Inégalités de Sobolev logarithmiques et hypercontractivité en mécanique statistique et en E.D.P.

Ivan Gentil

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Probabilités

par **Ivan Gentil**

Sous la direction de **Michel Ledoux**

Inégalités de Sobolev logarithmiques et Hypercontractivité en mécanique statistique et en E.D.P.

Soutenue le 18 Décembre 2001 devant le jury composé de
Messieurs les Professeurs :

Dominique	Bakry	Université Paul Sabatier	Examinateur
Thierry	Bodineau	Université de Paris VII	Examinateur
Francis	Comets	Université de Paris VII	Rapporteur
Michel	Ledoux	Université Paul Sabatier	Directeur
Laurent	Miclo	Université Paul Sabatier	Examinateur
Jean-Michel	Roquejoffre	Université Paul Sabatier	Examinateur
Cédric	Villani	École Normale Supérieure de Lyon	Rapporteur

Laboratoire de Statistique et Probabilités
UMR CNRS 5883, Université Paul Sabatier, Toulouse III

Thèse créé avec LaTeX 2_ε, compilé le 26 novembre 2001.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout particulièrement à remercier Michel LEDOUX d'avoir accepté de me diriger pendant ces années de thèse et d'avoir consacré beaucoup de temps à me « former ».

Je remercie mes rapporteurs, Francis COMETS et Cédric VILLANI, d'avoir d'effectué cette lourde tâche. En particulier, les nombreuses et instructives discussions avec Cédric m'ont beaucoup aidé d'une part dans la compréhension et la résolution de certains problèmes d'analyse et d'autre part dans la rédaction de ce manuscrit.

La rédaction de cette thèse ne serait pas la même sans l'aide de Thierry BODINEAU, qui par une lecture très attentive de mon manuscrit, m'a aussi beaucoup apporté. Par ailleurs, je salue Sergei BOBKOV et Cyril ROBERTO pour deux collaborations très agréables.

Je remercie aussi les autres membres du jury : Dominique BAKRY qui m'a souvent aidé entre autres pour des problèmes de Γ_2, Laurent MICLO pour sa conception des maths, et enfin Jean-Michel ROQUEJOFFRE d'avoir accepté de participer à mon jury.

Je remercie les membres du laboratoire et plus particulièrement la bande à « *log-sob* » qui ont rendu ces années agréables.

Enfin, je profite de l'occasion pour rendre hommage à mes amis et à ma famille qui me supportent depuis maintenant quelques années.

BIBLIOGRAPHIE PERSONNELLE

Articles publiés

- Écrit en collaboration avec Cyril ROBERTO. *Spectral gaps for spin systems: somme non-convex phase examples*, J. Funct. Anal. **180** (2001), no. 1, p. 66-84.
- Écrit en collaboration avec Sergei BOBKOV et Michel LEDOUX. *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pu. Appli, **80** (2001), no. 7, p. 669-696.

Article en préparation

- *Ultracontractive bounds on* HAMILTON-JACOBI *solutions.*

Livre

- Écrit en collaboration avec Cécile ANÉ, Sébastien BLACHÈRE, Djalil CHAFAÏ, Pierre FOUGÈRES, Florent MALRIEU, Cyril ROBERTO et Gregory SCHEFFER. *Sur les inégalités de* SOBOLEV *logarithmiques*, Panoramas et Synthèse 10, S.M.F., 2000, xvi+217 pages.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans cette thèse nous nous intéressons à des inégalités fonctionnelles comme les inégalités de POINCARÉ, SOBOLEV, SOBOLEV logarithmique, et celles appelées inégalités de transport. De façon générale, le travail se répartie selon deux centres intérêts. Le premier porte sur l'étude et l'amélioration des méthodes permettant d'établir ces inégalités et le second sur la compréhension des différents liens existant entre celles-ci.

Décrivons brièvement les différentes inégalités que nous allons étudier. Plaçons nous ici, pour simplifier, sur $\mathbb{R}^n$. L'inégalité la plus importante que nous étudions est celle de SOBOLEV logarithmique. On dit qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique s'il existe une constante $\alpha(\mu) > 0$ telle que, pour toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, assez régulière, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log\left(\frac{f^2}{\int f^2 d\mu}\right) d\mu \leqslant \alpha(\mu) \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Cette inégalité est introduite par GROSS en 1975 et établie pour la mesure gaussienne avec une constante optimale $\alpha(\mu)$ égale à 2, [Gro75].

Une autre inégalité très importante considérée ici est celle de POINCARÉ (ou inégalité de trou spectral). Une mesure de probabilité μ satisfait à une inégalité de POINCARÉ si il existe une constante $\beta(\mu) > 0$ telle que pour toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, assez régulière, on a l'inégalité suivante

$$\mathbf{Var}_\mu(f^2) = \int \left(f - \int f d\mu\right)^2 d\mu \leqslant \beta(\mu) \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Cette inégalité, plus ancienne que l'inégalité de SOBOLEV logarithmique, est impliquée par cette dernière. On a en outre la relation suivante entre les différentes constantes $2\beta(\mu) \leqslant \alpha(\mu)$. La mesure gaussienne satisfait à l'inégalité de POINCARÉ avec une constante optimale $\beta(\mu)$ égale à 1.

Une mesure μ (non nécessairement de probabilité) vérifie une inégalité de SOBOLEV de dimension n si il existe deux constantes $a(\mu) \geqslant 0$ et $b(\mu) \geqslant 0$ telles que pour toute fonction f suffisamment régulière on a

$$\|f\|^2_{2n/(n-2)} \leqslant a(\mu)\|\nabla f\|_2^2 + b(\mu)\|f\|_2^2. \tag{0.1}$$

Cette inégalité, quand celle-ci est vérifiée pour une mesure de probabilité, implique l'inégalité de SOBOLEV logarithmique et de POINCARÉ. La mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}^n$ satisfait à l'inégalité de SOBOLEV avec $a(\mu) > 0$ et $b(\mu) = 0$, (la constante optimale $a(\mu)$ pour la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas toujours évidente à exprimer).

De façon parallèle à ces trois inégalités importantes, définissons les inégalités de transport. PINSKER montre, dans [Pin64], l'inégalité fonctionnelle suivante, pour toutes mesures de probabilités μ et ν,

$$\|\nu - \mu\|_{VT} \leqslant \sqrt{2\mathbf{Ent}_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)}. \tag{0.2}$$

Partant de cette première inégalité entre une distance sur l'espace des mesures de probabilité et l'entropie de la dérivée de RADON-NIKODIM, d'autres inégalités plus générales dites de transport ont été introduites, comme par exemple l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ sur $\mathbb{R}^n$ que nous définissons maintenant. Une mesure de probabilité μ vérifie une inégalité de transport, que nous appellerons $\mathcal{T}_2$, s'il existe une constante $\tau(\mu) \geqslant 0$ telle que pour toute fonction F, densité de probabilité par rapport à la mesure μ, on a

$$T_2(Fd\mu, d\mu) \leqslant \tau(\mu)\mathbf{Ent}_\mu(F)\,,$$

où $T_2(Fd\mu, d\mu)$ est le carré de la distance de WASSERSTEIN, définie par

$$T_2(Fd\mu, d\mu) = \inf\left\{\int \frac{|x-y|^2}{2} d\pi(x,y)\right\}, \tag{0.3}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité π ayant $Fd\mu$ et μ comme marges. Contrairement à l'inégalité (0.2) de PINSKER, cette dernière inégalité n'est pas toujours vérifiée, nous savons par exemple que la mesure gaussienne vérifie inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ avec une constante optimale égale à 2. OTTO et VILLANI montrent dans [OV00] le premier lien entre l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ et l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Ils prouvent entre autre, que la seconde inégalité de constante $\beta(\mu)$ implique la première de même constante $\beta(\mu)$.

Dans les chapitres 1 et 2 nous établissons les inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmique pour des modèles de mécanique statistique. La mesure de référence vérifiant les inégalités de POINCARÉ ou de SOBOLEV logarithmique est la mesure gaussienne, de manière plus générale une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$, de la forme $d\mu(X) = \exp(-U(X))dX$ avec $\mathrm{Hess}(U) \geqslant C\,\mathrm{Id}$ $(C > 0)$, vérifie les deux inégalités. L'exemple décrit ci-dessus est le cas que l'on nommera « uniformément strictement convexe », c'est un cas particulier du critère Γ_2 de BAKRY et EMERY. Nous essayons ici de montrer l'existence d'une inégalité de SOBOLEV logarithmique ou de POINCARÉ pour certaine mesure sur $\mathbb{R}^n$ avec une constante ne dépendant pas de la dimension n. Les mesures étudiées ici sont des mesures sur $\mathbb{R}^n$ de la forme $d\mu(X) = \exp(-U(X))dX$ avec

$$\forall\, X = (x_1, ..., x_n),\;\; \Phi(X) = \sum_i \psi(x_i) + \sum_{i\sim j} V(x_i - x_j).$$

La fonction Φ est appelé *hamiltonien* et ψ *phase*. D'après le cas uniformément strictement convexe décrit ci-dessus, lorsque ψ vérifie $\psi'' \geqslant C$ avec $C > 0$ et $\|V''\|_\infty$ assez petit, la mesure μ satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique et de POINCARÉ avec une constante indépendante de n. De nombreuses et récentent études permettent de montrer que si la fonction $\psi = \varphi + g$ avec $\varphi'' \geqslant c$, $(c > 0)$, et $\|g\|_\infty < \infty$ les résultats subsistent encore. Nous appellerons ce cas *« convexe + borné »* ou hypothèse (CB). Le principal intérêt de ces deux chapitres est de prouver l'existence des inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmique pour des phases φ ne vérifiant pas l'hypothèse (CB).

Le chapitre 1, effectué en collaboration de C. ROBERTO traite de l'inégalité de POINCARÉ. Nous présentons d'abord une méthode due à HELFFER. Celle-ci permet, pour démontrer l'existence de l'inégalité de POINCARÉ pour les modèles de mécanique statistique, de restreindre les calculs sur des mesures en dimension 1. Nous décrivons alors les inégalités de HARDY qui nous conduisent de façon efficace à l'inégalité de POINCARÉ en dimension 1. Ces méthodes décrites, nous sommes alors en mesure de montrer l'existence de l'inégalité de POINCARÉ pour les modèles de mécanique statistique sortant du cas uniformément strictement convexe décrit ci-dessus. L'intérêt de cette méthode est d'une part d'avoir d'une manière simple un bon contrôle de la constante de l'inégalité de POINCARÉ pour les modèles considérés, et d'autre part d'exhiber de nouveaux modèles de mécanique statistique vérifiant l'inégalité de POINCARÉ. Ce chapitre a été publié dans la revue *Journal of Functional Analysis* en 2001, voir [GR01].

Dans le chapitre 2 nous étudions pour les mêmes modèles de mécanique statistique que dans le chapitre précédent, l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Cette inégalité est proche de l'inégalité de POINCARÉ mais elle est plus difficile à prouver. Nous établissons dans ce chapitre que la méthode décrite ci-dessus pour l'inégalité de POINCARÉ n'est plus applicable, qu'il n'existe malheureusement pas de méthode, équivalente à celle de HELFFER présentée ci-dessus, pour l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Nous exposons alors les différentes difficultés rencontrées pour adapter cette méthode à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Ainsi, l'obtention de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour ces modèles particuliers fait appel a la méthode des martingales. Cette méthode à été exposée pour la première fois dans un cas discret par LU et YAU dans [LY93]. Celle-ci est reprise dans le cas continue dans différentes publications par BODINEAU, HELFFER, YOSHIDA et ZEGARLINSKI. Une étude attentive de la démonstration montre qu'une adaptation est possible à des cas plus généraux de modèles. Nous observons qu'à l'aide de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique en dimension 1 nous pouvons obtenir des théorèmes pour les modèles de mécanique statistique. Nous étudions alors le théorème de BOBKOV et GÖTZE qui partant des inégalités de HARDY, nous permet de contrôler la constante de SOBOLEV logarithmique dans le cas de la dimension 1. Cette méthode nous permet de montrer l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour des modèles de mécanique statistique différents du cas classique. Par contre celle-ci ne permet malheureusement pas, contrairement à l'inégalité de POINCARÉ, d'obtenir un contrôle simple de la constante de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour le modèle de mécanique statistique considéré.

Les semi-groupes de MARKOV sont très importants dans l'étude des inégalités de SOBOLEV logarithmique, de POINCARÉ et de SOBOLEV. En effet c'est par eux que GROSS dans [Gro75] montre qu'un semi-groupe de diffusion est hypercontractif si et seulement si sa mesure invariant satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique. De la même manière ils sont aussi au coeur de critère Γ_2 développé par BAKRY et EMERY, voir [BE85] et [Bak94]. VAROPOULOS les utilise aussi dans l'étude du lien entre l'inégalité de SOBOLEV et l'ultracontractivité du semi-groupe de la chaleur, voir [Var84] et [Var85]. Dans les chapitres suivants nous étudions ces différentes inégalités par le biais d'un autre semi-groupe, celui décrit par les solutions des équations de HAMILTON-JACOBI que nous définissons maintenant. Si f est une fonction lipschitzienne bornée, définissons, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{Q_t} f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(y) + \frac{1}{2t} |x-y|^2 \right\}, \tag{0.4}$$

et $\mathbf{Q}_0 f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Cette famille d'opérateurs, appelée solution de HOPF-LAX de l'équation de HAMILTON-JACOBI, vérifie, lorsque la fonction f

est assez régulière, l'équation différentielle de HAMILTON-JACOBI suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{Q_t} f}{\partial t} + \dfrac{1}{2} |\nabla \mathbf{Q_t} f|^2 & = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \mathbf{Q_t} f & = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

La famille d'opérateurs $(\mathbf{Q_t})_{t \geqslant 0}$ sera étendue à une variété riemannienne, où la norme euclidienne sera remplacée par la distance riemannienne.

Dans le chapitre 3, nous étudions le lien entre le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t \geqslant 0}$ vérifiant l'équation différentielle de HAMILTON-JACOBI et l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Les travaux de ce chapitre ont été effectués en collaboration de S. BOBKOV et de M. LEDOUX. Le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t \geqslant 0}$ permet d'exposer une forme duale de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$, inégalité (0.3) : une mesure de probabilité μ satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ si et seulement si, pour toute fonction f lipschitzienne bornée on a

$$\int \exp\left(\frac{1}{\tau(\mu)} \mathbf{Q}_1 g\right) d\mu \leqslant \exp\left(\frac{1}{\tau(\mu)} \int g d\mu\right).$$

C'est cette forme duale qui nous permet de trouver un premier lien entre les inégalités de transport et l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Nous prouvons en particulier, qu'une mesure de probabilité μ vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique si et seulement si le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t \geqslant 0}$ vérifie une condition d'hypercontractivité. Nous mettons en parallèle ce résultat avec celui de GROSS qui montre un résultat similaire pour un semi-groupe ayant μ comme mesure de probabilité invariante, voir [Gro75]. Le théorème exposé dans ce chapitre nous permet alors de montrer de façon assez simple le théorème de OTTO et VILLANI établissant qu'une inégalité de SOBOLEV logarithmique implique une inégalité de transport $\mathcal{T}_2$. L'utilisation de ce résultat nous conduit aussi à une représentation de l'inégalité de POINCARÉ par une famille d'inégalités de transport, pour un coût autre que quadratique. Une telle représentation est à mettre en parallèle avec la représentation de l'inégalité de POINCARÉ en une famille d'inégalités de SOBOLEV logarithmique modifiée obtenue par BOBKOV et LEDOUX dans [BL97]. Ce chapitre a été publié dans la revue *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, voir [BGL01].

Dans le chapitre 4 nous étudions le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t \geqslant 0}$ défini par la formule (0.4) sous la contrainte de différentes inégalités fonctionnelles. Son étude sous la contrainte de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique a été décrite dans le chapitre 3, nous nous intéressons ici au contrôle du semi-groupe dans le cas où l'espace mesuré vérifie une inégalité de SOBOLEV. Dans le cas où la mesure vérifie une inégalité de SOBOLEV de type euclidienne (lorsque $b(\mu) = 0$ dans l'équation (0.1)) nous montrons qu'une majoration de type ultracontractive du semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t \geqslant 0}$ est équivalente à l'existence de l'inégalité de SOBOLEV. Ce résultat est à mettre en parallèle avec le théorème de VAROPOULOS, comparant l'inégalité de SOBOLEV avec le comportement ultracontractif du semi-groupe de la chaleur. Nous étendons ensuite les majorations dans le cadre plus général d'inégalités de SOBOLEV, nous obtenons entre autre un lien entre les inégalités de SOBOLEV et certaines inégalités de transport. Ce chapitre est en court de rédaction pour une soumission prochaine.

Le chapitre 5 est un exposé autour des inégalités de transport. Dans un premier temps, nous définissons les inégalités de transport plus générales que l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$, et donnons quelques résultats généraux les concernant. Dans un second temps nous donnons différents critères pour montrer l'existence d'inégalités de transport. Ces critères nous permettent alors de montrer qu'une inégalité de transport est vérifiée pour certains modèles de mécanique statistique. Enfin nous étendons les résultats obtenus dans le chapitre 3 d'une part pour des inégalités de SOBOLEV logarithmiques modifiées et d'autre part dans le cas de la dimension infinie.

Tout au long de cette thèse nous faisons référence au livre *Sur les inégalités de* SOBOLEV *logarithmiques* publié dans la collection Panoramas et Synthèse de la Société Mathématique de France (voir [ABC$^+$00]), celui-ci à été écrit en collaboration avec Cécile ANÉ, Sébastien BLACHÈRE, Djalil CHAFAÏ, Pierre FOUGÈRES, Florent MALRIEU, Cyril ROBERTO et Gregory SCHEFFER, des doctorants du Laboratoire de Statistique et Probabilités de Toulouse. Les nombreuses références faites aux différents chapitres de ce livre nous permettrons d'alléger les démonstrations des théorèmes étudiés ici.

Les résultats obtenus dans cette thèse sont présentés sous forme de chapitres essentiellement indépendants les uns des autres. Certains ayant fait l'objet d'une publication ou de soumission, ont été rédigés en anglais et sont insérés sous forme d'articles (chapitres 1, 3 et 4).

CHAPITRE 1

SPECTRAL GAPS FOR SPIN SYSTEMS: SOME NON-CONVEX PHASE EXAMPLES

Ivan Gentil and Cyril Roberto

1.1. Introduction

The purpose of this work is to establish some perturbation results for spectral gaps to produce some examples of unbounded spin systems with nearest neighbour interaction associated to non-convex phases satisfying a spectral gap inequality uniformly in finite subsets of the lattice and boundary conditions. These examples thus show that the recent results by Yoshida (see [Yos99]), Helffer [Hel99a], Bodineau-Helffer [BH99a, BH99b] on spectral gaps and logarithmic Sobolev inequalities can actually hold for families of phases that go beyond the usual convexity at infinity.

To introduce to the results of this paper, let us first describe, following [Hel99a], the spin systems we will investigate. Consider the measure $\exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))dX$, where $\Phi_{\Lambda,\omega}$ is a function associated to a finite subset Λ in $\mathbb{Z}^d$ (for $d \in \mathbb{N}^*$) and to some $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ which defines the boundary conditions. The function $\Phi_{\Lambda,\omega}$ has the form, for $X = X^\Lambda \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}$ (where $|\Lambda|$ is the cardinal of Λ) :

$$\Phi_{\Lambda,\omega}(X) = \sum_{i\in\Lambda} \psi(x_i) + J \sum_{\{i,j\}\cap\Lambda\neq\emptyset,\, i\sim j} V(z_i - z_j)$$

where

– $X = (x_i)_{i\in\Lambda}$, $z_i = \begin{cases} x_i & \text{if } i \in \Lambda \\ \omega_i & \text{if } i \notin \Lambda \end{cases}$.
– ψ and V are real-valued functions, respectively called *phase* and *potential of the interactions* between sites. We assume that V satisfy

$$\|V''\|_\infty < \infty. \tag{1.1}$$

– $i \sim j$ means that j and i are neighbours in $\mathbb{Z}^d$.
– J is a positive real parameter (the coupling constant).

Assume that there exists $J_0 > 0$ such that for any J in $[0, J_0]$, any finite subset Λ of $\mathbb{Z}^d$ and ω in $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, the integral of $\exp(-\Phi_{\Lambda,\omega})$ on $\mathbb{R}^\Lambda$ is finite. In this case, define the probability measure $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ as:

$$d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}(X) = \frac{1}{Z_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}\exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))dX, \tag{1.2}$$

where $Z_{\Phi_{\Lambda,\omega}} = \int \exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))dX$.

This model is described in [BH99a] (see also [Hel99a]). The particular case where $\psi(x) = ax^4 - bx^2$ $(a, b > 0)$ and $V(x) = x^2$ is considered by YOSHIDA (see [Yos99]).

We will investigate spectral gaps and decays of correlations of the family of probability measures $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ uniformly over Λ and ω. More precisely, we want to find two constants C and C' such that, for any Λ finite subset of $\mathbb{Z}^d$, $\omega \in \mathbb{Z}^d$ and any smooth functions f and F, G we have:

$$\mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(f^2) - \mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(f)^2 \leqslant C \int \|\nabla f\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(F, G) &\overset{\text{def.}}{=} \mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}\left(\left(F - \mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(F)\right)\left(G - \mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(G)\right)\right) \\ &\leqslant C' \exp(-\mathrm{d}(S_F, S_G)) \left(\int \|\nabla F\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)^{1/2} \left(\int \|\nabla G\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

where $\|\nabla f\|^2 = \sum_{i\in\Lambda} (\partial_i f)^2$, $\mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(f) = \int f d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$, S_F is the support of F in $\mathbb{Z}^d$ and d is the distance between subsets of the lattice $\mathbb{Z}^d$.

It has been shown in [Hel99a], [BH99a] and [Yos99] that whenever the phase ψ is convex at infinity and J_o is small enough, then the measures $\left(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)_{\Lambda,\omega}$ satisfy such a uniform spectral gap and decay of correlations (inequality (1.3)).

As announced, the aim of this paper is to present examples of non-convex phases such that the uniform spectral gap still hold. The main tool of the construction is the method developed by HELFFER which is presented in the next section. It will reduce to the study of some uniform spectral gap property of the phase ψ in dimension one that we investigate by means of HARDY's criterion for POINCARÉ inequalities in dimension one. This is the subject of Section 3.

In the last section, we prove our main result:

Theorem 1.1.1. — *Let φ be a strictly uniformly convex function (i.e. for all $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) \geqslant a > 0$), let g be a bounded function ($\|g\|_\infty < \infty$), and let h be a perturbation function satisfying $S = \int_{\mathbb{R}}(e^{|h|} - 1) < \infty$. Then, the measure $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ defined in* (1.2) *with $\psi = \varphi + g + h$ satisfies, uniformly in Λ and ω, a spectral gap inequality and a decay of correlations for every J small enough.*

The simple criterion on h will easily produce examples for which ψ is not convex at infinity, and not even bounded above and below by two power type functions as will be showm at the end of the section 4.

1.2. HELFFER's method for spectral gap inequality

Let us first recall the definition of the spectral gap or POINCARÉ inequality for a measure on $\mathbb{R}^n$ and for the set of measures $\left(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)_{\Lambda,\omega}$.

***Definition 1.2.1* (Spectral gap inequality)**. — Let assume that the measure $d\mu_\psi = \exp(-\psi(X))dX$ is a probability measure on $\mathbb{R}^n$, where ψ is a real-valued function. The measure μ_ψ satisfies a spectral gap inequality if there exists a positive constant C_ψ such that for any smooth enough function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{Var}_{\mu_\psi}(f) = \mathbf{E}_{\mu_\psi}(f^2) - \mathbf{E}_{\mu_\psi}(f)^2 \leqslant C_\psi \int \|\nabla f\|^2 d\mu_\psi \tag{1.4}$$

where $\|\nabla f\|^2 = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)^2$ and $\mathbf{E}_{\mu_\psi}(f) = \int f d\mu_\psi$.

The constant C_ψ is the spectral gap constant associated to either the measure μ_ψ or the function ψ.

We say that the set of measures $\left(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)_{\Lambda,\omega}$ defined by (1.2) satisfies a uniform *spectral gap inequality* if each measure $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$satisfies a spectral gap inequality with a constant $C = C_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ independent of Λ in $\mathbb{Z}^d$ and ω in $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

HELFFER proved recently spectral gap inequalities for the preceding spin systems using a criterion on the WITTEN Laplacian [Hel99a]. The main feature of the approach is that it reduces to some uniform spectral gap for the phase ψ that we investigate in the next section by HARDY's inequalities. For the sake of completness, we present this criterion that we however reformulate via the BAKRY-EMERY Γ_2 operator (see [BE85], [Bak94] and [Led92] with more simple semigroup tools).

Theorem 1.2.2. — *Let assume that $d\mu_\psi(X) = exp(-\psi(X))dX$ is a probability measure on $\mathbb{R}^n$, where ψ is a C^2 real-valued function. Let $\mathbf{L} = \Delta - (\nabla\psi.\nabla)$ denote the infinitesimal diffusion generator with invariant measure μ_ψ. Then the spectral gap inequality is equivalent to the inequality:*

$$\int (-f)\mathbf{L}f d\mu_\psi \leqslant C_\psi \int (\mathbf{L}f)^2 d\mu_\psi, \tag{1.5}$$

holding for any smooth function f.

We briefly recall the proof.

Proof

◀ Assume that the measure μ_ψ satisfies (1.5). Denote by $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ the semigroup with generator $\mathbf{L}$. For any smooth function f, we have $\mathbf{P}_0 f = f$ and $\mathbf{P}_\infty = \int f d\mu_\psi$, so that

$$\mathbf{Var}_{\mu_\psi}(f) = -2\int\int_0^\infty \mathbf{P}_t f \ \mathbf{L}\mathbf{P}_t f \ dt d\mu_\psi = -2\int_0^\infty \int \mathbf{P}_t f \ \mathbf{L}\mathbf{P}_t f \ d\mu_\psi dt.$$

Let $F(t) = -\int \mathbf{P}_t f \ \mathbf{L}\mathbf{P}_t f d\mu_\psi$, $t \geqslant 0$. Integration by parts shows that

$$F'(t) = -2\int (\mathbf{L}\mathbf{P}_t f)^2 d\mu_\psi.$$

Then, by (1.5), $F'(t) \leqslant -(2/C_\psi)F(t)$ so that $F(t) \leqslant e^{-\frac{2}{C_\psi}t}F(0)$, for every $t \geqslant 0$. Hence,

$$\mathbf{Var}_{\mu_\psi}(f) \leqslant C_\psi \int \|\nabla f\|^2 d\mu_\psi.$$

On the other hand, by invariance and the CAUCHY-SCHWARZ inequality,

$$\begin{aligned}\int -f\mathbf{L}f d\mu_\psi &= \int (f - \mathbf{E}_{\mu_\psi}(f))(-\mathbf{L}f) d\mu_\psi \\ &\leqslant \mathbf{Var}_{\mu_\psi}(f)^{1/2} \left(\int (\mathbf{L}f)^2 d\mu_\psi\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Therefore inequality (1.5) follows from the spectral gap inequality with the same constant C_ψ. The proof of the theorem is complete. ▶

Applying Theorem 1.2.2 shows that a spectral gap inequality for the set of measures $(\mu_{\Phi\Lambda,\omega})$ amounts to establish (1.5) uniformly in Λ and ω. Now, for a given smooth function f, integration by parts allows us to write that

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad \int (\mathbf{L}f)^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}} &= \int \left(\sum_{i,j\in\Lambda}(\partial_{i,j}f)^2 + \sum_{i,j\in\Lambda}\partial_i f\,(\partial_{i,j}\Phi_{\Lambda,\omega})\,\partial_j f\right) d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\\ &\geqslant \int \sum_{i\in\Lambda}\left((\partial_{i,i}f)^2 + (\partial_i f)^2\{\psi''(x_i) + \sum_{j\in N(i)} JV''(x_i - z_j)\}\right) d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\\ &\quad + \int \sum_{i,j\in\Lambda, i\sim j} -JV''(x_i - x_j)\partial_i f\;\partial_j f\, d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}},\end{aligned}$$

where $N(i) = \{j \in \mathbb{Z}^d\ ;\ j \sim i\}$. For any i in Λ, $|N(i)| = 2d$, so

$$\sum_{i,j\in\Lambda,i\sim j} \partial_i f\;\partial_j f \leqslant 2d\sum_{i\in\Lambda}(\partial_i f)^2.$$

The condition (1.1) on V'' easily shows that

$$(1.7)\qquad \sum_{i,j\in\Lambda,i\sim j} -JV''(x_i - x_j)\partial_i f\partial_j f \geqslant -2d\|V''\|_\infty J\sum_{i\in\Lambda}(\partial_i f)^2.$$

Therefore, (1.6) holds as soon as

$$\begin{aligned}\int (\mathbf{L}f)^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \geqslant \sum_{i\in\Lambda}\int &\left((\partial_{i,i}f)^2 + (\partial_i f)^2(\psi''(x_i) + \sum_{j\in N(i)} JV''(x_i - z_j))\right) d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\\ (1.8)\qquad &+ \sum_{i\in\Lambda} -2dJ\|V''\|_\infty \int (\partial_i f)^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}.\end{aligned}$$

For each i in the set Λ, denote by $\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ the conditional measure on $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ given $\{(x_j), j \in \Lambda, j \neq i\}$. Therefore $\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ is a measure on the real line and

$$\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}(dx_i) = \frac{\exp(-\psi(x_i) - \sum_{j\in N(i)} JV(x_i - z_j))}{Z^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}} dx_i,$$

where $Z^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}} = \int \exp(-\psi(x_i) - \sum_{j\in N(i)} JV(x_i - z_j))dx_i$. The measure $\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ depends of the variables $(x_j)_{j\neq i}$ and $\omega \in \mathbb{Z}^d$.

Suppose now that all the measures $\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$, $i \in \Lambda$, satisfy a spectral gap inequality with a constant C_{USG} (USG as uniform spectral gap) independent from the variables $(\omega, (x_j)_{j\in\Lambda, j\neq i})$ and from the site i.

The equivalence provided by Theorem 1.2.2 then indicates that for every $i \in \Lambda$,

$$\int \left((\partial_{i,i} f)^2 + (\partial_i f)^2 (\psi''(x_i) + \sum_{j\in N(i)} JV''(x_i - z_j)) \right) d\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \geqslant \frac{1}{C_{USG}} \int (\partial_i f)^2 d\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}.$$

After integration all the $(x_j)_{j\neq i}$ and summation on $i \in \Lambda$ we find:

$$\int \sum_{i\in\Lambda} \left((\partial_{i,i} f)^2 + (\partial_i f)^2 (\psi''(x_i) + \sum_{j\in N(i)} JV''(x_i - z_j)) \right) d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \geqslant \frac{1}{C_{USG}} \int \sum_{i\in\Lambda} (\partial_i f)^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}. \tag{1.9}$$

It then follows from (1.8) and (1.9) that (1.6) became

$$\int (\mathbf{L} f)^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \geqslant \left(\frac{1}{C_{USG}} - 2dJ\|V''\|_\infty \right) \int \|\nabla f\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}.$$

As a consequence, the measure $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ satisfies the spectral gap inequality defined by 1.2.1 with a constant, independant of $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ and $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, equal to $C_{USG}/(1 - C_{USG} 2dJ\|V''\|_\infty)$ as soon as $1 - C_{USG} 2dJ\|V''\|_\infty > 0$.

The main point in this argument is the uniformity of the spectral gap inequalities for the measures $\mu^{(i)}_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ on $\mathbb{R}$. We emphasize this property with the following definition.

Definition 1.2.3 **(Uniform spectral gap inequality (USG))**
Let define $\overline{\theta} = (\theta_i)_{i\in N(0)}$ and $N(0) = \{j \in \mathbb{Z}^d \ ; \ j \sim 0\}$. Denote by $\mu_{\psi_{\overline{\theta}}}$ the probability measure on $\mathbb{R}$ defined by

$$d\mu_{\psi_{\overline{\theta}}}(x) = \frac{1}{Z_{\psi_{\overline{\theta}}}} \exp\left(-\psi_{\overline{\theta}}(x)\right) dx, \tag{1.10}$$

where $\psi_{\overline{\theta}}(x) = \psi(x) + \sum_{i\in N(0)} JV(x-\theta_i)$ and $Z_{\overline{\theta}} = \int \exp\left(-\psi_{\overline{\theta}}(x)\right) dx$. We say that the phase ψ satisfies a uniform spectral gap inequality (USG) if the measure $\mu_{\psi_{\overline{\theta}}}$ satisfies a spectral gap inequality with a constant C_{USG} independent of $\overline{\theta}$ in $\mathbb{R}^{|N(0)|}$.

At the light of this definition 1.2.3 and the preceding argument, we may state HELFFER's result in the following way (see [Led00b]).

Theorem 1.2.4. — *Let ψ be a real-valued function on $\mathbb{R}$ such that ψ satisfies the condition (USG) of the definition 1.2.3. Then there exists J_0 such that for every $J \in [0, J_0]$, the set of measures $(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}})_{\Lambda,\omega}$ satisfies spectral gap inequality with*

$$C_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \leqslant \frac{C_{USG}}{1 - C_{USG} 2dJ\|V''\|_\infty}.$$

The right hand side of the inequality does not depend of $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, and $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

With the same method, we also get the corresponding decay of correlations as in [Hel99a].

Theorem 1.2.5. — *Let ψ be a real-valued function on $\mathbb{R}$ such that ψ satisfies the condition (USG) of the definition 1.2.3. Then there exists J_0 and a constant C' such that for every $J \in [0, J_0]$, the set of measures $(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}})_{\Lambda,\omega}$ satisfies:*

$$\mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(F,G) \leqslant C' \exp(-d(S_F,S_G)) \left(\int \|\nabla F\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)^{1/2} \left(\int \|\nabla G\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)^{1/2},$$

for any smooth functions F, G, Λ and ω. The constant C' only depends on C_{USG}, J, d and $\|V''\|_\infty$.

Remark 1.2.6. — In the particular case where $V(x) = x^2$, (1.10) can be reparametrized in terms of a single one-dimensional parameter θ, and (USG) amounts to a uniform spectral gap for the set of measures (μ_{ψ_θ}) defined by

$$d\mu_{\psi_\theta}(x) = \frac{1}{Z_{\psi_\theta}} \exp(-\psi_\theta(x)) dx. \tag{1.11}$$

where $\psi_\theta(x) = \psi(x) + \theta x$.

A natural question is thus to ask when the condition (USG) is satisfied? Simple arguments show that (USG) holds when ψ is strictly convex at infinity, that is $\psi = \varphi_a + g$ with $\varphi_a''(x) \geqslant a$ for some $a > 0$ and $\|g\|_\infty < \infty$ (see [Yos99] and [ABC+00]). This is the classical phase behaviour investigated in the recent contributions on spectral gap and logarithmic Sobolev inequalities for unbounded spin systems by ZEGARLINSKI [Zeg96], YOSHIDA [Yos99], HELFFER [Hel99a] and BODINEAU-HELFFER [BH99a, BH99b].

That (USG) for a given phase ψ may be quite restrictive is shown by the example of $\psi(x) = |x|^s$ with some s in $[1, 2[$ that is known to satisfy a spectral gap inequality (see [ABC$^+$00]) but that does not satisfy a uniform spectral gap in the sense of the preceding definition as shown by the next proposition.

Proposition 1.2.7. — *Let ψ be a real-valued function on $\mathbb{R}$ such that*

$$\psi'(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \ \text{ and } \lim_{|x|\to\infty} \psi''(x) = 0.$$

Then the phase $\psi_\theta(x) = \psi(x) + \theta x$, define on (1.11), could satisfy for any θ in $\mathbb{R}$ a spectral gap inequality but the phase ψ does not satisfy the condition (USG).

Remark 1.2.8. — The function $\psi(x) = |x|^s$ satisfies the hypotheses of Proposition 1.2.7 and for any θ there is a spectral gap inequality. However by the last proposition, it does not satisfy the condition (USG). This case is treated by HELFFER in the Exercise 6.3.4 in [Hel99b].

Proof

◄ We assume that the measure μ_{ψ_θ} satisfies the condition (USG). By Theorem 1.2.2, there exists a constant $C_{USG} > 0$ such that, for any $\theta \in \mathbb{R}$ and any smooth function f with compact support, we have:

$$\int f'^2 d\mu_{\psi_\theta} \leqslant C_{USG} \int \left(f''^2 + f'^2\psi''\right) d\mu_{\psi_\theta}.$$

The hypotheses on ψ insure the existence of α_θ such that $\psi'(\alpha_\theta) + \theta = 0$, and $\lim_{|\theta|\to\infty} |\alpha_\theta| = \infty$. Then for any y by TAYLOR's formula on $\mathbb{R}$, there exists $u_{y,\theta} \in]0, 1[$ such that

$$\psi(y + \alpha_\theta) + \theta y = \psi(\alpha_\theta) + \frac{y^2}{2}\psi''(\alpha_\theta + u_{y,\theta} y).$$

By a change of variables,

$$\int f'(y)^2 e^{-\frac{y^2}{2}\psi''(\alpha_\theta + u_{y,\theta} y)} dy \\ \leqslant C_{USG} \int \left(f''(y)^2 + f'(y)^2\psi''(y + \alpha_\theta)\right) e^{-\frac{y^2}{2}\psi''(\alpha_\theta + u_{y,\theta} y)} dy.$$

By the dominated convergence theorem as $\theta \to \infty$,

$$\int f'^2 dx \leqslant C_{USG} \int f''^2 dx.$$

However, there is no spectral gap inequality for the LEBESGUE measure on $\mathbb{R}$. Therefore the phase ψ does not satisfy the condition (USG). ▶

Proposition 1.2.7 deals in particular with the case $|x|^s$ for $1 < s < 2$. On the other hand, one can easily see that $\psi_\theta(x) = |x|^2 + \theta x$ satisfies a spectral gap inequality with constant independant of θ (and so a uniform spectral gap). To complete this setting, our next result deals with the behaviour of the spectal gap constant of ψ_θ (define in 1.11) with $\psi(x) = |x|^s$ and $s > 2$. More precisely, we have (we omit the proof):

Proposition 1.2.9. — *Let ψ be a real-valued function on $\mathbb{R}$ such that*

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi''(x) = \infty.$$

Then the measure μ_{ψ_θ} defined in (1.11) satisfy for any θ a spactral gap inequality and the constant C_{ψ_θ} satisfy:

$$\lim_{|\theta|\to\infty} C_{\psi_\theta} = 0.$$

Theorem 1.2.4 reduces the question of spectral gap for families $(\mu_{\Lambda,\omega})$ to the (USG) property of a real-valued phase ψ. We now investigate this condition by means of HARDY type inequalities.

1.3. HARDY type inequalities and applications

This section introduces the notion of HARDY type inequalities which will be our basic tool to prove our main result (Theorem 1.4.1 below).

Let μ and ν be two probability measures on $\mathbb{R}^+$. We assume ν to be absolutely continuous with respect to LEBESGUE's measure on $\mathbb{R}^+$, and its density $d\nu/dx$ to be strictly positive. In 1972, MUCKENHOUPT generalized results of HARDY and TOMASELLI (see [Tom69]), TALENTI (see [Tal69]) and ARTOLA on some specific functional inequalities, now called HARDY type inequalities. They were namely interested in controlling the best constant A such that

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)\, dt\right)^2 d\mu(x) \leqslant A \int_0^\infty f^2(x)\, d\nu(x) \tag{1.12}$$

for all continuous functions for which the preceding integrals are well-defined. HARDY gave a result for this inequality with $d\mu(x) = x^{2b}dx$ and $d\nu(x) = x^{2b+2}dx$. TOMASELLI, TALENTI and ARTOLA proved the inequality for general measure $d\mu(x) = U^2(x)dx$ and $d\nu(x) = V^2(x)dx$. One of MUCKENHOUPT's main results [Muc72] is summarized in the next statement.

Theorem 1.3.1. — *The constant A defined by* (1.12) *is finite if and only if*

$$B \stackrel{def.}{=} \sup_{x \geqslant 0} \int_x^\infty d\mu(x) \int_0^x \left(\frac{d\nu}{dx}\right)^{-1} dx < \infty ,$$

and in this case,

$$B \leqslant A \leqslant 4B .$$

In [Mic99], MICLO establishes a link between the HARDY type inequalities and the spectral gap inequalities. While he was concerned with the case of probability measures on $\mathbb{Z}$, we briefly present here the corresponding results on the real line.

Let us first remark that if $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ and $\mu = \nu$ (that we will suppose from now), then the previous inequality (1.12) becomes

$$\int_0^\infty (F(x) - F(0))^2\, d\mu(x) \leqslant A \int_0^\infty F'^2(x)\, d\mu(x) .$$

This latter inequality is rather close to a spectral gap inequality for the probability measure μ. More precisely, it is well known that for every $m \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{Var}_\mu(F) \leqslant \int_{\mathbb{R}} (F(x) - F(m))^2\, d\mu(x) .$$

In order to apply Theorem 1.3.1, we need to cut the real line into two parts (to reduce $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^+$). We denote by A_m^+ and A_m^- the best constants satisfying respectively

$$\int_m^\infty (F(x) - F(m))^2\, d\mu(x) \leqslant A_m^+ \int_m^\infty F'^2(x)\, d\mu(x)$$

and

$$\int_{-\infty}^m (F(x) - F(m))^2\, d\mu(x) \leqslant A_m^- \int_{-\infty}^m F'^2(x)\, d\mu(x) ,$$

for all $\mathcal{C}^1$ functions F. By a simple change of variables, they are controlled by

$$B_m^+ \leqslant A_m^+ \leqslant 4B_m^+ \quad \text{and} \quad B_m^- \leqslant A_m^- \leqslant 4B_m^- ,$$

where

$$B_m^+ \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{x \geqslant m} \int_x^{\infty} d\mu(t) \int_m^x \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^{-1} dt \tag{1.13}$$

$$\text{and} \quad B_m^- \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{x \leqslant m} \int_{-\infty}^{x} d\mu(t) \int_x^m \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^{-1} dt \,.$$

We may summarize these observations in the following proposition.

Proposition 1.3.2. — *For every $m \in \mathbb{R}$, the best constant C in the spectral gap inequality for μ is such that*

$$C \leqslant 4(B_m^+ \vee B_m^-) \,.$$

While the latter bound holds for every $m \in \mathbb{R}$, we get a more precise control if m is a median for μ.

Proposition 1.3.3. — *Let m be a median of μ. Then μ satisfies a spectral gap inequality if and only if $B_m^+ \vee B_m^-$ is finite, and in this case, the best constant C in the spectral gap inequality for μ is such that*

$$\frac{1}{2}(B_m^+ \vee B_m^-) \leqslant C \leqslant 4(B_m^+ \vee B_m^-) \,.$$

Proof

◀ We need only prove the lower bound. Assume that $B_m^+ \vee B_m^-$ is finite and that $B_m^+ \vee B_m^- = B_m^+$. For any $\epsilon > 0$, we can find f such that

$$\int_m^{\infty} \left(\int_m^x f(t)\,dt\right)^2 d\mu(x) \geqslant (A_m^+ - \epsilon) \int_m^{\infty} f^2(x)\,d\mu(x) \,.$$

Without loss of generality, we can assume that f is non negative. Now, define

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leqslant m \,, \\ \int_m^x f(t)\,dt & \text{if } x \geqslant m \,. \end{cases}$$

As m is a median of μ, $\mu(F=0) \geqslant \mu(x \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$. From the CAUCHY-SCHWARZ inequality, we get therefore that

$$\mu(F)^2 \leqslant \mu(F^2)\mu(F>0) \leqslant \frac{1}{2}\mu(F^2) \,.$$

Hence

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}_\mu(F) = \mu(F^2) - \mu(F)^2 &\geqslant \frac{1}{2}\mu(F^2)\\ &\geqslant \frac{1}{2}(A_m^+ - \epsilon)\int_m^\infty F'^2(x)\,d\mu(x)\\ &\geqslant \frac{1}{2}(B_m^+ - \epsilon)\int_{-\infty}^\infty F'^2(x)\,d\mu(x)\\ &\geqslant \frac{1}{2}(B_m^+ - \epsilon)\frac{1}{C}\mathbf{Var}_\mu(F)\ ,\end{aligned}$$

from which the result follows since $\epsilon > 0$ is arbitrary.

Now, assume that $B_m^+ = \infty$. Following step by step the previous argument with f_n such that

$$\int_m^\infty \left(\int_m^x f_n(t)\,dt\right)^2 d\mu(x) \geqslant n\int_m^\infty f_n^2(x)\,d\mu(x)$$

for n large enough, we conclude similarly that $C = \infty$. The proof of the proposition is complete. ►

In the following, we describe with the preceding results some perturbation properties. Consider a function $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Given a phase φ, we modify the probability measure $d\mu_\varphi(x) = Z_\varphi^{-1}\exp(-\varphi(x))dx$ as

$$d\mu_{\varphi+h}(x) = Z_{\varphi+h}^{-1}\exp(-\varphi(x) - h(x))dx\ . \tag{1.14}$$

We assume that $Z_{\varphi+h}$ is finite. h can be considered as a perturbation function.

The following result gives conditions on φ and h so that $\mu_{\varphi+h}$ satisfies a spectral gap inequality. It also gives an upper bound on the spectral gap constant.

Theorem 1.3.4. — *Assume that there exist $m \in \mathbb{R}$ and a constant K independent of x such that for all $x \geqslant m$,*

$$\int_x^\infty e^{-\varphi(t)}\,dt \leqslant Ke^{-\varphi(x)} \quad \textit{and} \quad \int_m^x e^{\varphi(t)}\,dt \leqslant Ke^{\varphi(x)}\ , \tag{1.15}$$

and the corresponding inequalities for $x \leqslant m$. Assume furthermore that φ is increasing on $[m, \infty)$ and decreasing on $(-\infty, m]$. Assume also that

$$S \overset{\text{def.}}{=} \int_{\mathbb{R}} (e^{|h|} - 1) < \infty\ . \tag{1.16}$$

Then, the probability measure $\mu_{\varphi+h}$ defined by (1.14) satisfies the spectral gap inequality. Furthermore, the best constant $C_{\varphi+h}$ appearing in the spectral gap inequality is controled by

$$C_{\varphi+h} \leqslant 4(K^2 + 2KS + S^2)\ .$$

Proof

◀ From Proposition 1.3.2, we see that $C_{\varphi+h} \leqslant 4(B_m^+(\varphi+h) \vee B_m^-(\varphi+h))$. By symmetry, we may reduce to the control of

$$B_m^+(\varphi+h) \overset{\text{def.}}{=} \sup_{x \geqslant m} \int_m^x e^{\varphi(t)+h(t)}\, dt \int_x^\infty e^{-\varphi(t)-h(t)}\, dt\ .$$

Now, given that $x \geqslant m$, we may write

$$\int_m^x e^{\varphi(t)+h(t)} dt \int_x^\infty e^{-\varphi(t)-h(t)}\, dt \leqslant$$
$$\left(\int_m^x e^{\varphi} + \int_m^x e^{\varphi} \left|e^h - 1\right|\right) \left(\int_x^\infty e^{-\varphi} + \int_x^\infty e^{-\varphi} \left|e^{-h} - 1\right|\right)\ .$$

We develop the right hand side using (1.15) and monotonicity of φ to get

$$\begin{aligned}\int_m^x e^{\varphi(t)+h(t)}\, dt \int_x^\infty e^{-\varphi(t)-h(t)}\, dt \ &\leqslant\ \left(Ke^{\varphi(x)}\right)\left(Ke^{-\varphi(x)}\right) + \\ \left(Ke^{\varphi(x)}\right)\left(e^{-\varphi(x)} \int_x^\infty \left|e^{-h(t)} - 1\right|\, dt\right) &+ \left(e^{\varphi(x)} \int_m^x \left|e^{h(t)} - 1\right|\, dt\right)\ \left(Ke^{-\varphi(x)}\right) \\ &+ \left(e^{\varphi(x)} \int_m^x \left|e^{h(t)} - 1\right|\, dt\right)\left(e^{-\varphi(x)} \int_x^\infty \left|e^{-h(t)} - 1\right|\, dt\right)\ .\end{aligned}$$

Now, note that $|e^h - 1| \leqslant e^{|h|} - 1$. It follows that for all $x \geqslant m$

$$\int_m^x e^{\varphi(t)+h(t)}\, dt \int_x^\infty e^{-\varphi(t)-h(t)}\, dt \leqslant K^2 + 2KS + S^2\ .$$

Together with the corresponding result for $B_m^-(\varphi+h)$, this completes the proof. ▶

Remark 1.3.5. — Turning back the proof above, we can replace K^2 in the upper bound of $C_{\varphi+h}$ by $B_m^+(\varphi) \vee B_m^-(\varphi)$ (this quantity is finite by (1.15)). Moreover, if m is a median of μ_φ, keeping all the hypotheses of Theorem 1.3.4 and applying Proposition 1.3.3, we get that $B_m^+(\varphi) \vee B_m^-(\varphi) \leqslant 2C_\varphi \leqslant 8B_m^+(\varphi) \vee B_m^-(\varphi)$ so that

$$C_{\varphi+h} \leqslant 8C_\varphi + 4(2KS + S^2)\ .$$

This inequality clearly describes the contribution of the perturbation in the spectral gap constant.

1.4. A new class of measures which satisfies a spectral gap inequality

As already mentioned in Section 1 and 2, the keystone of HELFFER's method is the (USG) condition (see Definition 1.2.3). It allows us to reduce the initial problem on unbounded spin systems to a simple problem on the real line. We will then be able to apply Theorem 1.3.4.

In this section, we first present and establish the main result of this paper. We then discuss why the new class of phases $\psi = \varphi + g + h$ is strictly bigger than the usual class of phases convex at infinity.

Theorem 1.4.1. — *Let φ be a strictly uniformly convex function (i.e. for all $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) \geqslant a > 0$), let g be a bounded function ($\|g\|_\infty < \infty$), and let h be a perturbation function satisfying $S = \int_{\mathbb{R}}(e^{|h|} - 1) < \infty$. Then, there exists J_0 such that for all $J \in [0, J_0]$, the set of measures $(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}})$ defined in (1.2) with $\psi = \varphi + g + h$ satisfies a spectral gap inequality uniformly in Λ and ω, with*

$$C_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \leqslant \frac{C_{USG} e^{4\|g\|_\infty}}{1 - C_{USG} 2dJ \|V''\|_\infty} ,$$

where $C_{USG} \leqslant 4(K^2 + 2KS + S^2)$ and $K \leqslant 1 + 4/a$.

This set of measures satisfies also a decay of correlations, uniformly in Λ and ω, with constant C' depending only on C_{USG}, J, d, $\|V''\|_\infty$ and $\|g\|_\infty$, that is, for any smooth functions F, G,

$$\mathbf{E}_{\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}(F, G) \leqslant C' \exp(-d(S_F, S_G)) \left(\int \|\nabla F\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \right)^{1/2} \left(\int \|\nabla G\|^2 d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}} \right)^{1/2} .$$

The proof of this theorem requires two technical lemmata. Note that from the hypothesis on φ, it is obvious that φ has a unique minimum $m \in \mathbb{R}$ and that φ is increasing on $[m, \infty)$ and decreasing on $(-\infty, m]$.

Lemma 1.4.2. — *Let φ be as defined in Theorem 1.4.1. Then there exists a constant $K \leqslant 1 + 2/a$ such that for all $x \geqslant m$,*

$$\int_m^x e^{\varphi(t)}\, dt \leqslant K e^{\varphi(x)} .$$

Proof

◀ By convexity, for all $x \geqslant m+1$,

$$\varphi'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(m) \geqslant a(x-m) \geqslant a \;. \tag{1.17}$$

For $x \geqslant m+1$, integration by parts yields that

$$\begin{aligned} \int_{m+1}^{x} e^{\varphi(t)}\, dt &= \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi'(x)} - \frac{e^{\varphi(m+1)}}{\varphi'(m+1)} + \int_{m+1}^{x} \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^2} e^{\varphi(t)}\, dt \\ &\leqslant \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi'(x)} + e^{\varphi(x)} \int_{m+1}^{x} \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^2}\, dt \;, \\ &\leqslant \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi'(x)} + \frac{1}{\varphi'(m+1)} e^{\varphi(x)} \;. \end{aligned}$$

So, by (1.17),

$$\int_{m+1}^{x} e^{\varphi(t)}\, dt \leqslant \frac{2}{a} e^{\varphi(x)} \;.$$

Finally, for all $x \geqslant m+1$, we have

$$\begin{aligned} \int_{m}^{x} e^{\varphi(t)}\, dt &= \int_{m}^{m+1} e^{\varphi(t)}\, dt + \int_{m+1}^{x} e^{\varphi(t)}\, dt \\ &\leqslant e^{\varphi(x)} + \frac{2}{a} e^{\varphi(x)} \\ &\leqslant \left(1 + \frac{2}{a}\right) e^{\varphi(x)} \;, \end{aligned}$$

namely, the expected result in this case with $K = 1+2/a$. Now, for $m \leqslant x \leqslant m+1$, write

$$\int_{m}^{x} e^{\varphi(t)}\, dt \leqslant e^{\varphi(x)} \leqslant K e^{\varphi(x)} \;,$$

from which the proof follows. ▶

In a similar way, we can prove the following lemma (we omit the proof).

Lemma 1.4.3. — *Let φ be as defined in Theorem 1.4.1. Then there exists a constant $K \leqslant 1 + 1/a$ such that for all $x \geqslant m$,*

$$\int_{x}^{\infty} e^{-\varphi(t)}\, dt \leqslant K e^{-\varphi(x)} \;.$$

Note that it exists two corresponding lemmata for $x \leqslant m$.

We now prove Theorem 1.4.1.

Proof

◀ As announced, we use the reduction to the (USG) property provided by Theorem 1.2.4. With the notation of the first two sections and in particular Definition 1.2.3, let us define

$$\varphi_{\overline{\theta}}(x) = \varphi(x) + \sum_{i \in N(0)} JV(x - \theta_i) \ .$$

For all $x \in \mathbb{R}$ and J small enough, $\varphi''_{\overline{\theta}}(x) \geqslant a - 2dJ\|V''\|_\infty \geqslant a/2$. It follows from lemmata 1.4.2 and 1.4.3 that the hypothesis (1.15) holds for $\varphi_{\overline{\theta}}$, with $K \leqslant 1 + 4/a$. We can thus apply Theorem 1.3.4 to $\varphi_{\overline{\theta}}$ and h to get

$$C_{USG} \leqslant 4(K^2 + 2KS + S^2) \ .$$

The preceding constant is independent of $\overline{\theta} = (\theta_i)_{i \in N(0)}$, so that (USG) is satisfied. In this way we may apply Theorem 1.2.4. The set of measures $(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}})$ will satisfy a spectral gap inequality with a constant equal to

$$\frac{C_{USG}}{1 - C_{USG} 2dJ\|V''\|_\infty} \ .$$

Finally, it is well known that adding a bounded function g gives no more than $e^{4\|g\|_\infty}$ in the control of the constant (see [ABC+00]).

On the other hand, applying Theorem 1.2.5 instead of Theorem 1.2.4 gives the result on the decay of correlations. Theorem 4.1 is established. ▶

We now present examples of functions $\psi = \varphi + g + h$ defined in Theorem 1.4.1 that are not convex at infinity. To do so, we give an example where we add a special perturbation function h to φ (where φ is as in Theorem 1.4.1). Indeed, let $h(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} h_i(x)$ where $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{Z})$ is a piecewise linear continuous function defined from its derivative by

$$h'_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin [u_i, u_i + \alpha_i] \ , \\ -\beta_i & \text{if } x = u_i + \frac{\alpha_i}{4} \ , \\ \beta_i & \text{if } x = u_i + \frac{3\alpha_i}{4} \ , \end{cases}$$

where (β_i) is a sequence of non negative numbers and (u_i) and (α_i) are two sequences of real numbers such that $u_i < u_i + \alpha_i < u_{i+1}$. Moreover we assume that $[u_i, u_i + \alpha_i]$ is the support of h_i. One can see h_i as a well of depth $\alpha_i \beta_i / 4$ and of width α_i.

To be outside the classical class of convex at infinity functions, it is enough to show that the depth of the well increases faster than φ. Write $L_i = \|h_i\|_\infty - (\varphi(u_i + \alpha_i/2) - \varphi(u_i))$. We have the following obvious sufficient condition (we omit the proof).

Proposition 1.4.4. — *Let φ be as in Theorem 1.4.1 and h as above. Then, if*

$$\lim_{i\to\infty} L_i = \infty \ ,$$

then $\varphi + h$ is not convex at infinity.

It is now easy to choose the sequences $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ and $(\beta_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ such that

$$\lim_{i\to\infty} L_i = \infty$$

and at the same time,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|h|} - 1 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i e^{\|h_i\|_\infty} < \infty \ ,$$

since we are free to choose α_i as we want. For example, one can chose $\varphi(x) = x^2/2$ and h as above, even, with $u_i = i$, $\beta_i = 4i^3 e^i$ and $\alpha_i = e^{-i}/i^2$ for all $i \in \mathbb{N}^*$. It's well known that $d\mu_\varphi(x) = Z^{-1}e^{-x^2/2}dx$ satisfies a spectral gap inequality with constant $C_\varphi = 2$. On the other hand, it follows from an obvious calculus that $L_i = i - o(1/i)$ and $S \leqslant 2\sum_{i\in\mathbb{N}^*} 1/i^2$. Proposition 1.4.4 holds and so $\varphi + h$ is not convex at infinity. Moreover the hypotheses of Theorem 1.4.1 are satisfied.

We may note that Theorem 1.4.1 is quite general since the condition on the perturbation h ($\int_{\mathbb{R}}(e^{|h|} - 1) < \infty$) is rather weak. Until now, the results were based on convexity conditions (following semi-group methods) whereas we just need integrability conditions here.

In this note, we proved a perturbation theorem (Theorem 1.3.4) for POINCARÉ inequalities using HARDY's criterion. One may try to obtain the same kind of result for logarithmic SOBOLEV inequalities using the corresponding criterion by BOBKOV and GÖTZE (see [BG99]). In an other direction, one can try to prove logarithmic SOBOLEV inequalities for unbounded spin systems with nearest neighbor interaction associated to non convex phases introduced in this note. But here, HELFFER's method is no more avaible because there is no result like Theorem 1.2.2 (See the next chapter or for example [Led00b, ABC$^+$00]). It is an open problem to find its analogue for logarithmic SOBOLEV inequalities. One may also try to use a more classical approache via the decay of correlations (see [Zeg96, Yos99, BH99a]). In this direction, HELFFER (see [Hel99b] Remark 8.5.2) remarks that under the decay of correlations (see Theorem 1.2.5) and an hypothesis relative to the existence for each n of a uniform logarithmic SOBOLEV constant C_n (uniform on the boundary conditions, in J and in the functions f with support "nearly" includes in a box of size n), one can prove the logarithmic SOBOLEV inequality for unbounded spin systems. Actually, taking back the proof given by HELFFER, we can see that we only need the existence of the uniform logarithmic SOBOLEV constant in dimension one.

We will see in the next chapter the details for the case of the logarithmic SOBOLEV inequality.

Acknowledgment. — The authors warmly acknowledge M. LEDOUX for his hints and for several interesting and instructing discussions.

CHAPITRE 2

ÉTUDE DE L'INÉGALITÉ DE SOBOLEV LOGARITHMIQUE ET APPLICATIONS AUX SYSTÈMES DE SPINS

2.1. Introduction

Ce chapitre a pour objet l'inégalité de SOBOLEV logarithmique étudiée dans différentes conditions et différents modèles sur l'espace $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Ces différentes études nous amènerons à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour des modèles de mécanique statistique.

Définissons tout d'abord l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour une mesure de probabilité. Si le cadre considéré ici est celui de $\mathbb{R}^n$, notons cependant que des extensions peuvent être obtenues dans un cadre beaucoup plus général, voir notamment [Bak94] ainsi que le chapitre 5 de [ABC+00].

Définition 2.1.1 **(Inégalité de SOBOLEV logarithmique)**
Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. La mesure μ satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f assez régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \mathbf{E}_\mu(f^2 \log f^2) - \mathbf{E}_\mu(f^2) \log \mathbf{E}_\mu(f^2) \leqslant C \int \|\nabla f\|_2^2 d\mu, \tag{2.1}$$

où $\|\nabla f\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)^2$ et $\mathbf{E}_\mu(f) = \int f d\mu$.

Nous supposerons ici qu'une fonction assez régulière est par exemple une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Nous renvoyons à [Bak94] ou [ABC+00] pour obtenir une classe plus générale.

Notons que la mesure élémentaire vérifiant l'inégalité de SOBOLEV logarithmique est, γ_n, la mesure gaussienne standard en dimension n. La constante optimale est alors égale à 2 et remarquons que celle-ci ne dépend pas de la dimension, (voir le corollaire 1.5.3 de [ABC+00]).

Cette inégalité fonctionnelle est plus forte que l'inégalité de POINCARÉ dans le sens que si une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique de constante C alors elle satisfait aussi à une inégalité de POINCARÉ de constante $C/2$. Ce lien fondamental entre ces deux inégalités est démontré dans la section 1.2.6 de [ABC+00]. L'inverse est faux, il existe des mesures de probabilité qui vérifient l'inégalité de POINCARÉ mais pas l'inégalité de SOBOLEV.

L'intérêt principal de ce chapitre, comme pour le précédent pour l'inégalité de POINCARÉ, est de prouver une inégalité de SOBOLEV logarithmique pour des modèles de mécanique statistique similaires à ceux étudiés précédemment. Définissons d'abord le modèle de mécanique statistique auquel nous nous intéressons. La famille de mesures que nous étudierons ici est un cas particulier de la famille étudiée dans le chapitre précédent pour l'inégalité de POINCARÉ, (nous considérons ici le cas $V(x) = x^2$).

Considérons la mesure $\exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))dX$, où $\Phi_{\Lambda,\omega}$ est une fonction associée au sous-ensemble fini Λ de $\mathbb{Z}^d$ (pour $d \in \mathbb{N}^*$) et pour $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ qui définit les conditions au bord. La fonction $\Phi_{\Lambda,\omega}$ est égale, pour $X = X^\Lambda \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}$ (où $|\Lambda|$ est le cardinal de Λ), à

$$\Phi_{\Lambda,\omega}(X) = \sum_{i\in\Lambda} \psi(x_i) + J \sum_{\{i,j\}\cap\Lambda\neq\emptyset,\, i\sim j} (z_i - z_j)^2,$$

où

- $z_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in \Lambda \\ \omega_i & \text{si } i \notin \Lambda \end{cases}$,
- ψ est une fonction réelle appelée *phase*.
- $i \sim j$ si i et j sont des voisins de $\mathbb{Z}^d$ au sens de la norme l_1.
- $J \geqslant 0$ est un paramètre réel appelé *paramètre de couplage*.

Nous supposerons dans la suite qu'il existe $J_0 > 0$ tel que pour tout J dans $[0, J_0]$, pour tout sous-ensemble fini Λ de $\mathbb{Z}^d$ et ω dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, l'intégrale de $\exp(-\Phi_{\Lambda,\omega})$ par rapport à la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}^\Lambda$ soit finie. Dans ce cas, nous définissons la mesure de probabilité $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ par

$$d\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}(X) = \frac{1}{Z_{\Phi_{\Lambda,\omega}}} \exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))dX, \tag{2.2}$$

où $Z_{\Phi_{\Lambda,\omega}} = \int \exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))dX$. Ainsi nous parlerons de la famille de mesures $(\mu_{\Lambda,\omega})_{\Lambda,\omega}$. Ce modèle est décrit dans [BH99a, BH00] (voir aussi [Hel99a]). Par exemple, le cas particulier où l'on a $\psi(x) = ax^4 - bx^2$ $(a, b > 0)$ est considéré par YOSHIDA dans [Yos99, Yos00, Yos01].

En considérant ce modèle, nous avons fait quelques choix particuliers que nous expliquons maintenant.

- Par rapport au chapitre 1 nous considérons le cas où $V(x) = x^2$. Cette simplification provient de problèmes techniques, elle permet de reprendre des calculs de BODINEAU et de HELFFER.
- Comme dans le chapitre 1 nous considérons une interaction au plus proches voisins. Il me semble possible d'étendre les résultats de ces deux chapitres à un modèle ou l'on a une interaction entre tous les sites et que celle-ci décroît avec la distance.
- Enfin, comme dans le chapitre 1 nous considérons un paramètre de couplage J positif. Cette simplification est faite juste pour réduire les calculs, les résultats des chapitres 1 et 2 sont encore valable pour $|J|$ petit.

L'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour ce modèle est étudié depuis maintenant quelques années. Les résultats obtenus par ZEGARLINSKI, YOSHIDA, BODINEAU et HELFFER sont les suivants :

Supposons que la fonction ψ peut-être décomposée en la somme d'une fonction uniformément convexe plus une fonction bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions φ et g vérifiant

$$\text{(CB)} \qquad \psi = \varphi + g \text{ avec } \begin{cases} \varphi'' & \geqslant c > 0 \\ \|g\|_\infty & < \infty. \end{cases}$$

Nous dirons, dans ce cas que la fonction ψ vérifie la *condition (CB)*. Alors il existe une constante C telle que pour tout sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, Λ, et pour tout $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ la mesure $\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique de constante C. Une des difficultés étant de prouver l'uniformité par rapport aux paramètres Λ et ω. Nous allons dans ce chapitre donner de nouvelles fonctions ψ telle que ce résultat subsiste.

L'inégalité de SOBOLEV logarithmique est plus complexe à étudier que l'inégalité de POINCARÉ et donc, avant de montrer des résultats pour le modèle de spins, nous allons tout d'abord donner dans les sections suivantes les premières propriétés et critères de cette inégalité.

Nous allons voir dans la section 2.2 le cas de la dimension 1. Ce cas est intéressant car il nous permet de dégager des exemples nouveaux de mesures vérifiant l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Les résultats de cette section seront utilisés pour les système de spins.

Dans la section 2.3 nous étudions les différents critères permettant de montrer l'inégalité de SOBOLEV logarithmique dans le cas multi-dimentionnel. Nous expliquons la méthode de tensorisation permettant d'obtenir une inégalité de SOBOLEV logarithmique pour des mesures produits. Ensuite nous expliquons la méthode de perturbation permettant quant à elle de montrer une inégalité de SOBOLEV logarithmique pour des mesures dont la densité est perturbée par une fonction dont le logarithme est bornée. Enfin nous exposons les différents critères Γ_2 de BAKRY et EMERY qui sont actuellement les critères les plus importants s'appliquant à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Enfin dans la section 2.4 nous donnons de nouveaux des exemples de phases ψ telles que la mesure définie par l'équation (2.2) satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique avec une constante indépendante des différents paramètres Λ et ω. Nous étudions deux méthodes. La première utilise le critère Γ_2-intégré, celle-ci aboutit malheureusement à une impasse. La seconde est plus délicate, elle utilise les méthodes développées par BODINEAU, HELFFER et YOSHIDA. Nous arrivons alors à obtenir de nouveaux modèles de mécanique statistique vérifiant l'inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Dans ce chapitre nous rappelons beaucoup de résultats maintenant bien connus. Mon apport est dans un premier temps la réorganisation des différents critères multi-dimentionnelles. D'autre part l'extension des inégalités de SOBOLEV logarithmique à de nouveaux modèles de mécanique statistique. Pour cela j'ai dû trouver de nouveaux exemples de mesures sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à l'inégalité.

2.2. Inégalité de SOBOLEV logarithmique sur $\mathbb{R}$

Étudions à présent l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. L'intérêt de ce placer sur $\mathbb{R}$ est que nous pouvons utiliser la condition nécessaire et suffisante de BOBKOV et GÖTZE pour qu'une mesure de probabilité de $\mathbb{R}$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique, voir [BG99] ou le chapitre 6 de [ABC+00]. Nous verrons dans la section 2.4 l'utilisation de ce résultat pour démontrer l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour des systèmes de spins.

Rappelons brièvement le théorème de BOBKOV et GÖTZE. Soit ψ une fonction mesurable, telle que $\exp(-\psi)$ soit intégrable par rapport à la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}$. Définissons la mesure de probabilité μ_ψ de la façon suivante :

$$d\mu_\psi(x) = \frac{1}{Z_\psi}\exp(-\psi(x))dx, \tag{2.3}$$

où $Z_\psi = \displaystyle\int \exp(-\psi(x))dx$.

Soit m une médiane de la mesure de probabilité μ_ψ. Définissons respectivement sur $]\infty, m]$ et sur $[m, \infty[$ les fonctions D_- et D_+ par

$$D_-(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\psi(t)}dt\right)\left(\int_{x}^{m} e^{\psi(t)}dt\right)\left(\log\frac{Z_\psi}{\int_{-\infty}^{x} e^{-\psi(t)}dt}\right),$$

$$D_+(x) = \left(\int_{x}^{+\infty} e^{-\psi(t)}dt\right)\left(\int_{m}^{x} e^{\psi(t)}dt\right)\left(\log\frac{Z_\psi}{\int_{x}^{+\infty} e^{-\psi(t)}dt}\right).$$

D'après BOBKOV et GÖTZE, la mesure μ_ψ définie par (2.3) satisfait à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique si et seulement si les fonctions D_- et D_+ sont bornées sur leurs intervalles de définitions. Plus précisément il existe deux constantes universelles A et B telles que la constante C de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique vérifie l'inégalité suivante

$$A \sup\{\|D_+\|_\infty, \|D_-\|_\infty\} \leqslant C \leqslant B \sup\{\|D_+\|_\infty, \|D_-\|_\infty\}.$$

Ce critère nous permet de dégager des premiers exemples de mesures vérifiant l'inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Proposition 2.2.1. — *Supposons qu'une fonction ψ vérifie la condition (CB). Alors la mesure de probabilité μ_ψ définie par* (2.3) *satisfait à une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique.*

La démonstration est élémentaire. On se ramène au cas où $\psi'' \geqslant c > 0$ et on applique la remarque 6.4.4 de [ABC+00].

Remarque 2.2.2. — Notons que le résultat exposé dans la proposition précédente n'est pas très pertinent. En effet celui-ci fait parti d'un critère beaucoup général qui s'applique à des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. Ce résultat est exposé dans la prochaine section. De plus la constante obtenue par cette méthode est loin d'être optimale.

Le critère de BOBKOV et GÖTZE permet de dégager un exemple particulier de mesure vérifiant une inégalité de SOBOLEV logarithmique, cet exemple est dû à ROBERTO et MALRIEU.

Exemple 2.2.3. — D'après la section 6.4.4 de [ABC+00], la mesure du probabilité μ_ψ, définie en (2.3), avec $\psi(x) = x^2 + x\sin x$, satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Il est facile de montrer que la fonction ψ ne vérifie pas la condition (CB). L'intérêt de cet exemple est donc juste de fournir une fonction ψ explicite telle que la mesure μ_ψ vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique avec ψ qui ne vérifie pas la condition (CB).

Malgré la remarque 2.2.2, le critère BOBKOV et GÖTZE permet, en reprenant la méthode expliquée dans la section 4 du chapitre précédent pour l'inégalité de trou spectral, de dégager une nouvelle classe de mesures sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à une inégalité de SOBOLEV logarithmique. Le résultat est exposé dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.4. — *Soit $\psi = \varphi + h$, où h est une fonction négative et φ vérifie les conditions suivantes*

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2} & = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2} & = 0. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe $p \in]1, \infty[$ telle que la quantité $S_p = \int \left|e^{|h|} - 1\right|^p$ soit finie et que la fonction φ vérifie de plus les hypothèses suivantes

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)^{1+1/q}} & < \infty \\ \limsup\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)^{1+1/q}} & < \infty, \end{cases}$$

avec $1/p + 1/q = 1$. Alors la mesure de probabilité μ_ψ définie en (2.3) satisfait à une inégalité de SOBOLEV *logarithmique.*

Preuve. — La démonstration de ce résultat s'appuie sur le critère de BOBKOV et GÖTZE. Soit m une médiane de μ_ψ. Nous allons majorer les fonctions D_- et D_+ sur leurs domaines de définition. Ces fonctions sont continues, nulles en zéro et positives. Elles sont par suite majorées dés qu'elles sont bornées au voisinage de l'infini. La fonction h étant négative, l'inégalité de HÖLDER entraîne que :

$$\begin{aligned} D_+(x) &= \left(\int_x^{+\infty} e^{-\varphi(t)-h(t)}dt\right)\left(\int_m^x e^{\varphi(t)+h(t)}dt\right)\left(\log\frac{Z_\psi}{\int_x^{+\infty} e^{-\varphi(t)-h(t)}dt}\right)\\ &\leqslant \left(\int_x^{+\infty} e^{-\varphi(t)-h(t)}dt\right)\left(\int_m^x e^{\varphi(t)}dt\right)\left(\log\frac{Z_\psi}{\int_x^{+\infty} e^{-\varphi(t)}dt}\right)\\ &\leqslant \left(\left(\int_x^{+\infty} e^{-q\varphi(t)}dt\right)^{1/q} S_p^{1/p}+\int_x^{+\infty} e^{-\varphi(t)}dt\right)\left(\int_m^x e^{\varphi(t)}dt\right)\times\\ &\quad\left(\log\frac{Z_\psi}{\int_x^{+\infty} e^{-\varphi(t)}dt}\right). \end{aligned}$$

L'hypothèse (2.4) faite sur la fonction φ, et le corollaire 6.4.2 de [ABC+00] assurent que l'on a

$$\int_x^{\infty} e^{-\varphi(t)}dt \sim_\infty \frac{e^{-\varphi(x)}}{\varphi'(x)}$$
$$\text{et } \int_m^x e^{\varphi(t)}dt \sim_\infty \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi'(x)}.$$

Il existe alors une constante $K>0$ telle que

$$D_+(x) \;\leqslant\; K\left(\frac{S_p^{1/p}}{\varphi'(x)^{1/q}}+\frac{1}{\varphi'(x)}\right)\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\varphi(x)+\varphi'(x)\right),$$

c'est-à-dire encore :

$$D_+(x) \;\leqslant\; \tilde{K} S_p^{1/p}\frac{\varphi(x)}{\varphi'^{1+1/q}}, \tag{2.6}$$

où $\tilde{K}$ est une nouvelle constante.

L'hypothèse (2.5) faite sur la fonction φ permet alors de borner l'inégalité (2.6) sur $[m,\infty[$. La même méthode est utilisée pour borner la fonction D_- sur l'intervalle $]-\infty,m]$. □

Remarque 2.2.5. — La condition (2.4) est une condition de régularitée qui n'est pas très contraignante pour la fonction φ. Notons en revanche que d'une part la condition (2.5) est une condition de croissance à l'infini et d'autre part la condition $S_p<\infty$ est une condition d'intégration pour la fonction h. Celle-ci est vérifiée dés que h est « souvent nulle ».

Exemple 2.2.6. — Voici le principal exemple. Tout polynôme de la forme $|x|^\alpha$, $(\alpha > 2)$, satisfait les deux hypothèses (2.4) et (2.5) pour $q = \alpha - 1$. Si h est une fonction négative vérifiant $S_p = \int \left|e^{|h|} - 1\right|^p < \infty$ avec $p = (\alpha - 1)/(\alpha - 2)$ et g vérifiant $\|g\|_\infty < \infty$, alors le théorème précédent assure que pour $\psi = |x|^\alpha + h + g$ la mesure μ_ψ satisfait à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. Remarquons cependant, que la méthode exposée ici ne permet malheureusement pas de conclure lorsque $\varphi(x) = x^2/2$, qui représente la mesure gaussienne.

Remarque 2.2.7. — L'exemple précédent est intéressant car, contrairement à l'exemple 2.2.3, il nous permet de donner une classe de mesures de la forme μ_ψ, définie en (2.3), telle que ψ ne vérifie pas la condition (CB). En effet si $\alpha > 1$ et $\psi = |x|^\alpha + h + g$, on peut trouver une fonction h négative vérifiant $S_p = \int \left|e^{|h|} - 1\right|^p < \infty$ avec $p = (\alpha - 1)/(\alpha - 2)$ et g vérifiant $\|g\|_\infty < \infty$ et telle que ψ ne vérifie pas la condition (CB). Voir pour cela la fin de la section 4 du chapitre 1.

2.3. Critères multi-dimensionels

Dans le cas des mesures sur $\mathbb{R}^n$ on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante aussi commode que celle de BOBKOV et GÖTZE pour l'obtention d'une inégalité de SOBOLEV logarithmique. Néanmoins il existe plusieurs principes et critères. Nous allons dans une première partie expliquer le principe de tensorisation.

2.3.1. Tensorisation de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. — Le principe de tensorisation est élémentaire mais très important pour les inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmique. Celui-ci est largement détaillé dans le chapitre 3 de [ABC+00], il date de l'invention même de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique, voir [Gro75].

Théorème 2.3.1. — *Soit μ_1 (resp. μ_2) une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$). Supposons que μ_1 (resp. μ_2), satisfait à une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique de constante C_1 (resp. C_2). Alors la mesure de probabilité $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $\mathbb{R}^{n+m}$ satisfait à une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique de constante* $\max\{C_1, C_2\}$.

Ce théorème se généralise pour un nombre fini de mesures de probabilité. On pourra, pour la démonstration, consulter le théorème 3.2.2 et le corollaire 3.2.3 de [ABC+00].

Voyons maintenant la propriété de perturbation.

2.3.2. Perturbation de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. — Voyons dans le théorème suivant, la propriété de perturbation, permettant de contrôler la constante de inégalité de SOBOLEV logarithmique lorsque la densité est faiblement perturbée. Ce résultat est due à HOLLEY et STROOCK, voir [HS87].

Théorème 2.3.2. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant à une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique de constante C. Soit U une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ bornée. Définissons la mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ par*

$$d\tilde{\mu} = \frac{e^U}{Z} d\mu,$$

où $Z = \int e^U d\mu$.

Alors la mesure $\tilde{\mu}$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV *logarithmique de constante $\tilde{C} = C \exp(2\mathrm{osc}(\mathrm{U}))$, où $\mathrm{osc}(\mathrm{U}) = \sup(\mathrm{U}) - \inf(\mathrm{U})$.*

De même, on pourra, pour la démonstration, consulter le théorème 3.4.3 de [ABC⁺00].

Les résultats de la section 2.2 combinés avec ceux de tensorisation et de perturbation permettent déjà de dégager une grande classe de mesures satisfaisant à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Introduisons dans la section suivante certains critères de BAKRY et EMERY.

2.3.3. Les critère Γ_2. — Nous allons ici introduire différents objets pour définir les critères Γ_2.

Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\exp(-\psi)$ soit intégrable par rapport à la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}^n$. Définissons la mesure de probabilité μ_ψ de la façon suivante :

$$d\mu_\psi(X) = \frac{1}{Z_\psi} \exp(-\psi(X)) dX, \tag{2.7}$$

où $Z_\psi = \displaystyle\int \exp(-\psi(X)) dX$.

Soit $\mathbf{L} = \Delta - (\nabla\psi \cdot \nabla)$ le générateur infinitésimal de diffusion de mesure réversible μ_ψ. Posons enfin, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \mathbf{\Gamma}(f) & = \|\nabla f\|_2^2 \\ \mathbf{\Gamma_2}(f) & = (\nabla f)^\top \cdot \mathrm{Hess}(\psi) \cdot \nabla f + \|\mathrm{Hess} f\|_2^2, \end{cases}$$

où

$$\|\mathrm{Hess} f\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2.$$

Nous nous bornons ici à faire référence à [BE85], [Bak94] et le chapitre 5 de [ABC⁺00] pour de plus amples détails concernant ces opérateurs.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$.

Théorème 2.3.3. — *Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons qu'il existe une constant $C > 0$ telle que*

$$\boldsymbol{\Gamma}(f) \leqslant C\boldsymbol{\Gamma}_2(f), \tag{2.8}$$

pour toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Alors la mesure de probabilité μ_ψ définie en (2.7), satisfait à une inégalité de Sobolev *logarithmique de constante $2C$.*

Nous dirons alors qu'une mesure de probabilité satisfait au *critère* $\boldsymbol{\Gamma}_2$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité (2.8) soit satisfaite pour toute fonction f assez régulière.

Avant de donner quelques applications de ce résultat, présentons le critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$-intégré.

Théorème 2.3.4. — *Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et notons μ_ψ la mesure de probabilité définie par l'équation (2.7). Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int e^f \boldsymbol{\Gamma}(f) d\mu_\psi \leqslant C \int e^f \boldsymbol{\Gamma}_2(f) d\mu_\psi, \tag{2.9}$$

pour toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que les termes de l'inégalité aient un sens. Alors la mesure de probabilité μ_ψ satisfait à une inégalité de Sobolev *logarithmique de constante $2C$.*

Nous dirons alors qu'une mesure de probabilité, définie en (2.7), satisfait au critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$*-intégré* s'il existe une constante C telle que l'inégalité (2.9) soit vérifiée pour toute fonction f assez régulière.

Nous trouverons une démonstration détaillée de ce théorème dans la proposition 5.4.7. du chapitre 5 de [ABC⁺00], celle-ci est similaire à celle du théorème 2.2 du chapitre 1, s'appuyant sur les semi-groupes de Markov.

Le lien entre ces deux critères est évidents : si une mesure de probabilité, définie par (2.7), satisfait au critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$ elle satisfait alors forcément au critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$-intégré avec les mêmes constantes. On peut se demander si le critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$-intégré est une condition nécessaire pour l'inégalité de Sobolev logarithmique? La réponse est non. La condition donnée dans ce théorème n'est pas nécessaire pour vérifier l'inégalité de Sobolev logarithmique comme le montre l'exemple suivant dû à Helffer.

Exemple 2.3.5. — Soit $\alpha > 0$, et $a, b \in \mathbb{R}$. Considérons la mesure de probabilité

$$\mu_\psi(dx) = \frac{1}{Z_\psi} e^{-\psi(x)} dx$$

où Z_ψ est la constante de normalisation, et où ψ est définie par $\psi(x) = \alpha(x^4 - bx^2)$. On lui associe naturellement l'opérateur

$$\mathbf{L}f = f'' - \alpha(4x^3 - 2bx)f',$$

pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$. La mesure μ_ψ vérifie une inégalité de SOBOLEV logarithmique, d'après la proposition 2.2.1. En effet, il est facile de montrer que la fonction $\psi(x) = \alpha(x^4 - bx^2)$ vérifie la condition (CB).

Montrons que, si $f(x) = \alpha a x^2$, alors le terme $\int e^f \boldsymbol{\Gamma}_2(f) d\mu_\psi$ est strictement négatif pour certaines valeurs des paramètres. Le critère du théorème précédent sera ainsi clairement mis en défaut. Par définition on a :

$$\int e^f \boldsymbol{\Gamma}_2(f) d\mu_\psi = \frac{(2\alpha a)^2}{Z_\psi} \int_{\mathbb{R}} [1 + \alpha(12x^4 - 2bx^2)] e^{-\alpha(x^4 - (a+b)x^2)} dx,$$

qui est du signe de

$$\int_{\mathbb{R}} \left[1 + \frac{12x^4}{\alpha} - 2bx^2\right] e^{-\frac{x^4}{\alpha} + (a+b)x^2} dx.$$

Sous la condition $a + b < 0$, la limite du membre de droite, quand α tend vers l'infini, est du signe de

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - 2bx^2) e^{(a+b)x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{b}{a+b}\right) e^{(a+b)x^2} dx.$$

Ainsi, pour tout a et b vérifiant simultanément $a + b < 0$ et $a + 2b > 0$ (par exemple $a = -3$ et $b = 2$) et pour α assez grand on a $\int e^f \boldsymbol{\Gamma}_2(f) d\mu_\psi < 0$. L'inégalité (2.9) ne peut donc pas être satisfaite, son terme de gauche étant toujours positif.

Nous pouvons alors résumer les différents liens entres ces critères et l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pas le schéma suivant :

(critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$) $\Rightarrow$ (Critère $\boldsymbol{\Gamma}_2$–intégré) $\Rightarrow$ (Inégalité de SOBOLEV logarithmique).

Les flèches étant des conditions nécessaires mais d'après ce qui précède non suffisantes.

Donnons maintenant quelques exemples permettant d'une part d'illustrer les théorèmes précédents et d'autre part de donner les exemples fondamentaux de mesures vérifiant l'inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Exemple 2.3.6. — Soit ψ de classe $\mathcal{C}^2$ et soit μ_ψ la mesure de probabilité définie par la formule (2.7).

Il est facile de remarquer que si

$$\mathrm{Hess}(\psi) \geqslant C\mathrm{Id}, \tag{2.10}$$

où $C > 0$, la mesure μ_ψ satisfait au critère Γ_2 de constante C. Dans ce cas, d'après le théorème 2.3.3, μ_ψ satisfait à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique. C'est le cas de la mesure gaussienne.

De plus, le théorème de perturbation bornée de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique (voir le théorème 2.3.2), permet de montrer que si ψ vérifie la condition (CB) alors la mesure μ_ψ satisfait encore à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique, la constante étant juste perturbée par $\exp\left(4\|g\|_\infty\right)$. Dans le cas de la dimension 1, nous retrouvons la proposition 2.2.1 mais l'estimé de la constante est meilleurs ici.

Même si l'équivalence entre le critère Γ_2-intégré et l'inégalité de SOBOLEV logarithmique est fausse, nous pouvons par ce critère obtenir une classe de fonctions ψ, qui ne vérifie pas l'inégalité (2.10), mais telles que la mesure μ_ψ définie par l'équation (2.7) vérifie le critère Γ_2-intégré. La proposition suivante présente une amélioration de la proposition 6.6.1 de [Hel99b] mais malheureusement pas de la condition (CB). Nous nous plaçons ici sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3.7. — *Soit ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$, supposée convexe à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes A et B strictement positives telles que*

$$\psi''(x) \geqslant B \ ,\ \forall x \in [-A, A]^c. \tag{2.11}$$

Nous supposerons de plus qu'il existe une constante $U_0 > 0$ telle que les deux conditions suivantes soient simultanément vérifiées

$$\begin{cases} \rho(U_0) = \inf\limits_{|x|\geqslant U_0} \{\psi''(x)\} & > 0, \\ 1 - 12U_0^2\|\psi'\|^2_{[-2U_0,2U_0]} & > 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors la mesure μ_ψ satisfait au critère Γ_2-intégré, l'inégalité (2.9).

La démonstration de cette proposition est technique mais son idée est simple. Il s'agit, sur l'ensemble compact $[-A, A]$, d'utiliser une inégalité de trou spectral compacte. Et sur le complémentaire d'utiliser l'uniforme convexité de ψ.

Preuve. — Soit $U > 0$ et soit ξ_U une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant les conditions suivantes

$$0 \leqslant \xi_U(x) \leqslant 1,$$

$$\begin{cases} \xi_U(x) & = 1 \;,\; \forall x \in [-U, U] \\ \xi_U(x) & = 0 \;,\; \forall x \in [-2U, 2U]^c. \end{cases}$$

Posons alors $\zeta_U = \sqrt{1 - \xi_U^2}$. Le couple de fonctions (ξ_U^2, ζ_U^2) réalise donc une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Supposons que $Z_\psi = 1$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Nous allons, pour prouver le théorème, majorer la quantité

$$\int f'^2 e^{f-\psi} d\lambda = \int f'^2 e^f d\mu_\psi$$

par la quantité

$$\int \Big(f'^2\psi'' + f''^2\Big) e^{f-\psi} d\lambda = \int \Big(f'^2\psi'' + f''^2\Big) e^f d\mu_\psi,$$

où λ est la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}$.

Il suffit donc d'après la définition des fonctions ξ_U^2 et ζ_U^2, de majorer

$$\int f'^2 \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda + \int f'^2 \zeta_U^2 e^{f-\psi} d\lambda.$$

Soit $\mathbb{K} = \int v^2 \xi_U^2 d\lambda$, où $v = f' e^{f/2-\psi/2}$. On a, en utilisant l'inégalité de POINCARÉ pour des fonctions à support dans l'intervalle $[-2U, 2U]$:

$$\mathbb{K} \leqslant 16U^2 \bigg(\int v'^2 \xi_U^2 d\lambda + \int v^2 {\xi_U}'^2 d\lambda \bigg).$$

Concentrons-nous sur la quantité $\mathbb{L} = \int v'^2 \xi_U^2 d\lambda$, le deuxième terme de droite de l'inégalité ne posant pas de problème. Après le développement de v'^2, deux intégrations par parties et quelques lignes de calculs nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \;&=\; -\frac{1}{12}\int f'^4 \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda - \frac{2}{3}\int f'^3 \xi_U {\xi_U}' e^{f-\psi} d\lambda - \frac{1}{4}\int f'^2 \psi'^2 \xi_C^2 e^{f-\psi} d\lambda \\ &+\; \frac{1}{3}\int f'^3 \psi' \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda + \int f'^2 \psi' \xi_U {\xi_U}' e^{f-\psi} d\lambda + \int f''^2 \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda \\ &+\; \frac{1}{2}\int f'^2 \psi'' \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes de $\mathbb{L}$ ne sont pas contraignants, posons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \;&=\; -\frac{1}{12}\int f'^4 \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda - \frac{2}{3}\int f'^3 \xi_U {\xi_U}' e^{f-\psi} d\lambda - \frac{1}{4}\int f'^2 \psi'^2 \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda \\ &+\; \frac{1}{3}\int f'^3 \psi' \xi_U^2 e^{f-\psi} d\lambda + \int f'^2 \psi' \xi_U {\xi_U}' e^{f-\psi} d\lambda. \end{aligned}$$

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ conduit à :

$$\begin{aligned}\mathbb{M} &\leqslant -\frac{1}{12}\int f'^4\xi_U^2 e^{f-\psi}d\lambda + \frac{2}{3}\sqrt{\int f'^4\xi_U^2 e^{f-\psi}d\lambda\int f'^2{\xi_U}'^2 e^{f-\psi}d\lambda}\\ &- \frac{1}{4}\int f'^2\psi'^2\xi_U^2 e^{f-\psi}d\lambda + \frac{1}{3}\sqrt{\int f'^2\psi'^2\xi_U^2 e^{f-\psi}d\lambda\int f'^4\xi_U^2 e^{f-\psi}d\lambda}\\ &+ \sqrt{\int f'^2\psi'^2\xi_U^2 e^{f-\psi}d\lambda\int f'^2{\xi_U}'^2 e^{f-\psi}d\lambda}.\end{aligned}$$

Soit la quadrique suivante :

$$Q(a,b,c) = -\frac{1}{12}a^2 + \frac{2}{3}ab - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{3}ca + bc - \alpha b^2.$$

Il est facile de montrer qu'il n'existe pas de constante $\alpha > 0$ telle que cette quadrique soit négative c'est à dire que la signature de la quadrique est $(0,3)$. Ceci montre que l'on peut malheureusement pas majorer $\mathbb{M}$ par $\alpha\int f'^2{\xi_U}'^2 e^{f-\psi}d\lambda$ où α est une constante strictement positive. Par contre la quadrique

$$Q'(a,b,c) = Q(a,b,c) - \gamma c^2$$

a pour signature $(0,3)$ dés que $\gamma = 3/4$ et $\alpha = 5$ par exemple. On obtient alors la majoration suivante

$$\mathbb{M} \leqslant 5\int f'^2{\xi_U}'^2 e^{f-\psi}d\lambda + \frac{3}{4}\int f'^2\psi'^2\xi_U^2 e^{f-\psi}d\lambda.$$

Nous avons d'une part

$$\int f'^2{\xi_U}'^2 e^{f-\psi}d\lambda \leqslant \frac{1}{\rho(U)}\int f'^2\psi''{\xi_U}'^2 e^{f-\psi}d\lambda,$$

où $\rho(U) = \inf_{|x|\geqslant U}\{\psi''(x)\}$ et d'autre part

$$\int f'^2\psi'^2{\xi_U}^2 e^{f-\psi}d\lambda \leqslant \|\psi'\|^2_{[-2U,2U]}\int f'^2{\xi_U}^2 e^{f-\psi}d\lambda.$$

Fixons alors $U_0 = U$. Les hypothèses de l'équation (2.12) assurant que : $\rho(U_0) > 0$ et $1 - 12U_0^2\|\psi'\|^2_{[-2U_0,2U_0]} > 0$, conduisent ainsi à

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &\leqslant 12U_0^2\|\psi'\|^2_{[-2U_0,2U_0]}\int f'^2{\xi_{U_0}}^2 e^{f-\psi}d\lambda + 16U_0^2\int f''^2 e^{f-\psi}d\lambda\\ &+ 8U_0^2\int f'^2\psi''{\xi_{U_0}}^2 e^{f-\psi}d\lambda + 8U_0^2\frac{6}{\rho(U_0)}\int f'^2\psi''{\xi_{U_0}'}^2 e^{f-\psi}d\lambda.\end{aligned}$$

On obtient par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &\leqslant \frac{16U_0^2}{1-12U^2\|\psi'\|^2_{[-2U_0,2U_0]}}\int f''^2 e^{f-\psi}d\lambda\\ &+ \frac{8U_0^2}{1-12U_0^2\|\psi'\|^2_{[-2U_0,2U_0]}}\int f'^2\psi''{\xi_{U_0}}^2 e^{f-\psi}d\lambda\\ &+ \frac{8U_0^2 * 6}{\rho(U_0)\left(1-12U_0^2\|\psi'\|^2_{[-2U_0,2U_0]}\right)}\int f'^2\psi''{\xi_{U_0}'}^2 e^{f-\psi}d\lambda.\end{aligned}$$

Cette dernière majoration implique l'existence de constantes A et C telles que

$$\begin{aligned}\int f'^2 e^{f-\psi}d\lambda &= \mathbb{K} + \int f'^2\zeta_{U_0}^2 e^{f-\psi}d\lambda\\ &\leqslant \mathbb{K} + \frac{1}{\rho(U_0)}\int f'^2\psi''\zeta_{U_0}^2 e^{f-\psi}d\lambda\\ &\leqslant A\int f''^2 e^{f-\psi}d\lambda + \int f'^2\psi''\left(A{\xi_{U_0}}^2 + A{\xi_{U_0}'}^2 + \frac{1}{\rho(U_0)}\zeta_{U_0}^2\right)e^{f-\psi}d\lambda\\ &\leqslant C\int\left(f''^2 + \psi'' f'^2\right)e^{f-\psi}d\lambda,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Exemple 2.3.8. — Reprenons l'exemple de HELFFER. Soit $\psi(x) = x^4 - ax^2$, où $a > 0$. Un rapide calcul permet de déduire de la proposition précédente que pour a assez petit, la mesure μ_ψ définie par l'équation (2.7) vérifie le critère (2.9) et pourtant ψ ne vérifie pas l'équation (2.10).

2.4. Inégalité de Sobolev logarithmique Systèmes de spins

Voyons maintenant la démonstration de l'inégalité de Sobolev logarithmique pour des systèmes de spins, qui est une inégalité uniforme rapport aux paramètres Λ et ω pour la famille de mesure $\left(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)_{\Lambda,\omega}$.

L'intérêt d'obtenir une inégalité de Sobolev logarithmique uniforme par rapport à Λ et ω permet de montrer quelques résultats de mécanique statistique. Nous pouvons, de façon simpliste, résumer les résultats obtenues.

- L'obtention de l'inégalité de Sobolev logarithmique permet de montrer l'existence et l'unicité de la mesure de Gibbs associée.
- Son obtention permet de montrer que la dynamique de Glauber associé, converge exponentiellement vite vers l'équilibre, indépendemment des conditions aux bords.
- De plus, l'intérêt d'obtenir l'inégalité de Sobolev logarithmique est méthodologique, son obtention permet de mieux maîtriser les modèles et les inégalités.

Comme dans le chapitre précédent, étudions la famille de mesures $\left(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)_{\Lambda,\omega}$ définie dans l'introduction par l'intermédiaire du critère Γ_2-intégré.

2.4.1. Étude par le critère Γ_2-intégré.

— La première idée pour étudier la famille de mesures $\left(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)_{\Lambda,\omega}$ définie dans l'introduction est de reproduire la méthode de Helffer développé dans le chapitre précédent. Malheureusement une lecture attentive du chapitre 1 montre que l'équivalence entre le critère Γ_2-intégré et l'inégalité de Sobolev logarithmique est indispensable pour que cette méthode aboutisse.

Néanmoins, même si la méthode décrite dans le chapitre précédent n'est plus valable nous pouvons, parallèlement à ce qui est fait dans le théorème 2.4 du chapitre 1, donner un critère uniforme entraînant l'inégalité de Sobolev logarithmique pour la famille de mesures $\left(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}}\right)_{\Lambda,\omega}$. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.4.1. — *Soit ψ une fonction réelle et soit la mesure μ_{ψ_θ} définie par*

$$d\mu_{\psi_\theta} = \frac{1}{Z_{\psi_\theta}} \exp(-\psi_\theta(x)),$$

où $\psi_\theta(x) = \psi(x) + \theta x$ ($\theta \in \mathbb{R}$) et $Z_{\psi_\theta} = \int \exp(-\psi_\theta(x))dx$. Supposons qu'il existe une constante C_{ULS} telle que tout θ, la mesure μ_ψ satisfait le critère (2.9):

$$\int e^f f'^2 d\mu_{\psi_\theta} \leqslant C_{ULS} \int e^f \Big(f'^2 \psi_\theta{}'' + f''^2\Big) d\mu_{\psi_\theta},$$

pour toute fonction f assez régulière pour que les termes de l'inégalité aient un sens.

Alors il existe une constante $J_0 > 0$ telle que pour tout $J \in [0, J_0]$ la famille de mesures $(\mu_{\Phi_{\Lambda,\omega}})_{\Lambda,\omega}$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV *logarithmique de constante*

$$\frac{C_{ULS}}{1 - C_{ULS} 2dJ}.$$

La démonstration de ce théorème relève exactement de la méthode de HELFFER pour l'inégalité de POINCARÉ décrite dans la section 2 du chapitre 1, adaptée à l'inégalité de SOBOLEV logarithmique.

L'exemple, le plus naturelle, est le cas où la fonction ψ est uniformément strictement convexe ($\psi'' \geqslant a > 0$, voir l'exemple 2.3.6), les hypothèses du théorème 2.4.1 sont alors clairement vérifiées. Cet exemple n'est pas très pertinent car dans ce cas on peut montrer l'existence de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la famille de mesures de probabilité $(\mu_{\Lambda,\omega})_{\Lambda,\omega}$ en utilisant directement le critère Γ_2. Actuellement, nous ne connaissons malheureusement pas de fonction ψ, non uniformément strictement convexe, vérifiant les conditions du théorème précédent.

Remarque 2.4.2. — Le résultat de la proposition 2.3.7, n'est malheureusement pas exploitable dans l'optique du théorème 2.4.1, car il faudrait obtenir une uniformité par rapport au paramètre θ. La constante C obtenue dépend de $\|\psi'\|^2_{[-2U_0,2U_0]}$ et cette quantité n'est pas uniformément bornée par rapport au paramètre θ.

2.4.2. Étude par la méthodes des martingales. — Cette méthode n'est pas facile à mettre en oeuvre car il apparaît très rapidement des calculs assez compliqués. Par contre, avant d'apporter le résultat, nous donnons son idée générale qui est plus simple.

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. Désignons par μ^k la mesure μ conditionnée par rapport aux k premières variables. Soit f une fonction suffisamment régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ pour que ce qui suit ait un sens. On a alors l'égalité suivante :

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_\mu\big(\mathbf{Ent}_{\mu^{k-1}}(f_k^2)\big)\,, \tag{2.13}$$

où f_k^2 pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ est l'espérance conditionnelle de f^2 par rapport aux variables $x_1, \cdots, x_k$ sous la mesure μ et par extension $f_0^2 = \mathbf{E}_\mu(f^2)$ et $f_n^2 = f^2$.

Appliquons cette identité à la mesure $\mu_{\Lambda,\omega}$. Pour cela on identifie $\mathbb{R}^\Lambda$ à $\mathbb{R}^n$ avec $n = |\Lambda|$ et on pose $\mu^k_{\Lambda,\omega}$ la mesure $\mu_{\Lambda,\omega}$ conditionnée par rapport aux k premières variables. Pour démontrer alors l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la mesure

$\mu_{\Lambda,\omega}$, il suffit d'après l'équation (2.13), d'utiliser l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la mesure $\mu_{\Lambda,\omega}^{k-1}$ appliquée à la fonction f_k. Il est important de remarquer que f_k sous $\mu_{\Lambda,\omega}^{k-1}$ ne dépend que d'une seule variable et donc, on applique l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour les mesures de dimension 1. Ceci justifie la proposition 2.4.4. Il faut alors estimer $\mathbf{E}_{\mu_{\Lambda,J}^{\omega}}\left(|\nabla f_k|^2\right)$ et son calcul fait apparaître des termes plus difficiles à contrôler.

Voyons maintenant le théorème que l'on obtient.

Théorème 2.4.3. — *Soit g une fonction bornée, h une fonction négative et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaisant à l'hypothèse de régularité (2.4). Posons alors $\psi = \varphi + h + g$.*

Supposons qu'il existe un réel $p > 1$ tel que les quantités $S_p = \int \left|e^{|h|} - 1\right|^p$ et $S_1 = \int \left|e^{|h|} - 1\right|$ soient finies. Supposons de plus que la fonction φ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi(x) & = O_{\infty}(\varphi'(x)^{1+1/q}) \\ \varphi(x) & = O_{-\infty}(\varphi'(x)^{1+1/q}) \\ \varphi''(x) & \geqslant a, \end{array}\right. \tag{2.14}$$

avec $1/p + 1/q = 1$ et $a > 0$.

Alors il existe $J_0 > 0$ tel que pour tout $J \in [0, J_0]$, la famille de mesures $(\mu_{\Lambda,\omega})_{\Lambda,\omega}$ satisfasse à une inégalité de SOBOLEV *logarithmique, avec une constante indépendante de la taille de la boîte Λ et des conditions à son bord ω.*

Nous pouvons remarquer dans [Hel99b] que la démonstration de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique repose sur trois points : l'inégalité de trou spectral, la décroissance des corrélations et le lemme 8.2.1 de [Hel99b]. D'après les hypothèses faites sur les fonctions φ, h et g, on sait d'après le théorème 4.1 du chapitre 1 que la famille de mesures $(\mu_{\Lambda,\omega})_{\Lambda,\omega}$ satisfait à une inégalité de trou spectral et une décroissance des corrélations. De plus la démonstration proposée dans [Hel99b] utilise plus précisément deux conséquences du lemme 8.2.1. La première est que la famille de mesures $(\mu_{\Lambda,\omega})_{\Lambda,\omega}$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique avec une constante indépendante de Λ et de ω pour des fonctions qui ne dépendent que d'un seul spin. La seconde conséquence du lemme est que chaque mesure $\mu_{\Lambda,\omega}$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique avec une constante indépendante des conditions à son bord ω .

Les deux propositions suivantes établissent ces deux points du lemme 8.2.1 de [Hel99b] pour notre famille de mesures, terminant ainsi la preuve du théorème 2.4.3.

Proposition 2.4.4. — *Sous les hypothèses du théorème 2.4.3, il existe deux constantes $C > 0$ et $J_0 > 0$ tel que pour tout $J \in [0, J_0]$ et pour toute fonction f, assez régulière pour que les termes de l'inégalité ait un sens et ne dépendant que d'une variable, on ait*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_{\Lambda,\omega}}\left(f^2\right) \leqslant C\mathbf{E}_{\mu_{\Lambda,\omega}}\left((f')^2\right),$$

pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ et $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

Preuve. — L'obtention de cette proposition s'appuie sur le théorème 2.2.4. Soit f ne dépendant que d'une variable x_{i_0}. On a alors

$$\mathbf{E}_{\mu_{\Lambda,\omega}}(f) = \int f(x_{i_0}) \int \exp\left(-\sum_{i\in\Lambda}\psi(x_i) - J\sum_{\{i,j\}\cap\Lambda\neq\emptyset,\, i\sim j}(z_i - z_j)^2\right)\frac{1}{Z_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}\otimes_{i\in\Lambda} dx_i,$$

en reprenant les notations de l'introduction. On a par suite

$$\mathbf{E}_{\mu_{\Lambda,\omega}}(f) = \int f(x_{i_0})\frac{e^{-\psi_{i_0}(x_{i_0})}}{Z_{\psi_{i_0}}}dx_{i_0},$$

où $\psi_{i_0}(x_{i_0}) = \psi(x_{i_0}) - k(x_{i_0})$ et

$$k(x_{i_0}) = -\log\left(\int \exp\left(-\sum_{i\in\Lambda\backslash\{i_0\}}\psi(x_i) - J\sum_{\{i,j\}\cap\Lambda\neq\emptyset,\, i\sim j}(z_i - z_j)^2\right)\frac{1}{Z_{\Phi_{\Lambda,\omega}}}\otimes_{i\in\Lambda\backslash i_0} dx_i\right).$$

La fonction k est deux fois dérivable :

$$\begin{aligned} k''(x_{i_0}) &= -J^2\mathbf{Var}_{\mu_{\Lambda\backslash\{i_0\},\omega^{i_0}}}\left(\sum_{j\in N(\{i_0\})} 2(x_{i_0} - z_j)\right) + \\ &\quad J\mathbf{E}_{\mu_{\Lambda\backslash\{i_0\},\omega^{i_0}}}\left(\sum_{j\in N(\{i_0\})} 2\right), \end{aligned}$$

où $\omega_i^{i_0} = \omega_i$ pour $i \neq i_0$ et $\omega_{i_0}^{i_0} = x_{i_0}$. On obtient alors en utilisant de l'inégalité de trou spectral obtenue dans le théorème 4.1 du chapitre 1 pour la mesure $\mu_{\Lambda\backslash\{i_0\},\omega^{i_0}}$, la majoration suivante :

$$|k''(x_{i_0})| \leqslant CJ^2 2d2 + J2d2.$$

Ainsi, la décomposition

$$\psi_{i_0} = \varphi - k + h + g,$$

et les hypothèses faites sur les fonctions φ et h, pour J assez petit, permettent d'appliquer le théorème 2.2.4 et d'obtenir la fin de la démonstration de cette proposition. □

Il reste, pour terminer la démonstration du théorème 2.4.3, à démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.4.5. — *Il existe $J_0 > 0$ tel que pour tout Λ, sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, et pour tout $J \in [0, J_0]$, la mesure de probabilité $\mu_{\Lambda,\omega}$ satisfait à une inégalité de* SOBOLEV *logarithmique avec une constante indépendante des conditions à son bord ω.*

Preuve. — La démonstration de cette proposition se fait par récurrence sur le cardinal de Λ. Le cas $\Lambda = \{i\}$ est un cas particulier de la proposition précédente. La récurrence s'obtient en reprenant exactement la démonstration de la section 8.4 de [Hel99b] et en utilisant la proposition 2.4.4. Elle démontre l'existence d'une constante C, indépendante des conditions au bord, telle que la mesure de probabilité $\mu_{\Lambda,\omega}$ satisfasse à une inégalité de SOBOLEV logarithmique. □

Remarque 2.4.6. — Soit maintenant une fonction φ vérifiant les conditions (2.14) pour un certain réel $q > 1$. Nous pouvons de façon simple (de manière analogue à ce qui est fait à la fin de la section 4 du chapitre 1, voir la remarque 2.2.7) construire une fonction h négative telle que $\varphi + h$ ne vérifie pas la condition (CB).

CHAPITRE 3

HYPERCONTRACTIVITY OF HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

S. G. Bobkov, I. Gentil and M. Ledoux

University of Minnesota and University of Toulouse

3.1. Introduction

The fundamental work by L. Gross [Gro75] put forward the equivalence between logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractivity of the associated heat semigroup. Let us consider for example a probability measure μ on the Borel sets of $\mathbb{R}^n$ satisfying the logarithmic Sobolev inequality

$$\rho\, \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\int |\nabla f|^2 d\mu \tag{3.1}$$

for some $\rho > 0$ and all smooth enough functions f on $\mathbb{R}^n$ where

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \log \int f^2 d\mu$$

and where $|\nabla f|$ is the Euclidean length of the gradient ∇f of f. The canonical Gaussian measure with density $(2\pi)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$ is the basic example of measure μ satisfying (3.1) with $\rho = 1$.

For simplicity, assume furthermore that μ has a strictly positive smooth density which may be written e^{-U} for some smooth function U on $\mathbb{R}^n$. Denote by $\mathbf{L}$

the second order diffusion operator $\mathbf{L} = \Delta - \langle \nabla U, \nabla \rangle$ with invariant measure μ. Integration by parts for $\mathbf{L}$ is described by

$$\int f(-\mathbf{L}g)d\mu = \int \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mu$$

for every smooth functions f, g. Under mild growth conditions on U (that will always be satisfied in applications throughout this work), one may consider the time reversible (with respect to μ) semigroup $(\mathbf{P}_t)_{t \geqslant 0}$ with generator $\mathbf{L}$. Given f (in the domain of $\mathbf{L}$), $u = u(x,t) = P_t f(x)$ is the fundamental solution of the initial value problem (heat equation with respect to $\mathbf{L}$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{L}u & = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \qquad\quad u & = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

One of the main results of the contribution [Gro75] by L. Gross is that the logarithmic Sobolev inequality (3.1) for μ holds if and only if the associated heat semigroup $(\mathbf{P}_t)_{t \geqslant 0}$ is hypercontractive in the sense that, for every (or some) $1 < p < q < \infty$, and every f (in $\mathbf{L}^p$),

$$\|P_t f\|_q \leqslant \|f\|_p \tag{3.2}$$

for every $t > 0$ large enough so that

$$\mathrm{e}^{2\rho t} \geqslant \frac{q-1}{p-1}. \tag{3.3}$$

In (3.2), the $\mathbf{L}^p$-norms are understood with respect to the measure μ. The key idea of the proof is to consider a function $q(t)$ of $t \geqslant 0$ such that $q(0) = p$ and to take the derivative in time of $F(t) = \|P_t f\|_{q(t)}$ (for a non-negative smooth function f on $\mathbb{R}^n$). Since the derivative of $\mathbf{L}^p$-norms gives rise to entropy, due to the heat equation $\frac{\partial}{\partial t} P_t f = \mathbf{L} P_t f$ and integration by parts, one gets that

$$\begin{aligned} & q(t)^2 F(t)^{q(t)-1} F'(t) \\ & \quad = q'(t)\, \mathbf{Ent}_\mu\big((\mathbf{P}_t f)^{q(t)}\big) + q(t)^2 \int (P_t f)^{q(t)-1} \mathbf{L} P_t f d\mu \\ & \quad = q'(t)\, \mathbf{Ent}_\mu\big((\mathbf{P}_t f)^{q(t)}\big) - 2\big(q(t)-1\big) \int \frac{q(t)^2}{2} |\nabla P_t f|^2 (P_t f)^{q(t)-2} d\mu. \end{aligned} \tag{3.4}$$

By the logarithmic Sobolev inequality applied to $(P_t f)^{q(t)/2}$, it follows that $F'(t) \leqslant 0$ as soon as $q'(t) = 2\rho(q(t)-1)$, that is $q(t) = 1 + (p-1)\,\mathrm{e}^{2\rho t}$, $t \geqslant 0$, which yields the claim. It is classical and easy to see that the same argument also shows that (3.1) is also equivalent to

$$\| \mathrm{e}^{P_t f} \|_{\mathrm{e}^{2\rho t}} \leqslant \| \mathrm{e}^f \|_1 \tag{3.5}$$

for every $t \geqslant 0$ and f (cf. [BE85]). For further comparison, observe that by linearity

$$\| \mathrm{e}^{P_t f} \|_{a\mathrm{e}^{2\rho t}} \leqslant \quad (\text{resp. } \geqslant) \quad \| \mathrm{e}^f \|_a$$

according as $a \geqslant 0$ (resp. $a \leqslant 0$).

Whenever $-\infty < q < p < 1$ satisfy (3.3), the logarithmic Sobolev inequality is similarly equivalent to the so-called reverse hypercontractivity

$$\|P_t f\|_q \geqslant \|f\|_p \tag{3.6}$$

for every f taking non-negative values.

The main result of this work is to establish a similar relationship for the solutions of Hamilton-Jacobi partial differential equations. Consider the Hamilton-Jacobi initial value problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{2} |\nabla v|^2 &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v &= f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Solutions of (3.7) are described by the Hopf-Lax representation formula as infimum-convolutions. Namely, given a (Lipschitz continuous) function f on $\mathbb{R}^n$, define the infimum-convolution of f with the quadratic cost as

$$Q_t f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left[f(y) + \frac{1}{2t} |x - y|^2 \right], \quad t > 0, \, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.8}$$

The family $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ defines a semigroup with infinitesimal (non-linear) generator $-\frac{1}{2} |\nabla f|^2$. That is, $v = v(x,t) = Q_t f(x)$ is a solution of the Hamilton-Jacobi initial value problem (3.7) (at least almost everywhere). Actually, if in addition f is bounded, the Hopf-Lax formula $Q_t f$ is the pertinent mathematical solution of (3.7), that is its unique viscosity solution (cf. e.g. [Bar94], [Eva98]).

Once this has been recognized, it is not difficult to try to follow Gross's idea for the Hamilton-Jacobi equation. Namely, letting now $F(t) = \| \mathrm{e}^{Q_t f} \|_{\lambda(t)}$, $t \geqslant 0$, for some function $\lambda(t)$ with $\lambda(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$, the analogue of (3.4) reads as

$$\lambda(t)^2 \, F(t)^{\lambda(t) - 1} F'(t) = \lambda'(t) \, \mathbf{Ent}_\mu \big(\mathrm{e}^{\lambda(t) Q_t f} \big) - \int \frac{\lambda(t)^2}{2} \left| \nabla Q_t f \right|^2 \mathrm{e}^{\lambda(t) Q_t f} d\mu. \tag{3.9}$$

By the logarithmic Sobolev inequality (3.1) applied to $\mathrm{e}^{\lambda(t) Q_t f}$, $F'(t) \leqslant 0$ as soon as $\lambda'(t) = \rho$, $t \geqslant 0$. As a result (and in complete analogy with (3.5) for example), the logarithmic Sobolev inequality (3.1) shows that, for every $t \geqslant 0$, every $a \in \mathbb{R}$ and every (say bounded) function f,

$$\| \mathrm{e}^{Q_t f} \|_{a+\rho t} \leqslant \| \mathrm{e}^{f} \|_{a}. \tag{3.10}$$

Conversely, if (3.10) holds for every $t \geqslant 0$ and some $a \neq 0$, then the logarithmic Sobolev inequality (3.1) holds. With respect to classical hypercontractivity, it is worthwhile noting that Q_t is defined independently of the underlying measure μ. Actually, hypercontractivity of Hamilton-Jacobi solutions may also be shown to follow from heta kernel hypercontractivity through the so-called vanishing viscosity method. Namely, if u^ε is solution of the heat equation $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{L} u^\varepsilon$ (with initial value $\mathrm{e}^{-f/2\varepsilon}$), then $v^\varepsilon = -2\varepsilon \log u^\varepsilon$ approaches as $\varepsilon \to 0$ the Hopf-Lax solution (3.8). Transferring hypercontractivity of the heat solution u^ε to v^ε yields another approach to our main result. In this Laplace-Varadhan large deviation asymptotic, the second order term in $\mathbf{L} = \Delta - \langle \nabla U, \nabla \rangle$ is the leading term that gives rise to the Gaussian kernel and the quadratic cost in (3.8) (and an expression for Q_t independent of U and thus of μ).

Due to the homogeneity property $Q_t(sf) = sQ_{st}f$, $s, t > 0$, and setting Q for Q_1, (3.10) may be rewritten equivalently as

$$\| \mathrm{e}^{Q f} \|_{r+\rho} \leqslant \| \mathrm{e}^{f} \|_{r} \tag{3.11}$$

for $r \in \mathbb{R}$. If (3.11) holds for either every $r > 0$ (or only large enough) or every $r < 0$ (or only large enough), then the logarithmic Sobolev inequality (3.1) holds. The value $r = 0$ is however critical.

When $a = 0$ in (3.10), or $r = 0$ in (3.11), these two inequalities actually amount to the infimum-convolution inequality

$$\int \mathrm{e}^{\rho Q f} d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\rho \int f d\mu} \tag{3.12}$$

holding for every bounded (or integrable) function f. Inequality (3.12) is known to be the Monge-Kantorovitch-Rubinstein dual version of the transportation cost inequality (see [BG99] and below)

$$\rho\, W_2(\mu, \nu)^2 \leqslant H(\nu \,|\, \mu) = \mathbf{Ent}_\mu \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right) \tag{3.13}$$

holding for all probability measures ν absolutely continuous with respect to μ with Radon-Nikodym derivative $\frac{d\nu}{d\mu}$. Here W_2 is the Wasserstein distance with quadratic cost

$$W_2(\mu, \nu)^2 = \inf \iint \frac{1}{2} \, |x - y|^2 d\pi(x, y)$$

where the infimum is running over all probability measures π on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with respective marginals μ and ν and $H(\nu \mid \mu)$ is the relative entropy, or informational divergence, of ν with respect to μ. (The infimum in W_2 is finite as soon as μ and ν have finite second moment which we shall always assume.) That the transportation cost inequality (3.13) follows from the logarithmic Sobolev inequality (3.1) was established recently by F. Otto and C. Villani [OV00] and motivated the present work. While the arguments developed in [OV00] do involve PDE's methods (further inspired by nice geometric interpretations described in [Ott]), the approach presented here only relies on the basic Hamilton-Jacobi equation (together with the dual formulation (3.12) of the transportation cost inequality (3.13)) and presents a clear view of the connection between logarithmic Sobolev inequalities and transportation cost inequalities. One feature of our approach is the systematic use of the Monge-Kantorovitch dual version of the transportation cost inequality involving infimum-convolution rather than Wasserstein distances.

It is an open problem (although probably with negative answer) to know whether the critical case (3.12) is also equivalent to the logarithmic Sobolev inequality (3.1). When the potential U is convex, it was shown in [OV00] that the transportation cost inequality (3.13) implies conversely the logarithmic Sobolev inequality (3.1) up to a numerical constant (the precise statement of [OV00] is somewhat more general and allows small non-convex wells of U). The proof relies on a general HWI inequality involving the entropy H, the Wasserstein distance W_2 and the Fisher information I which may be established using the Brenier-McCann mass transportation by the gradient of a convex function (see [OV00], [CE00b] and the references therein). The hypercontractive tools developed in the present paper do not seem to be of help in providing an alternate description of this converse statement. However, we present in Section 3.4 a semigroup proof of these results relying on the Bakry-Emery method and Wang's Harnack inequalities [Wan97] by means of a short time parabolic regularization estimate between entropy and Wasserstein distance. In particular, this approach interpolates between the HWI inequality of [OV00] and the logarithmic Sobolev inequality under exponential integrability of [Wan97]. The subsequent comment note [OV] by F. Otto and C. Villani further expands on this theme.

In Section 3.2 of this work, we give a detailed proof of the main result (3.10). While the general principle outlined above is straightforward, some regularity questions have to be addressed. We also discuss the approach through the vanishing viscosity technique that shows a formal direct equivalence of hypercontractivity for the heat equation and for the Hamilton-Jacobi equation. The principle of proof extends to Riemannian manifolds (with the Riemannian metric as transportation cost). In the next section, we present an alternate deduction of the transportation cost inequalities via the analogue of the Herbst argument. To this task, we first recall the usual Herbst argument, and then adapt it to infimum convolutions. We introduce this section by the Monge-Kantorovitch dual description of transportation cost inequalities. In Section 3.4 , we first mention that quadratic transportation cost inequalities are stronger than the related Poincaré inequalities. We then investigate how to reach HWI and logarithmic Sobolev inequalities for families of log-concave measures following the Bakry-Emery semigroup method. In the fifth section, we show how the Herbst method for infimum convolutions of Section 3.3 may be used to recover similarly the transportation inequality of M. Talagrand [Tal96] for the exponential measure from the logarithmic Sobolev inequality of [BL97] (and more generally for measures satisfying a Poincaré inequality). In the final part, we present further applications and discuss possible extensions of the basic principle. In particular, we investigate, following [Mau91] and [BL00], how Brunn-Minkowski inequalities are related to the infimum-convolution inequalities (3.12) for strictly convex potential. We also discuss the $\mathbf{L}^1$-transportation cost and its relation to some (logarithmic) isoperimetric inequalities.

3.2. Hamilton-Jacobi equations and logarithmic Sobolev inequalities

This section is devoted to the main result of this work. We first present the direct proof as outlined in the introduction, and then the alternate vanishing viscosity method. We briefly discuss extension to a Riemannian setting.

3.2.1. Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi solutions. — In this section, we present our main result connecting logarithmic Sobolev inequalities to hypercontractivity of solutions of Hamilton-Jacobi equations. While the subsequent arguments extend to Riemannian manifolds, we however present, for clarity, the analysis in the more classical Euclidean case. The general principle will apply similarly in the Riemannian setting (Section 3.2.3).

Let $(Q_t)_{t\geqslant 0}$ be the semigroup of operators

$$Q_t f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\Big[f(y) + \frac{1}{2t}|x-y|^2\Big], \quad t>0,\, x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.14}$$

and $Q_0 f(x) = f(x)$. These operators may be applied to arbitrary functions on $\mathbb{R}^n$ with values in $[-\infty, +\infty]$. As is well-known (see e.g. [Bar94], [Eva98]), for any f and $t>0$, $Q_t f$ is upper semicontinuous. If f is bounded (resp. Lipschitz),

$Q_t f$ is bounded and Lipschitz (resp. Lipschitz). Given a bounded function f, $Q_t f(x) \to f(x)$ as $t \to 0$ if and only if f is lower semicontinuous at x.

The infimum convolution Q_t is known as the Hopf-Lax solution of the Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_t f(x) = -\frac{1}{2} \left| \nabla Q_t f(x) \right|^2 \tag{3.15}$$

with initial value f. More precisely (cf. [Eva98]), given f Lipschitz continuous, the Hopf-Lax fsolution is Lipschitz continuous and solves (3.15) almost everywhere in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Standard variants of the classical theory further show that if f is, say bounded, $t \to Q_t f(x)$ is differentiable at every $t \geqslant 0$ for almost every $x \in \mathbb{R}^n$, and (3.15) holds true (at $t > 0$, almost everywhere in x).

Let μ be a probability measure on the Borel sets of $\mathbb{R}^n$. We denote below by $\| \cdot \|_p$, $p \in \mathbb{R}$, the $\mathbf{L}^p$-norms (functionals when $p < 1$) with respect to μ. As is usual, we agree that $\|f\|_0 = \mathrm{e}^{\int \log |f| d\mu}$ whenever $\log |f|$ is μ-integrable. The main result of this work is the following theorem.

Theorem 3.2.1. — *Assume that μ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and that for some $\rho > 0$ and all smooth enough functions f on $\mathbb{R}^n$,*

$$\rho \, \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \int |\nabla f|^2 d\mu. \tag{3.16}$$

Then, for every *bounded measurable function f on $\mathbb{R}^n$, every $t \geqslant 0$ and every $a \in \mathbb{R}$,*

$$\| \mathrm{e}^{Q_t f} \|_{a + \rho t} \leqslant \| \mathrm{e}^f \|_a . \tag{3.17}$$

Conversely, if (3.17) holds for all $t \geqslant 0$ and some *$a \neq 0$, then the logarithmic Sobolev inequality (3.16) holds.*

In Theorem 3.2.1, inequalities (3.17) are stated for bounded functions for simplicity: they readily extend to larger classes of functions under the proper integrability conditions.

We may define similarly the supremum-convolution semigroup $(\widetilde{Q}_t)_{t>0}$ by

$$\widetilde{Q}_t f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left[f(y) - \frac{1}{2t} |x - y|^2 \right], \quad t > 0, \, x \in \mathbb{R}^n$$

$(\widetilde{Q}_0 f(x) = f(x))$. The operators Q_t and $\widetilde{Q}_t$ are related by the property that for any two functions f and g, $g \geqslant \widetilde{Q}_t f$ if and only if $f \leqslant Q_t g$ so that $\widetilde{Q}_t Q_t f \leqslant f \leqslant$

$Q_t\widetilde{Q}_t f$. We also have that $\widetilde{Q}_t(-f) = -Q_t f$. In particular, the conclusion (3.17) of Theorem 3.2.1 may be reformulated equivalently on $(\widetilde{Q}_t)_{t\geqslant 0}$ by

$$\| \mathrm{e}^f \|_{a+\rho t} \leqslant \| \mathrm{e}^{\widetilde{Q}_t f} \|_a . \tag{3.18}$$

Note that the families of inequalities (3.17) and (3.18) are stable under the respective semigroups.

If μ is not absolutely continuous, an easy convolution argument leads to (3.17) at least for all bounded continuous functions. Namely, the stability by products of the logarithmic Sobolev inequality shows that if γ_σ is the Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$ with covariance $\sigma^2\,\mathrm{Id}$, for every smooth function $\tilde{f}$ on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\min(\rho, \sigma^{-1})\,\mathbf{Ent}_{\mu\otimes\gamma_\sigma}\left(\tilde{f}^2\right) \leqslant 2\int |\nabla \tilde{f}|^2 d\mu \otimes \gamma_\sigma.$$

Applied to $\tilde{f}(x,y) = f(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, for some smooth function f on $\mathbb{R}^n$, we get

$$\min(\rho, \sigma^{-1})\,\mathbf{Ent}_{\mu*\gamma_\sigma}\left(f^2\right) \leqslant 2\int |\nabla f|^2 d\mu * \gamma_\sigma.$$

Theorem 3.2.1 then applies to $\mu * \gamma_\sigma$. Letting $\sigma \to 0$ yields (3.17) for all bounded continuous functions.

Proof of Theorem 3.2.1. — In the first part of the argument, we assume that the logarithmic Sobolev inequality (3.16) holds and show that (3.17) is satisfied for any bounded f, and any $t > 0$, $a \in \mathbb{R}$. By a simple density argument, the logarithmic Sobolev inequality (3.16) holds for all (locally) Lipschitz functions. Let thus f be a bounded function on $\mathbb{R}^n$. (By regularization, it may be assumed that f is compactly supported with bounded derivatives of any orders: however, besides the final step, regularity does not make life easier here.) Let $F(t) = \| \mathrm{e}^{Q_t f} \|_{\lambda(t)}$, with $\lambda(t) = a + \rho t$, $t > 0$. For all $t > 0$ and almost every x, the partial derivatives $\frac{\partial}{\partial t} Q_t f(x)$ exist. Thus F is differentiable at every point $t > 0$ where $\lambda(t) \neq 0$. For such points, we get that

$$\lambda^2(t)\, F(t)^{\lambda(t)-1} F'(t) = \rho\,\mathbf{Ent}_\mu\left(\mathrm{e}^{\lambda(t)Q_t f}\right) + \int \lambda^2(t)\, \frac{\partial}{\partial t} Q_t f\, \mathrm{e}^{\lambda(t)Q_t f} d\mu. \tag{3.19}$$

Since

$$\frac{\partial}{\partial t}\, Q_t f(x) = -\frac{1}{2}\left|\nabla Q_t f(x)\right|^2$$

almost everywhere in x, and since μ is absolutely continuous,

$$\lambda^2(t)\, F(t)^{\lambda(t)-1} F'(t) = \rho\,\mathbf{Ent}_\mu\left(\mathrm{e}^{\lambda(t)Q_t f}\right) - \int \frac{\lambda(t)^2}{2} \left|\nabla Q_t f\right|^2 \mathrm{e}^{\lambda(t)Q_t f} d\mu.$$

Now, since $Q_t f(x)$ is Lipschitz in x for every $t > 0$, we may apply the logarithmic Sobolev inequality (3.16) to $\mathrm{e}^{\lambda(t)Q_t f}$ to deduce that $F'(t) \leqslant 0$ for all $t > 0$ except possibly one point (in case $a < 0$). Since F is continuous, it must be non-increasing. Continuity of $Q_t f(x)$ at $t = 0$ however requires f be lower semicontinuous at the point x. Apply then the result to the maximal lower semicontinuous function majorized by f to conclude. (Alternatively, as mentioned previously, we may regularize f to start with and assume f bounded and Lipschitz for example.) The first part of the theorem is established.

Turning to the converse, let f be a bounded $\mathcal{C}^1$ function satisfying (3.17) for every $t > 0$ and some $a \neq 0$. Under (3.17), it thus must be that $F'(0) \leqslant 0$. Since f is differentiable, $\lim_{t\to 0} Q_t f(x) = f(x)$ and

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_t f(x)\big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[Q_t f(x) - f(x)\right] = -\frac{1}{2}\left|\nabla f(x)\right|^2$$

at every point x so that (3.19) as $t \to 0$ yields

$$\rho\,\mathbf{Ent}_\mu\big(\mathrm{e}^{af}\big) \leqslant \frac{1}{2}\int |a\nabla f|^2 \mathrm{e}^{af}\,d\mu.$$

Since $a \neq 0$, this amounts to (3.16) by setting $g^2 = \mathrm{e}^{af}$. The proof of Theorem 3.2.1 is complete. □

Remark 3.2.2. — As in the classical case, the proof of Theorem 3.2.1 similarly shows that a defective logarithmic Sobolev inequality of the type

$$\rho\,\mathbf{Ent}_\mu\big(f^2\big) \leqslant 2\int |\nabla f|^2 d\mu + C\int f^2 d\mu$$

for some $C > 0$ is equivalent to the hypercontractive bounds ($t \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$)

$$\|\,\mathrm{e}^{Q_t f}\|_{a+\rho t} \leqslant \mathrm{e}^{M(t)}\|\,\mathrm{e}^{f}\|_a$$

where

$$M(t) = \frac{Ct}{a(a+\rho t)}\,.$$

3.2.2. Hypercontractivity and vanishing viscosity. — An alternate proof of Theorem 3.2.1 may be provided by the tool of vanishing viscosity (cf. [Eva98]). We only briefly outline the principle that requires some further technical arguments. The idea is to add a small noise to the Hamilton-Jacobi equation to turn it after an exponential change of functions into the heat equation. Given a smooth function

f, and $\varepsilon > 0$, denote namely by $v^\varepsilon = v^\varepsilon(x,t)$ the solution of the initial value partial differential equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{1}{2}|\nabla v^\varepsilon|^2 - \varepsilon \mathbf{L} v^\varepsilon & = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \hfill v^\varepsilon & = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

As $\varepsilon \to 0$, it is expected that v^ε approaches in a reasonable sense the solution v of (3.7). It is easy to check that $u^\varepsilon = \mathrm{e}^{-v^\varepsilon/2\varepsilon}$ is a solution of the heat equation $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{L} u^\varepsilon$ (with initial value $\mathrm{e}^{-f/2\varepsilon}$). Therefore,

$$u^\varepsilon = P_{\varepsilon t}\big(\mathrm{e}^{-f/2\varepsilon}\big).$$

It must be emphasized that the perturbation argument by a small noise has a clear picture in the probabilistic language of large deviations. Namely, the asymptotic of

$$v^\varepsilon = -2\varepsilon \log P_{\varepsilon t}\big(\mathrm{e}^{-f/2\varepsilon}\big)$$

as $\varepsilon \to 0$ is a Laplace-Varadhan asymptotic with rate described precisely by the infimum convolution of f with the quadratic large deviation rate function for the heat semigroup (cf. e.g. [Bar94]). In this limit, the second order Laplace operator is the leading term in the definition of $\mathbf{L} = \Delta - \langle \nabla, \nabla U \rangle$ so that the limiting solution u given by the infimum-convolution $Q_t f$ is independent of the potential U and thus of μ. In particular, this asymptotic is explicit on the basic Ornstein-Uhlenbeck example.

Apply now classical hypercontractivity to u^ε. More precisely, for $b > a > 0$ fixed, apply the reverse hypercontractivity inequality (3.6) with $0 > p = -2\varepsilon a > q = -2\varepsilon b$ and

$$\mathrm{e}^{2\varepsilon\rho t} = \frac{1+2\varepsilon b}{1+2\varepsilon a}.$$

It follows that

$$\|\mathrm{e}^{v^\varepsilon}\|_b \leqslant \|\mathrm{e}^f\|_a.$$

Now, as $\varepsilon \to 0$, $t > 0$ is such that $b = a + \rho t$. We thus recover in this way the main Theorem 3.2.1. Note however that it was necessary to go through reverse hypercontractivity of the heat semigroup to reach the conclusion.

3.2.3. Extension to Riemannian manifolds. — As announced, Theorem 3.2.1 and its proof extend to the setting of logarithmic Sobolev inequalities on Riemannian manifolds and infimum-convolutions with the Riemannian metric as in [OV00]. We briefly outline in this sub-section the corresponding result. Let M be a smooth complete Riemannian manifold of dimension n and Riemannian metric d. Let μ be a probability measure absolutely continuous with respect to the standard volume element on M satisfying, for some $\rho > 0$ and all smooth enough functions f on M, the logarithmic Sobolev inequality

$$\rho\, \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Here $|\nabla f|$ now stands for the Riemannian length of the gradient of f. Let, for $t > 0$, $x \in M$,

$$Q_t f(x) = \inf_{y \in M} \Big[f(y) + \frac{1}{2t}\, d(x,y)^2 \Big].$$

It may be observed that $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ forms a semigroup since for the geodesic distance,

$$\inf_{z \in M} \Big[\frac{1}{t}\, d(x,z)^2 + \frac{1}{s}\, d(z,y)^2 \Big] = \frac{1}{s+t}\, d(x,y)^2$$

for all $x, y \in M$ and $s, t > 0$. Following the argument in the classical Euclidean case (cf. [Vil00]), one shows similarly that $v = v(x,t) = Q_t f(x)$ is again a solution of the initial-value Hamilton-Jacobi problem on M,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{2} |\nabla v|^2 & = 0 \quad \text{in } M \times (0, \infty), \\ \qquad\qquad\quad v & = f \quad \text{on } M \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Theorem 3.2.1 and its proof thus readily extend to this case. It might be easier to develop the extension of Hamilton-Jacobi equations to Riemannian manifolds in the compact case first. Regularizing f into a compactly supported function as in the proof of Theorem 3.2.1 allows us to reduce to this case if necessary.

3.3. Herbst's argument and transportation inequalities

There is yet another way from logarithmic Sobolev inequalities to infimum-convolution inequalities that goes through the so-called Herbst method (cf. [Led99]). To introduce it, we first summarize the Monge-Kantorovitch dual versions of the transportation cost inequalities. We then recall the classical Herbst argument and apply it in the infimum-convolution context.

3.3.1. Monge-Kantorovitch duality. — Let us start with the Wassertein distance with linear cost between two probability measures on $\mathbb{R}^n$ defined by

$$W_1(\mu, \nu) = \inf \iint |x - y| d\pi(x,y)$$

where the infimum is running over all probability measures π on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with respective marginals μ and ν (having a finite first moment). Bythe Monge-Kantorovitch dual characterization (cf. [Rac91], [Dud89]),

$$W_1(\mu,\nu) = \sup \left[\int g d\nu - \int f d\mu \right] \tag{3.20}$$

where the supremum is running over all bounded measurable functions f and g such that

$$g(x) \leqslant f(y) + |x-y|$$

for every $x, y \in \mathbb{R}^n$. Perhaps more classicaly, we have equivalently that

$$W_1(\mu,\nu) = \sup \left[\int g d\mu - \int g d\nu \right] \tag{3.21}$$

where the supremum is running over all Lipschitz functions g with $\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$.

The general form of the dual Monge-Kantorovitch representation of some metric space (E,d) for example indicates that (cf. [Rac91])

$$\inf \iint T(x,y) d\pi(x,y) = \sup \left[\int g d\nu - \int f d\mu \right] \tag{3.22}$$

where the infimum is running over all probability measures π with marginals μ and ν such that T is integrable with respect to π and where the supremum is over all pairs (g,f) of bounded measurable functions (or respectively ν and μ-integrable) such that for all x, y,

$$g(x) \leqslant f(y) + T(x,y).$$

Here T is upper semicontinuous, π-integrable and such that $T(x,y) \leqslant a(x) + b(y)$ for some measurable functions a and b. On $\mathbb{R}^n$, the supremum on the right-hand side of (3.22) may be taken over smaller classes of smooth functions, such as bounded Lipschitz or so on. (This provides an alternate regularization procedure for the arguments developed in the next sections.)

For the quadratic cost in particular, we thus have that

$$W_2(\mu,\nu)^2 = \sup \left[\int g d\nu - \int f d\mu \right] \tag{3.23}$$

where the supremum is running over all bounded functions f and g such that

$$g(x) \leqslant f(y) + \frac{1}{2} |x-y|^2$$

for every $x, y \in \mathbb{R}^n$. In the infimum-convolution notation,

$$g(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \Big[f(y) + \frac{1}{2} |x-y|^2 \Big] = Qf(x)$$

achieves the optimal choice.

3.3.2. Linear transportation cost. — In this section, we recall the Herbst argument and its interpretation as a transportation result with linear cost. Assume the logarithmic Sobolev inequality

$$\rho \, \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \int |\nabla f|^2 d\mu \tag{3.24}$$

holds for some $\rho > 0$ and all smooth enough (locally Lipschitz) functions f on $\mathbb{R}^n$. For simplicity, assume below that μ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.

Now, let g be a (bounded) Lipschitz function on $\mathbb{R}^n$ with Lipschitz coefficient $\|g\|_{\mathrm{Lip}}$. Let us then apply (3.24) to $f^2 = \mathrm{e}^{\lambda g - \lambda^2 \|g\|^2_{\mathrm{Lip}}/2\rho}$ where $\lambda \in \mathbb{R}$. Set $G(\lambda) = \int \mathrm{e}^{\lambda g - \lambda^2 \|g\|^2_{\mathrm{Lip}}/2\rho} d\mu$. Since $|\nabla g| \leqslant \|g\|_{\mathrm{Lip}}$ almost everywhere, we get from (3.24) that, for every $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int \Big[\lambda g - \frac{1}{2\rho} \lambda^2 \|g\|^2_{\mathrm{Lip}} \Big] \mathrm{e}^{\lambda g - \lambda^2 \|g\|^2_{\mathrm{Lip}}/2\rho} d\mu - G(\lambda) \log G(\lambda) \leqslant \frac{1}{2\rho} \lambda^2 \|g\|^2_{\mathrm{Lip}} G(\lambda).$$

In other words,

$$\lambda G'(\lambda) \leqslant G(\lambda) \log G(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

This differential inequality is easily integrated to yield, since $G'(0) = \int g d\mu$, that for every Lipschitz (integrable) function g on $\mathbb{R}^n$,

$$\int \mathrm{e}^g d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\int g d\mu + \|g\|^2_{\mathrm{Lip}}/2\rho}. \tag{3.26}$$

By Chebychev's inequality, this inequality describes the concentration properties of a measure μ satisfying a logarithmic Sobolev inequality (cf. [Led99]).

Inequality (3.26) has been recognized in [BG99] as a transportation inequality for the W_1 Wasserstein distance in the form of

$$\rho \, W_1^2(\mu, \nu) \leqslant 2 \, H(\nu \,|\, \mu) = 2 \, \mathbf{Ent}_\mu \Big(\frac{d\nu}{d\mu} \Big) \tag{3.27}$$

holding for all probability measures ν absolutely continuous with respect to μ with Radon-Nikodym derivative $\frac{d\nu}{d\mu}$. Namely by (3.27) and (3.20) (one could use completely similarly (3.21)), for every bounded measurable functions f and g such that

$g(x) \leqslant f(y) + |x-y|$ for all $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\int g d\nu - \int f d\mu \leqslant \sqrt{\frac{2}{\rho} \, \mathbf{Ent}_\mu\Big(\frac{d\nu}{d\mu}\Big)},$$

or, equivalently, for every $\lambda > 0$,

$$\int g d\nu - \int f d\mu \leqslant \frac{\lambda}{2\rho} + \frac{1}{\lambda} \, \mathbf{Ent}_\mu\Big(\frac{d\nu}{d\mu}\Big).$$

Set $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$. The preceding indicates that

$$\int \psi\varphi d\mu \leqslant \mathbf{Ent}_\mu(\varphi)$$

where $\psi = \lambda g - \lambda^2/2\rho - \lambda \int f d\mu$. Since this inequality holds for every choice of φ (i.e. ν), applying it to $\varphi = \mathrm{e}^\psi / \int \mathrm{e}^\psi d\mu$ yields $\log \int \mathrm{e}^\psi d\mu \leqslant 0$. In other words,

$$\int \mathrm{e}^{\lambda g} d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\lambda \int f d\mu + \lambda^2/2\rho}.$$

When f is Lipschitz with $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$, one may choose $g = f$ so that the latter exactly amounts to (3.26). Since

$$\mathbf{Ent}_\mu(\varphi) = \sup \int \varphi\psi d\mu$$

where the supremum is running over all ψ's such that $\int \mathrm{e}^\psi d\mu \leqslant 1$, the preceding argument clearly indicates that (3.26) is actually equivalent to (3.27). This result easily extends to arbitraty metric spaces.

3.3.3. Quadratic transportation cost. — The aim of this section is to describe how the preceding Herbst argument may be applied completely similarly to infimum-convolutions. In particular, we recover in this case the conclusion of Theorem 3.2.1 at the critical value $a = 0$.

Given a (bounded Lipschitz) function g on $\mathbb{R}^n$, apply now the logarithmic Sobolev inequality (3.24) to $f^2 = \mathrm{e}^{\rho Q(\lambda g)}$ (where we recall that $Q = Q_1$). Since $Q(\lambda g) = \lambda Q_\lambda g$, $\lambda > 0$, we see from the Hamilton-Jacobi equation that, almost everywhere in space,

$$Q(\lambda g) = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} Q(\lambda g) + \frac{1}{2} \left|\nabla Q(\lambda g)\right|^2.$$

We thus immediately deduce from the logarithmic Sobolev inequality (3.24) the differential inequality (3.25) on $G(\lambda) = \int e^{\rho Q(\lambda g)} d\mu$. Since $G'(0) = \rho \int g d\mu$, it follows similarly that

$$\int e^{\rho Q g} d\mu \leqslant e^{\rho \int g d\mu}, \tag{3.28}$$

that is the infimum-convolution inequality (3.12). Inequality (3.28) amounts, as announced in the introduction, to the transportation cost inequality for the quadratic cost

$$\rho W_2(\mu, \nu)^2 \leqslant H(\nu \,|\, \mu) = \mathbf{Ent}_\mu \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right) \tag{3.29}$$

for every ν absolutely continuous with respect to μ. Exactly as for the equivalence between (3.26) and (3.27), by the dual description of W_2,

$$\int g d\nu - \int f d\mu \leqslant \frac{1}{\rho} \mathbf{Ent}_\mu \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right)$$

for all bounded functions f and g such that

$$g(x) \leqslant f(y) + \frac{1}{2} |x - y|^2$$

for every $x, y \in \mathbb{R}^n$. Since $g = Qf$ achieves the optimal choice, setting $\varphi = \frac{d\nu}{d\mu}$, the preceding amounts to

$$\int \psi \varphi d\mu \leqslant \mathbf{Ent}_\mu(\varphi)$$

where $\psi = Qf - \int f d\mu$. Since the inequality holds for every choice of φ, it is equivalent to say that $\int e^{\rho\psi} \leqslant 1$, that is exactly (3.28).

As a consequence of either Theorem 3.2.1 or the preceding, we may state the following corollary first established in [OV00].

Corollary 3.3.1. — *Assume that μ is absolutely continuous and that for some $\rho > 0$ and all smooth enough functions f on $\mathbb{R}^n$,*

$$\rho \, \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Then, for every probability measure ν absolutely continuous with respect to μ,

$$\rho W_2(\mu, \nu)^2 \leqslant H(\nu \,|\, \mu).$$

Replacing $|x-y|$ by the Riemannian distance $d(x,y)$ yields the same conclusion on a smooth manifold M.

It might be worthwhile mentioning that whenever g is Lipschitz,

$$Qg \geqslant g - \frac{1}{2}\|g\|_{\mathrm{Lip}}^2.$$

So clearly, (3.28) represents an improvement upon (3.26) (replacing g by g/ρ). Actually, Theorem 3.2.1 (cf. (3.11)) then indicates that for every $r \in \mathbb{R}$,

$$\|\,\mathrm{e}^g\|_{\rho+r} \leqslant \|\,\mathrm{e}^g\|_r\, \mathrm{e}^{\|g\|_{\mathrm{Lip}}^2/2}$$

a much stronger property.

3.4. Semigroup tools and HWI inequalities

In this section, we examine some converse results from transportation cost inequalities to logarithmic Sobolev inequalities. We first describe how quadratic transportation cost inequalities imply spectral inequalities. Then, under appropriate log-concavity assumptions on the underlying measure, we review the Bakry-Emery criterion and put in parallel the HWI inequalities of [OV00] and the results of [Wan97].

3.4.1. Transportation cost inequalities and spectral gap. — Using again the dual Monge-Kantorovitch description (3.12) of the quadratic transportation inequality (3.13), it is not difficult to see that (3.12) implies the spectral gap, or Poincaré inequality, for μ, in the sense that for all smooth functions f on $\mathbb{R}^n$,

$$\rho\, \mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant \int |\nabla f|^2 d\mu \tag{3.30}$$

where $\mathbf{Var}_\mu(f) = \int f^2 d\mu - \big(\int f d\mu\big)^2$. Indeed, homogeneity in (3.12) yields

$$\int \mathrm{e}^{\rho t Q_t f} d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\rho t \int f d\mu}.$$

As $t \to 0$, $Q_t f \sim f - \frac{t}{2}|\nabla f|^2$ so that

$$1+\rho t\int f d\mu - \frac{\rho t^2}{2}\int |\nabla f|^2 d\mu + \frac{\rho^2 t^2}{2}\int f^2 d\mu \leqslant 1+\rho t\int f d\mu + \frac{\rho^2 t^2}{2}\Big(\int f d\mu\Big)^2 + o(t^2)$$

and thus (3.30). A different derivation of this result is given in [OV00].

It is well-known and classical that, applying the logarithmic Sobolev inequality (3.1) to $1+tf$ and letting $t \to 0$ also yields (3.30). Furthermore, both the logarithmic Sobolev inequality (3.1) and the transportation cost inequality (3.12) (or (3.13)) entail concentration properties. In particular, logarithmic Sobolev inequality and the transportation inequality for the quadratic cost are stable by products and therefore lead to dimension free concentration inequalities (cf. [Mar96b], [Tal96], [BG99], [Led99]...).

3.4.2. The Bakry-Emery criterion. — Before turning to our main question in the next sub-section, it is worthwhile to briefly review the Bakry-Emery criterion [BE85], [Bak94], [Led99], for logarithmic Sobolev inequalities under strict log-concavity of the measure.

Let thus $d\mu = \mathrm{e}^{-U}dx$ be a probability measure on the Borel sets of $\mathbb{R}^n$ where U is a smooth potential.

Theorem 3.4.1. — *Assume that for some $c > 0$, $\mathrm{Hess}\,(U)(x) \geqslant c\,\mathrm{Id}$ in the sense of symmetric matrices uniformly in $x \in \mathbb{R}^n$. Then μ satisfies the logarithmic Sobolev inequality*

$$\mathbf{Ent}_\mu\big(f^2\big) \leqslant \frac{2}{c}\int |\nabla f|^2 d\mu$$

for every smooth function f on $\mathbb{R}^n$.

The proof by D. Bakry and M. Emery of this result relies on the commutation properties of the gradient with the semigroup $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ with generator $\mathbf{L} = \Delta - \langle \nabla U, \nabla \rangle$. Namely, the condition $\mathrm{Hess}\,(U)(x) \geqslant c\,\mathrm{Id}$ uniformly in $x \in \mathbb{R}^n$ for some $c \in \mathbb{R}$ (non necessarily strictly positive) is actually equivalent to saying that for every smooth function f,

$$|\nabla P_t f| \leqslant \mathrm{e}^{-ct} P_t\big(|\nabla f|\big) \tag{3.31}$$

(cf. [Bak94], [Led00a]). Then, given a smooth stritly positive bounded function f, we may write

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\int P_t f \log P_t f \, d\mu dt = \int_0^\infty I(P_t f)dt$$

where

$$I(P_t f) = \int \frac{|\nabla P_t f|^2}{P_t f}\, d\mu$$

is the Fisher information of $P_t f$. By (3.31) and the Cauchy-Schwarz inequality,

$$|\nabla P_t f|^2 \leqslant e^{-2ct} P_t\Big(\frac{|\nabla f|^2}{f}\Big) P_t f,$$

so that, by invariance of P_t,

$$I(P_t f) \leqslant e^{-2ct} I(f). \tag{3.32}$$

When $c > 0$, it immediately follows that

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) \leqslant \frac{1}{2c} I(f)$$

which amounts to Theorem 3.4.1 by changing f into f^2.

3.4.3. HWI inequalities. — We examine here what happens to the Bakry-Emery argument when the lower bound c on the Hessian of U is not strictly positive. While the argument clearly breaks down, it may efficiently be complemented by transportation cost inequalities. We reach in this way the HWI inequalities of [OV00]. For simplicity, we again work in the Euclidean case, all the results and methods however going through in a Riemannian setting.

Namely, for any $T > 0$, we may still apply the Bakry-Emery criterion up to time T. That is, for any smooth positive and bounded function f on $\mathbb{R}^n$ such that $\int f d\mu = 1$, we may write

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) = \int_0^T I(P_t f) dt + \mathbf{Ent}_\mu(P_T f).$$

Assuming that $\mathrm{Hess}\,(U) \geqslant c\,\mathrm{Id}$ for some $c \in \mathbb{R}$, and using (3.32) shows that

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) \leqslant \alpha(T) I(f) + \mathbf{Ent}_\mu(P_T f) \tag{3.33}$$

where

$$\alpha(T) = \frac{1 - e^{-2cT}}{2c} \quad (= T \text{ if } c = 0.)$$

The idea is now to control $\mathbf{Ent}_\mu(P_T f)$, $T > 0$, by some transportation bound. We will prove the following lemma that describes a kind of reverse transportation cost inequality for $P_T f$ in the form of a short time parabolic regularization estimate. In the subsequent comment note [OV], F. Otto and C. Villani mention that Lemma 4.2 below may actually be shown to follow from their proof of Theorem 4.3 using the Brenier-McCann transference plan theorem. They establish in the same way a stronger regularization estimate showing that both entropy and Fisher information become finite in arbitrarily short time (like $O(t^{-1})$ and $O(t^{-2})$ respectively) as a variant of an estimate for gradient flows of a convex function on a Hilbert space going back to H. Brézis [Bré73], Theorem 3.7.

Lemma 3.4.2. — *Assume* $\mathrm{Hess}\,(U) \geqslant c\,\mathrm{Id}$, $c \in \mathbb{R}$, *and denote by* $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ *the semigroup with generator* $\mathbf{L} = \Delta - \langle \nabla U, \nabla \rangle$. *Let* f *on* $\mathbb{R}^n$ *be non-negative and such that* $\int f d\mu = 1$. *Then, for any* $T > 0$,

$$\mathbf{Ent}_\mu(P_T f) \leqslant \Big(\frac{1}{2\alpha(T)} - c\Big)\, W_2(\mu,\nu)^2$$

where $d\nu = f d\mu$.

Optimizing in $T > 0$ in (3.33) together with Lemma 3.4.2, we obtain the following result that describes the so-called HWI inequalities connecting entropy H, Wassertein distance W_2 and Fisher information I.

Theorem 3.4.3. — *Let* $d\mu = \mathrm{e}^{-U}dx$ *and assume that* $\mathrm{Hess}\,(U) \geqslant c\,\mathrm{Id}$ *for some* $c \in \mathbb{R}$. *Then, for every smooth non-negative function* f *such that* $\int f d\mu = 1$,

$$H(\nu \,|\, \mu) = \mathbf{Ent}_\mu(f) \leqslant \sqrt{2I(f)}\, W_2(\mu,\nu) - c\, W_2(\mu,\nu)^2$$

(where we recall that $d\nu = f d\mu$*).*

Theorem 3.4.3 has been obtained by F. Otto and C. Villani [OV00] using the Brenier-McCann mass transport [Bre91], [McC95] together with further PDE arguments. A simple proof, relying on the same tool, was recently given by D. Cordero-Erausquin [CE00b]. Theorem 3.4.3 admits the following corollary that complements Theorem 3.4.1.

Corollary 3.4.4. — *Let* $d\mu = \mathrm{e}^{-U}dx$ *and assume that* $\mathrm{Hess}\,(U) \geqslant c\,\mathrm{Id}$ *for some* $c \leqslant 0$. *Assume that for some* $\rho > 0$ *and every* ν,

$$\rho W_2(\mu,\nu)^2 \leqslant H(\nu \,|\, \mu).$$

Then, provided that $1 + \frac{c}{\rho} > 0$, μ *satisfies the logarithmic Sobolev inequality*

$$\rho'\, \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \int |\nabla f|^2 d\mu$$

for every smooth f *with*

$$\rho' = \frac{\rho}{4}\Big(1 + \frac{c}{\rho}\Big)^2.$$

To complete our proof of Theorem 3.4.3, we have to establish Lemma 3.4.2. To this task, we make use of a Harnack type result of F.-Y. Wang in [Wan97], that actually bridges the result of [OV00] with the logarithmic Sobolev inequalities under exponential integrability of [Wan97] (see also [Aid98], [Led99]).

Proof of Lemma 3.4.2. — Rewrite first $\mathbf{Ent}_\mu(P_T f)$ by time reversibility as

$$\mathbf{Ent}_\mu(P_T f) = \int f P_T(\log P_T f) d\mu.$$

We bound $P_T(\log P_T f)$ by the method of [Wan97]. Fix x, y in $\mathbb{R}^n$. Let $x(t) = \frac{1-t}{T} x + \frac{t}{T} y$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Let further $h : [0,T] \to [0,T]$ be a $\mathcal{C}^1$ speed function such that $h(0) = 0$ and $h(T) = T$. Set $\gamma(t) = x \circ h(t)$ and

$$\Psi\big(t, \gamma(t)\big) = P_t(\log P_{2T-t} f)\big(\gamma(t)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

We have

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= -P_t\Big(\frac{|\nabla P_{2T-t} f|^2}{(P_{2T-t} f)^2}\Big)\big(\gamma(t)\big) + \frac{h'(t)}{T} \langle \nabla P_t(\log P_{2T-t} f), y - x\rangle \\ &\leqslant -P_t\Big(\frac{|\nabla P_{2T-t} f|^2}{(P_{2T-t} f)^2}\Big)\big(\gamma(t)\big) + \frac{|h'(t)|}{T}\, |x-y| \big|\nabla P_t(\log P_{2T-t} f)\big|. \end{aligned}$$

Using (3.31),

$$\big|\nabla P_t(\log P_{2T-t} f)\big| \leqslant \mathrm{e}^{-ct} P_t\Big(\frac{|\nabla P_{2T-t} f|}{(P_{2T-t} f)}\Big).$$

Hence, with

$$X = \frac{|\nabla P_{2T-t} f|^2}{(P_{2T-t} f)^2} \quad \text{and} \quad Y = \frac{|h'(t)|}{2T}\, |x-y|\, \mathrm{e}^{-ct},$$

we have that

$$\frac{d\Psi}{dt} \leqslant P_t(-X^2 + 2XY)$$

and thus

$$\frac{d\Psi}{dt} \leqslant P_t(Y^2) = \frac{|h'(t)|^2}{4T^2}\, |x-y|^2\, \mathrm{e}^{-2ct}.$$

It follows that

$$P_T(\log P_T f)(x) - \log P_{2T} f(y) \leqslant \frac{|x-y|^2}{4T^2} \int_0^T \big|h'(t)\big|^2 \mathrm{e}^{-2ct} dt.$$

For the optimal choice of the speed h, that is

$$h(t) = T(\mathrm{e}^{2cT} - 1)^{-1}(\mathrm{e}^{2ct} - 1), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

this leads to

$$P_T(\log P_T f)(x) \leqslant \log P_{2T} f(y) + \frac{1}{2S}\,|x-y|^2 \tag{3.34}$$

where

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{2\alpha(T)} - c.$$

Inequality (3.34) is the analogue, adapted to our purposes, of the Harnack inequality of [Wan97]. For x fixed, take then the infimum in y in (3.34) to get

$$P_T(\log P_T f)(x) \leqslant Q_S\varphi(x)$$

where $\varphi = \log P_{2T} f$. Since by Jensen's inequality

$$\int \varphi d\mu = \int \log P_{2T} f d\mu \leqslant \log\left(\int P_{2T} f d\mu\right) = 0,$$

we actually have that

$$P_T(\log P_T f) \leqslant Q_S\varphi - \int \varphi d\mu.$$

Therefore,

$$\mathbf{Ent}_\mu(P_T f) = \int f P_T(\log P_T f) d\mu \leqslant \sup\left[\int Q_S\varphi d\nu - \int \varphi d\mu\right]$$

where the supremum is over all bounded measurable functions φ. By the dual Monge-Kantorovitch description (3.23) of W_2 together with the scaling property of infimum-convolutions, the lemma is established. □

As mentioned before, Theorem 3.4.3 and its proof, in particular Lemma 3.4.2, hold similarly in a Riemannian context.

Remark 3.4.5. — Lemma 3.4.2 provides a bridge between the logarithmic Sobolev inequalities of Theorem 3.4.3 under the quadratic transportation cost and the result of F.-Y. Wang [Wan97] under exponential integrability of the square distance, immediate consequence of linear transportation cost. Indeed, if we integrate inequality (3.34) in $d\mu(y)$ rather than to take the infimum in y, we get that

$$\begin{aligned}\mathbf{Ent}_\mu(P_T f) = \int P_T f \log P_T f d\mu \leqslant \iint f(x) \log P_{2T} f(y) d\mu(x) d\mu(y) + \\ \iint f(x)\,\frac{|x-y|^2}{4\alpha(T)\mathrm{e}^{2cT}}\, d\mu(x)d\mu(y) \leqslant \iint f(x)\,\frac{|x-y|^2}{2S}\, d\mu(x)d\mu(y)\end{aligned}$$

where we used Jensen's inequality. By Young's inequality $ab \leqslant a \log a + \mathrm{e}^b$, $a \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$,

$$\iint f(x)\,\frac{|x-y|^2}{2S}\,d\mu(x)d\mu(y) \leqslant \frac{1}{2}\,\mathbf{Ent}_\mu(f) + \iint \mathrm{e}^{\frac{|x-y|^2}{S}}d\mu(x)d\mu(y).$$

Together with (3.33), we thus get

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) \leqslant 2\alpha(T)I(f) + 2\iint \mathrm{e}^{\frac{|x-y|^2}{S}}d\mu(x)d\mu(y). \tag{3.35}$$

Assume now that for some $\varepsilon > 0$,

$$\iint \mathrm{e}^{(-\tilde{c}+\varepsilon)|x-y|^2}d\mu(x)d\mu(y) < \infty \tag{3.36}$$

where $\tilde{c} = \min(c, 0)$. We may then choose $T > 0$ so that the integral in (3.35) is finite. We thus conclude that for some $C > 0$ (depending on the value of the latter),

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) \leqslant C\big(I(f) + 1\big).$$

By homogeneity, for every smooth enough f on $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant C\bigg(\int |\nabla f|^2 d\mu + \int f^2 d\mu\bigg). \tag{3.37}$$

This is a defective logarithmic Sobolev inequality. One classical way to switch it into a true logarithmic Sobolev inequality (cf. e.g. [Bak94]) is to establish first the Poincaré inequality for μ under the same condition (3.36). This can be achieved similarly on the basis the Harnack type inequality of [Wan97] (cf. [Aid98], [Led99]). (With respect to Corollary 3.4.4, it should be emphasized for applications that the constant in (3.37), that depends on the value of the integral in (3.36), is highly dimensional. On the other hand, as Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities, the transportation cost inequality (3.29) is stable by products [Tal96].)

3.5. Transportation cost for the exponential measure

In this section, we apply the method of Section 3.3 to investigate the transportation cost inequality for the exponential measure first explored in [Tal96]. To this task, we need to work with non-quadratic Hamilton-Jacobi equations.

3.5.1. Non-quadratic Hamilton-Jacobi equations. — The general principle based on Hamilton-Jacobi equations can be extended to other cost functions than the square function. Let namely H be smooth and convex on $\mathbb{R}^n$ with $\lim_{|x|\to\infty} H(x)/|x| = +\infty$. For a smooth (Lipschitz e.g.) function f, the (unique viscosity) solution $u = u(x,t)$ of the minimization problem (cf. [Bar94], [Eva98])

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla u) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u &= f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{aligned}\right. \tag{3.38}$$

is given by the Hopf-Lax formula

$$u(x,t) = \left\{\begin{array}{l} Q_t^L f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\Big[f(y) + tL\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\Big], \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ f(x), \qquad t=0,\ x\in\mathbb{R}^n, \end{array}\right. \tag{3.39}$$

where L is the convex conjugate of H defined by

$$L(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big[\langle x,y\rangle - H(x)\big].$$

For arbitrary cost, $Q_t^L f$ is not continuous in general at $t=0$ even for smooth f.

Following the proof of Theorem 3.2.1, the derivative of $F(t) = \|\,\mathrm{e}^{Q_t^L f}\|_{\lambda(t)}$ then leads to

$$\lambda^2(t)\,F(t)^{\lambda(t)-1}F'(t) = \rho\,\mathbf{Ent}_\mu\Big(\mathrm{e}^{\lambda(t)Q_t^L f}\Big) - \lambda^2(t)\int H(\nabla Q_t^L f)\,\mathrm{e}^{\lambda(t)Q_t^L f}d\mu.$$

Useful applications of this principle however seem to require some homogeneity properties of H.

A first set of applications is obtained by replacing the Euclidean norm by arbitrary norms $\|\cdot\|$ on $\mathbb{R}^n$. Setting namely $L(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$, $y\in\mathbb{R}^n$, then, since H and L are self-dual, $H(x) = \frac{1}{2}\|x\|_*^2$, $x\in\mathbb{R}^n$, where $\|\cdot\|_*$ is the dual norm of $\|\cdot\|$. Therefore, under the logarithmic Sobolev inequality

$$\rho\,\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\int \|\nabla f\|_*^2 d\mu \tag{3.40}$$

holding for some $\rho > 0$ and all smooth enough functions f on $\mathbb{R}^n$, we may conclude as in Theorem 3.2.1 to the hypercontractive estimates

$$\|\,\mathrm{e}^{Q_t^L f}\|_{a+\rho t} \leqslant \|\,\mathrm{e}^{f}\|_a$$

for every, say bounded f, $t\geqslant 0$ and $a\in\mathbb{R}$. In particular,

$$\int \mathrm{e}^{\rho Q^L f}d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\rho\int f d\mu}$$

and, in its equivalent transportation cost form,

$$\rho\, W_L^2(\mu,\nu) \leqslant H(\nu \,|\, \mu).$$

Here

$$W_L^2(\mu,\nu) = \inf \iint \frac{1}{2}\,\|x-y\|^2 d\pi(x,y)$$

where the infimum is running over all probability measures π on the product space $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ with marginals μ and ν. One may also consider more generally p-convex, $p \geqslant 2$, potentials (cf. [BL00]).

3.5.2. Modified logarithmic Sobolev inequalities. — Another important example in the setting of Section 3.5.1 is the logarithmic Sobolev inequality for the exponential measure [BL97] that will lead, via this principle, to the transportation cost inequality of M. Talagrand [Tal96] for the exponential measure. Recall from [BL97] that whenever μ is the measure on the real line with density $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$ with respect to Lebesgue measure, for every Lipschitz function f on $\mathbb{R}$ such that $|f'| \leqslant c < 1$ almost everywhere,

$$\mathbf{Ent}_\mu\big(\mathrm{e}^f\big) \leqslant \frac{2}{1-c} \int f'^2 \mathrm{e}^f d\mu. \tag{3.41}$$

Fix for simplicity $c = \frac{1}{2}$. Set now

$$H(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{if } |x| \leqslant 1/2\,, \\ +\infty & \text{if } |x| > 1/2\,. \end{cases}$$

Its dual function is given by

$$L(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{16} & \text{if } |y| \leqslant 4\,, \\ \dfrac{|y|}{2} - 1 & \text{if } |y| > 4\,. \end{cases}$$

One may rewrite (3.41) as

$$\mathbf{Ent}_\mu\big(\mathrm{e}^f\big) \leqslant \int H(f')\,\mathrm{e}^f d\mu. \tag{3.42}$$

Note that $H(\lambda x) \leqslant \lambda^2 H(x)$ whenever $|\lambda| \leqslant 1$.

Although H does not exactly fit all the hypotheses of the classical Hamilton-Jacobi theory, one may however check that $(Q_t^L f)'$ is (almost everywhere) in the domain of H (i.e. $|x| \leqslant \frac{1}{2}$). We may then argue as in Section 3.2. Since we cannot expect however for a characterization through some kind of hypercontractivity (due to the lack of homogeneity of H), it is actually more simple to adapt the Herbst argument of Section 3.3. Namely, given a bounded (Lipschitz) function f, one first shows that $Q_t^L f$ is differentiable in $t > 0$ and almost every $x \in \mathbb{R}^n$ and that

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_t^L f + H\big((Q_t^L f)'\big) = 0.$$

Set $F(t) = \int e^{tQ_t^L f} d\mu$ which is differentiable in $t > 0$. By (3.42),

$$tF'(t) \leqslant F(t) \log F(t), \quad 0 < t \leqslant 1.$$

While $Q_t^L f$ is not continuous at $t = 0$, it is easy to check however that $tQ_t^L f \to 0$ as $t \to 0$. Therefore $F'(0) \leqslant \int f d\mu$, and integrating the preceding differential inequality as in the previous section, one concludes that

$$\int e^{Q^L f} d\mu \leqslant e^{\int f d\mu} \tag{3.43}$$

where $Q^L = Q_1^L$. The latter inequality (3.43) actually corresponds exactly to the transportation cost inequality for the exponential measure put forward in [Tal96]. Namely, by the dual Monge-Kantorovitch principle (cf. [Rac91]), (3.43) is equivalent to saying that, for every probability measure ν on the real line absolutely continuous with respect to μ

$$W_L(\mu, \nu) \leqslant H(\nu \,|\, \mu) \tag{3.44}$$

with

$$W_L(\mu, \nu) = \inf \int\!\!\int L(x - y) d\pi(x, y)$$

where the infimum is running over all probability measures on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ with respective (integrable) marginals μ and ν. It is then easy to check that the cost L is equivalent, up to numerical constants, to the cost used in [Tal96].

The preceding extends to products of the exponential distribution by considering the functions on $\mathbb{R}^n$ given by $\sum_{i=1}^n H(x_i)$ and $\sum_{i=1}^n L(x_i)$ for a vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. To this task, one may either tensorize the logarithmic Sobolev inequality (3.41) or the transportation inequality (3.44). As in [Tal96], the main difficulty arises in dimension one.

3.5.3. Poincaré inequalities and exponential transportation cost. — As a main result of the work [BL97], it was actually shown that every measure μ (absolutely continuous say) satisfying the Poincaré inequality

$$\lambda \, \mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant \int |\nabla f|^2 d\mu \tag{3.45}$$

for some $\lambda > 0$ and all smooth functions f actually satisfies a modified logarithmic Sobolev inequality such as (3.41)

$$\mathbf{Ent}_\mu(\mathrm{e}^f) \leqslant K(c) \int |\nabla f|^2 \mathrm{e}^f d\mu \tag{3.46}$$

for every bounded Lipschitz function f such that $|\nabla f| \leqslant c < 2\sqrt{\lambda}$ almost everywhere, where $K(c) > 0$ only depends on c and λ. Setting

$$H(x) = H_c(x) = \begin{cases} K(c)\,|x|^2 & \text{if } |x| \leqslant c\,, \\ +\infty & \text{if } |x| > c\,, \end{cases}$$

with dual function

$$L(y) = L_c(y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^2}{4K(c)} & \text{if } |y| \leqslant 2cK(c)\,, \\ c|y| - c^2 K(c) & \text{if } |y| > 2cK(c)\,, \end{cases} \tag{3.47}$$

and arguing exactly as before, we may state the following corollary.

Corollary 3.5.1. — *Let μ be a measure on the Borel sets of $\mathbb{R}^n$ satisfying the Poincaré inequality*

$$\lambda\, \mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant \int |\nabla f|^2 d\mu$$

for some $\lambda > 0$ and all smooth functions f. Then, for every $c < 2\sqrt{\lambda}$, μ satisfy

$$\int \mathrm{e}^{\rho Q f} d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\rho \int f d\mu} \tag{3.48}$$

for every bounded measurable f (where we write Q for Q_1) that corresponds to the critical value $a = 0$ in Theorem 3.2.1. Equivalently,

$$\int \mathrm{e}^{\rho f} d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\rho \int \widetilde{Q} f d\mu} \tag{3.49}$$

(where we write $\widetilde{Q}$ for $\widetilde{Q}_1$). These inequalities can easily be extended from the class of all bounded measurable functions to the class of all μ-integrable functions f in (3.48) and the class of all measurable functions f in (3.49) with μ-integrable sup-convolution.

The operator Q_t represents a bijection from the class of all concave functions on $\mathbb{R}^n$ with values in $[-\infty, +\infty)$ onto itself. Respectively, $\widetilde{Q}_t$ is a bijection on the class of all convex functions on $\mathbb{R}^n$ with values in $(-\infty, +\infty]$. In particular, if we start with a homogeneous convex function

$$f(x) = \sup_{\theta \in T} \langle \theta, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \, T \subset \mathbb{R}^n,$$

then

$$\widetilde{Q}^{-1} f(x) = \sup_{\theta \in T} \Big[\langle \theta, x \rangle - \frac{1}{2} \, |\theta|^2 \Big].$$

The supremum-convolution inequality (3.49) then yields (after a simple approximation argument)

$$\int \mathrm{e}^{\rho \sup_\theta [\langle \theta, x \rangle - |\theta|^2/2]} d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\rho \int \sup_\theta \langle \theta, x \rangle d\mu} .$$

For the canonical Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$, this inequality was discovered by B. S. Tsirel'son [Tsi85] in connection with Gaussian mixed volumes. In the general setting of logarithmic Sobolev inequalities and non-homogeneous convex functions it may be formulated in the following way.

Corollary 3.5.2. — *Under the logarithmic Sobolev inequality (3.16) of Theorem 3.2.1, for any convex μ-integrable function f on $\mathbb{R}^n$,*

$$\int \mathrm{e}^{\rho (f - \frac{1}{2} |\nabla f|^2)} d\mu \leqslant \mathrm{e}^{\rho \int f d\mu}.$$

For the proof, since f is differentiable almost everywhere, for every point $x \in \mathbb{R}^n$ at which f is differentiable, and all $z \in \mathbb{R}^n$, $f(x+z) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), z \rangle$. Therefore,

$$Qf(x) \geqslant \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \Big[f(x) + \langle \nabla f(x), z \rangle - \frac{1}{2} \, |z|^2 \Big] = f(x) - \frac{1}{2} \, \big| \nabla f(x) \big|^2.$$

3.6. Brunn-Minskowski inequalities and hypercontractivity

Brunn-Minkowski inequalities may be used to prove the hypercontractive inequalities of Theorem 3.2.1 for some classes of measures with logconcave densities. Assume that $d\mu = \mathrm{e}^{-U} dx$ where $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is smooth and such that for some $c > 0$, uniformly in $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Hess}\,(U)(x) \geqslant c \, \mathrm{Id}$$

in the sense of symmetric matrices. This condition is thus the Bakry-Emery criterion [BE85] (cf. [Bak94], [Led99]) under which the logarithmic Sobolev inequality for μ holds with $\rho = c$ as we have seen in Theorem 3.4.1. The classical Brunn-Minkowski inequality, in its functional form (see [DG80] for the historical developments of this result), may be used to provide a simple proof of the hypercontractive estimates of Theorem 3.2.1 (with $a = 1$), and thus of the logarithmic Sobolev inequality. Recall that, in its functional formulation, the Brunn-Minkowski theorem indicates that whenever $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, and u, v, w are non-negative measurable functions on $\mathbb{R}^n$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$w\big(\alpha x + \beta y\big) \geqslant u(x)^\alpha v(y)^\beta, \tag{3.50}$$

then

$$\int w dx \geqslant \Big(\int u dx\Big)^\alpha \Big(\int v dx\Big)^\beta. \tag{3.51}$$

Given a (bounded) function f on $\mathbb{R}^n$, apply then (3.51) to the functions

$$u(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha} Q_{\beta/c\alpha} f(x) - U(x)}, \quad v(y) = e^{-U(y)}, \quad w(z) = \mathrm{e}^{f(z) - U(z)}.$$

Due to the convexity condition $\mathrm{Hess}\,(U) \geqslant c\,\mathrm{Id}$, for every $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ and $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha U(x) + \beta U(y) - U(\alpha x + \beta y) \geqslant \frac{c\alpha\beta}{2}\, |x - y|^2 \tag{3.52}$$

so that condition (3.50) will be satisfied by the very definition of the infimum-convolution $Q_{\beta/c\alpha} f$. Therefore,

$$\int \mathrm{e}^f d\mu \geqslant \Big(\int \mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha} Q_{\beta/c\alpha} f} d\mu\Big)^\alpha.$$

Setting $\frac{1}{\alpha} = 1 + ct$, $t \geqslant 0$, immediately yields (3.17) with $\rho = c$ and $a = 1$. In particular the logarithmic Sobolev inequality for μ holds with $\rho = c$. The same arguments holds when considering an arbitrary norm in (3.52) to yield the logarithmic Sobolev inequality. We thus recover with the Hamilton-Jacobi approach the Bakry-Emery result (Theorem 3.4.1) as well as some of the main results of [BL00]. In particular, convexity (3.52) with an arbitrary norm instead of the Euclidean one yields, via hypercontractivity of Hamilton-Jacobi solutions, to the logarithmic Sobolev inequalities (3.40), a conclusion out of reach of the heat semigroup tools.

It was shown similarly in [BG99] and [BL00] how Brunn-Minkowski inequalities may be used to deduce directly the transportation cost inequalities of Section 3.3. See also [Blo99] for further results. The recent Riemannian version of the functional Brunn-Minkowski inequality of [CEMS00] may be used to extend the preceding to a Riemannian setting and to recover in this way the logarithmic Sobolev inequality of D. Bakry and M. Emery [BE85] in manifolds with a strictly positive lower bound on the Ricci curvature.

It might be worthwhile mentioning that the alternate choice (used in particular in [Mau91], [BG99], [BL00]) in the functional Brunn-Minkowski inequality of

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\beta f(x)-U(x)}, \quad v(y) = e^{\alpha Q_{1/c}f(y)-U(y)}, \quad w(z) = \mathrm{e}^{-U(z)},$$

leads to

$$\left(\int \mathrm{e}^{\alpha Q_{1/c}f} d\mu\right)^{1/\alpha} \left(\int \mathrm{e}^{-\beta f} d\mu\right)^{1/\beta} \leqslant 1. \tag{3.53}$$

As $\beta \to 0$, (3.53) only yields (3.17) with $a = 0$, that is the infimum convolution inequality (3.48) (with $\rho = c$). In the notation (3.11), (3.53) corresponds to the range $-1 \leqslant r \leqslant 0$. While to reach the logarithmic Sobolev inequality itself would require all r (negative) large enough, it is already interesting to point out that the value $r = 0$ (the infimum-convolution inequality (3.48)) is actually equivalent to the whole interval $-1 \leqslant r \leqslant 0$ (the inequalities (3.53)). To prove this claim, rewrite (3.53) as

$$\frac{1}{\alpha} \log \int \mathrm{e}^{\alpha Q_{1/c}f} d\mu + \frac{1}{\beta} \log \int \mathrm{e}^{-\beta f} d\mu \leqslant 0 \tag{3.54}$$

for every $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Now,

$$\log \int \mathrm{e}^{g} d\mu = \sup \left[\int g h d\mu - \mathbf{Ent}_{\mu}(h)\right]$$

where the supremum is running over all bounded measurable functions $h \geqslant 0$ such that $\int h d\mu = 1$. Thus we may further rewrite (3.54) as

$$\int Q_{1/c}f\, h_1 d\mu - \int f h_2 d\mu \leqslant \frac{1}{\alpha}\, \mathbf{Ent}_{\mu}(h_1) + \frac{1}{\beta}\, \mathbf{Ent}_{\mu}(h_2)\,,$$

$\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, that should therefore hold for all $h_1, h_2 \geqslant 0$ with $\int h_1 d\mu = \int h_2 d\mu = 1$. Optimizing over α and β we get

$$\int Q_{1/c}f\, h_1 d\mu - \int f h_2 d\mu \leqslant \left(\sqrt{\mathbf{Ent}_{\mu}(h_1)} + \sqrt{\mathbf{Ent}_{\mu}(h_2)}\right)^2,$$

that is

$$\int Q_{1/c} f d\nu_1 - \int f d\nu_2 \leqslant \left(\sqrt{H(\nu_1 \,|\, \mu)} + \sqrt{H(\nu_2 \,|\, \mu)}\right)^2 \tag{3.55}$$

where $d\nu_1 = h_1 d\mu$, $d\nu_2 = h_2 d\mu$ are arbitrary probability measures on $\mathbb{R}^n$ absolutely continuous with respect to μ. These measures may also be assumed to have finite second moment. Now the supremum over all f's on the left-hand side of (3.55) is equal to $\frac{c}{2}\, W_2(\nu_1,\nu_2)^2$ so that (3.55) becomes

$$\sqrt{c}\, W_2(\nu_1,\nu_2) \leqslant \sqrt{H(\nu_1\,|\,\mu)} + \sqrt{H(\nu_2\,|\,\mu)}\,. \tag{3.56}$$

We thus reduced (3.53) to (3.56). But now the latter follows from (3.26) (with $\rho = c$) by the triangle inequality for the metric W_2. This proves the claim.

3.6.1. Logarithmic isoperimetry. — In this last part, we turn some to $\mathbf{L}^1$-versions of our hypercontractivity results. Let μ be a probability measure on the Borel sets of a metric space (E,d) and assume it satisfies the (logarithmic) isoperimetric inequality

$$\mu^+(A) \geqslant c\,\big(1-\mu(A)\big)\log\left(\frac{1}{1-\mu(A)}\right) \tag{3.57}$$

for every Borel set A in E and some $c>0$. Recall that in general the μ-perimeter $\mu^+(A)$ of a Borel set $A\subset E$ is defined by

$$\mu^+(A) = \liminf_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\big[\mu(A_t)-\mu(A)\big]$$

where A_t, $t>0$, is the open t-neighborhood of A in the metric d on E.

The isoperimetric inequality (3.57) is connected with hypercontractivity of the convolution operators

$$Q_tf(x) = \inf_{y\in E;\, d(x,y)<t} f(y), \quad t>0,\, x\in E.$$

As we will see indeed, (3.57) holds if and only if

$$\|Q_tf\|_q \leqslant \|f\|_p \tag{3.58}$$

for every non-negative measurable function f and all $0<p<q<\infty$ and $t>0$ such that $\mathrm{e}^{ct}\geqslant \frac{q}{p}$. To hint this connection, apply (3.58) to $f=\mathbf{1}_{E\setminus A}$. Since $Q_tf = \mathbf{1}_{E\setminus A_t}$, (3.58) turns into

$$\log\big(1-\mu(A_t)\big) \leqslant \mathrm{e}^{ct}\log\big(1-\mu(A)\big). \tag{3.59}$$

As $t\to 0$, this amounts to (3.57).

It should be noted that in "regular" situations one has $\mu^+(A) = \mu^+(M\setminus A)$. This is certainly the case for μ absolutely continuous on $E=\mathbb{R}^n$, as well as in a more general Riemannian manifold setting. In the latter cases, it was shown by

O. Rothaus [Rot85] that the isoperimetric inequality (3.57) is equivalent to the logarithmic Sobolev inequality

$$c\,\mathbf{Ent}_\mu(f) \leqslant \int |\nabla f| d\mu \tag{3.60}$$

which should hold in the class of all non-negative locally Lipschitz function f on $\mathbb{R}^n$ (or on a manifold). Furthermore, the standard theory shows that (given a locally Lipschitz) function f on $\mathbb{R}^n$, the function $v = v(x,t) = Q_t f(x)$ provides a solution of the initial-value partial differential equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + |\nabla v| & = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \qquad\quad v & = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.61}$$

The equivalence between (3.57) and (3.58) may then be proved on the basis of the partial differential equation (3.61) arguing as in the proof of our main result in Section 3.2. The particular structure of the $\mathbf{L}^1$ case makes it however more general than equation (3.61) and the result actually holds in the setting of abstract metric spaces, with a purely "metric" proof.

Theorem 3.6.1. — *Let μ be a probability measure on the Borel sets of a metric space (E, d). The probability measure μ satisfies the isoperimetric inequality*

$$\mu^+(A) \geqslant c\big(1 - \mu(A)\big) \log\left(\frac{1}{1-\mu(A)}\right)$$

for some $c > 0$ in the class of all Borel sets A in E if and only if

$$\|Q_t f\|_q \leqslant \|f\|_p$$

for every non-negative measurable function f on E and all $0 < p < q < \infty$ and $t > 0$ such that

$$\mathrm{e}^{ct} \geqslant \frac{q}{p}\,.$$

Proof. — We only need to show the sufficiency part. Since $(Q_t f)^p = Q_t f^p$, it is enough to deal with the case $p = 1$, and thus $q = \mathrm{e}^{ct} \geqslant 1$. The isoperimetric inequality (3.57) can be iterated in $t > 0$ so to yield (3.59) for every Borel A. Given a measurable function $f \geqslant 0$ on E, and $\lambda > 0$, set $A = \{f < \lambda\}$. By definition of Q_t, for every $t > 0$,

$$\big\{Q_t f < \lambda\big\} = A_t,$$

so that by (3.60), we get

$$\mu(Q_t f \geqslant \lambda) \leqslant \mu(f \geqslant \lambda)^q.$$

Hence

$$\|Q_t f\|_q^q = \int_0^\infty \mu(Q_t f \geqslant \lambda) d\lambda^q \leqslant \int_0^\infty \mu(f \geqslant \lambda)^q d\lambda^q.$$

Now it is know that the right-hand side of the latter inequality defines the so-called $\|f\|_{1,q}$ Lorentz norm of f, and that $\|f\|_{1,q} \leqslant \|f\|_1$ (cf. [SW71]). This stronger conclusion implies the result. □

A dual statement to Theorem 3.6.1 can be formulated with

$$\widetilde{Q}_t f(x) = \sup_{y \in E; d(x,y) < t} f(y), \quad t > 0,\, x \in E.$$

Both inequalities (3.57) and (3.58) imply the logarithmic Sobolev inequality

$$\rho\, \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \int |\nabla f|^2 d\mu$$

for some $\rho = \rho(c) > 0$ (cf. [Rot85]).

It was shown in [Bob98] that every log-concave measure μ on $\mathbb{R}^n$ supported by a ball of radius r satisfies the isoperimetric inequality (3.57) with $c = 1/2r$. In particular, the uniform distribution on a convex compact body $K \subset \mathbb{R}^n$ satisfies (3.57) with some $c > 0$. It would be of interest to estimate this constant in some special situations. For example, when K is the unit ball, the extremal sets in the isoperimetric problem are known. Another important case is the unit cube $K = [0,1]^n$. One may also consider the case of the sphere.

Acknowledgment. — We sincerely thank C. Villani for explaining to us his results with F. Otto and for numerous helpful comments and remarks on the present work. We also thank F. Otto and C. Villani for theiestir welcome addition [OV] to this paper.

CHAPITRE 4

BORNES ULTRACONTRACTIVES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI

4.1. Introduction

The main results of the following paper are on the border of three theorems, which are respectively the theorem of hypercontractivity of GROSS, the theorem of hypercontractivity of BOBKOV-GENTIL-LEDOUX and the theorem of ultracontractivity of VAROPOULOS. Let us described these results.

The fundamental work by L. Gross [Gro75] put forward the equivalence between logarithmic SOBOLEV inequalities and hypercontractivity of the associated heat semigroup. Let us consider for example a probability measure μ on the Borel sets of $\mathbb{R}^n$ satisfying the logarithmic Sobolev inequality

$$\rho\,\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\int |\nabla f|^2 d\mu \tag{4.1}$$

for some $\rho > 0$ and all smooth enough functions f on $\mathbb{R}^n$ where

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \log \int f^2 d\mu$$

and where $|\nabla f|$ is the Euclidean length of the gradient ∇f of f. The canonical Gaussian measure with density $(2\pi)^{-n/2}\mathrm{e}^{-|x|^2/2}$ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$ is the basic example of measure μ satisfying (4.1) with $\rho = 1$.

For simplicity, assume furthermore that μ has a strictly positive smooth density which may be written e^{-U} for some smooth function U on $\mathbb{R}^n$. Denote by $\mathbf{L}$ the second order diffusion operator $\mathbf{L} = \Delta - \langle \nabla U, \nabla \rangle$ with invariant measure μ. Integration by parts for $\mathbf{L}$ is described by

$$\int f(-\mathbf{L}g)d\mu = \int \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mu$$

for every smooth functions f, g. Under mild growth conditions on U one may consider the time reversible (with respect to μ) semigroup $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ with generator $\mathbf{L}$. Given a function f (in the domain of $\mathbf{L}$), $u = u(x,t) = \mathbf{P}_t f(x)$ is the fundamental solution of the initial value problem (heat equation with respect to $\mathbf{L}$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathbf{L}u & = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \qquad u & = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

One of the main results of the contribution [Gro75] by L. Gross is that the logarithmic Sobolev inequality (4.1) for μ holds if and only if the associated heat semigroup $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ is hypercontractive in the sense that, for every (or some) $1 < p < q < \infty$, and every f (in $\mathbf{L}^p$),

$$\|\mathbf{P}_t f\|_q \leqslant \|f\|_p \tag{4.2}$$

for every $t > 0$ large enough so that

$$\mathrm{e}^{2\rho t} \geqslant \frac{q-1}{p-1}. \tag{4.3}$$

In (4.2), the $\mathbf{L}^p$-norms are understood with respect to the measure μ. The key idea of the proof is to consider a function $q(t) = 1 + (p-1)\,\mathrm{e}^{2\rho t}$ of $t \geqslant 0$ such that $q(0) = p$ and to take the derivative in time of $F(t) = \|\mathbf{P}_t f\|_{q(t)}$ (for a non-negative smooth function f on $\mathbb{R}^n$).

Following Gross'idea, the main result of [BGL01] is to establish a similar relationship for the solutions of Hamilton-Jacobi partial differential equations. Consider the Hamilton-Jacobi initial value problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{2}|\nabla v|^2 & = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \qquad v & = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Solutions of (4.4) are described by the Hopf-Lax representation formula as infimum-convolutions. Namely, given a (Lipschitz continuous) function f on $\mathbb{R}^n$, define the infimum-convolution of f with quadratic cost as

$$\mathbf{Q_t} f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(y) + \frac{1}{2t}|x-y|^2 \right\}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

The family $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ defines a semigroup with infinitesimal (non-linear) generator $-\frac{1}{2}|\nabla f|^2$. That is, $v = v(x,t) = \mathbf{Q_t} f(x)$ is a solution of the Hamilton-Jacobi initial value problem (4.4) (at least almost everywhere). Actually, if in addition f is bounded, the Hopf-Lax formula $\mathbf{Q_t} f$ is the pertinent mathematical solution of (4.4), that is its unique viscosity solution (cf. e.g. [Bar94], [Eva98]).

An other way to introduce the HAMILTON-JACOBI solutions is to use the vanishing viscosity. Let $\mathbf{L}$ an infinitesimal diffusion generator, like the Laplacian, and $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ the associated MARKOV semigroup. Given a smooth function f, and $\varepsilon > 0$, denote namely by $v^\varepsilon = v^\varepsilon(x,t)$ the solution of the initial value partial differential equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{1}{2}|\nabla v^\varepsilon|^2 - \varepsilon \mathbf{L} v^\varepsilon & = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ v^\varepsilon & = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

As $\varepsilon \to 0$, it is expected that v^ε approaches in a reasonable sense the solution v of (4.4). It is easy to check that $u^\varepsilon = \mathrm{e}^{-v^\varepsilon/2\varepsilon}$ is a solution of the heat equation $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{L} u^\varepsilon$ (with initial value $\mathrm{e}^{-f/2\varepsilon}$). Therefore,

$$u^\varepsilon = P_{\varepsilon t}\big(\mathrm{e}^{-f/2\varepsilon}\big).$$

It must be emphasized that the perturbation argument by a small noise has a clear picture in the probabilistic language of large deviations. Namely, the asymptotic of

$$v^\varepsilon = -2\varepsilon \log P_{\varepsilon t}\big(\mathrm{e}^{-f/2\varepsilon}\big) \tag{4.6}$$

as $\varepsilon \to 0$ is a Laplace-Varadhan asymptotic with rate described precisely by the infimum convolution of f with the quadratic large deviation rate function for the heat semigroup (see [Bar94] or [BGL01]).

The main results in [BGL01] is that if the logarithmic SOBOLEV inequality (4.1) holds, then for each $t \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$ and each (say bounded) function f,

$$\big\| \mathrm{e}^{\mathbf{Q_t} f} \big\|_{a+\rho t} \leqslant \big\| \mathrm{e}^{f} \big\|_{a}. \tag{4.7}$$

Conversely, if (4.7) holds for every $t \geqslant 0$ and some $a \neq 0$, then the logarithmic SOBOLEV inequality (4.1) holds. Compared respect to classical hypercontractivity, it is worthwhile noting that $\mathbf{Q_t}$ is defined independently of the underlying measure μ.

Let us now recall the VAROPOULOS theorem. A measure μ satisfies the SOBOLEV inequality in dimension n if

$$\|f\|_{2n/(n-2}^2 \leqslant a\|\nabla f\|_2^2 + b\|f\|_2^2, \tag{4.8}$$

for any function f with compact support.

The main result of VAROPOULOS is the following. Let $\mathbf{L}$ an infinitesimal diffusion generator and note $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ the symmetric markovian semigroup associated. Suppose that μ is reversible for the operator $\mathbf{L}$ and $-\int f \mathbf{L} g d\mu = \|\nabla f\|_2^2$, where $\|\cdot\|_2^2$ is the $\mathbf{L}^2$-norm for μ. Let $n \geqslant 3$. Then the SOBOLEV inequality (4.8) is equivalent to the existence of a constant $k > 0$ such that for each $t \in]0, 1]$ and each smooth function f, we have

$$\|\mathbf{P}_t f\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \frac{k}{t^{n/2}}.$$

This theorem is developed in [Var84], [Var85] or [Var91].

At the light of the three theorems we study, like in [BGL01] for the logarithmic SOBOLEV inequality, the implication of SOBOLEV inequality (4.8) to the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$.

The next section deals with the $\mathbb{R}^n$ case and the LEBESGUE measure. We prove, by 3 methods, an optimal ultracontractive estimate for the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}^n$. In particular, we use the vanishing viscosity (inequality (4.6)) and the BRUNN-MINSKOWSKI inequality.

In the section 4.3, we prove that a measure μ on a manifold M, satisfies an Euclidean-type SOBOLEV inequality (where $b = 0$ in the inequality (4.8)) if ond only if the following control of the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ holds for each $\beta > \alpha > 0$, $t > 0$ and for any smooth function f,

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t} f}\right\|_\beta \leqslant \left\|e^f\right\|_\alpha \left(\frac{k\alpha(\beta-\alpha)}{t\beta}\right)^{\frac{n}{2}\frac{\beta-\alpha}{\beta\alpha}}. \tag{4.9}$$

When $\beta = \infty$ and $\alpha = 1$ the inequality (4.9) become

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t} f}\right\|_\infty \leqslant \left\|e^f\right\|_1 \left(\frac{k}{t}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{4.10}$$

for every smooth f and $t > 0$.

Section 4.4 finally states such a control for the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$, when the measure satisfies a SOBOLEV inequality with constants $a > 0$ and $b > 0$. We prove that under a general SOBOLEV inequality the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ satisfy the inequality (4.10) for every $t \in]0, A]$ ($A > 0$). When the manifold is compact, some interesting inequalities are obtained for the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$, which also imply some transportations inequalities for probability measures.

4.2. The $\mathbb{R}^n$ case

4.2.1. Majoration in $\mathbb{R}^n$ of the HAMILTON-JACOBI equations. — Before getting into more complicated cases let us start with the example of the LEBESGUE measure on $\mathbb{R}^n$. Let us define the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ in $\mathbb{R}^n$: If f is a bounded

Lipschitz function on $\mathbb{R}^n$, we define the function $\mathbf{Q_t}f$ by the following equation

$$\mathbf{Q_t}f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\left\{f(y) + \frac{1}{2t}|x-y|^2\right\}, \quad t>0,\, x\in\mathbb{R}^n, \tag{4.11}$$

and $\mathbf{Q}_0 f(x) = f(x)$. The infimum convolution $\mathbf{Q_t}$ is known as the HOPF-LAX solution of the HAMILTON-JACOBI equation

$$\frac{\partial \mathbf{Q_t}f}{\partial t}(x) = -\frac{1}{2}|\nabla \mathbf{Q_t}f(x)|^2, \tag{4.12}$$

with initial value f.

Then, in $\mathbb{R}^n$, considering the LEBESGUE measure yields the following theorem.

Theorem 4.2.1. — *Let f be a smooth function on $\mathbb{R}^n$ and let α and β be two constants such that $0<\alpha\leqslant\beta$, then we have the following inequality*

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_\beta \leqslant \left\|e^f\right\|_\alpha \left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}\frac{\beta-\alpha}{\beta\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{n}{2}\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}}, \tag{4.13}$$

for any $t>0$. The norm $\|\cdot\|_p$ is the $\mathbf{L}^p$-norm of the LEBESGUE *measure.*

Proof

◀ In this following proof we use the method developed by DAVIES and BAKRY in [Dav90] and [Bak94].

Thanks to the property of $\mathbf{Q_t}f$,

$$\lambda\geqslant 0,\, t\geqslant 0,\ \ \mathbf{Q_t}(\lambda f) = \lambda \mathbf{Q}_{\lambda t}f, \tag{4.14}$$

we just have to prove the inequality (4.13) when $t=1$. Let α and β be such that $0<\alpha\leqslant\beta$, and define $F(t) = \left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_{q(t)}$ with $q(t) = \alpha\beta/((\alpha-\beta)t+\beta)$. The function F is smooth and we obtain

$$F'(t) = F(t)^{1-q(t)}\frac{q'}{q^2}\left(\mathbf{Ent}_{dx}\left(e^{q(t)\mathbf{Q_t}f}\right) - \frac{1}{2q'(t)}\int |\nabla q(t)\mathbf{Q_t}f|^2 e^{q(t)\mathbf{Q_t}f}dx\right). \tag{4.15}$$

Besides, we know that the LEBESGUE measure on $\mathbb{R}^n$ satisfies the following inequality

$$\mathbf{Ent}_{dx}(e^g) \leqslant \frac{n}{2}\left(\int e^g dx\right)\log\left(\frac{1}{2e\pi n}\frac{\int|\nabla g|^2 e^g dx}{\int e^g dx}\right), \tag{4.16}$$

for any smooth function g on $\mathbb{R}^n$. This inequality is called *Euclidean logarithmic* SOBOLEV inequality and can be obtained as a consequence of the logarithmic SOBOLEV inequality for the Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$ (see for example [Car91] or Chapters 4 or 10 of [ABC+00]).

Because of the concavity of the logarithmic function, inequality (4.16) is equivalent to the following

$$\mathbf{Ent}_{dx}(e^g) \leqslant \frac{n}{2x} \int |\nabla g|^2 e^g dx + \frac{n}{2} \log\left(\frac{1}{2\pi e^2 n} x\right) \int e^g dx, \tag{4.17}$$

for each $x > 0$. Taking $x(t) = nq'(t)$ and using (4.15) and (4.17) then yields

$$F'(t) \leqslant F(t) \frac{n}{2} \frac{q'(t)}{q^2(t)} \log\left(\frac{1}{2\pi e^2} q'(t)\right).$$

Theorem 4.2.1 then follows from an integration over $t \in [0,1]$ and from the fact that

$$\int_0^1 \frac{n}{2} \frac{q'(t)}{q^2(t)} \log\left(\frac{1}{2\pi e^2} q'(t)\right) dt = \frac{n}{2} \frac{\beta - \alpha}{\beta\alpha} \log\left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}}\right).$$

▶

In the previous theorem, α and β can be chosen arbitrary. When $\beta = \infty$, we obtain the following result.

Corollary 4.2.2. — *Let f be a smooth function. Then for any $t > 0$ we have the following inequality,*

$$\left\| e^{\mathbf{Q_t} f} \right\|_\infty \leqslant \left\| e^f \right\|_1 \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{4.18}$$

which is

$$\mathbf{Q_t} f(x) \leqslant \log \left\| e^f \right\|_1 + \frac{n}{2} \log\left(\frac{1}{2\pi t}\right),$$

for any $x \in \mathbb{R}^n$.

Remark 4.2.3. — The inequality (4.16) is optimal (see [ABC+00]), and we can see that the inequality (4.13) is also optimal. When

$$\begin{cases} f(x) &= -ax^2, \text{ with } 0 < a < 1/2 \\ t &= 1 \\ \beta &= \alpha/(1-2a) \end{cases}$$

the inequality (4.13) became, after some easy calculus, an equality.

4.2.2. Ultracontractivity and vanishing viscosity. — The upper bound in inequality (4.13) of Theorem 4.2.1 can be proved using the optimal heat kernel bound. Let define the heat semigroup.

Let $g \in \mathbf{L}^p$ and denote $\mathbf{P}_t g$ the heat semigroup on $\mathbb{R}^n$ starting from g defined by

$$\mathbf{P}_t\, g(x) = \int g(y) \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{n/2}} dy, \tag{4.19}$$

for $x \in \mathbb{R}^n$. We can easily show the following inequality

$$\|\mathbf{P}_t g\|_\infty \leqslant \|g\|_1 \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{4.20}$$

which is exactly the same bound of the inequality (4.18). Then after more involed calculus, following [Bak94] or [Led00c], we can obtain an ultracontractive estimate for the heat semigroup $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$, that for any $q \leqslant p < 0$, $t > 0$, and for every povitive smooth function g

$$\|g\|_p \leqslant \|\mathbf{P}_t g\|_q \left(\frac{p-q}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}\frac{p-q}{pq}} \frac{(1-q)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)}}{(1-p)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \tag{4.21}$$

where $\|h\|_p = \left(\int h^p\right)^{1/p}$ for $p < 0$ and $h \geqslant 0$.

Let $0 < \alpha \leqslant \beta$ and $\varepsilon > 0$ and let apply the inequality (4.21) for $p = -\varepsilon\alpha$, $q = -\varepsilon\beta$, $g = \exp(-f/\varepsilon)$ and the time $\varepsilon t/2$. We obtain

$$\left\|e^f\right\|_\alpha^{-\varepsilon} \leqslant \left\|\left(\mathbf{P}_{\varepsilon t/2}\left(e^{-f/\varepsilon}\right)^{-\varepsilon}\right)\right\|_\beta^{-\varepsilon}$$
$$\left(\frac{\beta-\alpha}{4\pi t}\right)^{\frac{n\varepsilon}{2}\frac{\beta\varepsilon-\alpha\varepsilon}{\alpha\beta\varepsilon^2}} \frac{(1+\beta\varepsilon)^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(1+\frac{1}{\beta\varepsilon}\right)}}{(1+\alpha\varepsilon)^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha\varepsilon}\right)}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{n\varepsilon}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha\varepsilon}+\frac{1}{\beta\varepsilon}\right)}.$$

Taking the power $-1/\varepsilon$ and letting ε tend to zero, we obtain, using the vanishing viscosity (equality (4.6)), the inequality (4.13) for any $\beta \geqslant \alpha > 0$, $t > 0$ and smooth function f.

Let us now present a third proof of the theorem 4.2.1, based on the BRUNN-MINSKOWSKI inequality. This proof are interesting because we use only the definition (4.11) of $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ and the geometry of $\mathbb{R}^n$.

4.2.3. BRUNN-MINSKOWSKI inequality. — We explain now the link between the geometry on $\mathbb{R}^n$ and the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$. Let us recall the theorem of

BRUNN-MINSKOWSKI, and let refer to [DG80] for a review, or [BL00] to see the link with the logarithmic SOBOLEV inequality.

Let $a, b > 0$, $a + b = 0$, and u, v, w three non negative functions on $\mathbb{R}^n$. Assume that, for any $x, y \in \mathbb{R}^n$, we have

$$w(ax+by) \geqslant u(x)^a v(y)^b. \tag{4.22}$$

Then the following inequality holds

$$\int w(x)dx \geqslant \left(\int u(x)dx\right)^a \left(\int v(x)dx\right)^b. \tag{4.23}$$

Let us now prove the Theorem 4.2.1 using the BRUNN-MINSKOWSKI inequality. Let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $0 < \alpha < \beta$. We note

$$\begin{cases} u(x) = \exp(\beta \mathbf{Q}_1 f(x)) \\ v(x) = \exp\left(-\dfrac{(\beta-\alpha)\beta}{2\alpha}|x|^2\right) \\ w(x) = \exp\left(\alpha f\left(\dfrac{\beta}{\alpha}x\right)\right), \end{cases}$$

and $a = \alpha/\beta$, $b = (\beta-\alpha)/\beta$. The HOPF-LAX formula enables to obtain easily that for any $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} u(x)^a v(y)^b &\leqslant \exp\left(\alpha f(x-z) + \frac{\alpha}{2}|z|^2 - \frac{(\beta-\alpha)^2}{2\alpha}|y|^2\right) \\ &\leqslant \exp\left(\alpha f\left\{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\beta-\alpha}{\beta}y\right)\right\}\right) \\ &= w(ax+by), \end{aligned} \tag{4.24}$$

where $z = -(\beta-\alpha)y/\alpha$. Inequality (4.24) implies that (4.22) is satisfied for the functions u, v and w and the constants a and b. Note finally that BRUNN-MINSKOWSKI inequality (4.23) coincides with (4.13).

Remark 4.2.4. — This link between BRUNN-MINSKOWSKI inequality and the inequality (4.13) is not surprising. We know that Euclidean logarithmic SOBOLEV inequality for the LEBESGUE measure (inequality (4.16)), is equivalent to the logarithmic SOBOLEV inequality for the Gaussian measure, (each can be obtained by the other, see for example [ABC+00]). Besides, from [BL00], the Theorem of BRUNN-MINSKOWSKI implies the logarithmic SOBOLEV inequality for the Gaussian measure, so that the link between the inequality (4.13) and BRUNN-MINSKOWSKI's Theorem follows.

Let remark that this proof uses the HOPF-LAX formula, equality (4.11), whereas the others proofs use the HAMILTON-JACOBI differential equation.

The following section presents some results on more general spaces satisfying an Euclidean-type SOBOLEV inequality.

4.3. Majoration under Euclidean-type SOBOLEV inequality

In this section, we present our main result connecting Euclidean-type SOBOLEV inequality with majoration of the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$. Let us first defined the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ on a Riemannian manifold.

Let M be a smooth complete Riemannian manifold of dimension n with Riemannian metric d. If f is a smooth function on M (for example Lipschitz), the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ is defined by the following equation

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{Q_t}f(x) & = \inf\limits_{y\in M}\left\{f(y)+\dfrac{1}{2t}d(x,y)^2\right\}, \quad t>0,\ x\in M, \\ \mathbf{Q}_0 f(x) & = f(x), \quad x\in M. \end{array}\right. \tag{4.25}$$

Following the argument in the classical Euclidean case, one shows similarly that $v=v(x,t)=\mathbf{Q_t}f(x)$ is a solution of the initial-value HAMILTON-JACOBI problem on the manifold M,

$$\left\{\begin{array}{rl} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)+\dfrac{1}{2}|\nabla v(x,t)|^2 & =0 \\ v(x,0) & = f(x), \end{array}\right. \tag{4.26}$$

where $|\nabla v|$ stands for the Riemannian lengh of the gradient of v for the variable x. This semigroup is called the HOPF-LAX solution of HAMILTON-JACOBI equations. Some details can be found about HAMILTON-JACOBI equations in [Bar94, Eva98].

Theorem 4.3.1. — *Let (M,d) be a smooth Riemannian manifold and let μ be a measure on M absolutely continuous with respect to the standard volume element on M.*

Let $n\geqslant 3$. Suppose that μ satisfies the following Euclidean-type SOBOLEV *inequality for a constant $a>0$,*

$$\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant a\|\nabla f\|_2^2, \tag{4.27}$$

for any function f with compact support. Then there exists a constant $k > 0$ such that the measure μ satisfies the following inequality

$$\left\| e^{\mathbf{Q_t} f} \right\|_\beta \leqslant \left\| e^f \right\|_\alpha \left(\frac{k\alpha(\beta-\alpha)}{t\beta} \right)^{\frac{n}{2}\frac{\beta-\alpha}{\beta\alpha}}, \tag{4.28}$$

for any smooth function f, $t \geqslant 0$, $\alpha > 0$ and $\beta \in [\alpha, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Conversely, let $k > 0$ and $\alpha > 0$. If the measure μ satisfies the inequality (4.28) *for any smooth function f, $\beta \geqslant \alpha$ and $t \geqslant 0$ then there exists $a > 0$ such that μ satisfies an Euclidean-type* SOBOLEV *inequality* (4.27).

Let refer to [Heb99] for results about Euclidean-type SOBOLEV inequality. Taking $\beta = \infty$ and $\alpha = 1$ in the inequality (4.28), the following corollary holds.

Corollary 4.3.2. — *Under conditions of Theorem 4.3.1, for every function f and $t > 0$, we find*

$$\left\| e^{\mathbf{Q_t} f} \right\|_\infty \leqslant \left\| e^f \right\|_1 \frac{k}{t^{n/2}}. \tag{4.29}$$

Let remark that the ultracontractive bound on the inequality (4.29) is the same as the ultracontractive bound for the heat semigroup, inequality (4.20). As in the VAROPOULOS Theorem, we don't know at this time if the ultracontractive bound for the HAMILTON-JACOBI solutions, inequality (4.29), is equivalent to the Euclidean-type SOBOLEV inequality.

To prove this result, like Theorem 4.2.1, we use the method developed by DAVIES and BAKRY in [Dav90] and [Bak94], involving two main results. The first one states the link between the SOBOLEV inequality and entropy-energy inequality, and the second ones ensures the equivalence between the control of the HAMILTON-JACOBI equations and the entropy-energy inequality. Let us define this latter inequality.

Definition 4.3.3. — Let $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ be a strictly increasing concave function. The measure μ on the manifold M satisfies an entropy-energy inequality of function Φ if the following inequality holds for any smooth enough function f:

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \int f^2 d\mu \; \Phi\left(\frac{\int |\nabla f|^2 d\mu}{\int f^2 d\mu} \right), \tag{4.30}$$

where $\mathbf{Ent}_\mu(f^2) = \int f^2 \log f^2 d\mu - \int f^2 d\mu \log \int f^2 d\mu$.

This inequality is a generalisation of the logarithmic SOBOLEV inequality, as (4.1) arises choosing $\Phi(x) = ax$ and μ as a probability measure. Further details on this inequality can be found in [Bak94, ABC+00, BCL97].

Let us now recall an important tool for the following. The next results states the link between SOBOLEV inequality and entropy-energy inequality.

Proposition 4.3.4. — *Let (M,d) be a smooth Riemannian manifold and let μ be a measure on M. Let $n \geqslant 3$. We suppose that the measure μ satisfies the following* SOBOLEV *inequality, with constants a and b,*

$$\|f\|_{2n/(n-2)}^2 \leqslant a\|f\|_2^2 + b\|\nabla f\|_2^2,$$

for any function f with compact support. Then the measure μ satisfies the entropy-energy inequality of function

$$\Phi(x) = \frac{n}{2}\log(ax+b).$$

Conversely, if the measure μ satisfies the entropy-energy inequality of function $\Phi(x) = (n/2)\log(ax+b)$ then there exists $\lambda \geqslant 1$ such that the measure μ satisfies the SOBOLEV *inequality with constants λa and λb.*

Let refer for example to [Bak94] or to the theorem 4.4.3 of [ABC$^+$00] for a proof of this result.

The next theorem now gives the equivalence between the entropy-energy inequality and the control of the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$.

Theorem 4.3.5. — *Let μ be a non negative measure on the manifold M. Suppose that μ satisfies an entropy-energy inequality of function Φ. Let $c>0$ and let q_c denote the stricly increasing non-negative function satisfying the following differential equation on $[0,t_0]$ $(t_0>0)$,*

$$\frac{2}{q_c'} = \Phi'(cq_c^2). \tag{4.31}$$

Then, for any $c>0$, the following inequality is satisfied for any smooth function f,

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t} f}\right\|_{q_c(t)} \leqslant \left\|e^f\right\|_{q_c(0)} e^{A(t)} \text{ with } A(t) = \int_{q_c(0)}^{q_c(t)} \frac{\psi(cy^2)}{y^2}dy, \tag{4.32}$$

where $\psi(x) = \Phi(x) - x\Phi'(x)$ and $t\in[0,t_0]$.

Conversely, if inequality (4.32) is satisfied for any $c>0$, then the measure μ satisfies the entropy-energy inequality of function Φ.

Proof

◄ Suppose that the measure μ satisfies the entropy-energy inequality with function

Φ. Let g be a bounded function on M; then for any $x > 0$, the concavity of the function Φ implies that

$$\mathbf{Ent}_\mu(g^2) \leqslant \Phi'(x) \int |\nabla g|^2 d\mu + \psi(x) \int g^2 d\mu, \tag{4.33}$$

where $\psi(x) = \Phi(x) - x\Phi'(x)$.

Let f be a smooth function on M and let consider $\mathbf{Q_t}f$ defined by the equation (4.25). Denote $F(t) = \left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_{q(t)}$, where q is an increasing function satisfying $2/q' \in \mathrm{Im}\Phi'$. Taking the derivative in time t of F, one gets

$$F'(t) = F(t)^{1-q(t)} \frac{q'(t)}{q^2(t)} \left(\mathbf{Ent}_\mu\big(e^{q(t)\mathbf{Q_t}f}\big) - \frac{1}{2q'(t)} \int |\nabla q(t)\mathbf{Q_t}f|^2 e^{q(t)\mathbf{Q_t}f} d\mu \right).$$

Inequality (4.33) applied to $g = \exp(q\mathbf{Q_t}f/2)$ and to the function $x(t)$ satisfying $1/q'(t) = \Phi'(x(t))/2$ gives

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leqslant \frac{q'(t)}{q^2(t)} \psi(x(t)).$$

Integrating over t implies

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_{q(t)} \leqslant \left\|e^f\right\|_{q(0)} e^{A(t)}, \quad \text{where} \tag{4.34}$$

$$A(t) = \int_0^t \frac{q'(s)}{q^2(s)} \psi\left(\Phi'^{-1}\left(\frac{2}{q'(s)}\right)\right) ds. \tag{4.35}$$

Let now consider $c > 0$. There exists $t_0 > 0$ such that q_c satisfies the differential equation (4.31) in the space $[0, t_0]$. Then changing the variables in the equation (4.34) yields equation (4.32).

Let us prove the converse. Let x be positive and take $c = x$. There exists $t_0 > 0$ such that the function q_c is the solution of the differential equation (4.31) in the space $[0, t_0]$, which satisfies the condition $q_c(0) = 1$. Then we obtain the equality $q_c'(0) = 2/\Phi'(x)$. Considering $F(t) = \left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_{q_c(t)}$, inequality (4.32) leads to $F(t) \leqslant F(0)e^{A(t)}$ ($\forall t \in [0, t_0]$), which can be rewritten after a derivation in zero

$$\frac{F'(0)}{F(0)} \leqslant A'(0),$$

that means after calculation,

$$\mathbf{Ent}_\mu(e^f) \leqslant \frac{\Phi'(x)}{4} \int |\nabla f|^2 e^f d\mu + \psi(x) \int e^f d\mu. \tag{4.36}$$

Taking at this step $g = \exp(f/2)$ in (4.36) and optimising over $x > 0$ yields the entropy-energy inequality of function Φ. ▶

Theorem 4.3.5 is a generalisation of Theorem 2.1 of [BGL01]. When the measure μ is a probability measure satisfying the logarithmic SOBOLEV inequality (4.1), we have $\Phi(x) = (2/\rho)x$ and $\psi = 0$.

And let remark that we can obtain Theorem 4.2.1 by Theorem 4.3.5. Inserting $q(t) = \alpha\beta/((\alpha-\beta)t+\beta)$ and $c = n(\beta-\alpha)/(4\alpha\beta)$ in (4.32) then implies (4.13).

Besides, when the entropy-energy inequality holds, Theorem 4.3.5 gives a control of the norm of the operator $(\exp \mathbf{Q_t})$. This control depends on Φ and some illustrations will be provided in the following section, which shows the influence of the sign of ψ.

Let us now present a proof of Theorem 4.3.1 using Proposition 4.3.4 and Theorem 4.3.5.

Proof of Theorem 4.3.1

◀ Suppose that the measure μ satisfies the inequality (4.27) with a constant $a > 0$. Then by Proposition 4.3.4, μ satisfies the entropy-energy inequality with the function

$$\Phi(x) = \frac{n}{2}\log(ax).$$

Let $c = a(\beta-1)/2$. The function $q_c(t) = \beta/((1-\beta)t+\beta)$ satisfies the differential equation (4.31) in the space $[0,\infty[$. Applying Theorem 4.3.5 with the fonction Φ and the constant c leads after some easy calculus to the following inequality

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_\beta \leqslant \left\|e^f\right\|_1 \left(\frac{k(\beta-1)}{t}\right)^{\frac{n}{2}\frac{\beta-1}{\beta}} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{n}{2}\frac{\beta+1}{\beta}},$$

where $k = nae/4$ and for any smooth function f. As $\beta \geqslant 1$, we know that

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta-1}} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

At the light of the previous inequality we find the inequality (4.28) for the constant $k = nae/4$, for every $\beta \geqslant 1$ and $\alpha = 1$. Using the property for the semigroup $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ that

$$\mathbf{Q_t}(\lambda f) = \lambda \mathbf{Q}_{\lambda t} f, \tag{4.37}$$

for every $\lambda > 0$ and f, inequality (4.28) is obtained for every β and α such that $\beta \geqslant \alpha > 0$, as well as inequality (4.29), as a particular case of (4.28).

Let us now prove the converse. Let $k > 0$ and $\alpha > 0$. Suppose that for every $\beta \in]\alpha, +\infty[\cup \{+\infty\}$ (4.28) holds for every $t \geqslant 0$. By (4.37) one can assume that $\alpha = 1$.

Let f be a smooth function and take $F(t) = \left\|e^{\mathbf{Q_t} f}\right\|_\beta$ where β is a function of t such that $\beta(0) = 1$, $\beta'(0) > 0$ and $\beta \geqslant 1$. Inequality (4.28) implies that

$$\frac{F'(0)}{F(0)} \leqslant g'(0), \tag{4.38}$$

where

$$g(t) = -\frac{n}{2}\frac{\beta - 1}{\beta} \log\left(\frac{t\beta}{k(\beta - 1)}\right).$$

As $g'0) = (n/2)\beta'(0)\log(\beta'(0)k)$, taking $x > 0$ and choosing the function β such that $\beta'(0) = 4x/n$, ($\beta(t) = 1 + 4xt/n$ for example) transform inequality (4.38) as

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{8x}\int |\nabla f|^2 e^f d\mu + \frac{n}{2}\log\left(\frac{k4x}{n}\right)\int e^f d\mu.$$

Optimising over x implies the entropy-energy inequality for $\Phi(x) = (n/2)\log ax$ where $a = k4e/n$. The proof is then achieved using the converse of Proposition 4.3.4. ▶

The first and the most important example is the LEBESGUE measure on $\mathbb{R}^n$. This example is detailed in Theorem 4.2.1 of Section 4.2. We can see in [Heb99] some other examples of measures which satisfy an Euclidean-type SOBOLEV inequality.

And like in the $\mathbb{R}^n$ case, section 4.2.2, the vanishing viscosity for an ultracontractive semigroup can be used to prove Theorem 4.3.1.

4.4. Majoration under other SOBOLEV inequality

4.4.1. Main results in this case. — The aim of the following theorem is to present the case where the measure μ, on the manifold M, satisfies a SOBOLEV inequality with a local term, where $b > 0$ in inequality (4.8).

Theorem 4.4.1. — *Let M be a complete Riemannian manifold of dimension n and Riemannian metric d. Let μ be a measure on M absolutely continuous with respect to the standard volume element on M. Let $n \geqslant 3$. We suppose that the measure μ satisfies the following* SOBOLEV *inequality*

$$\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant a\|\nabla f\|_2^2 + b\|f\|_2^2, \tag{4.39}$$

where a and b are two constants and $\|\cdot\|_\alpha$ is the $\mathbf{L}^\alpha$-norm for the measure μ.

Then there exist constants $k > 0$ and $A > 0$ such that the measure μ satisfies the following inequality ,

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_\infty \leqslant \left\|e^f\right\|_1 \frac{k}{t^{\frac{n}{2}}}. \tag{4.40}$$

for any $t \in]0, A]$ and every smooth function f.

This theorem is a consequence of the following proposition.

Proposition 4.4.2. — *Let μ be a measure on M. Assume that the measure μ satisfies the entropy-energy inequality with function $\Phi(x) = (n/2)\log(ax+b)$, $(a, b > 0)$. Let $m \in \mathbb{N}$ and $K \in [m\pi, m\pi + \pi/2]$.*

Then, for any function f, $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ satisfies the following inequality for every $t, u > 0$ such that $tu + K \in [m\pi, m\pi + \pi/2]$,

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_{\frac{4b}{una}\tan(tu+K)} \leqslant \left\|e^f\right\|_{\frac{4b}{una}\tan K} \exp\left(A(t)\right), \tag{4.41}$$

where

$$A(t) = \frac{n^2au}{8b}\left(\frac{\log\left(\frac{\cos^2(tu+K)}{b}\right)}{\tan(tu+K)} - \frac{\log\left(\frac{\cos^2 K}{b}\right)}{\tan K}\right) + \frac{n^2u^2a}{8b}. \tag{4.42}$$

Conversely, if there exists $m \in \mathbb{N}$ such that inequalities (4.41) *and* (4.42) *hold for any $K \in [m\pi, m\pi + \pi/2]$ and t, u such that $tu + K \in [m\pi, m\pi + \pi/2]$, then the measure μ satisfies an entropy-energy inequality with function φ.*

This proposition is a simple consequence of Theorem 4.3.5, when we have $\Phi(x) = n/2\log(ax + b)$, which enable us to prove Theorem 4.4.1.

Proof of Theorem 4.4.1

◀ Let μ be a measure satisfying the SOBOLEV inequality (4.39). Proposition 4.3.4 ensures that the measure μ satisfies the entropy-energy inequality with function $\Phi(x) = n/2\log(ax + b)$. Let us now apply the previous proposition for $t = 1$ and $K = \pi/2 - u$. The following inequality then arises

$$\left\|e^{\mathbf{Q_1}f}\right\|_\infty \leqslant \left\|e^f\right\|_{4b/(una\tan u)} e^{A(1)},$$

where

$$A(1) = -\frac{n^2au}{8b}\tan u\left(\log\frac{\sin^2 u}{b}\right) + \frac{n^2u^2a}{8b}.$$

Due to the property (4.14), the following inequality holds, for any $t > 0$ and every smooth function f,

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t}f}\right\|_\infty \leqslant \left\|e^f\right\|_1 e^{\varphi(t)}, \tag{4.43}$$

where

$$\varphi(t)=\frac{1}{t}\left\{-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\sin^2\left(V(t)\right)}{b}\right)+\frac{n^2V(t)^2a}{8b}\right\},$$

and the function V is defined by the following formula, for every $t\geqslant 0$

$$V(t)\tan V(t)=\frac{4b}{na}t.$$

Using the definition of V we prove that there exists $A>0$ and $C>0$, such that for every $t\in]0,A]$ we have

$$\frac{1}{C}\sqrt{t}\geqslant V(t)\leqslant C\sqrt{t}.$$

This inequality implies that there exists $C'>0$ such that for every $t\in]0,A]$,

$$\varphi(t)\leqslant -\frac{n}{2}\log t+C'. \tag{4.44}$$

Inequalities (4.43) and (4.44) lead to the theorem 4.4.1. ▶

Remark 4.4.3. — Like in the previous section, we don't know if the ultracontractive bound given by the inequality (4.40) is equivalent to the SOBOLEV inequality (4.39).

4.4.2. Particular case. — Let us now describe the special case when $b=1$ in the SOBOLEV inequality. Suppose that the Riemannian manifold M is compact and let μ be the probability measure of the volume. If the measure μ satisfies a SOBOLEV inequality, then we know that we can choose the constant $b=1$, (see for example [Bak94, ABC+00]).

An example is the unit sphere $\mathbb{S}_n$ of dimension n in $\mathbb{R}^{n+1}$. Let $n>2$. The probability measure μ of the volume, satisfies the following optimal SOBOLEV inequality

$$\|f\|^2_{2n/(n-2)}\leqslant\frac{4}{n(n-2)}\|\nabla f\|_2^2+\|f\|_2^2.$$

More generally, let consider a Riemannian manifold M of dimension $n>2$. If the RICCI curvature is bounded below by a constant $\rho>0$, then the following SOBOLEV inequality holds for the probability measure of the volume, see [Ili83, Bak94, ABC+00]

$$\|f\|^2_{2n/(n-2)}\leqslant\frac{4(n-1)}{n(n-2)\rho}\|\nabla f\|_2^2+\|f\|_2^2.$$

In this particular case, the following proposition can be stated.

Proposition 4.4.4. — *Suppose that the measure μ satisfies the following* SOBOLEV *inequality*

$$\|f\|_{2n/(n-2)}^2 \leqslant a\|\nabla f\|_2^2 + \|f\|_2^2.$$

Then we obtain the following estimate

$$\mathbf{Q_t} f(x) \leqslant \int f d\mu + \frac{\pi^2 n^2 a}{16t}, \tag{4.45}$$

for any $x \in M$.

Proof

◄ Proposition 4.4.2 is applied with $b = 1$. Using the property (4.14), we just have to prove the inequality (4.45) for $t = 1$. Let take $t = 1$, $K = 0$ and $u = \pi/2$ in inequality (4.41). Then equation $\left\|e^f\right\|_0 = \exp\left(\int f d\mu\right)$, ledas to inequality (4.45). ►

4.4.3. Application to transportation inequality. — Let (M, d) be a Riemannian manifold. Let us recall the definition of the distance T_2. Let μ and ν two probability measures on M. We denote

$$T_2(\mu, \nu) = \inf\left\{\int \frac{d(x,y)^2}{2} d\pi(x,y)\right\}, \tag{4.46}$$

where the infimum is taken over the set of measures π on $M \times M$ such that π has two margins μ and ν. Let recall that by the OTTO-VILLANI's theorem, (see [OV00] and [BGL01]), a logarithmic SOBOLEV inequality implies a linear transportation inequality. In the same way, we obtain the following result about SOBOLEV inequality.

Theorem 4.4.5. — *Let μ be a probability measure on M, which is absolutely continuous with respect to the standard volume element on M. Let $n \geqslant 3$. Suppose that μ satisfies the following* SOBOLEV *inequality*

$$\|f\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leqslant a\|\nabla f\|_2^2 + \|f\|_2^2.$$

Let V be the function defined for $x > 0$, by

$$V(x) = \frac{n^2 a}{8}\left(\arctan\sqrt{e^{\frac{2x}{n}} - 1}\right)^2. \tag{4.47}$$

Then the measure μ satisfies the following transportation inequality

$$T_2(g d\mu, d\mu) \leqslant V(\mathbf{Ent}_\mu(g)), \tag{4.48}$$

for any smooth function g, density of probability with respect to the measure μ.

Let remark that V is increasing and bounded by $n^2 a\pi^2/32$.

Proof

◀ This result is based on Proposition 4.4.2. Let consider $m = 0$, $K = 0$ and $t = 1$. Then the following inequality holds, for any $0 < u < \pi$,

$$\left\|e^{\mathbf{Q}f}\right\|_{\frac{4}{una}\tan(u)} \leqslant \exp\left(\int f d\mu\right)\exp(A),$$

where $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1$ and

$$A = \frac{n^2 au}{4}\frac{\log|\cos(u/2)|}{\tan(u/2)} + \frac{n^2 au^2}{8}.$$

Let $x > 0$ and $u = \arctan\sqrt{\exp(2x/n) - 1}$. The following equation follows straightforwad

$$\frac{4}{una}\tan(u) = \frac{1}{V'(x)}.$$

Defining $\Lambda(x) = V(x) - xV'(x)$, and using

$$\log\cos\arctan\sqrt{\exp\left(e^{\frac{2x}{n}} - 1\right)} = -\frac{x}{n},$$

we obtain after some calculus the following inequality

$$\int \exp\left(\frac{\mathbf{Q}f}{V'(x)}\right)d\mu \leqslant \exp\left(\frac{\int f d\mu}{V'(x)} + \frac{\Lambda(x)}{V'(x)}\right),$$

for any $x > 0$. Let g be a density of probability with respect to the measure μ. As we have

$$\int \exp\left(\frac{\mathbf{Q}f}{V'(x)} - \frac{\int f d\mu}{V'(x)} - \frac{\Lambda(x)}{V'(x)}\right)d\mu \leqslant 1,$$

we can write

$$\int g\mathbf{Q}f d\mu - \int f d\mu \leqslant V'(x)\mathbf{Ent}_\mu(g) + \Lambda(x),$$

for any Lipschitz function f. Optimising over all Lipschitz functions f and over $x > 0$, we obtain the transportation inequality (4.48) as a consequence of the theorem of KANTOROVICH-RUBINSTEIN (see [ABC+00]). ▶

In the classical case, a transportation inequality gives a concentration inequality, see for example [Mar96a, Mar96b] or the chapter 8 of [ABC+00]. In this case we find the following estimate of the diameter.

Corollary 4.4.6. — *Suppose that the probability measure μ satisfies the following* SOBOLEV *inequality, for $n \geqslant 3$,*

$$\|f\|^2_{2n(n-2)} \leqslant a\|\nabla f\|^2_2 + \|f\|^2_2.$$

Let define $\Delta = \sup\{d(x,y) \,/\, x, y \in M\}$, the diameter of the manifold M. Then one has

$$\Delta \leqslant \sqrt{\frac{n^2 a}{4}}\pi. \tag{4.49}$$

Proof

◀ The transport inequality (4.48) leads to

$$\sqrt{\frac{\Delta^2}{2}} \leqslant \sup_{r>0}\left(\sqrt{V(\varphi_A)} + \sqrt{V(\varphi_{A_r^c})}\right),$$

where $A \subset M$, A_r^c is the complementary of the r-neighbourhood of A, $\varphi_A = \mathbb{1}_A/\mu(A)$ and V is the function defined by the equation (4.47). We obtain also

$$\Delta \leqslant \sqrt{8\|V\|_\infty}, \tag{4.50}$$

so that (4.49) holds. ▶

The estimates specified by Inequality (4.49) are not optimal. In the case of the unit sphere, one has $\Delta \leqslant \pi\sqrt{n/(n-2)}$ also π. In [Bak94], BAKRY finds, using also entropy-energy inequality, $\Delta \leqslant \pi\sqrt{n/(n-1)}$ which is more accurate.

Acknowledgment. — The author sincerely thanks M. LEDOUX for helpful comments and remarks, and G. SCHEFFER for interesting discussions about SOBOLEV inequality.

CHAPITRE 5

INÉGALITÉS DE TRANSPORT

5.1. Introduction

En 1781, MONGE (voir [Mon81]) évoque le problème concret de déplacer un remblai sur un déblai avec un coût minimum. On transporte chaque particule de terre et il faut, au total, avoir effectué le moins d'effort possible, le coût étant le prix à payer pour déplacer une particule d'un point à un autre. Ce problème, sous une forme relaxée, est repris par la suite par KANTOROVICH et WASSERSTEIN. Ils définissent ainsi, pour un coût H, une distance T_H entre deux distributions, représentants le remblai et le déblai. Cette application T_H a, depuis, été largement étudiée en mathématiques, et l'on pourra à ce sujet consulter les ouvrages de RACHEV et RÜSCHENDORF dans [Rac84], [Rac91], [RR98a] et [RR98b].

Nous présentons et étudions dans ce chapitre la fonction T_H, où H est une fonction positive, définit sur un sous-ensemble des mesures de probabilité de $\mathbb{R}^n$, par : Si μ et ν sont deux mesures de probabilités,

$$T_H(\mu,\nu) = \inf \int H(x-y)d\pi(x,y),$$

où infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité π sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ayant μ et ν comme marges. Dans un cas particulier, lorsque $H(\cdot) = \delta_0(\cdot)$, PINSKER , voir [Pin64], démontre l'inégalité suivante,

$$\|\nu-\mu\|_{VT} = 2T_H(\mu,\nu) \leqslant \sqrt{2\mathbf{Ent}_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)},$$

pour toutes mesures de probabilités μ,ν (cette inégalité sera exposée dans la prochaine section). Nous avons vu dans les chapitres précédents que les inégalités de POINCARÉ ou de SOBOLEV logarithmique sont une majoration de la variance ou de l'entropie par l'énergie. De la même manière et s'inspirant de l'inégalité de PINSKER, des inégalités de transport $\mathcal{T}_H$ peuvent être définies, par la majoration de la distance T_H par une fonction de l'entropie de la dérivée de RADON-NIKODYM. L'objectif de ce chapitre est d'une part de donner les propriétés et des applications générales des inégalités de transport $\mathcal{T}_H$, et d'autre part d'étendre les résultats du chapitre 3, en montrant le lien étroit existant entre une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$, où $H(\cdot) = \|\cdot\|_p^p/p$, et des inégalités de SOBOLEV logarithmique modifiées.

Dans la seconde partie, nous donnons les définitions, des propriétés élémentaires et des théorèmes généraux concernant les inégalités de transport $\mathcal{T}_H$. Nous illustrons ensuite en section 5.3 le cas de la mesure de BERNOULLI, qui permet, comme pour l'inégalité de SOBOLEV logarithmique, de retrouver une inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ pour la mesure gaussienne. La méthode employée ici est similaire à celle utilisée pour démontrer l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la mesure gaussienne.

Dans une quatrième section nous donnons les propriétés de concentration liées aux inégalité de transport. Les différentes propriétés de la distance de transport T_H nous permettent, dans une cinquième section, de donner différents critères pour montrer une inégalité de transport. Ces critères sont appliqués dans la section suivante pour montrer une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ à un modèle de mécanique statistique équivalent à celui des chapitres 1 et 2.

OTTO et VILLANI (voir [OV00]), ont exhibé le lien étroit entre l'inégalité de SOBOLEV logarithmique et l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$. L'objet de la sixième section est d'établir de manière analogue le lien entre certaines inégalités de transport $\mathcal{T}_H$ et des inégalités de SOBOLEV logarithmique modifiées, généralisant ainsi les résultats de OTTO et VILLANI et ceux du chapitre précédent.

Enfin, la dernière section est consacrée à la dimension infinie où l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ est étendue, conduisant notamment à une inégalité de transport pour la mesure de WIENER.

Au cours de ce chapitre, nous énonçons des résultats théoriques concernant les inégalités de transport $\mathcal{T}_H$, lorsque H vérifie certaines hypothèses techniques. Ces résultats sont alors illustrés par un coût H particulier souvent représenté par la fonction puissance $\|\cdot\|_p^p$. De plus, précisons que tout en essayant de rester dans un cadre général, nous serons amenés, pour éviter les complications inutiles, à faire certaines restrictions dans les définitions.

5.2. Définitions et propriétés élémentaires

L'objet de cette section est de définir et étudier ce qu'est une « inégalité de transport », en introduisant pour cela une distance de transport, associée à un certain coût du transport H. Nous nous plaçons ici sur $\mathbb{R}^n$, mais la plupart des résultats sont généralisables sur des espaces métriques séparables. Nous verrons à ce sujet dans la section 5.8 une généralisation à un espace de dimension infinie.

Soit H une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, mesurable et positive. Notons $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$, muni de la tribu des boréliens. Définissons de plus le sous-ensemble $\mathcal{P}_H$ de $\mathcal{P}_0$ contenant les mesures de probabilité μ qui admettent un moment d'ordre H, i.e. telles que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\int H(x-y)d\mu(x) < \infty$. La fonction H est appelée *coût du transport*.

***Définition 5.2.1* (Distance de transport).** — Soit μ et ν deux éléments de $\mathcal{P}_0$ et soit $P(\mu,\nu)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ admettant comme marges μ et ν, c'est-à-dire, $\pi \in P(\mu,\nu)$ si, pour toutes fonctions f et g mesurables bornées, on a

$$\int (f(x)+g(y))d\pi(x,y) = \int f d\mu + \int g d\nu.$$

On définit l'application T_H sur $\mathcal{P}_H \times \mathcal{P}_H$ par

$$T_H(\mu,\nu) = \inf\left\{\int H(x-y)d\pi(x,y)\,;\, \pi \in P(\mu,\nu)\right\}.$$

Notons que la fonction T_H, pour H mesurable positive, est bien définie : Étant données deux mesures μ et ν dans $\mathcal{P}_H$, l'ensemble $P(\mu,\nu)$ est non vide car puisqu'il contient la mesure produit $\mu \otimes \nu$. Notons de plus que nous avons effectué un choix simplificateur dans cette définition de la distance de transport, en effet nous aurions pu considérer de façon plus générale $T_c(\mu,\nu) = \inf\left\{\int c(x,y)d\pi(x,y)\,;\, \pi \in P(\mu,\nu)\right\}$, où c est une fonction positive mesurable. Ce choix permet d'alléger les résultats exposés mais la plupart sont généralisables.

Les coûts du transport, H, les plus utilisés sont les fonctions puissances. Ces coût particuliers serons utilisés pour illustrer les résultats au cours de ce chapitre, et nous utiliserons pour ceux-ci les notations suivantes :

$$\begin{cases} T_H = T_p \text{ si } H(x) = \dfrac{1}{p}\|x\|_p^p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p \\ T_H = T_0 \text{ si } H(\cdot) = \delta_0(\cdot), \end{cases} \tag{5.1}$$

où p est un paramètre réel strictement positif, $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et δ_0 représente la masse de DIRAC en 0. Dans la pratique, nous considérons seulement les cas où $p \geqslant 1$ ou $p = 0$, les autres cas étant très différents du fait de la concavité de la fonction $\|\cdot\|_p^p$.

Rappelons ici la définition de la norme en variation totale d'une mesure que nous utiliserons dans la proposition suivante. Si μ est une mesure de signe quelconque sur un espace mesuré $(\mathbb{E}, \mathcal{F})$, on pose alors

$$\|\mu\|_{VT} = \sup\left\{\int f d\mu\right\}, \tag{5.2}$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des fonctions f mesurables bornées par 1.

Voici maintenant quelques propriétés élémentaires, que nous ne démontrons pas ici, de l'application T_H.

Proposition 5.2.2. —
-Les applications T_0 et $T_p^{1/p}$ ($p \geqslant 1$) sont des distances sur leurs espaces de définitions.

-Soit H une fonction mesurable positive. Pour toutes mesures de probabilité μ et ν dans $\mathcal{P}_H$, on a

$$T_H(\mu,\nu) = \inf\left\{\mathbb{E}\left(H(X-Y)\right)\right\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ admettant comme lois respectives μ et ν.

-Soit μ et ν deux mesures de probabilité, on a :

$$T_0(\mu,\nu) = \inf\{\mathbb{P}(X \neq Y)\} = \frac{1}{2}\|\mu-\nu\|_{VT},$$

où l'infimum est également pris sur l'ensemble des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ admettant comme lois respectives μ et ν, et $\|\cdot\|_{VT}$ désigne la norme en variation totale définie en (5.2).

Nous allons donné maintenant une forme duale de la fonction T_H. Cette nouvelle expression de T_H est donné le théorème de Kantorovich-Rubinstein que nous allons décrire maintenant. Pour utiliser ce résultat nous avons besoin d'une première contrainte sur la fonction H. Nous dirons que la fonction H vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_0$ si il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe, vérifiant, satisfaisant aux conditions suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \sup\{f(2t)/f(t),\, t>0\}<\infty \\ H(x-y)=f(d(x,y)), \end{array}\right. \tag{$\mathbf{H}_0$}$$

où d est une distance sur $\mathbb{R}^n$. C'est le cas des fonctions T_p pour $p \geqslant 1$ définies en (5.1). Dans ce cas le théorème suivant dû à Kantorovich et Rubinstein nous donne une définition équivalente de la fonction T_H. Cette nouvelle définition nous sera très utile pour obtenir des inégalités de transport.

Théorème 5.2.3 **(Kantorovich-Rubinstein).** — *Soit H vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_0$ et soit μ et ν deux éléments de $\mathcal{P}_H$. On a alors*

$$T_H(\mu,\nu) = \sup\left\{\int f d\mu - \int g d\nu\right\},$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des fonctions f et g, lipschitziennes bornées, qui vérifient $f(x) - g(y) \leqslant H(x-y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. De manière équivalente,

$$T_H(\mu,\nu) = \sup\left\{\int \mathbf{Q}^H g d\mu - \int g d\nu\right\}, \tag{5.3}$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des fonctions g lipschitziennes bornées, avec pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Q}^H g(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \{g(y) + H(x-y)\}$. Pour la fonction T_1, l'expression précédente se simplifie en

$$T_1(\mu,\nu) = \sup\left\{\int f d\mu - \int f d\nu\right\},$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des fonctions f, lipschitziennes, telles que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$.

La démonstration du théorème 5.2.3 s'effectue en se ramènant, après plusieurs étapes, au cas où l'espace $\mathbb{R}^n$ est un espace fini (voir [Rac91]). Le cas fini se résout par le principe dual en programmation linéaire (voir [BJS90]). Signalons aussi la nouvelle rédaction de la démonstration par Villani dans [Vil00].

Nous sommes maintenant en mesure de définir, en toute généralité, une inégalité de transport. Une inégalité de transport est une comparaison d'une fonction T_H avec une fonction de l'entropie de la dérivée de Radon-Nikodym. Il y a différentes comparaisons possibles et celles-ci varient selon la valeur de la fonction H.

Définition 5.2.4. — Nous dirons que la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$ appartenant à $\mathcal{P}_H$ satisfait à *une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction* Φ si

$$T_H(fd\mu,\mu) \leqslant \Phi(\mathbf{Ent}_\mu(f)),$$

pour toute densité f par rapport à la mesure μ telle que $fd\mu \in \mathcal{P}_H$.

Dans la pratique nous allons considérer des cas bien particuliers de fonction H et de fonction Φ. Dans le cas du transport T_p les inégalités que nous allons considérer varient selon la valeur du paramètre p.

Soit $p \geqslant 2$. Nous dirons qu'une mesure μ de probabilité satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ de constante C si l'on a

$$T_p(fd\mu,\mu) \leqslant C\mathbf{Ent}_\mu(f), \tag{5.4}$$

pour toute densité f par rapport à la mesure μ. Dans le cas où $p \in [1,2]$, nous dirons qu'une mesure μ de probabilité satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ de constante C si l'on a

$$T_p^{2/p}(fd\mu,\mu) \leqslant C\mathbf{Ent}_\mu(f)\,, \tag{5.5}$$

pour toute densité f par rapport à la mesure μ.

Remarquons que les deux définitions sont cohérentes dans le cas où $p = 2$. Nous verrons dans la remarque 5.5.2 pourquoi ce sont les bonnes inégalités de transport à considérer pour un coût du transport égal à $\|\cdot\|_p^p/p$.

Il existe aussi une inégalité de transport $\mathcal{T}_0$, et celle-ci est toujours vérifiée : Il s'agit de c'est l'inégalité de PINSKER expliquée dans le théorème suivant.

***Théorème 5.2.5* (PINSKER).** — *Soit μ un élément de $\mathcal{P}_0$. On a, pour toute densité de probabilité f par rapport à la mesure μ :*

$$\|fd\mu - d\mu\|_{VT} \leqslant \sqrt{2\mathbf{Ent}_\mu(f)},$$

où $\|\cdot\|_{VT}$ désigne la norme en variation totale définie en (5.2).

De façon équivalente, soit μ et ν deux éléments de $\mathcal{P}_0$ on a,

$$T_0(\mu,\nu) \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{Ent}_\mu\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)}.$$

Nous trouverons une démonstration simple de ce théorème dans la démonstration du théorème 8.2.7 de [ABC+00], signalons aussi l'ouvrage de PINSKER, [Pin64].

Nous terminons cette section en rappelant la propriété très utile de tensorisation de certaines inégalités de transport. Pour cela nous avons besoin d'une autre condition sur la fonction H. On dit que H vérifie la condition $\mathbf{H}_1$ si celle-ci *se tensorise*, c'est-à-dire s'il existe une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$H(x) = \sum_{i=1}^n h(x_i),\ x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n. \tag{$\mathbf{H}_1$}$$

Proposition 5.2.6. — *On suppose que H vérifie les hypothèses $\mathbf{H}_0$ et $\mathbf{H}_1$. Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que μ (resp. ν) satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction CId (resp. $C'Id$).*

Alors la mesure produit $\mu\otimes\nu$ satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction $\tilde{C}Id$, où $\tilde{C} = \max\{C, C'\}$.

Dans cette proposition, l'hypothèse $\mathbf{H}_1$ étant vérifiée, nous étendons de façon naturelle la fonction H de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ à une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. La démonstration de cette proposition s'obtient en utilisant exactement les même arguments que TALAGRAND (voir [Tal96] ou [ABC+00]). De plus, le fait que la fonction H vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_0$ nous permet aussi d'utiliser une autre démonstration basée sur le théorème 5.2.3 (voir à ce sujet la remarque 8.4.4 de [ABC+00]).

Remarque 5.2.7. — Il existe, d'après la proposition précédente, des résultats permettant de tensoriser des inégalités de transport. L'inégalité de SOBOLEV logarithmique d'une part se tensorise, et d'autre part se perturbe (voir entre autre le chapitre 3 de [ABC+00]). Le parallèle entre l'inégalité de SOBOLEV logarithmique et les inégalités de transport nous permet de spéculer sur l'existence d'un théorème de perturbation pour les inégalités de transport. Signalons que BLOWER (dans [Blo99]) obtient un résultat de perturbation de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ mais que celui-ci diffère toutefois de celui obtenu concernant les inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmique.

5.3. Cas de la mesure de BERNOULLI

Présentons maintenant quelques inégalités de transport dans le cas de la mesure de BERNOULLI. L'intérêt de cette section ne réside pas tant dans les résultats obtenus, car ceux-ci sont maintenant classiques, mais dans le fait d'exposer quelques similitudes entre différentes méthodes conduisant à des inégalités de POINCARÉ et de SOBOLEV logarithmique pour la mesure gaussienne d'une part, et à l'inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ pour la mesure gaussienne d'autre part. Les exemples exposés dans cette partie nous permettent par ailleurs d'exhiber des mesures pour lesquelles les calculs des distances de transport sont explicites.

Dans ce qui suit, nous établissons que la mesure de BERNOULLI satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ (voir l'inégalité (5.5)) mais pas à une inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ (voir l'inégalité (5.4)). Nous observons de plus que par une méthode similaire à celle proposée dans le premier chapitre de [ABC+00] on peut démontrer l'inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ pour la mesure gaussienne en partant de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ pour la mesure de BERNOULLI.

Soit $r \in [0,1]$. Notons β_r la mesure de BERNOULLI de paramètre r sur l'espace $\{0,1\}$. La proposition suivante nous donne une expression exacte de la distance T_p dans un tel cadre.

Proposition 5.3.1. — *Pour toute fonction f, densité de probabilité par rapport à la mesure β_r, on a, pour $p \geqslant 1$,*

$$T_0(fd\beta_r, d\beta_r) = p\,T_p(fd\beta_r, d\beta_r) = r(1-r)|f(0)-f(1)|. \tag{5.6}$$

Preuve. — Pour démontrer cette proposition, on détermine explicitement l'ensemble des mesures π qui admettent comme marges β_r et $fd\beta_r$. On minimise ensuite sur cet ensemble pour obtenir l'égalité (5.6). □

L'égalité (5.6) nous permet d'observer que nous ne pouvons pas considérer plusieurs inégalités de transport, la perte de la puissance p dans l'inégalité (5.6) rend en effet les inégalités de transport non homogènes, si ce n'est dans le cas où $p = 1$ ou 0. Démontrons que la mesure β_r vérifie l'inégalité de transport $\mathcal{T}_1$, mais pas l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$, la généralisation au transport $\mathcal{T}_p$ avec $p > 1$ étant évidente.

Dans cet exemple particulier, $T_1 = T_0$, et le théorème 5.2.5 de PINSKER assure par suite une inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ de constante 1/2. De façon optimale, un calcul, dû à CHAFAÏ (communication personnelle), montre que l'on a

$$T_0(fd\beta_r, d\beta_r) \leqslant \sqrt{\frac{s-r}{\log s - \log r}\mathbf{Ent}_{\beta_r}(f)}, \tag{5.7}$$

pour toute fonction f, densité de probabilité par rapport à β_r. La constante obtenue $(s-r)/(\log s - \log r)$ est, de plus, optimale et vaut 1/2 pour $r = s = 1/2$.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$, en établissant que la constante est infinie. Considérons pour cela la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(0) = 1 - 1/n$ et $f_n(1) = (1-(1-1/n)r)/s$, où $s = 1-r$. Cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de densités de probabilité par rapport à la mesure β_r, et l'on a, par un calcul direct,

$$\begin{aligned}\frac{T_2^2(f_n d\beta_r, d\beta_r)}{\mathbf{Ent}_{\beta_r}(f_n)} &= \frac{r/2n}{r(1-1/n)\log(1-1/n) + (s+r/n)\log(1+r/ns)} \\ &= \frac{rn}{K + O(1/n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\end{aligned}$$

où K est une constante non nulle. Il en résulte l'absence d'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ pour la mesure de BERNOULLI. Ce calcul peut-être étendu de façon simple à une mesure sur un ensemble fini et pour une inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ avec $p > 1$.

Nous savons d'après l'article de BOBKOV et GÖTZE que la mesure gaussienne vérifie une inégalité de transport $\mathcal{T}_1$, on pourra, à ce sujet, consulter [BG99] ou [ABC⁺00]. Nous allons établir à nouveau ce résultat par un procédé de tensorisation à partir du cas discret. La démonstration de cette proposition est à mettre en parallèle avec la démonstration du théorème 1.5.2 de [ABC⁺00].

Proposition 5.3.2. — *Soit* γ *la mesure gaussienne standard de dimension* 1. *La mesure* γ *satisfait à l'inégalité de transport suivante :*

$$T_1(fd\gamma, d\gamma) \leqslant \sqrt{2\mathbf{Ent}_\gamma(f)},$$

pour toute fonction f, *densité de probabilité par rapport à* γ. *De plus la constante* 2 *de l'inégalité est optimale.*

Preuve. — La démonstration de la proposition repose sur le théorème de la limite centrale. Soit $\tilde{\beta}$ la mesure de BERNOULLI, centrée, sur l'espace $\{-1, 1\}$ et soit f, densité de probabilité par rapport à $\tilde{\beta}$. Nous changeons de mesure de BERNOULLI pour que celle-ci soit centrée réduite. On a alors, d'après le calcul précédent appliqué à la mesure $\tilde{\beta}$:

$$T_1(fd\tilde{\beta}, d\tilde{\beta}) \leqslant \sqrt{2\mathbf{Ent}_{\tilde{\beta}}(f)},$$

et par suite, pour tout $\lambda > 0$,

$$T_1(fd\tilde{\beta}, d\tilde{\beta}) \leqslant \lambda\mathbf{Ent}_{\tilde{\beta}}(f) + \frac{1}{2\lambda}.$$

Par un argument simple de tensorisation, on montre que la mesure de probabilité produit $\tilde{\beta}^{\otimes n} = \otimes_{i=1}^n \tilde{\beta}$ sur l'espace $\{0, 1\}^n$ vérifie l'inégalité suivante pour tout $\lambda > 0$,

$$T_1(Fd\tilde{\beta}^{\otimes n}, d\tilde{\beta}^{\otimes n}) \leqslant \lambda\mathbf{Ent}_{\tilde{\beta}^{\otimes n}}(F) + \frac{n}{2\lambda}, \tag{5.8}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction F densité de probabilité par rapport à la mesure $\tilde{\beta}^{\otimes n}$. Soit donc, après optimisation,

$$T_1(Fd\tilde{\beta}^{\otimes n}, d\tilde{\beta}^{\otimes n}) \leqslant \sqrt{2n\mathbf{Ent}_{\tilde{\beta}^{\otimes n}}(f)}.$$

Soit f densité de probabilité par rapport à la mesure gaussienne γ. Appliquons l'inégalité (5.8) à $F_n = f \circ T_n / a_n$ avec, pour $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$,

$$T_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i,$$

et a_n est une constante telle que la fonction F_n est soit une densité de probabilité par rapport à la mesure $\tilde{\beta}^{\otimes n}$. Ainsi, nous obtenons après un calcul simple

$$T_1(fd\tilde{\beta}^{\otimes n}_{T_n}, d\tilde{\beta}^{\otimes n}_{T_n}) \leqslant \sqrt{2\mathbf{Ent}_{\tilde{\beta}^{\otimes n}_{T_n}}(f)},$$

où $\tilde{\beta}_{T_n}^{\otimes n}$ est l'image par l'application T_n de la mesure $\tilde{\beta}_{\otimes n}$. D'après le théorème de la limite centrale nous savons que $\tilde{\beta}_{T_n}^{\otimes n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$. De plus il est facile de voir que $a_n \to 1$. Nous obtenons alors en passant à la limite

$$T_1(fd\gamma, d\gamma) \leqslant \sqrt{2\mathbf{Ent}_\gamma(f)}.$$

Les termes de l'inégalité convergent sans poser de problème. De plus l'inégalité obtenue est optimale, car elle implique une inégalité de concentration optimale pour la mesure gaussienne (voir la proposition 5.4.1). □

Nous pouvons effectuer le même calcul avec la mesure de Bernoulli β_r, nous obtenons alors une inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ pour la mesure gaussienne mais la constante obtenue n'est plus optimale.

L'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ a été établie par Talagrand pour la mesure gaussienne, (voir [Tal96] ou le chapitre 3). Mais cette dernière ne peut pas s'obtenir dans le cas discret comme dans le cas de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_1$, puisqu'il n'y a pas d'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ pour la mesure de Bernoulli.

5.4. Applications à la concentration de la mesure

Une première application des inégalités de tranport est la concentration de la mesure. Le lien entre les inégalités de transport et le phénomène de concentration est important, comme l'évoque en premier lieu Marton dans [Mar86, Mar96a, Mar96b]. Bobkov et Götze ont, par ailleurs, montré l'équivalence pour une mesure de probabilité de vérifier une inégalité de transport $\mathcal{T}_1$ de fonction $C\mathrm{Id}$ et de vérifier une majoration gaussienne de la transformée de Laplace. On pourra consulter [BG99] ou le théorème 8.3.2 de [ABC$^+$00]. Ici, nous utiliserons un résultat de concentration dû à Marton qui se généralise facilement aux inégalités de transport $\mathcal{T}_H$. Résumons cette propriété dans la proposition suivante.

***Proposition 5.4.1* (Marton).** — *Supposons qu'il existe une fonction f, croissante, telle que l'on ait $H(x-y) = f(d(x,y))$ où d est une distance sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que la mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$, satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction $C\mathrm{Id}$. Alors la mesure μ satisfait à l'inégalité de concentration suivante, pour tout A sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$:*

$$\mu((A_r)^c) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{C}\left(f(r) - C\log\frac{1}{\mu(A)}\right)\right), \tag{5.9}$$

où A_r^c est le complémentaire du r-voisinage (pour la distance d) de l'ensemble A. Autrement dit, pour tout A sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mu(A) \geqslant 1/2$ on a

$$\mu((A_r)^c) \leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{C}f(r)\right). \tag{5.10}$$

Preuve. — Soit $A, B \subset \mathbb{R}^n$ de mesure non nulle. On a, par l'inégalité triangulaire et par croissance de f :

$$T_H(\mu_A, \mu_B) \leqslant T_H(\mu_A, \mu) + T_H(\mu_B, \mu),$$

où $\mu_A(\cdot) = \mu(\cdot|A)$ et $\mu_B(\cdot) = \mu(\cdot|B)$. Soit $\varphi_A = \mathbb{1}_A/\mu(A)$ et $\varphi_B = \mathbb{1}_B/\mu(B)$. L'inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction $C\mathrm{Id}$ assure que

$$\begin{aligned} T_H(\mu_A, \mu_B) &\leqslant C\mathbf{Ent}_\mu(\varphi_A) + C\mathbf{Ent}_\mu(\varphi_B) \\ &\leqslant C\log\frac{1}{\mu(A)} + C\log\frac{1}{\mu(B)}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Choisissons A tel que $\mu(A) \neq 0$ et $B = (A_r)^c = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A) \geqslant r\}$ avec $\mu(B) \neq 0$. D'après la définition de $(A_r)^c$, les supports des mesures μ_A et $\mu_{(A_r)^c}$ sont distants de r. Si π est une mesure sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui admet comme marges μ_A et $\mu_{(A_r)^c}$ alors son support est inclus dans l'ensemble produit $A \times (A_r)^c$. Ceci implique que $\int f(d(x,y))d\pi(x,y) \geqslant f(r)$. On obtient alors par définition de la distance T_H

$$T_H(\mu_A, \mu_{(A_r)^c}) \geqslant f(r).$$

L'inégalité (5.11) devient alors :

$$r \leqslant C\log\frac{1}{\mu(A)} + C\log\frac{1}{\mu((A^c)_r)}.$$

Pour $f(r) \geqslant C\log\frac{1}{\mu(A)}$, on en déduit donc

$$\mu((A_r)^c) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{C}\left(f(r) - C\log\frac{1}{\mu(A)}\right)\right).$$

L'inégalité 5.10 s'obtient alors en majorant $\log(1/\mu(A))$ par $\log 2$ dans l'inégalité précédente. $\square$

5.5. Différentes représentations des inégalités de transport

Nous présentons dans un premier temps une définition équivalente de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction $C\mathrm{Id}$, conséquente au théorème 5.2.3.

***Proposition 5.5.1* (Bobkov-Götze).** — *Supposons que H satisfait à l'hypothèse $\mathbf{H}_0$. La mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$ satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction $C\mathrm{Id}$ si et seulement si on a pour toute application g lipschitzienne bornée :*

$$\int \exp\left(\frac{1}{C}\mathbf{Q}^H g\right) d\mu \leqslant \exp\left(\frac{1}{C}\int g d\mu\right), \tag{5.12}$$

où $\mathbf{Q}^H g(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{g(y) + H(x-y)\}$.

Preuve. — Supposons que l'inégalité (5.12) soit satisfaite pour toute fonction g lipschitzienne. On a alors

$$\int \exp\left(\frac{1}{C}\mathbf{Q}^H g - \frac{1}{C}\int g d\mu\right) d\mu \leqslant 1. \tag{5.13}$$

Pour toute densité de probabilité f par rapport à μ, d'après la formule variationnelle de l'entropie suivante,

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) = \sup\left\{\int fh d\mu,\ h \text{ t.q. } \int e^h d\mu \leqslant 1\right\},$$

on a en utilisant l'inégalité (5.13),

$$\int f\mathbf{Q}^H g d\mu - \int g d\mu \leqslant C\mathbf{Ent}_\mu(f)\,. \tag{5.14}$$

L'inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction CId, s'obtient alors en optimisant en la fonction g et en utilisant le théorème 5.2.3.

Afin d'obtenir la réciproque, appliquons l'inégalité (5.14) à une fonction g lipschitzienne et à

$$f = \frac{\exp\left(\frac{1}{C}\mathbf{Q}^H g - \frac{1}{C}\int g d\mu\right)}{\int \exp\left(\frac{1}{C}\mathbf{Q}^H g - \frac{1}{C}\int g d\mu\right) d\mu}.$$

Un petit calcul nous permet alors de vérifier l'inégalité (5.13). □

Cette proposition s'avère à la fois utile à l'obtention d'inégalités de transport et à l'éclaircissement du lien entre les inégalités de transport et les inégalités de Sobolev logarithmique (voir la section 5.7). Elle permet également de prouver, d'une manière simple, le théorème 5.2.6 de tensorisation des inégalités de transport (on pourra consulter pour cela la remarque 8.4.4 de [ABC+00]).

Elle met enfin la lumière dans le choix des inégalités de transport $\mathcal{T}_p$ que nous avons définies dans la section 5.2, comme évoqué dans la remarque suivante.

Remarque 5.5.2. — Les inégalités de transport $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, désormais classiques, sont entre autre vérifiées par la mesure gaussienne (voir notamment la proposition 5.3.2). Nous avons donc cherché dans la section 5.2 à étendre ces deux inégalités de transport lorsque $p \notin \{1, 2\}$.

Lorsque $p \geqslant 2$, l'inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ définie par l'équation (5.4) est belle et bien celle à considérer, car elle est impliquée par une q-inégalité de SOBOLEV logarithmique (voir le théorème 5.7.4 de la section 5.7), elle-même vérifiée par une certaine classe de mesures. Montrons en revanche qu'il n'existe pas de mesure de probabilité μ vérifiant l'inégalité suivante

$$T_p(fd\mu, \mu) \leqslant \mathbf{Ent}_\mu(f)\,,$$

pour $p \in [1, 2[$ et f densité de probabilité par rapport à la mesure μ. La proposition 5.5.1 entraîne en effet l'équivalence de cette inégalité avec

$$\int \exp\left(\mathbf{Q}^{(p)} g\right) d\mu \leqslant \exp\left(\int g d\mu\right),$$

où $\mathbf{Q}^{(p)} g(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(y) + \frac{\|x - y\|_p^p}{p} \right\}$ et g est lipschitzienne. Remplaçons g par tg $(t > 0)$, dans l'inégalité précédente, un développement limité en zéro du paramètre t aboutit alors à une contradiction dans le cas où $p \in [1, 2[$.

Lorsque $p \in [1, 2]$, la forme de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ à considérer est bien celle définie par l'équation (5.5), car toutes ces inégalités sont vérifiées par la mesure gaussienne, et sont de plus, grâce à l'inégalité de JENSEN, décroissantes (au sens où, si $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant 2$, alors $\mathcal{T}_{p'}$ implique $\mathcal{T}_p$).

Remarquons par ailleurs que comme pour l'inégalité de tranport $\mathcal{T}_p$ lorsque $p \geqslant 2$, il existe aussi lorsque $p \in [1, 2]$ une définition équivalente de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ similaire à la proposition 5.5.1. Celle-ci n'apparaît toutefois pas aussi utile que la proposition 5.5.1.

Un autre outil permettant d'obtenir des inégalités de transport est d'utiliser le théorème de GANGBO et MCCANN. Commençons par obtenir une autre définition équivalente de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_H$. Pour cela, nous allons utiliser le théorème de GANGBO et MCCANN dans le cas convexe. L'application de ce théorème nécessite différentes hypothèses supplémentaires sur la fonction H. On dit que la fonction H vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_2$ si H vérifie les deux propriétés suivantes :

$$(\mathbf{H}_2) \qquad \begin{cases} H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+ \text{ est paire et strictement convexe,} \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} H(x)/|x| = +\infty. \end{cases}$$

Avant d'exposer le théorème de GANGBO et MCCANN définissons les fonctions H-concave. Soit φ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, assez régulière. Posons alors pour tout x dans $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi^H(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{H(x-y) - \varphi(x)\}.$$

On dit que la fonction φ est *H-concave* s'il existe une fonction ψ telle que $\varphi = \psi^H$.

Lorsque $H(x) = \|x\|_2^2/2$, la définition précédente se simplifie de la façon suivante. Une fonction φ est dans ce cas H-concave si et seulement si la fonction $\|x\|_2^2/2 - \varphi$ est convexe (voir à ce sujet [CE00a] ou [GM96]).

Lorsque H satisfait aux hypothèses précédentes (voir à ce sujet [GM96]), le théorème de GANGBO et MCCANN donne un sens concret à la distance $\mathcal{T}_H$. Nous l'exposons ici dans le cas simple utilisé ultérieurement.

***Théorème 5.5.3* (GANGBO-MCCANN).** — *Soit H une fonction mesurable positive vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_2$. Soit ψ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $e^{-\psi}$ soit intégrable par rapport à la mesure de* LEBESGUE. *On suppose que la mesure μ définie par*

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z} e^{-\psi(x)} dx$$

(où $Z = \int e^{-\psi} dx$) est un élément de $\mathcal{P}_H$. Soit la fonction f une densité de probabilité par rapport à la mesure μ, telle que $f d\mu$ soit dans $\mathcal{P}_H$.

Alors il existe une fonction H-concave φ, unique μ-presque partout, telle que, d'une part, la mesure image de la mesure $f d\mu$ par la fonction $S = Id - (\nabla H)^{-1} \circ \nabla \varphi$ soit la mesure $d\mu$, ce qui s'écrit,

$$\int F \circ S \, f d\mu = \int F d\mu, \tag{5.15}$$

pour toute fonction F mesurable bornée, et d'autre part, la fonction $\nabla\varphi$ réalise le transport $\mathcal{T}_H$ entre les deux mesures $f d\mu$ et $d\mu$ c'est-à-dire,

$$T_H(f d\mu, d\mu) = \int H\big((\nabla H)^{-1} \circ \nabla \varphi\big) \, f d\mu. \tag{5.16}$$

***Remarque 5.5.4*.** — Le cas du transport T_2 est plus simple. Dans ce cas nous sommes dans le cadre du théorème de BRENIER et MCCANN. Plaçons nous dans les conditions du théorème précédent avec $H(\cdot) = \|\cdot\|_2^2/2$. Alors il existe une unique fonction convexe φ telle que la fonction $S = \nabla\varphi$ transporte la mesure $f d\mu$ en la mesure μ . On obtient de plus

$$T_2(f d\mu, d\mu) = \int \frac{\|x - \nabla\varphi(x)\|_2^2}{2} f(x) d\mu(x).$$

On pourra consulter [Bre91] et [GM96] pour des compléments sur ce théorème. De plus d'après les articles de CAFFARELLI, [Caf96b] et [Caf96a], lorsque ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ le changement de variable est licite, c'est-à-dire

$$e^{-\psi} = f(S)e^{-\psi\circ S}\det\nabla S, \tag{5.17}$$

avec $S = Id - \nabla\varphi$.

Suite à une remarque de VILLANI, la validité de la formule de changement de variable (5.17), n'est pas « encore » démontrée dans le cas où le coût du transport n'est plus quadratique. Nous supposerons dans la suite du chapitre que c'est le cas, que sous la condition ψ de classe $\mathcal{C}^1$, le changement de variable est licite,

$$e^{-\psi} = f(S)e^{-\psi\circ S}\det\nabla S, \tag{5.18}$$

avec $S = Id - (\nabla H)^{-1}\nabla\varphi$.

Le théorème de GANGBO et MCCANN permet d'obtenir une autre formulation du transport $\mathcal{T}_H$, lorsque H vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_2$. Nous obtenons ainsi la proposition suivante :

Proposition 5.5.5. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$d\mu(x) = \frac{1}{Z}\exp(-\psi(x))dx,$$

où $Z = \int\exp(-\psi(x))dx$. On suppose que la fonction H vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_2$. Alors la mesure μ satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction CId si et seulement si l'on a :

$$\int H\left((\nabla H)^{-1}\circ\nabla\varphi\right)d\mu \leqslant C\int\{\psi\left(x-(\nabla H)^{-1}\circ\nabla\varphi(x)\right)-\psi(x) \\ -\log\det\left(\mathrm{I}_n - \nabla\left((\nabla H)^{-1}\circ\nabla\varphi(x)\right)\right)\}d\mu(x), \tag{5.19}$$

pour toute application φ H-concave.

Preuve. — Cette proposition est une conséquence du théorème de GANGBO et MCCANN : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive, densité de probabilité par rapport à la mesure μ. D'après le théorème 5.5.3, il existe une fonction S satisfaisant à l'équation (5.15). De plus, d'après la supposition, on a le changemant de variable suivant

$$e^{-\psi} = f(S)e^{-\psi\circ S}\det\nabla S.$$

La convexité du coût H entraîne la positivité de $\det \nabla S$, d'après [GM96]. Ainsi nous avons une nouvelle formulation de l'entropie :

$$\mathbf{Ent}_\mu(f) = \int (f \circ S - f - \log\det(\nabla S))d\mu. \tag{5.20}$$

Le théorème 5.5.3 assure l'existence d'une fonction φ H-concave telle que l'on a $S = \mathrm{Id} - (\nabla H)^{-1} \circ \nabla\varphi$, et choisir la fonction φ H-concave équivaut à choisir la densité f. Il suffit alors d'utiliser les équations (5.20) et (5.16) pour achever la démonstration. □

La méthode utilisée ici ne se limite pas seulement à des inégalités énergie-entropie de fonction $C\mathrm{Id}$, mais nous ne l'utiliserons dans la pratique que dans ce cas. Cette nouvelle formulation de l'inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ nous permet alors de trouver un critère simple décrit dans la proposition suivante.

Proposition 5.5.6. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ et soit H vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_2$. On suppose qu'il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $d\mu(x) = \exp(-\psi(x))dx$, où dx est la mesure de* LEBESGUE *sur $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que μ satisfait à l'inégalité suivante*

$$\int H(\boldsymbol{\beta})\, d\mu \leqslant C \int \{\psi(x + \boldsymbol{\beta}(x)) - \psi(x) - \boldsymbol{\beta}(x)\cdot\nabla\psi(x)\}\, d\mu(x), \tag{5.21}$$

pour toute application $\boldsymbol{\beta}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Alors la mesure μ satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de fonction $C\mathrm{Id}$.

Preuve. — Appliquons la proposition précédente, et en utilisant les même notations, posons $\boldsymbol{\beta} = \nabla H^{-1} \circ \nabla\varphi$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On a alors l'inégalité suivante

$$\log\det(\mathrm{I}_n - \nabla\boldsymbol{\beta}) \leqslant -\sum_{i=1}^n \partial_i\beta_i,$$

car si A est une matrice de taille $n \times n$ symétrique réelle ayant des valeurs propres supérieures à -1, on a $\log\det(\mathrm{I}_n + A) \leqslant \mathrm{Tr}(A)$. Pour conclure la démonstration, il suffit d'utiliser l'inégalité précédente dans l'inégalité 5.19 et d'effectuer n intégrations par parties pour obtenir l'inégalité recherchée. □

Ce critère permet d'exhiber des exemples de mesures satisfaisant à l'inégalité de transport $\mathcal{T}_H$.

Exemple 5.5.7. — Si $H(x) = \|x\|_2^2$, on retrouve de façon évidente que si ψ vérifie $\psi'' \geqslant \lambda > 0$, alors la mesure μ définie dans la proposition 5.5.6 vérifie l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ de constante $C = 2/\lambda$, ce qui démontre à nouveau le résultat dû à BLOWER, [Blo99] .

De la même manière, si l'on a $H(x) = \psi(x) = \frac{1}{p}\|x\|_p^p$, pour $p \geqslant 2$, alors la mesure μ vérifie l'inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ de constante $C = 1$. En effet, les fonctions H et ψ vérifient l'inégalité suivante

$$H(y) \leqslant \psi(x+y) - \psi(x) - y \cdot \nabla\psi'(y),$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pour conclure, il suffit d'intégrer par rapport à la mesure μ et d'utiliser la proposition 5.5.6. On peut aussi coupler les deux exemples précédents en posant $H(x) = \psi(x) = \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \|x\|_2^2$. Ce cas sera utilisé dans la prochaine section.

Les exemples fournis ici sont classiques. Dans le premier exemple, le critère de BAKRY et EMERY assure notamment, par le biais de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique, l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$. Dans le second exemple, on retrouve le cas étudié dans l'article de BOBKOV et LEDOUX (voir [BL00]).

Dans ces deux exemples, nous sommes dans le cas de mesures log-concaves (le logarithme de la densité est concave) et le théorème 5.7.6 que nous verrons dans la section 5.7 s'applique. Nous allons voir dans la proposition suivante que le critère de la proposition 5.5.6 implique malheureusement la log-concavité de la mesure.

Proposition 5.5.8. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $d\mu(x) = \exp(-\psi(x))dx$. On suppose de plus que la fonction H vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_2$.*

Si la mesure μ satisfait à l'inégalité (5.21) de constante C, alors la fonction ψ est convexe.

Preuve. — On peut supposer par approximation que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons qu'il existe une constante C telle que l'inégalité (5.21) soit vérifiée pour toute fonction β, et qu'il existe un intervalle I d'intérieur non vide sur lequel ψ'' est strictement négative. On a alors, si $\beta = \alpha \mathbb{1}_J$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et J un intervalle réel,

$$\int \{\psi(x+\beta(x)) - \psi(x) - \beta(x)\cdot\nabla\psi(x)\}\, d\mu(x) = \int_J \int_0^\alpha (\alpha - y)\psi''(y+x)dyd\mu(x)$$

Choisissons enfin les paramètres α et J tels que $\alpha + J \subset I$ de sorte que la quantité ci-dessus soit strictement négative. Ceci contredit l'inégalité (5.21) et achève la preuve. $\square$

Cette dernière proposition montre les lacunes du critère pour obtenir une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$. Un des intérêts de ce critère est de linéariser les inégalités de transport et par la suite de l'utiliser pour des modèles de mécanique statistique. Nous allons dans la section 5.6 prouver, à partir de ce critère, l'existence d'une inégalité de transport pour un modèle de mécanique statistique. Nous exposerons un théorème équivalent au théorème 2.4 du chapitre 1 pour les inégalités de transport.

5.6. Application a un modèle de mécanique statistique

Voyons maintenant une application du critère de la proposition 5.5.6 pour obtenir une inégalité de transport pour un modèle de mécanique statistique. Elle nécessite une autre hypothèse sur la fonction H.

Supposons que l'hypothèse $\mathbf{H}_1$ soit vérifiée. La fonction H vérifie alors l'hypothèse $\mathbf{H}_3$ si :

$$(\mathbf{H}_3) \qquad \exists\ \alpha > 0 \text{ tel que } h(x) \geqslant \alpha x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Reprenons et décrivons à nouveau le modèle décrit dans les chapitres 1 et 2 dans le cas où $V(x) = x^2$. Soit $d \geqslant 1$, Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et ψ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $J \in \mathbb{R}$, posons $\mu_{\Lambda,\omega}$ la mesure de probabilité définie par :

$$d\mu_{\Lambda,\omega}(X) = \frac{\exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))}{Z_{\Lambda,\omega}}dX \tag{5.22}$$

où

$$\Phi_{\Lambda,\omega}(X) = \sum_{i\in\Lambda}\psi(x_i) + J\sum_{\{i;j\}\in\Lambda;\ \|i-j\|_1=1} x_i x_j + \sum_{i\in\Lambda, j\notin\Lambda;\ \|i-j\|_1=1} x_i\omega_j,$$

pour $X = (x_i)_{i\in\Lambda} \in \mathbb{R}^{|\Lambda|}$ et $Z_{\Lambda,\omega} = \displaystyle\int \exp(-\Phi_{\Lambda,\omega}(X))dX$.

Nous supposons que les termes existent et pour plus de précision et de références on pourra consulter la section 1 du chapitre 1 et la dernière section du chapitre 2. Dans les deux premiers chapitres, nous avons montré sous certaines conditions sur la fonction ψ, des inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique pour la famille de mesure $(\mu_{\Lambda,\omega})_{\Lambda,\omega}$ (voir les théorèmes 4.1 du chapitre 1 et le théorème 2.4.3 du chapitre 2). Nous cherchons ici à montrer une inégalité de transport pour la famille de mesures $(\mu_{\Lambda,\omega})_{\Lambda,\omega}$ pour J assez petit, avec une constante indépendante de Λ, sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ et de $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, représentant les conditions au bord.

Ceci nous amène alors au théorème suivant :

Théorème 5.6.1. — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, strictement convexe, telle que*

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \sup\{f(2x)/f(x), x > 0\} < \infty \\ \exists\ \alpha > 0 \text{ tel que } f(x) \geqslant \alpha x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Définissons la fonction H définie par

$$H(X - Y) = \sum_{i=1}^{n} f(|x_i - y_i|).$$

Soit ψ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose alors, pour $\theta \in \mathbb{R}$, μ_θ, la mesure sur $\mathbb{R}$ définie par

$$d\mu_\theta(dx) = \frac{\exp(-\psi(x) - \theta x)}{Z_\theta} dx,$$

où $Z_\theta = \int \exp(-\psi(x) - \theta x)dx$ et dx est la mesure de LEBESGUE *sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une constante C, indépendante de θ, telle que la mesure μ_θ vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ l'inégalité suivante :*

$$\int h(\beta)\, d\mu_\theta \leqslant C \int \{\psi(x - \beta(x)) - \psi(x) - \beta(x)\psi'(x)\} d\mu_\theta(x),$$

pour toute fonction β de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors dès que la quantité suivante $\tilde{C} = (\alpha C)/(\alpha - 2d|J|C)$ est positive, la mesure $\mu_{\Lambda,\omega}$ définie en (5.22), satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_H$ de constante $\tilde{C}$, $\tilde{C}$ étant indépendante du sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, Λ, et des conditions au bord ω.

Preuve. — La démonstration de ce théorème est très similaire à celle du théorème 2.4 du chapitre 1 et du théorème 2.4.1 du chapitre 2. D'après les hypothèses vérifiées la fonction H, l'inégalité de transport pour la mesure $\mu_{\Lambda,\omega}$ s'obtient à l'aide de la proposition 5.5.6. Il suffit de fait de montrer l'existence d'une constante $\tilde{C}$ telle que l'on ait pour tout Λ sous-ensemble fini Λ de $\mathbb{Z}^d$, $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant |\Lambda|}$, fonction de $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$ dans $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$,

$$\int H(\boldsymbol{\beta}) d\mu_{\Lambda,\omega} \leqslant \tilde{C} \int \{\Phi_{\Lambda,\omega}(X + \boldsymbol{\beta}(X)) - \Phi_{\Lambda,\omega}(X) - \boldsymbol{\beta}(X) \cdot \nabla \Phi_{\Lambda,\omega}(X)\} d\mu_{\Lambda,\omega}(X).$$

Supposons que $J \geqslant 0$, le cas opposé se démontre de la même manière. On a pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant|\Lambda|}$

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\Lambda,\omega}(X+\boldsymbol{\beta}(X)) - \Phi_{\Lambda,\omega}(X) - \boldsymbol{\beta}(X)\cdot\nabla\Phi_{\Lambda,\omega}(X)\\
&\quad= \sum_{i\in\Lambda}\varphi(x_i+\beta_i(X)) + J\sum_{i\sim j,\ i,j\in\Lambda}(x_i+\beta_i(X))(x_j+\beta_j(X))\\
&\quad+ J\sum_{i\sim j,\ i\in\Lambda,\ j\notin\Lambda}(x_i+\beta_i(X))\omega_j - \sum_{i\in\Lambda}\varphi(x_i) - J\sum_{i\sim j,\ i,j\in\Lambda}x_ix_j - J\sum_{i\sim j,\ i\in\Lambda,\ j\notin\Lambda}x_i\omega_j\\
&\quad- \sum_{i\in\Lambda}\beta_i(X)\varphi'(x_i) - J\sum_{i\in\Lambda}\beta_i(X)\sum_{j\in N(i)}x_i - J\sum_{i\in\Lambda}\beta_i(X)\sum_{j\in N(i)}\omega_j,
\end{aligned}$$

où $N(i) = \left\{j\in\mathbb{Z}^d,\ i\sim j\right\}$. Après simplification des différents termes de l'égalité, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\Lambda,\omega}(X+\boldsymbol{\beta}(X)) - \Phi_{\Lambda,\omega}(X) - \boldsymbol{\beta}(X)\cdot\nabla\Phi_{\Lambda,\omega}(X) =\\
&\qquad\qquad\sum_{i\in\Lambda}\{\varphi(x_i+\beta_i(X)) - \varphi(x_i) - \beta_i(X)\varphi'(x_i)\} + \sum_{i,j\in\Lambda,\ i\sim j}\beta_i\beta_j.
\end{aligned}$$

Puisque pour tout i, $|N(i)| = 2d$ on a

$$\sum_{i,j\in\Lambda,i\sim j}\beta_i\beta_j \geqslant -2d\sum_{i\in\Lambda}(\beta_i)^2,$$

soit donc

$$\begin{aligned}
&\int\{\Phi_{\Lambda,\omega}(X+\boldsymbol{\beta}(X)) - \Phi_{\Lambda,\omega}(X) - \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\Phi_{\Lambda,\omega}(X)\}d\mu_{\Lambda,\omega}(X) \geqslant\\
&\sum_{i\in\Lambda}\int\{\varphi(x_i+\beta_i(X)) - \varphi(x_i) - \beta_i(X)\varphi'(x_i)\}d\mu_{\Lambda,\omega}(X) - 2dJ\sum_{i\in\Lambda}\int(\beta_i)^2d\mu_{\Lambda,\omega}.
\end{aligned}$$

Intégrant par rapport à toutes les variables sauf une, et utilisant l'hypothèse faite sur la mesure μ_θ, on obtient pour tout $i\in\Lambda$,

$$\int\{\varphi(x_i+\beta_i(X)) - \varphi(x_i) - \beta_i(X)\varphi'(x_i)\}d\mu_{\Lambda,\omega}(X) \geqslant \frac{1}{C}\int h(\beta_i)d\mu_{\Lambda,\omega}.$$

Soit donc

$$\int \{\Phi_{\Lambda,\omega}(X+\boldsymbol{\beta}(X)) - \Phi_{\Lambda,\omega}(X) - \boldsymbol{\beta}(X)\cdot\nabla\Phi_{\Lambda,\omega}(X)\}d\mu_{\Lambda,\omega}(X) \geqslant \frac{1}{C}\sum_{i\in\Lambda}\left(\int h(\beta_i)d\mu_{\Lambda,\omega} - 2dJC\int(\beta_i)^2 d\mu_{\Lambda,\omega}\right).$$

L'hypothèse $\mathbf{H}_3$ faite sur H assure alors que :

$$\int \{\Phi_{\Lambda,\omega}(X+\boldsymbol{\beta}(X)) - \Phi_{\Lambda,\omega}(X) - \boldsymbol{\beta}(X)\cdot\nabla\Phi_{\Lambda,\omega}(X)\}d\mu_{\Lambda,\omega}(X) \geqslant \frac{\alpha - 2dJC}{\alpha C}\int H(\boldsymbol{\beta})d\mu_{\Lambda,\omega},$$

ce qui démontre le théorème. □

Soulignons ici le fait que les hypothèses de ce théorème ne sont pas des plus accessibles en pratique, et qu'au vu de la proposition 5.5.8, principalement deux exemples, présentés ci-dessous, illustrent de manière intéressante ce résultat.

Exemple 5.6.2. — Le premier exemple correspond au cas où $H(X) = \|X\|^2$. On retrouve alors le cas classique déjà obtenu, entre autre dans le chapitre 2, par le critère de Bakry et Emery.

Si maintenant $H(X) = \|X\|^p + \|X\|^2$ et $\psi(x) = |x|^p + x^2$, nous sommes dans les conditions d'application du théorème si $p \geqslant 2$. On obtient alors une nouvelle inégalité de transport pour le modèle de mécanique statistique et surtout, par l'utilisation de la proposition 5.4.1, une concentration mieux adaptée au modèle considéré. Donnons un exemple de la concentration au spin moyen que l'on obtient dans ce cas (voir [Fou00]). Pour cela, considérons pour tout Λ, $S_\Lambda = \sum_{i\in\Lambda} f(x_i)$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ 1-lipschitzienne. Posons alors $m_{\Lambda,\omega}$ la moyenne de S_Λ sous la mesure $\mu_{\Lambda,\omega}$. On obtient alors l'inégalité de concentration suivante

$$\mu_{\Lambda,\omega}\left(\left|\frac{S_\Lambda}{|\Lambda|} - m_{\Lambda,\omega}\right| \geqslant r\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{r^p|\Lambda|}{\tilde{C}}\right),$$

où $\tilde{C}$ est la constante donnée dans le théorème précédent.

5.7. Liens avec différentes inégalités de Sobolev logarithmique

Dans cette section, nous étendons les résultats d'hypercontractivité à des inégalités de Sobolev logarithmique plus générales, complétant ainsi le chapitre 3. Nous obtenons des résultats d'hypercontractité pour des semi-groupes d'HAMILTON-JACOBI plus généraux que ceux considérés dans le chapitre 3, permettant d'accéder à des inégalités de transport $\mathcal{T}_p$.

On se place, ici, dans le cas où H satisfait à l'hypothèse $\mathbf{H}_1$ et où $h(\cdot) = |\cdot|^p/p$, pour $p \geqslant 2$. Ce cas particulier de fonction h vérifie aussi l'hypothèse $\mathbf{H}_0$.

Le résultat fondamental du chapitre 3 est le théorème 2.1, mettant en relation l'inégalité de SOBOLEV logarithmique et l'hypercontractivité pour le semi-groupe d'HAMILTON-JACOBI $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$. Examinons le cas d'une inégalité de SOBOLEV logarithmique modifiée et définissons, pour $q > 1$, une q-inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Définition 5.7.1. — Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$ satisfait à une q-inégalité de SOBOLEV logarithmique $\mathcal{L}_q$, pour $q > 1$, de constante C si pour toute fonction g dérivable bornée, on a :

$$\mathbf{Ent}_\mu(e^g) \leqslant C\mathbf{E}_\mu\Big(\|\nabla g\|_q^q e^g\Big),$$

où $\|\nabla g\|_q^q = \sum_{i=1}^n |\partial_i g|^q$.

Dans le cas $q = 2$ on retrouve, à un changement de fonction près $(f^2 = e^g)$, l'inégalité de SOBOLEV logarithmique classique étudiée dans les chapitres précédents.

D'après l'article de BOBKOV et LEDOUX [BL00], lorsque $q \geqslant 2$, sous une certaine condition de p-convexité pour la mesure μ, l'inégalité $\mathcal{L}_q$ est vérifiée. Si la mesure μ s'écrit $d\mu(x) = \exp(-V(x))dx$, alors, d'après [BL00], elle vérifie une q-inégalité de SOBOLEV logarithmique $\mathcal{L}_q$, dès lors que V vérifie l'inégalité suivante

$$tV(x) + sV(y) - V(tx + sy) \geqslant C'(s + o(s))\|x - y\|_p^p,$$

pour tout $t, s >$ vérifiant $t + s = 1$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Reprenons par ailleurs la définition de la solution de l'équation de HAMILTON-JACOBI que nous utiliserons ici. Soit $q > 1$, et soit f une fonction assez régulière (par exemple lipschitzienne), alors la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rll} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\|\nabla u\|_q^q}{p} & = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n\times]0,\infty[, \\ u & = f & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{array} \right. \tag{5.23}$$

est donnée par la formule suivante :

$$
(5.24)\quad u(x,t) = \begin{cases} \mathbf{Q_t}^{(p)} f(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(y) + \frac{t}{p}\left\| \frac{x-y}{t} \right\|_p^p \right\}, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ f(x), \quad t=0,\ x\in\mathbb{R}^n, & \end{cases}
$$

où $1/p+1/q=1$. L'équation décrite ci-dessus est un cas particulier du cadre décrit en section 5.1 du chapitre 3.

Le théorème suivant éclaire le lien entre l'inégalité de SOBOLEV logarithmique $\mathcal{L}_q$ et les solutions de l'équation de HAMILTON-JACOBI.

Théorème 5.7.2. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que la mesure μ satisfait à une q-inégalité de* SOBOLEV *logarithmique $\mathcal{L}_q$, de constante C pour $q>1$.*

Alors, pour toute fonction bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $t\geqslant 0$ et pour tout $a>0$, on a :

$$
(5.25)\qquad \left\| e^{\mathbf{Q_t}^{(p)} f} \right\|_{\left(a+\frac{q-1}{Cq}t\right)^{\frac{1}{q-1}}} \leqslant \left\| \mathrm{e}^{f} \right\|_{a^{\frac{1}{q-1}}},
$$

avec $1/p+1/q=1$.

Inversement, si l'inégalité (5.25) est vérifiée pour tout $t\geqslant 0$ et pour une constante $a>0$, alors la mesure μ satisfait à la q-inégalité de SOBOLEV *logarithmique* (5.7.1) *de constante C.*

Preuve. — Pour démontrer ce théorème nous posons, comme dans la démonstration du théorème 2.1 du chapitre 3, $F(t) = \left\| e^{\mathbf{Q_t}^{(p)} f} \right\|_{\lambda(t)}$, avec $\lambda(t) = \left(a+\frac{q-1}{Cq}t\right)^{\frac{1}{q-1}}$, $t>0$. On obtient alors

$$
\frac{\lambda^2(t)}{\lambda'(t)} F(t)^{\lambda(t)-1} F'(t) = \mathbf{Ent}_\mu\left(\mathrm{e}^{\lambda(t)\mathbf{Q_t}^{(p)} f}\right) - \frac{\lambda^{2-q}(t)}{q\lambda'(t)} \int \left\| \nabla \lambda(t) \mathbf{Q_t}^{(p)} f \right\|_q^q e^{\lambda(t)\mathbf{Q_t}^{(p)} f} d\mu.
$$

Mais la fonction λ vérifie l'équation différentielle suivante

$$
\lambda^{2-q} = Cq\lambda',
$$

et donc grâce à la q-inégalité de SOBOLEV logarithmique (5.7.1) de constante C la fonction F est décroissante, ce qui démontre la première partie du théorème.

Réciproquement, soit $a>0$. Soit f bornée de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'inégalité (5.25) soit vérifiée pour tout $t>0$. Cette inégalité implique alors que la fonction F vérifie $F'(0)\geqslant 0$ c'est-à-dire :

$$
\mathbf{Ent}_\mu\left(e^{af}\right) \leqslant C \int \|\nabla af\|_q^q e^{af} d\mu.
$$

Puisque $a \neq 0$, par un changement de fonction ($af = g$), on retrouve la q-inégalité de SOBOLEV logarithmique de constante C. □

Remarque 5.7.3. — Dans le théorème précédent, la seule restriction sur le paramètre q est $q > 1$. Mais on peut montrer de façon évidente qu'aucune mesure de probabilité ne vérifie la q-inégalité de SOBOLEV logarithmique lorsque $q > 2$. Ce théorème n'a donc de d'intérêt seulement pour $q \in]1,2]$ et dans ce cas, on a $p \geqslant 2$.

De même qu'en section 3.3 du chapitre 3, cette inégalité d'hypercontractivité permet d'obtenir des inégalités de transport.

Théorème 5.7.4. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que la mesure μ satisfait à une q-inégalité de* SOBOLEV *logarithmique $\mathcal{L}_q$, de constante C, pour $q \in]1;2]$. Alors la mesure μ satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_p$, de constante $C' = (qC/(q-1))^{1/(q-1)}$, avec $1/p + 1/q = 1$.*

Preuve. — D'après la proposition 5.5.1, il suffit de montrer l'équation suivante

$$\int \exp\left(\frac{1}{C}\mathbf{Q}_1^{(p)}g\right)d\mu \leqslant \exp\left(\frac{1}{C}\int g d\mu\right),$$

pour toute fonction g lipschitzienne. Appliquant le théorème précédent avec $a = 0$ et $t = 1$, on obtient

$$\int \exp\left(\left(\frac{q-1}{Cq}\right)^{\frac{1}{q-1}}\mathbf{Q}_1^{(p)}g\right)d\mu \leqslant \exp\left(\left(\frac{q-1}{Cq}\right)^{\frac{1}{q-1}}\int g d\mu\right),$$

ce qui démontre l'inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ de constante $C' = (qC/(q-1))^{1/(q-1)}$. □

Remarque 5.7.5. — Tout comme pour la section 3.3 du chapitre 3, on peut aussi démontrer le théorème précédent en utilisant l'argument de HERBST. L'équation différentielle que l'on obtient alors est un peu différente mais permet encore de conclure.

Comme dans le cas de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique classique, si la mesure est log-concave, une inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ implique une q-inégalité de SOBOLEV logarithmique.

Théorème 5.7.6. — *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une fonction ψ convexe de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $d\mu(x) = \exp(-\psi(x))dx$. Si la mesure de probabilité μ satisfait à une inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ ($p \geqslant 2$) de constante*

C, alors elle satisfait à une q-inégalité de SOBOLEV *logarithmique $\mathcal{L}_q$ de constante $C' = \left(\frac{qC}{q-1}\right)^{q-1}$ avec $1/p + 1/q = 1$.*

Preuve. — Pour démontrer ce théorème, on utilise le théorème de BRENIER et MACCANN, ainsi qu'une généralisation de la démonstration de CORDÉRO-ERAUSQUIN (voir [CE00b] ou la démonstration du théorème 8.4.5 de [ABC+00]).

Établissons tout d'abord l'inégalité suivante, vérifiée pour la mesure μ et pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\exp(g)$ soit une densité de probabilité par rapport à μ,

$$\mathbf{Ent}_\mu(e^g) \leqslant p^{\frac{1}{p}} (T_p(e^g d\mu, d\mu))^{\frac{1}{p}} \left(\int \|\nabla g\|_q^q e^g d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{5.26}$$

où $1/p + 1/q = 1$. Appliquons le théorème de BRENIER et MCCANN. Soit φ la fonction donnée par le théorème 5.5.3 pour les mesures $\exp(g)d\mu$ et $d\mu$. On a, d'après le théorème 5.5.3,

$$T_p(e^g d\mu, d\mu) = \frac{1}{p} \int \sum_{i=1}^n (\partial_i \varphi)^{\frac{p}{p-1}} e^g d\mu.$$

Nous supposons, à nouveau ici, que la formule de changement de variable (5.18) est licite. On peut donc écrire la formule de changement de variables suivante

$$e^{g(x)} e^{-\psi(x)} = \exp\left(-\psi\left(x - (\nabla\varphi)^{\frac{1}{p-1}}(x)\right)\right) \det\left(\mathrm{I}_n - \nabla(\nabla\varphi)^{\frac{1}{p-1}}(x)\right),$$

où les puissance de vecteur sont pris terme à terme. En prenant le logarithme, on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= \psi(x) - \psi\left(x - (\nabla\varphi)^{\frac{1}{p-1}}(x)\right) + \log\det\left(\mathrm{I}_n - \nabla(\nabla\varphi)^{\frac{1}{p-1}}(x)\right) \\ &\leqslant \psi(x) - \psi\left(x - (\nabla\varphi)^{\frac{1}{p-1}}(x)\right) - \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^n \partial_{i,i}\varphi(x) (\partial_i \varphi(x))^{\frac{2-p}{p-1}}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

La convexité de la fonction ψ implique de plus que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\psi(x) - \psi\left(x - (\nabla\varphi)^{\frac{1}{p-1}}(x)\right) \leqslant (\nabla\varphi)^{\frac{1}{p-1}}(x) \cdot \nabla\psi(x). \tag{5.28}$$

Après multiplication par $\exp(g)$ et une intégration par parties pour chaque terme de la somme, on obtient :

$$\mathbf{Ent}_\mu(e^g) \leqslant \int \left(\sum_{i=1}^n \partial_i g (\partial_i \varphi)^{\frac{1}{p-1}} \right) e^g d\mu.$$

L'inégalité de HÖLDER pour les paramètres p et q permet alors d'obtenir l'inégalité (5.26). Pour conclure la démonstration du théorème, il suffit alors d'appliquer l'inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ et d'utiliser le fait que $1/p + 1/q = 1$.

Remarquons finalement que l'inégalité (5.26) peut également s'obtenir en adaptant la démonstration de OTTO et VILLANI (voir [OV00]). □

Remarquons que dans les théorèmes 5.7.6 et 5.7.4, lorsque $p = q = 2$, on retrouve les cas exposés dans le chapitre 3. Et l'interrogation subsiste encore de savoir si, ne serait-ce qu'a une constante près, il y a équivalence entre une q-inégalité de SOBOLEV logarithmique $\mathcal{L}_q$ et une inégalité de transport $\mathcal{T}_p$ avec $1/p + 1/q = 1$. Nous pouvons seulement juste constater que dans les deux théorèmes précédents se produit une perte au niveau des constantes, et ce même dans le cas convexe.

5.8. Cas de la dimension infinie

La mesure de WIENER sur l'espace des fonctions continues satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique. Celle-ci peut, par exemple, se démontrer par tensorisation de l'inégalité de SOBOLEV logarithmique pour la mesure gaussienne. On pourra notamment consulter [CHL97]. Nous allons montrer dans cette dernière section que le semi-groupe de HAMILTON-JACOBI associé à la mesure de WIENER est hypercontractif, et par suite que la mesure de WIENER satisfait à une inégalité de transport.

Il semble évident que le semi-groupe de HAMILTON-JACOBI que nous allons définir est déjà connu de CRANDALL et LIONS, on pourra consulter leurs nombreux articles sur les équations de HAMILTON-JACOBI en dimension infinie. Par contre son utilisation dans le cas particulier de la mesure de WIENER ne semble pas connu.

Définissons dans un premier temps les objets que nous allons étudier, qui diffèrent des sections précédentes du fait de la dimension infinie. Les calculs sont présentés pour la mesure de WIENER sur $\mathbb{R}$ pour simplifier les notations, mais peuvent être étendus à la mesure de WIENER sur $\mathbb{R}^n$.

Notons $\mathbb{H}$ l'espace de CAMERON-MARTIN, défini par

$$\mathbb{H} = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ absolument continue, vérifiant : } f(0) = 0,\ \dot{f} \in L^2 \right\},$$

et considérons la norme de CAMERON-MARTIN associée, définie pour toute fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, par

$$\|f\|_{\mathbb{H}} = \begin{cases} \sqrt{\int_0^1 \left|\dot{f}_s\right|^2 ds} \text{ si } f \in \mathbb{H} \\ \infty \text{ si } f \notin \mathbb{H}. \end{cases}$$

Définissons alors par $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ le produit scalaire sur $\mathbb{H}$ induit par la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$, ce produit scalaire faisant de $\mathbb{H}$ un espace de HILBERT. Posons de plus,

$$\mathbf{W}_0 = \{f : [0,1] \text{ continue}, \ f(0) = 0\},$$

$\mathbb{H}$ est alors un sous-espace de $\mathbf{W}_0$. Pour toute fonction f de $\mathbf{W}_0$, définissons finalement la fonction H par

$$H(f) = \frac{1}{2}\|f\|_{\mathbb{H}}^2. \tag{5.29}$$

Cette fonction H représente le coût du transport que nous allons considérer. Nous sommes maintenant en mesure de définir le semi-groupe d'HAMILTON-JACOBI que nous étudierons. Soit F une fonction de $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbb{R}$, et posons pour tout $t \geqslant 0$ et pour toute fonction $h \in \mathbf{W}_0$,

$$\mathbf{Q_t}F(h) = \inf_{\omega \in \mathbb{H}} \{F(h - \omega t) + tH(\omega)\} = \inf_{\omega \in \mathbf{W}_0} \{F(h - \omega t) + tH(\omega)\}. \tag{5.30}$$

Afin d'obtenir les résultats d'hypercontractivité pour le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$, nous avons besoin d'établir une formule analogue à l'équation (2.2) du chapitre 3. Établissons auparavant quelques propriétés du semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$. Les propositions comme les démonstrations proposées ici sont inspirées de la dimension finie étudiée par EVANS dans [Eva98].

Proposition 5.8.1. —
-La fonction H, définie par l'équation (5.29), *vérifie pour toute fonction $h \in \mathbb{H}$,*

$$\sup_{\omega \in \mathbb{H}} \{\langle h, \omega\rangle_{\mathbb{H}} - H(\omega)\} = H(h). \tag{5.31}$$

-Pour toute fonction $F \in \mathbf{W}_0$ on a $\mathbf{Q}_0 F = F$.
-Pour tout $0 \geqslant t \geqslant s$, on a sur l'espace $\mathbf{W}_0$,

$$\mathbf{Q_t} = \mathbf{Q_s} \circ \mathbf{Q_{t-s}}.$$

Preuve. — Les deux premiers points de la proposition étant évidents, démontrons la dernière assertion. Supposons $s > 0$. Soit $h \in \mathbf{W}_0$, on a alors après un changement de variable dans l'équation (5.30),

$$\mathbf{Q_t}F(h) = \inf_{\omega \in \mathbf{W}_0} \left\{ F(\omega) + tH\left(\frac{h-\omega}{t}\right) \right\}.$$

Soit $f \in \mathbf{W}_0$; la convexité de la fonction H entraîne

$$tH\left(\frac{h-\omega}{t}\right) \leqslant (t-s)H\left(\frac{h-f}{t-s}\right) + sH\left(\frac{f-\omega}{s}\right).$$

On obtient donc, pour toutes fonctions $\omega, f \in \mathbf{W}_0$,

$$\mathbf{Q_t}F(h) \leqslant (t-s)H\left(\frac{h-f}{t-s}\right) + F(\omega) + sH\left(\frac{f-\omega}{s}\right).$$

Prenant l'infimum en $\omega \in \mathbf{W}_0$, puis en $f \in \mathbf{W}_0$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\mathbf{Q_t}F(h) \leqslant \mathbf{Q_s}(\mathbf{Q_{t-s}}(F)(h)). \tag{5.32}$$

Réciproquement, on a pour toutes fonctions $\omega \in \mathbf{W}_0$ et $f \in \mathbf{W}_0$,

$$\mathbf{Q_s}F(f) \leqslant sH\left(\frac{f-\omega}{s}\right) + F(\omega).$$

En posant $f = (s/t)h + (1-s/t)\omega$, on est conduit à

$$(t-s)H\left(\frac{h-f}{t-s}\right) + \mathbf{Q_s}F(h) \leqslant (t-s)H\left(\frac{h-f}{t-s}\right) + sH\left(\frac{f-\omega}{s}\right) + F(\omega).$$

Cette dernière inégalité se simplifie en

$$(t-s)H\left(\frac{h-f}{t-s}\right) + \mathbf{Q_s}F(h) \leqslant tH\left(\frac{h-\omega}{t}\right) + F(\omega).$$

Soit donc, pour toute fonction $\omega \in \mathbf{W}_0$,

$$\mathbf{Q_s}(\mathbf{Q_{t-s}}(F)(h)) \leqslant tH\left(\frac{h-\omega}{t}\right) + F(\omega),$$

et après passage à l'infimum pour la variable ω on obtient :

$$\mathbf{Q_s}(\mathbf{Q_{t-s}}(F)(h)) \leqslant \mathbf{Q_t}F(h),$$

ce qui à l'aide de l'inégalité (5.32) démontre la proposition. □

La proposition suivante énonce des propriétés de régularité pour le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$. Nous dirons que la fonction F de $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{H}$-*lipschitzienne* de constante $\alpha > 0$ si on a l'inégalité suivante :

$$|F(\omega+h) - F(\omega)| \leqslant \alpha \|h\|_{\mathbb{H}},$$

pour tout $h \in \mathbb{H}$ et $\omega \in \mathbf{W}_0$.

Proposition 5.8.2. — *Soit F une fonction de $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$-lipschitzienne de constante α.*

Alors d'une part, pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $\mathbf{Q_t}F$ de $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{H}$-lipschitzienne de constante α, et d'autre part, on a, pour toute fonction $f \in \mathbf{W}_0$,

$$|\mathbf{Q_t}F(f) - F(f)| \leqslant \frac{\alpha^2}{2}t, \tag{5.33}$$

pour tout $t \geqslant 0$.

Preuve. — Soient $f \in \mathbf{W}_0$ et $h \in \mathbb{H}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega_\varepsilon \in \mathbb{H}$ tel que

$$\mathbf{Q_t}F(f+h) \geqslant F(h - \omega_\varepsilon t) + tH(\omega_\varepsilon) - \varepsilon,$$

et

$$\mathbf{Q_t}F(f) - \mathbf{Q_t}F(f+h) \leqslant F(f - \omega_\varepsilon t) - F(f + h - \omega_\varepsilon t) + \varepsilon,$$

la fonction F étant $\mathbb{H}$-lipschitzienne de constante α, on obtient :

$$\mathbf{Q_t}F(f) - \mathbf{Q_t}F(f+h) \leqslant \alpha\|h\|_{\mathbb{H}} + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, puis en échangeant les rôles de f et $f+h$, on montre que la fonction $\mathbf{Q_t}F$ est $\mathbb{H}$-lipschitzienne de constante α.

Montrons maintenant l'inégalité (5.33). D'après la définition de $\mathbf{Q_t}F$ et en utilisant le fait que F est $\mathbb{H}$-lipschitzienne, on obtient

$$\mathbf{Q_t}F(f) \geqslant F(f) - t\sup_{\omega\in\mathbb{H}}\left\{\alpha\|\omega\|_{\mathbb{H}} - H(\omega)\right\}. \tag{5.34}$$

Mais d'après l'équation suivante

$$\alpha\|\omega\|_{\mathbb{H}} = \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant\alpha}\left\{\langle h, \omega\rangle_{\mathbb{H}}\right\},$$

l'inégalité (5.34) s'écrit

$$\mathbf{Q_t}F(f) \geqslant F(f) - t\sup_{\|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant\alpha}\left\{\sup_{\omega\in\mathbb{H}}\left\{\langle h, \omega\rangle_{\mathbb{H}} - H(\omega)\right\}\right\}.$$

En utilisant l'inégalité (5.31), l'inégalité (5.34) se simplifie alors en

$$\mathbf{Q_t}F(f) \geqslant F(f) - t\sup_{\|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant\alpha} H(h).$$

On obtient donc

$$\mathbf{Q_t}F(f) - F(f) \geqslant -\frac{\alpha^2}{2}t.$$

Puisque l'on a toujours $\mathbf{Q_t}F(f) \geqslant F(f)$, la proposition est démontrée. $\square$

Nous obtenons de plus le corollaire suivant :

Corollaire 5.8.3. — *Soit F une fonction de $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$-lipschitzienne, alors la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, définie par*

$$t \mapsto \mathbf{Q_t} F(f),$$

est aussi lipschitzienne.

Notons μ la mesure de WIENER sur l'espace $\mathbf{W}_0$. Nous pouvons maintenant énoncer l'équation différentielle vérifiée par le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t \geqslant 0}$.

Théorème 5.8.4. — *Soit F une fonction de $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$-lipschitzienne. Alors μ presque-sûrement on a pour tout $t \geqslant 0$,*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q_t} F(f) = -H(\mathbf{D}\mathbf{Q_t} F(f)), \tag{5.35}$$

où $\mathbf{D}$ représente l'opérateur gradient au sens du calcul de MALLIAVIN.

L'obtention de ce théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 5.8.5. — *Soit F une fonction de $\mathbf{W}_0$ dans $\mathbb{R}$ et soit une fonction $f \in \mathbf{W}_0$ telle que F admette un opérateur gradient en f. La propriété suivante est alors vérifiée*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{Q_t} F(f) - F(f)}{t} = -H(\mathbf{D}F(f)).$$

Preuve du lemme 5.8.5. — Par définition de l'opérateur gradient, on a forcément $\mathbf{D}F(f) \in \mathbb{H}$, soit donc

$$\mathbf{Q_t} F(f) \leqslant F(f - t\mathbf{D}F(f)) + tH(\mathbf{D}F(f)),$$

$$\frac{\mathbf{Q_t} F(f) - F(f)}{t} \leqslant \frac{F(f - t\mathbf{D}F(f)) - F(f)}{t} + H(\mathbf{D}F(f)).$$

En prenant la limite supérieure on obtient

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{\mathbf{Q_t} F(f) - F(f)}{t} \leqslant -\mathbf{D}_{\mathbf{D}F(f)} F(f) + H(\mathbf{D}F(f)),$$

où $\mathbf{D}_{\mathbf{D}F(f)} F(f)$ représente la dérivée suivant la direction $\mathbf{D}F(f)$. Puisque

$$\mathbf{D}_{\mathbf{D}F(f)} F(f) = \|\mathbf{D}F(f)\|_{\mathbb{H}}^2 = 2H(\mathbf{D}F(f)),$$

on obtient l'inégalité

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \frac{\mathbf{Q_t} F(f) - F(f)}{t} \leqslant -H(\mathbf{D}F(f)).$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. On a

$$\mathbf{Q_t}F(f) = \inf_{\omega\in\mathbb{H}} \{F(f - t\omega) + tH(\omega)\}.$$

Dans l'équation précédente, on peut, puisque F est $\mathbb{H}$-lipschitzienne de constante α, prendre l'infimum pour les fonctions ω vérifiant $\|\omega\|_{\mathbb{H}} \leqslant 2\alpha$.

De plus, F admettant un opérateur gradient en f, on a pour tout $\omega \in \mathbb{H}$,

$$F(f - t\omega) = F(f) - t\langle\omega, \mathbf{D}F(f)\rangle_{\mathbb{H}} + t\varepsilon(t\omega),$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $\|h\|_{\mathbb{H}} \to 0$. On peut alors écrire

$$\mathbf{Q_t}F(f) \geqslant \inf_{\omega\in\mathbb{H},\ \|\omega\|_{\mathbb{H}}\leqslant 2\alpha} \{F(f) - t\langle\omega, \mathbf{D}F(f)\rangle_{\mathbb{H}} + tH(\omega)\} - t\sup_{\|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant 2\alpha} |\varepsilon(th)|,$$

et ainsi

$$\frac{\mathbf{Q_t}F(f) - F(f)}{t} \geqslant -\sup_{\omega\in\mathbb{H}} \{\langle\omega, \mathbf{D}F(f)\rangle_{\mathbb{H}} - H(\omega)\} + t \sup_{\|h\|_{\mathbb{H}}\leqslant 2\alpha} |\varepsilon(th)|.$$

Faisant tendre t vers 0 et utilisant l'équation (5.31) on obtient

$$\varliminf_{t\to 0} \frac{\mathbf{Q_t}F(f) - F(f)}{t} \geqslant -H(\mathbf{D}F(f)),$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 5.8.4.

Preuve du théorème 5.8.4. — D'après le corollaire 5.8.3, puisque l'application F est $\mathbb{H}$-lipschitzienne, l'application $f \mapsto \mathbf{Q_s}F(f)$ est aussi $\mathbb{H}$-lipschitzienne. D'après l'article de Enchev et Stroock, (voir [ES93]) cette application est μ presque-sûrement différentiable au sens de l'opérateur gradient de Malliavin. Le lemme précédent entraîne donc

$$\frac{\mathbf{Q_{t+s}}F(f) - \mathbf{Q_s}F(f)}{t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -H(\mathbf{D}\mathbf{Q_s}F(f)),$$

μ presque-sûrement, ce qui démontre le théorème. □

Ayant énoncé la propriété fondamentale que doit vérifier le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$, nous pouvons établir maintenant le résultat d'hypercontractivité.

Théorème 5.8.6. — *Le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ satisfait, pour toute fonction F $\mathbb{H}$-lipschitzienne et pour tout $a, t \geqslant 0$, à l'inégalité suivante*

$$\left\|e^{\mathbf{Q_t}F}\right\|_{t+a} \leqslant \left\|e^{\mathbf{Q_t}F}\right\|_{a}, \tag{5.36}$$

la norme étant prise par rapport à la mesure de Wiener μ.

Preuve. — Soit G appartenant au domaine du gradient $\mathbf{D}$. On a alors l'inégalité de SOBOLEV logarithmique suivante, pour la mesure de WIENER,

$$\mathbf{Ent}_\mu\big(e^G\big) \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(\|\mathbf{D}G\|_{\mathbb{H}} e^G\big),$$

où $\mathbf{Ent}_\mu\big(e^G\big) = \mathbb{E}\big(e^G G\big) - \mathbb{E}\big(e^G\big) \log \mathbb{E}\big(e^G\big)$, l'espérance étant prise par rapport à la mesure μ. Soit $a > 0$, posons alors pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = \big\|e^{\mathbf{Q_t}F}\big\|_{a+t}$. D'après ce qui précède, si la fonction F est $\mathbb{H}$-lipschitzienne, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$. Un calculs analogue à celui du théorème 2.1 du chapitre 3, permet d'achever la démonstration. □

Ce théorème d'hypercontractivité pour le semi-groupe $(\mathbf{Q_t})_{t\geqslant 0}$ permet de déduire une inégalité de transport pour la mesure de WIENER. Définissons la distance de transport que nous considérons ici. Soit ν une mesure de probabilité définie sur l'espace $\mathbf{W}_0$. Posons alors

$$\mathbb{T}(\nu, \mu) = \inf\left\{H(f-g)d\pi(f,g)\right\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des probabilités π ayant comme marges ν et μ.

La distance de transport $\mathbb{T}$ n'est pas forcément finie, puisque la fonction H n'est finie que sur $\mathbb{H}$, qui est un espace négligeable pour la mesure μ. Exhibons un cas où celle-ci est finie. Soit $h \in \mathbb{H}$, et soit $\nu = \mu_h$ la mesure μ translatée par h. On peut montrer de façon élémentaire l'inégalité suivante

$$\mathbb{T}(\mu_h, \mu) \leqslant H(h).$$

Posons de plus

$$\mathbb{TS}(\nu, \mu) = \sup\left\{\int \mathbf{Q}F d\nu - \int F d\mu\right\},$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des fonctions F $\mathbb{H}$-lipschitziennes et où $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1$. Il est aisé de remarquer que pour toute mesure de probabilité ν, on a l'inégalité suivante

$$\mathbb{TS}(\nu, \mu) \leqslant \mathbb{T}(\nu, \mu).$$

On ne peut certes pas conclure, en utilisant le théorème 5.2.3 de KANTOROVICH-RUBINSTEIN que $\mathbb{TS}(\nu, \mu) = \mathbb{T}(\nu, \mu)$ car les hypothèses qu'il requiert ne sont pas vérifiées. Néanmoins, d'après une démonstration due à VILLANI (communication personnelle), le théorème de KANTOROVICH-RUBINSTEIN s'applique dans notre cas.

Nous pouvons donc utiliser les remarques précédentes pour montrer le théorème suivant que la mesure de WIENER satisfait à une inégalité de transport pour la distance $\mathbb{T}$.

Théorème 5.8.7. — *La mesure de* WIENER μ *vérifie l'inégalité suivante*

$$\mathbb{T}(Fd\mu, d\mu) \leqslant \mathbf{Ent}_\mu(F)\,, \tag{5.37}$$

pour toute fonction F*, densité par rapport à la mesure* μ.

Preuve. — Faisant tendre a vers 0 dans l'équation (5.36), on obtient l'inégalité suivante

$$\int e^{\mathbf{Q}_1 F} d\mu \leqslant \exp\left(\int F d\mu\right),$$

pour toute fonction F $\mathbb{H}$-lipschitzienne. D'après la formule variationnelle de l'entropie on a

$$\int \mathbf{Q}FGd\mu - \int Fd\mu \leqslant \mathbf{Ent}_\mu(G)\,.$$

En prenant finalement le supremum sur les fonctions F $\mathbb{H}$-lipschitziennes sur l'inégalité précédente et en utilisant le théorème de KANTOROVICH-RUBINSTEIN en dimension infinie, on obtient le résultat énoncé. □

Remarque 5.8.8. — D'après les techniques de tensorisation il semble possible de démontrer le théorème précédent en utilisant l'inégalité de transport $\mathcal{T}_2$ pour la mesure gaussienne.

Remarquons de plus, que le principal intérêt de cette section est d'étendre les résultats sur les inégalités de transport à une mesure de dimension infinie.

BIBLIOGRAPHIE

[ABC$^+$00] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto & G. Scheffer – *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[Aid98] S. Aida – « Uniform positivity improving property, Sobolev inequalities, and spectral gaps », *J. Funct. Anal.* **158** (1998), no. 1, p. 152–185.

[Bak94] D. Bakry – « L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes », Lectures on probability theory. École d'été de probabilités de St-Flour 1992, Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.

[Bar94] G. Barles – *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, Paris, 1994.

[BCL97] D. Bakry, D. Concordet & M. Ledoux – « Optimal heat kernel bounds under logarithmic Sobolev inequalities », *ESAIM Probab. Statist.* **1** (1997), p. 391–407 (electronic).

[BE85] D. Bakry & M. Emery – « Diffusions hypercontractives », Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, Springer, Berlin, 1985, p. 177–206.

[BG99] S. G. Bobkov & F. Götze – « Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities », *J. Funct. Anal.* **163** (1999), no. 1, p. 1–28.

[BGL01] S. Bobkov, I. Gentil & M. Ledoux – « Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations », *J. Math. Pu. Appli.* **80** (2001), no. 7, p. 669–696.

[BH99a] T. Bodineau & B. Helffer – « The log-Sobolev inequality for unbounded spin systems », *J. Funct. Anal.* **166** (1999), no. 1, p. 168–178.

[BH99b] ———, « Correlations, Spectral gap and Log-Sobolev inequatities for unbounded spins systems », *Differential Equations and Math. Phy.* (Birmingham 1999), p. 27–42, International Press 1999.

[BH00] ———, « Correlations, spectral gap and log-Sobolev inequalities for unbounded spins systems », Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1999), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 51–66.

[BJS90] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis & H. D. Sherali – *Linear programming and network flows*, second ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1990.

[BL97] S. Bobkov & M. Ledoux – « Poincaré's inequalities and Talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution », *Probab. Theory Related Fields* **107** (1997), no. 3, p. 383–400.

[BL00] S. G. Bobkov & M. Ledoux – « From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 5, p. 1028–1052.

[Blo99] G. Blower – « The gaussian isoperimetric inequality and transportation », *ta appear* (1999).

[Bob98] S. G. Bobkov – « Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures », preprint, Mar. 1998.

[Bré73] H. Brézis – *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973, North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[Bre91] Y. Brenier – « Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions », *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), no. 4, p. 375–417.

[Caf96a] L. A. CAFFARELLI – « Boundary regularity of maps with convex potentials. II », *Ann. of Math. (2)* **144** (1996), no. 3, p. 453–496.

[Caf96b] ———, « A priori estimates and the geometry of the Monge Ampère equation », Nonlinear partial differential equations in differential geometry (Park City, UT, 1992), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, p. 5–63.

[Car91] E. A. CARLEN – « Superadditivity of Fisher's information and logarithmic Sobolev inequalities », *J. Funct. Anal.* **101** (1991), no. 1, p. 194–211.

[CE00a] CORDERO-ERAUSQUIN – « Inégalités géométriques », Thèse de Doctorat, 2000.

[CE00b] D. CORDERO-ERAUSQUIN – « Somme applications of mass transport to guanssian type inequalities », (2000), to appear.

[CEMS00] D. CORDERO-ERAUSQUIN, R. MCCANN & M. SCHMUCKENSCHÄGER – « A riemannian interpolation inequality à la borell, brascamp and lieb », (2000).

[CHL97] M. CAPITAINE, E. P. HSU & M. LEDOUX – « Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces », *Electron. Comm. Probab.* **2** (1997), p. 71–81 (electronic).

[Dav90] E. B. DAVIES – *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[DG80] S. DAS GUPTA – « Brunn-Minkowski inequality and its aftermath », *J. Multivariate Anal.* **10** (1980), no. 3, p. 296–318.

[Dud89] R. M. DUDLEY – *Real analysis and probability*, Wadsworth & Brooks / Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1989.

[ES93] O. ENCHEV & D. W. STROOCK – « Rademacher's theorem for Wiener functionals », *Ann. Probab.* **21** (1993), no. 1, p. 25–33.

[Eva98] L. C. EVANS – *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Fou00] P. Fougères – « Hypercontractivité et isopérimétrie gaussienne. Applications aux systèmes de spins », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **36** (2000), no. 5, p. 647–689.

[GM96] W. Gangbo & R. J. McCann – « The geometry of optimal transportation », *Acta Math.* **177** (1996), no. 2, p. 113–161.

[GR01] I. Gentil & C. Roberto – « Spectral gaps for spin systems: some non-convex phase examples », *J. Funct. Anal.* **180** (2001), no. 1, p. 66–84.

[Gro75] L. Gross – « Logarithmic Sobolev inequalities », *Amer. J. Math.* **97** (1975), no. 4, p. 1061–1083.

[Heb99] E. Hebey – *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.

[Hel99a] B. Helffer – « Remarks on decay of correlations and Witten Laplacians. III. Application to logarithmic Sobolev inequalities », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **35** (1999), no. 4, p. 483–508.

[Hel99b] B. Helffer – « Semiclassical analysis and statistical mechanics », *Notes* (1999).

[HS87] R. Holley & D. Stroock – « Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising models », *J. Statist. Phys.* **46** (1987), no. 5-6, p. 1159–1194.

[Ili83] S. Ilias – « Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **33** (1983), no. 2, p. 151–165.

[Led92] M. Ledoux – « On an integral criterion for hypercontractivity of diffusion semigroups and extremal functions », *J. Funct. Anal.* **105** (1992), no. 2, p. 444–465.

[Led99] M. Ledoux – « Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities », Séminaire de Probabilités, XXXIII, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1999, p. 120–216.

[Led00a] M. LEDOUX – « The geometry of markov diffusion generators », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **9** (2000), no. 2, p. 305–366.

[Led00b] ______, « Logarithmic Sobolev inequalities for unbounded spin systems revisited », à paraître in Séminaire de probabilités, Lecture Notes in Math., Springer, 2000.

[Led00c] M. LEDOUX – « The geometry of Markov diffusion generators », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **9** (2000), no. 2, p. 305–366, Probability theory.

[LY93] S. L. LU & H.-T. YAU – « Spectral gap and logarithmic Sobolev inequality for Kawasaki and Glauber dynamics », *Comm. Math. Phys.* **156** (1993), no. 2, p. 399–433.

[Mar86] K. MARTON – « A simple proof of the blowing-up lemma », *IEEE Trans. Inform. Theory* **32** (1986), no. 3, p. 445–446.

[Mar96a] ______, « Bounding $\overline{d}$-distance by informational divergence: a method to prove measure concentration », *Ann. Probab.* **24** (1996), no. 2, p. 857–866.

[Mar96b] ______, « A measure concentration inequality for contracting Markov chains », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 3, p. 556–571.

[Mau91] B. MAUREY – « Some deviation inequalities », *Geom. Funct. Anal.* **1** (1991), no. 2, p. 188–197.

[McC95] R. J. MCCANN – « Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 2, p. 309–323.

[Mic99] L. MICLO – « An example of application of discrete Hardy's inequalities », *Markov Process and Related Fields* **5** (1999), p. 319–330.

[Mon81] G. MONGE – *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'académie des sciences de Paris, 1781.

[Muc72] B. MUCKENHOUPT – « Hardy's inequality with weights », *Studia Math.* **44** (1972), p. 31–38, collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, **I**.

[Ott] F. Otto – « The geometry of dissipative evolution equations: the porus medium equation », *Partial Diff. Equa.*, to appear.

[OV] F. Otto & C. Villani – *J. Math. Pures Appl.*, this issue.

[OV00] ———, « Generalization of an inequality by Talagrand, and links with the logarithmic Sobolev inequality », *J. Funct. Anal.* **173** (2000), no. 2, p. 361–400.

[Pin64] M. S. Pinsker – *Information and information stability of random variables and processes*, Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1964, Traduit par Amiel Feinstein.

[Rac84] S. T. Rachev – « The Monge-Kantorovich problem on mass transfer and its applications in stochastics », *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **29** (1984), no. 4, p. 625–653.

[Rac91] S. T. Rachev – *Probability metrics and the stability of stochastic models*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1991.

[Rot85] O. S. Rothaus – « Analytic inequalities, isoperimetric inequalities and logarithmic Sobolev inequalities », *J. Funct. Anal.* **64** (1985), no. 2, p. 296–313.

[RR98a] S. T. Rachev & L. Rüschendorf – *Mass transportation problems. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 1998, Theory.

[RR98b] ———, *Mass transportation problems. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 1998, Applications.

[SW71] E. M. Stein & G. Weiss – *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, Princeton Mathematical Series, No. 32.

[Tal69] G. Talenti – « Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze », *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **39** (1969), p. 171–185.

[Tal96] M. Talagrand – « Transportation cost for Gaussian and other product measures », *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 3, p. 587–600.

[Tom69] G. Tomaselli – « A class of inequalities », *Boll. Un. Mat. Ital.* **21** (1969), p. 622–631.

[Tsi85] B. S. Tsirelson – « A geometric approach to maximum likelihood estimation for an infinite-dimensional Gaussian location. II », *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* **30** (1985), no. 4, p. 772–779.

[Var84] N. T. Varopoulos – « Une généralisation du théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les espaces de Dirichlet », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), no. 14, p. 651–654.

[Var85] N. T. Varopoulos – « Hardy-Littlewood theory for semigroups », *J. Funct. Anal.* **63** (1985), no. 2, p. 240–260.

[Var91] N. T. Varopoulos – « Analysis and geometry on groups », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)* (Tokyo), Math. Soc. Japan, 1991, p. 951–957.

[Vil00] C. Vilani – « Topics in mass transport », *Lectures Notes* (2000).

[Wan97] F.-Y. Wang – « Logarithmic Sobolev inequalities on noncompact Riemannian manifolds », *Probab. Theor. Relat. Fields* **109** (1997), no. 3, p. 417–424.

[Yos99] N. Yoshida – « The Log-Sobolev inequality for weakly coupled lattice field », *Probab. Theor. Relat. Fields* **115** (1999), no. 1, p. 1–40.

[Yos00] ———, « Application of log-Sobolov inequality to the stochastic dynamics of unbounded spin systems on the lattice », *J. Funct. Anal.* **173** (2000), no. 1, p. 74–102.

[Yos01] ———, « The equivalence of the log-Sobolev inequality and a mixing condition for unbounded spin systems on the lattice », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **37** (2001), no. 2, p. 223–243.

[Zeg96] B. Zegarlinski – « The strong decay to equilibrium for the stochastic dynamics of unbounded spin systems on a lattice », *Comm. Math. Phys.* **175** (1996), no. 2, p. 401–432.