implies $z(\underline{\nu}) = 1$. Let us first precisely define the induction assumption.

Induction assumption. Let $\underline{\nu}$ be an array of t lines and $2d$ columns. Let l be the number of *lines* which have at least one odd component. Let z denote the number of *columns* which have at least three odd components and y denote the number of odd components in these columns. Then $m(\underline{\nu}) \geq ((l - (y - 2z))/2) \vee 1$.

Proof for $y = 3$. In that case, $z = 1$ and we can cancel one line of the array in such a way as to obtain a new array ν' with $l' = l - 1$ and $y = z = 0$. For that array, we have $m' \geq l'/2$. So we have

$$m \geq m' \geq l'/2 = (l - 1)/2 = (l - (y - 2z))/2.$$

Induction. Assume that the induction assumption is true for some $y - 1 \geq 3$. As above we cancel one of the line of the array and we obtain a new array ν' with $l' = l - 1$, $y' < y$ and $z' \leq z$. If $y' = 0$, then $m \geq m' \geq l'/2 = (l - 1)/2 \geq (l - (y - 2z))/2$ since by definition $y \geq 3z$ and thus $y - 2z \geq 1$ as soon as $z \geq 1$. If $y' \neq 0$, then $y' \geq 3$ and we can apply the induction assumption. Thus we get

$$m \geq m' \geq (l' - (y' - 2z'))/2 = (l - (y' - 2z' + 1))/2.$$

Thus we must prove that $y' - 2z' + 1 \leq y - 2z$, *i.e.* $2(z - z') + 1 \leq y - y'$. If $z = z'$, this is obvious since $y' < y$. If $z' < z$, then $y - y' \geq 3(z - z') \geq 2(z - z') + 1$. This proves that the induction assumption holds for y .

Conclusion. We now prove that for an array which satisfies the moment conditions , we have $y(\underline{\nu}) - 2z(\underline{\nu}) \leq q$. Denote w the the number of indices $j \in \{1, \dots, d\}$ such that the sum of all the entries of the columns $2m(j - 1) + 1, \dots, 2mj$ is exactly 1. Since the Hermite rank of ϕ_1, \dots, ϕ_s is at least 2, then it is necessary that $w \leq d - s$, *i.e.* $d - w \geq s$. Thus, we have

$$2s + q = y + w + 2(d - z(\underline{\nu}) - w) = 2d - w + y - 2z(\underline{\nu}) \geq 2s + y - 2z(\underline{\nu}),$$

and thus $y - 2z(\underline{\nu}) \leq q$. This, together with (3.8.17) yields $m(\underline{\nu}) \geq (l(\underline{\nu}) - q)/2 \vee 1$ and, by definition of $m(\underline{\nu})$, applying (3.8.15),

$$d(\underline{\nu}) \leq d - ((l(\underline{\nu}) - q)/2) \vee 1 < d + (r - s)/2.$$

This concludes the proof of Lemma 3.3.

3.8.1. Validity of Edgeworth expansions. In this section, we prove that the Edgeworth expansions used in the previous sections are valid. Chen and Hannan (1980) (Lemma 2) have adapted Theorem 19.3 of Bhattacharya and Rao (1976) to prove that under assumption **(A3.1)**, the Edgeworth expansion of the joint density of an arbitrary number of discrete Fourier transform is valid up to the order 2. That was all they needed since they only considered the function log. To consider more genral functions, we should check the validity of the expansion up to an

arbitrary order. We will omit this proof since the arguments of Chen and Hannan (1980) are easily generalized. We will only check the validity of Edgeworth expansions of moments using the result of Götze and Hipp (1978). We first state a version of Theorem 3.17 in Götze and Hipp (1978) with stronger assumptions than in Götze and Hipp (1978), but which are easy to check in our context. Let $(\zeta_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ be a sequence of independent a -dimensional vectors. Define $S_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n \zeta_{n,k}$ and let Q_s be the formal Edgeworth expansion of S_n up to the order s . Denote $|u|$ the Euclidean norm of a vector and define, whenever possible,

$$\rho_{n,3} = n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|\zeta_{n,k}|^3), \quad (3.8.18)$$

$$\Delta_{n,s} = n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|\zeta_{n,k}|^s \{n^{-1/2} |\zeta_{n,k}| \mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,k}| \leq n^{1/2}\}} + \mathbf{1}_{\{|\zeta_{n,k}| > n^{1/2}\}}\}]. \quad (3.8.19)$$

THEOREM 3.7. *Let ψ be a C^{r+2} function on \mathbb{R}^a such that for all $\beta \in \mathbb{N}^a$ with $\sum_{i=1}^a \beta_i = r+2$, it holds that*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |D^\beta \psi(x)| dx \leq C(\psi),$$

for some finite constant $C(\psi)$. Assume that the variables $\zeta_{n,k}$ have finite moment of order $s+2$. If $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{n,s+2} = 0$, then there exists a constant C which depends only on a and the distribution of Z_0 such that, for large enough n ,

$$|\mathbb{E}(\psi(S_n)) - Q_s(\psi)| \leq C(M_s(\psi) + C(\psi)) \Delta_{n,s+2} n^{-s/2} + C \rho_{n,3}^{r+k+1} n^{-(r+a+1)/2}.$$

In particular, if $\rho_{n,3}$ is uniformly bounded, then $\mathbb{E}(\psi(S_n)) - Q_s(\psi) = o(n^{-s/2})$ as soon as ψ is $C^{(s-a)^++2}$ and the constants involved in the term $o(n^{-s/2})$ depend only on the derivative of order $(s-a)^++2$. We now check that condition (3.8.19) holds in our context. For $k = (k_1, \dots, k_u)$, define

$$\zeta_{n,t} = \sqrt{2} Z_t (\cos(tx_{m(k_1-1)+1}), \sin(tx_{m(k_1-1)+1}), \dots, \cos(tx_{m k_u}), \sin(tx_{m k_u}))^T.$$

Then $|\zeta_{n,t}|^2 = 2um|Z_t|^2$. In the context of Lemma 3.1, we must also consider

$$\begin{aligned} \zeta_{n,t}^{(M)} &= \sqrt{2} (Z_t^{(M)} \cos(tx_{m(k_1-1)+1}), Z_t^{(M)} \sin(tx_{m(k_1-1)+1}), \dots, Z_t^{(M)} \cos(tx_{m k_1}), Z_t^{(M)} \sin(tx_{m k_1}), \\ &\quad \tilde{Z}_t^{(M)} \cos(tx_{m(k_2-1)+1}), \tilde{Z}_t^{(M)} \sin(tx_{m(k_2-1)+1}), \dots, \tilde{Z}_t^{(M)} \cos(tx_{m k_2}), \tilde{Z}_t^{(M)} \sin(tx_{m k_2}))^T. \end{aligned}$$

In that case we have

$$|\zeta_{n,t}^{(M)}|^2 = m|Z_t^{(M)}|^2 + |\tilde{Z}_t^{(M)}|^2 = m|Z_t|^2 (\sigma_M^{-2} \mathbf{1}_{\{|Z_t| \leq M\}} + \tilde{\sigma}_M^{-2} \mathbf{1}_{\{|Z_t| > M\}}).$$

Thus, in both cases, (3.8.18) is obvious, and checking (3.8.19) amounts to checking that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|Y_t|^s \mathbf{1}_{\{|Y_t| > n^{1/2}\}}] = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3/2} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|Y_t|^{s+1} \mathbf{1}_{\{|Y_t| \leq n^{1/2}\}}] = 0$$

for an i.i.d. sequence (Y_t) with finite moment of order s . This is obvious since the variables Y_t are identically distributed, thus these sums are equal respectively to $\mathbb{E}[|Y_1|^s \mathbf{1}_{\{|Y_1| > n^{1/2}\}}]$ and $n^{-1/2} \mathbb{E}[|Y_1|^{s+1} \mathbf{1}_{\{|Y_1| \leq n^{1/2}\}}]$. Since $|Y_1|^s \mathbf{1}_{\{|Y_1| > n^{1/2}\}}$ and $n^{-1/2} \mathbb{E}[|Y_1|^{s+1} \mathbf{1}_{\{|Y_1| \leq n^{1/2}\}}]$ converge almost surely to 0 and both sequences are bounded for all n by $|Y_1|^s$, their expectations tend to 0 as n tends to infinity by the bounded convergence theorem.

Bibliography

1. M.S. Bartlett, *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1955.
2. R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.
3. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, 1968.
4. D.R. Brillinger, *Time series. data analysis and theory*, Holden-Day, 1981.
5. Z.-G. Chen and E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 73–82.
6. R.A. Davis and T. Mikosch, *The maximum of the periodogram of a non-Gaussian sequence*, Ann. Probab. **27** (1999), no. 1, 522–536.
7. G. Fay, E. Moulines, and Ph. Soulier, *Non linear functionals of the periodogram*, soumis à publication, 1999.
8. D. Freedman and D. Lane, *The empirical distribution of Fourier coefficients.*, Ann. Stat. **8** (1980), 1244–1251.
9. F. Götze and C. Hipp, *Asymptotic expansions in the central limit theorem under moment conditions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **42** (1978), 67–87.
10. C. Hurvich, E. Moulines, and Ph.Soulier, *The FEXP estimator for non Gaussian, potentially no stationary processes*, Preprint, 1999.
11. P. Kokoszka and T. Mikosch, *The periodogram at Fourier frequencies*, to appear, 1999.
12. Q.M. Shao and Y.X. Yu, *Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences*, Annals of Probability **24** (1996), 2098–2127.
13. C. Velasco, *Non-Gaussian log-periodogram regression*, Econometric Theory **16** (2000), 44–79.

CHAPITRE 4

Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme

Ce chapitre reproduit un article intitulé *Non-linear functionals of the periodogram* en collaboration avec Eric Moulines et Philippe Soulier et soumis pour publication à la revue *Journal of Time Series Analysis*.

ABSTRACT. A central limit theorem is stated for a wide class of triangular arrays of non-linear functionals of the periodogram of a stationary linear sequence. Those functionals may be singular and not-bounded. The proof of this result is based on Bartlett decomposition and an existing counterpart result for the periodogram of an i.i.d sequence, here taken to be the driving noise. The main contribution of this paper is to prove the asymptotic negligibility of the remainder term from Bartlett decomposition, feasible under short dependence assumption. As it is highlighted by applications (to estimation of non-linear functionals of the spectral density, robust spectral estimation, local polynomial approximation and log-periodogram regression), this extends many results until then tied to Gaussian assumption.

KEYWORDS : Periodogram, linear process, central limit theorem, non-linear functionals, Bartlett decomposition

4.1. Introduction

There is a wealth of applications in time-series analysis where a quantity of interest depends on a triangular array of non-linear function of the periodogram. Examples of such situation include: "direct" estimation of non-linear functions of the spectral density (such as the innovation variance; see e.g. Chen and Hannan, 1980), parameter estimation by log-periodogram regression (see e.g. Taniguchi 1979, 1991), non-parametric estimation of the spectral density by robust non-linear regression of the periodogram (see e.g. Von Sachs, 1994 and Janas and Von Sachs, 1995), local polynomial regression of the periodogram (see e.g. Kreutzberger and Fan 1998, and Fan and Gijbels, 1996, section 6.6), or more recently, the estimation of the memory parameter for long-range dependent processes based on some form of log-periodogram regression (see e.g. Robinson 1995, Velasco 1999 and Moulines and Soulier 1997).

Because of the very involved nature this type of statistics, most of the derivations up to now have been obtained under the additional assumption that the process is Gaussian, being based on general results on non-linear functional of (possibly) non-stationary Gaussian process (see e.g. Taqqu (1977), Arcones (1994)). However, these techniques are tailored to the Gaussian case, and do not extend to a wider setting.

A first step to weaken the Gaussian assumption has been taken by Chen and Hannan, which proved the consistency (but not the asymptotic normality) of the sample average of the log-periodogram evaluated at the Fourier frequencies of a non-Gaussian linear process. This work was based on early results on the periodogram of linear processes obtained by Bartlett (1955, see also Walker, 1965).

Some extensions of these results have been obtained by Von Sachs (1994) and Janas and Von Sachs (1995), motivated by the limiting theory of a class of "robustified" estimator of the spectral density, using Huberized regression estimator in the spectral domain. Janas and Von Sachs (1995) proved the consistency of the estimators of general non-linear functions of the spectral density for non-Gaussian linear process. Contrary to the work of Chen and Hannan (1980), the technique used by Janas and Von Sachs (1995) was based on Edgeworth expansion of triangular array of weakly dependent random variables, using results established earlier by Götze and Hipp (1983). Because of the very involved nature of the Edgeworth expansion in the dependent case, only the first and the second order moments can be evaluated; based on these results, Janas and Von Sachs (1995, section 3.4) proved the mean-square convergence of their robust spectral estimator. Note that the approach used by these authors is restricted to the case where the process is strongly mixing with geometrically decaying mixing coefficients.

The main objective of this paper is to derive the limiting distribution of triangular array of non-linear function of the periodogram of a linear process under mild technical conditions. Our approach extends the techniques presented in Chen and Hannan (1980). It is based on the Bartlett decomposition of the periodogram which relates the periodogram of the observations to the (fictitious) periodogram of the "driving" noise. Using this decomposition, the proof is in two almost independent steps. The first step consists in showing a central limit theorem for triangular array of non-linear functions of the periodogram of an independent and identically distributed (i.i.d) sequence of random variables. This first step is carried out in a companion paper by Fay and Soulier (1999). The second step consists in showing that the remainder term in the Bartlett decomposition does not contribute to the limit. This step, which is essentially independent from the first one, is carried out in this paper under conditions on the filter coefficients that imply short-range dependence, but for non-linear functions which are possibly singular and non-bounded (such as $\phi(x) = \log(x)$).

The paper is organized as follow. In section 4.2, the main assumptions and results are stated. In section 4.3, several applications (involving non-linear functions of the periodogram) are outlined to illustrate our results. Bounds for the remainder terms in the Bartlett decomposition of the periodogram are presented in section 4.6.

4.2. Assumptions and main results

Define the discrete Fourier transform and the periodogram of a stationary process Y as

$$d_n^Y(x) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t=1}^n Y_t e^{itx} \quad \text{and} \quad I_n^Y(x) = |d_n^Y(x)|^2.$$

The discrete Fourier transform and the periodogram are evaluated at the Fourier frequencies $x_k = 2\pi k/n$, $1 \leq k \leq \tilde{n} := [(n-1)/2]$, where $[a]$ denotes the integer part of a . Let m be a fixed integer. Following the procedure proposed by Robinson (1995), the frequency axis is divided in non overlapping segments of size m , and the periodogram is pooled over each segment. Let $K = [(n-m)/2m]$ (the dependency in n is omitted). For $k = 1, \dots, K$, denote $J_k = \{m(k-1) + 1, \dots, mk\}$. Define the k -th ordinate of the pooled periodogram of Y_1, \dots, Y_n as the sum:

$$\bar{I}_{n,k}^Y = \sum_{l \in J_k} I_n^Y(x_l) \tag{4.2.1}$$

Since $\sum_{t=1}^n \exp(itx_i) = 0$ for $1 \leq k < \tilde{n}$, the pooled periodogram is shift-invariant. Let \mathcal{H} be the space of measurable functions ϕ such that for all $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\phi^2(|u\xi|^2/2)] < \infty$, where

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2m})$ denote a $2m$ -dimensional Gaussian vector and $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm. For $\phi \in \mathcal{H}$, define

$$\gamma_m(\phi) = \mathbb{E}[\phi(|\xi|^2/2)], \quad (4.2.2)$$

$$\gamma_m(\phi, u) = \mathbb{E}[\phi(u|\xi|^2/2)]. \quad (4.2.3)$$

Many statistical applications require to prove a central limit theorem for weighted sums of non-linear functionals of the pooled-periodogram ordinates of the form

$$S_n(Y, \phi) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \{ \phi(\bar{I}_{n,k}^Y / f_Y(y_k)) - \gamma_m(\phi) \}, \quad (4.2.4)$$

$$\tilde{S}_n(Y, \phi) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \{ \phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^Y) - \gamma_m(\phi, f_Y(y_k)) \}, \quad (4.2.5)$$

where f_Y is the spectral density of the process Y , $(\beta_{n,k})$ is a triangular array of real numbers and y_k , $1 \leq k \leq K$ are frequencies related to the set of frequencies J_k . For instance, an often convenient choice is $y_k = (2k-1)\pi/2K$. Unless otherwise specified, we only assume that $2\pi m(k-1)/n \leq y_k \leq 2\pi mk/n$. If Y is a sequence of uncorrelated variables, then $S_n(Y, \phi)$ and $\tilde{S}_n(Y, \phi)$ coincide. When Y is Gaussian white noise, the variables $2\pi \bar{I}_{n,k}^Y$ are independent $\Gamma(m, 1)$ r.v. (*i.e.* half a central chi-square with $2m$ degrees of freedom). Thus $S_n(Y, \phi)$ converges to a normal random variable under Lindeberg-Levy's conditions (cf. Petrov, 1995). When Y is not a Gaussian white noise, the random variables $(\bar{I}_{n,k}^Y)$ are no longer independent, and no general result is available for non linear functionals of $\bar{I}_{n,k}^Y$. Recently, Fay and Soulier (1999) have proved a central limit theorem for $S_n(Y, \phi)$ when Y is a (non-Gaussian) white noise, under rather weak and easily checked conditions on the functional ϕ and the weights $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$. For a general process X , it seems quite hopeless to prove directly a central limit theorem for $S_n(X, \phi)$ (cf. for instance Janas and Von Sachs (1995) for an attempt in that direction). If X is a linear process, that is a process which admits a linear representation with respect to a white noise Z :

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j Z_{t-j} + \mu, \quad \sum_j a_j^2 < \infty, \quad \mathbb{E}[Z_0] = 0, \quad \mathbb{E}[Z_0^2] = 1, \quad (4.2.6)$$

one can hope to prove a central limit theorem for $S_n(X, \phi)$ or $\tilde{S}_n(X, \phi)$ by resorting to the so-called Bartlett's decomposition. This decomposition amounts to writing

$$I_{n,k}^X = (2\pi) f_X(y_k) \bar{I}_{n,k}^Z + R_{n,k}, \quad (4.2.7)$$

where f_X is the spectral density of the process X and $R_{n,k}$ is a remainder term. Note that for a linear process, the spectral density writes

$$f_X(x) = (2\pi)^{-1} |A(e^{ix})|^2 = (2\pi)^{-1} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ikx} \right|^2.$$

This decomposition of the periodogram was suggested in Bartlett (1955) and later thoroughly investigated by many authors (see, *e.g.* Walker (1965), Chen and Hannan (1980), Brockwell and Davis (1991) . The leading term in the decomposition (4.2.7), $2\pi f_X(x) \bar{I}_{n,k}^Z$, is sometimes referred to as the *pseudo-periodogram*. It should be stressed however that this quantity is purely of theoretical interest and cannot be estimated explicitly. The Bartlett's decomposition suggests to relate the limiting distribution of $S_n(X, \phi)$ to the limiting distribution of $S_n(Z, \phi)$. A central limit theorem will hold for $S_n(X, \phi)$, provided that we show that $S_n(Z, \phi) - S_n(X, \phi) = o_P(1)$ (*i.e.* converges to zero in probability). This can be achieved (with patience and hard work) under reasonable regularity assumptions on the functional ϕ , which are not considerably more stringent

than those needed for the derivation of the central limit theorem for $S_n(Z, \phi)$. We now state our assumptions.

(A4.1) $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ is a triangular array of real numbers such that $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$ and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}| = 0.$$

(A4.2) For all $\epsilon > 0$, $\max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}| = O(\mu_n^{-1/2+\epsilon})$, where $\mu_n := \#\{k : 1 \leq k \leq K, \beta_{n,k} \neq 0\}$.

Assumption **(A4.2)** means that $\mu_n(\max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}|)^2$ is bounded by a slowly varying function of μ_n . It holds in particular when

$$\beta_{n,k} := \left(\sum_{k=1}^K g^2(y_k) \right)^{-1/2} g(y_k)$$

under mild technical condition on function g . Note that, for functions of bounded variations on $[-\pi, \pi]$, $\max_{k \in \{1, \dots, K\}} |\beta_{n,k}| = O(n^{-1/2})$. Assumption **(A4.2)** may however hold even when g is not of bounded variation.

(A4.3) There exists a real τ_m such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} = \tau_m.$$

For any function $\phi \in \mathcal{H}$ and any real u , define

$$\sigma_m^2(\phi, u) = \mathbb{E}[(\phi(u|\xi|^2/2) - \gamma_m(\phi, u))^2], \quad (4.2.8)$$

$$C_m(\phi, u) = \mathbb{E}[(\xi_1^2 - 1)\phi(u|\xi|^2/2)], \quad C_m(\phi) := C_m(\phi, 1). \quad (4.2.9)$$

(A4.4) There exists a real $\Sigma_m^2(\phi, f)$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \sigma_m^2(\phi, f(y_k)) = \Sigma_m^2(\phi, f).$$

(A4.5) There exists a real $\tau_m(\phi, f)$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{1 \leq k \neq l \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,l} C_m(\phi, f(y_k)) C_m(\phi, f(y_l)) = \tau_m(\phi, f).$$

To deal with functions ϕ singular at zero (such as $\log(x)$), an additional technical assumption on the probability distribution of Z_0 is required.

(A4.6) There exists a real $r \geq 1$ such that $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbb{E}(e^{itZ_0})|^r dt < \infty$.

Assumption **(A4.6)** ensures that $n^{-1/2} \sum_{t=1}^n Z_t$ has a density q_n for all sufficiently large n ($n \geq p$) and that this density converges uniformly to the standardized Gaussian distribution (see, for example, Bhattacharya and Rao (1976) [3], Theorem 19.1,p.189).

(A4.7) There exists a real $\delta > 3/4$ such that $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^\delta |a_j| < \infty$ and $A(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j z^j \neq 0$ for $|z| = 1$.

Under this assumption, the process is short-range dependent and (perhaps non-causally) invertible.

THEOREM 4.1. *Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of i.i.d centered random variables with unit variance and with finite moment of order $\mu \geq 4$, and let $\kappa_4 = \mathbb{E}[Z^4] - 3(\mathbb{E}[Z^2])^2$ be the fourth-order cumulant of Z_0 . Let X be a linear process which admits the linear representation (4.2.6) with respect to Z and such that **(A4.7)** holds. Assume either*

- **(S1)** ϕ is twice differentiable and there exists an integer ν such that

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\phi(x)| + |\phi'(x)| + |\phi''(x)|}{1 + |x|^\nu} < \infty,$$

and $\mu \geq 8\nu \vee 4$.

- **(S2)** Assumption **(A4.6)** holds, ϕ is twice differentiable on $(0, \infty)$ and there exist integers, $\nu_0 \geq 3$, $\nu_1 \geq 4$, $\nu_2 \geq 3$ and $\nu_3 \geq 3$, reals α and β such that $m > \beta$ and

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \phi^2(|x|^2/2)(1+|x|)^{-\nu_0} dx < \infty \quad (4.2.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{4m}} \phi(|x|^2/2)\phi(|y|^2/2)(1+|x|+|y|)^{-\nu_1} dx dy < \infty \quad (4.2.11)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} [\phi'(|x|^2/2)]^4(1+|x|)^{-\nu_2} dx < \infty, \quad (4.2.12)$$

$$\int_{\mathbb{R}^{4m}} |\phi'(|x|^2/2)||x|\phi'(|y|^2/2)||y|(1+|x|+|y|)^{-\nu_3} dx dy < \infty, \quad (4.2.13)$$

$$|\phi''(x)| \leq C(x^\alpha \mathbf{1}_{\{x \geq 1\}} + x^{-\beta} \mathbf{1}_{\{x \leq 1\}}), \quad (4.2.14)$$

and $\mu \geq \max\{8, 4\alpha, [2(m-\beta)] + 1, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3 + 2\}$.

Let $(\beta_{n,k})_{1 \leq k \leq K}$ be a triangular array satisfying assumptions **(A4.1)** and **(A4.2)**.

- If **(A4.3)** holds then $S_n(X, \phi)$ is asymptotically centered Gaussian with variance $\sigma_m^2(\phi) + \tau_m m^2 C_m^2(\phi) \kappa_4$.
- If **(A4.4)** and **(A4.5)** hold then $\tilde{S}_n(X, \phi)$ is asymptotically centered Gaussian with variance $\Sigma_m^2(\phi, f) + \tau_m(\phi, f) m^2 \kappa_4$.

Remarks.

- In the case of Assumption **(S1)**, the assumptions needed to prove a central limit theorem for $S_n(Z, \phi)$ are sufficient to prove that $S_n(Z, \phi) - S_n(X, \phi) = o_P(1)$. In the case of assumption **(S2)**, (4.2.10) and (4.2.11) alone imply the central limit theorem for $S_n(Z, \phi)$, while (4.2.12), (4.2.13) and (4.2.14) are needed to prove that $S_n(Z, \phi) - S_n(X, \phi) = o_P(1)$.
- We will only prove the theorem for $S_n(X, \phi)$. Setting $\phi_{n,k}(y) = \phi(f(y_k)z)$, we get

$$\tilde{S}_n(X, \phi) = \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \{ \phi_{n,k}(\bar{I}_{n,k}^X / f(y_k)) - \gamma_m(\phi_{n,k}) \}.$$

Since we consider only short-range dependent processes with spectral density bounded above and away from zero, Assumptions **(S1)** and **(S2)** hold uniformly for the functions $\phi_{n,k}$ for all n and $k \leq K$ whenever they hold for ϕ . This would not be the case if long-range dependent processes were considered. In that case, it is well known that $S_n(X, \phi)$ and $\tilde{S}_n(X, \phi)$ may not have the same asymptotic distribution. In the case of a linear functional, *i.e.* $\phi(x) = x$, $\tilde{S}_n(X, \phi)$ may even have a non Gaussian asymptotic distribution with a suitable normalization, while $S_n(X, \phi)$ is asymptotically Gaussian (cf. Fox and Taqqu, 1985, 1987).

- If $\kappa_4 = 0$ then Assumptions **(A4.3)** and **(A4.5)** are not necessary.
- If $\mu_n = o(n^{2/3})$ then Assumption **(A4.2)** is not necessary and Assumptions **(A4.3)** and **(A4.5)** hold with $\tau_m = \tau_m(\phi, f) = 0$.
- If $C_m(\phi, u) = 0$ for all $u \in \mathbb{R}^+$, then Assumptions **(A4.2)**, **(A4.3)** and **(A4.5)** are not necessary. Thus the central limit theorem holds under the same assumption on the weights $\beta_{n,k}$ as in the Gaussian case and with the same asymptotic variance.

4.3. Applications

4.3.1. Estimation of functional of the spectral density. Many problems in time series analysis require the evaluation of a non-linear functional of the spectral density

$$\Lambda(f) = \int_0^\pi w(x)G(f(x))dx, \quad (4.3.1)$$

either as a goal or as an intermediate step in an inference procedure. The linear case, $G(x) = x$, is well-understood (cf. Brockwell and Davis, 1991). The estimation of non-linear functional has been scarcely considered in the literature, despite the number of potential applications.

In this section, we study a class of estimators based on the pooled periodogram. For any positive integer m , denote $g_m(t) := t^{m-1}e^{-t}/(m-1)!$, $t \geq 0$, the probability density function of a Gamma($m, 1$) random variable. For ϕ a real-valued function such that $\int_0^\infty |\phi(xt)|g_m(t)dt < \infty$ for all $x > 0$, define

$$\mathcal{T}_m[\phi](x) := \int_0^\infty \phi(xt)g_m(t)dt$$

In order to define an estimator of $\Lambda(f)$, we need the following assumption.

(NLF) There exists a function ϕ_m such that, for almost every $x > 0$,

$$\mathcal{T}_m[\phi_m](x) = G(x). \quad (4.3.2)$$

When $G(u) = u^\alpha$, with $\alpha + m > 0$, **(NLF)** holds with $\phi_m(x) = \Gamma(\alpha + m) x^\alpha$. When $G(u) = \log(u)$, **(NLF)** holds with $\phi_m(x) = \log(x) - \psi(m)$, where $\psi(m)$ is the digamma function. Assumption **(NLF)** implies that $\forall x \in [0, \pi]$, $\mathbb{E}[\phi_m((f(x)|\xi|^2/2))] = G(f(x))$. Define

$$\hat{\Lambda}_n = (2\pi/K) \sum_{k=1}^K w(y_k) \phi_m(\bar{I}_{n,k}^X) \quad (4.3.3)$$

This construction differs from the estimators considered in Taniguchi (1991) or Mokkadem (1996): these authors suggest to plug in Eq.(4.3.1), a consistent estimator of the spectral density.

THEOREM 4.2. *Assume that w is a function of bounded variation. Assume in addition that, for some positive integer m , (4.3.2) has a solution denoted ϕ_m , satisfying either assumption (S1) or (S2) of Theorem 4.1. Then $\sqrt{n}(\hat{\Lambda}_n - \Lambda(f))$ converges weakly to a zero-mean Gaussian distribution.*

The expression of the limiting distribution can be deduced from Theorem 4.1. In general, the limiting variance depends upon the spectral density $f_X(x)$ of the process X .

Functionals of the log-spectral density are of particular interest. In such case, $G(x) = \log(x)$, and $\phi_m(x) = \log(x) - \psi(m)$. The function ϕ_m is singular at $x = 0$, and so we must verify assumption **(S2)** of Theorem 4.1. This assumption requires that **(A4.6)** be verified. It is easily checked that (4.2.10)-(4.2.14) are satisfied by taking $m \geq 5$ and $E|Z|^\mu < \infty$, for $\mu \leq 2m + 1$. The condition on the pooling size m is imposed by (4.2.12), which guarantees that $\mathbb{E}(\phi_m'(\bar{I}_{n,k}^Z))^4 = \mathbb{E}(\bar{I}_{n,k}^Z)^{-8} < \infty$. The limiting distribution then is

$$\frac{m\psi'(m)}{\pi} \int_0^\pi w^2(y)dy + \frac{\kappa_4}{4\pi} \left(\int_0^\pi w(y)dy \right)^2, \quad (4.3.4)$$

where $\psi'(m)$ is the trigamma function. Note that, not surprisingly, the limiting variance in such case does not depend on $f_X(x)$.

A direct application of the above result is the estimation of the innovation variance. Following the suggestion of Davis and Jones (1968) (see also Hannan and Nichols (1977)), an estimate of

the innovation variance may be obtained by computing

$$\hat{\sigma}_n^2 = \exp((2\pi K)^{-1} \sum_{k=1}^K (\log(\bar{I}_{n,k}^X) - \psi(m))). \quad (4.3.5)$$

These estimators are based on the Kolmogorov formula, which relates the innovation variance to the integral of the log-spectral density, $\sigma^2 = \exp(\int_0^{2\pi} \log f(w) dw / 2\pi)$. The estimator (4.3.5) has been shown to be consistent by Chen and Hannan (1980). Although hinting that the limiting distribution would involve the fourth order cumulant of Z , these authors failed to prove asymptotic normality in the non-Gaussian case.

It follows from the discussion above that $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2)$ is asymptotically zero-mean Gaussian with variance $(2m\psi'(m) + \kappa_4)\sigma^4$, for $m \geq 5$ and $E|Z|^\mu < \infty$ for $\mu \geq 2m + 1$. The recurrence relation $\psi'(m+1) = \psi'(m) - m^{-2}$ indicates that the function $m\psi'(m)$ decreases in m , taking values 1.289 at $m = 2$ and 1.185 at $m = 3$, and tending to 1 as $m \rightarrow \infty$. There is thus always some advantages to "pool" the periodogram ordinates prior to compute logged variables. The same comments hold for most applications considered in the sequel (see Taniguchi (1991) chapter 1, for related result).

4.3.2. Log-Periodogram Regression. Log-periodogram regression have been considered by several authors as an alternative to maximum likelihood or the method of moments for parameter estimation (cf. Taniguchi, 1987). For $C < \infty$ and $\delta > 0$, define $\mathcal{F}(C, \delta)$ the space of spectral density defined by

$$\mathcal{F}(C, \delta) := \left\{ g; g(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-ijx} \right|^2, \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)|a_j| < C, \right. \\ \left. \text{and } \left| \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \right| \geq \delta, \text{ for all } |z| \leq 1 \right\}$$

We propose to fit some parametric family $\mathcal{P} := \{f_\theta, f_\theta \in \mathcal{F}, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p\}$ to the true spectral density $f_X(x) = f(x; \theta_0)$, $\theta_0 \in \text{int}(\Theta)$, of the process by solving the following non-linear least-square criterion

$$S_n(\theta) := \sum_{i=1}^{K_n} (\log(\bar{I}_{n,k}^X) - \psi(m) - l(y_k; \theta))^2 \quad (4.3.6)$$

where $l(y; \theta) := \log f(y; \theta)$. Any vector $\hat{\theta}_n$ in Θ which minimizes the residual sum of squares (Eq. 4.3.6) will be called a least-square log-periodogram regression estimate of θ_0 . Based on the results derived above, the theory of log-periodogram estimate parallels the theory of non-linear least-squares estimate, as developed in Jennrich (1969) or Wu (1981). Denote $D_n(\theta, \theta') := \sum_{i=1}^n (l(y_i; \theta) - l(y_i; \theta'))^2$ and

$$l'(y; \theta) := \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} l(y; \theta) \right)_j, \quad l''(y; \theta) := \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} l(y; \theta) \right)_{j,k}, \quad j, k \in \{1, \dots, p\}.$$

We will consider the following assumptions

- **(LPR1)** $n^{-1}D_n(\theta, \theta_0)$ converges uniformly for $(\theta, \theta_0) \in \Theta \times \Theta$ to a continuous function $D(\theta, \theta_0)$, and $D(\theta, \theta_0)$ has a unique minimum at $\theta = \theta_0$.
- **(LPR2)** $l'(y; \theta)$ and $l''(y; \theta)$ exist and are bounded for all θ near θ_0 ; the true parameter θ_0 is in the interior of Θ and

$$I(\theta_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l'(y; \theta_0) l'(y; \theta_0)^T dy$$

is positive definite.

Note that $I(\theta_0)$ is the Fisher information matrix for Gaussian process. Assumption **(LPR1)** is the Jennrich's classical assumption, allowing to show (in the standard non-linear regression model with i.i.d errors with finite second-order moments) that the non-linear least-square estimator $\hat{\theta}_n$ is strongly consistent. It follows from Theorem 4.1 that the same assumption may be, in our context, used to show that $\hat{\theta}_n$ is weakly consistent (the proof is by a direct adaptation of Theorem 6 in Jennrich (1969); this assumption can be relaxed; see Wu (1981)). Assumption **(LPR2)** is adapted from Jennrich (1969) to prove the asymptotic normality.

THEOREM 4.3. *Assume **(A4.6)**, **(A4.7)** and **((LPR1)-(LPR2))**. Assume in addition that $m \geq 5$ and $E|Z|^\mu < \infty$, for $\mu \geq 2m + 1$. Then, $\hat{\theta}_n$ is \mathbb{P}_{θ_0} -weakly consistent and $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ is \mathbb{P}_{θ_0} -asymptotically zero-mean Gaussian with covariance matrix*

$$m\psi'(m)I^{-1}(\theta_0) + \kappa_4/4I(\theta_0)^{-1/2}J(\theta_0)I(\theta_0)^{-1/2},$$

$$J(\theta_0) = (2\pi)^{-2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} l'(y; \theta) dy \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} l'(y; \theta) dy \right)^T$$

The proof is a straightforward application of Jennrich (1969), Theorem 7, and is omitted for brevity. Note that when Z_1 is Gaussian, the least-square log-periodogram regression estimator is quasi-efficient, since $m\psi'(m) \rightarrow 1$ very quickly with m .

Taniguchi (1987) suggest to use, instead of the pooled periodogram, a sequence of mean-square consistent estimator of the spectral density in the non-linear least square regression equation 4.3.6. When Z_1 is Gaussian, this approach is, from the asymptotical point of view, better than the one outlined here, even though the loss in efficiency is a constant factor $m\psi'(m)$ which is very close to one even for moderate values of m .

In practice of course, there is always a substantial ambiguity to select an appropriate way to construct a preliminary estimate of the spectral density. One can for instance let m tend to infinity and set $\hat{f}(y_k) = m^{-1}\bar{I}_{n,k}$. This will yield an asymptotically efficient estimator. In practice, the values of m will always be rather small (such as $m = 3$ or 4) and $m^{-1}\bar{I}_{n,k}$ can hardly be considered as a consistent estimator. The type of asymptotics adopted here (fixed block size) seems more sensible to derive meaningful confidence interval, since those derived from the postulated limiting distribution of the Taniguchi's estimator are likely to be underestimated for moderate sample sizes.

4.3.3. Non-parametric Robust spectral estimation. The robustification of the usual kernel estimator by means of M-estimation in frequency domain was suggested by Von Sachs (1994) and Janas and Von Sachs (1995). The procedure, motivated by the robust regression technique (see Härdle and Gasser, 1984), consists in solving in s the estimation equation

$$\hat{\Lambda}_{n,x}(s) = K^{-1} \sum_{k=-K}^K W_{b_n}(x - y_k) \phi \left(\frac{\bar{I}_{n,k}^X}{m.s} - 1 \right), \quad (4.3.7)$$

where for any function W and a positive real h , $W_h(x) = h^{-1}W(h^{-1}x)$. To study this estimator, the following assumptions are introduced.

- **(VS1)** W is a Lipschitz symmetric probability density function with compact support included in $[-\pi, \pi]$.

- **(VS2)** ϕ is three times continuously differentiable on $] -1, \infty[$, monotone increasing and ,

$$\int_0^\infty \phi\left(\frac{x}{m} - 1\right)g_m(x)dx = 0,$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\phi(x)| + |\phi'(x)| + |\phi''(x)| + |\phi'''(x)|}{1 + |x|^\nu} < \infty.$$

- **(VS3)** $(b_n)_{n \geq 0}$ is a decreasing sequence of positive numbers such that $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n^3 = \infty$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n^5 = 0$.

To keep the derivations simple, these assumptions are stronger than really needed (in particular, the strict monotonicity can be replaced by a weaker form of local monotonicity; see Von Sachs, 1994). The choice $\phi(x) = x$ leads to the classical (non-robust) "kernel" estimator. The implicit definition of $f_n(x)$ as the root of $\hat{\Lambda}_{n,x}(f_n(x)) = 0$, can be considered as a variant of an M-estimation procedure. It is shown in Von Sachs (1994) and Janas and Von Sachs (1995) that the robustification improves the estimate of the spectral density, in presence of contamination by periodic components (which can be seen as outliers in the frequency domain). The consistency of this estimator is established for linear processes with exponentially decaying filter coefficients ($a_j = O(\rho^{|j|})$, $\rho < 1$) in Janas and Von Sachs (1995). The asymptotic normality of the estimator is obtained only for Gaussian processes (Theorem 3.2, Von Sachs 1994). We will briefly sketch how to exploit Theorem 4.1 to extend those results to non-necessarily Gaussian linear processes. Define

$$\sigma_m^2 = \int_0^\infty \phi^2\left(\frac{x}{m} - 1\right)g_m(x)dx,$$

$$\beta_m = \int_0^\infty \frac{x}{m}\phi'\left(\frac{x}{m} - 1\right)g_m(x)dx,$$

$$\sigma_W^2 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^\pi W^2(x)dx.$$

PROPOSITION 4.4. *Assume **(VS1)**-**(VS3)**. Assume in addition that*

$$\sum_j j^2 |a_j| < \infty, \quad |A(e^{i\omega})| \neq 0, \text{ for } \omega \in [-\pi, \pi]$$

and $E|Z|^\mu < \infty$, with $\mu = 8\nu \vee 8$. Then,

$$\sqrt{Kb_n} \left(\hat{f}_n(x) - f_X(x) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_W^2 \sigma_m^2 \beta_m^{-2} f_X^2(x)).$$

An outline of the proof is given in appendix 4.8. The rate of asymptotic normality is the same as in the robust case for the usual kernel estimator. Only the constant in the asymptotic variance will be increased by a factor $\beta_m/\sigma_m^2 \geq 1$, accounting for the asymptotic loss of efficiency due to robustification. Along the same lines, one may generalize the results of Von Sachs (1994) on the bias and the variance of the estimator.

4.3.4. Local Polynomial Approximation. The decomposition $\bar{I}_{n,k}^X = f(y_k)\bar{I}_{n,k}^Z + \bar{R}_{n,k}$ suggests to smooth the periodogram using a least-square method (see Fan and Gijbels, 1996). The log-pooled-periodogram admits the following regression model

$$Y_{n,k}^X := \log(\bar{I}_{n,k}^X) - \psi(m) = l(y_k) + \eta_{n,k} + r_{n,k}$$

where $l(y_k) := \log(f(y_k))$ and $\eta_{n,k} := \log(\bar{I}_{n,k}^Z) - \psi(m)$ and $r_{n,k} := \log(1 + \bar{R}_{n,k}/f(y_k)\bar{I}_{n,k}^Z)$ is an asymptotically negligible remainder term. In the local polynomial regression approach, the unknown regression function l is locally approximated by a polynomial of order p (assuming that the regression function is $(p+1)$ -th times differentiable at x). We consider for simplicity a linear fit.

For a given x , approximate $l(y)$ locally by $l(y) = a + b(y - x) + O((y - x)^2)$. The local regression estimator may be expressed as

$$\hat{l}_n(x) = \sum_{k=1}^{K_n} \tilde{W}_n((x - y_k)/b_n) Y_{n,k},$$

$$K_n(y) = \frac{1}{b_n} \frac{S_{n,2} - b_n y S_{n,1}}{S_{n,0} S_{n,2} - S_{n,1}^2} W(y)$$

with $S_{n,j} := \sum_{i=1}^{K_n} W_{b_n}(y_k - x)(y_k - x)^j$, where W_{b_n} is defined as in the previous section. This estimator has been suggested (with $m = 1$, *i.e.* without pooling) in an unpublished report by Fan and Kreutzberger (1995) (see also Fan and Gijbels, 1996, section 6.4.1). It is assumed in the sequel that

(LPA1) $\sum_j j^2 |a_j| < \infty$ and $|A(e^{ix})| \neq 0$, for $x \in [-\pi, \pi]$,

(LPA2) W is a twice continuously differentiable symmetric probability density function and has a compact support,

(LPA3) $nb_n \rightarrow \infty$ and $b_n \rightarrow 0$.

Using the results derived above, we may now generalize Theorem 6.4 in Fan and Gijbels (1996).

PROPOSITION 4.5. *Assume (A4.6), (LPA1-LPA3) and $E|Z|^\mu < \infty$, for $\mu \geq 2m + 1$ and $m \geq 5$. Let b_n be a sequence such that $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n^5 = 0$. Then, for each x , $0 < x < \pi$,*

$$\sqrt{nb_n} \left(\hat{l}_n(x) - l(x) \right) \rightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, m\psi'(m)\nu_0(W)\pi) \quad (4.3.8)$$

where $\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} t^j W(t) dt$,

$$\mu_2(W) = \frac{\mu_2^2 - \mu_1\mu_3}{\mu_0\mu_2 - \mu_1^2}, \quad \nu_0(W) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\mu_2 - \mu_1 t)^2 W^2(t) dt}{(\mu_0\mu_2 - \mu_1^2)^2}.$$

Recall that ψ is the digamma function and note that $\psi'(1) = \pi^2/6$ and (4.3.8) in such case corresponds exactly to the statement of Theorem 6.4 in Fan and Gijbels (1996) (formulated by these authors only in the Gaussian case). Since $m\psi'(m) \rightarrow 1$, for m large enough, local polynomial regressor estimator is asymptotically equivalent to the local likelihood smoothed periodogram estimator, advocated by Fan and Kreutzberger (1995) (see section 6.4.2 in Fan and Gijbels (1996)), the loss in efficiency being equal to $m\psi'(m)$. Once again, the pooling has a positive effect on the asymptotic distribution of the estimator.

4.4. Proof of Theorem 4.1

As mentioned after Theorem 4.1, we only prove the asymptotic normality of $S_n(X, \phi)$, which will follow from the proof of the asymptotic normality of $S_n(Z, \phi)$ and from the proof that $T_n := S_n(X, \phi) - S_n(Z, \phi) = o_P(1)$. The asymptotic normality is a consequence of Theorem 2 in Fay and Soulier (1999). We now prove that $T_n = o_P(1)$. Denote $T_{n,k} = \phi(\bar{I}_{n,k}^X/f(y_k)) - \phi(2\pi\bar{I}_{n,k}^Z)$. A tractable expression for $T_{n,k}$ is naturally obtained by a second order Taylor expansion :

$$\phi(\bar{I}_{n,k}^X/f(y_k)) = \phi(2\pi\bar{I}_{n,k}^Z) + \phi'(2\pi\bar{I}_{n,k}^Z)\bar{R}_{n,k} + \frac{1}{2}\phi''(2\pi\bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k}\bar{R}_{n,k})\bar{R}_{n,k}^2$$

where $0 \leq \theta_{n,k} \leq 1$ and

$$\bar{R}_{n,k} = \frac{\bar{I}_{n,k}^X}{f_X(y_k)} - 2\pi\bar{I}_{n,k}^Z. \quad (4.4.1)$$

Thus we only need to prove the following two lemmas.

LEMMA 4.1. *Assume (A4.1), (A4.7) and either (S1) or (A4.6)-(4.2.12)-(4.2.13) and $\mathbb{E}[|Z_t|^\mu] < \infty$ with $\mu \geq \nu_2 \vee (\nu_3 + 2) \vee 8$. Then,*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi'(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z) \bar{R}_{n,k} \right| = o(1). \quad (4.4.2)$$

LEMMA 4.2. *Assume (A4.1), (A4.7) and either (S1) or (A4.6), (4.2.14) with $m > \beta$ and $\mathbb{E}[|Z_t|^\mu] < \infty$ with $\mu \geq 6 \vee 4\alpha \vee ([2m - 2\beta] + 1)$. Then,*

$$\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi''(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k} \bar{R}_{n,k}) \bar{R}_{n,k}^2 = o_P(1). \quad (4.4.3)$$

An important tool in proving these lemmas is the following bound for $\bar{R}_{n,k}$, proved in appendix 4.6.

LEMMA 4.3. *Under Assumption (A4.7), for any integer p , if $\mathbb{E}[Z_0^{2p}] < \infty$,*

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}[|\bar{R}_{n,k}|^p] = O(n^{-p/2}). \quad (4.4.4)$$

Unfortunately, this bound cannot be improved, even by strengthening assumption (A4.7), and is not sufficient to prove Lemma 4.1, even if for instance ϕ' is bounded. In this case, we have

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi'(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z) \bar{R}_{n,k} \right| \leq \sum_{k=1}^K |\beta_{n,k}| \mathbb{E}[|\bar{R}_{n,k}|] = O(n^{-1/2}) \sum_{k=1}^K |\beta_{n,k}| = O(1),$$

since $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$ implies that $\sum_{k=1}^K |\beta_{n,k}| = O(n^{1/2})$. This latter bound cannot generally be improved as shown by the trivial example $\beta_{n,k} = K^{-1/2}$ for all $1 \leq k \leq K$. The proof of Lemma 4.1 is very involved and is postponed to Appendix 4.7.

The proof of Lemma 4.2 is much simpler. Under assumption (S1), it is straightforward if $\nu = 0$. If $\nu > 0$, applying Lemma 4.3 and Hölder inequality, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi''(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k} \bar{R}_{n,k}) \bar{R}_{n,k}^2 \right] &\leq \\ &\sqrt{K} \max_{1 \leq k \leq K} \left(\mathbb{E}^{1/2} [(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z)^{2\nu}] \mathbb{E}^{1/2} [\bar{R}_{n,k}^4] + \mathbb{E}[|\bar{R}_{n,k}|^{\nu+2}] \right) = O(n^{-1}), \end{aligned}$$

provided Z_0 has finite moments up to the order $4\nu \vee 8$.

Under assumption (S2), ϕ might be singular at zero, and this induces some more technicalities and necessitates Assumption (A4.6). Under assumptions (A4.7) and (A4.6), for all $n \geq 2r$ (where r is defined in assumption (A4.6)), it holds that $\mathbb{P}(\bar{I}_{n,k}^Z > 0) = \mathbb{P}(\bar{I}_{n,k}^X > 0) = 1$. Thus $\bar{U}_{n,k} = \bar{R}_{n,k}/(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z)$ is well defined and we have the following lemma, proved in appendix 4.6.

LEMMA 4.4. *Assume (A4.7), (A4.6), $\mathbb{E}[Z_0^6] < \infty$ and $m \geq 1$. Then,*

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\bar{U}_{n,k}| = o_P(1).$$

Denote $\Omega_n = \{\max_{1 \leq k \leq K} |\bar{U}_{n,k}| \leq 1/2\}$. Lemma 4.4 implies that $\mathbb{P}(\Omega_n) = 1$, thus it is sufficient to prove Lemma 4.1 on Ω_n . On that event, it holds that

$$2\pi \bar{I}_{n,k}^Z/2 \leq 2\pi \bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k} \bar{R}_{n,k} \leq 6\pi \bar{I}_{n,k}^Z/2.$$

Applying (4.2.14), we get

$$\begin{aligned} |\phi''(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k} \bar{R}_{n,k})| \mathbf{1}_{\Omega_n} &\leq C(|\bar{I}_{n,k}^Z|^\alpha + |\bar{I}_{n,k}^Z|^{-\beta}), \\ \left| \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi''(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k} \bar{R}_{n,k}) \bar{R}_{n,k}^2 \mathbf{1}_{\Omega_n} \right] \right| &\leq C\sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}^{1/2} [\bar{R}_{n,k}^4] \mathbb{E}^{1/2} [(\bar{I}_{n,k}^Z)^{2\alpha} + (\bar{I}_{n,k}^Z)^{-2\beta}]. \end{aligned}$$

Provided $\mathbb{E}[|Z_0|^{4\alpha}] < \infty$, $\mathbb{E}[(\bar{I}_{n,k}^Z)^{2\alpha}]$ is uniformly bounded. To conclude, we must prove that $\mathbb{E}[(\bar{I}_{n,k}^Z)^{-2\beta}]$ is also uniformly bounded. The following Lemma is a consequence of Lemma 4.7 in appendix 4.5.

LEMMA 4.5. *Let $\gamma > 0$ and let m and μ be two integers such that $m > \gamma$ and $\mu > 2m - 2\gamma$. Under Assumption **(A4.6)**, if $\mathbb{E}[|Z|^\mu] < \infty$, then there exists an integer $n_0 \geq 2m$, which depends only on the distribution of Z_0 such that*

$$\max_{n \geq n_0} \max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}[(\bar{I}_{n,k}^Z)^{-\gamma}] < \infty$$

Applying Lemmas 4.3 and 4.5 yields

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \phi''(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z + \theta_{n,k} \bar{R}_{n,k}) \bar{R}_{n,k}^2 \mathbf{1}_{\Omega_n}\right] = O(n^{-1/2}).$$

This concludes the proof of Lemma 4.2 and Theorem 4.1.

APPENDIX

4.5. Edgeworth expansions

The Lemmas needed to prove Theorem 4.1 make use of the technique of Edgeworth expansions. In this section, we briefly sketched the main notations and results that are required in the sequel. We follow Battacharya and Rao (1976) and Götze and Hipp (1978).

Define, for any q -tuple $\mathbf{k} = (k(1), \dots, k(q))$, $k(i) \in \{1, \dots, K\}$, $k(i) \neq k(j)$ for all $i, j \in \{1, \dots, q\}$,

$$\mathbf{W}_n(\mathbf{k}) = (2/n)^{1/2} \sum_{j=1}^n Z_j [\cos(x_{k(1)}j), \sin(x_{k(1)}j), \dots, \cos(x_{k(q)}j), \sin(x_{k(q)}j)]^T. \quad (4.5.1)$$

Let κ_r denote the cumulant of order r of Z_1 . For any $2q$ -uplet of non-negative integers $\boldsymbol{\nu} := (\nu(1), \nu(2), \dots, \nu(2q))$, let $|\boldsymbol{\nu}| := \sum_{i=1}^{2q} \nu(i)$ and $\boldsymbol{\nu}! = \nu(1)! \cdots \nu(2q)!$. Define the average cumulant of order $\boldsymbol{\nu}$ as

$$\begin{aligned} \chi_{n,\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{k}) &:= 2^{|\boldsymbol{\nu}|/2} n^{-1} \text{cum} \left(\underbrace{\sum_{t=1}^n Z_t \cos(x_{k(1)}t)}_{\nu(1)\text{times}}, \dots, \underbrace{\sum_{t=1}^n Z_t \sin(x_{k(q)}t)}_{\nu(2q)\text{times}} \right), \\ &= 2^{|\boldsymbol{\nu}|/2} \kappa_{|\boldsymbol{\nu}|} n^{-1} \sum_{t=1}^n \cos^{\nu(1)}(x_{k(1)}t) \sin^{\nu(2)}(x_{k(1)}t) \cdots \sin^{\nu(2q-1)}(x_{k(q)}t) \cos^{\nu(2q)}(x_{k(q)}t). \end{aligned}$$

It is important to note that $\chi_{n,\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{k})$ is bounded uniformly with respect to \mathbf{k} . For all \mathbf{k} , the latter equation implies that $|\chi_{n,\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{k})| \leq 2^{|\boldsymbol{\nu}|/2} \kappa_{|\boldsymbol{\nu}|}$. Denote $\chi_n(\mathbf{k}) := (\chi_{n,\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{k}))_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^{2q}}$ and

$$P_r(\mathbf{x}, \chi_n(\mathbf{k})) = \sum_{u=1}^r \frac{1}{u!} \sum_{u,r}^* \frac{\chi_{n,\boldsymbol{\nu}_1}(\mathbf{k}) \cdots \chi_{n,\boldsymbol{\nu}_u}(\mathbf{k})}{\boldsymbol{\nu}_1! \cdots \boldsymbol{\nu}_u!} H_{\boldsymbol{\nu}_1 + \cdots + \boldsymbol{\nu}_u}(\mathbf{x}) \quad (4.5.2)$$

where $\sum_{u,r}^*$ extends over all u -uplets $(\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_u)$ of $(2q)$ -uplets $\boldsymbol{\nu}_i$, $1 \leq i \leq u$ verifying the two properties

$$3 \leq |\boldsymbol{\nu}_i| \text{ and } \sum_{k=1}^u (|\boldsymbol{\nu}_k| - 2) = r.$$

and for any $2q$ -uplets of integers $\boldsymbol{\nu} = (\nu(1), \dots, \nu(2q))$, $H_{\boldsymbol{\nu}}$ is the multi-dimensional Hermite polynomial of order $\boldsymbol{\nu}$, defined as

$$H_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) = H_{\nu(1)}(x_1) \cdots H_{\nu(2q)}(x_{2q}),$$

H_i denoting the i -th scalar Hermite polynomial.

Let d be a positive integer, and let (k_1, \dots, k_d) be a d -tuple of pairwise distinct integers ($k_i \in \{1, \dots, K\}$, $k_i \neq k_j$, for all $i, j \in \{1, \dots, d\}$). Denote

$$\mathbf{k} := [m(k_1 - 1) + 1, \dots, mk_1, \dots, m(k_d - 1) + 1, \dots, mk_d]. \quad (4.5.3)$$

Let $\boldsymbol{\xi}$ denote a standard $2dm$ -dimensional Gaussian vector. For a function $\phi : \mathbb{R}^{2dm} \rightarrow \mathbb{C}$ such that $\mathbb{E}[\phi^2(\boldsymbol{\xi})] < \infty$, define, for $r, u \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}(\phi) = \mathbb{E}[P_r(\boldsymbol{\xi}, \chi_n(\mathbf{k}))\phi(\boldsymbol{\xi})], \quad (4.5.4)$$

$$Q_{u,\mathbf{k}}(\phi) = \sum_{r=0}^u n^{-r/2} \mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}(\phi). \quad (4.5.5)$$

$Q_{u,\mathbf{k}}(\phi)$ is the u -th order Edgeworth expansion of the moment $\mathbb{E}[\mathbf{W}_n(\mathbf{k})]$. Since $\chi_n(\mathbf{k})$ is bounded with respect to \mathbf{k} , we also have the following uniform bound for $\mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}$.

$$|\mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}(\phi)| \leq C_r \mathbb{E}^{1/2}[\phi^2(\boldsymbol{\xi})]. \quad (4.5.6)$$

In order to obtain conditions upon which the error $\mathbb{E}[\phi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k})) - Q_{u,\mathbf{k}}(\phi)]$ is controlled, we need to define some functional spaces. Denote $C^q(\mathbb{R}^a)$ the set of all functions on \mathbb{R}^a with continuous derivative of order q . For an a -tuple of integers $\boldsymbol{\beta} = (\beta(1), \dots, \beta(a))$, denote $D^{\boldsymbol{\beta}} = \partial_{x_1}^{\beta(1)} \dots \partial_{x_a}^{\beta(a)}$. For $\nu \in \mathbb{N}$, and any measurable function ψ on \mathbb{R}^a , define

$$N_{a,\nu}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^a} |\psi(x)|(1+|x|)^{-\nu} dx,$$

$$M_{a,\nu}(\psi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^a} \frac{|\psi(x)|}{1+|x|^\nu}.$$

Finally, for $\nu, r \in \mathbb{N}$, let $S_\nu^r(\mathbb{R}^a)$ be the subspace of $C^r(\mathbb{R}^a)$ such that for all d -tuples of integers that satisfy $\beta(1) + \dots + \beta(a) \leq r$, $M_{a,\nu}(D^{\boldsymbol{\beta}}\psi) < \infty$, for $\psi \in S_\nu^r(\mathbb{R}^a)$, define

$$\tilde{M}_{a,\nu,r}(\psi) = \max_{\beta(1)+\dots+\beta(a) \leq r} M_{a,\nu}(D^{\boldsymbol{\beta}}\psi).$$

LEMMA 4.6. (BR) *If (A4.6) holds and if there exists $u \in \mathbb{N}^*$ such that $N_{2md,u+2}(\phi) < \infty$ and $\mathbb{E}[|Z_0|^{u+2}] < \infty$, then*

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\mathbb{E}[\phi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k})) - Q_{u,\mathbf{k}}(\phi)]| \leq n^{-u/2} \epsilon_n N_{2md,u+2}(\phi),$$

(GH) *If there exist positive integers u, p such that $\mathbb{E}[|Z_0|^{u+2}] < \infty$, $\phi \in S_\nu^r(\mathbb{R}^{2dm})$, then*

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\mathbb{E}[\phi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k})) - Q_{u,\mathbf{k}}(\phi)]| \leq n^{-u/2} \epsilon_n \tilde{M}_{2md,\nu,r}(\phi) + C \tilde{M}_{2md,\nu,r}(\phi) n^{-(r+2dm+1)/2},$$

where, in both cases, $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence (depending only on the distribution of Z_0 , d and m) such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

Remarks.

- **(BR)** is a consequence of Theorem 19.7 of Bhattacharya and Rao (1976). **(GH)** is implied by Theorem 3.17 of Gotze and Hipp (1978). In that case, **(A4.6)** is not required, thus the result applies even when the probability distribution of Z_0 has a discrete support.
- As noted by Chen and Hannan (1980), Theorem 19.7 of Bhattacharya and Rao (1976) applies for normalized sums of i.i.d sequences, but not for triangular arrays. However, they proved for their Lemma 1 that the conclusion of Theorem 19.7 in Bhattacharya and Rao (1976) still holds in our case, upon replacing the cumulants by the averaged cumulants.

We now derive some consequences of Lemma 4.6. In the case of a Gaussian white noise, since the sequence $2\pi \bar{I}_{n,k}^Z$, $1 \leq k \leq K$ is i.i.d. $\Gamma(m, 1)$, a positive fonction ϕ satisfies either $\mathbb{E}[\phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z)] = \infty$ or $\mathbb{E}[\phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z)]$ is uniformly bounded with respect to n and k . In the non Gaussian case, if ϕ is polynomially bounded, then $\mathbb{E}[\phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z)]$ is uniformly bounded with respect to n and k under a relevant moment condition on Z_0 . If ϕ has singularity, then nothing can be said in full generality, and for a given n and k , $\mathbb{E}[\phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z)]$ may not even exist. Under assumption **(A4.6)**, and under an integrability condition such as (4.2.10), $\mathbb{E}[\phi(2\pi \bar{I}_{n,k}^Z)]$ can be proved to be finite and uniformly bounded, for large enough n .

LEMMA 4.7. *Let $m \geq 1$ and $s \geq 3$ be integers and let ϕ be a function such that (4.2.10) holds i.e. $\int_{\mathbb{R}^{2m}} |\phi(|x|^2)|(1+|x|)^{-s} dx < \infty$. Under assumption **(A4.6)**, if $\mathbb{E}[|Z_0|^s] < \infty$, then there exists*

an integer $n_0 \geq 2m$ which depends only on the distribution of Z_0 , m and s such that for all $n \geq n_0$,

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}[|\phi(\bar{I}_{n,k}^Z)|] \leq C(\mathbb{E}^{1/2}[\phi^2(|\xi|^2/2)] + N_{2m,s}(\phi)), \quad (4.5.7)$$

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\mathbb{E}[\phi(\bar{I}_{n,k}^Z)] - \mathbb{E}[\phi(\xi)]| \leq O(n^{-1})\mathbb{E}^{1/2}[\phi^2(|\xi|^2/2)] + o(n^{(s-2)/2})N_{2m,s}(\phi), \quad (4.5.8)$$

where the constant C and the terms $O(n^{-1})$ and $o(n^{(s-2)/2})$ depend only on the distribution of Z_0 , m and s but not on ϕ .

Lemma 4.7 is a straightforward consequence of Lemma 4.6 (**BR**) and of the bound (4.5.6). Lemma 4.7 implies Lemma 4.5 in section 4.4 and the following Lemma which is used in the proof of Lemma 4.4 in section 4.6.

LEMMA 4.8. Assume **(A4.6)** and $\mathbb{E}[Z_0^6] < \infty$. Then, for all $\epsilon \in [0, 1]$,

$$\max_{1 \leq j \leq K} \mathbb{P}(\bar{I}_{n,j}^Z \leq \epsilon) \leq \frac{\epsilon^m}{m!} + O(n^{-2}),$$

where the term $O(n^{-1})$ depends only on m and on the distribution of Z_0 , and is uniform with respect to ϵ in $[0, 1]$.

LEMMA 4.9. Let p, q, s be positive integers with $s \geq 3$ and let $T : \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}$ be a measurable function. Assume that $\mathbb{E}[|Z_0|^{s+p}] < \infty$ and that one of the following assumptions hold.

- **(BR)** **(A4.6)** holds and $N_{2q,s}(T) < \infty$.
- **(GH)** There exists an integer $r \geq 2$ such that $T \in \mathcal{S}_s^r(\mathbb{R}^{2q})$.

Then, $\max_{\mathbf{k}} \max_{\mathbf{t}} |\mathbb{E}[T(W_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] - \mathbb{E}[T(\xi)] \mathbb{E}[\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}]| = O(n^{-1/2})$,

where $\max_{\mathbf{k}}$ is the maximum over all the q -uplets $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_q)$ of pairwise distinct integers in $\{1, \dots, K\}$, $\max_{\mathbf{t}}$ is the maximum over all p -uplets of (not necessarily distinct) integers $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)$, $1 \leq t_i \leq n$ and $\mathbf{Z}_{\mathbf{t}} := Z_{t_1} \cdots Z_{t_p}$ and, as usual, ξ denotes a $2q$ dimensional standard Gaussian vector.

Proof of Lemma 4.9. Write $W_n(\mathbf{k}) = \tilde{W}_n(\mathbf{k}) + Y_n(\mathbf{k})$ with

$$\tilde{W}_n(\mathbf{k}) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t \in \{1, \dots, K\} \setminus \{t_1, \dots, t_p\}} Z_t [\cos(x_{k_1} t), \sin(x_{k_1} t), \dots, \cos(x_{k_q} t), \sin(x_{k_q} t)]^T$$

$$Y_n(\mathbf{k}) = (2\pi n)^{-1/2} \sum_{t \in \{t_1, \dots, t_p\}} Z_t [\cos(x_{k_1} t), \sin(x_{k_1} t), \dots, \cos(x_{k_q} t), \sin(x_{k_q} t)]^T.$$

Define $\psi(x) = \mathbb{E}[T(x + \xi)]$ and $G_n(x) = \mathbb{E}[T(x + \tilde{W}_n(\mathbf{k}))] - \psi(x)$. Under the assumptions of Lemma 4.9, ψ and G_n are well defined and $\mathbb{E}[|\psi(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}|] < \infty$ and $\mathbb{E}[|G_n(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}|] < \infty$. Moreover, with these notations, $\mathbb{E}[T(\xi)] \mathbb{E}[\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] = \psi(0)\mathbb{E}[\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}]$. Thus, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T(W_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[T(W_n(\mathbf{k}))|\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}]\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] = \mathbb{E}[\psi(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] + \mathbb{E}[G_n(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] \\ &= \psi(0) \mathbb{E}[\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] + \mathbb{E}[\{\psi(Y_n(\mathbf{k})) - \psi(0)\}\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}] + \mathbb{E}[G_n(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}]. \end{aligned}$$

The assumptions of Lemma 4.9 also imply that ψ is continuously differentiable and there exists a constant $C(T)$ such that $|\psi(x)| + |\psi'(x)| \leq C(T)(1 + |x|)^s$. In order to avoid assuming unnecessary moment condition on Z_0 , we use the following trick. Note that for all u ,

$$\begin{aligned} |\psi(u) - \psi(0)| &= |\psi(u) - \psi(0)|\mathbf{1}_{\{|u| \leq 1\}} + |\psi(u) - \psi(0)|\mathbf{1}_{\{|u| \geq 1\}} \\ &\leq C(T)(1 + |u|)^s |u| \mathbf{1}_{\{|u| \leq 1\}} + 2C(T)(1 + |u|)^s \mathbf{1}_{\{|u| \geq 1\}} \leq 2^{s+1} C(T)(|u| + |u|^s). \end{aligned}$$

Using brutally the mean value theorem yields the bound $C(T)|u|(1 + |u|)^s$, which would increase the required number of moments for Z_0 . We now trivially have

$$|\mathbb{E}[(\psi(Y_n(\mathbf{k})) - \psi(0))\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}]| \leq C\mathbb{E}[(|Y_n(\mathbf{k})| + |Y_n(\mathbf{k})|^s) |\mathbf{Z}_{\mathbf{t}}|] = O(n^{-1/2}),$$

provided Z_0 has $s + p$ moments.

To bound $\mathbb{E}[G_n(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_t]$, we must first check the validity of an Edgeworth expansion of $G_n(x) = \mathbb{E}[T(x + \tilde{W}_n(\mathbf{k}))]$:

$$G_n(x) = \sum_{r=0}^{s-2} n^{-r/2} \tilde{\mathbb{E}}_{r,\mathbf{k}}[T(x + \cdot)] + o(n^{-(s-2)/2})R_{s,T}(x).$$

Two problems arise. The first problem is that the validity of an Edgeworth expansion has been proved only for $W_n(k)$ and not for $\tilde{W}_n(k)$. Nevertheless, the arguments of Chen and Hannan (1980) still apply. It is also necessary to obtain a bound for the terms $\tilde{\mathbb{E}}_{r,\mathbf{k}}$. The difference between $W_n(k)$ and $\tilde{W}_n(k)$ is that the covariance matrix, say $\tilde{\Sigma}_n$, of $\tilde{W}_n(k)$ is not the identity matrix. Instead, it writes $\tilde{\Sigma}_n = J_{2q} + \Delta_n$, where the entries of Δ_n are uniformly $O(n^1)$. Since q is fixed, it is then easily seen that for any function ϕ that satisfies assumption **(BR)** or **(GH)** $|\tilde{\mathbb{E}}_{r,\mathbf{k}}[\phi]| \leq C(\phi)$ where $C(\phi)$ is the relevant norm for ϕ . The second one, which is easily solved, is to give a bound for the remainder term $R_{s,T}(x)$. Under the assumptions of lemma 4.9, it is easily checked that $|R_{s,T}(x)| \leq C(T)(1 + |x|)^s$. Thus, we get, noting moreover that by definition of T , $\mathbb{E}_{0,\mathbf{k}}[T(x + \cdot)] = 0$,

$$\mathbb{E}[G_n(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_t] = \sum_{r=1}^{s-2} n^{-r/2} \mathbb{E}[\mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}[T(Y_n(\mathbf{k}) + \cdot)]\mathbf{Z}_t] + o(n^{-(s-2)/2})\mathbb{E}[R_{s,T}(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_t].$$

Under the assumptions of lemma 4.9, it is also easily checked that for any polynomial $P : \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{E}_0[P(\xi)T(x + \xi)] \leq C(P)(1 + |x|)^s$. Thus

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}[T(Y_n(\mathbf{k}) + \cdot)]\mathbf{Z}_t| &\leq C\mathbb{E}[(1 + |Y_n(\mathbf{k})|)^s\mathbf{Z}_t] < \infty, \\ |\mathbb{E}[R_{s,T}(Y_n(\mathbf{k}))\mathbf{Z}_t]| &\leq \mathbb{E}[(1 + |Y_n(\mathbf{k})|)^s\mathbf{Z}_t] < \infty. \end{aligned}$$

provided $\mathbb{E}[|Z_0|^{p+s}] < \infty$, and the bounds are uniform with respect to n and $k \leq K$. This concludes the proof of Lemma 4.9.

4.6. Bounds related to the Bartlett decomposition

In this section, we bound the error incurred by the approximation of the periodogram of a linear process by the pseudo-periodogram. Most of the material in this section is standard (cf. Walker, 1965).

Denote $r_n(x) := d_n^X(x) - A(e^{ix})d_n^Z(x)$. Following Walker (1965), $r_n(x)$ may be expressed as $r_n(x) = r_n^{(1)}(x) + r_n^{(2)}(x)$, with for $l = 1, 2$,

$$r_n^{(l)}(x) := (-1)^l (2\pi n)^{-1/2} \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_u e^{-iux} Z_{n,u}^{(l)}(x) \quad (4.6.1)$$

where

$$Z_{n,u}^{(l)}(x) = \sum_{v \in \mathcal{I}_{n,u}^{(l)}} Z_v e^{-ivx}, \quad (4.6.2)$$

$$\mathcal{I}_{n,u}^{(1)} := \{(1-u), \dots, (n-u)\} \cap \{1, \dots, n\}^c. \quad (4.6.3)$$

$$\mathcal{I}_{n,u}^{(2)} := \{1, \dots, n\} \setminus (\{(1-u), \dots, (n-u)\} \cap \{1, \dots, n\}). \quad (4.6.4)$$

Note that $\mathcal{I}_{n,u}^{(1)} \subset \{1, \dots, n\}$ and $\mathcal{I}_{n,u}^{(2)} \subset \{1, \dots, n\}^c$, and $\#\mathcal{I}_{n,u}^{(1)} = \#\mathcal{I}_{n,u}^{(2)} = \min(n, |u|)$. The following result is a straightforward adaptation of Theorems 2 and 2a in Walker (1965).

LEMMA 4.10. Assume $\sum_j |j|^{1/2} |a_j| < \infty$ and $\mathbb{E}|Z|^p < \infty$ for some $p \geq 2$. Then,

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} \mathbb{E}[|d_n^Z(x)|^p] = O(1), \quad (4.6.5)$$

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} \mathbb{E}[|r_n^{(l)}(x)|^p] = O(n^{-p/2}), \quad l = 1, 2 \quad (4.6.6)$$

Assume $\sum_j |j|^{1/4+\epsilon} |a_j| < \infty$, for some $\epsilon > 0$. Then,

$$\mathbb{E}[\max_{1 \leq k \leq n} |r_n^{(l)}(x_k)|] = O(n^{-\epsilon}), \quad l = 1, 2. \quad (4.6.7)$$

Proof Lemma 4.10. Eq. (4.6.5) is a direct consequence of Rosenthal inequality (see, e.g., Petrov, 1985, Theorem 2.9). This inequality also implies

$$\max_{x \in [0, \pi]} \mathbb{E}|Z_{n,u}^{(l)}(x)|^p \leq c(p) \min(n, |u|)^{p/2}.$$

Minkowski inequality yields, for $l = 1, 2$,

$$\max_{x \in [0, \pi]} (\mathbb{E}|r_n^{(l)}(x)|^p)^{1/p} \leq cn^{-1/2} \sum_{u=-\infty}^{\infty} |a_u| \min(n, |u|)^{1/2} = O(n^{-1/2}).$$

which proves (4.6.6). Let $u < v$, $u, v \in \mathbb{N}$. We have

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=u+1}^v Z_t e^{-ikx} \right|^2 &= \sum_{\tau=-(v-u)+1}^{(v-u)-1} e^{-i\tau x} \sum_{t=u}^{v-|\tau|} Z_t Z_{t+|\tau|} \leq \sum_{\tau=-(v-u)+1}^{(v-u)-1} \left| \sum_{t=u+1}^{v-|\tau|} Z_t Z_{t+|\tau|} \right|, \\ \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=u+1}^v Z_t e^{-ikx} \right|^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{t=u+1}^v Z_t^2 \right] + 2 \sum_{\tau=1}^{(v-u)-1} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=u}^{v-|\tau|} Z_t Z_{t+|\tau|} \right)^2 \right]^{1/2} \leq c(v-u)^{3/2}. \end{aligned}$$

This yields $\mathbb{E}[\max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{t=u+1}^v Z_t e^{-ikx}|] \leq c(v-u)^{3/4}$ and

$$\mathbb{E}[\max_{1 \leq k \leq n} |Z_{n,u}^{(l)}(x_k)|] \leq c \min(n, |u|)^{3/4}, \quad l = 1, 2.$$

Plugging this expression in (4.6.1) finally gives

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\max_{1 \leq k \leq n} |r_n^{(l)}(x_k)|] &\leq cn^{-1/2} \sum_{|u| \leq n} |u|^{3/4} |a_u| + n^{1/4} \sum_{|u| > n} |a_u|, \\ &\leq cn^{-\epsilon} \sum_u |u|^{1/4+\epsilon} |a_u|. \end{aligned}$$

which concludes the proof of (4.6.7).

Define $R_n(x) := I_n^X(x) - |A(e^{ix})|^2 I_n^Z(x)$ and $\bar{R}_{n,k} := \sum_{l \in J_k} R_n(x_l) / (2\pi f_X(y_k))$. We have

$$\begin{aligned} R_n(x) &= 2\operatorname{Re} (A(e^{ix}) d_n^Z(x) r_n(x)) + |r_n(x)|^2, \\ \bar{R}_{n,k} &= \frac{1}{2\pi f_X(y_k)} \sum_{l \in J_k} R_{n,l} + \sum_{l \in J_k} \frac{f_X(x_k) - f_X(y_k)}{f_X(y_k)} I_{n,k}^Z. \end{aligned}$$

Decompose $\bar{R}_{n,k} = \sum_{j=1}^4 \bar{R}_{n,k}^{(j)}$, with

$$\bar{R}_{n,k}^{(1)} = 2 \sum_{l \in J_k} \operatorname{Re} \left(d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(j)} A(e^{ix_l}) \right) / (2\pi f_X(y_k)), \quad l = 1, 2. \quad (4.6.8)$$

$$\bar{R}_{n,k}^{(3)} = \sum_{l \in J_k} |r_{n,l}|^2 / (2\pi f_X(y_k)), \quad (4.6.9)$$

$$\bar{R}_{n,k}^{(4)} = \sum_{l \in J_k} f_X^{-1}(y_k) (f_X(x_l) - f_X(y_k)) \bar{I}_{n,l}^Z. \quad (4.6.10)$$

LEMMA 4.11. *Assume (A4.7) and $\mathbb{E}Z^{2p} < \infty$ that*

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}[\bar{R}_{n,k}^{(l)}]^p = O(n^{-p/2}), \quad j = 1, 2, \quad (4.6.11)$$

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}[\bar{R}_{n,k}^{(3)}]^p = O(n^{-p}), \quad (4.6.12)$$

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}[\bar{R}_{n,k}^{(4)}]^p = O(n^{-p(\delta \wedge 1)}). \quad (4.6.13)$$

The proof of (4.6.11) and (4.6.12) is a straightforward application of Lemma 4.10 and do not need assumption (A4.7) in its full strength. To prove, (4.6.13), note that, under (A4.7), it holds that $|f_X(x) - f_X(y)| \leq C|x - y|^{\delta \wedge 1}$ for all x, y and thus

$$\max_{1 \leq k \leq K} \max_{l \in J_k} |f_X(x_l) - f_X(y_k)|/f_X(y_k) = O(n^{-\delta \wedge 1}). \quad (4.6.14)$$

Since $\mathbb{E}[(\bar{I}_{n,k}^Z)^p]$ is uniformly bounded provided $\mathbb{E}[Z_0^{2p}] < \infty$, (4.6.13) holds.

Proof of Lemma 4.4. Write $U_{n,k} = U_{n,k}^{(1)} + U_{n,k}^{(2)}$ with

$$U_{n,k}^{(1)} = \frac{\sum_{l \in J_k} 2\operatorname{Re}(d_n^Z(x_l)A(e^{ix_l})r_n(x_l)) + |r_n(x_l)|^2}{(2\pi)f_X(y_k)\bar{I}_{n,k}^Z}$$

$$U_{n,k}^{(2)} = \frac{1}{f_X(y_k)} \sum_{l \in J_k} \frac{I_{n,l}^Z}{\bar{I}_{n,k}^Z} (f_X(x_l) - f_X(y_k))$$

Under (A4.7), $A(e^{ix})$ (and $f_X(x)$) are bounded and bounded away from zero. Applying Cauchy-Schwarz inequality, we get,

$$|U_{n,k}^{(1)}| \leq C(\gamma_{n,k} + \gamma_{n,k}^2), \quad \text{with} \quad \gamma_{n,k} = (\bar{I}_{n,k}^Z)^{-1/2} \max_{1 \leq l \leq n} |r_n(x_l)|. \quad (4.6.15)$$

Let $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be an arbitrary sequence of positive numbers. We have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq K} |\gamma_{n,k}| \geq \epsilon) &\leq \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq k \leq K} \bar{I}_{n,k}^Z \leq \frac{M_n^2}{\epsilon^2}\right) + \mathbb{P}(\max_{1 \leq l \leq n} |r_n(x_l)| \geq M_n), \\ &\leq \sum_{k=1}^K \mathbb{P}(\bar{I}_{n,k}^Z \leq \frac{M_n^2}{\epsilon^2}) + \mathbb{P}(\max_{1 \leq l \leq n} |r_n(x_l)| \geq M_n). \end{aligned}$$

Under Assumption (A4.7), Lemma 4.10 Eq. (4.6.7) yields $\mathbb{E}[\max_{1 \leq l \leq n} |r_n(x_l)|] = O(n^{-1/2-\delta})$. Lemma 4.8 and Markov inequality yield

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq K} |\gamma_{n,k}| \geq \epsilon) \leq c \left\{ nM_n^{2m} \epsilon^{-2m} + O(n^{-1}) + M_n^{-1} n^{-1/2-\delta} \right\}$$

Setting $M_n = n^{-1/2-\delta}$ yields, for all $m \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq K} |\gamma_{n,k}| \geq \epsilon) = 0$. (4.6.15) finally implies that $\max_{1 \leq k \leq K} |U_{n,k}^{(1)}| = o_P(1)$. $U_{n,j}^{(2)}$ is a convex combination of $(f_X(x_l) - f_X(y_k))/f_X(y_k)$ ($l \in J_k$) with non-negative weights $I_{n,l}^Z$, thus, (4.6.14) yields

$$\max_{1 \leq k \leq K} |U_{n,k}^{(2)}| \leq \max_{1 \leq k \leq K} \max_{l \in J_k} |f_X(x_l) - f_X(y_k)|/f_X(y_k) = O(n^{-\delta \wedge 1}),$$

which implies that $\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq K} |U_{n,k}^{(2)}| \geq \epsilon) = 0$ for all sufficiently large n . This concludes the proof of Lemma 4.4.

4.7. Proof of Lemma 4.1

Set $\zeta_{n,k} := \phi'(\bar{I}_{n,k}^Z)$. Under assumption **(S1)** or assumption **(A4.6)**, (4.2.12) and $\mathbb{E}[|Z_0|^\mu] < \infty$ with $\mu \geq \nu_2$, there exists a constant C such that, for all sufficiently large n ,

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}(\zeta_{n,k}^4) \leq C. \quad (4.7.1)$$

Recall that $\bar{R}_{n,k} = \sum_{j=1}^4 \bar{R}_{n,k}^{(j)}$ and that under **(A4.7)**, $\mathbb{E}[\bar{R}_{n,k}^{(j)}] = o(n^{-1/2})$, $j = 3, 4$. Thus for any reals $\beta_{n,k}$ such that $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$, applying Hölder inequality, we have

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \zeta_{n,k} (\bar{R}_{n,k}^{(3)} + \bar{R}_{n,k}^{(4)}) \right| = o(1).$$

To bound the terms involving $\bar{R}_{n,k}^{(j)}$ for $j = 1, 2$, we must compute $\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \zeta_{n,k} (\bar{R}_{n,k}^{(1)} + \bar{R}_{n,k}^{(2)}))^2]$. The diagonal terms in the expansion of the square are easily bounded using Lemma 4.11, (4.6.12) and (4.6.13)

$$\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \mathbb{E}(\zeta_{n,k}^2 (\bar{R}_{n,k}^{(1)} + \bar{R}_{n,k}^{(2)})^2) \leq \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 (\mathbb{E}|\zeta_{n,k}|^4)^{1/2} (\mathbb{E}|\bar{R}_{n,k}^{(1)} + \bar{R}_{n,k}^{(2)}|^4)^{1/2} = O(n^{-1}).$$

Consider now the sum over non-diagonal entries

$$V_n = \sum_{1 \leq k < k' \leq K} \beta_{n,k} \beta_{n,k'} \mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} (\bar{R}_{n,k}^{(1)} + \bar{R}_{n,k}^{(2)}) (\bar{R}_{n,k'}^{(1)} + \bar{R}_{n,k'}^{(2)})).$$

If $\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 = 1$, then $\sum_{k \neq k'} |\beta_{n,k} \beta_{n,k'}| = O(n)$. Thus, to prove that $V_n = o_P(1)$, it is sufficient to prove that for $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\}$,

$$\max_{1 \leq k \neq k' \leq K} \mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} \bar{R}_{n,k}^{(i)} \bar{R}_{n,k'}^{(j)}) = o(n^{-1}). \quad (4.7.2)$$

Using the expression (4.6.8) of $\bar{R}_{n,k}^{(j)}$ in terms of $r_{n,l}^{(j)}$, each term $\bar{R}_{n,k}^{(i)} \bar{R}_{n,k'}^{(j)}$ writes as the sum of $4m^2$ terms typified by

$$d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(i)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(j)} A(e^{ix_l}) A(e^{ix_{l'}}) f^{-1}(y_k) f^{-1}(y_{k'}).$$

Since A and f are bounded and bounded away from zero under **(A4.7)** (and are deterministic functions), (4.7.2) will follow from

$$\max_{1 \leq k \neq k' \leq K} \max_{l \in J_k, l' \in J_{k'}} \left| \mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(i)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(j)}) \right| = o(n^{-1}) \quad (4.7.3)$$

for $(i, j) = (1, 2), (1, 1)$ and $(2, 2)$.

Note that $\mathbb{E}(r_{n,l}^{(1)}) = 0$ and $r_{n,l}^{(1)}$ is independent from $\zeta_{n,k}, \zeta_{n,k'}, d_{n,l}^Z, d_{n,l'}^Z$ and $r_{n,l'}^{(2)}$. Hence, for all $1 \leq k < k' \leq K, l \in J_k, l' \in J_{k'}$,

$$\mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(1)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(2)}] = 0, \quad (4.7.4)$$

$$\mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(1)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(1)}] = \mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z] \mathbb{E}[r_{n,l}^{(1)} r_{n,l'}^{(1)}]. \quad (4.7.5)$$

(4.7.5) and Lemma 4.10 yield

$$\left| \mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(1)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(1)}] \right| \leq cn^{-1} |\mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z]| \quad (4.7.6)$$

This bound is not sufficient to conclude the proof of Lemma 4.1. We must still prove that $\mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z] = o(1)$, uniformly with respect to $k \leq K$.

Define, for $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{4m}) \in \mathbb{R}^{4m}$,

$$\psi(\mathbf{w}) := \phi'(|\mathbf{w}_1|^2/2) \phi'(|\mathbf{w}_2|^2/2) (w_{2m_1-1} + iw_{2m_1}) (w_{2m_2-1} + iw_{2m_2}). \quad (4.7.7)$$

where $\mathbf{w}_1 = (w_1, \dots, w_{2m})$, $\mathbf{w}_2 = (w_{2m+1}, \dots, w_{4m})$, $m_1 = l - (k-1)m$, $m_2 = l' - (k'-2)m$. Set $\mathbf{k} = [k(m-1) + 1, \dots, km, k'(m-1) + 1, k'm]$. The definitions above imply that

$$\psi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k})) = \zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z.$$

We now check the validity of an Edgeworth expansion of $\mathbb{E}[\psi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k}))]$.

- Under **(S1)**, $|\psi(\mathbf{w})| \leq C(1 + |\mathbf{w}|^{4\nu+2})$. Since $\mathbb{E}[|Z|^{4\nu+2}] < \infty$, Lemma 4.6 implies that Edgeworth expansion of $\mathbb{E}[\psi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k}))]$ is valid up to order 4ν , with a remainder term of order $o(n^{-2\nu}) + O(n^{-(2+4m+1)/2}) = o(n^{-1/2})$.
- Under assumption (4.2.13), $\int_{\mathbb{R}^{4m}} |\psi(\mathbf{w})| (1 + |\mathbf{w}|)^{-\nu_3} d\mathbf{w} < \infty$. Since $\mathbb{E}[|Z|^{\nu_3}] < \infty$, Lemma 4.6 shows that the Edgeworth expansion of $\mathbb{E}[\psi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k}))]$ is valid up to order ν_3 , with a remainder term of order $o(n^{-(\nu_3-2)/2}) = o(n^{-1/2})$.

With the notations of Lemma 4.6, we can thus write, with $\tilde{\nu} = 4\nu + 2$ under assumption **(S1)** and $\tilde{\nu} = \nu_3$ under assumption (4.2.13),

$$\mathbb{E}[\psi(\mathbf{W}_n(\mathbf{k}))] = \sum_{r=0}^{\tilde{\nu}} \mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}(\psi) + o(n^{-1/2}).$$

It is easily seen that for all $r \leq \tilde{\nu}$, $\max_{1 \leq k, k' \leq K} \mathbb{E}_{r,\mathbf{k}}(\psi) < \infty$, and that

$$\mathbb{E}_{0,\mathbf{k}}(\psi) = \mathbb{E}[\phi'(|\xi|^2/2)(\xi_{2m_1-1} + i\xi_{2m_1})] \mathbb{E}[\phi'(|\xi|^2/2)(\xi_{2m_2-1} + i\xi_{2m_2})] = 0.$$

Hence, uniformly in $k, k' \in \{1, \dots, K\}$ and $l, l' \in J_k \times J_{k'}$,

$$|\mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z)| = O(n^{-1/2}).$$

This finally implies that $\mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(1)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(1)}) = O(n^{-3/2})$.

There now remains to bound the terms $\mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,l} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(2)} r_{n,l'}^{(2)}]$. From (4.6.4),

$$\mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(2)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(2)}) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{u, u'} a_u a_{u'} \sum_{v \in I_{n,u}^{(2)}, v' \in I_{n,u'}^{(2)}} \mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z Z_v Z_{v'})$$

Applying Lemma 4.9 with $q = 2m$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$, $\mathbf{k} = [(k-1)m + 1, \dots, km, (k'-1)m + 1, \dots, k'm]$, ψ defined in (4.7.7), $r = 2$ and $s = \nu_3$, we have,

$$\max_{1 \leq k, k' \leq K} \max_{l \in J_k, l' \in J_{k'}} |\mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z Z_{t_1} Z_{t_2}) - \mathbb{E}_0(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z) \mathbb{E}(Z_{t_1} Z_{t_2})| = O(n^{-1/2})$$

Since $\mathbb{E}_0(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z) = 0$, and $\#[I_{n,u}^{(2)}] = n \wedge |u|$, we get,

$$\sum_{v \in I_{n,u}^{(2)}, v' \in I_{n,u'}^{(2)}} \mathbb{E}(\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z Z_v Z_{v'}) \leq cn^{-1/2} (n \wedge |u|) (n \wedge |u'|)$$

Therefore, under **(A4.7)**,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z r_{n,l}^{(2)} d_{n,l'}^Z r_{n,l'}^{(2)}]| &\leq cn^{-1} \sum_{u, v} |a_u| |a_v| \sum_{v \in I_{n,u}^{(2)}, v' \in I_{n,u'}^{(2)}} |\mathbb{E}[\zeta_{n,k} \zeta_{n,k'} d_{n,l}^Z d_{n,l'}^Z Z_v Z_{v'}]| \\ &\leq cn^{1/2-2\delta} \sum_{u \in \mathbb{Z}} |u|^\delta |a_u| = o(n^{-1}). \end{aligned}$$

This concludes the proof of Lemma 4.1.

4.8. Proof of Proposition 4.4

We present an outline of the proof of Proposition 4.4, which is adapted from Von Sachs (1994) and Janas and Von Sachs (1995). Define $\phi_{m,s}(z) = \phi(z/ms - 1)$ and

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_{n,x}(s) &= \frac{2\pi}{K} \sum_{k=-K}^K W_{b_n}(x - y_k) \phi_{m,s}(\bar{I}_{n,k}^X), \\ \bar{\Lambda}_{n,x}(s) &= \frac{2\pi}{K} \sum_{k=-K}^K W_{b_n}(x - y_k) \gamma_m(\phi_{m,s}, f_X(y_k)), \\ \bar{\Lambda}_x(s) &= \gamma_m(\phi_{m,s}, f_X(x))\end{aligned}$$

where

$$\gamma_m(\phi_{m,s}, u) = \int \phi(uz/ms - 1) g_m(z) dz.$$

Note that, under **(VS2)**, $\hat{\Lambda}_{n,x}(s)$, $\bar{\Lambda}_{n,x}(s)$, $\bar{\Lambda}_x(s)$ are monotone decreasing. In addition $\bar{\Lambda}_x(f_X(x)) = 0$, *i.e.* $f_X(x)$ is a root of the equation $\bar{\Lambda}_x(s) = 0$.

The following lemma is repeatedly used in the sequel. The proof is straightforward and is omitted for brevity.

LEMMA 4.12.

$$\frac{2\pi}{K} \sum_{j=0}^K W_{b_n}^p(x - y_j) = b_n^{-(p-1)} \int_{\mathbb{R}} W^p(v) dv (1 + o(1)).$$

If v is twice continuously differentiable,

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{K} \sum_{j=0}^K W_{b_n}(x - y_j) v(y_j) &= \int_{\mathbb{R}} W_{b_n}(x - y) v(y) dy + O((nb_n^2)^{-1}), \\ \int W_{b_n}(x - y) v(y) dy - v(x) &= O(b_n^2)\end{aligned}$$

LEMMA 4.13. Assume **(VS1)**-**(VS3)** and $E|Z|^\mu < \infty$, with $\mu = 8\nu \vee 4$. Then, for all $s \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$,

$$\sqrt{Kb_n}(\hat{\Lambda}_{n,x}(s) - \bar{\Lambda}_x(s)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_W^2 \sigma_m^2(\phi_{m,s}, f_X(x))), \quad (4.8.1)$$

$$\sqrt{Kb_n}(\bar{\Lambda}_{n,x}(s) - \bar{\Lambda}_x(s)) = o(1). \quad (4.8.2)$$

Proof of Lemma 4.13. : Set $\beta_{n,k} := (\sum W_{b_n}^2(x - y_k))^{-1/2} W_{b_n}(x - y_k)$. It is easily shown that

$$\frac{2\pi}{K} \sum_k W_{b_n}^2(x - y_k) = b_n^{-1} \int W^2(v) dv (1 + o(1)).$$

Hence, $\max_k |\beta_{n,k}| = O((Kb_n)^{-1/2}) = O(\mu_n^{-1/2})$, where $\mu_n = \#\{k : \beta_{n,k} \neq 0\}$ (note that $\mu_n \simeq Kb_n$); it follows that assumptions **(A4.1)** and **(A4.2)** are satisfied. These results also imply that

$$n^{-1} \sum |\beta_{n,k} \beta_{n,l}| = O(b_n)$$

Since, $\sup_{\min f_X(y) \leq u \leq \max f_X(y)} C_m(\phi_{m,s}, u) < \infty$, assumption **(A4.3)** holds. Finally, under the stated assumptions, $y \rightarrow \sigma_m^2(\phi_{m,s}, f_X(y))$ is twice continuously differentiable. Lemma 4.12 implies that

$$\sum_{k=0}^K \beta_{n,k}^2 \sigma_m^2(\phi_{m,s}, f_X(y_k)) = \sigma_m^2(\phi_{m,s}, f_X(x)) + O(b_n^2).$$

and thus assumption **(A4.4)** is satisfied. We may thus apply Theorem 4.1 to show that

$$\sum_{k=0}^K \beta_{n,k} \phi_{m,s}(\bar{I}_{n,k}^X) - \gamma_m(\phi_{m,s}, f_X(y_k))$$

converges in distribution to a zero-mean Gaussian variable with covariance $\sigma_m^2(\phi_{m,s}, f_X(x))$, showing (4.8.1). Eq. (4.8.2) is a direct consequence of Lemma 4.12.

This lemma has the following important corollary

COROLLARY 4.6. *Assume **(VS1)**-**(VS3)**. Then,*

$$\sqrt{Kb_n} \hat{\Lambda}_{n,x}(f_X(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_W^2 \sigma_m^2). \quad (4.8.3)$$

where $\sigma_m^2 = \int \phi^2(z/m - 1) g_m(z) dz$.

Since $\bar{\Lambda}_x(s)$ is monotone decreasing and $\bar{\Lambda}_x(f_X(x)) = 0$, $\bar{\Lambda}_x(s)$ is strictly positive/negative for values of s which are strictly smaller/larger than $f_X(x)$. By Lemma 4.13, for any $0 < \epsilon < \min f_X(x)$, we have

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{n,x}(f_X(x) - \epsilon) &\rightarrow_P \bar{\Lambda}_x(f_X(x) - \epsilon) > 0, \\ \hat{\Lambda}_{n,x}(f_X(x) + \epsilon) &\rightarrow_P \bar{\Lambda}_x(f_X(x) + \epsilon) < 0, \end{aligned}$$

Since $\hat{\Lambda}_{n,x}(s)$ is continuous

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\exists \hat{f}_{n,X}(x) \in [f_X(x) - \epsilon, f_X(x) + \epsilon], \hat{\Lambda}_{n,x}(\hat{f}_{n,X}(x)) = 0) = 1.$$

Since $\hat{\Lambda}_{n,x}(s)$ is monotone decreasing this root (when it exists) is unique. We may thus conclude from this discussion that the equation $\hat{\Lambda}_{n,x}(s) = 0$ has, with a probability tending to 1 as $n \rightarrow \infty$ a solution denoted $\hat{f}_{n,X}(x)$, and that these solutions (for different values n) form a consistent sequence of estimators of the spectral density $f_X(x)$. To prove that these estimators (properly normalized) have a limiting distribution, we follow the classical pattern of proof, consisting in linearizing the estimation equation around $f_X(x)$. By the mean value theorem, we have

$$0 = \hat{\Lambda}_{n,x}(\hat{f}_{n,X}(x)) = \hat{\Lambda}_{n,x}(f_X(x)) - \Delta_{n,x}(\hat{f}_{n,X}(x) - f_X(x)) \quad (4.8.4)$$

where

$$\Delta_{n,x} = (2\pi/K) \sum_{j=0}^K W_{b_n}(x - y_j) \phi' \left(\frac{\bar{I}_{n,j}}{m f_j^*} - 1 \right) \frac{\bar{I}_{n,j}}{m f_j^{*2}}$$

where $f_j^* = f_X(x) + \eta_j (\hat{f}_{n,X}(x) - f_X(x))$, $\eta_j \in [0, 1]$. The weak consistency of $\hat{f}_{n,X}(x)$ implies that $\sup_j |f_j^* - f_X(x)| = o_P(1)$. Using Theorem 4.1 with $\psi_{m,s}(x) = x\phi'(x/s - 1)$ implies

$$\Delta_{n,x} = \frac{\beta_m}{f_X(x)} + o_P(1). \quad (4.8.5)$$

Proposition 4.4 follows from Eq. (4.8.4), and (4.8.5).

Remark: It is suggested in Von Sachs (1994) that a use of a data taper may be beneficial. The results in Theorem 4.1 can be adapted to cover that case, under basically the same assumptions (on the data taper) needed to prove Theorem 3.2 (Von Sachs, 1994).

Bibliography

1. M. Arcones, *Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors*, Annals of Probability **22** (1994), no. 4, 2243–2274.
2. M.S. Bartlett, *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1955.
3. R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.
4. P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
5. Z.-G. Chen and E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 73–82.
6. H.T. Davis and R.H. Jones, *Estimation of the innovation variance of stationary time series*, JASA **63** (1968), 141–149.
7. J. Fan and I. Gijbels, *Local polynomial modelling and its applications*, Chapman et Hall, 1996.
8. J. Fan and Kreutzberger, *Automatic local smoothing for spectral density estimation*, Scand. J. Stat. **25** (1998), no. 2, 359–369.
9. G. Faÿ and Ph. Soulier, *The periodogram of an i.i.d sequence*, To appear in *Stochastic Processes and their Applications*.
10. R. Fox and M.S. Taqqu, *Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence*, Annals of Probability **13** (1985), 428–446.
11. ———, *Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence*, Probability Theory and Related Fields **74** (1987), 213–240.
12. F. Götze and C. Hipp, *Asymptotic expansions for sum of weakly dependent random vectors*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **64** (1983), 211–239.
13. E.J. Hannan and D.F. Nicholls, *The estimation of the prediction error variance*, J. Amer. Statist. Assoc. **72** (1977), 834–840.
14. W. Härdle and T. Gasser, *Robust non-parametric function fitting*, J.R. Statist. Society Ser. B **46** (1984), 42–51.
15. D. Janas and R. von Sachs, *Consistency for non-linear functions of the periodogram of tapered data*, J. of Time Series Analysis **16** (1995), 585–606.
16. R.I. Jennrich, *Asymptotic properties of non-linear least squares estimators*, Ann. Math. Statist. **40** (1969), 633–43.
17. A. Mokkadem, *Estimation consistante de l'ordre d'un processus arma*, C.R. de l'Acad. Sci. **323** (1996), 1271–1276.
18. E. Moulines and Ph. Soulier, *Broad band log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **27** (1999), no. 3, 1415–1539.
19. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory*, Oxford University Press, 1995.
20. P.M. Robinson, *Log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **23** (1995), 1043–1072.
21. M. Taniguchi, *On estimation of parameters of Gaussian stationary processes*, J. of Applied Probability **16** (1979), 575–591.
22. ———, *Minimum constrast estimation for spectral densities of stationary processes*, J. R. Statist. Soc. B **49** (1987), 315–325.
23. ———, *Higher order asymptotic theory for time series analysis*, Lecture Notes in Statistics, no. 68, Springer-Verlag, 1991.
24. M.S. Taqqu, *Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of Gaussian variables that exhibit long range dependence*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **40** (1977), 203–238.
25. C. Velasco, *Non-Gaussian log-periodogram regression*, Econometric Theory **16** (2000), 44–79.
26. R. von Sachs, *Peak-insensitive non-parametric spectrum estimation*, Journal Of Time Series Analysis **15** (1994), no. 4, 453–474.
27. A.M. Walker, *Some asymptotic results for the periodogram of a stationary times series*, J. Aust. Math. Soc. **5** (1965), 107–128.
28. C-F. Wu, *Asymptotic theory of nonlinear least squares estimation*, Annals of Statistics **9** (1981), no. 3, 501–513.

Développements d'Edgeworth pour les tableaux multidimensionnels infinis

Ce chapitre reproduit un article intitulé *Edgeworth expansions for multidimensional infinite arrays*, à soumettre.

ABSTRACT. The contribution of this paper is the proof of the validity of Edgeworth expansion for density of multidimensional triangular arrays of i.i.d random vectors of the form $\mathbf{S}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j$. It mimics the proof of Theorem 19.2 of Bhattacharya and Rao (1976) which states the validity of this development in the case of the normalized sum of n independent random variables. The errors of approximation has order $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s$ in place of $n^{-(s-2)/2}$. Application to the asymptotic expansion of the distribution of the periodogram of a long-range dependent linear process at low frequencies is fully developed. This result allows one to compute the Mean Square Error of the Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter, extending previous result of Hurvich *et al.* (1998) from Gaussian to linear framework.

5.1. Introduction

This contribution is motivated by the study of sums $\mathbf{T}_n = \sum_{t=1}^n \mathbf{V}_t X_t$ where $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a linear process and $(\mathbf{V}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ a sequence of weights in \mathbb{R}^d . In this context, the sum \mathbf{T}_n writes as a triangular array

$$\mathbf{T}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j \tag{5.1.1}$$

where $\{Z_j\}$ is an i.i.d sequence, namely the driving noise, and the weights $\mathbf{U}_{n,j}$ are related to the \mathbf{V}_t 's and to the filter coefficients (see details and applications in Section 5.4). Bhattacharya and Ranga Rao's monograph (1976, referred to as BR in the following) provides a large account on asymptotic expansions for sum $\mathbf{S}_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \mathbf{Z}_j$ of independent random vectors. García-Soidán (1998) considered triangular arrays of the form $\sum_{j=1}^n \mathbf{Z}_{n,j}$ with i.i.d random vectors on each row and under a modified Cramér's condition. An adaptation to particular triangular arrays of the form (5.1.1) is given in Chen and Hannan (1980) to get asymptotic expansion for a vector of discrete Fourier transform of Z_1, \dots, Z_n . In BR, expansions for density q_n (if any) and distribution function Q_n of \mathbf{S}_n are both obtained, the former type of expansion requiring slightly less assumptions on the distribution of the vectors \mathbf{Z}_j 's. Those conditions are relaxed by Götze and Hipp (1978), who provided asymptotic bounds for $\int f d(Q_n - \Psi_{n,s})$ for smooth or polynomial functions f , where $\Psi_{n,s}$ is a formal Edgeworth expansion of length s for \mathbf{S}_n . A first attempt to validate asymptotic expansion for sums of (weakly) dependent random vectors is taken by Götze and Hipp (1983), under conditions relaxed by Lahiri (1993). Janas and von Sachs (1995) applied their result to approximate the density of the discrete Fourier transform of a tapered linear random sequence. Translated into the particular case of linear sequences, Götze and Hipp's conditions are very stringent on the decay of the linear filter, which restrict the result to very short-range dependent processes.

In this paper, we prove the validity of the Edgeworth expansion for the density of triangular array of the generic form (5.1.1). We introduce notations and assumptions in Section 5.2. The Theorem is stated in Section 5.3. Finally, it is shown in Section 5.4 that this result applies to the study of the large sample properties of the periodogram in the short and long range dependence contexts, noticing that any vector of discrete Fourier transform of a linear process write as an array of the form (5.1.1). The approximate expression of the Mean Square Error of the Geweke and Porter-Hudak's (1983) long range parameter estimator is given as a further application.

REMARK 1. Note that (5.1.1) is a wide class of triangular arrays in the sense that there are countably many random vectors on each row, but restricted in the sense that the triangular array structure is concentrated on the deterministic $(\mathbf{U}_{n,j})$'s weighting an i.i.d. sequence which is the same on each row.

REMARK 2. As our applications require density expansions, we present our result under Assumption **(A5.1)** on the distribution of Z , namely that its characteristic function \hat{Q} belongs to some Lebesgue L_p space. We claim that they should be adaptable to expansion of distribution functions, which suffice for other applications and would hold under the weaker Cramér's condition

$$\overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} |\hat{Q}(t)| < 1. \quad (5.1.2)$$

5.2. Notations and assumptions

Let $\{Z_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables such that $\mathbb{E}Z_1 = 0$, $\mathbb{E}Z_1^2 = 1$ and $\mathbb{E}|Z_1|^s < \infty$ for some $s \geq 3$. Let \hat{Q} denote the characteristic function of Z_1 and suppose that the following assumption holds.

(A5.1) $\int_{\mathbb{R}} |\hat{Q}(t)|^p dt < \infty$ for some $p \geq 1$.

Consider the triangular array (5.1.1) where $\{\mathbf{U}_{n,j}\}$ is a d -dimensional triangular array. Define $U_n^* = \max_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|$, where $\|\cdot\|$ denote the Euclidean norm in \mathbb{R}^d . We shall assume that the weights $(\mathbf{U}_{n,j})$ satisfy **(A5.4)** and either **(A5.2)** or **(A5.3)** (which is **(A5.2)** with $V_n = I_d$).

(A5.2) $\mathbb{E}[\mathbf{T}_n] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} = (0, \dots, 0)'$ and $V_n := \text{cov}(\mathbf{T}_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}_{n,j}'$ is invertible for all sufficiently large n and such that

$$\underline{\lim}_n \lambda_n > 0 \quad \text{and} \quad \overline{\lim}_n \Lambda_n < \infty. \quad (5.2.1)$$

where λ_n and Λ_n denote the smallest and the largest eigenvalues of V_n .

(A5.3) $\mathbb{E}[\mathbf{T}_n] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} = (0, \dots, 0)'$ and $\text{cov}(\mathbf{T}_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}_{n,j}' = I_d$.

(A5.4) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^* = 0$.

As we deal with an infinite number of vectors, this last Lindeberg type condition is not sufficient. We strengthen it by **(A5.5)**. Let associate to any d -tuple $B = \{j_1, \dots, j_d\}$, $j_1 < \dots < j_d$, the square matrix $\mathbf{M}(B) = (\mathbf{U}_{n,j_1}, \dots, \mathbf{U}_{n,j_d})$. For any $t \in \mathbb{R}^d$ and any positive α , let $f_{n,\alpha}(t)$ denote the number (finite under **(A5.4)**) of indices j such that $|t' \mathbf{U}_{n,j}| \geq \alpha \|t\| U_n^*$ and put $g_{n,\alpha} = \inf_{t \in \mathbb{R}^{2m}} f_{n,\alpha}(t)$.

(A5.5) There exist positive constants C, β such that, for any k_1, \dots, k_m and all sufficiently large n , there exist $p + s$ disjoint d -tuples $B_q = \{j_{1,q}, \dots, j_{d,q}\}$, $q = 1, \dots, p$, such that

$$|\det \mathbf{M}(B_q)| > C (U_n^*)^\beta, \quad q = 1, \dots, p. \quad (5.2.2)$$

Also, for any $\epsilon \in (0, 1)$, there exist an α such that

$$\epsilon^{g_{n,\alpha}} = O((U_n^*)^{s+\beta}) \quad (5.2.3)$$

Consider another assumption which is simpler to verify than **(A5.5)**.

(A5.6) There exist some positive reals δ, c_1, c_2 such that $U_n^* < c_1 n^{-\delta}$ and

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{|j| \geq c_2 (U_n^*)^{-2}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 - \lambda_n < 0. \quad (5.2.4)$$

This assumption will be verified and used in the context of applications of Section 5.4 with $\delta = \frac{1}{2}$, because of the following Lemma. Note that obviously **(A5.6)** yields **(A4.1)**.

LEMMA 5.1. *Assumptions **(A5.6)**-**(A5.2)** imply **(A5.5)**.*

PROOF OF LEMMA 5.1. See Appendix 5.6. \square

Introduce now some notations. Our definition of the Edgeworth polynomials P_r and \tilde{P}_r is adapted to triangular arrays from Bhattacharya and Rao (1976, section 7) : Let $\{\chi_\nu\}_{|\nu| \geq 3}$ be a bounded collection of numbers, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ being a vector of non-negative integers. For any integer $r \geq 2$, define the functions

$$\bar{\chi}_r(t) := r! \sum_{|\nu|=r} \bar{\chi}_\nu(it)^\nu / \nu!$$

and write

$$\exp\left\{\sum_{r=3}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_r(t)}{r!}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{r=3}^{\infty} \frac{\bar{\chi}_r(t)}{r!}\right)^m = \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{P}_r(it, \{\chi_\nu\}_{|\nu| \geq 3}) \quad (5.2.5)$$

with

$$\tilde{P}_0 \equiv 1 \quad ; \quad \tilde{P}_r(it, \{\chi_\nu\}_{|\nu| \geq 3}) = \sum_{m=1}^r \frac{1}{m!} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m}^* \prod_{k=1}^m \frac{\chi_{\nu_k}}{(\nu_k)!} (it)^{\nu_k} \text{ for } r > 0, \quad (5.2.6)$$

where summation \sum^* is over all m -uplets of non-negative integer vectors (ν_1, \dots, ν_m) such that $3 \leq |\nu|$ and $\sum_{k=1}^m (|\nu_k| - 2) = r$. Let $\phi_V(x)$ denote the normal density in \mathbb{R}^d with mean zero and covariance matrix V , and $\hat{\phi}_V(t)$ its Fourier transform

$$\begin{aligned} \phi_V(x) &= (2\pi)^{-d/2} |\det V|^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x'V^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^d; \\ \hat{\phi}_V(t) &= \exp(-\frac{1}{2}t'Vt), \quad t \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Then we define the ‘‘polynomials’’ P_r by

$$P_r(x, V, \{\chi_\nu\}) = \left[\tilde{P}_r(-D, \{\chi_\nu\}) \right] \phi_V(x)$$

where D denotes the differentiation operator, *i.e.* $D^\nu = \partial^{|\nu|} / \partial t_1^{\nu_1} \dots \partial t_d^{\nu_d}$ and we simply denote $\phi = \phi_{I_d}$, $P_r(x, \{\chi_\nu\}) = P_r(x, I_d, \{\chi_\nu\})$. $\tilde{P}_r(it, \{\chi_\nu\})e^{-t'Vt/2}$ is the Fourier transform of $P_r(x, V, \{\chi_\nu\})\phi_V(x)$ (see BR, Lemma 7.2). Those polynomials appears naturally while developing the second characteristic function of a sum of independent random variables with covariance V and its cumulants for collection $\{\chi\}$. Let m_r and κ_r denote the moment and cumulant of order r of Z_1 , for $r \leq s$. Let $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\}$. For $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_d)' \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)' \in (\mathbb{Z}^+)^d$ and $\delta > 0$, let $\|\mathbf{U}\|$ denote the Euclidean norm of the vector \mathbf{U} , $\mathcal{B}(\delta)$ the ball $\{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| < \delta\}$, $\mathbf{U}^\alpha = \prod_{i=1}^d u_i^{\alpha_i}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $\alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$ and the partial order relation ‘‘ \leq ’’ on $(\mathbb{Z}^+)^d$ by

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^d \times (\mathbb{Z}^+)^d, \quad \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\}, \alpha_i \leq \beta_i.$$

For any vector of non-negative integers $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, $2 \leq |\nu| \leq s$ and any integer $r \geq 2$, denote respectively the average cumulants of order ν and the cumulant function of order r as

$$\bar{\chi}_{n,\nu} := \text{cum}_\nu(\mathbf{T}_n) = \kappa_{|\nu|} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j}^\nu \quad , \quad \bar{\chi}_{n,r}(t) := r! \sum_{|\nu|=r} \frac{\bar{\chi}_{n,\nu}(it)^\nu}{\nu!} \quad (5.2.7)$$

5.3. Main result

THEOREM 5.1. *Suppose that Z satisfies (A5.1) and $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$ for some integer $s \geq 3$. Assume (A5.3), (A5.4) and (A5.5) (with the same s) on the triangular weights $\{\mathbf{U}_{n,j}\}$. Then there exist a constant C depending only on the distribution of Z such that, for all sufficiently large n , the distribution of the random vector $\mathbf{T}_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j$ has a density q_n which satisfies*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^s) |q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} P_r(x, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})| < C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \quad (5.3.1)$$

COROLLARY 5.2. *Suppose that Z satisfies (A5.1) and $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$ for some integer $s \geq 3$. Assume (A5.2), (A5.4) and (A5.5) (with the same s) on the triangular weights $\{\mathbf{U}_{n,j}\}$. Then there exist a constant C depending only on the distribution of Z such that, for all sufficiently large n , the distribution of the random vector \mathbf{T}_n has a density q_n which satisfies*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^s) |q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} P_r(x, V_n, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})| < C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \quad (5.3.2)$$

REMARK 3. By Lemma 5.1, Theorem 5.1 and Corollary 5.2 remain true if one replaces (A5.5) by (A5.6).

PROOF OF THEOREM 5.1: The sketch of the proof is similar to the proof of Bhattacharya and Ranga Rao's Theorem 19.2. Let \hat{Q}_n denote the characteristic function of \mathbf{T}_n

$$\hat{Q}_n(t) := \mathbb{E}(e^{it' \mathbf{T}_n}) = \prod_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(e^{it' \mathbf{U}_{n,j} Z_j}) = \prod_{j \in \mathbb{Z}} \hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j}).$$

The existence of a density follows from the absolute summability of \hat{Q}_n : Under (A5.3), (A5.4), one can chose, for all sufficiently large n , p disjoint d -tuples of \mathbb{Z} $B_q = (j_{1,q}, \dots, j_{d,q})$, $q = 1, \dots, p$ such that $\text{rank } \mathbf{M}(B_q) = d$. Then, by Hölder inequality, p changes of variables and using (A5.1), we get

$$\begin{aligned} \int_{t \in \mathbb{R}^d} |\hat{Q}_n(t)| dt &\leq \int_{t \in \mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^p \prod_{k=1}^d |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j_{i,k}})| dt \leq \prod_{i=1}^p \left(\int_{t \in \mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j_{i,k}})|^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq \prod_{i=1}^p (|\det \mathbf{M}(B_i)|^{-1} \int_{v \in \mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d |\hat{Q}(v_k)|^p dv)^{1/p} \\ &\leq \prod_{i=1}^p (|\det \mathbf{M}(B_i)|)^{-1/p} \|\hat{Q}\|^{dp} < \infty. \end{aligned}$$

Denote by q_n the density of \mathbf{T}_n and put $f_n(x) = q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} P_r(x, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})$. The Fourier transforms of f_n and $x^\alpha f_n(x)$, $|\alpha| \leq s$ exist and write

$$\begin{aligned} \widehat{(f_n(x))}(t) &= \hat{Q}_n(t) - \sum_{r=0}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\}) e^{-\|t\|^2/2}; \\ \widehat{(x^\alpha f_n(x))}(t) &= (-i)^{|\alpha|} D^\alpha (\hat{Q}_n(t) - \sum_{r=0}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\}) e^{-\|t\|^2/2}). \end{aligned}$$

Classically, the difference between q_n and its Edgeworth expansion is estimated by the nearness of there characteristic functions. Precisely Theorem 5.1 follows from Fourier inversion

$$f \in L_1(\mathbb{R}^d) \quad \text{and} \quad \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d) \quad \Rightarrow \quad |f|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(t)| dt$$

provided that $(\widehat{f_n(x)})$ and $(x^\alpha \widehat{f_n(x)})$ have L_1 norm and

$$\int_{t \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha (\hat{Q}_n(t) - e^{-\|t\|^2/2} \sum_{r=0}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})| dt \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s$$

for $|\alpha| = 0, s$ and some constant C which only depends on the distribution of Z . This is a direct consequence of Lemmas 5.2, 5.3 and 5.4 proved in Appendix 5.5. \square

PROOF OF THE COROLLARY. For all sufficiently large n , let B_n be the symmetric square root of V_n^{-1} . The random vector $B_n \mathbf{T}_n$ writes as a triangular array which weights satisfy **(A5.3)**. **(A5.4)** and **(A5.5)** are also easily checked, using (5.2.1). By Theorem 5.1, $B_n \mathbf{T}_n$ have a density $q_n^{(0)}$ satisfying (5.3.1) with the cumulants of $B_n \mathbf{S}_n$, $\{\bar{\chi}_{\nu,n}^{(0)}\}$, for weights of the Edgeworth polynomials. It follows that \mathbf{T}_n also have a density $q_n(x) = |\det B_n| q_n^{(0)}(B_n x)$ and (5.3.2) follows using the properties of Edgeworth polynomials and (5.2.1) again. \square

LEMMA 5.2. *There exists positive constants δ_1 and c_1 such that for all triangular weights $(\mathbf{U}_{n,j})$ satisfying **(A5.3)**, **(A5.4)** and for all $t \in \mathcal{B}(\delta_1/U_n^*)$, and all $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $0 \leq |\alpha| \leq s$*

$$|D^\alpha (\exp(\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\bar{\chi}_{n,r}(t)}{r!}) - e^{-\|t\|^2/2} \sum_{r=0}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\}))| \leq c_1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s (1 + \|t\|^{2s}) e^{-\|t\|^2/4} \quad (5.3.3)$$

LEMMA 5.3. *There exists positive constants δ_2 and c_2 such that for all triangular weights $(\mathbf{U}_{n,j})$ satisfying **(A5.3)**, **(A5.4)** and for all $t \in \mathcal{B}(\delta_2/U_n^*)$, and all $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $0 \leq |\alpha| \leq s$*

$$|D^\alpha (\hat{Q}_n(t) - \exp(\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\bar{\chi}_{n,r}(t)}{r!}))| \leq c_2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s R(t) e^{-\|t\|^2/4} \quad (5.3.4)$$

where R is a polynomial in t with bounded coefficients uniformly in n .

LEMMA 5.4. *Assume that the distribution of Z_1 satisfies **(A5.1)** For any positive δ , there exists a positive constant c_3 such that, for all triangular weights $(\mathbf{U}_{n,j})$ satisfying **(A5.3)**, **(A5.4)** and **(A5.5)** and all α , $|\alpha| = 0$ or $|\alpha| = s$*

$$\int_{\|t\| > \delta/U_n^*} |D^\alpha (\hat{Q}_n(t) - e^{-\|t\|^2/2} \sum_{r=0}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\}))| \leq c_3 \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \quad (5.3.5)$$

Comments on these three lemmas. Lemma 5.2, analogous to BR's Lemma 9.8, follows from algebraic calculations. It shows that the two left-hand-side quantities of (5.3.3) and there derivatives get closer to each other at the wanted rate $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s$ for small values of the variable in the characteristic function domain, the bounding function of t being summable. Those two quantities are the characteristic functions of two signed measures of \mathbb{R}^d , the second of which being the formal Edgeworth expansion of the distribution of \mathbf{T}_n and the first one being a more tractable approximation in the second characteristic functions domain, because of the exponential form. Indeed, Lemma 5.3 shows it is close to $\hat{Q}_n(t)$ in a certain sense, for small values of t . Lemma 5.4 bounds the integrated difference outside of any ball of the form $\mathcal{B}(\delta/U_n^*)$, thanks to smallness assumptions **(A5.4)** and **(A5.5)**.

5.4. Applications

In what follows, X is a finite variance linear sequence admitting the following representation $X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{t-j} Z_j$ where Z is an i.i.d sequence. It is assumed that the spectral density of X , denoted f , is bounded away from zero. We shall consider vectors of sine and cosine transform

normalized by the spectral density. Precisely, let $x_k = 2k\pi/n, k = 1, \dots, [(n-1)/2]$ denote the Fourier frequencies of the interval $(0, \pi)$ and put

$$\mathbf{S}_n = (2\pi n)^{-1/2} \mathbf{F}_n \sum_{t=1}^n X_t \mathbf{C}_t \quad (5.4.1)$$

where $\mathbf{k} = (k(1), \dots, k(m))$ is a m -uplet of distinct fixed integers in $\{1, \dots, [(n-1)/2]\}$,

$$\mathbf{C}_t = (\cos(x_{k(1)}t), \sin(x_{k(1)}t), \dots, \cos(x_{k(m)}t), \sin(x_{k(m)}t)),$$

and \mathbf{F}_n is the $2m$ -dimensional diagonal matrix with diagonal elements

$$(f(x_{k(1)})^{-1/2}, f(x_{k(1)})^{-1/2}, \dots, f(x_{k(m)})^{-1/2}, f(x_{k(m)})^{-1/2}).$$

X being linear, \mathbf{S}_n writes as (5.1.1),

$$\mathbf{S}_n = (2\pi n)^{-1/2} \mathbf{F}_n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{t=1-j}^{n-j} \psi_t \mathbf{C}_{t+j} \right) Z_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{U}_{n,j} Z_j$$

with

$$\mathbf{U}_{n,j} = (2\pi n)^{-1/2} \mathbf{F}_n \sum_{t=1-j}^{n-j} \psi_t \mathbf{C}_{t+j}. \quad (5.4.2)$$

Note that \mathbf{F}_n is bounded if and only if X is short range dependent. To our best knowledge, asymptotic expansions for distributions or densities of such vectors of Fourier transform have been used and validated in few cases, including Janas and von Sachs (1995) paper, but for tapered data and sequences which linear filter coefficients decay exponentially. In the following, we prove that such expansions are valid in the larger contexts of short dependence (Section 5.4.1) and long dependence (Section 5.4.2). We show how this former result applies to the long memory parameter estimation (Section 5.4.3).

5.4.1. Short range dependence. Assume here that $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{1/2} |\psi_j| < \infty$. The covariance matrix of \mathbf{S}_n satisfies $V_n := \text{cov}(\mathbf{S}_n) = \frac{1}{2} I_{2m} + A_n$ where A_n is a matrix with entries that can be bounded uniformly in k_1, \dots, k_m by $cn^{-1/2}$ on the diagonal and cn^{-1} outside of the diagonal, for some positive constant c (see *e.g.* Theorem 10.3.2 in Brockwell and Davis 1991). Then the largest and the smallest eigenvalues of V_n go to $\frac{1}{2}$ and **(A5.2)** holds true, uniformly. It is easily seen that $U_n^* < c/\sqrt{n}$ for some constant c that does not depend on k_1, \dots, k_m . Also, for any positive constant $c_2 > 1$,

$$\sum_{|j| \geq c_2 n} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 \leq cn^{-1} \|\mathbf{F}_n\|^2 \sum_{|j| \geq c_2 n} \left| \sum_{t=1}^n \cos(x_{k_t} t) \psi_{t-j} \right|^2 \leq c \sum_{|j| \geq (c_2-1)n} |j| |\psi_j|^2 = o(1)$$

Then **(A5.6)** is satisfied by the array $\mathbf{U}_{n,j}$. Applying Corollary 5.2 proves the validity of the Edgeworth expansion (5.3.2) for the density of \mathbf{S}_n and Theorem 5.3 follows.

THEOREM 5.3. *Let $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a linear proces such that*

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{t-j} Z_j \quad , \quad Z \text{ i.i.d.}, \quad \mathbb{E}[Z_1] = 0, \quad \mathbb{E}[Z_1^2] < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{1/2} |\psi_j| < \infty \quad (5.4.3)$$

*Assume that Z satisfies **(A5.1)** and $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$ for some integer $s \geq 3$. Let \mathbf{S}_n be the random vector of cosine and sine transform of X_1, \dots, X_n defined by (5.4.1) Put $V_n = \text{cov}(\mathbf{S}_n)$ and*

$B_n = B'_n$, $B_n^2 = V_n^{-1}$. Then, for all sufficiently large n , the distribution of the random vector \mathbf{S}_n have a density q_n such that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{2m}} (1 + \|x\|^s) |q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} P_r(x, V_n, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})| < Cn^{-(s-2)/2} \quad (5.4.4)$$

for some constant C uniform in \mathbf{k} and where the $\bar{\chi}_{n,\nu}$'s are the cumulants of $B_n \mathbf{S}_n$.

This is a wider setting than the one used by Janas and von Sachs (1995). As those authors used arguments from Götze and Hipp (1983), they had to impose an exponential decay of the filter coefficients, *i.e.* $|\psi_j| < C\rho^{-|j|}$ for some $\rho \in (0, 1)$. Here it is only required that $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{1/2} |\psi_j| < \infty$. Although this operations destroys the orthogonality of the sine and cosine sequences at Fourier frequencies, a data taper may be applied to the observations as soon as it is proved that condition **(A5.5)** remains true in this case.

5.4.2. Long range dependence. The distribution of the discrete Fourier transform in the long range dependence context have been studied by many authors (*e.g.* Künsch, 1986 ; Robinson 1995). Following Yajima (1989), Pham and Guegan (1994) derives the joint asymptotic normality of the Fourier coefficients for tapered data, under a cumulant summability condition weaker than the linear assumption. However, their result holds for moving frequencies $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ that satisfy $n|\lambda_i| \rightarrow \infty, n|\lambda_i \pm \lambda_j| \rightarrow \infty, 1 \leq i < j \leq k$ as $n \rightarrow \infty$, which excludes low Fourier frequencies. Actually, the Fourier transform at low Fourier frequencies are known not to be asymptotically independent (not even uncorrelated, see below) — this is a typical long-range memory processes feature. Robinson (1995), Moulines and Soulier (1999) state some large sample properties for the normalized discrete Fourier transform, some of which are tied to Gaussian assumption on X . By Corollary 5.2, we prove the validity of the Edgeworth expansion for a normalized vector of Fourier coefficients of a linear process. Assume

(B5.1) X is a strictly stationary strongly dependent causal linear process which spectral density is bounded away from zero and which admits the following representation

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_{t-j} Z_j \quad , \quad Z \text{ i.i.d.}, \quad \mathbb{E}[Z_1] = 0, \quad \mathbb{E}[Z_1^2] < \infty \quad (5.4.5)$$

with $\psi_j = 0$ if $j \leq 0$ and $\psi_j = j^{-\gamma} L(j)$ if $j > 0$, $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, L a slowly varying function (*i.e.* a positive measurable function satisfying $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t\lambda)/L(\lambda) = 1$ for all $\lambda > 0$) and quasi-monotone.

REMARK 4. $\gamma > 1/2$ implies finite variance of X_t without further assumption on L . Hall (1992) provides an Edgeworth expansion for the empirical mean of such linear processes which leading term is of order $n^{-1/2}$. The case $\gamma = 1/2$ is not treated here.

Note that, by Bojanic and Karamata (1963, see Theorem 4.3.2 in Bingham *et al.* 1987)

$$\begin{aligned} \text{as } x \rightarrow 0+, \quad \sum_{t=1}^{\infty} L(t)t^{-\gamma} \sin tx &\sim \frac{1}{2}\pi x^{\gamma-1} L(1/x) / \{\Gamma(\gamma) \sin \frac{1}{2}\pi\gamma\}, \\ \sum_{t=1}^{\infty} L(t)t^{-\gamma} \cos tx &\sim \frac{1}{2}\pi x^{\gamma-1} L(1/x) / \{\Gamma(\gamma) \cos \frac{1}{2}\pi\gamma\}, \\ f(x) &\sim x^{2(\gamma-1)} L^2(1/x) \Gamma^2(1-\gamma) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

where Γ is the *Gamma* function defined by $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ for all $t > 0$.

THEOREM 5.4. Assume **(B5.1)** on the process X , with Z satisfying **(A5.1)** and $\mathbb{E}|Z|^s < \infty$ for some integer $s \geq 3$. Let \mathbf{S}_n be the random vector of cosine and sine transform of X_1, \dots, X_n defined by (5.4.1) Put $V_n = \text{cov}(\mathbf{S}_n)$ and $B_n = B'_n$, $B_n^2 = V_n^{-1}$. Let a_n be any positive sequence

of integers satisfying $a_n/n \rightarrow 0$. Then, for all sufficiently large n , the distribution of the random vector \mathbf{S}_n have a density q_n such that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{2m}} (1 + \|x\|^s) |q_n(x) - \sum_{r=0}^{s-3} P_r(x, V_n, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})| < Cn^{-(s-2)/2} \quad (5.4.7)$$

for some constant C uniform in the d -uplet $\mathbf{k} = (k(1), \dots, k(m))$ of distinct integer in $\{1, \dots, a_n\}$, and where the $\bar{\chi}_{n,\nu}$'s are the cumulants of $B_n \mathbf{S}_n$.

PROOF OF THEOREM 5.4. Expansion (5.4.7) holds true by Corollary 5.2 and the remark following it if one can prove that the weights $\mathbf{U}_{n,j}$ defined in (5.4.2) satisfy **(A5.2)** and **(A5.6)** with $\delta = 1/2$ uniformly with respect to \mathbf{k} . This is the purpose of the two Lemmas that follow. \square

LEMMA 5.5. Define the triangular array of weights $\mathbf{U}_{n,j}$ by (5.4.2). Under the assumptions of Theorem 5.4,

$$0 < \lambda^* \leq \lambda_n \leq \Lambda_n \leq \Lambda^* < \infty \quad (5.4.8)$$

for some strictly positive constants λ^*, Λ^* that may be chosen uniformly in the d -uplet $\mathbf{k} = (k(1), \dots, k(m))$ of distinct integer in $\{1, \dots, a_n\}$.

LEMMA 5.6. There exist some positive reals c_1, c_2 which may be chosen independently of the d -uplet \mathbf{k} such that $U_n^* < c_1 n^{-1/2}$ and

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{|j| \geq c_2 n} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 - \lambda_n < 0. \quad (5.4.9)$$

PROOF OF LEMMA 5.5. Let V_n be the covariance matrix of \mathbf{S}_n . For $k = 1, \dots, a_n$, define $\omega_{n,k} = (2\pi n f(x_k))^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t e^{itx_k}$ and $c_{n,k} = (2\pi n f(x_k))^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t \cos(x_k t)$, $s_{n,k} = (2\pi n f(x_k))^{-1/2} \sum_{t=1}^n X_t \sin(x_k t)$. It is proved in Moulines and Soulier (1999) that there exist a constant c such that, for $1 \leq k < j < n/2$,

$$|\mathbb{E}(\omega_{n,k} \omega_{n,j})| \leq c \frac{\log j}{k^{1-d} j^d}, \quad |\mathbb{E}(\omega_{n,k} \bar{\omega}_{n,j})| \leq c \frac{\log j}{k^{1-d} j^d}, \quad (5.4.10)$$

$$\mathbb{E}(|I_{n,k}/f(x_k) - 1|) \leq c \frac{\log(k+1)}{k}. \quad (5.4.11)$$

The authors assume $f(x) \sim Cx^{-2d}$ as $x \rightarrow 0$, but those results still hold true in our context ($f(x) \sim CL^2(1/x)x^{-2d}$).

Consider first Λ_n , the largest eigenvalue of V_n which is bounded by

$$\text{tr}(V_n) = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}(I_{n,k(i)})/f(x_{k(i)}).$$

Then, by (5.4.11), Λ_n is bounded by some constant which may be chosen uniformly with the d -uplet \mathbf{k} of distinct integer of $\{1, \dots, a_n\}$.

Consider now $\lambda_n = \lambda_{\min}(V_n)$. For $1 \leq k < j \leq a_n$, define

$$A_{n,k} := \text{cov}((c_{n,k}, s_{n,k})) \\ B_{n,k,j} := \mathbb{E}((c_{n,k}, s_{n,k})'(c_{n,j}, s_{n,j})).$$

Using (5.4.10), for all $(k, j) \in \{1, \dots, a_n\}^2, k < j$

$$A_{n,k} = \frac{1}{2} I_2 + O\left(\frac{\log k}{k}\right) \quad \text{and} \quad B_{n,k,j} = O\left(\frac{\log j}{k^{1-d} j^d}\right). \quad (5.4.12)$$

First consider the case $m = 1$. Then $V_n = A_{n,k(1)}$. By (5.4.10), there exists an integer K_0 such that the smallest eigenvalue of V_n is bounded away from $1/4$ as soon as $k \geq K_0$. Adapting

the proof of Lemma 3 in Moulines and Soulier (1999), all the V_n 's associated to $k \in \{1, \dots, K_0\}$ converge to the same invertible matrix. The smallest eigenvalue of those V_n 's is then bounded away from zero uniformly in $k \in \{1, \dots, a_n\}$. Consider now the case $m = 2$, so that

$$V_n = \begin{pmatrix} A_{n,k} & B_{n,k,j} \\ B_{n,j,k} & A_{n,j} \end{pmatrix} \quad (5.4.13)$$

with, say $1 \leq k < j$. Using the same arguments the spectral radius of V_n is bounded away from zero as soon as $j \geq K_0$ for a large enough integer K_0 . Let μ_2 be a lower bound of their smallest eigenvalues. Take now $(k, j) \in \{1, \dots, K_0\}^2$. The V_n associated with this (k, j) converges to an invertible matrix, say $M_{k,j}$. Let $\mu_1 = \inf \lambda_{\min}(M_{k,j})$, and note that $\mu_1 > 0$. Taking $\min(\frac{1}{2}\mu_1, \mu_2)$ provides a lower bound for the smallest eigenvalues of all the V_n 's, for n sufficiently large. This result is shown to hold true in the general case by induction on the number of frequency m , along the same lines. \square

PROOF OF LEMMA 5.6. The first step of the proof is to show that $U_n^* := \max_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\| \leq C/\sqrt{n}$ for some positive constant C uniform in the $k(j), j = 1, \dots, m$. It will follow from $\max_{j \in \mathbb{Z}} |U_{n,j}^{(p)}| \leq C/\sqrt{n}$ for some constant C and any $p = 1, \dots, 2m$. Put $k = k_{[(p+1)/2]}$, $x = x_k$ and write

$$\sqrt{n} \max_{j \in \mathbb{Z}} |U_{n,j}^{(p)}| \leq (2\pi f(x))^{-1/2} \left[\max_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{t=1-j}^{n-j} \psi_t \cos(xt) \right| + \max_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{t=1-j}^{n-j} \psi_t \sin(xt) \right| \right].$$

Using (5.4.6), it suffices to show that there exist some constant C such that

$$\left| \sum_{t=u+1}^{\infty} \psi_t \cos(xt) \right| \leq CL(1/x)x^{\gamma-1} \quad (5.4.14)$$

for all $u \in \mathbb{N}$ and uniformly for $x \in (1/n, a_n/n)$. The bound for the sine sum may be proved along the same lines that follow. Suppose $u > 1/x$ and define $U_t(x) = \sum_{j=t}^{\infty} j^{-\gamma} \cos jx$. Using Abel's transformation (twice), $|U_t(x)| < Ct^{-\gamma}/x$ and

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=u+1}^{\infty} L(t)t^{-\gamma} \cos(xt) \right| &\leq \sum_{t=u+2}^{\infty} |L(t) - L(t-1)| |U_t(x)| + L(u+1) |U_{u+1}(t)| \\ &\leq Cx^{-1} \left(\int_{u+1}^{\infty} t^{-\gamma} |dL(t)| + L(u+1)(u+1)^{1-\gamma} \right). \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

for n (then x^{-1}) large enough. The first term of (5.4.15) is bounded using quasi-monotony of L which implies that its right-gauge functions are bounded (see Corollary 2.8.2 in Bingham *et al.* 1987)

$$\exists M \geq 0, \int_{u+1}^{\infty} t^{-\gamma} |dL(t)| \leq M(u+1)^{-\gamma} L(u+1).$$

This latter bound and the second term of (5.4.15) are both smaller than $CL(1/x)x^{\gamma-1}$ as the function $L(v)v^{-\gamma}$ is decreasing for some v_0 and $v \geq v_0$. This result holds for $L(v)v^{-\eta}$ and any $\eta > 0$ as a consequence of a representation theorem for quasi-monotone slowly varying functions, *e.g.* Corollary 2.7.4. in Bingham *et al.* (1987). (5.4.14) follows in this case. Take now $1 \leq u \leq 1/x$ and bound the LHS of (5.4.14) by

$$\left| \sum_{t=u+1}^{\infty} \psi_t \cos(xt) \right| \leq \left| \sum_{t=1}^{\infty} \psi_t \cos(xt) \right| + \left| \sum_{t=1}^u \psi_t \cos(xt) \right|.$$

The first term is bounded by $CL(1/x)x^{\gamma-1}$ by Bojanic and Karamata's result (5.4.6). Same arguments as above bound the second term by $Cu^{-\gamma+1}L(u) \leq Cx^{\gamma-1}L(1/x)$.

$$\sum_{t=1}^{u-1} |L(t) - L(t+1)| |V_t(x)| + L(u)V_u(x) \leq C \int_0^u t^{-\gamma+1} |dL(t)| + L(u)u^{-\gamma+1}$$

with $V_t(x) = \sum_{j=1}^t j^{-\gamma} \cos xt$, $|V_t(x)| \leq t^{-\gamma+1}$.

Prove now that (5.4.9) holds true. As λ_n is bounded away from zero uniformly in \mathbf{k} , it only needs to show that choosing c_2 large enough makes $\sum_{j \geq c_2 n} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2$ arbitrary small, say smaller than some $\epsilon > 0$ which does not depend on \mathbf{k} . It suffices to show that there exists such a number ϵ such that $\sum_{j \geq c_2 n} |U_{n,j}^{(p)}|^2 \leq \epsilon/2m$ for $p = 1, \dots, 2m$ and some constant c_2 . Write $|\sum_{t=j}^{j+n} L(t)t^{-\gamma} \cos(x(t+j))|^2 \leq CL^2(u)u^{-2\gamma}/x^2$. As L^2 is quasi monotone slowly varying

$$\sum_{j \geq c_2 n} |U_{n,j}^{(p)}|^2 \leq Cn^{-1}L^2(1/x)x^{-2\gamma} \sum_{j \geq c_2 n} L^2(j)j^{-2\gamma} \leq Cc_2^{1-2\gamma}k^{-2\gamma}L^2(c_2n)/L^2(1/x). \quad (5.4.16)$$

as another consequence of Corollary 2.7.4. in Bingham *et al.* (1987) : like L , L^2 is quasi-monotone and slowly varying, and then $L^2(v)v^{-\eta}$ is also eventually vanishing for all $\eta > 0$.

L is slowly varying, then, by Karamata representation Theorem (see *e.g.* Th.1.2 in Seneta, 1976), $L(t)$ writes $Q(t) \exp(\int_{t_L}^t \frac{\rho(s)}{s} ds)$ for some $t_L > 0$ and all $t > t_L$, a bounded measurable function $Q(t)$ with limit $Q_0 > 0$ at infinity and a continuous function ρ vanishing at infinity. It follows that

$$|L^2(c_2n)/L(1/x)| \leq C \exp\left(\int_{1/x}^{c_2n} \frac{\rho(s)}{s} ds\right) \leq C(c_2nx)^{\max_{s \in [1/x, c_2n]} \rho(s)} \leq C_\eta k^\eta c_2^\eta$$

for any positive η and n sufficiently large as $\rho \rightarrow 0$ and $1/x \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. Choosing $0 < \eta < 2\gamma - 1$ yields that (5.4.16) is smaller than any $\epsilon > 0$ uniformly in k for large enough c_2 . \square

5.4.3. The Mean Square Error (MSE) of the Geweke and Porter-Hudak's estimator of the long range dependance parameter. We consider the Geweke and Porter-Hudak's (1983) estimator of the memory parameter of a long-memory stationary process and a modified version proposed by Robinson (1995). Both amount to regress linearly the log-periodogram on the logarithmic function at very-low frequencies (frequencies of order $1/n$) where the spectral density as a power law singularity. The estimated slope of this least-squares linear regression defines \hat{d} . The periodogram at Fourier frequencies is defined as follows

$$I_{n,k} = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{ix_k t} \right|^2$$

Geweke and Porter-Hudack built an estimator \hat{d}^{GPH} of d on the first m periodogram ordinates with fixed m . Assuming that the process is Gaussian, Robinson proved consistency and asymptotic normality for a modified estimator \hat{d} based on the periodogram ordinates I_j in a range $j \in [l, m]$ with $l, m \rightarrow \infty, l/m \rightarrow 0$, and $m/n \rightarrow 0$. Still under Gaussian assumption, Hurvich *et al.* (1998) computed the Mean Square Error $\mathbb{E}(\hat{d} - d)^2$ of \hat{d} as a function of the truncation point m , and exhibited a not surprising bias-variance tradeoff, optimized for m of order $O(n^{4/5})$. Dropping Gaussian assumption, Velasco (1999) used a Bartlett-like technique to prove consistency of \hat{d} for a range $[l, m]$ such that

$$\frac{\log m}{l} + \frac{l \log^2 n}{m} + \frac{m}{n} + \frac{\log m \log^2 n}{m} \rightarrow 0$$

which requires that the number of trimmed low frequencies (l) grows to infinity. But as the Bartlett decomposition forbids any control on the moments of the log-periodogram (see the section

Problématique in the introduction chapter of this document), no second moment convergence may be proved, and the mean-square error may not be expressed, *a fortiori*. We show in the following that Theorem 5.1 allows one to override the Gaussian assumption and the trimming of low frequencies and enables to compute the MSE in this context. We use a slightly different definition of the “short-range part” f^* of the spectral density f

(B5.2) The spectral density f of $\{X_t\}$ satisfies:

$$f(x) = x^{-2d} f^*(x)$$

where $0 < d < 1/2$ where f^* is positive and three times differentiable on $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, $f^{*'}(0) = 0$ and such that $f^{*''}$ and $f^{*'''}$ are bounded on a neighborhood of zero.

REMARK 5. **(B5.2)** together with **(B5.1)** implies that $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = L_0 > 0$, by (5.4.6).

Put $Y_{n,j} = \log I_{n,j} + \mathcal{E}$ where \mathcal{E} is Euler’s constant, $\epsilon_{n,j} := Y_{n,j} - \log f(x_j)$ and define, for possibly moving boundaries l and m

$$\hat{d} = -\frac{\sum_{j=l}^m L_{n,j} Y_{n,j}}{2 \sum_{j=l}^m L_{n,j}^2} \quad (5.4.17)$$

with $L_{n,j} = \log |x_j| - (m - l + 1)^{-1} \sum_{k=l}^m \log |x_k|$ for $j = 1, \dots, n/2 - 1$ and $S_{xx} = \sum_{j=l}^m L_{n,j}^2$. Assuming

(B5.3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/m + m \log(m)/n = 0$

it is proved in Hurvich and Beltrao (1994) that $S_{xx} = m + o(m)$ and $L_{n,j} = O(\log m)$. Having $1/m + m/n \rightarrow 0$, this regression is performed with a increasing number of data on a interval which degenerates to zero, and \hat{d} is the a narrow-band estimate of d , to be opposed to the broad-band semi-parametric approach described in Moulines and Soulier (1999). As $Y_{n,j} = \epsilon_{n,j} - 2d \log x_j + \log f^*(x_j)$, it follows that

$$\hat{d} - d = -\frac{1}{2S_{xx}} \sum_{j=l}^m L_{n,j} \epsilon_{n,j} - \frac{1}{2S_{xx}} \sum_{j=l}^m L_{n,j} \log f^*(x_j)$$

Then, the mean-square error of \hat{d} writes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(d - \hat{d})^2 &= \frac{1}{4S_{xx}^2} \sum_{j=1}^m L_{n,j}^2 \mathbb{E}(\epsilon_{n,j}^2) + \frac{1}{2S_{xx}^2} \sum_{1 \leq k < j \leq m} L_{n,k} L_{n,j} \mathbb{E}(\epsilon_{n,k} \epsilon_{n,j}) \\ &\quad + \frac{1}{4S_{xx}^2} \sum_{j,k=1}^m L_{n,j} L_{n,k} \mathbb{E}(\epsilon_{n,j}) f^*(x_k) + \left(\frac{1}{2S_{xx}} \sum_{j=1}^m L_{n,j} f^*(x_j) \right)^2 \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Assumptions on f^* make the last (deterministic) term of (5.4.18) equal to $\frac{4\pi^4}{81} \left\{ \frac{f^{*''}(0)}{f^*(0)} \right\} \frac{m^4}{n^4} (1 + o(1))$ (see Hurvich *et al.* (1998), Lemma 1). The treatment of the other terms are more involved, since the $\epsilon_{n,j}$ ’s are not i.i.d, not even unbiased neither asymptotically uncorrelated. Lemma 5.7 derives from (5.4.18) and the expressions of $\mathbb{E}^0(\epsilon_{n,j})$, $\text{var}^0(\epsilon_{n,j})$ and $\mathbb{E}^0(\epsilon_{n,j} \epsilon_{n,k})$ for $1 \leq j < k < n/2$ (the exponent “0” reads “under gaussian assumption”).

LEMMA 5.7 (Hurvich *et al.* (1998)). *Under assumptions (B5.2) and (B5.3), and assuming that Z is Gaussian*

$$\mathbb{E}(d - \hat{d})^2 = \frac{4\pi^4}{81} \left\{ \frac{f^{*''}(0)}{f^*(0)} \right\} \frac{m^4}{n^4} + \frac{\pi^2}{24m} + O \left\{ \frac{m(\log^3 m)}{n^2} \right\} + o\left(\frac{m^4}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right). \quad (5.4.19)$$

Edgeworth expansions arguments extend those expressions up to a multiplying factor $(1 + O(n^{-1/2}))$ to non-Gaussian linear processes. The validity of the Edgeworth expansion follows from Theorem 5.4. For example, consider the second term of the RHS of (5.4.18), which is bounded by

$$C \frac{\log^2 m}{m^2} \sum_{j=l+1}^m \sum_{k=l}^j |\mathbb{E}(\epsilon_{n,j} \epsilon_{n,k})|. \quad (5.4.20)$$

Let $\mathbf{S}_n = \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_t \cos x_j t}{\sqrt{2\pi n f(x_j)}}, \frac{\sum_{t=1}^n X_t \sin x_j t}{\sqrt{2\pi n f(x_j)}}, \frac{\sum_{t=1}^n X_t \cos x_k t}{\sqrt{2\pi n f(x_k)}}, \frac{\sum_{t=1}^n X_t \sin x_k t}{\sqrt{2\pi n f(x_k)}} \right)'$. If \mathbf{S}_n has a density q_n

$$\mathbb{E}(\epsilon_{n,j} \epsilon_{n,k}) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} h(\mathbf{x}) q_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.4.21)$$

with $h(\mathbf{x}) = (\log(x_1^2 + x_2^2) + \mathcal{E})(\log(x_3^2 + x_4^2) + \mathcal{E})$ for $1 \leq k < j \leq n$. Then, under assumption that Z has five finite moments, it follows from Theorem 5.4 that q_n admits a second order asymptotic expansion such that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^4} (1 + \|x\|^5) |q_n(x) - \phi_{V_n}(x) - P_1(V_n^{-1/2} x, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\}) \phi_{V_n}(x) \quad (5.4.22)$$

$$- P_2(V_n^{-1/2} x, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\}) \phi_{V_n}(x)| < cn^{-3/2} \quad (5.4.23)$$

where the constant c does not depend on (k, j) . Then, it follows from (5.4.21) and (5.4.22) that

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}(\epsilon_{n,j} \epsilon_{n,k}) - \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} h_{n,k,j}(\mathbf{x}) \phi_{V_n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} h_{n,k,j}(\mathbf{x}) P_1(\mathbf{x}) \phi_{V_n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} h_{n,k,j}(\mathbf{x}) P_2(\mathbf{x}) \phi_{V_n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ & \quad = \left| \mathbb{E}(\epsilon_{n,j} \epsilon_{n,k}) - I_1 - I_2 - I_3 \right| \leq Cn^{-5/2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \frac{|h_{n,k,j}(\mathbf{x})|}{1 + \|\mathbf{x}\|^5} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

The integral of the RHS is finite and I_3 is bounded by Cn^{-1} . P_1 and P_2 are polynomials which coefficients are bounded by $Cn^{-1/2}$ and Cn^{-1} uniformly in j, k . Moreover, by definition of Edgeworth polynomials, $P_1(\mathbf{x})$ is a sum of polynomials of \mathbf{x} which are all odd w.r.t one of the coordinates of \mathbf{x} , thus I_2 would vanish if V_n was diagonal. Using this remark, let D_n be the diagonal matrix of diagonal elements of V_n^{-1} , so that $\|V_n^{-1} - D_n\| = O(\log^2 j/k^2)$ and write

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} h_{n,k,j}(\mathbf{x}) P_1(\mathbf{x}) [\phi_{V_n}(\mathbf{x}) - |(2\pi)^d \det V_n|^{-1/2} e^{-x' D_n x/2}] d\mathbf{x} \\ &= |(2\pi)^d \det V_n|^{-1/2} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} h_{n,k,j}(\mathbf{x}) P_1(\mathbf{x}) e^{-x' D_n x/2} [\exp(-\mathbf{x}'(V_n^{-1} - D_n)\mathbf{x}/2) - 1] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Noting that

$$\begin{aligned} |\exp(\mathbf{x}'(V_n^{-1} - D_n)\mathbf{x}/2) - 1| &\leq \|V_n^{-1} - D_n\| \|\mathbf{x}\|^2 \exp(-\mathbf{x}'(V_n^{-1} - D_n)\mathbf{x}/2), \\ \|V_n^{-1} - D_n\| &\leq \log^2 j/k^2, \end{aligned}$$

and

$$\left| \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} h_{n,k,j}(\mathbf{x}) P_1(\mathbf{x}) \|\mathbf{x}\|^2 e^{-x' V_n^{-1} x/2} d\mathbf{x} \right| < Cn^{-1/2},$$

we get $|I_2| \leq Cn^{-1/2} \log^2 j/k^2$. By a similar argument, we get $|I_1 - \text{cov}^0(\epsilon_{n,j}, \epsilon_{n,k})| \leq n^{-1/2} \log^2 j/k^2$ and finally

$$\max_{1 \leq j < k \leq m} |\text{cov}(\epsilon_{n,j} \epsilon_{n,k}) - \text{cov}^0(\epsilon_{n,j} \epsilon_{n,k})| < Cn^{-1/2} \log^2 j/k^2.$$

A straightforward adaptation of the proof of Lemma 5.7 yields to Proposition 5.5.

PROPOSITION 5.5. Under assumptions **(B5.1)**, **(B5.2)**, **(B5.3)** and $\mathbb{E}|Z|^5 < \infty$

$$\mathbb{E}(d - \hat{d})^2 = \frac{4\pi^4}{81} \left\{ \frac{f^{*''}(0)}{f^*(0)} \right\} \frac{m^4}{n^4} + \frac{\pi^2}{24m} + O \left\{ \frac{m(\log^3 m)}{n^2} \right\} + o\left(\frac{m^4}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

as in the Gaussian case.

REMARK 6. A by-product of this proposition is the optimal rate of growth for m under our assumptions, which is $m \sim n^{4/5}$. Using a different modelization of f^* around zero would yield another ‘‘bias term’’, and then another optimal rate for m .

REMARK 7. The density of \mathbf{S}_n is expanded up to order n^{-1} because, for an order s , one need to have $\int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \log(x_1^2 + x_2^2) \log(x_3^2 + x_4^2) (1 + \|\mathbf{x}\|^s)^{-1} d\mathbf{x} < \infty$ which holds for $s \geq 5$. But the $O(n^{-1/2})$ term yet does not vanish.

5.5. Appendix : Proof of Lemmas 5.2-5.4

Proof of Lemma 5.2. Put $g_n(t) = \exp(\sum_{r=3}^{s-1} \bar{\chi}_{n,r}(t)/r!) - \sum_{r=0}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}_{n,\nu}\})$ so that the left-hand-side of (5.3.3) is $|D^\alpha(g_n(t)e^{-\|t\|^2/2})|$. For $0 \leq \beta \leq \alpha$, $|D^{\alpha-\beta}(e^{-\|t\|^2/2})| \leq c(\alpha - \beta)(1 + \|t\|^{|\alpha-\beta|})e^{-\|t\|^2/2}$ and α

$$\begin{aligned} |D^\alpha(e^{-\|t\|^2/2}g_n(t))| &= \left| \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} c(\alpha, \beta)(1 + \|t\|^{|\alpha-\beta|}) \exp(-\|t\|^2/2) D^\beta g_n(t) \right| \\ &\leq c(\alpha)(1 + \|t\|^s) \exp(-\|t\|^2/2) \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} |D^\beta g_n(t)| \end{aligned}$$

Then it suffices to prove that, for all β , $0 \leq \beta \leq \alpha$, and $\|t\| \leq \delta/U_n^*$

$$|D^\beta g_n(t)| \leq c(\beta) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right) (1 + \|t\|^s) \exp(\|t\|^2/4) \quad (5.5.1)$$

Define the truncated cumulant family $\bar{\chi}'_{n,\nu} = \bar{\chi}_{n,\nu}$ if $|\nu| \leq s-1$ and $\bar{\chi}'_{n,\nu} = 0$ otherwise. Then

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}'_{n,\nu}\}) - \sum_{r=0}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}'_{n,\nu}\}) = \sum_{r=s-2}^{\infty} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}'_{n,\nu}\}) \\ &= \sum_{r=s-2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum^* \left[\prod_{k=1}^m \frac{\bar{\chi}_{n,\nu_k}(it)^{\nu_k}}{\nu_k!} \right] = \sum_{r=s-2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m}^* (it)^{\sum_{k=1}^m \nu_k} \prod_{k=1}^m \frac{\bar{\chi}_{n,\nu_k}}{\nu_k!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{r=\max(m, s-2)}^{m(s-3)} \sum^* \prod_{k=1}^m \frac{\bar{\chi}_{n,\nu_k}(it)^{\nu_k}}{\nu_k!} \end{aligned}$$

where the summation \sum^* is now over all m -uplets of non-negative integer vectors (ν_1, \dots, ν_m) such that $3 \leq |\nu_k| \leq s-1$ and $\sum_{k=1}^m |\nu_k| = r+2m$. As $|D^\beta(it)^{\sum_{k=1}^m \nu_k}| \leq (r+2m)^s \|t\|^{r+2m-|\beta|} \leq C^{r+2m} \|t\|^{r+2m-|\beta|}$,

$$\begin{aligned} |D^\beta g_n(t)| &= \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{r=\max(m, s-2)}^{m(s-3)} \sum^* D^\alpha \left[\prod_{k=1}^m \frac{\bar{\chi}_{n,\nu_k}(it)^{\nu_k}}{\nu_k!} \right] \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{r=\max(m, s-2)}^{m(s-3)} C^{r+2m} \sum^* \prod_{k=1}^m |\bar{\chi}_{n,\nu_k}| \|t\|^{r+2m-|\beta|} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C\|t\|)^{2m}}{m!} \sum_{r=\max(m, s-2)}^{m(s-3)} C^r \sum^* \prod_{k=1}^m |\bar{\chi}_{n,\nu_k}| \|t\|^{r-|\beta|} \quad (5.5.2) \end{aligned}$$

Now, for all ν , $|\nu| \geq 3$, $|\bar{\chi}_{n,\nu}| \leq |\kappa_{|\nu|}| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^{|\nu|}$. Let a_n be a sequence of positive numbers such that $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^2 = 1$. For any reals s and j such that $2 < j < s$, we get by Holder inequality

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^j \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^s \right)^{\frac{j-2}{s-2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^2 \right)^{\frac{s-j}{s-2}} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^s \right)^{\frac{j-2}{s-2}}$$

Let C denote a constant, which value may differ from an equation to the other. Then, for $3 \leq \nu_k \leq s-1$, $\sum \|\mathbf{U}_{n,j}\|^{|\nu_k|} \leq (\sum \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s)^{(|\nu_k|-2)/(s-2)}$, and

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^m |\bar{\chi}_{n,\nu_k}| &\leq \prod_{k=1}^m |\kappa_{|\nu_k|}| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^{|\nu_k|} \leq C^m \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right)^{\frac{\sum |\nu_k| - 2}{s-2}} \\ &= C^m \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right)^{(r-s+2)/(s-2)} \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

As the summation \sum^* is over at most $\binom{r-1}{m-1} d^{(s-1)m}$ terms and $\binom{r-1}{m-1} \leq 2^r$, we get from (5.5.2) and (5.5.3)

$$|D^\beta g_n(t)| \leq C' \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C\|t\|^2)^{2m}}{m!} \sum_{r=\max(m,s-2)}^{m(s-3)} \|t\|^{r-|\beta|} C'^r \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right)^{\frac{r-s+2}{s-2}} \quad (5.5.4)$$

Now $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \leq U_n^{*s-2}$ and $\|t\| < \delta/U_n^*$ yield

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right)^{(r-s+2)/(s-2)} \|t\|^{r-|\beta|} &\leq \delta^{r-s+2} \|t\|^{s-2-|\beta|} \quad \text{if } |\beta| \leq s-2 \\ \text{and} \quad \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right)^{(r-s+2)/(s-2)} \|t\|^{r-|\beta|} &\leq \delta^{r-|\beta|} \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

In any case, with $\delta < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{r=\max(m,s-2)}^{m(s-3)} C^r \|t\|^{r-|\beta|} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right)^{(r-s+2)/(s-2)} &\leq c(\delta) \|t\|^{(s-2-|\beta|)^+} \sum_{r=\max(m,s-2)}^{m(s-3)} (2\delta)^r \\ &\leq c(\delta) \delta^m \|t\|^{(s-2-|\beta|)^+}. \end{aligned}$$

Choosing δ sufficiently small

$$\begin{aligned} |D^\alpha g_n(t)| &\leq c(\delta) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right) \|t\|^{(s-2-|\beta|)^+} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(C\delta\|t\|^2)^m}{m!} \\ &\leq C(\delta) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right) [1 + \|t\|^{s-2}] \exp(\|t\|^2/4) \end{aligned}$$

Proof of Lemma 5.3. This proof is strictly carried along the same lines as the proof of Theorem 9.9 of BR. By continuity of \hat{Q} , one can choose δ such that $\|t\| \leq \delta$ implies $|\hat{Q}(t) - 1| < 1/2$ so we can define unambiguously $\log \hat{Q}(t)$ in this region. For any $t \in \mathbb{R}^D$ verifying $\|t\| < \delta/U_n^*$ and any $j \in \mathbb{Z}$, define $h_n(t) = \log \hat{Q}_n(t) - \psi_n(t)$ and $\psi_n(t) = \sum_{r=2}^{s-1} \bar{\chi}_{n,r}(t)/r!$. Then

$$\begin{aligned} \hat{Q}_n(t) - \exp\left(\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\bar{\chi}_{n,r}(t)}{r!}\right) &= \exp(\psi_n(t)) (\exp(h_n(t)) - 1) \\ D^\alpha (\hat{Q}_n(t) - \exp\left(\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\bar{\chi}_{n,r}(it)^r}{r!}\right)) &= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} c(\alpha, \beta) D^\beta \exp(\psi_n(t)) D^{\alpha-\beta} (\exp(h_n(t)) - 1) \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

We shall now give some bounds on the two kind of derivatives in this last expression, using the explicit expression of the derivative of $\exp f$ at order α

$$D^\alpha (\exp(f)) = \exp(f) \sum_{r=0}^{\alpha} \sum_{\{\beta_i\}, \{j_i\}}^* c(\{\beta_i\}, \{j_i\}) \prod_{i=1}^r (D^{\beta_i} f)^{j_i} \quad (5.5.6)$$

where the summation \sum^* is over all collections of positive integers $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}, \{j_1, \dots, j_r\}$ such that $\sum_{i=1}^r j_i \beta_i = \alpha$.

Bound on $D^\beta \exp(\psi_n(t))$ for $\|t\| < \delta_0/U_n^, 0 \leq \beta \leq \alpha$.* Under assumption **(A5.3)**, $\bar{\chi}_{n,2}(t)/2 = -\|t\|^2/2$. For $r \geq 2, |\nu| = r$ and $\|t\| < \delta_0/U_n^*$

$$\sum_j |\mathbf{U}_{n,j}^\nu (it)^\nu| \leq \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^r \|t\|^r \leq \|t\|^2 \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^r \|t\|^{r-2} \leq \|t\|^2 \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 \delta_0^{r-2} \leq \|t\|^2 \delta_0^{r-2}$$

then choosing δ_0 sufficiently small yields

$$|\psi_n(t) + \|t\|^2/2| \leq \sum_{r=3}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} \sum_{|\nu|=r} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathbf{U}_{n,j}^\nu| |t^\nu| \leq C(s) \|t\|^2 \sum_{r=3}^{s-1} \frac{\kappa_r}{r!} \delta_0^{r-2} \leq \|t\|^2/8.$$

For such δ_0 , one has $-\frac{5}{8}\|t\|^2 \leq \psi_n(t) \leq -\frac{3}{8}\|t\|^2$. Also $D^\beta \Psi_n(t)$ is a polynomial in t then

$$\exists \delta_0 > 0, \forall t \in \mathcal{B}(\delta_0), |D^\beta(\exp \psi_n(t))| \leq c'(\delta_0, \beta) R_1(t) \exp(-\frac{3}{8}\|t\|^2) \quad (5.5.7)$$

where R_1 is a polynomial in t with bounded coefficients uniformly in n , as it is shown by the inspection of the terms $(D^{\beta_i} \Psi_n(t))^{j_i}$ from the formula (5.5.6).

Bound on $D^{\alpha-\beta}(\exp(h_n(t)) - 1)$ for $\|t\| < \delta_1/U_n^, 0 \leq \beta \leq \alpha$.* By definition of the cumulants, the $s-1$ first derivatives of h_n vanish at zero. Then, for all $0 \leq \gamma \leq \alpha - \beta$, the $s - \gamma - 1$ first derivatives of $D^\gamma(h_n)$ vanish at zero. For any multi-index $\nu, |\nu| = s$, $|D^\nu h_n(t)| \leq c_2(s) \mathbb{E}\|\mathbf{S}_n\|^s$ on a ball $\mathcal{B}(\delta_1/U_n^*)$ where \hat{Q}_n is bounded away from zero by Lemma 9.4 of BR, and $\mathbb{E}\|\mathbf{S}_n\|^s \leq c_3(s) m_s \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s$. Using a mean-value theorem yields

$$|D^\gamma h_n(t)| \leq \max_{|\nu|=s} \sup_{u \in [0,1]} |h_n^{(s)}(ut)| \|t\|^{s-\gamma} \leq m_s \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \|t\|^{s-\gamma}.$$

In particular, we get $|h_n(t)| \leq m_s \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \|t\|^s \leq m_s \|t\|^2 \delta_1^{s-2} \leq \|t\|^2/8$ for δ_1 sufficiently small. Combining those inequalities yield

$$|\exp h_n(t) - 1| \leq |h_n(t)| \exp h_n(t) \leq \|t\|^s m_s \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \exp(t^2/8) \quad (5.5.8)$$

Also, for $\alpha - \beta > 0$ and collections of positive integers $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}, \{j_1, \dots, j_r\}$ such that $\sum_{i=1}^r j_i \beta_i = \alpha - \beta$

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^r (D^{\beta_i}(h_n(t)))^{j_i} \right| &\leq C m_s^{\sum_i j_i} \left(\sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \right)^{\sum_i j_i} \|t\|^{\sum_i (s-\beta_i) j_i} \\ &= C m_s^{\sum_i j_i} \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \left(\sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \|t\|^{s-2} \right)^{\sum_i j_i - 1} \|t\|^{2(\sum_i j_i - 1) - \alpha + \beta + s} \\ &\leq C m_s^s \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 (\|t\|^{s-\alpha+\beta} + \|t\|^{\alpha-\beta-2+s}) \end{aligned}$$

Considering all admissible combinations of $\{\beta_i\}, \{j_i\}$, we get the bound for some $\delta_1 > 0$

$$\forall t \in \mathcal{B}(\delta_1/U_n^*), |D^{\alpha-\beta}(\exp(h_n(t)) - 1)| \leq C' m_s^s \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s (\|t\|^{s-\alpha+\beta} + \|t\|^{s+\alpha-\beta-2}) e^{\|t\|^2/8} \quad (5.5.9)$$

Put $\delta = \delta_0 \wedge \delta_1$. Using (5.5.5), (5.5.7), (5.5.9) we get

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathcal{B}(\delta/U_n^*), \left| D^\alpha \hat{Q}_n(t) - \exp\left(\sum_{r=2}^{s-1} \frac{\bar{\chi}_{n,r}}{r!} (it)^r\right) \right| \\ \leq c(\delta, \beta) \sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s (\|t\|^{s-\alpha+\beta} + \|t\|^{s+\alpha-\beta-2}) R_1(t) e^{-\|t\|^2/4} \quad (5.5.10) \end{aligned}$$

which concludes the proof of Lemma 5.3.

Proof of Lemma 5.4. $\int_{\|t\|>\delta/U_n^*} |D^\alpha (e^{-\|t\|^2/2} \sum_{r=1}^{s-3} \tilde{P}_r(it, \{\bar{\chi}_{n,k}\}))| dt$ has an exponential decay with respect to δ/U_n^* , e.g. it is $O(U_n^{*s})$, then $O(\sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s)$. It remains to prove

$$\int_{\|t\|>\delta/U_n^*} |D^\alpha (\hat{Q}_n(t))| dt = O(\sum_j \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s) \quad (5.5.11)$$

for all α 's such that $|\alpha| = 0, s$. First consider the case $|\alpha| = s$.

$$D^\alpha (\hat{Q}_n(t)) = \sum_{r=1}^{|\alpha|} \sum_{\{\alpha_i\}}^* c(\{\alpha_i\}) \sum_{j_1 < \dots < j_r} \prod_{i=1}^r D^{\alpha_i} \hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j_i}) \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}} \hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j})$$

where the sum \sum^* is over all collections of non-zero vectors of non-negative integers $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ such that $\sum_{i=1}^r \alpha_i = \alpha$. Now,

$$|\prod_{i=1}^r D^{\alpha_i} \hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j_i})| \leq |\prod_{i=1}^r \mathbf{U}_{n,j_i}^{\alpha_i} \mathbb{E} Z^{|\alpha_i|}| \leq C |\prod_{i=1}^r \|\mathbf{U}_{n,j_i}\|^{|\alpha_i|}| \leq C \sum_{i=1}^r \|\mathbf{U}_{n,j_i}\|^s.$$

Then

$$\int_{\|t\|>\delta/U_n^*} |D^\alpha (\hat{Q}_n(t))| dt < C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s \sup_{j_1 < \dots < j_s} \int_{\|t\|>\delta/U_n^*} \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{j_1, \dots, j_s\}} |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j})| dt$$

Under the first part of assumption **(A5.5)** and for all $J_0 = \{j_1, \dots, j_s\}$, one can choose p disjoint subsets of $\mathbb{Z} \setminus J_0$, denoted $B_q, q = 1, \dots, p$, such that (5.2.2) holds. Put $J_1 = \mathbb{Z} \setminus (J_0 \cup (\cup_q B_q))$. Then

$$\begin{aligned} \int_{\|t\|>\delta/U_n^*} \prod_{j \in \mathbb{Z} \setminus J_0} |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j})| dt &\leq \int_{t \in \mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^p \prod_{k=1}^d |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j_{i,k}})| dt \times \sup_{\|t\|>\delta/U_n^*} \prod_{j \in J_1} |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j})| \\ &\leq \|\hat{Q}\|_p^{dp} \prod_{i=1}^p |\det \mathbf{M}(B_i)|^{-1/p} \sup_{\|t\|>\delta/U_n^*} \prod_{j \in J_1} |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j})| \\ &\leq C (U_n^*)^{-\beta} \sup_{\|t\|>\delta/U_n^*} \prod_{j \in J_1} |\hat{Q}(t' \mathbf{U}_{n,j})|. \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

This supremum is easily shown to be lower than $\epsilon^{g_n, \alpha - dp - s}$, where $\epsilon := \sup_{|t|>\delta\alpha} |\hat{Q}(t)|$ and $\epsilon < 1$ by (5.1.2), uniformly in J_0 . By (5.2.3), it is also $O((U_n^*)^{s+\beta})$. (5.5.11) follows as $U_n^{*s} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^s$ for $s > 2$. The bound for $|\alpha| = 0$ is proved along the lines of (5.5.12) with $J_0 = \emptyset$.

5.6. Appendix : Proof of Lemma 5.1

Assume **(A5.6)** and **(A5.2)**. Then, for all sufficiently large n , the spectral radius of $\sum_{|j| \geq c_2/U_n^*} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}'_{n,j}$ is smaller than $\text{tr}(\sum_{|j| \geq c_2/U_n^*} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}'_{n,j}) = \sum_{|j| \geq c_2/U_n^*} \|\mathbf{U}_{n,j}\|^2 < \lambda_n - \epsilon$ for some $\epsilon > 0$, and

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{|j| < c_2/U_n^*} t' \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}'_{n,j} t \geq \epsilon \|t\|^2. \quad (5.6.1)$$

Put $n_0 = s + d$ and assume n large enough so that for any $-c_2/U_n^* < j_1 < \dots < j_d < c_2/U_n^*$, the spectral radius of $\sum_{k=1}^d \mathbf{U}_{n,j_k} \mathbf{U}'_{n,j_k}$ is smaller than $\epsilon/2n_0$. Prove by induction on $d' \in \{1, \dots, d\}$ that one can choose $B_{d'} = \{j_1, \dots, j_{d'}\} \subset \{j : |j| < c_2/U_n^*\}$ such that $|\det \mathbf{M}(B_{d'})' \mathbf{M}(B_{d'})| > (\epsilon U_n^{*2}/2c_2)^{d'}$. This is obviously true for $d' = 1$. Assume it is true for some positive $d' < d$, let $B_{d'} = \{j_1, \dots, j_{d'}\}$ be a block satisfying the induction assumption. Note that $|\det \mathbf{M}(B)' \mathbf{M}(B)|$ is also the Gram determinant of the vectors $\mathbf{U}_{n,j_1}, \dots, \mathbf{U}_{n,j_{d'}}$. Take $t \in \mathbb{R}^d$ of unit norm and

orthogonal to those d' vectors. As $\sum_{|j| < c_2/U_n^*} |t' \mathbf{U}_{n,j}|^2 > \epsilon \|t\|^2 = \epsilon$, there is at least one j , say $j_{d'+1}$ such that $|t' \mathbf{U}_{n,j}|^2 \geq \epsilon U_n^{*2}/2c_2$. Now, put $B_{d'+1} = B_{d'} \cup \{j_{d'+1}\}$ and write

$$\det(\mathbf{M}(B_{d'+1})' \mathbf{M}(B_{d'+1})) = \text{Gram}(\mathbf{U}_{n,j_1}, \dots, \mathbf{U}_{n,j_{d'+1}}) = \text{Gram}(\mathbf{U}_{n,j_1}, \dots, \mathbf{U}_{n,j_{d'}}) \|\mathbf{V}_{n,d'}\|^2$$

where $\mathbf{V}_{n,d'}$ is the component of $\mathbf{U}_{n,j_{d'}}$ orthogonal to $\text{span}(\mathbf{U}_{n,j_1}, \dots, \mathbf{U}_{n,j_{d'}})$. Its squared norm is larger than $\epsilon U_n^{*2}/2c_2$ by construction of $j_{d'}$ then, using induction assumption, $\det(\mathbf{M}(B_{d'+1})' \mathbf{M}(B_{d'+1})) \geq (\epsilon U_n^{*2}/2c_2)^{d'+1}$. Using this result for $d' = d$, there exist a block B satisfying (5.2.2). Applying the same arguments to the operator $\sum_{|j| < c_2/U_n^*, j \notin B} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}_{n,j}'$ for which it holds

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, t' \sum_{|j| < c_2/U_n^*, j \notin B} \mathbf{U}_{n,j} \mathbf{U}_{n,j}' t \geq \epsilon(1 - 1/2n_0) \|t\|^2,$$

yields to a second block, and so on n_0 times. The first part of Assumption **(A5.5)** is proved. Now from (5.6.1), $\sum_{|j| \leq c_2(U_n^*)^{-2}} |t' \mathbf{U}_{n,j}|^2 > \epsilon \|t\|^2$ for all sufficiently large n and all $t \in \mathbb{R}^d$. By definition of $f_{n,\alpha}(t)$, it follows that

$$[2c_2(U_n^*)^{-2} - f_{n,\alpha}(t)] \alpha^2 U_n^{*2} + f_{n,\alpha}(t) U_n^{*2} > \epsilon.$$

Then $f_{n,\alpha}(t)(1 - \alpha^2) > (\eta - 2c_2\alpha^2) U_n^{*-2}$ and $g_{n,\alpha} > C U_n^{*2}$ for small enough α . (5.2.3) follows however big $s + d$.

Bibliography

1. R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.
2. N.H. Bingham, C.M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 27., Cambridge University Press, 1987.
3. P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
4. Z.-G. Chen and E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 73–82.
5. P. H. Garcia-Soidàn, *Edgeworth expansions for triangular arrays.*, Commun. Stat., Theory Methods **27** (1998), no. 3, 705–722.
6. J. Geweke and S. Porter-Hudak, *The estimation and application of long memory time series models*, J. of Time Series Analysis **4** (1983), 221–238.
7. F. Götze and C. Hipp, *Asymptotic expansions in the central limit theorem under moment conditions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **42** (1978), 67–87.
8. ———, *Asymptotic expansions for sum of weakly dependent random vectors*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **64** (1983), 211–239.
9. P. Hall, *Convergence rates in the central limit theorem for means of autoregressive and moving average sequences.*, Stochastic Processes Appl. **43** (1992), no. 1, 115–131.
10. C. M. Hurvich, R. Deo, and J. Brodsky, *The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **19** (1998), no. 1, 19–46.
11. C.M. Hurvich and K.I. Beltrao, *Automatic semiparametric estimation of the memory parameter of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **15** (1994), no. 3, 285–302.
12. D. Janas and R. von Sachs, *Consistency for non-linear functions of the periodogram of tapered data*, J. of Time Series Analysis **16** (1995), 585–606.
13. H.R. Künsch, *Discrimination between monotonic trends and long-range dependence*, J. Applied Probability **23** (1986), 1025–1030.
14. S.N Lahiri, *Refinements in asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors.*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 2, 791–799.
15. E. Moulines and Ph. Soulier, *Broad band log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **27** (1999), no. 3, 1415–1539.
16. D. T. Pham and D. Guegan, *Asymptotic normality of the discrete Fourier transform of long memory time series.*, Stat. Probab. Lett. **21** (1994), no. 4, 299–309.
17. P.M. Robinson, *Log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **23** (1995), 1043–1072.

18. E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Mathematics, no. 508, Springer-Verlag, 1976.
19. C. Velasco, *Non-Gaussian log-periodogram regression*, *Econometric Theory* **16** (2000), 44–79.
20. Y. Yajima, *A central limit theorem of Fourier transforms of strongly dependent stationary processes*, *J. Time Ser. Anal.* **10** (1989), no. 4, 375–383.

Annexes

Calculs pour le chapitre 2

A.1. Preuve du Théorème 2.7

Notons d'abord que sous les hypothèses **(H2.1)**-**(H2.3)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}}{\sqrt{n}} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2}{n} + \frac{\sum_{k \neq l=1}^K \beta_{n,k} \beta_{n,l}}{n} = L \quad (\text{A.1.1})$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\sum_{k=1}^n \beta_{n,k}| \leq \sqrt{n} \cdot S_n$ peut se réécrire de la façon suivante

$$S_n = \sum_{t=1}^n (U_{t,n} + V_{t,n})$$

avec

$$\begin{aligned} U_{t,n} &:= \frac{\sum \beta_{n,k}}{n} (Z_t^2 - 1), \\ V_{t,n} &:= Z_t \left(\sum_{s=1}^{t-1} Z_s c_{t-s} \right), \\ c_s &:= 2n^{-1} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \cos(sx_k) = 2n^{-1} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \cos(kx_s) \end{aligned}$$

où la dépendance de c_s en n est implicite dans la notation. c_s est le s -ième coefficient de Fourier de la suite $\{\beta_{n,1}, \beta_{n,2}, \dots, \beta_{n,K}\}$.

$W_{t,n} := [U_{t,n}, V_{t,n}]^T$ est un tableau d'accroissements de martingales de moyenne nulle, et la convergence faible de S_n vers la loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ découle alors du Théorème de limite centrale pour les accroissements de martingales (par exemple Théorème xxx) si l'on sait prouver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[W_{t,n} W_{t,n}^T | \mathcal{F}_{t-1}] = \Gamma, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[U_{t,n}^4] + \mathbb{E}[V_{t,n}^4] = 0. \quad (\text{A.1.3})$$

Les bornes suivantes seront utiles par la suite.

LEMME A.1.

$$|c_j| \leq 1/\sqrt{n}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$|c_j| \leq \kappa j^{-1} \left(\sum_{k=1}^K |\beta_{n,k} - \beta_{n,k+1}| + \max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}| \right), \quad (\text{A.1.5})$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_j^2 \leq \kappa n^{-1} \quad (\text{A.1.6})$$

pour une constante $\kappa < \infty$.

La preuve de ce lemme est reportée à la fin de cette annexe.

Pour prouver (A.1.2), considérons d'abord $\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[V_{t,n}^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$. Alors

$$\sum_t \mathbb{E}[V_{t,n}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{t=2}^n \left(\sum_{s=1}^{t-1} Z_s c_{t-s} \right)^2 =: A + B + C$$

avec

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{t=2}^n \sum_{s=1}^{t-1} c_{t-s}^2 = \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{n-t} c_t^2, \\ B &:= \sum_{t=2}^n \sum_{s=1}^{t-1} (Z_s^2 - 1) c_{t-s}^2 = \sum_{t=1}^{n-1} (Z_s^2 - 1) \sum_{s=1}^{n-t} c_s^2, \\ C &:= \sum_{t=2}^n \sum_{r \neq s=1}^{t-1} Z_s Z_r c_{t-s} c_{t-r}. \end{aligned}$$

Ces trois termes se traitent indépendamment. De la définition,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-t} c_s^2 &= 4n^{-2} \sum_{j,k=1}^K \beta_{n,j} \beta_{n,k} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-t} \cos(sx_k) \cos(sx_j), \\ &= 4n^{-2} \sum_{j=1}^K \beta_{n,j}^2 \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-t} \cos^2(sx_k) + 2n^{-2} \sum_{j \neq k} \beta_{n,j} \beta_{n,k} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-t} (\cos(s(x_j + x_k)) + \cos(s(x_j - x_k))). \end{aligned}$$

Par des relations trigonométriques classiques (voir Robinson 1995), on a pour $j, k \in \{1, \dots, [n/2 - 1]\}$, $j \neq k$,

$$\sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-t} \cos^2(sx_j) = (n-1)^2/4, \quad (\text{A.1.7})$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{n-t} (\cos(s(x_j + x_k)) + \cos(s(x_j - x_k))) = -n. \quad (\text{A.1.8})$$

Sous l'hypothèse **(H2.3)**, $A \rightarrow 1 - 2L$.

Considérons maintenant B . De **(H2.2)**, B est de moyenne nulle et de variance

$$\sigma^2(B) := \sum_{t=1}^{n-1} \left(\sum_{s=1}^{n-t} c_s^2 \right)^2$$

Or

$$\sigma^2(B) \leq A \left(\sum_{s=1}^n c_s^2 \right).$$

D'après (A.1.6), $\sigma^2(B) = O(n^{-1})$ et $B = O_P(n^{-1/2})$.

Enfin, considérons le dernier terme C . Soit

$$D := \sum_{t=1}^n \sum_{(r,s) \in \mathcal{D}_t} Z_s Z_r c_{t-s} c_{t-r}$$

avec $\mathcal{D}_t := \{(r, s) \in (\{1, \dots, t-1\} \times \{1, \dots, t-1\})^c, r \neq s\}$. Sous **(H2.2)**, D est de moyenne nulle et $\mathbb{E}[Z_s Z_r Z_u Z_v] = 0$ pour tout $(r, s) \in (\{1, \dots, t-1\} \times \{1, \dots, t-1\})$ et $(u, v) \in \mathcal{D}_t$. Alors, les

variables aléatoires C et D sont décorrélées et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C^2] &\leq \mathbb{E}[(C + D)^2] = 2 \sum_{t,u=1}^n \sum_{1 \leq r \neq s \leq n} c_{t-s} c_{t-r} c_{u-s} c_{u-r}, \\ &= 2 \sum_{1 \leq r \neq s \leq n} \left(\sum_{t=1}^n c_{t-s} c_{t-r} \right)^2.\end{aligned}$$

Par la relation de Parseval,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n c_{t-s} c_{t-r} &= n^{-2} \sum_{k,l=1}^K \beta_{n,k} \beta_{n,l} \sum_{t=1}^n (\cos(t(x_k + x_l) - sx_k - rx_l) + \cos(t(x_k - x_l) - sx_k + rx_l)), \\ &= n^{-1} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^2 \cos((s-r)x_k).\end{aligned}$$

Donc, d'après (A.1.7),

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq r \neq s \leq n} \left(\sum_{t=1}^n c_{t-s} c_{t-r} \right)^2 &= \\ 2n^{-2} \sum_{k=1}^K \beta_{n,k}^4 \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^{s-1} \cos^2(rx_k) &+ n^{-2} \sum_{k \neq l=1}^K \beta_{n,k}^2 \beta_{n,l}^2 \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^{s-1} [\cos(r(x_k + x_l)) + \cos(r(x_k - x_l))], \\ &\leq (\beta_n^*)^2 ((n-1)^2 / 2n^2 + 2n^{-1} \sum_{k \neq l} |\beta_{n,k} \beta_{n,l}|).\end{aligned}$$

ce qui implique $\sigma^2(C) \rightarrow 0$.

- $\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[U_{n,t}^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$. De la définition des $U_{n,t}$,

$$\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[U_{n,t}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k})^2}{n} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[(Z_t^2 - 1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}].$$

De **(H2.2)**, $\mathbb{E}[(Z_t^2 - 1)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = \mu_4 - 1$. De plus, (A.1.1) implique que $(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k})^2 / n \rightarrow L$. Alors,

$$\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \mathbb{E}[U_{n,k}^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \rightarrow L(\mu_4 - 1).$$

- $\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[U_{n,t} V_{n,t} | \mathcal{F}_{t-1}]$. Par définition des $U_{n,k}$ et $V_{n,k}$, la somme précédente s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^K \mathbb{E}[U_{n,k} V_{n,k} | \mathcal{F}_{k-1}] &= \frac{(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k})^2}{n} \frac{\mu_3}{n} \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=1}^{t-1} Z_s c_{t-s} \right)^2, \\ &= \frac{(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k})^2}{n} \frac{\mu_3}{n} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[V_{t,n}^2 | \mathcal{F}_{t-1}].\end{aligned}$$

Sous nos hypothèses, $\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[V_{t,n}^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$ converge p.s. vers une limite finie. Donc,

$$\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[U_{n,t} V_{n,t} | \mathcal{F}_{t-1}] \rightarrow 0.$$

Pour prouver le critère de tension, vérifions des conditions de type Lyapunov.

- $\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[V_{t,n}^4]$. Notons que sous **(H2.2)**

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}(V_{t,n})^4 &= \mu_4 \mathbb{E} \left(\sum_{s=1}^{t-1} Z_s c_{t-s} \right)^4, \\ &= \mu_4 \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^{t-1} c_{t-s}^4 + \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=1}^{t-1} c_{t-s}^2 \right)^2. \end{aligned}$$

- $\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|U_{t,n}|^{2+\epsilon} | \mathcal{F}_{t-1}]$. Sous l'hypothèse **(H2.2)**

$$\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|U_{t,n}|^{2+\epsilon} | \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{\left(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \right)^{2+\epsilon}}{n^{1+\epsilon}} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[|Z_t^2 - 1|^{2+\epsilon}] \rightarrow 0$$

PREUVE DU LEMME A.1. L'équation A.1.4 est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Eq. A.1.5 s'obtient par la transformation d'Abel

$$\begin{aligned} c_j &= n^{-1} \left| \sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \cos(jx_k) \right|, \\ &= n^{-1} \sum_{k=1}^K (\beta_{n,k} - \beta_{n,k+1}) \sum_{l=1}^k \cos(jx_l) + n^{-1} \beta_{n,K} \sum_{l=1}^K \cos(jx_l). \end{aligned}$$

Il existe une constante $\kappa < \infty$, telle que, pour tout $n \geq 0$ et tout $0 \leq s < n/2$, $\left| \sum_{l=1}^k \cos(jx_l) \right| \leq \kappa n/j$. Alors

$$|c_j| \leq \kappa n^{-1} \left(\sum_{k=1}^K |\beta_{n,k} - \beta_{n,k+1}| + \max_{1 \leq k \leq K} |\beta_{n,k}| \right)$$

Pour prouver (A.1.6), notons que

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n-1} c_s^2 &= 4n^{-2} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^K \beta_{n,k} \cos(sx_k) \right)^2, \\ (A.1.6) &= 2n^{-2} \sum_{k,l=1}^K \beta_{n,k} \beta_{n,l} \sum_{s=1}^{n-1} (\cos(s(x_k + x_l)) + \cos(s(x_k - x_l))) = O(n^{-1}) \end{aligned}$$

□

ANNEXE B

Un nouveau test de blancheur

Ce chapitre reproduit une version intermédiaire d'un article intitulé *A new test for whiteness* en collaboration avec Karim Drouiche et accepté pour publication dans la revue *IEEE Transactions in Signal Processing*.

Bibliographie générale

1. H.-Z. An, Z.-G. Chen, and E.J. Hannan, *The maximum of the periodogram*, J. Multivariate Anal. **13** (1983), 383–400.
2. M. Arcones, *Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors*, Annals of Probability **22** (1994), no. 4, 2243–2274.
3. R. Azencott and D. Dacunha-Castelle, *Séries d'observations irrégulières. Modélisation et prévision*, Techniques Stochastiques, Masson, 1984.
4. O.E. Barndorff-Nielsen and D.R. Cox, *Asymptotic techniques for use in statistics*, Chapman and Hall, 1989.
5. M.S. Bartlett, *An introduction to stochastic processes*, Cambridge University Press, 1955.
6. R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao, *Normal approximation and asymptotic expansions*, 1st ed., Wiley, 1976.
7. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, 1968.
8. ———, *Probability and measure. 2nd ed.*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, New York etc., John Wiley and Sons, 1986.
9. N.H. Bingham, C.M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 27., Cambridge University Press, 1987.
10. P. Bloomfield, *An exponential model for the spectrum of a scalar time series*, Biometrika **60** (1973), 217–226.
11. D.R. Brillinger, *Asymptotic properties of spectral estimates of second order*, Biometrika **56** (1969), 375–390.
12. D.R. Brillinger, *Time series. data analysis and theory*, Holden-Day, 1981.
13. P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time series: Theory and methods*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1991.
14. P.L. Chebyshev, *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités*, Acta Math. **14** (1890), 305–315.
15. Z.-G. Chen and E.J. Hannan, *The distribution of periodogram ordinates*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 73–82.
16. F. Comte and C. Hardouin, *Régression sur le log-périodogramme régularisé pour des processus gaussiens à densité spectrale bornée*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math. **325** (1997), no. 11, 1203–1206.
17. H. Cramér, *On the composition of elementary errors*, Skand. Aktuarietidskr. **11** (1928), 13–74, 141–180.
18. ———, *Mathematical methods of statistics*, Princeton University Press, 1946.
19. R. Dahlhaus, *Spectral analysis with tapered data*, J. of Time Series Analysis **4** (1983), 163–175.
20. H.T. Davis and R.H. Jones, *Estimation of the innovation variance of stationary time series*, JASA **63** (1968), 141–149.
21. R.A. Davis and T. Mikosch, *The maximum of the periodogram of a non-Gaussian sequence*, Ann. Probab. **27** (1999), no. 1, 522–536.
22. R.S. Deo, *Asymptotic theory for certain regression models with long memory errors.*, J. of Time Series Analysis **18** (1997), no. 4, 385–393.
23. P. Doukhan, *Mixing: Properties and examples.*, Lecture Notes in Statistics, Springer, 1994.
24. K. Drouiche and G. Fay, *A new test for whiteness*, accepted for publication, 2000.
25. K. Dzhaparidze, *Parameter estimation and hypothesis testing in spectral analysis of stationary time series*, Springer series in statistics, Springer-Verlag, 1986.
26. F.Y. Edgeworth, *The asymmetrical probability curve*, Philos. Mag. **41** (1896), 90–99.
27. ———, *The law of error*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **20** (1905), 26–65.
28. C.G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions*, Acta Mathematica **77** (1945), 1–125.
29. J. Fan and I. Gijbels, *Local polynomial modelling and its applications*, Chapman and Hall, 1996.
30. J. Fan and Kreutzberger, *Automatic local smoothing for spectral density estimation*, Scand. J. Stat. **25** (1998), no. 2, 359–369.
31. G. Fay, *Edgeworth expansions for multidimensional infinite arrays*, en cours de finition, 1999.

32. G. Fay, E. Moulines, O. Cappé, and F. Bimbot, *Polynomial quasi-harmonic models for speech analysis and synthesis*, Intl. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998.
33. G. Fay, E. Moulines, and Ph. Soulier, *Data driven order selection for projection estimator of the spectral density of time series with long range dependence*, Proceedings of the 9th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing, 1998.
34. ———, *Central limit theorems for non linear functionals of the periodogram of a non Gaussian time series*, Prépublication de l'université d'Evry val d'Essonne, 1999.
35. ———, *Fonctionnelles non-linéaires du périodogramme*, 17è colloque GRETSI, Vannes, 1999.
36. ———, *Non linear functionals of the periodogram*, soumis à publication, 1999.
37. G. Faÿ and Ph. Soulier, *The periodogram of an i.i.d sequence*, To appear in *Stochastic Processes and their Applications*.
38. R. Fox and M.S. Taqqu, *Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence*, Annals of Probability **13** (1985), 428–446.
39. ———, *Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series*, Annals of Statistics **14** (1986), 517–532.
40. ———, *Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence*, Probability Theory and Related Fields **74** (1987), 213–240.
41. D. Freedman and D. Lane, *The empirical distribution of Fourier coefficients.*, Ann. Stat. **8** (1980), 1244–1251.
42. W.A. Fuller, *Introduction to statistical time series*, John Wiley, New York, 1976.
43. E. Moulines G. Fay and P. Soulier, *Estimation de fonctionnelle non-linéaire du périodogramme d'une série linéaire non gaussienne*, XXXIè Journées de Statistique. Résumés, 1999, pp. 781–783.
44. P. H. Garcia-Soidàn, *Edgeworth expansions for triangular arrays.*, Commun. Stat., Theory Methods **27** (1998), no. 3, 705–722.
45. J. Geweke and S. Porter-Hudak, *The estimation and application of long memory time series models*, J. of Time Series Analysis **4** (1983), 221–238.
46. L. Giraitis and D. Surgailis, *A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of whittles's estimate*, Probab. Theory Related Fields **86** (1990), 87–104.
47. F. Götze and C. Hipp, *Asymptotic expansions in the central limit theorem under moment conditions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **42** (1978), 67–87.
48. ———, *Asymptotic expansions for sum of weakly dependent random vectors*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **64** (1983), 211–239.
49. C. Gouriéroux and A. Monfort, *Time series and dynamic models*, Themes in Modern Econometrics, Cambridge University Press, 1997.
50. C.W.J. Granger and R. Joyeux, *An introduction to long memory time series and fractional differencing*, J. of Time Series Analysis **1** (1980), 15–30.
51. P. Hall, *The bootstrap and Edgeworth expansion*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1992.
52. ———, *Convergence rates in the central limit theorem for means of autoregressive and moving average sequences.*, Stochastic Processes Appl. **43** (1992), no. 1, 115–131.
53. J. D. Hamilton, *Time series analysis*, Princeton University Press, 1994.
54. E.J. Hannan, *Multiple time series*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, 1970.
55. E.J. Hannan and D.F. Nicholls, *The estimation of the prediction error variance*, J. Amer. Statist. Assoc. **72** (1977), 834–840.
56. W. Härdle and T. Gasser, *Robust non-parametric function fitting*, J.R. Statist. Society Ser. B **46** (1984), 42–51.
57. C. Hipp, *Edgeworth expansions for integrals of smooth functions*, Ann. Probab. **5** (1977), 1004–1011.
58. H.-C. Ho and T. Hsing, *Limit theorems for functionals of moving averages.*, Ann. Probab. **25** (1997), no. 4, 1636–1669.
59. P.J. Huber, *Robust estimation of a location parameter*, Ann. Math. Statist. **35** (1964), 73–101.
60. C. Hurvich, E. Moulines, and Ph. Soulier, *The FEXP estimator for non Gaussian, potentially non stationary processes*, Preprint, 1999.
61. C. M. Hurvich and K. I. Beltrao, *Asymptotics for the low-frequency ordinates of the periodogram of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **14** (1993), no. 5, 455–472.
62. C. M. Hurvich, R. Deo, and J. Brodsky, *The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **19** (1998), no. 1, 19–46.

63. C. W. Hurvich and W.W. Chen, *An efficient taper for potentially overdifferenced long-memory time series*, J. of Time Series Analysis **00** (1999), 000–000.
64. C.M. Hurvich and K.I. Beltrao, *Automatic semiparametric estimation of the memory parameter of a long-memory time series.*, J. Time Ser. Anal. **15** (1994), no. 3, 285–302.
65. D. Janas, *Edgeworth expansions for spectral mean estimates with applications to Whittle estimates.*, Ann. Inst. Stat. Math. **46** (1994), no. 4, 667–682.
66. D. Janas and R. von Sachs, *Consistency for non-linear functions of the periodogram of tapered data*, J. of Time Series Analysis **16** (1995), 585–606.
67. R.I. Jennrich, *Asymptotic properties of non-linear least squares estimators*, Ann. Math. Statist. **40** (1969), 633–43.
68. P. Kokoszka and T. Mikosch, *The periodogram at Fourier frequencies*, forthcoming in Stochastic Processes and Applications, 1999.
69. P. Kokoszka and T. Mikosch, *The periodogram at Fourier frequencies*, to appear, 1999.
70. J.E. Kolassa, *Series approximation methods in statistics*, 2nd ed., Lecture Notes in Statistics, no. 88, Springer, 1997.
71. H.R. Künsch, *Discrimination between monotonic trends and long-range dependence*, J. Applied Probability **23** (1986), 1025–1030.
72. S.N Lahiri, *Refinements in asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors.*, Ann. Probab. **21** (1993), no. 2, 791–799.
73. B.B. Mandelbrot and Van Ness J.W., *Fractional brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Rev. **10** (1968), 422–437.
74. A. Mokkadem, *Estimation consistante de l'ordre d'un processus arma*, C.R. de l'Acad. Sci. **323** (1996), 1271–1276.
75. E. Moulines and Ph. Soulier, *Broad band log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **27** (1999), no. 3, 1415–1539.
76. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory*, Oxford University Press, 1995.
77. D. T. Pham and D. Guegan, *Asymptotic normality of the discrete Fourier transform of long memory time series.*, Stat. Probab. Lett. **21** (1994), no. 4, 299–309.
78. D Pollard, *Convergence of stochastic processes*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, 1984.
79. M.B. Priestley, *Spectral analysis and time series*, Academic Press, 1981.
80. P.M. Robinson, *Semiparametric analysis of long-memory time series*, Annals of Statistics **22** (1994), 515–539.
81. ———, *Gaussian semiparametric estimation of long range dependence*, Annals of Statistics **24** (1995), 1630–1661.
82. ———, *Log-periodogram regression of time series with long range dependence*, Annals of Statistics **23** (1995), 1043–1072.
83. M. Rosenblatt, *Stationary sequences and random fields*, Birkhäuser, 1985.
84. E. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Mathematics, no. 508, Springer-Verlag, 1976.
85. Q.M. Shao and Y.X. Yu, *Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences*, Annals of Probability **24** (1996), 2098–2127.
86. Ph. Soulier, *Some new bounds and a central limit theorem for functions of Gaussian vectors*, Prépublication de l'université d'Evry val d'Essonne, 1998.
87. M. Taniguchi, *On estimation of parameters of Gaussian stationary processes*, J. of Applied Probability **16** (1979), 575–591.
88. ———, *On estimation of the integrals of certain functions of spectral density*, J. of Applied Probability **17** (1980), 73–83.
89. ———, *Minimum contrast estimation for spectral densities of stationary processes*, J. R. Statist. Soc. B **49** (1987), 315–325.
90. ———, *Higher order asymptotic theory for time series analysis*, Lecture Notes in Statistics, no. 68, Springer-Verlag, 1991.
91. M. S. Taquq, V. Teverovsky, and W. Willinger, *Estimators for long-range dependence: An empirical study*, Fractals **3** (1995), no. 4, 785–798.
92. M.S. Taquq, *Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of Gaussian variables that exhibit long range dependence*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **40** (1977), 203–238.
93. C. Velasco, *Non-Gaussian log-periodogram regression*, Econometric Theory **16** (2000), 44–79.
94. M.-C. Viano, C. Deniau, and G. Oppenheim, *Long-range dependence and mixing for discrete time fractional processes.*, J. Time Ser. Anal. **16** (1995), no. 3, 323–338.

95. B. von Bahr, *On the convergence of moments in the central limit theorem*, Ann. Math. Statist. **36** (1965), 808–18.
96. R. von Sachs, *Peak-insensitive non-parametric spectrum estimation*, Journal Of Time Series Analysis **15** (1994), no. 4, 453–474.
97. A.M. Walker, *Asymptotic properties of least-squares estimates of parameters of the spectrum of a stationary non-deterministic time series*, J. Aust. Math. Soc. **4** (1964), 363–384 (English).
98. A.M. Walker, *Some asymptotic results for the periodogram of a stationary times series*, J. Aust. Math. Soc. **5** (1965), 107–128.
99. C-F. Wu, *Asymptotic theory of nonlinear least squares estimation*, Annals of Statistics **9** (1981), no. 3, 501–513.
100. Y. Yajima, *A central limit theorem of Fourier transforms of strongly dependent stationary processes*, J. Time Ser. Anal. **10** (1989), no. 4, 375–383.